M. VIG

ĀGSTĀKĀS MATEMĀTIKAS ROKASGRĀMATA

M. VIGODSKIS

AUGSTĀKĀS MATEMĀTIKAS ROKASGRĀMATA

IZDEVNIECIBA «LIESMA»
RĪGĀ 1968

М. Я. Выгодский

СПРАВОЧНИК ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ
Издательство «Наука»

Издательство «Лиесма». На латышском языке

Tulkojis E. Kronbergs. Redaktore E. Vulfsone. Mäksl. redaktors A. Ļipins. Mākslinieka M. Vaņina apdare. Tehn. redaktore V. Blaua. Korektore G. Brikmane. Nodota salikšanai 1967. g. 22. aprīlī. Parakstīta iespiešanai 1968. g. 6. martā. Tip. papīrs Nr. 2, formāts 70×90/32. 29,63 fiz. iespiedl.; 34,66 uzsk. iespiedl.; 41,89 izdevn. l. Metiens 15 000 eks. Maksā 1 rbl. 57 kap. Izdevniecība «Liesma» Rīgā, Padomju bulv. 24. Izdevn. Nr: 20681-R1528. Iespiesta Latvijas PSR Ministru Padomes Preses komitejas Poligrāfiskās rūpniecības pārvaldes 3. tipogrāfijā Rīgā, Ļeņina ielā 137/139. Pasūt. Nr. 196.

2—2—3
1968—2

SATURS

ANALĪTISKĀ ĢEOMETRIJA TELPĀ

MATEMĀTISKĀS ANALĪZES PAMATJĒDZIENI

DIFERENCIĀLRĒĶINI

INTEGRĀLREĶINI

ZIŅAS PAR PLAKNES UN TELPAS LĪNIJĀM

RINDAS

VAIRĀKARGUMENTU FUNKCIJU DIFERENCĒŠANA UN INTEGRĒŠANA

DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMI

DAŽAS IEVĒROJAMAS LĪKNES

TABULAS

KO VAR ATRAST ROKASGRĀMATĀ

Šī grāmata ir tā paša autora «Elementārās matemātikas rokasgrāmatas» turpinājums un aptver visu vielu, kas ietilpst augstāko tehnisko (mehānikas-mašīnbūvniecības, celtniecības, aviācijas, transporta, elektrotehnisko, enerģētisko un metalurģisko) mācību iestāžu matemātikas pamatkursa programmā.

Grāmatai ir divējāds uzdevums.

Pirmkārt, tā dod faktisku izziņu: kas ir vektoriāls reizinājums, kā atrast rotācijas ķermeņa virsmu, kā funkciju izvirzīt trigonometriskā rindā utt. Atbilstošās definīcijas, teorēmas, kārtulas un formulas, kurām pievienoti piemēri un praktiski norādījumi, var atrast ātri; šim nolūkam noder detalizēts iedalījums un sīks alfabētisks rādītājs.

Otrkārt, grāmata noderīga sistemātiskai lasīšanai. Tā necenšas aizstāt mācību grāmatu, un tāpēc pilnīgi pierādījumi šeit doti tikai retos gadījumos. Tomēr tā var noderēt, lai vispārīgos vilcienos iepazītos ar priekšmetu. Šai nolūkā šeit sīki iztirzāti pamatjēdzieni, piemēram, skalārais reizinājums (104. §.), robeža (203.—206. §.), diferenciālis (228.—235. §.), bezgalīga rinda (270., 366.—370. §.). Tai pašā nolūkā visas kārtulas ilustrētas ar daudziem piemēriem, kuri ir šīs grāmatas organiskā daļa (sk. 50.—62., 134., 149., 264.—266., 369., 422., 498. u. c. §.). Tie noskaidro, kā jālieto kārtulas, kad kārtula nav lietojama, kādas kļūdas jānovērš (290., 339., 340., 379. u. c. §.).

Teorēmām un kārtulām pievienoti dažādi paskaidrojumi. Dažkārt to uzdevums ir uzskatāmi parādīt teorēmas *saturu*, lai lasītājs varētu pamatīgi apgūt pierādījumu. Dažkārt paskaidrojumam pievienots atsevišķs piemērs, un tas satur tādus spriedumus, kas dotu pilnīgu teorēmas pierādījumu, ja tos pielietotu vispārīgajam gadījumam (sk. 148., 149., 369.,

374. §.). Dažkārt paskaidrojums ierobežojas ar norādījumiem uz tiem paragrāfiem, uz kuriem balstās pierādījums.

Apzinīgu matemātisko ideju apgūšanu ļoti atvieglo iepazīšanās ar apstākļiem, kādos tās radušās un attīstījušās. Lūk, kādēļ šeit liela uzmanība pievērsta arī vēsturiskām izziņām. Tā 270., 366. § kopā ar 271., 383., 399., 400. §., cerams, dos iespēju Teilora rindas teoriju izprast labāk nekā parastajā formālajā iztirzājumā. Līdz ar vēsturiskām ziņām sniegti arī biogrāfiski dati par zinātniekiem, kuru vārdi saistās ar iztirzājamo vielu.

Uz citām grāmatas metodiskām īpatnībām nav nozīmes norādīt: skolēns spriedīs par tām pēc saprotamības pakāpes, pasniedzējam pietiek norādīt uz dažiem raksturīgiem paragrāfiem: 28., 60.—62., 92., 184.—190., 203.—206., 228.—234., 237., 258.—260., 271., 343.—347., 430.—438., 459.

M. Vigodskis

ANALĪTISKĀ ĢEOMETRIJA PLAKNĒ

1. §. Jēdziens par analītiskās ģeometrijas priekšmetu

Skolas *(elementārā)* ģeometrija pētī taisnlīniju figūru un riņķa līnijas īpašības. Galvenā loma piekrīt konstrukcijām; aprēķiniem, kaut arī to praktiskā nozīme ir liela, teorijā ir sekundāra loma. Vienas vai otras konstrukcijas izvēle prasa atjautību. Tas arī rada galvenās grūtības, risinot uzdevumus ar elementārās ģeometrijas metodēm.

Analītiskā ģeometrija radās no vajadzības izveidot vienveidīgu metodi ģeometrisku uzdevumu atrisināšanai, lai to varētu pielietot dažāda veida praksē svarīgu līkņu pētīšanā.

Šo mērķi sasniedza, izveidojot *koordinātu metodi* (sk. tālāk 2.—4. §.). Tanī vadošā loma piekrīt aprēķiniem; konstrukcijām ir tikai palīgnozīme. Šī iemesla dēļ uzdevumu atrisināšanai ar analītiskās ģeometrijas metodi ir vajadzīgs daudz mazāk atjautības.

Koordinātu metodes izveidošanu sagatavoja sengrieķu matemātiķu, it īpaši Apolonija (3.—2. gs. pirms m. ē.) darbi. Koordinātu metode sistemātiski attīstīta Fermā[1] un Dekarta[2] darbos. Viņi tomēr apskatīja tikai plaknes līnijas. Telpas līniju un virsmu sistemātiskai pētīšanai koordinātu metodi pirmais lietoja L. Eilers[3].

---

[1] Pjers Fermā (1601—1655) — ievērojams franču matemātiķis, viens no Ņūtona un Leibnica priekšgājējiem diferenciālrēķinu izstrādāšanā, lielu ieguldījumu devis skaitļu teorijā. Vairums Fermā darbu (tai skaitā darbi analītiskajā ģeometrijā) nav publicēti autora dzīves laikā.

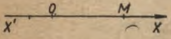
[2] Renē Dekarts (1596—1650) — ievērojams franču filozofs un matemātiķis. Viņa «Ģeometrijas» (kas bija pielikums filozofiskajam traktātam «Pārdomas par metodi») publicēšanu 1637. gadā uzskata par analītiskās ģeometrijas rašanās datumu.

[3] Leonards Eilers (1707—1783) dzimis Šveicē. 1727. gadā atbrauca uz Krieviju; strādāja vispirms kā adjunkts (zinātniskais līdzstrādnieks) Pēterburgas Zinātņu akadēmijā, bet pēc tam bija tās akadēmiķis. Uzrakstījis vairāk par 800 darbiem.

Visās fizikas un matemātikas nozarēs izdarījis svarīgus atklājumus. Ļoti veicinājis zinātnes attīstību Krievijā.

2. §. Koordinātes

Par punkta koordinātēm sauc tādus lielumus, kas nosaka šī punkta stāvokli (telpā, uz plakanas vai liektas virsmas, uz taisnes vai liektas līnijas). Tā, piemēram, ja punkts M atrodas uz kādas taisnes $X'X$ (1. zīm.), tad tā stāvokli var noteikt ar vienu skaitli, piemēram, šādā veidā: izvēlamies uz $X'X$ kādu sākuma punktu O un izmērojam nogriezni OM, teiksim, centimetros. Dabūsim skaitli x, kas būs pozitīvs vai negatīvs atkarībā no tā, kurp vērsts nogrieznis OM (pa labi vai pa kreisi, ja taisne ir horizontāla). Skaitlis x ir punkta M koordināte.



1. zīm.

Koordinātes x vērtība ir atkarīga no sākuma punkta O izvēles, no pozitīvā vērsuma izvēles uz taisnes un no tā, kāds nogrieznis pieņemts par garuma mērvienību.

3. §. Taisnleņķa koordinātu sistēma

Punkta stāvokli plaknē nosaka divas koordinātes. Vienkāršākais paņēmiens ir tāds.

Novelk divas savstarpēji perpendikulāras taisnes $X'X$, $Y'Y$ (2. zīm.). Tās sauc par *koordinātu asīm*. Vienu no tām

2. zīm.

3. zīm.

$X'X$ (parasti to velk horizontāli) sauc par *abscisu asi*, otru $Y'Y$ — par *ordinātu asi*. To krustošanās punktu O sauc par *koordinātu sākumu* jeb, īsāk, par *sākumu*. Nogriežņu mērīšanai uz koordinātu asīm izvēlas kādu patvaļīgu garuma mērvienību — vienu un to pašu abām asīm.

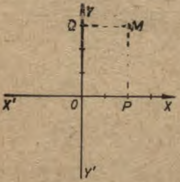
Uz katras ass izvēlas pozitīvo vērsumu (apzīmē ar bultiņu). Stars OX 2. zīmējumā parāda pozitīvo vērsumu uz abscisu ass, bet stars OY — uz ordinātu ass.

Pozitīvos vērsumus pieņemts izvēlēties tā, lai pozitīvais stars OX pēc pagrieziena par 90° pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam sakristu ar staru OY (3. zīm.).

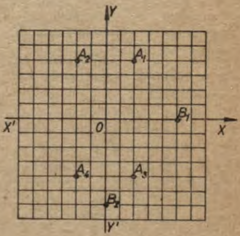
Koordinātu asis $X'X$, $Y'Y$ (ar nospraustajiem pozitīvajiem vērsumiem un izvēlēto mērogu) veido *taisnleņķa koordinātu sistēmu.*

4. §. Taisnleņķa koordinātes

Punkta M stāvokli plaknē taisnleņķa koordinātu sistēmā (3. §.) nosaka šādā veidā. Novelkam taisni $MP \| Y'Y$, līdz tā krustojas ar $X'X$ asi punktā P (4. zīm.), un $MQ \| X'X$, līdz tā krustojas ar $Y'Y$ asi punktā Q. Skaitļus x un y, kas izsaka nogriežņu OP un OQ mērus izvēlētajā mērogā (bet dažkārt arī pašus nogriežņus), sauc par punkta M *taisnleņķa koordinātēm* (īsāk, par *koordinātēm*). Šos skaitļus ņem vai nu pozitīvus, vai negatīvus atkarībā no nogriežņu OP, OQ vērsumiem. Skaitli x sauc par punkta M abscisu, skaitli y — par tā ordināti.



4. zīm.



5. zīm.

Punktam M 4. zīmējumā ir abscisa $x=2$ un ordināte $y=3$ (garuma mērvienība ir 0,4 *cm*). To pieraksta tā: $M(2; 3)$. Vispārīgi pieraksts $M(a; b)$ nozīmē, ka punktam M ir abscisa

$$x=a$$

un ordināte

$$y = b.$$

Piemēri. 5. zīmējumā parādītajiem punktiem ir šādas koordinātes: $A_1(+2; +4)$, $A_2(-2; +4)$, $A_3(+2; -4)$, $A_4(-2; -4)$, $B_1(+5; 0)$, $B_2(0; -6)$, $O(0; 0)$.

Piezīme. Dotā punkta M koordinātes būs citādas citā taisnleņķa koordinātu sistēmā.

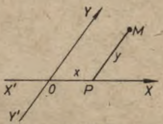
5. §. Koordinātu leņķi

Četrus leņķus, ko veido koordinātu asis, sauc par *koordinātu leņķiem* jeb *kvadrantiem*. Tos numurē tā, kā parādīts 6. zīmējumā. Sekojošā tabula rāda, kādas zīmes ir punkta koordinātēm dažādos kvadrantos.

Koordinātes	Kvadrants			
	I	II	III	IV
Abscisa	+	−	−	+
Ordināte	+	+	−	−

Punkts A_1 5. zīmējumā atrodas pirmajā kvadrantā, punkts A_2 — otrajā, punkts A_4 — trešajā un punkts A_3 — ceturtajā kvadrantā.

6. zīm.



7. zīm.

Ja punkts atrodas uz abscisu ass (piemēram, punkts B_1 5. zīmējumā), tad tā ordināte ir vienāda ar nulli. Ja punkts atrodas uz ordinātu ass (piemēram, punkts B_2 5. zīmējumā), tad tā abscisa ir vienāda ar nulli.

6. §. Slīpleņķa koordinātu sistēma

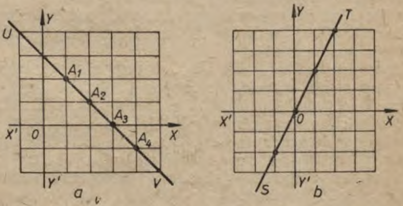
Bez taisnleņķa koordinātu sistēmas lieto vēl citas koordinātu sistēmas. Slīpleņķa koordinātu sistēmu (tā ir vislīdzīgākā taisnleņķa sistēmai) konstruē tā: novelk (7. zīm.) divas neperpendikulāras taisnes $X'X$ un $Y'Y$ *(koordinātu asis)* un tālāk rīkojas tāpat, kā konstruējot taisnleņķa sistēmu (3. §.). Koordinātes $x=OP$ (abscisa) un $y=PM$ (ordināte) nosaka tā, kā paskaidrots 4. paragrāfā.

Taisnleņķa un slīpleņķa sistēmas kopā sauc par *Dekarta koordinātu sistēmām.*

Bez Dekarta sistēmas lieto vēl citas koordinātu sistēmas (visbiežāk lieto *polāro* koordinātu sistēmu (sk. 73. §.)).

7. §. Līnijas vienādojums

Apskatīsim vienādojumu $x+y=3$, kas saista abscisu x un ordināti y. To apmierina daudzi x, y vērtību pāri, piemēram, $x=1$ un $y=2$, $x=2$ un $y=1$, $x=3$ un $y=0$, $x=4$ un $y=-1$ utt. Katram koordinātu pārim (dotajā koordinātu sistēmā) atbilst viens punkts (4. §.). 8. zīmējumā a parādīti punkti $A_1(1; 2)$, $A_2(2; 1)$, $A_3(3; 0)$, $A_4(4; -1)$. Tie atrodas uz vienas taisnes UV. Uz šīs taisnes atradīsies arī jebkurš cits punkts, kura koordinātes apmierina vienādojumu $x+y=3$.

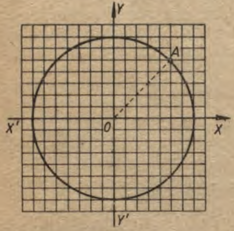


8. zīm.

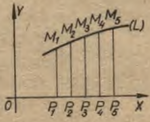
Otrādi, jebkura punkta, kas atrodas uz taisnes UV, koordinātes x, y apmierinās vienādojumu $x+y=3$.

Saskaņā ar to saka: *vienādojums* $x+y=3$ *ir taisnes UV vienādojums.* Saka arī, ka *vienādojums* $x+y=3$ *attēlo taisni*

UV. Analogā nozīmē jāsaprot izteicieni: «taisnes ST (8. zīm. b) vienādojums ir $y=2x$», «vienādojums $x^2+y^2=49$ attēlo riņķa līniju (9. zīm.), kuras rādiuss ir 7 garuma vienības, bet centrs atrodas koordinātu sākumā» (sk. 38. §.).



9. zīm.



10. zīm.

Vispārīgi vienādojumu, kas saista koordinātes x, y, sauc par līnijas L vienādojumu, ja ievēroti divi noteikumi: 1) *jebkura līnijas L punkta M koordinātes x, y apmierina šo vienādojumu;* 2) *jebkura punkta, kas neatrodas uz līnijas L, koordinātes x, y neapmierina šo vienādojumu.*

Līnijas L patvaļīga punkta M koordinātes sauc par *tekošām koordinātēm,* jo līnija L var izveidoties, punktam M pārvietojoties («tekot»).

Pieņemsim, ka M_1, M_2, $M_3, \ldots$ (10. zīm.) ir punkta M pēc kārtas ņemti stāvokļi uz līnijas L. Konstruēsim perpendikulus M_1P_1, M_2P_2, M_3P_3, ... pret OX asi. Dabūsim vienu otram sekojošus nogriežņus P_1M_1, P_2M_2, $P_3M_3, \ldots$. Uz OX ass tie atšķeļ nogriežņus OP_1, OP_2, $OP_3, \ldots$. Tie būs abscisas. Ar to saistās terminu «abscisa» un «ordināte» rašanās. Latīņu vārds «abscisa» (abscissa) tulkojumā nozīmē «atšķeltā»; vārds «ordināte» ir termina «ordinatim dukta» (ordinatim ducta) saīsinājums, kas nozīmē «pēc kārtas novilktā».

Attēlojot katru plaknes punktu ar tā koordinātēm un katru līniju ar vienādojumu, kas saista tekošās koordinātes, mēs ģeometrisko uzdevumu reducējam uz analītisko, t. i., aprēķinu uzdevumu. No šejienes radies nosaukums *«analītiskā ģeometrija».*

8. §. Līnijas un punkta savstarpējais novietojums

Lai atbildētu uz jautājumu, vai punkts M atrodas uz kādas līnijas L, pietiek zināt punkta M koordinātes un līnijas L vienādojumu. Ja punkta M koordinātes apmierina līnijas L vienādojumu, tad M atrodas uz L; pretējā gadījumā neatrodas.

Piemērs. Vai punkts $M(5; 5)$ atrodas uz riņķa līnijas $x^2+y^2=49$ (7. §.)?

Atrisinājums. Ievietojam vērtības $x=5$, $y=5$ vienādojumā $x^2+y^2=49$. Tā kā koordinātes vienādojumu neapmierina, tad punkts M neatrodas uz apskatāmās riņķa līnijas.

9. §. Divu līniju savstarpējais novietojums

Lai atbildētu uz jautājumu, vai divām līnijām ir kopīgi punkti, un ja ir, tad cik, pietiek zināt šo līniju vienādojumus. Ja vienādojumi ir saderīgi, tad kopīgi punkti ir, pretējā gadījumā nav. Kopīgo punktu skaits ir vienāds ar vienādojumu sistēmas atrisinājumu skaitu.

1. piemērs. Taisnei $x+y=3$ (7. §.) un riņķa līnijai $x^2+y^2=49$ ir divi kopīgi punkti, jo sistēmai

$$x+y=3, \quad x^2+y^2=49$$

ir divi atrisinājumi:

$$x_1=\frac{3+\sqrt{89}}{2}\approx 6{,}22, \quad y_1=\frac{3-\sqrt{89}}{2}=-3{,}22$$

un

$$x_2=\frac{3-\sqrt{89}}{2}\approx -3{,}22, \quad y_2=\frac{3+\sqrt{89}}{2}\approx 6{,}22.$$

2. piemērs. Taisnei $x+y=3$ un riņķa līnijai $x^2+y^2=4$ nav kopīgu punktu, jo sistēmai

$$x+y=3, \quad x^2+y^2=4$$

nav (reālu) atrisinājumu.

10. §. Attālums starp diviem punktiem

Attālumu d starp punktiem $A_1(x_1; y_1)$ un $A_2(x_2; y_2)$ izsaka ar formulu

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \qquad (1)$$

P i e m ē r s. Attālums starp punktiem $M(-2{,}3; 4{,}0)$ un $N(8{,}5; 0{,}7)$ ir

$$d=\sqrt{(8{,}5+2{,}3)^2+(0{,}7-4)^2}=\sqrt{10{,}8^2+3{,}3^2}\approx 11{,}3$$

(garuma mērvienības).

1. p i e z ī m e. Punktu M un N kārtībai nav nozīmes, tāpēc N var uzskatīt par pirmo, bet M par otro punktu.

2. p i e z ī m e. Attālumu d uzskata par pozitīvu, tāpēc formulā (1) sakni ņem tikai ar vienu (plusa) zīmi.

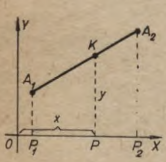
11. §. Nogriežņa dalīšana dotajā attiecībā

Doti punkti $A_1(x_1; y_1)$ un $A_2(x_2; y_2)$ (11. zīm.). Jāatrod koordinātes x, y punktam K, kas dala nogriezni A_1A_2 attiecībā

$$A_1K : KA_2=m_1 : m_2.$$

Atrisinājumu dod formulas

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{m_2x_1+m_1x_2}{m_1+m_2}, \\ y&=\frac{m_2y_1+m_1y_2}{m_1+m_2}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$



11. zīm.

Ja attiecību $m_1 : m_2$ apzīmē ar burtu λ, tad formulas (1) pieņem nesimetrisku veidu

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \qquad (2)$$

1. p i e m ē r s. Dots punkts $B(6; -4)$ un punkts O, kas sakrīt ar koordinātu sākumu. Atrast punktu K, kas dala BO attiecībā 2 : 3.

A t r i s i n ā j u m s. Formulās (1) jāievieto

$$m_1=2, \quad m_2=3, \quad x_1=6, \quad y_1=-4, \quad x_2=0, \quad y_2=0.$$

Dabūjam

$$x=\frac{18}{5}=3{,}6,\quad y=-\frac{12}{5}=-2{,}4.$$

Tās ir meklētā punkta K koordinātes.

1. piezīme. Izteiciens «punkts K dala nogriezni A_1A_2 attiecībā $m_1:m_2$» nozīmē, ka attiecība $m_1:m_2$ ir vienāda ar nogriežņu attiecību $A_1K:KA_2$, ja tie ņemti *tieši norādītajā* (bet ne apgrieztā) kārtībā. 1. piemērā punkts $K(3{,}6;\ -2{,}4)$ dala nogriezni BO attiecībā $2:3$, bet nogriezni OB — attiecībā $3:2$.

2. piezīme. Pieņemsim, ka punkts K dala nogriezni A_1A_2 *ārēji*, t. i., atrodas uz nogriežņa A_1A_2 turpinājuma; tad formulas (1) un (2) paliek spēkā, ja lielumam $m_1:m_2=\lambda$ pieraksta negatīvu zīmi.

2. piemērs. Doti punkti $A_1(1;2)$ un $A_2(3;3)$. Atrast uz nogriežņa A_1A_2 turpinājuma punktu, kas atrodas no A_1 divreiz tālāk nekā no A_2.

Atrisinājums. Dabūjam $\lambda=m_1:m_2=-2$ (jo var ņemt $m_1=-2$, $m_2=1$ vai $m_1=2$, $m_2=-1$). Ar formulām (1) atrodam

$$x=\frac{1\cdot 1+(-2)\cdot 3}{-2+1}=5,\quad y=\frac{1\cdot 2+(-2)\cdot 3}{-2+1}=4.$$

11a. §. Nogriežņa dalīšana uz pusēm

Nogriežņa A_1A_2 viduspunkta koordinātes ir vienādas ar tā galu koordinātu pussummām:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Šīs formulas rodas no 11. §. formulām (1) un (2), ja tanīs ņem $m_1=m_2=1$ vai $\lambda=1$.

12. §. Otrās kārtas determinants[1]

Pieraksts $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ nozīmē to pašu, ko $ad-bc$.

[1] Sīkāk par determinantiem sk. 182.—185. §.

Piemēri.

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 5 - 3\cdot 7 = -11;$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 2 - 6\cdot(-4) = 30.$$

Izteiksmi $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ sauc par *otrās kārtas determinantu.*

13. §. Trijstūra laukums

Pieņemsim, ka punkti $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$, $A_3(x_3; y_3)$ ir trijstūra virsotnes; tad tā laukumu izsaka formula

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}; \qquad (1)$$

labajā pusē atrodas otrās kārtas determinants (12. §.). Trijstūra laukumu mēs uzskatām par pozitīvu. Tāpēc pirms determinanta jāņem plusa zīme, ja determinanta vērtība ir pozitīva, un mīnusa zīme, ja tā ir negatīva.

Piemērs. Atrast laukumu trijstūrim ar virsotnēm $A(1; 3)$, $B(2; -5)$ un $C(-8; 4)$.

Atrisinājums. Pieņemot A par pirmo virsotni, B par otro, C par trešo, atrodam

$$\begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+8 & 3-4 \\ 2+8 & -5-4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 9 & -1 \\ 10 & -9 \end{vmatrix} = -81+10 = -71.$$

Formulā (1) jāņem mīnusa zīme; tad dabūjam

$$S = -\frac{1}{2}\cdot(-71) = 35{,}5.$$

Ja uzskata A par pirmo virsotni, C par otro un B par trešo, tad

$$\begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-2 & 3+5 \\ -8-2 & 4+5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 8 \\ -10 & 9 \end{vmatrix} = 71.$$

Formulā (1) tagad jāņem plusa zīme; dabūjam atkal $S=$ $=35{,}5$.

P i e z ī m e. Ja virsotne A sakrīt ar koordinātu sākumu, tad trijstūra laukumu izsaka formula

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \tag{2}$$

(Formulas (1) atsevišķs gadījums, ja $x_3=y_3=0$).

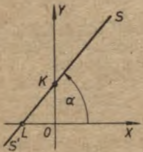
14. §. Taisne; tās atklātais vienādojums («vienādojums ar virziena koeficientu»)

Jebkuru taisni, kas nav paralēla ordinātu asij, var izteikt ar vienādojumu

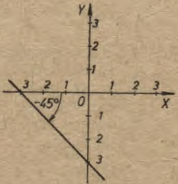
$$y=ax+b; \tag{1}$$

šeit a ir tangenss no leņķa α (12. zīm.), kuru taisne veido ar pozitīvo abscisu asi[1] ($a=\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\sphericalangle XLS$), bet skaitlis b pēc absolūtās vērtības ir vienāds ar nogriežņa OK garumu, kuru taisne atšķeļ no ordinātu ass; skaitlis b ir pozitīvs vai negatīvs atkarībā no nogriežņa OK vērsuma. Ja taisne iet caur sākumu, tad $b=0$.

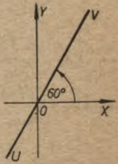
Lielumu a sauc par *virziena koeficientu*, lielumu b — par *sākuma ordināti*.



12. zīm.



13. zīm.



14. zīm.

[1] Par leņķa α sākuma staru skaita staru OX. Uz taisnes SS' var ņemt jebkuru no stariem LS vai LS'. Leņķi XLS skaita par pozitīvu, ja pagrieziens, kas sakļauj staru LX ar staru LS, notiek tai pašā virzienā kā OX ass pagrieziens par 90°, kas sakļauj to ar OY asi (t. i., parastā novietojumā — pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam).

1. piemērs. Uzrakstīt vienādojumu taisnei (13. zīm.), kas veido ar OX asi leņķi $\alpha=-45°$ un atšķeļ sākuma ordināti $b=-3$.

Atrisinājums. Virziena koeficients $a=\operatorname{tg}(-45°)=$ $=-1$. Meklētais vienādojums ir $y=-x-3$.

2. piemērs. Kādu līniju izsaka vienādojums $3x=\sqrt{3}y$?

Atrisinājums. Atrisinot vienādojumu attiecībā pret y, atrodam $y=\sqrt{3}x$. Pēc virziena koeficienta $a=\sqrt{3}$ atrodam leņķi α: tā kā $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3}$, tad $\alpha=60°$ (vai $\alpha=240°$). Sākuma ordināte $b=0$; tāpēc dotais vienādojums izsaka taisni UV (14. zīm.), kas iet caur sākumu un veido ar OX asi 60° lielu leņķi (vai 240°).

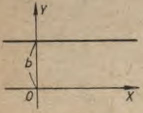
1. piezīme. Atšķirībā no citiem taisnes vienādojuma veidiem (sk. tālāk 30., 33. §.) vienādojumu (1) sauc par *atklāto vienādojumu* (vienādojumu, kas atrisināts attiecībā pret ordināti) vai par *vienādojumu ar virziena koeficientu*[1].

2. piezīme. Ordinātu asij paralēlu taisni nevar izteikt ar vienādojumu, kas atrisināts attiecībā pret ordināti (sal. 15. §.).

15. §. Koordinātu asij paralēla taisne

Abscisu asij paralēlu taisni (15. zīm.) izsaka vienādojums[2]

$$y=b, \tag{1}$$



15. zīm.

kur b pēc absolūtās vērtības ir vienāda ar abscisu ass attālumu līdz taisnei. Ja $b>0$, tad taisne atrodas «virs» abscisu ass (sk. 15. zīm.); ja $b<0$, — tad «zem» tās. Pašu abscisu asi izsaka vienādojums

$$y=0. \tag{1a}$$

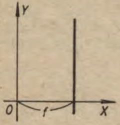
[1] Pirmais nosaukums ir ieteicamāks ne vien īsuma dēļ, bet arī saskaņotības dēļ ar terminu «atklāta funkcija» (sk. 197. §). Vienādojums, kas atrisināts attiecībā pret abscisu $x=a'y+b'$ arī izsaka taisni, kas nav paralēla abscisu asij, jo koordinātes x, y ir līdztiesīgas. Šeit skaitli a' ar tādām pašām tiesībām kā skaitli a varētu nosaukt par virziena koeficientu.

[2] Vienādojums (1) ir vienādojuma $y=ax+b$, kas atrisināts attiecībā pret ordināti (14. §), atsevišķs gadījums. Virziena koeficients $a=0$.

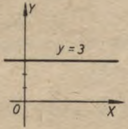
Ordinātu asij paralēlu taisni (16. zīm.) izsaka vienādojums [1]

$$x=f. \qquad (2)$$

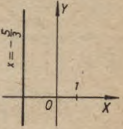
Lieluma f absolūtā vērtība dod attālumu no ordinātu ass līdz taisnei. Ja $f>0$, tad taisne atrodas «pa labi» no ordinātu



16. zīm.



17. zīm.



18. zīm.

ass (sk. 16. zīm.); ja $f<0$, — «pa kreisi» no tās. Pašu ordinātu asi izsaka vienādojums

$$x=0. \qquad (2a)$$

1. p i e m ē r s. Uzrakstīt vienādojumu taisnei, kas atšķeļ sākuma ordināti $b=3$ un ir paralēla OX asij (17. zīm.).

A t b i l d e. $y=3$.

2. p i e m ē r s. Kādu līniju izsaka vienādojums $3x+5=0$?

A t r i s i n ā j u m s. Atrisinot doto vienādojumu attiecībā pret x, dabūjam $x=-\frac{5}{3}$. Vienādojums izsaka OY asij paralēlu taisni, kas atrodas «pa kreisi» no tās attālumā $\frac{5}{3}$ (18. zīm.). Lielumu $f=-\frac{5}{3}$ var nosaukt par «sākuma abscisu».

16. §. Taisnes vispārīgais vienādojums

Vienādojums

$$Ax+By+C=0 \qquad (1)$$

(kur A, B, C var pieņemt jebkuras vērtības, ja tikai koefi-

[1] Vienādojums (2) ir vienādojuma $x=a'y+b'$, kas atrisināts attiecībā pret abscisu (sk. 14. §), atsevišķs gadījums. Virziena koeficients $a'=0$.

cienti A un B reizē nav nulles[1]) izsaka taisni (sal. 14., 15. §.). Jebkuru taisni var izteikt ar šādu vienādojumu. Tāpēc to sauc par *taisnes vispārīgo vienādojumu.*

Ja $A=0$, t. i., vienādojums (1) nesatur x, tad tas izsaka OX asij paralēlu taisni[2] (15. §.).

Ja $B=0$, t. i., vienādojums (1) nesatur y, tad tas izsaka OY asij paralēlu taisni[2].

Ja B nav vienāds ar nulli, tad vienādojumu (1) var atrisināt attiecībā pret ordināti y; vienādojums tad pieņem izskatu

$$y=ax+b\left(\text{kur } a=-\frac{A}{B},\quad b=-\frac{C}{B}\right). \tag{2}$$

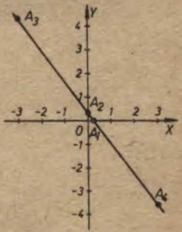
Tā vienādojumu $2x-4y+5=0$ ($A=2$, $B=-4$, $C=5$) var pārveidot veidā

$$y=0{,}5x+1{,}25$$

$\left(a=-\dfrac{2}{-4}=0{,}5,\ b=\dfrac{-5}{-4}=1{,}25\right)$, kas ir atrisināts attiecībā pret ordināti (sākuma ordināte $b=1{,}25$, virziena koeficients $a=0{,}5$, no kurienes $\alpha\approx26°34'$ (sk. 14. §.).

Analogi, ja $A\neq0$, tad vienādojumu (1) var atrisināt attiecībā pret x.

Ja $C=0$, t. i., vienādojums (1) nesatur brīvo locekli, tad tas izsaka taisni, kas iet caur koordinātu sākumu (8. §).



19. zīm.

17. §. Taisnes konstrukcija pēc tās vienādojuma

Lai konstruētu taisni, pietiek atrast divus tās punktus. Piemēram, var atrast krustošanās punktus ar asīm (ja taisne nav paralēla kādai asij un neiet caur sākumu; gadījumā, ja taisne ir paralēla kādai asij vai iet caur sākumu, mums

[1] Ja $A=B=0$, tad rodas vai nu identitāte $0=0$ (ja $C=0$), vai bezjēdzība, piemēram, $5=0$ (ja $C\neq0$).

[2] Taisnēm, kas paralēlas OX asij, pieskaita arī pašu šo asi. Gluži tāpat taisnēm, kas paralēlas OY asij, pieskaita pašu OY asi.

ir tikai viens krustošanās punkts). Lielākas precizitātes dēļ ieteicams atrast vēl vienu divus kontroles punktus.

P i e m ē r s. Konstruēt taisni $4x+3y=1$. Ņemot $y=0$, atrodam (19. zīm.) taisnes krustošanās punktu ar abscisu asi $A_1\left(\frac{1}{4};\ 0\right)$. Ņemot $x=0$, atrodam krustošanās punktu ar ordinātu asi $A_2\left(0;\ \frac{1}{3}\right)$. Šie punkti ir ļoti tuvu viens otram. Tāpēc dodam abscisai vēl divas vērtības, piemēram, $x=-3$ un $x=+3$. Atrodam punktus $A_3\left(-3;\ \frac{13}{3}\right)$, $A_4\left(3;\ -\frac{11}{3}\right)$. Novelkam taisni $A_4A_1A_2A_3$.

18. §. Taisņu paralelitātes noteikums

Paralelitātes noteikums divām taisnēm, kuras uzdotas ar vienādojumiem

$$y=a_1x+b_1, \tag{1}$$

$$y=a_2x+b_2, \tag{2}$$

ir virziena koeficientu vienādība

$$a_1=a_2, \tag{3}$$

t. i., taisnes (1) un (2) ir paralēlas, ja to virziena koeficienti ir vienādi, un nav paralēlas, ja to virziena koeficienti ir dažādi [1].

1. p i e m ē r s. Taisnes $y=3x-5$ un $y=3x+4$ ir paralēlas, jo tām virziena koeficienti ir vienādi ($a_1=a_2=3$).

2. p i e m ē r s. Taisnes $y=3x-5$ un $y=6x-8$ nav paralēlas, jo tām virziena koeficienti ir dažādi ($a_1=3$, $a_2=6$).

3. p i e m ē r s. Taisnes $2y=3x-5$ un $4y=6x-8$ ir paralēlas, jo tām virziena koeficienti ir vienādi $\left(a_1=\frac{3}{2},\ a_2=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}\right)$.

1. p i e z ī m e. Ja vienas taisnes vienādojums nesatur ordinātu (t. i., taisne ir paralēla OY asij), tad šī taisne ir

---

[1] Divas sakrītošas taisnes šeit un arī visur tālāk skaitīsim par paralēlām.

paralēla citai taisnei tikai tad, ja otrās taisnes vienādojums arī nesatur y. Piemēram, taisnes $2x+3=0$ un $x=5$ ir paralēlas, bet taisnes $x-3=0$ un $x-y=0$ nav paralēlas.

2. piezīme. Ja divas taisnes uzdotas ar vienādojumiem

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2=0, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

tad to paralelitātes noteikums ir

$$A_1B_2-A_2B_1=0 \tag{5}$$

jeb ar citu apzīmējumu (12. §.)

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=0.$$

4. piemērs. Taisnes

$$2x-7y+12=0$$

un

$$x-3{,}5y+10=0$$

ir paralēlas, jo

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -3{,}5 \end{vmatrix}=2\cdot(-3{,}5)-1\cdot(-7)=0.$$

5. piemērs. Taisnes

$$2x-7y+12=0$$

un

$$3x+2y-6=0$$

nav paralēlas, jo

$$\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=25\neq 0.$$

3. piezīme. Vienādību (5) var uzrakstīt veidā

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}, \tag{6}$$

t. i., *taišņu (4) paralelitātes noteikums ir tekošo koordinātu koeficientu proporcionalitāte*[1]. Sal. 4. un 5. piemēru. Ja bez tam arī brīvie locekļi proporcionāli, t. i., ja

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}, \tag{7}$$

tad taisnes (4) ir ne tikai paralēlas, bet arī sakrīt. Tā vienādojumi

$$3x+2y-6=0$$

un

$$6x+4y-12=0$$

izsaka vienu un to pašu taisni.

19. §. Taišņu krustošanās

Lai atrastu taišņu

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \tag{1}$$

un

$$A_2x+B_2y+C_2=0 \tag{2}$$

krustošanās punktu, tad jāatrisina vienādojumu (1) un (2) sistēma. Šī sistēma parasti dod vienu atrisinājumu, un mēs iegūstam meklēto punktu (9. §.). Izņēmums ir tikai tad, ja attiecības $\frac{A_1}{A_2}$ un $\frac{B_1}{B_2}$ ir vienādas, t. i., ja dotās taisnes ir paralēlas (sk. 18. §. 2. un 3. piezīmi).

Piezīme. Ja dotās taisnes ir paralēlas un nesakrīt, tad sistēmai (1)—(2) nav atrisinājumu, bet, ja sakrīt, tad atrisinājumu ir bezgalīgi daudz.

1. piemērs. Atrast taišņu $y=2x-3$ un $y=-3x+2$ krustošanās punktu. Atrisinot vienādojumu sistēmu, atrodam $x=1$, $y=-1$. Taisnes krustojas punktā (1; -1).

2. piemērs. Taisnes

$$2x-7y+12=0, \quad x-3{,}5y+10=0$$

[1] Var gadīties, ka viens no lielumiem A_2 vai B_2 (bet ne abi reizē; sk. 16. §) ir vienāds ar nulli. Tad proporcija (6) jāsaprot tai nozīmē, ka atbilstošajam skaitītājam arī jābūt vienādam ar nulli. Tāda pati jēga ir proporcijai (7), ja $C_2=0$.

ir paralēlas, bet nesakrīt, jo attiecības $2:1$ un $(-7):(-3{,}5)$ ir savā starpā vienādas, bet nav vienādas ar attiecību $12:10$ (sal. 18. §. 4. piemēru). Dotajai sistēmai nav atrisinājumu.

3. piemērs. Taisnes $3x+2y-6=0$, $6x+4y-12=0$ sakrīt, jo attiecības $3:6$, $2:4$ un $(-6):(-12)$ ir savā starpā vienādas. Otro vienādojumu dabū, pirmo vienādojumu pareizinot ar 2. Dotajai sistēmai ir bezgalīgi daudz atrisinājumu.

20. §. Divu taišņu perpendikularitātes noteikums

Perpendikularitātes noteikums divām taisnēm, kas uzdotas ar vienādojumiem

$$y=a_1x+b_1, \tag{1}$$

$$y=a_2x+b_2, \tag{2}$$

ir sakarība

$$a_1a_2=-1, \tag{3}$$

t. i., divas taisnes ir perpendikulāras, ja to virziena koeficientu reizinājums ir vienāds ar -1, un nav perpendikulāras, ja tas nav vienāds ar -1.

1. piemērs. Taisnes $y=3x$ un $y=-\frac{1}{3}x$ ir perpendikulāras, jo $a_1a_2=3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$.

2. piemērs. Taisnes $y=3x$ un $y=\frac{1}{3}x$ nav perpendikulāras, jo $a_1a_2=3\cdot\frac{1}{3}=1$.

1. piezīme. Ja vienas taisnes vienādojums nesatur ordināti (t. i., taisne ir paralēla OY asij), tad šī taisne ir perpendikulāra otrai taisnei tikai tad, ja otrās taisnes vienādojums nesatur abscisu (t. i., otrā taisne ir paralēla abscisu asij). Pretējā gadījumā taisnes nav perpendikulāras. Piemēram, taisnes $x=5$ un $3y+2=0$ ir perpendikulāras, bet taisnes $x=5$ un $y=2x$ nav perpendikulāras.

2. piezīme. Ja divas taisnes attēlo vienādojumi

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \quad A_2x+B_2y+C_2=0, \tag{4}$$

tad to perpendikularitātes noteikums ir

$$A_1A_2+B_1B_2=0. \qquad (5)$$

3. piemērs. Taisnes $2x+5y=8$ un $5x-2y=3$ ir perpendikulāras; tiešām, šeit $A_1=2$, $A_2=5$, $B_1=5$, $B_2=-2$, tātad $A_1A_2+B_1B_2=10-10=0$.

4. piemērs. Taisnes $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y=0$ un $2x-3y=0$ nav perpendikulāras, jo šeit $A_1A_2+B_1B_2=2$.

21. §. Leņķis starp divām taisnēm

Pieņemsim, ka divas neperpendikulāras taisnes L_1, L_2 (kas ņemtas norādītajā kārtībā) izsakās ar vienādojumiem

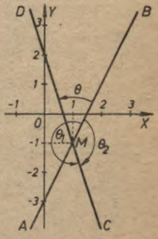
$$y=a_1x+b_1, \qquad (1)$$

$$y=a_2x+b_2. \qquad (2)$$

Tad formula[1]

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{a_2-a_1}{1+a_1a_2} \qquad (3)$$

dod leņķi, par kuru jāpagriež pirmā taisne, lai tā kļūtu paralēla otrai taisnei.



20. zīm.

1. piemērs. Atrast leņķi starp taisnēm $y=2x-3$ un $y=-3x+2$ (20. zīm.).

Šeit $a_1=2$, $a_2=-3$. Ar formulu (3) atrodam

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{-3-2}{1+2\cdot(-3)}=1,$$

no kurienes $\theta=+45°$. Tas nozīmē, ja taisni $y=2x-3$ (taisne AB 20. zīmējumā) pagriež par 45° ap doto taišņu krustošanās punktu $M(1;-1)$ (19. §. 1. piemērs), tā sakritīs ar

[1] Par šīs formulas pielietojamību gadījumā, kad taisnes L_1, L_2 ir perpendikulāras, sk. tālāk 1. piezīmi.

taisni $y=-3x+2$ (taisne CD 20. zīmējumā). Var ņemt arī $\theta=180^\circ+45^\circ=225^\circ$, $\theta=-180^\circ+45^\circ=-135^\circ$ utt. (Šie leņķi 20. zīmējumā apzīmēti ar θ_1, θ_2).

2. piemērs. Atrast leņķi starp taisnēm $y=-3x+2$ un $y=2x-3$.

Šeit ir tās pašas taisnes, kas 1. piemērā, bet tagad taisne CD (sk. 20. zīm.) ir pirmā, bet taisne AB — otrā. Formula (3) dod $\operatorname{tg}\theta=-1$, t. i., $\theta=-45^\circ$ (vai $\theta=135^\circ$, vai arī $\theta=-225^\circ$ utt.). Par šo leņķi jāpagriež taisne CD, līdz tā sakritīs ar AB.

3. piemērs. Atrast taisni, kas iet caur koordinātu sākumu un krusto 45° lielā leņķī taisni $y=2x-3$.

Atrisinājums. Meklētās taisnes vienādojums ir $y=ax$ (14. §.). Virziena koeficientu a var atrast no formulas (3), ņemot tanī a_1 vietā dotās taisnes virziena koeficientu (t. i., liekot $a_1=2$); a_2 vietā ņemam meklētās taisnes virziena koeficientu a, bet θ vietā — leņķi $+45^\circ$ vai -45°. Dabūjam

$$\frac{a-2}{1+2a}=\pm 1.$$

Uzdevumam ir divi atrisinājumi: $y=-3x$ (taisne AB 21. zīmējumā) un $y=\frac{1}{3}x$ (taisne CD).

21. zīm.

1. piezīme. Ja taisnes (1) un (2) ir perpendikulāras ($\theta=\pm 90^\circ$), tad izteiksme $1+a_1a_2$, kas atrodas formulas (3) saucējā, kļūst vienāda ar nulli (20. §) un dalījums $\frac{a_2-a_1}{1+a_1a_2}$ vairs neeksistē[1]. Vienlaicīgi neeksistē («kļūst bezgalīgi liels») arī $\operatorname{tg}\theta$. Formula (3), ja to saprot burtiski, zaudē jēgu; šai gadījumā tā jāsaprot nosacīti. Proti, katru reizi, kad formulas (3) saucējā parādās nulle, leņķis θ jāskaita par vienādu ar $\pm 90^\circ$ (tiklab pagrieziens par $+90^\circ$, kā arī pagrieziens par -90° sakļauj jebkuru taisni ar tai perpendikulāro taisni).

[1] Skaitītājs a_2-a_1 nav vienāds ar nulli, jo tikai paralēlām taisnēm virziena koeficienti a_1, a_2 ir vienādi (18. §).

4. piemērs. Atrast leņķi starp taisnēm $y=2x-3$ un $y=-\frac{1}{2}x+7$ $\left(a_1=2,\ a_2=-\frac{1}{2}\right)$. Ja iepriekš uzstādām jautājumu, vai šīs taisnes ir perpendikulāras, tad 20. §. pazīme (3) dod apstiprinošu atbildi, tā ka arī bez formulas (3) dabūjam $\theta=\pm 90^\circ$. To pašu dod arī formula (3). Mēs dabūjam

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{-\frac{1}{2}-2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2}=\frac{-2\frac{1}{2}}{0}.$$

Saskaņā ar 1. piezīmi šī vienādība jāsaprot tai nozīmē, ka $\theta=\pm 90^\circ$.

2. piezīme. Ja viena no taisnēm L_1, L_2 (vai abas) ir paralēla OY asij, tad formula (3) nepavisam nav lietojama, jo tad šo taisni (vai abas) nevar izteikt (15. §.) ar vienādojumu (1). Šai gadījumā leņķi θ aprēķina šādā veidā:

a) ja taisne L_2 ir paralēla OY asij, bet L_1 nav paralēla, lietojam formulu

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{1}{a_1};$$

b) ja taisne L_1 ir paralēla OY asij, bet L_2 nav paralēla, lietojam formulu

$$\operatorname{tg}\theta=-\frac{1}{a_2};$$

c) ja abas taisnes ir paralēlas OY asij, tad tās ir paralēlas savā starpā un $\operatorname{tg}\theta=0$.

3. piezīme. Leņķi starp taisnēm, kas uzdotas ar vienādojumiem

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \tag{4}$$

un

$$A_2x+B_2y+C_2=0, \tag{5}$$

var atrast ar formulu

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}. \tag{6}$$

Ja $A_1A_2+B_1B_2=0$, tad formula (6), kas jāsaprot nosacīti (sk. 1. piezīmi), dod $\theta=\pm 90^\circ$. Sal. 20. §. formulu (5).

22. §. Noteikums, kad trīs punkti atrodas uz vienas taisnes

Trīs punkti $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$, $A_3(x_3; y_3)$ atrodas uz vienas taisnes tad un tikai tad, kad [1]

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}=0. \quad (1)$$

Šī formula izsaka arī (13. §.), ka «trijstūra» $A_2A_3A_1$ laukums ir vienāds ar nulli.

1. piemērs. Punkti $A_1(-2; 5)$, $A_2(4; 3)$, $A_3(16; -1)$ atrodas uz vienas taisnes, jo

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4+2 & 3-5 \\ 16+2 & -1-5 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 18 & -6 \end{vmatrix}=6\cdot(-6)-(-2)\cdot 18=0.$$

2. piemērs. Punkti $A_1(-2; 6)$, $A_2(2; 5)$, $A_3(5; 3)$ neatrodas uz vienas taisnes, jo

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2+2 & 5-6 \\ 5+2 & 3-6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}=-5.$$

23. §. Vienādojums taisnei, kura iet caur diviem punktiem

Taisni, kas iet caur diviem punktiem $A_1(x_1; y_1)$ un $A_2(x_2; y_2)$, izsaka vienādojums [2]

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x\ -x_1 & y\ -y_1 \end{vmatrix}=0. \quad (1)$$

Šis vienādojums izsaka, ka dotie punkti A_1, A_2 un «tekošais» punkts $A(x; y)$ atrodas uz vienas taisnes (22. §.).

Vienādojumu (1) var izteikt (sk. tālāk piezīmi) veidā

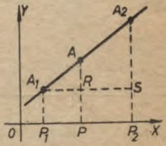
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \quad (2)$$

[1] Vienādības (1) kreisā puse uzrakstīta determinanta veidā (sk. 12. §).
[2] Turpat.

Šis vienādojums izsaka 22. zīmējumā parādīto taisnleņķa trijstūru A_1RA un A_1SA_2 katetu proporcionalitāti, kur

$$x_1=OP_1,\quad x_2=OP_2,\quad x=OP,$$
$$x-x_1=A_1R,\quad x_2-x_1=A_1S;$$
$$y_1=P_1A_1,\quad y_2=P_2A_2,\quad y=PA,$$
$$y-y_1=RA,\quad y_2-y_1=SA_2.$$

1. piemērs. Sastādīt vienādojumu taisnei, kas iet caur punktiem (1; 5) un 3; 9).



22. zīm.

Atrisinājums. Formula (1) dod

$$\begin{vmatrix} 3-1 & 9-5 \\ x-1 & y-5 \end{vmatrix}=0, \text{ t. i.,}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ x-1 & y-5 \end{vmatrix}=0,$$

t. i., $2(y-5)-4(x-1)=0$ jeb $2x-y+3=0$.

Formula (2) dod $\frac{x-1}{2}=\frac{y-5}{4}$. No šejienes atkal atrodam $2x-y+3=0$.

Piezīme. Gadījumā, ja $x_2=x_1$ (vai $y_2=y_1$), viens saucējs vienādībā (2) ir vienāds ar nulli; tad vienādojums (2) jāsaprot tai nozīmē, ka atbilstošais skaitītājs ir vienāds ar nulli. (Sk. nākošo — 2. piemēru un arī zemteksta piezīmi 33. lpp.)

2. piemērs. Sastādīt vienādojumu taisnei, kas iet caur punktiem $A_1(4; -2)$ un $A_2(4; 5)$. Vienādojums (1) dod

$$\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ x-4 & y+2 \end{vmatrix}=0, \tag{3}$$

t. i., $0(y+2)-7(x-4)=0$, t. i., $x-4=0$.

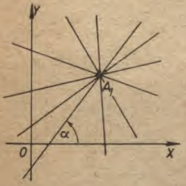
Vienādojums (2) uzrakstāms veidā

$$\frac{x-4}{0}=\frac{y+2}{7}; \tag{4}$$

šeit kreisās puses saucējs ir vienāds ar nulli. Izprotot vienādojumu (4) iepriekš minētajā nozīmē, pielīdzinām kreisās puses saucēju nullei. Dabūjam iepriekšējo rezultātu $x-4=0$.

24. §. Taišņu šķipsna

Caur punktu $A_1(x_1; y_1)$ (23. zīm.) iet daudzas taisnes, kuras sauc par *centrālo šķipsnu* (jeb vienkārši par *šķipsnu*). Punktu A_1 sauc par *šķipsnas centru*. Jebkuru šķipsnas taisni (izņemot ordinātu asij paralēlo taisni (sk. 1. piezīmi)) var izteikt ar vienādojumu



23. zīm.

$$y-y_1=k(x-x_1). \qquad (1)$$

Šeit k ir apskatāmās taisnes virziena koeficients ($k=\operatorname{tg}\alpha$). Vienādojumu (1) sauc par *šķipsnas vienādojumu*. Lielums k *(šķipsnas parametrs)* raksturo taisnes virzienu; tas mainās, pārejot no vienas šķipsnas taisnes uz citu.

Parametra k vērtību var atrast, ja uzdod vēl kādu noteikumu, kurš (līdz ar taisnes piederības noteikumu dotajai šķipsnai) nosaka taisnes stāvokli (sk. 2. piemēru).

1. piemērs. Sastādīt vienādojumu šķipsnai ar centru punktā $A_1(-4; -8)$.

Atrisinājums. Saskaņā ar (1) dabūjam

$$y+8=k(x+4).$$

2. piemērs. Atrast vienādojumu taisnei, kas iet caur punktu $A_1(1; 4)$ un ir perpendikulāra taisnei $3x-2y=12$.

Atrisinājums. Meklētā taisne pieder šķipsnai ar centru $(1; 4)$. Šīs šķipsnas vienādojums ir $y-4=k(x-1)$. Lai atrastu parametra k vērtību, ievērosim, ka meklētā taisne ir perpendikulāra taisnei $3x-2y=12$, kuras virziena koeficients ir $\frac{3}{2}$. Dabūjam (20. §.) $\frac{3}{2}k=-1$, t. i., $k=-\frac{2}{3}$. Meklētās taisnes vienādojums ir $y-4=-\frac{2}{3}(x-1)$ jeb $y=-\frac{2}{3}x+4\frac{2}{3}$.

1. piezīme. Taisnei, kas pieder šķipsnai ar centru $A_1(x_1; y_1)$ un ir paralēla OY asij, vienādojums ir $x-x_1=0$; nav tādas k vērtības, ar kuru šo vienādojumu varētu dabūt

no (1). Bez izņēmuma visas šķipsnas taisnes var izteikt ar vienādojumu

$$l(y-y_1)=m(x-x_1), \qquad (2)$$

kur l un m ir patvaļīgi skaitļi (kas reizē nav nulles). Ja $l \neq 0$, tad mēs vienādojumu (2) varam izdalīt ar l. Apzīmējot tad $\frac{m}{l}$ ar k, dabūsim (1). Ja pieņemam, ka $l=0$, tad vienādojums (2) pieņem izskatu $x-x_1=0$.

2. piezīme. Vienādojums šķipsnai, kurā ietilpst divas krustojošās taisnes L_1, L_2, kas uzdotas ar vienādojumiem

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \quad A_2x+B_2y+C_2=0,$$

ir

$$m_1(A_1x+B_1y+C_1)+m_2(A_2x+B_2y+C_2)=0. \qquad (3)$$

Šai vienādojumā m_1, m_2 ir patvaļīgi skaitļi (kas reizē nav nulles). Atsevišķā gadījumā, ja $m_1=0$, dabūjam taisni L_2, ja $m_2=0$, — taisni L_1. Vienādojuma (3) vietā var rakstīt vienādojumu

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0, \qquad (4)$$

kurā visas iespējamās vērtības var dot tikai vienam burtam λ, bet no (4) vairs nevar dabūt taisnes L_2 vienādojumu.

Vienādojums (1) ir vienādojuma (4) atsevišķs gadījums, kad taisnes L_1 un L_2 ir uzdotas ar vienādojumiem $y=y_1$, $x=x_1$ (tad šīs taisnes ir paralēlas koordinātu asīm).

3. piemērs. Sastādīt vienādojumu taisnei, kas iet caur taišņu $2x-3y-1=0$, $3x-y-2=0$ krustošanās punktu un ir perpendikulāra taisnei $y=x$.

Atrisinājums. Meklētā taisne (tā katrā ziņā nesakrīt ar taisni $3x-y-2=0$) pieder šķipsnai

$$2x-3y-1+\lambda(3x-y-2)=0.$$

Taisnes (5) virziena koeficients ir $k=\frac{3\lambda+2}{\lambda+3}$. Tā kā meklētā taisne ir perpendikulāra taisnei $y=x$, tad (20. §.) $k=-1$. Tādējādi $\frac{3\lambda+2}{\lambda+3}=-1$, t. i., $\lambda=-\frac{5}{4}$. Ievietojot $\lambda=-\frac{5}{4}$ vienādojumā (5), pēc vienkāršojumiem dabūjam

$$7x+7y-6=0.$$

3. piezīme. Ja taisnes L_1, L_2 ir paralēlas (bet nesakrīt), tad vienādojums (3) visām iespējamām m_1, m_2 vērtībām izsaka visas dotajām divām taisnēm paralēlas taisnes. Savā starpā paralēlu taišņu kopu sauc par *paralēlu šķipsnu*. Tādējādi vienādojums (3) izsaka vai nu centrālu, vai paralēlu šķipsnu.

25. §. Vienādojums taisnei, kura iet caur doto punktu paralēli dotajai taisnei

1. Taisni, kura iet caur punktu $M_1(x_1; y_1)$ un ir paralēla taisnei $y=ax+b$, izsaka vienādojums

$$y-y_1=a(x-x_1). \tag{1}$$

Sal. 24. §.

1. piemērs. Sastādīt vienādojumu taisnei, kura iet caur punktu $(-2; 5)$ un ir paralēla taisnei

$$5x-7y-4=0.$$

Atrisinājums. Dotās taisnes vienādojumu var izteikt tā: $y=\frac{5}{7}x-\frac{4}{7}\left(\text{šeit } a=\frac{5}{7}\right)$. Meklētās taisnes vienādojums ir $y-5=\frac{5}{7}[x-(-2)]$, t. i., $7(y-5)=5(x+2)$ jeb $5x-7y+45=0$.

2. Taisni, kas iet caur punktu $M_1(x_1; y_1)$ un ir paralēla taisnei $Ax+By+C=0$, izsaka vienādojums

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0. \tag{2}$$

2. piemērs. Atrisinot 1. piemēru ($A=5$, $B=-7$) ar formulu (2), atrodam $5(x+2)-7(y-5)=0$.

3. piemērs. Sastādīt vienādojumu taisnei, kura iet caur punktu $(-2; 5)$ un ir paralēla taisnei $7x+10=0$.

Atrisinājums. Šeit $A=7$, $B=0$. Formula (2) dod $7(x+2)=0$, t. i., $x+2=0$. Formula (1) nav lietojama, jo doto vienādojumu nevar atrisināt attiecībā pret y (dotā taisne ir paralēla ordinātu asij; sal. 15. §.).

26. §. Vienādojums taisnei, kura iet caur doto punktu perpendikulāri dotajai taisnei

1. Taisne, kura iet caur punktu $M_1(x_1; y_1)$ un ir perpendikulāra taisnei $y=ax+b$, izsakās ar vienādojumu

$$y-y_1=-\frac{1}{a}(x-x_1). \qquad (1)$$

Sal. 24. §. 2. piemēru.

1. piemērs. Sastādīt vienādojumu taisnei, kura iet caur punktu (2; −1) un ir perpendikulāra taisnei

$$4x-9y=3.$$

Atrisinājums. Dotās taisnes vienādojumu var izteikt tā: $y=\frac{4}{9}x-\frac{1}{3}\left(a=\frac{4}{9}\right)$. Meklētās taisnes vienādojums ir $y+1=-\frac{9}{4}(x-2)$, t. i., $9x+4y-14=0$.

2. Taisni, kura iet caur punktu $M_1(x_1; y_1)$ un ir perpendikulāra taisnei $Ax+By+C=0$, izsaka vienādojums

$$A(y-y_1)-B(x-x_1)=0. \qquad (2)$$

2. piemērs. Atrisinot 1. piemēru ($A=4$, $B=-9$) ar formulu (2), atrodam $4(y+1)+9(x-2)=0$, t. i., $9x+4y-14=0$.

3. piemērs. Sastādīt vienādojumu taisnei, kura iet caur punktu (−3; −2) perpendikulāri taisnei

$$2y+1=0.$$

Atrisinājums. Šeit $A=0$, $B=2$. Formula (2) dod $-2(x+3)=0$, t. i., $x+3=0$. Formula (1) nav lietojama, jo $a=0$ (sal. 20. §. 1. piezīmi).

27. §. Taisnes un punktu pāra savstarpējais novietojums

Punktu $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ un taisnes

$$Ax+By+C=0 \qquad (1)$$

savstarpējo novietojumu nosaka šādas pazīmes:

a) punkti M_1 un M_2 atrodas vienā pusē no taisnes (1), ja skaitļiem $Ax_1+By_1+C_1$, $Ax_2+By_2+C_2$ ir vienādas zīmes;

b) punkti M_1 un M_2 atrodas dažādās pusēs no taisnes (1), ja šiem skaitļiem ir pretējas zīmes;

c) viens no punktiem M_1, M_2 (vai abi) atrodas uz taisnes (1), ja viens no šiem skaitļiem (vai abi) ir vienādi ar nulli.

1. piemērs. Punkti $(2; -6)$, $(-4; -2)$ atrodas vienā pusē no taisnes

$$3x+5y-1=0,$$

jo abi skaitļi $3\cdot2+5\cdot(-6)-1=-25$ un $3\cdot(-4)+5\cdot(-2)-1=-23$ ir negatīvi.

2. piemērs. Koordinātu sākums $(0; 0)$ un punkts $(5; 5)$ atrodas dažādās pusēs no taisnes $x+y-8=0$, jo skaitļiem $0+0-8=-8$ un $5+5-8=+2$ ir dažādas zīmes.

28. §. Attālums no punkta līdz taisnei

Attālums d no punkta $M_1(x_1, y_1)$ līdz taisnei

$$Ax+By+C=0 \tag{1}$$

ir vienāds ar lieluma

$$\delta=\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}} \tag{2}$$

absolūto vērtību, t. i.,[1]

$$d=|\delta|=\left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|. \tag{3}$$

Piemērs. Atrast attālumu no punkta $(-1; +1)$ līdz taisnei

$$3x-4y+5=0.$$

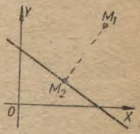
Atrisinājums.

$$\delta=\frac{3x_1-4y_1+5}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{3\cdot(-1)-4\cdot1+5}{\sqrt{3^2+4^2}}=-\frac{2}{5},$$

$$d=|\delta|=\left|-\frac{2}{5}\right|=\frac{2}{5}.$$

[1] Formulu (3) parasti izved mākslīgas konstrukcijas ceļā; tālāk (sk. 2. piezīmi) parādīts tīri analītisks izvedums.

1. piezīme. Pieņemsim, ka taisne (1) neiet caur sākumu O un tātad $C \neq 0$ (16. §.). Ja tad δ un C zīmes ir vienādas, tad punkti M_1 un O atrodas vienā pusē no taisnes (1); ja zīmes ir pretējas, — tad dažādās pusēs (sal. 27. §); beidzot, ja $\delta = 0$ (kas ir iespējams tikai tad, ja $Ax_1 + By_1 + C = 0$), tad M_1 atrodas uz dotās taisnes (8. §).



24. zīm.

Lielumu δ sauc par punkta M_1 *orientēto attālumu* (jeb *atvirzi*) līdz taisnei (1). Apskatītajā piemērā orientētais attālums δ ir vienāds ar $-\frac{2}{5}$, bet $C = 5$. Lielumu δ un C zīmes ir pretējas, tātad punkti $M_1(-1; +1)$ un O atrodas dažādās pusēs no taisnes $3x - 4y + 5 = 0$.

2. piezīme. Formulu (3) visvienkāršāk var dabūt šādā veidā.

Pieņemsim, ka $M_2(x_2;\ y_2)$ (24. zīm.) ir no punkta $M_1(x_1;\ y_1)$ pret taisni (1) novilktā perpendikula pamats. Tad

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{4}$$

Koordinātes x_2, y_2 atrodam kā sistēmas

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

$$A(y - y_1) - B(x - x_1) = 0 \tag{5}$$

atrisinājumu, kur vienādojums (5) izsaka taisni M_1M_2 (26. §.). Lai atvieglotu aprēķinus, pārrakstām sistēmas pirmo vienādojumu tā:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + Ax_1 + By_1 + C = 0. \tag{6}$$

Atrisinot (5) un (6) attiecībā pret $(x - x_1)$, $(y - y_1)$, dabūjam

$$x - x_1 = -\frac{A}{A^2 + B^2}(Ax_1 + By_1 + C), \tag{7}$$

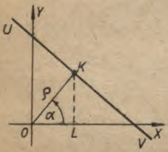
$$y - y_1 = -\frac{B}{A^2 + B^2}(Ax_1 + By_1 + C). \tag{8}$$

Ievietojot (7) un (8) vienādībā (4), atrodam

$$d=\left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|.$$

29. §. Taisnes polārie parametri [1]

Taisnes stāvokli plaknē var uzdot ar diviem skaitļiem; tādus skaitļus sauc par taisnes *parametriem.* Tā skaitļi b (sākuma ordināte) un a (virziena koeficients) ir (sal. 14. §.) taisnes parametri. Bet parametri b un a nav derīgi visām taisnēm; OY asij paralēlu taisni nevar ar tiem uzdot (15. §.). Pretstatā tiem ar polārajiem parametriem (sk. tālāk) var uzdot jebkuras taisnes stāvokli.



25. zīm.

Par taisnes *UV polāro attālumu* (25. zīm.) sauc no sākuma O pret taisni novilktā perpendikula OK garumu p. Polārais attālums ir pozitīvs vai vienāds ar nulli ($p \geqslant 0$).

Par taisnes *UV polāro leņķi* sauc leņķi $\alpha=\angle XOK$ starp stariem OX un OK, kurus ņem norādītajā kārtībā (sal. 21. §). Ja taisne UV neiet caur sākumu (kā 25. zīmējumā), tad otra stara vērsums ir pilnīgi noteikts (no O uz K); ja UV iet caur O (tad O un K sakrīt), tad taisnei UV perpendikulāro staru velk vienalga uz kuru pusi.

Polāro attālumu un polāro leņķi sauc par *taisnes polārajiem parametriem.*

Ja taisne UV uzdota ar vienādojumu

$$Ax+By+C=0,$$

tad tās polāro attālumu aprēķina ar formulu

$$p=\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}, \tag{1}$$

bet polāro leņķi α — ar formulām

$$\cos\alpha=\mp\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \sin\alpha=\mp\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}, \tag{2}$$

[1] Šis paragrāfs ir ievads 30. un 31. paragrāfam.

kur augšējās zīmes ņem, ja $C>0$, bet apakšējās, — ja $C<0$; ja $C=0$, tad pēc brīvas izvēles ņem vai nu tikai augšējās, vai tikai apakšējās zīmes[1].

1. piemērs. Atrast polāros parametrus taisnei

$$3x-4y+10=0.$$

Atrisinājums. Formula (1) dod $p=\frac{10}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$. Formulas (2), kur jāņem augšējās zīmes (jo $C=+10$), dod

$$\cos\alpha=-\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}=-\frac{3}{5}; \quad \sin\alpha=-\frac{(-4)}{\sqrt{3^2+4^2}}=+\frac{4}{5}.$$

Tādējādi $\alpha\approx127°$ vai $\alpha\approx487°$ utt.

2. piemērs. Atrast polāros parametrus taisnei

$$3x-4y=0.$$

Formula (1) dod $p=0$; formulās (2) drīkst ņemt vai nu tikai augšējās, vai tikai apakšējās zīmes. Pirmajā gadījumā $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ un tātad $\alpha\approx127°$; otrajā gadījumā $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$ un tātad $\alpha\approx-53°$.

---

[1] Formula (1) rodas no 28. § formulas (3), ja $x_1=y_1=0$. Formulas (2) var dabūt tā (no 25. zīmējuma):

$$\cos\alpha=\frac{OL}{OK}=\frac{x}{p}, \quad \sin\alpha=\frac{LK}{OK}=\frac{y}{p}. \tag{3}$$

Saskaņā ar 28. § formulām (7) un (8) (ja $x_1=y_1=0$) dabūjam

$$x=-\frac{AC}{A^2+B^2}, \quad y=-\frac{BC}{A^2+B^2}. \tag{4}$$

No (1), (3) un (4) izriet, ka

$$\cos\alpha=-\frac{C}{|C|}\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \sin\alpha=-\frac{C}{|C|}\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{5}$$

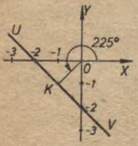
Formulas (5) sakrīt ar formulām (2), ja $\frac{C}{|C|}=+1$, ja $C>0$ un $\frac{C}{|C|}=-1$, ja $C<0$.

30. §. Taisnes normālais vienādojums

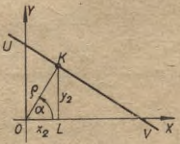
Taisni ar polāro attālumu p un polāro leņķi α (29. §.) izsaka ar vienādojumu

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0. \tag{1}$$

To sauc par *taisnes normālo vienādojumu.*



26. zīm.



27. zīm.

P i e m ē r s. Pieņemsim, ka taisne UV atrodas no sākuma attālumā

$$OK=\sqrt{2}$$

(26. zīm.) un stars OK veido ar staru OX leņķi $\alpha=225°$. Tad taisnes UV normālais vienādojums ir

$$x\cos 225°+y\sin 225°-\sqrt{2}=0,$$

t. i.,

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y-\sqrt{2}=0.$$

Pareizinot visus locekļus ar $-\sqrt{2}$, dabūsim taisnes UV vienādojumu formā $x+y+2=0$, bet tas jau vairs nebūs normālais vienādojums.

V i e n ā d o j u m a (1) i z v e d u m s. Apzīmēsim punkta K (27. zīm.) koordinātes ar x_2, y_2. Tad $x_2=OL=p\cos\alpha$, $y_2=LK=p\sin\alpha$. Taisni OK, kas iet caur punktiem $O(0;0)$ un $K(x_2;y_2)$, izsaka (23. §.) ar vienādojumu $\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x & y \end{vmatrix}=0$, t. i., $(\sin\alpha)x-(\cos\alpha)y=0$. Taisne UV iet caur $K(x_2;y_2)$

un ir perpendikulāra taisnei OK. Tātad (26. §. 2. p.) tās izsaka ar vienādojumu $\sin\alpha(y-y_2)-(-\cos\alpha)(x-x_2)=0$. Ievietojot šai vienādojumā $x_2=p\cos\alpha$ un $y_2=p\sin\alpha$, dabūjam $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$.

31. §. Taisnes vienādojuma redukcija normālajā veidā

Lai atrastu normālo vienādojumu taisnei, kas uzdota ar vienādojumu $Ax+By+C=0$, pietiek izdalīt doto vienādojumu ar $\mp\sqrt{A^2+B^2}$, pie kam augšējo zīmi ņem, ja $C>0$, bet apakšējo, — ja $C<0$; ja $C=0$, tad var ņemt jebkuru zīmi. Dabūjam vienādojumu

$$\mp\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x\mp\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y-\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=0.$$

Tas būs normālais vienādojums [1].

1. piemērs. Vienādojumu $3x-4y+10=0$ reducēt normālajā veidā.

Šeit $A=3$, $B=-4$ un $C=10>0$. Tāpēc dalām ar $-\sqrt{3^2+4^2}=-5$. Dabūjam

$$-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-2=0.$$

Šī vienādojuma veids ir $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$. Tanī $p=2$, $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, $\sin\alpha=+\frac{4}{5}$ (tātad $\alpha\approx127°$).

2. piemērs. Vienādojumu $3x-4y=0$ reducēt normālajā veidā.

Tā kā šeit $C=0$, tad var dalīt vai nu ar 5, vai ar -5. Pirmajā gadījumā dabūjam

$$\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y=0$$

($p=0$, $\alpha\approx307°$), otrajā gadījumā

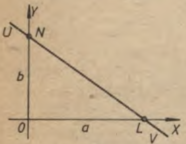
$$-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y=0$$

($p=0$, $\alpha\approx127°$). Divām α vērtībām atbilst divi pozitīvā vērsuma izvēles veidi uz stara OK (sk. 29. §.).

[1] Jo koeficienti pie x, y saskaņā ar 29. § formulām (2) ir attiecīgi vienādi ar $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, bet brīvais loceklis saskaņā ar 29. § formulu (1) ir vienāds ar $(-p)$.

32. §. Nogriežņi uz asīm

Lai atrastu nogriezni $OL=a$ (28. zīm.), kuru taisne UV atšķeļ uz abscisu ass, pietiek taisnes vienādojumā ņemt $y=0$ un vienādojumu atrisināt attiecībā pret x. Analogi atrod nogriezni $ON=b$ uz ordinātu ass. Lielumu a un b vērtības var būt tiklab pozitīvas, kā negatīvas. Ja taisne ir paralēla kādai asij, tad atbilstošais nogrieznis neeksistē («pārvēršas bezgalībā»). Ja taisne iet caur sākumu, tad abi nogriežņi deģenerējas punktos ($a=b=0$).



28. zīm.

1. piemērs. Atrast nogriežņus a, b, kurus taisne $3x-2y+12=0$ atšķeļ uz asīm.

Atrisinājums. Ņemam $y=0$ un no vienādojuma $3x+12=0$ atrodam $x=-4$. Ņemot $x=0$, no vienādojuma $-2y+12=0$ atrodam $y=6$. Tātad $a=-4$, $b=6$.

2. piemērs. Atrast nogriežņus a, b, kurus uz asīm atšķeļ taisne

$$5y+15=0.$$

Atrisinājums. Šī taisne ir paralēla abscisu asij (15. §.). Nogrieznis a neeksistē (ņemot $y=0$, dabūjam pretrunīgu sakarību $15=0$). Nogrieznis b ir vienāds ar -3.

3. piemērs. Atrast nogriežņus a, b, kurus uz asīm atšķeļ taisne

$$3y-2x=0.$$

Atrisinājums. Ar apskatīto paņēmienu atrodam $a=0$, $b=0$. Katra «nogriežņa» gals sakrīt ar tā sākumu, t. i., nogrieznis deģenerējas punktā. Taisne iet caur sākumu (sal. 14. §.).

33. §. Taisnes vienādojums ar asu nogriežņiem

Ja taisne atšķeļ uz asīm nogriežņus a, b (kas nav vienādi ar nulli), tad to var izteikt ar vienādojumu

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (1)$$

Otrādi, vienādojums (1) izsaka taisni, kas atšķeļ uz asīm (skaitot no sākuma O) nogriežņus a, b.

Vienādojumu (1) sauc *par taisnes vienādojumu ar asu nogriežņiem.*

Piemērs. Taisnei

$$3x-2y+12=0 \tag{2}$$

atrast vienādojumu ar asu nogriežņiem.

Atrisinājums. Atrodam (32. §. 1. piemērs), ka $a=-4$, $b=6$. Vienādojums ar asu nogriežņiem ir

$$\frac{x}{-4}+\frac{y}{6}=1. \tag{3}$$

Tas ir ekvivalents vienādojumam (2).

1. piezīme. Taisni, kas atšķeļ uz asīm nogriežņus, kuri vienādi ar nulli (t. i., taisni, kas iet caur sākumu; sk. 32. §. 3. piemēru), nevar izteikt ar vienādojumu ar asu nogriežņiem.

2. piezīme. OX asij paralēlu taisni (32. §. 2. piemērs) var izteikt ar vienādojumu $\frac{y}{b}=1$, kur b ir nogrieznis uz OY ass. Analogi OY asij paralēlu taisni var izteikt ar vienādojumu $\frac{x}{a}=1$. Vai šos vienādojumus uzskatīt par «vienādojumiem ar asu nogriežņiem» vai ne, nav izšķirts (vispārpieņemtas vienošanās literatūrā nav)[1].

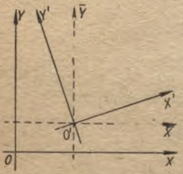
34. §. Koordinātu transformācija (jautājuma nostādne)

Vienu un to pašu līniju dažādās koordinātu sistēmās izsaka ar dažādiem vienādojumiem. Bieži, zinot kādas līnijas vienādojumu vienā *(«vecajā»)* koordinātu sistēmā, jāatrod šīs līnijas vienādojums citā *(«jaunajā»)* sistēmā. Šim nolūkam noder *koordinātu transformācijas formulas.* Tās nodibina saistību starp kāda punkta M vecajām un jaunajām koordinātēm.

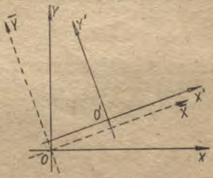
---

[1] Jāievēro, ka vienādojumu $\frac{x}{a}=1$ vai $\frac{y}{b}=1$ var dabūt no vienādojuma $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, bet ne kā tā atsevišķu gadījumu, bet ar robežpāreju (ja b vai a ir bezgalīgi lieli).

Jebkuru jauno taisnleņķa koordinātu sistēmu $X'O'Y'$ var dabūt no jebkuras vecās sistēmas XOY (29. zīm.) ar diviem pārvietojumiem: 1) vispirms sakļaujot sākumu O ar punktu O', asu virzienus paturot nemainīgus, iegūst palīgsistēmu



29. zīm.



30. zīm.

$\overline{X}O'\overline{Y}$ (parādīta ar punktētu līniju); 2) pēc tam pagriež palīgsistēmu ap punktu O', līdz tā sakļaujas ar jauno sistēmu $X'O'Y'$.

Šos pašus divus pārvietojumus var izpildīt arī otrādā kārtībā (vispirms izpildīt pagriezienu ap O, kas dod palīgsistēmu $\overline{X}O\overline{Y}$, pēc tam pārnešanu uz punktu O', kas dod jauno sistēmu $X'O'Y'$; 30. zīm.).

31. zīm.

Ievērojot teikto, pietiek zināt koordinātu transformācijas formulas, ja pārnes sākumu (35. §) un ja pagriež asis (36. §).

35. §. Koordinātu sākuma pārnešana

Apzīmējumi (31. zīm.):
punkta M vecās koordinātes: $x=OP$, $y=PM$;
punkta M jaunās koordinātes: $x'=O'P'$, $y'=P'M$;
jaunā sākuma O' koordinātes vecajā sistēmā XOY:

$$x_0=OR, \quad y_0=RO'.$$

Pārnešanas (paralēlās translācijas) formulas ir

$$x=x'+x_0, \quad y=y'+y_0. \tag{1}$$

jeb

$$x' = x - x_0, \quad y' = y - y_0. \qquad (2)$$

Ar vārdiem — *vecā koordināte ir vienāda ar jauno, kurai pieskaitīta jaunā sākuma koordināte* (vecajā sistēmā)[1].

1. piemērs. Koordinātu sākums pārnests punktā (2; −5). Atrast punkta $M(-3; 4)$ jaunās koordinātes.

Atrisinājums. Šai gadījumā

$$x_0 = 2, \quad y_0 = -5; \quad x = -3, \quad y = 4.$$

Ar formulām (2) atrodam

$$x' = -3 - 2 = -5, \quad y' = 4 + 5 = 9.$$

2. piemērs. Kādas līnijas vienādojums ir

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y = 36.$$

Kāds būs šīs līnijas vienādojums, ja koordinātu sākumu pārnes punktā $O'(2; -3)$?

Atrisinājums. Saskaņā ar formulām (1) dabūjam

$$x = x' + 2 \text{ un } y = y' - 3.$$

Ievietojam šīs izteiksmes dotajā vienādojumā. Dabūjam

$$(x'+2)^2 + (y'-3)^2 - 4(x'+2) + 6(y'-3) = 36$$

jeb pēc vienkāršojumiem

$$x'^2 + y'^2 = 49.$$

Tas ir mūsu līnijas jaunais vienādojums. No tā redzams, ka šī līnija ir (38. §.) riņķa līnija, kuras rādiuss $R = 7$ un centrs atrodas punktā O'.

36. §. Asu pagriešana

Apzīmējumi (32. zīm.):
punkta M vecās koordinātes: $x = OP$, $y = PM$;
punkta M jaunās koordinātes: $x' = OP'$, $y' = P'M$;
asu pagrieziena leņķis[2]: $\alpha = \angle XOX' = \angle YOY'$.

---

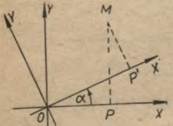
[1] Lai iegaumētu kārtulu, nelasiet vārdus iekavās; tiem ir būtiska nozīme, bet tos viegli var restaurēt pēc jēgas.
[2] Par leņķa α zīmi sk. 14. § zemteksta piezīmi.

Pagrieziena formulas[1] ir

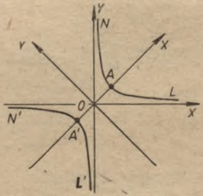
$$\left.\begin{aligned} x&=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\\ y&=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha,\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

jeb

$$\left.\begin{aligned} x'&=x\cos\alpha+y\sin\alpha,\\ y'&=-x\sin\alpha+y\cos\alpha.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$



32. zīm.



33. zīm.

1. piemērs. Vienādojums $2xy=49$ izsaka līniju, kas sastāv no diviem zariem LAN un $L'A'N'$ (33. zīm.) (to sauc par vienādsānu jeb taisnleņķa hiperbolu). Atrast šīs līnijas vienādojumu, ja asis pagriež par 45° leņķi.

Atrisinājums. Formulas (1), ja $\alpha=45°$, pieņem izskatu

$$x=x'\frac{\sqrt{2}}{2}-y'\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$y=x'\frac{\sqrt{2}}{2}+y'\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ievietosim šīs izteiksmes dotajā vienādojumā. Dabūsim

$$2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')(x'+y')=49$$

[1] Lai iegaumētu formulas (1), ievērojiet, ka x izteiksmē ir «pilnīga nekārtība» (kosinuss atrodas pirms sinusa, starp labās puses locekļiem ir mīnusa zīme). Turpretim y izteiksmē mums ir «pilnīga kārtība» (vispirms sinuss, tad kosinuss, bet starp locekļiem ir plusa zīme).

Formulas (2) rodas no formulām (1), ja α aizstāj ar $-\alpha$ un samaina apzīmējumus x, y ar x', y', un otrādi.

jeb pēc vienkāršojumiem

$$x'^2 - y'^2 = 49.$$

2. piemērs. Līdz pagriezienam par $-20°$ leņķi punktam M bija abscisa $x=6$ un ordināte $y=0$. Atrast punkta M koordinātes pēc asu pagrieziena.

Atrisinājums. Punkta M jaunās koordinātes x', y' atrod ar formulām (2), ņemot tanīs $x=6$, $y=0$, $\alpha=-20°$. Dabūjam

$$x' = 6\cos(-20°) \approx 5{,}64,$$
$$y' = -6\sin(-20°) \approx 2{,}05.$$

37. §. Algebriskas līnijas un to kārta

Vienādojums

$$Ax + By + C = 0, \tag{1}$$

kur vismaz viens no koeficientiem A, B nav vienāds ar nulli, ir *pirmās pakāpes algebrisks vienādojums* (ar diviem nezināmiem x, y). Tas vienmēr izsaka taisni.

Par *otrās pakāpes algebrisku vienādojumu* sauc šāda veida vienādojumu:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{2}$$

kur vismaz viens no koeficientiem A, B, C nav vienāds ar nulli.

Vienādojumam (2) ekvivalentu vienādojumu arī sauc par algebrisku.

1. piemērs. Vienādojums $y=5x^2$, kas ir ekvivalents vienādojumam $5x^2-y=0$, ir otrās pakāpes algebrisks vienādojums ($A=5$, $B=0$, $C=0$, $D=0$, $E=-1$, $F=0$).

2. piemērs. Vienādojums $xy=1$, kas ir ekvivalents vienādojumam $xy-1=0$, ir otrās pakāpes algebrisks vienādojums ($A=0$, $B=1$, $C=0$, $D=0$, $E=0$, $F=-1$).

3. piemērs. Vienādojums $(x+y+2)^2-(x+y+1)^2=0$ ir pirmās pakāpes vienādojums, jo tas ir ekvivalents vienādojumam $2x+2y+3=0$

Analogi definē trešās, ceturtās, piektās utt. pakāpes algebriskus vienādojumus. Lielumus A, B, C, D utt. (tai skaitā arī brīvo locekli) sauc par algebriskā vienādojuma *koeficientiem*.

Ja kādu līniju L vienā Dekarta koordinātu sistēmā izsaka n-tās pakāpes algebrisks vienādojums, tad arī jebkurā citā Dekarta sistēmā tā izteiksies ar tās pašas pakāpes algebrisku vienādojumu. Protams, pie tam vienādojuma koeficienti (visi vai daži) savas vērtības izmainīs; atsevišķā gadījumā daži no tiem var kļūt vienādi ar nulli.

Līniju L, kuru Dekarta sistēmā izsaka n-tās pakāpes vienādojums, sauc par *n-tās kārtas algebrisku līniju.*

4. piemērs. Taisni taisnleņķa koordinātu sistēmā izsaka pirmās pakāpes algebrisks vienādojums $Ax+By+C=0$ (16. §.). Tāpēc taisne ir pirmās kārtas algebriska līnija. Vienai un tai pašai taisnei dažādās koordinātu sistēmās koeficientiem A, B, C ir dažādas vērtības. Pieņemsim, piemēram, ka «vecajā» sistēmā taisne izsakās ar vienādojumu $2x+3y-5=0$ ($A=2$, $B=3$, $C=-5$). Ja pagriež asis par 45°, tad (36. §.) jaunajā sistēmā tā pati taisne izteiksies ar vienādojumu

$$2\left(x'\frac{\sqrt{2}}{2}-y'\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+3\left(x'\frac{\sqrt{2}}{2}+y'\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-5=0,$$

t. i.,

$$\frac{5\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'-5=0\quad\left(A=\frac{5\sqrt{2}}{2},\ B=\frac{\sqrt{2}}{2},\ C=-5\right).$$

5. piemērs. Ja koordinātu sākums atrodas riņķa līnijas centrā, kuras rādiuss $R=3$, tad riņķa līniju izsaka vienādojums (38. §.) $x^2+y^2-9=0$. Tas ir otrās pakāpes algebrisks vienādojums ($A=1$, $B=0$, $C=1$, $D=0$, $E=0$, $F=-9$). Tātad riņķa līnija ir otrās kārtas līnija. Ja koordinātu sākumu pārnes punktā $(-5; -2)$, tad jaunajā sistēmā tā pati riņķa līnija izteiksies ar vienādojumu (35. §.) $(x'-5)^2+(y'-2)^2-9=0$, t. i., $x'^2+y'^2-10x'-4y'-20=0$. Šis vienādojums arī ir otrās pakāpes vienādojums; koeficienti A, B un C ir palikuši iepriekšējie, bet D, E un F ir mainījušies.

6. piemērs. Līnija, kuru izsaka vienādojums $y=\sin x$ (sinusoīda), nav algebriska līnija.

38. §. Riņķa līnija

Riņķa līnijai ar rādiusu R un centru koordinātu sākumā ir vienādojums

$$x^2+y^2=R^2.$$

Tas izsaka, ka attāluma OA (sk. 9. zīm. 22. lpp.) kvadrāts no koordinātu sākuma līdz jebkuram riņķa līnijas punktam ir vienāds ar R^2.

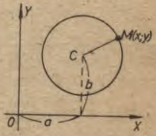
Riņķa līnijai ar rādiusu R un centru punktā $C(a; b)$ vienādojums ir

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \quad (1)$$

Tas izsaka, ka attāluma MC (34. zīm.) kvadrāts starp punktiem $M(x; y)$ un $C(a; b)$ (10. §) ir vienāds ar R.

Vienādojumu (1) var pārrakstīt veidā

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0. \quad (2)$$



34. zīm.

Vienādojumu (2) var pareizināt ar jebkuru skaitli A; tad tas pieņems izskatu

$$Ax^2+Ay^2-2Aax-2Aby+A(a^2+b^2-R^2)=0. \quad (3)$$

1. piemērs. Riņķa līniju ar rādiusu $R=7$ un centru $C(4; -6)$ izsaka vienādojums

$$(x-4)^2+(y+6)^2=49 \text{ jeb } x^2+y^2-8x+12y+3=0,$$

jeb (pēc pareizināšanas ar 3)

$$3x^2+3y^2-24x+36y+9=0.$$

Piezīme. Riņķa līnija ir otrās kārtas līnija (37. §.), jo to izsaka otrās pakāpes vienādojums. Tomēr ne katrs otrās pakāpes vienādojums izsaka riņķa līniju. Lai tas izteiktu riņķa līniju, ir nepieciešams

1) lai tanī nebūtu locekļa ar reizinājumu xy;

2) lai koeficienti pie x^2 un y^2 būtu vienādi (sal. ar vienādojumu (3)).

Bet šie noteikumi nav pilnīgi pietiekami (sk. 39. §.).

2. piemērs. Otrās pakāpes vienādojums $x^2+3xy+y^2=1$ neizsaka riņķa līniju: tanī ir loceklis $3xy$.

3. piemērs. Otrās pakāpes vienādojums $9x^2+4y^2=49$ neizsaka riņķa līniju: koeficienti pie x^2 un y^2 nav vienādi.

4. piemērs. Vienādojums

$$5x^2-10x+5y^2+20y-20=0$$

izpilda abus noteikumus. 39. paragrāfā parādīts, ka tas izsaka riņķa līniju.

39. §. Riņķa līnijas centra un rādiusa atrašana

Vienādojums

$$Ax^2+Bx+Ay^2+Cy+D=0 \qquad (1)$$

(tas izpilda 38. §. abus noteikumus) izsaka riņķa līniju, ja koeficienti A, B, C, D apmierina nevienādību

$$B^2+C^2-4AD>0. \qquad (2)$$

Tad riņķa līnijas centru $(a; b)$ un rādiusu R var atrast ar formulām[1]

$$a=-\frac{B}{2A},\quad b=-\frac{C}{2A},\quad R^2=\frac{B^2+C^2-4AD}{4A^2}. \qquad (3)$$

P i e z ī m e. Nevienādība (2) izsaka, ka rādiusa kvadrātam jābūt pozitīvam skaitlim; sk. pēdējo formulu (3). Ja nevienādība (2) nav izpildīta, tad vienādojums (1) neizsaka nevienu līniju (sk. tālāk 2. piemēru).

1. p i e m ē r s. Vienādojums

$$5x^2-10x+5y^2+20y-20=0 \qquad (4)$$

atbilst vienādojuma (1) prasībām; šeit

$$A=5,\quad B=-10,\quad C=20,\quad D=-20.$$

Nevienādība (2) ir izpildīta. Tātad vienādojums (4) izsaka riņķa līniju. Ar formulām (3) atrodam

$$a=1,\quad b=-2,\quad R^2=9,$$

t. i., centrs ir $(1; -2)$ un rādiuss $R=3$.

C i t s p a ņ ē m i e n s. Izdalot vienādojumu (4) ar koeficientu pie otrās pakāpes locekļiem, t. i., ar 5, dabūjam

$$x^2-2x+y^2+4y-4=0.$$

Papildinām summas x^2-2x un y^2+4y līdz kvadrātiem. Šai nolūkā pieskaitām pirmajai summai 1, bet otrai -4. Lai to kompensētu, pieskaitām tos pašus skaitļus arī vienādojuma labajai pusei. Dabūjam

$$(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)-4=1+4,$$

t. i.,

$$(x-1)^2+(y+2)^2=9.$$

---

[1] Nav vajadzīgs formulas iegaumēt (sk. 1. piemēra otru paņēmienu).

2. piemērs. Vienādojums

$$x^2-2x+y^2+2=0 \qquad (5)$$

atbilst vienādojuma (1) prasībām, bet nevienādība (2) nav izpildīta. Tātad vienādojums (5) neizsaka nevienu līniju. Pie šīs atziņas var nonākt arī tā (sk. 1. piemēru).

Papildinām summu x^2-2x līdz kvadrātam, pieskaitot tai 1. Kompensācijas dēļ pieskaitām 1 arī labajai pusei. Dabūjam $(x-1)^2+y^2+2=1$, t. i., $(x-1)^2+y^2=-1$. Bet (reālu) skaitļu kvadrātu summa nevar būt vienāda ar negatīvu skaitli. Tāpēc nav neviena punkta, kura koordinātes apmierinātu šo vienādojumu.

40. §. Elipse kā saspiesta riņķa līnija

Caur riņķa līnijas ar rādiusu a centru O novelkam divus savstarpēji perpendikulārus diametrus $A'A$, $D'D$ (35. zīm.). Uz rādiusiem OD un OD' atliekam no punkta O vienādus nogriežņus, kuru garums ir b (mazāks par a). No katra riņķa līnijas punkta N novelkam pret diametru $A'A$ perpendikulu NP un uz šī perpendikula atliekam no tā pamata P nogriezni PM tā, lai

$$PM : PN = b : a. \qquad (1)$$

35. zīm.

Šī konstrukcija transformē katru punktu N citā tam atbilstošā punktā M, kas atrodas uz tā paša perpendikula NP, pie kam PM rodas no PN, samazinot vienā un tai pašā attiecībā $k=\frac{b}{a}$. Tādu transformāciju sauc par *vienmērīgu spiedi*. Taisni $A'A$ sauc par *spiedes asi*.

Līniju $ABA'B'$, kurā transformējas riņķa līnija ar vienmērīgu spiedi, sauc par *elipsi*[1].

Nogriezni $A'A=2a$ (bet bieži arī taisni $A'A$, t. i., spiedes asi) sauc par elipses *lielo asi*.

Nogriezni $B'B=2b$ (bet bieži arī taisni $B'B$) sauc par

[1] Citu elipses definīciju sk. 41. §.

elipses *mazo asi* (saskaņā ar konstrukciju $2a>2b$). Punktu O sauc par elipses *centru*. Punktus A, A', B, B' sauc par elipses *virsotnēm*.

Attiecību $k=b:a$ sauc par elipses *spiedes koeficientu*. Lielumu $1-k=\frac{a-b}{a}$ (t. i., attiecību $BD:OD$) sauc par elipses *spiedi*. To apzīmē ar burtu α.

Elipse ir simetriska attiecībā pret lielo un mazo asi un tātad arī attiecībā pret centru.

Riņķa līniju var uzskatīt par elipsi ar spiedes koeficientu $k=1$.

Elipses kanoniskais vienādojums. Ja elipses asis pieņem par koordinātu asīm, tad elipsi izsaka ar vienādojumu [1]

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{2}$$

To sauc par elipses *kanonisko* [2] *vienādojumu*.

1. piemērs. Riņķa līniju ar rādiusu $a=10$ *cm* pakļauj vienmērīgai spiedei ar spiedes koeficientu $3:5$. Pēc transformācijas rodas elipse ar lielo asi $2a=20$ *cm* un mazo asi $2b=12$ *cm* (pusasis $a=10$ *cm*, $b=6$ *cm*). Spiede šai elipsei ir $\alpha=1-k=\frac{10-6}{10}=0{,}4$. Elipses kanoniskais vienādojums ir

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1.$$

---

[1] Var rakstīt

$$OP^2+PN^2=ON^2=a^2. \tag{3}$$

Saskaņā ar (1) dabūjam

$$PN=\frac{a}{b}PM. \tag{4}$$

Ievietojot vienādībā (3), dabūjam

$$OP^2+\frac{a^2}{b^2}PM^2=a^2, \tag{5}$$

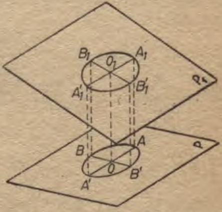
t. i.,

$$x^2+\frac{a^2}{b^2}y^2=a^2. \tag{6}$$

Izdalot ar a^2, dabūjam ekvivalento vienādojumu (2). Tātad, ja punkts $M(x;y)$ atrodas uz elipses $ABA'B'$, tad x, y apmierina vienādojumu (2). Ja turpretim M neatrodas uz šīs elipses, tad vienādība (4) un tātad arī vienādojums (6) nav izpildīts (sal. 7. §).

[2] No grieķu vārda «kanon» — paraugs. Tādējādi nosaukums «kanoniskais» nozīmē «parauga», «tipizēts».

2. piemērs. Lai projicētu riņķa līniju uz kādu plakni P, šai plaknei paralēlo diametru $A_1A'_1$ (36. zīm.) projicē dabiskā lielumā, bet visas diametram perpendikulārās hordas saīsina attiecībā, kas vienāda ar $\cos\varphi$, kur φ ir leņķis starp riņķa līnijas plakni P_1 un plakni P. Tāpēc riņķa līnijas projekcija ir elipse ar lielo asi $2a = A'A$ un spiedes koeficientu $k = \cos\varphi$.



36. zīm.

3. piemērs. Zemes meridiānu precīzāk pieņemt nevis par riņķa līniju, bet par elipsi. Zemes ass ir šīs elipses mazā ass. Tās garums (noapaļoti) ir 12 712 *km*. Lielās ass garums (noapaļoti) ir vienāds ar 12 754 *km*. Atrast šīs elipses spiedes koeficientu k un spiedi α.

Atrisinājums.

$$\alpha = \frac{a-b}{a} = \frac{2a-2b}{2a} = \frac{12\,754 - 12\,712}{12\,754} \approx 0{,}003,$$

$$k = 1 - \alpha \approx 0{,}997.$$

41. §. Cita elipses definīcija

Definīcija. *Elipse* ir tādu punktu (M) ģeometriska vieta, kuru attālumu summai līdz diviem dotajiem punktiem F', F (37. zīm.) ir viena un tā pati vērtība $2a$, t. i.,

$$F'M + FM = 2a. \tag{1}$$

Punktus F' un F sauc par elipses *fokusiem*[1], bet attālumu $F'F$ — par *fokusu attālumu;* to apzīmē ar $2c$, t. i.,

$$F'F = 2c. \tag{2}$$

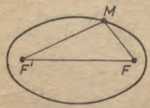
Tā kā $F'F < F'M + FM$, tad $2c < 2a$, t. i.,

$$c < a. \tag{3}$$

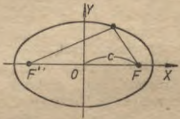
[1] Fokuss ir latīņu vārds un nozīmē «ugunskurs». Ja punktā F (vai F') novieto gaismas avotu, tad pēc atspoguļošanās no elipses visi stari kondensēsies punktā F' (vai F) un tur novietotā viegli degošā viela aizdegsies. Šis skats pārsteidza skatītājus; tāpēc vārds «fokuss» ieguva to nozīmi, kādā to lieto tagad.

Šī paragrāfa definīcija ir pilnīgā saskaņā ar 40. §. definīciju [sal. vienādojumu (7) ar 40. §. vienādojumu (2)].

Elipses kanoniskais vienādojums. Ņemsim taisni $F'F$ (38. zīm.) par abscisu asi un nogriežņa $F'F$ vidus-



37. zīm.



38. zīm.

punktu Q — par koordinātu sākumu. Ievērojot, ka $F'(-c; 0)$ un $F(c; 0)$, mēs saskaņā ar elipses definīciju un 10. §. formulu (1) dabūjam

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a. \tag{4}$$

Atbrīvojoties no radikāliem[1], dabūjam ekvivalentu vienādojumu

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2) \tag{5}$$

jeb

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1. \tag{6}$$

Saskaņā ar (3) *lielums a^2-c^2 ir pozitīvs.* Tāpēc (6) var uzrakstīt formā

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{7}$$

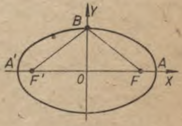
kur

$$b^2=a^2-c^2. \tag{8}$$

Vienādojums (7) sakrīt ar 40. §. vienādojumu (2). Tātad līnija, kas šai paragrāfā nosaukta par elipsi, ir identiska ar līniju, kas nosaukta par elipsi 40. paragrāfā. Pie tam izrādās, ka elipses centrs O (39. zīm.) sakrīt ar nogriežņa $F'F$ viduspunktu, t. i., $OF=c$. Elipses lielā ass $2a=A'A$ saskaņā ar

[1] Vienu radikālu pārnesam labajā pusē un vienādojumu kāpinām kvadrātā; jaunajā vienādojumā būs tikai viens radikāls. To atstājam vienā pusē, bet pārējos locekļus pārnesam otrā pusē un atkal kāpinām kvadrātā. Pēc vienkāršojumiem dabūsim (5).

vienādību (1) ir vienāda ar nemainīgo attālumu summu $F'M+FM$ (38. zīm.). Mazā pusass $b=OB$ (39. zīm.) un nogrieznis $c=OF$ ir taisnleņķa trijstūra BOF katetes; šī trijstūra hipotenūza BF ir vienāda ar a. Tas ir redzams no vienādības (8) un arī no tā, ka vienādo nogriežņu $F'B$ un FB summa ir $2a$ (pēc elipses definīcijas). Tādējādi attālums no fokusa līdz mazās ass galiem ir vienāds ar lielās pusass garumu.



39. zīm.

Fokusu attāluma un lielās ass attiecību $\frac{F'F}{A'A}$, t. i., lielumu $\frac{c}{a}$ sauc par elipses *ekscentricitāti*.

Ekscentricitāti apzīmē ar grieķu burtu ε («epsilon»); tad

$$\varepsilon=\frac{c}{a}. \tag{9}$$

Tā kā saskaņā ar (3) $c<a$, tad elipses ekscentricitāte ir mazāka par vienu. Elipses ekscentricitāte ε un spiedes koeficients k (40. §.) saskaņā ar (8) saistās ar sakarību

$$k^2=1-\varepsilon^2. \tag{10}$$

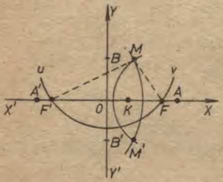
P i e m ē r s. Pieņemsim, ka elipses fokusu attālums $2c=8$ *cm*, bet attālumu summa no patvaļīga tās punkta līdz fokusiem ir 10 *cm*. Tad lielā ass $2a=10$ *cm* un ekscentricitāte $\varepsilon=\frac{c}{a}=0{,}8$. Spiedes koeficients $k=\sqrt{1-\varepsilon^2}=0{,}6$. Mazā ass $2b=2ak=2\sqrt{a^2-c^2}=6$ *cm*. Elipses kanoniskais vienādojums ir

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

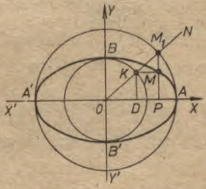
P i e z ī m e. Ja riņķa līniju uzskata par elipses atsevišķu gadījumu, kad $b=a$, tad $c=0$, t. i., jāuzskata, ka fokusi F' un F ir sakrituši. Riņķa līnijas ekscentricitāte ir vienāda ar nulli.

42. §. Elipses konstrukcija pēc tās asīm

Pirmais paņēmiens. Uz perpendikulārām taisnēm $X'X$ un $Y'Y$ (40. zīm.) atliekam nogriežņus $OA'=OA=a$ un $OB'=OB=b$ (doto asu $2a$, $2b$ $(a>b)$ puses). Punkti A', A, B', B būs elipses virsotnes.



40. zīm.



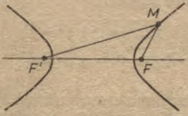
41. zīm.

No punkta B ar rādiusu a novelkam loku uv; tas krustos nogriezni $A'A$ punktos F', F; tie būs elipses fokusi [saskaņā ar 41. §. formulu (8)]. Sadalām nogriezni $A'A=2a$ patvaļīgā veidā divās daļās: $A'K=r'$ un $KA=r$, tā ka $r'+r=$ $=2a$. No punkta F novelkam riņķa līniju ar rādiusu r, bet no F' — riņķa līniju ar rādiusu r'. Šīs riņķa līnijas krustosies divos punktos M un M', pie kam saskaņā ar konstrukciju $F'M+FM=2a$ un $F'M'+FM'=2a$. Saskaņā ar 41. §. definīciju punkti M un M' atrodas uz elipses. Mainot r, dabūsim jaunus elipses punktus.

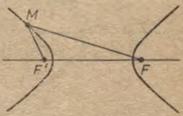
Otrs paņēmiens. Novelkam divas koncentriskas riņķa līnijas ar rādiusiem $OA=a$ un $OB=b$ (41. zīm.). Caur centru O novelkam patvaļīgu staru ON. Caur punktiem K un M_1, kuros ON krusto abas riņķa līnijas, novelkam taisnes, kas ir atbilstoši paralēlas $X'X$, $Y'Y$ asīm. Šīs taisnes krustojas punktā M. Tā ordināte PM $(=KD)$ ir īsāka par riņķa līnijas ar rādiusu a punkta M_1 ordināti PM_1, pie kam $PM : PM_1=b : a$. Tātad (40. §.) punkts M atrodas uz meklētās elipses. Mainot stara ON virzienu, dabūsim jaunus elipses punktus.

43. §. Hiperbola

Definīcija. *Hiperbola* ir tādu punktu (M) ģeometriska vieta, kuru attālumu starpībai līdz diviem dotajiem



42. zīm.



43. zīm.

punktiem F', F (42. zīm.) ir viena un tā pati absolūtā vērtība $2a$ (sal. ar elipses definīciju 41. §.), t. i.,

$$|F'M-FM|=2a. \tag{1}$$

Punktus F' un F sauc par hiperbolas *fokusiem*[1], attālumu $F'F$ — par *fokusu attālumu;* to apzīmē ar $2c$, t. i.,

$$F'F=2c. \tag{2}$$

Tā kā $F'F>|F'M-FM|$, tad [sal. 41. §. formulu (3)]

$$c>a. \tag{3}$$

Ja M ir tuvāk fokusam F' nekā fokusam F, t. i., ja $F'M<FM$ (43. zīm.), tad (1) vietā var rakstīt

$$FM-F'M=2a. \tag{1a}$$

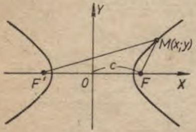
Ja M ir tuvāk F nekā F', t. i., $F'M>FM$ (42. zīm.), tad dabūjam

$$F'M-FM=2a. \tag{1b}$$

Punkti, kuriem $F'M-FM=2a$, veido vienu hiperbolas zaru (parastajā zīmējuma novietojumā — labo); punkti, kuriem $FM-F'M=2a$, veido otru zaru (kreiso).

[1] Ja vienā fokusā novieto gaismas avotu, tad pēc atspoguļošanās no hiperbolas stari veido izkliedētu kūli ar centru otrā fokusā. Sal. ar zemteksta piezīmi 61. lpp.

Hiperbolas kanoniskais vienādojums. Par OX asi pieņemam taisni $F'F$ (44. zīm.), par koordinātu sākumu — nogriežņa $F'F$ viduspunktu O. Saskaņā ar (2) dabūjam $F(c;0)$, $F'(-c;0)$. Labo zaru saskaņā ar (1b) un 10. § izsaka vienādojums



44. zīm.

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a. \quad (4a)$$

Kreisajam zaram saskaņā ar (1a) un 10. § dabūjam vienādojumu

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a. \quad (4b)$$

Atbrīvojoties no radikāliem, abos gadījumos dabūjam

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2) \quad (5)$$

jeb

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1. \quad (6)$$

Šis vienādojums ir ekvivalents vienādojumu (4a), (4b) pārim un izsaka reizē abus hiperbolas zarus [1].

Vienādojumam (6) ir tāds pats ārējais veids kā elipses vienādojumam [sal. 41. §. (6)], bet šī līdzība ir mānīga, jo tagad saskaņā ar (3) lielums a^2-c^2 ir negatīvs, tā ka $\sqrt{a^2-c^2}$ ir šķietams lielums. Tāpēc ar b apzīmēsim lielumu $+\sqrt{c^2-a^2}$, tā ka [2]

$$b^2=c^2-a^2. \quad (7)$$

Tad no (6) dabūjam hiperbolas *kanonisko* [3] vienādojumu

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

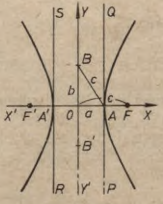
[1] Divus hiperbolas zarus varētu uzskatīt nevis par vienu, bet par divām līnijām. Bet tad nevienu no šīm līnijām atsevišķi nevarētu izteikt ar otrās pakāpes algebrisku vienādojumu.
[2] Par lieluma b ģeometrisko nozīmi sk. 46. §.
[3] Sk. zemteksta piezīmi [2] 60. lpp.

Piemērs. Ja attālumu starpība $F'M-FM$ pēc absolūtās vērtības ir $2a=20$ *cm*, bet fokusu attālums $2c=25$ *cm*, tad $b=\sqrt{c^2-a^2}=\frac{15}{2}$ (*cm*). Hiperbolas kanoniskais vienādojums ir

$$\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{\frac{225}{4}}=1.$$

44. §. Hiperbolas forma; virsotnes un asis

Hiperbola ir simetriska attiecībā pret nogriežņa $F'F$ (45. zīm.) viduspunktu O; tā ir arī simetriska attiecībā pret taisni $F'F$ un attiecībā pret taisni $Y'Y$, kas novilkta caur O perpendikulāri taisnei $F'F$. Punktu O sauc par hiperbolas *centru*. Taisne $F'F$ krusto hiperbolu divos punktos $A(+a; 0)$ un $A'(-a; 0)$. Šos punktus sauc par hiperbolas *virsotnēm*. Nogriezni $A'A=2a$ (bet bieži arī taisni $A'A$) sauc par hiperbolas *reālo asi*.



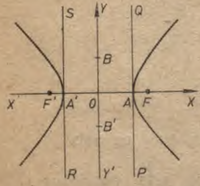
45. zīm.

46. zīm.

Taisne $Y'Y$ nekrusto hiperbolu. Neskatoties uz to, pieņemts uz tās atlikt nogriežņus $B'O=OB=b$ un nosaukt nogriezni $B'B=2b$ (un arī taisni $Y'Y$) par hiperbolas *imagināro* jeb *šķietamo asi*.

Tā kā $AB^2 = OA^2 + OB^2 = a^2 + b^2$, tad no 43. §. (7) seko, ka $AB = c$, t. i., attālums no hiperbolas virsotnes līdz šķietamās ass galam ir vienāds ar fokusu attāluma pusi.

Šķietamā ass $2b$ var būt lielāka (45. zīm.), mazāka (46. zīm.) un vienāda (47. zīm.) ar reālo asi $2a$. Ja reālā un šķietamā ass ir vienāda, tad hiperbolu sauc par *vienādsānu* jeb *taisnleņķa hiperbolu*.



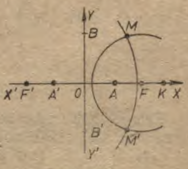
47. zīm.

Fokusu attāluma un reālās ass attiecību $\frac{F'F}{A'A} = \frac{c}{a}$ sauc par hiperbolas ekscentricitāti un apzīmē ar ε [sal. 41. §. (9)]. Saskaņā ar 43. § nevienādību (3) hiperbolas ekscentricitāte ir lielāka par vienu. Vienādsānu hiperbolas ekscentricitāte ir $\sqrt{2}$.

Hiperbola pilnīgi atrodas ārpus joslas, ko ierobežo $Y'Y$ asij paralēlas taisnes PQ un RS, kas atrodas no $Y'Y$ attālumā $OA = A'O = a$ (45., 46. un 47. zīm.). Pa labi un pa kreisi no šīs joslas hiperbola aizstiepjas neierobežoti.

45. §. Hiperbolas konstrukcija pēc tās asīm

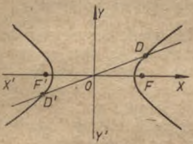
Uz perpendikulārām taisnēm $X'X$ un $Y'Y$ (48. zīm.) atliekam nogriežņus $OA = OA' = a$ un $OB = OB' = b$ (reālās un šķietamās pusasis). Pēc tam atliekam ar AB vienādus nogriežņus OF un OF'. Punkti F' un F ir fokusi [saskaņā ar 43. §. (7)]. Uz nogriežņa $A'A$ turpinājuma aiz punkta A ņemam patvaļīgu punktu K. No punkta F ar rādiusu $r = AK$ novelkam riņķa līniju, no punkta F' — ar rādiusu $r' = A'K = 2a + r$. Šīs riņķa līnijas krustojas divos punktos M, M', pie kam pēc konstrukcijas $F'M - FM = 2a$ un $F'M' - FM' = 2a$. Saskaņā ar definīciju (43. §) punkti M un M' atrodas uz hiperbolas. Mainot r, dabūsim jaunus «labā» zara punktus. Analogi var konstruēt «kreisā» zara punktus.



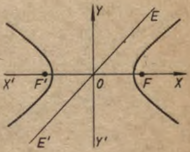
48. zīm.

46. §. Hiperbolas asimptotas

Taisne $y=kx$ (tā iet caur hiperbolas centru O), ja $|k|<\frac{b}{a}$, krusto hiperbolu divos punktos D', D (49. zīm.),



49. zīm.



50. zīm.

kas ir simetriski attiecībā pret O. Ja turpretim $|k|\geqslant\frac{b}{a}$, tad taisnei $y=kx$ ($E'E$ 50. zīmējumā) nav kopīgu punktu ar hiperbolu.

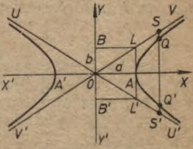
Taisnēm $y=\frac{b}{a}x$ un $y=-\frac{b}{a}x$ ($U'U$ un $V'V$ 51. zīmējumā), kurām $|k|=\frac{b}{a}$, piemīt šāda īpašība (tā piemīt tikai šīm taisnēm): neierobežoti turpinot, tās neierobežoti tuvojas hiperbolai.

Precīzāk: *ja ordinātu asij paralēlu taisni $Q'Q$ neierobežoti attālina no centra O* (pa labi vai pa kreisi), *tad nogriežņi QS, $Q'S'$ starp hiperbolu un abām taisnēm $U'U$, $V'V$ neierobežoti samazinās.*

Taisnes $y=\frac{b}{a}x$ un $y=-\frac{b}{a}x$ sauc par *hiperbolas asimptotām*[1].

Vienādsānu hiperbolas asimptotas ir savstarpēji perpendikulāras.

Šķietamās ass ģeo-



51. zīm.

[1] «Asimptota» ir grieķu vārds; nozīmē «netrāpošā».

metriskā nozīme. Caur hiperbolas virsotni A (51. zīm.) novelkam reālai asij perpendikulāru taisni $L'L$. Tad šīs taisnes nogrieznis $L'L$, kas ieslēgts starp hiperbolas asimptotām, ir vienāds ar hiperbolas šķietamo asi $B'B=2b$.

52. zīm.

47. §. Saistītās hiperbolas

Divas hiperbolas sauc par *saistītām* (52. zīm.), ja tām ir kopīgs centrs O un kopīgas asis, bet vienas hiperbolas reālā ass ir otras hiperbolas šķietamā ass.

52. zīmējumā $A'A$ ir hiperbolas I reālā ass un hiperbolas II šķietamā ass, $B'B$ ir hiperbolas II reālā ass un hiperbolas I šķietamā ass.

Ja vienas hiperbolas vienādojums ir

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

tad otru hiperbolu izsaka vienādojums

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1.$$

Saistītām hiperbolām ir kopīgas asimptotas ($U'U$ un $V'V$ 52. zīmējumā).

48. §. Parabola

Definīcija. *Parabola* (53. zīm.) ir tādu punktu (M) ģeometriska vieta, kuri atrodas vienādos attālumos no dotā punkta F un dotās taisnes PQ, t. i.,

$$FM=KM. \qquad (1)$$

Punktu F sauc par parabolas *fokusu*[1], bet taisni PQ — par *direktrisi*. Attālumu $FC=p$ no fokusa līdz direktrisei sauc par parabolas parametru.

[1] Paralēlu staru kūlis, kuri ir perpendikulāri direktrisei, pēc atspoguļošanās no parabolas kļūs par centrālu kūli ar centru fokusā. Sk. zemteksta piezīmi 61. lpp.

Pieņemsim par koordinātu sākumu nogriežņa FC viduspunktu O. Tad

$$CO=OF=\frac{p}{2}. \tag{2}$$

Par abscisu asi pieņemsim taisni CF; pozitīvo vērsumu skaitīsim no O uz F.

Tad dabūjam $F(\frac{p}{2}; 0)$, $KM=KD+DM=\frac{p}{2}+x$ un (10. §.)

$$FM=\sqrt{\left(\frac{p}{2}-x\right)^2+y^2}.$$

Ievērojot (1), dabūjam

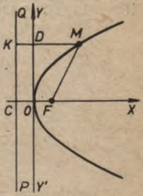
$$\sqrt{\left(\frac{p}{2}-x\right)^2+y^2}=\frac{p}{2}+x. \tag{3}$$

Atbrīvojoties no radikāla, iegūstam ekvivalentu vienādojumu

$$y^2=2px. \tag{4}$$

Tas ir parabolas *kanoniskais*[1] vienādojums.

Direktrises PQ vienādojums (tai pašā koordinātu sistēmā) ir $x+\frac{p}{2}=0$.



53. zīm.

Parabola ir simetriska attiecībā pret taisni FC (abscisu ass mūsu izvēlētajā koordinātu sistēmā). Šo taisni sauc par parabolas *asi.* Parabola iet caur nogriežņa FC viduspunktu O. Punktu O sauc par parabolas *virsotni* (mēs pieņēmām to par koordinātu sākumu).

Parabola atrodas pilnīgi vienā pusē no taisnes $Y'Y$ (pieskare virsotnē) un aizstiepjas šai pusē neierobežoti.

[1] Sk. zemteksta piezīmi [2] 60. lpp.

49. §. Parabolas konstrukcija pēc dotā parametra p

Novelkam (54. zīm.) taisni PQ (parabolas direktrisi) un dotajā attālumā $p=CF$ no tās ņemam punktu F (fokusu). Nogriežņa CF viduspunkts O būs virsotne, bet taisne CF — parabolas ass. Uz stara OF ņemam patvaļīgu punktu R un caur to novelkam asij perpendikulāru taisni RS. No fokusa F kā no centra novelkam riņķa līniju ar rādiusu CR. Tā krustos RS divos punktos M, M'. Punkti M un M' piederēs meklētajai parabolai, jo pēc konstrukcijas $FM=CR=KM$ (sk. definīciju 48. §). Mainot punkta R stāvokli, dabūsim jaunus parabolas punktus.

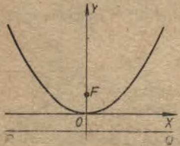
54. zīm.

50. §. Parabola kā vienādojuma $y=ax^2+bx+c$ grafika

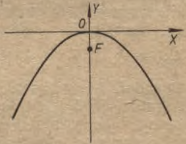
Vienādojums

$$x^2=2py \tag{1}$$

izsaka to pašu parabolu, ko vienādojums $y^2=2px$ (sk. 48. §.), tikai tagad parabolas ass sakrīt ar ordinātu asi; koordi-



55. zīm.



56. zīm.

nātu sākums, tāpat kā agrāk, atrodas parabolas virsotnē (55. zīm.). Fokuss atrodas punktā $F(0; \frac{p}{2})$. Direktrisi PQ izsaka vienādojums $y+\frac{p}{2}=0$.

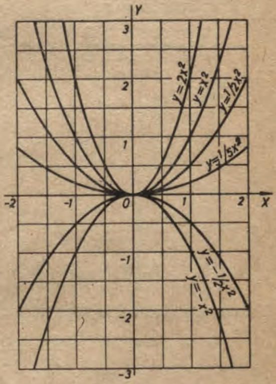
Ja pozitīvo vērsumu uz ordinātu ass ņem nevis virzienā OF, bet virzienā FO (56. zīm.), tad parabolas vienādojums būs

$$-x^2=2py \tag{2}$$

(sk. 56. zīm.; tanī koordinātu asis ņemtas parastajos virzienos). Tātad funkcijas

$$y=ax^2 \tag{3}$$

grafika būs parabola, kuras zari būs vērsti augšup, ja $a>0$, un lejup, ja $a<0$. Jo mazāka ir a absolūtā vērtība (57. zīmējumā ņemti $a=2$, $a=\pm 1$, $a=\pm\frac{1}{2}$, $a=\frac{1}{5}$), jo tuvāk fokuss ir virsotnei un jo lielāks ir parabolas «izpletums».



57. zīm.

Jebkurš vienādojums

$$y=ax^2+bx+c \tag{4}$$

grafiski attēlo to pašu parabolu, ko vienādojums $y=ax^2$ (abām parabolām attālums $\frac{p}{2}$ no virsotnes līdz fokusam ir $\frac{1}{|4a|}$). Abām parabolām zari vērsti uz vienu un to pašu pusi. Bet parabolas (4) virsotne atrodas nevis sākumā, bet punktā A (58. zīm.) ar koordinātēm

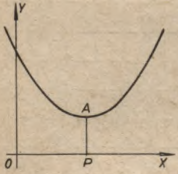
$$x_A=OP=-\frac{b}{2a}, \quad y_A=PA=\frac{4ac-b^2}{4a}. \tag{5}$$

Piemērs. Vienādojums

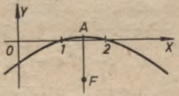
$$y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{2} \tag{4a}$$

$\left(a=-\frac{1}{4},\quad b=\frac{3}{4},\quad c=-\frac{1}{2}\right)$ izsaka to pašu parabolu (59. zīm.), ko vienādojums $y=-\frac{1}{4}x^2$. Virsotne atrodas punktā A ar koordinātēm

$$x_A=-\frac{b}{2a}=\frac{3}{2},\quad y_A=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{1}{16}. \tag{5a}$$



58. zīm.



59. zīm.

Fokuss atrodas uz leju no virsotnes attālumā

$$\frac{p}{2}=\frac{1}{|4a|}=1.$$

Tādējādi fokusa koordinātes ir

$$x_F=\frac{3}{2},\quad y_F=\frac{1}{16}-1=-\frac{15}{16}.$$

1. piezīme. Formulas (5) nav vajadzības atcerēties. Lai aprēķinātu x_A, y_A, var lietot šādu paņēmienu. Vienādojumu (4a) pārrakstām veidā

$$y+\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}(x^2-3x). \tag{6}$$

Papildinām izteiksmi iekavās līdz pilnam kvadrātam, pieskaitot $\frac{9}{4}$. Lai to kompensētu, pieskaitām $-\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{4}=-\frac{9}{16}$ kreisajai pusei. Dabūsim

$$y-\frac{1}{16}=-\frac{1}{4}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2. \tag{7}$$

Vienādojums (7) pieņem izskatu

$$y'=-\frac{1}{4}x'^2, \tag{8}$$

ja izpildām asu paralēlo translāciju (35. §.) ar formulām

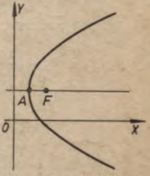
$$y'=y-\frac{1}{16},\quad x'=x-\frac{3}{2}. \tag{9}$$

Parabolas virsotnei (punktam $x'=0$, $y'=0$) ir koordinātes $x=\frac{3}{2}$, $y=\frac{1}{16}$.

2. p i e z ī m e. Vispārīgās formulas (5) var atrast no (4) tādā pašā veidā, kādu lietojām iepriekš vienādojumam (4a).

3. p i e z ī m e. Vienādojums

$$x=ay^2+by+c$$



60. zīm.

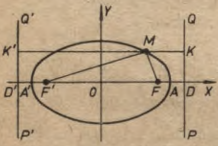
izsaka parabolu (60. zīm.) ar virsotni punktā $\left(\frac{4ac-b^2}{4a};\ -\frac{b}{2a}\right)$. Tās ass ir paralēla abscisu asij; zari vērsti «pa labi», ja $a>0$, un «pa kreisi», ja $a<0$.

51. §. Elipses un hiperbolas direktrises

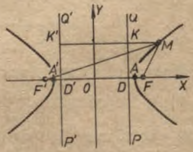
a) E l i p s e s d i r e k t r i s e s. Pieņemsim, ka dota elipse (61. zīm.) ar lielo asi $A'A=2a$ un ekscentricitāti (41. §.) $\frac{OF}{OA}=\frac{c}{a}=\varepsilon$. Pieņemsim, ka $\varepsilon\neq 0$, t. i., elipse nav riņķa līnija. Atliksim no elipses centra O uz lielās ass nogriežņus $OD=OD'$, kas vienādi ar $\frac{a}{\varepsilon}$, t. i., $OD:OA=OA:OF$. Taisnes PQ, $P'Q'$, kuras iet caur punktiem D, D' un ir paralēlas mazajai asij, sauc par *elipses direktrisēm.*

Uzskatīsim, ka katrai direktrisei atbilst tas elipses fokuss, kurš atrodas tai pašā pusē no centra, t. i., direktrisei PQ atbildīs fokuss F, bet direktrisei $P'Q'$ — fokuss F'. Tad *attiecība starp jebkura elipses punkta M attālumu līdz* *fokusam un tā attālumu līdz atbilstošajai direktrisei ir vienāda ar ekscentricitāti* ε, t. i.,

$$MF : MK = MF' : MK' = \varepsilon. \qquad (1)$$



61. zīm.



62. zīm.

Tā kā elipsei $\varepsilon<1$, tad visi elipses punkti atrodas tuvāk fokusam nekā atbilstošajai direktrisei.

Ja elipses lielā ass paliek nemainīga, bet ekscentricitāte tiecas uz nulli, t. i., elipse mazāk un mazāk atšķiras no riņķa līnijas, tad direktrises neierobežoti attālinās no centra. Riņķa līnijai direktrišu nav.

b) Hiperbolas direktrises. Pieņemsim, ka $A'A$ (62. zīm.) ir hiperbolas reālā ass, bet $\varepsilon = \frac{OF}{OA} = \frac{c}{a}$ ir tās ekscentricitāte (44. §.). Atliekam

$$OD = OD' = \frac{a}{\varepsilon}$$

(t. i., $OD : OA = OA : OF$). Taisnes PQ, $P'Q'$, kuras attiecīgi iet caur punktiem D, D' un ir paralēlas šķietamajai asij, sauc par hiperbolas *direktrisēm. Attiecība starp jebkura hiperbolas punkta M attālumu līdz fokusam un tā attālumu līdz atbilstošai direktrisei* [sk. a) punktu] ir vienāda ar ekscentricitāti, t. i.,

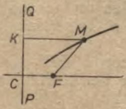
$$MF : MK = MF' : MK' = \varepsilon. \qquad (2)$$

Tā kā hiperbolai $\varepsilon>1$, tad visi hiperbolas punkti ir tuvāk direktrisei nekā atbilstošajam fokusam.

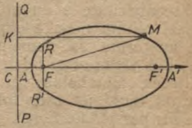
52. §. Elipses, hiperbolas un parabolas vispārīga definīcija

Visām elipsēm[1], hiperbolām un parabolām piemīt šāda īpašība: visām šīm līnijām paliek nemainīga attiecība (63. zīm.)

$$FM : MK, \tag{1}$$



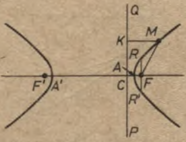
63. zīm.



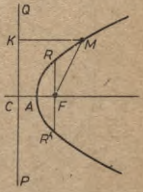
64. zīm.

kur FM ir patvaļīga līnijas punkta M attālums līdz dotajam punktam F (fokusam), bet MK — punkta M attālums līdz dotajai taisnei PQ (direktrisei).

Elipsei (64. zīm.) šī attiecība ir mazāka par vienu (tā ir vienāda ar elipses ekscentricitāti $\frac{c}{a}$; sal. 41., 51. §.). Hi-



65. zīm.



66. zīm.

perbolai (65. zīm.) tā ir lielāka par vienu (un vienāda ar hiperbolas ekscentricitāti $\frac{c}{a}$; sal. 43., 51. §.); parabolai (66. zīm.) tā ir vienāda ar vienu (48. §.).

[1] Izņemot riņķa līniju.

Otrādi, katra līnija, kurai piemīt minētā īpašība, ir vai nu elipse (ja $FM:MK<1$), vai hiperbola (ja $FM:MK>1$), vai arī parabola (ja $FM:MK=1$). Tāpēc minēto īpašību var pieņemt par elipses, hiperbolas un parabolas kopīgu definīciju, bet nemainīgo attiecību $FM:MK=\varepsilon$ nosaukt par *ekscentricitāti*. Parabolai ekscentricitāte ir vienāda ar vienu, elipsei $\varepsilon<1$, hiperbolai $\varepsilon>1$.

Ekscentricitāte ε un attālums $FC=d$ no fokusa līdz direktrisei pilnīgi nosaka elipses, hiperbolas un parabolas lielumu un formu. Ja, nemainot ε, maina d, tad visas iegūtās līknes būs viena otrai līdzīgas.

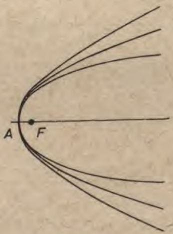
Elipses, hiperbolas vai parabolas hordu RR' (64., 65., 66. zīm.), kura iet caur fokusu F un ir perpendikulāra asij FC, sauc par *fokālo hordu* un apzīmē ar $2p$, t. i.,

$$RR'=2p. \tag{2}$$

Lielumu $p=FR=FR'$ (t. i., fokālās pushordas garumu) sauc par elipses, hiperbolas vai parabolas *parametru*. To saista ar d sakarība

$$p=d\varepsilon; \tag{3}$$

67. zīm.



68. zīm.

parabolai ($\varepsilon=1$) dabūjam

$$p=d. \tag{3a}$$

Elipses, hiperbolas un parabolas virsotnes (A 64., 65., 66. zīmējumā) dala nogriezni FC attiecībā $FA:AC=\varepsilon$. Otra elipses un hiperbolas virsotne (A' 64., 65. zīmējumā) dala FC tai pašā attiecībā ārēji (11. §.).

Saskaņā ar jauno definīciju elipsi, hiperbolu un parabolu izsaka viens kopīgs vienādojums. Ja sākumu ņemam virsotnē A (67. zīm.) un x asi vēršam pa staru AF, tad šis vienādojums būs

$$y^2=2px-(1-\varepsilon^2)x^2; \tag{4}$$

šeit p ir parametrs, bet ε — ekscentricitāte.

Virsotnes tuvumā parabola arī pēc formas maz atšķiras no elipsēm un hiperbolām, kurām ekscentricitāte ir tuva 1. 68. zīmējumā attēlota elipse ar ekscentricitāti $\varepsilon=0{,}9$, hiperbola[1] ar ekscentricitāti $\varepsilon=1{,}1$ un parabola ar $\varepsilon=1$, kurām ir kopīgs fokuss F un kopīga virsotne A.

Elipses un hiperbolas pusasis a, b un attāluma pusi c starp fokusiem atkarībā no ε izsaka formulas:

Elipse	$a=\dfrac{p}{1-\varepsilon^2}$	$b=\dfrac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$	$c=a\varepsilon=p\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}$
Hiperbola	$a=\dfrac{p}{\varepsilon^2-1}$	$b=\dfrac{p}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}$	$c=a\varepsilon=p\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon^2-1}$

Attālumu $\delta=AF$ no fokusa F līdz virsotnei A visos trijos gadījumos izsaka formula

$$\delta=\frac{d\varepsilon}{1+\varepsilon}=\frac{p}{1+\varepsilon}.$$

53. §. Konusa šķēlumi

Elipsi, hiperbolu un parabolu sauc par *konusa šķēlumiem* jeb par *konikām*, jo šīs līnijas var dabūt uz taisna, apaļa[2] konusa virsmas, ja to krusto ar plakni P, kas neiet caur konusa virsotni. Pie tam iedomājas, ka konusa virsma ir neierobežoti turpināta uz abām pusēm no virsotnes.

Ja plakne P nav paralēla nevienai konusa veidotājai (69. zīm.), tad konusa šķēlums ir elipse[3].

---

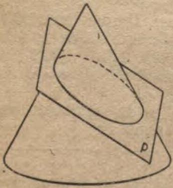
[1] Elipses un hiperbolas otra virsotne (un līdz ar to arī viss hiperbolas otrs zars) ir jo tālāk no pirmās virsotnes, jo ε ir tuvāks 1.

[2] Un arī uz slīpā riņķa konusa virsmas.

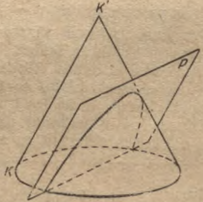
[3] Atsevišķā gadījumā elipse var būt riņķa līnija. Uz taisna riņķa konusa riņķa šķēlumus veido tikai pamatam paralēlas plaknes; uz slīpa konusa ir vēl viena riņķa šķēlumu saime.

Ja plakne P ir paralēla tikai vienai konusa veidotājai (70. zīmējumā KK'), tad konusa šķēlums ir parabola.

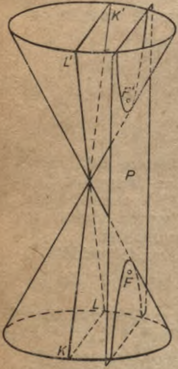
Ja plakne P ir paralēla divām konusa veidotājām (71. zīmējumā KK' un LL'), tad konusa šķēlums ir hiperbola.



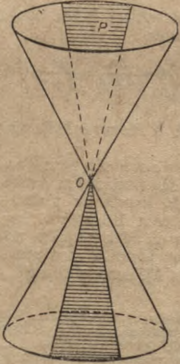
69. zīm.



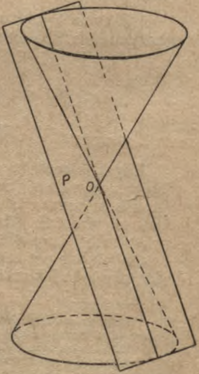
70. zīm.



71. zīm.



72. zīm.

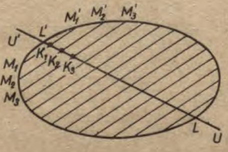


73. zīm.

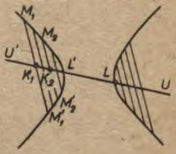
Ja plakne P iet caur konusa virsotni, tad elipses vietā mēs dabūsim punktu, hiperbolas vietā — divas krustojošās taisnes (72. zīm.), bet parabolas vietā — plaknes P pieskaršanās taisni konusam (73. zīm.). Šo taisni var uzskatīt par divām kopā saplūdušām taisnēm.

54. §. Konusa šķēluma diametri

Paralēlo hordu viduspunkti jebkuram konusa šķēlumam atrodas uz vienas taisnes; šo taisni sauc par konusa šķēluma



74. zīm.



75. zīm.

diametru. Katram paralēlo hordu virzienam atbilst savs diametrs, kas ir *«saistīts»* ar šo virzienu. 74. zīmējumā attēlots viens elipses diametrs $U'U$. Uz tā atrodas paralēlo hordu $M_1M'_1$, $M_2M'_2$, ... viduspunkti K_1, K_2, ... Šo viduspunktu ģeometriskā vieta ir diametra $U'U$ nogrieznis $L'L$.

75. zīmējumā attēlots hiperbolas diametrs $U'U$, kas atbilst paralēlajām hordām $M_1M'_1$, $M_2M'_2$ utt. Uz tā atrodas šo hordu viduspunkti K_1, K_2, ... Punktu K_1, K_2, ... ģeometriskā vieta ir staru pāris $L'U'$ un LU.

P i e z ī m e. Elementārajā ģeometrijā par riņķa līnijas diametru sauc n o g r i e z n i (vislielāko hordu). Analītiskajā ģeometrijā vārdu «diametrs» arī dažreiz lieto, lai apzīmētu n o g r i e z n i LL' (74., 75. zīm.). Biežāk tomēr šai vārdā sauc v i s u taisni UU'.

55. §. Elipses diametri

Visi elipses diametri iet caur tās centru.

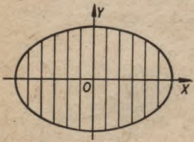
Diametrs, kas atbilst mazajai asij paralēlām hordām, ir lielā ass (76. zīm.). Diametrs, kas atbilst lielajai asij paralēlām hordām, ir mazā ass.

Hordām ar virziena koeficientu k ($k \neq 0$) atbilst diametrs $y = k_1 x$, kur k_1 nosaka no vienādības

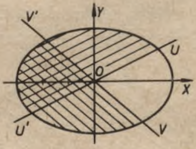
$$kk_1 = \varepsilon^2 - 1, \tag{1}$$

t. i.,

$$kk_1 = -\frac{b^2}{a^2}. \tag{1a}$$



76. zīm.



77. zīm.

1. piemērs. Elipses

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

diametru $U'U$ (77. zīm.), kas atbilst hordām ar leņķa koeficientu $k = -\frac{8}{9}$, nosaka vienādojums $y = k_1 x$; tā kā k vērtību var aprēķināt no vienādības $-\frac{8}{9}k_1 = -\frac{4}{9}$, tad diametra $U'U$ vienādojums būs

$$y = \frac{1}{2}x.$$

2. piemērs. Tās pašas elipses diametru $V'V$ (77. zīm.), kas atbilst hordām ar virziena koeficientu $k = \frac{1}{2}$, nosaka vienādojums $y = -\frac{8}{9}x$.

Ja elipses diametrs $U'U$ dala uz pusēm diametram $V'V$ paralēlās hordas, tad diametrs $V'V$ vienmēr dala uz pusēm diametram $U'U$ paralēlās hordas.

3. piemērs. Elipses $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ (sk. 1. un 2. piemēru) diametrs $y=-\frac{8}{9}x$ dala uz pusēm diametram $y=\frac{1}{2}x$ paralēlās hordas. Savukārt diametrs $y=\frac{1}{2}x$ dala uz pusēm diametram $y=-\frac{8}{9}x$ paralēlās hordas.

Divus diametrus, kuri dala uz pusēm otram diametram paralēlās hordas, sauc par *savstarpēji saistītiem* diametriem.

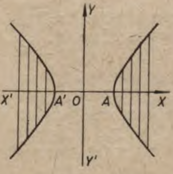
Divus vienu ar otru saistītus diametrus, kas bez tam ir savstarpēji perpendikulāri, sauc par *galvenajiem diametriem.* Riņķa līnijai jebkurš diametrs ir galvenais. Elipsei atšķirībā no riņķa līnijas ir tikai viens galveno diametru pāris — lielā un mazā ass.

Saistīto diametru (ja tie nav galvenie) virziena koeficientiem saskaņā ar (1a) ir pretējas zīmes, t. i., divi saistītie elipses diametri atrodas dažādos kvadrantos (77. zīmējumā diametrs $V'V$ atrodas II un IV kvadrantā, bet $U'U$ — I un III kvadrantā). Griežot diametru $U'U$, saistītais diametrs $V'V$ griežas uz to pašu pusi, kurp $U'U$.

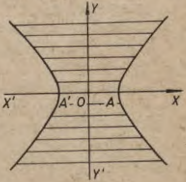
56. §. Hiperbolas diametri

Visi hiperbolas diametri iet caur tās centru.

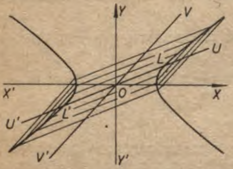
Diametrs, kas atbilst imaginārajai asij paralēlām hordām (78. zīm.), ir reālā ass (hordu viduspunktu ģeometriskā vieta ir staru $A'X$ un AX pāris); diametrs, kas atbilst reālajai asij paralēlām hordām (79. zīm.), ir imaginārā ass (hordu viduspunkti aizpilda $Y'Y$ asi pilnīgi).



78. zīm.



79. zīm.



80. zīm.

Hiperbolai, tāpat kā elipsei, paralēlo hordu virziena koeficientu k ($k \neq 0$) un atbilstošā diametra virziena koeficientu k_1 saista vienādība

$$kk_1 = \varepsilon^2 - 1. \qquad (1)$$

Bet 55. § vienādību (1a) aizstāj vienādība

$$kk_1 = +\frac{b^2}{a^2}. \qquad (1b)$$

1. piemērs. Hiperbolas $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ (80. zīm.) diametru, kas atbilst hordām ar virziena koeficientu $k = \frac{10}{9}$, izsaka vienādojums $y = k_1 x$; k_1 vērtību atrod no sakarības $kk_1 = \frac{4}{9}$, un tad diametra $U'U$ vienādojums ir $y = \frac{2}{5}x$.

2. piemērs. Tās pašas hiperbolas (80. zīm.) diametru $V'V$, kas atbilst hordām ar virziena koeficientu $k = \frac{2}{5}$, izsaka vienādojums $y = \frac{10}{9}x$.

Ja diametrs $U'U$ dala uz pusēm diametram $V'V$ paralēlās hordas, tad diametrs $V'V$ vienmēr dala uz pusēm diametram $U'U$ paralēlās hordas. Tādus divus diametrus sauc par *savstarpēji saistītiem.*

Katrai hiperbolai ir tikai viens galveno (t. i., saistītu un bez tam savstarpēji perpendikulāru) diametru pāris — reālā un imaginārā ass.

Ja paralēlo hordu virziena koeficients pēc absolūtās vērtības ir lielāks par asimptotas virziena koeficientu, t. i.,

$$|k| > \frac{b}{a}$$

$\left(\text{sk. 1. piemēru, kur } \frac{b}{a} = \frac{2}{3}\right)$, tad hordu viduspunktu ģeometriskā vieta ir staru pāris ($L'U'$ un LU). Ja turpretim

$$|k| < \frac{b}{a}$$

(sk. 2. piemēru), tad hordu viduspunkti aizpilda diametru pilnīgi ($V'V$ 80. zīmējumā). No diviem saistītiem diametriem viens diametrs vienmēr pieder pirmajam, otrs — otrajam tipam.

1. piezīme. Paralēlu hordu virziena koeficients nevar būt pēc absolūtās vērtības vienāds ar $\frac{b}{a}$, jo taisnes $y = \pm\frac{b}{a}x$ (asimptotas) nekrusto hiperbolu, bet asimptotai paralēlas taisnes krusto hiperbolu tikai vienā punktā.

Saistīto diametru (ja tie nav galvenie) virziena koeficientiem saskaņā ar (1b) ir vienādas zīmes, t. i., divi saistītie hiperbolas diametri atrodas vienādos kvadrantos.

Turpretim divi saistīti diametri vienmēr atrodas dažādās pusēs no atbilstošās asimptotas.

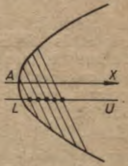
2. piezīme. Griežot hiperbolas diametru $U'U$, saistītais diametrs $V'V$ griežas uz pretējo pusi. Pie tam, ja $U'U$ neierobežoti tuvojas vienai asimptotai, tad $V'V$ neierobežoti tuvojas *tai pašai* asimptotai. Tāpēc par asimptotu mēdz teikt, ka tā ir diametrs, kas *saistīts pats ar sevi.* Šis izteiciens nav jāsaprot vārda tiešā nozīmē, jo asimptota nav diametrs (sal. 1. piezīmi). Izņemot asimptotas, jebkura cita taisne, kas iet caur hiperbolas centru, ir viens tās diametrs.

57. §. Parabolas diametri

Visi parabolas diametri ir paralēli tās asij; sk. 81. un 82. zīm. (parabolas paralēlo hordu viduspunktu ģeometriskā vieta ir stars LU).

Diametrs, kas atbilst parabolas asij perpendikulārajām hordām, ir pati ass (83. zīm.).

81. zīm.

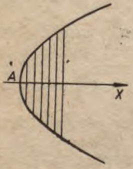


82. zīm.

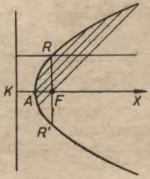
Parabolas $y^2=2px$ diametru, kas atbilst hordām ar virziena koeficientu $k (k \neq 0)$, izsaka vienādojums

$$y=\frac{p}{k}$$

(jo slīpākas hordas pret asi, jo tālāk diametrs atrodas no ass[1]).



83. zīm.



84. zīm.

Piemērs. Parabolas $y^2=2px$ diametru, kas atbilst hordām, kuras veido ar asi $+45°$ lielu leņķi ($k=1$), izsaka vienādojums $y=p$, t. i., tā attālums no AX ass (84. zīm.) ir vienāds ar fokālo pushordu FR (52. §.). Tātad diametrs krusto parabolu punktā R, kas atrodas virs fokusa F.

Visas kādam parabolas diametram paralēlās taisnes krusto parabolu tikai vienā punktā. Tāpēc savstarpēji saistītu diametru parabolai nav.

58. §. Otrās kārtas līnijas

Elipse (atsevišķā gadījumā riņķa līnija), hiperbola un parabola ir otrās kārtas līnijas, t. i., jebkurā Dekarta koordinātu sistēmā tās izsaka otrās pakāpes vienādojumi. Bet ne katrs otrās pakāpes vienādojums izsaka vienu minēto līniju. Var, piemēram, gadīties, ka otrās pakāpes vienādojums izsaka taišņu pāri.

[1] Jebkura parabolas diametra virziena koeficients ir vienāds ar nulli, t. i., apmierina vienādojumu $kk_1=\varepsilon^2-1$, kurš derēja (55., 56. §) elipsei un hiperbolai (parabolai $\varepsilon=1$).

1. p i e m ē r s. Vienādojums

$$4x^2-9y^2=0 \tag{1}$$

sadalās divos vienādojumos $2x-3y=0$ un $2x+3y=0$ un izsaka taišņu pāri, kuras krustojas koordinātu sākumā.

2. p i e m ē r s. Vienādojums

$$x^2-2xy+y^2-9=0 \tag{2}$$

sadalās vienādojumos $x-y+3=0$ un $x-y-3=0$ un izsaka paralēlu taišņu pāri.

3. p i e m ē r s. Vienādojums

$$x^2-2xy+y^2=0, \tag{3}$$

t. i., $(x-y)^2=0$ izsaka vienu taisni $x-y=0$, bet, ievērojot to, ka vienādojuma (3) kreisajā pusē binoms $x-y$ ieiet kā reizinātājs divas reizes, pieņemts uzskatīt, ka (3) izsaka d i v a s s a p l ū d u š a s t a i s n e s.

Var gadīties, ka otrās pakāpes vienādojums izsaka tikai vienu punktu.

4. p i e m ē r s. Vienādojumam

$$x^2+\frac{1}{4}y^2=0 \tag{4}$$

ir tikai viens reāls atrisinājums, proti, $x=0$, $y=0$. Tas izsaka punktu (0; 0). Starp citu, vienādojums (4) sadalās divos vienādojumos $x+\frac{1}{2}iy=0$, $x-\frac{1}{2}iy=0$ ar imagināriem koeficientiem. Tāpēc saka, ka vienādojums (4) izsaka «imagināru taišņu pāri, kuras krustojas reālā punktā».

Beidzot, var gadīties, ka otrās pakāpes vienādojums neizsaka nekādu ģeometrisku vietu.

5. p i e m ē r s. Vienādojums

$$\frac{x^2}{-9}+\frac{y^2}{-16}=1 \tag{5}$$

neizsaka līniju un pat ne punktu, jo lielumam $\frac{x^2}{-9}+\frac{y^2}{-16}$ nevar būt pozitīvas vērtības. Tomēr, ievērojot vienādojuma (5) ārējo līdzību ar elipses vienādojumu, saka, ka vienādojums (5) izsaka «imagināru elipsi».

6. piemērs. Vienādojums

$$x^2-2xy+y^2+9=0$$

arī neizsaka ne līniju, ne pat punktu. Bet, tā kā tas sadalās vienādojumos $x-y+3i=0$ un $x-y-3i=0$, tad saka (sal. 2. piemēru), ka vienādojums (6) izsaka «imagināru paralēlu taišņu pāri».

Konusa šķēlumi un taišņu pāri aptver visas līnijas, kuras var izteikt otrās pakāpes vienādojums Dekarta koordinātu sistēmā. Citiem vārdiem, spēkā šāda teorēma.

Teorēma. *Katra otrās kārtas līnija ir vai nu elipse, vai hiperbola, vai parabola, vai taišņu pāris (kuras krustojas, ir paralēlas vai saplūdušas kopā).*

Pierādījuma plāns. Ar koordinātu transformācijas palīdzību doto otrās pakāpes vienādojumu reducē vienkāršākā veidā, un tad mēs vai nu dabūjam vienu no kanoniskajiem vienādojumiem

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\pm 1 \text{ (elipse, reāla vai imagināra)},$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ (hiperbola)}, \ y^2=2px \text{ (parabola)},$$

vai arī konstatējam, ka otrās pakāpes vienādojums sadalās divos pirmās pakāpes vienādojumos. Reizē ar to mēs atrodam otrās kārtas līnijas izmērus un novietojumu dotajā koordinātu sistēmā (piemēram, elipsei — asu garumus, to vienādojumus, centra stāvokli utt.).

61. un 62. §. minētās transformācijas izpildītas pilnīgi.

59. §. Otrās pakāpes vienādojuma vispārīgais pieraksts

Otrās pakāpes vispārīgo vienādojumu parasti pieraksta tā:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0. \qquad (1)$$

Apzīmējumi $2B$, $2D$, $2E$ (un nevis B, D, E) lietoti tāpēc, ka daudzas formulas satur koeficientu puses pie xy, pie x un pie y. Lietojot apzīmējumus $2B$, $2D$, $2E$, mēs izvairāmies no daļveida izteiksmēm.

1. p i e m ē r s. Vienādojumam

$$x^2+xy-2y^2+2x+4y+4=0$$

dabūjam

$$A=1,\quad B=\frac{1}{2},\quad C=-2,\quad D=1,\quad E=2,\quad F=4.$$

2. p i e m ē r s. Vienādojumam $2xy+x+5=0$ dabūjam

$$A=0,\ B=1,\ C=0,\ D=\frac{1}{2},\ E=0,\ F=5.$$

P i e z ī m e. Lielumiem A, B, C, D, E, F var būt jebkuras vērtības, vienīgi lielumi A, B, C nedrīkst visi reizē būt vienādi ar nulli, jo tad (1) ir pirmās pakāpes vienādojums.

60. §. Otrās pakāpes vienādojuma vienkāršošana; vispārīgas piezīmes

Otrās pakāpes vienādojuma

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \tag{1}$$

transformāciju vienkāršākajā veidā (sk. 58. §.) izpildīsim šādi [1]:

a) iepriekšējā transformācija. Ar tās palīdzību mēs atbrīvosimies no locekļa, kas satur koordinātu reizinājumu (to panāk ar asu pagriešanu; sk. 61. §.);

b) noslēdzošā transformācija. Ar tās palīdzību atbrīvojamies no locekļiem, kas satur koordinātu pirmās pakāpes (to panāk ar sākuma punkta pārcelšanu; sk. 62. §.).

61. §. Otrās pakāpes vienādojuma iepriekšējā transformācija

(Ja $B=0$, tad šī transformācija nav vajadzīga).

Pagriežam koordinātu asis par leņķi α, kas apmierina vienādību [2]

$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2B}{A-C}. \tag{2}$$

[1] Šeit apskatītais paņēmiens nav visātrākais, bet tas neprasa nekādas papildu teorēmas. Cits paņēmiens, kas ved pie mērķa ātrāk, izskaidrots 69. un 70. §.

[2] Ja $A=C$ (lielums $\frac{2B}{A-C}$ «pārvēršas bezgalībā»), tad (21. § piezīme) $2\alpha=\pm 90°$, t. i., $\alpha=\pm 45°$.

Transformācijas formulas būs (36. §.)

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\quad y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha. \tag{3}$$

Locekļi ar $x'y'$ savstarpēji iznīcināsies[1], un jaunais vienādojums iegūs izskatu

$$A'x'^2+C'y'^2+2D'x'+2E'y'+F'=0. \tag{4}$$

1. piemērs. Dots vienādojums

$$2x^2-4xy+5y^2-x+5y-4=0. \tag{1a}$$

Šeit

$$A=2,\quad B=-2,\quad C=5,\quad D=-\frac{1}{2},\quad E=\frac{5}{2},\quad F=-4.$$

No noteikuma (2) atrodam

$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}. \tag{2a}$$

Ja leņķi 2α ņemam pirmajā kvadrantā ($2\alpha\approx53°8'$, $\alpha\approx26°34'$), tad dabūjam

$$\cos 2\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}}=\frac{3}{5},$$

$$\sin\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\cos\alpha=\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Formulas (3) pieņem izskatu

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{2}{\sqrt{5}}x'-\frac{1}{\sqrt{5}}y',\\ y&=\frac{1}{\sqrt{5}}x'+\frac{2}{\sqrt{5}}y'. \end{aligned}\right\} \tag{3a}$$

[1] Koeficients pie $x'y'$ iznāk šāds:

$$2B'=(C-A)\,2\sin\alpha\cos\alpha+2B(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=$$
$$=(C-A)\sin 2\alpha+2B\cos 2\alpha.$$

Saskaņā ar formulu (2) šis koeficients ir vienāds ar nulli.

Ievietojot vienādojumā (1a), dabūjam jaunu vienādojumu

$$x'^2+6y'^2+\frac{3}{\sqrt{5}}x'+\frac{11}{\sqrt{5}}y'-4=0, \qquad (4a)$$

kur

$$A'=1,\quad B'=0,\quad C'=6,\quad D'=\frac{3}{2\sqrt{5}},\quad E'=\frac{11}{2\sqrt{5}},\quad F'=-4.$$

Ja leņķi 2α ņemam trešajā kvadrantā ($2\alpha\approx233°8'$, $\alpha\approx\approx116°34'$), tad analogi iegūstam vienādojumu

$$6x'^2+y'^2+\frac{11}{\sqrt{5}}x'-\frac{3}{\sqrt{5}}y'-4=0,$$

kur

$$A'=6,\quad B'=0,\quad C'=1,\quad D'=\frac{11}{2\sqrt{5}},\quad E'=-\frac{3}{2\sqrt{5}},\quad F'=-4.$$

2. piemērs. Dots vienādojums

$$x^2+2xy+y^2+2x+y=0. \qquad (1b)$$

Šeit

$$A=1,\quad B=1,\quad C=1,\quad D=1,\quad E=\frac{1}{2},\quad F=0.$$

Tā kā $A=C$, tad (sk. zemteksta piezīmi 89. lpp.) var ņemt $\alpha=45°$. Ievietojot izteiksmes

$$\left.\begin{aligned} x&=x'\cos 45°-y'\sin 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y'),\\ y&=x'\sin 45°+y'\cos 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y') \end{aligned}\right\} \qquad (3b)$$

vienādojumā (1b), atrodam

$$2x'^2+\frac{3}{\sqrt{2}}x'-\frac{1}{\sqrt{2}}y'=0. \qquad (4b)$$

Šeit

$$A'=2,\quad B'=0,\quad C'=0,\quad D'=\frac{3}{2\sqrt{2}},\quad E'=-\frac{1}{2\sqrt{2}},\quad F'=0.$$

Ja ņemam $\alpha=-45°$, tad dabūjam

$$2y'^2+\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{3}{\sqrt{2}}y'=0. \tag{4b'}$$

Šeit

$$A'=0,\quad B'=0,\quad C'=2,\quad D'=\frac{1}{2\sqrt{2}},\quad E'=\frac{3}{2\sqrt{2}},\quad F'=0.$$

3. piemērs. Dots vienādojums

$$2x^2-4xy+2y^2+8x-8y-17=0. \tag{1c}$$

Tā kā $A=C$, tad var ņemt $\alpha=45°$. Ievietojot vienādojumā (1c) izteiksmes (3b), atrodam

$$4y'^2-8\sqrt{2}y'-17=0. \tag{4c}$$

Ņemot $\alpha=-45°$, dabūjam

$$4x'^2+8\sqrt{2}x'-17=0. \tag{4c'}$$

62. §. Otrās pakāpes vienādojuma noslēdzošā transformācija

Šeit var izšķirt divus gadījumus:

1) neviens no koeficientiem A', C' vienādojumā

$$A'x'^2+C'y'^2+2D'x'+2E'y'+F'=0 \tag{4}$$

nav vienāds ar nulli (tā bija 1. piemērā);

2) viens no koeficientiem A', C' ir vienāds ar nulli (tā bija 2. un 3. piemērā)[1].

1. gadījums. Vienādojumu

$$A'x'^2+C'y'^2+2D'x'+2E'y'+F'=0 \tag{4}$$

pārveidojam tā. Summu $A'x'^2+2D'x'=A'\left(x'^2+2\frac{D'}{A'}x'\right)$ papildinām ar locekli $\frac{D'^2}{A'}$; dabūjam $A'\left(x'+\frac{D'}{A'}\right)^2$. Summu $C'y'^2+2E'y'$ papildinām ar locekli $\frac{E'^2}{C'}$; dabūjam $C'\left(y'+\frac{E'}{C'}\right)^2$.

[1] Koeficienti A' un C' reizē nevar būt vienādi ar nulli, jo (4) tad būtu pirmās pakāpes vienādojums.

Vienādojuma (4) labajai pusei kā kompensāciju pieskaitām $\frac{D'^2}{A'}+\frac{E'^2}{C'}$. Dabūjam vienādojumu

$$A'\left(x'+\frac{D'}{A'}\right)+C'\left(y'+\frac{E'}{C'}\right)^2=K', \tag{5}$$

kur

$$K'=\frac{D'^2}{A'}+\frac{E'^2}{C'}-F'.$$

Pārnesam sākumu punktā $\left(-\frac{D'}{A'};\ -\frac{E'}{C'}\right)$, t. i., transformējam koordinātes (35. §.) ar formulām

$$x'=\bar{x}-\frac{D'}{A'},\quad y'=\bar{y}-\frac{E'}{C'}. \tag{6}$$

Dabūjam vienādojumu

$$A'\bar{x}^2+C'\bar{y}^2=K'\ (A'\neq 0,\ C'\neq 0). \tag{7}$$

Ja $K'\neq 0$, tad izdalām šo vienādojumu ar K'. Dabūsim

$$\frac{\bar{x}^2}{\frac{K'}{A'}}+\frac{\bar{y}^2}{\frac{K'}{C'}}=1. \tag{8}$$

a) Ja abi lielumi $\frac{K'}{A'}, \frac{K'}{C'}$ ir pozitīvi, tad dabūjam elipsi.

b) Ja abi lielumi $\frac{K'}{A'}, \frac{K'}{C'}$ ir negatīvi, tad dabūjam imagināru elipsi (sk. 58. §. 5. piemēru).

c) Ja viens no šiem lielumiem (vienalga kurš) ir pozitīvs, bet otrs negatīvs, tad dabūjam hiperbolu.

Ja turpretim $K'=0$, tad vienādojums (7) pieņem izskatu

$$A'\bar{x}^2+C'\bar{y}^2=0.$$

Iespējami divi gadījumi:

d) ja A' un C' ir dažādas zīmes, tad $A'\bar{x}^2+C'\bar{y}^2$ sadalās pirmās pakāpes reizinātājos kā kvadrātu starpība. Abiem reizinātājiem koeficienti ir reāli, un mēs dabūjam krustojošos taišņu pāri (sal. 58. §. 1. piemēru);

e) ja A' un C' ir vienādas zīmes, tad $A'\bar{x}^2+C'\bar{y}^2$ arī sadalās pirmās pakāpes reizinātājos, bet abi reizinātāji saturēs locekļus ar imagināriem koeficientiem, un mēs dabūsim imagināru krustojošos taišņu pāri, t. i., vienu reālu punktu (sal. 58. §. 4. piemēru).

1. piemērs. Vienādojums (1a) (61. §. 1. piemērs) pēc asu pagriešanas pieņēma izskatu

$$x'^2+6y'^2+\frac{3}{\sqrt{5}}x'+\frac{11}{\sqrt{5}}y'-4=0. \tag{4a}$$

Šo vienādojumu pārrakstām tā:

$$\left(x'+\frac{3}{2\sqrt{5}}\right)^2+6\left(y'+\frac{11}{12\sqrt{5}}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{3}{2\sqrt{5}}\right)^2+6\left(\frac{11}{12\sqrt{5}}\right)^2+4, \tag{5a}$$

t. i.,

$$\left(x'+\frac{3}{2\sqrt{5}}\right)^2+6\left(y'+\frac{11}{12\sqrt{5}}\right)^2=\frac{131}{24}.$$

Pārejot uz jaunu sistēmu, kurai koordinātu sākums ir punktā $\left(-\frac{3}{2\sqrt{5}};\ -\frac{11}{12\sqrt{5}}\right)$, ar formulām

$$x'=\bar{x}-\frac{3}{2\sqrt{5}},\quad y'=\bar{y}-\frac{11}{12\sqrt{5}}, \tag{6a}$$

dabūjam

$$\bar{x}^2+6\bar{y}^2=\frac{131}{24} \tag{7a}$$

jeb

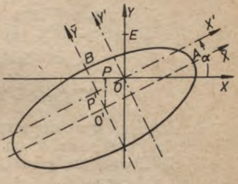
$$\frac{\bar{x}^2}{\frac{131}{24}}+\frac{\bar{y}^2}{\frac{131}{144}}=1. \tag{8a}$$

Dotais vienādojums izsaka elipsi ar pusasīm $a=\sqrt{\frac{131}{24}}\approx$ $\approx 2,3$, $b=\sqrt{\frac{131}{144}}\approx 1,0$. 85. zīmējumā (kur OE ir mērvienība) $a=O'A$, $b=O'B$.

Elipses centrs atrodas punktā O' ar koordinātēm $\bar{x}=0$, $\bar{y}=0$. Ar formulu (6a) palīdzību atrodam centra koordinātes starpsistēmā $X'OY'$

$$x'=-\frac{3}{2\sqrt{5}}\approx -0{,}7,$$

$$y'=-\frac{11}{12\sqrt{5}}\approx -0{,}4.$$



85. zīm.

85. zīmējumā

$$x'=OP',\quad y'=P'O'.$$

Ar 61. § formulām (3a) atrodam centra koordinātes sākotnējā sistēmā XOY

$$x_c=\frac{2}{\sqrt{5}}\left(-\frac{3}{2\sqrt{5}}\right)-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{11}{12\sqrt{5}}\right)=-\frac{5}{12}\approx -0{,}4,$$

$$y_c=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{3}{2\sqrt{5}}\right)+\frac{2}{\sqrt{5}}\left(-\frac{11}{12\sqrt{5}}\right)=-\frac{2}{3}\approx -0{,}7.$$

85. zīmējumā $x_c=OP$, $y_c=PO'$.

Atrodam elipses asu vienādojumus sākotnējā sistēmā. Sistēmā $\bar{X}O'\bar{Y}$ lielo asi izsaka vienādojums $\bar{y}=0$; sistēmā $X'OY'$ to pašu asi saskaņā ar (6a) otro vienādojumu izsaka vienādojums $y=-\dfrac{11}{12\sqrt{5}}$.

Atrisinot sistēmu (3a) attiecībā pret x', y', atrodam

$$x'=\frac{2}{\sqrt{5}}x+\frac{1}{\sqrt{5}}y,$$

$$y'=\frac{2}{\sqrt{5}}y-\frac{1}{\sqrt{5}}x.$$

Mums vajadzīgs tikai otrs vienādojums; liekot tanī $y'=-\dfrac{11}{12\sqrt{5}}$, dabūjam lielās ass vienādojumu sistēmā XOY, t. i.,

$$\frac{2}{\sqrt{5}}y-\frac{1}{\sqrt{5}}x=-\frac{11}{12\sqrt{5}}$$

jeb

$$12x-24y-11=0.$$

Tādā pašā veidā atrodam mazās ass vienādojumu

$$4x+2y+3=0.$$

2. gadījums. Viens no koeficientiem A', C' ir vienāds ar nulli. Vienādojumam (4) ir izskats

$$A'x'^2+2D'x'+2E'y'+F'=0 \tag{9}$$

vai

$$C'y'^2+2D'x'+2E'y'+F'=0. \tag{9'}$$

Apskatīsim vienādojumu (9) [vienādojumam (9′) aprēķini ir tādi paši, tikai x' un y' samainīti vietām]:

a) ja $E'\neq 0$, tad vienādojumu (9) var atrisināt attiecībā pret y'; dabūsim

$$y'=-\frac{A'}{2E'}x'^2-\frac{D'}{E'}x'-\frac{F'}{2E'}. \tag{10}$$

Esam ieguvuši parabolu. Virsotnes koordinātes nosaka 50. §. formulas (5), ja

$$a=-\frac{A'}{2E'},\quad b=-\frac{D'}{E'},\quad c=-\frac{F'}{2E'};$$

b) ja $E'=0$, tad vienādojums (9) pieņem izskatu

$$A'x'^2+2D'x'+F'=0. \tag{11}$$

Sadalot vienādojuma (11) kreiso pusi pirmās pakāpes reizinātājos, dabūjam [1]

$$A'\left(x'-\frac{\sqrt{D'^2-A'F'}-D'}{A'}\right)\left(x'+\frac{\sqrt{D'^2-A'F'}+D'}{A'}\right)=0. \tag{12}$$

Vienādojums (12) un tātad arī (11), ja $D'^2-A'F'>0$, izsaka paralēlu taišņu pāri; ja $D'^2-A'F'<0$ — imagināru paralēlu taišņu pāri; bet, ja $D'^2-A'F'=0$ — divas kopā saplūdušas taisnes (58. §. 2., 6. un 3. piemērs).

2. piemērs. 61. §. 2. piemēra vienādojums (1b) pēc asu pagriešanas par 45° leņķi pieņēma izskatu

$$2x'^2+\frac{3}{\sqrt{2}}x'-\frac{1}{\sqrt{2}}y'=0. \tag{4b}$$

[1] Lielumi $\frac{\sqrt{D'^2-A'F'}-D'}{A'}$ un $\frac{-\sqrt{D'^2-A'F'}-D'}{A'}$ ir vienādojuma (11) saknes.

Atrisinot attiecībā pret y', dabūjam

$$y' = 2\sqrt{2}x'^2 + 3x'. \qquad (10b)$$

Vienādojums (10b) un tātad arī (1b) izsaka parabolu (86. zīm.); tās virsotnes A koordinātes x', y' atrodam ar 50. §. formulām (5)

$$x'_A = -\frac{3}{4\sqrt{2}} \approx -0{,}5,$$

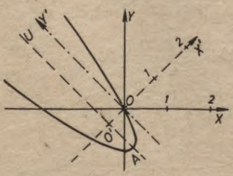
$$y'_A = -\frac{9}{8\sqrt{2}} \approx -0{,}8.$$

Virsotnes koordinātes var atrast arī, nelietojot 50. §. formulas (5) (sk. 50. §. 1. piezīmi).

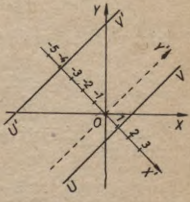
Ar 61. §. formulām (3b) atrodam virsotnes koordinātes sākotnējā sistēmā

$$x_A = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{3}{4\sqrt{2}} + \frac{9}{8\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{16} \approx 0{,}2,$$

$$y_A = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{3}{4\sqrt{2}} - \frac{9}{8\sqrt{2}}\right) = -\frac{15}{16} \approx -0{,}9.$$



86. zīm.



87. zīm.

Atrodam parabolas ass AU vienādojumu. Jaunajā sistēmā šo asi izsaka vienādojums

$$x' = -\frac{3}{4\sqrt{2}}.$$

Atrisinot vienādojumus (3b) attiecībā pret x', y', atrodam

$$x'=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y),$$

$$y'=\frac{\sqrt{2}}{2}(y-x).$$

Ievietojot pirmajā vienādojumā (otrs vienādojums nav vajadzīgs) $x'=-\frac{3}{4\sqrt{2}}$, dabūjam

$$-\frac{3}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$$

jeb

$$4x+4y+3=0.$$

Tas ir parabolas ass vienādojums sākotnējā sistēmā.

3. piemērs. 61. §. 3. piemēra vienādojums (1c) pēc asu pagriešanas par -45° leņķi pieņēma izskatu

$$4x'^2+8\sqrt{2}x'-17=0. \tag{4c'}$$

Sadalot vienādojuma (4c') kreiso pusi reizinātājos, dabūjam

$$4\left(x'-\frac{5-2\sqrt{2}}{2}\right)\left(x'+\frac{5+2\sqrt{2}}{2}\right)=0, \tag{12c}$$

t. i., esam dabūjuši paralēlu taišņu pāri (UV un $U'V'$ 87. zīmējumā)

$$x'=\frac{5-2\sqrt{2}}{2}, \quad x'=-\frac{5+2\sqrt{2}}{2}. \tag{13}$$

Atradīsim šo taišņu vienādojumus sistēmā XOY. Tā kā sistēmu XOY dabū no sistēmas $X'OY'$, pagriežot pēdējo par $+45^\circ$, tad

$$x'=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y), \quad y'=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y). \tag{14}$$

Ievietojot pirmajā šai vienādojumā vispirms vienu, bet pēc tam otru vērtību (13), atrodam

$$\frac{5-2\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y),$$

$$-\frac{5+2\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y),$$

jeb

$$\sqrt{2}x-\sqrt{2}y-5+2\sqrt{2}=0,$$

$$\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+5+2\sqrt{2}=0.$$

Tie ir taišņu UV, $U'V'$ vienādojumi sākotnējā sistēmā.

63. §. Par paņēmieniem, kas atvieglo otrās pakāpes vienādojuma vienkāršošanu

Otrās pakāpes vienādojuma vienkāršošanas paņēmienam, kurš iztirzāts 61. un 62. §., salīdzinot ar citiem paņēmieniem, ir divas priekšrocības: 1) tas dod pilnīgu otrās kārtas līniju klasifikāciju (58. §. teorēma); 2) tas ir vienveidīgs un idejā vienkāršs. Tomēr šis paņēmiens prasa diezgan nogurdinošus aprēķinus.

Daudzos gadījumos aprēķinus var ievērojami atvieglot.

1. Otrās kārtas līnijām, kuras sadalās taišņu pāros (58. §. 2., 3., 4. un 6. piemērs), viegli var atrast abu taišņu vienādojumus, neizpildot koordinātu transformāciju. Šis paņēmiens iztirzāts 65. paragrāfā; iepriekš (64. §.) dota sadalīšanās (deģenerēšanās) pazīme.

2. Otrās kārtas līnija, kas nedeģenerējas, var būt vai nu elipse, vai hiperbola, vai arī parabola. Elipsei un hiperbolai ir centrs, bet parabolai tāda nav. Tāpēc elipses un hiperbolas vienādojumu vienkāršošanu izdevīgi sākt ar sākuma pārnešanu centrā. Var jau iepriekš uzzināt, kuram no šiem trim tipiem pieder otrās kārtas līnija. Atbilstošā pazīme dota 67. paragrāfā, 68. paragrāfā precizēts centra jēdziens un 69. paragrāfā paskaidrots, kā atrast centra koordinātes. 70. paragrāfā izskaidrots elipses un hiperbolas vienādojumu vienkāršošanas paņēmiens.

3. Kas attiecas uz parabolu, tad tai 61. paragrāfā iztirzātais vienkāršošanas paņēmiens ir vislabākais. Starp citu, parabolas izmērus (t. i., parametra p lielumu) viegli var atrast ar tā saukto invariantu palīdzību. Par tiem pastāstīts 66. paragrāfā.

64. §. Otrās kārtas līniju deģenerēšanās pazīme

Ja otrās kārtas līnija

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \tag{1}$$

sadalās divās (dažādās vai saplūstošās) taisnēs (tās var būt arī imagināras), tad trešās kārtas determinants (118. §.)

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} \tag{2}$$

(«lielais diskriminants»)[1] kļūst vienāds ar nulli. Otrādi, ja $\Delta=0$, tad līnija (1) sadalās divās taisnēs.

Pierādījumu sk. 65. §. (2. piezīme).

1. piemērs. 61. paragrāfā (3. piemērs) mēs apskatījām otrās kārtas līniju

$$2x^2-4xy+2y^2+8x-8y-17=0$$

$$(A=2,\quad B=-2,\quad C=2,\quad D=4,\quad E=-4,\quad F=-17).$$

62. paragrāfā mēs konstatējām, ka šī līnija sadalās divās paralēlās taisnēs

$$\sqrt{2}x-\sqrt{2}y-5+2\sqrt{2}=0 \tag{3}$$

un

$$\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+5+2\sqrt{2}=0. \tag{4}$$

[1] «Diskriminants» ir latīņu termins, burtiski nozīmē «izšķīrējs». Diskriminantu Δ sauc par *lielo* atšķirībā no *mazā* diskriminanta, par kuru sk. 66. §.

Ievērojot to, lielajam diskriminantam Δ jābūt vienādam ar nulli. Tiešām,

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & -4 \\ 4 & -4 & -17 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & -17 \end{vmatrix}+$$

$$+2\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 4 & -17 \end{vmatrix}+4\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}=$$

$$=2\cdot(-50)+2\cdot 50+0=0.$$

2. piemērs. Otrās kārtas līnija

$$2x^2-4xy+5y^2-x+5y-4=0$$

nesadalās divās taisnēs, jo lielais diskriminants

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -2 & -\frac{1}{2} \\ -2 & 5 & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -4 \end{vmatrix}=-\frac{131}{4}$$

nav vienāds ar nulli. 61. un 62. paragrāfā tika parādīts, ka šī līnija ir elipse.

Izteiksmes (2) iegaumēšanas kārtula. Pirmajā rindiņā raksta pēc kārtas burtus, aiz kuriem vienādojumā (1) seko x, otrajā rindiņā — burtus, aiz kuriem (tieši vai pēc x) seko y, trešajā rindiņā — pēdējos trīs burtus.

65. §. Taišņu atrašana, kuras veido otrās kārtas deģenerētu līniju

Lai atrastu vienādojumus divām taisnēm, kas kopā veido otrās kārtas deģenerētu līniju

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (1)$$

(deģenerēšanās noteikumu sk. 64. §.), pietiek sadalīt vienādojuma (1) kreiso pusi pirmās pakāpes reizinātājos. Ja vismaz viens no koeficientiem A, C nav vienāds ar nulli, tad vislabāk tieši atrisināt vienādojumu (1) attiecībā pret to koordināti x, y, kura tanī ieiet otrajā pakāpē. Divi atrisinājumi (tie var arī saplūst) izteiks divas meklētās taisnes.

1. piemērs. Otrās kārtas līnija

$$2x^2-4xy+2y^2+8x-8y-17=0 \tag{2}$$

ir deģenerēta, jo lielais diskriminants

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & -4 \\ 4 & -4 & -17 \end{vmatrix}$$

ir vienāds ar nulli. Vienādojumu (2) var atrisināt tiklab attiecībā pret x, kā pret y (abas koordinātes ieiet otrajās pakāpēs). Izsakām vienādojumu (2) veidā

$$y^2-2(x+2)y+\left(x^2+4x-\frac{17}{2}\right)=0,$$

atrisinām to attiecībā pret y; dabūjam

$$y=x+2\pm\sqrt{(x+2)^2-\left(x^2+4x-\frac{17}{2}\right)},$$

t. i.,

$$y=x+2\pm\frac{5}{\sqrt{2}}.$$

Vienu taisni izsaka vienādojums $y=x+2+\frac{5}{\sqrt{2}}$, otru — vienādojums $y=x+2-\frac{5}{\sqrt{2}}$. Šīs taisnes ir paralēlas (sk. 61. un 62. §., 3. piemēru).

2. piemērs. Otrās kārtas līnija

$$2x^2+7xy-15y^2-10x+54y-48=0 \tag{3}$$

sadalās, jo

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & \frac{7}{2} & -5 \\ \frac{7}{2} & -15 & 27 \\ -5 & 27 & -48 \end{vmatrix}=0.$$

Izsakot vienādojumu (3) formā

$$15y^2-(7x+54)y-(2x^2-10x-48)=0,$$

atrodam

$$y=\frac{7x+54\pm\sqrt{(7x+54)^2+4\cdot 15(2x^2-10x-48)}}{30}.$$

Zemsaknes izteiksme ir $169x^2+156x+36=(13x+6)^2$. Tātad $y=\dfrac{7x+54\pm(13x+6)}{30}$. Vienu taisni izsaka vienādojums $y=\dfrac{2x+6}{3}$, otru — vienādojums $y=\dfrac{-x+8}{5}$. Šīs taisnes krustojas punktā $\left(-\dfrac{6}{13}, \dfrac{22}{13}\right)$.

3. piemērs. Līnija

$$10xy-14x+15y-21=0 \tag{4}$$

sadalās, jo

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 5 & -7 \\ 5 & 0 & \frac{15}{2} \\ -7 & \frac{15}{2} & -21 \end{vmatrix}=0.$$

Vienādojumā (4) tiklab x, kā y ieiet tikai pirmajā pakāpē. Tāpēc vienādojuma (4) kreiso pusi sadalām reizinātājos, grupējot locekļus. Dabūjam

$$10xy-14x+15y-21=2x(5y-7)+3(5y-7)=$$
$$=(2x+3)(5y-7).$$

Līnija (4) sadalās taisnēs $2x+3=0$ un $5y-7=0$.

1. piezīme. Gadījumā, ja $A=C=0$, doto vienādojumu arī var atrisināt attiecībā pret x vai y; tā 3. piemērā dabūsim $(10x+15)y=14x+21$, bet tālāk dalīt abas puses ar $10x+15$ var tikai tad, ja $10x+15$ nav vienāds ar nulli. Tad dabūjam $y=\dfrac{14x+21}{10x+15}=\dfrac{7(2x+3)}{5(2x+3)}=\dfrac{7}{5}$, un vienas taisnes vienādojums būs $y=\dfrac{7}{5}$ jeb $5y-7=0$. Gadījumā, ja $10x+15=0$, t. i., $x=-\dfrac{3}{2}$, vienādojumu $(10x+15)y=14x+21$ apmierina jebkura y vērtība; tādējādi dabūjam otru taisni $x=-\dfrac{3}{2}$ jeb $2x+3=0$.

2. piezīme. 1. un 2. piemērā izdarītos aprēķinus var izpildīt jebkuram vienādojumam (1), ja vien $C \neq 0$. Izpildot šos aprēķinus vispārīgā veidā, dabūsim zem radikāla kvadrātisku trinomu

$$(B^2-AC)x^2+2(BE-CD)x+E^2-CF. \tag{5}$$

Tas būs pilns kvadrāts tikai tai gadījumā, ja

$$(BE-CD)^2-(B^2-AC)(E^2-CF)=0. \tag{6}$$

Pēc vienkāršiem pārveidojumiem atradīsim, ka vienādības (6) kreisā puse ir vienāda ar $C\Delta$, kur Δ ir lielais diskriminants. Tā kā saskaņā ar pieņēmumu $C \neq 0$, tad sadalīšanās (deģenerēšanās) pazīme ir $\Delta=0$. Gadījumā, ja $C=0$, bet $A \neq 0$, mēs iegūsim to pašu rezultātu, samainot vietām x un y. Tā var pierādīt 64. §. pazīmi vispārīgajam gadījumam. Atsevišķā gadījumā, kad $A=C=0$ (tātad $B \neq 0$), vienādojuma (1) kreisā puse pieņem izskatu

$$2Bxy+2Dx+2Ey+F.$$

Izsakām šo polinomu formā $2x(By+D)+(2Ey+F)$. Šī izteiksme sadalās pirmās pakāpes reizinātājos tikai tad, ja binomiem $By+D$ un $2Ey+F$ atbilstošie koeficienti ir vienādi vai proporcionāli (sk. 3. piemēru), t. i., ja $2DE-BF=$ $=0$. Bet šai gadījumā lielajam diskriminantam Δ ir šāds izskats $\begin{vmatrix} 0 & B & D \\ B & 0 & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$, un no tā izriet, ka $2DE-BF=\frac{\Delta}{B}$. Tā pierāda 64. §. pazīmi atsevišķā gadījumā.

66. §. Otrās pakāpes vienādojuma invarianti

Pārejot no vienas taisnleņķa koordinātu sistēmas uz citu sistēmu, mēs otrās kārtas līnijas vienādojumu

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \tag{1}$$

aizstājam ar citu vienādojumu

$$A'x'^2+2B'x'y'+C'y'^2+2D'x'+2E'y'+F'=0, \tag{2}$$

kuru dabū no (1) ar koordinātu transformācijas formulu palīdzību (sk. 61. un 62. §. piemērus). Pie tam A', B', C', D',

E', F' vērtības (vai nu visas, vai dažas) atšķiras no atbilstošajām A, B, C, D, E, F vērtībām.

Tomēr trīs tālāk uzrakstītās izteiksmes, ja tās sastāda no lielumiem A', B', C', D', E', F', vienmēr paliek *vienādas ar izteiksmēm, kas tādā pašā veidā sastādītas no lielumiem A, B, C, D, E, F*. Šīs trīs izteiksmes sauc par otrās pakāpes vienādojuma *invariantiem*[1]:

a) pirmais invariants $A+C$;

b) otrais invariants $\delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$ (mazais diskriminants);

c) trešais invariants

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} \text{ (lielais diskriminants).}$$

1. piemērs. Vienādojumu

$$2x^2-4xy+5y^2-x+5y-4=0$$

$$\left(A=2,\ B=-2,\ C=5,\ D=-\frac{1}{2},\ E=\frac{5}{2},\ F=-4\right)$$

mēs 61. paragrāfā (1. piemērs) pārveidojam veidā

$$x'^2+6y'^2+\frac{3}{\sqrt{5}}x'+\frac{11}{\sqrt{5}}y'-4=0$$

$$\left(A'=1,\ B'=0,\ C'=6,\ D'=\frac{3}{2\sqrt{5}},\ E'=\frac{11}{2\sqrt{5}},\ F'=-4\right),$$

izpildot pagriezienu par leņķi $\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\approx 26°34'$.

a) Izteiksme $A+C$ vecajā sistēmā bija vienāda ar $2+5=7$, jaunajā sistēmā atbilstošā izteiksme $A'+C'$ ir vienāda ar $1+6=7$, tā ka

$$A+C=A'+C'.$$

b) Mazais diskriminants vecajā sistēmā bija vienāds ar

$$\delta=\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}=2\cdot 5-(-2)\cdot(-2)=6,$$

[1] «Invariants» ir latīņu termins, tulkojumā nozīmē «nemainīgais».

jaunajā sistēmā dabūjam

$$\delta'=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}=6,$$

tā ka

$$\delta=\delta'.$$

c) Lielais diskriminants vecajā sistēmā bija vienāds ar

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -2 & -\frac{1}{2} \\ -2 & 5 & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -4 \end{vmatrix}=-\frac{131}{4},$$

jaunajā sistēmā

$$\Delta'=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2\sqrt{5}} \\ 0 & 6 & \frac{11}{2\sqrt{5}} \\ \frac{3}{2\sqrt{5}} & \frac{11}{2\sqrt{5}} & -4 \end{vmatrix}=-\frac{131}{4},$$

tā ka

$$\Delta=\Delta'.$$

2. piemērs. Vienādojumu

$$x'^2+6y'^2+\frac{3}{\sqrt{5}}x'+\frac{11}{\sqrt{5}}y'-4=0$$

mēs 62. paragrāfā (sk. 1. piemēru) tālāk pārveidojam veidā $\overline{x}^2+6\overline{y}^2-\frac{131}{24}=0$, kas atbilst sākuma pārnešanai punktā $x'=-\frac{3}{2\sqrt{5}}$, $y'=-\frac{11}{12\sqrt{5}}$. Lielais diskriminants tagad būs

$$\overline{\Delta}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{131}{24} \end{vmatrix}=-\frac{131}{4},$$

t. i.,

$$\overline{\Delta}=\Delta'=\Delta.$$

Abi pārējie invarianti, protams, arī ir saglabājuši savas vērtības.

Lai pierādītu, ka visi trīs invarianti nemainās, pietiek sastādīt lielumu A', B', C',... izteiksmes atkarībā no A, B, C,... (šīs izteiksmes saturēs arī pagrieziena leņķi α un jaunā sākuma koordinātes). Ievietojot tās, piemēram, izteiksmē $A'+C'$, mēs pēc vienkāršojumiem dabūsim $A+C$ utt. Tomēr šie aprēķini ir ļoti smagi[1].

P i e z ī m e. Ja vienādojuma (1) abas puses pareizinām (vai izdalām) ar kādu skaitli k, tad jaunais vienādojums izteiks to pašu otrās kārtas līniju. Tomēr tagad visi trīs invarianti izmainīsies: pirmais tiks pareizināts ar k, otrais — ar k^2, trešais — ar k^3. Tāpēc arī šos lielumus sauc par otrās pakāpes *vienādojuma* invariantiem, bet nevis par otrās kārtas *līnijas* invariantiem.

67. §. Trīs otrās kārtas līniju tipi

Mazais diskriminants δ (66. §.) elipsei ir pozitīvs (sk. 66. §. 1. piemēru), hiperbolai — negatīvs, parabolai — vienāds ar nulli.

P i e r ā d ī j u m s. Elipsi izsaka vienādojums $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=$ $=0$. Šim vienādojumam mazais diskriminants $\delta=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b^2}>0$. Koordinātu transformācijā δ saglabā savu lielumu, bet, pareizinot abas vienādojuma puses ar kādu skaitli k, diskriminants pareizinās ar k (66. §. piezīme). Tādējādi elipses diskriminants ir pozitīvs jebkurā koordinātu sistēmā. Hiperbolai un parabolai pierādījums ir analogs.

Ievērojot to, izšķir trīs otrās kārtas līniju (un otrās pakāpes vienādojumu) tipus:

a) *eliptisko tipu* raksturo noteikums

$$\delta=AC-B^2>0.$$

Bez reālas elipses šeit ietilpst arī imagināra elipse (58. §. 5. piemērs) un imagināru taišņu pāris, kas krustojas reālā punktā (58. §., 4. piemērs);

---

[1] Ir arī mākslotі paņēmieni, kas atvieglo pierādījumu.

b) *hiperbolisko tipu* raksturo noteikums

$$\delta = AC - B^2 < 0.$$

Bez hiperbolas šeit ietilpst arī reālu krustojošos taišņu pāris (58. §. 1. piemērs);

c) *parabolisko tipu* raksturo noteikums

$$\delta = AC - B^2 = 0.$$

Bez parabolas šeit ietilpst arī paralēlu (reālu vai imagināru) taišņu pāris (tās var arī saplūst).

1. piemērs. Vienādojums

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + y = 0 \tag{1}$$

pieder paraboliskajam tipam, jo

$$\delta = AC - B^2 = 1 \cdot 1 - 1^2 = 0.$$

Tā kā lielais diskriminants

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}$$

nav vienāds ar nulli, tad vienādojums (1) izsaka nedeģenerētu līniju, t. i., parabolu (sal. 61. un 62. §. 2. piemēru).

2. piemērs. Vienādojums

$$8x^2 + 24xy + y^2 - 56x + 18y - 55 = 0 \tag{2}$$

pieder hiperboliskajam tipam, jo

$$\delta = AC - B^2 = 8 \cdot 1 - 12^2 = -136 < 0;$$

tā kā

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 12 & -28 \\ 12 & 1 & 9 \\ -28 & 9 & -55 \end{vmatrix} = 0,$$

tad vienādojums (2) izsaka krustojošos taišņu pāri. To vienādojumus var atrast ar 65. §. norādīto paņēmienu.

3. piemērs. Vienādojums

$$2x^2-4xy+5y^2-x+5y-4=0$$

pieder eliptiskajam tipam, jo

$$\delta=AC-B^2=5\cdot 2-2^2=6>0.$$

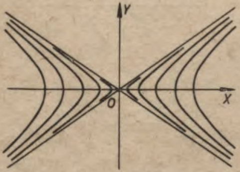
Tā kā

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -2 & -\frac{1}{2} \\ -2 & 5 & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -4 \end{vmatrix}\neq 0,$$

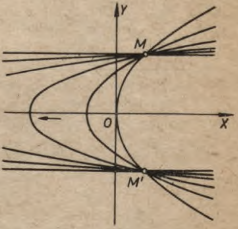
88. zīm.

tad līnija nav deģenerēta un tātad izsaka elipsi.

Piezīme. Viena tipa līnijas ģeometriski interpretējamas tā: krustojošos imagināru taišņu pāris (t. i., viens reāls punkts) ir robežgadījums elipsei, kura «sarāvusies punktā» (88. zīm.); krustojošos reālu taišņu pāris ir robežgadījums



89. zīm.

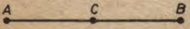


90. zīm.

hiperbolai, kura tuvojas savām asimptotām (89. zīm.); paralēlu taišņu pāris ir robežgadījums parabolai, kurai ass un asij simetrisku punktu pāris M, M' paliek nekustīgi, bet virsotne attālinās bezgalībā (90. zīm.).

68. §. Centrālās un necentrālās otrās kārtas līnijas

D e f i n ī c i j a. Punktus A un B (91. zīm.) sauc par *simetriskiem* attiecībā pret punktu C, ja C dala uz pusēm nogriezni AB. Punktu C sauc par figūras *simetrijas centru* (jeb īsāk par *centru*), ja figūras katram punktam M atbilst figūras punkts N, kas ir simetrisks ar M attiecībā pret C.

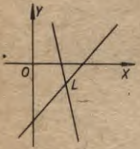


91. zīm.

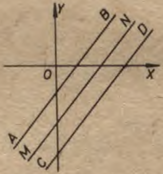
Punkts, ko mēs nosaucām par elipses centru (40. §.), un arī punkts, ko mēs nosaucām par hiperbolas centru (44. §.), acīm redzot, pakļaujas šai definīcijai. Otrās kārtas līnijai, kura sadalās divās krustojošās taisnēs (58. §.), centrs saskaņā ar šo definīciju būs šo taišņu krustošanās punkts (L 92. zīmējumā).

Visām iepriekš minētajām otrās kārtas līnijām ir viens vienīgs centrs. Ja otrās kārtas līnija sastāv no divām paralēlām taisnēm (AB un CD 93. zīmējumā), tad centra definīciju izpilda j e b k u r š taisnes MN punkts, kura ir vienādi attālināta no AB un CD.

Parabolai pavisam nav centra.



92. zīm.



93. zīm.

Otrās kārtas līnijas, kurām ir viens vienīgs centrs (elipsi, hiperbolu, krustojošos taišņu pāri), sauc par *centrālām* līnijām; otrās kārtas līnijas, kurām ir vairāki centri vai arī nemaz to nav (parabola, paralēlu taišņu pāris), sauc par *necentrālām* līnijām.

P i e z ī m e. Imagināras elipses un imagināru taišņu pāri, kuras krustojas reālā punktā (sk. 58. §.), pieskaita centrālām līnijām. Imaginārai elipsei šī pieskaitīšana ir saprotama — figūra, kas sastāv no viena reāla punkta, izpilda centrālās «līnijas» definīciju (šis punkts pats ir centrs). Imagināru paralēlu taišņu pārus pieskaita necentrālām līnijām.

Tādējādi otrās kārtas līnijas, kas pieder eliptiskajam un hiperboliskajam tipam (šīm līnijām $AC-B^2\neq 0$; sk. 67. §.), ir centrālas līnijas, bet paraboliska tipa līnijas ($AC-B^2=0$) ir necentrālas.

69. §. Otrās kārtas centrālas līnijas centra atrašana

Lai atrastu centrālas līnijas

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \tag{1}$$

centra koordinātes x_0, y_0, tad jāatrisina vienādojumu sistēma

$$\left.\begin{aligned} Ax_0+By_0+D=0,\\ Bx_0+Cy_0+E=0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Šai sistēmai ir viens vienīgs atrisinājums (187. §.)

$$x_0=-\frac{\begin{vmatrix} D & B \\ E & C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}},\quad y_0=-\frac{\begin{vmatrix} A & D \\ B & E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}, \tag{3}$$

jo $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}\neq 0$ (tas ir centrālas līnijas noteikums; 68. §.).

1. piemērs. Līnijas

$$8x^2+24xy+y-56x+18y-55=0 \tag{4}$$

(67. §. 2. piemērs) centru atrodam, atrisinot vienādojumu sistēmu

$$\begin{aligned} 8x_0+12y_0-28=0,\\ 12x_0+y_0+9=0. \end{aligned}$$

Dabūsim

$$x_0=\frac{\begin{vmatrix} -28 & 12 \\ 9 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 12 \\ 12 & 1 \end{vmatrix}}=-1,\quad y_0=-\frac{\begin{vmatrix} 8 & -28 \\ 12 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 12 \\ 12 & 1 \end{vmatrix}}=3.$$

Tā kā (4) ir hiperboliska tipa deģenerēta līnija, tad punkts $(-1;\ 3)$ ir to taišņu krustošanās punkts, kuras veido līniju (4).

2. p i e m ē r s. Līnijas

$$2x^2-4xy+5y^2-x+5y-4=0 \tag{5}$$

(61. §. 1. piemērs) centru atrodam, atrisinot sistēmu

$$2x_0-2y_0-\frac{1}{2}=0,$$

$$-2x_0+5y_0+\frac{5}{2}=0.$$

Dabūsim

$$x_0=\frac{5}{12},\quad y_0=-\frac{2}{3}.$$

Līnija (5) ir elipse, jo $\delta>0$ un $\Delta\neq 0$.

V i e n ā d o j u m u (2) a t r a š a n a. Ja pārnesam sākumu meklētajā centrā $C(x_0;\ y_0)$, tad vienādojums (1), lietojot transformācijas formulas

$$x=x_0+x',\quad y=y_0+y', \tag{6}$$

pārveidosies formā

$$Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2+2(Ax_0+By_0+D)x'+$$
$$+2(Bx_0+Cy_0+E)y'+F'=0, \tag{7}$$

kur īsuma dēļ apzīmēts

$$F'=Ax_0^2+2Bx_0y_0+Cy_0^2+2Dx_0+2Ey_0+F.$$

Ja x_0, y_0 apmierinās vienādojumus (2), tad vienādojums (7) pieņems izskatu

$$Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2+F'=0. \tag{8}$$

Šo vienādojumu var pārrakstīt tā

$$A(-x')^2+2B(-x')(-y')+C(-y')^2+F'=0.$$

Tāpēc, ja punkts $M(x';\ y')$ piederēs līnijai (8), šī līnija saturēs arī punktu $N(-x';\ -y')$, kas būs simetrisks ar punktu M attiecībā pret jauno sākumu C. Tādējādi (68. §.) C ir līnijas (8) centrs.

70. §. Otrās kārtas centrālas līnijas vienādojuma vienkāršošana

Centrālas līnijas vienādojuma transformāciju vienkāršākajā veidā var izpildīt ātrāk nekā ar 60. paragrāfa vispārīgo paņēmienu, ja vispirms sākumu pārnes centrā (kāpēc izzudīs pirmās pakāpes locekļi, sk. 69. §), bet pēc tam pagriež asis (kāpēc izzudīs loceklis, kas satur xy). Pagrieziena leņķis α ir jau iepriekš zināms (61. §.); to nosaka no vienādojuma

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A-C}. \tag{1}$$

P i e z ī m e. Šo paņēmienu var lietot jebkurai centrālai otrās kārtas līnijai, bet deģenerētai līnijai izdevīgāk lietot 65. §. paņēmienu.

P i e m ē r s. Dots vienādojums (61. un 62. § 1. piemērs)

$$2x^2-4xy+5y^2-x+5y-4=0. \tag{2}$$

Pārnesam sākumu centrā $x_0=-\frac{5}{12}$, $y_0=-\frac{2}{3}$ (69. §. 2. piemērs).

Ar transformācijas formulām

$$x=x_0+x', \quad y=y_0+y' \tag{3}$$

dabūjam [sal. 69. §. (8)]

$$2x'^2-4x'y'+5y'^2-\frac{131}{24}=0. \tag{4}$$

No vienādības (1) atrodam $\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{4}{3}$ un, ja leņķi α ņemam pirmajā kvadrantā (sal. 61. §.), tad dabūjam pagrieziena formulas

$$\left.\begin{aligned} x'&=\frac{2}{\sqrt{5}}x-\frac{1}{\sqrt{5}}y, \\ y'&=\frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{2}{\sqrt{5}}y. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Ievietojot vienādojumā (4), atrodam

$$\bar{x}^2+6\bar{y}^2=\frac{131}{24} \tag{6}$$

jeb

$$\frac{\bar{x}^2}{\frac{131}{24}}+\frac{\bar{y}^2}{\frac{131}{144}}=1. \tag{7}$$

Šī līnija ir elipse ar pusasīm $a=\sqrt{\frac{131}{24}}\approx 2,3$ un $b=\sqrt{\frac{131}{144}}\approx$ $\approx 1,0$. Sākotnējā sistēmā tās centram ir koordinātes $x_0=-\frac{5}{12}$, $y_0=-\frac{2}{3}$, lielo asi (tā ir abscisu ass sistēmā $\bar{x}$, $\bar{y}$) izsaka vienādojums $y-y_0=\operatorname{tg}\alpha\,(x-x_0)$ jeb $y+\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\left(x+\frac{5}{12}\right)$, t. i., $12x-24y-11=0$ (sal. 62. §. 1. piemēru).

P i e z ī m e. Elipses izmērus var atrast arī, neizpildot koordinātu transformāciju. Mēs jau iepriekš zinām, ka transformācijas rezultātā jārodas vienādojumam $\bar{A}\bar{x}^2+\bar{C}\bar{y}^2+\bar{F}=0$. Lielumus $\bar{A}$, $\bar{C}$ un $\bar{F}$ var atrast ar invariantu palīdzību (66. §.). Dotajam vienādojumam tie ir vienādi

$$A+C=2+5=7,\quad \delta=AC-B^2=2\cdot 5-(-2)^2=6,$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}=-\frac{131}{4}.$$

Tās pašas vērtības invarianti paturēs vienkāršotajā vienādojumā. Tādējādi

$$\bar{A}+\bar{C}=7,\quad \bar{A}\bar{C}=6,$$

$$\begin{vmatrix} \bar{A} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{C} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{F} \end{vmatrix}=\bar{A}\bar{C}\bar{F}=-\frac{131}{4},$$

no kurienes

$$\bar{A}=1,\quad \bar{C}=6,\quad \bar{F}=-\frac{131}{24},$$

un atkal esam dabūjuši vienādojumu (6).

71. §. Vienādsānu hiperbola kā vienādojuma $y=\frac{k}{x}$ grafika

Vienādojums

$$y=\frac{k}{x} \tag{1}$$

($k\neq0$) izsaka vienādsānu hiperbolu (44. §); tās asimptotas sakrīt ar koordinātu asīm. Tās pusasis ir

$$a=b=\sqrt{2|k|}. \tag{2}$$

94. zīm.

Ja $k>0$, tad viens hiperbolas zars atrodas pirmajā, bet otrs — trešajā kvadrantā, ja turpretim $k<0$, tad viens zars atrodas otrajā, otrs — ceturtajā kvadrantā (94. zīm.). Pirmajā gadījumā hiperbolas reālā ass veido ar abscisu asi 45° leņķi, otrajā gadījumā šis leņķis ir −45°.

Visu to var konstatēt ar 61. §. doto paņēmienu, ja vienādojumu (1) uzraksta formā

$$xy=k. \tag{3}$$

Piezīme. Gadījumā, ja $k=0$, vienādojums (3) izsaka taišņu pāri $y=0$ (abscisu asi) un $x=0$ (ordinātu asi). Ja $|k|$ neierobežoti samazinās, tad hiperbolas (3) ciešāk pieklaujas šīm taisnēm (tā ka perpendikulāru taišņu pāri var uzskatīt par deģenerētu vienādsānu hiperbolu).

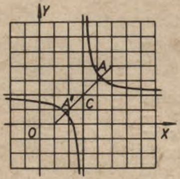
Vienādojums (1), ja $k=0$, izsaka tikai vienu taisni $y=0$ (abscisu asi) un pie tam ne pilnīgi, bet bez koordinātu sākuma, jo, ja $k=0$ un $x=0$, tad izteiksme $y=\frac{k}{x}$ kļūst nenoteikta. Ja šim nenoteiktajam lielumam dodam visas iespējamās vērtības, tad arī dabūsim «pazudušo» ordinātu asi.

72. §. Vienādsānu hiperbola kā vienādojuma $y=\dfrac{mx+n}{px+q}$ grafika

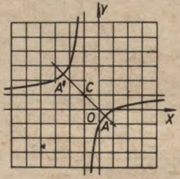
Apskatīsim vienādojumu

$$y=\frac{mx+n}{px+q}, \tag{1}$$

ja $p\neq 0$ $\left(\text{ja } p=0, \text{ tad dabūjam taisni } y=\frac{m}{q}x+\frac{n}{q}\right)$.



95. zīm.



96. zīm.

Ja determinants

$$D=\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix}=mq-np$$

nav vienāds ar nulli, tad vienādojums (1) izsaka to pašu vienādsānu hiperbolu, ko 71. §. vienādojums (1)

$$y=\frac{k}{x},$$

kur $k=-\frac{D}{p^2}$; vienīgā atšķirība ir tā, ka centrs no koordinātu sākuma pārvietots punktā $C\left(-\frac{q}{p}; \frac{m}{p}\right)$ (95. un 96. zīm.). Tātad pusasis ir vienādas $a=b=\sqrt{\frac{2|D|}{p^2}}$.

Gadījumā, ja $D<0$ (tad $k>0$), reālā ass veido ar abscisu asi 45° lielu leņķi (95. zīm.), ja turpretim $D>0$, tad leņķis ir $-45°$ (96. zīm.).

1. piemērs. Vienādojums

$$y=\frac{4x-9}{2x-6}$$

$$\left(\text{šeit } m=4,\ n=-9,\ p=2,\ q=-6,\ D=\begin{vmatrix}4 & -9\\ 2 & -6\end{vmatrix}=-6\right)$$

izsaka vienādsānu hiperbolu (95. zīm.) ar centru $C(3;2)$ un pusasīm $a=b=\sqrt{\frac{2\cdot 6}{2^2}}=\sqrt{3}\approx 1{,}73$. $A'A$ ass veido ar OX asi 45° leņķi, jo $D<0$. Virsotnes A koordinātes būs

$$x_A=x_C+a\cos 45°=3+\sqrt{3}\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 4{,}2,$$

$$y_A=y_C+a\sin 45°=2+\sqrt{3}\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 3{,}2.$$

Tāpat atrodam

$$x_{A'}=3-\sqrt{3}\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 1{,}8,\quad y_{A'}=2-\sqrt{3}\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}8.$$

2. piemērs. Vienādojums

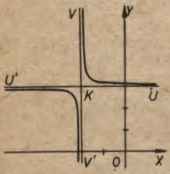
$$y=\frac{x-1}{x+1}$$

(šeit $m=1$, $n=-1$, $p=1$, $q=1$, $D=2$) izsaka vienādsānu hiperbolu (96. zīm.) ar centru $C(-1;1)$ un pusasīm $a=b=$ $=\sqrt{\frac{2\cdot 2}{1^2}}=2$. $A'A$ ass veido ar OX asi $-45°$ leņķi, jo $D>0$.

1. piezīme. Ja determinants $D=\begin{vmatrix}m & n\\ p & q\end{vmatrix}$ ir vienāds ar nulli, tad lielumi m, n un p, q ir proporcionāli $\left(\frac{m}{p}=\frac{n}{q}\right)$, tā ka $mx+n$ dalās ar $px+q$; dalījums ir $\frac{m}{p}$. Šai gadījumā vienādojums (1) izsaka taisni $y=\frac{m}{p}$, kurai iztrūkst punkts

$x=-\frac{q}{p}$ (ja $x=-\frac{q}{p}$, tad izteiksme (1) ir nenoteikta; sk. 71. §. piezīmi).

Piemēram, vienādojums $y=\frac{3x+6}{x+2}$ $\left(m=3,\ n=6,\ p=1,\ q=2,\ D=\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=0\right)$ izsaka taisni $y=3$, kurai iztrūkst punkts $x=-2$. Ja nenoteiktajam lielumam y dosim visas iespējamās vērtības, tad bez taisnes $y=3$ dabūsim vēl taisni $x=-2$.



97. zīm.

2. piezīme. Punkta $x=-2$ «izkrišanu» no taisnes $y=3$ uzskatāmi var iztēlot tā. Apskatām vienādojumu $y=\frac{3x+6\beta}{x+2}$; šeit $D=\begin{vmatrix} 3 & 6\beta \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=6(1-\beta)$, tā ka, ja $\beta\neq 1$, mēs dabūjam hiperbolu ar asimptotām $x=-2$ un $y=3$; bet, ja lielums β maz atšķiras no 1, tad šī hiperbola (97. zīm., kur $\beta=1{,}1$) ļoti cieši piekļaujas savām asimptotām $U'U$ un $V'V$, kuras krustojas punktā $K(-2; 3)$. Var sagaidīt, ka, ja $\beta=1$, mēs dabūsim taišņu pāri $U'U$ ($y=3$) un $V'V$ ($x=-2$). Tomēr taisne $V'V$ «izkrīt», jo tā ir paralēla OY asij, un tātad (14. §. 2. piezīme) to nevar izteikt ar vienādojumu, kas atrisināts attiecībā pret ordināti. Līdz ar taisni $V'V$ «izkrīt» arī punkts K, kas uz tās atrodas.

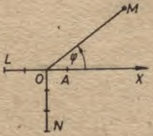
73. §. Polārās koordinātes

Ņemam plaknē (98. zīm.) patvaļīgu punktu O *(pols)* un novelkam staru OX *(polārā ass)*. Ņemam kādu nogriezni OA par garuma mērvienību un kādu leņķi (parasti ņem radiānu) par leņķa mērvienību. Tad jebkura punkta M stāvokli plaknē var uzdot ar diviem skaitļiem: 1) pozitīvu skaitli ϱ, kas izsaka nogriežņa OM garumu *(polārais rādiuss)*, 2) skaitli φ, kas izsaka leņķa XOM lielumu *(polārais leņķis)*. Skaitļus ϱ un φ sauc par punkta M *polārajām koordinātēm*.

1. piemērs. Polārās koordinātes $\varrho=3$, $\varphi=-\frac{\pi}{2}$ nosaka

punktu N (98. zīm.), polārās koordinātes $\varrho=3$, $\varphi=\frac{3\pi}{2}$ — to pašu punktu N, polārās koordinātes $\varrho=1$, $\varphi=0$ (un arī $\varrho=1$, $\varphi=2\pi$ vai $\varrho=1$, $\varphi=-2\pi$ utt.) — punktu A.

Katram ϱ, φ vērtību pārim atbilst tikai viens punkts, bet vienam un tam pašam punktam M atbilst bezgalīgi daudzas polārā leņķa vērtības, kas atšķiras viena no otras par 2π



98. zīm.

99. zīm.

daudzkārtni (sal. 1. piemēru). Ja punkts M sakrīt ar polu, tad polārā leņķa vērtība kļūst pilnīgi patvaļīga.

Var vienoties ņemt tikai vienu polārā leņķa vērtību, piemēram, ņemt φ robežās

$$-\pi<\varphi\leqslant\pi. \tag{1}$$

Tādu polārā leņķa vērtību sauc par *galveno.*

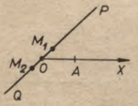
2. piemērs. Punktam N (98. zīm.) atbilst polārās koordinātes $\varrho=3$, $\varphi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$; polārā leņķa galvenā vērtība ir $-\frac{\pi}{2}$.

Punktam L atbilst polārās koordinātes $\varrho=2$, $\varphi=\pi+2k\pi$; galvenā φ vērtība saskaņā ar noteikumu (1) ir π (un nevis $-\pi$).

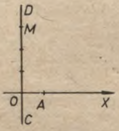
Lietojot galvenās vērtības, katram punktam (izņemot polu) atbilst viens polāro koordinātu pāris. Polam $\varrho=0$, bet φ paliek patvaļīgs.

1. piezīme. Ja punkts M, aprakstot riņķa līniju ar centru polā O (99. zīm.), krusto punktā K polārās ass turpinājumu, tad polārā leņķa galvenā vērtība mainās ar lēcienu (punktā M_1 tā maz atšķiras no π, bet punktā M_2 — no $-\pi$). Tāpēc daudzos gadījumos nav lietderīgi ierobežoties tikai ar φ galvenajām vērtībām.

2. piezīme. Ja punkts M, aprakstot taisni PQ (100. zīm.), iet caur polu O, tad φ vērtība mainās ar lēcienu. Piemēram, ja $\angle XOP=\frac{\pi}{4}$, tad punktam M_1 (uz stara



100. zīm.



101. zīm.

OP) $\varphi=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, bet punktam M_2 (uz stara OQ) $\varphi=$ $=-\frac{3\pi}{4}+2n\pi$ (k un n ir veseli skaitļi). Lai to novērstu, *visiem* taisnes PQ *punktiem* var pierakstīt vienu un to pašu vērtību, piemēram, $\varphi=\angle XOP$, bet polāros rādiusus skaitīt par pozitīviem uz stara OP un par negatīviem uz stara OQ. Piemēram, polārās koordinātes

$$\varphi=\frac{\pi}{4}, \quad \varrho=\frac{1}{2}$$

nosaka punktu M_1, bet polārās koordinātes

$$\varphi=\frac{\pi}{4}, \quad \varrho=-\frac{1}{2}$$

— punktu M_2.

Tos pašus punktus var uzdot ar koordinātēm

$$\varphi=-\frac{3}{4}\pi, \quad \varrho=\frac{1}{2}$$

(punkts M_2) un

$$\varphi=-\frac{3}{4}\pi, \quad \varrho=-\frac{1}{2}$$

(punkts M_1). Pie tam mēs visiem taisnes PQ punktiem pierakstām vērtību $\varphi=\angle XOQ$, tā kā ϱ ir pozitīvs uz stara OQ un negatīvs uz OP.

3. p i e m ē r s. Konstruēt punktu M ar polārajām koordinātēm

$$\varrho=-3, \quad \varphi=-\frac{\pi}{2}.$$

Polārajam leņķim $\varphi=-\frac{\pi}{2}$ atbilst stars OC (101. zīm.). Uz tā turpinājuma OD atliekam $OM=3OA$. Dabūjam meklēto punktu M. Tam pašam punktam atbilst polārās koordinātes $\varrho=3$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

74. §. Sakarības starp polārajām un taisnleņķa koordinātēm

Pieņemsim, ka polārās sistēmas pols O (102. zīm.) sakrīt ar taisnleņķa sistēmas sākumu un polārā ass OX sakrīt ar pozitīvo abscisu asi. Pieņemsim, ka M ir patvaļīgs plaknes punkts; x un y ir tā taisnleņķa koordinātes, bet ϱ, φ — polārās koordinātes. Tad

$$x=\varrho\cos\varphi, \quad y=\varrho\sin\varphi. \tag{1}$$

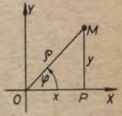
Otrādi [1]

$$\varrho=\sqrt{x^2+y^2}, \tag{2}$$

$$\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{3}$$

un

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}. \tag{4}$$

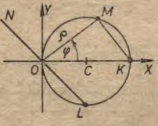


102. zīm.

[1] Formulās (2) un (3) pieņemts, ka polārais rādiuss ϱ vienmēr ir pozitīvs. Ja apskata arī negatīvas ϱ vērtības (73. § 2. piezīme), tad formulas (2) un (3) jāraksta tā: $\varrho=\pm\sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\varphi=\frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin\varphi=\frac{y}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}$ (zīmes jāņem vai nu tikai augšējās, vai tikai apakšējās). Formulas (1) un (4) nemainās.

Formula (4) viena pati [un arī tikai viena no formulām (3)] pilnīgi nenosaka leņķi φ (sk. 1. piemēru).

1. piemērs. Punkta taisnleņķa koordinātes ir $x=2$, $y=-2$. Atrast tā polārās koordinātes (ja abas sistēmas novietotas tā, kā iepriekš norādīts).



103. zīm.

104. zīm.

Atrisinājums. Formula (2) dod

$$\varrho=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2},$$

bet formula (4) $\operatorname{tg}\varphi=\frac{-2}{2}=-1$. Tātad vai nu $\varphi=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$, vai arī $\varphi=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$. Tā kā punkts atrodas ceturtajā kvadrantā, tad pareiza ir tikai pirmā vērtība. Galvenā φ vērtība ir $-\frac{\pi}{4}$.

Ja lietojam formulu $\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, tad dabūjam $\cos\varphi=$ $=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Tādējādi vai nu $\varphi=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, vai arī $\varphi=-\frac{\pi}{4}+$ $+2k\pi$. Tikai otrā vērtība ir pareiza.

2. piemērs. Taisnleņķa sistēmā XOY 103. zīmējumā attēloto riņķa līniju izsaka vienādojums (38. §.) $(x-R)^2+$ $+y^2=R^2$. Formulas (1) un (2) ļauj atrast tās vienādojumu polārajā sistēmā (O — pols, OX — polārā ass). Dabūjam $\varrho^2-2R\varrho\cos\varphi=0$. Šis vienādojums sadalās divos vienādojumos: 1) $\varrho=0$, 2) $\varrho-2R\cos\varphi=0$. Pirmais vienādojums (jebkurai φ vērtībai) izsaka polu O. Otrs vienādojums dod visus riņķa līnijas punktus, ieskaitot arī polu (ja $\varphi=\frac{\pi}{2}$ un $\varphi=$

$=-\frac{\pi}{2}\Big)$. Tāpēc pirmo vienādojumu varam atmest; dabūjam

$$\varrho=2R\cos\varphi. \qquad (5)$$

Šo vienādojumu var dabūt arī tieši no trijstūra OMK ar taisno leņķi pie virsotnes M ($OK=2R$, $OM=\varrho$, $\angle KOM=\varphi$).

Piezīme. Ja ϱ neatļauj pieņemt negatīvas vērtības, tad vienādojumā (5) leņķi φ drīkst ņemt pirmajā un ceturtajā kvadrantā, bet otrajā un trešajā kvadrantā ņemt nedrīkst. Tā, ja $\varphi=\frac{3}{4}\pi$, vienādojums (5) dod $\varrho=-R\sqrt{2}$. Īstenībā staram ON (103. zīm.) bez pola nav kopīgu punktu ar riņķa līniju. Ja atļaujam ϱ pieņemt negatīvas vērtības (73. §. 2. piezīme), tad koordinātes $\varrho=-R\sqrt{2}$, $\varphi=\frac{3}{4}\pi$ dod punktu L uz taisnes ON turpinājuma.

3. piemērs. Noteikt, kādu līniju izsaka vienādojums

$$\varrho=2a\sin\varphi. \qquad (6)$$

Atrisinājums. Pārejot uz taisnleņķa sistēmu atrodam

$$\sqrt{x^2+y^2}=2a\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

t. i.,

$$x^2+y^2-2ay=0$$

jeb

$$x^2+(y-a)^2=a^2.$$

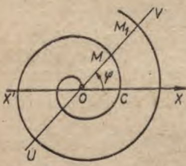
Vienādojums (6) izsaka riņķa līniju ar rādiusu a (104. zīm.), kura iet caur polu O un pieskaras polārajai asij OX.

75. §. Arhimēda spirāle [1]

1. Definīcija. Pieņemsim, ka taisne UV (105. zīm.), izejot no sākuma stāvokļa $X'X$, vienmērīgi griežas ap nekustīgu punktu O, bet punkts M, izejot no sākuma stāvokļa O, vienmērīgi kustas pa UV. Līnija, kuru apraksta punkts M,

[1] Sīkākas ziņas par Arhimēda spirāli sk. 858. lpp.

nosaukta par *Arhimēda spirāli* — par godu ievērojamam sengrieķu zinātniekam Arhimēdam (3. gs. pirms m. ē.), kurš pirmais pētīja šo līniju.



105. zīm.

106. zīm.

Piezīme. No definīcijā minētajiem kinemātiskajiem jēdzieniem var izvairīties, aizstājot tos ar noteikumu, lai attālums $\varrho = OM$ būtu proporcionāls taisnes UV pagrieziena leņķim φ.

Taisnes UV pagriezienam no jebkura tās stāvokļa par doto leņķi atbilst viens un tas pats attāluma ϱ pieaugums. Atsevišķā gadījumā pilnam apgriezienam atbilst viens un tas pats pārvietojums $MM_1 = a$. Nogriezni a sauc par Arhimēda spirāles *soli.*

Dotajam solim a atbilst divas Arhimēda spirāles, kas atšķiras viena no otras ar taisnes UV griešanās virzienu. Ja taisne griežas pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam, tad rodas *labā* spirāle (106. zīm. nepārtraukta līnija), ja tā griežas pulksteņa rādītāja kustības virzienā, tad — *kreisā* spirāle (106. zīm. punktētā līnija).

Labo un kreiso spirāli ar vienu un to pašu soli var sakļaut, bet šai nolūkā viena no tām ir jāapgriež uz otru pusi.

Kā 106. zīmējumā redzams, labo un kreiso spirāli ar vienu un to pašu soli var uzskatīt par diviem zariem līnijai, kuru apraksta punkts M, ja tas pārvietojas pa visu taisni UV, izejot arī caur punktu O.

2. Polārais vienādojums (O — pols, polārās ass OX virziens sakrīt ar punkta M kustības virzienu, kad tas iziet caur punktu O, a — spirāles solis) Arhimeda spirālei ir

$$\frac{\varrho}{a} = \frac{\varphi}{2\pi}. \qquad (1)$$

Pozitīvām φ vērtībām atbilst labais zars, negatīvām vērtībām — kreisais zars.

Vienādojumu (1) var pārrakstīt formā

$$\varrho = k\varphi,$$

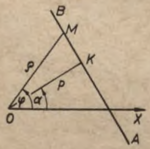
kur k (Arhimēda spirāles *parametrs*) ir punkta M pārvietojums $\frac{a}{2\pi}$ pa taisni UV, ja pēdējā pagriežas par vienu radiānu lielu leņķi.

76. §. Taisnes polārais vienādojums

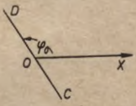
Taisni AB (107. zīm.), kas neiet caur polu, polārajās koordinātēs izsaka vienādojums

$$\varrho = \frac{p}{\cos(\varphi - \alpha)}, \qquad (1)$$

kur $\varrho = OK$ un $\alpha = \angle XOK$ ir taisnes AB polārie parametri (29. §.).



107. zīm.



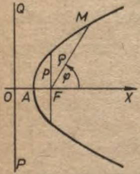
108. zīm.

Vienādojums (1) rodas no trijstūra OKM (kur $OM = \varrho$ un $\angle KOM = \varphi - \alpha$).

Taisni CD (108. zīm.), kas iet caur polu, nevar izteikt ar vienādojumu (1) [šādai taisnei $p = 0$ un $\varphi - \alpha = \pm\frac{\pi}{2}$, tā ka $\cos(\varphi - \alpha) = 0$]. Šīs taisnes staru OD izsaka vienādojums $\varphi = \varphi_0$ (kur $\varphi_0 = \angle XOD$), bet staru OC — vienādojums $\varphi = \varphi_1$ (kur $\varphi_1 = \angle XOC$). Katrs no šiem vienādojumiem var izteikt visu taisni, ja ϱ atļauj pieņemt negatīvas vērtības (73. §. 2. piezīme).

77. §. Konusa šķēluma polārais vienādojums

Novietosim polu konusa šķēluma (elipses, hiperbolas vai parabolas) fokusā F (109. zīm.), bet polāro asi sakļausim ar konusa šķēluma asi FX, vēršot to projām no atbilstošās direktrises PQ. Tad konusa šķēlumu izteiks vienādojums



109. zīm.

$$\varrho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}, \tag{1}$$

kur p ir konusa šķēluma parametrs, bet ε ekscentricitāte (52. §).

Piezīme. Ja ϱ atļaujam pieņemt tikai pozitīvas vērtības, tad hiperbolas gadījumā ($\varepsilon > 1$) vienādojums (1) izsaka tikai vienu zaru — to, kura iekšpusē atrodas fokuss. Pie tam φ ir jāapmierina nevienādība $1 - \varepsilon \cos \varphi > 0$. Ja apskatām arī negatīvas ϱ vērtības, tad φ drīkst pieņemt jebkuru vērtību un, ja $1 - \varepsilon \cos \varphi < 0$, dabūjam hiperbolas otru zaru.

ANALĪTISKĀ ĢEOMETRIJA TELPĀ

78. §. Jēdziens par vektoriem un skalāriem

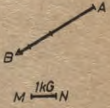
Par *vektoriālu lielumu* jeb *vektoru* (plašā nozīmē) sauc jebkuru lielumu, kam ir virziens. Par *skalāru lielumu* jeb *skalāru* sauc lielumu, kam nav virziena.

1. piemērs. Spēks, kas darbojas uz materiālu punktu, ir vektors, jo tam ir virziens. Materiāla punkta ātrums arī ir vektors.

2. piemērs. Ķermeņa temperatūra ir skalārs, jo ar šo lielumu nav saistīts nekāds virziens. Ķermeņa masa un tā blīvums arī ir skalāri.

Ja neievērojam vektoriālā lieluma virzienu, tad to, tāpat kā skalāru lielumu, var mērīt, izvēloties atbilstošu mērvienību. Bet mērīšanas rezultātā iegūtais skaitlis skalāru lielumu raksturo pilnīgi, turpretim vektoriālu lielumu — tikai daļēji.

Vektoriālu lielumu pilnīgi var raksturot ar vērstu (orientētu) nogriezni, iepriekš uzdodot lineāru mērogu.



110. zīm.

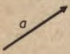
3. piemērs. Vērstais nogrieznis AB 110. zīmējumā mērogā MN, kas attēlo spēka vienību (1 kG), raksturo 3,5 kG lielu spēku, kura virziens sakrīt ar nogriežņa AB virzienu (vērsumu norāda bultiņa).

79. §. Vektori ģeometrijā

Par *vektoru* ģeometrijā (šaurā nozīmē) sauc jebkuru vērstu nogriezni.

Vektoru, kura sākums ir punkts A, bet gals — punkts B, apzīmē ar $\overrightarrow{AB}$ (110. zīm.).

Vektoru apzīmē arī ar vienu burtu, kā parādīts 111. zīmējumā. Šo burtu dod treknā iespiedumā ($\boldsymbol{a}$), bet rakstos virs tā liek svītriņu ($\bar{a}$).



111. zīm.

Vektora garumu sauc arī par tā *moduli*. Modulis ir s k a l ā r s l i e l u m s.

Vektora moduli apzīmē ar divām vertikālām svītriņām — kreisajā un labajā pusē: $|\overrightarrow{AB}|$ jeb $|\boldsymbol{a}|$ jeb $|\bar{a}|$.

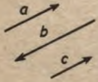
Ja vektors apzīmēts ar diviem burtiem, tad tā moduli dažkārt apzīmē ar tiem pašiem burtiem, bet bez bultiņas (AB ir vektora $\overrightarrow{AB}$ modulis), ja vektors apzīmēts ar vienu burtu, tad moduli apzīmē ar to pašu burtu parastā iespiedumā (b ir vektora $\boldsymbol{b}$ modulis).

80. §. Vektoru algebra

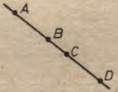
Ar vektoriem izpilda darbības, kuras sauc par vektoru saskaitīšanu, atņemšanu un reizināšanu (sk. tālāk). Šīm darbībām ir daudzas kopīgas īpašības ar algebriskajām saskaitīšanas, atņemšanas un reizināšanas darbībām. Tāpēc mācību par darbībām ar vektoriem sauc par *vektoru algebru.*

81. §. Kolineāri vektori

Vektorus, kas atrodas uz paralēlām taisnēm (vai uz vienas un tās pašas taisnes) sauc par *kolineāriem*. Vektori **a**,



112. zīm.



113. zīm.

b, **c** (112. zīm.) ir kolineāri. Vektori $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ un $\overrightarrow{CB}$ 113. zīmējumā ir kolineāri.

Kolineāriem vektoriem var būt viens un tas pats vērsums (*vienādvērsti* jeb *paralēli* vektori) vai pretēji vērsumi (*pre-*

tēji vērsti jeb *antiparalēli* vektori). Tā, vektori **a** un **c** (112. zīm.) ir vienādvērsti, vektori **a** un **b** (un arī **b** un **c**) ir pretēji vērsti. Vektori $\overrightarrow{AC}$ un $\overrightarrow{BD}$ 113. zīmējumā ir vienādvērsti, vektori $\overrightarrow{AC}$ un $\overrightarrow{CB}$ pretēji vērsti.

82. §. Nulles vektors

Ja nogriežņa AB sākums A un gals B sakrīt, tad nogrieznis AB pārvēršas punktā un zaudē virzienu. Lai padarītu vektoru algebras kārtulas vispārīgākas, tad sakritušu punktu pāris arī jāpieskaita vektoriem. Šo īpašo vektoru sauc par *nulles vektoru,* un tas ir kolineārs ar jebkuru vektoru.

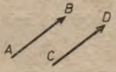
Nulles vektoru apzīmē tāpat kā skaitli nulle (ar 0 zīmi).

83. §. Vektoru vienādība

D e f i n ī c i j a. Divi (nenulles) vektori **a** un **b** ir vienādi, ja tie ir vienādvērsti un tiem ir viens un tas pats modulis. Visus nulles vektorus uzskata par vienādiem. Pārējos gadījumos vektori nav vienādi.

1. p i e m ē r s. Vektori $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{CD}$ (114. zīm.) ir vienādi.

2. p i e m ē r s. Vektori $\overrightarrow{OM}$ un $\overrightarrow{ON}$ (115. zīm.) nav vienādi (kaut arī tiem garumi ir vienādi), jo to virzieni ir dažādi. Vektori $\overrightarrow{ON}$ un $\overrightarrow{KL}$ arī nav vienādi, bet vektori $\overrightarrow{OM}$ un $\overrightarrow{KL}$ ir vienādi.



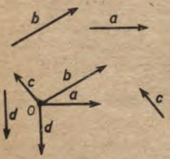
114. zīm.

115. zīm.

B r ī d i n ā j u m s. Nedrīkst jaukt jēdzienu «vektoru vienādība» ar jēdzienu «nogriežņu vienādība». Sakot «nogriežņi ON un KL ir vienādi», mēs apgalvojam, ka vienu nogriezni var sakļaut ar otru. Bet, lai to izdarītu, tad var gadīties, ka sakļaujamais nogrieznis jāpagriež (kā 115. zīmējumā). Tādā gadījumā saskaņā ar definīciju *vektori* $\overrightarrow{ON}$ un $\overrightarrow{KL}$ *nav vienādi.* Divi vektori būs vienādi tikai tai gadījumā, ja tos *var sakļaut bez pagrieziena.*

Apzīmējumi. Pieraksts $\mathbf{a}=\mathbf{b}$ izsaka, ka vektori $\mathbf{a}$ un $\mathbf{b}$ ir vienādi. Pieraksts $\mathbf{a}\neq\mathbf{b}$ izsaka, ka vektori $\mathbf{a}$ un $\mathbf{b}$ nav vienādi. Pieraksts $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|$ izsaka, ka vektoru $\mathbf{a}$ un $\mathbf{b}$ moduļi (garumi) ir vienādi, bet paši vektori $\mathbf{a}$ un $\mathbf{b}$ var būt vienādi, bet var arī viens ar otru nebūt vienādi.

3. piemērs. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ (114. zīm.), $\overrightarrow{ON}\neq\overrightarrow{KL}$ (115. zīm.), $|\overrightarrow{ON}|=|\overrightarrow{KL}|$ (115. zīm.), $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{KL}$ (115. zīm.).



116. zīm.

84. §. Vektoru pārnešana uz kopīgu sākumu

Visus vektorus (jebkurā skaitā) var «pārnest uz kopīgu sākumu», t. i., konstruēt vektorus, kas ir attiecīgi vienādi dotajiem vektoriem un kuriem ir kopīgs sākums kādā punktā O. Tāda vektoru pārnešana parādīta 116. zīmējumā.

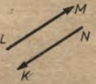
85. §. Pretēji vektori

Definīcija. Divus pretēji vērstus vektorus, kuriem ir vienādi moduļi, sauc par *pretējiem* vektoriem.

Vektoram $\mathbf{a}$ pretējo vektoru apzīmē ar $-\mathbf{a}$.

1. piemērs. Vektori $\overrightarrow{LM}$ un $\overrightarrow{NK}$ 117. zīmējumā ir pretēji vektori.

2. piemērs. Ja vektoru $\overrightarrow{LM}$ (117. zīm.) apzīmējam ar burtu $\mathbf{a}$, tad $\overrightarrow{NK}=-\mathbf{a}$, $\overrightarrow{ML}=-\mathbf{a}$, $\overrightarrow{KN}=\mathbf{a}$.



117. zīm.

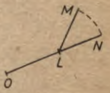
No definīcijas izriet: $-(-\mathbf{a})=\mathbf{a}$, $|-\mathbf{a}|=|\mathbf{a}|$.

86. §. Vektoru saskaitīšana

Definīcija. Par vektoru $\mathbf{a}$ un $\mathbf{b}$ *summu* sauc trešo vektoru $\mathbf{c}$, kuru dabū ar šādu konstrukciju: no patvaļīga sākuma O (118. zīm.) konstruējam vektoram $\mathbf{a}$ vienādu vektoru $\overrightarrow{OL}$ (83. §.); no punkta L, kā no sākuma, konstruējam ar vektoru **b** vienādu vektoru $\overrightarrow{LM}$. Vektors $\mathbf{c}=\overrightarrow{OM}$ ir vektoru **a** un **b** summa («trijstūra kārtula»).

Pieraksts: $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}$.

118. zīm.



119. zīm.

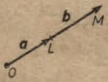
B r ī d i n ā j u m s. Nedrīkst jaukt jēdzienu «nogriežņu summa» ar jēdzienu «vektoru summa». Nogriežņu OL un LM summu dabū ar šādu konstrukciju: turpinām taisni OL (119. zīm.) un atliekam uz tās ar nogriezni LN vienādu nogriezni LM. Nogrieznis ON ir nogriežņu OL un LM summa. Vektoru $\overrightarrow{OL}$ un $\overrightarrow{LM}$ summu konstruē citādi (sk. definīciju).

Vektoru summai ir spēkā nevienādības

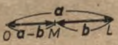
$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leq|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|, \qquad (1)$$

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\geq\big||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\big|, \qquad (2)$$

kas izsaka, ka trijstūra OML (118. zīm.) mala OM ir mazāka par abu pārējo malu summu un lielāka par to starpību. Formulā (1) vienādības zīme būs tikai vienādvērstiem vektoriem (120. zīm.), formulā (2) — tikai pretēji vērstiem vektoriem (121. zīm.).



120. zīm.



121. zīm.

122. zīm.

P r e t ē j u v e k t o r u s u m m a. No definīcijas izriet, ka *pretēju vektoru summa ir vienāda ar nulles vektoru*, t. i.,

$$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=0.$$

K o m u t a t ī v ā ī p a š ī b a. *Ja saskaitāmos samaina vietām, tad vektoru summa nemainās*:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}.$$

Paralelogramma kārtula. Ja saskaitāmie **a** un **b** *nav kolineāri*, tad summu **a**+**b** var atrast ar šādu konstrukciju: no jebkura sākuma O (122. zīm.) konstruējam vektorus $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ un $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$; uz nogriežņiem OA, OB konstruējam paralelogrammu $OACB$. Diagonāles vektors $\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$ ir vektoru **a** un **b** summa (jo $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$ un $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}$).

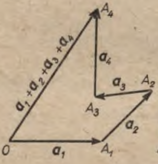
Kolineāriem vektoriem (120. un 121. zīm.) šī konstrukcija *nav lietojama*.

Piezīme. Vektoru saskaitīšanas definīcija dota saskaņā ar vektoriālu lielumu (piemēram, materiālam punktam pieliktu spēku) saskaitīšanas fizikālajiem likumiem.

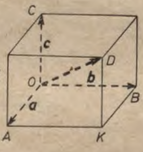
87. §. Vairāku vektoru summa

Definīcija. Par vektoru $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \ldots, \mathbf{a}_n$ *summu* sauc vektoru, kuru dabū, pēc kārtas saskaitot visus dotos vektorus: vektoram $\mathbf{a}_1$ pieskaita vektoru $\mathbf{a}_2$, dabūtajam vektoram pieskaita vektoru $\mathbf{a}_3$ utt.

No definīcijas izriet tāda konstrukcija (*daudzstūra kārtula* jeb *ķēdes kārtula*).



123. zīm.



124. zīm.

No patvaļīga sākuma O (123. zīm.) konstruējam vektoru $\overrightarrow{OA_1}=\mathbf{a}_1$, no punkta A_1, kā no sākuma, konstruējam vektoru $\overrightarrow{A_1A_2}=\mathbf{a}_2$, no punkta A_2 konstruējam vektoru $\overrightarrow{A_2A_3}=\mathbf{a}_3$ utt. Vektors $\overrightarrow{OA_n}$ (123. zīmējumā $n=4$) ir vektoru $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ summa.

Vektoru $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ summu apzīmē šādi: $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_4$.

Asociatīvā īpašība. *Saskaitāmos vektorus drīkst pēc patikas grupēt.* Tā, ja vispirms atrodam vektoru summu $\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_4$ (tā ir vienāda ar vektoru $\overrightarrow{A_1A_4}$, kas nav attēlots 123. zīmējumā) un tai pieskaitām vektoru $\mathbf{a}_1$ $(=\overrightarrow{OA_1})$, tad dabūsim to pašu vektoru $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_4$ $(=\overrightarrow{OA_4})$, t. i.,

$$\mathbf{a}_1+(\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_4)=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_4.$$

Paralēlskaldņa kārtula. Ja trīs vektori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ pēc pārnešanas uz kopīgu sākumu (84. §.) neatrodas vienā plaknē, tad summu $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ var atrast ar šādu konstrukciju. No jebkura sākuma O (124. zīm.) konstruējam vektorus $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$. Uz nogriežņiem OA, OB, OC kā uz šķautnēm konstruējam paralēlskaldni. Diagonāles vektors $\overrightarrow{OD}$ ir vektoru $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ un $\mathbf{c}$ summa (jo $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{KD}=\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$ un $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KD}$).

Vektoriem, kuri (pēc pārnešanas uz kopīgu sākumu) atrodas vienā plaknē, šī konstrukcija *nav lietojama.*

88. §. Vektoru atņemšana

Definīcija. Atņemt vektoru $\mathbf{a}_1$ (mazinātājs) no vektora $\mathbf{a}_2$ (mazināmais) nozīmē atrast jaunu vektoru $\boldsymbol{x}$ (starpību), kura summa ar vektoru $\mathbf{a}_1$ ir vektors $\mathbf{a}_2$.

Īsāk: vektoru atņemšana ir vektoru saskaitīšanai pretēja darbība.

Apzīmējums: $\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_1$.

No definīcijas izriet šāda konstrukcija: no patvaļīga sākuma O (125. un 126. zīm.) konstruējam vektorus $\overrightarrow{OA_1}=\mathbf{a}_1$, $\overrightarrow{OA_2}=\mathbf{a}_2$. Vektors $\overrightarrow{A_1A_2}$ (kas novilkts no mazinātāja gala uz mazināmā galu) ir starpība $\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_1$, t. i.,

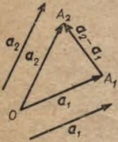
$$\overrightarrow{A_1A_2}=\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OA_1}.$$

Tiešām, summa $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}$ ir vienāda ar $\overrightarrow{OA}$.

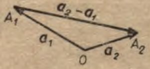
Piezīme. Starpības modulis (vektora $\overrightarrow{A_1A_2}$ garums) var būt mazāks par «mazināmā» moduli, bet var būt arī lielāks par to un vienāds ar to. Visi šie trīs gadījumi parādīti 125., 126. un 127. zīmējumā.

Cita konstrukcija. Lai konstruētu vektoru $\mathbf{a}_2$ un $\mathbf{a}_1$ starpību $\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_1$, tad var ņemt vektoru $\mathbf{a}_2$ un $-\mathbf{a}_1$ summu, t. i.,

$$\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_1=\mathbf{a}_2+(-\mathbf{a}_1).$$



125. zīm.



126. zīm.

127. zīm.

128. zīm.

Piemērs. Pieņemsim, ka jāatrod starpība $\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_1$ (128. zīm.). Saskaņā ar pirmo konstrukciju $\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_1=\overrightarrow{A_1A_2}$. Konstruējam tagad vektoru $\overrightarrow{A_2L}=-\mathbf{a}_1$ un saskaitām vektorus $\overrightarrow{OA_2}=\mathbf{a}_2$ un $\overrightarrow{A_2L}=-\mathbf{a}_1$. Dabūsim (86. § definīcija) vektoru $\overrightarrow{OL}$. No zīmējuma redzams, ka $\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{A_1A_2}$.

89. §. Vektora reizināšana un dalīšana ar skaitli

1. definīcija. Reizināt vektoru $\mathbf{a}$ (reizināmo) ar skaitli x (reizinātāju) nozīmē konstruēt jaunu vektoru (reizinājumu), kura moduli dabū, pareizinot vektora $\mathbf{a}$ moduli ar skaitļa x absolūto vērtību, bet vērsums sakrīt ar vektora $\mathbf{a}$ vērsumu vai ir tam pretējs, atkarībā no tā, vai skaitlis x ir pozitīvs vai negatīvs. Ja $x=0$, tad reizinājums ir nulles vektors.

Apzīmējums: $\mathbf{a}x$ jeb $x\mathbf{a}$.

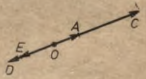
Piemēri. $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot 4$ vai $\overrightarrow{OB}=4\overrightarrow{OA}$ (129. zīm.), $\overrightarrow{OC}=$ $=3\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OD}=-2\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OE}=-1{,}5\overrightarrow{OA}$ (130. zīm.).

2. definīcija. Izdalīt vektoru $\mathbf{a}$ ar skaitli x nozīmē

atrast tādu vektoru, kurš, pareizināts ar skaitli x, reizinājumā dos vektoru $\mathbf{a}$.

Apzīmējums: $\mathbf{a} : x$ jeb $\frac{\mathbf{a}}{x}$.

129. zīm.



130. zīm.

Dalīšanas $\frac{\mathbf{a}}{x}$ vietā var izpildīt reizināšanu $\mathbf{a} \cdot \frac{1}{x}$.

Vektora reizināšana ar skaitli pakļaujas tiem pašiem likumiem, kuriem pakļaujas skaitļu reizināšana:

1. $(x+y)\mathbf{a}=x\mathbf{a}+y\mathbf{a}$ (distributīvā īpašība attiecībā pret skaitlisko reizinātāju);

2. $x(\mathbf{a}+\mathbf{b})=x\mathbf{a}+x\mathbf{b}$ (distributīvā īpašība attiecībā pret vektoriālo reizinātāju);

3. $x(y\mathbf{a})=(xy)\mathbf{a}$ (asociatīvā īpašība).

Saskaņā ar šīm īpašībām var sastādīt vektoriālas izteiksmes, kurām ir tāds pats ārējais izskats kā pirmās pakāpes polinomiem algebrā; šīs izteiksmes var tāpat pārveidot, kā pārveido atbilstošās algebriskās izteiksmes (savilkt līdzīgos locekļus, atvērt iekavas, iznest pirms iekavām, pārnest locekļus no vienas vienādības puses uz otru ar pretēju zīmi utt.).

Piemēri.

$$2\mathbf{a}+3\mathbf{a}=5\mathbf{a} \text{ (saskaņā ar 1. īpašību)},$$

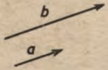
$$2(\mathbf{a}+\mathbf{b})=2\mathbf{a}+2\mathbf{b} \text{ (saskaņā ar 2. īpašību)},$$

$$5 \cdot 12\mathbf{c}=60\mathbf{c} \text{ (saskaņā ar 3. īpašību)},$$

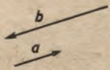
$$4(2\mathbf{a}-3\mathbf{b})=4[2\mathbf{a}+(-3\mathbf{b})]=4[2\mathbf{a}+(-3)\mathbf{b}]=$$
$$=4 \cdot 2\mathbf{a}+4(-3)\mathbf{b}=8\mathbf{a}+(-12)\mathbf{b}=8\mathbf{a}-12\mathbf{b},$$
$$2(3\mathbf{a}-4\mathbf{b}+\mathbf{c})-3(2\mathbf{a}+\mathbf{b}-3\mathbf{c})=6\mathbf{a}-8\mathbf{b}+2\mathbf{c}-6\mathbf{a}-3\mathbf{b}+9\mathbf{c}=$$
$$=-11\mathbf{b}+11\mathbf{c}=11(\mathbf{c}-\mathbf{b}).$$

90. §. Kolineāru vektoru savstarpīgā saistība (vektora dalīšana ar vektoru)

Ja vektors **a** nav nulles vektors, tad katru ar to k o l i n e ā r u vektoru **b** var izteikt kā $x\mathbf{a}$, kur skaitli x dabū



131. zīm.



132. zīm.

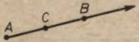
tā: tā absolūtā vērtība ir $|\mathbf{b}| : |\mathbf{a}|$ (moduļu attiecība); tas ir pozitīvs, ja vektors **b** ir vienādi vērsts ar vektoru **a**, negatīvs, ja **b** un **a** ir pretēji vērsti, un vienāds ar nulli, ja **b** ir nulles vektors.

P i e m ē r i. Vektoriem **a** un **b** 131. zīmējumā dabūjam $\mathbf{b}=2\mathbf{a}$ ($x=2$), 132. zīmējumā dabūjam $\mathbf{b}=-2\mathbf{a}$.

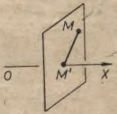
P i e z ī m e. Skaitļa x atrašanu sauc par vektora **b** *dalīšanu ar vektoru* **a**. *Nekolineārus vektorus vienu ar otru dalīt nedrīkst.*

91. §. Punkta projekcija uz ass

Par asi sauc jebkuru taisni, uz kuras atzīmēts viens no diviem tās vērsumiem (vienalga, kurš). Šo vērsumu sauc par *pozitīvu* (zīmējumā to apzīmē ar bultiņu); pretējo vērsumu sauc par *negatīvu.*



133. zīm.



134. zīm.

Katru asi var uzdot ar jebkuru vektoru, kurš atrodas uz tās un kuram ir tas pats vērsums. Tā 133. zīmējumā parādīto asi var uzdot ar vektoru $\overrightarrow{AB}$ vai $\overrightarrow{AC}$ (bet ne ar vektoru $\overrightarrow{BA}$).

Pieņemsim, ka dota ass OX (134. zīm.) un kāds punkts M (kas atrodas ārpus ass vai uz tās). Novelkam caur M asij perpendikulāru plakni; tā krustos asi kādā punktā M'. Punktu M' sauc par *punkta M projekciju uz ass OX* (ja punkts M atrodas uz ass, tad tas pats ir sava projekcija).

P i e z ī m e. Citiem vārdiem, punkta M projekcija uz ass OX ir no punkta M pret asi OX novilktā perpendikula pamats. Iepriekš dotā definīcija pasvītro, ka konstrukcija tiek izpildīta telpā.

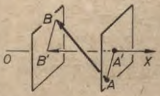
92. §. Vektora projekcija uz ass

Izteicienu «vektora $\overrightarrow{AB}$ projekcija uz ass OX» lieto divās dažādās nozīmēs: ģeometriskā un algebriskā (aritmētiskā).

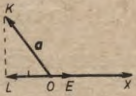
1. Par *vektora $\overrightarrow{AB}$ projekciju (ģeometrisko)* uz ass OX sauc vektoru $\overrightarrow{A'B'}$ (135. zīm.), kura sākums A' ir sākuma A projekcija uz ass OX, bet gals B' — gala B projekcija uz tās pašas ass.

A p z ī m ē j u m s: $\mathrm{Pr}_{OX}\overrightarrow{AB}$ jeb, īsāk, $\mathrm{Pr}\,\overrightarrow{AB}$.

Ja ass OX uzdota ar vektoru **c**, tad vektoru $\overrightarrow{A'B'}$ sauc arī par *vektora $\overrightarrow{AB}$ projekciju uz vektora* **c** *virzienu un apzīmē ar* $\mathrm{Pr}_c\,\overrightarrow{AB}$.



135. zīm.



136. zīm.

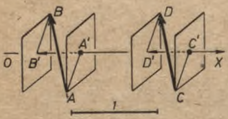
Vektora ģeometrisko projekciju uz ass OX sauc arī par *vektora komponenti pa asi OX.*

2. Par vektora $\overrightarrow{AB}$ projekciju (algebrisko) uz ass OX (jeb uz vektora **c** virzienu) sauc vektora $\overrightarrow{A'B'}$ *garumu, ņemtu ar* $+$ vai $-$ zīmi atkarībā no tā, vai vektoram $\overrightarrow{A'B'}$ ir tas pats vērsums, kas asij OX (vektoram **c**), vai pretējs.

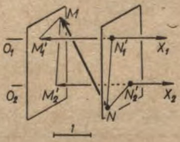
Apzīmējums:

$$\text{pr}_{ox}\overrightarrow{AB} \text{ jeb } \text{pr}_c\overrightarrow{AB}.$$

Piezīme. Vektora ģeometriskā projekcija (komponente) ir *vektors*, bet vektora algebriskā projekcija ir *skaitlis*.



137. zīm.



138. zīm.

1. piemērs. Vektora $\overrightarrow{OK}=\mathbf{a}$ (136. zīm.) ģeometriskā projekcija uz ass OX ir vektors $\overrightarrow{OL}$. Tā vērsums ir pretējs ass vērsumam, bet garums (mērvienība ir OE) ir vienāds ar 2. Tātad, vektora $\overrightarrow{OK}$ algebriskā projekcija uz ass OX ir negatīvs skaitlis -2:

$$\text{Pr}\,\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OL}, \quad \text{pr}\,\overrightarrow{OK}=-2.$$

Ja vektori $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{CD}$ (137. zīm.) ir vienādi, tad to algebriskās projekcijas uz vienas un tās pašas ass ir vienādas $\left(\text{pr}\,\overrightarrow{AB}=\text{pr}\,\overrightarrow{CD}=-\frac{1}{2}\right)$. To pašu var teikt par ģeometriskajām projekcijām.

Viena un tā paša vektora algebriskās projekcijas uz *vienādvērstām* asīm (138. zīmējumā O_1X_1 un O_2X_2) ir vienādas[1] $(\text{pr}_{O_1X_1}\overrightarrow{NM}=\text{pr}_{O_2X_2}\overrightarrow{NM}=-2)$. To pašu var teikt par ģeometriskajām projekcijām.

[1] Ja asis ir paralēlas, bet pretēji vērstas, tad algebriskās projekcijas nav vienādas; tās atšķiras ar zīmi.

3. S a i s t ī b a s t a r p v e k t o r a k o m p o n e n t i (ģeometrisko projekciju) u n a l g e b r i s k o p r o j e k c i j u. Pieņemsim, ka $\mathbf{c}_1$ ir vektors, kurš ir vienādi vērsts ar asi OX un kura garums ir 1. Tad kaut kāda vektora $\mathbf{a}$ ģeometriskā projekcija (komponente) uz ass OX ir vienāda ar vektora $\mathbf{c}_1$ reizinājumu ar vektora $\mathbf{a}$ algebrisko projekciju uz tās pašas ass:

$$\mathrm{Pr}\,\mathbf{a}=\mathrm{pr}\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}_1.$$

2. p i e m ē r s. Ja paturam 136. zīm. apzīmējumus, tad $\mathbf{c}_1=\overrightarrow{OE}$. Vektora $\overrightarrow{OK}=\mathbf{a}$ ģeometriskā projekcija uz ass OX ir vektors $\overrightarrow{OL}$, tā paša vektora algebriskā projekcija ir skaitlis -2 (sk. 1. piemēru). Dabūjam $\overrightarrow{OL}=-2\overrightarrow{OE}$.

93. §. Pamatteorēmas par vektora projekcijām

1. t e o r ē m a. Vektoru summas projekcija uz kādas ass ir vienāda ar saskaitāmo vektoru projekciju summu uz tās pašas ass.

Teorēma ir spēkā jebkurā termina «vektora projekcija» nozīmē un jebkuram saskaitāmo skaitam; tā, trim saskaitāmiem

$$\mathrm{Pr}(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3)=\mathrm{Pr}\,\mathbf{a}_1+\mathrm{Pr}\,\mathbf{a}_2+\mathrm{Pr}\,\mathbf{a}_3 \quad (1)$$

un

$$\mathrm{pr}(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3)=\mathrm{pr}\,\mathbf{a}_1+\mathrm{pr}\,\mathbf{a}_2+\mathrm{pr}\,\mathbf{a}_3. \quad (2)$$

Formula (1) izriet no vektoru saskaitīšanas definīcijas, formula (2) — no pozitīvu un negatīvu skaitļu saskaitīšanas kārtulas.

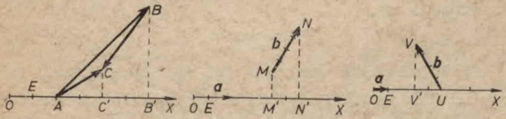
1. p i e m ē r s. Vektors $\overrightarrow{AC}$ (139. zīm.) ir vektoru $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{BC}$ summa. Vektora $\overrightarrow{AC}$ ģeometriskā projekcija uz ass OX ir vektors $\overrightarrow{AC'}$, bet vektoru $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{BC}$ ģeometriskās projekcijas ir $\overrightarrow{AB'}$ un $\overrightarrow{B'C'}$. Pie tam

$$\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{B'C'},$$

tā ka

$$\mathrm{Pr}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\mathrm{Pr}\,\overrightarrow{AB}+\mathrm{Pr}\,\overrightarrow{BC}.$$

2. piemērs. Pieņemsim, ka OE (139. zīm.) ir mērvienība; tad vektora $\overrightarrow{AB}$ algebriskā projekcija uz ass OX ir vienāda ar 4 (AB' garums, ņemts ar plusa zīmi), t. i., $\operatorname{pr}\overrightarrow{AB}=4$. Tālāk $\operatorname{pr}\overrightarrow{BC}=-2$ ($B'C'$ garums, ņemts ar mīnusa



139. zīm. 140. zīm. 141. zīm.

zīmi) un $\operatorname{pr}\overrightarrow{AC}=+2$ (AC' garums, ņemts ar plusa zīmi). Dabūjam

$$\operatorname{pr}\overrightarrow{AB}+\operatorname{pr}\overrightarrow{BC}=4-2=2;$$

bet no otras puses

$$\operatorname{pr}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\operatorname{pr}\overrightarrow{AC}=2,$$

tā ka

$$\operatorname{pr}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\operatorname{pr}\overrightarrow{AB}+\operatorname{pr}\overrightarrow{BC}.$$

2. teorēma. Vektora algebriskā projekcija uz kādas ass ir vienāda ar vektora garuma reizinājumu ar leņķa kosinusu starp asi un vektoru, t. i.,

$$\operatorname{pr}_a \mathbf{b}=|\mathbf{b}|\cos(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}). \tag{3}$$

3. piemērs. Vektors $\mathbf{b}=\overrightarrow{MN}$ (140. zīm.) veido ar asi OX (tā uzdota ar vektoru $\mathbf{a}$) 60° lielu leņķi. Ja OE ir mērvienība, tad $|\mathbf{b}|=4$, tā ka

$$\operatorname{pr}_a \mathbf{b}=4\cdot\cos 60^\circ=4\cdot\frac{1}{2}=2.$$

Tiešām, vektora $\overrightarrow{M'N'}$ garums (vektora $\mathbf{b}$ ģeometriskā projekcija) ir vienāda ar 2, bet virziens sakrīt ar OX ass virzienu (sal. 92. § 2. p.).

4. piemērs. Vektors $\mathbf{b} = \overrightarrow{UV}$ 141. zīmējumā veido ar asi OX (ar vektoru $\mathbf{a}$) leņķi $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = 120°$. Vektora $\mathbf{b}$ garums $|\mathbf{b}|$ ir vienāds ar 4. Tāpēc $\mathrm{pr}_a\, \mathbf{b} = 4 \cdot \cos 120° = -2$.

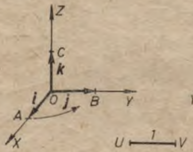
Tiešām, vektora $\overrightarrow{UV'}$ garums ir vienāds ar 2, bet vērsums ir pretējs ass vērsumam.

94. §. Taisnleņķa koordinātu sistēma telpā

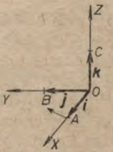
Pamatvektori. Trīs savstarpēji perpendikulāras asis OX, OY, OZ (142. zīm.), kas iet caur kādu punktu O, veido *taisnleņķa koordinātu sistēmu*. Punktu O sauc par *koordinātu sākumu*, taisnes OX, OY, OZ — par *koordinātu asīm* (OX — par *abscisu* asi, OY — par *ordinātu* asi, OZ — par *aplikātu*[1] asi), bet plaknes XOY, YOZ, ZOX — par *koordinātu plaknēm*. Kaut kādu nogriezni UV pieņem par mērvienību visām trim asīm.

Atliekot uz asīm OX, OY, OZ pozitīvā virzienā mērvienībai vienādus nogriežņus OA, OB, OC, dabūsim trīs vektorus $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$. Tos sauc par *pamatvektoriem* un apzīmē attiecīgi ar $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.

Pozitīvos vērsumus uz asīm pieņemts izvēlēties tā, lai pagrieziens par 90°, kas sakļauj pozitīvo staru OX ar staru



142. zīm.



143. zīm.

OY (142. zīm.), notiktu pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam, raugoties no stara OZ pozitīvās puses. Tādu koordinātu sistēmu sauc par *labo*. Dažreiz lieto arī *kreiso*

[1] Par termina «aplikāta» rašanos sk. 95. §.

koordinātu sistēmu. Tanī minētais pagrieziens notiek pulksteņa rādītāja kustības virzienā (143. zīm.).

1. piezīme. Triedra leņķus, kurus veido stari OX, OY, OZ labajā un kreisajā sistēmā, nevar sakļaut tā, lai sakristu arī *atbilstošās* asis.

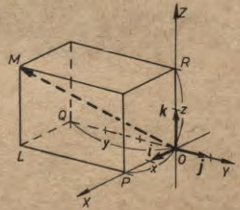
2. piezīme. Nosaukumi «labā» un «kreisā» sistēma radušies tādējādi, ka labās rokas īkšķis, rādāmais un vidējais pirksts, ja tos novieto asu OX, OY, OZ (144. zīm.) stāvokļos, veido labo sistēmu. Kreisajā rokā turpretim (145. zīm.) dabūjam kreiso sistēmu.

144. zīm.

145. zīm.

95. §. Punkta koordinātes

Jebkura punkta M stāvokli telpā var noteikt ar trim koordinātēm šādā veidā. Caur punktu M novelkam koordinātu plaknēm YOZ, ZOX, XOY paralēlas plaknes MP, MQ, MR (146. zīm.). Plaknes krustojas ar asīm punktos P, Q, R. Skaitļus x (abscisa), y (ordināte), z (aplikāta [1]), ar kuriem izvēlētajā mērogā mērī nogriežņus OP, OQ, OR, sauc par punkta M *(taisnleņķa) koordinātēm.* Šos skaitļus ņem pozitīvus vai negatīvus, atkarībā no tā, vai vektoriem $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ ir attiecīgi tie paši vērsumi, kādi ir pamatvektoriem **i**, **j**, **k**, vai pretēji.



146. zīm.

Piemērs. Punkta M koordinātes 146. zīmējumā ir:

abscisa $x=2$,
ordināte $y=-3$,
aplikāta $z=2$.

Pieraksts:

$M(2; -3; 2)$.

[1] Latīņu vārds «aplikāta» (applicata) tulkojumā nozīmē «pieliktā» (punktu M var konstruēt tā: vispirms ņemt plaknē XOY punktu L ar koordinātēm $x=OP$, $y=PL$ un pēc tam «pielikt» XOY plaknei perpendikulāru nogriezni $LM=z$).

Vektoru $\overrightarrow{OM}$, kas vilkts no sākuma O uz kādu punktu M, sauc par punkta M *rādiusvektoru* un apzīmē ar burtu $\mathbf{r}$; lai vienu no otra atšķirtu dažādu punktu rādiusvektorus, burtam $\mathbf{r}$ liek indeksus; tā, punkta M rādiusvektoru apzīmē ar $\mathbf{r}_M$; punktu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ rādiusvektorus apzīmē ar

$$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n.$$

96. §. Vektora koordinātes

Definīcija. Par vektora $\mathbf{m}$ *taisnleņķa koordinātēm* sauc vektora $\mathbf{m}$ algebriskās projekcijas (92. §.) uz koordinātu asīm. Vektora koordinātes apzīmē ar lielajiem burtiem X, Y, Z (punkta koordinātes apzīmē ar mazajiem burtiem). Pieraksts:

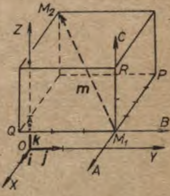
$$\mathbf{m}\{X, Y, Z\} \text{ jeb } \mathbf{m}=\{X, Y, Z\}.$$

Tā vietā, lai vektoru $\mathbf{m}$ projicētu uz asīm OX, OY, OZ, to var projicēt uz asīm M_1A, M_1B, M_1C (147. zīm.), kas novilktas caur vektora $\mathbf{m}$ sākumu M_1 un ir vienādi vērstas ar koordinātu asīm (92. § 2. p.).

1. piemērs. Atrast vektora $\overrightarrow{M_1M_2}$ (147. zīm.) koordinātes koordinātu sistēmā $OXYZ$.

Caur punktu M_1 novelkam asis M_1A, M_1B, M_1C, kas ir vienādi vērstas ar asīm OX, OY, OZ.

Caur punktu M_2 novelkam koordinātu plaknēm paralēlas plaknes M_2P, M_2Q, M_2R. Plaknes M_2P, M_2Q, M_2R krusto asis M_1A, M_1B, M_1C attiecīgi punktos P, Q, R. Vektora $\overrightarrow{M_1M_2}$ abscisa X ir vektora $\overrightarrow{M_1P}$ garums, ņemts ar mīnusa zīmi (92. § 2. p.); vektora $\mathbf{m}$ ordināte Y ir vektora $\overrightarrow{M_1Q}$ garums, ņemts ar mīnusa zīmi; aplikāta Z ir vektora $\overrightarrow{M_1R}$ garums, ņemts ar plusa zīmi. Ja lietojam 147. zīm. mērogu, tad $X=-4$, $Y=-3$, $Z=2$.



147. zīm.

Pieraksts:

$$\overrightarrow{M_1M_2}\{-4; -3; 2\}$$

jeb

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{-4; -3; 2\}.$$

Ja divi vektori $\mathfrak{m}_1$ un $\mathfrak{m}_2$ ir vienādi, tad to koordinātes ir attiecīgi vienādas:

$$X_1 = X_2, \quad Y_1 = Y_2, \quad Z_1 = Z_2$$

(sal. 92. § 2. p.).

Vektora koordinātes nemainās, ja koordinātu sistēmu pārnes paralēli. Turpretim punkta koordinātes, ja koordinātu sistēmu pārnes paralēli, mainās (sk. tālāk 166. § 1. p.).

Ja vektora $\overrightarrow{OM}$ sākuma punkts O sakrīt ar koordinātu sākumu, tad vektora $\overrightarrow{OM}$ koordinātes attiecīgi ir vienādas ar tā gala punkta M koordinātēm (95. §).

2. piemērs. Vektoram $\overrightarrow{OM}$ 146. zīmējumā abscisa $X=2$, ordināte $Y=-3$, aplikāta $Z=2$. Tādas pašas koordinātes ir punktam M.

Pieraksts: $\overrightarrow{OM}\{2; -3; 2\}$ jeb $\overrightarrow{OM}=\{2; -3; 2\}$.

97. §. Vektora izteiksmes ar komponentēm un ar koordinātēm

1. Katrs vektors ir vienāds ar tā komponentu (ģeometrisko projekciju) summu pa trim koordinātu asīm, t. i.,

$$\mathfrak{m} = \mathrm{Pr}_{OX}\,\mathfrak{m} + \mathrm{Pr}_{OY}\,\mathfrak{m} + \mathrm{Pr}_{OZ}\,\mathfrak{m}.$$

1. piemērs. Ja lietojam 147. zīm. apzīmējumus, tad dabūjam

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1P} + \overrightarrow{M_1Q} + \overrightarrow{M_1R}.$$

2. Katrs vektors $\mathfrak{m}$ ir vienāds ar triju pamatvektoru un atbilstošo vektora $\mathfrak{m}$ koordinātu reizinājumu summu, t. i.,

$$\mathfrak{m} = X\mathfrak{i} + Y\mathfrak{j} + Z\mathfrak{k}. \qquad (2)$$

2. piemērs. Lietojot 147. zīm. apzīmējumus, dabūjam

$$\overrightarrow{M_1M_2} = -4\mathfrak{i} - 3\mathfrak{j} + 2\mathfrak{k}.$$

98. §. Darbības ar vektoriem, kas uzdoti ar savām koordinātēm

1. *Vektorus saskaitot, jāsaskaita to koordinātes*, t. i., ja $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2$, tad $X=X_1+X_2$, $Y=Y_1+Y_2$, $Z=Z_1+Z_2$.

2. Analītiskā kārtula vektoru atņemšanai ir: ja $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_2-\mathfrak{a}_1$, tad $X=X_2-X_1$, $Y=Y_2-Y_1$, $Z=Z_2-Z_1$.

3. Pareizinot vektoru ar skaitli, visas koordinātes jāpareizina ar to pašu skaitli, t. i., ja $\mathfrak{m}_2=\lambda\mathfrak{m}_1$, tad $X_2=\lambda X_1$, $Y_2=\lambda Y_1$, $Z_2=\lambda Z_1$.

4. Vektora dalīšanai ar skaitli ir analoga kārtula: ja $\mathfrak{m}_2=\frac{\mathfrak{m}_1}{\lambda}$, tad $X_2=\frac{X_1}{\lambda}$, $Y_2=\frac{Y_1}{\lambda}$, $Z_2=\frac{Z_1}{\lambda}$.

99. §. Vektora izteikšana ar tā sākuma un gala rādiusvektoriem

Der ievērot svarīgu formulu

$$\overrightarrow{A_1A_2}=\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_1, \qquad (1)$$

kur $\mathfrak{r}_1=\overrightarrow{OA_1}$ (148. zīm.) ir vektora $\overrightarrow{A_1A_2}$ sākuma A_1 rādiusvektors (95. §), bet $\mathfrak{r}_2=\overrightarrow{OA_2}$ — tā gala A_2 rādiusvektors.

No (1), ievērojot 98. § 2. p., izriet formulas

$$\left.\begin{array}{c} X=x_2-x_1, \quad Y=y_2-y_1, \\ Z=z_2-z_1. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Šeit X, Y, Z ir vektora $\overrightarrow{A_1A_2}$ koordinātes, x_1, y_1, z_1 — punkta A_1 koordinātes (tās ir attiecīgi vienādas ar rādiusvektora $\mathfrak{r}_1=\overrightarrow{OA_1}$ koordinātēm) un x_2, y_2, z_2 — punkta A_2 koordinātes (tās ir attiecīgi vienādas ar rādiusvektora $\mathfrak{r}_2=\overrightarrow{OA_2}$ koordinātēm).

148. zīm.

Vārdos: *lai atrastu vektora abscisu, tad no vektora gala punkta abscisas jāatņem sākuma punkta abscisa.*

Analogas kārtulas der ordinātei un aplikātai.

Piemērs. Atrast vektora $\overrightarrow{A_1A_2}$ koordinātes, ja $A_1(1; -2; 5)$ un $A_2(-2; 4; 0)$.

Atrisinājums. $X=-2-1=-3$, $Y=4-(-2)=6$, $Z=$ $=0-5=-5$, tā ka $\overrightarrow{A_1A_2}=\{-3, 6, -5\}$.

100. §. Vektora garums. Attālums starp diviem punktiem

Vektora $\mathbf{a}\{X, Y, Z\}$ garumu atkarībā no tā koordinātēm izsaka formula

$$|\mathbf{a}|=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}. \tag{1}$$

1. piemērs. Vektora $\mathbf{a}\{-4, -3, 2\}$ garums (147. zīm.) ir vienāds ar

$$|\mathbf{a}|=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2+2^2}=\sqrt{29}\approx 5{,}4.$$

Attālumu d starp punktiem $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$ izsaka formula

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{2}$$

Šo formulu dabū no (1), ievērojot 99. § formulas (2) (sal. 10. §).

2. piemērs. Attālums starp punktiem $A_1(8; -3; 8)$, $A_2(6; -1; 9)$ ir

$$d=\sqrt{(6-8)^2+(-1+3)^2+(9-8)^2}=3.$$

101. §. Leņķis starp koordinātu asi un vektoru

Leņķus α, β, γ (149. zīm.), ko pozitīvie virzieni OX, OY, OZ veido ar vektoru $\mathbf{a}\{X, Y, Z\}$, var atrast ar formulām [1]

$$\cos\alpha=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\left(=\frac{X}{|\mathbf{a}|}\right), \tag{1}$$

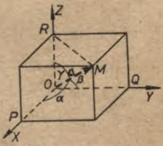
[1] No taisnleņķa trijstūra OMR dabūjam

$$\cos\gamma=\frac{OR}{|\overrightarrow{OM}|}=\frac{Z}{|a|}=\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}.$$

Analogi dabū formulas (1) un (2).

$$\cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\left(=\frac{Y}{|\mathbf{a}|}\right), \quad (2)$$

$$\cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\left(=\frac{Z}{|\mathbf{a}|}\right). \quad (3)$$



149. zīm.

Ja vektora a garums ir viena garuma mērvienība, t. i., ja $|\mathbf{a}|=1$, tad

$$\cos\alpha = X, \quad \cos\beta = Y, \quad \cos\gamma = Z.$$

No (1), (2), (3) izriet

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \quad (4)$$

Piemērs. Atrast leņķus, ko koordinātu asis veido ar vektoru $\{2, -2, -1\}$.

Atrisinājums. $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1}} = \frac{2}{3}$, $\cos\beta = -\frac{2}{3}$, $\cos\gamma = -\frac{1}{3}$, no kurienes $\alpha \approx 48°11'$, $\beta \approx 131°49'$, $\gamma \approx 109°28'$.

102. §. Vektoru kolinearitātes (paralelitātes) pazīme

Ja vektori $\mathbf{a}_1\{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\mathbf{a}_2\{X_2, Y_2, Z_2\}$ ir kolineāri, tad to atbilstošās koordinātes ir proporcionālas

$$X_2 : X_1 = Y_2 : Y_1 = Z_2 : Z_1 \quad (1)$$

un otrādi.

Ja proporcionalitātes koeficients $\lambda = \frac{X_2}{X_1} = \frac{Y_2}{Y_1} = \frac{Z_2}{Z_1}$ ir pozitīvs, tad vektori $\mathbf{a}_1$ un $\mathbf{a}_2$ ir vienādvērsti, ja negatīvs — pretēji vērsti. Koeficienta λ absolūto vērtību izsaka garumu attiecība $|\mathbf{a}_2| : |\mathbf{a}_1|$.

Piezīme. Ja vektora $\mathbf{a}_1$ viena koordināte ir vienāda ar nulli, tad proporcija (1) jāsaprot tai nozīmē, ka vektora $\mathbf{a}_2$ atbilstošā koordināte arī ir vienāda ar nulli.

1. piemērs. Vektori $\{-2, 1, 3\}$ un $\{4, -2, -6\}$ ir kolineāri un pretēji vērsti ($\lambda = -2$). Otrs vektors ir divreiz garāks par pirmo vektoru.

2. piemērs. Vektori $\{4, 0, 10\}$ un $\{6, 0, 15\}$ ir kolineāri un vienādvērsti $\left(\lambda=\frac{3}{2}\right)$. Otrs vektors ir pusotras reizes garāks par pirmo vektoru.

3. piemērs. Vektori $\{2, 0, 4\}$ un $\{4, 0, 2\}$ nav kolineāri.

103. §. Nogriežņa dalīšana dotajā attiecībā

Punkta A rādiusvektoru $\mathbf{r}$, kas dala nogriezni A_1A_2 attiecībā $A_1A : AA_2 = m_1 : m_2$, nosaka formula

$$r=\frac{m_2r_1+m_1r_2}{m_1+m_2}, \qquad (1)$$

kur $\mathbf{r}_1$ un $\mathbf{r}_2$ ir punktu A_1 un A_2 rādiusvektori.

Punkta A koordinātes atrod ar formulām

$$x=\frac{m_2x_1+m_1x_2}{m_1+m_2}, \quad y=\frac{m_2y_1+m_1y_2}{m_1+m_2}, \quad z=\frac{m_2z_1+m_1z_2}{m_1+m_2} \qquad (2)$$

(sal. 11. §).

Atsevišķā gadījumā nogriežņa A_1A_2 viduspunkta koordinātes ir

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}, \quad z=\frac{z_1+z_2}{2}. \qquad (3)$$

Piezīme. Punktu A var ņemt uz nogriežņa A_1A_2 turpinājuma vai nu uz vienu, vai uz otru pusi, tad viens no skaitļiem m_1, m_2 jāņem ar mīnusa zīmi.

Piemērs. Atrast koordinātes punktam A, kas dala nogriezni A_1A_2 attiecībā $A_1A : AA_2 = 2 : 3$, ja $A_1(2; 4; -1)$, $A_2(-3; -1; 6)$.

Formula (2) dod

$$x=\frac{3\cdot 2+2\cdot(-3)}{2+3}=0, \quad y=\frac{3\cdot 4+2\cdot(-1)}{2+3}=2,$$

$$z=\frac{3\cdot(-1)+2\cdot 6}{2+3}=\frac{9}{5}.$$

104. §. Divu vektoru skalārais reizinājums

Definīcija. Par vektora **a** skalāro reizinājumu ar vektoru **b** sauc vektoru moduļu reizinājumu, pareizinātu ar kosinusu no leņķa starp tiem.

Apzīmējums. **a** · **b** jeb **ab**.

Saskaņā ar definīciju

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}). \qquad (1)$$

Saskaņā ar 93. § 2. teorēmu

$$|\mathbf{b}| \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \mathrm{pr}_a\, \mathbf{b},$$

tā ka vienādības (1) vietā var rakstīt

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}|\, \mathrm{pr}_a\, \mathbf{b}. \qquad (2)$$

Analogi

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{b}|\, \mathrm{pr}_b\, \mathbf{a}.$$

Vārdos: *divu vektoru skalārais reizinājums ir vienāds ar viena vektora moduli, pareizinātu ar otra vektora algebrisko projekciju uz pirmā vektora virzienu.*

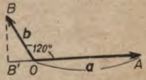
Ja leņķis starp vektoriem **a** un **b** ir šaurs, tad $\mathbf{ab} > 0$, ja plats, tad $\mathbf{ab} < 0$; ja taisns, tad $\mathbf{ab} = 0$.

Izriet no formulas (1).

Piemērs. Vektoru **a** un **b** garumi attiecīgi ir vienādi ar 2 *m* un 1 *m*, bet leņķis starp tiem ir 120°. Atrast skalāro reizinājumu **ab**.

Formula (1) dod $\mathbf{ab} = 2 \cdot 1 \cdot \cos 120° = -1$ (m^2).

Aprēķināsim to pašu lielumu ar formulu (2). Vektora **b** (150. zīm.) algebriskā projekcija uz vektora **a** virzienu ir vienāda ar $|\overrightarrow{OB}| \cos 120° = -\frac{1}{2}$ (vektora $\overrightarrow{OB'}$ garumam, ņemtam ar mīnusa zīmi). Dabūjam



$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}|\, \mathrm{pr}_a\, \mathbf{b} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \ (m^2).$$

150. zīm.

1. piezīme. Termina «skalārais reizinājums» pirmais vārds norāda uz to, ka darbības rezultāts ir skalārs un nevis vektors (pretstatā *vektoriālajam reizinājumam*, sk. tālāk 111. §). Otrs vārds pasvītro, ka apskatāmajai darbībai ir spēkā parastās reizināšanas pamatīpašības (105. §).

2. piezīme. Skalāro reizināšanu nevar vispārināt trim reizinātājiem.

Tiešām, divu vektoru **a** un **b** skalārais reizinājums ir skaitlis; ja šo skaitli pareizinām ar vektoru **c** (89. §), tad reizinājumā dabūsim ar vektoru **c** kolineāru vektoru

$$(\mathbf{ab})\mathbf{c} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})\mathbf{c}.$$

104a. §. Skalārā reizinājuma fizikālā jēga

151. zīm.

Ja vektors $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ (151. zīm.) attēlo materiāla punkta pārvietojumu, bet vektors $\mathbf{F} = \overrightarrow{OF}$ — spēku, kas darbojas uz šo punktu, tad skalārais reizinājums **aF** *skaitliski ir vienāds ar spēka* **F** *darbu.*

Tiešām, darbu dara tikai komponente $\overrightarrow{OF'}$. Tātad, darbs pēc absolūtās vērtības ir vienāds ar vektoru **a** un $\overrightarrow{OF'}$ garumu reizinājumu. Pie tam darbu uzskata par pozitīvu, ja vektori $\overrightarrow{OF'}$ un **a** ir vienādi vērsti, un par negatīvu pretējā gadījumā. Tādējādi, darbs ir vienāds ar vektora **a** moduli, pareizinātu ar vektora **F** algebrisko projekciju uz vektora **a** virzienu, t. i., darbs ir vienāds ar skalāro reizinājumu **aF**.

Piemērs. Spēka vektora **F** modulis ir 5 *kg*. Pārvietojuma vektora **a** garums ir 4 *m*. Spēks **F** darbojas $\alpha = 45°$ leņķī pret pārvietojumu **a**. Tad spēka **F** darbs ir

$$\mathbf{Fa} = |\mathbf{F}| \cdot |\mathbf{a}| \cos\alpha = 5 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2} \approx 14{,}1 \ (kGm).$$

105. §. Skalārā reizinājuma īpašības

1. Skalārais reizinājums ir vienāds ar nulli, ja viens reizinātājs ir nulles vektors vai ja vektori **a** un **b** ir perpendikulāri.

Izriet no 104. § (1).

Piemērs. $3\mathbf{i} \cdot 2\mathbf{j} = 0$, jo pamatvektori **i**, **j** un līdz ar to vektori $3\mathbf{i}$, $2\mathbf{j}$ ir perpendikulāri.

Piezīme. Parastajā algebrā no vienādības $ab=0$ izriet, ka vai nu $a=0$, vai $b=0$. Skalārajam reizinājumam šī īpašība nav spēkā.

2. $\mathbf{ab}=\mathbf{ba}$ (komutatīvā īpašība).

Izriet no 104. § (1).

3. $(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)\mathbf{b}=\mathbf{a}_1\mathbf{b}+\mathbf{a}_2\mathbf{b}$ (distributīvā īpašība).

Šī īpašība ir spēkā jebkuram saskaitāmo skaitam, piemēram, trim saskaitāmiem

$$(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3)\mathbf{b}=\mathbf{a}_1\mathbf{b}+\mathbf{a}_2\mathbf{b}+\mathbf{a}_3\mathbf{b}.$$

Izriet no 104. § (2) un 93. § (3).

4. $(m\mathbf{a})\mathbf{b}=m(\mathbf{ab})$ (asociatīvā īpašība attiecībā pret skalāru reizinātāju)[1].

Piemēri.

$$(2\mathbf{a})\mathbf{b}=2\mathbf{ab}, \quad (-3\mathbf{a})\mathbf{b}=-3\mathbf{ab}, \quad \mathbf{p}(-6\mathbf{q})=-6\mathbf{pq}.$$

4. īpašību atrod no 104. § (1) (izdevīgi apskatīt atsevišķi gadījumus $m>0$ un $m<0$).

4a. $(m\mathbf{a})(n\mathbf{b})=(mn)\mathbf{ab}$.

Piemēri.

$$(2\mathbf{a})(-3\mathbf{b})=-6\mathbf{ab}, \quad (-5\mathbf{p})\left(-\frac{2}{3}\mathbf{q}\right)=\frac{10}{3}\mathbf{pq}.$$

4a. īpašība izriet no iepriekšējās īpašības.

Īpašības 2, 3, 4a ļauj izdarīt ar skalārajiem reizinājumiem tādus pašus pārveidojumus, kādus algebrā izdara ar polinomu reizinājumiem.

1. piemērs.

$$2\mathbf{ab}+3\mathbf{ac}=\mathbf{a}(2\mathbf{b}+3\mathbf{c})$$

(ievērojot 3. un 4. īpašību).

2. piemērs.

$$(2\mathbf{a}-3\mathbf{b})(\mathbf{c}+5\mathbf{d})=2\mathbf{ac}+10\mathbf{ad}-3\mathbf{bc}-15\mathbf{bd}$$

(ievērojot 3. un 4a. īpašību).

---

[1] Attiecībā uz vektoriālu reizinātāju asociatīvā īpašība nav spēkā: izteiksme $(\mathbf{cb})\mathbf{a}$ ir ar vektoru $\mathbf{a}$ kolineārs vektors (104. § 2. piezīme), bet $\mathbf{c}(\mathbf{ba})$ ir ar $\mathbf{c}$ kolineārs vektors, tā ka

$$(\mathbf{cb})\mathbf{a} \neq \mathbf{c}(\mathbf{ba}).$$

3. piemērs. Aprēķināt izteiksmi $(\mathbf{i}+\mathbf{k})(\mathbf{j}-\mathbf{k})$, kur **i**, **j**, **k** ir pamatvektori.

Atrisinājums. Tā kā vektori **i**, **j**, **k** ir savstarpīgi perpendikulāri, tad $\mathbf{ij}=\mathbf{ik}=\mathbf{jk}=0$; bez tam

$$\mathbf{kk}=|\mathbf{k}|\,|\mathbf{k}|\cos(\widehat{\mathbf{k},\mathbf{k}})=|\mathbf{k}|^2\cos 0=1$$

(pamatvektora modulis ir vienāds ar vienu). Tāpēc

$$(\mathbf{i}+\mathbf{k})(\mathbf{j}-\mathbf{k})=\mathbf{ij}-\mathbf{ik}+\mathbf{kj}-\mathbf{kk}=-1.$$

5. Ja vektori **a** un **b** ir kolineāri, tad $\mathbf{ab}=\pm|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|$ (+ zīme, ja **a**, **b** ir viens un tas pats vērsums, — zīme, ja vērsumi ir pretēji).

5a. Atsevišķā gadījumā $\mathbf{aa}=|\mathbf{a}|^2$.

Skalāro reizinājumu **aa** apzīmē $\mathbf{a}^2$ (vektora **a** *skalārais kvadrāts*), tā ka

$$\mathbf{a}^2=|\mathbf{a}|^2$$

(vektora skalārais kvadrāts ir tā moduļa kvadrāts).

1. piezīme. Skalārā kuba (un augstākas pakāpes) vektoru algebrā nav (sal. 104. § 2. piezīme).

2. piezīme. $\mathbf{a}^2$ ir pozitīvs skaitlis (vektora garuma kvadrāts); no tā var izvilkt jebkuras pakāpes sakni, piemēram, kvadrātsakni $\sqrt{\mathbf{a}^2}$ (vektora **a** garums). Tomēr nedrīkst $\sqrt{\mathbf{a}^2}$ vietā rakstīt **a**, jo **a** ir vektors, bet $\sqrt{\mathbf{a}^2}$ skaitlis. Pareizs rezultāts būs

$$\sqrt{\mathbf{a}^2}=|\mathbf{a}|. \qquad (2)$$

106. §. Pamatvektoru skalārie reizinājumi

No 104. § definīcijas izriet, ka

$$\mathbf{ii}=\mathbf{i}^2=1,\quad \mathbf{jj}=\mathbf{j}^2=1,\quad \mathbf{kk}=\mathbf{k}^2=1,$$
$$\mathbf{ij}=\mathbf{ji}=0,\quad \mathbf{jk}=\mathbf{kj}=0,\quad \mathbf{ki}=\mathbf{ik}=0$$

(sal. 105. § 3. piemēru).

Šīs sakarības var attēlot «skalāras reizināšanas tabulas» veidā

Reizinātājs	Reizināmais		
	i	j	k
i	1	0	0
j	0	1	0
k	0	0	1

107. §. Skalārā reizinājuma izteiksme ar reizinātāju koordinātēm

Ja $\mathbf{a}_1=\{X_1, Y_1, Z_1\}$ un $\mathbf{a}_2=\{X_2, Y_2, Z_2\}$, tad [1]

$$\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2. \tag{1}$$

Atsevišķā gadījumā, ja $\mathbf{m}=\{X, Y, Z\}$, tad

$$\mathbf{m}^2=X^2+Y^2+Z^2, \tag{2}$$

no kurienes

$$\sqrt{\mathbf{m}^2}=|\mathbf{m}|=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2} \tag{2a}$$

(sal. 105. § 2. piezīme un 100. §).

1. piemērs. Atrast vektoru $\mathbf{a}_1\,\{3, 2, 1\}$ un $\mathbf{a}_2\,\{2, -3, 0\}$ garumus un šo vektoru skalāro reizinājumu.

Atrisinājums. Meklētie garumi ir

$$\sqrt{\mathbf{a}_1^2}=\sqrt{3^2+2^2+1^2}=\sqrt{14},$$
$$\sqrt{\mathbf{a}_2^2}=\sqrt{2^2+(-3)^2+0^2}=\sqrt{13}.$$

Skalārais reizinājums

$$\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2=3\cdot 2+2(-3)+1\cdot 0=0.$$

Tātad (105. § 1. p.), vektori $\mathbf{a}_1$ un $\mathbf{a}_2$ ir perpendikulāri.

---

[1] Varam izteikt $\mathbf{a}_1=X_1\mathbf{i}+Y_1\mathbf{j}+Z_1\mathbf{k}$, $\mathbf{a}_2=X_2\mathbf{i}+Y_2\mathbf{j}+Z_2\mathbf{k}$. Sareizinām, ievērojot 105. § 3. un 4. īpašību un 106. § tabulu.

2. piemērs. Atrast leņķi starp vektoriem

$$\mathbf{a}_1\{-2, 1, 2\} \text{ un } \mathbf{a}_2\{-2, -2, 1\}.$$

Atrisinājums. Vektoru garumi ir

$$|\mathbf{a}_1| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = 3,$$
$$|\mathbf{a}_2| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3.$$

Skalārais reizinājums $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 = (-2)(-2) + 1(-2) + 2\cdot 1 = 4$. Tā kā $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 = |\mathbf{a}_1|\,|\mathbf{a}_2| \cos(\widehat{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2})$, tad

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2}) = \frac{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1|\cdot|\mathbf{a}_2|} = \frac{4}{3\cdot 3} = \frac{4}{9},$$

t. i.,

$$(\widehat{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2}) \approx 63°37'.$$

108. §. Vektoru perpendikularitātes noteikums

Ja vektori $\mathbf{a}_1\{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\mathbf{a}_2\{X_2, Y_2, Z_2\}$ ir savstarpīgi perpendikulāri, tad

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0.$$

Otrādi, ja $X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0$, tad vektori $\mathbf{a}_1$ un $\mathbf{a}_2$ ir perpendikulāri vai arī viens no tiem (piemēram, $\mathbf{a}_1$) ir nulles vektors[1] (tad $X_1 = Y_1 = Z_1 = 0$).

Atrod no 105. § 1. p. un 107. § (1).

109. §. Leņķis starp vektoriem

Leņķi φ starp vektoriem $\mathbf{a}_1\{X_1, Y_1, Z_1\}$ un $\mathbf{a}_2\{X_2, Y_2, Z_2\}$ var atrast ar formulu (sk. 107. § 2. piemēru)

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1|\cdot|\mathbf{a}_2|} = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}. \qquad (1)$$

Atrod no 107. § (1) un (2a).

[1] Nulles vektoru var uzskatīt par perpendikulāru jebkuram vektoram; sal. 82. §.

1. piemērs. Atrast leņķi starp vektoriem $\{1, 1, 1\}$ un $\{2, 0, 3\}$.

Atrisinājums.

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot 2+1\cdot 0+1\cdot 3}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{5}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{13}}\approx 0{,}8006,$$

no kurienes $\varphi\approx 36°50'$.

2. piemērs. Trijstūra ABC virsotnes ir

$$A(1;2;-3);\quad B(0;1;2);\quad C(2;1;1).$$

Atrast malu AB un AC garumus un leņķi A.

Atrisinājums.

$$\overrightarrow{AB}=\{(0-1),\ (1-2),\ (2+3)\}=\{-1,\ -1,\ 5\},$$

$$\overrightarrow{AC}=\{(2-1),\ (1-2),\ (1+3)\}=\{1,\ -1,\ 4\},$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+5^2}=3\sqrt{3},$$

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+4^2}=3\sqrt{2},$$

$$\cos A=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{(-1)\cdot 1+(-1)\cdot(-1)+5\cdot 4}{9\sqrt{6}}=\frac{20}{9\sqrt{6}}.$$

Piezīme. 101. § formulas (1)—(3) ir šī paragrāfa formulas (1) atsevišķi gadījumi.

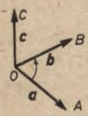
110. §. Triju vektoru labā un kreisā sistēma

Pieņemsim, ka **a**, **b**, **c** ir trīs (nenulles) vektori, kas nav paralēli vienai plaknei un kas ņemti norādītajā kārtībā (t. i., **a** ir pirmais, **b** — otrais un **c** — trešais vektors). Pārnesot tos uz kopīgu sākumu O (152. zīm.), dabūsim trīs vektorus $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, kas neatrodas vienā plaknē.

Triju vektoru **a**, **b**, **c** sistēmu sauc par *labo* (152. zīm.), ja vektora $\overrightarrow{OA}$ pagrieziens, kas to pa īsāko ceļu savieno ar vektoru $\overrightarrow{OB}$, izpildāms pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam attiecībā uz novērotāju, kura acs atrodas punktā C.

Ja minētais pagrieziens jāizpilda pulksteņa rādītāja kustības virzienā (153. zīm.), tad triju vektoru **a**, **b**, **c** sistēmu sauc par *kreiso*[1].

1. piemērs. Pamatvektori **i**, **j**, **k** labajā koordinātu sistēmā (94. §) veido labo sistēmu. Turpretim sistēma **j**, **i**, **k** (vektori ir tie paši, bet kārtība ir cita) ir kreisā.



152. zīm.

153. zīm.

154. zīm.

Ja mums ir divas triju vektoru sistēmas un abas šīs sistēmas ir vai nu labās, vai kreisās, tad saka, ka šīm sistēmām ir *vienāda orientācija;* ja viena sistēma ir labā, bet otra kreisā, tad saka, ka šīm sistēmām ir *pretēja orientācija.*

Ja samaina vietām divus blakus vektorus, tad sistēma maina orientāciju (sal. 1. piemēru).

Sistēma saglabā savu orientāciju, ja vektorus *cikliski maina,* kā parādīts 154. zīmējumā (otrs vektors kļūst pirmais, trešais — otrs, bet pirmais — trešais, t. i., sistēmas **a**, **b**, **c** vietā dabūjam sistēmu **b**, **c**, **a**).

2. piemērs. No labās sistēmas **i**, **j**, **k** ar ciklisku maiņu dabūjam labo sistēmu **j**, **k**, **i**, no tās — labo sistēmu **k**, **i**, **j**.

3. piemērs. Ja vektori **a**, **b**, **c** veido labo sistēmu, tad sekojošās trīs sistēmas

a, **b**, **c**, **b**, **c**, **a**, **c**, **a**, **b**

ir labās, bet pārējās trīs sistēmas

b, **a**, **c**, **a**, **c**, **b**, **c**, **b**, **a**,

kas sastādītas no tiem pašiem vektoriem, ir kreisās sistēmas.

Triju vektoru labo sistēmu nevar sakļaut ne ar vienu kreiso sistēmu.

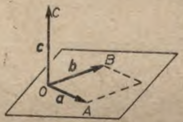
Spoguļa attēlā labā sistēma kļūst par kreiso un otrādi.

[1] Par nosaukumu «labā» un «kreisā» sistēma rašanos sk. 94. § 2. piezīmi.

111. §. Divu vektoru vektoriālais reizinājums

D e f i n ī c i j a. Par vektora **a** (reizināmais) *vektoriālo reizinājumu* ar tam nekolineāru vektoru **b** (reizinātājs) sauc trešo vektoru **c** (reizinājums), kuru konstruē šādi:

1) tā modulis skaitliski ir vienāds ar paralelograma (155. zīmējumā $AOBL$) laukumu, kas konstruēts uz vektoriem **a** un **b**, t. i., ir vienāds ar $|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\sin(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})$;



155. zīm.

156. zīm.

2) tā virziens ir perpendikulārs minētā paralelograma plaknei;

3) vektora **c** vērsumu (uz vienu vai otru pusi) izvēlas tā, lai vektori **a**, **b**, **c** veidotu labo sistēmu (110. §).

A p z ī m ē j u m s: $\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ jeb $\mathbf{c}=[\mathbf{ab}]$.

P a p i l d i n ā j u m s d e f i n ī c i j a i. Ja vektori **a** un **b** ir kolineāri, tad figūrai $AOBL$, uzskatot to (nosacīti) par paralelogramu, dabiski laukumu skaitīt par vienādu ar nulli. Tāpēc kolineāru vektoru vektoriālais reizinājums jāuzskata par vienādu ar nulles vektoru.

Tā kā nulles vektoram var pierakstīt jebkuru virzienu, tad šis pieņēmums nav pretrunā ar definīcijas 2. un 3. punktu.

1. p i e z ī m e. Terminā «vektoriālais reizinājums» pirmais vārds norāda uz to, ka darbības rezultāts ir vektors (pretstatā skalāram reizinājumam; sal. 104. § 1. piezīmi).

1. p i e m ē r s. Atrast vektoriālo reizinājumu $\mathbf{i}\times\mathbf{j}$, kur **i**, **j** ir labās koordinātu sistēmas pamatvektori (156. zīm.).

A t r i s i n ā j u m s. 1) Tā kā pamatvektoru garumi ir vienādi ar mērvienību, tad paralelograma (kvadrāta) $AOBL$

laukums skaitliski ir vienāds ar vienu. Tātad vektoriālā reizinājuma modulis ir vienāds ar vienu.

2) Tā kā OZ ass ir perpendikulāra $AOBL$ plaknei, tad meklētais vektoriālais reizinājums ir vektors, kas ir kolineārs ar vektoru **k**; bet tā kā abiem tiem moduļi ir 1, tad meklētais vektoriālais reizinājums ir vienāds vai nu ar **k**, vai ar $-$**k**.

3) No diviem iespējamiem vektoriem jāizvēlas pirmais, jo vektori **i**, **j**, **k** veido labo sistēmu (bet vektori **i**, **j**, $-$**k** — kreiso).

Tātad,

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}.$$

2. piemērs. Atrast vektoriālo reizinājumu $\mathbf{j} \times \mathbf{i}$.

Atrisinājums. Tāpat kā pirmajā piemērā, secinām, ka $\mathbf{j} \times \mathbf{i}$ ir vienāds vai nu ar **k**, vai $-$**k**. Bet tagad jāizvēlas $-$**k**, jo vektori **j**, **i**, $-$**k** veido labo sistēmu (bet vektori **j**, **i**, **k** — kreiso).

Tātad,

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}.$$

3. piemērs. Vektoru **a** un **b** garumi attiecīgi ir 80 *cm* un 50 *cm*, un tie veido 30° leņķi. Pieņemot par garuma vienību metru, atrast vektoriālā reizinājuma $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ garumu.

Atrisinājums. Uz vektoriem **a** un **b** konstruētā paralelograma laukums ir vienāds ar $80 \cdot 50 \sin 30° = 2000$ (cm^2), t. i., 0,2 m^2. Meklētā vektoriālā reizinājuma garums ir 0,2 *m*.

4. piemērs. Atrast vektoriālā reizinājuma garumu tiem pašiem vektoriem, pieņemot par garuma vienību centimetru.

Atrisinājums. Tā kā uz vektoriem **a** un **b** konstruētā paralelograma laukums ir vienāds ar 2000 cm^2, tad vektoriālā reizinājuma garums ir vienāds ar 2000 *cm*, t. i., 20 *m*.

Salīdzinot 3. un 4. piemēru, redzam, ka vektora $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ garums ir atkarīgs ne tikai no reizinātāju **a** un **b** garumiem, bet *arī no garuma vienības izvēles*.

Vektoriālā reizinājuma fizikālā jēga. No daudziem fizikāliem lielumiem, kurus izsaka ar vektoriālo reizinājumu, apskatīsim tikai spēka momentu.

Pieņemsim, ka A ir spēka **F** pielikšanas punkts. Par *spēka* **F** *momentu* attiecībā pret punktu O sauc vektoriālo reizinājumu $\overrightarrow{OA} \times \mathbf{F}$. Tā ka šī vektoriālā reizinājuma modulis skaitliski ir vienāds ar paralelograma $AFLO$ (157. zīm.)

laukumu, tad momenta modulis ir vienāds ar pamata AF un augstuma OK reizinājumu, t. i., ar spēku, kas pareizināts ar punkta O attālumu līdz taisnei, pa kuru darbojas spēks.

Mehānikā pierāda, ka, lai ciets ķermenis atrastos līdzsvarā, tad ir nepieciešami, lai ar nulli būtu vienāda ne vien vektoru $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, ... summa, kuri izsaka ķermenim pieliktos spēkus, bet arī spēku momentu summa. Tai gadījumā, kad spēki ir paralēli vienai plaknei, momentu vektoru saskaitīšanu var aizstāt ar to moduļu saskaitīšanu un atņemšanu. Bet, ja spēku virzieni ir patvaļīgi, tad tāda aizstāšana nav iespējama. Ievērojot to, vektoriālo reizinājumu definē kā vektoru, bet ne kā skaitli.

157. zīm.

112. §. Vektoriālā reizinājuma īpašības

1. Vektoriālais reizinājums $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ ir vienāds ar nulli tikai tad, kad vektori $\mathbf{a}$ un $\mathbf{b}$ ir kolineāri (atsevišķā gadījumā, ja viens no tiem vai abi ir nulles vektori).

Izriet no 111. § definīcijas 1. punkta.

1a. $\mathbf{a}\times\mathbf{a}=0$.

Vienādība $\mathbf{a}\times\mathbf{a}=0$ novērš nepieciešamību lietot «vektoriālā kvadrāta» jēdzienu (sal. 105. § 5a. p.).

2. Samainot vietām reizinātājus, vektoriālais reizinājums jāpareizina ar -1 («maina zīmi uz pretējo»):

$$\mathbf{b}\times\mathbf{a}=-(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

(sal. 111. § 1. un 2. piemēru).

Tādējādi, *vektoriālajam reizinājumam nepiemīt komutatīvā īpašība* (sal. 105. § 2. p.).

3. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\boldsymbol{l}=\mathbf{a}\times\boldsymbol{l}+\mathbf{b}\times\boldsymbol{l}$ (distributīvā īpašība).

Šī īpašība ir spēkā jebkuram saskaitāmo skaitam, piemēram, trim saskaitāmiem dabūjam

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})\times\boldsymbol{l}=\mathbf{a}\times\boldsymbol{l}+\mathbf{b}\times\boldsymbol{l}+\mathbf{c}\times\boldsymbol{l}.$$

4. $(m\mathbf{a})\times\mathbf{b}=m(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ (asociatīvā īpašība attiecībā pret skalāru reizinātāju).

4a. $(m\mathbf{a})\times(n\mathbf{b})=mn(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$.

Piemēri.

1) $-3\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-3(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$.

2) $0{,}3\mathbf{a}\times 4\mathbf{b}=1{,}2(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$.

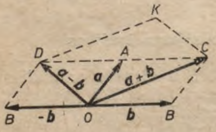
3) $(2\mathbf{a}-3\mathbf{b})\times(\mathbf{c}+5\mathbf{d})=$
$=2(\mathbf{a}\times\mathbf{c})+10(\mathbf{a}\times\mathbf{d})-3(\mathbf{b}\times\mathbf{c})-15(\mathbf{b}\times\mathbf{d})=$
$=2(\mathbf{a}\times\mathbf{c})+10(\mathbf{a}\times\mathbf{d})+3(\mathbf{c}\times\mathbf{b})+15(\mathbf{d}\times\mathbf{b})=$
$=2(\mathbf{a}\times\mathbf{c})-10(\mathbf{d}\times\mathbf{a})+3(\mathbf{c}\times\mathbf{b})+15(\mathbf{d}\times\mathbf{b})$.

4) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{a}-\mathbf{b})=\mathbf{a}\times\mathbf{a}-\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{a}-\mathbf{b}\times\mathbf{b}$.

Pirmais un ceturtais saskaitāmais ir vienāds ar nulli (1. p.). Bez tam $\mathbf{b}\times\mathbf{a}=-\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ (2. p.). Tātad

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{a}-\mathbf{b})=-2(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=2(\mathbf{b}\times\mathbf{a}).$$

Tādējādi, $OCKD$ (158. zīm.) laukums ir divreiz lielāks par $OACB$ laukumu.



158. zīm.

159. zīm.

113. §. Pamatvektoru vektoriālie reizinājumi

No 111. § definīcijas izriet, ka

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i}\times\mathbf{i}=0, & \mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}, & \mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}, \\ \mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k}, & \mathbf{j}\times\mathbf{j}=0, & \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}, \\ \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}, & \mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i}, & \mathbf{k}\times\mathbf{k}=0. \end{array}$$

Lai nekļūdītos zīmēs, lietderīgi paturēt prātā šādu shēmu (159. zīm.). Lietot to vajag tā.

Ja īsākā ceļa virziens no pirmā vektora (reizināmā) uz otru vektoru (reizinātāju) sakrīt ar bultiņas virzienu, tad reizinājums vienāds ar trešo vektoru; ja tas nesakrīt, tad trešais vektors jāņem ar mīnusa zīmi.

1. piemērs. Atrast $\mathbf{k}\times\mathbf{i}$. Shēmā īsākā ceļa virziens no $\mathbf{k}$ uz $\mathbf{i}$ sakrīt ar bultiņas virzienu. Tāpēc $\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$.

2. piemērs. Atrast $\mathbf{k}\times\mathbf{j}$. Tagad īsākā ceļa virziens ir pretējs bultiņas virzienam. Tāpēc $\mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i}$.

3. piemērs. Vienkāršot izteiksmi $(2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+6\mathbf{k})\times$ $\times(4\mathbf{i}-6\mathbf{j}+12\mathbf{k})$. Atverot iekavas un lietojot tabulu vai shēmu, dabūjam

$$(2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+6\mathbf{k})\times(4\mathbf{i}-6\mathbf{j}+12\mathbf{k})=8(\mathbf{i}\times\mathbf{i})-$$
$$-12(\mathbf{i}\times\mathbf{j})+24(\mathbf{i}\times\mathbf{k})-12(\mathbf{j}\times\mathbf{i})+18(\mathbf{j}\times\mathbf{j})-$$
$$-36(\mathbf{j}\times\mathbf{k})+24(\mathbf{k}\times\mathbf{i})-36(\mathbf{k}\times\mathbf{j})+72(\mathbf{k}\times\mathbf{k})=$$
$$=-12\mathbf{k}-24\mathbf{j}+12\mathbf{k}-36\mathbf{i}+24\mathbf{j}+36\mathbf{i}=0.$$

Tā kā vektoriālais reizinājums ir vienāds ar nulli tikai reizinātāju kolinearitātes gadījumā (112. § 1. p.), tad vektori $2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+6\mathbf{k}$ un $4\mathbf{i}-6\mathbf{j}+12\mathbf{k}$ ir kolineāri. To rāda arī 102. §. pazīme.

114. §. Vektoriālā reizinājuma izteiksme ar reizinātāju koordinātēm

Ja $\mathbf{a}_1=\{X_1, Y_1, Z_1\}$ un $\mathbf{a}_2=\{X_2, Y_2, Z_2\}$, tad [1]

$$\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2=\left\{\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}\right\}. \quad (1)$$

Vertikālajās svītrās ietvertās izteiksmes ir otrās kārtas determinanti (12. §).

Praktiska kārtula. Lai dabūtu vektora $\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2$ koordinātes, sastādam tabulu

$$\begin{matrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2. \end{matrix} \quad (2)$$

Aizsedzot tanī pirmo kolonu, atrodam pirmo koordināti

$$\begin{matrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2. \end{matrix}$$

[1] Vektoriālo reizinājumu $(X_1\mathbf{i}+Y_1\mathbf{j}+Z_1\mathbf{k})\times(X_2\mathbf{i}+Y_2\mathbf{j}+Z_2\mathbf{k})$ atrodam, lietojot 113. § tabulu un 112. § 2., 3. un 4. īpašību (sal. 113. § 3. piemēru).

Aizsedzot otro kolonu un ņemot atlikušo determinantu ar pretēju zīmi $\left(-\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}\right.$ jeb, kas ir tas pats, $\left.\begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}\right)$, atrodam otro koordināti.

Aizsedzot trešo kolonu (atlikušo determinantu ņemam atkal ar paša zīmi), atrodam trešo koordināti.

1. piemērs. Atrast vektoru $\mathbf{a}_1\{3, -4, -8\}$ un $\mathbf{a}_2\{-5, 2, -1\}$ vektoriālo reizinājumu.

Atrisinājums. Sastādam tabulu

$$\begin{matrix} 3 & -4 & -8 \\ -5 & 2 & -1. \end{matrix}$$

Aizsedzot pirmo kolonu, dabūjam pirmo koordināti

$$\begin{vmatrix} -4 & -8 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-4)\cdot(-1) - 2\cdot(-8) = 20.$$

Aizsedzot otro kolonu, atrodam determinantu

$$\begin{vmatrix} 3 & -8 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}$$

Samainot tanī vietām kolonas (pie tam zīme mainās uz pretējo), dabūjam otro koordināti $\begin{vmatrix} -8 & 3 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = 43.$

Aizsedzot trešo kolonu, dabūjam trešo koordināti $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -14.$

Tātad, $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \{20, 43, -14\}$.

Piezīme. Lai nekļūdītos ar zīmi, aprēķinot otro koordināti, tad tabulas (2) vietā var lietot tabulu

$$\begin{matrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & X_2 & Y_2, \end{matrix} \tag{3}$$

kuru dabū no (2), pierakstot tai pirmās divas kolonas. Aizsedzot tabulā (3) pirmo kolonu, ņemam sekojošas divas kolonas. Pēc tam aizsedzot vēl otro kolonu, ņemam atkal sekojošās divas kolonas. Beidzot, aizsedzot arī trešo kolonu, ņemam pēdējās divas kolonas. Nevienā no dabūtajiem trim determinantiem nevajag samainīt kolonas.

2. piemērs. Atrast laukumu S trijstūrim, kura virsotnes ir $A_1(3; 4; -1)$, $A_2(2; 0; 4)$, $A_3(-3; 5; 4)$.

Atrisinājums. Meklētais laukums ir vienāds uz vektoriem $\overrightarrow{A_1A_2}$ un $\overrightarrow{A_1A_3}$ konstruētā paralelograma laukuma pusei. Atrodam (99. §.) $\overrightarrow{A_1A_2}=\{(2-3), (0-4), (4+1)\}=$ $=\{-1, -4, 5\}$ un $\overrightarrow{A_1A_2}=\{-6, 1, 5\}$. Paralelograma laukums ir vienāds ar vektoriālā reizinājuma $\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}$ moduli. Šis vektoriālais reizinājums ir $\{-25, -25, -25\}$. Tādējādi,

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}|=\frac{1}{2}\sqrt{(-25)^2+(-25)^2+(-25)^2}=$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{1875}\approx 21{,}7.$$

115. §. Komplanāri vektori

Trīs (vai vairāk) vektorus sauc par *komplanāriem*, ja tie pēc pārnešanas uz kopīgu sākumu atrodas vienā plaknē.

Ja viens no trim vektoriem ir nulles vektors, tad šos trīs vektorus arī uzskata par komplanāriem.

Komplanaritātes pazīmi sk. 116. un 120. §.

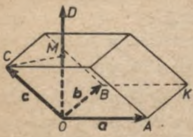
116. §. Jauktais reizinājums

Par triju vektoru **a**, **b**, **c** (kas ņemti norādītajā kārtībā) *jaukto* (jeb *vektoriāli-skalāro*) reizinājumu sauc vektora **a** skalāro reizinājumu ar vektoriālo reizinājumu **b**×**c**, t. i., skaitli **a**(**b**×**c**) jeb, kas ir tas pats, (**b**×**c**)**a**.

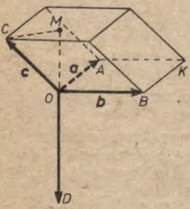
Apzīmējums: **abc**.

Komplanaritātes pazīme. Ja sistēma **a**, **b**, **c** ir labā, tad **abc**>0, ja kreisā, tad **abc**<0. Ja vektori **a**, **b**, **c** ir komplanāri (115. §.), tad **abc**=0. Citiem vārdiem, *ja jauktais reizinājums* **abc** *ir vienāds ar nulli, tad tā ir vektoru* **a**, **b**, **c** *komplanaritātes pazīme.*

Jauktā reizinājuma ģeometriskā jēga. Triju nekomplanāru vektoru **a**, **b**, **c** jauktais reizinājums **abc** ir vienāds uz vektoriem **a**, **b**, **c** konstruētā paralēlskaldņa tilpumam, ņemtam ar plusa zīmi, ja sistēma **a**, **b**, **c** ir labā, un ar mīnusa zīmi, ja šī sistēma ir kreisā.



160. zīm.



161. zīm.

Paskaidrojums. Konstruējam (160. un 161. zīm.) vektoru

$$\overrightarrow{OD}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}. \qquad (1)$$

Tad pamata $OAKB$ laukums ir vienāds ar

$$S=|\overrightarrow{OD}|. \qquad (2)$$

Augstums H (vektora $\overrightarrow{OM}$ garums), ņemts ar plusa vai mīnusa zīmi, ir (92. § 2. p.) vektora $\mathbf{c}$ algebriskā projekcija uz virzienu $\overrightarrow{OD}$, t. i.,

$$H=\pm \mathrm{pr}_{\overrightarrow{OD}}\mathbf{c}. \qquad (3)$$

Plusa zīmi ņem, ja $\overrightarrow{OM}$ un $\overrightarrow{OD}$ ir vienādi vērsti (160. zīm.), bet tas būs tai gadījumā, ja $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ veido labo sistēmu. Mīnusa zīmei atbilst kreisā sistēma (161. zīm.). No (2) un (3) dabūjam

$$V=SH=\pm|\overrightarrow{OD}|\,\mathrm{pr}_{\overrightarrow{OD}}\mathbf{c},$$

bet $|\overrightarrow{OD}|\,pr_{\overrightarrow{OD}}\mathbf{c}$ ir skalārais reizinājums $\overrightarrow{OD}\cdot\mathbf{c}$ (104. §), t. i., $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}$. Tātad

$$V=\pm(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}.$$

117. §. Jauktā reizinājuma īpašības

1. Ja reizinātājus cikliski maina (110. §.), tad jauktais reizinājums nemainās, ja turpretim samaina vietām divus reizinātājus, tad — maina zīmi uz pretējo

$$\mathbf{abc}=\mathbf{bca}=\mathbf{cab}=-(\mathbf{bac})=-(\mathbf{cba})=-(\mathbf{acb}).$$

Izriet no ģeometriskā iztulkojuma (116. §.) un no 110. §.

2. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c}\mathbf{d}=\mathbf{a}\mathbf{c}\mathbf{d}+\mathbf{b}\mathbf{c}\mathbf{d}$ (distributīvā īpašība). Var vispārināt jebkuram saskaitāmo skaitam.

Izriet no jauktā reizinājuma definīcijas un no 112. § 3. p.

3. $(m\mathbf{a})\mathbf{b}\mathbf{c}=m(\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c})$ (asociatīvā īpašība attiecībā pret skalāru reizinātāju).

Izriet no jauktā reizinājuma definīcijas un no 112. §. 4. p.

Šīs īpašības ļauj ar jauktajiem reizinājumiem izdarīt algebriskus pārveidojumus, kuri atšķiras no algebriskajiem pārveidojumiem tikai ar to, ka *mainīt reizinātāju kārtību drīkst tikai, ievērojot reizinājuma zīmi* (1. p.).

4. Jauktais reizinājums, kuram ir divi vienādi reizinātāji, ir vienāds ar nulli, t. i.,

$$\mathbf{a}\mathbf{a}\mathbf{b}=0.$$

1. piemērs.

$$\mathbf{a}\mathbf{b}(3\mathbf{a}+2\mathbf{b}-5\mathbf{c})=3\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{a}+2\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{b}-5\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}=-5\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}.$$

2. piemērs.

$$\begin{aligned}&(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{b}+\mathbf{c})(\mathbf{c}+\mathbf{a})=\\&=(\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c})(\mathbf{c}+\mathbf{a})=\\&=(\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c})(\mathbf{c}+\mathbf{a})=\\&=\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}+\mathbf{a}\mathbf{c}\mathbf{c}+\mathbf{a}\mathbf{c}\mathbf{a}+\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{a}+\mathbf{b}\mathbf{c}\mathbf{c}+\mathbf{b}\mathbf{c}\mathbf{a}.\end{aligned}$$

Visi locekļi, izņemot divus galējos locekļus, ir vienādi ar nulli. Bez tam, $\mathbf{b}\mathbf{c}\mathbf{a}=\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}$ (1. īpašība). Tāpēc

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{b}+\mathbf{c})(\mathbf{c}+\mathbf{a})=2\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}.$$

118. §. Trešās kārtas determinants[1]

Daudzos gadījumos, piemēram, aprēķinot jaukto reizinājumu, izdevīgi lietot pierakstu

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{1}$$

[1] Sīkāk par determinantiem sk. 182.—185. §§.

Tas ir saīsināts apzīmējums izteiksmei

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Izteiksmi (1) sauc par *trešās kārtas determinantu.*

Otrās kārtas determinanti, kas ietilpst izteiksmē (2), sastādīti šādā veidā. Izsvītrojam tabulā (1) to rindiņu un to kolonu, kur atrodas a_1, kā parādīts šai shēmā:

$$\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array}$$

Atlikušais determinants ietilpst izteiksmē (2) kā reizinātājs pie izsvītrotā burta a_1. Analogi dabū abus pārējos izteiksmes (2) determinantus

$$\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array} \quad \text{un} \quad \begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array}$$

Jāatceras: *pirms vidējā locekļa izteiksmē* (2) *ir mīnusa zīme!*

1. p i e m ē r s. Aprēķināt determinantu

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix}.$$

Dabūjam

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\cdot 6 + 1\cdot(-15) - 3\cdot(-9) = 0.$$

1. p i e z ī m e. Tā kā

$$\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix},$$

tad trešās kārtas determinantu var izteikt arī tā

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Šeit visi otrās kārtas determinanti ņemti ar plusa zīmi.

2. piezīme. Aprēķinus ar formulu (3) var mehanizēt šādā veidā. Pierakstām tabulai (1) divas pirmās tās kolonas; dabūjam tabulu

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{matrix} \tag{4}$$

Ņemam no pirmās rindiņas burtu a_1, ejam no tā pa diagonāli lejup uz labo pusi, kā norādīts ar bultiņu tabulā (5):

$$\begin{array}{c|cc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ \searrow & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array} \tag{5}$$

Otrās kārtas determinants, uz kuru norāda bultiņa, ir a_1 reizinātājs. Dabūjam $a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

Pēc tam nosedzam pirmo kolonu, ņemam no pirmās rindiņas burtu b_1 (pirmo atlikušo) un rīkojamies analogi, kā *parādīts tabulā (6):*

$$\begin{array}{c|cc|c} b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ \searrow & & & \\ b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array} \tag{6}$$

Dabūjam $b_1 \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix}$.

Beidzot, nosedzam otro kolonu un dabūjam $c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$.

2. piemērs. Aprēķināt determinantu

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Sastādām tabulu (4)

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 2 & 5 \end{matrix}$$

un atrodam

$$D=1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=$$
$$=-14+20-33=-27.$$

119. §. Jauktā reizinājuma izteiksme ar reizinātāju koordinātēm

Ja vektori $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ ir uzdoti ar to koordinātēm

$$\mathbf{a}_1=\{X_1, Y_1, Z_1\},\quad \mathbf{a}_2=\{X_2, Y_2, Z_2\},\quad \mathbf{a}_3=\{X_3, Y_3, Z_3\},$$

tad jauktais reizinājums $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$ aprēķināms ar formulu

$$\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Izriet no 107. §. formulas (1) un no 114. §. formulas (1).

1. piemērs. Vektoru $\mathbf{a}_1\{-2, -1, -3\}$, $\mathbf{a}_2\{-1, 4, 6\}$, $\mathbf{a}_3\{1, 5, 9\}$ jauktais reizinājums $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$ ir vienāds ar

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix}=0$$

(sal. 118. § 1. piemēru). Tātad (116. §) vektori $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ ir komplanāri.

2. piemērs. Vektori {1, 2, 3}, {−1, 3, 4}, {2, 5, 2} veido kreiso sistēmu, jo to jauktais reizinājums (118. § 2. piemērs)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -27$$

ir negatīvs (sk. 116. §).

120. §. Komplanaritātes pazīme koordinātu formā

Vektoru $\mathbf{a}_1\{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\mathbf{a}_2\{X_2, Y_2, Z_2\}$, $\mathbf{a}_3\{X_3, Y_3, Z_3\}$ komplanaritātes noteikums (nepieciešamais un pietiekamais) ir (sk. 119. § 1. piemērs)

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Izriet no 116. §.

121. §. Paralēlskaldņa tilpums

Uz vektoriem $\mathbf{a}_1\{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\mathbf{a}_2\{X_2, Y_2, Z_2\}$, $\mathbf{a}_3\{X_3, Y_3, Z_3\}$ konstruētā paralēlskaldņa tilpums ir

$$V = \pm \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix},$$

kur plusa zīmi ņem, kad trešās kārtas determinants ir pozitīvs, un mīnusa zīmi — ja determinants ir negatīvs (sal. 13. §).

Izriet no 116. un 119. §.

1. piemērs. Atrast tilpumu paralēlskaldnim, kas konstruēts uz vektoriem {1, 2, 3}, {−1, 3, 4}, {2, 5, 2}.

Atrisinājums. Dabūjam

$$V = \pm \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \pm(-27).$$

Tā kā determinants ir negatīvs, tad ņemam pirms tā mīnusa zīmi. Atrodam $V=27$.

2. piemērs. Atrast tilpumu V trijstūra piramīdai $ABCD$ ar virsotnēm $A(2; -1; 1)$, $B(5; 5; 4)$, $C(3; 2; -1)$, $D(4; 1; 3)$.

Atrisinājums. Atrodam (99. §):

$$\overrightarrow{AB}=\{(5-2),\ (5+1),\ (4-1)\}=\{3,\ 6,\ 3\}.$$

Tāpat dabūjam $\overrightarrow{AC}=\{1,\ 3,\ -2\}$, $\overrightarrow{AD}=\{2,\ 2,\ 2\}$. Meklētais tilpums ir $\frac{1}{6}$ paralēlskaldņa tilpuma, kurš konstruēts uz šķautnēm $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$. Tāpēc

$$V=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

No šejienes dabūjam $V=3$.

122. §. Divkāršais vektoriālais reizinājums

Par divkāršu vektoriālu reizinājumu sauc izteiksmi

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).$$

Divkāršais vektoriālais reizinājums ir vektors, kas ir komplanārs ar vektoriem **b** un **c**; to atkarībā no vektoriem **b** un **c** izsaka šādi:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}(\mathbf{ac})-\mathbf{c}(\mathbf{ab}). \qquad (1)$$

123. §. Plaknes vienādojums

A. Plakni (162. zīm.), kas iet caur punktu $M_0(x_0; y_0; z_0)$ un ir perpendikulāra vektoram $\mathbf{N}\{A,\ B,\ C\}$, izsaka pirmās pakāpes vienādojums [1]

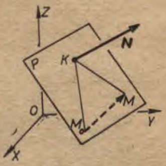
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (1)$$

jeb

$$Ax+By+Cz+D=0, \qquad (2)$$

[1] Vienādojums (1) ir vektoru $\mathbf{N}=\{A,\ B,\ C\}$ un $\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0\}$ perpendikularitātes noteikums. Sk. 108. un 99. §.

kur ar D apzīmēts lielums $-(Ax_0+$ $+By_0+Cz_0)$. Vektoru $\mathbf{N}\{A, B, C\}$ sauc par plaknes P *normālo vektoru.*



162. zīm.

1. piezīme. Izteiciens «plakni P izsaka vienādojums (1)» nozīmē, ka 1) jebkura plaknes P punkta M koordinātes x, y, z apmierina vienādojumu (1); 2) jebkura punkta koordinātes x, y, z, kurš neatrodas uz plaknes P, neapmierina šo vienādojumu (sal. 8. §).

B. Katrs pirmās pakāpes vienādojums $Ax+By+Cz+D=0$ (A, B un C nav reizē vienādi ar nulli) izsaka plakni.

Vienādojumiem (1) un (2) vektoriālā formā ir izskats

$$\mathbf{N}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=0, \qquad (1a)$$

$$\mathbf{N}\mathbf{r}+D=0 \qquad (2a)$$

($\mathbf{r}_0$ un $\mathbf{r}$ ir punktu M_0 un M rādiusvektori; $D=-\mathbf{N}\mathbf{r}_0$).

Piemērs. Plakni, kas iet caur punktu (2; 1; -1) un ir perpendikulāra vektoram $\{-2, 4, 3\}$, izsaka vienādojums

$$-2(x-2)+4(y-1)+3(z+1)=0$$

jeb

$$-2x+4y+3z+3=0.$$

2. piezīme. Vienu un to pašu plakni var izteikt ar daudziem vienādojumiem, kuriem visi koeficienti un brīvais loceklis ir attiecīgi proporcionāli (sk. tālāk 125. § piezīme).

124. §. Plaknes stāvokļa atsevišķi gadījumi attiecībā pret koordinātu sistēmu

1. Vienādojums $Ax+By+Cz=0$ (brīvais loceklis $D=0$) izsaka plakni, kas iet caur sākumu.

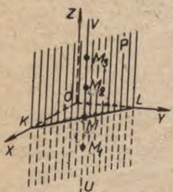
2. Vienādojums $Ax+By+D=0$ (koeficients $C=0$) izsaka OZ asij paralēlu plakni, vienādojums $Ax+Cz+D=0$ — asij OY paralēlu plakni, vienādojums $By+Cz+D=0$ — plakni, paralēlu OX asij.

Der atcerēties: *ja vienādojumā nav burta z, tad plakne ir paralēla OZ asij* utt.

P i e m ē r s. Vienādojums

$$x+y-1=0$$

izsaka OZ asij paralēlu plakni P (163. zīm.).



163. zīm.

P i e z ī m e. Analītiskajā ģeometrijā plaknē vienādojums $x+y-1=0$ attēlo *taisni* (KL 163. zīmējumā). Paskaidrosim, kāpēc telpā tas pats vienādojums izsaka *plakni*.

Ņemsim uz taisnes KL kādu punktu M. Tā kā M atrodas plaknē XOY, tad tam $z=0$. Pieņemsim, ka sistēmā XOY punktam M ir koordinātes $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$ (tās apmierina vienādojumu $x+y-1=0$). Tad telpiskajā sistēmā $OXYZ$ punkta M koordinātes būs $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$, $z=0$. Šīs koordinātes a p m i e r i n a vienādojumu $x+y-1=0$ (lielākas skaidrības dēļ uzrakstīsim šo vienādojumu tā $1x+1y+0\cdot z=0$).

Apskatīsim tagad punktus, kuriem $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$, bet $z\neq 0$, piemēram, punktus $M_1\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$, $M_2\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$, $M_3\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ 1\right)$ utt. (sk. 163. zīm.). Šo punktu koordinātes apmierina vienādojumu $x+y+0\cdot z-1=0$. Šie punkti aizpilda «vertikālu» taisni UV, kas iet caur M. Tādas pašas vertikālas taisnes var konstruēt visiem taisnes KL punktiem. Visas šīs taisnes aizpilda plakni P.

Par to, kā telpiskā koordinātu sistēmā izteikt taisni KL, pastāstīts tālāk (140. §. 4. piemērs).

3. Vienādojums $Ax+D=0$ ($B=0$, $C=0$) izsaka tiklab OY asij, kā arī OZ asij paralēlu plakni (sk. 2. p.), t. i., koordinātu plaknei YOZ paralēlu plakni.

Analogi vienādojums $By+D=0$ izsaka plaknei XOZ paralēlu plakni, bet vienādojums $Cz+D=0$ — plaknei XOY paralēlu plakni.

4. Vienādojumi $x=0$, $y=0$, $z=0$ attiecīgi izsaka plaknes YOZ, XOZ, XOY.

125. §. Plakņu paralelitātes noteikums

Ja plaknes

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \text{ un } A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

ir paralēlas, tad to normālie vektori $\mathbf{N}_1\{A_1, B_1, C_1\}$ un $\mathbf{N}_2\{A_2, B_2, C_2\}$ ir kolineāri (un otrādi). Tāpēc (102. §) paralelitātes (nepieciešamais un pietiekamais) noteikums ir

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_2}{C_1}.$$

1. piemērs. Plaknes $2x-3y-4z+11=0$ un $-4x+6y+ +8z+36=0$ ir paralēlas, jo $\frac{-4}{2}=\frac{6}{-3}=\frac{8}{-4}$.

2. piemērs. Plaknes $2x-3z-12=0$ ($A_1=2$, $B_1=0$, $C_1=-3$) un $4x+4y-6z+7=0$ ($A_2=4$, $B_2=4$, $C_2=-6$) nav paralēlas, jo $B_1=0$, bet $B_2\neq0$ (102. § piezīme).

Piezīme. Ja ne tikai koeficienti pie tekošajām koordinātēm, bet arī brīvie locekļi ir proporcionāli, t. i., ja

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_2}{C_1}=\frac{D_2}{D_1},$$

tad plaknes sakrīt. Tā, vienādojumi

$$3x+7y-5z+4=0 \text{ un } 6x+14y-10z+8=0$$

izsaka vienu un to pašu plakni. Sal. 18. § 3. piezīme.

126. §. Plakņu perpendikularitātes noteikums

Ja plaknes

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \text{ un } A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

ir perpendikulāras, tad perpendikulāri ir arī to normālie vektori $\mathbf{N}_1\{A_1, B_1, C_1\}$, $\mathbf{N}_2\{A_2, B_2, C_2\}$ (un otrādi). Tāpēc (108. §) plakņu (nepieciešamais un pietiekamais) perpendikularitātes noteikums ir

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

1. piemērs. Plaknes

$$3x-2y-2z+7=0 \text{ un } 2x+2y+z+4=0$$

ir perpendikulāras, jo $3\cdot 2+(-2)\cdot 2+(-2)\cdot 1=0$.

2. piemērs. Plaknes

$$3x-2y=0 \quad (A_1=3,\ B_1=-2,\ C_1=0)$$

un

$$z=4 \quad (A_2=0,\ B_2=0,\ C_2=1)$$

ir perpendikulāras.

127. §. Leņķis starp divām plaknēm

Divas plaknes

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \tag{1}$$

un

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \tag{2}$$

veido četrus divplakņu kaktus, kas ir pa pāriem vienādi. Viens no tiem ir vienāds ar leņķi starp normālajiem vektoriem $\mathbf{N}_1\{A_1, B_1, C_1\}$ un $\mathbf{N}_2\{A_2, B_2, C_2\}$. Apzīmējot jebkuru divplakņu kakta leņķi ar φ, dabūjam

$$\cos\varphi=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \tag{3}$$

Izvēloties augšējo zīmi, dabūjam $\cos(\widehat{\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2})$, izvēloties apakšējo zīmi, dabūjam $\cos[180°-(\widehat{\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2})]$.

Piemērs. Leņķi starp plaknēm

$$x-y+\sqrt{2}z+2=0 \text{ un } x+y+\sqrt{2}z-3=0$$

aprēķina no vienādības

$$\cos\varphi=\pm\frac{1\cdot 1+(-1)\cdot 1+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{1+1+(\sqrt{2})^2}\sqrt{1+1+(\sqrt{2})^2}}=\pm\frac{1}{2}.$$

Dabūjam $\varphi=60°$ vai $\varphi=120°$.

Ja vektors $\mathbf{N}_1$ veido ar asīm OX, OY, OZ leņķus α_1, β_1, γ_1, bet vektors $\mathbf{N}_2$ — leņķus α_2, β_2, γ_2, tad

$$\cos\varphi = \pm(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2). \quad (4)$$

Izriet no (3) un 101. § formulām (1)—(3).

128. §. Plakne, kas iet caur doto punktu paralēli dotajai plaknei

Plakni, kas iet caur punktu $M_1(x_1; y_1; z_1)$ un ir paralēla plaknei $Ax+By+Cz+D=0$, izsaka vienādojums

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0.$$

Izriet no 123. un 125. §.

P i e m ē r s. Plakni, kas iet caur punktu (2; −1; 6) paralēli plaknei $x+y-2z+5=0$, izsaka vienādojums

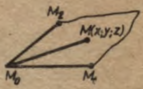
$$(x-2)+(y+1)-2(z-6)=0, \text{ t. i., } x+y-2z+11=0.$$

129. §. Plakne, kas iet caur trim punktiem

Ja punkti $M_0(x_0; y_0; z_0)$, $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ neatrodas uz vienas taisnes, tad plakni, kas iet caur tiem (164. zīm.), izsaka vienādojums

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

Šis vienādojums izsaka vektoru $\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{M_0M_1}$, $\overrightarrow{M_0M_2}$ komplanaritāti (sk. 120. un 99. §).



164. zīm.

P i e m ē r s. Punkti M_0 (1; 2; 3), M_1 (2; 1; 2), M_2 (3; 3; 1) neatrodas uz vienas taisnes, jo vektori $\overrightarrow{M_0M_1}$ {1, −1, −1} un $\overrightarrow{M_0M_2}\{2, 1, -2\}$ nav kolineāri. Plakni $M_0M_1M_2$ izsaka vienādojums

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

t. i.,

$$x+z-4=0.$$

P i e z ī m e. Ja punkti M_0, M_1, M_2 atrodas uz vienas taisnes, tad vienādojums (1) pārvēršas identitātē.

130. §. Nogriežņi uz asīm

Ja plakne $Ax+By+Cz+D=0$ nav paralēla OX asij (t. i., $A\neq 0$; 124. §), tad tā atšķeļ uz šīs ass nogriezni $a=-\frac{D}{A}$. Analogi nogriežņi uz asīm OY, OZ būs $b=-\frac{D}{B}$ (ja $B\neq 0$) un $c=-\frac{D}{C}$ (ja $C\neq 0$) (sal. 32. §).

P i e m ē r s. Plakne $3x+5y-4z-3=0$ atšķeļ uz asīm nogriežņus $a=\frac{3}{3}=1$, $b=\frac{3}{5}$, $c=-\frac{3}{4}$.

131. §. Plaknes vienādojums ar asu nogriežņiem

Ja plakne atšķeļ uz asīm nogriežņus a, b, c (kas nav vienādi ar nulli), tad to var izteikt ar vienādojumu

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \tag{1}$$

kuru sauc par «plaknes vienādojumu ar asu nogriežņiem».

Vienādojumu (1) var dabūt kā vienādojumu plaknei, kas iet caur trim punktiem $(a;\ 0;\ 0)$, $(0;\ b;\ 0)$ un $(0;\ 0;\ c)$ (sk. 129. §).

Piemērs. Uzrakstīt plaknes

$$3x-6y+2z-12=0$$

vienādojumu ar asu nogriežņiem.

Atrodam (130. §) $a=4$, $b=-2$, $c=6$. Vienādojums ar asu nogriežņiem ir

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{6}=1.$$

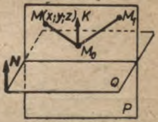
1. piezīme. Plakni, kas iet caur koordinātu sākumu, nevar izteikt vienādojums ar asu nogriežņiem (sal. 33. § 1. piezīme).

2. piezīme. OX asij paralēlu plakni, kas nav paralēla abām pārējām asīm, var izteikt ar vienādojumu $\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, kur b un c ir nogriežņi uz asīm OY un OZ. Abscisu un ordinātu asij paralēlu plakni var izteikt ar vienādojumu $\frac{z}{c}=1$. Analogi var izteikt plaknes, kas ir paralēlas vienai vai divām citām asīm (sal. 33. § 2. piezīme).

132. §. Plakne, kas iet caur diviem punktiem perpendikulāri dotajai plaknei

Plakni P (165. zīm.), kura iet caur diviem punktiem $M_0(x_0; y_0; z_0)$ un $M_1(x_1; y_1; z_1)$ un ir perpendikulāra plaknei Q, kura uzdota ar vienādojumu $Ax+By+Cz+D=0$, izsaka vienādojums

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ A & B & C \end{vmatrix}=0. \qquad (1)$$



165. zīm.

Šis vienādojums izsaka (120. §) vektoru $\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{M_0M_1}$ un $\mathbf{N}\{A, B, C\}=\overrightarrow{M_0K}$ komplanaritāti.

P i e m ē r s. Plakni, kas iet caur diviem punktiem $M_0(1;2;3)$ un $M_1(2;1;1)$ perpendikulāri plaknei $3x+4y+$ $+z-6=0$, izsaka vienādojums

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2-1 & 1-2 & 1-3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

t. i., $x-y+z-2=0$.

P i e z ī m e. Ja taisne M_0M_1 ir perpendikulāra plaknei Q, tad plakne P ir nenoteikta. Šai gadījumā vienādojums (1) pārvēršas identitātē.

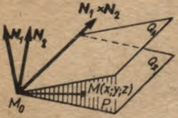
133. §. Plakne, kas iet caur doto punktu perpendikulāri divām plaknēm

Plakni P, kura iet caur punktu $M_0(x_0;y_0;z_0)$ perpendikulāri divām (neparalēlām) plaknēm Q_1, Q_2, kas uzdotas ar vienādojumiem

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

izsaka vienādojums

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$



166. zīm.

Šis vienādojums izsaka (166. zīm.) vektoru $\overrightarrow{M_0M}$, $\mathbf{N}_1\{A_1, B_1, C_1\}$, $\mathbf{N}_2\{A_2, B_2, C_2\}$[1] komplanaritāti.

P i e m ē r s. Plakni, kas iet caur punktu $(1;3;2)$ perpendikulāri plaknēm $x+2y+z-4=0$ un $2x+y+3z+5=0$, izsaka vienādojums

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

t. i.,

$$5x-y-3z+4=0.$$

[1] Vektoriālais reizinājums $\mathbf{N}_1\times\mathbf{N}_2$ (166. zīm.) ir plaknes P normālais vektors. Tātad 123. § (1a) plaknes P vienādojums ir $(\mathbf{N}_1\times\mathbf{N}_2)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=0$, kas atkal dod vienādojumu (1).

Piezīme. Ja plaknes Q_1, Q_2 ir paralēlas, tad plakne P ir nenoteikta; šai gadījumā vienādojums (1) pārvēršas identitātē.

134. §. Triju plakņu krustošanās punkts

Trim plaknēm var nebūt neviena kopīga punkta (ja mazākais divas no tām ir paralēlas vai ja to krustošanās taisnes ir paralēlas), tām var būt neskaitāms daudzums kopīgu punktu (ja visas plaknes iet caur vienu taisni) un tām var būt viens kopīgs punkts. Pirmajā gadījumā vienādojumu sistēmai

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$
$$A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$$

nav atrisinājumu, otrajā gadījumā tai ir neskaitāms daudzums atrisinājumu, trešajā gadījumā — tikai viens atrisinājums. Šo jautājumu izpētīšanai visērtāk lietot determinantus (183., 190. §), bet var iztikt arī ar elementārās algebras metodēm.

1. piemērs. Plaknēm

$$7x-3y+z-6=0, \qquad (1)$$
$$14x-6y+2z-5=0, \qquad (2)$$
$$x+y-5z=0 \qquad (3)$$

nav kopīgu punktu, jo plaknes (1) un (2) ir paralēlas (125. §). Vienādojumu sistēma ir nesaderīga (vienādojumi (1) un (2) ir viens ar otru pretrunā).

2. piemērs. Izpētīt, vai trim plaknēm

$$x+y+z=1, \qquad (4)$$
$$x-2y-3z=5, \qquad (5)$$
$$2x-y-2z=8. \qquad (6)$$

ir kopīgi punkti.

Meklējam sistēmas (4)—(6) atrisinājumu. Izslēdzot z no (4) un (5), dabūjam $4x+y=8$; izslēdzot z no (4) un (6), dabūjam $4x+y=10$. Šie divi vienādojumi ir nesaderīgi.

Tātad, trim plaknēm nav kopīgu punktu. Tā kā to vidū nav paralēlu plakņu, tad trīs taisnes, pa kurām ik divas plaknes krustojas, ir paralēlas.

3. piemērs. Izpētīt, vai plaknēm

$$x+y+z=1,\quad x-2y-3z=5,\quad 2x-y-2z=6$$

ir kopīgi punkti.

Rīkojoties tāpat kā iepriekšējā piemērā, abas reizes dabūjam $4x+y=8$, t. i., faktiski ne divus, bet vienu vienādojumu. Tam ir neskaitāms daudzums atrisinājumu. Tātad trim plaknēm ir neskaitāms daudzums kopīgu punktu, t. i., šīs plaknes iet caur vienu taisni.

4. piemērs. Plaknēm

$$x-y+2=0,\quad x+2y-1=0,\quad x+y-z+2=0$$

ir viens kopīgs punkts $(-1; 1; 2)$, jo vienādojumu sistēmai ir viens vienīgs atrisinājums $x=-1$, $y=1$, $z=2$.

135. §. Plaknes un punktu pāra savstarpējais novietojums

Punktu $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ un plaknes

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (1)$$

savstarpējo novietojumu nosaka šādas pazīmes (sal. 27. §).

a) Punkti M_1 un M_2 atrodas vienā pusē no plaknes (1), ja skaitļiem $Ax_1+By_1+Cz_1+D$ un $Ax_2+By_2+Cz_2+D$ ir vienādas zīmes.

b) M_1 un M_2 atrodas dažādās pusēs no plaknes (1), ja šiem skaitļiem ir pretējas zīmes.

c) Viens no punktiem M_1, M_2 (vai abi) atrodas uz plaknes, ja viens no šiem skaitļiem (vai abi) ir vienāds ar nulli.

1. piemērs. Punkti $(2; 3; 3)$ un $(1; 2; -1)$ atrodas vienā pusē no plaknes $6x+3y+2z-6=0$, jo abi skaitļi $6\cdot 2+3\cdot 3+2\cdot 3-6=21$ un $6\cdot 1+3\cdot 2+2(-1)-6=4$ ir pozitīvi.

2. piemērs. Koordinātu sākums $(0; 0; 0)$ un punkts $(2; 1; 1)$ atrodas dažādās pusēs no plaknes $5x+3y-2z-5=0$, jo skaitļiem $5\cdot 0+3\cdot 0-2\cdot 0-5=-5$ un $5\cdot 2+3\cdot 1-2\cdot 1-5=$ $=6$ ir pretējas zīmes.

136. §. Attālums no punkta līdz plaknei

Attālums d no punkta $M_1(x_1; y_1; z_1)$ līdz plaknei

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{1}$$

ir vienāds (sal. 28. §) ar lieluma

$$\delta=\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{2}$$

absolūto vērtību, t. i.,

$$d=|\delta|=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{3}$$

Piemērs. Atrast attālumu no punkta (3; 9; 1) līdz plaknei $x-2y+2z-3=0$.

Atrisinājums.

$$\delta=\frac{x_1-2y_1+2z_1-3}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{1\cdot3-2\cdot9+2\cdot1-3}{3}=-5\frac{1}{3},$$

$$d=|\delta|=5\frac{1}{3}.$$

1. piezīme. Lieluma δ zīme ļauj spriest par punkta M_1 un sākuma O savstarpējo novietojumu attiecībā pret plakni (1) (sal. 28. § 1. piezīme).

2. piezīme. Formulu (3) var dabūt analītiski, spriežot tāpat kā 28. § 2. piezīmē. Vienādojumu taisnei, kas iet caur punktu M_1 perpendikulāri plaknei (1), izdevīgi ņemt parametriskajā formā (sk. 153. un 156. §).

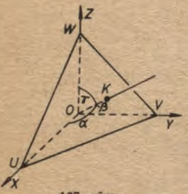
137. §. Plaknes polārie parametri[1]

Par plaknes UVW (167. zīm.) *polāro attālumu* sauc no sākuma O pret plakni novilktā perpendikula OK garumu p. Polārais attālums ir pozitīvs vai vienāds ar nulli.

[1] Sal. 29. §.

Ja plakne UVW neiet caur sākumu, tad uz perpendikula OK par pozitīvo vērsumu pieņem vektora $\overrightarrow{OK}$ vērsumu. Ja turpretim UVW iet caur sākumu, tad pozitīvo vērsumu uz perpendikula izvēlas pēc patikas.

Par plaknes UVW *polārajiem leņķiem* sauc leņķus



167. zīm.

$$\alpha = \angle XOK, \quad \beta = \angle YOK,$$
$$\gamma = \angle ZOK$$

starp taisnes OK pozitīvo virzienu un koordinātu asīm (šos leņķus uzskata par pozitīviem un ne lielākus par 180°). Leņķus α, β, γ saista (101. §) sakarība

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Polāro attālumu p un polāros leņķus α, β, γ sauc par plaknes UVW *polārajiem parametriem.*

Ja plakne UVW ir uzdota ar vienādojumu $Ax+By+Cz+$ $+D=0$, tad tās polāros parametrus nosaka formulas

$$p = \frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \mp\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\beta &= \mp\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\gamma &= \mp\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

kur augšējās zīmes ņem, ja $D>0$, bet apakšējās, ja $D<0$. Ja $D=0$, tad pēc patikas izvēlas vai nu tikai augšējās, vai tikai apakšējās zīmes.

1. piemērs. Atrast polāros parametrus plaknei

$$x-2y+2z-3=0 \quad (A=1,\ B=-2,\ C=2,\ D=-3).$$

Atrisinājums. Formula (1) dod

$$p=\frac{|-3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{3}{3}=1.$$

Formulas (2), kur jāņem apakšējās zīmes (jo $D=-3<0$), dod

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{1}{3},$$

$$\cos\beta=\frac{-2}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=-\frac{2}{3},$$

$$\cos\gamma=\frac{2}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{2}{3}.$$

Tādējādi, $\alpha\approx 70°32'$, $\beta\approx 131°49'$, $\gamma\approx 48°11'$.

2. piemērs. Atrast polāros parametrus plaknei

$$x-2y+2z=0.$$

Formula (1) dod $p=0$ (plakne iet caur koordinātu sākumu); formulās (2) jāņem vai nu tikai augšējās, vai tikai apakšējās zīmes. Pirmajā gadījumā

$$\cos\alpha=-\frac{1}{3},\quad \cos\beta=+\frac{2}{3},\quad \cos\gamma=-\frac{2}{3},$$

tādējādi

$$\alpha\approx 109°28',\quad \beta\approx 48°11',\quad \gamma\approx 131°49',$$

otrā gadījumā

$$\alpha\approx 70°32',\quad \beta\approx 131°49',\quad \gamma\approx 48°11'.$$

138. §. Plaknes normālais vienādojums

Plakni ar polāro attālumu p (137. §) un polārajiem leņķiem α, β, γ ($\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$; 101. §) izsaka vienādojums

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0. \tag{1}$$

To sauc par plaknes *normālo vienādojumu.*

1. piemērs. Sastādīt normālo vienādojumu plaknei, kurai polārais attālums ir $\frac{1}{\sqrt{3}}$, bet visi polārie leņķi ir plati un savā starpā vienādi.

Atrisinājums. Ja $\alpha=\beta=\gamma$, tad noteikums $\cos^2\alpha+$ $+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ dod $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, un tā kā α, β, γ ir platleņķi, tad jāņem mīnusa zīme. Meklētais vienādojums ir $-\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}y-\frac{1}{\sqrt{3}}z-\frac{1}{\sqrt{3}}=0$.

Piezīme. To pašu plakni var izteikt ar vienādojumu

$$x+y+z+1=0$$

(iepriekšējā vienādojuma abas puses pareizinātas ar $-\sqrt{3}$), bet šis vienādojums nav normālais vienādojums, jo koeficienti pie tekošajām koordinātēm nav polāro leņķu kosinusi (to kvadrātu summa nav vienāda ar 1) un bez tam brīvais loceklis ir pozitīvs.

2. piemērs. Vienādojums $\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}z+5=0$ nav normālais vienādojums, jo, lai gan $\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2=$ $=1$, tad tomēr brīvais loceklis ir pozitīvs.

3. piemērs. Vienādojums $-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}z-5=0$ ir normālais vienādojums $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$, $\cos\beta=\frac{2}{3}$, $\cos\gamma=-\frac{2}{3}$, $p=5$ ($\alpha\approx109°28'$, $\beta\approx48°11'$, $\gamma\approx131°49'$).

Vienādojuma (1) atrašana. Apskatāmā plakne (167. zīmējumā UVW) iet caur punktu K ($p\cos\alpha$, $p\cos\beta$, $p\cos\gamma$) perpendikulāri vektoram $\overrightarrow{OK}$. Vektora $\overrightarrow{OK}$ vietā var ņemt tāda paša virziena vektoru **a**, kura garums ir viena mērvienība. Vektora **a** koordinātes ir $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ (101. §). Uzrakstot 123. § vienādojumu (1), dabūsim normālo vienādojumu (1).

139. §. Plaknes vienādojuma redukcija normālajā veidā

Lai atrastu normālo vienādojumu plaknei, kura uzdota ar vienādojumu $Ax+By+Cz+D=0$, tad dotā vienādojuma abas puses pietiek izdalīt ar $\mp\sqrt{A^2+B^2+C^2}$, pie kam augšējo zīmi ņem, ja $D>0$, un apakšējo, — ja $D<0$; ja $D=0$, tad var ņemt jebkuru zīmi.

Dabūsim vienādojumu

$$\mp\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x\mp\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y\mp\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z-\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0.$$

Tas ir normālais vienādojums, jo koeficienti pie x, y, z saskaņā ar 137. § (2) ir attiecīgi vienādi ar $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, bet brīvais loceklis saskaņā ar 137. § (1) ir vienāds ar $-p$.

1. piemērs. Reducēt normālajā veidā vienādojumu

$$x-2y+2z-6=0. \qquad (1)$$

Dalām abas vienādojuma puses ar $+\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=3$ (pirms radikāla ņemam plusa zīmi, jo brīvais loceklis -6 ir negatīvs). Dabūjam

$$\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z-2=0.$$

Tādējādi, $p=2$, $\cos\alpha=\frac{1}{3}$, $\cos\beta=-\frac{2}{3}$, $\cos\gamma=\frac{2}{3}$ ($\alpha\approx70°32'$, $\beta\approx131°49'$, $\gamma\approx48°11'$).

2. piemērs. Reducēt normālajā veidā vienādojumu

$$x-2y+2z+6=0. \qquad (2)$$

Brīvais loceklis ir pozitīvs. Tāpēc dalām ar $-\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=-3$. Dabūjam

$$-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}z-2=0.$$

Tādējādi, $p=2$, $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$, $\cos\beta=\frac{2}{3}$, $\cos\gamma=-\frac{2}{3}$ ($\alpha\approx$ $\approx 109°28'$, $\beta\approx 48°11'$, $\gamma\approx 131°49'$).

3. piemērs. Reducēt normālajā veidā vienādojumu

$$x-2y+2z=0.$$

Tā kā $D=0$ (plakne iet caur sākumu), tad var dalīt vai nu ar $+3$, vai arī ar -3. Dabūjam vai nu $\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z=$ $=0$, vai arī $-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}z=0$. Abos gadījumos $p=0$. Lielumi α, β, γ pirmajā gadījumā ir tādi paši kā pirmajā piemērā, otrā gadījumā — tādi paši kā 2. piemērā.

Piezīme. Ja vienādojumā $Ax+By+Cz+D=0$ brīvais loceklis ir negatīvs un $A^2+B^2+C^2=1$, tad tas jau ir normālais vienādojums (138. § 3. piemērs) un to pārveidot nevajag.

140. §. Vienādojums taisnei telpā

Katru taisnu līniju UV (168. zīm.) var izteikt ar divu vienādojumu sistēmu

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \tag{1}$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \tag{2}$$

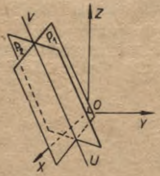
kuri (ja tos apskata *atsevišķi*) izsaka kaut kādas divas *(dažādas)* plaknes P_1 un P_2, kas iet caur UV. Vienādojumus (1) un (2) *(kopā ņemtus)* sauc par *taisnes UV vienādojumiem.*

Piezīme. Izteiciens «taisni UV izsaka sistēma (1)—(2)» nozīmē, ka 1) jebkura taisnes UV punkta M koordinātes x, y, z apmierina abus vienādojumus (1) un (2); 2) jebkura punkta koordinātes, kurš neatrodas uz UV, neapmierina abus vienādojumus (1), (2), kaut arī var apmierināt vienu no tiem.

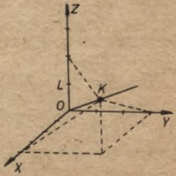
1. piemērs. Uzrakstīt vienādojumu taisnei OK (169. zīm.), kas iet caur sākumu O un punktu $K(4; 3; 2)$.

Atrisinājums. Taisne OK ir plakņu KOZ un KOX šķelšanās rezultāts. Ņemot uz ass OZ kaut kādu punktu, piemēram, $L(0; 0; 1)$, sastādam plaknes KOZ vienādojumu (kā plaknei, kas iet caur trim punktiem O, K, L; 129. §). Dabūjam

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ t. i., } 3x-4y=0. \tag{3}$$



168. zīm.



169. zīm.

Tādā pašā veidā atrodam plaknes KOX vienādojumu

$$2y-3z=0. \tag{4}$$

Taisni OK izsaka vienādojumu sistēma (3)—(4).

Tiešām, katrs taisnes OK punkts M atrodas plaknē KOZ un plaknē KOX; tātad, tā koordinātes apmierina reizē abus vienādojumus (3) un (4). No otras puses, punkts N, kas neatrodas uz OK, nevar piederēt reizē abām plaknēm KOZ un KOX; tātad, tā koordinātes nevar reizē apmierināt abus vienādojumus (3)—(4).

2. piemērs. Taisni OK, kas apskatīta 1. piemērā, var izteikt arī ar vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 3x-4y=0, & (3) \\ 2x-4z=0. & (5) \end{cases}$$

Pirmais vienādojums izsaka plakni KOZ, otrs — plakni KOY.

To pašu taisni OK var izteikt arī ar sistēmu

$$2y-3z=0, \quad 2x-4z=0.$$

3. piemērs. Noteikt, vai punkti $M_1(2; 2; 3)$, $M_2(-4; -3; -3)$, $M_3(-8; -6; -4)$ atrodas uz taisnes OK, kas apskatīta 1. piemērā.

Punkta M_1 koordinātes neapmierina ne vienādojumu (3), ne vienādojumu (4); punkts M_1 neatrodas uz taisnes UV. Punkta M_2 koordinātes apmierina (3), bet neapmierina (4); punkts M_2 atrodas plaknē KOZ, bet neatrodas plaknē KOX; tātad, M_2 neatrodas uz OK. Punkts M_3 atrodas uz OK, jo tā koordinātes apmierina abus vienādojumus (3) un (4).

4. piemērs. Vienādojums $z=0$ izsaka plakni XOY. Vienādojums $x+y-1=0$ izsaka OZ asij paralēlu plakni P (124. § piemērs). Taisni, pa kuru šķeļas plaknes XOY un P (163. zīmējumā KL), izsaka sistēma

$$x+y-1=0, \quad z=0.$$

141. §. Noteikums, kad divi pirmās pakāpes vienādojumi izsaka taisni

Sistēma

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, & (1) \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 & (2) \end{cases}$$

izsaka taisni, ja koeficienti A_1, B_1, C_1 nav proporcionāli koeficientiem A_2, B_2, C_2, šai gadījumā plaknes (1) un (2) nav paralēlas (125. §).

Ja koeficienti A_1, B_1, C_1 ir proporcionāli koeficientiem A_2, B_2, C_2, bet brīvie locekļi nepakļaujas šai proporcijai, t. i.,

$$A_2 : A_1 = B_2 : B_1 = C_2 : C_1 \neq D_2 : D_1,$$

tad sistēma ir nesaderīga un neizsaka nevienu ģeometrisku veidojumu (plaknes (1) un (2) ir paralēlas, bet nesakrīt).

Ja visi četri lielumi A_1, B_1, C_1, D_1 ir proporcionāli lielumiem A_2, B_2, C_2, D_2, t. i.,

$$A_2 : A_1 = B_2 : B_1 = C_2 : C_1 = D_2 : D_1,$$

tad viens no vienādojumiem (1), (2) ir otra vienādojuma sekas un sistēma izsaka plakni, plaknes (1) un (2) sakrīt.

1. piemērs. Sistēma

$$2x-7y+12z-4=0, \quad 4x-14y+36z-8=0$$

izsaka taisni (otrajā vienādojumā koeficienti A un B ir divreiz, bet koeficients C — trīsreiz lielāks nekā pirmajā vienādojumā).

2. piemērs. Sistēma

$$2x-7y+12z-4=0, \quad 4x-14y+24z-8=0$$

izsaka plakni (visi četri lielumi A, B, C, D ir proporcionāli).

3. piemērs. Sistēma

$$2x-7y+12z-4=0, \quad 4x-14y+24z-12=0$$

neizsaka nekādu ģeometrisku veidojumu (lielumi A, B, C ir proporcionāli, bet D nepakļaujas šai proporcijai; sistēma ir nesaderīga).

142. §. Taisnes krustošanās ar plakni

Taisnei L

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, & (1) \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 & (2) \end{cases}$$

un plaknei P

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (3)$$

var nebūt neviena kopīga punkta (ja $L \parallel P$), var būt neskaitāms daudzums kopīgu punktu (ja L atrodas plaknē P) un var arī būt tikai viens kopīgs punkts. Jautājums reducējas[1] uz kopīgo punktu meklēšanu trim plaknēm (1), (2), (3) (sk. 134. §).

1. piemērs. Taisnei

$$x+y+z-1=0, \quad x-2y-3z-5=0$$

[1] Aprēķini kļūst vieglāki, ja taisnes vienādojumus ņem parametriskajā formā (152. § un 153. § piezīme).

nav kopīgu punktu ar plakni

$$2x-y-2z-8=0$$

(tās ir paralēlas) (sk. 134. § 2. piemēru).

2. piemērs. Taisne

$$x-2y-3z-5=0, \quad 2x-y-2z=6$$

atrodas plaknē $x+y+z=1$ (sk. 134. § 3. piemēru).

3. piemērs. Taisne $x+y-z+2=0$, $x-y+2=0$ krusto plakni $x+2y-1=0$ punktā $(-1; 1; 2)$ (sk. 134. § 4. piemēru).

4. piemērs. Aprēķināt koordinātes kaut kādam taisnes L

$$\begin{cases} 2x-3y-z+3=0, \\ 5x-y+z-8=0 \end{cases}$$

punktam.

Dodam koordinātei x kaut kādu vērtību, piemēram, $x=3$. Dabūjam sistēmu $-3y-z+9=0$, $-y+z+7=0$. Atrisinot to, atrodam $y=4$, $z=-3$. Punkts $(3; 4; -3)$ atrodas uz taisnes L (tās krustošanās vietā ar plaknei YOZ paralēlu plakni $x=3$). Tādā pašā veidā, ņemot $x=0$, atrodam punktu $\left(0; -\frac{5}{4}; \frac{27}{4}\right)$ taisnes L krustošanās vietā ar plakni YOZ utt. Tāpat var dot dažādas vērtības koordinātei y vai z.

5. piemērs. Aprēķināt koordinātes kaut kādam taisnes L

$$\begin{cases} 5x-3y+2z-4=0 \\ 8x-6y+4z-3=0 \end{cases}$$

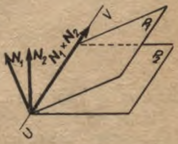
punktam.

Pretstatā iepriekšējam piemēram koordinātei x šeit nedrīkst dot patvaļīgu vērtību. Tā, ja $x=0$, dabūjam nesaderīgu sistēmu $-3y+2z-4=0$, $-6y+4z-3=0$. Taisne L ir paralēla plaknei ZOY. Koordinātei y (vai z) var dot patvaļīgas vērtības; piemēram, ņemot $z=0$, dabūjam punktu $\left(\frac{5}{2}; \frac{17}{6}; 0\right)$. Koordinātei x vienmēr dabūsim vienu un to pašu vērtību $x=\frac{5}{2}$, jo taisne L atrodas ZOY plaknei paralēlā plaknē $x=\frac{5}{2}$.

143. §. Virziena vektors

A. Jebkuru (nenulles) vektoru **a** $\{l, m, n\}$, kas atrodas uz taisnes UV (vai ir tai paralēls), sauc par šīs taisnes *virziena vektoru*. Virziena vektora koordinātes l, m, n sauc par *taisnes virziena koeficientiem*.

Piezīme. Pareizinot virziena koeficientus l, m, n ar vienu un to pašu skaitli k (kas nav vienāds ar nulli), dabūsim skaitļus lk, mk, nk, kuri arī būs virziena koeficienti (tie ir ar vektoru **a** kolineāra vektora **a**k koordinātes).



170. zīm.

B. Par taisnes UV

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \quad (1)$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \quad (2)$$

virziena vektoru var pieņemt vektoriālo reizinājumu $\mathbf{N}_1\times\mathbf{N}_2$, kur $\mathbf{N}_1=\{A_1, B_1, C_1\}$ un $\mathbf{N}_2=\{A_2, B_2, C_2\}$ ir normālie vektori plaknēm P_1 un P_2 (170. zīm.), kuras izsaka vienādojumi (1) un (2). Tiešām, taisne UV ir perpendikulāra normālajiem vektoriem $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$.

Piemērs. Atrast virziena koeficientus taisnei

$$2x-2y-z+8=0, \quad x+2y-2z+1=0.$$

Atrisinājums. Dabūjam $\mathbf{N}_1=\{2, -2, -1\}$, $\mathbf{N}_2=\{1, 2, -2\}$. Par dotās taisnes virziena vektoru pieņemam $\mathbf{a}=\mathbf{N}_1\times\mathbf{N}_2$. Atrodam

$$\mathbf{a}=\left\{\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-1 & 2\\ -2 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix}\right\}=\{6, 3, 6\}.$$

Virziena koeficienti būs $l=6$, $m=3$, $n=6$.

Piezīme. Pareizinot šos skaitļus ar $\frac{1}{3}$, atrodam virziena koeficientus $l'=2$, $m'=1$, $n'=2$. Par virziena koeficientiem var pieņemt arī skaitļus -2; -1; -2 utt.

144. §. Leņķi starp taisni un koordinātu asīm

Leņķus α, β, γ, ko taisne L (neprecizējot tās vērsumu) veido ar koordinātu asīm, atrod no sakarībām

$$\cos\alpha=\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$
$$\cos\beta=\frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$
$$\cos\gamma=\frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

kur l, m, n ir taisnes L virziena koeficienti.

Izriet no 101. §.

Lielumus $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sauc par taisnes *virziena kosinusiem.*

Piemērs. Atrast leņķus, ko taisne

$$2x-2y-z+8=0,\quad x+2y-2z+1=0$$

veido ar koordinātu asīm.

Atrisinājums. Par dotās taisnes virziena koeficientiem (143. § piemērs) var pieņemt $l=2$, $m=1$, $n=2$. Tātad,

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{2}{3},\quad \cos\beta=\frac{1}{3},\quad \cos\gamma=\frac{2}{3};$$

no kurienes

$$\alpha\approx 48°11',\quad \beta\approx 70°32',\quad \gamma\approx 48°11'.$$

145. §. Leņķis starp divām taisnēm

Leņķi φ starp taisnēm L un L' (precīzāk, vienu no šiem leņķiem) atrod ar formulu

$$\cos\varphi=\frac{ll'+mm'+nn'}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}},\tag{1}$$

kur l, m, n un l', m', n' ir taišņu L un L' virziena koeficienti, vai arī ar formulu

$$\cos\varphi=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'.\tag{2}$$

Izriet no 109. §.

P i e m ē r s. Atrast leņķi starp taisnēm

$$\begin{cases} 2x-2y-z+8=0, \\ x+2y-2z+1=0, \end{cases} \quad \begin{cases} 4x+y+3z-21=0, \\ 2x+2y-3z+15=0. \end{cases}$$

A t r i s i n ā j u m s. Pirmās taisnes virziena koeficienti (143. § piemērs) ir $l=2$, $m=1$, $n=2$. Ja par otras taisnes virziena vektoru pieņem vektoriālo reizinājumu $\{4, 1, 3\}\times\times\{2, 2, -3\}$, tad tās virziena koeficienti ir -9, 18, 6. Pareizinot tos (lai rastos mazāki skaitļi) ar $\frac{1}{3}$ (143. § piezīme), dabūjam $l=-3$, $m=6$, $n=2$. Dabūjam

$$\cos\varphi=\frac{2\cdot(-3)+1\cdot6+2\cdot2}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}\sqrt{(-3)^2+6^2+2^2}}=\frac{4}{21},$$

no šejienes $\varphi\approx79°01'$.

146. §. Leņķis starp taisni un plakni

Leņķi ψ starp taisni L (ar virziena koeficientiem l, m, n) un plakni $Ax+By+Cz+D=0$ var atrast ar formulu

$$\sin\psi=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Izriet no 145. § (ja φ ir leņķis starp taisni L un normālo vektoru A, B, C, tad $\varphi=90°\pm\psi$).

P i e m ē r s. Atrast leņķi starp taisni

$$3x-2y=24, \quad 3x-z=-4$$

un plakni $6x+15y-10z+31=0$. Dabūjam $l=2$, $m=3$, $n=6$ (143. §). Atrodam

$$\sin\varphi=\frac{|6\cdot2+15\cdot3+(-10)\cdot6|}{\sqrt{6^2+15^2+(-10)^2}\sqrt{2^2+3^2+6^2}}=\frac{3}{133},$$

no kurienes $\varphi\approx1°18'$.

[1] Sal. 24. §.

147. §. Taisnes un plaknes paralelitātes un perpendikularitātes noteikumi

Paralelitātes noteikums taisnei ar virziena koeficientiem l, m, n un plaknei $Ax+By+Cz+D=0$ ir

$$Al+Bm+Cn=0. \tag{1}$$

Tas izsaka taisnes un normālā vektora $\{A, B, C\}$ perpendikularitāti.

Perpendikularitātes noteikums taisnei un plaknei (apzīmējumi tie paši) ir

$$\frac{l}{A}=\frac{m}{B}=\frac{n}{C}. \tag{2}$$

Tas izsaka taisnes un normālā vektora paralelitāti.

148. §. Plakņu šķipsna

Visu plakņu kopu, kuras iet caur vienu un to pašu taisni UV, sauc par *plakņu šķipsnu.* Taisni UV sauc par šķipsnas *asi.*

Ja zināmi divu dažādu plakņu P_1 un P_2 vienādojumi

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \tag{1}$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \tag{2}$$

kuras pieder šķipsnai (t. i., šķipsnas ass vienādojumi; sal. 140. §), tad katru šķipsnas plakni var izteikt ar vienādojumu

$$m_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+m_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0. \tag{3}$$

Otrādi, vienādojums (3) ar jebkurām m_1, m_2 vērtībām (kas vienlaicīgi nav vienādas ar nulli) izsaka plakni, kura pieder šķipsnai ar asi UV[1]. Atsevišķā gadījumā, ja $m_1=0$, dabūjam plakni P_2, bet, ja $m_2=0$, — plakni P_1. Vienādojumu (3) sauc par *plakņu šķipsnas vienādojumu*[2].

---

[1] Sk. tālāk paskaidrojumu 1. piemēram.

[2] Ja plaknes (1) un (2) ir paralēlas (bet nesakrīt), tad vienādojums (3), kur m_1, m_2 drīkst pieņemt visas iespējamās vērtības, izsaka visas divām dotajām plaknēm paralēlas plaknes (paralēla plakņu šķipsna).

Ja $m_1 \neq 0$, tad mēs varam vienādojumu (3) izdalīt ar m_1. Apzīmējot $m_2 : m_1$ ar λ, dabūjam vienādojumu

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0. \qquad (4)$$

Šeit visas iespējamās vērtības var dot tikai vienam burtam λ, bet no (4) nevar dabūt plaknes P_2 vienādojumu.

1. piemērs. Pieņemsim, ka doti šķipsnas divu plakņu vienādojumi

$$5x-3y=0 \qquad (5)$$

$$3z-4x=0, \qquad (6)$$

t. i., šķipsnas ass vienādojumi. Šķipsnas vienādojums ir

$$m_1(5x-3y)+m_2(3z-4x)=0. \qquad (7)$$

Ņemot, piemēram, $m_1=2$, $m_2=-3$, dabūsim

$$2(5x-3y)+(-3)(3z-4x)=0. \qquad (8)$$

Vienādojums (8) jeb

$$22x-6y-9z=0 \qquad (8a)$$

izsaka vienu šķipsnas plakni.

Paskaidrojums. Ņemam uz taisnes UV kaut kādu punktu $M(x; y; z)$. Tā koordinātes x, y, z apmierina vienādojumus (5) un (6) un tādējādi arī vienādojumu (8). Tātad plakne (8) iet caur katru taisnes UV punktu M, t. i., tā pieder šķipsnai.

2. piemērs. Atrast vienādojumu plaknei, kas iet caur 1. piemēra taisni UV un caur punktu $(1; 0; 0)$.

Atrisinājums. Meklēto plakni izsaka vienādojums (7). Šo vienādojumu apmierinās vērtības $x=1$, $y=0$, $z=0$. Ievietojot šīs vērtības vienādojumā (7), atrodam $5m_1-4m_2=$ $=0$, t. i., $m_1 : m_2=4:5$. Dabūjam vienādojumu

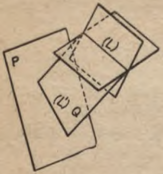
$$4(5x-3y)+5(3z-4x)=0,$$

t. i.,

$$5z-4y=0.$$

3. piemērs. Atrast vienādojumu taisnes L

$$\left.\begin{aligned} 2x+3y+4z+5=0 \\ x-6y+3z-7=0 \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$


171. zīm.

projekcijai plaknē P

$$2x+2y+z+15=0. \qquad (10)$$

Atrisinājums. Meklētā projekcija L' (171. zīm.) ir taisne, pa kuru plakne P šķeļas ar plakni Q (kas novilkta caur L perpendikulāri pret P). Plakne Q pieder šķipsnai ar asi L, un to izsaka vienādojums

$$(2x+3y+4z+5)+\lambda(x-6y+3z-7)=0. \qquad (11)$$

Lai atrastu λ, izsakām (11) šādā veidā

$$(2+\lambda)x+(3-6\lambda)y+(4+3\lambda)z+5-7\lambda=0 \qquad (11a)$$

un uzrakstām plakņu (10) un (11a) perpendikularitātes noteikumu

$$2(2+\lambda)+2(3-6\lambda)+1\cdot(4+3\lambda)=0.$$

No šejienes $\lambda=2$. Ievietojot vienādojumā (11a), dabūsim plaknes Q vienādojumu. Meklēto projekciju izteiks vienādojumi

$$\begin{cases} 4x-9y+10z-9=0, \\ 2x+2y+z+15=0. \end{cases}$$

149. §. Taisnes projekcijas uz koordinātu plaknēm

Pieņemsim, ka taisni izsaka vienādojumi

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, & (1) \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, & (2) \end{cases}$$

kur C_1 un C_2 nav vienlaicīgi vienādi ar nulli (gadījums $C_1=C_2=0$ apskatīts tālāk 3. piemērā). Lai atrastu taisnes projekciju plaknē XOY, pietiek no vienādojumiem (1)—(2) izslēgt z. Dabūtais vienādojums (līdz ar vienādojumu $z=0$) izteiks meklēto projekciju[1]. Analogi atrod projekcijas plaknēs YOZ un ZOX.

[1] Sk. tālāk paskaidrojumu 1. piemēram.

Atrast taisnes L

$$\begin{cases} 2x+4y-3z-12=0, & (3) \\ x-2y+4z-10=0 & (4) \end{cases}$$

projekciju plaknē XOY.

Atrisinājums. Lai izslēgtu z, pareizinām pirmo doto vienādojumu ar 4, bet otro — ar 3 un saskaitām. Dabūsim

$$4(2x+4y-3z-12)+3(x-2y+4z-10)=0, \qquad (5)$$

t. i.,

$$11x+10y-78=0. \qquad (6)$$

Šis vienādojums kopā ar vienādojumu

$$z=0 \qquad (7)$$

izsaka taisnes L projekciju L' plaknē XOY.

Paskaidrojums. Plakne (5) iet caur taisni L (148. §.). No otras puses, kā redzams no (6) (kas nesatur z), šī plakne (124. § 2. p.) ir perpendikulāra plaknei XOY. Tādējādi, taisne, pa kuru plakne (6) šķeļas ar plakni (7), ir taisnes L projekcija plaknē (7) (sal. 148. § 3. piemērs).

2. piemērs. Taisnes L

$$\begin{cases} 3x-5y+4z-12=0, & (8) \\ 2x-5y-\ 4=0 & (9) \end{cases}$$

projekciju plaknē $z=0$ izsaka (koordinātu sistēmā XOY plaknē) vienādojums (9). Izslēgt koordinātu z nav vajadzīgs, jo vienādojums (9) to jau nesatur. Plakne (9) ir perpendikulāra pret plakni XOY; tā projicē taisni L plaknē XOY.

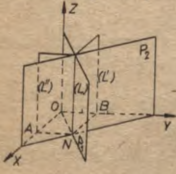
3. piemērs. Atrast taisnes L

$$\begin{cases} 2x-3y=0, & (10) \\ x+y-4=0 & (11) \end{cases}$$

projekcijas koordinātu plaknēs.

Atrisinājums. Abos vienādojumos z iztrūkst, tātad abas plaknes P_1 un P_2 (172. zīm.) ir perpendikulāras pret plakni XOY. Taisne L ir perpendikulāra pret XOY, un tās projekcija plaknē XOY ir punkts N ar koordināti $z_N=0$. No sistēmas (10)—(11) atrodam $x_N=\frac{12}{5}$, $y_N=\frac{8}{5}$.

Vienādojumu projekcijai L' plaknē YOZ var atrast ar vispārīgo paņēmienu, izslēdzot x no (10) un (11). Dabūjam $y=\frac{8}{5}$, t. i., to pašu vienādību, kuru iepriekš atradām koordinātei y_N (no zīmējuma redzams, ka taisne L' atrodas no OZ attālumā OB, kas vienāds ar $y_N=AN$). Vienādojums projekcijai L'' plaknē XOZ ir $x=\frac{12}{5}$.



172. zīm.

150. §. Taisnes simetriskie vienādojumi

Taisni L, kura iet caur punktu $M_0(x_0; y_0; z_0)$ un kurai ir virziena vektors $\mathbf{a}\{l, m, n\}$ (143. §), izsaka vienādojumi

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \tag{1}$$

Šie vienādojumi izsaka vektoru $\mathbf{a}\{l, m, n\}$ un $\overrightarrow{M_0M}\{x-x_0, y-y_0, z-z_0\}$ (173. zīm.) kolinearitāti. Tos sauc par taisnes *simetriskajiem* jeb *kanoniskajiem* vienādojumiem.

1. piezīme. Tā kā par punktu M_0 var ņemt jebkuru taisnes L punktu, bet virziena vektoru $\mathbf{a}$ var aizstāt ar vektoru $k\mathbf{a}$ (143. §), tad vienam no lielumiem x_0, y_0, z_0 un vienam no lielumiem l, m, n var dot patvaļīgu vērtību.

173. zīm.

1. piemērs. Uzrakstīt simetriskos vienādojumus taisnei, kas iet caur punktiem $A(5; -3; 2)$ un $B(3; 1; -2)$. Par punktu M_0 var ņemt punktu A, par vektoru $\mathbf{a}$ var pieņemt vektoru $\overrightarrow{AB}=\{-2, 4, -4\}$. Simetriskie vienādojumi būs

$$\frac{x-5}{-2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-2}{-4}; \tag{2}$$

Ja par punktu M_0 ņem B, bet par a pieņem vektoru $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\{1, -2, 2\}$, tad simetriskie vienādojumi būs

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+2}{2}. \tag{3}$$

2. p i e z ī m e. No trim vienādojumiem

$$\frac{x-5}{-2}=\frac{y+3}{4}, \quad \frac{x-5}{-2}=\frac{z-2}{-4}, \quad \frac{y+3}{4}=\frac{z-2}{-4}, \tag{4}$$

ko satur sistēma (2), *tikai divi* vienādojumi (vienalga kādi) ir neatkarīgi, trešais vienādojums ir to sekas. Katrs no vienādojumiem (4) izsaka plakni, kas iet caur taisni AB perpendikulāri vienai koordinātu plaknei; līdz ar to tas izsaka taisnes AB projekciju atbilstošajā koordinātu plaknē (149. §).

2. p i e m ē r s. Simetriskie vienādojumi taisnei, kas iet caur punktiem $M_0(5; 01; 1)$ un $M_1(5; 6; 5)$, būs

$$\frac{x-5}{0}=\frac{y-0}{6}=\frac{z-1}{4}. \tag{5}$$

Pieraksts $\frac{x-5}{0}$ ir simbolisks; tas nozīmē (102. § piezīme), ka $x-5=0$; līdz ar to vienādojumu (5) vietā var rakstīt sistēmu

$$x=5, \quad \frac{y}{6}=\frac{z-1}{4}. \tag{6}$$

Taisne M_0M_1 ir perpendikulāra OX asij (jo $l=0$).

3. p i e m ē r s. Simetriskie vienādojumi taisnei, kas iet caur punktiem $A(2; 4; 3)$ un $B(2; 4; 5)$, būs

$$\frac{x-2}{0}=\frac{y-4}{0}=\frac{z-3}{2}.$$

Šis pieraksts nozīmē, ka $x=2$ un $y=4$.

Lielums z pieņem dažādas (patvaļīgas) vērtības dažādiem taisnes AB punktiem. Taisne AB ir paralēla OZ asij (jo $l=m=0$).

151. §. Taisnes vienādojumu redukcija simetriskā veidā

Lai taisnes vienādojumus

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \qquad (1)$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \qquad (2)$$

reducētu simetriskā veidā (150. §), jānosaka koordinātes x, y, z kaut kādam punktam, kas atrodas uz taisnes (142. § 4. un 5. piemērs), un virziena koeficienti l, m, n (143. §).

1. piemērs. Taisnes vienādojumus

$$2x-3y-z+3=0, \quad 5x-y+z-8=0$$

reducēt simetriskā veidā.

Atrisinājums. Tāpat kā 142. § (4. piemērs) atrodam uz taisnes punktu $M_0(3; 4; -3)$, $x_0=3$, $y_0=4$, $z_0=-3$. Aprēķinot virziena koeficientus

$$l=\begin{vmatrix}-3 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-4;\ m=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 5\end{vmatrix}=-7,\ n=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 5 & -1\end{vmatrix}=13,$$

dabūjam simetriskos vienādojumus

$$\frac{x-3}{-4}=\frac{y-4}{-7}=\frac{z+3}{13}.$$

2. piemērs. Reducēt simetriskā veidā vienādojumus

$$x+2y-3z-2=0, \quad -3x+4y-6z+21=0.$$

Dosim koordinātei y vai z kaut kādu vērtību (koordinātei x patvaļīgu vērtību dot nedrīkst; sal. 142. § 5. piemērs), piemēram, ņemsim $y=0$. Dabūsim punktu $M_0(5; 0; 1)$. Virziena koeficienti būs $l=0$, $m=15$, $n=10$ jeb (pareizinot ar $\frac{1}{5}$) $l=0$, $m=3$, $n=2$. Simetriskie vienādojumi ir

$$\frac{x-5}{0}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{2}$$

(sal. 150. § 2. piemēru).

3. piemērs. Atrast simetriskos vienādojumus taisnei

$$x+y-6=0, \quad x-y+2=0. \tag{3}$$

Vērtības x un y pilnīgi nosaka vienādojumi (3), t. i., $x_0=2$, $y_0=4$. Koordinātei z var dot jebkuru vērtību, piemēram, $z_0=3$. Tālāk atrodam virziena koeficientus $l=0$, $m=0$, $n=2$. Simetriskie vienādojumi ir (sal. 150. § 3. piemērs)

$$\frac{x-2}{0}=\frac{y-4}{0}=\frac{z-3}{2}.$$

152. §. Taisnes parametriskie vienādojumi

Attiecības $\frac{x-x_0}{l}, \frac{y-y_0}{m}, \frac{z-z_0}{n}$ (150. §) ir vienādas ar vektora

$$\overrightarrow{M_0M}\,\{x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0\}$$

dalījumu (90. §) ar kolineāru vektoru $\mathbf{a}\{l,\ m,\ n\}$. Apzīmēsim šo dalījumu ar t. Tad

$$\left.\begin{aligned} x&=x_0+lt,\\ y&=y_0+mt,\\ z&=z_0+nt. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Šos vienādojumus sauc par taisnes *parametriskajiem vienādojumiem;* kad lielums t (parametrs) pieņem dažādas vērtības, punkts $M(x;\,y;\,z)$ pārvietojas pa taisni. Ja $t=0$, tad tas sakrīt ar M_0; pozitīvām un negatīvām t vērtībām atbilst punkti, kas atrodas uz taisnes dažādās pusēs no M_0.

Vektoriālā formā trīs vienādojumus (1) aizstāj viens vienādojums

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{a}t. \tag{2}$$

153. §. Plaknes krustošanās ar taisni, kas uzdota parametriski

Plaknes P

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{1}$$

un taisnes L

$$x=x_0+lt, \quad y=y_0+mt, \quad z=z_0+nt \tag{2}$$

kopīgo punktu (ja tāds eksistē) atrod ar formulām (2), ja tanīs ievieto t vērtību, kuru aprēķina no vienādojuma[1]

$$(Al+Bm+Cn)t+Ax_0+By_0+Cz_0+D=0. \qquad (3)$$

Pēdējo vienādojumu savukārt dabū, ja izteiksmes (2) ievieto vienādojumā (1).

1. piemērs. Atrast krustošanās punktu plaknei

$$2x+3y+3z-8=0$$

ar taisni

$$\frac{x+5}{3}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+3}{2}.$$

Atrisinājums. Taisnes parametriskie vienādojumi ir

$$x=-5+3t, \quad y=3-t, \quad z=-3+2t. \qquad (4)$$

Ievietojot vienādojumā $2x+3y+3z-8=0$, atrodam $9t-18=0$, no kurienes $t=2$. Ievietojot šo vērtību vienādojumos (4), dabūjam $x=1$, $y=1$, $z=1$. Meklētais punkts ir $(1; 1; 1)$.

2. piemērs. Atrast krustošanās punktu plaknei $3x+y-4z-7=0$ ar 1. piemēra taisni.

Atrisinājums. Tādā pašā veidā dabūjam $0\cdot t-7=0$; šim vienādojumam nav atrisinājuma. Krustošanās punkta nav (taisne ir paralēla plaknei).

3. piemērs. Atrast krustošanās punktu plaknei $3x+y-4z=0$ ar 1. piemēra taisni.

Atrisinājums. Tādā pašā veidā dabūjam $0\cdot t+0=0$; šim vienādojumam ir neskaitāms daudzums atrisinājumu (taisne atrodas plaknē).

Piezīme. Lietojot parametriskos vienādojumus (4), mums nāca klāt ceturtais nezināmais t un mēs dabūjam četrus vienādojumus (doto triju vienādojumu vietā). Šī komplikācija tomēr attaisnojas, jo sistēmu ir vieglāk atrisināt.

[1] Vienādojumam (3) atsevišķos gadījumos var nebūt atrisinājuma (sk. tālāk 2. piemēru) vai arī tam var būt neskaitāms daudzums atrisinājumu (sk. tālāk 3. piemēru).

154. §. Vienādojums taisnei, kas iet caur diviem dotajiem punktiem

Taisni, kas iet caur punktiem $M_1(x_1; y_1; z_1)$ un $M_2(x_2; y_2; z_2)$, izsaka vienādojumi

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{1}$$

Piemērus sk. 150. §.

155. §. Vienādojums plaknei, kas iet caur doto punktu perpendikulāri dotajai taisnei

Plaknei, kas iet caur punktu $M_0(x_0; y_0; z_0)$ perpendikulāri taisnei

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},$$

normālais vektors ir $\{l_1, m_1, n_1\}$ un, tātad, to izsaka vienādojums

$$l_1(x-x_0)+m_1(y-y_0)+n_1(z-z_0)=0$$

jeb vektoriālā formā

$$\mathbf{a}_1(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=0.$$

P i e m ē r s. Plakni, kas iet caur punktu $(-1; -5; 8)$ un ir perpendikulāra taisnei $\frac{x}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z-3}{5}$, izsaka vienādojums $2(y+5)+5(z-8)=0$, t. i.,

$$2y+5z-30=0.$$

156. §. Vienādojums taisnei, kas iet caur doto punktu perpendikulāri dotajai plaknei

Taisnei, kas iet caur punktu $M_0(x_0; y_0; z_0)$ perpendikulāri plaknei $Ax+By+Cz+D=0$, ir virziena vektors $\{A, B, C\}$ un, tātad, to izsaka simetriskie vienādojumi

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}; \tag{1}$$

Piemērs. Taisni, kas iet caur koordinātu sākumu un ir perpendikulāra plaknei $3x+5z-5=0$, izsaka simetriskie vienādojumi $\frac{x}{3}=\frac{y}{0}=\frac{z}{5}$ jeb parametriskie vienādojumi $x=3t$, $y=0$, $z=5t$.

157. §. Vienādojums plaknei, kas iet caur doto punktu un doto taisni

Plakni, kura iet caur punktu $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ un caur taisni L

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}, \tag{1}$$

kura neiet caur M_0, izsaka vienādojums

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0 \tag{2}$$

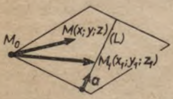
jeb vektoriālā formā

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)\mathbf{a}=0. \tag{2a}$$

Vienādojums (2) jeb (2a) izsaka vektoru $\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{M_0M_1}$ un $\mathbf{a}\,\{l,\, m,\, n\}$ (174. zīm.) komplanaritāti.

Piemērs. Plakni, kas iet caur punktu $M_0(5;\, 2;\, 3)$ un taisni

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-5}{3},$$



174. zīm.

izsaka vienādojums

$$\begin{vmatrix} x-5 & y-2 & z-3 \\ -6 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0,$$

t. i.,

$$x-2y-1=0.$$

Piezīme. Ja taisne (1) iet caur punktu M_0, tad vienādojums (2) pārvēršas identitātē un uzdevumam ir neskaitāms daudzums atrisinājumu (iegūstam plakņu šķipsnu ar asi L; 148. §).

158. §. Vienādojums plaknei, kas iet caur doto punktu paralēli divām dotajām taisnēm

Plakni, kas iet caur punktu $M_0(x_0; y_0; z_0)$ un ir paralēla divām dotajām (savā starpā neparalēlām) taisnēm L_1 un L_2 (vai vektoriem $\mathbf{a}_1$ un $\mathbf{a}_2$), izsaka vienādojums

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0, \tag{1}$$

kur l_1, m_1, n_1 un l_2, m_2, n_2 ir doto taišņu virziena koeficienti (vai doto vektoru koordinātes). Vektoriālā formā vienādojums ir

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2=0. \tag{1a}$$

Vienādojums (1) jeb (1a) izsaka vektoru $\overrightarrow{M_0M}$ (M ir patvaļīgs meklētās plaknes punkts), $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ komplanaritāti.

P i e z ī m e. Ja taisnes L_1 un L_2 ir paralēlas, t. i., $\mathbf{a}_1$ un $\mathbf{a}_2$ ir kolineāri, tad vienādojums (1) pārvēršas identitātē un uzdevumam ir neskaitāms daudzums atrisinājumu (dabūjam plakņu šķipsnu ar asi, kas iet caur punktu M_0 paralēli dotajām taisnēm).

159. §. Vienādojums plaknei, kas iet caur doto taisni un ir paralēla citai dotajai taisnei

Pieņemsim, ka L_1 un L_2 ir neparalēlas taisnes. Tad plakni, kas iet caur taisni L_1 un ir paralēla taisnei L_2, izsaka vienādojums

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0, \tag{1}$$

kur x_1, y_1, z_1 ir kāda taisnes L_1 punkta M_1 koordinātes. Šeit mums ir 158. § atsevišķs gadījums (punkta M_0 loma piekrīt punktam M_1). 158. § piezīme arī paliek spēkā.

160. §. Vienādojums plaknei, kas iet caur doto taisni perpendikulāri dotajai plaknei

Plakni P, kas iet caur doto taisni L_1

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \tag{1}$$

un ir perpendikulāra dotajai plaknei Q

$$Ax+By+Cz+D=0$$

(kas savukārt nav perpendikulāra pret taisni L_1), izsaka vienādojums

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ A & B & C \end{vmatrix}=0. \tag{3}$$

Vektoriālā formā vienādojums ir

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\mathbf{a}_1\mathbf{N}=0. \tag{3a}$$

P a s k a i d r o j u m s. Plakne P iet caur taisni L_1 un ir paralēla plaknes Q normālei $\mathbf{N}\{A, B, C\}$ (sal. 159. §).

P i e z ī m e. Ja plakne (2) ir perpendikulāra taisnei (1), tad vienādojums (3) pārvēršas identitātē un uzdevumam ir neskaitāms daudzums atrisinājumu (sk. 158. § piezīmi).

T a i s n e s p r o j e k c i j a u z j e b k u r u p l a k n i. Plakne (3) projicē taisni L_1 uz plakni Q. Tātad taisni L', kas ir taisnes L_1 projekcija plaknē Q, izsaka vienādojumu sistēma (2)—(3) (sal. 149. §).

161. §. Vienādojums perpendikulam, kas novilkts no dotā punkta pret doto plakni

Perpendikulu, kas novilkts no punkta $M_0(x_0; y_0; z_0)$ pret taisni L_1

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \tag{1}$$

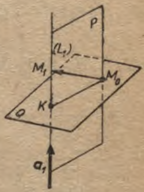
(kura neiet caur M_0), izsaka vienādojumu sistēma

$$\left\{\begin{array}{l} l_1(x-x_0)+m_1(y-y_0)+n_1(z-z_0)=0, \qquad (2) \\ \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix}=0 \qquad (3) \end{array}\right.$$

jeb vektoriālā formā vienādojumi

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{a}_1(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=0, \qquad (2a) \\ (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)\mathbf{a}_1=0. \qquad (3a) \end{array}\right.$$

Ja vienādojumu (2) ņem atsevišķi, tad tas izsaka plakni Q (175. zīm.), kas novilkta caur M_0 perpendikulāri taisnei L_1 (155. §), bet vienādojums (3), ņemts atsevišķi, izsaka plakni R, kas novilkta caur punktu M_0 un taisni L_1 (157. §).



175. zīm.

P i e z ī m e. Ja taisne L_1 iet caur punktu M_0, tad vienādojums (3) pārvēršas (120. §) identitātē (caur punktu, kas ņemts uz taisnes L, var novilkt neskaitāmu daudzumu perpendikulu pret L).

P i e m ē r s. Atrast vienādojumu perpendikulam, kas novilkts no punkta (1; 0; 1) pret taisni

$$x=3z+2, \quad y=2z. \qquad (1a)$$

Atrast arī perpendikula pamatu.

A t r i s i n ā j u m s. Vienādojumu (1a) simetriskā veidā (151. §) var uzrakstīt tā:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}. \qquad (1b)$$

Meklēto perpendikulu izsaka vienādojumi

$$\left\{\begin{array}{l} 3(x-1)+2(y-0)+1(z-1)=0, \qquad (2b) \\ \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 2-1 & 0 & 0-1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0 \qquad (3b) \end{array}\right.$$

jeb pēc vienkāršojumiem

$$3x+2y+z-4=0 \qquad (2c)$$

$$x-2y+z-2=0. \qquad (3c)$$

Perpendikula pamata K koordinātes atradīsim, atrisinot triju vienādojumu sistēmu (1b). (2c). Vienādojums (3c) arī tiks apmierināts. Dabūjam

$$K\left(\frac{11}{7};\ -\frac{2}{7};\ -\frac{1}{7}\right).$$

Piezīme. Triju vienādojumu sistēmai (1b), (3c) ir neskaitāms daudzums atrisinājumu (jo plakne R iet caur taisni L_1, bet nekrusto to).

162. §. No dotā punkta pret doto taisni novilktā perpendikula garums

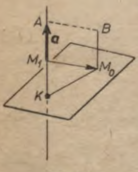
Dots punkts $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un taisne L_1, kuru izsaka 161. § vienādojums (1). Jāatrod attālums no punkta M_0 līdz taisnei L_1, t. i., garums perpendikulam M_0K (175. zīm.), kas novilkts no punkta M_0 pret taisni L_1.

Var vispirms atrast perpendikula pamatu K (161. § piemērs), pēc tam nogriežņa M_0K garumu. Vienkāršāk tomēr pielietot formulu (saglabāti 161. § apzīmējumi)

$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}\dfrac{y_0-y_1}{m_1} & \dfrac{z_0-z_1}{n_1}\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\dfrac{z_0-z_1}{n_1} & \dfrac{x_0-x_1}{l_1}\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\dfrac{x_0-x_1}{l_1} & \dfrac{y_0-y_1}{m_1}\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}}, \qquad (1)$$

t. i., vektoriālā formā

$$d=\frac{\sqrt{[(\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_1)\times\mathbf{a}_1]^2}}{\sqrt{\mathbf{a}_1^2}}, \qquad (1a)$$



176. zīm.

Izteiksmes (1a) skaitītājs ir (111. §) paralelograma M_1M_0BA (176. zīm., kur $M_1A=\mathbf{a}_1$) laukums, bet saucējs ir pamata M_1A garums. Tādējādi, daļa ir vienāda ar paralelograma augstumu M_0K.

Piemērs. Atrast garumu perpendikulam, kas novilkts no punkta $M_0(1;\,0;\,1)$ pret taisni $x=3z+2$, $y=2z$.

Atrisinājums. 161. § piemērā mēs atradām

$$K\left(\frac{11}{7};\ -\frac{2}{7};\ -\frac{1}{7}\right).$$

Tātad

$$d=|M_0K|=\sqrt{\left(\frac{11}{7}-1\right)^2+\left(-\frac{2}{7}\right)^2+\left(-\frac{1}{7}-1\right)^2}=2\sqrt{\frac{3}{7}}.$$

Pielietojam tagad formulu (1). Saskaņā ar 161. § (1b) dabūjam

$$x_1=2,\ y_1=0,\ z_1=0,\ l_1=3,\ m_1=2,\ n_1=1, \text{ tā ka}$$

$$\begin{vmatrix} y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-2,\quad \begin{vmatrix} z_0-z_1 & x_0-x_1 \\ n_1 & l_1 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=4,\quad \begin{vmatrix} x_0-x_1 & y_0-y_1 \\ l_1 & m_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-2.$$

Dabūjam

$$d=\frac{\sqrt{(-2)^2+4^2+(-2)^2}}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}}=2\sqrt{\frac{3}{7}}.$$

163. §. Noteikums, kad divas taisnes krustojas vai atrodas vienā plaknē

Ja taisnes

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}, \tag{1}$$

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2} \tag{2}$$

atrodas vienā plaknē, tad

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0 \tag{3}$$

jeb vektoriālā formā

$$(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2=0. \tag{3a}$$

Otrādi, ja izpildīts noteikums (3), tad taisnes atrodas vienā plaknē.

177. zīm

P a s k a i d r o j u m s. Ja taisnes (1) un (2) atrodas vienā plaknē, tad tanī atrodas arī taisne M_1M_2 (177. zīm.), t. i., vektori $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ ir komplanāri (un otrādi). To arī izsaka vienādojums (3).

P i e z ī m e. Ja $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$, pie tam vienādība (3) katrā ziņā būs apmierināta, tad taisnes ir paralēlas. Pretējā gadījumā taisnes, kas apmierina noteikumu (3), krustojas.

P i e m ē r s. Noteikt, vai taisnes

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}, \tag{1}$$

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{4} \tag{2}$$

krustojas un, ja krustojas, tad kādā punktā.

A t r i s i n ā j u m s. Taisnes (1) un (2) atrodas vienā plaknē, jo determinants (3), kas šai gadījumā vienāds ar $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$, ir vienāds ar nulli. Šīs taisnes nav paralēlas (virziena koeficienti nav proporcionāli). Lai atrastu krustošanās punktu, jāatrisina četru vienādojumu sistēma (1), (2) ar trim nezināmiem. Parasti tādai sistēmai nav atrisinājuma, bet šai gadījumā tāpēc, ka izpildīts noteikums (3), atrisinājums ir. Atrisinot kaut kādu triju vienādojumu sistēmu, dabūjam $x=1$, $y=2$, $z=3$. Ceturto vienādojumu šis atrisinājums arī apmierina. Krustošanās punkts ir (1; 2; 3).

164. §. Divu doto taišņu kopīgā perpendikula vienādojums

Taisni UV, kas krusto divas neparalēlas taisnes (L_1 un L_2 178. zīmējumā)

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},$$

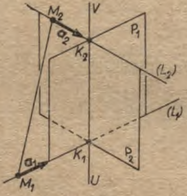
$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

un ir perpendikulāra pret tām, izsaka (vektoriālā formā) vienādojumi

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\,\mathbf{a}_1\mathbf{a}=0, \qquad (1)$$

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2)\,\mathbf{a}_2\mathbf{a}=0, \qquad (2)$$

kur $\mathbf{a}_1=\{l_1, m_1, n_1\}$, $\mathbf{a}_2=\{l_2, m_2, n_2\}$ un $\mathbf{a}=\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2$.



178. zīm.

179. zīm.

Ja vienādojumu (1) ņem atsevišķi, tad tas izsaka plakni P_1, kas novilkta caur taisni L_1 paralēli vektoram $\mathbf{a}=\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2$ (159. §). Analogi (2) izsaka plakni P_2, kas novilkta caur L_2 paralēli $\mathbf{a}$.

Punktu K_1, kur UV krusto L_1, atrod kā L_1 un plaknes P_2 krustošanās punktu. Analogi atrod punktu K_2; pēc tam var aprēķināt kopīgā perpendikula K_1K_2 garumu.

P i e z ī m e. Ja L_1 un L_2 ir paralēlas (tad $\mathbf{a}=0$ un vienādojumi (1), (2) pārvēršas identitātēs), tad ir neskaitāms daudzums taišņu UV. Lai dabūtu vienas šādas taisnes vienādojumu, ņemam uz L_1 (179. zīm.) patvaļīgu punktu K_1 un sastādām vienādojumu taisnei, kas iet caur K_1 vektora $\mathbf{a}_1\times\mathbf{b}$ virzienā, kur $\mathbf{b}=\mathbf{a}_1\times(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)$.

1. piemērs. Atrast kopīgā perpendikula vienādojumu taisnēm

$$x=2+2t,\quad y=1+4t,\quad z=-1-t, \tag{3}$$

$$x=-31+3t',\quad y=6+2t',\quad z=3+6t'. \tag{4}$$

Atrisinājums. Dabūjam $\mathbf{a}_1=\{2, 4, -1\}$, $\mathbf{a}_2=\{3, 2, 6\}$, $\mathbf{a}=\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2=\{26, -15, -8\}$.

Meklēto perpendikulu izsaka vienādojumi

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 26 & -15 & -8 \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} x+31 & y-6 & z-3 \\ 3 & 2 & 6 \\ 26 & -15 & -8 \end{vmatrix}=0$$

jeb pēc vienkāršojumiem

$$\begin{cases} 47x+10y+134z+30=0, & (5) \\ 74x+180y-97z+1505=0. & (6) \end{cases}$$

Kopīgā perpendikula krustošanās punktu K_1 ar taisni (3) atrodam no sistēmas (3) – (6). Dabūjam $K_1(-2; -7; 1)$. Analogi atrodam $K_2(-28; 8; 9)$. Kopīgā perpendikula garums d ir vienāds ar

$$d=\sqrt{(-2+28)^2+(-7-8)^2+(1-9)^2}=\sqrt{965}.$$

2. piemērs. Atrast kopīgā perpendikula vienādojumus taisnēm

$$x=2+2t,\quad y=3+2t,\quad z=t, \tag{7}$$

$$x=5+2t',\quad y=4+2t',\quad z=1+t'. \tag{8}$$

Taisnes ir paralēlas $\mathbf{a}_1=\mathbf{a}_2=\{2, 2, 1\}$, $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1=\{3, 1, 1\}$, $\mathbf{b}=\mathbf{a}_1\times(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)=\{1, 1, -4\}$. Kopīgā perpendikula virziena vektors ir $\mathbf{a}_1\times\mathbf{b}=\{-9, 9, 0\}$ jeb, pareizinot ar $\frac{1}{9}$, $\{-1, 1, 0\}$. Par sākuma punktu pieņemam patvaļīgu taisnes (7) punktu $K_1(2+2t;\ 3+2t;\ t)$. Dabūsim kopīgā perpendikula vienādojumu

$$\frac{x-(2+2t)}{-1}=\frac{y-(3+2t)}{1}=\frac{z-t}{0}, \tag{9}$$

kur t ir patvaļīgs skaitlis. Lai atrastu kopīgā perpendikula (9) krustošanās punktu K_2 ar taisni (8), izteiksmes (8) jāievieto vienādojumā (9). Dabūsim

$$\frac{3+2(t'-t)}{-1}=\frac{1+2(t'-t)}{1}=\frac{1+(t'-t)}{0}.$$

Visi šie vienādojumi dod $t'=t-1$; ievietojot šo izteiksmi vienādībās (8), atrodam $K_2(3+2t;\ 2+2t;\ t)$, tad

$$d=|K_1K_2|=$$
$$=\sqrt{[(3+2t)-(2+2t)]^2+[(2+2t)-(3+2t)]^2+[t-t]^2}=\sqrt{2}.$$

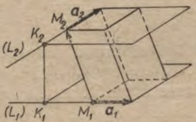
165. §. Īsākais attālums starp divām taisnēm

Īsākais attālums starp taisnēm L_1 un L_2 ir to kopīgā perpendikula garums d. To var atrast, sastādot kopīgā perpendikula vienādojumus (164. § 1. un 2. piemērs). Vienkāršāk tomēr d atrast tieši.

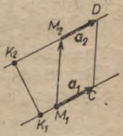
1) Ja taisnes L_1 un L_2 nav paralēlas (180. zīm.), tad

$$d=\frac{|(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\,\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2|}{|\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2|}=\frac{|(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\,\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2|}{\sqrt{(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)^2}} \qquad (1)$$

($\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ ir punktu M_1, M_2 rādiusvektori; $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ — taišņu L_1, L_2 virziena vektori).



180. zīm.



181. zīm.

Daļas (1) skaitītājs ir (121. §) uz vektoriem $\overrightarrow{M_1M_2}$, a_1, a_2 konstruētā paralēlskaldņa tilpums. Saucējs ir tā pamata laukums (111. §). Tādējādi, visa daļa ir augstums $K_1K_2=d$.

Taisnēm, kas krustojas, (vektori $\overrightarrow{K_1K_2}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ ir komplanāri) formula (1) dod $d=0$. Paralēlām taisnēm (vektori $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ ir kolineāri) šī formula neder $\left(\text{dod } \frac{0}{0}\right)$.

2) Ja taisnes L_1, L_2 ir paralēlas (181. zīm.), tad

$$d=\frac{|(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\times\mathbf{a}_1|}{|\mathbf{a}_1|}=\frac{\sqrt{[(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\times\mathbf{a}_1]^2}}{\sqrt{\mathbf{a}_1^2}} \tag{2}$$

($\mathbf{a}_1$ vietā var ņemt $\mathbf{a}_2$).

Daļas (2) skaitītājs ir paralelograma M_1M_2DC laukums, saucējs — pamata M_1C garums. Visa daļa ir augstums $K_1K_2=d$.

1. piemērs. Atrast īsāko attālumu starp 164. § 1. piemēra taisnēm [$\mathbf{r}_1=\{2, 1, -1\}$, $\mathbf{r}_2=\{-31, 6, 3\}$, $\mathbf{a}_1=\{2, 4, -1\}$, $\mathbf{a}_2=\{3, 2, 6\}$].

Atrisinājums. Dotās taisnes nav paralēlas. Dabūjam

$$\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2=\left\{\begin{vmatrix}4 & -1\\ 2 & 6\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-1 & 2\\ 6 & 3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 2\end{vmatrix}\right\}=\{26, \quad -15, \quad -8\},$$

$$(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2=-33\cdot 26+5\cdot(-15)+4\cdot(-8)=-965.$$

Formula (1) dod

$$d=\frac{965}{\sqrt{26^2+(-15)^2+(-8)^2}}=\frac{965}{\sqrt{965}}=\sqrt{965}.$$

2. piemērs. Atrast īsāko attālumu starp 164. § 2. piemēra taisnēm [$\mathbf{a}_1=\mathbf{a}_2=\{2, 2, 1\}$, $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1=\{3, 1, 1\}$].

Atrisinājums. Taisnes ir paralēlas; formula (2) dod

$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{2^2+2^2+1}}=\sqrt{2}.$$

Piezīme. Īsākajam attālumam starp taisnēm (ja tās nav perpendikulāras un nav paralēlas) var pierakstīt zīmi (sk. 165a. §).

165a. §. Labie un kreisie taišņu pāri

Definīcija. Šķērsu neperpendikulāru taišņu L_1L_2 pāri (180. zīm.) sauc par *labo*, ja novērotājs, kas atrodas uz kādas sekantes K_1K_2 turpinājuma aiz taisnes L_2, redz taisnes L_1 īsāko pagriezienu, kas jāizdara, lai tā nonāktu taisnei L_2 paralēlā stāvoklī, notiekam pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam. Pretējā gadījumā L_1, L_2 pāri sauc par *kreiso*.

1. piezīme. Labais pāris paliek labais, bet kreisais — kreisais neatkarīgi ne tikai no punktu K_1, K_2 izvēles uz taisnēm L_1, L_2, bet arī no šo taišņu apzīmējumiem (pirmo taisni var apzīmēt ar L_2, bet otru — ar L_1). Tiešām, kaut arī tagad pagrieziens notiek pretējā virzienā, tomēr novērotājs būs novietojies uz sekantes turpinājuma aiz L_1, tā ka viņam pagrieziena virziens paliks iepriekšējais.

2. piezīme. Taisnēm L_1, L_2, kas atrodas vienā plaknē, un arī perpendikulārām taisnēm, jēdzienam par labo un kreiso pāri nav jēgas.

Piemērs. Ja, ieskrūvējot vai izskrūvējot viļķi, tā rokturi pagriež par 60° leņķi, tad roktura ass sākuma un beigu stāvokļi veido labo taišņu pāri (ja par taisni L_1 pieņem roktura asi tās augšējā stāvoklī, tad novērotājam, kas minēts definīcijā, jāskatās no apakšas; pretējā gadījumā — no augšas). Ja viļķa rokturi pagriež par 120° leņķi, tā ass sākuma un beigu stāvokļi veido kreiso sistēmu.

Labā un kreisā pāra pazīme. Pieņemsim, ka $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ ir kādi ar taisnēm L_1, L_2 kolineāri (nenulles) vektori. Ja jauktajam reizinājumam $\overrightarrow{K_1K_2}\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$ ir tāda pati zīme kā skalārajam reizinājumam $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$, tad taišņu L_1, L_2 pāris ir labais, ja zīmes ir pretējas, tad — kreisais.

Ja $\overrightarrow{K_1K_2}\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2=0$, tad taisnes L_1, L_2 atrodas vienā plaknē; ja $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2=0$, tad taisnes L_1, L_2 ir perpendikulāras. Abos gadījumos pāris L_1, L_2 nav ne labais, ne kreisais (sk. 2. piezīmi).

Zīme īsākajam attālumam starp diviem punktiem. Īsākajam attālumam starp šķērsām neperpendikulārām taisnēm var pierakstīt zīmi, uzskatot šo attālumu par pozitīvu, ja pāris ir labais, un negatīvu, ja tas ir kreisais.

Ja apzīmējam ar burtu δ īsāko attālumu starp taisnēm, ievērojot arī tā zīmi, tad 165. § formulas (1) vietā varam rakstīt šādu formulu

$$\delta = \frac{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2|} \cdot \frac{(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|}. \tag{1}$$

Tā ir derīga arī taisnēm, kas krustojas (bet nav perpendikulāras) un šai gadījumā dod $\delta=0$. Perpendikulārām taisnēm formula (1) nav derīga, jo pirmais reizinātājs $\frac{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2|}$ kļūst nenoteikts, pieņemot izskatu $\frac{0}{0}$ (ja taisnes nav perpendikulāras, tad pirmais reizinātājs ir vienāds vai nu ar $+1$ vai -1). Paralēlām taisnēm formula (1) arī nav derīga, jo nenoteikts kļūst otrs reizinātājs. Sk. 2. piezīmi.

166. §. Koordinātu transformācija

1. Koordinātu sākuma pārnešana. Ja koordinātu sistēmu $OXYZ$ aizstāj ar jaunu sistēmu $O'X'Y'Z'$ ar vienādi vērstām asīm, tad punkta vecās koordinātes (x; y; z) atkarībā no jaunajām koordinātēm (x'; y'; z') izsaka formulas

$$x=a+x', \quad y=b+y', \quad z=c+z', \tag{1}$$

kur a, b, c ir jaunā sākuma O' koordinātes vecajā sistēmā (sal. 35. §).

Jebkura vektora koordinātes šai transformācijā paliek nemainīgas.

2. Asu pagriešana. Aizstājot sistēmu $OXYZ$ ar jaunu sistēmu $O'X'Y'Z'$, kurai ir tas pats sākums, punkta vecās koordinātes atkarībā no jaunajām koordinātēm izsaka formulas

$$\left.\begin{aligned} x&=x'\cos(\widehat{\mathbf{i}',\mathbf{i}})+y'\cos(\widehat{\mathbf{j}',\mathbf{i}})+z'\cos(\widehat{\mathbf{k}',\mathbf{i}}),\\ y&=x'\cos(\widehat{\mathbf{i}',\mathbf{j}})+y'\cos(\widehat{\mathbf{j}',\mathbf{j}})+z'\cos(\widehat{\mathbf{k}',\mathbf{j}}),\\ z&=x'\cos(\widehat{\mathbf{i}',\mathbf{k}})+y'\cos(\widehat{\mathbf{j}',\mathbf{k}})+z'\cos(\widehat{\mathbf{k}',\mathbf{k}}),\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

kur $(\widehat{\mathbf{i}',\mathbf{i}})$ ir leņķis starp vektoriem $\mathbf{i}'$ un $\mathbf{i}$, t. i., starp jauno un veco abscisu asi, $(\widehat{j', i})$ ir leņķis starp jauno ordinātu asi un veco abscisu asi utt.[1]

Jebkura vektora koordinātes šai transformācijā mainās saskaņā ar tām pašām formulām.

P i e z ī m e. No deviņiem lielumiem $\cos(\widehat{i', i})$, $\cos(\widehat{j', j})$ utt. jebkurus trīs lielumus var uzdot patvaļīgi, pārējie seši apmierina sakarības

$$\left.\begin{aligned} \cos^2(\widehat{i, i'}) + \cos^2(\widehat{i, j'}) + \cos^2(\widehat{i, k'}) = 1, \\ \cos^2(\widehat{j, i'}) + \cos^2(\widehat{j, j'}) + \cos^2(\widehat{j, k'}) = 1, \\ \cos^2(\widehat{k, i'}) + \cos^2(\widehat{k, j'}) + \cos^2(\widehat{k, k'}) = 1 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

un

$$\left.\begin{aligned} \cos(\widehat{i, i'})\cos(\widehat{j, i'}) + \cos(\widehat{i, j'})\cos(\widehat{j', j'}) + \\ + \cos(\widehat{i, k'})\cos(\widehat{j, k'}) = 0, \\ \cos(\widehat{i, i'})\cos(\widehat{k, i'}) + \cos(\widehat{i, j'})\cos(\widehat{k, j'}) + \\ + \cos(\widehat{i, k'})\cos(\widehat{k, k'}) = 0, \\ \cos(\widehat{j, i'})\cos(\widehat{k, i'}) + \cos(\widehat{j, j'})\cos(\widehat{k, j'}) + \\ + \cos(\widehat{j, k'})\cos(\widehat{k, k'}) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Sakarības (3) izriet no 101. § vienādības (4), sakarības (4) — no 145. § vienādības (2).

167. §. Virsmas vienādojums

Vienādojumu, kas saista koordinātes x, y, z, sauc par *virsmas S vienādojumu,* ja ievēroti šādi divi noteikumi: 1) jebkura virsmas S punkta koordinātes apmierina šo

[1] Visu jauno koordinātu koeficienti ir leņķu kosinusi starp atbilstošo jauno asi un to veco asi, kurai atbilst kreisā pusē pierakstītā koordināte.

vienādojumu, 2) jebkura punkta koordinātes x, y, z, kurš neatrodas uz virsmas S, neapmierina šo vienādojumu (sal. 7. §).

Piezīme. Ja maina koordinātu sistēmu, tad mainīsies arī virsmas vienādojums (jauno vienādojumu dabū no vecā vienādojuma ar koordinātu transformācijas formulu palīdzību, 166. §).

1. piemērs. Vienādojums $x+y+z-1=0$ ir plaknes vienādojums. To pašu plakni, attiecīgi izvēloties taisnleņķa koordinātu sistēmu, var izteikt ar jebkuru citu pirmās pakāpes vienādojumu.

2. piemērs. Lodes virsmu (sfēru), kuras rādiuss ir R un centrs atrodas koordinātu sākumā, izsaka vienādojums

$$x^2+y^2+z^2=R^2, \tag{1}$$

jo, 1) ja punkts $M(x, y, z)$ atrodas uz šīs virsmas, tad attālums $OM=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ir vienāds ar R, tātad punkta koordinātes vienādojumu apmierina; 2) ja M neatrodas uz šīs virsmas, tad $OM \neq R$, un koordinātes vienādojumu (1) neapmierina.

3. piemērs. Sfēru, kuras rādiuss ir R un centrs atrodas punktā $C(a; b; c)$, izsaka vienādojums

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2. \tag{2}$$

Vienādojums, kas saista koordinātes x, y, z, var izteikt ne virsmu, bet citus ģeometriskus veidojumus, vai arī neizteikt nevienu ģeometrisku veidojumu (sal. 58. §).

4. piemērs. Vienādojums $x^2+y^2+z^2+1=0$ neizsaka nekādu ģeometrisku veidojumu, jo tam nav (reālu) atrisinājumu.

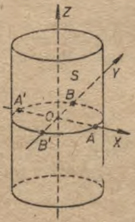
5. piemērs. Vienādojums $x^2+y^2+z^2=0$, kuram ir viens reāls atrisinājums $x=0$, $y=0$, $z=0$, izsaka vienu punktu.

6. piemērs. Vienādojums $(x-y)^2+(z-y)^2=0$ ir apmierināts tikai tad, ja vienlaicīgi $x-y=0$ un $z-y=0$; tas izsaka taisni $x=y=z$.

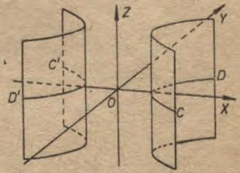
168. §. Cilindriskas virsmas, kurām veidotājas paralēlas vienai koordinātu asij

Virsmu, kuru izveido taisna līnija (veidotāja), pārvietojoties paralēli kādai nekustīgai taisnei, sauc par *cilindrisku virsmu.* Jebkuru līniju, kuru veidotāja krusto jebkurā savā stāvoklī, sauc par *vadītāju.*

Katrs vienādojums, kas nesatur koordināti z un izsaka plaknē XOY kādu līniju L, izsaka telpā cilindrisku virsmu, kurai veidotāja ir paralēla OZ asij, bet vadītāja ir līnija L.



182. zīm.



183. zīm.

1. piemērs. Vienādojums

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

izsaka plaknē XOY elipsi $ABA'B'$ (182. zīm.) ar pusasīm $a=OA$, $b=OB$. Telpā tas izsaka cilindrisku virsmu S, kurai veidotājas ir paralēlas OZ asij, bet vadītāja ir elipse $ABA'B'$ *(eliptiskais cilindrs).*

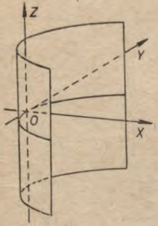
2. piemērs. Vienādojums $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ izsaka cilindrisku virsmu (183. zīm.), kurai veidotājas ir paralēlas OZ asij, bet vadītāja ir hiperbola $CDC'D'$ *(hiperboliskais cilindrs).*

3. piemērs. Vienādojums $y^2=2px$ izsaka *parabolisko cilindru* (184. zīm.).

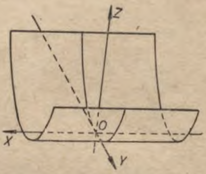
Vienādojums, kas nesatur koordināti x (vai y) izsaka cilindrisku virsmu, kuras veidotāja ir paralēla OX (vai OY) asij.

4. piemērs. Vienādojums $y^2=2pz$ izsaka parabolisku cilindru, kas novietots tā, kā parādīts 185. zīmējumā.

P i e z ī m e. Ja vadītāja ir taisne, tad cilindriskā virsma ir plakne. Ievērojot to, vienādojums $Ax+By+D=0$ telpā izsaka OZ asij paralēlu plakni (sal. 124. § piezīme).



184. zīm.



185. zīm.

169. §. Līnijas vienādojumi

Līniju var uzskatīt par divu virsmu šķelšanās rezultātu un saskaņā ar to izteikt ar divu vienādojumu sistēmu.

Divus (kopā ņemtus) vienādojumus, kas saista koordinātes x, y, z sauc par *līnijas L vienādojumiem*, ja ievēroti šādi divi noteikumi: 1) jebkura līnijas L punkta M koordinātes apmierina abus vienādojumus; 2) jebkura punkta koordinātes, kurš neatrodas uz līnijas L, neapmierina reizē abus vienādojumus (kaut arī var apmierināt vienu vienādojumu; sk. 140. §).

1. p i e m ē r s. Divi vienādojumi $y-z=0$, $x-z=0$ izsaka taisni kā divu plakņu šķelšanās rezultātu (sk. 140. § 1. piemēru).

2. p i e m ē r s. Divi vienādojumi

$$x^2+y^2+z^2=a^2, \quad y=z$$

izsaka katrs atsevišķi: pirmais — sfēru, kuras rādiuss ir a (186. zīm.) un centrs atrodas punktā O, otrs — plakni LOX (taisne OL dala uz pusēm leņķi YOZ). Kopā ņemti, šie vienādojumi izsaka lielā riņķa ALK aploci.

1. p i e z ī m e. Vienu un to pašu līniju var izteikt ar

dažādām (savstarpēji ekvivalentām) vienādojumu sistēmām, jo to var dabūt kā dažādu virsmu pāru šķelšanās rezultātu.

2. piezīme. Divu vienādojumu sistēma var izteikt nevien līniju, bet arī citus ģeometriskus veidojumus; tā var neizteikt arī nevienu ģeometrisku veidojumu.

3. piemērs. Vienādojumu sistēma $x^2+y^2+z^2=25$, $z=5$ izsaka punktu (0; 0; 5), kurā plakne $z=5$ pieskaras sfērai $x^2+y^2+z^2=25$.

4. piemērs. Vienādojumu sistēma $x^2+y^2+z^2=0$, $x+y+z=1$ neizsaka nevienu ģeometrisku veidojumu, jo pirmo vienādojumu apmierina tikai vērtības $x=0$, $y=0$, $z=0$, bet tās neapmierina otru vienādojumu.

186. zīm.

170. §. Līnijas projekcija uz koordinātu plaknes

1. Pieņemsim, ka līniju izsaka divi vienādojumi, no kuriem viens vienādojums satur z, bet otrs nesatur [1]. Tad otrs vienādojums izsaka «vertikālu» cilindrisku virsmu, bet plaknē XOY — šīs virsmas vadītāju L_1 (168. §); līnijas L projekcija plaknē XOY atrodas uz līnijas L_1 (nosedzot to visu vai tikai daļu).

1. piemērs. Vienādojumi

$$z=y+\frac{3}{2}, \quad x^2+y^2=1$$

izsaka (187. zīm.) līniju ABA_1B_1 (elipsi), pa kuru plakne $z=y+\frac{3}{2}$ (187. zīmējumā plakne P) šķeļas ar apaļu cilindrisku virsmu $x^2+y^2=1$. Plaknē XOY vienādojums $x^2+y^2=1$ izsaka riņķa līniju $A'B'A'_1B'_1$. Līnijas ABA_1B_1 projekcija sakrīt ar līniju $A'B'A'_1B'_1$.

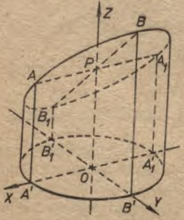
2. piemērs. Vienādojumi

$$x^2+y^2+z^2=a^2, \quad y=mx$$

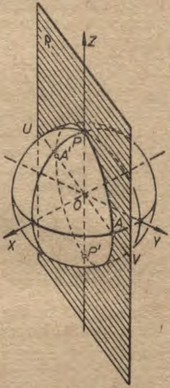
[1] Ja abi vienādojumi nesatur z, tad līnija L ir vertikāla taisne (vai vairākas tādas taisnes); tās projekcija plaknē XOY ir punkts (sal. 149. § 3. piemērs).

izsaka (188. zīm.) sfēras O lielo riņķi («meridiānu») $APA'P'$ kā šīs sfēras šķelšanās rezultātu ar plakni $y=mx$ (188. zīmējumā plakne R). Vienādojums $y=mx$ plaknē XOY izsaka taisni UV. Meridiāna $APA'P'$ projekcija plaknē XOY atrodas uz taisnes UV, bet aizņem tikai tās daļu, proti, nogriezni AA'.

2. Pieņemsim, ka abi vienādojumi, kas izsaka līniju L,



187. zīm.



188. zīm.

satur z; tad, lai atrastu līnijas L projekciju plaknē XOY, no abiem dotajiem vienādojumiem jāizslēdz z[1]. Vienādojums, kuru dabū izslēgšanas rezultātā, plaknē XOY izsaka līniju L', uz kuras atrodas meklētā projekcija (nosedzot to visu vai tikai daļu). Analogi atrod līnijas projekcijas plaknēs XOY un YOZ.

Izriet no 1. p.

3. piemērs. Apskatīsim riņķa līniju (189. zīmējumā ALK), ko izsaka (sal. 169. § 2. piemērs) vienādojumi

$$x^2+y^2+z^2=a^2, \tag{1}$$

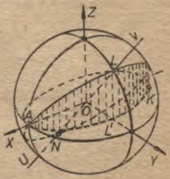
$$y=z. \tag{2}$$

[1] Izslēgt z no diviem vienādojumiem nozīmē atrast trešo vienādojumu, kas nesatur z un kuru apmierina visas tās x, y vērtības, kas apmierina divu doto vienādojumu sistēmu.

Lai atrastu tās projekciju plaknē XOY, izslēdzam no (1) un (2) z. Dabūjam vienādojumu

$$x^2+2y^2=a^2. \qquad (3)$$

Šis vienādojums plaknē XOY izsaka elipsi $AL'K'$ ar pusasīm $OA=$ $=a$, $OL'=\frac{a}{\sqrt{2}}$. Riņķa līnijas ALK projekcija nosedz elipsi $AL'K'$ pilnīgi.



189. zīm.

Lai atrastu riņķa līnijas ALK projekciju plaknē XOZ, no (1) un (2) jāizslēdz y. Dabūjam vienādojumu

$$x^2+2z^2=a^2, \qquad (4)$$

kas izsaka plaknē XOZ elipsi, kurai ir tādi paši izmēri kā elipsei $AL'K'$. Riņķa līnijas projekcija nosedz šo elipsi pilnīgi.

Lai atrastu riņķa līnijas ALK projekciju plaknē YOZ, nav vajadzīgs izslēgt x, jo viens dotais vienādojums ($y=z$) jau tā nesatur x. Vienādojums $y=z$ plaknē YOZ izsaka visu taisni UV, bet meklētā projekcija ir tikai tās nogrieznis (NL).

171. §. Algebriskas virsmas un to kārta

Par *otrās pakāpes algebrisku vienādojumu* (ar trim nezināmiem x, y, z) sauc šāda veida vienādojumu

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fzx+Gx+Hy+Kz+L=0,$$

kur vismaz viens no sešiem koeficientiem A, B, C, D, E, F nav vienāds ar nulli. Analogi definē jebkuras pakāpes algebrisku vienādojumu (sal. 37. §).

Ja kādu virsmu S kādā taisnleņķa koordinātu sistēmā izsaka n-tās pakāpes vienādojums, tad arī jebkurā citā taisnleņķa koordinātu sistēmā šo virsmu izteiks tādas pašas pakāpes vienādojums (sal. 37. §).

Virsmu, kuru izsaka n-tās pakāpes vienādojums, sauc par n-tās kārtas *algebrisku virsmu*. Visas pirmās kārtas virsmas ir plaknes. Otrās kārtas virsmas apskatīsim tālākajos paragrāfos.

172. §. Sfēra

Otrās pakāpes vienādojums

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \tag{1}$$

izsaka (167. § 2. piemērs) sfēru, kuras rādiuss ir R un centrs atrodas koordinātu sākumā. Ja sākums nesakrīt ar sfēras centru, tad sfēru arī izsaka otrās pakāpes vienādojums, proti

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2, \tag{2}$$

kur a, b, c ir sfēras centra koordinātes (sal. 38. §).

Otrās pakāpes vienādojums

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fzx+Gx+Hy+$$
$$+Kz+L=0 \tag{3}$$

izsaka sfēru tikai tad, ja izpildīti noteikumi

$$A=B=C, \tag{4}$$

$$D=0,\ E=0,\ F=0, \tag{5}$$

$$G^2+H^2+K^2-4AL>0 \tag{6}$$

(sal. 39. §). Ja šie noteikumi izpildīti, tad

$$a=-\frac{G}{2A},\quad b=-\frac{H}{2A},\quad c=-\frac{K}{2A},$$

$$R^2=\frac{G^2+H^2+K^2-4AL}{4A^2}. \tag{7}$$

P i e m ē r s. Vienādojums

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y-4=0$$

$$(A=B=C=1,\ D=E=F=0,\ G=-2,\ H=-4,$$
$$K=0,\ L=-4)$$

izsaka sfēru. Papildinot izteiksmes x^2-2x un y^2-4y līdz pilniem kvadrātiem un kompensācijas dēļ pieskaitot labajai pusei skaitļus 1^2, 2^2, dabūsim vienādojumu

$$(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=9,$$

t. i.,

$$a=1,\ b=2,\ c=0,\ R=3.$$

To pašu atrodam ar formulām (7).

173. §. Elipsoīds

Virsmu, kuru izsaka vienādojums [1]

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{1}$$

sauc par *elipsoīdu* [2] (190. zīm.). Elipsoīda (1) šķelšanās līniju $ABA'B'$ ar plakni XOY izsaka (169. §) sistēma

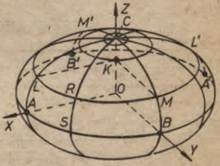
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad z=0.$$

Tā ir ekvivalenta sistēmai

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad z=0,$$

tā ka $ABA'B'$ ir elipse ar pusasīm $OA=a$, $OB=b$.

Elipsoīda (1) šķelšanās līnijas ar plaknēm YOZ, XOZ ir elipses $M'CNB$ ar pusasīm [3] $OB=b$, $OC=c$ un $L'CLA$ ar pusasīm $OA=a$, $OC=c$.



190. zīm.

Elipsoīda šķēlumu ar plakni $z=h$ ($LML'M'$ 190. zīmējumā) izsaka sistēma

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}, \tag{2}$$

$$z=h. \tag{3}$$

[1] Šeit un tālāk ar burtiem a, b, c apzīmēti dažādu nogriežņu garumi, tāpēc skaitļi a, b, c ir pozitīvi.

[2] Grieķu vārds «elipsoīds» nozīmē «elipsveidīgais». Šis vārds maz noderīgs v i r s m a s nosaukumam, bet ir ļoti iesakņojies. Sengrieķu ģeometri rotācijas elipsoīdus (citus viņi neapskatīja) sauca par *sferoīdiem* (t. i., «sfērveidīgie»). Šo nosaukumu lieto vēl tagad.

[3] Agrāk (41. §) ar burtu c apzīmēja pusi no attāluma starp fokusiem [$c=\sqrt{a^2-b^2}$, tā ka $c<a$]. Šeit c ir cita nozīme un tam var būt jebkura vērtība.

Tomēr, ja $|h|>c$, tad vienādojums (2) neizsaka nevienu ģeometrisku vietu («imaginārs eliptisks cilindrs»; sal. 58. § 5. piemēru). Šai gadījumā plakne nešķeļ elipsoīdu. Ja $|h|=c$, tad vienādojums (2) izsaka asi OZ ($x=0$, $y=0$; sal. 58. § 4. piemērs). Tātad plaknei $z=c$ ar elipsoīdu ir viens kopīgs punkts $C(0;0;c)$ (pieskaršanās punkts); tādā pašā veidā plakne $z=-c$ pieskaras elipsoīdam punktā $C'(0;0;-c)$ (zīmējumā nav parādīts).

Ja $|h|<c$, tad meklētais šķēlums ir elipse ar pusasīm

$$KL=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}, \quad KM=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}, \tag{4}$$

kas ir proporcionālas a un b.

Attālinoties no plaknes XOY, šķēlumu izmēri samazinās (pie tam visi tie ir līdzīgi).

Tāda pati aina novērojama šķēlumiem, kas ir paralēli plaknēm YOZ, ZOX.

Punkts O ir elipsoīda (1) simetrijas centrs. Plaknes XOY, YOZ, XOZ ir simetrijas plaknes, asis OX, OY, OZ — simetrijas asis [1].

T r ī s a s u e l i p s o ī d s. Ja visi trīs lielumi a, b, c ir dažādi (t. i., neviena no elipsēm $A'CA$, $B'CB$, ABA' nepārvēršas riņķa līnijā), tad virsmu (1) sauc par *trīsasu* elipsoīdu. Elipses $A'CA$, $B'CB$, $A'BA$ sauc par *galvenajām elipsēm*; to virsotnes $A(a;0;0)$, $A'(-a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $B'(0;-b;0)$, $C(0;0;c)$, $C'(0;0;-c)$ sauc par trīsasu elipsoīda *virsotnēm*. Nogriežņus AA', BB', CC' (elipšu galvenās asis), kā arī to garumus sauc par elipsoīda asīm. Ja $a>b>c$, tad $2a$ ir lielā, $2b$ — vidējā un $2c$ — mazā ass.

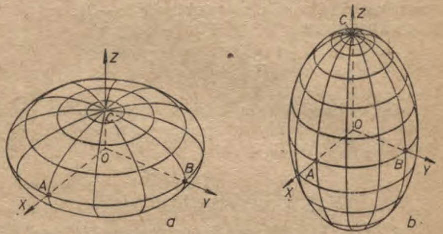
R o t ā c i j a s e l i p s o ī d s. Ja jebkuri divi no lielumiem a, b, c, piemēram, a un b, ir savstarpēji vienādi, tad atbilstošā galvenā elipse $A'BA$ un visi tai paralēlie šķēlumi pārvēršas riņķa līnijās. Jebkuru šķēlumu CRS, kas iet caur OZ asi, var dabūt, pagriežot elipsi CLA ap OZ asi, t. i., elipsoīds ir rotācijas virsma (elipses CLA, CRS, CMB utt. ir *meridiāni*, riņķa līnija $A'BA$ — *ekvators*). Tādu elipsoīdu sauc par *rotācijas elipsoīdu*. Tā vienādojumam ir izskats

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{5}$$

---

[1] Par simetrijas centru un simetrijas plakni sk. «Elementārās matemātikas rokasgrāmatu», IV. C, 16. §.

Ja $a>c$, tad rotācijas elipsoīdu sauc par *saspiestu* (191. zīm. a), ja $a<c$, tad — par *izstieptu* (191. zīm. b). Rotācijas elipsoīdam divu tā asu stāvoklis ir nenoteikts.



191. zīm.

Ja $a=b=c$, tad elipsoīds pārvēršas sfērā un visu triju asu stāvoklis kļūst nenoteikts.

1. piezīme. Rotācijas elipsoīdu var definēt kā virsmu, ko dabū ar vienmērīgu sfēras spiedi pret ekvatoru (sal. 40. §). Saspiests rotācijas elipsoīds rodas, ja spiedes koeficients $k<1$, izstiepts — ja $k>1$.

Trīsasu elipsoīdu var definēt kā virsmu, ko dabū ar vienmērīgu rotācijas elipsoīda spiedi pret meridiānu.

2. piezīme. Elipsoīdu izsaka vienādojums (1), ja koordinātu asis sakrīt ar elipsoīda asīm. Citos gadījumos elipsoīdu izsaka citādi vienādojumi.

1. piemērs. Noteikt, kādu virsmu izsaka vienādojums

$$16x^2+3y^2+16z^2-48=0.$$

Atrisinājums. Doto vienādojumu var pārveidot tā

$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{3}=1.$$

Tas izsaka izstieptu rotācijas elipsoīdu ar pusasīm $a=c=\sqrt{3}$, $b=4$. Rotācijas ass ir Oy ass.

2. piemērs. Noteikt, kādu virsmu izsaka vienādojums $x^2-6x+4y^2+9z^2+36z-99=0$.

Atrisinājums. Pārveidojam doto vienādojumu formā

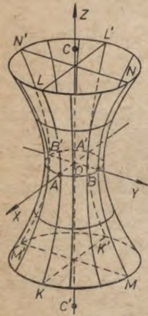
$$(x-3)^2+4y^2+9(z+2)^2=144.$$

Pārnesam koordinātu sākumu punktā (3; 0; −2); tad (166. §) dabūsim vienādojumu $x'^2+4y'^2+9z'^2=144$ jeb

$$\frac{x'^2}{144}+\frac{y'^2}{36}+\frac{z'^2}{16}=1.$$

Šis vienādojums izsaka trīsasu elipsoīdu ar pusasīm $a=12$, $b=6$, $c=4$; tā centrs atrodas punktā (3; 0; −2) un asis paralēlas koordinātu asīm.

174. §. Viendobuma hiperboloīds



192. zīm.

Virsmu, ko izsaka vienādojums

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (1)$$

sauc par *viendobuma hiperboloīdu* (192. zīm.).

Nosaukums «hiperboloīds»[1] radies tā iemesla dēļ, ka šīs virsmas šķēlumu vidū ir hiperbolas. Hiperbolas, starp citu, ir šķēlumi ar plaknēm $x=0$ (192. zīmējumā $MNN'M'$) un $y=0$ ($KLL'K'$). Šos šķēlumus (savās plaknēs) izsaka vienādojumi

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (2)$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (3)$$

Nosaukums «viendobuma» pasvītro, ka virsma (1) pretstatā divdobumu hiperboloīda virsmai (175. §) neveido divus «dobumus», bet attēlo nepārtrauktu bezgalīgu cauruli, kas izstiepta gar OZ asi.

Plakne

$$z=h \qquad (4)$$

[1] Tas ir — «hiperbolveidīgais». Sk. zemteksta piezīmi 225. lappusē.

p i e j e b k u r a s h v ē r t ī b a s (sal. 173. §) šķēlumā ar virsmu (1) dod elipsi[1]

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2} \tag{5}$$

ar pusasīm $a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$, $b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$. Visas elipses (5) ir līdzīgas, virsotnes atrodas uz hiperbolām (2) un (3); elipšu izmēri pieaug, šķēlumiem attālinoties no plaknes XOY. Šķēlums ar plakni XOY ir elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{5}$$

(*kakla* elipse $ABA'B'$).

Hiperbolas (2) un (3) un arī elipsi (5′) sauc par *galvenajiem šķēlumiem*, to virsotnes $A(a; 0; 0)$, $A'(-a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $B'(0; -b; 0)$ — par viendobuma hiperboloīda *virsotnēm*. Nogriežņus $AA'=2a$, $BB'=2b$ (galveno hiperbolu reālās asis) un bieži arī taisnes AA', BB' sauc par *šķērsasīm*. Nogriezni $CC'=2OC=2c$, kas atlikts uz OZ ass (abu galveno hiperbolu imaginārā ass), sauc par viendobuma hiperboloīda *garenisko asi*.

Punkts O ir viendobuma hiperboloīda (1) simetrijas centrs, plaknes XOY, YOZ, ZOX — simetrijas plaknes, asis OX, OY, OZ — simetrijas asis.

V i e n d o b u m a r o t ā c i j a s h i p e r b o l o ī d s. Ja $a=b$, tad vienādojums (1) pieņem izskatu

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{6}$$

Kakla elipse $ABA'B'$ pārvēršas par *kakla riņķa līniju* ar rādiusu a. Visi XOY plaknei paralēlie šķēlumi arī ir riņķa līnijas. Šķēlumi $KLL'K'$ un $MNN'M'$ (un vispār visi šķēlumi caur garenisko asi) ir vienādas hiperbolas; tāpēc virsmu (6) var izveidot, griežot hiperbolu $KLL'K'$ ap garenisko asi. Virsmu (6) sauc par ***viendobuma rotācijas hiperboloīdu.***

[1] Šeit pieņemts, ka $a \neq b$. Ja $a=b$, tad elipses (5) pārvēršas riņķa līnijās; sk. tālāk vienādojumu (6).

Divu tās (šķērsenisko) asu stāvoklis kļūst nenoteikts, trešā (gareniskā) ass sakrīt ar rotējošās hiperbolas imagināro asi. Atšķirībā no rotācijas hiperboloīda ($a=b$) viendobuma hiperboloīdu (1), ja $a \neq b$, sauc par *trīsasu hiperboloīdu.*

Piezīme. Viendobuma rotācijas hiperboloīdu var definēt kā virsmu, kas rodas, hiperbolai rotējot ap tās imagināro asi, viendobuma trīsasu hiperboloīdu — ko dabū ar vienmērīgu viendobuma rotācijas hiperboloīda spiedi pret kādu meridiāna plakni.

Piemērs. Noteikt izskatu virsmai

$$x^2-4y^2-4z^2+16=0.$$

Atrisinājums. Šo vienādojumu var pārrakstīt tā

$$-\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{2^2}+\frac{z^2}{2^2}=1.$$

Tas izsaka viendobuma rotācijas hiperboloīdu ar centru punktā (0; 0; 0), rotācijas ass ir OX ass (jo negatīvais koeficients ir pie x^2). Kakla riņķa rādiuss $r=2$, gareniskā pusass ir vienāda ar 4.

175. §. Divdobumu hiperboloīds

Virsmu, ko izsaka vienādojums

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1, \tag{1}$$

sauc par *divdobumu hiperboloīdu* (193. zīm.).

Šķēlumus ar plaknēm XOZ un YOZ izsaka vienādojumi

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1, \tag{2}$$

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{3}$$

Tās ir hiperbolas ($KK'L'L$ un $MM'N'N$ 193. zīmējumā). Abām tām OZ ass ir reālā ass (sal. 174. §).

Plaknes $z=h$ nešķeļ hiperboloīdu (1), ja $|h|<c$ (sal. 174. §). Ja $h=\pm c$, tad tās pieskaras hiperboloīdam punktos

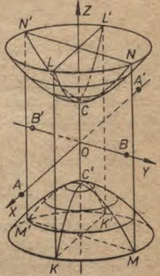
$C(0; 0; c)$ un $C'(0; 0; -c)$. Ja $|h|>c$, tad šķēlumā rodas elipses [1]

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1, \tag{4}$$

kas ir viena otrai līdzīgas ($KMK'M'$, $LNL'N'$ u. c.). Šo elipšu izmēri pieaug, attālinoties no plaknes XOY.

Tādējādi, virsma (1) sastāv no diviem atsevišķiem dobumiem, no kurienes arī radies nosaukums **divdobumu hiperboloīds**.

Hiperbolas (2) un (3) sauc par *galvenajiem šķēlumiem*, to kopīgās virsotnes C un C' — par divdobumu hiperboloīda *virsotnēm*, to reālo asi CC' — par divdobumu hiperboloīda *garenisko asi*, imaginārās asis $AA'=2a$ un $BB'=2b$ — par *simetrijas šķērsasīm.*



193. zīm.

Divdobumu hiperboloīdam ir centrs O, simetrijas asis OX, OY, OZ un simetrijas plaknes XOY, YOZ, ZOX. Hiperboloīda abi dobumi ir simetriski viens pret otru attiecībā pret plakni XOY.

Divdobumu rotācijas hiperboloīds. Ja $a=b$, tad vienādojums (1) pieņem izskatu

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

un izsaka virsmu, kas rodas, hiperbolai rotējot ap tās reālo asi. Šo virsmu sauc par *divdobumu rotācijas hiperboloīdu.* Divdobumu hiperboloīdu ar nevienādām šķērseniskajām pusasīm a un b sauc par *trīsasu* hiperboloīdu.

1. **piemērs.** Noteikt izskatu virsmai

$$3x^2-5y^2-2z^2-30=0.$$

Atrisinājums. Šo vienādojumu var pārrakstīt tā

$$\frac{y^2}{6}+\frac{z^2}{15}-\frac{x^2}{10}=-1.$$

---

[1] Sk. zemteksta piezīmi 229. lappusē.

Tas ir divdobumu trīsasu hiperboloīds. Gareniskā ass ir vienāda ar $\sqrt{10}$ un sakrīt ar OX asi, viena šķērsass ir vienāda ar $\sqrt{6}$ un vērsta pa OY asi, otra ir vienāda ar $\sqrt{15}$ un vērsta pa OZ asi.

2. piemērs. Vienādojums

$$x^2-y^2-z^2=-1$$

izsaka *viendobuma* (bet ne divdobumu) hiperboloīdu (kaut arī labajā pusē ir -1 un nevis $+1$, toties kreisajā pusē ir divi negatīvi saskaitāmie). Izsakot šo vienādojumu $y^2+z^2-x^2=1$ veidā, redzam, ka hiperboloīds izveidojies, vienādsānu hiperbolai rotējot ap tās imagināro asi (kas sakrīt ar OX asi).

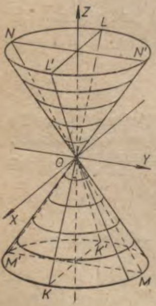
176. §. Otrās kārtas konuss

Par *konisku virsmu* sauc jebkuru virsmu, kuru izveido taisne (veidotāja), pārvietojoties tā, ka visu laiku iet caur nekustīgu punktu (koniskās virsmas *virsotne*). Jebkuru līniju (kas neiet caur virsotni), kura krusto veidotāju jebkurā tās stāvoklī, sauc par *vadītāju*.

Virsmu

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \qquad (1)$$

kura, kā tālāk parādīts, ir koniska virsma, sauc par *otrās kārtas konusu* (194. zīm.).



194. zīm.

Šīs virsmas šķēlumu ar plakni XOZ ($y=0$) izsaka vienādojums

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

t. i.,

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=0. \qquad (2)$$

Tas ir taišņu pāris (KL un $K'L'$), kas iet caur sākumu (58. §). Šķēlumā ar YOZ plakni dabūjam taišņu pāri (MN un $M'N'$)

$$\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)=0. \qquad (3)$$

Šķēlumu ar jebkuru citu plakni $y=kx$, kas iet caur OZ asi, izsaka (169. §) sistēma

$$y=kx, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{k^2x^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \tag{4}$$

Dabūjam atkal taišņu pāri

$$y=kx, \quad x\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}}+\frac{z}{c}=0 \tag{5}$$

un

$$y=kx, \quad x\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}}-\frac{z}{c}=0, \tag{6}$$

kas iet caur sākumu. Tātad virsma (1) ir koniska virsma, punkts O ir tās virsotne.

Konusa (1) šķēlums ar plaknēm $z=h$ (ja $h\neq 0$) ir elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}; \tag{7}$$

ja $h=0$, tad tā deģenerējas punktā $O(0; 0; 0)$. Visas elipses (7) ir līdzīgas; to virsotnes atrodas uz šķēlumiem (2) un (3).

Ja $a=b$, tad elipses (7) pārvēršas riņķa līnijās un otrās kārtas konuss ir apaļš konuss

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \tag{8}$$

Otrās kārtas konusu var definēt kā virsmu, ko iegūst ar apaļa konusa vienmērīgu spiedi pret ass šķēluma plakni.

Konusa (1) šķēlumi ar plaknei XOZ (vai plaknei YOZ) paralēlām plaknēm ir hiperbolas.

P i e z ī m e. Jebkura otrās kārtas konusa šķēlumi ar plaknēm, kas neiet caur virsotni, ir riņķa līnijas[1], elipses, hiperbolas un parabolas. Visas šīs līnijas var pieņemt par vadītājām. Ievērojot to, lietderīgi otrās kārtas konusu saukt par «eliptisku».

1. p i e m ē r s. Vienādojums $x^2+y^2=z^2$ izsaka apaļu konusu; šķēlums ar plakni XOZ ir taišņu pāris $x=\pm z$. Veidotājas ar asi veido 45° lielu leņķi.

[1] Apaļam konusam ir viena paralēlu riņķa šķēlumu sistēma, neapaļam — divas.

2. piemērs. Vienādojums $-x^2+9y^2+3z^2=0$ izsaka otrās kārtas (neapaļu) konusu. Šķēlumi ar plaknēm $z=h$ ($h\neq 0$) ir hiperbolas $x^2-9y^2=3h^2$; ja $h=0$, rodas veidotāju pāris. Tāda pati aina novērojama šķēlumiem $y=1$. Šķēlumi $x=d$ ($d\neq 0$) ir elipses.

177. §. Eliptiskais paraboloīds

Virsmu, ko izsaka vienādojums

$$z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q} \tag{1}$$

($p>0$, $q>0$), sauc par *eliptisko paraboloīdu* (195. zīm.).

Šķēlumi ar plaknēm XOZ un YOZ (galvenie šķēlumi) ir parabolas (AOA', BOB')

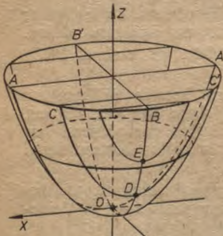
$$x^2=2pz, \tag{2}$$

$$y^2=2qz; \tag{3}$$

tās abas ieliektas uz vienu pusi («uz augšu»).

Plakne $z=0$ pieskaras paraboloīdam punktā O; plaknes $z=h$, ja $h>0$, šķeļ paraboloīdu pa savā starpā vienādām elipsēm

$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=h \tag{4}$$



195. zīm.

ar pusasīm $\sqrt{2ph}$, $\sqrt{2qh}$. Ja $h<0$, tad šīs plaknes paraboloīdu nešķeļ.

Eliptiskajam paraboloīdam nav simetrijas centra; tas ir simetrisks attiecībā pret plaknēm XOZ un YOZ un attiecībā pret OZ asi. Taisni OZ sauc par eliptiskā paraboloīda *asi*, punktu O — par tā *virsotni*, lielumus p un q — par *parametriem*.

Ja $p=q$, tad parabolas (2) un (3) kļūst vienādas, elipses (4) pārvēršas riņķa līnijās un paraboloīds (1) kļūst par virsmu, ko izveido parabola, rotējot ap savu asi *(rotācijas paraboloīds)*[1].

Eliptisko paraboloīdu var definēt kā virsmu, kuru dabū ar vienmērīgu rotācijas paraboloīda spiedi pret vienu tā meridiānu.

P i e m ē r s. Virsma $z=x^2+y^2$ ir rotācijas paraboloīds, kuru izveido parabola $z=x^2$, rotējot ap savu asi (OZ ass). Virsma $x=y^2+z^2$ ir tas pats paraboloīds, tikai citādi novietots (rotācijas ass sakrīt ar OX asi).

P i e z ī m e. Eliptiskā paraboloīda šķēlums ar plakni $y=f$ ir līnija $z=\frac{x^2}{2p}+\frac{f^2}{2q}$ (CDC'); tā ir parabola, kas ir vienāda (50. §) ar parabolu AOA' $(z=\frac{x}{2p})$; tās ass arī ir vērsta «augšup», bet virsotne ir punkts $D(0; f; \frac{f^2}{2q})$. Punkta D koordinātes apmierina vienādojumus $x=0$, $y^2=2qz$, t. i., punkts D atrodas uz parabolas BOB'. Tātad eliptiskais paraboloīds ir virsma, kuru dabū, paralēli pārnesot parabolu (AOA') tā, ka tās virsotne slīd pa otru parabolu (BOB'). Pie tam kustīgās un nekustīgās parabolas plaknes ir perpendikulāras, bet asis vienādi vērstas.

178. §. Hiperboliskais paraboloīds

Virsmu, ko izsaka vienādojums

$$z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q} \tag{1}$$

($p>0$, $q>0$), sauc par *hiperbolisko paraboloīdu* (196. zīm.).

Šķēlumi ar plaknēm XOZ un YOZ (galvenie šķēlumi) ir parabolas (AOA', BOB')

$$x^2=2pz, \tag{2}$$

$$y^2=-2qz. \tag{3}$$

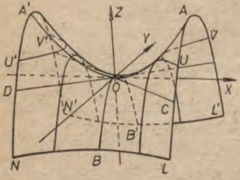
Pretstatā eliptiskā paraboloīda galvenajiem šķēlumiem (177. §) parabolas (2) un (3) ir ieliektas uz p r e t ē j ā m

[1] Rotācijas paraboloīda forma ir reflektoru spoguļiem (tie pārvērš no fokusa izejošu staru kūli paralēlu staru kūlī).

pusēm (parabola AOA' — «uz augšu», parabola BOB' — «uz leju»). Virsmai (1) ir sedlveidīga forma.

Hiperboliskā paraboloīda (1) šķēlumu ar plakni XOY ($z=0$) nosaka vienādojums

$$\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}=0. \qquad (4)$$



196. zīm.

Tas ir taišņu pāris[1] OD, OC (58. § 1. piemērs).

Plaknes $z=h$, kas paralēlas plaknei XOY, šķeļ hiperbolisko paraboloīdu pa hiperbolām

$$\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}=h, \quad z=h. \qquad (5)$$

Ja $h>0$, tad šīm hiperbolām reālā ass (piemēram, hiperbolai $UVV'U'$) ir paralēla OX asij; ja $h<0$ (hiperbola $LNN'L'$), tad reālā ass ir paralēla OY asij. Visas hiperbolas (5), kas atrodas vienā pusē no plaknes XOY, ir viena otrai līdzīgas; tās ir pa pāriem saistītas (47. §) ar hiperbolām (5), kas atrodas otrā pusē no XOY.

Hiperboliskajam paraboloīdam nav centra; tas ir simetrisks attiecībā pret plaknēm XOZ un YOZ un attiecībā pret asi OZ. Taisni OZ sauc par hiperboliskā paraboloīda *asi*, punktu O — par tā *virsotni*, lielumus p un q — par *parametriem*.

1. piezīme. Nav tādu p un q vērtību, pie kurām hiperboliskais paraboloīds (atšķirībā no iepriekšapskatītajām otrās kārtas virsmām) būtu rotācijas virsma.

2. piezīme. Hiperbolisko paraboloīdu, tāpat kā eliptisko paraboloīdu, var izveidot, paralēli pārnesot vienu galveno šķēlumu (piemēram, BOB') pa otru (AOA'). Bet tagad kustīgā un nekustīgā parabola vērsta ar ieliekumiem uz pretējām pusēm.

Piemērs. Virsma $z=x^2-y^2$ ir hiperboliskais paraboloīds; abi galvenie šķēlumi ir savā starpā vienādas parabolas, kas vērstas uz pretējām pusēm. Virsmu var izveidot, paralēli pārvietojot vienu parabolu pa otru. Šķēlums ar

[1] Uz hiperboliskā paraboloīda atrodas neskaitāms daudzums taišņu; sk. 180. §.

plakni $z=h$ $(h\neq 0)$ ir vienādsānu hiperbola ar pusasīm $a=\sqrt{|h|}$, $b=\sqrt{|h|}$. Ja $h=0$, tad tā pārvēršas perpendikulāru taišņu pārī ($x+y=0$, $x-y=0$). Ja šīs taisnes pieņem par koordinātu asīm OX', OY', tad apskatāmo hiperbolisko paraboloīdu izsaka (36. §) vienādojums $z=2x'y'$.

Vispār vienādojums $z=\frac{xy}{a}$ izsaka to pašu hiperbolisko paraboloīdu, ko vienādojums $z=\frac{x^2}{2a}-\frac{y^2}{2a}$, tikai pirmajā gadījumā asis OX, OY sakrīt ar taisnlīniju veidotājām (180. §), kas iet caur virsotni.

179. §. Otrās kārtas virsmu uzskaitījums

Katru otrās pakāpes vienādojumu

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fzx+Gx+Hy+Kz+L=0$$

ar koordinātu transformācijas formulu palīdzību (166. §) var pārveidot vienā no 17 tabulā uzrādītajiem vienādojumiem, kurus sauc par *kanoniskajiem vienādojumiem*. Pie tam vienādojums $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ (Nr. 14) neizsaka virsmu, bet taisnu līniju ($x=0$, $y=0$). Tomēr saka, ka tas izsaka *imagināru plakņu pāri* (kas krustojas pa reālu taisni) (sal. 58. § 4. piemēru). Vienādojums $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ (Nr. 13) izsaka tikai vienu punktu (0; 0; 0). Tomēr (līdzības dēļ ar vienādojumu Nr. 14) saka, ka vienādojums Nr. 13 izsaka *imagināru otrās kārtas konusu* (ar reālu virsotni).

Vienādojumi Nr. 15, 16, 17 neizsaka nevienu ģeometrisku veidojumu. Tomēr saka, ka tie attiecīgi izsaka *imagināru elipsoīdu* (sal. Nr. 1), *imagināru eliptisku cilindru* (sal. Nr. 7) un *imagināru paralēlu plakņu pāri* (sal. Nr. 11).

Lietojot šo nosacīto terminoloģiju, var teikt, ka katra otrās kārtas virsma ir viena no 17 tabulā uzdotajām virsmām.

Nr.	Kanoniskais vienādojums	Shemātisks attēls	Virsmas nosaukums	Paragrāfs
1	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$		Elipsoīds (atsevišķā gadījumā rotācijas elipsoīds un sfēra)	173
2	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$		Viendobuma hiperboloīds	174
3	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$		Divdobumu hiperboloīds	175
4	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$		Otrās kārtas konuss	176
5	$z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}$		Eliptiskais paraboloīds	177
6	$z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}$		Hiperboliskais paraboloīds	178

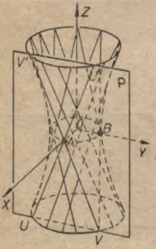
Nr.	Kanoniskais vienādojums	Shematisks attēls	Virsmas nosaukums	Paragrāfs
7	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$		Eliptiskais cilindrs	168
8	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$		Hiperboliskais cilindrs	168
9	$y^2=2px$		Paraboliskais cilindrs	168
10	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$		Krustenisku plakņu pāris	
11	$\frac{x^2}{a^2}=1$		Paralēlu plakņu pāris	
12	$x^2=0$		Sakrītošu plakņu pāris	
13	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$		Otrās kārtas imaginārs konuss ar reālu virsotni (0; 0; 0)	

Nr.	Kanoniskais vienādojums	Shematisks attēls	Virsmas nosaukums	Para-grāfs
14	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$		Imagināru plakņu pāris (kas krustojas pa reālu taisni)	
15	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$		Imaginārs elipsoīds	
16	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$		Imaginārs eliptisks cilindrs	
17	$\frac{x^2}{a^2}=-1$		Imagināru paralēlu plakņu pāris	

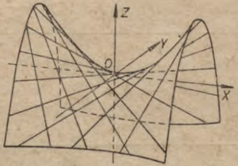
180. §. Otrās kārtas virsmu taisnlīnijas veidotājas

Virsmu sauc par *taišņu virsmu*, ja to var izveidot, pārvietojot taisnu līniju *(veidotāju)*. No otrās kārtas virsmām taišņu virsmas ir otrās kārtas cilindri un konuss un bez tam viendobuma hiperboloīds un hiperboliskais paraboloīds.

Tiklab uz viendobuma hiperboloīda (197. zīm.), kā arī uz hiperboliskā paraboloīda (198. zīm.) caur katru punktu



197. zīm.



198. zīm.

iet [illegible] taisnlīnijas veidotājas. Tā 197. zīmējumā caur punktu A iet veidotājas UU' un VV', caur punktu V — veidotājas VA un VB.

Elipsoīdam, divdobumu hiperboloīdam un eliptiskajam paraboloīdam taisnlīniju veidotāju (reālu) nav.

P i e m ē r s. Viendobuma hiperboloīda

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1}$$

šķēlumu ar plakni $x=a$ (plakne P 197. zīmējumā) izsaka vienādojums

$$\frac{a^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

t. i.,

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \tag{2}$$

Tas ir taišņu pāris (UU' un VV'). Tās iet caur kakla elipses virsotni $A(a; 0; 0)$. Gluži tāpat caur virsotni $B(0; b; 0)$ iet taisnlīnijas veidotāju pāris

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \quad y=b. \tag{3}$$

Viendobuma rotācijas hiperboloīdu ($a=b$) var izveidot[1], griežot taisni UU' (vai VV') ap OZ asi.

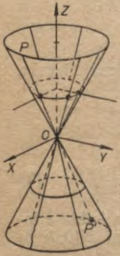
P i e z ī m e. To, ka viendobuma hiperboloīds ir taišņu virsma, izlietojis inženieris V. Šuhovs būvkonstrukcijai, ko sauc par «Šuhova torni». To konstruē no dzelzs posmiem, kurus novieto pa viendobuma hiperboloīda taisnlīnijas veidotājām. Posmus sakniedē divu veidotāju sistēmu krustošanās vietās. Neskatoties uz mazo materiāla patēriņu, V. Šuhova konstrukcijai piemīt liela izturība.

181. §. Rotācijas virsmas

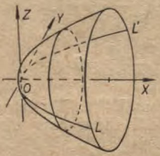
Pieņemsim, ka līnija L atrodas XOZ plaknē. Tad vienādojumu virsmai, kas rodas, līnijai L rotējot ap OZ asi, dabū, līnijas L vienādojumā aizstājot x ar $\sqrt{x^2+y^2}$.

[1] Ja ar adatu sasprauž divus sērkociņus, kas neatrodas vienā plaknē un, paņemot vienu sērkociņu aiz gala, visu modeli ātri griež ap to, tad otrs sērkociņš apraksta viendobuma hiperboloīdu.

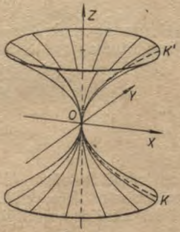
1. p i e m ē r s. Pieņemsim, ka taisne $z=2x$, kas atrodas plaknē $y=0$ (199. zīmējumā taisne PP'), griežas ap OZ asi. Tad koniskai virsmai, ko rotējot izveido taisne PP', vienādojums ir $z=2\sqrt{x^2+y^2}$, t. i., $x^2+y^2-\frac{z^2}{4}=0$ (sal. 176. §).



199. zīm.



200. zīm.



201. zīm.

Analogas kārtulas ir spēkā, ja līnija L atrodas citā koordinātu plaknē un rotācijas ass ir cita koordinātu ass.

2. p i e m ē r s. Atrast vienādojumu virsmai, ko izveido parabola $y^2=2px$ (200. zīmējumā LOL'), rotējot ap OX asi.

A t r i s i n ā j u m s. Aizstājot y ar $\sqrt{y^2+z^2}$, t. i., y^2 ar y^2+z^2, dabūjam $y^2+z^2=2px$ (rotācijas paraboloīds ar asi OX).

3. p i e m ē r s. Atrast vienādojumu virsmai, kas rodas, parabolai $z^2=2px$ (KOK' 201. zīmējumā) rotējot ap Z asi.

A t r i s i n ā j u m s. Aizstājot x ar $\sqrt{x^2+y^2}$, dabūjam vienādojumu $z^2=2p\sqrt{x^2+y^2}$ jeb $z^4=4p^2(x^2+y^2)$ (ceturtās kārtas virsma).

182. §. Otrās un trešās kārtas determinanti

Par *otrās kārtas determinantu* $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ sauc (12. §) izteiksmi

$$a_1b_2-a_2b_1.$$

Par *trešās kārtas determinantu*

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{1}$$

sauc (118. §) izteiksmi

$$a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+b_1c_2a_3-b_1c_3a_2+c_1a_2b_3-c_1a_3b_2 \tag{2}$$

jeb, kas ir tas pats,

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Burtus a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3 sauc par *determinanta elementiem.*

Minori. Determinantus $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$, kas ietilpst formulā (3), sauc par elementu a_1, b_1, c_1 *minoriem*[1].

Vispārīgi par kāda elementa *minoru* sauc determinantu, kuru dabū no dotā determinanta, izsvītrojot to rindiņu un to kolonu, kuru krustojumā atrodas elements.

Piemēri. Determinanta (1) elementa b_2 minors ir

determinants $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$, shēma $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

Elementa b_3 minors ir $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$, elementa c_3 minors ir $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

Piezīme. Otrās kārtas determinantā $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ par elementa a_1 minoru sauc elementu b_2; to var uzskatīt par «pirmās kārtas determinantu». Elementu b_2 dabū no otrās kārtas determinanta, izsvītrojot augšējo rindiņu un kreiso kolonu. Analogi elementa a_2 minors ir elements b_1 utt.

Algebriskais papildinājums. Formulā (3) elementus a_1, b_1, c_1 reizina ar $+\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $-\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $+\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$. Šīs izteiksmes sauc par elementu a_1, b_1, c_1 *algebriskajiem papildinājumiem* jeb *adjunktiem.*

Vispārīgi par elementa *algebrisko papildinājumu* sauc

[1] No latīņu vārda minor — mazāks.

tā minoru, kuru ņem ar paša jeb ar pretēju zīmi saskaņā ar šādu kārtulu.

Ja tās kolonas un tās rindiņas numuru summa, kuru krustojumā atrodas elements, ir pāra skaitlis, tad minoru ņem ar paša zīmi, ja nepāra skaitlis, — tad ar pretēju zīmi.

Elementu a_1, b_1, c_1, a_2 utt. algebriskos papildinājumus attiecīgi apzīmēsim ar A_1, B_1, C_1, A_2 utt.

1. piemērs. Determinanta (1) elements atrodas pirmās rindiņas un otrās kolonas krustojumā. Tā kā $1+2=3$ ir nepāra skaitlis, tad $B_1 = -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

2. piemērs. Atrast algebrisko papildinājumu elementam c_2.

Atrisinājums. Izsvītrojot otro rindiņu un trešo kolonu, atrodam elementa c_2 minoru $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$. Šī elementa rindiņas numurs ir 2, kolonas numurs — 3. Summa $2+3$ ir nepāra skaitlis. Tāpēc $c_2 = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$.

3. piemērs. Determinantā (1) elementa b_2 algebriskais papildinājums B_2 ir $+\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ($2+2$ ir pāra skaitlis).

1. teorēma. Determinants (1) ir vienāds ar kādas rindiņas elementu un to algebrisko papildinājumu reizinājumu summu, t. i.,

$$\Delta = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1, \tag{4}$$

$$\Delta = a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2, \tag{5}$$

$$\Delta = a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3. \tag{6}$$

Formula (4) ir identiska ar (3), formulas (5) un (6) var pārbaudīt, tieši izskaitļojot.

2. teorēma. Determinants (1) ir vienāds ar kādas kolonas elementu un to algebrisko papildinājumu reizinājumu summu, t. i.,

$$\Delta = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3, \tag{7}$$

$$\Delta = b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3, \tag{8}$$

$$\Delta = c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3. \tag{9}$$

Šīs divas teorēmas atvieglina determinanta aprēķināšanu, ja elementu vidū ir nulles.

4. piemērs. Lai aprēķinātu determinantu

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix},$$

ieteicams lietot formulu (5) vai (9).

Formula (5) dod

$$\Delta=-3\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}+8\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=-3\cdot 31+8\cdot 12=3.$$

Formula (9) dod

$$\Delta=-2\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}+5\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}=-2\cdot 1+5\cdot 1=3.$$

5. piemērs. Lai aprēķinātu determinantu

$$\Delta=\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & 11 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix},$$

vislabāk pielietot formulu (6)

$$\Delta=-3\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}=-3\cdot -8=24.$$

183. §. Augstāku kārtu determinanti

Par ceturtās kārtas determinantu

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \tag{1}$$

sauc izteiksmi

$$\Delta=a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1+d_1D_1, \tag{2}$$

kur A_1, B_1, C_1, D_1 ir elementu a_1, b_1, c_1, d_1 algebriskie papildinājumi, t. i.,

$$\left.\begin{aligned} A_1&=\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}, & B_1&=-\begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}, \\ C_1&=\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix}, & D_1&=-\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

1. piemērs. Aprēķināt determinantu

$$\Delta=\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \\ 7 & 7 & 8 & 5 \end{vmatrix}.$$

Atrisinājums.

$$A_1=\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & 5 \end{vmatrix}=8, \quad B_1=-\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & 5 \end{vmatrix}=-16,$$

$$D_1=-\begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 7 & 7 & 8 \end{vmatrix}=-72$$

(tā kā $c_1=0$, tad C_1 aprēķināt nevajag),

$$\Delta=6\cdot 8+3(-16)+3(-72)=-216.$$

Ceturtās kārtas determinantam paliek spēkā 182. § 1. un 2. teorēma. Tās apvieno šāda teorēma.

Teorēma. Determinants ir vienāds ar kādas rindiņas (vai kādas kolonas) elementu un to algebrisko papildinājumu reizinājumu summu, t. i.,

$$\left.\begin{array}{l} \Delta=a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1+d_1D_1, \\ \Delta=a_2A_2+b_2B_2+c_2C_2+d_2D_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Delta=a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3+a_4A_4, \\ \Delta=b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3+b_4B_4, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \quad (4)$$

Pirmā no formulām (4) sakrīt ar formulu (2), kas pieņemta par definīciju. Pārējās formulas var pārbaudīt ar tiešiem aprēķiniem, lai gan tie ir ļoti smagi. Ir arī īsāki pierādījumi.

2. piemērs. Aprēķināsim 1. piemēra determinantu, izvirzot to pēc pirmās kolonas elementiem. Dabūjam

$$\Delta=3B_1+4B_2+4B_3+7B_4,$$

kur

$$B_1=-\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & 5 \end{vmatrix}=-16,\quad B_2=\begin{vmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & 5 \end{vmatrix}=-60,$$

$$B_3=-\begin{vmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 5 \end{vmatrix}=-66,\quad B_4=\begin{vmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}=48,$$

tā ka

$$\Delta=3\cdot(-16)+4\cdot(-60)+4\cdot(-66)+7\cdot 48=-216.$$

3. piemērs. Aprēķināsim to pašu determinantu, izvirzot to pēc trešās rindiņas elementiem

$$\Delta=0\cdot A_3+4B_3+4C_3+2D_3=$$

$$=-4\begin{vmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 5 \end{vmatrix}+4\begin{vmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 7 & 7 & 5 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \\ 7 & 7 & 8 \end{vmatrix}=-216.$$

Par *piektās kārtas determinantu*

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix} \tag{5}$$

sauc izteiksmi

$$\Delta=a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1+d_1D_1+e_1E_1, \tag{6}$$

kur A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 ir elementu a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 algebriskie papildinājumi; šie algebriskie papildinājumi paši ir ceturtās kārtas determinanti.

Analogi ar piektās kārtas determinantiem definē sestās kārtas determinantu utt.

Šī paragrāfa teorēma paliek spēkā jebkuras kārtas determinantiem.

184. §. Determinantu īpašības

1. Determinanta lielums nemainās, ja visas rindiņas samaina ar tāda paša numura kolonām.

1. piemērs.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

2. piemērs.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

2. Samainot vietām kaut kādas divas rindiņas vai kaut kādas divas kolonas, determinanta absolūtā vērtība nemainās, bet zīme mainās uz pretējo.

3. piemērs.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

(samainītas otrā un trešā rindiņa; sal. 117. § 1. p.).

4. piemērs.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

(samainītas pirmā un trešā kolona).

3. Determinants, kuram vienas rindiņas (vai kolonas) elementi ir attiecīgi proporcionāli citas rindiņas (vai kolonas) elementiem, ir vienāds ar nulli. Atsevišķā gadījumā determinants ar divām vienādām rindiņām (vai kolonām) ir vienāds ar nulli.

5. piemērs.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -5 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

(otrā un trešā kolona ir vienāda).

6. piemērs.

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ 3a & 3a' & 3a'' \end{vmatrix} = 0$$

(trešās rindiņas elementi ir proporcionāli pirmās rindiņas elementiem; sal. 117. § 1., 3., 4. p.).

4. Kādas rindiņas (vai kādas kolonas) visu elementu kopīgo reizinātāju var iznest pirms determinanta zīmes.

7. piemērs.

$$\begin{vmatrix} ma & ma' & ma'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$

(sal. 117. § 3. p.).

5. Ja kādas kolonas (rindiņas) visi elementi ir divu saskaitāmo summa, tad determinants ir vienāds ar divu determinantu summu: pirmajā determinantā visu summu vietā atrodas tikai pirmais saskaitāmais, otrā — tikai otrs saskaitāmais (pārējie elementi abos determinantos paliek tādi paši kā dotajā determinantā).

8. p i e m ē r s.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1+c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3+c_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

(sal. 117. § 2. p.).

6. Ja kādas kolonas visiem elementiem pieskaita saskaitāmos, kas ir proporcionāli atbilstošajiem citas kolonas elementiem, tad jaunais determinants ir vienāds ar veco determinantu. To pašu var teikt par rindiņām.

9. p i e m ē r s. Determinants $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ ir vienāds ar 12. Pieskaitīsim pirmās rindiņas elementiem otrās rindiņas elementus. Dabūsim $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}$. Šis determinants arī ir vienāds ar 12, bet to var aprēķināt vienkāršāk (izvirzījumā pēc pirmās rindiņas elementiem divi saskaitāmie ir vienādi ar nulli).

10. p i e m ē r s. Lai aprēķinātu determinantu

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

pirmās kolonas elementiem pieskaitām otrās kolonas elementus, pareizinātus ar -2. Dabūsim $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -7 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$. Šo determinantu viegli var aprēķināt, izvirzot pēc pirmās kolonas elementiem [182. § formula (7)]. Dabūjam

$$7\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -77.$$

11. piemērs. Lai aprēķinātu determinantu

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \\ 7 & 7 & 8 & 5 \end{vmatrix}$$

atņemam no otrās kolonas elementiem trešās kolonas elementus. Dabūsim

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 7 & -1 & 8 & 5 \end{vmatrix}.$$

Tagad atņemam no trešās kolonas elementiem ceturtās kolonas elementus, kas pareizināti ar 2. Dabūsim

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & -6 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 7 & -1 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Izvirzot pēc trešās rindiņas elementiem, dabūjam (tāpat kā 183. § 1. piemērā)

$$-2\begin{vmatrix} 6 & 3 & -6 \\ 4 & 2 & 0 \\ 7 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -216.$$

185. §. Praktisks determinantu aprēķināšanas paņēmiens

Šeit aprakstītais paņēmiens ir sevišķi izdevīgs, ja determinanta elementi ir veseli skaitļi.

Nozīmējam rindiņu [1], pēc kuras elementiem determinantu izvirzīsim. Vēlams, lai tā saturētu nulli. Paņēmiena mērķis ir izveidot izvēlētajā rindiņā jaunas nulles. Šai nolūkā pielieto 164. § 6. īpašību.

1. piemērs. Aprēķināt determinantu

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 6 & 2 \\ 7 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

[1] Vai kolonu.

Izvirzīsim to pēc otrās rindiņas elementiem (tanī ir nulle). Izveidosim tur (elementa 6 vietā) vēl vienu nulli. Šai nolūkā no otrās kolonas elementiem atņemsim trīskāršotus trešās kolonas elementus. Dabūsim

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -4 & 3\\ 0 & 0 & 2\\ 7 & 6 & -1\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}2 & -4\\ 7 & 6\end{vmatrix}=-80.$$

Izvirzīsim tagad doto determinantu pēc pirmās kolonas elementiem, kur jau ir viena nulle. Izveidosim šai kolonā (elementa 7 vietā) vēl vienu nulli. Šai nolūkā no trešās rindiņas elementiem atņemsim pirmās rindiņas elementus, iepriekš pareizinot tos ar $\frac{7}{2}$. Dabūsim

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 5 & 3\\ 0 & 6 & 2\\ 0 & -\frac{29}{2} & -\frac{23}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2 & 5 & 3\\ 0 & 6 & 2\\ 0 & 29 & 23\end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot 2\begin{vmatrix}6 & 2\\ 29 & 23\end{vmatrix}=-80.$$

P i e z ī m e. Varēja jau paredzēt, ka pirmais paņēmiens būs izdevīgāks: otrajā rindiņā elements 6 ir elementa 2 daudzkārtnis, kamēr pirmajā kolonā elements 7 nav elementa 2 daudzkārtnis. Vēlams, lai izvēlētajā rindiņā (vai kolonā) pēc iespējas visi elementi būtu viena elementa daudzkārtņi. Ja viens elements ir vienāds ar 1 vai -1, tad jāizvēlas tā rindiņa vai kolona, kur atrodas šis elements.

2. p i e m ē r s. Aprēķināt determinantu

$$\Delta=\begin{vmatrix}-1 & -2 & 4 & 1\\ 2 & 3 & 0 & 6\\ 2 & -2 & 1 & 4\\ 3 & 1 & -2 & -1\end{vmatrix}.$$

Izvēlamies trešo kolonu (tur ir nulle un viens). Lai dabūtu nulli elementa 4 vietā, no pirmās rindiņas elementiem atņemam četrkāršotus trešās rindiņas (tur atrodas izvēlētās kolonas elements 1) elementus. Pirmā rindiņa pieņems izskatu

$$-9 \quad 6 \quad 0 \quad -15.$$

Lai izveidotu trešajā kolonā nulli elementa -2 vietā, ceturtās rindiņas elementiem pieskaitīsim divkāršotus trešās rindiņas elementus. Ceturtā rindiņa tad būs

$$7 \quad -3 \quad 0 \quad 7.$$

Tagad, izvirzot pēc trešās kolonas elementiem, dabūsim

$$\Delta = \begin{vmatrix} -9 & 6 & 0 & -15 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 7 & -3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -9 & 6 & -15 \\ 2 & 3 & 6 \\ 7 & -3 & 7 \end{vmatrix}.$$

Trešās kārtas determinantā visi otrās kolonas elementi ir elementa -3 daudzkārtņi. Tāpēc trešās rindiņas elementus (kur atrodas elements -3) pieskaitām vispirms otrās rindiņas elementiem, bet pēc tam, iepriekš divkāršojot tos, — pirmās rindiņas elementiem. Dabūsim

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 9 & 0 & 13 \\ 7 & -3 & 7 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 9 & 13 \end{vmatrix} \cdot (-3) = 222.$$

3. p i e m ē r s. Aprēķināt determinantu

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 7 & -2 & 4 \\ -3 & -2 & 6 & -4 \\ 5 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & -5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Šeit nav nuļļu, bet otrajā rindiņā viegli tūlīt izveidot divas nulles: tās elementiem jāpieskaita pirmās rindiņas elementi. Dabūsim

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 7 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ 5 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & -5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Tagad otrajā rindiņā var izveidot vēl vienu nulli, atņemot no trešās kolonas elementiem otrās kolonas elementus, kas iepriekš pareizināti ar $\frac{4}{5}$. Izdevīgāk tomēr ir otrajā rindiņā izveidot vienu. Šai nolūkā pietiek no otrās kolonas elementiem atņemt trešās kolonas elementus. Dabūsim

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 9 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 5 & 8 & -3 & 2 \\ 2 & 11 & -5 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 9 & -38 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & -35 & 2 \\ 2 & 11 & -49 & 3 \end{vmatrix}$$

(mēs atskaitījām no trešās kolonas elementiem četrkāršotus otrās kolonas elementus. Tagad dabūjam

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -38 & 4 \\ 5 & -35 & 2 \\ 2 & -49 & 3 \end{vmatrix}=-303.$$

186. §. Determinantu pielietošana vienādojumu sistēmu atrisināšanā un izpētīšanā

Determinantus vispirms pielietoja pirmās pakāpes vienādojumu sistēmu atrisināšanā. 1750. gadā šveiciešu matemātiķis G. Kramers deva vispārīgas formulas, kas izteica nezināmos ar determinantiem, kuri sastādīti no sistēmas koeficientiem. Apmēram pēc simts gadiem determinantu teorija tālu izgāja aiz algebras ietvariem un to sāka pielietot visās matemātikas zinātnēs.

Tālākajos paragrāfos sniegtas pamatziņas par pirmās pakāpes (lineāru) vienādojumu sistēmu atrisināšanu un izpētīšanu; lielākas uzskatāmības dēļ visur norādīta saistība ar ģeometrijas atziņām.

187. §. Divi vienādojumi ar diviem nezināmajiem

Apskatīsim vienādojumu sistēmu

$$a_1x+b_1y=h_1, \tag{1}$$

$$a_2x+b_2y=h_2 \tag{2}$$

(katrs vienādojums izsaka taisni plaknē XOY; sal. 19. §).

Lietosim apzīmējumus

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ (sistēmas determinants)}, \tag{3}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} h_1 & b_1 \\ h_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & h_1 \\ a_2 & h_2 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Determinantu Δ_x dabū no determinanta Δ, aizstājot pirmās kolonas elementus ar sistēmas brīvajiem locekļiem; līdzīgā veidā dabū Δy.

Iespējami trīs gadījumi.

1. gadījums. Sistēmas determinants nav vienāds ar nulli: $\Delta \neq 0$.

Tad sistēmai ir viens vienīgs atrisinājums

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \tag{5}$$

[taisnes (1) un (2) krustojas, formulas (5) dod krustošanās punkta koordinātes].

2. gadījums. Sistēmas determinants ir vienāds ar nulli $\Delta = 0$ (t. i., koeficienti pie nezināmajiem ir proporcionāli). Pieņemsim, ka viens no determinantiem Δ_x, Δ_y nav vienāds ar nulli (t. i., brīvie locekļi nav proporcionāli koeficientiem pie nezināmajiem).

Šai gadījumā sistēmai nav atrisinājumu [taisnes (1) un (2) ir paralēlas, bet nesakrīt].

3. gadījums. $\Delta = 0$, $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$ (t. i., tiklab koeficienti, kā arī brīvie locekļi ir proporcionāli).

Tad viens no vienādojumiem (1), (2) ir otra vienādojuma sekas; sistēma reducējas uz vienu vienādojumu ar diviem nezināmiem un tai ir neskaitāms daudzums atrisinājumu [taisnes (1) un (2) sakrīt].

1. piemērs.

$$2x + 3y = 8, \quad 7x - 5y = -3.$$

Šeit

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = -31, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = -31,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -62.$$

Sistēmai ir viens vienīgs atrisinājums

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=1,\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=2.$$

2. piemērs.

$$2x+3y=8,\quad 4x+6y=10.$$

Šeit $\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}=0$. Pie tam $\Delta_x=\begin{vmatrix}8 & 3\\ 10 & 6\end{vmatrix}=18\neq 0$. Koeficienti ir proporcionāli, bet brīvie locekļi nav pakļauti tai pašai proporcijai. Sistēmai nav atrisinājumu.

3. piemērs.

$$2x+3y=8,\quad 4x+6y=16.$$

Šeit

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}=0,\quad \Delta_x=\begin{vmatrix}8 & 3\\ 16 & 6\end{vmatrix}=0,\quad \Delta_y=\begin{vmatrix}2 & 8\\ 4 & 16\end{vmatrix}=0.$$

Viens vienādojums ir otra vienādojuma sekas (piemēram, otru vienādojumu dabū no pirmā vienādojuma, pareizinot to ar 2). Sistēma reducējas uz vienu vienādojumu, un tai ir bezgalīgi daudz atrisinājumu, kurus izsaka formula

$$y=-\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}\quad \text{vai}\quad x=-\frac{3}{2}y+4.$$

188. §. Divi vienādojumi ar trim nezināmajiem

Apskatīsim vienādojumu sistēmu

$$a_1x+b_1y+c_1z=h_1, \tag{1}$$

$$a_2x+b_2y+c_2z=h_2 \tag{2}$$

(katrs vienādojums izsaka plakni telpā; sal. 141. §).

Iespējami trīs gadījumi.

1. gadījums. Vismaz viens no trim determinantiem

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}c_1 & a_1\\ c_2 & a_2\end{vmatrix} \tag{3}$$

nav vienāds ar nulli, t. i., koeficienti pie nezināmiem nav proporcionāli. Tad sistēmai ir neskaitāms daudzums atrisinājumu, pie kam vienam nezināmajam var dot jebkuru vērtību. Piemēram, ja $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, tad nezināmajam z var dot jebkuru vērtību; nezināmos x, y aprēķina vienā noteiktā veidā (187. § 1. p.) no sistēmas

$$a_1x+b_1y=h_1-c_1z,$$
$$a_2x+b_2y=h_2-c_2z$$

[plaknes (1) un (2) nav paralēlas, sistēma izsaka taisni, lielumi (3) ir virziena koeficienti (143. §)].

2. gadījums. Visi determinanti (3) ir vienādi ar nulli, bet viens no determinantiem

$$\begin{vmatrix} a_1 & h_1 \\ a_2 & h_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_1 & h_1 \\ b_2 & h_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_1 & h_1 \\ c_2 & h_2 \end{vmatrix} \tag{4}$$

nav vienāds ar nulli, t. i., koeficienti pie nezināmiem ir proporcionāli, bet brīvie locekļi nepakļaujas šai proporcijai. Šai gadījumā sistēmai nav atrisinājumu [plaknes (1) un (2) ir paralēlas, bet nesakrīt].

3. gadījums. Visi determinanti (3) un (4) ir vienādi ar nulli, t. i., tiklab koeficienti, kā arī brīvie locekļi ir proporcionāli. Tad sistēma reducējas uz vienu vienādojumu un tai ir neskaitāms daudzums atrisinājumu, pie kam jebkuras vērtības var dot *diviem* nezināmajiem. Piemēram, ja $c_1 \neq 0$, tad jebkuras vērtības var dot nezināmajiem x, y [plaknes (1) un (2) sakrīt].

1. piemērs. Atrisināt sistēmu

$$x-2y-z=15, \quad 2x-4y+2z=2.$$

Šeit

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}=-8,$$

$$\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-4.$$

Šo determinantu vidū ir tādi, kas nav vienādi ar nulli. Tātad sistēmai ir neskaitāms daudzums atrisinājumu. Jebkuras vērtības var dot vai nu tikai nezināmajam x vai arī tikai nezināmajam y, jo $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$ un $\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Nezināmajam z jebkuras vērtības dot nedrīkst (sal. 142. § 5. piemēru).

Atrisinām sistēmu attiecībā pret y un z. Dabūjam

$$-2y-z=15-x, \quad -4y+2z=2-2x.$$

No šejienes

$$y=\frac{\begin{vmatrix}15-x & -1\\ 2-2x & 2\end{vmatrix}}{-8}=-4+\frac{1}{2}x, \quad z=\frac{\begin{vmatrix}-2 & 15-x\\ -4 & 2-2x\end{vmatrix}}{-8}=-7.$$

(Sistēma izsaka OZ asij perpendikulāru taisni).

2. piemērs. Sistēmai

$$7x-4y+z=5, \quad 21x-12y+3z=12$$

nav atrisinājumu, jo visi determinanti (3) ir vienādi ar nulli (nezināmo koeficienti ir proporcionāli), bet determinants $\begin{vmatrix}a_1 & h_1\\ a_2 & h_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}7 & 5\\ 21 & 12\end{vmatrix}$ nav vienāds ar nulli (brīvie locekļi nav proporcionāli koeficientiem).

(Plaknes ir paralēlas, bet nesakrīt.)

3. piemērs. Atrisināt sistēmu

$$7x-4y+z=5, \quad 21x-12y+3z=15.$$

Šeit tiklab koeficienti, kā arī brīvie locekļi ir proporcionāli. Sistēma reducējas uz vienu vienādojumu. Jebkuram nezināmo pārim (teiksim, x un y) var dot patvaļīgas vērtības (tad $z=5-7x+4y$).

(Plaknes sakrīt.)

189. §. Homogena divu vienādojumu sistēma ar trim nezināmajiem

Pirmās pakāpes vienādojumu sistēmu sauc par *homogenu*, ja visos vienādojumos brīvie locekļi ir vienādi ar nulli.

Apskatīsim homogenu sistēmu

$$a_1x+b_1y+c_1z=0, \quad (1)$$

$$a_2x+b_2y+c_2z=0. \quad (2)$$

Tas ir 188. § sistēmas atsevišķs gadījums. Šādai sistēmai īpatnība ir tā, ka tā nevar būt nesaderīga, t. i., *2. gadījums* *nav spēkā* [188. § determinanti (4) vienmēr ir vienādi ar nulli]. Sistēmai (1)—(2) vienmēr ir neskaitāms daudzums atrisinājumu.

[Plaknes (1) un (2) iet caur koordinātu sākumu un tātad vai nu šķeļas, vai sakrīt].

1. gadījums. Koeficienti nav proporcionāli, t. i., vismaz viens no trim 188. § determinantiem (3) nav vienāds ar nulli. Tad atrisinājumu var uzrakstīt simetriskā formā

$$x=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} t, \quad y=\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} t, \quad z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} t \tag{3}$$

(parametrs t ir patvaļīgs skaitlis; sal. 152. §). Parametriskie vienādojumi (3) izsaka plakņu (1) un (2) šķelšanās taisni.

2. gadījums. Koeficienti ir proporcionāli, t. i., visi determinanti $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ir vienādi ar nulli.

Sistēma reducējas uz vienu vienādojumu (plaknes sakrīt).

1. piemērs. Atrisināt sistēmu

$$2x-5y+8z=0, \quad x+4y-3z=0.$$

Šeit

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -5 & 8 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=-17, \quad \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}=14,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=13.$$

Saskaņā ar (3) dabūjam

$$x=-17t, \quad y=14t, \quad z=13t.$$

Šai piemērā patvaļīgas vērtības var dot vienam (jebkuram) nezināmajam. Piemēram, ņemot $z=39$, atrodam $t=3$; tātad $x=-51$, $y=42$.

2. piemērs. Atrisināt sistēmu

$$x-2y-z=0, \quad 2x-4y+2z=0.$$

Šeit

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}=-8, \quad \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}=-4, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0.$$

Tātad

$$x=-8t, \quad y=-4t, \quad z=0.$$

Patvaļīgas vērtības var dot vienam no nezināmajiem x vai y, *bet ne nezināmajam* z. Nezināmais z var būt vienāds tikai ar nulli (taisne atrodas plaknē XOY).

3. piemērs. Sistēma

$$7x-4y+z=0, \quad 21x-12y+3z=0$$

reducējas uz vienu vienādojumu. Patvaļīgas vērtības var dot *jebkuram nezināmo pārim.*

190. §. Trīs vienādojumi ar trim nezināmajiem

Apskatīsim sistēmu

$$a_1x+b_1y+c_1z=h_1, \tag{1}$$

$$a_2x+b_2y+c_2z=h_2, \tag{2}$$

$$a_3x+b_3y+c_3z=h_3. \tag{3}$$

Lietosim apzīmējumus

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{(sistēmas determinants)}, \tag{4}$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & h_1 & c_1 \\ a_2 & h_2 & c_2 \\ a_3 & h_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & h_3 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

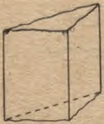
Determinantu Δ_x dabū no Δ, aizstājot tanī pirmās kolonas elementus ar brīvajiem locekļiem. Līdzīgā veidā dabū Δ_y un Δ_z.

Ja izrādītos, ka determinantā Δ kaut kādu divu rindiņu, teiksim, pirmās un otrās rindiņas, elementi ir proporcionāli, tad vienādojumi (1) un (2) vai nu būtu nesaderīgi (188. § 2. p.), vai arī reducētos uz vienu vienādojumu (188. § 3. p.). Pirmajā gadījumā dotajai sistēmai nebūs atrisinājumu, otrajā gadījumā — dotās sistēmas vietā dabūsim divu vienādojumu (1) un (3) sistēmu (tā savukārt var reducēties uz vienu vienādojumu). Tā kā viss tas jau apskatīts 188. paragrāfā, tad var ierobežoties ar pieņēmumu, ka determinantā Δ *nav neviena rindiņu pāra ar proporcionāliem elementiem* [plakņu (1), (2), (3) vidū nav paralēlu plakņu pāra].

Ar šādu pieņēmumu iespējami trīs gadījumi.

1. gadījums. Sistēmas determinants nav vienāds ar nulli, t. i.,

$$\Delta \neq 0.$$



202. zīm.

203. zīm.

Sistēmai ir viens vienīgs atrisinājums

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}. \tag{6}$$

(Trīs plaknes krustojas vienā punktā.)

2. gadījums. Sistēmas determinants ir vienāds ar nulli, t. i., $\Delta=0$, bet viens no determinantiem Δ_x, Δ_y, Δ_z nav vienāds ar nulli, tad arī abi pārējie determinanti nav vienādi ar nulli [1], t. i.,

$$\Delta_x \neq 0, \quad \Delta_y \neq 0, \quad \Delta_z \neq 0.$$

Šai gadījumā sistēmai nav atrisinājumu.

[Vienādība $\Delta=0$ nozīmē, ka plakņu (1), (2), (3) normālie vektori ir komplanāri, tātad visas trīs plaknes ir paralēlas vienai taisnei. Šai gadījumā trīs plaknes veido prizmatisku virsmu (202. zīm.).]

3. gadījums. $\Delta=0$, $\Delta_x=0$, $\Delta_y=0$, $\Delta_z=0$. Šai gadījumā viens no trim vienādojumiem (jebkurš) ir abu pārējo vienādojumu sekas. Sistēma reducējas uz diviem vienādojumiem ar trim nezināmiem un tai ir neskaitāms daudzums atrisinājumu (188. § 1. gadījums; 2. un 3. gadījums nav iespējams saskaņā ar iepriekšējo pieņēmumu).

(Trīs plaknes tāpat kā iepriekšējā gadījumā ir paralēlas vienai taisnei, bet tagad tās veido šķipsnu; 203. zīm.)

[1] Ja determinanta Δ divu rindiņu attiecīgie elementi ir proporcionāli (šo gadījumu mēs no apskata izslēdzam), tad var gadīties, ka no trim determinantiem Δ_x, Δ_y, Δ_z tikai viens vai tikai divi determinanti ir vienādi ar nulli.

1. p i e m ē r s. Atrisināt sistēmu

$$3x+4y+2z=5, \quad 5x-6y-4z=-3, \quad -4x+5y+3z=1.$$

Šeit

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & -6 & -4 \\ -4 & 5 & 3 \end{vmatrix}=12, \quad \Delta_x=\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -3 & -6 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}=12,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 5 & -3 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix}=-24, \quad \Delta_z=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & -3 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix}=60.$$

Sistēmai ir viens vienīgs atrisinājums

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=1, \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=-2, \quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=5.$$

2. p i e m ē r s. Atrisināt sistēmu

$$x+y+z=5, \quad x-y+z=1, \quad x+z=2.$$

Šeit

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Pie tam

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-2$$

(determinantus Δ_y un Δ_z nav vajadzības aprēķināt [1]). Sistēmai nav atrisinājumu. To var redzēt arī tieši: saskaitot pirmos divus vienādojumus, dabūjam $2x+2z=6$, t. i., $x+z=3$, kas ir pretrunā ar trešo vienādojumu.

3. p i e m ē r s. Atrisināt sistēmu

$$x+y+z=5, \quad x-y+z=1, \quad x+z=3.$$

Šeit

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

[1] Determinanta Δ rindiņas nav pa pāriem proporcionālas; sk. iepriekšējo zemteksta piezīmi.

Pie tam

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Determinanti Δ_x un Δ_z katrā ziņā ir vienādi ar nulli[1].

Dotā sistēma reducējas uz divu vienādojumu sistēmu (var ņemt jebkuru vienādojumu pāri, trešais vienādojums ir sekas) un tai ir neskaitāms daudzums atrisinājumu. Patvaļīgas vērtības var dot vai nu tikai nezināmajam x, vai tikai nezināmajam z (bet ne y; sk. 188. § 1. p.).

Ņemsim pirmo un trešo vienādojumu un atrisināsim tos attiecībā pret x un y. Dabūsim

$$x+y=5-z, \quad x=3-z.$$

No šejienes

$$x=3-z, \quad y=2.$$

P i e z ī m e. Ja trīs vienādojumu sistēma ar trim nezināmajiem ir homogena ($h_1=h_2=h_3=0$), tad otrs gadījums nav iespējams. Pirmajā gadījumā vienīgais atrisinājums būs $x=0$, $y=0$, $z=0$ (plaknes krustojas koordinātu sākumā). Trešajā gadījumā, ņemot jebkurus divus sistēmas vienādojumus, teiksim, (1) un (2), visus dotās sistēmas atrisinājumus atradīsim ar 189. § formulām (3) (trīs plaknes veido šķipsnu, kuras ass iet caur koordinātu sākumu).

4. p i e m ē r s. Atrisināt sistēmu

$$x+y+z=0, \quad 3x-y+2z=0, \quad x-3y=0.$$

Šeit

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Viens vienādojums ir abu pārējo vienādojumu sekas. Patvaļīgas vērtības var dot vienam (jebkuram) nezināmajam. Ņemot pirmo un trešo vienādojumu, ar 189. § formulām (3) atrodam

$$x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} t = 3t, \quad y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} t = t, \quad z = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} t = -4t.$$

[1] Determinanta Δ rindiņas nav pa pāriem proporcionālas; sk. zemteksta piezīmi 260. lpp.

190a. §. *n* vienādojumu sistēma ar *n* nezināmajiem

Pilnīga iespējamo gadījumu uzskaite ir ļoti komplicēta. Tāpēc ierobežosimies ar šādām ziņām.

Pieņemsim, ka dota n vienādojumu sistēma ar n nezināmajiem

$$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1z+\ldots+f_1u=h_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z+\ldots+f_2u=h_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nx+b_ny+c_nz+\ldots+f_nu=h_n. \end{array}\right\} \quad (1)$$

1. Ja n-tās kārtas determinants

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & f_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & f_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & b_n & c_n & \ldots & f_n \end{vmatrix} \quad \text{(sistēmas determinants)} \qquad (2)$$

nav vienāds ar nulli, tad sistēmai ir viens vienīgs atrisinājums

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}, \ldots, \quad u=\frac{\Delta_u}{\Delta}, \qquad (3)$$

kur Δ_x ir determinants, kuru dabū no Δ, elementus a_1, $a_2, \ldots, a_n$ aizstājot ar brīvajiem locekļiem $h_1, h_2, \ldots, h_n$; analogi dabū determinantus $\Delta_y, \Delta_z, \ldots, \Delta_u$.

2. Ja $\Delta=0$, bet vismaz viens no determinantiem Δ_x, $\Delta_y, \ldots, \Delta_u$ nav vienāds ar nulli, tad sistēmai nav atrisinājumu.

3. Pieņemsim, ka $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\ldots=\Delta_u=0$ un vismaz viens determinanta Δ $(n-1)$-ās kārtas minors (piemēram, minors, kuru dabū, izsvītrojot otro rindiņu un trešo kolonu) nav vienāds ar nulli. Tad sistēma reducējas ~~uz~~ $n-1$ vienādojumiem; viens vienādojums (otrais, kas atbilst rindiņas numuram) ir pārējo vienādojumu sekas. Vienam nezināmajam (nezināmajam z, kas atbilst kolonas numuram) var dot patvaļīgas vērtības. Pārējos $n-1$ nezināmos vienveidīgi nosaka no $n-1$ vienādojumiem.

P i e z ī m e. Gadījumā, ja visi $(n-1)$-ās kārtas determinanti, kas ir determinanta Δ minori, ir vienādi ar nulli, sistēmai var nebūt atrisinājumu, bet tā var arī reducēties uz $n-2$ vienādojumiem vai vēl mazāku vienādojumu skaitu.

1. piemērs Atrisināt sistēmu

$$\begin{aligned} 3x+7y-2z+4u&=3,\\ -3x-2y+6z-4u&=11,\\ 5x+5y-3z+2u&=6,\\ 2x+6y-5z+3u&=0. \end{aligned}$$

Sistēmas determinants Δ (sk. 185. § 3. piemēru) ir vienāds ar -303. Lietojot 185. paragrāfā apskatītos paņēmienus, atrodam

$$\Delta_x=-303,\quad \Delta_y=-606,\quad \Delta_z=-303,\quad \Delta_u=909.$$

Saskaņā ar formulām (3) dabūjam

$$x=1,\quad y=2,\quad z=1,\quad u=-3.$$

2. piemērs. Atrisināt sistēmu

$$\begin{aligned} x-y+2z-u&=1,\\ x+y+z+u&=4,\\ 2x+3y\qquad-5u&=0,\\ 5x+2y+5z-6u&=0. \end{aligned}$$

Šeit

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 0 & -5\\ 5 & 2 & 5 & -6 \end{vmatrix}=0.$$

Bet

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -1\\ 4 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 0 & -5\\ 0 & 2 & 5 & -6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 5 & -7 & 5\\ 0 & 3 & 0 & -5\\ 0 & 2 & 5 & -6 \end{vmatrix}=144\neq 0.$$

Tāpēc sistēmai nav atrisinājumu (ja pirmo vienādojumu pareizina ar 2 un pēc tam saskaita ar otro un trešo vienādojumu, tad dabūsim $5x+2y+5z-6u=6$, kas ir pretrunā ar ceturto vienādojumu).

3. piemērs. Atrisināt sistēmu

$$\begin{aligned} x-\ y+2z-\ u&=1, \\ x+\ y+\ z+\ u&=4, \\ 2x+3y\qquad -5u&=0, \\ 5x+2y+5z-6u&=6. \end{aligned}$$

Šeit

$$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=\Delta_u=0.$$

Izsvītrojot ceturto rindiņu un ceturto kolonu, dabūsim minoru

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}=-3\neq 0.$$

Sistēma reducējas uz trim vienādojumiem

$$\left.\begin{aligned} x-\ y+2z-\ u&=1, \\ x+\ y+\ z+\ u&=4, \\ 2x+3y\qquad -5u&=0. \end{aligned}\right\}$$

Ceturtais vienādojums ir šo vienādojumu sekas (sk. 2. piemēru). Nezināmajam u var dot jebkuras vērtības. No (4) atrodam

$$x=\frac{-24u+21}{-3},\quad y=\frac{11u-14}{-3},\quad z=\frac{16u-19}{-3}.$$

MATEMĀTISKĀS ANALĪZES PAMATJĒDZIENI

191. §. Ievada piezīmes

Par matemātisko analīzi sauc disciplīņu sistēmu, kuras apvieno šādas raksturīgas iezīmes.

To pētīšanas priekšmets ir reālās pasaules kvantitatīvās sakarības (atšķirībā no ģeometrijas, kura nodarbojas ar tās telpiskajām īpašībām). Šīs sakarības, tāpat kā aritmētikā, izsaka ar *skaitlisku* lielumu palīdzību. Bet aritmētikā (un arī algebrā) galvenokārt apskata pastāvīgus lielumus (tie raksturo *stāvokļus*), kamēr analīzē — mainīgus lielumus (tie raksturo *procesus;* 195. §). Pētījumu pamatā par sakarībām starp mainīgiem lielumiem ir *funkcijas* (196. §) un *robežas* (203.—206. §) jēdzieni.

Šai grāmatā apskatītas šādas analīzes nodaļas: diferenciālrēķini, integrālrēķini, rindu teorija un diferenciālvienādojumu teorija. Par katras nodaļas pētīšanas objektiem pastāstīts attiecīgā vietā.

Matemātiskās analīzes metožu pirmsākumi atrodami pie sengrieķu matemātiķiem (Arhimēds). Šīs metodes sistemātiski izveidoja 17. gadsimtā. 17. un 18. gadsimtu mijā Ņūtons [1] un Leibnics [2] galvenajos vilcienos noslēdza diferenciālrēķinu un integrālrēķinu izveidošanu un lika pamatus mācībai par rindām un par diferenciālvienādojumiem. Eilers 18. gadsimtā izstrādāja šīs pēdējās divas nodaļas, kā arī lika pamatus citām matemātiskās analīzes disciplīnām.

18. gadsimta beigās bija uzkrājies milzīgs faktiskais materiāls, bet loģiskā ziņā tas nebija pietiekami izstrādāts. Šo trūkumu novērsa 19. gs. lielākie zinātnieki, tādi kā Košī Francijā, N. Lobačevskis Krievijā, Ābels Norvēģijā, Rīmans Vācijā u. c.

---

[1] Izaks Ņūtons (1642—1727) — lielais angļu matemātiķis un fiziķis. Atklāja vispasaules gravitācijas likumu, formulēja mehānikas pamatlikumus un pielietoja tos zemes un debess ķermeņu kustības pētīšanai, eksperimentāli un teorētiski izpētīja optikas likumus.

[2] Gotfrīds Vilhelms Leibnics (1646—1716) — ievērojamais vācu filozofs un matemātiķis.

192. §. Racionāli skaitļi

Pirmie priekšstati par skaitli radās, skaitot priekšmetus. Skaitīšanas rezultāts ir skaitļi 1, 2, 3 utt. Tos tagad sauc par *naturāliem* skaitļiem. Vēlāk radās jēdziens par *daļām*; to izcelsmes avots ir nepārtrauktu lielumu (garuma, svara u. c.) mērīšana. *Negatīvie* skaitļi un līdz ar tiem arī nulle ienāca matemātikā[1] līdz ar algebras attīstību.

Veselos skaitļus (t. i., naturālos skaitļus 1, 2, 3 utt., negatīvos skaitļus -1, -2, -3 utt. un nulli) un daļas sauc par *racionāliem* skaitļiem (pretstatā *iracionāliem* skaitļiem; 193. §). Jebkuru racionālu skaitli var izteikt veidā $\frac{p}{q}$ (kur p un q ir veseli skaitļi).

193. §. Reāli skaitļi

Mērīšanu p r a k s ē izdara ar kādu instrumentu. Mērīšanas rezultātu izsaka ar kādu racionālu skaitli (piemēram, tievas metāla stieplītes garums, kuru izmērī ar mikrometru, milimetros izsakās, teiksim, ar skaitli 0,023). Visiem instrumentiem ir ierobežota precizitāte. Tāpēc praktiskām vajadzībām racionālo skaitļu krājums ir nevien pietiekams, bet pat pārāk liels. Tomēr matemātikas t e o r i j ā, kur mērījumus pieņem par absolūti precīziem, ar racionāliem skaitļiem vien iztikt nevar. Tā ne ar vienu racionālu skaitli nevar precīzi izteikt kvadrāta diagonāles garumu, ja tā malu pieņem par mērvienību; ar racionālu skaitli nevar precīzi izteikt 60° leņķa sinusu, 22° leņķa kosinusu, 17° leņķa tangensu, riņķa līnijas garuma attiecību pret diametru utt. Vispār nesamērojamu nogriežņu attiecību nevar precīzi izteikt ar racionālu skaitli.

Lai precīzi izteiktu nesamērojamu nogriežņu attiecību,

---

[1] Ķīnā pirms apmēram 2000 gadiem un Indijā pirms apmēram 1500 gadiem. Eiropā negatīvie skaitļi pilsoņtiesības iekaroja tikai 17. gadsimtā. Sk. M. Vigodskis. Elementārās matemātikas rokasgrāmata. Izdevniecība «Liesma», Rīgā, 1967.

jālieto jauni skaitļi — *iracionālie skaitļi*[1]. Iracionāls skaitlis izsaka *tāda nogriežņa garumu, kas nav samērojams ar mērvienību.* Racionālus un iracionālus skaitļus, kopā ņemtus, sauc par *reāliem* skaitļiem (pretstatā *imagināriem* jeb *šķietamiem* skaitļiem; sk. 2. piezīmi). Ar reālo skaitļu palīdzību var precīzi izteikt jebkura nogriežņa garumu.

Iracionāls skaitlis nevar būt precīzi vienāds ar racionālu skaitli. Bet katram iracionālam skaitlim var atrast racionālus skaitļus (atsevišķā gadījumā, decimāldaļskaitļus), kas aptuveni vienādi ar to (ar uzviju un ar iztrūkumu), pie kam pieļauto kļūdu var padarīt pēc patikas mazu.

P i e m ē r s. Skaitlim $\lg 3$ (tas ir iracionāls skaitlis) var atrast aptuvenas vērtības 0,4771 (ar iztrūkumu) un 0,4772 (ar uzviju); tās atšķiras par 0,0001, tā ka šo aptuveno vērtību kļūda pēc absolūtās vērtības nepārsniedz 0,0001. Ja vajadzīgs, lai kļūda nepārsniegtu 0,00001, tad var atrast vērtības 0,47712 (ar iztrūkumu) un 0,47713 (ar uzviju). Par logaritmu aprēķināšanas paņēmieniem sk. 272. § un arī 242. §.

1. p i e z ī m e. Racionāli skaitļi arī bieži jāizsaka aptuveni. Tā daļas $\frac{1}{3}$ vietā bieži ņem mazākas vērtības 0,33, 0,333 utt. (atkarībā no nepieciešamās precizitātes pakāpes) vai lielākas vērtības 0,34, 0,334 utt.

2. p i e z ī m e. *Imagināram* skaitlim ir izskats bi, kur b ir reāls skaitlis, bet i — «imagināra vienība», ko nosaka vienādība $i^2 = -1$ (šo vienādību neapmierina neviens reāls skaitlis). Izteiksmi $a+bi$ sauc par ***kompleksu*** skaitli. Kompleksi skaitļi algebrā parādījās 16. gs. vidū sakarā ar kuba vienādojuma atrisināšanu[2]. Sākot ar 17. gs. beigām tos lieto arī analīzē.

Šai grāmatā visur, kur nav minēts pretējais, visus skaitļus uzskata par reāliem.

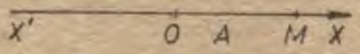
---

[1] Samērojamu nogriežņu attiecību var izteikt ar veselu skaitļu attiecību, nesamērojamu — nevar. Sengrieķu matemātikā sākumā apskatīja tikai veselu skaitļu attiecības. Tāpēc, kad atklāja nesamērojamus lielumus, tos sāka saukt par iracionāliem, t. i., «kam nav attiecības» (latīņu termins «iracionāls» ir grieķu vārda «alogos» tulkojums). Vēlāk (4. gadsimtā pirms m. ē.) grieķu matemātiķi (Eidokss un pēc viņa Eiklīds) sāka apskatīt arī nesamērojamu lielumu attiecības. Kad šīs attiecības izteica ar jaunajiem skaitļiem, tos arī sāka saukt par iracionāliem.

[2] «Elementārās matemātikas rokasgrāmata», III, 2.

194. §. Skaitļu ass

Uz taisnes $X'X$ (204. zīm.) izvēlamies sākumu O, mērvienību OA un pozitīvo vērsumu (teiksim, no X' uz X). Tad katram reālam skaitlim x atbilst noteikts punkts M, kura abscisa ir vienāda ar x.



204. zīm.

Analīzē (uskatāmības dēļ) skaitļus attēlo minētā veidā ar punktiem. Taisni $X'X$, uz kuras ņem šos punktus, sauc par *skaitļu asi.*

195. §. Mainīgi un pastāvīgi lielumi

Mainīgs lielums ir tāds lielums, kas dotā jautājuma apskatā var pieņemt *dažādas* vērtības. Pretēji mainīgam lielumam pastāvīgs lielums dotā jautājuma apskatā saglabā *vienu un to pašu* vērtību. Viens un tas pats lielums viena jautājuma apskatā var būt pastāvīgs, citā apskatā — mainīgs.

1. p i e m ē r s. Ūdens vārīšanās temperatūra T lielāko tiesu fizikālos jautājumos ir pastāvīgs lielums. Bet tur, kur jāievēro atmosfēras spiediena maiņa, T ir mainīgs lielums.

2. p i e m ē r s. Parabolas vienādojumā $y^2=2px$ koordinātes x, y ir mainīgi lielumi. Parametrs p ir pastāvīgs lielums, ja mēs apskatām tikai vienu parabolu. Ja turpretim mēs apskatām parabolu kopu ar kopīgu asi OX un kopīgu virsotni O, tad parametrs p ir mainīgs lielums.

Mainīgus lielumus parasti apzīmē ar latīņu alfabeta pēdējiem burtiem (x, y, z, u, v, w), bet pastāvīgus — ar pirmajiem burtiem (a, b, c, ...).

196. §. Funkcija

1. d e f i n ī c i j a. Lielumu y sauc par mainīga lieluma x *funkciju*, ja katrai vērtībai, kuru var pieņemt x, atbilst viena vai vairākas noteiktas y vērtības. Pie tam mainīgo lielumu x sauc par *argumentu*.

Saka arī: lielums y ir atkarīgs no lieluma x; saskaņā ar to argumentu sauc par *neatkarīgo* mainīgo, bet funkciju — par *atkarīgo* mainīgo.

1. piemērs. Pieņemsim, ka T ir ūdens vārīšanās temperatūra, bet p — atmosfēras spiediens. Novērojumi rāda, ka katrai vērtībai, ko var pieņemt p, vienmēr atbilst viena un tā pati T vērtība. Tātad T ir argumenta p funkcija.

Temperatūras T atkarība no p ļauj, novērojot ūdens vārīšanās temperatūru, bez barometra noteikt spiedienu no tabulas (dota saīsinātā veidā):

1. tabula

T °C	70	75	80	85	90	95	100
p *mm*	234	289	355	434	526	634	760

Savukārt p ir argumenta T funkcija; p atkarība no T ļauj, novērojot spiedienu, bez termometra noteikt ūdens vārīšanās temperatūru no tās pašas 1. tabulas. Ērtāk tomēr lietot šāda veida tabulu:

2. tabula

p *mm*	300	350	400	450	500	550	600	650	700
T °C	75,8	79,6	83,0	85,9	88,7	91,2	93,5	95,7	97,7

Šeit arguments p aug ar vienādiem intervāliem (tāpat kā arguments T 1. tabulā).

1. piezīme. 1. tabulu var papildināt ar citām argumenta T vērtībām, teiksim, 65°, 73°, 104°. Bet ir arī tādas vērtības, kuras vārīšanās temperatūra nevar pieņemt; tā, piemēram, vārīšanās temperatūra nevar būt mazāka par «absolūto nulli» (−273°). Neiespējamajai vērtībai $T=-300°$, protams, neatbilst nekāda p vērtība. Lūk, kādēļ 1. definīcijā teikts: «katrai vērtībai, kuru var pieņemt x...» (bet ne «katrai x vērtībai...»).

2. piemērs. Ķermenis izsviests augšup; s ir tā augstums virs zemes, t — laiks, kas pagājis no izsviešanas momenta.

Lielums s ir argumenta t funkcija, jo katrā kustības momentā ķermenim ir noteikts augstums. Savukārt t ir argumenta s funkcija, jo katram augstumam, kurā ķermenis var atrasties, atbilst divas noteiktas t vērtības (viena paceļoties, otra krītot).

2. definīcija. Ja katrai argumenta vērtībai atbilst viena funkcijas vērtība, tad funkciju sauc par *vienvērtīgu*, ja divas vai vairāk, — tad par *daudzvērtīgu* (*divvērtīgu*, *trīsvērtīgu* utt.).

Otrajā piemērā s ir argumenta t vienvērtīga funkcija, bet t ir divvērtīga argumenta s funkcija.

Ja sevišķi nav pasvītrots, ka funkcija ir daudzvērtīga, tad domāta vienvērtīga funkcija.

3. piemērs. Daudzstūra leņķu summa s ir tā malu skaita n funkcija. Arguments n var pieņemt tikai veselas vērtības, kas nav mazākas par 3. Summas s atkarību no n izsaka formula

$$s=\pi(n-2)$$

(par leņķu mērvienību pieņemts radiāns). Savukārt n ir argumenta s funkcija; n atkarību no s izsaka formula

$$n=\frac{s}{\pi}+2.$$

Arguments s var pieņemt tikai vērtības, kas ir π daudzkārtņi (π, 2π, 3π utt.).

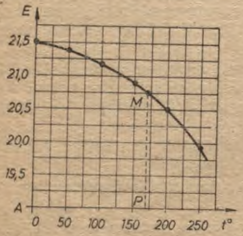
4. piemērs. Kvadrāta mala x ir tā laukuma S funkcija ($x=\sqrt{S}$). Arguments var pieņemt jebkuras pozitīvas vērtības.

2. piezīme. Arguments vienmēr ir mainīgs lielums. Funkcija vispārīgi arī ir mainīgs lielums. Bet nav tomēr izslēgts, ka tā paliek pastāvīga. Tā kustoša punkta attālums no nekustīga punkta ir ceļā pavadītā laika funkcija un vispārīgi ir mainīgs lielums. Bet, ja punkts kustas pa riņķa līniju, tad attālums līdz centram ir pastāvīgs.

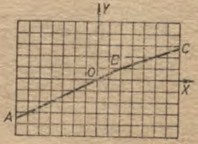
Gadījumā, ja funkcija ir pastāvīgs lielums, argumentu un funkciju lomām samainīt nedrīkst (mūsu piemērā kustības laiks pa riņķa līniju nav funkcija no attāluma līdz centram).

197. §. Funkcijas uzdošanas veidi

Funkciju uzskata par uzdotu (zināmu), ja katrai argumenta vērtībai (no iespējamo vērtību skaita) var atrast at-



205. zīm.



206. zīm.

bilstošo funkcijas vērtību. Visvairāk lieto trīs funkcijas uzdošanas paņēmienus: a) tabulāro, b) grafisko, c) analītisko.

a) *Tabulārais uzdošanas veids* ir vispārpazīstams (logaritmu tabulas, kvadrātsakņu tabulas utt.; sk. arī 196. § 1. piemēru). Tas uzreiz dod funkcijas skaitlisko vērtību. Tā arī ir šī uzdošanas veida priekšrocība salīdzinājumā ar citiem veidiem.

Trūkumi: 1) tabula grūti pārskatāma visumā; 2) tā bieži nesatur visas vajadzīgās argumenta vērtības.

b) Grafiski funkciju uzdod, novelkot līniju (grafiku), kurai abscisas attēlo argumenta vērtības, bet ordinātes — atbilstošās funkcijas vērtības. Lai funkciju varētu labāk attēlot, tad mērogus uz asīm bieži ņem dažādus.

1. p i e m ē r s. 205. zīmējumā grafiski attēlota kaltas dzelzs elastības moduļa E (t/cm^2) atkarība no dzelzs temperatūras t. Abscisas (t) un ordinātes (E) mērogi parādīti ar skaitliskām atzīmēm. Lai taupītu telpu, koordinātu sākums un abscisu ass nav uzzīmēti. No grafikas var nolasīt, piemēram, ja $t=170°$, tad elastības modulis $E \approx 20{,}75$ t/cm^2.

Grafiskā uzdošanas veida priekšrocības ir vieglā pārskatāmība visumā un argumenta maiņas nepārtrauktība; trūkumi: ierobežotā precizitātes pakāpe un nogurdinošā funkcijas vērtību nolasīšana ar maksimāli iespējamo precizitāti.

c) *Analītiski funkciju uzdod* ar vienu vai vairākām formulām.

2. piemērs. Funkcionālo atkarību starp riņķa līnijas rādiusu r un tās garumu s izsaka formula

$$s=2\pi r. \tag{1}$$

3. piemērs. Funkcionālo atkarību starp 1 kg gaisa tilpumu V (m^3) un spiedienu p (t/m^2), ja temperatūra ir 0°, izsaka formula

$$pV=8{,}000. \tag{2}$$

Ja sakarība starp x un y izteikta ar vienādojumu, kas ir atrisināts attiecībā pret y, tad lielumu y sauc par argumenta x *atklātu* funkciju, pretējā gadījumā — par *apslēptu*. 2. piemērā lielums s ir argumenta r atklāta funkcija, bet r — argumenta s apslēpta funkcija. 3. piemērā lielums p ir argumenta V apslēpta funkcija un lielums V — argumenta p apslēpta funkcija. Ja vienādojumu (2) uzraksta veidā

$$p=\frac{8{,}000}{V}, \tag{3}$$

tad p kļūs argumenta V atklāta funkcija.

4. piemērs. Funkciju, kas uzdota grafiski (206. zīm.) ar lauztu līniju ABC, var izteikt ar divām formulām. Ja $x<2$ (t. i., gabalam BA), jāņem formula

$$y=\frac{1}{2}x,$$

bet, ja $x>2$ (t. i., gabalam BC) — formula

$$y=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}x.$$

Ja $x=2$, tad abas formulas dod $y=1$ (punkts B).

5. piemērs. Attālums (pa šoseju) starp punktiem A un B ir 90 km. Automašīna nobrauca pirmo ceļa pusi no A uz B ar ātrumu 0,6 km/min, otro — ar ātrumu 0,9 km/min.

Apzīmēsim ar s (km) mašīnas attālumu no punkta A. Mašīnas ceļā pavadītais laiks t (min) ir argumenta s funkcija. To var uzdot ar divām formulām

$$t=\frac{s}{0{,}6}, \text{ ja } 0\leqslant s\leqslant 45,$$

$$t=75+\frac{s}{0{,}9}, \text{ ja } 45\leqslant s\leqslant 90.$$

198. §. Funkcijas definīcijas apgabals

1. Visu vērtību kopu, kuras var pieņemt (saskaņā ar jautājuma nostādni) funkcijas $f(x)$ arguments x, sauc par šīs funkcijas *definīcijas* jeb *eksistences apgabalu.*

Piezīme. Argumenta x vērtībai, kas neietilpst minētajā kopā, neatbilst neviena funkcijas vērtība.

1. piemērs. 197. § 5. piemērā funkcijas $t=f(s)$ definīcijas apgabals ir visu skaitļu kopa no 0 līdz 90 (ieskaitot robežvērtības 0 un 90), t. i.,

$$0\leqslant s\leqslant 90.$$

Tiešām, katram attālumam no 0 līdz 90 *km* atbilst noteikts mašīnas ceļā pavadītais laiks t, bet attālumiem $s<0$ un $s>90$ neatbilst neviena t vērtība.

2. piemērs. Aritmētiskās progresijas locekļu summa

$$s=1+3+5+\ldots+(2n-1)$$

ir locekļu skaita n funkcija; to izsaka formula

$$s=n^2.$$

Pati par sevi šī formula der jebkuram n. Bet apskatāmajā jautājumā n var pieņemt tikai vērtības 1, 2, 3, 4, ... Definīcijas apgabals ir visu naturālo skaitļu kopa (vērtībām $n=\frac{1}{2}$, $n=-5$, $n=\sqrt{3}$ u. tml. neatbilst nekādas funkcijas vērtības).

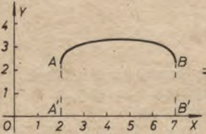
2. Bieži funkciju uzdod ar formulu, nenorādot definīcijas apgabalu; tad pieņem, ka definīcijas apgabals ir visu to argumenta vērtību kopa, pie kurām formulai ir jēga.

3. piemērs. Funkcija s uzdota ar formulu $s=n^2$ (nenorādot definīcijas apgabalu). Pieņem, ka definīcijas apgabals ir visu reālo skaitļu kopa (sal. 2. piemēru).

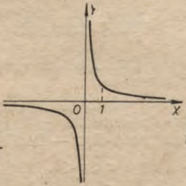
4. p i e m ē r s. Funkcija y uzdota ar formulu

$$y=\sqrt{x-2}+\sqrt{7-x},$$

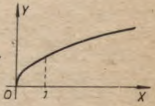
kurai jēga ir tikai tad, ja $2 \leqslant x \leqslant 7$ (ieskaitot robežas). Grafika (207. zīm.) atrodas tikai virs nogriežņa $A'B'$.



207. zīm.



208. zīm.



209. zīm.

5. p i e m ē r s. Funkcija y uzdota ar formulu $y=\frac{1}{x}$. Definīcijas apgabals ir visu skaitļu kopa, izņemot nulli. Pie vērtības $x=0$ grafikai (208. zīm.) nav punkta.

6. p i e m ē r s. Funkcijas $y=\sqrt{x}$ definīcijas apgabals ir pozitīvo skaitļu un nulles kopa (209. zīm.).

3. Ja funkcijas definīcijas apgabals ir naturālo skaitļu kopa, tad funkciju sauc par *veselskaitļu* jeb *aritmētisku* funkciju; par veselskaitļu funkcijas vērtībām saka, ka tās veido *virkni* jeb ir *virknes locekļi.*

7. p i e m ē r s. Funkcija $t_n=1\cdot 2\cdot 3 \ldots n$ ir veselskaitļu funkcija. Vērtības $t_1=1$, $t_2=1\cdot 2=2$, $t_3=1\cdot 2\cdot 3=6, \ldots$ veido virkni.

Reizinājumu $1\cdot 2\cdot 3 \ldots n$ apzīmē ar $n!$ (lasa *«n faktoriāls»*); tātad šo funkciju var izteikt ar formulu

$$t_n=n!$$

8. p i e m ē r s. Funkcija $u=\frac{1}{2^n}$, kur n pieņem vērtības 1. 2, 3, ..., ir veselskaitļu funkcija. Vērtības $u_1=\frac{1}{2}$, $u_2=\frac{1}{4}$, $u_3=\frac{1}{8}$, ... (ģeometriskās progresijas locekļi) veido virkni.

9. piemērs. Funkcija $s=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}$ (ģeometriskās progresijas n locekļu summa) ir veselskaitļu funkcija. Vērtības $s_1=\frac{1}{2}$, $s_2=\frac{3}{4}$, $s_3=\frac{7}{8}$, ... veido virkni.

199. §. Intervāls

Analīzē apskatāmo funkciju definīcijas apgabals bieži ir viens vai vairāki «intervāli».

Par intervālu (a, b) sauc skaitļu x kopu, kuri ieslēgti starp skaitļiem a un b; pierakstā (a, b) pirmais burts parasti apzīmē mazāko skaitli, bet otrs — lielāko, tā ka

$$a<x<b.$$

Skaitļus a un b sauc par intervāla galiem. Bieži intervāla punktu kopai pievieno galus a un b vai arī tikai vienu galu. Intervālu, kuram pievienoti abi gali, sauc par *slēgtu intervālu* (jeb *segmentu*).

Par intervālu (a, ∞) sauc visu skaitļu kopu, kuri ir lielāki par a; par intervālu $(-\infty, a)$ — visu skaitļu kopu, kuri ir mazāki par a; par intervālu $(-\infty, \infty)$ — visu reālo skaitļu kopu.

1. piemērs. 197. § 5. piemērā funkcijas t definīcijas apgabals ir slēgts intervāls $(0, 90)$, t. i., arguments s var pieņemt visas vērtības, kas apmierina nevienādības

$$0\leqslant s\leqslant 90.$$

2. piemērs. Funkcijas $y=\sqrt{1-x^2}$ definīcijas apgabals ir slēgts intervāls $(-1, 1)$. Grafika (pusaploce) atrodas virs šī intervāla (210. zīm.).

3. piemērs. Funkcijas

$$y=\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}$$

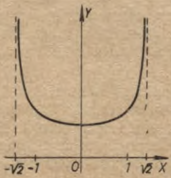
definīcijas apgabals ir intervāls $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ (vaļējs). Intervāla galos funkcija nav definēta («pārvēršas bezgalībā»). Grafika (211. zīm.) atrodas virs intervāla *iekšējiem* punktiem. Virs intervāla galiem un ārpus tā grafikai nav punktu.

4. piemērs. Funkcijas

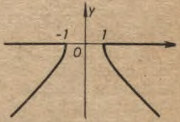
$$y=-\sqrt{x^2-1}$$

definīcijas apgabals ir divi intervāli $(-\infty, -1)$ un $(1, +\infty)$ ar pievienotiem galiem -1 un 1. Grafika (hiperbolas $x^2-y^2=1$ apakšējā puse, 212. zīm.) atrodas zem šiem intervāliem.

210. zīm.



211. zīm.



212. zīm.

200. §. Funkciju klasifikācija

a) Funkcijas iedala *vienvērtīgās* un *daudzvērtīgās* funkcijās (196. § 2. definīcija).

b) Ar formulām izteiktās funkcijas iedala *atklātās* un *apslēptās* funkcijās (197. §).

c) Funkcijas iedala *elementārās* un *neelementārās* funkcijās[1].

Galveno elementāro funkciju saraksts dots 201. paragrāfā; visas tās izteic kādu «darbību» ar argumentu (kāpināšanu kvadrātā, kuba saknes izvilkšanu, logaritmēšanu, sinusa atrašanu utt.). Atkārtoti izpildot šīs darbības, kā arī četras aritmētiskās darbības (ierobežotā skaitā) dabūjam jaunas funkcijas; arī tās pieskaita elementārajām funkcijām.

1. piemērs. Funkcijas

$$y=\frac{3+x^2}{1+\lg x}, \quad y=\lg\sin\sqrt[3]{1-3\sin x}, \quad y=\lg\lg(3+2\sqrt[3]{\sin x})$$

ir elementāras.

[1] Šim iedalījumam ir vairāk vēsturisks nekā matemātisks raksturs.

Funkcijas, kuras nevar izteikt minētajā veidā, skaita par neelementārām.

2. piemērs. Funkcija $s=1+2+3+\ldots+n$ ir elementāra funkcija, jo to var izteikt ar formulu $s=\frac{(1+n)n}{2}$, kas satur elementārās darbības ierobežotā skaitā.

3. piemērs. Funkcija $s=1\cdot2\cdot3\ldots n$ ir neelementāra, jo to nevar izteikt ar elementārām darbībām ierobežotā skaitā (jo lielāks ir n, jo vairāk reizināšanas jāizpilda, bet izteiksmi $1\cdot2\cdot3\ldots n$ pārveidot elementārā veidā nav iespējams).

Piezīme. Mēs apzinīgi atturamies šeit iedalīt funkcijas algebriskās un transcendentās, jo precīzu algebriskas funkcijas definīciju var dot tikai komplicētākiem jēdzieniem (nepārtrauktību vai diferencējamību). Bez tam izšķirt algebriskas un transcendentas funkcijas šīs grāmatas ietvaros ir lieki.

201. §. Galvenās elementārās funkcijas

1) *Pakāpes funkcija* $y=x^n$ (kur n ir pastāvīgs reāls skaitlis).

Ja $n=0$, tad pakāpes funkcija ir pastāvīgs lielums ($y=1$) (sal. 196. § 2. piezīmi).

2) *Eksponentfunkcija* $y=a^x$, kur a ir pozitīvs skaitlis [1] (pakāpes bāze).

3) *Logaritmiskā funkcija* $y=\log_a x$, kur a ir pozitīvs skaitlis, kas atšķiras no viena [2] (logaritmu bāze).

4) *Trigonometriskās funkcijas* $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$, $y=\sec x$, $y=\operatorname{cosec} x$.

5) *Ciklometriskās (apvērstās trigonometriskās) funkcijas*

$$y=\arcsin x,\quad y=\arccos x,\quad y=\operatorname{arctg} x,$$

$$y=\operatorname{arcctg} x,\quad y=\operatorname{arcsc} x,\quad y=\operatorname{arccosc} x.$$

Elementāro funkciju definīcijas un grafikas sk. «Elementārās matemātikas rokasgrāmatā», VI. nodaļā.

[1] Daži autori izslēdz gadījumu $a=1$ (šai gadījumā y ir pastāvīgs lielums).

[2] Ja bāze $a=1$, tad nevienam skaitlim, izņemot vienu, nav logaritma.

202. §. Funkcijas apzīmējumi

Simbols $f(x)$ (lasa «ef no ikss») ir saīsināts pieraksts mutiskajam izteicienam «x funkcija».

Ja apskata divas vai vairākas x funkcijas, kuras var būt savā starpā dažādas, tad bez $f(x)$ lieto vēl citus pierakstus, piemēram, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$, $\Phi(x)$.

Pieraksts

$$y=f(x) \tag{1}$$

izsaka, ka lielums y ir vienāds ar kaut kādu x funkciju, t. i., ka y ir argumenta x funkcija.

Simbolu $f(x)$ var lietot, lai apzīmētu kā nezināmu tā zināmu funkciju.

Piemēri. 1) Pieraksts $f(x)=\lg x$ izsaka, ka $f(x)$ ir logaritmiskā funkcija.

2) Pieraksts $\varphi(x)=x^n$ izsaka, ka $\varphi(x)$ ir pakāpes funkcija.

3) Pieraksts $F(x)=\varphi(x)+f(x)$ nozīmē, ka funkcija $F(x)$ ir funkciju $\varphi(x)$ un $f(x)$ summa. Ja $f(x)=\lg x$ un $\varphi(x)=x^n$, tad $F(x)=\lg x+x^n$.

4) Pieraksts $f_1(x)=f_2(x)$ nozīmē, ka funkcijas $f_1(x)$ un $f_2(x)$ ir vienādas (vai nu identiski, vai arī noteiktām x vērtībām).

5) Pieraksts $u=\varphi(v)$ nozīmē, ka lielums u ir kāda argumenta v funkcija.

Burtu f (vai F, φ utt.), kuru lieto šajos pierakstos, sauc par funkcijas *raksturojumu*.

Ja jāizsaka, ka y atrodas tādā pašā atkarībā no x, kā u — no v, tad šo atkarību pierakstā lieto vienu un to pašu raksturojumu, t. i., raksta

$$u=\varphi(v) \text{ un } y=\varphi(x) \tag{2}$$

jeb

$$u=F(v) \text{ un } y=F(x) \tag{3}$$

utt.

Tā, ja u atkarību no v izsaka formula $u=\pi v^2$, tad y atkarību no x saskaņā ar (2) izteiks formula $y=\pi x^2$. Ja turpretim $u=\frac{\lg v}{1+v}$, tad $y=\frac{\lg x}{1+x}$ utt.

Piemēri. 6) Ja $f(x)=\sqrt{1+x^2}$, tad $f(t)=\sqrt{1+t^2}$.

7) Ja $F(\alpha)=1-\operatorname{tg}^2\alpha$, tad $F(\beta)=1-\operatorname{tg}^2\beta$, $F(\gamma)=1-\operatorname{tg}^2\gamma$ utt.

8) Ja $f(x)=4$ (t. i., pie visām argumenta vērtībām funkcijai ir viena un tā pati vērtība; sal. 196. § 2. piezīmi), tad $f(y)=4$, $f(z)=4$ utt.

Pieraksti $f(1)$, $f(\sqrt{3})$, $f(a)$ utt. izsaka, ka tiek ņemtas funkcijas vērtības, ja $x=1$, ja $x=\sqrt{3}$, ja $x=a$ utt. vai funkcijas $f(y)$ vērtības, ja $y=1$, $y=3$, $y=a$ utt.

Piemēri. 9) Ja $f(x)=\sqrt{x^2+1}$, tad

$$f(1)=\sqrt{2},\quad f(\sqrt{3})=2,\quad f(a)=\sqrt{a^2+1}.$$

10) Ja $\varphi(\alpha)=\frac{1}{1+\sin^2\alpha}$, tad $\varphi(0)=1$, $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$, $\varphi(\pi)=1$, $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2}{3}$.

203. §. Virknes robeža

Skaitli b sauc par *virknes* (198. § 3. p.) $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ *robežu*, ja līdz ar numura n augšanu loceklis y_n neierobežoti tuvojas skaitlim b.

Precīza jēga izteicienam «neierobežoti tuvojas» paskaidrota tālāk (aiz 1. piemēra).

Pieraksts[1]:

$$\lim y_n=b$$

jeb sīkāk

$$\lim_{n\to\infty} y_n=b.$$

Pieraksts $n\to\infty$ pasvītro, ka numurs n neierobežoti aug («tiecas uz bezgalību»).

1. piemērs. Apskatīsim virkni

$$y_1=0{,}3,\quad y_2=0{,}33,\quad y_3=0{,}333,\ \ldots \tag{1}$$

Loceklis y_n neierobežoti tuvojas $\frac{1}{3}$ (decimāldaļas 0,3, 0,33, ... dod vienmēr precīzākas un precīzākas daļas $\frac{1}{3}$ izteiksmes). Tātad $\frac{1}{3}$ ir virknes (1) robeža

$$\lim y_n=\frac{1}{3}.$$

[1] Apzīmējums lim ir latīņu vārda *limes* (robeža) saīsinājums; šis vārds atbilst franču vārdam *limite* (limit).

P i e z ī m e. Starpība $y_n - \frac{1}{3}$ pēc kārtas sekojošām n vērtībām ir vienāda ar

$$y_1 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{30}, \quad y_2 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{300}, \quad y_3 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3000}, \qquad (2)$$

t. i.,

$$y_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3 \cdot 10^n}. \qquad (3)$$

Locekļa y_n *neierobežotā* tuvošanās skaitlim $\frac{1}{3}$ izpaužas tādējādi, ka starpības (3) absolūtā vērtība, sākot ar kādu numuru N, paliek mazāka par *jebkuru* (iepriekš uzdotu) pozitīvu skaitli ε. Tā, ja uzdodam $\varepsilon=0{,}01$, tad $N=2$, t. i., sākot ar otro numuru, $y_n - \frac{1}{3}$ absolūtā vērtība paliek mazāka par 0,01. Ja uzdodam $\varepsilon=0{,}005 \left(=\frac{1}{200}\right)$, tad tāpat kā iepriekš $N=2$. Ja $\varepsilon=0{,}001$, tad $N=3$; ja $\varepsilon=0{,}00001$, tad $N=5$ utt.

Tagad būs saprotams šāds precīzs paragrāfa sākumā dotās definīcijas formulējums.

D e f i n ī c i j a. Skaitli b sauc par virknes $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ robežu, ja starpības $y_n - b$ absolūtā vērtība, sākot ar kādu numuru N, paliek mazāka par jebkuru iepriekš uzdotu pozitīvu skaitli ε, t. i.,

$$|y_n - b| < \varepsilon, \text{ ja } n \geqslant N$$

(numurs N ir atkarīgs no ε lieluma).

2. p i e m ē r s. Virknē $y_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$ (t. i., $y_1=1$, $y_2=2\frac{1}{2}$, $y_3=1\frac{2}{3}$, $y_4=2\frac{1}{4}$, ...) loceklis y_n, numuram n augot, tiecas uz 2. Tātad 2 ir virknes robeža.

Tiešām, atrodam $|y_n - 2| = \frac{1}{n}$; bet lielums $\frac{1}{n}$, sākot ar kādu numuru, paliek mazāks par jebkuru iepriekš uzdotu pozitīvu skaitli ε (ja $\varepsilon=2$, tad sākot ar pirmo numuru; ja $\varepsilon = 0{,}02$, tad ar 51. numuru utt.).

2. piemērs rāda, ka virknes locekļi var būt te lielāki, te mazāki par robežu. Tie var būt arī vienādi ar robežu (sk. 3. piemēru).

3. piemērs. Virknei

$$y_1=0,\quad y_2=1,\quad y_3=0,\quad y_4=\frac{1}{2},\quad y_5=0,\quad y_6=\frac{1}{3},\ \ldots,$$

kas uzdota ar formulu $y_n=\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{n}$, ir robeža $b=0$.

Tiešām, lielums $|y_n-0|=\left|\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{n}\right|$, sākot ar kādu numuru, paliek mazāks par jebkuru iepriekš uzdotu pozitīvu skaitli ε (ja $\varepsilon=\frac{1}{3}$, tad sākot ar septīto numuru, ja $\varepsilon=0{,}01$, tad — ar 201. numuru utt.).

4. piemērs. Virknei $y_n=(-1)^n$ nav robežas; locekļi $y_1=-1$, $y_2=1$, $y_3=-1$, $y_4=1$ utt. netiecas ne uz vienu pastāvīgu skaitli.

204. §. Funkcijas robeža

Skaitli b sauc par funkcijas $f(x)$ *robežu*, kad $x\to a$ (lasa «kad x tiecas uz a»), ja līdz ar x tuvošanos a — vai nu no labās vai kreisās puses — $f(x)$ vērtība neierobežoti tuvojas[1] («tiecas») b.

Pieraksts

$$\lim_{x\to a} f(x)=b.$$

1. piezīme. Pieņemts, ka funkcija $f(x)$ ir definēta kādā intervālā, kas satur punktu $x=a$ (visos punktos pa labi un pa kreisi no a); pašā punktā $x=a$ funkcija $f(x)$ var būt, bet var arī nebūt definēta (pēdējais gadījums nav mazāk svarīgs par pirmo gadījumu).

1. piemērs. Apskatīsim funkciju $f(x)=\frac{4x^2-1}{2x-1}$ (tā ir definēta visos punktos, izņemot punktu $x=\frac{1}{2}$). Ņemam $x=6$.

---

[1] Izteiciena «neierobežoti tuvojas» matemātiskā jēga izskaidrota 205. paragrāfā. Šī definīcija (ievērojot 1. piezīmi) ir pilnīgi pietiekama, lai saprastu tālāko materiālu.

Tad $f(x)=\frac{4\cdot 6^2-1}{2\cdot 6-1}=13$. Ja x tuvojas 6 (no labās vai kreisās puses), tad skaitītājs $4x^2-1$ tiecas uz 143, bet saucējs — uz 11. Visa daļa tiecas uz $\frac{143}{11}=13$. Skaitlis 13 (kas ir vienāds ar funkcijas vērtību pie $x=6$) līdz ar to ir funkcijas robeža, kad $x\to 6$, t. i.,

$$\lim_{x\to 6}\frac{4x^2-1}{2x-1}=13.$$

2. piemērs. Apskatīsim to pašu funkciju $f(x)=\frac{4x^2-1}{2x-1}$ un ņemsim $x=\frac{1}{2}$. Funkcija $f(x)$ šai punktā nav definēta (formula dod nenoteiktu izteiksmi $\frac{0}{0}$). Bet funkcijas robeža, kad $x\to\frac{1}{2}$, eksistē. Tā ir vienāda ar 2.

Tiešām, izteiksme $\frac{4x^2-1}{2x-1}$ ir nenoteikta *tikai, ja x ir vienāds ar $\frac{1}{2}$*, bet, *kad x tuvojas* $\frac{1}{2}$, tā ir pilnīgi noteikta un vienmēr vienāda ar $2x+1$. Bet pēdējā izteiksme tiecas uz skaitli 2. Tātad

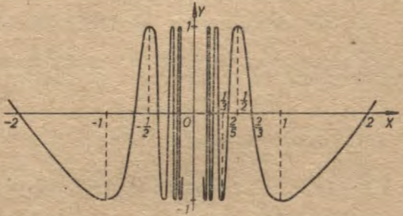
$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x^2-1}{2x-1}=2.$$

2. piezīme. Funkcijas $y=\frac{4x^2-1}{2x-1}$ grafika ir taisne UV (213. zīm.), kurai iztrūkst punkts $A(\frac{1}{2}, 2)$. Funkcijas $y=2x+1$ grafika ir tā pati taisne UV, tikai ņemta pilnīgi.

3. piemērs. Funkcijai $f(x)=\cos\frac{\pi}{x}$ (tā ir definēta visos punktos, izņemot $x=0$) nav robežas, kad $x\to 0$. To rāda

grafika (214. zīm.): kad abscisa tiecas uz nulli, ordināte netiecas ne uz ko (grafikas punkts izpilda neskaitāmas svārstības ar pastāvīgu amplitūdu).

213. zīm.



214. zīm.

205. §. Funkcijas robežas definīcija

Mainīga lieluma neierobežotā tuvošanās pastāvīgam lielumam izpaužas tādējādi (sal. 203. §), ka, sākot ar kādu momentu, to starpība pēc absolūtās vērtības paliks mazāka par jebkuru iepriekš uzdotu pozitīvu skaitli. Ievērojot to, 204. § definīcijai var dot šādu precīzu formulējumu.

Definīcija. Skaitli b sauc par funkcijas $f(x)$ *robežu*, kad $x \to a$, ja starpības $f(x)-b$ absolūtā vērtība paliek mazāka par jebkuru iepriekš uzdotu pozitīvu skaitli ε, ja vien starpības $x-a$ absolūtā vērtība, kur x nav vienāds ar a, ir mazāka par kādu pozitīvu skaitli δ (kas ir atkarīgs no ε).

Īsāk (bet neprecīzāk): skaitlis b ir funkcijas $f(x)$ robeža, kad $x \to a$, ja lielums $|f(x)-b|$ ir pēc patikas mazs ar noteikumu, ka lielums $|x-a|$ ir pietiekami mazs.

Piemērs. Skaitlis 2 ir funkcijas $f(x)=\frac{4x^2-1}{2x-1}$ robeža, kad $x \to \frac{1}{2}$ (sal. 204. § 2. piemēru).

Tiešām, pieprasām, lai lielums

$$\left|\frac{4x^2-1}{2x-1}-2\right|$$

(kur $x \neq \frac{1}{2}$) būtu mazāks par ε. Dabūjam nevienādību

$$|2x-1|<\varepsilon.$$

Tā ir ekvivalenta nevienādībai

$$\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Tātad starpības $\frac{4x^2-1}{2x-1}-2$ absolūtā vērtība paliek mazāka par jebkuru iepriekš uzdotu pozitīvu skaitli ε, ja vien starpības $x-\frac{1}{2}$ absolūtā vērtība ir mazāka par $\frac{\varepsilon}{2}$. Šai piemērā $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$.

206. §. Pastāvīga lieluma robeža

D e f i n ī c i j a. Par pastāvīga lieluma b robežu sauc pašu lielumu b.

Šī definīcija ir vajadzīga tādēļ, lai pamatteorēmas par robežām (213. §) būtu pareizas bez izņēmuma visos gadījumos. Tā saskan ar 203. un 205. § definīcijām (lielums $|b-b|=0$ ir mazāks par jebkuru pozitīvu skaitli ε).

207. §. Bezgalīgi mazs lielums

Par bezgalīgi mazu lielumu sauc lielumu, kura robeža ir vienāda ar nulli.

1. p i e m ē r s. Funkcija x^2-4 ir bezgalīgi mazs lielums, kad $x \to 2$ un kad $x \to -2$. Kad $x \to 1$ šī funkcija nav bezgalīgi maza.

2. p i e m ē r s. Funkcija $1-\cos\alpha$ ir bezgalīgi mazs lielums, kad $\alpha \to 0$, jo $\lim\limits_{\alpha \to 0}(1-\cos\alpha)=0$.

Saka arī: «lielums $1-\cos\alpha$ ir bezgalīgi mazs, ja α ir bezgalīgi mazs».

3. piemērs. Lielums $\frac{4x^2-1}{2x-1}$, kad $x \to \frac{1}{2}$, nav bezgalīgi mazs, jo tā robeža ir vienāda ar 2 (204. § 2. piemērs).

4. piemērs. Veselskaitļu funkcija $y=\frac{1}{n!}$ (198. § 7. piemērs) ir bezgalīgi mazs lielums, jo virknes $\frac{1}{1}, \frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}, \ldots$ robeža ir vienāda ar nulli.

1. piezīme. Apgalvojumi «skaitlis b ir lieluma y robeža» un «starpība $y-b$ ir bezgalīgi mazs lielums» ir ekvivalenti.

5. piemērs. Kā zināms, $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \frac{4x^2-1}{2x-1}=2$. To pašu faktu var izteikt ar frāzi «lielums $\frac{4x^2-1}{2x-1}-2$ ir bezgalīgi mazs».

2. piezīme. No pastāvīgiem lielumiem vienīgi nulle ir bezgalīgi mazs lielums (sal. 206. §).

208. §. Bezgalīgi liels lielums

Par bezgalīgi lielu lielumu sauc mainīgu lielumu, kura absolūtā vērtība neierobežoti aug.

Izteiciena «neierobežoti aug» precīzā jēga izskaidrota paragrāfa beigās.

1. piemērs. Veselskaitļu funkcija $y=n!$ ir bezgalīgi liels lielums, jo virknes $1, 1\cdot 2, 1\cdot 2\cdot 3, \ldots$ locekļi neierobežoti aug.

2. piemērs. Funkcija $\frac{1}{x}$ ir bezgalīgi liels lielums, ja x ir bezgalīgi mazs, jo, kad x tuvojas nulliei, lieluma $\frac{1}{x}$ absolūtā vērtība neierobežoti aug.

3. piemērs. Funkcija $\operatorname{tg} x$ ir bezgalīgi liels lielums, kad $x \to \frac{\pi}{2}$.

Neviens pastāvīgs lielums nav bezgalīgi liels.

Piezīme. Izteiciens «lieluma y absolūtā vērtība neierobežoti aug» nozīmē, ka $|y|$, sākot ar kādu momentu, paliek lielāks par jebkuru iepriekš uzdotu pozitīvu skaitli. Ievērojot to, bezgalīgi liela lieluma jēdzienu precīzi definē šādi.

1. definīcija. Veselskaitļu funkcija y ir bezgalīgi liels lielums, ja y_n absolūtā vērtība, sākot ar kādu numuru N, paliek lielāka par jebkuru iepriekš uzdotu pozitīvu skaitli M (sal. 203. §).

2. definīcija. Funkcija $f(x)$ ir bezgalīgi liels lielums, kad $x \to a$, ja $f(x)$ absolūtā vērtība paliek lielāka par jebkuru iepriekš uzdotu pozitīvu skaitli M, ja vien starpības $x-a$ absolūtā vērtība ir mazāka par kādu pozitīvu skaitli δ (kas ir atkarīgs no M) (sal. 205. §).

209. §. Saistība starp bezgalīgi lieliem un bezgalīgi maziem lielumiem

Ja y ir bezgalīgi liels lielums, tad $\frac{1}{y}$ ir bezgalīgi mazs; ja y ir bezgalīgi mazs lielums, tad $\frac{1}{y}$ ir bezgalīgi liels.

1. piemērs. Lielums $\frac{3}{x-2}$ ir bezgalīgi liels, kad $x \to 2$. Apgrieztā daļa $\frac{x-2}{3}\left(=1 : \frac{3}{x-2}\right)$, kad $x \to 2$, ir bezgalīgi maza.

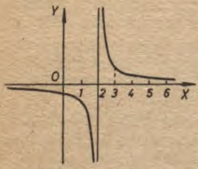
2. piemērs. Lielums $\operatorname{tg} x$ ir bezgalīgi mazs, kad $x \to 0$, lielums $\frac{1}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{ctg} x$ ir bezgalīgi liels, kad $x \to 0$.

210. §. Ierobežoti lielumi

Lielumu sauc par *ierobežotu,* ja tā absolūtā vērtība nepārsniedz kādu (pastāvīgu) pozitīvu skaitli M.

1. piemērs. Funkcija $\sin x$ ir ierobežots lielums uz visas skaitļu ass, jo $|\sin x| \leqslant 1$.

2. piemērs. Funkcija $\frac{1}{x-2}$ ir ierobežota intervālā $(3, 5)$, bet nav ierobežota intervālā $(2, 5)$, jo arguments x, paliekot intervālā $(2, 5)$, var tiekties uz 2, bet tad funkcija ir bezgalīgi liela (215. zīm.).



215. zīm.

Visi pastāvīgi lielumi ir ierobežoti. Visi bezgalīgi lieli lielumi nav ierobežoti.

P i e z ī m e. Neierobežots lielums var arī nebūt bezgalīgi liels. Tā veselskaitļu funkcija $n+(-1)^n n$ nav bezgalīgi liels lielums, jo, ja n ir nepāra skaitlis, tad tā ir vienāda ar nulli; bet tā nav ierobežota, jo, ja n ir pāra skaitlis, tad tā sākot ar kādu numuru, paliek lielāka par jebkuru pozitīvu skaitli M.

211. §. Robežas jēdziena paplašinājums

Ja mainīgs lielums s ir bezgalīgi liels, tad pieņemts teikt, ka s «tiecas uz bezgalību» jeb ka «tai ir bezgalīga robeža». P i e r a k s t s

$$s \to \infty \text{ jeb } \lim s = \infty. \tag{1}$$

Ja bezgalīgi liels lielums, sākot ar kādu momentu[1], paliek pozitīvs, tad saka, ka tas «tiecas uz plus bezgalību» un raksta

$$s \to +\infty \text{ jeb } \lim s = +\infty. \tag{2}$$

Ja bezgalīgi liels lielums, sākot ar kādu momentu, paliek negatīvs, tad saka, ka tas «tiecas uz mīnus bezgalību» un raksta

$$s \to -\infty \text{ jeb } \lim s = -\infty. \tag{3}$$

Pieraksta (1) vietā lielākas izteiksmības dēļ dažreiz raksta

$$s \to \pm\infty \text{ jeb } \lim s = \pm\infty. \tag{4}$$

1. p i e m ē r s. Funkcijai $\operatorname{ctg} x$, kad $x \to 0$, ir bezgalīga robeža

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{ctg} x = \infty.$$

Lai pasvītrotu, ka funkcija $\operatorname{ctg} x$, kad $x \to 0$, var pieņemt

[1] Izteicienu «sākot ar kādu momentu» var precizēt tāpat kā 208. paragrāfā (1. un 2. definīcija).

tiklab pozitīvas (ja $x>0$), kā negatīvas (ja $x<0$) vērtības, raksta

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{ctg} x = \pm\infty.$$

2. piemērs. Pieraksts $\lim \frac{1}{x}=0$ nozīmē, ka funkcija $\frac{1}{x}$ tiecas uz nulli, kad x absolūtā vērtība neierobežoti aug.

3. piemērs. Var rakstīt

$$\lim_{x\to+\infty} 2^x = +\infty$$

jeb

$$\lim_{x\to+\infty} 2^x = \infty.$$

Otrs pieraksts jautājumu par funkcijas 2^x zīmi atstāj atklātu. Bet kreisajās pusēs $x\to+\infty$ vietā nedrīkst rakstīt $x\to\infty$. Pēdējais pieraksts aptvertu arī gadījumu, kad $x\to-\infty$, bet tad funkcija tiektos ne uz bezgalību, bet uz nulli, t. i.,

$$\lim_{x\to-\infty} 2^x = 0.$$

Piezīme. Bezgalīgi lielam lielumam nav robežas iepriekš minētajā nozīmē (203.—205. §), jo nekādā ziņā nedrīkst teikt, piemēram, ka «starpība starp $f(x)$ un ∞ paliek mazāka par iepriekš uzdotu pozitīvu skaitli». Tādējādi bezgalīga robeža *paplašina* robežas jēdzienu. Atšķirībā no bezgalīgas robežas iepriekš definēto robežu sauc par *galīgu.*

212. §. Bezgalīgi mazu lielumu pamatīpašības

Šeit pieņemts, ka apskatāmie lielumi ir *viena un tā paša* argumenta funkcijas.

I teorēma. Divu, triju un vispār vairāku bezgalīgi mazu lielumu summa ir bezgalīgi mazs lielums, ja saskaitāmo skaits ir nemainīgs.

1. piezīme. Ja saskaitāmo skaits nepaliek nemainīgs, bet mainās līdz ar argumenta maiņu, tad 1. teorēma var arī nebūt spēkā. Tā, ja mums ir n saskaitāmo, kuri katrs atsevišķi ir vienādi ar $\frac{1}{n}$, tad, ja $n\to\infty$, katrs saskaitāmais

ir bezgalīgi mazs, bet summa $\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\cdot n$ ir vienāda ar 1.

2. piezīme. Divu bezgalīgi mazu lielumu starpība ir bezgalīgi mazs lielums (1. teorēmas atsevišķs gadījums).

II teorēma. Ierobežota lieluma (210. §) reizinājums ar bezgalīgi mazu lielumu ir bezgalīgi mazs lielums.

Atsevišķā gadījumā pastāvīga lieluma reizinājums ar bezgalīgi mazu lielumu, kā arī divu bezgalīgi mazu lielumu reizinājums ir bezgalīgi mazs lielums.

III teorēma. Bezgalīgi maza lieluma dalījums ar mainīgu lielumu, kurš tiecas uz robežu, kas *atšķiras no nulles*, ir bezgalīgi mazs lielums.

3. piezīme. Ja dalītāja robeža ir vienāda ar nulli, t. i., ja tiklab dalāmais, kā dalītājs ir bezgalīgi mazi, tad dalījums var arī nebūt bezgalīgi mazs. Tā lielumi x^2 un x^3 ir bezgalīgi mazi, kad $x \to 0$. Dalījums $x^3 : x^2 = x$ arī ir bezgalīgi mazs, bet dalījums $x^2 : x^3 = \frac{1}{x}$ ir bezgalīgi liels. Lielumi $6x^2+x^3$ un $2x^2$ ir bezgalīgi mazi, kad $x \to 0$, bet dalījuma $(6x^2+x^3) : 2x^2$ robeža ir vienāda ar 3.

213. §. Pamatteorēmas par robežām

Šeit pieņemts, ka visi dotie lielumi (saskaitāmie, reizinātāji, dalāmais un dalītājs) ir atkarīgi *no viena un tā paša* argumenta x un tiem ir galīgas robežas (kad $x \to a$ vai kad $x \to \infty$).

I teorēma. Divu, triju un vispār vairāku saskaitāmo summas robeža ir vienāda ar atsevišķo saskaitāmo robežu summu, ja saskaitāmo skaits ir *nemainīgs* (sal. 212. § 1. piezīmi).

Īsāk: *summas robeža ir vienāda ar robežu summu.*

$$\lim(u_1+u_2+\ldots+u_k)=\lim u_1+\lim u_2+\ldots+\lim u_k. \quad (1)$$

Šeit zem visiem simboliem lim domāts pieraksts $x \to a$ (vai $x \to \infty$).

Ia teorēma (I teorēmas atsevišķs gadījums.)

$$\lim(u_1-u_2)=\lim u_1-\lim u_2. \quad (2)$$

II teorēma. Divu, triju un vispār vairāku reizinātāju reizinājuma robeža ir vienāda ar šo reizinātāju robežu reizinājumu, ja reizinātāju skaits ir *nemainīgs*.

$$\lim(u_1u_2\ldots u_k) = \lim u_1 \cdot \lim u_2 \ldots \lim u_k. \qquad (3)$$

IIa teorēma. Pastāvīgu reizinātāju var iznest pirms robežas zīmes

$$\lim cu = c \lim u. \qquad (4)$$

III teorēma. Dalījuma robeža ir vienāda ar robežu dalījumu, ja dalītāja robeža nav vienāda ar nulli

$$\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v} \; (\lim v \neq 0). \qquad (5)$$

1. piemērs.

$$\lim_{x\to5} \frac{x+4}{x-2} = \lim_{x\to5}(x+4) : \lim_{x\to5}(x-2) = 9:3 = 3.$$

Ja dalītāja robeža ir vienāda ar nulli, bet *dalāmā robeža nav vienāda ar nulli,* tad dalījumam ir bezgalīga robeža.

2. piemērs.

$$\lim_{x\to2} \frac{x+4}{x-2} = \infty;$$

šeit

$$\lim_{x\to2}(x-2) = 0, \text{ un } \lim_{x\to2}(x+4) = 6 \neq 0.$$

1. piezīme. Ja dalāmais un dalītājs tiecas uz nulli, tad dalījumam var būt tiklab bezgalīga, kā galīga robeža (212. §, 3. piezīme). Tam var arī nebūt robežas.

Tā, $\lim\limits_{x\to0} x^2 \cos\frac{\pi}{x} = 0$ un $\lim\limits_{x\to0} x^2 = 0$, bet dalījumam $x^2 \cos\frac{\pi}{x} : x^2 = \cos\frac{\pi}{x}$ nav robežas, kad $x \to 0$ (204. § 3. piemērs).

2. piezīme. Gadījumā, ja $\lim v=0$, bet $\lim u \neq 0$, III teorēma paliek spēkā, ja to iztulko plašākā nozīmē. Proti, pieraksts $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \frac{c}{0}$ (c ir no nulles atšķirīgs skaitlis) jāsaprot tai nozīmē, ka $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

3. piemērs. Atrast $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x+4}{x-2}$.

Dalītāja robeža ir vienāda ar nulli, bet dalāmā robeža — ar 6. Saprotot pierakstu $\frac{6}{0}$ minētajā nozīmē, dabūjam

$$\lim_{x \to 2} \frac{x+4}{x-2} = \frac{6}{0} = \infty$$

(sal. 2. piemēru).

3. piezīme. Gadījumā, ja $\lim v=0$ un $\lim u=0$, III teorēma *nav pielietojama, jo izteiksme* $\frac{0}{0}$ ir nenoteikta. Bet *nepareizu* rezultātu III teorēma nedod arī šai gadījumā. Pieņemsim, piemēram, ka jāatrod

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{4x^2-1}{2x-1}.$$

Pielietojot (formāli) III teorēmu, dabūjam $\frac{0}{0}$. Šī nenoteiktā izteiksme ir signāls, kas noslēdz tiešo ceļu un liek meklēt apkārtceļu (sk. 204. § 2. piemēru).

«Saīsināt» ar nulli un $\frac{0}{0}$ vietā rakstīt 1, protams, nedrīkst.

214. §. Skaitlis e.

Veselskaitļu funkcija $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, kad $n\to\infty$, aug, bet paliek ierobežota [1]. Bet katram augošam un ierobežotam lielumam ir robeža (galīga). Robežu, uz kuru tiecas $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, kad $n\to\infty$, apzīmē ar e, t. i.,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e. \qquad (1)$$

Skaitlis e (tas ir iracionāls) ar pareizību līdz sestajam zīmīgajam ciparam ir vienāds

$$e=2{,}71828.$$

Skaitli e daudzos gadījumos ir izdevīgi ņemt par logaritmu bāzi (sal. 242. §).

Funkcijai $(1+\frac{1}{n})^n$ skaitlis e ir robeža ne tikai tad, kad n pieņem naturālas vērtības, bet arī tad, kad n tiecas uz

---

[1] Var likties, ka ja pakāpes rādītājs neierobežoti augs, tad neierobežoti augs arī funkcija $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Bet kāpinātāja augšanu kompensē tas, ka bāze $1+\frac{1}{n}$ tiecas uz 1. Lietderīgi to pārbaudīt praktiski; ar pieczīmju logaritmu tabulām atrodam, piemēram, ka

$$\left(1+\frac{1}{5}\right)^5=2{,}48,\quad \left(1+\frac{1}{10}\right)^{10}=2{,}59,\quad \left(1+\frac{1}{50}\right)^{50}=2{,}69,\quad \left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}=2{,}71.$$

Pakāpes $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ierobežotību var pierādīt arī ar binoma formulas palīdzību. Pirmais tās loceklis ir 1, otrais — arī 1, trešais, kas ir vienāds ar $\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$, jebkuram n ir mazāks par $\frac{1}{2}$, ceturtais vienmēr ir mazāks par $\frac{1}{2^2}$, piektais — mazāks par $\frac{1}{2^3}$ utt. Tāpēc jebkura u_n vērtība ir mazāka par

$$1+1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\right),$$

t. i., mazāka par 3.

bezgalību, pieņemot skaitliskās vērtības nepārtraukti. Pat vēl vairāk, arguments n var pieņemt tiklab pozitīvas, kā negatīvas vērtības, ja vien n pēc absolūtās vērtības neierobežoti aug. Lai atspoguļotu šo apstākli, aizstāsim burtu n ar burtu x un rakstīsim

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \tag{2}$$

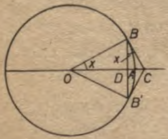
(sk. 211. §) jeb īsāk

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{3}$$

215. §. Robeža $\dfrac{\sin x}{x}$, ja $x \to 0$

Ja x ir izteikts radiānos, tad

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \text{ un } \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{1}$$



216. zīm.

P a s k a i d r o j u m s. Pieņemsim rādiusu OA (216. zīm.) par garuma vienību. Tad $x = \overset{\frown}{AB}$, $\sin x = BD$. Dabūjam $x : \sin x = \overset{\frown}{AB} : BD = B'AB : B'B$. Loks $\overset{\frown}{B'AB}$ ir lielāks par hordu $B'B$. Tāpēc $x : \sin x > 1$. No otras puses, loks $\overset{\frown}{B'AB}$ ir mazāks par $BC + B'C = 2BC$, t. i., $\overset{\frown}{AB} < BC$. Tātad $x : \sin x < < BC : BD = \sec x$ (no trijstūra DBC).

Tātad attiecība $\dfrac{x}{\sin x}$ ieslēgta starp vienu un $\sec x$. Bet, ja $x \to 0$, tad lielums $\sec x$ arī tiecas uz vienu un līdz ar to katrā ziņā arī $\dfrac{x}{\sin x}$.

216. §. Ekvivalenti bezgalīgi mazi lielumi

Definīcija. Divus bezgalīgi mazus lielumus sauc par *ekvivalentiem* [1], ja to attiecības robeža ir vienāda ar vienu.

1. piemērs. Lielumi x un $\sin x$, kad $x \to 0$, ir ekvivalenti bezgalīgi mazi lielumi, jo (215. §) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Lielumi $2x$ un $\sin 2x$ ir ekvivalenti. Lielumi x^2 un $\sin^2 x$ arī ir ekvivalenti.

2. piemērs. Bezgalīgi mazi lielumi $\alpha^2+3\alpha^3$ un $\alpha^2-4\alpha^3$ $(\alpha \to 0)$ ir ekvivalenti, jo

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha^2+3\alpha^3}{\alpha^2-4\alpha^3}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1+3\alpha}{1-4\alpha}=1.$$

Bezgalīgi mazu lielumu ekvivalenci apzīmē ar to pašu simbolu $\approx$, ar ko apzīmē aptuvenu vienādību. Tādējādi,

$$\sin x\approx x,\quad \sin 2x\approx 2x,\quad \sin^2 x\approx x^2,\quad \alpha^2+3\alpha^3\approx\alpha^2-4\alpha^3.$$

Piezīme. Ekvivalenti lielumi arī īstenībā ir aptuveni vienādi (vienādība ir jo precīzāka, jo tuvāk nullei ir ekvivalentie lielumi). Tā, ja $\alpha=0{,}01$, tad lielums $\alpha^2+3\alpha^3$ ir vienāds ar 0,000103, bet $\alpha^2-4\alpha^3=0{,}000096$. Starpība ir 0,000007, t. i., apmēram 7% no viena ekvivalentā lieluma. Jo šie lielumi ir tuvāk nullei, jo mazāks ir šis procents.

Teorēma. Divu bezgalīgi mazu lielumu dalījuma (attiecības) robeža nemainīsies, ja vienu no tiem (vai abus) aizstāj ar tam ekvivalentu lielumu.

3. piemērs. Atrast $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$.

Aizstājam $\sin 2x$ ar tam ekvivalentu lielumu $2x$; dabūjam

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2.$$

4. piemērs.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}.$$

[1] Latīņu termins «ekvivalents» nozīmē «līdzvērtīgs».

5. piemērs. Atrast

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}.$$

Atrisinājums. Kā zināms,

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2},$$

un tā kā

$$\sin^2\frac{x}{2}\approx\left(\frac{x}{2}\right)^2,$$

tad

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x}=0.$$

217. §. Bezgalīgi mazu lielumu salīdzināšana

1. definīcija. Ja divu bezgalīgi mazu lielumu attiecība $\frac{\beta}{\alpha}$ ir bezgalīgi maza, t. i., ja $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$, un tātad (209. §) $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\infty$, tad β sauc par *augstākas kārtas* bezgalīgi mazu lielumu attiecībā pret α; savukārt α sauc par *zemākas kārtas* bezgalīgi mazu lielumu attiecībā pret β.

2. definīcija. Ja divu bezgalīgi mazu lielumu attiecība $\frac{\beta}{\alpha}$ tiecas uz galīgu robežu, kas nav vienāda ar nulli, tad α un β sauc par *vienādas* kārtas bezgalīgi maziem lielumiem [1].

Piezīme. Ekvivalenti bezgalīgi mazi lielumi vienmēr ir ar vienādu kārtu [2].

---

[1] Attiecības $\frac{\beta}{\alpha}$ vietā var ņemt apgriezto attiecību $\frac{\alpha}{\beta}$, jo arī tai būs galīga robeža, kas nav vienāda ar nulli (ja $\lim\frac{\beta}{\alpha}=m$, tad $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{m}$).

[2] Apgrieztais apgalvojums nav pareizs. Tā lielumiem $2x$ un $3x$, kad $x\to 0$, ir vienāda kārta $\left(\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}\right)$, bet tie nav ekvivalenti.

1. piemērs. Ja $x \to 0$, tad x^5 ir augstākas kārtas bezgalīgi mazs lielums attiecībā pret x^3, jo $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^5}{x^3}=0$. Otrādi, x^3 ir zemākas kārtas bezgalīgi mazs lielums attiecībā pret x^5, jo $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{x^5}=\infty$.

2. piemērs. Ja $x \to 0$, tad $\sin x$ un $2x$ ir vienādas kārtas bezgalīgi mazi lielumi, jo (215. §)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}.$$

3. piemērs. Ja $x \to 0$, tad $1-\cos x$ ir augstākas kārtas bezgalīgi mazs lielums attiecībā pret $\sin x$, jo (216. § 5. piemērs)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=0.$$

Ja $\alpha \to 0$, tad lielumu virknē $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \ldots$ katram lielumam ir zemāka kārta attiecībā pret lielumiem, kas atrodas aiz tā. Tāpēc tālākās bezgalīgi mazu lielumu klasifikācijas pamatā var likt šādu definīciju.

3. definīcija. Bezgalīgi mazu lielumu β sauc par m-tās kārtas bezgalīgi mazu lielumu attiecībā pret α, ja β ir vienādas kārtas bezgalīgi mazs lielums attiecībā pret α^m, t. i., (sk. 2. definīciju), ja attiecībai $\frac{\beta}{\alpha^m}$ ir galīga robeža, kas nav vienāda ar nulli.

4. piemērs. Ja $x \to 0$, tad $\frac{1}{4}x^3$ ir trešās kārtas bezgalīgi mazs lielums attiecībā pret x, jo $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{4}x^3 : x^3\right)=\frac{1}{4}$, $\frac{1}{7}x^2$ ir otrās kārtas bezgalīgi mazs lielums, bet $\sqrt{x}$ — bezgalīgi mazs lielums ar kārtu $\frac{1}{2}$ attiecībā pret x.

5. piemērs. $1-\cos\alpha$ ($\alpha \to 0$) ir otrās kārtas bezgalīgi mazs lielums attiecībā pret α, jo (sk. 2. definīcijas piezīmi)

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}\approx 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

6. piemērs. $\frac{1}{4}\alpha^3+1000\alpha^4$ ($\alpha\to 0$) ir trešās kārtas bezgalīgi mazs lielums attiecībā pret α, t. i., tā kārta ir tāda pati kā saskaitāmajam $\frac{1}{4}\alpha^3$, kura kārta ir zemāka par otra saskaitāmā kārtu. Tā tas ir vienmēr divu vai vairāku saskaitāmo summā.

7. piemērs. $x^3\sin^2 x$ ($x\to 0$) ir piektās kārtas bezgalīgi mazs lielums attiecībā pret x (kārtas skaitlis 5 ir reizinātāju kārtu summa; tā tas būs vienmēr divu vai vairāk reizinātāju reizinājumā).

1. teorēma. Divu ekvivalentu bezgalīgi mazu lielumu α un β starpība $\alpha-\beta$ ir augstākas kārtas bezgalīgi mazs lielums tiklab attiecībā pret α, kā arī attiecībā pret β.

8. piemērs. Ja $x\to 0$, tad $x\approx\sin x$. Tāpēc $x-\sin x$ ir augstākas kārtas bezgalīgi mazs lielums attiecībā pret x (un arī attiecībā pret $\sin x$).

2. teorēma (apgrieztā). Ja bezgalīgi mazu lielumu α un β starpība ir augstākas kārtas bezgalīgi mazs lielums attiecībā pret vienu no tiem (tad tai būs augstāka kārta arī attiecībā pret otru), tad $\alpha\approx\beta$.

9. piemērs. Bezgalīgi mazu lielumu $\alpha^2+3\alpha^3$ un α^2 ($\alpha\to 0$) starpība ir $3\alpha^3$; tas ir augstākas kārtas bezgalīgi mazs lielums attiecībā pret α^2. Tāpēc

$$\alpha^2+3\alpha^3\approx\alpha^2.$$

217.a §. Mainīga lieluma pieaugums

Definīcija. Ja mainīgs lielums z pieņem vispirms vērtību $z=z_1$, bet pēc tam $z=z_2$, tad starpību z_2-z_1 sauc par lieluma z *pieaugumu*. Pieaugums var būt pozitīvs, negatīvs un vienāds ar nulli. Vārdu «pieaugums» apzīmē ar Δ [1], pieraksts Δz (lasa «delta zet») apzīmē «lieluma z pieaugumu», tā ka

$$\Delta z=z_2-z_1.$$

Pastāvīga lieluma pieaugums ir vienāds ar nulli.

Piemērs. Argumenta sākuma vērtība $x=3$, argumenta pieaugums $\Delta x=-2$. Atrast atbilstošo funkcijas $y=x^2$ pieaugumu Δy.

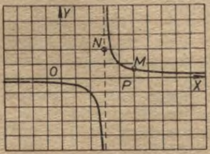
---

[1] Δ — grieķu burts «delta» (lielais).

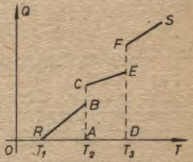
Atrisinājums. Tā kā $x_1=3$ un $x_2-x_1=-2$, tad $x_2=1$. Funkcija $y=x^2$ pieņem vispirms vērtību $y_1=3^2=9$, bet pēc tam $y_2=1^2=1$.
Funkcijas pieaugums ir $\Delta y=y_2-y_1=1-9=-8$.

218. §. Funkcijas nepārtrauktība punktā

Definīcija. Funkciju $f(x)$ sauc par *nepārtrauktu punktā* $x=a$, ja tā izpilda šādus divus noteikumus.
1. Punktā $x=a$ funkcijai $f(x)$ ir noteikta vērtība b.



217. zīm.



218. zīm.

2. Kad $x\to a$, funkcijai ir noteikta robeža, kas ir vienāda ar b.
Ja kaut viens no šiem noteikumiem nav izpildīts, tad funkciju sauc par *pārtrauktu* punktā $x=a$.

1. piemērs. Funkcija $f(x)=\frac{1}{x-3}$ ir nepārtraukta punktā $x=5$ (217. zīmējumā M), jo 1) pie $x=5$ tai ir noteikta vērtība $f(5)=\frac{1}{2}$; 2) kad $x\to 5$, tai ir robeža, kas ir vienāda ar $\frac{1}{2}$. Funkcija ir pārtraukta punktā $x=3$; šeit nav izpildīts pirmais noteikums (funkcijai nav noteiktas vērtības). Otrs noteikums arī nav izpildīts.

2. piemērs. Uzdosim funkciju (x) šādā veidā

$$\varphi(x)=\frac{1}{x-3},\ \text{ja } x\neq 3,$$

$$\varphi(x)=2,\ \text{ja } x=3.$$

Šī funkcija (tās grafikā rodas no 1. piemēra grafikas, pievienojot punktu N; sk. 217. zīm.) arī ir pārtraukta punktā $x=3$. Pirmais noteikums tagad ir izpildīts, bet otrs — ne: kad $x \to 3$, funkcijai $\varphi(x)$ ir bezgalīga robeža.

3. piemērs. Siltuma daudzums Q, ko iegūst ķermenis, ir ķermeņa temperatūras T funkcija. 218. zīmējumā parādīta šīs funkcijas grafika. Līnija RB atbilst cietam stāvoklim (T_1 ir sākuma temperatūra, T_2 — kušanas temperatūra), līnija CE — šķidram stāvoklim (T_3 — iztvaikošanas temperatūra), līnija FS — gāzveidīgam stāvoklim. Funkcija Q ir pārtraukta pie $T=T_2$ un $T=T_3$; šais punktos tai nav noteiktas vērtības. Tā kušanas temperatūrai T_2 atbilst visas iespējamās siltuma daudzuma vērtības no $Q=AB$ līdz $Q=AC$.

219. §. Punktā nepārtrauktu funkciju īpašības

1. īpašība. Divu punktā $x=a$ nepārtrauktu funkciju summa, starpība un reizinājums ir šai punktā nepārtrauktas funkcijas. Divu punktā $x=a$ nepārtrauktu funkciju dalījums $\frac{u}{v}$ ir šai punktā nepārtraukta funkcija, ja punktā $x=a$ dalītājs v nav vienāds ar nulli.

2. īpašība[1]. Ja funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta pie kādas x vērtības, tad funkcijas pieaugums ir bezgalīgi mazs, ja argumenta pieaugums ir bezgalīgi mazs.

Piemērs. Funkcija $f(x)=\frac{1}{x-3}$ ir nepārtraukta punktā $x=5$, pie kam $f(5)=\frac{1}{2}$ (218. § 1. piemērs). Ja $x=5+\Delta x$, tad funkcija iegūst vērtību

$$f(5+\Delta x)=\frac{1}{2+\Delta x}.$$

Funkcijas pieaugums ir

$$f(5+\Delta x)-f(5)=-\frac{\Delta x}{2(2+\Delta x)}.$$

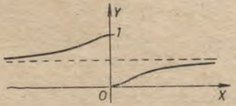
Tas ir bezgalīgi mazs, ja Δx ir bezgalīgi mazs.

[1] 2. īpašību var pieņemt arī par funkcijas nepārtrauktības definīciju punktā (līdzvērtīga 218. § definīcijai).

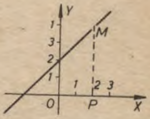
219.a §. Vienpusīgā robeža; funkcijas lēciens

Ja funkcijas $f(x)$ vērtība tiecas uz skaitli b_1, kad x tiecas uz a no mazāko vērtību puses, tad skaitli b_1 sauc par funkcijas $f(x)$ *kreisās puses robežu* punktā $x=a$ un raksta

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = b_1. \tag{1}$$



219. zīm.



220. zīm.

Ja $f(x)$ tiecas uz b_2, kad x tiecas uz a no lielāko vērtību puses, tad b_2 sauc par funkcijas $f(x)$ *labās puses robežu*, kad $x \to a$ un raksta

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = b_2. \tag{2}$$

Lielumu $|b_2 - b_1|$ sauc par funkcijas *lēcienu* jeb *pārtraukumu*.

Kreisās puses un labās puses robežas apvieno ar vienu nosaukumu — «vienpusīgās robežas».

1. piemērs. Funkcijai Q, kas attēlota 218. zīmējumā, punktā T_2 kreisās puses robeža ir AB, bet labās puses robeža — AC. Lēcienu attēlo nogrieznis $BC = AC - AB$.

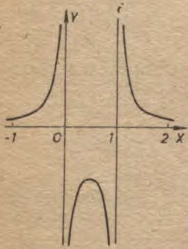
2. piemērs. Funkcijai $f(x) = \frac{1}{1+2^{1/x}}$ (219. zīm.) punktā $x=0$ labās puses robeža ir $b_2=0$ un kreisās puses robeža $b_1=1$. Lēciens ir vienāds ar vienu.

Funkcijas $f(x)$ abas vienpusīgās robežas punktā $x=a$ var būt arī vienādas. Ja bez tam funkcija ir definēta punktā $x=a$ un tās vērtība sakrīt ar robežvērtībām, tad tā ir nepārtraukta šai punktā.

3. piemērs. Funkcijai $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ abas vienpusīgās robežas punktā $x=2$ ir vienādas ar 4. Pašā punktā $x=2$ funkcija nav definēta un tāpēc ir pārtraukta. Grafika ir (220. zīm.) taisne $y=x+2$, kurai iztrūkst punkts $M(2; 4)$.

Ja papildus vienojas, ka $f(2)=4$, tad funkcija $f(x)$ kļūs nepārtraukta. Grafiku papildinās punkts M.

Ja ar papildu noteikumu, kas definē funkciju $f(x)$ punktā a, pārtrauktu funkciju var pārvērst nepārtrauktā, tad pārtraukumu sauc par *novēršamu*. 3. piemērā pārtraukums ir novēršams, 1. un 2. piemērā — nenovēršams.



221. zīm.

220. §. Funkcijas nepārtrauktība slēgtā intervālā

D e f i n ī c i j a. Funkciju sauc par *nepārtrauktu slēgtā intervālā*, ja tā ir nepārtraukta visos šī intervāla punktos, ieskaitot abus gala punktus.

Analogi definē funkcijas nepārtrauktību vaļējos intervālos.

P i e m ē r s. Apskatīsim funkciju $\frac{1}{4x(x-1)}$ (221. zīm.). Tā ir nepārtraukta slēgtā intervālā $(1\frac{1}{2}, 2)$, bet pārtraukta slēgtā intervālā $(0, 1)$, jo abi gala punkti ir pārtraukuma punkti. Tā ir pārtraukta arī slēgtā intervālā $(1, 2)$, jo viens gals ir pārtraukuma punkts. Tā ir pārtraukta arī slēgtā intervālā $(\frac{1}{2}, 2)$, jo intervāla iekšienē atrodas pārtraukuma punkts $(x=1)$.

221. §. Slēgtā intervālā nepārtrauktu funkciju īpašības

Pieņemsim, ka funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta slēgtā intervālā (a, b). Tad tai piemīt šādas īpašības.

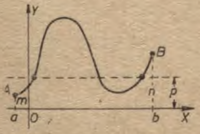
1. To vērtību vidū, kuras funkcija pieņem dotā intervāla punktos, ir vislielākā un vismazākā vērtība.

1. p i e z ī m e. To vērtību vidū, kuras funkcija $f(x)$ pieņem *vaļēja* intervāla (a, b) punktos, var arī nebūt lielākās un mazākās vērtības.

Tā *vaļējā* intervālā $(1, 3)$ funkcijai $2x$ nav ne mazākās, ne lielākās vērtības (tā varētu pieņemt šīs vērtības galos

$x=1$ un $x=3$, bet tā kā intervāls ir vaļējs, tad gala punkti ir izslēgti.

2. Ja m ir funkcijas $f(x)$ vērtība punktā $x=a$ un $n-f(x)$ vērtība punktā $x=b$, tad funkcija $f(x)$ intervālā (a, b) vismaz vienu reizi pieņem jebkuru vērtību, kas ieslēgta starp m un n.



222. zīm.

223. zīm.

G e o m e t r i s k i: jebkura taisne, kas novilkta paralēli abscisu asij augstāk par punktu A, bet zemāk par punktu B (222. zīm.), vismaz vienu reizi krustos grafiku AB (222. zīmējumā — trīs reizes).

2. p i e z ī m e. Pārtrauktai funkcijai 2. īpašība var arī nebūt spēkā (sk. 218. un 219. zīm.).

2a. Atsevišķā gadījumā, ja vienā intervāla galā funkcijai ir pozitīva, bet otrā — negatīva vērtība, tad intervāla iekšienē tā vismaz vienu reizi kļūs vienāda ar nulli.

G e o m e t r i s k i: ja viens no punktiem A, B (223. zīm.) atrodas virs OX ass, bet otrs zem tās, tad grafika AB vismaz reizi krustos OX asi (vai tai pieskarsies) (223. zīmējumā — divas reizes).

3. Ja mainīgie x un x' mainās tā, ka starpība $x-x'$ ir bezgalīgi maza, tad starpība $f(x)-f(x')$ arī būs bezgalīgi maza.

3. p i e z ī m e. Ja x' ir pastāvīgs lielums c, tad starpība $f(x)-f(c)$ ir bezgalīgi maza saskaņā ar 219. § 2. īpašību. Saskaņā ar šī paragrāfa 3. īpašību starpība $f(x)-f(x')$ ir bezgalīgi maza, ja $x-x'$ ir bezgalīgi maza, nevien tad, kad x' ir pastāvīgs, bet arī tad, kad tas ir mainīgs.

4. Īpašība. Ja funkcija ir nepārtraukta *vaļējā* intervālā, tad 3. īpašība var arī nebūt spēkā. Tā, funkcija $\frac{1}{x}$ ir nepārtraukta intervālā $(0, 1)$, kuram atņemts gals $x=0$. Pieņemsim, ka x un x' mainās tā, ka $x'=2x$ un $x\to 0$. Tad starpība $x-x'$ ir bezgalīgi maza, bet starpība $f(x)-f(x')=$ $=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x}=\frac{1}{2x}$ ir bezgalīgi liela.

DIFERENCIĀLRĒĶINI

222. §. Ievada piezīmes

Diferenciālrēķini radās, risinot divus jautājumus:
1) kā atrast pieskari patvaļīgai līnijai (225. §),
2) kā aprēķināt ātrumu, ja kustības likums ir patvaļīgs (223. §).

Abi šie jautājumi reducējās uz vienu un to pašu aprēķina uzdevumu, kas arī kļuva par diferenciālrēķinu pamatu. Šis uzdevums ir pēc dotās funkcijas $f(t)$ atrast citu funkciju $f'(t)$, ko vēlāk nosauca par *atvasinājumu* un kas izsaka funkcijas $f(t)$ izmaiņas ātrumu attiecībā pret argumenta izmaiņu (precīzu atvasinājuma definīciju sk. 224. §).

Tādā vispārīgā veidā uzdevumu nostādīja Ņūtons un līdzīgā formā Leibnics 17. gs. 70-os un 80-os gados. Bet jau iepriekšējā pusgadsimtā Fermā, Paskāls un citi zinātnieki faktiski deva atvasinājuma atrašanas kārtulas daudzām funkcijām.

Ņūtons un Leibnics noslēdza šo attīstības ceļu; viņi deva atvasinājuma[1] un diferenciāļa[2] vispārīgos jēdzienus un arī apzīmējumus, kas ļoti atvieglināja aprēķinus; viņi attīstīja diferenciālrēķinu aparātu līdz maksimālajām robežām un pielietoja diferenciālrēķinus daudzu ģeometrijas un mehānikas uzdevumu atrisināšanā. Loģiskās stingrības trūkumu novērsa tikai 19. gadsimtā (sk. 191. §).

223. §. Ātrums[3]

Lai noteiktu vilciena ātrumu, mēs atzīmējam, kādā ceļa kilometrā tas atradās momentā $t=t_1$ un pēc tam momentā $t=t_2$. Pieņemsim, ka tie ir attālumi $s=s_1$ un $s=s_2$. Ceļa

---

[1] Ņūtona ieteiktais nosaukums «fluksija». Terminu «atvasinājums» ieteica (Arbogasts) 18. gs. beigās.
[2] Terminu «diferenciālis» (no lat. differentia) ieteica Leibnics.
[3] Šis paragrāfs ir ievads 224. paragrāfam.

pieaugumu (217.a §) $\Delta s = s_2 - s_1$ mēs dalām ar laika pieaugumu $\Delta t = t_2 - t_1$. Dalījums

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{1}$$

dod vilciena *vidējo ātrumu* laika intervālā (t_1, t_2). Ja kustība ir nevienmērīga, tad vidējais ātrums nepietiekami raksturo kustības ātrumu momentā $t = t_1$. Bet, jo mazāks ir Δt, jo precīzāk tiek raksturots šis ātrums. Tāpēc par *ātrumu momentā* $t = t_1$ sauc robežu, uz kuru tiecas attiecība $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, kad $\Delta t \to 0$, t. i.,

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{2}$$

Piemērs. Ķermeņa brīvs kritiens. Kā zināms,

$$s = \frac{1}{2} g t^2. \tag{3}$$

Tā kā $t_2 = t_1 + \Delta t$, tad

$$\Delta s = s_2 - s_1 = \frac{1}{2} g (t_1 + \Delta t)^2 - \frac{1}{2} g t_1^2.$$

Tātad

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{2} g (t_1 + \Delta t)^2 - \frac{1}{2} g t_1^2}{\Delta t}. \tag{4}$$

Aprēķinot robežu, atrodam

$$v = g t_1. \tag{5}$$

Apzīmējumu t_1 mēs lietojam, lai uzsvērtu *t pastāvīgumu robežas aprēķināšanā.* Tā kā t_1 ir patvaļīga laika vērtība, tad indeksu 1 labāk atmest; no formulas

$$v = g t \tag{5a}$$

tad redzams, ka ātrums v, tāpat kā ceļš s, ir laika funkcija. Funkcijas v veids ir pilnīgi atkarīgs no funkcijas s veida, tāpēc funkcija s it kā «atvasina» funkciju v. No šejienes arī nosaukums «funkcijas atvasinājums».

224. §. Funkcijas atvasinājuma definīcija[1]

Pieņemsim, ka $y=f(x)$ ir nepārtraukta argumenta x funkcija, kas definēta intervālā (a, b), un pieņemsim, ka x kāds šī intervāla punkts. Dosim argumentam x pieaugumu Δx (pozitīvu vai negatīvu). Funkcija $y=f(x)$ iegūs pieaugumu Δy, kas vienāds ar

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x). \qquad (1)$$

Ja Δx ir bezgalīgi mazs, tad pieaugums Δy arī būs bezgalīgi mazs (219. §).

Robeža, uz kuru tiecas attiecība $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, kad $\Delta x \to 0$, t. i.,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}, \qquad (2)$$

pati ir argumenta x funkcija (sal. 223. §). Šo funkciju sauc par funkcijas $f(x)$ atvasinājumu un apzīmē ar $f'(x)$ jeb y'.

Īsāk: *funkcijas atvasinājums ir robeža[2], uz kuru tiecas attiecība starp bezgalīgi mazu funkcijas pieaugumu un atbilstošo bezgalīgi mazo argumenta pieaugumu.*

P i e z ī m e. *Robežas* (2) *meklēšanas procesā* x uzskata par pastāvīgu.

1. p i e m ē r s. Atrast funkcijas $y=x^2$ atvasinājumu, ja $x=7$.

A t r i s i n ā j u m s. Ja $x=7$, tad $y=7^2=49$. Dosim argumentam x pieaugumu Δx. Arguments kļūs vienāds ar $7+\Delta x$, bet funkcijas vērtība būs $(7+\Delta x)^2$.

Funkcijas pieaugums Δy ir

$$\Delta y=(7+\Delta x)^2-7^2=14\Delta x+\Delta x^2.$$

Šī pieauguma attiecība pret pieaugumu Δx ir

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{14\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=14+\Delta x.$$

Atrodam robežu, uz kuru tiecas $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, kad $\Delta x \to 0$,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}(14+\Delta x)=14.$$

[1] Ieteicams vispirms izlasīt 223. §.

[2] Par gadījumiem, kad šī robeža neeksistē, sk. 231. §.

Meklētā atvasinājuma vērtība ir vienāda ar 14.

2. piemērs. Atrast atvasinājumu funkcijai $y=x^2$ (pie patvaļīgas x vērtības). Dodam argumentam pieaugumu Δx. Arguments iegūst vērtību $x+\Delta x$. Funkcijas pieaugums Δy ir $(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+\Delta x^2$. Attiecība $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ir vienāda ar $\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=2x+\Delta x$. Funkcijas atvasinājums ir šīs attiecības robeža, kad $\Delta x \to 0$, t. i.,

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$$

Meklētais atvasinājums $y'=2x$. Ja $x=7$, tad dabūjam $y'=$ $=14$ (sal. 1. piemēru).

3. piemērs. Atrast atvasinājumu funkcijai $y=\sin x$ (arguments izteikts radiānos).

Atrisinājums. Dodam argumentam pieaugumu Δx. Funkcijas pieaugums ir

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Attiecība $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ir vienāda ar

$$\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}.$$

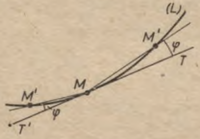
Šīs attiecības robeža, kad $\Delta x\to 0$ (213. un 215. §), ir

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\cos x.$$

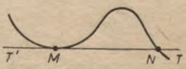
Tātad $y'=\cos x$.

225. §. Pieskare

Par līnijas L *pieskari* jeb *tangenti* punktā M (224. zīm.) sauc taisni $T'MT$, ar kuru tiecas sakļauties[1] sekante MM', kad punkts M', paliekot uz L, tiecas uz M — vai nu no labās, vai kreisās puses.



224. zīm.



225. zīm.

P i e z ī m e. No 225. zīm. redzams, ka pieskarei bez pieskāršanās punktiem var būt ar līkni vēl citi kopīgi punkti.

Ja līnija L ir funkcijas $y=f(x)$ grafika, tad pieskares virziena koeficients ir vienāds ar funkcijas atvasinājuma vērtību atbilstošajā punktā[2].

Tas ir redzams no 226. zīm. Sekantes virziena koeficients $k=\frac{QM'}{MQ}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Ja M' tiecas uz M, tad k robeža ir pieskares virziena koeficients m. Tātad $m=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, t. i., (224. §) $m=f'(x)$.

1. p i e m ē r s. Atrast pieskares virziena koeficientu un vienādojumu parabolai $y=x^2$ punktā $M(1; 1)$ (227. zīm.).

A t r i s i n ā j u m s. Kā zināms, $y'=2x$ (224. § 2. piemērs). Ja $x=1$, tad dabūjam $y'=2$. Meklētais pieskares virziena koeficients $m=2$. Pieskares vienādojums būs $y-1=$ $=m(x-1)$, t. i., $y=2x-1$.

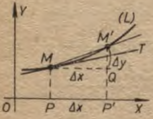
2. p i e m ē r s. Atrast pieskares vienādojumu līnijai $y=$ $=\sin x$ (sinusoīda, 228. zīm.) punktā $O(0; 0)$.

[1] Izteiciens «tiecas sakļauties» nozīmē, ka šaurais leņķis starp nekustīgo taisni $T'MT$ un kustīgo taisni MM' tiecas uz nulli.

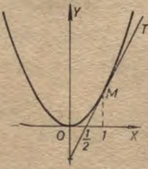
[2] Ja grafikai nav pieskares, tad funkcijai $f(x)$ nav atvasinājuma un otrādi.

Atrisinājums. Kā zināms, $y'=\cos x$ (224. § 3. piemērs). Ja $x=0$, tad dabūjam $y'=1$. Pieskares vienādojums ir $y=x$.

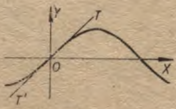
Ievērosim, ka sinusoīda novietojas abās pusēs no pieskares $T'OT$.



226. zīm.



227. zīm.



228. zīm.

3. piemērs. Taisnes $y=ax+b$ virziena koeficients (tas ir vienāds ar a) ir funkcijas $y=ax+b$ atvasinājums (taisnes pieskare ir pati taisne).

226. §. Dažu vienkāršāko funkciju atvasinājumi

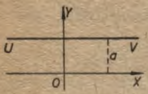
1. *Pastāvīga lieluma atvasinājums* ir vienāds ar nulli

$$(a)'=0. \tag{1}$$

Fizikālā nozīme (223. §): nekustīga punkta ātrums ir vienāds ar nulli.

Ģeometriskā nozīme: taisnes $y=a$ (229. zīmējumā UV) virziena koeficients ir vienāds ar nulli (sal. 225. § 3. piemēru).

Piezīme. Atsevišķām x vērtībām funkcijai var būt ar nulli vienāds atrisinājums arī tad, ja tā nav pastāvīga. Tā, atvasinājums $(\sin x)'=\cos x$ (224. § 3. piemērs) ir vienāds ar nulli, ja $x=\frac{\pi}{2}$, $x=-\frac{3\pi}{2}$ utt.



229. zīm.

Bet, ja atvasinājums $f'(x)$ ir vienāds ar nulli *identiski*, tad funkcija $f(x)$ katrā ziņā ir pastāvīga (265. § 1. teorēma).

2. *Neatkarīgā mainīgā atvasinājums* ir vienāds ar vienu

$$(x)'=1. \tag{2}$$

Ģeometriskā nozīme: taisnes $y=x$ virziena koeficients ir vienāds ar vienu.

Fizikālā nozīme: ja ķermeņa noietais ceļš skaitliski ir vienāds ar kustībā pavadīto laiku, tad ātrums skaitliski ir vienāds ar vienu.

3. *Lineāras funkcijas $y=ax+b$ atvasinājums* ir pastāvīgs lielums a, t. i.,

$$(ax+b)'=a. \tag{3}$$

4. *Pakāpes funkcijas atvasinājums* ir vienāds ar pakāpes rādītāja reizinājumu ar pakāpes funkciju, kurai rādītājs ir par vienu mazāks, t. i.,

$$(x^n)'=nx^{n-1}. \tag{4}$$

Piemēri.

1) $(x^2)'=2x$.

2) $(x^3)'=3x^2$.

3) $(\sqrt{x})'=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

4) $\left(\frac{1}{x^2}\right)'=(x^{-2})'=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$.

227. §. Atvasinājuma īpašības

1. Pastāvīgu reizinātāju var iznest pirms atvasinājuma zīmes, t. i.,

$$[af(x)]'=af'(x).$$

Piemēri.

1) $(3x^2)'=3(x^2)'=3\cdot 2x=6x$.

2) $\left(\frac{5}{x^2}\right)'=5\left(\frac{1}{x^2}\right)'=5\left(-\frac{2}{x^3}\right)=-\frac{10}{x^3}$.

3) $(\sqrt{2x})'=\sqrt{2}(\sqrt{x})'=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{2x}}$.

2. Vairāku funkciju algebriskas summas atvasinājums ir

vienāds ar šo funkciju atvasinājumu algebrisko summu (ja funkciju skaits ir nemainīgs).

$$[f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)]'=f'_1(x)+f'_2(x)-f'_3(x).$$

Piemēri.

4) $(0{,}3x^2-2x+0{,}8)'=(0{,}3x^2)'-(2x)'+(0{,}8)'=0{,}6x-2$

(pēdējā saskaitāmā atvasinājums ir vienāds ar nulli; 226. § 1. p.).

5) $\left(\frac{3}{x^2}-6\sqrt{x}\right)'=\left(\frac{3}{x^2}\right)'-6(\sqrt{x})'=-\frac{6}{x^3}-\frac{3}{\sqrt{x}}.$

228. §. Diferenciālis

Definīcija. Pieņemsim, ka funkcijas $y=f(x)$ pieaugums (217.a §) ir sadalīts divu locekļu summā

$$\Delta y=A\Delta x+\alpha, \tag{1}$$

kur A nav atkarīgs no Δx (t. i., ir pastāvīgs pie dotās argumenta x vērtības) un α ir augstākas kārtas bezgalīgi mazs lielums (217. §) attiecībā pret Δx (kad $\Delta x\to 0$).

Tad pirmo («galveno») locekli, kas ir proporcionāls Δx, sauc par funkcijas $f(x)$ *diferenciāli* un apzīmē ar dy jeb $df(x)$.

1. piemērs. Ņemsim funkciju $y=x^3$. Tad [1]

$$\Delta y=3x^2\Delta x+(3x\Delta x^2+\Delta x^3). \tag{2}$$

Šeit koeficients $A=3x^2$ nav atkarīgs no Δx, tātad pirmais loceklis ir proporcionāls Δx, turpretim otrs loceklis $\alpha=3x\Delta x^2+\Delta x^3$ ir augstākas kārtas bezgalīgi mazs lielums attiecībā pret Δx. Tādējādi loceklis $3x^2\Delta x$ ir funkcijas x^3 diferenciālis, t. i.,

$$dy=3x^2\Delta x \text{ jeb } d(x^3)=3x^2\Delta x. \tag{3}$$

1. teorēma. Koeficients A ir vienāds ar atvasinājumu

[1] Pieraksts Δx^2 apzīmē to pašu, ko $(\Delta x)^2$ (iekavas neraksta). Ja jāapzīmē funkcijas x^2 pieaugums, tad raksta $\Delta(x^2)$.

$f'(x)$; citiem vārdiem, funkcijas diferenciālis ir vienāds ar atvasinājuma un argumenta pieauguma reizinājumu, t. i.,

$$dy = y'\Delta x \tag{4}$$

jeb

$$df(x) = f'(x)\Delta x. \tag{4a}$$

2. piemērs. 1. piemērā mēs atradām, ka $d(x^3) = 3x^2\Delta x$. Koeficients $3x^2$ ir funkcijas x^3 atvasinājums.

3. piemērs. Ja $y = \frac{1}{x}$, tad $y' = -\frac{1}{x^2}$ (226. § 4. p.). Tāpēc $dy = -\frac{\Delta x}{x^2}$.

Pārbaudīsim to. Dabūjam $\Delta y = \frac{1}{(x+\Delta x)} - \frac{1}{x} = \frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}$. Ja šo izteiksmi sadala divos locekļos, kur pirmais ir $-\frac{\Delta x}{x^2}$ tad otrs būs $\frac{\Delta x^2}{x^2(x+\Delta x)}$. Otrajam loceklim ir augstāka (otrā) kārta attiecībā pret Δx[1].

2. teorēma. Ja atvasinājums nav vienāds ar nulli, tad funkcijas diferenciālis un tās pieaugums ir ekvivalenti (kad $\Delta x \to 0$); ja turpretim atvasinājums ir vienāds ar nulli (tad arī diferenciālis ir vienāds ar nulli), tad nav ekvivalenti.

4. piemērs. Ja $y = x^2$, tad $\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2$ un $dy = 2x\Delta x$. Ja $x = 3$, tad lielumi $\Delta y = 6\Delta x + \Delta x^2$ un $dy = 6\Delta x$ ir ekvivalenti, ja $x = 0$, tad lielumi $\Delta y = \Delta x^2$ un $dy = 0$ nav ekvivalenti.

Diferenciāļa un pieauguma ekvivalenci bieži izlieto aptuvenos aprēķinos (parasti diferenciāli aprēķināt ir vieglāk nekā pieaugumu).

5. piemērs. Metāliska kuba šķautne $x = 10{,}00$ *cm*. Sasilstot šķautne ir pagarinājusies par $\Delta x = 0{,}01$ cm. Par cik palielinājies kuba tilpums V?

Atrisinājums. Kā zināms, $V = x^3$, tātad $dV = 3x^2\Delta x = 3 \cdot 10^2 \cdot 0{,}01 = 3$ (cm^3). Tilpuma pieaugums ΔV ir ekvivalents diferenciālim dV, tātad $\Delta V \approx 3$ cm^3. Pilnīgs aprēķins dotu $\Delta V = 10{,}01^3 - 10^3 = 3{,}003001$. Bet šai rezultātā visi cipari,

[1] Pieņemts, ka $x \neq 0$ (ja $x = 0$, pati funkcija $\frac{1}{x}$ nav definēta).

izņemot pirmo, nav droši; tātad tikpat būtu jānoapaļo uz 3 cm^3.

Diferenciāļa citus pielietojumu piemērus aptuvenos aprēķinos sk. 243. § (4. piemērs) un 248. §.

229. §. Diferenciāļa mehāniskā nozīme

Pieņemsim, ka $s=f(t)$ ir punkta attālums taisnvirziena kustībā no sākuma stāvokļa (t ir ceļā pavadītais laiks). Pieaugums Δs ir ceļš, ko punkts nogājis laika sprīdī Δt, bet diferenciālis $ds=f'(t)\Delta t$ (228. § 1. teorēma) ir ceļš, kuru punkts noietu tai pašā laika sprīdī Δt, ja tas paturētu ātrumu $f'(t)$, kāds tam bija momentā t. Ja Δt ir bezgalīgi mazs, tad iedomātais ceļš ds atšķirtos no patiesā ceļa Δs par augstākas kārtas bezgalīgi mazu lielumu attiecībā pret Δt. Ja ātrums momentā t nav vienāds ar nulli, tad ds dod punkta neliela pārvietojuma aptuveno vērtību (sal. 228. § 2. teorēma).

230. §. Diferenciāļa ģeometriskā nozīme

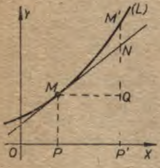
Pieņemsim, ka līnija L (230. zīm.) ir funkcijas $y=f(x)$ grafika. Tad

$$\Delta x=MQ, \quad \Delta y=QM'.$$

Pieskare MN sadala nogriezni Δy divās daļās, QN un NM'. Pirmais nogrieznis ir proporcionāls Δx un vienāds ar $QN=MQ\cdot\operatorname{tg}\angle QMN=\Delta x f'(x)$ (sk. 225. §), t. i., QN ir diferenciālis dy.

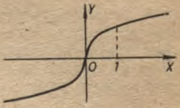
Otrs nogrieznis NM' dod starpību $\Delta y-dy$; tas ir augstākas kārtas bezgalīgi mazs lielums attiecībā pret Δx. Gadījumā, ja $f'(x)\neq 0$ (pieskare nav paralēla OX asij), nogriežņi QM' un QN ir ekvivalenti (228. § 2. teorēma); citiem vārdiem, NM' ir tāda paša kārta arī attiecībā pret $\Delta y=QM'$. Tas ir redzams zīmējumā (kad M' tuvojas M, nogrieznis NM' vienmēr ir mazāks procents no QM').

Tātad *funkcijas diferenciālis grafiski attēlo pieskares ordinātes pieaugumu.*



230. zīm.

231. §. Diferencējamas funkcijas



231. zīm.

Nepārtrauktu funkciju, kurai (dotajā punktā) ir diferenciālis, sauc par *diferencējamu* (apskatāmajā punktā).

Pārtrauktai funkcijai pārtraukuma punktā nevar būt ne atvasinājuma, ne diferenciāļa (grafikai nav pieskares; sk. 214. zīm. 284. lpp. un 219. zīm. 301. lpp.).

Funkcijai, kas ir nepārtraukta dotajā punktā, var arī nebūt diferenciāļa šai punktā. Tālāk apskatīti trīs raksturīgi gadījumi.

1. gadījums. Funkcijai $y=f(x)$ apskatāmajā punktā ir *bezgalīgs atvasinājums,* t. i.,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$$

jeb

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$$

(t. i., Δy ir zemāka kārta attiecībā pret Δx). Grafikai ir vertikāla pieskare.

Pieraksts (nosacīts)

$$f'(x) = \infty.$$

1. piemērs. Funkcija $f(x)=\sqrt[3]{x}$ (231. zīm.) nav diferencējama punktā $x=0$. Lielumam

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{0+\Delta x} - \sqrt[3]{0}}{\Delta x},$$

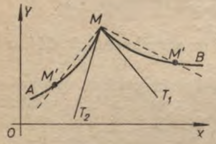
kad $x \to 0$, ir bezgalīga robeža $+\infty$.

Pieskare punktā $x=0$ sakrīt ar OY asi.

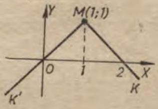
1. piezīme. Funkcija, kurai (dotajā punktā) ir *galīgs* atvasinājums, ir diferencējama. Otrādi, diferencējamai funkcijai ir galīgs atvasinājums.

2. gadījums. Attiecībai $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nav robežas, kad $\Delta x \to 0$

(t. i., funkcijai $y=f(x)$ nav atvasinājuma), bet ir labās puses robeža (kad $\Delta x \to +0$, 219.a §) un kreisās puses robeža (kad $\Delta x \to -0$). Pirmo robežu sauc par *labās puses atvasinājumu* un apzīmē ar $f'(x+0)$, otro — par *kreisās puses atvasinājumu* un apzīmē ar $f'(x-0)$.



232. zīm.



233. zīm.

Apskatāmajā punktā (232. zīmējumā M) grafikai nav pieskares, bet ir *labās puses pieskare* MT_1 un *kreisās puses pieskare* MT_2, t. i., sekante MM' tiecas sakļauties ar MT_1, kad M' tiecas uz M no labās puses, un ar MT_2, kad M' tiecas uz M no kreisās puses.

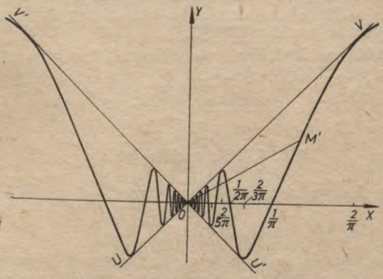
2. piemērs. Funkcija $f(x)=1-|1-x|$ nav diferencējama punktā $x=1$. Līnijai $K'MK$ nav pieskares punktā $M(1;1)$. Labās puses atvasinājums $f'(1+0)=-1$, kreisās puses atvasinājums $f'(1-0)=1$.

3. gadījums. Funkcijai $y=f(x)$ nav vai nu labās puses, vai kreisās puses atvasinājuma (vai arī nav ne viena, ne otra). Grafikai nav atbilstošās vienpusīgās pieskares.

3. piemērs. Funkcija, kas uzdota ar formulu $f(x)= =x\sin\frac{1}{x}$ (234. zīm.) un blakus noteikumu $f(0)=0$ (izteiksmei $\sin\frac{1}{x}$ nav jēgas, ja $x=0$), ir nepārtraukta punktā $x=0$. Tomēr, kad M' tiecas uz O no labās puses (vai no kreisās puses), sekante OM' svārstās starp taisnēm UV ($y=x$) un $U'V'$ ($y=-x$) un netiecas ne uz vienu taisni. Grafikai punktā O nav ne labās puses, ne kreisās puses pieskares, bet funkcijai $f(x)$ — ne labās, ne kreisās puses atvasinājuma.

2. piezīme. Var izdomāt pat tādas nepārtrauktas fun-

kcijas, kurām nav atvasinājuma nevienā punktā[1]. Tātad atvasinājuma eksistence loģiski neizriet no funkcijas nepārtrauktības. Pirmais uz to norādīja lielais krievu matemātiķis N. Lobačevskis[2].



234. zīm.

232. §. Dažu vienkāršāko funkciju diferenciāļi

1. Pastāvīga lieluma diferenciālis ir vienāds ar nulli

$$da=0. \tag{1}$$

2. Neatkarīgā mainīgā diferenciālis ir vienāds ar tā pieaugumu

$$dx=\Delta x. \tag{2}$$

---

[1] Līniju, kas grafiski attēlotu tādu funkciju, mēs nevaram ne tik vien konstruēt, bet pat iedomāties; jo priekšstatu par līniju mēs iegūstam, abstrahējoties no reālu priekšmetu īpašībām, un tas cieši saistās ar jēdzienu par virzienu. Jau 3. piemērā «līnijai» $y=x\sin\frac{1}{x}$ nav virziena punktā $x=0$, bet šeit mūsu iztēlei palīdz tas, ka punkta O tuvumā grafikai ir noteikts virziens.

[2] Nikolajs Lobačevskis (1792—1856) savu vārdu padarīja nemirstīgu, radot neeiklīda ģeometriju. Arī algebras un analīzes nozarēs viņam pieder izcili darbi. N. Lobačevska pasaules uzskatam ir spilgti izteikts materiālistisks raksturs. Lieli nopelni N. Lobačevskim kā progresīvam sabiedriskam darbiniekam, pedagogam un tautas izglītības organizētājam. Visa lielā zinātnieka dzīve saistās ar Kazaņas universitāti, kur viņš izglītojās pats un pēc tam bija profesors un rektors.

3. Vispār lineāras funkcijas diferenciālis ir vienāds ar tās pieaugumu

$$d(ax+b)=\Delta(ax+b)=a\Delta x. \tag{3}$$

Citām funkcijām diferenciālis un pieaugums *ņav vienādi.* (Bet tie atšķiras par augstākas kārtas bezgalīgi mazu lielumu attiecībā pret Δx; 228. §).

4. Pakāpes funkcijas x^n diferenciālis ir vienāds ar $nx^{n-1}\Delta x$ [sal. 233. § (4)], t. i.,

$$dx^n=nx^{n-1}\Delta x. \tag{4}$$

233. §. Diferenciāļa īpašības

1. Pastāvīgu reizinātāju var iznest pirms diferenciāļa zīmes

$$d[af(x)]=adf(x). \tag{1}$$

2. Vairāku funkciju algebriskas summas diferenciālis ir vienāds ar šo funkciju diferenciāļu algebrisku summu, ja saskaitāmo skaits ir nemainīgs

$$d[f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)]=df_1(x)+df_2(x)-df_3(x). \tag{2}$$

3. Funkcijas diferenciālis ir vienāds ar funkcijas un argumenta diferenciāļa reizinājumu

$$df(x)=f'(x)dx. \tag{3}$$

Izriet no 228. § (1. teorēma) un 232. § 2. p.
Atsevišķā gadījumā (sal. 232. § 4. p.)

$$d(x^n)=nx^{n-1}dx. \tag{4}$$

234. §. Izteiksmes $f'(x)dx$ invariance

Izteiksme $f'(x)\Delta x$ izsaka (228. § 1. teorēma) diferenciāli $df(x)$, kad x uzskata par argumentu. Ja pašu lielumu x uzskata par kāda argumenta t funkciju, tad izteiksme $f'(x)\Delta x$ parasti neizsaka diferenciāli (sk. tālāk 1. piemēru); izņēmums ir tikai lineāra atkarība $x=at+b$.

Turpretim 233. § formula (3)

$$df(x)=f'(x)dx \tag{1}$$

ir pareiza kā gadījumā, kad x ir arguments (tad $dx=\Delta x$), tā arī gadījumā, kad x ir t funkcija (sk. tālāk 2. piemēru).

Šo izteiksmes $f'(x)dx$ īpašību sauc par tās invarianci (nemainīgumu).

1. piemērs. Izteiksme $2x\Delta x$ izsaka funkcijas $y=x^2$ diferenciāli, kad x ir arguments.

Ņemsim tagad

$$x=t^2 \tag{2}$$

un uzskatīsim t par argumentu. Tad

$$y=x^2=t^4. \tag{3}$$

No (2) atrodam

$$\Delta x=2t\,\Delta t+\Delta t^2. \tag{4}$$

Tātad

$$2x\,\Delta x=2t^2(2t\,\Delta t+\Delta t^2). \tag{5}$$

Šī izteiksme nav proporcionāla Δt un tāpēc tagad $2x\,\Delta x$ nav diferenciālis. Funkcijas y diferenciāli atrodam no (3)

$$dy=4t^3\,\Delta t. \tag{6}$$

Salīdzinot (5) un (6), redzam, ka $2x\,\Delta x$ un dy atšķiras par lielumu $2t^2\,\Delta t^2$, kuram ir otrā kārta attiecībā pret Δt.

2. piemērs. Izteiksme $2xdx$ ir funkcijas $y=x^2$ diferenciālis *pie jebkura argumenta t*. Pieņemsim, piemēram, ka $x=t^2$. Tad

$$dx=2t\,\Delta t.$$

Tātad

$$2x\,dx=2t^2\cdot 2t\,\Delta t=4t^3\,\Delta t.$$

Salīdzinot ar (6), redzam, ka

$$dy=2xdx.$$

235. §. Atvasinājuma izteiksme ar diferenciāļiem

Funkcijas y atvasinājums pēc argumenta x ir vienāds ar attiecību starp mainīgā y diferenciāli un mainīgā x diferenciāli, t. i.,

$$y'=\frac{dy}{dx}.$$

Indekss x pie simbola y' pasvītro, ka, *meklējot atvasinā-*

jumu, arguments ir x. Diferenciāļus dy un dx var ņemt *pēc jebkura argumenta* (sk. 234. §).

Bieži izdevīgāks atvasinājuma apzīmējums ir izteiksme $\frac{dy}{dx}$ un tai līdzīgas, piemēram,

$\frac{df(x)}{dx}$ (funkcijas $f(x)$ atvasinājums pēc x),

$\frac{d\varphi(t)}{dt}$ (funkcijas $\varphi(t)$ atvasinājums pēc t),

$$\frac{d(3x^2+2x+1)}{dx}=6x+2 \text{ utt.}$$

Lieto arī šādus pierakstus

$$\frac{d}{dx}f(x), \quad \frac{d}{dx}(3x^2+2x+1) \text{ utt.,}$$

kuri ir sevišķi parocīgi, kad atvasinājumu sastāda komplicētai izteiksmei.

236. §. Funkcija no funkcijas (salikta funkcija)

Lielumu y sauc par *funkciju no funkcijas* (jeb par *saliktu* funkciju), ja to uzskata par kāda (palīga) mainīgā u funkciju, kurš savukārt ir atkarīgs no argumenta x, t. i.,

$$y=f(u), \quad u=\varphi(x). \tag{1}$$

Līdz ar to y ir x funkcija, ko var pierakstīt tā

$$y=f[\varphi(x)]. \tag{2}$$

Ja $f(u)$ un $\varphi(x)$ ir nepārtrauktas funkcijas, tad funkcija $f[\varphi(x)]$ arī būs nepārtraukta.

P i e m ē r s. Ja $y=u^3$ un $u=1+x^2$, tad y ir salikta x funkcija, ko var pierakstīt tā

$$y=(1+x^2)^3.$$

237. §. Saliktas funkcijas diferenciālis

Saliktas funkcijas diferenciāļa atrašana neprasa sevišķas kārtulas (izteiksmes $f'(x)dx$ invariances dēļ; 234. §).

1. piemērs. Atrast diferenciāli funkcijai $y=(1+x^2)^3$.

Atrisinājums. Uzskatot y par saliktu funkciju ($y=u^3$, $u=1+x^2$), dabūjam

$$dy=3u^2du, \quad du=2xdx.$$

No šejienes

$$dy=3(1+x^2)^2\cdot 2xdx=(6x+12x^3+6x^5)dx.$$

To pašu rezultātu varam dabūt tieši

$$dy=d(1+3x^2+3x^4+x^6)=(6x+12x^3+6x^5)dx.$$

Piezīme. Praksē sevišķu apzīmējumu palīga mainīgajam u nelieto. 1. piemērā rīkojas tā

$$d(1+x^2)^3=3(1+x^2)^2\cdot d(1+x^2)=3(1+x^2)^2 2xdx.$$

2. piemērs. Atrast

$$d\sqrt{a^2-x^2}.$$

Atrisinājums.

$$d\sqrt{a^2-x^2}=d(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(a^2-x^2)=-\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

238. §. Saliktas funkcijas atvasinājums

Saliktas funkcijas atvasinājums ir vienāds ar funkcijas atvasinājuma pēc palīga mainīgā un šī palīga mainīgā atvasinājuma pēc argumenta reizinājumu, t. i.,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}. \tag{1}$$

1. piemērs. Atrast atvasinājumu funkcijai

$$y=\sqrt{a^2-x^2}$$

(pēc argumenta x).

Apzīmējot

$$y=u^{\frac{1}{2}}, \quad u=a^2-x^2,$$

dabūjam

$$\frac{dy}{du}=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}, \quad \frac{du}{dx}=-2x.$$

Ar formulu (1) dabūjam

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}\cdot(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

P i e z ī m e. Lietojot apzīmējumu $(\sqrt{a^2-x^2})'$, iesācēji bieži pieļauj kļūdu. Zinot, ka $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, viņi uzraksta rezultātu tā $\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}$, aizmirstot pareizināt ar $(a^2-x^2)'=-2x$. Kļūda rodas nepilnīga apzīmējuma dēļ (nav redzams, pēc kāda mainīgā ņem atvasinājumu). Tāpēc pirmajā laikā pierakstu labāk izdarīt tā:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{a^2-x^2}=\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}\frac{d}{dx}(a^2-x^2)=\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}(-2x).$$

Ja ir jau pietiekamas iemaņas, tad starppārveidojumu izpilda galvā.

Vislabāko garantiju kļūdas novēršanai dod iepriekšēja diferenciāļa $d\sqrt{a^2-x^2}$ aprēķināšana. Ja atrasts (237. § 2. piemērs) diferenciālis $\frac{-x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, tad ņemam koeficientu pie dx (t. i., dalām ar dx) un atrodam atvasinājuma izteiksmi

$$\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

2. p i e m ē r s. Atrast atvasinājumu funkcijai $y=\sin^2 2x$.

A t r i s i n ā j u m s. Šeit ir triju atkarību virkne

$$y=u^2, \quad u=\sin v, \quad v=2x.$$

Pēc analoģijas ar (1) varam rakstīt $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$.

Ievērojot, ka $\frac{du}{dv}=\frac{d\sin v}{dv}=\cos v$ (224. § 3. piemērs), atrodam

$$\frac{dy}{dx}=2u\cdot\cos v\cdot 2=4\sin 2x\cdot\cos 2x=2\sin 4x.$$

Lai novērstu kļūdas, labāk rīkoties tā

$$d\sin^2 2x=2\sin 2x\cdot d\sin 2x=2\sin 2x\cos 2x\cdot d(2x)=$$
$$=4\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot dx.$$

Dalot ar dx, dabūjam

$$\frac{d\sin^2 2x}{dx}=4\sin 2x\cos 2x.$$

239. §. Reizinājuma diferencēšana

Kārtula. Divu funkciju reizinājuma diferenciālis ir vienāds ar katras funkcijas un otras funkcijas diferenciāļa reizinājumu summu, t. i.,

$$d(uv)=u\,dv+v\,du. \tag{1}$$

Trim reizinātājiem dabūjam

$$d(uvw)=vw\cdot du+uw\cdot dv+uv\cdot dw \tag{2}$$

un analogi lielākam reizinātāju skaitam.

Reizinājuma atvasinājumu aprēķina ar tādu pašu kārtulu (vārdu «diferenciālis» abas reizes aizstāj ar vārdu «atvasinājums»), t. i.,

$$(uv)'=uv'+vu', \tag{1a}$$

$$(uvw)'=vwu'+uwv'+uvw'. \tag{2a}$$

1. piemērs. Atrast diferenciāli un atvasinājumu funkcijai[1] $(2x^2+3x)(x^3-2)$.

---

[1] Funkcijas diferenciāļa atrašanas darbību sauc par funkcijas *diferencēšanu*, bet atvasinājuma atrašanas darbību par funkcijas *atvasināšanu*. Tā kā šīs darbības ir ļoti līdzīgas, tad ar izteicienu «diferencēt funkciju» bieži saprot atvasinājuma atrašanu. *Tulk.*

Atrisinājums.

$$d\,[(2x^2+3x)\,(x^3-2)]=$$
$$=(2x^2+3x)\,d(x^3-2)+(x^3-2)\,d(2x^2+3x)=$$
$$=(2x^2+3x)\,3x^2dx+(x^3-2)\,(4x+3)\,dx=$$
$$=(10x^4+12x^3-8x-6)\,dx.$$

Koeficients $10x^4+12x^3-8x-6$ ir atvasinājums. Ar formulu (1a) mēs atrastu

$$[(2x^2+3x)\,(x^3-2)]'=$$
$$=(2x^2+3x)\,(x^3-2)'+(x^3-2)\,(2x^2+3x)'$$

utt.

2. piemērs.

$$d\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=x\,d\sin\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}\cdot dx=$$

$$=x\cos\frac{1}{x}\,d\left(\frac{1}{x}\right)+\sin\frac{1}{x}\,dx=\frac{-x\cos\frac{1}{x}}{x^2}\,dx+\sin\frac{1}{x}\,dx=$$
$$=\left(-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}\right)dx.$$

No šejienes

$$\frac{d}{dx}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}. \qquad (3)$$

Piezīme. Pieņemts, ka $x\neq 0$. Ja $x=0$, tad funkcija $x\sin\frac{1}{x}$ nav definēta. Bet pat tad, ja to šai punktā definētu (231. § 3. piemērs), tā pie $x=0$ nebūtu diferencējama (kad $x\to 0$, atvasinājums (3) netiecas ne uz vienu robežu; sk. 234. zīm.).

240. §. Dalījuma (daļas) diferencēšana

Kārtula. Daļas diferenciālis ir vienāds ar daļu, kuras skaitītājā ir dotās daļas saucēja reizinājums ar skaitītāja diferenciāli mīnus skaitītāja reizinājums ar saucēja diferenciāli, bet saucējā ir dotās daļas saucēja kvadrāts, t. i.,

$$d\frac{u}{v}=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}. \qquad (1)$$

Tā pati kārtula der daļas atvasinājumam (vārds «diferenciālis» visas trīs reizes jāaizstāj ar vārdu «atvasinājums»)

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}. \tag{1a}$$

1. piemērs. Atrast y', ja $y = \frac{2x+1}{x^2+1}$.

Dabūjam

$$y' = \frac{(x^2+1)(2x+1)' - (2x+1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{(x^2+1)2 - (2x+1)2x}{(x^2+1)^2},$$

t. i.,

$$y' = \frac{2(-x^2-x+1)}{(x^2+1)^2}.$$

2. piemērs. Atrast $d\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Uzskatām doto izteiksmi par saliktu funkciju

$$\left(y = \sqrt{u};\ u = \frac{1+x}{1-x}\right):$$

$$d\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, d\,\frac{1+x}{1-x} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\ \frac{(1-x)dx + (1+x)dx}{(1-x)^2}.$$

Pēc vienkāršojumiem dabūsim

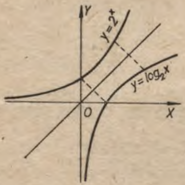
$$d\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}.$$

241. §. Apvērstā funkcija

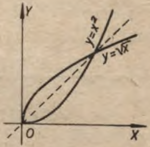
Ja no sakarības $y = f(x)$ var dabūt sakarību $x = \varphi(y)$, tad funkciju $\varphi(y)$ sauc par apvērsto jeb inverso funkciju attiecībā pret funkciju $f(x)$.

1. piemērs. Funkcijai $y=x^2$ apvērstā funkcija ir (divvērtīga) funkcija $x=\pm\sqrt{y}$.

2. piemērs. Funkcijai $y=\sin x$ apvērstā funkcija ir (bezgalīgi daudzvērtīga) funkcija $x=\operatorname{Arcsin} y$ (kas ir defi-



235. zīm.



236. zīm.

nēta visām y vērtībām, kuras pēc absolūtās vērtības ir mazākas par vienu).

Piezīme. Apvērstā funkcija parasti ir daudzvērtīga[1]. No daudzvērtības var atbrīvoties, ja samazina dotās funkcijas argumenta maiņas apgabalu. Tā 1. piemērā var atmest negatīvās argumenta x vērtības un tad apvērstā funkcija $y=+\sqrt{y}$ būs vienvērtīga.

Ja patur iepriekšējos mainīgo apzīmējumus, tad funkcijas $y=f(x)$ grafika vienlaicīgi būs arī apvērstās funkcijas $x=$ $=\varphi(y)$ grafika.

Bet parasti mainīgo apzīmējumus samaina un apvērstās funkcijas argumentu apzīmē ar burtu x, tāpat kā tiešās funkcijas argumentu.

3. piemērs. Funkcijai $y=x^2$ apvērstā (vienvērtīgā) funkcija ir $y=\sqrt{x}$, funkcijai $y=2^x$ apvērstā funkcija ir $y=$ $=\log_2 x$.

Ja lieto šādus apzīmējumus, tad tiešās un apvērstās funkcijas grafikas ir simetriskas pret taisni $y=x$ (235. zīm.).

Apvērstās funkcijas atvasinājums. Apvēr-

[1] Izņēmums ir tikai tie gadījumi, kad, argumentam augot, tiešās funkcijas vērtība vai nu tikai aug, vai tikai dilst (tādas funkcijas sauc par *monotonām*).

stās funkcijas atvasinājums ir viens, dalīts ar tiešās funkcijas atvasinājumu [1]

$$\frac{dx}{dy}=1:\frac{dy}{dx}. \tag{1}$$

4. piemērs. Apskatīsim funkciju $y=x^2$ pozitīvām x vērtībām. Apvērstā funkcija (236. zīm.) ir $x=\sqrt{y}$. Dabūjam

$$\frac{dy}{dx}=2x,\quad \frac{dx}{dy}=\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}.$$

242. §. Naturālie logaritmi

Logaritmiskās funkcijas diferencēšanas formulai (243. §) ir vienkāršāks veids, ja par bāzi pieņem skaitli

$$e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\approx 2{,}71828$$

(214. §). Tad logaritmus sauc par *naturāliem* jeb *dabiskiem* logaritmiem un apzīmē ar simbolu [2] ln.

Lai no naturālā logaritma pārietu uz logaritmu pie jebkuras bāzes a, tad tas jāpareizina ar «pārejas moduli», kas ir vienāds ar $\log_a e$, t. i.,

$$\log_a x=\log_a e \ln x. \tag{1}$$

[1] Ja atvasinājums $\frac{dy}{dx}$ pārvēršas nullē, tad formula (1) jāsaprot tai nozīmē, ka apvērstajai funkcijai apskatāmajā punktā ir bezgalīgs atvasinājums, t. i., $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\infty$ (sk. 231. § 1. gadījumu; sal. 213. § 2. piezīmi).

[2] Latīņu vārdu logarithmus (logaritms) naturalis (naturālais) sākuma burti. Skaitlis e ir iracionāls; vēl vairāk, tas ir transcendents, t. i., nevar būt sakne nevienam algebriskam vienādojumam ar racionāliem koeficientiem. Transcendenti ir arī visu veselo skaitļu naturālie logaritmi, kā arī visu veselo skaitļu (izņemot 1, 10, 100, 1000, utt.) decimāllogaritmi. Skaitļa e transcendencitāti 1871. gadā pierādīja franču matemātiķis E r m i t s, bet decimāllogaritmu transcendencitāti 1934. gadā — padomju matemātiķis A. G e l f o n d s.

Otrādi, lai pārietu no logaritma pie bāzes a uz naturālo logaritmu, tad tas jāpareizina ar $\ln a$ (t. i., ar $\log_e a$)[1]

$$\ln x = \ln a \log_a x. \tag{2}$$

Mnemoniska kārtula. Uzrakstot formulu (1) pilnīgi, dabūjam $\log_a x = \log_a e \log_e x$. Ja atmetam simbolus log, bet no atlikušajiem burtiem sastādām «daļas» $\frac{x}{a}, \frac{e}{a}, \frac{x}{e}$, tad pirmā daļa ir abu pārējo reizinājums. Analogi var atcerēties formulu (2).

Pārejas moduli no naturālajiem uz decimāllogaritmiem apzīmē ar M, t. i.,

$$M = \lg e = 0{,}43429 \tag{3}$$

(viegli var atcerēties pirmās četras zīmes $M = 0{,}4343$).

Formulas (1) un (2) pieņem izskatu[2]

$$\lg x = M \ln x, \tag{4}$$

$$\ln x = \frac{1}{M} \lg x, \tag{5}$$

kur

$$\frac{1}{M} = \ln 10 \approx 2{,}3026. \tag{6}$$

Lai pareizinātu ar M un ar $\frac{1}{M}$, var lietot speciālas tabulas (921. lpp.).

1. piemērs. Atrast $\ln 100$.

Ar formulu (5) atrodam $\ln x \approx 2{,}3026 \cdot 2 \approx 4{,}605$.

2. piemērs. Aprēķināt e^3 ar decimāllogaritmu tabulu palīdzību.

Dabūjam $\lg(e^3) = 3 \lg e = 3M = 1{,}3029$, no šejienes $e^3 \approx 20{,}09$.

Var lietot arī naturālo logaritmu tabulu (917. lpp.). Dabūjam $\ln(e^3) = 3$. Lai atrastu četras zīmes skaitlim e^3, jāizpilda interpolācija.

---

[1] Lielumi $\log_a e$ un $\log_e a$ ir savstarpīgi apgriezti ($\log_a e \cdot \log_e a = 1$).

[2] Lai nesajauktu, kad jāreizina ar M, kad ar $\frac{1}{M}$, der ievērot, ka jebkura skaitļa decimāllogaritms ir *mazāks* par naturālo logaritmu (piemēram, $\ln 10 \approx 2{,}3$, bet $\lg 10 = 1$).

3. piemērs. Kāda skaitļa decimāllogaritms ir 0,5041; atrast tā naturālo logaritmu.

Dabūjam

$$\ln x = \frac{1}{M} \lg x \approx 2{,}303 \cdot 0{,}5041 \approx 1{,}161.$$

Šo reizinājumu var atrast, lietojot tabulu 921. lpp., proti,

$$\frac{1}{M} \cdot 0{,}50 \approx 1{,}1513$$

$$\frac{1}{M} \cdot 0{,}0041 \approx 0{,}0094$$

$$\frac{1}{M} \cdot 0{,}5041 \approx 1{,}161$$

243. §. Logaritmiskās funkcijas diferencēšana

Naturālā logaritma (242. §) diferenciāli un atvasinājumu izsaka formulas

$$d \ln x = \frac{dx}{x}, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}. \tag{2}$$

Ja logaritma bāze ir patvaļīgs skaitlis, tad [1]

$$d \log_a x = \log_a e \frac{dx}{x}, \tag{3}$$

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \log_a e \cdot \frac{1}{x}. \tag{4}$$

Atsevišķā gadījumā decimāllogaritmiem dabūjam

$$d \lg x = \frac{M dx}{x}, \tag{3a}$$

$$\frac{d}{dx} \lg x = M \cdot \frac{1}{x}. \tag{4a}$$

[1] Formulu (3) var dabūt no (1), ievērojot 242. § formulu (1).

Šeit $M \approx 0{,}4343$ ir pārejas modulis no naturālajiem uz decimāllogaritmiem (242. §).

1. piemērs.

$$\frac{d}{dx}\ln(ax+b) = \frac{1}{ax+b}\cdot\frac{d}{dx}(ax+b) = \frac{a}{ax+b}.$$

2. piemērs.

$$d\ln\frac{1+x}{1-x} = d\ln(1+x) - d\ln(1-x) =$$

$$= \frac{dx}{1+x} + \frac{dx}{1-x} = \frac{2dx}{1-x^2}.$$

3. piemērs. Atrast funkcijas $\lg x$ atvasinājuma vērtību, ja $x=100$.

Formula (4a) dod $(\lg x)' = \frac{M}{x} \approx \frac{0{,}4343}{100} \approx 0{,}0043.$

4. piemērs. Atrast bez tabulām lg 101.

Pieaugums $\Delta \lg x$ aptuveni ir vienāds ar diferenciāli $d\lg x = \frac{M\Delta x}{x}$. Ja $x=100$ un $\Delta x = 1$, tad dabūjam $\Delta \lg x \approx$ $\approx \frac{0{,}4343 \cdot 1}{100} \approx 0{,}0043$. Tādējādi

$$\lg 101 = \lg 100 + \Delta \lg 100 \approx 2 + 0{,}0043 = 2{,}0043,$$

kas sakrīt ar tabulas vērtību.

244. §. Logaritmiskā diferencēšana

Lai diferencētu izteiksmes, kurām ir logaritmēšanai izdevīgs veids, tad iepriekš var izpildīt logaritmēšanu.

1. piemērs. Diferencēt funkciju $y = xe^{-x^2}$.

1) Logaritmējot pie bāzes e, atrodam

$$\ln y = \ln x - x^2. \tag{1}$$

2) Diferencējam tagad vienādības (1) abas puses

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} - 2x\,dx.$$

3) Ievietojot y vietā izteiksmi xe^{-x^2}, atrodam

$$dy = xe^{-x^2}\left(\frac{1}{x} - 2x\right)dx = e^{-x^2}(1-2x^2)\,dx.$$

2. piemērs. Atvasināt funkciju $y = x^x$.
Pakāpeniski atrodam

1) $\ln y = x \ln x$,

2) $\dfrac{y'}{y} = x(\ln x)' + \ln x = 1 + \ln x$,

3) $y' = y(1+\ln x) = x^x(1+\ln x)$.

3. piemērs. Atvasināt funkciju

$$y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

(sal. 240. § 2. piemēru).

1) $\ln y = \dfrac{1}{2}\ln(1+x) - \dfrac{1}{2}\ln(1-x)$,

2) $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1}{1-x^2}$,

3) $y' = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} \cdot \dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$.

4. piemērs. Atvasināt funkciju

$$y = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}.$$

1) $\ln y = 2\ln(x+1) - 3\ln(x+2) - 4\ln(x+3)$,

2) $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{3}{x+2} - \dfrac{4}{x+3}$,

3) $$y' = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}\left(\frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2} - \frac{4}{x+3}\right) =$$
$$= -\frac{(x+1)(5x^2+14x+5)}{(x+2)^4(x+3)^5}.$$

Apskatīto paņēmienu sauc par *logaritmisko diferencēšanu* jeb atvasināšanu, bet funkcijas $y=f(x)$ logaritma atvasinājumu —

$$(\ln y)'=\frac{y'}{y}=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

par funkcijas $f(x)$ *logaritmisko atvasinājumu.*

245. §. Eksponentfunkcijas diferencēšana

Eksponentfunkcijas $e^x \left[\text{kur } e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\approx 2{,}71828 \right]$ diferenciāli un atvasinājumu izsaka formulas [1]

$$de^x=e^x dx,\quad \frac{d}{dx}e^x=e^x \tag{1}$$

(funkcijas e^x atvasinājums ir vienāds ar pašu funkciju). Ja bāze a ir patvaļīga, tad dabūjam

$$da^x=a^x\ln a\,dx,\quad \frac{d}{dx}a^x=a^x\ln a. \tag{2}$$

Atsevišķā gadījumā

$$d10^x=10^x\frac{1}{M}\,dx,\quad \frac{d}{dx}10^x=10^x\frac{1}{M}. \tag{2a}$$

Šeit

$$\frac{1}{M}=\ln 10\approx 2{,}3026.$$

1. piemērs.

$$\frac{d}{dx}(e^{3x})=e^{3x}\frac{d}{dx}(3x)=3e^{3x}.$$

2. piemērs.

$$d(xe^{-x^2})=xde^{-x^2}+e^{-x^2}dx=$$
$$=xe^{-x^2}d(-x^2)+e^{-x^2}dx=e^{-x^2}(1-2x^2)\,dx.$$

[1] Formulas (1) un (2) var dabūt ar logaritmisko diferencēšanu (244. §) vai arī uzskatot eksponentfunkciju par logaritmiskās funkcijas apvērsto funkciju (241. §).

3. piemērs.

$$d\,\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}=\frac{(e^t+e^{-t})\,d(e^t-e^{-t})-(e^t-e^{-t})\,d(e^t+e^{-t})}{(e^t+e^{-t})^2}=$$

$$=\frac{(e^t+e^{-t})^2-(e^t-e^{-t})^2}{(e^t+e^{-t})^2}\,dt=\frac{4dt}{(e^t+e^{-t})^2}.$$

4. piemērs.

$$d\,7^{t^2}=7^{t^2}\ln 7\,d(t^2)=2t\,7^{t^2}\ln 7\,dt.$$

246. §. Trigonometrisko funkciju diferencēšana

Diferenciāļi	Atvasinājumi
I. $d\sin x=\cos x\,dx$,	$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$,
II. $d\cos x=-\sin x\,dx$,	$\frac{d}{dx}\cos x=-\sin x$,
III. $d\,\mathrm{tg}\,x=\frac{dx}{\cos^2 x}$,	$\frac{d}{dx}\mathrm{tg}\,x=\frac{1}{\cos^2 x}$,
IV. $d\,\mathrm{ctg}\,x=-\frac{dx}{\sin^2 x}$;	$\frac{d}{dx}\mathrm{ctg}\,x=-\frac{1}{\sin^2 x}$.

Šīs formulas jāiegaumē [1]. Nākošās divas formulas iegaumēt nav vajadzīgs.

V. $d\,\mathrm{sc}\,x=\mathrm{tg}\,x\cdot\mathrm{sc}\,x\,dx$,	$\frac{d}{dx}\mathrm{sc}\,x=\mathrm{tg}\,x\cdot\mathrm{sc}\,x$,
VI. $d\,\mathrm{csc}\,x=-\mathrm{ctg}\,x\cdot\mathrm{csc}\,x\,dx$;	$\frac{d}{dx}\mathrm{csc}\,x=-\mathrm{ctg}\,x\cdot\mathrm{csc}\,x$.

1. piemērs.

$$d\sin 2x=\cos 2x\,d(2x)=2\cos 2x\,dx.$$

[1] Formulas I izdevumu sk. 224. § 3. piemērā; formulu II atrod analogi. Formulas III un IV dabū no sakarībām

$$\mathrm{tg}\,x=\frac{\sin x}{\cos x},\quad \mathrm{ctg}\,x=\frac{\cos x}{\sin x}.$$

2. piemērs.

$$\frac{d}{dx}\ln\sqrt{\sin 2x}=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\ln\sin 2x=\frac{1}{2\sin 2x}\cdot\frac{d}{dx}\sin 2x=\operatorname{ctg} 2x.$$

3. piemērs.

$$\frac{d}{d\varphi}\ln\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}\cdot\frac{d}{d\varphi}\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{ctg}\varphi\,\frac{1}{\cos^2\varphi}=\frac{2}{\sin 2\varphi}.$$

4. piemērs.

$$\frac{d}{dx}x^{\sin x}=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right).$$

Dabū ar logaritmisko atvasināšanu (244. §). Apzīmējot $y=x^{\sin x}$, atrodam $\ln y=\sin x\ln x$, no kurienes

$$\frac{1}{y}\frac{d}{dx}y=\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}.$$

247. §. Ciklometrisko funkciju diferencēšana

Diferenciāļi	Atvasinājumi
I. $d\arcsin x=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,	$\frac{d}{dx}\arcsin x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
II. $d\arccos x=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,	$\frac{d}{dx}\arccos x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
III. $d\operatorname{arctg} x=\frac{dx}{1+x^2}$,	$\frac{d}{dx}\operatorname{arctg} x=\frac{1}{1+x^2}$,
IV. $d\operatorname{arcctg} x=-\frac{dx}{1+x^2}$;	$\frac{d}{dx}\operatorname{arcctg} x=-\frac{1}{1+x^2}$.

Šīs formulas jāiegaumē[1]. Nākošās divas formulas iegaumēt nav vajadzīgs.

[1] Formulas I—VI atrod no atbilstošajām 246. § formulām (sk. 241. §).

V. $d \operatorname{arcsc} x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad \frac{d}{dx} \operatorname{arcsc} x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},$

VI. $d \operatorname{arccsc} x = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}; \quad \frac{d}{dx} \operatorname{arccsc} x = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$

1. piemērs.

$$d \arcsin \frac{x}{a} = \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}. \tag{1}$$

2. piemērs.

$$d \operatorname{arctg} \frac{x}{a} = \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{adx}{a^2+x^2}. \tag{2}$$

3. piemērs.

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arctg} \frac{3x+5}{2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{3x+5}{2}\right) : \left[1+\left(\frac{3x+5}{2}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{9x^2+30x+29} = \frac{6}{9x^2+30x+29}.$$

4. piemērs.

$$d \arccos \frac{3}{4x-1} = d\left(\frac{3}{4x-1}\right) : -\sqrt{1-\left(\frac{3}{4x-1}\right)^2} =$$

$$= -\frac{3 \cdot 4 \cdot dx}{(4x-1)^2} : -\frac{\sqrt{(4x-1)^2-9}}{|4x-1|} = \frac{6dx}{|4x-1|\sqrt{4x^2-2x-2}}.$$

Piezīme. Funkcija $\arccos \frac{3}{4x-1}$ ir definēta tikai tām x vērtībām, kas apmierina nevienādību $\left|\frac{3}{4x-1}\right| \leqslant 1$, t. i., ja $x \geqslant 1$ vai $x \leqslant -\frac{1}{2}$. Intervālā $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ tā nav definēta. Ja diferenciāļa izteiksmē formāli ievieto kādu nederīgu vērtību (piemēram, $x=0$), tad tā iznāk imagināra.

247.a §. Daži pamācoši piemēri

Tālāk apskatītie piemēri ļauj noskaidrot smalkākas nianses, kas rodas, diferencējot ciklometriskās funkcijas.

1. piemērs.

$$d \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{dx}{1+x^2}.$$

Iegūtā izteiksme sakrīt ar funkcijas $\operatorname{arcctg} x$ diferenciāli. Tomēr pozitīviem x ir spēkā vienādība

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \operatorname{arcctg} x. \tag{1}$$

Negatīviem x dabūjam [1]

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x = -\pi. \tag{2}$$

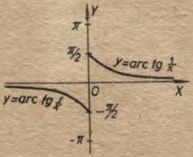
Punktā $x=0$ funkcija $\operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ (237. zīm.) ir pārtraukta (tās robeža no kreisās puses ir $-\frac{\pi}{2}$, bet no labās puses $+\frac{\pi}{2}$; sal. 219.a §) un tātad nediferencējama, kamēr funkcija $\operatorname{arcctg} x$ (238. zīm.) ir nepārtraukta un tās atvasinā-

[1] Formulu (2) var viegli pārbaudīt punktam $x=-1$, kuram dabūjam

$$\operatorname{arcctg} x = \frac{3\pi}{4}, \quad \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{4}.$$

No otras puses, starpība $\operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \operatorname{arcctg} x$ negatīvām x vērtībām ir pastāvīga, jo tās atvasinājums $\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)$ visiem $x<0$ ir vienāds ar nulli (sk. 226. § 1. p.). Tātad formula (2) ir spēkā *visām negatīvām* x vērtībām; ņemot $x=+1$ un spriežot tāpat, varam pārliecināties, ka formula (1) ir spēkā arī visām pozitīvām x vērtībām. Punktā $x=0$ funkcija $\operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ nav definēta, un tātad tai nav atvasinājuma. Lūk, kādēļ nedrīkst apgalvot, ka funkcija $\operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x$ ir pastāvīga *uz visas skaitļu ass* (sal. 265. § 1. teorēmu).

jums pie $x=0$ ir vienāds ar -1. Funkcijas $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ grafikas labais zars sakrīt ar funkcijas $y=\operatorname{arcctg} x$ grafika labo pusi, bet kreisais zars, — ar 238. zīmējumā parādītās punktētās līnijas kreiso pusi (šī līnija nedod daudzvērtīgās funkcijas $y=\operatorname{Arcctg} x$ galvenās vērtības).



237. zīm.

238. zīm.

2. piemērs.

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1+x}{1-x}\right):\left[1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2\right]=$$

$$=\frac{2}{(1-x)^2}\cdot\frac{(1-x)^2}{(1-x)^2+(1+x)^2}=\frac{1}{1+x^2}.$$

Iegūtā izteiksme sakrīt ar funkcijas $\operatorname{arctg} x$ atvasinājumu. Ja $x<1$, tad šo funkciju ar doto funkciju saista sakarība[1]

$$\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}=\operatorname{arctg} x+\frac{\pi}{4} \tag{3}$$

(239. zīm.), ja $x>1$, tad — sakarība

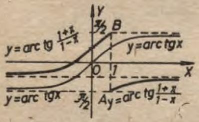
$$\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}=\operatorname{arctg} x-\frac{3\pi}{4}. \tag{4}$$

Punktā $x=1$ funkcijai $\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$ ir pārtraukums $AB=\pi$ un nav atvasinājuma.

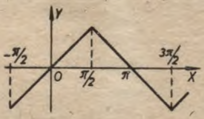
[1] Pierādījums ir tāds pats kā iepriekšējā zemteksta piezīmē.

3. piemērs.

$$\frac{d}{dx}\arcsin(\sin x)=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\cdot\frac{d}{dx}\sin x=\frac{\cos x}{|\cos x|}.$$



239. zīm.



240. zīm.

Šis atvasinājums ir vienāds ar $+1$, kad $\cos x>0$, un ar -1, kad $\cos x<0$. Vērtībām $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$, kad $\cos x=0$, atvasinājums neeksistē.

Piezīme. Intervālā $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ dabūjam $\arcsin(\sin x)=x$, intervālā $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$ dabūjam $\arcsin(\sin x)=$ $=\pi-x$, intervālā $\frac{3\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{2}$ dabūjam $\arcsin(\sin x)=x-2\pi$ utt. (240. zīm.). Tāpēc pirmā intervāla iekšienē atvasinājums ir vienāds ar 1, otrā — ar -1 utt. Punktos $x=$ $=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ atvasinājumam ir pārtraukums; visos šajos punktos eksistē vienpusīgie atvasinājumi (sal. 231. § 2. piemērs).

248. §. Diferenciālis aptuvenos aprēķinos

Bieži gadās, ka funkciju $f(x)$ un tās atvasinājumu $f'(x)$ viegli var aprēķināt vērtībai $x=a$, bet x vērtībām, kas maz atšķiras no a, funkcijas tieša aprēķināšana ir smaga. Tad var lietot aptuvenu formulu

$$f(a+h)\approx f(a)+f'(a)h. \qquad (1)$$

Tā izsaka, ka funkcijas $f(x)$ pieaugums $f(a+h)-f(a)$ mazām h vērtībām ir aptuveni vienāds [1] ar diferenciāli $f'(a)h$ (sal. 228. § 2. teorēmu).

Tālāk (265. §) norādīts paņēmiens, kā novērtēt formulas (1) kļūdu [2], bet novērtējums bieži prasa smagus aprēķinus. Rupjākos aprēķinos bieži apmierinās ar formulu (1).

1. p i e m ē r s. Izvilkt kvadrātsakni no 3654.

A t r i s i n ā j u m s. Jāatrod funkcijas $f(x)=\sqrt{x}$ vērtība, ja $x=3654$. Viegli var aprēķināt $f(x)$ un $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ vērtības, ja $x=3600$. Formula (1), ja $a=3600$ un $h=54$, dod $\sqrt{3654}\approx 60+\frac{1}{2\cdot 60}\cdot 54\approx 60{,}45$. Šeit visas zīmes ir pareizas.

2. p i e m ē r s. Atrast $10^{2,1}$.

A t r i s i n ā j u m s. Apzīmējam $f(x)=10^x$, tad (245. §) $f'(x)=\frac{1}{M}10^x\left(\frac{1}{M}\approx 2{,}3026\right)$. Formula (1), ja $a=2$, $h=0{,}1$, dod

$$10^{2,1}\approx 100+\frac{1}{M}\cdot 100\cdot 0{,}1\approx 123{,}0.$$

Šis rezultāts ir aptuvens (ar precizitāti līdz ceturtajam zīmīgajam ciparam $10^{2,1}=125{,}9$).

Ja tādā pašā veidā aprēķina $10^{2,01}$ (tagad $h=0{,}01$), tad dabū 102,3. Šeit visas zīmes ir pareizas.

3. p i e m ē r s. Atrast bez tabulām tg 46°.

A t r i s i n ā j u m s. Apzīmējam $f(x)=\operatorname{tg} x$, $a=45°$, $h==1°=0{,}0175$ radiāna; tad dabūjam $f'(a)=\frac{1}{\cos^2 45°}=2$. Tātad $\operatorname{tg} 46°\approx 1+2\cdot 0{,}0175=1{,}0350$.

Nepareiza ir tikai pēdējā zīme; no tabulām atrodam $\operatorname{tg} 46°=1{,}0355$.

---

[1] Ja $f'(a)=0$, tad formula (1) izsaka, ka funkcijas pieaugums ir mazs, salīdzinot ar h; tad pietiekami mazām h vērtībām praktiski var pieņemt, ka $f(a+h)=f(a)$.

[2] Sk. arī 271. § piezīmi.

Der ievērot šādas aptuvenas formulas[1] (α ir mazs lielums):

$$\frac{1}{1+\alpha}\approx 1-\alpha, \qquad \frac{1}{1-\alpha}\approx 1+\alpha; \tag{2}$$

$$\frac{1}{(1+\alpha)^2}\approx 1-2\alpha, \qquad \frac{1}{(1-\alpha)^2}\approx 1+2\alpha; \tag{3}$$

$$\sqrt{1+\alpha}\approx 1+\frac{1}{2}\alpha, \qquad \sqrt{1-\alpha}\approx 1-\frac{1}{2}\alpha; \tag{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}\approx 1-\frac{1}{2}\alpha, \qquad \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}\approx 1+\frac{1}{2}\alpha; \tag{5}$$

$$\sqrt[3]{1+\alpha}\approx 1+\frac{1}{3}\alpha, \qquad \sqrt[3]{1-\alpha}\approx 1-\frac{1}{3}\alpha; \tag{6}$$

$$\ln(1+\alpha)\approx\alpha, \qquad \ln(1-\alpha)\approx -\alpha; \tag{7}$$

$$e^{\alpha}\approx 1+\alpha, \qquad 10^{\alpha}\approx 1+\frac{1}{M}\alpha; \tag{8}$$

$$\sin\alpha\approx\alpha, \qquad \cos\alpha\approx 1-\frac{1}{2}\alpha^2, \ \operatorname{tg}\alpha\approx\alpha. \tag{9}$$

249. §. Diferenciāļa pielietošana, novērtējot formulu kļūdas

Mērīšanas rezultāti satur kļūdas, kuras rodas mērinstrumentu neprecizitātes dēļ. Pozitīvu skaitli, kas droši pārsniedz kļūdu pēc absolūtās vērtības (vai sliktākajā gadījumā ir vienāds ar šo kļūdu) sauc par *absolūto robežkļūdu* jeb, īsāk, par *robežkļūdu*. Robežkļūdas attiecību pret mērījamā lieluma absolūto vērtību sauc par *relatīvo robežkļūdu*.

1. piemērs. Zīmuļa garums izmērīts ar lineālu ar milimetru iedaļām. Mērījums parādīja 17,9 *cm*. Kļūda nav zināma, bet tā droši ir mazāka par 0,1 *cm*. Tāpēc 0,1 *cm* var

---

[1] Formulas (2)—(6) ir formulas

$$(1+\alpha)^n\approx 1+n\alpha$$

atsevišķi gadījumi; pēdējo formulu var dabūt no (1), ja ņem $f(x)=x^n$, $a=1$, $h=\alpha$.

pieņemt par robežkļūdu. Relatīvā robežkļūda ir vienāda ar $\frac{0,1}{17,9}$. Noapaļojot uz lielāko pusi, dabūjam 0,6%.

R o b e ž k ļ ū d a s a t r a š a n a. Pieņemsim, ka funkciju y aprēķina ar precīzu formulu $y=f(x)$, bet y vērtību iegūst mērījumu ceļā un tāpēc tā satur kļūdu. Tad funkcijas absolūto robežkļūdu $|\Delta y|$ atrod ar formulu

$$|\Delta y| \approx |dy| = |f'(x)|\,|\Delta x|, \tag{1}$$

kur $|\Delta x|$ ir argumenta robežkļūda. Lielumu $|\Delta y|$ noapaļo uz lielāko pusi (ievērojot pašas formulas neprecizitāti).

2. p i e m ē r s. Ar mērīšanu atrastā kvadrāta mala iznāca vienāda ar 46 *m*. Robežkļūda ir vienāda ar 0,1 *m*. Atrast robežkļūdu kvadrāta laukumam.

A t r i s i n ā j u m s. Varam rakstīt $y=x^2$ (x ir kvadrāta mala, y — laukums). No šejienes $|\Delta y| \approx 2|x|\,|\Delta x|$. Mūsu piemērā $x=46$ un $|\Delta x|=0,1$. Tātad $|\Delta y| \approx 2 \cdot 46 \cdot 0,1 = 9,2$. Absolūtā robežkļūda ir vienāda (noapaļoti) ar 10 m^2. Relatīvā robežkļūda ir vienāda ar $\frac{10}{46^2} \approx 0,5\%$.

Relatīvo robežkļūdu $\frac{\Delta y}{y}$ var atrast arī ar logaritmisko diferencēšanu (244. §) ar formulu

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right| \approx |d \ln y|. \tag{2}$$

Atsevišķā gadījumā, ja $y=x^n$ $\left(\text{tad } d \ln y = \frac{n\,dx}{x}\right)$, dabūjam

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right| \approx n \left|\frac{\Delta x}{x}\right|, \tag{3}$$

t. i., *pakāpes x^n relatīvā robežkļūda ir vienāda ar n-kārtīgu argumenta relatīvo robežkļūdu.*

3. p i e m ē r s. 2. piemērā laukuma relatīvā robežkļūda ir $2 \cdot \frac{0,1}{46} \approx 0,5\%$.

4. p i e m ē r s. Kuba šķautnes mērījums deva $x=12,4$ *cm*. Robežkļūda ir 0,05 *cm*. Kāda ir relatīvā robežkļūda kuba tilpumam?

Atrisinājums. Relatīvā robežkļūda šķautnei x ir vienāda ar $\frac{0{,}05}{12{,}4} \approx 0{,}004$; tilpumam x^3 tā ir vienāda ar $3 \cdot 0{,}004 = 0{,}012$.

1. kārtula. Divu vai vairāku reizinātāju relatīvā robežkļūda ir vienāda ar atsevišķo reizinātāju relatīvo robežkļūdu summu.

2. kārtula. Daļas relatīvā robežkļūda ir vienāda ar skaitītāja un saucēja relatīvo robežkļūdu summu.

Šīs kārtulas izriet no 239. un 240. §[1].

5. piemērs. Lai aprēķinātu ķermeņa īpatnējo svaru, atrod tā svaru $p=20\ g$ un tā izspiestā ūdens svaru $v=40\ g$. Absolūtā robežkļūda svaram p ir vienāda ar 0,5 g, bet svaram v tā ir vienāda ar 1 g. Aprēķināt relatīvo robežkļūdu īpatnējam svaram.

Atrisinājums. Īpatnējais svars y ir vienāds ar $\frac{p}{v}$. Dabūjam

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right| = \left|\frac{\Delta p}{p}\right| + \left|\frac{\Delta v}{v}\right| = \frac{0{,}5}{20} + \frac{1}{40} = 0{,}05.$$

6. piemērs. Cilindra augstums h un pamata rādiuss r ir izmērīti ar precizitāti līdz 1%. Atrast relatīvo robežkļūdu 1) cilindra sānvirsmai S, 2) tilpumam V.

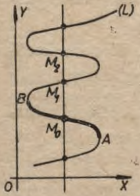
Atrisinājums. Kā zināms, $S=2\pi rh$. Reizinātājs 2π ir precīzs skaitlis; tā kļūda ir vienāda ar nulli. Relatīvā kļūda virsmai S ir $\left|\frac{\Delta S}{S}\right| = \left|\frac{\Delta r}{r}\right| + \left|\frac{\Delta h}{h}\right| = 2\%$, bet tilpumam $V=\pi r^2 h$ tā ir vienāda ar $2\left|\frac{\Delta r}{r}\right| + \left|\frac{\Delta h}{h}\right| = 3\%$.

---

[1] Formula $d \ln \frac{u}{v} = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v}$ dod relatīvo robežkļūdu $\left|\frac{du}{u}\right| + \left|\frac{dv}{v}\right|$, bet ne $\left|\frac{du}{u} - \frac{dv}{v}\right|$, jo lielumiem $\frac{du}{u}$ un $\frac{dv}{v}$ var būt dažādas zīmes.

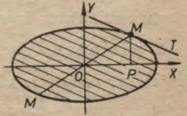
250. §. Apslēptu funkciju diferencēšana

Pieņemsim, ka vienādojums, kurš saista x un y un kuru apmierina vērtības $x=x_0$ un $y=y_0$, definē y kā x funkciju. Lai atrastu atvasinājumu $\frac{dy}{dx}$ punktā $x=x_0$, $y=y_0$, nav nepieciešams meklēt funkcijas atklāto izteiksmi. Pietiek pie-



241. zīm.

242. zīm.



243. zīm.

līdzināt vienādojuma abu pušu diferenciāļus un no dabūtās vienādības atrast attiecību $dy : dx$.

Piezīme. Vienādojums, kas saista x un y, var definēt y kā daudzvērtīgu x funkciju $F(x)$. Bet, uzdodot vērtību pāri $x=x_0$ un $y=y_0$, mēs no funkcijas daudzajām vērtībām izdalām vienu.

Ģeometriski: OY asij paralēla taisne (241. zīm.) var krustot līniju L vairākos punktos $M_0, M_1, M_2, \ldots$, bet, uzdodot punktu M_0, mēs izdalām caur to ejošu loku AM_0B, kurš izsaka vienvērtīgu funkciju.

1. piemērs. Atrast atvasinājumu apslēptai funkcijai, kas uzdota ar vienādojumu $x^2+y^2=25$, punktā $x=4$, $y=-3$.

Pirmais paņēmiens. Atrisinot vienādojumu, dabūjam $y=-\sqrt{25-x^2}$ (izvēlamies mīnusa zīmi, jo, ja $x=4$, tad jābūt $y=-3$). Tagad atrodam

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}=\frac{4}{3}.$$

Otrais paņēmiens. Pielīdzinot labās un kreisās puses diferenciāļus, atrodam

$$2x\,dx+2y\,dy=0,$$

no kurienes

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}=\frac{4}{3}. \tag{1}$$

Mēs esam atraduši riņķa līnijas $x^2+y^2=25$ (242. zīm.) pieskares M_0T virziena koeficientu punktā $M_0(4; -3)$.

Rādiusa OM_0 virziena koeficients ir $-\frac{3}{4}$. Virziena koeficientu reizinājums ir vienāds ar -1, t. i., $OM_0 \perp M_0T$.

2. piemērs. Atrast atvasinājumu $\frac{dy}{dx}$ apslēptai funkcijai, kas uzdota ar vienādojumu[1]

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{2}$$

Diferencējot atrodam

$$\frac{2x\,dx}{a^2}+\frac{2y\,dy}{b^2}=0,$$

no šejienes

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}. \tag{3}$$

Vienādojums (2) izsaka elipsi. Saskaņā ar (3) pieskares MT (243. zīm.) virziena koeficients ir $-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$. Diametra MM' virziena koeficients ir $\frac{y}{x}$. Virziena koeficientu reizinājums ir vienāds ar $-\frac{b^2}{a^2}$. Tātad (55. §) virzieni MT un MM' ir saistīti, t. i., diametrs MM' dala MT paralēlās hordas uz pusēm.

Tāda pati īpašība piemīt hiperbolas un parabolas diametriem.

[1] Vienādojums (2) definē y kā divvērtīgu x funkciju, bet tiklīdz kļūst zināmas abu mainīgo vērtības, no divām funkcijas vērtībām tiek izdalīta viena (sal. 1. piemēru).

251. §. Līniju parametriskā uzdošana

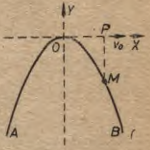
Jebkuru mainīgu lielumu t, kas nosaka punkta stāvokli uz kādas līnijas, sauc par parametru[1]. Mehānikā par parametru visbiežāk izvēlas laiku.

Punkta koordinātes, kurš atrodas uz līnijas L, ir parametra funkcijas

$$x=\varphi(t), \tag{1}$$

$$y=f(t). \tag{2}$$

Vienādojumus (1)—(2) sauc par līnijas L *parametriskajiem vienādojumiem* (sal. 152. §).



244. zīm.

Ja vajadzīgs atrast vienādojumu, kas saista līnijas L koordinātes x, y, tad no vienādojumiem (1)—(2) jāizslēdz t (sk. 1. un 2. piemēru).

Var tomēr gadīties, ka vienādojums, kuru dabū pēc t izslēgšanas, izsaka tādu līniju, kuru līnija L sedz tikai daļēji (sk. 3. piemēru).

1. piemērs. Pieņemsim, ka O (244. zīm.) ir slīpā leņķī pret horizontu izsviesta materiāla punkta visaugstākais stāvoklis, bet t — laiks, kuru skaita no visaugstākās pacelšanās momenta. Punkta M stāvokli uz trajektorijas AOB nosaka lielums t, tātad t ir parametrs. Trajektorijas parametriskie vienādojumi sistēmā XOY būs

$$x=OP=v_0t, \tag{3}$$

$$y=PM=-\frac{1}{2}\,gt^2. \tag{4}$$

Šie vienādojumi izsaka, ka horizontālā virzienā punkts M kustas vienmērīgi ar ātrumu v_0, bet vertikālā — vienmērīgi paātrināti (g ir Zemes pievilkšanas paātrinājums).

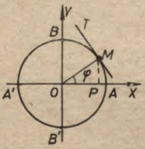
---

[1] Terminu «parametrs» lieto vēl citādā nozīmē, apzīmējot ar to lielumu, kurš dotajai līnijai ir nemainīgs, bet mainās, pārejot no vienas apskatāmā tipa līnijas uz otru. Tā parabolas vienādojumā $y^2=2px$ lielums p ir pastāvīgs dotajai parabolai, bet mainās, pārejot uz citu parabolu.

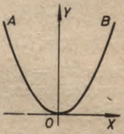
Izslēdzot t, atrodam vienādojumu

$$y = -\frac{g}{2v_0^2} x^2, \tag{5}$$

kas rāda, ka kustība notiek pa parabolu.



245. zīm.



246. zīm.

2. piemērs. Punkta M stāvokli uz riņķa līnijas $ABA'B'$ ar rādiusu R (245. zīm.) nosaka leņķa $\varphi = \angle AOM$ lielums, tātad φ ir parametrs. Novietojot asis, kā parādīts 245. zīmējumā, dabūjam riņķa līnijas parametriskos vienādojumus

$$x = R\cos\varphi, \tag{6}$$

$$y = R\sin\varphi. \tag{7}$$

Lai izslēgtu φ, kāpinām (6) un (7) kvadrātā un saskaitām; dabūsim

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{8}$$

3. piemērs. Apskatām līniju, ko izsaka parametriskie vienādojumi

$$x = \sqrt{t}, \quad y = \frac{1}{2} t. \tag{9}$$

Izslēdzot t, dabūjam vienādojumu $y = \frac{1}{2} x^2$, kas izsaka parabolu AOB (246. zīm.). Līnija (9) ir šīs parabolas puse (OB), kas atbilst pozitīvām x vērtībām.

252. §. Funkciju parametriskā uzdošana

Pieņemsim, ka dotas divas argumenta t funkcijas

$$x=\varphi(t), \quad y=f(t). \tag{1}$$

Tad viena no tām, piemēram, y, ir otras funkcija[1]. Šīs funkcijas uzdošanu ar vienādībām (1) sauc par *parametrisku*, palīglielumu t sauc par *parametru*.

Lai dabūtu y kā atklātu x funkciju, vienādojums $x=\varphi(t)$ jāatrisina attiecībā pret t (tas ne vienmēr izdodas) un atrastā izteiksme jāievieto vienādojumā $y=f(t)$.

Bieži, tieši otrādi, ir izdevīgāk pāriet no neparametriskā vienādojuma uz parametriskajiem vienādojumiem. Izmantojot to, ka vienu funkciju $f(t)$ vai $\varphi(t)$ var izvēlēties patvaļīgi, cenšas panākt abu funkciju vienvērtību un pēc iespējas vienkāršumu.

Atvasinājumu $\frac{dy}{dx}$ ar parametru t izsaka formula

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df(t)}{d\varphi(t)}=\frac{f'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{2}$$

Ja funkcija uzdota parametriski, tad abi mainīgie x, y atrodas līdztiesīgā stāvoklī (sal. 251. §).

1. piemērs. Dotas divas funkcijas

$$x=R\cos t, \quad y=R\sin t. \tag{3}$$

Tās parametriski uzdod y kā divvērtīgu x funkciju (un otrādi). No pirmā vienādojuma atrodam $\cos t=\frac{x}{R}$, tātad $\sin t=\pm\sqrt{1-\frac{x^2}{R^2}}$. Ievietojot šo izteiksmi otrajā vienādojumā, dabūjam

$$y=\pm\sqrt{R^2-x^2}. \tag{4}$$

Tas ir riņķa līnijas vienādojums (sal. 251. § 2. piemēru).

[1] Parasti tā ir daudzvērtīga, pat ja funkcijas $f(t)$ un $\varphi(t)$ ir vienvērtīgas.

Parametrs t ir leņķis XOM (sk. 245. zīm.). Atvasinājums $\frac{dy}{dx}$, izteikts ar parametru t, ir vienāds ar

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(R\sin t)}{d(R\cos t)}=-\operatorname{ctg} t. \tag{5}$$

Tas ir pieskares MT virziena koeficients.

2. piemērs. Vienādojums

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{6}$$

kas izsaka elipsi, uzdod divvērtīgu funkciju

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Lai šo funkciju uzdotu parametriski, vienu mainīgo, piemēram x, var izteikt kā patvaļīgu t funkciju. Ņemot $\frac{x}{a}=\cos t$, atrodam $\frac{y}{b}=\pm\sin t$. Zīmi var izvēlēties pēc patikas. Ņemam plusa zīmi. Dabūsim parametriski uzdotu funkciju

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t. \tag{7}$$

Parametra t ģeometrisko nozīmi var redzēt no 247. zīm., kur ANA' ir riņķa līnija ar rādiusu a un N — punkts, kas ņemts uz vienas vertikāles ar elipses punktu M tai pašā pusē[1] no ass AA'. Dabūjam $t=\angle AON$. Atvasinājumu $\frac{dy}{dx}$ ar t izsaka formula

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(b\sin t)}{d(a\cos t)}=-\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t.$$

247. zīm.

Tas ir pieskares MT virziena koeficients.

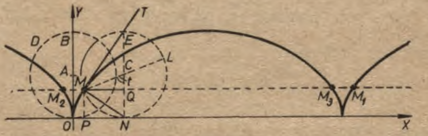
Piezīme. Parasto funkcijas uzdošanas veidu $y=f(x)$ var uzskatīt par parametriskā uzdošanas veida atsevišķu gadījumu, proti, to var uzrakstīt veidā

$$x=t,\quad y=f(t).$$

[1] Ja ņemam $\frac{y}{b}=-\sin t$, tad N jāņem otrā pusē.

253. §. Cikloīda

Par *cikloīdu* sauc līniju, kuru apraksta riņķa līnijas punkts M, ja tā rit bez slīdes pa taisnu līniju *(vadītāju)*. Ritošo riņķa līniju sauc par *veidotāju*.



248. zīm.

248. zīmējumā vadītāja ir taisne OX; veidojošā riņķa līnija dota divos stāvokļos: «sākuma stāvoklī» (ODB), kad punkts M atrodas uz vadītājas OX, un «starpstāvoklī» (NME).

Piezīme. Izteiciens «rit bez slīdes» nozīmē, ka pieskaršanās punkts N atrodas no tā sākuma stāvokļa O attālumā, kas ir vienāds ar loku NM, t. i.,

$$ON = \smile{NM}. \qquad (1)$$

Cikloīdas parametriskie vienādojumi. Ja koordinātu asis novieto tā, kā parādīts 248. zīmējumā, un par parametru ņem leņķi $t = \angle MCN$, tad dabūjam šādus cikloīdas parametriskos vienādojumus [1]

$$x = a(t - \sin t), \qquad (2)$$

$$y = a(1 - \cos t), \qquad (3)$$

kur a ir veidojošās riņķa līnijas rādiuss.

Ja vienādojumu (3) atrisinām attiecībā pret t un ievie-

---

[1] Leņķa t vērtība var būt pozitīva un negatīva un tai var būt jebkura absolūtā vērtība; ja $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$, tad vienādojumus (2)—(3) viegli atrast no 248. zīmējuma:

$$x = OP = ON - PN = \smile{NM} - MQ = at - a \sin t,$$

$$y = PM = NC - QC = a - a \cos t.$$

tojam vienādojumā (2), tad dabūjam x kā bezgalīgi daudzvērtīgu y funkciju

$$x=2ak\pi\pm\left(a\arccos\frac{a-y}{a}-\sqrt{y(2a-y)}\right),\tag{4}$$

kur k ir jebkurš vesels skaitlis [1].

Ordināte y ir vienvērtīga, bet ne elementāra x funkcija (sk. 248. zīm.).

Pieskares virziena koeficients k ir

$$k=\frac{dy}{dx}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)},\tag{5}$$

bet taisnes NM virziena koeficients k' ir

$$k'=\frac{y-y_N}{x-x_N}=\frac{a(1-\cos t)}{-a\sin t}.\tag{6}$$

Tādējādi $kk'=-1$, t. i., $MT\perp MN$. Tātad, lai konstruētu cikloīdai pieskari, pietiek punktu M savienot ar veidojošās riņķa līnijas visaugstāko punktu (leņķis NME ir taisns, kā ievilkts leņķis, kas balstās uz diametra).

254. §. Plaknes līnijas pieskares vienādojums

Pieņemsim, ka MT (249. zīm.) ir līnijas L pieskare punktā $M(x; y)$. Apzīmēsim pieskares tekošā punkta N koordinātes ar X, Y.

Lai kā būtu uzdota līnija L (atklāti, apslēpti vai parametriski), pieskares vienādojumu var uzrakstīt šādā simetriskā formā

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}.\tag{1}$$

Ja līnija ir uzdota ar vienādojumu $y=f(x)$, tad no (1) dabūjam [2]

$$Y-y=f'(x)(X-x).\tag{2}$$

---

[1] 248. zīmējumā punktiem M, M_1 utt. atbilst plusa zīme pirms iekavām, punktiem M_2, M_3 utt. — mīnusa zīme.

[2] Pieņemts, ka atvasinājums $f'(x)$ punktā M ir galīgs. Ja turpretim $f'(x)=\infty$ (231. § 1. gadījums), tad (2) vietā dabūjam vienādojumu

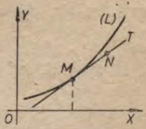
$$X-x=0$$

(pieskare paralēla ordinātu asij).

Ja līnija L ir uzdota parametriski, tad dabūjam

$$\frac{X-x}{y'}=\frac{Y-y}{x'}, \tag{3}$$

kur x', y' ir atvasinājumi pēc parametra.



249. zīm.

Ja līnija L ir uzdota apslēpti, tad pielīdzinām vienādojuma abu pušu diferenciāļus (sal. 250. §) un dabūtajā vienādībā dx, dy aizstājam ar tiem proporcionāliem lielumiem $X-x$, $Y-y$.

1. piemērs. Atrast pieskares vienādojumu parabolai $y=x^2-3x+2$ punktā $(0; 2)$.

Dabūjam $y'=2x-3=-3$. Saskaņā ar (2) meklētais vienādojums ir $Y-2=-3X$.

2. piemērs. Atrast pieskares vienādojumu elipsei

$$x=5\sqrt{2}\cos t, \quad y=3\sqrt{2}\sin t \tag{4}$$

punktā $M(-5; 3)$ (sal. 252. § 2. piemēru).

Atrisinājums. Dotajam punktam atbilst vērtība $t=\frac{3\pi}{4}$. No (4) atrodam

$$x'=-5\sqrt{2}\sin t=-5, \quad y'=3\sqrt{2}\cos t=-3.$$

Saskaņā ar (3) pieskares vienādojums ir

$$\frac{X+5}{-5}=\frac{Y-3}{-3},$$

t. i.,

$$3X-5Y+30=0.$$

3. piemērs. Atrast pieskares vienādojumu vienādsānu hiperbolai $xy=m^2$ punktā $\left(\frac{m}{2}; 2m\right)$.

Atrisinājums. Pielīdzinot vienādojuma abu pušu diferenciāļus, dabūjam

$$xdy+ydx=0.$$

Aizstājot dx, dy ar lielumiem $X-x$, $Y-y$, atrodam

$$x(Y-y)+y(X-x)=0. \tag{5}$$

Tā kā $xy=m^2$, tad (5) var pārrakstīt arī tā:

$$xY+yX=2m^2. \tag{6}$$

Ievietojot $x=\frac{m}{2}$, $y=2m$ vienādojumā (5) vai (6), atrodam

$$Y+4X=4m.$$

254.a §. Otrās kārtas līniju pieskares

Līnijas vienādojums	Pieskares vienādojums
Elipse	
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$	$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}=1,$
Hiperbola	
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$	$\frac{xX}{a^2}-\frac{yY}{b^2}=1,$
Parabola	
$y^2=2px,$	$yY=p(X+x).$

255. §. Normāles vienādojums

Par līnijas L *normāli* punktā M (250. zīm.) sauc pret pieskari MT novilkto perpendikuli MN.

Ievērojot 254. § vienādojumu (1), normāles vienādojumu var uzrakstīt formā

$$(X-x)dx+(Y-y)dy=0. \tag{1}$$

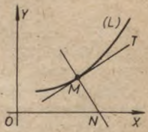
Atbilstoši 254. § vienādojumiem (2) un (3) normāles vienādojumu var rakstīt arī šādā formā

$$Y-y=-\frac{1}{f'(x)}(X-x), \tag{2}$$

$$(X-x)x'+(Y-y)y'=0. \tag{3}$$

Ja līnija L uzdota apslēpti, tad pielīdzinām vienādojuma abu pušu diferenciāļus un ar vienādojuma (1) palīdzību izslēdzam dx un dy.

1. p i e m ē r s. Atrast normāles vienādojumu parabolai $y=\frac{1}{2}x^2$ punktā $(-2; 2)$.



250. zīm.

Dabūjam $y'=x=-2$; saskaņā ar (2) meklētais vienādojums ir

$$Y-2=\frac{1}{2}(X+2).$$

2. p i e m ē r s. Normāles vienādojums cikloīdai (253. §)

$$x=a(t-\sin t), \quad y=a(1-\cos t) \tag{4}$$

saskaņā ar (3) ir

$$(X-x)(1-\cos t)+(Y-y)\sin t=0 \tag{5}$$

jeb, ievērojot (4),

$$X(1-\cos t)+Y\sin t-at(1-\cos t)=0. \tag{6}$$

Šo vienādojumu apmierina $X=at$, $Y=0$; tātad normāle iet (sk. 248. zīm.) caur veidojošās riņķa līnijas atbalsta punktu $N(at; 0)$.

3. p i e m ē r s. Atrast normāles vienādojumu elipsei

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Diferencējot atrodam

$$\frac{x\,dx}{a^2}+\frac{y\,dy}{b^2}=0. \tag{7}$$

Izslēdzot no (7) un (1) diferenciāļus, atrodam

$$\frac{(X-x)y}{b^2}=\frac{(Y-y)x}{a^2}.$$

256. §. Augstāku kārtu atvasinājumi

Ja $f'(x)$ ir funkcijas $f(x)$ atvasinājums, tad funkcijas $f'(x)$ atvasinājumu sauc par funkcijas $f(x)$ *otro atvasinājumu* un apzīmē ar simbolu $f''(x)$.

Otro atvasinājumu sauc arī par *otrās kārtas atvasinājumu*. Atšķirībā no tā $f'(x)$ sauc par *pirmās kārtas atvasinājumu* jeb *pirmo atvasinājumu*.

Otrā atvasinājuma atvasinājumu sauc par funkcijas $f(x)$ *trešo atvasinājumu* (jeb *trešās kārtas atvasinājumu*); to apzīmē ar simbolu $f'''(x)$.

Tādā pašā veidā definē ceturtās kārtas atvasinājumu $f^{\mathrm{IV}}(x)$, piektās kārtas atvasinājumu $f^{\mathrm{V}}(x)$ utt. (prim zīmīšu vietā lieto ciparu apzīmējumus, romiešu ciparus ņem, lai atšķirtu no pakāpes rādītājiem).

n-tās kārtas atvasinājumu apzīmē ar simbolu $f^{(n)}(x)$.

Ja funkcija apzīmēta ar vienu burtu, piemēram y, tad tās atvasinājumus apzīmē tā:

$$y',\ y'',\ y''',\ y^{\mathrm{IV}},\ y^{\mathrm{V}},\ \ldots,\ y^{(n)}.$$

1. piemērs. Atrast visus atvasinājumus funkcijai $f(x)=x^4$.

Atrisinājums.

$$f'(x)=4x^3,\quad f''(x)=(4x^3)'=12x^2;$$

$$f'''(x)=24x,\quad f^{\mathrm{IV}}(x)=24,\quad f^{\mathrm{V}}(x)=0.$$

Visi tālākie atvasinājumi arī ir vienādi ar nulli.

2. piemērs. Ja $y=\sin x$, tad

$$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\quad y''=-\sin x=\sin(x+\pi),$$

$$y'''=-\cos x=\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right),\ \ldots,\quad y^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

Atvasinājumu vērtības pie dotās argumenta vērtības $x=a$ apzīmē ar simboliem $f'(a)$, $f''(a)$, $f'''(a)$ utt. 1. piemērā dabūjam $f'(2)=32$, $f''(2)=48$ utt.

3. piemērs. Ja $f(x)=\ln(1+x)$, tad

$$f'(x)=\frac{1}{1+x},\quad f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2},\quad f'''(x)=\frac{1\cdot 2}{(1+x)^3},$$

$$f^{IV}(x)=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4},\ldots,\quad f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Tātad

$$f(0)=0,\quad f'(0)=1,\quad f''(0)=-1,\quad f'''(0)=2!,$$

$$f^{IV}(0)=-3!,\ldots,\quad f^{(n)}(0)=(-1)^{n+1}(n-1)!.$$

257. §. Otrā atvasinājuma mehāniskā nozīme

Pieņemsim, ka punkts kustas taisnā virzienā un, nogājis laikā t ceļu s, ir ieguvis ātrumu v. Pieņemsim, ka šis ātrums mainās un laika intervālā $(t, t+\Delta t)$ ieguvis pieaugumu Δv. Tad attiecība $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ dod ātruma izmaiņu, kas aprēķināta (vidēji) uz laika vienību, un to sauc par *vidējo paātrinājumu*. Šī attiecība raksturo ātruma izmaiņas straujumu momentā t jo precīzāk, jo mazāks ir Δt. Tāpēc par *paātrinājumu* (momentā t) nosauc attiecības $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ robežu, kad $\Delta t \to 0$, t. i., atvasinājumu $\frac{dv}{dt}$. Bet pats ātrums v ir atvasinājums $\frac{ds}{dt}$. Tāpēc paātrinājums ir ceļa otrais atvasinājums pēc laika.

Piemērs. Membrānas nerimstošu svārstību kustību apraksta vienādojums

$$s=a\sin\frac{2\pi t}{T} \tag{1}$$

(T ir svārstību periods, a — svārstību amplitūda, s — membrānas punkta atvirze no miera stāvokļa).

Kustības ātrums ir

$$v=s'=\frac{2\pi a}{T}\cos\frac{2\pi t}{T}. \tag{2}$$

Paātrinājums ir

$$v'=s''=\frac{-4\pi^2 a}{T^2}\sin\frac{2\pi t}{T}. \tag{3}$$

Salīdzinot (2) un (3), redzam, ka

$$s'' = -\frac{4\pi^2}{T^2}s, \tag{4}$$

t. i., svārstību elastības spēks (saskaņā ar otro Ņūtona likumu tas ir proporcionāls paātrinājumam) ir proporcionāls atvirzei, bet ar pretēju vērsumu.

258. §. Augstāku kārtu diferenciāļi

Apskatīsim vienādi attālinātu argumenta vērtību virkni

$$x, \quad x+\Delta x, \quad x+2\Delta x, \quad x+3\Delta x, \ldots$$

un atbilstošās funkcijas vērtības

$$y=f(x), \quad y_1=f(x+\Delta x), \quad y_2=f(x+2\Delta x),$$

$$y_3=f(x+3\Delta x), \ldots$$

Lietosim apzīmējumus

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x),$$

$$\Delta y_1=f(x+2\Delta x)-f(x+\Delta x),$$

$$\Delta y_2=f(x+3\Delta x)-f(x+2\Delta x)$$

utt. Lielumus Δy, Δy_1, $\Delta y_2, \ldots$ sauc par funkcijas $f(x)$ pirmajām diferencēm. Par otrajām diferencēm sauc lielumus $\Delta y_1-\Delta y$, $\Delta y_2-\Delta y_1$ utt. Tās apzīmē ar $\Delta^2 y$, $\Delta^2 y_1$ utt.

$$\Delta^2 y=\Delta y_1-\Delta y,$$

$$\Delta^2 y_1=\Delta y_2-\Delta y_1.$$

Analogi definē trešās diferences $\Delta^3 y=\Delta^2 y_1-\Delta^2 y$ utt.

1. piemērs. Pieņemsim, ka $f(x)=x^3$ un $x=2$. Pirmās diferences būs

$$\Delta y=(2+\Delta x)^3-2^3=12\Delta x+6\Delta x^2+\Delta x^3,$$

$$\Delta y_1=(2+2\Delta x)^3-(2+\Delta x)^3=12\Delta x+18\Delta x^2+7\Delta x^3,$$

$$\Delta y_2=(2+3\Delta x)^3-(2+2\Delta x)^3=12\Delta x+30\Delta x^2+19\Delta x^3,$$

. . . .

Otrās diferences

$$\Delta^2 y = \Delta y_1 - \Delta y = 12\Delta x^2 + 6\Delta x^3,$$
$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = 12\Delta x^2 + 12\Delta x^3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Trešās diferences

$$\Delta^3 y = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y = 6\Delta x^3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ja Δx ir bezgalīgi mazs, tad pirmā diference parasti ir pirmās kārtas bezgalīgi mazs lielums attiecībā pret Δx, otrā diference — otrās kārtas, trešā — trešās utt.

Pirmās diferences galveno locekli ($12\Delta x$ 1. piemērā) mēs nosaucām par funkcijas diferenciāli. Tagad sauksim to par *pirmo diferenciāli.* Par *otro diferenciāli* mēs nosauksim otrās diferences galveno locekli, kas proporcionāls Δx^2 (1. piemērā $12\Delta x^2$), par *trešo diferenciāli* — trešās diferences galveno locekli, kas proporcionāls Δx^3 (1. piemērā $6\Delta x^3$) utt. Formulēsim to precīzi.

Definīcija. Pieņemsim, ka funkcijas $y=f(x)$ otrā diference $\Delta^2 y$ ir sadalīta divu locekļu summā

$$\Delta^2 y = B\Delta x^2 + \beta,$$

kur B nav atkarīgs no Δx un loceklis β ir augstākas kārtas bezgalīgi mazs lielums attiecībā pret Δx^2. Tad locekli $B\Delta x^2$ sauc par funkcijas y *otro diferenciāli* un apzīmē ar $d^2 y$ jeb $d^2 f(x)$. Analogi definē augstāku kārtu diferenciāļus.

1. teorēma. Koeficients B pie Δx^2 otrā diferenciāļa izteiksmē ir vienāds ar otro atvasinājumu $f''(x)$. Koeficients C pie Δx^3 trešā diferenciāļa $C\Delta x^3$ izteiksmē ir vienāds ar trešo atvasinājumu utt.

2. piemērs. Ja $f(x)=x^3$, tad $f''(x)=6x$. Saskaņā ar to $d^2(x^3)=6x\Delta x^2$. Ja $x=2$, tad dabūjam $d^2(x^3)=12\Delta x^2$ (sal. 1. piemēru). Tālāk $f'''(x)=6$ (jebkurai x vērtībai); saskaņā ar to $d^3(x^3)=6\Delta x^3$.

1. teorēmu vēl var formulēt tā.

1.a teorēma. n-tās kārtas diferenciālis ir vienāds ar n-tās kārtas atvasinājuma un neatkarīgā mainīgā n-tās pakāpes pieauguma reizinājumu, t. i.,

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x)\Delta x^n. \qquad (1)$$

Tā kā neatkarīgajam mainīgajam dabūjam

$$\Delta x = dx,$$

tad

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x)\,dx^n\ ^{1}. \qquad (2)$$

3. p i e m ē r s. $d(x^4) = 4x^3dx$, $d^2(x^4) = 12x^2dx^2$; $d^3(x^4) = 24x\,dx^3$, $d^4(x^4) = 24dx^4$, $d^5(x^4) = 0$, $d^6(x^4) = d^7(x^4) = \ldots = 0$ (sal. 256. § 1. piemēru).

4. p i e m ē r s. $d^n(\sin x) = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right) dx^n$ (sal. 256. § 2. piemēru).

2. t e o r ē m a. Ja argumenta x diferenciāli dx uzskata par lielumu, kas nav atkarīgs no x, tad funkcijas $f(x)$ otrais diferenciālis ir vienāds ar

$$d(df(x)) = d^2f(x). \qquad (3)$$

Ar tādiem pašiem noteikumiem trešais diferenciālis ir otrā diferenciāļa diferenciālis utt.

5. p i e m ē r s. Pieņemsim, ka $f(x) = x^4$. Dabūjam $df(x) = 4x^3dx$. Ja uzskata, ka dx nav atkarīgs no x, tad diferencējot tas jāuzskata par konstanti. Tātad $d(4x^3dx) = d(4x^3)dx = 12x^2dx^2$. Bet tas ir funkcijas x^4 otrais diferenciālis (3. piemērs). Tālāk $d[d^2(x^3)] = d(12x^2dx^2) = d(12x^2dx^2) = 24xdx^3$, bet tas ir funkcijas x^4 trešais diferenciālis utt.

Neatkarīgā mainīgā lineāras funkcijas otrais diferenciālis ir vienāds ar nulli

$$d^2(ax + b) = 0.$$

Atsevišķā gadījumā neatkarīgā mainīgā otrais diferenciālis ir vienāds ar nulli, t. i., $d^2x = 0$.

---

[1] Ja x nav neatkarīgais mainīgais, tad formula (1) vispārīgi nav pareiza nevienai n vērtībai, pat ja $n=1$ (sal. 234. §). Bet augstākas kārtas diferenciāļiem ($n=2, 3, \ldots$) vispārīgi šai gadījumā nav pareiza arī formula (2), kura, ja $n=1$, vienmēr ir pareiza. Citiem vārdiem, izteiksmes $f''(x)dx^2$, $f'''(x)dx^3, \ldots$ *nav invariantas.*

Tā, ja $f(x) = x^3$, tad izteiksme $6xdx^2$ izsaka $d^2(x^3)$, ja x ir neatkarīgais mainīgais. Turpretim, ja $x = t^2$ un par neatkarīgo mainīgo pieņemam ne x, bet t, tad $f(x) = t^6$ un mēs dabūjam $6xdx^2 = 24t^4dt^2$, kamēr $d^2f(x) = 30t^4dt^2$.

Kvadrātiskas funkcijas trešais diferenciālis arī ir vienāds ar nullī, t. i.,

$$d^3(ax^2+bx+c)=0.$$

Vispārīgi n-tās pakāpes polinoma $(n+1)$-ās kārtas diferenciālis ir vienāds ar nulli.

259. §. Augstāku kārtu atvasinājumu izteiksmes ar diferenciāļiem

Otrā atvasinājuma izteiksme ar diferenciāļiem ir [1]

$$y''=\frac{dxd^2y-dyd^2x}{dx^3}. \tag{1}$$

Tā ir derīga jebkuram argumentam.

Ja par argumentu pieņemam x (tad $d^2x=0$), tad

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}. \tag{2}$$

Šī izteiksme izriet arī no 258. § formulas (2) (ja $n=2$). No tās pašas formulas var dabūt izteiksmes

$$y'''=\frac{d^3y}{dx^3},\quad y^{\mathrm{IV}}=\frac{d^4y}{dx^4},\ \ldots,\ y^{(n)}=\frac{d^ny}{dx^n}, \tag{3}$$

ja vien x ir neatkarīgais mainīgais. Šo atvasinājumu vispārīgās izteiksmes ir ļoti komplicētas [2].

Piezīme. n-tās kārtas atvasinājumu bieži apzīmē ar simbolu $\frac{d^ny}{dx^n}$ neatkarīgi no tā, kāds lielums pieņemts par argumentu. Bet šinī izteiksmē *nedrīkst ievietot* mainīgo y un x izteiksmes atkarībā no kāda parametra.

---

[1] Kā zināms, $y''=\frac{dy'}{dx}$; šeit ievietojam $y'=\frac{dy}{dx}$; diferencējam, pielietojot 258. § 2. teorēmu.

[2] Kā zināms, $y'''=\frac{dy''}{dx}$; šeit ievietojam izteiksmi (1). Rezultātu vislabāk izteikt formā

$$y'''=\left[dx\begin{vmatrix}dx & dy\\ d^3x & d^3y\end{vmatrix}-3d^2x\begin{vmatrix}dx & dy\\ d^2x & d^2y\end{vmatrix}\right]:dx^5. \tag{4}$$

Tālākās izteiksmes ir vēl komplicētākas.

260. §. Augstāku kārtu atvasinājumi funkcijām, kas uzdotas parametriski

Pieņemsim, ka y ir x funkcija un uzdota ar vienādojumiem

$$x=\varphi(t), \quad y=f(t). \tag{1}$$

Pirmās un otrās kārtas atvasinājumus atrod ar formulām [1]

$$y'=\frac{f'(t)}{\varphi'(t)}, \tag{2}$$

$$y''=\frac{\varphi'(t)f''(t)-f'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}. \tag{3}$$

Tālāko atvasinājumu izteiksmes ir komplicētas [2]; ja funkcijas $f(t)$ un $\varphi(t)$ ir dotas, tad aprēķinus vienkāršāk izpildīt soli pa solim, kā parādīts šādā piemērā.

Piemērs. Pieņemsim, ka

$$x=a\cos t, \quad y=b\sin t.$$

Tad (sal. 252. § 2. piemēru)

$$y'=d(b\sin t):d(a\cos t)=-\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t.$$

Tālāk

$$y''=d\left(-\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t\right):d(a\cos t)=-\frac{b}{a^2\sin^3 t},$$

$$y'''=d\left(-\frac{b}{a^2\sin^3 t}\right):d(a\cos t)=-\frac{3b\cos t}{a^3\sin^5 t}$$

utt.

---

[1] Formulu (3) atrod tāpat kā 259. § formulu (1) un to var dabūt no pēdējās, aizstājot diferenciāļus ar attiecīgajiem atvasinājumiem pēc parametriem.

[2] Sk. 259. § zemteksta piezīmi.

261. §. Apslēptu funkciju augstāku kārtu atvasinājumi

Lai atrastu augstāku kārtu atvasinājumus argumenta x funkcijai y, kura uzdota apslēpti ar kādu vienādojumu, tad šis vienādojums pakāpeniski jādiferencē, t. i., jāpielīdzina labās un kreisās puses diferenciāļi (vai atvasinājumi). Dabūsim virkni vienādību; no pirmās vienādības atrodam y' izteiksmi atkarībā no x un y, otrā vienādība (ievērojot atrasto y' izteiksmi) dos y'' izteiksmi atkarībā no x un y, trešā (ievērojot atrastās y', y'' izteiksmes) dos y''' utt. Atsevišķos gadījumos iespējami vienkāršojumi.

Piemērs. Atrast atvasinājumus līdz trešajai kārtai funkcijai $y=f(x)$, kas uzdota ar vienādojumu

$$x^2+y^2=25 \tag{1}$$

un aprēķināt šo atvasinājumu vērtības punktā (3; 4).

Atrisinājums. Pielīdzinot diferenciāļus, dabūjam

$$x\,dx+y\,dy=0, \tag{2}$$

no kurienes

$$x+yy'=0. \tag{2a}$$

Pielīdzinot vienādības (2a) abu pušu diferenciāļus, atrodam

$$dx+y'dy+yy''dx=0, \tag{3}$$

no kurienes

$$1+y'^2+yy''=0. \tag{3a}$$

Diferencējam vēlreiz

$$2y'dy'+y''dy+yy'''dx=0, \tag{4}$$

no kurienes

$$3y'y''+yy'''=0. \tag{4a}$$

No (2a) atrodam

$$y'=-\frac{x}{y}. \tag{5}$$

No (3a) atrodam $y''=-\dfrac{1+y'^2}{y}$; ievērojot (5), dabūjam

$$y''=-\frac{x^2+y^2}{y^3}. \tag{6}$$

No (4a), ievērojot (5) un (6), atrodam

$$y'''=\frac{-3x(x^2+y^2)}{y^5}. \tag{7}$$

Ievietojot vienādībās (5), (6) un (7) $x=3$, $y=4$, atrodam

$$y'=-\frac{3}{4},\quad y''=-\frac{25}{64},\quad y'''=-\frac{225}{1024}.$$

1. piezīme. Šai gadījumā aprēķinus var vienkāršot. Formula (6), ievērojot vienādojumu $x^2+y^2=25$, pieņem izskatu $y''=-\frac{25}{y^3}$. No šejienes $y'''=-\frac{d}{dx}\left(\frac{25}{y^3}\right)=\frac{75}{y^4}y'=-\frac{75x}{y^5}$.

2. piezīme. Nav nepieciešams (3a) atrast no (3), (4a) no (4) utt. Var tūlīt ņemt atvasinājumus. Bet iepriekšēja diferenciāļu aprēķināšana brīdina no dažām kļūdām, kas ir raksturīgas iesācējiem (y'^2 atvasinājumu ņem formā $2y'$ un nevis $2y'y''$ utt.; sal. 238. § piezīmi).

262. §. Leibnica kārtula

Lai sastādītu n-tās kārtas atvasinājumu reizinājumam uv (pēc jebkura argumenta), $(u+v)^n$ jāizvirza ar Ņūtona binoma formulu un dabūtajā izvirzījumā visas pakāpes jāaizstāj ar attiecīgas kārtas atvasinājumiem, pie kam nulles pakāpes ($u^0=v^0=1$), kuras var iedomāties izvirzījuma galējos locekļos, jāaizstāj ar pašām funkcijām.

Ar šo kārtulu dabūjam

$$(uv)'=u'v+uv', \tag{1}$$

$$(uv)''=u''v+2u'v'+uv'', \tag{2}$$

$$(uv)'''=u'''v+3u''v'+3u'v''+uv''', \tag{3}$$

. . . .

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v''+\ldots$$

$$\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\ldots+uv^{(n)}. \tag{4}$$

Šo kārtulu, kuru ievēroja Leibnics, pierāda ar pilnās matemātiskās indukcijas metodi.

1. piemērs. Atrast desmitās kārtas atvasinājumu funkcijai $e^x x^2$.

Atrisinājums. Ar formulu (4) (ja $u=e^x$, $v=x^2$, $n=10$) dabūjam

$$(e^x x^2)^{X}=(e^x)^{X} x^2+10(e^x)^{IX}(x^2)'+45(e^x)^{VIII}(x^2)''+\ldots$$

Tālākos saskaitāmos nav nozīmes rakstīt, jo funkcijas x^2 trešās un augstāku kārtu atvasinājumi ir vienādi ar nulli. Ievērojot, ka visi e^x atvasinājumi ir vienādi ar e^x, dabūjam

$$(e^x x^2)^{X}=e^x(x^2+20x+90).$$

2. piemērs. Atrast visu atvasinājumu vērtības funkcijai $f(x)=\operatorname{arctg} x$, ja $x=0$.

Atrisinājums. Dabūjam

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}, \tag{5}$$

tad

$$f(0)=0, \quad f'(0)=1. \tag{6}$$

Augstāko kārtu atvasinājumu tieša aprēķināšana ir ļoti nogurdinoša. Bet, ja (5) izsakām veidā

$$f'(x)(1+x^2)=1$$

un pielietojam Leibnica kārtulu ($u=f'(x)$, $v=1+x^2$), tad dabūjam

$$f^{(n+1)}(x)(1+x^2)+nf^{(n)}(x)2x+n(n-1)f^{(n-1)}(x)=0.$$

Ja $x=0$, tad dabūjam

$$f^{(n+1)}(0)+n(n-1)f^{(n-1)}(0)=0. \tag{7}$$

Tā kā $f^{(0)}(0)=f(0)=0$, tad visu pāra kārtas atvasinājumu vērtības ir vienādas ar nulli

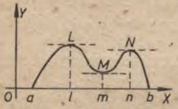
$$f''(0)=f^{IV}(0)=f^{(VI)}(0)=\ldots=0. \tag{8}$$

Tā kā $f'(0)=1$, tad no (7) pakāpeniski atrodam

$$f'''(0)=-1\cdot 2f'(0)=-(2!),$$
$$f^{V}(0)=-3\cdot 4f'''(0)=+(4!),$$
$$f^{VII}(0)=-5\cdot 6f^{V}(0)=-(6!),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(2k+1)}(0)=-(2k-1)2kf^{(2k-1)}(0)=(-1)^k(2k!).$$

263. §. Rola teorēma[1]

T e o r ē m a. Pieņemsim, ka funkcija $f(x)$ ir diferencējama slēgtā intervālā (a, b) un ir vienāda ar nulli intervāla galos. Tad intervāla iekšienē atvasinājums $f'(x)$ vismaz vienu reizi kļūst vienāds ar nulli.



251. zīm.

252. zīm.

251. zīmējumā starp punktiem $x=a$ un $x=b$, kur funkcijas $f(x)$ grafika krusto OX asi, ir trīs punkti L, M, N, kur pieskare ir paralēla OX asij (t. i., $f'(x)=0$).

252. zīmējumā starp $x=a$ un $x=b$ nav neviena punkta ar «horizontālu» pieskari. Iemesls tāds, ka punktā C grafikai nav pieskares, t. i., funkcija $f(x)$ nav diferencējama punktā $x=c$ [šeit ir divi vienpusīgie atvasinājumi (231. §)].

1. p i e z ī m e. Ja diferencējamai funkcijai $f(x)$ punktos $x=a$ un $x=b$ ir vienādas vērtības, kaut arī tās nav vienādas ar nulli, tad tomēr atvasinājums $f'(x)$ intervāla (a, b) iekšienē kļūs vienāds ar nulli.

2. p i e z ī m e. Rola teorēma paliek spēkā arī tai gadījumā, kad $f(x)$ ir diferencējama tikai intervāla (a, b) iekšējos punktos, galos funkcija $f(x)$ var būt nediferencējama, bet tikai nepārtraukta.

Parasti Rola teorēmu formulē ar šiem vispārīgākajiem

[1] M. R o l s (1652—1719). Ņūtona un Leibnica laika biedrs, uzskatīja diferenciālrēķinus par loģiski pretrunīgiem un, dabiski, nevarēja formulēt «Rola teorēmu». Rolam pieder viena algebras teorēma, no kuras izriet šāds secinājums: ja a un b ir vienādojuma $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}x+p_n=0$ saknes, tad starp a un b atrodas vienādojuma $nx^{n-1}+(n-1)p_1x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}=0$ sakne. Šis apgalvojums ir «Rola teorēmas» atsevišķs gadījums (otra vienādojuma kreisā puse ir pirmā vienādojuma kreisās puses atvasinājums). No šejienes arī radies (vēsturiski neprecīzs) nosaukums «Rola teorēma».

noteikumiem, kas sarežģī tās formulējumu un apgrūtina tās pamatsatura izprašanu. Tālāk (264., 266., 283. §) mēs formulēsim vairāku teorēmu nosacījumus arī ne ar vispārīgākajiem pieņēmumiem; pēdējos pieminēsim kā piezīmes vēlāk.

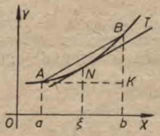
264. §. Lagranža[1] teorēma par vidējo vērtību

T e o r ē m a s f o r m u l ē j u m s. Ja funkcija $f(x)$ ir diferencējama slēgtā intervālā (a, b), tad attiecība $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ir vienāda ar atvasinājuma $f'(x)$ vērtību kādā punktā $x=\xi$[2], kas atrodas intervāla (a, b) iekšienē, t. i.,

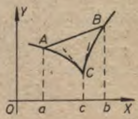
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi). \tag{1}$$

Ģ e o m e t r i s k ā n o z ī m e. Attiecība $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{KB}{AK}$ (253. zīm.) ir hordas AB virziena koeficients, bet $f'(\xi)$ — pieskares NT virziena koeficients. Lagranža teorēma apgalvo, ka starp A un B uz loka $\overset{\frown}{AB}$ atrodas vismaz viens punkts N, kur pieskare ir paralēla hordai AB, ja vien *katrā* loka $\overset{\frown}{AB}$ *punktā* eksistē pieskare.

254. zīmējumā redzams, ka, ja šis noteikums nav ievērots, tad teorēma var būt nepareiza. Punktā C nav pieskares (eksistē tikai vienpusīgās pieskares — labā un kreisā).



253. zīm.



254. zīm.

[1] Ž o z e f s L u ī L a g r a n ž s (1736—1813) — lielais franču zinātnieks, analītiskās mehānikas izveidotājs, viens no variāciju rēķinu radītājiem.

[2] Grieķu burts ξ (ksi) ir standarta apzīmējums argumenta vidējai vērtībai (t. i., vērtībai, kas atrodas dotā intervāla iekšienē).

Funkcija $f(x)$, kuru attēlo grafika ACB, nav diferencējama punktā $x=c$ un Lagranža teorēma nav spēkā: nav tādas starpvērtības ξ, kur atvasinājums $f'(x)$ būtu vienāds ar attiecību $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

M e h ā n i s k ā n o z ī m e. Pieņemsim, ka $f(t)$ ir punkta attālums momentā t no sākuma stāvokļa. Tad $f(b)-f(a)$ ir momenta $t=a$ līdz momentam $t=b$ noietais ceļš, attiecība $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ — vidējais ātrums šai laika sprīdī. Lagranža teorēma apgalvo, ka kaut kādā starpmomentā punkta ātrums ir vienāds ar kustības vidējo ātrumu, ja vien katrā momentā punktam ir noteikts ātrums.

Teorēma var būt nepareiza, ja šis noteikums nav izpildīts. Tā, ja punkts pirmo stundu kustas ar ātrumu 20 *m/st*, bet otru stundu — ar ātrumu 30 *m/st*, tad kustības vidējais ātrums ir vienāds ar 25 *m/st*; tāds ātrums punktam nebija ne reizi divu stundu laikā. Teorēmas nepareizības cēlonis ir tas, ka pirmās stundas beigās punktam nebija noteikts ātrums [1].

C i t s L a g r a n ž a t e o r ē m a s f o r m u l ē j u m s. Vienādojumam

$$f'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

(ja izpildīti teorēmas noteikumi) ir intervāla (a, b) iekšienē vismaz viena sakne $x=\xi$.

Šīs saknes (vai sakņu) stāvoklis ir atkarīgs no funkcijas $f(x)$ veida. Ja tā ir kvadrātisks trinoms (grafika ir parabola; 255. zīm.), tad dabūjam pirmās pakāpes vienādojumu; tā sakne atrodas tieši (a, b) viduspunktā, t. i.,

$$\xi=\frac{b+a}{2}.$$

Citām funkcijām šī īpašība izpildās aptuveni; proti, ja a ir pastāvīga vērtība, bet b tiecas uz a, tad viena sakne pa-

[1] Istenībā pāreja no ātruma 20 *m/st* uz ātrumu 30 *m/st* nenotiek momentāni, bet pakāpeniski ļoti īsā laika sprīdī, un tad ir tāds moments, kur ātrums ir vienāds ar 25 *m/st*.

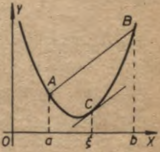
rasti[1] tiecas uz nogriežņa (a, b) viduspunktu, t. i., $\frac{\xi-a}{b-a}=$ $=\frac{1}{2}$, kad $b \to a$.

1. piemērs. Pieņemsim, ka $f(x)=x^2$. Tad $f'(\xi)=2\xi$. Formula (1) pieņem izskatu

$$\frac{b^2-a^2}{b-a}=2\xi,$$

no kurienes

$$\xi=\frac{a+b}{2},$$



255. zīm.

t. i., ξ atrodas tieši intervāla (a, b) viduspunktā.

2. piemērs. Pieņemsim, ka $f(x)=x^3$, tad $f'(x)=3x^2$. Ņemam $a=10$, $b=12$. Dabūjam

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=364.$$

Saskaņā ar Lagranža teorēmu vienādojumam $3x^2=364$ ir jābūt saknei, kas atradīsies starp 10 un 12. Tiešām, tā pozitīvā sakne $x=\sqrt{121\frac{1}{3}}\approx 11{,}015$ atrodas intervālā (10, 12) un pie tam ļoti tuvu viduspunktam.

Piezīme. Lagranža teorēma paliek spēkā arī tad, ja funkcija $f(x)$ ir diferencējama tikai intervāla (a, b) iekšējos punktos (galos nav diferencējama, bet ir tikai nepārtraukta).

265. §. Galīgo pieaugumu formula

264. § formulu (1) var pārrakstīt tā

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a) \tag{1}$$

jeb ar citiem apzīmējumiem

$$f(a+h)-f(a)=f'(\xi)h. \tag{2}$$

[1] Izņēmumi ir tikai tie gadījumi, kad atvasinājums $f''(a)$ ir vienāds ar nulli vai neeksistē.

Tā ir *galīgo pieaugumu formula*; to raksta arī tā

$$f(a+h)=f(a)+f'(\xi)h. \tag{3}$$

Pielietojumi aptuvenos aprēķinos. 248. paragrāfā $f(a+h)$ aprēķināšanai mēs lietojam aptuvenu formulu

$$f(a+h)\approx f(a)+f'(a)h. \tag{4}$$

Precīzā formula (3) (kaut arī ξ vērtība nav zināma) ļauj novērtēt formulas (4) kļūdu. Ja formulā (3) ņemam $\xi=$ $=\frac{a+b}{2}$, tad, kaut arī tā vairs nav precīza, tomēr parasti (264. §) dod daudz precīzāku tuvinājumu nekā formula (4).

Piemērs. Atrast bez tabulām lg 101.

Apzīmējot $f(x)=\lg x$, dabūjam $f'(x)=\frac{M}{x}$ $(M=0{,}43429)$. Ja $a=100$ un $h=1$, tad formula (4) dod

$$\lg 101\approx\lg 100+M\cdot\frac{1}{100}\cdot 1=2{,}0043429. \tag{5}$$

Lai novērtētu kļūdu, lietojam precīzo formulu (3); dabūjam

$$\lg 101=\lg 100+M\cdot\frac{1}{\xi}\cdot 1. \tag{6}$$

Šeit ξ atrodas starp 100 un 101, tātad $\frac{1}{\xi}>\frac{1}{101}$. Formulas (5) kļūda ir $M\left|\frac{1}{100}-\frac{1}{\xi}\right|$, bet šis lielums droši ir mazāks par $M\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{101}\right)$, t. i., mazāks par 0,00004. Tāda ir formulas (5) robežkļūda (patiesā kļūda ir divreiz mazāka).

Ja formulā (6) liekam $\xi=\frac{1}{2}(100+101)=100{,}5$, tad dabūjam

$$\lg 101\approx\lg 100+M\cdot 0{,}00995025\cdot 1=2{,}0043213. \tag{7}$$

Šeit nav pareizs tikai pēdējais cipars; patiesā vērtība ir par vienu lielāka.

Formulas (1) secinājums. No atvasinājuma definīcijas tieši izriet, ka pastāvīga lieluma atvasinājums ir vienāds ar nulli. No formulas (1) izriet šāda apgrieztā teorēma.

1. teorēma. Ja intervalā (m, n) atvasinājums $f'(x)$ visur ir vienāds ar nulli, tad šai intervalā funkcija $f(x)$ ir pastāvīgs lielums, t. i., jebkuros divos šī intervala[1] punktos a un b funkcijas vērtības ir vienādas.

Paskaidrojums. Funkcija $f(x)$ saskaņā ar nosacījumiem ir diferencējama intervalā (m, n) un vēl jo vairāk intervalā (a, b). Tātad tai var pielietot (264. §) formulu (1). Pēdējā saskaņā ar doto jāievieto $f'(\xi)=0$. Dabūjam $f(b)=$ $=f(a)$.

No 1. teorēmas tieši izriet

2. teorēma. Ja divu funkciju $f(x)$ un $\varphi(x)$ atvasinājumi intervalā (m, n) visur ir vienādi, tad šai intervalā abu funkciju vērtības atšķiras par pastāvīgu lielumu.

266. §. Vispārinātā teorēma par vidējo vērtību (Koši teorēma)

Koši[2] teorēma. Pieņemsim, ka slēgtā intervālā (a, b) diferencējamu funkciju $f(t)$ un $\varphi(t)$ atvasinājumi $f'(t)$ un $\varphi'(t)$ nekur šī intervala iekšienē vienlaicīgi neklūst vienādi ar nulli. Pieņemsim bez tam, ka vienai no funkcijām $f(t)$, $\varphi(t)$ intervala galos nav vienādas vērtības, piemēram, $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. Tad šo funkciju pieaugumi $f(b)-f(a)$ un $\varphi(b)-\varphi(a)$ attiecas kā to atvasinājumi kādā punktā $t=\tau$[3], kas atrodas intervala (a, b) iekšienē, t. i.,

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\tau)}{\varphi'(\tau)}. \tag{1}$$

Lagranža formula (264. § formula (1)) ir formulas (1) atsevišķs gadījums, ja $\varphi(t)=t$.

---

[1] Funkcija $f(x)$ saskaņā ar noteikumiem ir definēta visā intervalā (m, n), citādi tai nebūtu visur atvasinājuma. Ja pretēji noteikumiem funkcija $f(x)$ būtu definēta visos intervala (m, n) punktos, izņemot, teiksim, divus punktus $x=k$ un $x=l (k<l)$, tad varētu izrādīties, ka funkcija ir pastāvīga tikai katrā (vaļējā) intervalā (m, k), (k, l) un (l, n) *atsevišķi*, bet, pārejot no viena intervala uz otru, maina savu vērtību (sk. 247.a § 1. un 2. piemēru).

[2] Ogistēns (citā izrunas veidā Augustins) Koši (1789—1857) — ievērojamais franču matemātiķis un fiziķis. Koši nosprauda uzdevumu izveidot matemātisko analīzi uz stingras loģiskas bāzes un visumā šo uzdevumu atrisināja.

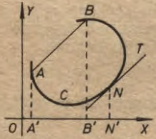
[3] τ — grieķu burts («tau»), atbilst latīņu burtam t.

Ģeometriskā nozīme ir tāda pati kā Lagranža teorēmai — tikai līnija ACB (256. zīm.) ir izteikta ar parametriskajiem vienādojumiem

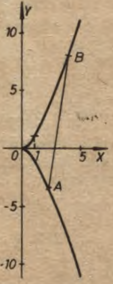
$$x=\varphi(t),\quad y=f(t).$$

Tad dabūjam

$$OA'=\varphi(a),\quad OB'=\varphi(b);$$
$$AA'=f(a),\quad BB'=f(b).$$



256. zīm.



257. zīm.

Attiecība $\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$ ir hordas AB virziena koeficients, attiecība $\dfrac{f'(t)}{\varphi'(t)}=\dfrac{dy}{dx}$ ir pieskares NT virziena koeficients.

256. zīmējumā pieskare NT ir paralēla hordai AB, punkts N atrodas uz loka AB (bet tā projekcija uz OX ass neatrodas uz nogriežņa $A'B'$; tāpat arī projekcija uz OY ass).

1. piezīme. Ja pretēji teorēmas noteikumiem mums būtu $f(a)=f(b)$ un $\varphi(a)=\varphi(b)$, tad vienādības (1) kreisā puse būtu nenoteikta.

2. piezīme. Košī teorēmas noteikumos prasīts, lai $f'(t)$ un $\varphi'(t)$ intervala (a, b) *iekšienē* vienlaicīgi nekļūtu vienādi ar nulli, tomēr vienā intervala galā (vai abos) tie var vienlaicīgi kļūt vienādi ar nulli (un pat neeksistēt, ja vien $f(x)$ un $\varphi(x)$ ir nepārtraukti abos galos).

1. piemērs. Apskatīsim funkcijas

$$f(t)=t^3 \text{ un } \varphi(t)=t^2$$

intervalā (0, 2). Galā $t=0$ atvasinājumi

$$f'(t)=3t^2 \text{ un } \varphi'(t)=2t$$

kļūst vienādi ar nulli, bet intervala iekšienē abi atvasinājumi atšķiras no nulles. Abām funkcijām $f(t)$ un $\varphi(t)$ ir dažādas vērtības galos $t=0$ un $t=2$. Košī teorēmas noteikumi ir izpildīti. Tātad attiecībai

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f(2)-f(0)}{\varphi(2)-\varphi(0)}=\frac{2^3}{2^2}=2$$

ir jābūt vienādai ar attiecību

$$\frac{f'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{3t^2}{2t}=\frac{3}{2}t$$

kādā punktā $t=\xi$, kas atrodas starp $a=0$ un $b=2$. Tiešām, vienādojumam

$$\frac{3}{2}t=2$$

ir sakne $t=\frac{4}{3}$, kas atrodas intervala (0, 2) iekšienē.

2. piemērs. Apskatīsim tās pašas funkcijas $f(t)=t^3$ un $\varphi(t)=t^2$ intervalā $\left(-1\frac{1}{2}, 2\right)$. Ja $a=-1\frac{1}{2}$, $b=2$, tad dabūjam

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{b^3-a^3}{b^2-a^2}=\frac{b^2+ab+a^2}{b+a}=\frac{13}{2}.$$

Vienādojumam

$$\frac{3}{2}t=\frac{13}{2}$$

ir viena vienīga sakne $t=4\frac{1}{3}$, bet tā atrodas ārpus intervala $\left(-1\frac{1}{2}, 2\right)$. Košī teorēma nebija pielietojama tā iemesla dēļ, ka punkts $t=0$, kur abi atvasinājumi $f'(t)$ un $\varphi'(t)$ ir vienādi ar nulli, tagad atrodas intervala (a, b) iekšienē. Ģeometriskā aina ir tāda: parametriskie vienādojumi $x=t^2$, $y=t^3$ izsaka puskubisko parabolu AOB (257. zīm.); vērtībām $a=-1\frac{1}{2}$, $b=2$ atbilst punkti $A\left(2\frac{1}{4}; -3\frac{3}{8}\right)$ un $B(4; 8)$. Uz līnijas $x=t^2$, $y=t^3$ (puskubiskā parabola) loka AOB nav punktu, kur pieskare būtu paralēla hordai AB (tāds punkts ir aiz loka AB augstāk par punktu B).

Mehāniskā nozīme. Pieņemsim, ka t ir laiks, bet

$$s_P = f(t)$$

un

$$s_Q = \varphi(t)$$

— divu taisnvirziena kustībā esošu ķermeņu P un Q attālumi no to sākuma stāvokļiem. Tad $f'(t)$ un $\varphi'(t)$ ir ķermeņu P un Q ātrumi v_P un v_Q. Saskaņā ar Koši teorēmas noteikumiem v_P un v_Q nav vienlaicīgi vienādi ar nulli. Teorēma apgalvo, ka ceļi, ko ķermeņi noiet kādā laika intervalā (a, b), attiecas kā to ātrumi kādā starpmomentā[1] (kurš ir viens un tas pats abiem ķermeņiem).

267. §. Nenoteiktību $\frac{0}{0}$ atklāšana

Ja kāda funkcija nav definēta punktā $x=a$, bet tai ir robeža, kad $x \to a$, tad šīs robežas atrašanu sauc par *nenoteiktības atklāšanu*. Atsevišķā gadījumā par nenoteiktības $\frac{0}{0}$ atklāšanu sauc robežas atrašanu attiecībai $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, kur funkcijas $f(x)$, $\varphi(x)$ ir bezgalīgi mazas, kad $x \to a$.

Lopitāla[2] kārtula. Lai atrastu divu funkciju attiecības $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ robežu, kuras ir bezgalīgi mazas, kad $x \to a$

---

[1] Paskaidrosim to uzskatāmi. Pieņemsim, ka laika intervalā (a, b) ķermenis P ir nogājis divreiz lielāku ceļu nekā Q ($s_P = 2s_Q$). Ja abas kustības ir vienmērīgas, tad *jebkurā* starpmomentā $v_P = 2v_Q$. Pieņemsim tagad, ka viena kustība (vai abas) ir nevienmērīgas. Nav iespējams, lai vienmēr būtu $v_P > 2v_Q$ (jo tad ķermeņa P noietais ceļš pārsniegtu ķermeņa Q ceļu vairāk nekā divas reizes). Nav iespējams arī, ka vienmēr būtu $v_P > 2v_Q$. Tāpēc, ja sākumā v_P pārsniedz $2v_Q$, tad vēlāk v_P ir mazāks par $2v_Q$ (un otrādi). Tātad kādā starpmomentā jābūt $v_P = 2v_Q$. Šai momentā arī dabūjam $v_P : v_Q = s_P : s_Q$, jo saskaņā ar noteikumiem gadījums $v_P = v_Q = 0$ izslēgts (šai gadījumā attiecība $v_P : v_Q$ būtu nenoteikta).

[2] Lopitāls (1661—1704) — pirmās iespiestās diferenciālrēķinu rokasgrāmatas (1696. g.) autors, kur arī formulēta kārtula (ne tik precīzi, kā šeit). Sastādot šo rokasgrāmatu, Lopitāls vadījās no sava skolotāja Johana Bernulli manuskripta. Manuskripts saturēja arī minēto kārtulu. Tāpēc nosaukums «Lopitāla kārtula» ir vēsturiski neprecīzs.

(vai kad $x \to \infty$), var apskatīt to atvasinājumu attiecību $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$. Ja tā tiecas uz robežu (galīgu vai bezgalīgu), tad uz to pašu robežu tiecas arī attiecība $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$.[1]

1. piemērs. Atrast $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x^3-1}$.

Funkcijas $f(x) = x^2 - 1$ un $\varphi(x) = x^3 - 1$ ir bezgalīgi mazas, kad $x \to 1$. Apskatām attiecību $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{2x}{3x^2}$. Kad $x \to 1$, tā tiecas uz robežu $\frac{2}{3}$. Saskaņā ar Lopitāla kārtulu uz to pašu robežu tiecas arī $\frac{x^2-1}{x^3-1}$. Tiešām,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x^3-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{2}{3}.$$

Ja nevien funkcijas $f(x)$, $\varphi(x)$, bet arī to atvasinājumi $f'(x)$, $\varphi'(x)$ ir bezgalīgi mazi, kad $x \to a$, tad robežas $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ atrašanai var atkārtoti pielietot Lopitāla kārtulu.

2. piemērs. Atrast $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

Skaitītājs un saucējs ir bezgalīgi mazi. Saskaņā ar Lopitāla kārtulu

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}.$$

Šeit skaitītājs un saucējs atkal ir bezgalīgi mazi. Pielietojam Lopitāla kārtulu atkārtoti

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{6x}{6x-2} = \frac{3}{2}.$$

[1] Kārtulas formulējumā parasti pieprasa, lai atvasinājums $\varphi'(x)$ nebūtu vienāds ar nulli kādā punkta $x=a$ apkārtnē. Šī prasība ir lieka, jo kārtulā jau teikts, ka attiecībai $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ ir robeža, kad $x \to a$, saskaņā ar robežas definīciju (205. §) tas iespējams tikai tad, kad $\varphi'x \neq 0$ punkta $x=a$ apkārtnē.

3. piemērs. Atrast

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}.$$

Pakāpeniski pielietojot Lopitāla kārtulu, mēs divreiz dabūjam bezgalīgi mazu lielumu attiecības

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}, \quad \frac{f''(x)}{\varphi''(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}.$$

Trešo reiz dabūjam attiecību

$$\frac{f'''(x)}{\varphi'''(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x}.$$

Kad $x \to 0$, tai ir robeža 2. Tātad

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = 2.$$

1. piezīme. Teorētiski nav izslēgta iespēja, ka visi abu funkciju $f(x)$, $\varphi(x)$ atvasinājumi būs bezgalīgi mazi. Praksē tādi gadījumi nav sastopami.

Lopitāla kārtulas pielietošanu ieteicams kombinēt ar pārveidojumiem, kas atvieglo robežas atrašanu.

4. piemērs. Atrast $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$.

Saskaņā ar Lopitāla kārtulu mēs meklējam robežu attiecībai

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - \cos x}{3 \sin^2 x \cos x}, \text{ kad } x \to 0.$$

Šeit $f'(x)$ un $\varphi'(x)$ ir bezgalīgi mazi, bet meklēt $\lim \dfrac{f''(x)}{\varphi''(x)}$ nav mērķtiecīgi. Labāk $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ pārveidot formā $\dfrac{1 - \cos^3 x}{3 \sin^2 x \cdot \cos^3 x}$ un, ievērojot, ka $\lim\limits_{x\to 0} (\cos^3 x) = 1$, meklēt $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos^3 x}{3 \sin^2 x}$. Saskaņā ar Lopitāla kārtulu šī robeža ir vienāda ar

$$\lim_{x\to 0} \frac{3 \cos^2 x \cdot \sin x}{6 \sin x \cdot \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \cos x = \frac{1}{2}.$$

Var jau pašā sākumā $\sin^3 x$ aizstāt ar tam ekvivalentu bezgalīgi mazu lielumu x^3. Tad

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2\cdot\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{3x^2}.$$

Atkārtota Lopitāla kārtulas pielietošana dod

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x\cdot\sin x}{6x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}.$$

2. piezīme. Var gadīties, ka attiecība $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, kad $x\to a$ (vai $x\to\infty$), netiecas ne uz vienu robežu. Tādos gadījumos attiecībai $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ arī var nebūt robežas, bet var arī būt. Tā, ja $f(x)=x+\sin x$ un $\varphi(x)=x$, tad attiecībai $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=1+$ $+\cos x$, kad $x\to\infty$, nav robežas. Tomēr attiecība

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{x+\sin x}{x}=1+\frac{\sin x}{x},$$

kad $x\to\infty$, tiecas uz vienu.

268. §. Nenoteiktību $\frac{\infty}{\infty}$ atklāšana

Lopitāla kārtula (267. §) paliek spēkā arī divu funkciju attiecībai $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, kuras ir bezgalīgi lielas, kad $x\to a$ (vai kad $x\to\infty$).

1. piemērs. Atrast $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}$.

Funkcijas $f(x)=\ln x$ un $\varphi(x)=x^2$ ir bezgalīgi lielas, kad $x\to\infty$. Attiecība $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\frac{\frac{1}{x}}{2x}$, kad $x\to\infty$, tiecas uz robežu 0. Uz to pašu robežu tiecas $\frac{\ln x}{x^2}$.

P i e z ī m e. Ja $f(x)$ un $\varphi(x)$ ir bezgalīgas robežas, kad $x \to a$, tad $f'(x)$ un $\varphi'(x)$ robežas (ja tās eksistē) arī ir bezgalīgas un Lopitāla kārtula būs noderīga tikai tad, kad izteiksmi $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ izdodas vieglāk pārveidot izdevīgākā formā nekā izteiksmi $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$.

2. p i e m ē r s. Atrast $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$.

Funkcijas $\operatorname{tg} 3x$ un $\operatorname{tg} x$ un arī to atvasinājumi $\frac{3}{\cos^2 3x}$ un $\frac{1}{\cos^2 x}$ ir bezgalīgi lieli, kad $x \to \frac{\pi}{2}$. Izsakām atvasinājumu attiecību formā $3\left(\frac{\cos x}{\cos 3x}\right)^2$ un meklējam $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos 3x}$ (tagad skaitītājs un saucējs ir bezgalīgi mazi). Pielietojot 267. § kārtulu, dabūsim $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos 3x} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{-3 \sin 3x} = -\frac{1}{3}$.

Tādējādi

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x} = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}.$$

Bet doto izteiksmi vēl vienkāršāk var pārveidot izdevīgā formā. Tā kā $\frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} 3x}$, tad

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} 3x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 3x}{3 \sin^2 x} = \frac{1}{3}.$$

269. §. Citu veidu nenoteiktas izteiksmes

1. Nenoteiktība $0\cdot\infty$, t. i., reizinājums $f(x)\ \varphi(x)$, kur $f(x)\to 0$ un $\varphi(x)\to\infty$. Šo izteiksmi var reducēt formā $\frac{0}{0}$ vai $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x)\varphi(x)=f(x):\frac{1}{\varphi(x)}=\varphi(x):\frac{1}{f(x)}$$

un pēc tam pielietot Lopitāla kārtulu.

1. piemērs. Atrast $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$. Pārveidojam $x\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=$ $=x:\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ un atrodam

$$\lim_{x\to 0} x\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=\lim_{x\to 0}\left[1:\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right]=2.$$

2. piemērs. Atrast $\lim\limits_{x\to 0} x^4\ln x$.

Dabūjam

$$\lim_{x\to 0} x^4\ln x=\lim_{x\to 0}\left[\ln x:\frac{1}{x^4}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}:\frac{-4}{x^5}\right]=0.$$

II. Nenoteiktība $\infty-\infty$, t. i., divu funkciju starpība, kur abām funkcijām ir robeža $+\infty$ (vai arī abām funkcijām robeža ir $-\infty$). Šādu izteiksmi arī var reducēt formā $\frac{0}{0}$ vai $\frac{\infty}{\infty}$.

3. piemērs. Atrast $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{2}{x(e^x+1)}\right]$.

Vienādojam saucējus; meklētais lielums ir $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x(e^x+1)}$, t. i., mums ir nenoteiktība $\frac{0}{0}$. Tā kā $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+1)=2$, tad

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{2}{x(e^x+1)}\right]=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=\frac{1}{2}.$$

III. Nenoteiktības 0^0, ∞^0, 1^∞, t. i., funkcijas $f(x)^{\varphi(x)}$, kur $\lim f(x)=0$ un $\lim \varphi(x)=0$ vai $\lim f(x)=\infty$ un $\lim \varphi(x)=0$ vai beidzot $\lim f(x)=1$ un $\lim \varphi(x)=\infty$.

Šeit vispirms meklējam dotās funkcijas logaritma robežu. Visos trijos gadījumos dabūjam nenoteiktību $0\cdot\infty$.

4. piemērs. Atrast $\lim\limits_{x\to 0} x^x$ (nenoteiktība 0^0).

Apzīmējot $y=x^x$, dabūjam $\ln y = x\ln x$. Tālāk

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\left(\ln x:\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}:-\frac{1}{x^2}\right)=0.$$

No šejienes

$$\lim_{x\to 0} y=1.$$

5. piemērs. Atrast $\lim\limits_{x\to\infty}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$ (nenoteiktība ∞^0).

Apzīmējam $y=(1+2x)^{\frac{1}{x}}$; dabūjam $\ln y=\frac{1}{x}\ln(1+2x)$.

Tālāk

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+2x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1+2x}=0.$$

Tātad

$$\lim_{x\to\infty} y=1.$$

6. piemērs. Atrast $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg}2x}$ (nenoteiktība 1^∞).

Dabūjam

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\ln y=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}2x\ln\operatorname{tg}x=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\operatorname{tg}x}{\operatorname{ctg}2x}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\sin x\cos x}:-\frac{2}{\sin^2 2x}\right)=-1.$$

Tātad

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}=e^{-1}.$$

270. §. Vēsturiskas ziņas par Teilora formulu[1]

1. Ņūtona bezgalīgas rindas. Lai atrastu dotās funkcijas atvasinājumu, bet galvenokārt, lai atrisinātu apgriezto uzdevumu, Ņūtons aizstāja doto funkciju ar *bezgalīgu pakāpju rindu,* t. i., ar izteiksmi

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots, \tag{1}$$

kuras locekļu skaits neierobežoti aug. Koeficientus a_0, a_1, $a_2, \ldots$ izvēlējās tā, lai izteiksme (1), locekļu skaitam augot, dotu vienmēr precīzākas funkcijas vērtības. Tā funkciju $\frac{1}{1+x}$ Ņūtons aizstāja ar izteiksmi $1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^nx^n+$ $+\ldots$ un rakstīja[2]

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots \tag{2}$$

Ja $|x|<1$, tad locekļi $1, -x, x^2, \ldots$ veido bezgalīgi dilstošu ģeometrisku progresiju un tās summa ir vienāda ar $\frac{1}{1+x}$. Ja turpretim $|x|\geqslant 1$, tad summa $1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^nx^n$, kad $n\to\infty$, netiecas uz $\frac{1}{1+x}$. Ievērojot šo apstākli, Ņūtons vienmēr ierobežojās ar pietiekami mazām x vērtībām.

Lai izvirzītu funkcijas bezgalīgās rindās, Ņūtons lietoja dažādus paņēmienus. Tā formulu

$$(1+x)^m=$$
$$=1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots, \tag{3}$$

kuru agrāk atrada Paskals[3] veselām pozitīvām m vērtībām,

---

[1] Šis paragrāfs ir ievads 271. un 272. paragrāfam; pēdējos var lasīt neatkarīgi.

[2] Izvirzījums (2) rodas, ja dalījumam $1:(1+x)$ pielieto polinomu dalīšanas kārtulu, kuri sakārtoti pēc augošām pakāpēm. Pirms Ņūtona formulu (2) lietoja Nikolajs Merkators (1665. gadā) sakarā ar logaritmu aprēķināšanu [funkcijas $\ln(1+x)$ atvasinājums ir $\frac{1}{1+x}$]. Merkatoram izvirzījumi bezgalīgā rindā ierobežojas ar šo vienīgo gadījumu. Ņūtonam tie kļuva par vispārīgu metodi.

[3] Blezs Paskals (1623—1662) — ievērojamais franču filozofs, matemātiķis un fiziķis.

Ņūtons pielietoja daļveida un negatīvām m vērtībām. Tad locekļu skaits neierobežoti aug. Ja $m=-1$, tad rodas formula (2), ja $m=-2$, rodas [1]

$$\frac{1}{(1+x)^2}=1-2x+3x^2-4x^3+\ldots \tag{4}$$

Lai atrastu $\frac{1}{1+x}$ atvasinājumu, Ņūtons atvasināja [2] izteiksmi (2). Salīdzinājums ar (4) rāda, ka

$$\left[\frac{1}{1+x}\right]'=-\frac{1}{(1+x)^2}. \tag{5}$$

2. T e i l o r a r i n d a. 1715. gadā Teilors [3] komplicētā un matemātiski nestingrā veidā atrada izteiksmes (1) vispārīgo veidu dotajai funkcijai $f(x)$. Ar tagadējiem apzīmējumiem rezultāts ir šāds:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots \tag{6}$$

Tā, ja $f(x)=\frac{1}{1+x}$, tad $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$. Tātad $f(0)=1$ un $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=(-1)^n$, tā ka formula (6) dod izvirzījumu (2). Ja $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$, dabūjam izvirzījumu (4).

3. M a k l o r ē n a i z v e d u m s. Pēc 30 gadiem Maklorēns [4] deva šādu vienkāršu Teilora formulas izvedumu. Viņš apskatīja vienādību

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots \tag{7}$$

[1] Apzinoties, ka viņa slēdzieni nav matemātiski stingri, Ņūtons pārbaudīja tos ar piemēriem. Tā, izpildot reizināšanu $(1-x+x^2-x^3+\ldots)\cdot(1-x+x^2-x^3+\ldots)$, viņš atrada $1-2x+3x^2-4x^3+\ldots$ un līdz ar to pārbaudīja formulu (4).

[2] Ņūtons nezināja, ka teorēma par summas atvasinājumu var būt nepareiza, ja saskaitāmo skaits neierobežoti aug. Starp citu, rindai (1) šī teorēma (pietiekami mazām x vērtībām) ir spēkā, tā ka kļūdas neradās.

[3] B r u k s T e i l o r s (1685—1731) — angļu matemātiķis, Ņūtona skolnieks.

[4] K o l i n s M a k l o r ē n s (1698—1746) — angļu matemātiķis; pakāpju rindu (6) tagad sauc (bez pietiekama pamatojuma) par Maklorēna rindu.

un vēlēdamies aprēķināt koeficientus a_0, a_1, $a_2, \ldots$, ar pakāpenisku atvasināšanu atrada

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\ldots, \\ f''(x) &= \quad 2a_2+2\cdot 3a_3x+3\cdot 4a_4x^2+\ldots, \\ f'''(x) &= \qquad 2\cdot 3a_3+2\cdot 3\cdot 4a_4x+\ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Ievietojot vienādībās (7) un (8) $x=0$, viņš pakāpeniski dabūja[1]

$$a_0=f(0),\quad a_1=f'(0),\quad a_2=\frac{f''(0)}{1\cdot 2},\quad a_3=\frac{f'''(0)}{1\cdot 2\cdot 3}\ \text{utt.} \tag{9}$$

4. Teilora rinda vispārīgā veidā. Tādā pašā veidā atrod formulu

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots, \tag{10}$$

kas dod funkcijas izvirzījumu pēc $(x-a)$ pakāpēm. Šī formula arī bija zināma Teiloram; būtībā tā nedod nekā jauna salīdzinājumā ar formulu (6).

Tā funkcijai $f(x)=\ln x$, ja $a=1$, formula (10) dod

$$\ln x=\frac{x-1}{1}-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\ldots \tag{11}$$

Ja ņemam funkciju $f(x)=\ln(1+x)$, tad ar formulu (6) atrodam

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots \tag{12}$$

Apzīmējam $1+x=z$, tad dabūsim formulu

$$\ln z=\frac{z-1}{1}-\frac{(z-1)^2}{2}+\frac{(z-1)^3}{3}-\frac{(z-1)^4}{4}+\ldots, \tag{13}$$

kura no formulas (11) atšķiras tikai ar apzīmējumiem.

[1] Ja pierāda, ka rindu (7) drīkst pa locekļiem atvasināt, tad Maklorēna izvedums nevainojami pierāda šādu teorēmu: ja $f(x)$ izvirzāma rindā (7), tad koeficientus a_0, a_1, $a_2 \ldots$ izsaka ar formulām (9). Tomēr ir funkcijas, kuras nav izvirzāmas rindā (7), kaut arī atvasinājumi $f'(0)$, $f''(0) \ldots$, eksistē. Tādas funkcijas piemērs dots pēdējā šī paragrafa zemteksta piezīmē.

5. Teilora rindas atlikums. Funkcijas, kuras bija pazīstamas 18. gadsimtā, atļauj izvirzījumu Teilora rindā (10) (jebkurām a vērtībām, izņemot tās, kurām funkcija vai kāds tās atvasinājums pārvēršas bezgalībā). Pamatojoties uz savu ierobežoto pieredzi, 18. gadsimta matemātiķi nešaubījās, ka katru nepārtrauktu funkciju var izvirzīt Teilora rindā. Tomēr bija vajadzīgs precīzi novērtēt kļūdu, kuru dod formula (10), ja to pārtrauc ar locekli

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

1799. gadā Lagranžs atrada «Teilora rindas atlikumam», t. i., starpībai

$$R_n = f(x) - \left| f(a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \right|, \tag{14}$$

šādu izteiksmi:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{15}$$

Šeit ξ ir kāds skaitlis, kas atrodas starp a un x.

Lagranža pierādījums prasīja funkcijas $f(x)$ izvirzāmību Teilora rindā [1]. Ceturtdaļu gadsimta vēlāk Košī pierādīja formulu (15), nebalstoties uz šo prasību; viņš deva arī citu atlikuma izteiksmi. Atlikuma izteiksme ļāva spriest par funkcijas izvirzāmību Teilora rindā: ja $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$, tad funkcija $f(x)$ ir izvirzāma Teilora rindā, pretējā gadījumā tā nav izvirzāma. Košī deva pirmo piemēru funkcijai [2], kura, kaut arī tai punktā $x=a$ ir visi atvasinājumi, nav izvirzāma rindā (10) pēc $x-a$ pakāpēm (praktiskas nozīmes tādām funkcijām nav).

[1] Lagranžs pat pierādīja, ka tāds izvirzījums ir iespējams katrai nepārtrauktai funkcijai, bet pierādījums bija neapmierinošs.

[2] Šo funkciju uzdod ar formulu $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ ar papildu noteikumu $f(0)=0$ (ja $x=0$, tad formulai nav jēgas). Funkcijai $f(x)$ punktā $x=0$ ir visu kārtu atvasinājumi. Visi tie šai punktā ir vienādi ar nulli, tā ka formulas (10) labā puse ir identiski vienāda ar nulli. Tomēr $f(x)$ nekur, izņemot $x=0$, nav vienāda ar nulli.

271. §. Teilora formula [1]

Teorēma. Ja funkcijai $f(x)$ slēgtā intervalā (a, b) ir atvasinājumi līdz $(n+1)$-ai kārtai ieskaitot [2], tad

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}, \qquad (1)$$

kur ξ ir kāds skaitlis, kas atrodas starp a un b.

Formulu (1) sauc par *Teilora formulu.*

Pēdējais saskaitāmais $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$, kuru sauc par *atlikuma locekli Lagranža formā* [3], dod precīzu izteiksmi starpībai R_n starp $f(b)$ un izteiksmi

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n$$

(«Teilora polinoms»), t. i.,

$$R_n=f(b)-\left[f(a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n\right]=$$
$$=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}. \qquad (2)$$

Teilora formula rāda, ka vienādojumam (1), kur par nezināmo pieņem ξ, ir vismaz viens atrisinājums [4], kas atrodas starp a un b (sal. 264. §).

Ja a uzskata par pastāvīgu, bet b par mainīgu lielumu, tad b vietā raksta x, t. i.,

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \qquad (3)$$

---

[1] Ieteicams iepriekš izlasīt 270. §.

[2] Intervala galos $(n+1)$-ais atvasinājums var neeksistēt, ja vien n-tais atvasinājums ir nepārtraukts ne tikai intervala iekšienē, bet arī galos.

[3] Atšķirībā no citām atlikuma locekļa formām.

[4] Ja a un b ir nemainīgi, tad lielums ξ vispārīgi mainās atkarībā no n maiņas.

Ja $a=0$, tad iegūst tā saukto[1] «Maklorēna formulu»

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}. \tag{4}$$

Piemērs. Pielietosim formulu (4), ņemot $n=2$, funkcijai $f(x)=\frac{1}{1+x}$. Dabūjam

$$f'(x)=\frac{-1}{(1+x)^2},\quad f''(x)=\frac{2}{(1+x)^3},\quad f'''(x)=\frac{-6}{(1+x)^4}.$$

Tātad

$$f(0)=1,\quad \frac{f'(0)}{1!}=-1,\quad \frac{f''(0)}{2!}=+1,\quad \frac{f'''(\xi)}{3!}=-\frac{1}{(1+\xi)^4}.$$

Formula (4) pieņem izskatu

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\frac{x^3}{(1+\xi)^4}. \tag{5}$$

Šeit ξ atrodas starp nulli un x. Svarīgi ievērot, ka formula pareiza tikai, ja $x>-1$. Šai gadījumā teorēmas noteikums izpildīts: funkcijai $\frac{1}{1+x}$ slēgtā intervalā $(0, x)$ ir visi atvasinājumi.

Atrisinot (5) attiecībā pret ξ, atrodam

$$\xi_1=\sqrt[4]{1+x}-1,\quad \xi_2=-\sqrt[4]{1+x}-1. \tag{6}$$

Viegli var pārbaudīt, ka pirmā sakne ξ_1 tiešām atrodas starp nulli un x, ja $x>-1$.

Ja turpretim $x\leqslant-1$, tad teorēmas noteikums nav izpildīts, jo funkcijai $\frac{1}{1+x}$ nav atvasinājumu punktā -1, bet šis punkts vai nu atrodas intervala $(0, x)$ iekšienē (ja $x<-1$), vai arī sakrīt ar tā galu (ja $x=-1$).

Formula (5) tad kļūst nepareiza: ja $x=-1$, tad kreisajai pusei nav jēgas, ja $x<-1$, tad vienādojumam (5) ir imagināras saknes.

Piezīme. Ja $n=0$, tad Teilora formula (2) [kurā

[1] Sal. 270. § 3. p.

$f^{(0)}(a)$ vietā jāraksta $f(a)$] dod galīgo pieaugumu formulu (265. §)

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a) \tag{7}$$

Ja $n=1$, dabūjam

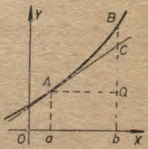
$$f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)=\frac{f''(\xi)}{2!}(b-a)^2 \tag{8}$$

jeb ar citiem apzīmējumiem

$$[f(x+\Delta x)-f(x)]-f'(x)\Delta x=\frac{f''(\xi)}{2!}\Delta x^2. \tag{8a}$$

Šī formula dod starpības izteiksmi starp funkcijas pieaugumu un tās diferenciāli (nogrieznis CB 258. zīmējumā).

Ja otrais atvasinājums $f''(x)$ ir nepārtraukts pie apskatāmās x vērtības, tad starpība starp funkcijas pieaugumu un tās diferenciāli ir otrās kārtas bezgalīgi mazs lielums attiecībā pret Δx [kad $f''(x)\neq 0$] vai augstākas kārtas bezgalīgi mazs lielums [kad $f''(x)=0$]. Sal. 230. §.



258. zīm.

272. §. Teilora formulas pielietošana funkcijas vērtību aprēķināšanā

Teilora formula bieži ļauj aprēķināt funkcijas vērtības ar jebkuru precizitāti.

Pieņemsim, ka zināmas funkcijas $f(x)$ un tās atvasinājumu vērtības «sākuma» punktā $x=a$, t. i.,

$$f(a),\ f'(a),\ f''(a),\ f'''(a),\dots$$

Jāatrod funkcijas $f(x)$ vērtība pie citas x vērtības.

Daudzos gadījumos pietiek aprēķināt Teilora polinoma

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots$$

$$\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{1}$$

vērtību, ņemot šeit divus, trīs vai vairāk locekļu atkarībā no vajadzīgās precizitātes pakāpes. Protams, tā rīkojoties, mēs pieļaujam zināmu kļūdu R_n; tā ir

$$R_n = f(x) - [f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n]. \qquad (2)$$

Bet bieži izrādās, ka kļūda R_n neierobežoti samazinās (pēc absolūtās vērtības), locekļu skaitam augot (t. i., $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$). Tad Teilora poliņoms var dot meklēto $f(x)$ vērtību ar jebkuru precizitātes pakāpi.

Locekļu skaits, kas nodrošina vajadzīgo precizitātes pakāpi, ir būtiski atkarīgs no tā, cik liels ir attālums $|x-a|$ no sākuma punkta a līdz punktam x. Jo lielāks $|x-a|$, jo vairāk locekļu jāņem (sk. 1. piemēru). Nereti gadās arī tā, ka R_n tiekšanās uz nulli, attālumam $|x-a|$ augot, ne vien pagausinās, bet, vēl tālāk augot, nepavisam nav novērojama (sk. 2. piemēru). Tad polinoms (1) $f(x)$ aprēķināšanai ir derīgs tikai ierobežotā attālumā no sākuma punkta.

Tātad jāprot atbildēt uz šādiem jautājumiem: vai polinoms (1) ir derīgs $f(x)$ aprēķināšanai dotajā attālumā $|x-a|$ no sākuma punkta a un, ja ir, tad cik locekļu jāņem, lai iegūtu vajadzīgo precizitāti? Svarīgi ir arī zināt, vai katram attālumam $|x-a|$ kļūda R_n tiecas uz nulli, ja locekļu skaits aug, un, ja ne katram, tad kur ir tā robeža.

Lai atrisinātu šos jautājumus, lieto dažādus paņēmienus. Viens paņēmiens[1] pamatojas uz 271. § teorēmu, kas ļauj kļūdu R_n izteikt šādā veidā[2]

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \qquad (3)$$

Skaitlis ξ šeit nav zināms; mēs zinām tikai, ka ξ atrodas starp a un x. Bet arī tas ir pietiekami, lai novērtētu kļūdu R_n un atbildētu uz iepriekšējiem jautājumiem.

1. piemērs. Pieņemsim, ka $f(x) = e^x$. Šīs funkcijas visi atvasinājumi ir vienādi ar e^x. Mums ir zināma e^x vērtība

[1] Šis paņēmiens nav vislabākais; dažreiz tas nepavisam nesasniedz mērķi. Citi paņēmieni parādīti tālāk (401. §).

[2] Pieņemts, ka funkcija $f(x)$ izpilda teorēmas nosacījumus; praktiski svarīgākajos gadījumos tas tā arī lielāko tiesu mēdz būt.

punktā $x=0$ (proti $e^0=1$). Šo punktu pieņemam par sākuma punktu. 271. § teorēmas nosacījumi ir izpildīti visām x vērtībām. Teilora polinomā (1) jāievieto

$$a=0,\quad f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(n)}(a)=1, \tag{4}$$

un tas pieņems šādu izskatu

$$1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\ldots+\frac{1}{n!}x^n. \tag{5}$$

Aizstājot e^x vērtību ar polinoma (5) vērtību, mēs pieļaujam kādu kļūdu R_n; tā ir vienāda ar

$$R_n=e^x-\left[1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right]. \tag{6}$$

Tā kā $f^{n+1}(x)=e^x$, tad kļūdu R_n saskaņā ar formulu (3) var izteikt tā

$$R_n=\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}. \tag{7}$$

Skaitlis ξ atrodas kaut kur starp nulli un x (tas ir atkarīgs no x un no n). Tātad e^{ξ} atrodas starp $e^0=1$ un e^x. Tas ir pietiekami, lai novērtētu kļūdu.

Pieņemsim, piemēram, ka jāaprēķina e^x vērtība, ja $x=\frac{1}{2}$, t. i., jāizvelk kvadrātsakne no skaitļa e. Tā kā e atrodas starp 2 un 3, tad $e^{\frac{1}{2}}$ un vēl jo vairāk e^{ξ} ir mazāks par 2. No (7) izriet, ka $|R_n|<\frac{2}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$; t. i.,

$$|R_n|<\frac{1}{(n+1)!2^n}. \tag{8}$$

Augot n, lielums $\frac{1}{(n+1)!\,2^n}$ (robežkļūda) un vēl jo vairāk R_n tiecas uz nulli. Tātad polinoms (5), kas tagad pieņem vērtību

$$1+\frac{1}{1!\,2}+\frac{1}{2!\,2^2}+\frac{1}{3!\,2^3}+\ldots+\frac{1}{n!\,2^n}, \tag{9}$$

ir derīgs $\sqrt{e}$ aprēķināšanai ar jebkuru precizitāti.

Aprēķināsim tagad, cik locekļu jāņem summā (9), lai nodrošinātu precizitāti, teiksim, līdz ceturtajai decimālzīmei (t. i., $\pm 0{,}5 \cdot 10^{-4}$). Šai nolūkā aprēķinām robežkļūdu $\frac{1}{(n+1)!\,2^n}$, ja $n=1, 2, 3$ utt.[1]

$$\frac{1}{2!\,2} = \frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{3!\,2^2} = \frac{1}{2!\,2} : 6 = \frac{1}{24},$$

$$\frac{1}{4!\,2^3} = \frac{1}{3!\,2^2} : 8 = \frac{1}{192},$$

$$\frac{1}{5!\,2^4} = \frac{1}{4!\,2^3} : 10 = \frac{1}{1920},$$

$$\frac{1}{6!\,2^5} = \frac{1}{5!\,2^4} : 12 = \frac{1}{23\,040}.$$

Šeit var apstāties, jo $\frac{1}{23\,040} < 0{,}5 \cdot 10^{-4}$.

Tātad, lai nodrošinātu precizitāti $0{,}5 \cdot 10^{-4}$, pietiek summā (9) ņemt sešus locekļus. Atrodam[2]

$$1 = 1{,}00000,$$

$$\frac{1}{1!\,2} = 0{,}50000,$$

$$\frac{1}{2!\,2^2} = \frac{1}{1!\,2} : 4 = 0{,}12500,$$

$$\frac{1}{3!\,2^3} = \frac{1}{2!\,2^2} : 6 = 0{,}02083,$$

$$\frac{1}{4!\,2^4} = \frac{1}{3!\,2^3} : 8 = 0{,}00260,$$

$$\frac{1}{5!\,2^5} = \frac{1}{4!\,2^4} : 10 = 0{,}00026$$

$$\overline{1{,}64869}$$

[1] Sākot ar otro rindiņu, mēs, pamatojoties uz identitāti

$$\frac{1}{(n+1)!\,2^n} = \frac{1}{2(n+1)} \cdot \frac{1}{n!\,2^{n-1}},$$

pakāpeniski dalām ar pāra skaitļiem 6, 8, 10, . . .

[2] Lai novērstu kļūdu uzkrāšanos, visus locekļus izskaitļojam līdz piektajai decimālzīmei.

Rezultātā dabūjam

$$\sqrt{e}=1{,}6487.$$

Tādā pašā veidā atrodam, ka, lai nodrošinātu precizitāti līdz $\pm 0{,}5 \cdot 10^{-8}$, summā (9) jāņem 10 locekļi, jo

$$|R_9| < \frac{1}{10!\,2^9} \approx 0{,}55 \cdot 10^{-9} < 0{,}5 \cdot 10^{-8}.$$

Aprēķins dod

$$\sqrt{e}=1+\frac{1}{1!\,2}+\frac{1}{2!\,2^2}+\ldots+\frac{1}{9!\,2^9}=1{,}64872127.$$

Ņemot 15 locekļus, $e^{1/2}$ var aprēķināt ar precizitāti līdz $0{,}5 \cdot 10^{-16}$ utt. Augot locekļu skaitam, strauji aug rezultāta precizitāte.

Precizitāte aug lēnāk, ja e^x aprēķina lielām $|x|$ vērtībām, piemēram, ja $x=1$ vai $x=-1$.

Ņemsim $x=1$. Tad polinoms (5), kas pieņem izskatu

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}, \tag{10}$$

dod aptuvenu skaitļa e vērtību. Kļūda R_n saskaņā ar (7) ir vienāda ar

$$R_n=\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}. \tag{11}$$

Skaitlis e^{ξ} tagad atrodas starp e^0 un e^1, t. i., starp 1 un e un tā kā $e<3$, tad

$$|R_n| < \frac{3}{(n+1)!}. \tag{12}$$

Ja n aug, tad kļūda tāpat kā iepriekš tiecas uz nulli. Bet tagad, lai nodrošinātu precizitāti līdz $0{,}5 \cdot 10^{-4}$, jāņem deviņi locekļi (sešu vietā), jo robežkļūda $\frac{3}{(n+1)!}$ kļūst mazāka par $0{,}5 \cdot 10^{-4}$ tikai tad, ja $n=8$. Aprēķins dod

$$e \approx 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{8!}=2{,}7183.$$

Ja jānodrošina precizitāte līdz $0{,}5 \cdot 10^{-8}$, jāņem 13 locekļi (10 vietā); aprēķins dod

$$e \approx 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{12!}=2{,}71828183.$$

Ņemot 15 locekļus, skaitli e var izskaitļot ar precizitāti līdz $0{,}5 \cdot 10^{-10}$ (bet ne līdz $0{,}5 \cdot 10^{-16}$, kā aprēķinot $\sqrt{e}$).

Ņemsim tagad $x=-1$. Tad polinoms (5), kas pieņem izskatu

$$1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!},$$

dod aptuvenu vērtību skaitlim e^{-1} (t. i., $\frac{1}{e}$). Kļūda R_n saskaņā ar (7) ir vienāda ar

$$R_n=(-1)^{n+1}\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}.$$

Skaitlis ξ ieslēgts starp mīnus vienu un nulli; tātad $e^{\xi}<e^0$, t. i., $e^{\xi}<1$. Tādējādi

$$|R_n|<\frac{1}{(n+1)!}.$$

Robežkļūda salīdzinājumā ar iepriekšējo gadījumu šeit ir trīsreiz mazāka. Pateicoties tam, locekļu skaits, kas nodrošina vajadzīgo precizitāti, var samazināties, bet ne vairāk kā par vienu. Tā precizitāti līdz $0{,}5 \cdot 10^{-10}$ tagad nodrošina ne 15, bet 14 locekļi; skaitļošanas praksei tam gan nav būtiskas nozīmes.

Ja $x=\pm 1$ vietā mēs ņemsim x vērtības, kas ir vēl lielākas pēc absolūtās vērtības, tad aptuvenās vienādības

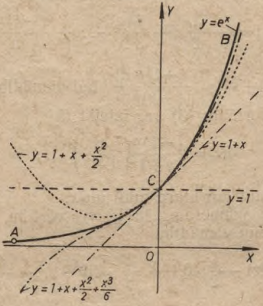
$$e^x \approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!} \tag{13}$$

kļūda tieksies uz nulli vēl lēnāk. Tomēr, lietojot formulu (7) un spriežot tāpat kā iepriekš, mēs varam pārliecināties, ka kļūda R_n tieksies uz nulli j e b k u r a i x vērtībai.

259. zīmējumā attēlota funkcijas $y=e^x$ grafika ACB un tās Teilora polinomu

$$y=1,\quad y=1+x,\quad y=1+x+\frac{x^2}{2},\quad y=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$$

grafikas.



259. zīm.

2. piemērs. Pieņemsim, ka

$$f(x)=\ln(1+x).$$

Tāpat kā 1. piemērā pieņemsim punktu $x=0$ par sākuma punktu. 271. § teorēmas nosacījumi izpildīti tikai tad, ja $x>-1$ [ja $x\leqslant-1$, tad funkcijai $\ln(1+x)$ zūd jēga]. Atvasinājumi izsakās šādi

$$f'(x)=\frac{1}{1+x},\quad f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2},\quad f'''(x)=\frac{1\cdot 2}{(1+x)^3},$$

$$f^{\mathrm{IV}}(x)=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4},\ \ldots,\ f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},$$

līdz ar to dabūsim (256. § 3. piemērs)

$$f(0)=0,\quad \frac{f'(0)}{1!}=1,\quad \frac{f''(0)}{2!}=-\frac{1}{2},$$

$$\frac{f'''(0)}{3!}=\frac{1}{3},\ldots,\quad \frac{f^{(n)}(0)}{n!}=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

Teilora polinoms (1) dos aptuvenu vienādību

$$\ln(1+x)\approx x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n. \tag{14}$$

Tā kā $f^{(n+1)}[\ln(1+x)]=\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$, tad vienādības (14) kļūdu R_n saskaņā ar formulu (3) var izteikt tā

$$R_n=\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{1+\xi}\right)^{n+1}, \tag{15}$$

kur ξ atrodas kaut kur starp nulli un x.

Aprēķināsim, piemēram, $\ln(1+x)$ vērtību, ja $x=-0{,}1$. Dabūjam aptuvenu vienādību

$$\ln 0{,}9\approx -0{,}1-\frac{1}{2}\cdot 0{,}1^2-\frac{1}{3}\cdot 0{,}1^3-\ldots-\frac{1}{n}\cdot 0{,}1^n. \tag{16}$$

Tās kļūda ir

$$R_n=-\frac{1}{n+1}\left(\frac{0{,}1}{1+\xi}\right)^{n+1}.$$

Tā kā ξ atrodas starp nulli un $-0,1$, tad $1+\xi>0{,}9$. Tātad $|R_n|<\frac{1}{n+1}\left(\frac{0{,}1}{0{,}9}\right)^{n+1}$, t. i.,

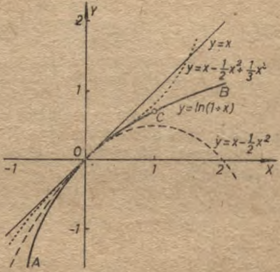
$$|R_n|<\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}. \tag{17}$$

Ja n aug, tad robežkļūda, acīmredzot, tiecas uz nulli, t. i., formula (16) var dot $\ln 0{,}9$ ar jebkuru precizitāti. Tā, lai nodrošinātu precizitāti līdz $0{,}5\cdot 10^{-4}$, jāņem $n=4$ un mēs dabūsim

$$\ln 0{,}9\approx -\left[0{,}1+\frac{1}{2}\cdot 0{,}01+\frac{1}{3}\cdot 0{,}001+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4}\cdot 0{,}0001\right]\approx -0{,}1054.$$

Tādā pašā veidā varam pārliecināties, ka formula (14) ir derīga visām x vērtībām, kas atrodas intervalā $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$[1]. Bet, jo lielāka ir $|x|$ vērtība, jo lēnāka kļūst kļūdas R_n tiekšanās uz nulli. Visvājākā šī tiekšanās ir, ja $x=1$. Tad formula (14) dod

$$\ln 2 \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$



260. zīm.

Lai nodrošinātu, piemēram, precizitāti līdz $0{,}5 \cdot 10^{-4}$, jāņem 19999 locekļi.

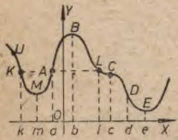
Kad x kaut nedaudz pārsniedz vienu, kļūda vispār vairs netiecas uz nulli; tieši pretēji, līdz ar n augšanu R_n neierobežoti aug.

260. zīmējumā attēlotas funkcijas $y=\ln(1+x)$ (līnija ACB) un trīs pirmo Teilora polinomu grafikas.

[1] Tā ir derīga arī visiem x, kas atrodas starp -1 un $-\frac{1}{2}$, bet izteiksme (15) neļauj par to pārliecināties.

273. §. Funkcijas augšana un dilšana

1. d e f i n ī c i j a. Funkciju $f(x)$ sauc par *augošu punktā* $x=a$, ja šī punkta p i e t i e k a m i t u v ā a p k ā r t n ē par a lielākām x vērtībām atbilst par $f(a)$ lielākas $f(x)$ vērtības un mazākām — mazākas.



261. zīm.

Funkciju $f(x)$ sauc par *dilstošu punktā* $x=a$, ja šī punkta p i e t i e k a m i t u v ā a p k ā r t n ē par a lielākām x vērtībām atbilst par $f(a)$ mazākas $f(x)$ vērtības un mazākām — lielākas.

1. p i e m ē r s. 261. zīmējumā attēlotā funkcija aug punktā $x=a$, jo pa labi no A grafikas punkti atrodas augstāk par A, bet pa kreisi — zemāk. Pie tam apskata tikai tos grafikas punktus, kuru ordinātes ir pietiekami tuvas ordinātei aA; šai piemērā — tie ir punkti, kas atrodas uz loka KL. Aiz šī loka minētā sakarība nav spēkā; tā punkts C atrodas pa labi no punkta A, bet zemāk par to, punkts U — pa kreisi, bet augstāk.

Tā pati funkcija dilst punktā $x=d$, jo punkta D pietiekami tuvā apkārtnē grafika pa labi atrodas zemāk par D, bet pa kreisi — augstāk.

Apskatāmā funkcija dilst arī punktā $x=c$.

Punktos $x=b$, $x=e$, $x=m$ funkcija nav ne augoša, ne dilstoša (punktā $x=b$ tai ir maksimums, bet punktos $x=e$ un $x=m$ — minimums; 275. §).

2. d e f i n ī c i j a. Funkciju sauc par *augošu intervalā* (a, b), ja tā ir augoša visos intervala iekšējos punktos (galos tā var arī neaugt).

Analogi definē intervalā (a, b) *dilstošu funkciju.*

2. p i e m ē r s. 261. zīmējumā attēlotā funkcija dilst intervalā (l, d), jo tā dilst visos šī intervalā iekšējos punktos (un arī tā galos). Intervalā (b, e) šī funkcija arī dilst, jo tā dilst visos intervala iekšējos punktos (galos b un e funkcija nedilst). Intervalā (m, b) funkcija aug, intervalā (a, d) tā nav ne augoša, ne dilstoša. Ja šo intervālu sadala divos intervalos (a, b) un (b, d), tad pirmajā intervalā funkcija aug, otrā — dilst.

Ja funkcija intervalā (a, b) aug, tad šai intervalā lielākai argumenta vērtībai vienmēr atbilst lielāka funkcijas vērtība; otrādi, ja intervalā (a, b) lielākai argumenta vērtībai vienmēr atbilst lielāka funkcijas vērtība, tad funkcija intervalā (a, b) aug[1].

Ja funkcija intervalā (a, b) dilst, tad lielākai argumenta vērtībai vienmēr atbilst mazāka funkcijas vērtība un otrādi.

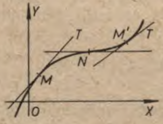
Ģeometriski: intervalos, kur funkcija aug, tās grafika (ejot uz labo pusi) kāpj augšup, bet intervalos, kur funkcija dilst, grafika slīd lejup (sal. 2. piemēru).

3. definīcija. Tiklab augošu, kā dilstošu (dotajā intervalā) funkciju sauc par *monotonu* (apskatāmajā intervalā).

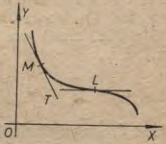
274. §. Funkcijas augšanas un dilšanas pazīmes punktā

Pietiekamā pazīme. Ja atvasinājums $f'(x)$ punktā $x=a$ ir pozitīvs, tad funkcija $f(x)$ šai punktā aug, ja negatīvs, tad dilst.

Ģeometriski: ja pieskares MT (262. zīm.) virziena koeficients ir pozitīvs, tad punkta M tuvumā grafika atrodas augstāk par punktu M pa labi un zemāk — pa kreisi; ja virziena koeficients ir negatīvs (263. zīm.), tad punkta M tuvumā grafika atrodas zemāk par M pa labi un augstāk — pa kreisi.



262. zīm.



263. zīm.

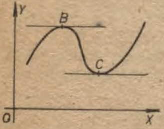
Piezīme. Ja $f'(a)=0$, tad punktā $x=a$ funkcija var būt augoša (262. zīmējumā punkts N); tā var būt dilstoša (263. zīmējumā punkts L). Bet vispārīgi funkcija punktā $x=a$ nebūs ne dilstoša, ne augoša (264. zīmējumā punkti B

---

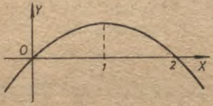
[1] Šo īpašību bieži pieņem par intervalā augošas funkcijas definīciju. Analogi definē intervalā dilstošu funkciju.

un C). Šo gadījumu izšķiršanas paņēmieni parādīti 278. un 279. paragrāfā.

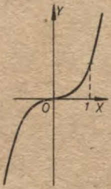
1. piemērs. Funkcija $y=x-\frac{1}{2}x^2$ (265. zīm.) punktā $x=0$ aug, jo $y'=1-x=1>0$. Tā pati funkcija dilst punktā



264. zīm.



265. zīm.



266. zīm.

$x=2$, kur $y'=-1<0$. Punktā $x=1$, kur $y'=0$, funkcija ne dilst un ne arī aug.

Nepieciešamā pazīme. Ja funkcija $f(x)$ punktā $x=a$ aug, tad tās atvasinājums[1] šai punktā ir pozitīvs (kā punktā M; 262. zīm.) vai vienāds ar nulli (kā punktā N; 262. zīm.), t. i.,

$$f'(a) \geqslant 0.$$

Analogi dilstošai funkcijai; tās atvasinājums punktā $x=a$ ir negatīvs vai vienāds ar nulli, t. i.,

$$f'(a) \leqslant 0.$$

2. piemērs. Funkcija $y=x^3$ (266. zīm.) aug visos punktos. Tās atvasinājums $y'=3x^2$ ir pozitīvs visur, izņemot punktu $x=0$, kur $y'=0$.

[1] Pieņemts, ka funkcija $f(x)$ ir diferencējama šai punktā.

274.a §. Funkcijas augšanas un dilšanas pazīmes intervālā

P i e t i e k a m ā   p a z ī m e. Ja funkcijas atvasinājums $f'(x)$ intervālā (a, b) visur ir pozitīvs, tad funkcija $f(x)$ šai intervālā aug; ja $f'(x)$ ir visur negatīvs, tad $f(x)$ dilst (sal. 274. §).

P i e z ī m e. Pazīme paliek spēkā arī tad, ja atvasinājums intervālā (a, b) pieņem arī nulles vērtības, ja vien $f(x)$ nav identiski vienāda ar nulli visā intervālā (a, b) vai arī kādā intervālā (a', b'), kas ir intervala (a, b) daļa (tādā intervālā funkcija $f(x)$ būtu pastāvīgs lielums).

P i e m ē r s. Funkcija $y=x-\frac{1}{2}x^2$ (265. zīm.) intervālā $(0, 1)$ aug, jo atvasinājums $y'=1-x$ pieņem nulles vērtību tikai punktā $x=1$, pārējos intervala $(0, 1)$ punktos tas ir pozitīvs. Tā pati funkcija intervālā $(1, 2)$ dilst, jo šeit atvasinājums y' ir visur negatīvs, izņemot punktu $x=1$, kur $y'=0$.

N e p i e c i e š a m ā   p a z ī m e. Ja funkcija $f(x)$ intervālā (a, b) aug, tad atvasinājums[1] $f'(x)$ šai intervālā ir pozitīvs vai vienāds ar nulli

$$f'(x) \geqslant 0, \text{ ja } a \leqslant x \leqslant b.$$

Analogi dilstošai funkcijai

$$f'(x) \leqslant 0, \text{ ja } a \leqslant x \leqslant b.$$

275. §. Maksimums un minimums

D e f i n ī c i j a. Saka, ka funkcijai $f(x)$ ir *maksimums punktā $x=a$*, ja šī punkta p i e t i e k a m i   t u v ā   a p k ā r t n ē visām x vērtībām (kas ir kā lielākas, tā arī mazākas par a) atbilst $f(x)$ vērtības, kas ir mazākas par $f(a)$.

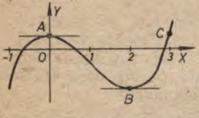
Funkcijai $f(x)$ ir *minimums punktā $x=a$*, ja šī punkta p i e t i e k a m i   t u v ā   a p k ā r t n ē visām x vērtībām atbilst $f(x)$ vērtības, kas ir lielākas par $f(a)$.

Īsāk: *funkcijai $f(x)$ ir maksimums (minimums) punktā $x=a$, ja $f(a)$ vērtība ir lielāka (mazāka) par visām blakus vērtībām.*

[1] Pieņemts, ka funkcija ir diferencējama intervālā (a, b).

Maksimumu un minimumu apvieno ar kopīgu nosaukumu *ekstrēms*[1].

Piemērs. Funkcijai $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}$ (267. zīm.) ir maksimums punktā $x=0$ [punkts $A\left(0;\ \frac{1}{3}\right)$ atrodas augstāk par visiem apkārtējiem punktiem] un minimums punktā $x=2$ [punkts B $(2;\ -1)$ atrodas zemāk par visiem apkārtējiem punktiem].



267. zīm.

Piezīme. Ikdienas sarunā izteicieni «maksimums» un «vislielākais lielums» ir viennozīmīgi. Analīzē terminam «maksimums» ir šaurāka nozīme. Funkcijas maksimums var arī nebūt tās vislielākā vērtība. Tā funkcijai $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}$ (sk. 267. zīm.), ja to apskata, teiksim, intervālā $(-1;\ 4)$, ir punktā $x=0$ maksimums, jo šī punkta tuvumā [proti, intervālā $(-1;\ 3)$] visām x vērtībām atbilst $f(x)$ vērtības, kas ir mazākas par $f(0)$, t. i., mazākas par $\frac{1}{3}$ (minētajā intervālā grafika atrodas zemāk par punktu A). Neskatoties uz to, maksimums $f(0)$ nav funkcijas vislielākā vērtība intervālā $(-1;\ 4)$, jo, ja $x>3$, tad

$$f(x)>\frac{1}{3}$$

(pa labi no C grafika atrodas augstāk par punktu A). Tomēr funkcijas lielākās vērtības atrašana dotajā intervālā cieši saistās ar tās maksimumu atrašanu (sk. 280. §).

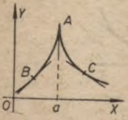
Analoga piezīme minimumam.

276. §. Nepieciešams maksimuma un minimuma noteikums

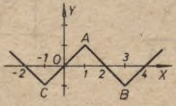
Teorēma. Ja funkcijai $f(x)$ ir ekstrēms (t. i., maksimums vai minimums) punktā $x=a$, tad šai punktā atvasinājums ir vai nu vienāds ar nulli, vai bezgalīgs, vai arī neeksistē.

[1] Latīņu vārds «ekstrēms» nozīmē «galējais».

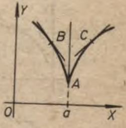
Ģeometriski: ja grafikai punktā A ir maksimālā ordināte, tad šai punktā pieskare ir vai nu horizontāla (267. zīm.), vai vertikāla (268. zīm.) vai arī neeksistē (269. zīm.). Tas pats sakāms par minimālo ordināti (punkts B 267. zīmējumā, punkts A 270. zīmējumā, punkti B un C 269. zīmējumā).



268. zīm.

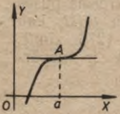


269. zīm.

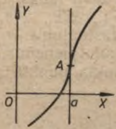


270. zīm.

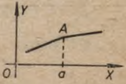
Piezīme. Teorēmā izteiktais ekstrēma noteikums ir nepieciešams, bet *nav pietiekams*, t. i., atvasinājums punktā $x=a$ var būt vienāds ar nulli (271. zīm.), var būt bezgalīgs (272. zīm.) vai arī neeksistēt (273. zīm.), bet funkcijai ekstrēms šai punktā var arī nebūt.



271. zīm.



272. zīm.



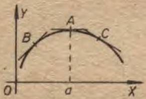
273. zīm.

277. §. Pirmais pietiekamais maksimuma un minimuma noteikums

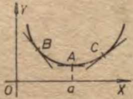
Teorēma. Ja punkta $x=a$ pietiekami tuvā apkārtnē atvasinājums $f'(x)$ ir pozitīvs pa kreisi no a un negatīvs pa labi no a (274. zīm.), tad pašā punktā $x=a$ funkcijai

$f(x)$ ir maksimums, ja vien funkcija $f(x)$ šeit ir nepārtraukta [1].

Otrādi, ja pa kreisi no a atvasinājums $f'(x)$ ir negatīvs, bet pa labi — pozitīvs (275. zīm.), tad $f(x)$ punktā a ir minimums, ja vien tā šeit ir nepārtraukta [2].



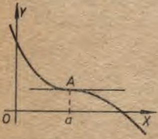
274. zīm.



275. zīm.

Teorēma izsaka faktu, ka funkcijai $f(x)$, pārejot no augšanas uz dilšanu ir maksimums, bet, pārejot no dilšanas uz augšanu, — minimums.

Piezīme. Saskaņā ar teorēmu funkcijas $f(x)$ ekstrēma pazīme ir atvasinājuma $f'(x)$ *zīmes maiņa*, argumentam ejot caur apskatāmo vērtību $x=a$.



276. zīm.

Ja, ejot caur $x=a$, atvasinājums *saglabā zīmi*, tad $f(x)$ *aug* punktā $x=a$, kad atvasinājums ir pozitīvs kā no $x=a$ labās, tā arī no kreisās puses (271., 272., 273. zīm.) un *dilst*, kad atvasinājums ir negatīvs (276. zīm.). Atkal pieņemts, ka $f(x)$ ir nepārtraukta punktā $x=a$.

278. §. Maksimumu un minimumu atrašanas kārtula

Pieņemsim, ka funkcija $f(x)$ ir diferencējama intervālā (a, b). Lai atrastu šai intervālā visus tās maksimumus un minimumus, tad

1) *Jāatrisina vienādojums* $f'(x)=0$ (šī vienādojuma saknes sauc par argumenta *kritiskajām* vērtībām; to vidū arī

[1] Funkcija $f(x)$ var arī nebūt diferencējama punktā $x=a$ (sk. 268. zīm.).

[2] Funkcija $f(x)$ var arī nebūt diferencējama punktā $x=a$ (sk. 270. zīm.).

jāmeklē x vērtības, kas dod funkcijas $f(x)$ ekstrēmus (sk. 276. §).

2) *Katrai kritiskai vērtībai $x=a$ jāizpētī, vai atvasinājums $f'(x)$ maina zīmi, argumentam ejot caur šo vērtību.* Ja $f'(x)$ pāriet *no pozitīvām uz negatīvām vērtībām* (ejot no $x<a$ uz $x>a$), tad dabūjam maksimumu (277. §), ja *no negatīvām uz pozitīvām vērtībām, tad — minimumu.*

Ja turpretim $f'(x)$ saglabā zīmi, tad nav ne maksimuma, ne minimuma: ja $f'(x)>0$, tad funkcija $f(x)$ punktā a aug, ja $f'(x)<0$, tad — dilst (277. § piezīme).

Atvasinājuma zīme		Grafikas veids punkta a tuvumā	
ja $x<a$	ja $x>a$		
+	−		maksimums
−	+		minimums
+	+		augšana
−	−		dilšana

1. piezīme. Ja funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta intervālā (a, b), bet atsevišķos tā punktos nav diferencējama, tad šie punkti jāpieskaita kritiskajiem punktiem un jāizpētī analogā veidā.

2. piezīme. Nepārtrauktas funkcijas maksimumi un minimumi seko viens aiz otra, alternējot.

1. piemērs. Atrast visus maksimumus un minimumus funkcijai $f(x)=x-\frac{1}{2}x^2$.

Atrisinājums. Dotā funkcija ir visur diferencējama (t. i., tai visur ir galīgs atvasinājums) $f'(x)=1-x$.

1) Atrisinām vienādojumu $1-x=0$. Tam ir viena sakne $x=1$.

2) Atvasinājums $f'(x)=1-x$ maina zīmi, argumentam ejot caur vērtību $x=1$. Proti, ja $x<1$, tad atvasinājums ir pozitīvs, ja $x>1$, tad — negatīvs. Tātad kritiskā vērtība $x=1$ dod maksimumu. Citu ekstrēmu funkcijai nav (sk. 265. zīm.).

2. piemērs. Atrast visus maksimumus un minimumus funkcijai

$$f(x)=(x-1)^2(x+1)^3. \tag{1}$$

Atrisinājums. Dotā funkcija visur diferencējama. Dabūjam

$$f'(x)=2(x-1)(x+1)^3+3(x-1)^2(x+1)^2=$$
$$=(x-1)(x+1)^2(5x-1).$$

1) Atrisinām vienādojumu $f'(x)=0$. Tā saknes (sakārtotas augšanas kārtībā) ir

$$x_1=-1,\quad x_2=\frac{1}{5},\quad x_3=1. \tag{2}$$

2) Izsakām atvasinājumu veidā

$$f'(x)=5(x+1)^2\left(x-\frac{1}{5}\right)(x-1) \tag{3}$$

un izpētam katru kritisko vērtību.

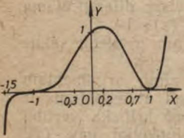
a) Ja $x<-1$, tad visi trīs binomi formulā (3) ir negatīvi, tāpēc pa kreisi no $x=-1$ dabūjam

$$f'(x)=5(-)^2(-)(-)=+. \tag{4}$$

Pieņemsim, ka arguments ir pārgājis vērtībai $x_1=-1$, bet nav nogājis līdz nākošai kritiskai vērtībai $x_2=\frac{1}{5}$. Tad binoms $x+1$ ir kļuvis pozitīvs, bet abi pārējie formulas (3) binomi palikuši negatīvi un mēs dabūjam

$$f'(x)=5(+)^2(-)(-)=+. \tag{5}$$

Salīdzinot (4) un (5), redzam, ka, izejot caur kritisko vērtību $x_1=-1$, atvasinājums nav mainījis zīmi un ir palicis pozitīvs. Tātad punktā $x=-1$ ekstrēma nav; šeit funkcija $f(x)$ aug (277. zīm.).



277. zīm.

b) Izpētam nākošo lielāko kritisko vērtību $x_2=\frac{1}{5}$. Pietiekami tuvu pa kreisi (t. i., starp $x_1=-1$ un $x_2=\frac{1}{5}$) atvasinājums saskaņā ar (5) ir pozitīvs. Pietiekami tuvu pa labi (starp $x_2=\frac{1}{5}$ un $x_3=+1$) otrs reizinātājs ir pozitīvs, un mēs dabūjam

$$f'(x)=5(+)^2(+)(-)=-. \tag{6}$$

Salīdzinot (5) un (6), redzam, ka atvasinājuma zīme, ejot caur $x_2=\frac{1}{5}$ mainās no plusa uz mīnusu [funkcija $f(x)$ no augošas pāriet dilstošā]. Tātad punktā $x=\frac{1}{5}$ funkcijai ir maksimālā vērtība; tā ir vienāda ar

$$f\left(\frac{1}{5}\right)=\left(\frac{1}{5}-1\right)^2\left(\frac{1}{5}+1\right)^3\approx 1{,}1.$$

c) Izpētam pēdējo kritisko vērtību $x_3=1$. Pietiekami tuvu pa kreisi atvasinājums saskaņā ar (6) ir negatīvs. Pa labi no $x=1$ dabūjam

$$f'(x)=5(+)^2(+)(+)=+. \tag{7}$$

Izejot caur $x=1$, atvasinājums maina zīmi no mīnusa uz plusu [funkcija $f(x)$ pāriet no dilstošas augošā]. Tātad punktā $x=1$ funkcijai ir minimālā vērtība; tā ir vienāda ar

$$f(1)=(1-1)^2(1+1)^3=0.$$

3. p i e m ē r s. Atrast visus ekstrēmus funkcijai

$$f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x^2}.$$

A t r i s i n ā j u m s. Dotā funkcija ir diferencējama visām pozitīvām un negatīvām x vērtībām, un mēs dabūjam

$$f'(x)=\sqrt[3]{x^2}+\frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{5}{3}\,\frac{x-\frac{2}{5}}{\sqrt[3]{x}}.$$

Punktā $x=0$ funkcija $f(x)$ nav diferencējama (tās atvasinājums ir bezgalīgs). Tāpēc (sk. 1. piezīmi) dabūjam divas kritiskās vērtības $x_1=0$ un $x_2=\frac{2}{5}$. Ja $x<0$, tad dabūjam

$$f'(x)=\frac{5}{3}\frac{(-)}{\sqrt[3]{-}}=+.$$

Ja $0<x<\frac{2}{5}$, tad dabūjam

$$f'(x)=\frac{5}{3}\frac{(-)}{\sqrt[3]{+}}=-.$$

Ja $x>\frac{2}{5}$, dabūjam

$$f'(x)=\frac{5}{3}\frac{(+)}{\sqrt[3]{+}}=+.$$

Tātad punktā $x=0$ funkcijai $f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ ir maksimālā vērtība

$$f(0)=0,$$

bet punktā $x=\frac{2}{5}$ — minimālā vērtība

$$f\left(\frac{2}{5}\right)=-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}\approx-0{,}33.$$

279. §. Otrais pietiekamais maksimuma un minimuma noteikums

Kad atvasinājuma zīmju noteikšana kritisko punktu (278. §) tuvumā sagādā grūtības, var lietot šādu pietiekamu ekstrēma noteikumu.

1. teorēma. Pieņemsim, ka punktā $x=a$ pirmais atvasinājums $f'(x)$ ir vienāds ar nulli; ja tad otrais atvasinājums $f''(a)$ ir negatīvs, tad funkcijai $f(x)$ punktā $x=a$ ir maksimums, ja pozitīvs, tad — minimums. Par gadījumu $f''(a)=0$ sk. 2. teorēmu.

Otrs nosacījums šādā veidā saistīts ar pirmo. Uzskatīsim $f''(x)$ par $f'(x)$ atvasinājumu. Sakarība $f''(a)<0$ nozīmē

(274. §), ka $f'(x)$ dilst punktā $x=a$. Bet, tā kā $f'(a)=0$, tad $f'(x)$ ir pozitīvs, ja $x<a$ un negatīvs, ja $x>a$. Tātad (277. §) $f(x)$ ir maksimums punktā $x=a$. Analogi var spriest gadījumam $f''(a)>0$.

1. piemērs. Atrast maksimumus un minimumus funkcijai

$$f(x)=\frac{1}{2}x^4-x^2+1.$$

Atrisinājums. Atrisinot vienādojumu

$$f'(x)=2x^3-2x=0,$$

dabūjam kritiskās vērtības

$$x_1=-1, \quad x_2=0, \quad x_3=1.$$

Ievietojot tās otrā atvasinājuma izteiksmē

$$f''(x)=6x^2-2=2(3x^2-1),$$

atrodam, ka

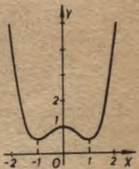
$$f''(-1)>0, \quad f''(0)<0, \quad f''(1)>0.$$

Tātad punktos $x=-1$ un $x=1$ ir minimumi, bet punktā $x=0$ — maksimums (278. zīm.).

Var gadīties, ka līdz ar pirmo atvasinājumu arī otrais atvasinājums kļūst vienāds ar nulli; ar nulli vienādi var kļūt arī vairāki tālākie atvasinājumi. Tad var izmantot šādu 1. teorēmas vispārinājumu.

2. teorēma. Ja punktā $x=a$, kur pirmais atvasinājums ir vienāds ar nulli, tuvākajam no nulles atšķirīgajam atvasinājumam ir pāra kārta $2k$, tad funkcijai $f(x)$ punktā $x=a$ ir maksimums, kad $f^{(2k)}(a)<0$, un minimums, kad $f^{(2k)}(a)>0$. Ja tuvākajam no nulles atšķirīgajam atvasinājumam ir nepāra kārta $2k+1$, tad funkcijai $f(x)$ punktā a nav ekstrēma; tā aug, kad $f^{(2k+1)}(a)>0$, un dilst, kad $f^{(2k+1)}(a)<0$.

Piezīme. Teorētiski nav izslēgts, ka funkcijai $f(x)$ (kas nav pastāvīgs lielums) *visi atvasinājumi* punktā $x=a$ būs vienādi ar nulli[1]. Tomēr praktiskas nozīmes šim gadījumam nav.



278. zīm.

[1] Tāda, piemēram, ir funkcija, kas apskatīta 270. § pēdējā zemtekstā piezīmē.

2. piemērs. Atrast maksimumus un minimumus funkcijai

$$f(x)=\sin 3x-3\sin x.$$

Atrisinājums. Atrodam

$$f'(x)=3\cos 3x-3\cos x.$$

Atrisinot vienādojumu

$$3\cos 3x-3\cos x=0,$$

atrodam

$$x=k\frac{\pi}{2},$$

kur k ir jebkurš vesels skaitlis.
Tā kā dotajai funkcijai ir periods 2π, tad pietiek izpētīt četras saknes

$$x_1=0,\quad x_2=\frac{\pi}{2},\quad x_3=\pi,\quad x_4=\frac{3\pi}{2}.$$

Ņemam otro atvasinājumu

$$f''(x)=-9\sin 3x+3\sin x.$$

Ievietojot kritiskās vērtības x_1, x_2, x_3, x_4, atrodam

$$f''(0)=0,\quad f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=12,$$

$$f''(\pi)=0,\quad f''\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-12.$$

Punktā $x_2=\frac{\pi}{2}$ tuvākajam no nulles atšķirīgajam atvasinājumam ir otrā (pāra) kārta, pie kam $f''(\frac{\pi}{2})>0$. Tātad punktā $x=\frac{\pi}{2}$ ir minimums. Analogi secinām, ka punktā $x=\frac{3\pi}{2}$ ir maksimums [jo $f''(\frac{3\pi}{2})<0$].

Ekstremālās vērtības būs

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin 3\frac{\pi}{2}-3\sin\frac{\pi}{2}=-1-3=-4 \text{ (minimums)},$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\frac{9\pi}{2}-3\sin\frac{3\pi}{2}=1-(-3)=4 \text{ (maksimums)}.$$

Lai izpētītu kritiskās vērtības $x_1=0$ un $x_3=\pi$, atrodam trešo atvasinājumu

$$f'''(x)=-27\cos 3x+3\cos x.$$

Dabūjam

$$f'''(0)=-24,\quad f'''(\pi)=+24.$$

Punktā $x=0$ tuvākajam no nulles atšķirīgajam atvasinājumam ir trešā (nepāra) kārta, pie kam $f'''(0)<0$. Tātad punktā $x=0$ ekstrēma nav. Šeit funkcija $f(x)$ dilst. Analogi secinām, ka arī punktā $x=\pi$ ekstrēma nav; bet šeit funkcija $f(x)$ aug [jo $f'''(\pi)>0$].

280. §. Funkcijas lielākās un mazākās vērtības atrašana

1. Pieņemsim, ka saskaņā ar apskatāmā jautājuma noteikumiem nepārtrauktas funkcijas $f(x)$ arguments mainās bezgalīgā intervālā $(a, +\infty)$. Tad var gadīties, ka funkcijas $f(x)$ vērtību vidū nav vislielākās (sk. 279.a zīm.), kur $f(x)$ neierobežoti aug, kad $x\to+\infty$. Ja tomēr funkcijai $f(x)$ ir vislielākā vērtība, tad pēdējā katrā ziņā būs viens funkcijas ekstrēms (sk. 279.b zīm.), kur funkcijas vislielākā vērtība ir $f(c)$.

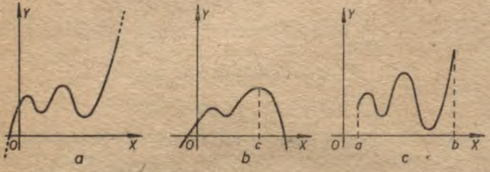
Pieņemsim tagad, ka saskaņā ar apskatāmā jautājuma noteikumiem arguments x mainās slēgtā intervālā (a, b). Tad $f(x)$ katrā ziņā pieņem vislielāko vērtību (221. §). Šī vērtība tomēr var nepiederēt ekstrēmiem, bet to var sasniegt kādā intervāla galā (279.c zīmējumā punktā $x=b$[1]).

Analogi vismazākajai vērtībai.

2. Pieņemsim, ka jāatrod vislielākā (vai vismazākā) vērtība ģeometriskam vai fizikālam lielumam, kas pakļauts noteiktiem nosacījumiem (sk. tālāk piemērus). Tad šis lielums jāizsaka kā kāda argumenta funkcija. No uzdevuma nosa-

[1] Ja no apskata izslēdz galu $x=b$, tad atlikušajā neslēgtajā intervālā funkcijai $f(x)$ vislielākās vērtības nebūs.

cījumiem nosakām argumenta maiņas intervālu. Pēc tam atrodam visas argumenta kritiskās vērtības, kuras atrodas šai intervālā un izskaitļojam attiecīgās funkcijas vērtības, kā arī funkcijas vērtības intervāla galos. No atrastajām vērtībām izvēlamies vislielāko (vismazāko).



279. zīm.

1. piezīme. Bieži argumentu var izvēlēties dažādi; veiksmīga izvēle var atvieglot atrisināšanu. Uzdevuma īpatnību ievērošana arī var vienkāršot atrisināšanu.

Tā, ja dotā intervāla iekšienē ir tikai viena argumenta kritiskā vērtība un tai, pamatojoties uz šādu vai tādu pazīmi (sk. 277., 279. §§) jādod maksimums (minimums), tad mums, nesalīdzinot ar funkcijas robežvērtībām, ir tiesības secināt, ka šis maksimums (minimums) ir meklētā lielākā (mazākā) vērtība.

1. piemērs. Nogriezni $AB=a$ punkts C dala divās daļās; uz nogriežņiem AC un CB (280. zīm.) kā uz malām konstruē taisnstūri $ACBD$. Noteikt vislielāko tā laukuma S vērtību.

Atrisinājums. Par argumentu pieņemsim AC garumu x; tad

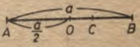
$$CB=a-x \text{ un } S=x(a-x).$$

Nepārtrauktās funkcijas S arguments x mainās intervālā $(0, a)$.

No vienādojuma

$$\frac{dS}{dx}=a-2x=0$$

atrodam (vienīgo) kritisko vērtību $x=\frac{a}{2}$. Tā pieder dotajam intervālam $(0, a)$. Aprēķinām vērtību $S(\frac{a}{2})=\frac{a^2}{4}$ un robežvērtības $f(0)=0$, $f(a)=0$. Salīdzinot šīs trīs vērtības, secinām, ka meklētā lielākā vērtība ir $\frac{a^2}{4}$.



280. zīm.

Šāda salīdzināšana nav nepieciešama, ja ievēro, ka vienīgajā kritiskajā punktā $x=\frac{a}{2}$ funkcijas $S(x)$ otrais atvasinājums ir negatīvs, t. i., (279. §) funkcijai $S(x)$ šeit ir maksimums.

Mainīgajam taisnstūrim $ACBD$ vienmēr ir viens un tas pats perimetrs $(2a)$. Tātad *no visiem taisnstūriem ar doto perimetru kvadrātam ir vislielākais laukums.*

2. piezīme. Vislabāk par argumentu z pieņemt punkta C attālumu z no nogriežņa AB viduspunkta O (sk. 280. zīm.). Tad

$$AC=AO+OC=\frac{a}{2}+z,\quad CB=OB-OC=\frac{a}{2}-z$$

un

$$S=\left(\frac{a}{2}+z\right)\left(\frac{a}{2}-z\right)=\left(\frac{a}{2}\right)^2-z^2.$$

Tagad nav vajadzības meklēt ekstrēmu, jo $\left(\frac{a}{2}\right)^2-z^2$, acīmredzot, nepārsniedz $\left(\frac{a}{2}\right)^2$.

2. piemērs. Paturot 1. piemēra nosacījumus, atrast vismazāko vērtību laukumam S.

Atrisinājums. Pieņemsim par argumentu $x=AC$. Salīdzinām funkcijas $S=x(a-x)$ vienīgo ekstrēmu $\left(\frac{a^2}{4}\right)$ ar tās vērtību $(S=0)$ intervāla galos $x=0$ un $x=a$. Secinām, ka nulle ir S vismazākā vērtība [*slēgtā intervālā* $(0, a)$].

Tomēr, ja $x=0$ un $x=a$, mums nav taisnstūra īstā nozīmē (tas pārvēršas nogrieznī AB). Ja apskata tikai «īstus» taisnstūrus, tad intervāla $(0, a)$ gali no apskata jāizslēdz un tad S vaļējā intervālā $(0, a)$ nav vismazākās vērtības.

3. piemērs. Atrast vismazāko un vislielāko pusperimetra p lielumu taisnstūrim ar doto laukumu S.

Atrisinājums. Apzīmēsim taisnstūra malas ar x, y. Tad

$$xy=S \tag{1}$$

(x un y ir pozitīvi lielumi). Jāatrod vismazākā un vislielākā vērtība lielumam

$$p=x+y. \tag{2}$$

Par argumentu pieņemsim x; tad

$$p=x+\frac{S}{x}. \tag{3}$$

Arguments x mainās bezgalīgā intervālā $(0, +\infty)$ (tanī neietilpst gals $x=0$). Šai intervālā funkcija $p(x)$ ir nepārtraukta un tai ir atvasinājums

$$\frac{dp}{dx}=1-\frac{S}{x^2}. \tag{4}$$

No vienādojuma

$$1-\frac{S}{x^2}=0 \tag{5}$$

atrodam vienīgo (dotajā intervālā) kritisko vērtību

$$x=\sqrt{S}.$$

No (4) redzams, ka atvasinājums $\frac{dp}{dx}$ ir negatīvs, ja $0<x<\sqrt{S}$, un pozitīvs, ja $x>\sqrt{S}$. Tātad (277. §) šai punktā ir minimums. Tā kā tas ir vienīgais, tad tas ir (sk. 1. piezīmi) pusperimetra mazākā vērtība [1], t. i.,

$$P_{\text{maz}}=\sqrt{S}+\frac{S}{\sqrt{S}}=2\sqrt{S}, \tag{6}$$

[1] Uzdevumu var atrisināt arī bez ekstrēma meklēšanas. Vienādības (2) un (1) dod: $p^2=(x+y)^2=(x-y)^2+4xy=(x-y)^2+4S$. Tā kā $4S$ ir pastāvīgs lielums, bet $(x-y)^2$ vismazākā vērtība ir nulle (ja $x=y$), tad vismazākā p vērtība ir $4S$; tātad vismazākā p vērtība ir $2\sqrt{S}$.
Šis paņēmiens ir vienkāršāks (tai nozīmē, ka neprasa augstākās matemātikas zināšanas) un īsāks. Bet šis paņēmiens prasa atjautību, un tai ziņā ir grūtāks par iztirzāto vispārīgo paņēmienu.

t. i., *no visiem taisnstūriem ar doto laukumu S vismazākais pusperimetrs ir kvadrātam* ($x=\sqrt{S}$, $y=\sqrt{S}$).

Vislielākās vērtības lielumam p nav [dotais intervāls $(0, +\infty)$ ir vaļējs].

4. piemērs. Atrast vismazāko skārda daudzumu, no kura var izgatavot cilindrisku konservu kārbu ar tilpumu $V=2\pi$ (šuvēm patērēto skārdu neievērot).

Atrisinājums. Pieņemsim, ka kārbas virsma ir S, pamata rādiuss — r, augstums — h. Jāaprēķina vismazākā vērtība lielumam

$$S=2\pi rh+2\pi r^2 \tag{7}$$

ar noteikumu, ka

$$\pi r^2 h=V. \tag{8}$$

Par argumentu izdevīgi pieņemt r. No (7) un (8) atrodam

$$S=2\left(\frac{V}{r}+\pi r^2\right), \tag{9}$$

kur arguments mainās intervālā $(0, \infty)$. Pēc uzdevuma satura skaidrs, ka lielums S sasniedz vismazāko vērtību kaut kur šī intervāla iekšienē. Tāpēc pietiek apskatīt funkcijas vērtības kritiskajos punktos.

Atrisinām vienādojumu

$$\frac{dS}{dr}=2\left(-\frac{V}{r^2}+2\pi r\right)=0. \tag{10}$$

Tā vienīgā sakne

$$r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \tag{11}$$

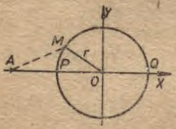
atbilst vismazākajai S vērtībai. No (8) un (11) atrodam

$h=\frac{V}{\pi r^2}=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}=2r$, t. i., *kārbas augstumam jābūt vienādam ar pamata diametru.* Vismazākais skārda daudzums, kas vajadzīgs kārbas izgatavošanai, ir

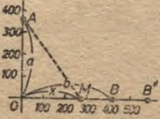
$$S_{maz}=2\pi(rh+r^2)=6\pi r^2=3\sqrt[3]{2\pi V^2}\approx 879 \text{ cm}^2.$$

5. piemērs. (Dekarta paradokss). 1638. gadā Dekarts saņēma (no M. Mersenā) Fermā vēstuli, kur viņš

bez pierādījuma ziņo par viņa atklāto ekstrēmu atrašanas kārtulu. Mūsdienu valodas tulkojumā Fermā kārtula reducējas uz tādas x vērtības meklēšanu, kas pētamās funkcijas atvasinājumu $f'(x)$ pārvērš nullē.



281. zīm.



282. zīm.

Atbildes vēstulē Dekarts deva šādu piemēru, kas, kā viņš uzskatīja, pierāda Fermā kārtulas maldīgumu.

Pieņemsim, ka dota riņķa līnija

$$x^2+y^2=r^2 \tag{12}$$

(281. zīm.) un punkts $A(-a; 0)$, kas nesakrīt ar centru (t. i., $a \neq 0$). Uz riņķa līnijas (12) jāatrod punkts, kas atrodas vistuvāk punktam A. Patvaļīga punkta $M(x; y)$ attālumu līdz punktam A izsaka tā:

$$AM^2=(x+a)^2+y^2. \tag{13}$$

Ja punkts atrodas uz riņķa līnijas (12), tad

$$y^2=r^2-x^2$$

un

$$AM^2=(x+a)^2+r^2-x^2.$$

Lai atrastu x vērtību, kas dod lielumam AM^2 minimumu, Dekarts rīkojas saskaņā ar Fermā kārtulu un iegūst bezjēdzīgu vienādību $2a=0$.

Tomēr ģeometriski skaidrs, ka meklētais punkts eksistē un sakrīt ar punktu $P(-r; 0)$. Tādēļ Dekarts secina, ka minimuma pazīme nav pareiza. Patiesībā punktu P $(x=-r)$ neatklāj cita iemesla dēļ: tam atbilstošā AM^2 vismazākā vērtība *nav minimums.* Tiešām, x mainās tikai intervālā $(-r, +r)$. Apskatāmā funkcija vismazāko vērtību pieņem intervāla galā.

6. piemērs. Peldētāju grupa sacenšas no laivas A (282. zīm.) sasniegt pretējā krasta punktu B. Sacensības noteikumi atļauj daļu ceļa veikt pa sauszemi. Laiva atrodas iepretim piestātnei O attālumā $OA=a=360$ m; gala punkts B atrodas no piestātnes attālumā $OB=b=420$ m. Kāds vislabākais rezultāts var būt sacensības dalībniekam, kas peldot veic 90 m minūtē, bet skrejot 150 m minūtē?

Atrisinājums. Pieņemsim, ka peldētājs izkāpj krastā punktā M, kas atrodas attālumā $OM=x$ no piestātnes. Lieluma x maiņu pietiek apskatīt intervālā $(0, b)$[1].

Ceļā AMB patērētais laiks t (minūtēs) ir vienāds ar

$$t=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{90}+\frac{b-x}{150}. \tag{14}$$

Šeit $a=360$, $b=420$. Jāatrod funkcijas t vismazākā vērtība intervālā $(0, b)$.

Dabūjam

$$\frac{dt}{dx}=\frac{x}{90\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{1}{150}. \tag{15}$$

Atrisinot vienādojumu

$$\frac{x}{90\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{1}{150}=0, \tag{16}$$

atrodam vienīgo kritisko vērtību $x=\frac{3}{4}a=270$ m. Šī vērtība atrodas apskatāmajā intervālā $(0, b)$. Tā kā otrais atvasinājums

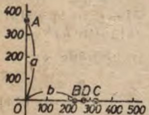
$$\frac{d^2t}{dx^2}=\frac{1}{90}\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)=\frac{a^2}{90\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$$

punktā $x=\frac{3}{4}a$ (un arī visos citos punktos) ir pozitīvs, tad (279. §. 1. teorēma) šai punktā ir minimums. Tā kā tas ir

[1] Piepeldēt krastam aiz gabala OB robežām peldētājam nav nozīmes: līdz punktam B' jāpeld tālāk nekā līdz B; bez tam vēl jānoskrien ceļš $B'B$.

vienīgais minimums, tad (sk. 1. piezīmi) tas dod meklēto funkcijas t vismazāko vērtību; tā ir

$$t_{maz}=\frac{\sqrt{a^2+\left(\frac{3}{4}a\right)^2}}{90}+\frac{b-\frac{3}{4}a}{150}=6\text{ (min.)}.$$



283. zīm.

Peldētāja ceļš 282. zīmējumā parādīts ar punktētu līniju.

6.a piemērs. Atrisināt to pašu 6. piemēra uzdevumu, mainot vērtību $b=420$ m uz vērtību $b=225$ m (283. zīm.).

Atrisinājums. Pietiek apskatīt x maiņu intervālā $(0, 225)$. Tā kā vienādojuma (16) sakne $x=270$ atrodas aiz šī intervāla robežām, tad funkcijai t tagad nav minimuma intervāla iekšienē. Vismazāko vērtību tā pieņem galā $x=b=225$.

Šeit

$$t=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{90}=4\ min.\ 43\ sek.$$

Peldētājam jāpeld tieši uz finišu.

3. piezīme. Risinot pēdējo uzdevumu, mēs, vadoties no vesela saprāta, apskatījām funkcijas

$$t=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{90}+\frac{b-x}{150} \tag{14}$$

(kur $a=360$, $b=225$) argumenta x maiņu tikai intervālā $(0, 225)$.

Bet mēs varētu paplašināt argumenta maiņas apgabalu un apskatīt, teiksim, intervālu $(0, 325)$. Tad, spriežot tāpat kā 6. piemērā, mēs atrastu, ka funkcijai (14) ir minimums punktā $x=270$ (jo šis punkts atrodas apskatāmajā intervālā, ir vienīgā funkcijas (14) kritiskā vērtība un dod šai funkcijai minimumu).

No šejienes, liekas, vajadzētu secināt, ka peldētājam jāpeld uz punktu D, kas atrodas tālāk par finišu B, kas, acīm redzot, ir muļķīgi.

Kļūda rodas tā iemesla dēļ, ka funkcija (14) izsaka t atkarību no x tikai gabalā OB, gabalā BC atkarību izsaka formula

$$t=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{90}+\frac{x-b}{150} \tag{14'}$$

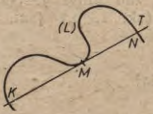
(sk. shematisko grafiku 284. zīmējumā).

284. zīm.

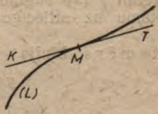
Punktā $x=b$ abas formulas (14), (14′) dod vienu un to pašu vērtību, tātad funkcija $t(x)$ punktā $x=b$ ir nepārtraukta, bet atvasinājums $\frac{dt}{dx}$ punktā $x=b$ neeksistē. Tāpēc punkts $x=b$ funkcijai $t(x)$ ir kritiskais punkts (sal. 278. § 1. piezīmi). Citu kritisko punktu intervālā (0, 325) nav.

281. §. Plaknes līniju izliekums; pārliekuma punkti

Plaknes līniju L sauc par izliektu punktā M (285. zīm.), ja punkta M pietiekami tuvā apkārtnē līnija L atrodas vienā pusē no pieskares MT (līnijas L *ieliekuma puse*). Pretējo pusi sauc par *izliekuma pusi*.



285. zīm.

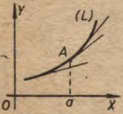


286. zīm.

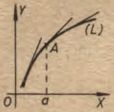
Ja līnija L punkta M apkārtnē atrodas abās pusēs no pieskares MT (286. zīm.), tad M sauc par līnijas L *pārliekuma* jeb *infleksijas punktu*.

Ejot caur pārliekuma punktu, izliekuma puse kļūst par ieliekuma pusi un otrādi.

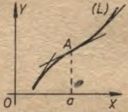
Pieņemsim, ka līniju L izsaka vienādojums $y=f(x)$. Ja *atvasinājums* $f'(x)$ punktā $x=a$ aug, tad līnija L šeit vērsta ar ieliekumu augšup (287. zīm.), ja dilst, tad — lejup (288. zīm.). Ja atvasinājumam $f'(x)$ punktā $x=a$ ir ekstrēms (289. un 290. zīm.), tad līnijai L šeit ir pārliekuma punkts.



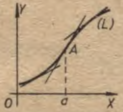
287. zīm.



288. zīm.



289. zīm.



290. zīm.

282. §. Ieliekuma puse

1. Ja otrais atvasinājums punktā $x=a$ ir pozitīvs, tad līnija $y=f(x)$ šeit vērsta ar ieliekumu augšup, ja negatīvs, tad — lejup (291. shematiskais zīmējums).

Paskaidrojums. Ja $f''(a)>0$, tad $f'(x)$ aug punktā $x=a$ (274. §); tātad ieliekums vērsts augšup (281. §). Analogi spriežam gadījumā, ja $f''(a)<0$.

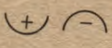
2. Pieņemsim, ka otrais atvasinājums $f''(x)$ punktā $x=a$ ir vienāds ar nulli, bezgalīgs vai vispār neeksistē.

Ja, ejot caur $x=a$, otrais atvasinājums[1] maina zīmi, tad līnijai $y=f(x)$ šeit ir pārliekuma punkts (292. zīm.). Ja turpretim $f''(x)$ saglabā zīmi, tad līnija $y=f(x)$ vērsta ar ieliekumu uz attiecīgo pusi (sk. 1. p.) (sal. 277. un 281. §§).

1. piemērs. Līnija

$$y=3x^4-4x^3$$

(293. zīm.) punktā $A\left(-\frac{1}{3};\ \frac{5}{27}\right)$ vērsta ar ieliekumu augšup,



291. zīm.

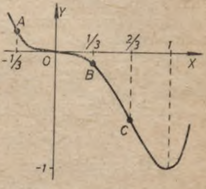
292. zīm.

[1] Pieņemts, ka tas eksistē punkta a apkārtnē.

bet punktā $B\left(\frac{1}{3};\ -\frac{1}{9}\right)$ — lejup, jo otrais atvasinājums

$$y''=36x^2-24x=12x(3x-2)$$

ir pozitīvs punktā $x=-\frac{1}{3}$ [abi reizinātāji $12x$ un $(3x-2)$ ir negatīvi], bet punktā $x=\frac{1}{3}$ negatīvs.

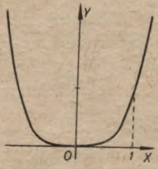


293. zīm.

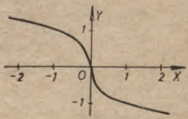
Punktā $O(0;0)$, kur $y''=0$, ir pārliekums, jo, ejot caur $x=0$, otrais atvasinājums maina zīmi no plusa (ja $x<0$) uz mīnusu (ja $x>0$). Pa kreisi no O līnija vērsta ar ieliekumu augšup, pa labi lejup.

2. piemērs. Līnija $y=x^4$ (294. zīm.) punktā $O(0;0)$, kur $y''=0$, vērsta ar ieliekumu augšup, jo, ejot caur $x=0$, funkcija $y''=12x^2$ saglabā plusa zīmi.

3. piemērs. Līnijai $y=-x^{-\frac{1}{3}}$ (295. zīm.) punktā $O(0;0)$, kur otrais atvasinājums ir bezgalīgs, ir pārliekums, jo, ejot caur $x=0$, otrais atvasinājums $y''=+\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$ maina zīmi no mīnusa uz plusu. Pa kreisi no O līnija vērsta ar ieliekumu lejup, pa labi — augšup.



294. zīm.



295. zīm.

283. §. Kārtula pārliekuma punktu atrašanai

Lai atrastu visus pārliekuma punktus līnijai $y=f(x)$, jāpārbauda visas tās x vērtības, kurām otrais atvasinājums ir vienāds ar nulli, bezgalīgs vai neeksistē (tikai tādos punktos pārliekums ir iespējams; 282. §).

Ja, ejot caur vienu no šīm vērtībām, otrais atvasinājums maina zīmi, tad līnijai šai punktā ir pārliekums. Ja nemaina, tad pārliekuma nav (282. § 2. p.).

1. p i e m ē r s. Atrast pārliekuma punktus līnijai $y=3x^4-4x^3$.

A t r i s i n ā j u m s. Atrodam

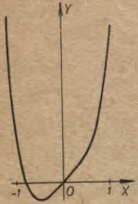
$$y''=36x^2-24x=12x\,(3x-2).$$

Otrais atvasinājums eksistē visur un visur ir galīgs; tas kļūst vienāds ar nulli divos punktos $x=\frac{2}{3}$ un $x=0$. Apskatām punktu $x=\frac{2}{3}$. Ja x ir nedaudz mazāks par $\frac{2}{3}$ $\left(\text{konkrēti, ja } 0<x<\frac{2}{3}\right)$, tad

$$y''=12(+)(-)=-;$$

ja x ir mazliet lielāks par $\frac{2}{3}$ (šai gadījumā lielumam x var ņemt jebkuru par $\frac{2}{3}$ lielāku skaitli), tad

$$y''=12(+)(+)=+.$$



296. zīm.

Ejot caur $x=\frac{2}{3}$, otrais atvasinājums maina zīmi; tātad atbilstošajā grafikas punktā (293. zīmējumā punkts C) ir pārliekums. Punktā $x=0$ arī ir pārliekums (282. § 1. piemērs).

2. p i e m ē r s. Atrast pārliekuma punktus līnijai

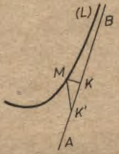
$$y=x+2x^4.$$

A t r i s i n ā j u m s. Dabūjam $y''=24x^2$. Otrais atvasinājums ir visur galīgs un kļūst vienāds ar nulli tikai punktā

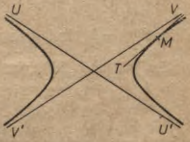
$x=0$. Ejot caur $x=0$, otrais atvasinājums, tāpat kā visur, saglabā plusa zīmi. Tātad ne šeit, ne citos punktos pārliekuma nav. Līnija vērsta ar ieliekumu augšup (296. zīm.).

284. §. Asimptotas

Pieņemsim, ka punkts M, izejot no stāvokļa M_0, kustas pa līniju L vienā virzienā. Ja pie tam attālums M_0M (kuru mērī pa taisni) neierobežoti aug, tad saka, ka punkts M *attālinās uz bezgalību.*



297. zīm.



298. zīm.

D e f i n ī c i j a. Taisni AB sauc par līnijas L *asimptotu*, ja attālums MK (297. zīm.) no līnijas L punkta M līdz taisnei AB tiecas uz nulli, kad punkts M attālinās uz bezgalību.

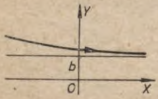
1. p i e z ī m e. Attālumu no M līdz AB var mērīt ne tikai pa perpendikulu, bet arī pa jebkuru *pastāvīgu* virzienu MK', jo, ja $MK \to 0$, tad arī $MK' \to 0$ un otrādi.

2. p i e z ī m e. 46. paragrāfā dotā hiperbolas asimptotu definīcija (298. zīmējumā $U'U$ un $V'V$) pakļaujas šeit dotajai vispārīgajai definīcijai.

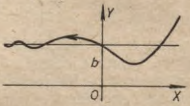
3. p i e z ī m e. Ne katrai līnijai, pa kuru punkts var attālināties uz bezgalību, ir asimptota. Tā parabolai un Arhimēda spirālei asimptotu nav.

285. §. Koordinātu asīm paralēlo asimptotu atrašana

1. Abscisu asij paralēlās asimptotas. Lai atrastu līnijas $y=f(x)$ horizontālās asimptotas, meklējam $f(x)$ robežas, kad $x \to +\infty$ un kad $x \to -\infty$.



299. zīm.



300. zīm.

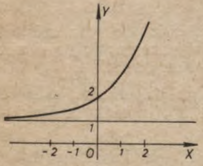
Ja $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$, tad taisne $y=b$ ir asimptota (bezgalīgi attālinoties pa labi; 299. zīm.).

Ja $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b'$, tad taisne $y=b'$ ir asimptota (bezgalīgi attālinoties pa kreisi; 300. zīm.).

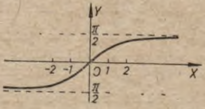
Ja $f(x)$ nav galīgas robežas ne kad $x \to +\infty$, ne kad $x \to -\infty$, tad līnijai $y=f(x)$ nav OX asij paralēlu asimptotu.

1. piemērs. Atrast līnijai $y=1+e^x$ asimptotas, kas paralēlas OX asij.

Atrisinājums. Kad $x \to +\infty$, funkcijai $1+e^x$ nav galīgas robežas $[\lim\limits_{x \to +\infty}(1+e^x) = +\infty]$, bet, kad $x \to -\infty$, tad funkcija tiecas uz vienu. Tāpēc taisne $y=1$ ir asimptota, līnijai attālinoties uz kreiso pusi (301. zīm.).



301. zīm.



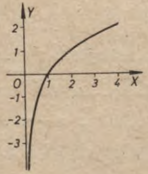
302. zīm.

2. p i e m ē r s. Atrast horizontālās asimptotas līnijai $y = \operatorname{arctg} x$.

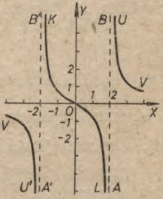
A t r i s i n ā j u m s. Dabūjam

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

Taisnes $y = \frac{\pi}{2}$, $y = -\frac{\pi}{2}$ ir asimptotas (302. zīm.).



303. zīm.



304. zīm.

2. **Ordinātu asij paralēlās asimptotas.** Lai atrastu līnijai $y = f(x)$ vertikālās asimptotas, jāmeklē tās argumenta x vērtības $x_1, x_2, x_3, \ldots$, kurām $f(x)$ ir bezgalīga robeža (vienpusīga vai abpusīga). Taisnes $x = x_1$, $x = x_2$, $x = x_3$ būs asimptotas. Ja nevienai x vērtībai $f(x)$ nav bezgalīgas robežas, tad vertikālo asimptotu nav.

3. p i e m ē r s. Apskatīsim līniju $y = \ln x$ (303. zīm.). Funkcijai $\ln x$ ir labās puses bezgalīga robeža, kad $x \to 0$ $\left(\lim\limits_{x \to +0} \ln x = -\infty\right)$. Taisne $x = 0$ (ordinātu ass) ir asimptota, bezgalīgi attālinoties lejup.

4. p i e m ē r s. Atrast vertikālās asimptotas līnijai

$$y = \frac{2x}{x^2 - 4}.$$

A t r i s i n ā j u m s. Funkcijai $\frac{2x}{x^2-4}$ ir bezgalīga robeža, kad $x \to 2$ un kad $x \to -2$.

Tātad taisnes

$$x=2 \text{ un } x=-2$$

(304. zīmējumā AB un $A'B'$) ir asimptotas. Taisne AB ir asimptota diviem zariem UV un KL. Pa pirmo zaru līnija bezgalīgi attālinās augšup, pa otro — lejup (jo $\lim\limits_{x \to 2+0} \frac{2x}{x^2-4} = +\infty$ un $\lim\limits_{x \to 2-0} \frac{2x}{x^2-4} = -\infty$). Analogi taisnei $A'B'$.

Atzīmēsim, ka taisne $x=0$ ir horizontālā asimptota (zariem UV un $U'V'$) (sal. 1. p.).

286. §. Koordinātu asīm neparalēlo asimptotu atrašana [1]

Lai atrastu līnijas $y=f(x)$ asimptotas, kas nav paralēlas OY asij, vispirms jāmeklē $\lim \frac{f(x)}{x}$, kad $x \to +\infty$ un kad $x \to -\infty$. Ja abos gadījumos nav galīgu robežu, tad nav arī meklēto asimptotu.

Ja turpretim $\lim\limits_{x \to +\infty} \left.\frac{f(x)}{x}\right| = c$, tad pēc tam jāmeklē $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - cx]$. Ja šī robeža ir vienāda ar d, tad taisne $y = cx+d$ ir asimptota, *līnijai bezgalīgi attālinoties pa labi*. Analogi, ja $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = c'$ un $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - c'x] = d'$, tad taisne $y=c'x+d'$ ir asimptota, *līnijai attālinoties pa kreisi*.

Ja lielumam $f(x) - cx$ [vai $f(x) - c'x$] nav galīgas robežas, kad $x \to +\infty$ [kad $x \to -\infty$], tad attiecīgās asimptotas nav.

Izteiksme $f(x) - (cx+d)$ dod dotās līnijas vertikālo novirzi LM (305. zīm.) no tās asimptotas, kuras vienādojums ir $y=cx+d$.

Ja šī izteiksme, kad $x \to +\infty$, sākot ar kādu momentu saglabā plusa zīmi, tad punkts M tuvojas asimptotai AB no augšas (305. zīm. *a*), ja mīnusa zīmi, tad — no apakšas

---

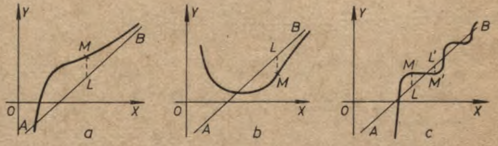
[1] Tālāk apskatītais paņēmiens atsevišķā gadījumā atklāj arī horizontālās asimptotas, ja tādas ir. Bet, ja mūs interesē tikai horizontālās asimptotas, tad vienkāršāk ir lietot 285. § 1. p. paņēmienu. Vertikālās asimptotas šis paņēmiens neatklāj.

(305. zīm. b). Ja zīme mainās, tad punkts M svārstās ap asimptotu (305. zīm. c).

Analogi asimptotai $y=c'x+d'$.

1. piemērs. Atrast asimptotas hiperbolai

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1. \tag{1}$$



305. zīm.

Atrisinājums. Vienādojumam (1) atbilst divas vienvērtīgas funkcijas

$$y=\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9} \tag{2}$$

un

$$y=-\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}. \tag{3}$$

Apskatām pirmo funkciju (tai atbilst 306. zīmējumā bezgalīgi zari AN un $A'K'$). Dabūjam

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}=\frac{2}{3}\ (=c).$$

Tālāk

$$\lim_{x\to+\infty}(y-cx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}-\frac{2}{3}x\right)=0\ (=d).$$

Tātad taisne $y=\frac{2}{3}x$ ir zara AN asimptota.

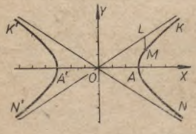
Izteiksme $y-(cx+d)=\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}-\frac{2}{3}x$, kad $x\to+\infty$, saglabā mīnusa zīmi. Tāpēc zars AN tuvojas asimptotai no apakšas.

Tālāk atrodam

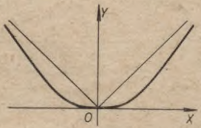
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = -\frac{2}{3} \ (=c'),$$

$$\lim_{x\to-\infty}(y-c'x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}+\frac{2}{3}x\right) = 0 \ (=d').$$

Tātad taisne $y=-\frac{2}{3}x$ ir zara $A'K'$ asimptota.



306. zīm.



307. zīm.

Izteiksme $\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}+\frac{2}{3}x$, kad $x\to-\infty$, saglabā mīnusa zīmi. Tāpēc zars $A'K'$ tuvojas asimptotai no apakšas.

Izpētot tādā pašā veidā funkciju $y=-\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}$ (tai atbilst zari AK un $A'N'$), atrodam, ka taisne $y=-\frac{2}{3}x$ ir zara AK asimptota, bet taisne $y=\frac{2}{3}x$ — zara $A'N'$ asimptota.

Zari AK un $A'N'$ tuvojas katrs savai asimptotai no augšas.

2. piemērs. Atrast visas asimptotas līnijai

$$y=x\,\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}.$$

Funkcijai $f(x)=x\,\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ ne pie kādas x vērtības nav bezgalīgas robežas. Tātad OY asij paralēlu asimptotu nav.

Lai atrastu asimptotas, kas nav paralēlas OY asij, meklējam vispirms

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=1\ (=c)$$

un pēc tam

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-cx]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2xe^{-x}}{e^x+e^{-x}}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^{2x}+1}=0\ (=d).$$

Tādējādi taisne $y=x$ ir labā bezgalīgā zara asimptota. Aprēķinot tās pašas robežas, kad $x\to-\infty$, atrodam $c'=-1$, $d'=0$, t. i., kreisajam bezgalīgajam zaram ir asimptota $y=-x$ (307. zīm.).

287. §. Grafiku konstruēšanas paņēmieni

Grafiku funkcijai, kas uzdota ar formulu $y=f(x)$, konstruē, atrodot tās punktus un savienojot tos pēc tam ar gludu līniju. Bet, ja punktus izvēlas uz labu laimi, tad var pieļaut rupjas kļūdas [1].

Lai grafiku uzzīmētu pietiekami precīzi, ja punktu skaits nav liels, tad iepriekš jānoskaidro tās raksturīgās īpatnības. Šai nolūkā:

1. Jākonstatē, kādā apgabalā funkcija ir definēta un vai tai nav pārtraukumu. Katram bezgalīgam pārtraukumam jānoskaidro $f(x)$ zīme no labās un kreisās puses; dabūjam grafikas vertikālās asimptotas (285. §).
2. Jāatrod pirmais un otrais atvasinājums $f'(x)$ un $f''(x)$ un jānosaka, vai nav punktu, kur $f'(x)$ vai $f''(x)$ neeksistē.
3. Jāatrod visi funkcijas $f(x)$ ekstrēmi (278. un 279. §), dabūsim visaugstākos izciļņu punktus un viszemākos ieplaku punktus.
4. Jāatrod visi pārliekuma punkti (283. §) un pieskares slīpums šais punktos.
5. Ja apskatāmais argumenta maiņas apgabals ir bezgalīgs, tad jākonstatē, vai nav horizontālas un slīpas asimptotas (286. §).

[1] Tā, ja funkcijas $y=\frac{1}{2}(x+2)^2\ (x-1)^3$ grafiku (sk. 308. zīm.) konstruē, vadoties no punktiem F, B, L, K (kas atbilst argumenta vērtībām $-2{,}5$; $-0{,}8$; 0; $1{,}5$), tad gabalā FB grafika iznāks pavisam nepareiza.

Atrastos rezultātus to iegūšanas gaitā ieteicams ierakstīt tabulā (sk. piemērus). Atliekot tos koordinātu tīklā, dabūsim vispārīgo grafikas ainu. Pievienojot vēl dažus starppunktus, varam uzzīmēt grafiku ar pietiekamu precizitāti.

1. piemērs. Konstruēt grafiku funkcijai [1]

$$f(x)=\frac{1}{2}(x+2)^2(x-1)^3.$$

1. Funkcija ir definēta un nepārtraukta visur, vertikālu asimptotu nav.

2. Atrodam

$$f'(x)=\frac{1}{2}(x+2)(x-1)^2(5x+4),$$

$$f''(x)=(x-1)(10x^2+16x+1).$$

Abi atvasinājumi visur eksistē un ir galīgi.

3. Lai atrastu ekstrēmus, atrisinām vienādojumu $f'(x)=$ $=0$. Atrodam kritiskās vērtības

$$x_1=-2,\quad x_2=-0{,}8,\quad x_3=1.$$

Ierakstām tabulā šīs vērtības un arī atbilstošās funkcijas vērtības

$$f(x_1)=0,\quad f(x_2)\approx-4{,}20,\quad f(x_3)=0.$$

Ailē y' ierakstām nulles.

Lai noskaidrotu ekstrēmu eksistenci, šeit ieteicams izmantot otro atvasinājumu, tāpēc šo jautājumu atstājam līdz 4. p.

4. Lai atrastu pārliekuma punktus, atrisinām vienādojumu $f''(x)=0$. Dabūsim iepriekš atrasto vērtību $x_3=1$ un bez tam

$$x_4=-1{,}5,\quad x_5=-0{,}07.$$

Ierakstām tabulā šīs vērtības un arī atbilstošās funkcijas un tās pirmā atvasinājuma vērtības

$$f(x_4)=-2{,}0,\quad f(x_5)=-2{,}3;$$

$$f'(x_4)=-5{,}5,\quad f'(x_5)=4{,}0.$$

Ailē y'' ierakstām nulles.

[1] Lasot piemērus, ieteicams līdztekus sastādīt tabulu.

Nosakām $f''(x)$ zīmes pirms un pēc iziešanas caur vērtībām

$$x=x_3, \quad x=x_4, \quad x=x_5$$

un izdarām atzīmes attiecīgajās tabulas vietās. Tā ailes y'' trešajā rindiņā atzīme $-0+$ nozīmē, ka $f''(x)$, ejot caur $x=x_3$ no kreisās uz labo pusi, maina zīmi no mīnusa uz plusu. Tā kā visos trijos punktos x_3, x_4, x_5 otrais atvasinājums maina zīmi, tad visos trijos punktos ir pārliekums.

Tagad nosakām $f''(x)$ zīmes kritiskajos punktos $x_1=-2$ un $x_2=-0{,}8$; dabūjam

$$f''(-2)<0, \quad f''(-0{,}8)>0.$$

Ailes y'' pirmajā rindiņā ierakstām mīnusu, otrajā — plusu. Punktā $x=x_1$ ir maksimums, punktā $x=x_2$ — minimums.

5. Horizontālu un slīpu asimptotu nav, jo $\lim \frac{y}{x}=\infty$.

Atrastos punktus (A, B, C, D, E) atliekam koordinātu tīklā (308. zīm.) un iezīmējam pieskaru virzienus. Pievienojot vēl trīs punktus $x_6=-2{,}5$, $x_7=0$, $x_8=1{,}5$ (F, L, K), dabūjam pietiekami precīzu funkcijas grafiku.

Punkta numurs	x	y	y'	y''	Ekstrēms, pārliekums	Punktu apzīmējumi
1	-2	0	0	$-$	maksimums	A
2	$-0{,}8$	$-4{,}2$	0	$+$	minimums	B
3	1	0	0	$-0+$	pārliekums	C
4	$-1{,}5$	$-2{,}0$	$-5{,}5$	$-0+$	pārliekums	D
5	$-0{,}07$	$-2{,}3$	4,0	$+0-$	pārliekums	E
6	$-2{,}5$	5,4	26			F
7	0	-2	4			L
8	1,5	0,8	5			K

2. piemērs. Konstruēt grafiku funkcijai $y=\frac{1}{2}\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$.

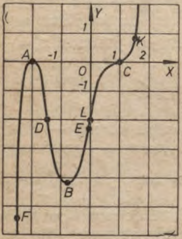
1. Funkcija ir definēta un nepārtraukta visur, izņemot punktu $x=-1$, kur tai ir bezgalīgs pārtraukums. Kā no pārtraukuma punkta labās, tā arī kreisās puses funkcijai ir mīnusa zīme (y ailē ierakstām $-\infty$). Dabūjam asimptotu

$x=-1$. Abi bezgalīgie zari vērsti lejup (309. zīm.).

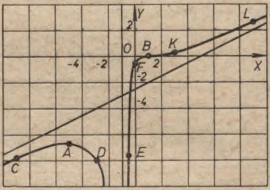
2. Atrodam

$$y'=\frac{1}{2}\,\frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3},\quad y''=12\,\frac{x-1}{(x+1)^4}.$$

Abi atvasinājumi eksistē visur, izņemot pārtraukuma punktu.



308. zīm.



309. zīm.

3. Vienādojumam $f'(x)=0$ ir divas saknes

$$x_1=-5,\quad x_2=1.$$

Atbilstošās y vērtības ir

$$y_1=-6{,}75,\quad y_2=0.$$

Ievērojot $f'(x)$ zīmes kritisko punktu tuvumā (sk. tabulu), redzam, ka punktā $x=-5$ ir maksimums, bet punktā $x=1$ ekstrēma nav.

4. Vienādojumam $y''(x)=0$ ir viena vienīga sakne $x_2=1$; otrā atvasinājuma zīme (sk. tabulu) rāda, ka šeit ir pārliekums.

5. Meklējam slīpās asimptotas; neatkarīgi no tā, vai $x\to+\infty$ vai arī $x\to-\infty$, dabūjam

$$\lim\frac{y}{x}=\frac{1}{2},\quad \lim\left(y-\frac{1}{2}x\right)=-\frac{5}{2}.$$

Tātad taisne $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$ ir asimptota diviem bezgalīgiem zariem.

Labais zars atrodas augstāk, kreisais — zemāk par asimptotu, jo izteiksme $y-\left(\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}\right)$, kad $x\to+\infty$, saglabā plusa zīmi, bet, kad $x\to-\infty$, mīnusa zīmi. Starp citu, tas ir redzams arī no zīmējuma, ja ir atlikti punkti C, D, E, F, K, L.

Punkta numurs	x	y	y'	y''	Ekstrēms, pārliekums, pārtraukumi	Punktu apzīmējumi
1	−1	$-\infty$			pārtraukums	A
2	−5	−6,75	+0−		maksimums	B
3	1	0	+0+	−0+	pārliekums	C
4	−9	−7,81				D
5	−3	−8,00				E
6	−0,5	−6,75				F
7	0	−0,50				K
8	3	0,25				L
9	9	2,56				

288. §. Vienādojumu atrisināšana. Vispārīgas piezīmes

Pirmās un otrās pakāpes algebriskus vienādojumus atrisina ar formulām, kas pazīstamas no algebras. Trešās un ceturtās pakāpes vienādojumu formulas ir ļoti komplicētas, bet piektās un augstākas pakāpes vispārīgie vienādojumi nav atrisināmi radikālos. Tomēr tiklab algebriskus, kā arī nealgebriskus vienādojumus var atrisināt ar vajadzīgo precizitāti, ja iepriekš atrod rupjus tuvinājumus. Pēdējos tad pakāpeniski precizē.

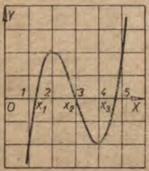
Rupju atrisinājumu var atrast grafiski ar vienu no šādiem paņēmieniem.

P i r m a i s p a ņ ē m i e n s. Lai atrisinātu vienādojumu $f(x)=0$, konstruējam funkcijas $y=f(x)$ grafiku (sk. 287. §) un nolasām to punktu abscisas, kuros grafika krusto OX asi.

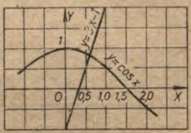
1. p i e m ē r s. Atrisināt vienādojumu $x^3-9x^2+24x-18=0$.

Konstruējam (310. zīm.) funkcijas $y=x^3-9x^2+24x-18$ grafiku un nolasām attiecīgās abscisas $x_1=1{,}3$, $x_2=3$, $x_3=4{,}7$. Ievietojot tās vienādojumā, redzam, ka otrā sakne ir precīza, pirmā un trešā — aptuvenas.

Otrs paņēmiens. Vienādojumu $f(x)=0$ izsaka veidā $f_1(x)=f_2(x)$, pie kam vienu no funkcijām $f_1(x)$ vai $f_2(x)$ izvēlas patvaļīgi. Šo patvaļīgumu izlieto tā, lai funkciju $y=f_1(x)$ un $y=f_2(x)$ grafikas varētu vieglāk uzkonstruēt. Atrodam grafiku krustošanās punktus. Nolasot to abscisas, dabūjam aptuvenas vienādojuma $f(x)=0$ saknes.



310. zīm.



311. zīm.

2. piemērs. Atrisināt vienādojumu $3x-\cos x-1=0$.

Izsakām doto vienādojumu tā:

$$3x-1=\cos x.$$

Konstruējam (311. zīm.) grafikas funkcijām $y=3x-1$ un $y=\cos x$. Tās krustojas vienā punktā. Nolasot tā abscisu, dabūjam aptuvenu sakni $x_1=0{,}6$.

289.—291. paragrāfā apskatīti trīs sakņu precizēšanas paņēmieni. Visi tie prasa, lai meklētā sakne x būtu *nošķirta*, t. i., lai būtu zināms kāds intervāls (a, b) *(izolācijas intervāls)*, kurš saturētu x un kurā nebūtu citas dotā vienādojuma saknes. Gali a un b paši ir saknes aptuvenās vērtības (ar iztrūkumu un uzviju). Tos var atrast grafiski ar vienu no iepriekš apskatītajiem paņēmieniem. Jo īsāks ir intervāls (a, b), jo labāk.

3. piemērs. Nošķirt vienādojuma $x^3-9x^2+24x-18=0$ saknes.

No grafikas (310. zīm.), ja tā izpildīta neprecīzi, mazākajai saknei nolasām izolācijas intervālu (1; 1,5), ja konstrukcija ir precīzāka, tad dabūjam īsāku intervālu, piemēram, (1,2; 1,4). Lielākajai saknei dabūjam intervālu (4,6; 4,8). Sakne $x=3$ nav jānošķir — tā ir precīza.

Piezīme. Algebriskiem vienādojumiem ir speciālas atrisināšanas metodes. No tām sevišķu ievērību pelna N. Lobačevska metode; tā ļauj, izpildot algebriskas darbības ar vienādojuma koeficientiem, atrast ar jebkuru precizitātes pakāpi visas saknes, to skaitā arī imaginārās saknes. Lobačevska metode neprasa sakņu noškiršanu.

289. §. Vienādojumu atrisināšana. Hordu metode

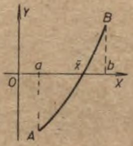
Pieņemsim, ka intervāla (a, b) galos funkcijai $f(x)$ ir pretējas zīmes (312. zīm.). Ja pie tam $f'(x)$ intervālā (a, b) saglabā nemainīgu zīmi [1], tad intervāla iekšienē atrodas viena vienīga vienādojuma $f(x)=0$ sakne $\bar{x}$ (ja $f'(x)$ nesaglabā zīmi, tad arī būs sakne, tikai tā var nebūt vienīgā).

Par pirmo saknes $\bar{x}$ tuvinājumu ņem punktu $x=x_1$, kur horda AB (313. zīm.) krusto OX asi; tad

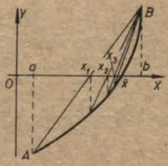
$$x_1=a-\frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}, \qquad (1)$$

jeb, kas ir tas pats [2],

$$x_1=b-\frac{(b-a)f(b)}{f(b)-f(a)}. \qquad (2)$$



312. zīm.



313. zīm.

[1] Tas ir gabalā AB grafika virzās vai nu tikai augšup, vai tikai lejup.

[2] Simetriskā veidā var izteikt $x_1=\frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$, bet formulas (1) un (2) ir aprēķiniem izdevīgākas.

Pēc tam aprēķinām $f(x_1)$ un ņemam to intervālu (a, x_1) vai (x_1, b), kura galos funkcijai $f(x)$ ir pretējas zīmes [313. zīmējumā intervāls (x_1, b)]. Meklētā saknes atrodas šai intervālā. Pielietojot formulai (1) analogu formulu, dabūjam otro tuvinājumu x_2. Procesu turpinot, atrodam virkni $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$; tās robeža ir meklētā sakne $\bar{x}$.

Tuvinājuma pakāpi praksē var noteikt šādā veidā. Pieņemsim, ka vajadzīga precizitāte līdz 0,01. Tad apstājamies pie tā tuvinājuma x_n, kurš atšķiras no iepriekšējā tuvinājuma mazāk nekā par 0,01. Starp citu, nav izslēgts (kaut arī maz ticams), ka precizitāte izrādīsies nepietiekama. Garantija būs pilnīga, ja pārliecinās, ka $f(x_n)$ un $f(x_n \pm 0{,}01)$ zīmes ir pretējas.

P i e m ē r s. Funkcijai $f(x)=x^3-2x^2-4x-7$ intervāla (3, 4) galos ir pretējas zīmes, proti,

$$f(3)=-10<0, \quad f(4)=9>0.$$

Atvasinājums $f'(x)=3x^2-4x-4$ saglabā intervālā (3, 4) plusa zīmi. Tātad intervālā (3, 4) atrodas viena vienādojuma

$$x^3-2x^2-4x-7=0$$

sakne. Atradīsim to ar precizitāti līdz 0,01. Formula (1) dod

$$x_1=3-\frac{1\cdot(-10)}{9-(-10)}=3+\frac{10}{19}\approx 3{,}53.$$

Tagad aprēķinām $f(3{,}53)\approx-2{,}05$.

No diviem intervāliem (3; 3,53), (3,53; 4) izvēlamies otro intervālu, jo tā galos $f(x)$ zīmes ir pretējas.

Atrodam otro tuvinājumu

$$x_2=3{,}53-\frac{0{,}47\cdot f(3{,}53)}{f(4)-f(3{,}53)}\approx 3{,}53+\frac{0{,}47\cdot 2{,}05}{11{,}05}=3{,}62.$$

Vērtība

$$f(3{,}62)=-0{,}24$$

ir negatīva, tāpēc ņemam intervālu (3,62; 4). Atrodam

$$x_3\approx 3{,}62+\frac{0{,}38\cdot 0{,}24}{9{,}24}=3{,}63$$

un

$$f(3{,}63)=-0{,}04.$$

Aprēķinu gaita ļauj cerēt, ka x_4 atšķirsies no x_3 mazāk nekā par 0,01 un ka tātad x_3 dod meklēto tuvinājumu. Pilnas garantijas dēļ mums jāaprēķina $f(3{,}64)$; tāpēc neaprēķinām x_4, bet tūlīt atrodam

$$f(3{,}64)=0{,}17.$$

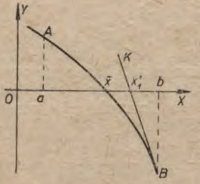
Skaitļu $f(3{,}63)$ un $f(3{,}64)$ zīmes ir pretējas. Tātad x_3 ir meklētais tuvinājums.

P i e z ī m e. Hordu metode, tāpat kā visas pakāpenisko tuvinājumu metodes, «nebaidās kļūdu»: kļūda starpaprēķinā automātiski izlabojas nākamajā darbībā. Bet gala aprēķini jāizpilda ļoti rūpīgi. Lai nerastos kļūda noapaļojumu dēļ, der saglabāt rezerves ciparus.

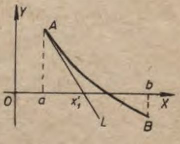
290. §. Vienādojumu atrisināšana. Pieskaru metode

Pieņemsim, ka intervāla (a, b) galos funkcijai $f(x)$ ir pretējas zīmes (314. un 315. zīm.), bet atvasinājumi $f'(x)$, $f''(x)$ intervālā (a, b) saglabā nemainīgu zīmi[1]. Lai atrastu sakni x, kas atrodas intervālā (a, b) (289. §), rīkojamies šādi.

Tai loka AB galā, kur $f(x)$ un $f''(x)$ zīmes ir vienādas[2], novelkam pieskari (BK 314. zīmējumā, AL 315. zīmējumā). Par meklētās saknes pirmo tuvinājumu pieņemam punktu



314. zīm.



315. zīm.

[1] Tas ir gabalā AB grafika virzās vai nu tikai augšup, vai tikai lejup, un tā vērsta ar ieliekumu vai nu tikai visur uz augšu, vai tikai uz leju.

[2] Tas ir augšējā galā, ja AB vērsts ar ieliekumu uz augšu, un apakšējā, ja — uz leju.

$x=x'_1$[1], kur pieskare krusto OX asi. Ja pieskare ņemta punktā $x=b$, tad

$$x'_1=b-\frac{f(b)}{f'(b)}, \tag{1}$$

ja turpretim — punktā $x=a$, tad

$$x'_1=a-\frac{f(a)}{f'(a)}. \tag{2}$$

Abos gadījumos otro tuvinājumu atrod ar formulu

$$x'_2=x'_1-\frac{f(x'_1)}{f'(x'_1)}. \tag{3}$$

Procesu turpinot, iegūstam virkni x'_1, x'_2, x'_3, ... (316. zīm.). Tās robeža ir meklētā sakne $\bar{x}$. Tuvinājuma pakāpi var aprēķināt tāpat kā hordu metodei.

1. piezīme. Ja pieskari novelkam tai loka galā, kur $f(x)$ un $f''(x)$ ir pretējas zīmes, tad x' var iziet aiz intervāla (a, b) robežām un pasliktināt tuvinājumu (317. zīm. a).

2. piezīme. Ja $f''(x)$ intervālā (a, b) nesaglabā zīmi, tad pieskares abos loka galos var krustot OX asi aiz intervāla robežām (317. zīm. b).

Piemērs. Aprēķināt ar precizitāti līdz 0,01 vienādojuma

$$f(x)=x^3-2x^2-4x-7=0$$

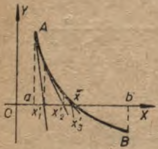
sakni, kas atrodas (sk. 289. §) intervālā (3; 4).

Atrisinājums. Dabūjam

$$f(3)=-10;\quad f(4)=9;$$
$$f'(x)=3x^2-4x-4;\quad f''(x)=6x-4.$$

Abi atvasinājumi intervālā (3; 4) saglabā plusa zīmi. Tāpēc ņemam to dotā intervāla galu, kur $f(x)>0$, t. i., galu $b=4$. Ar formulu (1) atrodam pirmo tuvinājumu

$$x'_1=4-\frac{f(4)}{f'(4)}=4-\frac{9}{28}\approx 3{,}68.$$



316. zīm.

Tālāk atrodam

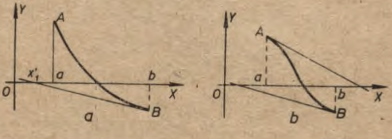
$$f(3{,}68)=1{,}03,\quad f'(3{,}68)=21{,}9$$

[1] Apzīmējumi x'_1, x'_2, ... ļauj atšķirt ar pieskaru metodi iegūtos tuvinājumus no tuvinājumiem x_1, x_2, ..., kas iegūti ar hordu metodi.

un ar formulu (3) atrodam otro tuvinājumu

$$x'_2=3{,}68-\frac{f(3{,}68)}{f'(3{,}68)}=3{,}68-0{,}047=3{,}633$$

(ar pārpalikumu).



317. zīm.

Tālākie tuvinājumi būs vienmēr mazāki un mazāki, pie kam aprēķinu gaita ļauj cerēt, ka tālākie saknes precizējumi neietekmēs simtdaļas ciparu. Tāpēc aprēķinām tikai $f(3{,}633)$ un $f(3{,}630)$. Aprēķini dod

$$f(3{,}633)=0{,}020, \quad f(3{,}630)=-0{,}042,$$

tātad (ar precizitāti, kas trīsreiz lielāka par prasīto) $\bar{x}=3{,}63$.

291. §. Kombinētā hordu un pieskaru metode

Ja izpildīti 290. § nosacījumi, tad tuvinājumi x_n (ar hordu metodi) un tuvinājumi x'_n (ar pieskaru metodi) tuvojas saknei $\bar{x}$ no pretējām pusēm (pirmie — no grafikas ieliekuma, otrie — no izliekuma puses; sk. 318. zīm.). Ja abas metodes pielietojam kopīgi, tad tūlīt dabūjam tuvinājumus ar uzviju un ar iztrūkumu un varam tieši novērtēt precizitātes pakāpi.

Pieņemsim, ka a ir tas intervāla (a, b) gals, kur $f(x)$ un $f''(x)$ zīmes ir vienādas. Tad ar 289. § formulu (1) un 290. § formulu (2) atrodam [1]

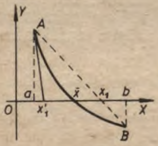
$$x_1=a-\frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}, \quad x'_1=a-\frac{f(a)}{f'(a)}. \qquad (1)$$

[1] Ja $f(x)$ un $f''(x)$ zīmes ir vienādas galā b, tad otrā formula jāaizstāj ar formulu $x'_1=b-\frac{f(b)}{f'(b)}$.

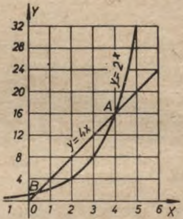
Meklētā sakne atrodas starp x_1 un x'_1. Pie tam $f(x'_1)$ ir tāda paša zīme kā $f''(x'_1)$ (sk. 318. zīm.). Tātad varam atkal pielietot šī paragrāfa formulas (1), aizstājot tanīs a ar x'_1 un b ar x_1. Dabūjam otros tuvinājumus

$$x_2 = x'_1 - \frac{(x_1 - x'_1) f(x'_1)}{f(x_1) - f(x'_1)},$$

$$x'_2 = x'_1 - \frac{f(x'_1)}{f'(x'_1)}.$$



318. zīm.



319. zīm.

Lai aprēķinātu x_3, pielietojam tās pašas formulas, aizstājot tanīs x_1 un x'_1 ar x_2 un x'_2 utt. Procesu turpinot, atrodam $\bar{x}$ ar vajadzīgo precizitāti.

P i e m ē r s. Atrisināt vienādojumu $2^x = 4x$.

Saskaņā ar 288. § otro paņēmienu konstruējam funkciju $y = 2^x$ un $y = 4x$ grafikas (319. zīm.). Neskaitot punktu A, kas dod precīzu sakni $x = 4$, dabūjam vēl vienu krustošanās punktu B. Tā abscisa atrodas starp $a = 0$ un $b = 0{,}5$.

Aprēķināsim $\bar{x}$ ar precizitāti līdz 0,0001. Dabūjam

$$f(x) = 2^x - 4x, \quad f'(x) = 2^x \ln 2 - 4, \quad f''(x) = 2^x \ln^2 2,$$

$$f(0) = 1, \quad f(0{,}5) = -0{,}586.$$

Pirmais atvasinājums intervālā (0; 0,5) saglabā mīnusa zīmi [1], otrais — plusa zīmi. Skaitļa x'_1 aprēķināšanai jāņem gals $a=0$, jo tur $f(x)$ un $f''(x)$ zīmes ir vienādas. Atrodam

$$x_1=a-\frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{0,5\cdot 1}{0,586+1}\approx 0,316 \quad \text{(ar uzviju)}$$

$$x'_1=a-\frac{f(a)}{f'(a)}=-\frac{1}{\ln 2-4}=-\frac{1}{0,69315-4}\approx 0,302$$

(ar iztrūkumu).

Ar pieczīmju logaritmu tabulām atrodam

$$f(0,302)=0,0249, \quad f'(0,302)=-3,14544,$$
$$f(0,316)=-0,0191.$$

Tas dod otros tuvinājumus

$$x_2=0,302-\frac{0,014\cdot f(0,302)}{f(0,316)-f(0,302)}=0,302+0,0079=0,3099$$

(ar uzviju)

$$x'_2=0,302-\frac{f(0,302)}{f'(0,302)}=0,302+0,0079=0,3099$$

(ar iztrūkumu).

Meklētā sakne $\bar{x}$ atrodas intervālā (x'_2, x_2) un tāpēc $\bar{x}=0,3099$ mazākais ar precizitāti līdz $0,5\cdot 10^{-4}$. Patiesībā precizitāte ir vēl lielāka (lietojot septiņzīmju logaritmu tabulas, mēs ar tām pašām x_1, x'_1 vērtībām dabūjam saknei $\bar{x}$ robežas 0,30990 un 0,30991).

[1] Zīmējumā redzam, ka intervālā (0; 0,5) $y=2^x$ grafikai slīpums ir mazāks nekā $y=4x$ grafikai.

INTEGRĀLRĒĶINI

292. §. Ievada piezīmes

1. Vēsturiskas ziņas. Integrālrēķini radās no vajadzības izveidot vispārīgu metodi laukumu, tilpumu un smaguma centru atrašanai.

Tādu metodi pirmsākuma formā lietoja jau Arhimēds. Sistemātiski tā attīstījās 17. gadsimtā Kavaljēri[1], Toričelli[1], Fermā, Paskala un citu zinātnieku darbos. 1659. gadā Barovs[2] atrada saistību starp laukuma atrašanas uzdevumu un pieskares atrašanas uzdevumu. Ņūtons un Leibnics 17. gs. septiņdesmitajos gados abstrahēja šo saistību no minētajiem speciālajiem ģeometrijas uzdevumiem. Līdz ar to tika nodibināta saistība starp integrālrēķiniem un diferenciālrēķiniem (sk. tālāk 3. p.). Šo saistību Ņūtons, Leibnics un viņu skolnieki izlietoja, lai attīstītu integrēšanas tehniku. Savu tagadējo stāvokli integrēšanas metodes galvenos vilcienos sasniedza L. Eilera darbos. M. Ostrogradska[3] un P. Čebiševa[4] darbi noslēdza šo metožu attīstību.

2. Jēdziens par integrāli. Pieņemsim, ka līnija MN (320. zīm.) ir uzdota ar vienādojumu

$$y=f(x),$$

un jāatrod «līklīnijas trapeces» $aABb$ laukums F.

---

[1] Bonaventura Kavaljēri (1591—1647) un Evangelista Toričelli (1608—1647) — itāļu zinātnieki, Galileja skolnieki.

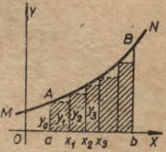
[2] Izaks Barovs (1630—1677) — angļu matemātiķis, Ņūtona skolotājs.

[3] Akadēmiķis Mihails Ostrogradskis (1801—1861) — ievērojams krievu matemātiķis.

[4] Akadēmiķis Pafnutijs Čebiševs (1821—1894) — lielais krievu matemātiķis, kas nosprauda jaunus ceļus daudzās zinātnes nozarēs.

Sadalām nogriezni ab n daļās ax_1, x_1x_2, ..., $x_{n-1}b$ (vienādās vai nevienādās) un konstruējam kāpņveida figūru, kas 320. zīmējumā iesvītrota. Tās laukums ir vienāds ar

$$F_n = y_0(x_1 - a) + y_1(x_2 - x_1) + \\ + \ldots + y_{n-1}(b - x_{n-1}). \quad (1)$$



320. zīm.

Ja apzīmējam

$$x_1 - a = dx_0, \quad x_2 - x_1 = dx, \ldots, \\ , \; b - x_{n-1} = dx_{n-1}, \quad (2)$$

tad formula (1) pieņem izskatu

$$F_n = y_0 dx_0 + y_1 dx_1 + \ldots + y_{n-1} dx_{n-1}. \quad (3)$$

Meklētais laukums ir summas (3) robeža, ja n ir bezgalīgi liels. Leibnics šai robežai ieteica apzīmējumu

$$\int y\,dx, \quad (4)$$

kurā $\int$ (izstiepts s) ir vārda «summa» sākuma burts, bet izteiksme ydx norāda atsevišķo saskaitāmo[1] tipisko formu.

Izteiksmi $\int ydx$ Leibnics sāka saukt par *integrāli* — no latīņu vārda «integrālis» — vesels, viengabalains[2].

Furjē[3] papildināja Leibnica apzīmējumu, rakstot

$$\int_a^b y\,dx. \quad (5)$$

Šeit skaidri norādītas x sākuma un gala vērtības.

[1] Robežas jēdziens tad vēl nebija izveidojies un Leibnics runāja par bezgalīgi daudzu saskaitāmo summu.

[2] Šo nosaukumu ieteica Leibnica skolnieks Johans Bernulli, lai atšķirtu «bezgalīgi daudzu saskaitāmo summu» no parastās summas.

[3] Žans Baptists Furjē (1768—1830) — franču matemātiķis un fiziķis, siltuma matemātiskās teorijas nodibinātājs.

3. Saistība starp integrēšanu un diferencēšanu. Uzskatīsim a par pastāvīgu, bet b par mainīgu lielumu. Saskaņā ar to mainīsim apzīmējumu b pret apzīmējumu $\bar{x}$. Tad integrālis

321. zīm.

$$\int_a^{\bar{x}} f(x)\,dx$$

(t. i., figūras $aABb$ laukums, ja ordināte aA ir nekustīga, bet bB — kustīga) ir $\bar{x}$ funkcija. Izrādās, ka šīs funkcijas diferenciālis ir vienāds ar $f(\bar{x})\,d\bar{x}$[1], t. i.,

$$d\int_a^{\bar{x}} f(x)\,dx = f(\bar{x})\,d\bar{x}. \qquad (6)$$

4. Integrālrēķinu pamatuzdevums. Tādējādi integrāļa (5) aprēķināšana reducējas uz *funkcijas atrašanu, ja dota tās diferenciāļa izteiksme.* Tādas funkcijas atrašana arī ir integrālrēķinu pamatuzdevums.

293. §. Primitīvā funkcija

Definīcija. Pieņemsim, ka funkcija $f(x)$ ir funkcijas $F(x)$ atvasinājums, t. i., $f(x)\,dx$ ir funkcijas $F(x)$ diferenciālis, t. i.,

$$f(x)\,dx = dF(x).$$

Tad funkciju $F(x)$ sauc par funkcijas $f(x)$ *primitīvo* jeb *pirmveida* funkciju.

1. piemērs. Funkcija $3x^2$ ir x^3 atvasinājums, t. i., $3x^2dx$ ir funkcijas x^3 diferenciālis

$$3x^2dx = d(x^3).$$

[1] Tas redzams no 321. zīm. Figūras $aABb$ laukuma pieaugums ΔF ir figūras $bBCc$ laukums. Pēdējo var izteikt kā summu $\text{Lauk}_{bBDc} + \text{Lauk}_{BDC}$. Šeit pirmais saskaitāmais ir vienāds ar $bB \cdot bc = f(\bar{x})\Delta\bar{x}$, bet otrais saskaitāmais ir augstākās kārtas bezgalīgi mazs lielums attiecībā pret $\Delta\bar{x}$ (tas ir mazāks par $L_{BDCK} = \Delta\bar{x} \cdot \Delta y$). Tātad (228. §) $f(\bar{x})\Delta\bar{x}$ ir laukuma F diferenciālis.

Saskaņā ar definīciju x^3 ir funkcijas $3x^2$ primitīvā funkcija.

2. piemērs. Izteiksme $3x^2dx$ ir funkcijas x^3+7 diferenciālis, t. i.,

$$3x^2dx=d(x^3+7).$$

Tātad funkcija x^3+7 (tāpat kā funkcija x^3) ir funkcijas $3x^2$ primitīvā funkcija.

Jebkurai nepārtrauktai funkcijai $f(x)$ ir neskaitāms daudzums primitīvo funkciju. Ja $F(x)$ ir viena primitīvā funkcija, tad jebkuru citu var izteikt ar izteiksmi $F(x)+C$, kur C ir pastāvīgs lielums. Pēdējo var uzdot patvaļīgi.

3. piemērs. Funkcijai $3x^2$ ir neskaitāms daudzums primitīvo funkciju. Viena no tām (sk. 1. piemēru) ir x^3, jebkuru citu var uzdot ar izteiksmi x^3+C, kur C ir pastāvīgs lielums. Ja $C=7$, tad dabūjam primitīvo funkciju x^3+7 (2. piemērs), ja $C=0$, tad dabūjam atkal primitīvo funkciju x^3.

4. piemērs. Funkcijas $3x^2$ viena primitīvā funkcija ir x^3+7. Jebkuru citu primitīvo funkciju dod izteiksme x^3+7+C. Ja $C=-7$, dabūjam primitīvo funkciju x^3.

Brīdinājums. Jebkuru funkcijas $3x^2$ primitīvo funkciju var izteikt tiklab veidā x^3+C, kā arī veidā x^3+7+C. Bet šīs izteiksmes *nedrīkst pielīdzināt*, jo konstantes C tanīs nav vienādas. Tā pirmā izteiksme dod primitīvo funkciju x^3+10, ja $C=10$, bet otra — ja $C=3$.

Ja pretēji brīdinājumam mēs x^3+C pielīdzinām x^3+7+C, tad dabūsim bezjēdzīgu vienādību $0=7$. Var tomēr rakstīt

$$x^3+C=x^3+7+C_1,$$

kur C un C_1 ir konstantes. Tās saistās ar sakarību

$$C=C_1+7.$$

294. §. Nenoteiktais integrālis

Par dotās izteiksmes $f(x)dx$ [jeb dotās funkcijas $f(x)$] *nenoteikto integrāli* sauc tā primitīvās funkcijas vispārīgāko veidu.

Izteiksmes $f(x)dx$ nenoteikto integrāli apzīmē ar simbolu

$$\int f(x)dx.$$

Uzskata, ka pastāvīgais saskaitāmais ietilpināts šai izteiksmē.

Simbola $\int$ un nosaukuma «integrālis» rašanās izskaidrota 292. § 2. un 3. p. Vārds «nenoteiktais» pasvītro, ka primitīvās funkcijas vispārīgajā izteiksmē ieiet pastāvīgs saskaitāmais, kuru var ņemt patvaļīgi[1].

Izteiksmi $f(x)dx$ sauc par *zemintegrāļa izteiksmi*, funkciju $f(x)$ — par *zemintegrāļa funkciju*, mainīgo x — par *integrācijas mainīgo*. Nenoteiktā integrāļa atrašanu dotajai funkcijai sauc par *integrēšanu*.[2]

1. piemērs. Izteiksmes $2xdx$ primitīvās funkcijas vispārīgākais veids ir x^2+C. Šī funkcija ir izteiksmes $2xdx$ nenoteiktais integrālis, t. i.,

$$\int 2xdx=x^2+C. \tag{1}$$

Var rakstīt arī

$$\int 2xdx=x^2-5+C_1. \tag{2}$$

Atšķirība konstantu apzīmējumos (C un C_1) pasvītro, ka tās nav vienādas; ($C=C_1-5$; sal. 293. § brīdinājumu).

2. piemērs. Atrast nenoteikto integrāli izteiksmei $\cos xdx$.

Atrisinājums. Funkcija $\cos x$ ir funkcijas $\sin x$ atvasinājums. Tāpēc

$$\int \cos xdx=\sin x+C.$$

3. piemērs. Atrast nenoteikto integrāli izteiksmei $\frac{dx}{x}$.

Atrisinājums. Funkcija $\frac{1}{x}$ ir pārtraukta punktā $x=0$. Apskatīsim vispirms pozitīvās x vērtības. Tā kā $d\ln x=\frac{dx}{x}$, tad

$$\int \frac{dx}{x}=\ln x+C. \tag{3}$$

[1] Pretstatā nenoteiktajam integrālim summas $y_0dx_0+y_1dx_1+\ldots+$ $+y_{n-1}dx_{n-1}$ robežu (292. § 2. p.) sauc par *noteikto integrāli*. Nenoteiktais integrālis ir *funkcija*. Noteiktais integrālis ir *skaitlis*.

[2] Par integrēšanu sauc arī noteiktā integrāļa atrašanu.

Tā kā $d\ln 3x = \frac{dx}{x}$, tad var arī rakstīt

$$\int \frac{dx}{x} = \ln 3x + C_1. \tag{4}$$

Konstantes C un C_1 saistītas ar sakarību

$$C = \ln 3 + C_1.$$

Analogi var rakstīt

$$\int \frac{dx}{x} = \ln \frac{x}{7} + C_2 \tag{5}$$

utt. Negatīvām x vērtībām funkcija $\ln x$ neeksistē un formulas (3), (4) un (5) nav derīgas. Toties funkcija $\ln(-x)$ eksistē; tās diferenciālis arī ir vienāds ar $\frac{dx}{x}$. Tagad dabūjam

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C \tag{6}$$

un analogi

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-2x) + C_1, \quad \int \frac{dx}{x} = \ln\left(-\frac{x}{5}\right) + C_2$$

utt. Formulas (3) un (6) var apvienot, tad dabūjam

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C. \tag{7}$$

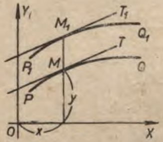
Formula (7) derīga jebkurai x vērtībai, izņemot $x=0$ (sal. 295. § 3. piemēru).

295. §. Nenoteiktā integrāļa ģeometriskā nozīme

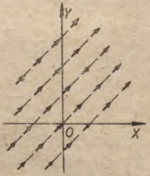
Pieņemsim, ka $f(x)$ ir dotā nepārtrauktā funkcija, bet $F(x)$ — kāda tās primitīvā funkcija. Ja uzkonstruē funkcijas $y=F(x)$ grafiku PQ (322. zīm.), tad dotā funkcija $f(x)$ izteiks pieskares MT virziena koeficientu.

Pieņemsim, ka $F_1(x)$ ir cita tās pašas funkcijas $f(x)$ primitīvā funkcija. Tad pieskaru MT un M_1T_1 (pieskāršanās punktiem M, M_1 ir viena un tā pati abscisa x) virziena koeficienti ir vienādi, t. i., $MT \| M_1T_1$.

Primitīvās funkcijas $F(x)$ grafiku sauc par funkcijas $f(x)$ [vai vienādojuma $dy=f(x)dx$] *integrāllīniju*. Pieskares divām integrāllīnijām atbilstošajos punktos ir paralēlas. Bez tam



322. zīm.



323. zīm.

divas integrāllīnijas atrodas viena no otras (pa vertikāli) pastāvīgā attālumā C (322. zīmējumā MM_1), tā ka, ja mums ir viena integrāllīnija, tad viegli var konstruēt citas.

Caur katru punktu iet viena vienīga integrāllīnija.

Integrāllīnijas aptuveni konstruē šādi. Dažos desmit punktos (sk., piemēram, 323. zīm.), kas cieši piepilda kādu plaknes daļu, novelkam īsus nogrieznīšus (vai bultiņas), kas norāda pieskaru virzienus.

Dabūjam «virzienu lauku». Tālāk novelkam pēc acumēra gludu līniju tā, lai tā pieskārtos virknei bultiņu. Dabūsim vienu integrāllīniju. Tādā pašā veidā konstruējam arī citas integrāllīnijas.

1. p i e m ē r s. Atrast integrāllīnijas vienādojumam

$$dy=dx.$$

Dotā funkcija $f(x)$ apskatāmajā piemērā ir pastāvīgs lielums 1. Visu bultiņu virziena koeficienti ir vienādi ar vienu, t. i., pieskares slīpums visur ir vienāds ar 45°. Integrāllīnijas (323. zīm.) ir paralēlas taisnes. Visu šo taišņu vienādojumi ir $y=\int dx$, t. i., $y=x+C$. Lielums C ir pastāvīgs katrai taisnei, bet mainās, pārejot no vienas taisnes uz citu.

2. piemērs. Atrast integrāllīnijas funkcijai $\frac{1}{2}x$ $\left(\text{t. i., vienādojumam } dy=\frac{1}{2}xdx\right)$.

324. zīm.

325. zīm.

Uz OY ass ($x=0$) ņemam horizontālas bultiņas $\left(\frac{1}{2}x=\right.$ $\left.=0\right)$, uz ordinātes $x=1$ ņemam bultiņas ar virziena koeficientu $\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}$ utt. Novelkot pēc acumēra integrāllīnijas, dabūjam «paralēlas» parabolas $\left(y=\int\frac{1}{2}xdx=\frac{1}{4}x^2+C;\right.$ 324. zīm.).

3. piemērs. 325. zīmējumā parādītas integrāllīnijas funkcijai $\frac{1}{x}$. Neviena no tām nekrusto OY asi, jo punktā $x=0$ primitīvās funkcijas nav definētas (funkcija $\frac{1}{x}$ punktā $x=0$ ir pārtraukta). Šī iemesla dēļ tikai tās integrāllīnijas atrodas viena no otras vienādos attālumos, kuras atrodas vienā pusē no ordinātu ass. Labās puses integrāllīnijas izsaka vienādojums $y=\ln x+C$, bet kreisās puses — vienādojums $y=\ln(-x)+C$. Nenoteikto integrāli $\int\frac{dx}{x}$ izsaka (visiem x, izņemot $x=0$) formula

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C.$$

326. zīm.

Piezīme. Citu ģeometrisku izskaidrojumu integrēšanai iegūst, ja uzzīmē dotās funkcijas $f(x)$ grafiku KL (326. zīm.). Pieņemsim, ka loks KL pilnīgi atrodas virs OX ass. Novelkam divas ordinātes aA un mM. Kreiso ordināti aA uzskatīsim par nekustīgu, bet labo mM — par kustīgu. Figūras $aAMm$ laukums būs viena argumenta $x=Om$ funkcijas $f(x)$ primitīvā funkcija (sal. 292. § 2. p.). Ņemot aA vietā nekustīgu ordināti bB, dabūsim citu primitīvo funkciju — figūras $bBMm$ laukumu. Šīs divas primitīvās funkcijas atšķiras par pastāvīgu lielumu $C=\text{Lauk}_{aAbB}$.

296. §. Integrācijas konstantes aprēķināšana ar sākuma nosacījumiem

No dotās funkcijas $f(x)$ primitīvo funkciju kopas tikai viena funkcija var pieņemt doto vērtību b pie dotās argumenta vērtības $x=a$. Ja zināms nenoteiktais integrālis

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C,$$

tad atbilstošo konstantes C vērtību atrod no sakarības

$$b=F(a)+C.$$

1. piemērs. Atrast to primitīvo funkciju funkcijai $\frac{1}{2}x$, kura pieņem vērtību 3, ja $x=2$.

Atrisinājums. Dabūjam

$$\int \frac{1}{2}x\,dx=\frac{1}{4}x^2+C. \tag{1}$$

Konstanti C atrodam no sakarības $3=\frac{1}{4}\cdot 2^2+C$. Dabūjam $C=2$. Ievietojot izteiksmē (1), atrodam meklēto primitīvo funkciju

$$y=\frac{1}{4}x^2+2. \tag{2}$$

Ģeometriski uzdevumu var formulēt tā: atrast to integrāllīniju funkcijai $\frac{1}{2}x$, kura iet caur punktu (2, 3). Meklētā līnija ir parabola UV (324. zīm.).

2. piemērs. Atrast to primitīvo funkciju funkcijai $\frac{1}{x}$, kura pieņem vērtību $\frac{1}{2}$, ja $x=-1$.

Atrisinājums. Negatīvām x vērtībām funkcijas $\frac{1}{x}$ nenoteiktais integrālis (294. § 3. piemērs) ir

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C. \tag{3}$$

Saskaņā ar doto nosacījumu dabūjam

$$\frac{1}{2} = \ln 1 + C, \tag{4}$$

no kurienes

$$C = \frac{1}{2}.$$

Meklējamā funkcija ir $\ln(-x) + \frac{1}{2}$. Tai 325. zīmējumā atbilst integrāllīnija PQ.

297. §. Nenoteiktā integrāļa īpašības

1. Diferenciāļa zīme pirms integrāļa zīmes pēdējo iznīcina, t. i.,

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx \tag{1}$$

(saskaņā ar nenoteiktā integrāļa definīciju).

Citādi: nenoteiktā integrāļa atvasinājums ir vienāds ar zemintegrāļa funkciju

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x). \tag{2}$$

Piemērs.

$$d\int 2x dx = d(x^2+C) = 2x dx, \qquad (1a)$$

$$\frac{d}{dx}\int 2x dx = 2x.$$

2. Integrāļa zīme pirms diferenciāļa zīmes pēdējo iznīcina, bet tad jāpieraksta patvaļīgs konstants saskaitāmais.

Piemērs.

$$\int d \sin x = \sin x + C. \qquad (3)$$

3. Pastāvīgu reizinātāju var iznest pirms integrāļa zīmes, t. i.,

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx. \qquad (4)$$

Piemērs.

$$\int 6x dx = 6\int x dx = 6\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right) = 3x^2 + 6C = 3x^2 + C_1,$$

kur $C_1 = 6C$.

4. Algebriskas summas integrālis ir vienāds ar integrāļu summu, kuri ņemti no katra saskaitāmā atsevišķi. Trim saskaitāmajiem dabūjam

$$\int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]\, dx =$$

$$= \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx; \qquad (5)$$

analogi jebkuram (nemainīgam) saskaitāmo skaitam.

Piemērs.

$$\int (5x^2 - 2x + 4)dx = \int 5x^2 dx - \int 2x dx + \int 4 dx =$$

$$= \left(\frac{5}{3}x^3 + C_1\right) - (x^2 + C_2) + (4x + C_3) =$$

$$= \frac{5}{3}x^3 - x^2 + 4x + C,$$

kur

$$C = C_1 - C_2 + C_3.$$

Piezīme. Nav vajadzīgs starpaprēķinos katram integrālim pierakstīt savu konstanto saskaitāmo; pietiek pierakstīt vienu konstanti pēc visu integrāļu atrašanas.

298. §. Integrāļu tabula

Apgriežot visas diferencēšanas formulas, rodas atbilstošās integrēšanas formulas. Tā no formulas

$$d\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})=\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} \tag{1}$$

rodas formula [1]

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C. \tag{2}$$

No desmit tālāk dotajām formulām pirmās deviņas dabū, apgriežot diferencēšanas pamatformulas, desmitā sakrīt ar (2). Šīs formulas izvedums dots 312. § 1. piemērā.

$$\text{I.}\quad \int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad (n\neq-1),$$

$$\text{II.}\quad \int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C\ ^2,$$

$$\text{III.}\quad \int e^x dx=e^x+C,$$

$$\text{IIIa.}\quad \int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C,$$

$$\text{IV.}\quad \int\sin x\,dx=-\cos x+C,$$

$$\text{V.}\quad \int\cos x\,dx=\sin x+C,$$

$$\text{VI.}\quad \int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}x+C,$$

[1] Lielums $x+\sqrt{a^2+x^2}$ ir pozitīvs jebkuram x, tāpēc formulā (2) nerakstām $\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|$.

[2] Sal. 294. § 3. piemēru.

$$\text{VII.} \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\text{VIII.} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$$

$$\text{VIIIa.} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C,$$

$$\text{IX.} \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$\text{IXa.} \quad \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C,$$

$$\text{X.} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln/x + \sqrt{a^2 \pm x^2}/ + C.$$

Šīs formulas ir jāiegaumē (no trim formulu pāriem III, VIII, IX pietiek iegaumēt pa vienai — vislabāk to, kurai pierakstīts burts «a»).

Formulā IXa atšķirībā no VIIIa pirms arc zīmes atrodas reizinātājs $\frac{1}{a}$. Tas saistās ar izteiksmes $\frac{dx}{a^2+x^2}$ *dimensiju*: skaitītājā atrodas lieluma dx pirmā pakāpe, bet saucējā — otrās pakāpes (a^2 un x^2). Dimensija ir -1; pateicoties reizinātājam $\frac{1}{a}$, tāda pati dimensija ir labajai pusei. Izteiksmei $\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ formulā VIIIa ir nulles dimensija tāpat kā labajai pusei.

1. piezīme. Formulas I—X ieteicams iegaumēt pakāpeniski, nostiprinot tās ar vingrinājumiem. Tālākajam darbam ieteicams iegaumēt vēl šādas piecas formulas [1]:

---

[1] Visas tās, tāpat kā pielikumā dotās formulas (940.—952. lpp.), atrod no formulām I—X ar kārtulām, kas apskatītas 300.—302. paragrāfā.

$$\text{XI.} \quad \int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C,$$

$$\text{XII.} \quad \int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C,$$

$$\text{XIII.} \quad \int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C,$$

$$\text{XIV.} \quad \int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C,$$

$$\text{XV.} \quad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

2. piezīme. Integrāļus XIII un XIV var izteikt arī šādā veidā:

$$\text{XIIIa.} \quad \int \frac{dx}{\sin x} = \ln|\csc x - \operatorname{ctg} x| + C,$$

$$\text{XIVa.} \quad \int \frac{dx}{\cos x} = \ln|\operatorname{sc} x - \operatorname{tg} x| + C.$$

Šai formā redzamāka to savstarpējā saistība, bet aprēķiniem ērtākas ir tekstā dotās formulas.

299. §. Tiešā integrēšana

Izlietojot 297. § 3. un 4. īpašību, daudzos gadījumos integrēšanu var reducēt uz 298. § tabulas formulām.

1. piemērs.

$$\int (3\sqrt{x} - 4x)\,dx = 3\int x^{\frac{1}{2}}dx - 4\int x\,dx =$$

$$= 3 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 4\,\frac{x^2}{2} + C = 2x\sqrt{x} - 2x^2 + C.$$

Pirmo pārveidojumu izdara, izlietojot 297. § īpašības, bet otro, — tabulas formulu I. Konstante O parādās tai momentā, kad izzūd integrāļa zīmes.

2. piemērs.

$$\int (2\sin t - 3\cos t)dt = 2\int \sin t dt - 3\int \cos t dt =$$
$$= -2\cos t - 3\sin t + C$$

(izlietotas formulas IV un V).

3. piemērs.

$$\int \frac{\sin^3 \varphi + 1}{\sin^2 \varphi} d\varphi = \int \sin \varphi d\varphi + \int \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} = -\cos \varphi - \operatorname{ctg} \varphi + C$$

(izlietotas formulas IV un VI).

4. piemērs.

$$\int (x^2+1)^4 x^3 dx = \int (x^{11} + 4x^9 + 6x^7 + 4x^5 + x^3) dx =$$
$$= \frac{1}{12}x^{12} + \frac{2}{5}x^{10} + \frac{3}{4}x^8 + \frac{2}{3}x^6 + \frac{1}{4}x^4 + C.$$

300. §. Substitūcijas metode (integrēšana ar palīgmainīgo)

Zemintegrāļa izteiksmē $f(x)dx$ mainīgo x var aizstāt ar palīgmainīgo z, kuru ar x saista kāda funkcionāla atkarība [1]. Pieņemsim, ka pārveidotā izteiksme ir $f_1(z)dz$ [2]; tad $\int f(x)dx = \int f_1(z)dz$. Ja integrālis $\int f_1(z)dz$ ir tabulas integrālis vai arī to var reducēt uz tabulas integrāli vieglāk nekā doto integrāli, tad pārveidojums ir sasniedzis mērķi.

Uz jautājumu: kā izvēlēties izdevīgu substitūciju, vispārīgi atbildēt nevar (sal. 309. §); paņēmienus dažiem svarīgiem gadījumiem dosim tālāk ar piemēriem.

1. piemērs.

$$\int \sqrt{2x-1}\,dx.$$

Tabulā tāda integrāļa nav, bet ar formulu I var aprēķināt integrāli $\int \sqrt{x}dx$, kas ir līdzīgs dotajam integrālim.

---

[1] Pieņemts, ka funkcijai $x=\varphi(z)$, kas izsaka šo atkarību, ir nepārtraukts atvasinājums.

[2] Dabūjam $f_1(z)dz = f[\varphi(z)]\varphi'(z)dz$.

Tāpēc mēģinām ievest palīgmainīgo z, kuru ar x saista sakarība

$$2x-1=z. \tag{1}$$

Diferencējot (1), dabūjam

$$2dx=dz. \tag{2}$$

Zemintegrāļa izteiksmi $\sqrt{2x-1}dx$ ar vienādībām (1) un (2) var pārveidot izskatā $\sqrt{z}\frac{dz}{2}$, un mēs dabūjam

$$\int \sqrt{2x-1}dx=\int \sqrt{z}\,\frac{dz}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{z^{3/2}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}z^{3/2}+C. \tag{3}$$

Atgriežoties pie mainīgā x, atrodam

$$\int \sqrt{2x-1}dx=\frac{1}{3}(2x-1)^{3/2}+C.$$

Pārbaudot rezultātu ar diferencēšanu, dabūjam

$$d\left[\frac{1}{3}(2x-1)^{3/2}+C\right]=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}(2x-1)^{1/2}\,d(2x-1)=\sqrt{2x-1}dx.$$

Šeit $2x-1$ atkal uzskatīta par palīgfunkciju (sal. 237. §).

1. piezīme. Vienkāršākajos gadījumos nav vajadzīgs lietot jaunu burtu. Tā 1. piemērā, kur ņemta palīgfunkcija $2x-1$, galvā atrodam tās diferenciāli $d(2x-1)=2dx$. Zemintegrāļa izteiksmē pirms dx ņemam reizinātāju 2; lai to kompensētu, pierakstām $\frac{1}{2}$ pirms integrāļa. Dabūjam

$$\frac{1}{2}\int \sqrt{2x-1}\,2dx=\frac{1}{2}\int (2x-1)^{1/2}d(2x-1)=$$
$$=\frac{1}{2}\,\frac{(2x-1)^{3/2}}{\frac{3}{2}}+C.$$

1. kārtula. *Ja zemintegrāļa funkcijai* (kā 1. piemērā) *ir izskats $f(ax+b)$, tad var izrādīties derīga substitūcija $ax+b=z$.*

2. piemērs.

$$\int \frac{dx}{(8-3x)^2}.$$

Ņemam palīgfunkciju $8-3x=z$; no šejienes $dx=-\frac{dz}{3}$. Atrodam

$$\int \frac{dx}{(8-3x)^2}=\int -\frac{dz}{3z^2}=\frac{1}{3z}+C=\frac{1}{3(8-3x)}+C.$$

3. piemērs.

$$\int \frac{dx}{6x-7}.$$

Par palīgfunkciju ņemam $6x-7$. Neapzīmējot to ar burtu (sk. 1. piezīmi), atrodam (ar formulu II)

$$\int \frac{dx}{6x-7}=\frac{1}{6}\int \frac{6dx}{6x-7}=\frac{1}{6}\int \frac{d(6x-7)}{6x-7}=\frac{1}{6}\ln|6x-7|+C.$$

4. piemērs. $\int e^{3x}dx$ (palīgfunkcija $3x$).

$$\int e^{3x}dx=\frac{1}{3}\int e^{3x}d(3x)=\frac{1}{3}e^{3x}+C.$$

5. piemērs.

$$\int \cos\frac{x+1}{3}\,dx=3\int \cos\frac{x+1}{3}\,d\left(\frac{x+1}{3}\right)=3\sin\frac{x+1}{3}+C.$$

2. kārtula. Pieņemsim, ka zemintegrāļa izteiksme sadalās divos reizinātājos un viens no tiem ir kādas funkcijas $\varphi(x)$ diferenciālis. Tad var izrādīties, ka pēc substitūcijas $\varphi(x)=z$ otrs reizinātājs pārvērtīsies par tādu z funkciju, kuru mēs protam integrēt. Tad substitūcija būs attaisnojusies.

6. piemērs.

$$\int \frac{2x\,dx}{1+x^2}.$$

Sadalām zemintegrāļa izteiksmi reizinātājos $\frac{1}{1+x^2}$ un $2x\,dx$. Reizinātājs $2x\,dx$ ir diferenciālis no funkcijas $1+x^2$, kas atrodas otra reizinātāja saucējā. Pēc substitūcijas $1+x^2=z$ reizinātājs $\frac{1}{1+x^2}$ pieņem izskatu $\frac{1}{z}$. Šo funkciju mēs protam integrēt. Aprēķinu var izdarīt tā:

$$\int \frac{2x\,dx}{1+x^2} = \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \ln(1+x^2) + C.$$

2. piezīme. Dotā integrāļa ārējā līdzība ar tabulas integrāli $\int \frac{dx}{1+x^2}$ ir maldinoša. Reizinātājs $2x$ skaitītājā būtiski maina primitīvās funkcijas izskatu.

7. piemērs.

$$\int \sin x \cos^3 x\,dx.$$

Sadalām zemintegrāļa izteiksmi reizinātājos $\cos^3 x$ un $\sin x\,dx = -d\cos x$. Substitūcija $\cos x = z$ pārveido $\cos^3 x$ funkcijā z^3, kuru mēs protam integrēt. Aprēķinu izdara tā:

$$\int \sin x \cos^3 x\,dx = -\int \cos^3 x\,d\cos x = -\frac{\cos^4 x}{4} + C.$$

8. piemērs.

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Līdzība ar tabulas integrāli VIIIa ir maldinoša. Ņemam palīgfunkciju $a^2-x^2=z$. Dabūjam $-2xdx=dz$, t. i., $xdx = -\frac{dz}{2}$. Integrālis pieņem izskatu

$$\int -\frac{dz}{2\sqrt{z}} = -\sqrt{z} + C.$$

Aprēķinu izdara tā:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}} =$$
$$= -\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

9. piemērs.

$$\int \frac{5x\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}}.$$

Palīgfunkcija ir x^2. Dabūjam

$$\int \frac{5x\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}} = \frac{5}{2}\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}} = \frac{5}{2}\int \frac{d(x^2)}{\sqrt{(a^2)^2-(x^2)^2}} =$$

$$= \frac{5}{2}\arcsin\frac{x^2}{a^2} + C.$$

10. piemērs.

$$\int \frac{\ln^2 x\,dx}{x} = \int \ln^2 x\, d\ln x = \frac{1}{3}\ln^3 x + C.$$

Ne vienmēr viegli atšķirt izdevīgu substitūciju no neizdevīgas. Tas redzams 11. un 12. piemērā.

11. piemērs

$$\int (x^2+1)^4 x^3 dx.$$

Šeit noderīga ir substitūcija $x^2+1=z$. Zemintegrāļa izteiksmi sadalām reizinātājos $x\,dx=\frac{1}{2}dz$ un $(x^2+1)^4x^2= =z^4(z-1)$. Dabūjam

$$\int (x^2+1)^4 x^3 dx = \frac{1}{2}\int z^4(z-1)\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int z^5 dz - \frac{1}{2}\int z^4 dz = \frac{1}{12}(x^2-1)^6 - \frac{1}{10}(x^2+1)^5 + C$$

(sal. 299. § 4. piemēru, kur tas pats integrālis atrasts bez substitūcijas).

12. piemērs.

$$\int (x^2+1)^4 x^2 dx.$$

Šeit substitūcija $x^2+1=z$ nav izdevīga: tā dod integrāli $\frac{1}{2}\int z^4\sqrt{z-1}\,dz$, kas ir grūtāks par doto integrāli. Doto integrāli vislabāk aprēķināt tieši, kā 299. § 4. piemērā. Dabūsim $\frac{1}{11}x^{11}+\frac{4}{9}x^9+\frac{6}{7}x^7+\frac{4}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+C.$

13. piemērs.

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x} = \ln|\operatorname{arctg} x| + C \quad (\text{palīgfunkcija } \operatorname{arctg} x).$$

14. piemērs.

$$\int \frac{y^2 dy}{\sqrt{1-y^6}} = \frac{1}{3} \arcsin y^3 + C \quad \text{(palīgfunkcija } y^3\text{)}.$$

15. piemērs.

$$\int \frac{u^3 du}{\sqrt{1-u^4}} = -\frac{1}{2}\sqrt{1-u^4} + C \quad \text{(palīgfunkcija } 1-u^4\text{)}.$$

16. piemērs.

$$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \ln(e^x + e^{-x}) + C \quad \text{(palīgfunkcija } e^x + e^{-x}\text{)}.$$

17. piemērs.

$$\int \frac{\sin x \, dx}{\cos^4 x} = \frac{1}{3\cos^3 x} + C \quad \text{(palīgfunkcija } \cos x\text{)}.$$

18. piemērs.

$$\int \frac{\sin^3 x \, dx}{\cos^5 x} = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + C$$

(palīgfunkcija $\operatorname{tg} x$; zemintegrāļa izteiksme ir vienāda ar $\left.\frac{\operatorname{tg}^3 x \, dx}{\cos^2 x}\right)$.

301. §. Integrēšana pa daļām

Jebkuru zemintegrāļa izteiksmi ar dažādiem paņēmieniem var izteikt veidā udv (u un v ir integrācijas mainīgās funkcijas).

Par *integrēšanu pa daļām* jeb par *parciālo integrēšanu* sauc dotā integrāļa $\int u\,dv$ redukciju uz integrāli $\int v\,du$ ar formulu

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{1}$$

Šis paņēmiens ved pie mērķa, ja $\int v\,du$ var atrast vieglāk nekā $\int u\,dv$ (1.—4. piemēri) vai ja viens integrālis izsakās atkarībā no otra (5. piemērs).

1. piemērs.

$$\int e^x x\,dx.$$

Zemintegrāļa izteiksmi pārveidojam tā: $x(e^x dx) = x de^x$. Šeit u loma piekrīt x, bet v — funkcijai e^x. Pielietojam formulu (1)

$$\int x\,de^x = xe^x - \int e^x dx.$$

Integrālis $\int e^x dx$ ir tabulas integrālis. Aprēķinu izdarām tā:

$$\int e^x x dx = \int x\,de^x = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

1. piezīme. Ja zemintegrāļa izteiksmi izsakām $e^x d\left(\frac{1}{2}x^2\right)$, t. i., ņemam $u = e^x$, $v = \frac{1}{2}x^2$, tad ar formulu (1) dabūjam

$$\int e^x d\left(\frac{1}{2}x^2\right) = \frac{1}{2}x^2 e^x - \int \frac{1}{2}x^2 e^x\,dx.$$

Integrālis $\int \frac{1}{2}x^2 e^x dx$ nav vieglāks par doto integrāli.

Izteiksmi $e^x x\,dx$ var izteikt veidā $u\,dv$ ar visdažādākiem paņēmieniem, ņemot par v kaut kādu funkciju. Tā, ja ņemam $v = x^4$, tad $dv = 4x^3 dx$. Tad $e^x x\,dx = \frac{e^x}{4x^2}(4x^3\,dx)$, t. i., $u = \frac{e^x}{4x^2}$. Bet formula (1) atkal dos integrāli, kurš ir grūtāks par doto integrāli.

Pirms integrēt pa daļām, vajag galvā apsvērt, ko var dot viena vai otra funkcijas v izvēle.

2. piemērs.

$$\int x \ln x\,dx.$$

Šeit zemintegrāļa funkciju izdevīgi izteikt veidā $\ln x\,d\left(\frac{1}{2}x^2\right)$. Formula (1) $\left(\text{ja } u = \ln x,\ v = \frac{1}{2}x^2\right)$ dod

$$\int \ln x\,d\left(\frac{1}{2}x^2\right) = \ln x\left(\frac{1}{2}x^2\right) - \int \frac{1}{2}x^2 d\ln x =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x^2 \frac{dx}{x}.$$

Integrālis $\int \frac{1}{2} x^2 \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \int x\,dx$ ir vienāds ar $\frac{1}{4} x^2 + C$, tā ka

$$\int x \ln x\,dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C.$$

3. piemērs.

$$\int x \sin x\,dx.$$

Dabūjam

$$\int x \sin x\,dx = \int x\,d(-\cos x) =$$
$$= -x \cos x - \int (-\cos x)\,dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

4. piemērs.

$$\int x^2 \cos x\,dx.$$

Dabūjam

$$\int x^2 \cos x\,dx = \int x^2 d \sin x = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x\,dx.$$

Dabūtajam integrālim vēlreiz pielietojam integrēšanu pa daļām (sk. 3. piemēru). Galīgi dabūjam

$$\int x^2 \cos x\,dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$$

5. piemērs.

$$\int e^x \cos x\,dx.$$

Izsakām zemintegrāļa izteiksmi veidā $e^x d \sin x$, tad

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x - \int \sin x\, e^x\,dx + C_1. \tag{2}$$

Dabūtais integrālis nav vienkāršāks par doto integrāli, bet to var izteikt atkarībā no dotā integrāļa. Šai nolūkā vēlreiz integrējam pa daļām

$$-\int \sin x\, e^x\,dx = \int e^x\,d \cos x =$$
$$= e^x \cos x - \int \cos x\, e^x\,dx + C_2. \tag{3}$$

Ievietojot (3) vienādībā (2), dabūjam vienādojumu

$$\int e^x \cos x\,dx =$$
$$= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\,dx + C_1 + C_2, \qquad (4)$$

no kura atrodam nezināmo $\int e^x \cos x\,dx$:

$$\int e^x \cos x\,dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C,$$

kur $C = \frac{C_1 + C_2}{2}$.

2. piezīme. Zemintegrāļa izteiksmi var izteikt veidā $\cos x\,de^x$. Tad, otrreiz integrējot, jaunā izteiksme $e^x \sin x\,dx$ jāizsaka veidā $\sin x\,de^x$, bet ne veidā $e^x\,d\cos x$, jo tad vienādojums $\int e^x \cos x\,dx$ aprēķināšanai pārvērtīsies identitātē.

302. §. Dažu trigonometrisku izteiksmju integrēšana

1. kārtula. Lai aprēķinātu integrāļus

$$\int \cos^{2n+1} x\,dx, \quad \int \sin^{2n+1} x\,dx \qquad (1)$$

(n ir vesels pozitīvs skaitlis), ieteicams par palīgfunkciju ņemt pirmajā gadījumā $\sin x$, otrajā — $\cos x$.

1. piemērs.

$$\int \cos^3 x\,dx = \int (1 - \sin^2 x)\,d\sin x =$$
$$= \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C.$$

2. piemērs.

$$\int \sin^5 x\,dx = \int \sin^4 x \sin x\,dx = -\int (1 - \cos^2 x)^2\,d\cos x =$$
$$= -\int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)\,d\cos x =$$
$$= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C.$$

Ja $\sin x$ vai $\cos x$ ir pāra pakāpēs, tad 1. kārtula neved pie mērķa (sk. 2. kārtulu).

2. kārtula. Lai aprēķinātu integrāļus

$$\int \cos^{2n} x\,dx, \quad \int \sin^{2n} x\,dx, \tag{2}$$

izdevīgi lietot formulas

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \tag{3}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \tag{4}$$

un par palīgfunkciju ņemt $\cos 2x$.

3. piemērs.

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

4. piemērs.

$$\int \cos^4 x\,dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\,dx.$$

Pirmos divus integrāļus aprēķinām tūlīt, bet trešajam atkārtoti pielietojam formulu (3), pārrakstot to tā:

$$\cos^2 2x = \frac{1+\cos 4x}{2}.$$

Dabūjam

$$\int \cos^4 x\,dx = \frac{1}{4}\,x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}(1+\cos 4x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

Atliek vēl tikai savilkt līdzīgos locekļus.

3. kārtula. Lai aprēķinātu integrāļus

$$\int \cos^m x \sin^n x\,dx, \tag{5}$$

kur vismaz viens no skaitļiem m, n ir nepāra skaitlis, tad izdevīgi lietot palīgfunkciju $\cos x$ (ja m ir nepāra skaitlis) vai $\sin x$ (ja n ir nepāra skaitlis) un rīkoties tā kā 1. un 2. piemērā.

5. piemērs.

$$\int \cos^6 x \sin^5 x \, dx.$$

Šeit sīnuss ir nepāra pakāpē. Izsakām zemintegrāļa izteiksmi tā:

$$\cos^6 x \sin^4 x \, d(-\cos x) = -\cos^6 x (1-\cos^2 x)^2 \, d \cos x.$$

Dabūjam

$$\int \cos^6 x \sin^5 x \, dx =$$

$$= -\int \cos^6 x \, d \cos x + 2\int \cos^8 x \, d \cos x - \int \cos^{10} x \, d \cos x =$$

$$= -\frac{1}{7} \cos^7 x + \frac{2}{9} \cos^9 x - \frac{1}{11} \cos^{11} x + C.$$

Ja abi skaitļi m, n ir pāra skaitļi, tad 3. kārtula neved pie mērķa (sk. 4. kārtulu).

4. kārtula. Lai aprēķinātu integrāļus (5), kur m un n ir pāra skaitļi, izdevīgi lietot formulas

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \tag{3}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \tag{4}$$

$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}. \tag{6}$$

6. piemērs.

$$\int \cos^4 x \sin^2 x \, dx.$$

Izsakot zemintegrāļa izteiksmi veidā

$$(\cos x \sin x)^2 \cos^2 x \, dx$$

un pielietojot formulas (6) un (3), dabūjam

$$\int \cos^4 x \sin^2 x \, dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 2x (1 + \cos 2x) \, dx =$$
$$= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \, dx + \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x \, dx.$$

Pirmo saskaitāmo pārveidojam ar formulu (4), pārrakstot to tā:

$$\sin^2 2x = \frac{1 - \cos 4x}{2}.$$

Otro integrāli aprēķinām ar palīgfunkciju $\sin 2x$. Dabūjam

$$\int \cos^4 x \sin^2 x \, dx = \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.$$

5. kārtula. Lai aprēķinātu integrāļus

$$\int \sin mx \cos nx \, dx, \tag{7}$$

$$\int \sin mx \sin nx \, dx, \tag{8}$$

$$\int \cos mx \cos nx \, dx, \tag{9}$$

izdevīgi lietot pārveidojuma formulas

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} [\sin (m - n) x + \sin (m + n) x], \tag{7'}$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} [\cos (m - n) x - \cos (m + n) x], \tag{8'}$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} [\cos (m - n) x + \cos (m + n) x]. \tag{9'}$$

7. piemērs.

$$\int \sin 5x \cos 3x \, dx = \frac{1}{2} \int [\sin (5 - 3) x + \sin (5 + 3) x] \, dx =$$
$$= -\frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 8x + C.$$

6. kārtula. Lai aprēķinātu integrāļus

$$\int \mathrm{tg}^n x\,dx, \quad \int \mathrm{ctg}^n x\,dx$$

(n ir vesels skaitlis, kas lielāks par 1), izdevīgi izdalīt reizinātāju $\mathrm{tg}^2 x$ (vai $\mathrm{ctg}^2 x$).

8. piemērs.

$$\int \mathrm{tg}^5 x\,dx.$$

Izdalot reizinātāju $\mathrm{tg}^2 x = \mathrm{sc}^2 x - 1 = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, dabūjam

$$\int \mathrm{tg}^5 x\,dx = \int \mathrm{tg}^3 x \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \mathrm{tg}^3 x\,dx.$$

Pirmais integrālis ir vienāds ar $\frac{1}{4}\,\mathrm{tg}^4 x$. Otru integrāli aprēķina ar tādu pašu paņēmienu:

$$\int \mathrm{tg}^3 x\,dx = \int \mathrm{tg}\, x \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \mathrm{tg}\, x\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}^2 x + \ln|\cos x|.$$

Galīgi

$$\int \mathrm{tg}^5 x\,dx = \frac{1}{4}\,\mathrm{tg}^4 x - \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}^2 x - \ln|\cos x| + C.$$

303. §. Trigonometriskas substitūcijas

Zemintegrāļa izteiksmēm, kas satur radikāļus

$$\sqrt{a^2-x^2}, \quad \sqrt{x^2+a^2}, \quad \sqrt{x^2-a^2}$$

(un arī šo radikāļu kvadrātus a^2-x^2, $x^2 \pm a^2$), bieži ir izdevīgas šādas substitūcijas:

gadījumam	$\sqrt{a^2-x^2}$	substitūcija	$x = a\sin t$,
„	$\sqrt{x^2+a^2}$	„	$x = a\,\mathrm{tg}\, t$,
„	$\sqrt{x^2-a^2}$	„	$x = a\,\mathrm{sc}\, t$.

1. piemērs.

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Ņemot $x=a\sin t$, dabūjam [1]

$$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t,\quad dx=a\cos t\,dt. \tag{1}$$

Tādējādi

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^2\int \cos^2 t\,dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C \tag{2}$$

(sk. 302. § (3)). Atgriežoties pie mainīgā x, atrodam

$$t=\arcsin\frac{x}{a},\quad \frac{1}{2}\sin 2t=\sin t\cos t=\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}. \tag{3}$$

Galīgi

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

2. piemērs.

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}.$$

Ņemot $x=a\,\mathrm{tg}\,t$, dabūjam

$$x^2+a^2=a^2(\mathrm{tg}^2 t+1)=\frac{a^2}{\cos^2 t},\quad dx=\frac{a\,dt}{\cos^2 t}.$$

Tādējādi

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{a^3}\int \cos^2 t\,dt=\frac{1}{2a^3}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C.$$

Atgriežoties pie mainīgā x, atrodam

$$t=\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a},\quad \frac{1}{2}\sin 2t=\sin t\cos t=\frac{ax}{a^2+x^2}.$$

Galīgi

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{2a^3}\left(\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}+\frac{ax}{a^2+x^2}\right)+C.$$

---

[1] Radikāļa zīme ņemta, pieņemot, ka $-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$.

3. piemērs.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Ņemot $x=a \operatorname{sc} t$, dabūjam [1]

$$\sqrt{x^2-a^2}=a \operatorname{tg} t, \quad dx=a \operatorname{tg} t \operatorname{sc} t\, dt.$$

Tādējādi

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{a}\int dt=\frac{1}{a}t+C=\frac{1}{a}\operatorname{arcsc}\frac{x}{a}+C=$$

$$=\frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x}+C.$$

304. §. Racionālas funkcijas

Par argumenta x *veselu racionālu funkciju* sauc funkciju, ko izsaka polinoms

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n. \quad (1)$$

Par *daļveida racionālu funkciju* sauc veselu racionālu funkciju attiecību

$$\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}. \quad (2)$$

Ja skaitītāja pakāpe ir mazāka par saucēja pakāpi, tad daļu (2) sauc par *īstu*, pretējā gadījumā — par *neīstu*.

Piemēri. Funkcija $\frac{0{,}3x^2+\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}$ ir vesela racionāla funkcija. Funkcijas $\frac{2x^2-1}{4x^3-5}, \frac{3x^2+\pi}{x^2+4}$ ir daļveida racionālas funkcijas. Pirmā daļa ir īsta, otra — neīsta. Funkcija $\frac{2\sqrt{x}}{x-1}$ nav racionāla.

[1] Radikāļa zīme ņemta, pieņemot, ka $-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$.

304.a §. Veselās daļas izslēgšana

No neīstas daļas, izpildot dalīšanu ar atlikumu, var *izslēgt veselo daļu*, t. i., neīstu daļu var izteikt kā veselas racionālas funkcijas un īstas daļas summu. Var gadīties, ka dalīšana izpildāma bez atlikuma; tad neīsta daļa ir vesela funkcija.

1. piemērs. Neīsta daļa $\frac{4x^3-16x}{15x^2-3}$ pēc veselās daļas izslēgšanas pieņem izskatu $\frac{4}{15}x-\frac{15\frac{1}{5}x}{15x^2-3}$ $\left(\frac{4}{15}x\right.$ ir dalījums, $-15\frac{1}{5}x$ ir atlikums, kas rodas, skaitītāju dalot ar saucēju).

2. piemērs.

$$\frac{1+x^5-x^6}{1-x}=x^5+\frac{1}{1-x}.$$

Šo rezultātu iegūst, $-x^6+x^5+1$ dalot ar $-x+1$ jeb, īsāk, šādā veidā:

$$\frac{1+x^5-x^6}{1-x}=\frac{1}{1-x}+\frac{x^5(1-x)}{1-x}=\frac{1}{1-x}+x^5.$$

3. piemērs. Izslēdzot veselo daļu no daļas $\frac{x^3-x^2}{x-1}$, iegūstam veselu racionālu funkciju x^2 (dalīšana izpildāma bez atlikuma).

305. §. Par racionālu daļu integrēšanas paņēmieniem

Integrējot neīstu racionālu daļu, vispirms izslēdz no tās veselo daļu (304.a §).

1. piemērs.

$$\int\frac{1+x^5-x^6}{1-x}dx=\int\left(x^5+\frac{1}{1-x}\right)dx=\frac{x^6}{6}-\ln|1-x|+C\ [1]$$

(sal. 304.a § 2. piemērs).

[1] Varētu lietot substitūciju $1-x=z$ un integrēt, neizdalot iepriekš veselo daļu, bet aprēķini būtu garāki.

Tā kā veselo daļu var integrēt tieši, tad jebkuras daļveida racionālas funkcijas integrēšana reducējas uz īstas daļas integrēšanu. Īstu daļu integrēšanai ir vispārīga metode (307. §). Bet tā bieži prasa garus skaitļojumus. Tāpēc, kur iespējams, der izmantot zemintegrāļa izteiksmes speciālas īpatnības.

Tā, ja *zemintegrāļa izteiksmes skaitītājs ir vienāds ar saucēja diferenciāli* (vai atšķiras no tā ar pastāvīgu reizinātāju), *tad saucējs jāpieņem par palīgfunkciju.*

2. piemērs.

$$\int \frac{(2x^3+6x^2+7x+3)\,dx}{x^4+4x^3+7x^2+6x+2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^4+4x^3+7x^2+6x+2)}{x^4+4x^3+7x^2+6x+2} =$$
$$= \frac{1}{2}\ln(x^4+4x^3+7x^2+6x+2)+C.$$

Analogi var rīkoties, ja skaitītājā ir kāda polinoma diferenciālis, bet saucējā tā paša polinoma pakāpe.

3. piemērs.

$$\int \frac{(3x^2+1)\,dx}{x^2(x^2+1)^2} = \int \frac{d(x^3+x)}{(x^3+x)^2} = -\frac{1}{x^3+x}+C.$$

Ja skaitītājam un saucējam ir kopīgs reizinātājs, tad vispirms der saīsināt.

4. piemērs.

$$\int \frac{(x^2-x-2)\,dx}{x^3+x^2+x+1}.$$

Šo daļu var saīsināt ar $x+1$. Dabūjam

$$\int \frac{(x-2)\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)-2\,\mathrm{arctg}\,x+C.$$

1. piezīme. Dažreiz saīsināt daļu nav jēgas. Tā 2. piemērā daļu var izteikt šādi

$$\frac{(x+1)(2x^2+4x+3)}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}$$

un saīsināt ar $x+1$. Bet integrāli

$$\int \frac{(2x^2+4x+3)\,dx}{(x+1)(x^2+2x+2)}$$

ir grūtāk aprēķināt nekā doto integrāli, nemaz nerunājot par to, ka sadalīšana reizinātājos arī sagādā zināmas grūtības.

2. piezīme. Racionālo daļu vispārīgā integrēšanas metode prasa doto daļu sadalīt tā saukto *vienkāršāko* jeb *elementārdaļu* summā. 306. paragrāfā paskaidrots, kas tās ir par daļām un kā tās integrēt. 307. paragrāfā parādīts, kā doto daļu sadalīt vienkāršākās daļās.

306. §. Vienkāršāko racionālo daļu integrēšana

Par *vienkāršākajām* racionālajām daļām sauc daļas, kuras var reducēt uz šādām daļām:

$$\text{I. } \frac{A}{(x-a)^n} \quad (n \text{ — naturāls skaitlis})$$

$$\text{II. } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} \quad (n \text{ — naturāls skaitlis}),$$

kur x^2+px+q *nevar sadalīt reālos pirmās pakāpes reizinātājos* $\left[\text{t. i., } q-\left(\frac{p}{2}\right)^2>0\right]$; ja turpretim x^2+px+q var sadalīt reālos pirmās pakāpes reizinātājos $\left[\text{t. i., } q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\leqslant 0\right]$, tad daļu II *neuzskata par vienkāršāko daļu.*

Daļas $\frac{5}{x+2}$, $\frac{\sqrt{3}}{(x-\sqrt{2})^3}$ ir pirmā tipa vienkāršākās daļas, daļas $\frac{0{,}2}{x^2+1}$, $\frac{7x-1}{x^2+2}$, $\frac{5(x+4)}{x^2+\sqrt{3}}$ ir otrā tipa vienkāršākās daļas. Daļas $\frac{1}{x^2-1}$, $\frac{3x-2}{(x^2-\sqrt{3})^3}$ nav vienkāršākās daļas, jo izteiksmes x^2-1, $x^2-\sqrt{3}$ sadalās reālos pirmās pakāpes reizinātājos.

Daļa $\frac{3}{2x-9}$ ir vienkāršākā daļa, jo to var reducēt veidā $\frac{\frac{3}{2}}{x-\frac{9}{2}}$. Daļa $\frac{18x-3}{(x^2+x+1)^3}$ ir vienkāršākā II tipa daļa.

A) *Pirmā tipa vienkāršākās daļas* integrē ar formulām

$$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^n} = -\frac{1}{n-1}\,\frac{A}{(x-a)^{n-1}} + C \quad (n>1), \tag{1}$$

$$\int \frac{A\,dx}{x-a} = A \ln|x-a| + C. \tag{2}$$

B) *Otrā tipa vienkāršākās daļas, gadījumā, ja* $n=1$, var pilnīgi izintegrēt ar substitūciju

$$x + \frac{p}{2} = z,$$

kas reducē saucēju

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

veidā z^2+k^2 $\left[\text{kur } k^2 = q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right]$.

1. piemērs.

$$\int \frac{3x-5}{x^2-8x+25}\,dx \left[p=-8,\ q=25;\ q-\left(\frac{p}{2}\right)^2=9\right].$$

Ar substitūciju

$$x-4=z$$

pārveidojam integrāli formā

$$\int \frac{3z+7}{z^2+9}\,dz = 3\int \frac{z\,dz}{z^2+9} + 7\int \frac{dz}{z^2+9} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln(z^2+9) + \frac{7}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{z}{3} + C.$$

Atgriežoties pie argumenta x, dabūjam

$$\int \frac{3x-5}{x^2-8x+25}\,dx = \frac{3}{2}\ln(x^2-8x+25) + \frac{7}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-4}{3} + C.$$

Formulai (iegaumēt to nevajag) ir izskats

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx=$$

$$=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

C) *Otrā tipa vienkāršākās daļas, gadījumā, ja* $n>1$, integrē ar to pašu substitūciju

$$x+\frac{p}{2}=z.$$

Ar to integrāli $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx$ pārveido formā

$$\int \frac{Mz+L}{(z^2+k^2)^n}\,dz \tag{3}$$

$\left(\text{kur } L=\frac{2N-Mp}{2},\quad k^2=q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right).$

Pirmo saskaitāmo $\int \frac{Mz\,dz}{(z^2+k^2)^n}$ var tūlīt integrēt ar palīgfunkciju z^2+k^2

$$\int \frac{Mz\,dz}{(z^2+k^2)^n}=-\frac{M}{2}\,\frac{1}{(n-1)(z^2+k^2)^{n-1}}+C. \tag{4}$$

Otro saskaitāmo $L\int \frac{dz}{(z^2+k^2)^n}$ aprēķina vai nu ar trigonometrisku substitūciju (303. § 2. piemērs), vai ar *rekurences formulu* [1]

$$\int \frac{dz}{(z^2+k^2)^n}=$$

$$=\frac{1}{2(n-1)k^2}\left[\frac{z}{(z^2+k^2)^{n-1}}+(2n-3)\int \frac{dz}{(z^2+k^2)^{n-1}}\right] \tag{5}$$

[1] Tā sauc jebkuru formulu, kas izsaka kādu lielumu, kurš atkarīgs no skaitļa n [mūsu gadījumā $\int \frac{dz}{(z^2+k^2)^n}$] ar to pašu lielumu, bet ar mazāku n absolūto vērtību.

(to var pārbaudīt ar diferencēšanu). Šī formula reducē integrāli $\int \frac{dz}{(z^2+k^2)^n}$ uz tāda paša tipa integrāli, bet rādītājs n saucējā ir samazināts par vienu. Procesu atkārtojot, mēs galu galā dabūsim integrāli

$$\int \frac{dz}{z^2+k^2} = \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{z}{k} + C.$$

2. piemērs.

$$\int \frac{(3x-2)\,dx}{(x^2-2x+3)^3}.$$

Ar substitūciju $x-1=z$ integrālis reducējams formā

$$\int \frac{3z+1}{(z^2+2)^3} dz = 3\int \frac{z\,dz}{(z^2+2)^3} + \int \frac{dz}{(z^2+2)^3}. \tag{6}$$

Pirmais loceklis ir vienāds ar

$$\frac{3}{2}\int \frac{d(z^2+2)}{(z^2+2)^3} = -\frac{3}{4(z^2+2)^2}. \tag{7}$$

Konstanti C nerakstām, ietilpinot to otrajā loceklī, kuru aprēķinām ar formulu (5) (ņemot tanī $k^2=2$, $n=3$); dabūjam

$$\int \frac{dz}{(z^2+2)^3} = \frac{1}{8}\,\frac{z}{(z^2+2)^2} + \frac{3}{8}\int \frac{dz}{(z^2+2)^2}. \tag{8}$$

Pielietojam otrreiz formulu (5), ņemot tanī $k^2=2$, $n=2$, dabūjam

$$\int \frac{dz}{(z^2+2)^2} = \frac{1}{4}\,\frac{z}{z^2+2} + \frac{1}{4}\int \frac{dz}{z^2+2} =$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{z}{z^2+2} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{2}} + C. \tag{9}$$

Ar formulām (6)—(9) atrodam

$$\int \frac{3z+1}{(z^2+2)^3} dz =$$

$$= -\frac{3}{4(z^2+2)^2} + \frac{1}{8}\,\frac{z}{(z^2+2)^2} + \frac{3}{32}\,\frac{z}{z^2+2} + \frac{3}{32\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= \frac{3z^3+10z-24}{32(z^2+2)^2} + \frac{3}{32\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{2}} + C.$$

Atgriežoties pie mainīgā x, dabūjam

$$\int \frac{(3x-2)\,dx}{(x^2-2x+3)^3} =$$

$$= \frac{3x^3-9x^2+19x-37}{32(x^2-2x+3)^2} + \frac{3}{32\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{2}} + C.$$

307. §. Racionālu funkciju integrēšana (vispārīga metode)

Racionālas funkcijas ar vispārīgo metodi integrē šādi.

1. No dotās funkcijas izslēdzam veselo daļu; to var integrēt tieši (305. § 1. piemērs).

2. Atlikušās īstās daļas saucēju sadalām reālos reizinātājos, kuru veids ir $x-a$ un x^2+px+q, pie kam otrā veida reizinātājiem jābūt tādiem, kurus *nevar sadalīt pirmās pakāpes reālos reizinātājos* [1].

Sadalījumam ir izskats

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n =$$
$$= a_0(x-a)(x-b)\ldots(x^2+px+q)(x^2+rx+s)\ldots \qquad (1)$$

Tāds sadalījums vienmēr eksistē un tas ir vienīgs [2].

3. Īstās daļas skaitītāju mēģinām dalīt ar visiem izteiksmes (1) reizinātājiem. Ja ar kādu reizinātāju skaitītājs dalās bez atlikuma, tad daļu ar attiecīgo reizinātāju saīsinām (305. § 4. piemērs).

4. Iegūto daļu sadalām vienkāršāko daļu summā un integrējam katru saskaitāmo atsevišķi (306. §).

1. piezīme. Jebkuru īstu daļu var vienā vienīgā veidā sadalīt vienkāršāko daļu summā. Sadalīšanas paņēmiens paskaidrots tālāk. Lai labāk to izprastu, apskatīti 4 gadījumi, kas ietver visas iespējamības.

1. gadījums. Saucēja sadalījums reizinātājos satur tikai pirmās pakāpes reizinātājus, un neviens no tiem neatkārtojas.

---

[1] Ja rodas reizinātājs x^2+px+q, kuru var sadalīt reālos reizinātājos $x-m$ un $x-n$, tad to aizstājam ar šiem diviem reizinātājiem.

[2] Vienkāršākajos gadījumos sadalījumu var izdarīt ar locekļu grupēšanu un citiem pārveidojumiem, kas pazīstami no algebras. Par vispārīgo gadījumu sk. 308. §.

Tad īsto daļu vienkāršākajās daļās sadala ar formulu

$$\frac{F(x)}{a_0(x-a)(x-b)\ldots(x-l)}=$$
$$=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\ldots+\frac{L}{x-l}, \tag{2}$$

kur konstantes $A, B, \ldots, L$ atrod (ar nenoteikto koeficientu metodi) šādā veidā.

a) Atbrīvojamies vienādojumā (2) no saucējiem.

b) Pielīdzinām koeficientus pie vienādām x pakāpēm labajā un kreisajā pusē (var gadīties, ka kreisajā pusē nav atbilstoša locekļa; tad domājam, ka tā koeficients ir 0). Nezināmajiem $A, B, \ldots, L$ dabūjam pirmās pakāpes vienādojumu sistēmu.

c) Atrisinām sistēmu (tai vienmēr ir viens atrisinājums).

1. piemērs. Atrast

$$\int \frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}\,dx.$$

Atrisinājums. Dotā daļa ir īsta. Sadalām saucēju reizinātājos

$$x^3+x^2-6x=x(x-2)(x+3). \tag{3}$$

Skaitītājs nedalās ne ar vienu reizinātāju, tātad daļa nesaīsinās. Visi reizinātāji ir pirmās pakāpes, un neviens neatkārtojas.

Saskaņā ar formulu (2)

$$\frac{7x-5}{x(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+3}. \tag{4}$$

Lai atrastu konstantes A, B, C atbrīvojamies no saucējiem. Dabūjam

$$7x-5=A(x-2)(x+3)+B(x+3)x+C(x-2)x \tag{5}$$

jeb

$$7x-5=(A+B+C)x^2+(A+3B-2C)x-6A. \tag{6}$$

Pielīdzinām koeficientus pie vienādām x pakāpēm (kreisajā pusē iedomājamies locekli $0\cdot x^2$). Dabūjam sistēmu

$$\left.\begin{aligned} A+B+C&=0,\\ A+3B-2C&=7,\\ -6A&=-5. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Atrisinot to, atrodam

$$A=\frac{5}{6},\quad B=\frac{9}{10},\quad C=-\frac{26}{15} \tag{8}$$

un, ievērojot (4), dabūjam šādu dotās daļas sadalījumu vienkāršākajās daļās:

$$\frac{7x-5}{x(x-2)(x+3)}=\frac{5}{6}\,\frac{1}{x}+\frac{9}{10}\,\frac{1}{x-2}-\frac{26}{15}\,\frac{1}{x+3}.$$

Integrējot tās, atrodam meklēto integrāli

$$\int\frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}\,dx=\frac{5}{6}\ln|x|+\frac{9}{10}\ln|x-2|-\frac{26}{15}\ln|x+3|+C.$$

2. piezīme. Konstantes A, B, C var atrast arī tā: izvēlas trīs patvaļīgas x vērtības un ievieto tās vienādībā (5). Dabū triju vienādojumu sistēmu, no kuras atkal atrod tās pašas vērtības (8).

Šī piezīme attiecas arī uz 2., 3. un 4. gadījumu. Bet 1. gadījumā minēto paņēmienu var vēl vienkāršot, ņemot tādas x vērtības, kas pārvērš nullē vienkāršāko daļu saucējus; mūsu piemērā — vērtības $x=0$, $x=2$, $x=-3$. Tad dabūjam sistēmu $-5=-6A$, $9=10B$, $-26=15C$, no kuras tūlīt dabūjam A, B, C vērtības.

2. gadījums. Saucēja sadalījums reizinātājos satur tikai pirmās pakāpes reizinātājus, bet daži no tiem atkārtojas. Pieņemsim, ka reizinātājs $x-a$ atkārtojas k reižu. Tad sadalījumā (2) atbilstošie k vienādie summas locekļi jāaizstāj ar šādu vienkāršāko daļu summu:

$$\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}}+\ldots+\frac{A_1}{x-a}. \tag{9}$$

Analogi arī citiem vairākkārtīgiem reizinātājiem. Vienkāršākās daļas, kas atbilst vienkāršiem reizinātājiem, paliek iepriekšējās. Sadalījumā ietilpstošās konstantes nosaka tāpat kā 1. gadījumā.

2. piemērs. Atrast

$$\int\frac{(x^3+1)\,dx}{x^4-3x^3+3x^2-x}.$$

Atrisinājums. Saucēja sadalījums reizinātājos ir

$$x^4-3x^3+3x^2-x=x(x-1)^3.$$

Visi reizinātāji ir pirmās pakāpes. Reizinātājs x neatkārtojas, bet reizinātājs $x-1$ atkārtojas trīsreiz. Vienkāršajam reizinātājam, tāpat kā 1. piemērā, atbilst vienkāršākā daļa $\frac{A}{x}$, trīskārtīgajam reizinātājam $(x-1)$ — triju vienkāršāko daļu summa

$$\frac{B}{(x-1)^3}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1}.$$

Dotās daļas sadalījumam vienkāršākajās daļās ir izskats

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^3}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1}.$$

Atbrīvojoties no saucējiem, dabūjam

$$x^3+1=A(x-1)^3+Bx+Cx(x-1)+Dx(x-1)^2 \tag{10}$$

jeb

$$x^3+1=(A+D)x^3+(-3A+C-2D)x^2+\\+(3A+B-C+D)x-A. \tag{11}$$

Pielīdzinām koeficientus pie vienādām x pakāpēm; dabūjam

$$\left.\begin{aligned} A+D&=1,\\ -3A+C-2D&=0,\\ 3A+B-C+D&=0,\\ -A&=1. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Atrisinot šo sistēmu, atrodam

$$A=-1,\quad B=2,\quad C=1,\quad D=2.$$

Esam dabūjuši dotās daļas sadalījumu vienkāršākajās daļās

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=-\frac{1}{x}+\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}.$$

Integrējot tās, atrodam

$$\int\frac{(x^3+1)\,dx}{x^4-3x^3+3x^2-x}=$$

$$=-\ln|x|-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}+2\ln|x-1|+C=$$

$$=-\frac{x}{(x-1)^2}+\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}+C.$$

C i t s v a r i a n t s. Ja vienādībā (10) ņemam vispirms $x=0$ un pēc tam $x=1$ (sk. 2. piezīmi), tad tūlīt dabūjam $A=-1$, $B=2$. Ievietojot vienādībā (10) vēl divas vērtības, piemēram, $x=2$ un $x=-1$ un ievērojot atrastās A un B vērtības, dabūjam sistēmu $2C+2D=6$, $2C-4D=-6$, no kuras atrodam $C=1$, $D=2$.

Šis paņēmiens ir sevišķi izdevīgs tad, kad saucēja sadalījumā reizinātājos ir daudzi vienkārši reizinātāji, bet vairākkārtīgo reizinātāju kārta nav liela.

3. gadījums. Saucēja sadalījums reizinātājos satur otrās pakāpes reizinātājus (kas nav sadalāmi reālos pirmās pakāpes reizinātājos), un neviens no tiem neatkārtojas.

Tad daļas sadalījumā vienkāršākajās daļās katram reizinātājam x^2+px+q atbilst vienkāršākā daļa $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$ (II tipa). Pirmās pakāpes reizinātājiem (ja tādi ir), tāpat kā iepriekš, atbilst I tipa vienkāršākās daļas.

3. p i e m ē r s. Atrast

$$\int \frac{(7x^2+26x-9)\,dx}{x^4+4x^3+4x^2-9}.$$

A t r i s i n ā j u m s. Sadalām saucēju reizinātājos

$$x^4+4x^3+4x^2-9=(x^2+2x)^2-3^2=$$
$$=(x^2+2x+3)(x^2+2x-3).$$

Esam dabūjuši divus x^2+px+q veida reizinātājus, bet no tiem tikai pirmais nesadalās reālos pirmās pakāpes reizinātājos

$$\left[q-\left(\frac{p}{2}\right)^2=3-1^2=2>0\right].$$

Turpretim otrs

$$\left[q-\left(\frac{p}{2}\right)^2=-3-1^2=-4<0\right]$$

sadalās

$$x^2+2x-3=(x-1)(x+3).$$

Tāpēc sadalījumam vienkāršākajās daļās ir šāds izskats[1]:

$$\frac{7x^2+26x-9}{(x^2+2x+3)(x-1)(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+3}. \quad (13)$$

Atbrīvojoties no saucējiem, dabūjam

$$7x^2+26x-9=(x^2+2x+3)[A(x+3)+B(x-1)]+$$
$$+(Cx+D)(x-1)(x+3). \quad (14)$$

Pielīdzinām koeficientus pie vienādām x pakāpēm

$$\left.\begin{array}{r} A+B+C=0, \\ 5A+B+2C+D=7, \\ 9A+B-3C+2D=26, \\ 9A-3B-3D=-9. \end{array}\right\} \quad (15)$$

Atrisinot sistēmu (15), atrodam

$$A=1,\quad B=1,\quad C=-2,\quad D=5,$$

tātad

$$\frac{7x^2+26x-9}{(x^2+2x+3)(x-1)(x+3)}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+3}+\frac{-2x+5}{x^2+2x+3}.$$

Integrējot (sk. 306. § gadījums B), atrodam

$$\int\frac{(7x^2+26x-9)\,dx}{x^4+4x^3+4x^2-9}=\ln|x-1|+\ln|x+3|-$$
$$-\ln(x^2+2x+3)+\frac{7}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C=$$
$$=\ln\left|\frac{x^2+2x-3}{x^2+2x+3}\right|+\frac{7}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

---

[1] Kļūda neradīsies, ja sadalījumu meklēsim formā

$$\frac{A'x+B'}{x^2+2x-3}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+3};$$

šai piemērā aprēķini pat vienkāršojas: mēs dabūjam $A'=2$, $B'=2$ un atrodam

$$\int\frac{(2x+2)\,dx}{x^2+2x-3}=\ln|x^2+2x-3|+C.$$

Vispārīgajā gadījumā daļu $\frac{A'x+B'}{x^2+2x-3}$ tāpat vajadzētu sadalīt vienkāršāko daļu summā $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}$.

Cits variants. Lai noteiktu A un B, vienādībā (14) ņemam vispirms $x=1$, pēc tam $x=-3$ (sk. 2. piezīmi). Dabūsim vienkāršus vienādojumus $24=24A$, $-24=-24B$, no kuriem atrodam

$$A=1, \quad B=1.$$

Liekot vienādībā (14) $x=0$, dabūjam $-9=9A-3B-3D$, no kurienes $D=5$. Liekot $x=-1$, atrodam $C=-2$.

4. gadījums. Saucēja sadalījums reizinātājos satur otrās pakāpes reizinātājus (kas nav sadalāmi reālos pirmās pakāpes reizinātājos), un daži no tiem atkārtojas.

Tad daļas sadalījumā katram reizinātājam x^2+px+q, kas atkārtojas k reižu, atbilst šāda vienkāršāko daļu summa:

$$\frac{M_k x+N_k}{(x^2+px+q)^k}+\frac{M_{k-1}x+N_{k-1}}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\ldots+\frac{M_1 x+N_1}{x^2+px+q}. \qquad (16)$$

4. piemērs. Atrast

$$\int \frac{(3x+5)\,dx}{x^5+2x^3+x}.$$

Atrisinājums. Sadalām saucēju reizinātājos

$$x^5+2x^3+x=x(x^4+2x^2+1)=x(x^2+1)^2.$$

Reizinātājs x^2+1 nav sadalāms reālos pirmās pakāpes reizinātājos; tas atkārtojas divreiz. Tāpēc sadalījumam vienkāršākajās daļās būs izskats

$$\frac{3x+5}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

Atbrīvojamies no saucējiem

$$3x+5=A(x^2+1)^2+(Bx+C)x+(Dx+E)x(x^2+1).$$

Pielīdzinām koeficientus pie vienādām x pakāpēm

$$A+D=0, \quad E=0, \quad 2A+B+D=0,$$

$$C+E=3, \quad A+E=5.$$

Atrisinot sistēmu, dabūjam

$$A=5, \quad B=-5, \quad C=3, \quad D=-5, \quad E=0,$$

tātad

$$\int \frac{(3x+5)\,dx}{x^5+2x^3+x}=5\int \frac{dx}{x}+\int \frac{(-5x+3)\,dx}{(x^2+1)^2}-5\int \frac{x\,dx}{x^2+1}.$$

Aprēķinot vidējo integrāli, kā paskaidrots 306. paragrāfā (gadījums C), atrodam

$$\int \frac{(3x+5)\,dx}{x^5+2x^3+x} = 5 \ln |x| + \left[\frac{5}{2(x^2+1)} + \frac{3x}{2(x^2+1)} + \frac{3}{2}\operatorname{arctg} x\right] - \frac{5}{2}\ln(x^2+1) + C =$$

$$= 5 \ln \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{3x+5}{2(x^2+1)} + \frac{3}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

3. piezīme. Jebkuras racionālas funkcijas integrālis teorētiski izsakās (sal. 1.—4. piemērus) ar racionālu funkciju logaritmiem, arkfunkcijām un «algebrisko daļu» (t. i., racionālu funkciju). Bet reizinātājus $x-a$, x^2+px+q (kuros sadalās katras racionālas funkcijas saucējs) vispārīgi var atrast tikai aptuveni (sk. 308. §).

Starp citu, ar M. Ostrogradska atklāto metodi *algebrisko* daļu vienmēr var izteikt precīzi, jo tās atrašanai nav vajadzīgs saucēju sadalīt reizinātājos.

308. §. Par polinoma sadalīšanu reizinātājos

Polinoma

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \tag{1}$$

sadalīšana reizinātājos reducējas uz vienādojuma

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \tag{2}$$

atrisināšanu. Tiešām, ja zināma kāda vienādojuma (2) sakne x_1, tad polinoms (1) dalās bez atlikuma ar $x-x_1$ un mēs dabūjam sadalījumu

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = \\ = a_0(x-x_1)(x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}). \tag{3}$$

Ar augstākajā algebrā iztirzātajām metodēm jebkuram skaitliskam algebriskam vienādojumam var atrast (aptuveni, bet ar jebkuru precizitāti) vienu sakni[1]. Tomēr sakne x_1 var būt arī imagināra.

[1] Ja polinomu (1) dala ar binomu $x-x'_1$, kur x'_1 ir saknes aptuvenā vērtība, tad atlikumā rodas kāds skaitlis q (kas ir vienāds ar polinoma vērtību, ja $x=x'_1$). Ja x'_1 tuvojas x_1, tad atlikums q tiecas uz nulli.

Kad esam dabūjuši sadalījumu (3), varam tālāk atrast sakni x_2 vienādojumam $x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-1}=0$. Skaitlis x būs arī vienādojuma (2) sakne. Polinomam (1) radīsies tāds sadalījums:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=$$
$$=a_0(x-x_1)(x-x_2)(x^{n-2}+c_1x^{n-3}+\ldots+c_{n-2}) \qquad (4)$$

utt. Galu galā dabūsim sadalījumu n (reālos vai imagināros) pirmās pakāpes reizinātājos

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n); \qquad (5)$$

tāds sadalījums ir vienīgais. Skaitļi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ir vienādojuma (2) saknes. Šos skaitļus sauc arī par polinoma (1) saknēm. Nav izslēgta iespējamība, ka dažas saknes ir savā starpā vienādas. Bet arī šai gadījumā uzskata, ka vienādojumam (2) ir n sakņu, tikai katra sakne jāskaita par vienu, par divām, par trim utt. atkarībā no tā, cik reižu atbilstošais reizinātājs atkārtojas sadalījumā (5).

Ja visi polinoma (1) koeficienti ir reāli, tad katrai kompleksai saknei $\alpha+\beta i$ atbilst otra kompleksa sakne $\alpha-\beta i$ *(saistītās saknes)*. Ja viena saistītā sakne atkārtojas, tad tikpat daudz reižu atkārtojas otra saistītā sakne.

Divi saistīti kompleksi reizinātāji $x-(\alpha+\beta i)$ un $x-(\alpha-\beta i)$ reizinājumā dod *reālu* kvadrātisku trinomu

$$x^2+px+q.$$

Šeit

$$p=-2\alpha,\quad q=\alpha^2+\beta^2;\quad q-\left(\frac{p}{2}\right)^2=\beta^2>0.$$

Tātad *katrs polinoms* (ar reāliem koeficientiem) *sadalās reālos reizinātājos*, kuru veids ir $x-x_k$ un x^2+px+q (otrā tipa reizinātāji nav sadalāmi reālos pirmās pakāpes reizinātājos).

P i e z ī m e. Kaut gan skaitļi x_k, p, q, kas parādās reizinātājos $x-x_k$, x^2+px+q, ir reāli, tomēr vispārīgi tie ir iracionāli. Vēl vairāk, tai gadījumā, kad polinomam (1) ir piektā vai augstāka pakāpe, šos skaitļus vispārīgi nevar izteikt pat ar radikāļiem. Tāpēc ne vienmēr racionālu funkciju iespējams p r e c ī z i sadalīt vienkāršākajās daļās.

309. §. Par integrējamību ar elementārajām funkcijām

Racionālas funkcijas integrālis vispārīgi *nav racionāla funkcija* (piemēram, $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$). Līdzīgi elementāras (neracionālas) funkcijas integrālis vispārīgi *nav elementāra funkcija.*

Tā integrāļi

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^3}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}, \quad \int \frac{dx}{\ln x}, \quad \int \frac{x\,dx}{\ln x}$$

neizsakās ar elementārām funkcijām [1], kaut gan pēc izskata līdzīgie integrāļi

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int \ln x\,dx, \int x \ln x\,dx$$

ir elementāras funkcijas.

Ar diferenciālrēķinu kārtulām jebkurai elementārai funkcijai var atrast atvasinājumu (arī elementāru funkciju). Integrālrēķinos līdzīgas kārtulas primitīvās funkcijas atrašanai *nav principiāli iespējamas.*

Bet dažām elementāro funkciju klasēm integrālis vienmēr ir elementāra funkcija (kaut arī tai dažkārt ir komplicēta izteiksme). 307. paragrāfā apskatījām vienu tādu (racionālu funkciju) klasi. 310.—313. paragrāfā apskatīsim citas svarīgas klases un norādīsim to integrāļu aprēķināšanas vispārīgās kārtulas. Starp citu, gan daudzos gadījumos izdevīgāki ir speciāli paņēmieni. Tos apgūst tikai ar iemaņu.

310. §. Daži integrāļi, kas atkarīgi no radikāļiem

Simbols $R(x, y)$ šeit un arī tālāk apzīmē daļu, kuras skaitītājs un saucējs ir polinomi attiecībā pret x, y. Tādu daļu sauc par divu mainīgo x, y *racionālu funkciju* (sal. 304. §). Ja saucējs ir pastāvīgs lielums (nulltās pakāpes polinoms), tad racionālo funkciju sauc par *veselu.*

Analogi definē triju mainīgo racionālu funkciju $R(x, y, z)$, četru mainīgo racionālu funkciju utt.

[1] Neskatoties uz to, katrai nepārtrauktai funkcijai nenoteiktais integrālis eksistē (un pie tam ir nepārtraukta funkcija).

Integrāli [1]

$$I=\int R\left[x, \left(\frac{px+q}{rx+s}\right)^{\alpha}, \left(\frac{px+q}{rx+s}\right)^{\beta}, \ldots\right] dx, \tag{1}$$

kur α, β ir *racionāli* skaitļi, bet p, q, r, s — pastāvīgi lielumi (skaitliski vai algebriski), var reducēt uz racionālas funkcijas integrāli, un tātad tas izsakās ar elementārām funkcijām. To panāk ar substitūciju [2] $\frac{px+q}{rx+s}=t^n$, kur n ir daļskaitļu α, β, ... kopīgais saucējs.

Atsevišķā gadījumā

$$I=\int R\,[x, x^{\alpha}, x^{\beta}, \ldots]\, dx \tag{2}$$

aprēķina ar substitūciju $x=t^n$.

Piezīme. Dotā integrāļa redukciju uz racionālas funkcijas integrāli sauc par *racionalizāciju*.

1. piemērs.

$$I=\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}}.$$

Šeit $p=q=s=1$, $r=0$, $\alpha=\frac{1}{3}$, $\beta=\frac{1}{2}$. Kopīgais saucējs $n=6$. Integrāli racionalizē ar substitūciju

$$1+x=t^6, \quad dx=6t^5\,dt.$$

Dabūjam

$$I=\int\frac{(t^6-1)\,6t^5\,dt}{t^2-t^3}=-6\int(t^8+t^7+t^6+t^5+t^4+t^3)\,dt=$$

$$=-6t^4\left(\frac{t^5}{9}+\frac{t^4}{8}+\frac{t^3}{7}+\frac{t^2}{6}+\frac{t}{5}+\frac{1}{4}\right)+C,$$

kur $t=\sqrt[6]{1+x}$.

2. piemērs.

$$I=\int x^{-\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{3}}+1\right)^{-2} dx.$$

[1] Burts I šeit un tālāk ir saīsināts integrāļa apzīmējums.

[2] Pieņemts, ka $\frac{p}{r}\neq\frac{q}{s}$, ja $\frac{p}{r}=\frac{q}{s}$, tad daļa $\frac{px+q}{rx+s}$ reducējas uz konstanti un tad nav vajadzīgas nekādas substitūcijas.

Tas ir integrālis veidā (2). Apzīmējam $x=t^6$. Dabūjam

$$I=6\int\frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^2}=-\frac{3t}{1+t^2}+3\operatorname{arctg} t+C,$$

kur $t=\sqrt[6]{x}$.

311. §. Binomiālā diferenciāļa integrālis

Par *binomiālo diferenciāli*[1] sauc izteiksmi

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx,$$

kur m, n, p ir racionāli skaitļi, a, b konstantes, kas atšķiras no nulles. Integrāli

$$I=\int x^m(a+bx^n)^p\,dx \tag{1}$$

var izteikt ar elementārajām funkcijām šādos trīs gadījumos.

1. gadījums. p ir vesels skaitlis. Tad integrālis atbilst 310. §. tipam.

Sk. 310. § 2. piemēru, kur $m=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{3}$, $p=-2$.

2. gadījums. p ir daļskaitlis $(p=\frac{r}{s})$, bet $\frac{m+1}{n}$ ir vesels skaitlis. Tad integrāli racionalizē ar substitūciju

$$a+bx^n=z^s$$

(s ir daļas p saucējs).

1. piemērs.

$$I=\int x^{\frac{1}{5}}\left(3-2x^{\frac{3}{5}}\right)^{-\frac{1}{2}}dx. \tag{2}$$

Šeit $m=\frac{1}{5}$, $n=\frac{3}{5}$, $\frac{m+1}{n}=2$ ir vesels skaitlis. Apzīmējam

$$3-2x^{\frac{3}{5}}=z^2. \quad (3)$$

[1] Daži autori lieto terminu *«diferenciālais binoms»*.

Varētu x izteikt atkarībā no z un ievietot vienādībā (2). Vienkāršāk tomēr diferencēt vienādību (3)

$$x^{-\frac{2}{5}}\,dx=-\frac{5}{3}\,z\,dz \tag{4}$$

un pārveidot I ar (3) un (4) palīdzību šādā veidā:

$$I=\int\left(3-2x^{\frac{3}{5}}\right)^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{5}}\left(x^{-\frac{2}{5}}dx\right)=$$

$$=\int(z^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{3-z^2}{2}\left(-\frac{5}{3}z\,dz\right)=-\frac{5}{6}\int(3-z^2)\,dz=$$

$$=-\frac{5}{2}z+\frac{5}{18}z^3+C,$$

kur

$$z=\left(3-2x^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

3. gadījums. Abi skaitļi $p=\frac{r}{s}$ un $\frac{m+1}{n}$ ir daļskaitļi, bet to summa $\frac{m+1}{n}+p$ ir vesels skaitlis.

Tad integrāli var racionalizēt ar substitūciju

$$ax^{-n}+b=z^s$$

(s ir daļas p saucējs).

2. piemērs.

$$I=\int x^{-6}(1+2x^3)^{\frac{2}{3}}\,dx.$$

Šeit $m=-6$, $n=3$, $p=\frac{2}{3}$ (daļskaitlis), $\frac{m+1}{n}=-\frac{5}{3}$ (daļskaitlis), $\frac{m+1}{n}+p=-1$ (vesels skaitlis).

Apzīmējam

$$x^{-3}+2=z^3,\quad x^{-4}\,dx=-z^2\,dz.$$

Izsakot $1+2x^3$ veidā $x^3(x^{-3}+2)$, dabūjam

$$I=\int x^{-4}(x^{-3}+2)^{\frac{2}{3}}\,dx=\int z^2(-z^2\,dz)=-\frac{1}{5}z^5+C=$$

$$=-\frac{1}{5}x^{-5}(1+2x^3)^{\frac{5}{3}}+C.$$

Apskatītos trīs gadījumus norādīja jau Ņūtons. Eilers, kuru pārveidojumu mākslā nekad nav pārspējis neviens matemātiķis, nesekmīgi meklēja jaunus binomiālā diferenciāļa integrējamības gadījumus. Viņš nonāca pie atziņas, ka šie trīs gadījumi ir vienīgie. Bet tikai P. Čebiševs 1853. gadā pierādīja Eilera apgalvojumu. D. Morduhajs-Boltovskojs 1926. gadā pierādīja atbilstošu teorēmu integrālim (1), ja kāpinātāji m, n, p ir iracionāli.

312. §. Integrāļi $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$

Šī veida integrāļus[1] var racionalizēt ar vienu no *Eilera substitūcijām.*

P i r m ā E i l e r a s u b s t i t ū c i j a lietojama, ja $a>0$. Apzīmējam[2]

$$\sqrt{ax^2+bx+c}+x\sqrt{a}=t. \tag{1}$$

Tad

$$ax^2+bx+c=(t-x\sqrt{a})^2.$$

Locekļi, kas satur x^2, savstarpēji iznīcinās, un x (un tātad arī dx) izsakās atkarībā no t racionāli. Ievietojot šo izteiksmi vienādībā (1), dabūsim racionālu izteiksmi arī radikālam $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

1. p i e m ē r s.

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{k^2+x^2}}.$$

[1] Var uzskatīt, ka $a\neq0$, jo, ja $a=0$, tad dabūjam 310. § gadījumu.
[2] Ar tādām pašām sekmēm var apzīmēt

$$\sqrt{ax^2+bx+c}-x\sqrt{a}=t.$$

Apzīmējam

$$\sqrt{k^2+x^2}=t-x.$$

No šejienes

$$x=\frac{t^2-k^2}{2t}, \quad dx=\frac{(t^2+k^2)\,dt}{2t^2},$$

$$\sqrt{k^2+x^2}=t-x=\frac{t^2+k^2}{2t}.$$

Tādējādi

$$I=\int\frac{(t^2+k^2)\,dt}{2t^2}:\frac{t^2+k^2}{2t}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C,$$

$$I=\ln(x+\sqrt{k^2+x^2})+C.$$

Trešā Eilera substitūcija (par otro substitūciju sk. tālāk piezīmi) lietojama vienmēr, kad trinomam ax^2+ $+bx+c$ ir reālas saknes, un atsevišķā gadījumā, ja $a<0$[1]. Pieņemsim, ka saknes ir x_1, x_2. Tad apzīmējam

$$\sqrt{\frac{a(x-x_1)}{x-x_2}}=t, \tag{2}$$

no kurienes atrodam racionālo x izteiksmi atkarībā no t

$$x=\frac{x_2t^2-ax_1}{t^2-a}. \tag{3}$$

Racionālo radikāļa izteiksmi atrodam tā:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=$$

$$=\sqrt{\frac{a(x-x_1)}{x-x_2}(x-x_2)^2}=t\,|x-x_2|. \tag{4}$$

2. piemērs.

$$I=\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+3x-2}}.$$

[1] Ja $a<0$, tad trinomam ax^2+bx+c var būt arī kompleksas saknes (ja $4ac-b^2>0$), bet tad saskaņā ar identitāti $ax^2+bx+c=\frac{1}{4a}[(2ax+$ $+b)^2+(4ac-b^2)]$ trinomam vienmēr būs negatīvas vērtības, tā ka sakne $\sqrt{ax^2+bx+c}$ būtu imaginārā visām x vērtībām.

Trinomam $-x^2+3x-2$ ir saknes $x_1=1$, $x_2=2$, tad

$$-x^2+3x-2=-(x-2)(x-1).$$

Zemsaknes izteiksme ir pozitīva, ja $1<x<2$ (punktos $x=1$ un $x=2$ zemintegrāļa funkcija pārvēršas bezgalībā). Apzīmējam [1]

$$\sqrt{\frac{-(x-1)}{x-2}}=t. \tag{5}$$

No šejienes

$$x=\frac{2t^2+1}{t^2+1}, \quad dx=\frac{2t\,dt}{(t^2+1)^2}, \tag{6}$$

$$\sqrt{-(x-2)(x-1)}=\sqrt{\frac{-(x-1)}{x-2}}\,|x-2|=$$
$$=t\,|x-2|=-t(x-2)$$

(saskaņā ar nevienādībām $1<x<2$ lielums $x-2$ ir negatīvs). Ievietojot labajā pusē x izteiksmi atkarībā no t, atrodam

$$\sqrt{-(x-2)(x-1)}=\frac{t}{t^2+1}. \tag{7}$$

Saskaņā ar (6) un (7) dabūjam

$$I=\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{-(x-2)(x-1)}}=\int\frac{2\,dt}{t^2}=-\frac{2}{t}=$$
$$=-2\sqrt{\frac{x-2}{-(x-1)}}+C.$$

P i e z ī m e. Ar pirmo un trešo Eilera substitūciju pietiek, lai aprēķinātu jebkuru apskatāmā veida integrāli. Pilnīguma dēļ dosim arī o t r o E i l e r a s u b s t i t ū c i j u:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=tx+\sqrt{c}. \tag{8}$$

Tā lietojama, ja $c>0$. Kāpinot kvadrātā un izdalot ar x, dabūjam racionālu x izteiksmi atkarībā no t; pēc tam (8) dod arī racionālu izteiksmi radikālam.

---

[1] Var ņemt $x_1=2$, $x_2=1$. Tad trešā Eilera substitūcija izmainīsies $\left(\text{vajadzēs apzīmēt } \sqrt{\frac{-(x-2)}{x-1}}=t\right)$.

313. §. Integrāļi $\int R(\sin x, \cos x)dx$

Šāda veida integrāļus racionalizē ar substitūciju

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z, \tag{1}$$

no kurienes

$$\sin x=\frac{2z}{1+z^2}, \quad \cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}, \tag{2}$$

$$dx=\frac{2\,dz}{1+z^2}. \tag{3}$$

Piemērs.

$$I=\int\frac{dx}{3+5\cos x}.$$

Ar (2) un (3) atrodam

$$I=\int\frac{2\,dz}{(1+z^2)\left(3+5\,\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)}=\int\frac{dz}{4-z^2}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+z}{2-z}\right|+C.$$

Ievietojot šeit $z=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, atrodam

$$I=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+C.$$

314. §. Noteiktais integrālis [1]

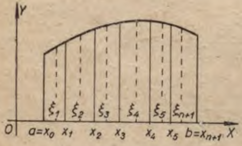
Pieņemsim, ka funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta intervāla (a, b) iekšienē un tā galos. Ņemsim intervāla iekšienē pēc kārtas punktus $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n$ (327. zīm., kur $n=5$). Vienveidības dēļ apzīmēsim a ar x_0 un b ar x_{n+1}. Intervāls (a, b) sadalīsies $n+1$ atsevišķos parciālos intervālos (x_0, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), $\ldots$, (x_{n-1}, x_n), (x_n, x_{n+1}).

[1] Iepriekš ieteicams izlasīt 292. § 2. p.

Ķatrā parciālajā intervālā (tā iekšienē vai vienā galā) ņemam vienu punktu [punkts ξ_1 intervālā (x_0, x_1), ξ_2 — intervālā (x_1, x_2) utt.].

Sastādām summu

$$S_n = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots$$
$$\ldots + f(\xi_{n+1})(x_{n+1} - x_n). \qquad (1)$$



327. zīm.

328. zīm.

Spēkā šāda teorēma.

T e o r ē m a. Ja, intervālu (x_0, x_1), (x_1, x_2), ... skaitam neierobežoti augot, lielākais šo intervālu garums tiecas uz nulli, tad summa S_n tiecas uz kādu robežu S. Skaitlis S ir viens un tas pats neatkarīgi no parciālo intervālu izveidošanas paņēmiena un punktu ξ_1, ξ_2, ... izvēles tanīs.

Uzskatāms teorēmas izskaidrojums redzams 328. zīmējumā. Summa S_n skaitliski ir vienāda ar iesvītrotās kāpņveidīgās figūras laukumu [kreisā pakāpiena pamats ir vienāds ar $x_1 - x_0$, bet tā augstums — ar $KL = f(\xi_1)$; tātad laukums ir $f(\xi_1)(x_1 - x_0)$ utt.]. Jo šaurāki ir pakāpieni, jo tuvāks ir kāpņveidīgās figūras laukums «līklīnijas trapeces» x_0ABx_{n+1} laukumam, tā ka summas S_n robeža S ir skaitliski vienāda ar figūras x_0ABx_{n+1} laukumu.

Summu (1) bieži saīsināti apzīmē tā:

$$\sum f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}). \qquad (2)$$

Šeit simbols $\sum$ (grieķu lielais burts «sigma», kas atbilst latīņu burtam «S») norāda, ka izteiksme (2) ir vienveidīgu locekļu summa. Izteiksme $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ norāda locekļu veidošanas likumu; ja $i=1$, rodas pirmais loceklis, ja $i=2$, — otrais utt. Lieto arī sīkāku pierakstu

$$\sum_{i=1}^{i=n+1} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}). \tag{2a}$$

Šeit atzīmēts, ka pirmais loceklis atbilst vērtībai $i=1$, bet pēdējais — vērtībai $i=n+1$.

D e f i n ī c i j a. Robežu, uz kuru tiecas summa (1), kad lielākais visu parciālo intervālu garums tiecas uz nulli, sauc par funkcijas $f(x)$ *noteikto integrāli*. Dotā intervāla *(integrācijas intervāla)* galus a, b sauc par *integrāļa robežām*; a sauc par apakšējo, bet b — par augšējo robežu.

Noteikto integrāli apzīmē ar simbolu

$$\int_a^b f(x)\,dx. \tag{3}$$

Šo pierakstu lasa: *integrālis no a līdz b ef no iks de iks.*

Noteiktā integrāļa vērtība ir atkarīga no funkcijas $f(x)$ veida un no augšējās un apakšējās robežas vērtības. Funkcijas argumentu var apzīmēt ar jebkuru burtu, piemēram, ar y, tad izteiksme

$$\int_a^b f(y)\,dy \tag{4}$$

izteiks to pašu skaitli, ko (3).

P i e z ī m e. Augšējā robeža b var būt lielāka vai arī mazāka par apakšējo robežu a. Pirmajā gadījumā

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n < b. \tag{5}$$

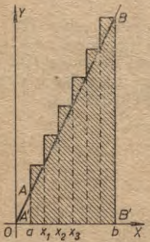
Otrajā gadījumā

$$a > x_1 > x_2 > \ldots > x_{n-1} > x_n > b. \tag{6}$$

P a p i l d i n ā j u m s d e f i n ī c i j a i. Definīcijā pieņemts, ka $a \neq b$. Bet noteiktā integrāļa jēdzienu attiecina arī uz gadījumu $a=b$; proti, integrāli ar vienādām robežām skaita par vienādu ar nulli, t. i.,

$$\int_a^a f(x)\,dx=0 \tag{7}$$

(šī noruna attaisnojas tā iemesla dēļ, ka integrālis (3) tiecas uz nulli, kad a un b tuvinās, sal. 327. zīm.).



329. zīm.

330. zīm.

P i e m ē r s. Atrast $\int_a^b 2x\,dx$. Šeit

$$f(x)=2x. \tag{8}$$

A t r i s i n ā j u m s. Sadalām intervālu (a, b) vienādās daļās (329. zīm.); tad abscisas

$$x_0=a,\ x_1,\ x_2, \ldots, x_n,\ x_{n+1}=b$$

veido aritmētisko progresiju ar diferenci

$$x_1-x_0=x_2-x_1=\ldots=\frac{b-a}{n+1}. \tag{9}$$

Punktus $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ņemsim parciālo intervālu (a, x_1), (x_1, x_2), ... labajos galos[1], tā ka

$$\xi_1=x_1,\ \xi_2=x_2, \ldots, \xi_n=x_n,\ \xi_{n+1}=b;$$

[1] Tas ir, pakāpieni pieslejas taisnes $y=2x$ ordinātēm no labās puses.

$$f(\xi_1)=2x_1,\ f(\xi_2)=2x_2,\ \ldots,\ f(\xi_n)=2x_n,\ f(\xi_{n+1})=2b. \quad (10)$$

Saskaņā ar (8) un (10) summa (1) pieņem izskatu

$$S_n=2x_1(x_1-x_0)+2x_2(x_2-x_1)+\ldots+2x_n(x_n-x_{n-1})+$$
$$+2x_{n+1}(x_{n+1}-x_n)=2\frac{b-a}{n+1}(x_1+x_2+\ldots+x_{n+1}).$$

Summējot aritmētisko progresiju, atrodam

$$S_n=2\frac{b-a}{n+1}\frac{(x_1+x_{n+1})(n+1)}{2}=(b-a)(x_1+b). \quad (11)$$

Ja vienādo intervālu skaits neierobežoti aug, tad to garumi tiecas uz nulli; pie tam x_1 tiecas uz a. Tāpēc

$$\lim S_n=(b-a)(a+b)=b^2-a^2;$$

tātad

$$\int_a^b 2x\,dx=b^2-a^2. \quad (12)$$

Gluži tāpat

$$\int_a^b 2y\,dy=b^2-a^2,$$

$$\int_a^b 2t\,dt=b^2-a^2$$

utt.

Lielums b^2-a^2 ir trapeces $A'ABB'$ (329. zīm.) laukums S; tiešām,

$$S=\frac{1}{2}(A'A+B'B)A'B'=\frac{1}{2}(2a+2b)(b-a)=b^2-a^2.$$

Otrs paņēmiens. Sadalām intervālu (a, b) nevienādās daļās tā, lai punkti $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ veidotu ģeometrisku progresiju [1] (330. zīm.)

$$x_0=a,\ x_1=aq,\ \ldots,\ x_n=aq^n,\ x_{n+1}=b=aq^{n+1}. \quad (13)$$

---

[1] Tas ir iespējams, ja abām robežām ir vienādas zīmes (neviena robeža nedrīkst būt vienāda ar nulli). Lietojot iepriekšējo paņēmienu, skaitļi a un b varēja būt patvaļīgi.

No pēdējās vienādības atrodam

$$q^{n+1}=\frac{b}{a}. \tag{14}$$

Punktus $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ņemam parciālo intervālu (a, x_1), $(x_1, x_2), \ldots$ kreisajos galos [1], tad

$$\xi_1=a, \ \xi_2=x_1, \ \ldots, \ \xi_n=x_{n-1}, \ \xi_{n+1}=x_n.$$

Summa (1) pieņem izskatu

$$S_n=2x_0(x_1-x_0)+2x_1(x_2-x_1)+\ldots+2x_n(x_{n+1}-x_n)=$$
$$=2a^2(q-1)[1+q^2+q^4+\ldots+q^{2n}].$$

Kvadrātiekavās ir ģeometriska progresija ar kvocientu q^2. Summējot to, atrodam

$$S_n=2a^2(q-1)\frac{q^{2(n+1)}-1}{q^2-1}=\frac{2a^2[(q^{n+1})^2-1]}{q+1}$$

jeb saskaņā ar (14)

$$S_n=\frac{2a^2\left[\left(\frac{b}{a}\right)^2-1\right]}{q+1}=\frac{2(b^2-a^2)}{q+1}. \tag{15}$$

Ja n neierobežoti aug, tad kvocients q, kā izriet no (14), tiecas uz vienu, t. i.,

$$\lim q=1. \tag{16}$$

Visu parciālo intervālu garumi tiecas uz nulli. Saskaņā ar (15) un (16) dabūjam

$$\lim S_n=b^2-a^2,$$

t. i.,

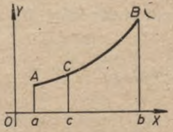
$$\int_b^a 2x\,dx=b^2-a^2.$$

[1] Tas ir, pakāpieni pieslejas taisnes $y=2x$ ordinātēm no kreisās puses.

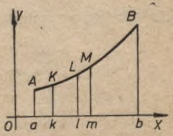
315. §. Noteiktā integrāļa īpašības

1. Samainot vietām robežas, noteiktais integrālis saglabā absolūto vērtību, bet zīmi maina uz pretējo, t. i.,

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx. \qquad (1)$$



331. zīm.



332. zīm.

Īpašības pareizība ieskatāma, ja salīdzina summas S_n, kas atbilst abiem integrāļiem.

$$2.\quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \qquad (2)$$

Šī īpašība paskaidrota 331. zīmējumā ($\text{Lauk}_{aABb} = \text{Lauk}_{aACc} + \text{Lauk}_{cCBb}$), bet tā ir pareiza arī tad, ja punkts c atrodas ārpus intervāla (a, b).

2a. Viena papildu punkta c vietā var ņemt vairākus; tā trim punktiem k, l, m dabūjam

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^k f(x)\,dx + \int_k^l f(x)\,dx + \int_l^m f(x)\,dx + \int_m^b f(x)\,dx.$$

Punktu sakārtojums nav svarīgs. Praktiski svarīgākais gadījums ir, kad punkti a, k, l, m, b ņemti vai nu augšanas (332. zīm.), vai dilšanas kārtībā.

3. Algebriskas summas integrālis ir vienāds ar atsevišķo

saskaitāmo integrāļu algebrisku summu, ja vien saskaitāmo skaits nemainās; tā trim saskaitāmiem dabūjam

$$\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)]\,dx=$$

$$=\int_a^b f_1(x)\,dx+\int_a^b f_2(x)\,dx-\int_a^b f_3(x)\,dx. \tag{3}$$

4. Pastāvīgu reizinātāju var iznest pirms integrāļa zīmes, t. i.,

$$\int_a^b mf(x)\,dx=m\int_a^b f(x)\,dx. \tag{4}$$

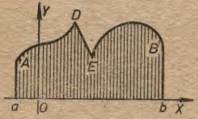
316. §. Noteiktā integrāļa ģeometriskā nozīme

Apskatīsim integrāli

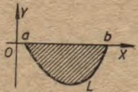
$$\int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

kuram apakšējā robeža ir mazāka par augšējo ($a<b$)[1].

Ja tad funkcija $f(x)$ ir intervāla (a, b) iekšienē pozitīva (333. zīm.), tad integrālis ir skaitliski vienāds ar laukumu, ko nosedz $y=f(x)$ grafikas ordinātes (333. zīmējumā figūras *aADEBb* laukums).



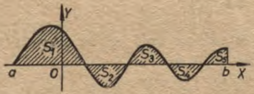
333. zīm.



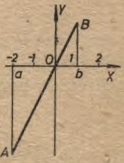
334. zīm.

[1] Gadījums $a>b$ saskaņā ar 315. § 1. p. ir reducējams uz apskatāmo gadījumu.

Ja funkcija $f(x)$ intervāla (a, b) iekšienē ir negatīva (334. zīm.), tad integrālis pēc absolūtās vērtības ir vienāds ar laukumu, ko nosedz šīs ordinātes, bet tam ir negatīva vērtība.



335. zīm.



336. zīm.

Pieņemsim tagad, ka $f(x)$ intervālā (a, b) vienu vai vairākas reizes maina zīmi (335. zīm.). Tad integrālis ir vienāds ar divu skaitļu starpību — viens no tiem (mazināmais) izsaka laukumu, ko nosedz pozitīvās ordinātes, bet otrs (mazinātājs) — laukumu, ko nosedz negatīvās ordinātes (sal. 315. § 2a. p.). Tā 335. zīmējumā attēlotajam gadījumam

$$\int_a^b f(x)\,dx = (S_1+S_3+S_5)-(S_2+S_4).$$

Piemērs. Integrālis $\int_{-2}^{1} 2x\,dx$ ir vienāds (314. § piemērs) ar $1^2-(-2)^2=-3$. Šis skaitlis ir vienāds ar laukumu (336. zīm.)

$$ObB=\frac{1}{2}Ob\cdot bB=1$$

$$OaA=\frac{1}{2}\,aO\cdot Aa=4$$

starpību.

317. §. Noteiktā integrāļa mehāniskā nozīme

1. Materiāla punkta ceļš. Pieņemsim, ka materiāls punkts kustas vienā virzienā ar ātrumu

$$v=f(t)$$

(t ir kustības ilgums). Jāaprēķina ceļš s, ko punkts noiet no momenta $t=T_1$ līdz momentam $t=T_2$.

Ja ātrums ir pastāvīgs, tad

$$s=v(T_2-T_1).$$

Ja turpretim ātrums mainās, tad, lai atrastu s, laika intervāls jāsadala parciālos intervālos

$$(T_1, t_1),\ (t_1, t_2),\ \ldots,\ (t_{n-1}, t_n),\ (t_n, T_2).$$

Pieņemsim, ka τ_1 ir kāds intervāla $(T_1,\ t_1)$ moments, τ_2 — kāds intervāla $(t_1,\ t_2)$ moments utt.

Lielums $f(\tau_1)$ ir ātrums momentā τ_1; reizinājums $f(\tau_1)(t_1-T_1)$ aptuveni izsaka ceļu, kas noiets pirmajā laika intervālā. Gluži tāpat $f(\tau_2)(t_2-t_1)$ aptuveni izsaka ceļu otrajā laika intervālā utt. Summa

$$s_n=f(\tau_1)(t_1-T_1)+f(\tau_2)(t_2-t_1)+\ldots+f(\tau_{n+1})(T_2-t_n)$$

izsaka ceļu jo precīzāk, jo mazāki ir parciālie intervāli. Summas s_n robeža, t. i., integrālis

$$\int_{T_1}^{T_2} f(t)\,dt,$$

dod precīzu ceļa s vērtību.

Piemērs. Materiāla punkta ātrums aug proporcionāli laikam, kas pagājis kopš sākuma momenta, t. i.,

$$v=mt.$$

Atrast ceļu, kas noiets no sākuma momenta līdz momentam T.

Atrisinājums. Meklēto ceļu izsaka funkcijas mt

integrālis; apakšējā robeža ir vienāda ar nulli, augšējā — ar T, tātad

$$s=\int_0^T mt\,dt=m\int_0^T t\,dt$$

(315. § 4. p.). Mēs zinām (314. § piemērs), ka $\int_a^b 2t\,dt=b^2-a^2$.

Tātad (315. § 4. p.) $\int_a^b t\,dt=\frac{b^2-a^2}{2}$. Ja $a=0$, $b=T$, dabūjam

$$s=m\int_0^T t\,dt=\frac{1}{2}\,mT^2.$$

2. Spēka darbs. Ja pastāvīgs spēks P darbojas uz materiālu punktu, kas kustas spēka virzienā, tad spēka darbu A gabalā (s_1, s_2) atrod ar formulu

$$A=P(s_2-s_1).$$

Ja turpretim spēks P saglabā kustības virzienu, bet tā lielums mainās atkarībā no ceļa s, t. i., $P=f(s)$, tad darbu atrod ar formulu

$$A=\int_{s_1}^{s_2} f(s)\,ds.$$

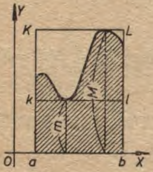
318. §. Noteiktā integrāļa novērtējums

1. teorēma. Ja m ir funkcijas $f(x)$ vismazākā, bet M — vislielākā vērtība intervālā (a, b), tad integrāļa $\int_a^b f(x)\,dx$ vērtība ieslēgta starp $m(b-a)$ un $M(b-a)$. Ja $a<b$, tad dabūjam

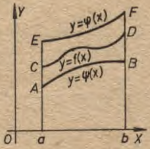
$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\,dx\leqslant M(b-a). \tag{1}$$

Ja $a>b$, tad nevienādības zīmes mainās uz pretējām.

Ģeometriski: 337. zīmējumā iesvītrotās figūras laukums ir lielāks par taisnstūra $ablk$ un mazāks par taisnstūra $abLK$ laukumu.



337. zīm.



338. zīm.

Piemērs. Novērtēt integrāli $\int\limits_4^6 2x\,dx$.

Atrisinājums. Funkcijas $2x$ vismazākā vērtība intervālā (4, 6) ir $m=2\cdot4=8$, bet vislielākā vērtība $M=2\cdot6=12$. Beidzot, $b-a=6-4=2$. Tātad integrāļa vērtība atrodas starp $8\cdot2=16$ un $12\cdot2=24$; t. i.,

$$16<\int\limits_4^6 2x\,dx<24.$$

Precīza tā vērtība (314. § piemērs) ir vienāda ar 20.

2. teorēma. Ja visos intervāla (a, b) punktos spēkā nevienādības

$$\psi(x)\leqslant f(x)\leqslant\varphi(x), \tag{2}$$

tad

$$\int\limits_a^b \psi(x)\,dx\leqslant\int\limits_a^b f(x)\,dx\leqslant\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{3}$$

Ģeometriski (338. zīm.) $\text{Lauk}_{aABb}<\text{Lauk}_{aCDb}<\text{Lauk}_{aEFb}$.

1. teorēma ir 2. teorēmas atsevišķs gadījums ($\psi(x)=m$, $\varphi(x)=M$).

Piezīme. 2. teorēma apgalvo, ka nevienādības drīkst integrēt. Diferencēt nevienādības nedrīkst.

318a. §. Buņakovska nevienādība

Integrāļa novērtējums ar 318. § formulu (1) parasti ir ļoti rupjš. Ir daudzas formulas, kas dod precīzākus novērtējumus; to vidū svarīga loma piekrīt Buņakovska[1] nevienādībai

$$\left[\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx\right]^2 \leqslant \int_a^b [f(x)]^2\,dx \cdot \int_a^b [\varphi(x)]^2\,dx.$$

Piemērs. Novērtēt integrāli $I=\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx.$

Zemintegrāļa funkciju izsakām veidā $1.\ \sqrt{1+x^2}$, tā ka $f(x)=1$, $\varphi(x)=\sqrt{1+x^2}$. Buņakovska nevienādība dod

$$I^2 \leqslant \int_0^1 1^2\,dx \cdot \int_0^1 (\sqrt{1+x^2})^2\,dx = \int_0^1 (1+x^2)\,dx = \frac{4}{3},$$

no kurienes

$$I \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}} < 1{,}155.$$

318. § formula (1) dotu $(M=\sqrt{2})$; $I\leqslant\sqrt{2}<1{,}415$. Integrāļa patiesā vērtība (kas atrasta ar 323. § paņēmienu) ir

$$I=\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1})\Big|_0^1=$$

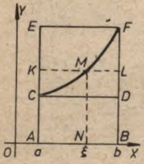
$$=\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})=1{,}147\ldots$$

[1] Akadēmiķis Viktors Buņakovskis (1804—1889) — ievērojams krievu matemātiķis, kas darbojies galvenokārt varbūtību teorijas un skaitļu teorijas nozarē.

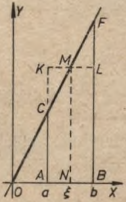
319. §. Integrālrēķinu vidējās vērtības teorēma

Noteiktais integrālis[1] ir vienāds ar integrācijas intervāla (a, b) garuma reizinājumu ar zemintegrāļa funkcijas vērtību kādā intervāla (a, b) punktā ξ, t. i.,

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\xi) \quad (a \leqslant \xi \leqslant b). \tag{1}$$



339. zīm.



340. zīm.

P a s k a i d r o j u m s. Pārvietosim taisni KL (339. zīm.) no stāvokļa CD stāvoklī EF. Pārvietošanas sākumā figūras $AKLB$ laukums ir mazāks par $\int_a^b f(x)\,dx$ (sal. 318. § 1. teorēmu), beigās — lielāks. Kādā starpmomentā jābūt spēkā vienādībai $\text{Lauk}_{AKLB} = \int_a^b f(x)\,dx$. Taisnstūra $AKLB$ pamats ir $AB = b - a$, bet augstums — ordināte NM, kas atbilst intervāla AB punktam $N(\xi)$. Tātad

$$(b-a)\,f(\xi) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

[1] Ja integrāļa jēdzienu vispārina pārtrauktai funkcijai (328. §), tad vidējās vērtības teorēma nav spēkā.

1. piezīme. Vidējās vērtības teorēma izsaka, ka vienādojumam (1), kur ξ uzskata par nezināmo, ir vismaz viena sakne, kas atrodas starp a un b.

Piemērs. Ja $f(x)=2x$, tad formula (1) pieņem izskatu

$$\int_a^b 2x\,dx=(b-a)2\xi. \tag{2}$$

Teorēma apgalvo, ka ξ atrodas starp a un b. Tiešām, integrālis ir vienāds ar b^2-a^2, un formula (2) dod

$$\xi=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2},$$

t. i., ξ ir vidējais aritmētiskais[1] starp a un b.

2. piezīme. Diferenciālrēķinu vidējās vērtības teorēma (264. §) atšķiras no šī paragrāfa teorēmas būtībā tikai ar apzīmējumiem. Apzīmējam formulas (1) zemintegrāla funkciju ar $f'(x)$. Formula (1) pieņem izskatu

$$\int_a^b f'(x)\,dx=(b-a)f'(\xi).$$

Šeit kreisā puse ir vienāda ar $f(b)-f(a)$ (sk. tālāk 322. §), un mēs dabūjam Lagranža formulu

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi),$$

kas ir pielietota funkcijai $f(x)$, kurai ir nepārtraukts atvasinājums.

320. §. Noteiktais integrālis kā augšējās robežas funkcija

Ja robežas a, b ir nemainīgas, tad dotās funkcijas $f(x)$ integrālim $\int_a^b f(x)\,dx$ ir *noteikta skaitliska vērtība*. Ja turpretim augšējā (vai apakšējā) robeža var pieņemt dažādas

[1] Ģeometriski formula (2) izsaka pazīstamo teorēmu par trapeces laukumu (340. zīmējumā trapece $ACFB$; $AB=b-a$ ir augstums, $NM=2\xi$ — viduslīnija).

vērtības, tad integrālis kļūst par augšējās (vai apakšējās) robežas funkciju. Tās izskats ir atkarīgs no zemintegrāļa funkcijas $f(x)$ veida (un arī no pastāvīgās apakšējās robežas). Par atkarības raksturu sk. 321. § 2. teorēmu.

1. piemērs. Integrālim $\int_0^1 2t\,dt$ ir skaitliska vērtība 1, integrālim $\int_0^2 2t\,dt$ — vērtība 4, integrālim $\int_0^3 2t\,dt$ — vērtība 9 utt. Tātad $\int_0^x 2t\,dt$ ir x funkcija; to izsaka formula

$$\int_0^x 2t\,dt = x^2. \tag{1}$$

Piezīme. Formulā (1) integrācijas mainīgais un mainīgā augšējā robeža ir apzīmēti ar *dažādiem burtiem* (t un x), jo šiem mainīgajiem piekrīt *dažādas lomas integrēšanas procesā.* Proti, vispirms mēs aprēķinām (314. §) summas

$$S_n = 2\tau_1(t_1 - 0) + 2\tau_2(t_2 - t_1) + \ldots + 2\tau_{n+1}(x - t_n)$$

robežu, kur $t_1, t_2, \ldots, t_n$ ņemti starp 0 un x, bet skaitļi $\tau_1, \tau_2, \ldots$ pieder intervāliem $(0, t_1)$, (t_1, t_2), ... Šai procesā x paliek pastāvīgs.

Pēc tam mēs padarām mainīgu x, un tagad mums jau vairs nav darīšanas ar mainīgo t.

Ja vienādības (1) vietā raksta

$$\int_0^x 2x\,dx = x^2, \tag{2}$$

tad minētā atšķirība tiek notušēta.

Neskatoties uz to, bieži lieto pierakstu (2) un vispārīgi raksta

$$\int_a^x f(x)\,dx \tag{3}$$

[kā arī $\int\limits_a^t f(t)\,dt$, $\int\limits_a^s f(s)\,ds$ utt.]. Lieta tāda, ka pēc integrēšanas izpildīšanas mainīgajai robežai ir tāda pati nozīme (ģeometriskā, mehāniskā utt.) kā integrācijas mainīgajam (sk. 2. un 3. piemēru).

2. piemērs. Trijstūra OPM (341. zīm.) laukumu S izsaka integrālis $\int\limits_0^a x\,dx$, t. i.,

341. zīm.

$$S=\int\limits_0^a x\,dx=\frac{a^2}{2}. \tag{4}$$

Pieņemsim, ka ordināte PM ir kustīga, tad integrālis (4) ir augšējās robežas funkcija; ievērojot to, a vietā rakstām t, dabūjam

$$S=\int\limits_0^t x\,dx=\frac{t^2}{2}. \tag{5}$$

Pieraksts (5) ir nevainojams, bet neizdevīgs, jo formulā $S=\frac{t^2}{2}$ burts t izsaka abscisu, bet pēdējo mēs apzīmējam ar x. Tāpēc bieži uzskata, ka labāks ir ne pilnīgi precīzais pieraksts

$$S=\int\limits_0^x x\,dx=\frac{x^2}{2}. \tag{6}$$

3. piemērs. Brīvi krītoša ķermeņa ātrumu v izsaka ar formulu

$$v=gt. \tag{7}$$

Ceļš s, ko krītošais ķermenis veic laika intervālā $(0, T)$, ir vienāds ar (317. § 1. p.) integrāli $\int\limits_0^T gt\,dt$, t. i.,

$$s=\int\limits_0^T gt\,dt=\frac{1}{2}\,gT^2. \tag{8}$$

Pieraksts (8) ir nevainojams, bet formulās (7) un (8) argumentiem ir dažādi apzīmējumi, kamēr to fizikālā nozīme ir viena un tā pati. Tāpēc vienādības (8) vietā raksta

$$s=\int_0^t gt\,dt=\frac{1}{2}\,gt^2.$$

321. §. Integrāļa diferenciālis

1. teorēma. Diferenciālis integrālim ar mainīgu augšējo robežu [1] sakrīt ar zemintegrāļa izteiksmi

$$d\int_a^x f(x)\,dx=f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Precīzāk formulu (1) var uzrakstīt tā: $d\int_a^x f(t)\,dt=f(x)\,dx$ (sk. 320. §).

Piemērs.

$$d\int_0^x 2x\,dx=2x\,dx. \qquad (1a)$$

Pārbaudīsim šo vienādību. Kā zināms (320. §)

$$\int_0^x 2x\,dx=x^2.$$

Diferencējot dabūjam (1a).

Piezīme. No (1) dabūjam

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x)\,dx=f(x), \qquad (2)$$

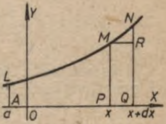
t. i., *integrāļa atvasinājums pēc augšējās robežas sakrīt ar zemintegrāļa funkciju.* Šo atziņu var izteikt vēl šādā formā.

---

[1] Integrālis ar mainīgu augšējo robežu x vienmēr ir *diferencējama* x funkcija.

2. teorēma. Integrālis ar mainīgu augšējo robežu ir viena primitīvā funkcija (293. §) zemintegrāļa funkcijai.

Formulas (1) paskaidrojums. Figūras *ALMP* laukumu (342. zīm.) izsaka ar integrāli $\int_a^x f(x)dx$. Ja x pieaug par $dx=PQ$, tad *ALMP* laukums iegūst pieaugumu *PMNQ*. Šis pieaugums sadalās taisnstūrī *PMRQ* un līklīnijas trijstūrī *MNR*. Taisnstūra laukums ir vienāds ar $PM \cdot PQ = f(x)dx$; tas ir proporcionāls dx, bet trijstūra *MNR* laukums ir augstākas kārtas bezgalīgi mazs lielums attiecībā pret dx (342. zīmējumā tas ir mazāks par $MR \cdot RN = dx\Delta y$). Tātad (230. §) zemintegrāļa izteiksme $f(x)dx$ ir integrāļa $\int_a^x f(x)dx$ diferenciālis.



342. zīm.

Formulas (2) izskaidrojums. Ja $f(t)$ ir ātrums momentā t, tad $\int_a^t f(t)dt$ ir (317. § 1. p.) ceļš s, kuru punkts noiet laikā, kas momentu t šķir no sākuma momenta a, t. i.,

$$s = \int_a^t f(t)dt. \tag{3}$$

Atvasinājums

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\int_a^t f(t)dt$$

ir punkta ātrums (223. §). Tātad

$$\frac{d}{dt}\int_a^t f(t)dt = f(t).$$

322. §. Diferenciāļa integrālis. Ņūtona — Leibnica formula

Sekojoša teorēma reducē noteiktā integrāļa aprēķināšanu uz nenoteiktā integrāļa atrašanu (sal. 323. §).

T e o r ē m a. Integrālis no funkcijas $F(x)$ diferenciāļa ir vienāds ar funkcijas $F(x)$ pieaugumu integrācijas intervālā, t. i.,

$$\int_a^b dF(x) = F(b) - F(a). \tag{1}$$

Citiem vārdiem, ja $F(x)$ ir kāda zemintegrāļa funkcijas $f(x)$ primitīvā funkcija, tad

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{2}$$

Formulu (2) pie mums bieži sauc par *Ņūtona—Leibnica formulu*[1].

1. p i e m ē r s. Kā zināms (314. §)

$$\int_a^b 2x\,dx = b^2 - a^2. \tag{3}$$

Zemintegrāļa izteiksme ir funkcijas x^2 diferenciālis $[d(x^2) = 2x\,dx]$. Pārejot no $x=a$ uz $x=b$, funkcija x^2 iegūst pieaugumu $b^2 - a^2$. Formula (3) izsaka, ka integrālis ir vienāds ar šo pieaugumu.

2. p i e m ē r s. Atrast integrāli $\int_a^b 3x^2\,dx$.

A t r i s i n ā j u m s. Ievērojot, ka zemintegrāļa izteiksme ir funkcijas x^3 diferenciālis, ar formulu (2) dabūjam

$$\int_a^b 3x^2\,dx = \int_a^b d(x^3) = b^3 - a^3. \tag{4}$$

[1] Formulas nosaukums ir pareizs tikai par tik, par cik Ņūtons un Leibnics pirmie integrāļa atrašanai izlietoja diferencēšanas sakarību ar integrēšanu. Bet formulas (2) viņiem nav (ne burtiskā, ne vārdiskā izteiksmē). Ģeometriskā formā šī paragrāfa teorēmu (tāpat kā 321. § 1. teorēmu) konstatēja Ņūtona skolotājs Barous.

P a s k a i d r o j u m s. Integrālis $\int_a^b 3x^2\,dx$ ir vienāds (314. §) ar summas

$$3x_0^2(x_1-x_0)+3x_1^2(x_2-x_1)+\ldots+3x_{n-1}^2(x_n-x_{n-1})+$$
$$+3x_n^2(x_{n+1}-x_n) \qquad (5)$$

robežu.

Pirmais saskaitāmais ir funkcijas x^3 diferenciālis intervālam (x_0, x_1), otrs — intervālam (x_1, x_2) utt. Aizstājam visus diferenciāļus ar atbilstošajiem pieaugumiem. Dabūjam summu

$$(x_1^3-x_0^3)+(x_2^3-x_1^3)+\ldots+(x_n^3-x_{n-1}^3)+$$
$$+(x_{n+1}^3-x_n^3). \qquad (6)$$

Atveram iekavas. Visi locekļi, izņemot $x_0^3=a^3$ un $x_{n+1}^3=b^3$, iznīcinās, tā ka summa (6) ir precīzi vienāda ar b^3-a^3.

Pārejot no (5) uz (6), pieļauta virkne kļūdu, bet visām tām ir augstāka kārta attiecībā pret atbilstošo argumenta pieaugumu. Tāpēc, neskatoties uz kļūdu uzkrāšanos, to summa ir bezgalīgi maza. Tātad izteiksme (5), ja tās locekļu skaits neierobežoti aug, atšķiras no b^3-a^3 par bezgalīgi mazu lielumu. Citiem vārdiem, b^3-a^3 ir summas (5) robeža, t. i.,

$$\int_a^b 3x^2\,dx=b^3-a^3.$$

Tādā pašā veidā var atrast vispārīgo formulu (1).

M e h ā n i s k ā n o z ī m e. Pieņemsim, ka punkts kustas vienā virzienā un $F(t)$ ir punkta attālums momentā t no sākuma stāvokļa. Atvasinājums $\frac{dF(t)}{dt}=f(t)$ ir (223. §) ātrums. Tātad integrālis $\int_a^b f(t)\,dt$ izsaka (317. §) ceļu s, kas noiets no momenta $t=a$ līdz momentam $t=b$, t. i.,

$$s=\int_a^b f(t)\,dt. \qquad (7)$$

Bet momentā $t=a$ attālums no sākuma punkta ir $F(a)$, bet momentā $t=b$ tas ir vienāds ar $F(b)$. Tātad

$$s=F(b)-F(a). \tag{8}$$

Salīdzinot (7) un (8), dabūjam

$$\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a).$$

323. §. Noteiktā integrāļa aprēķināšana ar nenoteikto integrāli

Kārtula. Lai aprēķinātu noteikto integrāli $\int_a^b f(x)dx$, pietiek atrast nenoteikto integrāli $\int f(x)dx$, ievietot atrastajā izteiksmē x vietā vispirms augšējo robežu, pēc tam apakšējo un pēc tam atņemt otro lielumu no pirmā.

Šī kārtula pamatojas uz 322. § teorēmas.

Piezīme. Nenoteiktā integrāļa konstanto saskaitāmo var nerakstīt; tas vienalga atņemot saīsināsies.

1. piemērs. Atrast $\int_{-2}^{3} 3x^2\,dx$.

Atrisinājums. Atrodam nenoteikto integrāli

$$\int 3x^2\,dx=x^3+C.$$

Ievietojot $x=3$, atrodam $27+C$; ja $x=-2$, dabūjam $-8+C$. Atņemot otro lielumu no pirmā, atrodam

$$\int_{-2}^{3} 3x^2\,dx=(27+C)-(-8+C)=27-(-8)=35. \tag{1}$$

Konstantais saskaitāmais C atņemot iznīcinājās.

2. piemērs. Atrast $\int_0^\pi \sin x\,dx$.

Atrisinājums. Dabūjam $\int \sin x\,dx = -\cos x$ (konstanto saskaitāmo nerakstām). Tādējādi

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = -[\cos \pi - \cos 0] = 2. \tag{2}$$

Substitūcijas apzīmējums. Pieraksts

$$F(x)\Big|_a^b \quad \text{jeb} \quad [F(x)]_a^b \tag{3}$$

(lasa: «$F(x)$ robežās no a līdz b») apzīmē to pašu, ko $F(b) - F(a)$. Piemēram, $-[\cos \pi - \cos 0]$ vietā raksta $-\cos x\Big|_0^{\pi}$ jeb $[-\cos x]_0^{\pi}$.

3. piemērs. Atrast $\int\limits_0^a \frac{dx}{a^2+x^2}$.

Atrisinājums.

$$\int_0^a \frac{dx}{a^2+x^2} = \left[\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right]_0^a = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{a}\operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4a}.$$

4. piemērs.

$$\int_3^5 \frac{dx}{(x-2)^2} = -\frac{1}{x-2}\Big|_3^5 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{1} = \frac{2}{3}.$$

324. §. Noteiktā integrēšana pa daļām

Integrēšanu pa daļām var pielietot tieši noteiktajam integrālim, lietojot formulu

$$\int_{x_1}^{x_2} u\,dv = uv\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} v\,du. \tag{1}$$

Formulas (1) lietošana ir izdevīgāka nekā iepriekšēja nenoteiktā integrāļa aprēķināšana, it īpaši, ja integrēšanu pa daļām izpilda atkārtoti.

1. piemērs.

$$I=\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2}.$$

Apzīmējot

$$u=x,\ dv=\frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}=d\left[-\frac{1}{2(1+x^2)}\right],$$

atrodam

$$I=\int\limits_0^{\sqrt{3}}x\,d\left[-\frac{1}{2(1+x^2)}\right]=-\frac{x}{2(1+x^2)}\Bigg|_0^{\sqrt{3}}+\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{2(1+x^2)}=$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\pi}{6}\approx 0{,}307.$$

2. piemērs.

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx.$$

Dabūjam

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}x\,d(-\cos x)=-x\cos x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx.$$

Pirmais saskaitāmais pārvēršas nullē; tad dabūjam

$$I=\sin x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$$

325. §. Substitūcijas metode noteiktajam integrālim

Kārtula. Lai aprēķinātu integrāli $\int\limits_{x_1}^{x_2}f(x)\,dx$, var ņemt kādu palīgmainīgo z, kuru ar x saista kāda funkcionāla atkarība. Zemintegrāļa izteiksme pārveidojas tāpat kā nenoteiktajā integrēšanā (300. §) formā $f_1(z)dz$. Bet bez tam robežas x_1, x_2 jāaizstāj ar jaunām robežām z_1, z_2 ar tādu aprēķinu, lai šīm mainīgā z vērtībām atbilstu dotās mainīgā x vērtības x_1, x_2. Ja tas ir iespējams, tad dabūjam [1]

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{z_1}^{z_2} f_1(z)dz. \tag{1}$$

1. piemērs. Atrast

$$\int_5^{13} \sqrt{2x-1}\,dx.$$

Atrisinājums. Ņemam palīgmainīgo z, kuru ar x saista sakarība

$$z=2x-1. \tag{2}$$

Izsakot x atkarībā no z, dabūjam

$$x=\frac{z+1}{2}. \tag{3}$$

Zemintegrāļa izteiksme $\sqrt{2x-1}\,dx$ pārveidojas formā

$$\frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}}dz.$$

Robežas $x_1=5$, $x_2=13$ jāaizstāj ar jaunām robežām z_1, z_2, kuras atrod no formulas (2):

$$z_1=2x_1-1=9, \quad z_2=2x_2-1=25.$$

Saskaņā ar (1) dabūjam

$$\int_5^{13} \sqrt{2x-1}\,dx = \int_9^{25} \frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}}dz = \frac{1}{3}z^{\frac{3}{2}}\Big|_9^{25} = 32\frac{2}{3}.$$

[1] Pieņemts, ka 1) sakarību starp x un z var izteikt ar formulu $x=\varphi(z)$, kur funkcijai $\varphi(z)$ ir nepārtraukts atvasinājums intervālā (z_1, z_2); 2) funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta visām vērtībām, kuras pieņem x, kad z mainās intervālā (z_1, z_2).

2. piemērs. Atrast $\int\limits_{-a}^{+a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

Atrisinājums. Substitūcija

$$x=a\sin t \tag{4}$$

zemintegrāļa izteiksmi reducē (303. § 1. piemērs) veidā

$$a^2\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt=\pm a^2\cos^2 t\,dt. \tag{5}$$

Augšējo zīmi ņem, ja t pieder pirmajam vai ceturtajam kvadrantam, apakšējo, — ja otrajam vai trešajam.

Jaunās robežas t_1, t_2 jāizvēlas tā, lai

$$-a=a\sin t_1,\quad a=a\sin t_2.$$

Tas ir iespējams un pie tam divējādā veidā. Var ņemt

$$t_1=-\frac{\pi}{2},\quad t_2=\frac{\pi}{2}.$$

Tad t mainās ceturtā un pirmā kvadranta ietvaros, tāpēc vienādībā (5) ņemam augšējo zīmi; dabūjam

$$\int\limits_{-a}^{+a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=$$

$$=a^2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^2}{2}.$$

Var arī ņemt

$$t_1=\frac{3\pi}{2},\quad t_2=\frac{\pi}{2},$$

bet tad vienādībā (5) jāņem apakšējā zīme; dabūjam

$$\int\limits_{-a}^{+a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=-a^2\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\frac{\pi a^2}{2}.$$

Ja vienādībā (5) ņemam augšējo zīmi, tad dabūjam nepareizu rezultātu $-\frac{\pi a^2}{2}$.

P i e z ī m e. Substitūcijas metode var radīt kļūdu, ja neievēro kārtulā ietverto nosacījumu, proti, ja nav tādu vērtību z_1, z_2, kurām atbilstu dotās integrācijas robežu vērtības x_1, x_2. Ar šādām kļūdām mēs sastapsimies 3. piemērā.

3. p i e m ē r s. Aprēķināt integrāļus

$$I_1 = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\, dx, \quad I_2 = \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2}\, dx$$

(tie atšķiras viens no otra tikai ar augšējās robežas vērtībām).

Mēģināsim ņemt palīgfunkciju

$$x^2 = z. \tag{6}$$

Pārveidojot zemintegrāļa izteiksmi $\sqrt{1-x^2}\,dx$, reizinātājs $\sqrt{1-x^2}$ jāaizstāj ar izteiksmi $\sqrt{1-z}$. Lai pārveidotu reizinātāju dx, izsakām x atkarībā no z; dabūsim

$$x = \pm\sqrt{z}. \tag{7}$$

Liktos, ka visvienkāršāk ņemt substitūciju

$$x = \pm\sqrt{z}. \tag{8}$$

Tomēr tad nav iespējams integrāļos I_1 un I_2 aizstāt apakšējo robežu $x_1 = -1$ ar jauno robežu z_1, kurai atbilstu no formulas (8) vērtība $x = -1$. Ņemsim tāpēc substitūciju

$$x = -\sqrt{z} \tag{9}$$

un mēģināsim pielietot to vispirms integrālim I_1. Tagad robežu vērtības $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$ atbilst vērtībām $z_1 = 1$, $z_2 = \frac{1}{4}$. No (9) atrodam

$$dx = -\frac{dz}{2\sqrt{z}} \tag{10}$$

un ar formulu (1) dabūjam

$$I_1=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx=-\frac{1}{2}\int_{1}^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{1-z}{z}}\,dz \qquad (11)$$

jeb, samainot vietām robežas,

$$I_1=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{4}}^{1}\sqrt{\frac{1-z}{z}}\,dz. \qquad (12)$$

Ņemam jaunu palīgfunkciju

$$\sqrt{\frac{1-z}{z}}=t, \qquad (13)$$

kas dod jaunas robežas

$$t_1=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}}=\sqrt{3}, \quad t_2=0.$$

Atbilstošā substitūcija būs

$$z=\frac{1}{1+t^2}, \quad dz=-\frac{2t\,dt}{(1+t^2)^2}, \qquad (14)$$

un mēs dabūjam

$$I_1=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{3}}^{0}t\left[-\frac{2t\,dt}{(1+t^2)^2}\right]=\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^2}.$$

Tāpat kā 324. § 1. piemērā atrodam

$$I_1=-\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\pi}{6}\approx 0{,}307.$$

Ja substitūcijas (9) vietā mēs lietotu substitūciju (8), neievērojot kārtulā ietverto nosacījumu, tad (12) vietā dabūtu

$-\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}\sqrt{\frac{1-z}{z}}\,dz$ un integrālim I_1 atrastu nepareizu vērtību ($-0{,}307$).

Kas attiecas uz integrāli I_2, tad tam nav derīga ne substitūcija (8), ne substitūcija (9), jo pirmā substitūcija nedod apakšējo robežu, bet otra — augšējo. Ja mēs kļūdaini lietotu, teiksim, substitūciju (8), tad integrālim I_2 dabūtu $\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{1}\sqrt{\frac{1-z}{z}}\,dz$, t. i., nulli. Tas ir bezjēdzīgi, jo zemintegrāļa funkcija $\sqrt{1-x^2}$ visā integrācijas intervālā ir pozitīva.

Lai aprēķinātu integrāli I_2, tad to var sadalīt divos saskaitāmos tā:

$$I_2=\int\limits_{-1}^{0}\sqrt{1-x^2}\,dx+\int\limits_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Pirmajam saskaitāmajam lietojam substitūciju (9), bet otram — substitūciju (8). Abi saskaitāmie pieņems vienādu izskatu

$$\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}\sqrt{\frac{1-z}{z}}\,dz,$$

un tad

$$I_2=\int\limits_{0}^{1}\sqrt{\frac{1-z}{z}}\,dz. \tag{15}$$

Tas ir neīstais integrālis (328. §), jo zemintegrāļa funkcijai ir pārtraukums punktā $z=0$. Tomēr arī tagad var lietot substitūciju (14) (jo funkcija $z=\frac{1}{1+t^2}$ ir monotona; sk. 328. § 3. piezīmi).

Atrodam, ka

$$I_2=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^2}.$$

Arī tas ir neīstais integrālis (327. §). Neskatoties uz to, tam var pielietot (327. § 1. piezīme) integrēšanu pa daļām; tad, rīkojoties tā kā 324. § 1. piemērā, atrodam

$$I_2 = -\frac{t}{2(1+t^2)}\Bigg|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{dt}{2(1+t^2)}.$$

Pirmais saskaitāmais ir vienāds ar nulli, un galīgi dabūsim

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t \Bigg|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785.$$

326. §. Par neīstajiem integrāļiem

Noteiktā integrāļa jēdzienu mēs devām (314. §) galīgam intervālam (a, b) un nepārtrauktai funkcijai $f(x)$. Daudzi konkrēti uzdevumi (sk. 327. un 328. § piemērus) prasa paplašināt integrāļa jēdzienu bezgalīgiem intervāliem un pārtrauktām funkcijām. Lai to izdarītu, tad bez 314. § robežpārejas jāizpilda vēl viena robežpāreja. Integrāļus, kurus dabū ar divkāršu pāreju uz robežu, sauc par *neīstiem*; pretstatā neīstiem integrāļiem 314. paragrāfā apskatītos integrāļus sauc par *īstiem*. 327. paragrāfā apskatīti *pirmā tipa* neīstie integrāļi (ar vienu vai divām bezgalīgām robežām), 328. paragrāfā — vienkāršākie *otrā tipa* neīstie integrāļi (no pārtrauktas funkcijas).

327. §. Integrāļi ar bezgalīgām robežām

1. definīcija. Ja integrālim

$$\int_a^{x'} f(x)\,dx, \tag{1}$$

kad $x' \to +\infty$ ir galīga robeža, tad šo robežu sauc par *funkcijas $f(x)$ integrāli no a līdz bezgalībai un apzīmē ar simbolu*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{2}$$

Tātad saskaņā ar definīciju

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{x' \to +\infty} \int_a^{x'} f(x)\,dx. \tag{3}$$

Ja integrālim (1), kad $x' \to +\infty$, ir bezgalīga robeža[1] vai vispār nav robežas, tad saka, ka *neīstais integrālis* (2) *neeksistē jeb diverģē*. Ja integrālim (2) ir galīga robeža, tad saka, ka neīstais integrālis (2) eksistē jeb konverģē.

1. piemērs. Atrast integrāli $\int_0^{+\infty} 2^{-x}\,dx$.

Atrisinājums. Dabūjam

$$\int_0^{x'} 2^{-x}\,dx = \frac{1}{\ln 2}(-2^{-x})\Big|_0^{x'} = \frac{1}{\ln 2}\left(1 - \frac{1}{2^{x'}}\right).$$

Kad $x' \to +\infty$, šai izteiksmei ir robeža $\frac{1}{\ln 2}$. Tātad

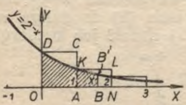
$$\int_0^{+\infty} 2^{-x}\,dx = \lim_{x' \to +\infty} \int_0^{x'} 2^{-x}\,dx = \frac{1}{\ln 2} \approx 1{,}4.$$

Ģeometriskā nozīme. Integrāli $\int_0^{x'} 2^{-x}\,dx$ attēlo figūras $OBB'D$ (343. zīm.) laukums, kura atrodas zem līnijas $y = 2^{-x}$. Ja ordināte BB' attālinās, tad $OBB'D$ laukums

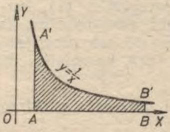
[1] Ja integrālim $\int_a^{x'} f(x)\,dx$ ir bezgalīga robeža, kad $x' \to +\infty$, tad saka, ka neīstajam integrālim $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ir bezgalīga vērtība, un raksta $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \infty$.

aug, bet ne neierobežoti. Tas tiecas uz $\frac{1}{\ln 2}$. Saka, ka laukums *bezgalīgajai joslai* zem līnijas $y=2^{-x}$ ir vienāds ar $\frac{1}{\ln 2}$.

Paskaidrojums. Apskatīsim kāpņveidīgo figūru



343. zīm.



344. zīm.

343. zīmējumā. Tās pirmajam pakāpienam $OACD$ ir laukums $OD \cdot OA=1 \cdot 1=1$, otrajam — laukums $AK \cdot AN=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$, trešajam — laukums $\frac{1}{4}$ utt. Ja pakāpienu skaits aug, tad to kopīgais laukums tiecas uz 2 (bezgalīgi dilstošas progresijas summa). Skaitli 2 dabiski uzskatīt par bezgalīgās kāpņveidīgās joslas laukuma mēru. Bezgalīgās līklīnijas joslas laukums ir vēl mazāks.

2. piemērs. Atrast $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x}$.

Atrisinājums. Integrālim $\int\limits_{1}^{x'}\frac{dx}{x}$ ir bezgalīga robeža, kad $x'\to+\infty$. Meklētais neīstais integrālis diverģē[1].

Ģeometriski: laukums joslai $AA'B'B$ (344. zīm.), kura atrodas zem hiperbolas $y=\frac{1}{x}$, neierobežoti aug (bezgalīgajai līklīnijas joslai ir bezgalīgs laukums).

[1] Turklāt tam ir bezgalīga vērtība $\left(\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x}=+\infty\right)$.

3. p i e m ē r s. Uz plakanas virsmas nostiprinātas divas elektrizētas lodītes ar pozitīviem lādiņiem e_1 un e_2 elektrostatiskās vienībās. Attālums starp centriem ir R *cm.* Lodīti ar lādiņu e_2 atbrīvo, un tā attālinās no e_1 atgrūšanās spēka $F = \frac{e_1 e_2}{r^2}$ iedarbībā (r — mainīgais attālums starp centriem centimetros, F — spēka lielums dinos).

Spēka F darbu gabalā (R, r') izsaka (ergos) integrālis (317. §)

$$\int_R^{r'} \frac{e_1 e_2}{r^2}\, dr = e_1 e_2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r'}\right).$$

Neīstais integrālis

$$e_1 e_2 \int_R^{+\infty} \frac{dr}{r^2} = \lim_{r' \to \infty} \left[e_1 e_2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r'}\right)\right] = \frac{e_1 e_2}{R}$$

izsaka pilnu apskatāmās sistēmas *darba krājumu.* Fizikā šo lielumu sauc par *potenciālu.*

2. d e f i n ī c i j a. *Par funkcijas* $f(x)$ *integrāli no* $-\infty$ *līdz* a sauc integrāļa $\int_{x''}^{a} f(x)\,dx$ robežu, kad $x'' \to -\infty$, t. i.,

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{x'' \to -\infty} \int_{x''}^{a} f(x)\,dx. \tag{4}$$

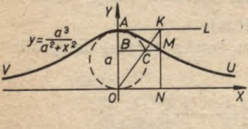
Neīstā integrāļa $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ konverģence un diverģence saprotama tāpat kā 1. definīcijā.

3. d e f i n ī c i j a. *Par funkcijas* $f(x)$ *integrāli no* $-\infty$ *līdz* $+\infty$, t. i.,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \tag{5}$$

sauc summu

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx. \qquad (6)$$



345. zīm.

Tas nav atkarīgs no a izvēles. Pieņemts, ka abi neīstie integrāļi (6) konverģē.

Integrālis (5) izsaka laukumu joslai zem līnijas $y=f(x)$, kas bezgalīgi aizstiepjas uz abām pusēm (345. zīmējumā līnija VAU).

4. piemērs. Atrast laukumu bezgalīgai joslai zem līnijas $y=\frac{a^3}{a^2+x^2}$ (*Anjezi verzjera*, 345. zīm.; sk. 506. §).

Atrisinājums. Meklēto laukumu izsaka integrālis

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^3\,dx}{a^2+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{a^3\,dx}{a^2+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{a^3\,dx}{a^2+x^2}. \qquad (7)$$

Tā kā

$$\int_{0}^{x'} \frac{a^3\,dx}{a^2+x^2} = a^2 \operatorname{arctg} \frac{x'}{a}, \text{ tad}$$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{a^3\,dx}{a^2+x^2} = a^2 \lim_{x'\to+\infty} \operatorname{arctg} \frac{x'}{a} = \frac{\pi a^2}{2}.$$

Analogi aprēķinām pirmo saskaitāmo un dabūjam

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^3\,dx}{a^2+x^2} = \pi a^2. \qquad (8)$$

1. piezīme. Pamatformula

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

ja to pielieto konverģentam integrālim $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$, pieņem izskatu

$$\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx = F(\infty) - F(a).$$

Simbols $F(\infty)$ apzīmē $\lim\limits_{x' \to \infty} F(x')$.

Analogi lieto formulu integrēšanai pa daļām. Lai aprēķinātu neīsto integrāli $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx$, var lietot arī substitūcijas metodi, bet ar nosacījumu, ka funkcija $x = \varphi(z)$ ir monotona.

2. piezīme. Dažkārt īsto integrāli ir izdevīgi pārveidot par neīsto. Tā, lai aprēķinātu integrāli

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x \cos^2 x\,dx}{(\sin^3 x + \cos^3 x)^2}, \tag{9}$$

vislabāk ir ņemt palīgfunkciju

$$\operatorname{tg} x = z. \tag{10}$$

Dabūjam

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{z^2\,dz}{(1+z^3)^2} = -\frac{1}{3(1+z^3)}\Bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{3}. \tag{11}$$

Pārveidojot integrāli (9) formā (11), mēs doto integrāli uzskatām par robežu integrālim

$$\int\limits_{0}^{x'} \frac{\sin^2 x \cos^2 x\,dx}{(\sin^3 x + \cos^3 x)^2}, \text{ kad } x' \to \frac{\pi}{2}.$$

328. §. Pārtrauktas funkcijas integrālis

1. d e f i n ī c i j a. Pieņemsim, ka funkcijai $f(x)$ ir pārtraukums punktā $x=b$, bet pārējos intervāla (a, b) punktos tā ir nepārtraukta.

Ja integrālim

$$\int_a^{x'} f(x)dx \tag{1}$$

ir galīga robeža, kad x' tiecas uz b (paliekot mazāks par b), tad šo robežu sauc par funkcijas $f(x)$ *neīsto integrāli no a līdz b* un apzīmē tāpat kā atbilstošo īsto integrāli

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x' \to b-0} \int_a^{x'} f(x)dx. \tag{2}$$

Formulu (2) īstajiem integrāļiem *pierāda*; neīstajiem integrāļiem to *pieņem par definīciju*.

Analogi definē neīsto integrāli, kad $f(x)$ ir pārtraukums tikai intervāla (a, b) galā $x=a$.

Neīstā integrāļa konverģenci un diverģenci saprot tāpat kā 327. paragrāfā.

2. d e f i n ī c i j a. Ja $f(x)$ ir pārtraukums tikai intervāla (a, b) iekšējā punktā c, tad

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{3}$$

Pieņemts, ka labajā pusē abi neīstie integrāļi konverģē.

Formulu (3) īstajiem integrāļiem *pierāda*; šeit to pieņem par neīstā integrāļa $\int_a^b f(x)dx$ *definīciju*.

1. p i e z ī m e. 2. definīciju vispārina gadījumam, kad intervāla (a, b) iekšienē ir divi, trīs utt. pārtraukuma punkti. Tā diviem punktiem c', c'' dabūjam

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c'} f(x)dx + \int_{c'}^{c''} f(x)dx + \int_{c''}^b f(x)dx. \tag{3a}$$

1. piemērs. Atrast

$$\int_0^a \frac{a^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Dotais integrālis ir neīstais, jo zemintegrāļa funkcija ir pārtraukta (pārvēršas bezgalībā) punktā $x=a$. Integrālis konverģē, jo funkcija

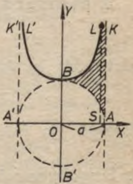
$$\int_0^{x'} \frac{a^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = a^2 \arcsin \frac{x'}{a} \tag{4}$$

tiecas uz robežu $\frac{\pi a^2}{2}$, kad $x' \to a$.

Tātad

$$\int_0^a \frac{a^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\pi a^2}{2}. \tag{5}$$

Ģeometriski: bezgalīgas joslas $KAOBL$[1] laukums (t. i., figūras $LSOB$ laukums, kad punkts S tiecas uz punktu A; 346. zīm.) ir vienāds ar pusriņķa $BOB'A$ laukumu; tātad iesvītrotā figūra, kas aizstiepjas bezgalībā, ir vienādliela ar sektoru AOB'.



346. zīm.

2. piemērs. Atrast

$$\int_{-a}^{+a} a \sqrt[3]{\frac{a^2}{x^2}}\, dx.$$

Tas ir neīstais integrālis, jo zemintegrāļa funkcija intervāla $(-a, +a)$ iekšienē punktā $x=0$ pārvēršas bezgalībā. Saskaņā ar 2. definīciju dabūjam

$$\int_{-a}^{+a} a \sqrt[3]{\frac{a^2}{x^2}}\, dx = a^{\frac{5}{3}} \int_{-a}^{0} x^{-\frac{2}{3}} dx + a^{\frac{5}{3}} \int_0^a x^{-\frac{2}{3}} dx. \tag{6}$$

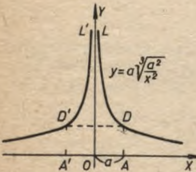
[1] Riņķa līnijas O rādiuss a ir vidējais proporcionālais starp līnijas $L'BL$ ordināti un atbilstošo pusriņķa līnijas $A'BA$ ordināti; tas ļauj viegli konstruēt līniju $L'BL$.

Saskaņā ar 1. definīciju

$$\int_{-a}^{0} x^{-\frac{2}{3}}\,dx = \lim_{x'\to 0}\int_{-a}^{x'} x^{-\frac{2}{3}}\,dx = \lim_{x'\to 0} 3\left(a^{\frac{1}{3}} - x'^{\frac{1}{3}}\right) = 3a^{\frac{1}{3}}.$$

Analogu rezultātu dabūjam formulas (6) otram saskaitāmam. Galīgi dabūjam

$$\int_{-a}^{+a} a\sqrt[3]{\frac{a^2}{x^2}}\,dx = 6a^2.$$



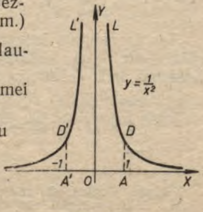
347. zīm.

Ģeometriski: bezgalīgās joslas $ADLL'D'A'$ (347. zīm.) laukums ir trīsreiz lielāks par taisnstūra $A'ADD'$ laukumu (tātad «bezgalīgā smaile» $DLL'D'$ ir vienādliela ar kvadrātu, kas konstruēts uz DD').

3. piemērs. Izteiksmē $\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x^2}$ zemintegrāļa funkcija ir pārtraukta punktā $x=0$. Neīstie integrāļi $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}$ un $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}$ diverģē (jo integrāļiem $\int_{-1}^{x'}\frac{dx}{x^2}=1-\frac{1}{x'}$ un $\int_{x''}^{1}\frac{dx}{x^2}=\frac{1}{x''}-1$ ir bezgalīgas robežas, kad $x'\to -0$ un $x''\to +0$). Tātad dotā izteiksme neizsaka nekādu neīsto integrāli (2. definīcijas nozīmē). Bezgalīgajai joslai $ADLL'D'A'$ (348. zīm.) zem līnijas $y=\frac{1}{x^2}$ ir bezgalīgs laukums.

2. piezīme. Pielietojot izeiksmei $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ integrālrēķinu pamatformulu

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \qquad (7)$$



348. zīm.

mēs dabūtu negatīvu skaitli -2; šis bezjēdzīgais rezultāts (zemintegrāļa funkcija $\frac{1}{x^2}$ ir visur pozitīva!) rodas tāpēc, ka izteiksmei $\int\limits_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2}$ nav jēgas. Ja turpretim neīstie integrāļi

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx, \quad \int\limits_c^b f(x)\,dx,$$

kas ietilpst vienādībā (3), konverģē, tad neīstajam integrā-lim $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ formula (7) vienmēr ir *pareiza*.

3. piezīme. Attiecībā uz integrēšanu pa daļām un substitūcijas metodi var atkārtot to pašu, kas teikts 327. § 1. piezīmē.

329. §. Par integrāļa aptuvenu aprēķināšanu

Praksē bieži sastopami integrāļi, kurus vai nu neizsaka ar elementārajām funkcijām (309. §), vai arī izsaka ļoti komplicētā veidā. Nereti zemintegrāļa funkciju uzdod ar tabulu vai grafiku. Šajos gadījumos integrāļus atrod ar aptuvenām metodēm.

Vēsturiski pirmā bija Ņūtona izveidotā *bezgalīgo rindu metode* (sk. 270. §). To lieto vēl šodien (uz stingrākiem pamatiem; sk. tālāk 402. §).

Cita metode, ko bieži sauc par *mehānisko kvadratūru metodi*[1], ieteic aizstāt zemintegrāļa funkciju $y=f(x)$ ar tādu n-tās pakāpes polinomu

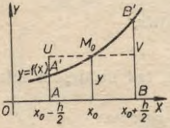
$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n, \tag{1}$$

kuram pie dotajām argumenta vērtībām $x=x_0$, $x=x_1$, ... , $x=x_n$ (to skaits ir vienāds ar $n+1$) ir tādas pašas vērtības kā dotajai funkcijai $f(x)$.

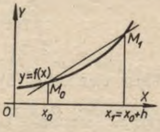
[1] Tā arī balstās uz Ņūtona idejām, un pirmie to attīstīja Teilors, Simpsons u. c. Jaunākie darbi pieder padomju zinātniekiem (V. Veļčinkinam un F. Koganai).

G e o m e t r i s k i: Līniju $y=f(x)$ aizstāj ar «n-tās pakāpes parabolu» $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, kas iet caur $n+1$ dotās līnijas punktu.

Funkcijas $f(x)$ aptuvenu aprēķināšanu pēc vairākām dotām tās vērtībām $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$ sauc par *interpolāciju*[1], bet polinomu (1) — par *interpolācijas polinomu.*



349. zīm.



350. zīm.

Izintegrējot interpolācijas polinomu, dabūsim aptuveni funkcijas $f(x)$ integrāli.

1. p i e m ē r s. Ja dota viena vērtība $y_0=f(x_0)$, tad dabūjam nulltās pakāpes interpolācijas polinomu

$$P(x)=y_0. \tag{2}$$

Līniju $y=f(x)$ aizstāj ar horizontālu taisni UV (349. zīm.), kas iet caur doto punktu $M_0(x_0, y_0)$.

Aptuvenā integrāļa vērtība

$$\int\limits_{x_0-\frac{h}{2}}^{x_0+\frac{h}{2}} f(x)\,dx \approx \int\limits_{x_0-\frac{h}{2}}^{x_0+\frac{h}{2}} y_0\,dx = y_0 h \tag{3}$$

dod taisnstūra $AUVB$ laukumu (līklīnijas trapeces $AA'B'B$ laukuma vietā).

2. p i e m ē r s. Ja dotas divas vērtības $y_0=f(x_0)$, $y_1=$ $=f(x_0+h)$, tad dabūjam pirmās pakāpes interpolācijas polinomu

$$P(x)=y_0+\frac{y_1-y_0}{h}(x-x_0). \tag{4}$$

[1] Šis latīņu termins nozīmē «ievietošana iekšā».

Tas izsaka taisni M_0M_1 (350. zīm.), kas iet caur punktiem $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_0+h; y_1)$. Atbilstošā aptuvenā integrāļa vērtība

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_0+h} P(x)\,dx = \frac{1}{2}(y_0+y_1)h \tag{5}$$

dod taisnlīnijas trapeces $x_0M_0M_1x_1$ laukumu.

3. piemērs. Ja dotas trīs vērtības

$$y_0=f(x_0), \quad y_1=f(x_0+h); \quad y_2=f(x_0+2h),$$

tad dabūjam otrās pakāpes interpolācijas polinomu

$$P(x)=y_0+\frac{y_1-y_0}{h}(x-x_0)+$$
$$+\frac{y_2-2y_1+y_0}{2h^2}(x-x_0)[x-(x_0+h)]. \tag{6}$$

Formulas (6) pareizību var pārbaudīt, ja tanī pēc kārtas ievieto

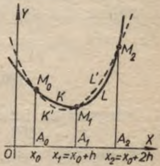
$$x=x_0, \quad x=x_0+h, \quad x=x_0+2h.$$

Dabūsim

$$P(x_0)=y_0, \quad P(x_0+h)=y_1, \quad P(x_0+2h)=y_2.$$

Ja $P(x)$ sakārto pēc x pakāpēm, tad formula kļūst komplicētāka. Izteiksmes $y_1-y_0(=\Delta y_0)$ un y_2-2y_1+ $+y_0(=\Delta^2 y_0)$ ir funkcijas $f(x)$ pirmā un otrā diference (258. §).

Polinoms (6) attēlo parabolu ar vertikālu asi (351. zīm.), kas iet caur trim punktiem $M_0(x_0; y_0)$, $M_1(x_0+h; y_1)$, $M_2(x_0+2h; y_2)$.



351. zīm.

Aptuvenā vērtība [1]

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_0+2h} P(x)\,dx = \frac{1}{3}(y_0+4y_1+y_2)h \tag{7}$$

[1] Integrāļa $\int_{x_0}^{x_0+2h} P(x)\,dx$ aprēķināšanu var atvieglot, ja ņem palīgmainīgo $x-(x_0+h)=z$.

dod *paraboliskās trapeces* $A_0M_0K'M_1L'M_2A_2$ laukumu (līklīnijas trapeces $A_0M_0KM_1LM_2A_2$ laukuma vietā).

Formulas (4), (6) var vispārināt patvaļīgam vienādi attālinātu x vērtību skaitam. Četrām vērtībām dabūjam

$$P(x)=y_0+\frac{y_1-y_0}{h}(x-x_0)+\frac{y_2-2y_1+y_0}{2!h^2}(x-x_0)[x-(x_0+h)]+$$
$$+\frac{y_3-3y_2+3y_1-y_0}{3!h^3}(x-x_0)[x-(x_0+h)][x-(x_0+2h)]$$

jeb saīsināti

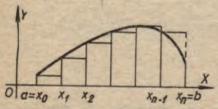
$$P(x)=y_0+\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}(x-x_0)+\frac{\Delta^2 y_0}{2!\Delta x_0^2}(x-x_0)(x-x_1)+$$
$$+\frac{\Delta^3 y_0}{3!\Delta x_0^3}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2).$$

Atbilstošo vispārīgo formulu sauc par *Ņūtona interpolācijas formulu.* Nepietiekami stingrā veidā Teilors dabūja no tās funkcijas $f(x)$ izvirzījumu pakāpju rindā (viņš ņēma $x_1=x_0$, $x_2=x_0$ utt. un starpības Δx_0, Δy_0, $\Delta^2 y_0$ utt. aizstāja ar diferenciāļiem dx_0, dy_0, d^2y_0 utt.) (sal. 270. §).

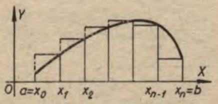
330. §. Taisnstūru formulas

Integrācijas intervālu (a, b) sadalām ar punktiem x_1, x_2, ..., x_{n-1} (352. un 353. zīm.) n vienādās daļās; katras daļas garums

$$h=\frac{b-a}{n}.$$



352. zīm.



353. zīm.

Vienveidības dēļ apzīmējam $a=x_0$, $b=x_n$. Ar $x_{1/2}$, $x_{3/2}$, $x_{5/2}$, ... (354. zīm.) apzīmējam gabalu (x_0, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), ... viduspunktus. Bez tam apzīmējam

$$f(x_0)=y_0, \quad f(x_1)=y_1, \quad f(x_2)=y_2, \ldots;$$

$$f(x_{1/2})=y_{1/2}, \quad f(x_{3/2})=y_{3/2}, \quad f(x_{5/2})=y_{5/2}, \ldots$$

Par *taisnstūru formulām* sauc šādas aptuvenas vienādības:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}[y_0+y_1+\ldots+y_{n-1}], \tag{1}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}[y_1+y_2+\ldots+y_n], \tag{2}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}[y_{1/2}+y_{3/2}+\ldots+y_{\frac{2n-1}{2}}]. \tag{3}$$

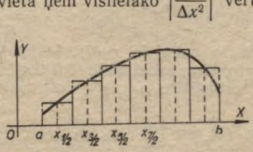
Izteiksmes (1), (2), (3) dod laukumus kāpņveidīgajām figūrām, kas attēlotas 352, 353., 354. zīmējumā (sal. 329. § 1. piemēru).

Daudzos gadījumos pie dotā n formula (3) ir precīzāka par formulām (1) un (2). Palielinot n, formulu (1), (2), (3) precizitāte neierobežoti aug.

P i e z ī m e. Formulas (3) robežkļūda ir

$$\frac{(b-a)^3}{24n^2}M_2, \tag{4}$$

kur M_2 ir $|f''(x)|$ lielākā vērtība intervālā (a, b). Empīriskām funkcijām M_2 vietā ņem vislielāko $\left|\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right|$ vērtību.



354. zīm.

Piemērs. Aprēķināsim ar formulu (3) 10 ordinātu gadījumā ($n=10$) aptuveno vērtību integrālim

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\left(=\frac{\pi}{4}=0{,}785398\ldots\right).$$

$$\begin{array}{ll}
x_{1/2}=0{,}05 & y_{1/2}=0{,}9995 \\
x_{3/2}=0{,}15 & y_{3/2}=0{,}9780 \\
x_{5/2}=0{,}25 & y_{5/2}=0{,}9412 \\
x_{7/2}=0{,}35 & y_{7/2}=0{,}8909 \\
x_{9/2}=0{,}45 & y_{9/2}=0{,}8316 \\
x_{11/2}=0{,}55 & y_{11/2}=0{,}7678 \qquad \dfrac{b-a}{n}=\dfrac{1}{10} \\
x_{13/2}=0{,}65 & y_{13/2}=0{,}7029 \\
x_{15/2}=0{,}75 & y_{15/2}=0{,}6400 \\
x_{17/2}=0{,}85 & y_{17/2}=0{,}5806 \\
x_{19/2}=0{,}95 & y_{19/2}=0{,}5256 \\
\hline
& \text{summa} \quad \sum y=7{,}8581
\end{array}$$

$$I\approx\frac{b-a}{n}\sum y=\underline{\underline{0{,}78581}}.$$

Kļūda aptuveni ir 0,0004.

Dabūjam $f''(x)=2\,\dfrac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}$. Vislielākā $|f''(x)|$ vērtība intervālā (0, 1) ir 2 (to dabū, ja $x=0$). Ievietojot formulā (4) $n=10$, $M_2=2$, atrodam robežkļūdu 0,00085. Tātad nav nozīmes aprēķināt ordinātēm $y_{1/2}$, $y_{3/2}$ utt. vairāk par četrām zīmēm.

Ar formulām (1) un (2) (y_0, y_1, y_2, ... vērtības dotas 331. paragrāfā) mēs dabūtu $I\approx0{,}8099$ un $I\approx0{,}7599$, t. i., kļūda būtu apmēram 50 reizes lielāka.

331. §. Trapeču formula

Ar 330. § apzīmējumiem dabūjam

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right]. \qquad (1)$$

Tā ir *trapeču formula*. Tā dod 355. zīmējumā parādīto trapeču kopīgo laukumu (sal. 329. § 2. piemēru).

355. zīm.

Piezīme. Formulas (1) robežkļūda ir $\frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2$, kur M_2 ir $|f''(x)|$ vislielākā vērtība intervālā (a, b) (sal. 330. § piezīmi).

Piemērs. Aprēķināsim integrāli $I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ $(=0{,}785398\ldots)$ ar trapeču formulu 11 ordinātēm $(n=10)$. Dabūjam

$x_1=0{,}1 \quad y_1=0{,}9901$

$x_2=0{,}2 \quad y_2=0{,}9615$

$x_3=0{,}3 \quad y_3=0{,}9174$

$x_4=0{,}4 \quad y_4=0{,}8621$

$x_5=0{,}5 \quad y_5=0{,}8000$ $\qquad x_0=0{,}0 \quad y_0=1{,}0000$

$x_6=0{,}6 \quad y_6=0{,}7353$ $\qquad x_{10}=1{,}0 \quad y_{10}=0{,}5000$

$x_7=0{,}7 \quad y_7=0{,}6711$ $\qquad y_0+y_{10}=1{,}5000$

$x_8=0{,}8 \quad y_8=0{,}6098$ $\qquad I\approx\frac{1}{10}\left(\frac{1{,}5000}{2}+7{,}0998\right)=\underline{\underline{0{,}78498.}}$

$x_9=0{,}9 \quad y_9=0{,}5525$

summa $\sum_{i=1}^{i=9} y_i=7{,}0998$

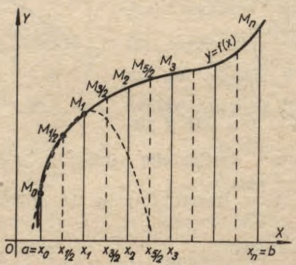
Kļūda ir apmēram 0,0004, tāpat kā ar 330. § formulu (3) iegūtajam rezultātam. Bet tur mums bija tuvinājums ar uzviju, šeit ar iztrūkumu.

332. §. Simpsona formula (parabolisko trapeču formula)

Ar 330. § apzīmējumiem dabūjam

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}\left[\frac{y_0+y_n}{2}+(y_1+y_2+\ldots+y_{n-1})+\right.$$

$$\left.+2(y_{1/2}+y_{3/2}+\ldots+y_{n-1/2})\right]. \tag{1}$$



356. zīm.

Tā ir *Simpsona formula*. Tā dod kopīgo laukumu paraboliskajām trapecēm $x_0M_0M_{1/2}\,M_1x_1$, $x_1M_1M_{3/2}\,M_2x_2$, ... (356. zīm.), kurām dotās līnijas $y=f(x)$ loku $M_0M_{1/2}\,M_1$, $M_1M_{3/2}\,M_2$, ... vietā ņemti tāpat apzīmētie parabolu loki ar vertikālām asīm. 356. zīmējumā parādīta tikai parabola $M_0M_{1/2}\,M_1$ (sal. 329. § 3. piemēru).

Ja ordinātu skaits ir viens un tas pats, tad Simpsona formula lielāko tiesu ir daudz precīzāka par taisnstūru (330. §) un trapeču (331. §) formulām.

Piezīme. Formulas (1) robežkļūda ir

$$\frac{(b-a)^5}{180(2n)^4}M_4. \tag{2}$$

Šeit M_4 ir $|f^{\mathrm{IV}}(x)|$ vislielākā vērtība intervālā (a, b).

P i e m ē r s. Aprēķināt integrāli

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\,(=0{,}785398\ldots)$$

ar Simpsona formulu piecām ordinātēm

$$\left(n=2,\ \frac{b-a}{3n}=\frac{1}{6}\right).$$

$x_0=0$	$\frac{1}{2}y_0=0{,}50000$
$x_{1/2}=0{,}25$	$2y_{1/2}=1{,}88235$
$x_1=0{,}50$	$y_1=0{,}80000$
$x_{3/2}=0{,}75$	$2y_{3/2}=1{,}28000$
$x_2=1{,}00$	$\frac{1}{2}y_2=0{,}25000$
	summa 4,71235

$$I\approx\frac{1}{6}\cdot 4{,}71235=\underline{\underline{0{,}78539.}}$$

Kļūda ir apmēram 0,00001, t. i., 40 reižu mazāka nekā 330. un 331. § piemērā, lai gan tur ordinātu skaits bija divreiz lielāks.

Noderīgi salīdzināt Simpsona formulu ar trapeču formulu. Pirmajā ir lieks saskaitāmais $2(y_{1/2}+y_{3/2}+\ldots)$, kurš ir apmēram divreiz lielāks par pārējo locekļu summu. Tātad Simpsona formulas izteiksme kvadrātiekavās ir apmēram trīsreiz lielāka par atbilstošo izteiksmi trapeču formulā. Tāpēc arī reizinātājs $\frac{b-a}{3n}$ ir trīsreiz mazāks par reizinātāju $\frac{b-a}{n}$.

333. §. Figūru laukumu aprēķināšana taisnleņķa koordinātēs

Laukumu līklīnijas trapecei (357. zīmējumā $aABb$), kas atrodas virs Ox ass, izsaka (316. §) ar integrāli

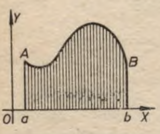
$$S=\int_a^b f(x)dx. \tag{1}$$

Trapecei, kas atrodas zem OX ass,

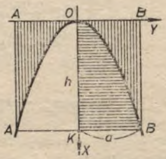
$$S=-\int_a^b f(x)dx. \tag{1'}$$

Citas formas figūras sadala trapecēs (vai arī papildina līdz trapecei) un laukumu atrod kā trapeču laukumu summu (vai starpību). Aprēķinus atvieglo piemērotas taisnleņķa sistēmas izvēle.

1. piemērs. Atrast laukumu paraboliskam segmentam AOB (358. zīm.), ja tā pamats $AB=2a$ un augstums $KO=h$.



357. zīm.



358. zīm.

359. zīm.

Asis izvēlamies tā, kā parādīts 358. zīmējumā. Segmentu AOB sadalām vienādās līklīnijas trapecēs OKB un OKA; tad

$$\text{Lauk}_{OKB}=\int_0^h y dx. \tag{2}$$

Koordinātes x, y saista vienādojums

$$y^2=2px. \tag{3}$$

Parametru p aprēķina no nosacījuma, ka parabola iet caur punktu $B(h; a)$, tad

$$a^2=2ph. \tag{4}$$

No (3) un (4) atrodam

$$y=\frac{a}{\sqrt{h}}\sqrt{x}. \tag{5}$$

Ievietojot vienādībā (2), dabūjam

$$\text{Lauk}_{OKB}=\frac{a}{\sqrt{h}}\int_0^h \sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}ah,$$

$$\text{Lauk}_{AOB}=2\text{Lauk}_{OKB}=\frac{2}{3}(2a)h,$$

t. i., *paraboliska segmenta laukums ir* $\frac{2}{3}$ *taisnstūra* $ABB'A'$ *laukuma, kuram ir tas pats pamats un tas pats augstums.*

C i t s p a ņ ē m i e n s. Papildinām segmentu AOB līdz taisnstūrim $AA'B'B$. Papildinošas trapeces laukums ir vienāds ar

$$\int_{-a}^{+a} x\,dy \text{ jeb saskaņā ar (5)}$$

$$\frac{h}{a^2}\int_{-a}^{+a} y^2dy=\frac{1}{3}\cdot 2ah.$$

Tātad

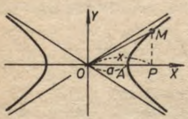
$$\text{Lauk}_{AOB}=2ah-\frac{1}{3}\cdot 2ah=\frac{2}{3}\cdot 2ah.$$

2. p i e m ē r s. Atrast laukumu S figūrai, kas ieslēgta starp parabolām $y^2=2px$ un $x^2=2py$ (359. zīm.).

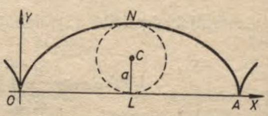
Laukums S ir laukumu $ONAL$ un $OKAL$ starpība. Parabolas krustojas punktos $O(0; 0)$ un $A(2p; 2p)$. Dabūjam

$$S=\int_0^{2p} \sqrt{2px}\,dx-\int_0^{2p} \frac{x^2}{2p}\,dx=\frac{4}{3}p^2=\frac{(2p)^2}{3},$$

t. i., S ir kvadrāta $OLAR$ laukuma trešdaļa [1].



360. zīm.



361. zīm.

3. piemērs. Elipses $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ laukums ir

$$S=2\int_{-a}^{+a} \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\pi ab.$$

4. piemērs. Dota hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (360. zīm.).

$$\text{Lauk}_{AMP}=\int_a^x \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\,dx=$$

$$=\frac{b}{2a}\,x\sqrt{x^2-a^2}-\frac{ab}{2}\ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}=$$

$$=\frac{xy}{2}-\frac{ab}{2}\ln\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right),$$

$$\text{Lauk}_{OAM}=\text{Lauk}_{OPM}-\text{Lauk}_{AMP}=\frac{ab}{2}\ln\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right).$$

[1] Balstoties uz 1. piemēra rezultātu, S var atrast ar elementāru paņēmienu.

5. piemērs. Dota cikloīda (361. zīm.)

$$x=a(t-\sin t), \quad y=a(1-\cos t),$$

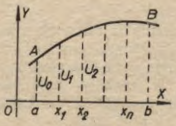
$$\text{Lauk}_{ONALO}=\int_0^{2\pi} y\,dx=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2dt=3\pi a^2,$$

t. i., *cikloīdas laukums ir trīsreiz lielāks par veidojošā riņķa laukumu.*

334. §. Noteiktā integrāļa pielietošanas shēma

Ar noteikto integrāli var izteikt daudz dažādus ģeometriskus un fizikālus lielumus (sk. 335.—338. §). Pie tam lieto šādu vienveidīgu shēmu.

1) Meklēto lielumu U nostāda atbilstībā ar kāda argumenta maiņas intervālu (a, b).



362. zīm.

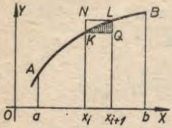
363. zīm.

Tā, lai izteiktu ar integrāli laukumu $aABb$ zem līnijas AB (362. zīm.), mēs nostādām to atbilstībā ar abscisas x maiņas intervālu (a, b).

2) Intervālu (a, b) sadala gabalos (a, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_n, b) (tālāk gabalu skaits tieksies uz bezgalību, bet to garumi — uz nulli).

Pieņemsim, ka tad meklētais lielums U sadalās daļās $U_0, U_1, U_2, \ldots$ (362. zīm.), kas summā dod U.

Lielumus, kam piemīt šī īpašība, sauc par *aditīviem.* Var būt arī neaditīvi lielumi. Tā leņķis starp koniskas virsmas veidotājām ir neaditīvs lielums. Leņķi AOB (363. zīm.) var nostādīt atbilstībā ar intervālu (a, b), kur $a=\smile{RA}$ un $b=\smile{RB}$



364. zīm.

ir vadītājas loki, kurus skaita no kāda sākuma punkta R. Bet, ja (a, b) sadala gabalos (a, c) un (c, b), tad atbilstošie leņķi AOC un COB summā nedod leņķi AOB.

Aditīvu lielumu var izteikt ar integrāli, neaditīvu — nevar.

3) Kā daļu U_0, U_1, ... tipisku pārstāvi ņem vienu no tām U_i; to izsaka (vadoties no jautājuma nosacījumiem) ar aptuvenu formulu

$$U_i \approx f(x_i)(x_{i+1}-x_i), \tag{1}$$

pie kam kļūdai jābūt ar augstāku kārtu attiecībā pret $x_{i+1}-x_i$.

Izteiksmi $f(x_i)(x_{i+1}-x_i)$ jeb saīsināti

$$f(x)\Delta x \tag{2}$$

sauc par lieluma U *elementu*.

Laukuma $aABb$ (364. zīm.) elements ir taisnstūra x_iKQx_{i+1} laukums; formulas (1) kļūda ir zīmējumā iesvītrotā trijstūra KQL laukums, tam ir augstāka kārta attiecībā pret $x_{i+1}-x_i= =\Delta x_i$ (trijstūra KQL laukums ir mazāks par taisnstūra $KNLQ$ laukumu, kas ir vienāds ar $KQ \cdot KN=\Delta x_i \Delta y_i$, bet pēdējam ir augstāka kārta attiecībā pret Δx_i).

4) No aptuvenas vienādības (1) izriet precīza vienādība

$$U=\int_a^b f(x)\,dx.$$

P a s k a i d r o j u m s. Ja n aug, tad summas

$$f(x_0)(x_1-x_0)+f(x_1)(x_2-x_1)+\ldots+f(x_n)(x_{n+1}-x_n) \tag{4}$$

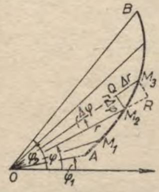
kļūda (neskatoties uz kļūdu uzkrāšanos) tiecas uz nulli, jo atsevišķo saskaitāmo kļūdas dilst straujāk, nekā aug saskaitāmo skaits. Tāpēc U ir summas (4) robeža, t. i.,

$$U=\int_a^b f(x)\,dx.$$

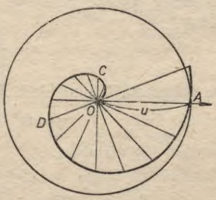
335. §. Figūru laukumu aprēķināšana polārajās koordinātēs

Laukumu S sektoram AOB, ko ierobežo līnija AB un stari OA un OB (365. zīm.), izsaka formula

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi, \tag{1}$$



365. zīm.



366. zīm.

kur r ir līnijas AB mainīgā punkta M polārais rādiuss, φ — tā polārais leņķis.

P a s k a i d r o j u m s. 334. § shēmu šeit pielieto šādā veidā.

1) Laukumu AOB nostādām atbilstībā ar polārā leņķa maiņas intervālu (φ_1, φ_2).

2) Intervālu (φ_1, φ_2) sadalām daļās, pie tam sektors AOB sadalīsies sektoros AOM_1, M_1OM_2 utt.; to laukumi summā dod AOB laukumu.

3) Kā sektoru AOM_1, M_1OM_2 utt. tipisku pārstāvi ņemam vienu no tiem (365. zīmējumā M_2OM_3). Aizstājam to ar riņķa sektoru M_2OQ; pēdējā laukums

$$\frac{1}{2}OM_2\cdot M_2Q=\frac{1}{2}r\cdot r\Delta\varphi=\frac{1}{2}r^2\Delta\varphi$$

ir figūras AOB laukuma elements. Aptuvenās formulas

$$\text{Lauk}_{M_2OM_3}\approx\frac{1}{2}r^2\Delta\varphi \tag{2}$$

kļūdai ir augstāka kārta attiecībā pret $\Delta\varphi$.

Kļūda ir vienāda ar līklīnijas trijstūra M_2QM_3 laukumu, bet pēdējais ir mazāks par figūras QM_2RM_3 laukumu, kas ir vienāds ar $\frac{1}{2}(OM_3^2 - OM_2^2)\Delta\varphi \approx r\Delta r\Delta\varphi$.

4) No aptuvenās vienādības (2) izriet formula (1).

Piemērs. Atrast laukumu figūrai $OCDA$ (366. zīm.), ko ierobežo Arhimeda spirāles (75. §) pirmā vītne un nogrieznis $OA = a$ *(spirāles solis)*.

Izvēloties polāro sistēmu, kā parādīts 366. zīmējumā, dabūjam

$$r = \frac{a}{2\pi}\varphi.$$

Vītnes sākumam O un galam A atbilst vērtības

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 2\pi.$$

Ar formulu (1) atrodam

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\varphi = \frac{a^2}{8\pi^2}\int_0^{2\pi} \varphi^2 d\varphi = \frac{1}{3}\pi a^2, \tag{3}$$

t. i., *pirmās vītnes laukums ir trīsreiz mazāks par riņķa laukumu, kura rādiuss ir spirāles solis.* Šo rezultātu atrada Arhimeds [1].

336. §. Ķermeņa tilpuma aprēķināšana ar paralēliem šķēlumiem

Apskatīsim patvaļīgas formas ķermeni (367. zīm.). Pieņemsim, ka zināmi tā visu plaknei R paralēlo šķēlumu laukumi $F(x)$ (x — attālums no šķēluma līdz plaknei R). Tad ķermeņa tilpums

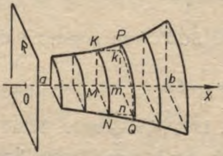
$$V = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx. \tag{1}$$

Paskaidrojums. Sadalām ķermeni paralēlos slāņos; ķermenis $NMKQmP$ ir tipisks šo slāņu pārstāvis. Konstru-

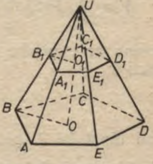
[1] Lai gan Arhimeds atklātā formā nelietoja ne integrāļa un ne robežas jēdzienu, tomēr viņa metode būtībā sakrīt ar integrālrēķinu metodi.

ējam cilindru $NMKnmk$. Tā tilpums $F(x)\Delta x$ ir tilpuma V elements. No šejienes izriet formula (1) (sal. 334. § un 335. §. piezīmi).

1. piemērs. Atrast tilpumu V piramīdai $UABCDE$ (368. zīm.), ja tās pamata laukums ir S un augstums $UO=H$.



367. zīm.



368. zīm.

Atrisinājums. Šķēluma $A_1B_1C_1D_1E_1$ laukumu $F(x)$ atrodam no proporcijas

$$F(x) : S = UO_1^2 : UO^2 = x^2 : H^2.$$

Saskaņā ar formulu (1)

$$V=\int_0^H F(x)\,dx=\frac{S}{H^2}\int_0^H x^2dx=\frac{1}{3}SH. \qquad (2)$$

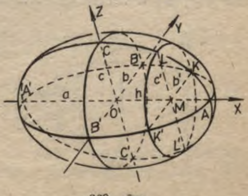
Šī formula ir pazīstama no elementārās ģeometrijas, bet tur izvedums ir daudz komplicētāks.

2. piemērs. Atrast tilpumu elipsoīdam (173. §) ar asīm $2a$, $2b$, $2c$.

Atrisinājums. Galvenajai elipsei $BCB'C'$ paralēls šķēlums $KLK'L'$ (369. zīm.), kas atrodas no tās attālumā $h=OM$, ir (173. §) elipse ar pusasīm

$$b'=MK=b\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}},$$

$$c'=ML=c\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}.$$



369. zīm.

Šķēluma laukums $F(h)$ ir (333. § 3. piemērs)

$$F(h)=\pi b'c'=\pi bc\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right).$$

Formula (1) dod

$$V=\int\limits_{-a}^{+a} F(h)\,dh=2\int\limits_{0}^{a} \pi bc\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)dh=\frac{4}{3}\,\pi abc. \qquad (3)$$

Konusam ar eliptisku pamatu $BCB'C'$ un augstumu $OA=a$ tilpums ir

$$V_1=\frac{1}{3}\,Sa$$

(atrod tāpat kā 1. piemērā), t. i., $V_1=\frac{1}{3}\,\pi abc$. Tātad *elipsoīda tilpums ir četrreiz lielāks par konusa tilpumu,* kura *pamats ir viens galvenais šķēlums, bet virsotne — elipsoīda pretējā virsotne.* Šo rezultātu atrada Arhimeds (rotācijas elipsoīdam).

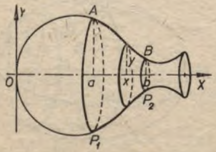
Ja elipsoīds pārvēršas lodē ($a=b=c$), dabūjam pazīstamo formulu $V=\frac{4}{3}\pi r^3$.

337. §. Rotācijas ķermeņa tilpums

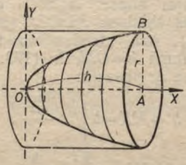
Tilpumu V ķermenim (370. zīm.), ko ierobežo rotācijas virsma un divas rotācijas asij OX perpendikulāras plaknes P_1, P_2, izsaka formula

$$V=\pi\int\limits_{x_1}^{x_2} y^2\,dx, \qquad (1)$$

kur $y=f(x)$ ir meridiāna AB ordināte.



370. zīm.



371. zīm.

Piezīme. Lielums πy^2 ir rotācijas asij perpendikulārā (riņķa) šķēluma laukums (sal. 336. §).

Piemērs. Atrast tilpumu rotācijas paraboloīda (371. zīm.) segmentam, ja tā pamata rādiuss $AB=r$ un augstums $OA=h$.

Atrisinājums. Tāpat kā 333. paragrāfā (1. piemērs) atrodam, ka meridiānu (parabolu) izsaka vienādojums

$$y^2=\frac{r^2x}{h}.$$

Formula (1) dod

$$V=\pi\int_0^h\frac{r^2x}{h}\,dx=\frac{1}{2}\pi r^2h,$$

t. i., paraboloīda segmenta tilpums ir vienāds ar cilindra tilpuma pusi, kuram ir tāds pats pamats un tāds pats augstums.

Šo rezultātu atrada Arhimeds.

338. §. Plaknes līnijas loka garums

Plaknes līnijas loka AB garumu s izsaka (taisnleņķa koordinātēs) formula

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt, \tag{1}$$

kur t ir kāds parametrs, atkarībā no kura izteiktas tekošās koordinātes x, y ($t_2>t_1$).

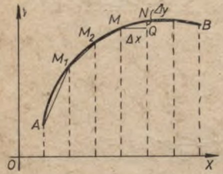
Ja parametrs vēl nav izvēlēts, tad formulu (1) ērtāk uzrakstīt tā:

$$s=\int_{(A)}^{(B)}\sqrt{dx^2+dy^2}. \tag{2}$$

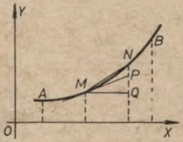
Apzīmējumi (A), (B) norāda, ka par integrācijas robežām jāņem tādas parametra vērtības, kuras atbilst loka AB galiem.

Atsevišķā gadījumā par parametru bieži ir izdevīgi ņemt abscisu x. Tad dabūjam

$$s=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx. \tag{3}$$



372. zīm.



373. zīm.

P a s k a i d r o j u m s. Bezgalīgi mazais loks $\overset{\frown}{MN}$ ir ekvivalents hordai MN (372. zīm.). No otras puses

$$MN=\sqrt{MQ^2+QN^2}=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\approx\sqrt{dx^2+dy^2}.$$

Tātad

$$\overset{\frown}{MN}\approx\sqrt{dx^2+dy^2}.$$

Tātad izteiksme $\sqrt{dx^2+dy^2}$ (tā ir proporcionāla argumenta t pieaugumam Δt) ir loka AB elements (diferenciālis). Saskaņā ar 334. § shēmas 4. p. mēs dabūjam formulu (2).

Loka garuma atrašanu sauc par loka *rektificēšanu* jeb *iztaisnošanu*.

P i e m ē r s. Atrast loka garumu cikloīdas (253. §) $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ vienam zaram.

A t r i s i n ā j u m s.

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=a\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}=$$

$$=a\sqrt{2(1-\cos t)}=2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|, \tag{4}$$

$$s=\int_0^{2\pi}2a\sin\frac{t}{2}\,dt=8a. \tag{5}$$

Cikloīdas viena zara garums ir vienāds ar četrkāršotu veidojošā riņķa diametru.

Ja aprēķinām cikloīdas divu zaru kopīgo garumu ar formulu $s=\int\limits_0^{4\pi} 2a\sin\frac{t}{2}dt$, dabūjam nulli. Kļūda rodas tāpēc, ka intervālā $(2\pi, 4\pi)$

$$\left|\sin\frac{t}{2}\right|=-\sin\frac{t}{2}\left(\text{bet nevis } +\sin\frac{t}{2}\right).$$

P i e z ī m e. Kad mēs mērījam līka celiņa garumu ar soļiem vai kartē iezīmētas līkumotas upes garumu ar doto mērogu, mēs būtībā vadāmies no pārliecības par loka un hordas ekvivalenci. Tādējādi uz šo īpašību uzvedina ikdienas pieredze. Bet, ja mēs nevēlamies pieņemt šo īpašību par aksiomu, bet gribam matemātiski pierādīt, tad jāvadās no kādas loka garuma definīcijas. Šo jēdzienu parasti definē tā.

D e f i n ī c i j a. *Plaknes vai telpas līnijas loka garums ir robeža, uz kuru tiecas lokā ievilktas lauztas līnijas perimetrs, kad lauztās līnijas posmu skaits neierobežoti aug un posmu garumi tiecas uz nulli.*

Vadoties no šīs definīcijas var pierādīt, ka $\smile{MN}\approx MN$. No šīs definīcijas arī tieši atrod formulu (1), tā ka 334. § shēma it kā netiek lietota. Bet būtībā šī shēma ir «paslēpta» pašā definīcijā.

Loka garumu var definēt arī citādi, — piemēram, kā *apvilktas* lauztas līnijas perimetra robežu. Šī definīcija ir ekvivalenta iepriekšējai definīcijai.

339. §. Loka diferenciālis

Loka garuma diferenciāli (īsāk: *loka diferenciāli*) izsaka (338. § paskaidrojums) formula

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}. \tag{1}$$

Ja *par argumentu pieņem x*, tad (373. zīm.)

$$dx=MQ, \quad dy=QP,$$

$$ds=\sqrt{MQ^2+QP^2}=MP,$$

t. i., *loka diferenciālis izsaka pieskares nogriežņa garumu* *no pieskaršanās punkta līdz krustošanās punktam ar jauno* (pēc pieauguma iegūto) *ordinātī.*

P i e m ē r s. Cikloīdas loka diferenciālis ir vienāds ar (sal. 338. § piemēru)

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=a\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt=$$
$$=2a\sin\frac{t}{2}\,dt \quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

340. §. Loka garums un tā diferenciālis polārajās koordinātēs

Loka $\smile{AB}$ (374. zīm.) garumu polārajās koordinātēs r, φ izsaka integrālis

$$s=\int_{(A)}^{(B)}\sqrt{dr^2+r^2d\varphi^2}. \tag{1}$$

Loka diferenciāli izsaka formula

$$ds=\sqrt{dr^2+r^2d\varphi^2}. \tag{2}$$

P a s k a i d r o j u m s. No punkta O, kā no centra, novelkam (374. zīm.) riņķa līniju ar rādiusu $OM=r$. Tās loks $\smile{MK}$ $(=r\Delta\varphi)$, nogrieznis KN $(=\Delta r)$ un līnijas AB loks $\smile{MN}$ $(=\Delta s)$ veido līklīniju trijstūri ar taisno leņķi pie virsotnes K. Lai gan tādam trijstūrim Pitagora teorēma neizpildās precīzi, tomēr, ja loks $\smile{MN}$ ir bezgalīgi mazs, «hipotenūzas» kvadrāts ir ekvivalents «katešu» kvadrātu summai, t. i.,

$$\smile{MN}\approx\sqrt{KN^2+\smile{KM}^2}$$

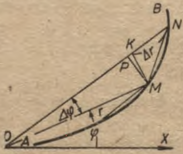
jeb

$$\Delta s\approx\sqrt{\Delta r^2+r^2\Delta\varphi^2}\approx$$
$$\approx\sqrt{dr^2+r^2d\varphi^2}.$$

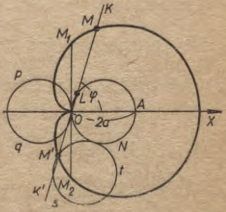
Tātad izteiksme $\sqrt{dr^2+r^2d\varphi^2}$ ir loka s elements (diferenciālis).

Piezīme. Šī paragrāfa formulu (2) var dabūt no 338. § formulas (2) ar substitūciju

$$dx = d(r\cos\varphi) = \cos\varphi dr - r\sin\varphi d\varphi,$$
$$dy = d(r\sin\varphi) = \sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi.$$



374. zīm.



375. zīm.

Piemērs. No punkta O uz riņķa līnijas ar rādiusu a novelkam staru OK (375. zīm.); no punkta L, kur taisne OK otrreiz krusto riņķa līniju, atliekam stara OK virzienā[1] nogriezni $LM=2a$. Līniju, ko, staram griežoties, apraksta punkts M, sauc par *kardioīdu*[2]. Atrast tās garumu.

Atrisinājums. Izvēlamies polāro sistēmu, kā parādīts 375. zīmējumā. Tad dabūjam

$$\left.\begin{aligned} OL &= OA\cos\varphi = 2a\cos\varphi, \\ r &= OL + LM = 2a(\cos\varphi + 1). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Kardioīda tiek aprakstīta pilnīgi, kad φ mainās intervālā $(-\pi, +\pi)$. Tās garums saskaņā ar (1) ir

$$s = \int_{-\pi}^{+\pi} \sqrt{4a^2(1+\cos\varphi)^2 + 4a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 2a\int_{-\pi}^{+\pi} \sqrt{2+2\cos\varphi}\, d\varphi = 4a\int_{-\pi}^{+\pi} \cos\frac{\varphi}{2} d\varphi = 16a. \qquad (4)$$

[1] Kad taisne pieskaras riņķa līnijai punktā O, tad nogriežņi, kas vienādi ar $2a$, jāatliek no O uz abām pusēm ($OM_1 = OM_2 = 2a$).
[2] Tulkojumā «sirdsveidīgā». Sīkāk sk. 508. §.

Piezīme. Kardioīdu var dabūt kā riņķa līnijas Opq (375. zīm.) punkta trajektoriju, ja tā rit bez slīdes pa tāda paša rādiusa riņķa līniju $ONAL$.

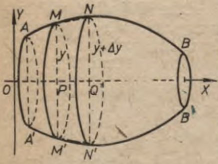
No (4) redzams, ka *kardioīdas garums ir vienāds ar astoņkārtīgu veidojošā riņķa diametru.*

Kardioīdu var aprakstīt, mainot φ no nulles līdz 2π. Bet, ja tās garumu aprēķina ar formulu $s=4a\int\limits_0^{2\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi$, tad dabūjam nulli. Kļūdas cēlonis norādīts 338. paragrāfā.

341. §. Rotācijas virsmas laukums

Laukumu S virsmai, ko izveido loks $\smile{AB}$, rotējot ap OX asi, izsaka integrālis

$$S=\int\limits_{(A)}^{(B)}2\pi y ds, \tag{1}$$



376. zīm.

kur y ir meridiāna AB ordināte, $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$ — tā loka diferenciālis (339. §), (A) un (B) — galējās vērtības parametram, ar kuru izsaka koordinātes.

Paskaidrojums. Virsmu $ABB'A'$ (376. zīm.) sadalām paralēlās joslās un katru joslu aizstājam ar nošķelta konusa sānu virsmu, kuram ir tie paši pamati. Šo virsmu laukumi ir ekvivalenti. Tāpēc

$$\text{Lauk}_{MNN'M'}\approx\pi(PM+QN)MN. \tag{2}$$

Tā kā $PM+QN=2y+\Delta y$, $MN\approx\smile{MN}=\Delta s$, tad

$$\text{Lauk}_{MNN'M'}\approx\pi(2y+\Delta y)\Delta s\approx 2\pi y\Delta s. \tag{3}$$

No šejienes izriet formula (1).

Piemērs. Atrast laukumu virsmai, ko izveido cikloīda, rotējot ap savu pamatu.

A t r i s i n ā j u m s. Dabūjam (338., 339. §)

$$ds = 2a \sin \frac{t}{2} dt \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi),$$

$$S = \int_0^{2\pi} 2\pi a(1-\cos t) \cdot 2a \sin \frac{t}{2}\, dt =$$

$$= 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2}\, dt = \frac{64}{3} \pi a^2.$$

Salīdzināšanas dēļ ņemsim aksiālā šķēluma laukumu (t. i., divkāršotu cikloīdas laukumu) $6\pi a^2$ (333. §). Rotācijas virsmas laukums pārsniedz to $3\frac{5}{9}$ reižu.

P i e z ī m e. Lai pierādītu joslas $MNN'M'$ laukuma un nošķelta konusa sānu virsmas laukuma ekvivalenci, jādefinē jēdziens «liektas virsmas laukums». Tāda definīcija dota 459. paragrāfā. Ievērojot tās komplicētību, bieži dod šādu šaurāku definīciju (kas saskan ar vispārīgo definīciju).

Rotācijas virsmas laukums ir robeža, uz kuru tiecas laukums virsmai, ko rotējot izveido lauzta līnija, kas ievilkta meridiānā, ja lauztās līnijas posmu skaits neierobežoti aug un posmu garumi tiecas uz nulli.

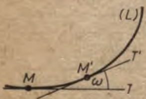
No šīs definīcijas var tieši atrast formulu (1) (salī. 338. § 1. piezīmi).

ZIŅAS PAR PLAKNES UN TELPAS LĪNIJĀM

342. §. Liekums

Pieņemsim, ka, pārejot no līnijas L punkta M uz punktu M' (377. zīm.), pieskare, kas vērsta kustības virzienā, pārejot no stāvokļa MT stāvoklī $M'T'$, pagriežas par leņķi ω [1].

Leņķa ω un loka garuma $\smile{MM'}$ attiecība $\frac{\omega}{\smile{MM'}}$ raksturo līnijas L izliektību gabalā MM', un to sauc par loka MM' *vidējo liekumu*. Leņķi ω pieņemts mērīt radiānos.



377. zīm.

Jebkura taisnes (tās pieskare sakrīt ar pašu taisni) nogriežņa vidējais liekums ir vienāds ar nulli, vidējais liekums jebkuram riņķa līnijas lokam ar rādiusu R ir vienāds ar $\frac{1}{R}$.

Vidējā liekuma dimensija ir apgriezta garuma dimensija, t. i., mainot mērogu, liekuma skaitliskais mērs mainās apgriezti proporcionāli nogriežņu garumu skaitliskajam mēram.

D e f i n ī c i j a. Par līnijas L *liekumu* punktā M sauc robežu, uz kuru tiecas loka $\smile{MM'}$ vidējais liekums, kad punkts M' tiecas uz M. Liekumu apzīmē ar burtu K; tad

$$K = \lim_{\smile{MM'} \to 0} \frac{\omega}{\smile{MM'}}. \qquad (1)$$

Liekums raksturo līnijas izliektību apskatāmajā punktā. Taisnes liekums visur ir vienāds ar nulli, liekums riņķa līni-

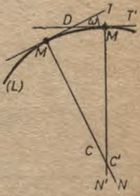
[1] ω — grieķu burts «omega» (mazais).

jai ar rādiusu R visur ir vienāds ar $\frac{1}{R}$. Jebkurai citai līnijai liekums mainās, pārejot no punkta uz punktu. Atsevišķos punktos tas var būt vienāds ar nulli; tādus punktus sauc par *rektificējošiem* jeb *iztaisnojošiem punktiem*. Rektificējošo punktu tuvumā līkne atgādina taisni.

Piezīme. Liekumu (ja tas nav vienāds ar nulli) mēs uzskatām par pozitīvu lielumu. Plaknes līnijas liekumam var pierakstīt zīmi, telpas līnijas liekumam — nevar (sk. 364. §).

343. §. Plaknes līnijas liekuma centrs, rādiuss un riņķis

Pieņemsim, ka punkts M' (378. zīm.), pārvietojoties pa plaknes līniju L, tiecas uz nekustīgu punktu M, kur liekums K nav vienāds ar nulli. Tad punkts C', kur nekustīgā normāle MN krustojas ar normāli $M'N'$, tiecas uz punktu C, kas atrodas no M attālumā $MC=\frac{1}{K}$.[1] Pie tam stars MC ir vērsts uz līnijas L ieliekuma pusi.



378. zīm.

Nogriezni MC sauc par līnijas L *liekuma rādiusu* (punktam M), bet punktu C — par *liekuma centru*.

Liekuma rādiusu apzīmē ar R vai ar grieķu burtu ϱ («ro»). Lielumi R un K ir savstarpīgi apgriezti, t. i.,

$$R=\frac{1}{K} \tag{1}$$

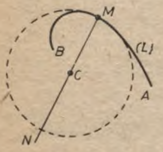
[1] Trijstūrī $MC'M'$ (378. zīm.) leņķis C' ir vienāds ar leņķi ω (leņķi ar savstarpīgi perpendikulārām malām), $\angle C'M'M=90°-\lambda$, kur leņķis $\lambda=\angle MM'D$ ir bezgalīgi mazs (tas ir mazāks par ω). Saskaņā ar sinusu teorēmu $MC'=\frac{\sin(90°-\lambda)}{\sin\omega}MM'=\cos\lambda\,\frac{MM'}{\sin\omega}$. Pārejam uz robežu, ievērojot, ka $MM'\approx\overset{\frown}{MM'}$, $\sin\omega\approx\omega$ un $\cos\lambda\to 1$. Dabūsim

$$MC=\lim\frac{\overset{\frown}{MM'}}{\omega}=1:\lim\frac{\omega}{\overset{\frown}{MM'}}=1:K.$$

un

$$K=\frac{1}{R}. \tag{2}$$

Riņķa līnijas liekuma rādiuss ir vienāds ar tās rādiusu, liekuma centrs sakrīt ar tās centru.



379. zīm.

380. zīm.

381. zīm.

No liekuma centra C (379. zīm.) ar rādiusu $R=MC$ novilkto riņķa līniju sauc par līnijas L *liekuma* jeb *oskulācijas riņķa līniju* (punktam M).

Liekuma rādiusa augšanas virzienā (379. zīmējumā — pa labi no M) līnija L iziet ārpus liekuma riņķa, dilšanas virzienā (379. zīmējumā — pa kreisi no M) iziet liekuma riņķa iekšienē. Tāpēc vispārīgi liekuma riņķis, pieskaroties līnijai L, tai pašā laikā to krusto.

Sevišķos gadījumos, kad liekuma rādiusam punktā M ir ekstrēms, līnija L abās pusēs no punkta M novietojas liekuma riņķa iekšienē (maksimuma gadījumā, 380. zīm.) vai arī ārpus tā (minimuma gadījumā, 381. zīm.). Pirmais gadījums novērojams, piemēram, elipses mazās ass galā, otrs — tās lielās ass galā.

Piezīme. Ja līnijas L punktā M liekums ir vienāds ar nulli, tad normāļu MN un $M'N'$ krustošanās punkts neierobežoti attālinās no M, kad M' tiecas uz M. Ievērojot to, saka, ka rektificējošā punktā liekuma rādiuss ir bezgalīgs un raksta $R=\infty$.

344. §. Plaknes līnijas liekuma, liekuma rādiusa un centra formulas [1]

Līnijas $y=f(x)$ liekumu aprēķina ar formulu

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}, \qquad (1)$$

liekuma rādiusu — ar formulu

$$R=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}, \qquad (2)$$

liekuma centra C koordinātes — ar formulām

$$x_C=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \quad y_C=y+\frac{1+y'^2}{y''}. \qquad (3)$$

Ja $y''=0$, tad liekums ir vienāds ar nulli, liekuma rādiuss ir bezgalīgs un liekuma centra nav. Tas vienmēr novērojams, piemēram, pārliekuma punktos (sal. 283. §).

Formulas (1)—(3) var aizstāt ar simetriskām formulām, ja līniju uzdod ar parametriskajiem vienādojumiem $x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$. Tad

$$K=\frac{|x'y''-y'x''|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}, \qquad (I)$$

$$R=\frac{(x'^2+y'^2)^{3/2}}{|x'y''-y'x''|}, \qquad (II)$$

$$x_C=x-\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-y'x''}y', \quad y_C=y+\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-y'x''}x'. \qquad (III)$$

«Prim» zīmītes nozīmē atvasināšanu pēc parametra t. Formulas (1)—(3) rodas no (I)—(III), ja tanīs ņem $x=t$ (tad $x'=1$ un $x''=0$). Ja ņemam $y=t$ (tad $y'=1$, $y''=0$), t. i., ja līnijas vienādojumu ņemam formā $x=f(y)$, tad (1)—(3) vietā dabūjam šādas formulas:

$$K=\frac{|x''|}{(1+x'^2)^{3/2}}, \qquad (1a)$$

[1] Atbilstošās formulas telpas līnijai dotas 363. paragrāfā.

$$R=\frac{(1+x'^2)^{3/2}}{|x''|}, \tag{2a}$$

$$x_C=x+\frac{1+x'^2}{x''}, \quad y_C=y-\frac{x'(1+x'^2)}{x''}. \tag{3a}$$

Atvasinājumu x', y', x'', y'' eksistence dotās līnijas punktā A nodrošina liekuma eksistenci šai punktā. Apgrieztais apgalvojums nav pareizs: gadās arī tā, ka, neskatoties uz liekumu punktā A, atvasinājumi x', y', x'', y'' (viens vai vairāki) neeksistē. Tad formulas (I)—(III) nav derīgas un tas liecina par parametra neizdevīgu izvēli. Sk. 1. piemēru.

1. piemērs. Atrast liekumu, liekuma rādiusu un centru C parabolai $y^2=2px$ virsotnē $A(0;0)$ (381. zīm.).

Atrisinājums. Visvienkāršāk pieņemt par argumentu ordināti y; no dotā vienādojuma atrodam

$$x=\frac{y^2}{2p}, \quad x'=\frac{y}{p}, \quad x''=\frac{1}{p}. \tag{4}$$

Parabolas virsotnē dabūjam

$$x'=0, \quad x''=\frac{1}{p}. \tag{5}$$

Ar formulām (1a)—(3a) atrodam

$$K=\frac{1}{p}, \quad R=p, \quad x_C=p, \quad y_C=0. \tag{6}$$

Liekuma rādiuss parabolas virsotnē ir vienāds ar tās parametru, t. i., fokuss F dala uz pusēm nogriezni AC.

Ja par argumentu pieņemam parabolas $y^2=2px$ abscisu x, tad (4) vietā dabūjam (sk. 250. §)

$$y'=\frac{p}{y}, \quad y''=-\frac{p^2}{y^3}. \tag{7}$$

Parabolas virsotnē ($x=0$, $y=0$) atvasinājumi y', y'' neeksistē; tātad formulas (1)—(3) tieši lietot nedrīkst. Tomēr visiem pārējiem parabolas punktiem formulas (1)—(3)

ir derīgas un, ievietojot tanīs izteiksmes (7), tās pieņem izskatu

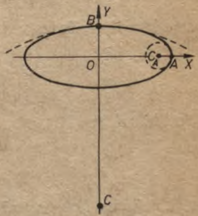
$$\left.\begin{aligned} K&=\frac{p^2}{(y^2+p^2)^{3/2}},\\ R&=\frac{(y^2+p^2)^{3/2}}{p^2}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$x_C=x+\frac{y^2}{p}+p\,(=3x+p).$$

$$y_C=-\frac{y^3}{p^2}. \tag{9}$$

Ja šeit ievieto $x=0$, $y=0$, tad atkal dabūjam vērtības (6). Šī aprēķina jēga ir tāda, ka mēs esam atraduši robežas, uz kurām tiecas lielumi K, R, x_C, y_C, kad parabolas punkts tiecas uz tās virsotni.

2. piemērs. Atrast liekuma rādiusu un centru elipses virsotnēs ar pusasīm a, b (382. zīm.).



382. zīm.

Atrisinājums. Visvienkāršāk lietot elipses parametriskos vienādojumus (252. §)

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t.$$

No tiem atrodam

$$x'=-a\sin t,\quad y'=b\cos t;$$

$$x''=-a\cos t,\quad y''=-b\sin t.$$

Ar formulām (II) un (III) dabūjam

$$R=\frac{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{3/2}}{ab}, \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} x_C&=\frac{(a^2-b^2)\cos^3 t}{a},\\ y_C&=-\frac{(a^2-b^2)\sin^3 t}{b}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Virsotnē $A(a; 0)$, kur $t=0$, dabūjam

$$R_a=\frac{b^2}{a}, \quad x_C=\frac{a^2-b^2}{a}, \quad y_C=0. \tag{12}$$

Virsotnē $B(0; b)$, kur $t=\frac{\pi}{2}$, dabūjam

$$R_b=\frac{a^2}{b}, \quad x_C=0, \quad y_C=-\frac{a^2-b^2}{b}. \tag{13}$$

Piezīme. Sastādot elipses pieskares vienādojumu (252. §)

$$b\cos t\cdot X+a\sin t\cdot Y-ab=0,$$

atrodam, ka elipses centra attālums līdz tai (28. §) ir

$$d=\frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}.$$

Salīdzinot ar (10), atrodam, ka

$$R=\frac{a^2b^2}{d^3},$$

t. i., *elipses liekuma rādiuss ir apgriezti proporcionāls attāluma kubam no elipses centra līdz pieskarei* atbilstošajā punktā. Starp citu, no (12) un (13) atrodam

$$R_a : R_b=b^3 : a^3.$$

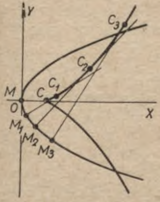
345. §. Plaknes līnijas evolūta

Plaknes līnijas L liekuma centru ģeometrisko vietu L' sauc par līnijas L *evolūtu*[1]. 344. § formulas (III), (3) un (3a), kas dod liekuma centra koordinātes x_C, y_C, reizē ir arī evolūtas parametriskie vienādojumi [formulās (3) un (3a) parametra loma piekrīt attiecīgi x un y]. Izslēdzot parametru, dabūsim vienādojumu, kas saista evolūtas tekošās koordinātes.

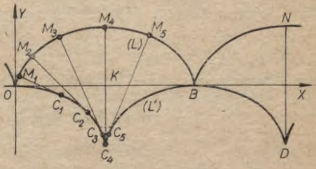
[1] «Evolūta» nozīmē «attītā», «attīstītā». Nosaukuma rašanās paskaidrota 347. paragrāfā.

1. piemērs. Atrast evolūtu parabolai

$$y^2=2px. \tag{1}$$



383. zīm.



384. zīm.

Atrisinājums. Pieņemsim par parametru ordināti y. Ievietojot 344. § formulās (3a) izteiksmes $x'=\frac{y}{p}$, $x''=\frac{1}{p}$, dabūsim

$$x_C=\frac{y^2}{2p}+\frac{p^2+y^2}{p}=\frac{3}{2}\frac{y^2}{p}+p, \tag{2}$$

$$y_C=y-\frac{y(p^2+y^2)}{p^2}=-\frac{y^3}{p^2}. \tag{3}$$

Tie ir evolūtas parametriskie vienādojumi (parametra loma piekrīt y). Lai izslēgtu y, sistēmu (2)—(3) izsakām tā:

$$\frac{2}{3}p(x_C-p)=y^2, \quad p^2y_C=-y^3.$$

Pirmā vienādojuma abas puses kāpinām kubā, otrā — kvadrātā. Pielīdzinot kreisās puses, dabūjam evolūtas vienādojumu

$$27py_C^2=8(x_C-p)^3.$$

Evolūta ir puskubiskā parabola (383. zīm.).

2. piemērs. Atrast evolūtu cikloīdai.

Atrisinājums. No cikloīdas parametriskajiem vienādojumiem

$$x=a(t-\sin t), \quad y=a(1-\cos t) \tag{4}$$

ar 344. § formulām (III) atrodam

$$x_C = a(t+\sin t), \quad y_C = -a(1-\cos t). \tag{5}$$

Vienādojumu (4) un (5) līdzība nav nejauša; ja ar substitūciju

$$t = t' + \pi \tag{6}$$

ieved jaunu parametru t', tad vienādojumi (5) pieņem izskatu

$$\left.\begin{aligned} x_C &= \pi a + a(t' - \sin t'), \\ y_C &= -2a + a(1-\cos t'). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Tātad *cikloīdas L evolūta L'* (384. zīm.) *ir cikloīda, kas ir kongruenta ar doto cikloīdu, bet pārvietota pamata OB virzienā par pusi pamata un novilkta zem pamata ar augstumu vienādā attālumā KC_4.*

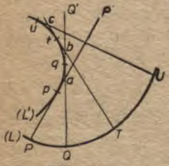
No (6) redzams, ka veidojošo riņķu pagriezieni atbilstošajos cikloīdu punktos atšķiras par 180°; starp citu, vienas cikloīdas virsotnei atbilst otras cikloīdas zaru sakļaušanās punkti.

346. §. Plaknes līnijas evolūtas īpašības

1. īpašība. Līnijas L normāle pieskaras tās evolūtai L' atbilstošajā liekuma centrā.

1. piemērs. Cikloīdas L normāle M_3C_3 (384. zīm.) pieskaras cikloīdai L' pirmās cikloīdas liekuma centrā C_3.

Paskaidrojums. Uz līnijas L normālēm PP', QQ' (385. zīm.) ņemam liekuma centrus p, q. Pieņemsim, ka punkts P ir nekustīgs, bet Q tiecas uz to. Tad punkts q aprakstīs evolūtas L' loku qp un tieksies uz p. Punkts a, kur nekustīgā normāle krustojas ar kustīgo normāli, arī tieksies uz p (saskaņā ar liekuma centra definīciju). Trijstūrī pqa leņķis p ir mazāks par ārējo leņķi $\angle PaQ = \omega$ un tāpēc ir bezgalīgi mazs. Tātad sekante qp tiecas sakrist ar PP', t. i., PP' ir evolūtas pieskare; pieskāršanās punkts ir liekuma centrs p, kas atbilst punktam P.



385. zīm.

2. Īpašība. Pieņemsim, ka līnijas L liekuma rādiuss R aug, pārvietojoties no punkta P uz punktu U (385. zīm.). Tad evolūtas L' loka pu garums ir vienāds ar līnijas L liekuma rādiusa pieaugumu, t. i.,

$$\breve{pu} = R_U - R_P.$$

2. piemērs. Cikloīdai L (384. zīm.) liekuma rādiuss punktā O ir vienāds ar nulli; ejot pa loku OM_4, tas aug un punktā M_4 ir $M_4C_4 = 4a$ (sk. 1. piemēru). Saskaņā ar 2. īpašību cikloīdas L' loka OC_4 garums ir vienāds ar $4a - 0 = 4a$ (sal. 345. § 2. piemēru).

Paskaidrojums. Sadalām evolūtas L' loku pu daļās pq, qt utt.; to skaits pēc tam tieksies uz bezgalību. Pieņemsim, ka visi loki pq, qt, ... ir vienādas kārtas bezgalīgi mazi lielumi. Ar tādu pašu kārtu būs atbilstošie līnijas L loki PQ, QT, ... Starpības $Pa - Qa$, $Tb - Qb$ utt. būs augstākas kārtas bezgalīgi mazi lielumi. Tā kā

$$pa + aq = (Pa - Pp) + (Qq - Qa) = Qq - Pp + (Pa - Qa)$$

un analogi lauztajām līnijām qbt, tcu, ..., tad lauztās līnijas $pqtu$ perimetrs atšķirsies no lieluma

$$(Qq - Pp) + (Tt - Qq) + (Uu - Tt) + \ldots = Uu - Pp$$

par bezgalīgi mazu lielumu (kas rodas, uzkrājoties augstākas kārtas bezgalīgi mazajiem lielumiem).

Tātad evolūtas loka pu garums, kas ir apvilktās lauztās līnijas garuma robeža, ir vienāds ar $Uu - Pp$.

Piezīme. Ja starp līnijas L loka galiem ir punkti ar ekstremālajiem liekuma rādiusiem, tad 2. īpašība nav spēkā. Tā cikloīdas L punktos M_3 un M_5 (348. zīm.) liekuma rādiusi ir vienādi, kamēr loka $C_3C_4C_5$ garums, protams, nav vienāds ar nulli. 2. īpašība nav spēkā tāpēc, ka punktā M_4 liekuma rādiusam ir maksimums. Loks $\breve{C_3C_4}$ ir vienāds ar $M_4C_4 - M_3C_3$, loks $\breve{C_4C_5}$ arī ir vienāds ar $M_4C_4 - M_3C_3$ (bet ne ar $M_3C_3 - M_4C_4$).

347. §. Plaknes līnijas evolvente

Plaknes līniju L var dabūt no tās evolūtas L' ar šādu mehānisku konstrukciju.

Uzvelkam uz evolūtas L' lokanu un neizstiepjamu diegu, kuram, atejot no evolūtas punktā p (385. zīm.), brīvais gals būtu līnijas L punktā P. Ja tagad diegu no evolūtas attin, tad brīvais gals apraksīs līniju L.

386. zīm.

P a s k a i d r o j u m s. Izstiepts diegs visu laiku pieskārsies līnijai L'. Kad tas būs attinies no evolūtas līdz punktam q, tā brīvais gabals būs pieaudzis par loka pq garumu, t. i., (346. § 2. īpašība) par $Qq-Pp$. Brīvais gabals kļūs vienāds ar $Pp+$ $+(Qq-Pp)=Qq$, un diega gals sakritīs ar punktu Q.

Šī konstrukcija ļauj dot šādu ģeometrisku definīciju.

D e f i n ī c i j a. Uz dotās līnijas L' (385. zīm.) izvēlamies loka augšanas virzienu (jebkuru no diviem iespējamiem virzieniem, piemēram, no u uz p); šai virzienā atliekam uz pieskarēm nogriežņus (uU, tT, qQ, ...), kuru garumi samazinās par tik, par cik pieaug loka garums. Šo nogriežņu gala punktu ģeometrisko vietu L sauc par dotās līnijas *evolventi.*

Jebkurai plaknes līnijai L' ir neskaitāms daudzums evolventu (386. zīmējumā PS, P_1S_1, P_2S_2). Visām tām līnija L' ir evolūta.

Līnijas L' evolventes ir tās pieskaru *ortogonālās trajektorijas* (t. i., krusto visas pieskares taisnā leņķī; sal. 346. § 1. īpašību).

Par telpas līnijas evolventi sk. 362. § 2. piezīmi.

348. §. Telpas līnijas parametriskā uzdošana

Līniju telpā, ja to uzskata par virsmu šķelšanās rezultātu, izsaka divu vienādojumu sistēma, kas saista x, y, z (sk. 170. §).

Līniju telpā, ja to uzskata par kustoša punkta trajektoriju, izsaka triju vienādojumu sistēma

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t), \quad z=\psi(t), \tag{1}$$

kas punkta koordinātes izsaka atkarībā no *parametra t* (mehānikā par parametru bieži pieņem laiku). Vienādojumus (1) sauc par telpas līnijas *parametriskajiem vienādojumiem* (sal. 251. §).

Par parametru bieži pieņem vienu koordināti, piemēram, x. Tad līnijas vienādojumiem ir izskats

$$y=\varphi(x), \quad z=\psi(x) \tag{2}$$

(sistēmas (1) pirmais vienādojums pārvēršas identitātē $x=x$).

Ar vienādojumiem (2) nevar izteikt līniju, kas atrodas OX asij perpendikulārā plaknē (visiem tādas līnijas punktiem ir viena un tā pati abscisa).

Ja kādas virsmas vienādojums pēc izteiksmju (1) ievietošanas pārvēršas identitātē, tad līnija (1) atrodas uz šīs virsmas.

Jebkuru līniju var izteikt parametriski neskaitāmos veidos. Ja ir zināma viena parametrisko vienādojumu sistēma, tad jebkuru citu sistēmu dabūsim, aizstājot t ar kādu jaunā parametra t' funkciju.

Līnijas (1) projekciju uz plakni $z=c$ (atsevišķā gadījumā uz koordinātu plakni XOY) izsaka vienādojumi

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t), \quad z=c. \tag{3}$$

Vienādojumu $z=c$ bieži neraksta, paturot to vērā. Analogi dabū projekcijas uz plaknēm $x=a$ un $y=b$.

P i e m ē r s. Parametriskie vienādojumi

$$x=-2+t, \quad y=3+2t, \quad z=1-2t \tag{1a}$$

izsaka taisni.

Ja par parametru pieņem x, tad šo taisni izsaka vienādojumi

$$y=2x+7, \quad z=-2x-3. \tag{2a}$$

Taisne (1a) atrodas uz virsmas

$$z-\frac{1}{2}=\frac{2x^2}{7}-\frac{y^2}{14} \tag{4}$$

(hiperboliskais paraboloīds), jo vienādība (4) pārvēršas par identitāti, ja tanī ievieto izteiksmes (1a).

Taisne (1a) atrodas arī plaknē

$$y+z-4=0. \tag{5}$$

Tātad taisne (1a) rodas, šķeļoties virsmām (4) un (5).

No šejienes neizriet, ka virsmas (4) un (5) šķeļas *tikai* taisnes (1a) punktos. Plakne (5) šķeļ paraboloīdu (4) pa divām taisnlīnijas veidotājām (180. §); viena no tām ir taisne (1a).

Ņemot izteiksmi $t=2+\frac{1}{2}t'$, kur parametrs t izteikts ar jaunu parametru t', dabūsim tās pašas taisnes citus parametriskos vienādojumus:

$$x=\frac{1}{2}t', \quad y=7+t', \quad z=-3-t'. \tag{1b}$$

Taisnes (1a) projekciju XOY plaknē izsaka parametriskie vienādojumi

$$x=-2+t, \quad y=3+2t \tag{3a}$$

(paturēts vērā vienādojums $z=0$). Tās pašas projekcijas vienādojums no (1b) būs

$$x=\frac{1}{2}t', \quad y=7+t' \tag{3b}$$

utt. Izslēdzot parametru, abos gadījumos dabūjam $y=2x+7$.

349. §. Skrūves līnija

Pieņemsim, ka punkts M (387. zīm.) vienmērīgi kustas pa apaļa cilindra veidotāju QR, bet pati veidotāja vienmērīgi griežas pa cilindra virsmu. Tad punkts M apraksta līkni AMC, kuru sauc par *skrūves līniju*. Par skrūves līnijas *rādiusu* sauc tā cilindra rādiusu a, uz kura uzvijas skrūves līnija.

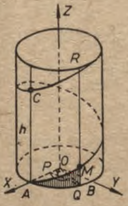
Ja punkta M kustību novēro no tā pamata puses, uz kuru tas kustas, tad veidotājas griešanās būs vai nu pozitīva (pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam), vai arī negatīva (pulksteņa rādītāja kustības virzienā)[1]. Pirmajā gadījumā skrūves līniju sauc par *labo* (388. zīm. a), otrā — par *kreiso* (388. zīm. b).

Taisnlīnijas ceļu $AC=h$ (387. zīm.), kuru punkts M noiet pa veidotāju pilna apgrieziena laikā, sauc par skrūves līni-

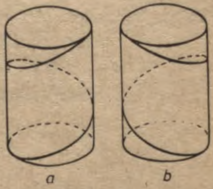
[1] Ja punkts M kustēsies pa vītnes līniju pretējā virzienā, tad jānovēro būs no otra pamata, bet arī veidotāja griezīsies uz pretējo pusi. Tātad pozitīvā griešanās paliks pozitīva, bet negatīvā — negatīva.

jas *kāpi*. Labās skrūves līnijas kāpi skaita par pozitīvu, kreisās — par negatīvu.

Labo un kreiso skrūves līniju (ar vienu un to pašu rādiusu un vienu un to pašu kāpes absolūto vērtību) sakļaut nevar. Viena ir otras spoguļattēls.



387. zīm.



388. zīm.

P i e z ī m e. Ja cilindrisku virsmu izklāj plaknē, tad riņķa līnija AQB (387. zīm.) pārvēršas taisnā līnijā, kas ir perpendikulāra pret veidotājām. Tā kā nogrieznis QM ir proporcionāls lokam AQ, t. i.,

$$QM : \overset{\frown}{AQ} = h : 2\pi a, \tag{1}$$

tad skrūves līnija pārvērtīsies taisnē (389. zīmējumā AM). Tās slīpuma leņķi pret veidotājām nosaka formula

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{AQ}{QM} = \frac{a}{b}, \tag{2}$$

kur $b = \dfrac{h}{2\pi}$.

389. zīm.

S k r ū v e s l ī n i j a s p a r a m e t r i s k i e v i e n ā d o j u m i. Cilindra asi pieņemsim par OZ asi (387. zīm.), OX asi vērsīsim uz patvaļīgi izvēlētu skrūves līnijas punktu A. Par parametru t pieņemsim ass šķēluma plaknes $OQMR$ pagrieziena leņķi no sākuma stāvokļa OAC. Tad

$$x = OP = a\cos t,\quad y = PQ = a\sin t,\quad z = QM = bt. \tag{3}$$

Divi vienādojumi $y=a \sin t$, $z=bt$ izsaka skrūves līnijas projekciju YOZ plaknē. Šī projekcija ir sinusoīda. Projekcija XOZ plaknē arī ir sinusoīda, bet XOY plaknē — riņķa līnija.

350. §. Telpas līnijas loka garums

Telpas līnijas loka $\overset{\frown}{AB}$ garumu izsaka integrālis

$$s=\int\limits_{(A)}^{(B)} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt \tag{1}$$

jeb

$$s=\int\limits_{(A)}^{(B)} \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}. \tag{2}$$

Loka diferenciālis ir (sal. 339. §)

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt. \tag{3}$$

1. piemērs. Atrast skrūves līnijas vienas vītnes garumu s_1.

Atrisinājums. Formula (2), ievērojot 349. § formulas (3), dod

$$s_1=\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{[d(a\cos t)]^2+[d(a\sin t)]^2+[d(bt)]^2}=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2}\,dt=2\pi\sqrt{a^2+b^2}, \tag{4}$$

t. i., *skrūves līnijas vienas vītnes garums ir vienāds ar tāda trijstūra hipotenūzu, kuram viena katete* ($2\pi a$) *ir vienāda ar pamata riņķa līniju, bet otra* ($2\pi b$) *— ar skrūves līnijas kāpi* (sal. 349. § piezīmi).

Ja loka sākuma punkts ir nekustīgs, bet gala punkts mainās, tad loka garums ir parametra t funkcija un tātad (348. §) to pašu var pieņemt par parametru.

2. piemērs. Uzrakstīt vienādojumu skrūves līnijai, pieņemot par parametru loka garumu, kuru skaita no sākuma punkta $t=0$.

Atrisinājums. Tāpat kā 1. piemērā atrodam

$$s=\int_0^t \sqrt{a^2 \sin^2 t+a^2 \cos^2 t+b^2}\, dt=\sqrt{a^2+b^2}\, t. \tag{5}$$

Izsakot t atkarībā no s un ievietojot 349. § vienādojumos (3), dabūjam

$$x=a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad y=a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad z=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\, s. \tag{6}$$

351. §. Telpas līnijas pieskare

Pieskare līnijai (L) punktā $M(x; y; z)$ ir taisne MT, uz kuru tiecas sekante MM', kad punkts M' tiecas uz punktu M (sal. 225. §).

Ja līnija (L) uzdota ar parametriskajiem vienādojumiem

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t), \quad z=\psi(t), \tag{1}$$

tad par pieskares virziena vektoru (143. §) var ņemt vektoru [1]

$$\mathbf{r}'=\left\{\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right\} \tag{2}$$

vai arī ar to kolineāru vektoru

$$\mathbf{t}=\left\{\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right\}. \tag{3}$$

Tā modulis ir vienāds ar vienu [2]. Tāpēc vektoru $\mathbf{t}$ sauc par *pieskares vienības vektoru.*

Vektora $\mathbf{t}$ koordinātes ir pieskares virziena kosinusi (144. §).

$$\cos \alpha=\frac{dx}{ds}, \quad \cos \beta=\frac{dy}{ds}, \quad \cos \gamma=\frac{dz}{ds} \tag{4}$$

(390. zīmējumā $\alpha=\angle AMT$, $\beta=\angle BMT$, $\gamma=\angle CMT$).

---

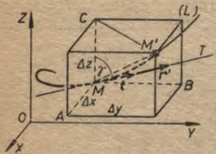
[1] Vektors r' ir rādiusvektora r (x, y, z) atvasinājums (sk. 355. § teorēmu).

[2] $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{ds^2}=\frac{ds^2}{ds^2}=1.$

P a s k a i d r o j u m s. Par sekantes virziena vektoru var pieņemt vektoru $\overrightarrow{MM'}=\{\Delta x, \Delta y, \Delta z\}$ un līdz ar to arī ar to kolineāros vektorus $\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}=\left\{\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}\right\}$ un $\frac{\overrightarrow{MM'}}{\smile{MM'}}=\left\{\frac{\Delta x}{\Delta s}, \frac{\Delta y}{\Delta s}, \frac{\Delta z}{\Delta s}\right\}$.

Formulas (2) un (3) iegūst ar robežpāreju.

No 390. zīm. dabūjam $\angle CMM'=\frac{MC}{MM'}\approx\frac{\Delta z}{\Delta s}$. Robežpāreja dod $\cos\gamma=\frac{dz}{ds}$. Analogi dabūjam abas pārējās (4) formulas.



390. zīm.

Pieskares simetriskie vienādojumi ir

$$\frac{X-x}{x'}=\frac{Y-y}{y'}=\frac{Z-z}{z'}. \tag{5}$$

«Prim» zīmītes apzīmē atvasinājumus pēc jebkura parametra.

P i e m ē r s. Apskatīsim skrūves līniju (349. §)

$$x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt. \tag{1a}$$

Vektors

$$r'=\{-a\sin t,\ a\cos t,\ b\}=\{-y, x, b\} \tag{2a}$$

ir pieskares virziena vektors. No 350. § vienādojumiem (6) atrodam pieskares vienības vektoru

$$t=\left\{-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\}, \tag{3a}$$

tātad

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha&=-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}=-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t,\\ \cos\beta&=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t,\quad \cos\gamma=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.\end{aligned}\right\} \tag{4a}$$

Pēdējā formula dod $\operatorname{tg}\gamma = \frac{a}{b}$ (sal. 349. §).

Pieskares vienādojumi ir

$$\frac{X-a\cos t}{-a\sin t}=\frac{Y-a\sin t}{a\cos t}=\frac{Z-bt}{b} \tag{5a}$$

jeb

$$\frac{X-x}{-y}=\frac{Y-y}{x}=\frac{Z-z}{b}. \tag{5b}$$

Parametriskā formā

$$X=x-yu,\quad Y=y+xu,\quad Z=z+bu. \tag{6}$$

Sākuma punktā ($t=0$, $x=a$, $y=0$, $z=0$) pieskari izsaka vienādojumi $X=a$, $Y=au$, $Z=bu$.

352. §. Normālplakne

Plakni P (391. zīm.), kas iet caur līnijas L punktu M perpendikulāri pieskarei MT, sauc par līnijas L *normālplakni*. Pieskares virziena vektors (351. §) $\mathbf{r}'=\{x', y', z'\}$ ir plaknes P normālais vektors. Normālplaknes vienādojums ir

$$(X-x)x'+(Y-y)y'+(Z-z)z'=0$$

jeb vektoriālā formā

$$(\mathbf{R}-\mathbf{r})\mathbf{r}'=0.$$

Piemērs. Normālplaknes vienādojums skrūves līnijai

$$x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad z=bt$$

ir

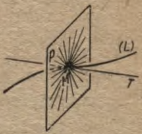
$$(X-a\cos t)(-a\sin t)+(Y-a\sin t)(a\cos t)+(Z-bt)b=0$$

jeb

$$-yX+xY+bZ-bz=0.$$

Normālplakni sākuma punktā (a; 0; 0) izsaka vienādojums

$$aY+bZ=0.$$



391. zīm.

Jebkuru taisni, kas iet caur telpas līnijas L punktu M un ir perpendikulāra pieskarei MT, sauc par līnijas L *nor-*

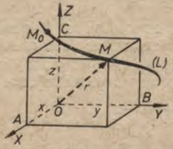
māli (punktā M). Telpas līnijai ir neskaitāms daudzums normāļu. Visas tās atrodas normālplaknē.

Ja līnija L atrodas vienā plaknē, tad no normāļu kopas var izdalīt vienu normāli *(galvenā normāle)*, kas atrodas šai plaknē. Telpas līnijai arī var izdalīt galveno normāli (359. §).

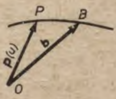
353. §. Skalāra argumenta vektorfunkcija

D e f i n ī c i j a. Vektoru p sauc par skalāra argumenta *u vektoriālu funkciju* jeb *vektorfunkciju*, ja katrai skaitliskai vērtībai, kuru var pieņemt u, atbilst noteikta vektora p vērtība (t. i., noteikts šī vektora modulis un noteikts virziens).

Pretēji vektoriālai funkcijai skalāru lielumu, kas atkarīgs no u, sauc par *skalāru funkciju.*



392. zīm.



393. zīm.

1. p i e m ē r s. Punkts M kustas pa līniju L (392. zīm.). Ātrums v (uzskatot to par vektoru) ir skalāra argumenta t (no sākuma momenta skaitītā laika) v e k t o r f u n k c i j a, jo katrā momentā vektoram v ir noteikts modulis un noteikts virziens (tas ir kolineārs ar līnijas L pieskari). Vektoru v var uzskatīt arī par skalāra argumenta s (loka M_0M garuma) funkciju. Ātruma m o d u l i s ir argumenta t (vai s) s k a l ā r a funkcija.

2. p i e m ē r s. Punkta M, kas apraksta līniju L (392. zīm.), rādiusvektors (95. §) $\overrightarrow{OM}$ ir loka $s=\overset{\frown}{M_0M}$ garuma v e k t o r f u n k c i j a. Vektora $\overrightarrow{OM}$ koordinātes x, y, z (t. i., punkta M koordinātes) ir loka garuma s s k a l ā r a s funkcijas (sal. 350. § 2. piemēru).

P i e z ī m e. Ja vektora $\mathbf{p}$ sākuma punkts ir kustīgs (tā kā 1. piemērā), tad var izvēlēties kādu nekustīgu punktu O (393. zīm.) un pieņemt to par sākumu vektoram $\overrightarrow{OP}$, kas vienāds ar vektoru $\mathbf{p}$. Gala P ģeometrisko vietu (parasti tā ir kāda līnija) sauc par vektorfunkcijas $\mathbf{p}$ *hodogrāfu.*

V e k t o r f u n k c i j a s a p z ī m ē j u m s. Pieraksts

$$\mathbf{p}=\mathbf{p}(u)$$

nozīmē, ka $\mathbf{p}$ ir skalāra argumenta u vektorfunkcija.

354. §. Vektorfunkcijas robeža

D e f i n ī c i j a. Pastāvīgu vektoru $\mathbf{b}$ sauc par vektorfunkcijas $\mathbf{p}(u)$ *robežu,* kad $u\to a$ (vai kad $u\to\infty$), ja vektoru $\mathbf{p}(u)$ un $\mathbf{b}$ starpības modulis ir bezgalīgi mazs, kad $u\to a$ (kad $u\to\infty$).

P i e r a k s t s.

$$\lim_{u\to a}\mathbf{p}(u)=\mathbf{b}. \tag{1}$$

P a s k a i d r o j u m s. Pārnesam mainīgo vektoru $\mathbf{p}(u)$ uz nekustīgu sākumu O (393. zīm.). Ja, kad $u\to a$, kustīgais gals P tiecas sakrist ar nekustīgo punktu B, tad vektors $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$ ir vektora $\mathbf{p}(u)$ robeža. Starpība $\mathbf{p}(u)-\mathbf{b}$ ir vektors $\overrightarrow{BP}$, bet tā modulis ir bezgalīgi mazs.

1. p i e z ī m e. Ja vektorfunkcijas $\mathbf{p}(u)$ modulis ir bezgalīgi mazs, tad arī pašu vektoru sauc par *bezgalīgi mazu.* Par bezgalīgi maza vektora *kārtu* sauc tā moduļa kārtu.

2. p i e z ī m e. Vektorfunkcijas nepārtrauktību definē tāpat kā skalārai funkcijai (218. §). Uzskatāmi vektorfunkcijas nepārtrauktība izpaužas tādējādi, ka tās hodogrāfs ir nepārtraukta līnija. Ja vektors $\mathbf{p}$ ir nepārtraukta argumenta u funkcija, tad tā koordinātes arī ir nepārtrauktas (skalāras) u funkcijas un otrādi.

3. p i e z ī m e. Teorēmas par summas un reizinājuma robežu attiecināmas arī uz vektorfunkcijām, pie kam drīkst apskatīt visus iespējamos reizinājumus (skalāras funkcijas reizinājumu ar vektoriālu funkciju, divu vektorfunkciju skalāru reizinājumu, to vektoriālu reizinājumu, triju vektorfunkciju jauktu reizinājumu). Teorēmu par dalījuma robežu var pielietot vienīgajam dalījuma veidam, ko apskata vektoru algebrā (vektorfunkcijas dalījums ar skalāru funkciju).

355. §. Vektorfunkcijas atvasinājums

D e f i n ī c i j a. Par vektorfunkcijas $\mathbf{p}(u)$ atvasinājumu sauc vektoru

$$\mathbf{p}' = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{p}(u+\Delta u) - \mathbf{p}(u)}{\Delta u}. \quad (1)$$

394. zīm.

Vektors $\mathbf{p}'$ pats ir argumenta u vektorfunkcija. Tāpēc lieto arī nosaukumu — *atvasinātā vektorfunkcija*; to apzīmē ar $\mathbf{p}'(u)$.

Ģ e o m e t r i s k ā n o z ī m e. Pieņemsim, ka vektora $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}(u)$ (394. zīm.) kustīgais gals apraksta līniju L [vektorfunkcijas $\mathbf{r}(u)$ hodogrāfu]. Tad vektors $\mathbf{r}'(u)$ ir vērsts pa pieskari MT uz parametra u augšanas pusi; tā garums $|\mathbf{r}'(u)|$ ir vienāds ar $\left|\frac{ds}{du}\right|$ (sk. 1. piemēru). Ja par argumentu pieņemam s, tad vektorfunkcijas atvasinājuma garums ir vienāds ar vienu (sk. 2. piemēru).

P a s k a i d r o j u m s. Pārejot no punkta $M(u)$ uz punktu $M'(u+\Delta u)$, vektors $\mathbf{r}(u)$ iegūst pieaugumu

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(u+\Delta u) - \mathbf{r}(u) = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'}.$$

Vektors $\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta u} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta u}$ ir vērsts pa sekanti MM'; tā garums ir vienāds ar $\frac{MM'}{|\Delta u|} \approx \frac{\overset{\frown}{MM'}}{|\Delta u|} = \left|\frac{\Delta s}{\Delta u}\right|$. Kad $\Delta u \to 0$, sekante MM' tiecas sakļauties ar pieskari, bet attiecība $\frac{\Delta s}{\Delta u}$ tiecas uz robežu $\frac{ds}{du}$.

Vektora $\mathbf{p}(u)$ *atvasinājuma* $\mathbf{p}'(u)$ *koordinātes ir attiecīgi vienādas ar vektora* $\mathbf{p}(u)$ *koordinātu atvasinājumiem*, t. i.,

$$[x(u)\mathbf{i} + y(u)\mathbf{j} + z(u)\mathbf{k}]' = x'(u)\mathbf{i} + y'(u)\mathbf{j} + z'(u)\mathbf{k}, \quad (2)$$

jeb ar citiem apzīmējumiem

$$\{x,\ y,\ z\}' = \{x',\ y',\ z'\}. \quad (3)$$

1. piemērs. Ar 349. § apzīmējumiem skrūves līnijas rādiusvektoru r izsaka atkarībā no parametra t šādā veidā:

$$\mathbf{r}=\{a\cos t,\ a\sin t,\ bt\}.$$

Saskaņā ar (3)

$$\mathbf{r}'=\{-a\sin t,\ a\cos t,\ b\}.$$

Vektors $\mathbf{r}'$ vērsts pa skrūves līnijas pieskari [sal. 351. § formulu (2a)]; tā garums $\sqrt{a^2+b^2}$ ir vienāds ar $\frac{ds}{dt}$ [sal. 350. § (5)].

2. piemērs. Ja par skrūves līnijas rādiusvektora $\mathbf{r}$ argumentu pieņemam loku s, tad (350. § 2. piemērs)

$$\mathbf{r}=\left\{a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}s\right\};$$

$$\mathbf{r}'=\left\{\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\}.$$

Vektora $\mathbf{r}'$ modulis ir

$$\frac{a^2}{a^2+b^2}\sin^2\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{a^2}{a^2+b^2}\cos^2\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b^2}{a^2+b^2}=1.$$

Augstākas kārtas atvasinājumi. Tos definē tāpat kā skalārām funkcijām un apzīmē ar $\mathbf{p}''(u)$, $\mathbf{p}'''(u)$ utt. Atvasinājumu izteiksmes ar diferenciāļiem dotas 356. paragrāfā.

Atvasinājumu mehāniskā nozīme. Pieņemsim, ka $\mathbf{r}(t)$ ir vektorfunkcija, kas izsaka kustoša punkta rādiusvektoru atkarībā no laika t. Tad $\mathbf{r}'(t)$ ir punkta M ātruma vektors, bet $\mathbf{r}''(t)$ — tā paātrinājuma vektors.

356. §. Vektorfunkcijas diferenciālis

Vektorfunkcijas $\mathbf{p}(u)$ diferenciāli definē tāpat kā skalārai funkcijai (228. §) un apzīmē ar $d\mathbf{p}$.

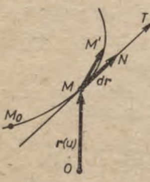
Vektorfunkcijas $\mathbf{p}(u)$ diferenciālis ir vektors; tas ir vienāds ar vektorfunkcijas atvasinājuma $\mathbf{p}'(u)$ un argumenta pieauguma reizinājumu, t. i.,

$$d\mathbf{p}=\mathbf{p}'(u)\Delta u \tag{1}$$

jeb

$$d\mathbf{r}=\mathbf{r}'(u)\,du. \tag{2}$$

Ģeometriskā nozīme. Diferenciālis $d\mathbf{r}(u)$ ir vektors $\overrightarrow{MN}$ (395. zīm.), kas vērsts pa pieskari MT; vektora $d\mathbf{r}$ koordinātes ir punkta M koordinātu x, y, z diferenciāļi, t. i.,



395. zīm.

$$d\mathbf{r}=\{dx,\ dy,\ dz\}. \tag{3}$$

Vektora $d\mathbf{r}$ garums ir vienāds ar loka $s=\smile{M_0M}$ diferenciāli

$$|d\mathbf{r}|=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=ds, \tag{4}$$

t. i.,

$$d\mathbf{r}^2=ds^2. \tag{5}$$

Ja vektorfunkcijas $\mathbf{r}(s)$ arguments ir loks s, tad $|d\mathbf{r}|=\Delta s=\smile{MM'}$. Vispārīgajā gadījumā $|\Delta \mathbf{r}|$ atšķiras no loka $\smile{MM'}$ (un arī no hordas MM') par augstākas kārtas bezgalīgi mazu lielumu attiecībā pret Δu.

Izteiksmes (2) invariance. Formula (2) ir pareiza arī tai gadījumā, kad u uzskata par kāda argumenta funkciju. Formulai (1) šī īpašība nepiemīt (sal. 234. §).

Augstākas kārtas diferenciāļi. Tos definē tāpat kā skalārajām funkcijām (258. §) un apzīmē ar $d^2\mathbf{r}$, $d^3\mathbf{r}$ utt.

Atvasinājuma izteiksmes ar diferenciāļiem:

$$\mathbf{r}'(u)=\frac{d\mathbf{r}}{du}, \tag{6}$$

$$\mathbf{r}''(u)=\frac{d^2\mathbf{r}}{du^2},\quad \mathbf{r}'''(u)=\frac{d^3\mathbf{r}}{du^3},\ \dots \tag{7}$$

Formulā (6) u var būt tiklab neatkarīgais, kā arī atkarīgais mainīgais; formulas (7) ir pareizas, kad u ir neatkarīgais mainīgais; pretējā gadījumā tās vispārīgi nav pareizas (sal. 259. §).

357. §. Vektorfunkcijas atvasinājuma un diferenciāļa īpašības

1. Pastāvīga vektora **a** atvasinājums ir vienāds ar nulli, diferenciālis arī ir vienāds ar nulli, t. i.,

$$\frac{d\mathbf{a}}{du}=0, \quad d\mathbf{a}=0. \tag{1}$$

Otrādi, ja vektora atvasinājums ir identiski vienāds ar nulli, tad vektors ir pastāvīgs.

P i e z ī m e. Pastāvīgam vektoram ir ne tikai pastāvīgs garums, bet arī nemainīgs virziens. Mainīgam vektoram **p** ar pastāvīgu garumu atvasinājums $\frac{d\mathbf{p}}{du}$ nav vienāds ar nulli (tas ir perpendikulārs vektoram **p**; sk. 6. īpašību).

2. Vairāku vektoru summas diferenciālis ir vienāds ar to diferenciāļu summu. Analoga īpašība ir atvasinājumam, t. i.,

$$d\,[\mathbf{p}(u)+\mathbf{q}(u)-\mathbf{r}(u)]=d\mathbf{p}(u)+d\mathbf{q}(u)-d\mathbf{r}(u), \tag{2}$$

$$\frac{d}{du}\,[\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{r}]=\frac{d\mathbf{p}}{du}+\frac{d\mathbf{q}}{du}-\frac{d\mathbf{r}}{du}. \tag{2a}$$

3. Visu veidu vektoru reizinājumiem ir spēkā diferencēšanas formulas, kas ir analogas 239. § formulām, vienīgi ar to atšķirību, ka vektoriālajos un jauktajos reizinājumos stingri jāievēro attiecīgā reizinātāju kārtība (sal. 112. § 2. p., 117. § 1. p.):

$$d(m\mathbf{p})=m\,d\mathbf{p}+\mathbf{p}\,dm, \tag{3}$$

$$d(\mathbf{p}\times\mathbf{q})=\mathbf{p}\times d\mathbf{q}+d\mathbf{p}\times\mathbf{q}, \tag{4}$$

$$d(\mathbf{p}\mathbf{q})=\mathbf{p}\,d\mathbf{q}+\mathbf{q}\,d\mathbf{p}, \tag{5}$$

$$d(\mathbf{p}\mathbf{q}\mathbf{r})=d\mathbf{p}\mathbf{q}\mathbf{r}+\mathbf{p}\,d\mathbf{q}\mathbf{r}+\mathbf{p}\mathbf{q}\,d\mathbf{r}. \tag{6}$$

Atbilstošās formulas atvasinājumiem:

$$\frac{d}{du}(m\mathbf{p})=m\frac{d\mathbf{p}}{du}+\mathbf{p}\frac{dm}{du}, \tag{3a}$$

$$\frac{d}{du}(\mathbf{p}\times\mathbf{q})=\mathbf{p}\times\frac{d\mathbf{q}}{du}+\frac{d\mathbf{p}}{du}\times\mathbf{q}, \tag{4a}$$

$$\frac{d}{du}(\mathbf{p}\mathbf{q})=\mathbf{p}\frac{d\mathbf{q}}{du}+\mathbf{q}\frac{d\mathbf{p}}{du}, \tag{5a}$$

$$\frac{d}{du}(\mathbf{p}\mathbf{q}\mathbf{r})=\frac{d\mathbf{p}}{du}\mathbf{q}\mathbf{r}+\mathbf{p}\frac{d\mathbf{q}}{du}\mathbf{r}+\mathbf{p}\mathbf{q}\frac{d\mathbf{r}}{du}. \tag{6a}$$

4. Kā formulu (5) un (5a) atsevišķu gadījumu dabūjam

$$d(\mathbf{p}^2)=2\mathbf{p}d\mathbf{p}, \quad \frac{d}{du}(\mathbf{p}^2)=2\mathbf{p}\frac{d\mathbf{p}}{du}. \tag{7}$$

5. Pastāvīgu reizinātāju (skalāru vai vektoriālu) drīkst iznest pirms diferenciāļa (atvasinājuma) zīmes, t. i.,

$$d(a\mathbf{p})=ad\mathbf{p} \quad (a=\text{const}), \tag{3b}$$

$$d(\mathbf{a}\times\mathbf{q})=\mathbf{a}\times d\mathbf{q} \quad (\mathbf{a}=\text{const}), \tag{4b}$$

$$d(\mathbf{a}\mathbf{q})=\mathbf{a}d\mathbf{q} \quad (\mathbf{a}=\text{const}), \tag{5b}$$

$$d(\mathbf{a}\mathbf{q}\mathbf{r})=\mathbf{a}d(\mathbf{q}\times\mathbf{r}) \quad (\mathbf{a}=\text{const}). \tag{6b}$$

Izriet no 1. un 3. īpašības.

6. Ja vektors $\mathbf{p}(u)$ saglabā pastāvīgu garumu, tad tas ir perpendikulārs vektoram $\mathbf{p}'(u)$ un arī vektoram $d\mathbf{p}(u)$, t. i., ja

$$\mathbf{p}^2=\text{const}, \tag{8}$$

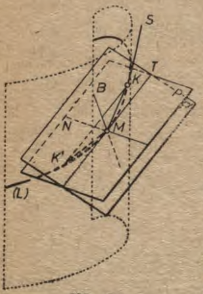
tad (sal. 4. p.)

$$\mathbf{p}\mathbf{p}'=0, \quad \mathbf{p}d\mathbf{p}=0. \tag{9}$$

Izriet no (7).

G e o m e t r i s k i: vektora $\mathbf{p}(u)$ hodogrāfs ir sfēriska līnija; tās pieskare ir perpendikulāra sfēras rādiusam.

358. §. Pieslejplakne



396. zīm.

D e f i n ī c i j a. Par līnijas L *oskulācijas* jeb *pieslejplakni* (punktā M) sauc plakni P, ar kuru tiecas sakļauties plakne KMK' (396. zīm.), kad divi punkti K un K' (kas viens ar otru nesakrīt), paliekot uz līnijas L, tiecas uz punktu M.

1. p i e z ī m e. Līknei L, kas atrodas vienā plaknē Q, pieslejplakne sakrīt ar plakni Q. Taisnei pieslejplakne paliek nenoteikta.

P a s k a i d r o j u m s. Uz līnijas L stieples modeļa atzīmējam trīs punktus M, K, K'. Ja tie nav pārāk tālu viens no otra, tad loks KMK' praktiski novietosies plaknē KMK'

(kaut arī loks jūtami atšķirtos no taisnlīnijas formas). Pieslejplakne ir plaknes KMK' abstrakts attēls. Ja uz modeļa uzliek papīra lapu tā, lai tā praktiski sakristu ar pieslejplakni, tad tā, neskatoties uz zināmu slīpumu, saglabās līdzsvaru (pateicoties berzei gabalā KMK'). Visos citos stāvokļos lapa nenoturēsies uz modeļa.

Pieslejplaknes vienādojums. «Plaknes vektors» $\mathbf{r}'(u)$ un «paātrinājuma vektors» $\mathbf{r}''(u)$ atrodas pieslejplaknē. Ja tie nav kolineāri, tad vektoriālais reizinājums

$$\mathbf{B}=\mathbf{r}'\times\mathbf{r}'' \qquad (1)$$

ir pieslejplaknes normālais vektors[1] un tās vienādojums ir

$$(\mathbf{R}-\mathbf{r})\mathbf{r}'\mathbf{r}''=0 \qquad (2)$$

jeb koordinātu formā

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}=0. \qquad (3)$$

Piemērs. Atrast pieslejplakni skrūves līnijai

$$\mathbf{r}=\{a\cos u,\ a\sin u,\ bu\}.$$

Atrisinājums. Atrodam

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(u) &=\{-a\sin u,\ a\cos u,\ b\},\\ \mathbf{r}''(u) &=\{-a\cos u,\ -a\sin u,\ 0\},\\ \mathbf{r}'(u)\times\mathbf{r}''(u) &=\{ab\sin u,\ -ab\cos u,\ a^2\}=\\ &=a\{b\sin u,\ -b\cos u,\ a\}. \end{aligned}$$

Saskaņā ar (3) pieslejplaknes vienādojums ir

$$(X-a\cos u)b\sin u-(Y-a\sin u)b\cos u+(Z-bu)a=0$$

jeb

$$b\sin uX-b\cos uY+aZ=abu.$$

[1] Ja r' un r'' ir kolineāri un ja $r^{(k)}$ ir pirmais atvasinātais vektors, kas nav kolineārs ar r', tad par pieslejplaknes normālo vektoru var pieņemt $r'\times r^{(k)}$.

Leņķi φ, ko pieslejplakne veido ar skrūves līnijas asi, aprēķina ar formulu (146. §)

$$\sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{b^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u + a^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

No šejienes $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{b}$, t. i., pieslejplakne veido ar skrūves līnijas asi to pašu pastāvīgo leņķi, ko pieskare (351. § piemērs).

Pieslejplaknei piemīt šādas īpašības.

1) Plakne TMK (396. zīm.), kas iet caur līnijas L pieskari MT un punktu K, tiecas sakļauties ar pieslejplakni P, kad punkts K tiecas uz M.

2) Plakne P' (396. zīm.), kas iet caur pieskari MT un ir paralēla pieskarei KS, arī tiecas sakļauties ar plakni P, kad punkts K tiecas uz M.

P i e z ī m e. Abas šīs īpašības var pieņemt par pieslejplaknes definīciju.

359. §. Galvenā normāle. Dabiskais triedrs

Līnijas L normāli MN (396. zīm.), kas atrodas pieslejplaknē P, sauc par *galveno normāli*; normāli MB, kas ir perpendikulāra pieslejplaknei, — par *binormāli*. Plakni TMB, kas iet caur pieskari un binormāli, sauc par *rektificējošo* jeb *iztaisnojošo* plakni.

Trīs savstarpēji perpendikulāras plaknes TMN (pieslejplakne), NMB (normālplakne) un BMT (iztaisnojošā plakne) veido *dabisko triedru*, trīs savstarpēji perpendikulāras taisnes MT, MN, MB (dabiskā triedra *šķautnes*) bieži pieņem par koordinātu asīm (pieskari MT — par abscisu asi, galveno normāli MN — par ordinātu asi, binormāli MB — par aplikātu asi). Par pozitīvo vērsumu izvēli sk. 361. §.

Šķautņu virziena vektorus vispārīgajā gadījumā ērti aprēķināt šādā kārtībā:

$$\mathbf{T} = \mathbf{r}' \text{ (pieskares vektors; sk. 351. §)}, \quad (1)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' \text{ (binormāles vektors; sk. 358. §)}, \quad (2)$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T} = (\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \times \mathbf{r}' \text{ (galvenās normāles vektors)}. \quad (3)$$

Vektora **N** izteiksme (3) vienkāršojas, ja par parametru pieņem līnijas L loku s. Tad

$$\mathbf{N}=\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\text{[1]}. \tag{4}$$

P i e m ē r s. Atrast dabisko triedru skrūves līnijai

$$\mathbf{r}=\{a\cos u,\ a\sin u,\ bu\}.$$

A t r i s i n ā j u m s. Pieskares vektors (355. § 1. piemērs) ir

$$\mathbf{T}=\mathbf{r}'=\{-a\sin u,\ a\cos u,\ b\}.$$

Binormāles vektors (358. § piemērs) ir

$$\mathbf{B}=\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''=\{ab\sin u,\ -ab\cos u,\ a^2\}.$$

Galvenās normāles vektors ir

$$\mathbf{N}=\mathbf{B}\times\mathbf{T}=\{-a(a^2+b^2)\cos u,\ -a(a^2+b^2)\sin u,\ 0\}.$$

Galvenās normāles vienādojumiem ir izskats

$$\frac{X-a\cos u}{\cos u}=\frac{Y-a\sin u}{\sin u}=\frac{Z-bu}{0}.$$

No šiem vienādojumiem redzams, ka galvenā normāle ir perpendikulāra skrūves līnijas asij un krusto šo asi punktā (0; 0; bu). Tātad galvenā normāle iet pa cilindra rādiusu, uz kura izvijas skrūves līnija. Pieslejplakne sakrīt ar cilindra pieskaru plakni.

360. §. Līnijas un plaknes savstarpējais stāvoklis

1. Ja plakne Q, kas iet caur punktu M, neiet caur līnijas L pieskari MT, tad šī līnija punkta M tuvumā atrodas abās plaknes pusēs.

---

[1] Ar divkāršā vektoriālā reizinājuma formulu (122. §) dabūjam

$$\mathbf{N}=(\mathbf{r}'\times\mathbf{r}'')\times\mathbf{r}'=\mathbf{r}''(\mathbf{r}'^2)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'\mathbf{r}'');$$

tā kā šai gadījumā $\mathbf{r}'^2=1$ un $\mathbf{r}'\mathbf{r}''=0$, tad $\mathbf{N}=\mathbf{r}''$.

Ģ e o m e t r i s k i : paātrinājuma vektors $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$ atrodas pieslejplaknē un ir perpendikulārs pieskares vektoram $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$. Tātad tas ir vērsts pa galveno normāli.

Starp citu, normālplakne vienmēr krusto līniju L.

Attālums d no līnijas L blakus punkta M' līdz plaknei Q šai gadījumā ir tādas pašas kārtas bezgalīgi mazs lielums kā loks $\overset{\frown}{MM'}$.

2. Ja plakne Q iet caur pieskari MT, bet nav pieslejplakne, tad līnija L punkta M tuvumā parasti atrodas vienā plaknes pusē (līnijas L *ieliekuma puse*). Izņēmumi iespējami vienīgi, ja vektori $\mathbf{r}'$, $\mathbf{r}''$ ir kolineāri.

Starp citu, līnija L parasti atrodas vienā pusē no pieslejplaknes.

Attālums d šai gadījumā ir otrās kārtas bezgalīgi mazs lielums attiecībā pret loku $\overset{\frown}{MM'}$.

3. Ja plakne Q ir pieslejplakne, tad līnija L punkta M tuvumā parasti atrodas abās plaknes pusēs. Izņēmumi iespējami tikai, ja vektori $\mathbf{r}'$, $\mathbf{r}''$, $\mathbf{r}'''$ ir komplanāri.

Attālums d šai gadījumā parasti ir trešās kārtas bezgalīgi mazs lielums attiecībā pret $\overset{\frown}{MM'}$. Tikai minētajā izņēmuma gadījumā d kārta ir augstāka par trešo.

361. §. Dabiskā triedra pamatvektori

Par pozitīviem vērsumiem uz dabiskā triedra šķautnēm pieņem šādu vienības vektoru vērsumus (kuriem ir tāda pati loma kā vektoriem $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ taisnleņķu koordinātu sistēmā).

1. Pieskares pamatvektors $\mathbf{t}$. Tas vērsts pa pieskari uz parametra augšanas pusi. To izsaka tā

$$\mathbf{t}=\frac{\mathbf{T}}{\sqrt{\mathbf{T}^2}}=\frac{\mathbf{r}'(u)}{\sqrt{\mathbf{r}'^2(u)}}. \tag{1}$$

Ja par parametru ņem līnijas L loku s, tad

$$\mathbf{t}=\frac{d\mathbf{r}}{ds}. \tag{1a}$$

2. Galvenās normāles pamatvektors $\mathbf{n}$. Tas vērsts pa galveno normāli uz līnijas L ieliekuma pusi. To izsaka tā

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{N}}{\sqrt{\mathbf{N}^2}}=\frac{(\mathbf{r}'\times\mathbf{r}'')\times\mathbf{r}'}{\sqrt{(\mathbf{r}'\times\mathbf{r}'')^2}\sqrt{\mathbf{r}'^2}}. \tag{2}$$

Ja par parametru pieņemts loks s, tad tā izteiksme jūtami vienkāršojas un pieņem izskatu

$$\mathfrak{n}=\frac{\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right)^2}}. \tag{2a}$$

3. Binormāles pamatvektors $\mathbf{b}$. Tas vērsts pa binormāli tā, lai vektoru $\mathbf{t}$, $\mathfrak{n}$, $\mathbf{b}$ trijnieks veidotu labo sistēmu. To izsaka tā

$$\mathbf{b}=\mathbf{t}\times\mathfrak{n}=\frac{\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''}{\sqrt{(\mathbf{r}'\times\mathbf{r}'')^2}}. \tag{3}$$

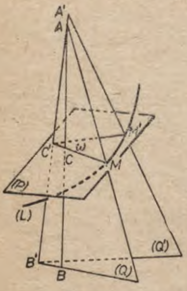
Ja par parametru ņemam s, tad

$$\mathbf{b}=\frac{\frac{d\mathbf{r}}{ds}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}}{\sqrt{\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}}}. \tag{3a}$$

P i e z ī m e. Galvenās normāles pamatvektora vērsums nav atkarīgs no parametra izvēles, t. i., tam ir objektīva ģeometriska nozīme. Pieskares pamatvektoram var būt jebkurš no diviem pretējiem vērsumiem atkarībā no parametrizācijas. Starp citu, ja par parametru pieņem laiku, tad vektora $\mathbf{t}$ vērsums sakrīt ar punkta M kustības virzienu pa līniju L. Ja parametrs ir loks, tad vektora $\mathbf{t}$ vērsums sakrīt ar pozitīvo loku skaitīšanas virzienu. Tādējādi objektīvas ģeometriskas nozīmes vektora $\mathbf{t}$ vērsumam nav. Kad vektora $\mathbf{t}$ vērsums ir konstatēts, vektora $\mathbf{b}$ vērsums ir pilnīgi noteikts.

362. §. Telpas līnijas liekuma centrs, ass un rādiuss

Pieņemsim, ka punkts M' (397. zīm.), kustoties pa telpas līniju L, tuvojas nekustīgam punktam M, kur liekums K nav vienāds ar nulli. Tad taisne $A'B'$, pa kuru nekustīgā normālplakne Q šķeļas ar kustīgo normālplakni Q', tiecas sakļauties ar pieslejplaknei P perpendikulāru taisni AB, kas atrodas no punkta M attālumā $MC=\frac{1}{K}$. Pie tam stars MC vērsts uz līnijas L ieliekuma pusi.



397. zīm.

Taisni AB sauc par *liekuma asi*, punktu C, kur AB krusto pieslejplakni P, sauc par *liekuma centru*, bet nogriezni MC — par *liekuma rādiusu*. Liekuma rādiusu apzīmē ar burtu ϱ; lielumi ϱ un K ir savstarpēji apgriezti, t. i.,

$$\varrho=\frac{1}{K}, \quad K=\frac{1}{\varrho}. \qquad (1)$$

Plaknes līnijai (tās plakne ir pieslejplakne) liekuma centru un rādiusu var dabūt ar 343. paragrāfā parādīto konstrukciju.

No liekuma centra C ar rādiusu $CM=\varrho$ vilkto riņķa līniju sauc par līnijas L *pieslejas riņķa līniju* jeb par *liekuma riņķi* (punktam M).

1. piezīme. Ja līnijas L liekums punktā M ir vienāds ar nulli, tad saka, ka liekuma rādiuss ir bezgalīgs un raksta $\varrho=\infty$ (sal. 343. § piezīmi).

2. piezīme. 347. paragrāfā dotā evolventes definīcija ir derīga ne vien plaknes, bet arī telpas līnijām. Telpas līnijai L' arī ir neskaitāms daudzums evolventu (visas tās ir telpas līnijas). Bet pretstatā plaknes līnijai (sal. 347. §) katras evolventes L liekuma centrs apraksta līniju, kas nesakrīt ar L'. Tāpēc telpas līnijas liekuma centru ģeometriskai vietai nepiešķir evolūtas nosaukumu.

363. §. Telpas līnijas liekuma, liekuma rādiusa un centra formulas

Liekumu K izsaka formula

$$K=\frac{\sqrt{(\mathbf{r}'\times\mathbf{r}'')^2}}{\sqrt{(\mathbf{r}'^2)^3}}. \qquad (1)$$

Koordinātu formā

$$K=\frac{\sqrt{(y'z''-z'y'')^2+(z'x''-x'z'')^2+(x'y''-y'x'')^2}}{\sqrt{(x'^2+y'^2+z'^2)^3}}. \tag{2}$$

Ja par parametru pieņem loku, tad formulas (1) un (2) vienkāršojas un pieņem izskatu

$$K=\sqrt{\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right)^2}=\left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right|, \tag{1a}$$

$$K=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}. \tag{2a}$$

Saskaņā ar formulu (1a) vektoru $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$ sauc par *liekuma vektoru*. Šis vektors ir vienādi vērsts ar vektoru $\overrightarrow{MC}$, kas novilkts no līnijas L punkta M uz liekuma centru C.

Liekuma rādiusu ϱ atrod ar formulu

$$\varrho=\frac{1}{K}. \tag{3}$$

Šeit jāievieto viena no izteiksmēm (1), (2), (1a), (2a).

Liekuma centra rādiusvektors $\mathbf{r}_C$ ir

$$\mathbf{r}_C=\mathbf{r}+\mathbf{n}\varrho \tag{4}$$

un [saskaņā ar 361. § formulu (2)] to izsaka ar šādu formulu

$$\mathbf{r}_C=\mathbf{r}+\frac{\mathbf{r}'^2}{(\mathbf{r}'\times\mathbf{r}'')^2}\,[(\mathbf{r}'\times\mathbf{r}'')\times\mathbf{r}']. \tag{5}$$

Ievērojot to, liekuma centra koordinātes x_C, y_C, z_C izsaka formulas

$$\left.\begin{aligned} x_C&=x+\frac{x'^2+y'^2+z'^2}{A^2+B^2+C^2}\,(Bz'-Cy'),\\ y_C&=y+\frac{x'^2+y'^2+z'^2}{A^2+B^2+C^2}\,(Cx'-Az'),\\ z_C&=z+\frac{x'^2+y'^2+z'^2}{A^2+B^2+C^2}\,(Ay'-Bx'), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

kur īsuma dēļ lietoti šādi apzīmējumi

$$A=y'z''-z'y'', \quad B=z'x''-x'z'', \quad C=x'y''-y'x''. \tag{7}$$

Ja par parametru pieņem loku, tad formulas (5) un (6) pēc vienkāršojumiem pieņem izskatu

$$\mathbf{r}_C=\mathbf{r}+\frac{\dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}}{\left(\dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right)^2}=\mathbf{r}+\varrho^2\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \tag{5a}$$

$$\left.\begin{aligned} x_C&=x+\frac{\dfrac{d^2x}{ds^2}}{\left(\dfrac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2z}{ds^2}\right)^2}=x+\varrho^2\frac{d^2x}{ds^2},\\ y_C&=y+\frac{\dfrac{d^2y}{ds^2}}{\left(\dfrac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2z}{ds^2}\right)^2}=y+\varrho^2\frac{d^2y}{ds^2},\\ z_C&=z+\frac{\dfrac{d^2z}{ds^2}}{\left(\dfrac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2z}{ds^2}\right)^2}=z+\varrho^2\frac{d^2z}{ds^2}. \end{aligned}\right\} \tag{6a}$$

Piezīme. Plaknes līnijas liekuma, liekuma rādiusa un centra formulas (344. §) dabū no šīm formulām, ja tanīs ņem $z=z'=z''=0$.

Piemērs. Atrast liekumu, liekuma rādiusu un centru skrūves līnijai L

$$\mathbf{r}=\{a\cos t, \quad a\sin t, \quad bt\}. \tag{8}$$

Atrisinājums. Pieņemot par parametru loka garumu, atrodam (350. §)

$$\mathbf{r}=\left\{a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\}.$$

Divreiz diferencējot, dabūjam

$$\mathbf{r}''=\left\{\frac{-a}{a^2+b^2}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad -\frac{a}{a^2+b^2}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0\right\}.$$

Formulas (2a) un (3) dod

$$K=\frac{a}{a^2+b^2}, \quad \varrho=\frac{a^2+b^2}{a}=a+\frac{b^2}{a}, \tag{9}$$

t. i., liekums un liekuma rādiuss ir pastāvīgi. Formulas (6a) dod

$$\left.\begin{aligned} x_C &= a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{a^2+b^2}{a}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}= \\ &= -\frac{b^2}{a}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}=-\frac{b^2}{a^2}x, \\ y_C &= -\frac{b^2}{a}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}=-\frac{b^2}{a^2}y, \\ z_C &= \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}=z. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

No formulām (10) redzams, ka, lai konstruētu liekuma centru, cilindra rādiuss, uz kura atrodas skrūves līnija, jāturpina aiz cilindra ass par pastāvīgu attālumu $\frac{b^2}{a}$. Tādējādi skrūves līnijas L liekuma centrs apraksta skrūves līniju L_1 ar tādu pašu kāpi $h=2\pi b$, kura atrodas uz cilindra ar rādiusu $a_1=\frac{b^2}{a}$ (un to pašu asi). Vienādības $aa_1=b^2$ simetrija rāda, ka līnijas L un L_1 ir saistītas, t. i., līnijas L_1 liekuma centrs apraksta līniju L.

364. §. Par liekuma zīmi

Plaknes līniju liekumiem, kuras atrodas *vienā* un *tai pašā plaknē*, var pierakstīt šādā veidā zīmi. Ja, punktam M kustoties parametra u augšanas virzienā, pieskares vektora griešanās notiek pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam, tad liekumu uzskata par pozitīvu, ja pulksteņa rādītāja kustības virzienā, — par negatīvu.

Liekuma zīme mainās uz pretējo, ja parametru u aizstāj ar citu parametru u', kurš dilst, kad u aug. Ja par parametru pieņem abscisu, tad parametra augšanai atbilst punkta M pārvietošanās «pa labi». Šai gadījumā liekums ir pozitīvs, ja līnija vērsta ar ieliekumu augšup, un negatīva, kad lejup (282. §).

344. § formulas (1) un (I) aizstāj šādas formulas

$$K=\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}, \tag{1}$$

$$K=\frac{x'y''-y'x''}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}. \tag{I}$$

Piemērs. Ar formulu (1) aprēķinātais riņķa līnijas

$$x=a\cos u,\quad y=a\sin u$$

liekums ir vienāds ar $\frac{1}{a}$ (ja parametrs aug, tad tekošais punkts apiet riņķa līniju pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam, uz to pašu pusi griežas pieskares vektors). Ja to pašu riņķa līniju izsaka ar vienādojumiem

$$x=a\cos u',\quad y=-a\sin u',$$

tad formula (1) dod $K=-\frac{1}{a}$.

Ja riņķa līniju uzdod ar vienādojumu

$$x^2+y^2=a^2$$

un pielieto formulu (1), tad augšējai riņķa līnijas pusei dabūjam $K=-\frac{1}{a}$ (apeja notiek pulksteņa rādītāju kustības virzienā, ieliekums vērsts lejup), apakšējai riņķa līnijas pusei dabūjam $K=\frac{1}{a}$.

Šis piemērs rāda, ka liekuma zīmei pašai par sevi nav ģeometriskas jēgas; nozīme ir tikai zīmes maiņai, ejot caur kādu punktu (pārliekuma punktu) vai, otrādi, zīmes saglabāšanai kādā gabalā.

Telpas (tai skaitā arī plaknes) līniju liekumam nepavisam nedrīkst pierakstīt zīmi, jo telpā nav griešanās pulksteņa rādītāja griešanās virzienā, nedz arī tam pretējā virzienā. Līnijām, kas atrodas vienā plaknē, šos divus virzienus var izšķirt tāpēc, ka, izvēloties plaknei pretskata pusi, mēs iedomājamies novērotāju, kas novēro tieši šo pusi. Ja mēs saskaņā ar kaut kādu pazīmi atšķirsim patvaļīgas telpas līnijas pieslejplakņu pretskata un pakaļskata puses, tad ne no vienas pozīcijas novērotājs nevarēs novērot visas plaknes no pretskata puses.

365. §. Vērpums

Telpas līnijas vērpums raksturo līnijas atvirzes mēru no plakanas formas (līdzīgi tam, kā liekums raksturo atvirzes mēru no taisnlīnijas formas).

D e f i n ī c i j a. Par līnijas L *vērpumu* punktā M sauc lielumu, kuru nosaka šādā veidā: pēc absolūtās vērtības tas ir vienāds ar robežu, uz kuru tiecas attiecība starp leņķi ω', kuru veido binormāles MB un $M'B'$, un loku $\smile{MM'}$, kad punkts M', paliekot uz līnijas L, tiecas uz punktu M. Vērpuma zīmi (un arī leņķa ω' zīmi) skaita par pozitīvu, ja binormāļu pāris MB, $M'B'$ ir labais (sk. 165. a §), un par negatīvu, ja tas ir kreisais. Vērpumu apzīmē ar σ; tad

$$\sigma=\lim\frac{\omega'}{\smile{MM'}}.$$

P i e z ī m e. Plaknes līnijas binormāle saglabā pastāvīgu virzienu, tā ka plaknes līnijas vērpums visur ir vienāds ar nulli. Otrādi, ja līnijas vērpums visur ir vienāds ar nulli, tad līnija ir plaknes līnija. Telpas līnijai vērpums var būt vienāds ar nulli tikai atsevišķos punktos.

V ē r p u m a r ā d i u s s. Vērpumam apgriezto lielumu $\tau=\frac{1}{\sigma}$ analogi liekuma rādiusam sauc par *vērpuma rādiusu.* Bet šī analoģija nav pilnīga: liekuma centra konstrukcijai analogs process nedod nekādu «vērpuma centru».

Vērpumu izsaka ar formulu

$$\sigma=\frac{\mathbf{r}'\mathbf{r}''\mathbf{r}'''}{(\mathbf{r}'\times\mathbf{r}'')^2} \qquad (1)$$

jeb koordinātu formā

$$\sigma=\frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{(y'z''-z'y'')^2+(z'x''-x'z'')^2+(x'y''-y'x'')^2}. \qquad (2)$$

Ja par parametru pieņem loku s, tad formulas (1) un (2) mazliet vienkāršojas, proti,

$$\sigma=\frac{\frac{d\mathbf{r}}{ds}\,\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\,\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}}{\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right)^2}=\varrho^2\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}\,\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\,\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\right) \tag{1a}$$

jeb koordinātu formā

$$\sigma=\begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \\ \frac{d^3x}{ds^3} & \frac{d^3y}{ds^3} & \frac{d^3z}{ds^3} \end{vmatrix}:\left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right]. \tag{2a}$$

Piemērs. Atrast vērpumu skrūves līnijai

$$x=a\cos u,\quad y=a\sin u,\quad z=bu.$$

Atrisinājums. Dabūjam

$$\mathbf{r}'\mathbf{r}''\mathbf{r}'''=\begin{vmatrix} -a\sin u & a\cos u & b \\ -a\cos u & -a\sin u & 0 \\ a\sin u & -a\cos u & 0 \end{vmatrix}=a^2b,$$

$$(\mathbf{r}'\times\mathbf{r}'')^2=a^2(a^2+b^2).$$

Ar formulu (1) atrodam

$$\sigma=\frac{b}{a^2+b^2}.$$

No šejienes redzams, ka labās skrūves līnijas ($b>0$) vērpums ir pozitīvs, kreisās — negatīvs.

RINDAS

366. §. Ievada piezīmes

Lai pārvarētu ar integrēšanu saistītās grūtības, Ņūtons un Leibnics zemintegrāļa funkciju izteica kā polinomu ar bezgalīgu locekļu skaitu (sk. 270. §). Pielietojot tādām izteiksmēm parastās algebras kārtulas, 18. gs. matemātiķi izdarīja daudzus ievērojamus atklājumus. Tomēr atklājās, ka, pielietojot bezgalīgām summām algebras kārtulas bez ierobežojumiem, var pieļaut arī kļūdas. Kļuva nepieciešams precīzi formulēt bezgalīgu rindu pamatjēdzienus un stingri pierādīt to īpašības. Šo uzdevumu atrisināja 19. gs. matemātiķi, kuru vārdus mēs sastapsim tālākajos paragrāfos.

367. §. Rindas definīcija

Pieņemsim, ka dota skaitļu virkne

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots \tag{1}$$

Saskaitīsim šos skaitļus to dotajā kārtībā. Dabūsim jaunu virkni $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$, kur

$$\left.\begin{array}{l} s_1 = u_1, \\ s_2 = u_1 + u_2, \\ s_3 = u_1 + u_2 + u_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{2}$$

Tās sastādīšanas procesu saīsināti apzīmē ar izteiksmi

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{3}$$

kuru sauc par *bezgalīgu rindu* jeb, īsāk, par *rindu*. Skaitļus $u_1, u_2, u_3, \ldots$ sauc par rindas *locekļiem*. Summu

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

sauc par rindas *parciālsummu* ($s_1 = u_1$ ir pirmā, $s_2 = u_1 + u_2$ — otrā, $s_3 = u_1 + u_2 + u_3$ — trešā parciālsumma utt.).

1. piemērs. Izteiksme

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots + (-1)^{n+1} + \ldots, \tag{4}$$

jeb, kā parasti raksta,

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots, \tag{4a}$$

ir rinda. Izteiksmes (4) jēga ir tāda, ka no locekļiem

$$1,\ -1,\ +1,\ -1,\ \ldots,\ (-1)^{n+1},\ \ldots$$

sastāda parciālsummas

$$s_1 = 1,\quad s_2 = 1 - 1 = 0,\quad s_3 = 1 - 1 + 1 = 1,\ \ldots$$

$$\ldots,\ s_n = 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n+1} = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2},\ \ldots \tag{5}$$

2. piemērs. Izteiksme

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \ldots \tag{6}$$

ir rinda. Tā nozīmē, ka no locekļiem

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ \ldots$$

sastāda parciālsummas

$$s_1 = 1,\quad s_2 = 1\frac{1}{2},\quad s_3 = 1\frac{3}{4},\ \ldots,\ s_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ \ldots \tag{7}$$

368. §. Konverģentas un diverģentas rindas

Definīcija. Rindu sauc par *konverģentu*, ja tās parciālsummu virknei ir galīga robeža. Šo robežu sauc par konverģentas rindas *summu*.

Ja parciālsummu virknei nav galīgas robežas, tad rindu sauc par *diverģentu.* Diverģentai rindai nav summas[1].

1. piemērs. Rinda

$$1+2+3+4+\ldots+n+\ldots \tag{1}$$

ir diverģenta, jo tās parciālsummu virknei

$$s_1=1,\quad s_2=3,\quad s_3=6,\ \ldots,\ s_n=\frac{n(n+1)}{2},\ \ldots \tag{2}$$

ir bezgalīga robeža.

2. piemērs. Rinda

$$1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n+1}+\ldots \tag{3}$$

ir diverģenta, jo tās parciālsummu virknei

$$s_1=1,\quad s_2=0,\quad s_3=1,\ \ldots,\ s_n=\frac{1+(-1)^{n+1}}{2},\ \ldots \tag{4}$$

(sal. 367. § 1. piemēru) nav nekādas robežas.

1. piezīme. Ja virknei s_1, s_2, s_3, ... nav nekādas robežas, tad diverģentu rindu sauc par *nenoteiktu.*

3. piemērs. Rinda

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\ldots \tag{5}$$

ir konverģenta, jo virknei

$$s_1=1,\quad s_2=1\frac{1}{2},\quad s_3=1\frac{3}{4},\ \ldots,\ s_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ \ldots \tag{6}$$

ir robeža, kas vienāda ar 2, t. i.,

$$\lim_{n\to\infty} s_n=2.$$

Skaitlis 2 ir rindas (5) summa.

2. piezīme. Pieraksts

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=S \tag{7}$$

[1] Vārds «summa» jāsaprot tai nozīmē, kā minēts definīcijā. Rindas summas jēdzienu var paplašināt un tad dažām diverģentām rindām arī būs summas (paplašinātā nozīmē).

nozīmē, ka rinda $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ ir konverģenta un tās summa ir vienāda ar S, t. i., pieraksts (7) ir ekvivalents ar pierakstu

$$\lim_{n\to\infty}(u_1+u_2+\ldots+u_n)=S.$$

4. piemērs. Pieraksts

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\ldots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\ldots=\frac{2}{3}$$

nozīmē, ka parciālsummu virknei

$$s_1=1,\quad s_2=\frac{1}{2},\quad s_3=\frac{3}{4},\ \ldots,\quad s_n=\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right],\ \ldots$$

ir robeža, kas vienāda ar $\frac{2}{3}$, t. i., ka

$$\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{2}+\ldots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]=\frac{2}{3}.$$

369. §. Nepieciešamais rindas konverģences noteikums

Rinda

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \tag{1}$$

var konverģēt tikai tai gadījumā, kad loceklis u_n (rindas *vispārīgais loceklis*) tiecas uz nulli, t. i., kad

$$\lim_{n\to\infty} u_n=0. \tag{2}$$

Citādi sakot: ja vispārīgais loceklis u_n netiecas uz nulli, tad rinda diverģē.

1. piemērs. Rinda

$$0{,}4+0{,}44+0{,}444+0{,}4444+\ldots \tag{3}$$

neapšaubāmi diverģē, jo vispārīgais loceklis $\left(\text{tā robeža ir } \frac{4}{9}\right)$ netiecas uz nulli.

2. piemērs. Rinda

$$1-1+1-1+\ldots \tag{4}$$

neapšaubāmi diverģē, jo tās vispārīgais loceklis netiecas uz nulli (un tam vispārīgi nav robežas).

Brīdinājums. Noteikums (2) nav rindas konverģencei pietiekams: rinda, kurai vispārīgais loceklis tiecas uz nulli, var konverģēt, bet var arī diverģēt (sk. 3. un 4. piemēru).

3. piemērs. Tā sauktā *harmoniskā* rinda[1]

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots \tag{5}$$

diverģē, lai gan tās vispārīgais loceklis tiecas uz nulli. Lai pārliecinātos par rindas diverģenci, apskatīsim parciālsummas

$$s_2=1+\frac{1}{2}=3\cdot\frac{1}{2},$$

$$s_4=s_2+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)>3\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=4\cdot\frac{1}{2},$$

$$s_8=s_4+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)>$$

$$>4\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)=5\cdot\frac{1}{2},$$

$$s_{16}=s_8+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{16}\right)>6\cdot\frac{1}{2}\ \text{utt.}$$

Mēs redzam, parciālsummas neierobežoti aug, t. i., rinda (5) diverģē.

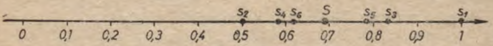
4. piemērs. Rinda

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots, \tag{6}$$

kuru iegūst no harmoniskās rindas, mainot zīmi locekļiem ar pāra indeksiem, konverģē. Lai par to pārliecinātos, atzīmēsim uz skaitļu ass (398. zīm.) punktus, kurus attēlo parciālsummas $s_1=1$, $s_2=\frac{1}{2}$, $s_3=\frac{5}{6}$, $s_4=\frac{7}{12}$, $s_5=\frac{47}{60}$, $s_6=\frac{37}{60}$.

[1] Nosaukums saistās ar to, ka stīga, ja to sadala 2, 3, 4 vienādās daļās, dod skaņas, kas harmonē ar pamattoni.

Katrs «nepāra» punkts s_1, s_3, s_5 atradīsies vairāk pa kreisi no iepriekšējā punkta, bet katrs «pāra» punkts s_2, s_4, s_6 — vairāk pa labi no iepriekšējā punkta, t. i., pāra un nepāra punkti pārvietosies viens otram pretim. Var pierādīt, ka ievērotais likums ir pareizs [1] un ka punkti s_{2n}, s_{2n+1} tuvojas



398. zīm.

neierobežoti [2]. Tātad kā pāra, tā arī nepāra punkti tiecas uz kādu punktu S (pāra punkti — no labās puses, nepāra — no kreisās). Tādējādi rindas (6) parciālsummu virknei robeža ir skaitlis S, t. i., rinda (6) konverģē un S ir tās summa.

Parciālsummas s_1, s_3, s_5 dod S tuvinājumus ar uzviju, bet s_2, s_4, s_5 — ar iztrūkumu. Aprēķinot $s_9=0{,}745$ un $s_{10}=$ $=0{,}645$, dabūjam summai S vienu pareizu zīmi, proti, $S=0{,}7$. Aprēķinot s_{999} un s_{1000}, mēs atrastu $S=0{,}693$ ar trim pareizām zīmēm. Precīzā S vērtība ir $\ln 2$, t. i.,

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\ln 2. \tag{7}$$

Formula (7) rodas no izvirzījuma

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

ja $x=1$ (sal. 270. § 4. p. un 272. § 2. piemēru).

[1] Starpība

$$s_{2n+1}-s_{2n-1}=$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}\right)-\left(1-\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)=$$
$$=-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}$$

ir negatīva, starpība $s_{2n+2}-s_{2n}=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}$ — pozitīva.

[2] Starpība $s_{2n+1}-s_{2n}=\frac{1}{2n+1}$ tiecas uz nulli, kad $n\to\infty$.

370. §. Rindas atlikums

Ja rindā

$$u_1+u_2+\ldots+u_m+u_{m+1}+u_{m+2}+\ldots \tag{1}$$

atmetam pirmos m locekļus, tad dabūjam rindu

$$u_{m+1}+u_{m+2}+\ldots, \tag{2}$$

kura konverģē (vai diverģē), ja konverģē (vai diverģē) rinda (1). Tāpēc, *pētot rindas konverģenci, var neievērot rindas pirmos locekļus galīgā skaitā.*

Gadījumā, kad rinda (1) konverģē, rindas (2) summu

$$R_m=u_{m+1}+u_{m+2}+\ldots \tag{3}$$

sauc par pirmās rindas *atlikumu* (jeb par *atlikuma locekli*) ($R_1=u_2+u_3+\ldots$ sauc par pirmo atlikumu, $R_2=u_3+u_4+\ldots$ — par otro atlikumu utt.). Atlikums R_m ir tā kļūda, kuru mēs pieļaujam, aizstājot rindas (1) summu S ar parciālsummu s_m. Rindas summa S un atlikums R_m ir saistīti ar sakarību

$$S=s_m+R_m. \tag{4}$$

Ja $m\to\infty$, tad rindas atlikums tiecas uz nulli. Praktiski svarīgi ir, lai šī tiekšanās būtu «pietiekami ātra», t. i., lai atlikums R_m kļūtu mazāks par pieļaujamo kļūdu, kad m nav pārāk liels. Tad saka, ka rinda (1) *konverģē ātri*, pretējā gadījumā saka, ka rinda *konverģē lēni.* Protams, konverģences ātrums un lēnums ir relatīvi jēdzieni.

1. piemērs. Rinda

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots \tag{5}$$

konverģē sevišķi lēni. Summējot divdesmit tās locekļus, mēs dabūjam rindas summas vērtību tikai ar precizitāti līdz $0{,}5\cdot10^{-1}$; lai iegūtu precizitāti līdz $0{,}5\cdot10^{-4}$, mums jāņem ne mazāk par 19 999 locekļiem (sk. 369. § 4. piemēru).

2. piemērs. Rinda

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots \tag{6}$$

(ģeometriskā progresija) konverģē daudz ātrāk par rindu (5); jau piecpadsmitais tās atlikums $-\frac{1}{2^{15}}+\frac{1}{2^{16}}-\frac{1}{2^{17}}+\ldots$

pēc absolūtā lieluma ir mazāks par $\left(\frac{1}{2}\right)^{15}<0{,}5\cdot 10^{-4}$, tā ka precizitāti līdz $0{,}5\cdot 10^{-4}$ nodrošina jau piecpadsmit locekļi.

3. piemērs. Rinda

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots$$

(tās summa ir vienāda ar e; sal. 272. § 1. piemēru) konverģē vēl ātrāk: precizitāti līdz $0{,}5\cdot 10^{-4}$ nodrošina astoņi rindas locekļi.

371. §. Vienkāršākās darbības ar rindām

1. Reizināšana ar skaitli. Ja rinda

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \tag{1}$$

konverģē un tās summa ir S, tad rinda

$$wu_1+wu_2+\ldots+wu_n+\ldots, \tag{2}$$

kuru dabū, rindas (1) locekļus pareizinot ar vienu un to pašu skaitli w, arī konverģē un tās summa ir vienāda ar wS, t. i.,

$$\begin{aligned}&wu_1+wu_2+\ldots+wu_n+\ldots=\\&=w(u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots).\end{aligned} \tag{3}$$

1. piemērs. Rinda

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots \tag{4}$$

konverģē un tās summa ir vienāda ar $0{,}693\ldots=\ln 2$ (369. § 4. piemērs). Tātad rinda

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots \tag{5}$$

konverģēs un tās summa būs vienāda ar $0{,}346\ldots=\frac{1}{2}\ln 2$.

2. Saskaitīšana un atņemšana. Ja rindas

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots, \tag{6}$$

$$v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots \tag{7}$$

konverģē un to summas ir attiecīgi vienādas ar U un V, tad rinda

$$(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \ldots + (u_n \pm v_n) + \ldots, \tag{8}$$

kuru dabū, attiecīgos rindu locekļus saskaitot (vai atņemot), arī konverģē un tās summa ir vienāda ar $U+V$ (vai $U-V$), t. i.,

$$\begin{gathered}(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \ldots = \\ = (u_1 + u_2 + \ldots) \pm (v_1 + v_2 + \ldots).\end{gathered} \tag{9}$$

2. piemērs. Rinda

$$0{,}11 + 0{,}0101 + 0{,}001001 + \ldots$$

konverģē un tās summa ir vienāda ar $\frac{12}{99}$. Tiešām, šī rinda rodas, ja saskaita attiecīgos locekļus konverģentām rindām $0{,}1 + 0{,}1^2 + 0{,}1^3 + \ldots$ un $0{,}01 + 0{,}01^2 + 0{,}01^3 + \ldots$, bet pēdējo rindu summas ir attiecīgi vienādas ar $\frac{1}{9}$ un $\frac{1}{99}$.

Brīdinājums. *Ne visas galīgu summu īpašības paliek spēkā konverģentām rindām.* Tā, ja konverģentas rindas locekļus pārgrupē, tad tā var iegūt citu summu vai pat kļūt diverģenta. Pārgrupēsim, piemēram, konverģentas rindas

$$\begin{gathered}1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \ldots = \\ = 0{,}693\ldots\end{gathered} \tag{10}$$

locekļus tā, lai aiz diviem pozitīviem locekļiem nāktu viens negatīvs (pozitīvo un arī negatīvo locekļu kārtība paliek iepriekšējā). Dabūsim rindu

$$\begin{gathered}1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \\ + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{8} + \ldots\end{gathered} \tag{11}$$

Tā konverģē, bet tās summa ir pusotras reizes lielāka par iepriekšējo summu. Tiešām, mēs dabūjam (sk. 1. piemēru)

$$0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{8}+0+\frac{1}{10}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 0{,}693 \qquad (12)$$

(nuļļu ievietošana nemaina rindas summu!). Saskaitot rindu (10) un (12) attiecīgos locekļus (2. p.), dabūsim

$$1+0+\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}+0+\frac{1}{7}-\frac{2}{8}+\frac{1}{9}+0+\ldots=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot 0{,}693\ldots$$

Saīsinot daļas un atmetot nulles, kreisā pusē dabūsim rindu (11).

372. §. Pozitīvas rindas

Pozitīva rinda (t. i., rinda, kuras visi locekļi ir pozitīvi) nevar būt nenoteikta (368. § 1. piezīme). Tās parciālsummām vienmēr ir robeža — galīga vai bezgalīga. Pirmajā gadījumā rinda konverģē, otrā — diverģē.

Pozitīva konverģenta rinda, pārgrupējot tās locekļus, paliek konverģenta un tās summa nemainās (sal. 371. § brīdinājumu), pozitīva diverģenta rinda paliek diverģenta.

373. §. Pozitīvu rindu salīdzināšana

Lai izpētītu dotās pozitīvās rindas

$$u_0+u_1+u_2+\ldots \qquad (1)$$

konverģenci, tad to bieži salīdzina ar citu pozitīvu rindu

$$v_0+v_1+v_2+\ldots, \qquad (2)$$

par kuru ir zināms, vai tā konverģē vai diverģē.

Ja rinda (2) konverģē un tās summa ir vienāda ar V, bet dotās rindas locekļi nepārsniedz atbilstošos rindas (2) locekļus, tad dotā rinda konverģē un tās summa nepārsniedz V. Pie tam arī dotās rindas atlikums nepārsniedz rindas (2) atlikumu.

Ja rinda (2) diverģē un dotās rindas locekļi nav mazāki par atbilstošajiem rindas (2) locekļiem, tad dotā rinda diverģē.

1. piemērs. Izpētīt konverģenci rindai

$$1+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5^2}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 5^{n-1}}+\ldots \tag{3}$$

un, ja tā konverģē, atrast tās summas S četrus zīmīgos ciparus.

Atrisinājums. Salīdzināsim doto rindu ar ģeometrisko progresiju

$$1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{5^{n-1}}+\ldots \tag{4}$$

Rinda (4) konverģē; tās summa ir vienāda ar 1,25. Dotās rindas locekļi nepārsniedz atbilstošos rindas (4) locekļus. Tātad dotā rinda konverģē un $S<1{,}25$. Rindas (3) atlikums

$$R_n=\frac{1}{(n+1)5^n}+\frac{1}{(n+2)5^{n+1}}+\frac{1}{(n+3)5^{n+2}}+\ldots \tag{5}$$

ir mazāks par rindas (4) n-to atlikumu, t. i.,

$$R_n<\frac{1}{5^n}+\frac{1}{5^{n+1}}+\frac{1}{5^{n+2}}+\ldots=\frac{1}{4\cdot 5^{n-1}}.$$

Lai labāk varētu novērtēt, salīdzināsim atlikumu (5) ar rindu

$$\frac{1}{(n+1)5^n}+\frac{1}{(n+1)5^{n+1}}+\frac{1}{(n+1)5^{n+2}}+\ldots=$$
$$=\frac{1}{(n+1)\cdot 4\cdot 5^{n-1}}. \tag{6}$$

Spriežot tāpat kā iepriekš, dabūsim nevienādību

$$R_n<\frac{1}{4(n+1)5^{n-1}}. \tag{7}$$

Ņemot pēc kārtas $n=1$, 2, 3, ..., atradīsim, ka izteiksme $\frac{1}{4(n+1)5^{n-1}}$ kļūst mazāka par 0,0005, ja $n=4$. Summējam dotās rindas četrus locekļus. Dabūjam tuvinājumu ar iztrūkumu (ar precizitāti līdz $0{,}5\cdot 10^{-3}$)

$$S\approx 1+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5^2}+\frac{1}{4\cdot 5^3}=1{,}115.$$

2. piemērs. Lai izpētītu rindas

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots \tag{8}$$

konverģenci, salīdzināsim to ar harmonisko rindu

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots \tag{9}$$

Pēdējā diverģē (369. § 3. piemērs), bet dotās rindas locekļi nav mazāki par atbilstošajiem rindas (9) locekļiem. Tātad rinda (8) diverģē.

3. piemērs. Lai izpētītu konverģenci rindai

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots, \tag{10}$$

salīdzināsim to ar rindu

$$1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}+\ldots, \tag{11}$$

kuras locekļi, sākot ar otro, ir lielāki par atbilstošajiem rindas (10) locekļiem. Rinda (11) konverģē un tās summa $S=2$, jo n-to parciālsummu var izteikt tā:

$$s_n=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=$$

$$=1+1-\frac{1}{n}. \tag{12}$$

Katrā ziņā tad konverģēs arī rinda (10) un tās summa būs mazāka par 2. Rindas (11) atlikums R_n ir vienāds ar (370. §)

$$R_n=S-s_n=\frac{1}{n}.$$

Rindas (10) atlikums ir tikai nedaudz mazāks, tātad rinda (10) konverģē lēni: lai atrastu četrus zīmīgus summas ciparus, jāsaskaita apmēram 2000 locekļu. Precīza summas (10) vērtība ir $\frac{\pi^2}{6}$ (sk. tālāk 417. § 3. piemēru).

374. §. Dalambēra pazīme pozitīvai rindai

T e o r ē m a. Pieņemsim, ka pozitīvā rindā

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \tag{1}$$

nākošā locekļa attiecībai $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ pret iepriekšējo locekli ir robeža q, kad $n\to\infty$. Tad iespējami trīs gadījumi.

1. g a d ī j u m s. $q<1$. Tad rinda konverģē.
2. g a d ī j u m s. $q>1$. Tad rinda diverģē[1].
3. g a d ī j u m s. $q=1$. Tad rinda var konverģēt, bet var arī diverģēt.

Šo teorēmu sauc par *Dalambēra pazīmi*[2].

1. p i e m ē r s. Apskatīsim pozitīvu rindu

$$2\cdot 0{,}8+3\cdot 0{,}8^2+4\cdot 0{,}8^3+\ldots+(n+1)\cdot 0{,}8^n+\ldots$$

Sākumā var novērot locekļu augšanu[3] ($a_1=1{,}6$, $a_2=1{,}92$, $a_3=2{,}048$, ...). Tomēr rinda konverģē, jo $a_{n+1}:a_n=0{,}8\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$, bet šīs attiecības robeža ir vienāda ar 0,8, t. i., ir mazāka par 1.

P a s k a i d r o j u m s. Pieņemsim, ka kādai pozitīvai rindai $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$ attiecības $u_{n+1}:u_n$ robeža ir vienāda ar 0,8. Tad, sākot ar kādu numuru N, attiecība $u_{n+1}:u_n$ atšķirsies no 0,8 mazāk nekā par $\pm 0{,}1$. Tātad tā paliks mazāka par 0,9, tā ka

$$\left.\begin{aligned} &u_{N+1}<0{,}9u_N,\\ &u_{N+2}<0{,}9u_{N+1}<0{,}9^2u_N,\\ &u_{N+3}<0{,}9u_{N+2}<0{,}9^3u_N \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

---

[1] Šeit ietilpst arī gadījums, kad $\lim u_{n+1}:u_n=\infty$.

[2] Nosaukums balstās uz pārpratumu. Teorēmu pirmais formulēja un pierādīja Koši.

[3] Pēc tam locekļi dilst.

utt. Rindas $u_{N+1}+u_{N+2}+u_{N+3}+\ldots$ salīdzināšana ar rindu $0{,}9u_N+0{,}9^2u_N+0{,}9^3u_N+\ldots$ (dilstoša ģeometriska progresija) rāda (373. §), ka dotā rinda konverģē.

Skaitļa 0,9 vietā var ņemt jebkuru skaitli, kas atrodas starp 0,8 un 1. (Ja ņem vienu vai lielāku skaitli, tad spriedumi nav pareizi.)

Tādā pašā veidā dod vispārīgo teorēmas pierādījumu gadījumam $q<1$.

2. p i e m ē r s. Apskatīsim pozitīvu rindu

$$1{,}1+\frac{1{,}1^2}{2}+\frac{1{,}1^3}{3}+\ldots+\frac{1{,}1^n}{n}+\ldots \tag{3}$$

Sākumā locekļi dilst, bet rinda diverģē, jo attiecības

$$u_{n+1}:u_n=\frac{1{,}1^{n+1}}{n+1}:\frac{1{,}1^n}{n}=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot 1{,}1$$

robeža ir vienāda ar 1,1, t. i., ir lielāka par 1.

P a s k a i d r o j u m s. Tā kā $\lim(u_{n+1}:u_n)=1{,}1$, tad, sākot ar kādu numuru N, attiecība $u_{n+1}:u_n$ ir lielāka par 1,09. Salīdzinot rindu $u_{N+1}+u_{N+2}+u_{N+3}+\ldots$ ar diverģentu rindu $1{,}09u_N+1{,}09^2u_N+1{,}09^3u_N+\ldots$ un spriežot tāpat kā iepriekšējā paskaidrojumā, mēs pierādīsim (373. §), ka dotā rinda diverģē.

Skaitļa 1,09 vietā var ņemt jebkuru skaitli starp 1,1 un 1 (bet ne vienu).

Tādā pašā veidā dod vispārīgo teorēmas pierādījumu gadījumam $q>1$.

3. p i e m ē r s. Apskatīsim rindas

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots, \tag{4}$$

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots \tag{5}$$

Abām rindām dabūjam

$$q=\lim_{n\to\infty}(u_{n+1}:u_n)=1.$$

Bet rinda (4) diverģē (369. §), kamēr (5) konverģē (373. §).

Piezīme. 1. gadījumā ($q<1$) konverģence ir jo ātrāka, jo mazāks ir q. 2. gadījumā ($q>1$) diverģence ir jo ātrāka, jo lielāks ir q. 3. gadījumā ($q=1$), ja rinda konverģē, tad lēni un tāpēc ir maz noderīga aprēķiniem.

375. §. Konverģences integrālā pazīme

Ja katrs pozitīvas rindas

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \qquad (1)$$

loceklis ir mazāks par iepriekšējo locekli, tad, lai izpētītu konverģenci, var apskatīt neīsto integrāli

$$\int_1^{\infty} f(n)\,dn, \qquad (2)$$

kur $f(n)$ ir nepārtraukta dilstoša argumenta n funkcija, kas, ja $n=1, 2, 3, \ldots$, pieņem vērtības $u_1, u_2, u_3, \ldots$

Rinda (1) konverģē vai diverģē atkarībā no tā, vai neīstais integrālis (2) konverģē vai diverģē. Konverģences gadījumā rindas (1) atlikums R_n apmierina nevienādības

$$\int_{n+1}^{\infty} f(n)\,dn<R_n<\int_n^{\infty} f(n)\,dn. \qquad (3)$$

Piezīme. Integrālā pazīme ir izdevīga tajos gadījumos, kad loceklis u_n ir uzdots ar izteiksmi, kurai ir jēga ne tikai veselām n vērtībām, bet arī visiem n, kas lielāki par vienu.

1. piemērs. Izpētīsim konverģenci harmoniskai rindai

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots \qquad (4)$$

Šī rinda ir pozitīva; katrs tās loceklis ir mazāks par iepriekšējo locekli un vispārīgais loceklis u_n ir uzdots ar izteiksmi $\frac{1}{n}$, kurai ir jēga visām n vērtībām (izņemot nulli). Funkcija $f(n)=\frac{1}{n}$ intervālā $(1, \infty)$ ir nepārtraukta un dilst.

Apskatām neīsto integrāli $\int\limits_1^\infty \frac{dn}{n}$. Tas diverģē, jo tam ir bezgalīga vērtība

$$\lim_{x\to\infty}\int\limits_1^x \frac{dn}{n} = \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty.$$

Tātad diverģē arī rinda (4) (sal. 369. § 3. piemēru).

2. piemērs. Izpētīsim konverģenci «apgriezto kvadrātu» rindai

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots \tag{5}$$

Šeit $f(n)=\frac{1}{n^2}$. Atbilstošais neīstais integrālis

$$\int\limits_1^\infty \frac{dn}{n^2} = \lim_{x\to\infty}\int\limits_1^x \frac{dn}{n^2} = 1$$

konverģē. Tātad konverģē arī rinda (5). Ņemot 10 locekļus, atrodam $S_{10}=1{,}5498$. Atlikums R_{10} apmierina nevienādību

$$\int\limits_{11}^\infty \frac{dn}{n^2} < R_{10} < \int\limits_{10}^\infty \frac{dn}{n^2}, \text{ t. i., } \frac{1}{11} < R_{10} < \frac{1}{10}.$$

Tātad aptuvenās vienādības

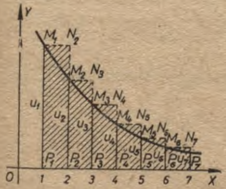
$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\approx 1{,}5498$$

kļūda nepārsniedz 0,1.

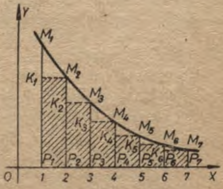
Paskaidrojums. Grafika 399. zīmējumā attēlo funkciju $f(n)$; locekļus u_1, u_2, ... attēlo ordinātes P_1M_1, P_2M_2, ... ; pēdējās skaitliski ir vienādas ar pakāpienu $P_1M_1N_2P_2$, $P_2M_2N_3P_3$, ... laukumiem.

Integrāļa $\int\limits_1^\infty f(n)\,dn$ diverģence nozīmē, ka laukums joslai zem līnijas $M_1M_2M_3$ ... ir bezgalīgi liels. Apvilktās kāpņveidīgās figūras laukums vēl jo vairāk ir bezgalīgi liels, t. i., rinda $u_1+u_2+\ldots$ diverģē.

Ja turpretim integrālis $\int\limits_1^\infty f(n)\,dn$ konverģē, tad laukums joslai zem $M_1M_2M_3$ ... ir galīgs. Laukums ievilktai figūrai,



399. zīm.



400. zīm.

kas 400. zīmējumā iesvītrota, ir vēl jo vairāk galīgs, t. i., rinda $u_2+u_3+\ldots$ konverģē. Līdz ar to konverģē arī rinda $u_1+u_2+u_3+\ldots$

Nevienādības (3) paskaidrosim atsevišķā piemērā, ja $n=2$. Atlikums $R_2=u_3+u_4+\ldots$ skaitliski ir vienāds ar apvilktās figūras $XP_3M_3N_4M_4N_5$ ... (399. zīm.) laukumu; tātad $R_2>\int\limits_3^\infty f(n)\,dn$ (saskaņā ar noteikumiem šis integrālis konverģē). Tas pats atlikums ir vienāds ar figūras $XP_2K_2M_3K_3M_4$ ... (400. zīm.) laukumu; tātad

$$R_2<\int\limits_2^\infty f(n)\,dn.$$

376. §. Maiņzīmju rinda. Leibnica pazīme

Rindu sauc par *maiņzīmju* jeb *alternējošu* rindu, ja tās locekļi pēc kārtas ir pozitīvi un negatīvi. Rinda

$$u_1-u_2+u_3-\ldots+(-1)^{n-1}u_n+\ldots, \tag{1}$$

kur burti u_1, u_2, u_3, ... apzīmē pozitīvus skaitļus, ir maiņzīmju rinda.

Leibnica pazīme. Maiņzīmju rinda konverģē, ja tās locekļi tiecas uz nulli, visu laiku dilstot pēc absolūtās vērtības [1]. Tādas rindas atlikumam ir tāda pati zīme kā pirmajam atmetamajam loceklim un tas ir mazāks par to pēc absolūtās vērtības.

Spriedumi, uz kuriem balstās pierādījums, atsevišķam gadījumam doti 369. § 4. piemērā.

Piemērs. Maiņzīmju rinda

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots \tag{2}$$

konverģē, jo tās locekļi tiecas uz nulli, visu laiku samazinoties pēc absolūtās vērtības. Piecpadsmitais atlikums

$$R_{15}=-\frac{1}{16}+\frac{1}{17}-\frac{1}{18}+\ldots$$

ir negatīvs, tātad parciālsumma s_{15} dod rindas (2) summai tuvinājumu ar uzviju. Pēc absolūtās vērtības atlikums ir mazāks par $\frac{1}{16}$.

[1] Maiņzīmju rindas locekļi var tiekties uz nulli, visu laiku nedilstot pēc absolūtās vērtības. Tad nav garantijas, ka rinda konverģē. Tā rinda

$$-\frac{1}{2}+\frac{2}{2}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{4}+\frac{2}{4}-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}-\ldots,$$

kuras locekļi tiecas uz nulli, bet visu laiku nedilst, diverģē. Tiešām, grupējot locekļus pa pāriem, atrodam, ka $s_{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$, tā ka (369. § 3. piemērs) $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n}=\infty$.

377. §. Absolūtā un nosacītā konverģence

T e o r ē m a. Rinda

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \tag{1}$$

katrā ziņā konverģē, ja konverģē pozitīva rinda

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots, \tag{2}$$

kas sastādīta no dotās rindas locekļu absolūtajām vērtībām.

Dotās rindas atlikums pēc absolūtās vērtības nepārsniedz atbilstošo rindas (2) atlikumu [1].

Dotās rindas summa S pēc absolūtās vērtības nepārsniedz rindas (2) summu S', t. i.,

$$|S|\leqslant S'.$$

Vienādība ir tikai tad, ja visiem rindas (1) locekļiem ir viena un tā pati zīme.

1. p i e z ī m e. Rinda (1) var konverģēt arī tad, ja rinda (2) diverģē.

1. p i e m ē r s. Rinda

$$1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}+\ldots, \tag{3}$$

kurai ik pēc diviem pozitīviem locekļiem seko trešais negatīvais loceklis, konverģē, jo rinda

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\ldots, \tag{4}$$

kas sastādīta no dotās rindas locekļu absolūtajām vērtībām, konverģē (373. § 3. piemērs). Rindas (3) summa S ir mazāka par rindas (4) summu S'. [2]

2. p i e m ē r s. Maiņzīmju rinda

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots$$

konverģē (369. § 4. piemērs), neskatoties uz to, ka rinda,

---

[1] Pierādījuma gaita parādīta tālāk (sk. paskaidrojumu).

[2] Šai gadījumā $S=\frac{7}{9}S'$ (sk. paskaidrojumu).

kas sastādīta no dotās rindas locekļu absolūtajām vērtībām, diverģē (369. § 3. piemērs).

1. definīcija. Rindu sauc par *absolūti konverģentu*, ja konverģē rinda, kas sastādīta no tās locekļu absolūtajām vērtībām (šai gadījumā konverģē arī dotā rinda; sal. 1. piemēru).

2. definīcija. Rindu sauc par *nosacīti konverģentu*, ja tā konverģē, bet rinda, kas sastādīta no tās locekļu absolūtajām vērtībām, diverģē (sal. 2. piemēru).

2. piezīme. Konverģenta rinda, kurai visi locekļi ir vai nu pozitīvi, vai arī negatīvi, ir absolūti konverģenta.

Paskaidrojums 1. piemēram. Paturēsim rindā (3) pozitīvos locekļus, bet negatīvos aizstāsim ar nullēm. Dabūsim konverģentu pozitīvu rindu

$$1+\frac{1}{2^2}+0+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+0+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+0+\ldots=U \tag{5}$$

(tās konverģence redzama, ja salīdzina ar 373. § rindu (10). Aizstājam tagad rindas (3) pozitīvos locekļus ar nullēm, bet negatīvos ņemam ar pretēju zīmi. Dabūjam konverģentu pozitīvu rindu

$$0+0+\frac{1}{3^2}+0+0+\frac{1}{6^2}+0+0+\frac{1}{9^2}+\ldots=V. \tag{6}$$

Atņemam rindas (6) locekļus no atbilstošajiem rindas (5) locekļiem. Dabūsim rindu (3). Saskaņā ar 371. § (2. p.) tā konverģē un tās summa S ir vienāda ar

$$S=U-V.$$

Abi dabūtie skaitļi U, V ir mazāki (373. §) par rindas (4) summu S'. Tāpēc

$$S<S'. \tag{7}$$

Pilnīgi tāpat pierāda arī vispārīgo teorēmu.

Piezīme. Saskaitot (5) un (6), atrodam

$$S'=U+V. \tag{8}$$

Šai piemērā bez tam (371. § 1. p.)

$$V=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{9^2}+\ldots=\frac{1}{3^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right)=\frac{1}{9}S'. \qquad (9)$$

No (7), (8) un (9) izriet, ka

$$S=\frac{7}{9}S'.$$

378. §. Dalambēra pazīme patvaļīgai rindai

Pieņemsim, ka rindā

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \qquad (1)$$

līdz ar pozitīviem locekļiem ir arī negatīvi locekļi (vai arī visi locekļi ir negatīvi). Pieņemsim, ka attiecības $u_{n+1}:u_n$ absolūtai vērtībai ir robeža q, t. i.,

$$\lim_{n\to\infty}|u_{n+1}:u_n|=q.$$

Tad, ja $q<1$, rinda konverģē, ja $q>1$, diverģē, ja $q=1$, tā var konverģēt, bet var arī diverģēt.

Teiktais izriet no 374. un 377. §.

P i e m ē r s. Rinda

$$1+\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+\ldots, \qquad (2)$$

kur aiz katriem diviem pozitīviem locekļiem seko divi negatīvi locekļi, bet aiz tiem atkal divi pozitīvi locekļi, konverģē, jo $|u_{n+1}:u_n|=\frac{1}{n!}:\frac{1}{(n-1)!}=\frac{1}{n}$; tātad

$$q=\lim_{n\to\infty}|u_{n+1}:u_n|=0,\ \text{t. i., } q<1.$$

379. §. Rindas locekļu pārstatīšana

Absolūti konverģentā rindā drīkst patvaļīgi pārstatīt locekļus, pie tam absolūtā konverģence netiek izjaukta un summa nemainās (atsevišķā gadījumā konverģentas pozitīvas rindas summa nav atkarīga no locekļu kārtības).

Turpretim nosacīti konverģentā rindā ne katra locekļu pārstatīšana ir pieļaujama, jo summa var mainīties un pat var tikt izjaukta konverģence.

1. piemērs. Rinda

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^4-\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^6-\left(\frac{1}{2}\right)^5+\ldots, \qquad (1)$$

kuru iegūst, pārstatot absolūti konverģentas rindas

$$-\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\left(-\frac{1}{2}\right)^4+\ldots, \qquad (2)$$

locekļus, arī konverģē un tai ir tāda pati summa S kā ģeometriskajai progresijai (2). Tādējādi

$$S=\frac{-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=-\frac{1}{3}. \qquad (3)$$

Formulu (3) var pārbaudīt, uzskatot rindas (1) parciālsummu s_{2n} par ģeometriskas progresijas locekļu summu, kurai pirmais loceklis ir $\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$ un kvocients $\left(\frac{1}{2}\right)^2=$ $=\frac{1}{4}$.

2. piemērs. Rinda

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\ldots \qquad (4)$$

konverģē nosacīti (377. §). Rinda

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\ldots, \qquad (5)$$

kas iegūta, pārstatot rindas (4) locekļus, konverģē, bet tās summa ir pusotras reizes lielāka par dotās rindas summu (371. § brīdinājums).

Piezīme. Katrā nosacīti konverģentā rindā var tā pārstatīt locekļus, lai jaunās rindas summa būtu jebkurš iepriekš uzdots skaitlis (var likt arī rindai diverģēt).

380. §. Rindas locekļu grupēšana

Prestatā komutatīvai īpašībai (kura piemīt tikai absolūti konverģentām rindām; sal. 379. §) asociatīvā īpašība piemīt *jebkurai* konverģentai rindai.

Proti, jebkurā konverģentā rindā, *nemainot locekļu kārtību,* tos var apvienot kādās vien patīk grupās. Saskaitot locekļus visās grupās, dabūsim jaunu rindu. Tā arī konverģēs un tās summa būs iepriekšējā.

1. piemērs. Konverģentā (pēc Leibnica pazīmes) rindā

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\ldots \tag{1}$$

locekļus var grupēt šādi:

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)+\ldots \tag{2}$$

Saskaitot locekļus grupās, dabūsim

$$\frac{2}{2^2-1}+\frac{2}{6^2-1}+\frac{2}{10^2-1}+\ldots \tag{3}$$

Tā ir zīmespozitīva rinda un tai ir tā pati summa [1] kā zīmes mainīgai rindai (1).

2. piemērs. Rindā (1) var grupēt otro locekli ar trešo, ceturto ar piekto utt. Dabūsim konverģentu rindu

$$1-\frac{2}{4^2-1}-\frac{2}{8^2-1}-\frac{2}{12^2-1}-\ldots, \tag{4}$$

kurai būs tā pati summa.

Piezīme. Pretējā darbība (iekavu atvēršana) pieļaujama ir tikai tai gadījumā, ja pēc iekavu atvēršanas rodas konverģenta rinda (tad dotā rinda ir katrā ziņā konverģenta). Tomēr iespējams gadījums, kad dotā rinda konverģē, bet *pēc iekavu atvēršanas* rodas diverģenta rinda.

3. piemērs. Rinda

$$(1-0{,}9)+(1-0{,}99)+(1-0{,}999)+\ldots \tag{5}$$

[1] Tā ir vienāda ar $\frac{\pi}{4}$; sk. 398. § 3. piemēru.

(ģeometriska progresija $0{,}1+0{,}01+0{,}001+\ldots$) konverģē un tai ir summa $\frac{1}{9}$.

Ja atveram iekavas, dabūjam rindu

$$1-0{,}9+1-0{,}99+1-0{,}999+\ldots; \tag{5'}$$

tā diverģē, jo parciālsummām ar pāra numuriem ir iepriekšējā robeža $\frac{1}{9}$, bet ar nepāra numuriem robeža ir $1\frac{1}{9}$.

4. piemērs. Apskatīsim rindu

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots \tag{6}$$

To var izteikt tā:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots \tag{7}$$

Šeit iekavas atvērt drīkst, jo dabūtā rinda

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots \tag{8}$$

ir konverģenta. Tiešām, katra parciālsumma s_{2n-1} ir vienāda ar vienu, bet parciālsumma

$$s_{2n}=1-\frac{1}{n+1}$$

tiecas uz vienu. Rindas (8) summa $S=1$ ir arī rindas (6) summa, t. i.,

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\ldots=1.$$

381. §. Rindu reizināšana

Teorēma. Divas absolūti konverģentas rindas

$$u_1+u_2+u_3+\ldots=U, \tag{1}$$

$$v_1+v_2+v_3+\ldots=V \tag{2}$$

var sareizināt kā polinomus. Katru rindas (1) locekli reizina ar katru rindas (2) locekli un reizinājumus saskaita jebkurā kārtībā. Dabūsim absolūti konverģentu rindu, kuras summa ir UV, t. i.,

$$u_1v_1+u_1v_2+u_2v_1+u_1v_3+u_2v_2+u_3v_1+\ldots=UV. \qquad (3)$$

1. piezīme. Lai rindā (3) nevienu locekli neatkārtotu divreiz vai neaizmirstu, ieteicams locekļus u_iv_k grupēt ar vienu un to pašu rādītāju i, k summu (šo summu sauc par locekļa u_iv_k *svaru*). Tad rinda iegūst izskatu

$$w_1+w_2+w_3+\ldots, \qquad (4)$$

kur

$$\begin{aligned} &w_1=u_1v_1,\\ &w_2=u_2v_1+u_1v_2,\\ &w_3=u_3v_1+u_2v_2+u_1v_3,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &w_n=u_nv_1+u_{n-1}v_2+u_{n-2}v_3+\ldots+u_1v_n. \end{aligned} \qquad (5)$$

Šī grupēšana atbilst reizināšanai pēc shēmas

$$\begin{array}{r} u_1+u_2\ \ +u_3\ \ +u_4\ \ +\ldots\\ v_1+v_2\ \ +v_3\ \ +v_4\ \ +\ldots\\ \hline u_1v_1+u_2v_1+u_3v_1+u_4v_1+\ldots\\ u_1v_2+u_2v_2+u_3v_2+\ldots\\ u_1v_3+u_2v_3+\ldots\\ u_1v_4+\ldots\\ \hline w_1\ +\ \ w_2\ \ +w_3\ \ +w_4\ \ +\ldots \end{array} \qquad (6)$$

1. piemērs. Apskatīsim divas absolūti konverģentas rindas

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots; \qquad (7)$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}+\ldots \qquad (8)$$

Sareizinot tās pēc shēmas (6), atradīsim

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
1 & + & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{8} & + & \frac{1}{16} & + & \dots \\
  & - & \frac{1}{2} & - & \frac{1}{4} & - & \frac{1}{8} & - & \frac{1}{16} & - & \dots \\
  &   &   &   & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{8} & + & \frac{1}{16} & + & \dots \\
  &   &   &   &   & - & \frac{1}{8} & - & \frac{1}{16} & - & \dots \\
  &   &   &   &   &   &   & + & \frac{1}{16} & + & \dots \\
\hline
1 & + & 0 & + & \frac{1}{4} & + & 0 & + & \frac{1}{16} & + & \dots
\end{array}
\tag{9}
$$

Dabūtās rindas sastādīšanas likumu izsaka ar formulām[1]

$$w_{2n-1}=\frac{1}{2^{2n-2}},\quad w_{2n}=0.$$

Nerakstot nulles, dabūjam absolūti konverģentu rindu

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\dots+\frac{1}{4^{n-1}}+\dots \tag{10}$$

Tās summa ir rindu (7) un (8) summu reizinājums. To var viegli pārbaudīt, jo progresijas (7) summa ir vienāda ar 2, progresijas (8) summa ir $\frac{2}{3}$, bet progresijas (10) summa ir $\frac{4}{3}$.

2. piemērs. Rinda

$$1+\frac{2}{7}+\frac{3}{7^2}+\frac{4}{7^3}+\dots+\frac{n}{7^{n-1}}+\dots \tag{11}$$

[1] Katrā shēmas (9) kolonā saskaitāmajiem ir viena un tā pati absolūtā vērtība, bet zīmes pēc kārtas mainās (alternē). Pāra numura kolona (kur saskaitāmie ir pāra skaitā) dod nulli. Nepāra numura $2n-1$ kolonā pirmais saskaitāmais ir $\frac{1}{2^{2n-2}}$, bet pārējie savstarpēji iznīcinās.

absolūti konverģē (pēc Dalambēra pazīmes). Atrast tās summu.

A t r i s i n ā j u m s. Meklētā summa ir divu vienādu absolūti konverģentu rindu

$$1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\ldots+\frac{1}{7^{n-1}}+\ldots=\frac{7}{6}, \tag{12}$$

$$1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\ldots+\frac{1}{7^{n-1}}+\ldots=\frac{7}{6}. \tag{13}$$

summu reizinājums.

Tiešām, pēc shēmas (6) dabūjam

$$\begin{array}{r}
1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\ldots \\
\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\ldots \\
\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\ldots \\
\frac{1}{7^3}+\ldots \\
\hline
1+\frac{2}{7}+\frac{3}{7^2}+\frac{4}{7^3}+\ldots
\end{array}$$

Tātad rindas (11) summa ir vienāda ar

$$\frac{7}{6}\cdot\frac{7}{6}=\frac{49}{36}.$$

2. p i e z ī m e. Ja viena no rindām (1) vai (2) konverģē absolūti, bet otra — nosacīti, tad ar shēmu (6) atrastā rinda (4) ir konverģenta un tās summa tāpat kā iepriekš ir vienāda ar UV. Bet var izrādīties, ka šī rinda konverģē nosacīti; tad ne katra locekļu pārstatīšana ir pieļaujama (379. §).

Ja abas rindas (1) un (2) konverģē nosacīti, tad var izrādīties, ka *rinda* (4) diverģē [1]. Bet, ja tā konverģē, tad tās summa ir vienāda ar UV.

382. §. Rindu dalīšana

Teorēma. Pieņemsim, ka mums ir divas konverģentas rindas

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=U, \tag{1}$$

$$v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots=V. \tag{2}$$

Pielietojot tām shēmu polinoma $u_1+u_2+\ldots+u_n$ dalīšanai ar polinomu $v_1+v_2+\ldots+v_n$, dabūsim rindu

$$w_1+w_2+\ldots+w_n+\ldots \tag{3}$$

Ja rinda (3) konverģē [2], tad tās summa W ir vienāda ar $U:V$.

---

[1] Rinda

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots\pm\frac{1}{\sqrt{n}}\mp\ldots \tag{U}$$

konverģē (pēc Leibnica pazīmes, 376. §), bet tā konverģē nosacīti, t. i., pozitīvā rinda

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$$

diverģē (373. § 2. piemērs). Ja pielietojam formulas (4) un (5) divām rindām, kuras abas sakrīt ar (U), tad dabūsim rindu

$$w_1+w_2+w_3+\ldots, \tag{W}$$

kurai visi locekļi pēc absolūtās vērtības ir lielāki par vienu. Tiešām, formula (5) dod

$$|w_n|=\frac{1}{\sqrt{1\cdot n}}+\frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n\cdot 1}}.$$

Šeit visi n saskaitāmie ir lielāki par $\frac{1}{\sqrt{n\cdot n}}=\frac{1}{n}$. Tātad w_n netiecas uz nulli un rinda (W) diverģē (369. §).

[2] Var izrādīties, ka tā diverģē, pat ja rindas (1) un (2) konverģē absolūti. Tā, ja saskaņā ar minēto shēmu izdala rindu $1+0+0+0+\ldots$ (visi locekļi, izņemot pirmo, ir nulles) ar rindu $1+1+0+0+0+\ldots$ (visi locekļi, izņemot divus pirmos, ir nulles), dabūsim diverģentu rindu $1-1+1-1+\ldots$

P i e m ē r s. Pielietosim konverģentām rindām

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=U, \tag{1a}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}+\ldots=V \tag{2a}$$

shēmu polinoma dalīšanai ar polinomu. Dabūsim

$$\begin{array}{l|l}
\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\ldots & \frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}-\ldots \\
\cline{2-2}
-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}-\ldots\right) & 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots, \\
\cline{1-1}
\qquad \frac{1}{2}+0+\frac{1}{2^3}+0+\frac{1}{2^5}+\ldots & \\
\qquad -\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}-\ldots\right) & \\
\cline{1-1}
\qquad\quad \frac{1}{2^2}+0+\frac{1}{2^4}+0+\ldots & \\
\qquad\quad -\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}+\ldots\right) & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad \frac{1}{2^3}+0+\frac{1}{2^5}+\ldots & \\
\qquad\qquad -\left(\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}-\ldots\right) & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad\quad \frac{1}{2^4}+0+\ldots &
\end{array}$$

Šai piemērā rindas (3) locekļi veidojas pēc šāda likuma:

$$w_1=1, \quad w_2=\frac{1}{2^0}, \quad w_3=\frac{1}{2^1},$$

$$w_4=\frac{1}{2^2}, \ldots, \quad w_n=\frac{1}{2^{n-2}}, \ldots \qquad (n\geqslant 2)$$

Tiešām, otrais atlikums rodas pareizinot visus pirmā atlikuma locekļus ar $1/2$, tādējādi rindas (3) trešo locekli dabū otro locekli pareizinot ar $1/2$. Trešajā atņemšanā tiklab mazināmajā, kā mazinātājā visi locekļi ir divreiz mazāki nekā iepriekšējā atņemšanā. Tādējādi trešo atlikumu dabū otro atlikumu pareizinot ar $1/2$. Tātad rindas (3) ceturto locekli dabū trešo locekli pareizinot ar $1/2$ utt.

Tātad rindas (3) locekļi, sākot ar otro locekli, veido ģeometrisku progresiju ar kvocientu $1/2$. Tātad rinda (3) konverģē. Tās summa W ir vienāda ar $U : V$.

Tiešām, dabūjam

$$U=1, \quad V=\frac{1}{3}, \quad W=1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3,$$

tā ka

$$U : V=W.$$

383. §. Funkciju rinda

Par *funkciju rindu* sauc izteiksmi

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots, \tag{1}$$

kur $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... (rindas locekļi) ir viena un tā paša argumenta x funkcijas, kuras definētas kādā intervālā (a, b).

Izteiksmes (1) jēga izskaidrota 367. paragrāfā. Tikai tagad rindas locekļi ir f u n k c i j a s, kamēr 367. paragrāfā tika apskatīta rinda, kuras locekļi bija skaitļi; tādu rindu atšķirībā no funkciju rindas sauc par *skaitļu rindu*. Funkciju rindas *parciālsummas* definē tāpat kā skaitļu rindai.

Ja rindā (1) argumentam x dod kādu vērtību [kas pieder intervālam (a, b)], tad no funkciju rindas dabūjam skaitļu rindu.

384. §. Funkciju rindas konverģences apgabals

Var gadīties, ka jebkurai x vērtībai, kas ņemta intervālā (a, b), funkciju rinda konverģē. Var gadīties arī tā, ka jebkurai x vērtībai rinda diverģē. Tipiskākajos gadījumos funkciju rinda konverģē vienām x vērtībām un diverģē citām.

Argumenta x vērtību kopu, kurām rinda konverģē, sauc par funkciju rindas *konverģences apgabalu*.

Konverģences apgabalā katrai x vērtībai atbilst noteikta rindas summa, tā ka pēdējā ir argumenta x funkcija, kas definēta konverģences apgabalā. Ārpus šī apgabala funkciju rindai nav summas.

1. piemērs. Apskatīsim funkciju rindu

$$1 \cdot x + 1 \cdot 2x^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3x^3 + \ldots + 1 \cdot 2 \ldots nx^n + \ldots \tag{1}$$

Tās locekļi ir funkcijas

$$u_1(x) = x, \quad u_2(x) = 2x^2, \quad u_3(x) = 6x^3, \ldots, \tag{2}$$

kas definētas intervālā $(-\infty, +\infty)$. Bet tikai vērtībai $x=0$ rinda (1) konverģē, visām pārējām x vērtībām rinda diverģē. Tiešām, dosim argumentam x kādu vērtību x_0, kas nav vienāda ar nulli. Dabūsim skaitļu rindu

$$1 \cdot x_0 + 1 \cdot 2x_0^2 + \ldots + 1 \cdot 2 \ldots nx_0^n + \ldots \tag{3}$$

Attiecībai

$$|u_{n+1} : u_n| = |(n+1)!\, x_0^{n+1} : n!\, x_0^n| = (n+1)|x_0|$$

ir bezgalīga robeža, kad $n \to \infty$. Tātad (378. §) rinda (3), ja $x \neq 0$, diverģē. Konverģences apgabalu sastāda viens punkts $x=0$.

2. piemērs. Funkciju rinda

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \tag{4}$$

[tās locekļi ir funkcijas, kas definētas intervālā $(-\infty, +\infty)$] konverģē jebkurai vērtībai $x=x_0$. Tiešām, attiecība

$$|u_{n+1} : u_n| = \frac{|x_0|}{n+1}$$

tiecas uz nulli, kad $n \to \infty$ (378. §). Konverģences apgabals ir viss intervāls $(-\infty, +\infty)$. Rindas (4) summa ir funkcija, kas definēta šai intervālā (šī funkcija ir e^x; sal. 272. § 1. piemēru).

3. piemērs. Atrast konverģences apgabalu un summas izteiksmi rindai

$$2+\frac{1}{2}x(1-x)+\frac{1}{2}x^2(1-x)+\ldots+$$
$$+\frac{1}{2}x^{n-1}(1-x)+\ldots \qquad (5)$$

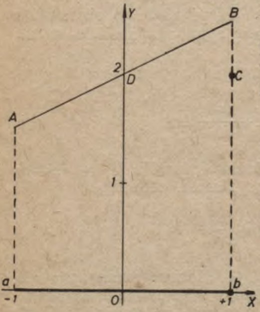
Atrisinājums. Uzrakstām rindas (5) parciālsummu tā:

$$s_n=2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^2-\ldots$$
$$\ldots-\frac{1}{2}x^{n-1}+\frac{1}{2}x^{n-1}-\frac{1}{2}x^n=2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^n. \qquad (6)$$

Ja $|x|>1$, tad s_n, kad $n\to\infty$, nav galīgas robežas (saskaitāmais $-\frac{1}{2}x^n$ ir bezgalīgi liels lielums), t. i., rinda (5) diverģē. Ja $x=-1$, tad rinda arī diverģē, jo tad

$$s_n=2-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(-1)^n=\frac{3}{2}+\frac{(-1)^{n+1}}{2}.$$

No šejienes redzams, ka s_n pārmaiņus pieņem vērtības 2 un 1.



401. zīm.

Visām pārējām x vērtībām (t. i., ja $-1<x\leqslant 1$) rinda (5) konverģē. Tiešām, ja $x=1$, tad visi rindas (5) locekļi, izņemot pirmo locekli, pārvēršas nullē un mēs dabūjam

$$S(1)=2. \qquad (7)$$

Beidzot, ja $|x|<1$, tad formulā (6) saskaitāmais $-\frac{1}{2}x^n$, kad $n\to\infty$ un x ir nemainīgs, tiecas uz nulli, tā ka

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^n\right)=$$
$$=2+\frac{1}{2}x. \qquad (8)$$

Rindas (5) konverģences apgabals ir intervāls $(-1, +1)$, no kura izslēgts gals $x=-1$ (401. zīmējumā nogrieznis ab bez gala a). Šai apgabalā rindas (5) summa S ir x funkcija, ko nosaka šādas vienādības:

$$\left.\begin{aligned} &S(x)=2+\frac{1}{2}x, \quad \text{ja } -1<x<1 \\ &S(x)=2, \qquad\quad \text{ja } x=1. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Funkcija ir pārtraukta punktā $x=1$ un ir nepārtraukta visos pārējos konverģences apgabala punktos. Ārpus apgabala $-1<x\leq 1$ funkcija $S(x)$ vispār nav definēta. Tās grafika (401. zīm.) ir nogrieznis AB, kuram izgriezti gali A un B un kuram (punkta B vietā) pievienots punkts C.

385. §. Par vienmērīgu un nevienmērīgu konverģenci [1]

Pieņemsim, ka funkciju rinda

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \tag{1}$$

konverģē (slēgta vai vaļēja) intervāla (a, b)[2] visos punktos un ir aptuveni ar precizitāti līdz ε jāatrod rindas (1) summa S (t. i., atlikums R_n pēc absolūtās vērtības nedrīkst pārsniegt pozitīvo skaitli ε). Katrai noteiktai x vērtībai šī prasība tiek izpildīta, sākot ar kādu numuru $n=N$. Lielums N vispārīgi ir atkarīgs no x un var gadīties, ka *neviens numurs N nenodrošina prasīto precizitāti visiem x uzreiz.* Tad saka, ka rinda (1) intervālā (a, b) konverģē *nevienmērīgi*. Ja turpretim prasīto precizitātes pakāpi vienmēr var nodrošināt tūlīt visiem x, sākot ar vienu un to pašu numuru N, tad saka, ka rinda (1) intervālā (a, b) konverģē *vienmērīgi*.

1. piemērs. Funkciju rinda

$$2+\frac{1}{2}x(1-x)+\frac{1}{2}x^2(1-x)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{2}x^{n-1}(1-x)+\ldots \tag{2}$$

[1] Definīciju sk. 386. paragrāfā.

[2] Rinda var konverģēt arī punktos ārpus intervāla (a, b), bet tādus punktus mēs neievērojam.

(sk. 384. § 3. piemēru) konverģē visos slēgta intervāla (0, 1) punktos. Parādīsim, ka tā šai intervālā konverģē nevienmērīgi.

Prasīsim, lai parciālsumma

$$s_n = 2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^n \tag{3}$$

dotu rindas (2) summu ar precizitāti līdz $\frac{1}{2} \cdot 0{,}1$. Ja $x=1$ un arī ja $x=0$, šo prasību izpilda visas parciālsummas (rodas precīza vērtība $S=2$). Pārējām x vērtībām rindas summa ir vienāda ar

$$S = 2 + \frac{1}{2}x, \tag{4}$$

tā ka rindas atlikums ir

$$R_n = S - s_n = \frac{1}{2}x^n. \tag{5}$$

Ja $x=0{,}1$ vai ja $x=0{,}2$, vai ja $x=0{,}3$, prasītā precizitāte tiek nodrošināta, sākot ar numuru $N=2$; piemēram, ja $x=0{,}3$, dabūjam

$$|R_2| = \frac{1}{2} \cdot 0{,}3^2 < \frac{1}{2} \cdot 0{,}1.$$

Bet, ja $x=0{,}4$, tad ar diviem locekļiem nepietiek — jāņem vismaz trīs. Tad

$$|R_3| = \frac{1}{2} \cdot 0{,}4^3 \approx \frac{1}{2} \cdot 0{,}06 < \frac{1}{2} \cdot 0{,}1.$$

Tālākās pārbaudes rāda, ka, ja $x=0{,}5$, prasītā precizitāte tiek nodrošināta, sākot tikai ar numuru $N=4$, ja $x=0{,}6$ — sākot ar numuru $N=5$, bet, ja $x=0{,}8$, jāņem $N=11$. Ja x tuvojas skaitlim 1, tad skaitlis N neierobežoti aug, tā ka visām x vērtībām uzreiz neviens numurs N precizitāti līdz 0,1 (un lielāku precizitāti vēl jo vairāk) nodrošināt nevar. Tātad rinda (2) intervālā (0, 1) konverģē nevienmērīgi.

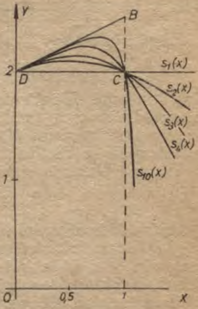
402. zīmējumā attēlotas parciālsummu

$$s_1(x) = 2, \quad s_2(x) = 2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2,$$

$$s_3(x) = 2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^3, \quad s_4(x) = 2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^4$$

grafikas. Atlikumu, ja $x \neq 1$, attēlo ordinātu nogriežņi starp atbilstošo grafiku un taisni $y = 2 + \frac{1}{2}x$ [kas izsaka rindas (2) summu visām x vērtībām, izņemot $x = 1$].

Rindas (2) konverģence izpaužas tādējādi, ka parciālsummas s_n, n augot, vienmēr ciešāk un ciešāk piekļaujas taisnei DB vienmēr lielākā tās garumā. Konverģences nevienmērīgums parādās tādējādi, ka punkta B tuvumā visas s_n grafikas atiet no taisnes DB. Bet līdz ar n augšanu jūtama atkāpšanās notiek vienmēr mazākā gabalā.



402. zīm.

2. p i e m ē r s. Parādīsim, ka tā pati rinda intervālā (0; 0,5) konverģē vienmērīgi.

Prasīsim precizitāti līdz $\frac{1}{2} \cdot 0{,}1$. Ja $x = 0{,}5$, šī precizitāte tiek nodrošināta, sākot ar numuru $N = 4$, jo

$$|R_4| = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5^4 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}0625 < \frac{1}{2} \cdot 0{,}1.$$

Jebkurai citai x vērtībai intervālā (0; 0,5) prasītā precizitāte vēl jo vairāk tiek nodrošināta, sākot ar numuru 4.

Prasīsim precizitāti līdz $\frac{1}{2} \cdot 0{,}01$; tad, ja $x = 0{,}5$, pietiek ņemt $N = 7$, jo

$$|R_7| = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5^7 \approx \frac{1}{2} \cdot 0{,}0078 < \frac{1}{2} \cdot 0{,}01.$$

Jebkurai citai x vērtībai intervālā (0; 0,5) ar septiņiem locekļiem vēl jo vairāk pietiek. Vispārīgi, tas numurs N, kas nodrošina precizitāti līdz ε punktā $x = 0{,}5$, vienmēr nodrošina to pašu precizitāti tūlīt visām x vērtībām intervālā (0; 0,5). Tātad šai intervālā rinda (2) konverģē vienmērīgi.

402. zīmējumā vienmērīgā konverģence izpaužas tādējādi, ka intervālā (0; 0,5) s_n grafikas vislielākā atvirze no taisnes DB tiecas uz nulli, ja n aug. Intervālā (0, 1) tas nav novērojams.

386. §. Vienmērīgas un nevienmērīgas konverģences definīcija

Funkciju rindu

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots, \tag{1}$$

kas konverģē (slēgtā vai vaļējā) intervālā (a, b), sauc par *vienmērīgi konverģentu* šai intervālā, ja atlikums $R_n(x)$, sākot ar kādu numuru N, *kas ir viens un tas pats visām apskatāmajām x vērtībām,* paliek pēc absolūtās vērtības mazāks par jebkuru iepriekš uzdotu pozitīvu skaitli ε, t. i.,

$$|R_n(x)|<\varepsilon, \text{ ja } n\geqslant N(\varepsilon) \tag{2}$$

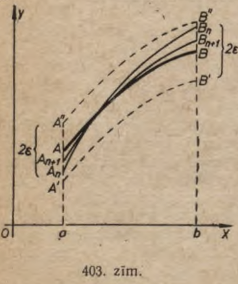
(numurs N ir atkarīgs tikai no ε).

Ja kādam ε noteikumu (2) nevar izpildīt (v i s i e m x u z r e i z), lai kāda būtu N vērtība, tad saka, ka rinda (1) intervālā (a, b) *konverģē nevienmērīgi.*

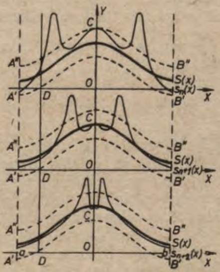
Piemērus sk. 385. paragrāfā.

387. §. Vienmērīgas un nevienmērīgas konverģences ģeometriskā jēga

Pieņemsim, ka AB (403. zīm.) ir intervālā (a, b) konverģentas rindas summas $S(x)$ grafika, bet līnijas A_nB_n, $A_{n+1}B_{n+1}, \ldots$ parciālsummu $s_n(x)$, $s_{n+1}(x), \ldots$ grafikas. Ieslēgsim AB joslā $A'A''B''B'$, kurai abas robežas $A'B'$ un



403. zīm.



404. zīm.

$A''B''$ atrodas no AB (pa vertikāli) pastāvīgā attālumā ε. Ja rinda vienmērīgi konverģē, tad visas līnijas A_nB_n, sākot ar kādu numuru $N(\varepsilon)$, novietojas (apskatāmā intervāla robežās) pilnīgi joslas iekšpusē.

Tas nav novērojams, ja rinda konverģē nevienmērīgi. Uzskatāmi to paskaidro 404. zīm.; šeit visām $s_n(x)$ grafikām ir divas «mēles», kas izšaujas no joslas $A'A''B''B'$ (ja n aug, tad tās tuvojas punktam C). Bet *virs katra atsevišķa* gabala ab punkta D $s_n(x)$ grafikas neierobežoti tuvojas $S(x)$ grafikai (pēc tam kad «mēle» ir pagājusi gar punktu D).

388. §. Vienmērīgas konverģences pazīme; regulāras rindas

Ja katrs funkciju rindas

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \qquad (1)$$

loceklis $u_n(x)$ jebkurai x vērtībai, kas ņemta intervālā (a, b), pēc absolūtās vērtības nepārsniedz pozitīvu skaitli A_n un ja skaitļu rinda

$$A_1+A_2+\ldots+A_n+\ldots \qquad (2)$$

konverģē, tad funkciju rinda šai intervālā vienmērīgi konverģē.

P a s k a i d r o j u m s. Rindas (1) konverģence izriet no 377. un 373. §. Rindas (1) atlikums pēc absolūtās vērtības nepārsniedz rindas (2) atlikumu. Numurs N jāizvēlas tā, lai tas nodrošinātu precizitāti līdz ε rindai (2), tad katrā ziņā būs nodrošināta precizitāte līdz ε rindai (1) visiem x uzreiz.

P i e m ē r s. Funkciju rinda

$$-\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 2x}{2^2}-\frac{\cos 3x}{3^2}+\ldots+(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}+\ldots \qquad (3)$$

vienmērīgi konverģē intervālā $(-\infty, +\infty)$, jo tās locekļi, lai kāds būtu x, pēc absolūtās vērtības nepārsniedz atbilstošos pozitīvas skaitļu rindas

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots \qquad (4)$$

locekļus. Pēdējā rinda konverģē (373. § 3. piemērs). Precizitāte līdz 0,1 rindai (4) tiek nodrošināta, sākot ar numuru

$n=10$. Rindai (3) tā pati precizitāte vēl jo vairāk ir nodrošināta, sākot ar desmito parciālsummu.

Slēgtā intervālā $(-\pi, \pi)$ rindas (3) summa ir

$$\frac{1}{4}\left(x^2-\frac{\pi^2}{3}\right).$$

Ja $x=\pm\pi$, tad funkciju rinda (3) pārvēršas skaitļu rindā (4); pēdējās summa ir vienāda ar $\frac{\pi^2}{6}$ (sk. 417. § 3. piemēru).

Piezīme. Funkciju rindu, kas pakļaujas šī paragrāfa pazīmei, sauc par *regulāru*. Jebkura regulāra rinda konverģē vienmērīgi. Neregulāras rindas dažos gadījumos konverģē vienmērīgi, citos — nevienmērīgi.

389. §. Rindas summas nepārtrauktība

Teorēma. Ja intervālā (a, b) visi vienmērīgi konverģentas funkciju rindas

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \qquad (1)$$

locekļi ir (šai intervālā) nepārtrauktas funkcijas, tad arī rindas (1) summa ir nepārtraukta funkcija intervālā (a, b).

1. piemērs. Visi locekļi rindai

$$-\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 2x}{2^2}-\frac{\cos 3x}{3^2}+\ldots+(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}+\ldots, \qquad (2)$$

kas vienmērīgi konverģē intervālā $(-\infty, +\infty)$ (388. §), ir nepārtrauktas funkcijas. Tātad rindas (2) summa ir funkcija, kas ir nepārtraukta jebkurai x vērtībai.

Piezīme. Nepārtrauktu funkciju nevienmērīgi konverģentas rindas summa dažos gadījumos ir nepārtraukta, citos — pārtraukta funkcija.

2. piemērs. Visi locekļi rindai

$$2+\frac{1}{2}x(1-x)+\frac{1}{2}x^2(1-x)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{2}x^{n-1}(1-x)+\ldots, \qquad (3)$$

kas slēgtā intervālā (0, 1) konverģē nevienmērīgi (385. §), ir nepārtrauktas funkcijas. Bet rindas summa ir funkcija, kurai ir pārtraukums punktā $x=1$ (sk. 384. § 3. piemēru).

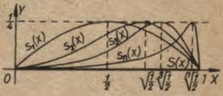
3. piemērs. Rinda

$$(x-x^2)+[(x^2-x^4)-(x-x^2)]+ \\ +[(x^3-x^6)-(x^2-x^4)]+\dots \tag{4}$$

ar vispārīgo locekli

$$u_n(x)=(x^n-x^{2n})-(x^{n-1}-x^{2n-2}) \tag{5}$$

slēgtā intervālā (0, 1) konverģē nevienmērīgi, bet tai ir nepārtraukta summa $S(x)$, kas ir identiski vienāda ar nulli.



405. zīm.

Tiešām, mēs dabūjam $s_n(x)=x^n-x^{2n}$ un katrai atsevišķai intervāla (0, 1) vērtībai x šī izteiksme tiecas uz nulli, tā ka rinda konverģē un tai ir summa $S(x)=0$.

Bet rindas atlikumu $R_n(x)=S(x)-s_n(x)=x^n-x^{2n}$ nevar padarīt mazāku par $\frac{1}{4}$ visām apskatāmajām x vērtībām reizē, jo, lai kāds būtu n, atlikums ir vienāds ar $\frac{1}{4}$, ja $x=\sqrt[n]{\frac{1}{2}}$.

Tātad (385. §) rindas (4) konverģence ir nevienmērīga. Bet tās summa $S(x)=0$ ir nepārtraukta funkcija.

Ģeometriski: visu parciālsummu s_n grafikām (405. zīm.) ir «kupri» uz taisnes $y=\frac{1}{4}$, tā ka neviena grafika pilnīgi nenovietojas iekšpusē joslai starp taisnēm $y=\pm\frac{1}{4}$. Tas tomēr netraucē rindas summai (kas attēlota ar treknu nogriezni uz OX ass) būt nepārtrauktai funkcijai.

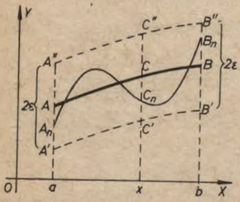
390. §. Rindu integrēšana

Teorēma. Ja konverģenta rinda

$$u_1(x)+u_2(x)+\dots+u_n(x)+\dots=S(x), \tag{1}$$

kas sastādīta no intervāla (a, b) nepārtrauktām funkcijām, konverģē šai intervālā vienmērīgi, tad to drīkst pa locekļiem integrēt. Rinda

$$\int_a^x u_1(x)dx+\int_a^x u_2(x)dx+\ldots+\int_a^x u_n(x)dx+\ldots \qquad (2)$$



406. zīm.

vienmērīgi konverģē intervālā (a, b), un tās summa ir vienāda ar rindas (1) summas integrāli $\int_a^x S(x)dx$, t. i.,

$$\int_a^x u_1(x)dx+\int_a^x u_2(x)dx+\ldots+$$
$$+\int_a^x u_n(x)dx+\ldots=\int_a^x S(x)dx. \qquad (3)$$

P a s k a i d r o j u m s. Rindas (2) parciālsumma $s'_n(x)$ ir rindas (1) parciālsummas $s_n(x)$ integrālis, t. i.,

$$s'_n(x)=\int_a^x s_n(x)dx$$

un to attēlo aA_nC_nx laukums (406. zīm.). Rindas (1) summas $S(x)$ integrāli $\int_a^x S(x)dx$ attēlo $aACx$ laukums.

Teorēma apgalvo, pirmkārt, ka rinda (2) konverģē un tās summa ir vienāda ar $\int_a^x S(x)dx$.

Ģ e o m e t r i s k i: figūras $aACx$ laukums (406. zīm.) ir aA_nC_nx laukuma robeža, kad $n\to\infty$.

Tiešām, ja rinda (1) vienmērīgi konverģē, tad grafika aA_nC_nx novietojas joslas $A'A''C''C'$ iekšienē (387. §). Tātad aA_nC_nx laukums ieslēgts starp $aA'C'x$ un $aA''C''x$ laukumiem. Bet abu to robeža ir $aACx$ laukums.

Teorēma apgalvo, otrkārt, ka rinda (2) konverģē vienmērīgi.

Ģeometriski: tūlīt visiem ordinātes xC'' stāvokļiem lielumu

$$|\text{Lauk}_{aACx} - \text{Lauk}_{aA_nC_nx}|, \tag{4}$$

sākot ar kādu numuru n, var padarīt mazāku par jebkuru iepriekš uzdotu laukumu E. Tiešām joslu $A'A''B''B'$ var sašaurināt tā, lai tās laukums būtu mazāks par E. Tad $A'A''C''C'$ laukums vēl jo vairāk būs mazāks par E, bet lielums (4) būs vēl mazāks.

1. piemērs. Rinda

$$1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots \tag{5}$$

intervālā $(0, q)$, kur q ir īsta daļa, konverģē vienmērīgi (saskaņā ar 388. § pazīmi), jo tās locekļi nepārsniedz konverģentas (374. §) pozitīvas rindas

$$1+2q+3q^2+\ldots+nq^{n-1}+\ldots \tag{6}$$

atbilstošos locekļus.

Pie tam [1]

$$S(x)=1+2x+\ldots+nx^{n-1}+\ldots=\frac{1}{(1-x)^2}. \tag{7}$$

Saskaņā ar šī paragrāfa teorēmu rinda

$$\int_0^x dx+\int_0^x 2x\,dx+\ldots+\int_0^x nx^{n-1}\,dx+\ldots \tag{8}$$

vienmērīgi konverģē intervālā $(0, q)$ un tās summa ir vienāda ar

$$\int_0^x S(x)\,dx=\int_0^x \frac{dx}{(1-x)^2}=\frac{1}{1-x}-1 \quad (0\leqslant x\leqslant q). \tag{9}$$

To var viegli pārbaudīt, jo rinda (8) ir progresija

$$x+x^2+x^3+\ldots$$

[1] Formulu (7) var dabūt, rindu

$$1+x+x^2+\ldots=\frac{1}{1-x} \quad \left(0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\right)$$

pareizinot pašu ar sevi (sal. 381. § 2. piemērs).

P i e z ī m e. Ja rinda (1) konverģē nevienmērīgi, tad integrēšana pa locekļiem dažos gadījumos ir pieļaujama, citos ne (sk. 2. un 3. piemēru).

2. p i e m ē r s. Intervālā (0, 1) nevienmērīgi konverģentu rindu

$$(x-x^2)+[(x^2-x^4)-(x-x^2)]+ \\ +[(x^3-x^6)-(x^2-x^4)]+\ldots=0 \qquad (10)$$

(sk. 389. § 3. piemēru) var integrēt pa locekļiem robežās no 0 līdz 1, t. i.,

$$\int_0^1 (x-x^2)\,dx+\int_0^1 [(x^2-x^4)-(x-x^2)]\,dx+\ldots=$$

$$=\int_0^1 0\cdot dx=0. \qquad (11)$$

Tiešām, rindas (11) parciālsumma s'_n ir

$$s'_n=\int_0^1 (x^n-x^{2n})\,dx=\frac{n}{(n+1)(2n+1)}. \qquad (12)$$

Tā tiecas uz nulli, kad $n\to\infty$.

Ģ e o m e t r i s k i: laukums figūrai, ko ierobežo $s_n(x)$ grafika (405. zīm.) un nogrieznis (0, 1), tiecas uz nulli, neskatoties uz «kupri». (Ja n aug, «kupris» neierobežoti sašaurinās, bet tā augstums paliek pastāvīgs).

3. p i e m ē r s. Rinda

$$(x-x^2)+[2(x^2-x^4)-(x-x^2)]+ \\ +[3(x^3-x^6)-2(x^2-x^4)]+\ldots \qquad (13)$$

ar vispārīgo locekli

$$u_n(x)=n(x^n-x^{2n})-(n-1)(x^{n-1}-x^{2n-2}) \qquad (14)$$

intervālā (0, 1) konverģē, un tai ir nepārtraukta summa $S(x)=0$ [pierāda tāpat kā rindai (10)]. Tādējādi

$$\int_0^1 S(x)\,dx=0. \qquad (15)$$

Bet integrēšana pa locekļiem robežās no 0 līdz 1 dod ne nulli, bet $\frac{1}{2}$. Tiešām, iegūstam rindu

$$\int_0^1 (x-x^2)\,dx+\left[2\int_0^1 (x^2-x^4)\,dx-\int_0^1 (x-x^2)\,dx\right]+\ldots$$

$$\ldots+\left[n\int_0^1 (x^n-x^{2n})\,dx-(n-1)\int_0^1 (x^{n-1}-x^{2n-2})\,dx\right]+\ldots \tag{16}$$

ar parciālsummu

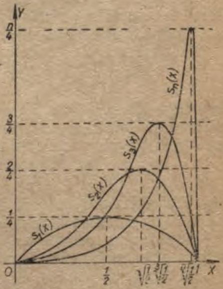
$$s'_n=n\int_0^1 (x^n-x^{2n})\,dx=\frac{n^2}{(n+1)(2n+1)}. \tag{17}$$

Tādējādi rindas summa S' ir

$$S'=\lim_{n\to\infty} s'_n=\frac{1}{2}. \tag{18}$$

Nesaskaņotība starp formulām (15) un (18) izskaidrojama ar rindas (13) nevienmērīgo konverģenci (konverģences nevienmērīgumu pierāda tāpat kā 389. § 3. piemērā).

Ģ e o m e t r i s k i: s_n grafikas (407. zīm.) tiecas saplūst ar abscisu asi virs jebkura nogriežņa (0, 1) gabala, kas nesatur punktu $x=1$. Bet šī punkta tuvumā veidojas «kupris». Tas neierobežoti tuvojas galam $x=1$. Pie tam tas sašaurinās horizontālā virzienā, bet vienlaicīgi aug augšup [1]. Kompensācijas rezultātā laukums starp s_n un nogriezni (0, 1) tiecas ne uz nulli, bet uz $\frac{1}{2}$.



407. zīm.

[1] 407. zīm. grafikas rodas no atbilstošajām 405. zīm. grafikām, izstiepjot tās pa vertikāli attiecībā $n:1$.

P i e z ī m e. Ja rindu (13) pārveido, ņemot rindu ar vispārīgo locekli

$$u_n(x)=n^2(x^n-x^{2n})-(n-1)^2(x^{n-1}-x^{2n-2}), \tag{14a}$$

tad, tāpat kā iepriekš, dabūsim

$$\int_0^1 S(x)dx=0, \tag{16a}$$

bet pēc integrēšanas pa locekļiem dabūsim rindu ar parciālsummu

$$s'_n=\frac{n^3}{(n+1)(2n+1)}. \tag{18a}$$

Tā būs diverģenta, jo $\lim\limits_{n\to\infty} s'_n=\infty$ («kupra» augšana augšup būs straujāka, nekā sašaurināšanās horizontālā virzienā).

391. §. Rindu diferencēšana

Pat ja rinda vienmērīgi konverģē, to diferencēt pa locekļiem ne vienmēr atļauts. Tālākā teorēma dod nosacījumus, kas nodrošina iespēju rindu diferencēt pa locekļiem.

T e o r ē m a. Ja funkciju rinda

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \tag{1}$$

konverģē intervālā (a, b) un tās locekļu atvasinājumi ir nepārtraukti šai intervālā, tad rindu (1) drīkst diferencēt pa locekļiem, ja vien izpildīts nosacījums, ka *iegūtā rinda*

$$u'_1(x)+u'_2(x)+\ldots+u'_n(x)+\ldots \tag{2}$$

vienmērīgi konverģēs dotajā intervālā. Rindas (2) summa būs rindas (1) summas atvasinājums.

Pierādījums pamatojas uz diferencēšanas un integrēšanas savstarpējo reciprocitāti un balstās uz 390. § teorēmu.

P i e m ē r s. Rinda

$$x+x^2+\ldots+x^n+\ldots \tag{3}$$

konverģē intervālā $(0, q)$, kur q ir īsts daļskaitlis. Pie tam

$$x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=\frac{x}{1-x}\;(0\leqslant x\leqslant q). \tag{4}$$

Rindas locekļu atvasinājumi ir nepārtraukti intervālā $(0, q)$, un no tiem sastādītā rinda

$$1+2x+\ldots+nx^{n-1}+\ldots \tag{5}$$

vienmērīgi konverģē šai intervālā (390. § 1. piemērs). Tātad rindas (5) summa ir rindas (3) summas $\frac{x}{1-x}$ atvasinājums, t. i.,

$$1+2x+\ldots+nx^{n-1}+\ldots=\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right)=\frac{1}{(1-x)^2}. \tag{6}$$

1. piezīme. Teorēmā nav prasības, lai rinda (1) konverģētu *vienmērīgi*. Ar teorēmas nosacījumiem šī prasība pati par sevi ir izpildīta (saskaņā ar 390. § teorēmu).

2. piezīme. Pat ja rinda (1) vienmērīgi konverģē un $u_n(x)$ atvasinājumi ir nepārtraukti, rinda (2) tomēr var izrādīties nevienmērīgi konverģenta un tad tās summa dažreiz ir vienāda, bet dažreiz nav vienāda ar rindas (1) summas atvasinājumu. Pat vēl vairāk, rinda (2) var iznākt diverģenta. Tā rinda

$$\sin x+\frac{\sin 2^4x}{2^2}+\ldots+\frac{\sin n^4x}{n^2}+\ldots \tag{7}$$

konverģē vienmērīgi uz visas skaitļu ass (sal. 388. § piemēru), kamēr atvasinājumu rinda

$$\cos x+2^2\cos 2^4x+\ldots+n^2\cos n^4x+\ldots \tag{8}$$

diverģē, ja $x=0$ (un arī neskaitāmai x vērtību kopai).

392. §. Pakāpju rinda

Praktiski svarīgākās funkciju rindas ir pakāpju rindas (par to rašanos sk. 270. §). Par *pakāpju rindu* sauc šāda veida rindu

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \tag{1}$$

un arī vispārīgāka veida rindu

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots, \tag{2}$$

kur x_0 ir pastāvīgs lielums. Par rindu (1) saka, ka tā ir *attīstīta pēc x pakāpēm*, par rindu (2), — ka tā ir *attīstīta pēc $x-x_0$ pakāpēm.*

Konstantes $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ sauc par pakāpju rindas *koeficientiem.*

Ja $x-x_0$ apzīmē ar z, tad rinda (2) būs attīstīta pēc z pakāpēm, t. i., pieņems veidu (1). Tāpēc tālāk, ja nebūs sevišķi uzsvērts, ar pakāpju rindu sapratīsim rindu (1). Pakāpju rinda vienmēr konverģē vērtībai $x=0$. Attiecībā uz konverģenci citos punktos var rasties trīs gadījumi, kas apskatīti 393. paragrāfā.

393. §. Pakāpju rindas konverģences intervāls un rādiuss

1. Var gadīties, ka pakāpju rinda diverģē visos punktos, izņemot $x=0$. Tāda, piemēram, ir rinda

$$1^1x+2^2x^2+3^3x^3+\ldots+n^nx^n+\ldots,$$

kurai vispārīgais loceklis $n^nx^n=(nx)^n$ pēc absolūtās vērtības neierobežoti aug, sākot ar momentu, kad nx kļūst lielāks par vienu. Tādām pakāpju rindām praktiskas nozīmes nav.

2. Pakāpju rinda var konverģēt visos punktos. Tāda, piemēram, ir rinda

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots,$$

kuras summa jebkurai x vērtībai ir vienāda ar e^x (272. § 1. piemērs).

3. Tipiskajā gadījumā pakāpju rinda vienā punktu kopā konverģē, citā — diverģē.

1. piemērs. Ģeometriskā progresija

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots \qquad (1)$$

konverģē, ja $|x|<1$, un diverģē, ja $|x|\geqslant 1$. Šeit konverģences apgabals (384. §) ir intervāls $(-1, +1)$, no kura izgriezti abi gali $x=+1$ un $x=-1$. Rindas (1) summa (konverģences apgabalā) ir

$$\frac{1}{1-x}.$$

2. piemērs. Pakāpju rinda

$$1+\frac{x}{1^2}+\frac{x^2}{2^2}+\ldots+\frac{x^n}{n^2}+\ldots \qquad (2)$$

konverģē, ja $|x| \leqslant 1$, un diverģē, ja $|x| > 1$ (sal. 374. § 2. piemēru). Konverģences apgabals ir intervāls $(-1, +1)$, kuram pieder abi gali $x=+1$ un $x=-1$. Rindas (2) summa neizsakās ar elementārajām funkcijām.

3. piemērs. Pakāpju rinda

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots \tag{3}$$

konverģē, ja $|x|<1$, un diverģē, ja $|x|>1$. Punktā $x=-1$ tā arī diverģē (369. § 3. piemērs), punktā $x=1$ — konverģē (369. § 4. piemērs). Konverģences apgabals ir intervāls $(-1, +1)$, ieskaitot punktu $x=1$; punkts $x=-1$ izslēgts. Rindas (3) summa (konverģences apgabalā) ir $\ln(1+x)$ (272. § 2. piemērs). Rindu (3) var dabūt, integrējot pa locekļiem rindu

$$1-x+x^2-x^3+\ldots=\frac{1}{1+x}.$$

Teorēma. Pakāpju rindas

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \tag{4}$$

konverģences apgabals ir kāds intervāls $(-R, R)$, kas ir simetrisks attiecībā pret punktu $x=0$. Dažreiz tanī jāieskaita abi gali $x=R$ un $x=-R$, dažreiz tikai viens, bet dažreiz abi gali jāizslēdz.

Intervālu $(-R, R)$ sauc par pakāpju rindas *konverģences intervālu*, pozitīvo skaitli R — par *konverģences rādiusu*. Ja pakāpju rinda konverģē tikai punktā $x=0$, tad $R=0$. 1.—3. piemērā konverģences rādiuss ir vienāds ar vienu. Ja rinda konverģē visos punktos, tad saka, ka konverģences rādiuss ir vienāds ar bezgalību ($R=\infty$).

394. §. Konverģences rādiusa atrašana

Teorēma. Pakāpju rindas

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \tag{1}$$

konverģences rādiuss R ir vienāds ar attiecības $|a_n|:|a_{n+1}|$ robežu, ja vien šī robeža (galīga vai bezgalīga) eksistē, t. i.,

$$R=\lim_{n\to\infty}|a_n:a_{n+1}|. \tag{2}$$

1. piemērs. Atrast konverģences rādiusu un apgabalu rindai

$$\frac{0{,}1x}{1}-\frac{0{,}01x^2}{2}+\frac{0{,}001x^3}{3}-\ldots+\frac{(-0{,}1)^n x^n}{n}+\ldots \tag{3}$$

Atrisinājums. Šeit $a_n=\frac{(-0{,}1)^n}{n}$. Dabūjam

$$|a_n|:|a_{n+1}|=\frac{0{,}1^n}{n}:\frac{0{,}1^{n+1}}{n+1}=10\,\frac{n+1}{n},$$

$$R=\lim_{n\to\infty}|a_n:a_{n+1}|=10. \tag{4}$$

Konverģences rādiuss ir vienāds ar 10, konverģences intervāls ir $(-10,\ 10)$. Šī intervāla iekšienē rinda (3) konverģē, ārpus tā — diverģē. Ja $x=10$, tad rinda (3) pieņem izskatu

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{(-1)^n}{n}+\ldots \tag{5}$$

Šī rinda konverģē (369. § 4. piemērs). Ja $x=-10$, dabūjam diverģentu (369. § 3. piemērs) rindu

$$-\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\ldots$$

Tātad konverģences apgabals ir intervāls $(-10,\ +10)$, kuram pievienots gals $x=+10$; otrs gals izgriezts.

Paskaidrojums. Uzskatīsim x par doto skaitli un pielietosim rindai (3) Dalambēra pazīmi (378. §). Dabūsim

$$u_n=\frac{(-0{,}1)^n x^n}{n},$$

$$\lim_{n\to\infty}|u_{n+1}:u_n|=\lim_{n\to\infty}\left(|x|\cdot 0{,}1\frac{n}{n+1}\right)=|x|\cdot 0{,}1.$$

Saskaņā ar Dalambēra pazīmi rinda (3) konverģē, ja $|x|\cdot 0{,}1<1$, t. i., ja $|x|<10$, un diverģē, ja $|x|\cdot 0{,}1>1$, t. i., ja $|x|>10$.

Pilnīgi atkārtojot šos spriedumus attiecībā pret rindu (1), dabūsim formulu (2).

1. piezīme. Rindas (3) summa (konverģences apgabalā) ir vienāda ar $\ln(1+0{,}1x)$ (sal. 393. § 3. piemēru).

2. piemērs. Atrast konverģences rādiusu rindai

$$1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\ldots \tag{6}$$

Atrisinājums. Šeit $a_n=\frac{(-1)^n}{n!}$. Ar formulu (2) dabūjam

$$R=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n!}:\frac{1}{(n+1)!}\right]=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty. \tag{7}$$

Rinda (6) konverģē visos punktos. Tās summa ir vienāda ar e^{-x} (sal. 272. § 1. piemēru).

2. piezīme. Ja rinda (1) satur bezgalīgi daudz koeficientu, kas vienādi ar nulli, tad attiecībai $|a_n|:|a_{n+1}|$ nav robežas un *formulu (2) lietot nevar*, pat ja atmet nulles koeficientus un pārējos koeficientus sanumurē pēc kārtas no jauna.

3. piemērs. Atrast konverģences rādiusu rindai

$$\frac{0{,}1z^2}{1}-\frac{0{,}01z^4}{2}+\frac{0{,}001z^6}{3}-\ldots, \tag{8}$$

kuru dabū no rindas (3) ar substitūciju $x=z^2$.

Atrisinājums. Tā kā rinda (3) konverģē, ja $|x|<10$, un diverģē, ja $|x|>10$, tad rinda (8) konverģē, ja $|z|<\sqrt{10}$, un diverģē, ja $|z|>\sqrt{10}$. Tātad rindas (8) konverģences rādiuss ir $\sqrt{10}$. Formula (2) nav lietojama: ja ievēro nulles koeficientus pie z nepāra pakāpēm, tad attiecībai $|a_n|:|a_{n+1}|$ nav jēgas, ja n ir pāra skaitlis; ja izmet nulles koeficientus un pārējos sanumurē pēc kārtas, tad attiecības $|a_n|:|a_{n+1}|$ robeža būs 10 un nedos konverģences rādiusu.

Rindas (8) summa (konverģences apgabalā) ir $\ln(1+$ $+0{,}1z^2)$.

395. §. Konverģences apgabals rindai, kas satur $x-x_0$ pakāpes

Konverģences apgabals pakāpju rindai

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots \tag{1}$$

ir kāds intervāls $(x_0-R,\ x_0+R)$, kas ir simetrisks attiecībā pret punktu x_0. Dažreiz tanī jāiekļauj abi gali, dažreiz viens, bet dažreiz abi gali jāizslēdz.

Intervālu $(x_0-R,\ x_0+R)$ sauc par rindas (1) *konverģences intervālu*, pozitīvo skaitli R — par *konverģences rādiusu*. Ja rinda konverģē visos punktos, tad konverģences rādiuss ir bezgalīgs $(R=\infty)$.

Ja attiecībai $|a_n| : |a_{n+1}|$ ir robeža (galīga vai bezgalīga), tad konverģences rādiusu atrod ar formulu

$$R=\lim_{n\to\infty} |a_n : a_{n+1}|. \tag{2}$$

P i e m ē r s. Atrast konverģences rādiusu un apgabalu rindai

$$\frac{x+0{,}2}{1}+\frac{(x+0{,}2)^2}{2}+\ldots+\frac{(x+0{,}2)^n}{n}+\ldots \tag{3}$$

Šeit $x_0=-0{,}2$, $a_n=\frac{1}{n}$. Ar formulu (2) atrodam

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}:\frac{1}{n+1}\right|=1.$$

Konverģences apgabals ir intervāls $(-1{,}2;\ 0{,}8)$, no kura izslēgts viens gals $x=0{,}8$. Rindas (3) summa (konverģences apgabalā) ir funkcija $-\ln[1-(x+0{,}2)]=\ln\frac{1}{0{,}8-x}$.

396. §. Abela[1] teorēma

T e o r ē m a. Ja pakāpju rinda

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \tag{1}$$

konverģē (absolūti vai nosacīti) kādā punktā x_0, tad tā konverģē *absolūti un vienmērīgi* jebkurā slēgtā intervālā $(a,\ b)$, kas atrodas intervāla $(-|x_0|,\ +|x_0|)$ iekšienē.

1. p i e z ī m e. Vārds iekšienē jāsaprot šaurā nozīmē, t. i., saskaņā ar teorēmas nosacījumiem neviens no nogriežņa

[1] N. Abels (1802—1829) — norvēģu matemātiķis. Viņš nodzīvoja tikai 27 gadus, bet radījis sevišķi svarīgus darbus. Apgalvojums par rindas (1) vienmērīgu konverģenci ir vēlāku laiku papildinājums (atšķirību starp vienmērīgo un nevienmērīgo konverģenci ieviesa Veierštrass 19. gs. četrdesmito gadu beigās).

galiem nedrīkst sakrist ne ar punktu $|x_0|$, ne ar punktu $-|x_0|$.

Piemērs. Rinda

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots \tag{2}$$

konverģē (nosacīti) punktā $x=-1$, pārvēršoties rindā (369. § 4. piemērs)

$$-\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\ldots$$

Saskaņā ar Abela teorēmu rinda (2) konverģē absolūti un vienmērīgi jebkurā slēgtā intervālā, kas atrodas intervāla $(-1, 1)$ iekšienē, piemēram, slēgtā intervālā $(-0{,}99;\ 0{,}99)$. Ja nogriežņa (a, b) kreiso galu ņemam punktā $x_0=-1$, tad izjuks *absolūtā* konverģence (pašā punktā -1). Ja (a, b) labo galu ņemam punktā $x_0=1$, tad rinda (2) kļūs diverģenta.

2. piezīme. Ja slēgta intervāla (a, b) vienu galu ņemam punktā x_0, tad tādā intervālā konverģence paliek vienmērīga. Tas pats sakāms par galu $-x_0$, *ja tanī rinda* (1) *konverģē.*

397. §. Darbības ar pakāpju rindām

Pieņemsim, ka dotas divas pakāpju rindas

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots=S_1(x), \tag{1}$$

$$b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n+\ldots=S_2(x). \tag{2}$$

Pieņemsim, ka A ir rindas (1) konverģences rādiuss un B — rindas (2) konverģences rādiuss. Apzīmēsim ar r mazāko no tiem (ja tie ir vienādi, tad r ir to kopīgā vērtība).

Ja rindas (1) un (2) pa locekļiem saskaita, atņem vai sareizina (saskaņā ar shēmu polinoma reizināšanai ar polinomu; sal. 381. §), tad dabūsim jaunas pakāpju rindas. To konverģences rādiusi sliktākajā gadījumā ir vienādi ar r, bet var arī būt lielāki par r. To summas attiecīgi ir vienādas ar $S_1(x)+S_2(x)$, $S_1(x)-S_2(x)$, $S_1(x)S_2(x)$ (sal. 371., 381. un 396. §).

Rindas (1) dalīšanu ar rindu (2) izpilda pēc 382. § shēmas ar nosacījumu, ka $b_0\neq 0$. Ja $r\neq 0$, tad dabūtās rindas konverģences rādiuss r_1 atšķiras no nulles, bet nepārsniedz A; var arī gadīties, ka r_1 ir mazāks par abiem rādiusiem A, B [sk. 4. piemēru un piezīmi 401. § formulai (4)]. Jaunās rindas summa (tās konverģences intervālā) ir vienāda ar $S_1(x) : S_2(x)$.

Ja $b_0=0$, tad dalīšana pa locekļiem vispār nav iespējama, ja $a_0 \neq 0$ (jo dalījums $S_1(x) : S_2(x)$ ir bezgalīgi liels, kad $x \to 0$, un to nevar izteikt ar rindu, kas būtu attīstīta pēc x pakāpēm). Ja turpretim $b_0=0$ un $a_0=0$, tad dalīšana pa locekļiem nav iespējama, ja dalāmā zemākā pakāpe ir mazāka par dalītāja zemāko pakāpi (tā paša iemesla dēļ). Pretējā gadījumā dalīšana ir iespējama un jaunajai rindai intervālā $(-r_1, r_1)$ ir summa $S_1(x) : S_2(x)$[1].

1. piemērs. Intervālā $(-1, +1)$ dabūjam

$$1+x+x^2+x^3+\ldots=\frac{1}{1-x}, \tag{3}$$

$$1-x+x^2-x^3+\ldots=\frac{1}{1+x}. \tag{4}$$

Saskaitot pa locekļiem, atrodam

$$2+2x^2+2x^4+\ldots=\frac{2}{1-x^2}. \tag{5}$$

Atņemot no (4) pa locekļiem (3), dabūjam

$$2x+2x^3+2x^5+\ldots=\frac{2x}{1-x^2}. \tag{6}$$

Sareizinot pa locekļiem (sal. 381. § 1. piemēru), dabūjam

$$1+x^2+x^4+\ldots=\frac{1}{1-x^2}. \tag{7}$$

Izdalot pa locekļiem rindu (3) ar rindu (4) (sal. 382. § piemēru), atrodam

$$1+2x+2x^2+2x^3+\ldots=\frac{1+x}{1-x}. \tag{8}$$

Rindām (5)—(8) saskaņā ar 394. § teorēmu konverģences rādiuss $R=1$, tāpat kā rindām (3) un (4). Formulas (5)—(8)

[1] Vērtībai $x=0$ šī summa (t. i., jaunās rindas brīvais loceklis) ir dalījuma robeža $S_1(x) : S_2(x)$, kad $x \to 0$.

viegli var pārbaudīt: to kreisās puses ir ģeometriskas progresijas [formulā (8), sākot ar otro locekli].

2. piemērs. Intervālā $(-\infty, +\infty)$ mums ir (272. § 1. piemērs)

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=e^x. \tag{9}$$

Aizstājot x ar $-x$, dabūjam

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\ldots=e^{-x}. \tag{10}$$

Tā kā $e^x \cdot e^{-x}=1$, tad, sareizinot pa locekļiem, visiem locekļiem, izņemot brīvo locekli, jāiznīcinās, kas arī patiesībā notiek.

3. piemērs. Dalot pa locekļiem rindu (9) ar rindu (10), dabūjam rindu

$$1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+\frac{2}{3}x^4+\ldots \tag{11}$$

Koeficientu veidošanās likums nav tūlīt ieskatāms, bet, zinot, ka rinda (11) konverģē kādā intervālā un ka tai ir summa $e^x : e^{-x}=e^{2x}$, rindu (11) var izteikt veidā

$$1+\frac{2}{1!}x+\frac{2^2}{2!}x^2+\frac{2^3}{3!}x^3+\frac{2^4}{4!}x^4+\ldots+\frac{2^n}{n!}x^n+\ldots \tag{12}$$

Rindai (12), tāpat kā rindām (9), (10), saskaņā ar 394. § teorēmu ir bezgalīgs konverģences rādiuss.

4. piemērs. Uzskatīsim binomus $1+x$ un $1-x$ par pakāpju rindām, kurām visu locekļu koeficienti, izņemot divus pirmos, ir vienādi ar nulli. Šo rindu konverģences rādiusi A un B ir bezgalīgi. Dalot pa locekļiem $1+x$ ar $1-x$, dabūjam pakāpju rindu

$$1+2x+2x^2+2x^3+2x^4+\ldots \tag{13}$$

Tās locekļi, sākot ar otro, veido ģeometrisku progresiju ar kvocientu x. Rindas (13) summa tās konverģences intervālā ir vienāda ar $(1+x):(1-x)$, bet konverģences rādiuss r_1 nav bezgalīgs; tas ir vienāds ar vienu.

398. §. Pakāpju rindas diferencēšana un integrēšana

1. teorēma. Ja pakāpju rindai ir konverģences rādiuss R un summa $S(x)$, t. i.,

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots=S(x), \qquad (1)$$

tad rindai, kuru dabū, to pa locekļiem diferencējot, ir tas pats konverģences rādiuss R un tās summa ir funkcijas $S(x)$ atvasinājums, t. i.,

$$a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots=S'(x). \qquad (2)$$

Tātad pakāpju rindas summa ir diferencējama funkcija; pie tam tai ir jebkuras kārtas atvasinājumi [jo rindai (2) atkal var pielietot 1. teorēmu utt.].

1. piezīme. Ja rinda (1) diverģē kādā intervāla $(-R, R)$ galā, tad šai galā rinda (2) arī diverģē. Rindas (1) konverģence intervāla $(-R, R)$ galā var saglabāties arī rindai (2), bet var arī nesaglabāties.

2. piezīme. Konverģence rindai (2) ir zināmā mērā sliktāka nekā rindai (1) (jo na_n pēc absolūtās vērtības ir lielāks par a_n).

1. piemērs. Atkārtoti diferencējot rindu

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=\frac{1}{1-x}\,(-1<x<+1), \qquad (3)$$

kurai $R=1$, dabūjam rindas ar to pašu konverģences rādiusu. To summas ir funkcijas $\frac{1}{1-x}$ augstākas kārtas atvasinājumi, t. i.,

$$1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+nx^{n-1}+\ldots=\frac{1}{(1-x)^2}, \qquad (4)$$

$$2+6x+12x^2+\ldots+n(n-1)x^{n-2}+\ldots=\frac{1\cdot 2}{(1-x)^3}, \qquad (5)$$

$$6+24x+\ldots+n(n-1)(n-2)x^{n-3}+\ldots=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1-x)^4}. \qquad (6)$$

Rinda (3) diverģē abos konverģences intervāla galos, tāpat arī rindas (4) – (6).

2. p i e m ē r s. Rinda (3) rodas, diferencējot rindu

$$x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots=-\ln(1-x). \qquad (7)$$

Rinda (7) diverģē punktā $x=1$ un konverģē punktā $x=-1$, bet pēc diferencēšanas konverģence galā $x=-1$ nesaglabājas.

2. t e o r ē m a. Rindai, kuru iegūst, integrējot pa locekļiem rindu (1) robežās no nulles līdz x, ir tas pats konverģences rādiuss un tās summa ir vienāda ar $\int\limits_0^x S(x)\,dx$, t. i.,

$$a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\ldots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\ldots=\int\limits_0^x S(x)\,dx. \qquad (8)$$

3. p i e z ī m e. Ja rinda (1) konverģē vienā intervāla $(-R, R)$ galā, tad šai galā rinda (8) arī konverģē un formula (8) paliek spēkā. Turpretim rindas (1) diverģence intervāla $(-R, R)$ galā var saglabāties arī rindai (8), bet var arī nesaglabāties. Rindas (8) konverģence ir zināmā mērā labāka par rindas (1) konverģenci.

3. p i e m ē r s. Ģeometriskās progresijas

$$1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^{n-1}x^{2n}+\ldots=\frac{1}{1+x^2} \qquad (9)$$

konverģences rādiuss ir vienāds ar vienu. Integrējot pa locekļiem, dabūjam (ja $|x|<1$)

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots=$$

$$=\int\limits_0^x \frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg} x. \qquad (10)$$

Rindas (10) konverģences rādiuss arī ir vienāds ar vienu.

Galā $x=1$ rinda (9) diverģē, bet rinda (10) konverģē (saskaņā ar Leibnica pazīmi), un mēs dabūjam[1]

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n+1}+\ldots=\operatorname{arctg} 1=\frac{\pi}{4}.$$

Galā $x=-1$ rinda (10), tāpat kā rinda (9), diverģē (saskaņā ir integrālo pazīmi).

4. p i e m ē r s. Integrējot pa locekļiem rindu

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots=\sin x \tag{11}$$

(272. § 2. piemērs), kurai $R=\infty$, dabūjam

$$\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-\frac{x^8}{8!}+\ldots=\int_0^x \sin x dx=1-\cos x,$$

kur x ir jebkurš skaitlis. No šejienes atrodam funkcijas $\cos x$ izvirzījumu

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots \tag{12}$$

Arī šeit $R=\infty$.

399. §. Teilora rinda[2]

D e f i n ī c i j a. Par *Teilora rindu* (kas attīstīta pēc $x-x_0$ pakāpēm) *funkcijai* $f(x)$ sauc pakāpju rindu

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$
$$\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots \tag{1}$$

Ja $x_0=0$, tad Teilora rindai (attīstītai pēc x pakāpēm) ir izskats

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \tag{2}$$

[1] Šo rezultātu atrada Leibnics.
[2] Ļoti ieteicams iepriekš izlasīt 270. §.

1. p i e m ē r s. Sastādīt funkcijai $f(x)=\frac{1}{5-x}$ Teilora rindu, kas attīstīta pēc $x-2$ pakāpēm.

A t r i s i n ā j u m s. Aprēķināsim funkcijas $f(x)$ un tās atvasinājumu vērtības, ja $x=2$. Dabūjam

$$\left.\begin{array}{c} f(2)=\frac{1}{3},\quad f'(2)=\left.\frac{1}{(5-x)^2}\right|_{x=2}=\frac{1}{3^2}, \\ f''(2)=\left.\frac{1\cdot 2}{(5-x)^3}\right|_{x=2}=\frac{1\cdot 2}{3^3},\ \dots, \\ f^{(n)}(2)=\left.\frac{n!}{(5-x)^{n+1}}\right|_{x=2}=\frac{n!}{3^{n+1}},\ \dots \end{array}\right\} \tag{3}$$

Meklētā rinda ir

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}(x-2)'+\frac{1}{3^3}(x-2)^2+\dots+\frac{1}{3^{n+1}}(x-2)^n+\dots \tag{4}$$

2. p i e m ē r s. Tai pašai funkcijai sastādīt Teilora rindu, kas attīstīta pēc x pakāpēm.

A t r i s i n ā j u m s. Tāpat kā 1. piemērā atrodam

$$\begin{array}{c} f(0)=\frac{1}{5},\ f'(0)=\frac{1}{5^2},\ f''(0)= \\ =\frac{2!}{5^3},\ \dots,\ f^{(n)}(0)=\frac{n!}{5^{n+1}},\ \dots \end{array} \tag{5}$$

Meklētajai rindai ir izskats

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}x+\frac{1}{5^3}x^2+\dots+\frac{1}{5^{n+1}}x^n+\dots \tag{6}$$

3. p i e m ē r s. Funkcijai $\frac{1}{x-5}$ nav Teilora rindas, kas attīstīta pēc $x-5$ pakāpēm, jo funkcija punktā $x=5$ neeksistē (pārvēršas bezgalībā).

4. p i e m ē r s. Funkcijai $f(x)=\sqrt[3]{x}$ nav Teilora rindas, kas attīstīta pēc x pakāpēm, jo atvasinājums $f'(0)$ ir bez-

galīgs. Bet tai ir Teilora rinda, kas attīstīta pēc $x-1$ pakāpēm. Tai ir izskats

$$1+\frac{1}{3}(x-1)-\frac{1}{2!}\frac{2}{3^2}(x-1)^2+\frac{1}{3!}\frac{2\cdot 5}{3^3}(x-1)^3+$$
$$+\frac{1}{4!}\frac{2\cdot 5\cdot 8}{3^4}(x-1)^4+\dots$$

400. §. Funkcijas izvirzījums pakāpju rindā

Izvirzīt funkciju $f(x)$ pakāpju rindā, kas attīstīta pēc $x-x_0$ pakāpēm, nozīmē sastādīt rindu

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\dots$$
$$\dots+a_n(x-x_0)^n+\dots, \tag{1}$$

kurai konverģences rādiuss nav vienāds ar nulli, bet summa ir identiski vienāda ar doto funkciju visur konverģences intervāla iekšienē.

T e o r ē m a. Ja funkciju $f(x)$ var izvirzīt pakāpju rindā (1), tad izvirzījums ir viens vienīgs un rinda (1) sakrīt ar Teilora rindu, kas attīstīta pēc $x-x_0$ pakāpēm.

P a s k a i d r o j u m s. Saskaņā ar teorēmas nosacījumiem konverģences intervālā pastāv identiska vienādība

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\dots+a_n(x-x_0)^n+\dots \tag{2}$$

Tātad (398. § 1. teorēma) funkcijai $f(x)$ ir jebkuras kārtas atvasinājumi un visos konverģences apgabala punktos mēs dabūjam

$$\left.\begin{aligned} f'(x)&=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+4a_4(x-x_0)^3+\dots,\\ f''(x)&=2a_2+2\cdot 3a_3(x-x_0)+3\cdot 4a_4(x-x_0)^2+\dots,\\ f'''(x)&=2\cdot 3a_3+2\cdot 3\cdot 4a_4(x-x_0)+\dots \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

utt. Ja $x=x_0$ formulas (2) un (3) dod

$$a_0=f(x_0),\quad a_1=f'(x_0),\quad a_2=\frac{f''(x_0)}{2!},\quad a_3=\frac{f'''(x_0)}{3!},\dots, \tag{4}$$

t. i., izvirzījums (2) ir viens vienīgs un sakrīt ar Teilora rindu funkcijai $f(x)$.

1. piemērs. Atrast piektā atvasinājuma vērtību funkcijai $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$, ja $x=0$.

Tiešs aprēķins ir nogurdinošs. Bet funkciju $f(x)$ viegli var izvirzīt rindā pēc x pakāpēm, izpildot dalīšanu $x:(1-x^2)$ (397. §). Dabūjam izvirzījumu

$$\frac{x}{1-x^2}=x+x^3+x^5+x^7+\ldots \tag{5}$$

intervālā $(-1, +1)$. Bet rinda (5) ir funkcijas $f(x)$ Teilora rinda, kas attīstīta pēc x pakāpēm. Tātad koeficients $a_5=1$ dod vērtību $\frac{f^{(V)}(0)}{5!}$, t. i., $f^{V}(0)=5!=120$. Tāpat varam atrast

$$f^{(2n+1)}(0)=(2n+1)!,\quad f^{(2n)}(0)=0. \tag{6}$$

Definīcija. Funkciju $f(x)$, kuru var izvirzīt rindā pēc $x-x_0$ pakāpēm, sauc par *analītisku funkciju punktā* x_0.

2. piemērs. Funkcija $\sqrt[3]{x}$ nav analītiska punktā $x=0$ (399. § 4. piemērs); tā pati funkcija ir analītiska punktā $x=1$ (un jebkurā punktā $x_0\neq0$).

Piezīme. Funkcija $f(x)$, kas definēta punktā $x=x_0$, var būt neanalītiska šai punktā triju iemeslu dēļ:

1) Tai punktā $x=x_0$ var nebūt galīgs kaut kādas kārtas atvasinājums; tā funkcija $\sqrt[3]{x}$ nav analītiska punktā $x=0$, jo šeit pirmais atvasinājums ir bezgalīgs.

2) Funkcijas $f(x)$ Teilora rindai, kurai konverģences rādiuss atšķiras no nulles, var būt summa, kas nav vienāda ar $f(x)$.

3) Funkcijas $f(x)$ Teilora rindas konverģences rādiuss var būt vienāds ar nulli.

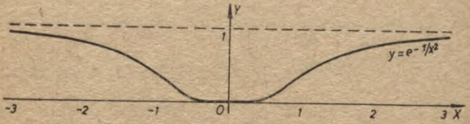
Praktiska nozīme ir tikai pirmajam tipam. 3. piemērā apskatīta otrā tipa funkcija.

Pašlaik pazīstamie trešā tipa funkciju piemēri ir pārāk komplicēti.

3. piemērs. Funkciju $\varphi(x)$ (408. zīm.) definēsim ar formulu $\varphi(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$ (ja $x\neq0$). Punktā $x=0$ ņemsim $\varphi(0)=0$. Šai funkcijai punktā $x=0$ visi atvasinājumi ir

vienādi ar nulli[1]. Tātad funkcijai $f(x)=e^x+\varphi(x)$ visiem atvasinājumiem $f'(0)$, $f''(0)$, ..., $f^{(n)}(0)$, ... būs tās pašas vērtības, kas atbilstošajiem funkcijas e^x atvasinājumiem, t. i., Teilora rinda funkcijai $f(x)$ būs

$$1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+\ldots$$



408. zīm.

Šai rindai konverģences rādiuss atšķiras no nulles ($R=\infty$), bet tās summa (tā ir e^x) nav vienāda ar $f(x)$.

---

[1] Ja $x\neq 0$, dabūjam

$$\varphi'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Ja $x=0$, tad šī izteiksme nav derīga; šeit

$$\varphi'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(h)-\varphi(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h}=0$$

(saskaņā ar Lopitāla kārtulu). Tālāk

$$\varphi''(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\varphi'(h)-\varphi'(0)}{h}=\lim_{h=0}\frac{2}{h^3}e^{-\frac{1}{h^2}}=0 \text{ utt.}$$

401. §. Elementāro funkciju izvirzījums pakāpju rindā

Iepriekšējas piezīmes. Lai funkciju $f(x)$ izvirzītu rindā pēc $x-x_0$ pakāpēm, var meklēt atvasinājumus $f'(x_0), f''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0), \ldots$ Ja tie eksistē un ir galīgi, tad dabūjam Teilora rindu

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

Ievērojot 400. § teikto, vēl jāpierāda, ka šai rindai konverģences rādiuss atšķiras no nulles un tās summa ir tieši funkcija $f(x)$, bet ne cita funkcija. Dažreiz izdodas novērtēt «atlikuma locekli» $R_n=f(x)-s_n(x)$ un pierādīt, ka $\lim\limits_{n\to\infty} R_n=0$. Šai nolūkā R_n izsaka Lagranža formā (272. § 1. un 2. piemērs) vai citos veidos.

Lielākoties tādi novērtējumi ir ļoti grūti vai praktiski neizpildāmi. Tad izvirzījumu var iegūt ar citiem paņēmieniem, izvairoties no atvasinājumu $f(x_0), f'(x_0), \ldots$ aprēķināšanas (pēdējos dabū pašus par sevi no atrastā izvirzījuma kā 400. § 1. piemērā).

Tālāk doti vienkāršāko funkciju izvirzījumi pēc x pakāpēm. Vispārīgais loceklis, kad tā izskatu var viegli ieskatīt, nav rakstīts.

Eksponentfunkcijas.

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots \quad (R=\infty), \tag{1}$$

$$e^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots \quad (R=\infty). \tag{1a}$$

Abus izvirzījumus var dabūt, novērtējot atlikuma locekli (272. § 1. piemērs). Formula (1a) rodas no (1), aizstājot x ar $-x$.

Trigonometriskās funkcijas

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots \quad (R=\infty), \tag{2}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots \quad (R=\infty). \tag{3}$$

Abus izvirzījumus var dabūt, novērtējot atlikuma locekli (272. § 2. piemērs). Vienu formulu var dabūt no otras, diferencējot (vai integrējot) pa locekļiem.

Dalot pa locekļiem (2) ar (3), dabūjam

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \ldots \left(R = \frac{\pi}{2}\right). \quad (4)$$

Koeficientu veidošanās likumu nevar izteikt ar elementāru formulu un tāpēc meklēt konverģences rādiusu saskaņā ar 394. § teorēmu ir ļoti grūti. Bet skaidrs, ka R nepārsniedz $\frac{\pi}{2}$, jo tad, ja $x = \pm\frac{\pi}{2}$, rinda (4) diverģē tāpēc, ka $\operatorname{tg}\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \infty$.

Piezīme. Rindas (4) konverģences rādiuss iznāk mazāks par konverģences rādiusiem rindām (2) un (3), no kurām rinda (4) iegūta ar dalīšanu pa locekļiem. Sal. 397. § 4. piemēru.

Funkcija $\operatorname{ctg} x$ nav izvirzāma pēc x pakāpēm (jo $\operatorname{ctg} 0 = \infty$).

Hiperboliskās funkcijas [1]

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots \quad (R = \infty) \quad (2a)$$

(*hiperboliskais sinuss*; apzīmējums $\operatorname{sh} x$),

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots \quad (R = \infty) \quad (3a)$$

(*hiperboliskais kosinuss*; apzīmējums $\operatorname{ch} x$),

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 - \ldots \left(R = \frac{\pi}{2}\right) \quad (4a)$$

(*hiperboliskais tangenss*; apzīmējums $\operatorname{th} x$).

Izvirzījumus (2a) un (3a) dabū, atņemot un saskaitot (1) un (1a), izvirzījumu (4a), — dalot pa locekļiem (2a) ar (3a). Sal. formulas (4) piezīmi.

Hiperbolisko funkciju izvirzījumi atšķiras no atbilstošo trigonometrisko funkciju izvirzījumiem tikai ar zīmēm.

---

[1] Par hiperboliskajām funkcijām sk. 403. §.

Logaritmiskās funkcijas

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots \quad (R=1), \qquad (5)$$

$$\ln(1-x)=-\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots \quad (R=1). \qquad (6)$$

Formulas (5) un (6) rodas, integrējot pa locekļiem izvirzījumus $\frac{1}{1\pm x}=1\mp x+x^2\mp x^3+\ldots$ Atņemot atrodam

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots\right] \quad (R=1). \qquad (7)$$

Ar rindas (7) palīdzību izdevīgi aprēķināt veselu skaitļu logaritmus. Piemēram, ja $x=\frac{1}{3}$, dabūjam rindu logaritmam $\ln 2$, kura ātri konverģē.

Binomālās rindas

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots \quad (R=1). \qquad (8)$$

Ja m ir vesels pozitīvs skaitlis, tad rinda pārtrūkst ar m-tās pakāpes locekli (tālākie koeficienti ir vienādi ar nulli). Iegūto formulu sauc par Ņūtona binomu[1]. Izvirzījums (8) ir pareizs jebkuram reālam m.

Ja $-\frac{1}{2}<x<1$, tad pierādījumam var izlietot Lagranža atlikuma locekli. Ar citiem paņēmieniem[2] formulas (8) pareizību var pierādīt visam intervālam $(-1, 1)$.

---

[1] Šo nosaukumu vajadzētu attiecināt uz vispārīgo formulu (8) (sal. 270. § 1. p.).

[2] Funkcijai $f(x)=(1+x)^m$ dabūjam identitāti $mf(x)=(1+x)f'(x)$. Tieša pārbaude (diferencēšana un reizināšana pa locekļiem) rāda, ka rindas (8) summai $S(x)$ pareiza tāda pati sakarība $mS(x)=$ $=(1+x)S'(x)$. Tātad

$$\frac{S(x)}{S'(x)}=\frac{f(x)}{f'(x)}, \text{ t. i., } [\ln f(x)]'=[\ln S(x)]'.$$

Tā kā funkcijām $\ln S(x)$ un $\ln f(x)$ ir vienādi atvasinājumi un vienādas vērtības, ja $x=0$, tad tās ir vienādas. Tātad $S(x)=f(x)$, ko arī vajadzēja pierādīt.

Formulas (8) atsevišķi gadījumi ir šādi izvirzījumi:

$$(1+x)^{-1}=\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots, \tag{9}$$

$$(1+x)^{-2}=\frac{1}{(1+x)^2}=1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-\ldots, \tag{10}$$

$$(1+x)^{-3}=\frac{1}{(1+x)^3}=$$

$$=1-\frac{2\cdot 3}{2}x+\frac{3\cdot 4}{2}x^2-\frac{4\cdot 5}{2}x^3+\ldots, \tag{11}$$

$$(1+x^2)^{-1}=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+x^8-\ldots, \tag{12}$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1+x}=$$

$$=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+\ldots, \tag{13}$$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x}}=$$

$$=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4-\ldots, \tag{14}$$

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^8+\ldots \tag{15}$$

Apvērstās trigonometriskās (ciklometriskās) funkcijas

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7}+\ldots\ (R=1), \tag{16}$$

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\ldots\ (R=1). \tag{17}$$

Izvirzījumus (16) un (17) dabū attiecīgi no (15) un (12), integrējot pa locekļiem robežās no nulles līdz x.

Izvirzījumus

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x \text{ un } \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$$

dabū no (16) un (17).

Apvērstās hiperboliskās funkcijas [1]

$$\ln(x+\sqrt{x^2+1}) = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \ldots \quad (R=1) \qquad (16a)$$

(*hiperboliskais areasinuss*; apzīmējums Arsh x).

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots \quad (R=1) \qquad (17a)$$

(*hiperboliskais areatangenss*; apzīmējums Arth x).

Funkcijas

$$\ln(x+\sqrt{x^2-1}) = \operatorname{Arch} x$$

(*hiperboliskais areakosinuss*) un

$$\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} = \operatorname{Arcth} x$$

(*hiperboliskais areakotangenss)* nav izvirzāmas rindā pēc x pakāpēm [tās nav definētas nevienā intervāla $(-1; 1)$ punktā, starp citu arī punktā $x=0$].

Izvirzījumi (16a) un (17a) atšķiras no izvirzījumiem (16) un (17) tikai ar zīmēm.

402. §. Rindu pielietojumi integrāļu aprēķināšanā [2]

Daudzus integrāļus, kurus neizsaka ar elementārajām funkcijām galīgā veidā, var izteikt ar bezgalīgām rindām, kuras ātri konverģē. Ir nozīme izvirzīt rindās pat tādus integrāļus, kurus var izteikt ar galīgām izteiksmēm (ja šīs izteiksmes ir komplicētas). Jāievēro, ka kļūdas rodas arī,

---

[1] Par apvērstām hiperboliskām funkcijām sk. 404. §.

[2] Bezgalīgās rindas vēsturiski radās sakarā ar integrēšanas uzdevumu (sal. 270. §).

lietojot «precīzas» izteiksmes, jo pēdējo vērtības parasti atrod ar tabulu palīdzību.

1. piemērs. Integrāli $\int_0^x e^{-x^2}dx$ nevar izteikt ar elementārām funkcijām galīgā veidā. Lietojot rindu

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots, \tag{1}$$

kura konverģē intervālā $(-\infty, +\infty)$, dabūsim

$$\int_0^x e^{-x^2}dx=x-\frac{1}{1!}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2!}\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots \tag{2}$$

Konverģences intervāls arī šeit ir $(-\infty, +\infty)$ (398. §).

2. piemērs. Aprēķināt $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ ar precizitāti līdz $0{,}5\cdot10^{-4}$.

Atrisinājums. Ievietojot vienādībā (2) vērtību $x=1$, dabūjam

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{216}-\frac{1}{1320}+\frac{1}{9360}-\frac{1}{75\,600}+\ldots \tag{3}$$

Locekli $-\frac{1}{75\,600}$ un tālākos locekļus atmetam, jo kļūda, kas šeit rodas, ir daudz mazāka par $0{,}5\cdot10^{-4}$ [rinda (3) ir maiņzīmju rinda ar dilstošiem locekļiem; 376. §]. Aprēķinus izdarām ar piecām sešām zīmēm. Dabūjam

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=0{,}7468.$$

3. piemērs. Aprēķināt integrāli $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx$ ar precizitāti līdz $0{,}5\cdot10^{-3}$.

A t r i s i n ā j u m s. Nenoteiktais integrālis $\int \frac{\sin x}{x} dx$ nav aprēķināms galīgā veidā. Izvirzot $\sin x$ rindā un izdalot locekļus ar x, dabūjam rindu

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots, \qquad (4)$$

kura konverģē jebkurai x vērtībai (saskaņā ar 394. § teorēmu). Integrējot atrodam

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x} dx = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \ldots,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{18}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{1}{600}\left(\frac{\pi}{2}\right)^5 - \frac{1}{35\,280}\left(\frac{\pi}{2}\right)^7 + \ldots \qquad (5)$$

Pirmais atmestais loceklis $\frac{1}{9 \cdot 9!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^9$ (rupji aprēķinot) ir daudz mazāks par $0,5 \cdot 10^{-3}$. Atrodam

$$\begin{array}{rr} & \frac{\pi}{2} = 1,5708 \\ + & \frac{1}{600} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^5 = 0,0159 \\ \hline & 1,5867 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & \frac{1}{18}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 = 0,2153 \\ + & \frac{1}{35\,280} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^7 = 0,0007 \\ \hline & 0,2160 \end{array}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx = 1,5867 - 0,2160 \approx 1,371.$$

403. §. Hiperboliskās funkcijas

Pakāpju rindām

$$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \ldots \quad (R = \infty), \qquad (1)$$

$$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots \quad (R = \infty), \qquad (2)$$

kuras ir līdzīgas $\sin x$, $\cos x$ izvirzījumiem, ir summas, kuras attiecīgi ir vienādas ar $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$. Šīs funkcijas sauc: pirmo — par *hiperbolisko sinusu*[1] (sh), otro — par *hiperbolisko kosinusu* (ch), t. i.,

$$\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}, \tag{3}$$

$$\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}. \tag{4}$$

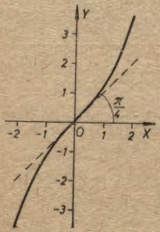
Par hiperbolisko tangensu (th) un hiperbolisko kotangensu (cth) sauc funkcijas

$$\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}, \tag{5}$$

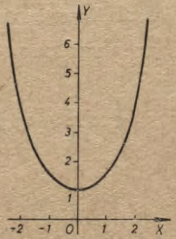
$$\operatorname{cth} x=\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}. \tag{6}$$

Funkcijas $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$ sauc par *hiperboliskām funkcijām*[2]. Šo funkciju grafikas parādītas 409.—412. zīmējumā.

Hiperboliskajām funkcijām ir noteiktas vērtības visām

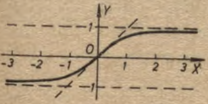


409. zīm. $y=\operatorname{sh} x$.

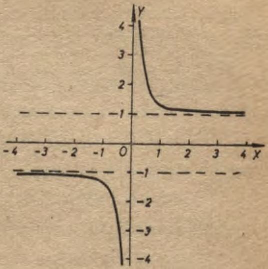


410. zīm. $y=\operatorname{ch} x$.

[1] Apzīmējums *sh* ir latīņu vārdu sinus hyperbolicus (sinuss hiperboliskais) saīsinājums, *ch* — cosinus hyperbolicus.
[2] Saistība ar hiperbolu izskaidrota 405. paragrāfā.



411. zīm. $y=\text{th}\, x$.



412. zīm. $y=\text{cth}\, x$.

x vērtībām (izņemot $\text{cth}\, x$, ja $x=0$, kur šī funkcija pārvēršas bezgalībā).

Funkcija $\text{sh}\, x$ pieņem visas iespējamās vērtības, $\text{ch}\, x$ — tikai vērtības, kas nav mazākas par vienu ($\text{ch}\, 0=1$), funkcijas $\text{th}\, x$ vērtības iekļautas starp -1 un $+1$, $\text{cth}\, x$ vērtības ir lielākas par 1, ja $x>0$, un mazākas par -1, ja $x<0$. Taisnes $y=+1$ un $y=-1$ ir asimptotas abām līnijām $y=\text{th}\, x$ un $y=\text{cth}\, x$.

Hiperboliskās funkcijas saistītas ar sakarībām

$$\text{ch}^2 x-\text{sh}^2 x=1, \tag{7}$$

$$\text{th}\, x\cdot\text{cth}\, x=1, \tag{8}$$

$$\text{th}\, x=\frac{\text{sh}\, x}{\text{ch}\, x}, \quad \text{cth}\, x=\frac{\text{ch}\, x}{\text{sh}\, x} \tag{9}$$

un ar citām trigonometriskajām formulām līdzīgām sakarībām. Tā

$$\text{sh}(x+y)=\text{sh}\, x\, \text{ch}\, y+\text{ch}\, x\, \text{sh}\, y, \tag{10}$$

$$\text{ch}(x+y)=\text{ch}\, x\, \text{ch}\, y+\text{sh}\, x\, \text{sh}\, y, \tag{11}$$

$$\text{th}(x+y)=\frac{\text{th}\, x+\text{th}\, y}{1+\text{th}\, x\, \text{th}\, y}. \tag{12}$$

Visas tās izriet no formulām (3) – (6).

Vispār katrai trigonometriskai formulai, *kas nesatur pastāvīgus lielumus zem trigonometrisko funkciju zīmēm*[1], atbilst analoga sakarība starp hiperboliskajām funkcijām. To var dabūt, ja visur aizstāj $\cos\alpha$ ar $\mathrm{ch}\,\alpha$, bet $\sin\alpha$ ar $i\,\mathrm{sh}\,\alpha$ (i — imaginārā vienība); imaginaritātes novēršas pašas.

1. piemērs. No trigonometriskas formulas

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$$

ar minēto aizstāšanu dabūjam

$$i\,\mathrm{sh}(x+y)=i\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,y+\mathrm{ch}\,x\cdot i\,\mathrm{sh}\,y.$$

Izdalot abas vienādības puses ar i, dabūjam formulu (10).

2. piemērs. No formulas

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1$$

dabūjam

$$\mathrm{ch}^2 x+i^2\,\mathrm{sh}^2 x=1.$$

Ņemot $i^2=-1$, dabūjam (7).

Diferencēšanas un integrēšanas formulas

$$d\,\mathrm{sh}\,x=\mathrm{ch}\,x\,dx,\quad \int\mathrm{ch}\,x\,dx=\mathrm{sh}\,x+C; \tag{13}$$

$$d\,\mathrm{ch}\,x=\mathrm{sh}\,x\,dx,\quad \int\mathrm{sh}\,x\,dx=\mathrm{ch}\,x+C; \tag{14}$$

$$d\,\mathrm{th}\,x=\frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x},\quad \int\frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x}=\mathrm{th}\,x+C; \tag{15}$$

$$d\,\mathrm{cth}\,x=-\frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x},\quad \int\frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x}=-\mathrm{cth}\,x+C. \tag{16}$$

Šīs formulas var dabūt no atbilstošajām trigonometriskajām formulām, ja izdara iepriekš minēto aizstāšanu un bez tam dx vietā raksta $i\,dx$.

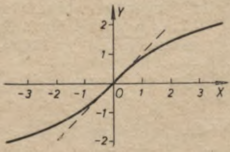
---

[1] Šī piezīme ir svarīga. Tā formulu $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$ nevar pārveidot ar šeit minēto paņēmienu.

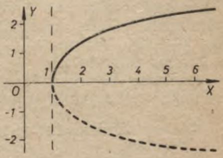
404. §. Apvērstās hiperboliskās funkcijas

Hiperboliskajām funkcijām sh x, ch x, th x, cth x ir apvērstās funkcijas:

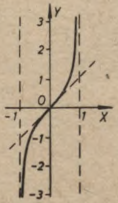
Arsh x (*hiperboliskais areasinuss;* 413. zīm.),



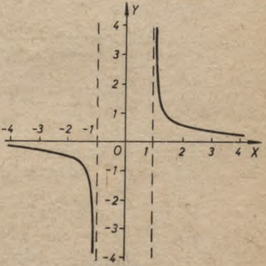
413. zīm. y=Arsh x.



414. zīm. y=Arch x.



415. zīm. y=Arth x.



416. zīm. y=Arcth x.

Arch x (*hiperboliskais areakosinuss;* 414. zīm.),
Arth x (*hiperboliskais areatangenss;* 415. zīm.),
Arcth x (*hiperboliskais areakotangenss;* 416. zīm.).

Sal. ar hiperbolisko funkciju grafikām 409.—412. zīmējumā.

Latīņu vārds «area» nozīmē laukums. Pamatojums šādam nosaukumam izskaidrots 405. paragrāfā.

Funkcija Arsh x vienvērtīgi definēta uz visas skaitļu ass. Funkcija Arch x definēta tikai intervālā $(1, \infty)$ un šeit ir divvērtīga (tās vērtības ir vienādas pēc absolūtā lieluma un atšķiras ar zīmi). Parasti apskata tikai pozitīvas vērtības; atbilstošais grafikas zars *(galvenais zars)* 414. zīmējumā parādīts ar nepārtrauktu līniju. Ar šo nosacījumu funkcija Arch x kļūst vienvērtīga.

Funkcijas Arth x un Arcth x ir vienvērtīgas; pirmā ir definēta tikai (vaļējā) intervālā $(-1, 1)$, otra tikai ārpus intervāla $(-1, 1)$. Taisnes $x=\pm 1$ ir abām līnijām $y=\operatorname{Arth} x$ un $y=\operatorname{Arcth} x$ asimptotas.

Apvērstās hiperboliskās funkcijas ar elementārajām pamatfunkcijām izsaka šādā veidā:

$$\operatorname{Arsh} x=\ln(x+\sqrt{x^2+1}), \tag{1}$$

$$\operatorname{Arch} x=\ln(x\pm\sqrt{x^2-1})= \\ =\pm\ln(x+\sqrt{x^2-1}) \quad (x\geqslant 1). \tag{2}$$

Augšējās zīmes formulā (2) atbilst Arch x galvenajai vērtībai:

$$\operatorname{Arth} x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \quad (|x|<1), \tag{3}$$

$$\operatorname{Arcth} x=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} \quad (|x|>1). \tag{4}$$

Diferencēšanas un integrēšanas formulas[1]

$$d\operatorname{Arsh} x=\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}; \tag{5}$$

$$d\operatorname{Arch} x=\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x\geqslant 1); \tag{6}$$

$$d\operatorname{Arth} x=\frac{dx}{1-x^2} \quad (|x|<1); \tag{7}$$

$$d\operatorname{Arcth} x=\frac{dx}{1-x^2} \quad (|x|>1); \tag{8}$$

[1] Ar Arch x saprot šīs funkcijas pozitīvo vērtību.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \operatorname{Arsh}\frac{x}{a} + C; \tag{5a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \operatorname{Arch}\frac{x}{a} + C\,(x \geqslant a); \tag{6a}$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{Arth}\frac{x}{a} + C \quad (|x|<a); \tag{7a}$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{Arcth}\frac{x}{a} + C \quad (|x|>a). \tag{8a}$$

405. §. Hiperbolisko funkciju nosaukumu rašanās

Apskatīsim vienādsānu hiperbolu (417. zīm.)

$$x^2-y^2=a^2. \tag{1}$$

Apzīmēsim ar $\frac{s}{2}$ hiperboliskā sektora AOM laukumu un pierakstīsim lielumam s (t. i., divkāršota sektora MON laukumam) to zīmi, kāda ir pagrieziena leņķim no OX uz OM. Tad vērsto nogriežņu PM, OP, AK (kuri konstruēti hiperbolas punktam M analogi sinusa, kosinusa un tangensa līnijām; sal. 418. zīm.) attiecības pret pusasi a izsaka atkarībā no s šādā veidā[1]:

$$\frac{PM}{a} = \operatorname{sh}\frac{s}{a^2}, \quad \frac{OP}{a} = \operatorname{ch}\frac{s}{a^2}, \quad \frac{AK}{a} = \operatorname{th}\frac{s}{a^2}. \tag{2}$$

---

[1] Dabūjam (333. § 4. piemērs)

$$s = 2\,\text{Lauk}_{AOM} = a^2 \ln\frac{x+y}{a}.$$

Atrisinot šo vienādojumu kopā ar vienādojumu (1), atradīsim

$$\frac{x}{a} = \frac{e^{\frac{s}{a^2}} + e^{-\frac{s}{a^2}}}{2} = \operatorname{ch}\frac{s}{a^2}, \quad \frac{y}{a} = \frac{e^{\frac{s}{a^2}} - e^{-\frac{s}{a^2}}}{2} = \operatorname{sh}\frac{s}{a^2}.$$

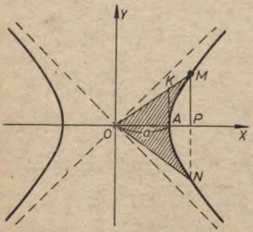
No trijstūru OAK, OPM līdzības dabūjam

$$\frac{AK}{a} = \frac{PM}{OP} = \frac{y}{x} = \operatorname{th}\frac{s}{a^2}.$$

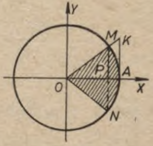
Ņemsim tagad hiperbolas (1) vietā riņķa līniju (418. zīm.)

$$x^2+y^2=a^2.$$

Ja paturam iepriekšējos apzīmējumus, tad ar attiecīgu zīmi



417. zīm.



418. zīm.

ņemtais lielums $\frac{s}{a^2}$ (s ir riņķa sektora $MONA$ laukums) dos leņķi $\alpha=\angle AOM$, tā ka formulu (2) vietā dabūsim

$$\frac{PM}{a}=\sin\frac{s}{a^2},\quad \frac{OP}{a}=\cos\frac{s}{a^2},\quad \frac{AK}{a}=\operatorname{tg}\frac{s}{a^2}. \tag{2a}$$

Formulu (2) un (2a) salīdzināšana izskaidro nosaukumus — *hiperboliskais sinuss, hiperboliskais kosinuss, hiperboliskais tangenss.*

406. §. Par kompleksiem skaitļiem

Kompleksie skaitļi [1] pilsoņtiesības matemātikā ieguva tāpēc, ka ar to palīdzību atvieglojas daudzu sakarību atrašana starp reāliem lielumiem.

[1] Par darbībām ar kompleksiem skaitļiem un šo darbību ģeometrisko iztulkojumu sk. «Elementārās matemātikas rokasgrāmata», III nod., 34.—48. §.

1. piemērs. Pakāpeniski sareizinot kompleksu skaitli pašu ar sevi, dabūjam *Moavra formulu*

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=(\cos n\varphi+i\sin n\varphi) \tag{1}$$

veselam pozitīvam[1] n. Pielietojam kreisajai pusei binoma formulu un pielīdzinām abās pusēs attiecīgās koordinātes (diviem vienādiem kompleksiem skaitļiem abscisas un ordinātes attiecīgi ir vienādas). Dabūjam $\cos n\varphi$ un $\sin n\varphi$ izteiksmes atkarībā no $\cos\varphi$ un $\sin\varphi$ pakāpēm. Piemēram, ja $n=4$, dabūjam

$$\cos 4\varphi=\cos^4\varphi-6\cos^2\varphi\sin^2\varphi+\sin^4\varphi, \tag{2}$$

$$\sin 4\varphi=4\cos^3\varphi\sin\varphi-4\cos\varphi\sin^3\varphi. \tag{3}$$

Šeit ieiet tikai reāli lielumi.

2. piemērs. Lietojot ģeometriskas progresijas summas formulu, atrodam

$$1+(\cos\varphi+i\sin\varphi)+(\cos\varphi+i\sin\varphi)^2+\ldots+(\cos\varphi+$$
$$+i\sin\varphi)^n=\frac{1-(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{n+1}}{1-(\cos\varphi+i\sin\varphi)}. \tag{4}$$

Pielietosim vienādības (4) abām pusēm formulu (1) un izpildīsim labajā pusē dalīšanu. Dabūsim divas formulas

$$\cos\varphi+\cos 2\varphi+\cos 3\varphi+\ldots+\cos n\varphi=$$
$$=\frac{\sin\frac{(2n+1)\varphi}{2}-\sin\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}, \tag{5}$$

$$\sin\varphi+\sin 2\varphi+\sin 3\varphi+\ldots+\sin n\varphi=$$
$$=\frac{\cos\frac{\varphi}{2}-\cos\frac{(2n+1)\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}. \tag{6}$$

[1] Negatīvu pakāpi kompleksam skaitlim var definēt tāpat kā reālam skaitlim un tad formulu (1) varēs attiecināt arī uz negatīviem pakāpes rādītājiem. Daļveida un iracionāliem rādītājiem formulu (1) var pieņemt par definīciju. Pie tam rezultāts iznāk daudzvērtīgs (ievērojot to, ka leņķi φ nosaka daudzvērtīgi $\varphi=\varphi_0+2k\pi$, kur k ir jebkurš vesels skaitlis). Darbību kārtulas ar pakāpēm paliek tādas pašas kā reālam pamatam.

Apskatot *kompleksus mainīgus lielumus* un definējot tiem funkcijas, robežas, atvasinājuma u. c. jēdzienus, mēs atradīsim daudz jaunu sakarību starp reāliem mainīgiem lielumiem.

Atkāpjoties no vispārējā grāmatas plāna, 407.—410. paragrāfā apskatīsim reālā argumenta kompleksas funkcijas; kompleksā argumenta funkcijas nemaz neapskatīsim.

407. §. Reālā argumenta kompleksa funkcija

Kompleksu lielumu

$$z=x+iy \tag{1}$$

(x, y ir reāli lielumi) sauc par *reālā argumenta t funkciju*, ja katrai t vērtībai (apskatāmajā apgabalā) atbilst noteikta z vērtība (t. i., noteikta x vērtība un noteikta y vērtība).

Pie tam abas koordinātes x, y ir argumenta t (reālas) funkcijas.

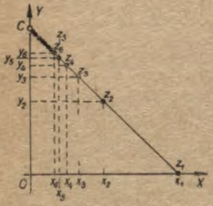
Pieraksts

$$z=f(t)+i\,\varphi(t) \tag{2}$$

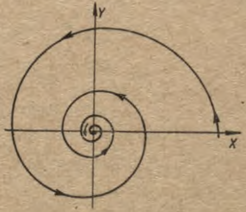
ir ekvivalents šādiem diviem pierakstiem:

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t). \tag{3}$$

Ja kompleksu skaitli $x+iy$ attēlo ar punktu $(x;\ y)$ XOY plaknē, tad funkcija z attēlosies ar punktu kopu, kuri būs izolēti vai arī aizpildīs līniju [šo līniju parametriski izsaka vienādojumi (3)].



419. zīm.



420. zīm.

Robežas un bezgalīgi maza lieluma jēdzienus kompleksām funkcijām definē tāpat kā reālām funkcijām (par kompleksa skaitļa $x+iy$ absolūto vērtību pieņem tā moduli $|x+iy|=\sqrt{x^2+y^2}$). Punkti, kas attēlo funkcijas vērtības, neierobežoti tuvojas punktam, kas attēlo robežu, kad arguments t tiecas uz doto vērtību (vai uz bezgalību). Lai kompleksai funkcijai z atrastu robežu c, pietiek atrast tās koordinātu x, y robežas a un b. Tad $c=a+bi$.

1. piemērs. Virkne

$$z_1=1,\ z_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i,\ z_3=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i,\ldots,z_n=$$
$$=\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}i,\ldots \tag{4}$$

attēlo (419. zīm.) izolētu punktu $(x_n;\ y_n)$ kopu, t. i.,

$$x_n=\frac{1}{n},\quad y_n=\frac{n-1}{n}. \tag{5}$$

Tie atrodas uz taisnes $x+y=1$. Dabūjam

$$\lim_{n\to\infty} x_n=0,\quad \lim_{n\to\infty} y_n=1, \tag{6}$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n=\lim_{n\to\infty}(x_n+iy_n)=0+1i=i. \tag{7}$$

Sakarība (7) izsaka, ka starpības z_n-i modulis $|z_n-i|$ neierobežoti samazinās, kad $n\to\infty$.

Ģeometriski: punkti z_n neierobežoti tuvojas punktam $C(0;\ 1)$.

2. piemērs. Argumenta t kompleksa funkcija

$$z=e^{-0,1t}(\cos t+i\sin t) \tag{8}$$

attēlo (420. zīm.) līniju

$$x=e^{-0,1t}\cos t,\quad y=e^{-0,1t}\sin t \tag{9}$$

(*logaritmiskā spirāle*). Dabūjam

$$\lim_{t\to\infty} x=0,\quad \lim_{t\to\infty} y=0;$$
$$\lim_{t\to\infty} z=\lim_{t\to\infty}(x+iy)=0.$$

Kad $t\to\infty$, kompleksās plaknes mainīgais punkts, kustoties pa spirāli bultiņas virzienā, neierobežoti tuvojas punktam O, kas attēlo funkcijas robežu.

408. §. Kompleksas funkcijas atvasinājums

Definīcija. Reālā argumenta t kompleksās funkcijas

$$F(t)=f(t)+i\varphi(t)$$

atvasinājums $F'(t)$ ir attiecības $\frac{\Delta F(t)}{\Delta t}$ robeža, kad $\Delta t \to 0$.

Atvasinājuma koordinātes ir dotās funkcijas koordinātu $f(t)$, $\varphi(t)$ atvasinājumi, t. i.,

$$F'(t)=f'(t)+i\varphi'(t). \tag{2}$$

Vektors, kas attēlo $F'(t)$, ir grafikas

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t) \tag{3}$$

pieskares vektors atbilstošajā punktā.

Ja t ir laiks, tad atvasinājuma modulis ir vienāds ar punkta kustības ātruma absolūto vērtību pa grafiku (3).

Diferenciāli kompleksai funkcijai definē tāpat kā reālai funkcijai, un tam piemīt tās pašas īpašības.

Ja kompleksā funkcija $F(t)$ ir polinoms

$$F(t)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n, \tag{4}$$

kur z ir reālā argumenta t kompleksa funkcija, tad

$$F'(t)=(a_1+2a_2z+\ldots+na_nz^{n-1})z'(t). \tag{5}$$

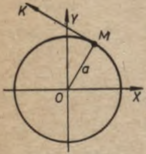
Reizinājuma un dalījuma atvasinājuma formulas ir tādas pašas kā reālām funkcijām.

1. piemērs. Funkcijas

$$F(t)=a\left(\cos 2\pi\frac{t}{T}+i\sin 2\pi\frac{t}{T}\right) \tag{6}$$

atvasinājums ir

$$F'(t)=\frac{2\pi a}{T}\left(-\sin 2\pi\frac{t}{T}+i\cos 2\pi\frac{t}{T}\right). \tag{7}$$



421. zīm.

Funkcija (6) attēlojas ar riņķa līnijas (421. zīm.) ar rādiusu a

$$x=a\cos 2\pi\frac{t}{T}, \quad y=a\sin 2\pi\frac{t}{T}. \tag{8}$$

punktu kopu.

Atvasinājums (7) attēlojas ar pieskares MK vektoru, kura koordinātes ir

$$x' = -\frac{2\pi a}{T}\sin 2\pi\frac{t}{T}, \quad y' = \frac{2\pi a}{T}\cos 2\pi\frac{t}{T}. \tag{9}$$

Atvasinājuma modulis (kas izsaka ātrumu, ja t ir laiks) ir vienāds ar

$$|F'(t)| = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \frac{2\pi a}{T}. \tag{10}$$

Tātad punkta kustības ātrums pa riņķa līniju ir pastāvīgs, tā ka $|F'(t)|$ ir riņķa līnijas loks, kuru noiet laika vienībā. Tādējādi T ir riņķa līnijas pilna apgrieziena periods.

No (6) un (7) izriet, ka

$$F'(t) = F(t)\cdot\frac{2\pi}{T}i. \tag{11}$$

Ģeometriski: vektors MK rodas no vektora OM, pagarinot (saīsinot) to $\frac{2\pi}{T}$ reižu un pagriežot par 90° (reizināšana ar i ir līdzvērtīga pagriezienam par 90°).

2. piemērs. Atvasinājums funkcijai

$$F(t) = (x+iy)^2, \tag{12}$$

kur x un y ir t funkcijas, ir vienāds ar

$$F'(t) = 2(x+iy)(x'+iy') = 2(xx'-yy') + 2i(xy'+yx'). \tag{13}$$

To pašu rezultātu dabūsim, ja (12) iepriekš izteiksim formā

$$F(t) = (x^2-y^2) + 2xyi. \tag{14}$$

409. §. Pozitīva skaitļa kāpināšana kompleksā pakāpē

Rinda

$$1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \ldots + \frac{u^n}{n!} + \ldots \tag{1}$$

visām *reālām* u vērtībām visur konverģē, un tai ir summa e^u.

Jebkurai *kompleksai* u vērtībai rinda (1) arī konverģē, t. i., tās parciālsummas s_n (kuras tagad ir kompleksi skaitļi) tiecas uz galīgu robežu (kura arī ir komplekss skaitlis).

Uz to pamatojas šāda definīcija jaunai darbībai — *pozitīva skaitļa kāpināšanai kompleksā pakāpē*[1].

Definīcija. Kāpināt skaitli e (naturālo logaritmu bāzi) kompleksā pakāpē $u=x+iy$ nozīmē ņemt rindas (1) summu. Par jebkura cita *pozitīva* skaitļa a kompleksu pakāpi u pieņem lielumu $e^{u \ln a}$ (reālai u vērtībai tā ir identiska ar a^u).

Piezīme. Uz pozitīvu skaitļu kompleksām pakāpēm var attiecināt visas darbību kārtulas ar pakāpēm. Bet tās īpaši jāpierāda.

1. piemērs. Kāpināt e pakāpē πi.

Atrisinājums. Saskaņā ar definīciju

$$e^{\pi i}=1+\frac{\pi i}{1!}+\frac{\pi^2 i^2}{2!}+\frac{\pi^3 i^3}{3!}+\frac{\pi^4 i^4}{4!}+\frac{\pi^5 i^5}{5!}+\ldots=$$

$$=1+\frac{\pi i}{1!}-\frac{\pi^2}{2!}-\frac{\pi^3 i}{3!}+\frac{\pi^4}{4!}+\frac{\pi^5 i}{5!}-\frac{\pi^6}{6!}-\frac{\pi^7 i}{7!}+\ldots$$

Summas abscisa ir vienāda ar

$$1-\frac{\pi^2}{2!}+\frac{\pi^4}{4!}-\frac{\pi^6}{6!}+\ldots=\cos\pi=-1$$

(sal. 272. §). Summas ordināte ir vienāda ar

$$\frac{\pi}{1!}-\frac{\pi^3}{3!}+\frac{\pi^5}{5!}-\frac{\pi^7}{7!}+\ldots=\sin\pi=0.$$

Tātad

$$e^{\pi i}=-1.$$

Šai gadījumā radies reāls skaitlis.

2. piemērs. Aprēķināt 10^i.

Atrisinājums. Saskaņā ar definīciju

$$10^i=e^{i\ln 10}=e^{\frac{1}{M}i},$$

kur $\frac{1}{M}\approx 2{,}3026$ (sk. 242. §);

[1] Par kompleksa skaitļa kāpināšanu reālā pakāpē pastāstīts 406. paragrāfā (zemteksta piezīme 663. lpp.). Var definēt arī kompleksa skaitļa kāpināšanu kompleksā pakāpē, bet tas ir komplicētāk.

$$10^i = 1 + \frac{1}{1!\,M}i - \frac{1}{2!\,M^2} - \frac{1}{3!\,M^3}i +$$

$$+ \frac{1}{4!\,M^4} + \frac{1}{5!\,M^5}i - \frac{1}{6!\,M^6} - \frac{1}{7!\,M^7}i + \ldots =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2!\,M^2} + \frac{1}{4!\,M^4} - \frac{1}{6!\,M^6} + \ldots\right) +$$

$$+ i\left(\frac{1}{1!\,M} - \frac{1}{3!\,M^3} + \frac{1}{5!\,M^5} - \frac{1}{7!\,M^7} + \ldots\right) =$$

$$= \cos\frac{1}{M} + i\sin\frac{1}{M} \approx \cos 2{,}3026 + i\sin 2{,}3026 \approx$$

$$\approx \cos 131°56' + i\sin 131°56' = -0{,}6680 + i\cdot 0{,}7440.$$

3. piemērs. Aprēķināt 10^{2+i}.
Atrisinājums. Dabūjam (sal. 2. piemēru)

$$10^{2+i} = 10^2 \cdot 10^i \approx -66{,}80 + 74{,}40\,i.$$

410. §. Eilera formula

Sakarību

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \tag{1}$$

sauc par *Eilera formulu*. Tā ir 409. § definīcijas secinājums (atrod kā 409. § 1. piemērā).

Ja $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ kompleksam φ *definē* ar tām pašām rindām, kuru summas saskaņā ar pierādīto dod $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ reāliem φ, tad formula (1) būs pareiza arī jebkuram kompleksam φ.

No formulas (1) dabūjam

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi, \tag{2}$$

bet no (1) un (2) atrodam

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}. \tag{3}$$

Šīs formulas ir ļoti līdzīgas ar hiperbolisko funkciju izteiksmēm

$$\operatorname{ch}\varphi = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}, \quad \operatorname{sh}\varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}.$$

No (1) izriet arī formula

$$e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y) \tag{4}$$

(sal. 409. § piezīmi).

Ja x un y formulā (4) ir argumenta t funkcijas, tad formulu (4) var diferencēt tā, it kā i būtu reāls pastāvīgs skaitlis, t. i.,

$$e^{x+iy}(x'+iy')=x'e^x(\cos y+i\sin y)+y'e^x(-\sin y+i\cos y). \tag{5}$$

Formulas (5) pareizību var pārbaudīt tieši.

P i e m ē r s. Atrast atvasinājumu funkcijai

$$F(t)=e^{0,1t}(\cos 2t+i\sin 2t).$$

A t r i s i n ā j u m s. Izsakām $F(t)$ veidā

$$F(t)=e^{(0,1+2i)t}.$$

Dabūjam

$$\begin{aligned}F'(t)&=(0,1+2i)e^{(0,1+2i)t}=\\&=(0,1+2i)e^{0,1t}(\cos 2t+i\sin 2t)=\\&=e^{0,1t}[(0,1\cos 2t-2\sin 2t)+i(0,1\sin 2t+2\cos 2t)].\end{aligned}$$

411. §. Trigonometriskā rinda

Par *trigonometrisko rindu* sauc rindu

$$\begin{aligned}\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\dots\\ \dots+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\dots\end{aligned} \tag{1}$$

Šeit $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ ir konstantes, kuras sauc par rindas *koeficientiem.*

1. p i e z ī m e. Brīvo locekli (to varētu uzrakstīt veidā $\frac{a_0}{2}\cos 0x$) apzīmē ar $\frac{a_0}{2}$ (bet ne ar a_0), lai koeficientu formulas (sal. 414. §) būtu vienveidīgas.

2. p i e z ī m e. Visi rindas (1) locekļi ir *periodiskas funkcijas* ar periodu 2π. Tas nozīmē, ja arguments x pieaug par 2π daudzkārtni, tad visi locekļi saglabā savas vērtības.

3. piezīme. Par trigonometrisku rindu sauc arī vispārīgāku izteiksmi

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos\frac{\pi x}{l}+b_1\sin\frac{\pi x}{l}+a_2\cos 2\frac{\pi x}{l}+b_2\sin 2\frac{\pi x}{l}+\ldots$$

$$\ldots+a_n\cos n\frac{\pi x}{l}+b_n\sin n\frac{\pi x}{l}+\ldots, \qquad (2)$$

kur l ir pozitīvs lielums, kuru sauc par *pusperiodu* [visi rindas (2) locekļi ir periodiskas funkcijas ar periodu $2l$; sal. 2. piezīmi]. Rinda (1) ir rindas (2) atsevišķs gadījums, kad pusperiods $l=\pi$.

412. §. Vēsturiskas ziņas par trigonometriskām rindām

Trigonometriskās rindas ieviesa D. Bernulli[1] 1753. gadā sakarā ar stīgas svārstību pētījumiem. Jautājums, kas šeit radās, par iespēju izvirzīt doto funkciju trigonometriskā rindā izraisīja karstu strīdu starp pirmklasīgajiem tā laika matemātiķiem (Eilers, Dalambērs, Lagranžs). Domstarpības radās tādēļ, ka funkcijas jēdziens tai laikā nebija skaidri noteikts. Šis strīds veicināja funkcijas jēdziena precizēšanu.

Formulas, kas izsaka rindas (1) koeficientus atkarībā no dotās funkcijas, deva Klero[2] 1757. gadā, bet tās neizpelnījās ievērību. Eilers atkal dabūja šīs formulas 1777. gadā (darbā, kas publicēts pēc Eilera nāves 1793. gadā). Stingru šo formulu izvedumu deva Furjē 1823. gadā. Attīstot Furjē ideju, Dirihlē[3] 1829. gadā formulēja un stingri pierādīja pietiekamo pazīmi funkcijas izvirzāmībai trigonometriskā rindā (418. §).

Vēlāk tika ieteikti vēl citi pietiekamie nosacījumi un izpētītas funkcijas, kas neapmierina šos nosacījumus. Trigonometrisko rindu teorijas un to praktisko pielietojumu izstrā-

[1] Daniels Bernulli (1700—1782) — šveicietis, ievērojams matemātiķis un mehāniķis, viens no hidrodinamikas nodibinātājiem. No 1725. līdz 1733. g. strādāja Pēterburgas Zinātņu akadēmijā, vēlāk bija tās goda loceklis.

[2] Aleksis-Klods Klero (1713—1765) — ievērojams franču matemātiķis, astronoms un ģeofiziķis. 16 gadu vecumā tika ievēlēts par Parīzes Zinātņu akadēmijas locekli.

[3] Peters Gustavs Ležēn-Dirihlē (1805—1859) — ievērojams vācu matemātiķis.

dāšanā svarīgu ieguldījumu deva daudzi krievu un padomju zinātnieki: N. Lobačevskis, A. Krilovs (1863—1945), S. Bernšteins (dz. 1880), N. Luzins (1883—1950), D. Meņšovs (dz. 1892), Ņ. Bari (1901—1961), A. Kolmogorovs (dz. 1903) u. c.

413. §. Funkciju $\cos nx$, $\sin nx$ sistēmas ortogonalitāte

1. definīcija. Divas funkcijas $\varphi(x)$, $\psi(x)$ sauc par *ortogonālām intervālā* (a, b), ja reizinājuma $\varphi(x)\psi(x)$ integrālis, kas ņemts robežās no a līdz b, ir vienāds ar nulli.

1. piemērs. Funkcijas

$$\varphi(x) = \sin 5x$$

un

$$\psi(x) = \cos 2x$$

ir ortogonālas intervālā $(-\pi, \pi)$, jo

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin 5x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin 7x + \sin 3x) \, dx =$$

$$= -\frac{1}{14} \cos 7x - \frac{1}{6} \cos 3x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

2. piemērs. Funkcijas

$$\varphi(x) = \sin 4x$$

un

$$\psi(x) = \sin 2x$$

ir ortogonālas intervālā $(-\pi, \pi)$, jo

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin 4x \sin 2x \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos 2x - \cos 6x) \, dx = 0.$$

Teorēma. Jebkuras divas dažādas funkcijas, kas ņemtas no funkciju sistēmas

$$1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \ldots, \sin x, \sin 2x, \sin 3x, \ldots \tag{1}$$

ir ortogonālas intervālā $(-\pi, \pi)$, t. i.,

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos mx\, dx = 0 \quad (m \neq 0), \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin mx\, dx = 0, \tag{2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx = 0 \quad (\text{ja } m \neq n), \tag{3}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\, dx = 0 \tag{4}$$

(m, n ir jebkuri naturāli skaitļi).

Pierādījums — pēc 1. un 2. piemēra parauga.

1. p i e z ī m e. Ja sistēmas (1) divu dažādu funkciju vietā ņem divas vienādas funkcijas, tad integrālis robežās no $-\pi$ līdz π ir vienāds ar π visām funkcijām (1), izņemot pirmo funkciju, kurai tas ir divreiz lielāks, t. i.,

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot 1\, dx = 2\pi, \tag{5}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx = \pi \,(n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{6}$$

Formulas (6) var dabūt, izpildot pārveidojumus

$$\cos^2 nx = \frac{1}{2}(1 + \cos 2nx), \quad \sin^2 nx = \frac{1}{2}(1 - \cos 2nx).$$

2. p i e z ī m e. Formulas (2)—(6) paliek spēkā jebkuram intervālam, kura garums ir 2π. Piemēram,

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{1\frac{3}{4}\pi} \sin 4x \sin 2x\, dx = \int_{0}^{2\pi} \sin 4x \sin 2x\, dx = 0,$$

$$\int_{-2\pi}^{0} \cos^2 3x\, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi} \cos^2 3x\, dx = \pi.$$

2. definīcija. Ja kādā funkciju sistēmā jebkuras divas funkcijas ir ortogonālas, tad arī pašu sistēmu sauc par *ortogonālu.* Saskaņā ar šī paragrāfa teorēmu sistēma (1) ir ortogonāla intervālā $(-\pi, \pi)$ (un arī jebkurā intervālā, kura garums ir 2π).

414. §. Eilera — Furjē formulas

Teorēma. Pieņemsim, ka trigonometriska rinda

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\ldots$$
$$\ldots+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\ldots \tag{1}$$

konverģē visām x vērtībām uz kādu funkciju $f(x)$ (šī funkcija ir periodiska ar periodu 2π). Ja šai funkcijai (tā var būt arī pārtraukta) eksistē integrālis $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,dx$ (īstais vai neīstais), tad rindas (1) koeficientus nosaka šādas *Eilera — Furjē formulas* (sk. 411. §):

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx,$$

$$a_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos x\,dx,\quad b_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x\,dx,$$

$$a_2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos 2x\,dx,\quad b_2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin 2x\,dx,$$

$$a_3=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos 3x\,dx,\quad b_3=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin 3x\,dx,$$

. . . .

un vispārīgi

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx. \tag{2}$$

Piezīme. Koeficienta a_0 izteiksmi var dabūt no vispārīgās a_n formulas, ja tanī liek $n=0$. Šī vienveidība zūd, ja ar a_0 apzīmē rindas (1) brīvo locekli, bet ne tā divkāršoto lielumu. Sal. 411. § 1. piezīmi.

Paskaidrojums. Varam rakstīt

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+\ldots+a_n\cos nx+$$
$$+b_n\sin nx+\ldots \tag{3}$$

Integrējam šo vienādību robežās no $-\pi$ līdz π. Pieņemot, ka dotā rinda pieļauj integrēšanu pa locekļiem[1], dabūjam

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx+a_1\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,dx+b_1\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,dx+\ldots \tag{4}$$

Visi labās puses integrāļi, izņemot pirmo, saskaņā ar 413. § formulām (2) ir vienādi ar nulli, un mēs dabūsim

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\pi a_0, \quad \text{t. i.,} \quad a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx.$$

Mēs esam dabūjuši sistēmas (2) pirmo formulu gadījumam $n=0$, pārējās formulas var dabūt tādā pašā veidā, ja vienādību (3) iepriekš pareizina ar $\cos nx$ vai $\sin nx$.

Tā, pareizinot (3) ar $\cos 2x$ un integrējot pa locekļiem, dabūjam

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 2x\,dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x\,dx+a_1\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\cos 2x\,dx+$$
$$+b_1\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\cos 2x\,dx+a_2\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 2x\,dx+$$
$$+b_2\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2x\cos 2x\,dx+\ldots \tag{5}$$

[1] Ja integrālis $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,dx$ konverģē, tad trigonometriskā rinda (1), kas konverģē uz funkciju $f(x)$, pieļauj integrēšanu pa locekļiem.

Labajā pusē visi integrāļi, izņemot ceturto, saskaņā ar 413. § formulām (2), (3) un (4) ir vienādi ar nulli. Ceturtais integrālis saskaņā ar 413. § formulu (6) ir vienāds ar π. Tādējādi

$$a_2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 2x\,dx.$$

T r i g o n o m e t r i s k a   r i n d a   a r   p a t v a ļ ī g u   p e r i o d u. Pieņemsim, ka trigonometriska rinda

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos\frac{\pi x}{l}+b_1\sin\frac{\pi x}{l}+a_2\cos 2\frac{\pi x}{l}+b_2\sin 2\frac{\pi x}{l}+\ldots$$

$$\ldots+a_n\cos n\frac{\pi x}{l}+b_n\sin n\frac{\pi x}{l}+\ldots \tag{6}$$

ar periodu $2l$ konverģē visām x vērtībām uz kādu funkciju $f(x)$ (šai funkcijai arī ir periods $2l$). Ja eksistē integrālis $\int_{-l}^{l}|f(x)|\,dx$ (īstais vai neīstais), tad rindas (6) koeficientus nosaka šādas Eilera—Furjē formulas:

$$\left.\begin{aligned} a_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos n\frac{\pi x}{l}\,dx \quad (n=0,\,1,\,2,\,3,\,\ldots),\\ b_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin n\frac{\pi x}{l}\,dx \quad (n=1,2,3,\ldots). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Formulas (2) rodas no formulām (7), ja $l=\pi$.

415. §. Furjē rinda

414. paragrāfā apskatījām *dotās* konverģentās trigonometriskās rindas summu. Praktiski svarīgs ir šāds apgrieztais uzdevums: dota funkcija $f(x)$ ar periodu 2π[1]; jāatrod visur konverģenta trigonometriska rinda

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+\ldots+a_n\cos nx+ \\ +b_n\sin nx+\ldots, \qquad (1)$$

kuras summa ir $f(x)$.

Ja šim uzdevumam ir atrisinājums, tad tas ir viens vienīgs un meklētās rindas (1) koeficientus atrod ar Eilera — Furjē formulām (414. §)

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx. \qquad (2)$$

Dabūto rindu sauc par *Furjē rindu funkcijai $f(x)$*.

Nav izslēgts, ka šeit spraustajam uzdevumam nav atrisinājuma: Furjē rinda [pat ja funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta] var izrādīties diverģenta neskaitāmā punktu kopā intervālā $(-\pi, \pi)$. Tāpēc saistību starp funkciju $f(x)$ un tās Furjē rindu apzīmē tā:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+ \\ +b_2\sin 2x+\ldots, \qquad (3)$$

izvairoties no vienādības zīmes.

Tomēr visām *praktiski svarīgām nepārtrauktām funkcijām* uzdevums ir atrisināms, t. i., Furjē rinda nepārtrauktai periodiskai funkcijai praksē izrādās visur konverģenta un tās summa ir vienāda ar doto funkciju, bet ne ar kādu citu funkciju. Tas parādīts 416. paragrāfā, kur dots pietiekamais nosacījums nepārtrauktas funkcijas izvirzāmībai Furjē rindā.

Vēl vairāk, pārtrauktas periodiskas funkcijas, kurām ir

[1] Pieņemts, ka šai funkcijai eksistē (īstais vai neīstais) integrālis $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|dx$.

praktiska nozīme, arī var izvirzīt Furjē rindā, bet tikai ar vienu piezīmi: funkcijas $f(x)$ pārtraukuma punktos tās Furjē rindai var būt summa, kas atšķiras no atbilstošās pašas funkcijas vērtības (sk. 418. §).

Piezīme. Neperiodiskas funkcijas, kas definētas intervālā $(-\pi, \pi)$, arī var izvirzīt Furjē rindā, bet ar šādu piezīmi: aiz intervāla $(-\pi, \pi)$ robežām un tā galos funkcijas $f(x)$ Furjē rindai būs summa, kura parasti atšķirsies no atbilstošās pašas funkcijas vērtības [kas ir pilnīgi dabiski, jo trigonometriskas rindas summa ir periodiska funkcija (sk. 417. § 2. piemēru)]. Bet tam nav būtiskas nozīmes, jo mūs interesē funkcijas vērtības tikai intervāla $(-\pi, \pi)$ iekšienē.

416. §. Furjē rinda nepārtrauktai funkcijai

Teorēma. Pieņemsim, ka funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta slēgtā intervālā $(-\pi, \pi)$ un tai šai intervālā nav ekstrēmu vai tie ir galīgā skaitā[1]. Tad Furjē rinda šai funkcijai konverģē visur. Tās summa ir vienāda ar $f(x)$ jebkurai x vērtībai intervāla $(-\pi, \pi)$ iekšienē. Abos intervāla galos summa ir vienāda ar

$$\frac{1}{2}[f(-\pi)+f(\pi)],$$

t. i., ar vidējo aritmētisko starp $f(-\pi)$ un $f(+\pi)$.

Piemērs. Apskatīsim funkciju $f(x)=x$; tā ir nepārtraukta slēgtā intervālā $(-\pi, \pi)$ un tai nav ekstrēmu. Tās Furjē rindas koeficienti a_0, a_1, $a_2, \ldots$ ir vienādi ar nulli. Tiešām,

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx. \tag{1}$$

[1] Piemērs nepārtrauktai funkcijai, kurai galīgā intervālā ir bezgalīgi daudz maksimumu un minimumu, ir funkcija $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$, ja to apskata jebkurā intervālā, kas ietver punktu $x=0$ (šai punktā funkcijai pieraksta vērtību 0; sal. 231. §).

Pirmais saskaitāmais pēc substitūcijas $x=-x'$ pieņem izskatu $\frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi}^{0} x' \cos nx' \, dx'$ un summā ar otro saskaitāmo dod nulli, tātad

$$a_n=0 \quad (n=0, 1, 2, 3, \ldots). \tag{2}$$

Koeficientus b_n aprēķina, integrējot pa daļām

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx=$$

$$=-\frac{1}{\pi n} x \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx= \tag{3}$$

$$=-\frac{2\pi \cos \pi n}{\pi n}=2(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}. \tag{4}$$

Furjē rinda funkcijai x ir šāda:

$$2\left[\frac{1}{1}\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{4}\sin 4x+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx+\ldots\right]. \tag{5}$$

Saskaņā ar teorēmu rinda (5) visur konverģē; ja $-\pi<x<$ $<\pi$, tad tās summa ir vienāda ar

$$2\left[\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}+\ldots\right]=x$$

$$(-\pi<x<\pi). \tag{6}$$

Ja $x=\pm\pi$, tad summa ir vienāda ar

$$\frac{1}{2}[-\pi+\pi]=0.$$

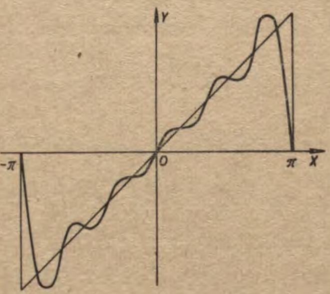
Tas ir acīm redzami, jo visi rindas locekļi pārvēršas nullē.

Ja $x=\frac{\pi}{2}$, tad formula (6) dod Leibnica rindu (398. §)

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\frac{\pi}{4}. \tag{7}$$

422. zīmējumā attēlotā funkcijas $f(x)=x$ Furjē rindas piektās parciālsummas

$$s_5=2\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\frac{\sin 5x}{5}\right) \qquad (8)$$



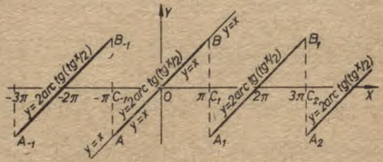
422. zīm.

grafika dod priekšstatu par rindas (5) parciālsummas s_n un pašas funkcijas $f(x)$ tuvuma pakāpi intervāla $(-\pi, \pi)$ iekšienē. Funkcijas $y=s_5(x)$ grafika svārstās ap taisni $y=x$; dažām x vērtībām rodas vērtības ar iztrūkumu, citām — ar pārpalikumu.

Līnija $y=s_5(x)$ iet caur punktiem $(-\pi, 0)$, $(\pi, 0)$ un tāpēc šo punktu tuvumā asi atraujas no taisnes $y=x$.

Aina paliek tāda pati tālākajām parciālsummām s_n. Tikai intervāla apjoms, kur novērojama asa atraušanās, līdz ar n augšanu neierobežoti samazinās. Intervāla $(-\pi, \pi)$ galos visas parciālsummas ir vienādas ar nulli un tātad netuvojas funkcijas $f(x)=x$ vērtībām punktos $x=\pm\pi$. Katrā iekšējā intervālā, kura gali nesakrīt ar punktiem $x=\pm\pi$, rinda (5) konverģē un pie tam vienmērīgi uz funkciju $f(x)=x$. Bet konverģence ir vāja; tā, ņemot vērtību $x=\frac{\pi}{2}$, dabūsim rindu (7), kas (saskaņā ar Leibnica pazīmi; 376. §) konverģē ļoti lēni.

1. piezīme. Funkcija $f(x)=x$ ir definēta arī ārpus intervāla $(-\pi, \pi)$, bet tā kā tā nav periodiska, tad, ja $x \geqslant \pi$ un ja $x \leqslant -\pi$, rindas (5) summa nav vienāda ar x (415. § piezīme). Rindas (5) summas grafika (423. zīm.) sastāv no nogriežņiem, kurus dabū, nogriezni AB pārvietojot horizontāli



423. zīm.

par $\pm 2k\pi$ $(k=0, 1, 2, 3, \ldots)$. Visiem nogriežņiem $A_{-1}B_{-1}$, AB, A_1B_1, ... atgriezti gali, un to vietā ņemti punkti C_{-1}, C_1, $C_2, \ldots$, kas dala uz pusēm nogriežņus $B_{-1}A$, BA_1, B_1A_2 utt.

2. piezīme. Apskatīsim periodisku funkciju $f_1(x)=$ $=2\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\frac{x}{2})$; tās periods ir vienāds ar 2π. Intervāla $(-\pi, \pi)$ iekšienē tā sakrīt ar funkciju $f(x)=x$ (423. zīm.). Punktos $\pm\pi$ šī funkcija nav definēta un tai ir pārtraukums. Furjē rinda funkcijai $f_1(x)$ sakrīt ar Furjē rindu funkcijai $f(x)$, un tagad Furjē rindas summa ir vienāda ar $f_1(x)$ ne tikai intervāla $(-\pi, \pi)$ iekšienē, bet visur, izņemot, protams, pārtraukuma punktus $x=\pm\pi$, $x=\pm 3\pi$ utt. Šajos punktos tā ir vienāda ar nulli.

417. §. Furjē rinda pāra un nepāra funkcijai

Definīcija. Pieņemsim, ka funkcija $f(x)$ ir definēta intervālā $(-a, a)$. To sauc par *pāra* funkciju, ja, izmainot argumenta zīmi, funkcijas vērtība nemainās, t. i.,

$$f(-x)=f(x). \tag{1}$$

Tāda funkcija ir pāra pakāpe x^{2m} (no kurienes arī termins «pāra funkcija»), tādas ir funkcijas $\cos nx$, $x^3 \sin nx$ u. c.

Funkciju sauc par *nepāra* funkciju, ja, izmainot argumentam zīmi, mainās tikai funkcijas zīme, bet absolūtā vērtība paliek tā pati, t. i.,

$$f(-x)=-f(x). \tag{2}$$

Tāda funkcija ir nepāra pakāpe x^{2m-1}, tādas ir funkcijas $\sin nx$, $x\cos nx$, $\operatorname{tg} x$ u. c.

Pāra funkcijas grafika ir simetriska attiecībā pret OY asi, nepāra funkcijas — attiecībā pret sākumu O.

1. piezīme. Integrāļi $\int\limits_{-a}^{0} f(x)dx$ un $\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$ pāra funkcijai ir savstarpēji vienādi, bet nepāra funkcijai — atšķiras ar zīmēm. Tāpēc pāra funkcijai dabūjam

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx=2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx, \tag{3}$$

bet nepāra funkcijai

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx=0. \tag{4}$$

2. piezīme. Furjē rinda pāra funkcijai nesatur sinusus; Furjē koeficienti ir

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad b_n=0 \tag{5}$$

(sal. 1. piezīmi). Furjē rinda nepāra funkcijai nesatur kosinusus un brīvo locekli; Furjē koeficienti ir

$$a_n=0, \quad b_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx. \tag{6}$$

1. piemērs. Funkcija $f(x)=x$, kuru apskatījām 416. §

piemērā, ir nepāra funkcija. Tās Furjē rinda nesatur kosinusus un brīvo locekli. Koeficienti b_n ir vienādi ar

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx=2(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}.$$

2. piemērs. Funkcija $f(x)=|x|$ ir pāra funkcija; tātad Furjē rinda tai nesaturēs sinusus. Koeficients a_0 ir vienāds ar

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|x|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x dx=\pi. \tag{7}$$

Ja $n\neq 0$, dabūjam

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}x\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi}-\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx dx=2\,\frac{\cos n\pi-1}{n^2\pi}, \tag{8}$$

t. i.,

$$a_{2k}=0,\quad a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\quad (k=1, 2, 3, \ldots). \tag{9}$$

Tātad Furjē rinda funkcijai $f(x)=|x|$ būs

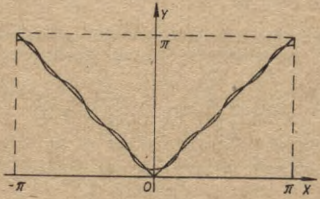
$$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\ldots+\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}+\ldots\right). \tag{10}$$

Funkcija $f(x)=|x|$ izpilda 416. § teorēmas nosacījumus. Tātad rinda (10) konverģē visur. Tās summa ir vienāda ar $|x|$ jebkurai x vērtībai intervāla $(-\pi, \pi)$ iekšienē. Vēl vairāk, tā kā funkcija $f(x)=|x|$ ir pāra funkcija, tās Furjē rindas summa ir vienāda ar $f(x)$ arī intervāla $(-\pi, \pi)$ galos. Tiešām, pāra funkcijai dabūjam $f(-\pi)=f(\pi)$, tā ka vidējais aritmētiskais starp vērtībām $f(-\pi)$ un $f(\pi)$ sakrīt ar abām šīm vērtībām. Tādējādi dabūjam

$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\ldots\right)\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi). \tag{10a}$$

Atsevišķā gadījumā, ievietojot vienādībā (10a) vienu no vērtībām $x=\pm\pi$ vai $x=0$, atrodam, ka

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}. \tag{11}$$



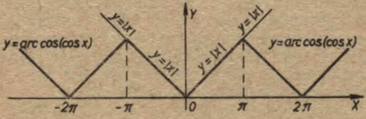
424. zīm.

Rinda (11) un vispārīgi rinda (10a) konverģē vāji, kaut gan labāk par 416. § rindu (5) (sal. 422. un 424. zīm. grafikas). 424. zīmējumā parādīta rindas (10) parciālsummas s_4, t. i.,

$$s_4=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}\right)$$

grafika intervālā $(-\pi, \pi)$. Lauztā līnija, ap kuru vijas līnija $y=s_4(x)$, ir rindas (10) summas $f_1(x)$ grafika.

425. zīmējumā attēlota summas $f_1(x)$ grafika intervālā $(-3\pi, 3\pi)$. Turpat attēlota (ar diviem stariem, kas iziet no punkta O) funkcijas $f(x)=|x|$ grafika. Slēgtā intervālā $(-\pi, \pi)$ funkcijas $f(x)$ un $f_1(x)$ sakrīt.

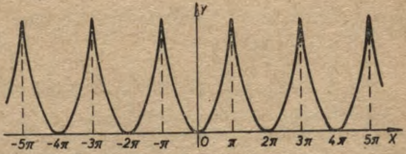


425. zīm.

3. piezīme. Funkciju $f_1(x)$ var izteikt ar formulu

$$f_1(x) = \arccos(\cos x).$$

3. piemērs. Izvirzīt Furjē rindā funkciju $f(x) = x^2$ (426. zīm.).



426. zīm.

Atrisinājums. Dotā funkcija ir pāra funkcija; tāpēc dabūjam

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Lai aprēķinātu a_n, ja $n \neq 0$, divreiz integrējam pa daļām; dabūsim

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi} x^2 \frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx dx =$$

$$= \frac{4}{n\pi} x \frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi} \cos nx dx = (-1)^n \frac{4}{n^2}. \qquad (12)$$

Intervālā $(-\pi, \pi)$, *ieskaitot galus* (sal. 2. piemēru), dabūjam

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left[\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} + \ldots\right]. \qquad (13)$$

Ja $x=\pi$ un $x=0$, tad attiecīgi dabūjam

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}, \tag{14}$$

$$\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{12}. \tag{15}$$

Saskaitot vienādības (14) un (15) pa locekļiem, atkal dabūjam (11).

418. §. Furjē rinda pārtrauktai funkcijai

416. § teorēma pieļauj šādu vispārinājumu.

Dirihlē teorēma. Pieņemsim, ka funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta visos intervāla $(-\pi, \pi)$ punktos, izņemot punktus $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ *(galīgā skaitā)*, kur tai ir lēcieni (219.a §). Ja pie tam intervālā $(-\pi, \pi)$ ir tikai galīgs skaits ekstrēmu (vai to nemaz nav), tad Furjē rinda funkcijai $f(x)$ konverģē visur. Pie tam[1]

1) abos galos $-\pi$, π rindas summa ir vienāda ar

$$\frac{1}{2}[f(-\pi)+f(\pi)]; \tag{1}$$

2) katrā pārtraukuma punktā $x=x_i$ rindas summa ir vienāda ar

$$\frac{1}{2}[f(x_i-0)+f(x_i+0)], \tag{2}$$

kur simbols $f(x_i-0)$ apzīmē robežu, uz kuru tiecas $f(x)$, kad x tiecas uz x_i no kreisās puses, bet $f(x_i+0)$ — $f(x)$ robežu, kad $x \to x_i$ no labās puses;

3) pārējos intervāla $(-\pi, \pi)$ punktos rindas summa ir vienāda ar $f(x)$.

1. piezīme. Integrāļi

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,$$

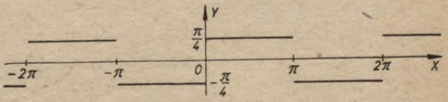
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx,$$

[1] Tālākais teksts pieļauj īsāku formulējumu (sk. 2. piezīmi).

kurus satur Furjē koeficienti, apskatāmajā gadījumā ir neīstie integrāļi (328. §).

P i e m ē r s. Apskatīsim funkciju $f(x)$, kas intervālā $(-\pi, \pi)$ definēta šādā veidā:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= -\frac{\pi}{4}, \text{ ja } -\pi \leqslant x < 0 \\ f(x) &= \frac{\pi}{4}, \text{ ja } 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$



427. zīm.

Šī funkcija ir pārtraukta punktā $x=0$, kur tai ir lēciens. Tiešām, dabūjam (sk. 427. zīm., kur attēlota funkcija $f(x)$, kas periodiski turpināta aiz intervāla $(-\pi, \pi)$)

$$f(-0) = -\frac{\pi}{4}, \quad f(+0) = \frac{\pi}{4}. \tag{4}$$

Atrodam Furjē koeficientus; funkcija $f(x)$ ir nepāra funkcija

$$\left.\begin{aligned} a_n &= 0, \\ b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi}{4} \sin nx\,dx = \frac{1}{2n}\,[1-(-1)^n]. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Tātad

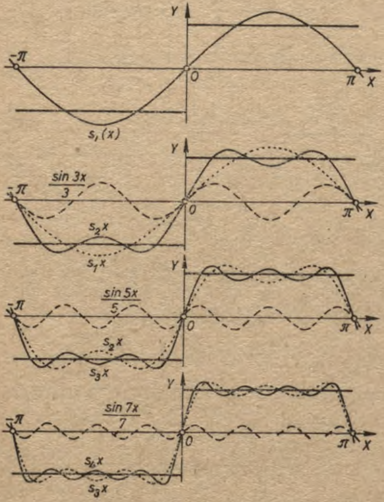
$$\left.\begin{aligned} b_{2k-1} &= \frac{1}{2k-1}, \\ b_{2k} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (k=1, 2, 3, \ldots). \tag{6}$$

Visos iekšējos intervāla $(-\pi, \pi)$ punktos, izņemot pārtraukuma punktu $x=0$, Furjē rindas summa ir vienāda ar $f(x)$, t. i., ja $-\pi < x < 0$, dabūjam

$$\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} + \ldots = -\frac{\pi}{4}, \tag{7}$$

bet, ja $0<x<\pi$, dabūjam

$$\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots+\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}+\ldots=\frac{\pi}{4}. \tag{8}$$



428. zīm.

Pārtraukuma punktā $x=0$ Furjē rindas summa ir vienāda ar

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=0$$

(visi rindas locekļi ir vienādi ar nulli). Intervāla $(-\pi, \pi)$ galos summa arī ir vienāda ar

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

428. zīmējumā redzams, ka parciālsummas $s_1(x)$, $s_2(x)$, $s_3(x)$, $s_4(x)$ pakāpeniski tuvojas funkcijai $f(x)$. Pirmajā joslā (no augšas) parādīta $s_1(x)$ grafika; otrā joslā ar nepārtrauktu līniju attēlota

$$s_2(x)=s_1(x)+\frac{\sin 3x}{3}$$

grafika. Šeit parādīta (ar pārtrauktu līniju) arī $\frac{\sin 3x}{3}$ grafika un (ar punktētu līniju) atkārtota $s_1(x)$ grafika. Tālāk seko $s_3(x)$ grafika, pie kam ar punktētu un pārtrauktu līniju parādītas $s_2(x)$ un $\frac{\sin 5x}{5}$ grafikas. Analogi konstruēta pēdējā grafika.

2. piezīme. Dirihlē teorēmā 1. un 3. punkts būtībā ir 2. punkta atsevišķi gadījumi. Tiešām, ja $f(-\pi)\neq f(\pi)$, tad intervāla gali ir periodiski turpinātās funkcijas $f(x)$ pārtraukuma punkti. Ja x ir iekšējs punkts, kur funkcija ir nepārtraukta, tad abas robežas — kreisā $f(x-0)$ un labā $f(+0)$ ir vienādas ar $f(x)$; tā ka

$$\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]=f(x). \tag{9}$$

Tādējādi Dirihlē teorēmu īsāk var formulēt tā:

Pieņemsim, ka periodiska funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta visos intervāla $(-\pi, \pi)$ punktos, izņemot punktus $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ (galīgā skaitā), kur tai ir lēcieni. Ja pie tam intervālā $(-\pi, \pi)$ ir tikai galīgs skaits ekstrēmu (vai to nemaz nav), tad Furjē rinda funkcijai $f(x)$ konverģē visur un tās summa visur ir vienāda ar

$$\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)].$$

VAIRĀKARGUMENTU FUNKCIJU DIFERENCĒŠANA UN INTEGRĒŠANA

419. §. Divu argumentu funkcija

D e f i n ī c i j a. Lielumu z sauc par *divu mainīgu lielumu* x, y *funkciju*, ja katram skaitļu pārim, kuri var (saskaņā ar jautājuma nostādni) būt mainīgo x, y vērtības, atbilst viena vai vairākas noteiktas lieluma z vērtības. Pie tam mainīgos lielumus x, y sauc par *argumentiem* (sal. 196. § 1. definīcija).

Vienvērtīgas un daudzvērtīgas funkcijas izšķir tāpat kā 196. § 2. definīcijā.

1. p i e m ē r s. Punkta augstums h virs Zemes virsmas (virs jūras līmeņa) ir ģeogrāfisko koordinātu — platuma φ un garuma ψ — funkcija. Platums var mainīties robežās no $-90°$ līdz $+90°$, garums — no $-180°$ līdz $+180°$.

2. p i e m ē r s. Divu reizinātāju x, y reizinājums ir divu argumentu x un y funkcija. Argumentu x un y vērtības var būt patvaļīgas.

S k a i t ļ u p l a k n e. Uzskatāmības dēļ x, y vērtību pāri attēlo ar ģeometrisku punktu $M(x; y)$ taisnleņķa koordinātu sistēmā XOY. Plakni, kurā šī sistēma ņemta, sauc par *skaitļu plakni.*

Izteiciens «punkts $M(x; y)$» ir līdzvērtīgs ar izteicienu «argumentu x un y vērtību pāris». Piemēram, izteiciens «punkts $M(1; -3)$» nozīmē to pašu, ko izteiciens «vērtību pāris $x=1$, $y=-3$». Saskaņā ar to divu mainīgo funkciju sauc par *punkta funkciju* (sk. 457. §). Bieži funkcijas vērtību pēc savas fizikālās jēgas nosaka punkta izvēle plaknē vai uz liektas virsmas (sal. 1. piemēru).

F u n k c i j a s d e f i n ī c i j a s a p g a b a l s. Skaitļu pāru kopa, kuri (saskaņā ar jautājuma nostādni) var būt funkcijas $f(x, y)$ argumentu x, y vērtības, veido šīs funkcijas *definīcijas apgabalu.*

Ģeometriski definīcijas apgabalu attēlo kāda punktu kopa XOY plaknē.

1. piemērā argumentu φ un ψ funkcijas h definīcijas apgabals ir skaitļu plaknes punktu kopa, kuri atrodas kāda taisnstūra iekšpusē un uz tā robežām. Šim taisnstūrim ir 360 mērvienības garumā un 180 platumā; tā malas ir paralēlas koordinātu asīm, bet centrs sakrīt ar koordinātu sākumu. 2. piemērā funkcijas definīcijas apgabals ir visa skaitļu plakne.

A p z ī m ē j u m i. Pieraksts

$$z=f(x, y)$$

nozīmē, ka z ir divu mainīgo x, y funkcija. Pieraksts $f(3, 5)$ nozīmē, ka tiek apskatīta funkcijas $f(x, y)$ vērtība punktā $M(3; 5)$, t. i., tā funkcijas vērtība, kura atbilst argumentu vērtībām $x=3$, $y=5$ (sk. 202. §). Burta f vietā lieto arī citus burtus.

Dažreiz funkcijas raksturojumam lieto to pašu burtu, ar kuru apzīmēta pati funkcija, t. i., raksta $z=z(x, y)$, $w=w(u, v)$ utt.

P i e z ī m e. Nav izslēgts, ka funkcijas $f(x, y)$ vērtība mainās atkarībā no x, bet, argumentam y mainoties, paliek viena un tā pati. Tad divu argumentu funkciju var uzskatīt par viena argumenta (x) funkciju. Ja $f(x, y)$ vērtība paliek viena un tā pati jebkurām abu argumentu vērtībām, tad divu argumentu funkcija ir pastāvīgs lielums.

3. p i e m ē r s. Nokrišņu diennakts daudzums (h mm) Maskavas apgabala teritorijā ir novērošanas vietas platuma φ un garuma ψ funkcija. Tomēr nav izslēgts, ka nokrišņu diennakts daudzums virzienā no dienvidiem uz ziemeļiem paliek nemainīgs un mainās tikai virzienā no austrumiem uz rietumiem. Tad h var uzskatīt par viena argumenta ψ funkciju.

Ja diennakts laikā visā apgabalā nokrišņu nebija, tad h ir pastāvīgs lielums (kas vienāds ar nulli).

420. §. Triju un vairāku argumentu funkcija

Triju, četru utt. argumentu funkcijas un tās definīcijas apgabala jēdzienus ievieš tāpat kā divu argumentu gadījumā (419. §).

Triju argumentu funkcijas definīcijas apgabalu attēlo kāda punktu kopa telpā. Saskaņā ar to triju (un pēc analoģijas arī vairāku) mainīgo funkciju sauc par *punkta funkciju*. Pieraksts

$$u = f(x, y, z)$$

nozīmē, ka u ir triju argumentu x, y, z funkcija.

Piezīme. Nav izslēgta iespēja, ka funkcijas $f(x, y, z)$ vērtība mainās atkarībā no x un y, bet, mainoties z, paliek viena un tā pati. Tad triju mainīgo funkcija $f(x, y, z)$ līdz ar to ir divu mainīgo x, y funkcija. Funkcija $f(x, y, z)$ var izrādīties arī viena mainīgā funkcija un pat pastāvīgs lielums (sal. 419. § piezīmi).

Vispārīgi var izrādīties, ka n mainīgo funkcija ir mazāka mainīgo skaita funkcija.

421. §. Vairākargumentu funkciju uzdošanas veidi

1. Divu vai vairāku argumentu funkciju var uzdot ar formulu (vai vairākām formulām). Funkcija, kas uzdota ar formulu, var būt *atklāta* vai *apslēpta* (sal. 197. § p. «c»).

1. piemērs. Formula

$$pv = A(273{,}2 + t), \tag{1}$$

kur $A = 0{,}02927$, izsaka sakarību starp viena kilograma gaisa tilpumu v (m^3), tā spiedienu $p\left(\frac{t}{m^2}\right)$ un temperatūru t (pēc Celsija). Katrs mainīgais p, v, t ir abu pārējo mainīgo apslēpta funkcija.

Formula

$$v = \frac{A(273{,}2 + t)}{p} \tag{2}$$

uzdod v kā atklātu divu argumentu p un t funkciju. Šīs funkcijas definīcijas apgabals ir fizikāli iespējamo spiediena un temperatūras vērtību kopa (t var pieņemt tikai vērtības, kas pārsniedz $-273°$, p — tikai pozitīvas vērtības).

Piezīme. Bieži vairāku argumentu funkciju uzdod, nenorādot tanī ietilpstošo lielumu fizikālo jēgu. Ja pie tam nav doti nekādi norādījumi attiecībā uz funkcijas definīcijas apgabalu, tad pieņem, ka definīcijas apgabals aptver visus tos punktus, kuriem formulai ir jēga.

2. p i e m ē r s. Pieņemsim, ka divu argumentu x, y funkcija uzdota ar formulu

$$z=\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}, \qquad (3)$$

nenorādot funkcijas definīcijas apgabalu. Formulai (3) ir jēga tikai tad, kad $x^2+y^2\leq R^2$. Tātad definīcijas apgabals ir visu punktu kopa, kuri atrodas iekšpus vai uz robežas riņķim ar rādiusu R un centru koordinātu sākumā.

3. p i e m ē r s. Formula $u=\sqrt{a^2-(x^2+y^2+z^2)}$ uzdod triju mainīgo funkciju. Formulai ir jēga tikai ar nosacījumu, ka $x^2+y^2+z^2\leq a^2$; definīcijas apgabals ir visu punktu kopa, kuri atrodas iekšpus vai uz virsmas lodei ar rādiusu a un centru koordinātu sākumā.

2. Divu vai vairāku argumentu funkciju var uzdot ar t a b u l u. Divu argumentu gadījumā tabulu var iekārtot kā taisnstūri. Augšējā rindiņā ieraksta viena argumenta vērtības, kreisajā kolonā otra argumenta vērtības. Attiecīgās rindiņas un kolonas krustojumā ieraksta funkcijas vērtību *(tabula ar divkāršu ieeju)*.

4. p i e m ē r s. Tālāk ievietotā tabula dod 1 *kg* gaisa tilpumu kā spiediena un temperatūras funkciju (sk. 1. piemēru).

$p\frac{t}{m^2}$ \ t°	−20	−10	0	10	20
10,0	0,7411	0,7704	0,7997	0,8289	0,8582
10,1	0,7338	0,7628	0,7918	0,8207	0,8497
10,2	0,7266	0,7553	0,7840	0,8126	0,8414
10,3	0,7195	0,7480	0,7764	0,8048	0,8332
10,4	0,7126	0,7408	0,7689	0,7970	0,8252
10,5	0,7058	0,7337	0,7616	0,7894	0,8173

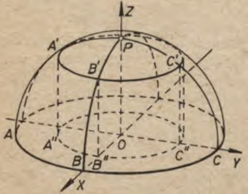
3. Divu argumentu funkciju var uzdot ar *telpas modeli (telpas grafiku)*. Funkcijas $f(x, y)$ telpas modelis ir kāda virsma S taisnleņķa koordinātu sistēmā $OXYZ$; virsmas S punkta M projekcija XOY plaknē ir argumentu x, y vērtību pāra attēls, punkta M aplikāta z attēlo atbilstošo funkcijas $f(x, y)$ vērtību.

Triju un vairāku argumentu funkcijām šis paņēmiens nav lietojams.

5. piemērs. Funkcija, kas uzdota ar formulu

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},$$

izsaka pussfēru (429. zīm., sal. 2. piemēru).



429. zīm.

430. zīm.

4. Divu argumentu funkciju var uzdot plaknē ar *atzīmju metodi.* Argumentu x, y vērtību pāri attēlo ar punktu $M(x; y)$, bet funkcijas z vērtību — ar skaitlisku atzīmi. (Šo metodi lieto kartogrāfijā, lai apzīmētu punkta augstumu.) Punktus, kuros z ir viena un tā pati vērtība, savieno ar līniju (*līmeņa līnija*); tai pieraksta atbilstošo skaitlisko atzīmi. Ja punkts $(x; y)$ atrodas uz vienas līmeņa līnijas, tad funkcijas vērtību nolasa tieši; ja neatrodas, tad ņem tuvākās divas līmeņa līnijas, starp kurām atrodas punkts $(x; y)$, un izpilda interpolāciju (pēc acumēra).

6. piemērs. 430. zīmējumā attēlotas funkcijas $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ līmeņa līnijas, kas atbilst funkcijas pieaugumam par $0{,}2a$ ($OB=a$). Funkcijas z vērtību punktā $M(0; -0{,}8a)$ nolasa pēc atzīmes — tā ir $0{,}6a$. Lai atrastu z vērtību punktā $N\left(\frac{1}{2}a; \frac{1}{2}a\right)$, nolasām atzīmes $0{,}6a$ un $0{,}8a$ pie tuvākajām līmeņa līnijām. Tā kā N atrodas apmēram vienādā attālumā no abām šīm līnijām, tad $z\approx 0{,}7a$.

Piezīme. Ja virsmu $z=f(x, y)$ šķeļ ar plakni $z=k$ un šķēlumu projicē XOY plaknē, tad dabūsim līmeņa līniju ar atzīmi k. Tā, ja šķeļam pussfēru $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ ar plakni $z=0{,}8a$, tad dabūsim šķēlumu $A'B'C'$ (429. zīm.). Tā projekcija $A''B''C''$ (429. un 430. zīm.) XOY plaknē ir līmeņa līnija ar atzīmi $0{,}8a$.

Analogi ar atzīmju metodi var attēlot telpā triju argumentu funkciju $u=f(x, y, z)$. Līmeņa līniju loma piekrīt *līmeņa virsmām.*

422. §. Vairākargumentu funkcijas robeža

Robežas jēdzienu vairākargumentu funkcijai ievieš tāpat kā viena argumenta funkcijai. Noteiktības dēļ apskatīsim divu argumentu funkciju.

Skaitli l sauc par funkcijas $z=f(x, y)$ robežu punktā $M_0(a; b)$, ja z neierobežoti tuvojas l vienmēr, kad punkts $M(x; y)$ neierobežoti tuvojas punktam M_0 (sal. 204. §).

P i e r a k s t s:

$$\lim_{M \to M_0} f(x, y) = l$$

jeb

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = l.$$

1. p i e z ī m e. Pieņemts, ka kāda riņķa iekšpusē, kas aptver punktu M_0, funkcija $f(x, y)$ ir definēta visos punktos, kas nesakrīt ar M_0; pašā punktā M_0 funkcija $f(x, y)$ var būt, bet var arī nebūt definēta (sal. 204. § 1. piezīmi).

2. p i e z ī m e. Matemātiskā jēga izteicienam «neierobežoti tuvojas» izprotama no šādas precīzas definīcijas.

D e f i n ī c i j a. Skaitli l sauc par funkcijas $f(x, y)$ *robežu* punktā $M_0(a; b)$, ja starpības $f(x, y)-l$ absolūtā vērtība paliek mazāka par jebkuru iepriekš uzdotu pozitīvu skaitli ε vienmēr, kad attālums $M_0M=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ no punkta $M_0(a; b)$ līdz punktam $M(x; y)$ (kas nesakrīt ar M_0) ir mazāks par kādu pozitīvu skaitli δ (kas ir atkarīgs no ε).

Ģ e o m e t r i s k ā n o z ī m e. Virsmas $z=f(x, y)$ aplikāta atšķiras no l mazāk nekā par ε vienmēr, kad punkta projekcija, kurš atrodas uz virsmas, nonāk riņķī ar rādiusu δ un centru punktā $M_0(a; b)$.

3. p i e z ī m e. Triju argumentu funkcijai $f(x, y, z)$ attālumu M_0M izsaka izteiksme $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$. Četru argumentu gadījumā, kad izteiksmes $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+(u-d)^2}$ ģeometriskais iztulko-

jums kļūst neiespējams, to pēc analoģijas joprojām sauc par *attālumu* starp punktiem $M(x; y; z; u)$ un $M_0(a; b; c; d)$.

Bezgalīgi maza un bezgalīgi liela lieluma jēdzienu ievieš tāpat kā viena argumenta funkcijai (207. un 208. §). Par bezgalīgi maza lieluma kārtu sk. 423. §. Robežas jēdziena paplašinājumu realizē tāpat kā 211. paragrāfā.

423. §. Par bezgalīgi mazu vairākargumentu funkciju kārtu

Salīdzinot divas bezgalīgi mazas v i e n a argumenta funkcijas α un β, mēs izšķirām (217. §) šādus gadījumus:

1) attiecībai $\frac{\alpha}{\beta}$ ir galīga robeža, kas atšķiras no nulles, tad bezgalīgi mazajiem lielumiem α un β ir vienāda kārta;

2) $\lim \frac{\alpha}{\beta}=0$, tad α ir augstākas kārtas bezgalīgi mazs lielums, salīdzinot ar β;

3) $\lim \frac{\alpha}{\beta}=\infty$, tad α ir zemākas kārtas bezgalīgi mazs lielums, salīdzinot ar β;

4) attiecībai $\frac{\alpha}{\beta}$ nav robežas, tad α un β nav salīdzināmi.

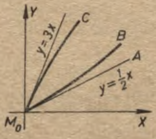
4. gadījums, pētot viena argumenta elementārās funkcijas, ir izņēmuma gadījums. Divu un vairāku argumentu funkcijām *izņēmuma gadījums ir* 1. *gadījums,* bet praktiski nozīmīgi ir 2., 3. un 4. gadījums.

Tādējādi divu bezgalīgi mazu vairākargumentu funkciju attiecībai tipiskajā gadījumā nav robežas (sk. 1. piemēru). Citos gadījumos vienai no divām bezgalīgi mazām funkcijām (piemēram, α) ir augstāka kārta attiecībā pret otru (sk. 2. un 3. piemēru). Tad otrai funkcijai ir zemāka kārta attiecībā pret pirmo.

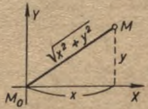
1. p i e m ē r s. Kad $x \to 0$, $y \to 0$ lielumi $2x^2+y^2$ un x^2+y^2 ir bezgalīgi mazi, bet to attiecībai nav robežas.

Tiešām, punkts $M(x; y)$ var tiekties uz punktu $M_0(0; 0)$ pa līniju, kas punktā M_0 pieskaras taisnei $y=\frac{1}{2}x$ (431. zīmējumā BM_0), vai taisnei $y=3x$, vai taisnei $y=x$ utt. Pirmajā gadījumā attiecība $\frac{y}{x}$ tiecas uz $\frac{1}{2}$, otrajā gadījumā — uz 3, trešajā — uz 1. Tātad attiecība

$$(2x^2+y^2) : (x^2+y^2) = \left[2+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right] : \left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]$$



431. zīm.



432. zīm.

pirmajā gadījumā tiecas uz $\frac{9}{5}$, otrajā uz $\frac{11}{10}$, trešajā — uz $\frac{3}{2}$ utt.

P i e z ī m e. Bezgalīgi mazais lielums x^2+y^2 ir attāluma M_0M kvadrāts no punkta M_0 līdz punktam M, kurš tiecas uz $M_0(0; 0)$. Starp citu, gadījumam, kad viens no salīdzināmajiem bezgalīgi mazajiem lielumiem ir kāda attāluma pakāpe starp punktu M un tā robežu M_0, ir ļoti svarīga nozīme (sal. 430., 444. §).

2. p i e m ē r s. Funkcija $2x^2-y^2$, kad $M \to M_0(0; 0)$ ir augstākas kārtas bezgalīgi mazs lielums, salīdzinot ar attālumu

$$MM_0=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Tiešām, attiecību $(2x^2-y^2) : \sqrt{x^2+y^2}$ var pārveidot tā:

$$\frac{2x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=2x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-y\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \qquad (1)$$

Abi lielumi $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ pēc absolūtās vērtības nepārsniedz vienu (sk. 432. zīm.), bet lielumi $2x$ un y tiecas uz nulli. Tātad uz nulli tiecas arī attiecība $(2x^2-y^2):\sqrt{x^2+y^2}$.

3. piemērs. Funkcijai $f(x, y)=(x-x_0)^2(y-y_0)$ ir augstāka kārta attiecībā pret attāluma MM_0 kvadrātu, t. i., attiecībā pret $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$. Tiešām,

$$\frac{f(x, y)}{MM_0^2}=(x-x_0)\frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\,\frac{y-y_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}.$$

Pirmais reizinātājs tiecas uz nulli, bet abi pārējie nepārsniedz vienu (sal. 2. piemēru).

424. §. Vairākargumentu funkcijas nepārtrauktība

1. definīcija. Funkciju $f(x, y)$ sauc par *nepārtrauktu punktā* $M_0(x_0; y_0)$, ja izpildīti šādi divi nosacījumi:

1) punktā M_0 funkcijai ir noteikta vērtība l,

2) punktā M_0 šai funkcijai ir robeža, kas vienāda ar l.

Ja vismaz viens no šiem nosacījumiem nav izpildīts, tad funkciju sauc par *pārtrauktu punktā* M_0.

Analogi nepārtrauktību definē triju un vairāku argumentu funkcijām.

2. definīcija. Funkciju $f(x, y)$ sauc par *nepārtrauktu kādā apgabalā*, ja tā ir nepārtraukta visos šī apgabala punktos.

1. piemērs. Funkcija $f(x, y)$, kas uzdota ar formulām

$$f(0, 0)=0,$$

$$f(x, y)=\frac{2x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (x^2+y^2\neq 0),$$

ir nepārtraukta punktā $M_0(0; 0)$. Tiešām, tai punktā M_0 ir vērtība nulle; bez tam tai šeit ir robeža, kas arī ir vienāda ar nulli (sal. 423. § 2. piemēru). Visos pārējos skaitļu plaknes punktos funkcija $f(x, y)$ arī ir nepārtraukta. Tāpēc tā ir nepārtraukta jebkurā apgabalā.

2. piemērs. Funkcija $\varphi(x, y)$, kas uzdota ar formulām

$$\varphi(0, 0)=0,$$

$$\varphi(x, y)=\frac{2x^2+y^2}{x^2+y^2} \quad (x^2+y^2\neq 0),$$

ir pārtraukta punktā $M_0(0; 0)$. Pirmais 1. definīcijas nosacījums šeit ir izpildīts, bet otrais ne: funkcijai $\varphi(x, y)$ nav robežas, kad $M \to M_0$ (sk. 423. § 1. piemēru).

425. §. Parciālie atvasinājumi

Definīcija. Par funkcijas $u=f(x, y, z)$ *parciālo atvasinājumu* pēc argumenta x sauc attiecības

$$\frac{f(x+\Delta x, y, z)-f(x, y, z)}{\Delta x}$$

robežu, kad $\Delta x \to 0$.

Apzīmējumi:

$$u'_x, f'_x(x, y, z), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}. \tag{1}$$

Par simbolu ∂u, ∂x nozīmi sk. 429. §.

1. piezīme. Argumentus x, y, z robežas meklēšanas procesā uzskata par pastāvīgiem; iegūtais parciālais atvasinājums ir x, y, z funkcija (sal. 224. §).

Parciālos atvasinājumus pēc argumentiem y, z definē un apzīmē analogi, piemēram,

$$u'_y = \frac{\partial u}{\partial y} = f'_y(x, y, z) =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y, z)-f(x, y, z)}{\Delta y}. \tag{2}$$

2. piezīme. Lai atrastu parciālo atvasinājumu u'_x, pietiek atrast mainīgā u parasto atvasinājumu, uzskatot pēdējo par viena argumenta x funkciju. Ja jāatrod visi trīs parciālie atvasinājumi, tad praktiskāk ir pielietot 438. § paņēmienu.

Piemērs. Atrast parciālo atvasinājumu vērtības funkcijai

$$u=f(x, y, z)=2x^2+y^2-3z^2-3xy-2xz \tag{3}$$

punktā $M_0(0; 0; 1)$.

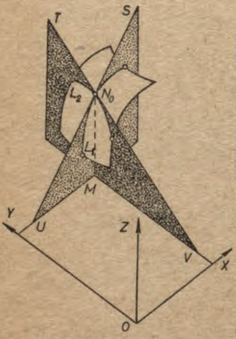
Atrisinājums. Uzskatot u par viena argumenta x funkciju, atrodam, ka tās atvasinājums $\frac{\partial u}{\partial x}$ ir vienāds ar

$4x-3y-2z$. Punktā (0; 0; 1) šī atvasinājuma vērtība ir vienāda ar -2.

P i e r a k s t s:

$$f'_x(0; 0; 1) = 4x-3y-2z\,|_{x=0,\ y=0,\ z=1} = -2,$$
$$f'_y(0; 0; 1) = 2y-3x\,|_{x=0,\ y=0,\ z=1} = 0,$$
$$f'_z(0; 0; 1) = -6.$$

426. §. Parciālo atvasinājumu ģeometriskā nozīme divargumentu funkcijām



433. zīm.

Pieņemsim, ka punktam $M_0(x_0; y_0)$ (433. zīm.) atbilst virsmas $z=f(x, y)$ (421. §) punkts N_0. Novelkam caur N_0 plaknei XOZ paralēlu plakni N_0M_0U. Šķēlumā dabūsim līniju L_1N_0, uz kuras y paliek pastāvīgs $(y=y_0)$. Līnijas L_1N_0 aplikāta z ir viena argumenta x funkcija. Parciālais atvasinājums skaitliski ir vienāds ar pieskares UN_0 virziena koeficientu, t. i., ar tā leņķa M_0UN_0 tangensu, kuru pieskare US veido ar koordinātu plakni XOY.

Novelkot YOZ plaknei paralēlu plakni N_0M_0V, dabūsim šķēlumu L_2N_0. Parciālais atvasinājums $f'_y(x_0, y_0)$ ir vienāds ar tā leņķa M_0VN_0 tangensu, kuru pieskare VT veido ar XOY plakni.

427. §. Pilnais un parciālais pieaugums

Ņemsim kaut kādas argumentu x, y, z vērtības x_0, y_0, z_0 un dosim tām kaut kādus pieaugumus Δx, Δy, Δz. Funkcija $u=f(x, y, z)$ dabūs *pilno pieaugumu*

$$\Delta u = \Delta f(x, y, z) =$$
$$= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f(x_0, y_0, z_0).$$

Var gadīties, ka pieaugumi Δy, Δz ir vienādi ar nulli, t. i., y un z paliek nemainīgi; tad funkcija $f(x, y, z)$ dabūs *parciālo pieaugumu*

$$\Delta_x u = \Delta_x f(x, y, z) = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0).$$

Analogi rodas parciālie pieaugumi

$$\Delta_y u = \Delta_y f(x, y, z) = f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0),$$

$$\Delta_z u = \Delta_z f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0).$$

Piezīme. Divu argumentu gadījumā funkcijas pilno pieaugumu ģeometriski attēlo aplikātas M_0N_0 (433. zīm.) pieaugums, ja punkts N_0 patvaļīgi pārvietojies pa virsmu $z = f(x, y)$. Parciālais pieaugums $\Delta_x f(x, y)$ rodas, ja punkts N_0 pārvietojies pa šķēlumu L_1N_0, parciālais pieaugums $\Delta_y f(x, y)$, — ja pa šķēlumu L_2N_0.

Piemērs. Pilnais pieaugums funkcijai

$$u = 2x^2 - y^2 - z$$

ir vienāds ar

$$\Delta u = \Delta(2x^2 - y^2 - z) =$$
$$= 2(x + \Delta x)^2 - (y + \Delta y)^2 - (z + \Delta z) - 2x^2 + y^2 + z =$$
$$= 4x\Delta x - 2y\Delta y - \Delta z + 2\Delta x^2 - \Delta y^2.$$

Parciālie pieaugumi ir

$$\Delta_x u = 4x\Delta x + 2\Delta x^2, \quad \Delta_y u = -2y\Delta y - \Delta y^2, \quad \Delta_z u = -\Delta z.$$

428. §. Parciālais diferenciālis

Definīcija. Ja funkcijas $u = f(x, y, z)$ parciālo pieaugumu $\Delta_x u$ (427. §) var sadalīt divu saskaitāmo summā

$$\Delta_x u = A\Delta x + \alpha, \tag{1}$$

kur A nav atkarīgs no Δx, bet α ir augstākas kārtas bezgalīgi mazs lielums, salīdzinot ar Δx, tad pirmo saskaitāmo $A\Delta x$ sauc par funkcijas $f(x, y, z)$ *parciālo diferenciāli* pēc argumenta x un apzīmē ar simbolu $d_x f(x, y, z)$ jeb $d_x u$, t. i.,

$$d_x u = d_x f(x, y, z) = A\Delta x. \tag{2}$$

Citādi sakot, parciālais diferenciālis ir funkcijas $f(x, y, z)$ diferenciālis (228. §), kas sastādīts, pieņemot, ka lielumi

y un z nemainās ($\Delta y = \Delta z = 0$). Ar šādu pieņēmumu x ir vienīgais arguments un tāpēc Δx vietā var rakstīt dx (sal. 234. §), tā ka

$$d_x u = d_x f(x, y, z) = A dx.$$

Analogi definē parciālos diferenciāļus $d_y f(x, y, z)$, $d_z f(x, y, z)$ pēc argumentiem y, z.

Koeficients A ir vienāds ar parciālo atvasinājumu u'_x, t. i., funkcijas parciālais diferenciālis ir vienāds ar atbilstošā parciālā atvasinājuma un argumenta pieauguma reizinājumu (228. § 1. teorēma)

$$d_x u = u'_x dx. \tag{3}$$

Analogi

$$d_y u = u'_y dy, \tag{4}$$

$$d_z u = u'_z dz. \tag{5}$$

P i e m ē r s. Atrast parciālos diferenciāļus funkcijai

$$u = x^2 y + y^2 x.$$

A t r i s i n ā j u m s. Uzskatot vispirms y, bet pēc tam x par pastāvīgu, atrodam

$$d_x u = (2xy + y^2) dx,$$

$$d_y u = (x^2 + 2xy) dy.$$

429. §. Parciālā atvasinājuma izteiksme ar diferenciāli

Funkcijas $u = f(x, y, z)$ parciālais atvasinājums u'_x ir vienāds ar attiecību starp parciālo diferenciāli $d_x u$ un diferenciāli dx, t. i.,

$$u'_x = \frac{d_x u}{dx}. \tag{1}$$

Izriet no 428. § (sal. 235. §).

Apzīmējumā $\frac{\partial u}{\partial x}$ nav lietderīgi simbolu ∂u saprast kā *parciālo diferenciāli* $d_x u$ pēc argumenta x, jo apzīmējumā $\frac{\partial u}{\partial y}$ *tas pats simbols* ∂u tad būtu jāsaprot kā parciālais diferenciālis $d_y u$, bet apzīmējumā $\frac{\partial u}{\partial z}$ — kā $d_z u$.

Tāpēc izteiksme $\frac{\partial u}{\partial x}$ jāuzskata par parciālā atvasinājuma *nedalāmu simbolu* (bet ne par diferenciāļu attiecību).

Piemērs. Pieņemsim, ka $u=xy$; tad $x=\frac{u}{y}$ un $y=\frac{u}{x}$. Dabūjam

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y, \quad \frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{u}{y^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial u}=\frac{1}{x}.$$

No šejienes atrodam

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=y\cdot\left(-\frac{u}{y^2}\right)\cdot\frac{1}{x}=-\frac{u}{xy}=-1.$$

Uzskatot simbolus ∂u, ∂x, ∂y par patstāvīgiem lielumiem, mēs -1 vietā dabūtu kļūdainu rezultātu $+1$.

430. §. Pilnais diferenciālis

Definīcija. Pieņemsim, ka funkcijas $f(x, y, z)$ pilno pieaugumu $\Delta f(x, y, z)$ (427. §) var sadalīt divu saskaitāmo summā

$$\Delta f(x, y, z)=(A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z)+\varepsilon, \tag{1}$$

kur neviens no koeficientiem A, B, C nav atkarīgs ne no Δx, ne no Δy, ne no Δz, bet lielums ε (kuru uzskata par Δx, Δy, Δz funkciju) ir augstākas kārtas bezgalīgi mazs lielums, salīdzinot ar attālumu $\varrho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$.

Tad pirmo saskaitāmo

$$A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z \tag{2}$$

sauc par funkcijas $f(x, y, z)$ *pilno diferenciāli* (jeb vienkārši par *diferenciāli*) un apzīmē ar $df(x, y, z)$ (sal. 228. un 428. §).

1. piemērs. Ņemam funkciju

$$f(x, y, z)=2x^2-y^2-z. \tag{3}$$

Dabūjam (427. § piemērs)

$$\Delta f(x, y, z)=(4x\Delta x-2y\Delta y-\Delta z)+(2\Delta x^2-\Delta y^2).$$

Koeficienti $A=4x$, $B=-2y$, $C=-1$ nav atkarīgi ne no Δx, ne no Δy, ne no Δz, bet lielums $\varepsilon=2\Delta x^2-\Delta y^2$ ir augstākas kārtas bezgalīgi mazs lielums, salīdzinot ar $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$ (sal. 423. § 2. piemēru). Tātad izteiksme $4x\Delta x-2y\Delta y-\Delta z$ ir funkcijas $2x^2-y^2-z$ pilnais diferenciālis, t. i.,

$$d(2x^2-y^2-z)=4x\Delta x-2y\Delta y-\Delta z. \tag{4}$$

T e o r ē m a. Koeficienti A, B, C ir attiecīgi vienādi ar funkcijas $f(x, y, z)$ parciālajiem atvasinājumiem, t. i.,

$$A=f'_x(x, y, z), \quad B=f'_y(x, y, z), \quad C=f'_z(x, y, z). \tag{5}$$

Citādi sakot, *pilnais diferenciālis ir vienāds ar parciālo diferenciāļu* (428. §) summu, t. i.,

$$df(x, y, z)=d_xf(x, y, z)+d_yf(x, y, z)+d_zf(x, y, z) \tag{6}$$

jeb

$$df(x, y, z)= \\ =f'_x(x, y, z)\Delta x+f'_y(x, y, z)\Delta y+f'_z(x, y, z)\Delta z. \tag{7}$$

2. p i e m ē r s. Formulā (4) koeficienti $A=4x$, $B=-2y$, $C=-1$ ir funkcijas $2x^2-y^2-z$ parciālie atvasinājumi pēc argumentiem x, y, z, t. i.,

$$\left.\begin{aligned} 4x&=\frac{\partial}{\partial x}(2x^2-y^2-z), \\ -2y&=\frac{\partial}{\partial y}(2x^2-y^2-z), \\ -1&=\frac{\partial}{\partial z}(2x^2-y^2-z). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

1. p i e z ī m e. Formulā (7) argumentu x, y, z pilnie diferenciāļi dx, dy, dz ir attiecīgi vienādi ar Δx, Δy, Δz. Tāpēc dabūjam

$$df(x, y, z)=f'_x(x, y, z)dx+f'_y(x, y, z)dy+f'_z(x, y, z)dz. \tag{9}$$

Piemēram, (sal. 1. piemēru)

$$d(2x^2-y^2-z)=4xdx-2ydy-dz. \tag{10}$$

Formula (9) ir invarianta (sk. 432. §) un tāpēc labāka par formulu (7).

2. p i e z ī m e. Ja u ir viena argumenta funkcija, tad pilnais diferenciālis pārvēršas parastajā diferenciālī, bet vienīgais parciālais atvasinājums — parastajā atvasinājumā.

431. §. Pilnā diferenciāļa ģeometriskā nozīme (divargumentu funkcijām)

Pieņemsim, ka plakne P pieskaras (435. §) punktā $M(x; y; z)$ virsmai S, kas attēlo funkciju $z=f(x, y)$ (421. § 3. p.). Pārvietosim punkta M projekciju $M_0(x; y; 0)$ stāvoklī $M_1(x+\Delta x; y+\Delta y; 0)$. Tad *pieskaru plaknes* aplikāta iegūs pieaugumu, kas būs vienāds ar pilno diferenciāli

$$dz=f'_x(x, y)\Delta x+f'_y(x, y)\Delta y. \qquad (1)$$

Atbilstošais *virsmas* S aplikātas pieaugums ir vienāds ar funkcijas $z=f(x, y)$ pilno pieaugumu Δz.

Tātad (430. § definīcija) attālums starp virsmu S un pieskaru plakni P (skaitot aplikātu ass virzienā) ir augstākas kārtas bezgalīgi mazs lielums, salīdzinot ar attālumu

$$\varrho=M_0M_1=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

(sal. 230. §).

432. §. Pilnā diferenciāļa izteiksmes $f'_x dx+f'_y dy+f'_z dz$ invariance

Izteiksme $f'_x\Delta x+f'_y\Delta y+f'_z\Delta z$ izsaka (430. §) funkcijas $u=f(x, y, z)$ pilno diferenciāli, ja x, y, z uzskata par argumentiem [1]. Ja turpretim mainīgie x, y, z paši ir viena, divu vai vairāku argumentu funkcijas, tad uzrakstītā izteiksme vispārīgi neizsaka diferenciāli. Turpretim izteiksme

$$f'_x dx+f'_y dy+f'_z dz$$

v i e n m ē r [1] izsaka funkcijas $f(x, y, z)$ pilno diferenciāli (sal. 234. §).

1. p i e m ē r s. Apskatīsim argumentu x, y funkciju $u=xy$. Dabūjam

$$du=u'_x dx+u'_y dy=y\,dx+x\,dy. \qquad (1)$$

Šī formula ir pareiza arī tai gadījumā, kad x, y ir argumentu t, s funkcijas, kas uzdotas ar formulām

$$x=t^2+s^2, \quad y=t^2-s^2. \qquad (2)$$

[1] Pieņemts, ka pilnais diferenciālis eksistē. Par funkcijām, kam ir parciālie atvasinājumi, bet nav pilna diferenciāļa, sk. 434. §.

Tiešām, šai gadījumā dabūjam

$$u=t^4-s^4, \tag{3}$$

$$du=u'_t dt+u'_s ds=4t^3 dt-4s^3 ds. \tag{4}$$

To pašu rezultātu dabūsim ar formulu (1), ja tanī x, y vietā ievietosim izteiksmes (2), bet dx, dy vietā — izteiksmes

$$dx=2t\,dt+2s\,ds, \quad dy=2t\,dt-2s\,ds, \tag{5}$$

kas atrastas ar formulu (2) palīdzību. Ja (1) vietā ņemam formulu

$$du=y\Delta x+x\Delta y, \tag{6}$$

tad tā argumentiem t, s nebūs pareiza.

2. piemērs. Formula (1) pareiza arī tai gadījumā, kad x un y ir viena argumenta funkcijas.

3. piemērs. Formula $d\operatorname{arctg} x=\frac{dx}{1+x^2}$ paliek pareiza, ja ņem $x=rst$; dabūjam

$$d\operatorname{arctg} rst=\frac{d(rst)}{1+r^2s^2t^2}.$$

433. §. Diferencēšanas tehnika

Lai dabūtu parciālos atvasinājumus, bieži izdevīgi ir *iepriekš* atrast pilno diferenciāli. Pēdējo aprēķina ar tām pašām kārtulām, ar kurām aprēķina viena argumenta funkcijas diferenciāli (sal. 432. § un 430. § 2. piezīme).

1. piemērs. Atrast parciālos atvasinājumus funkcijai

$$u=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Atrisinājums. Aprēķinām ar 247. un 240. § kārtulām pilno diferenciāli. Dabūjam

$$du=\frac{d\frac{y}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}. \tag{1}$$

Koeficienti pie dx, dy ir parciālie atvasinājumi $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$. Tāpēc

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}. \tag{2}$$

Tieša atvasinājumu aprēķināšana prasītu vairāk darba un uzmanības.

2. piemērs. Atrast parciālos atvasinājumus funkcijai $u=ln\sqrt{x^2+y^2}$.

Atrisinājums.

$$d\ln\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}d\ln(x^2+y^2)=\frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}. \tag{4}$$

Dažreiz, diferencējot viena argumenta funkciju, izdevīgi lietot divu, trīs un vairāku argumentu funkciju pilno diferenciāli.

3. piemērs. Atrast diferenciāli funkcijai $u=x^x$.

Atrisinājums. Meklējam dy^z (y un z ir neatkarīgie mainīgie), kāpēc iepriekš atrodam parciālos atvasinājumus. Pēc tam liekam $y=x$, $z=x$; dabūsim

$$dy^z=\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=zy^{z-1}dy+y^z\ln y\,dz, \tag{5}$$

$$dx^x=xx^{x-1}dx+x^x\ln x\,dx=x^x(1+\ln x)dx. \tag{6}$$

Ar zināmu iemaņu var ierobežoties tikai ar formulas (6) pierakstu, pārējo izdara prātā.

434. §. Diferencējamas funkcijas

Funkciju $u=f(x,y,z)$, kurai punktā M_0 ir pilnais diferenciālis, sauc par *diferencējamu* šai punktā.

Diferencējamai funkcijai vienmēr ir galīgi parciālie atvasinājumi $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ un parciālie diferenciāļi

$$d_x u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x, \quad d_y u=\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y, \quad d_z u=\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z;$$

pēdējo summa dod pilno diferenciāli.

Bet parciālo diferenciāļu (vai galīgu parciālo atvasinājumu) eksistence nenodrošina pilnā diferenciāļa eksistenci.

Piemērs. Apskatīsim funkciju $f(x, y)$, kas definēta punktā $M_0(0; 0)$ ar formulu

$$f(0; 0) = 4, \tag{1}$$

bet pārējos punktos — ar formulu

$$f(x, y) = 4 + 2x + y + \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}. \tag{2}$$

Šī funkcija ir nepārtraukta punktā $M_0(0; 0)$, un tai šeit ir parciālie atvasinājumi

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - 4}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - 4}{\Delta y} = 1.$$

Bet izteiksme $f'_x(0, 0)\Delta x + f'_y(0, 0)\Delta y = 2\Delta x + \Delta y$ nav pilnais diferenciālis. Tiešām, pilnajam pieaugumam ir izskats

$$\Delta f(0, 0) = f(\Delta x, \Delta y) - 4 = (2\Delta x + \Delta y) + \frac{\Delta x^2 \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Pirmais loceklis nav pilnais diferenciālis, jo otrais loceklis $\varepsilon = \frac{\Delta x^2 \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ nav augstākas kārtas bezgalīgi mazs lielums, salīdzinot ar

$$\varrho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2},$$

t. i., attiecība $\varepsilon : \varrho$ netiecas uz nulli, kad $M(\Delta x, \Delta y) \to M_0$. Tā, ja M tiecas uz M_0 pa staru $y = 3t$, $x = 4t$, tad $\varepsilon : \varrho$ vērtība ir $\frac{36}{125}$.

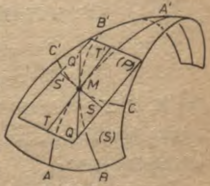
Cits nediferencējamas funkcijas piemērs apskatīts 442. paragrāfā (2. piemērs).

1. piezīme. Ja visi parciālie atvasinājumi ir nepārtraukti apskatāmajā punktā, tad funkcija ir diferencējama šai punktā. Iepriekšējā piemērā abi parciālie atvasinājumi bija pārtraukti punktā $M_0(0; 0)$.

2. piezīme. Elementārās funkcijas parasti ir diferencējamas. Diferencējamība var izzust tikai atsevišķos punktos vai uz atsevišķām līnijām.

435. §. Virsmas pieskaru plakne un normāle

1. definīcija. Caur virsmas S punktu M (434. zīm.) novilksim uz virsmas līnijas AA', BB', CC', ... , kurām punktā M ir pieskares TT', QQ', SS', ... Plakni P, kurā atrodas visas iespējamās pieskares, sauc par virsmas S *pieskaru* jeb *tangenciālplakni* punktā M (pieskaršanās punkts).



434. zīm.

1. piemērs. Pieņemsim, ka taisne MT ir pieskare kādai sfēriskai līnijai. Tad MT ir perpendikulāra pret rādiusu, t. i., atrodas plaknē P, kas iet caur punktu M perpendikulāri rādiusam. Tātad P ir sfēras pieskaru plakne.

2. piemērs. Koniskai virsmai nav pieskaru plaknes virsotnē K. Tiešām, ja caur K novelk visvisādas līnijas, tad to pieskares punktā K neatradīsies vienā plaknē.

Piezīme. Virsmai $z=f(x, y)$ nav pieskaru plaknes punktā M tajā un tikai tajā gadījumā, kad funkcija $f(x, y)$ nav diferencējama apskatāmajā punktā. Fizikāli realizējamām virsmām pieskaru plakne var iztrūkt tikai atsevišķos punktos *(koniskie punkti)* vai uz atsevišķām līnijām *(šķautnes)* (sal. 434. § 2. piezīmi).

3. piemērs. Funkcija $f(x, y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}+2x+y+4$, kas papildināta ar nosacījumu $f(0, 0)=4$, nav diferencējama punktā $x=0$, $y=0$ (434. § piemērs). Ievērojot to, virsmai

$$z=\frac{x^2y}{x^2+y^2}+2x+y+4 \qquad (1)$$

nav pieskaru plaknes punktā $A(0; 0; 4)$[1].

---

[1] Šī virsma ir konuss (ne apaļš) ar virsotni A. Tiešām, jebkura taisne

$$y=ax, \quad z=\left(\frac{a}{1+a^2}+a+2\right)x+4 \qquad (2)$$

(a — pastāvīgs skaitlis) iet caur A un atrodas uz virsmas (1), par ko varam pārliecināties, ievietojot izteiksmes (2) vienādojumā (1). Taišņu (2) kopa veido konisko virsmu.

2. definīcija. Par virsmas S *normāli* punktā M sauc caur punktu M novilkto perpendikulu pret pieskaru plakni.

4. piemērs. Sfēriskas virsmas normāle visos tās punktos iet caur sfēras centru.

436. §. Pieskaru plaknes vienādojums

1. Pieskaru plakni virsmai $z=f(x,y)$ izsaka vienādojums

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y), \qquad (1)$$

kur X, Y, Z ir tekošās koordinātes, x, y, z — pieskaršanās punkta koordinātes, p, q — parciālo atvasinājumu $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ atbilstošās vērtības.

Paskaidrojums. Plakne (1) iet caur taisni

$$Z-z=p(X-x), \quad Y-y=0, \qquad (A)$$

par ko var pārliecināties, ievietojot (A) vienādojumā (1). Taisne (A) ir pieskare šķēlumam, kas novilkts caur punktu $(x;\, y;\, z)$ paralēli XOZ plaknei (426. §). Tāpat pārliecināmies, ka plakne (1) iet caur pieskari, kas novilkta ZOY plaknei paralēlam šķēlumam. Tātad (435. §) plakne (1) sakrīt ar pieskaru plakni (ja tā eksistē; sal. 435. § piezīmi).

1. piemērs. Atrast pieskaru plaknes vienādojumu hiperboliskajam paraboloīdam $z=\frac{x^2-y^2}{2a}$ punktā $\left(2a;\ a;\ \frac{3}{2}a\right)$.

Atrisinājums. Dabūjam $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{a}=2$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{a}=-1$. Meklētās pieskaru plaknes vienādojums ir

$$Z-\frac{3}{2}a=2(X-2a)-(Y-a)$$

jeb

$$Z=2X-Y-\frac{3}{2}a.$$

2. Ja virsmu izsaka vienādojums $F(x,y,z)=0$, tad pieskaru plakni izteiks vienādojums

$$F'_x(X-x)+F'_y(Y-y)+F'_z(Z-z)=0. \qquad (2)$$

Vienādojums (1) ir vienādojuma (2) atsevišķs gadījums.

2. piemērs. Atrast pieskaru plaknes vienādojumu elipsoīdam

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \tag{3}$$

punktā $M(x; y; z)$.

Atrisinājums. Dabūjam $F'_x=\frac{2x}{a^2}$, $F'_y=\frac{2y}{b^2}$, $F'_z=\frac{2z}{c^2}$. Meklētais vienādojums ir

$$\frac{2x}{a^2}(X-x)+\frac{2y}{b^2}(Y-y)+\frac{2z}{c^2}(Z-z)=0 \tag{4}$$

jeb, saīsinot ar 2 un ievērojot elipsoīda vienādojumu,

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}-1=0.$$

Piezīme. Pieskaru plaknes vienādojumu visvienkāršāk dabū no dotās virsmas vienādojuma šādā veidā: doto vienādojumu diferencējam un dx, dy, dz vietā rakstām $X-x$, $Y-y$, $Z-z$. Tā, diferencējot vienādojumu (3), dabūjam

$$\frac{2x\,dx}{a^2}+\frac{2y\,dy}{b^2}+\frac{2z\,dz}{c^2}=0.$$

Aizstājot diferenciāļus dx, dy, dz ar starpībām $X-x$, $Y-y$, $Z-z$, dabūjam vienādojumu (4).

437. §. Normāles vienādojums

Virsmas $F(x, y, z)$ normāli punktā $M(x; y; z)$ izsaka vienādojumi

$$\frac{X-x}{F'_x}=\frac{Y-y}{F'_y}=\frac{Z-z}{F'_z} \tag{1}$$

(sal. 436. un 156. §). Atsevišķā gadījumā, ja virsma uzdota ar vienādojumu $z=f(x, y)$, tad normāles vienādojumi, paturot 436. § apzīmējumus, ir

$$\frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{q}=\frac{Z-z}{-1}. \tag{2}$$

Piemērs. Normāles vienādojumi elipsoīdam $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+$ $+\frac{z^2}{c^2}=1$ (sal. 436. § 2. piemēru) ir

$$\frac{a^2(X-x)}{x}=\frac{b^2(Y-y)}{y}=\frac{c^2(Z-z)}{z}.$$

438. §. Saliktas funkcijas diferencēšana

Lielumu w sauc par *saliktu funkciju,* ja to uzskata par (palīga) mainīgo x, y, ... funkciju, kuri savukārt ir atkarīgi no viena vai vairākiem argumentiem u, v,... (sal. 236. §).

Pilnā diferenciāļa atrašana saliktai funkcijai neprasa sevišķas kārtulas (diferenciāļa izteiksmes invariances dēļ; 432. §). Pēc tam kad ir atrasts pilnais diferenciālis, parciālo atvasinājumu izteiksmes iegūst automātiski (433. §). Šo izteiksmju vispārīgais veids dots 440. paragrāfā.

Piemērs. Atrast pilno diferenciāli un parciālos atvasinājumus funkcijai

$$w=e^{uv}\sin(u+v). \tag{1}$$

Ja w izsaka veidā $e^x \sin y$, kur $x=uv$ un $y=u+v$, tad w būs argumentu u, v salikta funkcija. Pilno diferenciāli atrod tā, it kā x un y būtu neatkarīgie mainīgie, t. i.,

$$dw=e^x \sin y\, dx+e^x \cos y\, dy=e^x(\sin y\, dx+\cos y\, dy).$$

Ievietojot šeit $x=uv$, $y=u+v$, atrodam

$$\begin{aligned} dw=e^{uv}[\sin(u+v)\,(v\,du+u\,dv)+ \\ +\cos(u+v)\,(du+dv)]. \end{aligned} \tag{2}$$

Tas ir dotās funkcijas pilnais diferenciālis; tās parciālie atvasinājumi ir koeficienti pie du, dv. Tātad

$$\frac{\partial w}{\partial u}=e^{uv}[v\sin(u+v)+\cos(u+v)], \tag{3}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v}=e^{uv}[u\sin(u+v)+\cos(u+v)]. \tag{4}$$

Piezīme. Praktiski nelieto sevišķus apzīmējumus palīgmainīgajiem. 1. piemērā rīkojas tā:

$$dw=d\,[e^{uv}\sin(u+v)]=$$
$$=\sin(u+v)\,de^{uv}+e^{uv}d\sin(u+v)=$$
$$=\sin(u+v)\,e^{uv}d(uv)+e^{uv}\cos(u+v)\,d(u+v).$$

Ja atklāj izteiksmes $d(uv)$, $d(u+v)$, iegūst vienādību (2).

439. §. Taisnleņķa koordinātu aizstāšana ar polārajām koordinātēm

Pieņemsim, ka $z=f(x, y)$ ir taisnleņķa koordinātu x, y funkcija, un bez tam pieņemsim, ka zināmas parciālo atvasinājumu f'_x, f'_y vērtības punktā M. Tad parciālos atvasinājumus $\frac{\partial z}{\partial r}$, $\frac{\partial z}{\partial \varphi}$ pēc polārajām koordinātēm atrod ar formulām

$$\frac{\partial z}{\partial r}=f'_x\cos\varphi+f'_y\sin\varphi,\quad \frac{\partial z}{\partial \varphi}=r(f'_y\cos\varphi-f'_x\sin\varphi). \qquad (1)$$

Paskaidrojums. Tā kā $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, tad z ir salikta r, φ funkcija. Ar 438. § paņēmienu atrodam

$$dz=f'_x\,dx+f'_y\,dy=f'_x\,d(r\cos\varphi)+f'_y\,d(r\sin\varphi)=$$
$$=f'_x(\cos\varphi\,dr-r\sin\varphi\,d\varphi)+f'_y(\sin\varphi\,dr+r\cos\varphi\,d\varphi).$$

Atvasinājumi $\frac{\partial z}{\partial r}$, $\frac{\partial z}{\partial \varphi}$ ir koeficienti pie dr, $d\varphi$.

Piemērs. Dotas vērtības

$$f'_x(3, 4)=7,\quad f'_y(3, 4)=2;$$

atrast $\frac{\partial f}{\partial r}$, $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$ vērtības punktā (3; 4).

Atrisinājums. Dotajā punktā dabūjam $r=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $\cos\varphi=\frac{3}{5}$, $\sin\varphi=\frac{4}{5}$. Ar formulām (1) atrodam

$$\frac{\partial z}{\partial r}=7\cdot\frac{3}{5}+2\cdot\frac{4}{5}=5{,}8;\quad \frac{\partial z}{\partial \varphi}=5\left(2\cdot\frac{3}{5}-7\cdot\frac{4}{5}\right)=-22.$$

440. §. Saliktu funkciju atvasināšanas formulas

Pieņemsim, ka w ir argumentu $u, v, \ldots, t$ (jebkurā skaitā) salikta funkcija (438. §), kas uzdota ar palīgmainīgajiem $x, y, \ldots, z$ (jebkurā skaitā). Tad

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial u}&=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\ldots+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u},\\
\frac{\partial w}{\partial v}&=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\ldots+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v},\\
&\ldots\\
\frac{\partial w}{\partial t}&=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\ldots+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t},
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

t. i., parciālais atvasinājums pēc kāda argumenta ir vienāds ar parciālo atvasinājumu pēc visiem palīgmainīgajiem un šo palīgmainīgo atvasinājumu pēc atbilstošā argumenta reizinājumu summu.

P a s k a i d r o j u m s. Formulas (1) rodas no pilnā diferenciāļa izteiksmes

$$dw=\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy+\ldots+\frac{\partial w}{\partial z}dz, \tag{2}$$

ja šeit ievieto

$$dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv+\ldots+\frac{\partial x}{\partial t}dt, \tag{3}$$

un analogas diferenciāļu $dy, \ldots, dz$ izteiksmes (sal. 438. §).

441. §. Pilnais atvasinājums

Pieņemsim, ka w var uzskatīt par mainīgo $x, y, \ldots, z$ funkciju, t. i.,

$$w=f(x, y, \ldots, z), \tag{1}$$

pie kam x ir arguments, bet pārējie mainīgie ir atkarīgi no

x^1. Funkcijas w atvasinājumu pēc argumenta x, *kas* sastādīts, ievērojot šo atkarību, sauc par pilno atvasinājumu un apzīmē ar $\frac{dw}{dx}$ atšķirībā no parciālā atvasinājuma apzīmējuma $\frac{\partial w}{\partial x}$ (425. §). Pilno atvasinājumu izsaka formula

$$\frac{dw}{dx}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\ldots+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dx}. \tag{2}$$

To dabū no pilnā diferenciāļa dw izteiksmes (izdalot ar dx).

1. piemērs. Atrast pilno atvasinājumu funkcijai $w=x^3e^{y^2}$, kur y ir kāda x funkcija.

Atrisinājums.

$$dw=e^{y^2}d(x^3)+x^3de^{y^2}=3e^{y^2}x^2dx+x^3e^{y^2}d(y^2)=$$
$$=3e^{y^2}x^2dx+2x^3e^{y^2}y\,dy,$$

$$\frac{dw}{dx}=3e^{y^2}x^2+2x^3ye^{y^2}\frac{dy}{dx}.$$

2. piemērs. Atrast pilno atvasinājumu funkcijai $w=xy'$.

Atrisinājums. Mainīgā y loma šeit piekrīt atvasinājumam $y'=\frac{dy}{dx}$. Ar formulu (2) atrodam

$$\frac{dw}{dx}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y'}\frac{dy'}{dx}=y'+x\frac{d^2y}{dx^2}.$$

To pašu izteiksmi dabūsim, izdalot ar dx vienādību

$$dw=y'dx+x\,dy'=y'\,dx+xy''dx.$$

442. §. Apslēptas vairākargumentu funkcijas diferencēšana

1. kārtula. Vienādojums

$$F(x,y,z)=0 \tag{1}$$

ar zināmiem nosacījumiem[2] uzdod mainīgo z kā argumentu

[1] Tas ir viena argumenta u saliktas funkcijas (438. §) atsevišķs veids (mainīgie $y, \ldots, z$ ir atkarīgi no u patvaļīgā veidā, bet mainīgo x saista ar u vienādība $x=u$).

[2] Sk. tālāk 1. piezīmi.

x, y apslēptu funkciju. Lai atrastu šīs funkcijas pilno diferenciāli, jādiferencē vienādojums (1), t. i., jāpielīdzina nullei tās kreisās puses pilnais diferenciālis. Dabūtā vienādība jāatrisina attiecībā pret dz, un mēs būsim atraduši funkcijas z pilno diferenciāli. Koeficienti pie dx, dy dos atbilstošos parciālos atvasinājumus.

Tādā pašā veidā rīkojamies, ja argumentu skaits ir cits.

1. piemērs. Atrast pilno diferenciāli un parciālos atvasinājumus argumentu x, y apslēptai funkcijai z, kura uzdota ar vienādojumu

$$x^2+y^2+z^2=9, \tag{2}$$

punktā $x=1$, $y=-2$, $z=-2$.

Atrisinājums. Diferencējot atrodam

$$2x\,dx+2y\,dy+2z\,dz=0.$$

Atrisinot šo vienādību attiecībā pret dz, dabūjam funkcijas z pilno diferenciāli (patvaļīgā punktā)

$$dz=-\frac{x}{z}\,dx-\frac{y}{z}dy. \tag{3}$$

Dotajā punktā (1; −2; −2) dabūjam

$$dz=\frac{1}{2}dx-dy. \tag{4}$$

Koeficienti pie dx, dy dod parciālo atvasinājumu vērtības dotajā punktā

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-1. \tag{5}$$

Pārbaude. Atrisinot vienādojumu (2) attiecībā pret z, dabūsim

$$z=-\sqrt{9-x^2-y^2} \tag{6}$$

(pirms radikāļa ņemam mīnusa zīmi, jo, ja $x=1$, $y=-2$, tad jābūt $z=-2$). No (6) atrodam

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}.$$

Ievietojot šeit vērtības $x=1$, $y=-2$, atkal dabūjam (5).

1. piezīme. 1. kārtulā pieņemts, ka funkcija $F(x, y, z)$ ir diferencējama kādā punktā $M_0(x_0; y_0; z_0)$, kas apmierina vienādojumu (1), kā arī pietiekami tuvā tā apkārtnē (t. i., kādas lodes ar centru punktā M_0 visos punktos). Bez tam pieņemts, ka ar diferencēšanu iegūtais vienādojums ir vienvērtīgi atrisināms attiecībā pret dz (t. i., ka koeficients pie dz atšķiras no nulles). Ja šie nosacījumi ir izpildīti, tad var apgalvot:

1) ka vienādojums (1) tiešām uzdod z kā argumentu x, y apslēptu funkciju; tā ir definēta kādā riņķī ar centru $(x_0; y_0)$ un pieņem vērtību z_0, ja $x=x_0$, $y=y_0$;

2) ka funkcija z ir diferencējama minētajā riņķī un, starp citu, punktā $(x_0; y_0)$.

1. piemērā iepriekš minētie nosacījumi bija izpildīti. Nākošā piemērā apskatīsim vienu no daždažādiem gadījumiem, kur tie nav izpildīti.

2. piemērs. Vienādojums

$$x^3+8y^3-z^3=0 \tag{7}$$

uzdod z kā argumentu x, y apslēptu funkciju. Atklātā tās izteiksme ir šāda:

$$z=\sqrt[3]{x^3+8y^3}. \tag{8}$$

Mēģinot pielietot 1. kārtulu, lai atrastu funkcijas z pilno diferenciāli punktā $x=0$, $y=0$, $z=0$, mēs no (7) dabūtu vienādību

$$3x^2\,dx+24y^2\,dy-3z^2\,dz=0. \tag{9}$$

Punktā $x=0$, $y=0$, $z=0$ šī vienādība nav vienvērtīgi atrisināma attiecībā pret dz, jo tā pārvēršas identitātē $0=0$. Tādējādi 1. kārtula nedod iespēju atrast ne funkcijas z pilno diferenciāli, ne parciālos atvasinājumus apskatāmajā punktā.

Papildu pētījumi rāda, ka šai punktā funkcija z nav diferencējama (434. §), bet tai ir parciālie atvasinājumi

$$\frac{\partial z}{\partial x}=1, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=2\,[1].$$

2. kārtula. Divu vienādojumu sistēma

$$F_1(x, y, z, u, v)=0, \quad F_2(x, y, z, u, v)=0 \tag{10}$$

ar zināmiem nosacījumiem[2] uzdod divus mainīgos u, v kā argumentu x, y, z apslēptas funkcijas. Lai atrastu šo funkciju pilnos diferenciāļus, vienādojumi (10) jādiferencē. Iegūtā vienādību sistēma jāatrisina attiecībā pret du, dv, un mēs būsim atraduši funkciju u, v pilnos diferenciāļus. Koeficienti pie dx, dy, dz dos atbilstošos parciālos atvasinājumus.

Tādā pašā veidā rīkojamies arī tad, ja sistēmā ir vairāk par diviem vienādojumiem (argumentu skaits patvaļīgs).

3. piemērs. Atrast pilnos diferenciāļus un parciālos atvasinājumus apslēptām funkcijām u, v, kuras uzdotas ar vienādojumu sistēmu

$$x+y+u+v=a, \quad x^2+y^2+u^2+v^2=b^2. \tag{11}$$

---

[1] Tiešām, ņemot $y=0$, dabūjam $z=\sqrt[3]{x^3}=x$, tā ka $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x=0}=1$; ņemot $x=0$, dabūjam $z=\sqrt[3]{8y^3}=2y$, tā ka $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}=2$. Bet izteiksme $\Delta x+2\Delta y$ nav pilnais diferenciālis, jo starpība

$$\Delta z-(\Delta x+2\Delta y)=\varepsilon$$

nav augstākas kārtas bezgalīgi mazs lielums, salīdzinot ar $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$. Tā, ja punkts $(x;\, y)$ tiecas uz punktu $(0;\, 0)$, teiksim, pa taisni $y=x$, tad attiecībai $\frac{\varepsilon}{\rho}$ ir vērtība

$$\frac{\varepsilon}{\rho}=\frac{\sqrt[3]{\Delta x^3+8\Delta y^3}-(\Delta x+2\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\pm\frac{\sqrt[3]{9}-3}{\sqrt{2}},$$

t. i., uz nulli netiecas.

[2] Sk. tālāk 2. piezīmi.

Atrisinājums. Diferencējot atrodam

$$dx+dy+du+dv=0, \qquad (12)$$
$$x\,dx+y\,dy+u\,du+v\,dv=0.$$

Atrisinot sistēmu (12) attiecībā pret du, dv, dabūjam funkciju u, v pilnos diferenciāļus

$$du=\frac{(v-x)dx+(v-y)dy}{u-v}, \quad dv=\frac{(u-x)dx+(u-y)dy}{v-u}. \qquad (13)$$

Koeficienti pie dx, dy dod parciālos atvasinājumus

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{v-x}{u-v}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{v-y}{u-v}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{u-x}{v-u}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{u-y}{v-u}. \qquad (14)$$

2. piezīme. 2. kārtulā pieņemts, ka funkcijas $F_1(x, y, z, u, v)=0$, $F_2(x, y, z, u, v)=0$ ir diferencējamas kādā punktā $M_0(x_0; y_0; z_0; u_0; v_0)$ un pietiekami tuvā šī punkta apkārtnē. Bez tam pieņemts, ka ar diferencēšanu iegūtā vienādojumu sistēma ir viennozīmīgi atrisināma attiecībā pret du, dv (t. i., ka no koeficientiem pie du, dv sastādītais determinants atšķiras no nulles). Ja šie nosacījumi ir izpildīti, tad var apgalvot:

1) ka sistēma (10) tiešām uzdod u, v kā argumentu x, y, z apslēptu funkciju; šīs funkcijas ir definētas kādā lodē ar centru $(x_0; y_0; z_0)$ un pieņem vērtības u_0, v_0, ja $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$;

2) ka funkcijas u, v ir diferencējamas minētajā lodē un, starp citu, punktā $(x_0; y_0; z_0)$.

443. §. Augstāku kārtu parciālie atvasinājumi

1. definīcija. Par funkcijas $z=f(x, y)$ *otrās kārtas parciālajiem atvasinājumiem* (jeb par *otrajiem parciālajiem atvasinājumiem*) sauc funkciju

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x, y) \qquad (1)$$

parciālos atvasinājumus.

Otro parciālo atvasinājumu kopējais skaits ir četri. Funkcijas $\frac{\partial z}{\partial x}$ parciālo atvasinājumu pēc argumenta x apzīmē ar $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ jeb $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$ jeb $f''_{xx}(x, y)$. Analogi apzīmē pārējos otros atvasinājumus, tā ka dabūjam

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}=f''_{xx}(x, y), \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\,\partial y}=f''_{xy}(x, y), \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y\,\partial x}=f''_{yx}(x, y), \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}=f''_{yy}(x, y). \tag{5}$$

Otros atvasinājumus (2) un (5) sauc par *tīriem*, otros atvasinājumus (3) un (4) — par *jauktiem*.

1. teorēma. Otrās kārtas jauktie atvasinājumi (tie atšķiras viens no otra ar diferencēšanas kārtību) ir savstarpēji vienādi (ja vien tie ir nepārtraukti apskatāmajā punktā).

1. piemērs. Atradīsim otros parciālos atvasinājumus funkcijai $z=x^3y^2+2x^2y-6$. Dabūjam

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2+4xy, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=2x^3y+2x^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6xy^2+4y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=6x^2y+4x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=6x^2y+4x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x^3.$$

Jauktie atvasinājumi $\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ un $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ ir savstarpēji vienādi.

1. piezīme. Četri otrās kārtas parciālie atvasinājumi saskaņā ar 1. teorēmu reducējas uz trim: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

2. definīcija. Otrās kārtas parciālo atvasinājumu parciālos atvasinājumus sauc par trešās kārtas parciālajiem atvasinājumiem (jeb par trešajiem parciālajiem atvasinājumiem) un apzīmē ar simboliem f'''_{xxx}, f'''_{yyy} (tīrie atvasinājumi), f'''_{xxy}, f'''_{xyx}, f'''_{xyy} utt. (jauktie atvasinājumi) jeb

$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y\, \partial x}$ utt.

2. teorēma. Trešās kārtas jauktie atvasinājumi, kas atšķiras viens no otra tikai ar diferencēšanas kārtību, ir savstarpēji vienādi (ja vien tie ir nepārtraukti apskatāmajā punktā).

Piemēram,

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}=\frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y\, \partial x}.$$

2. piemērs. Funkcijas $z=x^3y^2+2x^2y-6$ (sal. 1. piemēru) trešās kārtas atvasinājumi ir

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=6y^2, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=0,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right)=12xy+4,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=6x^2.$$

2. piezīme. Astoņi trešās kārtas parciālie atvasinājumi saskaņā ar 2. teorēmu reducējas uz četriem, proti,

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\, \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

3. piezīme. Analogi definē un apzīmē funkcijas $f(x, y)$, kā arī trīs un vairākargumentu funkciju ceturtās un augstākas kārtas parciālos atvasinājumus. Visos gadījumos ir spēkā 1. un 2. teorēmai analogas teorēmas.

444. §. Augstāku kārtu pilnie diferenciāļi

Izveidojam funkcijas $z=f(x, y)$ (427. §) pilno pieaugumu Δz; pēc tam, *saglabājot tās pašas* $\Delta x, \Delta y$ vērtības, izveidojam lieluma Δz (uzskatot to par x, y funkciju) pilno pieaugumu $\Delta(\Delta z)$. Dabūsim funkcijas z otro diferenci $\Delta^2 z$.

Pieņemsim, ka $\Delta^2 z$ sadalās divu saskaitāmo summā

$$\Delta^2 z = (r\,\Delta x^2 + 2s\,\Delta x\,\Delta y + t\,\Delta y^2) + \alpha, \qquad (1)$$

kur r, s, t nav atkarīgi ne no Δx, ne no Δy, bet α ir augstākas kārtas bezgalīgi mazs lielums, salīdzinot ar $\varrho^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$. Tad pirmo saskaitāmo sauc par funkcijas z *otro* (pilno) *diferenciāli* un apzīmē ar simbolu $d^2 z$.

1. piemērs. Apskatīsim funkciju $z = x^3 y^2$. Atradīsim

$$\Delta z = (x + \Delta x)^3 (y + \Delta y)^2 - x^3 y^2,$$

$$\Delta^2 z = (x + 2\Delta x)^3 (y + 2\Delta y)^2 - 2(x + \Delta x)^3 (y + \Delta y)^2 + \\ + x^3 y^2 = (6xy^2\,\Delta x^2 + 12x^2 y\,\Delta x\,\Delta y + 2x^3\,\Delta y^2) + \alpha, \qquad (2)$$

kur α ir augstākas kārtas bezgalīgi mazs lielums, salīdzinot ar ϱ^2. Summas (2) pirmais saskaitāmais ir $r\Delta x^2 + 2s\,\Delta x\,\Delta y + t\Delta y^2$, pie kam lielumi $r = 6xy^2$, $s = 6x^2 y$, $t = 2x^3$ nav atkarīgi ne no Δx, ne no Δy. Tātad pirmais saskaitāmais ir funkcijas $z = x^3 y^2$ otrais diferenciālis, t. i.,

$$d^2 z = 6xy^2\,\Delta x^2 + 12x^2 y\,\Delta x\,\Delta y + 2x^3\,\Delta y^2. \qquad (3)$$

1. teorēma. Lielumi r, s, t formulā (1) ir vienādi ar atbilstošajiem funkcijas z otrajiem parciālajiem atvasinājumiem, t. i.,

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

2. piemērs. Iepriekšējā piemērā mēs atradām

$$r = 6xy^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = 6x^2 y = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \quad t = 2x^3 = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Otrā diferenciāļa izteiksme. Saskaņā ar 1. teorēmu dabūjam

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\Delta x\,\Delta y + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Delta y^2. \qquad (4)$$

Piezīme. Tā kā

$$\Delta x = dx, \quad \Delta y = dy$$

(430. § 1. piezīme), tad (4) vietā var rakstīt

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2. \qquad (5)$$

Pretstatā atbilstošai pirmā diferenciāļa (sal. 432. §) izteiksmei formula (5) vispārīgi nav pareiza, ja x un y nav argumenti (sal. 258. § zemteksta piezīmi).

2. teorēma. Ja uzskata, ka diferenciāļi dx, dy nav atkarīgi ne no x, ne no y, tad otrais diferenciālis d^2z ir vienāds ar pirmā diferenciāļa dz diferenciāli (sal. 258. § 2. teorēmu), t. i.,

$$d[df(x, y)]=d^2f(x, y). \tag{6}$$

3. piemērs. Pieņemsim, ka $z=x^3y^2$. Dabūjam

$$dz=3x^2y^2\,dx+2x^3y\,dy.$$

Diferencējam vēlreiz, uzskatot dx, dy par pastāvīgiem. Dabūsim

$$d(dz)=d(3x^2y^2)\,dx+d(2x^3y)\,dy=$$
$$=6xy^2\,dx^2+12x^2y\,dx\,dy+2x^3\,dy^2.$$

Bet tas ir funkcijas x^3y^2 otrais pilnais diferenciālis (sk. 1. piemēru).

Trešās, ceturtās utt. kārtas pilnos diferenciāļus (d^3z, d^4z utt.) definē analogi un tos izsaka ar šādām formulām:

$$d^3z=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}dx^2dy+$$
$$+3\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}dx\,dy^2+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3, \tag{7}$$

$$d^4z=\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}dx^4+4\frac{\partial^4 z}{\partial x^3\partial y}dx^3dy+6\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2}dx^2dy^2+$$
$$+4\frac{\partial^4 z}{\partial x\,\partial y^3}dx\,dy^3+\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}dy^4. \tag{8}$$

Skaitliskie reizinātāji ir vienādi ar atbilstošajiem binomiālajiem koeficientiem.

Formulas (7), (8) utt. vispārīgi nav pareizas, ja x un y nav argumenti.

Visu iepriekš teikto var attiecināt uz trīs un vairāku mainīgo funkcijām.

445. §. Atkārtotas diferencēšanas tehnika

Lai atrastu augstākas kārtas parciālos atvasinājumus, izdevīgi vispirms atrast atbilstošās kārtas pilno diferenciāli.

Piemērs. Atrast parciālos atvasinājumus funkcijai $z=x^3y^2$ līdz trešai kārtai ieskaitot.

A t r i s i n ā j u m s. Atrodam vispirms pirmo diferenciāli

$$dz = 3x^2y^2dx + 2x^3y\,dy, \tag{1}$$

pēc tam otro diferenciāli, kāpēc diferencējam (1), uzskatot dx, dy par pastāvīgiem; dabūsim

$$d^2z = 6xy^2\,dx^2 + 12x^2y\,dx\,dy + 2x^3\,dy^2 \tag{2}$$

(sal. 444. § 3. piemēru). Tālāk diferencējam (2), atkal uzskatot dx, dy par pastāvīgiem; dabūsim

$$d^3z = (6y^2\,dx^3 + 12xy\,dx^2\,dy) + \\ + (24xy\,dx^2\,dy + 12x^2\,dx\,dy^2) + 6x^2\,dx\,dy^2$$

jeb

$$d^3z = 6y^2\,dx^3 + 3\cdot 12xy\,dx^2\,dy + 3\cdot 6x^2\,dx\,dy^2. \tag{3}$$

No izteiksmju (1), (2), (3) koeficientiem, ievērojot 444. § formulas (5) un (7), atrodam

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 6x^2y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^3; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 6y^2,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} = 12xy, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} = 6x^2, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0.$$

446. §. Diferenciāļu simboliska apzīmēšana

Kārtai augot, diferenciāļu izteiksmes kļūst komplicētākas. Vienkāršojuma dēļ ievieš šādu funkcijas $z = f(x, y)$ k-tās kārtas diferenciāļa *simbolisku apzīmējumu*:

$$d^kz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^k z. \tag{1}$$

Tas jāsaprot tā: vispirms «kāpinām k-tajā pakāpē» binomu $\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy$ tā, it kā simboli ∂x, ∂y, ∂ apzīmētu patstāvīgus algebriskus lielumus. Pēc tam «atveram iekavas», pierakstot katram simbolam ∂^k reizinātāju z. Reizē ar to atklājam visu simbolu patieso jēgu.

Piemērs. Pierakstu $d^3z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial^3}{\partial y}dy\right)^3 z$ atšifrē tā: «kāpinot kubā», dabūjam

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3}{\partial x^2\,\partial y}dx^2\,dy+3\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y^2}dx\,dy^2+\frac{\partial^3}{\partial y^3}dy^3\right)z,$$

«atverot iekavas», atrodam

$$d^3z=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}dx^2\,dy+3\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}dx\,dy^2+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3$$

(sal. 444. § (7)).

Piezīme. Trīs, četru un vairāku argumentu funkcijām simboliskie pieraksti ir tādi paši; piemēram, pieraksts

$$d^2u=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy+\frac{\partial}{\partial z}dz\right)^2 u$$

nozīmē, ka

$$d^2u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz^2+$$
$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}dx\,dy+2\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}dy\,dz+2\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}dz\,dx.$$

447. §. Teilora formula vairākargumentu funkcijām

Vienargumenta funkcijai Teilora formulu var uzrakstīt tā:

$$f(x+\Delta x)=f(x)+\frac{1}{1!}f'(x)\Delta x+\frac{1}{2!}f''(x)\Delta x^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x)\Delta x^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x+\Theta\Delta x)\Delta x^{n+1}, \qquad (1)$$

kur Θ ir kāds pozitīvs skaitlis, kas ir mazāks par vienu[1], t. i.,

$$0<\Theta<1. \qquad (2)$$

[1] Skaitlis ξ, kas ieiet 271. § formulā (1), atrodas starp x un $x+\Delta x$; tāpēc starpībai $\xi-x$ ir tā pati zīme, kas Δx, bet pēc absolūtās vērtības tā ir mazāka par Δx. Tātad dalījums $(\xi-x):\Delta x$ ir kāds pozitīvs skaitlis Θ, kas ir mazāks par vienu. No vienādības $(\xi-x):\Delta x=\Theta$ atrodam $\xi=x+\Theta\Delta x$.

Šeit izteiksmes $f'(x)\Delta x$, $f''(x)\Delta x^2$, ... ir pirmās, otrās utt. kārtas diferenciāļi.

Vairākargumentu funkcijai[1] Teilora formulu konstruē analogi, tikai ņem pilnos diferenciāļus. Tā divargumentu funkcijai, ja $n=2$, dabūjam

$$
\begin{aligned}
f(x+\Delta x, y+\Delta y) &= \\
&= f(x, y) + \frac{1}{1!}[f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y] + \\
&+ \frac{1}{2!}[f''_{xx}(x, y)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(x, y)\Delta x\,\Delta y + f''_{yy}(x, y)\Delta y^2] + \\
&+ \frac{1}{3!}[f'''_{xxx}(x+\Theta\,\Delta x, y+\Theta\,\Delta y)\Delta x^3 + \\
&+ 3f'''_{xxy}(x+\Theta\,\Delta x, y+\Theta\,\Delta y)\Delta x^2\Delta y + \\
&+ 3f'''_{xyy}(x+\Theta\,\Delta x, y+\Theta\,\Delta y)\Delta x\,\Delta y^2 + \\
&+ f'''_{yyy}(x+\Theta\,\Delta x, y+\Theta\,\Delta y)\Delta y^3],
\end{aligned} \tag{3}
$$

kur Θ apmierina nevienādību (2).

Izteiksmes kvadrātiekavās ir (444. §) pilnie diferenciāļi. Pēdējā loceklī parciālie atvasinājumi aprēķināti argumentu starpvērtībām[2].

Teilora formula ar jebkuru locekļu skaitu ir uzskatāma (pat divu argumentu gadījumā) tikai ar 446. § simboliskajiem apzīmējumiem. Tad tai ir izskats

$$
\begin{aligned}
\Delta f(x, y) &= \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right) f(x, y) + \\
&+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^2 f(x, y) + \ldots \\
&\ldots + \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^n f(x, y) + \\
&+ \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{n+1} f(x+\Theta\,\Delta x, y+\Theta\,\Delta y)
\end{aligned} \tag{4}
$$

[1] Nosacījums, kad formula pareiza, dots vēlāk piezīmē.

[2] Punkts $\overline{M}(x+\Theta\Delta x;\ y+\Theta\Delta y)$ atrodas uz nogriežņa, kas savieno punktus $M(x;\ y)$ un $M_1(x+\Delta x;\ y+\Delta y)$. Skaitlis Θ dod attiecību

$$\overline{MM} : MM_1.$$

jeb

$$\Delta f(x, y) = \frac{1}{1!} df(x, y) + \frac{1}{2!} d^2 f(x, y) + \ldots + \frac{1}{n!} d^n f(x, y) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x + \Theta\, \Delta x, y + \Theta\, \Delta y) \tag{5}$$

un analogi lielākam argumentu skaitam.

P i e z ī m e. Teilora formula ir pareiza, ja izpildīts nosacījums, ka funkcijai $f(x, y)$ ir $(n+1)$-ās kārtas pilnais diferenciālis visos punktos uz nogriežņa, kas savieno punktus $M(x; y)$ un $M_1(x+\Delta x; y+\Delta y)$.

P i e m ē r s. Pārbaudīsim formulu (3), piemēram, funkcijai

$$f(x, y) = xy^2,$$

ja $x = y = 1$, $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2$. Dabūsim

$$(x+\Delta x)(x+\Delta y)^2 = xy^2 + [y^2 \Delta x + 2xy\, \Delta y] +$$

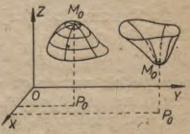
$$+ \frac{1}{2} [4(y + \Theta\, \Delta y) \Delta x\, \Delta y + 2(x + \Theta\, \Delta x) \Delta y^2].$$

Ievietojot dotās vērtības, dabūsim vienādojumu $0{,}004 = 0{,}012\, \Theta$, no kurienes $\Theta = \frac{1}{3}$, t. i., Θ tiešām atrodas starp nulli un vienu.

448. §. Vairākargumentu funkciju ekstrēmi (maksimumi un minimumi)

D e f i n ī c i j a. Funkcijai $f(x, y)$ *ir maksimums (minimums)* punktā $P_0(a, b)$, ja visos punktos, kas ir pietiekami tuvi punktam P_0, $f(x, y)$ vērtība ir mazāka (lielāka) par vērtību $f(a, b)$ (sal. 275. §).

Ģ e o m e t r i s k i: virs punkta P_0 (435. zīm.) virsmai $z = f(x, y)$ ir punkts M_0, kas atrodas augstāk (zemāk) par visiem blakus punktiem.

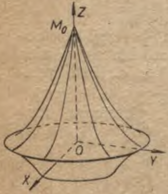


435. zīm.

N e p i e c i e š a m a i s e k s t r ē m a n o s a c ī j u m s. Ja funkcijai $f(x, y)$ ir ekstrēms punktā $P_0(a; b)$, tad šai punktā pilnais diferenciālis ir vai nu identiski vienāds ar nulli, vai arī neeksistē.

1. piezīme. Nosacījums $df(x, y)=0$ ir ekvivalents divu vienādojumu sistēmai

$$f'_x(x, y)=0, \quad f'_y(x, y)=0.$$



436. zīm.

Vienādība $f'_x(x, y)=0$, atsevišķi ņemta, ir nepieciešamais ekstrēma nosacījums, ja y ir nemainīgs (276. §). Ģeometriski tā nozīmē, ka XOZ plaknei paralēlam virsmas šķēlumam punktā M_0 ir OX asij paralēla pieskare (sal. 426. §). Analoga nozīme ir vienādībai $f'_y(x, y)=0$.

Ģeometriski: punktā M_0, kas atrodas augstāk (zemāk) par visiem blakus punktiem, virsmai $z=f(x, y)$ ir vai nu horizontāla pieskaru plakne (kā 435. zīmējumā), vai arī nemaz nav pieskaru plaknes (kā 436. zīmējumā).

2. piezīme. Ekstrēma definīcija un nepieciešamais nosacījums paliek tāds pats funkcijām ar citu argumentu skaitu.

449. §. Ekstrēmu atrašanas kārtula

Pieņemsim, ka funkcija $f(x, y)$ ir diferencējama kādā tās definīcijas apgabalā. Lai atrastu visus tās ekstrēmus šai apgabalā, tad:

1) Jāatrisina vienādojumu sistēma

$$f'_x(x, y)=0, \quad f'_y(x, y)=0. \tag{1}$$

Atrisinājumi dos *kritiskos punktus.*

2) Katram kritiskajam punktam $P_0(a; b)$ jāizpētī, vai starpības

$$f(x, y)-f(a, b)$$

zīme paliek nemainīga visiem punktiem $(x; y)$, kas ir pietiekami tuvi punktam P_0. Ja starpība (2) saglabā pozitīvu zīmi, tad punktā P_0 ir minimums, ja negatīvu, — tad maksimums. Ja starpība (2) zīmi nesaglabā, tad punktā P_0 ekstrēma nav.

Analogi atrodam ekstrēmus funkcijām, kurām argumentu skaits ir lielāks.

P i e z ī m e. Divu argumentu gadījumā pētījumus dažkārt atvieglo 450. § pietiekamā noteikuma pielietošana. Ja argumentu skaits ir lielāks, tad šis noteikums kļūst komplicētāks. Tāpēc tad praksē cenšas pielietot dotās funkcijas speciālas īpašības.

P i e m ē r s. Atrast ekstrēmus funkcijai

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 1.$$

A t r i s i n ā j u m s. Pielīdzinot nullei parciālos atvasinājumus $f'_x = 3x^2 - 3y$, $f'_y = 3y^2 - 3x$, dabūjam vienādojumu sistēmu

$$x^2 - y = 0, \quad y^2 - x = 0. \tag{3}$$

Tai ir divi atrisinājumi

$$x_1 = y_1 = 0, \quad x_2 = y_2 = 1. \tag{4}$$

Izpētām starpības (2) zīmi abiem kritiskajiem punktiem $P_1(0; 0)$, $P_2(1; 1)$.

2a) Punktam $P_1(0; 0)$ dabūjam

$$f(x, y) - f(0, 0) = x^3 + y^3 - 3xy. \tag{5}$$

Starpība (5) *nesaglabā zīmi*, t. i., punkta P_1 *pietiekamā tuvumā* ir divu veidu punkti: vieniem starpība (5) ir pozitīva, citiem — negatīva. Tā, ja punktu $P(x; y)$ ņemam uz taisnes $y = x$, tad starpība (5) ir $2x^3 - 3x^2 = x^2(2x - 3)$. Punkta P_1 tuvumā $\left(\text{ja } x < \frac{3}{2}\right)$ šī starpība ir negatīva. Ja punktu $P(x; y)$ ņemam uz taisnes $y = -x$, tad starpība (5) ir vienāda ar $3x^2$, bet šis lielums vienmēr ir pozitīvs.

Tā kā starpība (5) zīmi nesaglabā, tad punktā $P_1(0; 0)$ ekstrēma nav. Virsmai

$$z = x^3 + y^3 - 3xy + 1$$

punktā (0; 0; 1) ir seglu veids (līdzīgi hiperboliskajam paraboloīdam).

2b) Punktam $P_2(1; 1)$ dabūjam

$$f(x, y) - f(1; 1) = x^3 + y^3 - 3xy + 1. \tag{6}$$

Parādīsim, ka šī starpība pietiekamā punkta (1; 1) tuvumā saglabā pozitīvu zīmi. Ņemsim

$$x=1+\alpha, \quad y=1+\beta. \tag{7}$$

Starpība (6) pieņem izskatu

$$3(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)+(\alpha^3+\beta^3). \tag{8}$$

Pirmais loceklis visām α, β vērtībām, kas reizē nav vienādas ar nulli, ir pozitīvs un pie tam lielāks par[1] $\frac{3}{2}(\alpha^2+\beta^2)$. Otrs loceklis var būt arī negatīvs, bet, ja $|\alpha|$ un $|\beta|$ ir pietiekami mazi, tas pēc absolūtās vērtības ir mazāks par[2] $\alpha^2+\beta^2$. Tātad starpība (8) ir pozitīva.

Tādējādi punktā (1; 1) dotajai funkcijai ir minimums.

450. §. Pietiekamie ekstrēma noteikumi (divargumentu funkcijām)

1. teorēma. Pieņemsim, ka

$$A\,dx^2+2B\,dx\,dy+C\,dy^2 \tag{1}$$

ir funkcijas $f(x, y)$ otrais diferenciālis tās kritiskajā punktā (449. §) $P_0(a; b)$ (līdz ar to skaitļi A, B, C dod otro atvasinājumu f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy} vērtības punktā P_0). Ja pie tam ir izpildīta nevienādība

$$AC-B^2>0, \tag{2}$$

tad funkcijai $f(x, y)$ punktā P_0 ir ekstrēms: maksimums, ja A (vai C) ir negatīvs, minimums, ja A (vai C) ir pozitīvs.

1. piezīme. Ja izpildīts noteikums (2), tad skaitļiem A un C vienmēr ir vienādas zīmes.

1. teorēma dod *ekstrēma eksistences pietiekamo noteikumu.*

1. piemērs. Funkcijai $f(x, y)=x^3+y^3-3xy+1$ (sal. 449. § piemēru) punktā (1; 1) ir ekstrēms, jo šai punktā

---

[1] Dabūjam identitāti $3(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=\frac{3}{2}(\alpha^2+\beta^2)+\frac{3}{2}(\alpha-\beta)^2$. Lielums $(\alpha-\beta)^2$ ir pozitīvs vai vienāds ar nulli.

[2] Ja $|\alpha|<1$, $|\beta|<1$, dabūjam $|\alpha^3|<\alpha^2$, $|\beta^3|<\beta^2$.

pirmie atvasinājumi ir vienādi ar nulli, bet otrajiem atvasinājumiem $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=-3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y$ ir vērtības $A=6$, $B=-3$, $C=6$, tā ka nevienādība (2) ir izpildīta. Ekstrēms ir minimums, jo A un C ir pozitīvi.

2. t e o r ē m a. Ja kritiskajā punktā $P_0(a;b)$ ir izpildīta (paturot 1. teorēmas apzīmējumus) nevienādība

$$AC-B^2<0, \tag{3}$$

tad funkcijai $f(x,y)$ punktā P_0 nav ekstrēma.

2. teorēma dod *ekstrēma neesamības pietiekamo noteikumu.*

2. p i e m ē r s. Funkcijai $f(x,y)=x^3+y^3-3xy+1$ (sal. 449. § piemēru) punktā (0; 0) nav ekstrēma, kaut gan pirmie atvasinājumi šeit pārvēršas nullē; šoreiz dabūjam

$$A=0,\quad B=-3,\quad C=0,$$

tā ka

$$AC-B=-9<0.$$

2. p i e z ī m e. Ja kritiskajā punktā izpildās vienādība

$$AC-B^2=0, \tag{4}$$

tad funkcijai šeit var būt ekstrēms (maksimums vai minimums), bet var arī nebūt. Šis gadījums prasa papildu pētījumus.

451. §. Divkāršais integrālis [1]

Pieņemsim, ka funkcija $f(x,y)$ ir nepārtraukta kāda apgabala D (437. zīm.) iekšienē un uz tā robežas. Sadalīsim apgabalu D n parciālos apgabalos $D_1, D_2, \ldots, D_n$; to laukumus apzīmēsim ar $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n$.[2] Katra apgabala vislielāko hordu nosauksim par tā *diametru.*

Katrā parciālajā apgabalā (tā iekšienē vai uz robežas)

[1] Divkāršā integrāļa jēdziens ir noteiktā integrāļa jēdziena vispārinājums divargumentu funkcijām. Tāpēc ieteicams iepriekš izlasīt 314. §.

[2] Vadoties no parciālo intervālu garumu apzīmējumiem Δx_1, $\Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$. Bet analoģija ir tikai ārēja, jo $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots$ nav argumenta pieaugumi. Lielumi $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots$ ir vienmēr pozitīvi, kamēr $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots$ var būt arī negatīvi (ja augšējā robeža ir mazāka par apakšējo).

ņemam vienu punktu [punkts $P_1(x_1; y_1)$ apgabalā D_1, punkts $P_2(x_2; y_2)$ apgabalā D_2 utt.]. Sastādīsim summu

$$S_n = f(x_1, y_1)\Delta\sigma_1 + f(x_2, y_2)\Delta\sigma_2 + \ldots + f(x_n, y_n)\Delta\sigma_n. \quad (1)$$

Spēkā šāda teorēma.

437. zīm.

438. zīm.

T e o r ē m a. Ja, apgabalu $D_1, D_2, \ldots, D_n$ skaitam neierobežoti augot, lielākais to diametrs tiecas uz nulli [1], tad summa S_n tiecas uz kādu robežu; pēdējā nav atkarīga ne no parciālo apgabalu izveidošanas paņēmiena, ne no punktu $P_1, P_2, \ldots, P_n$ izvēles tajos.

D e f i n ī c i j a. Robežu, uz kuru tiecas summa (1), kad lielākais parciālo apgabalu diametrs tiecas uz nulli, sauc par *divkāršo integrāli no funkcijas $f(x, y)$ pa apgabalu D.*

A p z ī m ē j u m s.

$$\iint\limits_D f(x, y)\,d\sigma. \quad (2)$$

C i t s a p z ī m ē j u m s.

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy. \quad (3)$$

439. zīm.

Tas radies no apgabala D (439. zīm.) sadalīšanas ar koordinātu asīm paralēlu taišņu tīklu (dx ir parciālā taisnstūra garums, dy — platums).

Divkāršā integrāļa apzīmēšanu taisnstūrainā apgabalā sk. 455. §.

[1] Pie tam visu parciālo apgabalu laukumi neierobežoti samazinās. Tomēr figūras laukums var neierobežoti samazināties arī tad, ja diametrs netiecas uz nulli (platums tiecas uz nulli, bet garums — ne; sal. 438. zīm.). Ja tā veidotu parciālos apgabalus, tad teorēma nebūtu spēkā.

T e r m i n i. Apgabalu D sauc par *integrācijas apgabalu,* funkciju $f(x, y)$ — par *zemintegrāļa funkciju,* izteiksmi $d\sigma$ — par *laukuma elementu,* izteiksmi $dx\,dy$ apzīmējumā (3) — par *laukuma elementu taisnleņķa koordinātēs.*

452. §. Divkāršā integrāļa ģeometriskā nozīme

Pieņemsim, ka funkcija $f(x, y)$ pieņem apgabalā D tikai pozitīvas vērtības. Tad divkāršais integrālis

$$\iint\limits_D f(x, y)\,d\sigma$$

skaitliski ir vienāds ar vertikāla cilindriska ķermeņa (440. zīm.) tilpumu V, kurš konstruēts uz pamata D un kuru no augšas ierobežo virsmas $z=f(x, y)$ gabals.

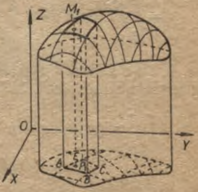
P a s k a i d r o j u m s. Sadalām cilindrisko ķermeni vertikālos stabiņos, kā parādīts 440. zīmējumā.

Stabiņš ar pamatu

$$\Delta\sigma_1 = ABCE$$

pēc tilpuma aptuveni ir vienāds ar prizmatisku stabiņu ar to pašu pamatu $\Delta\sigma_1$ un augstumu

$$P_1M_1 = f(x_1, y_1).$$



440. zīm.

Tātad summas S_n pirmais saskaitāmais (451. §) aptuveni izsaka vertikāla stabiņa tilpumu, bet visa summa S_n — visu tilpumu V. Precizitātes pakāpe aug, ja parciālos apgabalus sasmalcina. Summas S_n robeža, t. i., integrālis $\iint\limits_D f(x, y)\,d\sigma$, dod precīzu tilpuma V vērtību.

453. §. Divkāršā integrāļa īpašības

1. īpašība. Ja apgabalu D sadala divās daļās D_1 un D_2, tad

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\,d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x, y)\,d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x, y)\,d\sigma$$

(sal. 315. § 2. p.). Analogi, ja apgabalu D sadala trīs, četrās vai vairākās daļās.

2. īpašība. Funkciju algebriskas summas divkāršais integrālis ir vienāds ar atsevišķo saskaitāmo divkāršo integrāļu algebrisku summu, ja funkciju skaits ir nemainīgs (sal. 315. § 3. p.); tā trīs saskaitāmiem dabūsim

$$\iint\limits_{D} [f(x, y) + \varphi(x, y) - \psi(x, y)]\,d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{D} f(x, y)\,d\sigma + \iint\limits_{D} \varphi(x, y)\,d\sigma - \iint\limits_{D} \psi(x, y)\,d\sigma.$$

3. īpašība. Pastāvīgu reizinātāju var iznest pirms integrāļa zīmes (sal. 315. § 4. p.)

$$\iint\limits_{D} mf(x, y)\,d\sigma = m \iint\limits_{D} f(x, y)\,d\sigma \quad (m \text{ — konstante}).$$

454. §. Divkāršā integrāļa novērtēšana

Pieņemsim, ka m ir vismazākā, bet M — vislielākā funkcijas $f(x, y)$ vērtība apgabalā D, un pieņemsim, ka S ir apgabala D laukums. Tad

$$mS \leqslant \iint\limits_{D} f(x, y)\,d\sigma \leqslant MS.$$

Ģeometriski: cilindriska ķermeņa tilpums ieslēgts starp divu cilindru tilpumiem, kuriem ir tas pats pamats; pirmajam cilindram augstums ir vismazākā aplikāta, otram — vislielākā (sal. 318. § 1. teorēmu).

455. §. Divkāršā integrāļa aprēķināšana (vienkāršākais gadījums)

Pieņemsim, ka apgabals D uzdots ar nevienādībām

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d, \tag{1}$$

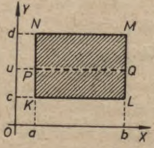
t. i., to attēlo taisnstūris $KLMN$ (441. zīm.). Tad divkāršo integrāli aprēķina ar vienu no formulām

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\,dx, \tag{2}$$

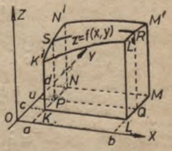
$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy. \tag{3}$$

Labās puses izteiksmes sauc par *divreizējiem integrāļiem.*

Piezīme. Formulā (2) vispirms aprēķina noteikto integrāli $\int_a^b f(x, y)\,dx$. Šīs *integrēšanas procesā* y uzskata par pastāvīgu lielumu. Bet *integrēšanas rezultātu* uzskata par y



441. zīm.



442. zīm.

funkciju un otro integrēšanu (robežās no c līdz d) izpilda pēc argumenta y. Formulā (3) darbību kārtība ir otrāda.

Paskaidrojums. Divkāršais integrālis

$\underset{(KLMN)}{\int\int} f(x, y)\,dx\,dy$ izsaka tilpumu V prizmatiskam ķermenim KM' (442. zīm.) ar pamatu $KLMN$, t. i.,

$$V = \iint\limits_{D} f(x, y)\,dx\,dy. \tag{4}$$

To pašu tilpumu dabū no šķērsgriezuma $PQRS$ mainīgā laukuma F (tas ir atkarīgs no ordinātes $y = Ou$) ar formulu (336. §)

$$V = \int_{c}^{d} F(y)\,dy. \tag{5}$$

Šķērsgriezuma $PQRS$ laukumu izsaka formula

$$F(y) = \int_{a}^{b} z\,dx = \int_{a}^{b} f(x, y)\,dx. \tag{6}$$

Salīdzinot (4), (5) un (6), dabūjam (2). Analogi dabūjam (3).

Apzīmējumi. Divkāršo integrāli $\iint\limits_{D} f(x, y)\,dx\,dy$, kas ņemts pa taisnstūri, kura malas ir paralēlas OX, OY asīm, apzīmē tā:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_{c}^{d}\int_{a}^{b} f(x, y)\,dx\,dy \\ \text{jeb} \\ \displaystyle\int_{a}^{b}\int_{c}^{d} f(x, y)\,dy\,dx \end{array}\right\} \tag{7}$$

(integrāļa ārējās zīmes atbilst ārējiem diferenciāļiem).

1. piemērs. Aprēķināt divkāršo integrāli

$$\int_{1}^{2}\int_{3}^{4} \frac{dx\,dy}{(x+y)^2}.$$

Atrisinājums. Integrācijas apgabalu nosaka nevienādības

$$3 \leqslant x \leqslant 4, \quad 1 \leqslant y \leqslant 2,$$

un tas ir taisnstūris ar OX, OY asīm paralēlām malām. Vispirms aprēķinām noteikto integrāli $\int\limits_3^4 \frac{dx}{(x+y)^2}$, kur y uzskata par pastāvīgu lielumu; dabūjam

$$\int\limits_3^4 \frac{dx}{(x+y)^2} = \frac{1}{y+3} - \frac{1}{y+4}.$$

Tagad ar formulu (2) aprēķinām

$$\int\limits_1^2 \int\limits_3^4 \frac{dx\,dy}{(x+y)^2} = \int\limits_1^2 \left(\frac{1}{y+3} - \frac{1}{y+4}\right) dy = \ln\frac{25}{24} \approx 0{,}0408.$$

2. piemērs. Aprēķināt divkāršo integrāli

$$I = \int\limits_1^3 \int\limits_2^5 (5x^2y - 2y^3)\,dx\,dy.$$

Atrisinājums. Ar formulu (3) atrodam

$$I = \int\limits_1^3 dy \int\limits_2^5 (5x^2y - 2y^3)\,dx = \int\limits_1^3 (195y - 6y^3)\,dy = 660.$$

3. piemērs. Taisnleņķa paralēlskaldnis KM_1 (443. zīm.) no augšas nošķelts ar rotācijas paraboloīdu, kura parametrs ir p. Paraboloīda virsotne sakrīt ar augšējā pamata centru C, ass vertikāla. Aprēķināt izveidotā ķermeņa tilpumu V, ja tā pamata malas ir

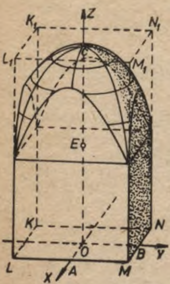
$$KL = a, \quad KN = b,$$

bet augstums

$$OC = h.$$

Atrisinājums. Izvēlamies koordinātu sistēmu $OXYZ$, kā parādīts 443. zīmējumā. Paraboloīda vienādojums ir

$$z = h - \frac{x^2 + y^2}{2p}. \tag{8}$$



443. zīm.

Meklētais tilpums ir vienāds ar divkāršo integrāli $\iint\limits_{(KLMN)} z dx dy$ pa taisnstūrainu apgabalu $KLMN$, t. i.,

$$V=\int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left(h-\frac{x^2+y^2}{2p}\right)dy\,dx. \tag{9}$$

Šī integrāļa vietā var ņemt četrkāršotu integrāli pa apgabalu $OAMB$ (ķermeņa simetrijas dēļ attiecībā pret plaknēm XOZ, YOZ), t. i.,

$$V=4\int\limits_0^{\frac{a}{2}}\int\limits_0^{\frac{b}{2}}\left(h-\frac{x^2+y^2}{2p}\right)dy\,dx.$$

Tālāk atrodam

$$V=4\int\limits_0^{\frac{a}{2}}\left[hy-\frac{x^2}{2p}y-\frac{y^3}{6p}\right]_0^{\frac{b}{2}}dx=4\int\limits_0^{\frac{a}{2}}\left(\frac{bh}{2}-\frac{bx^2}{4p}-\frac{b^3}{48p}\right)dx=$$
$$=abh-\frac{ab}{24p}(a^2+b^2).$$

456. §. Divkāršā integrāļa aprēķināšana (vispārīgais gadījums)

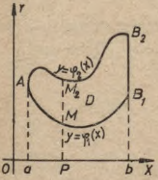
1. Ja apgabala D kontūru jebkura vertikāla taisne krusto ne vairāk kā divos punktos (444. zīmējumā M_1M_2), tad apgabalu D nosaka nevienādības

$$a\leqslant x\leqslant b,\quad \varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x) \tag{1}$$

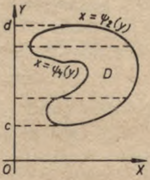
[a, b ir apgabala galējās abscisas, $\varphi_1(x)$ un $\varphi_2(x)$ — funkcijas, kas izsaka apakšējās un augšējās robežlīnijas AM_1B_1 un AM_2B_2 ordinātes].

Šai gadījumā divkāršo integrāli aprēķina ar formulu

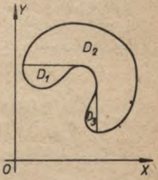
$$\iint\limits_D f(x, y)\,d\sigma = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy. \tag{2}$$



444. zīm.



445. zīm.



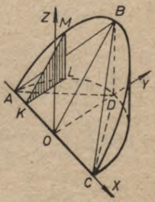
446. zīm.

2. Ja apgabala D kontūru ne vairāk kā divos punktos krusto jebkura horizontāla taisne, tad analogi dabūjam (ar 445. zīm. apzīmējumiem)

$$\iint\limits_D f(x, y)\,d\sigma = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx. \tag{3}$$

Piezīme. Ja kontūra neietilpst ne pirmajā, ne otrajā gadījumā, tad apgabalu D sadala vairākās daļās (446. zī-

447. zīm.



448. zīm.

mējumā D_1, D_2, D_3) tā, lai katrai daļai varētu lietot formulu (2) vai (3).

1. piemērs. Atrast integrāli $I=\iint\limits_D (y^2+x)\,dx\,dy$, ja apgabalu D ierobežo parabolas $y=x^2$, $y^2=x$ (447. zīm.; kontūra ietilpst tiklab 1., kā 2. gadījumā).

Pirmais atrisinājums. Pielietosim formulu (2); tanī jāievieto $a=0$, $b=1$, $\varphi_1(x)=x^2$, $\varphi_2(x)=\sqrt{x}$. Dabūjam

$$\iint\limits_D (y^2+x)\,dx\,dy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} (y^2+x)\,dy.$$

Aprēķinām integrāli $\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} (y^2+x)\,dy$, uzskatot x par pastāvīgu; dabūsim

$$\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} (y^2+x)\,dy=\left[\frac{y^3}{3}+xy\right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}}=$$

$$=\left(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{2}}\right)-\left(\frac{1}{3}x^6+x^3\right).$$

Atrasto izteiksmi integrējam pēc x; dabūjam

$$I=\int\limits_0^1\left(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^6-x^3\right)dx=\frac{33}{140}.$$

Otrs atrisinājums. Pielietosim formulu (3); tanī jāievieto $c=0$, $d=1$, $\psi_1(y)=y^2$, $\psi_2(y)=\sqrt{y}$. Dabūsim

$$I=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{y^2}^{\sqrt{y}} (y^2+x)\,dx=\int\limits_0^1 dy\left[xy^2+\frac{x^2}{2}\right]_{x=y^2}^{x=\sqrt{y}}=$$

$$=\int\limits_0^1\left(y^{\frac{5}{2}}+\frac{y}{2}-\frac{3}{2}y^4\right)dy=\frac{33}{140}.$$

2. piemērs. Atrast tilpumu V *«cilindriskam nagam»*, t. i., ķermenim $ACDB$ (448. zīm.), kas rodas, puscilindru šķeļot ar plakni ABC, kura novilkta caur pamata diametru AC. Dots pamata rādiuss $R=OA$ un naga augstums $DB=h$.

Atrisinājums. Izvēlamies koordinātu sistēmu tā, kā parādīts 448. zīmējumā (tad kontūra ietilpst tiklab 1., kā 2. gadījumā). Plaknes ABC vienādojums būs $z=\frac{h}{R}y$. Dabūjam $V=\iint\limits_{(ADC)}\frac{h}{R}y\,dx\,dy$.

Pirmais paņēmiens. Formulā (2) ņemam (448. zīm.):

$$a=-R,\quad b=R,\quad \varphi_1(x)=0,\quad \varphi_2(x)=\sqrt{R^2-x^2}\,(=KL).$$

Dabūjam

$$V=\int\limits_{-R}^{+R}dx\int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{h}{R}y\,dy.$$

Integrējot pēc y, atrodam

$$\int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{h}{R}y\,dy=\frac{h}{2R}(R^2-x^2).$$

Šī izteiksme dod šķēluma KLM laukumu F $\left(F=\frac{1}{2}KL\cdot LM,\right.$ kur $KL=\sqrt{R^2-x^2}$, bet LM atrod no līdzīgiem trijstūriem $\left.KLM,\ ODB\right)$. Galīgi dabūjam

$$V=\int\limits_{-R}^{R}\frac{h}{2R}(R^2-x^2)\,dx=\frac{2}{3}R^2h,$$

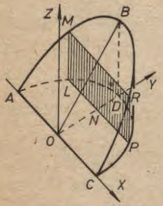
t. i., *cilindriska naga tilpums ir divreiz lielāks par piramīdas BACD tilpumu*[1].

---

[1] Šo rezultātu atrada Arhimeds.

Otrs paņēmiens. Formulā (3) ņemam (449. zīm.) $c=0$, $d=R$, $\psi_1(y)=-\sqrt{R^2-y^2}\ (=NL)$, $\psi_2(y)=\sqrt{R^2-y^2}(=NP)$. Dabūjam

$$V=\int_0^R dy \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \frac{h}{R} y\, dx.$$



449. zīm.

Pirmā integrēšana dod

$$\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \frac{h}{R} y\, dx = 2\frac{h}{R} y\sqrt{R^2-y^2}.$$

Šī izteiksme izsaka šķēluma $PLMR$ laukumu. Galīgi dabūjam

$$V=\int_0^R 2\frac{h}{R}\sqrt{R^2-y^2}\, y\, dy=\frac{2}{3}R^2 h.$$

457. §. Punkta funkcija

Pieņemsim, ka dota kāda punktu kopa (piemēram, dotā nogriežņa, dotā virsmas gabala, dotā ķermeņa punktu kopa). Ja šīs kopas katram punktam P nostādīta atbilstībā lieluma z (skalāra vai vektoriāla) noteikta vērtība, tad šo lielumu sauc par *punkta P funkciju.* Doto punktu kopu sauc par *funkcijas uzdošanas (definīcijas) apgabalu.*

Apzīmējums. $z=f(P)$.

1. piemērs. Temperatūra gāzei, kura aizpilda kādu trauku, ir punkta funkcija; funkcijas uzdošanas apgabals ir to punktu kopa, kuri atrodas trauka iekšienē.

2. piemērs. Gada laika nokrišņu daudzums ir punkta funkcija uz Zemes lodes virsmas.

Ja doto punktu kopu apskatām kādā koordinātu sistēmā, tad punkta funkcija pārvēršas par koordinātu funkciju. *Tās izskats ir atkarīgs no koordinātu sistēmas izvēles.*

3. piemērs. Punkta P attālums no fiksēta punkta O ir punkta P funkcija $f(P)$. Ja ņemam taisnleņķa koordinātu sistēmu ar sākumu punktā O, tad $f(P)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Ja sākumu izvē-

lamies citā punktā, tad $f(P)=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$, kur a, b, c ir punkta O koordinātes.

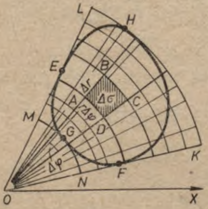
4. piemērs. Divkāršā integrāļa $\iint\limits_D f(x, y)\,d\sigma$ zemintegrāļa funkcija $f(x, y)$ ir punkta $P(x; y)$ funkcija, tāpēc integrāli $\iint\limits_D f(x, y)\,d\sigma$ raksta arī tā: $\iint\limits_D f(P)\,d\sigma$.

458. §. Divkāršā integrāļa izteiksme ar polārajām koordinātēm

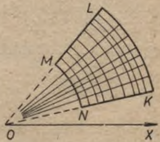
Divkāršo integrāli $\iint\limits_D f(P)\,d\sigma$ ar punkta P polārajām koordinātēm izsaka ar formulu

$$\iint\limits_D f(P)\,d\sigma=\iint\limits_D F(r, \varphi)\,r\,dr\,d\varphi. \tag{1}$$

Šeit $F(r, \varphi)$ ir tā koordinātu r, φ funkcija, kura attēlo doto punkta P funkciju $f(P)$. Izteiksmi $r\,dr\,d\varphi$ sauc par *laukuma elementu polārajās koordinātēs*. Tas ir ekvivalents četrstūra $ABCD$ (450. zīm.), kur $AD\approx OA$, $\Delta\varphi=r\,d\varphi$ un $AB=$ $=DC=dr$, laukumam.



450. zīm.

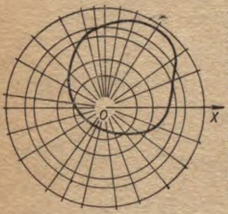


451. zīm.

Integrāli (1) izsaka ar divreizējo integrāli (455. §) tā, it kā r un φ būtu taisnleņķa koordinātes [kur zemintegrāļa funkcija ir $F(r, \varphi)r$].

Ja pols atrodas ārpus kontūras un katrs polārais stars krusto kontūru ne vairāk kā divos punktos (450. zīm.), tad

$$\iint\limits_D F(r, \varphi) r\, dr\, d\varphi = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1}^{r_2} F(r, \varphi) r\, dr. \tag{2}$$



452. zīm.

Šeit $\varphi_1 = \angle XOK$, $\varphi_2 = \angle XOL$, bet r_1 un r_2 ir φ funkcijas, kas izsaka robežlokus FGE, FHE. Atsevišķā gadījumā šīs funkcijas (viena vai abas) var būt pastāvīgas (451. zīm.).

Ja pols atrodas kontūras iekšienē (452. zīm.) un katrs polārais stars krusto kontūru vienā punktā, tad formulā (2) jāņem $r_1 = 0$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 2\pi$; ja pols atrodas uz kontūras, tad $r_1 = 0$, $\varphi_1 = \angle XOA$, $\varphi_2 = \angle XOB$ (453. zīm.).

Ja katra riņķa līnija ar centru polā krusto kontūru ne vairāk kā divos punktos (450. zīm.), tad aprēķinu var izdarīt ar formulu

$$\iint\limits_D F(r, \varphi) r\, dr\, d\varphi = \int\limits_{r_1}^{r_2} r\, dr \int\limits_{\varphi^1}^{\varphi^2} F(r, \varphi)\, d\varphi. \tag{3}$$

Šeit $r_1 = OG$, $r_2 = OH$, bet φ_1, φ_2 ir r funkcijas, kas izsaka robežlokus GEH, GFH.

1. p i e m ē r s. Atrast divkāršo integrāli

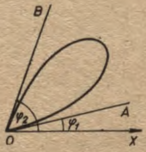
$$I = \iint\limits_D r \sin\varphi\, d\sigma, \tag{4}$$

ja apgabals D ir 454. zīmējumā attēlotais pusriņķis ar diametru a.

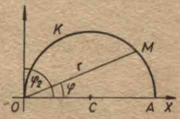
A t r i s i n ā j u m s. Pusaploces AKO punktiem M dabūjam (74. § 2. piemērs) $r = a\cos\varphi$. Pielietojam formulu (2), ņemot $r_1 = 0$, $r_2 = a\cos\varphi$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$; dabūjam

$$\iint\limits_D r\sin\varphi\, d\sigma = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} r^2 \sin\varphi\, dr = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} r^2\, dr =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi \frac{a^3\cos^3\varphi}{3} = \frac{a^3}{12}.$$



453. zīm.



454. zīm.

1. p i e z ī m e. Lai integrāli (4) izteiktu taisnleņķa koordinātēs, jāņem

$$r\sin\varphi = y, \quad d\sigma = dx\, dy.$$

Ievērojot, ka pusaploces AKO vienādojums ir $y^2 = ax - x^2$, dabūsim

$$I = \iint\limits_D y\, dx\, dy = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{ax - x^2}} y\, dy = \frac{a^3}{12}.$$

2. p i e z ī m e. Integrālis (4) dod cilindriska naga (sal. 456. § 2. piemēru) tilpumu, kuram augstums ir vienāds ar pamata rādiusu.

2. piemērs. Aprēķināt integrāli

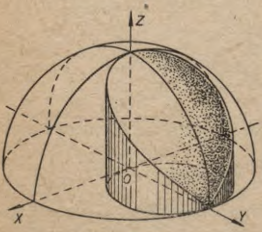
$$I=\int\limits_{-a}^{+a}\int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

Atrisinājums. Apgabals D ir riņķis ar rādiusu a un centru punktā $(0; 0)$ (integrālis I izsaka tilpumu puslodei ar rādiusu a). Aprēķins taisnleņķa koordinātēs ir smags. Pārejam uz polārajām koordinātēm. Polu tagad ņemsim riņķa centrā, t. i., koordinātu sākumā. Zemintegrāļa funkcija pieņem izskatu $\sqrt{a^2-r^2}$. Dabūsim

$$I=\iint\limits_D \sqrt{a^2-r^2}\,d\sigma=\iint\limits_D \sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr\,d\varphi.$$

Pielietojot formulu (2), atrodam

$$I=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{a}\sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr=\int\limits_0^{2\pi}\frac{a^3}{3}\,d\varphi=\frac{2}{3}\pi a^3.$$



455. zīm.

3. piemērs. Atrast tilpumu V ķermenim, kuru no puslodes ar rādiusu a (455. zīm.) izgriež cilindriska virsma, kurai diametrs ir vienāds ar lodes rādiusu, bet viena veidotāja sakrīt ar puslodes asi (*Viviani ķermenis*)[1].

Atrisinājums. Asis novietosim tā, kā parādīts 455. zīmējumā. Meklēto tilpumu izteiks integrālis

$$I=\iint\limits_D z\,d\sigma=\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

[1] Vinčenco Viviani (1622—1703) — Galileja skolnieks, matemātiķis un arhitekts. Augšējā pamata kontūru Viviani izlietoja sfēriska kupola logam.

Aprēķins taisnleņķa koordinātēs ir smags. Pārejam uz polārajām koordinātēm ar polu puslodes centrā O (sal. 1. un 2. piemēru), dabūjam

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{0}^{a\cos\varphi} \sqrt{a^2-r^2}\, r\, dr = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^3(1-\sin^3\varphi)}{3}\, d\varphi =$$

$$=\frac{2}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

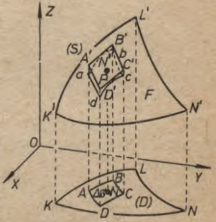
459. §. Virsmas gabala laukums

Pieņemsim, ka kāda virsmas S gabala $K'L'M'$ (456. zīm.) projekcija XOY plaknē ir apgabals D (456. zīmējumā KLM), pie kam katrā apgabala D punktā N projicējas *tikai viens* apskatāmā gabala punkts N'.

Tad gabala $K'L'M'$ laukumu F izsaka[1] divkāršais integrālis

$$F=\iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}\, d\sigma, \qquad (1)$$

kur $p=\dfrac{\partial z}{\partial x}$ un $q=\dfrac{\partial z}{\partial y}$.



456. zīm.

Paskaidrojums. Pieņemsim, ka γ ir leņķis starp pieskaru plakni P punktā N' un XOY plakni. Tad (127. un 436. §) $\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$. Cilindriska virsma, kurai pamats ir elements $\Delta\sigma$ (456. zīmējumā $ABCD$), izgriež no plaknes P gabalu $A'B'C'D'$. Tā laukums ir vienāds ar $\dfrac{\Delta\sigma}{\cos\gamma}=\sqrt{1+p^2+q^2}\,\Delta\sigma$ Tā virsmas S elementa $abcd$ laukums, kura projekcija ir elements $ABCD$,

[1] Pieņemts, ka virsmai ir pieskaru plakne visos apskatāmā gabala punktos un ka pieskaru plakne mainās nepārtraukti (t. i., leņķis starp divām pieskaru plaknēm ir bezgalīgi mazs, ja attālums starp pieskaršanās punktiem ir bezgalīgi mazs).

aptuveni ir vienāds ar gabala $A'B'C'D'$ laukumu; līdz ar to gabalu $A'B'C'D'$ laukumu summas robeža dod[1] laukumu F, t. i.,

$$F=\lim(\sqrt{1+p_1^2+q_1^2}\,\Delta\sigma_1+\ldots+\sqrt{1+p_n^2+q_n^2}\,\Delta\sigma_n). \quad (2)$$

No šejienes (451. §) arī rodas formula (1).

Piemērs. Atrast augšējā pamata laukumu Viviani ķermenim (458. § 3. piemērs).

Atrisinājums. Dabūjam

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},\quad p=\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

$$q=\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\quad \sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Meklētais laukums ir

$$F=\iint\limits_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,d\sigma=\iint\limits_D \frac{a\,d\sigma}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Apgabalu D ietver riņķa līnija

$$x^2+y^2-ax=0.$$

Izsakot divkāršo integrāli polārajās koordinātēs (458. §), dabūjam

$$F=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \frac{ar\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}=2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}.$$

Izpildot integrēšanu, atrodam

$$F=2a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

[1] Sk. tālāk 1. piezīmi.

1. piezīme. Mēs pieņēmām, ka laukumu $A'B'C'D'$ summas robeža ir laukums F. Šo īpašību (tā saskan ar uzskatāmiem priekšstatiem, ko dod pieredze) bieži pieņem par definīciju. To formulē tā.

Definīcija. Apskatāmo virsmas gabalu sadalām daļās $abcd$; katrā daļā izvēlamies punktu N'. Caur punktiem N' novelkam pieskaru plaknes un projicējam $abcd$ uz atbilstošo pieskaru plakni P ar OZ asij paralēlām taisnēm. Virsmas gabala laukums ir robeža, uz kuru tiecas projekciju laukumu summa, ja daļas neierobežoti sasmalcina.

Zemteksta piezīmē 747. lpp. minētie nosacījumi nodrošina šīs robežas eksistenci.

2. piezīme. Dodot tādu definīciju, jākonstatē ne vien robežas esamība, bet arī jāpierāda tās neatkarība no koordinātu sistēmas izvēles. Šis uzdevums atkrīt, ja maina definīciju, konkrēti, ja $abcd$ projicē uz plakni P plaknei P perpendikulārā virzienā. Bet tad kļūst komplicētāka formulas (1) atrašana.

460. §. Trīskāršais integrālis

Definīcija[1]. Pieņemsim, ka punkta $P(x; y; z)$ funkcija $f(x, y, z)$ ir nepārtraukta telpas apgabala D iekšienē un uz tā robežas. Sadalām D n daļās; to tilpumus apzīmēsim ar $\Delta v_1, \Delta v_2, \ldots, \Delta v_n$. Katrā daļā ņemsim punktu un sastādīsim summu

$$S_n = f(x_1, y_1, z_1)\Delta v_1 + f(x_2, y_2, z_2)\Delta v_2 + \ldots$$
$$\ldots + f(x_n, y_n, z_n)\Delta v_n. \qquad (1)$$

Robežu, uz kuru tiecas S_n, kad lielākais parciālo apgabalu diametrs tiecas uz nulli[2], sauc par funkcijas $f(x, y, z)$ *trīskāršo integrāli pa apgabalu D*.

Apzīmējumi.

$$\iiint\limits_D f(x, y, z)\,dv \quad \text{jeb} \quad \iiint\limits_D f(P)\,dv, \quad \text{jeb}$$
$$\iiint\limits_D f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

[1] Tā ir analoga divkāršā integrāļa definīcijai.
[2] Spēkā 451. § teorēmai analoga teorēma.

Izteiksmi $dx\,dy\,dz$ pēdējā apzīmējumā sauc par *tilpuma elementu taisnleņķa koordinātēs.*

Fizikālā nozīme. Pieņemsim, ka D ir telpa, ko aizpilda fizisks ķermenis, un $f(P)$ — ķermeņa blīvums punktā $P(x; y; z)$. Tad summa (1) dod ķermeņa D masas M aptuvenu vērtību, bet trīskāršais integrālis $\iiint\limits_D f(P)\,dv$ — precīzu tās vērtību.

Trīskāršā integrāļa īpašības ir tādas pašas kā divkāršajam integrālim (453. §).

461. §. Trīskāršā integrāļa aprēķināšana (vienkāršākais gadījums)

Pieņemsim, ka telpas apgabals D uzdots ar nevienādībām

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d, \quad e \leqslant z \leqslant f, \tag{1}$$

t. i., to attēlo paralēlskaldnis, kura šķautnes ir paralēlas koordinātu asīm. Tad trīskāršo integrāli aprēķina ar formulu

$$\iiint\limits_D f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_e^f dz \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x, y, z)\,dx \tag{2}$$

vai arī ar analogām formulām (argumenti x, y, z var mainīties lomām) (sal. 455. §).

Izteiksmi, kas atrodas vienādības (2) labajā pusē sauc par trīsreizēju integrāli.

Trīskāršo integrāli, kas ņemts pa paralēlskaldni, kura šķautnes ir paralēlas koordinātu asīm, apzīmē arī ar simboliem

$$\int\limits_e^f\int\limits_c^d\int\limits_a^b f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz, \quad \int\limits_a^b\int\limits_c^d\int\limits_e^f f(x, y, z)\,dz\,dy\,dx$$

utt. (ārējā integrāļa zīme atbilst ārējam diferenciālim, iekšējā — iekšējam).

Piemērs. Aprēķināt integrāli

$$I=\int_0^1\int_2^4\int_0^3 (x+y+z)\,dx\,dy\,dz.$$

Atrisinājums.

$$I=\int_0^1 dz\int_2^4 dy\int_0^3 (x+y+z)\,dx=$$

$$=\int_0^1 dz\int_2^4 dy\left[\frac{x^2}{2}+(y+z)x\right]_{x=0}^{x=3}=\int_0^1 dz\int_2^4\left(\frac{9}{2}+3y+3z\right)dy.$$

Tālāk aprēķinām tāpat kā 455. paragrāfā. Dabūjam $I=30$.

462. §. Trīskāršā integrāļa aprēķināšana (vispārīgais gadījums)

Doto telpas apgabalu sadalām, ja vajadzīgs, daļās (sal. 456. §) ar tādu aprēķinu, lai katras daļas D horizontālā projekcija $\overline{D}$ (457. zīm.) būtu vienkāršākā veida plaknes apgabals (456. § 1. un 2. p.) un lai katra «vertikālā» taisne krustotu apgabala D robežu ne vairāk kā divos punktos (457. zīmējumā M_1, M_2).

Trīskāršo integrāli, kas ņemts pa parciālo apgabalu D, var reducēt uz divkāršo integrāli ar formulu

$$\iiint_D f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz=$$

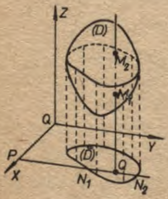
$$=\iint_{\overline{D}} dx\,dz\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz, \qquad (1)$$

kur funkcijas $z_1(x, y)$ un $z_2(x, y)$ izsaka aplikātas QM_1 un QM_2. Integrāļa

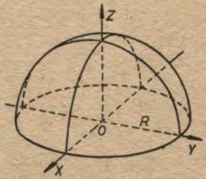
$$\int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)\,dz$$

aprēķināšanas procesā lielumus x, y uzskata par pastāvīgiem. Aprēķinu rezultātu uzskata par argumentu x, y funkciju.

Pēc tam kad integrēšana pēc mainīgā z ir izpildīta, vienādības (1) labā puse pārvēršas divkāršajā integrālī. Bet



457. zīm.



458. zīm.

pēdējo aprēķina kā 456. paragrāfā. Tāpēc galu galā trīskāršais integrālis reducējas uz trīsreizējo integrāli

$$\iiint_D f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz. \qquad (2)$$

Šeit funkcijas $y_1(x)$ un $y_2(x)$ izsaka ordinātes PN_1 un PN_2.

P i e m ē r s. Aprēķināt integrāli $I = \iiint_D z\,dv$, ja apgabals D ir puslode ar rādiusu R, kas attēlota 458. zīmējumā.

Integrālis I izsaka puslodes statisko momentu attiecībā pret pamata plakni (puslodes blīvumu μ pieņem par vienu).

A t r i s i n ā j u m s. Dotais apgabals nav jāsadala. Apgabals $\overline{D}$ ir riņķis

$$x^2 + y^2 \leqslant R^2,$$

tā ka $a=-R$, $b=R$, $y_1(x)=-\sqrt{R^2-x^2}$, $y_2(x)=\sqrt{R^2-x^2}$. Puslodes apakšējās un augšējās robežas aplikātas ir $z_1(x, y)=0$, $z_2(x, y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. Ar formulu (2) atrodam

$$I=\int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z\,dz=$$

$$=\int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{R^2-x^2-y^2}{2} dy.$$

Tālāk aprēķinus izdarām kā 456. § piemēros. Dabūjam

$$I=\frac{1}{2}\int_{-R}^{R} dx\left[(R^2-x^2)y-\frac{y^3}{3}\right]_{y=-\sqrt{R^2-x^2}}^{y=\sqrt{R^2-x^2}}=$$

$$=\frac{2}{3}\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{2}{3}\cdot\left[\frac{1}{4}x(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{8}R^2x(R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{8}R^4\arcsin\frac{x}{R}\right]_{-R}^{+R}=\frac{\pi R^4}{4}.$$

Piezīme. Puslodes masa (ja $\mu=1$) skaitliski ir vienāda ar tās tilpumu $\frac{2}{3}\pi R^3$. Dalījums $I:\frac{2}{3}\pi R^3=\frac{3}{8}R$ ir smaguma centra augstums virs pamata plaknes. Tātad smaguma centrs dala puslodes augstumu attiecībā 5 : 3.

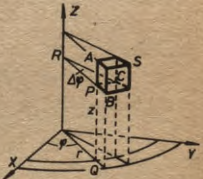
463. §. Cilindriskās koordinātes

Punkta P (459. zīm.) stāvokli telpā var noteikt ar tā aplikātu

$$z=QP$$

un ar tā projekcijas Q plaknē XOY polārajām koordinātēm

$$r=OQ,\quad \varphi=\angle XOQ.$$



459. zīm.

Lielumus r, φ, z sauc par punkta P *cilindriskajām* jeb *puspolārajām koordinātēm.* Punkta P taisnleņķa un cilindriskās koordinātes (ja sākums O sakrīt ar polu un OX ass ar polāro asi) saista sakarības

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi$$

(aplikātas abās sistēmās ir vienādas).

464. §. Trīskāršā integrāļa izteiksme ar cilindriskajām koordinātēm

Trīskāršais integrālis $\iiint\limits_D f(P)\,dv$ izsakās ar punkta P cilindriskajām koordinātēm ar formulu

$$\iiint\limits_D f(P)\,dv=\iiint\limits_D F(r,\varphi,z)\,r\,dr\,d\varphi\,dz. \tag{1}$$

Šeit $F(r, \varphi, z)$ ir tā cilindrisko koordinātu funkcija, kura attēlo punkta P funkciju $f(P)$. Izteiksmi $r\,dr\,d\varphi\,dz$ sauc par *tilpuma elementu cilindriskajās koordinātēs.* Tā ir ekvivalenta ķermeņa PS (459. zīm.) tilpumam, kuram $PA=dz$, $PB=dr$, $\overset{\smile}{PC}=r\,d\varphi$.

Integrāli (1) izsaka ar trīsreizējo integrāli tā, it kā r, φ, z būtu taisnleņķa koordinātes zemintegrāļa funkcijai $F(r,\varphi,z)r$.

P i e m ē r s. Aprēķināsim ar cilindrisko koordinātu palīdzību 462. § piemērā atrasto integrāli. Dabūsim

$$I=\iiint\limits_D zr\,dr\,d\varphi\,dz=\int\limits_0^R dz\int\limits_0^{\sqrt{R^2-z^2}}dr\int\limits_0^{2\pi}zr\,d\varphi. \tag{2}$$

Tālāk atrodam

$$I=2\pi\int\limits_0^R dz\int\limits_0^{\sqrt{R^2-z^2}}zr\,dr=2\pi\int\limits_0^R z\,dz\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{R^2-z^2}}=$$

$$=\pi\int\limits_0^R (R^2-z^2)z\,dz=\frac{\pi R^4}{4}. \tag{3}$$

465. §. Sfēriskās koordinātes

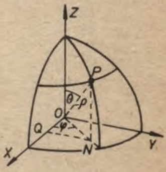
Punkta P stāvokli telpā (460. zīm.) var noteikt ar šādiem trim lielumiem: ar attālumu

$$\varrho = OP$$

no punkta O, leņķi $\Theta = \angle ZOP$ starp stariem OZ un OP, leņķi

$$\varphi = \angle XON$$

starp pusplaknēm ZOX un ZOP. Lielumus ϱ, Θ, φ sauc par punkta P sfēriskajām jeb polārajām koordinātēm. Taisnleņķa un sfēriskās koordinātes (ja abu sistēmu pamatplaknes sakrīt) saista sakarības



460. zīm.

$$x = \varrho \sin \Theta \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \Theta \sin \varphi, \quad z = \varrho \cos \Theta.$$

466. §. Trīskāršā integrāļa izteiksme ar sfēriskajām koordinātēm

Trīskāršo integrāli $\iiint\limits_D f(P)\,dv$ izsaka ar punkta P sfēriskajām koordinātēm ar formulu

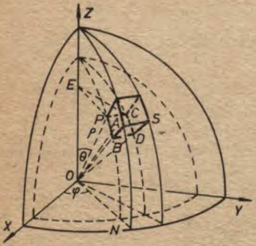
$$\iiint\limits_D f(P)\,dv = \iiint\limits_D F(\varrho, \Theta, \varphi)\,\varrho^2\,d\varrho \sin \Theta\,d\Theta\,d\varphi. \qquad (1)$$

Šeit $F(\varrho, \Theta, \varphi)$ ir tā sfērisko koordinātu funkcija, kura attēlo punkta P funkciju $f(P)$. Izteiksmi $\varrho^2\,d\varrho \sin \Theta d\Theta\,d\varphi$ sauc par *tilpuma elementu sfēriskajās koordinātēs*. Tā ir ekvivalenta ķermeņa[1] PS (461. zīm.) tilpumam, kuram

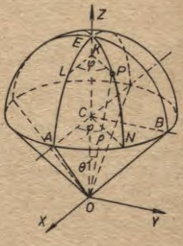
$$BA = d\varrho, \quad \breve{PB} = OP\,d\Theta = \varrho\,d\Theta, \quad \breve{PC} = EP\,d\varphi = \varrho \sin \Theta\,d\varphi.$$

[1] Šo ķermeni ierobežo divas sfēriskas virsmas (ar rādiusiem ρ un $\rho + d\rho$), divas plaknes, kas iet caur OZ asi, divas koniskas virsmas, kuru asis sakrīt ar OZ asi.

Reizinātājs $\varrho^2 \sin\Theta\, d\Theta\, d\varphi$ ($\approx PC \cdot PB$) elementa dv izteiksmē ir ekvivalents sfēriskās figūras $PCDB$ laukumam. Reizinātājs $\sin\Theta\, d\Theta\, d\varphi$ ir ekvivalents telpiskam leņķim, kurā četrstūris $PCDB$ redzams no centra [1].



461. zīm.



462. zīm.

Piemērs. Aprēķināt integrāli $I = \iiint\limits_D r^2\, dv$, kur punkta P funkcija $f(P) = r^2$ ir tā attāluma kvadrāts no OZ ass (KP 462. zīmējumā), bet apgabals D ir ķermenis, kuru no apakšas ierobežo konuss (tam augstums OC ir vienāds ar pamata rādiusu $CA = R$), bet no augšas — pussfēra ar rādiusu R.

Integrālis I izsaka ķermeņa D inerces momentu attiecībā pret OZ asi (468. §).

Atrisinājums. Lietosim sfēriskās koordinātes $\varrho = OP$, $\Theta = \angle EOP$, $\varphi = \angle ACN = \angle LKP$. Tā kā $r = KP = \varrho \sin\Theta$, tad meklētais integrālis pieņem izskatu

$$I = \iiint\limits_D \varrho^2 \sin^2\Theta\, dv = \iiint\limits_D \varrho^4 \sin^3\Theta\, d\varrho\, d\Theta\, d\varphi.$$

[1] Telpiskais leņķis ir telpas daļa, kas ieslēgta kādas koniskas virsmas (ar noslēgtu vadītāju) viena dobuma iekšienē. Par telpiska leņķa mēru pieņem attiecību starp laukumu, ko telpiskais leņķis izgriež sfērā (ar centru telpiskā leņķa virsotnē), un sfēras rādiusa kvadrātu.

Vispirms integrējam pēc argumenta φ (integrācijas robežas būs nulle un 2π), pēc tam — pēc argumenta ϱ (robežās būs $\varrho_1=0$ un $\varrho_2=OP=OE\cdot\cos\Theta$) un beidzot pēc argumenta Θ (robežas būs $\Theta_1=0$ un $\Theta_2=\angle EOA=\frac{\pi}{4}$). Dabūsim

$$I=2\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}d\Theta\int\limits_0^{2R\cos\Theta}\varrho^4\sin^3\Theta\,d\varrho=2\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\Theta\,d\Theta\cdot\frac{32\,R^5\cos^5\Theta}{5}=$$

$$=\frac{64\pi R^5}{5}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^5\Theta(1-\cos^2\Theta)\,d(-\cos\Theta)=\frac{11}{30}\pi R^5.$$

467. §. Divkāršā un trīskāršā integrāļa pielietošanas shēma

Daudzus ģeometriskus un fizikālus lielumus izsaka ar divkāršo vai trīskāršo integrāli atkarībā no tā, vai tie attiecas uz virsmu (plakanu vai izliektu) vai uz telpas ķermeni[1]. Aprēķina shēma ir tāda pati kā lielumiem, kurus izsaka ar parasto (noteikto) integrāli, proti (sal. 334. §):

1) Meklētajam lielumam nostāda atbilstībā kādu (virsmas vai telpas) apgabalu D.

2) Apgabalu D sadala daļās $\Delta\sigma_k$ (vai Δv_k); to skaits vēlāk tieksies uz bezgalību, bet diametri uz nulli.

Pieņemsim pie tam, ka meklētais lielums U sadalās daļās $u_1, u_2, \ldots, u_n$, kuru summa ir U[2].

3) Kā tipisku daļu $u_1, u_2, \ldots$ pārstāvi apskata vienu no tām; to aptuveni izsaka ar formulu

$$u_k\approx f(P_k)\Delta\sigma_k$$

$$[\text{vai } u_k\approx f(P_k)\Delta v_k],$$

pie kam kļūdai ir jābūt augstākas kārtas bezgalīgi mazam lielumam, salīdzinot ar $\Delta\sigma_k$ (vai salīdzinot ar Δv_k).

---

[1] Atbilstošos lielumus, kas attiecas uz līniju, izsaka ar parasto integrāli.

[2] Lielumus, kam piemīt šī īpašība, sauc par aditīviem.

4) No aptuvenas vienādības dabū precīzu vienādību

$$U=\iint_D f(P)\,d\sigma$$

$$[\text{vai } U=\iiint_D f(P)\,dv].$$

Raksturīgs piemērs ir inerces momenta aprēķināšana (468. §).

468. §. Inerces moments

Kinētiskā enerģija T ķermenim, kas griežas ap asi AB, ir proporcionāla (dotajā ass novietojumā attiecībā pret ķermeni) leņķa ātrumam ω, t. i.,

$$T=I\omega. \tag{1}$$

Proporcionalitātes koeficientu I sauc par ķermeņa *inerces momentu* attiecībā pret asi AB. Ja ķermenis sastāv no n materiāliem punktiem ar masām $m_1, m_2, \ldots, m_n$, kuras atrodas no ass attālumos $r_1, r_2, \ldots, r_n$, tad inerces momentu izsaka formula

$$I=m_1r_1^2+m_2r_2^2+\ldots+m_nr_n^2. \tag{2}$$

Inerces momenta izteiksmi kompaktam ķermenim dabū no (2), pielietojot 467. § shēmu. Šai nolūkā

1) inerces momentu I nostāda atbilstībā ar apgabalu D, ko aizņem ķermenis;

2) apgabalu D sadala daļās $D_1, D_2, \ldots, D_n$. Pie tam I sadalās daļās $I_1, I_2, \ldots, I_n$, kuri summā dod I.

3) pieņemsim, ka daļiņā D_k blīvums μ_k visur ir tāds pats kā vienā tās punktā P_k. Dabūsim aptuvenu vienādību

$$m_k \approx \mu_k\, \Delta v_k, \tag{3}$$

un inerces moments I_k izteiksies ar aptuvenu formulu

$$I_k \approx \mu_k r_k^2\, \Delta v_k. \tag{4}$$

4) No aptuvenās vienādības (4) dabūjam precīzu vienādību

$$I=\iiint\limits_{D}\mu r^2\,dv. \tag{5}$$

Piemēru sk. 466. paragrāfā.

Ja rotācijas asi AB pieņemam par aplikātu asi, tad formula (5) pieņem izskatu

$$I=\iiint\limits_{D}\mu(x, y, z)\,(x^2+y^2)\,dx\;dy\,dz. \tag{6}$$

Ja dotais ķermenis ir platīte, kuras plakne ir perpendikulāra asij AB, tad trīskāršā integrāļa (6) vietā dabūsim divkāršo integrāli

$$I=\iint\limits_{D}\mu(x, y)\,(x^2+y^2)\,dx\,dy, \tag{7}$$

kur $\mu(x, y)$ ir platītes virsmas blīvums.

Ja dotais ķermenis ir taisns stienītis, kas asi AB krusto taisnā leņķī, tad, sakļaujot to ar OX asi (tad dabūsim $y=0$), trīskāršā integrāļa (6) vietā dabūsim parasto noteikto integrāli

$$I=\int_a^b\mu(x)\,x^2\,dx, \tag{8}$$

kur $\mu(x)$ ir stienīša lineārais blīvums.

P i e z ī m e. Par ģeometriska ķermeņa inerces momentu sauc materiāla ķermeņa inerces momentu, kurš aizņem to pašu telpu un kuram blīvums visur ir vienāds ar vienu.

Formulas (6), (7), (8) iegūst izskatu

$$I=\iiint\limits_{D}(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz, \tag{6a}$$

$$I=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\,dx\,dy, \tag{7a}$$

$$I=\int_a^b x^2\,dx\left(=\frac{b^3-a^3}{3}\right). \tag{8a}$$

469. §. Dažu fizikālu un ģeometrisku lielumu izteiksmes ar divkāršajiem integrāļiem

Lieluma nosaukums	Vispārīgā izteiksme	Taisnleņķa koordinātēs	Polārajās koordinātēs
Plaknes figūras laukums	$S=\iint\limits_D d\sigma$	$\iint dx\,dy$	$\iint r\,dr\,d\varphi$
Virsmas gabala laukums (459. §)[1]	$S=\iint\limits_D \frac{d\sigma}{\cos\gamma}$	$\iint\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$	$\iint\sqrt{r^2+r^2\left(\frac{\partial z}{\partial \varrho}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}\,dr\,d\varphi$
Tilpums cilindriskam ķermenim, kas novietots uz XOY plaknes (452. §)	$V=\iint\limits_D z\,d\sigma$	$\iint z\,dx\,dy$	$\iint zr\,dr\,d\varphi$
Plaknes figūras[2] inerces moments attiecībā pret OZ asi[3]	$I_z=\iint\limits_D r^2\,d\sigma$	$\iint (x^2+y^2)\,dx\,dy$	$\iint r^3\,dr\,d\varphi$

Plaknes figūras[2] inerces moments attiecībā pret OX asi	$I_x=\iint\limits_D y^2\,d\sigma$	$\iint y^2\,dx\,dy$	$\iint r^3 \sin^2\varphi\,dr\,d\varphi$
Homogēnas platītes[2] smaguma centra koordinātes	$x_c=\dfrac{\iint\limits_D x\,d\sigma}{S}$	$\dfrac{\iint x\,dx\,dy}{S}$	$\dfrac{\iint r^2\cos\varphi\,dr\,d\varphi}{S}$
	$y_c=\dfrac{\iint\limits_D y\,d\sigma}{S}$	$\dfrac{\iint y\,dx\,dy}{S}$	$\dfrac{\iint r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi}{S}$

[1] Apgabals D ir virsmas gabala projekcija XOY plaknē; katrā apgabala punktā projicējas tikai viens virsmas punkts; γ — leņķis starp pieskaru plakni un XOY plakni.
[2] Kas sakļauta ar XOY plakni.
[3] Jeb, kas ir tas pats, attiecībā pret centru O.

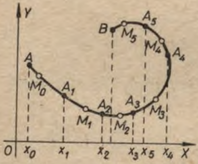
470. §. Dažu fizikālu un ģeometrisku lielumu izteiksmes ar trīskāršajiem integrāļiem

Lieluma nosaukums	Vispārīgā izteiksme	Taisnleņķa koordinātēs	Cilindriskajās koordinātēs	Sfēriskajās koordinātēs
Ķermeņa tilpums	$V=\iiint_D dv$	$\iiint dx\,dy\,dz$	$\iiint r\,dr\,d\varphi\,dz$	$\iiint \varrho^2 \sin\theta\,d\varrho\,d\varphi\,d\theta$
Ģeometriska ķermeņa inerces moments attiecībā pret OZ asi	$I_z=\iiint_D r^2\,dv$	$\iiint (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$	$\iiint r^3\,dr\,d\varphi\,dz$	$\iiint \varrho^4 \sin^3\theta\,d\varrho\,d\varphi\,d\theta$
Fizikāla ķermeņa masa [1]	$M=\iiint_D \mu\,dv$	$\iiint \mu\,dx\,dy\,dz$	$\iiint \mu r\,dr\,d\varphi\,dz$	$\iiint \mu\varrho^2 \sin\theta\,d\varrho\,d\varphi\,d\theta$
Homogēna ķermeņa smaguma centra koordinātes	$x_c=\dfrac{\iiint_D x\,dv}{V}$	$\dfrac{\iiint x\,dx\,dy\,dz}{V}$		
	$y_c=\dfrac{\iiint_D y\,dv}{V}$	$\dfrac{\iiint y\,dx\,dy\,dz}{V}$		
	$z_c=\dfrac{\iiint_D z\,dv}{V}$	$\dfrac{\iiint z\,dx\,dy\,dz}{V}$		

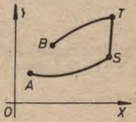
[1] Ar μ apzīmēts blīvums (punkta funkcija).

471. §. Līnijintegrālis

Pieņemsim, ka dota kādā skaitļu plaknes XOY apgabalā nepārtraukta funkcija $P(x, y)$. Ņemsim šai apgabalā kādu līniju[1] ar sākumu punktā A (463. un 464. zīm.) un galu punktā B (gals var sakrist ar sākumu).



463. zīm.



464. zīm.

Sadalīsim AB (463. zīm.) n parciāllokos AA_1, A_1A_2, ... , $A_{n-1}B$ un vienveidības dēļ piešķirsim punktiem A, B apzīmējumus A_0, A_n. Uz katra parciālloka A_iA_{i+1} ņemsim vienu punktu $M_i(x_i, y_i)$ un sastādīsim summu

$$S_n = P(x_1\, y_1)\Delta x_1 + \\ + P(x_2, y_2)\Delta x_2 + \ldots + P(x_n, y_n)\Delta x_n, \quad (1)$$

kur Δx_i ir abscisas pieaugums, kas atbilst pārejai no punkta A_{i-1} uz punktu A_i[2].

Spēkā šāda teorēma.

T e o r ē m a. Ja, skaitlim n neierobežoti augot, lielākais no lielumiem $|\Delta x_i|$ tiecas uz nulli, tad summa (1) tiecas uz robežu, kas nav atkarīga ne no gabalu A_iA_{i+1} veidošanas paņēmiena, ne no starppunktu M_i izvēles.

D e f i n ī c i j a. Robežu, uz kuru tiecas summa S_n, kad lielākais no lielumiem $|\Delta x_i|$ tiecas uz nulli, sauc par izteiksmes $P(x, y)dx$ *līnijintegrāli*, kas *ņemts pa ceļu* AB.

---

[1] Pieņemts, ka līnijas AB pieskare mainās nepārtraukti, tomēr pieļaujams izņēmums atsevišķiem punktiem (galīgā skaitā), kur pieskare var mainīties ar lēcienu, kā 464. zīm. punktos S, T.

[2] Šis pieaugums var būt tiklab pozitīvs(kā gabalā AA_1), kā arī negatīvs (kā gabalā A_4A_5).

Apzīmējums.

$$\int_{AB} P(x, y)\,dx. \tag{2}$$

Analogi definē izteiksmes $Q(x, y)dy$ līnijintegrāli, kuru apzīmē ar simbolu

$$\int_{AB} Q(x, y)\,dy, \tag{3}$$

un arī izteiksmes $P(x, y)dx+Q(x, y)dy$ līnijintegrāli, kuru apzīmē ar simbolu

$$\int_{AB} P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy. \tag{4}$$

Integrāļi (2) un (3) ir integrāļa (4) atsevišķi veidi (ja $Q=0$ vai ja $P=0$).

Tādā pašā veidā definē līnijintegrāli

$$\int_{AB} P(x, y, z)\,dx+Q(x, y, z)\,dy+R(x, y, z)\,dz \tag{5}$$

pa telpas līniju AB.

1. piezīme. Ja, paturot līniju AB, ceļa virzienu maina uz pretējo, tad līnijintegrālis saglabā absolūto vērtību, bet maina zīmi. Ja punkti A un B ir dažādi, tad ceļa virzienu nosaka burtu A, B kārtība pierakstos (2)—(5), un mēs dabūjam

$$\int_{BA} P\,dx+Q\,dy=-\int_{AB} P\,dx+Q\,dy,$$

$$\int_{BA} P\,dx+Q\,dy+R\,dz=-\int_{AB} P\,dx+Q\,dy+R\,dz.$$

Ja punkti A un B sakrīt, tad ceļa virzienu var norādīt ar starppunktiem noteiktā kārtībā.

Tādus norādījumus var nedot, ja ceļš ir plaknes apgabala kontūra K. Šai gadījumā pieraksts $\int\limits_{+K} P\,dx + Q\,dy$ nozīmē, ka apgabala apeju izdara pretēji pulksteņa rādītāju kustības virzienam (parastā asu novietojumā). Ja apgabalu apiet pretējā virzienā, tad līnijintegrāli apzīmē ar simbolu $\int\limits_{-K} P\,dx + Q\,dy$.

2. piezīme. Līnijintegrālis ir parastā noteiktā integrāļa vispārinājums [1], un tam piemīt visas noteiktā integrāļa īpašības (315. §).

472. §. Līnijintegrāļa mehāniskā nozīme

Pieņemsim, ka materiāls punkts M ar masu m kustas pa ceļu AB spēku laukā. Pieņemsim, ka $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ ir koordinātes *snrieguma vektoram* punktā $M(x; y; z)$, t. i., spēkam F, kas punktā $(x; y; z)$ darbojas uz masas vienību. Tad darbu, ko veic spēks, kas darbojas uz punktu M, izsaka ar līnijintegrāli

$$\int\limits_{AB} m(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz). \qquad (1)$$

Paskaidrojums. Pieņemsim, ka A_iA_{i+1} ir ceļa AB mazs gabaliņš. Šai mazajā ceļa gabaliņā darbu aptuveni izteiks [2] skalārais reizinājums (104a. §) $m\mathbf{F}_i\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$, kur $\mathbf{F}_i$ ir snrieguma vektors punktā A_i. Koordinātu formā dabūjam (107. §) izteiksmi $m[X_i\Delta x_i + Y_i\Delta y_i + Z_i\Delta z_i]$. Summējot atradīsim aptuvenu darba vērtību ceļā AB. Summas robeža, t. i., līnijintegrālis (1), dos precīzu darba vērtību.

[1] Ja integrācijas ceļš AB ir abscisu ass nogrieznis (a, b), tad līnijintegrālis $\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ pārvēršas parastajā noteiktajā integrālī $\int\limits_a^b P(x, 0)\,dx$.

[2] Līklīnijas loku $\overset{\frown}{A_iA_i}$ mēs aizstājam ar hordu A_iA_{i+1} un pieņemam, ka uz šīs hordas lauka spriegums paliek nemainīgs.

473. §. Līnijintegrāļa aprēķināšana

Lai aprēķinātu līnijintegrāli

$$\int_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy, \tag{1}$$

līnija AB jāizsaka ar parametriskajiem vienādojumiem

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{2}$$

un izteiksme (2) jāievieto zemintegrāļa izteiksmē. Iegūtais noteiktais integrālis

$$\int_{t_A}^{t_B} \{P[\varphi(t), \psi(t)]\,\varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)]\,\psi'(t)\}\,dt \tag{3}$$

ir vienāds ar līnijintegrāli (1).

Piezīme. Vienu no funkcijām $\varphi(t)$, $\psi(t)$ var izvēlēties patvaļīgi, tikai tā, lai abām funkcijām $\varphi(t)$, $\psi(t)$ būtu nepārtraukti atvasinājumi visā intervālā (t_A, t_B), izņemot punktus, kur pieskare mainās ar lēcienu, kā punktos S, T 464. zīmējumā. Ja tādi punkti ir, tad integrālis (3) ir neīstais (328. §).

Analogi aprēķina līnijintegrāli pa telpas līniju.

1. piemērs. Aprēķināt līnijintegrāli

$$I = \int_{AB} -y\,dx + x\,dy \tag{4}$$

pa riņķa līnijas $x^2 + y^2 = a^2$ (465. zīm.) augšējo pusi.

Atrisinājums. Izsakām loku AB ar parametriskajiem vienādojumiem

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t \tag{5}$$

(šeit t ir leņķis BOM, tā ka $t_A = \pi$, $t_B = 0$). Ievietojot izteiksmes (5) integrālī (4), atrodam

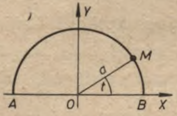
$$I = \int_{\pi}^{0} -a\sin t\,d(a\cos t) + a\cos t\,d(a\sin t) =$$

$$= a^2 \int_{\pi}^{0} dt = -\pi a^2. \tag{6}$$

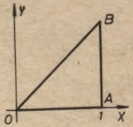
Par parametru var pieņemt abscisu x, t. i., ņemt pusaploces vienādojumu veidā $y=\sqrt{a^2-x^2}$. Tad $x_A=-a$, $x_B=a$, un mēs dabūjam

$$I=\int_{-a}^{a}-\sqrt{a^2-x^2}\,dx+x\,d\sqrt{a^2-x^2}=-a^2\int_{-a}^{a}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\pi a^2.$$

Lai varētu par parametru pieņemt ordināti y, tad loks AB vispirms jāsadala divās daļās, citādi x nebūs vienvērtīga ordinātes funkcija.



465. zīm.



466. zīm.

2. piemērs. Aprēķināt līnijintegrāli

$$I=\int_{OABO}(x-y^2)\,dx+2xy\,dy \tag{7}$$

pa trijstūra OAB perimetru (466. zīm.).

Atrisinājums. Sadalām slēgto ceļu $OABO$ trīs gabalos OA, AB, BO. Gabalā OA par parametru pieņemam abscisu (tad $y=0$, $dy=0$), gabalā AB — ordināti (tad $x=1$, $dx=0$), gabalā BO — abscisu (tad $y=x$, $dy=dx$). Dabūjam

$$I_1=\int_{OA}(x-y^2)\,dx+2xy\,dy=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2},$$

$$I_2=\int_{AB}(x-y^2)\,dx+2xy\,dy=\int_0^1 2y\,dy=1,$$

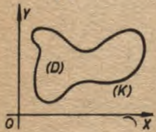
$$I_3=\int_{BO}(x-y^2)\,dx+2xy\,dy=\int_1^0(x+x^2)\,dx=-\frac{5}{6};$$

$$I=I_1+I_2+I_3=\frac{1}{2}+1-\frac{5}{6}=\frac{2}{3}.$$

474. §. Grīna formula

Pieņemsim, ka D ir plaknes apgabals, ko ierobežo kontūra K (467. zīm.), un bez tam pieņemsim, ka visur šai apgabalā funkcijas $P(x, y)$, $Q(x, y)$ līdz ar saviem parciālajiem atvasinājumiem $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ ir nepārtrauktas. Tad spēkā sekojoša Grīna[1] formula:

$$\int\limits_{+K} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy. \qquad (1)$$



467. zīm.

P i e m ē r s. Aprēķināt līnijintegrāli $I = \int (x - y^2)\,dx + 2y\,dy$ pa trijstūra OAB (466. zīm.) perimetru (sal. 473. § 2. piemēru).

A t r i s i n ā j u m s. Ar formulu (1), ņemot $P = x - y^2$, $Q = 2xy$, atrodam

$$I = \iint\limits_{D} \left[\frac{\partial}{\partial x}(2xy) - \frac{\partial}{\partial y}(x - y^2)\right] dx\,dy = \iint\limits_{D} 4y\,dx\,dy.$$

Šeit apgabals D ir trijstūris OAB; aprēķinot divkāršo integrāli, atrodam

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x 4y\,dy = \int\limits_0^1 2x^2\,dx = \frac{2}{3}.$$

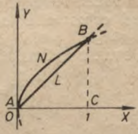
475. §. Noteikums, kad līnijintegrālis nav atkarīgs no ceļa

Pieņemsim, ka funkcijas $P(x, y)$, $Q(x, y)$ un arī to parciālie atvasinājumi $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ ir nepārtraukti apgabalā D (468. zīm.), kuru ierobežo kāda nepārtraukta slēgta līnija (kas sevi nekrusto). Ņemsim apgabalā D divus fiksētus

[1] D ž o r d ž s G r ī n s (1793—1841) — angļu matemātiķis un fiziķis, kam ieli nopelni elektrības un magnētisma matemātiskās teorijas attīstībā.

punktus $A(x_0; y_0)$, $B(x_1; y_1)$ un apskatīsim visdažādākos integrācijas ceļus, kas ved no A uz B un pilnīgi atrodas apgabalā D (tādi ceļi 468. zīmējumā ir ALB, ANB). Iespējami divi gadījumi.

468. zīm.



469. zīm.

1. gadījums (īpašais). Apgabalā D identiski izpildīta vienādība

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0. \tag{1}$$

Tad līnijintegrālis

$$I = \int_{AB} P\,dx + Q\,dy \tag{2}$$

nav atkarīgs no ceļa izvēles, un šai gadījumā to apzīmē

$$\int_A^B P\,dx + Q\,dy.$$

2. gadījums (vispārīgais). Vienādība (1) nav identitāte. Tad līnijintegrālis (2) ir atkarīgs no ceļa izvēles.

Paskaidrojums. Līnijintegrāļu $I_1 = \int_{ALB} P\,dx + Q\,dy$, $I_2 = \int_{ANB} P\,dx + Q\,dy$ starpība $I_1 - I_2$ ir vienāda ar summu $I_1 + (-I_2)$, t. i., (471. §) ar summu $\int_{ALB} P\,dx + Q\,dy +$ $+ \int_{BNA} P\,dx + Q\,dy$. Šī summa dod integrāli pa kontūŗu

$ALBNA$, bet tas ir vienāds (474. §) ar divkāršo integrāli $I_3=\iint\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$ pa apgabalu $ALBNA$. Ja vienādība (1) ir identitāte, tad $I_3=0$; tātad $I_1=I_2$, t. i., līnijintegrāļi pa ceļiem ALB, ANB ir vienādi. Ja vienādība (1) nav identitāte, tad ceļus ALB un ANB var izvēlēties tā, lai $I_3\neq 0$ un tad $I_1\neq I_2$.

1. piemērs. Apskatīsim integrāli

$$I=\int\limits_{AB} y\,dx+x\,dy. \tag{3}$$

Funkcijas $P(x,y)=y$, $Q(x,y)=x$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=1$, $\frac{\partial P}{\partial y}=1$ ir visur nepārtrauktas, un vienādība (1) izpildīta identiski. Tātad, ja punkti A, B ir fiksēti, tad integrālis (3) nav atkarīgs no ceļa. Ņemsim, piemēram, punktus $A(0;0)$ un $B(1;1)$ (469. zīm.) un aprēķināsim integrāli I pa taisnlīnijas ceļu $ALB(y=x)$. Dabūsim

$$I_{ALB}=\int\limits_0^1 x\,dx+x\,dx=1.$$

Ja par ceļu ņemam parabolas $ANB(x=y^2)$ loku, tad atkal dabūsim $I_{ANB}=\int\limits_0^1 y\,d(y^2)+y^2\,dy=3\int\limits_0^1 y^2\,dy=1$. To pašu vērtību dabūsim, ejot pa lauzto līniju ACB. Uz nogriežņa AC dabūjam $y=0$, $dy=0$, tā ka $I_{AC}=\int\limits_0^1 0\cdot dx=0$; uz CB dabūjam $x=1$, $dx=0$, tā ka $I_{CB}=\int\limits_0^1 1\cdot dy=1$. Tātad $I_{ACB}=$ $=I_{AC}+I_{CB}=1$.

Pieraksts. $I=\int\limits_{A(0;\,0)}^{B(1;\,1)} y\,dx+x\,dy=1.$

2. piemērs. Paturot punktus $A(0;0)$, $B(1;1)$, apskatīsim integrāli $I=\int\limits_{AB} y^2\,dx+x^2dy$. Vienādība (1) pieņem iz-

skatu $x-y=0$, t. i., nav identitāte. Integrālis I tagad ir atkarīgs no ceļa. Tā pa ceļu ALB (469. zīm.) dabūjam $I=\int_0^1 x^2\,dx+x^2\,dy=\frac{2}{3}$, bet pa ceļu ANB integrālim ir cita vērtība

$$I=\int_0^1 y^2\,d(y^2)+y^4\,dy=\int_0^1 (2y^3+y^4)\,dy=\frac{7}{10}.$$

To pašu vērtību $^7/_{10}$ dabūsim, ejot pa parabolas $y=x^2$ loku. Un vispār 2. gadījumā vienmēr var speciāli sameklēt divus ceļus, ejot pa kuriem, integrālim būtu vienādas vērtības.

476. §. Cita iepriekšējā paragrāfa noteikuma forma

1. teorēma (pilnā diferenciāļa pazīme). Ja vienādība

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0 \tag{1}$$

apgabalā D ir izpildīta identiski, tad katram šī apgabala punktam izteiksme $P\,dx+Q\,dy$ ir kādas funkcijas $F(x;\,y)$ pilnais diferenciālis. Ja turpretim vienādība (1) nav identitāte, tad izteiksme $P\,dx+Q\,dy$ nav nevienas funkcijas pilnais diferenciālis.

1. piemērs. Izteiksmei $y\,dx+x\,dy$ (šeit $P=y$, $Q=x$) vienādība (1) ir izpildīta identiski jebkurā apgabalā. Tāpēc $y\,dx+x\,dy$ ir kādas funkcijas $F(x,y)$ pilnais diferenciālis. Šai gadījumā var ņemt $F(x,y)=xy$ vai $xy+3$ un vispārīgi $xy+C$.

2. piemērs. Izteiksme $y^2\,dx+x^2\,dy$ nevar būt pilnais diferenciālis nevienai funkcijai, jo izteiksme (1), kas tagad pieņem izskatu $2x-2y=0$, nav identitāte.

Paskaidrojums. Pieņemsim, ka $y^2\,dx+x^2\,dy$ ir kādas funkcijas $F(x,y)$ diferenciālis. Tad dabūtu $\frac{\partial F}{\partial x}=y^2$, $\frac{\partial F}{\partial y}=$ $=x^2$. Bet tas nav iespējams, jo jauktajiem atvasinājumiem

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dF}{\partial y}\right)$ un $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)$ (tie ir nepārtraukti) jābūt vienādiem (443. §), t. i., identiski jābūt izpildītai vienādībai $\frac{\partial}{\partial x}(x^2)-$ $-\frac{\partial}{\partial y}(y^2)=0$, bet tā nav identitāte.

Ievērojot 1. teorēmu, 475. § noteikumu var formulēt tā.

1. gadījums (īpašais). Izteiksme $P\,dx+Q\,dy$ ir (dotajā apgabalā) kādas funkcijas $F(x, y)$ (to sauc par primitīvo funkciju) pilnais diferenciālis. Tad līnijintegrālis $\int\limits_{AB} P\,dx+Q\,dy$ nav atkarīgs no ceļa izvēles (kuram, protams, jāatrodas dotajā apgabalā).

2. gadījums (vispārīgais). Izteiksme $P\,dx+Q\,dy$ nav pilnais diferenciālis. Tad līnijintegrālis ir atkarīgs no ceļa izvēles.

Pirmajā gadījumā, zinot primitīvo funkciju, integrāļa vērtību var aprēķināt, pamatojoties uz šādu teorēmu.

2. teorēma. Ja zemintegrāļa izteiksme $P\,dx+Q\,dy$ ir funkcijas $F(x, y)$ pilnais diferenciālis, tad līnijintegrālis $\int\limits_{A}^{B} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$ ir vienāds ar starpību starp šīs funkcijas vērtībām punktos B un A, t. i.,

$$\int\limits_{A(x_0;\,y_0)}^{B(x_1;\,y_1)} P\,dx+Q\,dy=\int\limits_{A(x_0;\,y_0)}^{B(x_1;\,y_1)} dF(x,y)=$$
$$=F(x_1, y_1)-F(x_0, y_0). \tag{2}$$

3. piemērs. Integrālis $I=\int\limits_{AB} 2xy\,dx+x^2\,dy$, ja fiksēti punkti $A(1; 3)$, $B(2; 4)$, nav atkarīgs no ceļa izvēles $\left[\text{jo } \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial(x^2)}{\partial x}-\frac{\partial(2xy)}{\partial y}\equiv 0\right]$. Jāatrod I vērtība.

Atrisinājums. Izteiksme $2xy\,dx+x^2\,dy$ ir funkcijas x^2y pilnais diferenciālis. Saskaņā ar 2. teorēmu dabūjam

$$I=\int\limits_{A(1;\,3)}^{B(2;\,4)} d(x^2y)=2^2\cdot 4-1^2\cdot 3=13.$$

Piezīme. Atrast primitīvo funkciju vispārīgā gadījumā ir tikpat grūti, cik tieši aprēķināt līnijintegrāli.

Bet daudzos gadījumos primitīvās funkcijas atrašanu var atvieglināt. Tā, ja abas funkcijas $P(x, y)$, $Q(x, y)$ ir locekļu Ax^my^n (A ir pastāvīgs lielums, m un n — jebkuri reāli skaitļi) summas, tad primitīvo funkciju atrod šādā veidā. Aprēķinām nenoteiktos integrāļus $\int P(x, y)\,dx$, $\int Q(x, y)\,dy$, uzskatot pirmajā integrālī y, bet otrajā — x par pastāvīgu. Dabūtās divas izteiksmes apvienojam, pie kam locekļus, kas ieiet abos integrāļos, ņemam tikai vienu reizi. Patvaļīgās konstantes, kas rodas integrēšanas rezultātā, var nerakstīt, jo pietiek atrast vienu primitīvo funkciju.

4. piemērs. Aprēķināt līnijintegrāli

$$I=\int\limits_{A(0;\,0)}^{B(1;\,1)} x(1+2y^3)\,dx+3y^2(x^2-1)\,dy$$

[noteikums (1) ir izpildīts].

Atrisinājums. Atrodam $\int x(1+2y^3)\,dx=\frac{x^2}{2}+x^2y^3$ (y uzskatām par pastāvīgu) un $\int 3y^2(x^2-1)\,dy=x^2y^3-y^3$ (x uzskatām par pastāvīgu).

Apvienojam šīs izteiksmes, pie kam locekli x^2y^3 ņemam vienu reizi. Dabūjam primitīvo funkciju $F(x, y)=\frac{x^2}{2}-y^3+$ $+x^2y^3$. Formula (2) dod $I=F(1, 1)-F(0, 0)={}^1/_2$.

DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMI

477. §. Pamatjēdzieni

Par *diferenciālvienādojumu* sauc vienādojumu, kas satur nezināmās funkcijas (vai vairāku nezināmo funkciju) atvasinājumus. Atvasinājumu vietā vienādojums var saturēt diferenciāļus.

Ja nezināmās funkcijas ir atkarīgas no viena argumenta, tad diferenciālvienādojumu sauc par *parasto*, ja no vairāk argumentiem, tad vienādojumu sauc par *parciālo diferenciālvienādojumu*. Šeit mēs apskatīsim tikai parastos diferenciālvienādojumus.

Vispārīgais veids diferenciālvienādojumam ar vienu nezināmo funkciju ir šāds:

$$\Phi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \qquad (1)$$

Par *diferenciālvienādojuma kārtu* sauc augstākā atvasinājuma kārtu, kurš ietilpst šai vienādojumā.

Piemēri. Vienādojums $y' = \frac{y^2}{x}$ ir pirmās kārtas diferenciālvienādojums, vienādojums $y'' + y = 0$ — otrās kārtas, vienādojums $y'^2 = x^3$ — pirmās kārtas diferenciālvienādojums.

Funkciju $y = \varphi(x)$ sauc par diferenciālvienādojuma *atrisinājumu*, ja, diferenciālvienādojumā ievietojot funkciju $y = \varphi(x)$, tas pārvēršas identitātē.

Diferenciālvienādojumu teorijas pamatuzdevums ir visu atrisinājumu atrašana dotajam diferenciālvienādojumam. Vienkāršākajos gadījumos šis uzdevums reducējas uz integrāļa aprēķināšanu. Tāpēc diferenciālvienādojuma atrisinājumu sauc arī par tā *integrāli*, bet visu atrisinājumu atrašanas procesu — par diferenciālvienādojuma *integrēšanu*.

Vispārīgi *par dotā diferenciālvienādojuma integrāli sauc jebkuru vienādojumu, kas nesatur atvasinājumus un no kura dotais diferenciālvienādojums rodas kā secinājums.*

1. piemērs. Funkcija $y=\sin x$ ir atrisinājums (integrālis) otrās kārtas diferenciālvienādojumam

$$y''+y=0, \tag{2}$$

jo, ja $y=\sin x$ ievietojam vienādībā (2), tad tā pieņem izskatu

$$(\sin x)''+\sin x=0, \tag{3}$$

t. i., kļūst par identitāti.

Funkcijas $y=\frac{1}{2}\sin x$, $y=\cos x$, $y=3\cos x$ arī ir vienādojuma (2) atrisinājumi, funkcija $y=\sin x+\frac{1}{2}$ nav atrisinājums.

2. piemērs. Apskatīsim pirmās kārtas diferenciālvienādojumu

$$xy'+y=0. \tag{4}$$

Funkcija

$$y=\frac{1,5}{x} \tag{5}$$

ir vienādojuma (4) atrisinājums, jo, ievietojot (5) vienādojumā (4), dabūjam identitāti

$$x\cdot\frac{1,5}{-x^2}+\frac{1,5}{x}=0.$$

Līdz ar to vienādojums (5) ir diferenciālvienādojuma (4) integrālis. $(xy)'=x'y+xy'=0 \rightarrow xy'+y=0$

Vienādojums

$$xy=0,2 \tag{6}$$

$(xy)'=0$

arī ir diferenciālvienādojuma (4) integrālis. Tiešām, no (6) seko, ka $(xy)'=0$, bet no šejienes (ja pielieto reizinājuma atvasinājuma formulu) izriet (4). No integrāļa (6), atrisinot to attiecībā pret y, dabūjam

$$y=\frac{0,2}{x}. \tag{7}$$

Funkcija (7) ir diferenciālvienādojuma (4) atrisinājums. Līdz ar to vienādojums (7) ir vienādojuma (4) integrālis.

Vienādojumi $xy=\sqrt{3}$, $xy=-2$, $xy=\pi$ utt. ir diferenciālvienādojuma (4) integrāļi, bet funkcijas $y=\frac{\sqrt{3}}{x}$, $y=-\frac{2}{x}$, $y=\frac{\pi}{x}$ utt. — tā atrisinājumi.

3. piemērs. Atrast visus atrisinājumus pirmās kārtas diferenciālvienādojumam

$$y'=\cos x. \tag{8}$$

Atrisinājums. Nezināmā funkcija $y=\varphi(x)$ ir funkcijas $\cos x$ primitīvā funkcija. Šādas funkcijas vispārīgākais veids ir nenoteiktais integrālis $\int \cos x\,dx$. Tātad visi atrisinājumi ietverti formulā

$$y=\sin x+C. \tag{9}$$

Funkcija $y=\sin x+C$, kas satur patvaļīgu konstanti C, ir vienādojuma (8) *vispārīgais atrisinājums*[1], funkcija $y=\sin x$ (un arī $y=\sin x+\frac{1}{2}$, $y=\sin x-1$ utt.) ir *partikulārais* jeb *atsevišķais* atrisinājums.

478. §. Pirmās kārtas vienādojums

Pirmās kārtas diferenciālvienādojuma vispārīgais izskats ir šāds:

$$\Phi(x, y, y')=0. \tag{1}$$

Vienādojumam, kas *atrisināts attiecībā pret y'*, ir izskats

$$y'=f(x, y). \tag{2}$$

Pieņemts, ka funkcija $f(x, y)$ ir kādā apgabalā vienvērtīgi definēta un nepārtraukta; meklē integrāli, kas pieder šim apgabalam.

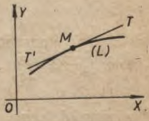
[1] Diferenciālvienādojuma vispārīgā un partikulārā atrisinājuma definīcijas sk. 481. paragrāfā (pirmās kārtas vienādojumam) un 493. un 494. paragrāfā (augstākas kārtas vienādojumiem).

479. §. Pirmās kārtas vienādojuma ģeometriskā interpretācija

Līniju L (470. zīm.), kas attēlo kādu diferenciālvienādojuma

$$y'=f(x, y) \tag{1}$$

integrāli, sauc par šī vienādojuma *integrāllīniju.*



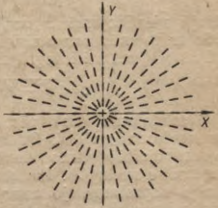
470. zīm.

Atvasinājums y' ir integrāllīnijas pieskares $T'T$ virziena koeficients. Jau pirms integrāllīnijas atrašanas, kura iet caur doto punktu $M(x; y)$, mēs no vienādojuma (1) varam atrast y' un novilkt caur M taisni $T'T$. Tā norādīs meklētās integrāllīnijas virzienu. Taišņu $T'T$ kopu, kuras atbilst visiem apskatāmā apgabala punktiem, sauc par vienādojuma (1) *virzienu lauku.*

Vienādojuma (1) integrēšanas uzdevumu ģeometriski formulē tā: *atrast līnijas, kurām pieskares virziens visur sakrīt ar lauka virzienu.*

Ja virzienu lauku attēlo ar īsām, biezi novilktām svītriņām (471. un 472. zīm.), tad integrāllīnijas var konstruēt (aptuveni) pēc acumēra,

471. zīm.



472. zīm.

1. piemērs. 471. zīmējumā attēlots virzienu lauks vienādojumam

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}. \tag{2}$$

Vienādojums (2) izsaka, ka lauka virziens punktā $M(x, y)$ ir perpendikulārs taisnei OM (lauka virziena koeficients ir $\frac{dy}{dx}$, bet taisnes OM virziena koeficients ir $\frac{y}{x}$). Viegli var ieskatīt, ka integrāllīnijas ir riņķa līnijas ar centru punktā O. Tātad vienādojuma (2) integrāļiem ir izskats

$$x^2+y^2=a^2, \tag{3}$$

kur a^2 ir konstante, kas drīkst pieņemt jebkuru pozitīvu vērtību. Funkcijas

$$y=\sqrt{a^2-x^2}, \quad y=-\sqrt{a^2-x^2} \tag{4}$$

ir vienādojuma (2) atrisinājumi, ko var viegli pārbaudīt.

P i e z ī m e. Saskaņā ar 478. § OX ass punkti no apskata jāizslēdz, jo funkcija $f(x, y)=-\frac{x}{y}$ šajos punktos nav definēta. Tomēr šajos punktos mēs attēlojam lauka virzienu (ar vertikālām svītriņām). Līdz ar to mēs *paplašinām* vienādojuma (2) *jēgu* (saskaņā ar tā ģeometrisko interpretāciju).

Pierakstu (2) mēs faktiski saprotam kā *divu vienādojumu kopu:*

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}, \quad \frac{dx}{dy}=-\frac{y}{x}. \tag{2a}$$

Otrajā vienādojumā x uzskata par argumenta y funkciju. Līdz ar to mēs par atrisinājumiem uzskatām ne tikai integrāļus (4), bet arī integrāļus

$$x=\sqrt{a^2-y^2}, \quad x=-\sqrt{a^2-y^2}. \tag{4a}$$

Vienādojumu (2a) vērtības ir vienādas visos punktos, kas neatrodas uz OX, OY asīm. Sistēmas (2a) otrais vienādojums aizstāj pirmo vienādojumu visos OX ass punktos (izņemot punktu O). Punkts O tomēr paliek izslēgts. Tas ir pilnīgi saprotams, jo caur to neiet neviena integrāllīnija (riņķa līnija $x^2+y^2=a^2$ deģenerējusies punktā).

Vienādojumu (2), ja to apskata paplašinātā nozīmē, ieteicams rakstīt tā:

$$x\,dx+y\,dy=0. \tag{5}$$

Šeit pasvītrota mainīgo x, y līdztiesība. Vienādojumu (5) var pārveidot tā: $d(x^2+y^2)=0$. Tas nozīmē, ka x^2+y^2 ir pastāvīgs lielums un tad mēs atkal dabūjam integrāli (3).

2. piemērs. 472. zīmējumā attēlots vienādojuma

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x} \tag{6}$$

virzienu lauks. Integrāllīnijas ir taisnes $y=Cx$. Saprotot vienādojumu (6) paplašinātā nozīmē (sk. iepriekšējo piezīmi), mēs varam attēlot lauka virzienus arī jebkurā OY ass punktā (izņemot punktu O). Dabūsim vertikālas svītriņas, kas novietotas uz vertikālas taisnes. Tātad šī taisne pieder integrāllīnijām $y=Cx$.

Punktā O lauka virziens paliek nenoteikts; caur to iet visu iespējamo virzienu integrāllīnijas.

Funkcijas

$$y=Cx \quad (C \text{ — konstante}) \tag{7}$$

un arī funkcijas

$$x=C_1 y \quad (C_1 \text{ — konstante}) \tag{7a}$$

ir vienādojuma (6) atrisinājumi (integrāļi). Integrāļi ir arī vienādojumi

$$\frac{y}{x}=C, \quad \frac{x}{y}=C, \quad \frac{x^2}{y^2}=C, \quad \ln\left|\frac{y}{x}\right|=C \tag{8}$$

utt.

Vienādojumu (6) var rakstīt arī veidā

$$x\,dy-y\,dx=0. \tag{9}$$

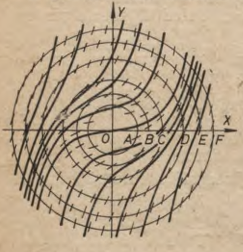
Ja vienādojumu (9) izdalām ar x^2, tad dabūjam $\frac{x\,dy-y\,dx}{x}=0$, t. i., $d\left(\frac{y}{x}\right)=0$. No šejienes dabūjam integrāli $\frac{y}{x}=C$. Izdalot (9) ar y^2, dabūsim $\frac{x}{y}=C_1$ $\left(\text{šeit } C_1=\frac{1}{C}\right)$.

3. piemērs. Vienādojuma $y'=f(x)$ virzienu lauku mēs apskatījām 295. paragrāfā (1.—3. piemērs). Integrāllīnijas $y=\int f(x)dx$ atrodas viena no otras vienādā attālumā (OY ass virzienā).

480. §. Izoklinas

Vienādojuma $y'=f(x, y)$ virzienu lauka konstrukcija kļūst vieglāka, ja iepriekš uzzīmē *vienāda slīpuma līnijas (izoklinas);* tās ir tādas līnijas, uz kurām funkcijai $f(x, y)$ ir pastāvīga vērtība. Visos kādas izoklinas punktos lauka virziens ir viens un tas pats.

Piemērs. Vienādojumam $y'=x^2+y^2$ izoklinas ir riņķa līnijas $x^2+y^2=a^2$ (473. zīm.). Visos riņķa līnijas $x^2+y^2=1$ punktos (rādiuss OC pieņemts par mērvienību) lauka virziena koeficients y' ir vienāds ar vienu, visos riņķa līnijas $x^2+y^2=$ $=2$ punktos (ar rādiusu $OD=\sqrt{2}$) dabūjam $y'=2$ utt. Integrāllīnijas attēlotas ar treknām nepārtrauktām līknēm.



473. zīm.

Piezīme. Praktiski, lietojot izoklinas, nav vajadzīgs virzienu lauku attēlot ar svītriņām. Pietiek katrai izoklinai pierakstīt skaitlisku atzīmi, kas rāda virziena koeficienta vērtību. Zīmējumā, kur parādītas izoklinas, bez tam attēlo biezu staru kūli un pie katra stara atzīmē tā virziena koeficientu. Atrisinājumu dabū, konstruējot atbilstošajiem stariem paralēlas svītriņas.

481. §. Pirmās kārtas vienādojuma partikulārais un vispārīgais atrisinājums

Pirmās kārtas diferenciālvienādojumam

$$y'=f(x, y) \tag{1}$$

ir neskaitāms daudzums atrisinājumu (sk. 479. § piemērus). Parasti caur apskatāmā apgabala doto punktu (478. §) iet *viena vienīga integrāllīnija*[1]. Atbilstošo vienādojuma (1) atrisinājumu sauc par *partikulāro* jeb *atsevišķo atrisinājumu*, visu partikulāro atrisinājumu kopu sauc par *vispārīgo atrisinājumu*. Diferenciālvienādojuma (1) vispārīgo atrisinājumu cenšas izteikt ar kādu funkciju

$$y=\varphi(x, C) \quad (C \text{ — konstante}), \tag{2}$$

[1] Izņēmums var būt tikai punktos, kur parciālais atvasinājums $f'_y(x, y)$ ir pārtraukts vai neeksistē.

kas dod jebkuru partikulāro atrisinājumu (ja attiecīgi izvēlas C vērtību). Tāda izteikšana dažkārt ir neiespējama pat teorētiski, bet praktiski iespējama tikai nedaudzām (bet svarīgām) vienādojumu klasēm (482.—486. §).

Turpretim partikulāro atrisinājumu, kas iet caur doto punktu (x_0, y_0), var vienmēr atrast, ja ne precīzas izteiksmes veidā ar elementārajām funkcijām, tad aptuveni (ar jebkuru precizitātes pakāpi; 490., 491. §). Skaitļus x_0, y_0 sauc par *sākuma vērtībām.*

Diferenciālvienādojuma (1) integrāli sauc par *vispārīgo,* ja tas ir līdzvērtīgs vispārīgajam atrisinājumam, un par *partikulāru,* ja tas ir līdzvērtīgs vienam vai vairākiem partikulārajiem atrisinājumiem.

1. piemērs. Atradīsim partikulāro atrisinājumu vienādojumam

$$x\,dx + y\,dy = 0 \tag{3}$$

(479. § 1. piemērs), ja sākuma vērtības ir $x_0=4$, $y_0=-3$. Vienādojuma (3) integrāllīnijas ir riņķa līnijas ar centru (0; 0). Caur punktu $M_0(4; -3)$ iet integrāllīnija $x^2+y^2=25$. Šis vienādojums ir vienādojuma (3) partikulārais integrālis. Tas ir ekvivalents diviem partikulārajiem atrisinājumiem

$$y=\sqrt{25-x^2},$$
$$y=-\sqrt{25-x^2}.$$

Otrs ir meklētais atrisinājums (pirmais atrisinājums neiet caur M_0).

2. piemērs. Vienādojuma (3) partikulārajam atrisinājumam, kas iet caur punktu $(x_0; y_0)$, ir izskats

$$y=\sqrt{x_0^2+y_0^2-x^2}, \text{ ja } y_0>0; \tag{4}$$

$$y=-\sqrt{x_0^2+y_0^2-x^2}, \text{ ja } y_0<0. \tag{5}$$

Gadījumā, ja $y_0=0$, t. i., ja punkts $(x_0; y_0)$ atrodas uz OX ass, partikulārajam atrisinājumam (saskaņā ar piezīmi 479. § 1. piemēram) ir izskats

$$x=\sqrt{x_0^2-y^2}, \text{ ja } x_0>0; \tag{6}$$

$$x=-\sqrt{x_0^2-y^2}, \text{ ja } x_0<0. \tag{7}$$

Punktā $x_0=0$, $y_0=0$ (koordinātu sākums) partikulārā atrisinājuma nav.

Partikulāro atrisinājumu (4), (5), (6), (7) kopa veido diferenciālvienādojuma (3) vispārīgo atrisinājumu.

Ja pastāvīgo lielumu $x_0^2+y_0^2$ apzīmē ar C^2, tad vispārīgo atrisinājumu var uzrakstīt tā:

$$y=\pm\sqrt{C^2-x^2}. \tag{8}$$

Vienādojums

$$x^2+y^2=C^2, \tag{9}$$

kas ir ekvivalents vispārīgajam atrisinājumam (8), ir vienādojuma (3) vispārīgais integrālis.

482. §. Vienādojumi ar atdalītiem mainīgajiem

Ja diferenciālvienādojumam ir izskats

$$P(x)\,dx+Q(y)\,dy=0 \tag{1}$$

(koeficients P ir atkarīgs tikai no x, koeficients Q — tikai no y), tad saka, ka *mainīgie ir atdalīti* (jeb *nošķirti*).

Vispārīgais integrālis vienādojumam ar atdalītiem mainīgajiem ir vienādojums [1]

$$\int P(x)\,dx+\int Q(y)\,dy=C \quad (C \text{ — konstante}). \tag{2}$$

Lai atrastu partikulāro integrāli, ja sākuma vērtības ir x_0, y_0, var rīkoties tā: ievietojot x_0, y_0 vienādībā (2), atrodam atbilstošo vērtību $C=C_0$. Ja vispārīgais atrisinājums mūs neinteresē, tad partikulāro atrisinājumu labāk atrast tieši ar formulu

$$\int_{x_0}^{x} P(x)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(y)\,dy=0. \tag{3}$$

[1] Šeit un tālāk simbols $\int$ apzīmē vienu kaut kādu primitīvo funkciju, t. i., patvaļīgo konstanto saskaitāmo šeit neievēro. Starp citu, kļūdas nebūs, ja integrālī $\int P(x)\,dx$ ietilpina konstanto saskaitāmo C_1, bet integrālī $\int Q(y)\,dy$ — saskaitāmo C_2. Bet tad atrisinājums bez jebkādas vajadzības pieņems komplicētāku izskatu.

Piemērs. Atrast partikulāro atrisinājumu vienādojumam

$$\sin x\,dx+\frac{dy}{\sqrt{y}}=0, \tag{4}$$

ja sākuma vērtības ir $x_0=\frac{\pi}{2}$, $y_0=3$.

Atrisinājums. Vienādojuma (4) vispārīgais integrālis ir

$$\int \sin x\,dx+\int\frac{dy}{\sqrt{y}}=C \text{ jeb } -\cos x+2\sqrt{y}=C. \tag{5}$$

Ņemot šeit $x=\frac{\pi}{2}$, $y=3$, dabūjam $C=2\sqrt{3}$; meklētais partikulārais atrisinājums ir

$$y=\frac{(2\sqrt{3}+\cos x)^2}{4}. \tag{6}$$

To var dabūt tieši ar formulu

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{x}\sin x\,dx+\int\limits_{3}^{y}\frac{dy}{\sqrt{y}}=0.$$

483. §. Mainīgo atdalīšana. Singulārais atrisinājums

Vienādojumu $X_1Y_1\,dx+X_2Y_2\,dy=0$, kur funkcijas X_1 un X_2 ir atkarīgas tikai no x[1], bet funkcijas Y_1, Y_2 — tikai no y, var reducēt 482. § formā (1), izdalot ar Y_1X_2. Redukcijas procesu sauc par *mainīgo atdalīšanu.*

1. piemērs. Apskatīsim vienādojumu

$$y\,dx-x\,dy=0. \tag{1}$$

Izdalot ar xy, dabūjam vienādojumu

$$\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}=0, \tag{2}$$

[1] Viena vai abas funkcijas var būt konstantes; tāpat funkcijas Y_1, Y_2.

kur mainīgie ir atdalīti. Integrējot atrodam

$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dy}{y} = C, \tag{3}$$

t. i.,

$$\ln|x| - \ln|y| = C \tag{4}$$

jeb

$$\ln\left|\frac{x}{y}\right| = C. \tag{4a}$$

Ja ņem jaunu konstanti C_1, kuru ar C saista sakarība $C = \ln C_1$, tad (4a) vietā var rakstīt

$$\frac{x}{y} = C \tag{4b}$$

(sal. 479. § 2. piemēru).

1. p i e z ī m e. Pieņemsim, ka vērtība $y=k$ ir vienādojuma $Y_1=0$ sakne. Tad funkcija $y=k$ (t. i., pastāvīgs lielums k) ir viens diferenciālvienādojuma $X_1Y_1\,dx+X_2Y_2\,dy=0$ atrisinājums (jo, ja $y=k$, tad $dy=0$ un bez tam saskaņā ar doto $Y_1=0$). Šis atrisinājums, dalot ar Y_1X_2, var pazust. Gluži tāpat var pazust atrisinājums $x=l$, kur l ir vienādojuma $X_2=0$ sakne. Tā 1. piemērā, iegūstot atrisinājumu (4), mēs pazaudējam diferenciālvienādojuma (1) partikulāro atrisinājumu $y=0$ un arī partikulāro atrisinājumu $x=0$. Jāievēro, ka vienādībai (4) nav jēgas tiklab, ja $y=0$, kā arī, ja $x=0$ (skaitlim nulle nav logaritma).

Atbrīvojoties vienādībā (4a) no logaritmiem, mēs atkal dabūjam atrisinājumu $x=0$ (ja $C_1=0$).

2. p i e m ē r s. Atrast visus atrisinājumus vienādojumam

$$\sqrt{1-y^2}\,dx - y\,dy = 0. \tag{5}$$

A t r i s i n ā j u m s. Joslā, ko ierobežo taisnes $y=\pm1$, vismaz viena no funkcijām $\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}\left(=\frac{dy}{dx}\right)$, $\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\left(=\frac{dx}{dy}\right)$ ir vienvērtīgi definēta un nepārtraukta. Ārpus šīs joslas neviena minētā funkcija nav definēta. Tātad (478. §) visi vienādojuma (5) integrāļi atrodas joslā, ko ierobežo taisnes $y=\pm1$.

Izdalīsim vienādojumu (5) ar $\sqrt{1-y^2}$. Dabūsim vienādojumu

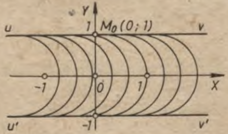
$$dx-\frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}}=0,$$

kur mainīgie ir atdalīti. Integrējot atrodam

$$x-1-y^2=C$$

jeb

$$x-C=\sqrt{1-y^2}. \qquad (6)$$



474. zīm.

Šis vienādojums izsaka pusaploču saimi, kas attēlota 474. zīmējumā. Bet tā nesatur visas vienādojuma (5) integrāllīnijas; izdalot šo vienādojumu ar $\sqrt{1-y^2}$, mēs zaudējam atrisinājumus $y=1$ un $y=-1$ (474. zīmējumā taisnes uv, $u'v'$).

2. piezīme. Šeit pazaudētie atrisinājumi *nav partikulārie atrisinājumi* (pretstatā 1. piemērā pazaudētajiem atrisinājumiem). Jāatceras, ka par partikulāro atrisinājumu mēs nosaucām (481. §) tādu atrisinājumu, kas ir *viens vienīgs* dotajām sākuma vērtībām. Bet caur atrisinājuma $y=1$ katru punktu iet *divi atrisinājumi;* piemēram, caur punktu $M_0(0;1)$ (474. zīm.) bez taisnes $y=1$ iet vēl pusaploce $x=\sqrt{1-y^2}$, kas attēlo vēl vienu vienādojuma (5) atrisinājumu; šis atrisinājums rodas no (6), ja ņem $C=0$.

Vienādojums (6), lai gan neaptver visus atrisinājumus, tomēr satur visus *partikulāros* atrisinājumus (pusaploces) un tāpēc ir vienādojuma (5) *vispārīgais* integrālis. Atrisinājumus $y=1$, $y=-1$ sauc par *singulārajiem* jeb *īpašajiem* atrisinājumiem.

Vispārīgi pirmās kārtas diferenciālvienādojuma integrāli sauc par *singulāru,* ja caur katru tā punktu iet vismaz vēl viens integrālis.

484. §. Eksaktais diferenciālvienādojums

Ja vienādojuma

$$P(x, y)dx+Q(x, y)dy=0 \tag{1}$$

koeficienti $P(x, y)$, $Q(x, y)$ izpilda nosacījumu

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{2}$$

tad vienādojuma (1) kreisā puse ir kādas funkcijas $F(x, y)$ pilnais diferenciālis (funkcija $F(x, y)$ ir izteiksmes $P\,dx+$ $+Q\,dy$ primitīvā funkcija; sk. 476. §). Vienādojuma (1) vispārīgais integrālis būs

$$F(x, y)=C. \tag{3}$$

P i e m ē r s. Atrast vienādojuma

$$\frac{x^2-y}{x^2}dx+\frac{x+1}{x}dy=0 \tag{4}$$

partikulāro integrāli, ja sākuma vērtības ir $x_0=1$, $y_0=1$.

A t r i s i n ā j u m s. Nosacījums (2) ir izpildīts. Pie tam funkcijas $P(x, y)=1-\frac{y}{x^2}$, $Q=1+\frac{1}{x}$ sastāv no Ax^my^n veida locekļiem. Tāpēc primitīvo funkciju atrodam (476. § piezīme) tā.

Izpildām integrēšanu

$$\int\left(1-\frac{y}{x^2}\right)dx=x+\frac{y}{x} \text{ (ja } y \text{ uzskata par pastāvīgu)}$$

$$\int\left(1+\frac{1}{x}\right)dy=y+\frac{y}{x} \text{ (ja } x \text{ uzskata par pastāvīgu)}.$$

Apvienojam šīs izteiksmes, paturot locekli $\frac{y}{x}$ tikai vienu reizi. Funkcija $x+y+\frac{y}{x}$ ir primitīvā funkcija. Vispārīgais integrālis būs

$$x+y+\frac{y}{x}=C. \tag{5}$$

Ievietojot sākuma vērtības $x=1$, $y=1$, atrodam $C=3$. Meklētais partikulārais integrālis ir $x+y+\frac{y}{x}=3$.

484a. §. Integrējošais reizinātājs

Ja koeficienti $P(x,y)$, $Q(x,y)$ vienādojumā

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0 \tag{1}$$

neizpilda nosacījumu

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{2}$$

tad vienādojuma (1) kreisā puse nav pilns diferenciālis. Bet dažkārt izdodas atrast tādu reizinātāju $M(x,y)$, ka izteiksme $M(P\,dx+Q\,dy)$ kļūst kādas funkcijas $F_1(x,y)$ pilnais diferenciālis. Tad vispārīgais integrālis ir

$$F_1(x,y)=C.$$

Funkciju $M(x,y)$ sauc *par integrējošo reizinātāju.*

Piemērs. Vienādojuma $2y\,dx+x\,dy=0$ kreisā puse nav pilns diferenciālis. Bet, pareizinot ar x, dabū

$$x(2y\,dx+x\,dy)=d(x^2y).$$

Dotā vienādojuma vispārīgais integrālis ir

$$x^2y=C.$$

Piezīme. Katram diferenciālvienādojumam ir integrējošie reizinātāji (un pat neskaitāms daudzums). Bet vispārīgu paņēmienu to atrašanai nav.

485. §. Homogēnais vienādojums

Diferenciālvienādojumu

$$M\,dx+N\,dy=0 \tag{1}$$

sauc par *homogēnu,* ja attiecību $\frac{M}{N}$ var izteikt kā attiecības $\frac{y}{x}$ funkciju. Šo attiecību mēs apzīmēsim ar t, t. i.,

$$t=\frac{y}{x}. \tag{2}$$

Tā vienādojums

$$(y+\sqrt{x^2+y^2})\,dx-x\,dy=0 \tag{3}$$

ir homogēns, jo

$$\frac{M}{N}=\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{-x}=-\frac{y}{x}-\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=$$
$$=-t-\sqrt{1+t^2}. \tag{4}$$

Ar substitūciju

$$y=tx \text{ (no kurienes } dy=t\,dx+x\,dt) \tag{5}$$

jebkuru homogēnu vienādojumu reducē uz vienādojumu ar atdalāmiem mainīgajiem.

1. piemērs. Integrēt vienādojumu (3), ja sākuma nosacījumi ir $x_0=3$, $y_0=4$.

Atrisinājums. Ievietojot (5) vienādojumā (3), dabūjam

$$\sqrt{x^2+x^2t^2}\,dx-x^2dt=0 \tag{6}$$

jeb

$$|x|\sqrt{1+t^2}\,dx-x^2dt=0. \tag{7}$$

Mainīgos var atdalīt. Dabūjam

$$\frac{dx}{|x|}=\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}. \tag{8}$$

Atdalot mainīgos, mēs pazaudējam atrisinājumu $x=0$. Tomēr tas nekādā ziņā neapmierina sākuma nosacījumus.

Tā kā jāintegrē ar sākuma nosacījumiem $x_0=3$, $t_0=\frac{y_0}{x_0}=$ $=\frac{4}{3}$, tad abscisa x ir pozitīva (sk. tālāk piezīmi) un jāņem

$$|x|=x. \tag{9}$$

Dabūjam

$$\int\limits_3^x\frac{dx}{x}=\int\limits_{4/3}^t\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}, \tag{10}$$

no kurienes

$$\ln x-\ln 3=\ln(t+\sqrt{1+t^2})-\ln 3. \tag{11}$$

Aizstājot t ar $\frac{y}{x}$ un potencējot, dabūjam partikulāro integrāli

$$x=\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}. \tag{12}$$

Atbilstošais partikulārais atrisinājums ir

$$y=\frac{x^2-1}{2}. \tag{13}$$

P i e z ī m e. Formulas (10) kreisajai pusei nav jēgas, ja augšējā robeža ir vienāda ar nulli vai pieņem negatīvas vērtības. Tāpēc, atrisinājumu meklējot, mums vajadzēja ierobežoties ar pozitīvām x vērtībām. Vai funkcija (13) dod vienādojuma (3) atrisinājumu, ja $x \leqslant 0$, ir jāizpētī papildus. Ja izteiksmi (13) ievietojam vienādojuma (3) kreisajā pusē, tad redzam, ka funkcija $y=\frac{x^2-1}{2}$ dod atrisinājumu visām x vērtībām.

2. p i e m ē r s. Integrēt vienādojumu (3), ja sākuma nosacījumi ir $x_0=-3$, $y_0=4$.

A t r i s i n ā j u m s. Darbību kārtība tāda pati kā 1. piemērā. Tomēr vienādības (9) vietā jāņem

$$|x|=-x, \tag{9a}$$

tā ka (10) vietā dabūsim

$$-\int_{-3}^{x}\frac{dx}{x}=\int_{-1/3}^{t}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}, \tag{10a}$$

no kurienes

$$-\ln|x|+\ln 3=\ln(t+\sqrt{1+t^2})-\ln\frac{1}{3}. \tag{11a}$$

Vienādības (12) vietā dabūsim

$$\frac{1}{|x|}=\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} \tag{12a}$$

jeb

$$-\frac{1}{x}=\frac{y}{x}-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} \tag{12b}$$

(mīnusa zīme pirms pēdējās daļas radās tāpēc, ka $\sqrt{x^2}=-x$, ja $x<0$). No (12b) dabūjam meklēto partikulāro atrisinājumu

$$y=\frac{x^2-1}{2}.$$

Tas sakrīt ar 1. piemēra atrisinājumu (sal. piezīmi 1. piemēram).

Ja, neievērojot vienādību (9a), mēs (10a) vietā lietotu formulu (10), tad dabūtu kļūdainu rezultātu.

486. §. Pirmās kārtas lineārais vienādojums

Pirmās kārtas diferenciālvienādojumu

$$M\,dx+N\,dy=0 \tag{1}$$

sauc par *lineāru*, ja attiecība $\frac{M}{N}$ satur y tikai pirmajā pakāpē («lineāri»). Lineāru vienādojumu pieņemts rakstīt formā

$$y'+P(x)y=Q(x); \tag{2}$$

šeit $P(x)$ un $Q(x)$ ir kādas (nepārtrauktas) x funkcijas.

Ja atsevišķā gadījumā $Q(x)=0$, tad vienādojumu (2) sauc par *lineāru vienādojumu bez labās puses*[1]. Šai gadījumā mainīgos var atdalīt un vispārīgajam atrisinājumam ir izskats

$$y=Ce^{-\int P\,dx}. \tag{3}$$

1. piemērs. Atrast vispārīgo atrisinājumu lineāram vienādojumam bez labās puses

$$y'-\frac{x}{1+x^2}y=0. \tag{4}$$

Atrisinājums. Atdalot mainīgos, dabūjam

$$\frac{dy}{y}=\frac{x\,dx}{1+x^2}, \tag{5}$$

[1] Lineāru vienādojumu bez labās puses sauc arī par *homogēnu*. Bet šim nosaukumam ir vēl cita jēga (485. §).

no kurienes

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C \tag{6}$$

jeb

$$y = C_1\sqrt{1+x^2}, \tag{6a}$$

kur $C_1 = e^C$. To pašu rezultātu mēs iegūtu arī ar formulu (3) (kur jāņem $P = -\frac{x}{1+x^2}$); tad

$$y = Ce^{-\int -\frac{x\,dx}{1+x^2}} = Ce^{\frac{1}{2}\ln(1+x^2)} = C\sqrt{1+x^2}.$$

1. piezīme. Partikulāro atrisinājumu $y=0$, kuru dabū no (6a), ja $C_1=0$, nevar dabūt no (6); šis atrisinājums pazuda, vienādojumu (4) dalot ar y. Pēc atbrīvošanās no logaritmiem, kas ietilpst vienādībā (6), mēs atkal dabūjam atrisinājumu $y=0$. Sal. 484. § 1. piemēru.

2. piezīme. Praktiski gatavās formulas (3) lietošanai nav sevišķu priekšrocību, salīdzinot ar 1. piemērā parādītajiem pārveidojumiem.

Lineāru diferenciālvienādojumu ar labo pusi [tad $Q(x) \neq \neq 0$] integrē šādi: atrodam vispārīgo atrisinājumu (3) atbilstošajam vienādojumam bez labās puses; šai atrisinājumā konstanti C aizstājam ar nezināmu funkciju u. Dabūto izteiksmi ievietojam vienādojumā (2). Pēc vienkāršojumiem mainīgos u un x var atdalīt, un integrējot mēs atrodam u izteiksmi atkarībā no x. Funkcija $y = ue^{-\int P dx}$ būs vienādojuma (2) vispārīgais atrisinājums [1].

2. piemērs. Atrast vispārīgo atrisinājumu vienādojumam

$$y' - \frac{x}{1+x^2}y = x. \tag{7}$$

Atrisinājums. Vispārīgais atrisinājums atbilstošajam vienādojumam bez labās puses (sk. 1. piemēru) ir

[1] Šo vispārīgo atrisinājumu izsaka formula

$$y = \left[\int dx.Q(x)e^{\int P(x)dx} + C_1\right] e^{-\int P dx}. \tag{A}$$

$y=C\sqrt{1+x^2}$. Aizstājot konstanti C ar nezināmo funkciju u, dabūjam

$$y=u\sqrt{1+x^2}, \tag{8}$$

no kurienes

$$y'=\frac{du}{dx}\sqrt{1+x^2}+\frac{ux}{\sqrt{1+x^2}}. \tag{9}$$

Ievietojam (8) un (9) vienādojumā (7). Pēc vienkāršojumiem atrodam

$$\frac{du}{dx}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

No šejienes dabūjam u izteiksmi atkarībā no x, t. i.,

$$u=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}=\sqrt{1+x^2}+C_1. \tag{10}$$

Saskaņā ar (8) un (10) dotā vienādojuma vispārīgais atrisinājums būs

$$y=(\sqrt{1+x^2}+C_1)\sqrt{1+x^2}.\text{[1]} \tag{11}$$

P i e z ī m e. Analogi integrē vienādojumu

$$\frac{dx}{dy}+P(y)x=Q(y), \tag{12}$$

kuru dabū no (2), ja samaina vietām x un y.

---

[1] To pašu rezultātu, ja $\left[P=-\frac{x}{1+x^2},\ Q=x\right]$, dabūjam ar formulu (A); tad

$$y=\left[\int x\,dx\,e^{\int-\frac{x\,dx}{1+x^2}}+C_1\right]e^{-\int-\frac{x\,dx}{1+x^2}}=$$

$$=\left[\int x\,dx\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+C_1\right]\sqrt{1+x^2}=(\sqrt{1+x^2}+C_1)\sqrt{1+x^2}.$$

487. §. Klero vienādojums

Par *Klero vienādojumu* sauc vienādojumu

$$y = xy' + \varphi(y'). \tag{1}$$

Tā vispārīgais integrālis ir

$$y = xC + \varphi(C). \tag{2}$$

Bez tam Klero vienādojumam ir singulārais integrālis (483. §); to dabū, izslēdzot parametru t no vienādojumiem

$$x = -\varphi'(t), \quad y = -t\varphi'(t) + \varphi(t). \tag{3}$$

Vispārīgais integrālis (2) izsaka taišņu kopu, kuras pieskaras kādai līnijai L. Singulārais integrālis attēlo pašu līkni L [vienādojumi (3) izsaka to parametriskā veidā].

Piemērs. Vienādojums

$$y = xy' - y'^2 \tag{1a}$$

ir Klero vienādojums. Tā vispārīgais integrālis

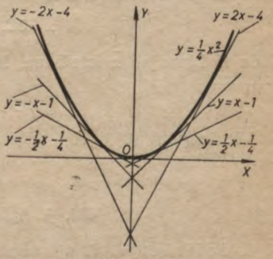
$$y = Cx - C^2 \tag{2a}$$

attēlo taišņu kopu (475. zīm.), kuras pieskaras parabolai

$$y = \frac{1}{4}x^2. \tag{4}$$

Vienādojums (4) ir singulārais integrālis. To dabū šādi. Dotajā piemērā ņemam $\varphi(t) = -t^2$, $\varphi'(t) = -2t$, un vienādojumi (3) tad pieņem izskatu

$$x = 2t, \quad y = t^2. \tag{3a}$$



475. zīm.

Izslēdzot t, dabūjam (4).

Paskaidrojums. Parādīsim vienādojuma (1a) piemērā, kā dabū singulārā integrāļa vienādojumu.

Līkne L, kas pieskaras integrāllīnijām (2a), arī pati būs integrāllīnija (jo tās virziens visur sakrīt ar lauka virzienu). Lai atrastu līkni L, ievērosim, ka tai ar katru taisni

$$y = Cx - C^2 \tag{5}$$

ir jābūt vienam kopīgam punktam $N(\bar{x}; \bar{y})$. Lielums C, kas ir pastāvīgs katrai taisnei (5), mainās, pārejot no vienas taisnes uz otru, tā ka koordinātes $\bar{x}$, $\bar{y}$ ir C funkcijas. Tā kā punkts $N(\bar{x}; \bar{y})$ atrodas uz taisnes (5), tad jābūt izpildītai identitātei

$$\bar{y} = C\bar{x} - C^2. \tag{6}$$

Tā kā punktā N līnijas L un taisnes (5) virzieni sakrīt, tad diferenciāļiem $d\bar{y}$, $d\bar{x}$ būs tā pati attiecība, kāda ir taisnes (5) koordinātu diferenciāļiem dx, dy, t. i., jābūt

$$d\bar{y} = C\,d\bar{x}. \tag{7}$$

Bez tam diferenciāļiem $d\bar{x}$, $d\bar{y}$ jāapmierina vienādība

$$d\bar{y} = C\,d\bar{x} + \bar{x}\,dC - 2C\,dC, \tag{8}$$

kuru dabū, diferencējot identitāti (6). Salīdzinot (7) ar (8), dabūjam $(\bar{x} - 2C)\,dC = 0$, t. i.,

$$\bar{x} = 2C. \tag{9}$$

Tāda ir funkcijas $\bar{x}$ izteiksme. Ievietojot to vienādībā (6), atrodam

$$\bar{y} = C^2. \tag{10}$$

Vienādojumi (9), (10) atšķiras no (3a) tikai ar apzīmējumiem.

488. §. Aploksne

1. d e f i n ī c i j a. Līniju kopu sauc par (vienparametra) *saimi*, ja katrai līnijai var nostādīt atbilstībā noteiktu skaitli *C (saimes parametru)* tādējādi, ka nepārtrauktai parametra C maiņai atbilst nepārtraukta līnijas pārveidošanās. Vienādojums

$$f(x, y, C) = 0, \tag{1}$$

kur $f(x, y, C)$ ir nepārtraukta triju argumentu x, y, C funkcija, izsaka līniju saimi plaknē. Atsevišķas saimes līnijas atbilst atsevišķām C vērtībām.

Vienādojumu (1) sauc par *saimes vienādojumu.*

1. piemērs. Vienādojums

$$y=Cx-C^2$$

izsaka taišņu saimi, kas attēlota 475. zīmējumā. Par saimes parametru pieņemts taisnes virziena koeficients.

2. piemērs. Vienādojums

$$(x-C)^2+y^2=1$$

izsaka riņķa līniju saimi, kurām rādiuss ir 1 un centri atrodas uz OX ass (474. zīm.). Par parametru pieņemta centra abscisa.

3. piemērs. Vienādojums

$$x^2+y^2=C^2$$

izsaka riņķa līniju saimi ar centriem punktā $O(0,0)$. Par parametru pieņemts rādiuss.

2. definīcija. Par dotās saimes *apliecēju* sauc tādu līniju, kura katrā savā punktā pieskaras vienai saimes līnijai.

1. piemērā apliecēja ir parabola $y=\frac{1}{4}x^2$ (sal. 487. §), 2. piemērā apliecēja ir taišņu pāris $y=\pm1$, 3. piemērā apliecējas nav.

Teorēma. Saimes (1) apliecēja pieder tā sauktajai *diskriminantlīnijai*, t. i., punktu ģeometriskai vietai, kuri apmierina vienādojumus

$$f(x,y,C)=0, \quad f'_C(x,y,C)=0 \qquad (2)$$

visām iespējamām C vērtībām. Ja no vienādojumiem (2) izslēdzam C, tad dabūjam diskriminantlīnijas vienādojumu.

1. piezīme. Nav izslēgts gadījums, ka apliecēja tikai daļēji sedz diskriminantlīniju un var arī gadīties, ka diskriminantlīnija eksistē, bet saimei (1) apliecējas nepavisam nav.

4. piemērs. Taišņu saimes $y=Cx-C^2$ diskriminantlīniju nosaka sistēma

$$y=Cx-C^2, \quad x-2C=0.$$

Izslēdzot C, dabūjam vienādojumu $y=\frac{1}{4}x^2$. Diskriminant-

476. zīm.

līnija ir parabola, kas sakrīt ar saimes aplieceju (sal. 487. § piemēru).

5. piemērs. Riņķa līniju saimes

$$(x-C)^2+y^2=1$$

diskriminantlīniju nosaka sistēma

$$(x-C)^2+y^2=1, \quad -2(x-C)=0.$$

Izslēdzot C, dabūjam vienādojumu $y^2=1$. Diskriminantlīnija (taišņu pāris $y=\pm 1$) sakrīt ar aplieceju (sal. 483. § 2. piemēru).

6. piemērs. Puskubisko parabolu saimes $(y-C)^2=x^3$ (476. zīm.) diskriminantlīnija ir taisne $x=0$, bet dotajai saimei nav apliecējas.

2. piezīme. Ja saime (1) attēlo kāda diferenciālvienādojuma vispārīgo integrāli, tad apliecēja attēlo singulāro integrāli. Ja nav apliecējas, tad nav arī singulārā integrāļa.

489. §. Par diferenciālvienādojumu integrējamību

No 482. līdz 487. § mēs apskatījām svarīgākos pirmās kārtas vienādojumu tipus, kuru atrisināšana reducējama uz pazīstamu funkciju integrāļu aprēķināšanu[1]. Par tādiem vienādojumiem saka, ka tie ir *reducējami uz kvadratūrām.*

Praksē sastopami arī tādi pirmās kārtas vienādojumi, kuri nav reducējami uz kvadratūrām. Risinot augstāku kārtu vienādojumus, tādi gadījumi sastopami vēl biežāk. Lai atrisinātu vienādojumus, kas nav reducējami uz kvadratūrām, lieto aptuvenas metodes. Par tām sk. tālāk 490.—492. §.

490. §. Pirmās kārtas vienādojumu aptuvena integrēšana ar Eilera metodi

Pieņemsim, ka dots vienādojums

$$y'=f(x, y) \tag{1}$$

ar sākuma nosacījumiem $x=x_0$, $y=y_0$. Jāatrod tā atrisinājums kādā intervālā (x_0, x). Sadalām šo intervālu ar pun-

[1] Šie integrāļi var neizteikties ar elementārajām funkcijām (309. §).

ktiem $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ (477. zīm.) n daļās (vienādās vai nevienādās).

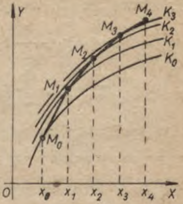
Gabalā (x_0, x_1) ņemam

$$y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0), \quad (2)$$

t. i., meklētās integrāllīnijas M_0K_0 vietā ņemam tās pieskari M_0M_1.

Punktā $x = x_1$ atrodam meklētā atrisinājuma aptuveno vērtību

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) = \\ = y_0 + f(x_0, y_0)\Delta x_0. \quad (3)$$



477. zīm.

Gabalā (x_1, x_2) ņemam

$$y = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1),$$

t. i., meklētās integrāllīnijas M_0K_0 vietā ņemam integrāllīnijas M_1K_1 pieskari M_1M_2 (pie tam rodas divkārša kļūda: pieskare M_1M_2 atvirzās no līnijas M_1K_1, bet pēdējā savukārt nesakrīt ar meklēto līniju M_0K_0). Turpinot procesu, pakāpeniski dabūjam aptuvenas vērtības

$$\left.\begin{array}{l} y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)\Delta x_1, \\ y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)\Delta x_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})\Delta x_{n-1}. \end{array}\right\} \quad (4)$$

Ja doto intervālu pietiekami sasmalcina, tad var iegūt jebkuru vajadzīgo precizitāti, bet šai nolūkā jāveic liels darbs. Tāpēc Eilera metodi lieto tikai rupjiem tuvinājumiem. Visbiežāk intervālu (x_0, x) izdevīgi dalīt vienādās daļās.

P i e m ē r s. Atrast aptuvenu atrisinājumu vienādojumam

$$y' = \frac{1}{2}xy$$

intervālā $(0, 1)$, ja sākuma vērtības ir $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ [šeit $f(x, y) = \frac{1}{2}xy$].

A t r i s i n ā j u m s. Sadalām intervālu $(0; 1)$ 10 vienādās daļās, tā ka

$$\Delta x_0 = \Delta x_1 = \ldots = \Delta x_9 = 0{,}1.$$

Ar formulām (3) un (4) pakāpeniski atrodam

$$y_1=y_0+\frac{1}{2}x_0y_0\Delta x_0=1+\frac{1}{2}\cdot 0\cdot 1\cdot 0{,}1=1,$$

$$y_2=y_1+\frac{1}{2}x_1y_1\Delta y_1=1+\frac{1}{2}\cdot 0{,}1\cdot 1\cdot 0{,}1=1{,}005$$

utt. Aprēķinus var sakārtot šādā shēmā:

x	$^*y$	$\Delta y=\frac{1}{2}xy\,\Delta x$	Patiesā y vērtība
0	1	0	1
0,1	1	0,005	1,0025
0,2	1,005	0,0101	1,0100
0,3	1,0151	0,0152	1,0227
0,4	1,0303	0,0206	1,0408
0,5	1,0509	0,0263	1,0645
0,6	1,0772	0,0323	1,0942
0,7	1,1095	0,0392	1,1303
0,8	1,1487	0,0459	1,1735
0,9	1,1946	0,0538	1,2244
1,0	1,2484		1,2840

No pirmajām divām kolonām sastāda aptuvenā atrisinājuma tabulu. Dotajam vienādojumam var atrast arī precīzu atrisinājumu ar formulu $\int\limits_1^y \frac{dy}{y}=\int\limits_0^x \frac{1}{2}x\,dx$, no kurienes $y=e^{\frac{1}{4}x^2}$. Atbilstošās y vērtības dotas pēdējā kolonā. Salīdzinājums ar pirmo kolonu rāda, ka kļūda pakāpeniski aug un punktā $x=1$ sasniedz 2,9%.

491. §. Diferenciālvienādojumu integrēšana ar rindām

Vienādojuma

$$y'=f(x,y) \tag{1}$$

atrisinājumu, kas izpilda sākuma nosacījumus $x=x_0$, $y=y_0$, var meklēt kā rindu, kas attīstīta pēc $x-x_0$ pakāpēm, t. i., veidā

$$y=y_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\ldots+c_n(x-x_0)^n+\ldots \tag{2}$$

Reizinātājus $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ var atrast ar nenoteikto koeficientu metodi (307. §) vai ar citiem paņēmieniem.

Rindu metodi diferenciālvienādojumu atrisināšanā sistemātiski lietoja Ņūtons (292. §). Pretstatā Eilera metodei, kas atrisinājumu dod tabulas veidā (490. §), šeit atrisinājumu dabū formulas veidā. Bet pēdējā nav derīga ārpus rindas konverģences intervāla. Teorētiski ir iespējami arī tādi gadījumi, kad atrisinājums nav izsakāms ar rindu (sal. 400. §). Šo jautājumu teorētiski izpētīja O. Koši. S. Kovaļevska[1] izpētīja analogu jautājumu parciālajiem diferenciālvienādojumiem.

Neskatoties uz minētajiem ierobežojumiem, rindu metodei ir svarīga praktiska nozīme.

P i e m ē r s. Atrast atrisinājumu vienādojumam

$$y'=\frac{1}{2}xy, \tag{3}$$

ja sākuma nosacījumi ir $x_0=0$, $y_0=1$.

A t r i s i n ā j u m s. Saskaņā ar formulu (2) ņemam

$$y=1+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+\ldots \tag{4}$$

Koeficienti $c_1, c_2, c_3, \ldots$ pagaidām nav zināmi. Diferencējot (4), atrodam

$$y'=c_1+2c_2x+3c_3x^2+4c_4x^3+\ldots \tag{5}$$

Ievietojot (4) un (5) vienādojumā (3), dabūjam

$$\begin{aligned} &c_1+2c_2x+3c_3x^2+4c_4x^3+\ldots= \\ &=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}c_1x^2+\frac{1}{2}c_2x^3+\ldots \end{aligned} \tag{6}$$

Tagad pielīdzinām koeficientus pie vienādām x pakāpēm. Dabūjam sakarības

$$c_1=0,\quad 2c_2=\frac{1}{2},\quad 3c_3=\frac{1}{2}c_1,\quad 4c_4=\frac{1}{2}c_2,\ \ldots \tag{7}$$

[1] S o f i j a K o v a ļ e v s k a (1850—1891) — ievērojama krievu zinātniece. Viņai pieder svarīgi rezultāti matemātikas, mehānikas un teorētiskās fizikas nozarēs un arī vairāki publicistiski un mākslinieciski darbi.

No tām pakāpeniski atrodam koeficientus

$$c_1=0, \quad c_2=\frac{1}{4}, \quad c_3=0, \quad c_4=\frac{1}{32}, \quad c_5=0, \ldots \tag{8}$$

Meklētais atrisinājums ir

$$y=1+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{32}x^4+\frac{1}{384}x^6+\ldots \tag{9}$$

Ja $x=1$, dabūjam $y\approx 1{,}2839$ (sal. 490. § tabulu). Izvirzījums (9) sakrīt ar funkcijas $e^{\frac{x^2}{4}}$ izvirzījumu

$$e^{\frac{x^2}{4}}=1+\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2!}\left(\frac{x^2}{4}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{x^2}{4}\right)^3+\ldots \tag{10}$$

Cits atrisinājums. Diferencējot pakāpeniski vienādību (3), atrodam

$$y''=\frac{1}{2}(xy)'=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}xy', \tag{11}$$

$$y'''=\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}xy'\right)'=y'+\frac{1}{2}xy'', \tag{12}$$

$$y^{\mathrm{IV}}=\left(y'+\frac{1}{2}xy''\right)'=\frac{3}{2}y''+\frac{1}{2}xy''' \tag{13}$$

utt. Ievietojot vienādojumā (3) sākuma vērtības $x_0=0$, $y_0=1$, atrodam $y'_0=0$, bet pēc tam no (11) dabūjam

$$y''_0=\frac{1}{2}y_0+\frac{1}{2}x_0y'_0=\frac{1}{2}.$$

Tādā pašā veidā atrodam

$$y'''_0=0, \quad y^{\mathrm{IV}}_0=\frac{3}{4}$$

utt. Ievietojot atrastās vērtības Teilora rindā

$$y=y_0+y'_0\,x+\frac{y''_0}{2!}x^2+\frac{y'''_0}{3!}x^3+\frac{y^{\mathrm{IV}}_0}{4!}x^4+\ldots,$$

atkal dabūjam rindu (9).

492. §. Par diferenciālvienādojumu sastādīšanu

Diferenciālvienādojuma sastādīšanas process saskaņā ar uzdevuma (ģeometriska, fizikāla vai ťehniska) nosacījumiem izpaužas tādējādi, ka mēs matemātiskā valodā izsakām *saistību starp mainīgiem lielumiem un to bezgalīgi mazajiem pieaugumiem*. Dažkārt diferenciālvienādojums rodas bez pieaugumu apskata — tā iemesla dēļ, ka tie ievēroti jau agrāk. Tā, izsakot ātrumu ar izteiksmi $v=\frac{ds}{dt}$, mēs neapskatām pieaugumus Δs, Δt, bet tie faktiski ir jau ievēroti, jo

$$\frac{ds}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Sastādot pirmās kārtas diferenciālvienādojumus, bezgalīgi mazos pieaugumus tūlīt aizstāj ar atbilstošajiem diferenciāļiem. Šeit pieļautā kļūda automātiski pazūd, pārejot uz robežu [1]. Vispārīgi jebkuru bezgalīgi mazu lielumu drīkst aizstāt ar tam ekvivalentu lielumu, piemēram, bezgalīgi mazu loku ar tam atbilstošo hordu vai otrādi.

Vispārīgas kārtulas diferenciālvienādojumu sastādīšanai nevar dot. Tāpat kā sastādot algebriskus vienādojumus, arī šeit bieži nepieciešama atjautība. Daudz kas atkarīgs no iemaņām, kas rodas ar vingrinājumiem.

1. piemērs. Rezervuārā ir 100 l sālījuma, kas satur 10 kg izšķīdinātas sāls. Katrā minūtē 2 l sālījuma no rezervuāra iztek, bet 3 l saldūdens tanī ieplūst. Ar maisīšanu uztur vienādu sāls koncentrāciju visā rezervuārā. Cik sāls paliks rezervuārā pēc stundas?

Atrisinājums. Apzīmēsim ar x sāls daudzumu rezervuārā (kilogramos), ar t — laiku, kuru skaita no sākuma momenta (minūtēs).

Laika sprīdī dt no rezervuāra aizplūst $(-dx)$ kg sāls [jāievēro, ka x ir dilstoša laika funkcija, tātad dx ir negatīvs lielums, bet $(-dx)$ — pozitīvs].

Lai sastādītu vienādojumu, aprēķināsim sāls zudumu citādā veidā. Momentā t rezervuārā atrodas $(100+t)$ l šķidruma (ietecējis $3t$ l un aizplūdis $2t$ l); tanī izšķīdināts x kg sāls. Tātad viens litrs sālījuma satur $\frac{x}{100+t}$ kg sāls. Laika

[1] Kā tas notiek, parādīts piezīmē.

sprīdī dt no rezervuāra aizplūst $2dt$ l sālījuma; tātad sāls daudzums samazinās par

$$\frac{x}{100+t}\cdot 2dt\ kg.$$

Dabūjam diferenciālvienādojumu

$$-dx=\frac{2x\,dt}{100+t}. \tag{1}$$

Atdalot mainīgos un ievērojot sākuma nosacījumus $t_0=0$, $x_0=10$, dabūjam

$$\int_{10}^{x}-\frac{dx}{x}=\int_{0}^{t}\frac{2dt}{100+t}, \tag{2}$$

t. i.,

$$\ln\frac{10}{x}=2\ln\frac{100+t}{100} \tag{3}$$

jeb

$$\frac{10}{x}=\left(\frac{100+t}{100}\right)^2. \tag{3a}$$

Ievietojot vienādībā (3a) $t=60$, atrodam meklēto sāls daudzumu $x\approx 3{,}91$ (kg).

Ja skaitļi nav tik noapaļoti, tad labāk ņemt formulu (3). Pareizinot abas tās puses ar moduli M (242. §), pārejam no naturāliem logaritmiem uz decimāllogaritmiem.

P i e z ī m e. Sastādot vienādojumu (1), mēs divreiz pieļāvām kļūdu: pirmkārt, mēs Δx un Δt vietā ņēmām dx un dt, otrkārt, mēs pieņēmām, ka laikā dt sāls zudums bija $\frac{x}{100+t}\cdot 2dt\ kg$, t. i., ka sālījuma koncentrācija ir vienāda ar $\frac{x}{100+t}$ visa intervāla $(t, t+dt)$ laikā. Patiesībā tā ir vienāda ar $\frac{x}{100+t}$ tikai intervāla sākumā, bet pēc tam samazinās. Bet šīs divas kļūdas automātiski kompensējās.

Tiešām, *maza* laika intervāla $(t, t+\Delta t)$ plūsmā sālījuma koncentrācija nedaudz atšķiras no $\frac{x}{100+t}\,\frac{kg}{l}$; tātad šai laikā sāls daudzums samazināsies, lai gan ne precīzi par $\frac{2x\,\Delta t}{100+t}$ *l*, tomēr aptuveni par tādu daudzumu. Tātad mums ir aptuvena vienādība

$$-\Delta x \approx \frac{2x\,\Delta t}{100+t}$$

jeb

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \approx -\frac{2x}{100+t}.$$

Šī aptuvenā vienādība ir jo precīzāka, jo mazāks ir Δt; citiem vārdiem, $-\frac{2x}{100+t}$ ir attiecības $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ robeža, kad $\Delta t \to 0$. Bet šī robeža ir atvasinājums $\frac{dx}{dt}$. Tādējādi atvasinājums $\frac{dx}{dt}$ ir precīzi vienāds ar $-\frac{2x}{100+t}$, t. i.,

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2x}{100+t}.$$

Šī precīzā vienādība ir ekvivalenta vienādojumam (1).

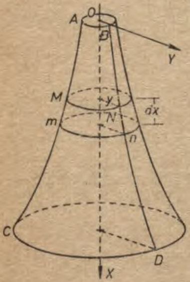
2. piemērs. Tiltam ceļ mūra balstu, kura augstums ir 12 *m* un kura horizontālie šķēlumi ir riņķveidīgi. Balsts aprēķināts slodzei $P=90\,t$ (neskaitot paša balsta svaru). Materiāla blīvums $\gamma=2{,}5\ \frac{t}{m^3}$. Pieļaujamais spiediens ir $k=$ $=300\frac{t}{m^2}$. Atrast augšējā un apakšējā pamata laukumus un arī balsta aksiālā šķēluma formu (lai būvmateriālu patēriņš būtu visekonomiskākais).

Atrisinājums. Augšējā pamata laukums s_0, ja pieļaujamais spiediens $k=300\ \frac{t}{m^2}$, var izturēt slodzi ks_0, bet saskaņā ar doto $ks_0=P$. Tādējādi

$$s_0=\frac{P}{k}=\frac{90}{300}=0{,}3\ (m^2). \tag{4}$$

Horizontālā šķēluma laukums s aug, līmenim pazeminoties, jo bez slodzes P uz laukumu s spiež vēl balsta augšējā daļa.

Apzīmēsim ar x šķēluma s (478. zīmējumā MN) attālumu no augšējā pamata. Izdalīsim bezgalīgi mazu horizontālu slāni $MNnm$. Tā apakšējā pamata mn laukums pārsniedz augšējā pamata MN laukumu par ds. Tāpēc apakšējam pamatam robežslodze ir par $k\,ds$ lielāka par augšējā pamata slodzi. No otras puses, šķēluma mn slodze ir lielāka par šķēluma MN slodzi par lielumu, kas ir vienāds ar slāņa $MNnm$ svaru, t. i., par $\gamma s\,dx$ [1]. Dabūjam diferenciālvienādojumu



478. zīm.

$$k\,ds = \gamma s\,dx. \qquad (5)$$

Atdalām mainīgos un integrējam, ievērojot sākuma nosacījumus $x=0$, $s=s_0$; dabūjam

$$\int_{s_0}^{s} \frac{ds}{s} = \frac{\gamma}{k}\int_0^x dx, \qquad (6)$$

no kurienes

$$\ln\frac{s}{s_0} = \frac{\gamma}{k}x. \qquad (7)$$

Lai atrastu apakšējā pamata laukumu s_1, jāievieto $x=12$ (kur $s_0=0{,}3$, $\gamma=2{,}5$, $k=300$). Pārejot uz decimāllogaritmiem (242. §), dabūsim

$$\lg\frac{s_1}{0{,}3} = M\cdot\frac{2{,}5}{300}\cdot 12, \qquad (8)$$

no kurienes $s_1=0{,}33$ (m^2).

Aksiālā šķēluma formu raksturo meridiāna BD vienādojums. Apzīmēsim šķēluma MN rādiusu ar y; tad $\frac{s}{s_0}=\left(\frac{y}{y_0}\right)^2$ un vienādība (7) dod

$$2\ln\frac{y}{y_0} = \frac{\gamma}{k}x \quad \text{jeb} \quad y = y_0 e^{\frac{\gamma}{2k}x}. \qquad (9)$$

Tāds ir meridiāna vienādojums. Meridiānu nosaka eksponentfunkcija (9).

[1] Mēs pieņemam, ka slānis $MNnm$ ir cilindrisks (kļūda ir augstākas kārtas bezgalīgi mazs lielums, salīdzinot ar dx).

493. §. Otrās kārtas vienādojums

Otrās kārtas diferenciālvienādojuma vispārīgais izskats ir šāds:

$$\Phi(x, y, y', y'')=0. \tag{1}$$

Vienādojumam, kas atrisināts attiecībā pret y'', ir izskats

$$y''=f(x, y, y'). \tag{2}$$

Pieņemts, ka triju argumentu x, y, y' funkcija $f(x, y, y')$ ir vienvērtīgi definēta un nepārtraukta kādā šo argumentu maiņas apgabalā.

Parasti[1], uzdodot sākuma vērtības $x=x_0$, $y=y_0$, $y'=y'_0$ (kas pieder apskatāmajam apgabalam), nosaka vienu vienīgu vienādojuma (2) atrisinājumu.

Ģeometriski: caur doto punktu $M(x_0; y_0)$ dotajā virzienā iet viena vienīga integrāllīnija.

Atbilstošo vienādojuma (2) atrisinājumu sauc par *partikulāro* jeb *atsevišķo atrisinājumu.* Visu partikulāro atrisinājumu kopu sauc par *vispārīgo atrisinājumu.* Vispārīgo atrisinājumu cenšas izteikt kā kādu funkciju

$$y=\varphi(x, C_1, C_2) \quad (C_1 \text{ un } C_2 \text{ — konstantes}), \tag{3}$$

kura dotu jebkuru partikulāro atrisinājumu (ja attiecīgi izvēlas C_1, C_2 vērtības).

Piezīme. Caur doto punktu $M(x_0; y_0)$ iet neskaitāms daudzums integrāllīniju — katrā iespējamā virzienā viena.

Piemērs. Atrast partikulāro atrisinājumu vienādojumam

$$y''=x, \tag{4}$$

ja sākuma vērtības ir $x_0=1$, $y_0=1$, $y'_0=2$.

Atrisinājums. Pārrakstām doto vienādojumu tā:

$$\frac{dy'}{dx}=x. \tag{5}$$

Ievērojot sākuma nosacījumus, dabūjam $\int\limits_2^{y'} dy'=\int\limits_1^x x\,dx$,

---

[1] Izņēmumi iespējami tikai tai gadījumā, ja vismaz viens no atvasinājumiem $f'_y(x, y, y')$, $f'_{y'}(x, y, y')$ ir pārtraukts vai neeksistē.

t. i., $y'=\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}$. Vēlreiz ievērojot sākuma nosacījumus, dabūjam $\int\limits_1^y dy=\int\limits_1^x\left(\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}\right)dx$. Meklētais partikulārais atrisinājums ir

$$y=\frac{x^3}{6}+\frac{3}{2}x-\frac{2}{3}. \tag{6}$$

C i t s p a ņ ē m i e n s. No (5) atrodam

$$y'=\frac{x^2}{2}+C_1, \tag{7}$$

bet no šejienes

$$y=\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2. \tag{8}$$

Funkcija (8) izsaka vispārīgo atrisinājumu, jo, attiecīgi izvēloties C_1, C_2 vērtības, tā dod jebkuru partikulāro atrisinājumu. Tā, ievietojot vienādībās (7) un (8) dotās sākuma vērtības, dabūsim

$$2=\frac{1}{2}+C_1, \quad 1=\frac{1}{6}+C_1+C_2, \tag{9}$$

no kurienes atrodam

$$C_1=\frac{3}{2}, \quad C_2=-\frac{2}{3}.$$

Ievietojot šīs vērtības vienādībā (8), atkal dabūsim partikulāro atrisinājumu (6).

B r ī d i n ā j u m s. Ne katrs atrisinājums, kas satur divas patvaļīgas konstantes, ir vispārīgais atrisinājums. Piemēram, funkcija

$$y=\frac{x^3}{6}+C_3x-C_4\left(x-\frac{1}{C_4}\right) \tag{10}$$

ir vienādojuma (4) atrisinājums, bet tā nesatur visus partikulāros atrisinājumus; tā ne ar kādām C_3, C_4 vērtībām nevar dabūt atrisinājumu (6). Tātad atrisinājums (10) nav vispārīgais atrisinājums. Tas redzams jau no tā, ka divas konstantes C_3, C_4 «nav būtiskas», t. i., tās var aizstāt ar vienu konstanti. Tiešām, formulu (10) var uzrakstīt tā:

$$y=\frac{x^3}{6}+(C_3-C_4)x+1.$$

Apzīmējot C_3-C_4 ar C_1, dabūsim

$$y=\frac{x^3}{6}+C_1x+1;$$

šis atrisinājums rodas no vispārīgā atrisinājuma (8), ja $C_2=1$.

494. §. n-tās kārtas vienādojums

n-tās kārtas vienādojumam, kas atrisināts attiecībā pret $y^{(n)}$,

$$y^{(n)}=f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

ar dotajām sākuma vērtībām x_0, y_0, y'_0, ..., $y_0^{(n-1)}$ parasti (sal. 493. §) ir viens vienīgs atrisinājums. Tādu atrisinājumu sauc par *partikulāru atrisinājumu*. Visu partikulāro atrisinājumu kopu sauc par *vispārīgo atrisinājumu*. Vispārīgo atrisinājumu cenšas izteikt veidā

$$y=\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Ne katrs atrisinājums, kas satur n konstantes, ir vispārīgais atrisinājums (sal. 493. § brīdinājumu).

495. §. Kārtas pazemināšanas gadījumi

Dažkārt otrās vai augstākas kārtas diferenciālvienādojums pieļauj kārtas pazemināšanu. Svarīgākie ir sekojoši divi gadījumi.

1. gadījums. Vienādojums nesatur y. Tad par nezināmo funkciju ņem lielumu y'.

1. piemērs. Integrēt otrās kārtas vienādojumu

$$(1+x)y''+y'=0. \tag{1}$$

Atrisinājums. Pieņemot y' par nezināmo funkciju, vienādojumu (1) pārrakstām tā:

$$(1+x)\frac{dy'}{dx}+y'=0. \tag{2}$$

Tas ir pirmās kārtas vienādojums (ar nezināmo funkciju y'). Pareizinot ar dx, dabūsim eksakto diferenciālvienādojumu (484. §), tā ka vienādojuma (2) vispārīgais integrālis ir

$$(1+x)y'=C_1. \tag{3}$$

Atgriezīsimies tagad pie nezināmās funkcijas y un pārrakstīsim vienādojumu (3) tā:

$$(1+x)\frac{dy}{dx}=C_1. \tag{3a}$$

Integrējot vienādojumu (3a), atradīsim

$$y=C_1\ln(1+x)+C_2. \tag{4}$$

Tas ir vienādojuma (1) vispārīgais atrisinājums.

2. gadījums. Vienādojums nesatur x. Tad par nezināmo funkciju atkal ņem y', bet par argumentu (x vietā) pieņem y. Pie tam otrās un augstākas kārtas atvasinājumus pārveidojam ar formulām

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dy'}{dy}y', \tag{5}$$

$$y'''=\frac{dy''}{dx}=\frac{d}{dy}\left(\frac{dy'}{dy}y'\right)\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dy}\left(\frac{dy'}{dy}y'\right)y' \tag{6}$$

utt.

2. piemērs. Integrēt otrās kārtas vienādojumu

$$y''+y=0. \tag{7}$$

Atrisinājums. Pielietojot formulu (5), vienādojumu (7) pārveidojam tā:

$$y'\,dy'+y\,dy=0. \tag{8}$$

Tas ir pirmās kārtas vienādojums (mainīgie y un y'). Vienādojuma (8) vispārīgais integrālis ir

$$y'^2+y^2=C_1^2. \tag{9}$$

Atgriežamies tagad pie iepriekšējiem mainīgajiem x, y un pārrakstām vienādojumu (9) tā:

$$\frac{dy}{\sqrt{C_1^2-y^2}}=\pm dx. \tag{10}$$

Integrējot atrodam

$$\arcsin\frac{y}{C_1}=\pm(x+C_2),$$

no kurienes

$$y=C_1\sin(x+C_2)$$

($\pm$ zīme ieslēgta konstantē C_1).

Tas ir vienādojuma (8) vispārīgais atrisinājums; to var pārveidot tā:

$$y=C_3\sin x+C_4\cos x,$$

kur

$$C_3=C_1\cos C_2,\quad C_4=C_1\sin C_2.$$

496. §. Otrās kārtas lineārais vienādojums

Par *otrās kārtas lineāru vienādojumu* sauc vienādojumu

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x), \tag{1}$$

kur funkcijas $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ nav atkarīgas no y.

Ja $R(x)=0$, tad vienādojumu (1) sauc par *vienādojumu bez labās puses*[1], ja turpretim $R(x)\neq 0$, tad — par *vienādojumu ar labo pusi*.

Vienādojumam bez labās puses

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \tag{2}$$

piemīt šādas īpašības.

1. teorēma. Ja funkcija $\varphi_1(x)$ ir vienādojuma (2) atrisinājums, tad arī funkcija $C_1\varphi_1(x)$ (C_1 — konstante) ir šī vienādojuma atrisinājums.

2. teorēma. Ja funkcijas $\varphi_1(x)$ un $\varphi_2(x)$ ir divi vienādojuma (2) atrisinājumi, tad arī funkcija $\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$ ir šī vienādojuma atrisinājums.

---

[1] Lineāro vienādojumu bez labās puses sauc arī par *homogēnu*. Sal. zemteksta piezīmi 790. lappusē.

S e c i n ā j u m s. Ja $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ ir divi vienādojuma (2) atrisinājumi, tad $C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)$ (C_1 un C_2 — konstantes) arī ir šī vienādojuma atrisinājums.

1. p i e m ē r s. Apskatīsim lineāro vienādojumu bez labās puses

$$y''+\frac{1}{x}y'-\frac{1}{x^2}y=0. \tag{3}$$

Ar pārbaudi pārliecināmies, ka funkcijas x un $\frac{1}{x}$ ir šī vienādojuma atrisinājumi; tad varam secināt, ka funkcija

$$y=C_1x+C_2\frac{1}{x}$$

arī būs vienādojuma (3) atrisinājums.

1. p i e z ī m e. Atrisinājums $y=C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)$ *ne vienmēr būs vispārīgais atrisinājums.* Tā funkcijas $\varphi_1(x)=3x$ un $\varphi_2(x)=5x$ ir vienādojuma (3) atrisinājumi, funkcija $y=C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)=(3C_1+5C_2)x$ arī ir atrisinājums, bet ne vispārīgais (divas konstantes C_1, C_2 nav būtiskas; sal. 493. § brīdinājumu).

2. p i e z ī m e. Atrisinājums $y=C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)$ nebūs vispārīgais atrisinājums, ja funkcijas $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ ir *lineāri atkarīgas*, t. i., tās saista sakarība

$$a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x)=0, \tag{4}$$

kur vismaz viena no konstantēm a_1, a_2 atšķiras no nulles.

Ja turpretim atrisinājumi $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ ir *lineāri neatkarīgi*, t. i., sakarība (4) ir identiski izpildīta tikai tad, ja abas konstantes a_1, a_2 ir vienādas ar nulli, tad funkcija

$$y=C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)$$

dod vispārīgo atrisinājumu.

2. p i e m ē r s. Vienādojuma (3) atrisinājumi $\varphi_1(x)=3x$ un $\varphi_2(x)=5x$ ir lineāri atkarīgi, jo, ja $a_1=5$, $a_2=-3$ vai ja $a_1=10$, $a_2=-6$, vai arī, ja $a_1=15$, $a_2=-9$ utt., dabūjam $a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x)=0$.

Atrisinājumi $\varphi_1(x)=3x$ un $\varphi_2(x)=-\frac{1}{2x}$ ir lineāri neatkarīgi, jo sakarība (4) ir iespējama tikai tad, ja $a_1=a_2=0$. Ievērojot to, varam apgalvot, ka atrisinājums $y=3C_1x+5C_2x$ nav vispārīgais, bet atrisinājums $y=3C_1x-\frac{C_2}{2x}$ ir vispārīgais atrisinājums.

Viss teiktais attiecas tikai uz lineāru *vienādojumu bez labās puses.*

Vienādojumam ar labo pusi

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x) \tag{5}$$

piemīt šāda īpašība.

3. t e o r ē m a. Ja funkcija $f(x)$ ir viens vienādojuma (5) atrisinājums, tad tā vispārīgais atrisinājums ir

$$y=C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+f(x), \tag{6}$$

kur $\varphi_1(x)$ un $\varphi_2(x)$ ir divi lineāri neatkarīgi atrisinājumi vienādojumam (2), t. i., atbilstošajam vienādojumam bez labās puses.

3. p i e m ē r s. Apskatīsim vienādojumu

$$y''+\frac{1}{x}y'-\frac{1}{x^2}y=8x. \tag{7}$$

Ar pārbaudi pārliecināmies, ka funkcija $f(x)=x^3$ ir tā atrisinājums; tad varam secināt, ka vienādojuma (7) vispārīgais atrisinājums ir (sal. 1. piemēru)

$$y=C_1x+C_2\frac{1}{x}+x^3.$$

3. teorēmu var formulēt vēl tā: *lineāram vienādojumam ar labo pusi vispārīgais atrisinājums ir kāda tā partikulārā atrisinājuma un atbilstošā vienādojuma bez labās puses vispārīgā atrisinājuma summa.*

3. p i e z ī m e. Otrās kārtas lineāru vienādojumu (tiklab ar labo pusi, kā bez tās) var reducēt uz kvadratūrām tikai speciālos gadījumos. Bet to skaitam pieder praktiski sevišķi svarīgais gadījums, kad abi koeficienti $P(x)$ un $Q(x)$ ir pastāvīgi (sk. tālāk 497.—499. §).

497. §. Otrās kārtas lineārais vienādojums ar konstantiem koeficientiem

Vienādojumu

$$y''+py'+qy=R(x), \qquad (1)$$

kur p un q ir pastāvīgi lielumi, bet $R(x)$ ir atkarīgs tikai no x (vai ir pastāvīgs lielums), sauc par *lineāru otrās kārtas vienādojumu ar konstantiem koeficientiem.* Vienādojumu (1) vienmēr var reducēt uz kvadratūrām. Bet gadījumā, ja $R(x)=0$ (vienādojums bez labās puses), atrisinājums ne tikai ir reducējams uz kvadratūrām, bet vienmēr izsakāms ar elementārajām funkcijām (sk. 498. §).

498. §. Otrās kārtas lineārais vienādojums ar konstantiem koeficientiem bez labās puses

Apskatīsim vienādojumu

$$y''+py'+qy=0, \qquad (1)$$

kur p, q ir pastāvīgi lielumi. Atrisinājumu meklēsim formā

$$y=e^{rx}. \qquad (2)$$

Ievietojot (2) vienādojumā (1), atrodam, ka skaitlim r jāapmierina vienādojums

$$r^2+pr+q=0. \qquad (3)$$

Šo vienādojumu sauc par *raksturīgo vienādojumu.*

Var būt trīs gadījumi.

1. g a d ī j u m s. $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q>0$. Raksturīgajam vienādojumam (3) ir divas dažādas reālas saknes r_1, r_2 $\left(r_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)$.

Šai gadījumā dabūjam divus lineāri neatkarīgus (496. § 2. piezīme) atrisinājumus $y=e^{r_1x}$, $y=e^{r_2x}$. Vispārīgais atrisinājums būs

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}. \qquad (4)$$

1. piemērs. Atrast vispārīgo atrisinājumu vienādojumam

$$8y''+2y'-3y=0, \tag{5}$$

kā arī partikulāro atrisinājumu, kas izpilda sākuma nosacījumus $x_0=0$, $y_0=-6$, $y'_0=7$.

Atrisinājums. Raksturīgajam vienādojumam

$$8r^2+2r-3=0 \tag{6}$$

ir divas dažādas reālas saknes

$$r_1=\frac{1}{2}, \quad r_2=-\frac{3}{4}.$$

Funkcijas $y=e^{\frac{1}{2}x}$, $y=e^{-\frac{3}{4}x}$ dod divus lineāri neatkarīgus atrisinājumus. Vienādojuma (5) vispārīgais atrisinājums ir

$$y=C_1e^{\frac{1}{2}x}+C_2e^{-\frac{3}{4}x}. \tag{7}$$

Lai atrastu partikulāro atrisinājumu, aprēķinām atvasinājumu y'; dabūjam

$$y'=\frac{1}{2}C_1e^{\frac{1}{2}x}-\frac{3}{4}C_2e^{-\frac{3}{4}x}. \tag{7a}$$

Ievietojot vienādībās (7) un (7a) sākuma vērtības, dabūjam sistēmu

$$-6=C_1+C_2, \quad 7=\frac{1}{2}C_1-\frac{3}{4}C_2.$$

No tās atrodam $C_1=2$, $C_2=-8$. Meklētais partikulārais atrisinājums ir

$$y=2e^{\frac{1}{2}x}-8e^{-\frac{3}{4}x}.$$

2. gadījums. $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=0$. Raksturīgajam vienādojumam ir divas vienādas saknes $\left(r_1=r_2=-\frac{p}{2}\right)$.

Šai gadījumā atrisinājumi $y=e^{r_1x}$, $y=e^{r_2x}$ ir lineāri atkarīgi (tie sakrīt). Bet tagad bez atrisinājuma $y=e^{-\frac{p}{2}x}$ ir vēl lineāri neatkarīgs atrisinājums $y=xe^{-\frac{p}{2}x}$. Vispārīgais atrisinājums būs

$$y=(C_1+C_2x)e^{-\frac{p}{2}x}. \tag{8}$$

2. piemērs. Atrast vienādojumam

$$y''+4y'+4y=0$$

vispārīgo atrisinājumu un partikulāro atrisinājumu, kas izpilda sākuma nosacījumus $x_0=0{,}5$, $y_0=0{,}5$, $y'_0=-4$.

Atrisinājums. Raksturīgajam vienādojumam

$$r^2+4r+4=0$$

ir vienādas saknes $r_1=r_2=-2$. Funkcijas $y=e^{-2x}$, $y=xe^{-2x}$ dod lineāri neatkarīgus atrisinājumus. Vienādojuma (9) vispārīgais atrisinājums ir

$$y=(C_1+C_2x)e^{-2x}. \tag{10}$$

Diferencējot atrodam

$$y'=[-2C_1+C_2(1-2x)]\,e^{-2x}. \tag{10a}$$

Ievietojot vienādībās (10) un (10a) sākuma vērtības, dabūsim sistēmu

$$0{,}5=(C_1+0{,}5C_2)e^{-1}, \quad -4=-2C_1e^{-1}.$$

No šejienes atrodam $C_1=2e$, $C_2=-3e$. Meklētais partikulārais atrisinājums ir

$$y=(2e-3ex)\,e^{-2x}$$

jeb

$$y=(2-3x)\,e^{1-2x}.$$

3. gadījums. $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q<0$. Raksturīgajam vienādojumam ir kompleksu sakņu pāris

$$r_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\beta i, \tag{11}$$

kur

$$\beta=\sqrt{q-\left(\frac{p}{2}\right)^2}.$$

Šai gadījumā izteiksmēm

$$e^{r_1x},\quad e^{r_2x} \tag{12}$$

nav reālu vērtību nevienai reālai x vērtībai, izņemot $x=0$. Bet tagad var izmantot funkcijas

$$y=e^{-\frac{p}{2}x}\cos\beta x,\quad y=e^{-\frac{p}{2}x}\sin\beta x. \tag{13}$$

Ievietojot tās vienādojumā (1), varam pārliecināties, ka tās abas ir vienādojuma (1) atrisinājumi.

498a. § parādīts, kā atrast atrisinājumus (13) no kompleksajiem atrisinājumiem (12).

Atrisinājumi (13) ir lineāri neatkarīgi, un tāpēc vispārīgais atrisinājums būs

$$y=e^{-\frac{p}{2}x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x) \tag{14}$$

jeb citādi

$$y=C_3e^{-\frac{p}{2}x}\sin(C_4+\beta x) \tag{14a}$$

(kur $C_3\sin C_4=C_1$, $C_3\cos C_4=C_2$).

3. piemērs. Atrast vispārīgo atrisinājumu vienādojumam

$$y''+y'+y=0. \tag{15}$$

Atrisinājums. Raksturīgajam vienādojumam

$$r^2+r+1=0 \tag{16}$$

ir kompleksas saknes $r_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Funkcijas

$$y=e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x \text{ un } y=e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

dod lineāri neatkarīgus atrisinājumus. Vienādojuma (1) vispārīgais atrisinājums ir

$$y=e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \tag{17}$$

jeb

$$y=C_3e^{-\frac{1}{2}x}\sin\left(C_4+\frac{\sqrt{3}}{2}x\right). \tag{17a}$$

4. piemērs. Atrast vispārīgo atrisinājumu vienādojumam

$$y''+y=0.$$

Atrisinājums. Raksturīgajam vienādojumam $r^2+1=$ $=0$ ir imagināras saknes $r_{1,2}=\pm i$ (šeit $\beta=1$, $-\frac{p}{2}=0$). Vispārīgais atrisinājums ir (sal. 495. § 2. piemēru)

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

498a. §. Saistība starp 498. § 1. un 3. gadījumu

Partikulāros atrisinājumus

$$\varphi_1(x)=e^{r_1x},\ \varphi_2(x)=e^{r_2x}\left[r_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right], \tag{1}$$

kurus mēs lietojam 498. § 1. gadījumā, var lietot arī 3. gadījumā, ja apskata kompleksus skaitļus un definē skaitļa e kompleksu pakāpi, kā mēs to darījām 409. paragrāfā. Formulas (1) tagad uzraksta tā:

$$\varphi_1(x)=e^{\left(-\frac{p}{2}+\beta i\right)x},\quad \varphi_2(x)=e^{\left(-\frac{p}{2}-\beta i\right)x}, \tag{2}$$

kur $\beta\left[=\sqrt{q-\left(\frac{p}{2}\right)^2}\right]$ un $-\frac{p}{2}$ ir reāli skaitļi. Izteiksmes (2) izsaka *reāla argumenta x kompleksu* funkciju pāri. Tā kā šīs funkcijas diferencē saskaņā ar parastajām kārtulām (408. §), tad tās arī 3. gadījumā ir vienādojuma $y''+py'+$ $+qy=0$ atrisinājumi. Šie atrisinājumi mūs neapmierina, jo tie nav reāli. *Bet no tiem var dabūt arī reālus atrisinājumus.*

Tiešām, pielietojot Eilera formulu (410. §), mēs atrisinājumus (2) varam izteikt tā:

$$\varphi_1(x) = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) \quad (3)$$

$$\varphi_2(x) = e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x). \quad (4)$$

Funkcija $C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x)$ ir atrisinājums jebkurām konstantu C_1, C_2 vērtībām (496. §). Ņemot vispirms $C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = \frac{1}{2}$, bet pēc tam $C_1 = -\frac{i}{2}$, $C_2 = \frac{i}{2}$, mēs dabūsim divus reālus atrisinājumus

$$e^{\alpha x} \cos \beta x \text{ un } e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Tos mēs arī lietojam 498. § 3. gadījumā.

499. §. Otrās kārtas lineārais vienādojums ar konstantiem koeficientiem ar labo pusi

Vispārīgo atrisinājumu vienādojumam ar labo pusi

$$y'' + py' + qy = R(x) \quad (1)$$

dabū ar kvadratūrām no atbilstošā vienādojuma bez labās puses

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (2)$$

vispārīgā atrisinājuma ar vispārīgu metodi, kas apskatīta tālāk 501. paragrāfā. Bet daudzos praktiski svarīgos gadījumos mērķi sasniedz vienkāršāk šādā veidā.

Vispirms jāsameklē kāds dotā vienādojuma (1) *partikulārais atrisinājums* $f(x)$, pēc tam $f(x)$ *jāpieskaita atbilstošā vienādojuma* (2) *bez labās puses vispārīgajam atrisinājumam.* Summā dabūsim (496. § 3. teorēma) dotā vienādojuma vispārīgo atrisinājumu.

Lai atrastu funkciju $f(x)$, lieto šādas trīs kārtulas.

1. kārtula. Ja vienādojuma (1) labajai pusei $R(x)$ ir izskats

$$R(x) = P(x)e^{kx}, \quad (3)$$

kur $P(x)$ ir kāds m-tās pakāpes polinoms un skaitlis k nav raksturīgā vienādojuma

$$r^2 + pr + q = 0 \quad (4)$$

sakne, tad vienādojumam (1) ir partikulārais atrisinājums

$$y^*=Q(x)e^{kx}, \tag{5}$$

kur $Q(x)$ ir tāpat m-tās pakāpes polinoms [funkcijai y pierakstīta zvaigznīte tāpēc, lai vienādojuma (1) partikulāro atrisinājumu $y^*=f(x)$ varētu atšķirt no tā vispārīgā atrisinājuma].

Polinoma $Q(x)$ koeficientus un brīvo locekli var atrast ar nenoteikto koeficientu metodi.

1. piezīme. Ja polinoms $P(x)$ ir pastāvīgs lielums (nulltās pakāpes polinoms), tad $Q(x)$ arī ir konstante.

2. piezīme. Kārtula lietojama arī tad, ja $R(x)$ ir polinoms (t. i., $k=0$). Tad atrisinājums (5) arī ir polinoms.

1. piemērs. Atrast vispārīgo atrisinājumu vienādojumam

$$y''-\frac{1}{2}y'-\frac{1}{2}y=3e^{\frac{1}{2}x}. \tag{6}$$

Atrisinājums.

Raksturīgajam vienādojumam

$$r^2-\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}=0 \tag{7}$$

ir saknes $r_1=1$, $r_2=-\frac{1}{2}$, tā ka atbilstošā vienādojuma bez labās puses vispārīgais atrisinājums ir

$$\overline{y}=C_1e^x+C_2e^{-\frac{1}{2}x} \tag{8}$$

[svītriņa virs y uzlikta, lai atšķirtu vienādojuma (2) vispārīgo atrisinājumu no vienādojuma (1) vispārīgā atrisinājuma].

Atliek atrast kādu vienādojuma (6) partikulāro atrisinājumu y^*. Šī vienādojuma labajai pusei ir forma (3), kur $P(x)=3$ (nulltās pakāpes polinoms) un skaitlis $k=\frac{1}{2}$ nav raksturīgā vienādojuma (7) sakne. Saskaņā ar 1. kārtulu vienādojumam (6) ir šāda veida atrisinājums:

$$y^*=Ae^{\frac{1}{2}x}\ (A \text{ — konstante}). \tag{9}$$

Ievietojot (9) vienādojumā (6), atrodam

$$\left(\frac{1}{4}A-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}A\right)e^{\frac{1}{2}x}=3e^{\frac{1}{2}x}. \tag{10}$$

Pielīdzinot koeficientus pie $e^{\frac{1}{2}x}$, dabūjam

$$A=-6. \tag{11}$$

Meklētais atrisinājums y^* ir

$$y^*=-6e^{\frac{1}{2}x}. \tag{12}$$

Vienādojuma (6) vispārīgais atrisinājums ir

$$y=\overline{y}+y^*=C_1e^x+C_2e^{-\frac{1}{2}x}-6e^{\frac{1}{2}x}. \tag{13}$$

2. piemērs. Atrast vispārīgo atrisinājumu vienādojumam

$$y''-3y'+2y=x^2+3x. \tag{14}$$

Raksturīgajam vienādojumam

$$r^2-3r+2=0$$

ir saknes $r_1=1$, $r_2=2$, tā ka (paturot 1. piemēra apzīmējumus)

$$\overline{y}=C_1e^x+C_2e^{2x}. \tag{15}$$

Vienādojuma (14) labajai pusei ir veids (3), pie kam $P(x)=x^2+3x$ un skaitlis $k=0$ nav raksturīgā vienādojuma sakne. Atrisinājumu meklējam formā

$$y^*=Ax^2+Bx+C. \tag{16}$$

Ievietojot šo izteiksmi vienādojumā (14), dabūjam vienādību

$$2Ax^2+(2B-6A)x+2C-3B+2A=x^2+3x. \tag{17}$$

Pielīdzinot koeficientus pie vienādām x pakāpēm, dabūjam sistēmu

$$2A=1,\quad 2B-6A=3,\quad 2C-3B+2A=0, \tag{18}$$

no kuras atrodam $A=\frac{1}{2}$, $B=3$, $C=4$, tā ka

$$y^*=\frac{1}{2}x^2+3x+4. \tag{19}$$

Vienādojuma (14) vispārīgais atrisinājums ir

$$y=\bar{y}+y^*=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{2}x^2+3x+4. \tag{20}$$

3. piezīme. Partikulārā atrisinājuma meklēšana formā (16) vienādojumam $y''-3y'=x^2+3x$ [1] būtu nesekmīga [2], jo skaitlis $k=0$ tagad ir raksturīgā vienādojuma $(r^2-3r=0)$ sakne. 1. kārtulas nosacījumi nav izpildīti un jālieto 2. kārtula.

2. kārtula. Pieņemsim, ka vienādojuma (1) labajai pusei ir izskats

$$R(x)=P(x)e^{kx}, \tag{21}$$

kur $P(x)$ ir m-tās pakāpes polinoms un skaitlis k ir raksturīgā vienādojuma $r^2+pr+q=0$ sakne. Ja šī sakne ir vienkārša (t. i., viena no dažādajām saknēm), tad vienādojumam (1) ir partikulārais atrisinājums

$$y^*=xQ(x)e^{kx}, \tag{22}$$

kur $Q(x)$ ir m-tās pakāpes polinoms, ja turpretim k ir raksturīgā vienādojuma divkārša sakne (t. i., viena no divām vienādām saknēm), tad vienādojumam (1) ir atrisinājums

$$y^*=x^2Q(x)e^{kx}. \tag{23}$$

1. un 2. piezīme paliek spēkā.

3. piemērs. Atrast vienādojumam

$$y''-3y'=x^2+3x \tag{24}$$

---

[1] Šis vienādojums atrisināts 3. piemērā.

[2] Tomēr kļūda nerodas: mēģinot meklēt atrisinājumu formā $y^*=Ax^2+Bx+C$, mēs vienādības (17) vietā dabūtu šādu vienādību:

$$-6Ax+(2A-3B)=x^2+3x.$$

Pielīdzināt koeficientus pie vienādām x pakāpēm nav iespējams, jo labajā pusē ir otrās pakāpes loceklis, bet kreisajā tāda nav. Mēģinājums bija neveiksmīgs, bet ne kļūdains.

vispārīgo atrisinājumu un arī partikulāro atrisinājumu, kas izpilda sākuma nosacījumus

$$x_0=0, \quad y_0=1, \quad y'_0=3.$$

Atrisinājums. Šeit $P(x)=x^2+3x$ un skaitlis $k=0$ ir raksturīgā vienādojuma

$$r^2-3r=0$$

vienkārša sakne ($r_1=3$, $r_2=0$). Vienādojumam (24) ir partikulārs atrisinājums

$$y^*=x(Ax^2+Bx+C)=Ax^3+Bx^2+Cx. \tag{25}$$

Rīkojoties tāpat kā 2. piemērā, dabūsim sistēmu

$$-9A=1, \quad -6B+6A=3, \quad -3C+2B=0,$$

no kuras atradīsim $A=-\frac{1}{9}$, $B=-\frac{11}{18}$, $C=-\frac{11}{27}$, tā ka

$$y^*=-\frac{1}{9}x^3-\frac{11}{18}x^2-\frac{11}{27}x. \tag{26}$$

Vienādojuma (24) vispārīgais atrisinājums ir

$$y=C_1e^{3x}+C_2-\frac{1}{9}x^3-\frac{11}{18}x^2-\frac{11}{27}x. \tag{27}$$

Diferencējot dabūjam

$$y'=3C_1e^{3x}-\frac{1}{3}x^2-\frac{11}{9}x-\frac{11}{27}. \tag{27a}$$

Ievietojot vienādībās (27) un (27a) sākuma vērtības, dabūjam sistēmu

$$1=C_1+C_2, \quad 3=3C_1-\frac{11}{27}.$$

Tā dod $C_1=\frac{92}{81}$, $C_2=-\frac{11}{81}$. Meklētais partikulārais atrisinājums ir $y=\frac{92}{81}e^{3x}-\frac{1}{9}x^3-\frac{11}{18}x^2-\frac{11}{27}x-\frac{11}{81}$.

4. piemērs. Atrast vispārīgo atrisinājumu vienādojumam

$$y''-2y'+y=xe^x. \tag{28}$$

Šeit $P(x)=x$ un skaitlis $k=1$ ir raksturīgā vienādojuma $r^2-2r+1=0$ divkārša sakne. Vienādojumam (28) ir partikulārs atrisinājums

$$y^*=x^2(Ax+B)e^x=(Ax^3+Bx^2)e^x. \tag{29}$$

Ievietojot izteiksmi (29) vienādojumā (28), locekļi, kas satur x^3 un x^2, iznīcinās, un mēs dabūjam vienādību

$$(6Ax+2B)e^x=xe^x. \tag{30}$$

Pielīdzinot koeficientus pie locekļiem ar vienādām x pakāpēm, dabūsim sistēmu $6A=1$, $2B=0$, tā ka

$$y^*=\frac{1}{6}x^3e^x.$$

Vienādojuma (28) vispārīgais atrisinājums (sk. 498. § 2. gadījumu) ir

$$y=(C_1+C_2x)e^x+\frac{1}{6}x^3e^x. \tag{31}$$

3. k ā r t u l a. Pieņemsim, ka vienādojuma (1) labā puse ir

$$R(x)=e^{\alpha x}[P_1(x)\cos\beta x+P_2(x)\sin\beta x], \tag{32}$$

kur $P_1(x)$ un $P_2(x)$ ir polinomi ar pakāpēm m_1 un m_2.

Iespējami divi gadījumi:

1) kompleksie skaitļi $\alpha\pm\beta i$ nav raksturīgā vienādojuma $r^2+pr+q=0$ saknes;

2) skaitļi $\alpha+\beta i$ ir šī vienādojuma saknes [1].

Pirmajā gadījumā vienādojumam (1) ir atrisinājums

$$y^*=e^{\alpha x}[Q_1(x)\cos\beta x+Q_2(x)\sin\beta x], \tag{33}$$

kur $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ ir polinomi, kuru pakāpes nepārsniedz lielāko no skaitļiem m_1, m_2.

Otrajā gadījumā vienādojumam (1) ir atrisinājums

$$y^*=xe^{\alpha x}[Q_1(x)\cos\beta x+Q_2(x)\sin\beta x]. \tag{34}$$

5. p i e m ē r s. Atrast vispārīgo atrisinājumu vienādojumam

$$y''+y=10e^x\sin 2x. \tag{35}$$

[1] Gadījums, kad tikai viens no skaitļiem $\alpha\pm\beta i$ ir vienādojuma $r^2+pr+q=0$ sakne, nav iespējams (ja koeficienti p, q ir reāli).

Šeit $P_1(x)=0$, $P_2(x)=10$ (t. i., $P_1(x)$ un $P_2(x)$ ir nulltās pakāpes polinomi), $\alpha=1$, $\beta=2$. Kompleksie skaitļi $\alpha\pm\beta i=1\pm 2i$ nav raksturīgā vienādojuma $r^2+1=0$ saknes. Vienādojumam (35) ir partikulārs atrisinājums

$$y^*=e^x(A\cos 2x+B\sin 2x). \qquad (36)$$

Ievietojot izteiksmi (36) vienādojumā (35), dabūjam vienādību

$$[(-2A+4B)\cos 2x+(-4A-2B)\sin 2x]e^x=10e^x\sin 2x \qquad (37)$$

no kuras iegūstam sistēmu

$$-2A+4B=0, \quad -4A-2B=10.$$

Tā dod $A=-2$, $B=-1$, tā ka

$$y^*=-e^x(2\cos 2x+\sin 2x).$$

Vienādojuma (35) vispārīgais atrisinājums ir

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x-e^x(2\cos 2x+\sin 2x). \qquad (38)$$

6. piemērs. Atrast vispārīgo atrisinājumu vienādojumam

$$y''+y=4x\sin x. \qquad (39)$$

Šeit $P_1(x)=0$, $P_2(x)=4x$ [polinomu $P_1(x)$ un $P_2(x)$ vecākā pakāpe ir pirmā], $\alpha=0$, $\beta=1$. Kompleksie skaitļi $\alpha\pm\beta i=\pm i$ ir raksturīgā vienādojuma $r^2+1=0$ saknes. Vienādojumam (39) ir partikulārais atrisinājums

$$y^*=x[(A_1x+B_1)\cos x+(A_2x+B_2)\sin x]=$$
$$=(A_1x^2+B_1x)\cos x+(A_2x^2+B_2x)\sin x. \qquad (40)$$

Ievietojot izteiksmi (40) vienādojumā (39), dabūjam vienādību

$$[4A_2x+(2B_2+2A_1)]\cos x+[-4A_1x+(-2B_1+2A_2)]\sin x=$$
$$=4x\sin x \qquad (41)$$

no kuras iegūstam sistēmu

$$4A_2=0, \quad 2B_2+2A_1=0, \quad -4A_1=4, \quad -2B_1+2A_2=0.$$

Tā dod $A_1=-1$, $B_1=0$, $A_2=0$, $B_2=1$, tā ka

$$y^*=-x^2\cos x+x\sin x.$$

Vienādojuma (39) vispārīgais atrisinājums ir

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x(-x \cos x + \sin x). \qquad (42)$$

4. piezīme. Ja vienādojuma (1) labajā pusē ir summa, kur katrs saskaitāmais izteikts formā (21) vai (32), tad vienādojumam (1) ir partikulārais atrisinājums, kas izteikts kā izteiksmju (5), (22), (23), (33), (34) summa. Koeficientus atrod tāpat kā iepriekšējos piemēros.

500. §. Jebkuras kārtas lineārais vienādojums

Par n-tās kārtas lineāru vienādojumu sauc vienādojumu

$$y^{(n)} + P_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + P_n(x) y = R(x). \qquad (1)$$

Ja $R(x) = 0$, tad (1) sauc par *vienādojumu bez labās puses* (jeb par *homogēnu*), ja $R(x) \neq 0$, tad par *vienādojumu ar labo pusi* (jeb par *nehomogēnu*).

Otrās kārtas lineāro vienādojumu īpašības (496.—499. §) var vispārināt augstāku kārtu lineāriem vienādojumiem šādā veidā.

Ja $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ ir atrisinājumi vienādojumam bez labās puses

$$y^{(n)} + P_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + P_n(x) y = 0, \qquad (2)$$

tad funkcija

$$y = C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x) + \ldots + C_n \varphi_n(x) \qquad (3)$$

arī ir atrisinājums. Šis atrisinājums nebūs vispārīgais atrisinājums, ja atrisinājumi $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ ir *lineāri atkarīgi*, proti, ir saistīti ar sakarību

$$a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x) + \ldots + a_n \varphi_n(x) = 0, \qquad (4)$$

kur vismaz viena no konstantēm $a_1, a_2, \ldots, a_n$ atšķiras no nulles.

Ja turpretim atrisinājumi $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ ir lineāri neatkarīgi, t. i., ja vienādība (4) ir identiski izpildīta tikai tad, ja visas konstantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ir vienādas ar nulli, tad (3) ir vienādojuma (2) vispārīgais atrisinājums.

Vienādojuma (1) vispārīgo atrisinājumu dabū, ja kādam tā partikulārajam atrisinājumam pieskaita vienādojuma (2) vispārīgo atrisinājumu.

Lineāro vienādojumu ar konstantiem koeficientiem bez labās puses

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\ldots+p_ny=0 \tag{5}$$

atrisina, izmantojot *raksturīgo vienādojumu*

$$r^n+p_1r^{n-1}+p_2r^{n-2}+\ldots+p_n=0. \tag{6}$$

I. Ja visas raksturīgā vienādojuma saknes $r_1, r_2, \ldots, r_n$ ir reālas un vienkāršas, tad vienādojuma (5) vispārīgais atrisinājums ir

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}+\ldots+C_ne^{r_nx}. \tag{7}$$

II. Ja kādai reālai saknei r ir kārta k $(r_1=r_2=\ldots=r_k)$, tad formulā (7) atbilstošos k locekļus aizstāj ar saskaitāmo

$$(C_1+C_2x+\ldots+C_kx^{k-1})e^{rx}. \tag{8}$$

III. Ja raksturīgajam vienādojumam ir vienkāršu saistītu kompleksu sakņu pāris $(r_{1,2}=\alpha\pm\beta i)$, tad atbilstošo locekļu pāri formulā (7) aizstāj ar saskaitāmo

$$e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x). \tag{9}$$

IV. Ja kādam saistītu kompleksu sakņu pārim ir kārta k, tad atbilstošos k locekļu pārus formulā (7) aizstāj ar saskaitāmo

$$e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\ldots+C_kx^{k-1})\cos\beta x+ \\ +(D_1+D_2x+\ldots+D_kx^{k-1})\sin\beta x]. \tag{10}$$

Piemērs. Apskatīsim vienādojumu

$$y^{\mathrm{V}}+y^{\mathrm{IV}}+2y'''+2y''+y'+y=0. \tag{11}$$

Tā raksturīgajam vienādojumam

$$r^5+r^4+2r^3+2r^2+r+1=0 \tag{12}$$

ir vienkārša reāla sakne $r=-1$ un divkāršu saistītu imagināru sakņu $r=\pm i$ pāri. Vienādojuma (11) vispārīgais atrisinājums ir

$$y=C_1e^{-x}+(C_2+C_3x)\cos x+(C_4+C_5x)\sin x. \tag{13}$$

Lineāram vienādojumam ar konstantiem koeficientiem ar labo pusi

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\ldots+p_ny=R(x) \tag{14}$$

vispārīgo atrisinājumu dabū ar kvadratūrām no atbilstošā vienādojuma bez labās puses vispārīgā atrisinājuma ar metodi, kas izskaidrota 501. paragrāfā. Bet, ja labajai pusei $R(x)$ ir izskats $P(x)e^{kx}$ [$P(x)$ ir polinoms] vai vēl vispārīgāks veids

$$e^{\alpha x}[P_1(x)\cos\beta x+P_2(x)\sin\beta x],$$

vai arī tā ir līdzīgu locekļu summa, tad atrisināšanu var vienkāršot.

I. Pieņemsim, ka

$$R(x)=P(x)e^{kx}, \tag{15}$$

kur $P(x)$ ir m-tās pakāpes polinoms. Tad vienādojumam (14) ir partikulārais atrisinājums

$$y^*=Q(x)e^{kx}, \tag{16}$$

kur $Q(x)$ ir m-tās pakāpes polinoms, ja vien skaitlis k nav raksturīgā vienādojuma (6) sakne. Pretējā gadījumā vienādojumam (14) ir partikulārais atrisinājums

$$y^*=x^lQ(x)e^{kx}, \tag{17}$$

kur l ir kārta, ar kādu k ieiet raksturīgā vienādojuma saknu skaitā (sal. 499. § 1. un 2. kārtulu un 1.—4. piemēru).

II. Pieņemsim, ka

$$R(x)=e^{\alpha x}[P_1(x)\cos\beta x+P_2(x)\sin\beta x], \tag{18}$$

kur $P_1(x)$ un $P_2(x)$ ir polinomi ar pakāpēm m_1 un m_2. Tad vienādojumam (14) ir partikulārais atrisinājums

$$y^*=e^{\alpha x}[Q_1(x)\cos\beta x+Q_2(x)\sin\beta x], \tag{19}$$

kur $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ ir polinomi, kuru pakāpes nepārsniedz lielāko no skaitļiem m_1 un m_2, ja vien kompleksie skaitļi $\alpha+\beta i$ nav raksturīgā vienādojuma (6) saknes. Pretējā gadījumā vienādojumam (1) ir partikulārais atrisinājums

$$y^*=x^le^{\alpha x}[Q_1(x)\cos\beta x+Q_2(x)\sin\beta x], \tag{20}$$

kur l ir kārta, ar kādu saknu pāris $\alpha\pm\beta i$ ieiet raksturīgā vienādojuma saknu skaitā (sal. 499. § 3. kārtulu un 5. un 6. piemēru).

501. §. Konstantu variāciju metode

Lineāram vienādojumam ar labo pusi vispārīgo atrisinājumu var dabūt ar kvadratūrām no atbilstošā vienādojuma bez labās puses vispārīgā atrisinājuma. Šai nolūkā var lietot šādu paņēmienu.

Vienādojuma bez labās puses vispārīgajā atrisinājumā visas patvaļīgās konstantes aizstājam ar nezināmām funkcijām. Dabūto izteiksmi diferencējam un tai pašā reizē nezināmās funkcijas pakļaujam papildu nosacījumiem, kas vienkāršo tālākos atvasinājumus. Ievietojot atvasinājumu y', y'', y''' utt. izteiksmes dotajā vienādojumā, dabūsim vēl vienu nosacījumu, kam pakļautas nezināmās funkcijas. Izrādās, ka tad ir iespējams atrast visu nezināmo funkciju pirmos atvasinājumus un atliek izpildīt kvadratūras.

Šo metodi var pielietot jebkuras kārtas lineāriem vienādojumiem tiklab ar pastāvīgiem, kā arī ar mainīgiem koeficientiem. 486. paragrāfā mēs šo metodi pielietojam pirmās kārtas lineārajam vienādojumam. Apskatīsim šeit otrās kārtas vienādojumu

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x). \tag{1}$$

Pieņemsim, ka atbilstošajam vienādojumam bez labās puses vispārīgais atrisinājums ir

$$y=C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x). \tag{2}$$

Meklēsim tagad vienādojuma (1) atrisinājumu formā (2), uzskatot C_1 un C_2 par nezināmām x funkcijām.

Vienādību (2) diferencējot, atrodam

$$y'=C_1\varphi_1'(x)+C_2\varphi_2'(x)+C_1'\varphi_1(x)+C_2'\varphi_2(x). \tag{3}$$

Prasām, lai izpildītos papildu nosacījums

$$C_1'\varphi_1(x)+C_2'\varphi_2(x)=0. \tag{4}$$

Tad pirmā atvasinājuma izskats vienkāršojas un mēs dabūjam

$$y'=C_1\varphi_1'(x)+C_2\varphi_2'(x). \tag{5}$$

Diferencējot vēlreiz, dabūjam

$$y''=C_1\varphi_1''(x)+C_2\varphi_2''(x)+C_1'\varphi_1'(x)+C_2'\varphi_2'(x). \tag{6}$$

Ja izteiksmes (2), (5) un (6) ievietojam vienādojumā (1), tad visi locekļi, kas satur C_1, savstarpēji iznīcinās [jo funkcija

$y=\varphi_1(x)$ ir vienādojuma $y''+Py'+Qy=0$ atrisinājums]; gluži tāpat iznīcinās visi locekļi, kas satur C_2, un mēs dabūjam vēl vienu nosacījumu

$$C_1'\varphi_1'(x)+C_2'\varphi_2'(x)=R(x). \tag{7}$$

Nosacījumi (4) un (7) ļauj atrast atvasinājumu C'_1, C'_2 izteiksmes un atliek izpildīt kvadratūras.

P i e m ē r s. Apskatīsim vienādojumu

$$y''+y=\operatorname{tg} x. \tag{1a}$$

Atbilstošajam vienādojumam bez labās puses vispārīgais atrisinājums ir

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x, \tag{2a}$$

kur C_1 un C_2 ir patvaļīgas konstantes. Meklēsim vienādojuma (1a) atrisinājumu formā (2a), uzskatot tagad C_1 un C_2 par nezināmām funkcijām.

Nosacījumi (4) un (7) pieņem izskatu

$$C_1'\cos x+C_2'\sin x=0, \quad -C_1'\sin x+C_2'\cos x=\operatorname{tg} x. \tag{3a}$$

No šejienes atrodam

$$C_1'=-\operatorname{tg} x\sin x, \qquad C_2'=\sin x;$$

$$C_1=\int -\operatorname{tg} x\sin x\,dx+C_3, \qquad C_2=\int \sin x\,dx+C_4$$

(C_3, C_4 — konstantes). Šai gadījumā integrēšana izpildāma ar elementārām funkcijām. Ievietojot izteiksmē (2a), dabūjam vispārīgo atrisinājumu

$$y=\left(\ln\frac{\cos x}{1+\sin x}+\sin x+C_3\right)\cos x+(-\cos x+C_4)\sin x=$$

$$=\cos x\ln\frac{\cos x}{1+\sin x}+C_3\cos x+C_4\sin x.$$

502. §. Diferenciālvienādojumu sistēmas. Lineāras sistēmas

Par diferenciālvienādojumu sistēmu sauc vienādojumu kopu, kuri satur vairākas nezināmās funkcijas un to atvasinājumus, pie kam katrā vienādojumā ieiet vismaz viens atvasinājums. Praktiski jāapskata tādas sistēmas, kur vienādojumu skaits ir vienāds ar nezināmo skaitu.

Sistēmu sauc par *lineāru*, ja nezināmās funkcijas un to atvasinājumi visos vienādojumos ieiet tikai pirmajās pakāpēs. Lineārai sistēmai ir *normālais veids*, kad tā ir atrisināta attiecībā pret visiem atvasinājumiem.

1. piemērs. Diferenciālvienādojumu sistēma

$$\frac{dx}{dt}=x-y+\frac{3}{2}t^2, \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt}=-4x-2y+4t+1 \tag{2}$$

ir lineāra; tai ir normālais veids.

Šai piemērā mums ir *lineāra sistēma ar konstantiem koeficientiem* (koeficienti pie nezināmajām funkcijām un to atvasinājumiem ir pastāvīgi).

No lineāras sistēmas (pievienojot tai ar diferencēšanu iegūtos vienādojumus) var izslēgt visas nezināmās funkcijas (un to atvasinājumus), izņemot vienu. Dabūtais vienādojums saturēs vienu nezināmo funkciju un tās pirmās un augstākas kārtas atvasinājumus. Šis vienādojums arī būs lineārs un, ja dotā sistēma bija sistēma ar konstantiem koeficientiem, tad arī atrastajam augstākas kārtas vienādojumam būs konstanti koeficienti.

Pēc tam kad esam atraduši šī vienādojuma nezināmo funkciju, ievietojam tās izteiksmi dotajos vienādojumos un atrodam pārējās nezināmās funkcijas.

2. piemērs. Atrisināt 1. piemēra lineāro sistēmu.

Atrisinājums. Lai izslēgtu y un $\frac{dy}{dt}$, diferencējam vienādojumu (1). Dabūsim

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}+3t. \tag{3}$$

No vienādojuma (1) atrodam y izteiksmi atkarībā no t, x un $\frac{dx}{dt}$; ievietojot vienādojumā (2), atrodam $\frac{dy}{dt}$ izteiksmi atkarībā no tiem pašiem lielumiem. Ievietojot šo izteiksmi vienādojumā (3), dabūsim otrās kārtas lineāru vienādojumu

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}-6x=3t^2-t-1. \tag{4}$$

Ar 499. paragrāfā apskatīto paņēmienu atrodam tā vispārīgo atrisinājumu

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t} - \frac{1}{2} t^2. \tag{5}$$

Šo izteiksmi ievietojam vienādojumā (1) un atrodam otru nezināmo funkciju

$$y = -\frac{dx}{dt} + x + \frac{3}{2} t^2 = -C_1 e^{2t} + 4C_2 e^{-3t} + t^2 + t. \tag{6}$$

DAŽAS IEVĒROJAMAS LĪKNES

503. §. Strofoīda

1. Definīcija un konstrukcija. *Taisnu strofoīdu*[1] jeb vienkārši *strofoīdu* definē tā: ņemam savstarpēji perpendikulāras taisnes AB, CD (479. zīm.) un uz vienas no tām punktu A; caur to novelkam patvaļīgu taisni AL, kas krusto CD punktā P. Uz AL atliekam nogriežņus PM_1, PM_2, kas vienādi ar OP (O ir AB un CD krustošanās punkts). Strofoīda (taisna) ir punktu M_1, M_2 ģeometriskā vieta.

Slīpu strofoīdu (480. zīm.) konstruē analogi; vienīgā atšķirība ir tā, ka AB un CD krustojas slīpā leņķī.

Strofoīdu apskatīja (droši vien pirmais) Robervals[2] 1645. gadā ar *pteroīdas*[3] nosaukumu. Tagadējo nosaukumu ieteica Midi 1849. gadā.

2. Stereometriska konstrukcija. Iedomāsimies cilindrisku virsmu ar asi CD (479. zīm.) un rādiusu AO. Caur punktu A novelkam zīmējuma plaknei perpendikulāru patvaļīgu plakni K (taisne AL ir šīs plaknes pēda). Šķēlumā dabūsim elipsi; tās fokusi M_1, M_2 apraksta taisnu strofoīdu.

Slīpu strofoīdu konstruē analogi, vienīgā atšķirība ir tā, ka cilindrisku virsmu samaina ar konisku virsmu: konusa ass (480. zīmējumā OS) iet caur O perpendikulāri pret AB;

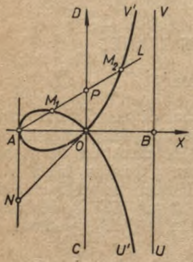
---

[1] No grieķu vārda «strofe» (στροφη) — pagrieziens.

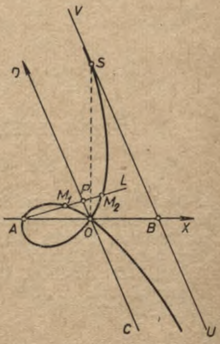
[2] Robervals — franču zinātnieka G. Personjē (1602—1675) pseidonīms; viņš dzimis Robervala ciemā. Viens no bezgalīgi mazo lielumu metodes dibinātājiem; izgudrojis svarus, kas nosaukti viņa vārdā.

[3] No grieķu vārda «pteron» (πτερον) — spārns.

taisne UV, kas iet caur B paralēli CD, ir viena veidotāja. Punkti M_1, M_2 ir atbilstošā konusa šķēluma fokusi; slīpā strofoīda atrodas abos koniskās virsmas dobumos un iet caur tās virsotni S.



479. zīm.



480. zīm.

3. Vienādojums Dekarta sistēmā (O — sākums; OX ass vērsta pa staru OB; $AO=a$, $\angle AOD=\alpha$; ja strofoīda ir slīpa, tad koordinātu sistēma ir slīpleņķa, OY ass vērsta pa staru OD) ir

$$y^2(x-a)-2x^2y\cos\alpha+x^2(a+x)=0. \qquad (1)$$

Taisnai strofoīdai vienādojumu (1) var reducēt veidā

$$y=\pm x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}. \qquad (2)$$

Vienādojums polārajā sistēmā (O — pols, OX — polārā ass) ir

$$\varrho=-\frac{a\cos 2\varphi}{\cos\varphi}.$$

Racionālie parametriskie vienādojumi ($u=\operatorname{tg}\varphi$) ir

$$x=a\left(\frac{u^2-1}{u^2+1}\right),\quad y=au\left(\frac{u^2-1}{u^2+1}\right).$$

4. Formas īpatnības. Punkts O ir mezgla punkts[1]; pieskares diviem zariem, kas iet caur O, ir savstarpēji perpendikulāras (tiklab taisnai, kā slīpai strofoīdai). Slīpai strofoīdai (480. zīm.) taisne UV ir asimptota (līnijai bezgalīgi attālinoties lejup). Bez tam UV pieskaras slīpai strofoīdai punktā S, kas atrodas vienādos attālumos no A un B. Taisnai strofoīdai pieskaršanās punkts S «aiziet bezgalībā» (attālinoties augšup), tā ka taisne UV (479. zīm.) ir asimptota abiem zariem.

5. Liekuma rādiuss mezgla punktā taisnai strofoīdai ir

$$R_0=a\sqrt{2}=ON \quad (479.\ \text{zīm.}).$$

6. Laukumi un tilpumi taisnai strofoīdai. Cilpas AOM_1 laukums S_1 ir

$$S_1=2a^2-\frac{1}{2}\pi a^2.$$

Tilpums V_1 ķermenim, kas rodas, cilpai rotējot ap OX asi, ir

$$V_1=\pi a^3\left(2\ln 2-\frac{4}{3}\right)\approx 0{,}166\,a^3.$$

Laukums S_2 starp zariem OU', OV' un asimptotu (šis laukums sniedzas bezgalībā, bet tam ir galīgs lielums) ir

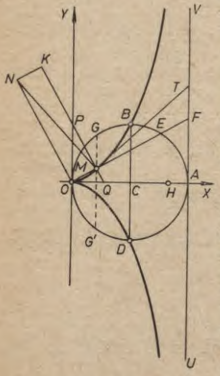
$$S_2=2a^2+\frac{1}{2}\pi a^2.$$

Tilpums ķermenim, kas rodas, figūrai $U'OV'VU$ rotējot ap OX asi, ir bezgalīgs.

[1] Par kādas līnijas *mezgla punktu* sauc tādu tās punktu, caur kuru šī līnija iet divreiz (vai vairākas reizes), pie kam līnijas virzieni viens no otra atšķiras.

504. §. Diokla cisoīda

1. Definīcija un konstrukcija. Uz nogriežņa $OA=2a$ kā uz diametra konstruējam riņķa līniju C (481. zīm.) un novelkam caur A pieskari UV. Caur O velkam patvaļīgu taisni OF, kas krusto UV punktā F; šī taisne krusto (otrreiz) riņķa līniju C punktā E. Uz taisnes OF no punkta virzienā uz O atliekam nogriezni FM, kas ir vienāds ar hordu OE. Līniju, kuru apraksta punkts M, taisnei OF rotējot ap O, sauc par *Diokla cisoīdu* — grieķu matemātiķa vārdā, kurš II gs. pirms m. ē. apskatīja šo līniju, lai grafiski atrisinātu uzdevumu par kuba divkāršošanu [1].



481. zīm.

2. Vēsturiskas ziņas. Diokls cisoīdu definēja, ņemot pamatā citu konstrukciju. Viņš novilka diametram OA perpendikulāru diametru BD; punktu M dabūja hordas OE krustojumā ar taisni $GG' \parallel BD$, kas novilkta caur punktam E simetrisku punktu G attiecībā pret BD. Tāpēc Diokla līnija novietojās pilnīgi riņķa C iekšienē. Tā sastāvēja no lokiem OB un OD. Ja līniju BOD noslēdz ar pusaploci BAD, ko apraksta punkts E, tad rodas figūra, kas atgādina efejas lapu. No šejienes arī radies nosaukums «cisoīda» [2].

Apmēram ap 1640. g. Robervals un vēlāk Slīzs [3] ievēroja, ka cisoīda neierobežoti turpinās arī aiz riņķa līnijas robežām, ja punkts E apraksta arī otru pusaploci BOD; tad punkts M atrodas uz OE turpinājuma. Tomēr Heigensa ieteiktais nosaukums «Slīza cisoīda» literatūrā neieviesās.

---

[1] Šai uzdevumā pēc dotās kuba šķautnes jākonstruē šķautne citam kubam, kura tilpums būtu divreiz lielāks.

[2] Grieķiski «kisoīda» — no vārda «kisos» (κισσός) — efeja.

[3] R. de Slīzs (1622—1685) — holandiešu zinātnieks, Dekarta darbu turpinātājs.

3. Vienādojums taisnleņķa sistēmā (O — sākums, OX — abscisu ass)

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}.$$

Polārajā sistēmā (O — pols, OX — polārā ass)

$$\varrho = \frac{2a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi}.$$

Racionālie parametriskie vienādojumi ($u = \operatorname{tg} \varphi$)

$$x = \frac{2a}{1+u^2}, \quad y = \frac{2a}{u(1+u^2)}.$$

4. Formas īpatnības. Cisoīda ir simetriska attiecībā pret diametru OA, iet caur punktiem B, D un tai ir asimptota UV ($x = 2a$); O ir atgriešanās punkts[1] (liekuma rādiuss $R_0 = 0$).

Pieskares konstrukcija. Lai konstruētu pieskari cisoīdai tās punktā M, novelkam $MP \perp OM$. Pieņemsim, ka P, Q ir MP krustošanās punkti ar taisnēm OX, OY. No punkta P uz nogriežņa QP turpinājuma atliekam nogriezni $PK = PQ$. Konstruējam $KN \parallel MO$ un $ON \parallel QP$. Nogriežņu KN un ON krustošanās punktu N savienojam ar M. Taisne MN ir cisoīdas normāle. Meklētā pieskare ir perpendikulāra MN.

5. Laukums S joslai, kas ieslēgta starp cisoīdu un tās asimptotu (šī josla aizstiepjas bezgalībā), ir galīgs; tas ir trīsreiz lielāks par veidojošā riņķa C laukumu, t. i.,

$$S = 3\pi a^2.$$

6. Tilpums V minētās joslas rotācijas ķermenim ap asimptotu UV ir vienāds ar tilpumu V' riņķa C rotācijas ķermenim ap to pašu asi (Slīzs), t. i.,

$$V = V' = 2\pi^2 a^3.$$

Ja tā pati josla rotē ap simetrijas asi, tad rodas ķermenis, kura tilpums ir bezgalīgi liels.

7. Smaguma centrs H joslai starp cisoīdu un tās asimptotu UV dala nogriezni OA attiecībā $OH : HA = 5 : 1$ (Heigenss).

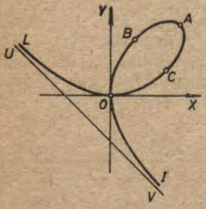
[1] Atgriešanās punkta definīciju sk. 507. § 4. p.

8. Saistība ar parabolu. Perpendikulu pamatu ģeometriskā vieta, kuri novilkti no parabolas ($y^2=2px$) virsotnes pret tās pieskarēm, ir cisoīda

$$\left(y^2=-\frac{x^3}{\frac{p}{2}-x}\right).$$

505. §. Dekarta lapa

1. Vēsturiskas ziņas. 1638. gadā Dekarts, lai apgāztu Fermā kārtulu par pieskaru atrašanu (kuru viņš nebija pareizi izpratis), uzdeva Fermā atrast pieskari līnijai $x^3+y^3=nxy$. Ja negatīvās koordinātes iztulko mums parastā nozīmē, tad šī līnija, kuru XVIII gadsimtā sāka saukt par Dekarta lapu (482. zīm.), sastāv no cilpas $OBAC$ (482. zīm.) un diviem bezgalīgiem zariem (OI, OL). Bet tādā veidā to pirmoreiz attēloja Heigenss (1692. gadā). Līdz tam līniju $x^3+y^3=nxy$ attēloja kā četras lapiņas (viena no tām ir $OBAC$), kas simetriski novietotas četros kvadrantos. Tāpēc to sauca arī par «jasmīna ziedu».



482. zīm.

2. Vienādojumu Dekarta lapai parasti raksta formā

$$x^3+y^3=3axy. \qquad (1)$$

Koeficients $3a$ izsaka diagonāli kvadrātam, kura mala ir vienāda ar cilpas vislielāko hordu OA, tā ka

$$OA=\frac{3a}{\sqrt{2}}. \qquad (2)$$

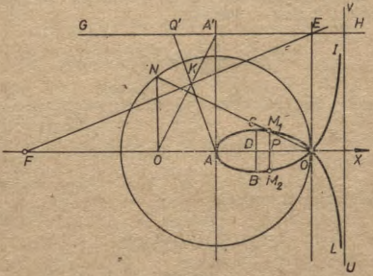
Vienādojums polārajā sistēmā (O — pols, OX — polārā ass) ir

$$\varrho=\frac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}. \qquad (3)$$

Racionālie parametriskie vienādojumi ($u=\operatorname{tg}\varphi$) ir

$$x=\frac{3au}{1+u^3}, \quad y=\frac{3au^2}{1+u^3}. \qquad (4)$$

F o r m a s ī p a t n ī b a s. Punkts O ir mezgla punkts. Pieskares, kas iet caur O, sakrīt ar koordinātu asīm. Taisne OA ($y=x$) ir simetrijas ass. Punktu $A\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$, kas atrodas vistālāk no mezgla punkta, sauc par *virsotni*. Taisne UV ($x+y+a=0$) ir asimptota abiem bezgalīgajiem zariem.



483. zīm.

3. V i e n ā d o j u m s a t t i e c ī b ā p r e t s i m e t r i j a s a s i. Ja simetrijas asi OA pieņem par abscisu asi, vēršot to no mezgla O (koordinātu sākuma) uz asimptotu UV (483. zīm.), tad Dekarta lapu izsaka vienādojums

$$y=\pm x\sqrt{\frac{l+x}{l-3x}}, \tag{5}$$

kur $l=\frac{3a}{\sqrt{2}}=OA$.

Atbilstošais vienādojums p o l ā r a j ā sistēmā ir

$$\varrho=\frac{l(\sin^2\varphi-\cos^2\varphi)}{3\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}.$$

Racionālie p a r a m e t r i s k i e vienādojumi ($u=\operatorname{tg}\varphi$) ir

$$x=l\frac{u^2-1}{3u^2+1}, \quad y=l\frac{u(u^2-1)}{3u^2+1}.$$

4. Liekuma rādiuss ir virsotnē $R_A=\frac{3a}{8\sqrt{2}}=\frac{l}{8}$; mezgla punktā $R_O=\frac{3a}{2}=\frac{l}{\sqrt{2}}$.

5. Cilpas laukums S_1 un (bezgalīgas) joslas laukums S_2 starp bezgalīgajiem zariem un asimptotu ir savstarpēji vienādi, un tos izsaka ar formulu

$$S_1=S_2=\frac{3}{2}a^2=\left(\frac{l}{3}\right)^2.$$

6. Cilpas vislielākais šķērsgriezums ir

$$BC=\frac{2l}{3}\sqrt{2\sqrt{3}-3}\approx 0{,}448\,l.$$

Tā attālums no mezgla ir

$$DO=\frac{l}{3}\sqrt{3}\approx 0{,}577\,l.$$

7. Konstrukcija. Lai konstruētu Dekarta lapu ar cilpas diametru l, novelkam riņķa līniju A ar rādiusu $AO=$ $=l$ un kādu AO paralēlu taisni GH. Tālāk novelkam nogrieznim AO perpendikulāras taisnes AA' un OE un atzīmējam to krustošanās punktus A', E ar taisni GH. Beidzot atliekam uz stara OA nogriezni $OF=3OA$ un novelkam taisni FE. Tagad meklēto līniju konstruē pēc dabūtajiem punktiem šādā veidā.

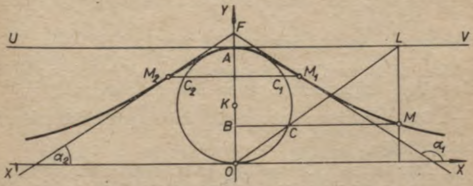
Caur punktu O novelkam kaut kādu taisni ON un caur punktu N, kur šī taisne krusto (otrreiz) riņķa līniju, novelkam $NQ \| AA'$. Punktu Q, kur NQ krusto taisni OF, savienojam ar A' un atzīmējam punktu K, kur QA' krusto FE. Novelkam taisni AK līdz tā krustojas ar taisni GH punktā Q'. Beidzot atliekam uz taisnes OA nogriezni OP, kas ir vienāds un vienādi vērsts ar nogriezni $A'Q'$. Caur punktu P taisnei AA' paralēli novilktā taisne M_1M_2 krusto taisni ON punktā M_1. Šis punkts (un arī punkts M_2, kas ir simetrisks ar to attiecībā pret AO) pieder meklētajai līnijai.

Kad punkts N, izejot no O, apraksta aploci A pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam, punkts M_1 apraksta trajektoriju $LOCABOI$.

506. §. Anjēzi verzjera

1. Definīcija. Pieņemsim, ka uz nogriežņa $OA=a$ (484. zīm.) kā uz diametra konstruēta riņķa līnija un pieņemsim, ka pushorda BC turpināta līdz punktam M, kuru nosaka proporcija

$$BM:BC=OA:OB.$$



484. zīm.

Kad punkts C apraksta riņķa līniju OC_1C_2, punkts M apraksta līniju, kuru sauc par *Anjēzi verzjeru* itāliešu zinātnieces Marijas-Gaetānas Anjēzi (1718—1799) vārdā, kura apskatīja šo līniju savā laikā ļoti izplatītajā augstākās matemātikas rokasgrāmatā (1748).

2. Konstrukcija. Anjēzi norādīja šādu vienkāršu šīs līnijas konstrukciju. Pieņemsim, ka L ir taisnes OC krustošanās punkts ar taisni UV, kura pieskaras dotajai riņķa līnijai punktā A (*verzjeras virsotne*). Novelkam taisnes $LM \parallel AO$ un $CB \parallel AL$. Taišņu LM un CB krustošanās punkts M pieder verzjerai. Izpildot konstrukciju, der ievērot verzjeras formas īpatnības (sk. tālāk).

3. Vienādojums (O — sākums; veidojošās riņķa līnijas pieskare $X'X$ punktā O — abscisu ass) ir

$$y=\frac{a^3}{a^2+x^2}$$

($a=OA$ ir veidojošās riņķa līnijas diametrs).

4. Formas īpatnības. Diametrs OA ir verzjeras simetrijas ass. Verzjera atrodas pilnīgi vienā pusē no taisnes $X'X$. Šī taisne ir verzjeras asimptota. Verzjerai ir divi

pārliekuma punkti $M_1\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{3a}{4}\right)$, $M_2\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{3a}{4}\right)$. Tos var konstruēt ar iepriekšējo paņēmienu, ja punktu C sakļauj ar vienu no punktiem C_1, C_2 $\left(\breve{AC_1}=\breve{AC_2}=\frac{\pi}{3}\right)$. Leņķus α_1, α_2, ko pieskares M_1F, M_2F veido ar $X'X$ asi, atrod ar formulu $\operatorname{tg}\alpha_{1,2}=\mp\frac{3\sqrt{3}}{8}$. Lai konstruētu pieskares M_1F, M_2F, pietiek uz diametra OA turpinājuma atlikt nogriezni $AF=\frac{a}{8}$.

Virsotnē A verzjeras liekuma centrs K sakrīt ar veidojošās riņķa līnijas centru, tā ka liekuma rādiuss $R_A=AK=$ $=\frac{a}{2}$. Tāpēc virsotnes A tuvumā verzjera praktiski sakļaujas ar riņķa līniju.

5. L a u k u m s S bezgalīgai joslai starp verzjeru un tās asimptotu ir vienāds ar četrkāršotu veidojošā riņķa laukumu, t. i., $S=\pi a^2$ (sal. 327. § 4. piemēru).

6. T i l p u m s V verzjeras rotācijas ķermenim ap asimptotu ir vienāds ar divkāršotu veidojošā riņķa rotācijas ķermeņa tilpumu V_1 ap to pašu asi, t. i.,

$$V=\frac{\pi^2a^3}{2}, \quad V_1=\frac{\pi^2a^3}{4}.$$

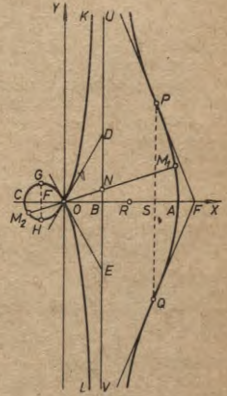
Verzjeras rotācijas ķermenim ap simetrijas asi ir bezgalīgs tilpums.

7. V ē s t u r i s k a s z i ņ a s. Ar vienādojumu $y=\frac{a^3}{a^2+x^2}$ uzdoto līniju pirmais apskata F e r m ā, kurš XVII gs. 30-jos gados atrada laukumu figūrai, ko ierobežo šīs līnijas loks, divas ordinātes un abscisu ass (šis uzdevums tad bija ļoti grūts, jo integrēšanas metodes bija maz izkoptas). Verzjeras konstrukciju un vairākas tās īpašības norādīja itāliešu zinātnieks G v i d o G r a n d i 1718. gadā. Viņš ieteica arī terminu «verzjera» (versiera); šo vārdu, neievērojot tā divdomību (itāliski tas nozīmē «ragana»), G r a n d i atvasināja no termina sinus versus («apvērstais sinuss»), jo Grandi laikā nogriezni BC sauca par loka OC sinusu, bet nogriezni BA — par apvērsto sinusu. Kuriozajam nosaukumam «Anjēzi cirta», kas sastopams dažās mūsdienu rokasgrāmatās, acīmredzot nav nekāda vēsturiska pamatojuma.

507. §. Nikomēda konhoīda

1. Vēsturiskas ziņas. Sengrieķu zinātnieks Nikomēds dzīvoja 250.—150. gadā pirms mūsu ēras. Līniju, kuru viņš pēc tās līdzības ar gliemežnīcu nosauca par konhoīdu[1] (*PAQ* 485. zīmējumā), viņš apskatīja, lai grafiski atrisinātu uzdevumu par dotā leņķa α sadalīšanu trīs vienādās daļās (leņķa *trisekcija*).

Kā mēs tagad zinām, šo uzdevumu var atrisināt ar lineālu un cirkuli tikai tad, ja speciāli izvēlas leņķi α (piemēram, ja $\alpha=\frac{\pi}{2}$). Tā uzdevums par leņķa $\alpha=\frac{\pi}{3}$ trisekciju nav atrisināms, ja lieto tikai lineālu un cirkuli, t. i., ja konstruē tikai taisnes un riņķa līnijas. Tomēr uzdevums ir atrisināms, ja piesaista vēl citas līnijas, piemēram, konhoīdu. Tās uzzīmēšanai Nikomēds konstruēja speciālu instrumentu (konhoīdogrāfu).



485. zīm.

2. Definīcija un konstrukcija. Doti: punkts *O* (*pols*), taisne *UV* (*pamats*) un nogrieznis l. No pola *O* (485. zīm.) novelkam patvaļīgu taisni *ON*, kas krusto pamatu punktā *N*. Uz taisnes *ON* atliekam uz abām pusēm no *N* nogriežņus $NM_1=NM_2=l$. Punktu M_1, M_2 ģeometrisko vietu sauc par *Nikomēda konhoīdu*. Līniju, ko apraksta punkts, kas atrodas uz nogriežņa *ON* turpinājuma aiz punkta *N* (485. zīmējumā punkts M_1), sauc par konhoīdas *ārējo zaru*; līniju, ko apraksta otrs punkts (485. zīmējumā M_2), — par *iekšējo zaru*.

Piezīme. Pats Nikomēds (un arī vēlākie autori līdz XVII gs. beigām) par konhoīdu sauca līniju, kuru tagad

[1] Konhe (κοὐχη) — gliemežnīca.

dēvē par tās ārējo zaru. Iekšējo zaru uzskatīja par īpašu līniju un sauca par «otro», «trešo» vai «ceturto» konhoīdu atkarībā no tās formas īpatnībām (sk. tālāk)[1].

3. Vienādojums (sākums — polā O; abscisu ass vērsta pa staru OB; punkts B ir pola projekcija uz pamata) ir

$$(x-a)^2(x^2+y^2)=l^2x^2, \tag{1}$$

kur $a(=OB)$ ir pola attālums no pamata.

Stingri runājot, šis vienādojums izsaka līniju, kas sastāv no diviem konhoīdas zariem un pola O, kurš var arī nepiederēt iepriekš definētajai ģeometriskajai vietai (sk. tālāk 487. zīm.).

Vienādojums polārajā sistēmā (O — pols; OX — polārā ass) ir

$$\varrho=\frac{a}{\cos\varphi}+l, \tag{2}$$

kur φ mainās no kādas vērtības φ_0 līdz $\varphi_0+2\pi$. Pie tam punkts $M(\varrho, \varphi)$ apraksta abus konhoīdas zarus. Kad φ iet caur vērtību $\frac{\pi}{2}$, punkts M ar lēcienu pāriet no ārējā zara uz iekšējo zaru («aiziet bezgalībā» virzienā «uz augšu», bet parādās «no lejas»). Analogi notiek pāreja vērtībai $\varphi=\frac{3\pi}{2}$ no iekšējā zara uz ārējo zaru[2].

Atšķirībā no vienādojuma (1) vienādojums (2) izsaka līniju, kas satur tikai tos punktus, kuri apmierina konhoīdas definīciju.

Parametriskie vienādojumi ir

$$x=a+l\cos\varphi, \quad y=a\operatorname{tg}\varphi+l\sin\varphi. \tag{3}$$

---

[1] Ne ārējo, ne iekšējo zaru, ja tos apskata atsevišķi, neizsaka *algebrisks* vienādojums.

[2] Polārais rādiuss ϱ vienādojumā (2) var pieņemt tiklab pozitīvas, kā arī negatīvas vērtības (sk. 73. § 2. piezīmi). Lai to novērstu, vienādojuma (2) vietā var lietot vienādojumu $\varrho=\frac{a}{\cos\varphi}\pm l$. Tomēr gadījumā, ja $l>a$ (485. zīm.), tādā veidā gan panāk, ka lielums ϱ ir pozitīvs, bet toties, punktam M_2 ejot caur mezgla punktu, tā polārais leņķis φ izdara lēcienu par $\pm\pi$. Šī iemesla dēļ leņķa φ maiņas apgabals sastāv no intervāla $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ un no intervāla $\left(+\frac{\pi}{2}, +\frac{3\pi}{2}\right)$ daļas. Bez tam dažām φ vērtībām pirms l jāņem abas zīmes $\pm$, bet dažām — tikai plusa zīme.

4. Formas īpatnības. Konhoīda ir simetriska attiecībā pret taisni OB; šī taisne krusto konhoīdu ne vien punktā O, bet vēl divos punktos A, C (*virsotnes*). Pamats UV ir asimptota tiklab iekšējam, kā arī ārējam zaram. Konhoīdas (tās iekšējā zara) forma būtiski atkarīga no attiecības starp nogriežņiem $a(=OB)$ un $l(=BA)$.

1) Ja $l:a>1$ (485. zīm.), tad iekšējam zaram ir cilpa (OCM_2); punkts O ir mezgla punkts.

Pieskaru OD, OE virziena koeficients mezgla punktā ir

$$\operatorname{tg}\alpha=\pm\frac{\sqrt{l^2-a^2}}{a}.$$

Lai konstruētu pieskares punktā O, pietiek pamatā UV ar lokiem, kuru rādiusi ir l un centrs punktā O, iezīmēt punktus D un E.

Vislielākais cilpas šķērsgriezums GH ir

$$GH=2(la^{1/3}-al^{1/3}:(l^{2/3}+a^{2/3})^{1/2}. \qquad (4)$$

Tam atbilst abscisa $x_G=OF=(l^2a)^{1/3}-l$ un polārais leņķis φ_G, ko nosaka formula $\cos\varphi_G=-(a:l)^{1/3}$. 485. zīmējumā, kur $l:a=2$, dabūjam

$$GH\approx 1{,}11a,\quad x_G\approx -0{,}59a,\quad \cos\varphi_G=-\sqrt[3]{0{,}5},\quad \varphi_G\approx 142°30'.$$

2) Ja $l:a=1$, tad iekšējā zara cilpa savelkas ap polu O un pārvēršas par atgriešanās punktu[1] (486. zīm.), pieskare šai punktā sakrīt ar OX asi.

3) Ja $l:a<1$, tad iekšējais zars neiet caur polu O (487. zīm.); tas ir līnijas (1) izolēts punkts[2].

5. Pārliekuma punkti. Uz iekšējā zara ir divi pārliekuma punkti P, Q (485.—487. zīm.). Uz iekšējā zara pārliekuma punkti (P', Q' 487. zīmējumā) ir tikai tai gadījumā, kad pols ir izolēts punkts. Punktu pāra P, Q abscisu

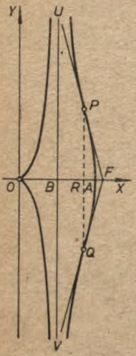
[1] Par kādas līnijas *atgriešanās punktu* sauc tādu šīs līnijas punktu, kur kustības virziens pa šo līniju lēcienveidīgi mainās uz pretējo.

[2] Punktu, kas ietilpst kādā ģeometriskajā vietā, sauc par *izolētu* (attiecībā pret šo ģeometrisko vietu), ja ap to, kā no centra, var apvilkt riņķa līniju, kuras iekšienē nav citu dotās ģeometriskās vietas punktu.

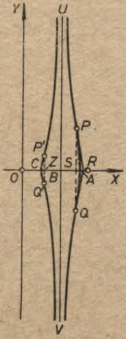
x_1 un punktu pāra P', Q' abscisu x_2 var atrast no vienādojuma

$$x^3-3a^2x+2a(a^2-l^2)=0. \qquad (5)$$

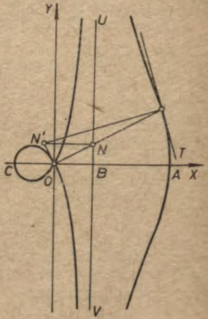
1) Ja $l:a>1$ (485. zīm.), tad vienādojumam (5) ir viena vienīga sakne x_1; tā ir ieslēgta starp $a\sqrt{3}\,(=OR)$ un



486. zīm.



487. zīm.



488. zīm.

$a+l\,(=OA)$, un jo tuvāka ir $a\sqrt{3}$, jo mazāk $l:a$ atšķiras no 1. Tā, ja $l:a=2$ (485. zīm.), tad vienādojums (5) pieņem izskatu $\left(\frac{x}{a}\right)^3-3\left(\frac{x}{a}\right)-6=0$. Sakne x_1 ieslēgta starp $a\sqrt{3}$ un $3a$. Ievērojot šīs robežas un pielietojot (divreiz) 291. § formulas, atrodam

$$x_1 \approx 2{,}35a\,(=OS).$$

2) Ja $l:a=1$ (486. zīm.), tad vienādojums (5) pieņem izskatu $x^3-3a^2x=0$. Tam ir trīs reālas saknes $x_1=a\sqrt{3}$, $x_2=0$, $x_3=-a\sqrt{3}$. Pirmā sakne dod pārliekuma punktu P, Q abscisu OR; otrajai saknei atbilst atgriešanās punkts O, trešajai — neatbilst neviens konhoīdas punkts.

3) Ja $l:a<1$ (487. zīm.), tad vienādojumam (5) ir trīs reālas saknes, no kurām pirmā $x_1(=OS)$ ieslēgta starp $a(=OB)$ un $a\sqrt{3}(=OR)$; tā nepārsniedz arī nogriezni $a+l(=OA)$. Otrā sakne $x_2(=OZ)$ ieslēgta starp $a-l(=OC)$ un a (abas saknes ir jo tuvāk a, jo mazāk $l:a$ atšķiras no nulles). Trešā sakne x_3 ir negatīva. Sakne x_1 dod punktu P, Q abscisu; sakne x_2 — punktu P', Q' abscisu. Saknei x_3 neatbilst neviens konhoīdas punkts. Tā, ja $l:a=0{,}5$ (487. zīm.), dabūjam vienādojumu

$$\left(\frac{x}{a}\right)^3-3\left(\frac{x}{a}\right)+1{,}5=0.$$

Starp a un $a+l=1{,}5a$ atrodas sakne $x_1\approx 1{,}38a(=OS)$, kas dod pārliekuma punktus P, Q. Starp $a-l=0{,}5a$ un a atrodas sakne $x_2\approx 0{,}57a(=OZ)$; tā dod punktus P', Q'. Trešā sakne $(x_3\approx -1{,}9a)$ ir negatīva.

6. N o r m ā l e s ī p a š ī b a. Konhoīdas normāle tās punktā M (488. zīm.) iet caur divu taišņu krustošanās punktu N'; viena no šīm taisnēm ir perpendikuls pret OM, kas novilkts caur polu O, bet otra — perpendikuls pret pamatu UV, kas novilkts caur punktu N, kur UV krustojas ar OM.

7. P i e s k a r e s k o n s t r u k c i j a. Lai konstruētu pieskari konhoīdai tās punktā M, savienojam punktu M ar polu O. Caur taišņu OM, UV krustošanās punktu N novelkam taisni $NN'\perp UV$, bet caur polu O — taisni $ON'\perp OM$. Šo taišņu krustošanās punktu N' savienojam ar M. Taisne $N'M$ būs konhoīdas normāle. Novelkot $MT\perp N'M$, dabūsim meklēto pieskari.

8. L i e k u m a r ā d i u s i punktos A, C, O ir

$$R_A=\frac{(l+a)^2}{l},\quad R_C=\frac{(l-a)^2}{l},\quad R_O=\frac{l\sqrt{l^2-a^2}}{2a}.$$

Tā, ja $l=2a$ (485. zīm.), dabūjam

$$R_A=4{,}5a,\quad R_C=0{,}5a,\quad R_O=a\sqrt{3}.$$

9. Laukums starp asimptotu un vienu konhoīdas zaru (ārējo vai iekšējo) ir bezgalīgs.

Cilpas laukums S ir

$$S=a\sqrt{l^2-a^2}-2al\ln\frac{l+\sqrt{l^2-a^2}}{a}+l^2\arccos\frac{a}{l}.$$

Tā, ja $l=2a$ (485. zīm.), dabūjam

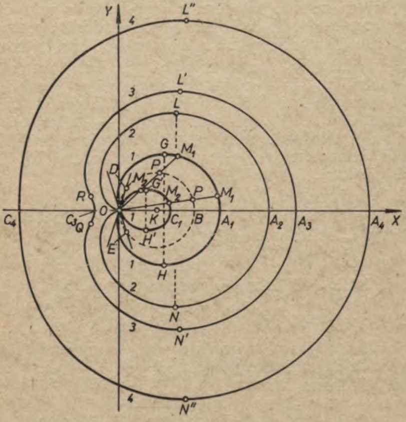
$$S=a^2\left[\sqrt{3}-4\ln(2+\sqrt{3})+\frac{4}{3}\pi\right]\approx 0{,}65a^2.$$

10. Vispārinātās konhoīdas. Ņemot taisnes UV vietā kaut kādu līniju L, bet citādi pilnīgi saglabājot Nikomēda konhoīdas definīciju, dabūsim jaunu līniju, kuru sauc par *līnijas L konhoīdu attiecībā pret polu O.*

Vispārinātā konhoīda, starp citu, ir Paskala gliemezis (sk. 508. §).

508. §. Paskala gliemezis; kardioīda

1. Definīcija un konstrukcija. Doti: punkts O (pols), riņķa līnija K, kuras diametrs $OB=a$ (489. zīm.) un kura iet caur polu (*galvenā riņķa līnija*; zīmējumā tā parādīta ar punktētu līniju), un nogrieznis l. No pola O



489. zīm.

novelkam patvaļīgu taisni OP. No punkta P, kur taisne OP otrreiz krusto riņķa līniju, atliekam uz abām pusēm no O nogriežņus $PM_1=PM_2=l$. Punktu M_1, M_2 ģeometrisko vietu (489. zīmējumā trekna līnija) sauc par *Paskala gliemezi* — par godu Etjēnam Paskalam (1588—1651), ievērojamā franču zinātnieka Bleza Paskala (1623—1662) tēvam.

Terminu «Paskala gliemezis» ieteica Paskala laika biedrs un draugs Robervals. Robervals apskatīja šo līniju kā vienu vispārinātās konhoīdas veidu (sk. 507. §).

2. Vienādojums (sākums — polā O; OX ass vērsta pa staru OB) ir

$$(x^2+y^2-ax)^2=l^2(x^2+y^2). \tag{1}$$

Stingri runājot, šis vienādojums izsaka līniju, kas sastāv no Paskala gliemeža un pola O, kurš var arī nepiederēt iepriekš definētajai ģeometriskajai vietai (tāds gadījums ir līnijām *3* un *4* 489. zīmējumā).

Vienādojums polārajā sistēmā (O — pols, OX — polārā ass) ir

$$\varrho=a\cos\varphi+l, \tag{2}$$

kur φ mainās no kaut kādas vērtības φ_0 līdz $\varphi_0+2\pi$[1].

Atšķirībā no (1) šis vienādojums izsaka līniju, kas satur tikai tos punktus, kuri apmierina Paskala gliemeža definīciju.

Parametriskie vienādojumi ir

$$\left.\begin{aligned} x&=a\cos^2\varphi+l\cos\varphi,\\ y&=a\sin\varphi\cos\varphi+l\sin\varphi.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Racionālie parametriskie vienādojumi ($u=\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$) ir

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{1-u^2}{(1+u^2)^2}\,[(l+a)+u^2(l-a)],\\ y&=\frac{2u}{(1+u^2)^2}\,[(l+a)+u^2(l-a)].\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

[1] Ja $l<a$ (treknā līnija 489. zīmējumā), tad polārais rādiuss var pieņemt tiklab pozitīvas, kā arī negatīvas vērtības. Lai to novērstu, var lietot vienādojumu $\varrho=l\pm a\cos\varphi$. Bet tad rodas tādas pašas neērtības, kas atzīmētas 507. §. 3. p. zemteksta piezīmē.

3. Formas īpatnības. Paskala gliemezis ir simetrisks attiecībā pret taisni OB. Šī taisne (gliemeža *ass*) krusto gliemezi 1) punktā O (ja tas pieder gliemezim); 2) divos punktos A, C (*virsotnes*). Līnijas forma ir atkarīga no attiecības starp nogriežņiem $a(=OB)$ un $l(=AB=BC)$.

1) Ja $l:a<1$ (treknā līnija *1*; tai $l:a=1:3$), Paskala gliemezis krusto pats sevi mezgla punktā O

$$\left(\varrho_{1,2}=0, \quad \cos\varphi_{1,2}=-\frac{l}{a}, \quad \sin\varphi_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{a^2-l^2}}{a}\right),$$

veidojot divas cilpas: ārējo OHA_1GO un iekšējo $OH'C_1G'O$. Pieskaru OD, OE virziena koeficienti mezgla punktā ir

$$\operatorname{tg}\alpha=\pm\frac{\sqrt{a^2-l^2}}{l}\left(=\pm\frac{2}{3}\sqrt{2}\right).$$

Lai konstruētu pieskares, pietiek riņķa līnijai K novilkt hordas OD, OE, kuru garumi ir l. Ārējās cilpas punktiem G, H, kas atrodas vistālāk no ass, atbilst vērtība

$$\cos\varphi=\frac{\sqrt{l^2+8a^2}-l}{4a}\ (\approx 0{,}62);$$

iekšējās cilpas vistālākajiem punktiem G', H' — vērtība

$$\cos\varphi=\frac{-\sqrt{l^2+8a^2}-l}{4a}\ (\approx -0{,}80)^1.$$

Atbilstošā polārā rādiusa vērtība ir

$$\varrho_{G'}=a\cos\varphi_{G'}+l=\frac{-\sqrt{l^2+8a^2}+3l}{4}\ (\approx -0{,}45a).$$

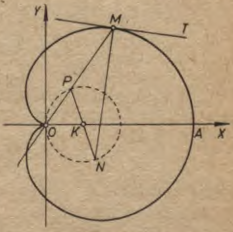
2) Ja $l:a=1$ (489. zīmējumā līnija *2*), tad iekšējā cilpa savelkas ap polu un pārvēršas atgriešanās punktā, kur kustību stara OX virzienā nomaina kustība pretējā virzienā. Punktiem L, N, kas atrodas vistālāk no ass, atbilst vērtības

$$\varphi=\frac{\pi}{3}, \quad \varrho=\frac{3}{2}a; \quad x=\frac{3}{4}a, \quad y=\pm\frac{3\sqrt{3}}{4}a.$$

[1] Tādējādi punkta G' polārais leņķis ir nevis leņķis XOG', bet leņķis starp OX un staram OG' pretēju staru (sk. 73. § 2. piezīmi).

Līniju 2 sauc par *kardioīdu*, t. i., «sirdsveidīgā» (šo terminu ieteica Kastilons 1741. gadā). Atsevišķi tā attēlota 490. zīmējumā.

3) Ja $1 < l : a < 2$ (līnija *3*; tai $l : a = 4 : 3$), tad Paskala gliemezis ir noslēgta līnija, kas pati sevi nekrusto; atrāvusies no pola, tā ieslēdz to savā iekšienē. Punktiem L', N', kas atrodas vistālāk no ass, atbilst vērtība $\cos\varphi = \frac{\sqrt{l^2+8a^2}-l}{4a}\left(=\frac{\sqrt{22}-2}{6}\approx 0{,}45\right)$. Pazaudējis atgriešanās punktu, gliemezis tā vietā ieguvis pārliekuma punktus R, Q, kuriem atbilst vērtība $\cos\varphi_R = -\frac{2a^2+l^2}{3al}$. Ja attiecība $l : a$ aug, tad leņķis ROQ $(=2\pi - 2\varphi_R)$, kurā nogrieznis RQ redzams no pola, vispirms aug no nulles līdz $2\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}$ $(\approx 39°40')$; šai vērtībai atbilst $l : a = \sqrt{2}$. Attiecībai $l : a$ tālāk augot, leņķis ROQ dilst, tiecoties uz nulli, ja $l : a \to 2$.



490. zīm.

4) Ja $l : a = 2$, tad pārliekuma punkti, saplūstot ar virsotni C, izzūd (pie kam liekums punktā C kļūst vienāds ar nulli). Gliemezis iegūst ovālu formu un saglabā to visām vērtībām $l : a > 2$ (līnija *4*; tai $l : a = 7 : 3$). Punktiem L'', N'', kas atrodas vistālāk no ass, atbilst vērtība

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{l^2+8a^2}-l}{4a}\left(=\frac{1}{3}\right).$$

4. N o r m ā l e s ī p a š ī b a. Paskala gliemeža normāle tā punktā M (490. zīm.) iet caur galvenās riņķa līnijas K punktu N, kas ir diametrāli pretējs tam punktam P, kur OM krusto galveno riņķa līniju.

5. P i e s k a r e s k o n s t r u k c i j a. Lai konstruētu pieskari Paskala gliemezim tā punktā M, savienojam šo punktu ar polu O. Galvenās riņķa līnijas K punktu N, kas ir diametrāli pretējs punktam P, savienojam ar M. Taisne MN būs gliemeža normāle. Novelkot $MT \perp MN$, dabūsim meklēto pieskari.

6. Liekuma rādiuss punktos A, C, O ir

$$R_A=\frac{(l+a)^2}{l+2a},\quad R_C=\frac{(l-a)^2}{|l-2a|},\quad R_O=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-l^2}.$$

Pēdējā izteiksmē nepieciešams, lai $l\leqslant a$ (ja $l>a$, tad punkts O ir no gliemeža atdalīts). Atsevišķā gadījumā kardioīdai ($l=a$; punkti O un C sakrīt) dabūjam

$$R_A=\frac{4}{3}a,\quad R_C=R_O=0.$$

7. Laukumi. Laukums S, ko apraksta gliemeža polārais rādiuss, izdarot pilnu apgriezienu, ir

$$S=\left(\frac{1}{2}\,a^2+l^2\right)\pi \tag{5}$$

(Robervals).

Ja cilpas nav ($l\geqslant a$), tad lielums S izsaka laukumu, kuru ierobežo gliemezis. Ja cilpa ir, tad ir spēkā vienādība

$$S=S_1+S_2,$$

kur S_1 ir laukums, ko ierobežo ārējā cilpa (ieskaitot arī iekšējās cilpas laukumu), S_2 — laukums, ko ierobežo tikai iekšējā cilpa. Atsevišķos laukumus S_1, S_2 izsaka tā:

$$S_1=\left(\frac{1}{2}\,a^2+l^2\right)\varphi_1+\frac{3}{2}l\sqrt{a^2-l^2}, \tag{5a}$$

kur

$$\varphi_1=\arccos\left(-\frac{l}{a}\right);$$

$$S_2=\left(\frac{1}{2}\,a^2+l^2\right)\varphi_2-\frac{3}{2}l\sqrt{a^2-l^2}, \tag{5b}$$

kur

$$\varphi_2=\arccos\frac{l}{a}.$$

Kardioīdai

$$S(=S_1)=\frac{3}{2}\pi a^2,$$

t. i., *kardioīdas laukums ir vienāds ar seškārtīgu galvenā riņķa laukumu.*

8. L o k a g a r u m s Paskala gliemezim vispārīgajā gadījumā neizsakās ar elementārajām funkcijām. Kardioīdai loka garums s, skaitot no virsotnes $A(\varphi=0)$, ir

$$s=4a\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Visas kardioīdas garums ir $8a$, *t. i., ir vienāds ar astoņkārtīgu galvenā riņķa diametru.*

9. S a i s t ī b a a r r i ņ ķ a l ī n i j u. Ģeometriskā vieta perpendikulu pamatiem, kuri novilkti no kāda punkta O pret riņķa līnijas ar rādiusu r un centru B pieskarēm, ir Paskala gliemezis. Ja punkts O atrodas riņķa līnijas B plaknē, tad gliemeža pols ir O, galveno riņķa līniju konstruē uz nogriežņa $OB=a$ kā uz diametra; pastāvīgais nogrieznis l, kuru atliek uz polārā stara, ir vienāds ar riņķa līnijas B rādiusu.

Ja punkts O atrodas uz riņķa līnijas B, tad Paskala gliemezis ir kardioīda.

509. §. Kasīni līnija

1. D e f i n ī c i j a. Par *Kasīni līniju* sauc punktu M ģeometrisko vietu, kuriem attālumu reizinājums līdz dotā nogriežņa $F_1F_2=2c$ galiem ir vienāds ar dotā nogriežņa a kvadrātu, t. i.,

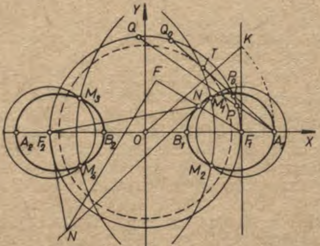
$$MF_1\cdot MF_2=a^2.$$

Punktus F_1, F_2 sauc par *fokusiem*; taisni F_1F_2 sauc par Kasīni līnijas *asi*; nogriežņa F_1F_2 viduspunktu O — par *centru*.

2. V ē s t u r i s k a s z i ņ a s. Ievērojamais astronoms D ž i o v a n i D o m e n i k o (Žans Domeniks) K a s ī n i (1625—1712) uzskatīja, ka līnija, kura tagad pazīstama viņa vārdā, var precīzāk attēlot Zemes orbītu nekā elipse. Tas kļuva zināms 1749. gadā no Ž a k a K a s ī n i - dēla (arī ievērojama astronoma) publikācijas. Lai gan Kasīni hipotēze neattaisnojās, tomēr viņa ieteiktā līnija kļuva daudzu pētījumu objekts. Bieži to sauc par *Kasīni ovālu*, lai gan patiesībā tā ne vienmēr ir ovāla [1] (sk. tālāk).

[1] Par *ovālu* sauc noslēgtu plaknes līniju, kurai piemīt tāda īpašība, ka jebkurai taisnei ar to var būt ne vairāk par diviem kopīgiem punktiem. Ovālai līnijai nevar būt ne pārliekuma punkti, ne atgriešanās punkti, ne mezgla punkti.

3. Konstrukcija. Uz nogriežņa $F_1F_2=2c$ kā uz diametra (491. zīm.) konstruējam riņķa līniju O. Uz tās pieskares F_1K ņemam nogriezni $F_1K=a$. Atliekot uz ass F_1F_2 no punkta O nogriežņus OA_1 un OA_2, kuri ir vienādi ar OK,



491. zīm.

dabūsim Kasīni līnijas punktus A_1, A_2, kuri atrodas vistālāk no centra $(OA_1=OA_2=\sqrt{c^2+a^2})$.

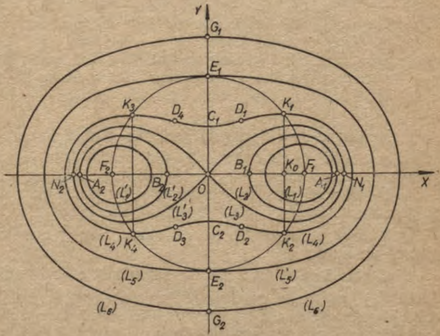
Ja, tāpat kā 491. zīmējumā, $a<c$, tad papildus konstruējam riņķa līniju ar rādiusu a un centru punktā O (491. zīmējumā tā parādīta ar punktētu līniju) un novelkam tai no A_1 pieskari A_1T. Krustošanās vietās ar galveno riņķa līniju $O(c)$ dabūsim punktus P_0, Q_0. No viena fokusa, teiksim, no F_1, atliksim O virzienā nogriežņus $F_1B_1=A_1P_0$ un $F_1B_2=A_1Q_0$. Dabūsim punktus B_1, B_2, kas atrodas vistuvāk centram $(OB_1=OB_2=\sqrt{c^2-a^2})$.

Ja turpretim $a\geqslant c$, tad tuvākie punkti C_1, C_2 (492. zīm.) atradīsies uz nogriežņa F_1F_2 simetrijas ass OY attālumā $F_1C_1=F_2C_1=a$ no fokusiem F_1, F_2 $(OC_1=OC_2=\sqrt{a^2-c^2})$.

Punktus A_1, A_2 un B_1, B_2 (vai C_1, C_2) nosauksim par Kasīni līnijas *virsotnēm.*

Caur punktu A_1 (vai A_2) novilksim (491. zīm.) galvenajai riņķa līnijai $O(c)$ patvaļīgu sekanti, pie kam gadījumā, ja $a<c$, ierobežosimies tikai ar tām sekantēm, kuras krusto arī papildu riņķa līniju $O(a)$. No fokusa F_1 kā no centra novelkam riņķa līniju ar rādiusu $r=A_1P$, bet no F_2 — riņķa

līniju ar rādiusu $r'=A_1Q$. To krustošanās punkti M_1, M_2 pieder Kasīni līnijai. Mainot lomām F_1 un F_2, dabūsim vēl vienu punktu pāri M_3, M_4. Meklētā līnija ir punktu M_1, M_2, M_3, M_4 ģeometriskā vieta.



492. zīm.

4. Vienādojums (O — sākums; F_2F_1 — abscisu ass) ir

$$(x^2+y^2)^2-2c^2(x^2-y^2)=a^4-c^4. \tag{1}$$

Vienādojums polārajā sistēmā (O — pols, OX — polārā ass) ir

$$\varrho^4-2c^2\varrho^2\cos 2\varphi+c^4-a^4=0 \tag{2}$$

jeb

$$\varrho^2=c^2\cos 2\varphi\pm\sqrt{a^4-c^4\sin^2 2\varphi}. \tag{3}$$

Divkāršo zīmi ņem, kad $a<c$. Pretējā gadījumā ņem tikai plusa zīmi (citādi ϱ iznāks imaginārs).

5. Formas īpatnības. Kasīni līnija ir simetriska attiecībā pret taisnēm OX un OY un tātad arī attiecībā pret punktu O.

Ja $a<c$, tad Kasīni līnija sastāv no nošķirtu ovālu pāra. 492. zīmējumā ovālu pāris L_1, L'_1 atbilst vērtībai $a=0{,}8c$; pāris L_2, L'_2 — vērtībai $a=0{,}9c$. Ja $a>c$, tad Kasīni līnija ir noslēgta līkne (vērtībai $a=1{,}1c$ atbilst līnija L_4, vērtībai $a=c\sqrt{2}$ — līnija L_5, vērtībai $a=c\sqrt{3}$ — līnija L_6). Robežgadījumā $a=c$ Kasīni līnija ir lemniskate L_3 (sal. lemniskates definīciju). Kad a augot tiecas uz c, virsotnes A_1, A_2 tiecas sakrist ar lemniskates virsotnēm N_1, N_2, bet virsotnes B_1, B_2 — ar mezgla punktu O; pie tam labais ovāls pārvēršas lemniskates labajā cilpā, bet kreisais ovāls — kreisajā cilpā.

Nogrieznim a tālāk augot, kad tas pārsniedz c, bet ir mazāks par $c\sqrt{2}$ ($c<a<c\sqrt{2}$), Kasīni līnija (492. zīmējumā L_4) iegūst četrus simetriski novietotus pārliekuma punktus D_1, D_2, D_3, D_4; lai gan tā ir noslēgta, tomēr tā nav ovāls[1]. Liekums virsotnēs C_1, C_2 ir bezgalīgi liels, ja $a-c$ ir bezgalīgi mazs. Kad a augot tiecas uz $c\sqrt{2}$, liekums punktos C_1, C_2 tiecas uz nulli.

Kasīni robežlīnija, kas atbilst sakarībai $a=c\sqrt{2}$ (492. zīmējumā L_5), un visas pārējās līnijas ($a>c\sqrt{2}$) ir ovāli. Bet robežovālam virsotnēs E_1, E_2 liekums ir vienāds ar nulli (šajos punktos pa pāriem saplūst līnijas L_4 pārliekuma punkti, bet pārliekuma punktos liekums vienmēr ir vienāds ar nulli).

6. Vislielākais šķērsgriezums. Ja $a\geqq c\sqrt{2}$, t. i., visiem ovāliem, kas aptver robežovālu L_5, vislielākais šķērsgriezums $G_1G_2=2\sqrt{a^2-c^2}$ atrodas uz OY ass. Jebkurai Kasīni līnijai, kura atrodas robežovāla iekšpusē (kuru aptver lemniskate vai arī kura aptver to), ir divi vislielākie šķērsgriezumi $K_1K_2=K_3K_4=\frac{a^2}{2c}$. Tie novietoti simetriski attiecībā pret OY asi un atrodas no centra attālumā

$$OK_0=\frac{\sqrt{4c^4-a^4}}{2c}.$$

To gali K_1, K_2, K_3, K_4 atrodas uz galvenās riņķa līnijas O. Šī riņķa līnija ir to punktu ģeometriskā vieta, kuriem Kasīni līniju pieskares ir paralēlas OX asij. Visas šīs pieskares ir

[1] Dažas taisnes, piemēram, taisne D_1D_4, krusto Kasīni līniju četros punktos.

«divkāršas», t. i., tās pieskaras Kasīni līnijai divos punktos K_1, K_3, kuri ir simetriski attiecībā pret OY asi.

7. L i e k u m a r ā d i u s s

$$R=\frac{2a^2\varrho^3}{c^4-a^4+3\varrho^4}=\frac{a^2\varrho}{\varrho^2+c^2\cos 2\varphi}. \tag{4}$$

Starp citu, virsotnēs $A(\varrho=\sqrt{c^2+a^2},\ \varphi=0)$,

$$B(\varrho=\sqrt{c^2-a^2},\ \varphi=0),\ C\left(\varrho=\sqrt{a^2-c^2},\ \varphi=\frac{\pi}{2}\right):$$

$$R_A=\frac{a^2\sqrt{c^2+a^2}}{2c^2+a^2}\quad R_B=\frac{a^2\sqrt{c^2-a^2}}{2c^2-a^2}\quad R_C=\frac{a^2\sqrt{a^2-c^2}}{|a^2-2c^2|}.$$

8. P ā r l i e k u m a p u n k t i. Pārliekuma punktu D_1, D_2, D_3, D_4 polārās koordinātes nosaka formulas

$$\varrho_D=\sqrt[4]{\frac{a^4-c^4}{3}},\quad \cos 2\varphi_D=-\sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{a^4}{c^4}-1\right)}. \tag{5}$$

Pārliekuma punktu ģeometriskā vieta ir lemniskate ar virsotnēm E_1, E_2 (zīmējumā nav attēlota).

9. P i e s k a r e s k o n s t r u k c i j a. Lai konstruētu pieskari Kasīni līnijai tās punktā N (491. zīm.), turpinām nogriezni F_1N aiz punkta N attālumā $NF=NF_1$. Caur punktiem F un F_2 novelkam nogriežņiem F_1N un F_2N attiecīgi perpendikulāras taisnes FH un F_2H. To krustošanās punktu H savienojam ar N. Taisne NH ir meklētā pieskare.

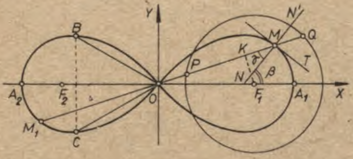
Ja taisnes FH, F_2H krustojas punktā ārpus zīmējuma robežām, tad nogriežņus NF, NF_2 var proporcionāli samazināt.

510. §. Bernulli lemniskate

1. V ē s t u r i s k a s z i ņ a s. 1694. gadā J a k o b s B e r n u l l i[1] darbā, kas veltīts paisumu un bēgumu teorijai, kā palīglīdzekli lietoja līniju, kuru viņš uzdod ar vienādojumu $x^2+y^2=a\sqrt{x^2-y^2}$. Viņš atzīmē šīs līnijas (493. zīm.) līdzību

[1] J a k o b s B e r n u l l i (1654—1705) — izcils šveiciešu zinātnieks, Leibnica skolnieks un līdzstrādnieks bezgalīgi mazo lielumu rēķinu un to pielietojumu izstrādāšanā. Varbūtību teorijas pamatlicējs; šeit viņš formulēja un pierādīja teorēmu, kas nosaukta viņa vārdā («lielo skaitļu likums»).

ar ciparu 8 un ar mezglveidīgu apsēju, kuru viņš dēvē par «lemnisku»[1]. No šejienes radies nosaukums *lemniskate*. Lemniskate kļuva plaši pazīstama 1718. gadā, kad itāliešu matemātiķis Džulio Karlo Fanjano (1682—1766) kon-



493. zīm.

statēja, ka integrālis, kas izsaka lemniskates loka garumu, neizsakās ar elementārajām funkcijām, bet, neskatoties uz to, lemniskati var sadalīt (ar lineālu un cirkuli) n vienādos lokos, ja vien $n=2^m$ vai $3\cdot 2^m$ vai arī $5\cdot 2^m$, kur m ir jebkurš vesels pozitīvs skaitlis.

Lemniskate ir Kasīni līnijas atsevišķs veids (509. § 6. p.). Tomēr, lai gan Kasīni līnija kļuva vispārpazīstama, sākot ar 1749. g., Kasīni «astotnieka» identitāti ar Bernulli lemniskati konstatēja tikai 1806. gadā (itāliešu matemātiķis Saladīni).

2. Definīcija. Lemniskate ir tādu punktu ģeometriskā vieta, kuriem attālumu reizinājums līdz dotā nogriežņa $F_1F_2=2c$ galiem ir vienāds ar c^2. Punktus F_1, F_2 sauc par lemniskates *fokusiem;* taisni F_1F_2 — par tās *asi.*

3. Vienādojums (sākums O ir nogriežņa F_1F_2 viduspunktā; OX ass vērsta pa nogriezni F_2F_1) ir

$$(x^2+y^2)^2=2c^2(x^2-y^2). \tag{1}$$

Vienādojums polārajā sistēmā (O — pols, OX — polārā ass) ir

$$\varrho^2=2c^2\cos 2\varphi. \tag{2}$$

Leņķis φ mainās intervālos $\left(-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right)$ un $\left(\frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4}\right)$.

[1] λημνισχος grieķiski — vilnas apsējs.

R a c i o n ā l i e p a r a m e t r i s k i e vienādojumi ir

$$x=c\sqrt{2}\frac{u+u^3}{1+u^4}, \quad y=c\sqrt{2}\frac{u-u^3}{1+u^4} \quad (-\infty<u<+\infty), \tag{3}$$

kur parametru u ar φ saista sakarība $u^2=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)$.

4. K o n s t r u k c i j a. Var lietot vispārīgo Kasīni līnijas konstruēšanas paņēmienu, bet šeit parādītais paņēmiens (Maklorēna) ir vienkāršāks un labāks. Konstruējam (493. zīm.) riņķa līniju ar rādisu $\frac{c}{\sqrt{2}}$ un centru punktā F_1 (vai F_2). Novelkam patvaļīgu sekanti OPQ un atliekam uz šīs taisnes uz abām pusēm no punkta O ar hordu PQ vienādus nogriežņus OM un OM_1. Punkts M aprakstīs vienu lemniskates cilpu, bet punkts M_1 — otru.

5. F o r m a s ī p a t n ī b a s. Lemniskatei ir divas simetrijas asis: taisne F_1F_2 (OX) un taisne $OY \perp OX$. Punkts O ir mezgla punkts; abiem zariem šeit ir pārliekums. Pieskares šai punktā veido ar OX asi $\pm\frac{\pi}{4}$ lielus leņķus. No mezgla O vistālākie lemniskates punkti A_1, A_2 (lemniskates virsotnes) atrodas uz F_1F_2 ass attālumā $c\sqrt{2}$ no mezgla.

6. N o r m ā l e s ī p a š ī b a. Lemniskates polārais rādiuss OM veido ar normāli MN leņķi γ $(\angle OMN=\gamma)$, kas ir divreiz lielāks par polāro leņķi φ $(=\angle XOM)$, t. i.,

$$\gamma=\angle OMN=2\varphi.$$

Citiem vārdiem: leņķis $\angle XNM=\beta$ starp OX asi un lemniskates ārējās normāles vektoru NN' punktā M ir vienāds ar trīskārtīgu punkta M polāro leņķi, t. i.,

$$\beta=3\varphi.$$

7. P i e s k a r e s k o n s t r u k c i j a. Lai konstruētu pieskari lemniskatei tās punktā M, novelkam polāro rādiusu OM un konstruējam $\angle OMN=2\angle XOM$. Perpendikuls MT pret taisni MN ir meklētā pieskare.

8. V i s l i e l ā k a i s š ķ ē r s g r i e z u m s. $BC=\frac{1}{2}F_1F_2=$ $=c$ (493. zīm.) ir pamats vienādmalu trijstūrim ar virsotni O.

9. Liekuma rādiuss

$$R=\frac{2c^2}{3\varrho}.$$

10. Polārā sektora A_1OM laukums S ir

$$S(\varphi)=\frac{c^2}{2}\sin 2\varphi=OK\cdot F_1K$$

(K ir fokusa F_1 projekcija uz polārā rādiusa OM).

Citiem vārdiem: no lemniskates fokusa pret patvaļīgu polāro rādiusu OM novilktais perpendikuls F_1K dala sektora A_1OM laukumu uz pusēm.

Vienas lemniskates cilpas laukums ir $2S\left(\frac{\pi}{4}\right)=c^2$.

11. Saistība ar hiperbolu. Perpendikulu pamatu ģeometriskā vieta, kuri novilkti no vienādsānu hiperbolas centra O ar virsotnēm A_1, A_2 uz tās pieskarēm, ir lemniskate ar tām pašām virsotnēm.

511. §. Arhimeda spirāle [1]

1. Konstrukcija. Lai konstruētu Arhimeda spirāli ar doto parametru k, novelkam no centra O (494. zīm.) patvaļīgu riņķa līniju, piemēram, riņķa līniju ar rādiusu $ON=k$ [2].

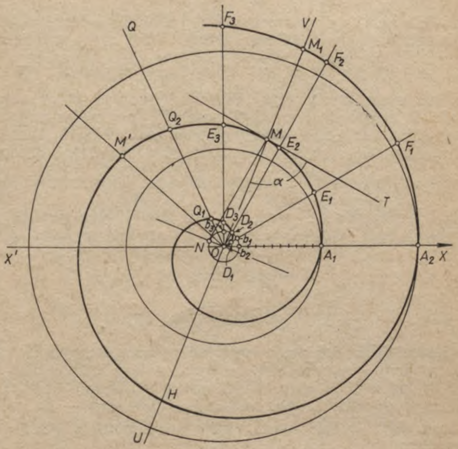
Sadalām to ar punktiem b_0, b_1, b_2, $b_3, \ldots$ [3] n vienādās daļās (n var būt patvaļīgs, mēs ņemam $n=12$). Uz stara Ob_0 atliekam nogriezni $OA_1=2\pi k$ (spirāles kāpe). Sadalām to tikpat daudzās vienādās daļās. Uz stariem Ob_1, Ob_2, $Ob_3, \ldots$ atliekam nogriežņus $OD_1=\frac{1}{n}OA_1$; $OD_2=\frac{2}{n}OA_1, \ldots$ Dabūjam spirāles pirmās vītnes punktus D_1, D_2, $D_3, \ldots$ Otrās vītnes punktus dabūsim, ja atliksim uz nogriežņu OD_1, OD_2, $OD_3, \ldots$ turpinājumiem nogriežņus D_1E_1, $D_2E_2, \ldots$, kas ir vienādi ar kāpi OA_1. Analogi dabūsim nākošo vītņu punktus.

[1] Iepriekš izlasiet 75.§, kam ir tāds pats nosaukums (sk. 123. lpp.).

[2] Konstrukcijai izdevīgāk ņemt lielāka rādiusa riņķa līniju; mēs ņēmām riņķa līniju ar rādiusu k tikai tāpēc, ka tā mums noderēs turpmāk.

[3] Punkts b_2 zīmējumā nav atzīmēts, jo tas atrodas tā riņķīša iekšienē, kas atzīmē punktu D_2 (attālums b_2D_2 ir apmēram 5% no rādiusa k).

2. Formas īpatnības. Jebkuram staram OQ ar sākumu polā O ir bez punkta O vēl bezgalīgi daudz ar spirāli kopīgu punktu Q_1, Q_2, ... Divi blakus stāvoši punkti atrodas viens no otra attālumā, kas ir vienāds ar kāpi a



494. zīm.

$(=2k\pi)$. Pieskare spirālei punktā O sakrīt ar sākotnējo taisni OX (to der ievērot, konstruējot spirāli). Pieskari MT patvaļīgā spirāles punktā dabū no taisnes MO, pagriežot to par (šauru) leņķi $OMT=\alpha$, kuram

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{OM}{k}=\frac{\varrho}{k}=\varphi.$$

Kad $\varrho\to\infty$, leņķis α tiecas uz $90°$ un spirāles loks punkta M tuvumā vienmēr vairāk un vairāk līdzinās riņķa līnijas lokam.

3. Normāles īpašība. Arhimeda spirālei ar kāpi a caur punktu M novilktā normāle MN krusto polārajam rādiusam OM perpendikulāru taisni ON punktā N, kas atrodas no O attālumā $ON=\frac{a}{2\pi}$ $(=|k|)$.

4. Pieskares konstrukcija. Lai konstruētu Arhimeda spirālei punktā M pieskari (sk. 494. zīm.) pagriežam staru OM ap punktu O par leņķi $+\frac{\pi}{2}$. Punktu N, kur pagrieztais stars krusto riņķa līniju ar rādiusu k un centru punktā O, savienojam ar M. Taisne MN ir spirāles normāle. Konstruējot $MT\perp MN$, dabūjam meklēto pieskari. Pieskari kreisajai spirālei (sk. 75. § un 106. zīm.) konstruē analoģi; vienīgā atšķirība ir tā, ka stars OM jāpagriež par leņķi $-\frac{\pi}{2}$.

5. Laukums S sektoram MOM' (ja punktu M, M' polārie leņķi atšķiras ne vairāk kā par 2π) ir

$$S=\frac{1}{6}\omega(\varrho^2+\varrho\varrho'+\varrho'^2), \tag{1}$$

kur

$$\varrho=OM,\quad \varrho'=OM',\quad \omega=\angle MOM'.$$

Ģeometriski: Arhimeda spirāles sektora laukums ir vienāds ar triju riņķa sektoru laukumu vidējo aritmētisko, kuriem leņķis ir tāds pats kā sektoram MOM', pie kam viens rādiuss ir vienāds ar polāro rādiusu OM, otrs — ar polāro rādiusu OM', trešais — ar vidējo proporcionālo $\sqrt{OM\cdot OM'}$ starp tiem.

6. Vītņu laukumi. Formula (1), ja $\varrho=0$, $\varrho'=a$, $\omega=2\pi$, dod laukumu S_1 figūrai $OD_2D_3Q_1A_1O$ (494. zīm.), ko ierobežo spirāles pirmā vītne un nogrieznis OA_1, t. i.,

$$S_1=\frac{1}{3}\pi a^2=\frac{1}{3}S_1', \tag{2}$$

kur S_1' ir laukums riņķim ar rādiusu OA_1.

Laukums S_2 figūrai $A_1E_3HA_2A_1$, ko ierobežo otrā vītne un nogrieznis A_2A_1 ($\varrho=a$, $\varrho'=2a$, $\omega=2\pi$), ir

$$S_2=\frac{7}{3}\pi a^2=\frac{7}{12}S_2', \tag{3}$$

kur S_2' ir laukums riņķim ar rādiusu OA_2.

Vispārīgi laukumu S_n figūrai, ko ierobežo n-tā spirāles vītne un nogrieznis OA_n, izsaka tā:

$$S_n = \frac{n^3-(n-1)^3}{3}\pi a^2 = \frac{n^3-(n-1)^3}{3n^2}S_n', \tag{4}$$

kur S_n' ir laukums riņķim ar rādiusu OA_n.

7. G r e d z e n u   l a u k u m i. Nosauksim par Arhimeda spirāles *pirmo gredzenu* figūru, ko pārvietojoties izveido polārā stara nogrieznis starp pirmo un otro vītni, ja polārais stars pagriežas no sākuma stāvokļa par 360°. Lai šo figūru apietu pa tās perimetru, tad jānoiet nogrieznis A_1O, pēc tam spirāles pirmā vītne OQ_1A_1, tālāk nogrieznis A_1A_2 un beidzot otrā vītne $A_2HQ_2A_1$ (ejot atpakaļceļu).

Otro gredzenu analogi izveido polārā stara nogrieznis starp otro un trešo vītni. To ierobežo: 1) nogrieznis A_2A_1, 2) otrā vītne, 3) nogrieznis A_2A_3, 4) trešā vītne (ejot atpakaļceļu).

Tādā pašā veidā definē trešo, ceturto utt. gredzenus.

n-tā gredzena laukumu F_n izsaka tā:

$$F_n = S_{n+1} - S_n = 6nS_1.$$

Šeit $S_1 = \frac{1}{3}\pi a^2$ ir pirmās vītnes (nulltā gredzena) laukums.

Īpašības, kas minētas šajā un iepriekšējos punktos, atklāja Arhimeds.

8. Loka OM garums l ir

$$l = \frac{k}{2}\left[\varphi\sqrt{\varphi^2+1} + \ln(\varphi+\sqrt{\varphi^2+1})\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\varrho\sqrt{\varrho^2+k^2}}{k} + k\ln\frac{\varrho+\sqrt{\varrho^2+k^2}}{k}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}k\,[\operatorname{tg}\alpha\operatorname{sc}\alpha + \ln(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{sc}\alpha)],$$

kur α ir šaurais leņķis starp pieskari MT (494. zīm.) un polāro rādiusu OM jeb $\alpha = \angle ONM$.

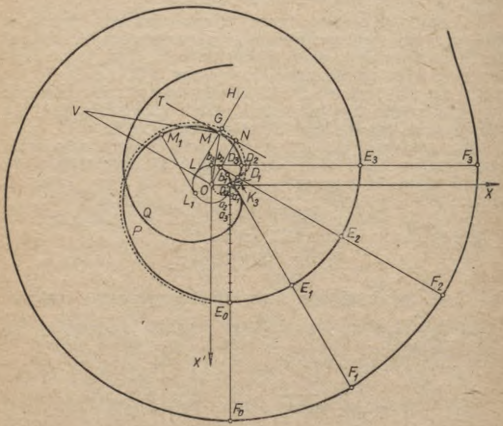
9. L i e k u m a   r ā d i u s s

$$R = \frac{(\varrho^2+k^2)^{3/2}}{\varrho^2+2k^2} = k\frac{(\varphi^2+1)^{3/2}}{\varphi^2+2} = k\frac{(\operatorname{tg}^2\alpha+1)^{3/2}}{\operatorname{sc}^2\alpha+1}.$$

Sākuma punktā $R_0 = \frac{k}{2}$.

512. §. Riņķa evolvente

1. Mehāniskā izveidošana. Ļoti radnieciska Arhimeda spirālei ir cita spirāle — *riņķa evolvente* (jeb riņķa līnijas evolvente). Tā ir līnija, kuru apraksta sastiepta diega



495. zīm.

LM gals *M* (495. zīm.), ja to attin no apaļas spolītes D_0LL_1 (vai arī uztin uz spolīti; šai gadījumā punkts *M* kustas pretējā virzienā).

Ģeometriski minēto īpašību var izteikt tā.

2. Definīcija. Pieņemsim, ka punkts *L*, izejot no sākuma stāvokļa D_0, vairākkārt apraksta riņķa līniju ar rādiusu *k* (*k* ir riņķa evolventes *parametrs*). Uz pieskares *LH* rotācijas virzienam pretējā virzienā atliekam nogriezni *LM*, kas ir vienāds ar punkta *L* noieto loku D_0L. Riņķa evolvente ir līnija, ko apraksta punkts *M*. Vienai un tai pašai riņķa

līnijai var būt neskaitāms daudzums evolventu (kas atbilst visiem iespējamiem sākuma punkta D_0 stāvokļiem).

Vadoties no tā, vai punkts L griežas pulksteņa rādītāja kustības virzienā vai pretējā virzienā, mēs dabūjam vai nu *labo* riņķa evolventi (495. zīmējumā D_0MP), vai *kreiso* (D_0Q). Parasti divas dotā riņķa evolventes uzskata par vienas līnijas diviem zariem.

3. Konstrukcija. Doto riņķa līniju sadalām n vienādos lokos $D_0b_1 = b_1b_2 = b_2b_3 = \ldots = b_{n-1}D_0$. Uz pieskares, kas novilkta caur D_0, atliekam nogriezni $D_0E_0 = 2\pi k$. To sadalām tikpat daudzās vienādās daļās

$$D_0a_1 = a_1a_2 = \ldots = a_{n-1}E_0.$$

Uz pieskarēm, kas novilktas caur punktiem b_1, b_2, $b_3 \ldots$, atliekam (pieskaršanās punkta pārvietošanās virzienam pretējā virzienā) nogriežņus b_1D_1, b_2D_2, $b_3D_3, \ldots$, kas ir attiecīgi vienādi ar nogriežņiem D_0a_1, D_0a_2, $D_0a_3, \ldots$ Dabūsim riņķa evolventes pirmās vītnes D_0PE_0 punktus D_1, D_2, $D_3, \ldots$ Otrās vītnes punktus E_1, E_2, $E_3, \ldots$ dabūsim, atliekot uz nogriežņu b_1D_1, b_2D_2, b_3D_3, ... turpinājumiem ar D_0E_0 vienādus nogriežņus D_1E_1, D_2E_2, $D_3E_3, \ldots$ Analogi dabūsim tālāko vītņu punktus.

4. Formas īpatnības. Riņķa evolventei saskaņā ar jebkuras līnijas evolventes vispārīgajām īpašībām (sk. 347. § un arī 346. §) piemīt šādas īpašības.

a) Riņķa evolvente krusto visas dotās riņķa līnijas pieskares taisnā leņķī. Starp citu, evolvente sākuma punktā D_0 veido taisnu leņķi ar pieskari D_0F_0.

b) Otrādi, evolventes normāle MH ir riņķa līnijas pieskare. Pie tam pieskaršanās punkts L ir evolventes liekuma centrs, tā ka nogrieznis ML ir evolventes liekuma rādiuss, t. i.,

$$R = ML. \tag{1}$$

Atsevišķā gadījumā sākuma punktā D_0 evolventes liekuma rādiuss ir vienāds ar nulli, t. i.,

$$R_0 = 0. \tag{2}$$

c) Punktam M attālinoties no sākuma punkta, evolventes liekuma rādiuss R aug; tā pieaugums $R_1 - R = M_1L_1 - ML$ ir vienāds ar atbilstošo riņķa līnijas loka garumu $\overset{\frown}{LL_1}$, t. i.,

$$R_1 - R = \overset{\frown}{LL_1}. \tag{3}$$

Atsevišķā gadījumā evolventes gabalā D_0M liekuma rādiusa pieaugums ir vienāds ar $R_M - R_0 = R_M$, pie kam

$$R_M = \overset{\frown}{D_0L} = k\alpha, \qquad (4)$$

kur $\alpha = \angle D_0OL$ ir rādiusa OL pagrieziena leņķis no sākuma stāvokļa OD_0.

d) Saskaņā ar konstrukciju evolvente nenonāk riņķa O iekšienē. Tāpēc, punktam M ejot caur sākuma punktu D_0, kustības virziens mainās uz pretējo, t. i., D_0 ir evolventes atgriešanās punkts.

5. S a i s t ī b a a r A r h i m e d a s p i r ā l i. Salīdzināsim riņķa evolventes labo (kreiso) zaru ar labo (kreiso) Arhimeda spirāli ar to pašu parametru $k = OD_0$ (t. i., ar kāpi $2\pi a = D_0E_0$) kā riņķa evolventei. Pieņemsim, ka šī spirāle (495. zīmējumā punktētā līnija) iziet no dotās riņķa līnijas centra O stara OX' virzienā, kuru dabū, pagriežot sākuma rādiusu OD_0 par leņķi $-90°(+90°)$. Punkts G, kas apraksta spirāli, neierobežoti tuvojas evolventei: punkta G īsākais attālums līdz evolventei (to mērī ar evolventes normāles LH nogriezni GM) jau pirmās vītnes galā sastāda tikai 1% no spirāles kāpes.

No otras puses, spirāles polārajam rādiusam ON, kas ar rādiusu OL veido $-90°(+90°)$ lielu leņķi, ir tāds pats garums $k\alpha$ kā nogrieznim LM. Tas nozīmē, ka *no centra O pret evolventes pieskari MT novilktā perpendikula pamats apraksta Arhimeda spirāli.*

6. R i ņ ķ a e v o l v e n t e s p o l ā r a i s v i e n ā d o j u m s (pols O ir dotās riņķa līnijas centrā, polārā ass OX vērsta pa sākuma rādiusu OD_0) ir

$$\varphi = \frac{\sqrt{\varrho^2 - k^2}}{k} - \arccos\frac{k}{\varrho}, \qquad (5)$$

kur k ir riņķa līnijas rādiuss.

7. P a r a m e t r i s k i e v i e n ā d o j u m i ir

$$x = k(\cos\alpha + \alpha\sin\alpha); \quad y = k(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha), \qquad (6)$$

kur

$$\alpha = \angle D_0OL.$$

8. L o k a $\overset{\frown}{D_0M}$ g a r u m s ir

$$s = \frac{1}{2}k\alpha^2 = \frac{1}{2}\frac{(k\alpha)^2}{k} = \frac{1}{2}\frac{ML^2}{OL}. \qquad (7)$$

Lai dabūtu tāda paša garuma nogriezni, novelkam taisni $MV \perp OM$ līdz tā krustojas punktā V ar rādiusa OL turpinājumu. Nogriežņa OV garuma puse ir vienāda ar loka $\overset{\frown}{D_0M}$ garumu, t. i.,

$$s = \overset{\frown}{D_0M} = \frac{1}{2} OV. \tag{8}$$

9. Laukums S sektoram D_0OM, ko apraksta polārais rādiuss un arī laukums S_1 līklīnijas trijstūrim LMD_0, kura pamats ir nogrieznis LM, bet sānu malas — riņķa līnijas loks D_0L un evolventes loks D_0M, ir trīsreiz mazāks par trijstūra OMV laukumu (kurš konstruēts 8. punktā), t. i.,

$$S = S_1 = \frac{1}{3}\,\mathrm{Lauk}_{OMV} = \frac{1}{6} k^2 \alpha^3. \tag{9}$$

10. Riņķa evolventes naturālais vienādojums. Par līnijas *naturālo vienādojumu* sauc vienādojumu, kas saista tās loka $\overset{\frown}{M_0M}$ garumu s, kuru skaita no kāda sākuma punkta M_0, un liekuma rādiusu R punktā M. Riņķa evolventes naturālais vienādojums ir

$$R^2 = 2ks; \tag{10}$$

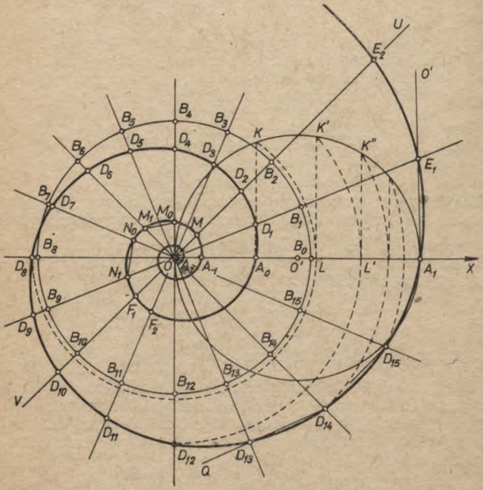
to dabū no (4) un (7), izslēdzot α.

11. Kinemātiskā īpašība. Kinemātikas valodā naturālais vienādojums (10) izsaka šādu īpašību: ja riņķa evolventes loks rit (bez slīdes) pa taisni, tad liekuma centrs L, kas atbilst pieskaršanās punktam, kustas pa parabolu ar parametru k.

12. Vēsturiskas ziņas. Dažādu līniju evolventes pirmais izpētījis Heigenss savā ievērojamā darbā par pulksteņa svārstu (1673. g.) (sal. 514. § 17. p.). Riņķa evolventes galvenās īpašības atradis franču zinātnieks Lagīrs (1640—1718), un tās publicētas viņa darbā 1706. gadā. Īpašību, kas apskatīta 5. punktā, atradis Klero (1713—1765) 1740. gadā. Īpašību, kas apskatīta 9. punktā, un arī naturālā vienādojuma kinemātisko iztulkojumu (jebkurai līnijai) devis Manheims 1859. gadā.

513. §. Logaritmiskā spirāle

1. D e f i n ī c i j a. Pieņemsim, ka taisne UV (496. zīm.) vienmērīgi griežas ap nekustīgu punktu O (*pols*), bet punkts M kustas pa UV, attālinoties no O ar ātrumu, kas ir proporcionāls attālumam OM. Līniju, ko apraksta punkts M, sauc par *logaritmisko spirāli*.



496. zīm.

2. G a l v e n ā ģ e o m e t r i s k ā ī p a š ī b a. Taisnes UV pagriezienam no jebkura tās stāvokļa par doto leņķi ω $(=\angle M_0OM_1)$ atbilst viena un tā pati polāro rādiusu attiecība $OM_1 : OM_0$. Citādi sakot: ja logaritmiskās spirāles punktu pāris M_0, M_1 no pola redzams tai pašā leņķī kā tās pašas

spirāles cits punktu pāris N_0, N_1, tad trijstūri OM_0M_1 un ON_0N_1 ir līdzīgi.

Attiecību q starp polārā rādiusa galējo vērtību (OA_1) un tā sākotnējo vērtību (OA_0), taisnei UV pagriežoties par leņķi $+2\pi$, sauksim par logaritmiskās spirāles *augšanas koeficientu*.

3. Labā un kreisā spirāle. Ja, punktam M attālinoties no pola O, taisnes UV rotācija notiek pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam, tad logaritmisko spirāli sauc par *labo*; pretējā gadījumā — par *kreiso*. Labajai spirālei augšanas koeficients $q>1$; kreisajai — $q<1$. Ja $q=1$, tad spirāle deģenerējas riņķa līnijā.

Labo un kreiso spirāli, kurām augšanas koeficientu reizinājums ir 1, var sakļaut, bet šai nolūkā viena spirāle jāapgriež uz otru pusi.

4. Konstrukcija. Lai konstruētu labo logaritmisko spirāli ar doto augšanas koeficientu q[1], sadalām kaut kādu riņķa līniju ar centru punktā O ar punktiem B_0, B_1, B_2, $B_3, \ldots$, kas seko viens aiz otra pulksteņa rādītāja kustības virzienam pretējā virzienā[2], $n=2^k$ vienādās daļās. Noteiktības dēļ ņemsim $n=2^4=16$. Uz stara OB_0 ņemam patvaļīgu punktu A_0 un atliekam nogriezni $OA_1=q\cdot OA_0$. Uz nogriežņa OA_1 kā uz diametra konstruējam riņķa līniju O' un novelkam nogriezni $A_0K\perp OA_1$ līdz tas krustojas ar šo riņķa līniju punktā K. Riņķa līnija ar rādiusu OK krusto staru OB_8 punktā D_8, kas pieder meklētajai spirālei; tā pati riņķa līnija krusto staru OA_1 kādā punktā L. Novelkam nogriezni $LK'\perp OA_1$ līdz tas krustojas ar riņķa līniju O' punktā K'. Riņķa līnija ar rādiusu OK' krusto staru OB_{12} punktā D_{12}, kas arī pieder meklētajai spirālei, bet staru OA_1 — kādā punktā L'. Caur to atkal novelkam $L'K''\perp OA_1$ utt. Tādā veidā dabūsim punktus D_{14} un D_{15}.

Neskaitāmi daudzos citus spirāles punktus, kas atrodas uz taisnēm B_0B_8, B_1B_9 utt., var konstruēt šādā veidā. Punktā D_{14} konstruējam ar leņķi $\angle OD_{15}D_{14}$ vienādu leņķi $\angle OD_{14}Q$; krustošanās vietā ar staru OB_{13} dabūjam meklētās spirāles punktu D_{13}. Punktā A_1 konstruējam $\angle OA_1Q'=\angle OD_{15}A_1$; krustošanās vietā ar staru OB_1 dabūsim punktu E_1 utt.

---

[1] Tāpat konstruē kreiso spirāli ar augšanas koeficientu $\frac{1}{q}$.

[2] Konstruējot kreiso spirāli, punkti B_0, B_1, B_2, $B_3, \ldots$ jāņem viens aiz otra pulksteņa rādītāja kustības virzienā.

5. Vienādojums polārajās koordinātēs (pols sakrīt ar spirāles polu; polārā ass novilkta caur patvaļīgi izvēlētu spirāles punktu M_0) ir

$$\varrho=\varrho_0 q^{\frac{\varphi}{2\pi}}, \qquad (1)$$

kur $\varrho_0=OM_0$ ir punkta M_0 polārais rādiuss, bet q — augšanas koeficients.

Piemērs. Spirāli, kas konstruēta 496. zīmējumā ($q=3$) izsaka vienādojums

$$\varrho=\varrho_0\, 3^{\frac{\varphi}{2\pi}}.$$

Ja par polāro asi pieņem staru OB_0, tad $\varrho_0=OA_0$. Ņemot atsevišķā gadījumā $\varphi=\pi$, dabūjam $\varrho=\varrho_0\sqrt{3}=OD_8$; ja $\varphi=\frac{\pi}{2}$, dabūjam $\varrho=\varrho_0\sqrt[4]{3}=OD_4$ utt.

Parasti vienādojumu (1) raksta veidā

$$\varrho=\varrho_0 e^{k\varphi}, \qquad (2)$$

kur k ir parametrs, kas saistās ar augšanas koeficientu tā:

$$k=\frac{\ln q}{2\pi}. \qquad (3)$$

Otrādi

$$q=e^{2k\pi}. \qquad (4)$$

Parametra k ģeometriskā nozīme izprotama no sakarības

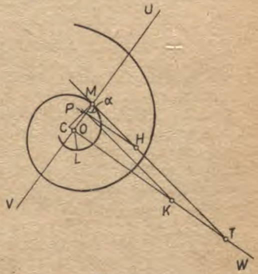
$$k=\operatorname{ctg}\alpha, \qquad (5)$$

kur $\alpha=\angle OMT$ ir leņķis starp taisni OM un pieskari MT (sk. tālāk 497. zīm.).

Labajām spirālēm parametram k ir pozitīvas vērtības, kreisajām — negatīvas.

6. Formas īpatnības. Ja taisne UV izdara neierobežoti daudzus apgriezienus pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam (pulksteņa rādītāja kustības virzienā), tad punkts M, kas apraksta labo (kreiso) spirāli, neierobežoti attālinās no pola un apraksta bezgalīgi daudzas vītnes. Ja neierobežoti daudzi apgriezieni tiek izdarīti pretējā virzienā, tad punkts M neierobežoti tuvojas polam O, bet nevienā taisnes UV stāvoklī nesakrīt ar O. Tādējādi spirāle apraksta

arī bezgalīgi daudzas vītnes ap polu. Tomēr loka garums, ko šai gadījumā apraksta punkts M un kuru skaita no kāda punkta M sākuma stāvokļa A_0, lai gan aug, tomēr ne bezgalīgi. Tas tiecas uz kādu robežu s, kuru sauc par loka OA_0 *garumu*. Šis nosaukums ir fiktīvs, jo punkts O, stingri runājot, nepieder logaritmiskajai spirālei.



497. zīm.

7. Pieskare un loka garums. Leņķis α $(=\angle OMT)$, par kuru taisne UV jāpagriež ap logaritmiskās spirāles punktu M (497. zīm.), lai šī taisne sakristu ar pieskari MT, ir vienāds visiem spirāles punktiem. Pieskares nogrieznim MT no pieskaršanās punkta līdz krustošanās punktam ar taisni OW, kas novilkta caur polu O perpendikulāri polārajam rādiusam OM, ir tāds pats garums s kā spirāles lokam no punkta M līdz polam O, t. i.,

$$s=\overset{\frown}{OM}=MT=\frac{\varrho}{\cos\alpha}, \tag{6}$$

kur ϱ ir polārais rādiuss OM.

Logaritmiskās spirāles jebkura loka LM garums $\bar{s}$ ir

$$\bar{s}=\overset{\frown}{LM}=\overset{\frown}{OM}-\overset{\frown}{OL}=\frac{\varrho_M-\varrho_L}{\cos\alpha}, \tag{7}$$

t. i., loka $\overset{\frown}{LM}$ garums ir proporcionāls loka galu polāro rādiusu starpībai. Lai konstruētu tāda paša garuma nogriezni, pietiek atlikt uz lielākā rādiusa OM ar mazāko rādiusu OL vienādu nogriezni OP un caur P novilkt OM perpendikulāru taisni PH. Tā krustos pieskari MT kādā punktā H. Nogrieznis MH ir meklētais.

Leņķi α atkarībā no augšanas koeficienta q izsaka formula

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\ln q}{2\pi}. \tag{8}$$

Spirālei, kas attēlota 496. zīmējumā, kur $q=OA_1:OA_0=3$, dabūjam

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\ln 3}{2\pi}\approx 0{,}1748,$$

$$\alpha\approx 80°5'.$$

8. Raksturīgais trijstūris un sektoriālais laukums. Laukums, ko apraksta polārais rādiuss OL (497. zīm.), kad punkts L, izejot no kāda sākuma stāvokļa M, neierobežoti tuvojas pa logaritmisko spirāli polam O, tiecas uz *galīgu* robežu S (sektoriālais laukums). Sektoriālais laukums punktā M ir divreiz mazāks par *raksturīgā trijstūra OMT* laukumu, kuru izveido polārais rādiuss OM, tam perpendikulāra taisne OW un pieskare MT, t. i.,

$$S=\frac{1}{2}S_{OMT}=\frac{1}{4}\varrho^2\operatorname{tg}\alpha, \tag{9}$$

kur ϱ ir punkta M polārais rādiuss.

Jebkura sektora LOM laukums S (pieņemam, ka OM ir lielākais rādiuss un ka $\angle LOM$ pēc absolūtās vērtības nepārsniedz 2π) ir divreiz mazāks par trapeces $PMTK$ (497. zīm.) laukumu, kuru atgriež no raksturīgā trijstūra OMT, ja uz OM atliek nogriezni $OP=OL$ un novelk $PK\|MT$, t. i.,

$$\overline{S}=S_{PMTK}=\frac{1}{4}(\varrho_2^2-\varrho_1^2)\operatorname{tg}\alpha, \tag{10}$$

kur ϱ_1, ϱ_2 ir punktu L, M polārie rādiusi.

9. Liekuma rādiuss un centrs. Liekuma centrs C, kas atbilst logaritmiskās spirāles punktam M (497. zīm.), atrodas punktā, kur krustojas caur M novilktā normāle MC ar taisni OW, kas novilkta caur polu perpendikulāri polārajam rādiusam OM. Liekuma rādiuss ir

$$R=\frac{\varrho}{\sin\alpha}. \tag{11}$$

Šo vienādību var ieskatīt no trijstūra COM.

10. Evolūta. Logaritmiskās spirāles liekuma centru C ģeometriskā vieta (evolūta) ir logaritmiskā spirāle, kuru dabū no dotās spirāles, pagriežot to ap polu par leņķi

$$\omega=(2n+1)\frac{\pi}{2}-\operatorname{tg}\alpha\ln\operatorname{tg}\alpha, \tag{12}$$

kur n ir jebkurš vesels skaitlis. Tā, ja dotā spirāle krusto polāros rādiusus leņķī $\alpha=45^\circ$, tad tā sakļausies ar savu evolūtu, ja to pagriezīs ap polu vai nu par leņķi $\omega=\frac{\pi}{2}$, vai $\omega=5\cdot\frac{\pi}{2}$, vai $\omega=-3\cdot\frac{\pi}{2}$ utt. Starp citu, eksistē bezgalīgi daudzas logaritmiskās spirāles, kuras pašas ir savas evolūtas. Tās ir spirāles, kurām leņķis α apmierina vienu no vienādojumiem

$$\operatorname{tg}\alpha\ln\operatorname{tg}\alpha=(2n+1)\frac{\pi}{2},$$

kur n ir vesels skaitlis.

11. Naturālais vienādojums (t. i., vienādojums, kas saista loka garumu un liekuma rādiusu; sal. 512. § 10. p.) ir

$$R=ks\ (=s\operatorname{ctg}\alpha). \tag{13}$$

Izriet no (6) un (11); ieskatāms no trijstūra CMT.

12. Kinemātiskā īpašība. Kinemātikas valodā vienādojums (13) izsaka šādu īpašību: ja logaritmiskās spirāles loks rit (bez slīdes) pa taisni AB, tad liekuma centrs, kas atbilst pieskaršanās punktam, kustas pa taisni, kura veido ar AB leņķi $\frac{\pi}{2}-\alpha$.

13. Kartografiskā īpašība. Ja sfērisku līniju, kura krusto meridiānus pastāvīgā leņķī (šo līniju sauc par *loksodromu* [1]), projicē no sfēras pola P ekvatora plaknē, tad dabū logaritmisko spirāli; tās pols atrodas sfēras centrā. Meridiānu projekcijas ir stari, kas vērsti pa spirāles polārajiem rādiusiem; šie stari krusto spirāli tādā pašā leņķī α, kādā loksodroma krusto meridiānus.

[1] Kas nozīmē «slīpi skrejošā» — no grieķu vārdiem «loksos» — slīps un «dromos» — skrējiens. Kuģis, kas saglabā nemainīgu kursu, kustas pa loksodromu.

14. Vēsturiskas ziņas. 1638. gadā Dekarts atrada, ka spirālei, kuras loks aug proporcionāli polārajam rādiusam, piemīt tāda īpašība, ka tās pieskare veido pastāvīgu leņķi ar polāro rādiusu. Apmēram tajā pašā laikā Toričelli neatkarīgi no Dekarta un daudz plašāk apskatīja īpašības «ģeometriskajai spirālei» — tā viņš nosauca līniju, kuru definēja ar 3. punktā apskatītās konstrukcijas palīdzību. Toričelli pierādīja ģeometriskās īpašības, kas apskatītas 6. un 7. punktā. Jakobs Bernulli 1692. gadā atklāja īpašības, kas minētas 8.—11. punktā, kā arī vēl citas «brīnišķīgās spirāles» (spira mirabilis) īpašības. Nosaukumu «logaritmiskā spirāle» (leņķis starp polārajiem rādiusiem ir proporcionāls to attiecības logaritmam) devis Varinjons 1704. gadā. Vēlāk logaritmiskā spirāle bija daudzu pētījumu objekts. Tā tās kinemātisko īpašību (12. p.) atrada E. Katalāns 1856. gadā.

514. §. Cikloīdas

1. Definīcija. Par *cikloīdu* sauc līniju, kuru apraksta riņķa *(veidojošais riņķis)* plaknē nostiprināts punkts (498. zīm.), ja šis riņķis rit (bez slīdes) pa kādu taisni KL *(vadītāja)*.

Ja punkts M, kas apraksta cikloīdu, ņemts veidojošā riņķa iekšienē (t. i., attālums $CM=d$ no centra C ir mazāks par rādiusu r), tad cikloīdu sauc par *saīsinātu* (498. zīm. a); ja ārpus riņķa (t. i., $d>r$), — par *pagarinātu* (498. zīm. b); ja turpretim punkts M atrodas uz riņķa aploces (t. i., $d=r$), tad līniju, ko apraksta šis punkts, sauc par *parasto* cikloīdu (498. zīm. c) jeb parasti vienkārši par cikloīdu.

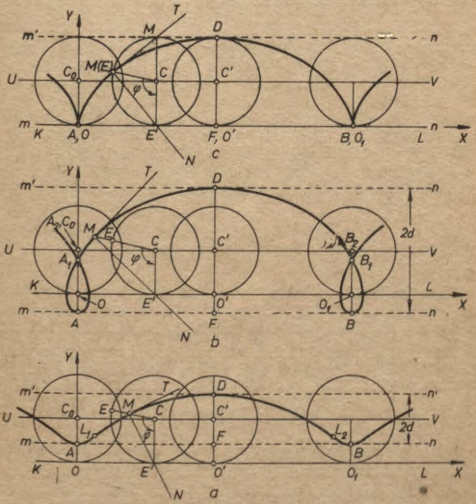
Piemērs. Kad vagons kustas pa sliedēm, riteņa iekšējais punkts apraksta saīsinātu cikloīdu, punkts uz ārējā loka — pagarinātu, bet riteņa aploces punkts — parasto cikloīdu.

Par cikloīdas *sākuma punktu* (A 498. zīmējumā a—c) sauc tādu tās punktu, kurš atrodas uz taisnes (C_0O), kas savieno veidojošā riņķa centru C_0 ar tā atbalsta punktu (O) un atrodas tai pašā pusē no centra C_0, kur atbalsta punkts O. Punkts B 498. zīmējumā a—c arī ir sākuma punkts.

Parastās cikloīdas (498. zīm. c) sākuma punkti atrodas uz vadītājas un sakrīt ar atbilstošajiem veidojošā riņķa atbalsta punktiem.

Par cikloīdas *virsotni* (D 498. zīmējumā a—c) sauc tādu tās punktu, kurš atrodas uz taisnes $C'O'$, kas savieno veidojošā riņķa centru C' ar atbalsta punktu O', bet kas atrodas uz nogriežņa $C'O'$ turpinājuma aiz punkta C'.

Nogriezni AB, kas savieno divus blakus sākuma punktus, sauc par cikloīdas *pamatu*. Perpendikulu DF, kas no-



498. zīm.

vilkts no cikloīdas virsotnes pret tās pamatu, sauc par *augstumu*. Loku, kuru apraksta punkts M starp diviem blakus sākuma punktiem, sauc par cikloīdas *arku*; taisni UV, kuru apraksta veidojošā riņķa centrs C, sauc par cikloīdas *centru līniju*.

2. Konstrukcija. Lai konstruētu cikloīdu, ja dots veidojošā riņķa rādiuss r un cikloīdu aprakstošā punkta M

attālums d, tad no veidojošā riņķa centra C novelkam vispirms (499. zīm.) centru līniju UV. No kāda tās punkta C_0, kā no centra, novelkam riņķa līniju ar rādiusu d[1]. Vienu tās taisnei UV perpendikulāra diametra galu apzīmēsim ar burtu M_0. Tā būs meklētās līnijas virsotne.

499. zīm.

Riņķa līniju C_0 sadalām $2n$ (pāra skaits) vienādos lokos (mēs ņēmām $2n=16$) tā, lai punkts M_0 būtu viens dalījuma punkts, un dalījuma punktus apzīmējam ar 0, ± 1, ± 2, ..., $\pm n$ (punkti $+n$ un $-n$ sakrīt). Uz centru līnijas uz abām pusēm no punkta C_0 atliekam ar veidojošā riņķa pusaploci vienādus nogriežņus C_0A', C_0B', t. i.,

$$C_0A'=C_0B'=\pi r,$$

un sadalām abus šos nogriežņus n vienādās daļās. Dalījuma punktus apzīmēsim ar $C_{+1}, C_{+2}, \ldots, C_{+n}$ (punkti C_n un C_{-n} attiecīgi sakrīt ar punktiem A' un B'; pozitīviem numuriem uz taisnes UV un uz riņķa līnijas C_0 atbilst punkti, kas atrodas kreisajā pusē no taisnes C_0M_0). Caur riņķa līnijas C_0 punktiem 1, 2, 3,... novelkam centru līnijai paralēlas taisnes (tās ies attiecīgi arī caur punktiem -1, -2, -3,...), bet punktos $C_{\pm 1}$, $C_{\pm 2}$,... novelkam pusaploces ar rādiusu d, kuru diametri ir perpendikulāri pret UV un kuras vērstas ar ieliekumu pret punktu C_0.

[1] Parastās cikloīdas gadījumā tā ir veidojošā riņķa līnija. Vispārīgi ne veidojošais riņķis, ne vadītāja aprakstāmajā konstrukcijā dalību neņem. 499. zīmējumā tie parādīti (ar punktētu līniju) tikai uzskatāmības dēļ.

Atzīmējam punktus M_1, M_{-1}, kur pusaploces C_1, C_{-1} krusto taisni, kas novilkta caur punktiem $+1$, -1; pēc tam atzīmējam punktus M_2, M_{-2}, kur pusaploces C_2, C_{-2} krusto taisni, kas novilkta caur punktiem $+2$, -2 utt. Visi punkti M_1, M_{-1}, M_2, M_{-2} utt. atradīsies uz meklētās cikloīdas. Punktos M_n, M_{-n} atradīsies tās sākuma punkti A, B.

Tā pēc punktiem var konstruēt vienu cikloīdas arku. Lai konstruētu blakus arkas, tad punktu C rinda jāturpina, kā parādīts 499. zīmējumā. Šo punktu numerācija jāizdara no jauna. Riņķa līniju C_0 no jauna zīmēt nav vajadzīgs, jo centru līnijai paralēlās taisnes paliek tās pašas.

3. Parametriskie vienādojumi [abscisu ass ir vadītāja KL; koordinātu sākums O — viena sākuma punkta (A 498. zīmējumā *a*—*c*) projekcija uz vadītāju KL] ir

$$x=r\varphi-d\sin\varphi;\quad y=r-d\cos\varphi, \tag{1}$$

kur $\varphi=\angle MCE'$ ir veidojošā riņķa pagrieziena leņķis, kuru skaita no tā stāvokļa, kur punkts M sakrīt ar sākuma punktu A.

Parastajai cikloīdai $(d=r)$

$$x=r(\varphi-\sin\varphi);\quad y=r(1-\cos\varphi). \tag{1a}$$

4. Formas īpatnības. Taisnes KL virzienā cikloīda uz abām pusēm stiepjas uz bezgalību. Jebkuram tās lokam, kuru skaita no kāda sākuma punkta A, atbilst simetrisks loks, kuru skaita no tā paša punkta pretējā virzienā; AC_0 ir simetrijas ass. Cikloīda ir simetriska arī pret taisni DF, kas novilkta caur kādu tās virsotni perpendikulāri vadītājai.

Pārvietojot cikloīdu centru līnijas virzienā par attālumu, kas ir $2\pi r$ (veidojošā riņķa līnijas garuma) daudzkārtnis, cikloīda sakļaujas pati ar sevi. Ja pakāpeniski pārvieto jebkuru cikloīdas loku, kas atbilst parametra izmaiņai no kādas vērtības $\varphi=\varphi_0$ līdz vērtībai $\varphi=\varphi_0+2\pi$, piemēram, no $\varphi=-\pi$ līdz $\varphi=\pi$ vai no $\varphi=0$ līdz $\varphi=2\pi$, par attālumu $\pm 2\pi r$, tad var iegūt visu cikloīdu.

Cikloīda ieslēgta joslā, ko ierobežo taisnes $y=r+d$ un $y=r-d$. Pirmā taisne pieskaras cikloīdai visās tās virsotnēs. Otra iet caur visiem sākuma punktiem; tā ir pieskare cikloīdai, ja šī cikloīda ir saīsināta vai pagarināta. Parastajai cikloīdai otrā taisne $(y=0)$ sakrīt ar vadītāju un ir *perpendikulāra* pieskarēm (vienpusīgajām) cikloīdas sākuma punktos.

5. Mezgla punkti. Pagarinātajai cikloīdai vienmēr ir mezgla punkti. To skaits un novietojums ir atkarīgs no attiecības $d:r$ $(=\lambda)$. Ja šī attiecība nepārsniedz skaitli $\lambda_0=$ $=4{,}60333\ldots$[1], tad visi mezgla punkti novietojas uz taisnēm $x=2k\pi r$ (k — vesels skaitlis), pie kam uz katras taisnes atrodas viens mezgla punkts: punkts A_1 (498. zīm. b) — uz taisnes $x=0$, punkts B_1 — uz taisnes $x=2\pi r$ utt.

Šos punktus var atrast, atrisinot vienādojumu

$$\varphi-\lambda\sin\varphi=0, \tag{2}$$

kuram apskatāmajā gadījumā $\lambda<\lambda_0$ ir viena pozitīva sakne φ_1; tā atrodas intervālā $(0,\ \pi)$. Vērtības $\varphi=\varphi_1$ un $\varphi=-\varphi_1$ atbilst punktam A_1 uz arkas ADB $(0<\varphi<2\pi)$ un uz blakus arkas $(-2\pi<\varphi<0)$[2].

1. piemērs. Pieņemsim, ka, tāpat kā 498. zīmējumā, b, $d=1{,}43r$. Atrisinot vienādojumu

$$\varphi-1{,}43\sin\varphi=0 \tag{2a}$$

(ar 288. un 289. § paņēmienu), atrodam vērtību $\varphi_1=81°$, kas atbilst punktam A_1 (uz arkas ADB). Punkta A_1 ordināti y_1 atrodam no sistēmas (1) otrā vienādojuma

$$y_1=OA_1=r(1-1{,}43\cos\varphi_1)\approx 0{,}78\,r.$$

Šīs cikloīdas mezgla punkti ir

$$(2\pi kr;\quad 0{,}78\,r).$$

Pieņemsim tagad, ka attiecība λ atrodas intervālā

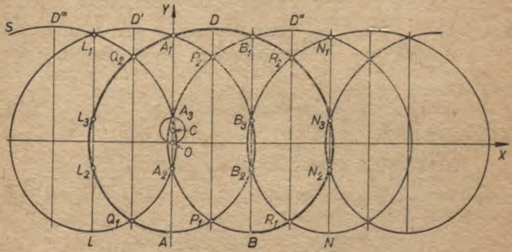
$$\lambda_0<\lambda\leqslant\lambda_1,$$

kur $\lambda_1=7{,}78968\ldots$[3]; tad bez iepriekš apskatītajiem mezgla punktiem rodas vēl jauni mezgla punkti uz taisnēm $x=$ $=(2k+1)\pi r$, viens pāris uz katras šīs taisnes: punkti P_1, P_2 (500. zīm.) uz taisnes $x=\pi r$, punkti Q_1, Q_2 uz taisnes $x=-\pi r$, punkti R_1, R_2 uz taisnes $x=3\pi r$ utt. Šos punktus var atrast, atrisinot vienādojumu

$$\varphi-\lambda\sin\varphi=\pi, \tag{3}$$

[1] Šis iracionālais skaitlis ir vienāds ar $\sec\alpha_0$, kur α_0 ir mazākā pozitīvā sakne vienādojumam $\operatorname{tg}\alpha-\alpha=0$.
[2] Vienādojuma (2) nulles saknei atbilst sākuma punkts A, kas nav mezgla punkts.
[3] Šis iracionālais skaitlis ir vienāds ar $\sec\alpha_1$, kur α_1 ir mazākā pozitīvā sakne vienādojumam $\operatorname{tg}\alpha-\alpha=\pi$.

kuram apskatāmajā gadījumā ir divas pozitīvas saknes φ_1, φ_2. Abas saknes atrodas intervālā $(2\pi, 3\pi)$ un atbilst punktiem P_1, P_2 uz arkas $BD''N$, kura krustojas šeit ar arku $LD'A$ [1], kas atdalīta no $BD''N$ ar vienu starparku ADB



500. zīm.

Gadījumā, ja λ atrodas intervālā

$$\lambda_1 < \lambda \leqslant \lambda_2,$$

kur $\lambda_2 = 14{,}102\ldots$ [2], cikloīdai parādās jauni mezgla punkti — šoreiz atkal uz taisnēm $x = 2k\pi r$, viens pāris uz katras taisnes: punkti A_2, A_3 (sk. 500. zīm.) uz taisnes $x=0$, punkti B_2, B_3 uz taisnes $x = 2\pi r$, punkti L_1, L_2 uz taisnes $x = -2\pi r$ utt. Šos punktus var atrast, atrisinot vienādojumu (2), kuram šai gadījumā nav vis viena pozitīva sakne kā 1. piemērā, bet trīs pozitīvas saknes. Vismazākā sakne φ_1 atrodas intervālā $(0, \pi)$ un atbilst mezgla punktam A_1 (500. zīm.), kas atrodas blakus arku ADB un $LD'A$ krustojumā. Abas pārējās saknes φ_2, φ_3 atrodas intervālā $(2\pi, 3\pi)$ un atbilst punktiem A_2, A_3, kas atrodas arku $BD''N$ un $LD'''S$ krustojumā, kuras atdalītas ar divām starparkām ($LD'A$ un ADB).

Ja attiecība λ tālāk aug, tad cikloīdai rodas vienmēr jauni un jauni mezgla punktu pāri: vispirms viens punktu

---

[1] Ja $\lambda = \lambda_0$, tad punkti P_1 un P_2 sakrīt, tā ka arkas $BD''N$ un $LD'A$ viena otrai pieskaras.

[2] Skaitlis λ_2 ir vienāds ar $\sec \alpha_2$, kur α_2 ir otrā (absolūtās vērtības augšanas kārtībā) pozitīvā sakne vienādojumam $\operatorname{tg} \alpha - \alpha = 0$.

pāris uz taisnēm $x=(2k+1)\pi r$ (šajos punktos krustojas divas arkas, kas atdalītas ar trim starparkām), pēc tam — viens punktu pāris uz taisnēm $x=2k\pi r$ (šeit krustojas divas arkas, kas atdalītas ar četrām starparkām) utt. pārmaiņus.

2. piemērs. Pieņemsim, ka, tāpat kā 500. zīmējumā, $\lambda=8$. Tā kā šī λ vērtība atrodas intervālā (λ_1, λ_2), tad dotajai pagarinātajai cikloīdai ir trīs mezgla punkti uz katras taisnes $x=2k\pi r$ un divi — uz katras taisnes $x=(2k+1)\pi r$.

Mezgla punktus A_1, A_2, A_3 uz taisnes $x=0$ atrodam no vienādojuma

$$\varphi-8\sin\varphi=0. \tag{2b}$$

Tā saknes ir

$$\varphi_1=159°40'; \quad \varphi_2=360°+69°30'; \quad \varphi_3=360°+95°54'.$$

Punktu A_1, A_2, A_3 ordinātes atrodam no sistēmas (1) otrā vienādojuma

$$y_1=OA_1=r(1-8\cos\varphi_1)\approx 8{,}50r$$

un analogi

$$y_2=OA_2\approx 1{,}80r; \quad y_3=OA_3\approx 1{,}83r.$$

Mezgla punktus P_1, P_2 uz taisnes $x=\pi$ atrodam no vienādojuma

$$\varphi-8\sin\varphi=\pi. \tag{3a}$$

Tā saknes ir

$$\varphi'_1=360°+26°49'; \quad \varphi'_2=360°+136°21'.$$

Punktu P_1, P_2 ordinātes būs

$$y'_1=OP_1\approx -6{,}14r; \quad y'_2=OP_2\approx 6{,}79r.$$

Uz katras mūsu cikloīdas arkas atrodas 10 mezgla punkti (uz arkas ADB — punkti Q_1, L_2, L_3, Q_2, A_1 un ar tiem simetriskie punkti R_1, N_2, N_3, R_2, B_1).

Ne saīsinātajai, ne parastajai cikloīdai mezgla punktu nav.

6. Atgriešanās punkti. Ja veidojošā riņķa ārējais punkts M tuvojas riņķa līnijai, tad punkta M aprakstītā pagarinātā cikloīda (498. zīm. *b*) tiecas sakrist ar parasto cikloīdu (498. zīm. *c*). Pie tam cilpa ar mezgla punktu A_1 savelkas punktā O, kas kļūst par parastās cikloīdas atgriešanās punktu: pārejot no arkas $(-2\pi, 0)$ uz arku $(0, 2\pi)$, punkta M kustības virziens mainās uz pretējo. Atgriešanās

punkti ir visi parastās cikloīdas punkti $\varphi=2k\pi$ un tikai šie punkti. Pagarinātajām un saīsinātajām cikloīdām atgriešanās punktu nav.

7. Pārliekuma punkti. Saīsinātajai cikloīdai uz katras arkas ir divi pārliekuma punkti (L_1 un L_2 498. zīmējumā *a*): atbilstošās parametra φ vērtības aprēķina no vienādojuma

$$\cos\varphi=\frac{d}{r}.$$

Cikloīdai, kas attēlota 498. zīmējumā *a*, kur $d=0{,}6r$, dabūjam $\cos\varphi=0{,}6$. Punktam L_1 atbilst vērtība $\varphi'_1\approx 52°25'$, punktam L_2 — vērtība $\varphi'_2=127°35'$. Punkta L_1 koordinātes x_1, y_1 ir

$$x_1=r\varphi-d\sin\varphi=r(\varphi-0{,}6\sin\varphi)\approx 0{,}43r,$$
$$y_1=r\ -d\cos\varphi=r(1-0{,}6\cos\varphi)\approx 0{,}63r.$$

Punkta L_2 koordinātes ir

$$x_2=2\pi-x_1\approx 5{,}85r;\quad y_2=y_1\approx 0{,}63r.$$

8. Normāles un pieskares īpašības. Jebkuras cikloīdas normāle MN (498. zīm. *a—c*) iet caur veidojošā riņķa atbalsta punktu E'. Parastās cikloīdas pieskare MT (498. zīm. *a*) iet caur punktu H, kas ir diametrāli pretējs veidojošā riņķa atbalsta punktam.

No šejienes arī izriet pieskares konstrukcijas paņēmiens.

9. Liekuma rādiuss. Jebkurai cikloīdai

$$R=\frac{(r^2+d^2-2dr\cos\varphi)^{3/2}}{d\,|d-r\cos\varphi|}. \tag{4}$$

Atsevišķā gadījumā parastajai cikloīdai

$$R=2r\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\varphi}=4r\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|=2\sqrt{2ry}=2ME' \tag{4a}$$

(498. zīm. *c*), t. i., *parastās cikloīdas liekuma rādiuss ir vienāds ar divkāršotu normāles nogriezni starp cikloīdu un vadītāju.* Citiem vārdiem, lai konstruētu liekuma centru, pietiek hordu ME' turpināt aiz punkta E' par attālumu, kas ir vienāds ar šo hordu.

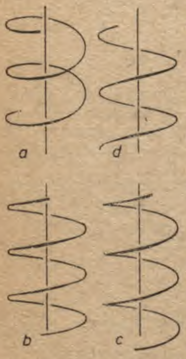
10. Parastās cikloīdas evolūta un evolvente. Parastās cikloīdas evolūta (liekuma centru ģeometriskā vieta) ir cikloīda, kas ir kongruenta ar doto cik-

loīdu, bet pārvietota pa vadītāju par pamata AB pusi un nobīdīta lejup zem pamata par attālumu, kas ir vienāds ar cikloīdas augstumu (sk. 384. zīm. 559. lappusē).

Citiem vārdiem, cikloīdas C_4BD (sk. 384. zīm.) evolvente, kas iziet no šīs cikloīdas virsotnes B, ir cikloīda M_2BN, kas ir kongruenta ar doto cikloīdu, bet pārvietota pa vadītāju par pamata C_4D pusi un pacelta augšup virs pamata par attālumu, kas ir vienāds ar cikloīdas augstumu.

11. Cikloīda un sinusoīda. No cikloīdas punkta M pret veidojošā riņķa (kas iet caur atbalsta punktu) vilkto perpendikulu pamatu ģeometriskā vieta ir sinusoīda ar viļņa garumu $2\pi r$ un amplitūdu d. Šīs sinusoīdas ass sakrīt ar cikloīdas centru līniju.

12. Cikloīda kā skrūves līnijas projekcija. Apzīmējumi: h — skrūves līnijas kāpe; a — tās rādiuss; α — kāpuma leņķis; β — leņķis starp skrūves līnijas asi un projekciju plakni; σ — projicējošo staru slīpuma leņķis pret projekciju plakni.



501. zīm.

Skrūves līnijas slīpleņķa projekcija asij *perpendikulārā* plaknē ir cikloīda. Ja $\sigma > \alpha$, tad šī cikloīda ir pagarināta; ja $\sigma < \alpha$, tad — saīsināta; ja $\sigma = \alpha$, tad — parastā. Skrūves līnijas ortogonālā (taisnleņķa) projekcija tai pašā plaknē, acīm redzot, ir riņķa līnija.

Skrūves līnijas *ortogonālā projekcija* plaknē, kas *nav perpendikulāra* asij, bet nav arī tai paralēla, ir «saspiesta cikloīda» (501. zīm. *a*—*c*), t. i., līnija, kuru iegūst no cikloīdas ar vienmērīgu spiedi (40. §) pret kādu cikloīdas centru līnijai perpendikulāru taisni.

Spiedes koeficients $k = \sin\beta$; lielumus r un d, kas raksturo cikloīdu (pirms spiedes), izsaka tā:

$$r = \frac{h}{2\pi} \operatorname{ctg}\beta \left(= a \operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\beta\right); \quad d = a. \tag{5}$$

No šejienes redzams, ja $\beta > \alpha$, tad skrūves līnijas projekcija (501. zīm. *a*) ir radnieciska ar pagarināto cikloīdu;

ja $\beta<\alpha$ (501. zīm. *b*) — ar saīsināto cikloīdu; ja $\beta=\alpha$ (501. zīm. *c*) — ar parasto cikloīdu.

Skrūves līnijas ortogonālā projekcija asij paralēlā plaknē (501. zīm. *d*) ir sinusoīda, kurai amplitūda ir skrūves līnijas rādiuss a, bet viļņa garums ir kāpes h projekcija $h\cos\beta$.

13. Cikloīdas l o k a g a r u m s s starp punktiem $\varphi=0$, $\varphi=\varphi_1$ ir

$$s=\int_0^{\varphi_1}\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\varphi}\,d\varphi. \tag{6}$$

Šis loks ir vienāds ar elipses

$$x=2(d+r)\cos\frac{\varphi}{2},\quad y=2(d-r)\sin\frac{\varphi}{2} \tag{7}$$

loka garumu starp punktiem ar tām pašām parametra φ vērtībām.

Integrāli (6) vispārīgajā gadījumā neizsaka ar argumenta φ_1 elementārajām funkcijām. Bet p a r a s t a j a i c i k l o ī d a i [elipse (7) deģenerējas nogrieznī, kura garums ir $8r$] dabūjam

$$s=2r\int_0^{\varphi_1}\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi=4r\left(1-\cos\frac{\varphi_1}{2}\right)=8r\sin^2\frac{\varphi_1}{4}\;(\varphi_1\leqslant 2\pi). \tag{8}$$

Atsevišķā gadījumā *parastās cikloīdas vienas arkas garums ir vienāds ar četrkārtīgu veidojošā riņķa diametra garumu*, t. i.,

$$s=4\cdot 2r. \tag{8a}$$

14. N a t u r ā l a i s v i e n ā d o j u m s parastajai cikloīdai (*vienas* arkas robežās) ir

$$R^2+(s-4r)^2=(4r)^2\quad (0<s<2\pi r). \tag{9}$$

Šo vienādojumu dabū no (8) un (4a), izslēdzot φ. Lokus skaita no sākuma punkta. Ja par loku sākumu pieņem virsotni, tad naturālais vienādojums būs

$$R^2+s^2=(4r)^2\quad (-4r\leqslant s\leqslant 4r). \tag{9a}$$

15. Parastās cikloīdas k i n e m ā t i s k ā ī p a š ī b a. Vienādojums (9) kinemātikas valodā izsaka sekojošu īpašību: ja parastā cikloīda rit (bez slīdes) pa taisni AB, tad pie-

skaršanās punkta liekuma centrs kustas pa riņķa līniju. Šīs riņķa līnijas rādiuss ir četrreiz lielāks par veidojošā riņķa rādiusu, bet centrs atrodas tajā taisnes AB punktā, caur kuru rit cikloīdas virsotne.

16. Laukumi un tilpumi. Laukums S_1, ko apraksta ordināte, ja φ mainās no $\varphi=0$ līdz $\varphi=\varphi_1$, ir

$$S_1=(2r^2+d^2)\varphi-4dr\sin\varphi+\frac{d^2\sin 2\varphi}{2}. \qquad (10)$$

«Pilnais laukums» S (ja $\varphi_1=2\pi$) ir

$$S=2\pi r^2+\pi d^2. \qquad (11)$$

Parastajai un saīsinātajai cikloīdai tas ir figūras $OADBO_1$ laukums (498. zīm. a, c); pagarinātajai cikloīdai — laukums figūrai, kas paliek no figūras AA_1DB_1B, ja atņem taisnstūri $OABO_1$ (498. zīm. b).

Parastajai cikloīdai ($d=r$)

$$S=3\pi r^2, \qquad (12)$$

t. i., laukums figūrai, ko ierobežo cikloīdas arka un pamats, ir trīsreiz lielāks par veidojošā riņķa laukumu [Robervals (1634), Toričelli (1643)].

Laukums F_1 virsmai, ko, rotējot ap savu pamatu AB, izveido parastā cikloīda, ir

$$F_1=\frac{64}{3}\pi r^2=\frac{64}{9}S, \qquad (13)$$

kur S ir cikloīdas cilpas laukums.

Tilpums V_1 atbilstošajam rotācijas ķermenim ir

$$V_1=5\pi^2 r^3=\frac{5}{8}V, \qquad (14)$$

kur V ir apvilktā cilindra tilpums.

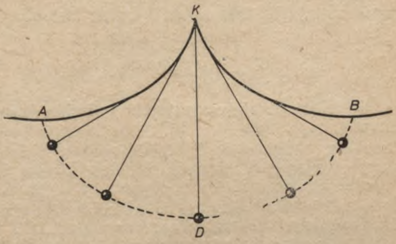
Laukums F_2 virsmai, ko, rotējot ap savu augstumu DF, izveido parastā cikloīda, ir

$$F_2=8\pi\left(\pi-\frac{4}{3}\right)r^2. \qquad (15)$$

Tilpums V_2 atbilstošajam rotācijas ķermenim ir

$$V_2=\pi r^3\left(\frac{3}{2}\pi^2-\frac{8}{3}\right)=\frac{3}{4}V'-2V'', \tag{16}$$

kur V' ir apvilktā cilindra tilpums, V'' — ievilktās lodes tilpums.



502. zīm.

17. C i k l o ī d a s t a u t o h r o n ā[1] ī p a š ī b a. Materiāls punkts, kas smaguma spēka iedarbībā kustas pa parasto cikloīdu ADB (502. zīm.), kura ar ieliekumu vērsta augšup, savu zemāko stāvokli D sasniedz laika sprīdī

$$t=\pi\sqrt{\frac{r}{g}} \tag{17}$$

(r ir veidojošā riņķa rādiuss, g — smaguma spēka paātrinājums). Šis laika sprīdis nav atkarīgs no punkta sākuma stāvokļa (Heigenss, 1673).

Tāpēc cikloidālā svārsta svārstību periods $T(T=4t)$ nav atkarīgs no tā amplitūdas (riņķa svārstam šī īpašība praktiski piemīt tikai mazu svārstību gadījumā). Heigensa konstruētā cikloidālā svārsta diegu nostiprina citas cikloīdas

[1] No ταυτὸς χρόνος — vienāds laiks.

AKB, kas ir cikloīdas ADB evolūta (sk. 10. p.), sākuma punktā K.

18. C i k l o ī d a k ā b r a h i s t o h r o n a[1]. Brahistohrona punktam, kas smaguma spēka iedarbībā pārvietojas (vidē, kuras pretestību var neievērot) no dotā punkta A uz zemāku punktu B (kas neatrodas uz vienas vertikāles ar A), ir parastā cikloīda. Tā ir vērsta ar ieliekumu augšup; punkts A ir tās sākuma punkts. Veidojošā riņķa lielumu atrod no nosacījuma, lai cikloīda ietu caur punktu B.

Ātrākās nolaišanās ilgumu aprēķina ar formulu

$$t=\sqrt{\frac{r}{g}}\varphi_B, \tag{18}$$

kur φ_B ir veidojošā riņķa pagrieziena leņķis, kas atbilst punktam B.

P i e m ē r s. Punkts B ir zemāk par punktu A par $0{,}83\ m$, bet horizontālā virzienā atrodas $1{,}54\ m$ attālumā no A. Atrast ātrākās nolaišanās ilgumu no A uz B.

A t r i s i n ā j u m s. Ņemsim koordinātu sākumu punktā A, OX asi vērsīsim vertikāli lejup; par plakni XOY ņemsim vertikālu plakni, kas iet caur A un B. OY asi vērsīsim tā, lai punktam B būtu pozitīva abscisa. Par mērvienību pieņemsim $1\ m$. Tad punkta B koordinātes būs

$$x_1=1{,}54; \quad y_1=0{,}83. \tag{19}$$

Cikloīdu, kas nodrošina ātrāko nolaišanos, izsaka vienādojumi

$$x=r(\varphi-\sin\varphi), \quad y=r(1-\cos\varphi). \tag{20}$$

No nosacījuma (19) var atrast veidojošā riņķa rādiusu r un vērtību $\varphi=\varphi_B$, kas atbilst punktam B.

Šai nolūkā, izslēdzot r no vienādojumiem (20), atrisināsim ar 288. un 289. § paņēmienu vienādojumu

$$1{,}54(1-\cos\varphi)=0{,}83(\varphi-\sin\varphi).$$

[1] Brahistohrona (no βραχιστος χρονος — īsākais laiks) ir līnija, pa kuru realizējas punkta ātrākā pāreja no viena stāvokļa otrā. Terminu ieteica Johans Bernulli (1667—1748), kurš sprauda sev uzdevumu atrast «īsākās nolaišanās līniju». 1696. gadā viņš vienlaicīgi ar Jakobu Bernulli publicēja uzdevuma atrisinājumu.

Dabūjam

$$\varphi \approx 195^\circ \ (\approx 3{,}40 \text{ radiāna}).$$

Tagad no sistēmas (20) otrā vienādojuma atrodam

$$r \approx 0{,}42 \ (m).$$

Beidzot ar formulu (18), ņemot tanī $g=9{,}8$ (m/sek^2), atrodam

$$t=\sqrt{\frac{0{,}42}{9{,}8}}\cdot 3{,}40 \approx 0{,}70 \text{ (sek)}.$$

Nolaišanās no A uz B pa slīpu plakni ilgtu 0,87 sek, t. i., gandrīz par 25% ilgāk.

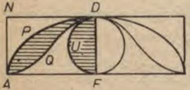
19. Vēsturiskas ziņas. Augstākās matemātikas vēsturē cikloīdai piekrita sevišķi svarīga loma. Vairāk par pusgadsimtu tā saistīja ievērojamāko XVII gadsimta zinātnieku uzmanību. Vairākas cikloīdas ģeometriskā veidā atrastās īpašības apstiprināja jauno analītisko metožu pareizību. Citas tās īpašības izdevās atklāt tikai ar šo jauno metožu palīdzību.

1640. gadā Galilejs, pētot ritošas riņķa līnijas punkta trajektoriju, konstruēja cikloīdu (viņam pieder arī šīs līnijas nosaukums). Viņš mēģināja noteikt laukumu figūrai, ko ierobežo cikloīdas arka un tās pamats. Tā kā viņa rīcībā nebija līdzekļu, lai šo uzdevumu atrisinātu teorētiski, tad viņš mēģināja atrast cikloīdas laukuma attiecību pret veidojošā riņķa laukumu ar svēršanu. Sākumā viņš pieņēma, ka šī attiecība ir vienāda ar 3, bet pēc tam pievērsa uzmanību tam, ka eksperiments viņam vienmēr deva skaitli, kas bija mazāks par trīs. Tā kā starpība bija niecīga, tad likās neiespējami meklēto attiecību izteikt ar nelielu veselu skaitļu palīdzību, un Galilejs nonāca pie pārliecības, ka šī attiecība ir iracionāla.

Pēc Galileja nāves (1642. g.) viņa skolnieki Toričelli un Viviani, kas kopā ar viņu bija pārcietuši ieslodzījuma grūtības, nodevās cikloīdas matemātiskajiem pētījumiem. Viviani, vadoties no kinemātiskiem apsvērumiem, atrada pieskares īpašību, kas apskatīta 5. punktā; Toričelli, lietojot paņēmienus, kas iezīmē integrālrēķinu sākumus, noteica cikloīdas laukumu (16. p.).

Cikloīdas laukumu neatkarīgi no Toričelli un, domājams, dažus gadus agrāk par viņu atrada arī Robervals. Robervala metode izceļas ar asprātību un vienkāršību (tā balstās uz 11. p. īpašību)[1].

Ar to pašu metodi Robervals atrada tilpumus cikloīdas rotācijas ķermeņiem ap pamatu un ap augstumu. Robervals apskatīja ne vien parasto, bet arī pagarināto un saīsināto cikloīdu un deva to pieskaru konstrukcijas metodi.



503. zīm.

Lai cik lieliski arī bija šie atklājumi, tie tomēr attiecās uz uzdevumiem, kuri daudzām citām līnijām jau sen bija atrisināti. Bet visi mēģinājumi precīzi rektificēt līklīniju lokus palika nesekmīgi. Cikloīda bija pirmā līkne, kuru izdevās rektificēt. Pirmais to veica ievērojamais angļu astronoms, fiziķis, matemātiķis un arhitekts Rens (1632—1723). Rena darbs tika publicēts 1658. gadā. Drīz to pašu uzdevumu atrisināja arī vairāki citi zinātnieki, pie kam Fermā bez tam pirmoreiz rektificēja algebrisku līniju (puskubisko parabolu).

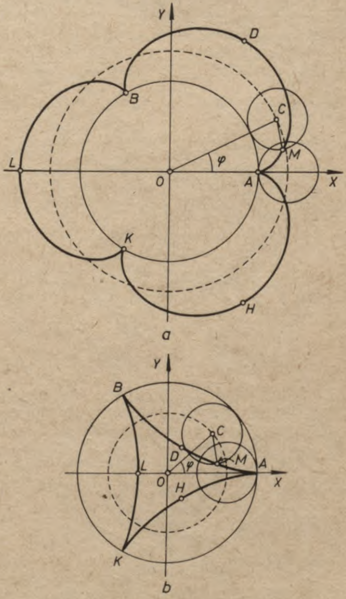
Cikloīdas ģeometriskās īpašības vispusīgi izpētīja B. Paskāls, kura darbs iznāca 1659. gadā.

Tālākajos četrdesmit gados tādu pirmklasīgu zinātnieku darbos kā Heigenss, Ņūtons, Leibnics un brāļi Bernulli tika izpētīti cikloīdas mehāniskie pielietojumi (sk. 15. un 16. p.). Brahistohronas uzdevums (16. p.) tā vispārinātajā veidā bija galvenais stimuls jaunas matemātikas nozares — variāciju rēķinu izveidošanai; šī matemātikas nozare tika radīta XVIII gadsimtā ar Eilera un Lagranža darbiem.

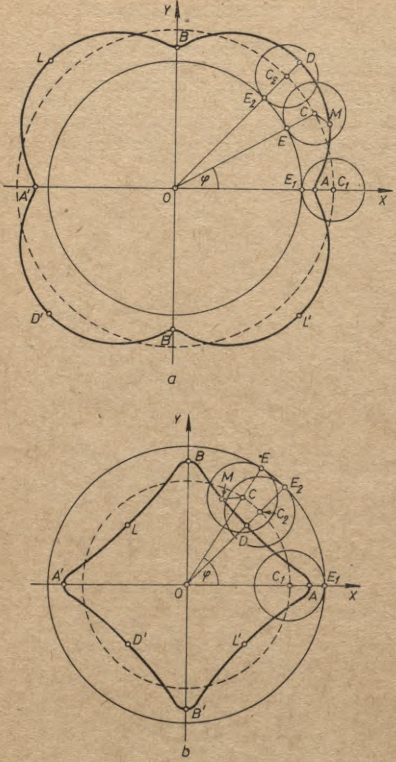
[1] Metodes ideja ir šāda. Simetrijas dēļ skaidrs, ka sinusoīda AQD (503. zīm.), kura minēta 11. īpašībā, dala vienlielās daļās taisnstūri $AFDK$, kas konstruēts uz cikloīdas pamata puses un tās augstuma. No šejienes ar elementāriem apsvērumiem izriet, ka figūra $AFDQ$, kuru veido augstums, pamata puse un sinusoīda, ir vienliela ar veidojošo riņķi. Lai dabūtu puscikloīdas laukumu, jāpievieno vēl «ziedlapiņa» $AQDP$ starp cikloīdas pusarku un sinusoīdu. Robervals pierādīja, ka šī ziedlapiņa ir vienliela ar veidojošā riņķa pusi. Pierādījums balstās uz tā sauktā Kavaljēri principa pielietošanu (pusriņķis ierobežots ar vertikālu diametru, šķēlumus izdara paralēli pamatam).

515. §. Epicikloīdas un hipocikloīdas

1. Definīcija. Tiklab epicikloīda (504. zīm. *a*), kā arī hipocikloīda (504. zīm. *b*) ir līnija L, kuru apraksta punkts M, kas nostiprināts kāda riņķa C ar rādiusu r (veidojošais riņķis) plaknē, ja šis riņķis rit bez slīdes pa kādu nekustīgu riņķa līniju ar rādiusu R (vadītāja). Līniju L sauc par epicikloīdu, ja riņķa līnijas C un O pieskaras viena otrai ārēji, bet par hipocikloīdu, ja pieskaršanās ir iekšēja.



504. zīm.


Y
B
L
D
C_2
E_2
C
M
E
φ
E_1
A
C_1
X
A'
O
D'
L'
B'
a
Y
B
E
M
C
E_2
C_2
L
D
A'
φ
C_1
E_1
O
A
X
D'
L'
B'
b

505. zīm.

Epicikloīdu 504. zīmējumā *a* un hipocikloīdu 504. zīmējumā *b* aprakstījis tāds punkts M, kas atrodas uz veidojošās riņķa līnijas. Tādas epicikloīdas un hipocikloīdas sauc par *parastajām* atšķirībā no saīsinātajām un pagarinātajām. Epicikloīdu (505. zīm. *a*) un hipocikloīdu (505. zīm. *b*) sauc par *saīsinātām*, ja punkts M ņemts veidojošā riņķa iekšienē, t. i., ja $d<r$ ($d=CM$ ir punkta M attālums no veidojošā riņķa centra C), un par *pagarinātām* (506. *a* un *b* zīm.), ja punkts M atrodas ārpus veidojošā riņķa, t. i., ja $d>r$.

Par epicikloīdas vai hipocikloīdas sākuma punktu (504.—506. zīmējumā A) sauc tādu tās punktu, kurš atrodas uz taisnes (C_1E_1), kas savieno veidojošā riņķa centru (C_1) ar atbalsta punktu (E_1) tai pašā pusē no centra C_1, kur atbalsta punkts E_1. Punkti A', B, B' 505. zīmējumā *a* un *b* arī ir sākuma punkti.

Parastās epicikloīdas un parastās hipocikloīdas sākuma punkti (A, B, K 504. zīmējumā *a* un *b*) atrodas uz veidojošās riņķa līnijas un sakrīt ar atbilstošajiem veidojošā riņķa atbalsta punktiem.

Par epicikloīdas vai cikloīdas virsotni (D 505. zīm. *a* un *b*) sauc tādu tās punktu, kurš atrodas uz taisnes C_2E_2, kas savieno veidojošā riņķa centru C_2 ar atbalsta punktu E_2, bet atrodas uz nogriežņa C_2E_2 turpinājuma aiz punkta C_2. Punkti D', L, L' 505. zīmējumā *a* un *b* arī ir virsotnes.

Riņķa līniju, kuru apraksta veidojošā riņķa centrs, sauc par epicikloīdas (hipocikloīdas) *centru līniju*. Centru līnijas rādiuss OC ir

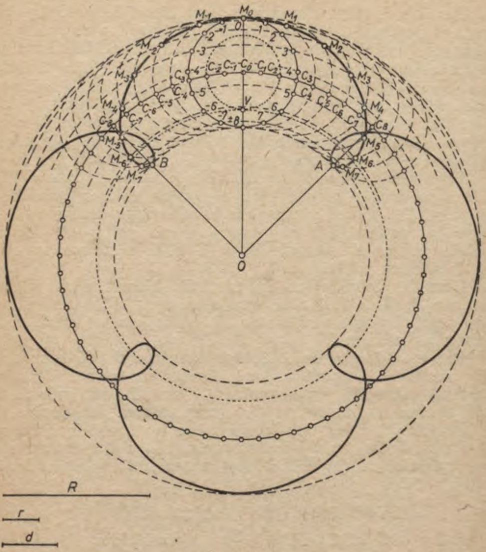
$$OC=OE+EC=R+r \quad \text{epicikloīdai,}$$

$$OC=|OE-EC|=|R-r| \quad \text{hipocikloīdai.}$$

2. K o n s t r u k c i j a. Lai konstruētu epicikloīdu vai hipocikloīdu, ja doti: R (vadītājas rādiuss), r (veidojošās riņķa līnijas rādiuss) un d (attālums no punkta M, kas apraksta epicikloīdu vai hipocikloīdu, līdz veidojošā riņķa centram C), rīkojamies šādi.

Novelkam divas riņķa līnijas (506. *a* un *b* zīmējumā tās parādītas ar treknu punktētu līniju) $O(R)$ un $C_0(r)$, kuras pieskaras viena otrai punktā V ārēji, ja konstruē epicikloīdu (506*a*. zīm.), un iekšēji, ja konstruē hipocikloīdu (506*b*. zīm.).

No centra C_0 novelkam vēl riņķa līniju ar rādiusu d (tā parādīta ar nepārtrauktu līniju un tai pierakstītas skaitliskas atzīmes) un apzīmējam ar burtu M_0 to šīs līnijas krustošanās punktu ar taisni OC_0, kurš atrodas uz nogriežņa

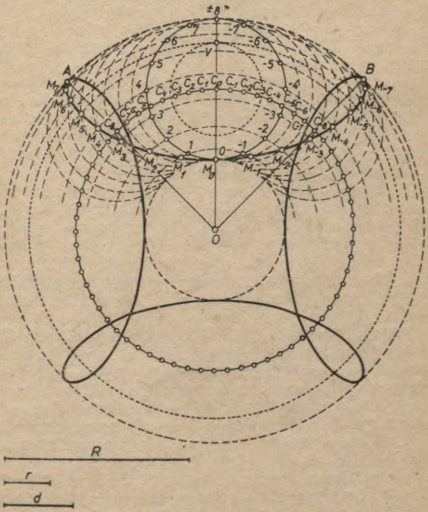


506.*a* zīm.

C_0V turpinājuma aiz punkta C_0. Punkts M_0 būs viena meklētās līnijas virsotne.

Riņķa līniju $C_0(d)$ sadalām $2n$ (pāra skaits) vienādos lokos (mēs ņēmām $2n=16$) tā, lai punkts M_0 būtu viens dalījuma punkts. Dalījuma punktiem pierakstām skaitliskas atzīmes $0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$ (nulles atzīme atbilst punktam M_0, atzīmes n un $-n$ atbilst vienam un tam pašam punktam). Noteiktības dēļ pieņemsim, ka atzīmju numuri aug, ja riņķa līniju C_0 apiet pulksteņa rādītāja kustības virzienā.

Tālāk no centra O novelkam riņķa līniju ar rādiusu OC_0 — meklētās epicikloīdas (hipocikloīdas) centru līniju —



506.*b* zīm.

un uz tās no punkta C_0 atliekam loku $\overset{\frown}{C_0C_n}$, kura grādu mēru nosaka no proporcijas

$$\overset{\frown}{C_0C_n} : 180° = r : R \qquad (1)$$

un kurš vērsts pulksteņa rādītāja kustības virzienā, ja konstruē epicikloīdu, un uz pretējo pusi, ja konstruē hipocikloīdu. No tā paša punkta C_0 atliekam ar C_0C_n simetrisku loku C_0C_{-n} [1]. 506. *a* un *b* zīmējumā, kur $r : R = 1 : 4$, loki C_0C_8 un

[1] Ja $r>R$, tad loki C_0C_n un C_0C_{-n} viens otru sedz, bet, ja $r>2R$, tad bez tam abi loki C_0C_n, C_0C_{-n} sedz arī paši sevi.

C_0C_{-8} satur katrs 90° un tos var ģeometriski precīzi viegli uzkonstruēt ar lineālu un cirkuli. Citos gadījumos tāda konstrukcija var būt grūta vai pat neiespējama. Tad konstrukciju izpilda aptuveni ar vajadzīgo precizitātes pakāpi.

Abus lokus C_0C_n, C_0C_{-n} sadalām n vienādās daļās un dalījuma punktus, sākot ar punktu C_0, apzīmējam ar burtiem $C_{\pm 1}, C_{\pm 2}, \ldots, C_{\pm n}$.

Novelkam tagad no punkta O koncentriskas riņķa līnijas, kuras attiecīgi iet caur punktu M_0, kuram ir arī atzīme O, caur punktu pāri ar atzīmēm ± 1, caur punktu pāri ar atzīmēm ± 2 utt. Uz pirmās riņķa līnijas atradīsies visas virsotnes, uz pēdējās — visi sākuma punkti.

No punktiem $C_1, C_2, \ldots, C_n$ kā no centriem novelkam pusaploces ar rādiusu d tā, lai to gali atrastos uz pirmās un pēdējās koncentriskās riņķa līnijas un lai šīs pusaploces varētu ar pagriezienu ap punktu O sakļaut ar pusaploci, kurai ir atzīmes *1, 2, 3,*... Tādā pašā veidā no centriem $C_{-1}, C_{-2}, C_{-3}, \ldots$ novelk pusaploces, kuras ar pagriezieniem ap punktu O var sakļaut ar pusaploci, kurai ir atzīmes -1, -2, $-3, \ldots$

Atzīmējam punktus M_1, M_{-1}, kur pusaploces $C_1(d)$, $C_{-1}(d)$ krusto to koncentrisko riņķa līniju, kura tika novilkta caur punktiem ± 1; pēc tam atzīmējam punktus M_2, M_{-2}, kur pusaploces C_2, C_{-2} krusto caur punktiem ± 2 novilkto riņķa līniju utt. Visi punkti $M_{\pm 1}, M_{\pm 2}, M_{\pm 3}, \ldots$ atrodas uz meklētās līnijas, pie kam punkti M_8, M_{-8} sakrīt ar sākuma punktiem A, B (šos punktus varēja dabūt arī agrāk, novelkot taisnes OC_n, OC_{-n}).

Tā pēc punktiem konstruē vienu epicikloīdas (hipocikloīdas) zaru. Lai konstruētu blakus zarus, pietiek turpināt punktu C rindu tā, kā parādīts 506. *a* un *b* zīmējumā. Šo punktu numerācija jāizdara no jauna. Riņķa līniju C_0 pārzīmēt nevajag, jo tā ir vajadzīga, lai konstruētu koncentriskās riņķa līnijas, bet šīs līnijas paliek tādas pašas.

3. P a r a m e t r i s k i e v i e n ā d o j u m i (koordinātu sākums O ņemts veidojošās riņķa līnijas centrā; OX ass vērsta uz vienu sākuma punktu; φ ir stara OC pagrieziena leņķis no tā sākuma stāvokļa [1]).

---

[1] Šis leņķis ir vienāds ar $\angle XOC$ visām epicikloīdām un tām hipocikloīdām, kurām veidojošā riņķa rādiuss ir mazāks par vadītājas rādiusu ($r<R$). Ja turpretim $r>R$, tad $\varphi=\angle XOC+\pi$. Ievērosim, ka nav tādas hipocikloīdas, kurai $r=R$, jo šai gadījumā veidojošais riņķis nevar ritēt bez slīdes pa vadītāju riņķa līniju, pieskaroties tai iekšēji.

Epicikloīdai

$$\left.\begin{aligned} x&=(R+r)\cos\varphi-d\cos\frac{R+r}{r}\varphi,\\ y&=(R+r)\sin\varphi-d\sin\frac{R+r}{r}\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{2a}$$

Hipocikloīdai

$$\left.\begin{aligned} x&=(R-r)\cos\varphi+d\cos\frac{R-r}{r}\varphi,\\ y&=(R-r)\sin\varphi-d\sin\frac{R-r}{r}\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{2b}$$

Vienādojumus (2b) dabū no (2a), ja r aizstāj ar $-r$ un d — ar $-d$[1].

4. Formas īpatnības. Jebkura epicikloīda atrodas riņķa gredzenā, ko ierobežo riņķa līnijas ar rādiusiem $R+r+d$ un $|R+r-d|$. Uz pirmās riņķa līnijas atrodas epicikloīdas virsotnes, uz otrās — sākuma punkti. Tādējādi, kā tas redzams 504. zīm. *a*, 505. zīm. *a* un 506. *a* zīmējumā, epicikloīdas virsotnes atrodas vienmēr tālāk no centra nekā sākuma punkti.

Jebkura hipocikloīda atrodas riņķa gredzenā, ko ierobežo riņķa līnijas ar rādiusiem $|R-r-d|$ un $|R-r+d|$. Uz pirmās riņķa līnijas atrodas hipocikloīdas virsotnes, bet uz otrās — sākuma punkti. Ja $R>r$, kā tas redzams 504. zīm. *b*, 505. zīm. *b* un 506. *b* zīmējumā, hipocikloīdas virsotnes atrodas tuvāk centram nekā sākuma punkti. Stāvoklis ir citāds tai gadījumā, ja $R<r$. Šī otrā tipa hipocikloīdas sauc par *pericikloīdām*. Mēs nedodam tām īpašus zīmējumus tā iemesla dēļ, ka katra pericikloīda ir identiska ar kādu epicikloīdu un atšķiras no tās tikai ar izveidošanas paņēmienu. Par to sīkāk pastāstīts 7. punktā.

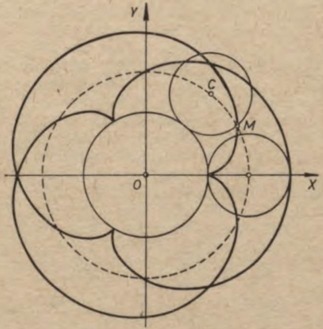
Pagriežot ap centru O par leņķi, kas ir $\frac{2\pi r}{R}$ daudzkārtnis, epicikloīda (hipocikloīda) sakļaujas pati ar sevi. Tā 504. zīmējumā *a* attēlotā līnija, kur $R=3r$, sakļausies pati ar sevi,

[1] Ja norādītajā veidā izvēlas OX ass virzienu un parametru φ, tad vienādojumi (2b) paliek spēkā arī tām hipocikloīdām, kurām $r>R$ (tādas hipocikloīdas sauc par pericikloīdām). Ja, kā to bieži dara, par parametru φ ņem leņķi $\angle XOC$, tad pericikloīdu parametriskie vienādojumi atšķirsies no pārējo hipocikloīdu vienādojumiem.

ja to pagriezīs ap O par leņķi $\pm\frac{2\pi}{3}$ vai $\pm\frac{4\pi}{3}$, vai $\pm 2\pi$ utt. Tas pats attiecas uz 504. zīmējumā b attēloto līniju. 505. zīm. a, b un 506. a, b zīmējumā attēlotas līnijas, kur $R=4r$, var sakļaut, pagriežot par leņķi, kas ir $\frac{\pi}{2}$ daudzkārtnis.

Parastās epicikloīdas (hipocikloīdas) sākuma punkti ir atgriešanās punkti (sk. 504. zīm. a un b).

Ja attiecība $R:r$ ir vesels skaitlis m, tad epicikloīda (parastā, pagarinātā vai saīsinātā) ir noslēgta algebriska līnija ar kārtu $2(m+1)$, bet hipocikloīda — noslēgta algebriska līnija ar kārtu $2(m-1)$. Tā 504. zīmējumā a attēlotā epicikloīda (kur $R:r=3:1$) ir astotās kārtas līkne, bet 504. zīmējumā b attēlotā hipocikloīda (arī šeit $R:r=3:1$) — ceturtās kārtas līkne. Tiklab epicikloīda, kā arī hipocikloīda sastāv no m kongruentiem zariem.



507. zīm.

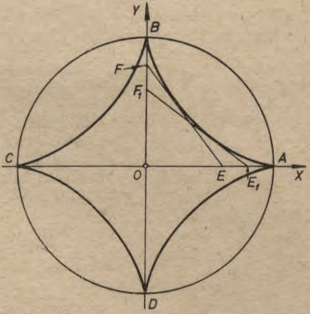
Ja attiecība $R:r$ ir daļskaitlis, kuram nesaīsināmā formā ir izskats $\frac{p}{q}$ $(q\neq 1)$, tad epicikloīda (hipocikloīda) arī ir algebriska līkne (ar kārtu $2\,|p\pm q|$) un sastāv no p kongruentiem zariem. Tā 507. zīmējumā attēlotā parastā epicikloīda ir desmitās kārtas līkne un sastāv no trim kongruentiem zariem.

Ja attiecība $R:r$ ir iracionāls skaitlis, tad epicikloīda (hipocikloīda) nav noslēgta, tai ir bezgalīgi daudz zaru, kas viens ar otru krustojas.

5. Atsevišķi veidi.

1) Ja $R:r=2:1$, tad tiklab pagarinātā, kā arī saīsinātā hipocikloīda ir elipse ar centru punktā O. Elipses pusasis ir $a=r+d$; $b=|r-d|$; lielās ass gala punkti ir hipocikloīdas sākuma punkti, mazās ass gali — virsotnes. Šo elipses izveidošanas paņēmienu izmanto, lai konstruētu ierīces, ar kurām zīmē elipses.

1a) Ja pastāvīgos lielumus R un r saista sakarība $R:r=$ $=2:1$, bet starpība $r-d$ tiecas uz nulli, tad elipses mazā ass neierobežoti samazinās, bet lielā ass tiecas sakrist ar veidojošās riņķa līnijas diametru. Parastā hipocikloīda, ko iegūst robežgadījumā ($d=r$), ir taisnes nogrieznis, konkrēti,



508. zīm.

tās veidojošās riņķa līnijas diametrs, kas savieno sākuma punktus. Ja veidojošais riņķis izdara pilnu apgriezienu, tad šo diametru apraksta vienā virzienā, bet, ja tas izdara nākošo apgriezienu, tad — pretējā virzienā. Tādējādi arī šai robežgadījumā parastās hipocikloīdas sākuma punkti ir atgriešanās punkti.

2) Ja $R=r$, tad visas epicikloīdas ir Paskāla gliemeži (508. §); starp citu, apskatāmā tipa parastā epicikloīda nav nekas cits kā kardioīda.

3) Ja $R:r=4:1$, tad parastā hipocikloīda ir *astroīda* (508. zīm.); šī līnija ir raksturīga ar to, ka tās pieskares nogrieznim EF, kas ieslēgts starp divām savstarpēji perpendikulārām taisnēm (kuras iet caur diviem pretēji novietotu sākuma punktu pāriem), ir viens un tas pats garums R. Astroīdas vienādojums 508. zīmējumā parādītajā taisnleņķa koordinātu sistēmā ir

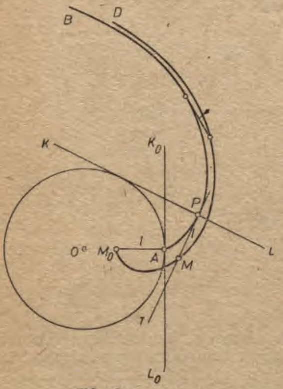
$$x^{2/3}+y^{2/3}=R^{2/3}$$

jeb parametriskajā formā

$$x=R\cos^3 u, \quad y=R\sin^3 u.$$

6. Robežgadījumi.

1. gadījums. Ja vadošās riņķa līnijas rādiuss ir bezgalīgs, bet veidojošā riņķa rādiuss pastāvīgs, tad epicikloīda (hipocikloīda) pārvēršas cikloīdā (514. § 1. p.) ar to pašu veidojošā riņķa rādiusu.



509. zīm.

2. gadījums. Ja veidojošā riņķa rādiuss ir bezgalīgs, tad šis riņķis pārvēršas taisnē (509. zīmējumā KL), kura rit bez slīdes pa vadošo riņķa līniju O; epicikloīda (hipocikloīda) tad pārvēršas līnijā, ko apraksta ar taisni KL nekustīgi saistīts punkts M.

Ja punkts M atrodas uz pašas taisnes KL (kā punkts P 509. zīmējumā), tad aprakstītā līnija (509. zīmējumā AB) ir vadošās riņķa līnijas evolvente (512. § 1. un 2. p.).

Ja ar taisni AB saistītais punkts atrodas tai pašā pusē, kur vadītāja (kā punkts M 509. zīmējumā), tad šī punkta projekcija P apraksta evolventi AB, bet pats punkts M — *saisinātu riņķa līnijas evolventi.* Šī līnija ir gala punkta ģeometriskā vieta nogrieznim PM, kuram ir dotais garums l un kuru atliek uz evolventes AB pieskares PT; pie tam nogriežņa PM virziens sakrīt ar evolventes loka $\smile{AP}$ dilšanas virzienu.

Ja ar taisni KL saistītais punkts atrodas otrā pusē no šīs taisnes, tad tas apraksta *pagarinātu evolventi.* Šo līniju konstruē analogi; vienīgā starpība ir tā, ka dotā garuma nogriezni atliek uz pieskares PT loka $\smile{AP}$ augšanas virzienā.

7. H i p o c i k l o ī d u u n e p i c i k l o ī d u d i v ē j ā d ā i z v e i d o š a n a. Parastā hipocikloīda, kura rodas, ja veidojošais riņķis ar rādiusu r rit pa riņķa līniju ar rādiusu R, ir identiska ar «hipocikloīdu», kura rodas, ja veidojošais riņķis ar rādiusu

$$r_1=R-r$$

rit pa to pašu riņķa līniju ar rādiusu R.

Vārds «hipocikloīda» ielikts pēdiņās tāpēc, ka gadījumā, ja $r>R$, *ar šo terminu jāsaprot epicikloīda, kurai veidojošā riņķa rādiuss* ir $r-R$.

1. p i e m ē r s. Riņķī ar rādiusu R ievilktu astroīdu, kura rodas (5. p.), ja riņķis ar rādiusu $\frac{1}{4}R$ rit pa riņķa līniju ar rādiusu R, kura iekšēji pieskaras veidojošajam riņķim, var dabūt arī kā hipocikloīdu, kurai $R_1=R$, $r_1=R-\frac{1}{4}R=\frac{3}{4}R$.

2. p i e m ē r s. Parastā hipocikloīda, kura rodas, ja riņķis ar rādiusu $r=4m$ rit pa riņķa līniju ar rādiusu $R=2m$, ir identiska ar «hipocikloīdu», kura rodas, ja riņķis ar rādiusu $r_1=2m-4m=-2m$ rit pa riņķa līniju ar rādiusu $R_1=2$ m, t. i., ar e p i c i k l o ī d u, kurai $R_1=2m$, $r_1=2m$. Šī e p i c i k l o ī d a i r k a r d i o ī d a (5. p.).

No teiktā izriet, ka jebkura parastā epicikloīda (R, r) ir identiska ar hipocikloīdu[1] $(R, R+r)$. Tā 504. zīmējumā *a* attēloto parasto epicikloīdu $(r=\frac{1}{3}R)$ var dabūt kā hipocikloīdu, kas atbilst vērtībām $R_1=R$, $r_1=\frac{4}{3}R$.

[1] Kas pieder pericikloīdu tipam; sk. 4. p.

Divējādā izveidošana pielietojama arī vispārīgā veida hipocikloīdām (epicikloīdām), proti, hipocikloīdu, kas atbilst dotajiem lielumiem R, r, d, var dabūt arī kā «hipocikloīdu» (R_1, r_1, d_1), kur R_1, r_1, d_1 izsaka atkarībā no R, r, d ar šādām formulām:

$$R_1=\frac{d}{r}R, \quad r_1=\frac{d}{r}(R-r), \quad d_1=R-r. \tag{4}$$

Gadījumā, ja $R<r$[1], līnija (R_1, r_1, d_1) ir epicikloīda, kurai $R_1=\frac{d}{r}R$, $r_1=\frac{d}{r}(r-R)$, $d_1=r-R$.

Jebkura epicikloīda (R, r, d) tāpat ir identiska ar hipocikloīdu

$$R_1=\frac{d}{r}R, \quad r_1=\frac{d}{r}(R+r), \quad d_1=R+r, \tag{4a}$$

kas pieder pericikloīdu tipam.

P i e z ī m e. Hipocikloīda (epicikloīda), kas ar vienu izveidošanas paņēmienu iznāca pagarināta, ar otru paņēmienu iznāks saīsināta (un otrādi).

3. p i e m ē r s. 506*b*. zīmējumā konstruēto pagarināto hipocikloīdu $(R, \frac{1}{4}R, \frac{3}{8}R)$ var dabūt kā (saīsinātu) hipocikloīdu (R_1, r_1, d_1), kur

$$R_1=\frac{3}{2}R, \quad r_1=\frac{9}{8}R, \quad d_1=\frac{3}{4}R$$

(saskaņā ar formulām (4)).

4. p i e m ē r s. 506*a*. zīmējumā konstruēto pagarināto epicikloīdu $(R, \frac{1}{4}R, \frac{3}{8}R)$ var dabūt arī kā (saīsinātu) hipocikloīdu (R_1, r_1, d_1), kur (saskaņā ar formulām (4a))

$$R_1=\frac{3}{2}R, \quad r_1=\frac{15}{8}R, \quad d_1=\frac{5}{4}R.$$

8. N o r m ā l e s u n p i e s k a r e s ī p a š ī b a. Jebkurai epicikloīdai (hipocikloīdai) punktā M novilktā normāle iet

[1] Tas ir, kad dotā hipocikloīda ir pericikloīda.

caur atbilstošo veidojošā riņķa un vadītājas pieskaršanās punktu. Pieskare parastajai epicikloīdai (hipocikloīdai) iet caur veidojošā riņķa punktu E', kas ir diametrāli pretējs punktam E (sal. 514. § 8. p.).

No šejienes izriet pieskares konstrukcijas paņēmiens.

9. L i e k u m a r ā d i u s s jebkurai epicikloīdai ir

$$\bar{R}=(R+r)\frac{\left(r^2+d^2-2dr\cos\frac{R\varphi}{r}\right)^{3/2}}{\left|r^3+d^2(R+r)-dr(R+2r)\cos\frac{R\varphi}{r}\right|}. \tag{5}$$

Atbilstošo formulu hipocikloīdai dabū, formulā (5) aizstājot r ar $-r$ un d ar $-d$.

Parastajai epicikloīdai (hipocikloīdai) dabūjam

$$\bar{R}=\frac{4r\,|R\pm r|}{|R\pm 2r|}\sin\frac{R\varphi}{2r}, \tag{5a}$$

kur plusa zīme atbilst epicikloīdai, bet mīnusa zīme — hipocikloīdai.

Formulu (5a) var pārrakstīt tā:

$$\bar{R}=2l\left|\frac{R\pm r}{R\pm 2r}\right|. \tag{5b}$$

Šeit l ir veidojošā riņķa horda ME, kas savieno epicikloīdas (hipocikloīdas) punktu M ar atbilstošo veidojošā riņķa atbalsta punktu E. Formula (5b) dod vienkāršu liekuma centra konstruēšanas paņēmienu.

Parastās epicikloīdas (hipocikloīdas) sākuma punktos $\bar{R}=0$.

Virsotnēs

$$\bar{R}=\frac{4r\,|R\pm r|}{|R\pm 2r|}.$$

10. E v o l ū t a. Parastās epicikloīdas vai hipocikloīdas evolūta (t. i., tās liekuma centru ģeometriskā vieta) ir dotajai līnijai līdzīga līnija. Līdzības attiecība epicikloīdai ir $R:(R+2r)$, bet hipocikloīdai $R:(R-2r)$. Evolūtai ir tas pats centrs kā dotajai epicikloīdai (hipocikloīdai). Evolūtas virsotnes sakrīt ar dotās līnijas sākuma punktiem (sal. 514. § 10. p.), tā ka vienu šo līniju var dabūt no otras, to

pagriežot par leņķi $\pi \cdot \frac{r}{R}$ un pēc tam proporcionāli mainot attālumus no centra.

P i e m ē r s. Evolūta astroīdai $ABCD$ (508. zīm.), t. i., hipocikloīdai, kurai $R=4r$, arī ir astroīda, kuru dabū no dotās astroīdas, pagriežot to ap centru par 45° lielu leņķi un proporcionāli mainot attālumus līdz centram attiecībā $R:(R-2r)=4:2=2:1$. Sākuma punkti A, B, C, D būs evolūtas virsotnes.

11. L o k a g a r u m s s epicikloīdai starp punktiem $\varphi=0$, $\varphi=\varphi_1$ ir

$$s=\frac{R+r}{r}\int_0^{\varphi_1}\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\frac{R\varphi}{r}}\,d\varphi. \tag{6}$$

Šis loka garums ir vienāds ar elipses

$$x=2(d+r)\frac{R+r}{R}\cos\frac{R\varphi}{2r},\quad y=2(d-r)\frac{R+r}{R}\sin\frac{R\varphi}{2r} \tag{7}$$

loka garumu starp punktiem ar tām pašām parametra φ vērtībām.

Integrālis (6) vispārīgi neizsakās ar argumenta elementārajām funkcijām. Bet parastajai epicikloīdai (elipse deģenerējas nogrieznī, kura garums ir $8r$) dabūjam

$$s=\frac{8r(R+r)}{R}\sin^2\frac{R\varphi_1}{4r}. \tag{8}$$

Atsevišķā gadījumā loka garums starp diviem blakus sākuma punktiem ir

$$8r\left(1+\frac{r}{R}\right). \tag{9}$$

Hipocikloīdai viss iepriekš teiktais paliek spēkā, ja vien d, r attiecīgi aizstāj ar $-d$, $-r$.

12. N a t u r ā l a i s v i e n ā d o j u m s parastajai epicikloīdai (hipocikloīdai) ir

$$\frac{\overline{R}^2}{a^2}+\frac{(s-b)^2}{b^2}=1\quad(0\leqslant s\leqslant 2b), \tag{10}$$

kur $a=\frac{4r(R\pm r)}{R\pm 2r}$; $b=\frac{4r(R\pm r)}{R}$, $\overline{R}$ ir liekuma rādiuss, s —

loka garums, kuru skaita no viena sākuma punkta. Lielumu a, b izteiksmēs augšējās zīmes attiecas uz epicikloīdu, apakšējās — uz hipocikloīdu. Vienādojumu (10) dabū, izslēdzot parametru φ no (8) un (5a).

Ja par loku atskaites sākumu pieņem vienu virsotni, tad naturālais vienādojums būs

$$\frac{\overline{R}^2}{a^2}+\frac{s^2}{b^2}=1 \quad (-b\leqslant s\leqslant b). \tag{10a}$$

Sal. 514. § 13. p.

13. Kinemātiskā īpašība. Vienādojums (10) jeb (10a) kinemātikas valodā izsaka šādu īpašību: ja parastās epicikloīdas vai parastās hipocikloīdas loks rit bez slīdes pa taisni AB, tad pieskaršanās punkta liekuma centrs kustas pa elipsi; šīs elipses centrs atrodas tanī taisnes AB punktā, caur kuru rit epicikloīdas (hipocikloīdas) virsotne; viena elipses pusass sakrīt ar taisni AB, un tās garums ir vienāds ar epicikloīdas (hipocikloīdas) puszara garumu $\left|\frac{4r(R\pm r)}{R}\right|$, otra pusass ir liekuma rādiuss virsotnē un ir vienāda ar $\left|\frac{4r(R\pm r)}{R\pm 2r}\right|$. Sal. 514. § 14. p.

14. Sektoriālais laukums S, ko apraksta polārais rādiuss OM, kas izejas stāvoklī vilkts uz epicikloīdas sākuma punktu, izsakās ar formulu

$$S=\frac{R+r}{2}\left\{\left(R+r+\frac{d^2}{r}\right)\varphi-\frac{d(R+2r)}{R}\sin\frac{R\varphi}{r}\right\}. \tag{11}$$

Atsevišķā gadījumā parastajai cikloīdai

$$S=\frac{(R+r)(R+2r)}{2}\left\{\varphi-\frac{r}{R}\sin\frac{R\varphi}{r}\right\} \tag{12}$$

(Ņūtons).

Hipocikloīdas gadījumā formulās (11) un (12) r jāaizstāj ar $-r$.

Formulās (11) un (12) laukumu uzskata par vērstu (orientētu) lielumu, t. i., pieņem, ka tajos parametra φ maiņas intervālos, kur polārais rādiuss griežas negatīvā virzienā, tas apraksta negatīvu laukumu.

Sektora laukumu S_1, kuru apraksta parastās epicikloīdas (hipocikloīdas) polārais rādiuss OM, kad punkts M noiet vienu zaru, izsaka ar formulu

$$S_1 = \frac{\pi r(R \pm r)(R \pm 2r)}{R}, \tag{13}$$

kur augšējās zīmes ņem epicikloīdai, bet apakšējās — hipocikloīdai.

Laukums S_2 atbilstošajam vadošā riņķa sektoram ir

$$S_2 = \pi R r. \tag{14}$$

Tāpēc laukumu $\overline{S}$ figūrai, ko ierobežo viens parastās epicikloīdas (hipocikloīdas) zars un atbilstošais veidojošās riņķa līnijas loks, izsaka ar formulu

$$S = |S_1 - S_2| = \pi r^2 \left| 3 \pm 2\frac{r}{R} \right|. \tag{15}$$

Piemērs. Apskatīsim parasto hipocikloīdu, kurai $r : R = 1 : 4$, t. i., astroīdu $ABCD$ (508. zīm.). Ar formulu (15) atradīsim

$$\overline{S} = \pi r^2 \left| 3 - 2 \cdot \frac{1}{4} \right| = \frac{5}{2}\pi r^2 = \frac{5}{32}\pi R^2. \tag{15a}$$

Tas ir laukums figūrai, ko ierobežo viens astroīdas zars, piemēram, zars AB un atbilstošais vadošās riņķa līnijas O loks $\smile{AB}$ ($\smile{AB} = 90°$).

Bet to pašu astroīdu var uzskatīt par hipocikloīdu, kurai $r : R = 3 : 4$ (7. p.). Tad, pielietojot formulu (15), atrodam

$$\overline{S} = \pi r^2 \left| 3 - 2 \cdot \frac{3}{4} \right| = \frac{3}{2}\pi r^2 = \frac{27}{32}\pi R^2. \tag{15b}$$

Šis rezultāts pirmajā mirklī var likties bezjēdzīgs. Tomēr jāievēro, ka tagad astroīdas zaram AB atbilst ne tas loks $\smile{AB}$, kas satur 90°, bet otrs loks ($BCDA$), kas satur 270°, tā ka formula (15b) izsaka to laukumu, kas kopā ar laukumu (15a) aizpilda visu riņķi O. Tiešām, saskaitot (15a) un (15b), dabūjam

$$\frac{27}{32}\pi R^2 + \frac{5}{32}\pi R^2 = \pi R^2.$$

15. Vēsturiskas ziņas. Lai izskaidrotu planētu atgriezeniskās kustības, sengrieķu astronomi, sekojot Hiparham (2. gs. pirms m. ē.), pierakstīja tām vienmērīgu kustību pa riņķa līniju *(epicikls)*, kuras centrs savukārt vienmērīgi kustas pa citu riņķa līniju *(deferents)*. Līnija, ko ar šiem nosacījumiem apraksta punkts, ir epicikloīda. Mēs tomēr nezinām, kādas tās ģeometriskās īpašības bija pazīstamas senatnes zinātniekiem. XIII gadsimta vidū ievērojamais musulmaņu astronoms un matemātiķis Muhameds Nasireddins at-Tusī (1201—1274) konstatēja, ka riņķa līnijas punkts, kura rit pa riņķa līniju ar divreiz lielāku rādiusu, pieskaroties tai iekšēji, apraksta nekustīgas riņķa līnijas diametru (5. p.). Šo īpašību neatkarīgi no Nasireddina atrada arī lielais poļu astronoms Nikolajs Koperniks (1473—1543); tā ietilpināta viņa ievērojamā darbā «Par debess riņķu griešanos», kas publicēts 1543. gadā. Nasireddina — Kopernika teorēmu plaši pielieto tehniskajā mehānikā.

Epicikloīdas un hipocikloīdas sistemātiski sāka pētīt 1525. gadā ievērojamais vācu mākslinieks Albrehts Dīrers (1471—1528), kas tēlojošā mākslā plaši pielietoja ģeometriskas metodes. Tomēr matemātiķiem Dīrera pētījumi palika nezināmi.

XVII gs. vidū Ž. Dezargs (1593—1662), kuram matemātisko ideju dziļums bija savienots ar konstruktora talantu, pētīja epicikloīdu īpašības sakarā ar uzdevumu izveidot zobratus ar vismazāko berzi. Šo, kā arī daudzu citu Dezarga pētījumu rezultāti netika publicēti, bet tie bija pazīstami viņa draugu vidū.

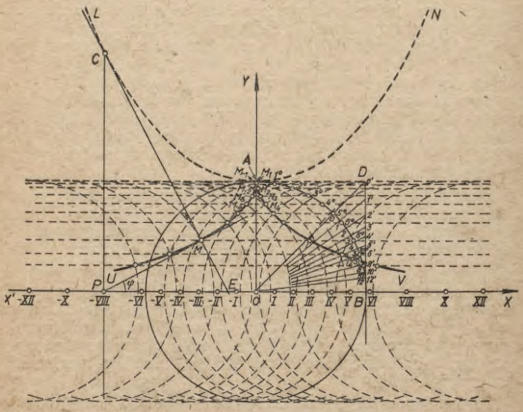
Lagīrs turpināja Dezarga pētījumus un 1675. gadā publicēja «Traktātu par epicikloīdām un to pielietojumiem mehānikā». Šeit konstatētas daudzas svarīgas epicikloīdu īpašības, starp citu īpašības, kas minētas 7., 8., 10., 11., 14. un 15. punktā.

Savā nemirstīgajā darbā «Dabas filozofijas matemātiskie pamati» (1687) Ņūtons vispārināja Heigensa pētījumus par cikloidālo svārstu (514. § 17. p.) un konstatēja, ka sfēriskajā gravitācijas laukā svārsta izohrono svārstību līnija ir epicikloīda.

Epicikloīdas un hipocikloīdas, kas ir cikloīdu dabisks vispārinājums, daudzkārt saistījušas zinātnieku uzmanību; bez iepriekš nosauktajiem autoriem pieminēsim vēl Leibnicu, Eileru un Danielu Bernulli (1700—1782).

516. §. Traktrise

1. Vēsturiskas ziņas. Franču ārsts Klods Pero 1693. gadā uzdeva vairākiem matemātiķiem tādu uzdevumu: viens neizstiepjama diega gals piestiprināts materiā-



510. zīm.

lam punktam M, kas atrodas horizontālā plaknē; otrs gals kustas pa taisni $X'X$, kas atrodas tai pašā plaknē. Kādu līniju aprakstīs materiālais punkts, kuru aizvelk savilktais diegs?

Šo uzdevumu atrisināja Leibnics, kurš meklētajai līnijai sastādīja diferenciālvienādojumu, vadoties no tā, ka šīs līnijas pieskares nogriežņa garumam, skaitot no pieskaršanās punkta M līdz krustošanās punktam ar taisni $X'X$, jābūt pastāvīgam (vienādam ar diega garumu). Neatkarīgi no Leibnica un vienlaicīgi ar viņu šo uzdevumu atrisināja Heigenss, kurš atrasto līniju nosauca par t r a k t o r i j u[1]. Tagad to visbiežāk sauc par traktrisi[2].

2. D e f i n ī c i j a. Par *traktrisi* (510. zīm.) sauc punktu ģeometrisku vietu, kuriem piemīt tāda īpašība, ka pieskares nogrieznim MP no pieskaršanās punkta M līdz krustošanās punktam ar doto taisni $X'X$ (vadītāju) ir dotais lielums a. Traktrises punktu A, kas atrodas vistālāk no vadītājas, sauc par traktrises *virsotni,* bet perpendikulu AO, kas novilkts no virsotnes pret vadītāju, — par *augstumu.*

3. P a r a m e t r i s k i e v i e n ā d o j u m i (abscisu ass vērsta pa traktrises vadītāju, ordinātu ass — pa augstumu uz virsotnes A pusi) ir

$$\left.\begin{aligned} x&=a\cos\varphi+a\ln\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},\\ y&=a\sin\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

kur $\varphi=\angle XPM$ ir leņķis, ko stars PM veido ar pozitīvo abscisu ass virzienu $(0<\varphi<\pi)$.

4. F o r m a s ī p a t n ī b a s. Traktrise ir simetriska attiecībā pret augstumu AO (šis augstums ir vienāds ar doto nogriezni a). Taisne AO pieskaras traktrisei punktā A; šis punkts ir traktrises atgriešanās punkts. Traktrise atrodas vienā pusē no vadītājas un aizstiepjas bezgalībā uz abām pusēm no virsotnes. Vadītāja ir traktrises asimptota.

5. K o n s t r u k c i j a. Lai konstruētu traktrisi, ja dots tās augstums a, tad novelkam taisni $X'X$ (vadītāju); no kāda šīs taisnes punkta kā no centra novelkam riņķa līniju ar rādiusu a. Krustošanās vietā ar staru $OY\perp X'X$ atrodam punktu A — traktrises virsotni. Caur punktu A un arī caur vienu punktu, kur riņķa līnija O krusto $X'X$ asi, piemēram, caur B, novelkam riņķa līnijai pieskares AD, BD; D ir to krustošanās punkts. Uz nogriežņa $BD=a$ ņemam punktus $1'$, $2'$, $3'$, ... tā, lai nogriežņi BD, $B1'$, $B2'$, $B3'$, ... veidotu ģeometrisko progresiju, t. i.,

$$BD : B1'=B1' : B2'=B2' : B3'=\ldots=q.$$

Kvocientu q var izvēlēties patvaļīgi. Lai novērstu kļūdu uzkrāšanos, ieteicams rīkoties tā: nogriezni BD sadalām uz

[1] No tā paša latīņu vārda «trahere» (vilkt, aizraut), no kura atvasināts vārds «traktors».

[2] Papildu vēsturiskas ziņas ir 14. punktā.

pusēm ar punktu *4'*; nogriezni *B4'* dalām uz pusēm ar punktu *8'* utt.; vienveidības dēļ apzīmējot punktu *D* ar *O'*, mēs dabūsim nogriežņu virkni *BO'*, *B4'*, *B8'*, *B16'*,..., kuri veidos progresiju ar kvocientu $\frac{1}{2}$. Tagad starp punktiem *O'*, *4'* konstruējam starppunktus *1'*, *2'*, *3'* [1] šādā kārtībā: vispirms atrodam punktu *2'* tā, lai nogrieznis *B2'* būtu vidējais proporcionālais starp *BO'* un *B4'*. Pie viena atzīmējam punktu *6'*, kas dala uz pusēm nogriezni *B2'*, un punktu *10'*, kas dala uz pusēm nogriezni *B6'* [2]. Tad dabūsim nogriežņu virkni *BO'*, *B2'*, *B4'*, *B6'*, *B8'*, *B10'*,..., kas veidos ģeometrisku progresiju ar kvocientu $1 : 2^{1/2}$.

Tālāk konstruējam punktu *1'* tā, lai nogrieznis *B1'* būtu vidējais proporcionālais starp *BO'* un *B2'*, un tālāk atzīmējam nogriežņa *B1'* viduspunktu *5'*, nogriežņa *B5'* viduspunktu *9'* utt. Tādā pašā veidā konstruē punktu *3'* (nogrieznis *B3'* ir vidējais proporcionālais starp *B2'* un *B4'*) un pēc tam atzīmē punktu *7'* (nogriežņa *B3'* viduspunkts), punktu *11'* (nogriežņa *B7'* viduspunkts) utt.[3].

Rezultātā mēs dabūsim nogriežņu virkni *BO'*, *B1'*, *B2'*,..., *B12'*,..., kas veidos ģeometrisku progresiju ar kvocientu $1 : 2^{1/4}$.

Rīkojoties gluži tāpat, mēs varētu arī konstruēt nogriežņu progresiju ar kvocientu $1 : 2^{1/8}$ vai $1 : 2^{1/16}$ utt.

Tagad uz vadītājas *X'X* uz abām pusēm no punkta *O* atliekam vienādus nogriežņus

$$O\,I = I\,II = II\,III = III\,IV = \ldots = d.$$

Teorētiski precīzu *d* vērtību aprēķina no proporcijas

$$d : a = \ln(a : B1'). \qquad (2)$$

[1] Paredzot nogriezni *0'4'* sadalīt četrās daļās, mēs jau iepriekš tā apakšējo galu numurējam ar ciparu 4'; lielākas precizitātes dēļ šo nogriezni varēja dalīt vai nu 8, vai 16 utt. daļās; tad attiecīgi vajadzētu izmainīt numerāciju.

[2] Numuri 2, 6, 10 veido aritmētisku progresiju ar to pašu diferenci (4), kādu veidoja numuri 0, 4, 8, 12, ...

[3] Punkti *7'*, *9'*, *11'* 510. zīmējumā nav parādīti, lai nesaraibinātu konstrukciju. Vispār nav vajadzības atzīmēt tos punktus, kas nonāk jau iepriekš konstruētu pārāk mazu nogriežņu iekšpusē. Šie punkti nepalielinās konstrukcijas precizitāti.

Bet, ja attiecība $a : B1'$ ir tuva vienam, tad praktiski pietiek ņemt

$$d = O'1'^{1}. \tag{2a}$$

Tālākā konstrukcija norit tā: punktus $1', 2', 3', \ldots$ savienojam ar centru O un staru $O1', O2', O3', \ldots$ krustošanās punktus ar riņķa līniju apzīmējam ar $1, 2, 3, \ldots$ (510. zīmējumā šie numuri ierakstīti riņķa līnijas iekšpusē; vienveidības dēļ ar numuru O apzīmēts riņķa līnijas krustošanās punkts ar staru OD).

Uz loka BA no punkta B atliekam loku $B1^\circ = 2 \cdot B1$, loku $B2^\circ = 2 \cdot B2$ utt. Caur divkāršoto loku galiem $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, \ldots$ (atbilstošie numuri 510. zīmējumā ierakstīti ārpus riņķa līnijas) novelkam vadītājai $X'X$ paralēlas taisnes[2] un no punktiem $\pm I, \pm II, \pm III$ kā no centriem novelkam pusaploces ar rādiusu a tā, kā parādīts 510. zīmējumā (pusaploces I, II, III vērstas ar ieliekumu uz centru numuru augšanas pusi, bet pusaploces $-I, -II, -III$ — uz pretējo pusi).

Beidzot atzīmējam punktu pāri, kur pusaploces $\pm I$ krusto caur 1° novilkto taisni, punktu pāri, kur pusaploces $\pm II$ krusto caur 2° novilkto taisni utt. Visi šie pa pāriem simetriskie punkti pieder meklētajai līnijai.

6. T r a k t r i s e k ā o r t o g o n ā l a t r a j e k t o r i j a; a p t u v e n a k o n s t r u k c i j a. Ortogonāla trajektorija riņķa līniju saimei ar rādiusu a un centriem uz taisnes $X'X$ (t. i., līnija, kura krusto visas šīs riņķa līnijas taisnā leņķī) ir traktrise. Minētajai riņķa līniju saimei ir bezgalīgi daudz ortogonālu trajektoriju: caur katru vienas riņķa līnijas punktu iet viena ar šo riņķa līniju ortogonāla traktrise. Viena trajektorija attēlota 510. zīmējumā; otra ir simetriska

---

[1] Mūsu gadījumā, kad $a : B1' = 2^{1/4}$, proporcija (2) dod

$$d = a \ln (2^{1/4}) = \frac{1}{4} a \ln 2 \approx 0{,}173\, a,$$

kamēr, ņemot $d = 0'1'$, mēs dabūjam

$$d = 0'1' = B0' - B1' = a\left(1 - \frac{1}{2^{1/4}}\right) \approx 0{,}160\, a.$$

Tādējādi kļūda sastāda 7,5%.

[2] Šai nolūkā vislabāk ir atlikt uz riņķa līnijas O no punkta A ar lokiem $A1^\circ$, $A2^\circ$ simetriskus lokus un savienot punktus 1°, 2° ar tiem simetriskajiem punktiem.

ar to attiecībā pret $X'X$ asi. Pārējās dabū, šo traktrisu pāri paralēli pārvietojot taisnes $X'X$ virzienā.

Šī īpašība ļauj diezgan precīzi uzskicēt traktrisi šādā veidā. Uzzīmējam vairākas pusaploces ar rādiusu a un ar centriem, kas cieši novietoti viens otram blakus uz taisnes $X'X$, un izvēlamies uz vienas pusaploces patvaļīgu punktu, kas atrodas no taisnes $X'X$ apmēram $\frac{1}{3}a$ attālumā; pēc tam novelkam pēc acumēra caur to līniju, kas krusto vairākas pusaploces taisnā leņķī, t. i., kas vienmēr vērsta pa atbilstošo rādiusu. Var rīkoties arī tā: atzīmējam ņemtās pusaploces rādiusu (vai šī rādiusa turpinājuma) krustošanās punktu ar blakus pusaploci; šīs pusaploces centru savienojam ar atrasto punktu un atzīmējam jaunā rādiusa krustošanās punktu ar nākošo pusaploci utt. Dabūsim lauztu līniju, kura, ja centri ņemti viens otram pietiekami tuvu, praktiski aizstās meklēto traktrisi. Konstrukcijas precizitāte samazinās, tuvojoties virsotnei.

7. P i e s k a r e s k o n s t r u k c i j a. Lai konstruētu pieskari dotajā punktā M traktrisei ar doto virsotni A un vadītāju $X'X$, pietiek iezīmēt uz taisnes $X'X$ punktu P ar loku, kas novilkts no centra M ar rādiusu $AO=a$. Taisne MP ir meklētā pieskare.

8. L i e k u m a r ā d i u s s

$$R=a \operatorname{ctg} \varphi. \tag{3}$$

Ģeometriski šī formula izsaka (sk. 510. zīm.), ka *traktrises liekuma rādiuss punktā M ir normāles nogrieznis MC no punkta M līdz krustošanās punktam C ar taisni PC, kura novilkta perpendikulāri vadītājai $X'X$ caur tās krustošanās punktu P ar punktā M novilkto pieskari.*

Minētā veidā konstruētais punkts C ir traktrises liekuma centrs punktā M.

Liekuma rādiuss virsotnē A ir

$$R_A=a. \tag{3a}$$

Liekuma rādiusu MC un normāles nogriezni ME (no punkta M līdz krustošanās punktam E ar vadītāju) saista sakarība

$$MC \cdot ME=a^2, \tag{4}$$

t. i., *liekuma rādiuss MC un normāles nogrieznis ME ir apgriezti proporcionāli.*

9. E v o l ū t a. Traktrises evolūta LAN (510. zīm.), t. i., tās liekuma centru C ģeometriskā vieta, ir ķēdes līnija (517. §). Koordinātu sistēmā OXY (510. zīm.) evolūtas vienādojums ir

$$\frac{y}{a}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right) \tag{5}$$

jeb, kas ir tas pats,

$$\frac{y}{a}=\operatorname{ch}\frac{x}{a}. \tag{5a}$$

10. L o k a $\overset{\frown}{AM}$ g a r u m u s izsaka ar formulu

$$s=a\ln\csc\varphi=a\ln\frac{a}{y}.$$

Starpība $s-|x|$ starp loka $\overset{\frown}{AM}$ garumu un tā projekciju uz vadītāju, ja punkts M neierobežoti attālinās no virsotnes A, tiecas uz robežu $a(1-\ln 2)$, t. i.,

$$\lim_{x\to\infty}(s-|x|)=a(1-\ln 2)\approx 0{,}307\,a. \tag{6}$$

11. N a t u r ā l a i s v i e n ā d o j u m s ir

$$s=a\ln\sqrt{\frac{R^2}{a^2}+1}. \tag{7}$$

12. L a u k u m s S bezgalīgai joslai, kas ieslēgta starp traktrisi un tās asimptotu $X'X$, ir divreiz mazāks par riņķa laukumu, kura rādiuss ir traktrises augstums OA, t. i.,

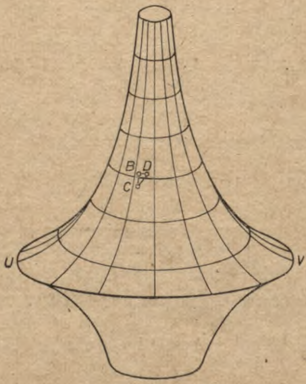
$$S=\frac{1}{2}\pi a^2. \tag{8}$$

13. Traktrises r o t ā c i j a s ķ e r m e n i m ap asimptotu $X'X$ (kas aizstiepjas bezgalībā $X'X$ ass virzienā) ir galīga virsma S_1, kas ir vienāda ar lodes virsmu, kuras rādiuss ir a, un galīgs tilpums V, kas ir vienāds ar šīs lodes tilpuma pusi, t. i.,

$$S_1=4\pi a^2, \tag{9}$$

$$V=\frac{2}{3}\pi a^3. \tag{10}$$

14. Traktrise un pseidosfēra. Virsmu (511. zīm.), kuru, rotējot ap savu asimptotu, izveido traktrise, sauc par *pseidosfēru*. Šī virsma tā nosaukta tāpēc, ka starp to un lodes virsmu pastāv dziļa analoģija. Tā, ja trīs punktus



511. zīm.

B, C, D uz lodes virsmas pa pāriem savieno ar īsākajiem lokiem, tad dabūtajā sfēriskajā trijstūrī BCD iekšējo leņķu summa vienmēr būs lielāka par π, pie kam lielums, par kuru summa $B+C+D$ pārsniedz π, ir vienāds ar attiecību starp sfēriskā trijstūra laukumu S un lodes rādiusa a kvadrātu, t. i.,

$$(B+C+D)-\pi=\frac{S}{a^2}. \tag{11}$$

Ja turpretim ņemam trīs punktus B, C, D (511. zīm.) uz pseidosfēras (vienā pusē no paralēles UV, ko apraksta traktrises virsotne) un tos arī savienojam ar īsākajiem lokiem, tad dabūtajā pseidosfēriskajā trijstūrī iekšējo leņķu summa vienmēr būs mazāka par π, pie kam lielums, par kuru summa $B+C+D$ ir mazāka par π, ir vienāds ar attiecību starp pseidosfēriskā trijstūra laukumu S un paralēles UV rādiusa a kvadrātu, t. i.,

$$\pi-(B+C+D)=\frac{S}{a^2}. \tag{12}$$

Atzīmējams, ka īpašība (12) piemīt taisnlīniju trijstūriem Lobačevska ģeometrijā. Un vispārīgi jebkurā pseidosfēras gabalā, kas nesatur paralēles UV punktus, realizējas bez izņēmuma visas īpašības, kuras piemīt kādam plaknes gabalam Lobačevska ģeometrijā. Šis atklājums, kuru 1863. gadā izdarīja itāļu ģeometrs E. Beltrami (1835—1900), izkliedēja to neuzticību pret Lobačevska ģeometriju, ar kādu pret to iepriekš izturējās gandrīz visi matemātiķi, to skaitā pat ļoti ievērojami.

517. §. Ķēdes līnija

1. Definīcija. Par *ķēdes līniju* sauc līniju, pa kuru nokarājas homogēns neizstiepjams diegs, kas nostiprināts divos tā galos.

1. piezīme. Sākotnējā jautājuma nostādnē (sk. 9. p.) runa bija par ķēdes izlieces līniju, no kurienes arī nācis nosaukums «ķēdes līnija». Aizstājot ķēdi ar diegu, mēs novēršam vairākus apstākļus (posmu izmēri, berze starp tiem utt.), kas apgrūtina pētījumus. Zemes gravitācijas spriegumu pieņem par pastāvīgu tiklab pēc lieluma, kā pēc virziena.

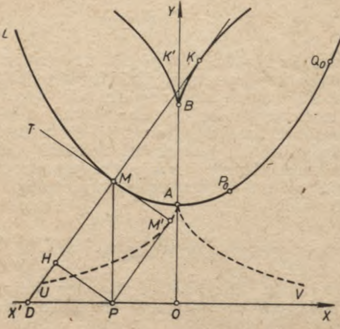
2. piezīme. Atkarībā no punktu P, Q stāvokļa, kuros nostiprināti diega gali, un paša diega garuma $l\,(l>PQ)$ izlieces lokam ir dažāds veids. Tomēr pētījumi rāda, ka loka PQ attēlu, kas izdarīts noteiktā mērogā, var sakļaut ar kādu pilnīgi noteiktas bezgalīgas līnijas LAN (512. zīm.) loku P_0Q_0. Tieši šo bezgalīgo līniju visumā (bet ne izlieces loku, kas sastāda tās daļu) arī sauc par «ķēdes līniju».

Ķēdes līnijas apakšējo punktu A sauc par tās *virsotni*.

2. Vienādojums. Ja par koordinātu sākumu pieņem ķēdes līnijas virsotni (kas liekas diezgan dabiski) un ordinātu asi vērš vertikāli augšup, tad ķēdes līniju izsaka vienādojums

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)-a, \tag{1}$$

kur a (ķēdes līnijas *parametrs*) ir tāda diega gabala garums, kura svars ir vienāds ar diega sastiepuma horizontālo komponenti (šī komponente ir pastāvīga visā loka garumā).



512. zīm.

Tomēr parasti koordinātu sākumu ņem punktā O, kas atrodas par attālumu a zemāk par punktu A, tad dabūjam vienkāršāku vienādojumu

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right) \tag{2}$$

jeb, lietojot hiperbolisko funkciju (403. §) apzīmējumus,

$$\frac{y}{a}=\mathrm{ch}\frac{x}{a}. \tag{2a}$$

Tādējādi ķēdes līnija ir funkcijas $\mathrm{ch}\, x$ grafika (ja nogriezni a pieņem par mērvienību).

Abscisu asi $X'X$, t. i., taisni, kura ir paralēla pieskarei virsotnē A un atrodas par attālumu a zemāk par šo pieskari, sauc par ķēdes līnijas *direktrisi*.

3. Ķ ē d e s l ī n i j a u n t r a k t r i s e. Ķēdes līnija (512. zīmējumā LAN) ir evolūta traktrisei UAV, kuras aug-

stums ir vienāds ar ķēdes līnijas parametru a. Traktrise UAV ir tā ķēdes līnijas evolvente, kurai sākuma punkts ir ķēdes līnijas virsotne A. Citādi sakot, pieskares MT nogriežņa MM' garums no pieskaršanās punkta M līdz krusttošanās punktam M' ar traktrisi UAV ir vienāds ar ķēdes līnijas loka MA garumu.

4. Konstrukcija. Lai konstruētu ķēdes līniju ar doto parametru a, vispirms atrodam virkni punktu traktrisei ar augstumu a (516. § 5. p.). Reizē savienojam arī katru tādu punktu M' (512. zīm.) ar atbilstošās pusaploces centru P. Taisne $M'P$ ir traktrises pieskare. Tālāk novelkam traktrises normāli $M'M$ ($MM' \perp M'P$) līdz tā krustojas punktā M ar perpendikulu PM, kas punktā P novilkts pret vadītāju $X'X$. Punkts M (traktrises liekuma centrs) pieder meklētajai ķēdes līnijai LAN.

Piezīme. Traktrises normāle $M'M$ ir tās evolūtas LAN pieskare (346. § 1. p.). Šī īpašība atvieglina gludas līnijas novilkšanu caur konstruēto punktu M virkni. Reizē tā ļauj kontrolēt konstrukcijas precizitāti.

5. Loka garums. Ķēdes līnijas loka $\breve{AM}$ garums s, kuru skaita no virsotnes A, ir vienāds ar ordinātes PM projekciju MM' uz pieskares MT, un to izsaka ar formulu

$$s=\breve{AM}=MM'=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right) \tag{3}$$

jeb

$$s=a\operatorname{sh}\frac{x}{a}. \tag{3a}$$

Ar ordināti $PM=y$ loku s saista sakarība

$$s^2+a^2=y^2. \tag{4}$$

Šī sakarība izriet no (2) un (3) un to viegli var nolasīt no trijstūriem $PM'M$, kur $PM=y$, $MM'=s$ un $PM'=a$ (saskaņā ar traktrises pamatīpašību).

6. Ordinātes projekcija uz normāli. Ķēdes līnijas ordinātes MP projekcijai MH uz normāli MD ir pastāvīgs garums a, t. i.,

$$HM=OA=a. \tag{5}$$

Šo sakarību var nolasīt no taisnstūra $MM'PH$, kur $MH = M'P = a$ (saskaņā ar traktrises pamatīpašību).

7. Liekuma rādiuss. Ķēdes līnijas liekuma rādiuss $MK = R$ ir vienāds ar normāles nogriezni MD no punkta M līdz direktrisei $X'X$, un to izsaka ar formulu

$$R = MD = \frac{a}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 \tag{6}$$

jeb

$$R = a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}. \tag{6a}$$

8. Liekuma centra konstrukcija; ķēdes līnijas evolūta. Lai konstruētu liekuma centru ķēdes līnijai dotajā tās punktā M, turpinām normāli MD aiz punkta M un atliekam nogriezni $MK = MD$. Punkts K ir meklētais liekuma centrs. Tādā veidā pēc punktiem var konstruēt arī līniju $K'BK$, ko apraksta liekuma centrs, t. i., ķēdes līnijas evolūtu. Tās parametriskie vienādojumi ir

$$\left.\begin{aligned} x_K &= a\left[\operatorname{ch}\frac{x}{a}\operatorname{sh}\frac{x}{a} + \ln\left(\operatorname{ch}\frac{x}{a} - \operatorname{sh}\frac{x}{a}\right)\right], \\ y_K &= 2a \operatorname{ch}\frac{x}{a}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Punkts B (liekuma centrs virsotnei A) ir evolūtas (7) atgriešanās punkts.

9. Ķēdes līnijas naturālais vienādojums ir

$$R = \frac{s^2}{a} + a. \tag{8}$$

To dabū no (3a) un (6a), izslēdzot x. Kinemātikas valodā vienādojums (8) izsaka sekojošo: ja ķēdes līnija rit bez slīdes pa taisni, tad pieskaršanās punkta liekuma centrs apraksta parabolu; šīs parabolas ass ir vertikāla; virsotne atrodas punktā B; parabolas parametrs ir vienāds ar ķēdes līnijas pusparametru $\frac{a}{2}$.

10. L a u k u m s S «līklīnijas trapecei» $OAMP$ ($OA=a$ ir virsotnes ordināte, PM loka $\breve{AM}=s$ gala M ordināte) ir vienāds ar tāda taisnstūra laukumu, kura malas ir a un s, t. i.,

$$S=as=a^2 \operatorname{sh}^2\frac{x}{a}. \tag{9}$$

11. V ē s t u r i s k a s z i ņ a s. Ja ķēdes piestiprināšanas punkti atrodas vienādā augstumā un ķēde ir tikai nedaudz garāka par attālumu starp piestiprināšanas punktiem, tad izlieces loks liekas identisks ar parabolas loku. Ilgu laiku tā arī domāja. Galileja pētījumi mehānikas nozarē radīja šaubas par šī uzskata pareizību, bet pašam Galilejam neizdevās ne apstiprināt to, ne apgāzt. 1669. gadā Jungiuss konstatēja tiklab teorētiski, kā arī eksperimentāli, ka ķēdes izlieces līnija nav parabola. Bet matemātikai šai laikā nebija nepieciešamo līdzekļu, lai atrastu šīs līnijas patieso formu. Drīz pēc tam, kad Ņūtons un Leibnics izstrādāja bezgalīgi mazo lielumu analīzes metodes, kļuva iespējams arī atrisināt uzdevumu par ķēdes izlieces līniju. Šo uzdevumu 1690. gadā formulēja Jakobs Bernulli un tūlīt atrisināja viņa brālis Johans Bernulli, Heigenss un Leibnics.

Jakobs Bernulli formulēja vēl citu uzdevumu: neievērojot buru svaru, atrast profila līniju burām, kuras piepūš vējš. Pašam Jakobam Bernulli izdevās tikai sastādīt diferenciālvienādojumu. Johans Bernulli atrisināja to. Izrādījās, ka meklētais profils ir ķēdes līnija.

1744. gadā Eilers formulēja un atrisināja tādu uzdevumu: plaknē dota taisne AB un divi punkti C, D (kas neatrodas uz taisnes AB). Novilkt caur A un B tādu līniju, lai virsmai, ko šī līnija izveido, rotējot ap asi AB, būtu vismazākais laukums. Izrādījās, ka šī līkne arī ir ķēdes līnija (taisne AB ir tās direktrise).

Ķēdes līnijas rotācijas virsmai ap tās direktrisi (*katenoīdam*[1]) piemīt vēl vispārīgāka īpašība, proti, *jebkura* tā gabala laukums ir mazāks nekā jebkurai citai virsmai, ko ierobežo tā pati kontūra. Šo katenoīda īpašību 1776. gadā atrada ievērojamais franču matemātiķis, inženieris un karavadonis Ž. Meņjē. Tā pati īpašība piemīt veselai virsmu kla-

[1] No latīņu vārda «catena» — ķēde.

sei (tā sauktajām *minimālajām* virsmām [1]). Bet rotācijas virsmu vidū katenoīds ir vienīgā šīs klases virsma.

Ķēdes līnijas nozīmi tehnikā nosaka, starp citu, tas, ka arkai, kurai ir ķēdes līnijas forma, pašas arkas svars nedarbojas uz arkas izlieci.

[1] Menjē norādīja vēl vienu minimālo virsmu — *helikoīdu* (tā izveidojas ar horizontālas taisnes, kas krusto vertikālu asi, skrūves kustību).

TABULAS

I. Naturālie logaritmi [1]

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	0,0000	0,0100	0,0198	0,0296	0,0392	0,0488	0,0583	0,0677	0,0770	0,0862
1,1	0,0953	0,1044	0,1133	0,1222	0,1310	0,1398	0,1484	0,1570	0,1655	0,1740
1,2	0,1823	0,1906	0,1989	0,2070	0,2151	0,2231	0,2311	0,2390	0,2469	0,2546
1,3	0,2624	0,2700	0,2776	0,2852	0,2927	0,3001	0,3075	0,3148	0,3221	0,3293
1,4	0,3365	0,3436	0,3507	0,3577	0,3646	0,3716	0,3784	0,3853	0,3920	0,3988
1,5	0,4055	0,4121	0,4187	0,4253	0,4318	0,4383	0,4447	0,4511	0,4574	0,4637
1,6	0,4700	0,4762	0,4824	0,4886	0,4947	0,5008	0,5068	0,5128	0,5188	0,5247
1,7	0,5306	0,5365	0,5423	0,5481	0,5539	0,5596	0,5653	0,5710	0,5766	0,5822
1,8	0,5878	0,5933	0,5988	0,6043	0,6098	0,6152	0,6206	0,6259	0,6313	0,6366
1,9	0,6419	0,6471	0,6523	0,6575	0,6627	0,6678	0,6729	0,6780	0,6831	0,6881
2,0	0,6931	0,6981	0,7031	0,7080	0,7129	0,7178	0,7227	0,7275	0,7324	0,7372
2,1	0,7419	0,7467	0,7514	0,7561	0,7608	0,7655	0,7701	0,7747	0,7793	0,7839
2,2	0,7885	0,7930	0,7975	0,8020	0,8065	0,8109	0,8154	0,8198	0,8242	0,8286
2,3	0,8329	0,8372	0,8416	0,8459	0,8502	0,8544	0,8587	0,8629	0,8671	0,8713
2,4	0,8755	0,8796	0,8838	0,8879	0,8920	0,8961	0,9002	0,9042	0,9083	0,9123

[1] Naturālo logaritmu skaitlim, kuru tabula nesatur, atrod šādā veidā. Pieņemsim, ka jāatrod ln 753. Dabūjam: $\ln 753 = \ln (7{,}53 \cdot 10^2) = \ln 7{,}53 + 2 \ln 10$. Pirmo saskaitāmo atrodam naturālo logaritmu tabulā, otro — III tabulā. Dabūjam $\ln 753 = 2.0189 + 4.6052 = 6.6241$.

Tādā pašā veidā atrodam $\ln 0{,}00753 = \ln (7{,}53 \cdot 10^{-3}) = 2{,}0189 - 6{,}9078 = -4{,}8889$.

Turpinājums

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,5	0,9163	0,9203	0,9243	0,9282	0,9322	0,9361	0,9400	0,9439	0,9478	0,9517
2,6	0,9555	0,9594	0,9632	0,9670	0,9708	0,9746	0,9783	0,9821	0,9858	0,9895
2,7	0,9933	0,9969	1,0006	1,0043	1,0080	1,0116	1,0152	1,0188	1,0225	1,0260
2,8	1,0296	1,0332	1,0367	1,0403	1,0438	1,0473	1,0508	1,0543	1,0578	1,0613
2,9	1,0647	1,0682	1,0716	1,0750	1,0784	1,0818	1,0852	1,0886	1,0919	1,0953
3,0	1,0986	1,1019	1,1053	1,1086	1,1119	1,1151	1,1184	1,1217	1,1249	1,1282
3,1	1,1314	1,1346	1,1378	1,1410	1,1442	1,1474	1,1506	1,1537	1,1569	1,1600
3,2	1,1632	1,1663	1,1694	1,1725	1,1756	1,1787	1,1817	1,1848	1,1878	1,1909
3,3	1,1939	1,1969	1,2000	1,2030	1,2060	1,2090	1,2119	1,2149	1,2179	1,2208
3,4	1,2238	1,2267	1,2296	1,2326	1,2355	1,2384	1,2413	1,2442	1,2470	1,2499
3,5	1,2528	1,2556	1,2585	1,2613	1,2641	1,2669	1,2698	1,2726	1,2754	1,2782
3,6	1,2809	1,2837	1,2865	1,2892	1,2920	1,2947	1,2975	1,3002	1,3029	1,3056
3,7	1,3083	1,3110	1,3137	1,3164	1,3191	1,3218	1,3244	1,3271	1,3297	1,3324
3,8	1,3350	1,3376	1,3403	1,3429	1,3455	1,3481	1,3507	1,3533	1,3558	1,3584
3,9	1,3610	1,3635	1,3661	1,3686	1,3712	1,3737	1,3762	1,3788	1,3813	1,3838
4,0	1,3863	1,3888	1,3913	1,3938	1,3962	1,3987	1,4012	1,4036	1,4061	1,4085
4.1	1,4110	1,4134	1,4159	1,4183	1,4207	1,4231	1,4255	1,4279	1,4303	1,4327
4,2	1,4351	1,4375	1,4398	1,4422	1,4446	1,4469	1,4493	1,4516	1,4540	1,4563
4,3	1,4586	1,4609	1,4633	1,4656	1,4679	1,4702	1,4725	1,4748	1,4770	1,4793
4,4	1,4816	1,4839	1,4861	1,4884	1,4907	1,4929	1,4951	1,4974	1,4996	1,5019
4,5	1,5041	1,5063	1,5085	1,5107	1,5129	1,5151	1,5173	1,5195	1,5217	1,5239
4,6	1,5261	1,5282	1,5304	1,5326	1,5347	1,5369	1,5390	1,5412	1,5433	1,5454
4,7	1,5476	1,5497	1,5518	1,5539	1,5560	1,5581	1,5602	1,5623	1,5644	1,5665
4,8	1,5686	1,5707	1,5728	1,5748	1,5769	1,5790	1,5810	1,5831	1,5851	1,5872
4,9	1,5892	1,5913	1,5933	1,5953	1,5974	1,5994	1,6014	1,6034	1,6054	1,6074

Turpinājums

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,0	1,6094	1,6114	1,6134	1,6154	1,6174	1,6194	1,6214	1,6233	1,6253	1,6273
5,1	1,6292	1,6312	1,6332	1,6351	1,6371	1,6390	1,6409	1,6429	1,6448	1,6467
5,2	1,6487	1,6506	1,6525	1,6544	1,6563	1,6582	1,6601	1,6620	1,6639	1,6658
5,3	1,6677	1,6696	1,6715	1,6734	1,6752	1,6771	1,6790	1,6808	1,6827	1,6845
5,4	1,6864	1,6882	1,6901	1,6919	1,6938	1,6956	1,6974	1,6993	1,7011	1,7029
5,5	1,7047	1,7066	1,7084	1,7102	1,7120	1,7138	1,7156	1,7174	1,7192	1,7210
5,6	1,7228	1,7246	1,7263	1,7281	1,7299	1,7317	1,7334	1,7352	1,7370	1,7387
5,7	1,7405	1,7422	1,7440	1,7457	1,7475	1,7492	1,7509	1,7527	1,7544	1,7561
5,8	1,7579	1,7596	1,7613	1,7630	1,7647	1,7664	1,7681	1,7699	1,7716	1,7733
5,9	1,7750	1,7766	1,7783	1,7800	1,7817	1,7834	1,7851	1,7867	1,7884	1,7901
6,0	1,7918	1,7934	1,7951	1,7967	1,7984	1,8001	1,8017	1,8034	1,8050	1,8066
6,1	1,8083	1,8099	1,8116	1,8132	1,8148	1,8165	1,8181	1,8197	1,8213	1,8229
6,2	1,8245	1,8262	1,8278	1,8294	1,8310	1,8326	1,8342	1,8358	1,8374	1,8390
6,3	1,8405	1,8421	1,8437	1,8453	1,8469	1,8485	1,8500	1,8516	1,8532	1,8547
6,4	1,8563	1,8579	1,8594	1,8610	1,8625	1,8641	1,8656	1,8672	1,8687	1,8703
6,5	1,8718	1,8733	1,8749	1,8764	1,8779	1,8795	1,8810	1,8825	1,8840	1,8856
6,6	1,8871	1,8886	1,8901	1,8916	1,8931	1,8946	1,8961	1,8976	1,8991	1,9006
6,7	1,9021	1,9036	1,9051	1,9066	1,9081	1,9095	1,9110	1,9125	1,9140	1,9155
6,8	1,9169	1,9184	1,9199	1,9213	1,9228	1,9242	1,9257	1,9272	1,9286	1,9301
6,9	1,9315	1,9330	1,9344	1,9359	1,9373	1,9387	1,9402	1,9416	1,9430	1,9445
7,0	1,9459	1,9473	1,9488	1,9502	1,9516	1,9530	1,9544	1,9559	1,9573	1,9587
7,1	1,9601	1,9615	1,9629	1,9643	1,9657	1,9671	1,9685	1,9699	1,9713	1,9727
7,2	1,9741	1,9755	1,9769	1,9782	1,9796	1,9810	1,9824	1,9838	1,9851	1,9865
7,3	1,9879	1,9892	1,9906	1,9920	1,9933	1,9947	1,9961	1,9974	1,9988	2,0001
7,4	2,0015	2,0028	2,0042	2,0055	2,0069	2,0082	2,0096	2,0109	2,0122	2,0136

Turpinājums

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7,5	2,0149	2,0162	2,0176	2,0189	2,0202	2,0215	2,0229	2,0242	2,0255	2,0268
7,6	2,0281	2,0295	2,0308	2,0321	2,0334	2,0347	2,0360	2,0373	2,0386	2,0399
7,7	2,0412	2,0425	2,0438	2,0451	2,0464	2,0477	2,0490	2,0503	2,0516	2,0528
7,8	2,0541	2,0554	2,0567	2,0580	2,0592	2,0605	2,0618	2,0631	2,0643	2,0656
7,9	2,0669	2,0681	2,0694	2,0707	2,0719	2,0732	2,0744	2,0757	2,0769	2,0782
8,0	2,0794	2,0807	2,0819	2,0832	2,0844	2,0857	2,0869	2,0882	2,0894	2,0906
8,1	2,0919	2,0931	2,0943	2,0956	2,0968	2,0980	2,0992	2,1005	2,1017	2,1029
8,2	2,1041	2,1054	2,1066	2,1078	2,1090	2,1102	2,1114	2,1126	2,1138	2,1150
8,3	2,1163	2,1175	2,1187	2,1199	2,1211	2,1223	2,1235	2,1247	2,1258	2,1270
8,4	2,1282	2,1294	2,1306	2,1318	2,1330	2,1342	2,1353	2,1365	2,1377	2,1389
8,5	2,1401	2,1412	2,1424	2,1436	2,1448	2,1459	2,1471	2,1483	2,1494	2,1506
8,6	2,1518	2,1529	2,1541	2,1552	2,1564	2,1576	2,1587	2,1599	2,1610	2,1622
8,7	2,1633	2,1645	2,1656	2,1668	2,1679	2,1691	2,1702	2,1713	2,1725	2,1736
8,8	2,1748	2,1759	2,1770	2,1782	2,1793	2,1804	2,1815	2,1827	2,1838	2,1849
8,9	2,1861	2,1872	2,1883	2,1894	2,1905	2,1917	2,1928	2,1939	2,1950	2,1961
9,0	2,1972	2,1983	2,1994	2,2006	2,2017	2,2028	2,2039	2,2050	2,2061	2,2072
9,1	2,2083	2,2094	2,2105	2,2116	2,2127	2,2138	2,2148	2,2159	2,2170	2,2181
9,2	2,2192	2,2203	2,2214	2,2225	2,2235	2,2246	2,2257	2,2268	2,2279	2,2289
9,3	2,2300	2,2311	2,2322	2,2332	2,2343	2,2354	2,2364	2,2375	2,2386	2,2396
9,4	2,2407	2,2418	2,2428	2,2439	2,2450	2,2460	2,2471	2,2481	2,2492	2,2502
9,5	2,2513	2,2523	2,2534	2,2544	2,2555	2,2565	2,2576	2,2586	2,2597	2,2607
9,6	2,2618	2,2628	2,2638	2,2649	2,2659	2,2670	2,2680	2,2690	2,2701	2,2711
9,7	2,2721	2,2732	2,2742	2,2752	2,2762	2,2773	2,2783	2,2793	2,2803	2,2814
9,8	2,2824	2,2834	2,2844	2,2854	2,2865	2,2875	2,2885	2,2895	2,2905	2,2915
9,9	2,2925	2,2935	2,2946	2,2956	2,2966	2,2976	2,2986	2,2996	2,3006	2,3016

II. Tabula pārejai no naturālajiem logaritmiem uz decimāllogaritmiem (reizināšanas tabula ar $M = \log e = 0,4342945\ldots$)

	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
0	0,0000	4,3430	8,6859	13,0288	17,3718	21,7147	26,0577	30,4006	34,7436	39,0865
1	0,4343	4,7772	9,1202	13,4631	17,8061	22,1490	26,4920	30,8349	35,1779	39,5208
2	0,8686	5,2115	9,5545	13,8974	18,2404	22,5833	26,9263	31,2692	35,6122	39,9551
3	1,3029	5,6458	9,9888	14,3317	18,6747	23,0176	27,3606	31,7035	36,0464	40,3894
4	1,7372	6,0801	10,4231	14,7660	19,1090	23,4519	27,7948	32,1378	36,4807	40,8237
5	2,1715	6,5144	10,8574	15,2003	19,5433	23,8862	28,2291	32,5721	36,9150	41,2580
6	2,6058	6,9487	11,2917	15,6346	19,9775	24,3205	28,6634	33,0064	37,3493	41,6923
7	3,0401	7,3830	11,7260	16,0689	20,4118	24,7548	29,0977	33,4407	37,7836	42,1266
8	3,4744	7,8173	12,1602	16,5032	20,8461	25,1891	29,5320	33,8750	38,2179	42,5609
9	3,9086	8,2516	12,5945	16,9375	21,2804	25,6234	29,9663	34,3093	38,6522	42,9952

III. Tabula pārejai no decimāllogaritmiem uz naturālajiem logaritmiem (reizināšanas tabula ar $\frac{1}{M} = \ln 10 = 2,302585\ldots$)

	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
0	0,0000	23,026	46,052	69,078	92,103	115,129	138,155	161,181	184,207	207,233
1	2,3026	25,328	48,354	71,380	94,406	117,431	140,458	163,484	186,509	209,535
2	4,6052	27,631	50,657	73,683	96,709	119,734	142,760	165,786	188,812	211,838
3	6,9078	29,934	52,959	75,985	99,011	122,037	145,062	166,089	191,115	214,140
4	9,2103	32,236	55,262	78,288	101,314	124,340	147,365	170,391	193,417	216,443
5	11,513	34,539	57,565	80,590	103,616	126,642	149,668	172,694	195,720	218,746
6	13,816	36,841	59,867	82,893	105,919	128,945	151,971	174,997	198,022	221,048
7	16,118	39,144	62,170	85,196	108,221	131,247	154,273	177,299	200,325	223,351
8	18,421	41,447	64,472	87,498	110,524	133,550	156,576	179,602	202,627	225,653
9	20,723	43,749	66,775	89,801	112,827	135,853	158,878	181,904	204,930	227,956

IV. Eksponentfunkcija e^x (naturālie antilogaritmi)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	1,0000	1,0101	1,0202	1,0305	1,0408	1,0513	1,0618	1,0725	1,0833	1,0942
0,1	1,1052	1,1163	1,1275	1,1388	1,1503	1,1618	1,1735	1,1853	1,1972	1,2092
0,2	1,2214	1,2337	1,2461	1,2586	1,2712	1,2840	1,2969	1,3100	1,3231	1,3364
0,3	1,3499	1,3634	1,3771	1,3910	1,4049	1,4191	1,4333	1,4477	1,4623	1,4770
0,4	1,4918	1,5068	1,5220	1,5373	1,5527	1,5683	1,5841	1,6000	1,6161	1,6323
0,5	1,6487	1,6653	1,6820	1,6989	1,7160	1,7333	1,7507	1,7683	1,7860	1,8040
0,6	1,8221	1,8404	1,8589	1,8776	1,8965	1,9155	1,9348	1,9542	1,9739	1,9937
0,7	2,0138	2,0340	2,0544	2,0751	2,0959	2,1170	2,1383	2,1598	2,1815	2,2034
0,8	2,2255	2,2479	2,2705	2,2933	2,3164	2,3396	2,3632	2,3869	2,4109	2,4351
0,9	2,4596	2,4843	2,5093	2,5345	2,5600	2,5857	2,6117	2,6379	2,6645	2,6912
1,0	2,7183	2,7456	2,7732	2,8011	2,8292	2,8577	2,8864	2,9154	2,9447	2,9743
1,1	3,0042	3,0344	3,0649	3,0957	3,1268	3,1582	3,1899	3,2220	3,2544	3,2871
1,2	3,3201	3,3535	3,3872	3,4212	3,4556	3,4903	3,5254	3,5609	3,5966	3,6328
1,3	3,6693	3,7062	3,7434	3,7810	3,8190	3,8574	3,8962	3,9354	3,9749	4,0149
1,4	4,0552	4,0960	4,1371	4,1787	4,2207	4,2631	4,3060	4,3492	4,3929	4,4371
1,5	4,4817	4,5267	4,5722	4,6182	4,6646	4,7115	4,7588	4,8066	4,8550	4,9037
1,6	4,9530	5,0028	5,0531	5,1039	5,1552	5,2070	5,2593	5,3122	5,3656	5,4195
1,7	5,4739	5,5290	5,5845	5,6407	5,6973	5,7546	5,8124	5,8709	5,9299	5,9895
1,8	6,0496	6,1104	6,1719	6,2339	6,2965	6,3598	6,4237	6,4883	6,5535	6,6194
1,9	6,6859	6,7531	6,8210	6,8895	6,9588	7,0287	7,0993	7,1707	7,2427	7,3155

Turpinājums

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,0	7,3891	7,4633	7,5383	7,6141	7,6906	7,7679	7,8460	7,9248	8,0045	8,0849
2,1	8,1662	8,2482	8,3311	8,4149	8,4994	8,5849	8,6711	8,7583	8.8463	8,9352
2,2	9,0250	9,1157	9,2073	9,2999	9,3933	9,4877	9,5831	9,6794	9,7767	9,8749
2,3	9,9742	10,074	10,176	10,278	10,381	10,486	10,591	10,697	10,805	10,913
2,4	11,023	11,134	11,246	11,359	11,473	11,588	11,705	11,822	11,941	12,061
2,5	12,182	12,305	12,429	12,554	12,680	12,807	12,936	13,066	13,197	13,330
2,6	13,464	13,599	13,736	13,874	14,013	14,154	14,296	14,440	14,585	14,732
2,7	14,880	15,029	15,180	15,333	15,487	15,643	15,800	15,959	16,119	16,281
2,8	16,445	16,610	16,777	16,945	17,116	17,288	17,462	17,637	17,814	17,993
2,9	18,174	18,357	18,541	18,728	18,916	19,106	19,298	19,492	19,688	19,886
3,0	20,086	20,287	20,491	20,697	20,905	21,115	21,328	21,542	21,758	21,977
3,1	22,198	22,421	22,646	22,874	23,104	23,336	23,571	23,807	24,047	24,288
3,2	24,533	24,779	25,028	25,280	25,534	25,790	26,050	26,311	26,576	26,843
3,3	27,113	27,385	27,660	27,938	28,219	28,503	28,789	29,079	29,371	29,666
3,4	29,964	30,265	30,569	30,877	31,187	31,500	31,817	32,137	32,460	32,786
3,5	33,115	33,448	33,784	34,124	34,467	34,813	35,163	35,517	35,874	36,234
3,6	36,598	36,966	37,338	37,713	38,092	38,475	38,861	39,252	39,646	40,045
3,7	40,447	40,854	41,264	41,679	42,098	42,521	42,948	43,380	43,816	44,256
3,8	44,701	45,150	45,604	46,063	46,525	46,993	47,465	47,942	48,424	48,911
3,9	49,402	49,899	50,400	50,907	51,419	51,935	52,457	52,985	53,517	54,055

V. Nenoteikto integrāļu tabula

1. Funkcijas, kas satur $a+bx$ veselā pakāpē

1) $\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \ln(a+bx) + C.$

2) $\int (a+bx)^n \, dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)} + C, \quad n \neq -1.$

3) $\int \frac{x\,dx}{a+bx} = \frac{1}{b^2}[a+bx-a\ln(a+bx)]+C.$

4) $\int \frac{x^2\,dx}{a+bx} = \frac{1}{b^3}\left[\frac{1}{2}(a+bx)^2 - 2a(a+bx) + \right.$

$$\left. + a^2 \ln(a+bx)\right] + C.$$

5) $\int \frac{dx}{x(a+bx)} = -\frac{1}{a} \ln \frac{a+bx}{x} + C.$

6) $\int \frac{dx}{x^2(a+bx)} = -\frac{1}{ax} + \frac{b}{a^2} \ln \frac{a+bx}{x} + C.$

7) $\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^2}\left[\ln(a+bx) + \frac{a}{a+bx}\right] + C.$

8) $\int \frac{x^2\,dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^3}\left[a+bx-2a\ln(a+bx) - \frac{a^2}{a+bx}\right] + C.$

9) $\int \frac{dx}{x(a+bx)^2} = \frac{1}{a(a+bx)} - \frac{1}{a^2} \ln \frac{a+bx}{x} + C.$

10) $\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^3} = \frac{1}{b^2}\left[-\frac{1}{a+bx} + \frac{a}{2(a+bx)^2}\right] + C.$

2. Funkcijas, kas satur a^2+x^2, a^2-x^2, $a+bx^2$

11) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$

12) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$

13) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} + C.$

jeb

14) $\int \frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\frac{x+a}{x-a}+C.$

15) $\int \frac{dx}{a+bx^2}=\frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg} x\sqrt{\frac{b}{a}}+C$, ja $a>0$ un $b>0$.

Ja a un b ir negatīvi, tad zīmi $(-)$ iznes pirms integrāļa zīmes, bet, ja a un b zīmes ir dažādas, tad lieto formulu (16).

16) $\int \frac{dx}{a-bx^2}=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}+C.$

17) $\int \frac{x\,dx}{a+bx^2}=\frac{1}{2b}\ln\left(x^2+\frac{a}{b}\right)+C.$

18) $\int \frac{x^2\,dx}{a+bx^2}=\frac{x}{b}-\frac{a}{b}\int\frac{dx}{a+bx^2},$

tālāk sk. formulu (15) vai (16).

19) $\int \frac{dx}{x(a+bx^2)}=\frac{1}{2a}\ln\frac{x^2}{a+bx^2}+C.$

20) $\int \frac{dx}{x^2(a+bx^2)}=-\frac{1}{ax}-\frac{b}{a}\int\frac{dx}{a+bx^2}.$

tālāk sk. formulu (15) vai (16).

21) $\int \frac{dx}{(a+bx^2)^2}=\frac{x}{2a(a+bx^2)}+\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{a+bx^2},$

tālāk sk. formulu (15) vai (16).

3. Funkcijas, kas satur $\sqrt{a+bx}$

22) $\int \sqrt{a+bx}\,dx=\frac{2}{3b}\sqrt{(a+bx)^3}+C.$

23) $\int x\sqrt{a+bx}\,dx=-\frac{2(2a-3bx)\sqrt{(a+bx)^3}}{15b^2}+C.$

24) $\int x^2\sqrt{a+bx}\,dx=\frac{2(8a^2-12abx+15b^2x^2)\sqrt{(a+bx)^3}}{105b^3}+C.$

25) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx}}=-\frac{2(2a-bx)}{3b^2}\sqrt{a+bx}+C.$

26) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2(8a^2-4abx+3b^2x^2)}{15b^3}\sqrt{a+bx}+C.$

27) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}} + C$, ja $a>0$.

28) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{\sqrt{-a}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a+bx}{-a}} + C$, ja $a<0$.

29) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx}} = \frac{-\sqrt{a+bx}}{ax} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}$,

tālāk sk. formulu (27) vai (28).

30) $\int \frac{\sqrt{a+bx}\,dx}{x} = 2\sqrt{a+bx} + a\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}$,

tālāk sk. formulu (27) vai (28).

4. Funkcijas, kas satur $\sqrt{x^2+a^2}$

31) $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C.$

32) $\int \sqrt{(x^2+a^2)^3}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2+5a^2)\sqrt{x^2+a^2} +$

$$+\frac{3a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C.$$

33) $\int x\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}{3} + C.$

34) $\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\,dx =$

$$= \frac{x}{8}(2x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C.$$

35) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C.$

36) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C.$

37) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2} + C.$

38) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C.$

39) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}=-\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}+\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C.$

40) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{a}\ln\frac{x}{a+\sqrt{x^2+a^2}}+C.$

41) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}=-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}+C.$

42) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+a^2}}=-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{2a^2x^2}+\frac{1}{2a^3}\ln\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}+C.$

43) $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}\,dx}{x}=\sqrt{x^2+a^2}-a\ln\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}+C.$

44) $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}\,dx}{x^2}=-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}+\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C.$

5. Funkcijas, kas satur $\sqrt{a^2-x^2}$

45) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C.$

46) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C.$

47) $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}+C.$

48) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\sqrt{a^2-x^2}+C.$

49) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}+C.$

50) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$

51) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$

52) $\int \sqrt{(a^2-x^2)^3}\,dx = \frac{x}{8}(5a^2-2x^2)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{3a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}+C.$

53) $\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{3}+C.$

54) $\int x\sqrt{(a^2-x^2)^3}\,dx = -\frac{\sqrt{(a^2-x^2)^5}}{5}+C.$

55) $\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}+C$

56) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}-\arcsin\frac{x}{a}+C.$

57) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\ln\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}+C.$

58) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}+C.$

59) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2a^2x^2}+\frac{1}{2a^3}\ln\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}+C.$

60) $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2-x^2}-a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}+C.$

61) $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{a}+C.$

6. Funkcijas, kas satur $\sqrt{x^2-a^2}$

62) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C.$

63) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}+C.$

64) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \sqrt{x^2-a^2}+C.$

65) $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C.$

66) $\int\sqrt{(x^2-a^2)^3}\,dx=\frac{x}{8}(2x^2-5a^2)\sqrt{x^2-a^2}+$
$$+\frac{3a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C.$$

67) $\int x\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}{3}+C.$

68) $\int x\sqrt{(x^2-a^2)^3}\,dx=\frac{\sqrt{(x^2-a^2)^5}}{5}+C.$

69) $\int x^2\sqrt{x^2-a^2}\,dx=$
$$=\frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C.$$

70) $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}+\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C.$

71) $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}=-\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}+\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C.$

72) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\operatorname{arcsc}x+C.$

73) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{a}\operatorname{arcsc}\frac{x}{a}+C.$

74) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x}+C.$

75) $\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2a^2x^2}+\frac{1}{2a^3}\operatorname{arcsc}\frac{x}{a}+C.$

76) $\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}\,dx}{x}=\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{x}+C.$

77) $\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}\,dx}{x^2}=-\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}+\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C.$

7. Funkcijas, kas satur $\sqrt{2ax-x^2}$, $\sqrt{2ax+x^2}$

Funkciju, kas satur $\sqrt{2ax-x^2}$, integrē ar substitūciju $t=x-a$. Tad $\sqrt{2ax-x^2}$ iegūst izskatu $\sqrt{a^2-t^2}$ un integrāli atrod šīs tabulas 5. grupā. Ja tā tabulā nav, tad to reducē tādā veidā, kas ir tabulā.

Gluži to pašu var teikt par funkciju, kas satur izteiksmi $\sqrt{2ax+x^2}$. Šai gadījumā substitūcija $t=x+a$ radikālu reducē veidā $\sqrt{t^2-a^2}$ (šīs tabulas 6. grupa).

8. Funkcijas, kas satur $a+bx+cx^2$ $(c>0)$

78) $$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2}=\begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arctg} \dfrac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+C, & \text{ja } b^2<4ac. \\ \dfrac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \ln \dfrac{2cx+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2cx+b+\sqrt{b^2-4ac}}+C, & \text{ja } b^2>4ac. \end{cases}$$

79) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}} \ln (2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2})+C.$$

80) $$\int \sqrt{a+bx+cx^2}\, dx=\frac{2cx+b}{4c}\sqrt{a+bx+cx^2}-$$
$$-\frac{b^2-4ac}{8\sqrt{c^3}} \ln (2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2})+C.$$

81) $$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{c}-$$
$$-\frac{b}{2\sqrt{c^3}} \ln (2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2})+C.$$

9. Funkcijas, kas satur $a+bx-cx^2$ $(c>0)$

82) $$\int \frac{dx}{a+bx-cx^2}=\frac{1}{\sqrt{b^2+4ac}} \ln \frac{\sqrt{b^2+4ac}+2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}-2cx+b}+C.$$

83) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}} \arcsin \frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C.$$

84) $$\int \sqrt{a+bx-cx^2}\, dx=\frac{2cx-b}{4c}\sqrt{a+bx-cx^2}+$$
$$+\frac{b^2+4ac}{8\sqrt{c^3}} \arcsin \frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C.$$

85) $$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}}=$$
$$=-\frac{\sqrt{a+bx-cx^2}}{c}+\frac{b}{2\sqrt{c^3}}\arcsin\frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C.$$

10. Citas algebriskas funkcijas

86) $$\int\sqrt{\frac{a+x}{b+x}}\,dx=\sqrt{(a+x)(b+x)}+$$
$$+(a-b)\ln(\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x})+C.$$

87) $$\int\sqrt{\frac{a-x}{b+x}}\,dx=$$
$$=\sqrt{(a-x)(b+x)}+(a+b)\arcsin\sqrt{\frac{x+b}{a+b}}+C.$$

88) $$\int\sqrt{\frac{a+x}{b-x}}\,dx=$$
$$=-\sqrt{(a+x)(b-x)}-(a+b)\arcsin\sqrt{\frac{b-x}{a+b}}+C.$$

89) $$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx=-\sqrt{1-x^2}+\arcsin x+C.$$

90) $$\int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C.$$

11. Eksponentfunkcijas un trigonometriskās funkcijas

91) $\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C.$ 92) $\int e^x\,dx=e^x+C.$

93) $\int e^{ax}\,dx=\frac{e^{ax}}{a}+C.$ 94) $\int \sin x\,dx=-\cos x+C.$

95) $\int \cos x\,dx=\sin x+C.$ 96) $\int \mathrm{tg}\,x\,dx=-\ln\cos x+C.$

97) $\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln \sin x + C.$

98) $\int \operatorname{sc} x\, dx = \ln(\operatorname{sc} x + \operatorname{tg} x) + C = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C.$

99) $\int \operatorname{csc} x\, dx = \ln(\operatorname{csc} x - \operatorname{ctg} x) + C = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$

100) $\int \operatorname{sc}^2 x\, dx = \operatorname{tg} x + C.$

101) $\int \operatorname{csc}^2 x\, dx = -\operatorname{ctg} x + C.$

102) $\int \operatorname{sc} x \operatorname{tg} x\, dx = \operatorname{sc} x + C.$

103) $\int \operatorname{csc} x \operatorname{ctg} x\, dx = -\operatorname{csc} x + C.$

104) $\int \sin^2 x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$

105) $\int \cos^2 x\, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$

106) $\int \sin^n x\, dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x\, dx.$

Šo formulu lieto vairākas reizes, kamēr dabū integrāli $\int \sin x\, dx$ vai $\int \sin^2 x\, dx$ (atkarībā no tā, vai n ir pāra, vai nepāra skaitlis), bet šos integrāļus atrod ar formulām (94) vai (104).

107) $\int \cos^n x\, dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\, dx$

(sk. piezīmi iepriekšējam integrālim un formulas (95) un (105)).

108) $\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}.$

Lieto vairākas reizes, kamēr dabū integrāli $\int dx$, ja n ir pāra skaitlis, vai integrāli $\int \frac{dx}{\sin x}$, ja n ir nepāra skaitlis (pēdējo integrāli dod formula (99)).

109) $$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$$

(sk. piezīmi iepriekšējam integrālim un formulu (98)).

110) $$\int \sin x \cos^n x \, dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + C.$$

111) $$\int \sin^n x \cos x \, dx = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + C.$$

112) $$\int \cos^m x \sin^n x \, dx = \frac{\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \cos^{m-2} x \sin^n x \, dx.$$

Šo formulu lieto vairākas reizes, kamēr kosinusa pakāpe kļūst vienāda ar nulli (ja m ir pāra skaitlis) vai vienu (ja m ir nepāra skaitlis). Pirmajā gadījumā sk. formulu (106), otrā — (111). Šo formulu der lietot, ja $m<n$. Ja $m>n$, tad labāk lietot formulu

113) $$\int \cos^m x \sin^n x \, dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \cos^m x \sin^{n-2} x \, dx$$

(sk. piezīmi iepriekšējam integrālim un formulas (107) un (110)).

$$\left.\begin{aligned}
&114)\quad \int \sin mx \sin nx \, dx = -\frac{\sin (m+n) x}{2(m+n)} + \frac{\sin (m-n) x}{2(m-n)} + C.\\
&115)\quad \int \cos mx \cos nx \, dx = \frac{\sin (m+n) x}{2(m+n)} + \frac{\sin (m-n) x}{2(m-n)} + C.\\
&116)\quad \int \sin mx \cos nx \, dx = -\frac{\cos (m+n) x}{2(m+n)} - \frac{\cos (m-n) x}{2(m-n)} + C.
\end{aligned}\right\} \quad (m \neq n)$$

117) $$\int \frac{dx}{a+b\cos x}=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C,$$ ja $a>b$.

118) $$\int \frac{dx}{a+b\cos x}=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\frac{\sqrt{b-a}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a}\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{b+a}}+C,$$ ja $a<b$.

119) $$\int \frac{dx}{a+b\sin x}=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{a\operatorname{tg}\frac{x}{2}+b}{\sqrt{a^2-b^2}}+C,$$ ja $a>b$.

120) $$\int \frac{dx}{a+b\sin x}=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\frac{a\operatorname{tg}\frac{x}{2}+b-\sqrt{b^2-a^2}}{a\operatorname{tg}\frac{x}{2}+b+\sqrt{b^2-a^2}}+C,$$ ja $a<b$.

121) $$\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}=\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{b\operatorname{tg}x}{a}\right)+C.$$

122) $$\int e^x\sin x\,dx=\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}+C.$$

123) $$\int e^{ax}\sin nx\,dx=\frac{e^{ax}(a\sin nx-n\cos nx)}{a^2+n^2}+C.$$

124) $$\int e^x\cos x\,dx=\frac{e^x(\sin x+\cos x)}{2}+C.$$

125) $$\int e^{ax}\cos nx\,dx=\frac{e^{ax}(n\sin nx+a\cos nx)}{a^2+n^2}+C.$$

126) $$\int xe^{ax}\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)+C.$$

127) $$\int x^n e^{ax}\,dx=\frac{x^n e^{ax}}{a}-\frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx.$$

Šo formulu lieto vairākas reizes, kamēr x pakāpe kļūst vienāda ar vienu; tad integrāli atrod ar formulu (126).

128) $$\int xa^{mx}\,dx=\frac{xa^{mx}}{m\ln x}-\frac{a^{mx}}{m(\ln a)^2}+C.$$

129) $\int x^n a^{mx}\,dx = \frac{a^{mx}x^n}{n\ln a} - \frac{n}{m\ln a}\int a^{mx}x^{n-1}\,dx.$

Formulu lieto tik ilgi, kamēr x pakāpe kļūst vienāda ar vienu; tad integrāli atrod ar formulu (128).

130) $\int e^{ax}\cos^n x\,dx = \frac{e^{ax}\cos^{n-1}x(a\cos x + n\sin x)}{a^2+n^2} + $
$$+\frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax}\cos^{n-2}x\,dx.$$

Formulu lieto tik ilgi, kamēr kosinuss izzūd (gadījumā, ja n ir pāra skaitlis) vai arī tā pakāpe kļūst vienāda ar vienu (gadījumā, ja n ir nepāra skaitlis). Pēdējā gadījumā sk. formulu (122).

131) $\int \mathrm{sh}\,x\,dx = \mathrm{ch}\,x + C.$

132) $\int \mathrm{ch}\,x\,dx = \mathrm{sh}\,x + C.$

133) $\int \mathrm{th}\,x\,dx = \ln \mathrm{ch}\,x + C.$

134) $\int \mathrm{cth}\,x\,dx = \ln \mathrm{sh}\,x + C.$

135) $\int \mathrm{sch}\,x\,dx = 2\,\mathrm{arctg}\,e^x + C.$

136) $\int \mathrm{csch}\,x\,dx = \ln \mathrm{th}\frac{x}{2} + C.$

137) $\int \mathrm{sch}^2 x\,dx = \mathrm{th}\,x + C.$

138) $\int \mathrm{csch}^2 x\,dx = -\mathrm{cth}\,x + C.$

139) $\int \mathrm{sch}\,x\,\mathrm{th}\,x\,dx = \mathrm{sch}\,x + C.$

140) $\int \mathrm{csch}\,x\,\mathrm{cth}\,x\,dx = -\mathrm{csch}\,x + C.$

141) $\int \mathrm{sh}^2 x\,dx = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\,\mathrm{sh}\,2x + C.$

142) $\int \mathrm{ch}^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\,\mathrm{sh}^2\,2x + C.$

12. Logaritmiskās funkcijas

Dotās funkcijas satur tikai naturālos logaritmus. Ja jāatrod integrālis no funkcijas, kas satur logaritmus pie citas bāzes, tad iepriekš tas jāpārveido naturālajā logaritmā ar formulu $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ un pēc tam jālieto tabula.

143) $\int \ln x\,dx = x \ln x - x + C.$

144) $\int \frac{dx}{x \ln x} = \ln(\ln x) + C.$

145) $\int x^n \ln x\,dx = x^{n+1}\left[\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] + C.$

146) $\int \ln^n x\,dx = x \ln^n x - n \int \ln^{n-1} x\,dx.$

Formulu lieto tik ilgi, kamēr rodas integrālis $\int \ln x\,dx$, kuru atrod ar formulu (143).

147) $\int x^m \ln^n x\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \ln^n x - \frac{n}{m+1} \int x^m \ln^{n-1} x\,dx.$

Formulu lieto tik ilgi, kamēr dabū integrāli (145).

ALFABĒTISKAIS RĀDĪTĀJS

Pamanītās kļūdas

Lpp.	Rinda	Iespiests	Jābūt
323.	13. no apakšas	$d(uvw)=vw \cdot du+$ $+uw \cdot dv+uw \cdot dw$	$d(uvw)=vw \cdot du+$ $+uw \cdot dv+uv \cdot dw$
450.	7. no augšas	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=$ $=\ln/x+\sqrt{a^2 \pm x^2}/+C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}+$ $+\ln\lvert x+\sqrt{a^2 \pm x^2}\rvert+C.$
579.	5. no apakšas	$\mathbf{N}=(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \times \mathbf{r}'=\mathbf{r}''(\mathbf{r}'^2)-$ $-\mathbf{r}^1(\mathbf{r}'\mathbf{r}'');$	$\mathbf{N}=(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \times \mathbf{r}'=\mathbf{r}''(\mathbf{r}'^2)-$ $-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'\mathbf{r}'');$
843.	16. no augšas	$GH=2(la^{\frac{1}{3}}-al^{\frac{1}{3}}:$ $:(l^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}.$	$GH=2(la^{\frac{1}{3}}-al^{\frac{1}{3}}):$ $:(l^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}.$

M. Vigodskis. «Augstākās matemātikas rokasgrāmata»

1 rbl. 57 kop.