

*P. Balodis*  
Latv. Hod.

JĀNIS BALODIS  
LATVIJAS UNIVERSITĀTES DOCENTS

---

# KARTOGRAFIJA



---

IZDEVIS INŽ. JĀNIS BALODIS  
RIGĀ, LĀČPLEŠA IELĀ 29



L  $\frac{52}{31}$

Latv. Ned.

JĀNIS BALODIS  
LATVIJAS UNIVERSITĀTES DOCENTS

---

# KARTOGRAFIJA

(KARTOGRAFISKO PROJEKCIJU TEORIJA)

Natura scritta in lingua matematica  
Galileo Galilei.

---

IZDEVIS INŽ. JĀNIS BALODIS  
RĪGĀ, LĀČPLĒŠA IELĀ 29

526.8

1953

307918

0208042343



Spiestuve un cinkografija F. VITUMS Rigā, Matisa ielā № 57



*Šis darbs veltīts neaizmirstamā audzinātāja  
bij. Trikātas draudzes skolas skolotāja Jēkaba  
Mūrnieka dārgai piemiņai.*



## Priekšvārds.

Ar nelielu zemes gabalu uzmērīšanu un attēlošanu uz plaknes nodarbojas zemākā ģeodēzija jeb topografija, ko var nosaukt par mērniecību šaurākā nozīmē. Ja, turpretim, jāuzmērī plaši apgabali, piemēram, veselas valsts teritorija, tad darīšana ir ar mērniecību plašākā nozīmē jeb augstāko ģeodēziju, kas savukārt sadalās sfēriskā un sferoidiskā, atkarībā no tā, vai zemi uzskata par sfēru vai sferoidu. Zemāko ģeodēziju franči sauc par topografiju vai arī „Lever des plans et nivellement“, angļi un amerikāņi par „surveying“ vai „topographical surveying“ un vāci dažreiz par Feldmesskunst vai praktisko ģeometriju. Augstāko ģeodēziju franči un angļi sauc tikai par ģeodēziju, bet vāci par Landesvermessung vai Erdmessung. Kartogrāfija ir ģeodēzijas nozare, kas apskata jautājumu par plašu zemes virsas daļu, vai pat visas zemes virsas attēlošanu uz plaknes. Par pamatu kartes sastādīšanai noder: 1) astronomiskie novērojumi, kuŗu rezultāts ir platums, garums un azimuts, 2) triangulācija un 3) sīkumu jeb situācijas un nelīdzenumu horizontālā un vertikālā uzmērīšana.

Pirmā un otrā punktā minētie darbi ar 1925. g. 31. decembrī Helsinkos noslēgto konvenciju (1926. g. lik. kr. Nr. 89.) ir padarīti par Baltijas jūras krastus apdzīvojošo tautu kopēju lietu. Konvencija noslēgta starp Latviju, Igauniju, Lietuvu, Somiju, Zviedriju, Dāniju, Dancigas brīvpilsētu, Poliju un Vāciju. Līgumslēdzējas valstis apņemas nodibināt un uzturēt Baltijas Ģeodēzijas komisiju, kuŗas uzdevums: uz vienāda pamata un pēc vienādām metodēm veicināt ģeodēziskus darbus, galvenām kārtām pirmās klases triangulāciju, bazu mērīšanu, vietu astronomisku noteikšanu un smaguma mērīšanu uz zemes virsas ap Baltijas jūru un uz līgumslēdzēju valsts teritorijas, un apstrādāt kopējo darbu rezultātus. Šos darbus izlieto praktiskiem un zinātniskiem mērķiem. Trešā punktā minētie darbi ir paredzēti 1931. g. 28. jūlija likumā (1931. g. lik. kr. Nr. 161.) par lauku nekustamas mantas kadastru un šī šī likuma otrais pants noteic, ka kadastrs izvedams tā, lai iegūtos datus un materiālus varētu izmantot arī valsts kartogrāfiskiem darbiem, statistiskiem mērķiem un valsts administratīvām vajadzībām. Helsinku konvencija un kadastra likums ģeodēziskos un kartogrāfiskos darbus nostāda tā, kā to prasa šo zinību patlaban sasniegtais attīstības stāvoklis. Atkāpšanās nozīmētu atkāpšanos no zinības prasībām

un izstāšanos no kulturālas sadarbības ar mums kaimiņos dzīvojošām tautām.

Šī grāmata domāta, pirmkārt, visiem tiem, kuņiem nāksies piedalīties Baltijas ģeodēzijas konvencijā un Latvijas nekustāmas mantas kadastra likumā paredzētos darbos.

Otrkārt, šī grāmata var noderēt visiem tiem speciālistiem, kuņiem darišana ar kartografiskiem darbiem valsts un pašvaldību iestādēs; minēšu tikai kaŗa ministrijas ģeodēzijas-topografijas daļu, jūrniecības departamentu, šoseju un zemes ceļu departamentu u. c. No pašvaldībām, piemēram, Rīgas pilsēta izved tik plašus uzmērīšanas darbus, ka viņos pilnīgi orientēties ir iespējams vienīgi speciāli izglītotam ģeodēzistam un kartografam.

Kartografija ieņem zināmu vietu matēmatisko un ģeografisko priekšmetu ciklā. Astronomijas, ģeodēzijas un ģeografijas attīstība ir uzstādījusi arī kartografijai jaunas prasības, kas pilnīgi nesakrīt ar vēl pastāvošiem veciem uzskatiem par kartes sastādīšanu un viņas nozīmi. Tāpēc, treškārt, šī grāmata var noderēt visiem tiem, kuŗu specialitātē ietilpst matēmatika, astronomija un ģeografija.

Uzstādot dažādas problēmas un atrisinoŗ tās matēmatiskā ceļā, kartografija, kā zinātne, palielina loģiskas domāšanas spējas, disciplinē tās un tādā ceļā pavairo un padziļina mūsu gara spējas vispār. Arī uz kartografiju attiecas tas, ko Kants saka par matēmatiku vispār, proti, ka „katrā dabas mācības nozarē ir zinības tikdaudz, cikdaudz viņa ir matēmatikas.“ Tāpēc, cik paradoksāli tas arī neizklausītos, kartografija pieder pie vispārīzglītojošiem priekšmetiem un tai ir vieta vispārīzglītojošo priekšmetu ciklā, jo tā pavairo cilvēka garīgās spējas un paceļ viņa kultūras līmeni.

Izsaku savu dziļāko pateicību Kultūras fonda domei par grāmatas izdošanai atvēlētiem līdzekļiem, bez kuņiem šī grāmata nebūtu varējusi iznākt.

Par daudziem zīmējumiem man jāpateicās inženieram J. Bauņa un stud. agr. H. Baloŗa kungiem; pēdējam pateicos arī par izpalīdzību pie korrektūru lasīšanas.

J. B.

## I. nodaļa.

### Ievads.

1. **Kartografijas mērķis.** Zemes lodei ir sfēras jeb bumbas veids un tāpēc tās virspusi var attēlot pareizi tikai uz globa, t. i., nelielas bumbas, uzzīmējot tur kontinentus, okeānus, salas, kalnus, upes, valšņu robežas, dzelzceļus, kuģniecības līnijas, telegrāfu kabeļus, jūras straumes u. t. t. Ja pietiekoši lielu globu konstruēšana un lietošana būtu bijusi pietiekoši ērta, tad nebūtu vajadzīgi nekādi citi līdzekļi zemes virsas attēlošanai. Par nožēlošanu lieli globi maksā dārgi un nav ērti lietošanai: Uz tā saucamiem „skolas“ globiem kontūri ir jāsamazina vairāk miljonu reiz un tāpēc viņi nevar noderēt atsevišķu apgabalu sikai attēlošanai. Pieņemot zemi par sfēru ar virsu vienlielu zemes sferoida virsai, zemes caurmērs, pēc Beseļa zemes sferoida elementiem iznāk 12 740 579 m un globa caurmērs mērogā 1:20 000 000 būs 63,7 cm. Uz šāda globa 100 kv. km liels kvadrāts attēlosies kā kvadrāts, ar malu 0,5 mm. Nav nozīmes arī attēlot uz globa reljefu, jo pat 10 km augsts kalns uz tāda globa attēlosies 0,5 mm augsts. Starpība starp zemes sferoida lielo (ekvatoriālo) un mazo (polāro) asi 42 636,4 m un tanī pašā mērogā dos 2,13 mm.

Latvijas karte mērogā 1:400 000 ir parocīga formāta ziņā, bet satura ziņā nevar apmierināt daudzas prasības; ja tomēr mūsu valsti vajadzētu attēlot uz globa tanī pašā mērogā, tad būtu jāņem globs ar diametru 31,85 m.

Kontinentus, salas, upes, valšņu robežas u. t. t. jau no seniem laikiem attēlo uz plaknes. Lai punktu un kontūru uzzīmēšana būtu ērta un pareiza, iedomājās zemes virsu ar meridiāniem un paralēlēm sadalītu nelielās sfēriskās trapēcēs. Meridiāni ir sfēras lieli riņķi, kas iet caur zemes asi, bet paralēles ir mazie riņķi, stateniski pret zemes asi. Parasti par meridiāniem un paralēlēm sauc šo riņķu aploces uz zemes virsas. Paralēli, kas iet caur zemes centru, t. i., lielo riņķi 90° attālumā no poliem, sauc par ekvātoru. Ja, piemēra dēļ, iedomāsimies meridiānus un paralēles novilkas ik pa 10°, tad ziemeļu puslodē iznāks 324 trapēces\*) un tikpat daudz dienvidus puslodē.

Ja attēlojamā zemes virsas daļa nav liela, tad viņu var uzskatīt par plakni un attēls iznāk līdzīgs attēlojamai zemes virsas daļai. Šādu

\*) Starp 80° paralēli un polu trapēces pārvēršās sfēriskos trīsstūros.

nelielu zemes sfēriskās virsas daļas līdzīgu attēlu uz plaknes, kā zināms, sauc par plānu. Cik lielam zemes gabalam var sastādīt plānu, atkarājas no prasībām, kādas uzstāda plāna noteiktībai un šo jautājumu tuvāki apskata mērniecība.

Cita lieta būs gadījumā, kad jāattēlo uz plaknes visa zemes virsa, jeb plaša zemes virsas daļa. Iedomājoties meridiānu un parallēļu tiklu pietiekoši biezu, dabū sfēriskās trapēces, kuņas bez jūtamas kļūdas var uzskatīt par plakanām, bet saliekot trapēces ar pamatiem pa taisnu līniju, dabūsim šauras asas strēmeles starp divām blakus trapēču malām pa meridiāniem. Ja, turpretim, trapēces saliksim ar sāniem pa meridiānu, attēlotu ar taisnu līniju, tad tukšas vietas iznāks starp trapēču pamatiem, t. i., uz parallēlēm. Jo vairāk attālināsimies no pirmās uzliktās trapēces, jo platakas paliks starpas, un jūru, ezeru, upju, kalnu, valšķu u. t. t. attēli būs sarauti un pārtraukti, neskatoties uz to, ka katrā atsevišķā trapēcē viņi ir pareizi. Ja attēla mērogs ir pietiekoši liels, tad katra sfēriskā trapēce ir diezgan liela lapa un parasti nav arī nekādas vajadzības visas viņas salikt kopā. Ja saliek kopā četras, pat deviņas blakus trapēces, tad baltas starpas vēl ir tik šauras, ka nepārsniedz neizbēgamās papīra deformācijas (saraušanos un izstiepšanos dažādos virzienos) pie zīmēšanas, iespiešanas un uzglabāšanas. Taču šādu trapēču kopojumu nevar saukt par valsts, pasaules daļas, jeb visas zemes virsas kopēju attēlu. Tas būs atlas, kuņa lapas lieto atsevišķi, pēc vajadzības. Tā kā sfērisko virsu nav iespējams attīt uz plaknes bez krunkām un plaisām, un ka globu, kā arī atsevišķu trapēču attēlu lietošana dažreiz nav ērta un parocīga, tad zemes virsas attēlošanai lieto ģeografiskās kartes, t. i. lielu zemes gabalu un pat visas zemes virsas attēlus uz plaknes samazinātā un šagrozītā veidā. Kartogrāfija apskata zemes virsas attēlošanas paņēmienus uz plaknes, jeb tā sauc. kartografiskās projekcijas.

No sacītā skaidrs, ka uzdevums par kartografisko projekciju konstruēšanu ir nenoteikts, un iekams stājas pie viņa atrisināšanas, ir jāuzstāda dažādi noteikumi. Var, p. p., uzstādīt prasību, lai uz projekcijas meridiāni un parallēles attēlotos kā zināma veida līnijas (taisnes, apla loki u. t. t.); var prasīt, lai uz kartes pareizi attēlotos leņķi, lai pareizas būtu attēloto zemes gabalu platības, var prasīt, lai projekcijas konstruēšana būtu viegla un ērta. Projekcijas, kuņa izpildītu visas šīs prasības uzreiz ne tikai nav, bet tādas arī nevar būt. Katra projekcija izpilda vienu jeb vairākas uzstādītās prasības uz citu projekcijas īpašību reķina.

Kartogrāfija ir veca zinātne, neskatoties uz to, ka viņa strauji attīstījās pagājušā gadu simtenī. Tanis laikos, kad zemi uzskatīja

par plakni, projekcijas izgudroja zvaigžņotās debess attēlošanai. Kartogrāfija, kā zinība, aprobežojas ar meridiānu un paralēļu tīkla konstruēšanu. Šī tīkla piepildīšana ar zemes detaluzmērīšanas rezultātiem jau pieder pie karšu sastādīšanas tehnikas.

**2. Projekciju šķirošana.** — Neskatoties uz projekciju lielo dažādību pie viņām var novērot kopējas pazīmes, pēc kuŗām, izpētīšanas ērtības labad, ir iespējams tās šķirot. Vissvarīgākās pazīmes ir attēla īpašības, atkarībā no kuŗām izšķir sekošas projekcijas:

1. **Vienādleņķu jeb leņķu pareizās** (autogonālas, konformas, ortomorfas, vāciski: Winkeltreue) projekcijas, kuŗās bezgalīgi mazas daļas ir līdzīgas attiecīgiem bezgalīgi maziem elementiem uz zemes virsas. No šīs projekcijas īpašības izriet vēl viena svarīga sakarība starp projekcijas elementiem, proti: ļoti īsu (pareizāki — bezgalīgi īsu) no viena un tā paša projekcijas punkta izejošu līniju mērogs ir nemainīgs. Turpretim projekcijas dažādos punktos, runājot vispārīgi, mērogs ir dažāds. Tā tad vienādleņķu projekcijas katrā punktā mērogs nav atkarīgs no azimuta. Tāpēc, p. p., bezgalīgi mazi vienādi riņķi, kuŗus ņem uz sfēras dažādos punktos, uz projekcijas attēlosies gan kā bezgalīgi mazi apli, bet to rādiusi nebūs vienādi. Bezgalīgi mazu daļu līdzība panākta taisni ar to, ka šīs projekcijas nemainās leņķi.

2. **Vienādlielās jeb laukumu pareizās** (autaliskās\*), ekvivalentās, homalogrāfiskās, vāciski: Flächentreue) projekcijas, kuŗās nemainās attēlojamo zemes gabalu platības. No viena un tā paša projekcijas punkta, zem dažādiem azimutiem novilkām līnijām, mērogi ir dažādi, bet visos projekcijas punktos mēroga vidējais lielums būs vienāds. Katrs bezgalīgi mazs sfēriskās virsas aplis projekcijā attēlosies kā vienādliela elipse; katra slēgta figūra projekcijā attēlosies kā vienādliela, bet ne līdzīga figūra. Pie vienādlielām projekcijām neskaita tās, kuŗas apmierina divas prasības: pirmkārt, kad nemainās no meridiāniem norobežotā divsānu laukums un, otrkārt, kad nemainās no paralēlēm norobežotā joslu laukums; šīs projekcijas dažreiz sauc par atraktozoniskām\*\*).

Tā kā sfērisko virsu nevar attīt uz plaknes bez krunkām un trūkumiem, tad prasība, lai projekcija vienā un tanī pašā laikā būtu vienādleņķu un vienādliela nav īpildāma.

3. **Patvaļīgās jeb afilaktiskās\*\*\*)** projekcijas, kuŗām bezgalīgi mazas daļas nav nedz leņķu, nedz laukumu pareizas. Toties viņām

\*) No  $\acute{\alpha}\lambda\omega\varsigma$ , tas pats, un  $\acute{\alpha}\lambda\omega\varsigma$ , laukums.

\*\*\*) No  $\acute{\alpha}\tau\rho\alpha\kappa\tau\omicron\varsigma$ , divsānis, fizo un  $\zeta\acute{\omega}\nu\eta$ , josla, zona.

\*\*\*) no  $\acute{\alpha}$  un  $\varphi\upsilon\lambda\alpha\kappa\tau\omicron\varsigma$ , kas uzglabā.

ir citas labas īpašības, p. p., konstruēšanas vienkāršība, uz viņām ir iespējams ērti atrisināt dažādus praktiskus uzdevumus u. t. t.

Šai projekciju klasifikācijai ir liela teorētiska nozīme, bet projekciju izpētišanas nolūkos daudz ērtāki ir šķirot viņas ne pēc attēlu īpašībām, bet pēc konstruēšanas paņēmieniem. No šī viedokļa visas projekcijas sadala:

1. Perspektīvās projekcijās, kuŗās zemes virsa attēlota tā, itkā zeme būtu caurspīdīga un katrs zemes virsas punkts perspektīvi projicētos uz plaknes.

Atkarībā no acs (redzes punkta) un ainu plaknes stāvokļa pret zemes centru un attāļuma no zemes centra, perspektīvās projekcijas sadala vairākās pasugās.\*)

2. Zenitālās projekcijās, kuŗās sfērisko virsu attēlo pēc zināmiem noteikumiem uz zemei kādā nebūt punktā pieskarošās plaknes. Šī šķira aptver arī visas perspektīvās projekcijas. Tā kā zenitālo projekciju konstruēšanai lieto citādus paņēmienus nekā perspektīvo projekciju konstruēšanai, tad katru no viņām apskata atsevišķi.

3. Cilindriskās projekcijās, kuŗām sfērisko virsu papriekšu attēlo uz zemei pieskarošā jeb šķeļošā cilindra virsas, pēc tam cilindri pārgriež pa vienu veidlīniju un attin uz plaknes.

4. Koniskās projekcijās, pie kuŗu konstruēšanas rīkojās tāpat kā iepriekšējā gadījumā, tikai cilindra vietā ņem konu. Koniskās projekcijas aptver arī visas iepriekšējās projekcijas, jo ņemot kona piltuves leņķi  $180^\circ$  jeb  $0^\circ$ , dabū plakni jeb cilindri.

5. Noteikumu jeb nosacījumu projekcijās, kuŗu konstruēšanu nevar izdarīt pēc augšā apskatītiem vienkāršiem paņēmieniem.

Visas projekcijas ne tikai apskatīt, bet pat uzskaitīt nav iespējams. No teorētiskā viedokļa patvaļīgu projekciju ir bezgalīgi reiz vairāk nekā vienādlielo projekciju, bet pēdējo bezgalīgi reiz vairāk par vienādleņķu projekcijām. Vienādleņķu projekciju skaits ir arī bezgalīgs. Pats par sevi saprotams, ka izgudroto projekciju skaits nav bezgalīgi liels. Tomēr viņu skaits ir krietni prāvs. Praksē lietojamo projekciju ir daudz mazāk. Mēs apskatīsim tikai biežāki lietojamās un sevišķu ievēribu pelnošās projekcijas. Nodaļas iedalīsim pēc projekciju konstruēšanas paņēmieniem, bet pie katras projekcijas aizrādīsim uz to šķiru, pie kuŗas viņa pieder pēc savām īpašībām.

\*) Perspektīvo projekciju nosaukums ir nepareizs, jo pie viņu sastādīšanas nemaz nepieturās pie tiem likumiem, pie kuŗiem pieturās mākslinieki gleznošanā. Perspektīvās projekcijas dod ļoti kļūdainus attēlus un viņām visai niecīga praktiska nozīme.

Pie šādas materiāla sakārtošanas „noteikumu“ projekciju iznāk ļoti daudz, tāpēc viņas savukārt šķirotas vienādleņķu, vienāddielas un patvaļīgās projekcijās.

A. Abendrots grāmatā „Die Praxis des Vermessungsingenieurs“ I. sēj., 1923. g. otrā izdevumā, 305. lp. kartes mērogā mazākā par 1:500 000, tā tad mērogos 1:1 000 000, 1:2 000 000 u. t. t. sauc par ģeografiskām, kartes mērogā starp 1:200 000 un 1:500 000 — par topografiskām pārskata kartēm, mērogā starp 1:20 000 līdz 1:200 000 — par topografiskām speciālkartēm, mērogā starp 1:5000 līdz 1:20 000 par pārskata plāniem un, beidzot, mērogā 1:5000 un lielākā — par speciālplāniem.

E. Prévot grāmatā „Topographie“ (1925. g. izd.) II. daļā, 631.—632. lpp. kartes šķiro:

1. Topografiskās kartes, kas sastādītas vidēja lieluma mērogā, kuŗā ir iespējams attēlot sīkumos zemes apveidus un virsas dažādības;

2. Chorografiskās kartes, kas aptver vienu vai vairākas valstis mazā mērogā un nedod pietiekoši sīku attēlu;

3. Ģeografiskās kartes, kuŗās ļoti mazos mērogos attēlotas plašas zemes virsas daļas vai pat visa zemes virsa.

Atkarībā no zemes nelidzenumu attēlošanas veida viņš izšķir:

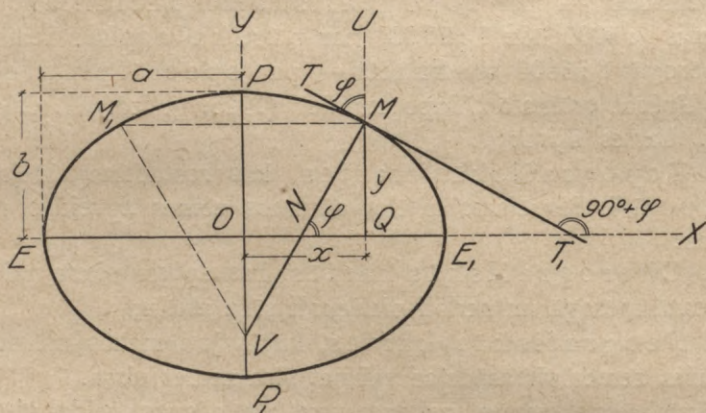
1. Orometriskās kartes, uz kuŗām zemes virsas formas ir attēlotas ar līmeņlīknēm, novilkām vienādos vertikālos attājumos;

2. Iespaidu radošās kartes (Les cartes modelées à l'effet), kur šīs zemes virsas formas parādītas ar mākslīgiem paņēmiem, švītrojumu, atņojumu vai krāsām.

**3. Zemes elipsoīds.** Zemes figūras veida un lieluma noteikšanā lieli nopelni franču zinātniekiem. Franču zinību akadēmija 1735. gadā sarīkoja divas ekspedīcijas: vienu uz Perū, pie ekvātora, un otru uz Lapu zemi, ziemeļos. Viņas noskaidroja, ka pie ekvātora zemes meridiāns ir vairāk izliekts, nekā pola tuvumā, kas pilnīgi saskanēja ar Ņutona teoriju.

Grādu mērīšanu Perū izveda Godens (Louis Godin), Lakondamins (Charles Marie de la Condamine) un Bugē (Pierre Bouguer) 1735.—1741. g.; tā aprakstīta grāmatā: „Mesure des trois premiers degrés du méridien dans l'hémisphère australe, tirée des observations de Mrs. de l'académie royale des sciences, envoyés par le roi sous l'équateur, par M. de la Condamine. Paris 1751.“ Grādu mērīšanu Lapzemē izveduši 1736.—1737. g. Mopertuji (Pierre Louis Moreau de Maupertuis) un Klero (Clairaut); to aprakstījis Mopertuji grāmatā: „La figure de la terre. Paris 1738.“

No 1792.—1808. gadam Delambrs (Jean Baptiste Joseph Delambre) un Mešens (Pierre François André Méchain) izveda gradu mērīšanu metra lieluma galīgai noteikšanai; publicētais darbs ir: „Base du système métrique décimal, ou mesure du méridien compris entre les parallèles de Dunkerque et Barcelone, exécutée en 1792 et années suivantes, par M. M. Méchain et Delambre, rédigée par M. Delambre. Tome premier Paris janvier 1806, tome second Paris juillet 1807, tome troisième Paris novembre 1810.“\*)



1. zīm.

Ar ideālo zemes virsu vislabāki sakrīt virsa, ko dabū griežot elipsi ap mazo asi  $PP_1$  (1. zīm.). Šāda veida ķermeņi sauc par rotācijas elipsoidu jeb sferoidu. Griezes ass gala punktus  $P$  un  $P_1$  sauc par poliem. Elipses lielās ass  $EE_1$  veidoto riņķi sauc par ekvātoru, vienādotāju jeb vienlīdzi; tas sadala sferoidu divi pusēs — vienu sauc par ziemeļu jeb pozitīvo un otru — par dienvidu jeb negatīvo puslodi vai hemisfēru. Polu  $P$ , kas ir ziemeļdaļā, sauc par ziemeļpolu un otru —  $P_1$  par dienvidpolu. Elipsi  $EPE_1P_1$ , kas noder rotācijas elipsoida jeb sferoida veidošanai, sauc par meridiāna elipsi jeb vienkārši par „meridiānu“. Tā lielo (ekvatoriālo) pusasi  $EO = OE_1$  parasti apzīmē ar burtu  $a$  un mazo (polāro) pusasi  $OP = OP_1$  ar burtu  $b$ .

Lielumu  $p = \frac{a-b}{a}$  sauc par saspiedumu un  $e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$  — par ekscentrību. Pēdējā laikā ievēd, tā sauc., otro ekscentrību  $e' = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}}$ . Ekscentrības  $e$  un  $e'$  ir absolūti skaitļi — pirmā ir li-

\*) Daži no šiem ievērojamiem darbiem pēdējos gados jaunizdoti.

neārās pusekscentribas  $\sqrt{a^2 - b^2}$  attiecība pret lielo pusasi  $a$  un otrā — lineārās pusekscentribas  $\sqrt{a^2 - b^2}$  attiecība pret mazo pusasi  $b$ . Otrā ekscentriba  $e'$  dažiem aprēķiniem ir parocīgāka, nekā pirmā ekscentriba  $e$ .

Latvijā pieņemtie Beseļa (1841. g.) zemes sferoida elementi ir sekoši:

$$a = 6\,377\,397,155 \text{ m.} \qquad \lg a = 6.804\,6434.637$$

$$b = 6\,356\,078,96325 \text{ m.} \qquad \lg b = 6.803\,1892.839$$

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2 = 0,00667\,43722\,31315 \qquad \lg e^2 = 7.824\,4104.237 - 10$$

$$e = 0,081\,6968\,312 \qquad \lg e = 8.912\,2052.119 - 10$$

$$\frac{a^2 - b^2}{b^2} = e'^2 = 0,00671\,92\,187\,98\,677 \qquad \lg e'^2 = 7.827\,3187.833 - 10$$

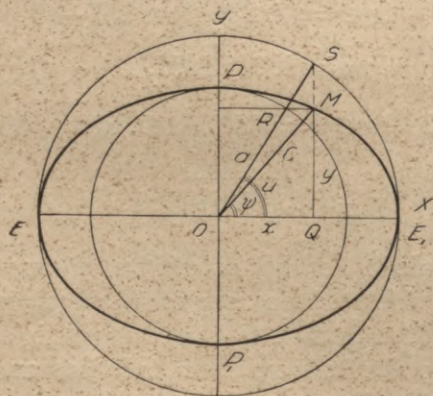
$$p = \frac{a - b}{a} = \frac{1}{299,1528128} \qquad \lg \frac{1}{p} = 2.475\,8930.907$$

Šo skaitļu noteiktība tālu pārsniedz lietišķo noteiktību, jo meridiāna kvadrantam = 10 000 856 m vidējā kļūda, apaļos skaitļos, ir 500 m un saspieduma skaitļam 299 vidējā kļūda ir 5, kamēr augšā  $\lg a$  un  $\lg b$  ir doti ar 10 zīmēm. Tomēr praktiski ir no svara, lai visos aprēķinos izietu no pilnīgi noteiktiem vienādiem skaitļiem; tad vienādos aprēķinos rezultāti iznāks pilnīgi vienādi un caur to būs ērta aprēķinu kontrole; rezultātu nesaskaņa tad celsies vienīgi no aprēķinu kļūdām.

Pie ģeodēzisko tabulu sastādīšanas, aprēķinus izdara bieži ar 3—4 zīmēm vairāk nekā patiesi ir vajadzīgs; tas tāpēc, lai pēdējās vietās skaitļi pie dažādiem aprēķinātājiem pilnīgi saskanētu, jo ir ļoti nepatīkami un traucējoši, ja rezultāti pilnīgi nesaskan.

Uz elipsoida smaģuma spēka virziens  $MV$  (1. zīm.) ir normāle un tās leņķis  $\varphi$  ar lielo asi jeb ekvatora plakni ir punkta  $M$  ģeografiskais platumus jeb vienkārši „platumus“. Šis leņķis ir =  $\sphericalangle$  TMU, t. i., pola augstumam virs horizonta. Sferoida ziemeļdaļā platumus skaita par pozitīviem un uz dienvidiem no ekvatora — par negatīviem no  $0^0$ — $90^0$ . Visi meridiāni ir vienādi; vienu no tiem pieņem par nulles jeb sākuma meridiānu. Par tādu starptautiskā astronomu konferencē 1911. g. Parīzē pieņēma Grinvičas meridiānu. Katrs meridiāns sadala zemi rietumu un austruma puslodēs. Leņķi starp kaut-kāda punkta  $M$  meridiāna plakni un nulles meridiāna plakni sauc par punkta  $M$  ģeografisko garumu, jeb vienkārši „garumu“; turpmāk to apzīmēsim ar grieķu burtu  $\lambda$ ; tāpat parasti apzīmē divu meridiānu ģeografisko garumu starpību. Meridiānus skaita no nulles meridiāna uz rītiem un

vakariem no  $0^{\circ}$  līdz  $\pm 180^{\circ}$ ; uz rītiem ar mīnuszīmi un vakariem ar plus zīmi. Ar tādu skaitīšanu vienai un tai pašai meridiāna elipsei ir divi gaŗumi. Ja punkta  $M$  gaŗums būs  $\lambda$ , tad tas noteiks loku  $PME_1P_1$ , bet punkta  $M_1$  gaŗums būs  $\lambda \pm 180^{\circ}$ , kas noteiks loku  $PM_1EP_1$ . Piemēram, ja  $M$  būtu Rīga ar gaŗumu  $-24^{\circ}07'01''{,}65$ , tad punkta  $M_1$  gaŗums būs  $155^{\circ}52'58''{,}35$ . Daŗos gadījumos punkta  $M$  ģeogrāfiskā platuma vietā lieto ģeocentrisko vai arī reducēto jeb pievesto platumu. Par ģeocentrisko platumu sauc leņķi  $\psi$  (2. zīm.) starp lielo asi  $a$  un līniju, kas savieno punktu  $M$  ar elipses centru  $O$ , t. i.,



2. zīm.

$\sphericalangle MOE_1 = \psi$ . Lai dabūtu jēdzienu par pievesto jeb reducēto platumu (latitude réduite) iedomāsimies elipses punkta  $M$  ordinātu  $MQ$  pagarinātu līdz krustojumam ar elipsi apvilktā riņķa (t. i. ar rādiusu  $a$ ) aploci punktā  $S$ . Iedomāsimies tāļāki caur punktu  $M$  līniju, novilkta paraleli asij; tā krustos elipse ievilkta riņķa (ar rādiusu  $b$ ) aploci punktā  $R$ . Tad  $S, R, O$  ir uz vienas taisnes un leņķis, ko šī taisne veido ar lielo asi, dod reducēto platumu  $u = \sphericalangle SOE_1$ .

Tāļāki apskatīsim elipsoida abu galveno normālgriezumu līkuma rādiusus, t. i. meridiāna līkuma rādiusu  $R_0 = M$  un līkuma rādiusu  $R_{90} = N$  griezumam, kas iet caur elipsoida normāli stateniski pret meridiānu, t. i. pirmam vertikālam. Azimutu  $\alpha$  vienmēr skaitīsim sākot no meridiāna ziemeļvirziena uz labo pusi caur rītiem, dienvidiem etc. no  $0^{\circ} - 360^{\circ}$ . Līkuma rādiusu  $R_0$  un  $R_{90}$  indeksi  $0$  un  $90$  norāda azimutus plaknēm, kādās viņi iet, atmetot  $0$  zīmi.

Meridiāna līkuma rādius  $R_0 = M$ . Apreķināsim punkta  $A$  (3. zīm.) meridiāna līkuma rādiusu  $R_0$  atkarībā no punkta  $A$  ģeogrāfiskā platuma  $\varphi$ . Dodot platumam  $\varphi$  bezgalīgi mazu pieaugumu  $d\varphi$ , dabūsim bezgalīgi tuvu punktu  $A_1$ . Meridiāna bezgalīgi mazā loka gaŗumu  $AA_1$  nosauksim par  $ds$ . Kad  $\varphi$  pieaug par  $d\varphi$ , tad  $x$  pamazinājas par  $Am = dx$  un  $y$  pieaug par  $A_1m = dy$ . Pēc zīmējuma

$$R_0 = \frac{ds}{d\varphi}$$

$$\text{un } -dx = ds \cdot \text{sn } \varphi. \text{ Caur to } R_0 = - \frac{dx}{d\varphi \cdot \text{sn } \varphi}.$$

Pēc tā paša zīmējuma  $\operatorname{tg}(90^\circ + \varphi) = \frac{dy}{dx}$ , jeb

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{cotg} \varphi. \quad (1)$$

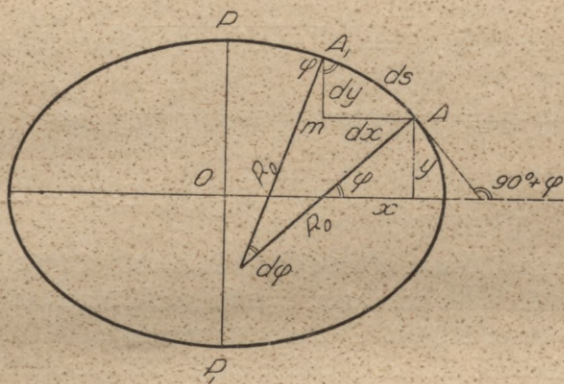
Izteiksim  $x$  caur  $\varphi$  un tad šo nol. diferencēsim. Ņemsim elipses nol. sekošā veidā:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

un diferencēsim to; tad

$2x \cdot \frac{dx}{a^2} + 2y \frac{dy}{b^2} = 0$ , jeb  $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$  un, ņemot vērā (1) nol.:

$$\frac{b^2x}{a^2y} = \operatorname{cotg} \varphi. \quad (3)$$



3. zīm.

No (2) un (3) nol. izslēgsim  $y$ , atvietosim  $b^2$  ar  $a^2(1 - e^2)$  un noteiksim  $x^2$ ; iznāks

$$x^2 = \frac{a^2 \operatorname{cotg}^2 \varphi}{1 - e^2 + \operatorname{cotg}^2 \varphi}.$$

Reizinot labā pusē skaitītāju un saucēju ar  $\operatorname{sn}^2 \varphi$  pēc vienkāršiem pārveidojumiem dabūsim:

$$x = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi}} = \frac{a \cos \varphi}{W},$$

$$\text{kur } W = \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi}.$$

No zīmējuma redzams, ka  $x$  ir ar platumu  $\varphi$  noteiktās parallēles rādius.

Diferencējot  $x$  izteiksmi pēc  $\varphi$  dabūsim:

$$\frac{dx}{d\varphi} = - \frac{a(1-e^2) \operatorname{sn} \varphi}{(1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)^{3/2}};$$

$$\text{tāpēc } R_0 = M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)^{3/2}} = \frac{a(1-e^2)}{W^3}.$$

Grāmatas beigās, pielikumā, doti  $\log R_0$  platumiem  $\varphi$  no  $0^\circ$  līdz  $90^\circ$  pēc Besela zemes sferoida elementiem.

Piezīme. Formulas  $R_0 = \frac{a(1-e^2)}{W^3}$ ,  $x = \frac{a \cos \varphi}{W}$  un līdz ar to  $y = \frac{a(1-e^2) \operatorname{sn} \varphi}{W}$  izved parasti visās ģeodēzijās; tomēr tās nav vislabākās. Ievēdot jauno (otro) ekscentrību dabūsim:

$$\frac{a^2-b^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} - 1 = e'^2; \quad \frac{a}{b} = \sqrt{1+e'^2}. \quad \text{Ievēdot vēl apzīmējumus}$$

$$\frac{a^2}{b} = c \quad \text{un} \quad V = \sqrt{1+e'^2 \cos^2 \varphi} \quad \text{dabūsim:}$$

$$a = \frac{c}{\sqrt{1+e'^2}}, \quad b = \frac{c}{1+e'^2} \quad \text{un}$$

$$x = \frac{c \cdot \cos \varphi}{V}; \quad y = \frac{c \cdot \operatorname{sn} \varphi}{V \cdot (1+e'^2)}; \quad R_0 = M = \frac{c}{V^3}.$$

Šķērsais līkuma rādius  $R_{90} = N$ . Otrais galvenais līkuma rādius attiecās uz izliekumu šķērsu meridiānam, tā tad uz plakni ar azimutu  $90^\circ$  resp.  $270^\circ$ , t. i. vakara-rīta virzienā.

Apskatīsim pēc 1. zīm. paralēlo riņķi  $MM_1$ , noteiktu ar platumu  $\varphi$ . No šīs paralēles punktiem novilkta normāles krustojas vienā un un tanī pašā griezes ass punktā  $V$ . Šķērsās liknes loks punktā  $M$  ir statenisks pret meridiānu, tā tad pieskārsies paralēlei  $MM_1$  punktā  $M$  un tāpēc, divas bezgalīgi tuvas taisnes  $MV$ , ir arī šķērsās liknes loka normāles punktā  $M$ . Tā kā kaut kuņas liknes divu bezgalīgi tuvo normāļu krustojšanās punkts ir liknes izliekuma centrs, tad  $MV$  ir šķērsās liknes loka līkuma rādius, jeb īsi sakot  $MV = R_{90} = N$ , ir rotācijas elipsoida šķērslicees rādius punktā  $M$ .

Saprotot zem  $R_{90} = N$  šķērsā izliekuma rādiusa gaŗumu un, ņemot vērā, ka  $\frac{MM_1}{2} = OQ = x$ , dabūsim:

$$R_{90} = N = \frac{x}{\cos \varphi} = \frac{a}{W} = \frac{c}{V}, \quad \text{kur } W = \sqrt{1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi}$$

un  $V = \sqrt{1+e'^2 \cos^2 \varphi}$ . tāpat kā agrāk.

Vidējais līkuma rādius  $r$ . Par vidējo līkuma rādiusu ģeodēzijā sauc ģeometrisko vidējo no abiem galveniem līkumu rādiusiem  $R_0$  un  $R_{90}$ , t. i.:

$$r = \sqrt{R_0 \cdot R_{90}} = \sqrt{M \cdot N}.$$

Ieliekot te  $M$  un  $N$  nozīmes, dabūsim:

$$r = \frac{a \sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi} = \frac{a \sqrt{1-e^2}}{W^2} \quad \text{jeb} \quad r = \frac{c}{V^2}.$$

Līkumu attiecība  $N:M$ . Pēc tam, kad ir noteikti abi galvenie līkuma rādiusi  $M$  un  $N$  apskatīsim viņu attiecību:

$$\frac{N}{M} = \frac{R_{90}}{R_0} = \frac{W^2}{1-e^2} = V^2.$$

Attiecība  $N:M$  vienmēr ir lielāka par 1, tā tad vienmēr  $N$  lielāks par  $M$ , t. i. šķērsais līkuma rādius vienmēr ir lielāks par meridiāna līkuma rādiusu, jeb otrādi, izliekums  $1:M$  uz meridiāna vienmēr ir lielāks par izliekumu  $1:N$  šķērslokā. Tikai polā viņi vienādi, jo pie  $\varphi = 90^\circ$   $N = M = \frac{a^2}{b} = c$  un zemes polā būtu vislabākais darba lauks ģeodēzistam, jo tur atkrīt visas sferoidiskās korrekcijas.

Ģeocentriskais rādius un ģeocentriskais platumš. Zemes punkta  $M$  (2. zīm.) attālumu no zemes centra  $O$  sauc par ģeocentrisko rādiusu. Apzīmējot viņu ar  $C$ , dabūsim, ka  $OM = C$ . Šī rādiusa leņķi  $\psi$ , ar ekvātoru kā jau bija teikts, sauc par ģeocentrisko platumu.

Taisnleņķa trīsstūrī  $OMQ$   $OM = C$ ,  $OQ = x$ ,  $MQ = y$  un  $\sphericalangle MOQ = \psi$ , tāpēc, ņemot vērā, ka

$$x = \frac{a \cos \varphi}{W} \quad \text{un} \quad y = \frac{a(1-e^2) \operatorname{sn} \varphi}{W}, \quad \text{dabūsim:}$$

$$C^2 = x^2 + y^2 = \frac{a^2}{W^2} [\cos^2 \varphi + (1-e^2)^2 \operatorname{sn}^2 \varphi] \quad \text{un} \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{y}{x} = \\ = (1-e^2) \operatorname{tg} \varphi \dots (a).$$

No pēdējā nol.  $1-e^2 = \frac{\operatorname{tg} \psi}{\operatorname{tg} \varphi}$ ; ieliekot šo nozīmi priekšpēdējā nol., dabūjam:

$$C^2 = \frac{a^2}{W^2} \left( \cos^2 \varphi + \frac{\operatorname{tg}^2 \psi}{\operatorname{tg}^2 \varphi} \cdot \operatorname{sn}^2 \varphi \right) = \frac{a^2}{W^2} \cdot \frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \psi}.$$

$$\begin{aligned} \text{Tā kā } e^2 = 1 - \frac{\text{tg } \psi}{\text{tg } \varphi} = \frac{\text{sn } (\varphi - \psi)}{\text{sn } \varphi \cos \psi}, \text{ tad } W^2 = 1 - e^2 \text{ sn}^2 \varphi = \\ = \frac{\cos \varphi \cos (\varphi - \psi)}{\cos \psi} \text{ un } C^2 = \frac{a^2 \cos \varphi}{\cos \psi \cos (\varphi - \psi)}. \quad (b). \end{aligned}$$

Formula (a) dod iespēju aprēķināt  $\psi$  pēc dotā platuma  $\varphi$ ; pēc tam no formulas (b) var aprēķināt  $C$ .

Reducētais platums. — Reducēto platumu, t. i.,  $\sphericalangle$  SOQ =  $= u$  (2. zīm.) noteic no taisnleņķa trīsstūra SOQ, kurā SO =  $a$  un

$$OQ = x; \text{ tāpēc } \text{tgu} = \frac{SQ}{OQ} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} = \sqrt{\frac{a^2}{x^2} - 1}; \text{ ieliekot te}$$

$$x = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \text{ sn}^2 \varphi}} \text{ dabūjam } \text{tgu} = \sqrt{1 - e^2} \cdot \text{tg } \varphi.$$

$$\text{Bez tam } \cos u = \frac{OQ}{OS} = \frac{x}{a} = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \text{ sn}^2 \varphi}} = \frac{\cos \varphi}{W}.$$

Parallēlo riņķu loki. — Pret zemes elipsoida griezes asi, resp. zemes asi stateniskās plaknes izveido uz elipsoida virsas dažāda rādiusa riņķus, tā saucamos parallēlos riņķus jeb vienkārši parallēles, izņemot vislielāko riņķi — ekvātoru, ko veido caur zemes centru ejošais šķēlums.

Pieņemsim, ka  $\text{MTM}_1$  ir ar ģeogrāfisko platumu  $\varphi$  noteikta parallēle un ka jānoteic tās loka garums  $\text{MT} = s$  starp diviem meridiāniem  $\text{PMP}_1$  un  $\text{PTP}_1$ , kad dota šo meridiānu garumu starpība  $\lambda = \sphericalangle$  TCM (4. zīm.).

Parallēles rādiusu  $\text{MC}$  nosauksim par  $r$ ; tad no taisnleņķa trīsstūra  $\text{MCV}$ , kur  $\text{MV}$  ir normāle  $N = R_{90} = \frac{a}{W} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \text{ sn}^2 \varphi}}$  ir:

$$\overline{\text{MC}} = r = \overline{\text{MV}} \cdot \cos \varphi.$$

$$\text{Bez tam } \frac{s}{2\pi r} = \frac{\lambda''}{360 \cdot 60 \cdot 60''}, \text{ jeb } s = \frac{\pi r \lambda''}{180 \cdot 60 \cdot 60''} = \frac{r \lambda''}{\rho''},$$

kur  $\rho'' = \frac{180 \cdot 60 \cdot 60''}{\pi}$  (\*). Ievietojot  $r$  un  $\text{MV}$  nozīmes, dabonam:

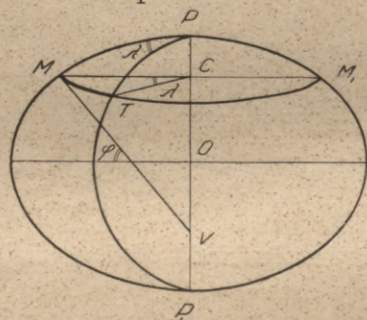
$$s = \frac{N \cos \varphi \cdot \lambda''}{\rho''} = \frac{a \cdot \lambda'' \cdot \cos \varphi}{\rho'' \cdot \sqrt{1 - e^2 \text{ sn}^2 \varphi}}.$$

\*) Sk. Lekcijas, lasītas 1922. g. Zemkopības ministrijas zemju departamenta Mērniecības daļas mērnieku un taksatoru papildu kursos, 12. lp. jeb J. Balodis. Mērniecība I, 45. lp.

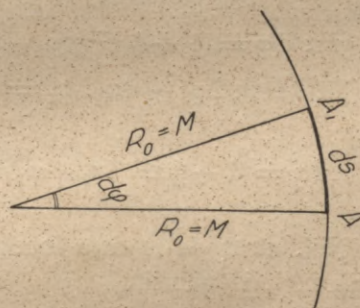
Par piemēru aprēķiniem pēc šīs formulas var noderēt sekoša paralēlo riņķu loku gaļumu tabula (metros):

$\varphi$	$\lambda = 1^{\circ}$ m	$\lambda = 1'$ m	$\lambda = 1''$ m
45 <sup>0</sup>	78837,2934	1313,9549	21,8892
46	77453,9112	1290,8985	21,5150
47	76046,7677	1267,4461	21,1241
48	74616,2834	1243,6047	20,7267
49	73162,8872	1219,3815	20,3230
50	71687,0146	1194,7836	19,9131
51	70189,1092	1169,8185	19,4970
52	68669,6213	1144,4937	19,0749
53	67129,0087	1118,8168	18,6469
54	65567,7359	1092,7956	18,2133
55	63986,2747	1066,4379	17,7740

Meridiāna loka gaļums. — Uz patvaļīga meridiāna ņemsim punktu A (5. zīm.), noteiktu ar platumu  $\varphi$ . Meridiāna likuma rādiusu šinī punktā nosauksim par  $R_0 = M$ . Dodot ģeografiskam platumam bezgalīgi mazu pieaugumu  $d\varphi$  dabūsim uz tā paša meridiāna punktu A<sub>1</sub>, bezgalīgi tuvu pirmam. Meridiāna bezgalīgi mazais elements ir  $AA_1 = ds$  un  $ds = M \cdot d\varphi$ . (1)



4. zīm.



5. zīm.

$$\text{Tā kā } M = R_0 = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^3}}, \text{ tad } ds = \frac{a(1-e^2) d\varphi}{\sqrt{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^3}}$$

un meridiāna loka gaļums no ekvatora, kur  $\varphi = 0$ , līdz paralēlei, noteiktai ar platumu  $\varphi$  ir:

$$s = a(1-e^2) \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^3}} \quad (2)$$

Šis ir otrās šķiras eliptiskais integrāls. Viņa aprēķinu ģeodēziskiem un kartografiskiem mērķiem sauc par meridiāna loka iztaisnošanu jeb rektifikāciju. Tā kā zemes veids maz atšķiras no sfēras un apakš integrāla zīmes stāvošo izteiksmi viegli izvirzīt ātri konverģējošā rindā, tad, raugoties pēc vajadzības, var aprobežoties ar mazāk vai vairāk locekļiem.

Integrēšanā aprobežosimies ar locekļiem, ne augstākiem par  $e^2$ ; integrējamo faktoru no (2) izvirzīsim rindā pēc Ņutona binoma sekoši:

$$\frac{1}{(1 - e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)^{3/2}} = (1 - e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)^{-3/2} = 1 + \frac{3}{2} e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi + \frac{15}{8} e^4 \operatorname{sn}^4 \varphi + \dots \quad (3)$$

Šis rindas beidzamo locekli ar  $e^4$  atmetīsim un integrēšanas atvieglošanas nolūkos ņemsim goniometrijas formulu

$$\operatorname{sn}^2 \varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos^2 \varphi. \quad (4)$$

$$\text{Tā kā } \int \cos 2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{sn} 2\varphi, \quad (5)$$

$$\text{tad } \int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)^3}} = (1 + \frac{3}{4} e^2) \varphi - \frac{3}{8} e^2 \operatorname{sn} 2\varphi + \dots \quad (6)$$

Uz šīs formulas pamata noteiktais integrāls starp robežām  $\varphi_1$  un  $\varphi_2$  būs:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \dots d\varphi = (1 + \frac{3}{4} e^2) (\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{3}{8} e^2 (\operatorname{sn} 2\varphi_2 - \operatorname{sn} 2\varphi_1). \\ \varphi_1 \quad \text{Tā kā } \operatorname{sn} 2\varphi_2 - \operatorname{sn} 2\varphi_1 = 2 \operatorname{sn} (\varphi_2 - \varphi_1) \cos (\varphi_1 + \varphi_2), \text{ tad} \\ \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \dots d\varphi = (1 + \frac{3}{4} e^2) (\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{3}{4} e^2 \operatorname{sn} (\varphi_2 - \varphi_1) \cos (\varphi_1 + \varphi_2). \quad (7)$$

Nol. otrās daļas otrā locekļa  $\sin$  izvirzīsim rindā tikai ar diviem locekļiem, t. i., ņemsim

$$\operatorname{sn} (\varphi_2 - \varphi_1) = (\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)^3}{6} + \dots, \text{ tad}$$

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \dots d\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1) [1 + \frac{3}{4} e^2 - \frac{3}{4} e^2 \cdot \cos (\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{1}{8} e^2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2 \cdot \cos (\varphi_1 + \varphi_2)]. \quad (8)$$

Caur to meridiāna loka garums starp platumiem  $\varphi_1$  un  $\varphi_2$  pēc (2) un (8) iznāk:

$$s = a (1 - e^2) (\varphi_2 - \varphi_1) [1 + \frac{3}{4} e^2 - \frac{3}{4} e^2 \cdot \cos (\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{1}{8} e^2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2 \cdot \cos (\varphi_1 + \varphi_2)]. \quad (9)$$

Ja grib sasniegt lielāku noteiktību meridiāna loka garuma noteikšanā, tad (3) izteiksmes izvirzīšana rindā un līdz ar to integrēšana pēc (2) formulas jāturpina. Profesors Jordans, ņemot vēl locekļus ar  $e^{10}$ , izvedis sekošu formulu meridiāna loka garuma B noteikšanai no ekvatora līdz platumam  $\varphi$ , izteiktam grādos:

$$B = 111120,61962 \varphi - 15988,63853 \operatorname{sn} 2\varphi - 16,7299538 \operatorname{sn} 4\varphi - 0,02178480 \operatorname{sn} 6\varphi + 0,000030766 \operatorname{sn} 8\varphi - 0,0000000452 \operatorname{sn} 10\varphi. \quad (10)$$

Pie šīs formulas izvešanas ņemti Beseļa zemes sferoīda elementi. Ņemot koeficientu vietā viņu logaritmus, un atmetot beidzamo locekli kā nevajadzīgu, dabūsim:

$$B = [5.0457946544] \varphi - [4.2038114842] \operatorname{sn} 2\varphi + [1.22349474] \operatorname{sn} 4\varphi - [8.3381536] \operatorname{sn} 6\varphi + [5.48807] \operatorname{sn} 8\varphi. \quad (11)$$

Formulā (10), pie  $\varphi = 90^\circ$ ,  $\operatorname{sn} 2\varphi$ ,  $\operatorname{sn} 4\varphi$  u. t. t. ir nulles un meridiāna kvadranta garums

$$Q = 10\,000\,855,7658 \text{ m.}$$

Pēc (10) vai (11) formulas aprēķinātie meridiāna loku garumi B no ekvatora līdz dažādiem platumiem  $\varphi$  doti pielikumā.

(9) izteiksme, neraugoties uz to, ka viņā atmetti visi locekļi sākot ar  $e^4$  un tālākie, daudzošos gadījumos ir noderīga. Ja vēl drusciņ upurēsim noteiktību, tad dabūsim sekošu vienkāršu teoremu:

Meridiāna īsa loka garumu var aprēķināt, kā apļa loku, ņemot par rādiusu vidējā platuma meridiāna līkuma rādiusu.

Lai to pierādītu, ņemsim uz viena un tā paša meridiāna divus punktus, noteiktus ar platumiem  $\varphi_1$  un  $\varphi_2$ . Vidējā platuma  $\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$  meridiāna līkuma rādius

$$M' = \frac{a(1 - e^2)}{\left(1 - e^2 \operatorname{sn}^2 \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Izvirzot šo izteiksmi rindā, tāpat kā (3), un ņemot locekļus neaugstākus par  $e^2$ , dabūsim:

$$M' = a(1 - e^2) \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \operatorname{sn}^2 \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right);$$

atvietojojot te sinusa kvadrātu saskaņā ar (4) formulu, dabūsim:

$$M' = a(1 - e^2) \left[1 + \frac{3}{4} e^2 - \frac{3}{4} e^2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2)\right].$$

Šo likuma rādiusu  $M'$  pieņemsim par apla loka rādiusu; tad centrālam lenķim  $\varphi_2 - \varphi_1$  atbilstošā riņķa aploces loka garums būs:

$$s' = M' (\varphi_2 - \varphi_1) = a(1 - e^2) (\varphi_2 - \varphi_1) \cdot [1 + \frac{3}{4} e^2 - \frac{3}{4} e^2 \cos (\varphi_1 + \varphi_2)] \quad (12)$$

Salīdzinot šo izteiksmi ar (9) redzam, ka viņas pirmie locekļi pilnīgi saskan. Tā tad, uzskatot meridiāna eliptisko loku par riņķa loku ar rādiusu vienādu meridiāna likuma rādiusam, ņemtam vidējam platumam, kļūdisimies par

$$s - s' = a (\varphi_2 - \varphi_1) (1 - e^2) \cdot \frac{e^2}{8} (\varphi_2 - \varphi_1)^2 \cdot \cos (\varphi_2 + \varphi_1), \text{ jeb}$$

ievedot vajadzīgo  $\rho$ :

$$s - s' = a (1 - e^2) \cdot \frac{e^2}{8} \left( \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\rho} \right)^3 \cdot \cos (\varphi_2 + \varphi_1). \quad (13)$$

Tāpēc visos tanīs gadījumos, kad kļūda  $s - s'$  nav liela, meridiāna loku var aprēķināt pēc formulas

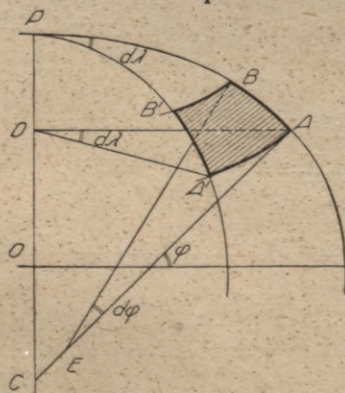
$$s = s' = M' \cdot \left( \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\rho} \right)$$

un augšā uzstādīta teorema ar to pierādīta.

No (13) formulas redzam, ka kļūdas nav gadījumā, kad  $\varphi_1 + \varphi_2 = 90^\circ$ , t. i., kad vidējais platumas  $= 45^\circ$  (saprotais nerēķinot kļūdas, kas izceļas atmetot locekļus ar  $e^4$  un augstākus pie izvirzīšanas rindā).

No tās pašas (13) formulas iznāk, ka pie  $\varphi_2 - \varphi_1 = 1^\circ$  un  $\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = 30^\circ$  jeb  $60^\circ$ , kļūda  $= -0,014$  m. vai  $+0,014$  m.

Zemes elipsoida virsas laukums. — Virsas laukuma



6. zīm.

(platības) aprēķināšanai un attēlošanai iedomāsimies elipsoidu sadalītu ar meridiāniem un paralēlēm trapēcēs. Sastādīsim vienas tādas bezgalīgi mazas trapēces AA'B'B (6. zīm.) diferenciālfornulas. Pieņemsim, ka  $AC = N$ ,  $AE = M$ . Paralēles elementa AA', noteikta ar platumu  $\varphi$ , rādius  $DA = N \cdot \cos \varphi = r$ . Meridiāna loka bezgalīgi maza elementa  $AB = A'B'$  garums būs  $M \cdot d\varphi$ . Paralēles bezgalīgi maza

elementa AA' garums būs  $N \cdot \cos \varphi \cdot d\lambda$ .

Trapēces AA'B'B laukuma diferenciāls:

$$dT = AA' \cdot AB = M \cdot N \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi \cdot d\lambda.$$

Visas joslas jeb zonas, starp platumiem  $\varphi$  un  $\varphi + d\varphi$ , laukumu  $dZ$  dabūsim integrējot šo izteiksmi pēc  $\lambda$  starp  $\lambda = 0$  un  $\lambda = 2\pi$ ;

$$dZ = 2 \cdot M \cdot N \cdot \pi \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi.$$

Ieliksīm  $M \cdot N$  vietā  $r^2 = \frac{a^2(1-e^2)}{(1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)^2}$  un  $a^2(1-e^2)$  vietā  $b^2$ , tad

$$dZ = 2b^2 \cdot \pi \cdot \frac{\cos \varphi}{(1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)^2} \cdot d\varphi.$$

Šis ir laukuma diferenciāls joslai starp platumiem  $\varphi$  un  $\varphi + d\varphi$ , bet pašas joslas virsas laukums būs:

$$Z = 2\pi \cdot b^2 \cdot \int \frac{\cos \varphi}{(1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)^2} \cdot d\varphi.$$

Tā kā

$$\frac{1}{(1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)^2} = (1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)^{-2} = 1 + 2e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi + 3e^4 \operatorname{sn}^4 \varphi + 4e^6 \operatorname{sn}^6 \varphi + \\ + 5e^8 \operatorname{sn}^8 \varphi + \dots,$$

tad

$$Z = 2\pi b^2 \cdot \int (\cos \varphi + 2e^2 \cos \varphi \operatorname{sn}^2 \varphi + 3e^4 \cos \varphi \operatorname{sn}^4 \varphi + \\ + 4e^6 \cos \varphi \operatorname{sn}^6 \varphi + \dots) d\varphi.$$

Integrēšana jāizdara vairākkārt pēc formulas:

$$\int \cos \varphi \operatorname{sn}^n \varphi d\varphi = \frac{1}{n+1} \operatorname{sn}^{n+1} \varphi; \text{ caur to:}$$

$$\int \frac{\cos \varphi}{(1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)^2} \cdot d\varphi = \operatorname{sn} \varphi + \frac{2}{3} e^2 \operatorname{sn}^3 \varphi + \frac{3}{5} e^4 \operatorname{sn}^5 \varphi + \frac{4}{7} e^6 \operatorname{sn}^7 \varphi + \dots$$

un

$$Z = 2\pi b^2 (\operatorname{sn} \varphi + \frac{2}{3} e^2 \operatorname{sn}^3 \varphi + \frac{3}{5} e^4 \operatorname{sn}^5 \varphi + \frac{4}{7} e^6 \operatorname{sn}^7 \varphi + \dots) = \\ = 2\pi a^2 (1-e^2) \cdot \operatorname{sn} \varphi (1 + \frac{2}{3} e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi + \frac{3}{5} e^4 \operatorname{sn}^4 \varphi + \frac{4}{7} e^6 \operatorname{sn}^6 \varphi + \dots), \quad (14)$$

kas izteic platību (laukumu) joslai starp ekvātoru un paralēli noteiktu ar platumu  $\varphi$ .

$$\text{Zemes elipsoīda visas virsas laukums } E = 2Z \Big|_0^{90^\circ} = \\ = 4\pi b^2 (1 + \frac{2}{3} e^2 + \frac{3}{5} e^4 + \frac{4}{7} e^6 + \frac{5}{9} e^8). \quad (15)$$

Aprēķini ar Beseļa elementiem dod:

$$E = 509\ 950\ 714,2 \text{ km}^2.$$

Rādius  $f$  sfērai ar virsas laukumu vienādlielu zemes elipsoida virsas laukumam. — Ja sfēras rādius ir  $f$ , tad virsas laukums ir  $4\pi f^2$ ; lai viņš būtu vienlīdzīgs zemes elipsoida virsas laukumam, ir jābūt spēkā nolīdzinājumam:

$$4\pi f^2 = E,$$

$$\text{kāpēc } f = \sqrt{\frac{E}{4\pi}} = 6\ 370\ 289,511 \text{ m.}$$

Zemes, kā sfēras, vidējais rādius. — Aprēķinu vienkāršošanai ļoti bieži zemes elipsoida vietā var ņemt sfēru un tad pacesļas jautājums par to, kāds jāņem sfēras rādius, lai viņa tuvinātos aprēķinos varētu atvietot zemes elipsoidu.

Pirmā doma būtu ņemt aritmētisko vidējo no elipsoida trim pusasīm, t. i., ņemt

$$r = \frac{a + a + b}{3}.$$

$$\begin{array}{l} \text{Pēc Beseļa } a = 6\ 377\ 397,155 \text{ m} \\ a = 6\ 377\ 397,155 \text{ „} \\ b = 6\ 356\ 078,963 \text{ „} \end{array} \left\{ \frac{a + a + b}{3} = 6,370291,091 \text{ m.} \right.$$

Šo  $r$  nozīmi arī var izvirzīt rindā:

$$\begin{aligned} r &= \frac{2a + b}{3} = \frac{2a + a\sqrt{1 - e^2}}{3} = \frac{a}{3} (2 + 1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 \dots) = \\ &= a (1 - \frac{1}{6}e^2 - \frac{1}{24}e^4 - \frac{1}{48}e^6 - \dots). \end{aligned}$$

Tāļāki ļoti izdevīgi elipsoīdu atvietot ar sfēru, lai tās rādius būtu augšā izvestais  $f$ , t. i. lai atvietojošās sfēras virsas laukums būtu vienāds zemes elipsoida virsas laukumam  $E$ . Tā kā  $f$  skaitliskā nozīme jau zināma, tad

$$f = \sqrt{\frac{E}{4\pi}} \text{ izvirzīsim rindā un ieliksīm } E \text{ nozīmi (15):}$$

Tā kā  $b^2 = a^2(1 - e^2)$ , tad

$$\begin{aligned} f &= a \sqrt{1 - e^2} \sqrt{1 + \frac{2}{3}e^2 + \frac{3}{5}e^4 + \frac{4}{7}e^6 + \frac{5}{9}e^8 + \dots} = \\ &= a \left( 1 - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{8} - \frac{e^6}{16} \right) \left( 1 + \frac{1}{3}e^2 + \frac{11}{45}e^4 + \frac{193}{945}e^6 + \dots \right) = \\ &= a \left( 1 - \frac{1}{6}e^2 - \frac{17}{360}e^4 - \frac{67}{3024}e^6 - \dots \right) = 6370291,091 \text{ m} - \end{aligned}$$

$$-1,577 \text{ m} - 0,004 \text{ m} = 6\,370\,289,510 \text{ m.}$$

Sakarība starp  $r$  un  $f$  ir sekoša:

$$f = r \left( 1 - \frac{1}{180} e^4 - \frac{17}{7560} e^6 \right).$$

Kā trešo tuvināto sfēru ņem tā, lai viņas tilpums būtu vienlīdzīgs zemes elipsoida tilpumam. Šādas sfēras rādiusu nosauksim par  $k$ ; tad viņas tilpums ir  $\frac{4}{3} \pi k^3$ .

$$\text{Zemes elipsoida tilpums} = \frac{4}{3} \pi a^2 b.$$

Tilpumu vienādlielums dod nol.:

$$k^3 = a^2 b, \text{ jeb } k = \sqrt[3]{a^2 b} = a \sqrt[6]{1 - e^2}.$$

Izvirzot pēdejo reizinātāju rindā, dabūjam:

$$k = a \left( 1 - \frac{1}{6} e^2 - \frac{5}{72} e^4 - \frac{55}{1296} e^6 - \dots \right).$$

Aprēķins ar Beseļa elementiem dod:

$$k = 6370291,091 \text{ m} - 7,8828 \text{ m} - 0,0497 \text{ m} = 6\,370\,283,158 \text{ m.}$$

Sakarība ar  $r$  būs sekoša

$$k = r \left( 1 - \frac{1}{36} e^4 - \frac{17}{648} e^6 \right).$$

Mensulas planšetu un karšu lapu rāmji. — Visas valsts uzmerīšanai tās teritoriju parasti sadala ar meridiāniem un paralēlēm vienādsānu (pa meridiāniem) trapēces. Šo trapēču samērus izvēlas atkarīgi no mēroga un ģeogrāfiskā platuma. Mūsu Armijas štāba ģeodezijas-topografijas daļa ir laidusi apgrozībā karšu lapas mērogā 1 : 75 000 ar trapēču malām pa meridiāniem 15' un pa paralēlēm 30'. Tagad pēc 6. zīm. pieņemsim, ka A'B'BA ir viena tāda trapēce, ka viņa norobežota ar meridiānu PA', kuŗa garums — 25°30' no Grinvičas, un meridiānu PA, kuŗa garums — 26°0', ka AA' ir paralēle ar platumu  $\varphi = 57°30'$  un BB' paralēle, noteikta ar platumu 57°45'. Eliptisko meridiāna loku B no ekvatora līdz punktam A dabūsim no tabulām (sk. pielikumā) pēc argumenta  $\varphi = 57°30'$ , t. i.  $B_1 = 6\,374\,932,189 \text{ m}$ ; tāpat dabūsim loka garumu no ekvatora līdz punktam B pēc  $\varphi = 57°45'$  un  $B_2 = 6\,402\,771,675 \text{ m}$ . Starpība  $B_2 - B_1$  dod  $AB = A'B' = 27\,839,486 \text{ m}$ . Šis meridiāna loks mērogā 1 : 75 000 būs 37,119 cm. Pēc pielikumā dotās tabulas garuma grads uz platuma 57°0' ir 60,7647 km un uz platuma 58°0' ir 59,1256 km; interpolējot dabūsim garuma pusgrādu uz paralēles 57°45', t. i.  $BB' =$

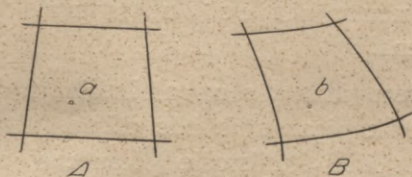
= 29767,69 m un uz parallēles  $57^{\circ}30'$ , loku  $AA' = 29\,972,58$  m, kas mērogā  $1 : 75\,000$  dod  $BB' = 39,69$  cm un  $AA' = 39,96$  cm. Ja aprēķinus izdarīsim pēc formulas, tad iznāks  $BB' = 29768,54$  m un  $AA' = 29973,72$  m, kas pareizāki, jo tabula sastādīta ar lieliem intervāliem.

**4. Mērogi.** — Iedomājoties zemes elipsoida (resp. sfēras) rādius-vektorus (resp. rādiusus) samazinātus  $M$  reiz, dabūsim globu — ķermeni līdzīgu zemes elipsoidam (sfērai). Uz šī globa visi gaļumi būs samazināti  $M$  reiz, bet laukumi (platības)  $M^2$  reiz. Vienai gaļuma vienībai uz globa dabā atbildēs  $M$  gaļumu vienības. Ja uz globa attāļums starp divi punktiem būs  $l$  gaļumu vienības (mm, cm, dm), tad dabā, uz zemes virsas, attāļums starp atbilstošiem punktiem dos  $lM$  tās pašās gaļumu vienībās. Šo konstanto attiecību  $l : lM = 1 : M$ , t. i. kādas līnijas uz globa attiecību pret atbilstošo gaļumu dabā vispār sauc par lineāro mērogu. Attēlojot zemes virsu uz globa, dabū šo lineāro mērogu visur vienādu. Cita lieta būs pie globa virsas projicēšanas uz plakni, t. i. kartes sastādīšanas: mēs nedabūsim vairs visur šo pieņemto mērogu, jo, kā jau bija teikts, sfērisko virsu nav iespējams attīt uz plaknes bez krunkām un pārrāvumiem. Tāpēc nav projekciju, kuŗu mērogs būtu bijis ūz visas kartes vienāds. Mērogs mainās ne tikai pārejot no projekcijas viena punkta uz otru punktu, bet mainās arī uz līnijām, kas iziet no viena un tā pašā punkta dažādos virzienos. Mērogu maiņas, saprotams, ir kartografisko projekciju un viņās sastādīto karšu sliktā īpašība. Viņas gan notiek pakāpeniski, pēc zināmas likumības, un labākas projekcijās nav lielas. Turpmāk izšķīrsim lineāro mērogu zemes virsas projicēšanai uz globa,  $1 : M$  un lineāro mērogu  $m$ , globa projicēšanai uz plaknes, t. i. sastādot karti. Mērogu  $1 : M$  un  $m = 1$  sauksim par galveno lineāro mērogu. Kā redzējam, mērogs  $m$  var būt lielāks vai mazāks par galveno. Šinīs gadījumos viņus sauksim par vietējiem jeb īpatnējiem mērogiem, vai arī tikai vienkārši par mērogiem. Jo mazāka mēroga maiņa, jo projekcija labāka.

Tā tad galvenā starpība starp plānu un karti ir tā, ka plāns ir attēls konstantā, bet karte mainīgā mērogā. Tāpēc saprotams, ka plānā var attēlot tikai nelielu zemes virsas daļu\*), bet kartē — atsevišķas valstis un pat visas zemes virsu. Katrai sfēriskai trapecei A (7. zīm.) uz zemes, norobežotai ar meridiānu un parallēļu lokiem, uz kartes atbilst

\*) No matemātiskā viedokļa plānu nevar izgatavot pat vismazākam zemes gabalam; tikai ņemot vērā zemes lielos samērus un grafisko konstrukciju neizbēgamās kļūdas, nelielu sfēras virsas daļu var uzskatīt par plakni. Tā tad no praktiskā viedokļa plāns būs pareizs tikmēr, kamēr starpības starp sfēras loka gaļumu un atbilstošām chordām un pieskarēm ir mazākas par mēroga

četrstūris B, ar taisn- jeb līklīniju malām un katram punktam a uz zemes virsas atbilst pilnīgi noteikts punkts b uz kartes, pie kam, ja meridiānu un paralēļu tīkls ir pietiekoši biezs, nav grūti noteikt punkta b koordinātas pēc punkta a platuma un garuma. Vispār attēlošanas veids būs pilnīgi noteikts, ja varesim aprēķināt kartes punktam koordinātas x un y pēc atbilstošā punkta ģeografiskām koordinātām  $\lambda$  un  $\varphi$ . Tā tad attēlošanu uz kartes noteiksim ar funkcijām:



7. zīm.

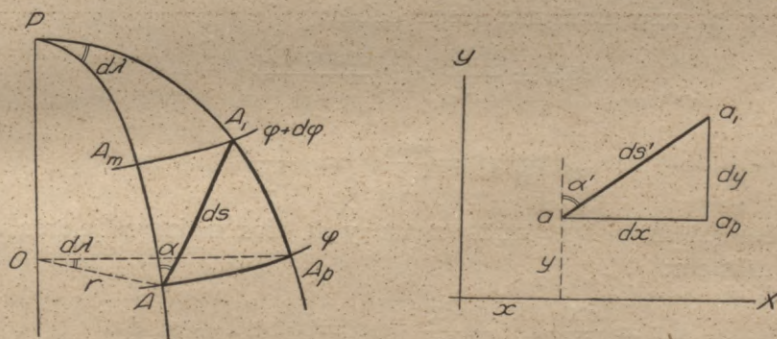
$$x = x(\lambda, \varphi), \quad y = y(\lambda, \varphi). \quad (1)$$

$$\text{jeb } f_1(x, y, \lambda, \varphi) = 0 \text{ un}$$

$$f_2(x, y, \lambda, \varphi) = 0. \quad (2)$$

Saprotams, ka pirmos divi nolīdzinājumus var reizināt ar vienu un to pašu konstantu koeficientu, bez kā mainītos kartes īpašības; šāda koeficienta ieviešana maina vienīgi kartes mērogu. Ir gadījumi, kad funkcijas iznāk vienkāršākas, ja ģeografiskās koordinātas  $\varphi$  vietā ņem polāro attāļumu z. Dažreiz ir ērtāki x un y vietā ņemt polarās koordinātas  $\rho$  un  $\theta$ .

Apskatīsim galvenā mērogā samazinātās zemes sfēras (globa) bezgalīgi mazu elementu  $AA_1$  (8. zīm.) novilkta zem azimuta  $\alpha$ ; ize-



8. zīm.

jas punkta A ģeografiskās koordinātas nosauksim par  $\lambda, \varphi$  un kartografiskās koordinātas par x, y; uz projekcijas atbilstošā elementa noteiktību. Jo mazāks mērogs un jo mazāka uzmērīšanas darbu pielaižamā noteiktība, jo lielāku zemes virsas daļu var uzskatīt par plakni. Ar šo izskaidrojams, ka dažās valstīs nepastāv atšķirības starp karti un plānu, un pieņemts kopējs nosaukums karte.

$aa_1 = ds'$  azimutu nosauksim par  $\alpha'$ . Elementa  $AA'$  lineārais mērogs

$$m = \frac{\text{gaņums uz kartes}}{\text{gaņums uz sfēras}} = \frac{aa_1}{AA_1} = \frac{ds'}{ds}.$$

Kartes bezgalīgi mazas daļas salīdzināšanu ar atbilstošu globa daļu izdara tāpēc, ka tas vieglāki izdarāms, lai gan tas nav visai loģiski; uz šī pamata daži autori dabūto lielumu apzīmē nevis ar  $m$ , bet ar  $r$  un nosauc par gaņumu attiecību (rapport de longueurs) dotā punktā un dotā virzienā.

Elements  $AA_1$  dod platuma pieaugumu  $d\varphi$  un atbilstošs meridiāna elements  $A_1A_p = R \cdot d\varphi$ ; gaņuma pieaugums būs  $d\lambda$  un paralēles elements  $AA_p = r \cdot d\lambda = R \cdot \cos\varphi \cdot d\lambda$ . Atbilstošie pieaugumi uz projekcijas būs  $a_1a_p = dy$  un  $aa_p = dx$ .

Uz Pitagora teoremas pamata

$$\overline{aa_1}^2 = (ds')^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \text{ un}$$

$$\overline{AA_1}^2 = (ds)^2 = (R d\varphi)^2 + (R \cos\varphi d\lambda)^2.$$

$$\text{Tāpēc } m^2 = \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{(R d\varphi)^2 + (R \cos\varphi d\lambda)^2}. \quad (3)$$

Pēdējā izteiksme ņemta kvadrātā vienīgi ērtības dēļ, lai nebūtu darišana ar radikāliem.

No tā paša zīmējuma viegli dabūt:

$$\text{tg } \alpha = \frac{AA_p}{AA_m} = \frac{\cos\varphi d\lambda}{d\varphi}. \quad (4)$$

$$\text{un } \text{tg } \alpha' = \frac{aa_p}{a_1a_p} = \frac{dx}{dy}. \quad (5)$$

No (1) formulām, kurās  $x$  un  $y$  ir divu mainīgo lielumu atkarīgie rakstam:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \lambda} \cdot d\lambda + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot d\varphi = p \cdot d\lambda + q \cdot d\varphi \quad (6)$$

$$\text{un } dy = \frac{\partial y}{\partial \lambda} \cdot d\lambda + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot d\varphi = p' \cdot d\lambda + q' \cdot d\varphi, \quad (7)$$

kur  $p$ ,  $q$ ,  $p'$  un  $q'$  ievesti vienkāršības dēļ parcielo atvasināto apzīmēšanai; kāpēc

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = p; \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = q; \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = p' \text{ un } \frac{\partial y}{\partial \varphi} = q'. \quad (7')$$

Ar šiem apzīmējumiem:

$$m^2 = \frac{(p^2 + p'^2)(d\lambda)^2 + (q^2 + q'^2)(d\varphi)^2 + 2(pq + p'q')d\lambda \cdot d\varphi}{(R d\varphi)^2 + (R \cos \varphi d\lambda)^2}. \quad (8)$$

No šīs formulas redzams, ka mērogs ir atkarīgs no (1) jeb (2) funkciju veida un punkta atrašanās vietas uz zemes.

Uz ekvatora, kur  $\varphi = 0$ ,

$$m^2 = \frac{(p^2 + p'^2)(d\lambda)^2 + (q^2 + q'^2)(d\varphi)^2 + 2(pq + p'q')d\lambda \cdot d\varphi}{R^2 [(d\varphi)^2 + (d\lambda)^2]}$$

un uz pola, kur  $\varphi = 90^\circ$ ,

$$m^2 = \frac{p^2 + p'^2}{R^2} \left(\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)^2 + \frac{q^2 + q'^2}{R^2} + \frac{2(pq + p'q')}{R^2} \cdot \frac{d\lambda}{d\varphi}.$$

Lai izpētītu mēroga izmaiņas jeb alterācijas projekcijas kautkāda punktā, ievēdīsim mēroga formulā azimutu  $\alpha$ . No (4) izteiksmes ņemsim  $d\lambda = \frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot d\varphi}{\cos \varphi}$  un ievietosim (8) formulā; pēc vienkāršiem pārveidojumiem iznāk:

$$m^2 = \frac{p^2 + p'^2}{(R \cos \varphi)^2} \cdot \operatorname{sn}^2 \alpha + \frac{q^2 + q'^2}{R^2} \cdot \cos^2 \alpha + \frac{pq + p'q'}{R^2 \cos \varphi} \cdot \operatorname{sn} 2\alpha. \quad (9)$$

Arī no šīs formulas redzams, ka mēroga lielums ir atkarīgs no (1) jeb (2) funkciju veida, t. i. likuma pēc kāda projekciju konstruē, un punkta atrašanās vietas uz zemes, jo parcelās atvasinātās  $p$ ,  $p'$ ,  $q$ ,  $q'$  ir atkarīgas no ņemtā punkta gaŗuma un platuma. Bez tam vienā un tanī pašā punktā mērogs mainās atkarībā no elementa  $AA_1$  azimuta  $\alpha$ .

Mēroga (8) un (9) formulas izvestas gadījumā, kad zeme pieņemta par sfēru un punkta  $A$  koordinātas ir platums un gaŗums.

Gadījumā, kad punkts uz sfēras noteikts ar polārām sfēriskām koordinātām, mēroga formula izvesta 8 §.

Analoģiski izved mēroga formulu arī tanī gadījumā, kad zemi uzskata par sferoidu. Tad bezgalīgi mazs elements pa meridiānu būs

$$M d\varphi = \frac{a(1-e^2)d\varphi}{\sqrt{(1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)^3}}, \quad (9')$$

$$\text{tāds pats elements pa parallēli } r d\lambda = \frac{a \cos \varphi d\lambda}{\sqrt{1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi}} \quad (9'')$$

$$\text{un } \operatorname{tg} \alpha = \frac{(1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi) \cos \varphi d\lambda}{(1-e^2) d\varphi}. \quad (10)$$

$$\text{Elements } \overline{AA'}^2 = \frac{a^2 (1-e^2) (d\varphi)^2}{(1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)^3 \cos^2 \alpha} \text{ un}$$

$$m^2 = \frac{[(p^2+p'^2)(d\lambda)^2 + (q^2+q'^2)(d\varphi)^2 + 2(pq+p'q')d\lambda d\varphi](1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)^3}{[a \cos \varphi d\lambda (1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)]^2 + [a(1-e^2)d\varphi]^2} \text{ jeb}$$

$$m^2 = \frac{(p^2+p'^2)(1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)}{a^2 \cos^2 \varphi} \operatorname{sn}^2 \alpha + \frac{(q^2+q'^2)(1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)^3}{a^2 (1-e^2)^2} \cos^2 \alpha + \\ + \frac{(pq+p'q')(1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)^2}{a^2 (1-e^2) \cos \varphi} \operatorname{sn} 2\alpha. \quad (11)$$

Ieliekot (9) un (11) formulā  $\alpha=0^\circ$ , dabūsim punktā A mērogu  $m_m^2$  pa meridiānu:

$$\text{sfērai } m_m^2 = \frac{q^2+q'^2}{R^2} \text{ un elipsoidam } m_m^2 = \frac{(q^2+q'^2)(1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)^3}{a^2 (1-e^2)^2}.$$

Ja tanis pašās formulās ieliksīm  $\alpha=90^\circ$ , tad dabūsim mērogu  $m_p^2$  uz parallēles punktā A:

$$\text{sfērai } m_p^2 = \frac{p^2+p'^2}{R^2 \cos^2 \varphi} \text{ un elipsoidam } m_p^2 = \frac{(p^2+p'^2)(1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)}{a^2 \cos^2 \varphi}.$$

Ievietojot šīs mēroga nozīmes pa meridiāniem un parallēlēm attiecīgās mērogu formulās (9) un (11), dabūsim:

$$\text{sfērai } m^2 = m_p^2 \operatorname{sn}^2 \alpha + m_m^2 \cos^2 \alpha + \frac{pq+p'q'}{R^2 \cos \varphi} \operatorname{sn} 2\alpha. \quad (12)$$

un sferoidam:

$$m^2 = m_p^2 \operatorname{sn}^2 \alpha + m_m^2 \cos^2 \alpha + \frac{(pq+p'q')(1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)^2}{a^2 (1-e^2) \cos \varphi} \operatorname{sn} 2\alpha. \quad (13)$$

Mērogi divos stateniskos virzienos. — Pēc (9) un (11) formulām noteiksim mērogu  $m_3$  un  $m_4$  divi stateniskiem virzieniem, dotiem ar azimutiem  $\alpha_3$  un  $\alpha_4$ , pieņemot  $\alpha_3 = \alpha_4 \pm 90^\circ$ .

Saskaitot mērogu kvadrātus, dabūsim

$$\text{sfērai } m_3^2 + m_4^2 = \frac{p^2+p'^2}{(R \cos \varphi)^2} + \frac{q^2+q'^2}{R^2} \text{ un}$$

sferoidam

$$m_3^2 + m_4^2 = \frac{(p^2+p'^2)(1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)}{a^2 \cos^2 \varphi} + \frac{(q^2+q'^2)(1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)^3}{a^2 (1-e^2)^3}.$$

Tā kā vienam un tam pašam punktam uz sfēras jeb sferoida abu pēdējo nolīdzinājumu labā pusē ir konstants lielums, tad: „Pa taisnā sfēriskā jeb sferoidiskā leņķa malām lineāro mērogu kvadrātu summa ir konstants lielums ikkurā sfēras jeb sferoida punktā“, jeb „Pa taisnā sfēriskā jeb sferoidiskā leņķa malām lineāro mērogu kva-

drātu summa nav atkarīga no taisnā leņķa orientācijas uz sfēras jeb sferoida“ (I. teor.).

Nemot vērā mērogu nozīmes pa meridiāniem un paralelēm, dabūsim kā sfērai, tā sferoidam:

$$m_3^2 + m_4^2 = m_p^2 + m_m^2. \quad (14)$$

Vislielākais un vismazākais mērogi. — Lai izpētītu mēroga maiņas vienā un tanī pašā zemes virsas punktā, atkarībā no virziena, resp. azimuta maiņas ņemsim (9) un (11) izteiksmes un aprēķināsim to vislielākās un vismazākās nozīmes. Mēroga kvadrāta pirmā atvasinātā pēc  $\alpha$  būs:

$$\text{sfērai: } \frac{d(m^2)}{d\alpha} = \frac{p^2 + p'^2}{R^2 \cos^2 \varphi} \operatorname{sn} 2\alpha - \frac{q^2 + q'^2}{R^2} \operatorname{sn} 2\alpha + \frac{2(pq + p'q')}{R^2 \cos \varphi} \cos 2\alpha$$

un sferoidam

$$\begin{aligned} \frac{d(m^2)}{d\alpha} = & \frac{(p^2 + p'^2)(1 - e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)}{a^2 \cos^2 \varphi} \operatorname{sn} 2\alpha - \frac{(q^2 + q'^2)(1 - e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)^3}{a^2 (1 - e^2)^2} \operatorname{sn} 2\alpha + \\ & + \frac{2(pq + p'q')(1 - e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)^2}{a^2 (1 - e^2) \cos \varphi} \cos 2\alpha. \end{aligned}$$

Mērogs būs vismazākais jeb vislielākais tanī gadījumā, kad pirmā atvasinātā pēc  $\alpha$  būs nulle. Tādā gadījumā iznāk sfērai

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2(pq + p'q') \cos \varphi}{(q^2 + q'^2) \cos^2 \varphi - (p^2 + p'^2)} \quad (15)$$

un sferoidam:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2(pq + p'q')(1 - e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)^2 (1 - e^2) \cos \varphi}{(q^2 + q'^2)(1 - e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)^3 \cos^2 \varphi - (p^2 + p'^2)(1 - e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)(1 - e^2)^2}. \quad (16)$$

Tā kā  $\operatorname{tg} 2(\alpha \pm 90^\circ) = -\operatorname{tg} 2\alpha$ , tad pēc (15) vaj (16) nol. iznāk divi virzieni ar azimutiem  $\alpha$  un  $\alpha \pm 90^\circ$ , kas apmierina šos abus nolīdzinājumus. Tā tad ir tiesība konstatēt, ka vienā un tanī pašā punktā divos virzienos mērogs var būt kā maksimums, tā minimums un šie abi virzieni ir stateniiski viens pret otru. Maksimuma nedz minimuma nebūs vienīgi tanī gadījumā, kad virziens būs nenoteikts, kad  $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{0}{0}$ ; tad visos no viena punkta izejošos virzienos mērogs būs vienāds. Sīkākī šo jautājumu apskatīsim vēlāk, bet tagad, lai noskaidrotu, kad mērogs būs maksimums un kad minimums, ņemsim mēroga otro atvasināto pēc azimuta  $\alpha$ ; sfērai

$$\frac{d^2(m^2)}{d\alpha^2} = 2 \cos 2\alpha \left[ \frac{p^2 + p'^2}{R^2 \cos^2 \varphi} - \frac{q^2 + q'^2}{R^2} - \frac{2(pq + p'q')}{R^2 \cos \varphi} \operatorname{tg} 2\alpha \right] \text{ un}$$

sferoidam

$$\frac{d^2(m^2)}{d\alpha^2} = 2 \cos 2\alpha \left[ \frac{(p^2 + p'^2)(1 - e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)}{a^2 \cos^2 \varphi} - \frac{(q^2 + q'^2)(1 - e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)^3}{a^2 (1 - e^2)} - \frac{2(pq + p'q')(1 - e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)^3}{a^2 (1 - e^2) \cos \varphi} \operatorname{tg} 2\alpha \right].$$

Ņemsim divi savā starpā stateniskus virzienus ar azimutiem  $\alpha_1$  un  $\alpha_2 = \alpha_1 \pm 90^\circ$ ; mērogu pirmā virzienā nosauksim par  $m_1$  un otrā — par  $m_2$ ; tad, pieņemot lielumu kvadrātiņkāvās par pozitīvu, sfērai un sferoidam iznāks:

$$\frac{d^2(m_1^2)}{d\alpha_1^2} = + 2 \cos 2\alpha_1 [ \dots ] > 0 \text{ un}$$

$$\frac{d^2(m_2^2)}{d\alpha_2^2} = - 2 \cos 2\alpha_2 [ \dots ] < 0.$$

Ja lielumi kvadrātiņkāvās būs negatīvi, tad

$$\frac{d^2(m_1^2)}{d\alpha_1^2} < 0 \text{ un } \frac{d^2(m_2^2)}{d\alpha_2^2} > 0.$$

Tā tad divi stateniskiem virzieniem, kuļiem azimuts noteikts pēc (15) vai (16) formulas, mēroga otrā atvasinātā pēc  $\alpha$  vienam virzienam ir pozitīva un otram negatīva; tas norāda, ka vienā virzienā mērogs ir vismazākais un otrā vislielākais. Šis konstatējums noved pie sekošas teorēmas: „Divi virzieni, pa kuļiem lineāram mērogam ir vislielākās izmaiņas (alterācijas) uz sfēras un sferoida, ir stateniski (II. teorēma).

Tā tad projekcijas ikkurā punktā lineārie mērogi, ņemot vispārīgi, ir dažādi, bet vienmēr ir divi uz sfēras jeb sferoida savā starpā stateniski virzieni, pa kuļiem mērogam ir vislielākā un vismazākā nozīme, izņemot vienīgi gadījumu, kad (15) resp. (16) formula dod nenoteiktu izteiksmi. Šos, savā starpā uz sfēras jeb sferoida stateniskos virzienus, ar vislielāko un vismazāko mērogu sauc par galveniem sfēras vai sferoida virzieniem. Pēc Tisso (Tissot) mēroga vislielāko nozīmi parasti apzīmē ar  $a$  un vismazāko ar  $b$ .

Sakars starp azimutiem uz sfēras jeb sferoida un atbilstošiem azimutiem uz projekcijas. — Ievietojot (5) formulā  $dx$  un  $dy$  nozīmes no (6) un (7) formulas, dabūsim:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{pd\lambda + qd\varphi}{p'd\lambda + q'd\varphi}. \quad (17)$$

Atvietojojot te  $d\varphi$  jeb  $d\lambda$  no (4) formulas pēc vienkāršiem pārveidojumiem, dabūsim:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{p \operatorname{tg} \alpha + q \cos \varphi}{p' \operatorname{tg} \alpha + q' \cos \varphi}. \quad (18)$$

Attiecīgu formulu sferoidam dabūsim atvietojojot (17) formulu  $d\varphi$  jeb  $d\lambda$  nozīmi no (10) nol.; pēc pārveidojumiem iznāk:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{p(1-e^2) \operatorname{tg} \alpha + q(1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi) \cos \varphi}{p'(1-e^2) \operatorname{tg} \alpha + q'(1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi) \cos \varphi}. \quad (19)$$

Leņķis starp galveniem virzieniem uz projekcijas. — Izpētīsim tagad, zem kāda leņķa uz projekcijas krustojas virzieni, atbilstoši galveniem virzieniem uz sfēras.

Ņemsim uz sfēras dotā punktā abas galvenās pieskares un viņu azimutus nosauksim par  $\alpha_1$  un  $\alpha_2$ ; tā kā tie savā starpā stateniski, tad  $\alpha_2 = \alpha_1 \pm 90^\circ$ . Uz projekcijas atbilstošo virzienu azimutus nosauksim par  $\alpha_1'$  un  $\alpha_2'$ . Azimuti  $\alpha_1$  un  $\alpha_2$  ir noteicami pēc (15) formulas...

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \operatorname{tg} 2\alpha_2 = \frac{2(pq + p'q') \cos \varphi}{(q^2 + q'^2) \cos^2 \varphi - (p^2 + p'^2)} \quad \text{un attiecīgie}$$

azimuti  $\alpha_1'$  un  $\alpha_2'$  uz projekcijas pēc (18) formulas:

$$\operatorname{tg} \alpha_1' = \frac{p \operatorname{tg} \alpha_1 + q \cos \varphi}{p' \operatorname{tg} \alpha_1 + q' \cos \varphi} \quad \text{un} \quad \operatorname{tg} \alpha_2' = \frac{p \operatorname{tg} \alpha_2 + q \cos \varphi}{p' \operatorname{tg} \alpha_2 + q' \cos \varphi}. \quad \text{Izliekot pēdējā}$$

formulā  $\alpha_2 = \alpha_1 \pm 90^\circ$  dabūsim:

$$\operatorname{tg} \alpha_2' = \frac{p \operatorname{cotg} \alpha_1 - q \cos \varphi}{p' \operatorname{cotg} \alpha_1 - q' \cos \varphi}. \quad (20)$$

Tagad reizināsim  $\operatorname{tg} \alpha_1'$  ar  $\operatorname{tg} \alpha_2'$  no (20) formulas:

$$\operatorname{tg} \alpha_1' \cdot \operatorname{tg} \alpha_2' = \frac{p^2 + pq \cos \varphi (\operatorname{cotg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_1) - q^2 \cos^2 \varphi}{p'^2 + p'q' \cos \varphi (\operatorname{cotg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_1) - q'^2 \cos^2 \varphi}.$$

Atvietosim  $\operatorname{cotg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_1$  ar  $2 \operatorname{cotg} 2\alpha_1 = \frac{2}{\operatorname{tg} 2\alpha_1}$  un  $\operatorname{tg} 2\alpha_1$  ar (15) izteiksmi, kas noteic galveno skaruļu azimutu tangensu; dabūsim

$$\operatorname{tg} \alpha_1' \operatorname{tg} \alpha_2' = -1.$$

No šejienes  $\operatorname{tg} \alpha_2' = -\operatorname{cotg} \alpha_1' = \operatorname{tg} (\alpha_1' \pm 90^\circ)$ ; tāpēc

$$\alpha_2' = \alpha_1' \pm 90^\circ.$$

Iznākums rāda, ka uz projekcijas ar azimutiem  $\alpha_1'$  un  $\alpha_2'$  noteiktie virzieni ir stateniski savā starpā. Tāpēc:

„Uz projekcijas, galvenām pieskārēm atbilstošie virzieni ir statiski savā starpā“. (III. teorēma.)

Trešo teorēmu mēs izvedām pieņemot zemi par sferu. Izrādās, ka teorēma ir spēkā arī tad, ja zemi pieņem par sferoidu. Darba gaita ir pilnīgi analogiska, bet no paša pierādījuma te vietas trūkuma dēļ jāatturas.

Galvenie virzieni, vispār ņemot, nesakrīt ar meridiānu un paralēļu virzienu, izņemot tikai tās projekcijas, kurām meridiāni un paralēles krustojas zem taisniem leņķiem. Tāpēc, vispārējā gadījumā uz kartes meridiāna elementa projekcija uz  $x$  asi jāaprēķina pēc formulas  $\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot d\varphi = q \cdot d\varphi$  un uz  $y$  asi pēc formulas  $\frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi = q' \cdot d\varphi$ . Attiecīgi uz kartes paralēles elementa projekcija uz  $x$  asi būs:  $\frac{\partial x}{\partial \lambda} \cdot d\lambda = p d\lambda$

$$\text{un uz } y \text{ asi } \frac{\partial y}{\partial \lambda} \cdot d\lambda = p' \cdot d\lambda.$$

Rezimēsīm no I, II un III teorēmas gūtās atziņas:

Atzīmēsīm uz sfēras jeb sferoida taisnā leņķa virsotni un malas; uz leņķa malām lineāro mērogu kvadrātu summa nav atkarīga no taisnā leņķa orientācijas.

Taisno leņķi ir iespējams orientēt tā, ka viņš uz kartes arī ir taisns; tad pa šī leņķa malām visvairāk mainās garumi.

Piemērs. — Pieņemsim, ka punkts uz kartes dots ar koordinātām

$$x = R \cos \varphi \cos \lambda = F_1(\lambda, \varphi),$$

$$y = R \cos \varphi \sin \lambda = F_2(\lambda, \varphi). \quad (\text{Polārā ortogr. proj.; sk. (66) form.}).$$

Tad  $p = -R \cos \varphi \sin \lambda$ ;  $q = -R \cos \lambda \sin \varphi$ ;  $p' = R \cos \lambda \cos \varphi$ ;  $q' = -R \sin \lambda \sin \varphi$  un pēc (9) formulas:

$$m = \sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \varphi \cos^2 \alpha}.$$

Tā kā  $pq + p'q' = 0$ , tad pēc (15) formulas  $\alpha_1 = 0$  un  $\alpha_2 = 90^\circ$ ; tas nozīmē, ka galvenie mērogi ir meridiānu un paralēļu virzienā, pie kam  $m_m = \sin \varphi$  un  $m_p = 1$ .

Uz ekvatora  $m_m = 0$ , bet uz pola  $m_m = 1$ . Mēroga kvadrāta pirmā atvasinātā pēc  $\alpha$  būs:  $\frac{d(m^2)}{d\alpha} = \sin 2\alpha \cos^2 \varphi$ . Lai zinātu, kad būs maksimums un kad minimums, ņemsim otro atvasināto:

$$\frac{d^2(m^2)}{d\alpha^2} = 2 \cos^2 \varphi \cos 2\alpha.$$

Šī atvasinātā būs pozitīva pie  $\alpha = 0$  un negatīva pie  $\alpha = 90^\circ$ ; tas nozīmē, ka mērogs būs vismazākais pa meridiānu un vislielākais pa paralēli izņemot polu, kur mērogs visos virzienos ir 1.

Vienādleņķu projekciju mērogi. — (15) vai (16) formula dod galveno virzienu azimutus, izņemot gadījumu, kad labā pusē daļas skaitītājs un saucējs vienā un tanī pašā laikā ir nulle, t. i., kad pēc (15) formulas

$$\begin{aligned} 2(pq + p'q') \cos \varphi &= 0 \\ \text{un } (q^2 + q'^2) \cos^2 \varphi - (p^2 + p'^2) &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Šinī gadījumā galveno virzienu azimuts iznāk nenoteikts, kas nozīmē, ka pastāvot (21) nol. mēroga maksimuma un minimuma nav, un ka katru virzienu var uzskatīt par galveno. Ar šiem nol. (9) formula dod:

$$m^2 = \frac{p^2 + p'^2}{R^2 \cos^2 \varphi} = \frac{q^2 + q'^2}{R^2}. \quad (22)$$

Kā redzam, tad mērogs nav atkarīgs no azimuta  $\alpha$ ; uz līnijām, kuŗas iziet no viena punkta dažādos virzienos, mērogs ir vienāds; mērogs mainās tikai ar  $\varphi$  maiņu, t. i. pārejot no viena punkta uz otru. Projekcijas ar šādām īpašībām sauc par konformām, leņķu pareizām jeb vienādleņķu projekcijām, jo var pierādīt, ka viņās leņķi attēlojas dabiskā lielumā.

Uzskatot (21) sistēmā  $p'$  un  $q'$  par nezināmiem un atrisinot šo sistēmu, dabūsim divi lietiskas saknes:

$$q' = + \frac{p}{\cos \varphi}, \quad p' = -q \cos \varphi \quad \text{un} \quad q' = - \frac{p}{\cos \varphi}, \quad p' = +q \cos \varphi.$$

Nemsim piemēram šo sakņu pirmo pāri un ievietosim (18) formula;

$$\text{iznāk } \operatorname{tg} \alpha' = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \frac{q}{p} \cos \varphi}{1 - \frac{q}{p} \cos \varphi \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \omega}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \omega} = \operatorname{tg} (\alpha + \omega), \quad \text{kur } \omega \text{ ir}$$

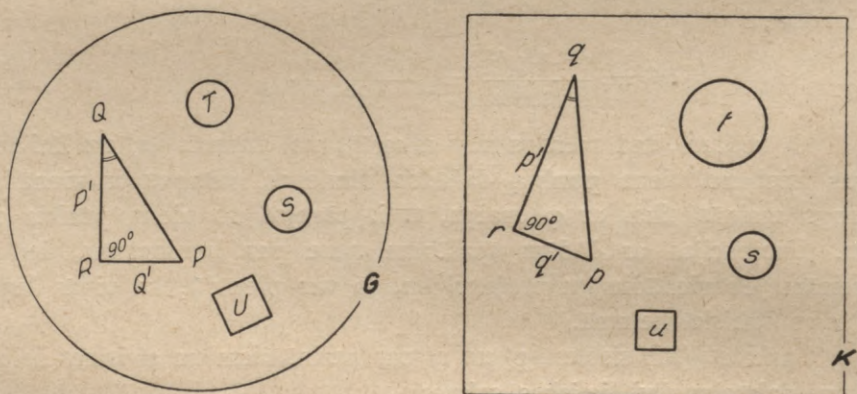
leņķis, noteikts ar nol.  $\operatorname{tg} \omega = \frac{q}{p} \cos \varphi$ . Šis leņķis  $\omega$  projekcijas dotam punktam ir konstants un tā kā  $\alpha' = \alpha + \omega$ , tad tas norāda, ka uz projekcijas visi virzieni ir pagriezti par leņķi  $\omega$ , attiecībā pret sfēras azimutu.

Ja uz sfēras atzīmēsim punktu un novilksim divi patvaļīgus virzienus zem azimutiem  $\alpha_1$  un  $\alpha_2$ , tad uz kartes šos abus virzienus attēlos divi līnijas, kuŗas ar  $y$  asi veidos leņķus  $\alpha_1' = \alpha_1 + \omega$  un  $\alpha_2' =$

$= \alpha_2 + \omega$ . Tā kā  $\alpha_2' - \alpha_1' = \alpha_2 - \alpha_1$ , tad tas norāda, ka vienādleņķu projekcijās leņķi uz kartes vienādi ar attiecīgiem leņķiem uz sfēras.

Lai labāki ilustrētu vienādleņķu projekciju, iedomāsimies uz globa G (9. zīm.) ļoti mazu taisnleņķa trīsstūri PQR, divi ļoti mazus vienādus aplis S un T un ļoti mazu kvadrātu U; pieņemsim, ka uz kartes K atbilstošās figūras būs pqr, s, t un u. Tā kā vienādleņķu projekcijā mērogi visos no viena punkta izejošos virzienos ir vienādi, un leņķi starp šiem virzieniem vienādi ar atbilstošiem leņķiem uz sfēras, tad, piemēram, starp trīsstūriem uz kartes un globa, pastāvēs sakarība:

$$\frac{qr}{QR} = \frac{qp}{QP} \text{ un } \sphericalangle Q = \sphericalangle q.$$



9. zīm.

No tā secinām, ka trīsstūri PQR un pqr ir līdzīgi.

Tāpēc pilnīgi pamatots ir apgalvojums, ka uz vienādleņķu projekcijām bezgalīgi mazas figūras ir līdzīgas atbilstošām figūrām uz globa; saīsināti, kaut gan tas nav pietiekoši skaidri, mēdz teikt, ka vienādleņķu projekcijas piepatur bezgalīgi mazu figūru līdzību. Tā kā uz līnijām, kas novilkas no viena un tā paša punkta, mērogi būs vienādi, tad ļoti mazie apli T un S attēlosies uz projekcijas arī kā apli t un s, bet pēdējo rādiusi, vispār ņemot, būs dažādi, jo mērogs var mainīties pie pārejas no viena punkta uz otru. Kvadrāts U attēlosies arī kā kvadrāts u.

Vienādlielo projekciju mērogi. — Iedomāsimies atkal ļoti mazu taisnleņķa trīsstūri PQR uz sfēras, bet orientētu tā, ka kātetes PR un QR iet galvenos virzienos. Uz kartes tāds trīsstūris visās projekcijās attēlosies kā taisnleņķa trīsstūris pqr, kuŗa kātete

$p' = aP'$  un  $q' = bQ'$ , kur  $a$  un  $b$  ir mērogi galvenos virzienos, t. i. maksimālais un minimālais mērogi taisnā leņķa virsotnē  $R$ . Elementārā sfēriskā trīsstūra  $PQR$  laukums ir  $\frac{1}{2}P'Q'$ , bet attēla — plakana trīsstūra  $pqr$  laukums uz kartes — būs  $\frac{1}{2}p'q'$ . Abu laukumu attiecība ir:

$$\frac{\frac{1}{2} p'q'}{\frac{1}{2} P'Q'} = a b.$$

Tā tad kartes ļoti maza laukuma attiecība pret atbilstošu laukumu uz sfēras, vispārīgi, ir mainīgs lielums. Lai šī attiecība pa visu karti būtu konstanta, t. i., lai attēls būtu laukumu pareizs, jeb ekvivalents, tad katrā punktā galveno mērogu reizinājumam jābūt konstantam; jāpastāv nol.  $ab = \text{const}$ .

**5. Indikatrīsa jeb rādītāja.** — Pārejot no punkta  $A$  uz bezgalīgi tuvu punktu  $A_1$  (8. zīm.) koordinātas  $\varphi, \lambda$  dabū pieaugumu  $d\varphi, d\lambda$ ; platuma maiņai atbilstošais meridiāna elements ir  $Md\varphi$  un paralēles elements  $r d\lambda$ , kur saskaņā ar (9') un (9'') nol.  $M$  ir meridiāna līkuma rādius sferoidam un  $r$  paralēles rādius; pieaugumus  $d\varphi$  un  $d\lambda$  saista nolīdzinājums:

$$(ds)^2 = M^2 (d\varphi)^2 + r^2 (d\lambda)^2. \quad (23)$$

Izslēdzot no (6) un (7) nol.  $d\varphi, d\lambda$  un ieliekot aplēstās nozīmes (23) nol. dabūjam sekošu nol.:

$$(dx)^2 (M^2 p'^2 + r^2 q'^2) + (dy)^2 (M^2 p^2 + r^2 q^2) - 2 \cdot dx \cdot dy (M^2 pp' + r^2 qq') = (p'q - pq')^2 (ds)^2. \quad (24)$$

Šis kvadrātnolīdzinājums attiecībā uz  $dx$  un  $dy$  noteic elipsi, izņemot īpatnējus gadījumus, kurus apskatīsim vēlāk.

Tāpēc bezgalīgi mazam aplim, novilkta uz sferoīda jeb sfēras ar rādiusu  $ds$ , uz kartes atbilst bezgalīgi maza elipse, neatkarīgi no tā, kādas ir funkcijas  $x(\varphi, \lambda)$  un  $y(\varphi, \lambda)$ .

Dalot (24) nol. abas puses ar  $(ds)^2$  elipses samēri iznāks galīgi lielumi, un pie tam bezgalīgi mazā apļa rādius  $ds$  būs pieņemts par mēra vienību. Šo elipsi sauc par Tiso indikatrīsu un tās samēri un veids atkarājas no projekcijas veida.

Iepriekšējie slēdzieni ir spēkā tikai tad, ja (24) nol. ieejošās parcelās atvasinātās  $p, q, p', q'$  ir nepārtrauktas pie projekcijas punkta  $a$  (8. zīm.) un ap to. Ja šis noteikums nav izpildīts, tad indikatrīsas elipses nav, un punkts  $a$  ir attēla īpatnējs jeb savrupš punkts (un point singulier). Šis noteikums ir nepieciešams, lai laukuma elementa attēlošana būtu nepārtraukta ap virsas kaut-kādu punktu  $A$ , bet viņš ir nepietiekošs tanī gadījumā, ja punkts  $A$  ir viens pola punkts, kad rodas citādas savādības.

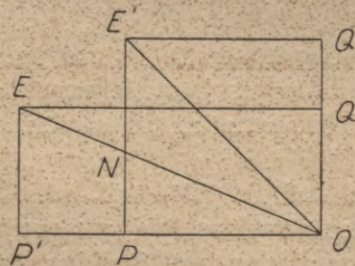
Lai to paskaidrotu, apskatīsim ziemeļpolu, kur  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  un  $\lambda$  var būt ikkuŗš patvaļīgs lielums; (1) formulas, kas noteic projekcijas sistēmu, tad iznāk:

$$\left. \begin{aligned} x &= x\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right), \\ y &= y\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Divi šādi nol., kas satur patvaļīgu parametru  $\lambda$ , vispār vairs nedod punktu, bet līkni. Šāda gadījuma piemēri būs visās cilindriskās projekcijās. Ir skaidrs, ka šīnī gadījumā, ap polu uz zemes virsas novilktais bezgalīgi mazs aplis, uz plaknes attēlosies kā galīga likne un šīnī punktā Tiso indikatrisas nebūs.

Lai pols attēlotos uz projekcijas kā viens vienīgs punkts, tad ir nepieciešams, lai pie  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $x$  un  $y$  būtu neatkarīgi no  $\lambda$ ; tas nozīmē, kā šīnī punktā jābūt  $p = 0, p' = 0$ .

Pieņemsim, ka šie noteikumi izpildīti. Lai uz plāna dabūtu bezgalīgi mazu apli  $\varphi = \frac{\pi}{2} - ds$ , tad nepietiks ar to, ja (6) un (7) formulās izstrīposim  $p$  un  $p'$ ; tā kā  $\lambda$  var pieņemt visas nozīmes no 0 līdz  $2\pi$ , tad  $d\lambda$  nevar uzskatīt par diferenciālu; bez tam polam parcielās atvasinātās  $q$  un  $q'$  nav konstantas, bet ir  $\lambda$  funkcijas. Tā tad, lai dabūtu polam bezgalīgi tuvo paralēles pārveidojumu, ir jāgriežas pie (1) formulām pašām, liekot  $\varphi = \frac{\pi}{2} - ds$ . Šis pārveidojums vispār nedos elipsi ar centru  $a$ , bet kaut-kādu līkni, piemēram, nenslēgtu loku u. t. t. Visos šīnīs gadījumos Tiso indikatrisas nebūs.



10. zīm.

Pieņemsim, ka  $E'$  ir bezgalīgi tuvs punkts punktam  $O$  uz zemes virsas (10. zīm.) un, ka  $OPE'Q$  ir bezgalīgi mazs taisnstūris, kuŗa malas iet galveno skaruļu virzienos, pie kam  $OE'$  ir šādā taisnstūra diagonāle. Karti ar šī taisnstūra attēlu resp. projekciju uz plaknes pārvietosim un griezīsim tikmēr, kamēr malu  $OP$  un  $OQ$  projekcijas sakrīt ar pašām malām jeb viņu turpinājumiem, kur tas nepieciešams; pieņemsim, ka  $OP'EQ'$  ir kartes taisnstūris, atbilstošs zemes virsas taisnstūrim  $OPE'Q$ . Taiŗņu  $OE$  un  $PE'$  krustojumu apzīmēsim ar  $N$ .

Kā redzams, leņķis starp zemes elementu  $OE'$  un atbilstošo kartes elementu  $OE$  ir atkarīgs no divi līniju  $NP$  un  $E'P$  attiecības. Nosaucot garumu attiecības virzienos  $OP$  un  $OQ$  par  $a$  un  $b$ , t. i.

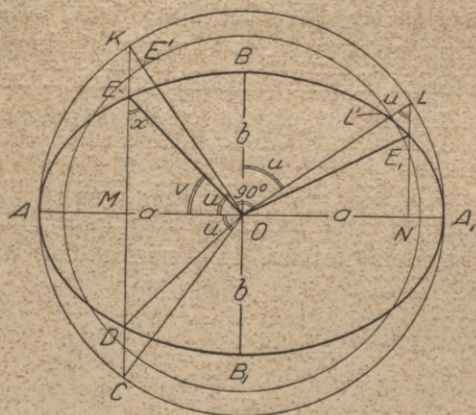
$$\text{liekot } \frac{OP'}{OP} = a, \frac{OQ'}{OQ} = b, \text{ iznāk } \frac{NP}{EP'} = \frac{OP}{OP'} = \frac{1}{a}, \frac{E'P}{EP'} = \\ = \frac{OQ}{OQ'} = \frac{1}{b} \text{ un, dalot priekšpēdējo izteiksmi ar pēdējo, } \frac{NP}{E'P} = \frac{b}{a}.$$

Tālāki redzams, ka

$$\frac{OE}{ON} = \frac{OP'}{OP} = a.$$

Ja ar rādiesu  $OE'$  uz zemes ap punktu  $O$ , kā centru novilk-sim aploci, tad uz projekcijas tā attēlosies kā elipse, kuŗas asis būs uz galvenām pieska-rēm; pieņemot aploces rādiesu par mēru vienību, elipses pus-asu garums būs  $a$  un  $b$ .

Katrā punktā šī elipse dod attiecīgās projekcijas indika-trīsu.



11. zīm.

Lai nebūtu jāprojicē ortogonāli aploces punkts  $E'$ , kas dod elipses punktu  $N$ , un pēc tam, punkta  $E$  dabūšanai, jāpalielina garums  $ON$   $a$  reiz, var izdarīt divi darbības pretējā kārtībā; tad darba kārtība ir sekoša: savieno  $O$  ar  $E'$  un šo līniju turpina līdz krustojumam punktā  $K$  (11. zīm.) ar aploci, kas konstruēta uz lielās ass kā diametra; no krustošanas punkta  $K$  nolaiž stateni  $KM$  uz lielās ass virzienu  $OA$  un pēc tam šo perpendīkuli samazina attiecībā  $b : a$ ; dabūto garumu atliek no statņa pakājes  $M$  sākot; tā dabūtais šī nogriežņa gala punkts  $E$  ir meklējamais punkts.

Ar to esam noskaidrojuši, kā pēc punkta  $E'$ , kas ņemts uz bezgalīgi mazā riņķa aploces, dabūt atbilstošo projekcijas punktu  $E$ .

Tagad ņemsim otru virzienu  $OL$  tā, lai  $\sphericalangle E'OL'$  resp.  $\sphericalangle KOL$  būtu taisns un pierādīsim, ka atbilstošie punkti  $E$  un  $E_1$  novietojas uz kartes tā, ka kvadrātu summa  $\overline{OE}^2 + \overline{OE_1}^2$  iznāk konstants lielums, kas neatkarīgs no riņķa savā starpā statenisko rādiesu  $OK$  un  $OL$  virziena, un vienlīdzīgs elipses pusasu kvadrātu summai, t. i., ka:

$$\overline{OE}^2 + \overline{OE_1}^2 = a^2 + b^2 = \text{const.}$$

No taisnleņķa trīsstūriem  $OME$  un  $ONE_1$  rakstam:

$\overline{OE}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{ME}^2$  un  $\overline{OE}_1^2 = \overline{ON}^2 + \overline{NE}_1^2$ . Uz konstrukcijas pamata  $ME = \frac{b}{a} \cdot \overline{MK}$  un  $NE_1 = \frac{b}{a} \cdot \overline{NL}$ ; bez tam taisnleņķu trīsstūri

$OMK$  un  $ONL$  vienādi, tāpēc ka viņu hipotenūzas ir  $= a$ , un kātetes savā starpā stateniskas, kamdēļ  $ON = MK$  un  $NL = OM$ . Ņemot visu šo vērā, kā arī vēl to, ka  $OM^2 + MK^2 = a^2$ , dabūjam

$$\overline{OE}^2 + \overline{OE}_1^2 = a^2 + b^2. \quad (25)$$

Tā tad, ja uz zemes virsas ņemsim divi viens pret otru stateniskus virzienus  $OE'$  un  $OL'$ , kas neiet galveno skaruļu virzienā, tad tiem uz kartes atbilst platais leņķis  $EOE_1$ ; pie tam punkti  $E$  un  $E_1$  ir uz elipses, un šo punktu attālumu no elipses centra kvadrātu summa ir konstants lielums = elipses pusasu kvadrātu summai.

Leņķu alterācijas. — Izpētīsim tāgad sakarību starp leņķiem uz zemes un atbilstošiem leņķiem uz kartes. Šauram leņķim  $AOK = u$  uz zemes virsas starp galveno pieskari un virzienu  $OK$ , uz projekcijas atbilst leņķis

$$AOE = v; \text{ tā kā } \operatorname{tg} v = \frac{ME}{MO}, \operatorname{tg} u = \frac{MK}{MO} \text{ un } \frac{ME}{MK} = \frac{b}{a}, \text{ tad}$$

$$\operatorname{tg} v = \frac{b}{a} \operatorname{tg} u. \quad (26)$$

Tāpēc, ja iepriekš aprēķinātas elipses pusasis  $a$  un  $b$ , tad pēc dotā leņķa  $u$  uz zemes virsas var aprēķināt leņķi  $v$ . Tā kā starpība  $u - v$  pa lielākai daļai ir maza, tad parocīgāki aprēķināt papriekšu to pēc dotā  $u$  un tikai pēc tam leņķi  $v$ . Lai izvestu formulu, kas noderīga šim gadījumam, ņemsim pazīstamo goniometrijas formulu  $\operatorname{tg}(u - v) = \frac{\operatorname{tg} u - \operatorname{tg} v}{1 + \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v}$  un ieliksīm tanī no (26) formulas  $\operatorname{tg} v$  nozīmi; iznāks

$$\operatorname{tg}(u - v) = \frac{(a - b) \operatorname{tg} u}{a + b \operatorname{tg}^2 u} = \frac{(a - b) \operatorname{sn} u \cos u}{a \cos^2 u + b \operatorname{sn}^2 u}; \text{ tā kā}$$

$$2 \cos^2 u = 1 + \cos 2u \text{ un } 2 \operatorname{sn}^2 u = 1 - \cos 2u, \text{ tad}$$

$$\operatorname{tg}(u - v) = \frac{(a - b) \operatorname{sn} 2u}{(a + b) + (a - b) \cos 2u}. \quad (27)$$

Šī formula nav logaritmiska un aprēķini iznāk garāki nekā pēc (26) formulas.

Lai izpētītu kā mainās leņķi uz projekcijas, turpināsim  $KM$  (11. zīm.) līdz otrreizējam krustojumam ar elipsi un apli punktus

D, C un šos punktus savienosim ar centru O. Saprotams, ka  $\sphericalangle COA = u$  un  $\sphericalangle DOA = v$ .

Trīsstūrī EOK:

$$\frac{KE}{KO} = \frac{\operatorname{sn}(u-v)}{\operatorname{sn}(180^\circ-x)}$$

un trīsstūrī COE: 
$$\frac{CE}{CO} = \frac{\operatorname{sn}(u+v)}{\operatorname{sn} x},$$

kur  $\sphericalangle OEC = x$ . Izdalot pirmo proporciju ar otro un ņemot vērā, ka  $OK = OC = a$ , dabūjam:

$$\frac{KE}{CE} = \frac{\operatorname{sn}(u-v)}{\operatorname{sn}(u+v)}.$$

Tā kā, savukārt,  $KE = MK - ME$ ,  $CE = CM + ME$ ,  $CM = MK$  un  $ME = \frac{b}{a} \cdot MK$ , tad

$$\frac{KE}{CE} = \frac{a-b}{a+b} \quad \text{un} \quad \operatorname{sn}(u-v) = \frac{a-b}{a+b} \cdot \operatorname{sn}(u+v). \quad (28)$$

Tā tad, ja uz zemes virsas ņemsim ļoti mazu apli ar rādiusu  $OE'$  un viņā konstruēsim leņķi  $\sphericalangle AOE' = u$ , tad uz projekcijas aplis attēlosies kā elipse  $ABA_1B_1$  un atbilstošais leņķis būs  $\sphericalangle AOE = v$ . Leņķi  $u$  un  $v$  būs vienādi, kad (28) formulā  $\operatorname{sn}(u+v) = 0$ . Tā kā abi leņķi  $u$  un  $v$  ir pozitīvi un mazāki par  $90^\circ$ , tad  $\operatorname{sn}(u+v)$  var būt nulle pie  $u+v=0$  vai  $u+v=180^\circ$ , tā tad, vispār ņemot, kad  $u=0$ ,  $v=0$  vai kad  $u=90^\circ$  un  $v=90^\circ$ . Šo slēdzienu varēja taisīt arī neatkarīgi no (28) formulas pētījuma, jo starp galvenām pieskarēm uz zemes virsas un starp indikatrīsas asīm uz projekcijas ir taisni leņķi.

Sākot no  $u=0$ ,  $v=0$  starpība  $u-v$  pamazām aug un iznāk vislielāka pie  $\operatorname{sn}(u+v) = 1$ , kad  $U+V=90^\circ$ ; (28) formula tad pieņem veidu

$$\operatorname{sn}(u-v)_{\max} = \frac{a-b}{a+b}.$$

Ja ņemsim leņķi  $\sphericalangle DOE = 2v$ , tad vislielākā, robežjojošā leņķa izmaiņa resp. alterācija būs  $2(u-v)$ . Nosaucot šinī gadījumā pašus leņķus par  $U$ ,  $V$  un vislielāko starpību  $2(U-V)$  par  $2\omega$ , dabūsim:

$$(u-v)_{\max} = U - V = \omega \quad \text{un}$$

$$\operatorname{sn}(u-v)_{\max} = \operatorname{sn}(U-V) = \operatorname{sn} \omega = \frac{a-b}{a+b}. \quad (29)$$

Pēc leņķa  $\omega$  lieluma novērtē projekcijas labumu: kad viņš mazāks, tad mazāk mainīti (izķēmoti) leņķi uz projekcijas un projekcija labāka.

Formula iznāks logaritmiska, ja ievēsim palīgleņķi  $\mu$  pēc nol.  
 $\operatorname{tg} \mu = \frac{a}{b}$ , tad  $\operatorname{sn} \omega = \frac{a - a \operatorname{tg} \mu}{a + a \operatorname{tg} \mu} = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} \mu}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} \mu} = \operatorname{tg} (45^\circ - \mu)$ . (30)

No (28) formulas var dabūt arī citas formulas leņķa alterācijas m aprēķinam; tā:

$$\cos \omega = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 \omega} = \frac{2 \sqrt{ab}}{a + b};$$

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{a - b}{2 \sqrt{ab}}; \quad \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{\operatorname{sn} \frac{\omega}{2}}{\cos \frac{\omega}{2}} = \frac{\sqrt{1 - \cos \omega}}{\sqrt{1 + \cos \omega}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}};$$

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2} \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}} = \sqrt{\frac{a}{b}}. \quad (31)$$

Ja, piemēram,  $a = 2,110$  un  $b = 0,595$ , tad  $\omega = 34^\circ 03' 39''$ , 31.

Atsevišķu projekciju pētījumi rāda, ka mērogu visvienkāršāki aprēķināt meridiānu un paralēļu virzienos, kas uz zemes virsas krustojas zem taisniem leņķiem; turpretim šie virzieni uz projekcijas, vispār ņemot, attēlojas kā indikatrisas divi saistītie pusdiametri; turpmāk viņus apzīmēsim ar  $m_m$  un  $m_p$ . Ja arī uz projekcijas meridiāni un paralēles krustojas zem taisniem leņķiem, tad  $m_m$  un  $m_p$  ir tieši indikatrisas pusasis  $a$  un  $b$ . Šinī gadījumā, ieliekot (26)—(31) formulās  $a$  un  $b$  vietā  $m_m$  un  $m_p$ , var aprēķināt jebkuŗa uz zemes virsas dotā leņķa alterāciju, kā arī noteikt katram projekcijas punktam leņķa vislielāko izmaiņu  $\omega$ . Ja uz projekcijas meridiāni un paralēles krustojas zem patvaļīga leņķa, tad, pirms kāda dotā leņķa alterācijas aprēķina, ir jānoteic indikatrisas pusasis, kā tas parādīts nākošā 6. n. Ir tomēr iespējams katrai projekcijai aprēķināt leņķa vislielāko alterāciju  $\omega$ , neaprēķinot iepriekš indikatrisas pusasis. Tas ir iespējams pēc sekošām elipses saistīto diametru formulām:

$$a^2 + b^2 = m_m^2 + m_p^2,$$

$$ab = m_m \cdot m_p \cdot \operatorname{sn} \Theta.$$

No tām  $a^2 \pm 2ab + b^2 = m_m^2 + m_p^2 \pm 2m_m \cdot m_p \cdot \operatorname{sn} \Theta$ ; tāpēc uz (29) formulas pamata

$$\operatorname{sn} \omega = \sqrt{\frac{m_m^2 + m_p^2 - 2m_m \cdot m_p \cdot \operatorname{sn} \Theta}{m_m^2 + m_p^2 + 2m_m \cdot m_p \cdot \operatorname{sn} \Theta}}. \quad (32)$$

Ja, piemēram, dots  $m_m = 1,499$ ,  $m_p = 1,600$ ,  $\Theta = 148^{\circ}25'$ , tad pēc (32) formulas leņķu vislielākā alterācija  $\omega$  ir  $34^{\circ}3',5$ . Izvedīsim vēl ļoti vienkāršās un elegantās formulas leņķa  $U$  uz zemes un viņam atbilstošā leņķa  $V$  uz projekcijas aprēķinam gadījumā, kad leņķa alterācija vislielāka. Pie (28) formulas izpētīšanas iznāca, ka starpība  $u - v$  ir vislielāka gadījumā, kad  $u + v = 90^{\circ}$  un tad pēc (29) formulas  $\operatorname{sn}(U - V) = \operatorname{sn} \omega = \frac{a - b}{a + b}$ . Formulā  $\operatorname{sn}(U - V) = \operatorname{sn} U \cos V - \operatorname{sn} V \cos U$  atvietojam sinusu un kosinusu ar tangensu pēc formulām

$$\operatorname{sn} x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}; \quad \text{tad}$$

$$\operatorname{sn}(U - V) = \frac{\operatorname{tg} U - \operatorname{tg} V}{\sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2 U)(1 + \operatorname{tg}^2 V)}} = \frac{a - b}{a + b}.$$

Ieliekam te, saskaņā ar (26) formulu  $\operatorname{tg} V = \frac{b}{a} \operatorname{tg} U$ ; iznāk sekošs bikvadrātnolidzinājums:

$$b^2 \operatorname{tg}^4 U - 2 a b \operatorname{tg}^2 U + a^2 = 0.$$

Atrisinot to un ņemot tikai šauros leņķus, dabonam:

$$\operatorname{tg} U = \sqrt{\frac{a}{b}}; \quad \operatorname{tg} V = \sqrt{\frac{b}{a}}. \quad (33)$$

Pēc šīs formulas, piemēram, pie  $a = 2,110$  un  $b = 0,595$ , vislielākās leņķu alterācijas būs pie  $U = 62^{\circ}02'$ , kam uz projekcijas atbilst  $V = 27^{\circ}58'$ ;  $2(U - V) = 68^{\circ}07'$ .

**6. Indikatrīsas elementi.** — No formulām (28) — (31) un (33) redzams, ka atsevišķu leņķu alterāciju, un vislielāko alterāciju aprēķinam ir jāzin indikatrīsu pusasu lielums un virziens. Tāpēc apskatīsim, kā projekcijas jebkuŗam punktam aprēķināt pusasis  $a$ ,  $b$  un leņķi  $\beta$ , starp lielo pusasi un meridiānu uz projekcijas pēc abiem dotiem indikatrīsas saistītiem pusdiametriem  $m_m$ ,  $m_p$  un leņķa  $\Theta$  starp viņiem. No analītiskās ģeometrijas zināms, ka sakarību starp elipsa pusasim  $a$ ,  $b$ , tā diviem saistītiem (sajūgtiem) pusdiametriem  $m_m$ ,  $m_p$  un leņķi  $\Theta$  starp tiem noteic sekoši četri nol.:

$$\left. \begin{aligned} m_m^2 + m_p^2 &= a^2 + b^2; \\ m_m \cdot m_p \cdot \operatorname{sn} \Theta &= a b; \\ \Theta &= \beta_1 - \beta; \\ \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \beta_1 &= -\frac{b^2}{a^2}. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

kur  $\beta$  un  $\beta_1$  ir leņķi starp lielo pusasi un abiem saistītiem pusdiametriem  $m_m$ ,  $m_p$ . Šinīs četros nolidzinājumos ieiet septiņi lielumi:  $a$ ,  $b$ ,  $m_m$ ,  $m_p$ ,  $\Theta$ ,  $\beta$  un  $\beta_1$ ; ja no tiem trīs būs doti, tad pārējos četrus var aprēķināt. Mūsu gadījumā vajadzēs pēc dotiem  $m_m$ ,  $m_p$ ,  $\Theta$  aprēķināt  $a$ ,  $b$ ,  $\beta$ ,  $\beta_1$ . Reizināsim (34) sistēmas otro nol. ar divi, iznākumu pieskaitīsim pirmam nol. un atņemsim no tā; tad

$$\left. \begin{aligned} a + b &= \sqrt{m_m^2 + m_p^2 + 2 m_m \cdot m_p \cdot \operatorname{sn} \Theta} \\ a - b &= \sqrt{m_m^2 + m_p^2 - 2 m_m \cdot m_p \cdot \operatorname{sn} \Theta} \end{aligned} \right\}. \quad (35)$$

No tās pašas sistēmas pirmā un otrā nol.:

$$\operatorname{sn} \Theta = \frac{a b}{m_m \cdot m_p} = \frac{a b}{m_m \sqrt{a^2 + b^2 - m_m^2}}, \text{ kāpēc}$$

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{\operatorname{sn} \Theta}{\sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 \Theta}} = - \frac{a b}{\sqrt{(a^2 - m_m^2)(m_m^2 - b^2)}}.$$

Negatīva zīme radikāla priekšā jāņem tāpēc, ka leņķis  $\Theta$  vienmēr ir plats ( $> \frac{\pi}{2}$ ). Dabūtā tangensa nozīme noderēs  $\beta$  un  $\beta_1$  noteikšanai no trešā un ceturta nol.; piemēram no trešā nol.  $\beta_1$  nozīmi ieliekam ceturta; tad  $\operatorname{tg} \beta \operatorname{tg}(\beta + \Theta) = -\frac{b^2}{a^2}$  jeb  $\operatorname{tg} \beta \frac{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \Theta}{1 - \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \Theta} = -\frac{b^2}{a^2}$ .

No šejienes  $\operatorname{tg} \beta$  noteikšanai iznāk kvadrātnolidzinājums:

$$a^2 \operatorname{tg}^2 \beta + (a^2 - b^2) \operatorname{tg} \Theta \operatorname{tg} \beta + b^2 = 0.$$

Ieliekot te iepriekšējo  $\operatorname{tg} \Theta$  nozīmi, pēc atrises dabonam:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{a^2 - m_m^2}{m_m^2 - b^2}} = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{(a + m_m)(a - m_m)}{(m_m + b)(m_m - b)}}. \quad (36)$$

Šī ir nol. pozitīvā sakne; otra sakne ir negatīva; tā kā leņķis  $\beta$  vienmēr ir šaurs ( $< \frac{\pi}{2}$ ), tā otra sakne neatbilst lietas būtībai un ir jāatmet.

Beidzot leņķi  $\beta_1$  dabū tieši no (34) sistēmas trešā nol.; viņu parasti pat nemaz neaprēķina.

(35) un (36) formulas pilnīgi atrisina uzstādīto uzdevumu. Atrise ir iespējama arī grāfiski ar vienkāršu konstruējumu; tā saprotams nav tik noteikta kā analītiskā, bet, kā katra grāfiska metode vispār, ļoti noderīga pārbaudei, lai pārlicinātos vai analītiskā aprēķinā nav ieviesušās rupjas kļūdas.

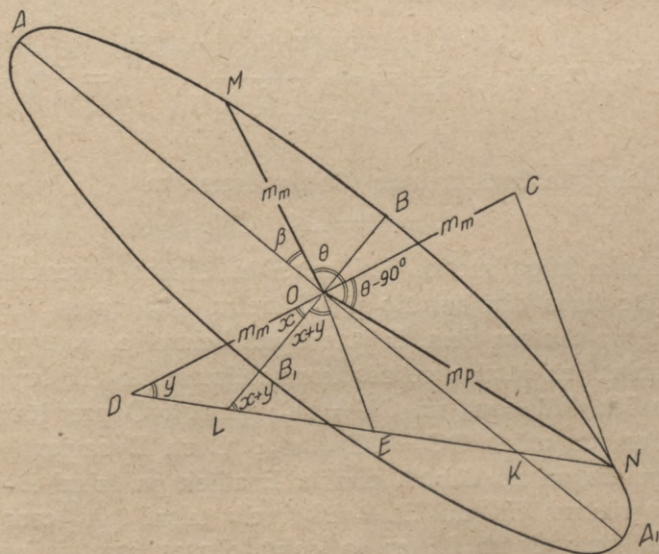
Grafisko metodi noskaidrosim pēc 12. zīm. Patvaļīgā punktā O, ko pieņem par elipses centru, konstruē leņķi  $\angle MON = \theta$  un uz viņa malām atliek dotos saistītos pusdiametrus  $OM = m_m$  un  $ON = m_p$ . Caur punktu O novelk taisni CD, stateniski pret līniju OM un atliek nogriežņus  $OC = OD = OM = m_m$ ; C un D savieno ar N. Leņķis

$$\angle CON = \theta - 90^\circ. \quad \text{Trīsstūrī } CON: \overline{NC}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{NO}^2 - 2\overline{CO} \cdot \overline{NO} \cdot \cos \angle CON, \text{ jeb } \overline{NC}^2 = m_m^2 + m_p^2 - 2m_m \cdot m_p \cdot \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right).$$

Tāpat no trīsstūra DON:

$$\overline{DN}^2 = \overline{DO}^2 + \overline{NO}^2 - 2 \cdot \overline{DO} \cdot \overline{NO} \cdot \cos \angle DON,$$

$$\text{jeb } \overline{DN}^2 = m_m^2 + m_p^2 + 2 \cdot m_m \cdot m_p \cdot \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right).$$



12. zīm.

Ņemot vērā (35) nol. redzam, ka  $DN = a + b$  un  $NC = a - b$ . No O novelk taisni  $OE \parallel CN$  līdz krustojumam ar līniju DN punktā E;

tad  $DE = EN = \frac{a+b}{2}$  un  $OE = \frac{a-b}{2}$ . Atliekot no punkta E pa

taisni DN uz abām pusēm nogriežņus  $EK = EL = EO$  iznāk:  $DK = DE + EK = a$  un  $DL = DE - LE = b$ , t. i., dabūjam elipses pusass gaļumus. Tājāki savieno O ar L un K; dabūtas līnijas OL un OK krustojas zem taisna leņķa un noteic elipses asu virzienu. Lai pārlielinātos par to, vispirms, vienkāršības dēļ, nosauksim leņķus LOD

un ODL attiecīgi par  $x$  un  $y$ ; tad vienādsānu trisstūri LOE:  $\sphericalangle$ OLE =  
=  $\sphericalangle$ EOL =  $x + y$  un trisstūra DOE perimetrs iznāk:

$$2p = m_m + \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = m_m + a \quad \text{un} \quad p = \frac{m_m + a}{2}.$$

Zinot trisstūra EDO visas trīs malas, var noteikt leņķu EOD =  
=  $2x + y$  un ODE =  $y$  pusēm tangensus:

$$\operatorname{tg} \left( x + \frac{y}{2} \right) = \sqrt{\frac{(a - m_m)(m_m + b)}{(a + m_m)(m_m - b)}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{y}{2} = \sqrt{\frac{(a - m_m)(m_m - b)}{(a + m_m)(m_m + b)}}.$$

Tamdēļ:

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \left[ \left( x + \frac{y}{2} \right) - \frac{y}{2} \right] = \frac{\operatorname{tg} \left( x + \frac{y}{2} \right) - \operatorname{tg} \frac{y}{2}}{1 + \operatorname{tg} \left( x + \frac{y}{2} \right) \operatorname{tg} \frac{y}{2}} = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{a^2 - m_m^2}{m_m^2 - b^2}}.$$

Salīdzinot šo iznākumu ar (36), redzam, ka

$$x = \beta = \sphericalangle AOM.$$

Savilksim kopā sacīto. Lai noteiktu elipses pusasu lielumu un virzienu pēc viņas divi saistīto pusdiametru  $m_m$  un  $m_p$  dotā lieluma un dotā leņķa  $\Theta$  starp tiem, ir jāaprēķina lielumi  $a$ ,  $b$ ,  $\beta$  pēc (35) un (36) formulas jeb jātaisa sekošs konstatējums: novelk leņķi MON =  $\Theta$  un atliek OM =  $m_m$  un ON =  $m_p$ ; punktā O pret līniju OM uzstāda stateni un atliek OC = OD =  $m_m$ ; C un D savieno ar N; DN daļa uz pusēm un no dabūtā punkta E atliek pa taisni DN uz abām pusēm nogriežņus EK un EL = EO; velk taisni AA<sub>1</sub> caur O un K, taisni BB<sub>1</sub> caur O un L; ar to dabū elipses asu virzienus; atliek OA = OA<sub>1</sub> = DK un OB = OB<sub>1</sub> = DL. Punkti A, A<sub>1</sub>, B, B<sub>1</sub> ir elipses virsotnes un ar to ir noteikta arī pati elipse.

Kā piemēru ņemsim Lorica projekciju, kuņai pie  $\lambda = 75^\circ$  un  $\varphi = 60^\circ$ ,  $m_m = 1,499$ ,  $m_p = 1,600$  un  $\Theta = 148^\circ 25'$ . Uz šo skaitļu pamata pēc (35) un (36) formulas, jeb pēc tikko apskatītā konstruējuma (12. zīm.) dobonam  $a = 1,110$   $b = 0,595$ ,  $\beta = 16^\circ 56'$ .

Abas (35) formulas nav logaritmējamas; tā kā viņu labā pusē ieiet pat trīs locekļi, tad arī summu un starpību logaritmu lietošana ir aprūtinoša, it īpaši, ja nākās aprēķināt indikatoru pusasis daudziem punktiem pie projekciju leņķu alterāciju tabulu sastādīšanas. Uz šī pamata un arī kontroles vajadzībām izvedisim formulas, pēc kuņām

pusasis  $a$  un  $b$  noteic pēc logaritmejamām formulām. Šinī nolūkā ievēdīsim divi paligleņķus  $\mu$  un  $\nu$  pēc nolīdzinājumiem:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{b}{a}, \quad (37)$$

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{m_p}{m_m}. \quad (38)$$

Tad pēc goniometrijas formulām:

$$\operatorname{sn} 2\mu = \frac{2 \operatorname{tg} \mu}{1 + \operatorname{tg}^2 \mu} = \frac{2ab}{a^2 + b^2} \quad (39)$$

$$\text{un } \operatorname{sn} 2\nu = \frac{2 \operatorname{tg} \nu}{1 + \operatorname{tg}^2 \nu} = \frac{2m_m \cdot m_p}{m_m^2 + m_p^2}. \quad (40)$$

Beidzamā nol.  $m_m \cdot m_p$  vietā ieliksīm tā nozīmi no (34) sistēmas otra nol. un  $m_m^2 + m_p^2$  vietā tā nozīmi no tās pašas sistēmas pirmā nol.; tad

$$\operatorname{sn} 2\nu = \frac{2ab}{(a^2 + b^2) \operatorname{sn} \Theta}. \quad (41)$$

$$\text{Izdalot (39) nol. ar (41), dabonam } \operatorname{sn} 2\mu = \operatorname{sn} \Theta \operatorname{sn} 2\nu. \quad (42)$$

Ievēdīsim apzīmējumus:

$$p = ab = m_m \cdot m_p \cdot \operatorname{sn} \Theta \quad (43)$$

Tas nozīmē, ka  $p$  ir uz elipses pusasīm konstruētā taisnstūra laukums; tas savukārt vienādiels ar paralēlogrammu, kas konstruēts pēc divi saistītiem pusdiametriem un leņķa starp tiem. No šīs formulas  $a = p : b$ ,  $b = p : a$ ; reizinot šos lielumus attiecīgi ar  $a = b \cotg \mu$  un  $b = a \operatorname{tg} \mu$  no (37) formulas dabonam  $a^2 = p \cotg \mu$  un  $b^2 = p \operatorname{tg} \mu$ , jeb

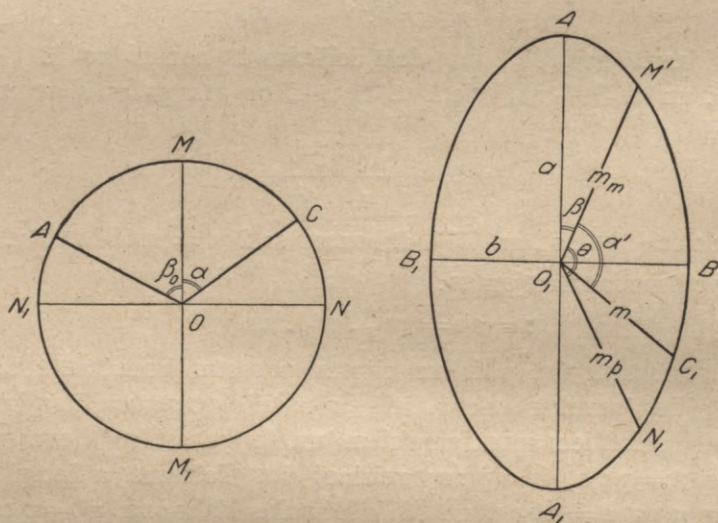
$$a = \sqrt{p \cotg \mu} \text{ un } b = \sqrt{p \operatorname{tg} \mu} \quad (44)$$

(36) — (44) formulas pilnīgi atrisina uzstādīto jautājumu. Ņemot augšā dotā piemēra skaitļus, dabonam no (38), (42) un (43)  $\nu = 46^\circ 52'$ ,  $2\mu = 31^\circ 30'$ ,  $\log p = 0,09903$  un pēc tam pēc (44) un (36) formulas lielumus  $a$ ,  $b$ ,  $\beta$ , kas iznāk tādi paši, kā jau augšā dabūtie.

**7. Alterācijas.** — Iepriekšējos paragrafos noskaidrojās, ka zemes virsas bezgalīgi mazs aplis attēlojas jebkurā projekcijā kā elipse, ko sauc par indikatrīsu. Izņēmums būs tikai gadījumā, kad  $a = b$ , jo tad katrs zemes virsas bezgalīgi mazs aplis arī attēlosies kā aplis, un projekcija būs vienādleņķu jeb konforma. Katram zemes virsas bezgalīgi mazā apļa rādiusam uz projekcijas atbilst pēc lieluma un virziena noteikts indikatrīsas rādius-vektors. Ja uz globa, samazināta

galvenā mērogā, bezgalīgi maza riņķīša rādiusu pieņem par 1, tad indikatrīsas vektoru gaņumi attēlos tieši mērogus projekcijas atbilstošā punktā un atbilstošos virzienos. Kā jau noskaidrojās, no visiem šiem mērogiem vislielākais un vismazākais būs vienlīdzīgi indikatrīsas pusasiem  $a$  un  $b$ . Kā noteikt pusasis un viņu virzienus, par to jau bija runa iepriekšējā 6. §; tagad atliek parādīt, kā aprēķināt uz projekcijas azimutu  $\alpha'$ , kas atbilst dotam azimutam  $\alpha$  uz zemes virsas, kā aprēķināt mērogu  $m$  ikuŗā virzienā un, beidzot, kā noteikt laukumus, resp. platību alterācijas.

Pieņemsim, ka aplis  $MNM_1N_1$  (13. zīm.) ir bezgalīgi mazs riņķītis uz zemes virsas un ka elipse  $ABA_1B_1$  ir uz projekcijas tam atbilstoša



13. zīm.

elipse, ko sauc par indikatrīsu. Turpmāk, ikkatras projekcijas teorijā apskatīsim, kā aplēst mērogus  $m_m$  un  $m_p$  pa meridiāniem un paralēlēm, kā arī leņķi  $\theta = M'O_1N_1$ . Te apskatīsim, pirmkārt, kā pēc patvaļīgas līnijas  $OC$  uz zemes virsas dotā azimuta  $MOC = \alpha$  dabūt atbilstošās līnijas  $O_1C_1$  uz projekcijas izmainījušos azimutu  $M'O_1C_1 = \alpha'$  un, otrkārt, kāds mērogs  $m$  ar šo azimutu noteiktā virzienā. Pirmais darbs te būs noteikt riņķītīm  $MNM_1N_1$  galvenās pieskares, t. i., tos divi virzienus uz zemes virsas, kas atbildētu indikatrīsas pusasiem uz projekcijas. Pieņemsim, ka skarule  $OA$  atbilst lielai pusasij  $O_1A$ , ka meridiānam  $OM$  uz zemes virsas atbilst vektors  $O_1M'$  un paralēlei  $ON$  uz zemes — vektors  $O_1N_1$  uz projekcijas. Leņķi  $AOM$ , starp galveno pieskari un meridiānu uz zemes virsas nosauksim par  $\beta_0$ .

atbilstošo leņķi  $AO_1M'$  uz projekcijas par  $\beta$  tad pēc (26) formulas

$$\operatorname{tg} \beta_0 = \frac{a}{b} \operatorname{tg} \beta \quad (45)$$

$$\text{un } \operatorname{tg} (\beta + \alpha') = \frac{b}{a} \operatorname{tg} (\beta_0 + \alpha). \quad (46)$$

Mēroga  $m$  aplēsei ņemsim elipses nol. attiecinātu uz simmetrijas asim; punkta  $C_1$  koordinātas būs:

$$x = m \cos [\pi - (\beta + \alpha')] \text{ un } y = m \operatorname{sn} (\alpha' + \beta);$$

tāpēc elipses nol. ir:

$$\frac{m^2 \cos^2 (\beta + \alpha')}{a^2} + \frac{m^2 \operatorname{sn}^2 (\beta + \alpha')}{b^2} = 1.$$

No šejienes, ņemot vērā (46) formulu, pēc vienkāršiem pārveidojumiem dabonam:

$$m = \frac{a \cos (\beta_0 + \alpha)}{\cos (\beta + \alpha')}. \quad (47)$$

Kontroles vajadzībām izvedīsim vēl otru formulu mēroga  $m$  aplēsei. No 11. zīm., ņemot vērā elipses ordinātu īpašības, rakstam, ka

$$\overline{ME} = \frac{b}{a} \cdot \overline{MK}.$$

Pēc tā paša zīmējuma, uzskatot OE virzienā mērogu par  $m$ ,  $ME = m \operatorname{sn} v$  un  $MK = a \operatorname{sn} u$ ; tāpēc

$$m \operatorname{sn} v = b \operatorname{sn} u$$

No tā paša zīmējuma  $MO = m \cos v = a \cos u$ . Divi pēdējos nol. pacelsim kvadrātā un saskaitīsim; tad

$$m^2 = b^2 \operatorname{sn}^2 u + a^2 \cdot \cos^2 u.$$

Leņķim  $u$  pēc 11. zīm. atbilst 13. zīmējumā leņķis  $\beta_0 + \alpha$ ; tāpēc ieliekot beidzamā nol.  $u = \beta_0 + \alpha$ , dabonam:

$$m = \sqrt{a^2 \cos^2 (\beta_0 + \alpha) + b^2 \operatorname{sn}^2 (\beta_0 + \alpha)}. \quad (48)$$

Beidzot izvedīsim platību, resp. laukumu alterācijas formulu. Uz zemes virsas apļa ar rādiusu 1 laukums ir  $\pi$ , bet indikatrīsas laukums, resp. uz projekcijas atbilstošās elipses laukums būs  $\pi ab = \pi \cdot m_m \cdot m_p \cdot \operatorname{sn} \Theta$ , kur  $a$  un  $b$  ir elipses pusasis,  $m_m$ ,  $m_p$  saistītās pusasis un  $\Theta$  leņķis starp pēdējām; tāpēc laukuma alterācija, ko izteiks šo divi laukumu attiecības, būs:

$$ab = m_m \cdot m_p \cdot \operatorname{sn} \Theta = p. \quad (49)$$

(45) — (49) formulas pilnīgi atrisina uzstādītos jautājumus. Skaitliskam piemēram ņemsim  $a = 2,110$ ,  $b = 0,595$ ; noteiksim uz pro-

jekcijas azimutu, kas atbilst azimutam uz zemes  $\alpha = 60^0$  un mērogus  $m, p$ , ja  $\beta = 16^056'$ .

Pēc (45) formulas  $\beta_0 = 47^012'$  un pēc (46) — (49) form.  $\alpha' = 120^044'$ ,  $m = 0,844$  un  $p = 1,256$ .

Daži sevišķi, ievēribu pelnoši gadījumi. — 1. Dotais azimuts uz zemes  $\alpha = 0^0$ . Šinī gadījumā pēc (46) un (45) formulas:

$$\operatorname{tg}(\beta + \alpha') = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \beta_0 = \operatorname{tg} \beta,$$

kas iespējams tikai tad, ja  $\alpha' = 0$ . Tas nozīmē, ka meridiāna virziena azimutam nav alterācijas. Pie  $\alpha = 0$  un  $\alpha' = 0$  (47) formula dod:

$$m = \frac{a \cos \beta_0}{\cos \beta}.$$

$$\text{Tā kā šinī gadījumā } \cos \beta_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta_0}} = \frac{b \cos \beta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sn}^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta}},$$

$$\text{tad } m = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \operatorname{sn}^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta}}.$$

Atrisinot (36) nol. pēc  $m_m$  dabūsim to pašu izteiksmi; tāpēc  $m = m_m$ , kam arī jābūt, jo pie  $\alpha = 0$  elements iet meridiāna virzienā.

2. Uz zemes dotais azimuts  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . Šinī gadījumā no (46) un (45) formulas

$$\operatorname{tg}(\beta + \alpha') = -\frac{b}{a} \operatorname{cotg} \beta_0 = -\frac{b^2}{a^2} \operatorname{cotg} \beta \dots (\alpha)$$

$$\text{jeb } \operatorname{tg}(\beta + \alpha') \cdot \operatorname{tg} \beta = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Salīdzinot šo izteiksmi ar (34) sistēmas ceturto nol., iznāk

$$\operatorname{tg}(\beta + \alpha') = \operatorname{tg} \beta_1,$$

$$\beta + \alpha' = \beta_1 \text{ un } \alpha' = \beta_1 - \beta = \Theta.$$

Tāļāki, no (47) formulas pie  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  un  $\alpha' = \Theta$ , iznāk:

$$m = \frac{a \cos\left(\beta_0 + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos(\beta + \Theta)} = -\frac{a \operatorname{sn} \beta_0}{\cos(\beta + \Theta)}.$$

No ( $\alpha$ ) formulas, ņemot vērā, ka  $\alpha' = \Theta$ :

$$\operatorname{tg}(\beta + \Theta) = -\frac{b}{a \operatorname{tg} \beta_0};$$

$$\text{tāpēc } \cos(\beta + \Theta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\beta + \Theta)}} = \frac{a \operatorname{sn} \beta_0}{\sqrt{a^2 \operatorname{sn}^2 \beta_0 + b^2 \cos^2 \beta_0}} \text{ un}$$

$$m = \sqrt{a^2 \operatorname{sn}^2 \beta_0 + b^2 \cos^2 \beta_0}.$$

Ieliekot te no (45) formulas  $\operatorname{sn}^2 \beta_0 = \frac{a^2 \operatorname{sn}^2 \beta}{a^2 \operatorname{sn}^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta}$  un

$$\cos^2 \beta_0 = \frac{b^2 \cos^2 \beta}{a^2 \operatorname{sn}^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta}, \text{ dabonam}$$

$$m = \sqrt{\frac{a^4 \operatorname{sn}^2 \beta + b^4 \cos^2 \beta}{a^2 \operatorname{sn}^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta}} \quad (\beta).$$

Ja no (34) sistēmas pirmā nol. noteiksim

$$m_p^2 = a^2 + b^2 - m_m^2$$

un ieliksīm te no (36) nol.  $m_m^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \operatorname{sn}^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta}$ , tad

pēc pārveidošanas iznāk izteiksme ( $\beta$ ), kāpēc  $m = m_p$ ,

kā arī jābūt, jo pie  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , t. i. pa paralēli mērogs ir  $m_p$ .

3. Kaut gan izvestās formulas noder visām projekcijām, tomēr tās vajadzēs lietot pie tā saucamām patvaļīgām projekcijām, jo vienād-leņķu un vienādlielām projekcijām iznāk vienkāršākas formulas. Vienād-leņķu projekcijām  $\Theta = \frac{\pi}{2}$ , tāpēc  $a = b = m_m = m_p$ ,  $p = m_m^2 = m_p^2$ ;  $\alpha' = \alpha$  un  $\omega = 0$ , t. i., šinīs projekcijās ap ikkatru punktu mērogs visos virzienos ir vienāds un leņķu alterācijas nav.

4. Vienādlielām projekcijām leņķi  $\nu$  un  $\mu$  ir jāaprēķina pēc (38) un (42) formulām un tā kā šīm projekcijām  $p = 1$ , tad (44) formulas iznāk vienkāršākas:  $a = \sqrt{\cotg \mu}$  un  $b = \sqrt{\tg \mu}$ . (50)

Leņķu  $\omega$  aprēķinām (31) formulu grupā pieņemam  $ab = 1$ ; tad

$$\tg \omega = \frac{a - b}{2}. \quad (51)$$

Skaitliskam piemēram ņemsim Molveides projekciju, kurai pie  $\varphi = 60^\circ$  un  $\lambda = 75^\circ$  iznāk  $m_m = 1,203$ ,  $m_p = 1,165$  un  $\Theta = 134^\circ 28'$ . Lai šim punktam aprēķinātu lielumus  $a$ ,  $b$  un  $\omega$  papriekšu pēc (38) un (42) formulām, dabonam  $\nu = 45^\circ 55'$  un  $\mu = 22^\circ 45'$ ; pēc tam pēc (50) un (51) formulām iznāk  $a = 1,544$ ,  $b = 0,648$  un  $\omega = 24^\circ 08'$ .

5. Dažām vienādlielām projekcijām mērogs pa paralēlēm ir 1; tādām projekcijām ne tikai  $p = 1$ , bet arī  $m_p = 1$ ; tāpēc no (43) formulas  $m_m = \operatorname{cosec} \Theta$ ; no (38) form.  $\tg \nu = \operatorname{sn} \Theta$ ; no pēdējās vai arī

$$(40) \text{ form. } \operatorname{sn} 2\nu = \frac{2 \operatorname{sn} \Theta}{1 + \operatorname{sn}^2 \Theta}, \text{ no (42) } \operatorname{sn} 2\mu = \frac{2 \operatorname{sn}^2 \Theta}{1 + \operatorname{sn}^2 \Theta}.$$

$$\text{Tā kā } \cos 2\mu = \frac{\cos \Theta \sqrt{1 + 3 \operatorname{sn}^2 \Theta}}{1 + \operatorname{sn}^2 \Theta}, \text{ tad}$$

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\operatorname{sn} 2\mu}{1 + \cos 2\mu} = \left( \frac{2 \operatorname{sn} \Theta}{\cos \Theta + \sqrt{1 + 3 \operatorname{sn}^2 \Theta}} \right)^2.$$

Ieliekot no (50) formulām a un b nozīmes (29) formulā, dabonam

$$\operatorname{sn} \omega = \frac{1 - \operatorname{tg} \mu}{1 + \operatorname{tg} \mu}. \quad (52)$$

No šejienes  $\operatorname{tg} \omega = \frac{\operatorname{sn} \omega}{\sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 \omega}} = \frac{1 - \operatorname{tg} \mu}{2 \sqrt{\operatorname{tg} \mu}}$ ; ieliekot te tikko dabūto  $\operatorname{tg} \mu$

nozīmi pēc vienkāršiem pārveidojumiem dabūjam:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \Theta. \quad (53)$$

Aprēķinot  $\omega$  pēc šīs formulas nav vajadzīgs palīglielums  $\mu$ , ko noteic pēc (42) form. un kas nepieciešams a un b aplēsei pēc (50) formulām. Šinī gadījumā no (52) form.  $\operatorname{tg} \mu = \frac{1 - \operatorname{sn} \omega}{1 + \operatorname{sn} \omega} = \operatorname{ctg}^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2} \right)$

un (50) formulas iznāk:  $a = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2} \right)$  un  $b = \operatorname{cotg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2} \right)$ . (54)

Skaitliskam piemēram ņemsim Bonna projekciju ar platumu  $\varphi_0 = 55^\circ$  paralēlei, pa kuŗu aptītais kons pieskaras zemes virsai; punktam ar  $\varphi = -60^\circ$  un  $\lambda = 75^\circ$ ,  $m_m = 1,701$ ,  $m_p = 1$  un  $\Theta = 36^\circ 01'$ . Ar šiem datiem pēc (53) formulas  $\omega = 34^\circ 31'$ , pēc (54) form.  $a = 1,901$  un  $b = 0,526$ .

6. Ja vienādlīelai projekcijai meridiāni un paralēles krustojas zem taisniem leņķiem, tad leņķu vislielāko alterāciju vienkāršāki aprēķināt pēc otrādi uzrakstītās (54) pirmās formulas, proti:

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2} \right) = a. \quad (55)$$

Kā jau agrāki bija teikts, projekcijas labumu visspilgtāki raksturo līniju un leņķu sagrozījumi, resp. alterācijas. Tāpēc turpmākās nodaļās, pie atsevišķu projekciju apskates, sevišķās tabulās ir doti tikai mērogi pa meridiāniem un paralēlēm un vislielākās leņķu izmaiņas; turpretim indikātrisu pusasis nav dotas, jo nav grūti tās aprēķināt katram punktam pēc augšā dotām formulām.

Pārskatāmības dēļ ir noderīgi uz projekcijas punktus ar vienādām līniju vai leņķu izmaiņām savienot ar nepārtrauktām līknēm. Šīs līknes sauc par izokoliem (no ἴσος — vienāds un κολός — sakropļots); vispār ņemot, tās ir daždažāda veida līknes; vienkāršākām projekcijām tās ir taisnas līnijas vai apļa loki.

## II. nodaļa.

### Perspektīvās projekcijas.

8. **Vispārīgās formulas.** — Perspektīvo projekciju konstruēšanai iedomājas zemes sferoidu samazinātu dotā galvenā mērogā un no tā tad projicē punktus un līnijas uz zināmā stāvokli nostādītu plakni. Šo plakni sauc par ainu, attēla vai projekcijas plakni, bet acs novietošanas vietu par redzes punktu. Stari, kas novilkti no redzes punkta uz attēlojamā ķermeņa svarīgākiem punktiem, krusto ainu plakni punktos, kuŗu kopojums veido perspektīvo attēlu. Projekcijas punktu, kuŗu dod perpendikulārais pret ainu plakni stars, parasti sauc par projekcijas centrālo punktu vai centru un pašu staru par galveno staru. Zinot redzes punkta un ainu plaknes stāvokļus attiecībā pret iedomātā zemes sferoida centru, ir iespējams dabūt zemes virsas perspektīvo attēlu grāfiski vai analītiski, resp. skaitliski. Perspektīvās projekcijās parasti attēlo zemes virsas lielas daļas (piemēram veselas puslodes jeb hemisfēras) un tāpēc galveno mērogu ņem ļoti mazu; pat vislielākos pasaules atlasos galvenais mērogs ir 1 : 20 miljoni un pat vēl mazāks. Zemes virsas deformācijas šinīs projekcijās iznāk tik lielas, ka nav vajadzīgs ņemt vērā zemes sferoida saspiedumu un tāpēc zemi uzskata par tādu sfēru, kuŗas laukums vienādiels zemes sferoida virsas laukumam; tādas sfēras rādīus  $R$  aprēķina pēc tuvinātas formulas (sk. 3. §):

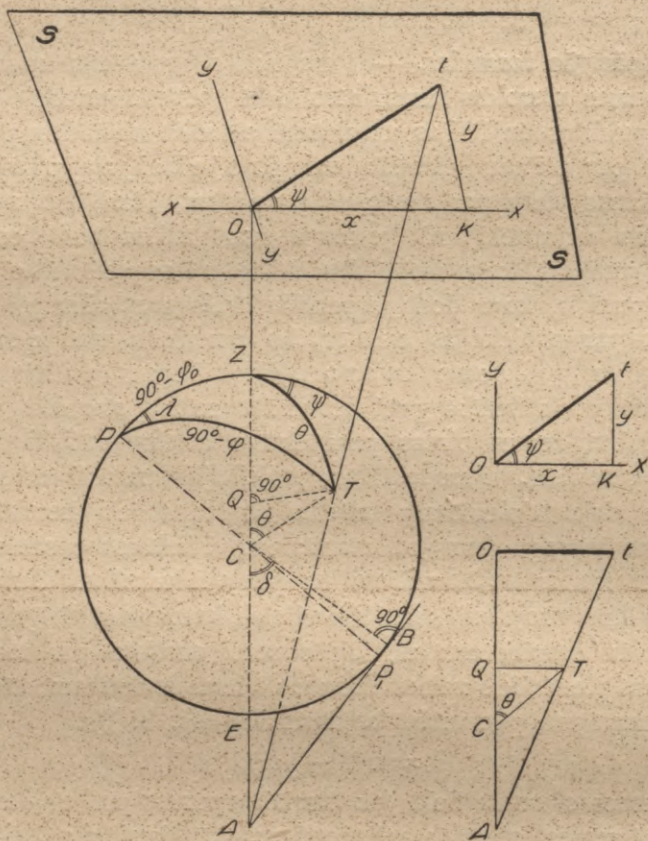
$$R = a \left(1 - \frac{1}{6} e^2\right),$$

kur  $a$  ir zemes sferoida lielā (ekvatoriālā) pusass un  $e$  ekscentrība. Pēc Beseļa zemes sferoida elementiem, kā jau bija teikts,  $R = 6\,370\,289,511$  m un  $\log R = 6.804\,15917$ .

Redzes punktam un ainu plaknei var būt patvaļīgs stāvoklis attiecībā pret sfēras centru, bet aprobežosimies ar gadījumiem, kad ainu plakne ir stateniska pret taisni, kas savieno redzes punktu ar sfēras centru.

Iedomāsimies, ka  $A$  (14. zīm.) ir redzes punkts,  $C$  sfēras centrs,  $PP_1$  galvenā mērogā samazināta zemes ass,  $SS$  ainu plakne,  $O$  projekcijas centrālais punkts un  $AO$  galvenais stars, statenisks pret ainu plakni. Lai dabūtu sfēras virsas patvaļīga punkta  $T$  attēlu, novilksim caur viņu no redzes punkta taisni  $AT$  līdz krustojumam ar ainu plakni

punktā  $t$ ; šis ir punkta  $T$  attēls uz projekcijas. Attēla atsevišķo punktu noteikšanai parasti lieto nevis grafisku konstruējumu, bet noteiktu analītisku aprēķinu. Pieņemsim, ka  $PP_1$  ir zemes ass un, ka punkta  $Z$  meridiāna plakne  $PZP_1$  sakrīt ar zīmējuma plakni. Šādi divi pieņēmumi nebūs vispārīgā jautājuma sašaurinājums, jo vienmēr būs iespējams pagriezt sferu ap taisni  $ZA$  tā, lai zemes ass  $PP_1$  no-



14. zīm.

14-b. zīm.

nāktu zīmējuma plaknē. Pieņemsim, ka  $P$  ir ziemeļpols un  $P_1$  dienvidpols. Punktā  $Z$  galvenais redzes stars krustojas ar sfēras virsu. Starp punktiem  $T, P$  un  $T, Z$  novilksim lielo riņķu lokus; tad loks  $PT$  būs punkta  $T$  meridiāna loks. Punkta  $T$  attēlu uz plaknes visvienkāršāki noteikt ar taisnleņķu koordinātām  $OK = x$  un  $Kt = y$ , ņemot projekcijas centrālo punktu  $O$  par koordinātu sākumu,  $x$  asi zīmējuma plaknē (ar šo taisni projekcijā attēlojas punkta  $Z$  meridiāns) un  $Y$  asi stateniski pret zīmējuma plakni. Tā kā plaknes leņķis  $tOK$  ir

vienlīdzīgs sfēriskam leņķim  $P_1ZT = \psi$ , tad no taisnleņķa trīsstūra OKt ar taisno leņķi punktā K (14. zīm.) rakstam:  $x = \overline{Ot} \cdot \cos \psi$ ,  $y = \overline{Ot} \cdot \sin \psi \dots$  (a)

Redzes punkta A attālumumu no ainu plaknes SS resp. galvenā stara AO gaŗumu nosauksim par L; tā paša punkta attālumumu no sfēras centra, t. i. gaŗumu AC apzīmēsim ar D. No punkta T nolaidīsim stateni TQ uz galveno staru AO; novilksim zemes rādiusu  $CT = R$  un leņķi ZCT nosauksim par  $\theta$ ; tad no līdzīgiem taisnleņķa trīsstūriem AOt un TAQ ar taisniem leņķiem punktos O, Q un kopēju leņķi A (14 b. zīm.) rakstam:

$$\frac{Ot}{QT} = \frac{AO}{AQ}.$$

Taisnleņķa trīsstūri CQT, ar  $\sphericalangle QCT = \theta$  un taisno leņķi Q,  $QT = R \sin \theta$  un  $QC = R \cos \theta$ ;  $AQ = AC + CQ = D + R \cos \theta$ ; nosaucot vēl rādiusu vektoru Ot par  $\rho$  un ieliekot dabūtos lielumus iepriekšējā proporcijā, dabonam:

$$\rho = \frac{LR \sin \theta}{D + R \cos \theta} = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (56)$$

Ieliekot šo Ot nozīmi (a) izteiksmē, dabūjam taisnleņķu koordinātas x un y sekošā veidā:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{LR \sin \theta \cos \psi}{D + R \cos \theta} = x(\theta, \psi). \\ y &= \frac{LR \sin \theta \sin \psi}{D + R \cos \theta} = y(\theta, \psi). \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Pēc šīm formulām ir iespējams noteikt punkta t vietu uz projekcijas, ja ir dotas atbilstošā punkta T uz sfēras sfēriskās polārās koordinātas, t. i. lielā riņķa loka ZT gaŗums  $\theta$  (zenītdistance) un sfēriskais leņķis  $\psi$ , skaitot pēdējo no punkta Z meridiāna resp. zīmējuma plaknes. Punkta T vietu uz zemes tomēr parocīgāki noteikt ar ģeogrāfiskām koordinātām.

Punktu T un Z platumus nosauksim par  $\varphi$  un  $\varphi_0$ , bet viņu gaŗumu starpību resp.  $\sphericalangle ZPT$  par  $\lambda$ ; tad no sfēriskā trīsstūra PZT, kuŗam  $PZ = 90^\circ = \varphi_0$ ,  $PT = 90^\circ - \varphi$ ,  $TZ = \theta$  un  $\sphericalangle T郑 = 180^\circ - \psi$ , rakstam:

1.  $\sin \theta \cos (180^\circ - \psi) = \sin (90^\circ - \varphi_0) \cos (90^\circ - \varphi) - \cos (90^\circ - \varphi_0) \sin (90^\circ - \varphi) \cos \lambda$ ,
2.  $\cos \theta = \cos (90^\circ - \varphi_0) \cos (90^\circ - \varphi) + \sin (90^\circ - \varphi_0) \sin (90^\circ - \varphi) \cos \lambda$ ,
3.  $\sin \theta \sin (180^\circ - \psi) = \sin \lambda \sin (90^\circ - \varphi)$ . (Sk. „Lekcijas, lasītas 1922. g. Zemkopības ministrijas Zemju departamenta Mērniecības daļas

mērieku un taksatoru papildu kursus“ 25. lp. (3) form., 21. lp. (1) form. un 23. lp. (2) form.).

Pēc šo formulu vienkāršošanas iznāk:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sn} \Theta \cos \psi &= \operatorname{sn} \varphi_0 \cos \varphi \cos \lambda - \cos \varphi_0 \operatorname{sn} \varphi, \\ \cos \Theta &= \operatorname{sn} \varphi_0 \operatorname{sn} \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \lambda, \\ \operatorname{sn} \Theta \operatorname{sn} \psi &= \operatorname{sn} \lambda \cos \varphi. \end{aligned} \right\} (b).$$

Šīs nozīmes ievietojam (57) sistēmā; tad

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{LR (\operatorname{sn} \varphi_0 \cos \varphi \cos \lambda - \cos \varphi_0 \operatorname{sn} \varphi)}{D + R (\operatorname{sn} \varphi_0 \operatorname{sn} \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \lambda)} \\ y &= \frac{LR \operatorname{sn} \lambda \cos \varphi}{D + R (\operatorname{sn} \varphi_0 \operatorname{sn} \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \lambda)} \end{aligned} \right\} (58)$$

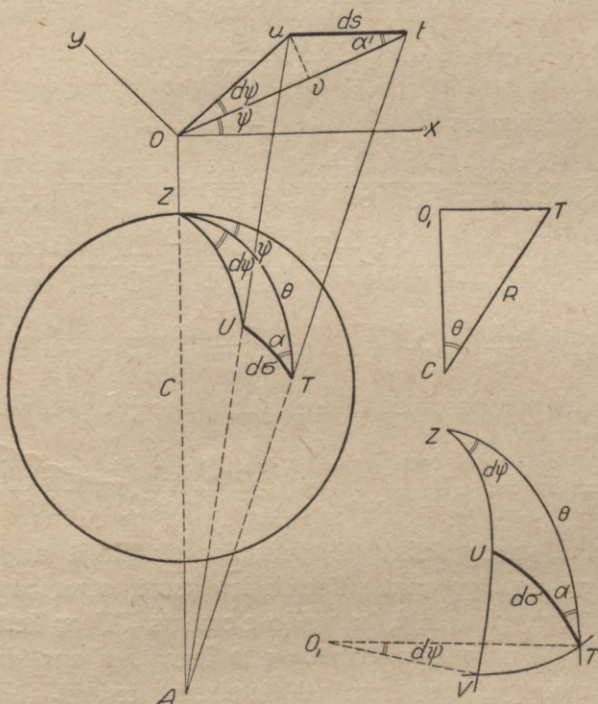
Zemes stāvokli attiecībā pret ainu plakni jeb otrādi noteic lielumi  $L$ ,  $D$ ,  $\varphi_0$ , kas vienai un tai pašai projekcijai ir nemainīgi. Ikkuŗa punkta uz zemes virsas stāvokli noteic tā platums un gaŗums, resp. gaŗumu starpība; tā tad (58) sistēma noteic 4. § (1) form. parādīto sakarību.

Ja no abiem nol. izslēgsim  $\varphi$ , tad dabūsim vienu nol. ar mainīgiem lielumiem  $x$ ,  $y$ ,  $\lambda$ . Pie viena un tā paša  $\lambda$ , t. i. uz viena un tā paša meridiāna, dabūtais nol. izteic sakarību starp viena un tā paša meridiāna punktu abscisām un ordinātām, tāpēc šādu nol. sauc par meridiānu nol.; mainot  $\lambda$  dabūsim dažādo meridiānu nol. Ja, turpretim, no abiem augšējiem nol. izslēgsim gaŗumu  $\lambda$ , tad iznāks viens nol. ar mainīgiem  $x$ ,  $y$ ,  $\varphi$ ; dodot tamī platumam dažādas nozīmes dabūsim parallēļu nol., jo tie izteic sakarību starp kādas parallēles atsevišķo punktu abscisām un ordinātām. Kā meridiānu, tā parallēļu nol.—os  $x$  un  $y$  iznāk otrā pakāpē; tāpēc vispār ņemot, meridiāni un parallēles perspektīvās projekcijās attēlojas kā otrās šķiras liknes, t. i. kā elipses, hiperbolas un parabolas un tikai sevišķos gadījumos kā riņķi un taisnes. Pie šī slēdziena var nonākt arī tiešā ceļā, jo meridiāni un parallēles uz sfēras virsas ir aplī un aplja projekcijas uz plāknes ir tikai otrās šķiras liknes.

1. piezīme. Pieņemsim ka  $AB$  (14. zīm.) ir meridiāna  $PZP_1$  pieskare punktā  $B$ . Centrālo leņķi  $\delta = \angle BCA$  noteic formula  $\cos \delta = \frac{R}{D}$ . Punkta  $B$  leņķiskais attālums no ziemeļpola  $= \angle PCB = = 270^\circ - \varphi_0 - \delta$ . Viegli saprast, ka uz projekcijas var attēlot tikai daļu  $ZB$  uz labo pusi no centrālā punkta un tikpat uz kreiso pusi no tā. Daļas  $EB$  uz labo pusi no  $E$ , un tādas pašas daļas uz kreiso pusi no  $E$ , attēlošana nebūs vairs iespējama, jo šīs daļas punkti novietosies uz agrāk uzzīmētās kartes daļas.

2. piezīme. Ja redzes punktu ņemsim augšā un āinu plakni apakšā, tad izveduma gaita būs analogiska, bet (56) formulas labā pusē saucējs iznāks  $D - R \cos \Theta$ ; tāds pats iznāks arī šaucejs (57) formulās un mīnus zīme ieies arī (58) formulu saucējos.

Perspektīvo projekciju mērogs. — Apskatīsim no kā atkarājas vietējais jeb lokālais mērogs perspektīvās projekcijās un kā



15. zīm.

tas mainās pārejot no viena punkta uz otru. Varētu ņemt mērogu vispārīgās formulas (4. §) un tanīs ielikt vajadzīgos lielumus no tikko izvestām (58) formulām, bet tāds darbs būs apgrūtinošs un nedos ērtas formulas; tāpēc mēģināsim izvest mērogu formulas patstāvīgi, pieņemot, ka punkts uz sfēras noteikts ar polārām sfēriskām koordinātām  $\Theta$  un  $\psi$  pēc (57) form.

Iedomāsimies, ka T un U ir divi bezgalīgi tuvi punkti uz sfēras (15. zīm.) un ka tiem atbilstošie punkti uz āinu plaknes ir t un u. Bezgalīgi mazos sfēras un plaknes elementus nosauksim par  $d\sigma$  un  $ds$ .

Tāpat, kā agrāk, mērogs  $m = \frac{ds}{d\sigma} \dots (c).$

Punkta T polārās sfēriskās koordinātas nosauksim, tāpat kā līdz šim, par  $\psi$ ,  $\Theta$  un punkta t taisnleņķu koordinātas par x, y. Caur punktiem Z, U novilksim lielā riņķa loku un caur punktu T novilksim mazā riņķa loku plaknē, stateniskā pret AZ, tad izveidosies bezgalīgi mazs sfērisks trīsstūris UVT, kuram loka VT (almukantarata) rādius  $O_1T = R \operatorname{Sn} \Theta$ , loks  $VT = O_1T \cdot d\psi = R \operatorname{sn} \Theta \cdot d\psi$  un loks  $UV = R \cdot d\Theta$ ; tāpēc  $UT^2 = (d\sigma)^2 = (R d\Theta)^2 + (R \operatorname{sn} \Theta d\psi)^2$ ,  $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$  un

$$m^2 = \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{(Rd\Theta)^2 + (R \operatorname{sn} \Theta d\psi)^2} \dots (d)$$

No (57) izteiksmes

$$\frac{\partial x}{\partial \Theta} = \frac{LR \cos \psi (D \cos \Theta + R)}{(D + R \cos \Theta)^2}, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{LR \operatorname{sn} \Theta \operatorname{sn} \psi}{D + R \cos \Theta}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \Theta} = \frac{LR \operatorname{sn} \psi (D \cos \Theta + R)}{(D + R \cos \Theta)^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{LR \operatorname{sn} \Theta \cos \psi}{D + R \cos \Theta}$$

Tā kā  $dx = \frac{\partial x}{\partial \Theta} d\Theta + \frac{\partial x}{\partial \psi} d\psi$  un  $dy = \frac{\partial y}{\partial \Theta} d\Theta + \frac{\partial y}{\partial \psi} d\psi$ , tad, ielie-

kot te tikko dabūtos parciālos diferenciālus, paceļot kvadrātā un saskaitot, dabūsim:

$$(dx)^2 + (dy)^2 = (ds)^2 = \frac{L^2 R^2 (d\Theta)^2}{(D + R \cos \Theta)^2} \left[ \left( \frac{R + D \cos \Theta}{D + R \cos \Theta} \right)^2 \left( \frac{\operatorname{sn} \Theta \cdot d\psi}{d\Theta} \right)^2 \right] \dots (e).$$

Šo nozīmi varētu ielikt (d) formulas skaitītājā un ar to būtu dabūta mēroga resp. gaŗumu attiecību izteiksme, atkarībā no polārām koordinātām  $\Theta$ ,  $\psi$ . Ja leņķi, ko veido elements TU ar lielā riņķa loku TZ, t. i.  $\sphericalangle$  UTZ nosauksim par  $\alpha$  un to ievēdīsim aprēķinos, tad varēsīm vienu mainīgo, piemēram,  $d\psi$  izteīsmē izslēgt. No zīmējuma redzam, ka  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{VT}{VU} = \frac{\operatorname{sn} \Theta d\psi}{d\Theta} \dots (f)$ . No šejienes  $d\psi$  nozīmi ieliekam

$$(e) \text{ form.}; \text{ tad } (ds)^2 = \frac{L^2 R^2 (d\Theta)^2}{(D + R \cos \Theta)^2} \left[ \left( \frac{R + D \cos \Theta}{D + R \cos \Theta} \right)^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha \right]; \text{ form. (d)}$$

saucējs pēc  $d\psi$  atvīetošanas iznāks  $\frac{R^2 (d\Theta)^2}{\cos^2 \alpha}$  un

$$m = \frac{L}{D + R \cos \Theta} \sqrt{\left( \frac{R + D \cos \Theta}{D + R \cos \Theta} \right)^2 \cos^2 \alpha + \operatorname{sn}^2 \alpha}. \quad (59)$$

Radikāla priekšā nav ņemtas divas zīmes, jo mērogs, kā divi linīju elementu attiecība, vienmēr ir pozitīvs lielums. Formula rāda, ka mērogs ir atkarīgs no  $\Theta$ , t. i. no punkta atstatuma līdz projekcijas centram; tā kā formulā  $\psi$  neīciet, tad mērogs nav atkarīgs no leņķa

$\psi$  un vienādos attājumos no projekcijas centra mērogi ir vienādi; vienā un tanī pašā projekcijas punktā mērogs ir atkarīgs no leņķa  $\alpha$ , t. i., no elementa TU virziena. Lai dabūtu maksimālā un minimālā mēroga virzienus, jāņem mēroga atvasinātas pēc  $\alpha$ . Šī jautājuma sīkāka pētīšana, kurai te trūkst vietas, rāda, ka mēroga maksimums un minimums būs pie  $\alpha = 0^\circ$  un  $90^\circ$ .

$$m_{\max} = m_{\alpha=90^\circ} = a = \frac{L}{D + R \cos \Theta}, \quad (59')$$

$$m_{\min} = m_{\alpha=0^\circ} = b = \frac{L(R + D \cos \Theta)}{(D + R \cos \Theta)^2}. \quad (59'')$$

Perspektīvo projekciju leņķu alterācijas — Uziešim sakarību starp leņķiem uz sfēras un atbilstošiem leņķiem uz projekcijas. Sfēriskam leņķim  $\alpha$  atbilst uz projekcijas leņķis  $\Theta = \alpha'$ ; tā kā

$$vu = \rho \, d\psi \text{ un } vt = d\rho, \text{ tad } \operatorname{tg} \alpha' = \frac{vu}{vt} = \frac{\rho \, d\psi}{d\rho}.$$

Dalot šo izteiksmi ar (f) dabonam:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\rho \, d\Theta}{\operatorname{sn} \Theta \cdot d\rho} \dots (g).$$

Diferencējam (56) nol. pēc  $\Theta$ ; tad

$$\frac{d\rho}{d\Theta} = \frac{LR(D \cos \Theta + R)}{(D + R \cos \Theta)^2}.$$

So rezultātu ievietojam (g) formulā un atvietojam  $\rho$  pēc (56) form.; iznāk

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{D + R \cos \Theta}{R + D \cos \Theta} \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (60)$$

Vispārējie slēdzieni un perspektīvo projekciju klasifikācija. — (56)—(60) formulas rāda, ka perspektīvo projekciju ipašības atkarājas no redzes punkta attāluma līdz sfēras centram, t. i. no lieluma  $D$ , bet neatkarājas no ainu plaknes  $SS$  attāluma, t. i. lieluma  $L$ . Ja ainu plakne pārvietosies paralēli sev pašai, tad koordinātu  $x$ ,  $y$  un mēroga  $m$  relatīvās nozīmes nemainīsies, jo šos lielumus noteicošās formulās attālums  $L$  ieiet tikai kā reizinātājs; turpretim leņķu alterācijas noteicošā (60) formulā  $L$  neieiet. Pie dotiem  $L$  un  $D$ , t. i. vienai un tai pašai projekcijai, līniju un leņķu izmaiņas ir atkarīgas tikai no  $\Theta$ ; tas nozīmē, ka punktus, kas ir vienādi tālu no redzes punkta projekcijas, resp. projekcijas centra, šīs izmaiņas ir vienādas. Tāpēc visās perspektīvās projekcijās izokoli ir koncentriski riņķi, kuŗu kopīgais centrs ir redzes punkta projekcija.

Atkarībā no redzes punkta vietas perspektīvās projekcijas sadalās: 1) ortografiskās, kad redzes punkts ir attālinājies bezgalīgi, 2) stereografiskās, kad redzes punkts ir ņemts uz sfēras virsas, 3) centrālās jeb gnomoniskās, kad redzes punkts ir sfēras centrā un 4) ārējās, kad redzes punkts ir ārpus sfēras, bet attāļums līdz sfērai ir galīgs. Atkarībā no tā, vai galvenais stars, resp. stars, kas savieno redzes punktu ar zemes centru un kuŗam stateniski iet ainu plakne, sakrīt ar zemes asi, ar ekvatora kaut-kādu diametru jeb krusto zemes virsu patvaļīgā punktā, katra no uzskaitītām perspektīvām projekcijām būs polāra, ekvatoriāla jeb horizontāla noteiktā zemes punktā.

**9. Ortografiskās projekcijas.** — Tanīs redzes punkts ir bezgalīgi tāļu no sfēras; tas nozīmē, ka visi redzes stari ir parallēli savā starpā; tā kā ainu plakne ir stateniska pret redzes stariem, tad tās atrašanās vieta negroza ne konstruēšanas veidu, ne attēla mērogu. Konstruēšanas paņēmienam atbilst tās nosaukums — taisni jeb stāvus rasējošā. AINU plakni velk parasti caur sfēras centru un uz to projicē veselu puslodi (hemisfēru) jeb sfēras kādu daļu. Parasti domā, ka ortografisko projekciju izgudrojis ievērojamais grieķu ģeometrs Appolonijs (ap 210. g. pirms mūsu ēras). Ortografisko projekciju vispārīgās formulas dabū no perspektīvo projekciju vispārīgām formulām, ieliekot tur  $D=L=\infty$ ; papriekšu (56)–(58) formulās ieliekam  $D=L$ , tad dalām ar  $L$  un pielīdzinām  $L=\infty$ . Jebkuŗa punkta noteikšanai iznāk rādiusam vektoram  $\rho$  un taisnleņķu koordinātām  $x, y$  sekošas formulas:

$$\rho = R \operatorname{sn} \Theta = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (61)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= R(\operatorname{sn} \varphi_0 \cos \varphi \cos \lambda - \cos \varphi_0 \operatorname{sn} \varphi), \\ y &= R \cos \varphi \operatorname{sn} \lambda \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Mēroga vispārīgā (59) formula šinī gadījumā dod:

$$m = \sqrt{\cos^2 \Theta \cos^2 \alpha + \operatorname{sn}^2 \alpha}. \quad (63)$$

Pēdējā formula rāda, ka mērogs ir atkarīgs no  $\Theta$  un  $\alpha$ ; tas nozīmē, ka ar attāluma maiņu no kāda punkta līdz projekcijas centram mainās mērogs un, ka vienā un tanī pašā punktā mērogs dažādos virzienos ir dažāds. Mēroga kvadrāta pirmā un otrā atvasinātās pēc  $\alpha$  ir

$$\frac{d(m^2)}{d\alpha} = \operatorname{sn}^2 \Theta \operatorname{sn} 2\alpha \quad \text{un} \quad \frac{d^2(m^2)}{d\alpha^2} = 2 \operatorname{sn}^2 \Theta \cos 2\alpha.$$

Otrā atvasinātā ir negatīva pie  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ; tanī pašā laikā pirmā atvasinātā ir nulle, tā tad šinī virzienā mērogam ir maksimums; otrā atvasinātā ir pozitīva pie  $\alpha = 0$  un tanī pašā laikā pirmā atvasinātā

ir atkal nulle, tā tad šinī virzienā mērogam ir minimums. Pati mēroga funkcija dod  $m_{\max} = a = 1$  un  $m_{\min} = b = \cos \Theta$ . Te un arī turpmāk jāņem vērā, ka (59)—(60) un no tām dabūtās formulās,  $\alpha$  ir leņķis starp virzienu uz projekcijas centru un kādu citu virzienu dotā punktā un tā tad, vispārīgā gadījumā, nav azimuts.

Sfēras lokam  $\Theta$  atbilst uz projekcijas rādius  $\rho$ ; tā tad pa projekcijas rādiusiem vektoriem mērogs mainās proporcionāli punkta atstatuma no projekcijas centra kosinusiem. Maksimums atbilst indikatrisas lielai un minimums mazai pusasij.

Ortografiskām projekcijām (60) formula dod:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \sec \Theta \operatorname{tg} \alpha. \quad (64)$$

Šī formula rāda, ka projekcijas centrā, pie  $\Theta = 0$ ,  $\alpha' = \alpha$ ; tas nozīmē, ka projekcijas centrā leņķi attēlojas dabiskā lielumā; leņķim  $\Theta$  pieaugot, pieaug arī  $\sec \Theta$ ; tā tad, ar attālināšanos no projekcijas centra palielinājas leņķu izmaiņas. Leņķu vislielāko alterāciju aprēķina pēc (29) formulas, ieliekot  $a = 1$  un  $b = \cos \Theta$ ; tad:

$$\operatorname{sn} \omega = \operatorname{tg}^2 \frac{\Theta}{2}. \quad (65)$$

Pēc (43) form.  $p = ab = \cos \Theta = b$ .

Pēc tikko izvestām formulām aprēķinātie  $\rho$ ,  $a$ ,  $b$  un  $\omega$  dažādiem leņķiskiem attālumiem  $\Theta$  no  $0^\circ$  līdz  $90^\circ$  ar  $15^\circ$  lieliem intervāliem, pieņemot  $R = 1$ , doti sekojošā tabulā, kuŗa noderīga visām ortografiskām projekcijām.

$\Theta$	$\rho$	$a$	$b$	$2 \omega$
$0^\circ$	0,000	1	1,000	$0^\circ 00'$
15	0,259	1	0,966	1 59
30	0,500	1	0,866	8 14
45	0,707	1	0,707	19 45
60	0,866	1	0,500	38 57
75	0,966	1	0,259	72 09
90	1,000	1	0,000	180

Formulu pētījums un tabulas skaitļi rāda, ka ortografiskās projekcijās nav nedz figūru līdzības, nedz laukumu vienādības, t. i. tās nav ne vienādleņķīgas (konformas), nedz vienlielas (ekvivalentas). Tikai projekcijas centrā, kur  $\Theta = 0^\circ$  mērogi visos virzienos ir  $= 1 =$  gal-

venam mērogam. Ar attālināšanos no projekcijas centrā projekcijas rādiusa virzienā (pie  $\alpha = 0^\circ$ ) mērogs pamazinājas, papriekšu pamazām, tad vairāk un uz projekcijas malām  $b = 0$ ; tūpretim stateniskā pret projekcijas rādius virzienā ( $\alpha = 90^\circ$ ) mērogs ikkuŗā punktā ir konstants = galvenam. Indikatrisas — līknēs, kas raksturo projekcijas labās un ļaunās īpašības — visos projekcijas punktos būs elipses, saspiestas projekcijas rādiusa-vektora virzienā. Tikai pašā pro-

jekcijas centrā bezgalīgi mazie sfēras riņķiši attēlosies arī uz projekcijas kā vienlieli riņķiši, bet projekcijas pašā malā riņķiši vairs pat nebūs elipses, bet pārvērtīsies par taisnes nogriežņiem.

Tagad pētīsim ortografisko projekciju atsevišķus gadījumus.

a) Polārā ortografiska projekcija. — Galvenais stars iet pa zemes asi un ainu plakne sakrīt ar ekvatora plakni jeb iet tai paralēli. Pēc 14. zīm. punkts  $Z$  — centrālais punkts — sakrīt ar  $P$  un  $90^\circ - \varphi_0 = 0^\circ$ . No šīs sakarības dabūto  $\varphi_0 = 90^\circ$  ieliekam (62) formulas; tad

$$\left. \begin{aligned} x &= R \cos \varphi \cos \lambda, \\ y &= R \cos \varphi \sin \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Tā kā  $\Theta = 90^\circ - \varphi$ , tad no (61) form.:

$$\rho = R \cos \varphi. \quad (67)$$

Projekcijas centrs ir pols un koordinātu sākums, jo pie  $\varphi = 90^\circ$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ .

Dalot  $y$  ar  $x$ , izslēdzam platumu  $\varphi$  un dabonam meridiānu nol.:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \lambda. \quad (68)$$

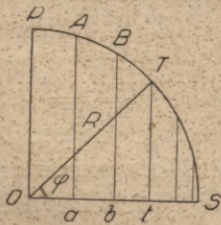
Pie viena un tā pašā gaļuma  $\lambda$  resp. vienam un tam pašam meridiānam šī nol. otrā daļa ir konstants lielums. Ja uz šī meridiāna ņemsim divi punktus ar koordinātām  $x_1, y_1$  un  $x_2, y_2$ , tad

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2};$$

tas nozīmē, ka meridiāni ir taisnes, kas iziet starveidīgi no projekcijas centra. Leņķi starp šīm taisnēm = gaļumu starpībām. Kad  $\lambda = 0^\circ$ , tad pēc (66) form.  $y = 0$ ; tas nozīmē, ka sākuma meridiāns sakrīt ar  $x$  asi; uz tās pašas ass būs arī meridiāns ar gaļumu  $\lambda = 180^\circ$ .

(66) nol. pacelsim kvadrātā un saskaitīsim; tad izslēdzas gaļumu starpība  $\lambda$  un iznāk paralēļu nol.:

$$x^2 + y^2 = (R \cos \varphi)^2. \quad (69)$$



16. zīm.

Šī nol. otrā daļa katram skaitliski noteiktam platumam  $\varphi$  ir konstants lielums; tāpēc visas paralēles ir koncentriski riņķi ar rādiusiem  $\rho = R \cos \varphi$  un kopēju centru, kas ir koordinātu sākums un pola attēls. Vislielākais riņķis būs ekvators pie  $\varphi = 0^\circ$  un tad  $\rho = R$ , t. i. ekvators ir projekcijas ārējais riņķis un attēlojas galvenā mērogā.

Paralēļu rādiusus ļoti vienkārši dabūt grafiskā ceļā. Ar rādiusu  $OP =$  zemes rādiusam pieņemtā galvenā mērogā novelk loku  $PS$  (16. zīm.),

atliek leņķi  $TOS = \varphi$  un nolaiž stateni  $Tt$ . Līnija  $Ot = R \cos \varphi = \rho$  ir rādius paralēlei, noteiktai ar platumu  $\varphi$ . Ja grib konstruēt vairākas paralēles, tad loku  $PS$  sadala attiecīgi vairākās vienādās daļās un no dabūtiem punktiem nolaiž statenus uz  $OS$ . Tā dabūtie nogriežņi  $Oa$ ,  $Ob$ ,  $Ot \dots$  ir attiecīgo paraleļu rādiusi.

Ja paralēļu rādiusi būtu jāaprēķina, piemēram, kartei ar galveno mērogu  $1 : 50\,000\,000$ , tad paralelēm, noteiktām ar platumiem  $0^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  un  $75^\circ$  dabūtu sekošus skaitļus centimetros 12,74; 12,30; 11,03; 9,01; 6,37 un 3,30.



17. zīm.



19. zīm.



21. zīm.

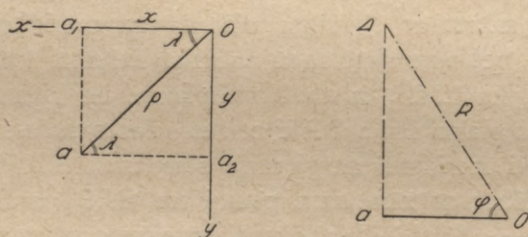
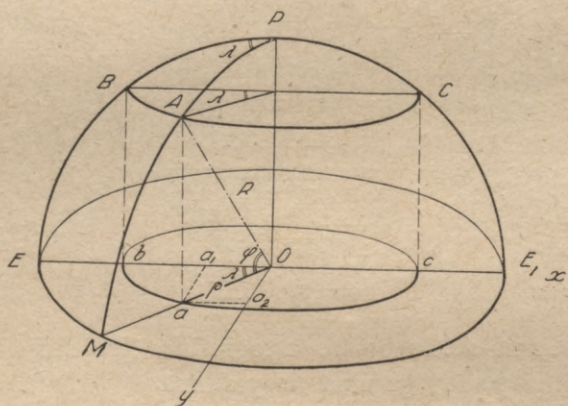
17. zīmējums attēlo polāro ortografisko projekciju ar meridiāniem un paralēlēm ik pa  $10^\circ$  garumā un platumā.

Piezīme. Polārās ortografiskās projekcijas formulas var dabūt arī tieši un pie tam ļoti vienkārši, kā tas parādīts 18. zīm. Kad ainu plakne sakrīt ar ekvatora plakni, tad meridiāni projicēties kā taisnas līnijas, bet paralēles savā dabiskā lielumā, kā koncentriski riņķi. Pieņemsim, ka  $EME_1$  ir ekvatora plakne un viņa centrā stateniska pret ekvatora plakni līnija  $OP$  ir zemes griezes pusass  $= R$ ,  $P$  pols,  $PBE$  un  $PAM$  divi meridiāni ar garumu starpību  $\sphericalangle MPE = \lambda$ , meridiāns  $EBPCE_1$  sakrīt ar zīmējuma plakni un  $BAC$  paralele, noteikta ar platumu  $AOM = \varphi$  (meridiāna loks starp ekvatoru un zemes punktu grādu mēros resp. centrālais leņķis, kas atbilst šim lokam). Projicējot ar līnijām stateniskām pret ekvatora plakni meridiānu un paralēļu visus punktus uz ekvatora plakni, dabūsim, piemēram, no paralēles  $BAC$  tikpat lielu apli  $bac$ ; meridiānu  $PAM$  un  $PBE$  plaknes attēlosies ar ekvatora rādiusiem  $OM$  un  $OE$  un  $\sphericalangle MOE = \lambda$ . Līniju  $EE_1$  pieņemsim par  $x$  asi un stateniski pret to centrā  $O$  uzstādīto stateni par  $y$  asi. Zemes virsas punkts  $A$  projicējas punktā  $a$  un no pēdējā uz abām asīm nolaistie stateni dod abscisu  $aa_2 = Oa_1 = x$  un  $aa_1 = -Oa_2 = y$ . No tā izveidojas divi vienādi taisnleņķa trīsstūri  $Oaa_1$  un

$Oaa_2$ , no kuriem  $x = \overline{Oa} \cdot \cos \lambda$  un  $y = \overline{Oa} \cdot \sin \lambda$ . No taisnleņķa trīsstūra  $AOa$  ar taisno leņķi punktā  $a$  un hipotenūzu  $AO = R$  iznāk, ka  $Oa = R \cos \varphi$ . Ieliekot šo nozīmi abos iepriekšējos nol. dabūjam (66) formulas.

b) Ekvatoriālā ortografiskā projekcija. — Aina plakne sakrīt ar viena kāda meridiāna plakni un galvenais stars ar ekvatora vienu diametru. Pēc 14. zīm. punkts  $Z$  ir uz ekvatora un loks  $PZ = 90^\circ - \varphi_0 = 90^\circ$ . No šejienes  $\varphi_0 = 0^\circ$  un ieliekot šo nozīmi (62) form., dabonam

$$x = -R \sin \varphi, \quad y = R \cos \varphi \sin \lambda. \quad (70)$$



18. zīm.

Šīs formulas noder projekcijas konstruēšanai pēc punktiem. Pie  $\varphi = 0^\circ$ ,  $x = 0$ ; tas norāda, ka ekvātors ir  $y$  ass. Pie  $\lambda = 0^\circ$ ,  $y = 0$ ; tas norāda, ka sākuma meridiāns ir  $x$  ass. Lai dabūtu meridiānu nol. no pirmā nol. noteic  $\sin \varphi$  un no otrā  $\cos \varphi$ ; tos paceļ kvadrātā un sasaskaita; iznāk

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{(R \sin \lambda)^2} = 1. \quad (71)$$

Sākuma meridiānam, kad  $\lambda=0$ , šādā veidā formula neder; tāpēc viņu pārraksta sekošā veidā:  $x^2 \operatorname{sn}^2 \lambda + y^2 = R^2 \operatorname{sn}^2 \lambda$ ; pie  $y=0$ ,  $\lambda=0$ ; tas norāda, ka sākuma meridiāns ir taisna līnija un sakrīt ar  $x$  asi; visai puslodei meridiāna gaņšums ir  $2R$ . Kad  $\lambda=90^\circ$ , tad  $x^2 + y^2 = R^2$  un meridiāns ir riņķis ar rādiusu  $R$ . Visos citos gadījumos, katram ar gaņšumu  $\lambda$  noteiktam meridiānam,  $R \operatorname{sn} \lambda$  ir konstants lielums; tāpēc meridiāni ir elipses ar nemainīgu un visiem kopēju pusasī  $\pm R$  un mazām pusasim  $R \operatorname{sn} \lambda$ , kas mainās no 0 līdz  $\pm R$ . Visu elipsu centri sakrīt ar projekcijas centru, kas ir ekvatora un sākuma meridiāna krustšanās punkts. No zīmējuma redzams, ka ainu plakne sakrīt ar meridiānu, kuņa gaņšums  $\lambda=90^\circ$ , jeb ainu plakne ir paralēla šī meridiāna plaknei.

Lai dabūtu paralēļu nol., tad jāstāda nol., kuņā neieiet gaņšums; tāds ir pirmais no augšā izvestiem (70) nol.:

$$x = -R \operatorname{sn} \varphi. \quad (72)$$

Katram dotam platumam  $\varphi$  nol. labā puse ir konstants lielums un  $x$  ir nemainīgs; tas nozīmē, ka paralēles ir taisnes, kas iet paralēli  $y$  asij. Pie  $\varphi=0$   $x=0$ ; tas rāda, ka ekvators ir taisne, kas sakrīt ar  $y$  asi. Ekvatoriālās ortografiskās projekcijas konstruēšanai pēc punktiem mērogā 1 : 50 000 000 var noderēt zemāk dotā tabula centimetros papriekšu  $\pm y$  un beidzamā slejā  $\pm x$ .

$\pm \varphi$	$\pm \lambda$										x
	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	
0°	0,00	2,21	4,36	6,37	8,19	9,76	11,03	11,97	12,55	12,74	0,00
10	0,00	2,18	4,29	6,27	8,06	9,61	10,86	11,79	12,37	12,55	2,21
20	0,00	2,08	4,09	5,99	7,70	9,17	10,37	11,25	11,79	11,97	4,36
30	0,00	1,92	3,77	5,52	7,09	8,45	9,55	10,37	10,86	11,03	6,37
40	0,00	1,69	3,44	4,88	6,27	7,48	8,45	9,17	9,61	9,76	8,19
50	0,00	1,42	2,80	4,10	5,26	6,27	7,09	7,70	8,07	8,19	9,76
60	0,00	1,11	2,18	3,19	4,10	4,88	5,52	5,99	6,27	6,37	11,03
70	0,00	0,76	1,49	2,18	2,80	3,24	3,77	4,09	4,29	4,36	11,96
80	0,00	0,38	0,76	1,11	1,42	1,69	1,92	2,08	2,18	2,21	12,55
90	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	12,74

Mēroga (9) formula ekvatoriālai ortografiskai projekcijai pieņem veidu

$$m^2 = [\cos^2 \varphi + (\operatorname{sn} \varphi \operatorname{sn} \lambda - \cos \lambda \operatorname{tg} \alpha)^2] \cos^2 \alpha. \quad (73)$$

Mērogs pa meridiāniem iznāks  $m_m = \sqrt{\cos^2 \varphi + \operatorname{sn}^2 \varphi \operatorname{sn}^2 \lambda}$  un pa paralēlēm  $m_p = \cos \lambda$ . Jāpiezīmē, ka pēdējo izteiksmi dabūsim tikai pēc iekavu atvēršanas (73) form. un pārveidošanas.

Projekcijas centrā  $\varphi = 0^{\circ}$ ,  $\lambda = 0^{\circ}$  un  $m_m = 1$ ,  $m_p = 1$ ; uz ekvatora, projekcijas malās  $\varphi = 0^{\circ}$ ,  $\lambda = \pm 90^{\circ}$  un  $m_m = 1$ ,  $m_p = 0$ .

19. zīm. parādīta ekvatoriālā ortografiskā projekcija ar meridiāniem un paralelēm ik pa  $10^{\circ}$ . Franči šo projekciju sauc par meridiānālo ortografisko projekciju.

c) Horizontālā ortografiskā projekcija. — Šinī projekcijā ainu plakne ir paralēla kāda dotā punkta horizontam. Ja, piemēram, pēc 14. zīm. caur punktu Z novilksim plakni, paralēlu ainu plaknei SS, tad šī plakne būs punkta Z horizonts, un punkta vieta uz meridiāna noteikta ar platumu  $\varphi_0$ . Viegli saprast, ka šinī gadījumā jāņem ortografisko projekciju vispārīgās (61), (62) un (63) formulas. Lai dabūtu meridiānu nol. ir jāizslēdz no (62) sistēmas platumš  $\varphi$ ; otrs nol. dod:  $\cos \varphi = \frac{y}{R \operatorname{sn} \lambda}$ ; ieliekot šo nozīmi tas pašas sistēmas pirmā nol. dabonam:

$$\operatorname{sn} \varphi = \frac{-x + y \operatorname{sn} \varphi_0 \cotg \lambda}{R \cos \varphi_0}.$$

Šo kosinusu un sinusu kvadrātus saskaita, pieved pie viena saucēja un to atmet; iznāk:

$$x^2 \operatorname{sn}^2 \lambda - 2xy \operatorname{sn} \varphi_0 \operatorname{sn} \lambda \cos \lambda + (\cos^2 \varphi_0 + \operatorname{sn}^2 \varphi_0 \cos^2 \lambda) y^2 = R^2 \cos^2 \varphi_0 \operatorname{sn}^2 \lambda \dots (a).$$

Šī formula ir elipses nol. un elipses centrs sakrīt ar koordinātu sākumu resp. projekcijas centru. Dodot garumam  $\lambda$  dažādas nozīmes dabū nol. dažādām elipsēm resp. meridiāniem. Kad  $\lambda = 0$ , tad  $y = 0$ ; tas nozīmē, ka nulles meridiāns ir taisne, kas sakrīt ar x asi. Kad  $\lambda = 90^{\circ}$ , tad  $\frac{x^2}{(R \cos \varphi_0)^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1$ ; tas norāda, ka šis meridiāns ir elipse ar y pusasi  $\pm R$  un x pusasi  $\pm R \cos \varphi_0$ .

Lai izpētītu (a) formulu, uzietu elipsu pusasis un leņķus starp tām un koordinātu asim, pieņemsim sekošus apzīmējumus:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}^2 \lambda &= A, \\ -2 \operatorname{sn} \varphi_0 \operatorname{sn} \lambda \cos \lambda &= B, \\ \cos^2 \varphi_0 + \operatorname{sn}^2 \varphi_0 \cos^2 \lambda &= C, \\ -R^2 \cos^2 \varphi_0 \operatorname{sn}^2 \lambda &= F. \end{aligned}$$

Tad (a) nol. pieņem sekošu veidu:

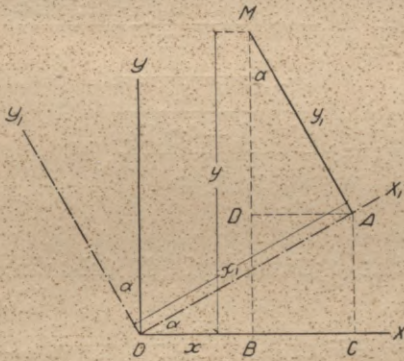
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0 \dots (b)$$

No šī nol. redzams, ka meridiāni ir otrās šķiras liknes, ar centru, taisnleņķu koordinātu sistēmā un ar koordinātu sākumu liknes centrā. Leņķi starp šīs liknes koordinātu asim un tās simmetrijas asim nosauksim par  $\alpha$  un (b) nol. pārveidosim tā, lai likne būtu attiecināta uz tās simmetrijas asim. Tas būs panākts, ja pēc asu pagriešanas par leņķi  $\alpha$

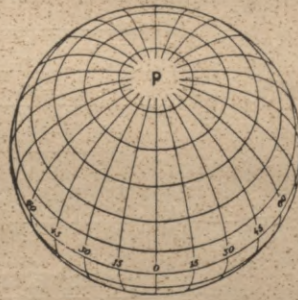
no (b) nol. izzudīs loceklis ar  $B_{xy}$  un tas būs tānī gadījumā, kad loceklis  $B$  būs nulle.

Pieņemsim, ka ar (a) jeb (b) noteiktās līknes koordinātu asis ir  $Ox, Oy$  un ka pēc asu pagriešanas par leņķi  $\alpha$  jaunās koordinātu asis ir  $Ox_1, Oy_1$ . Pagriešanu, kā jau teikts, izdarīsim tā, lai jaunās asis būtu simmetrijas asis. Ņemsim līknes kādu punktu  $M$ , kuŗa vecās koordinātas ir  $OB = x, MB = y$  un jaunās:  $OA = x_1, MA = y_1$ . No 20. zīmējuma viegli dabūsim sekošās pazīstamās izteiksmes koordinātu transformācijai:

$$\begin{aligned} x &= OC - BC = x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha, \\ y &= BD + MD = x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha. \end{aligned}$$



20. zīm.



21-a. zīm.

Ieliekot šīs veco koordinātu nozīmes (b) formulā, izdarot norādītās darbības, atverot iekavas un savēkot koeficientus pie  $x_1^2, y_1x_1, y_1^2$  un ievēdot, vienkāršības dēļ, sekošus apzīmējumus:

$$\begin{aligned} A_1 &= A \cos^2 \alpha + B \sin \alpha \cos \alpha + C \sin^2 \alpha, \\ B_1 &= B (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (C - A) \sin 2\alpha = B \cos 2\alpha + (C - A) \sin 2\alpha, \\ C_1 &= A \sin^2 \alpha - B \sin \alpha \cos \alpha + C \cos^2 \alpha, \end{aligned}$$

dabūjam līknes nolīdzinājumu jaunā koordinātu sistēmā sekošā veidā:

$$A_1 x_1^2 + B_1 x_1 y_1 + C_1 y_1^2 + F = 0 \dots (c)$$

Jaunās koordinātu asis sakrīt ar simmetrijas asīm tānī gadījumā, ja tikko dabūtā nolīdzinājumā pazudīs loceklis ar  $x_1 y_1$ , t. i., kad  $B_1 = 0$ . Ņemot vērā  $B_1$  augšā doto nozīmi, dabonam:

$$B \cos 2\alpha + (C - A) \sin 2\alpha = 0.$$

Izdalot šo nol. ar  $\cos 2\alpha$  dabonam:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{B}{A - C}.$$

Ievietojot te A, B un C augšā pieņemtās nozīmes, pārejam no vispārīgā veida pie meridiānu nol. (a); iznāk:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2 \operatorname{sn} \varphi_0 \operatorname{sn} \lambda \cos \lambda}{\operatorname{sn}^2 \lambda - \cos^2 \varphi_0 - \operatorname{sn}^2 \varphi_0 \cos^2 \lambda} = \frac{2 \operatorname{sn} \varphi_0 \operatorname{sn} \lambda \cos \lambda}{\cos^2 \lambda - \operatorname{sn}^2 \varphi_0 \operatorname{sn}^2 \lambda} \dots (d).$$

Pēdējo pārveidojumu panākam ievedot saucējā  $\operatorname{sn}^2 \lambda = 1 - \cos^2 \lambda$  pirmā locekļa vietā un  $\cos^2 \lambda = 1 - \operatorname{sn}^2 \lambda$  pēdējā locekļī. Jaunā meridiānu nolīdz. (c) atliek vairs noteikt tikai koeficientus  $A_1$  un  $C_1$ . Tā kā šim nolūkam ir vajadzīgs  $\operatorname{sn}^2 \alpha$  un  $\cos^2 \alpha$ , tad viņu noteikšanai pēc tikko aprēķināta  $\operatorname{tg} 2\alpha$  ņem sekošas goniometrijas formulas:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn} \alpha &= \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{\cos^2 2\alpha}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{\frac{\cos^2 2\alpha}{\operatorname{sn}^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha}}}}{2}} = \\ &= \sqrt{\frac{1 - \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 2\alpha + 1}}}}{2}} \text{ jeb } \operatorname{sn}^2 \alpha = \frac{1 - \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}}}{2} \text{ un} \\ \cos^2 \alpha &= \frac{1 + \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}}}{2}. \end{aligned}$$

Ievietojot te  $\operatorname{tg} 2\alpha$  nozīmi (d) dabūsim:

$$\operatorname{sn}^2 \alpha = \frac{\operatorname{sn}^2 \varphi_0 \operatorname{sn}^2 \lambda}{\cos^2 \lambda + \operatorname{sn}^2 \varphi_0 \operatorname{sn}^2 \lambda}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{\cos^2 \lambda}{\cos^2 \lambda + \operatorname{sn}^2 \varphi_0 \operatorname{sn}^2 \lambda}.$$

$$\text{No šejienes } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sn} \varphi_0 \operatorname{sn} \lambda}{\cos \lambda} = \operatorname{sn} \varphi_0 \operatorname{tg} \lambda.$$

Šis nol. noder asu pagriešanas leņķa  $\alpha$  noteikšanai.

Ar šim pašam leņķu nozīmēm un ievēdot A, B, C nozīmes dabūjam:

$$\begin{aligned} A_1 &= \operatorname{sn}^2 \lambda \cos^2 \varphi_0, \\ C_1 &= 1. \end{aligned}$$

Tāpēc meridiānu nol., attiecināts uz simmetrijas asim, iznāk:

$$\operatorname{sn}^2 \lambda \cos^2 \varphi_0 x_1^2 + y_1^2 - R^2 \cos^2 \varphi_0 \operatorname{sn}^2 \lambda = 0,$$

jeb

$$\frac{x_1^2}{R^2} + \frac{y_1^2}{(R \cos \varphi_0 \operatorname{sn} \lambda)^2} = 1. \quad (74)$$

Šī formula rāda, ka meridiāni ir elipses ar vienādām pusasim  $\pm R$ ; mazās pusasis ir  $\pm R \cos \varphi_0 \operatorname{sn} \lambda$  un tā tad mainās atkarībā no garuma; vidējais meridiāns ir taisne un sakrīt ar x asi. Divi meridiāni, kuņu garumu summa jeb starpība ir  $180^\circ$ , attēlojas ar vienu un to pašu elipsi.

Elipsu simmetrijas assis ir pagrieztas pret projekcijas koordinātu asim par leņķi  $\alpha$ , kas noteicams no formulas

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{sn} \varphi_0 \operatorname{tg} \lambda.$$

Kad  $\lambda = 0$ , tad  $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{sn} \varphi_0$ ; kad  $\lambda = 90^\circ$ , tad  $\alpha = 90^\circ$ ; tas nozīmē, ka elipses ass  $x_1$  ir stateniska pret projekcijas  $x$  asi; šinī gadījumā mazā pusass ir  $\pm R \cos \varphi_0$ .

Parallēļu nol. sastādīšanai no (62) formulām jāizslēdz gaņums  $\lambda$ . No pirmā nol.

$$\cos \lambda = \frac{x + R \cos \varphi_0 \operatorname{sn} \varphi}{R \operatorname{sn} \varphi_0 \cos \varphi},$$

no otrā

$$\operatorname{sn} \lambda = \frac{y}{R \cos \varphi},$$

un kvadrātu summa dod:

$$\frac{(x + R \cos \varphi_0 \operatorname{sn} \varphi)^2}{(R \operatorname{sn} \varphi_0 \cos \varphi)^2} + \frac{y^2}{(R \cos \varphi)^2} = 1. \quad (75)$$

Kā redzams, parallēles ir elipses ar pusasim  $R \operatorname{sn} \varphi_0 \cos \varphi$  un  $R \cos \varphi$ . Šo elipsu centri ir uz  $y$  ass, attālumos  $- R \cos \varphi_0 \operatorname{sn} \varphi$  no projekcijas centra; lielās assis ir stateniskas pret centrālā punkta meridiānu. Kad  $\varphi = 0^\circ$ , tad parallēle pārvēršas par ekvātoru, kuņa nol. iznāk:

$$\frac{x^2}{(R \operatorname{sn} \varphi_0)^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1.$$

No horizontālās ortografiskās projekcijas meridiānu un parallēļu nol., ieliekot tanīs  $\varphi_0 = 90^\circ$ , dabonam polārās ortografiskās projekcijas un ieliekot  $\varphi_0 = 0^\circ$  — ekvatoriālās ortografiskās projekcijas.

Par paraugu horizontālās ortografiskās projekcijas aplēsei zemāk dota koordinātu  $x$  un  $y$  tabula, centimetros; projekcijas centrs ņemts uz parallēles, noteiktas ar platumu  $\varphi_0 = 56^\circ 56' 53'' , 919$  (Rīga); mērogs 1 : 50 000 000; meridiāni un parallēles ik pa  $15^\circ$ . Aprēķini doti tikai līdz meridiāniem, noteiktiem ar gaņumu  $\pm 45^\circ$ ; lai tabula būtu pilnīga, tad, saprotams, tā jāturpina līdz  $\lambda = \pm 180^\circ$ .

Sk. tabulu 70. lapp.

21. un 21-a. zīm. rāda horizontālās ortografiskās projekcijas. Pedējai  $\varphi_0 = 60^\circ$  un meridiāni ar parallelēm novilkti ik pa  $15^\circ$ .

Slēgums. — Mēs redzējam, ka ortografiskās projekcijas stipri mainās mērogs, it īpaši uz projekcijas malām; tamdēļ viņās gandrīz nekad neattēlo veselas puslodes, bet tikai zemes virsās nelielas daļas.

$\varphi$	x un y	$\lambda$			
		$0^{\circ}$	$\pm 15^{\circ}$	$\pm 30^{\circ}$	$\pm 45^{\circ}$
+ 90°	x	— 6,948	— 6,948	— 6,948	— 6,948
	y	0	0	0	0
+ 75	x	— 3,947	— 4,042	— 4,319	— 4,757
	y	0	$\pm 0,853$	$\pm 1,649$	$\pm 3,331$
+ 60	x	— 0,678	— 0,860	— 1,394	— 2,242
	y	0	$\pm 1,649$	$\pm 3,185$	$\pm 4,504$
+ 45	x	+ 2,638	+ 2,380	+ 1,626	+ 0,297
	y	0	$\pm 2,331$	$\pm 4,504$	$\pm 6,370$
+ 30	x	+ 5,774	+ 5,458	+ 4,534	+ 3,065
	y	0	$\pm 2,855$	$\pm 5,516$	$\pm 7,801$
+ 15	x	+ 8,517	+ 8,165	+ 7,134	+ 5,496
	y	0	$\pm 3,185$	$\pm 6,153$	$\pm 8,701$
0	x	+10,679	+10,314	+ 9,248	+ 7,551
	y	0	$\pm 3,297$	$\pm 6,370$	$\pm 9,008$
— 15	x	+12,093	+11,770	+10,730	+ 9,091
	y	0	$\pm 3,185$	$\pm 6,153$	$\pm 8,701$
— 30	x	+12,722	+12,406	+11,483	+10,014
	y	0	$\pm 2,855$	$\pm 5,516$	$\pm 7,801$
—33°03' 06"	x	+12,740	+12,445	+11,641	+10,119
	y	0	$\pm 2,764$	$\pm 5,339$	$\pm 7,551$

Tā kā kartes centrā mērogs mainās vismazāk, tad ainu plakni parasti ņem tā, lai tā zemes virsai pieskārtos projicējamā zemes gabala centrālā punktā. Katrs plāns ir uzmērīto zemes gabalu horizontālā ortografiskā projekcija. Lielakas zemes virsas daļas attēlo ortografiskā projekcijā tikai izņēmuma gadījumos, piemēram, saules aptumšošanas gaitas noskaidrošanai. Šinī gadījumā nevajaga zināt patiesos attālumus starp dažādiem punktiem, bet nepieciešami tikai pēc iespējas ērtāki un labāki konstruēt līknes, kas nodala apgabalus ar totālu vai daļēju saules aptumšošanu.

Veselas puslodes attēlošanai ekvatoriālo ortografisko projekciju lieto mēness kartēm. Tā kā zemes apdzīvotāji redz tikai sava pavaidoņa pusi un mēness griezes ass gandrīz ir stateniska pret tās orbītas plakni, tad mēness kartes ekvatoriālā ortografiskā projekcija attēlo visus sikumus tāpat, kā viņi mums rādās īstenībā. Debess sfēras ortografisko projekciju sauc par analemmu.

**10. Stereografiskās projekcijas.** — Šo projekciju konstruēšanai redzes punktu novieto uz sfēras virsas, bet ainu plakni velk caur sfēras centru, stateniski rādiusam, kas novilkts uz redzes punktu. Projekcijas nosaukums cēlies no grieķu vārdiem  $\sigma\tau\acute{\epsilon}\rho\epsilon\omicron\varsigma$  — ciets un  $\gamma\rho\acute{\alpha}\varphi\omega$  — es rakstu un, tā tad nozīmē „cietu ķermeni attēlojošās uz plaknes.“ Šīs projekcijas izgudrojis astronomijas dibinātājs Hipparchus (180—125. g. priekš Kristus), bet to galvenās īpašības atradis Ptolemeus (87—165).

Stereografisko projekciju formulas dabū no perspektīvo projekciju vispārīgām formulām (56)—(59), ieliekot tur  $L = D = R$ :

$$\rho = \frac{R \operatorname{sn} \Theta}{1 + \cos \Theta} = R \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2}. \quad (76)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{R (\operatorname{sn} \varphi_0 \cos \varphi \cos \lambda - \cos \varphi_0 \operatorname{sn} \varphi)}{1 + \operatorname{sn} \varphi_0 \operatorname{sn} \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \lambda} \\ y &= \frac{R \operatorname{sn} \lambda \cos \varphi}{1 + \operatorname{sn} \varphi_0 \operatorname{sn} \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \lambda} \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

$$m = \frac{1}{1 + \cos \Theta} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\Theta}{2}}. \quad (78)$$

Beidzamā formula rāda, ka mērogs ir atkarīgs no  $\Theta$  un nav atkarīgs no leņķa  $\alpha$ ; tas nozīmē, ka vienā un tanī pašā punktā mērogs ir nemainīgs resp. vienāds visos virzienos; turpretim, ar punkta attāluma mainīšanos no projekcijas centra, mērogs mainās. Tā tad stereografiskās projekcijas ir vienādleņķu jeb konformās projekcijas, kurām leņķi attēlojas dabiskā lielumā, nemainīgi. Projekcijas centrā, kad  $\Theta = 0^\circ$ ,  $m = \frac{1}{2}$ ; kad  $\Theta = 90^\circ$ ,  $m = 1$ ; kad  $\Theta = 180^\circ$ ,  $m = \infty$ . Bezgalīgi mazo daļu līdzība šinīs projekcijās redzama no (60), (30) un (31) formulām; ieliekot (60) formulā  $L = D = R$  un pārējās  $a = b$  dabonam:

$$\alpha' = \alpha; \quad \omega = 0. \quad (79)$$

Tāpēc stereografiskās projekcijās indikatrīsa visur attēlosies kā riņķis, bet šo riņķišu rādiusi ir dažādi projekcijas dažādās vietās.

Pieņemot  $R = 1$ , aprēķināsim  $\rho$ ,  $a = b$ ,  $p$  un  $\omega$  dažādiem attālumiem  $\Theta$  no projekcijas centra visām stereografiskām projekcijām. Rezultātus reizināsim ar 2, lai tos ērtāki varētu salīdzināt ar citu perspektīvo projekciju attiecīgiem skaitļiem; tas, saprotams, negroza lietas būtību. Dabūtie rezultāti doti sekošā tabulā:

$\theta$	$\rho$	$a = b$	$p$	$\omega$
$0^{\circ}$	0,000	1,000	1,000	$0^{\circ} 0'$
15	0,263	1,017	1,035	0 0
30	0,536	1,072	1,149	0 0
45	0,828	1,172	1,373	0 0
60	1,155	1,333	1,778	0 0
75	1,535	1,589	2,524	0 0
90	2,000	2,000	4,000	0 0

Tā tad stereografiskā projekcijā katrā punktā mērogi visos virzienos ir vienādi. Projekcijas centrā mērogs ir 1; no šejienes tas palielinājas uz visām pusēm un projekcijas malās = 2. Sfēras bezgalīgi mazi riņķiši visur attēlosies kā riņķiši, un projekcijas centrā šo riņķišu laukumi vienādi ar atbilstošo riņķišu laukumiem uz sfēras; turpretim projekcijas malās tie 4 reiz lielāki. Pariesim pie atsevišķiem gadījumiem.

a) Polārā stereografiskā projekcija. — Galvenais stars sakrīt ar zemes asi un ainu plakne ar ekvatora plakni; pols projicējas projekcijas centrā un te, tāpat kā polārā ortografiskā projekcijā, loks  $PZ = 90^{\circ} - \varphi_0 = 0^{\circ}$  (14. zīm.); tāpēc  $\varphi_0 = 90^{\circ}$  un (77) formulas iznāk:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{R \cos \varphi \cos \lambda}{1 + \operatorname{sn} \varphi} \\ y &= \frac{R \cos \varphi \operatorname{sn} \lambda}{1 + \operatorname{sn} \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

$$m = m_m = m_p = \frac{1}{1 + \operatorname{sn} \varphi} \quad (81)$$

Dalot  $y$  ar  $x$  izslēdzam platuma  $\varphi$  funkcijas un dabūjam meridiānu nol.:

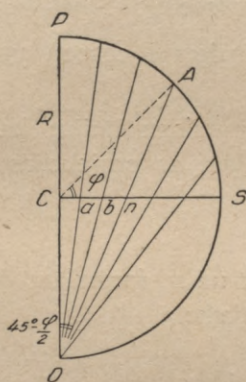
$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \lambda. \quad (82)$$

Tas nozīmē, ka meridiāni ir taisnes, kas staru veidā (homocentriski) iziet no koordinātu sākuma; leņķi starp šīm divām blakus taisnēm = gaŗumu starpībām.

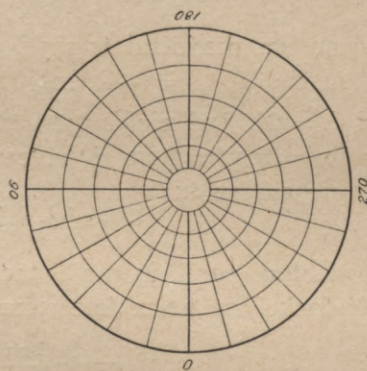
Pacelsim  $x$  un  $y$  kvadrātā un saskaitīsim; tad izslēgsies gaŗums  $\lambda$  un dabūtais nol. būs paralēļu nol.:

$$x^2 + y^2 = \left( \frac{R \cos \varphi}{1 + \operatorname{sn} \varphi} \right)^2 = \left\{ R \operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \right\}^2 \quad (83)$$

Pēdējā formula rāda, ka paralēles ir koncentriski riņķi, kuŗu rādiusi ir  $R \operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)$ . Šo riņķu kopējs centrs ir koordinātu sākumā.



22. zīm.



23. zīm.

22. zīm. rāda paralēļu rādiusu grafisku noteikšanu. Ar rādiusu  $R$ , samazinātu galvenā mērogā, konstruē kvadrantu  $PS$  un to sadala vienādās daļās; dabūtos punktus savieno ar pretējo polu  $O$ ; tad nogriežņi  $Ca, Cb \dots$  ir atbilstošo paralēļu rādiusi. Ja, piemēram, dota gadījumā atlikts  $\sphericalangle ACS = \varphi$ , tad  $\sphericalangle COA = 45^\circ - \frac{\varphi}{2}$  un  $Cn = CO \cdot \operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)$ .

23. zīm. attēlo polāro stereogrāfisko projekciju ar meridiāniem un paralēlēm ik pa 15 gaŗuma un platuma grādiem.

b) ekvatoriāla stereogrāfiskā projekcija. — Rezdes punkts ir uz ekvatora; tāpēc galvenais stars ir viens no ekvatora diametriem un ainu plakne sakrīt ar viena, kaut-kāda meridiāna plakni. Šinī gadījumā pēc 14. zīm. loks  $PZ = 90^\circ$  un  $\varphi_0 = 0^\circ$ ; vispārīgās (77) formulas pārvēršas par sekošām:

$$x = \frac{-R \operatorname{sn} \varphi}{1 + \cos \varphi \cos \lambda}, \quad y = \frac{R \cos \varphi \operatorname{sn} \lambda}{1 + \cos \varphi \cos \lambda}.$$

Ja no šiem nol. izslēdz platuma  $\varphi$  funkcijas, tad iznāk meridiāna nol.; ja, turpretim, izslēdz gaŗuma  $\lambda$  funkcijas, tad iznāk paralēļu nol. No otrā nol.:

$$\cos \varphi = \frac{y}{R \operatorname{sn} \lambda - y \cos \lambda}.$$

Ar šo nozīmi  $x$  izteiksme dod:

$$\operatorname{sn} \varphi = -\frac{x \operatorname{sn} \lambda}{R \operatorname{sn} \lambda - y \cos \lambda}.$$

Kosinusa un sinusa kvadrātu summa pēc vienkāršiem pārveidojumiem dod meridiānu nolīdzinājumu:

$$x^2 + (y + R \cotg \lambda)^2 = (R \operatorname{cosec} \lambda)^2. \quad (84)$$

Redzam, ka meridiāni ir riņķi ar rādiusiem  $R \operatorname{cosec} \lambda$  un centru koordinātām  $x' = 0, y' = -R \cotg \lambda$ .

Kad  $\lambda = 0^\circ$ , tad riņķis pārveršas par taisnu līniju; kad  $\lambda = 90^\circ$ , tad  $x' = 0, y' = 0$  un riņķa centrs sakrīt ar projekcijas centru; pats nol. pieņem veidu:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Lai dabūtu paraleļu nol., tad no  $x$  un  $y$  formulām jāizsle dz gaŗuma  $\lambda$  funkcijas; no  $x$  izteiksmes dabūjam:

$$\cos \lambda = -\frac{x + R \operatorname{sn} \varphi}{x \cos \varphi}.$$

Ieliekot šo kosinusu nozīmi  $y$  izteiksmē, dabonam:

$$\operatorname{sn} \lambda = -\frac{y \operatorname{sn} \varphi}{x \cos \varphi}.$$

Divu pēdējo lielumu kvadrātu summa dod sekošu paraleļu nol.:

$$x^2 + 2Rx \operatorname{cosec} \varphi + y^2 + R^2 = 0,$$

kas pēc vienkāršiem pārveidojumiem pieņem veidu:

$$(x + R \operatorname{cosec} \varphi)^2 + y^2 = (R \cotg \varphi)^2. \quad (85)$$

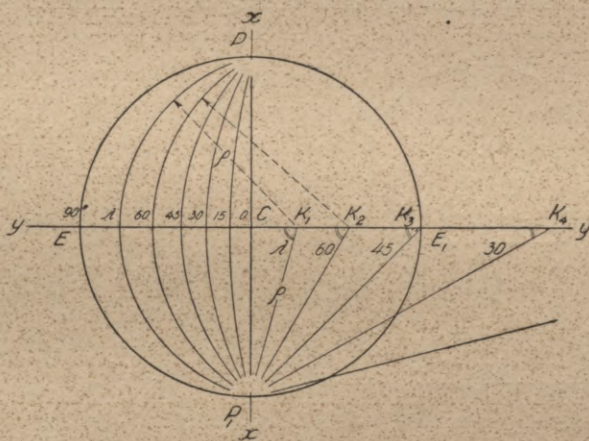
Tā tad ekvatoriālā stereografiskā projekcijā arī paraleles ir riņķi, kuriem rādiusi ir  $R \cotg \varphi$  un centru koordinātas  $x' = -R \operatorname{cosec} \varphi, y' = 0$ ; paraleļu centri atrodās uz  $x$  ass; kad  $\varphi = 0^\circ$ , tad dabūjam ekvātoru, kas attēlojas kā taisna līnija; kad  $\varphi = \pm 90^\circ$ , tad paraleles no riņķa pārveršas par punktiem, kas attēlo polus.

Tā kā ekvatoriālai stereografiskai projekcijai meridiāni un paraleles ir riņķu loki, tad to ir viegli konstruēt grafiski.

24. zīm. rāda meridiānu konstruešanu ekvatoriālā stereografiskā projekcijā.

No  $C$  ar rādiusu  $R$ , samazinātu pieņemtā galvenā mērogā, novelk riņķi, kas attēlo meridiānu, noteiktu ar ģeogrāfisko gaŗumu  $\pm 90^\circ$ , skaitot no sākuma jeb nulles meridiāna  $PCP_1$ ; stateniskā pret pēdējo — līnija  $EE_1$  ir ekvātors; uz tā jeb tā turpinājuma dabū punk-

tus  $K_1, K_2, K_3, K_4 \dots$  tā, lai  $\sphericalangle P_1K_1C = 75^\circ$ ,  $\sphericalangle P_1K_2C = 60^\circ$ ,  
 $\sphericalangle P_1K_3C = 45^\circ$ ,  $\sphericalangle P_1K_4C = 30^\circ$  u. t. t., jeb, lai  $\sphericalangle CP_1K_1 = 15^\circ$ ,  
 $\sphericalangle CP_1K_2 = 30^\circ$ ,  $\sphericalangle CP_1K_3 = 45^\circ$ ,  $\sphericalangle CP_1K_4 = 60^\circ \dots$ ,  
 jeb vispārīgā veidā  $90^\circ - \lambda$ ; tad katra, tādā ceļā noteiktā punkta,  
 piemēram  $K_1$ , koordinātas ir  $x' = 0$ ,  $y' = CK_1 = -R \cotg \lambda_1$ ;  
 tas nozīmē, ka punkts  $K_1$  ir meridiāna, noteikta ar gaļumu  $-\lambda_1$   
 centrs; tā rādiuss būs  $P_1K_1 = -R \operatorname{cosec} \lambda_1$ . Tādā pašā ceļā dabū  
 meridiānu centrus un rādiusus zīmējuma kreisā pusē, skaitot no  $PP_1$ ,  
 negatīviem gaļumiem no  $0^\circ - 90^\circ$ , ar pieņemtiem intervāliem ( $15^\circ$ ).



24. zīm.

Kā jau bija teikts, projekcijā leņķi attēlojas dabiskā lielumā, tāpēc  
 visi meridiāni krustojas projekcijas polos zem leņķiem, vienādiem ar  
 gaļumu starpībām.

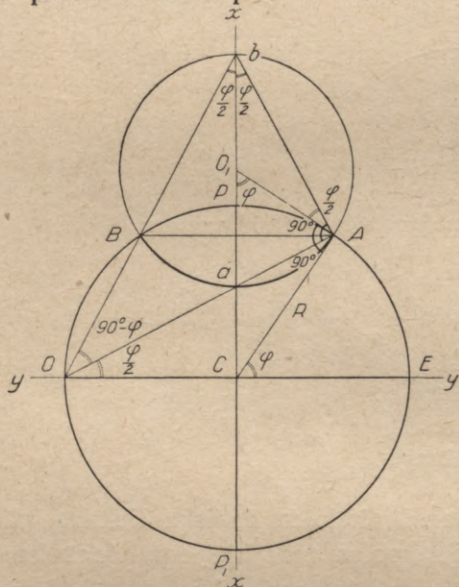
Ar platumu  $\varphi$  noteiktās paraleles konstruēšanai (25. zīm.) riņķi  
 ar rādiusu  $R$  novelk rādiusu  $CA$  tā, lai  $\sphericalangle ACE = \varphi$ ; pēc tam  
 velk chordu  $AB$  paralēli ekvātoram  $OE$ ; savienojot punktus  $A$  un  
 $O$  dabū punktu  $a$ , un turpinot līniju  $OB$  dabū punktu  $b$ ;  $ab$  daļa  
 uz pusēm, dabū punktu  $O_1$ , kas ir meklējamās paraleles centrs, un  
 paralēli attēlos loks  $BaA$ . Tas redzams no sekoša:  $\sphericalangle ACE = \varphi$ ,  
 $\sphericalangle CAO = \frac{\varphi}{2}$  un tāpēc  $\sphericalangle OAB = \frac{\varphi}{2}$ . Bez tam  $\sphericalangle CbO = \sphericalangle AbC = \frac{\varphi}{2}$ ,  
 $\sphericalangle ACP = \sphericalangle AOB = 90^\circ - \varphi$ ; trīsstūris  $OAb$  ir taisnleņķa trīsstūris  
 ar taisno leņķi  $OAb$ .

No sacītā izriet, ka  $O_1b = O_1A = O_1a$  un riņķis, kas no-  
 vilkts ar šādu rādiusu no centra  $O_1$ , ies caur punktiem  $B, b, A, a$   
 un arī  $\sphericalangle CAO_1$  iznāk taisns.

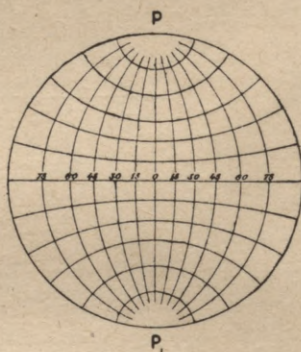
No taisnleņķa trīsstūra  $O_1AC$  iznāk:  $O_1A = R \cotg \varphi$  un  $-O_1C = -R \operatorname{cosec} \varphi$ ; tas norāda, ka  $O_1A$  ir rādiuss paralēlei, noteiktai ar (85) nol. un  $O_1$  ir šīs paraleles centrs.

26. zīmējumā attēlota ekvatoriālā stereografiskā projekcija ar meridiāniem un paralēlēm ik pa  $15^\circ$ .

c) Horizontālā stereografiskā projekcija. — Aina plakne pieskaņas zemei punktā, noteiktā ar platumu  $\varphi_0$ ; tas nozīmē, ka aina plakne sakrīt ar dotā punkta horizontu; projekcijas īpašības nemainīsies, ja aina plakne nepieskārsies zemei dotā punktā, bet būs paralēla dotā punkta horizontam. Šinī gadījumā jāņem vispā-



25. zīm.



26. zīm.

rīgās formulas (77). Lai dabūtu meridiāna nol., jāizslēdz ir platumu  $\varphi$  funkcijas; savelkot locekļus ar  $\operatorname{sn} \varphi$  un  $\cos \varphi$ , dabūsim sekošus divi nolīdzinājumus:

$$\begin{aligned} (x \operatorname{sn} \varphi_0 + R \cos \varphi_0) \operatorname{sn} \varphi + (x \cos \varphi_0 \cos \lambda - R \operatorname{sn} \varphi_0 \cos \lambda) \cos \varphi + x &= 0, \\ y \operatorname{sn} \varphi_0 \operatorname{sn} \varphi + (y \cos \varphi_0 \cos \lambda - R \operatorname{sn} \lambda) \cos \varphi + y &= 0. \end{aligned}$$

Šie ir divi nol. ar divi nezināmiem  $\operatorname{sn} \varphi$  un  $\cos \varphi$ ; to noteikšanu var izdarīt dažādi. Ja, piemēram, pirmo nol. reizināsim ar  $y \operatorname{sn} \varphi_0$ , otro ar  $-(x \operatorname{sn} \varphi_0 + R \cos \varphi_0)$  un pēc tam abus nol. sakaitīsim, tad pēc vienkāršiem pārveidojumiem dabūjam:

$$\cos \varphi = \frac{y \cos \varphi_0}{x \operatorname{sn} \varphi_0 \operatorname{sn} \lambda + R \cos \varphi_0 \operatorname{sn} \lambda - y \cos \lambda}.$$

Ieliekot šo kosinusa nozīmi vienā augšējā nol. (vienkāršākais ir otrs) dabūjam:

$$\operatorname{sn} \varphi = \frac{y \cos \lambda \operatorname{sn} \varphi_0 - x \operatorname{sn} \lambda}{x \operatorname{sn} \varphi_0 \operatorname{sn} \lambda + R \cos \varphi_0 \operatorname{sn} \lambda - y \cos \lambda}.$$

Šo izteiksmju kvadrātu summa dod:

$$y^2 \cos^2 \varphi_0 + (y \cos \lambda \operatorname{sn} \varphi_0 - x \operatorname{sn} \lambda)^2 = [(x \operatorname{sn} \varphi_0 + R \cos \varphi_0) \operatorname{sn} \lambda - y \cos \lambda]^2, \\ \text{jeb } y^2 + 2 Ry \cotg \lambda \sec \varphi_0 + x^2 - 2 Rx \operatorname{tg} \varphi_0 - R^2 = 0.$$

Pēc vienkāršiem pārveidojumiem iznāk:

$$(y + R \cotg \lambda \sec \varphi_0)^2 + (x - R \operatorname{tg} \varphi_0)^2 = (R \sec \varphi_0 \operatorname{cosec} \lambda)^2. \quad (86)$$

Tas norāda, ka meridiāni ir riņķi ar rādiusiem  $R \sec \varphi_0 \operatorname{cosec} \lambda$  un centru koordinātām  $x' = R \operatorname{tg} \varphi_0$  un  $y' = -R \cotg \lambda \sec \varphi_0$ .

Paralleļu nol. horizontālai stereografiskai projekcijai dabūsim izslēdzot no (77.) sistēmas gaŗumu funkcijas, resp.  $\operatorname{sn} \lambda$  un  $\cos \lambda$ . Pirmā nol. ieiet tikai  $\cos \lambda$ , bet otrā  $\cos \lambda$  un  $\operatorname{sn} \lambda$ ; tāpēc no pirmā jānoteic  $\cos \lambda$ , dabūtā nozīme jāieliek otrā nol. un jānoteic  $\operatorname{sn} \lambda$ .

$$\cos \lambda = \frac{x' + x \operatorname{sn} \varphi_0 \operatorname{sn} \varphi + R \operatorname{sn} \varphi \cos \varphi_0}{(R \operatorname{sn} \varphi_0 - x \cos \varphi_0) \cos \varphi}.$$

Ar šo  $\cos \lambda$  nozīmi  $y$  izteiksme dod:

$$\operatorname{sn} \lambda = \frac{y (\operatorname{sn} \varphi_0 + \operatorname{sn} \varphi)}{(R \operatorname{sn} \varphi_0 - x \cos \varphi_0) \cos \varphi}.$$

Paceļot šo sinusu un kosinusu kvadrātā, pēc vienkāršiem pārveidojumiem, dabūjam:

$$\left(x + \frac{R \cos \varphi_0}{\operatorname{sn} \varphi_0 + \operatorname{sn} \varphi}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{R \cos \varphi}{\operatorname{sn} \varphi_0 + \operatorname{sn} \varphi}\right)^2. \quad (87)$$

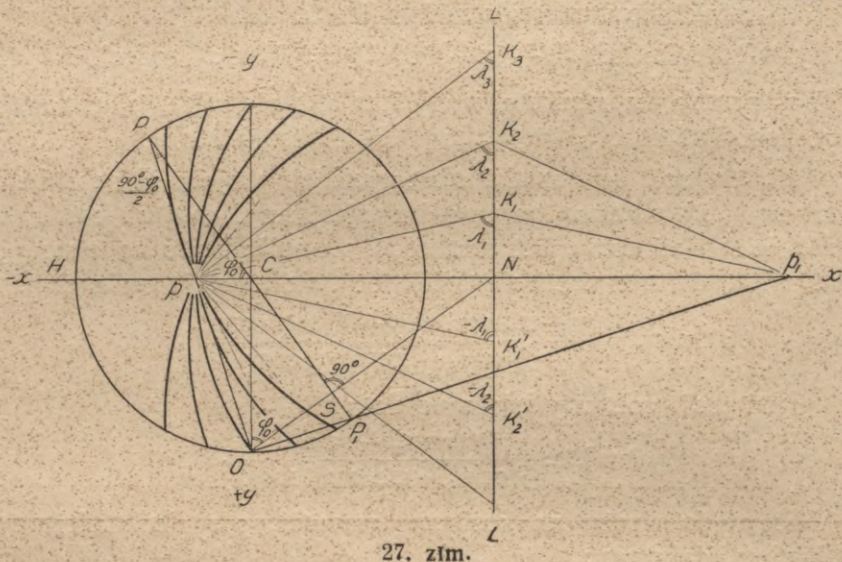
Šāds ir paralleļu nol. horizontālai stereografiskai projekcijai.

Redzam, ka paraleles ir riņķi ar rādiusiem  $\frac{R \cos \varphi}{\operatorname{Sn} \varphi_0 + \operatorname{sn} \varphi}$  un centru koordinātām  $x' = -\frac{R \cos \varphi}{\operatorname{sn} \varphi_0 + \operatorname{sn} \varphi}$ ,  $y' = 0$ .

(86.) un (87.) form. dod meridiānu un paralleļu nolīdzinājumus stereografiskām projekcijām vispārīgā veidā, jo ieliekot  $\varphi_0 = 90^\circ$ , dabūsim meridiānu un paralleļu nol. polārai stereografiskai projekcijai, un ieliekot  $\varphi_0 = 0^\circ$  — meridiānu un paralleļu nol. ekvatoriālai stereografiskai projekcijai.

Meridiānu konstruēšana. — (27. zīm.). Ar galvenā mērogā samazinātu zemes rādiusu  $R$  novelk riņķi un viņā zemes asi  $PP_1$  zem leņķa  $\varphi_0 = \sphericalangle HCP$ ; novelk taisnes  $OP$  un  $OP_1$  līdz

krustojumam ar rādiusu HC punktā  $p$  un viņa turpinājumu punktā  $p_1$ ; šie abi dabūtie punkti ir polu  $P$  un  $P_1$  projekcijas; nogriežņi  $pp_1$  daļa uz pusēm un dabūtā punktā  $N$  uzstāda stateni  $LL$ ; uz pedejās līnijas atrodas visu meridiānu centri un meridiāni ir riņķu loki, kas iet caur punktiem  $p$ ,  $p_1$ . Ievērojot to, ka pie pola visi meridiāni krustojas zem leņķiem, kuņi vienlīdzīgi gaŗuma starpībām, ir jānovelk no  $p$  (jeb  $p_1$ ) taisnes  $pK_1, pK_2, pK_3, \dots, pK_1', pK_2', \dots$  zem atbilstošām gaŗumu starpībām (zīmējumā ik pēc  $15^\circ$ )  $\pm\lambda_1, \pm\lambda_2, \dots$



Nogriežņi  $NK_1, NK_2, \dots$  ir centru ordinātas  $y_1, y_2, \dots$ , bet nogriežņi  $pK_1, pK_2, \dots$  meridiānu rādiusi uz projekcijas. Sacītā pareizību pierāda sekoši:

Leņķis  $pOp_1$  ir taisns un  $\sphericalangle CON = \varphi_0$ , tāpēc  $\overline{NO} = R \sec \varphi_0 = \overline{pN} = Np_1$ ;  $CN = x' = R \operatorname{tg} \varphi_0$ ;  $y_1' = NK_1 = Np \cdot \operatorname{cotg} \lambda_1 = -R \sec \varphi_0 \operatorname{cotg} \lambda_1$ ; tā tad punkts  $K_1$  ir ar (86) nol. noteiktā riņķa centrs. Tā ka trīsstūrī  $NpK_1$  kātete  $Np = K_1p \cdot \operatorname{sn} \lambda_1$ , tad  $K_1p = R \sec \varphi \operatorname{cosec} \lambda_1$  ir ar gaŗumu  $\lambda_1$  noteiktās paralēles rādiuss, saskaņā ar (86) nol.

Paralēļu konstruēšana. — (28. zīm.). Konstruē  $\sphericalangle xCP = \varphi_0$  un novelk līniju  $AB$  tā, lai  $\sphericalangle AP = \sphericalangle PB = 90^\circ - \varphi$ , kur  $\varphi$  konstruējamās paralēles dotais platums.

Savieno  $A$  un  $B$  ar  $O$ ; šo līniju krustojuma punkti ar taisni  $xx$  dod punktus  $a, b$ , kas ir paralēles diametra gali; dalot  $ab$  uz pusēm, dabū punktu  $c$ , kas ir paralēles centrs un  $ac = cb$  ir paralēles rādiuss.

$\sphericalangle BOA = 90^\circ - \varphi$  un tā kā  $\sphericalangle Ay = \varphi - \varphi_0$ , tad  $\sphericalangle AOy = \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_0)$  un  $\sphericalangle BOy = 90^\circ - \frac{1}{2}(\varphi + \varphi_0)$ . Uz šī pamata trīsstūri COa,  $Ca = R \cotg \frac{1}{2}(\varphi + \varphi_0)$  un trīsstūri COb,  $Cb = R \tg \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_0)$ .

Saskaitot šos pēdējos divi garumus, tad atņemot otro no pirmā, un dalot rezultātus ar 2, dabūjam:

$$\frac{1}{2}(Ca + Cb) = Cc = -\frac{R \cos \varphi_0}{\operatorname{sn} \varphi_0 + \operatorname{sn} \varphi} = x' \quad \text{un} \quad \frac{1}{2}(Ca - Cb) = ac = cb = \frac{R \cos \varphi}{\operatorname{sn} \varphi + \operatorname{sn} \varphi_0}.$$

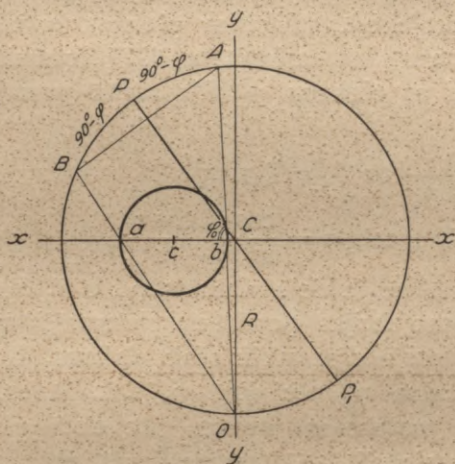
Pēdējais lielums ir ar (87.) nol. noteiktā riņķa rādus un no augšā teiktā skaidrs, ka punkts c ir šī riņķa centrs.

Pēc (9) formulas mērogs ekvatoriālai stereografiskai projekcijai ir

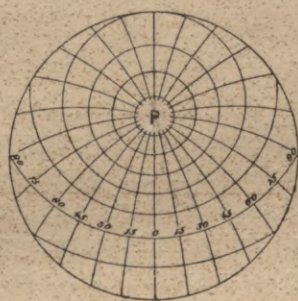
$$m = m_m = m_p = \frac{1}{1 + \cos \varphi \cos \lambda}$$

un horizontālai stereografiskai projekcijai  $m = m_m = m_p =$

$$= \frac{1}{1 + \operatorname{sn} \varphi_0 \operatorname{sn} \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \lambda}.$$



28. zīm.



29. zīm.

29. zīm. rāda horizontālo stereografisko projekciju platumam  $\varphi_0 = 60^\circ$  ar meridiāniem un paralēlēm ik pa  $15^\circ$ .

Sakarība starp ekvatoriālo un horizontālo stereografiskām projekcijām. — Angļu matemātiķis Keilī (Arthur Cayley, 1821—1895) ir atradis starp dažādām horizontālām stereografiskām projekcijām un ekvatoriālo stereografisko projekciju visai interesantu sakarību, kas ļoti atvieglo horizontālās projekcijas konstruēšanu pēc uzzīmētās ekvatoriālās projekcijas. Ja pēc 30. zīm. novilksim chordu AB paraleli ekvātoram tā, lai  $\sphericalangle BOH = \varphi_0$  un uz tās kā diametra konstruēsim riņķi, tad  $\frac{1}{2} AB = R_1 = R \cos \varphi_0$ . Ja tagad šini riņķi turpināsim ekvatoriālās stereografiskās projekcijas visus meridiānus un nepilnus paralēļu lokus, tad dabūsim horizontālo stereografisko projekciju platumam  $\varphi_0$ . Neparocība tikai tā, ka jaunas

projekcijas galvenais mērogs būs tikreiz mazāks par uzzīmētās ekvatoriālās projekcijas mērogu, cikreiz chorda AB ir mazāka par ekvatoriālās projekcijas diametru.

Tāda sakarība izskaidrojama sekoši. Ekvatoriālās projekcijas meridiāni, kā riņķi, kas krustojas zem leņķiem, vienlīdzīgiem garumu starpībām, būs meridiāni arī horizontālā stereografiskā projekcijā un pie tam tām pašām garumu starpībām. Arī ekvatoriālās ster. pr. paralēles būs paralēles horiz. stereogr. pr., bet tās būs paralēles citiem platumiem, kuŗiem gan ar ekvatoriālās projekcijas platumiem ir ļoti vienkārša sakarība.

Ar platumu  $\varphi$  noteiktās paralēles rādiusu ekvatoriālā stereografiskā projekcijā aprēķina pēc (85.) nol.; pieņemsim, ka tas pats rādiuss horizontālā stereografiskā projekcijā atbilst ar platumu  $\varphi$  noteiktās paralēles rādiusam; tas jāaprēķina saskaņā ar (87) formulu, sfērai ar rādiusu  $R_1$  un paralēlei ar platumu  $\varphi_1$ . Uz sacītā pamata iznāk nol.:

$$R \cotg \varphi = \frac{R_1 \cos \varphi_1}{\operatorname{sn} \varphi_0 + \operatorname{sn} \varphi_1} \quad \text{un} \quad R_1 = R \cos \varphi_0.$$

$$\text{Izslēdzot no tiem } R_1 \text{ dabūjam } \cotg \varphi = \frac{\cos \varphi_0 \cos \varphi_1}{\operatorname{sn} \varphi_0 + \operatorname{sn} \varphi_1} \quad \dots \quad (\text{a}).$$

Pēc šīs formulas ērti aprēķināt  $\varphi$ , ja dots platumš  $\varphi_1$ , t. i., kad pēc horizontālās stereografiskās projekcijas paralēles platumā jāaprēķina ekvatoriālās stereografiskās projekcijas atbilstošais platumš. Mūsu gadījumā, turpretim, ir jāaprēķina  $\varphi_1$  pēc dotā  $\varphi$ , t. i., jāaprēķina horizontālās stereografiskās projekcijas platumš pēc dotā platumā ekvatoriālā stereografiskā projekcijā. Šī transcendentā nol. atrisei ņemsim pazīstamo goniometrijas formulu  $\operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{\cos \varphi}{1 + \operatorname{sn} \varphi}$  un ieliksīm tanī  $\cos \varphi$  un  $\operatorname{sn} \varphi$  no (a), t. i.:

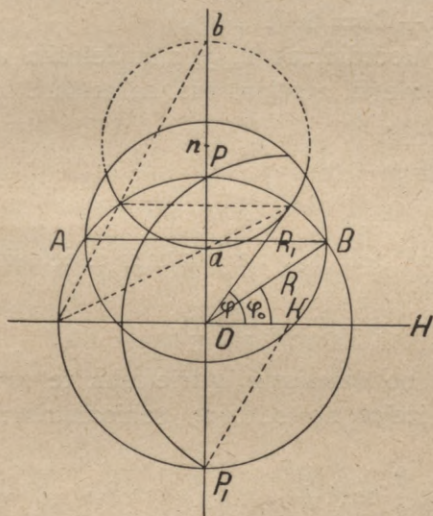
$$\operatorname{sn} \varphi = \frac{\operatorname{sn} \varphi_0 + \operatorname{sn} \varphi_1}{1 + \operatorname{sn} \varphi_0 \operatorname{sn} \varphi_1} \quad \text{un} \quad \cos \varphi = \frac{\cos \varphi_0 \cos \varphi_1}{1 + \operatorname{sn} \varphi_0 \operatorname{sn} \varphi_1}.$$

Vajadzīgais nol. iznāk sekošā veidā:

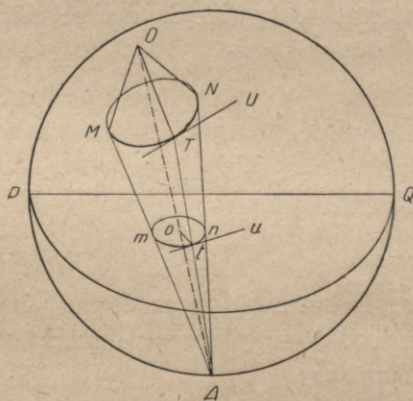
$$\operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{\varphi_1}{2} \right) = \cotg \left( 45^\circ - \frac{\varphi_0}{2} \right) \operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \quad \dots \quad (88)$$

Stereografisko projekciju pamatīpašības. — No (78.) un (79.) formulas jau bija redzams, ka stereografiskās projekcijās, tāpat kā visās vienādleņķu projekcijās, sfēras katrs bezgalīgi mazs riņķītis arī uz projekcijas attēlojas kā riņķītis. No iepriekšējās teorijas noskaidrojās, ka stereogr. pr. kā riņķi attēlojas visi sfēras riņķi — meridiāni un paralēles. Projekciju ar šādām īpašībām

jau ir daudz mazāk, nekā vispār vienādleņķu projekciju (sal. Lagranža projekciju). Tā tad stereografiskās projekcijas ir netikvien konformas, bet tanīs katrs lielais un mazais sfēras riņķis attēlojas kā riņķis. Pēdējā īpašība ir visai svarīga un tāpēc pievedīsim divi pierādījumus: 1) ģeometrisko un 2) analītisko. Tā kā sfēras lielo riņķi var uzskatīt par mazā riņķa sevišķu gadījumu, tad pietiks, ja šo īpašību pierādīsim sfēras mazam riņķim.



30. zīm.



31. zīm.

1) Ģeometriskais pierādījums. — Pieņemsim, ka MTN (31. zīm.) attēlo mazo riņķi uz sfēras virsas un ka visi šī riņķa aploces punkti savienoti ar redzes punktu A; tad uz ainu plaknes PQ izveidosies likne mtn. Atliek pierādīt, ka šī likne ir aplis. Šinī nolūkā iedomāsimies taisnu konu OMTN, kas pieskaŗas sfērai pa mazo riņķi MTN; tas nozīmē, ka kona veidules ir stateniskas pret sfēras rādiusiem, kas savieno mazā riņķa punktus ar sfēras centru. Bez tam kona ikkuŗa veidule, p. p., taisne OT ir stateniska pret mazā riņķa pieskari TU, kas novilkta mazam riņķim punktā T. Visu veiduju projekcijas uz ainu plakni ies caur punktu o, kona virsotnes O projekciju uz ainu plakni. Sfēras mazā riņķa skarules projicēties kā pieskaŗes liknei mtn. Stereografiskās projekcijās leņķi projicējas dabiskā lielumā un tā kā taisnes OT un TU ir viena pret otru stateniskas, tad šo divi pēdejo liniju projekcijas resp. taisnes ot un tu arī būs stateniskas viena pret otru; tas savukārt nozīmē, ka taisne ot ir normāla pret likni mtn. Šis prātojums ir spēkā attiecībā

uz visu citu veiduļu projekcijām; tā tad liknes mtn normāles visas krustojas vienā un tanī pašā punktā. Tāda likne ir tikai viena — riņķa aploce.

2) Analītiskais pierādījums. — Iedomāsimies sfēru ar rādiusu  $R=1$  un šķelsim to ar plakni; tad uz lodes virsas šķelumā izveidosies slēgta līkne, kuŗu noteiks divu nol. sistēma:

$$\begin{aligned} \text{Sfēras nolīdzinājums} \quad x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \dots (a) \\ \text{un plaknes nolīdzinājums} \quad Ax + By + Cz &= D \dots (b). \end{aligned}$$

Punkta uz sfēras virsas taisnleņķu koordinātas  $x, y, z$  atvietosim ar polārām  $\Theta, \varphi$  izejot no sekošas, viegli aprēķināmas sakarības:

$$\left. \begin{aligned} x &= \text{sn } \Theta \cos \psi \\ y &= \text{sn } \Theta \text{ sn } \psi \\ z &= \cos \Theta \end{aligned} \right\} (c)$$

No šīs sistēmas, kas atvieto (a) nol.,  $x, y, z$  nozīmes ievietosim (b) nol.; iznāk

$$A \text{ sn } \Theta \cos \psi + B \text{ sn } \Theta \text{ sn } \psi + C \cos \Theta = D,$$

kas ir mazā riņķa uz sfēras virsas nolīdzinājums. Atvietosim te  $\text{sn } \Theta$  un  $\cos \Theta$  ar pusleņķu funkcijām, izejot no sekošas goniometriskas sakarības

$$\text{sn } \Theta = 2 \text{tg } \frac{\Theta}{2} \cos^2 \frac{\Theta}{2},$$

$$\cos \Theta = \cos^2 \frac{\Theta}{2} - \text{sn}^2 \frac{\Theta}{2}$$

un izdalīsim visus locekļus ar  $\cos^2 \frac{\Theta}{2}$ ; tad

$$2 A \text{tg } \frac{\Theta}{2} \cos \psi + 2 B \text{tg } \frac{\Theta}{2} \text{sn } \psi + C \left(1 - \text{tg}^2 \frac{\Theta}{2}\right) = D \left(1 + \text{tg}^2 \frac{\Theta}{2}\right) \dots (d)$$

Šis ir sfēras mazā riņķa nolīdzinājums polārās koordinātās. Lai dabūtu šī mazā riņķa projekcijas nol., ņemsim vispārīgās (57) formulas, kas noteic sfēras punkta taisnleņķu koordinātas uz plaknes, kā sfērisko polāro koordinātu funkcijas perspektīvām projekcijām; lai sakarību dabūtu stereogrāfiskām projekcijām, ieliksīm  $L = D = R = 1$ ; iznāk

$$x = \frac{\text{sn } \Theta \cos \psi}{1 + \cos \Theta} = \text{tg } \frac{\Theta}{2} \cos \psi, \quad y = \frac{\text{sn } \Theta \text{ sn } \psi}{1 + \cos \Theta} = \text{tg } \frac{\Theta}{2} \text{sn } \psi.$$

$$\text{No šejienes} \quad x^2 + y^2 = \text{tg}^2 \frac{\Theta}{2}.$$

Dabūtās nozīmes ieliksīm (d) nol.; tad

$$(C+D)x^2 - 2Ax + (C+D)y^2 - 2By = C - D \dots (e),$$

jeb

$$\left(x - \frac{A}{C+D}\right)^2 + \left(y - \frac{B}{C+D}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 + C^2 - D^2}{(C+D)^2} \dots (f).$$

Šāds ir nolīdzinājums līknei, kuŗu sfēras mazā riņķa stereografiskā projekcija veido uz plaknes. Nolīdzinājums, kā redzam, noteic

riņķi ar rādiusu  $\frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - D^2}}{C+D}$  un centra koordinātām

$$x' = \frac{A}{C+D}, \quad y' = \frac{B}{C+D}.$$

Kad mazā riņķa plakne ir stateniska pret ainu plakni un iet caur redzes punktu, tad  $C=0$ ,  $D=0$  un (e) nol. pieņem veidu  $Ax + By = 0$ ; šis nol. noteic taisni, kas iet caur koordinātu sākuma punktu.

Kad mazā riņķa plakne ir paralēla ainu plaknei, tad  $A=0$ ,  $B=0$  un (e) nol. dod

$$x^2 + y^2 = \frac{C - D}{C + D},$$

kas ir nolīdzinājums riņķim ar centru koordinātu sākumā.

Slēgums. — Stereografiskās projekcijas lieto gandrīz vienīgi veselu pusložu attēlošanai: polāro — ziemeļ un dienvidpuslodes attēlošanai un ekvatoriālo jeb meridionālo — rīta (austruma) un vakara (rietuma) puslodēm.

Šinīs projekcijās attēlotās puslodes ievietotas gandrīz visos ģeogrāfijas atlasos. Tomēr stereografiskās projekcijas ir arī ļoti noderīgas zemes virsas daļu attēlošanai, kas netikvien mazākas, bet arī lielākas par puslodi. Pēdējā gadījumā mērogs uz kartes malām pieaug ļoti ātri. Visu zemes lodi stereogr. proj. nav iespējams attēlot. Mērogs, kā to redzējam no (78) formulas, uz projekcijas malām ir bezgalīgi liels.

Tā kā stereografiskām projekcijām piemīt ļoti vērtīga īpašība — attēlot ar riņķiem visus sfēras riņķus, — tad tā ļoti ērta dažādu astronomisku uzdevumu atrisei.

**11. Centrālās jeb gnomoniskās projekcijas.** — Redzes punkts sfēras centrā un ainu plakne skar sfēras virsu dotā punktā. Šis ir visvecākās no visām zināmām projekcijām, un tās izgudrojis grieķu filozofs Miletas Tales (640.—548. g. pr. Kr.). Centrālo projekciju vis-

pārīgās formulas dabū no (56) un (58) — (60) formulām, ieliekot  $L = T$  un  $D = 0$ :

$$\rho = R \operatorname{tg} \Theta. \quad (89)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{R (\operatorname{sn} \varphi_0 \cos \varphi \cos \lambda - \cos \varphi_0 \operatorname{sn} \varphi)}{\operatorname{sn} \varphi_0 \operatorname{sn} \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \lambda} \\ y &= \frac{R \cos \varphi \operatorname{sn} \lambda}{\operatorname{sn} \varphi_0 \operatorname{sn} \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \lambda} \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

$$m = \sec \Theta \sqrt{\sec^2 \Theta \cos^2 \alpha + \operatorname{sn}^2 \alpha} \quad (91)$$

$$\operatorname{tg} \alpha' = \cos \Theta \operatorname{tg} \alpha. \quad (92)$$

Šīs formulas rāda, ka centrālās projekcijas nav nedz vienādleņķīgas (konformas), nedz vienādlielas (ekvivalentas), resp. nav vienveidības bezgalīgi mazās daļās un arī laukumi mainās. Mērogs ir atkarīgs no  $\Theta$  un  $\alpha$ , kas nozīmē, ka tas mainās netikvien pārejot no viena punkta uz otru, bet arī vienā un tanī pašā punktā dažādos virzienos. Kad  $\Theta = 0^\circ$ ,  $m = 1$ ; kad  $\Theta = 90^\circ$ ,  $m = \infty$ . Tā tad projekcijas centrā ( $\Theta = 0^\circ$ ) mērogs vienlīdzīgs galvenam visos virzienos, bet  $90^\circ$  attālumā no tā mērogs  $= \infty$  un tā tad šinis projekcijas nav iespējams attēlot veselu puslodi. Bezgalīgi mazie riņķīši projekcijas centrā attēlojas kā vienlieli riņķīši, bet tā kā mērogs aug ar attālināšanos no projekcijas centra, tad pārejās vietās bezgalīgi mazie riņķīši attēlosies kā elipses. Mēroga kvadrāta pirmā atvasinātā pēc  $\alpha$  ir  $-\frac{\operatorname{sn}^2 \Theta \operatorname{sn} 2\alpha}{\cos^4 \Theta}$  un otrā  $-\frac{2 \operatorname{sn}^2 \Theta \cos 2\alpha}{\cos^4 \Theta}$ ; kad  $\alpha = 0^\circ$ , tad pirmā atvasinātā ir nulle un otrā negatīva; tas nozīmē, ka projekcijas rādiusu virzienā mērogs ir vislielākais un  $a = \sec^2 \Theta$ ; kad  $\alpha = 90^\circ$ , tad pirmā atvasinātā ir nulle un otrā pozitīva; mērogs šinī virzienā vismazākais un  $b = \sec \Theta$ .

Neraugoties uz lielām un ievērojamām alterācijām, centrālām projekcijām ir viena visai svarīga un tikai vienīgi tām piemītoša īpašība, proti, sfēras katrs lielais aplis, kā likne, kuŗas plakne iet caur redzes punktu, attēlojas uz projekcijas kā taisna līnija. Centrālām projekcijām vispārīgā formula (29) vislielākām lenķu maiņām pieņem veidu:

$$\operatorname{sn} \omega = \operatorname{tg}^2 \frac{\Theta}{2}. \quad (93)$$

Interesanti aizrādīt, ka šī formula ir tāda pat kā (65) formula ortografiskām projekcijām.

Pieņemot  $R = 1$  un lenķisko attāļumu  $\Theta$  intervālus ik pa  $15^\circ$ , uz izvesto formulu pamata visām centrālām projekcijām aprēķinātie  $\rho$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $p$  un  $\varphi$  doti sekošā tabulā:

$\theta$	$\rho$	a	b	p	$2\omega$
$0^\circ$	0,000	1,000	1,000	1,000	$0^\circ 0'$
15	0,268	1,072	1,035	1,110	1 59
30	0,577	1,333	1,155	1,540	8 14
45	1,000	2,000	1,414	2,828	19 45
60	1,732	4,000	2,000	8,000	38 57
75	3,732	14,928	3,864	57,676	72 09
90	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	180 0

Apskatisim centrālo projekciju atsevišķus gadījumus.

a) Polārā centrālā projekcija. — AINU plakne skar zemi vienā polā. Ieliekot (90) formulās  $\varphi_0 = 90^\circ$  iznāk:

$$\begin{aligned} x &= R \cotg \varphi \cos \lambda, \\ y &= R \cotg \varphi \operatorname{sn} \lambda. \end{aligned}$$

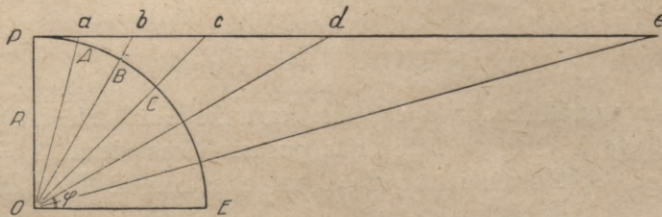
Lai no šiem nol. izslēgtu platumu  $\varphi$  daļām  $y$  ar  $x$ ; dabūjam meridiānu nol.:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \lambda. \quad (94)$$

Tā tad polārā centrālā projekcijā, tāpat kā visās citās polārās projekcijās, meridiāni ir no projekcijas centra (pola) starveidīgi izejošas taisnes, kuŗas krustojas zem leņķiem, vienlīdzīgiem meridiānu gaŗumu starpībām. Paceļot  $x$  un  $y$  kvadrātā un saskaitot, izslēgsim gaŗumu  $\lambda$  un dabūsim paralēļu nol.:

$$x^2 + y^2 = (R \cotg \varphi)^2. \quad (95)$$

Tas rāda, ka paralēles ir koncentriski riņķi ar rādiesiem  $R \cotg \varphi$  un kopēju centru koordinātu sākuma punktā, kas līdz ar to ir arī



32. zīm.

pola attēls. 32. zīm. rāda paralēļu rādiesu konstruēšanu. Ar rādiesu  $R$ , samazinātu galvenā mērogā, konstruē kvadrantu OPE. Kvadranta

loku PE sadala vienādās daļās (atkarībā no intervāliem, kādos jāvelk paralēles uz projekcijas) un no centra O velk taisnes OA, OB, OC.... un turpina tās līdz krustojumam ar pieskari Pe. Nogriežņi Pa, Pb, Pc... ir attiecīgo paralēļu rādiusi, jo, piemēram,  $Pd = \overline{PO} \cdot \cotg \varphi = R \cdot \cotg \varphi$ . Polārai centrālajai projekcijai, tāpat kā visām citām polārām projekcijām  $\Theta = 90^\circ - \varphi$ ; tāpēc no (89) formulas  $\rho = R \cotg \varphi$ , kas pilnīgi saskan ar (95) formulu. Mēroga formula pēc (91) būs  $m = \operatorname{cosec} \varphi \sqrt{\operatorname{cosec}^2 \varphi \cos^2 \alpha + \operatorname{sn}^2 \alpha}$  un no (92)  $\operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{sn} \varphi \operatorname{tg} \alpha$ .

Tā kā pie  $\varphi = 0^\circ$   $\rho = \infty$ , tad polārā centrālā projekcijā nav iespējams attēlot ekvātoru.

33. zīm. attēlo polārā centrālā projekcijā ziemeļpuslodes daļu līdz paralēlei  $\varphi = 45^\circ$  ar meridiāniem un paralēlēm ik pa  $15^\circ$ .

b) Ekvatoriālā centrālā projekcija. — AINU plaknes skar zemes sfēru ekvatora dotā punktā. Šinī gadījumā (90) formulās jāievieto  $\varphi_0 = 0^\circ$ ; iznāk:

$$\begin{aligned} x &= -R \operatorname{tg} \varphi \sec \lambda \\ y &= R \operatorname{tg} \lambda. \end{aligned}$$

Tā kā y izteiksmē neiet platums  $\varphi$ , tad meridiānu nol. ir

$$y = R \operatorname{tg} \lambda. \quad (96)$$

Tas rāda, ka visi meridiāni ir taisnes, kas paralēlas x asij — pieskares meridiānam un iet attālumos  $R \operatorname{tg} \lambda$  no koordinātu sākuma.

Paralēļu nol. dabūsim, izslēdzot no abiem nol.  $\lambda$  funkcijas; no x izteiksmes papriekšu noteic  $\cos \lambda$ :

$$\cos \lambda = \frac{-R \operatorname{tg} \varphi}{x}.$$

Ieliekot šo nozīmi y izteiksmē, iznāk:  $\operatorname{sn} \lambda = -\frac{y \operatorname{tg} \varphi}{x}$ . Kosinusa un sinusa kvadrātu summa pēc vienkāršiem pārveidojumiem dod paralēļu nol.:

$$\frac{x^2}{(R \operatorname{tg} \varphi)^2} - \frac{y^2}{R^2} = 1. \quad (97)$$

Tā tad paralēles ir hiperbolas, kuŗu lietiskās asis iet pa x asi; pusass lielums ir  $R \operatorname{tg} \varphi$ ; šķietamās pusasis visas vienādās = R. Pie  $\varphi = 0^\circ$ , t. i., ekvātoram iznāk  $x = 0$  un ekvātoru attēlo y ass; polus, turpretim, nav iespējams attēlot.

34. zīm. attēlo ekvatoriālo centrālo projekciju līdz paralēlēm  $\varphi = \pm 75^\circ$  uz ziemeļiem un dienvidiem no ekvatora un uz abām pusēm no pieskares punkta meridiānā līdz gaŗumam  $\lambda = \pm 75^\circ$ , ar meridiāniem un paralēlēm ik pa  $15^\circ$ .

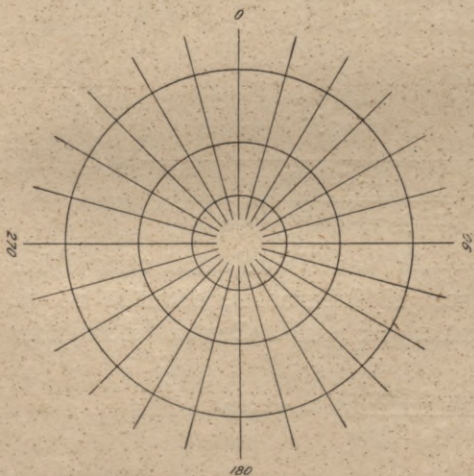
c) Horizontālā centrālā projekcija. — AINU plakne skar zemes lodi ar platumu  $\varphi_0$  noteiktā punktā.

Šinī gadījumā jālieto vispārīgās formulas (90). Meridiāna nol.-am jādabū nol.-ms bez platuma  $\varphi$ . Visvienkāršāki to panāk izdalot  $x$  un  $y$  izteiksmju skaitītājus un saucējus ar  $\cos \varphi$ ; caur to dabū divas  $\operatorname{tg} \varphi$  izteiksmes, kuŗas, pielīdzinot vienu otrai, pēc pārveidojumiem dod meridiānu nol.:

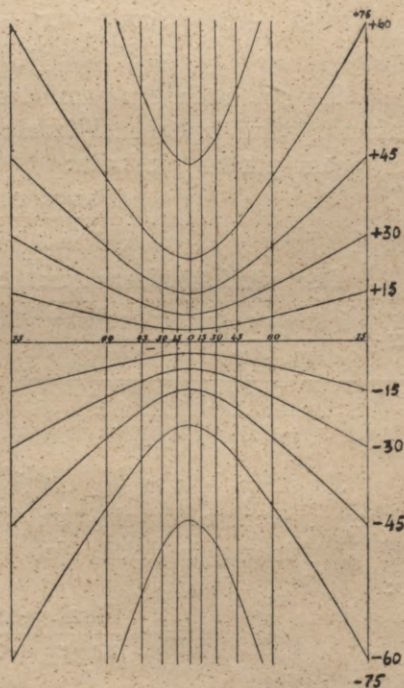
$$\operatorname{sn} \varphi_0 \cdot x - \operatorname{cotg} \lambda \cdot y + R \cos \varphi_0 = 0.$$

Tā kā šinī nolīdzinājumā koordinātas  $x$  un  $y$  ieiet tikai pirmā pakāpē, tad meridiāni ir taisnes; to varēja arī paredzēt iepriekš, jo meridiāni ir sfēras lielle riņķi, kas iet caur centru, un centrā novietots arī redzes punkts. Kad  $y=0$ ,  $x = -R \operatorname{cotg} \varphi_0$ . Meridiāna nol. dabūsim vienkāršākā veidā, ja koordinātu sākumu pārnēsīsim uz punktu ar koordinātām  $\alpha = -R \operatorname{cotg} \varphi_0$  un  $\beta = 0$ ; tad koordinātas jaunā sistēmā būs  $x' = x + R \operatorname{cotg} \varphi_0$  un  $y' = y$ . Lai pārietu uz jauno sistēmu, tad  $x$  un  $y$  nozīmes ievietojam meridiānu nol.; iznāk:

$$\frac{y'}{x'} = \operatorname{sn} \varphi_0 \operatorname{tg} \lambda. \quad (98)$$



33. zīm.



34. zīm.

Redzam, ka meridiāni ir starveidīgi izejošas taisnes no viena punkta — pola attēla. Ordinātu un abscisu attiecība noteic tangensu leņķiem  $\lambda_1$ , zem kuŗiem meridiāni krustojas uz projekcijas; šos leņķus ar atbilstošiem gaŗumiem  $\lambda$  saista sekošs nol.:

$$\operatorname{tg} \lambda_1 = \operatorname{sn} \varphi_0 \operatorname{tg} \lambda. \quad (99)$$

Šis ir pazīstamais gnomona teorijā izvedamais nol., kas node-rīgs saules stundeņu konstruēšanai. Uz šī pamata centrālās projek-cijas mēdz saukt par gnomoniskām.

Paralleļu nol. sastādīšanai no  $x$  un  $y$  formulām ir jāizsle dz ga-ruma  $\lambda$  funkcijas. Tā kā (90) sistēmas pirmā nol. ieiet vienīgi  $\cos \lambda$ , tad no tā:

$$\cos \lambda = \frac{R \cos \varphi_0 + x \operatorname{sn} \varphi_0}{R \operatorname{sn} \varphi_0 - x \cos \varphi_0} \operatorname{tg} \varphi.$$

Šo  $\cos \lambda$  nozīmi ieliekam  $y$  izteiksmē un aprēķinām  $\operatorname{sn} \lambda$ ; iz-nāk:

$$\operatorname{sn} \lambda = \frac{y}{R \operatorname{sn} \varphi_0 - x \cos \varphi_0} \operatorname{tg} \varphi.$$

Kosinusa un sinusa kvadrātu summa pēc pārveidošanas dod pa-ralleļu nol. sekošā veidā:

$$\begin{aligned} (\operatorname{sn}^2 \varphi_0 - \cos^2 \varphi_0 \operatorname{ctg}^2 \varphi) x^2 + 2R \operatorname{sn} \varphi_0 \cos \varphi_0 \operatorname{cosec}^2 \varphi \cdot x + y^2 = \\ = R^2 \cdot (\operatorname{sn}^2 \varphi_0 \operatorname{ctg} \varphi - \cos^2 \varphi_0). \end{aligned} \quad (100)$$

Šis nol. rāda, ka paraleles, vispār ņemot, ir otrās šķiras līknes. Līkņu sīkākai izpētīšanai izdala nol. visus locekļus ar  $x^2$  koeficientu un abām pusēm pieskaita:

$$\left( \frac{R \operatorname{sn} \varphi_0 \cos \varphi_0 \operatorname{cosec}^2 \varphi}{\operatorname{sn}^2 \varphi_0 - \cos^2 \varphi_0 \operatorname{ctg}^2 \varphi} \right)^2.$$

Pēc vienkāršošanas iznāk:

$$\left( x + \frac{R \operatorname{sn} \varphi_0 \cos \varphi_0 \operatorname{cosec}^2 \varphi}{\operatorname{sn}^2 \varphi_0 - \cos^2 \varphi_0 \operatorname{ctg}^2 \varphi} \right)^2 + \frac{y^2}{\left( \frac{R \operatorname{ctg} \varphi}{\sqrt{\operatorname{sn}^2 \varphi_0 - \cos^2 \varphi_0 \operatorname{ctg}^2 \varphi}} \right)^2} = 1. \quad (101)$$

Ja  $\operatorname{sn}^2 \varphi_0 - \cos^2 \varphi_0 \operatorname{ctg}^2 \varphi \neq 0$ , tad šis nol. dod otrās šķiras līknes ar centru un pie tam elipses jeb hiperbolas, atkarībā no tā, vai šis binoms ir lielāks jeb mazāks par nulli. Centra koordinātas ir:

$$\alpha = - \frac{R \operatorname{sn} \varphi_0 \cos \varphi_0 \operatorname{cosec}^2 \varphi}{\operatorname{sn}^2 \varphi_0 - \cos^2 \varphi_0 \operatorname{ctg}^2 \varphi}, \quad \beta = 0,$$

bet pusasis:

$$a = \frac{R \operatorname{ctg} \varphi}{\operatorname{sn}^2 \varphi_0 - \cos^2 \varphi_0 \operatorname{ctg}^2 \varphi} \quad \text{un} \quad b = \frac{R \operatorname{ctg} \varphi}{\sqrt{\operatorname{sn}^2 \varphi_0 - \cos^2 \varphi_0 \operatorname{ctg}^2 \varphi}}.$$

Paraleles attēlosies kā elipses, kad

$$\operatorname{sn}^2 \varphi_0 > \cos^2 \varphi_0 \operatorname{ctg}^2 \varphi$$

jeb kad

$$\varphi > 90^\circ - \varphi_0.$$

Tas nozīmē, ka kā elipses attēlosies paralēles, kuŗu platums  $\varphi$  ir lielāks par ainu plaknes pieskares punkta platuma papildinājumu līdz  $90^\circ$ . Paralēles izveidosies par hiperbolām, kad

$$\operatorname{sn}^2 \varphi_0 < \cos^2 \varphi_0 \operatorname{ctg}^2 \varphi,$$

jeb kad

$$\varphi < 90^\circ - \varphi_0.$$

Tas nozīmē, ka par hiperbolām attēlojas tās paralēles, kuŗu platums ir mazāks par ainu plaknes pieskares punkta platuma papildinājumu līdz  $90^\circ$ .

Kad  $\operatorname{sn}^2 \varphi_0 - \cos^2 \varphi_0 \operatorname{ctg}^2 \varphi = 0$ , tad  $\varphi = 90^\circ - \varphi_0$  un, kā tas redzams no (101) nol., liknes pusasis ir  $= \infty$ . Šinī gadījumā likne, kas attēlo paralēli, ir parabola.

Pēdējās tuvākai izpētišanai griežamies pie (100) nol., ieliekot tur  $\varphi = 90^\circ - \varphi_0$ . Pēc vienkāršiem pārveidojumiem iznāk:

$$y^2 + 2R \operatorname{tg} \varphi_0 (x + R \operatorname{ctg} 2\varphi_0) = 0.$$

Šis nol. noteic parabolu, kuŗas virsotnes attāļums no koordinātu sākuma ir  $= -R \operatorname{ctg} 2\varphi_0$ . Koordinātu sākumu ņemsim punktā, kuŗa koordinātas agrākā sistēmā ir:

$$\alpha = -R \operatorname{ctg} 2\varphi_0, \beta = 0;$$

tad jaunās koordinātas būs:  $x' = x + R \operatorname{ctg} 2\varphi_0$ ,  $y' = y$  un parabolas nol. iznāk:

$$y'^2 = -2R \operatorname{tg} \varphi_0 \cdot x'. \quad (102)$$

Šis parabolas parametrs ir  $R \operatorname{tg} \varphi_0$  un nol. sastādīts attiecībā uz virsotni un simmetrijas asi.

Paralēle, kas noteikta ar platumu  $\varphi = 0^\circ$ , resp. ekvātors, attēlojas kā taisne. Šinī gadījumā (101) nol. pieņem nenoteiktu veidu un tāpēc nav noderīgs; tamdēļ ņemam (100) nol., reizinām to ar  $\operatorname{tg}^2 \varphi$  un tad ieliekam  $\varphi = 0$ ; iznāk:

$$(\cos \varphi_0 \cdot x - R \operatorname{sn} \varphi_0)^2 = 0$$

un  $x = R \operatorname{tg} \varphi_0$ .

Tagad skaidri redzams, ka ekvātoru attēlo  $y$  asij paralēla taisne, kas novilkta attāļumā  $R \operatorname{tg} \varphi_0$  no tās.

Lai dabūtu pola vietu uz projekcijas, ieliekam (100) formulā  $\varphi = 90^\circ$ ; tad

$$(\operatorname{sn} \varphi_0 \cdot x + R \cos \varphi_0)^2 + y^2 = 0.$$

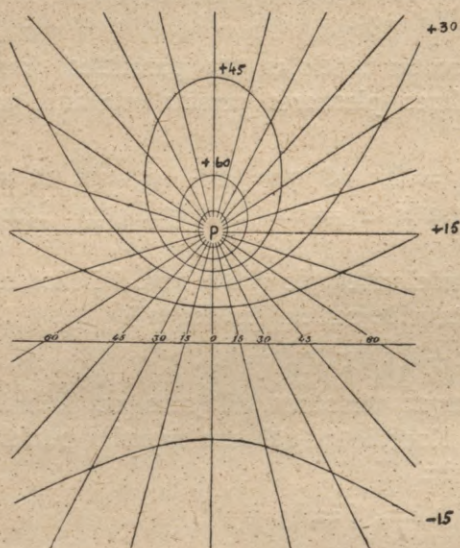
Divu lielumu kvadrātu summa var būt nulle tikai tad, ja abi šie lielumi ir nulles, t. i., kad

$$x = -R \operatorname{ctg} \varphi_0$$

un

$$y = 0.$$

Īsi atkārtosim gūtās atziņas. Horizontālā centrālā projekcijā ar doto platumu  $\varphi_0$  meridiāni attēlojas kā starveida no viena punkta (pola projekcijas) izejošās taisnes; tās krustojas zem leņķiem  $\lambda_1$ , kurus noteic (99) nol. Ekvātoru attēlo taisne, kas stateniska pret pieskares punkta meridiānu. Paralēles ar platumiem, mazākiem par  $90^\circ - \varphi_0$ , ir hiperbolas, paralēle ar platumu  $90^\circ - \varphi_0$  ir parabola; paralēles ar platumiem, lielākiem par  $90^\circ - \varphi_0$ , ir elipses, kuŗu lielās



35. zīm.

skares punkta meridiānu. Paralēles ar platumiem, mazākiem par  $90^\circ - \varphi_0$ , ir hiperbolas, paralēle ar platumu  $90^\circ - \varphi_0$  ir parabola; paralēles ar platumiem, lielākiem par  $90^\circ - \varphi_0$ , ir elipses, kuŗu lielās asis iet pieskares punkta meridiāna virzienā.

35. zīm. attēlo horizontālo centrālo projekciju ar pieskares punkta platumu  $\varphi_0 = 60^\circ$  un meridiāniem un paralēlēm ik pa  $15^\circ$ . Paralēles ar platumu  $\pm 15^\circ$  ir hiperbolas, paralēle ar platumu  $30^\circ$  ir parabola, bet ar platumiem  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  un  $75^\circ$  — elipses.

Sk. tabula 90. un 91. lapp.

Kad ainu plakne skaŗ zemi punktā, noteiktā ar platumu  $\varphi_0 = 56^\circ 56' 53''$ , 919 (Rīga) un mērogs 1 : 50 000 000, tad pēc (90) formulām aprēķinātiem  $x$  un  $y$  dabonam sekošu tabulu centimetros:

$\varphi$	$\lambda$	$\lambda$					
		$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$
00	x	19.580	19.580	19.580	19.580	19.580	19.580
	y	0	6.259	13.487	23.360	40.461	87.188
15	x	11.451	11.250	10.599	9.323	6.993	2.467
	y	0	4.388	9.141	14.763	22.188	33.648
30	x	6.477	6.236	5.476	4.070	1.755	-1.997
	y	0	3.263	6.662	10.360	14.583	19.689
45	x	2.696	2.466	1.755	0.492	-1.449	-4.273
	y	0	2.416	4.862	7.361	9.932	12.566
60	x	-0.679	-0.870	-1.449	-2.440	-3.883	-5.820
	y	0	1.667	3.311	4.903	6.398	7.726
75	x	-4.152	-4.273	-4.634	-5.231	-6.055	-7.153
	y	0	0.902	1.769	2.564	3.244	3.765
90	x	-8.290	-8.290	-8.290	-8.290	-8.290	-8.290
	y	0	0	0	0	0	0

Slēgums. — Centrālās projekcijas bieži sastāda debess kartes, jo zvaigžņu veids tanīs ir vistuvāks tam, kā tie redzami pie debesīm un tāpēc pēc centrālā projekcijā sastādītām kartēm vieglāki uziet atsevišķas zvaigznes. Visas debess sfēras attēlošanai to parasti projicē uz sfēru aptverošā kuba sešām skaldnēm. Kubu iedomājas novietotu tā, ka viņš pieskaņas sfērai abos polos un ekvatora četros punktus, no kā ekvatora aploce sadalās četras vienlīdzīgās daļās. Tādā ceļā visa debess sfēra un zvaigžņaji attēlojas divi polarās un četras ekvatoriālās centrālās projekcijas. Šīs projekcijas ir visertākas kritošo zvaigžņu ceļu uzzīmēšanai un zvaigžņu radiantu noteikšanai. Zemes tuvumā vienas strāvas kritošās zvaigznes virzās gandrīz pa paralēlām taisnēm, bet perspektīvē tās izliekas kā taisnes, kas starveidā iziet no viena punkta, tā sauc. radiantā. Tā tad kritošo zvaigžņu redzamos ceļus var attēlot kā taisnes vienīgi centrālās projekcijās. Ja ievēro katras atsevišķas kritošās zvaigznes parādīšanās un nozūšanas vietas pie debess un uznes tās uz centrālā projekcijā sastādītās zvaigžņu kartes, tad, savienojot divi uznestos punktus ar taisni, dabon ceļa attēlu. Turpinot ceļu līnijas uz otru pusi, lielākam zvaigžņu vairumam tās parasti krustojas vienā punktā, kuŗu sauc par strāvas radiantā vietu. Kritošo zvaigžņu novērošanai, amātiēriem tiek izdotas debess kartes centrālās projekcijās tām debesu daļām, kuŗās visbiežāki novērojami šie krāšņie meteori.

Zemes virsas attēlošanai centrālās projekcijas pirmie piegrieza uzmanību ģeologi. Ievērojamais Eli de Bomons (Jean Baptiste Elie de Beaumont, 1798—1874), meklējot vienmērību galveno kalnu grē-

90°	105°	120°	135°	150°	165°	180°
19 580	19.580	19.580	19.580	19.580	19.580	19.580
∞	—87.188	— 40.461	— 23.360	— 13.487	— 6.259	0
— 8.290	—55.446	149.689	58.443	44.846	40.291	39.091
56.731	147.510	—229.350	— 55.934	— 25.714	—10.911	0
— 8.290	—19.769	— 44.271	—117.664	—114.341	33.404	238.980
26.328	35.904	52.236	91.675	54.931	—76.884	0
— 8.290	—13.935	— 21.730	— 32.042	— 44.271	—55.444	—60.207
15.201	17.656	19.510	19.908	17.345	10.590	0
— 8.290	—11.292	— 14.736	— 18.372	— 21.730	—24.164	—25.061
8.776	9.390	9.358	8.450	6.504	3.565	0
— 8.290	— 9.537	— 10.952	— 12.209	— 13.247	—13.934	—14.175
4.073	4.120	3.864	3.285	2.399	1.258	0
— 8.290	— 8.290	— 8.290	— 8.290	— 8.290	— 8.290	— 8.290
0	0	0	0	0	0	0

du novietošanā, nonāca pie diezgan neparasta slēdziena, proti, ka šīs grēdas stiepijas pa lielo riņķu lokiem un sadala visu zemes virsu 12 regulāros sfēriskos piecstūpos. Tā kā visi lielo riņķu loki attēlojas kā taisnes tikai centrālās projekcijās, tad Eli-de-Bomons ieteica projicēt zemes virsu uz sfēru aptvepošā regulārā dodekaedra 12 skaldnēm. Centru piecstūra skaldnei, uz kuŗas attēlojas Europa, viņš atrada pie Remdas pilsētiņas Saksijā. Šī maldu mācība tagad pilnīgi aizmirsta, neraugoties uz to, ka sākumā tai netrūka piekritēju.

**12. Ārējās projekcijas.** — Tās ir tādas perspektīvās projekcijas, kuŗām redzes punkts ir kaut-kāds punkts ārpus sfēras, starp sfēras virsu un bezgalīgi lielu attālumu. Šinīs projekcijās pa daļai novērsti ortografisko projekciju trūkumi no vienas puses, kā arī stereografisko un centrālo projekciju trūkumi no otras puses. Piemēram, attēlojot puslodi ortografiskās projekcijās mērogs projekcijas rādiusa virzienā no centra līdz malām mainās no 1 līdz 0, stereografiskās — no 1 līdz 2, bet centrālās pat no 1 līdz  $\infty$ . Tā tad mērogs no centra uz malām ortografiskās projekcijās mazinājas, bet stereografiskās turpretim palielinājas. Dabiska liekās doma, ka ārējās projekcijas abu minēto projekciju trūkumi, vismaz pa daļai, līdzsvarosies. Papriekšu izvedīsim dažas vispārīgās formulas, kas būs derīgas visām ārējām projekcijām un pēc tam apskatīsim svarīgākās no tām.

Nav vajadzīgs pierādīt, ka visās ārējās perspektīvās projekcijās meridiāni un paralēles attēlojas kā otrās šķiras līknes. Atsevišķos gadījumos, p. p., polārās projekcijās, meridiāni ir starveida no viena punkta — pola projekcijas — izejošas taisnes, kas krustojas zem leņķiem, vienlīdzīgiem gaŗumu starpībām, bet paralēles koncentriski riņķi, kuŗu kopīgais centrs sakrīt ar koordinātu sākumu — pola projekciju — projekcijas galveno punktu. Sacītais tieši redzams no perspektīvo projekciju vispārīgām formulām (56) — (59).

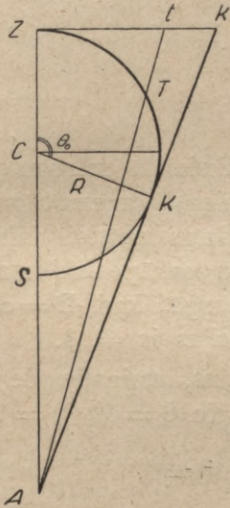
Ārējās projekcijās ir iespējams attēlot vairāk par sfēras virsas pusi, un attēlojamās daļas lielums atkarājas no redzes punkta attāluma līdz sfērai. Ja no redzes punkta A (36. zīm.) novilksim pieskari AKk aplocei ZKS un leņķi ZCK nosauksim par  $\theta_0$ , tad no

$\Delta ACK: \cos(180^\circ - \theta_0) = \frac{CK}{AC} = \frac{R}{D}$ , kur AC apzīmēts ar D. No

šejienes  $\cos \theta_0 = -\frac{R}{D} \dots (103)$ . Pie šīs pašas leņķa maksimālās

nozīmes nonāksim pielīdzinot nullei (56) formulas pirmo atvasināto pēc mainīgā  $\theta$ , jo  $\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{LR(R + D \cos \theta)}{(D + R \cos \theta)^2}$ , kas būs nulle tikai tanī gadījumā, kad  $R + D \cos \theta = 0$ .

Tā kā  $\cos \Theta_0$  iznāca negatīvs, tad projekcijas malas leņķiskais attālums  $\Theta_0$  no projekcijas centra ir lielāks par  $90^\circ$ . Lai turpmāki nebūtu darīšana ar divi lielumiem  $L$  un  $D$ , tad pieņemsim, ka ainu plakne skar sfēru punktā  $Z$  (14. un 36. zīm.); tādā gadījumā  $L = D + R$  un (56) formula iznāk:



36. zīm.

$$\rho = \frac{(D + R) R \sin \Theta}{D + R \cos \Theta}. \quad (104)$$

Ievēdīsim šo pašu apzīmējumu mēroga formulā (59); pieņemot  $\alpha = 90^\circ$  un  $\alpha = 0^\circ$ , dabūjam:

$$a = \frac{D + R}{D + R \cos \Theta}. \quad (105)$$

$$b = \frac{(D + R) (R + D \cos \Theta)}{(D + R \cos \Theta)^2} \quad (106)$$

Te ievesti apzīmējumi  $a$  un  $b$  tāpēc, ka projekcijas rādīsa-vektora virzienā mērogs ir minimums un stateniskā pret to — maksimums. Laukumu mērogu  $p$  dod tieši reizinājums  $ab$ , t. i.,

$$p = \frac{(D + R)^2 (R + D \cos \Theta)}{(D + R \cos \Theta)^3}. \quad (107)$$

Izpētīsim lielumu  $\rho$ ,  $a$ ,  $b$  un  $p$  maiņas atkarībā no leņķa  $\Theta$  maiņas un pieņemot  $D$  par nemainīgu; pēc tam izpētīsim to pašu lielumu maiņu atkarībā no  $D$  maiņas, bet pieņemot leņķi  $\Theta$  par nemainīgu.

Rādīsa  $\rho$  lielums. — Centrālais leņķis  $\Theta$  starp galvena stara virzienu un rādīsu, novilkto uz kaut-kādu sfēras virsas punktu, var mainīties no  $0^\circ$  līdz  $\Theta_0$  ko noteic (103) nol.; dōdot tam dažādas nozīmes un uzskatot  $D$  par konstantu, dabūjam:

$$\text{pie } \Theta = 0^\circ, \quad \rho = 0$$

$$\text{„ } \Theta = 90^\circ, \quad \rho = R \cdot \frac{D + R}{D}$$

$$\text{„ } \Theta = \Theta_0, \quad \rho = R \sqrt{\frac{D + R}{D - R}}.$$

Kā pats par sevi arī saprotams, rādīss  $\rho$ , sākot no projekcijas centra nepārtraukti un pakāpeni aug līdz projekcijas malām, kur  $\Theta = \Theta_0$ . Pie viena un tā paša  $\Theta$  ar redzes punkta attāluma  $D$  palielināšanos rādīss  $\rho$  mazinājas; tas redzams no neistām daļām  $\frac{D + R}{D}$  un  $\frac{D + R}{D - R}$ ,

kuŗas mazinājas ar viena un tā paŗa skaitŗa pielikŗanu skāititājam un saucējam.

Maksimālais mērogs  $a$ , kā tas redzams no (105) formulas, ar leņŗa  $\Theta$  palielināŗanos no  $0^\circ$  līdz  $\Theta_0$ , nepārtraukti aug, pieņemot sekoŗas nozīmes:

$$\text{pie } \Theta = 0^\circ, a = 1; \text{ pie } \Theta = 90^\circ, a = 1 + \frac{R}{D} > 1; \text{ pie } \Theta = \Theta_0,$$

$$a = \frac{D}{D-R} > 1 + \frac{R}{D}.$$

No ŗis paŗas (105) formulas var noteikt maksimālā mēroga  $a$  maiŗu, atkarībā no redzes punkta attālumā  $D$  maiŗas. Izņemot gadījumu, kad  $\Theta = 0^\circ$  un  $a = 1$ , ŗis mērogs vienlīdzīgs neīstai daŗai un tā tad ar  $D$  palielināŗanos tas nepārtraukti un pakāpeniski mazinājas, paliekot tomēr vienumēr  $> 1$ . Tikai gadījumā, kad  $D = \infty$  (ortografiskās projekcijas) mērogs uz visas projekcijas ir  $= 1$ .

Minimālais mērogs  $b$ , pēc (106) formulas, mainoties leņŗim  $\Theta$  no  $0^\circ$  līdz  $\Theta_0$ , pieņem sekoŗas nozīmes: pie  $\Theta = 0^\circ$ ,  $b = 1$ ;

$$\text{pie } \Theta = 90^\circ, b = R \cdot \frac{D+R}{D^2}; \text{ pie } \Theta = \Theta_0, b = 0.$$

Tā tad pārejot no projekcijas centra uz tās malām, mērogs mainās no 1 līdz 0; tas tomēr vēl nenozīmē, ka ŗī pamazināŗanas notiek nepārtraukti. Ir gadījumi, kad mērogs, sākot no projekcijas centra, papriekŗu palielinājas, sasniedz augstāko robeŗu un tikai pēc tam nepārtraukti un pakāpeniski pamazinājas līdz nullei. ŗis parāŗības izpētiŗanai ŗemsim no (106) formulas lieluma  $b$  pirmo atvasināto pēc mainīgā  $\Theta$ :

$$\frac{db}{d\Theta} = \frac{(D+R)(2R^2 + RD \cos \Theta - D^2) \sin \Theta}{(D+R \cos \Theta)^3}.$$

Pielīdzinot ŗo atvasināto nullei, dabonam  $\Theta$  divas nozīmes  $\Theta = 0^\circ$

$$\text{un } \cos \Theta = \frac{D^2 - 2R^2}{DR}. \quad (108)$$

Leņŗa  $\Theta$  pirmā nozīme dod projekcijas centru; tāpēc projekcijas centrā lielumam  $b$  ir vismazākā vai vislielākā nozīme, neatkarīgi no tā, vai tas uz projekcijas malām palielinājas vai pamazinājas. Leņŗa  $\Theta$  otrā nozīme nav tik vienkārŗi izprotama; lieta ir tā, ka ārējās projekcijās  $\cos \Theta$  nevar pieņemt visas nozīmes no  $+1$  līdz  $-1$ , bet tikai no  $+1$  projekcijas centrā līdz  $-\frac{R}{D}$  projekcijas malās, saskaņā ar (103) formulu. Kad  $\cos \Theta = 1$ , tad (108) nol. dod:

$D^2 - RD - 2R^2 = 0$ . No šejienes, ņemot tikai iespējamo pozitīvo sakni, dabonam:

$$D = 2R.$$

Kad  $\cos \theta = -\frac{R}{D}$  tad no (108) nol.  $D = R$ . Tā tad (108) nol. ir spēkā tikai tām ārējām projekcijām, kuŗām attālums  $D$  nav lielāks par  $2R$ , resp. redzes punkta attālums no sfēras virsas nav lielāks par sfēras rādiusu. Šīm projekcijām ( $2R > D > R$ ) mērogs  $b$ , sākot no 1 pie  $\theta = 0^\circ$ , leņķim  $\theta$  pieaugot, papriekšu palielinājas, pie leņķiskā attāluma  $\theta$ , noteikta no (108) formulas, sasniedz vislielāko nozīmi un pēc tam sāk nepārtraukti pamazināties līdz nullei, kuŗu sasniedz pie  $\theta = \theta_0$ .

Minimālais mērogs  $b$  pēc (106) formulas dabūs vislielāko nozīmi, ja tanī ieliksīm  $\cos \theta$  nozīmi no (108); tad:

$$\text{Vislielākais } b = \frac{D^2}{4R(D-R)}. \quad (109)$$

Tām ārējām projekcijām, kuŗām attālums  $D = 2R$  jeb  $> 2R$ , mērogs  $b$  papriekšu nepieaug līdz vislielākai nozīmei, lai pēc tam pamazinātos, bet sākot no 1 (pie  $\theta = \theta_0$ ) nepārtraukti pamazinājas līdz nullei (pie  $\theta = \theta_0$ ), tāpat kā ortografiskās projekcijas, kuŗas ir tikai ārējo projekciju sevišķs gadījums (pie  $D = \infty$ ).

Mēroga  $b$  izpētīšanai pie noteikta leņķa  $\theta$ , bet mainīga attāluma  $D$ , (106) formulai ir jādod cits veids: otrai daļai pieskaita un atņem 1 un skaitītājā  $\cos \theta$  atvieto ar vienādu lielumu  $1 - 2 \operatorname{sn}^2 \frac{\theta}{2}$ ; tad:

$$b = 1 + 2 \operatorname{sn}^2 \frac{\theta}{2} \cdot \frac{2R^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - D(D-R)}{(D+R \cos \theta)^2} \quad (110)$$

Ar attāluma  $D$  palielināšanos šis izteiksmes pēdējā daļveidīgā reizinātāja skaitītājs pamazinājas, bet saucējs palielinājas; tā tad, ar redzes punkta attālināšanos no sfēras virsas, mērogs  $b$  pie viena un tā paša leņķa  $\theta$  paliek mazāks.

Tā kā ārējām projekcijām, gadījumos, kad redzes punkta attālums  $D > R$ , bet mazāks par  $2R$ , mērogs  $b$  leņķim  $\theta$  pieaugot papriekšu palielinājas, sākot no 1, un pēc tam mazinājas līdz nullei, tad starpā starp vislielāko nozīmi un nulli tam kur nebūt ir jābūt vel otreiz vienlīdzīgam vienam. Leņķisko attālumu  $\theta_1$ , pie kuŗa tas būs, dabū no (110) formulas, pielīdzinot otrās daļas otro locekli nullei; tad, bez jau zināmas nozīmes  $\theta_1 = 0^\circ$ , vēl dabūsīm:

$$\cos \frac{\theta_1}{2} = \frac{\sqrt{D(D-R)}}{R\sqrt{2}}. \quad (111)$$

Šo pašu  $\theta_1$  var dabūt no (106) formulas, ieliekot tanī  $b=1$ .

Platību mērogs  $p$ , mainoties leņķim  $\theta$  no  $0^\circ$  līdz  $\theta_0$ , pēc (107) formūlas dabū sekošas nozīmes: pie  $\theta=0^\circ$ ,  $p=1$ ; pie  $\theta=90^\circ$ ,

$$p = \frac{R(R+D)^2}{D}; \text{ pie } \theta = \theta_0, p = 0.$$

Mērogs  $p$ , tāpat kā mērogs  $b$ , vai nu nepārtraukti pamazinājas no 1 līdz 0, jeb papriekšu palielinājas, sasniedz vislielāko nozīmi un pēc tam pamazinājas līdz nullei.

Atkarībā no  $\theta$  maiņām,  $p$  maiņas dabū, ņemot (107) nol. atvasināto pēc mainīgā  $\theta$ .

$$\frac{dp}{d\theta} = (D+R)^2 \sin \theta \frac{3R^2 + 2RD \cos \theta - D^2}{(D+R \cos \theta)^4}.$$

Pielīdzinot šo izteiksmi nullei, dabūjam leņķim  $\theta$  sekošas divi

$$\text{nozīmes: } \theta = 0^\circ \text{ un } \cos \theta = \frac{D^2 - 3R^2}{2DR}. \quad (112)$$

Leņķa  $\theta$  pirmā nozīme atbilst projekcijas centram. Šis iznākums pilnīgi dabīgs, jo šinī punktā mērogam  $p$  jābūt vismazākam jeb vislielākam, neatkarīgi no tā, vai tas no centra uz malām palielinājas jeb pamazinājas;  $\theta$  otro izteiksmi dabonam pēc  $\cos$ , kas savukārt aprobežots ar nozīmēm  $+1$  projekcijas centrā un  $-\frac{R}{D}$  projekcijas malās, saskaņā ar (103) formulu. Kad  $\cos \theta = 1$ , tad no (112) nol. iznāk:

$$D^2 - 2RD - 3R^2 = 0,$$

no kurienes, aprobežojoties tikai ar pozitīvu sakni, dabonam:

$$D = 3R.$$

Kad  $\cos \theta = -\frac{R}{D}$ , tad (112) nol. sakne ir:  $D=R$ .

Tā tad starpā  $\theta=0^\circ$  un  $\theta=\theta_0$  platības mērogs  $p$  sasniedz vislielāko nozīmi tikai tanīs ārējās projekcijās, kurām redzes punkta attālums no sfēras virsas, resp.  $D-R$  nav lielāks par sfēras diametru ( $3R > D > R$  un  $2R > D-R > 0$ ). Mēroga  $p$  vislielāko nozīmi dabūsim ieliekot (107) formulā  $\cos \theta$  nozīmi no (112) nol.; tad

$$\text{vislielākais } p = \frac{4D^3}{27R(D-R)^2}. \quad (113)$$

Tā kā apskatāmās projekcijās platību (laukumu) mērogs, sākot no centra, kur tas = 1, papriekšu palielinājas, bet pēc tam pamazinājas līdz nullei, tad, saprotams, tas kur-nebūt vēl otrreiz būs

=1. Atbilstošo leņķisko attālumu  $\Theta_2$  dabū no (107) formulas, ieliekot tanī  $p=1$ ; pēc vienkāršiem pārveidojumiem iznāk:

$$(1 - \cos \Theta)[R^3 \cos^2 \Theta + R^2(R + 3D) \cos \Theta + R^3 + 2DR^2 + D^2R - D^3] = 0. \quad (114)$$

Šī nol. viena sakne ir  $\Theta = 0^\circ$ , kas jau zināma un atbilst projekcijas centram. Pielīdzinot otro reizinātāju nullei,  $\cos \Theta$  noteikšanai iznāk kvadrātnolīdz., kuŗa vienīgi iespējamā sakne pie  $D > R$  ir:

$$\cos \Theta_2 = \frac{(D+R)\sqrt{4DR - 3R^2} - 3D + R}{2R^2} - \frac{3D + R}{2R}. \quad (115)$$

Ārējās projekcijās ar redzes punkta attālumu  $D = 3R$  un  $> 3R$  platību (laukumu) mērogs  $p$ , sākot no 1 (pie  $\Theta = 0^\circ$ ), nepārtraukti pamazinājas līdz 0 (pie  $\Theta = \Theta_0$ ) un šinī starpā  $p$  nedabū maksimālo nozīmi.

Pie nemainīgā leņķiskā attāluma  $\Theta$ , platību mērogs mazinājas ar  $D$  palielināšanos, resp. redzes punkta attālināšanos no sfēras centra.

Te būs istā vieta parādīt, ka vienādlielu (laukumu pareizu) perspektīvo projekciju nevar būt.

Atcerēsimies, ka par vietējo jeb lokālo virsas, resp. platību mērogu sauc lielumu

$$p = \frac{\text{elementārais laukums uz kartes}}{\text{elementārais laukums uz sfēras}}.$$

Bezgalīgi maza riņķīša, ar rādiusu  $dr$ , laukums uz sfēras virsas ir  $\pi \cdot (dr)^2$ ; to uz kartes attēlo indikatrīsa ar laukumu  $\pi \times adr \times bdr$  un tāpēc  $p = ab$ . Kad  $p = 1$  jeb = konstantam, tad kartes visos punktos mērogs ir vienāds un karte ir vienādliela. Izejot no šīs prasības, bija dabūts (114) nol., kuŗa otrais atrisinājums dod nol.:

$$D^3 - RD^2 - R^2(2 + 3 \cos \Theta)D - R^3(1 + \cos \Theta + \cos^2 \Theta) = 0.$$

Šis ir kubisks nol. attiecībā uz  $D$ ; atrisinājums dos  $D$  atkarīgu no leņķiskā attāluma  $\Theta$ ; tā kā lielumam  $D$  ir jābūt nemainīgam, tad viņam jābūt neatkarīgam no mainīgā  $\Theta$ , kas kā redzams nav izpildāms; (114) nol. otrais atrisinājums nav iespējams un tā tad vienādlielu perspektīvo projekciju nav.

Tādā pašā ceļā viegli pierādīt, ka nevar būt vienādleņķu ārējo perspektīvo projekciju. Vienādleņķu projekcijām attiecībai  $a : b$  ir jābūt neatkarīgai no leņķa  $\Theta$ ; no (105) un (106) formulām šī attiecība iznāk:

$$\frac{a}{b} = \frac{D + R \cos \Theta}{R + D \cos \Theta}.$$

Šī vienādojuma otrā puse var būt neatkarīga no  $\Theta$  tikai pie  $D = R$ , t. i., stereografiskās projekcijas, bet nekādā ziņā ārējās pro-

jekcijās; 10 § jau bija noskaidrots, ka stereogrāfiskās projekcijas ir vienīgās konformās perspektīvās projekcijas.

Apskatīsim beidzot (29) formulu, pēc kuŗas var noteikt vislielākās leņķu alterācijas. Ārējām perspektīvām projekcijām  $a$  un  $b$  jāņem no (105) un (106) formulām; iznāk:

$$\operatorname{sn} \omega = \frac{D-R}{D+R} \operatorname{tg}^2 \frac{\Theta}{2}. \quad (116)$$

Ieliekot te dažādus leņķiskus attālumus  $\Theta$ , dabūjam: pie  $\Theta = 0^\circ$ ,  $\omega = 0$ ; pie  $\Theta = 90^\circ$ ,  $\operatorname{sn} \omega = \frac{D-R}{D+R}$ ; pie  $\Theta = \Theta_0$ ,  $\omega = 90^\circ$ .

Tā tad projekcijas centrā leņķis  $\omega = 0^\circ$ , bet ar attālināšanos no tā, tas nepārtraukti aug, un uz projekcijas malām jau ir  $90^\circ$ . Lūk tāpēc ārējās projekcijās attēlo vienīgi puslodi (līdz  $\Theta = 90^\circ$ ), neraugoties uz to, ka tanīs ir iespējams attēlot daudz lielāku sfēras daļu. Vienādojums  $\omega = 0^\circ$  ir iespējams tikai pie  $D = R$ , t. i., stereogrāfiskās projekcijās. Ar redzes punkta attālināšanos, t. i., ar  $D$  palielināšanos, palielinājas arī leņķis  $\omega$ , tāpēc ka (116) formulas otrās daļas koeficients ir istā daļa. Kad  $D = \infty$ , t. i., ortogrāfiskās projekcijās leņķis  $\omega$  ir  $90^\circ$  jau pie  $\Theta = 90^\circ$ .

Atkārtosim īsumā slēdzienus, kādi dabūti izpētot vispārīgā veidā ārējās perspektīvās projekcijas.

1. Projekcijas centrā lielumi  $\rho$ ,  $a$ , un  $\omega$  attiecīgi ir 0, 1, 0; tie nepārtraukti aug ar leņķiskā attāluma palielināšanos, t. i., virzienā uz projekcijas malām.

2. Projekcijām, kuŗām  $D > R$ , bet  $< 2R$ , mērogs  $b$ , sākot no centra, kur tas = 1, papriekšu aug, sasniedz vislielāko nozīmi un pēc tam nepārtraukti mazinājas līdz 0. Projekcijām, kuŗām  $D \geq 2R$ , mērogs  $b$  no projekcijas centra uz tās malām nepārtraukti mazinājas no 1 līdz 0.

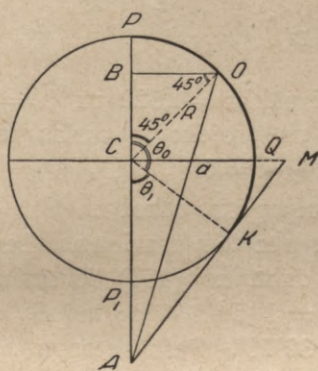
3. Projekcijām, kuŗām  $R < D < 3R$ , platību mērogs  $p$ , sākot no centra, kur tas = 1, papriekš aug, sasniedz vislielāko nozīmi un pēc tam mazinājas līdz nullei. Projekcijām, kuŗām  $D \geq 3R$ , platību mērogs no centra, kur tas = 1, nepārtraukti mazinājas virzienā uz projekcijas malām, līdz 0 uz projekcijas malas.

4. Ar redzes punkta attālināšanos, resp.  $D$  augšanu, pie viena un tā paša leņķiskā attāluma  $\Theta$ , lielumi  $\rho$ ,  $a$ ,  $b$  un  $p$  mazinājas; šīnī gadījumā aug vienīgi leņķis  $\omega$ .

Tagad apskatīsim svarīgākās un interesantākās ārējās projekcijas. Apmierināsimies tikai ar to īpašību pētīšanu, bez atsevišķu projekciju zīmējumiem, jo tie, vispār ņemot, būs kaut-kas vidējs starp

ortografiskām un stereografiskām projekcijām. Pati konstruēšana būs viegla pēc atsevišķām projekcijām turpmāk dotām lielumu  $\rho$  tabulām.

a) La Īra projekcija. — Franču astronoms Philippe de la Hire (1640—1718) par ainu plakni ņēma ekvatora plakni CQ (37. zīm.) un redzes punkta vietu A aprēķināja no noteikuma, lai kvadranta PQ vidus punkts O attēlotos rādiusa CQ vidū a. Tādā ceļā dabū polāro ārējo projekciju ar redzes punktu A, taisnes Oa krustojumā ar diametra PP<sub>1</sub> — zemes ass — turpinājumu. Projekcija ir pilnīgi noteikta ar la Īra divi uzstādītiem noteikumiem, proti: lai 1)  $\cup PO = \cup OQ$  un 2) lai  $Ca = aQ = \frac{1}{2} R$ . No šīm prasībām izriet, ka  $\sphericalangle PCO = 45^\circ$  un ka  $BO = BC = \frac{1}{2} R \sqrt{2}$ . No taisnleņķa trīsstūriem ABO un ACa iznāk, ka  $AB = R(\sqrt{2} + 1)$  un  $AC = D = R + \frac{1}{2} R \sqrt{2}$ ; tamdēļ  $AP_1 = \frac{1}{2} R \sqrt{2} = BO = BC$ . Pēc šīs sakarības ļoti vienkārši uziet redzes punktu: no loka PQ vidus punkta O nolaiž stateni OB uz PP<sub>1</sub> un atliek  $P_1A = BO = \frac{1}{2} R \sqrt{2} = 0,7071R$ ; tad  $AC = 1,7071R$ . (117)



37. zīm.

Viegli saprast, ka polārā la Īra projekcijā meridiāni attēlojas ar taisnēm, izejošām no viena kopējā centra — pola un paralēles — ar koncentriskiem riņķiem. Formulas šo projekciju konstruēšanai un pētīšanai dabū vai nu no ārējo perspektīvo projekciju formulām (104) — (106) atvietojojot tanis  $D + R$  ar  $D$ , jeb no perspektīvo projekciju vispārīgām formulām (56) — (59), pieņemot  $L = D$ ; kā vienā, tā otrā gadījumā iznāk:

$$\rho = \frac{DR \sin \theta}{D + R \cos \theta} = \frac{R(2 + \sqrt{2}) \sin \theta}{2 + \sqrt{2} + 2 \cos \theta},$$

$$a = \frac{D}{D + R \cos \theta} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2} + 2 \cos \theta},$$

$$b = \frac{D(R + D \cos \theta)}{(D + R \cos \theta)^2} = \frac{(2 + \sqrt{2}) [2 + (2 + \sqrt{2}) \cos \theta]}{(2 + \sqrt{2} + 2 \cos \theta)^2},$$

kur  $\theta$  ir no pola P izejošais loks, tā tad  $= 90^\circ - \varphi$ ; ņemot vēl vērā, ka  $\varphi_0 = 90^\circ$ , dabūjam:

$$\rho = \frac{DR \cos \varphi}{D + R \operatorname{sn} \varphi}, \quad x = \frac{DR \cos \varphi \cos \lambda}{D + R \operatorname{sn} \varphi} = \frac{(2 + \sqrt{2}) R \cos \varphi \cos \lambda}{2 + \sqrt{2} + 2 \operatorname{sn} \varphi},$$

$$y = \frac{DR \cos \varphi \operatorname{sn} \lambda}{D + R \operatorname{sn} \varphi} = \frac{(2 + \sqrt{2}) R \cos \varphi \operatorname{sn} \lambda}{2 + \sqrt{2} + 2 \operatorname{sn} \varphi};$$

$x$  un  $y$  jāaprēķina tikai tad, ja projekciju konstruē pēc punktiem.

Tā kā  $\rho_{45^\circ} = \frac{1}{2} R = Ca$ , un tā kā šinī gadījumā  $\Theta = 45^\circ$ , tad

$$\rho_{45^\circ} = \frac{1}{2} \rho_{90^\circ} = \frac{1}{2} R = \frac{DR \operatorname{sn} 45^\circ}{D + R \cos 45^\circ};$$

atrisinot šo nol., atkal dabūjam (117) form. doto  $D$  lielumu.

La Īra projekcijā var attēlot vairāk par sfēras pusi. Leņķa  $\Theta$  robeža pēc (103) formulas iznāk  $\Theta_0 = 125^\circ 52'$ ; tas pats redzams no

$\Delta ACK$ , kur  $\cos \Theta_1 = \cos (180^\circ - \Theta_0) = \frac{CK}{CA} = \frac{R}{D}$ ; atbilstošās paralē-

$$\begin{aligned} \text{les rādiuss } \rho_0 &= CM = \overline{CA} \cdot \cotg \Theta_1 = D \cotg \Theta_1 = \frac{RD}{\sqrt{D^2 - R^2}} = \\ &= \frac{R}{7} \sqrt{28\sqrt{2} + 35} = 1,234 R. \end{aligned}$$

Indikatrīsas asis uz projekcijas malas iznāk  $a = 1,522$  un  $b = 0$ . Ja ainu plakni vilktu caur punktu  $P$ , tad uz projekcijas malas pie  $\Theta_0 = 125^\circ 52'$ , iznāktu  $\rho_0 = 1,957R$ ,  $a = 2,414$ ,  $b = 0$ .

Tā kā šinī projekcijā  $R < D < 2R$ , tad mērogs  $b$ , sākot no  $\Theta = 0^\circ$  papriekšu aug, sasniedz vislielāko nozīmi un pēc tam mazinājas. Leņķi  $\Theta_m$ , pie kuŗa mērogs  $b$  ir vislielākais, dabū no (108) formulas, kas šinī gadījumā dod vienādojumu  $\cos \Theta_m = \frac{1}{2} (5\sqrt{2} - 6)$ ; tad  $\Theta_m = 57^\circ 37'$ , kas atbilst paralēlei ar platumu  $32^\circ 23'$ . Paša mēroga lielumu dabū no vispārīgās (59") formulas sekošā veidā:

$$b = \frac{D(R + D \cos \Theta_m)}{(D + R \cos \Theta_m)^2},$$

kas pēc  $\cos \Theta_m$  nozīmes ielikšanas no (108) formulas, dod:

$$b_{\max} = \frac{D^3}{4R(D^2 - R^2)}. \quad (118)$$

Šo izteiksmi var dabūt arī no (109) formulas, ņemot tikai vērā, ka tā izvesta gadījumā, kur ainu plakne skaŗ sfēras virsu; tā kā La Īra projekcijā ainu plakne iet caur sfēras centru, tad no (109) formulas dabūtais rezultāts jāreizina ar attiecību  $D : (D + R)$ .

Pieņemot sfēras rādiusu  $R$  par 1 un par ainu plakni sfēras pieskares plakni, ertākas salīdzināšanas deļ ar citām projekcijām, da-

būjam sekošu svarīgāko elementu tabulu veselai puslodei, t. i. līdz  $\Theta = 90^\circ$  ar intervāliem ik pa  $15^\circ$ .

$\Theta$	$\rho$	a	b	p	2 $\omega$
0°	0,000	1,000	1,000	1,000	0° 0'
15	0,262	1,013	1,004	1,016	0 31
30	0,526	1,052	0,013	1,066	2 09
45	0,793	1,121	1,025	1,149	5 08
60	1,062	1,227	1,030	1,263	9 59
75	1,330	1,377	1,010	1,391	17 42
90	1,586	1,586	0,929	1,473	30 17

Vislielākais mērogs  $b = 1,0303$  iznāk pie  $\Theta_m = 57^\circ 37'$ , kā jau agrāki. Mērogs  $b$  otrreiz ir 1 pie  $\Theta_1 = 78^\circ 03'$ , uz (111) formulas pamata. Laukumu maksimālais mērogs  $p$  jāaprēķina pēc (112) un (113) formulām; iznāk  $p = 1,474$  pie  $\Theta = 91^\circ 26'$ ; mērogs  $p$  otrreiz ir 1 pie  $\Theta_2 = 114^\circ 21'$ , aprēķinot pēc (115) formulas; indikatrisas pusasis te būs  $a = 2,091$  un  $b = 0,478$ .

La Īra projekcijā nav ne bezgalīgi mazu daļu līdzības, ne laukumu pareizības; tomēr tanī figūras mainās mazāk nekā augšā apskatītās perspektīvās projekcijās; tāpēc šo projekciju dažreiz lieto kā polāro projekciju ziemeļ- un dienvidpusložu attēliem.

b) Parāna projekcija. — Franču ģeogrāfs Antoine Parent (1666—1716), izpētot La Īra projekciju, grieza vērību uz to, ka lai gan vienādie loki PO un OQ (37. zīm.), katrs  $45^\circ$ , attēlojas ar vienādiem rādiusa nogriežņiem Ca un aQ, tad tomēr loku citas vienādās daļas projekcijā neattēlojas ar vienādiem nogriežņiem. Tā pēc augšā dotās skaitliskās tabulas La Īra projekcijai nogriežņi, resp. rādiusu  $\rho$  starpības ir 0,262; 0,264; 0,267; 0,269; 0,268; 0,256.

Tā tad sfēras vienādie loki uz projekcijas dažādās vietās ir dažādi un pataisīt tos vienādus nav iespējams. Parāns lika priekšā redzes punktu ņemt tā, lai starpību: „loks minus attiecīgais nogrieznis uz projekcijas“ summa būtu vismazākā. La Īra projekcijā mērogam  $b$  ir sekošas nozīmes: projekcijas centrā, kur  $\Theta = 0^\circ$ ,  $b_0 = \frac{D}{D+R}$ ; pie  $\Theta = 57^\circ 37'$  (vislielākā nozīme) pēc (118) formulas,  $b_m = \frac{D^3}{4R(D^2-R^2)}$  un uz projekcijas malām, pie  $\Theta = 90^\circ$ ,  $b_{90^\circ} = \frac{R}{D}$ . Leņķim  $\Theta$  nepārtraukti augot no  $0^\circ$  līdz  $57^\circ 37'$ , atbilstoši aug mērogs  $b$ . Ja leņķim

$\Theta$  dosim patvaļīgus pieaugumus, tad, neatkarīgi no šī pieauguma lieluma, katru divu, viens otram sekojošo mērogu starpību summa būs vienlīdzīga mēroga  $b$  vislielākai un vismazākai nozīmju starpībai; tāpēc no  $\Theta = 0^\circ$  līdz  $\Theta = 57^\circ 37'$  divi, viens otram sekojošo elementu mērogu starpību summa ir:

$$\frac{D^3}{4R(D^2 - R^2)} - \frac{D}{D + R}$$

un, kad  $\Theta$  pieņem nozīmes no  $57^\circ 37'$  līdz  $90^\circ$ , divi viens otram sekojošo elementu mērogu starpību summa ir:

$$\frac{D^3}{4R(D^2 - R^2)} - \frac{R}{D}$$

Tāpēc mērogu starpību summa  $s$  pa visu puslodi = šo divi izteiksmju summai, t. i.:

$$s = \frac{D^3}{2R(D^2 - R^2)} - \frac{D}{D + R} - \frac{R}{D}$$

Pārveidojot šo izteiksmi un atvietojojot, vienkāršības dēļ, attiecību  $\frac{D}{R}$  ar  $x$ , dabonam:

$$s = \frac{x^4 - 2x^3 + 2}{2x(x^2 - 1)} \dots (a).$$

Parāns aprēķina redzes punkta attālumu  $D$  jeb  $x$  no noteikuma, lai summa  $s$  būtu vismazāka. To dabū pielīdzinot nullei  $s$  atvasināto pēc mainīgā  $x$ ; tas noved pie sekoša sestās pakāpes nol. atrises:

$$x^6 - 3x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 2 = 0.$$

Šī nol. četras saknes ir lietiskas un divas imagināras; no lietiskām divi pozitīvas un divi negatīvas; negatīvās saknes neatbilst jautājumam. Pozitīvās saknes ir:

$$x_1 = 1,5944 \text{ un } x_2 = 0,6692.$$

Ņemsim (a) funkcijas otro atvasināto:

$$\frac{d^2s}{dx^2} = \frac{x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 2}{x^3(x^2 - 1)^3}$$

un ieliksīm tanī abas tikko dabūtās saknes; pirmā sakne dod pozitīvu, otrā — negatīvu lielumu; tā tad pie  $x_1$  (a) funkcija ir vismazākā un pie  $x_2$  vislielākā. Tāpēc Parāna uzstādītām prasībām atbilst tikai pirmā sakne un caur to  $D = 1,5944 R$ . (119)

Ieliekot šo  $D$  nozīmi vispārīgās formulās (104) — (107) un (116), dabūjam apskatāmai projekcijai sekošu skaitlisku tabulu:

$\theta$	$\rho$	a	b	p	$2\omega$
0°	0,000	1,000	1,000	1,000	0° 0'
15	0,262	1,013	1,005	1,019	0 27
30	0,527	1,054	1,020	1,076	1 53
45	0,797	1,127	1,042	1,175	4 30
60	1,073	1,239	1,063	1,317	8 46
75	1,352	1,400	1,067	1,494	15 30
90	1,627	1,627	1,021	1,661	26 29

Tā kā Parāna projekcijai attālums  $D > R$ , bet mazāks par  $2R$ , tad mērogi  $b$  un  $p$ , sākot no  $\theta = 0^\circ$ , papriekšu aug, sasniedz maksimālo nozīmi un pēc tam mazinājas; pēc (108) formulas vislielākais  $b$  iznāk pie  $\theta = 70^\circ 07'$  un pēc (109) formulas tas = 1,069. Otrreiz  $b$  ir 1 pie  $\theta = 93^\circ 0'$ , saskaņā ar (111) formulu. Vislielākais platību mērogs  $p$ , noteikts pēc (113) formulas, ir 1,700 pie  $\theta = 98^\circ 15'$ , kas noteicams pēc (112) formulas; mērogs  $p$  otrreiz ir 1 pie  $\theta_2 = 120^\circ 30'$ , saskaņā ar (115) formulu un tad indikatrisu pusasis ir  $a = 2,387$  un  $b = 0,419$ . Beidzot, saskaņā ar (103) formulu, apskatāmā projekcijā var attēlot punktus, kuŗu leņķiskais attālums no projekcijas centra ir  $\theta_0 = 128^\circ 51'$ ; tad  $\rho_0 = 2,089$ ,  $a = 2,682$  un  $b = 0$ .

Viegli pārlicināties par to, ka vietējo mērogu izmaiņas Parāna projekcijā patiešām mazākas, nekā La Īra projekcijā (to nomanām salīdzinot abās projekcijās vislielākās leņķu izmaiņas  $\omega$ ), bet šī samazināšanās ir niecīga un šīs projekcijas viena no otras atšķiŗas visai maz; tāpēc šī Parāna projekcija ir interesanta tikai teorētiskā ziņā.

Parāns ir izgudrojis vēl dažas citas ārējās perspektīvās projekcijas, bet arī tās nelieto. Teiksim par tām dažus vārdus un atstāsim pašam lasītājam to sīkāku izpētīšanu un alterāciju tabulu sastādīšanu.

1. Ja tikko izpēstītai projekcijai Parāns uzstādīja prasību, lai vismazāka būtu mērogu  $b$  izmaiņu summa, tad nākošai projekcijai Parāns uzstādīja prasību, lai platību alterāciju summa būtu vismazāka. Augšā bija pierādīts, ka tanīs ārējās projekcijās, kuŗām attālums  $D$  ir mazāks par  $3R$ , platību mērogs  $p$  no projekcijas centra uz tās malām papriekšu palielinājas, sasniedz vislielāko nozīmi un pēc tam mazinājas. Ja ainu plakni velk caur sfēras centru, tad projekcijas centrā ( $\theta = 0^\circ$ )  $p_0 = \frac{D^2}{(D+R)^2}$ , vislielākais  $p_m = \frac{4D^5}{27R(D^2-R^2)^2}$  un uz pro-

jekcijas malām ( $\Theta = 90^\circ$ )  $p_{90^\circ} = \frac{R}{D}$ . Platību mērogu izmaiņu sum-

ma starp  $p_m$  un  $p_0$  ir:  $\frac{4D^5}{27R(D^2-R^2)^2} - \frac{D^2}{(D+R)^2}$  un starp  $p_m$  un

$$p_{90^\circ} \text{ ir } \frac{4D^5}{27R(D^2-R^2)^2} - \frac{R}{D}.$$

Šo starpību summa  $s$  ir:

$$s = \frac{8D^5}{27R(D^2-R^2)^2} - \frac{D^2}{(D+R)^2} - \frac{R}{D}.$$

Attiecību  $\frac{D}{R}$  nosaucam par  $x$ ; pēc pārveidojuma iznāk:

$$s = \frac{8x^6 - 27x^5 + 27x^4 - 27x^3 + 54x^2 - 27}{27x(x^2-1)^2}.$$

Ņemot  $s$  atvasināto pēc mainīgā  $x$ , dabūjam sekošu astotās pakāpes nol.:

$$8x^8 - 67x^6 + 162x^5 - 243x^4 + 54x^3 + 81x^2 - 27 = 0.$$

No šī nol. astoņām saknēm sešas ir imagināras, bet no divi lietiskām viena pozitīva un otra negatīva. Tā kā pēdējā neatbilst jautājumam, tad vienīgais atrisinājums dod  $x = 2,099948$  un redzes punkta attālums iznāk:  $D = 2,099948R$ . (120)

Leņķiskais attālums līdz projekcijas malai ir  $\Theta_0 = 118^\circ 26'$ .

2. Vienu citu projekciju Parāns aprēķina sekoši: ainu plakni velk caur sfēras centru un redzes punktu ņem tādā attālumā, lai  $b$  iznāktu vismazāks. Pirmā noteikuma dēļ (109) formulas vietā iznāk:

$$b = \frac{D^3}{4R(D^2-R^2)} \text{ un otrā noteikuma dēļ } D = R\sqrt{3} = 1,7321R. \quad (121)$$

Projekcijas malu noteic leņķis  $\Theta_0 = 125^\circ 16'$ .

3. Pie projekcijas aprēķina iziets no tā, ka platību mērogam  $p$  jābūt vismazākam un ka ainu plaknei jāiet caur sfēras centru. Pie šāda ainu plaknes novietojuma (113) formulas vietā iznāk:

$$p = \frac{4D^5}{27R(D^2-R^2)^2}. \quad \text{Šis mērogs } p \text{ būs vismazākais pie attāluma}$$

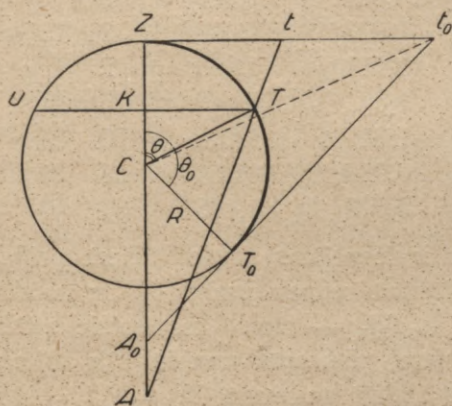
$$D = R\sqrt{5} = 2,2361R. \quad (122)$$

Projekcijas malu noteic leņķis  $\Theta_0 = 116^\circ 34'$ .

c) Fišera projekcija. — Geodēzijas profesors Darmštate Fišers (Philipp Fischer, 1818—1887) ārējai perspektīvai projekcijai redzes punkta  $A$  vietu (38. zīm.) noteica ar to, lai projekcijas malējā riņķa rādiuss  $Zt$  būtu vienlīdzīgs iztaisnotam lokam  $ZT$ , t. i., lokam no ainu plaknes pieskares punkta līdz projekcijā attēlojamā seg-

menta pamatam. Atkarībā no attēlojamā segmenta samēriem redzes punkts iznāk dažādās vietās un tadā ceļā var dabūt daždažādas šī veida projekcijas.

Pieņemsim, ka jāattēlo sfēras segments ZTU ar virsotni Z un norobežotu ar sfēras mazo riņķi UKT, kā segmenta pamatu. Lai uzietu redzes punktu, tad pa sfēras skaruli punktā Z atliek Zt = iztaisnotam lokam ZT, savieno t ar T un šo taisni turpina līdz krustojumam punktā A ar rādusa ZC turpinājumu. Dabūtais punkts ir redzes punkts dotā segmenta perspektīvai attēlošanai. Punkta A vietu viegli noteikt arī skaitļos. No līdzīgiem taisnleņķu trīsstūriem AZt un AKT:



38. zīm.

$$\frac{AZ}{Zt} = \frac{AK}{KT};$$

ievedot te agrākos apzīmējumus un ņemot vērā, ka  $Zt = R \Theta$ , dabonam:

$$\frac{D+R}{R\Theta} = \frac{D+R \cos \Theta}{R \sin \Theta}.$$

No šejienes

$$D = \frac{\sin \Theta - \Theta \cos \Theta}{\Theta - \sin \Theta} R. \quad (123)$$

Kā šī formula, tā arī vienkārša pārliksme rāda, ka redzes punkta attāļums D ir atkarīgs no leņķa  $\Theta$ , t. i., attēlojamā sfēras segmenta lieluma resp. tā augstuma. Mainot  $\Theta$  no  $0^\circ$  līdz  $90^\circ$  ik pa  $15^\circ$  dabūjam sekošus skaitļus:

$$\Theta = 0^\circ \quad 15^\circ \quad 30^\circ \quad 45^\circ \quad 60^\circ \quad 75^\circ \quad 90^\circ$$

$$\frac{D}{R} = 2,000 \quad 1,993 \quad 1,972 \quad 1,939 \quad 1,890 \quad 1,828 \quad 1,752.$$

Tā kā  $\frac{D}{R}$  pie  $\Theta = 0^\circ$ , iznāk nenoteikts, tad šinī gadījumā jālieto funkcijas patiesā lieluma noteikšanas paņēmiens, t. i., jāuziet

$$\lim \left[ \frac{D}{R} \right]_{\Theta=0^\circ}.$$

Fišera polārai projekcijai atsevišķo paralēļu rādusi neiznāk vienādi ar meridiāna lokiem starp polu un attiecīgo paralēli. Tāda vienādība ir tikai vienā gadījumā — malējai paralēlei. Jo mazāks leņķis

ķis noteic malējo paralēli, resp. jo mazāks projekcijā attēlojamais sfēras segments, jo mazākas ir līniju un leņķu alterācijas projekcijā.

Zemāk doti Fišera perspektīves skaitliskie lielumi veselai puslodei, t. i., pieņemot  $\Theta = 90^\circ$ ; tie aprēķināti pieņemot  $R = 1$  pēc vispārīgām ārējo projekciju formulām (104) — (107) un (116) un ievērojot vienīgi Fišera uzstādīto prasību, lai saskaņā ar (123) formulu  $D = 1,751938 R \left(\log \frac{D}{R} = 0,2435188\right)$ .

$\Theta$	$\rho$	a	b	p	2 $\omega$
0°	0,000	1,000	1,000	1,000	0° 0'
15	0,262	1,013	1,003	1,016	0 33
30	0,526	1,051	1,011	1,062	2 15
45	0,791	1,119	1,019	1,140	5 22
60	1,058	1,222	1,018	1,244	10 27
75	1,322	1,369	0,989	1,354	18 31
90	1,571	1,571	0,897	1,408	31 43

Izpētīsim cik lielu segmentu ir iespējams attēlot Fišera projekcijā. Pieņemsim, ka atsevišķā gadījumā redzes punkts  $A_0$  ir noteikts saskaņā ar (123) formulu tā, ka  $A_0 T_0 t_0$  — stars, kas noteic attēlojamā segmenta malējo punktu, sfērai pieskaņās punktā  $T_0$ ; robežojšo leņķi  $ZCT_0$  nosauksim par  $\Theta_0$ . Šinī gadījumā  $Zt_0 = T_0 t_0 = R\Theta_0$ . (Te pirmais vienādojums izriet no pieskares īpašībām, otrs — no projekcijas konstruēšanas metodes).— No vienādiem taisnleņķa trīsstūriem  $ZCt_0$  un  $Ct_0 T_0$  rakstām:

$$Zt_0 = R \operatorname{tg} \frac{\Theta_0}{2}, \text{ jeb } R \Theta_0 = R \operatorname{tg} \frac{\Theta_0}{2}; \text{ no šejienes } \Theta_0 = \operatorname{tg} \frac{\Theta_0}{2}. \quad (a)$$

Atbilstošais redzes punkta attālums pēc (123) formulas iznāk:

$$D = \frac{\Theta_0^2 + 1}{\Theta_0^2 - 1} R.$$

Atrisinot (a) nol. ar vairākkārtīgiem mēģinājumiem, dabū  $\Theta_0 = 133^\circ 34'$ ; tad  $D = 1,451R$ .

d) Hammera projekcija. — Kartografs, ģeodēzijas un ģeografijas profesors Hammers, Štutgartē, aprēķināja ārējās projekcijas tā, lai sfēras segmenta virsa attēlotos ar tikpat lielu laukuma ziņā riņķi. Viens tāds segments, kuŗu varētu nosaukt par pamatsegmentu, attēlosies ar tikpat lielu laukuma ziņā riņķi, bet atsevišķu segmentu virsas vairs neattēlosies ar vienādlielām riņķiem, jo vienādlielu, resp. laukumu parēizo perspektīvo projekciju nevar būt.

Pieņemsim, ka 39. zīm. attēlo sfēru ar rādiusu  $R$ , ka  $AB$  ir segmenta pamatriņķis,  $Z$  segmenta virsotne un  $ZC$  segmenta augstums. Lai dabūtu redzes punktu  $A_1$ , atliek  $Za = ZA = \rho$  savieno ar  $A$  un šo līniju turpina līdz krustojumam ar rādiusa  $ZO$  turpinājumu punktā  $A_1$ . Parādīsim papriekšu, ka uz projekcijas ar rādiusu  $Za$  dabūtā riņķa laukums būs vienādiels ar segmenta  $BZA$  virsas laukumu un pēc tam pāriesim pie punkta  $A_1$  analītiskās noteikšanas.

Ar rādiusu  $Za = \rho$  novilkta riņķa laukums  $= \pi \rho^2$ , kur  $Za = \rho =$  chordai  $ZA$ . Sfēriskā segmenta  $AZB$  virsas laukums ir  $2\pi R \cdot \overline{ZC}$ ; tā kā  $ZC = \frac{\rho^2}{2R}$ , tad virsas laukums  $= \pi \rho^2$ . Sacīto var formulēt sekošā teoreēmā: „Sfēras segmenta virsas laukums ir vienādiels ar riņķa laukumu, ja riņķis novilkts ar rādiusu  $=$  chordai, kas savieno segmenta virsotni ar segmenta pamatriņķa aploces kādu nebūt punktu.“

Tagad nosauksim leņķi  $AOZ$  par  $\Theta$ ; viegli redzēt, ka tas no teic punkta  $A$  vietu un līdz ar to pamatsegmenta augstumu. No  $\Delta OZA$   $\rho = 2R \operatorname{sn} \frac{\Theta}{2}$ ; no līdzīgiem taisnleņķu trīsstūriem  $A_1Za$  un  $A_1CA$  rakstām:

$$\frac{Za}{CA} = \frac{ZA_1}{CA_1}, \text{ jeb } \frac{2R \operatorname{sn} \frac{\Theta}{2}}{R \operatorname{sn} \Theta} = \frac{D + R}{D + R \cos \Theta}.$$

Ieliekot te  $\cos \Theta = 2 \cos^2 \frac{\Theta}{2} - 1$  un  $\operatorname{sn} \Theta = 2 \operatorname{sn} \frac{\Theta}{2} \cos \frac{\Theta}{2}$  pēc pārveidojuma dabonam:

$$D \left( 1 - \cos \frac{\Theta}{2} \right) = R \left( 1 + \cos \frac{\Theta}{2} - 2 \cos^2 \frac{\Theta}{2} \right).$$

Ieliekam te

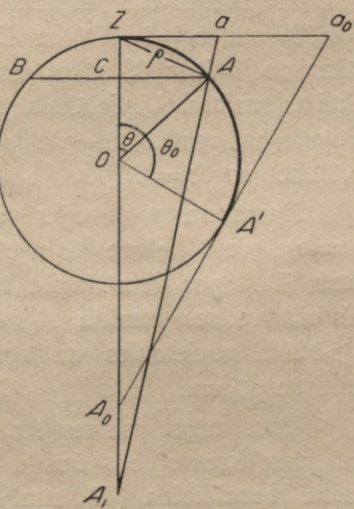
$$1 - \cos \frac{\Theta}{2} = 2 \operatorname{sn}^2 \frac{\Theta}{4},$$

$$1 + \cos \frac{\Theta}{2} = 2 \cos^2 \frac{\Theta}{4},$$

$$\cos^2 \frac{\Theta}{2} = \left( 2 \cos^2 \frac{\Theta}{4} - 1 \right)^2;$$

pēc pārveidojuma iznāk:

$$D = R \left( 4 \cos^2 \frac{\Theta}{4} - 1 \right). \quad (124)$$



39. zīm.

Aprēķinot pēc šīs formulas lielumu  $D$  dažādiem leņķiem  $\Theta$  ik pa  $15^\circ$  no  $0^\circ$  līdz  $90^\circ$ , dabonam sekošus skaitļus:

$$\begin{array}{ccccccc} \Theta = 0^\circ & 15^\circ & 30^\circ & 45^\circ & 60^\circ & 75^\circ & 90^\circ \\ \frac{D}{R} = 3,000 & 2,983 & 2,932 & 2,848 & 2,732 & 2,587 & 2,414. \end{array}$$

Pie  $\Theta = 90^\circ$ , t. i., pieņemot pamatsegmentu par pussferu, pēc (124) formulas, iznāk  $D = (\sqrt{2} + 1)R = 2,414\ 213\ 562R$ . Pieņemot  $R = 1$  pēc vispārīgām formulām (104) — (107) un (116) aprēķinātie raksturīgie lielumi Hammera perspektīvei ir sekoši:

$\Theta$	$\rho$	a	b	p	2 $\omega$
$0^\circ$	0,000	1,000	1,000	1,000	$0^\circ\ 0'$
15	0,261	1,010	0,996	1,006	0 49
30	0,520	1,041	0,981	1,021	3 25
45	0,773	1,094	0,949	1,038	8 09
60	1,015	1,172	0,887	1,040	15 52
75	1,234	1,277	0,776	0,992	28 14
90	1,414	1,414	0,586	0,828	48 56

Projekciju var turpināt līdz  $\Theta_0 = 114^\circ 28'$ , kur  $\rho_0 = 1,554$ ,  $a = 1,707$  un  $b = 0$ . Tā kā  $D > 2R$ , tad mērogs  $b$  nepārtraukti mazinājas no 1 līdz 0, sākot no projekcijas centra un virzienā uz projekcijas malām. Vislielākais platību mērogs  $p = 1,042$  pie  $\Theta = 54^\circ 08'$ ; projekcijas centrā un pie  $\Theta = 73^\circ 33'$ ,  $p = 1$ ; pēdējā gadījumā  $a = 1,266$  un  $b = 0,790$ .

Hammera projekcijas var konstruēt līdz robežai, kuŗu noteic ar  $\Theta = \Theta_0$ , kad taisne  $A_1a$  pārvēršās par aploces pieskari un trīsstūris  $ZaA$  par vienādmalu trīsstūri ar  $\Theta_0 = 120^\circ$  (jo  $ZA' = Za_0$ ). Atbilstošā redzes punkta  $A_0$  attālums  $D = 2R$ . Punkti, kuŗus noteiks  $\Theta > 120^\circ$ , novietosies uz agrāk uznestiem; tāpēc to attēlošana nav vairs iespējama.

Konstruējot taisnes  $Aa$ , kas atbilst leņķa  $\Theta$  dažādām nozīmēm, dabonam krustojošos taisņu sistēmu, kuŗu aptverošā likne ir trīsragainā hipocikloida (40. zīm.). Šo likni izpētījis ievērojamais ģeometrs Šteiners (Jacob Steiner, 1796—1863). Tā kā Hammera projekcijai ir sakarība ar šo likni, tad īsumā izvedīsim tās nol. un apskatīsim tās galvenās īpašības.

Vienkāršības nolūkos leņķi  $\Theta$  turpmāk sauksim par  $2\alpha$ . Taisni  $ZA_1$  (39. zīm.) ņemsim par  $x$  asi un  $Za$  par  $y$  asi.

Tad  $Za = \overline{Z\bar{A}} = \rho = 2R \operatorname{sn} \alpha$ ,

$$ZA_1 = Za \cdot \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} = 2R \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}.$$

Taisnes aA nol. iznāk:

$$\frac{x}{2R \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}} + \frac{y}{2R \operatorname{sn} \alpha} = 1, \text{ jeb}$$

$$\operatorname{sn} \frac{\alpha}{2} \cdot x + \cos \frac{\alpha}{2} \cdot y = 2R \operatorname{sn} \alpha \cos \frac{\alpha}{2} \dots (a).$$

Lai dabūtu visu šīs šķiras taisņu aptveru nol., uziesim atvasināto pēc parametra  $\alpha$ :

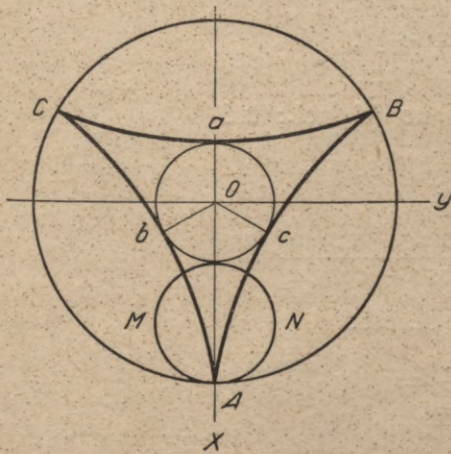
$$\cos \frac{\alpha}{2} \cdot x - \operatorname{sn} \frac{\alpha}{2} \cdot y = 4R \cos \alpha \cos \frac{\alpha}{2} - 2R \operatorname{sn} \alpha \operatorname{sn} \frac{\alpha}{2} \dots (b).$$

No (a) un (b) nol. jāizsle dz mainīgais lielums, parametrs  $\alpha$ ; tad dabūsim aptveres nol. taisnleņķu koordinātās. Nol. iznāk ceturtā pakāpē un ir ļoti neērts līknes īpašību pētīšanai. Daudz vienkāršāki ir izteikt aptveres nol. ar diviem nol., kuņos  $x$  un  $y$  ir parametra  $\alpha$  funkcijas. Tamdēļ papriekšu reizina (a) nol. ar

$$\operatorname{sn} \frac{\alpha}{2}, \text{ (b) nol. ar } \cos \frac{\alpha}{2},$$

pēc tam otrādi, pirmos divus rezultātus saskaita, pēdējo no priekšpēdēja atņem; pēc tam koordinātu sākumu pārnes uz riņķa centru, atstājot asim to pašu virzienu; nosaucot jaunās koordinātas atkal par  $x$  un  $y$ , dabūjam:

$$\left. \begin{aligned} x &= R (2 \cos \alpha + \cos 2\alpha) \\ y &= R (2 \operatorname{sn} \alpha - \operatorname{sn} 2\alpha) \end{aligned} \right\} \dots (c).$$



40. zīm.

Šo divu nol. sistēma noteic tā sauc. trīsragaino hipocikloīdu, kas ir līkne, ko veido riņķa aploces (ar rādiusu  $R$ ) punkts, kad šis riņķis ripo bez slīdes pa cita nekustīga riņķa (ar rādiusu  $3R$ ) aploces iekšpusi. Šādā ceļā dabūtais līknes vispār sauc par ruletēm, kas ir ceļš, ko noiet riņķa aploces viens punkts riņķim ripojot bez slīdes pa taisni jeb līkni.

Aprēķināsim ar (c) nol. noteiktās trīsragainās hipocikloidas garumu un laukumu; diferencējot, iznāk:

$$\begin{aligned} dx &= -2R(\operatorname{sn} \alpha + \operatorname{sn} 2\alpha) d\alpha, \\ dy &= 2R(\operatorname{cos} \alpha - \operatorname{cos} 2\alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

Loka ds diferenciāls būs:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = 4R \operatorname{sn} \frac{3\alpha}{2} \cdot d\alpha,$$

no kurienes

$$s = \frac{8}{3} R \int_0^{\alpha} \operatorname{sn} \frac{3\alpha}{2} d\left(\frac{3\alpha}{2}\right) = \frac{16}{3} R \operatorname{sn}^2 \frac{3\alpha}{4}.$$

Likne ir simmetriskā un ieliekot  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  dabū tās garuma sesto daļu; liknes garums iznāk:

$$s = 16R.$$

T. i., trīsragainās hipocikloidas garums ir vienlīdzīgs tanī ievilkta riņķa astoņiem diametriem.

Liknes laukuma aprēķinam ērtāki pāriet uz polārām koordinātām  $\rho$  un  $\varphi$ , kuŗas ar taisnleņķu koordinātām saista sekoši pazīstamie nol.:

$$\begin{aligned} \rho^2 &= x^2 + y^2, \\ \operatorname{tg} \varphi &= y : x. \end{aligned}$$

Ieliekam te  $x$  un  $y$  nozīmes no (c) nol.; tad

$$\rho^2 = R^2(5 + 4 \operatorname{cos} 3\alpha) = R^2 \left(9 - 8 \operatorname{sn}^2 \frac{3\alpha}{2}\right) \dots (d)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2 \operatorname{sn} \alpha - \operatorname{sn} 2\alpha}{2 \operatorname{cos} \alpha + \operatorname{cos} 2\alpha}.$$

Pedejo formulu var izteikt sekoši:

$$\operatorname{tg} \left(\varphi + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{3\alpha}{2},$$

$$\text{jeb } \varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{3\alpha}{2}\right) - \frac{\alpha}{2} \dots (e).$$

Laukuma  $P$  diferenciāls polārās koordinātas ir:

$$dP = \frac{\rho^2 d\varphi}{2}.$$

Ieliekam te  $\rho^2$  un  $d\varphi$  nozīmes no (d) un (e); tad:

$$dP = 2R^2 \operatorname{sn}^2 \frac{3\alpha}{2} \cdot d\alpha.$$

Integrācija starp 0 un  $\alpha$  dod:

$$P = \frac{2}{3} R^2 \left( \frac{3}{2} \alpha - \operatorname{sn} \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2} \right).$$

Ieliekot te  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  dabonam liknes laukuma sesto daļu; bet visas liknes laukums ir  $P = 2\pi R^2$ , t. i., trīsragainās hipocikloidas laukums = viņā ievilkta riņķa divkārsam laukumam.

e) Tisso perspektīves. — Pie ārējo projekciju vispārīgās apskates noskaidrojās, ka tanī gadījumā, kad redzes punkta attālums  $D$  ir robežās, noteiktās ar nevienādību  $R < D < 2R$ , mērogs  $b$ , sākot no  $b = 1$  projekcijas centrā rādīja virzienā papriekš palielinājas, sasniedz maksimumu un pēc tam mazinājas, pie kāda nebūt  $\Theta_1$  atkal = 1 un tad tālāki samazinājas līdz nullei. Analogiskas maiņas notiek ar platību mērogu  $p$  tanī gadījumā, kad redzes punkta attālums apmierina nevienādību  $R < D < 3R$ ; projekcijas centrā  $p = 1$ , ar attālināšanos no centra tas papriekšu aug, sasniedz vislielāko nozīmi un pēc tam nepārtraukti mazinājas; pie kaut kāda leņķiskā attāluma  $\Theta_2$  vēl reiz  $p = 1$  un pēc tam pamazinājas līdz nullei. Uz šīm mērogu  $b$  un  $p$  īpašībām grieza vērību ievērojamais franču ģeometrs Tisso (Nicolas Auguste Tissot, 1824—1897) un ieteica konstruēt perspektīves tā, lai leņķiskie attālumi  $\Theta_1$  un  $\Theta_2$  noteiktu projekcijas malas. Parādīsim, kā šīm projekcijām noteikt redzes punkta attājumus.

1. Pirmā gadījumā, kad mērogs  $b = 1$ , leņķiskā attāluma  $\Theta_1$  un redzes punkta attāluma  $D$  sakarību noteic (111) nol., no kuŗa:  $D^2 - RD - R^2 - R^2 \cdot \cos \Theta_1 = 0$ . Šis ir kvadrātnolīdz., ja lielumu  $D$  uzskata par nezināmo; pozitīvā sakne ir:

$$D = \frac{R}{2} (1 + \sqrt{5 + 4 \cos \Theta_1}).$$

Šī formula rāda, ka Tiso perspektīvēs, tāpat kā Fišera un Hammera projekcijās, lielums  $D$  ir atkarīgs no  $\Theta_1$ , t. i., no attēlojamā segmenta samēriem. Dodot šim leņķim  $\Theta_1$  nozīmes no  $0^\circ$  līdz  $90^\circ$  ar  $15^\circ$  lieliem intervāliem, dabonam sekošas  $\frac{D}{R}$  nozīmes:

$$\Theta_1 = 0^\circ \quad 15^\circ \quad 30^\circ \quad 45^\circ \quad 60^\circ \quad 75^\circ \quad 90^\circ$$

$$\frac{D}{R} = 2,000 \quad 1,989 \quad 1,955 \quad 1,899 \quad 1,823 \quad 1,728 \quad 1,618.$$

Pie  $\Theta_1 = 0^\circ$  šī projekcija ir vienāda ar Fišera projekciju un vispār tās maz atšķiņas viena no otras. Pie  $\Theta_1 = 90^\circ$  Tisso projekcija redzes punkta attālums no sfēras virsas = ievilkta regulārā desmit-

stūra malai, jo pie  $\Theta_1 = 90^\circ$ , iznāk:

$$D - R = \frac{R}{2} (\sqrt{5} - 1).$$

Pieņemot  $R = 1$  un  $\Theta_1 = 90^\circ$  šai perspektīvei raksturīgākie skaitļi, aprēķināti pēc formulām (104) — (107) un (116), būs sekoši:

$\Theta$	$\rho$	a	b	p	$2 \omega$
$0^\circ$	0,000	1,000	1,000	1,000	$0^\circ 0'$
15	0,262	1,013	1,005	1,018	0 28
30	0,527	1,054	1,019	1,074	1 57
45	0,796	1,126	1,038	1,169	4 39
60	1,071	1,236	1,056	1,305	9 02
75	1,347	1,395	1,055	1,471	15 59
90	1,618	1,618	1,000	1,618	27 19

2. Savu projekciju otrai pasugai, kad platību mērogs  $p = 1$  pie  $\Theta_2$ , Tisso atrisina (115) nol., pieņemot leņķi  $\Theta_2$  par dotu; iznāk sekošs trešās pakāpes nol.:

$$\left(\frac{D}{R}\right)^3 - \left(\frac{D}{R}\right)^2 - (2 + 3 \cos \Theta_2) \cdot \frac{D}{R} - (1 + \cos \Theta_2 + \cos^2 \Theta_2) = 0.$$

Šim nol. vispār ir tikai viena lietiska pozitīva sakne; pie robežošanās nozīmes  $\Theta_2 = 0^\circ$  ir gan trīs lietiskas saknes:  $+3$  un divi  $-1$ , bet tās neatbilst lietas būtībai. Dodot leņķim  $\Theta_2$  dažādas nozīmes no  $0^\circ$  līdz  $90^\circ$  ar  $15^\circ$  lieliem intervāliem, dabūjam sekošas saknes:

$$\begin{array}{ccccccc} \Theta_2 = & 0^\circ & 15^\circ & 30^\circ & 45^\circ & 60^\circ & 75^\circ & 90^\circ \\ \frac{D}{R} = & 3,000 & 2,974 & 2,898 & 2,773 & 2,603 & 2,392 & 2,148. \end{array}$$

Viegli manīt šo perspektīvu līdzību ar Hammera projekcijām. Pieņemot  $R = 1$  un  $\Theta_2 = 90^\circ$  ( $D = 2,148$ ) šai Tisso otrās pasugas perspektīvei pēc vispārīgām formulām (104) — (107) un (116), dabūjam sekošus svarīgākos skaitļus:

$\Theta$	$\rho$	a	b	p	$2 \omega$
$0^\circ$	0,000	1,000	1,000	1,000	$0^\circ 0'$
15	0,262	1,011	0,998	1,009	0 43
30	0,522	1,044	0,991	1,035	3 0
45	0,780	1,103	0,973	1,072	7 10
60	1,030	1,189	0,931	1,107	13 58
75	1,263	1,308	0,846	1,106	24 48
90	1,466	1,466	0,682	1,000	42 46

Uz šīs projekcijas var attēlot punktus, kuŗu leņķiskais attālums no projekcijas centra  $\Theta_0 = 117^\circ 45'$ ; tad  $\rho = 1,656$  un  $\alpha = 1,871$ . Tā kā  $D > 2R$ , tad mērogam  $b$  nav maksimuma starp  $\Theta = 0^\circ$  un  $90^\circ$ . Vislielākais platību mērogs  $p = 1,114$  attālumā  $\Theta = 67^\circ 56'$  no projekcijas centra. Pie  $\Theta_2 = 90^\circ$  mērogs  $p = 1$ ; tad  $a = 1,466$  un  $b = 0,638$ .

f) Klarka projekcija. — Ārējo perspektīvo projekciju redzes punkta vietu aprēķinā La Īrs un Parāns izgāja no prasības, lai alterācijas būtu pēc iespējas mazākas; viņu uzstādītās prasības tomēr bija vienpusīgas, jo vismazākām vajadzēja iznākt vai nu gaŗumu mērogu izmaiņām noteiktā virzienā, jeb platību mērogu izmaiņām. Pazīstamais angļu ģeodēzists Klarks (Alexander Ross Clarke) uzstādīja līdzīgas prasības, bet vairāk vispārinātā veidā. Pēc viņa domām projekcijas katrām punktam jābūtu mērogs galvenos virzienos, t. i., mēroga maksimums un minimums; tad jāveido starpība starp šiem mērogiem un 1, resp. galveno mērogu un redzes punkta vieta jānoteic tā, lai dabūto starpību kvadrātu summa būtu vismazāka. Starpību kvadrāti ņemti tamdej, lai nebūtu darišana ar negatīviem lielumiem, tāpat kā tas pieņemts vismazāko kvadrātu metodē.

Sfēras virsas bezgalīgi maza elementa laukums polārās sfēriskās koordinātās pēc 14. zīm. ir:  $R \operatorname{sn} \Theta \cdot d\psi \cdot R \cdot d\Theta$ , jeb pieņemot  $R = 1$ ,  $\operatorname{sn} \Theta \cdot d\Theta \cdot d\psi$ . Prasība, kādu uzstādīja Klarks pie ārējās perspektīvās projekcijas redzes punktā noteikšanas, noved pie vismazākās nozīmes noteikšanas sekošam divkāršam integrālam:

$$\int_0^{\Theta_0} \int_0^{2\pi} [(a-1)^2 + (b-1)^2] \operatorname{sn} \Theta \cdot d\Theta \cdot d\psi$$

ar leņķa  $\psi$  maiņu no 0 līdz  $2\pi$  un leņķa  $\Theta$  maiņu no 0 līdz  $\Theta_0$ , t. i., integrālam, kas dod sfēras segmenta virsu; pie tam pašu segmentu noteic leņķis  $\Theta_0$  — skaitot to no segmenta virsotnes līdz kādam punktam uz segmenta pamatriņķa;  $a$  un  $b$  ir vislielākais un vismazākais mērogi galvenos virzienos.

Integrēšana pēc mainīgā  $\psi$  aprādītās robežās ievēd tikai konstantu reizuli  $2\pi$  un tāpēc jāuziet tikai vismazākā nozīme integrālam

$$M = \int_0^{\Theta_0} [(a-1)^2 + (b-1)^2] \operatorname{sn} \Theta \cdot d\Theta.$$

Pieņemsim (59') un (59'') formulās  $R = 1$ ; tad

$$a = \frac{L}{D + \cos \Theta}, \quad b = \frac{L(1 + D \cos \Theta)}{(D + \cos \Theta)^2}.$$

Šīs nozīmes ieliksīm  $M$  izteiksmē un pagaidām neievērosim integrāla robežas; tad

$$M = 2 \int \operatorname{sn} \theta \, d\theta + L^2 \int \frac{\operatorname{sn} \theta \, d\theta}{(D + \cos \theta)^4} + 2L^2 D \int \frac{\cos \theta \operatorname{sn} \theta \, d\theta}{(D + \cos \theta)^4} + \\ + L^2 D^2 \int \frac{\cos^2 \theta \operatorname{sn} \theta \, d\theta}{(D + \cos \theta)^4} + (L^2 - 2L) \int \frac{\operatorname{sn} \theta \, d\theta}{(D + \cos \theta)^2} - \\ - 2LD \int \frac{\cos \theta \operatorname{sn} \theta \, d\theta}{(D + \cos \theta)^2} - 2L \int \frac{\operatorname{sn} \theta \, d\theta}{D + \cos \theta}.$$

Izdarām substitūciju  $D + \cos \theta = x$ ; integrējam un savelkam līdzīgus locekļus; iznāk:

$$M = -2 \cos \theta + \frac{L^2 (D^2 - 1)^2}{3(D + \cos \theta)^3} - \frac{L^2 D (D^2 - 1)}{(D + \cos \theta)^2} + \frac{L^2 (D^2 + 1)}{D + \cos \theta} + \\ + \frac{2L (D^2 - 1)}{D + \cos \theta} + 2L (D + 1) \ln (D + \cos \theta).$$

Ņemot tagad  $\theta$  robežas  $0$  un  $\theta_0$ , savienojot locekļus ar  $L^2$  un  $L$ , un izdarot līdzīgo locekļu savilkšanu, dabonam galīgi:

$$M = 4 \operatorname{sn}^2 \frac{\theta_0}{2} + AL^2 + 2BL \dots (a),$$

$$\text{kur } A = \frac{(D^2 - 1)^2}{3(D + \cos \theta_0)^3} - \frac{D(D^2 - 1)}{(D + \cos \theta_0)^2} + \frac{D^2 + 1}{D + \cos \theta_0} - \frac{D^2 + D + 4}{3(D + 1)} \dots (b)$$

$$\text{un } B = \frac{D^2 - 1}{D + \cos \theta_0} - D + 1 - (D + 1) \ln \frac{D + 1}{D + \cos \theta_0} \dots (c)$$

Kā redzams, tad palīgkoeficienti ir viena mainīgā  $D$  funkcijas. Lai uzietu  $M$ , kā divi mainīgo  $L$  un  $D$  funkcijas vismazāko lielumu, tad jāatrisina divi nol.:

$$\frac{\partial M}{\partial L} = 0 \text{ un } \frac{\partial M}{\partial D} = 0.$$

Pirmais nol. pēc pārveidošanas ir:

$$2AL + 2B = 0;$$

$$\text{tad } L = -\frac{B}{A} \dots (d)$$

Otrais nol. ir:

$$L^2 \frac{\partial A}{\partial D} + 2L \frac{\partial B}{\partial D} = 0,$$

jeb ievēdot (d) nozīmi:

$$\frac{B}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial D} - 2 \frac{\partial B}{\partial D} = 0 \dots (e)$$

No šī nol. ar vienu nezināmo  $D$  teorētiski ir iespējams pēc katra dotā leņķa  $\theta_0$  aprēķināt lielumu  $D$ ; pēc tam no formulām (b) un (c) var aprēķināt koeficientus  $A$ ,  $B$  un, beidzot, no (d) nol., lielumu  $L$ . Praktiski tas tomēr nav iespējams, jo (e) nol. ir transcendentis. Lai nebūtu šo grūtību, tad Klarks  $L$  nozīmi no (d) ielika pamatnol. (a) un dabūja:

$$M = 4 \operatorname{sn}^2 \frac{\theta_0}{2} - \frac{B^2}{A}$$

Tā kā pie dotā leņķa  $\theta_0$  otrās daļas pirmais loceklis ir konstants, tad  $M$  vismazākā nozīme būs tad, kad daļa  $\frac{B^2}{A}$  būs vislielākā. To noteic ar pakāpenisku tuvošanos un interpolāciju. Aprēķinu atvieglošanai Klarks izteic koeficientus  $A$  un  $B$  citādā — vienkāršākā veidā. No (b) formulas:

$$A = \frac{1 - \cos \theta_0}{(D + \cos \theta_0)(D + 1)} \left\{ \frac{(D^2 - 1)^2 (D + 1)}{3(D + \cos \theta_0)^2 (1 - \cos \theta_0)} - \frac{D(D^2 - 1)(D + 1)}{(D + \cos \theta_0)(1 - \cos \theta_0)} + \frac{(D^2 + 1)(D + 1)}{1 - \cos \theta_0} - \frac{(D^2 + D + 4)(D + \cos \theta_0)}{3(1 - \cos \theta_0)} \right\}$$

Locekli iekavās piedēvē pie viena saucēja un izdala ar  $1 - \cos \theta_0$ ; iznāk:

$$A = \frac{1 - \cos \theta_0}{(D + \cos \theta_0)(D + 1)} \left\{ \frac{(D - 1)^2}{3} \left( \frac{1 - \cos \theta_0}{D + \cos \theta_0} \right)^2 - (D - 1) \left( \frac{1 - \cos \theta_0}{D + \cos \theta_0} \right) + 2 \right\}$$

Vienkāršības dēļ ievēd sekošus apzīmējumus:

$$p = \frac{1 - \cos \theta_0}{D + \cos \theta_0}, \quad q = (D - 1)p \dots (f);$$

tad

$$A = \frac{p}{D + 1} \left( \frac{1}{3} q^2 - q + 2 \right) \dots (g)$$

Tālāki (c) formulu pārveido sekoši:

$$B = (D - 1) \frac{1 - \cos \theta_0}{D + \cos \theta_0} - (D + 1) \ln \left( 1 + \frac{1 - \cos \theta_0}{D + \cos \theta_0} \right);$$

ievēdot te apzīmējumus (f) dabūjam:

$$B = q - (D + 1) \ln (p + 1) \dots (h).$$

Tāpēc, lai Klarka projekcijā pēc dotā leņķa  $\Theta_0$  noteiktu redzes punkta un ainu plaknes vietas, t. i., lielumus  $L$  un  $D$ , tad pēc (f) formulas aprēķina palīglieņus  $p$  un  $q$  dažiem patvaļīgi ņemtiem lielumiem  $D$ ; tad pēc (g) un (h) formulām aprēķina koeficientus  $A$  un  $B$ , sastāda daļas  $\frac{B^2}{A}$  tabulu un ar interpolēšanu noteic to lielumu  $D$ , pie kura šī daļa vislielāka. Beidzot aprēķina  $L$  pēc (d) formulas.

Parādīsim Klarka projekcijas aprēķinu divi atsevišķos gadījumos; proti, kad  $\Theta_0 = 90^\circ$  un  $\Theta_0 = 113^\circ 30'$ . Pirmā gadījumā, kā pats par sevi saprotams, attēlosies pussfēra, bet otrā gandrīz visas zemes virsas  $\frac{2}{3}$ , pie kam, kā aizrādīja pats izgudrotājs, ja centrālo punktu ņem pie Falmūtas Anglijā, tad uz vienas kartes var novietot, izņemot Austrāliju, visas citas pasaules daļas.

1)  $\Theta_0 = 90^\circ$ . Šinī gadījumā pēc vairākkārtīgiem mēģinājumiem atrodam, ka daļas  $\frac{B^2}{A}$  maksimums ir 1,961 pie  $D = 1,465$ ; tiem atbilst  $L = 2,031$ . Pēc šiem lielumiem projekcijai viegli sastādīt sekošu tabulu:

$\Theta$	$\rho$	a	b	p	$2\omega$
$0^\circ$	0,000	0,824	0,824	0,679	$0^\circ \quad 0'$
15	0,216	0,836	0,830	0,694	0 22
30	0,436	0,871	0,848	0,739	1 33
45	0,661	0,935	0,876	0,819	3 55
60	0,895	1,034	0,911	0,942	7 13
75	1,138	1,178	0,942	1,111	12 45
90	1,386	1,386	0,946	1,312	21 45

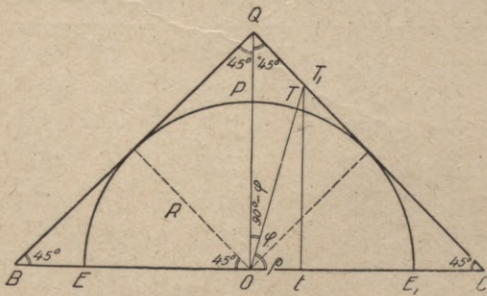
Tā kā šinī projekcijā ainu plakne nepieskaņas sfērai, tad mērogus  $a$ ,  $b$  un  $p$  tieši nevar salīdzināt ar citu ārējo perspektīvo projekciju attiecīgiem mērogiem. Leņķi  $\omega$  ir neatkarīgi no ainu plaknes stāvokļa; to salīdzināšana ar citām projekcijām pārlicina, ka Klarka projekcijai pie  $\Theta_0 = 90^\circ$  ir neapstrīdamas priekšrocības, salīdzinot ar visām agrāki apskatītām.

2)  $\Theta_0 = 113^\circ 30'$ . Vairākkārtīgi mēģinot un interpolējot, dabū daļas  $\frac{B^2}{A}$  vislielāko nozīmi = 2,635 pie  $D = 1,367$ ; atbilstošais  $L = 1,662$ . Projekcijas raksturīgākiem elementiem dabonam sekošas skaitliskas nozīmes:

$\theta$	$\rho$	a	b	p	$2\omega$
$0^\circ$	0,000	0,702	0,702	0,493	$0^\circ 0'$
15	0,184	0,712	0,709	0,505	0 18
30	0,372	0,744	0,728	0,542	1 17
45	0,567	0,801	0,760	0,609	3 03
60	0,771	0,890	0,803	0,715	5 56
75	0,987	1,022	0,851	0,870	10 29
90	1,216	1,216	0,889	1,081	17 50
105	1,449	1,500	0,875	1,311	30 32
$113\frac{1}{2}$	1,574	1,716	0,807	1,384	42 17

Ja šai projekcijai ņem leņķisko attālumu tikai  $\theta = 90^\circ$ , tad alterācijas būs vēl mazākas nekā iepriekšējā projekcijā.

g) Lidmaņa projekcija. — Apskatīsim vēl beigās norvēģu zinātnieka Lidmaņa projekciju, kuŗa, ja tā būtu atļauts izteikties, ir pussferas divkāŗša perspektīve.



41. zīm.

Pussfēru  $EPE_1$  (41. zīm.) projicē papriekšu uz pieskares konu BQC un pēc tam no kona virsas uz plakni BC. Pieņemsim, ka P attēlo ziemeļpolu un  $EE_1$  ekvātoru. Kons var pieskarties puslodei pa jebkuŗu paralēli, bet parasti ņem paralēli, noteiktu ar platumu

$\varphi = 45^\circ$ ; tad kona piltuves leņķis CQB ir taisns. Pussfēras virsas kautkādu punktu T projicē ar rādiusa OT turpinājumu uz kona virsu punktā  $T_1$ ; pēc tam šo punktu  $T_1$  ar stateni  $T_1t$  projicē uz ekvātorā plakni jeb tās turpinājumu punktā t. Uz projekcijas meridiāni attēlojas kā taisnes, kuŗas starveidīgi iziet no pola un savā starpā krustojas zem leņķiem, kas = gaŗumu starpībām, bet paralēles ir koncentriski riņķi ar kopēju centru polā. No zīmējuma redzams, ka ar platumu  $\varphi$  noteiktās paralēles rādiuss  $\rho = Ot = OT_1 \cdot \cos\varphi$ .

No  $\Delta OT_1Q$  rakstam:

$$OT_1 = OQ \cdot \frac{\text{sn } T_1QO}{\text{sn } OT_1Q}.$$

Nosauksim galvenā mērogā samazināto pussfēras rādiusu par R; tad kona augstums  $OQ = R \sqrt{2}$  un

$$OT_1 = \frac{R \sqrt{2} \operatorname{sn} 45^\circ}{\cos(45^\circ - \varphi)} = \frac{R}{\cos(45^\circ - \varphi)}.$$

Tamdej

$$\rho = R \cos \varphi \sec(45^\circ - \varphi).$$

Vietējo garuma mērogu  $a$  un  $b$  pa paralēlēm un meridiāniem, un platību mērogu  $p$  noteic pēc formulām:

$$a = \frac{\rho d\lambda}{R \cos \varphi d\lambda}, \quad b = -\frac{d\rho}{R d\varphi};$$

caur to  $a = \sec(45^\circ - \varphi)$ ,  $b = \frac{1}{\sqrt{2}} \sec^2(45^\circ - \varphi)$ ,  $p = \frac{1}{\sqrt{2}} \sec^3(45^\circ - \varphi)$ .

Vislielāko leņķu alterāciju aprēķina pēc (31) formulas:

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\omega}{2}\right) = \sqrt[4]{2} \sqrt{\cos(45^\circ - \varphi)}.$$

Pieņemot  $R=1$ , dabūjam sekošu skaitļu tabulu Lidmaņa projekcijai:

$\theta$	$\rho$	$a$	$b$	$p$	$2 \omega$
90°	0,000	1,414	1,414	2,000	0° 0'
75	0,299	1,155	0,943	1,089	11 36
60	0,518	1,035	0,758	0,785	17 48
45	0,707	1,000	0,707	0,707	19 45
30	0,897	1,035	0,758	0,785	17 48
15	1,115	1,155	0,943	1,089	11 36
0	1,414	1,414	1,414	2,000	0 0

No šīs tabulas redzam, ka uz pola un pa ekvatoru indikātrīsas ir riņķi, bet visos citos punktos elipses, kuŗu lielās asis virzītas pa paralēli. Mērogi  $a$  un  $b$  uz pola ir vienādi; no šejienes sākot tie mazinājas līdz paralēlei ar platumu  $45^\circ$ , kur tie vismazāki; pēc tam tie palielinājas līdz ekvatoram, kur atkal ir vienādi. Uz paralēles, noteiktas ar platumu  $\varphi = 45^\circ$ , mērogs  $a=1$ , bet mērogs  $b$  daudz mazāks. Mērogs  $b=1$  uz divi paralēlēm, kuŗu platumus var aprēķināt no formulas:  $\sec(45^\circ - \varphi) = \sqrt[4]{2}$ .

Šis nol. dod divi platumus  $\varphi_1 = 77^\circ 46'$  un  $\varphi_2 = 12^\circ 14'$ . Platību mērogs  $p$  uz pola un ekvatora ir 2; tas mazinājas līdz paralēlei ar platumu  $45^\circ$ , kur mazāks par 1; tāpēc ir divi paralēles, uz kuŗām  $p=1$ ; platumus, kas noteic šīs paralēles, aprēķina no nol.:

$$\sec(45^\circ - \varphi) = \sqrt[6]{2};$$

divi saknes dod platumus  $\varphi_1 = 72^\circ 01'$  un  $\varphi_2 = 17^\circ 59'$ .

### III. nodaļa.

#### Zenitālās projekcijas.

13. **Vispārīgā teorija.** — Zenitālo projekciju konstruēšanai iedomājas zemes sfēras virsai patvaļīgi ņemtā punktā pieskarošos plakni. Uz šo plakni pārnes sfēras virsu ar tādu aprēķinu, lai sfēras punkti, kas vienādos attāļumos no pieskares punkta (uz viena un tā paša almukantarata), uz projekcijas attēlotos uz viena un tā paša riņķa aploces ar centru pieskares punktā. Visbiežāki lieto polārās zenitālās projekcijas, kad attēla plakne skaļ zemi vienā polā. Šinī gadījumā meridiāni attēlojas kā taisnes, kas starveidīgi iziet no pola un savā starpā veido leņķus, vienlīdzīgus gaŗumu starpībām; paralēles, turpretim, ir koncentriski riņķi ar rādiusiem, konstruētiem jeb aprēķinātiem dažādi, atkarībā no projekcijai uzstādītām prasībām. Ja par pieskares punktu ņem ne polu, bet citu patvaļīgu punktu, tad kā taisnes attēlosies vertikālie griezumumi (vertikālās plaknes) un kā koncentriski riņķi pieskares punktā almukantarati; turpretim meridiāni un paralēles vispār būs transcendentas liknes, kas jākonstruē pēc punktiem, aprēķinātiem pēc sfēriskās trigonometrijas formulām. Tā kā perspektīvās projekcijās ainu plaknes attāļums  $L$  no redzes punkta neiespaido attēla īpašības un dažās projekcijās (piemēram, centrālās) ainu plakne arī tieši pieskaŗas sfērai, tad visas perspektīvās projekcijas var uzskatīt par zenitālo projekciju sevišķu jeb specifisku gadījumu. Ja perspektīvās projekcijas tika izdalītas atsevišķā grupā un apskatītas atsevišķā nodaļā, tad tas bija darīts vienīgi tāpēc, ka šo projekciju ir pietiekoši daudz un ka tām visām ir sevišķas un tikai vienīgi tam piemītošas raksturīgas īpašības.

Lai atvieglotu konstruēšanu un aprēķinus, tad arī te zemi uzskata par sfēru ar rādiusu  $R = a(1 - \frac{1}{6}e^2)$ , kur  $a$  ir zemes sfērōida lielā pūsass un  $e$  tā ekscentrība. Tā tad arī te sfēras virsas laukums ir vienādliels ar zemes sfērōida virsas laukumu. Ja zenitālā projekcijā jāattēlo zemes virsas neliela daļa, tad arī to pieņem par sfēras virsas daļu, bet tās rādiusu aprēķina kā pieskares punkta galveno normālgriezumumu likuma rādiusu ģeometrisko vidējo. Sfērōida punktam, noteiktam ar platumu  $\varphi$ , šie rādiusi ir:

$$M = R_0 = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^3}}$$

$$\text{un } N = R_{90} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi}},$$

kāpēc šinīs gadījumos ņem

$$R = \sqrt{MN} = \frac{a \sqrt{1 - e^2}}{1 - e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi}. \quad (\text{sk. 17. lp.})$$

Garuma mērogs zenitālās projekcijās. — Bezgalīgi mazu projekcijas loka elementu nosauksim par  $ds'$ ; viņam atbilstošo sfēras elementu par  $ds$ . Ar pārējiem 8 § un 14, 15 zīm. dotiem apzīmējumiem dabūsim:

$$\begin{aligned} (ds')^2 &= (d\rho)^2 + \rho^2 (d\psi)^2, \\ (ds)^2 &= (R d\Theta)^2 + (R \operatorname{sn} \Theta d\psi)^2. \end{aligned}$$

Tā kā par garuma mērogu sauc attiecību  $ds' : ds$ , tad

$$m^2 = \frac{(d\rho)^2 + \rho^2 (d\psi)^2}{R^2 [(d\Theta)^2 + (\operatorname{sn} \Theta d\psi)^2]}.$$

Sfēras elementa āzimuthu nosauksim par  $\alpha$ ; tad (Sk. 58. lpp. (f) form):

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{sn} \Theta \cdot \frac{d\psi}{d\Theta}.$$

No abiem pēdējiem nol. pēc vienkāršiem pārveidojumiem (izslēdzot  $d\psi$  vai  $d\Theta$ ), dabūjam:

$$m = \frac{1}{R} \sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\Theta}\right)^2 \cos^2 \alpha + \left(\frac{\rho}{\operatorname{sn} \Theta}\right)^2 \operatorname{sn}^2 \alpha}. \quad (125)$$

Katrai zenitālai projekcijai ir noteikta  $\rho$  un  $\Theta$  sakarība; tāpēc pēc šīs formulas var aprēķināt vietējo mērogu jebkuŗā projekcijas punktā, ja tas uz sfēras noteikts ar leņķisko attālumu  $\Theta$  no pieskares punkta. Saprotams, ka vēl jāzina arī ar leņķi  $\alpha$  noteiktais virziens, kuŗā grib aprēķināt mērogu. Zenitālās, tāpat kā perspektīvās projekcijās,  $\alpha$  ir azimuts tikai tanī gadījumā, kad ar projekcijas centru sakrīt pols; visos citos gadījumos  $\alpha$  ir leņķis starp rādiusvektoru, novilkto uz projekcijas centru un elementa virzienu. Mēroga formulā neieiet leņķis  $\psi$ ; tāpēc mēroga alterācijas nav atkarīgas no vietas uz viena un tā paša almukantarata; šis atziņas otrais formulējums skan šādi: „uz viena un tā paša almukantarata resp. vienādos attāļumos no projekcijas centra, mērogi ir vienādi“.

Apskatīsim kādos virzienos mēroga svārstības ir vislielākās un vismazākās, resp. kādos virzienos ir ar (125) nol. noteiktā mēroga maksimums un minimums. Rīkosimies parastā kārtībā: pielīdzināsim nullei  $m^2$  izteiksmes pirmo atvasināto pēc mainīgā  $\alpha$ :

$$\frac{d(m^2)}{d\alpha} = \frac{1}{R^2} \left[ \left( \frac{\rho}{\operatorname{sn}\Theta} \right)^2 - \left( \frac{d\rho}{d\Theta} \right)^2 \right] \operatorname{sn} 2\alpha = 0.$$

Šis nol. ir spēkā pie  $\operatorname{sn} 2\alpha = 0$  un pie  $\frac{\rho}{\operatorname{sn}\Theta} = \frac{d\rho}{d\Theta}$ ; tas nozīmē, ka mēroga maksimums un minimums ir pie  $\alpha = 0^0$  un  $= 90^0$ , t. i., projekcijas rādusiu virzienā un pa almukantaratiem. Lai zinātu kādā virzienā ir mēroga maksimums un kādā minimums, ir jāņem  $m^2$  otrā atvasinātā pēc mainīgā  $\alpha$ ; iznāk:

$$\frac{d^2(m^2)}{d\alpha^2} = \frac{1}{R^2} \left[ \left( \frac{\rho}{\operatorname{sn}\Theta} \right)^2 - \left( \frac{d\rho}{d\Theta} \right)^2 \right] 2 \cos 2\alpha \dots (a)$$

Šis izteiksmes otrās daļas zīme atkarājas no leņķa  $\alpha$  lieluma un reizinātāja kvadrātiekvās zīmes; tāpēc jāizšķir trīs gadījumi:

$$1. \quad \left( \frac{\rho}{\operatorname{sn}\Theta} \right)^2 > \left( \frac{d\rho}{d\Theta} \right)^2, \text{ jeb } \frac{d\rho}{\rho} < \frac{d\Theta}{\operatorname{sn}\Theta}.$$

Integrējot šis nevienādības abas daļas dabonam:

$$\rho < C \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} \dots (b), \text{ kur } C \text{ ir patvaļīga konstante.}$$

Katrai zenitālai projekcijai, kā jau bija teikts,  $\rho$  ir leņķiskā at-tājuma  $\Theta$  funkcija; ja šī funkcija apmierina (b) nevienādību, tad (a) izteiksmes reizinātājs kvadrātiekvās ir pozitīvs lielums; tāpēc  $m^2$  otrā atvasinātā būs pozitīva pie  $\alpha = 0^0$  un negatīva pie  $\alpha = 90^0$ ; tas no-zīmē, ka šinī gadījumā mērogs projekcijas rādusiu virzienā ir vis-mazākais un stateniskos virzienos pret rādusiem — vislielākais.

$$2. \quad \left( \frac{\rho}{\operatorname{sn}\Theta} \right)^2 < \left( \frac{d\rho}{d\Theta} \right)^2. \text{ Rīkojoties pēc tikko lietotās metodes,}$$

$$\text{dabūsim} \quad \rho > C \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2}.$$

(Šo iznākumu var uzrakstīt arī tieši no iepriekšējā gadījuma uz ana-logījas pamata).

Šinī gadījumā mērogs projekcijas rādusiu virzienā ir vislielākais un statenisko virzienos pret tiem — vismazākais.

$$3. \quad \left( \frac{\rho}{\operatorname{sn}\Theta} \right)^2 = \left( \frac{d\rho}{d\Theta} \right)^2. \text{ Tad (a) izteiksmē reizinātājs kvadrāt-}$$

iekavās ir nulle un  $\rho = C \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} \dots (c)$ . Šinī gadījumā  $m^2$  otrā atvasinātā pēc (a) formulas ir nulle un tā tad funkcijai  $m$ , noteiktai

ar (125) nol., nav ne minimuma ne maksimuma;  $m = \frac{1}{R} \cdot \frac{\rho}{\text{sn}\Theta} =$   
 $= \frac{C}{R \cos^2 \frac{\Theta}{2}} \dots$  (d). Mērogs nav atkarīgs no bezgalīgi mazā ele-

menta virzienu un vienā un tanī pašā projekcijas punktā visos virzienos ir konstants. Šinī gadījumā projekcija ir konforma. Salīdzinot (c) izteiksmi ar (76) un (d) ar (78), redzam, ka starpība ir tikai konstantos koeficientos; tas rāda, ka apskatāmā gadījumā zenitālās projekcijas ir stereografiskās projekcijas, kuŗas, kā jau visas citas perspektīvās projekcijas, ir zenitālo projekciju tikai sevišķi gadījumi.

Leņķu alterācijas. — Ņemsim jau vairākkārt lietotu formulu, kas noteic sfēras bezgalīgi maza elementa virzienu, proti:

$$\text{tg } \alpha = \text{sn } \Theta \cdot \frac{d\psi}{d\Theta} \quad (\text{sk. 58. lp. (f) form.})$$

un arī formulu, kas noteic atbilstošā elementa virzienu uz projekcijas:

$$\text{tg } \alpha' = \rho \cdot \frac{d\psi}{d\rho} \quad (\text{sk. 59. lp.})$$

Dalot pēdējo ar iepriekšējo, dabonam sekošu sakarību starp leņķi uz projekcijas un tam atbilstošo leņķi uz sfēras:

$$\text{tg } \alpha' = \frac{\rho \cdot d\Theta}{\text{sn}\Theta \cdot d\rho} \cdot \text{tg } \alpha. \quad (\text{sk. (g) form. 59. lp.}) \quad (126)$$

Vienkāršības dēļ parasti ievēd apzīmējumu:

$$k = \frac{\rho \cdot d\Theta}{\text{sn}\Theta \cdot d\rho}; \quad (127)$$

$$\text{tad} \quad \text{tg } \alpha' = k \cdot \text{tg } \alpha. \quad (128)$$

Formulas rāda, ka leņķu alterācijas, tāpat kā tas bija ar gaŗuma maiņām, nav atkarīgas no  $\psi$ ; tas nozīmē, ka alterācijas ir vienādas viena un tā pašā almukantarata visos punktos. Pie  $\alpha = 0^\circ$  un  $= 90^\circ$ ,  $\alpha' = \alpha$ ; tā tad nemainās virzieni, kas iet pa rādiusiem-vektoriem un stateniski pret tiem; tas arī saprotams, jo rādiālās taisnes uz projekcijas ir stateniskas pret almukantarātiem.

Kad  $k = 1$ , tad arī  $\alpha' = \alpha$  un no (127) formulas  $\rho = C \text{tg } \frac{\Theta}{2}$ ; tā tad leņķi nemainās tikai stereografiskās projekcijās, t. i., esam atkal nonākuši pie tām pašām atziņām, kuŗas guvām izpētot mērogu maiņas.

Atliek vēl leņķa alterācijas, resp. starpības  $\alpha' - \alpha$  izpētīšana. Ņemsim starpības  $\alpha' - \alpha$  tangensa pazīstamo goniometrijas formulu:

$$\operatorname{tg}(\alpha' - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \alpha' - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha' \operatorname{tg} \alpha}$$

un ieliksīm te  $\operatorname{tg} \alpha'$  nozīmi no (128); tad

$$\operatorname{tg}(\alpha' - \alpha) = \frac{(k - 1) \operatorname{tg} \alpha}{1 + k \operatorname{tg}^2 \alpha}. \quad (129)$$

Šis izteiksmes pirmā atvasinātā pēc  $\alpha$  ir:

$$\frac{(k - 1)(1 - k \operatorname{tg}^2 \alpha)}{(1 + k \operatorname{tg}^2 \alpha)^2 \cos^2 \alpha}.$$

Ja šo atvasināto pielīdzināsim nullei un attiecīgo virzienu nosauksīm par  $\alpha_0$ , tad no  $1 - k \operatorname{tg}^2 \alpha_0 = 0$ , iznāk:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{k}}. \quad (130)$$

Pedējā formula rāda, ka leņķu vislielākās alterācijas ir divi simmetriskos virzienos pret projekcijas rādiusu. Lai zinātu izmaiņu lielumu, tad šī  $\operatorname{tg} \alpha_0$  nozīmē jāieliek (129) formulas otrā daļā; tāpēc

$$\text{vislielākais } \operatorname{tg}(\alpha'_0 - \alpha_0) = \frac{k - 1}{2\sqrt{k}}. \quad (131)$$

Šinī paragrafā vispārīgā veidā dabūtās formulas būs noderīgas turpmāk pie atsevišķo zenitālo projekciju apskates.

**14. Konstruēšana pēc punktiem.** — Ja zenitālo projekciju konstruē lielā mērogā, tad jāvelk riņķi ar lieliem rādiusiem. Šis ir grūts darbs un dažreiz pat neiespējams. Tādos gadījumos ērtāki projekcijas konstruēt pēc punktiem, pakāpeniski savienojot pēdējos ar liknēm pēc lekāla (šablona) jeb vienkārši ar taisnēm. Pieņemot par taisnleņķu koordinātu sākumu projekcijas centru, resp. attēla plaknes pieskares punktu un virzot  $x$  asi pa līniju, kuŗai  $\psi = 0^\circ$ , dabūsim sekošas abscisu un ordinātu noteikšanas formulas:

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \psi \\ y &= \rho \operatorname{sn} \psi \end{aligned} \right\}. \quad (132)$$

Šīs formulas, kā zināms no analītiskās ģeometrijas, izteic sakarību starp taisnleņķu un polārkoordinātām, kā tas jau tika darīts perspektīvās projekcijās. (Sk. (a) formulu 55. lp.).

Savukārt rādiuss-vektors  $\rho = f(\theta)$  (kā to redzējam iepriekšējā paragrafā pie mērogu pētīšanas); pašas funkcijas veids tiek noteikts iepriekš katrai atsevišķai zenitālai projekcijai. Polāram zenitālām pro-

jekcijām, t. i., gadījumos, kad projekcijas plakne skar zemi polā, leņķis  $\psi$  ir vienlīdzīgs gaļumu starpībām  $\lambda$  un

$$x = \rho \cos \lambda, \quad y = \rho \sin \lambda.$$

Bez tam šinī gadījumā sfēriskais leņķiskais attāļums  $\Theta$  ir vienlīdzīgs polārai distancei, proti:  $\Theta = 90^\circ - \varphi$ , kur  $\varphi$  ir punkta platumu.

Ja attēla plakne skar zemi ne polā, bet kādā citā punktā, tad tadās zenitalās projekcijās meridiāni un paraleles attēlojas kā dažādas transcendentas līknes; šinīs gadījumos meridiānu un paraleļu tīkla konstruēšana ir iespējama vienīgi pēc punktiem. Taisnleņķu koordinātu aprēķinam arī šinīs gadījumos noder (132) formulas, lai gan tad leņķu  $\Theta$  un  $\psi$  sakarība ar platumu un gaļumu ir sarežģītāka.

Iedomāsimies, ka projekcijas plakne skar zemi ekvātorā tanī punktā, no kuļa skaita gaļumus, t. i., nulles meridiāna un ekvātorā krustošanās punktā un ka riņķis  $PEP_1E_1$  (42. zīm.) attēlo pussfēru ekvatoriālā (meridionālā) ortografiskā projekcijā, ka  $EE_1$  ekvātors,  $PP_1$  zemes ass, resp. nulles (sākuma) meridiāns, C projekcijas plaknes pieskares punkts, bet T patvaļīgs punkts, noteikts ar platumu  $\varphi$  un gaļumu  $\lambda$ . Savienojot punktu T ar polu P un punktu C ar lielo riņķu lokiem TP un TC, dabūsim sfērisku trīsstūri PTC, kuļam mala  $PC = 90^\circ$ , mala  $PT = 90^\circ - \varphi$ , mala  $CT = \Theta$  un šīs malas pretleņķis  $\lambda$ . Uz malu kosinusa formulas pamata  $\cos \Theta = \cos \varphi \cdot \cos \lambda$ . No tā paša trīsstūļa, uzskatot PT par ārmalu, PC par iekšējo malu, leņķi  $\lambda$  par iekšējo leņķi un leņķi  $90^\circ - \psi$  par ārējo leņķi, uz kotangensu formulas pamata dabonam:  $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \psi \sin \lambda^*$ . Šīs divi formulas dod iespēju noteikt  $\Theta$  un  $\psi$  pēc punkta T ģeografiskām koordinātām un

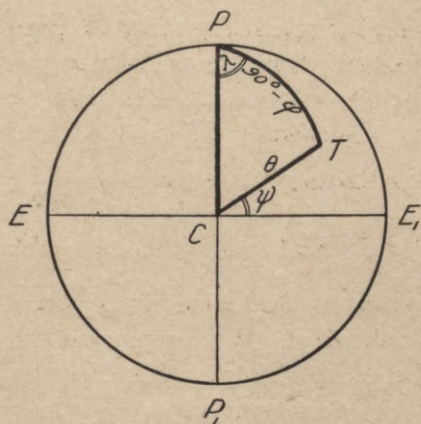
$$\left. \begin{aligned} \cos \Theta &= \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\ \operatorname{tg} \psi &= \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{cosec} \lambda \end{aligned} \right\} \quad (133)$$

Tagad iedomāsimies, ka projekcijas plakne skar zemi patvaļīgā punktā C, kas noteikts ar platumu  $\varphi_0$  (43. zīm.); šī punkta gaļumu pieņemsim par  $0^\circ$ . Ņemsim punktu T, kas noteikts ar ģeografiskām koordinātām  $\varphi$  un  $\lambda$ ; ar lielā riņķa lokiem TP un TC savienosim to ar polu P un punktu C; izveidojas sfēriskais trīsstūris PTC, no kuļa iznāk (uz to pašu formulu pamata kā iepriekšējā gadījumā):

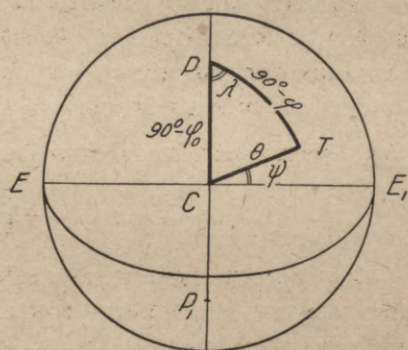
$$\left. \begin{aligned} \cos \Theta &= \sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \lambda, \\ \operatorname{tg} \psi &= (\operatorname{tg} \varphi \cos \varphi_0 - \sin \varphi_0 \cos \lambda) \operatorname{cosec} \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (134)$$

\*) Sk. Lekcijas, lasītas 1922. g. Zemkopības ministrijas Zemju departamenta Mērnīcības daļas mērnīku un taksatoru papildu kursos, 27.—28. lpp.

Tāpēc, gadījumā, ja zenitālā projekcija jākonstruē pēc punktiem, tad papriekšu aprēķina leņķus  $\Theta$  un  $\psi$  pēc (133) vai (134) formulas visiem meridiānu un paralēļu krustošanās punktiem (ņemot kā meridiānus, tā paralēles pēc viena un tā paša gradu skaita). Pēc tam, saskaņā ar doto funkciju  $\rho = f(\Theta)$  aprēķina visu punktu attālumus no projekcijas centra, t. i., aprēķina visus rādiius-vektorus; beidzot pēc (132) formulām noteic taisnleņķu koordinātas  $x, y$ . Pēc šīm koordinātām uznes uz kartes atsevišķus punktus un savieno tos ar nepārtrauktām noapaļotām līknēm ar lekala palīdzību; ja punkti pietiekoši bieži, tad pietiek pat ar to, ja punktus savieno ar tais-



42. zīm.



43. zīm.

nēm. Punkti ar vienādu garumu noteiks meridiānus, un punkti ar vienādu platumu — paralēles.

**15. Posteļa projekcija.** — Visvienkāršāko zenitālo projekciju izgudrojis matemātikas profesors Postels (Guillaume Postel, 1510—1581), Parīzē. Tānī rādiiusi  $\rho$  ir vienlīdzīgi iztaisnotiem sfēras lokiem. Ja par pieskares punktu ņem polu, tad ikkuņas paralēles rādiiuss  $\rho$  vienāds ar meridiāna loka garumu no pola līdz attiecīgai paralēlei (polārai distancei), t. i.:

$$\rho = R\theta. \quad (135)$$

Te  $R$  ir sfēras rādiiuss, samazināts pieņemtā galvenā mērogā un  $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ ;  $\theta$  un platumš  $\varphi$  te jāizteic radiānos.

Ja Posteļa polārā projekcijā konstruē puslodi, tad ekvātora rādiiuss uz projekcijas iznāk  $\rho = \frac{\pi}{2} \cdot R$  un puslodes virsas laukums uz projekcijas  $\pi \rho^2 = \frac{\pi^3}{4} R^2$ , kas apmēram par vienu ceturtdaļu (0,23)

lielāks nekā pussfēras virsas laukums. Kā redzam, Posteļa projekcija nav vienādliela; parādīsim, ka viņa nav arī vienādleņķu.

Mēroga formulu Posteļa projekcijai dabūsim, ievietojot vispārīgā izteiksmē (125)  $\rho$  nozīmi (135); tad

$$m = \sqrt{\cos^2 \alpha + \left(\frac{\Theta}{\operatorname{sn} \Theta}\right)^2 \operatorname{sn}^2 \alpha}.$$

Redzams, ka mērogs ir atkarīgs no platuma  $\varphi = 90^\circ - \Theta$  un āzimuta  $\alpha$ . Projekcijas centrā, pie  $\Theta = 0^\circ$ ,  $m = 1$ , t. i., mērogs vienlīdzīgs galvenam un visos virzienos ir vienāds; ar  $\Theta$  augšanu  $m$  aug.

Lai noskaidrotu mēroga atkarību no virziena, ņemam tā pirmo un otro atvasināto pēc  $\alpha$ ; pirmā atvasinātā rāda, ka maksimums un minimums var būt pie  $\alpha = 0^\circ$  un  $\alpha = 90^\circ$ ; otrā atvasinātā rāda, ka vismazākais mērogs ir pie  $\alpha = 0^\circ$  un vislielākais pie  $\alpha = 90^\circ$ ; nosaucot pirmo par  $b$  un otro par  $a$ , dabūjam:  $b = 1$  un  $a = \frac{\Theta}{\operatorname{sn} \Theta} =$

$$= \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \sec \varphi. \quad (136)$$

Ka mērogs projekcijas rādīusa, resp. meridiāna virzienā ir  $= 1$ , saprotams arī bez kādiem paskaidrojumiem, jo pēc projekcijas konstruēšanas metodes meridiāni uz projekcijas vienlīdzīgi atbilstošo meridiānu uz sfēras iztaisnotiem lokiem. Uz ekvatora, kur  $\varphi = 0^\circ$ ,  $a = \frac{\pi}{2} = 1,571$ , kas vairāk kā  $1\frac{1}{2}$  reiz lielāks par galveno.

Lai Posteļa projekcijai noteiktu āzimutu alterācijas, ieliksīm (127) formulā  $\rho$  un  $d\rho$  nozīmes no (135); tad

$$k = \frac{\Theta}{\operatorname{sn} \Theta}$$

un (128) — (131) formulas iznāk:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\Theta}{\operatorname{sn} \Theta} \operatorname{tg} \alpha,$$

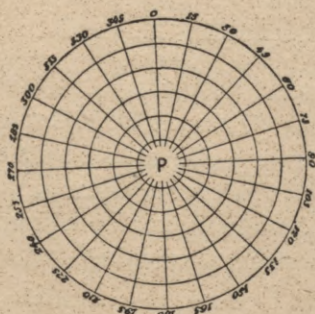
$$\operatorname{tg} (\alpha' - \alpha) = \frac{(\Theta - \operatorname{sn} \Theta) \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{sn} \Theta + \Theta \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{sn} \Theta}{\Theta}},$$

$$\text{vislielākais } \operatorname{tg} (\alpha' - \alpha) = \frac{\Theta - \operatorname{sn} \Theta}{2 \sqrt{\Theta \cdot \operatorname{sn} \Theta}}.$$

No šīm formulām redzams, ka projekcijas centrā, kur  $\Theta = 0^\circ$ ,  $\alpha' = \alpha$  un āzimutu izmaiņu nav. Ar attāļināšanos no projekcijas centra

āzimuthu alterācijas aug un uz projekcijas malām, piemēram pie  $\Theta = \frac{\pi}{2}$ , kad attēlo pussferu, vislielākā starpība  $\alpha' - \alpha = 12^\circ 50'$  iznāk pie āzimutha  $\alpha_0 = 38^\circ 35'$ .



44. zīm.

Tā tad Posteļa projekcijā ainu plaknes pieskares punkta, resp. pola tuvumā visu zemes priekšmetu atveidi iznāk bez sagrozījumiem; ar attālināšanos no šī punkta attēli vairāk un vairāk izstiepjas pa almukantarātiem, resp. paralēlēm. 44. zīmējumā attēlota vesela puslode Posteļa projekcijā ar meridiāniem un paralēlēm ik pa  $15^\circ$  un sekojošā tabulā doti skaitļi, kas aprēķināti pēc (135), (136), (49) un (30) formulām (pie  $R = 1$ ):

$\Theta$	$\rho$	a	b	p	$2 \omega$
$0^\circ$	0,000	1,000	1	1,000	$0^\circ 0'$
15	0,262	1,012	1	1,012	0 39
30	0,524	1,047	1	1,047	2 39
45	0,785	1,111	1	1,111	6 01
60	1,047	1,209	1	1,209	10 52
75	1,309	1,355	1	1,355	17 21
90	1,571	1,571	1	1,571	25 40

Vienkāršās konstruēšanas dēļ Posteļa projekciju lieto ļoti bieži, it īpaši polāro apgabalu attēlošanai. To lieto arī zvaigžņu kārtēm, bet tad to zīmē uz sfēras otrās puses, t. i., tā, kā debess mums rādās istenībā. Šis aizrādījums, saprotams, attiecas uz visām zvaigžņu kārtēm.

Beidzot apskatīsim formulas austruma jeb rietuma puslodes konstruēšanai Posteļa projekcijā, t. i. Posteļa ekvatoriālās (meridionālās) projekcijas formulas. No (133) otrās formulas, ņemot vērā, ka

$$\operatorname{sn} \psi = \frac{\operatorname{tg} \psi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}} \quad \text{un} \quad \cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}}, \quad \text{dabū:}$$

$$\operatorname{sn} \psi = \frac{\operatorname{sn} \varphi}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda}}, \quad \cos \psi = \frac{\cos \varphi \operatorname{sn} \lambda}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda}} \quad (137)$$

un no (133) pirmās formulas:

$$\Theta = \operatorname{arc} \cos (\cos \varphi \cos \lambda).$$

Ieliekot šīs nozīmes (132) un (135) formulas, dabonam:

$$\left. \begin{aligned} x &= R \operatorname{arc} \cos (\cos \varphi \cos \lambda) \frac{\cos \varphi \operatorname{sn} \lambda}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda}}, \\ y &= R \operatorname{arc} \cos (\cos \varphi \cos \lambda) \frac{\operatorname{sn} \varphi}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda}}. \end{aligned} \right\} \quad (137')$$

**16. Lamberta projekcija.** — Ievērojamais ģeometrs Lamberts (Jean Henri Lambert, 1728—1777)\* ir ļoti daudz nodarbojies ar kartografisko projekciju teoriju un izgudrojis starp citu arī vienā d-  
lielu zenitālo projekciju. Šai projekcijai katra almukantarata rādiusu aprēķina izejot no prasības, lai almukantarata laukums būtu vienāds ar atbilstošā sfēriskā segmenta virsas laukumu.

Uzstādīto prasību izteic ar sekošu nol.:

$$\pi \rho^2 = 2\pi R (R - R \cos \Theta) = 4\pi R^2 \operatorname{sn}^2 \frac{\Theta}{2},$$

kur  $\rho$  ir riņķa resp. almukantarata rādiuss uz projekcijas un  $\Theta$  lielā riņķa loks, skaitot no sfēriskā segmenta virsotnes līdz kaut-kādam punktam uz segmenta pamatriņķa aploces. No šī nol.:  $\rho = 2R \operatorname{sn} \frac{\Theta}{2}$ . (138)

Hammera projekciju apskatot, noskaidrojās  $\rho$  ģeometriskā nozīme: tas vienlīdzīgs chordai, kas savieno segmenta pamatriņķa kaut-kuņu punktu ar tā virsotni; šī  $\rho$  un tā atvasinātās nozīmi ieliekam mēroga (125) formulā; tad

$$m = \sqrt{\cos^2 \frac{\Theta}{2} \cos^2 \alpha + \sec^2 \frac{\Theta}{2} \operatorname{sn}^2 \alpha}. \quad (139)$$

Pēc šīs formulas projekcijas centrā, kur  $\Theta = 0^\circ$ , vietējais mērogs vienlīdzīgs galvenam un visos virzienos vienāds, jo nav atkarīgs no āzimuta  $\alpha$ ; pie  $\Theta = 90^\circ$ ,  $m = \sqrt{\frac{1}{2} \cos^2 \alpha + 2 \operatorname{sn}^2 \alpha}$ ;

(139) formulas pirmā un otrā atvasinātās rāda, ka projekcijas ikkatrā punktā mērogs ir vismazāks pie  $\alpha = 0^\circ$  un vislielāks pie  $\alpha =$

$$= 90^\circ; \text{ tāpēc} \quad b = \cos \frac{\Theta}{2} \quad (140)$$

$$\text{un } a = \sec \frac{\Theta}{2}. \quad (141)$$

Āzimutu izmaiņu aprēķinam ņemam (127) — (129) formulas, no

$$\text{kurām iznāk } k = \sec^2 \frac{\Theta}{2}, \operatorname{tg} \alpha' = \sec^2 \frac{\Theta}{2} \operatorname{tg} \alpha \quad (142)$$

\*) Dzimis Elzāsas pilsētā Mülhausenā, miris Berlinē.

un

$$\operatorname{tg}(\alpha' - \alpha) = \frac{\operatorname{sn}^2 \frac{\Theta}{2} \operatorname{tg} \alpha}{\cos^2 \frac{\Theta}{2} + \operatorname{tg}^2 \alpha}. \quad (142')$$

Priekšpēdējā formula dod iespēju grafiski noteikt leņķi  $\alpha'$  pēc dotā  $\alpha$ : konstruē taisnleņķa trīsstūri CPO (45. zīm.) ar leņķi OCP =  $\alpha$ ; pie taisnā leņķa virsotnes O konstruē leņķi QOP =  $\frac{\Theta}{2}$  t. i., pusi no leņķa, kas noteic kāda punkta leņķisko attālumu no projekcijas centra; atliek OQ = OP un punktā Q uzstāda stateni pret līniju OQ, ar ko dabū punktu R uz līnijas OP turpinājuma; atliek OS = OR un punktā S uzstāda stateni ST pret taisni OS; T un C savieno ar taisni. Pierādīsim, ka dabūtais leņķis OCT =  $x$  būs =  $\alpha'$ . Pēc zīmējuma

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{TO}{PO} = \frac{TO}{SO} \cdot \frac{RO}{QO} = \sec^2 \frac{\Theta}{2};$$

tāpēc  $\operatorname{tg} x = \sec^2 \frac{\Theta}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha$  un uz (142) form. pamata,  $x = \alpha'$ .

Āzimetri visvairāk mainās virzienā, kuŗu noteic (130) formula; tā šinī gadījumā dod:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \pm \cos \frac{\Theta}{2}. \quad (143)$$

Pašu vislielāko izmaiņu dabū no (131) formulas:

$$\operatorname{tg}(\alpha' - \alpha)_{\max.} = \frac{1}{2} \operatorname{sn} \frac{\Theta}{2} \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2}.$$

Kā redzam, āzimetu alterācijas aug ar attālināšanos no projekcijas centra; tur  $\Theta = 0$  un izmaiņu nav. Gadījumā, kad attēlo veselu pussfēru, uz projekcijas malām, pie  $\Theta = 90^\circ$ , vislielākā starpība  $\alpha' - \alpha = 19^\circ 28'$  un šī izmaiņa būs virzienā, noteiktā ar āzimetu  $\alpha_0 = 35^\circ 16'$ .

Vislielākām leņķu izmaiņām pēc (29), (51) un (55) formulām dabonam sekošas vienkāršas izteiksmes:

$$\operatorname{sn} \omega = \frac{1 - \cos^2 \frac{\Theta}{2}}{1 + \cos^2 \frac{\Theta}{2}},$$

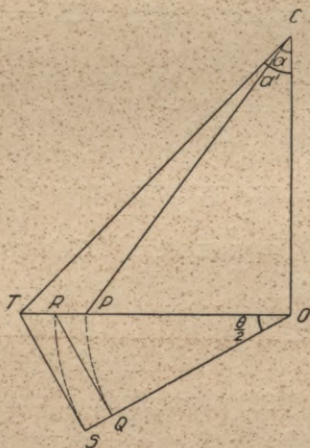
$$\operatorname{tg} \omega = \frac{1}{2} \operatorname{sn} \frac{\Theta}{2} \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2},$$

$$\operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\omega}{2} \right) = a = \sec \frac{\Theta}{2}.$$

Šīs formulas noderīgas visām vienādlielām zenitalām projekcijām. Gadījumā, kad ainu plakne skar zemi vienā polā, visus projekcijas elementus var izteikt tieši kā platuma funkcijas, jo  $\Theta = 90^\circ - \varphi$ ; tad

$$\begin{aligned} \rho &= 2R \operatorname{sn} \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right), \\ a &= \sec \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right), \\ b &= \cos \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right). \end{aligned} \tag{144}$$

Platību mērogs  $p = ab = 1$ , kam arī jābūt, jo projekcija ir vienādliela.



45. zīm.



46. zīm.

Lamberta projekcijā pussfēra ar meridiāniem un paralēlēm, novilktiem ik pa 15 gaŗuma un platuma grādiem, attēlota 46. zīm. Skaitļi, kas raksturo šo projekciju, sakopoti sekošā tabulā:

$\Theta$	$\rho$	a.	b	p	2 $\omega$
0 <sup>0</sup>	0,000	1,000	1,000	1	0 <sup>0</sup> 0'
15	0,261	1,009	0,991	1	0 59
30	0,518	1,035	0,966	1	3 58
45	0,765	1,082	0,924	1	9 04
60	1,000	1,155	0,866	1	16 26
75	1,218	1,260	0,793	1	26 17
90	1,414	1,414	0,707	1	38 57

**17. Izoperimetriskā līkne.** — Lai noteiktu mērogu āzimuta vislielākās alterācijas virzienā, tad (139) formulā jāieliek  $\alpha$  nozīme no (143); iznāk  $m=1$ ; tas nozīmē, ka Lamberta projekcijā āzimuta vislielākās izmaiņas virzienā, attāļumi ir vienādi ar atbilstošiem attāļumiem uz sfēras. Tā kā projekcijas katrā punktā ir divi virzieni, pa kuņiem āzimuti mainās visvairāk, un abi šie virzieni iet simmetriski pret meridiānu, tad caur projekcijas katru punktu iet divi pret meridiānu simmetriskas līknes, kuņas patur savu isto gaņumu; tās sauc par izoperimetriskām līknēm. Iesākoties kaut-kādā punktā ar āzimutu  $\alpha_0$  uz sfēras, un āzimutu  $\alpha'$  uz projekcijas, šis līknes būs vienādgāņas, neraugoties uz to, cik tāju tās turpina. Tā kā pēc (143) formulas  $\text{tg } \alpha_0 = \pm \cos \frac{\Theta}{2}$ , tad atbilstošais āzimuts  $\alpha'_0$  uz projekcijas būs (uz 142 otrās form. pamata):  $\text{tg } \alpha'_0 = \pm \sec \frac{\Theta}{2}$ ; tāpēc  $\text{tg } \alpha'_0 \cdot \text{tg } \alpha_0 = 1$  un  $\alpha_0 + \alpha'_0 = 90^\circ$ .

Dodot leņķiskam attāļumam  $\Theta$  dažādas nozīmes ar  $15^\circ$  lieliem intervāliem, dabūjam sfēras un projekcijas sekošus āzimutus, kas atbilst āzimuta vislielākām alterācijām Lamberta projekcijā:

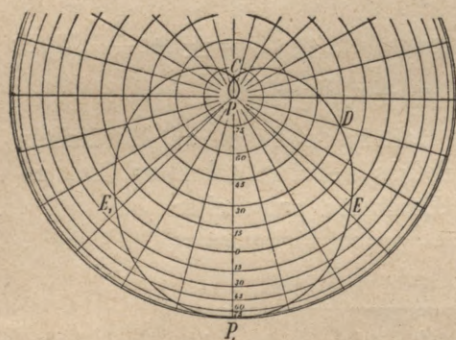
$\Theta$	$\alpha$	$\alpha'$	$\alpha' - \alpha$
$0^\circ$	$45^\circ 0'$	$45^\circ 0'$	$0^\circ 0'$
15	44 45	45 15	0 30
30	44 00	46 0	2 0
45	42 44	47 16	4 32
60	40 54	49 06	8 12
75	38 26	51 34	13 08
90	35 16	54 44	19 28
105	31 20	58 40	27 20
120	26 34	63 26	36 52
135	20 56	69 04	48 08
150	14 31	75 29	60 58
165	7 26	82 34	75 08
180	0 0	90 0	90 10

47. zīmējums attēlo visu zemes virsu Lamberta projekcijā; punkts P ir ziemeļpols, aploce  $EE_1$  — ekvātors un ārējā aploce, kas iet caur punktu  $P_1$  — dienvidpols. Zīmējumā parādītas izoperimetriskās līknes  $P_1EDCP$  un  $P_1E_1CP$ . Kā no zīmējuma un augšā dotās tabulas redzams, izoperimetriskā līkne  $P_1EDCP$  iziet no dienvidpola virzienā, noteiktā ar āzimutu  $= 90^\circ$ , tāļākā gaitā pamazām noliecas uz ziemeļiem un tā tad, krustojot meridiānus, veido leņķus, kuņi

nepārtraukti mazinājas; līkne traucās uz ziemeļpolu, bet to nekad nesasniedz, jo tās āzimuts nekad nepaliek mazāks par  $45^\circ$ . Dienvidpolā līkne pieskaņas ārējā riņķa aplocei un tieši pāriet simmetriskā zarā  $P_1E_1C$ .

Atbilstošās līknes uz sfēras iziet no dienvidpola meridiāna virzienā ( $\alpha_0 = 0^\circ$ ), bet pēc tam pakāpeniski novirzās no tā uz rītiem un vakariem; arī te abi zari traucās uz ziemeļpolu, bet nevar to sasniegt, jo taisa bezgalīgi daudzus apgriezienus ap to ar robežojošiem āzimutiem  $45^\circ$ .

Lai tuvāki izpētītu izoperimētrisko līkni, sastādīsim tās nol. polārās koordinātās  $\rho$  un  $\psi$ , pieņemot punktu  $P$  par polu un virzienu  $PP_1$  par leņķa  $\psi$  skaitīšanas sākumu. No āzimuta  $\alpha'_0$  divi izteiks-



47. zīm.

$$\text{mēm } \operatorname{tg} \alpha'_0 = \sec \frac{\Theta}{2} \text{ un } \operatorname{tg} \alpha'_0 =$$

$$= -\rho \frac{d\psi}{d\rho} \text{ dabonam } d\psi =$$

$$= -\frac{d\rho}{\rho} \sec \frac{\Theta}{2}; \text{ ieliekam te no (138)}$$

formulas  $\rho$  un  $d\rho$  nozīmes; tad

$$d\psi = -\frac{d\Theta}{2 \operatorname{sn} \frac{\Theta}{2}}.$$

Pēc integrēšanas  $\psi = -\ln \operatorname{tg} \frac{\Theta}{4} + C$ , kur  $C$  ir patvaļīga konstante.

Punktam  $P_1$ ,  $\Theta = 180^\circ$  un  $\psi = 0^\circ$ ; tāpēc  $0 = -\ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + C$  un  $C = 0$ .

$$\text{Uz šī pamata } e^\psi = \operatorname{cotg} \frac{\Theta}{4}. \quad (145)$$

kur  $e$  ir naturālo logaritmu bāze. Šo  $\operatorname{cotg}$  nozīmi ieliekam rādusavektora (138) formulā, iepriekš pārveidojot to sekoši:

$$\rho = 4R \operatorname{sn} \frac{\Theta}{4} \cos \frac{\Theta}{4} = \frac{4R \operatorname{cotg} \frac{\Theta}{4}}{1 + \operatorname{cotg}^2 \frac{\Theta}{4}}; \text{ tad } \rho = \frac{4R e^\psi}{1 + e^{2\psi}} \quad (146)$$

$$\text{No šejienes noteic } e^\psi; \text{ tad } \psi = \ln \frac{2R \pm \sqrt{4R^2 - \rho^2}}{\rho}. \quad (147)$$

Pēc (146) formulas var aprēķināt  $\rho$  pēc dotā leņķa  $\psi$  un pēc (147) formulas otrādi — aprēķināt  $\psi$ , kad dots rādusavektors  $\rho$ .

Piemēra dēļ aprēķināsim leņķi  $\psi$  pēc  $\rho = R\sqrt{2}$  un  $\rho = R$ , t. i., punktiem E un D, kur izoperimetriskā likne krusto ekvātoru un paralēli, noteiktu ar platumu  $\varphi = 30^\circ$  ( $\Theta = 90^\circ$  un  $60^\circ$ ).

$$\text{Kad } \rho = R\sqrt{2} \dots \psi = \ln(\sqrt{2} \pm 1) = \pm 50^\circ 29' 56'', 33,$$

$$\text{„ } \rho = R \dots \psi = \ln(2 \pm \sqrt{3}) = \pm 75^\circ 27' 22'', 06.$$

Ievietojot (146) un (145) formulās  $\varphi = \pi$ , dabūjam punktu, kurā izoperimetriskā likne krusto meridiānam  $PP_1$  pretejo meridiānu, t. i., meridiānu, kas no tā ir  $\pm 180^\circ$  tālu. Šo punktu C noteic  $\rho = 0,17254351 R$  un  $\Theta = 90^\circ 53' 51'', 88$ . Augšā jau bija teikts, ka tuvojoties ziemeļpolam (vispār ņemot, projekcijas centram) izoperimetriskās liknes azimuts tuvojas konstantam lielumam  $45^\circ$ . Punktā C tas jau ir  $45^\circ 06' 25'', 20$ ; tājaki likne veido bezgalīgi daudzus apgriezienus un ļoti līdzīga logaritmiskai spirālei. Šos apgriezienus var attēlot tikai lielā mērogā un tāpēc 47. zīm. to nav. Liknes veidu pie pola visērtāki noskaidrot analītiski. Tā kā maziem leņķiem var pieņemt

$$\sin \frac{\Theta}{2} = \frac{\Theta}{2} \text{ un } \cotg \frac{\Theta}{4} = \frac{1}{\left(\frac{\Theta}{4}\right)} \text{ tad (138) un (145) formulas}$$

iznāk:  $\rho = R\Theta$  un  $e^{-\psi} = \frac{\Theta}{4}$ ; tamdēļ  $\rho = 4 R e^{-\psi}$ , kas, kā zināms, ir logaritmiskās spirāles nol. polārās koordinātās, kad tā, krustojot rādus-vektorus, veido konstantu leņķi  $45^\circ$ .

Beidzot aprēķināsim izoperimetriskās līknes laukumu. Kā zināms, laukuma diferenciāls polārās koordinātās ir:  $dP = \frac{\rho^2}{2} \cdot d\psi$ ; ieliekot te

$$\rho \text{ nozīmi no (146), dabūjam: } dP = 4 R^2 \frac{d(e^{2\psi})}{(1 + e^{2\psi})^2}.$$

Integrācija starp 0 un  $\psi$  dod:

$$P = 2R^2 \frac{e^{2\psi} - 1}{e^{2\psi} + 1}. \quad (148)$$

Šo formulu piemērosim dažos atsevišķos gadījumos:

- 1) Kad  $\psi = \ln(\sqrt{2} + 1)$ , jeb  $e^{2\psi} = 3 + 2\sqrt{2}$ , laukums  $P_1EPP_1 = R^2\sqrt{2}$ ;
- 2) Kad  $\psi = \ln(2 + \sqrt{3})$ , jeb  $e^{2\psi} = 7 + 4\sqrt{3}$ , laukums  $P_1EDPP_1 = R^2\sqrt{3}$ ;
- 3) Kad  $\psi = \pi$ , jeb  $e^{2\pi} = 535, 49163$ , laukums  $P_1EDCPP_1 = 1,992544R^2$ .

Kad  $\psi = \infty$ , tad dabūjam līkni līdz pašam polam un tās laukums, ieskaitot arī laukumus, kuri viens otru sedz, ir  $P = 2R^2$ . Ie-

skaitot laukumus pie pola, kuŗi viens otru sedz, viss liknes  $P_1EDCE_1P_1$  laukums ir  $4R^2$ . Šis pēdējās formulas ģeometriskā interpretācija ir sekoša: ja uz projekcijas konstruēšanai ņemtās sfēras diametra konstruē kvadrātu, tad tā laukums vienlīdzīgs izoperimetriskās liknes pilnam laukumam.

**18. Lornja projekcija.** — Ja par projekcijas centru, t. i., attēla plaknes pieskares punktu ņem ne polu, bet zemes virsas citu punktu, tad var dabūt daždažādas vienādlīelas zenitālas projekcijas. Bez polārām bieži lieto ekvātorialās zenitālas projekcijas, kuŗām par projekcijas centru ņem ekvātora patvaļīgu punktu. Vienu tādu projekciju izgudrojis arī Lamberts, bet to parasti sauc par Lornja projekciju, Veronas kaŗa skolas direktora (Antonio Maria Lorgna, 1730—1796) vārdā, jo viņš šo projekciju sikāki izpētījis.

Projekcijas konstruēšanai pēc punktiem papriekš jāaprēķina pēc (133) formulām leņķi  $\Theta$  un  $\varphi$  visiem meridiānu un paralēļu krustojšanās punktiem, noteiktiem ar ģeografiskām koordinātām  $\varphi$ ,  $\lambda$ . Sekošā tabulā doti šāda aprēķina rezultāti atsevišķiem punktiem ik pa 15 platuma un garuma grādiem.

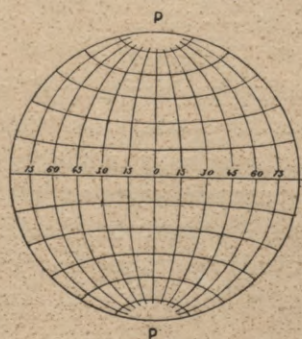
$\lambda =$	0°		15°		30°		45°		60°		75°		90°	
	$\Theta$	$\psi$	$\Theta$	$\psi$	$\Theta$	$\psi$	$\Theta$	$\psi$	$\Theta$	$\psi$	$\Theta$	$\psi$	$\Theta$	$\psi$
90°	90°	90°	90° 0'	90° 0'	90° 0'	90° 0'	90° 0'	90° 0'	90° 0'	90° 0'	90° 0'	90° 0'	90°	90°
75	75	90	75 31	86 02	77 03	82 22	79 27	79 16	82 34	76 56	86 10	75 29	90	75
60	60	90	61 07	81 30	64 20	74 54	69 18	67 48	75 31	63 26	82 34	60 51	90	60
45	45	90	46 55	75 29	52 14	63 26	60 0	54 44	69 18	49 06	79 27	46 0	90	45
30	30	90	33 14	65 51	41 25	49 06	52 14	39 14	64 20	33 41	77 03	30 52	90	30
15	15	90	21 06	46 0	33 14	28 11	46 55	20 45	61 07	17 12	75 31	15 30	90	15
0	0	90	15 0	0 0	30 0	0 0	45 0	0 0	60 0	0 0	75 0	0 0	90	0

Ja piemēram  $\varphi = 45^\circ$  un  $\lambda = 75^\circ$ , tad  $\Theta = 79^\circ 27' 16''{,}96$  un  $\psi = 45^\circ 59' 34''{,}70$ , kādi skaitļi, noapaļoti līdz 1', ierakstīti attiecīgā rindīnā un slejā.

Projekcijas konstruēšana notiek sekoši. Novelk taisni EQ, kas attēlo ekvātoru un uz tās atzīmē projekcijas centru O. Šinī punktā pēc dotās tabulas uz ziemeļiem un dienvidiem no ekvātora konstruē leņķus  $\psi$ . Uz šīm starveidīgi no O izejošām taisnēm atliek garumus  $\rho$ , aprēķinātus pēc (138) formulas, proti:  $\rho = 2R \sin \frac{\Theta}{2}$ ; R ir zemes rādiuss, samazināts projekcijas galvenā mērogā un  $\Theta$  leņķis, ņemts no tikko dotās tabulas pēc argumentiem  $\varphi$ ,  $\lambda$ . Kad attiecīgie punkti uznesti, tad savienojot ar nepārtrauktām līknēm pēc

šablona punktus ar vienādiem garumiem  $\lambda$ , dabū meridiānus, un savienojot punktus ar vienādiem platumiem  $\varphi$  — parallēles. Lornja projekcijā attēlota pussfēra (rīta jeb vakara) parādīta 48. zīm.

$\rho$  un  $\Theta$  vienkārša sakarība dod iespēju konstruēt šo projekciju neaprēķinot paligielumu  $\psi$  un  $\Theta$ , bet izteicot meridiānu un parallēļu krustošanās punktu taisnleņķu koordinātas kā platumu un garuma funkcijas. Ņemsim uz projekcijas ekvātoru par  $x$  asi un pieskares punkta meridiānu par  $y$  asi; tad projekcijas ikuņa punkta taisnleņķu koordinātas pēc (132) formulām ir  $x = \rho \cos \psi$  un  $y = \rho \sin \psi$ . . . (a). Te ieejošie  $\sin \psi$  un  $\cos \psi$  jau noteikti kā  $\varphi$  un  $\lambda$  funkcijas ar (137) formulām;  $\rho$  noteic pēc (138) formulas



48. zīm.

un tā kā  $\sin \frac{\Theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \Theta}{2}}$ , tad  $\rho =$   
 $= R \sqrt{2(1 - \cos \Theta)}$ ;  $\cos \Theta$  atvieto ar viņa nozīmi no (133) nol.; tāpēc, izdarot (a) formulas substitūciju, dabonam:

$$\begin{aligned} x &= \frac{R \sqrt{2} \cos \varphi \sin \lambda}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos \lambda}}, \\ y &= \frac{R \sqrt{2} \sin \varphi}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos \lambda}}. \end{aligned} \quad (149)$$

Šīs formulas netikvien ērtas projekcijas konstruēšanai pēc punktiem, bet no tām viegli dabūt arī to līkņu nol., ar kādām uz projekcijas attēlojas meridiāni un parallēles.

Kad  $\varphi = 0^\circ$  un  $\lambda = \pm 90^\circ$ , tad  $x = \pm R \sqrt{2}$  un  $y = 0$ ; kad  $\lambda = 0^\circ$  un  $\varphi = \pm 90^\circ$ , tad  $x = 0$  un  $y = \pm R \sqrt{2}$ ; kad  $\varphi = 0^\circ$  un  $\lambda = \pm 180^\circ$  tad  $x = \pm 2R$  un  $y = 0$ .

Ja no (149) formulām aprēķināsim  $\sin \varphi$  un  $\cos \varphi$ , pacelsim kvadrātā un saskaitīsim, tad izslēgsim platumu  $\varphi$  un dabūsim meridiānu nol.:

$$(2R^2 - x^2 - y^2)^2 - (4R^2 - x^2 - y^2) x^2 \cot^2 \lambda = 0. \quad (150)$$

Turpretim, noteicot no (149)  $\sin \lambda$  un  $\cos \lambda$  un saskaitot to kvadrātus, izslēdzam garumu  $\lambda$  un dabonam parallēļu nol. sekošā veidā:

$$(4R^2 - x^2 - y^2) y^2 - 4R^4 \sin^2 \varphi = 0. \quad (151)$$

Abi beidzamie nol. rāda, ka meridiāni un parallēles ir ceturtās pakāpes alģebriskās līknes. Ar šīm līknēm attēlosim ne tikai vienu pussfēru, kā parādīts 48. zīm., bet visu zemes lodi, kas attēlosies

kā riņķis ar rādiusu  $2R$ ; malējais riņķis ir pieskares punkta antipoda bezgalīgi izstiepts attēls.

Ar (150) un (151) nol. noteikto līkņu sika pētīšana noved pie daudziem interesantiem secinājumiem, bet šis darbs ir jāatstāj centīgā lasītāja patstāvīgai pētīšanai. Te aizrādīsim tikai uz to, ka (150) nol. vispār noteic divas ovālas liknes, kuņas krustojas polos; (151) nol. noteic divi atsevišķus ovāla veida zarus.

**19. Breizinga projekcija.** — Mainot nolīdzinājumā  $\rho = f(\Theta)$  funkcijas veidu, var dabūt daudz jaunu zenitālo projekciju. Ievērojamākie un vienkāršākie šīs funkcijas veidi ir:

$$\rho_1 = 2R \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} \text{ jeb } \rho_2 = 2R \operatorname{sn} \frac{\Theta}{2}.$$

Funkcijas pirmais veids dod stereografisko projekciju (kad ainu plakne neiet caur sfēras centru, bet pieskaņas tā virsai), otrs veids — Lamberta projekciju. Pirmā, t. i., stereografiskā, leņķi attēlojas pareizi, bet laukumi mainās; otrā, turpretim, laukumi attēlojas pareizi, bet mainās leņķi. Kādreizējais Bremeņas jūrskolas profesors Breizingš (Friedrich Arthur Breusing, 1818 — 1892) izgudroja projekciju, kuņai, tā sakot, bija vidējas īpašības, jo viņš rādiusu  $\rho$  noteica kā augšā doto izteiksmju ģeometrisko vidējo, ņemot

$$\rho = \sqrt{\rho_1 \rho_2} = 2R \sqrt{\operatorname{sn} \frac{\Theta}{2} \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2}}. \quad (152)$$

Ar šo īpašību izskaidrojams kartes nosaukums: vermittelnde azimuthale Projection.

Tā kā  $\rho$  ir ģeometriskais vidējais starp loka  $\Theta$ , novilkta ar rādiusu  $R$ , chordu un loka  $\frac{\Theta}{2}$  divkāršo tangenti, tad  $\rho$  apreķinu pēc šīs formulas var atvietot ar vienkāršu konstruējumu.

Vislielāko un vismazāko mērogu Breizinga projekcijai dabū no vispārīgās (125) formulas, jo mēroga minimums ir pie  $\alpha = 0^\circ$  un maksimums pie  $\alpha = 90^\circ$ ; tad pirmā gadījumā

$$m_{\min} = b = \frac{d\rho}{R d\Theta} \text{ un otrā } m_{\max} = a = \frac{\rho}{R \operatorname{sn} \Theta}.$$

Ņemot vērā (152) formulu un no tās atvasināto 
$$\frac{d\rho}{d\Theta} = \frac{R \left(1 + \cos^2 \frac{\Theta}{2}\right)}{2 \sqrt{\cos^3 \frac{\Theta}{2}}}$$

dabūjam:

$$a = \frac{1}{\sqrt{\cos^3 \frac{\Theta}{2}}} \text{ un } b = \frac{1 + \cos^2 \frac{\Theta}{2}}{2 \sqrt{\cos^3 \frac{\Theta}{2}}}. \quad (153)$$

$$\text{Laukuma mērogs } p = ab = \frac{1 + \cos^2 \frac{\Theta}{2}}{2 \cos^3 \frac{\Theta}{2}}.$$

Leņķu vislielākās izmaiņas aprēķina pēc (29) un (30) formulām:

$$\text{sn } \omega = \frac{\text{sn}^2 \frac{\Theta}{2}}{4 - \text{sn}^2 \frac{\Theta}{2}} \text{ un } \text{tg} \left( 45^\circ + \frac{\omega}{2} \right) = \sqrt{\frac{2}{1 + \cos^2 \frac{\Theta}{2}}}.$$

Pie  $R = 1$  un leņķiem  $\Theta$  no  $0^\circ$  līdz  $90^\circ$  ar  $15^\circ$  lieliem intervāliem aprēķinātie raksturīgākie lielumi Breizinga projekcijai doti sekošā tabulā:

$\Theta$	$\rho$	a	b	p	$2 \omega$
$0^\circ$	0,000	1,000	1,000	1,000	$0^\circ \quad 0'$
15	0,262	1,013	1,004	1,017	0 29
30	0,527	1,053	1,018	1,072	1 57
45	0,796	1,126	1,044	1,175	4 21
60	1,075	1,241	1,086	1,347	7 39
75	1,367	1,415	1,153	1,631	11 43
90	1,682	1,682	1,261	2,121	16 26

Salīdzinot šīs tabulas skaitļus ar attiecīgiem stereografiskās un Lamberta projekcijas skaitļiem redzam, ka Breizinga projekcijai, salīdzinot ar pirmo, ir priekšrocības laukumu attēlošanā un, salīdzinot ar otro, leņķu attēlošanā. Neraugoties uz visu to šī projekcija nav guvusi piekrišanu un tai drīzāk ir teorētiska, nekā praktiska nozīme.

**20. Eri projekcija.** — Jau vairākkārt aizrādīts, ka nevar būt tādas projekcijas, kurai būtu leņķu vienādība resp. figūru vienveidība un tanī pašā laikā laukumu vienādlielums; tāpēc visas projekcijas izpilda vai nu vienu no šiem noteikumiem, jeb neizpilda nevienu no tiem. Ievērojamais angļu astronoms, bijušais Grinvičas observatorijas direktors Eri (George Biddel Airy, 1801 — 1892) izgudroja pēdējā tipa zenitālo projekciju, uzstādot tai prasību, lai pa visu projekciju novirzu no figūras vienveidības un laukumu vienādības kvadrātu summa būtu vismazākā. Pats izgudrotājs to nosauca par projekciju ar izlīdzinātām kļūdām (Projection with balance of errors).

Klarka projekcija (sk. 12 §, f), kas arī pamatota uz vismazāko kvadrātu metodes, atšķiras no Erī projekcijas ar to, ka tā ir perspektīvā projekcija, kuŗai papriekš jānoteic funkcijas  $\rho = f(\Theta)$  veids pēc (56) formulas un pēc tam tikai jāaprēķina redzes punkta attālums pēc vismazāko kvadrātu principa, kamēr, turpretim, Erī projekcijai jāuziet pati funkcija  $\rho = f(\Theta)$ , pamatojoties uz vismazāko kvadrātu metodes. Tā tad pēdējā gadījumā uzdevums ir sarežģītāks un tā atrise iespējama vienīgi pēc variācijas aprēķiniem.

No divi bezgalīgi tuvām parallēlēm un divi bezgalīgi tuviem meridiāniem uz zemes virsas izveidotas bezgalīgi mazas trapēces pamatu un augstumu nosauksim attiecīgi par  $\alpha$  un  $\beta$ . Uz projekcijas atbilstošās bezgalīgi mazās trapēces pamatu un augstumu nosauksim par  $\alpha + \Delta\alpha$  un  $\beta + \Delta\beta$ . Par  $\Delta\alpha$  un  $\Delta\beta$  te sapratisim  $\alpha$  un  $\beta$  palielināšanos jeb pamazināšanos.

Projekcija būs vienādleņķu, ja starp sfēras un projekcijas bezgalīgi mazo trapēču elementiem pastāv sekoša sakarība, pamatota uz figūru vienveidības:

$$\frac{\alpha + \Delta\alpha}{\beta + \Delta\beta} = \frac{\alpha}{\beta},$$

kas nozīmē proporcionalitāti starp bezgalīgi mazo elementu atbilstošām daļām.

Projekcija, turpretim, būs vienādiela, ja spēkā būs sekošs nol.:

$$(\alpha + \Delta\alpha) (\beta + \Delta\beta) = \alpha\beta.$$

Ja projekcija neapmierina ne pirmo, ne otro prasību, tad uzrakstīto nol. vietā būs sekoši:

$$\frac{\alpha + \Delta\alpha}{\beta + \Delta\beta} : \frac{\alpha}{\beta} = 1 + \varepsilon \dots (a)$$

un 
$$\frac{(\alpha + \Delta\alpha) (\beta + \Delta\beta)}{\alpha\beta} = 1 + \eta \dots (b),$$

kur  $\varepsilon$  var uzskatīt par kontura līdzības maiņas mēru un  $\eta$  par laukuma maiņas mēru.

Izdarot dalīšanu un aprobežojoties vienīgi ar  $\Delta\alpha$  un  $\Delta\beta$  pirmās kārtības lielumiem, dabūsim

no (a): 
$$\varepsilon = \frac{\Delta\alpha}{\alpha} - \frac{\Delta\beta}{\beta}$$

un no (b): 
$$\eta = \frac{\Delta\alpha}{\alpha} + \frac{\Delta\beta}{\beta}.$$

Šo alterāciju kvadrātu summa ir:

$$\varepsilon^2 + \eta^2 = 2 \left( \frac{\Delta\alpha}{\alpha} \right)^2 + 2 \left( \frac{\Delta\beta}{\beta} \right)^2.$$

Atmetīsim konstanto reizuli 2, kuŗam šinī jautājumā nav nozīmes. Projekcijas katrai trapēci iznāks analogiska izteiksme, un tāpēc visai projekcijai alterāciju kvadrātu summa būs:

$$\Sigma \left\{ \left( \frac{\Delta\alpha}{\alpha} \right)^2 + \left( \frac{\Delta\beta}{\beta} \right)^2 \right\} \dots (c)$$

Erī uzstādīja prasību, lai šī summa būtu vismazāka. Nosauksim, tāpat kā agrāk, kaut-kāda punkta leņķisko attājumu no attelojamā sfēras segmenta virsotnes par  $\Theta$  un leņķi starp virzienu uz šo punktu un pieņemto sākuma virzienu par  $\psi$ . Uz projekcijas atbilstošā punkta polārās koordinātas nosauksim par  $\rho$  un  $\psi$ . Ar šiem apzīmējumiem, un pieņemot pagaidām sfēras rādiusu par 1, dabonam:

$\alpha = \text{sn } \Theta \cdot d\psi$  (paralleles elements uz sfēras = paralleles rādiusam  $\text{sn } \Theta \times$  ar leņķa  $\psi$  bezgalīgi mazo pieaugumu); atbilstošais elements uz projekcijas ir  $\alpha + \Delta\alpha = \rho \cdot d\psi$ ; bezgalīgi mazāis elements uz sfēras pa meridiānu  $\beta = d\Theta$  un atbilstošais elements uz projekcijas  $\beta + \Delta\beta = d\rho$ ;

tapēc  $\Delta\alpha = (\rho - \text{sn } \Theta) d\psi$ ,  $\Delta\beta = d\rho - d\Theta$ ;  $\frac{\Delta\alpha}{\alpha} = \frac{\rho}{\text{sn } \Theta} - 1$  un

$$\frac{\Delta\beta}{\beta} = \frac{d\rho}{d\Theta} - 1.$$

Šos lielumus ieliekam (c) izteiksmē un atvietojam  $\Sigma$  ar divkāršo integrālu, t. i., šo lielumu ņemam visu bezgalīgi mazo trapēču laukumiem  $\alpha\beta = \text{sn } \Theta \cdot d\psi \cdot d\Theta$ . Erī prasību analitiski izteic ar to, ka jābūt vismazākam sekošam divkāršam integrālam

$$\int_0^{\Theta_0} \int_0^{2\pi} \left\{ \left( \frac{\rho}{\text{sn } \Theta} - 1 \right)^2 + \left( \frac{d\rho}{d\Theta} - 1 \right)^2 \right\} \text{sn } \Theta \cdot d\psi \cdot d\Theta,$$

kas ņemts norādītās robežās, t. i. kas aptver visu sfēras segmenta virsu no virsotnes līdz mazam riņķim, noteiktam ar leņķisko attājumu  $\Theta_0$ .

Tā kā integrēšana pēc mainīgā  $\psi$  ievēd tikai konstanto reizuli  $2\pi$ , tad atliek vienīgi uzstādīt prasību, lai vienkāršais integrāls

$$J = \int_0^{\Theta_0} \left\{ \left( \frac{\rho}{\text{sn } \Theta} - 1 \right)^2 + \left( \frac{d\rho}{d\Theta} - 1 \right)^2 \right\} \text{sn } \Theta \cdot d\Theta$$

būtu vismazāks.

Ievēdīsim apzīmējumu  $y = \rho - \Theta \dots$  (d),

$$\text{tad } \frac{dy}{d\Theta} = \frac{d\rho}{d\Theta} - 1.$$

Ar šī jaunā mainīgā ievēšanu iepriekšējais integrāls pieņem sekošu veidu:

$$J = \int_0^{\Theta_0} \left\{ \left( \frac{y + \Theta}{\text{sn } \Theta} - 1 \right)^2 + \left( \frac{dy}{d\Theta} \right)^2 \right\} \text{sn } \Theta \, d\Theta.$$

Ievēdot apzīmējumu  $\left\{ \left( \frac{y + \Theta - \text{sn } \Theta}{\text{sn } \Theta} \right)^2 + \left( \frac{dy}{d\Theta} \right)^2 \right\} \text{sn } \Theta = V \dots$  (e)

dabonam

$$J = \int_0^{\Theta_0} V \cdot d\Theta.$$

Integrāla J vismazākās nozīmes aprēķinam variācijas rēķini dod sekošus nol.

$$\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial \Theta} = 0 \dots \text{ (A)}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y'} = 0 \text{ (pie } \Theta = \Theta_0) \dots \text{ (B) *)}$$

\*) Parādīsim (A) un (B) formulu īsu izvedumu. Integrāls J būs vismazākā gadījumā, kad  $\delta \int_0^{\Theta_0} V \, d\Theta = 0 \dots$  (x),

$$\delta \int_0^{\Theta_0} V \, d\Theta = 0 \dots \text{ (x)}$$

kur  $\delta$  ir variācijas zīme un  $V = F(y, y', \Theta)$ , saskaņā ar (e) formulu, pie kam F ir funkcijas zīme. Lietojot variācijas zīmi kā diferencēšanas zīmi, dabonam:

$$\begin{aligned} \delta \int_0^{\Theta_0} V \, d\Theta &= \int_0^{\Theta_0} V \, d\delta\Theta + \int_0^{\Theta_0} \delta V \, d\Theta = \int_0^{\Theta_0} V \cdot \delta\Theta + \\ &+ \int_0^{\Theta_0} (\delta V \cdot d\Theta - dV \cdot \delta\Theta) \dots \text{ (y)} \end{aligned}$$

$$\text{Bet } \delta V = \frac{\partial V}{\partial y} \delta y + \frac{\partial V}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial V}{\partial \Theta} \delta \Theta$$

$$\text{un } dV = \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial y'} dy' + \frac{\partial V}{\partial \Theta} d\Theta.$$

Pareizinot pirmo nol. ar  $d\Theta$ , otro ar  $\delta\Theta$  un atņemot otro rezultātu no pirmā, dabūsim:

$$\delta V \cdot d\Theta - dV \cdot \delta\Theta = \frac{\partial V}{\partial y} (\delta y \cdot d\Theta - dy \cdot \delta\Theta) + \frac{\partial V}{\partial y'} (\delta y' \cdot d\Theta - dy' \cdot \delta\Theta) \dots \quad (z)$$

Ievedīsim apzīmējumu:

$$\delta y - y' \delta\Theta = \omega.$$

Diferencējot un pārmainot  $d$  un  $\delta$  zīmes, dabūsim:

$$\delta \cdot dy - dy' \cdot \delta\Theta - y' \cdot d\delta\Theta = d\omega;$$

tā kā  $dy = y' d\Theta$ , tad  $\delta dy = \delta y' \cdot d\Theta + y' \delta d\Theta$  un

$$\delta y' \cdot d\Theta - dy' \cdot \delta\Theta = d\omega;$$

caur to (z) nol. pieņem veidu:

$$\delta V d\Theta - dV \delta\Theta = \frac{\partial V}{\partial y} \omega d\Theta + \frac{\partial V}{\partial y'} d\omega$$

un (y) nol. pārvēršas par sekošu:

$$\delta \int_0^{\Theta_0} V d\Theta = \int_0^{\Theta_0} V \delta\Theta + \int_0^{\Theta_0} \frac{\partial V}{\partial y} \omega d\Theta + \int_0^{\Theta_0} \frac{\partial V}{\partial y'} d\omega.$$

Integrējot pēdējo integrālu pa daļām dabūjam:

$$\int_0^{\Theta_0} \frac{\partial V}{\partial y'} d\omega = \int_0^{\Theta_0} \omega \cdot \frac{\partial V}{\partial y'} - \int_0^{\Theta_0} \omega \frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial \Theta} d\Theta.$$

Nemot vērā (x) sākuma nol. iznāk:

$$\delta \int_0^{\Theta_0} V d\Theta = \int_0^{\Theta_0} \left( V \delta\Theta + \frac{\partial V}{\partial y'} \omega \right) + \int_0^{\Theta_0} \left( \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial \Theta} \right) \omega d\Theta = 0.$$

Lai šo divu binomu summa būtu nulle, ir vajadzīgs, lai katrs binoms atsevišķi ir  $=0$ ; jo ja otrais binoms nebūtu  $=0$ , tad, pamatojoties uz variāciju  $\delta y$  un  $\delta\Theta$  patvaļību, vienmēr varētu sastādīt  $\omega$  funkciju tā, lai apakšintegrāla funkcijai būtu vienāda zīme ar pirmo binomu un tad  $\delta \int_0^{\Theta_0} V d\Theta$  nebūtu

nulle. Tā kā pie  $\Theta = \Theta_0$  variācija  $\delta\Theta = 0$ , tad arī pirmam binomam un caur to arī tā otram locēklim ir jābūt  $=0$ . Šos slēdzienus arī izteic (A) un (B) nol.

(A) nol. noder funkcijas  $\rho = f(\Theta)$  veida noteikšanai un (B) nol. — integrāla konstantā noteikšanai (A) nolīdzinājumā.

No (e) izteiksmes:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{2(y + \Theta - \operatorname{sn} \Theta)}{\operatorname{sn} \Theta}, \quad \frac{\partial V}{\partial y'} = 2 \frac{dy}{d\Theta} \operatorname{sn} \Theta,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial \Theta} = 2 \cdot \frac{d^2 y}{d\Theta^2} \operatorname{sn} \Theta + 2 \frac{dy}{d\Theta} \cos \Theta \dots (f).$$

Tāpēc, pēc (A) nol. reizināšanas ar  $-\operatorname{sn} \Theta$  un izdalīšanas ar 2, tas dabū sekošu veidu:

$$\operatorname{sn}^2 \Theta \frac{d^2 y}{d\Theta^2} + \operatorname{sn} \Theta \cos \Theta \frac{dy}{d\Theta} - y = \Theta - \operatorname{sn} \Theta \dots (g)$$

Šī diferenciālā nol. integrēšanai ievēd jaunu mainīgo  $x$ , noteiktu sekoši:

$$x = \operatorname{sn} \Theta \cdot \frac{dy}{d\Theta} + y \dots (h);$$

tad

$$\frac{dx}{d\Theta} = \operatorname{sn} \Theta \frac{d^2 y}{d\Theta^2} + \cos \Theta \frac{dy}{d\Theta} + \frac{dy}{d\Theta}.$$

Šo nozīmi ieliekam iekš (g); tad, ievērojot (d) apzīmējumu, dabonam:

$$\operatorname{sn} \Theta \frac{dx}{d\Theta} - x = \Theta - \operatorname{sn} \Theta \dots (i)$$

Ar šo paņēmieni izdevās pārveidot otrās pakāpes diferenciālo nol. (g) par pirmās pakāpes diferenciālo nol. (i).

Lai integrētu (i) nol. reizināsim tā abas daļas ar  $\frac{d\Theta}{\operatorname{sn}^2 \frac{\Theta}{2}}$ ; tad

$$2 \operatorname{cotg} \frac{\Theta}{2} dx + 2x d \operatorname{ctg} \frac{\Theta}{2} = \Theta \frac{d\Theta}{\operatorname{sn}^2 \frac{\Theta}{2}} - \operatorname{sn} \Theta \frac{d\Theta}{\operatorname{sn}^2 \frac{\Theta}{2}}.$$

Ņemsim vērā, ka:

$$\int \left( \operatorname{cotg} \frac{\Theta}{2} dx + x d \operatorname{ctg} \frac{\Theta}{2} \right) = x \operatorname{cotg} \frac{\Theta}{2},$$

$$\int \Theta \cdot \frac{d\Theta}{\operatorname{sn}^2 \frac{\Theta}{2}} = -2\Theta \operatorname{cotg} \frac{\Theta}{2} + 4 \ln \operatorname{sn} \frac{\Theta}{2},$$

$$\int \operatorname{sn} \theta \frac{d\theta}{\operatorname{sn}^2 \frac{\theta}{2}} = 4 \ln \operatorname{sn} \frac{\theta}{2};$$

tad (i) nol. integrāls ir:

$$x \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2} = -\theta \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2} + C,$$

$$\text{jeb } x = -\theta + C \operatorname{tg} \frac{\theta}{2},$$

kur C ir pie integrēšanas ienakuša un pagaidām patvaļīga konstante. Atvietojot pagaidlielumu x ar tā izteiksmi (h), dabūjam jaunu diferenciālnol.:

$$\operatorname{sn} \theta \frac{dy}{d\theta} + y = -\theta + C \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}.$$

Šī diferenciālā nol. integrēšanai reizināsim tā abas daļas

$$\text{ar } \frac{d\theta}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}, \text{ tad:}$$

$$2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} dy + 2y d \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = -\theta \frac{d\theta}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} + C \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \frac{d\theta}{\cos^2 \frac{\theta}{2}};$$

bet

$$\int \left( \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} dy + y d \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) = y \operatorname{tg} \frac{\theta}{2},$$

$$\int \theta \frac{d\theta}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} = 2\theta \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + 4 \ln \cos \frac{\theta}{2},$$

$$\int \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \frac{d\theta}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} = \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2};$$

tāpēc

$$2y \cdot \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = -2\theta \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - 4 \ln \cos \frac{\theta}{2} + C \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} + C_1,$$

kur C<sub>1</sub> ir otra patvaļīga konstante. No šejienes:

$$y = -\theta - 2 \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2} \ln \cos \frac{\theta}{2} + \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \frac{C_1}{2} \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2} \dots (k)$$

Lai noteiktu konstantes C un C<sub>1</sub>, tad jāapskata tādi atsevišķi gadījumi, kas dod nol., no kuriem ir iespējams noteikt C un C<sub>1</sub>;

piemēram, projekcijas centrā  $\rho$  un  $\Theta$  ir nulles un tad arī, uz (d) nol. pamata  $y=0$ ; ja tagad (k) nol. ievietosim  $y=0$ ,  $\Theta=0$ , tad iznāks ka  $C_1=0$  un tāpēc šis nol. pieņem sekošu vienkāršāku veidu:

$$y = -\Theta - 2 \cotg \frac{\Theta}{2} \ln \cos \frac{\Theta}{2} + \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} \quad (l).$$

Lai noteiktu konstanti  $C$ , ņemsim no šī pēdējā nol.  $y$  atvasināto pēc  $\Theta$ :

$$\frac{dy}{d\Theta} = \frac{\ln \cos \frac{\Theta}{2}}{\operatorname{sn}^2 \frac{\Theta}{2}} + \frac{C}{4 \cos^2 \frac{\Theta}{2}}.$$

Šai atvasinātai uz (B) nol. jeb tam identiska (f) nol. pamata pie  $\Theta=\Theta_0$  ir jābūt  $=0$ ; tāpēc

$$\frac{\ln \cos \frac{\Theta_0}{2}}{\operatorname{sn}^2 \frac{\Theta_0}{2}} + \frac{C}{4 \cos^2 \frac{\Theta_0}{2}} = 0.$$

No šejienes

$$C = -4 \cotg^2 \frac{\Theta_0}{2} \ln \cos \frac{\Theta_0}{2}.$$

Šo  $C$  nozīmi ieliekam (l) nolīdzinājumā un no (d) formulas ievadam atpakaļ  $\rho$ ; tad iznāk:

$$\rho = 2 \left( \cotg \frac{\Theta}{2} \ln \sec \frac{\Theta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} \cotg^2 \frac{\Theta_0}{2} \ln \sec \frac{\Theta_0}{2} \right).$$

Beidzot ievadam vēl sfēras rādiusu  $R$  un naturālos logaritmus atvietojam ar parastiem, Brigsa logaritmiem; galu galā dabonam sekošu rādiusa vektora  $\rho$  sakarību ar leņķi  $\Theta$ :

$$\rho = \frac{2R}{M} \left( \cotg \frac{\Theta}{2} \log \sec \frac{\Theta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} \cotg^2 \frac{\Theta_0}{2} \log \sec \frac{\Theta_0}{2} \right). \quad (154)$$

Šinī formulā  $R$  ir zemes rādius, samazināts dotā galvenā mērogā,  $M$  — Brigsa logaritmu modulis,  $\Theta$  — ar rādiusu  $\rho$  noteiktā almukantarata leņķiskais attālums no pieskares punkta,  $\Theta_0$  — projekcijas malējā almukantarata leņķiskais attālums no pieskares punkta. Lai iepriekš noteiktu galveno mērogu, tad nepieciešami zināt šī malējā almukantarata rādiusu  $\rho_0$ ; lai to dabūtu, tad iepriekšējā (154) nol. ieliek  $\Theta$  vietā  $\Theta_0$ ; iznāk:

$$\rho_0 = \frac{4R}{M} \cotg \frac{\Theta_0}{2} \log \sec \frac{\Theta_0}{2}. \quad (155)$$

Ja, piemēram,  $\Theta_0 = 90^\circ$ , tad  $\rho_0 = 1,386 R$ .

Palielinājot  $\Theta_0$  dabūsim tādu nozīmi, no kuŗas  $\rho_0$  sāk mazināties. Šo maksimālo  $\Theta_0$  dabū pielīdzinot nullei  $\rho_0$  atvasināto pēc  $\Theta_0$ ; tad iznāk transcendents nol.:

$$\ln \sec \frac{\Theta_0}{2} = \operatorname{sn}^2 \frac{\Theta_0}{2}.$$

Šī nol atrise tiešā ceļā nav iespējama; ar vairākkārtīgiem mēģinājumiem dabonam  $\Theta_0 = 126^\circ 25'$ . Ar šo īpašību Erī projekcija atšķiras no citām zenitālām projekcijām, jo tām konstruēšanu var turpināt līdz pat  $\Theta_0 = 180^\circ$ , ieliekot leņķiskā attāluma  $\Theta_0$  vietā vajadzīgos lielumus.

Ja konstruē polāro Erī projekciju, t. i., ja pieskares plakne skar zemi polā, tad leņķi  $\Theta$  un  $\Theta_0$  būs kaut-kādas patvaļīgas un malejās paralēles platumu  $\varphi$  un  $\varphi_0$  papildinājumi līdz  $90^\circ$ . Galvenos virzienos mērogus noteic pēc jau zināmām formulām:

$$a = \frac{\rho}{R \operatorname{sn} \Theta}, \quad b = \frac{d\rho}{R d\Theta}.$$

Ieliksīm te  $\rho$  nozīmes no (154) izteiksmes; tad

$$a = \frac{\log \sec \frac{\Theta}{2}}{M \operatorname{sn}^2 \frac{\Theta}{2}} + \frac{\rho_0 \operatorname{cotg} \frac{\Theta_0}{2}}{4R \cos^2 \frac{\Theta}{2}}. \quad (156)$$

$$b = 1 - \frac{\log \sec \frac{\Theta}{2}}{M \operatorname{sn}^2 \frac{\Theta}{2}} + \frac{\rho_0 \operatorname{cotg} \frac{\Theta_0}{2}}{4R \cos^2 \frac{\Theta}{2}}. \quad (157)$$

Kad dots sfēras segmenta leņķis  $\Theta_0$ , līdz kuŗam projekcija jākonstruē, tad pēc (154) — (157) formulām ir iespējams aprēķināt visus projekcijas konstruēšanai un izpētišanai nepieciešamos skaitļus.

Zemāk dota tabula ar skaitļiem, kuŗi vajadzīgi puslodes attelošanai Erī projekcijā, t. i., pieņemot  $\Theta_0 = 90^\circ$ ; leņķiskais attālums starp atsevišķiem almukantarātiem ir  $15^\circ$ . Šinī gadījumā pēc (155) formulas iznāk  $\rho_0 = 1,386 R$ ; projekcijas centrā, kur  $\Theta = 0^\circ$ ,  $a = b = 0,847$ . Lai Erī projekcijai aprēķinātos skaitļus varētu salīdzināt ar citu zenitālo projekciju skaitļiem, tad dabūtie  $\rho$ ,  $a$  un  $b$  pareizināti ar daļas  $0,847$  apgriesto lielumu  $1,181$ . Rādius  $R$  pieņemts par 1.

$\theta$	$\rho$	a	b	p	2 $\omega$
0 <sup>0</sup>	0,000	1,000	1,000	1,000	0 <sup>0</sup> 0'
15	0,262	1,012	1,002	1,014	0 33
30	0,525	1,050	1,009	1,059	2 19
45	0,791	1,118	1,022	1,143	5 08
60	1,061	1,225	1,047	1,284	8 59
75	1,341	1,388	1,094	1,518	13 39
90	1,637	1,637	1,181	1,934	18 38

Šīs tabulas skaitļi, kā redzams, ir ļoti tuvi Breizinga projekcijas atbilstošiem skaitļiem (sk. 137. lpp.).

## IV. nodaļa.

### Cilindriskās projekcijas.

21. **Vispārīgā teorija.** — Iedomāsimies taisnu cilindri, kas vai nu skar sferu pa kādu lielo riņķi, jeb šķeļ sferu pa diviem maziem riņķiem; pēdējā gadījumā šie riņķi būs vienādi un vienādos attājumos no centra. Tājāki iedomāsimies, ka ievēribu pelnošie punkti no sfēras virsas ir pārnesti pēc iepriekš uzstādītiem noteikumiem uz cilindra virsu un ka pēc tam cilindrs pārgriezts pa kādu veiduli un atritināts uz plaknes. Dabūtais sfēras punktu attēls uz plaknes ir cilindriskā projekcija. Projekcija būs noteikta, ja zināsim: 1) cilindra ass stāvokli, 2) cilindra pamatriņķa rādiusa lielumu (atkarīgu no tā, vai cilindrs pieskarās sfērai, jeb šķeļ to) un 3) likumu, pēc kuŗa pārnes punktus no sfēras virsas uz cilindra virsu. Vienkāršākos un biežāki lietojamos gadījumos cilindra ass sakrīt ar zemes griezes asi; tad zemes meridiānu plakņu turpinājumi krusto cilindra virsu pa vienāda attājuma paralēlām taisnēm, bet paralēles ir pret meridiāniem, stateniskas taisnes. Paralēļu attājumus no ekvatora aprēķina dažādi, atkarībā no iepriekš uzstādītām prasībām. Šādas projekcijas sauc par vienkāršām cilindriskām projekcijām. Ja cilindra ass sakrīt ar ekvatora plakni un ar zemes griezes asi veido taisnu leņķi, tad dabonam, tā saucamās šķērsas cilindriskās projekcijas. Ja cilindra ass ar zemes griezes asi neveido ne  $0^\circ$  nedz  $90^\circ$ , bet kādu citu leņķi, tad dabonam slīpas cilindriskās projekcijas. Abos pēdējos gadījumos meridiāni un paralēles uz projekcijas ir liknes, kas konstruējamās pēc punktiem.

Lai izvestu mēroga formulu vienkāršām cilindriskām projekcijām, ņemsim (3) formulu:

$$m^2 = \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{(R d\varphi)^2 + (R \cos \varphi d\lambda)^2}$$

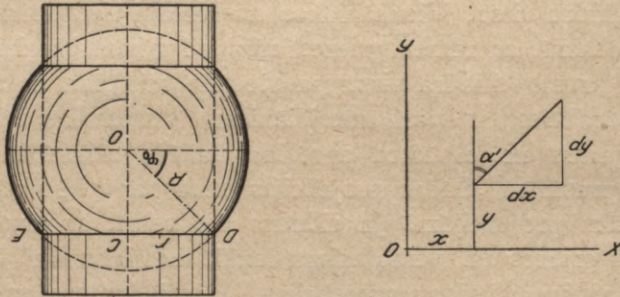
Formulas būs vispārīgas, ja ņemsim cilindri, kas šķeļ sferu pa divām paralēlēm, noteiktām ar platumu  $\pm \varphi_0$ . Taisni, kas uz projekcijas attēlos ekvatoru, pieņemsim par X asi un statēni pret to — vienu no meridiāniem — par Y asi (49. zīm.). Šķeļošā cilindra pamatriņķa rādius  $DC = r = R \cos \varphi_0$ ; uz projekcijas, atritinot cilindri, dabūsim atbilstoši  $x = r \lambda = R \lambda \cos \varphi_0$ , kapēc  $dx = R \cos \varphi_0 d\lambda$ ; šo pēdējo no-

zīmi un no formulas  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos \varphi \, d\lambda}{d\varphi}$  (sk. 4. form. 28. lpp.) noteikto  $d\lambda$  no zīmi ieliksīm mēroga formulā; dabūsim:  $m^2 = \left(\frac{dy}{R \, d\varphi}\right)^2 \cos^2 \alpha + \left(\frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi}\right)^2 \operatorname{sn}^2 \alpha \dots$  (a)

Ja zemi uzskatīsim par sferoidu un izdarīsim analogiskus aprēķinus, tad dabūsim:

$$m^2 = \left[\frac{dy}{a(1-e^2)d\varphi}\right]^2 (1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)^3 \cos^2 \alpha + \left(\frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi \sqrt{1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi_0}}\right)^2 (1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi) \operatorname{sn}^2 \alpha \dots$$
 (b)

No (a) formulas iznāk:  $m = \frac{1}{R} \sqrt{\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 \cos^2 \alpha + \left(\frac{R \cos \varphi_0}{\cos \varphi}\right)^2 \operatorname{sn}^2 \alpha}$ . (158)



49. zīm.

Šī ir mēroga formula gadījumā, kad cilindrs šķēļ sfēru pa paraleli, noteiktu ar plātumu  $\varphi_0$ . Ja cilindrs skaļ sfēru pa ekvātoru, tad  $\varphi_0 = 0^\circ$ ,  $\cos \varphi_0 = 1$  un formula pieņem sekošu veidu:

$$m = \frac{1}{R} \sqrt{\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 \cos^2 \alpha + \left(\frac{R}{\cos \varphi}\right)^2 \operatorname{sn}^2 \alpha}$$
 (159)

Ja (b) formulā ieliksīm  $e = 0$ , t. i., pieņemsim zemi par sfēru, tad dabūsim (158) formulu; ja bez tam vēl pieņemsim  $\varphi_0 = 0^\circ$ , tad iznāks (159) form.

Formulas rāda, ka mērogs ir atkarīgs no  $\varphi_0$ ,  $\varphi$ ,  $y$  un  $\alpha$ , t. i., no šķeļošās paraleles plātuma, punkta vietas uz sfēras resp. sferoida, ordinātas  $y$  aprēķināšanas principa un bezgalīgi maza elementa virziena resp. azimuta.

Azimutu  $\alpha'$  uz projekcijas noteic nol.:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{dx}{dy} = \frac{R \cos \varphi_0 d\lambda}{dy} \dots (c)$$

Sakarību starp azimutiem uz projekcijas un sfēras dabūsim izdalot  $\operatorname{tg} \alpha'$  ar  $\operatorname{tg} \alpha$ , tad:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{R \cos \varphi_0 d\varphi}{\cos \varphi dy} \operatorname{tg} \alpha. \quad (160)$$

Ja zeme būtu pieņemta par elipsoidu, tad iznāktu:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{a(1-e^2) \cos \varphi_0 \cdot d\varphi}{(1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi) \sqrt{1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi_0} \cdot \cos \varphi \cdot dy} \operatorname{tg} \alpha \quad (161)$$

Zemei, kā sfērai, ar pieskares cilindri:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{R d\varphi}{\cos \varphi dy} \operatorname{tg} \alpha. \quad (162)$$

Mēroga un azimuta formulās neieiet gaņums  $\lambda$ ; tāpēc punktiem uz vienas paralēles mērogi ir vienādi un cilindriskās projekcijas izokoli iet pa paralēlēm.

(158) un (159) formulas atbilst zenitālo projekciju (125) formulai; (160), (161) un (162) formulas atbilst (126) formulai; tāpēc te vietā tie paši pētījumi, kādi izdarīti ar zenitālām projekcijām.

Lai pēc (158) formulas dabūtu vislielāko un vismazāko mērogu, ņemsim tās kvadrāta pirmo un otro atvasināto pēc mainīgā  $\alpha$ :

$$\frac{d(m^2)}{d\alpha} = \frac{1}{R^2} \left[ \left( \frac{R \cos \varphi_0}{\cos \varphi} \right)^2 - \left( \frac{dy}{d\varphi} \right)^2 \right] \operatorname{sn} 2\alpha;$$

pirmā atvasinātā būs nulle pie  $\alpha = 0^\circ$  un  $= 90^\circ$ , t. i. mērogs būs max. un min. pa meridiāniem un paralēlēm.

Otrā atvasinātā

$$\frac{d^2(m^2)}{d\alpha^2} = \frac{1}{R^2} \left[ \left( \frac{R \cos \varphi_0}{\cos \varphi} \right)^2 - \left( \frac{dy}{d\varphi} \right)^2 \right] 2 \cos 2\alpha \dots (c)$$

rāda, ka te jāizšķir trīs gadījumi.

$$1. \quad \frac{R \cos \varphi_0}{\cos \varphi} > \frac{dy}{d\varphi}, \text{ jeb } dy < R \cos \varphi_0 \frac{d\varphi}{\cos \varphi} \text{ un}$$

$$y < C \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \dots (d),$$

kur  $C$  ir patvaļīga pie integrēšanas ienākusi konstante. Katrai cilindriskai projekcijai ordināta  $y$  ir  $\varphi$  funkcija; ja šī funkcija ir tāda,

ka tiek apmierināta tikko dabūtā nevienādība, tad reizinātājs (c) izteiksmes kvadrātiekvās ir pozitīvs un mēroga otrā atvasinātā pēc mainīgā  $\alpha$  būs pozitīva pie  $\alpha=0^0$  un negatīva pie  $\alpha=90^0$ ; t. i. pastāvot (d) nevienādībai, mērogs pa meridiāniem būs vismazāks un pa paralēlēm vislielāks.

$$2. \frac{R \cos \varphi_0}{\cos \varphi} < \frac{dy}{d\varphi}, \text{ jeb } y > C \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \dots (e); \text{ reizinātājs (c)}$$

izteiksmes kvadrātiekvās ir negatīvs; tāpēc pie  $\alpha=90^0$  otrā atvasinātā ir pozitīva un mērogs ir vismazākais; pie  $\alpha=0^0$  otrā atvasinātā ir negatīva un mērogs būs vislielāks; tāpēc, pastāvot (e) nevienādībai, mērogs pa meridiāniem ir vislielāks un pa paralēlēm vismazāks.

3. Ja, beidzot, (c) formulas reizulis kvadrātiekvās ir 0, tad

$$\frac{R \cos \varphi_0}{\cos \varphi} = \frac{dy}{d\varphi} \text{ un } y = R \cos \varphi_0 \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) + C \dots (f).$$

Tā kā pie  $\varphi=0$ ,  $y=0$ , tad  $C=0$ . Pēc (158) formulas  $m = \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi}$ , t. i. mērogs nav atkarīgs no azimuta un ir konstants visos no viena un tā paša punkta izejošos virzienos; pati projekcija ir viēnādlenķu resp. konforma. Pāriesim tagad pie (160) formulas pētīšanas; formulas labā pusē koeficientu pie  $\operatorname{tg} \alpha$  nosauksim atkal par  $k$ , tad

$$k = \frac{R \cos \varphi_0 d\varphi}{\cos \varphi dy}. \quad (163)$$

Tālāki iznāk (128)—(131) formulas, tikai ar to starpību, ka šinī gadījumā  $k$  jāņem no (163) form.

Kad  $k=1$ , tad pēc (160) nol.  $\alpha'=\alpha$  un projekcija ir konforma; šinī gadījumā (163) nol. dod noteikumu (f).

**22. Kvadrātiskā projekcija.** — (La projection plate carée; quadratische Plattkarte). Visvienkāršākā un visvieglākā konstruēšanas ziņā netikvien no cilindriskām, bet vispār no projekcijām ir kvadrātiskā jeb plaknes projekcija.

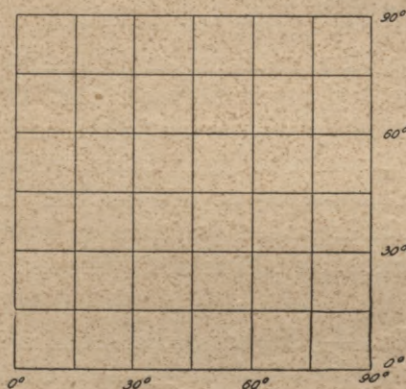
Šo projekciju Dzenovieši lietojuši jau sākot no 1318. g., lai gan daži domā, ka to 1438. g. izgudrojis Portugāles princis Indriķis Jūrnies (1394—1460). Šinī projekcijā cilindrs skaņ sferu pa ekvātoru un zemes meridiānu plakņu turpinājumi šķēļ cilindra virsu pa veidulēm, kas uz projekcijas ir stateniskas pret ekvātoru, savā starpā paralēlos un viēnādos attāļumos  $x=R\lambda$  viena no otras. Paralēles attēlo ar ekvātoram paralēlēm taisnēm un to attāļumu  $y$  no ekvātora ņem vienlīdzīgu iztaisnotam meridiāna lokam starp ekvātoru un paralēli, noteiktu ar platumu  $\varphi$ ; tāpēc  $y=R\varphi$ . Tā kā uz kartēm meridiānus un pa-

rallēles parasti novelk pēc vienāda gradu skaita, tad pieņemot zemi par sfēru un nosaucot tās rādiusu, samazinātu projekcijas galvenā mērogā, par  $R$ , dabūsim:

$$x = y = R\lambda = R\varphi. \quad (164)$$

Saprotams, ka  $\lambda$  un  $\varphi$  te jāizteic radiānos, resp. radiusa vienībās.

Projekcijas tīkls dod vienādu kvadrātu sistēmu, kā to rāda 50. zīm., kur attēlota ziemeļpuslodes ceturta daļa (austruma vai rietuma) ar meridiāniem un paralēlēm ik pa  $15^\circ$  gaļumā un platumā.



50. zīm.

Šinī projekcijā  $\varphi_0 = 0^\circ$ ; tāpēc no (159) form., ņemot vērā ka pēc (164) form.  $dy = R d\varphi$ , dabonam:

$$m = \sqrt{\cos^2 \alpha + \sec^2 \varphi \operatorname{sn}^2 \alpha}. \quad (165)$$

$$\text{No (163): } k = \sec \varphi. \quad (166)$$

$$\begin{aligned} \text{No (160) vai (162): } \operatorname{tg} \alpha' &= \\ &= \sec \varphi \cdot \operatorname{tg} \alpha \end{aligned} \quad (167)$$

$$\text{No (129): } \operatorname{tg} (\alpha' - \alpha) =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2 \operatorname{sn}^2 \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg} \alpha}{\cos \varphi + \operatorname{tg}^2 \alpha} \end{aligned}$$

$$\text{No (130): } \operatorname{tg} \alpha_0 = \pm \sqrt{\cos \varphi}$$

$$\begin{aligned} \text{No (131): visliel. } \operatorname{tg} (\alpha'_0 - \alpha_0) &= \\ &= \operatorname{sn}^2 \frac{\varphi}{2} \sqrt{\sec \varphi}. \end{aligned}$$

Mēroga kvadrāta otrā atvasināta pēc  $\alpha$  no (165) formulas ir:  $\frac{d^2(m^2)}{d\alpha^2} = 2 \cos 2\alpha (\sec^2 \varphi - 1)$ ; tā kā  $\sec \varphi \geq 1$ , tad lielums iekavās pozitīvs vai nulle; tāpēc mēroga minimums ir pie  $\alpha = 0^\circ$  un maksimums pie  $\alpha = 90^\circ$ ; formula dod:

$$\left. \begin{aligned} m_{\max} &= m_p = a = \sec \varphi \\ m_{\min} &= m_m = b = 1 \end{aligned} \right\} \quad (168)$$

Pie  $\varphi = 0^\circ$ ,  $m_p = m_m = 1$ ; tāpēc uz ekvatora indikatrisas ir apli; visos citos punktos  $m_p > m_m$  un indikatrisas vienmēr izstieptas pa paralēli. Laukumu mērogs  $p = ab = \sec \varphi$ .

Leņķu vislielākā izmaiņa pēc (29) formulas ir:

$$\operatorname{sn} \omega = \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (169)$$

Sekojošā tabulā doti skaitliski lielumi kvadrātiskai projekcijai meridiāna punktiem ik pa  $15^\circ$  platumā, pieņemot  $R = 6370\,289,511$  m un pieņemot  $R = 1$ .

$\varphi$	y (metros)	y centi- metros mērogā 1:50 000 000	y pie $R=1$	a	b	p	2 $\omega$
$\pm 90^\circ$	10 006427,2	20,01	1,571	$\infty$	1	$\infty$	180° 0'
75	8 338689,1	16,68	1,309	3,864	1	3,864	72 09
60	6 670951,5	13,34	1,047	2,000	1	2,000	38 57
45	5 003213,6	10,01	0,785	1,414	1	1,414	19 45
30	3 335475,7	6,67	0,524	1,155	1	1,155	8 14
15	1 667737,8	3,34	0,262	1,035	1	1,035	1 59
0		0	0,000	1,000	1	1,000	0 0

No formulām un šīs tabulas skaitļiem redzams, ka kvadrātiskā projekcija nav ne laukumu pareizā, ne leņķu pareizā projekcija. Ekvātorā tuvumā izmaiņas nav lielas, bet tās pieaug ar attālināšanos uz ziemeļiem un dienvidiem no tā. Uz ekvātorā un meridiāna virzienā mērogs nemainās; mērogs pa paralēlēm pieaug ar attālināšanos no ekvātorā; tāpēc figūras pa paralēlēm izstiepjas un jo tālāki no ekvātorā, jo vairāk. Tāpēc šīnī projekcijā pietiekoši labi ir attēlot tropiskus apgabalus un debess zodiāka joslu.

**23. Vienādu taisnstūru projekcija.** — Šo projekciju izgudrojis ievērojamais senātnes filozofs un matemātiķis Anaksimandrs (310—547). Šīs projekcijas konstruēšanai iedomājas cilindri tā, lai tas šķeltu sfēru pa divām paralēlām, kas vienādos attājumos no ekvātorā; saprotams, kā šīnī gadījumā cilindra ass sakritis ar zemes asi (sk. 49. zīm.). Sfēras punktus pārnes uz cilindra virsu un pēdējo atritina uz plaknes. Ja par  $R$  nosauksim zemes sfēras rādiusu, samazinātu galvenā mērogā, par  $\pm \varphi_0$  platumus paralēlēm, pa kurām cilindrs šķel sfēru, tad šķeļošo paralēļu rādius  $r = R \cos \varphi_0$ ; ja  $\lambda$  ir garumu starpība starp diviem blakus meridiāniem uz sfēras, tad uz projekcijas attājumu  $x$  starp tiem pašiem meridiāniem noteic ar nol.:

$$x = R \cos \varphi_0 \cdot \lambda . \quad (170)$$

Ekvātorā plakni attēlo ar taisni un pieņem par  $x$  asi; sākuma meridiānu par  $y$  asi; ar platumu  $\varphi$  noteiktās paralēles attājumu  $y$  no taisnes, kas attēlo ekvātoru, noteic ar formulu

$$y = R \varphi . \quad (171)$$

Šīs formulas rāda, ka apskatāmā projekcijā ar meridiāniem un paralēlēm norobežotās sfēriskās trapēces attēlojas kā vienādi taisnstūri; to garākās malas ir vienādas ar iztaisnotiem meridiānu lokiem starp attiecīgām paralēlēm, bet mazās malas ir vienādas ar šķeļošo paralēļu iztaisnotiem lokiem starp attiecīgiem meridiāniem.

Pēc (158) formulas mērogs būs:  $m = \sqrt{\cos^2 \alpha + \left(\frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi}\right)^2 \operatorname{sn}^2 \alpha}$ .

Mēroga kvadrāta otrā atvasinātā pēc azimuta ir  $\left[\left(\frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi}\right)^2 - 1\right] 2 \cos 2\alpha$ ;

tā rāda, ka pie  $\varphi > \varphi_0$  vislielākais mērogs ir pa paralēlēm un vismazākais pa meridiāniem; pie  $\varphi = \varphi_0$ , t. i. uz abām šķeļošām paralēlēm mērogs ir 1; pie  $\varphi < \varphi_0$  vislielākais mērogs ir pa meridiāniem un vismazākais pa paralēlēm.

Mērogs pa meridiāniem  $m_m = 1$  un pa paralēlēm

$$m_p = \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi}. \quad (172)$$

Tā tad, pa meridiāniem un abām šķeļošām paralēlēm mērogs ir 1, bet uz visām citām paralēlēm mērogi ir vienlīdzīgi šķeļošas paraleles platuma kosinusam, dalītam ar apskatāmās paraleles platuma kosinusu; uz paralēlēm, kuŗas ir starp šķeļošām paralēlēm, mērogi ir mazāki par 1, bet uz paralēlēm, kas aiz šķeļošām paralēlēm, mērogi ir lielāki par galveno.

Lielāko leņķu izmaiņu uz projekcijas aprēķina pēc (29) formulas:

$$\operatorname{sn} \omega = \pm \operatorname{tg} \frac{\varphi + \varphi_0}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi - \varphi_0}{2}. \quad (173)$$

Kad šinī formulā  $\varphi < \varphi_0$ , tad jāņem plus; kad  $\varphi > \varphi_0$ , tad mīnus.

51. zīm. attēlo vienādtaisnstūru projekcijā pussfēru, projicētu uz cilindri, kas šķeļ sfēru pa paralēlēm, noteiktām ar platumiem  $+60^\circ$  un  $-60^\circ$ .

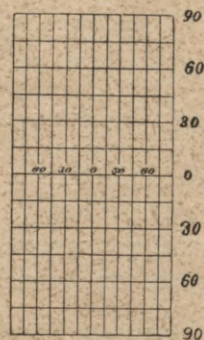
Tāļāki dota tabula ar svarīgākiem skaitliskiem datiem šai projekcijai, ņemot platumu intervālus  $15^\circ$  un sfēras rādiusu  $R = 1$ .

$\varphi$	y	$m_m$	$m_p$	p	$2 \omega$
$90^\circ$	1,571	1	$\infty$	$\infty$	$180^\circ 0'$
75	1,309	1	1,932	1,932	37 04
60	1,047	1	1,000	1,000	0 0
45	0,785	1	0,707	0,707	19 52
30	0,524	1	0,577	0,577	31 05
15	0,262	1	0,518	0,518	37 04
0	0,000	1	0,500	0,500	38 57

No šīs tabulas un iepriekšējās projekcijas attiecīgās tabulas, tāpat no (171) un (164) formulu salīdzinājuma redzams, ka ordinātas  $y$  vienādtaisnstūru un kvadrātiskā projekcijā ir vienādas.

Abscisas  $x$ , resp. attālumu starp meridiāniem, aprēķinam šinī gadījumā jāņem pēc (170) formulas  $R=1$ ,  $\varphi_0=60^\circ$  un  $\lambda=15^\circ = \frac{\pi}{12}$ .

Vienādtaisnstūru projekciju dažreiz lieto nelielu zemes gabalu attēlošanai, ņemot par šķeļošo paralēli valsts vidējo paralēli.



51. sīm.

**24. Nevienādu taisnstūru vienādliela projekcija.** — Taisnstūru projekcijā paralēles var novilkt ar tādu aprēķinu, lai projekcija būtu laukumu pareiza. Šāda projekcija sevišķi noderīga gadījumos, kad jāattēlo zemes josla starp divām tuvām paralēlēm.

Nosauksim par  $\varphi_0$  platumu paralēlei, pa kuru cilindrs šķēļ sfēru; tad cilindra un paralēles rādius  $r=R \cos \varphi_0$ . Attīsim cilindri uz plaknes;  $y$  asi virzīsim pa vienu no meridiāniem, bet par  $x$  asi ņemsim paralēli ar platumu  $\varphi_0$ . Nosauksim par  $s$  attālumu no šķeļošās paralēles uz projekcijas līdz paralēlei, noteiktai ar platumu  $\varphi$ ; uz sfēras tam atbilst joslas augstums  $h=R(\operatorname{sn} \varphi - \operatorname{sn} \varphi_0)$ .

Lai cilindriskās virsas laukums būtu tikpat liels, kā sfēras atbilstošās joslas laukums, tad jābūt spēkā nolīdzinājumam:

$$2\pi r s = 2\pi R h, \text{ jeb } 2\pi R \cos \varphi_0 \cdot s = 2\pi R^2 (\operatorname{sn} \varphi - \operatorname{sn} \varphi_0).$$

$$\text{No šejienes } s = \frac{R(\operatorname{sn} \varphi - \operatorname{sn} \varphi_0)}{\cos \varphi_0} = \frac{2R}{\cos \varphi_0} \operatorname{sn} \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2}. \quad (174)$$

Mēroga aprēķinam pēc (158) formulas ieliksīm tur dy vietā  $ds$  nozīmi no tikko dabūtā nol-juma:  $ds = \frac{R}{\cos \varphi_0} \cos \varphi d\varphi$ ; tad

$$m = \sqrt{\left(\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_0}\right)^2 \cos^2 \alpha + \left(\frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi}\right)^2 \operatorname{sn}^2 \alpha}. \quad (175)$$

Tā kā  $\frac{d^2(m^2)}{d\alpha^2} = \left[ \left(\frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi}\right)^2 - \left(\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_0}\right)^2 \right] \cdot 2 \cos 2\alpha$ , tad pie vislielākā un

vismazākā mēroga lieluma noteikšanas jāizšķir trīs gadījumi.

1.  $\frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi} > \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_0}$ ; pie  $\alpha = 0^\circ$  otrā atvasinātā pozitīva un mērogs

ir vismazāks; pie  $\alpha = 90^\circ$  mērogs vislielāks; tā tad, gadījumā, kad  $\varphi > \varphi_0$  mērogs pa paralēlēm  $m_p = a = \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi} > 1$  ir maksimums un mērogs pa meridiāniem  $m_m = b = \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_0} < 1$  ir minimums.

2.  $\frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi} = \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_0}$ ; tad  $\varphi = \varphi_0$ ,  $m = 1$  un nav ne maksimuma ne minimuma.

3.  $\frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi} < \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_0}$  tad  $\varphi < \varphi_0$ ; kad  $\alpha = 0^\circ$ , tad  $m_m = a = \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_0} > 1$  ir maksimums un kad  $\alpha = 90^\circ$ , tad  $m_p = b = \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi} < 1$  un ir minimums.

Šīs formulas rāda, ka sfēras virsas bezgalīgi mazie riņķīši attēlošies uz projekcijas arī kā riņķīši, ja tie būs uz šķeļošās paralēles. Uz ziemeļiem no šķeļošās paralēles (ja attēlojamā valsts ir ziemeļpuslode) sfēras riņķīši attēlošies ar vienādlīnām un pa paralēli izstieptām ellipsēm; uz dienvidiem no tās, vienādlīnās ellipses būs izstieptas pa meridiāniem.

Šķeļošo paralēli ziemeļos var ņemt dažādi; ja to ņem vidū starp valsts malējām paralēlēm, tad mērogu ellipsu pusasis uz malējām paralēlēm neiznāks vienādas; tomēr ļoti vēlams, lai šo ellipsu attiecīgās pēc lieluma pusasis būtu vienādas uz valsts malējām paralēlēm. Nosauksim valsts malējo paralēļu platumus par  $\varphi_1$  un  $\varphi_2$ ; ar platumiem  $\varphi_1$  un  $\varphi_2$  noteiktos punktos mērogu nosauksim par  $m_m'$ ,  $m_p'$  un  $m_m''$ ,  $m_p''$ . Aprēķināsim šķeļošo paralēli no prasības, lai  $m_m' = m_p''$  jeb  $m_p' = m_m''$ , t. i. lai uz malējām paralēlēm indikātrīsas būtu vienādas. Tā kā  $m_m' = \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_0}$ ,  $m_p' = \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi_1}$ ,  $m_m'' = \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_0}$ ,

$$m_p'' = \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_0}; \text{ tad iznāk: } \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_0} = \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi_2} \text{ jeb } \cos \varphi_0 = \sqrt{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2} \quad (176)$$

Sk. tabula 156. lapp.

Leņķu vislielākās izmaiņas dabūsim no (55) formulas:

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2} \right) = \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi} \quad (\text{kad } \varphi > \varphi_0). \quad (177)$$

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2} \right) = \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_0} \quad (\text{kad } \varphi < \varphi_0). \quad (178)$$

Latvijas kartei var ņemt  $\varphi_1 = 55^{\circ}30'$  un  $\varphi_2 = 58^{\circ}05'$ ; tad pēc (176) formulas  $\varphi_0 = 56^{\circ}49'24'',41$  ( $\log \cos \varphi_0 = 9,738\ 1626$ ). Uz šīs paralēles  $1/2^{\circ}$  garumā ir 30420,71 m. Šai projekcijai aprēķinātie skaitļi doti sekošā tabulā:

$\theta$	y metros	$\Delta y$ metros	$m_m$	$m_p$
58 <sup>00</sup> 5'	287 440,92		0,966128	1,035059
58 0	278 479,10	8961,82	0,968383	1,032649
57 30	224 270,19	54208,91	0,981870	1,018464
57 0	169 313,63	54956,56	0,995282	1,004740
56 30	113 613,61	55700,02	1,008619	1,991455
56 0	57 174,31	56439,30	1,021878	0,978590
55 30	0	57174,31	1,035059	0,966127

Europas kartes sastādīšanai var pieņemt  $\varphi_1 = 40^{\circ}$  un  $\varphi_2 = 70^{\circ}$ ; tad pēc (176) formulas iznāk  $\varphi_0 = 59^{\circ}13'$ . Sekojošā tabulā dotas šādas vienādlīelas taisnstūrprojekcijas skaitliskās nozīmes, pieņemot  $R = 1$  un skaitot  $s$  no dienvidparalēles  $\varphi_1 = 40^{\circ}$  sfēras rādiusa daļas.

$\varphi$	s	$m_m$	$m_p$	p	2 $\omega$
70 <sup>0</sup>	0,580	0,668	1,497	1	45 <sup>0</sup> 0'
65	0,515	0,826	1,211	1	21 49
60	0,436	0,977	1,024	1	2 41
55	0,345	1,121	0,893	1	13 0
50	0,241	1,256	0,796	1	25 53
45	0,126	1,381	0,724	1	36 24
40	0,000	1,497	0,668	1	45 0

**25. Lamberta cilindriskā projekcija.** — Tagad apskatīsim vienādlīelu projekciju uz cilindra, kas sfēru skaņ pa ekvātoru. Ar platumu  $\varphi$  noteiktā sfēras punktā meridiāna loka bezgalīgi mazs elements būs  $R d\varphi$ , bet paralēles loka bezgalīgi mazs elements  $R \cos \varphi d\lambda$ .

Tāpēc ar divi bezgalīgi tuviem meridiāniem un divi bezgalīgi tuvām paralēlēm norobežotas bezgalīgi mazas sfēriskās trapēces laukums būs:

$$R d\varphi \cdot R \cos \varphi d\lambda = R^2 \cos \varphi d\varphi d\lambda.$$

Uz projekcijas atbilstošā punkta koordinātu  $x$  un  $y$  pieaugumus nosauksim par  $dx$  un  $dy$ .

Tā kā cilindrs pieskaras sfērai pa ekvātoru, tad uz atritinātā cilindra attāļums starp diviem blakus meridiāniem būs  $x = R\lambda$ . (179) un  $dx = R d\lambda$ ; bezgalīgi maza taisnstūra laukums uz projekcijas būs:

$$dx \cdot dy = R d\lambda \cdot dy.$$

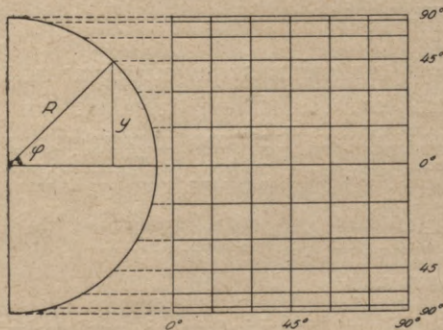
Vienādlīelai projekcijai spēkā būs nol.:

$$R^2 \cos \varphi d\varphi d\lambda = R d\lambda \cdot dy, \text{ jeb } dy = R \cos \varphi d\varphi.$$

Integrēsim; tā kā pie  $\varphi = 0^\circ$ ,  $y = 0$  un patvaļīgā konstante, kas ienāk pie integrēšanas ir nulle, tad

$$y = R \sin \varphi. \quad (180)$$

Projekciju, kurā paraleļu attāļumus no ekvātora noteic šī vienkāršā formula, tās izgudrotājs Lamberts nosaucis par izocilindrisko; sauc to arī par Lamberta cilindrisko projekciju. Ordinātas  $y$  aprēķinu var atvietot ar attiecīgu konstrukciju. Sadala pussferu (52. zīm.) vienādās daļās (p. p. ik pa  $15^\circ$ ) un caur dabūtiem punktiem novelk taisnas līnijas paralēli rādiusam, kas attēlo ekvātoru.



52. zīm.

Šo paraleļu attāļumi no ekvātora apmierina (180) formulu. Meridiāni ir taisnas līnijas, kas stateniskas pret ekvātoru un attāļumu starp tiem ņem pēc (179) nol.

Projekcijas grafiska konstruēšana lielā mērogā nav ērta; tāpēc meridiānu un paraleļu krustojšanās punktiem noteic taisleņķu koordinātas pēc (179) un (180) formulām.

Par  $x$  asi ņem ekvātoru un par  $y$  asi sākuma meridiānu.

Mērogam pēc (159) form. dabonam  $m = \sqrt{\cos^2 \varphi \cos^2 \alpha + \sec^2 \varphi \sin^2 \alpha}$  (181)

$$\text{no šejienes } \frac{d^2(m^2)}{d\alpha^2} = (\sec^2 \varphi - \cos^2 \varphi) 2 \cos 2\alpha.$$

Kad  $\sec^2 \varphi > \cos^2 \varphi$ , tad otrā atvasinātā pie  $\alpha = 0^\circ$  pozitīva,  $m = m_m = b = \cos \varphi$ ; pie  $\alpha = 90^\circ$ ,  $m = m_p = a = \sec \varphi$ . (182)

Kad  $\sec^2 \varphi = \cos^2 \varphi$ , tad  $\varphi = 0^\circ$ , nav mēroga maksimuma ne minimuma un  $m = 1$ .

Tā tad uz ekvātora mērogs visos virzienos ir 1; ar attāļināšanos no tā uz ziemeļiem un dienvidiem mērogs pa meridiāniem samazi-

nājas proporcionāli platuma kosinusam, bet pa paralelēm, turpretim, aug proporcionāli platuma sekansom; pa meridiāniem figūras sašaurinājas, bet pa paralelēm izstiepjas. Tā kā reizinājums  $m_m \cdot m_p = 1$ , tad laukumi nemainās, kam arī jābūt pēc projekcijai uzstādītām prasībām. Sfēras bezgalīgi mazi riņķiši attēlosies kā ellipses, bet bezgalīgi mazi kvadrāti — kā taisnstūri, izstiepti pa paralelēm.

$$(163) \text{ izteiksme iznāk } k = 1 : \cos^2 \varphi; \text{ tāpēc } \operatorname{tg} \alpha' = \sec^2 \varphi \operatorname{tg} \alpha. \quad (183)$$

Starpībai  $\alpha' - \alpha$  iznāk:

$$\operatorname{tg} (\alpha' - \alpha) = \frac{\operatorname{sn}^2 \varphi \operatorname{tg} \alpha}{\cos^2 \varphi + \operatorname{tg}^2 \alpha}. \quad (184)$$

Vislielākās azimutu izmaiņas dabūsim pielīdzinot nullei otrās daļas atvasināto pēc  $\alpha$ ; tā kā

$$\frac{d \operatorname{tg} (\alpha' - \alpha)}{d \alpha} = \frac{\operatorname{sn}^2 \varphi (\cos^2 \varphi - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha (\cos^2 \varphi + \operatorname{tg}^2 \alpha)^2}, \text{ tad azimutu, pie kura izmaiņa ir vislielākā, dabūsim no nol.: } \operatorname{tg} \alpha_0 = \pm \cos \varphi. \quad (185)$$

Ar šo nozīmi (184) nol. iznāk:

$$\operatorname{tg} (\alpha_0' - \alpha_0) = \frac{\operatorname{sn}^2 \varphi}{2 \cos \varphi}. \quad (186)$$

Uz ekvatora, kur  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\alpha_0' = \alpha_0$  un azimuts nemainās; ar attālināšanos no ekvatora uz ziemeļiem un dienvidiem izmaiņas aug, jo (186) formulas labā pusē sin palielinājas, bet cos mazinājas; uz platuma  $\varphi = 60^\circ$  starpība  $\alpha_0' - \alpha_0$  jau sasniedz  $36^\circ 52'$ , bet uz poliem pat  $90^\circ$ .

Leņķu vislielākās izmaiņas dabūsim no (51) formulas:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi \operatorname{sn} \varphi.$$

Sekošā tabulā doti skaitliskie lielumi izocilindriskai projekcijai platumiem ik pa  $15^\circ$  un pieņemot  $R = 1$ .

$\varphi$	y	$m_m$	$m_p$	p	$2\omega$
$90^\circ$	1,000	0,000	$\infty$	1	$180^\circ 0'$
75	0,966	0,259	3,864	1	121 57
60	0,866	0,500	2,000	1	73 44
45	0,707	0,707	1,414	1	38 57
30	0,500	0,866	1,155	1	16 26
15	0,259	0,966	1,035	1	3 58
0	0,000	1,000	1,000	1	0 0

Salīdzinot šīs tabulas skaitļus ar Lamberta zenitālās projekcijas attiecīgiem skaitļiem redzam, ka pie  $\varphi = 30^\circ$  un  $\Theta = 60^\circ$  abām projek-

cijām ir vienādi mērogi un vienādas vislielākās leņķu alterācijas. Tāpēc, ja izocilindriskā projekcijā būs attēlota zemes virsas josla starp parallelēm ar platumiem  $\pm 30^0$ , un pēc tam zīmējums satīts tā, ka izveidojas cilindrs, tad par šāda cilindra pamatiem noderēs divas Lamberta zenitālās projekcijas, uz kuņām attēlotas zemes virsas pārējās daļas. Tā kā šādā izocilindriskā projekcijā augstums starp minētām parallelēm ir vienlīdzīgs sfēras rādiusam un tāpat vienlīdzīgs Lamberta zenitālās projekcijas rādiusam pie  $\Theta = 60^0$ , tad dabonam ģeometrijas vienkāršās sakarības apstiprinājumu, proti, ka sfēras virsas laukums vienlīdzīgs tāda cilindra pilnam virsas laukumam, kuņa pamata rādius un augstums vienāds ar sfēras rādiusu.

Ja no (185) nol. noteiksim azimuta  $\sin$  un  $\cos$  kvadrātus un dabūtās nozīmes ieliksīm mēroga vispārīgā formulā (181), tad dabūsim  $m=1$ ; tas nozīmē, ka azimuta vislielākās alterācijas virzienā līniju gaņumi uz projekcijas ir tādi paši kā uz sfēras. Tā kā katrā punktā ir divi meridiānam simmetriski virzieni ar azimutu vislielāko izmaiņu, tad caur katru sfēras un tam atbilstošu projekcijas punktu iet divas izoperimetriskas līknes. Uz ekvatora, pie  $\varphi = 0^0$ ,  $\operatorname{tg} \alpha_0 = \pm 1$  un  $\alpha_0 = \pm 45^0$ ; tas nozīmē, ka te izoperimetriskās līknes virzieni veido ar meridiānu leņķus  $\pm 45^0$ ; sākot no šejienes izoperimetriskās līknes azimuti uz sfēras nepārtraukti mazinājas, bet uz projekcijas palielinājas, tā kā uz pola tie attiecīgi ir  $0^0$  un  $90^0$ .

Pierādīsim, ka apskatāmā projekcijā izoperimetriskā līkne attēlojas, kā sinusoida. Ekvatora virzienu ņemsim par  $x$  asi un kautkādu patvaļīgu meridiānu par  $y$  asi; tad izoperimetriskās līknes azimutu uz projekcijas noteiks vispārējā formula:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{dx}{dy}.$$

Azimutam ar vislielāko alterāciju atmetīsim indeku un (185) izteiksmes nozīmi ievietosim (183) formulā, tad

$$\operatorname{tg} \alpha' = \sec \varphi \text{ un } \operatorname{tg} \alpha' = \sec \varphi \text{ un } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}}.$$

Ieliekot te  $\sin$  nozīmi no (180) formulas dabūjam sekošu izoperimetriskās līknes diferencialo nol. taisnleņķu koordinātās:

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{R}\right)^2}}.$$

Integrējam šo nol.; tā kā pie  $x=0$ ,  $y=0$ , tad integrācijas konstantais ir nulle, un  $y = R \operatorname{sn} \frac{x}{R}$ .

Šis ir sinusoidas nol.; kā jau teikts, caur projekcijas katru punktu iet divas sinusoidas; sākoties no ekvatora, kur  $\alpha' = \pm 45^\circ$ , tās iet uz poliem, kur  $\alpha' = \pm 90^\circ$ .

Lai aprēķinātu izoperimetriskās līknes laukumu P, ņem laukuma diferenciālu  $dP = y dx = R^2 \operatorname{sn} \frac{x}{R} \cdot d\left(\frac{x}{R}\right)$ . Ieliekot te  $x = \pi R$  dabūjam  $P = 2R^2$ , t. i., uz projekcijas laukums norobežots ar izoperimetrisko līkni un ekvatoru ir vienlīdzīgs kvadrāta ar malu R divkāšotam laukumam.

Tā kā izocilindriskā projekcija ir vienādliela un tanī visu zemes virsu var attēlot ar vienu taisnstūri, tad to bieži lieto kartēm, uz kuŗām jāparāda tautību, dzīvnieku un augu izplatīšanās robežas. Uz šādām kartēm lielai konturu veidmaiņai nav nozīmes; turpretim laukumu vienādlielums dod iespēju noteikt ar planimetru platības, kuŗas aizņem viens vai otrs dzīvnieku jeb augu valsts priekšstāvis.

**26. Merkatora projekcija.** — Slavenais holandiets, kartografs Gerhards Kremers jeb Merkators (1512—1594) izdeva 1554. g. Europas un 1569. g. pasaules karti vienādleņķu cilindriskā projekcijā. Šīs kartes drīz vien guva lielu piekrišanu un tika nosauktas par „kartēm ar augošiem platumiem“ (projection des Cartes réduites).

Tagad ir izpētīts, ka šī projekcija jau lietota 1511. g. un 1513. g., kaut gan pats izgudrotājs nav zināms\*).

Lai projekcijas bezgalīgi mazs elements būtu līdzīgs atbilstošam elementam uz sferoīda, tad azimutiem uz projekcijas ir jābūt vienlīdzīgiem atbilstošo virzienu elementiem uz sferoīda; tas nozīmē, ka (161) formulā

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{a(1-e^2) \cos \varphi_0 d\varphi}{(1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi) \sqrt{1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi_0} \cos \varphi dy} \operatorname{tg} \alpha$$

koeficientām pie  $\operatorname{tg} \alpha$  ir jābūt vienlīdzīgam 1. Šis nosacījums dod nolīdzinājumu:

$$dy = \frac{a(1-e^2) \cos \varphi_0 d\varphi}{W_0 (1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi) \cos \varphi} \dots (x), \text{ jeb}$$

$$y = \frac{a \cos \varphi_0}{W_0} \int \frac{(1-e^2) d\varphi}{(1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi) \cos \varphi},$$

$$\text{kur } W_0 = \sqrt{1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi_0}.$$

Integrēšanas atvieglošanai apakšintegrāla daļas skaitītājā  $e^2$  reizinā ar summu  $\operatorname{sn}^2 \varphi + \cos^2 \varphi$ , tad:

$$y = \frac{a \cos \varphi_0}{W_0} \left( \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} - \int \frac{e^2 \cos \varphi d\varphi}{1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi} \right) \dots (a)$$

\*) Sk. Max Eckert. Die Kartenwissenschaft II, 1925., 72. lapp.

Tā kā

$$\int \frac{e^2 \cos \varphi \, d\varphi}{1 - e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi} = \frac{e}{2} \int \frac{e \cos \varphi \, d\varphi}{1 - e \operatorname{sn} \varphi} + \frac{e}{2} \int \frac{e \cos \varphi \, d\varphi}{1 + e \operatorname{sn} \varphi} = -\frac{e}{2} \ln \frac{1 - e \operatorname{sn} \varphi}{1 + e \operatorname{sn} \varphi},$$

tad

$$y = \frac{a \cos \varphi_0}{W_0} \left[ \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{e}{2} \ln \frac{1 - e \operatorname{sn} \varphi}{1 + e \operatorname{sn} \varphi} \right] + C.$$

Pēc šīs formulas noteikto ordinātu  $y$  var skaitīt no ekvatora jeb no kaut-kādas paralēles; izdevīgāki skaitīt no ekvatora; tad pie  $\varphi = 0^\circ$ ,  $y = 0$  un  $C = 0$ .

Ja ņemsim noteikto integrālu robežās no  $0^\circ$  līdz  $\varphi$ , tad

$$y = \frac{a \cos \varphi_0}{W_0} \left[ \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{e}{2} \ln \frac{1 - e \operatorname{sn} \varphi}{1 + e \operatorname{sn} \varphi} \right].$$

Pēc šīs formulas noteiktās ordinātas  $y$  sauc gan par meridiāna daļām, gan par augošiem platumiem (la latitude croissante).

Lai šī eksaktā formula būtu ērta lietošanai, tad iekavās pēdējā locēkļa naturālo logaritmu izvirza rindā, pamatojoties uz formulas:

$$\ln(1 \mp \operatorname{sn} \varphi) = \mp e \operatorname{sn} \varphi - \frac{e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi}{2} \mp \frac{e^3 \operatorname{sn}^3 \varphi}{3} - \frac{e^4 \operatorname{sn}^4 \varphi}{4} \mp \frac{e^5 \operatorname{sn}^5 \varphi}{5} - \\ - \frac{e^6 \operatorname{sn}^6 \varphi}{6} \mp \frac{e^7 \operatorname{sn}^7 \varphi}{7}.$$

Tad

$$y = \frac{a \cos \varphi_0}{W_0} \left[ \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) - e^2 \operatorname{sn} \varphi \left( 1 + \frac{1}{3} e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi + \frac{1}{5} e^4 \operatorname{sn}^4 \varphi + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{7} e^6 \operatorname{sn}^6 \varphi + \dots \right) \right],$$

jeb

$$y = \frac{\cos \varphi_0}{W_0} \left[ \frac{a}{\mu} \log \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) - a e^2 \operatorname{sn} \varphi - \frac{1}{3} a e^4 \operatorname{sn}^3 \varphi - \right. \\ \left. - \frac{1}{5} a e^6 \operatorname{sn}^5 \varphi - \frac{1}{7} a e^8 \operatorname{sn}^7 \varphi - \dots \right].$$

Te  $\mu$  apzīmē parasto (vulgāro) logaritmu moduli,  $a$  — zemes sferoida lielo pusasi un  $e$  — ekscentrību; tā kā  $\mu = 0,434 294 4819$  un  $\log \mu = 9,637 784 3113 - 10$ , tad pēc Beseļa zemes sferoida elementiem, kas doti 13 lappusē, iznāk:

$$y = \frac{\cos \varphi_0}{W_0} \left[ 14 684 499,7424 \log \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) - 42 565,1223 \operatorname{sn} \varphi - \right. \\ \left. - 94,6985 \operatorname{sn}^3 \varphi - 0,3792 \operatorname{sn}^5 \varphi - 0,0018 \operatorname{sn}^7 \varphi \right]. \quad (187)$$

Še doto skaitlisko koeficientu logaritmi attiecīgi ir:

7. 166 859 1524; 4.629 053 8874; 1.976 343 056; 9.578 9047; 7.2571871.

Ar to ordināta  $y$  ir noteikta; abscisu  $x$  dabū pēc formulas:

$$x = \frac{a \cos \varphi_0}{W_0} \cdot \frac{\lambda}{\rho} \quad (188)$$

kur  $\pm \varphi_0$  ir platums parallēlēm, pa kuņām cilindrs šķeļ sferoidu. Ja šķeļošā cilindra vietā iedomājas cilindri, kas pieskaņas elipsoidam pa ekvatoru, tad  $\varphi_0 = 0^0$  un

$$y = 14684499,7424 \log \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) - 42565,1223 \operatorname{sn} \varphi - 94,6985 \operatorname{sn}^3 \varphi - 0,3792 \operatorname{sn}^5 \varphi - 0,0018 \operatorname{sn}^7 \varphi. \quad (189)$$

$$\text{un } x = \frac{\pi}{180} a \lambda^0 = \frac{a \lambda}{\rho}. \quad (190)$$

Apskatīsim vēl (a) nol. otru integrēšanas paņēmieni, ievēdot palīgleņķi  $\psi$  pēc sekoša nol.:

$$\operatorname{sn} \psi = e \operatorname{sn} \varphi,$$

kur  $e$  ir zemes sferoida ekscentriība. Tā kā  $e$  ir mazāks par vienu, tad tāda palīgleņķa noteikšana pēc sinusa vienmēr būs iespējama. Diferencejot šo nol., dabonam

$$e \cos \varphi \, d\varphi = \cos \psi \, d\psi;$$

$$\text{bez tam } 1 - e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi = 1 - \operatorname{sn}^2 \psi = \cos^2 \psi.$$

Ar šīm divām substitūcijām (a) izteiksme pieņem veidu:

$$y = \frac{a \cos \varphi_0}{W_0} \left\{ \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos \varphi} - e \int_0^\psi \frac{d\psi}{\cos \psi} \right\}.$$

Kad  $\varphi = 0^0$ , tad  $\psi = 0^0$  un  $y = 0$ , tāpēc

$$y = \frac{a \cos \varphi_0}{W_0} \left\{ \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - e \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2} \right) \right\}.$$

Ievēdot apzīmējumu

$$U = \frac{\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)}{\operatorname{tg}^e \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2} \right)} \quad (191)$$

dabūsim

$$y = \frac{a \cos \varphi_0}{W_0} \cdot \frac{\log U}{\mu} \quad (192)$$

jeb

$$y = 14684499,74 \cdot \frac{\cos \varphi_0}{W_0} \cdot \log U. \quad (193)$$

Dažreiz jūrnieki lielos attājumus rēķina tā saucamās jūras jūdzes, pieņemot vienu jūras jūdzi = ekvatora loka vienai minūtei; pēdējā formula jūras jūdzēs būs:

$$y = 7915,705 \cdot \frac{\cos \varphi_0}{W_0} \log U. \quad (194)$$

Pēdējo formulu dabū izejot no sakarības, ka ekvatora loka viena

$$\text{minūte ir} = \frac{\pi a}{10800};$$

$$\text{tad } y \text{ jūras jūdz.} = \frac{10800}{\pi \mu} \cdot \frac{\cos \varphi_0}{W_0} \log U.$$

Cilindrim, kas pieskaņas sferoidam pa ekvatoru,  $\varphi_0 = 0^0$  un tad

$$y = \frac{a}{\mu} \cdot \log U = 14\,684\,499,74 \cdot \log U \quad (195)$$

$$\text{un jūras jūdzēs } y = 7915,705 \log U. \quad (196)$$

Formulas būs daudz vienkāršākas, ja zemi uzskata par sfēru ar rādiusu R; tad  $e = 0$  un  $a = R$ . Šīs formulas var dabūt arī patstāvīgi pielīdzinot (160) nolīdzinājuma:

$$\text{tg } \alpha' = \frac{R \cos \varphi_0 d\varphi}{\cos \varphi \cdot dy} \cdot \text{tg } \alpha$$

koeficientu vienam; tad

$$\frac{R \cos \varphi_0 d\varphi}{\cos \varphi dy} = 1$$

$$\text{un } dy = \frac{R \cos \varphi_0}{\cos \varphi} d\varphi.$$

Pēc integrēšanas, un ņemot vērā, ka pie  $\varphi = 0^0$  arī  $y$  ir nulle, dabūsim

$$y = R \cos \varphi_0 \ln \text{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{R \cos \varphi_0}{\mu} \log \text{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right); \quad (197)$$

$$x = R \cos \varphi_0 \cdot \lambda. \quad (198)$$

kad  $\lambda$  izteikts analītiskos mēros resp. radiānos un

$$x = \frac{R \lambda \cos \varphi_0}{\rho}, \quad (199)$$

kad  $\lambda$  ņemts gradu mēros.

Ekvatoru attēlo  $x$  ass un sākuma (nulle) meridiānu  $y$  ass; R ir zemes sfēras rādius projekcijas galvenā mērogā,  $\mu$  — Brīgsa loģaritmu modulis un  $\varphi, \lambda$  — patvaļīga punkta ģeografiskās koordinātas.

Ja cilindrs pieskaņas sfērai pa ekvatoru, tad  $\varphi_0 = 0^0$  un

$$y = \frac{R}{\mu} \log \text{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right), \quad (200)$$

$$x = R\lambda = \frac{R\lambda^0}{\rho^0}. \quad (201)$$

Mērogs. — Nemsim mēroga vispārīgo formulu cilindriskai projekcijai uz šķeļošā cilindra (sk. (b) formulu 148. lappusē):

$$m = \sqrt{\left(\frac{dy}{a(1-e^2)d\varphi}\right)^2 (1-e^2\operatorname{sn}^2\varphi)^3 \cos^2\alpha + \left(\frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi}\right)^2 \left(\frac{1-e^2\operatorname{sn}^2\varphi}{1-e^2\operatorname{sn}^2\varphi_0}\right) \operatorname{sn}^2\alpha}$$

un ieliksīm te no (x) formulas 160. lappusē:

$$dy = \frac{a(1-e^2)\cos\varphi_0 d\varphi}{\sqrt{1-e^2\operatorname{sn}^2\varphi_0} (1-e^2\operatorname{sn}^2\varphi)\cos\varphi};$$

pēc vienkāršiem pārveidojumiem Merkatora projekcijai iznāk mērogs

$$m = \frac{\cos\varphi_0 \sqrt{1-e^2\operatorname{sn}^2\varphi}}{\cos\varphi \sqrt{1-e^2\operatorname{sn}^2\varphi_0}} = \frac{W \cos\varphi_0}{W_0 \cos\varphi}.$$

Pie šīs pašas formulas ātrāki nonāksim pamatojoties uz noteikuma, ka vienādleņķu projekcijas bezgalīgi mazi elementi ir proporcionāli atbilstošiem bezgalīgi maziem elementiem uz sferoīda. Šos elementus ērtāki ņemt pa meridiāniem vai pa paralēlēm. Meridiāna loks uz projekcijas ir  $dy$ , uz sferoīda  $ds$ ; tāpēc  $m_m = \frac{dy}{ds}$ ; ieliekot te  $dy$  nozīmi un  $ds$  nozīmi (sk. 19. lp.) dabūsim augšā izvesto formulu.

Noteiksim tagad mērogu pēc paralēļu bezgalīgi mazo elementu attiecības; pēc (188) formulas paralēles elements uz projekcijas ir

$$dx = \frac{a \cos\varphi_0 d\lambda}{\sqrt{1-e^2\operatorname{sn}^2\varphi_0}}; \text{ uz sferoīda atbilstošais elements ir}$$

$$r d\lambda = \frac{a \cos\varphi d\lambda}{\sqrt{1-e^2\operatorname{sn}^2\varphi}}, \text{ tāpēc } m_p = \frac{dx}{r d\lambda}.$$

Visos gadījumos iznāk

$$m = m_m = m_p = \frac{\cos\varphi_0 \sqrt{1-e^2\operatorname{sn}^2\varphi}}{\cos\varphi \sqrt{1-e^2\operatorname{sn}^2\varphi_0}} = \frac{W \cdot \cos\varphi_0}{W_0 \cdot \cos\varphi}. \quad (202)$$

Kad cilindrs skar sferoīdu pa ekvātoru, tad

$$m = m_m = m_p = \frac{\sqrt{1-e^2\operatorname{sn}^2\varphi}}{\cos\varphi}. \quad (203)$$

Pēdējā izteiksme  $= \frac{1}{\cos u}$ , kur  $u$  ir pievestais jeb reducētais platumš „latitude réduite“.

Pēc (202) formulas mērogs = galvenam uz šķeļošām paralēlēm, pie  $\varphi = \varphi_0$ , pēc (203) formulas — uz ekvātora; uz pola pēc abām formulām mērogs =  $\infty$ .

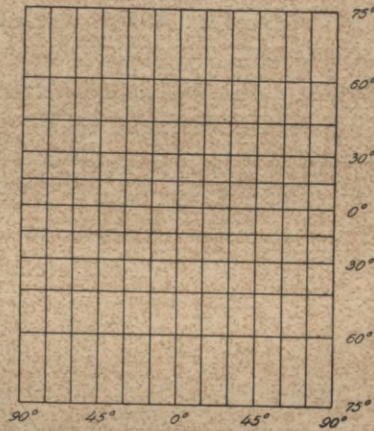
Ja zemi uzskata par sferu, tad mēroga formulās jāņem  $e = 0$ ;

$$\text{no (202) form. } m = \cos \varphi_0 \sec \varphi. \quad (204)$$

$$\text{un no (203): } m = \sec \varphi. \quad (205)$$

Pedejā formula ir tāda paš, kā visām citām cilindriskām projekcijām; 53. zīm. Merkatora projekcijā attēlota gandrīz vesela puslode ar meridiāniem un paralēlēm ik pa  $15^\circ$ ; malējo paralēļu platumi  $\pm 75^\circ$ . Turpmāk dota tabula Mērkatora projekcijas raksturīgākiem elementiem, pieņemot zemi par sferu ar rādiusu  $R = 1$ , ar pieskares cilindri pa ekvātoru.

$\varphi$	y	m	p	$2\omega$
$90^\circ$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$0^\circ 0'$
75	2,028	3,864	14,928	0 0
60	1,317	2,000	4,000	0 0
45	0,881	1,414	2,000	0 0
30	0,549	1,155	1,333	0 0
15	0,265	1,035	1,072	0 0
0	0,000	1,000	1,000	0 0



53. zīm.

Ar attālināšanos no ekvatora projekcijas mērogs ātri aug; piemēram, uz paralēles ar platumu  $60^\circ$  visi linijiskie gaņumi, salīdzinot ar samēriem uz ekvatora, palielinājas divkārti, bet laukumi četrkārt. Visvairāk palielināti polārie apgabali, bet pašus polus pavisam nav iespējams attēlot, jo uz pola, kā jau redzējām, mērogs ir vienlīdzīgs bezgalībai un arī  $y = \infty$ . Šim apstāklim nav praktiskas nozīmes, jo polārās zemes līdz šim vēl nav pieejamas.

Skaitlisks piemērs. — Aprēķināt Merkatora projekciju kartes lapai starp  $56^\circ 55'$  un  $58^\circ 35'$  ziemeļa platumu pēc Besēja zemes sferoīda elementiem, ņemot mērogu  $1 : 100\,000$  vidējam platumam  $\varphi_0 = 57^\circ 45'$  un novelkot meridiānus gaņumiem  $22^\circ 25'$ ,  $22^\circ 45'$ ,  $23^\circ 0'$ ,  $23^\circ 30'$ ,  $24^\circ 0'$ ,  $24^\circ 30'$  un  $24^\circ 40'$  uz rītiem no Grinvičas.

Sk. tabula 166. lapp.

Otrā slejā ierakstīti pēc (187) formulas figūras iekavās aprēķinātie skaitļi; trešā slejā ierakstītas otrās slejas skaitļu starpības; samazinot šos skaitļus simtstūkstošreiz un reizinot ar koeficientu  $\frac{\cos \varphi_0}{W_0}$ , kas (187) formulā ir iekavu priekšā, dabonam 4. slejā ierakstītos skaitļus; pieņemot vidējo paralēli par x asi, dabūsim y platumiem uz augšu un leju; tie ierakstīti 5. slejā, neievēdot zīmes.

Paralleles loks uz platuma 57°45' pusgradam gaŗumā resp.  $x$  pēc (188) formuļas iznāk 29 768,544 m, kas attiecīgā mērogā dod 29,768 cm; ja meridiāni jānovelk ik pa 10', tad  $x$  būs 9,92 cm; kartes lapas platums (rīti-vakari) 2°15' dod 133,958 cm.

Paralleles 30' gaŗu loku var ņemt no ģeodēziskām tabulām.

Projekcijas konstruēšanai novelk divi savā starpā stateniskas līnijas. Abscisu ass būs paralele ar platumu 57°45' un ordinātu ass kaut-kuŗš meridiāns. Pa abscisu asi atliek samazinātos vidējās paraleles loka gaŗumus un pa ordinātu asi  $y$  uz augšu un leju skaitļus  $y'$ , kas doti 5. slejā. Caur dabūtiem punktiem novelk asīm paraleļu līniju sistēmu un ar to dabūts vajadzīgais kartografiskais tīkls.

Platums $\varphi$	Meridiānu daļas		Meridianu daļas samazinātas mēroga 1:100000 uz paraleles $\varphi_0 = 57^{\circ}45'$	
	$y$ (metros)	$\Delta y$ metrs	$\Delta y'$ cm	$y'$
1	2	3	4	5
58°35'	8 053 545,88	17740,19	9,489	93,895 <i>18,76</i>
58 30	8 035 805,69	52970,45	28,334	84,406 <i>15,28</i>
58 15	7 982 835,24	52596,78	28,134	56,072 <i>17,20</i>
58 0	7 930 238,46	52230,44	27,938	27,938 <i>5,58</i>
57 45	7 878 008,02	51868,52	27,744	0,000 <i>0</i>
57 30	7 826 139,50	51512,47	27,554	27,744 <i>5,55</i>
57 15	7 774 627,03	51162,30	27,366	55,298 <i>11,06</i>
57 0	7 723 464,73	16978,08	9,081	82,664 <i>10,53</i>
56 55	7 706 486,66			91,745 <i>18,35</i>

Merkatora projekcijas aprēķinu atvieglo gatavas tabulas, no kurām būtu mināmas: 1) Rechnungsvorschriften für die Nautische Abteilung des Reichs-Marine-Amts. Formeln und Tafeln zur Berechnung von Merkatornetzen für die Deutschen Admiralitätskarten. Berlin. 1904 un 2) Tablici dļa postrojenja Merkatorskich kart. Izdanije Glavno Gidrografičeskogo upravlenija. Petrograd 1918. (Pedējās sastādītas krievu saŗenim. Inŗ. zin. fak. bibl. Nr. 6887).

**27. Loksodroma.** — Merkatora projekcijai ir sevišķi raksturīga un tikai tai vienai piemītoša īpašība: proti, attēlot loksodromas, kā taisnas līnijas. Par loksodromu (no  $\lambda\omicron\zeta\acute{o}\varsigma$  — šķībs un  $\delta\rho\acute{o}\mu\omicron\varsigma$  — skriešana) sauc likni uz zemes virsas, kas visus meridiānus krūsto zem viena un tā paša leņķa resp. azimuta. Ja kuģis brauc pa loksodromu, tad visā savā ceļā tas ieņtur vienu un to pašu virzienu pret debess pusēm (nemainīgu rumbo resp. azimutu). Saprotams, ka šāda loksodromas īpašība atvieglo kuģošānu; braucot atklātā okeānā no vienas ostas uz otru pa loksodromu, ir jābrauc ar vienu un to pašu rumbo (kursu) visu ceļu. Ja uz Merkatora projekcijā sastādītas kartes savieno ar taisni divus punktus — izbraukšanas un gala ostas — tad leņķis starp šo taisni un kartes ikkuņu meridiānu (kas visi savā starpā paralēli) ir tieši azimuts jeb tā saucamais kuģa kurss. Lūk tāpēc Merkatora projekcijā sastādītās kartes visai bieži sauc par jūras kartēm. Dotā kursa resp. azimuta loksodroma uz sferoīda virsas veido spirālveidīgu likni, kas nepārtraukti un pamazitiņām tuvojas polam. Ja no ekvatora patvaļīga punkta uz globa novilksim lielā riņķa īsu loku zem azimuta  $0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$ , t. i. pirmā ceturksnī, tad tuvāko meridiānu uz rītiem šis loka elements krustos zem druscīņ lielāka azimuta, nekā sākuma azimuts; lai iznāktu agrākais azimuts  $\alpha$ , tad loks būs druscīņ jāpaliec uz ziemeļiem. Atkārtojot līdzīgu konstruējumu tājāki un ņemot lielo riņķu loku daļas bezgalīgi mazas, dabūsim nepārtrauktu likni, ko sauc par dotā azimuta  $\alpha$  loksodromu. Virzoties uz austrumiem loksodroma tanī pašā laikā liecās uz ziemeļiem; pēc viena pilna apgrieziena tā no jauna nonāks uz izejas punkta meridiāna, bet vairāk uz ziemeļiem, nekā izejas punkts. Pēc otra apgrieziena loksodroma atkal krustos visus meridiānus, atkal nonāks uz sākuma meridiāna u. t. t., savā gaitā nepārtraukti liecoties uz ziemeļiem. Vispār tājākā gaitā loksodroma krustos katru meridiānu bezgalīgu skaitu reiz bet, nepārtraukti liecoties uz ziemeļpola pusi, tomēr to nekad nesasnies, tāpēc ka polā krustojas visi meridiāni un tur nevar iedomāties liknes elementu, kas veidotu ar visiem meridiāniem vienu un to pašu leņķi.

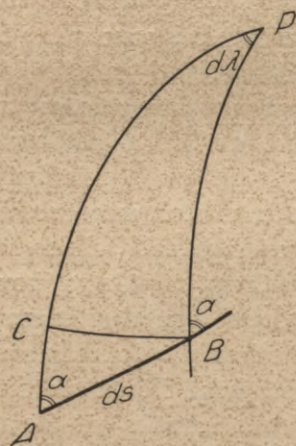
Ja loksodroma iesāksies no ekvatora zem azimuta  $90^{\circ} < \alpha < 180^{\circ}$ , otrā ceturksnī, tad tā ies dienvidrīta virzienā, dienvidpuslodē un, veidojot bezgalīgi daudzus apgriezienus, trauksies uz dienvidpolu.

Loksodromas, kas sāksies no ekvatora un ies dienvidvakara un ziemeļvakara virzienos, resp. trešā un ceturta ceturksnī, ies simmetriski ar augšā apskatītām, atšķiroties no tām tikai ar to, ka pirmās divas iet no vakariem uz rītiem, bet divas pēdējās — no rītiem uz

vakariem; tāpēc abas pēdējās var uzskatīt par pirmo divu turpinājumu pretējā virzienā, sākot no ekvatora.

Tā tad loksodromas uz sferoīda ir spirālveidīgas liknes ar bezgalīgi daudziem apgriezieniem un abi poli tām ir asimptotiskie punkti. Katram azimutam atbilst atsevišķa loksodroma un katra loksodroma ir divējāda likuma likne. Gadījumos, kad azimuti ir  $\alpha = 0^\circ$  un  $= 90^\circ$ , tad loksodromas ir plaknes liknes; pirmā gadījumā tās iet pa meridiānu, bet otrā — pa ekvatoru, ja sākuma punkts ir uz ekvatora, un pa paralēli, ja sākuma punkts nav uz ekvatora, bet noteikts ar platumu, kas nav nulle.

Lai paskaidrotu sacīto un izpētītu loksodromas svarīgākās īpašības, noteiksim šīs liknes nolīdzinājumu, uzskatot zemi par sferoīdu.



54. zīm.

Loksodromas pamatīpašību — azimuta nemainīgumu, analītiski var izteikt ar sekošu formulu:

$$\operatorname{tg} \alpha = C,$$

kur  $\alpha$  ir dotais azimuts un  $C$  konstants lielums.

Apskatīsim loksodromas bezgalīgi mazu loku  $AB$  (54. zīm.), kas ar meridiāniem  $PA$  un  $PB$  veido leņķi  $\alpha$ . No punkta  $B$  novilksim paralēles loku  $BC$  līdz krustojumam ar  $A$  punkta meridiānu punkta  $C$ ; tad:

$$CB = r \, d\lambda = \frac{a \cos \varphi \, d\lambda}{W},$$

$$AC = M \, d\varphi = \frac{a(1 - e^2) \, d\varphi}{W^3},$$

kur  $r$  ir paralēles loka  $BC$  rādiuss;  $M$  meridiāna likumrādiuss,  $a$  un  $e$  zemes sferoīda lielā pusass un ekscentritāte,  $\varphi$  — punkta  $A$  platums un  $W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$ . No bezgalīgi mazā taisnleņķa trīsstūra  $ACB$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{CB}{CA} = \frac{W^2 \cos \varphi \, d\lambda}{(1 - e^2) \, d\varphi},$$

no kurienes

$$d\lambda = \frac{(1 - e^2) \operatorname{tg} \alpha \, d\varphi}{W^2 \cos \varphi}.$$

Tā kā  $\alpha$  ir konstants lielums, tad integrējot šo nol. robežās no  $\varphi_1$  līdz  $\varphi_2$  un ievēdot (191) formulas apzīmējumus, dabūsim:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \operatorname{tg} \alpha (\ln U_2 - \ln U_1). \quad (206)$$

$$\text{kur } U_2 = \frac{\text{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi_2}{2}\right)}{\text{tg}^e\left(45^\circ + \frac{\psi_2}{2}\right)}, \quad U_1 = \frac{\text{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi_1}{2}\right)}{\text{tg}^e\left(45^\circ + \frac{\psi_1}{2}\right)},$$

$$\text{sn}\psi_2 = e \text{ sn}\varphi_2, \quad \text{sn}\psi_1 = e \text{ sn}\varphi_1.$$

Dabūtā (206) formula ir sferoida loksodromas nolidzinājums. Kad  $\alpha = 0^\circ$ , tad  $\lambda_2 - \lambda_1 = 0^\circ$ , kas nozīmē, ka loksodroma pārveršas par meridiānu; kad  $\alpha = 90^\circ$ , tad  $\text{tg } \alpha = \infty$  un lai (206) nol. būtu spēkā ir vajadzīgs, lai otrās daļas otrais reizinātais būtu nulle; tas noved pie vienādojuma  $\varphi_2 = \varphi_1$ , t. i., loksodroma iet pa vienu un to pašu paralēli. Ja sākuma punktam ņem  $\varphi_1 = 0^\circ$  un  $\lambda_1 = 0^\circ$ , tad (206) nol. iznāk vienkāršāks:

$$\lambda = \text{tg } \alpha \ln U.$$

Uzskatot zemi par sfēru:

$$\lambda = \text{tg } \alpha \ln \text{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right). \quad (207)$$

Ja par nezināmo te uzskata platumu  $\varphi$ , tad ātrisinot dabū:

$$\text{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) = e^{\lambda \cot \alpha}, \quad (208)$$

kur  $e$  ir naturālo logaritmu pamats (bāze). Kad dots platumu  $\varphi$ , tad garumu  $\lambda$  var aprēķināt pēc (207) formulas un funkcija ir vien-  
zīmīga; tas nozīmē, ka vienam noteiktam  $\varphi$  atbilst viens noteikts  
garums  $\lambda$ . No (208) nol., turpretim, pēc dotā  $\lambda$  var aprēķināt bezgalīgi  
daudzus platumus  $\varphi$ , jo vienam un tam pašam sākuma meridiānam  
ģeografiskie garumi būs  $\lambda = 0, 2\pi, 4\pi \dots$  u. t. t. un katrai šai  $\lambda$   
nozīmei atbilst savs  $\varphi$ ; šie platumi pakāpeniski aug, bet tomēr nesa-  
sniedz  $90^\circ$ , jo tad pie galīgā  $\cot \alpha$  vajadzētu iznākt  $\lambda = \infty$ , kas nav  
iespējams.

Tā tad, loksodroma, iziedama no ekvatora patvaļīga punkta, vir-  
zienā, kuŗu noteic azimuts  $\alpha < 90^\circ$ , ies pa ziemeļa puslodi un sastaps  
pēc kārtas visus meridiānus; pēc pilna apgrieziena, t. i., apejot zemes  
lodei apkārt, loksodroma sastaps atkal sākuma merīdiānu, bet jau  
punktā, kuŗa platumu  $\varphi$  noteic nol.:

$$\text{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) = e^{2\pi \cot \alpha}.$$

Pēc tam loksodroma no jauna krustos visus meridiānus un uz  
sākuma meridiāna nonāks pie  $\lambda = 4\pi$  u. t. t., šķērsojot izejas punkta  
meridiānu bezgalīgu skaitu reiz un pakāpeniski tuvojoties polam; to-

mēr polu sasniegt tā nevar, tāpēc kā tad (208) nol. otrai daļai ir jāpaliek bezgalīgi lielai, lai iznāktu  $\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) = \operatorname{tg} 90^\circ = \infty$ ; bet tas var būt vispār tikai pie  $\lambda = \infty$ .

Sevišķā gadījumā, pie  $\operatorname{cotg} \alpha = \infty$ , kad  $\alpha = 0^\circ$ , otrā daļa iznāk bezgalīgi liela; loksodroma pārvēršās par sākuma punkta meridiānu un iet caur polu.

Neskatoties uz bezgalīgi daudz apgrīezienu skaitu, visas loksodromas gaņums ir galīgs lielums, atkarīgs tikai no tās azimuta. Šī īpašība ir kā sferoīda, tā sfēras loksodromai, bet, vienkāršības dēļ, apskatīsim tikai pēdējo. Loksodromas bezgalīgi mazu loku  $ds$ , kā tas redzams no 54. zīm., izteic ar formulu:

$$ds = R \sqrt{(d\varphi)^2 + \cos^2\varphi (d\lambda)^2} \quad (a) \quad (\text{sk. 28. lp.})$$

Ieliekam te  $d\lambda$  nozīmi no formulas  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos\varphi d\lambda}{d\varphi}$ , tad  $ds = \frac{R d\varphi}{\cos\alpha}$ .

Integrācija robežās no  $0^\circ$  līdz  $\varphi$  dod loksodromas gaņumu no ekvatora līdz punktam ar platumu  $\varphi$ ; tā kā pie  $\varphi = 0^\circ$  arī  $s = 0$ , tad

$$s = \frac{R\varphi}{\cos\alpha}. \quad (209)$$

Loksodromas loka gaņums starp divām paralēlēm, noteiktām ar platumiem  $\varphi_1$  un  $\varphi_2$  ir:

$$s = \frac{R(\varphi_2 - \varphi_1)}{\cos\alpha}. \quad (210)$$

Ja ņemsim vēl divas paralēles, kuņu platumu starpība  $\varphi_4 - \varphi_3 = \varphi_2 - \varphi_1$ , tad  $s$  nemainīsies; tā tad loksodromas loku gaņumi ir vienādi, kad paralēļu platumu starpības vienādas.

Loksodromas viss gaņums, t. i., gaņums no ekvatora līdz polam ir:

$$S = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{R}{\cos\alpha}.$$

Pie  $\alpha = 0^\circ$ ,  $S = \frac{1}{2} \pi R$ ; pie  $\alpha = 90^\circ$ ,  $S = \infty$ .

Kad  $\alpha$  ir tuvu pie  $90^\circ$ , tad atsevišķu apgrīezienu platumu starpība ir maza un (210) formula nav piemērojama aprēķinam, jo jānoteic divu mazu lielumu  $\varphi_2 - \varphi_1$  un  $\cos\alpha$  attiecība. Šinī gadījumā izdevīgāki izteikt loku  $s$ , kā gaņumu starpību funkciju. Šinī nolūkā (a) formulā ieliek nozīmi

$$d\varphi = \frac{\cos\varphi d\lambda}{\operatorname{tg}\alpha};$$

$$\text{tad } ds = \frac{R \cos\varphi d\lambda}{\operatorname{sn}\alpha}.$$

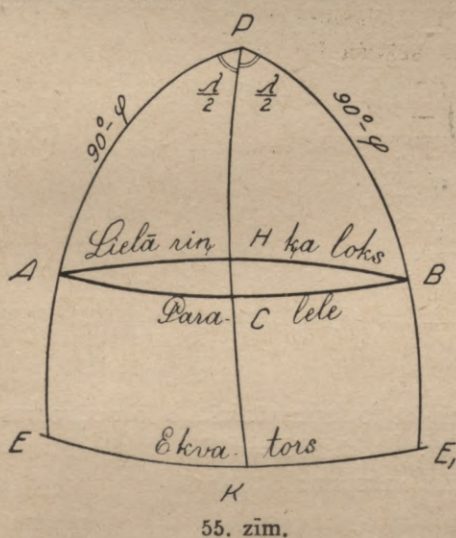
Kad platumu starpība nav liela, tad  $\varphi$  var uzskatīt par konstantu un izteiksmes integrāls dod loksodromas gařumu starp meridiāniem, noteiktiem ar gařumiem  $\lambda_2$  un  $\lambda_1$ , sekošā veidā:

$$s = \frac{R \cos \varphi}{\sin \alpha} (\lambda_2 - \lambda_1). \quad (211)$$

Ieliekot te  $\alpha = 90^\circ$ , dabūsim ar platumu  $\varphi$  noteiktās paralēles gařumu starp meridiāniem, noteiktiem ar gařumiem  $\lambda_2$  un  $\lambda_1$  sekoši:

$$s = R (\lambda_2 - \lambda_1) \cos \varphi.$$

Sfēras loksodromas loks starp diviem uz sfēras virsas ņemtiem punktiem ir gařaks par lielā riņķa loku (tā sauc. ortodromu) starp tiem pašiem punktiem, izņemot gadījumus, kad loksodroma iet pa meridiānu un ekvatoru un, tā tad sakrīt ar lielo riņķi\*). Šis apgalvojums neprasa te nekādu pierādījumu, jo no elementārās ģeometrijas ir zināms, ka lielā riņķa loks ir īsākais attālums pa sfēras virsu starp sfēras virsas diviem punktiem. Te pierādīsim, ka starpība starp loksodromas gařumu un lielā riņķa loku, kas novilkts starp loksodromas gala punktiem, var būt ļoti liela. Uziesim šo starpību visvienkāršākā gadījumā, kad loksodromas un lielā riņķa loka dotie gala punkti ir uz vienas un tās pašas paralēles un zeme pieņemta par sfēru ar rādiusu R.



Iedomāsimies divus punktus A un B (55. zīm.) uz vienas un tās pašas paralēles ACB, noteiktas ar platumu  $\varphi$ ; abu punktu gařumu starpību nosauksim par  $\lambda$ ; P — pols; EKE<sub>1</sub> — ekvators; PAE, PBE<sub>1</sub> — A un B punktu meridiānu loki starp polu un ekvatoru. Paralēles ACB gařumu nosauksim par L; kā jau bija noskaidrots, paralēle tanī pašā laikā ir arī loksodroma starp tiem pašiem punktiem A un B. Beidzot pieņemsim, ka starp tiem pašiem punktiem A un B ir novilkts lielā riņķa loks AHB un

tā gařumu nosauksim par L. Paralēles ACB loka gařums

$$L = R \cos \varphi, \lambda \dots (b)$$

\*) Par lielo riņķu attēlošanu dažādās projekcijās sk. B. Dziadkowsky. Die kartographische Projektion der Kugelgrosskreise. Sonderabdruck aus „Annalen der Hydrographie.“ 1929, Heft 8.

Lai dabūtu lielā riņķa loka garumu  $l$  pārdalīsim leņķi  $BPA = \lambda$  uz pusēm un novilksim meridiāna loku  $PCK$ ; tad  $\sphericalangle BPC = \sphericalangle CPA = \frac{\lambda}{2}$ . No taisnleņķa sfēriskā trīsstūra  $APH$  ar taisno leņķi pie virsotnes  $H$  rakstam:

$$\operatorname{sn} \frac{l}{2R} = \operatorname{sn} \frac{\lambda}{2} \cos \varphi,$$

jo katetes sinus ir vienlīdzīgs hipotenūzas sinusam reizinātam ar katetes pretleņķa sinusu (sk. Lekcijas, lasītas 1922. g. Zemkop. min. u. t. t. 30. lpp. II form.).

$$\text{No šejienes } l = 2R \operatorname{arc} \operatorname{sn} \left( \operatorname{sn} \frac{\lambda}{2} \cos \varphi \right) \dots (c).$$

Atņemam (c) no (b):

$$L - l = R \left\{ \lambda \cos \varphi - 2 \operatorname{arc} \operatorname{sn} \left( \operatorname{sn} \frac{\lambda}{2} \cos \varphi \right) \right\} \dots (d).$$

Šī formula rāda, ka uz parallēles starpība starp loksodromas un lielā riņķa loka garumiem ir atkarīga no platuma  $\varphi$  un garumu starpības  $\lambda$ ; tā ir nulle uz ekvatora un polā, tā tad ir kaut-kāds platums  $\varphi_1$ , pie kuŗa starpība  $L - l$  sasniedz maksimumu. Šo platumu dabūsim pielīdzinot nullei (d) izteiksmes pirmo atvasināto pēc mainīgā  $\varphi$ ; tad  $\varphi_1$  noteikšanai iznāk sekoša formula:

$$\cos \varphi_1 = \frac{\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 - \operatorname{sn}^2 \frac{\lambda}{2}}}{\frac{\lambda}{2} \operatorname{sn} \frac{\lambda}{2}} \quad (212)$$

Ar šo  $\varphi_1$  nozīmi (d) formula dod:

$$\text{Vislielākais } (L - l) = 2R \left\{ \frac{\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 - \operatorname{sn}^2 \frac{\lambda}{2}}}{\operatorname{sn} \frac{\lambda}{2}} - \operatorname{arc} \operatorname{sn} \frac{\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 - \operatorname{sn}^2 \frac{\lambda}{2}}}{\frac{\lambda}{2}} \right\} \quad (213)$$

Tagad aprēķināsim  $HC = h$ , jeb kā to sauc, vislielāko loksodromas attālināšanos no lielā riņķa loka. Tā kā  $HC = PC - PH = PA - PH$ , tad leņķu starpības tangensam rakstam:

$$\operatorname{tg} h = \frac{\operatorname{tg} PA - \operatorname{tg} PH}{1 + \operatorname{tg} PA \cdot \operatorname{tg} PH}.$$

Tā kā  $PA = 90^\circ - \varphi$  un  $\operatorname{tg} PH = \operatorname{tg} PA \cdot \cos \frac{\lambda}{2}$  (Katetes tangens vienlīdzīgs hipotenūzas tangensam, reizinātam ar katetei klātesošā leņķa kosinusu), tad

$$\operatorname{tg} h = \frac{\left(1 - \cos \frac{\lambda}{2}\right) \operatorname{cotg} \varphi}{1 + \operatorname{cotg}^2 \varphi \cos \frac{\lambda}{2}} \quad (e)$$

Nemot šīs izteiksmes atvasināto pēc mainīgā  $\varphi$ , pielīdzinot to nullei un noteicot no dabūtā nol.  $\varphi$ , kuŗu šinī gadījumā sauksim par  $\varphi_2$ , dabonam:

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \sqrt{\cos \frac{\lambda}{2}} \quad (214)$$

Ar šo  $\varphi$  nozīmi (e) formula dod:

$$\text{Maksimālais } \operatorname{tg} h = \frac{\operatorname{sn}^2 \frac{\lambda}{4}}{\sqrt{\cos \frac{\lambda}{2}}} \quad (215)$$

Uzskatot zemi par sfēru ar rādiusu  $R = 6370$  km un ņemot garumu starpības ik pa  $30^\circ$  dabūjam sekošu tabulu: 1) platumiem  $\varphi_1$ , kur loksodromas (paralleles) un lielā riņķa garumu starpība  $L - l$  ir vislielākā, 2) pašām šīm vislielākām starpībām  $L - l$ , izteiktām kilometros, 3) platumiem  $\varphi_2$ , kur attālināšanās vislielāka un 4) pašām šīm vislielākām attālināšanās  $h$ , izteiktām grados.

Garumu starpības $\lambda$	Platumi $\varphi_1$ (kur $L-l$ vislielāks)	Vislielākās starpības $L-l$ km	Platumi $\varphi_2$ (kur $h$ vislielāks).	Vislielākā attālināšanās $h$
$30^\circ$	$54^\circ 27'$	14,8 km	$44^\circ 30'$	$1^\circ 0'$
60	53 35	120,6 "	42 56	4 7
90	52 01	422,0 "	40 04	9 53
120	49 31	1054,5 "	35 16	19 28
150	45 40	2213,9 "	26 58	36 04
180	39 32	4213,7 "	0 0	90 0

Kad punkti A un B nav uz vienas paraleles, tad vislielākās starpības  $L - l$  gan nav tik lielas, bet tomēr tās var sasniegt 100 un pat 1000 kilometrus.

Tā kā loksodroma ir likne ar visai svarīgām īpašībām, tad apskatīsim sīkāk, kā tā attēlojas Merkatora un polārā stereografiskā projekcijās. Uz Merkatora projekcijā sastādītās kartes iedomāsimies divi punktus A un B (56. zīm.), noteiktus ar geogr. koordinātam  $\varphi_1$ ,  $\lambda_1$  un  $\varphi_2$ ,  $\lambda_2$ ; domāsim, ka  $EE_1$  ir ekvators, bet CE,  $BE_1$  punktu A, B meridiāni. Novilksim taisni CB paralēli ekvatoram  $EE_1$ ; tad

$$CB = EE_1 = \frac{a \cos \varphi_0}{W_0} (\lambda_2 - \lambda_1)$$

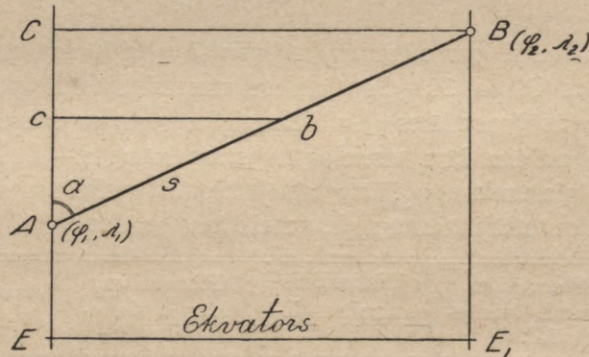
uz (188) formulas pamata, kur  $a$  ir zemes sferoida lielā pusass,  $\varphi_0$  — šķeļošās paralēles platums un  $\lambda_2 - \lambda_1$  gaļumu ņarpība, izteikta analitiskā mērā. Tā kā nogriežņi  $AE$  un  $BE_1$  ir platumiem  $\varphi_1$  un  $\varphi_2$  atbilstošās meridiāna daļas  $y_1$  un  $y_2$ , kas aprēķināmas uz (192)

formulas pamata, tad  $AC = BE_1 - AE = y_2 - y_1 = \frac{a \cos \varphi_0}{W_0} (\ln U_2 - \ln U_1)$ .

Savienosim punktus  $A, B$  ar taisni un  $\sphericalangle CAB$  nosauksim par  $\alpha$ . No taisnleņķa trīsstūra  $ABC$ , ņemot vērā augšējos vienādojumus, dabonam:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{CB}{CA} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\ln U_2 - \ln U_1};$$

tāpēc  $\lambda_2 - \lambda_1 = (\ln U_2 - \ln U_1) \operatorname{tg} \alpha$ .



56. zīm.

Tā kā ņis nol. ir tāds pats, kā sferoida loksodromas nol. (206), tad slēdziens ir tas, ka uz Merkatora projekcijas loksodroma attēlojas, kā taisne  $AB$ , kas savieno uz kartes abus dotos punktus  $A, B$ , bet leņķis  $\alpha$ , ko veido taisne  $AB$  ar  $A$  punkta meridiānu, vienlīdzīgs loksodromas āzimutam uz sferoida.

Lai sastādītu loksodromas nol. polārai stereogrāfiskai projekcijai, ieliksīm (76) formulā  $\Theta = 90^\circ - \varphi$  un vienkāršības dēļ pieņemsīm  $R = 1$ ; tad

$$\rho = \operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) = \operatorname{cotg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)$$

un

$$\operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{1}{\rho}.$$

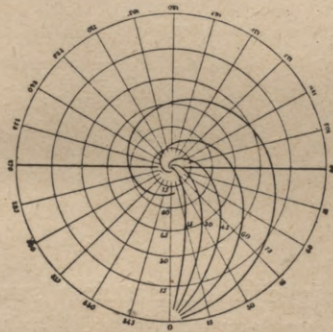
Tā kā stereogrāfiskās projekcijās āzimuti nemainās un leņķi uz projekcijas patur savu dabisko lielumu, t. i., tādu, kāds tiem uz sfēras

(ņemot, saprotams, tikai bezgalīgi mazus virzienu elementus), tad lokso-dromas nol. šai projekcijai dabūsim no (207) formulas — lokso-dromas nol. uz sfēras, ieliekot tanī tikko dabūto izteiksmi; tāpēc

$$\lambda = \operatorname{tg} \alpha \ln \frac{1}{\rho} = -\operatorname{tg} \alpha \ln \rho$$

un 
$$\rho = e^{-\lambda \operatorname{cotg} \alpha}. \quad (216)$$

Šis nol. rāda, ka polārā stereografiskā projekcijā lokso-droma attēlojas, kā logaritmiskā spirāle, t. i., kā likne, kas ar savu rādiusu vektoru veido konstantu leņķi  $\alpha$ . Labākas izpratnes dēļ 57. zīm. attēlotas polārā stereografiskā projekcijā vairākas lokso-dromas azīmu-tiem, kas savā starpā atšķiras par  $15^\circ$ . Tās visas iziet no kopējā punkta (ar gaŕumu  $0^\circ$ ) uz ekvatora un traucās uz polu, taisot ap to bezgalīgi daudzus apgriezienus, kuŗus visus nav iespējams parādīt šikā mērogā.



57. zīm.

Noteiksim stereografiskā projekcijā lokso-dromas gaŕumu un laukumu. Loka diferenciāls  $ds$  polārās koordinātās ir:

$$ds = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\lambda)^2}$$

Lai šo formulu attiecinātu uz lokso-dromu polārā stereografiskā projekcijā, tad te jāieliek no (216) formulas  $\rho$  un

$$d\rho = -e^{-\lambda \operatorname{cotg} \alpha} \cdot \operatorname{cotg} \alpha \cdot d\lambda.$$

Integrējot dabūto lielumu robežās no  $\lambda = 0^\circ$  uz ekvatora līdz patvaļīgam gaŕumam  $\lambda$  iznāk:

$$s = \pm \frac{1}{\operatorname{sn} \alpha} \int_0^\lambda e^{-\lambda \operatorname{cotg} \alpha} d\lambda = \pm \frac{1 - \rho}{\cos \alpha}.$$

Neraugoties uz to, ka lokso-dromas apgriezīnu skaits ir bezgalīgi liels, tās gaŕums  $s_0$  starp ekvatoru un polu ir galīgs lielums. Uz pola  $\rho = 0$ , jo daudzo apgriezīnu dēļ  $\lambda = \infty$ ; tāpēc visas lokso-dromas gaŕums

$$s_0 = \sec \alpha. \quad (217)$$

Pie  $R = 1$  polārai stereografiskai projekcijai ekvatora rādiuss ir 1; tāpēc laukums  $P$ , kuŗu stereografiskā projekcijā norobežo lokso-droma un rādiusi-vektori, kas novilkti uz ekvatora punktu un uz kādu citu punktu, ir:

$$P = \frac{1}{4} (1 - \rho^2) \operatorname{tg} \alpha.$$

Loksodromas viss laukums  $P_0$ , skaitot arī daļas, kas aizsedz viena otru, iznāk:

$$P_0 = \frac{1}{4} \operatorname{tg} \alpha. \quad (218)$$

Logaritmiskās spirāles likuma rādiuss

$$K = \frac{ds}{d\lambda} = \rho \operatorname{cosec} \alpha. \quad (219)$$

Šī formula rāda, ka pie nemainīga azimuta  $\alpha$ , loksodromas lieces rādiuss nepārtraukti mazinājas, no viena (uz ekvatora) līdz nullei (pola). Dažādām loksodromām, t. i., pie dažādiem azimutiem  $\alpha$ , bet vienādos attāļumos  $\rho$  n

pola, lieces rādiuss palielinājas ar āzimuta  $\alpha$  mazināšanos.  
Sekošā tabulā doti 57. zīm. attēlotām loksodromām loku garumi, laukumi un likuma rādiusi, pieņemot sfēras rādiusu  $R = 1$ ; likuma rādiusi doti tikai liknes punktiem ar  $\rho = 1$ .

$\alpha$	$S_0$	$P_0$	$K$
$0^\circ$	1,000	0,000	$\infty$
15	1,035	0,067	3,864
30	1,155	0,144	2,000
45	1,414	0,250	1,414
60	2,000	0,433	1,155
75	3,864	0,933	1,035
90	$\infty$	$\infty$	1,000

**28. Navigācijas uzdevumi.** — Par navigācijas uzdevumiem sauc kuģa vietas noteikšanu uz jūras ar kompasa un laga palīdzību. Tā kā Merkatora projekcijā loksodroma attēlojas, kā taisne, tad šī projekcija ir visnoderīgākā jūrniekiem pie šādu uzdevumu atrisināšanas.

Pēc 56. zīm. uz Merkatora projekcijā sastādītas kartes ņemsim divus punktus A un B ar zināmiem platumiem un garumiem; savienojot tos ar taisni dabūjam loksodromu; leņķis starp to un punkta A meridiānu AC būs loksodromas azimuts. Pieņemsim, ka loksodromas virzienā kuģis ir nogājis attāļumu  $Ab = s$ ; atliekam šo attāļumu galvenā mērogā uz kartes un novelkam punktu b un B paraleles bc un BC; dabonam divus taisnleņķu trīsstūrus ABC un Abc, no kuriem:

$$\begin{aligned} Ac &= s \cdot \cos \alpha, \\ cb &= s \cdot \sin \alpha, \\ CB &= AC \cdot \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

Nogriežņi Ac un AC ir meridiāna daļas un CB garumu starpība jūras jūdzēs jeb ekvatora minūtes. Attāļumu s sauc par ceļu, cb par attiešanu un azimutu  $\alpha$  par kursu. Ar šiem apzīmējumiem augšējās formulas var izteikt tādā formulējumā, kādā tās navigācijā parasti lieto:

$$\left. \begin{aligned} \text{Platumu starpība} &= \text{ceļam} \times \text{kursa kosinus.} \\ \text{Attiešana. . . .} &= \text{ceļam} \times \text{kursa sinus.} \\ \text{Garumu starpība} &= \text{meridionālai platumu starpībai} \times \\ \text{kursa tangens.} & \end{aligned} \right\} (220)$$

Uz šo formulu pamata atrisina dažādus navigācijas uzdevumus; aprēķinu vietā noder ļoti vienkārši grafiski konstruejumi. Apskatīsim te divu visbiežāki sastopamo uzdevumu atrisinājumu.

1. Doti ostas A, no kuŗas izbrauc un ostas B, uz kuŗu jābrauc, platumi  $\varphi_1, \varphi_2$  un gaŗumi  $\lambda_1, \lambda_2$ . Noteikt kursu  $\alpha$  un ceļu  $s$ , t. i., attāļumu starp šīm ostām pa loksodromas loku.

Dotos punktus A un B (56. zīm.) uz kartes savieno ar taisni un ar transportieri (lenkuli) tieši izmēri kursu  $\alpha = \sphericalangle CAB$ ; pēc tam ar cirkuli ņem gaŗumu AB un pieliek pie kartes tīkla sānmalas tā, lai vidus punkts starp cirkuļa kājiņām apmēram iznāktu uz taisnes AC vidus; uz sānu malas pēc tur uznestām iedaļām nolasītais minūšu skaits dos ceļu  $s$  jūŗas jūdzes.

Šis uzdevums, tā tad, jāatrisina pie kursa un ceļa noteikšanas gadījumā, kad dotas izbraukšanas un gala ostas geografiskās koordinātas.

2. Dots kurss  $\alpha$  un ceļš  $s$ ; jānoteic kuŗa atrašanās vieta.

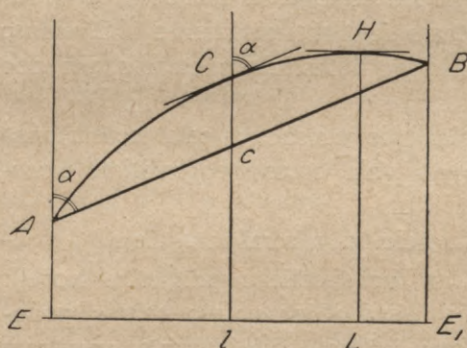
No ceļa sākuma punkta A ar transportiera palīdzību novelk taisni AB pēc dotā kursa  $\alpha$ . Pa šo taisni atliek noiето ceļu  $s$ , palielinātu platuma mērogā. Šo atlikšanu izdara sekoši: tanis apmēram platumos, kur atrodas dotais un noteicamais punkti, no kartes sānmalas (rāmja) ar cirkuli ņem grādu un minūšu skaitu, kas = noiетā ceļa jūdžu skaitam un dabūto gaŗumu atliek pa AB, no A uz b; punkts b būs kuŗa atrašanās vieta.

Ar šo paņēmienu noteic kuŗa vietu tikai tad, kad laiks apmācies un kad zināms tikai kurss un noiетais ceļa gaŗums.

Grafiskie paņēmiени kuŗa vietas noteikšanai dod pilnīgi apmierinošus rezultātus, jo vēji un jūŗas straumes var aiznest kuŗi sāņus vairāk par to, cik lielas ir grafiskās noteikšanas kļūdas. Kad attāļumi ir lieli, tad rēķina pēc (220) formulas jeb lieto sevišķas tabulas.

Kā jau noskaidrojās, loksodroma ir gaŗāka par lielā riņķa loku, novilkta starp loksodromas abiem gala punktiem; tāpēc, teorētiski ņemot, ir izdevīgāki braukt pa lielā riņķa loku, nekā pa loksodromu; kuŗi, turpretim, vada pēc kompasa un pie nemainīga kursa tas iet pa loksodromu. Ja attāļums starp ceļa gala punktiem nav liels, tad, saprotams, arī starpība ceļā pa loksodromu un lielā riņķa loku nav liela un praksē tai nav nekādas nozīmes; turpretim ērtība braukt ar

nemainīgu resp. vienu un to pašu kursu ir tik liela, ka šādos gadījumos visi kuģi brauc pa loksodromu. Citādi tas ir, kad jābrauc pāri okeānam, tūkstošiem kilometru tālu, jo tad laika zaudējums un lieki izdevumi uz kurināmo jau krietni manāmi un tas pamudina jūrniekus turēties pie lielā riņķa loka. Nav iespējams vadīt kuģi pēc kompasa tā, lai tas vienmēr ietu pa lielā riņķa loku, jo pēdējais veido citu leņķi ar katru nākošo meridiānu. Lai samazinātu ceļa garumu un gūtu priekšrocības kuģošanai pa loksodromu, tad uz Merkatora projekcijā sastādītām kartēm uznes lielā riņķa loku un ar kuģi brauc pa vairākām loksodromām, novelkot tās starp lielā riņķa loka atsevišķiem punktiem. Šinī gadījumā kurss nav jāmaina vienmēr, bet pakāpeniski un vairāk reiz, pārejot no vienas loksodromas uz otru.



58. zīm.

Apskatīsim, kā Merkatora projekcijā attēlojas lielā riņķa loks. Iedomāsimies divus punktus A, B (58. zīm.) tā, lai otrais punkts B būtu vairāk uz ziemeļiem un austrumiem, nekā pirmais punkts A; novilksim starp tiem lielā riņķa loku ACB; tas veidos ar mēridiāniem azimutus, kas pamazām palielinājas ar pārvietošanos no pirmā punkta līdz otram; turpretim loksodroma starp šiem pašiem punktiem veidos ar vi-

siem meridiāniem konstantu leņķi, kas lielāks par lielā riņķa loka vismazāko azimutu un mazāks par lielā riņķa loka vislielāko azimutu, t. i., būs starp lielā riņķa loka azimutu galējām nozīmēm. No tā jānāk pie slēdziena, ka uz projekcijas visa loksodroma novietosies uz dienvidiem no lielā riņķa loka; loksodroma attēlojas kā taisne AB, bet lielā riņķa loks attēlojas kā kaut-kāda līkne ACB, kas iet uz ziemeļiem no loksodromas un vērsta ar izliekumu (kūkumu) pret polu. Vispār ņemot lielā riņķa loks uz projekcijas novietojas, izteicoties jūrnieku valodā, „polārāki“ par loksodromu. Tikai gadījumā, kad viens punkts ir ziemeļpuslodē un otrs dienvidpuslodē, lielā riņķa loks var arī krustot loksodromu. Abas liknes, kā jau teikts, saķrīt ja galu punkti ir uz viena un tā paša meridiāna jeb uz ekvatora.

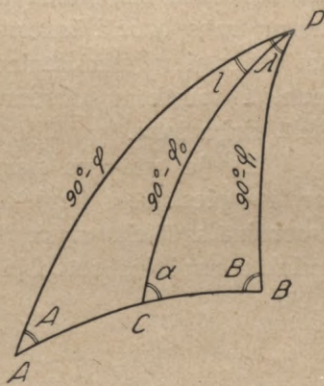
No 58. zīm. redzams, ka Merkatora projekcijā lielā riņķa loks ir garāks par loksodromu, bet tas vēl nenozīmē, ka lielā riņķa loks ir garāks arī uz zemes virsas: tuvojoties polam mērogs Merkatora pro-

jekcijā aug un tā tad vienam un tam pašam lokam atbilst mazaks jūdžu skaits, jo vairāk virzāties uz ziemeļiem; tāpēc loka ACB patiesais ga-  
rums uz zemes virsas ir īsāks par taisni AB. Lielā riņķa loka punktu  
C, kas vistālāki no loksodromas, sauc par vislielākās attālināšanās  
punktu. Šinī punktā liknes ACB pieskare ir paralela taisnei AB un  
tā tad te kurss ir vienāds ar loksodromisko.

Kontrūējot lielā riņķa loku uz kartes Merkatora projekcijā izšķir  
divus gadījumus: 1) kad attājums starp abi punktiem nav liels (ne  
vairāk par 500—1000 km), un 2) kad tas ir lielāks.

1) Pieņemsim, ka doti punktu A, B (59. zīm.) platumi  $\varphi$ ,  $\varphi_1$   
un garumu starpība  $\lambda$ ; savienosim tos ar lielā riņķa loku ACB un do-  
māsim, ka attājums starp abi punktiem nav lielāks par 500—1000 km,  
skaitot pa meridiānu. No pola P novilksim meridiānus PA un PB.  
Dabūtā sfēriskā trīsstūrī PAB ir zināmas  
divi malas  $PA = 90^\circ - \varphi$ ,  $PB = 90^\circ - \varphi_1$   
un leņķis starp tām  $\angle BPA = \lambda$ . Pēc šiem  
elementiem uz Nepera analogiju pamata  
aprēķina leņķus A un B, kurus jūrnieki  
sauc par stāvokļa leņķiem:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{B+A}{2} &= \operatorname{cotg} \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{\cos \frac{\varphi_1 - \varphi}{2}}{\operatorname{sn} \frac{\varphi_1 + \varphi}{2}}, \\ \operatorname{tg} \frac{B-A}{2} &= \operatorname{cotg} \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{\operatorname{sn} \frac{\varphi_1 - \varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi_1 + \varphi}{2}} \end{aligned} \right\} (221)$$



59. zīm.

(Sk. „Lekcijas, lasītas 1922. g. Zemkop. min. u. t. t.“ 43. lpp.  
3. un 4. form.)

Pieņemsim, ka C ir vislielākais attālināšanās punkts. Šinī punktā  
 $\sphericalangle PCB =$  loksodromiskam kursam un to dabū novelkot loksodromu  
starp abi punktiem A, B uz Merkatora projekcijā sastādītās kartes.  
Nosauksim šo kursu par  $\alpha$ . Vislielākā attālināšanās punkta C geogra-  
fisko platumu  $\varphi_0$  un garumu  $l$  (skaitot no A punkta meridiāna) dabū  
no sfēriskā trīsstūra APC pēc dotās malas  $AP = 90^\circ - \varphi$  un divi  
leņķiem:  $\sphericalangle PCA = 180^\circ - \alpha$  uu  $\sphericalangle PAC = A$ ; tā kā meridiāna loks  
 $PC = 90^\circ - \varphi_0$  un  $\sphericalangle CPA = l$ , tad uz sešu sinusu formulas pamata  
(sk. Lekcijas, 23. lpp. 2. form.), un uz tā paša pamata, kā pirmā  
formula (221) sistēmā rakstam:

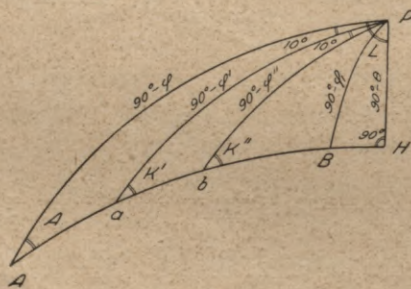
$$\cos \varphi_0 = \operatorname{sn} A \cos \varphi \operatorname{cosec} \alpha$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{l}{2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha - A}{2} \frac{\cos \frac{\varphi_0 - \varphi}{2}}{\operatorname{sn} \frac{\varphi_0 + \varphi}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (222)$$

Liela riņķa loka ACB konstruēšanu (58. zīm.) uz Merkatora projekcijā sastādītās kartes izdara sekoši:

Abos dotos punktos A un B ar transportiera palīdzību konstruē pēc (221) formulām aprēķinātos leņķus A un B; ar to dabū loka ACB divi pieskares punktus A un B; uznes uz kartes punktu C pēc tā geografiskām koordinātām, kas aprēķinātas no (222) formulām, un caur to novelk lielā riņķa trešo pieskāri pēc loksodromas kursa, t. i., paralēli taisnei AB. Beidzot caur šiem trīs punktiem A, C un B no rokas novelk nepārtrauktu līkni tā, lai trīs aprādītās taisnes būtu šīs līknes pieskares. Līknes daļas uzskata par taisnēm un ar transportieri izmēri leņķus starp šiem taisniem līknes elementiem un attiecīgiem meridiāniem. Tādā ceļā dabū kursu līknes ACB ikkuņā punktā vairākām loksodromām, kuŗas visā visumā maz atšķiras no lielā riņķa loka.

2) Ja attāļums starp dotiem punktiem A un B ir ļoti liels, tad ar trīs pieskarēm nepietiek un nepieciešami ir aprēķināt geografiskās koordinātas lielā riņķa loka vairākiem starppunktiem. Tamdēļ priekšu aprēķina stāvokļa leņķus A un B pēc (221) formulām un pēc



60. zīm.

tam aprēķina lielā riņķa virsotnes geografiskās koordinātas, resp. koordinātas tam lielā riņķa AB (60. zīm.) punktam H, kuŗam vislielākais platums. Punkta H platumu  $\Theta$  un gaŗumu L (skaitot no sākuma punkta A meridiāna) dabū no taisnleņķa sfēriskā trīsstūra APH pēc dotās hipotenūzas  $PA = 90^\circ - \varphi$  un leņķa A.

Taisnleņķa sfēriskā trīsstūrī hipotenūzas kosinus vienlīdzīgs abu šauru leņķu kotangensu reizinājumam un katetes sinus vienlīdzīgs hipotenūzas sinusam  $\times$  ar katetes pretleņķa sinusu, tāpēc:

$$\begin{aligned} \cos(90^\circ - \varphi) &= \operatorname{cotg} L \operatorname{cotg} A, \\ \operatorname{sn}(90^\circ - \Theta) &= \operatorname{sn}(90^\circ - \varphi) \operatorname{sn} A, \text{ jeb} \\ \operatorname{cotg} L &= \operatorname{sn} \varphi \operatorname{tg} A, \\ \cos \Theta &= \cos \varphi \operatorname{sn} A, \end{aligned} \quad (223)$$

Iedomāsimies uz lielā riņķa loka starp gala punktiem A un B vairākus starppunktus a, b... tā, lai šo punktu gaņumi atšķirtos par vienādu gradu skaitu savā starpā, piemēram, par  $10^0$  ( $\sphericalangle aPA = 10^0$ ,  $\sphericalangle bPA = 20^0$  u. t. t.). Šo punktu a, b... platumus  $\varphi'$ ,  $\varphi''$ ... aprēķina no formulas:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi' &= \operatorname{tg} \Theta \cdot \cos (L - 10^0) \\ \operatorname{tg} \varphi'' &= \operatorname{tg} \Theta \cdot \cos (L - 20^0) \end{aligned} \quad (224)$$

jo hipotenūzas kotangens vienlīdzīgs katetes kotangensam  $\times$  ar šai katetei klatesošā šaurā leņķa kosinusu (sk. „Lekcijas...” 31. lpp. III' formula).

Punktus a, b... uznes uz kartes pēc to platumiem un gaņumiem; savienojot tos ar nepārtrauktu un vienmērīgu līkni dabū lielā riņķa loku; tā ikkatrā punktā var noteikt kursu pēc 1. gadījumā apskatītās metodes.

Kursus K, t. i. leņķus BaP, BbP... punktos a, b... vienkārši var aprēķināt pēc formulām:

$$\begin{aligned} \cos K' &= \operatorname{sn} \Theta \operatorname{sn} (L - 10^0) \\ \cos K'' &= \operatorname{sn} \Theta \operatorname{sn} (L - 20^0) \end{aligned} \quad (225)$$

Jāpiezīmē, ka aprēķinus pēc (221) — (225) formulām var izdarīt ar piec- vai pat četrzīmju logaritmiem: pirmkārt tāpēc, ka šīs formulas izvestas pieņemot zemi par sfēru un, otrkārt, tāpēc, ka vējš un straume, lai gan tiek ņemti vērā, tomēr var aiznest kuģi uz sāniem; tamdēļ te lielu noteiktību sagaidīt nevar. Skaidrā laikā kuģa atrašanās vietu noteic no astronomiskiem novērojumiem un pēc tam noteic jaunu lielā riņķa loku starp atrašanās punktu un ceļa gala punktu.

Piemērs. — Konstruēt lielā riņķa loku uz Merkatora projekcijā sastādītas kartes starp Hamiltonas un Brestes ostām, ja pirmai (uz Bermudu salām)  $\varphi = 32^015'$ ,  $\lambda = 65^005'$  no Grinvičas un otrai (Francijas vakara piekrastē)  $\varphi_1 = 48^024'$ ,  $\lambda_1 = 4^030'$ .

Pēc (221) formulām: A =  $51^036'$ , B =  $86^036',5$ .

Nosaucot pēc 56. zīm. Hamiltonu par A un Bresti par B, dabūjam:

$$\begin{aligned} BE_1 &= \frac{R}{\mu} \log \operatorname{tg} \left( 45^0 + \frac{\varphi_1}{2} \right), \\ AE &= \frac{R}{\mu} \log \operatorname{tg} \left( 45^0 + \frac{\varphi}{2} \right) \\ \hline AC &= \frac{R}{\mu} \left\{ \log \operatorname{tg} \left( 45^0 + \frac{\varphi_1}{2} \right) - \log \operatorname{tg} \left( 45^0 + \frac{\varphi}{2} \right) \right\}. \\ BC &= \frac{R(\lambda - \lambda_1)''}{\rho''}, \text{ kur } \rho = 206264,806. \end{aligned}$$

$$\text{Tāpēc } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\mu (\lambda - \lambda_1)''}{\rho'' \left\{ \operatorname{logtg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi_1}{2} \right) - \operatorname{logtg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \right\}}$$

un loksodromiskais kurs  $\alpha = 70^\circ 34' 51''$ ,64.

Tāļāki pēc (222) un (223) formulām aprēķina:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 45^\circ 21' & l &= 29^\circ 42' \\ \theta &= 48 \text{ } 29 & L &= 56 \text{ } 03' \end{aligned}$$

un, beidzot, punktu noteikšanai uz lielā riņķa loka un kursiem šinīs punktos pēc (224) un (225) formulām dabonam sekošu tabulu:

Garumi	Platumi	Kursi
L—10 <sup>0</sup>	38 <sup>0</sup> 06'	57 <sup>0</sup> 23'
L—20	42 25	63 51
L—30	45 26	70 48
L—40	47 21	78 03
L—50	48 20	85 28
L—60	48 25	92 57

Pēc šiem punktiem jau viegli konstruēt lielā riņķa visu loku, kā parādīts 58. zīmējumā.

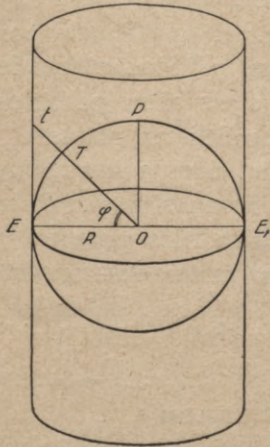
Lielā riņķa loks, kas savieno abas minētās ostas ir  $47^\circ 34' = 2854$  jūras jūdžem (1 jūras jūdze = 6080 angļu pēdam); turpretim loksodromas garums grafiski jeb pēc (210) formulas iznāk 2914 jūras jūdzes; tamdēļ ceļa saīsinājums, braucot ne

pa loksodromu, bet pa lielā riņķa loku te ir tikai 60 jūras jūdzes jeb ap 115,5 km.

Šo aprēķinu vietā var lietot sevišķu konstruējumu, kuŗu izgudrojis Roselis (Russel). Lai katrā atsevišķā gadījumā nebūtu jāaprēķina lielo riņķu projekcijas, tad Merkatora projekcijā sastādītās kartes mērogā Roselis zīmē lielo riņķu projekcijas, ņemot to slīpumu pret ekvātoru ik pa 2<sup>0</sup>. Ja konkrētā gadījumā jākonstruē lielā riņķa projekcija starp diviem noteiktiem punktiem, tad uz kartes uzliek kalku (vispār caurspīdīgu vaskotu audekli jeb papīri) un atzīmē uz tās abus dotos punktus un ekvātoru; tad šo kalku ar abiem atzīmētiem punktiem un ekvātoru uzliek uz Roseļa zīmējuma, griež un bīda, kamēr ekvātori sakrīt; pēc tam kalku bīda uz labo jeb kreiso pusi, kamēr abi uznestie punkti iznāk uz viena un tā paša lielā riņķa projekcijas, jeb proporcionālos attājumos starp divi blakus riņķu projekcijām. Pie šī stāvokļa uz kalkas novelk atbilstošo lielā riņķa loka daļu starp abiem dotiem punktiem un tad pārkopē to uz kartes. Ar to ir dabūts lielā riņķa loks starp diviem punktiem uz Merkatora projekcijā sastādītās kartes.

**29. Ueīča projekcija.** — Angļu zinātnieks Uečs (Wetch) ieteica projicēt no sfēras centra sfēras virsas punktus uz cilindri, kas pieskaras

sfērai pa ekvātoru; ja pēc tam cilindri pārgriež pa kādu veiduli un attin uz plaknes, tad dabū centrālo perspektīvo cilindrisko projekciju, kuŗu visai bieži sauc par epicilindrisko. Tās konstruēšana parādīta 61. zīmējumā.  $EE_1$  ir ekvātors, pa kuŗu cilindrs pieskaras sfērai; punkta  $T$  projekcija iznāk punktā  $t$  — rādiusa  $OT$  turpinājuma sastapšanās punktā ar cilindra virsu. Punkts  $T$  uz sfēras noteikts ar platumu  $\varphi$  un garumu  $\lambda$ ; punkta  $t$  taisnleņķu koordinātas  $x$  un  $y$  uz projekcijas būs



61. zīm.

$$\left. \begin{aligned} x &= R\lambda \\ Et = y &= R \operatorname{tg} \varphi \end{aligned} \right\} \quad (226)$$

Te  $R$  ir zemes sfēras rādius, samazināts pieņemtā galvenā mērogā;  $\lambda$  un  $x$  skaitās no sākuma meridiāna,  $y$  — no ekvātora.

Sfēras bezgalīgi mazs elements pa meridiānu ir  $R d\varphi$ , pa paralēli  $R \cos \varphi d\lambda$ ; uz projekcijas atbilstošie elementi ir  $dy$ ,  $dx$ ; tāpēc

mērogi pa meridiāniem un paralēlēm iznāk:

$$\left. \begin{aligned} m_m &= \frac{dy}{R d\varphi} = \sec^2 \varphi \\ m_p &= \frac{dx}{R \cos \varphi d\lambda} = \sec \varphi \end{aligned} \right\} \quad (227)$$

No (159) formulas mērogs vispārīgā veidā iznāk:

$$m = \sec \varphi \sqrt{\sec^2 \varphi \cos^2 \alpha + \operatorname{sn}^2 \alpha}.$$

Ši izteiksme būs maksimum pie  $\alpha = 0^\circ$  un minimum pie  $\alpha = 90^\circ$ ; tāpēc  $m_m = a$  un  $m_p = b$  un indikatrisas lielā ass vienmēr stateniska pret ekvātoru.

Platību mērogs  $p = \sec^3 \varphi$ .

Vislielākai leņķu alterācijai pēc (29) formulas ir:

$$\operatorname{sn} \omega = \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}.$$

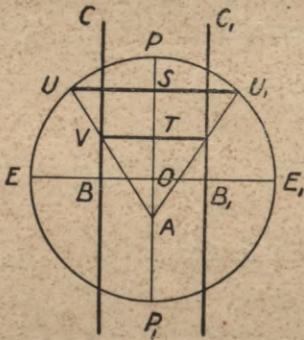
Uetča projekcija nekad nav lietota geografisko karšu konstruēšanai; apskatam to tikai tamdēļ, lai nesajauktu ar Merkātora projekciju, jo pēc ārējā izskata abas projekcijas visai līdzīgas: uz abām paralēļu starpas nepārtraukti pieaug un polus, kā vienā, tā otrā, nav iespējams attēlot. Uetča projekcijā meridiānu daļas ir lielākas, nekā Merkātora projekcijā; bez tam Uetča projekcijā nav bezgalīgi mazo daļu vienveidības, resp. tā nav konforma.

**30. Epicilindriskās projekcijas ar nemainīgu redzes punktu.** — Šīs projekcijās redzes punktu ņem uz polu līnijas un zemes virsas dažādos punktos projicē uz taisno cilindri, kuŗa ass sakrīt ar polu līniju; pēc tam, kā parasti, cilindri attin uz plaknes.

Pieņemsim, ka  $O$  ir globa centrs (62. zīm.),  $P$  un  $P_1$  abi poli,  $A$  redzes punkts un  $S$  centrs paralēlei ar platumu  $\varphi$ . Plakne, kas ies caur zemes asi un sakrīt ar zīmējuma plakni, šķēls sfēru pa aploci  $EPE_1P_1$ , cilindri pa veidulēm  $BC$ ,  $B_1C_1$  un paralēli ar platumu  $\varphi$  pa taisni  $UU_1$ , kas stateniska pret  $PP_1$ ;  $OA$ , redzes punkta  $A$  attālumus no centra  $O$  nosauksim par  $D$ ; globa rādiusu nosauksim par  $R$  un cilindra pamatnes rādiusu  $OB$  par  $r$ . Minētās paralēles perspektīve attīsies uz plaknes pa taisni, kuŗas attāļums  $y$  no kartes ekvatora būs

$OT$ . No līdzīgiem trīsstūriem  $AVT$  un  $AUS$  iznāk, ka  $AT = \frac{AS \cdot VT}{US}$ .

Tamdēļ  $AT = D + y$ ;  $TV = r = R \cos \varphi_0$ ;  $AS = D + R \sin \varphi$ ;  
 $SU = R \cos \varphi$  un  $y = AT - D = \frac{(D + R \sin \varphi) \cdot \cos \varphi_0}{\cos \varphi} - D$ .



62. zīm.

Meridiānu, noteiktu ar gaŗumu  $\lambda$  attēlos taisne, kuŗas attāļums no kartes pirmā meridiāna ir cilindra virsas loks starp abu meridiānu plaknēm, tā tad

$$x = r \lambda = R \lambda \cos \varphi_0.$$

Mēroga aprēķinam ņemam (158) formulu, kas dod

$$m_m = \frac{(R + D \sin \varphi) \cos \varphi_0}{R \cos^2 \varphi}$$

$$\text{un } m_p = \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi}.$$

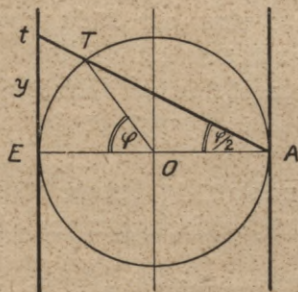
**31. Perspektīvās epicilindriskās projekcijas ar mainīgu redzes punktu.** — Šīs projekcijas atšķiras no iepriekšējām ar to, ka redzes punkts ir mainīgs un veido ekvatora plaknē ekvatoram koncentrisku riņķi; redzes punkts vienmēr ir uz šī riņķa aploces un pie tam meridiāna plaknē, kas  $180^\circ$  ( $200$  gr) tāļu no attelojamās vietas meridiāna. Apskatīsim divi šādas projekcijas, kuŗas  $1868$ . gadā ieteicis P. Brauns. Abās cilindrs pieskarās globam pa ekvatoru. Pirmo viņš nosauc par stereogrāfiski-cilindrisko projekciju (projection stéréographique à cylindre) un otro par pārveidoto Merkatora projekciju (projection de Mercator modifiée); pirmā redzes punkts paliek uz ekvatora, bet otrā tā attāļums no centra ir rādiusa  $0,4$ . Pirmā maz maina leņķus, ja platumi nav lieli; otrā vairāk maina leņķus, bet platības mazāk.

Pieņemsim, ka epicilindriskai perspektīvei ar mainīgo redzes punktu uz ekvatora (63. zīm.) EA ir ekvators, A redzes punkts, T ar platumu  $\varphi$  noteikts zemes virsas punkts un t tā projekcija ar redzes staru AT uz skarošā cilindra virsas. Nosaucot zemes rādiusu par R, dabūsim

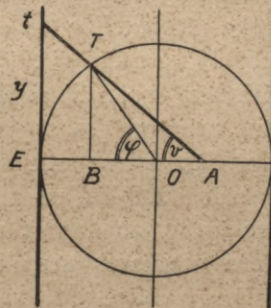
$$\left. \begin{aligned} y &= 2R \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \\ x &= R\lambda \end{aligned} \right\} \quad (228)$$

Mērogs pēc (159) formulas būs:  $m = \sqrt{\sec^4 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \alpha + \sec^2 \varphi \operatorname{sn}^2 \alpha}$ ;

pie  $\alpha = 0^\circ$ ,  $m_m = \sec^2 \frac{\varphi}{2} = b$  un pie  $\alpha = 90^\circ$ ,  $m_p = \sec \varphi = a$ .



63. zīm.



64. zīm.

Otrā Brauna projekcijā pēc 64. zīm. A ir redzes punkts un  $OA = 0,4R$ ;

$$y = Et = EA \cdot \operatorname{tg} \nu = 1,4R \cdot \operatorname{tg} \nu;$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \nu = \frac{BT}{BA} = \frac{\operatorname{sn} \varphi}{\cos \varphi + 0,4}; \text{ t\u0101p\u0113c } y &= \frac{14R \operatorname{sn} \varphi}{10 \cos \varphi + 4} \\ x &= R\lambda \end{aligned} \right\} \quad (229)$$

No \u0161ejienes:

$$\left. \begin{aligned} m_p &= a = \sec \varphi \\ m_m &= b = \frac{14(10 + 4 \cos \varphi)}{(10 \cos \varphi + 4)^2} \end{aligned} \right\} \quad (230)$$

Visliel\u0101kai le\u0137\u0137u alter\u0101cijai izn\u0101k:

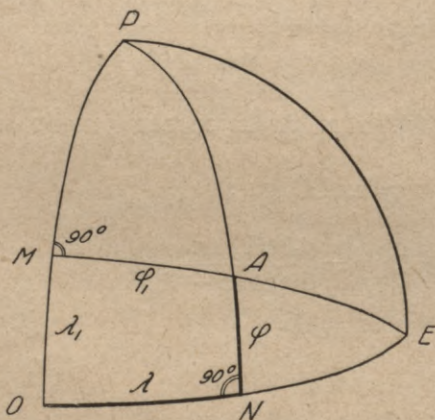
$$\operatorname{sn} \omega = \frac{11 \cos^2 \varphi - 15 \cos \varphi + 4}{39 \cos^2 \varphi + 55 \cos \varphi + 4}$$

Leņķis  $\omega$  būs nulle pie  $\cos \varphi = 1$  un  $\cos \varphi = \frac{4}{11}$  t. i., uz ekvatora un uz paralēles ar  $\varphi = 68^{\circ}40'34'',73 = 76,3071$  gr.; starp šo paralēli u ekvatoru (230) form. a un b vietas savstarpēji jāapmaina.

**32. Šķērsās cilindriskās projekcijas.** — Līdz šim mēs iedomājāmies cilindri ar asi pa polu līniju un uz tā virsu pārnēsām punktus no globa. Cilindra virsa zemei pieskārs pa ekvatoru vai šķēla to pa divām paralēlēm. Šīs projekcijas, kā to var redzēt no mērogu formulām, vismazākās alterācijas ir ekvatoriālām zemēm; ar attālināšanos no ekvatora uz ziemeļiem vai dienvidiem alterācijas nepārtraukti aug; polārām zemēm tās ir ļoti lielas, bet pašos polos bezgalīgi lielas un abi poli attēlojas kā taisnes. Ja valstij, kas izstiepta platumā un šaura gaļumā, cilindrs pieskārtos valsts vidējam meridiānam, tad tādas valsts teritorijas alterācijas būtu daudz mazākas.

Globa projekcijas uz cilindri, kas to skar par kādu meridiānu, sauc par šķērsām jeb transversālām cilindriskām projekcijām. Uz šīm projekcijām meridiāni un paralēles nav taisnes, bet šīm neērtībām nav praktiskas nozīmes, jo lielā mērogā tā kā tā visas projekcijas jākonstruē pēc punktiem.

Uziesim kaut-kādam patvaļīgam punktam tā ģeografisko koordinātu sakarību ar sferiskām koordinātām, attiecinātām uz ekvatoru un cilindra pieskares meridiānu.



65. zīm.

Pieņemsim, ka P ir pols un PO (65. zīm.) sākuma meridiāna loks, pa kuņu cilindrs pieskares globam; OE ekvators. Patvaļīga punkta A platums būs  $AN = \varphi$  un gaļums  $ON = \lambda$ . No A novilksim lielā riņķa loku AM stateniski pret sākuma meridiānu; lokus AM un MO nosauksim attiecīgi par  $\varphi_1$  un  $\lambda_1$ . Turpinot loku AM līdz ekvatoram, dabūsim punktu E un ar to izveidojas sfēriskais taislēņķa trīsstūris AEN. Šinī trīsstūrī leņķis pie virsotnes N ir taisns,  $AE = 90^{\circ} - \varphi_1$ ,  $NE =$

$= 90^{\circ} - \lambda$  un  $\sphericalangle NEA = \lambda_1$ ; tā kā 1) hipotenūzas kosinusi ir vienlīdzīgi katetu kosinusu reizinājumam un 2) katetes (NA) tangens vienlīdzīgs otras katetes sinusam, reizinātam ar pirmās katetes pretlēņķa tangensu, tad

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sn} \varphi_1 &= \cos \varphi \operatorname{sn} \lambda, \\ \operatorname{tg} \lambda_1 &= \operatorname{tg} \varphi \operatorname{sec} \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (231)$$

Kad pēc šīm formulām ir aprēķinātas sfēriskās koordinātas  $\varphi_1$ ,  $\lambda_1$  visiem globa meridiānu un paralēļu krustojumu punktiem, tad aprēķinām to taisnleņķu koordinātas, attiecībā uz divām savā starpā stateniskām taisnēm, no kurām  $x$  ass uz projekcijas būs ekvātors un  $y$  ass — cilindra pieskares meridiāns; par pēdējo parasti ņem valsts vidējo meridiānu. Formulas, pēc kurām aprēķina taisnleņķu koordinātas, ir atkarīgas no projekcijai uzstādītām prasībām. Apskatīsim visvairāk lietotām šī veida projekcijas.

1) Vienkāršai šķērsai cilindriskai projekcijai, kas atbilst kvadrātiskai:  $x = R \varphi_1$ ,  $y = R \lambda_1 \dots$  (232)

2) Vienādlielai šķērsai cilindriskai projekcijai, kas atbilst izocilindriskai:  $x = R \operatorname{Sn} \varphi_1$ ,  $y = R \lambda_1 \dots$  (233)

3) Vienādleņķu šķērsai cilindriskai projekcijai, kas atbilst Merkatora projekcijai ar skarošu cilindri:  $x = R \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi_1}{2} \right)$ ,  $y = R \lambda_1 \dots$  (234)

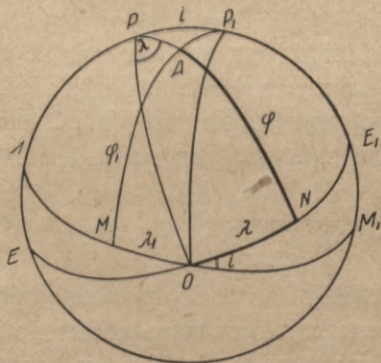
Visos šīnīs gadījumos iepriekš jāaprēķina palīgkoordinātas  $\varphi_1$ ,  $\lambda_1$  pēc (231) formulām.

Kā jau bija aizrādīts augšā, šķērsās cilindriskās projekcijas sevišķi noderīgas tādām valstīm un zemēm, kas izstieptas pa meridiānu un šauras pa paralēlēm resp. rietum-austruma virzienā.

Piemēram visu Ameriku šīnīs projekcijās var attēlot ar mazākiem sagrozījumiem, nekā cilindriskās projekcijās uz tāda cilindra, kas zemei pieskarās pa ekvātoru.

**33. Slīpas cilindriskās projekcijas.** — Ja valsts ir izstiepta ne pa meridiānu, bet pa kaut-kādu lielo riņķi, tad labāki lietot slīpās cilindriskās projekcijas; tas nozīmē, ka tādu valsti projicē uz cilindra, kas pieskaras sfērai pa šo lielo riņķi, kurš, tā sakot, noteic valsts ass virzienu. Šīs projekcijas atšķiras no šķērsām cilindriskām projekcijām tikai ar to, kā meridiānu un paralēļu krustšanās punktu sfēriskās palīgkoordinātas  $\varphi_1$  un  $\lambda_1$  jāaprēķina pēc komplicētākām formulām.

Pieņemsim, ka  $MM_1$  (66. zīm.) attēlo lielā riņķa loku, pa kuru



66. zīm.

cilindrs pieskarās sfērai. Šī loka stāvokli noteiks tā krustošanās punkts O ar ekvatoru  $EE_1$  un leņķis  $i$  starp šo loku un ekvatoru. Loka  $MM_1$  pola  $P_1$  attāļums no zemes pola P ir loks  $PP_1 = i$ . Ar ģeografiskām koordinātām  $\varphi = AN$  un  $\lambda = ON$  noteiktā punkta A sfēriskās koordinātas  $AM = \varphi_1$  un  $OM = \lambda_1$  ir iespējams aprēķināt no sfēriskā trīsstūra  $PP_1A$ , kuŗa malas ir:  $PA = 90^\circ - \varphi$ ,  $PP_1 = i$ ;  $AP_1 = 90^\circ - \varphi_1$  un leņķi:  $P_1PA = 90^\circ - \lambda$ ,  $AP_1P = 90^\circ - \lambda_1$ ; tad

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sn} \varphi_1 &= \operatorname{sn} \varphi \cos i + \cos \varphi \operatorname{sn} i \operatorname{sn} \lambda, \\ \operatorname{tg} \lambda_1 &= (\operatorname{tg} \varphi \operatorname{sn} i - \cos i \operatorname{sn} \lambda) \operatorname{sec} \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (235)$$

Pirmo nol. raksta uz malas kosinusa formulas pamata un otro uz kotangensu formulas pamata, ņemot par āra malu AP un iekšējo malu  $PP_1$  (sk. „Lekcijas...” § 20, 27—28. lpp.).

Pie  $i = 90^\circ$  šīs formulas pārveršas par (231) formulām. Slīpo cilindrisko projekciju atsevišķie gadījumi ir pilnīgi analogiski šķērso cilindrisko projekciju atsevišķiem gadījumiem un tāpēc punktu taisnleņķu koordinātas var aprēķināt pēc augšā dotām (232) — (234) formulām.

Lielā riņķa  $MOM_1$  slīpuma leņķī  $i$  un šī riņķa krustošanās punktu O ar ekvatoru noteic vai nu grafiski uz globa, novelkot no rokas ass līniju, jeb šīs ass virzienu un krustošanās punktu aprēķina pēc ass līnijas divu punktu dotām ģeografiskām koordinātām. Aprēķins redzams no sekošā.

Pieņemsim, ka doti divi punktu (A, B, 67. zīm.) uz zemes virsas platumi  $\varphi_1, \varphi_2$  un garumi  $\lambda_1, \lambda_2$ ; uziesim slīpuma leņķi  $i$  un garumu  $\lambda_0$  punktam, kuŗā krustojas ar ekvatoru caur abiem minētiem punktiem novilktais lielais riņķis.

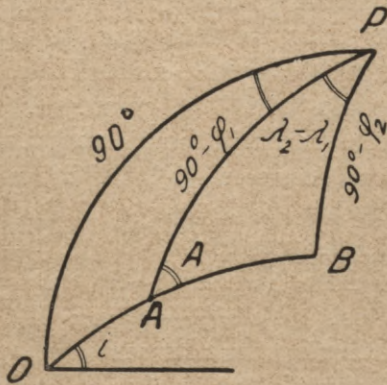
Iedomāsimies, ka novilkti abu punktu meridiāni un ka abi punktus savieno lielā riņķa loks; tad izveidojas sfēriskais trīsstūris, kuŗa malas pa meridiāniem līdz polam ir  $PA = 90^\circ - \varphi_1$ ,  $PB = 90^\circ - \varphi_2$  un leņķis starp tām pie pola  $\lambda_2 - \lambda_1$ . Nosaucot leņķi, kas veidojas pirmā dotā punktā starp meridiānu un lielā riņķa loku par A, dabūsim (sk. „Lekcijas etc.” 27—28. lpp. § 20. pirmo kotangensu formulu (5) sistēmā):  $\operatorname{tg} \varphi_2 \cos \varphi_1 = \operatorname{cotg} A \operatorname{sn}(\lambda_2 - \lambda_1) + \operatorname{sn} \varphi_1 \cos(\lambda_2 - \lambda_1)$  un no šejienes

$$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{sn}(\lambda_2 - \lambda_1)}{\operatorname{tg} \varphi_2 \cos \varphi_1 - \operatorname{sn} \varphi_1 \cos(\lambda_2 - \lambda_1)}. \quad (236)$$

Pēc tam apskatīsim sfērisko trīsstūri, ko veido pirmais punkts A, pols P un punkts O, kuŗā ar ekvatoru krustojas starp abiem dotiem punktiem A un B novilktais lielais riņķis; tā malas ir  $90^\circ - \varphi_1$  un  $90^\circ$ , bet leņķis  $POA = 90^\circ - i$ ,  $\sphericalangle OAP = 180^\circ - A$  un  $\sphericalangle APO = \lambda_1 - \lambda_0$ ;

tad, 1) uz sešu sinusu formulas pamata un 2) uzskatot PO par ārmaļu un PA par iekšmaļu uz kotangensu formulu pamata, rakstam:

$$\left. \begin{aligned} \cos i &= \operatorname{sn} A \cos \varphi_1, \\ \operatorname{tg} (\lambda_1 - \lambda_0) &= \operatorname{sn} \varphi_1 \operatorname{tg} A. \end{aligned} \right\} (237)$$

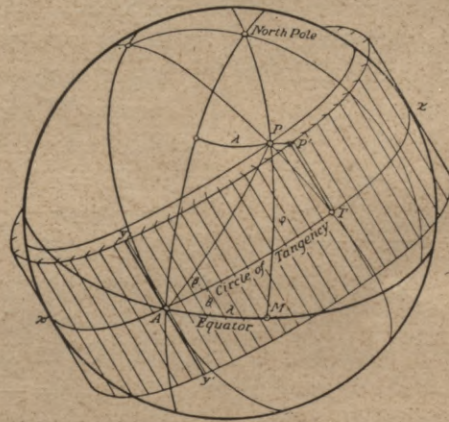


67. zīm.

Piemērs. — Uziet lielā riņķa stāvokli Amerikas slīpās cilindriskās projekcijas kartes konstruēšanai, ja tā divi doto (Ziemeļ- un Dienvidamerikas centrālo) punktu ģeografiskās koordinātas ir:  $\varphi_1 = +40^\circ$ ,  $\lambda_1 = +93^\circ$ ;  $\varphi_2 = -15^\circ$ ,  $\lambda_2 = +60^\circ$ , skaitot gaļumus no Grinvičas.

No (236) formulām dabonam  $A = 141^\circ 54' 40'', 05$  un no (237) formulām  $i = 61^\circ 47' 57'', 86$  un  $\lambda_0 = 68^\circ 15' 38'', 34$ .

**34. Slīpā vienādlielā cilindriskā projekcija.** — Iedomāsimies zemes sfēru ar rādiusu  $R$  (68. zīm.) un tai pieskarošos cilindri pa kaut-kādu lielo riņķi  $x'ATx$ ; pieņemsim ka pēdējais punktā  $A$  krusto ekvatoru un veido ar to leņķi  $TAM = \Theta$ . Pie šāda cilindra virsas atritināšanas uz uz plaknes pieskares aplis veidos taisni, kuŗu pieņemsim par asi  $xx'$ ; par  $y$  asi uz projekcijas ņemsim veiduli, kas iet caur punktu  $A$ . Ņemsim sfēras punktu  $P$ , noteiktu ar platumu  $\varphi = PM$  un gaļumu  $\lambda = MA$ . Iedomājoties caur cilindra asi un punktu  $P$  lielā riņķa plakni, uz cilindra virsas dabūsim lielā riņķa elementa projekciju  $TP'$  un punkts  $P'$  būs punkta  $P$  projekcija uz cilindra virsas. Noteiksim punkta  $P'$  taisnleņķu koordinātas  $x, y$ . Viegli redzēt, ka loka  $AT$  lineārais gaļums būs abscisa  $x = R$  reiz arc  $AT$ , kas izteikts radiānos un ordināta  $y = P'T$  ir loka  $PT$  projekcija uz pieskares cilindri. Uzdevums sastāv iekš tam, ka jānoteic  $AT$  un  $P'T$  atkarībā no punkta  $P$  gaļuma un platumā un  $\angle \Theta$ .



68. zīm.

AT noteikšanai apskatīsim sfērisko taisnleņķa trīsstūri ATP; tā kā katetes tangens ir vienlīdzīgs hipotenūzas tangensam, reizinātam ar noteicamai katetei klātesoša leņķa kosinusu\*), tad  $\overline{tg AT} = \overline{AP} \times \cos \beta \dots$  (a), kur  $\beta$  ir  $\sphericalangle PAT$ . Uz šīs pašas formulas pamata no sfēriskā taisnleņķa trīsstūra APM iznāk:  $\overline{tg AM} = \overline{tg AP} \cdot \cos PAM$ , jeb  $\overline{tg \lambda} = \overline{tg AP} \cdot \cos(\beta + \Theta) \dots$  (b). No tā paša trīsstūra, ņemot vērā, ka hipotenūzas kosinuss = katetu kosinusu reizinājumam\*\*), rakstam  $\overline{\cos AP} = \overline{\cos AM} \cdot \overline{\cos PM}$  jeb  $\overline{\cos AP} = \cos \lambda \cos \varphi \dots$  (c). Tā kā katetes sinus ir vienlīdzīgs hipotenūzas sinusam, reizinātam ar katetes pretleņķa sinusu, tad no tā paša taisnleņķa trīsstūra  $PAM : \overline{\sin \varphi} = \overline{\sin AP} \cdot \overline{\sin(\beta + \Theta)} \dots$  (d). Ņemsim tāpatību  $\overline{\cos \beta} = \overline{\cos[(\beta + \Theta) - \Theta]} = \overline{\cos(\beta + \Theta) \cos \Theta} + \overline{\sin(\beta + \Theta) \sin \Theta}$ , atvietosim te  $\overline{\cos(\beta + \Theta)}$  un  $\overline{\sin(\beta + \Theta)}$  ar to (b) un (d) nozīmēm, dabūto rezultātu ieliksīm (a) formulā un  $\overline{\cos AP}$  atvietosim ar tā (c) nozīmi; tad iznāk:

$$\overline{tg AT} = \overline{tg \lambda} \cos \Theta + \overline{tg \varphi} \sin \Theta \sec \lambda.$$

AT izteikts radiānos būs viens meklējamais lielums — abscisa x, jeb

$$x = \frac{R}{\rho} \arctg(\overline{tg \lambda} \cos \Theta + \overline{tg \varphi} \sin \Theta \sec \lambda). \quad (238)$$

Noteiksim ordinātu. No sfēriskā taisnleņķa trīsstūra APT:  $\overline{\sin PT} = \overline{\sin \beta} \overline{\sin AP} \dots$  (e) (katetes sinus vienlīdzīgs hipotenūzas sinusam reiz kateta pretleņķa sinus) ... Ņemsim tāpatību  $\overline{\sin \beta} = \overline{\sin[(\beta + \Theta) - \Theta]} = \overline{\sin(\beta + \Theta) \cos \Theta} - \overline{\cos(\beta + \Theta) \sin \Theta}$  un ievietosim te  $\overline{\sin(\beta + \Theta)}$  un  $\overline{\cos(\beta + \Theta)}$  nozīmes no (b) un (d); dabūtā rezultātā  $\overline{\cos AP}$  atvietosim ar tā (c) nozīmi; tad dabūto izteiksmi ievietosim (e) nol.; iznāk:  $\overline{\sin PT} = \overline{\sin \varphi} \cos \Theta - \overline{\sin \Theta} \sin \lambda \cos \varphi$ .

Punktu P' uz projekcijas cilindra dabū nolaižot no P stateni uz P'T (69. zīm.); tāpēc  $P'T = y = R \overline{\sin PT} = R(\overline{\sin \varphi} \cos \Theta - \overline{\sin \Theta} \sin \lambda \cos \varphi)$ . (239).

Ar x un y noteikšanu jautājums ir atrisināts.

Kad leņķis  $\Theta = 90^\circ$ , tad cilindrs pieskarās pa vienu meridianu; šādas projekcijas mēs nosaucām par šķērsām jeb meridionāla tipa projekcijām uz cilindra. Tā kā šinī gadījumā  $\overline{\sin \Theta} = 1$ ,  $\overline{\cos \Theta} = 0$ , tad

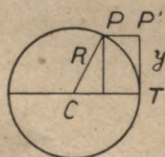
$$y = -R \overline{\sin \lambda} \cdot \cos \varphi \text{ un}$$

$$\overline{tg AT} = \overline{tg \varphi} \sec \lambda.$$

Kad  $\Theta = 0^\circ$ , tad (238) un (239) formulas pārvēršās par Lamberta cilindriskās projekcijas (179) un (180) formulām.

\*) Sk. „Lekcijas etc.” 31. lpp., III' form.

\*\*) Sk. „Lekcijas etc.” 30. lpp., I form.



69. zīm.

## V. nodaļa.

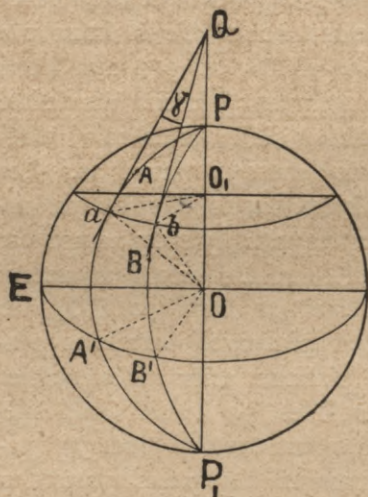
### Koniskās projekcijas.

35. **Vispārīgā teorija.** — Konisko projekciju konstruēšanai iedomājas zemes lodei pieskarošos, jeb to šķelošu konu. Uz šī kona pēc zināmiem likumiem attēlo meridiānus un paralēles un pēc tam konu pārgriež pa vienu no veidulēm un tā virsu attin uz plaknes. Visbiežāki koniskās projekcijas lieto nelielu zemes virsas daļu, piemēram, atsevišķu valšķu, attēlošanai, samazinot ar to mērogu izmaiņas. Koniskās projekcijas ir sevišķi noderīgas valstīm, kuŗas stieejas pa paralēli jeb kādu citu mazā riņķa loku. Kona stāvoklis, vispār ņemot var būt dažāds; biežāki lietojamās projekcijās kona ass sakrīt ar zemes griezes asi un kona veidules pieskaras zemei pa kādu paralēli, jeb šķeļ zemes virsu pa divām paralēlēm. Par pieskares paralēles platumu parasti ņem valsts malējo paralēļu platumu aritmētisko vidējo, bet šķelošo konu iedomājas tā, lai tās paralēles, pa kuŗām kons šķeļ globu, būtu vienādos attāļumos no vidējās un tuvākās malējās paralēles. Šinīs projekcijās mērogi uz vienas un tās pašas paralēles nemainās un tā tad ir neatkarīgi no ģeogr. gaŗuma maiņas no  $0^{\circ}$ — $360^{\circ}$ . Arī Latviju ir izdevīgi attēlot šādā kona projekcijā, jo mūsu valsts stieejas pa paralēli vairāk, nekā pa meridiānu. Ja kona ass ir state-niska pret zemes asi un sakrīt ar ekvatora vienu diametru, tad dabūjam šķērsās koniskās projekcijas; ja, turpretīm, kona ass ar zemes asi veido šauru jeb platu leņķi, tad dabonam slīpās koniskās projekcijas.

Konisko projekciju teorija ietver zenitālo un cilindrisku projekciju teorijas, jo šīs pēdējās ir tikai attiecīgo konisko projekciju robežošie gadījumi: palielinot kona piltuves kaktu līdz  $180^{\circ}$ , konu pārveršam par plakni, un samazinot to līdz  $0^{\circ}$  — par cilindri. Ja kona ass sakrīt ar zemes griezes asi, tad uz projekcijas meridiāni attēlojas kā taisnes, starveidīgi izejošas no viena punkta, bet paralēles, kā koncentrisku apļu loki ar kopīgu centru meridiānu krustošanās punktā; šinīs projekcijās meridiāni un paralēles krustojas zem taisniem leņķiem.

**Meridiānu tuvošanās.** — Iedomāsimies konu, kas pieskarās globam pa paralēli ab, noteiktu ar doto platumu  $\varphi_0$  (70. zīm.). Globa rādiusu nosauksim par  $R$  un pieņemsim, ka  $PaA'P_1$  un  $PbB'P_1$  ir divi meridiāni ar gaŗumu starpību  $\lambda$ . Šo meridiānu plaknes krustojas

ar pieskares paralēles plakni pa taisnām līnijām  $aO_1$  un  $bO_1$  — paralēles rādiusiem, bet ar pieskares kona virsu — pa veidulim  $aQ$  un  $bQ$ , kas stateniskas pret sfēras rādiusiem  $aO$  un  $bO$ . Ja konu atritināsim uz plaknes, tad paralēles loks  $ab$  būs gan riņķa loks, bet tā rādius būs  $aQ = bQ = \rho_0 = R \cotg \varphi_0 \dots$  (240); tas savilks ne leņķi  $bO_1a = \lambda$ , bet kādu citu leņķi  $\delta$ ; šo divi blakus meridiānu veidotu leņķi sauc par meridiānu tuvošanos, jeb konvergenci dotai paralēlei. Šis leņķis  $\delta$  atšķirsies no leņķa  $bQa = \gamma$ , kuŗu pie kona virsotnes dabū starp veidulēm  $aQ$ ,  $bQ$  plaknē  $abQ$ , kur  $ab$  ir chorda, kas savieno punktus  $a$  un  $b^*$ ). Loks  $ab = aO_1 \cdot \lambda$ ; pēc atritināšanas uz plaknes tas būs  $aQ \cdot \delta$ ; tā kā  $aO_1 = aQ \operatorname{sn} \varphi_0$ , tad  $\delta = \lambda \operatorname{sn} \varphi_0$ . (241)



70. zīm.

Šī formula izteic meridiānu tuvošanos uz paralēles, noteiktas ar geografisko platumu  $\varphi_0$ .

Ja pieskares kona vietā iedomāsimies šķeļošu konu, tad sakarība nebūs tik vienkārša; tomēr vienādām gaŗumi starpībām  $\lambda$  vienmēr atbilst vienādi  $\delta$ . Leņķa starp diviem meridiāniem uz projekcijas saistību ar šo pašu meridiānu ģeogr. gaŗumu starpību

uz sfēras vai sferoida var izteikt vispār ar sekošu formulu:  $\delta = \alpha \lambda$ . (242)  $\alpha$  vienai un tai pašai projekcijai ir konstants lielums, atkarīgs no projekcijai uzstādītiem noteikumiem.

Paralēļu konstruēšana. — Bija jau teikts, ka kona projekcijās, kad kona ass sakrīt ar zemes asi, meridiāni ir starveidīgi ejošas taisnes; uz (242) formulas pamata ir iespējams noteikt šo leņķi. Paralēles vienmēr ir koncentriski apļu loki, bet to konstruēšanu izdara dažādi. Ja divu paralēļu rādiusu starpības ir vienlīdzīgas iztaisnotiem meridiānu lokiem starp tām pašām paralēlēm uz zemes, tad dabonam vienādstarpu jeb ekvidistantu paralēļu projekcijas (uzmetus); tā kā arī uz sfēras paralēles ir vienādos attājumos, tad mērogs pa meridiāniem ir nemainīgs un vienlīdzīgs galvenam. Šī tipa koniskas projekcijas atbilst Posteļa zenitālai un cilindriskai kvadrātu projekcijai. Ja projekcijas paralēļu rādiusi aprēķināti tā, ka projekcijas atsevišķu

\*) Ja, piemēram,  $R = 10$ ,  $\varphi_0 = 45^\circ$ ,  $\lambda = 60''$ , tad  $\delta = 42^\circ 25' 35''_{,08}$  un  $\gamma = 41^\circ 24' 34''_{,65}$ .

trapeču laukumi vienādi ar atbilstošām sfēras trapecēm, tad projekcijas ir vienādielas jeb ekvivalentas. Šī tipa koniskās projekcijas atbilst Lamberta zenitālai un izocilindriskai projekcijām.

Ja, beidzot, paralēļu rādījumus izteic tādās platuma funkcijās, ka projekcijas bezgalīgi mazas figūras ir vienāda veida ar sfēras atbilstošām figūrām, tad tādās koniskās projekcijas, pēc pašā sākumā pieņemtās terminoloģijas, sauc par vienādleņķu jeb konformām projekcijām; tās atbilst stereografiskai un Merkatora cilindriskai projekcijai. Uz kartēm ļoti viegli pazīt uzskaitīto konisko projekciju veidus, ja kona ass sakrīt ar zemes griezes asi: 1) vienādstarpu projekcijām attālumi starp paralēlēm vienādi; 2) vienādielām projekcijām attālums starp vidējo paralēli un tuvāko paralēli uz ziemeļiem un dienvidiem no tās ir vislielākais, bet tālāki starpas pamazinājas, kā uz ziemeļiem, tā dienvidiem, 3) beidzot, vienādleņķu projekcijās paralēļu starpas, sākot no vidējās, kur tās vismazākas, palielinājas kā uz ziemeļiem, tā dienvidiem.

Mērogi. — Paralēli uz sfēras noteic ģeografiskais platums  $\varphi$ , bet koniskā projekcijā — paralēles rādījums  $\rho$ ; tā tad koniskās projekcijās paralēles rādījumam ir jābūt platuma funkcijai, ko izteiks sekošs nolīdzinājums:

$$\rho = f(\varphi). \quad (243)$$

Iedomāsimies uz sfēras ar diviem bezgalīgi tuviem meridiāniem un divām bezgalīgi tuvām paralēlēm norobežotu bezgalīgi mazu trapēci. Trapēces augstums būs bezgalīgi mazs meridiāna loks  $R d\varphi$  un pamats — paralēles bezgalīgi mazs loks  $R \cos \varphi d\lambda$ ; te  $R$  ir sfēras rādījums,  $\varphi$  un  $\lambda$  trapēces vienas virsotnes platums un garums.

Atbilstošās bezgalīgi mazās trapēces augstums un pamats koniskā projekcijā, ņemot vērā šo projekciju konstruēšanas metodi, būs:

$$d\rho \text{ un } \rho d\delta,$$

kur  $\rho$  ir paralēles rādījums uz projekcijas un  $\delta$  pēc (242) formulas aprēķināts leņķis. Tā kā no pedējās formulas  $d\delta = \alpha d\lambda$ , tad visās koniskās projekcijās mērogi  $m_m$  pa meridiāniem un  $m_p$  pa paralēlēm būs:

$$m_m = -\frac{d\rho}{R d\varphi}, \quad m_p = \frac{\rho d\delta}{R \cos \varphi d\lambda} = \frac{\rho \alpha}{R \cos \varphi}. \quad (244)$$

Ar platuma augšānu paralēles rādījums uz projekcijas mazinājas; tāpēc atvasināta pēc (244) formulas iznāk negatīva; mērogs, turpretim, vienmēr ir pozitīvs lielums; tāpēc meridiāna mērogam  $m_m$  priekšā likta mīnus zīme. Mērogu abās formulās neieiet garums  $\lambda$ ; tāpēc mērogs uz vienas un tās pašas paralēles nemainās un koniskās projekcijas izokoli iet līdztekus paralēlēm.

Mēroga pa meridiāniem izpētišana vispārējā veidā nav panākama, jo tas atkarājas no (243) formulā dotās funkcijas veida.

Lai noskaidrotu, kur mērogs  $m_p$  ir vislielākais un kur vismazākais, ņemsim tā funkcijas pirmo un otro atvasināto pēc mainīgā  $\varphi$ :

$$\frac{d(m_p)}{d\varphi} = \frac{\alpha}{R} \left( \frac{d\rho}{d\varphi} + \rho \operatorname{tg}\varphi \right) \frac{1}{\cos\varphi}.$$

Šī izteiksme būs nulle pie  $\frac{d\rho}{d\varphi} + \rho \operatorname{tg}\varphi = 0$ .

**36. Vienādstarpu projekcijas.** — Kā jau bija teikts, vienādstarpu koniskās projekcijās mērogs uz meridiāna ir 1. Pieņemot (244) formulā  $m_m = 1$  un integrējot šo izteiksmi, dabūjam šīm projekcijām sekošu vispārēju formulu:

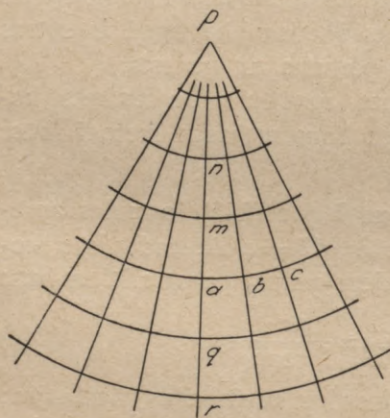
$$\rho = C - R\varphi. \quad (245)$$

$C$  ir pie integrēšanas ienākušais konstantais lielums. Ar tā maiņu, mainās projekcijas veids un, otrādi, tas atkarīgs no projekcijai uzstādītām prasībām.

Apskatīsim visbiežāki sastopamās vienādstarpu projekcijas.

a) Ptolemēja jeb vienkāršā koniskā projekcija. — Tā jāpieskaita pie ļoti vecām, jo to izgudrojis slavenais Almagesta autors Klaudijs Ptolemejs no Aleksandrijas (laikam 87.—150. g. pēc Kristus). Šo projekciju konstruē uz pieskares kona, noteicot pieskares paralēles rādiusu uz projekcijas pēc (240) formulas:

$$\rho_0 = R \operatorname{cotg}\varphi_0. \quad (246)$$



71. zīm.

Projekcijas konstruēšanai ņem patvaļīgu punktu  $p$  (71. zīm.) un no tā velk starveidīgi taisnes — meridiānus  $pa, pb, pc \dots$ . Leņķus  $\delta$  starp šīm — nijām aprēķina pēc (241) formulas. Gařumu starpībai  $\lambda$  ņem noteiktu gradu skaitu, atkarībā no tīkla paredzētā biezuma, ko savukārt visvairāk iespaido kartes mērogs. No punkta  $p$ , kā centra, ar rādiusu  $pa = \rho_0$  novelk apļa loku; tas attēlo pieskares paralēli ar platumu  $\varphi_0$ ; tad no punkta  $a$  atliek

$am, an \dots aq, ar \dots$ , vienlīdzīgas iztaisnotiem meridiānu lokiem  $R(\varphi - \varphi_0)$ , kur  $\varphi$  attiecīgās paralēles platumu, un caur dabūtiem punktiem  $m, n \dots q, r \dots$  no tā paša centra  $p$  velk apļa lokus, kas

attēlos paralēles. Saprotams, ka ar platumu  $\varphi$  noteiktās paralēles rādiuss  $\rho$  būs:

$$\rho = \rho_0 - R(\varphi - \varphi_0). \quad (247)$$

Šai projekcijai mērogs uz meridiāniem ir 1; mērogu uz paralēlēm aprēķina pēc vispārīgās (244) otrās formulas; tāpēc

$$m_m = 1, \quad m_p = \frac{\rho \alpha}{R \cos \varphi}. \quad (248)$$

Lai dabūtu mēroga uz paralēles vislielāko un vismazāko nozīmi, ņem tā izteiksmes pirmo un otro atvasināto pēc platumu  $\varphi$ ; ņemot vērā, ka pēc (247) form.  $d\rho = -Rd\varphi$  dabonam

$$\frac{d(m_p)}{d\varphi} = -\frac{\alpha}{\cos \varphi} + \frac{\alpha \rho \operatorname{sn} \varphi}{R \cos^2 \varphi} \quad \text{un}$$

$$\frac{d^2(m_p)}{d\varphi^2} = \frac{\alpha}{R \cos^3 \varphi} (\rho + \rho \operatorname{sn}^2 \varphi - R \operatorname{sn} 2\varphi).$$

Kad  $\rho > \frac{R \operatorname{sn} 2\varphi}{1 + \operatorname{sn}^2 \varphi}$ , tad ir mēroga min., kad mazāks — max.

Mērogs uz paralēles būs vismazāks, kad  $\frac{\alpha \rho \operatorname{sn} \varphi}{R \cos^2 \varphi} - \frac{\alpha}{\cos \varphi} = 0$ , jeb  $\rho = R \cotg \varphi$ .

Ieliekot šini izteiksmē  $\rho$  nozīmi no (247) un atvietojot pēc tam  $\rho_0$  ar (246) izteiksmi, dabonam nol.:

$$\varphi + \cotg \varphi = \varphi_0 + \cotg \varphi,$$

kas var būt spēkā tikai gadījumā, kad  $\varphi = \varphi_0$ ; tas norāda, ka mērogs ir vismazāks uz pieskares paralēles.

Kona pieskares paralēlei  $m_p = \frac{\rho_0 \alpha}{R \cos \varphi_0} = 1$  un tam arī tā jābūt,

jo pieskares paralēle attēlojas galvenā mērogā. Pierādīsim, ka uz visām citām paralēlēm, kā uz ziemeļiem, tā dienvidiem no pieskares paralēles mērogs  $m_p > 1$ . Šī nevienādība būs pierādīta, ja pierādīsim, ka

$$\rho \alpha - R \cos \varphi > 0.$$

Šinī nevienādībā atvietosim  $\rho$  un  $\rho_0$  nozīmes no (247) un (246) un  $\alpha$  vietā ieliksīm  $\operatorname{sn} \varphi_0$ , tad

$$\cos \varphi_0 - \cos \varphi - (\varphi - \varphi_0) \operatorname{sn} \varphi_0 > 0. \quad \dots (a)$$

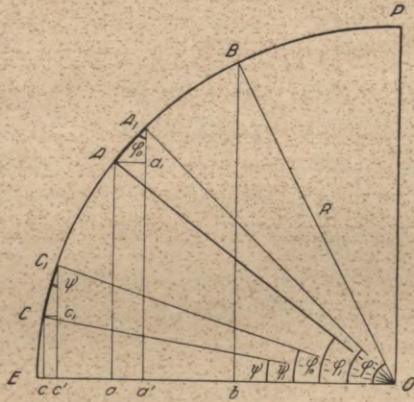
Nevienādības (a) pierādīšanai ņemsim divi punktus A un B (72. zīm.), noteiktus ar platumiem  $\varphi_0$  un  $\varphi$ ; šinī gadījumā  $\varphi > \varphi_0 > 0$ ,

$$aO = R \cos \varphi_0,$$

$$bO = R \cos \varphi$$

un  $ab = aO - bO = R(\cos \varphi_0 - \cos \varphi), \dots (b)$

kur  $ab$  ir loka  $AB$  projekcija uz ekvatoru  $EO$ . Iedomāsimies starp punktiem  $A$  un  $B$  bezgalīgi daudz punktus  $A_1, A_2, A_3 \dots A_n$ , noteiktus



72. zīm.

ar platumiem  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots \varphi_n$ ; tad, piemēram,  $\cup AA_1 = R(\varphi_1 - \varphi_0)$  un  $Aa_1 = AA_1 \operatorname{sn} \varphi_0 = R(\varphi_1 - \varphi_0) \times \operatorname{sn} \varphi_0$ ; to pašu dabūsim projekciju pārējiem elementiem un tāpēc  $ab = R(\varphi_1 - \varphi_0) \operatorname{sn} \varphi_0 + R(\varphi_2 - \varphi_1) \times \operatorname{sn} \varphi_1 + R(\varphi - \varphi_n) \operatorname{sn} \varphi_n$ . Ja te  $\operatorname{sn} \varphi_1, \operatorname{sn} \varphi_2, \dots \operatorname{sn} \varphi_n$  vietā ņemsim mazāku par tiem  $\operatorname{sn} \varphi_0$ , tad  $ab > R(\varphi - \varphi_0) \operatorname{sn} \varphi_0 \dots (c)$ .

Atvietojot te  $ab$  ar tā (b) nozīmi konstatējam, ka (a) nevienādība ir spēkā; ar to ir pierādīts, ka  $\rho \alpha - R \cos \varphi > 0$  un ka uz

ziemeļiem no punkta  $A$ , kas ir uz pieskares paralēles, mērogs  $m_p > 1$ .

Tālāki ņemsim punktu  $C$ , noteiktu ar platumu  $\psi < \varphi_0$ ; tad  $cO = R \cos \psi$  un  $cO - aO = ca = R(\cos \psi - \cos \varphi_0) \dots (d)$ .

Ievietojot starp punktiem  $C$  un  $A$  bezgalīgi daudz punktus ar platumiem  $\psi_1, \psi_2, \dots \psi_n$ , kā, piemēram, punktu  $C_1$ , dabūsim:  $\cup CC_1 = R(\psi_1 - \psi)$  un  $Cc_1 = CC_1 \operatorname{sn} \psi = R(\psi_1 - \psi) \operatorname{sn} \psi$ ; analoģu izteiksmi dabūsim loka pārējiem bezgalīgi maziem elementiem un to summa dos  $ca = R(\psi_1 - \psi) \operatorname{sn} \psi + R(\psi_2 - \psi_1) \operatorname{sn} \psi_1 + \dots + R(\varphi_0 - \psi_n) \times \operatorname{sn} \psi_n$ . Ņemot te  $\operatorname{sn} \psi, \operatorname{sn} \psi_1, \operatorname{sn} \psi_2, \dots \operatorname{sn} \psi_n$  vietā lielāko par tiem  $\operatorname{sn} \varphi_0$  dabūsim  $ca < R(\varphi_0 - \psi) \operatorname{sn} \varphi_0 \dots (e)$ . Atvietojot te  $ca$  ar (d) nozīmi dabūsim

$$\cos \psi - \cos \varphi_0 < (\varphi_0 - \psi) \operatorname{sn} \varphi_0,$$

kas norāda, ka

$$\cos \varphi_0 - \cos \psi > (\psi - \varphi_0) \operatorname{sn} \varphi_0.$$

Tā tad arī šī gadījumā izteiksmei (a) atbilstošā nevienādība spēkā un tas norāda, ka arī uz dienvidiem no pieskares paralēles mērogs  $m_p > 1$ .

Glūži tāds pats pierādījums būs, kad  $\varphi_0 < 0^\circ$  un kons pieskares dienvidus puslodes paralēlei.

Aprēķināsim vienkāršo kona projekciju Latvijas kartei ik pa 30' platumā starp paralēlēm  $\varphi_1 = 55^\circ 30'$  un  $\varphi_2 = 58^\circ 05'$ ;  $\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = 56^\circ 47',5$ ;  $\alpha = \text{sn } \varphi_0 = 0,836\ 6847$ ;  $\rho_0 = 4\ 179\ 537\ \text{m}$ ;  $\delta = 25'06'',03$ .

Paralēļu rādiusiem uz projekcijas dabūjam sekošas nozīmes:

$\varphi$	$\rho$ metros
58° 0'	4045 191,72
57 30	4100 782,38
57 0	4156 373,64
56 30	4211 964,91
56 0	4267 556,17
55 30	4323 147,43

Austrumeuropas kartei par malējām paralēlēm var ņemt paralēles, noteiktas ar platumu  $40^\circ$  un  $70^\circ$ .

b) Pārļabotā vienkāršā koniskā projekcija.—Mērogi uz meridiāniem, kā jau bija teikts, ir = 1. Uz ziemeļiem no pieskares paralēles mērogi  $m_p$  un vislielākās leņķu alterācijas  $\omega$  mainās ātrāki, nekā uz dienvidiem no tās. Izmaiņas būs mazākas, ja par pieskares paralēli ņem ne valsts videjo paralēli, bet kādu paralēli vairāk uz ziemeļiem, noteicot to tā, lai mērogi uz kartes malējām paralēlēm iznāktu vienādi. Šī prasība uz (248) otrā nol. pamata noved pie sekoša nol.:

$$\frac{\rho_1 \alpha}{R \cos \varphi_1} = \frac{\rho_2 \alpha}{R \cos \varphi_2},$$

kurā  $\varphi_1$  un  $\varphi_2$  ir valsts malējo paralēļu ģeografiskie platumi;  $\rho_1$  un  $\rho_2$  šo paralēļu rādiusi uz projekcijas. Nosaucot, tāpat kā agrāk, pieskares paralēles platumu par  $\varphi_0$  un ieliekot tikko dabūtā nol.  $\rho_1$  un  $\rho_2$  vietā to nozīmes pēc (247) formulas, t. i.,

$\rho_1 = \rho_0 - R(\varphi_1 - \varphi_0)$ ,  $\rho_2 = \rho_0 - R(\varphi_2 - \varphi_0)$  un  $\rho_0$  no (246), pēc pārveidošanas un saīsināšanas dabonam sekošu transcendentu nol.:

$$\varphi_0 + \cotg \varphi_0 = \frac{\varphi_2 \cos \varphi_1 - \varphi_1 \cos \varphi_2}{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2},$$

kuŗu var atrisināt tikai pakāpeniski tuvojoties un interpolejot; tomēr šī atrise ir ļoti sekmīga, jo nol. labā pusē ir konstants lielums. Valstīm, kuŗas ziemeļdienvidvirzienā ir šauras, piemēram, mūsu zeme, tur  $\varphi_0$  nēko neatšķiras no  $\varphi_1$  un  $\varphi_2$  aritmetiskā vidējā. Ja, turpretim, piemēra dēļ, ņem  $\varphi_1 = 40^\circ$  un  $\varphi_2 = 70^\circ$ , tad  $\varphi_0 = 57\ 01'$ ; pieņemot  $R = 1$ , dabonam sekošus svarīgākos skaiļus šai pārļabotai Ptolemeja projekcijai: ( $\alpha = 0,8388$ ;  $\lg \alpha = \lg \text{sn } \varphi_0 = 9.92\ 367$ )

Sk. tabula 198. lapp.

Vienkāršā un pārļabotā koniskā projekcijā izmainās leņķi un laukumi. Zemes virsas bezgalīgi mazi riņķiši un kvadrātiņi šinī projekcijā attēlojas līdzīgi tikai pa pieskares paralēli; uz ziemeļiem un dien-

vidiem no tās tie pārvēršas par rīta-vakara (gaŗumā) virzienā izstieptām elipsēm un taisnstūriem. Sagrozījumi aug ar attālināšanos no pieskares paralēles un tāpēc šī projekcija noderīga valstīm, kas maz stieþjas platumā (pa meridiānu); gaŗumā resp. pa paralēlēm, rīta-vakara virzienā, šo projekciju var konstruēt neaprobeþoti tāļu, pat pilnus 360°, bez sagrozījumu palielinājuma.

$\varphi$	$\rho$	$m_m$	$m_p$	$p$	$2\omega$
70°	0,4224	1	1,036	1,036	2° 01'
65	0,5097	1	1,012	1,012	0 40
60	0,5969	1	1,001	1,001	0 5
55	0,6842	1	1,001	1,001	0 2
50	0,7715	1	1,007	1,007	0 23
45	0,8587	1	1,019	1,019	1 4
40	0,9460	1	1,036	1,036	2 1

34. § jau bija teikts, ka koniskā projekcija aptver zenitālās un cilindriskās projekcijas, kā atsevišķus specifiskus gadījumus. Tikko apskatītās vienkāršās koniskās projekcijas pārvēršas par Posteļa zenitālo projekciju gadījumā, kad kona smailes leņķis palielinājas līdz 180°; kad šis leņķis samazinājas līdz 0° — iznāk kvadrātiskā projekcija.

Lai pierādītu sacīto, ieliksīm (246) — (248) formulas  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ ,

tad  $\rho_0 = 0$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\delta = \lambda$ ,  $\rho = R\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ ,  $m_m = 1$ ,  $m_p = \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \sec \varphi$ ,

kas ir Posteļa projekcijas (135) un (136) formulas (15. §).

Ja tanis pašās formulas ieliek  $\varphi_0 = 0^\circ$ , tad  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\delta = 0^\circ$ ,  $\rho = \rho_0 - R\varphi$ ;  $y = \rho_0 - \rho = R\varphi$ ,  $m_m = 1$ ,  $m_p = \sec \varphi$ , kas ir kvadrātiskas projekcijas (164) un (168) formulas (22. §).

c) Deliļa projekcija. — Vienkāršās un pārļabotās vienkāršās koniskās projekcijas galvenā slikta īpašība ir tā, ka mērogs ļoti mainās uz paralēlēm. Ja ņem ne pieskarošos konu, bet tādu, kas globu šķel pa divām noteiktām paralēlēm, tad uz šīm divi paralēlēm mērogs būs 1, starp tām — mazāks par vienu, bet ārpus tām, uz ziemeļiem un dienvidiem — lielāks par vienu; šādā projekcijā uz valsts vai joslas maļejām paralēlēm mēroga izmaiņas iznāk mazākas, nekā vienkāršā koniskā projekcijā. Tomēr arī šīm projekcijām ir viena visai slikta īpašība, proti, mērogs uz meridiāniem starp šķeļošām paralēlēm nevar būt 1, jo loks pa meridiānu starp šķeļošām paralēlēm vienmēr ir gaŗāks par chordu — kona veiduli. Astronoms Josefs Nikolajs Delils (De l'Isle, 1688—1768), kas XVIII. g. simteņa sākumā vadīja kartogrāfiskos

darbus Krievijā, izgudroja Krievijas kartei projekciju, kuŗai mērogs pa meridiāniem iznāk 1 un kuŗa, tā tad, ir vienādstarpu projekcija. Paralleles, uz kuŗām mērogs 1, Delils ņēma vienādos attājumos no valsts vidējās un malējās parallelēm, sadalot ar to loku starp malējām parallelēm četrās vienādās daļās. Nosauksim, tāpat kā agrāk, valsts malējo parallelu platumus par  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  un pieņemsim, ka  $\varphi_2 > \varphi_1$ ; vidējās parallelē platumu sauksim par  $\varphi_0$  un platumus parallelēm, uz kuŗām mērogs ir 1, un pa kuŗām kons šķēļ globu, par  $\varphi_3$ ,  $\varphi_4$ , pieņemot pie tam, ka  $\varphi_4 > \varphi_3$ . Ar šiem apzīmējumiem Deliļa pieņēmumi dod sekošas sakarības:

$$\varphi_0 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}, \quad \varphi_3 = \frac{\varphi_1 + \varphi_0}{2}, \quad \varphi_4 = \frac{\varphi_0 + \varphi_2}{2}.$$

Vienkāršības dēļ ievēsim apzīmējumu  $\Theta_0 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$ ; tad  $\varphi_4 - \varphi_3 = \Theta$

un  $\varphi_3 + \varphi_4 = 2\varphi_0$ . (Viegli pārlicināties, ka  $\varphi_2 - \varphi_4 = \varphi_4 - \varphi_0 = \varphi_0 -$

$$- \varphi_3 = \varphi_3 - \varphi_1 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{4}).$$

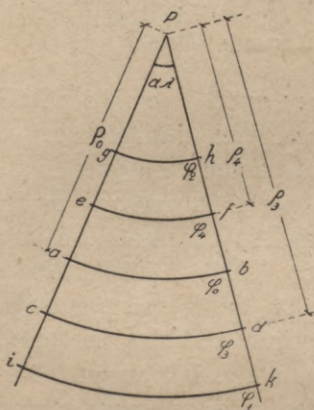
Pieņemsim (73. zīm.), ka uz projekcijas pi un pk ir divi blakus meridiāni, kas saietas zem leņķa  $\varepsilon = \alpha\lambda$ , ka gh valsts ziemeļparallēle, ef šķēļošā parallēle, ab valsts vidējā parallēle, cd šķēļošā parallēle, ik valsts dienvidparallēle un ka šīs parallelēles noteiktas ar platumiem attiecīgi  $\varphi_2$ ,  $\varphi_4$ ,  $\varphi_0$ ,  $\varphi_3$ ,  $\varphi_1$ . Tā kā projekcija ir ekvidistanta, tad  $ge = ea = ac = ci = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{4} \times$

$$R = \frac{R\Theta}{2}, \text{ kur } R \text{ globa rādiuss.}$$

Uz projekcijas parallelu rādiusus pe, pa, pc nosauksim par  $\rho_4$ ,  $\rho_0$ ,  $\rho_3$ ; tad  $\rho_4 = \rho_0 - ea = \rho_0 - \frac{1}{2}R\Theta$ ;  $\rho_3 = \rho_0 + \frac{1}{2}R\Theta$ . Uz projekcijas parallelē loks ef =  $\rho_4 \cdot \delta = (\rho_0 - \frac{1}{2}R\Theta) \alpha\lambda$  un parallelē loks cd =  $\rho_3 \delta = (\rho_0 + \frac{1}{2}R\Theta) \alpha\lambda$ ; atbilstošie globa

parallelu loki ir:  $R \cos \varphi_4 \lambda$  un  $R \cos \varphi_3 \lambda$ . Tā kā Delils ņem projekcijas lokus cd un ef vienādus ar attiecīgiem globa lokiem, tad iznāk divi nol.:

$$R \lambda \cos \varphi_3 = \left( \rho_0 + \frac{1}{2} R \Theta \right) \alpha \lambda$$



73. zīm.

$$\text{un } R\lambda \cos \varphi_4 = \left( \rho_0 - \frac{1}{2} R\Theta \right) \alpha \lambda.$$

Pēc saīsināšanas ar  $\lambda$  šo nol. summa un starpība dod:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{\cos \varphi_3 - \cos \varphi_4}{\Theta} = \frac{2 \operatorname{sn} \varphi_0 \operatorname{sn} \frac{\Theta}{2}}{\Theta} \\ \rho_0 &= \frac{R (\cos \varphi_3 + \cos \varphi_4)}{2\alpha} = \frac{R\Theta}{2} \operatorname{cotg} \varphi_0 \operatorname{cotg} \frac{\Theta}{2} \end{aligned} \right\} \quad (249)$$

$\delta$  aprēķina pēc (242) formulas;  $\rho$ ,  $m_m$  un  $m_p$  pēc vienkāršās koniskās projekcijas formulām (247) un (248).

Sekojošā tabulā doti skaitliskie lielumi Austrumeuropas kartei Delila projekcijā, pieņemot  $\varphi_1 = 40^\circ$ ,  $\varphi_2 = 70^\circ$  un  $R = 1$  ( $\alpha = 0,8168$ ).

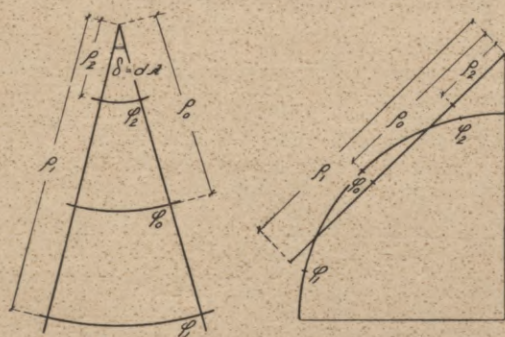
$\varphi$	$\rho$	$m_m$	$m_p$	$p$	$2\omega$
$70^\circ$	0,4344	1	1,037	1,037	$2^\circ 06'$
65	0,5217	1	1,008	1,008	0 28
60	0,6089	1	0,995	0,996	0 18
55	0,6962	1	0,991	0,991	0 30
50	0,7835	1	0,996	0,996	0 15
45	0,8707	1	1,006	1,006	0 20
40	0,9580	1	1,022	1,022	1 13

d) Eulera projekcija. — Delila projekcijā šķeļošās paralēles ir ņemtas vienādos attālumos no valsts malējam paralēlēm un vidējās paralēles. Šis patvaļīgais, bez zinātniska pamatojuma pieņēmums noved pie tā, ka starp šķeļošām paralēlēm paralēļu mērogs mainās mazāk, nekā pa paralēlēm, kas ir aiz šīm šķeļošām paralēlēm. Ievērojams matemātiķis Eulers (Leonhards Eulers, 1707—1783) 1778. g. ieteica\* globa virsu projicēt uz šķeļoša kona tā, lai 1) valsts malējam paralēlēm paralēļu loku gaņumi uz projekcijas atšķirtos no globa attiecīgo loku gaņumiem par vienādu lielumu un 2) lai šī starpība būtu tikpat liela, kā starpība starp vidējās paralēles loka gaņumu uz globa un projekcijas. Valsts malējo paralēļu platumus nosauksim atkal par  $\varphi_1$  un  $\varphi_2$ , tad vidējās paralēles platumus  $\varphi_0 = \frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2)$ ; vienkāršības dēļ pieņemsim atkal, ka  $\frac{1}{2} (\varphi_2 - \varphi_1) = \Theta$ . Paralēļu rādījumus uz projekcijas attiecīgi sauksim par  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  un  $\rho_0$ .

Pēc 74. zīm.

$$\rho_2 \delta > R \cos \varphi_2 \lambda,$$

\*) Peterpils Zinību Akadēmijas annājos.



74. zīm.

$$\begin{aligned} \rho_1 \delta &> R \cos \varphi_1 \lambda, \\ R \cos \varphi_0 \lambda &> \rho_0 \delta. \end{aligned}$$

Tāpēc Eulera uzstādītie noteikumi dod sekošus trīs nolīdzinājumus:

$$\rho_2 \delta - R \cos \varphi_2 \lambda = x \dots (a)$$

$$\rho_1 \delta - R \cos \varphi_1 \lambda = x \dots (b)$$

$$R \cos \varphi_0 \lambda - \rho_0 \delta = x \dots (c),$$

kur  $x$  ir nezināms lielums, ko vēlāki var izslēgt no šiem nolīdzinājumiem. Šinī

sistēmā, ir trīs nol. ar pieciem nezināmiem  $\rho_1, \rho_2, \rho_0, \delta$  un  $x$ ; tāpēc vēl jādabū divi nol.; tāds dabūsim no prasības, lai meridiānu loki uz projekcijas būtu vienādi ar mērogā samazinātiem meridiānu lokiem uz globa starp attiecīgām paralēlēm, t.i., no noteikuma, lai projekcija būtu vienādstarpu jeb ekvidistanta; šie nol. ir:

$$(\varphi_2 - \varphi_1) R = \rho_1 - \rho_2 \dots (d)$$

$$\frac{\rho_1 + \rho_2}{2} = \rho_0 \dots (e)$$

Jāņem vēl vērā, ka  $\delta = \alpha \lambda \dots (f)$ .

Atņemot (a) no (b), atvietojot  $\delta$  ar  $\alpha \lambda$  un  $\rho_1 - \rho_2$  no (d) dabūsim:

$$\alpha = \frac{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2}{\varphi_2 - \varphi_1} = \frac{\text{sn } \Theta \text{ sn } \varphi_0}{\Theta} \dots (250)$$

Saskaitot (a) un (b) nol., ievietojot  $x$  no (c) nol. un  $\rho_1 + \rho_2$  no (e) dabonam:

$$\rho_0 = R (\cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 + 2 \cos \varphi_0) : 4 \alpha. \text{ Tā kā}$$

$$\cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 = 2 \cos \varphi_0 \cos \Theta,$$

tad

$$\rho_0 = \frac{R (1 + \cos \Theta) \cos \varphi_0}{2 \alpha} = \frac{1}{2} R \Theta \cotg \frac{\Theta}{2} \cotg \varphi_0. \dots (251)$$

Eulera projekcijā rādus  $\rho_0$  iznak tads pats, kā Deliļa projekcijā (sk. otro 250 form.); abās projekcijas atšķiras tikai  $\alpha$ . Lielumi  $\delta, \rho, m_m$  un  $m_p$  ir jāaprēķina pēc vienkāršās kona projekcijas formulām (242), (247) un (248).

Latvijas kartes sastādīšanai Eulera projekcijā varētu ņemt  $\varphi_1 = 55^\circ 30'$  un  $\varphi_2 = 58^\circ 0'$ .

Pieņemot  $\varphi_1 = 40^\circ, \varphi_2 = 70^\circ$  un  $R = 1$  ( $\alpha = 0,8098$ ) dabūsim sekošus skaitļus Eiropas kartēi Eulera projekcijā.

$\varphi$	$\rho$	$m_m$	$m_p$	$p$	$2\omega$
70 <sup>0</sup>	0,4344	1	1,029	1,029	1 <sup>0</sup> 37'
65	0,5217	1	1,000	1,000	0 01
60	0,6089	1	0,986	0,986	0 47
55	0,6962	1	0,983	0,983	0 59
50	0,7835	1	0,987	0,987	0 45
45	0,8707	1	0,997	0,997	0 09
40	0,9580	1	1,013	1,013	0 44

No šīs tabulas redzams, ka Eulera projekcijā mērogs mazāk mainās, nekā Ptolemēja un Delila projekcijās; tomēr arī šīs izmaiņas ir prāvas un uz ziemeļu malējās paralēles tās vairāk, kā divreiz lielākas, nekā uz dienvidus malējās paralēles. Tas izskaidrojams ar to, ka Eulers pieņēma vienādas starpības starp paralēļu lokiem uz projekcijas un globa, nerūpējoties par to, lai mērogi uz malējām paralēlēm būtu vienādi. Šo trūkumu manija jau pats Eulers, bet viņš aprobežojās ar aizrādījumu, ka ziemeļapgabali maz izpētīti un tāpēc to alterācijām uz kartes nav praktiskas nozīmes.

e) Vitkovska projekcija. — Var uzskatīt par vēlamu, lai koniskās projekcijās mērogs mazāk mainītos, kā uz valsts ziemeļ-, tā dienvidparalēles; tāpēc lietderīgāki uzstādīt prasību, lai uz valsts malējām paralēlēm būtu vienādas ne loku garumu absolūtās starpības, bet gan šo starpību attiecības pret pašiem lokiem, t. i., lai uz šīm paralēlēm mērogi atšķirtos no galvenā par vienu un to pašu lielumu. Par šo jauno vienādstarpu projekciju 29. februārī 1900. g. profesors, ģenerālis Vitkovskis referēja Ķeizariskai krievu ģeografiskai biedrībai\*). Šo prasību var izteikt ar sekošiem trim nol.:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\rho_1 \alpha}{R \cos \varphi_1} &= 1 + x \\ \frac{\rho_0 \alpha}{R \cos \varphi_0} &= 1 - x \\ \frac{\rho_2 \alpha}{R \cos \varphi_2} &= 1 + x \end{aligned} \right\} (A)$$

kur  $x$  ir lielums, kas nav vajadzīgs projekcijas konstruēšanai, bet noder vienīgi projekcijas labuma un noderīguma raksturošanai. Prasība, lai projekcija būtu vienādstarpu, dod agrākos divus (d) un (c) nol.:  $\rho_1 - \rho_2 = R(\varphi_2 - \varphi_1)$  un  $\rho_1 + \rho_2 = 2\rho_0$ . Pieņemsim agrākos ap-

\*) Iespiests biedrības annāļu XXXVI. sējumā.

zīmējumus  $\varphi_0 = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$  un  $\Theta = \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)$ ; no (A) sistēmas pirmā un trešā nol. iznāk  $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2}$ , jeb  $\frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} = \frac{\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2}{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2} = \cotg \varphi_0 \times \cotg \Theta$  un  $\rho_0 = R\Theta \cotg \Theta \cotg \varphi_0$ . (252)

Lieluma  $\alpha$  noteikšanai ņemsim (A) sistēmas pirmā un trešā nol. pussummu un tai pieskaitīsim otro nol.; tad

$$\alpha = \frac{2R}{\frac{\rho_1}{2 \cos \varphi_1} + \frac{\rho_2}{2 \cos \varphi_2} + \frac{\rho_0}{\cos \varphi_0}} = \frac{2R}{\frac{\rho_1}{\cos \varphi_1} + \frac{\rho_0}{\cos \varphi_0}}; \text{ t\u00e1 k\u00e1 } \rho_1 = \rho_0 + R\Theta = \frac{R\Theta \cos(\varphi_0 - \Theta)}{\sin \varphi_0 \sin \Theta} \text{ un } \varphi_1 = \varphi_0 - \Theta, \text{ tad } \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2}}{\Theta} \cdot \sin \varphi_0. \quad (253)$$

$\delta$ ,  $\rho$ ,  $m_m$  un  $m_p$  jāapr\u0113kina p\u0113c (242), (247) un (248) formul\u0101m. \u0160is projekcijas rakstur\u012bg\u0101kie skait\u0137i Europas kartei ir seko\u0161i ( $\alpha = 0,8239$ ).

$\varphi$	$\rho$	$m_m$	$m_p$	$p$	$2\omega$
70 <sup>0</sup>	0,4223	1	1,017	1,017	0 <sup>0</sup> 59'
65	0,5096	1	0,993	0,993	0 23
60	0,5969	1	0,983	0,983	0 57
55	0,6841	1	0,983	0,983	0 59
50	0,7714	1	0,989	0,989	0 39
45	0,8587	1	1,000	1,000	0 02
40	0,9459	1	1,017	1,017	0 59

No \u0161is tabulas redzam, ka Vitkovska propon\u0113tai projekcijai ir priek\u0161rocība ne tikai salidzin\u0101t ar Ptolem\u0113ja un Delila projekcij\u0101m, bet arī salidzin\u0101t ar Eulera vien\u0101dstarpu konisko projekciju. Par projekcijas labuma m\u0113rauklu j\u0101uzskata m\u0113rogs  $m_p$  pa paral\u0113l\u0113m. Eulera projekcij\u0101 tas at\u0161ķiras no galven\u0101 par 0,029, Vitkovska projekcij\u0101, turpretim — par 0,017. Sik\u0101 m\u0113rog\u0101 \u0161ada starpība nep\u0101rsniedz kar\u0161u iesp\u0113\u0161anas neizb\u0113gam\u0101s pap\u012bra deform\u0101cijas un t\u0101 tad ir piln\u012bg\u0101 pie-lai\u017eama.

Ja p\u0113d\u0113j\u0101s \u0113etr\u0101s apskat\u012bt\u0101s vien\u0101dstarpu projekcij\u0101s sast\u0101d\u012bt\u0101s kart\u0113s novilksim izokolus ik p\u0113c paral\u0113l\u0113ju m\u0113roga izmai\u0137as 0,001 da\u0137as, tad izn\u0101ks 35, 46, 46 un 34 izokolas; p\u0113d\u0113j\u0101 projekcij\u0101 bez tam izokoli ies vienm\u0113r\u012bg\u0101ki.

Sl\u0113gums. — Lai konisko projekciju teorija b\u016btu izsm\u0113lo\u0161a, apr\u0113\u0137in\u0101sim projekcij\u0101m uz pieskares kona platumu paral\u0113l\u0113i, kur m\u0113-

rogs  $m_p$  ir vismazāks un projekcijām uz šķeļoša kona platumu paralēlēm, kur mērogs  $m_p = 1$ .

Vienkāršai koniskai projekcijai, kā jau bija noskaidrots, vismazākais mērogs ir uz pieskares paralēles.

Delīļa un Eulera projekcijām tādas paralēles platuma noteikšanai iznāk transcendentis nolīdzinājums:

$$\varphi + \cotg \varphi = \varphi_0 + \frac{\Theta}{2 \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2}} \cotg \varphi_0,$$

ko atrisina ar pakāpenu tuvošanos, ieliekot  $\varphi$  dažādas nozīmes un interpolējot resp. ekstrapolējot. Šim projekcijām vienmēr  $\varphi > \varphi_0$ , t. i., paralēles ar vismazāko mērogu platums vienmēr ir lielāks par valsts vidējās paralēles platumu, jeb, ar citiem vārdiem, paralēle ar vismazāko mērogu ir uz ziemeļiem no valsts vidējās paralēles. Piemēram, augšā aprēķinātai projekcijai ar  $\varphi_0 = 55^\circ$  paralēles ar vismazāko mērogu platums iznāk  $55^\circ 28'$ . Vitkovska projekcijai iznāk līdzīgs transcendentis nolīdzinājums:

$$\varphi + \cotg \varphi = \varphi_0 + \frac{\Theta}{\operatorname{tg} \Theta} \cotg \varphi_0.$$

Šinī gadījumā meklējamais platums  $= 57^\circ 1'$ .

Tā kā vismazākais mērogs, vispār ņemot, neiznāk uz paralēles ar vidējo platumu, tad teorētiski ņemot, projekcijas elementus vajadzētu aprēķināt tā, lai uz valsts malējām paralēlēm un uz paralēles ar vismazāko mērogu, mērogu novirzes no galvenā mēroga, absolūti būtu vienādas. Tādu vienādstarpu konisku projekciju (atbilstu uz Eulera projekcijas pamatprincipa) izgudrojis Bolonjas ģeodēzijas profesors Matteo Fiorini (1827—1901). Šis papildnoteikums dažkārt jāuzskata par lieku, jo starpība starp vidējās paralēles mērogu un vismazāko mērogu parasti ir maza. Austrumeuropas kartei tā mazāka par 0,001, kam nav praktiskas nozīmes.

Ptolemeja un Delīļa projekcijām platumus paralēlēm ar mērogu 1 noteic jau pie pieskares jeb šķeļoša kona izveles. Citām projekcijām šos platumus aprēķina no noteikuma, ka  $m_p = 1$ , kas Eulera un Vitkovska projekcijās noved pie transcendentu nolīdzinājumu atrises:

$$\varphi + \frac{\cos \varphi}{\alpha} = \varphi_0 + \frac{\Theta}{2 \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2}} \cotg \varphi_0,$$

$$\text{un } \varphi + \frac{\cos \varphi}{\alpha} = \varphi_0 + \frac{\Theta}{\operatorname{tg} \Theta} \cotg \varphi_0.$$

Šiem nol. augšā dotos piemēros ir sekošas saknes:

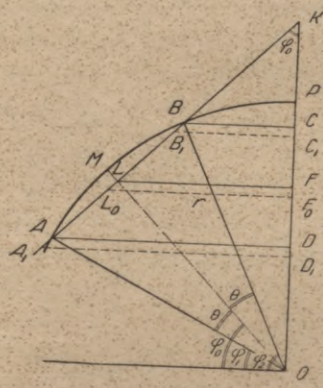
pirmam . . .  $\varphi' = 43^{\circ}58'$  un  $\varphi'' = 65^{\circ}05'$

otram . . .  $\varphi' = 45^{\circ}09'$  un  $\varphi'' = 66^{\circ}47'$ .

Nemot riņķa iztaisnoto loku vietā eliptisko meridiānu loku garumus (no ģeodēziskām tabulām) dabū sferoīda vienādstarpu koniskās projekcijas; tomēr šādā rūpība ir lieka, jo konisko projekciju saimē vienādstarpu projekcijas nevar uzskatīt pie labākām; tāpēc šinis projekcijās sastāda tikai sīka mēroga kartes, kuŗām kļūdas no zemes saspieduma neievērošanas ir mazākas par zīmēšanas kļūdām un papīra deformācijām pie iespiešanas.

**37. Vienādlielās projekcijas.** — Izšķir vienādlielo konisko projekciju divi veidus: 1) tos, kuŗiem visa tīkla laukums vienādliels ar globa atbilstošo virsas daļu, kurpretim projekcijas atsevišķas trapēces nav vienādlielas ar globa atbilstošām trapēcēm un 2) tos, kuŗiem projekcijas katra atsevišķa trapēce vienādliela ar atbilstošo sfērisko trapēci. Pie pirmā pieder angļu zinātnieka Merdoka (Patrice Murdoch) trīs projekcijas, pie otrā — visas pārējās vienādlielās jeb ekvivalentās koniskās projekcijas.

a) Pirmā Murdoch'a projekcija. — Šī projekcija apmierina divas prasības: 1) mērogs uz meridiāna ir viens (tāpat, kā vienādstarpu koniskās projekcijās) un 2) visas kartes tīkla laukums vienādliels ar globa virsas atbilstošo joslu, samazinātu pieņemtā mērogā.



75. zīm.

Pieņemsim, ka A un B (75. zīm.) ir globa meridiāna punkti uz valsts malējām paralēlēm, noteiktām ar platumiem  $\varphi_1$  un  $\varphi_2$ . Vienkāršības dēļ, tāpat kā agrāk ņemsim apzīmējumus:  $\frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1) = \theta$  un  $\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) = \varphi_0$ . Meridiāna loka AMB garums starp abām malējām paralēlēm ir  $R(\varphi_2 - \varphi_1) = 2R\theta$ . Sfēras joslas laukums starp punktu A un B paralēlēm ir = lielā riņķa aplocei  $\times$  ar joslas augstumu =  $2\pi R \times CD = 2\pi R(CO - DO) = 2\pi R^2 \times (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)$ . Šo sfēras joslu attēlosim uz nošķelta kona, kuŗa veidules garumu apzīmēsīm ar  $l$  un vidējā griezuma aplo-

ces rādiusu ar  $r$ ; tā kā nošķelta kona sānu virsas laukums = vidējā griezuma aplocei  $\times$  ar veidules garumu, tad nošķeltā kona sānu virsas laukums =  $2\pi r l$

Merdoka pirmā prasība dod nolīdzinājumu:  $l = 2R\Theta$  un otrā:  $2\pi r l = 2\pi R^2 (\operatorname{sn} \varphi_2 - \operatorname{sn} \varphi_1)$ . No šiem abiem nol.

$$r = \frac{R(\operatorname{sn} \varphi_2 - \operatorname{sn} \varphi_1)}{2\Theta} = \frac{R \operatorname{sn} \Theta \cos \varphi_0}{\Theta} \dots (a)$$

Projekcijas kona veidulī ņem paralēli līnijai AB, kas ar globa asi veido  $\sphericalangle OKA = \varphi_0$ ; pats par sevi saprotams, ka šī kona vidējā griezuma rādiuss pēc (a) nol. būs lielāks par līnijas AB veidotā nošķeltā kona vidējā griezuma rādiusu.

Ja projekcijas vidējās paralēles rādiusu nosauksim par  $\rho_0$ , tad  $r = \rho_0 \operatorname{sn} \varphi_0$ . Ieliekot te no (a) r nozīmi, dabonam:

$$\rho_0 = \frac{R \operatorname{sn} \Theta}{\Theta} \cdot \operatorname{cotg} \varphi_0. \quad (254)$$

Visi pārējie lielumi meridiānu un paralēļu tīkla konstruēšanai ir vienlīdzīgi vienkāršās koniskās projekcijas attiecīgiem lielumiem, proti  $\alpha = \operatorname{sn} \varphi_0$ ,  $\delta = \alpha \lambda$ ,  $\rho = \rho_0 - R(\varphi - \varphi_0)$ ;

$$m_m = 1; m_p = \frac{\rho \alpha}{r} = \frac{\rho \alpha}{R \cos \varphi}. \quad (255)$$

Sekošā tabulā doti Europas kartes svarīgākie skaitļi Merdoka pirmā projekcijā, pieņemot  $R = 1$  un  $\varphi_1 = 40^\circ$  līdz  $\varphi_2 = 70^\circ$  ( $\alpha = 0,8192$ ).

$\varphi$	$\rho$	$m_m$	$m_p$	$p$	$2\omega$
70°	0,4304	1	1,031	1,031	1° 45'
65	0,5177	1	1,004	1,004	0 12
60	0,6050	1	0,991	0,991	0 31
55	0,6922	1	0,989	0,989	0 39
50	0,7795	1	0,993	0,993	0 23
45	0,8668	1	1,004	1,004	0 14
40	0,9540	1	1,020	1,020	1 09

Platumu paralēlei ar vismazākiem mērogiem  $m_p$  un  $p$  noteic no transcendentā nolīdzinājuma:

$$\varphi + \operatorname{cotg} \varphi = \varphi_0 + \frac{\operatorname{sn} \Theta}{\Theta} \operatorname{cotg} \varphi_0.$$

Šinī gadījumā  $\varphi = 55^\circ 58'$  ( $m_p = 0,988$ ).

Platumu paralēlei ar mērogu  $m_p = 1$  un  $p = 1$  noteic no nolīdzinājuma:

$$\varphi + \frac{\cos \varphi}{\operatorname{sn} \varphi_0} = \varphi_0 + \frac{\operatorname{sn} \Theta}{\Theta} \operatorname{cotg} \varphi_0,$$

kuŗa saknes ir  $\varphi' = 46^\circ 38'$  un  $\varphi'' = 64^\circ 0'$ .



Formulas  $\alpha$  un  $\delta$  aprēķinām paliek agrākās:

$$\alpha = \operatorname{sn} \varphi_0, \quad \delta = \alpha \lambda. \quad (258)$$

Mērogus pa meridiāniem un paralēlēm dabū no vispārīgām formulām (247):

$$m_m = \frac{\sqrt{\cos \Theta}}{\cos^2(\varphi - \varphi_0)}, \quad m_p = \frac{\sqrt{\cos \Theta}}{\cos(\varphi - \varphi_0)}. \quad (259)$$

Sekošā tabulā doti skaitļi otrās Merdoka projekcijas konstruēšanai Europas kartei ( $\alpha = 0,8192$ ).

$\varphi$	$\rho$	$m_m$	$m_p$	$p$	$2\omega$
70°	0,4248	1,053	1,018	1,072	1° 59'
65	0,5149	1,013	0,997	1,011	0 53
60	0,6022	0,990	0,987	0,977	0 13
55	0,6882	0,983	0,983	0,966	0 0
50	0,7742	0,990	0,987	0,977	0 13
45	0,8615	1,013	0,998	1,011	0 53
40	0,9515	1,053	1,018	1,072	1 59

Mērogi  $m_m$ ,  $m_p$  un  $p$  iznāk vismazāki uz vidējās paralēles; lai dabūtu paralēles, kur šie mērogi ir 1, jāatrisina vienkārši nolīdzinājumi:

$$\cos(\varphi - \varphi_0) = \sqrt[4]{\cos \Theta}, \quad \cos(\varphi - \varphi_0) = \sqrt{\cos \Theta}$$

$$\text{un} \quad \cos(\varphi - \varphi_0) = \sqrt[3]{\cos \Theta}.$$

Šinī piemērā  $m_m = 1$  uz paralēlēm, noteiktām ar platumiem  $\varphi' = 47^{\circ}28'$  un  $\varphi'' = 62^{\circ}32'$ ;  $m_p = 1$  pie  $\varphi_1' = 44^{\circ}22'$  un  $\varphi_1'' = 65^{\circ}38'$  un  $p = 1$  pie  $\varphi_2' = 46^{\circ}18'$  un  $\varphi_2'' = 63^{\circ}42'$ .

c) Trešā Murdoch'a projekcija. — Savai trešai projekcijai Merdoks šķeļošā kona veiduli AQ novelk tā, lai ar ass OP turpinājumu izveidotos atkal leņķis  $\varphi_0 = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$ , bet lai tās atālumu OC no lodes centra noteiktu nolīdzinājums:

$$OC : R = \text{loks } \Theta : \operatorname{tg} \Theta.$$

Veidules vidus punkts C uz kona virsas veido apli ar rādiusu  $r = CD = OC \cdot \cos \varphi_0$ , un tā kā no iepriekšējā nol.  $OC = R \Theta \operatorname{cotg} \Theta$ , tad  $r = R \Theta \operatorname{cotg} \Theta \cos \varphi_0$ . Nošķeltā kona veidules gaŗumu nosauksim par  $l$ . Pieņēmus, ka nošķeltā kona sānu virsas laukums vienlīdzīgs globa attiecīgās joslas virsas laukumam dod nol.:

$$2\pi r l = 2\pi R^2 (\operatorname{sn} \varphi_2 - \operatorname{sn} \varphi_1),$$

$$\text{no kuŗienes } l = 2R \cdot \frac{\operatorname{sn} \Theta \operatorname{tg} \Theta}{\Theta}.$$

Projekcijai vidējās paralēles rādus  $\rho_0$ , t. i., nogriezni CQ noteic pēc formulas:

$$\rho_0 = R \theta \cotg \theta \cotg \varphi_0. \quad (260)$$

Apskatāmā projekcijā atsevišķas paralēles novelk vienādos attālumos, kāpēc kaut-kādas ar platumu  $\varphi$  noteiktas paralēles rādus  $\rho$  ir:

$$\rho = \rho_0 - \frac{l}{2} \cdot \frac{\varphi - \varphi_0}{\theta},$$

$$\text{jeb} \quad \rho = \rho_0 - \frac{\text{sn } \theta \text{ tg } \theta}{\theta^2} R (\varphi - \varphi_0). \quad (261)$$

Mērogu pa meridiāniem noteic pēc vispārīgās formulas (244), ieliekot tur  $\frac{d\rho}{d\varphi}$  nozīmi no (261) nol.; iznāk konstants lielums:

$$m_m = \frac{\text{sn } \theta \text{ tg } \theta}{\theta^2}. \quad (262)$$

Mērogu pa paralēlēm noteic pēc (244) otrās formulas, ieliekot te  $\rho$  attiecīgo nozīmi no (261) un  $\alpha$  vietā  $\text{sn } \varphi_0$ .

Pieņemot  $R=1$ ,  $\varphi_1=40^\circ$  un  $\varphi_2=70^\circ$  dabūjam sekošu tabulu Europas kartei trešā Merdoka projekcijā.

$\varphi$	$\rho$	$m_m$	$m_p$	$p$	$2\omega$
70°	0,4192	1,012	1,004	1,016	0° 26'
65	0,5075	1,012	0,984	0,995	1 37
60	0,5958	1,012	0,976	0,988	2 03
55	0,6841	1,012	0,977	0,989	2 0
50	0,7724	1,012	0,984	0,996	1 35
45	0,8607	1,012	0,997	1,009	0 50
40	0,9490	1,012	1,015	1,027	0 09

Platumu paralēlei, uz kuŗas mērogi  $m_p$  un  $p$  vismazāki, noteic no nol.:

$$\varphi + \cotg \varphi = \varphi_0 + \theta^3 \text{ cosec } \theta \cotg^2 \theta \cotg \varphi_0.$$

Augšā aprēķinātai kartei  $\varphi = 58^\circ 10'$ .

Platumus paralēlēm, pa kuŗām mērogs  $m_p$  ir 1, dabū no nol.:  $\varphi + \theta^2 \text{ cosec } \theta \cotg \theta \text{ cosec } \varphi_0 \cos \varphi = \varphi_0 + \theta^3 \cotg \varphi_0 \text{ cosec } \theta \cotg^2 \theta$ .

Mūsu piemērā šie platumi ir:  $\varphi_1' = 44^\circ 05'$  un  $\varphi_1'' = 69^\circ 16'$ .

Beidzot, platumus paralēlēm, pa kuŗām laukumu mērogs  $p$  ir viens, dabū no līdzīga nol.:

$$\varphi + \theta^4 \text{ cosec}^2 \theta \cotg^2 \theta \text{ cosec } \varphi_0 \cos \varphi = \varphi_0 + \theta^3 \cotg \varphi_0 \text{ cosec } \theta \cotg^2 \theta.$$

Mūsu piemēra šie platumi ir:  $\varphi_2' = 48^\circ 13'$  un  $\varphi_2'' = 66^\circ 31'$ .

d) Albersa projekcija uz šķeļoša kona. — Augšā jau bija aizrādīts, ka Merdoka projekcijās nemainās viss globa virsas laukums starp valsts malējām paralēlēm, bet starpparalēļu atsevišķas trapēces nav vienādielas ar globa atbilstošām trapēcēm. Pilnīgi vienādielas projekcijas uz šķeļoša kona izgudroja Lüneburgas zinātnieks Albers (Heinrich Christian Albers) un par tām ziņoja žurnālā „Monatliche Correspondenz“ 1805. g.

Vispirms atgādināsim agrāk pieņemtus apzīmējumus:

1. Valsts malējo paralēļu platumus sauksim par  $\varphi_1$  un  $\varphi_2$  un lai  $\varphi_2 > \varphi_1$ .

2. Vidējās paralēles platums  $\varphi_0 = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$ .

3.  $\frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)$  apzīmējam ar  $\Theta$ .

4. Albers ņem mērogu viens uz divām paralēlēm, kas iet vidū starp abām malējām paralēlēm un vidējo paralēli. Šo paralēļu platumus nosauksim par  $\varphi_3$  un  $\varphi_4$  un pieņemsim, ka  $\varphi_3 < \varphi_4$ ; tad  $\varphi_3 = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_0)$  un  $\varphi_4 = \frac{1}{2}(\varphi_0 + \varphi_2)$ ; tāpēc  $\varphi_2 - \varphi_4 = \varphi_4 - \varphi_0 = \varphi_0 - \varphi_3 = \varphi_3 - \varphi_1$ ,  $\varphi_4 - \varphi_3 = \Theta$  un  $\varphi_4 + \varphi_3 = 2\varphi_0$ .

5. Uz projekcijas ar platumiem  $\varphi_3$  un  $\varphi_4$  noteikto paralēļu rādījumus nosauksim par  $\rho_3$  un  $\rho_4$ .

Nošķelta kona ar veiduli  $\rho_3 - \rho_4$  sānu virsas laukumu Albers ņem vienādieli ar globa atbilstošās joslas virsas laukumu starp paralēlēm ar platumiem  $\varphi_3$  un  $\varphi_4$ . Nošķelta kona sānu virsas laukums ir  $2\pi r(\rho_3 - \rho_4)$ , kur  $r$  ir kona sānu virsas vidējā griezumā rādījums  $= \frac{1}{2}R(\cos \varphi_3 + \cos \varphi_4)$ ; globa atbilstošās joslas virsas laukums ir  $2\pi R^2(\operatorname{sn} \varphi_4 - \operatorname{sn} \varphi_3)$ ; tāpēc

$$2\pi \cdot \frac{1}{2}R(\cos \varphi_3 + \cos \varphi_4)(\rho_3 - \rho_4) = 2\pi R^2(\operatorname{sn} \varphi_4 - \operatorname{sn} \varphi_3),$$

$$\text{no kurienes } \rho_3 - \rho_4 = \frac{2R(\operatorname{sn} \varphi_4 - \operatorname{sn} \varphi_3)}{\cos \varphi_4 + \cos \varphi_3} = 2R \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} \dots (a)$$

Ar platumu  $\varphi_3$  noteiktās paralēles loka elements uz globa ir  $R \cos \varphi_3 \cdot \lambda$ ; tāds pats elements uz globa paralēlei ar platumu  $\varphi_4$  ir  $R_4 \cos \varphi_4 \cdot \lambda$ . Atbilstošie elementi uz projekcijas būs  $\rho_3 \delta$  un  $\rho_4 \delta$ , pie kam  $\delta = \alpha \lambda$ . Tā kā šo abu paralēļu lokus uz projekcijas un globa Albers ņem atbilstoši vienādus, tad

$$\rho_3 \alpha \lambda = R \lambda \cos \varphi_3 \dots (b)$$

$$\rho_4 \alpha \lambda = R \lambda \cos \varphi_4 \dots (c)$$

No trīs nol. (a), (b) un (c) ir iespējams noteikt trīs nezināmos  $\rho_3$ ,  $\rho_4$  un  $\alpha$ ; atrisinājums dod:

$$\alpha = \operatorname{sn} \varphi_0 \cos \frac{1}{2} \Theta. \quad (263)$$

$$\rho_3 = R \cos \varphi_3 \operatorname{cosec} \varphi_0 \sec \frac{1}{2} \Theta, \quad \rho_4 = R \cos \varphi_4 \operatorname{cosec} \varphi_0 \sec \frac{1}{2} \Theta. \quad (264)$$

Uz projekcijas rādiusu  $\rho$  ar platumu  $\varphi$  noteiktai paralēlei dabū no noteikuma, ka nošķelta kona sānu virsas laukums vienādiels ar globa attiecīgās joslas virsas laukumu, ņemot šo joslu starp platumiem  $\varphi$  un  $\varphi_4$  (jeb  $\varphi_3$  un  $\varphi$ ). Šis laukums uz projekcijas būs:

$$\frac{1}{2} \rho_4^2 \delta - \frac{1}{2} \rho^2 \delta = \frac{1}{2} (\rho_4^2 - \rho^2) \delta.$$

Globa virsas atbilstošās daļas laukums starp meridiāniem ar garumu starpību  $\lambda$  (ņemot  $\lambda$  loku mēros) būs:

$$R^2 (\operatorname{sn} \varphi - \operatorname{sn} \varphi_4) \lambda.$$

Tāpēc

$$\frac{1}{2} (\rho_4^2 - \rho^2) \delta = R^2 \lambda (\operatorname{sn} \varphi - \operatorname{sn} \varphi_4), \quad \text{jeb}$$

$$\rho^2 = \rho_4^2 - \frac{2R^2}{\alpha} (\operatorname{sn} \varphi - \operatorname{sn} \varphi_4) \dots (d) \quad \text{Ieliekot te } \alpha \text{ nozīmi no (263)}$$

noļ. dabonam:

$$\rho = \sqrt{\rho_4^2 + 2R^2 (\operatorname{sn} \varphi_4 - \operatorname{sn} \varphi) \operatorname{cosec} \varphi_0 \sec \frac{1}{2} \Theta}. \quad (265)$$

Te radikāla priekšā jāņem vienīgi plus zīme.

Tā kā no (d) noļ.  $d\rho = -\frac{R^2 \cos \varphi d\varphi}{\rho \alpha} \dots (e)$ , tad mērogs pēc (244) formulām būs:

$$m_m = \frac{R \cos \varphi}{\rho \alpha}, \quad m_p = \frac{\rho \alpha}{R \cos \varphi}. \quad (266)$$

Platību mērogs  $p = m_m m_p = 1$ , kā tam arī vajaga būt pēc noteikuma, kāds uzstādīts projekcijai.

Ņemot  $\varphi_1 = 40^\circ$ ,  $\varphi_2 = 70^\circ$  un  $R = 1$  Europas kartei dabūjam  $\varphi_0 = 55^\circ$ ,  $\varphi_3 = 47^\circ 30'$ ,  $\varphi_4 = 62^\circ 30'$ ,  $\alpha = 0,8121$  un pēc tam sekošu skaitlisku tabulu:

$\varphi$	$\rho$	$m_m$	$m_p$	$p$	$2\omega$
70 <sup>0</sup>	0,4399	0,957	1,045	1	5 <sup>0</sup> 0'
65	0,5251	0,991	1,009	1	1 02
60	0,6123	1,005	0,995	1	0 37
55	0,7003	1,009	0,991	1	0 59
50	0,7881	1,004	0,996	1	0 29
45	0,8754	0,995	1,005	1	0 37
40	0,9616	0,981	1,020	1	2 13

Tabula rāda, ka mērogs  $m_m$  sākot no malējās ziemeļparalēles, papriekš aug, sasniedz vislielāko lielumu un pēc tam mazinājas; mērogs  $m_p$ , turpretim, papriekš mazinājas, sasniedz vismazāko lielumu

un pēc tam aug. Platumu paralēlei, uz kuŗas mērogam  $m_m$  ir vislielākā un mērogam  $m_p$  vismazākā nozīme, dabūsim, ja pielīdzināsim nullei to atvasinātās pēc mainīgā  $\varphi$ ; tad no (266) nol. iznāk:  $-\rho \operatorname{sn} \varphi = \cos \varphi \frac{d\rho}{d\varphi}$ ; ieliekot te  $d\rho$  nozīmi no (e),  $\rho$  nozīmi no (265),  $\rho_4$  nozīmi no (264) un  $\alpha$  nozīmi no (263) dabonam:

$$\frac{\cos^2 \varphi_4}{\operatorname{sn} \varphi_0 \cos \frac{\Theta}{2}} + 2 \operatorname{sn} \varphi_4 = \frac{1 + \operatorname{sn}^2 \varphi}{\operatorname{sn} \varphi}. \quad \text{Šī nolīdzinājuma aplēsei iaved}$$

palīglenķi  $\psi$  no noteikuma:  $\operatorname{sn} \varphi = \operatorname{tg} \psi$ ; tad  $\frac{1 + \operatorname{sn}^2 \varphi}{\operatorname{sn} \varphi} = \frac{2}{\operatorname{sn} 2\psi}$  un meklējamā platuma aplēsei iznāk sekošas formulas:

$$\operatorname{sn} 2\psi = \frac{2 \cos \frac{\Theta}{2} \operatorname{sn} \varphi_0}{\cos^2 \varphi_4 + 2 \cos \frac{\Theta}{2} \operatorname{sn} \varphi_0 \operatorname{sn} \varphi_4}$$

$$\operatorname{sn} \varphi = \operatorname{tg} \psi.$$

Tikko apskatītā piemērā iznāk  $\psi = 39^{\circ}14'$ ,  $\varphi = 55^{\circ}43'$ ; uz šī platuma vislielākais mērogs  $m_m = 1,009$  un vismazākais mērogs  $m_p = 0,991$ .

Mērogi  $m_m$  un  $m_p$  ir 1 uz paralēlēm, noteiktām ar platumiem  $\varphi_3$  un  $\varphi_4$ , kā tas bija pieņemts pašā sākumā.

e) Albersa projekcija uz pieskares kona. — Ja Albersa projekcijas uz šķeļošā kona formulas (263) — (265) ieliksīm  $\varphi_3 = \varphi_4 = \varphi_0$ , tad  $\Theta = 0^{\circ}$  un iznāk vienādiela koniskā projekcija uz pieskares kona. Šinī gadījumā  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $\rho_0$ , un  $\rho$  aprēķina pēc sekošām formulām, kuŗas var dabūt arī tieši:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \operatorname{sn} \varphi_0 \\ \delta &= \alpha \lambda \\ \rho_0 &= R \operatorname{cotg} \varphi_0 \end{aligned} \right\} \quad (267)$$

$$\rho = \sqrt{\rho_0^2 - 2R^2 (\operatorname{sn} \varphi - \operatorname{sn} \varphi_0) \operatorname{cosec} \varphi_0}$$

Mērogu aplēsei noder agrāk izvestās formulas (266). Uz šo formulu pamata aplēstie skaitļi vienādielai koniskai projekcijai uz pieskares kona Europas kartei, pieņemot  $\varphi_0 = 55^{\circ}$  un  $R = 1$  doti sekošā tabulā:

Sk. tabulu 213. lapp.

Šinī projekcijā vislielākais mērogs  $m_m$  un vismazākais mērogs  $m_p$  ir 1 un iznāk uz pieskares paralēles  $\varphi_0 = 55^{\circ}$ .

Palielinot kona piltuves lenķi līdz  $180^{\circ}$  dabūjam Lamberta zenitālo projekciju; pamazinot to, turpretim, līdz  $0^{\circ}$ , dabonam izocilindrisko. Lai pieskares kona vietā dabūtu pieskares plakni (polā), tad (267)

formulā jāieliek  $\varphi_0 = 90^\circ$ ; tad  $\alpha = 1$ ,  $\delta = \lambda$ ,  $\rho_0 = 0$ ,  $\rho = 2R \operatorname{sn}\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$ ;

mērogu formulas (266) iznāk:  $m_m = \cos\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$ ,  $m_p = \sec\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$ .

Tā kā šini gadījumā  $m_m$  un  $m_p$  ir indikatrisas lielā un mazā pusasis, tad šīs formulas ir tās pašas, kas Lamberta zenitālai projekcijai (144. form.). Lai pieskares kona vietā dabūtu pieskares cilindri, tad (267) formulās jāņem  $\varphi_0 = 0^\circ$ ; iznāk  $\alpha = 0$ ,  $\delta = 0$ ,  $\rho_0$  un  $\rho = \infty$ ; tā tad, uz projekcijas paralēļu rādiusi iznāk bezgalīgi lieli un leņķis starp tiem nulle; tas nozīmē, ka paralēles ir taisnas līnijas un ka paralēle ar rādiusu resp. ordinātu  $\rho_0 = y_0$  attēlo ekvatoru; kaut-kādas paralēles attāļums no ekvatora būs  $y = \rho_0 - \rho$ ; no (267) sistēmas ceturtais nol. dod

$$\rho_0^2 - \rho^2 = 2R^2 \frac{\operatorname{sn}\varphi - \operatorname{sn}\varphi_0}{\operatorname{sn}\varphi_0}$$

un tā kā  $\rho_0^2 - \rho^2 = (\rho_0 + \rho)(\rho_0 - \rho) = 2\rho_0 y \left(1 - \frac{y}{2\rho_0}\right)$ , tad ieliekot  $\rho_0$

nozīmi no trešās formulas (267) un pieņemot  $\varphi_0 = 0$ , dabonam  $y = R \operatorname{sn}\varphi$ . Sastādot tadā pašā ceļā reizinājumu  $\alpha\rho$  un ievēdot to (266) formulās dabonam  $m_m = \cos\varphi$ ,  $m_p = \sec\varphi$ , kas ir Lamberta cilindriskās projekcijas (182) formulas.

$\varphi$	$\rho$	$m_m$	$m_p$	$p$	$2\omega$
70°	0,4427	0,943	1,060	1	6° 42'
65	0,5268	0,979	1,021	1	2 23
60	0,6131	0,996	1,004	1	0 30
55	0,7002	1,000	1,000	1	0 0
50	0,7874	0,997	1,003	1	0 23
45	0,8740	0,988	1,013	1	1 25
40	0,9596	0,974	1,026	1	2 58

f) Pārlabotā vienādlielā projekcija. — Albersa projekcija jau ir liels solis uz priekšu, salīdzinot ar Merdoka projekcijām, tāpēc ka viņā laukumi iznāk vienādlieli ne tikai visā visumā, lielos masīvos, bet arī sīkākās daļās. Tomēr mēroga svārstības uz kādas atsevišķas valsts kartes ir diezgan prāvas, pie kam uz polam tuvākās malējās paralēles mērogi atšķiras vairāk no viena, nekā uz ekvatoram tuvākās malējās paralēles (sk. d punktā doto tabulu 211. lpp.).

Ir iespējams konstruēt vienādlielu konisku projekciju tā, lai uz valsts abām malējām paralēlēm mērogi būtu vienādi un lai tie būtu lielāki vai mazāki par 1 par tik, par cik uz valsts vidējās paralēles

mērogs ir mazāks vai lielāks par vienu, ar citiem vārdiem, lai mēroga alterācijas uz vienu un otru pusi no galvenā mēroga iznāktu vienādas. Šādu vienādlīelu konisku projekciju var aprēķināt pēc prof. Vitkovska trīs nolīdzinājumiem (A) (sk. 36. paragr. e punktu 202. lpp.). Pirmo no šiem nolīdzinājumiem dalīsim ar trešo; tad

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2}.$$

No šejienes, paturot agrākos apzīmējumus, dabonam atvasinātu proporciju:

$$\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} = \operatorname{tg} \Theta \operatorname{tg} \varphi_0 \dots (a)$$

Ja joslu uz globa norobežo divi paralēles, noteiktas ar platumiem  $\varphi_1$  un  $\varphi_2$ , tad tādas joslas virsas laukums ir  $2\pi R^2 (\operatorname{sn} \varphi_2 - \operatorname{sn} \varphi_1)$ ; platumam  $\lambda$  joslas atbilstošās virsas daļas laukums būs  $R^2 \lambda (\operatorname{sn} \varphi_2 - \operatorname{sn} \varphi_1) = 2R^2 \lambda \operatorname{sn} \Theta \cos \varphi_0$ . Nošķeltā kona sānu virsas veidule ir  $d_1 - \rho_2$ ; tās vidus punkta attālums no kona virsotnes ir  $\frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)$ ; ja leņķis starp divi veidulēm ir  $\delta = \alpha \lambda$ , tad kona attiecīgās virsas daļas laukums būs  $\frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)(\rho_1 - \rho_2)\delta$ . Prasība, lai nošķeltā kona sānu laukums (vai laukumu daļa) būtu vienādlīels ar globa joslas virsas laukumu (vai laukumu daļu), dod nolīdzinājumu:

$$\frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)(\rho_1 - \rho_2)\delta = 2R^2 \lambda \operatorname{sn} \Theta \cos \varphi_0 \text{ jeb}$$

$$(\rho_1 + \rho_2)(\rho_1 - \rho_2) = \frac{4R^2}{\alpha} \operatorname{sn} \Theta \cos \varphi_0 \dots (b).$$

No (a) un (b) nolīdzinājumiem vispirms dabonam:

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 + \rho_2 &= 2R \cos \varphi_0 \sqrt{\frac{\cos \Theta}{\alpha \operatorname{sn} \varphi_0}} \\ \rho_1 - \rho_2 &= 2R \operatorname{sn} \Theta \sqrt{\frac{\operatorname{sn} \varphi_0}{\alpha \cos \Theta}} \end{aligned} \right\} \dots (c)$$

No šejienes

$$\rho_1 = \frac{R \cos \varphi_1}{\sqrt{\alpha \cos \Theta \operatorname{sn} \varphi_0}}, \quad \rho_2 = \frac{R \cos \varphi_2}{\sqrt{\alpha \cos \Theta \operatorname{sn} \varphi_0}}.$$

Dabūto  $\rho_1$  nozīmi ieliekam (A) sistēmas pirmā nol., jeb  $\rho_2$  nozīmi trešā nol.; iznāk:

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\cos \Theta \operatorname{sn} \varphi_0}} = 1 + x.$$

(A) sistēmas otrā nol. ieliek  $\rho_0 = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)$  un  $\rho_1 + \rho_2$  summu atvieto ar (c); tad

$$\sqrt{\frac{\alpha \cos \Theta}{\operatorname{sn} \varphi_0}} = 1 - x.$$

Saskaitot pēdējās divas izteiksmes dabū formulu koeficienta  $\alpha$  aprēķinam; proti:

$$\alpha = \cos \Theta \sec^4 \frac{1}{2} \Theta \operatorname{sn} \varphi_0. \quad (268)$$

Lai aplēstu projekcijas rādīus  $\rho$  paralēlei, noteiktai ar platumu  $\varphi$ , par izeju ir jāņem noteikums, ka nošķeltā kona sānu virsas daļas laukums vienāddiels ar sfēras joslas virsas laukuma atbilstošo daļu; uz šī pamata, tāpat kā (b) nol.:

$$(\rho_1^2 - \rho^2) \alpha = 2R^2 (\operatorname{sn} \varphi - \operatorname{sn} \varphi_1).$$

Atvietojam  $\rho_1$  ar augšā dabūto nozīmi; tad

$$\rho = \frac{R}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi_1}{\cos \Theta \operatorname{sn} \varphi_0} - 2(\operatorname{sn} \varphi - \operatorname{sn} \varphi_1)}. \quad (269)$$

Šai projekcijai mērogus aprēķina, tāpat kā visām citām, pēc (266) formulām:

$$m_m = \frac{R \cos \varphi}{\alpha \rho}, \quad m_p = \frac{\alpha \rho}{R \cos \varphi}. \quad (270)$$

Šinī projekcijā aprēķinātie skaitļi Europas kartei, pieņemot  $R=1$ , ir sekoši:

$\varphi$	$\rho$	$m_m$	$m_p$	$p$	$2\omega$
70°	0,4249	0,983	1,017	1	1° 58'
65	0,5119	1,008	0,992	1	0 56
60	0,6004	1,017	0,983	1	1 56
55	0,6892	1,016	0,984	1	1 52
50	0,7776	1,009	0,991	1	1 05
45	0,8652	0,998	1,002	1	0 14
40	0,9517	0,983	1,017	1	1 58

Salīdzinot šo tabulu ar Albersa projekcijas līdzīgu tabulu redzam šis jaunās projekcijas priekšrocības: te mērogi mainās par vienu trešdaļu mazāk.

Platumu paralēlei, uz kuŗas mērogs ir vislielāks pa meridiānu un vismazāks pa paralēli, noteic no tā, ka pielīdzina nullei mēroga pirmo atvasināto pēc mainīgā  $\varphi$ ; formula iznāk līdzīga tai, kādu šinī gadījumā dabūjam Albersa projekcijai; proti:

$$\operatorname{sn} 2\psi = \frac{2 \cos \Theta \operatorname{sn} \varphi_0}{\cos^2 \varphi_1 + 2 \cos \Theta \operatorname{sn} \varphi_0 \operatorname{sn} \varphi_1} \quad \text{un} \quad \operatorname{sn} \varphi = \operatorname{tg} \psi.$$

Saknes ir  $\psi = 40^\circ 18'$  un  $\varphi = 58^\circ 0'$ ; šim platumam atbilstošie mērogi ir vislielākais  $m_m = 1,018$  un vismazākais  $m_p = 0,983$ .

Uziesim vēl platumus paralelēm, uz kuņām nav nekādu alterāciju, t. i., noteiksim vietas, kur mērogs  $m_m = m_p = 1$  un  $\omega = 0$ . Šim gadījumam (270) nolīdz. dod:

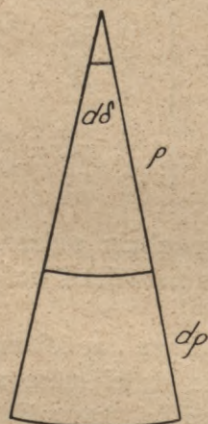
$$\alpha \rho = R \cos \varphi.$$

Atvietojot te  $\rho$  ar (269) izteiksmi pēc vienkāršiem pārveidojumiem dabonam kvadrātnolīdzinājumu, kuņa saknes ir:

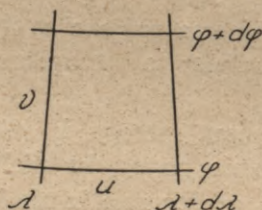
$$\operatorname{sn} \varphi = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 1 - \alpha \left( \frac{\cos^2 \varphi_1}{\cos \theta \operatorname{sn} \varphi_0} + 2 \operatorname{sn} \varphi_1 \right)}. \text{ Apskatītai Europas kar-}$$

tei  $\varphi' = 45^{\circ}46'$  un  $\varphi'' = 67^{\circ}08'$

**38. Vienādleņķu projekcijas.** — Vienādleņķu konisko projekciju teoriju pirmais izpētīja Lamberts, bet viņa darbam nepiegrīza vajadzīgo vērību. Vienādleņķu koniskās projekcijas pareizi novērtēja un tās guva piekrišanu tikai pēc ievērojamā matemātiķa Gausa (Karl Friedrich Gausz, 1777—1855) pētījumiem. Gauss pierādīja, ka šīs projekcijas ir tikai atsevišķs gadījums uzdevumam: izklāt vienu virsu uz otras tā, lai līdzība paliktu bezgalīgi mazās daļās. Interesanti atzīmēt, ka Gauss piedzima Lamberta miršanas gadā. Tagad koniskās vienādleņķu projekcijas lieto visai bieži un pie tam liela mēroga kartim, tāpēc tās teoriju izvedisim tieši sferoidam. Pieņemot šīs formulas  $e = 0$  dabūsim vienkāršākas formulas sfēras virsai.



Iedomāsimies uz sferoida bezgalīgi mazu trapēci (77. zīm.), norobežotu ar divi bezgalīgi tuvjiem meridiāniem un divi bezgalīgi tuvām paralelēm. Meridiānu gaŗumus nosauksim par  $\lambda$  un  $\lambda + d\lambda$ , paraleļu platumus par  $\varphi$  un  $\varphi + d\varphi$ . Trapēces pamatu nosauksim par  $u$  un sānu malu resp. augstumu par  $v$ ; tad



$$u = r d\lambda = \frac{a \cos \varphi d\lambda}{(1 - e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)^{1/2}} =$$

$$= \frac{a \cos \varphi d\lambda}{W} \text{ (sk. 18. lpp.)}$$

$$\text{un } v = M \cdot d\varphi = \frac{a(1 - e^2) d\varphi}{W^3}$$

77. zīm.

(sk. 19. lpp.), kur  $a$  ir zemes sferoida lielā pusass, jeb

ekvatora rādius un  $e$  — eliptiskā meridiāna ekscentriība.

Atbilstošās bezgalīgi mazās trapēces pamats un augstums katrā koniskā projekcijā ir:  $\rho d\delta$  un  $d\rho$  jeb  $\rho \alpha d\lambda$  un  $d\rho$ , kur  $\rho$  ir paralēles ar platumu  $\varphi$  rādius, bet  $\alpha$  konstants koeficients, kas noteic leņķa

starp meridiāniem uz projekcijas sakarību ar leņķi starp meridiāniem uz sferoīda, kā tas redzams no (241) un (242) formulām.

Nosauksim par  $\rho_1$  uz projekcijas rādiusu paralēlei ar platumu  $\varphi_1$ ,

"	$\rho_0$	"	"	"	"	"	"	$\varphi_0$
"	$\rho_2$	"	"	"	"	"	"	$\varphi_2$
"	$\rho$	"	"	"	"	"	"	$\varphi$

Noteikums, ka figurām uz projekcijas jābūt līdzīgām atbilstošām sferoīda figurām, prasa, lai trapēču malas būtu proporcionālas, t. i., lai:

$$\frac{d\rho}{\rho \alpha d\lambda} = \frac{v}{u} = -\frac{(1-e^2)d\varphi}{W^2 \cos\varphi d\lambda},$$

$$\text{jeb } \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\alpha(1-e^2)d\varphi}{W^2 \cos\varphi} = -\frac{\alpha(1-e^2)d\varphi}{(1-e^2 \operatorname{sn}^2\varphi) \cos\varphi}.$$

Mīnus zīme ir jāliek tāpēc, ka ar platumu  $\varphi$  augšanu rādius  $\rho$  mazinājas. Otrās daļas integrēšana jau paskaidrota 25. § (sk. 191. un 192 form.); tāpēc

$$\ln \rho = -\alpha \ln U + \ln k = \ln \frac{k}{U^\alpha},$$

$$\text{jeb } \rho = \frac{k}{U^\alpha},$$

$$\left. \begin{aligned} & \text{kur } U = \frac{\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tg}^e\left(45^\circ + \frac{\psi}{2}\right)} \text{ un } \operatorname{sn}\psi = e \operatorname{sn}\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (271)$$

bet  $k$  ir pie integrēšanas ievestais konstants lielums. Tā kā pie  $\varphi = 0^\circ$ ,  $U = 1$  un  $\rho = k$ , tad konstante  $k$  ir ekvatora rādius uz projekcijas. Otrai konstantei ir svarīgāka nozīme, tāpēc ka tā noteic projekciju dažādus veidus; par to runa būs turpmāk.

Vienādleņķu projekcijā mērogi vienādi visos no viena punkta izejošos virzienos un tāpēc mēroga  $m$  lielumu var dabūt, kā projekcijas paralēļu resp. meridiānu loku gaļumu attiecību pret sferoīda atbilstošo paralēļu resp. meridiānu loku gaļumu, t. i.:

$m = \frac{\rho d\delta}{u}$ , jeb  $m = \frac{d\rho}{v}$ . Ieliekot pirmā no šīm formulām  $\rho$  nozīmi (271),  $d\delta$  vietā  $\alpha d\lambda$  un  $u$  nozīmi, jeb otrā —  $v$ ,  $d\rho$  un  $\rho$  nozīmes, dabūsim:

$$m = \frac{k\alpha}{U^\alpha} \cdot \frac{W}{a \cos\varphi} = \frac{k\alpha}{r U^\alpha}, \quad (272)$$

kur  $r$  ir sferoīda atbilstošās paralēles rādiuss (sk. 15 .lpp.). Šinī

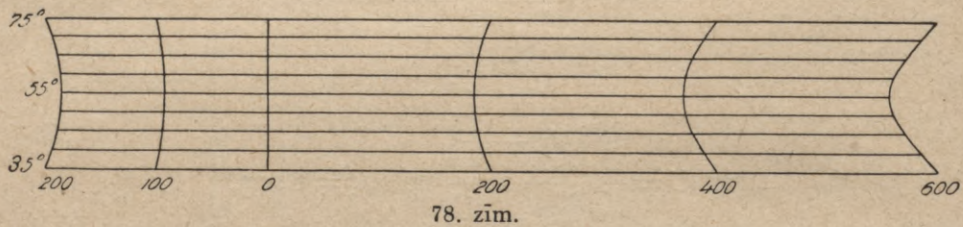
mēroga formulā  $k$  un  $\alpha$  ir konstanti lielumi vienai un tai pašai projekcijai, bet  $r$  un  $U$  ir platumu funkcijas; tāpēc projekciju mērogs ir atkarīgs no konstanto izveles, bet vienā un tanī pašā projekcijā tas mainās ar punkta platuma maiņu; būs lieki aizrādīt, ka mērogs nav atkarīgs no gaŗuma un ka, tā tad, uz vienas un tās pašas paralēles mērogs nēmainās.

Leņķi  $\delta$ , ko uz projekcijas veido taisnie starveidīgi no viena punkta izejošie blakus meridiāni ar gaŗumu starpību  $\lambda$ , aprēķina pēc (242) formulas:

$$\delta = \alpha \lambda. \quad (273).$$

(271) — (273) formulas noder visu vienādleņķu konisko projekciju aplēsei; tanis ietilpstošos konstantos lielumus  $\alpha$  un  $k$  noteic katrai projekcijai, atkarībā no tai uzstādītiem noteikumiem.

Tā kā mērogs ir tikai platuma funkcija, mainās ar platuma maiņu, bet nēmainās uz vienas un tās pašas paralēles, tad pēdējā laikā vienādleņķu projekcijās konstruētām kartēm bieži vien pieliek sevišķu mērogu, lai būtu iespējams lietot karti tāpat, kā plānu. Tāds grafisks konstruējums parādīts 78. zīm. Patvaļīgos attāļumos novelk vairākas



paralēlas taisnes; no šīm taisnēm stateniskas līnijas, apzīmētas ar 0, atliek 100, 200, 300... km uz vienu vai otru pusi katras atsevišķas paralēles mērogā un dabūtos gala punktus savieno ar nepārtrauktām līknēm; 78. zīm. šie gaŗumi atliekti paralēlēm ar platumiem  $\varphi = 35^\circ, 40^\circ, \dots, 75^\circ$ ; saprotams, ka pa katru paralēli gaŗumi jāatliek mērogā, kas aprēķināts pēc (272) formulas. Konstruējums rāda, ka līnijas iznāk visīsākas uz paralēles, kas ir tuvu kartes vidējai paralēlei; tas nozīmē, ka uz šīs paralēles mērogs ir vismazāks. Uz ziemeļiem un dienvidiem no šīs paralēles mērogs progresīvi aug.

Lai dabūtu platumu paralēlei, uz kuŗas mērogs ir vismazāks, pielīdzināsim nullei (272) izteiksmes pirmo atvasināto pēc mainīgā  $\varphi$ . Logaritmējot un tad diferencējot dabūjam:

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{dm}{d\varphi} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\varphi} - \frac{\alpha}{U} \cdot \frac{dU}{d\varphi}. \quad \text{Tā kā } \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{a(1-e^2)\sin\varphi}{W^3},$$

$$\frac{dU}{d\varphi} = \frac{(1-e^2)U}{W^2 \cos\varphi}, \quad \text{tad} \quad \frac{dm}{d\varphi} = \frac{m(1-e^2)(\operatorname{sn}\varphi - \alpha)}{W^2 \cos\varphi}.$$

Šī atvasinātā var būt nulle vienīgi pie  $\operatorname{sn}\varphi - \alpha = 0$ ; tā tad platumu  $\varphi$  paralēlei, uz kuŗas mērogs ir vismazāks, dabū no nolīdzinājuma

$$\operatorname{sn}\varphi = \alpha. \quad (274)$$

Gadījumos, kad vienādleņķu konisko projekciju konstruē uz kona, kas pieskaras sferoidam pa paralēli ar platumu  $\varphi_0$ , tad pēc (241) un (242) form.  $\alpha = \operatorname{sn}\varphi_0$  un vismazākais mērogs iznāk tieši uz pieskares paralēles. Ar to jautājums vispārējā veidā ir atrisināts; tagad apskatīsim atsevišķus gadījumus.

a) Projekcija uz pieskares kona ar galveno mērogu uz pieskares paralēles. — Kona pieskāšanās paralēles platumu nosauksim par  $\varphi_0$ ; tad uz (241) un (242) form. pamata

$$\alpha = \operatorname{sn}\varphi_0. \quad (275)$$

Tā kā galvenais mērogs ir uz pieskares paralēles, tad saskaņā ar (272) formulu

$$\frac{k\alpha}{r_0 U_0^\alpha} = 1,$$

kur zīme 0 rāda, ka lielumi  $r$  un  $U$  jāņem platumam  $\varphi_0$ ; no šejienes

$$k = \frac{r_0 U_0^\alpha}{\alpha}. \quad (276)$$

Sacitais noteic sekošu projekcijas aprēķināšanas gaitu: pirmkārt, izvēlās kona pieskāšanās paralēles platumu  $\varphi_0$ ; to parasti ņem, kā valsts malējo paralēļu  $\varphi_1$  un  $\varphi_2$  aritmētisko vidu, t. i., ņem  $\varphi_0 = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$ ; tad pēc (275) formulas noteic  $\alpha$  un pēc (276) form.  $k$ ;  $\rho$  un  $m$  aplēsei dažādiem platumiem jāņem (271) un (272) formulas; ar to ir noteikti paralēļu kā koncentrisku riņķu loku rādiusi; no tā paša kopējā centra novelk meridiānus, kā starveidīgas taisnes ar leņķiem  $\delta = \alpha \lambda$  savā starpā.

Sekošā tabulā doti skaitļi, kas aplēsti vienādleņķu koniskai projekcijai uz pieskares kona ar pieskares paralēles doto platumu  $\varphi_0 = 55^\circ$  un pieņemot zemes sferoida lielo pusasi  $a$  par 1 ( $\alpha = 0,8192$ ,  $k = 1,7983$ ).

Sk. tabula 220. lapp.

Šinī projekcijā savā laikā sastādīta „Āzijas Krievijas karte“ galvenā mērogā 1 : 4 200 000 (100 verstis 1 angļu collā) uz 8 lielām lapām (26 × 19 angļu collas) un „Āzijas Krievijas pierobežjoslas karte“ galvenā mērogā 1 : 1 680 000 (40 verstis vienā angļu collā) uz 32 lapām (23 × 20 angļu collas); pirmāi kartei pieskares paralēles platumus  $54^\circ$

un otrai  $44^{\circ}$ ; uz šīm kartēm meridiāni un paralēles novilkas ik pa  $2^{\circ}$  garumā un platumā.

$\varphi$	$\rho$	m	p	$2\omega$
$70^{\circ}$	0,4363	1,042	1,085	$0^{\circ} 0'$
65	0,5261	1,017	1,034	0 0
60	0,6144	1,004	1,008	0 0
55	0,7018	1,000	1,000	0 0
50	0,7891	1,004	1,007	0 0
45	0,8770	1,014	1,029	0 0
40	0,9660	1,032	1,064	0 0

Latvijas kartei var ņemt  $\varphi_1 = 55^{\circ}30'$ ,  $\varphi_2 = 58^{\circ}10'$  un  $\varphi_0 = 56^{\circ}50'$ ; ja mērogu ņem 1 : 100 000, tad meridiānus un paralēles var novilkt pa  $10'$ . Parādīsim, ka vienādleņķu projekcija uz pieskares kona, gadījumā, kad kona piltuves leņķis pieaug līdz  $180^{\circ}$ , pārvēršas par stereografisko projekciju un par Merkatora projekciju, kad piltuves leņķis ir nulle.

Kad kona pieskares paralēles platums  $\varphi_0$  aug, tad aug arī kona piltuves leņķis; kad  $\varphi_0 = 90^{\circ}$ , tad kons pārvēršas par zemei polā pieskarošos plakni un šīnī gadījumā (275) formula dod  $\alpha = 1$ . Ja vienkāršības dēļ zemi uzskatām par sfēru, tad  $e = 0$ ,  $U = \operatorname{tg}(45^{\circ} + \frac{1}{2}\varphi)$  un no (272) form.  $m = \frac{k}{R \operatorname{tg}(45^{\circ} + \frac{1}{2}\varphi) \cos \varphi}$ .

Mērogu uz ekvatora pieņemsim par 1, tad pie  $\varphi = 0^{\circ}$

$$1 = \frac{k}{R}, \quad k = R \quad \text{un}$$

$$m = \frac{1}{\operatorname{tg}(45^{\circ} + \frac{1}{2}\varphi) \operatorname{sn}(90^{\circ} - \varphi)} = \frac{1}{\operatorname{tg}(45^{\circ} + \frac{1}{2}\varphi) 2 \operatorname{sn}(45^{\circ} - \frac{1}{2}\varphi) \cos(45^{\circ} - \frac{1}{2}\varphi)} =$$

$$= \frac{1}{2 \operatorname{sn}^2(45^{\circ} + \frac{1}{2}\varphi)} = \frac{1}{2} \sec^2(45^{\circ} - \frac{1}{2}\varphi); \quad \text{no (271) form. } \rho = R \operatorname{tg}(45^{\circ} - \frac{1}{2}\varphi)$$

Ja divi pēdējās formulas ieliksīm  $90^{\circ} - \varphi = \theta$ , tad iznāks stereografiskās projekcijas formulas (78) un (76).

Kad  $\varphi_0 = 0^{\circ}$ , tad kons pieskares zemei pa ekvatoru, kas var būt tikai tānī gadījumā, kad tas pārvēršas par cilindri; pēc (275) formulas  $\alpha = 0$ , pēc (276) form.  $k = \infty$  un pēc (271)  $\rho = k = \infty$ ; tā tad uz projekcijas ekvators un paralēles ir taisnes. Ja (271) formulās ieliksīm  $\varphi = 0^{\circ}$ , tad  $U = 1$  un  $\rho_0 = k = y_0$ ; tas ir ekvatora attālums no x ass; patvaļīgas paralēles uz projekcijas attālums  $y'$  no x ass ir  $y' = \rho = \frac{k}{U^{\alpha}}$ ;

$$\text{tāpēc } y = y_0 - y' = \rho_0 - \rho = k - \frac{k}{U^{\alpha}} = \frac{k}{U^{\alpha}} (U^{\alpha} - 1) \dots (a).$$

Tanī pašā laikā ekvātors ir pieskares paralele un uz tā mērogam jābūt vienam; bez tam ekvātoram  $r = a$ ; tāpēc no (272) formulas:

$$1 = \frac{k\alpha}{aU^\alpha}$$

un no šejienes

$$\frac{k}{U^\alpha} = \frac{a}{\alpha} \dots (b).$$

Ieliekot (b) izteiksmi (a) formulā dabonam:

$$y = \frac{a}{\alpha} (U^\alpha - 1).$$

Ieliekot te  $\alpha = 0$  dabūjam nenoteiktu lielumu. Lai dabūtu patieso lielumu, jāņem skaitītāja un saucēja atvasinātie; iznāk

$$\lim \left/ \frac{U^\alpha - 1}{\alpha} \right/_{\alpha=0} = \frac{\log U}{\mu}; \text{ tāpēc } y = \frac{a}{\mu} \log U,$$

kur  $\mu$  ir Brīgsa logaritmu modulis.

Ja, beidzot, (272) formulā ievietojam (b) nozīmi un sferoīda paralēles rādiusa vietā ieliksīm tā nozīmi, tad

$$m = W \sec \varphi$$

Pēdējās divi formulas ir vienādas ar Merkātora projekcijas formulām (195) un (203).

b) Projekcija uz pieskares kona ar galveno mērogu uz pieskares paralēles un vienādiem mērogiem uz kartes malējām paralēlēm. — Šinī gadījumā  $\delta = \lambda \sin \varphi_0 = \alpha \lambda$  un  $\sin \varphi_0 = \alpha$ ; pieskares paralele nav dota, bet ir atkarīga no malējām paralēlēm; tāpēc tikko dabūtā sakarībā pagaidām ne  $\alpha$  nedz  $\varphi_0$  nav zināms. Kartes resp. valsts malējo paralēļu platumus un rādiusus nosauksim attiecīgi par  $\varphi_1, \varphi_2, r_1$  un  $r_2$ ; mērogus uz šīm paralēlēm nosauksim par  $m_1$  un  $m_2$ ; tad

$$m_1 = \frac{k\alpha}{r_1 U_1^\alpha}$$

$$\text{un } m_2 = \frac{k\alpha}{r_2 U_2^\alpha},$$

kur  $U_1$  un  $U_2$  ir platumiem  $\varphi_1$  un  $\varphi_2$  atbilstošās attiecīgās funkcijas (sk. 191 un 271 otro form.).

Projekcijai uzstādītā otrā prasība dod nol.:

$$\frac{k\alpha}{r_1 U_1^\alpha} = \frac{k\alpha}{r_2 U_2^\alpha},$$

$$\text{no kuŗa } \alpha = \frac{\log r_1 - \log r_2}{\log U_2 - \log U_1}. \quad (277)$$

Kad  $\alpha$  noteikts, tad pieskares paralēles platumu  $\varphi_0$  noteic pēc formulas

$$\operatorname{sn} \varphi_0 = \alpha. \quad (278)$$

Pirmā projekcijai uzstādītā prasība dod nol.:

$$m_0 = 1 = \frac{k\alpha}{r_0 U_0^\alpha},$$

$$\text{no kuŗa } k = \frac{r_0 U_0^\alpha}{\alpha}. \quad (279)$$

Te  $r_0$  ir pieskares paralēles rādiuss (sk. 15. lpp.) un  $U_0$  platumam  $\varphi_0$  atbilstošā funkcija pēc (271) otrās form.

Lielumus  $\rho$  un  $m$  noteic pēc (271) un (272) form.

Sekošā tabulā doti skaitļi vienādenķū koniskai projekcijai uz pieskares kona pie noteikuma, ka mērogī vienādi uz kartes malējām paralēlēm ar platumiem  $\varphi_1 = 40^\circ$  un  $\varphi_2 = 70^\circ$  ( $\alpha = 0,8293$ ,  $\varphi_0 = 56^\circ 01'$ ,  $k = 1,7974$ ).

$\varphi$	$\rho$	$m$	$p$	$2\omega$
$70^\circ$	0,4285	1,036	1,073	$0^\circ 0'$
65	0,5180	1,014	1,027	0 0
60	0,6060	1,003	1,005	0 0
55	0,6934	1,000	1,000	0 0
50	0,7808	1,005	1,011	0 0
45	0,8689	1,017	1,035	0 0
40	0,9582	1,036	1,073	0 0

c) Projekcija uz šķeļoša kona ar vienādiem mērogiem uz valsts malējām paralēlēm un galveno mērogu uz dotās starpparalēles. — Valsts malējo paralēļu un starpparalēles doto platumu nosauksim attiecīgi par  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  un  $\varphi_3$ . Pirmā prasība, tāpat kā iepriekšējā gadījumā,  $\alpha$  aplēsei dod (277) formulu.

$$\alpha = \frac{\lg r_1 - \lg r_2}{\log U_2 - \log U_1}. \quad (280)$$

Otrā prasība noved pie nol.:

$$m^3 = \frac{k\alpha}{r_3 U_3^\alpha} = 1,$$

no kuŗa var aplēst otro konstanto  $k$ :

$$k = \frac{r_3 U_3^\alpha}{\alpha}. \quad (281)$$

Projekcijas paraleļu rādījumus  $\rho$  un mēroģus  $m$  noteic pēc vispārīgām formulām (271) un (272). Platumu  $\varphi_{\min}$  paralēlei, uz kuģas mēroģs vismazāks, aprēķina pēc (274) formulas:

$$\operatorname{sn} \varphi_{\min} = \alpha,$$

bet platumu paralēlei, kur mēroģs vēl reiz ir viens no formulas

$$r U^\alpha = k\alpha.$$

Sekošā tabulā doti skaitliskie lielumi vienādleņķu koniskai projekcijai ar vienādiem mēroģiem uz paralēlēm, noteiktām ar platumiem  $\varphi_1 = 40^\circ$  un  $\varphi_2 = 70^\circ$  un ar galveno mēroģu uz paralēles ar platumu  $\varphi_3 = 50^\circ$  ( $\alpha = 0,8293$ ,  $k = 1,7880$ ).

$\varphi$	$\rho$	$m$	$p$	$2\omega$
$70^\circ$	0,4263	1,030	1,062	$0^\circ 0'$
65	0,5153	1,008	1,017	0 0
60	0,6028	0,997	0,995	0 0
55	0,6898	0,995	0,990	0 0
50	0,7767	1,000	1,000	0 0
45	0,8643	1,012	1,024	0 0
40	0,9532	1,030	1,062	0 0

Vismazākais mēroģs iznāk uz platumā  $56^\circ 01'$ , bet mēroģs otrreiz ir 1 uz platumā  $61^\circ 44'$ .

d) Projekcija ar galveno mēroģu uz kartes divi dotām paralēlēm. — Doto paraleļu platumus nosauksim par  $\varphi_3$  un  $\varphi_4$ ; projekcijai uzstādītās prasības pēc (272) formulas dod divi nolīdzinājumus:

$$\frac{k\alpha}{r_3 U_3^\alpha} = 1 \text{ un } \frac{k\alpha}{r_4 U_4^\alpha} = 1.$$

No tiem

$$\alpha = \frac{\log r_3 - \log r_4}{\log U_4 - \log U_3}. \quad (282)$$

$$\text{un } k = \frac{r_3 U_3^\alpha}{\alpha} = \frac{r_4 U_4^\alpha}{\alpha}. \quad (283)$$

$p$  un  $m$  aprēķina pēc (271) un (272) formulām. Šinī projekcijā mēroģi ir mazāki par 1 starpā starp paralēlēm, noteiktām ar platumiem  $\varphi_3$  un  $\varphi_4$ ; ārpus tām mēroģi lielāki par vienu. Vismazākais mēroģs ir uz paralēles, kuģas platumu noteic pēc (274) nol.:

$$\operatorname{sn} \varphi = \alpha.$$

Sekošā tabulā doti skaitliskie lielumi vienādleņķu koniskai projekcijai ar šķeļošo paraleļu dotiem platumiem  $\varphi_3 = 50^\circ$  un  $\varphi_4 = 60^\circ$

kartes sastādīšanai teritorijai starp malējām paralēlēm ar platumiem  $\varphi_1 = 40^\circ$  un  $\varphi_2 = 70^\circ$  ( $\alpha = 0,8202$ ,  $k = 1,7913$ ).

$\varphi$	$\rho$	m	p	$2\omega$
70°	0,4338	1,037	1,076	0° 0'
65	0,5233	1,013	1,026	0 0
60	0,6112	1,000	1,000	0 0
55	0,6983	0,996	0,992	0 0
50	0,7853	1,000	1,000	0 0
45	0,8729	1,011	1,022	0 0
40	0,9616	1,028	1,057	0 0

Šai projekcijai vismazākais mērogs iznāk uz paralēles, noteiktas ar platumu  $55^\circ 06'$ .

Parasti šīs projekcijas aprēķina tā, lai paralēles ar mērogu 1 dalītu meridiāna loku starp valsts malējām paralēlēm uz trīs vienādām daļām; piemēram, Eiropas kartei ar malējo paralēļu platumiem  $\varphi_1 = 30^\circ$  un  $\varphi_2 = 70^\circ$  galveno mērogu ņem uz paralēlēm ar platumiem  $\varphi_3 = 43^\circ 20'$  un  $\varphi_4 = 56^\circ 40'$ .

Krievijas ģeografiskā biedrība 1862. g. izdevusi Eiropas Krievijas karti uz 12 lielām loksniēm mērogā  $1 : 1\,680\,000$  (40 verstis 1 angļu collā) pieņemot  $\varphi_1 = 37^\circ$ ,  $\varphi_2 = 71^\circ$ ,  $\varphi_3 = 46^\circ$ ,  $\varphi_4 = 58^\circ$ . Mērogs uz malējās dienvidparalēles ir 1,031 uz paralēles ar platumu  $52^\circ$  mērogs 0,994 un malējās ziemeļparalēles 1,064. Šinī pašā projekcijā sastādīta jaunā „Speciālā Eiropas Krievijas karte“ mērogā  $1 : 420\,000$  (10 verstis 1 angļu collā) un „Eiropas Krievijas kara ceļu karte“ mērogā  $1 : 1\,050\,000$  (25 verstis 1 angļu collā); abi kartim galvenais mērogs ņemts uz paralēlēm ar platumiem  $45^\circ$  un  $59^\circ$ .

e) Projekcija ar vienādiem mērogiem uz valsts malējām paralēlēm un ar starpību starp vislielāko mērogu un 1 tikpat lielu, kā starpība starp 1 un vismazāko mērogu. — Zināmos valsts malējo paralēļu platumus nosauksim par  $\varphi_1$  un  $\varphi_2$ . Pirmais noteikums dod, tāpat kā (b) gadījumā (277) formulu:

$$\alpha = \frac{\log r_1 - \log r_2}{\log U_2 - \log U_1} \quad (284)$$

Platumu  $\varphi_0$  paralēlei, uz kuŗas mērogs vismazāks, noteic (274) nol.:

$$\sin \varphi_0 = \alpha \quad (285)$$

Simbols 0 šinī gadījumā nav jāizprot tā, ka  $\varphi_0$  būtu pieskares paralēles platumš.

Mērogs no paralēles  $\varphi_0$  ar vismazāko mērogu aug uz ziemeļiem un dienvidiem un uz malējām paralēlēm tas vislielāks. Otrā prasību, t. i., lai vislielākais mērogs uz valsts malējām paralēlēm no galvenā atšķirtos par tikpat, par cik galvenais mērogs atšķiras no vismazākā uz paralēles ar platumu  $\varphi_0$ , var izteikt ar sekošiem trīs nol.:

$$m_1 = \frac{k\alpha}{r_1 U_1^\alpha} = 1 + \varepsilon,$$

$$m_2 = \frac{k\alpha}{r_2 U_2^\alpha} = 1 + \varepsilon,$$

$$m_0 = \frac{k\alpha}{r_0 U_0^\alpha} = 1 - \varepsilon,$$

kur  $\varepsilon$  ir viegli izslēdzams nezināms un nevajadzīgs konstants lielums. Pirmā un trešā jeb otrā un trešā nol. summa dod formulu projekcijas otrās konstantes aprēķinam, proti:

$$\text{jeb } \left. \begin{aligned} k &= \frac{2r_0 U_0^\alpha r_1 U_1^\alpha}{\alpha(r_0 U_0^\alpha + r_1 U_1^\alpha)}, \\ k &= \frac{2r_0 U_0^\alpha r_2 U_2^\alpha}{\alpha(r_0 U_0^\alpha + r_2 U_2^\alpha)} \end{aligned} \right\} \quad (286)$$

$\rho$  un  $m$  atkal aprēķina pēc (271) un (272) formulām. Šinī projekcijā uz divām paralēlēm mērogs ir 1; šo paralēļu platumus noteic no transcendentā nolīdzinājuma:

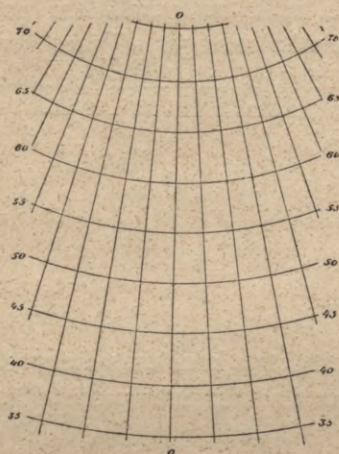
$$r U^\alpha = k\alpha,$$

kušu atrisina ar pakāpenisku tuvināšanos un interpolāciju.

Sekošā tabulā doti skaitļi vienādleņķu koniskai projekcijai, ņemot vienādus mēroģus uz malējām paralēlēm, noteiktām ar platumiem  $\varphi_1 = 40^\circ$  un  $\varphi_2 = 70^\circ$  un izejot no prasības, lai vislielākais mēroģs uz malējām paralēlēm būtu lielāks par vienu par tikpat, par cik viens ir lielāks par vismazāko mēroģu ( $\alpha = 0,8293$ ,  $\varphi_0 = 56^\circ 01'$  un  $k = 1,7658$ ).

$\varphi$	$\rho$	$m$	$p$	$2\omega$
$70^\circ$	0,4210	1,018	1,036	$0^\circ 0'$
65	0,5089	0,996	0,991	0 0
60	0,5953	0,985	0,970	0 0
55	0,6812	0,983	0,966	0 0
50	0,7671	0,988	0,975	0 0
45	0,8536	0,999	0,999	0 0
40	0,9414	1,018	1,036	0 0

Vismazākais mērogs 0,982 ir uz paralēles  $56^{\circ}01'$ ; tas ir mazāks par 1 par tik, par cik vislielākais mērogs lielāks par 1. Mērogs ir viens uz paralēlēm ar platumiem  $44^{\circ}47'$  un  $66^{\circ}15'$ .



79. zīm.

Salīdzinot visos piecos apskatītos vienādleņķu konisko projekciju gadījumos sastādītās tabulas redzam, ka pēdējais, e gadījums ir visizdevīgākais, jo tam gaŗumu alterācijas pa visu karti ir vismazākās. Nebūs lieki aizrādīt, ka šī pēdējā projekcija pamatota uz tiem pašiem principiem, kā Vitkovska vienādstarpu un vienāddielā koniskā projekcija; 79. zīm. rāda Eiropas kartes tīklu ar meridiāniem un paralēlēm pa  $5^{\circ}$  gaŗumā un platumā.

**39. Šķērsās un slīpās projekcijas.** — Visām līdz šim apskatītām koniskām projekcijām iedomātā taisnā kona ass sakrīt ar zemes griezes asi. Šādas projekcijas ir derīgas valstīm, kas šauras platumā, bet stiepjas gaŗumā, t. i. pa paralēlēm; tāpēc šīs projekcijas ir arī noderīgas Latvijas valsts kartēm. Ja valsts nav izstiepta pa paralēli, bet pa kādu mazo riņķi, tad izdevīgākas ir šķērsās un slīpās koniskās projekcijas, kas atbilst jau apskatītām šķērsām un slīpām cilindriskām projekcijām. Ja valsts stiepjas pa ekvatora plaknei statenisko mazo riņķi, tad kartes sastādīšanai ir jālieto šķērsā koniskā projekcija, t. i. projekcija uz tāda kona, kuŗa ass iet pa ekvatora plakni; turpretim valstij, kuŗas vispārīgais virziens iet pa patvaļīgu mazo riņķi — jālieto slīpā koniskā projekcija, t. i. projekcija uz tāda kona, kuŗa ass sakrīt ar sfēras dotā mazā riņķa asi.

Ja ir noteikts mazais riņķis, pa kuŗu stiepjas attēlojamā valsts, tad ir iespējams ikkuŗam punktam, pēc tā dotām ģeografiskām koordinātām  $\varphi$  un  $\lambda$  aprēķināt sfēriskās koordinātas  $\varphi_1$  un  $\lambda_1$ , attiecinātas uz lielo riņķi, kas paralēls minētam dotam valsts ass mazam riņķim. Šo abu riņķu paralēlisma pazīme ir tā, ka tiem abiem ir kopīgs pols uz sfēras virsas. Jauno sfērisko koordinātu  $\varphi_1$  un  $\lambda_1$  aprēķinam pēc dotām ģeografiskām  $\varphi$  un  $\lambda$  vajadzīgās formulas izvestas jau 32 un 33 paragrafā, proti: šķērsai koniskai projekcijai der (231) formulas, bet slīpai — (235). Pēc tam, kad aplēstas koordinātas  $\varphi_1$  un  $\lambda_1$  valsts visiem meridiānu un paralēļu krustošanās punktiem noteic projekcijas konstantes un citus lielumus, saskaņā ar 36, 37 un 38 § formulām,



Šie trīs nolīdzinājumi ar trīs nezināmiem  $\psi$ ,  $\varphi_0$  un  $\lambda_0$  noder uzstādītā uzdevuma atrisinājumam.

Nezināmo izslēgšana būs vienkāršāka ja otro un trešo nol. atņemsim no pirmā; tad dabūsim divus nol. ar diviem nezināmiem  $\varphi_0$  un  $\lambda_0$ :  
 $\operatorname{sn} \varphi_0 (\operatorname{sn} \varphi_1 - \operatorname{sn} \varphi_2) = \cos \varphi_0 [\cos \varphi_2 \cos(\lambda_0 - \lambda_2) - \cos \varphi_1 \cos(\lambda_0 - \lambda_1)]$ , ... (a)  
 $\operatorname{sn} \varphi_0 (\operatorname{sn} \varphi_1 - \operatorname{sn} \varphi_3) = \cos \varphi_0 [\cos \varphi_3 \cos(\lambda_0 - \lambda_3) - \cos \varphi_1 \cos(\lambda_0 - \lambda_1)]$  ... (a)

Ņemsim tāpatības:

$$\begin{aligned} \lambda_0 - \lambda_2 &= (\lambda_0 - \lambda_1) - (\lambda_2 - \lambda_1), \\ \lambda_0 - \lambda_3 &= (\lambda_0 - \lambda_1) - (\lambda_3 - \lambda_1). \end{aligned}$$

Uzskatot arī labās puses par divu loku starpībām ņemsim to kosinusus; ievietosim tos abu (a) nol. labā pusē pirmos locekļos iekavās, starpību kosinusus atvietosim ar kosinusu un sinusu reizinājumu šūmmu, izdalīsim pirmo nol. ar otro; pēc tam dabūtā nol. otras puses skaitītāju un saucēju izdalīsim ar  $\cos(\lambda_0 - \lambda_1)$ ; pēc vienkāršiem pārveidojumiem gaŗuma  $\lambda_0$  aplēsei dabonam sekošu formulu

$$\begin{aligned} &\operatorname{tg}(\lambda_0 - \lambda_1) = \\ &= \frac{(\operatorname{sn} \varphi_1 - \operatorname{sn} \varphi_3) [\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1)]}{(\operatorname{sn} \varphi_1 - \operatorname{sn} \varphi_3) \cos \varphi_2 \operatorname{sn}(\lambda_2 - \lambda_1) - (\operatorname{sn} \varphi_1 - \operatorname{sn} \varphi_2) \cos \varphi_3 \operatorname{sn}(\lambda_3 - \lambda_1)} - \\ &- \frac{(\operatorname{sn} \varphi_1 - \operatorname{sn} \varphi_2) [\cos \varphi_1 - \cos \varphi_3 \cos(\lambda_3 - \lambda_1)]}{(\operatorname{sn} \varphi_1 - \operatorname{sn} \varphi_3) \cos \varphi_2 \operatorname{sn}(\lambda_2 - \lambda_1) - (\operatorname{sn} \varphi_1 - \operatorname{sn} \varphi_2) \cos \varphi_3 \operatorname{sn}(\lambda_3 - \lambda_1)}. \quad (288) \end{aligned}$$

Platumu  $\varphi_0$  dabūjam tieši no (a) pirmā jeb otrā nol.:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\cos \varphi_2 \cos(\lambda_0 - \lambda_2) - \cos \varphi_1 \cos(\lambda_0 - \lambda_1)}{\operatorname{sn} \varphi_1 - \operatorname{sn} \varphi_2}. \quad (289)$$

Leņķi  $\psi$ , beidzot, aprēķina pēc vienas no (287) formulām.

Šis ir tiešais, dabīgais uzdevuma atrisinājums; galīgās formulas tomēr iznāk komplicētas un neērtas logaritmēšanai. Ieteicams pārbaudei lietot citas formulas, kuŗas šī uzdevuma aplēsei izvedis pazīstamais itāļu astronoms Kaņjoli (Andrea Cagnoli, 1743—1816). Tiesa, ka viņa paņēmiens ir mākslots, bet galīgās formulas ir elegantas un ērtas logaritmēšanai.

Apzīmēsim leņķus PAQ, PBQ un PCQ, kā parādīts 80. zīm., ar burtiem p, q un r un starp punktiem A un B iedomāsimies lielā riņķa loku AB. No sfēriskā trīsstūra ABP, pamatojoties uz Nepera analogiju, kas noteic divu leņķu pusstarpības tangensu, rakstam:

$$\operatorname{tg} \frac{\text{PAB} - \text{PBA}}{2} = \operatorname{cotg} \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} \cdot \frac{\operatorname{sn} \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}}{\cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}} \dots \quad (b)$$

No zīmējuma redzam, ka:

$$\begin{aligned}\sphericalangle PAB &= p + \sphericalangle QAB, \\ \sphericalangle PBA &= \sphericalangle QBA - q.\end{aligned}$$

Tā kā loki AQ un BQ ir vienādi un  $\sphericalangle QBA = \sphericalangle QAB$ , tad  $\sphericalangle PAB - \sphericalangle PBA = p + q$ .

Šo nozīmi ieliek (b) formulā un līdzīgi rīkojas ar trīsstūriem ACP un BCP (iepriekš novelkot lielo riņķu lokus AC un BC); tad iznāk:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \frac{p+q}{2} &= \operatorname{cotg} \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} \cdot \frac{\operatorname{sn} \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}}{\cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}}, \\ \operatorname{tg} \frac{p+r}{2} &= \operatorname{cotg} \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{2} \cdot \frac{\operatorname{sn} \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{2}}{\cos \frac{\varphi_1 + \varphi_3}{2}}, \\ \operatorname{tg} \frac{q+r}{2} &= \operatorname{cotg} \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{2} \cdot \frac{\operatorname{sn} \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{2}}{\cos \frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2}}.\end{aligned}\tag{290}$$

No šīm trīs simmetriskām formulām noteic palīgleņķus p, q, r. Pēc tam no sfēriskiem trīsstūriem APQ un BPQ dabūjam:

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sn} p}{\operatorname{sn} (\lambda_0 - \lambda_1)} &= \frac{\cos \varphi_0}{\cos \psi}, \\ \frac{\operatorname{sn} q}{\operatorname{sn} (\lambda_0 - \lambda_2)} &= \frac{\cos \varphi_0}{\cos \psi}.\end{aligned}$$

Tā kā šo nol. labās puses vienādas, tad:

$$\frac{\operatorname{sn} p}{\operatorname{sn} q} = \frac{\operatorname{sn} (\lambda_0 - \lambda_1)}{\operatorname{sn} (\lambda_0 - \lambda_2)}.$$

No starpību un summu attiecībām pēc vienkāršiem pārveidojumiem dabonam:

$$\operatorname{tg} \left( \lambda_0 - \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{2} \right) = \operatorname{tg} \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{p+q}{2}}{\operatorname{tg} \frac{p-q}{2}}.\tag{291}$$

Beidzot, no sfēriskā trīsstūra APQ, kurā zināmi leņķi p,  $\lambda_0 - \lambda_1$  un mala  $AP = 90^\circ - \varphi_1$ , uz Nepera analogiju pamata (malu PQ un AQ pussumas un pusstarpības tangens):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \psi}{2} &= \operatorname{cotg} \left( 45^\circ - \frac{\varphi_1}{2} \right) \cdot \frac{\cos \frac{\lambda_0 - \lambda_1 + p}{2}}{\cos \frac{\lambda_0 - \lambda_1 - p}{2}} \\ \operatorname{tg} \frac{\varphi_0 - \psi}{2} &= \operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{\varphi_1}{2} \right) \cdot \frac{\operatorname{sn} \frac{\lambda_0 - \lambda_1 - p}{2}}{\operatorname{sn} \frac{\lambda_0 - \lambda_1 + p}{2}} \end{aligned} \quad (292)$$

Skaitliskais piemērs. — Aplēst mazā riņķa pola ģeogrāfiskās koordinātas, ja mazais riņķis iet caur trīs punktiem:

- 1)  $\varphi_1 = 32^\circ 30'$ ,  $\lambda_1 = 131^\circ 0'$
- 2)  $\varphi_2 = 36^\circ 0'$ ,  $\lambda_2 = 139^\circ 0'$
- 3)  $\varphi_3 = 43^\circ 30'$ ,  $\lambda_3 = 142^\circ 30'$ .

Pēc (287) — (289) jeb (290) — (292) formulām dabonam:

$$\varphi_0 = 42^\circ 14', \quad \lambda_0 = 129^\circ 10' \quad \text{un} \quad \psi = 80^\circ 09'.$$

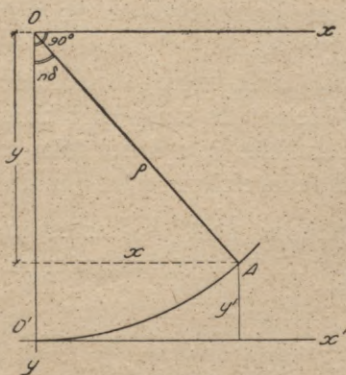
**40. Taisnleņķu koordinātas.** — Bija noskaidrots, ka koniskām projekcijām, kurām kona ass sakrīt ar zemes griezes asi, meridiāni attēlojas kā starveidīgi no viena kopēja punkta izejošas taisnes, veidojot savā starpā vienādus leņķus; paraleles, turpretim, attēlojas kā koncentriski riņķu loki ar kopēju centru — meridiānu sateku punktā. Uz šī pamata šo projekciju konstruēšana liekās visai vienkārša: ar aplēstiem rādiusiem  $\rho$  novelk koncentrisku riņķu lokus un tos krusto ar taisnēm, izejošām no visu loku kopējā centra tā, lai leņķi starp divām blakus taisnēm būtu  $\delta$ . Praksē tomēr izrādās citādi, jo karti parasti sastāda lielā mērogā, uz vairākām loksņēm; tāpēc nav iespējams novilkt gaŗas taisnas līnijas un konstruēt riņķus ar tik lieliem rādiusiem; pat kartē uz vienas lapas meridiānu krustošanās punkts parasti iznāk ārpus lapas un pie tam tik tālu, ka pat vislielākie stieņa cirkuli izrādās par maziem, nēmaz nerunājot par to, ka patī konstruēšana ļoti neērta un nav pietiekoši precīza.

Šķērsām un slīpām koniskām projekcijām meridiāni un paraleles ir transcendentas līknes un to tieša rasēšana nav iespējama. Tāpēc vienkāršāki un pareizāki projekciju konstruēt pēc punktiem, kuriem aprēķinātas taisnleņķu koordinātas.

Pieņemsim visu meridiānu kopīgo krustošanās punktu O (81. zīm.) par koordinātu sākumu; kartes vidējo meridiānu ņemsim par y asi un tai statenisku līniju Ox — par x asi. Sekojošie meridiāni ar vidējo meridiānu veidos leņķus  $\delta$ ,  $2\delta$ ,  $3\delta$ ...  $n\delta$ . Šie leņķi katrai projekcijai jāaprēķina vienreiz, bet rādiuss  $\rho$  jāaprēķina katrai projekcijai pēc

35—38 § izvestām formulām. Kaut-kāda meridiāna un kaut-kādas paralēles krustošanās punkta A taisnleņķu koordinātas nosauksim par  $x$  un  $y$ ; šīs paralēles rādiusu  $OA$  par  $\rho$  un leņķi  $AOO'$ , starp sākuma meridiānu un punkta A meridiānu, par  $n\delta$ ; tad

$$\begin{aligned} x &= \rho \operatorname{sn}(n\delta), \\ y &= \rho \operatorname{cos}(n\delta). \end{aligned} \quad (293)$$



81. zīm.

Dodot koeficientam  $n$  dažādas nozīmes 1, 2, 3...  $n$  dabūsim punktus uz vienas un tās pašas paralēles, bet, ieliekot dažādas  $\rho$  nozīmes pie viena un tā paša  $n\delta$ , dabūsim punktus uz viena un tā paša meridiāna. Ar to uz projekcijas meridiānu un paralēļu tīkls ir noteikts.

Aplēse ir vajadzīga tikai tīkla vienai pusei, piemēram, austrumdaļai, skaitot no vidējā meridiāna; tad otrai daļai, uz rietumiem no vidējā meridiāna, ordinātas būs tās pašas, bet abscisas jāņem ar negatīvu zīmi; tas tāpēc, ka augšējās formulās  $+\delta$  vietā jāņem  $-\delta$ .

Ordinātām  $y$  parasti iznāk ļoti lieli skaitļi un tāpēc izdevīgāki tās skaitīt ne no  $x$  ass, bet no stāņiem, kas uzstādīti pret vidējo meridiānu no tā krustošanās punktiem ar visām paralēlēm (piemēram punkta  $O'$ ). Tad jaunās ordinātas  $y'$  ir starpības starp attiecīgās paralēles rādiusu  $\rho$  un ordinātām  $y$ , aprēķinātām pēc (293) otras formulas, t.i.,

$$y' = \rho - \rho \operatorname{cos}(n\delta) = 2\rho \operatorname{sn}^2 \frac{n\delta}{2}. \quad (294)$$

Ja karti sastāda uz vairākām lapām, tad katrai lapai koordinātu sākumu var ņemt lapas vienā stūra punktā. Ja, piemēram, viena tāda stūra punkta pēc (293) formulām aprēķinātas koordinātas ir  $x_0, y_0$ , tad šīs lapas jaunās koordinātas  $x_1, y_1$  aprēķina pēc formulām:

$$\begin{aligned} x_1 &= x - x_0, \\ y_1 &= y - y_0. \end{aligned} \quad (295)$$

Ja meridiānu un paralēļu tīkls ir pietiekoši biezs, tad vienu otram sekojošo punktu koordinātas būs vienmērīgi augošo jeb dilstošo skaitļu rindas, pēc kuņu starpībām viegli spriest par lēses pareizību.

Kad atsevišķu punktu koordinātas aplēstas un punkti uznesti uz papīra, tad savienojot tos, kam ir viens un tas pats platums, dabūsim

ar šo platumu noteikto paralēli; ja savienosim punktus, noteiktus ar vienu un to pašu  $\pm n\delta$  nozīmi, tad dabūsim ar atbilstošo gaļumu noteikto meridiānu. Meridiānus novelk gar līnijālu; ja kāds punkts nav uz kopējās taisnes, tad tas ir nepareizs un jāpārbauda tā uznešana un koordinātu aplēse. Paralleles novelk gar lēkālu, pieliekot to pie 3 jeb 4 viens otram sekojošiem punktiem. Lielā mērogā paralēlēm ir tik mazs lēkums, ka paralēļu atsevišķus elementus starp divi blakus punktiem var novilkēt gar līnijālu. Tā kā paralēles ir aploces lēki, tad arī te viegli atrast nepareizi aprēķinātus vai nepareizi uznestus punktus.

Skaitliskis piemērs. — Aprēķināsim Latvijas kartes projekciju, kas apmierina 38. § e punktā uzstādītās prasības, pieņemot valsts malējo paralēļu platumus  $\varphi_1 = 55^{\circ}30'$  un  $\varphi_2 = 58^{\circ}05'$ .

Pēc (284) un (285) formulām  $\log a = \log \sin \varphi_0 = 9.92259887$  un  $\varphi_0 = 56^{\circ}47'56'',892$ ; pēc (286) form.  $\log k = 7.059224166$ . Ja meridiānus un paralleles novelk ik pa  $20'$  un mērogu ņem  $1 : 100\,000$ , tad dabonam sekošu tabulu.

Sk. tabulu 233. lapp.

Pie Latvijas kartes sastādīšanas pēc šīs tabulas var ņemt meridiānu, noteiktu ar gaļumu —  $24^{\circ}20'$  vai —  $24^{\circ}40'$  par vidējo. Pa šo meridiānu atliek tabulas 1. slejā doto  $\rho$  starpības, t. i.  $37100,10$  m;  $37127,32$  m;  $37093,39$  m. u. t. t. pieņemtā mērogā; ar to katrai paralēlei dabūts punkts  $O'$  (81. zīm.) — vidējā meridiāna un paralēles krustošanās punkts; pa šini punktā uzstādīto stateni ( $yx'$ ) pret vidējo meridiānu atliek tabulā dotos  $x$  uz labo un kreiso pusi no vidējā meridiāna; no tā dabūtiem punktiem atliek uz augšu tabulā dotos  $y'$ .

---

Log $\rho$ $\rho$ metros	$\lambda =$ $n\delta =$	$\varphi$													
		0°20' 16'44",11 cm	0°40' 33' 28",21 cm	1°0' 50' 12",32 cm	1°20' 1°06' 56",43 cm	1°40' 1°23' 40",54 cm	2°0' 1°40' 24",64 cm	2°20' 1°57' 08",75 cm	2°40' 2°13' 52",86 cm	3°0' 2°30' 36",97 cm	3°20' 2°47' 21",07 cm	3°40' 3°04' 05",18 cm	3°50' 3°12' 27",23 cm		
1		3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14		
6.6417653	55° 0'	x = 21,33	42,67	64,00	85,34	106,67	128,00	149,33	170,65	191,97	213,28	234,59	245,24		
4382937,74		y' = 0,05	0,21	0,47	0,83	1,30	1,87	2,54	3,32	4,21	5,19	6,28	6,86		
6.6380735	20	x = 21,15	42,31	63,46	84,62	105,77	126,92	148,06	169,20	190,34	211,47	232,60	243,17		
4345837,64		y' = 0,05	0,21	0,46	0,82	1,29	1,85	2,52	3,30	4,17	5,15	6,23	6,81		
6.6343473	40	x = 20,97	41,94	62,92	83,89	104,87	125,83	146,80	167,76	188,71	209,67	230,61	241,09		
4308710,32		y' = 0,05	0,20	0,46	0,82	1,28	1,84	2,50	3,27	4,13	5,10	6,18	6,75		
6.6305923	56 0	x = 20,79	41,59	62,37	83,17	103,96	124,75	145,53	166,31	187,09	207,86	228,63	239,01		
4271616,93		y' = 0,05	0,20	0,46	0,81	1,27	1,82	2,48	3,24	4,10	5,06	6,12	6,69		
6.6268015	20	x = 20,61	41,23	61,83	82,44	103,06	123,67	144,27	164,87	185,46	206,06	226,65	236,95		
4234493,76		y' = 0,05	0,20	0,45	0,80	1,25	1,81	2,46	3,21	4,06	5,01	6,07	6,64		
6.6229788	40	x = 20,43	40,86	61,29	81,72	102,16	122,58	143,00	163,42	183,84	204,25	224,66	234,86		
4197384,93		y' = 0,05	0,20	0,45	0,80	1,24	1,79	2,44	3,18	4,03	4,97	6,02	6,58		
6.6191237	57 0	x = 20,25	40,50	60,75	81,00	101,25	121,50	141,74	161,98	182,22	202,45	222,67	232,78		
4160290,90		y' = 0,05	0,20	0,44	0,79	1,23	1,77	2,42	3,15	3,99	4,93	5,96	6,52		
6.6152305	20	x = 20,07	40,14	60,21	80,27	100,36	120,42	140,47	160,53	180,59	200,64	220,68	230,71		
4123162,96		y' = 0,05	0,19	0,44	0,78	1,22	1,76	2,39	3,12	3,96	4,88	5,91	6,45		
6.6113032	40	x = 19,89	39,78	59,66	79,56	99,45	119,33	139,21	159,09	178,96	198,83	218,70	228,63		
4086045,53		y' = 0,05	0,19	0,43	0,77	1,21	1,74	2,37	3,10	3,92	4,84	5,86	6,40		
6.6073412	58 0	x = 19,71	39,42	59,12	78,84	98,54	118,24	137,95	157,64	177,34	197,03	216,71	226,55		
4048938,68		y' = 0,05	0,19	0,43	0,77	1,20	1,73	2,35	3,07	3,89	4,80	5,80	6,34		
6.6053438	10														
4030359,65															

## VI. nodaļa.

### Polikoniskās projekcijas.

41. **Vispārīgās piezīmes.** — Kad kons pieskaras globam pa paralēli jeb kādu citu mazo riņķi, tad ar attālināšanos no pieskares paralēles resp. mazā riņķa, projekcijas mērogs nepārtraukti aug. Ja valsts pa meridiānu stiepjas tālu, tad, saprotams, uz valsts malējām paralēlēm mērogi visai manāmi atšķirsies no pieskares paralēles mēroga. Dabiski rodas doma pataisīt visas paralēles par pieskares paralēlēm; tas panākams ar to, ka attēlojamo valsti (pasaules daļu, kontinentu, apgabalu etc.) projicē ne uz viena, bet daudziem koniem; tāda doma atradusi atrisinājumu daudzkoniskās jeb polikoniskās projekcijas.

Polikonisko projekciju konstruēšanas paņēmiens pēc Tissot ir sekošs: Uz taisnes, kas attēlo valsts vidējo jeb centrālo meridiānu, atliek nogriežņus, vienlīdzīgus meridiānu loku garumiem starp globa attiecīgām paralēlēm. Caur dabūtiem punktiem novelk riņķa lokus ar rādiusiem, vienlīdzīgiem meridiāna pieskares garumam — skaitot no pieskares punkta resp. meridiāna un attiecīgās paralēles krustošanās punkta līdz pieskares un turpinātās zemes griezes ass krustošanās punktam. Tā tad visu paralēļu centri atrodas uz vidējā meridiāna, bet tikai dažādos punktos un paralēles attēlojas, kā ekscentrisku riņķu loki. Ar šo galvenā kārtā arī atšķiras polikoniskās projekcijas no koniskām projekcijām, jo uz pēdējām paralēles attēlojas kā koncentrisko riņķu loki. Pats par sevi saprotams, ka ar attālināšanos no vidējā meridiāna polikoniskās projekcijās attāļumi starp paralēlēm nepārtraukti aug.

Visās polikoniskās projekcijās ar platumu  $\varphi$  noteiktās paralēles rādiusu noteic no formulas

$$\rho = R \cotg \varphi. \quad (296)$$

kur  $R$  ir projekcijas galvenā mērogā samazināts zemes rādiuss (sk. 240. form.).

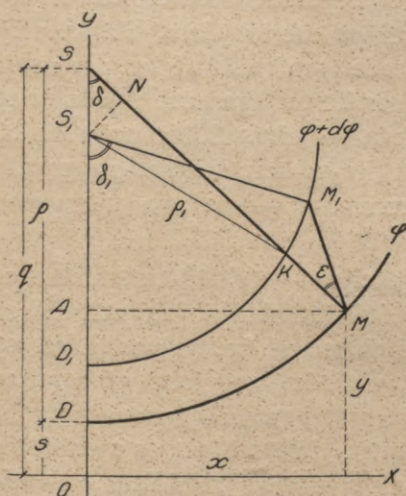
Pēc šīs formulas ekvatora rādius iznāk bezgalīgs un tāpēc ekvātors uz projekcijas attēlojas kā taisne, kas stateniska pret valsts vidējo meridiānu. Pieņemsim, ka pēc 82. zīmējuma  $OY$  attēlo vidējo meridiānu un taisne  $OX$  ekvatoru. Ar platumu  $\varphi$  noteiktās paralēles  $DM$

attālumu  $OD = s$  no ekvatora pa vidējo meridiānu noteic pēc formulas  $s = R \varphi$ . (297)

Šīs paralēles centra  $S$  attālumumu  $OS = q$  no ekvatora noteiks formula

$$q = s + p = R (\varphi + \cotg \varphi). \quad (298)$$

Ņemsim  $R = 1$  un pēc šīm formulām aprēķināsim  $\rho$ ,  $s$  un  $q$  paralēlēm ik pa  $15^\circ$  platumā; dabūtie skaitļi dod sekošu tabulu:



82. zīm.

$\varphi$	$\rho$	$s$	$q$
$90^\circ$	0,0000	1,5708	1,5708
75	0,2679	1,3090	1,5769
60	0,5774	1,0472	1,6245
45	1,0000	0,7854	1,7854
30	1,7321	0,5236	2,2556
15	3,7321	0,2618	3,9938
0	$\infty$	0,0000	$\infty$

Vēlāki būs vajadzīgi lielumu  $\rho$   $s$  un  $q$  pieaugumi, kas atbilst platumā  $\varphi$  pieaugumam; tos dabū diferencējot (296), (297) un (298) formulu; iznāk:

$$d\rho = -\frac{R d\varphi}{\text{sn}^2 \varphi}. \quad (299)$$

$$ds = R d\varphi. \quad (300)$$

$$dq = -R \cotg^2 \varphi \cdot d\varphi. \quad (301)$$

(296) — (301) formulas ir noderīgas visām polikoniskām projekcijām; atliekot  $q$  no punkta  $O$  dabū paralēles centru  $S$ ; paralēles krustošanās punktu  $D$  ar vidējo meridiānu dabū atliekot  $OD$  un novelkot loku ar rādiusu  $SD$  dabonam paralēles loku  $DM$ . Tā tad ir dabūts viss, kas nepieciešams paralēļu novilkšanai.

Ir izgudrotas vairākas polikonisko projekciju pasugas, kas viena no otras atšķiras vienīgi ar meridiānu konstruēšanas paņēmieniem. Vidējais meridiāns visām polikoniskām projekcijām ir taisne, bet visi citi meridiāni, vispār ņemot, ir līknes, kuŗas konstruē pēc punktiem un kuŗu noteikšanai var izgudrot dažādus noteikumus. Turpmākos paragrafos apskatīsim vienīgi vienkāršo un taisnstūra polikonisko projekciju; pirmā — paralēļu loku gaŗumi vienlīdzīgi globa atbilstošiem loku gaŗumiem; tāpēc uz visām paralēlēm mērogs vienlīdzīgs galvenam un meridiāni ir līknes, kas krusto paralēles zem šauriem un platiem leņķiem; otrā — taisnstūru jeb ortogonālā poli-

koniskā projekcijā visi meridiāni krusto paraleles zem taisniem leņķiem, bet toties mērogi pa paralēlēm iznāk dažādi netikai uz dažādām paralēlēm, bet pat uz vienas un tās pašas paralēles tās dažādās vietās.

Polikoniskās projekcijās alterācijas aug ar attālināšanos no vidējā meridiāna, kamēr visās citās koniskās projekcijas tās aug ar attālināšanos no pieskares jeb vispār kādas dotās paraleles; tā tad šo projekciju īpašības ir pilnīgi pretējas, neraugoties uz viņu radniecību. Koniskās projekcijās izokoli sakrīt ar paralēlēm, bet polikoniskās projekcijās tie ir līknes, kas iet gandrīz pa meridiāniem. Kā jau bija aizrādīts, koniskās projekcijas ir ļoti noderīgas valstīm, kas šauras pa meridiānu (platumā), bet stiepjas pa paralēlēm (gaļumā); šāda stiepšanās gaļumā var būt pat neaprobežota — visus  $360^\circ$ ; polikoniskās projekcijas turpretim noderīgas valstīm, kuŗas maz stiepjas pa paralēlēm, bet neaprobežoti stiepjas pa meridiānu — pat no viena pola līdz otram.

**42. Vienkāršā polikoniskā projekcija.** — Vidējā meridiāna un visu paralēļu novilkšanas paņēmiens šai projekcijai jau noskaidrots iepriekšējā paragrafā. Meridiānu novilkšanai uz katras paraleles, sākot no vidējā meridiāna atliek daļas, vienādas ar globa atbilstošiem paralēļu lokiem; savienojot tā vienai un tai pašai gaļumu starpībai noteiktos punktus ar nepārtrauktām līknēm, dabū attiecīgos meridiānus. Pieņemsim, ka pēc 82. zīm. OY ir valsts vidējais meridiāns, OX ekvātors un DM ar platumu  $\varphi$  noteiktā paralele, kas ir riņķa loks ar centru S; uz šīs paraleles ņemsim patvaļīgu punktu M un tā gaļumu, skaitot no vidējā meridiāna, nosauksim par  $\lambda$ . Savienosim M ar centru S un nosauksim leņķi MSD par  $\delta$ . Loka DM gaļumam dabūsim divas izteiksmes: pirmkārt, uz sfēras ar platumu  $\varphi$  noteiktās paraleles loks pie gaļumu starpības  $\lambda$  ir  $R \lambda \cos \varphi$  un, otrkārt, uz projekcijas  $\rho \delta = R \delta \cotg \varphi$ , saskaņā ar (296) formulu. Salīdzinot šīs abas izteiksmes dabūjam sekošu formulu leņķa  $\delta$  aplēsei:

$$\delta = \lambda \operatorname{sn} \varphi. \quad (302)$$

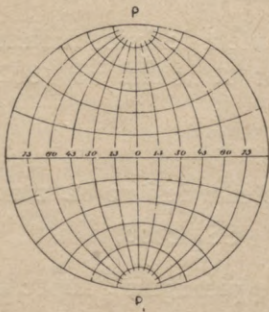
Tā kā sfēras paralēļu iztaisnotus lokus nevar atlikt uz projekcijas pa riņķa aploci tieši, tad jāaprēķina atbilstošās chordas jeb punktu koordinātas.

Jebkuŗa punkta M taisnleņķu koordinātas ir:

$$\begin{aligned} AM = x &= \rho \operatorname{sn} \delta, \\ OA = y &= \rho \cos \delta. \end{aligned} \quad (303)$$

Lielumi  $q$  un  $\rho$  ir jāaprēķina iepriekš pēc (296) un (298) formulām jeb jāņem no iepriekšējā paragrafā aplēstās tabulas.

83. zīmējumā attelota vienkāršā polikoniskā projekcijā pussfēra ar meridiāniem un paralēlēm ik pa  $15^{\circ}$  gaļumā un platumā. Kā redzams, meridiāni attēlojas kā liknes, kas ar savu ieliekumu vērsās pret videjo meridiānu un ar gaļumu  $\pm 90^{\circ}$  noteiktais meridiāns maz atšķiras no riņķa aploces. Ja paralēļu lokus turpināsim un pēc apskatītās metodes konstruēsim tālākos meridiānus, tad vienkāršā polikoniskā projekcijā būs iespējams attēlot visas zemes virsu.



83. zīm.

Lai izpētītu alterācijas, uziesim zem kādiem leņķiem uz projekcijas krustojas meridiāni ar paralēlēm. Ņemsim ar platumu  $\varphi + d\varphi$  noteiktu paralēli  $D_1M_1$  (82. zīm.) un uz tās punktu  $M_1$ , noteiktu ar gaļumu  $\lambda$ , tādu, pašu, kā punktam  $M$ ; pieņemsim, ka paralēles centrs ir  $S_1$  un rādiuss  $S_1D_1 = S_1M_1 = \rho_1$ . Elements  $MM_1$  ir meridiāna bezgalīgi mazs loks un to var pieņemt par taisni; leņķis  $SMM_1 = \varepsilon$  izteiks alterācijas lielumu, jo rādiuss  $SM$  ir normāls pret paralēles loku  $DM$ . No zīmējuma redzams,

ka ar noteiktību līdz mazo lielumu otrai šķirai

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{KM_1}{KM} \dots (a).$$

Nogriežņa  $KM_1$  noteikšanai savieno  $K$  un  $S_1$  ar taisni  $KS_1$ ; tad

$$KM_1 = S_1M_1 \cdot \sphericalangle M_1S_1K = \rho_1 \cdot \sphericalangle M_1S_1K \dots (b).$$

Nosauksim leņķi  $M_1S_1A$  par  $\delta_1$ ; tad no trīsstūra  $SS_1K$  ar ārējo leņķi  $KS_1O$  rakstām:

$$\begin{aligned} \delta_1 - \sphericalangle M_1S_1K &= \delta + \sphericalangle S_1KS \text{ jeb} \\ \sphericalangle M_1S_1K &= \delta_1 - \delta - \sphericalangle S_1KS \dots (c) \end{aligned}$$

Starpība  $\delta_1 - \delta$  ir leņķa  $\delta$  pieaugums pie pārejas no paralēles  $DM$  ar platumu  $\varphi$  uz paralēli  $D_1M_1$  ar platumu  $\varphi + d\varphi$ ; tāpēc šo starpību var dabūt diferencējot (302) formulu pēc mainīgā  $\varphi$ ; tad

$$d\delta = \delta_1 - \delta = \lambda \cos \varphi d\varphi \dots (d)$$

Bezgalīgi mazā leņķa  $SKS_1$  noteikšanai nolaiž no  $S_1$  stateni  $SN$  uz rādiusu  $SM$ ; no dabūtiem divi taisnleņķu trīsstūriem  $S_1SN$  un  $S_1NK$  dabonam:

$$S_1N = SS_1 \cdot \operatorname{sn} \delta = \rho_1 \cdot \sphericalangle S_1KS, \text{ kāpēc}$$

$$\sphericalangle S_1KS = \frac{\overline{SS_1} \cdot \operatorname{sn} \delta}{\rho_1}.$$



No šīs tabulas redzams, ka leņķis  $\epsilon$  vispār nav liels, it īpaši pie maziem gaļumiem  $\lambda$ . Pēdējā gadījumā (304) formulai var dot vienkāršāku un ērtāku veidu. Izvirzot rindās  $\operatorname{tg} \epsilon$ ,  $\operatorname{sn} \delta$ ,  $\operatorname{cos} \delta$  un atvietojot  $\delta$  ar tā (302) izteiksmi, pēc vienkāršiem pārveidojumiem ar noteiktību līdz mazo lielumu ceturtaī šķirai, dabūsim:

$$\epsilon = \frac{1}{12} \lambda^3 \operatorname{cos} \varphi \operatorname{sn} 2\varphi. \quad (305)$$

Gar katru meridiānu, sākot no ekvatora, kur leņķis  $\epsilon = 0^\circ$ , tas papriekšu aug, sasniedz pie noteikta platuma vislielāko nozīmi un pēc tam mazinājas, paliekot uz poliem atkal par nulli; tāpēc uz katra meridiāna ir punkts, kur leņķis  $\epsilon$  ir vislielākais. Šāda punkta platuma aplēsei pielīdzina nullei (304) izteiksmes atvasināto pēc mainīgā  $\varphi$ ; iznāk sekošs nol.:

$$2\lambda (\operatorname{sec} \varphi + \operatorname{cos} \varphi) \operatorname{sn}^2 \frac{\delta}{2} - 2(\delta - \operatorname{sn} \delta) \operatorname{sn} \varphi \operatorname{sec}^3 \varphi - \lambda^2 \operatorname{sn} \delta \operatorname{sn} \varphi \operatorname{cos} \varphi = 0.$$

Šis nolīdzinājums jāatrisina ar vairākkārtīgiem mēģinājumiem un interpolāciju; piemēram, malējām meridiānam, t. i. pie  $\lambda = \frac{\pi}{2}$  jeb  $90^\circ$  vislielākais leņķis  $\epsilon = 7^\circ 56'$  ir uz platuma  $\pm 41^\circ 32'$ . Kad meridiāna gaļums nav liels, tad (305) formulas atvasinātai būs vienkāršāka izteiksme:

$$\operatorname{sn} \varphi = \pm \frac{1}{\sqrt{3}},$$

no kuļienes  $\varphi = \pm 35^\circ 16'$ .

Tā tad uz abu pusložu projekcijām ir divi līknes, gar kuļām leņķim  $\epsilon$  ir vislielākā nozīme. Šīs līknes krusto vidējo meridiānu zem platumiem  $\pm 35^\circ 16'$  un velkās gandrīz pa paralēlēm, pamazām noliecoties uz polu pusi; pat uz malējā meridiāna, kur gaļums  $\pm 90^\circ$  šīs līknes sasniedz tikai platumu  $\pm 41^\circ 32'$ .

Iepriekšējās tabulas skaitļi un (305) formula rāda, ka meridiānu un paralēļu nestateniskums aug uz abām pusēm no vidējā meridiāna un pie tam no sākuma ļoti lēni; šis apstāklis ir visai labvēlīgs pa paralēlēm izstieptu zemju attēlošanai.

Mērogs. — Mērogs  $m_m$  pa meridiānu ir projekcijas bezgalīgi maza loka  $MM_1$  attiecība pret sfēras bezgalīgi mazu atbilstošu loku  $R d\varphi$ ; tāpēc

$$m_m = \frac{MM_1}{R d\varphi} = \frac{KM \operatorname{sec} \epsilon}{R d\varphi}.$$

Atvietojot te  $KM$  ar augšā izvesto lielumu ( $g$ ) dabonam:

$$m_m = (\operatorname{cosec}^2 \varphi - \operatorname{cotg}^2 \varphi \operatorname{cos} \delta) \operatorname{sec} \epsilon.$$

Ievietojam te  $\cos \delta$  vietā  $1 - 2 \operatorname{sn}^2 \frac{\delta}{2}$ ; iznāk:

$$m_m = \left(1 + 2 \operatorname{cotg}^2 \varphi \operatorname{sn}^2 \frac{\delta}{2}\right) \operatorname{sec} \varepsilon. \quad (306)$$

Uz videjā meridiāna  $\delta = 0$ ,  $\varepsilon = 0$  un  $m_m = 1$ ; uz pola  $\operatorname{cotg} \varphi = 0$ ,  $\varepsilon = 0$  un  $m_m = 1$ ; tā tad mērogs pa meridiānu vienāds ar galveno tikai gar vidējo meridiānu un polos; projekcijas visos citos punktos  $m_m > 1$ . Kad  $\varphi = 0^\circ$ , tad (306) formulas otrais loceklis iekavās pieņem nenoteiktu izteiksmi; patiesā nozīme ir  $\operatorname{cotg} \varphi \operatorname{sn} \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2} \lambda$ ; tāpēc uz ekvatora, kur arī  $\varepsilon = 0$ ,  $m_m = 1 + \frac{1}{2} \lambda^2$ . (307)

Sekošā tabulā uzrādīti dažādiem punktiem mērogi  $m_m$  vienkāršā polikoniskā projekcijā.

$\varphi \backslash \lambda$	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$90^\circ$	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
75	1,000	1,002	1,009	1,020	1,034	1,050	1,068
60	1,000	1,009	1,034	1,074	1,129	1,195	1,270
45	1,000	1,017	1,068	1,151	1,264	1,404	1,571
30	1,000	1,026	1,102	1,229	1,404	1,626	1,894
15	1,000	1,032	1,128	1,287	1,509	1,794	2,141
0	1,000	1,034	1,137	1,308	1,548	1,857	2,234

No projekcijas konstruēšanas paņēmiena pats par sevi saprotams, ka mērogi pa paralēlēm  $m_p$  visur vienādi ar galveno, t. i.,

$$m_p = 1. \quad (308)$$

Platību mērogs  $p$  pēc (49) formulas ir:

$$p = m_m m_p \cos \varepsilon = 1 + 2 \operatorname{cotg}^2 \varphi \operatorname{sn}^2 \frac{\delta}{2}. \quad (309)$$

Zemāk dota laukumu mērogu tabula dažādiem punktiem vienkāršā polikoniskā projekcijā.

$\varphi \backslash \lambda$	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$90^\circ$	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
75	1,000	1,002	1,009	1,020	1,034	1,050	1,068
60	1,000	1,009	1,034	1,074	1,128	1,192	1,264
45	1,000	1,017	1,068	1,150	1,262	1,399	1,556
30	1,000	1,026	1,102	1,228	1,402	1,620	1,879
15	1,000	1,032	1,128	1,287	1,508	1,792	2,135
0	1,000	1,034	1,137	1,308	1,548	1,857	2,234

No abi pēdējām tabulām redzams, ka uz katra atsevišķa meridiāna (pie viena un tā paša garuma  $\lambda$ ) mērogī  $m_m$  un  $m_p$  ir vislielāki uz ekvatora; no šejienes sākot tie nepārtraukti mazinājas virzienā uz poliem un tas notiek neraugoties uz to, ka leņķis  $\epsilon$  līdz zināmiem platumiem aug.

Tā kā vienkāršā polikoniskā projekcijā leņķi starp meridiāniem un paralelēm ļoti maz atšķiras no taisnā leņķa un mērogī pa visām paralelēm ir vienādi ar galveno, tad uz projekcijas indikatrixu pusasis gandrīz sakrīt ar meridiāniem (lielā pusass) un paralelēm (mazā pusass); bez tam mazā pusass  $b$  visur tikai nedaudz atšķiras no 1. Ja pēc I. nodaļā dotām formulām (38) — (44) aprēķināt indikatrixas pusasis  $a$  un  $b$  projekcijas dažādiem punktiem, tad izrādās, ka pusasis  $a$  ir vislielākas uz ekvatora; sākot no šejienes uz katra meridiāna tās nepārtraukti mazinājas līdz poliem, kur  $a = 1$ ; pusasis  $b$ , turpretim, uz ekvatora  $= 1$ ; sākot no šejienes uz katra meridiāna tās mazinājas, sasniedz vismazāko lielumu un pēc tam aug, pārvēršoties uz poliem atkal par 1. Visu laiku gan pusass  $b$  maz atšķiras no 1; tā, piemēram, uz meridiāna, noteikta ar garumu  $90^\circ$ , kur šī starpība vislielākā visai pussferai, vismazākā  $b$  nozīme ir  $0,984$  uz platumiem  $\pm 47^\circ 28'$ .

Lai vienkāršās polikoniskās projekcijas teorija būtu pilnīga, aprēķināsim vēl leņķu vislielākās alterācijas  $2\omega$  pēc (32) formulas, pieņemot  $\Theta = 90^\circ + \epsilon$ ; dabūtā tabula ir sekoša:

$\varphi \backslash \lambda$	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$90^\circ$	$0^\circ 0'$	$0^\circ 0'$	$0^\circ 0'$	$0^\circ 0'$	$0^\circ 0'$	$0^\circ 0'$	$0^\circ 0'$
$75^\circ$	$0 0$	$0 08$	$0 31$	$1 09$	$2 01$	$3 04$	$4 18$
$60^\circ$	$0 0$	$0 29$	$1 55$	$4 12$	$7 13$	$10 50$	$14 51$
$45^\circ$	$0 0$	$0 58$	$3 46$	$8 09$	$13 43$	$20 03$	$26 52$
$30^\circ$	$0 0$	$1 27$	$5 36$	$11 52$	$19 33$	$28 01$	$36 43$
$15^\circ$	$0 0$	$1 48$	$6 53$	$14 26$	$23 29$	$38 09$	$42 49$
$0$	$0 0$	$1 56$	$7 21$	$15 20$	$24 51$	$34 54$	$44 51$

Arī no šīs tabulas, tāpat kā no iepriekšējām, redzams, ka vienkāršā polikoniskā projekcija visai noderīga valstīm, kuŗas stiepjas meridionālā virzienā. Ar attālināšanos no vidējā meridiāna alterācijas no sākuma aug lēnām, tā kā līdz garumiem  $5^\circ$ — $10^\circ$  uz rītiem un vakariem no tā, alterācijas gandrīz nepārsniedz pie konstruēšanas neizbēgamās kļūdas.

Nav zināms, kas izgudrojis vienkāršo polikonisko projekciju. Pirmo reizi tā sīkaki izpētīta un lietota Amerikas Savienotās Valstīs,

kāpēc to bieži sauc par amerikāņu projekciju. Šo projekciju visai sīki aprakstījis un 1859. g. sastādījis tabulas tīkla konstruēšanai Sav. Valšņu krastu un ģeodēziskās uzmērīšanas valdes (The Coast and Geodetic Survey) kādreizējais priekšnieks Hilgerds (Julius Erasmus Hilgerd, 1825—1891), būdams vēl par novērotāju, jeb — pēc amerikāņu terminoloģijas „par mērnīku asistentu“.

Savienoto Valšņu teritorija ir šaurāka meridionālā virzienā un tāpēc liekās, ka tikko apskatītā projekcija amerikāņiem nav visizdevīgākā; ikuŗa iepriekšējā V. nodaļā apskatītā koniskā projekcija dotu iespēju attēlot šo valsti ar mazākām alterācijām. Šai savādībai dažās valstīs militārās aprindās atraduši visai divainu izskaidrojumu. Amerikāņiem viņu projekciju izvēlē izšķirošais esot bijis patriotiskais viedoklis; koniskas projekcijas elementi atkarājas no valsts malējo paralēļu izvēles un katrs teritorijas pieaugums uz ziemeļiem un dienvidiem izsauc pilnīgi jaunu kartografiskā tīkla aplēsi un sastādīšanu; polikoniskā projekcija, turpretim, nav saistīta ar tādu radikālu pārstrādāšanu: teritorijas paplašināšana uz ziemeļiem un dienvidiem izsauks vienīgi vairāku jaunu paralēļu pievienošanu, pavisam neaizskarot agrāk izstrādātās kartes. Uz Amerikas materiķa Savienotās valstīs no austrumiem un rietumiem norobežo okeāni un te teritorijas paplašināšanu kavē pati daba; turpretim, paplašināšanai uz ziemeļiem un dienvidiem nav, tā sacīt, fizisku kavēķļu un šī valsts var plēsties meridionālā virzienā tādos apmēros, kādos nevienā citā pasaules daļā tas nav iespējams.

**43. Taisnleņķu polikoniskā projekcija.** — Tikko apskatītā vienkāršā polikoniskā projekcijā leņķi starp meridiāniem un paralēlēm maz atšķiras no taisniem; ir iespējams tomēr konstruēt polikonisku projekciju, kuŗai šie leņķi ir pilnīgi taisni pa visu projekciju; tādu projekciju sauc par taisnleņķu jeb ortogonālu polikonisku projekciju (rectangular polyconic projection). Paralleles tai novelķ tāpat, kā vienkāršai polikoniskai projekcijai, bet meridiānu konstruēšana ir citāda — meridiāni ir liknes, kas novilkta tā, lai tās krustotu visas paralēles zem taisniem leņķiem.

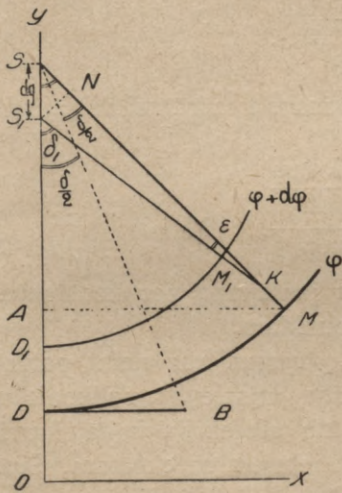
Pieņemsim, ka (84. zīm.) OX ir uz projekcijas ekvātors un OY vidējais meridiāns un ka ar šim līnijām sakrīt koordinātu asis x un y; domāsim, ka riņķa loki DM un  $D_1M_1$  ir divi bezgalīgi tuvas paralēles ar platumiem  $\varphi$  un  $\varphi + d\varphi$ . Uz tām ņemsim divi punktus M un  $M_1$  tā, lai tie būtu uz viena un tā paša meridiāna, noteikta ar garumu  $\lambda$ , skaitot pēdējo no vidējā meridiāna OS. Tā kā loki DM un  $D_1M_1$ , sākot no vidējā meridiāna, viens no otra pamazām attālinājas, tad meridiāna elements  $MM_1$ , kas saskaņā ar projekcijai uzstādītām prasībām,

krusto paralēles zem taisniem leņķiem, būs piegriests vidējam meridiānam ar savu ieliekumu. Šim meridiāna loka elementam  $MM_1$  punktus  $M$  un  $M_1$  novilksim pieskares  $MS$  un  $M_1S_1$  un turpināsim tās līdz krustojumam ar vidējo meridiānu punktos  $S$  un  $S_1$ . Saskaņā ar to pašu projekcijai uzstādīto prasību  $MS$  un  $M_1S_1$  būs paralēļu loku  $DM$  un  $D_1M_1$  radiji. Pieņemsim, ka  $K$  ir pieskaru  $MS$  un  $M_1S_1$  krustšanās punkts. Leņķus  $MSO$  un  $M_1S_1O$ , ko pieskares  $MS$  un  $M_1S_1$  veido ar vidējo meridiānu, sauksim par  $\delta$  un  $\delta_1$ , bet leņķi  $S_1KS$  — par  $\epsilon$ . No trīsstūra  $SKS_1$ :

$$\frac{SS_1}{SK} = \frac{\text{sn } \epsilon}{\text{sn } \delta_1} \dots (a)$$

Nogrieznis  $SS_1$  ir attāluma  $OS$  absolūtais pieaugums un to var atvietot ar (301) izteiksmi; gaņums  $SK$ , ar noteiktību līdz otrās šķiras maziem lielumiem, ir vienāds ar paralēles loka  $DM$  radiju  $SM$  un tā aplēsei jau dota (296) formula; leņķis  $\epsilon$  ir leņķa  $\delta$  pieaugums, vienlīdzīgs starpībai  $\delta_1 - \delta$ , tā tad  $\text{sn } \epsilon = \epsilon = d\delta$ ; bez tam, tāpat, ar noteiktību līdz otrās šķiras lielumiem, var pieņemt  $\text{sn } \delta_1 = \text{sn } \delta$ . Ar visām šīm substitūcijām attiecība (a) iznāk:

$$\frac{d\delta}{\text{sn } \delta} = \cotg \varphi d\varphi.$$



84. zīm.

Šis izteiksmes integrācija dod:

$$\ln \text{tg } \frac{\delta}{2} = \ln \text{sn } \varphi + \ln C,$$

jeb 
$$\text{tg } \frac{\delta}{2} = C \text{sn } \varphi \dots (A).$$

Pie integrēšanas ienākušās konstantes  $C$  noteikšanai izejam no tā, ka kaut-kādas paralēles loka gaņums uz projekcijas ir vienāds ar atbilstošās paralēles loka gaņumu uz sfēras virsas. Pieņemsim, ka tā ir paralēle  $DM$ , ko noteic platums  $\varphi$ . No  $M$  nolaidīsim stateni  $MA$  uz vidējo meridiānu  $OY$ ; no dabūtā taisnleņķa trīsstūra  $SAM$  rakstam:

$$MA = SM \cdot \text{sn } \delta = R \cotg \varphi \frac{2 \text{tg } \frac{\delta}{2}}{1 + \text{tg}^2 \frac{\delta}{2}} \dots (b)$$

Atvietojam  $\operatorname{tg} \frac{\delta}{2}$  ar izteiksmi (A); tad

$$MA = \frac{2RC \cos \varphi}{1 + C^2 \operatorname{sn}^2 \varphi} \dots (c)$$

Ja paralēles loks uz projekcijas patur savu patieso gaļumu, tad leņķi  $\delta$  var noteikt pēc vienkāršās polikoniskās projekcijas (302) formulas; tāpēc (b) vienādojumu vēl var izteikt sekoši:

$$MA = R \operatorname{cotg} \varphi \cdot \operatorname{sn} (\lambda \operatorname{sn} \varphi) \dots (d)$$

No (c) un (d) izteikmēm:

$$\frac{2C}{1 + C^2 \operatorname{sn}^2 \varphi} = \frac{\operatorname{sn} (\lambda \operatorname{sn} \varphi)}{\operatorname{sn} \varphi}$$

No šejienes konstantes C aplēsei dabonam kvadrātnolidzinājumu ar saknēm:

$$C_1 = \frac{\operatorname{cotg} \frac{\lambda \operatorname{sn} \varphi}{2}}{\operatorname{sn} \varphi} \quad \text{un} \quad C_2 = \frac{\operatorname{tg} \frac{\lambda \operatorname{sn} \varphi}{2}}{\operatorname{sn} \varphi} \dots (B)$$

(A) un (B) formulas pilnīgi atrisina jautājumu par konstantes C un leņķa  $\delta$  aplēsi projekcijas iekšam punktam.

Paralēli, uz kuļas vēlās paturēt isto gaļumu, var ņemt patvaļīgi un atkarībā no tā dabonam katreiz citu taisnleņķu polikonisku projekciju; visvairāk lietotā un pilnīgi izpētītā projekcija ir tā, kuļai patiesais gaļums resp. galvenais mērogs tiek ieturēts uz ekvatora. Šinī gadījumā  $\varphi = 0^\circ$  un (B) formulas dod:  $C_1 = \infty$ , t. i. lielumu, kas neatbilst projekcijas prasībām un  $C_2 = \frac{1}{2} \lambda$ , kas ir te iznākušās nenoteiktās izteiksmes patiesā nozīme. Šo sakni ieliekām (A) formulā; tad leņķa  $\delta$  lieluma noteikšanai projekcijas jebkuļā punktā dabonam:

$$\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2} \lambda \operatorname{sn} \varphi. \quad (310)$$

Dabūtā formula ir komplicētāka par vienkāršās polikoniskās projekcijas attiecīgo (302) formulu.

Tur leņķis  $\delta$  ir proporcionāls gaļumam  $\lambda$ , kāpēc katrai paralēlei tas jāaprēķina tikai vienreiz un pēc tam dabūtais lielums jāņem vairākkārtīgi. Turpretim tikko dabūtā (310) formulā tādas proporcionalitātes nav un leņķi  $\delta$  ir jāaprēķina visiem meridiānu un paralēļu krustojumu punktiem; pie grafiskās konstruēšanas tomēr vienkāršāki rīkoties pēc (310) formulas. Punktā D novelk pieskāri jau konstruētai paralēlei DM un pa to atliek nogriezni DB, vienlīdzīgu atbilstošās paralēles loka pusei, t. i.  $DB = \frac{1}{2} R \lambda \cos \varphi$ ; dabūto punktu savieno ar tās pašas paralēles centru S. No taisnleņķa trīsstūra DBS:

$$\operatorname{tg} \text{BSD} = \frac{\text{DB}}{\text{DS}} = \frac{\frac{1}{2} R \lambda \cos \varphi}{R \cotg \varphi} = \frac{1}{2} \lambda \operatorname{sn} \varphi = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta;$$

$$\text{tamdēļ } \sphericalangle \text{BSD} = \frac{1}{2} \delta = \frac{1}{2} \text{MSD}.$$

Tā tad, lai konstruētu meridiānu atsevišķus punktus uz jau novilkām paralēlēm, caur paralēles un vidēja meridiāna krustošanās punktu D novelk taisni DB paralēli ekvātoram OX un atliek pa to attiecīgās paralēles loka patiesā gaŗuma pusi, ņemot šos gaŗumus no gatavām tabulām. Katru tā dabūto punktu (piemēram B) pieņem par centru un ar rādiusu BD krusto paralēles loku; dabūtais punkts M (BM = BD) dod attiecīgā meridiāna un attiecīgās paralēles krustošanās punktu.

Šo asprātīgo un eleganto konstruējumu izgudrojis angļu uzmerīšanas pārvaldes aprēķinātājs Ofarels (James O'Farrel). Šī konstrukcija ir ļoti vienkārša un ērta; turpretim lielā mērogā, kad pašu paralēļu novilkšana ar ļoti lieliem rādijiem ir apgrūtināša, papriekšu labāki aplēst taisnleņķu koordinātas atsevišķiem meridiānu un paralēļu krustojumu punktiem.

Pieņemot ekvātoru un vidējo meridiānu par x un y asīm no 84. zīmējuma dabonam:

$$\text{OA} = y = \text{OD} + \text{DS} - \text{AS} = R\varphi + R \cotg \varphi - R \cotg \varphi \cos \delta,$$

$$\text{AM} = x = \text{SM} \cdot \operatorname{sn} \delta = R \cotg \varphi \operatorname{sn} \delta.$$

Ņemot vērā goniometrijas formulas

$$\operatorname{sn} \delta = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\delta}{2}}, \quad \cos \delta = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\delta}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\delta}{2}} \dots (e)$$

un (310) izteiksmi, dabonam:

$$x = \frac{4R\lambda \cos \varphi}{4 + \lambda^2 \operatorname{sn}^2 \varphi}, \quad y = R\varphi + \frac{R\lambda^2 \operatorname{sn} 2\varphi}{4 + \lambda^2 \operatorname{sn}^2 \varphi}. \quad (311)$$

Te R ir zemes sfēras rādijs galvenā mērogā,  $\varphi$  un  $\lambda$  dotā punkta platums un gaŗums.

85. zīmējums attēlo visu zemes virsu taisnleņķu polikoniskā projekcijā ar novilktiem meridiāniem un paralēlēm ik pa  $15^\circ$  gaŗumā un platumā.

Mērogs. — Mēroga pa meridiāniem noteikšanai ņemsim meridiāna loka elementu  $\text{MM}_1 = ds$  uz projekcijas (84. zīm.) un atbilstošo sfēras meridiāna loka elementu  $R d\varphi$ ; šo divi lielumu attiecība

$$m_m = \frac{ds}{R d\varphi} \dots (f)$$

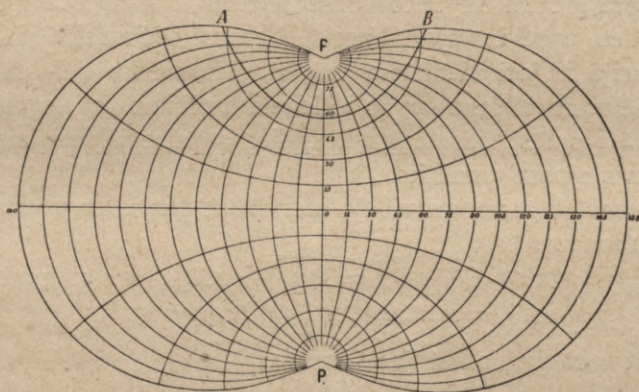
Pēc 84. zīm. ar noteiktību līdz otrās šķiras maziem lielumiem var pieņemt

$MM_1 = ds = MS - M_1S = MS - M_1S_1 - NS = \rho - \rho_1 - SS_1 \cos \delta =$   
 $= -d\rho + dq \cos \delta$ ; atvietojam te  $d\rho$  un  $dq$  ar (299) un (301) form.  
 nozīmēm; tad

$$ds = R(1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \delta) \operatorname{cosec}^2 \varphi d\varphi.$$

Nemam (e) formulas kosinusu, ievietojam tur pusleņķa tangensa nozīmi no (310) formulas un rezultātu ieliekam tikko dabūtā formulā; tad iznāk

$$ds = R \cdot \frac{4 + \lambda^2 (1 + \cos^2 \varphi)}{4 + \lambda^2 \operatorname{sn}^2 \varphi} d\varphi \dots (g).$$



85. zīm.

Šo meridiāna loka elementa diferenciālu ieliek (f) formulā; tad mēroga pa meridiānu aplēsei taisnleņķu polikoniskai projekcijai iznāk:

$$m_m = \frac{4 + \lambda^2 (1 + \cos^2 \varphi)}{4 + \lambda^2 \operatorname{sn}^2 \varphi},$$

jeb

$$m_m = 1 + \frac{2 \cos^2 \varphi}{\frac{4}{\lambda^2} + \operatorname{sn}^2 \varphi} \quad (312)$$

Pēdējā formula rāda, ka uz vidējā meridiāna, kur  $\lambda = 0^0$ , un uz poliem, kur  $\varphi = \pm 90^0$ , mērogs  $m_m = 1$ ; visos citos punktos  $m_m > 1$ . Uz vienas un tās pašas paraleles mērogs  $m_m$  aug ar attālināšanos no vidējā meridiāna, bet uz viena un tā paša meridiāna tas aug, sākot no pola līdz ekvātoram, kur mērogam vislielākā nozīme, jo pie  $\varphi = 0^0$ ,  $m = 1 + \frac{1}{2} \lambda^2$ . Salīdzinot šos rezultātus ar tā paša mēroga  $m_m$  nozīmēm vienkāršā polikoniskā projekcijā redzam, ka uz ekvā-



Tā kā taisnleņķu polikoniskai projekcijai meridiāni un paraleles krustojas zem taisniem leņķiem, tad platību mērogu dabonam kā meridiānu un paralēļu mērogu reizinājumu, t. i.,  $p = m_m \cdot m_p$ ; tāpēc no (312) un (313) formulām:

$$p = \frac{16 + 4\lambda^2(1 + \cos^2\varphi)}{(4 + \lambda^2 \operatorname{sn}^2\varphi)^2}. \quad (314)$$

Uz vidējā meridiāna ( $\lambda = 0^0$ ) pēc šīs formulas  $p = 1$ , ko varēja paredzēt jau iepriekš, jo uz vidējā meridiāna abi mērogi ir vienlīdzīgi galvenam.

Uz ekvatora, kur  $\varphi = 0^0$ ,  $p = 1 + \frac{1}{2}\lambda^2$ , tā tad lielāks par 1; uz poliem, kur  $\varphi = \pm 90^0$ ,  $p = 4 : (4 + \lambda^2)$  un mazāks par 1. No tā secinām, ka uz katra meridiāna ir punkts, kur  $p = 1$  un platības nemainās. Šāda punkta platuma noteikšanai uz ikuŗa meridiāna, t. i. pēc dotā gaŗuma  $\lambda$ , no (314) formulas dabonam sekoŗu bikvadrātnolidzinājumu:

$$\lambda^2 \operatorname{sn}^4\varphi + 12 \operatorname{sn}^2\varphi - 8 = 0. \quad (315)$$

Šim nolidzinājumam ir divi lietīŗķas un divi ŗķietamas saknes; lietīŗķās saknes ir:

$$\operatorname{sn}\varphi = \frac{\pm \sqrt{2(\sqrt{9 + 2\lambda^2} - 3)}}{\lambda}. \quad (316)$$

Ievietojot te pēc kārtas dažādus gaŗumus, dabūsim atbilstoŗus platumus; piemēram:

$$\text{pie } \lambda = 0^0 \dots \dots \dots \varphi = \pm 54^0 44'$$

$$\text{„ } \lambda = \frac{\pi}{2} \text{ jeb } 90^0 \dots \dots \varphi = \pm 50 \ 25$$

$$\text{„ } \lambda = \pi \text{ jeb } 180^0 \dots \dots \varphi = \pm 43 \ 46.$$

Punktu geometriskās vietas, kuŗām  $p = 1$ , uz projekcijas dod divi liknes, kas pārdala katras (ziemeļ- un dienvid-) puslodes projekciju divi daļās: tām projekcijas daļām, kas uz ekvatora pusi, platības lielākas par atbilstoŗam platībām uz sfēras; tām daļām, turpretīm, kas tuvāki poliem — otrādi; 85. zīmējumā tāda likne AB parādīta ziemeļpuslodei; krustojot vidējo meridiānu uz platuma  $54^044'$  tā iet uz rītiem un vakariem, lēnām virzās uz dienvidiem un sastop diametrāli-pretējo meridiānu ( $\lambda = 180^0$ ) uz platuma  $43^046'$ .

Pēc (315) nol. var atrisināt arī pretējo uzdevumu: noteikt gaŗumus punktiem, kuŗos vienāddlielo platību likne krusto dotās paraleles; tad pēc dotā platuma  $\varphi$  jāaprēķina  $\lambda$  no nolidzinājuma:

$$\lambda = \frac{\pm 2\sqrt{2 - 3 \operatorname{sn}^2\varphi}}{\operatorname{sn}^2\varphi}. \quad (317)$$

Piemēram, vienādlielo platību līkne krusto paralēli ar platumu  $45^\circ$  punktā, kuŗu noteic gaŗums  $\lambda = \pm \sqrt{8}$  jeb  $\lambda = \pm 162^\circ 03'$ .

Sekojošā tabulā dotas mēroga p skaitliskās nozīmes dažādiem punktiem taisnleņķu polikoniskā projekcijā.

$\varphi \backslash \lambda$	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
$90^\circ$	1.000	0.983	0.936	0.866	0.785	0.700	0.618	0.477	0.369	0.288
$75^\circ$	1.000	0.986	0.948	0.890	0.820	0.744	0.668	0.530	0.420	0.333
$60^\circ$	1.000	0.996	0.982	0.958	0.924	0.880	0.828	0.714	0.602	0.503
$45^\circ$	1.000	1.008	1.031	1.061	1.091	1.114	1.125	1.103	1.036	0.942
$30^\circ$	1.000	1.021	1.083	1.177	1.296	1.428	1.561	1.757	1.960	2.034
$15^\circ$	1.000	1.031	1.122	1.272	1.475	1.727	2.022	2.707	3.470	4.249
$0^\circ$	1.000	1.034	1.137	1.308	1.548	1.857	2.234	3.193	4.427	5.935

Pētījums. — Taisnleņķu polikoniskā projekcijā meridiāni attēlojas kā transcendentas līknes un to dažas īpašības pelna ievērtību. Šo līkņu likums, gaŗums un no tām norobežotie laukumi dabū, salīdzinot, vienkāršu un elegantu izteiksmi.

Jebkuŗas līknes līkuma rādiju  $K$  noteic formula:

$$K = \frac{ds}{d\delta},$$

kur  $ds$  ir līknes bezgalīgi mazs loks un  $d\delta$  pieaugums leņķim, kas ir starp līknes pieskāri un kaut-kādu konstantu taisni. Šinī gadījumā loka elementu  $ds$  noteic ( $g$ ) izteiksme, bet leņķis  $\delta$  ir jau zināmais leņķis MSO (84. zīm.), t. i., leņķis starp meridiāna elementa  $MM_1$  pieskāri MS un vidējo meridiānu OS; tamdēļ

$$K = R \frac{4 + \lambda^2 (1 + \cos^2 \varphi)}{4 + \lambda^2 \sin^2 \varphi} \frac{d\varphi}{d\delta}.$$

Uzskatot gaŗumu par konstantu diferencējam (310) formulu,  $\cos^2 \frac{1}{2} \delta$  atvietojam ar tā (313) formulā dabūto nozīmi un iznākumu ieliekam  $K$  izteiksmē; tad dabūjam taisnleņķu polikoniskai projekcijai meridiāna līkuma rādija formulu ikkuŗam ar platumu  $\varphi$  un gaŗumu  $\lambda$  noteiktam punktam:

$$K = R \frac{4 + \lambda^2 (1 + \cos^2 \varphi)}{4 \lambda \cos \varphi}. \quad (318)$$

Vidējam meridiānam, kuŗam  $\lambda = 0^\circ$ , šī formula dod  $K = \infty$ ; tas nozīmē, ka vidējais meridiāns attēlojas kā taisna līnija. Visi pārējie meridiāni ir līknes ar mainīgiem līkuma rādijiem; uz ekvatora, kur  $\varphi = 0^\circ$ , katra meridiāna līkuma rādijs ir  $R(2 + \lambda^2) : 2\lambda$ . Uz poliem, kur  $\varphi = 90^\circ$ , visu meridiānu līkuma rādiži ir bezgalīgi, t. i., pie abiem

poliēm uz projekcijas meridiāni saietas kā taisnes vienā punktā, veidojot ar vidējo meridiānu dažādus leņķus; pēdējos noteic no nol.:  $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta = \frac{1}{2} \lambda$ , kas iznāk no (310) form., ieliekot tur  $\varphi = 90^\circ$ . Piemēram, ar gaļumiem  $90^\circ$  un  $180^\circ$  ( $\lambda = \frac{\pi}{2}$  un  $\pi$ ) noteiktie meridiāni krusto vidējo meridiānu zem leņķiem  $76^\circ 18'$  un  $115^\circ 02'$ .

Pēc (318) formulas aplēstie skaitliskie lielumi meridiānu līkumu radijiem taisnleņķu polikoniskās projekcijas dažādiem punktiem, pie  $R = 1$ , doti sekošā tabulā:

$\varphi \backslash \lambda$	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
$90^\circ$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
75	$\infty$	15.028	7.919	5.729	4.769	4.301	4.079	4.003	4.174	4.468
60	$\infty$	7.803	4.147	3.037	2.564	2.291	2.255	2.264	2.400	2.600
35	$\infty$	5.540	2.979	2.217	1.906	1.775	1.733	1.786	1.929	2.116
30	$\infty$	4.543	2.470	1.867	1.632	1.543	1.529	1.573	1.764	1.955
15	$\infty$	4.086	2.239	1.711	1.513	1.446	1.445	1.542	1.705	1.901
0	$\infty$	3.951	2.172	1.666	1.478	1.418	1.422	1.525	1.691	1.889

No šīs tabulas redzams, ka katram meridiānam vismazākais līkuma radijs (jeb vislielākais līkums) ir uz ekvatora; uz ziemeļiem un dienvidiem no tā meridiāni iztaisnojas pamazām un pie poliēm pieiet kā taisnas līnijas. Turpretim uz vienas un tās pašas paralēles meridiāna līkuma radiji, sākot no bezgalības uz vidējā meridiāna, papriekšu pakāpeniski mazinājas, sasniedz pie noteikta gaļuma vismazāko lielumu un pēc tam sāk pieaugt. Tāpēc uz katras paralēles ir punkts, kurā meridiāna līkuma radijs ir vismazākais. Lai aprēķinātu tāda punkta gaļumu, pielīdzināsim nullei (318) izteiksmes pirmo atvasināto pēc mainīgā  $\lambda$ ; tas dod formulu:

$$\lambda = \frac{+2}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi}}. \quad (319)$$

Ieliekot šo  $\lambda$  nozīmi (318) izteiksmē dabūsim sekošu formulu meridiāna vismazākā līkuma rādiusa  $K_0$  aplēsei uz paralēles, noteiktas ar ģeogrāfisko platumu  $\varphi$ :

$$K_0 = R \sec \varphi \sqrt{1 + \cos^2 \varphi}. \quad (320)$$

Dažādām ik pa  $15^\circ$  ar platumiem  $\varphi$  noteiktām paralēlēm nākošā tabulā doti gaļumi  $\lambda$  punktiem, kur meridiāna līkuma rādiusi ir vismazākie; doti arī paši līkuma rādiusi šinīs punktos. Pirmie resp. gaļumi  $\lambda$  aplēsti pēc (319) formulas, bet otrie resp. līkuma rādiusi pēc (320) formulas, pieņemot  $R = 1$ .

$\varphi$	$\lambda$	$K_0$
90°	114° 35'	$\infty$
75	111 6	3.991
60	102 30	2.236
45	93 34	1.732
30	86 37	1.528
15	82 25	1.439
0	81 2	1.414

Lai noteiktu meridiāna loka gařumu uz projekcijas, ir jāintegrē loka diferenciālais nol. (g), skaitot loka sākumu no ekvatora.

$$s = R \int_0^{\varphi} \frac{4 + \lambda^2 (1 + \cos^2 \varphi)}{4 + \lambda^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = R \int_0^{\varphi} \frac{8 + 2\lambda^2 - (4 + \lambda^2 \sin^2 \varphi)}{4 + \lambda^2 \sin^2 \varphi} d\varphi =$$

$$= R \sqrt{4 + \lambda^2} \int_0^{\varphi} \frac{\frac{1}{2} \sqrt{4 + \lambda^2} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}}{1 + (\frac{1}{2} \sqrt{4 + \lambda^2})^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} - R\varphi, \text{ jeb}$$

$$s = R \left[ \sqrt{4 + \lambda^2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{1}{2} \sqrt{4 + \lambda^2} \cdot \operatorname{tg} \varphi \right) - \varphi \right]. \quad (321)$$

Pēc šīs formulas var aprēķināt katra meridiāna gařumu no ekvatora līdz punktam, noteiktam ar platumu  $\varphi$ ;  $\lambda$ , saprotams, noteic to meridiānu, kuŗa gařumu aprēķina. Ja  $\varphi$  vietā ieliksīm  $\frac{\pi}{2}$ , tad dabūsim meridiāna gařumam no ekvatora līdz polam sekošu vienkāršu formulu:

$$s = \frac{1}{2} \pi R (\sqrt{4 + \lambda^2} - 1). \quad (322)$$

Dodot  $\lambda$  dažādas nozīmes var aprēķināt dažādu meridiānu gařumus. Vidējā meridiāna ( $\lambda = 0$ ) gařumam šī formula dod  $s = \frac{1}{2} \pi R$ , kam arī jābūt, jo uz vidējā meridiāna mērogs  $m_m = 1$ ; meridiāniem, noteiktiem ar gařumiem  $\lambda = 90^\circ$  un  $180^\circ$  iznāk:

$$S_{90^\circ} = 1,543 \frac{\pi R}{2} \text{ un } S_{180^\circ} = 2,724 \frac{\pi R}{2}$$

t. i., šie meridiāni uz projekcijas attiecīgi ir vairāk par pusotras reizes un gandrīz trīs reizes gaŗāki par to īstiem gařumiem uz sfēras.

Vel vienkāršāki ir noteikt paralēles loka gařumu uz projekcijas. No 84. zīm. redzam, ka paralēles DM bezgalīgi mazu loku  $ds_1$  var izteikt sekoši:

$$ds_1 = \rho d\delta = R \operatorname{cotg} \varphi d\delta.$$

Diferencēsim (310) formulu, uzskatot platumu  $\varphi$  par konstantu lielumu; tad:

$$d\delta = \operatorname{sn} \varphi \cdot \cos^2 \frac{\delta}{2} \cdot d\lambda = \frac{4 \operatorname{sn} \varphi}{4 + \lambda^2 \operatorname{sn}^2 \varphi} d\lambda$$

un tāpēc

$$ds_1 = 4R \cdot \frac{\cos \varphi d\lambda}{4 + \lambda^2 \operatorname{sn}^2 \varphi} \dots (h)$$

jeb

$$ds_1 = 2R \operatorname{cotg} \varphi \frac{d\left(\frac{\lambda}{2} \operatorname{sn} \varphi\right)}{1 + \left(\frac{\lambda}{2} \operatorname{sn} \varphi\right)^2}.$$

No šejienes pēc diferencēšanas starp robežām 0 un  $\lambda$ :

$$s_1 = 2R \operatorname{cotg} \varphi \operatorname{arctg} \left(\frac{\lambda}{2} \operatorname{sn} \varphi\right). \quad (323)$$

Ekvatora loka garumam, pie  $\varphi = 0$ , iznāk  $s_0^0 = R\lambda$ ; uz pola, pie  $\varphi = 90^\circ$ ,  $s_{90}^0 = 0$ , kā arī jābūt.

Tagad aprēķināsim laukumu uz projekcijas starp vidējo meridiānu un kādu citu meridiānu, kas noteikts ar garumu  $\lambda$ . Tā kā meridiāni ir stateniski pret paralelēm, tad laukuma diferenciāls  $dP$  ir vienlīdzīgs meridiāna un paraleles loku diferenciālu reizinājumam; tāpēc reizinot (g) izteiksmi ar (h) dabūsim:

$$dP = 4R^2 \frac{(4 + \lambda^2 + \lambda^2 \cos^2 \varphi) \cos \varphi}{(4 + \lambda^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)^2} d\varphi d\lambda$$

un

$$P = 4R^2 \int_0^\lambda d\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(4 + 2\lambda^2 - \lambda^2 \operatorname{sn}^2 \varphi) \lambda \cos \varphi}{\lambda (4 + \lambda^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)^2} d\varphi.$$

Izdarīsim sekošu substitūciju:

$$x = \lambda \operatorname{sn} \varphi,$$

$$dx = \lambda \cos \varphi d\varphi,$$

$$\text{tad pie } \varphi = \frac{\pi}{2}, x = \lambda \text{ un}$$

$$P = 4R^2 \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\lambda} \int_0^\lambda \frac{4 + 2\lambda^2 - x^2}{(4 + x^2)^2} dx = 4R^2 \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\lambda} \int_0^\lambda \frac{8 + 2\lambda^2 - (4 + x^2)}{(4 + x^2)^2} dx$$

$$\text{jeb } P = 4R^2 \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\lambda} \left\{ (8 + 2\lambda^2) \int_0^\lambda \frac{dx}{(4 + x^2)^2} - \int_0^\lambda \frac{dx}{4 + x^2} \right\}.$$

Tā kā  $\int \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  un  $\int \frac{dx}{(4+x^2)^2} = \frac{1}{8} \left( \frac{x}{x^2+4} + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)$ ,

tad: 
$$P = R^2 \lambda + 2R^2 \int_0^\lambda \frac{\lambda}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} d \frac{\lambda}{2}.$$

Lai integrētu pēdējo izteiksmi, atcerēsimies, ka vispār:

$$\int \frac{z^2}{1+z^2} dz = \int \left( 1 - \frac{1}{1+z^2} \right) dz = z - \operatorname{arc} \operatorname{tg} z \text{ un}$$

$$\int z \operatorname{arc} \operatorname{tg} z dz = \frac{1}{2} \int \operatorname{arc} \operatorname{tg} z dz^2 = \frac{1}{2} (1+z^2) \operatorname{arc} \operatorname{tg} z - \frac{1}{2} z.$$

Tāpēc

$$P = R^2 \lambda + 2R^2 \left[ \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{4} \lambda^2) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \lambda - \frac{1}{4} \lambda \right]$$

un, beidzot:

$$P = \frac{1}{2} R^2 \lambda + R^2 (1 + \frac{1}{4} \lambda^2) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \lambda. \quad (324)$$

Ja te ieliksīm  $\lambda = 90^\circ$  un  $180^\circ$ , tad laukums P būs — pirmā gadījumā  $1,862 R^2$  un otrā  $= 5,052 R^2$ ; tā kā sfēras virsas atbilstošās daļas ir  $\frac{1}{2} \pi R^2$  un  $\pi R^2$ , t. i.,  $1,571 R^2$  un  $3,142 R^2$ , tad šie apgabali uz projekcijas palielināti, saldizinot ar patiesiem samēriem, apmēram attiecībā 7 : 6 un 8 : 5.

Atliek vēl dot leņķu vislielāko alterāciju  $2\omega$  tabulu. Tā kā meridiāni un paralēles uz apskatāmas projekcijas krustojas zem taisniem leņķiem, tad mērogi  $m_m$  un  $m_p$ , te dos indikātrīsas lielo un mazo pusasis, kāpēc leņķus  $2\omega$  var aprēķināt pēc (29) formulas, ievietojot tanī  $a = m_m$  un  $b = m_p$ . Dosim te tādas aplēses rezultātus projekcijas dažādiem punktiem.

$\varphi \backslash \lambda$	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
$90^\circ$	0° 0'	0° 59'	3° 48'	8° 13'	13° 51'	20° 19'	27° 16'	41° 29'	54° 58'	67° 31'
75	0 0	1 2	4 3	8 43	14 40	21 27	28 40	43 19	57 3	69 16
60	0 0	1 13	4 42	10 5	16 49	24 23	32 19	47 59	62 16	74 41
45	0 0	1 27	5 36	11 54	19 38	28 9	36 54	53 39	68 26	80 58
30	0 0	1 42	6 29	13 39	22 19	31 39	41 2	57 29	73 8	86 14
15	0 0	1 52	7 8	14 54	24 11	34 3	43 52	61 56	77 9	89 35
0	0 0	1 56	7 21	15 21	24 51	34 54	44 51	63 5	78 19	90 44

Uz vienas un tās pašas paralēles leņķu alterācijas aug ar attālināšanos no vidējā meridiāna, bet uz viena un tā paša meridiāna ar attālināšanos no poliēm. Tā tad pa meridiāniem leņķu maksimālās alterācijas ir uz ekvatora.

Gadījumā, kad taisnleņķu polikoniskai projekcijai ir jāaprēķina pēc augšā izvestām formulām dažādi lielumi lielā vairumā, tad mērogu un meridiānu likumu formulas izdevīgāki pārveidot, ievēdot paligleņķi  $\delta$ ; tad formulas (312), (313), (314) un (318) pieņem sekošu veidu:

$$\begin{aligned} m_m &= 1 + 2 \operatorname{sn}^2 \frac{\delta}{2} \cdot \operatorname{cotg}^2 \varphi, \\ m_p &= \cos^2 \frac{\delta}{2}, \\ p &= m_m \cdot m_p, \\ K &= \frac{R m_m}{m_p \lambda \cos \varphi}. \end{aligned} \tag{325}$$

Tāpat projekcijas atsevišķa punktu taisnleņķu koordinātu aprēķināšanai ir parocīgāki (311) formulu vietā ņemt sekošas:

$$\begin{aligned} x &= R \lambda \cos \varphi \cos^2 \frac{\delta}{2}, \\ y &= R \varphi + R \left( \frac{\lambda}{2} \right)^2 \operatorname{sn} 2\varphi \cos^2 \frac{\delta}{2}. \end{aligned} \tag{326}$$

Šīs formulās  $R$  ir sfēras rādius, samazināts projekcijas galvenā mērogā, bet leņķi  $\delta$  ir jāaprēķina pēc (310) formulas. Neskatoties uz to, ka aprēķināšana ir ļoti vienkārša, tos var ņemt arī no sekošās tabulas, kurā tie doti meridiānu un paralēļu dažādiem krustošanās punktiem.

$\varphi \backslash \lambda$	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	120°	150°	180°
90°	0° 0'	14° 55'	29° 20'	42° 53'	55° 16'	66° 25'	76° 18'	92° 39'	105° 15'	115° 02'
75	0 0	14 25	28 23	41 33	53 39	64 36	74 22	90 39	103 19	113 13
60	0 0	12 56	25 33	37 34	48 47	59 5	68 27	84 25	97 10	107 22
45	0 0	10 35	20 59	31 2	40 38	49 40	58 6	73 2	85 35	96 0
30	0 0	7 29	14 55	22 13	29 21	36 15	42 53	55 17	66 25	76 18
15	0 0	3 53	7 45	11 36	15 26	19 14	22 59	30 20	37 26	44 15
0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0

Pastāv uzskats, ka taisnleņķu polikonisko projekciju izgudrojis Lielbritānijas uzmērīšanas valdes priekšnieks Džems (Henry James, 1803—1877); patiesība tomēr ir tā, ka šo projekciju izgudrojis un izpētījis tanī pašā laikā pie Uzmērīšanas valdes sastāvotais pazīstamais angļu ģeodēzists Klarks.

Pēc attēla īpašībām apskatītās vienkāršā un taisnleņķu polikoniskās projekcijas jāpieskaita pie patvaļīgām projekcijām. Pie šī paša paralēļu konstruēšanas paņēmiena meridiānus var novilkt tā, lai uz projekcijas

iznāktu vai nu bezgalīgi mazo daļu līdzība (vienādleņķu polikoniskā projekcija), jeb arī tā, lai iznāktu laukumu vienādība (vienādliela polikoniskā projekcija). Izrādās tomēr, ka šādas projekcijas maz noderīgas, jo tām iznāk ļoti lielas mērogu alterācijas.

Polikonisko projekciju vispārīgā teorija dota 174. lappuses biezā, 1919. g. Vašingtonā iznākušā grāmatā: Oscar S. Adams. General theory of polyconic projections (Special publikation Nr. 57, Department of Commerce) un grāmatā L. Driencourt et J. Laborde, Traité des projections des cartes géographiques a l'usage des cartographes et des géodésiens; premier fascicule, Paris. 1932, 155—173 lappuses.

---



konstantais lielums, kuŗu aprēķina pēc (337) formulas jeb sevišķiem noteikumiem.

Taisni  $PP_1$  ņemsim par  $y$  asi un  $PP_1$  vidus punktā  $O$  uzstādīto stateni  $OC$  par  $x$  asi. Ja kaut-kāds meridiāns  $PAP_1$ , būdams, saskaņā ar Lagranža pieņemto noteikumu, riņķa loks, veido ar videjo meridiānu  $PP_1$  pie pola  $P$  leņķi  $\alpha\lambda$ , tad tā centru  $S$  dabonam konstruējot leņķi  $OPS = 90^\circ - \alpha\lambda$ ; taisne  $PS$  krustojoties ar  $x$  asi dos punktu  $S$ . Tādā pašā ceļā dabū visus citus meridiānus, noteiktus ar gaŗumiem  $2\alpha\lambda, 3\alpha\lambda \dots$ ; tie visi būs riņķi ar centriem uz  $x$  ass. Kad  $\angle OPS = 0^\circ$ , tad  $90^\circ - \alpha\lambda = 0^\circ$  un ar gaŗumu  $\lambda = 90^\circ : \alpha$  noteiktais meridiāns attēlosies kā riņķis  $PCP_1$  ar rādiusu  $= k$  un centru  $O$ , koordinātu sākumā.

Meridiānu nolīdzinājums. — Ar gaŗumu  $\lambda$  noteiktā meridiāna  $PAP_1$  rādiusu  $SP$  nosauksim par  $\rho_1$  un centra — punkta  $S$  koordinātas par  $x_1, y_1$ . No taisnleņķa trisstūra  $SOP$ , kuŗā  $OP = k$ ,  $SO = x_1$  un  $SP = \rho_1$  iznāk:

$$x_1 = -k \cotg \alpha\lambda; y_1 = 0; \rho_1 = k \operatorname{cosec} \alpha\lambda. \quad (327)$$

Šo lielumu pietiek, lai sastādītu riņķa nolīdzinājumu, kas pie tam arī būs ar gaŗumu  $\lambda$  noteiktā projekcijas meridiāna nolīdzinājums:

$$(x + k \cotg \alpha\lambda)^2 + y^2 = (k \operatorname{cosec} \alpha\lambda)^2$$

jeb

$$x^2 + 2k \cotg \alpha\lambda \cdot x + y^2 = k^2. \quad (328)$$

Parallēļu nolīdzinājums. — Arī paralēles ir aploces loki; lai projekcija būtu leņķu pareiza, tad paralēlēm un meridiāniem jākrustojas zem taisniem leņķiem, kas ir nepieciešams, bet gan vēl nepietiekošs nosacījums tam, lai projekcija būtu leņķu pareiza. No centra  $O$  novilksim rādiusu  $Oc$  zem patvaļīga leņķa  $cOX = \delta$ . No punkta  $c$  novilksim meridiāna  $PcC$  pieskari  $cQ$  un lai  $Q$  ir šis pieskares krustojšanās punkts ar  $y$  asi. No  $Q$  novilksim pārējiem meridiāniem  $PBP_1, PAP_1 \dots$  pieskares  $Qb, Qa \dots$ . Pēdējo gaŗumi, t. i. nogriežņi  $Qb, Qa \dots$ , kā vidējie proporcionālie starp visu sekanti  $QP_1$  un tās ārējo daļu  $QP$ , ir vienādi; tāpēc likne  $cba$  — pieskares punktu ģeometriskā vieta — būs riņķa loks, kas krusto visus meridiānus zem taisniem leņķiem. Tā tad loks  $cba$  attēlo uz projekcijas ar leņķi  $\delta$  noteiktu paralēli. Leņķa  $\delta$  sakarību ar athilstošās paralēles uz sfēras platumu  $\varphi$  noteic zemāk izvestā (333) formula. Novelkot no  $O$  citus rādiusus zem leņķiem  $2\delta, 3\delta \dots$  dabūsim ar līdzīgu konstruējumu uz projekcijas visas parējās paralēles. No taisnleņķa trisstūra  $OcQ$  iznāk:  $OQ = Oc \cdot \operatorname{cosec} \delta = k \operatorname{cosec} \delta$  un paralēles rādiuss  $Qc = k \cotg \delta$ ; tāpēc uz projekcijas paralēles centra  $Q$  koor-

dinātas  $x_2$ ,  $y_2$  un tās rādiusu  $\rho_2$ , atkarībā no dotā leņķa  $\delta$ , noteic pēc sekošām formulām:

$$x_2 = 0; y_2 = k \operatorname{cosec} \delta; \rho_2 = k \cotg \delta. \quad (329)$$

Ar šiem lielumiem uz projekcijas paraleļu nolīdzinājums būs riņķa nolīdzinājums sekošā veidā:

$$\begin{aligned} \text{jeb} \quad & x^2 + (y - k \operatorname{cosec} \delta)^2 = (k \cotg \delta)^2, \\ & x^2 - 2k \operatorname{cosec} \delta \cdot y + y^2 = -k^2. \end{aligned} \quad (330)$$

Punktu koordinātas. — Kad punkts uz zemes virsas noteikts ar dotām ģeografiskām koordinātām un kad zināmas projekcijas konstantes, tad ir iespējams dabūt projekcijas iekšēja punkta koordinātas  $x$ ,  $y$ . Šinī nolūkā ir tikai jāatrisina (328) un (330) nolīdzinājumi, pieņemot par nezināmiem  $x$  un  $y$ . Atņemot otro nolīdzinājumu no pirmā un dalot iznākumu ar  $2k$  dabūsim:

$$y = (k - \cotg \alpha \lambda \cdot x) \cdot \operatorname{sn} \delta \dots (a)$$

Šo  $y$  nozīmi ieliekam (328) nol., izdalām visus locekļus ar  $x^2$  koeficientu un nolīdzinājuma abām pusēm pieskaitam daļu:

$$\frac{k^2 \cos^4 \delta \cotg^2 \alpha \lambda}{(1 + \operatorname{sn}^2 \delta \cotg^2 \alpha \lambda)^2},$$

lai nolīdzinājuma pirmo pusi pārvērstu par pilnu kvadrātu.

Pēc kvadrātsaknes izvilkšanas no nol. abām pusēm un vienkāršiem pārveidojumiem dabūjam, ka abscisa

$$x = \frac{k \cos \delta \operatorname{sn} \alpha \lambda}{1 + \cos \delta \cos \alpha \lambda}. \quad (331)$$

Otrais nezināmais  $y$  būs noteikts, ja (a) formulā atvietosim lielumu  $x$  ar tikko dabūto izteiksmi; iznāk, ka ordināta

$$y = \frac{k \operatorname{sn} \delta}{1 + \cos \delta \cos \alpha \lambda}. \quad (332)$$

Mērogi. — Uz projekcijas, kā meridiāna, tā paraleles bezgalīgi mazu loku  $ds$  var izteikt ar formulu  $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ ; uz sfēras ar rādiusu  $R$  bezgalīgi mazs meridiāna loka elements būs  $R d\varphi$  un paraleles  $R \cos \varphi d\lambda$ ; tāpēc mērogus  $m_m$  un  $m_p$  pa meridiāniem un paralelēm var izteikt sekoši:

$$m_m = \frac{ds}{R d\varphi} = \frac{1}{R} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} \dots (b)$$

$$m_p = \frac{ds}{R \cos \varphi d\lambda} = \frac{1}{R \cos \varphi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2} \dots (c)$$

Tā kā (331) un (332) formulās platums  $\varphi$  ir lieluma  $\delta$  funkcija, tad (b) izteiksmi pārveido sekoši:

$$\begin{aligned} m_m &= \frac{1}{R} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\delta} \cdot \frac{d\delta}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\delta} \cdot \frac{d\delta}{d\varphi}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{R} \cdot \frac{d\delta}{d\varphi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\delta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\delta}\right)^2} \dots (d) \end{aligned}$$

(c) un (d) formulās ieejošās  $x$  un  $y$  atvasinātās dabū no (331) un (332) formulas:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\delta} &= -\frac{k \operatorname{sn} \delta \operatorname{sn} \alpha \lambda}{(1 + \cos \delta \cos \alpha \lambda)^2}; & \frac{dx}{d\lambda} &= \frac{\alpha k \cos \delta (\cos \delta + \cos \alpha \lambda)}{(1 + \cos \delta \cos \alpha \lambda)^2}; \\ \frac{dy}{d\delta} &= \frac{k (\cos \delta + \cos \alpha \lambda)}{(1 + \cos \delta \cos \alpha \lambda)^2}; & \frac{dy}{d\lambda} &= \frac{\alpha k \operatorname{sn} \delta \cos \delta \operatorname{sn} \alpha \lambda}{(1 + \cos \delta \cos \alpha \lambda)^2}. \end{aligned}$$

Ievietojot šīs atvasinātās (c) un (d) formulās pēc vienkāršiem pārveidojumiem dabūjam:

$$m_m = \frac{k}{R (1 + \cos \delta \cos \alpha \lambda)} \cdot \frac{d\delta}{d\varphi} \dots (e)$$

$$m_p = \frac{\alpha k \cos \delta}{R (1 + \cos \delta \cos \alpha \lambda) \cos \varphi} \dots (f)$$

Tā kā pēc noteikuma projekcija ir leņķu pareiza, tad mērogiem katrā punktā visos virzienos ir jābūt vienādiem, t. i., jābūt  $m_m = m_p$ ; tāpēc no (e) un (f) nolīdzinājumiem iznāk:

$$\frac{d\delta}{d\varphi} = \frac{\alpha \cos \delta}{\cos \varphi} \dots (g)$$

jeb

$$\frac{d\delta}{\cos \delta} = \alpha \frac{d\varphi}{\cos \varphi}.$$

Integrējam šī nolīdzinājuma abas daļas; nosaucot par  $\beta$  jauno pie integrēšanas ienākušo konstanto lielumu, dabūjam:

$$\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\delta}{2}\right) = \beta \operatorname{tg}^\alpha \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right). \quad (333)$$

Šis nolīdzinājums izteic ievestā palīgleņķa  $\delta$  sakarību ar ģeografisko platumu  $\varphi$ ; dodot konstantēm  $\alpha$  un  $\beta$  dažādas nozīmes dabūjam dažādas projekcijas; šos atsevišķos gadījumus apskatīsim turpmāk.

Tā kā vispār uz visām vienādleņķu projekcijām vienā un tanī pašā punktā visos virzienos mērogs ir vienāds, tad mēroga  $m$  noteik-

šanai var ņemt izteiksmi (e) jeb (f); labāki ņemt otro, kā brīvu no diferenciālu zīmēm; tad:

$$m = m_m = m_p = \frac{\alpha k \cos \delta}{R(1 + \cos \delta \cos \alpha \lambda) \cos \varphi} \quad (334)$$

Pēc šīs formulas mērogs ir platuma  $\varphi$ , gaŗuma  $\lambda$  un leņķa  $\delta$  funkcija; tā kā leņķi  $\delta$  ar platumu  $\varphi$  saista (333) formula, tad labāki dabūt mērogam  $m$  citu izteiksmi, kas nesatur leņķi  $\delta$ , bet tikai projekcijas konstantos lielumus  $k$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  un uz sfēras dotā punkta ģeografiskās koordinātas  $\varphi$ ,  $\lambda$ . Šinī nolūkā ņemsim goniometrijas formulu:

$$\cos \delta = \operatorname{sn} \left( 90^\circ + \delta \right) = \frac{2 \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\delta}{2} \right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ + \frac{\delta}{2} \right)}$$

un ieliksīm tanī no (333) formulas  $\operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\delta}{2} \right)$  nozīmi; dabūto  $\cos \delta$  izteiksmi ievietojam (334) formulā; pēc vienkāršiem pārveidojumiem iznāk:

$$m = \frac{2 k \alpha \beta}{R \left\{ \beta^2 \operatorname{tg}^\alpha \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + 2 \beta \cos \alpha \lambda + \operatorname{cotg}^\alpha \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \right\} \cos \varphi} \quad (335)$$

Šī formula ir noderīga mēroga aplēsei visos projekcijas punktus, izņemot polus, kur tā dod nenoteiktu izteiksmi un pie tam tādu, kuŗas īsto nozīmi nevar dabūt parastā ceļā. Tāpēc tai jādod citāds veids. Vispirms ieliekam saucējā

$$\cos \varphi = \operatorname{sn} \left( 90^\circ + \varphi \right) = 2 \operatorname{sn} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \cos \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right),$$

tad tangens un kotangens izteicam caur sinusu un kosīnu; iznāk:

$$m = \frac{k \alpha \beta \operatorname{sn}^{\alpha-1} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \cos^{\alpha-1} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)}{R \left\{ \beta^2 \operatorname{sn}^{2\alpha} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + 2 \beta \operatorname{sn}^\alpha \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \cos^\alpha \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \cos \alpha \lambda + \cos^{2\alpha} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \right\}} \quad (336)$$

Kad  $\varphi = \pm 90^\circ$ , tad šīs daļas saucējs ir galīgs lielums un viens no skaitītāja reizinājumiem, proti:

$$\cos^{\alpha-1} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \text{ jeb } \operatorname{sn}^{\alpha-1} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)$$

ir nulle; tomēr, skatoties pēc tā, vai  $\alpha > 1$ , jeb  $< 1$ , šī nulle paliek skaitītājā jeb pāriet saucējā; tamdēļ pie  $\alpha > 1$  uz poliem pa visiem

meridiāniem mērogs ir 0, bet pie  $\alpha < 1$  ir  $= \infty$ . Kas zīmējās uz sevišķo gadījumu, kad  $\alpha = 1$  un kad abas formulas (334) un (335) dod nenoteiktu lielumu, kad tomēr īstenībā mērogs  $m$  uz poliem ir pilnīgi noteikts lielums, kas atšķiras no nulles, tad to apskatīsim nākošā 45. §, pie Lagranža projekcijas atsevišķu gadījumu izpētīšanas.

Apskatīsim, kā mainās mērogs. Uz vienas un tās pašas paralēles, t. i., pie dotā platuma  $\varphi$ , mērogs  $m$  ir vismazāks tad, kad (335) izteiksmes saucējs ir vislielāks; tas būs pie  $\cos \alpha \lambda = 1$  jeb  $\lambda = 0^\circ$ , kas nozīmē, ka vismazākais mērogs iznāk uz vidējā taisnā meridiāna. Uz abām pusēm no vidējā meridiāna, kā rītiem, tā vakariem, loceklis ar  $\cos \alpha \lambda$  saucējā mazinājas un tāpēc mērogs palielinājas. Pie tam tā kā (335) izteiksmē garums  $\lambda$  ieiet zem kosinusa zīmes un trigonometriskā rinda

$$\cos \alpha \lambda = 1 - \frac{(\alpha \lambda)^2}{2} + \frac{(\alpha \lambda)^4}{24} - \dots$$

nesatur locekļus ar  $\lambda$  nepārnīeku pakāpēm, tad, sākot no vidējā meridiāna, mēroga palielināšanās uz vienas un tās pašas paralēles iet simmetriski uz abām pusēm, t. i., rītiem un vakariem. Bez tam, tā kā šinī rindā nav locekļa ar  $\lambda$  pirmā pakāpē, tad mēroga alterācija vidējā meridiāna tuvumā nav liela; šim pēdējam apstāklim ir ļoti liela nozīme tādām valstīm, kuŗas maz stiepjas pa paralēlēm, resp. rīta-vakara virzienā. Augšā dotās rindas locekļi ar  $\lambda^2$ ,  $\lambda^4$ ... var būt nulles tikai pie  $\alpha = 0$ , kādā gadījumā Lagranža projekcija pārvēršas par Merkatora projekciju (26. §), kuŗai mērogs uz vienas un tās pašas paralēles patiešām ir konstants lielums. Grūtāki ir izsekot mērogu alterācijām pa meridiāniem, jo, izņemot sevišķo gadījumu pie  $\alpha = 1$ , mērogs uz pola ir vai nu nulle, vai bezgalība un, sākot no šejienes, uz viena un tā paša meridiāna vai nu palielinājas vai pamazinājas, sasniedzot uz kaut-kāda platuma vislielāko jeb vismazāko nozīmi. Pie tam mēroga izmaiņu raksturs var būt ļoti dažāds, atkarībā no konstanto  $\alpha$  un  $\beta$  lieluma. No (335) formulas redzams, ka mēroga lielums ir atkarīgs netikvien no punkta ģeografiskām koordinātām  $\varphi$ ,  $\lambda$ , bet arī no projekcijas trīs konstantiem lielumiem  $k$ ,  $\alpha$  un  $\beta$ . No tiem konstantam  $k$  nav iespāida uz projekcijas veidu, bet tikai uz tās samēriem; divi pārējos konstantos  $\alpha$  un  $\beta$  Lagranžs ņem tā, lai valsts noteiktā (parasti centrālā) punktā mēroga pirmā un otrā atvasinātā iznāktu nulle. Tādā gadījumā gar valsts dotā punkta meridiānu mērogu alterācijas ir niecīgas pat uz liela attājuma. Tā kā agrāki jau bija pierādīts, ka gar paralēlēm ap vidējo meridiānu mēroga alterācijas arī ir ļoti mazas, tad Lagranža projekcija pelna

ievēribu ar to, ka ap doto punktu visos virzienos mērogs gandrīz nemainās, un tā, zināms, ir ļoti vērtīga projekcijas īpašība. Ja dotais punkts ir valsts vidū un valsts nav visai liela, tad tās attēls Lagranža projekcijā iznāk tuvāks istenībai, nekā kādā citā projekcijā.

Konstanto lielumu  $\alpha$ ,  $\beta$  un  $k$  noteikšana. — Noteiksim tos zem nosacījuma, lai uz vidējā meridiāna dotā punktā mēroga divi pirmās atvasinātās būtu nulles. Tā kā (335) un (336) formulas ir komplicētas, tad ņemsim sākuma formulu (334), kas pie  $\lambda = 0^\circ$  pieņem veidu:

$$m = \frac{\alpha k \cos \delta}{R(1 + \cos \delta) \cos \varphi} \dots (h)$$

Atvasinātās  $\frac{dm}{d\varphi}$  un  $\frac{d^2m}{d\varphi^2}$  sastādisim ņemot vērā (g) izteiksmi. Pielīdzinot abas atvasinātās nullei dabonam sekošus divus nolīdzinājumus:

- 1)  $\alpha \operatorname{sn} \delta - (1 + \cos \delta) \operatorname{sn} \varphi = 0$ ,
- 2)  $\alpha^2(1 - \cos \delta - 2 \cos^2 \delta) - 3\alpha(1 + \cos \delta) \operatorname{sn} \delta \operatorname{sn} \varphi + (1 + \cos \delta)^2(1 + \operatorname{sn}^2 \varphi) = 0$ .

No pirmā nolīdzinājuma iznāk:

$$\operatorname{sn} \delta = \frac{2\alpha \operatorname{sn} \varphi}{\alpha^2 + \operatorname{sn}^2 \varphi}, \dots (i)$$

no kuŗa

$$\cos \delta = \frac{\alpha^2 - \operatorname{sn}^2 \varphi}{\alpha^2 + \operatorname{sn}^2 \varphi} \dots (j).$$

Šos lielumus ieliekam otrā nolīdzinājumā un izdaram visus iespējamus vienkāršojumus. Nosaucot dotā punkta platumu par  $\varphi_0$  dabūjam sekošu vienkāršu izteiksmi:

$$\alpha = \sqrt{1 + \cos^2 \varphi_0}. \quad (337)$$

Tagad pāriesim pie otrā konstantā  $\beta$  noteikšanas. Tā kā (333) formula ir spēkā visiem projekcijas punktiem, tad tā pareiza arī punktam, kas noteikts ar platumu  $\varphi_0$ , t. i.:

$$\operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\delta_0}{2} \right) = \beta \operatorname{tg}^\alpha \left( 45^\circ + \frac{\varphi_0}{2} \right), \dots (l)$$

kur  $\delta_0$  ir platumam  $\varphi_0$  atbilstošais leņķis  $\delta$ . Ņemsim goniometrijas formulu:

$$\operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\delta}{2} \right) = \frac{1 + \operatorname{sn} \delta}{\cos \delta},$$

tanī sinusu un kosinusu atvietosim ar (i) un (j) izteiksmēm, pie  $\delta$  un  $\varphi_0$  pieliksim indeksus; tad:

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\delta_0}{2}\right) = \frac{\alpha + \operatorname{sn}\varphi_0}{\alpha - \operatorname{sn}\varphi_0}.$$

Salīdzinot šo formulu ar (l) izteiksmi dabonam:

$$\beta = \frac{\alpha + \operatorname{sn}\varphi_0}{\alpha - \operatorname{sn}\varphi_0} \operatorname{cotg}^\alpha\left(45^\circ + \frac{\varphi_0}{2}\right). \quad (338)$$

Tagad atliek noteikt konstanto lielumu  $k$ . Ja (h) formulā ievietot no (j) formulas  $\cos \delta$  izteiksmi, tad dabūsim mērogu  $m_0$  punktā, noteiktā ar platumu  $\varphi_0$  un garumu  $\lambda = 0$ ; iznāk:

$$m_0 = \frac{k(\alpha^2 - \operatorname{sn}^2\varphi_0)}{2R\alpha \cos\varphi_0}. \quad (339)$$

Ja ir vajadzīgs, lai mērogs šinī punktā būtu 1, t. i., vienlīdzīgs galvenam, tad  $m_0 = 1$  un no šejienes

$$k = \frac{2R\alpha \cos\varphi_0}{\alpha^2 - \operatorname{sn}^2\varphi_0}. \quad (340)$$

(339) un (340) formulas var noderēt arī mēroga  $m_0$  un konstantā  $k$  aplēsei pie ikkuŗas, pat patvaļīgi ņemtās konstantā  $\alpha$  nozīmes (sk. nākošo 45 §). Ja, turpretim, šis konstantais ir aprēķināts pēc (337) formulas, tad lieluma  $k$  aplēsei var lietot vienkāršāku izteiksmi, kuŗu dabū no (340) formulas, ieliekot tanī  $\alpha$  nozīmi no (337); tad

$$k = \frac{R\sqrt{1 + \cos^2\varphi_0}}{\cos\varphi_0} = \frac{R\alpha}{\cos\varphi_0}. \quad (341)$$

Šī paragrafa sākumā bija teikts, ka Lagranža projekcijā visas paralēles attēlojas kā riņķi, izņemot vienu no tām, kuŗa visādā ziņā būs taisna līnija; taisnlīnijiskās paralēles platums  $\varphi_1$ , vispār ņemot, nav apaļš skaitlis grados un minūtēs un šī paralēle var arī nebūt uz kartografiskā tīkla. Platums  $\varphi_1$  atbilst palīgleņķa nozīmei  $\delta = 0$ ; tāpēc, lai dabūtu formulu platuma  $\varphi_1$  aplēsei, ir jāieliek (333) izteiksmē  $\delta = 0$ ; tad

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\varphi_1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}. \quad (342)$$

No šīs formulas redzams, ka  $\varphi_1 = 0^\circ$  pie  $\beta = 1$ ; tas nozīmē, ka šinī gadījumā Lagranža projekcijā ekvātors attēlosies kā taisna līnija. Visos citos gadījumos, kad konstantais  $\beta$  nav viens, ekvātors attēlojas kā riņķa loks.

Vispār no trīs konstantiem lielumiem  $\alpha$ ,  $\beta$  un  $k$ , kas ieiet Lagranža projekcijas formulās, vislielākais iespaids ir konstantam  $\alpha$ . Vi-

sas svarīgākās attēla īpašības atkarājas tikai no lielumu  $\alpha$  izveles un par to sīkākī būs runa nākošā paragrafā; konstantais  $\beta$  noteic tikai platumu tai paralēlei, kuŗa uz projekcijas iznāk taisna; konstantais  $k$  noteic gaŗuma vienību — vidējā taisnlīnijiskā meridiāna gaŗuma pusi, jeb pusattāļumu starp poliem uz projekcijas. Kas zīmējās uz papildleņķi,  $\delta$ , kas ieiet (329) — (332) un (334) formulā, tad tā ievēšana tikai atvieglo aprēķinus, bet nav nepieciešama, kā tas jau arī tika darīts pie (334) formulas atvietošanas ar tai vienādvērtīgu (335) formulu. Atbrīvosim no  $\delta$  arī (329) — (332) formulas. Ņemsim gonometrijas formulas:

$$\operatorname{sn} \delta = \frac{\operatorname{tg}^2\left(45^\circ + \frac{\delta}{2}\right) - 1}{\operatorname{tg}^2\left(45^\circ + \frac{\delta}{2}\right) + 1}, \quad \operatorname{cos} \delta = \frac{2 \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\delta}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(45^\circ + \frac{\delta}{2}\right) + 1}$$

un ieliksīm te no (333) nolīdzinājuma  $\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\delta}{2}\right)$  nozīmi; tad

$$\operatorname{sn} \delta = \frac{\beta^2 \operatorname{tg}^{2\alpha}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) - 1}{\beta^2 \operatorname{tg}^{2\alpha}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) + 1}, \quad \operatorname{cos} \delta = \frac{2\beta \operatorname{tg}^\alpha\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)}{\beta^2 \operatorname{tg}^{2\alpha}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) + 1}.$$

Šīs sinusa un kosinusa nozīmes ieliksīm (329) — (332) formulās; ar to dabūsim citas bez palīgleņķa  $\delta$ ; tad meklējamie lielumi būs izteikti kā projekcijas konstanto un ģeografisko koordinātu funkcijas:

$$\left. \begin{aligned} x_2 = 0, \quad y_2 = k \frac{\beta^2 \operatorname{tg}^{2\alpha}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) + 1}{\beta^2 \operatorname{tg}^{2\alpha}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) - 1} \\ \rho_2 = k \frac{2\beta \operatorname{tg}^\alpha\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)}{\beta^2 \operatorname{tg}^{2\alpha}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) - 1} \end{aligned} \right\} \quad (343)$$

$$x^2 - 2k \frac{\beta^2 \operatorname{tg}^{2\alpha}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) + 1}{\beta^2 \operatorname{tg}^{2\alpha}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) - 1} y + y^2 + k^2 = 0. \quad (344)$$



$\varphi$	$\delta$	$y_2$	$\rho_2$	$\lambda$	$\alpha\lambda$	$x_1$	$\rho_1$
70°	80° 06'	2,040	0,351	0°	0° 0'	— ∞	∞
65	77 08	2,062	0,459	5	5 46	— 19,911	20,012
60	74 02	2,091	0,575	10	11 32	— 9,854	10,057
55	70 48	2,128	0,700	15	17 18	— 6,456	6,762
50	67 25	2,177	0,836	20	23 03	— 4,722	5,132
45	63 54	2,238	0,984	25	28 49	— 3,653	4,169
40	60 15	2,315	1,149				

lēstie mērogi projekcijas dažādiem punktiem doti sekošā tabulā, kuŗu interesanti salīdzināt ar citu projekciju attiecīgām tabulām pie tiem pašiem ģeogrāfiskiem platumiem.

$\varphi \backslash \lambda$	0°	5°	10°	15°	20°	25°
70°	0,993	0,994	0,996	1,000	1,005	1,012
65	0,998	0,999	1,002	1,006	1,013	1,021
60	1,000	1,001	1,004	1,009	1,017	1,027
55	1,000	1,001	1,005	1,011	1,020	1,031
50	1,000	1,001	1,006	1,013	1,023	1,036
45	1,001	1,002	1,007	1,015	1,026	1,040
40	1,003	1,005	1,010	1,018	1,030	1,046

No šīs tabulas skaitļiem redzams, ka mēroga alterācijas ir diezgan niecīgas, pat diezgan lielā attālumā no pieņemtā centrālā punkta.

Saprotams, arī te aprēķini jāizved tikai tikla vienai pusei, piemēram, austruma.

Pēc (342) formulas uz projekcijas kā taisna līnija attēlojas ar platumu  $\varphi_1 = -21^{\circ}38'$  noteiktā paralēle.

Uzdevums. — Aplēst Lagranža projekcijas tiklu Latvijas kartei starp platumiem  $58^{\circ}10'$  un  $55^{\circ}30'$  un garumiem  $\pm 3^{\circ}30'$  no videjā meridiāna ( $24^{\circ}$  uz rītiem no Grinvičas) ar meridiāniem un paralēlēm ik pa  $30'$ .

**45. Sevišķie gadījumi.** — Nav nepieciešami Lagranža projekcijai konstanto  $\alpha$  aplēst pēc (337) formulas; to var noteikt arī ar vairākkārtīgiem mēģinājumiem, izejot no iepriekš uzstādītām prasībām, piemēram, lai mērogi uz malējām paralēlēm būtu vienādi, lai mērogu alterācijas projekcijas zināmos punktos būtu vienādas u. t. t. Tā rīkojies arī ievērojamais ģeodēzists un astronoms N. Cingers, aprēķinot projekciju Eiropas kartei. Ar vairākkārtīgiem mēģinājumiem un interpolāciju viņš noteica konstanto  $\alpha = 1,04$ ; punkts ar mērogu  $m = 1$

iznāca uz platuma  $45^0$ , bet ne  $55^0$ , kā bija pieņemts iepriekšējā para-  
grafa skaitliskā piemērā. Starpības starp vienu un dažādiem  $m$  uz  
malējām paralēlēm iznāca gandrīz vienādas, kamēr iepriekšējā pie-  
mērā dienvidplatumos alterācijas lielākas nekā ziemeļu. Dodot kon-  
stantam  $\alpha$  patvaļīgas nozīmes dabū ļoti dažādas projekcijas un to  
starpā arī sen pazīstamās.

Ja konstanto  $\alpha$  neapreķina pēc (337) formulas, bet noteic ar pa-  
kāpenu mēģinājumu vai arī ņem to patvaļīgu, tad no Lagranža pro-  
jekcijas pārējiem divi konstantiem  $\beta$  un  $k$ , pirmo apreķina, kā vien-  
mēr, pēc (338) formulas, bet otro pēc (340), bet ne pēc (341) for-  
mulas. Apskatīsim dažus šādus sevišķus gadījumus.

1) Ņemsim  $\alpha = 0$ . Šinī gadījumā pēc (327) formulām iznāk  
 $x_1 = -\infty$ ,  $\rho_1 = \infty$ , kas nozīmē, ka visi meridiāni ir paralēlas taisnas  
līnijas; tā kā projekcija ir leņķu pareiza, tad arī paralēlēm ir jābūt  
taisnēm, stateniskām pret meridiāniem. Tā tad visi leņķi  $\delta$  ir vien-  
līdzīgi nullei un pēc (333) formulas  $\beta = 1$ .

Tājāki pieņemsim, ka galvenam mērogam jāiznāk uz ekvatora;  
tad (339) formulā jāieliek  $m_0 = 1$  un  $\varphi_0 = 0$ ; iznāk:

$$k = \frac{2R}{\alpha} \dots (a)$$

Tā kā  $\alpha = 0$ , tad  $k = \infty$ ; tomēr pie  $\alpha k = 2R$  un  $\delta = 0$  mēroga  
vispārīgā formula (334) pieņem sekošu vienkāršu veidu:

$$m = \sec \varphi \dots (b)$$

Ieliekot (a) un  $\beta = 1$  koordinātu  $x$  un  $y$  (345) un (346) formu-  
lās dabūsim:

$$x = R \frac{\operatorname{sn} \alpha \lambda}{\alpha},$$

$$y = \frac{R}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg}^{2\alpha} \left( 45^0 + \frac{\varphi}{2} \right) - 1}{\alpha}.$$

Šo nenoteikto (pie  $\alpha = 0$ ) izteiksmju patiesās nozīmes būs:

$$x = R\lambda,$$

$$y = \frac{R}{\mu} \operatorname{logtang} \left( 45^0 + \frac{\varphi}{2} \right), \dots (c)$$

kur  $\mu$  ir Brigsas logaritmu modulis.

Tā kā (b) un (c) formulas ir tādas pašas, kā (205), (201) un (200),  
kas izvestas mērogam un punktu koordinātām Merkatora projekcijai  
(26. §), kad zemi uzskata par sfēru un cilindrs tai pieskaras pa ekvā-  
toru, tad šinī īpašā gadījumā, pie  $\alpha = 0$ , Lagranža projekcija paliek  
par Merkatora projekciju.

2)  $\alpha = 0,5$ . Lai šī gadījuma izpētīšana būtu vienkāršāka, pieņemsim atkal, ka galvenais mērogs ir uz ekvatora. Tad, ieliekot vispārīgās formulās (338) un (339)  $\varphi_0 = 0^0$  un  $\alpha = 0,5$ , dabūsim, ka pārējie divi projekcijas konstantie lielumi ir:  $\beta = 1$  un  $k = 4R$ . Tāpēc no (333) formulas:

$$\operatorname{tg} \left( 45^0 + \frac{\delta}{2} \right) = \sqrt{\operatorname{tg} \left( 45^0 + \frac{\varphi}{2} \right)}. \quad (347)$$

No šejienes pēc vienkāršiem pārveidojumiem iznāk:

$$\operatorname{sn} \delta = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \text{ un } \cos \delta = \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

Ieliekot šīs nozīmes vispārīgās formulās (327), (329), (331), (332) un (334), dabūsim:

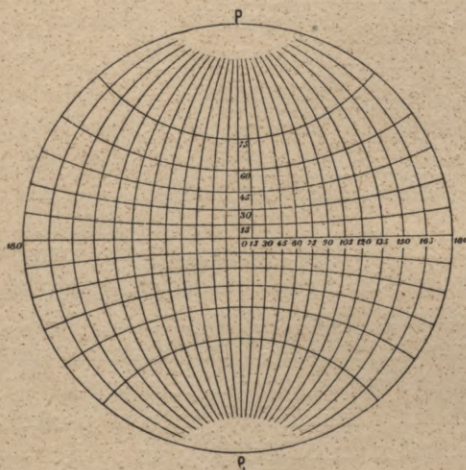
$$\begin{aligned} x_1 &= -4R \operatorname{cotg} \frac{\lambda}{2}, \quad y_1 = 0, \quad \rho_1 = 4R \operatorname{cosec} \frac{\lambda}{2}; \\ x_2 &= 0, \quad y_2 = 4R \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2}, \quad \rho_2 = 4R \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2} \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}; \\ x &= \frac{4R \operatorname{sn} \frac{\lambda}{2} \cdot \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}}{1 + \cos \frac{\lambda}{2} \cdot \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}}, \quad y = \frac{4R \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 + \cos \frac{\lambda}{2} \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}}; \\ m &= \frac{2 \left( 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \right)}{\left\{ 1 + \cos \frac{\lambda}{2} \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} \right\} \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}}. \end{aligned} \quad (348)$$

Jebkuŗas paralēles un vidējā meridiāna krustojuma punkta ordināta (piemēram  $O_n$ , 86. zīm.)  $c$  ir vienlīdzīga starpībai  $y_2 - \rho_2$  un tāpēc to var izteikt atkarībā no rādiusa  $k$  sekoši:

$$c = k \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} \right). \quad (349)$$

Tā kā pie  $\lambda = 180^0$ ,  $\rho_1 = 4R = k$ , tad apskatāmā gadījumā visu zemes virsu var attēlot ar vienu riņķi. Ar to šis gadījums, saprotams, pelna ievēribu, bet, dievamžēl, uz projekcijas malām mērogī stipri atšķiras no 1, kā tas redzams no zemāk dotās tabulas ar  $m$ , aprēķinātiem pēc (348) formulas dažādiem projekcijas punktiem, ņemtiem platumam ik pa  $15^0$ , bet garumam ik pa  $15^0$  un  $30^0$ . Šīs tabulas pēdējā slejā dotas vēl pēc (349) formulas aprēķinātās ordinātas  $c$ , pieņemot  $k = 1$ .

$\varphi \backslash \lambda$	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	120°	150°	180°	c
90°	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	1,0000
75	3,019	3,029	3,060	3,111	3,186	3,284	3,409	3,752	4,249	4,951	0,4675
60	1,806	1,813	1,834	1,870	1,922	1,991	2,080	2,330	2,709	3,281	0,3178
45	1,348	1,353	1,370	1,398	1,440	1,495	1,566	1,769	2,084	2,574	0,2168
30	1,133	1,138	1,152	1,177	1,213	1,261	1,323	1,502	1,781	2,225	0,1365
15	1,031	1,035	1,049	1,071	1,104	1,149	1,207	1,372	1,633	2,053	0,0661
0	1,000	1,004	1,017	1,040	1,072	1,115	1,172	1,333	1,589	2,000	0,0000



87. zīm.

87. zīmējums attēlo visas zemes virsu Lagranža projekcijā šīnī sevišķā gadījumā. Uz ekvatora, kartes malās mērogs divreiz lielāks nekā centrā, bet cirskumpolāras zemes sagrozītas vēl vairāk. Novelkot vienādo mērogu izokolus dabū elipsēm līdzīgas līknes, ar lielām asīm pa ekvatoru.

3)  $\alpha = 1$ . Šīnī gadījumā no vispārīgās formulas (338) iznāk:

$$\beta = \frac{1 + \operatorname{sn} \varphi_0}{1 - \operatorname{sn} \varphi_0} \cotg \left( 45^\circ + \frac{\varphi_0}{2} \right) = \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi_0}{2} \right) \text{ un no (333):}$$

$$\operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\delta}{2} \right) = \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi_0}{2} \right) \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right). \quad (350)$$

$$\text{Te ieliek } \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi_0}{2} \right) = \frac{1 + \operatorname{sn} \varphi_0}{\cos \varphi_0}, \quad \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{1 + \operatorname{sn} \varphi}{\cos \varphi};$$

tad dabūto rezultātu savukārt ieliek goniometriskā formulā:

$$\operatorname{sn} \delta = \frac{\operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ + \frac{\delta}{2} \right) - 1}{\operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ + \frac{\delta}{2} \right) + 1} \dots (x); \text{ pēc pārveidojuma iznāk:}$$

$$\operatorname{sn} \delta = \frac{\operatorname{sn} \varphi_0 + \operatorname{sn} \varphi}{1 + \operatorname{sn} \varphi_0 \operatorname{sn} \varphi} \text{ un no šejienes } \cos \delta = \frac{\cos \varphi_0 \cos \varphi}{1 + \operatorname{sn} \varphi_0 \operatorname{sn} \varphi}.$$

$$\text{No (340) formulas } k = \frac{2R \cos \varphi_0}{1 - \operatorname{sn}^2 \varphi_0} = \frac{2R}{\cos \varphi_0}.$$

Tad vispārīgās formulas (327), (329), (331), (332) un (334) dos:

$$x_1 = -\frac{2R}{\cos\varphi_0} \cotg\lambda, \quad y_1 = 0, \quad \rho_1 = \frac{2R}{\cos\varphi_0} \operatorname{cosec}\lambda;$$

$$x_2 = 0, \quad y_2 = \frac{2R(1 + \operatorname{sn}\varphi_0 \operatorname{sn}\varphi)}{(\operatorname{sn}\varphi_0 + \operatorname{sn}\varphi) \cos\varphi_0}, \quad \rho_2 = \frac{2R \cos\varphi}{\operatorname{sn}\varphi_0 + \operatorname{sn}\varphi};$$

$$x = \frac{2R \cos\varphi \operatorname{sn}\lambda}{1 + \operatorname{sn}\varphi_0 \operatorname{sn}\varphi + \cos\varphi_0 \cos\varphi \cos\lambda};$$

$$y = \frac{2R(\operatorname{sn}\varphi_0 + \operatorname{sn}\varphi)}{\cos\varphi_0(1 + \operatorname{sn}\varphi_0 \operatorname{sn}\varphi + \cos\varphi_0 \cos\varphi \cos\lambda)};$$

$$m = \frac{2}{1 + \operatorname{sn}\varphi_0 \operatorname{sn}\varphi + \cos\varphi_0 \cos\varphi \cos\lambda}.$$

Šinīs formulās, tāpat kā visās citās Lagranža projekcijas formulās, koordinātu sākums uz projekcijas ir zemes polus savienojošās taisnes vidū. Ja par koordinātu sākumu ņem ar abscisu  $x_0 = 0$  un ordinātu  $y_0 = 2R \operatorname{tg}\varphi_0$  noteiktu punktu, tad augšējās formulas dod stereografiskās horizonta projekcijas formulas, kā tās izvestas 10. §, kur par koordinātu sākumu ņemts ar platumu  $\varphi_0$  noteikts punkts. Lai formulas būtu pilnīgi identiskas, tad  $x$  vietā jāieliek  $y$  un  $y$  vietā —  $x$ ; bez tam, lai mērogs būtu vienāds, tad visas formulas vēl jādala ar 2.

Iepriekšējās formulas ir spēkā pie katra  $\varphi_0$ ; pieņemot  $\varphi_0 = 0^0$  sakarība starp palīgleņķiem  $\delta$  un platumiem  $\varphi$  vienkāršojas un no (350) formulas:

$$\delta = \varphi. \quad (351)$$

Ar šādu substitūciju iepriekšējās formulas jeb 44. § vispārīgās formulas pārvēršās par ekvātorālās (meridionālās) stereografiskās projekcijas formulām.

Tā tad pie  $\alpha = 1$  Lagranža projekcija dod dažādādas stereografiskas projekcijas.

4)  $\alpha = 2$ . Lai šo sevišķo gadījumu būtu ērtāki izpētīt pieņem atkal, ka galvenais mērogs ir uz ekvatora. Ieliekot (338) un (340) formulās  $\varphi_0 = 0^0$  dabūsim projekcijas konstantos  $\beta = 1$ ,  $k = R$ .

No (333) formulas sakarība starp palīgleņķi  $\delta$  un platumu  $\varphi$  iznāk:

$$\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\delta}{2}\right) = \operatorname{tg}^2\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right). \quad (352)$$

No šejienes, ņemot augšējo goniometrijas formulu (x), dabonam:

$$\operatorname{sn}\delta = \frac{2 \operatorname{sn}\varphi}{1 + \operatorname{sn}^2\varphi} \quad \text{un} \quad \cos\delta = \frac{\cos^2\varphi}{1 + \operatorname{sn}^2\varphi}.$$

Ar šīm nozīmēm vispārīgās formulas (327), (329), (331), (332) un (334) iznāk:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -R \cotg 2\lambda, \quad y_1 = 0, \quad \rho_1 = R \operatorname{cosec} 2\lambda; \\ x_2 &= 0, \quad y_2 = R \frac{1 + \operatorname{sn}^2 \varphi}{2 \operatorname{sn} \varphi}, \quad \rho_2 = \frac{1}{2} R \cotg \varphi \cos \varphi; \\ x &= \frac{R \cos^2 \varphi \operatorname{sn} 2\lambda}{2(1 - \cos^2 \varphi \operatorname{sn}^2 \lambda)}; \quad y = \frac{R \operatorname{sn} \varphi}{1 - \cos^2 \varphi \operatorname{sn}^2 \lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (353)$$

$$m = \frac{\cos \varphi}{1 - \cos^2 \varphi \operatorname{sn}^2 \lambda}. \quad (354)$$

Tā kā uz ekvatora pie  $\lambda = 90^\circ$  lielumi  $x$  un  $m$  iznāk bezgalīgi lieli, bet pie  $\lambda > 90^\circ$  projekcijas daļas gulstās uz agrāki uznestām, tad apskatāmā gadījumā, pie  $\alpha = 2$ , Lagranža projekcijā nevar attēlot pat visu pussferu.

Slēgums. — Apskatītie sevišķie gadījumi dod iespēju taisīt sekošus slēdzienus:

Pie  $\alpha = 1$  Lagranža projekcija dod dažāda veida stereografiskās projekcijas, atkarībā no otrā konstantā  $\beta$ ; attēlot ir iespējams ne tikvien ikkuŗu puslodi, bet arī visu zemes virsu. Aiz pirmās pussferas robežām mērogs sāk ātri augt un uz projekcijas malām tas vienlīdzīgs bezgalībai. Vienādu mērogu izokoli ir koncentriski riņķi.

Pie  $\alpha < 1$  pa paralēlēm attājumi aug lēnāki, nekā pa meridiāniem. Robežjošā gadījumā, pie  $\alpha = 0$ , Lagranža projekcija pārvēršas par Merkatora projekciju un meridiāni ir paralēlas taisnes. Vienādo mērogu izokoli ir pa paralēlēm izstieptas ovālas līknes; robežjošā gadījumā, pie  $\alpha = 0$ , izokoli sakrīt ar paralēlēm.

Pie  $\alpha > 1$  pa paralēlēm attājumi aug ātrāki, nekā pa meridiāniem. Kad attēlojamā zemes virsas daļa ir liela, tad dažas attālākās daļas sāk novietoties uz agrāki jau attēlotām; tāpēc attēlojamā platība nevar būt liela; tā, piemēram, pie  $\alpha = 2$  nevar attēlot pat veselu pussferu. Vienādu mērogu izokoli ir pa meridiāniem izstieptas līknes.

Tā tad Lagranža projekcijā var attēlot netikvien pussferu, bet pat visu zemes virsu (pie  $\alpha < 1$ ); tomēr pēdējā gadījumā uz kartes malām mērogi stipri atšķiras no galvenā. Turpretim, pie atsevišķu un pie tam pat diezgan lielu valšķu attēlošanas Lagranža projekcija ir gandrīz viena no labākām, raugoties no alterāciju lieluma. Izokolu figūras rāda, ka valstīm, kuŗu robežu kontūras atgādina aploci, vajaga ņemt  $\alpha = 1$ , t. i. stereografisko horizonta projekciju. Valstij ar ovālveidīgu kontūru izdevīgāki ņemt  $\alpha < 1$ , ja tā izstiepta pa paralēli, un  $\alpha > 1$ , ja tā izstiepta pa meridiānu.

**46. Augusta projekcija.** — Uz Lagranža projekcijas bezgalīgi mazas daļas ir līdzīgas sfēras attiecīgām bezgalīgi mazām daļām, izņemot polus, kur meridiāni uz projekcijas nekrustojas zem gaŗumu starpībām vienlīdzīgiem leņķiem, bet zem mazākiem jeb lielākiem, atkarībā no tā, vai  $\alpha$  ir mazāks, jeb lielāks par 1. Izņēmumu sastāda sevišķs gadījums, kad  $\alpha = 1$  (stereografiskās projekcijas), kad bezgalīgi mazas daļas ir līdzīgas arī uz poliem; tomēr šinī gadījumā uz vienas kartes nevar attēlot visu zemes virsu — tā uz visām pusēm ietu bezgalīgi. Šī trūkuma novēršanai Berlīnes kara akadēmijas profesors Augusts (Friedrich Oscar August, 1840—1900) izgudrojis tā saucamo epicikloidālo projekciju, kuŗu tas aprakstījis žurnālā „Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin“ (1874. g. 9. sējums, 1—22 lpp.) Augusta projekcija ir leņķu pareiza pa visu karti, neizslēdzot arī polus; uz vienas kartes var attēlot visu zemes virsu. Ekvatoru un vidējo meridiānu attēlo divi viena pret otru stateniskas taisnes; vidējo meridiānu attēlojošās taisnes gaŗums no viena pola līdz otram ir vienlīdzīgs ekvatoru attēlojošās taisnes gaŗuma pusēi. Ar gaŗumu  $\pm 180^\circ$  noteiktais malējais meridiāns ir divragu epicikloida, ko veido aploces punkts tanī gadījumā, kad aploce ripo pa otras ar divreiz lielāku rādiusu novilktās aploces ārpusi. Pārejie meridiāni un paraleles ir līdzīgu epicikloidu evolventes. Savu projekciju izgudrotājs ieteic izotermu, izogonu u. tml dz. kartēm. Dzīvē tā nav guvusi piekrišanu.

**47. Vispārīgā teorija.** — Ievērojamie matemātiķi, ka Lamberts un Lagranžs, jau XVIII. g. simtenī pareģoja, ka ir iespējams izvest visu vienādleņķu projekciju vispārīgo teoriju. Par šī svarīgā jautājuma atrisināšanu Kopenhagenes zinību akadēmija 1822. g. izsludināja prēmiju un 1825. g. Gauss iesniedza tai rakstu: „Vispārīgs risinājums uzdevumam: attēlot dotās virsas daļas uz otras dotās virsas tā, lai attēls būtu bezgalīgi mazās daļas līdzīgs attēlojamai virsai“ (Allgemeine Auflösung der Aufgabe: die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird). Šinī rakstā Gauss uzdevumu atrisina vispārīgā veidā; tāpēc sfēroīda attēlošana uz plaknes ir tikai vispārīgās teorijas piemērošana atsevišķā gadījumā.

Katra virsa ir matemātiski noteikta, ja zināms nolīdzinājums ar trīs mainīgiem lielumiem — virsas jebkuŗa punkta koordinātām. Pieņemsim, ka virsa, kas dota ar nolīdzinājumu:

$$f(x, y, z) = 0 \tag{355}$$

ir jāattēlo uz otras virsas, noteiktas ar nolīdzinājumu:

$$F(X, Y, Z) = 0. \tag{356}$$

Lietderīgāki un praktiski ērtāki ir noteikt virsu ne ar vienu nolīdzinājumu, kurā ieiet trīs mainīgie lielumi, bet ar triju nolīdzinājumu sistēmu, izteicot katru neatkarīgo mainīgo lielumu kā divi mainīgo palīglieļumu atklātu (attīstītu) funkciju (piemēram, sferoidu var noteikt ar tā virsas kaut-kuŗa patvaļīga punkta trīs taisnleņķu koordinātām  $x, y, z$ , izteicot, savukārt, pēdējās, kā ģeografisko koordinātu, platuma  $\varphi$  un gaŗuma  $\lambda$ , funkcijas). Nosaucot neatkarīgos mainīgos palīglieļumus par  $\varphi$  un  $\lambda$  ir iespējams (355) un (356) virsas nolīdzinājumus atvietot ar sekošām nolīdzinājumu sistēmām:

$$\left. \begin{aligned} x &= f(\lambda, \varphi), y = f_1(\lambda, \varphi), z = f_2(\lambda, \varphi) \\ X &= F(\lambda, \varphi), Y = F_1(\lambda, \varphi), Z = F_2(\lambda, \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (357)$$

Prasību, lai bezgalīgi mazās daļas būtu vienveidīgas, var izteikt ar sekošu nolīdzinājumu:

$$m = \frac{dS}{ds} = \Phi(\lambda, \varphi). \quad (358)$$

Tas nozīmē, ka attēla ikkuŗā punktā mērogs  $m$  nedrīkst būt atkarīgs no attiecīgo loku  $ds$  un  $dS$  virziena uz apskatāmām virsām, bet tikai no punkta koordinātām.

Lai izteiktu loku  $ds$  kā lielumu  $\lambda$  un  $\varphi$  funkciju, ņemam šāda loka telpā formulu:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2, \dots \quad (a)$$

no (357) nolīdzinājumiem noteicam  $x, y, z$  diferenciālus un ievietojam (a) formulā.

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial z}{\partial \varphi} d\varphi.$$

Vienkāršošanas nolūkos ievēdīsim parciālo atvasināto sekošus apzīmējumus:

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = a, \frac{\partial x}{\partial \varphi} = a_1, \frac{\partial y}{\partial \lambda} = b, \frac{\partial y}{\partial \varphi} = b_1, \frac{\partial z}{\partial \lambda} = c, \frac{\partial z}{\partial \varphi} = c_1. \quad (359)$$

Tad

$$\left. \begin{aligned} dx &= a d\lambda + a_1 d\varphi, \\ dy &= b d\lambda + b_1 d\varphi, \\ dz &= c d\lambda + c_1 d\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (360)$$

Tikko dabūtās nozīmes ieliekam (a) formulā; dabūsim:

$$ds^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(d\lambda)^2 + 2(aa_1 + bb_1 + cc_1)d\lambda \cdot d\varphi + (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(d\varphi)^2.$$

Ja ievēdīsim apzīmējumus:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= a^2 + b^2 + c^2, \\ \beta &= aa_1 + bb_1 + cc_1, \\ \gamma &= a_1^2 + b_1^2 + c_1^2, \end{aligned} \right\} \quad (361)$$

$$\text{tad: } (ds)^2 = \alpha (d\lambda)^2 + 2\beta d\lambda \cdot d\varphi + \gamma (d\varphi)^2 \dots (b)$$

Šīs izteiksmes abas daļas reizināsim ar  $\alpha$  un iznākumu izteiksim sekošā veidā:

$$\alpha (ds)^2 = (\alpha d\lambda + \beta d\varphi)^2 + (\sqrt{\alpha\gamma - \beta^2} d\varphi)^2. \quad (362)$$

Radikāls  $\sqrt{\alpha\gamma - \beta^2}$  vienmēr ir lietišķs, jo zemradikāla izteiksme, ņemot vērā (361) nol., ir:

$$\alpha\gamma - \beta^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) - (aa_1 + bb_1 + cc_1)^2 = (ab_1 - a_1b)^2 + (bc_1 - b_1c)^2 + (ca_1 - c_1a)^2, \text{ kāds lielums vienmēr ir pozitīvs, jo sastādas no trīs kvadrātu summas.}$$

Ievēdot kompleksos lielumus, (362) formulas labo pusi, kā divu kvadrātu summu, saliksim divos reizinātajos; tad

$$\alpha (ds)^2 = (\alpha d\lambda + \beta d\varphi + i \sqrt{\alpha\gamma - \beta^2} d\varphi) (\alpha d\lambda + \beta d\varphi - i \sqrt{\alpha\gamma - \beta^2} d\varphi), \text{ jeb}$$

$$\alpha (ds)^2 = \{ \alpha d\lambda + (\beta + i \sqrt{\alpha\gamma - \beta^2}) d\varphi \} \{ \alpha d\lambda + (\beta - i \sqrt{\alpha\gamma - \beta^2}) d\varphi \}. \quad (363)$$

kur  $i = \sqrt{-1}$ .

Katrai, veida  $M d\lambda + N d\varphi$  izteiksmei, kur  $M$  un  $N$  ir  $\lambda$  un  $\varphi$  funkcijas, var sameklēt kādu reizuli  $r$  tā, lai iznāktu kaut-kādas funkcijas pilns diferenciāls; tāpēc ir iespējams sekošs nolīdzinājums:

$$r (M d\lambda + N d\varphi) = dF(\lambda, \varphi).$$

Vispār ņemot reizulim  $r$  ir jābūt  $\lambda$  un  $\varphi$  funkcijai, izņemot gadījumu, kad  $M d\lambda + N d\varphi$  ir jau pilns diferenciāls; pēdējā gadījumā  $r$  ir konstants lielums un

$$\frac{\partial M}{\partial \varphi} = \frac{\partial N}{\partial \lambda}.$$

Tagad pieņemsim, ka izteiksmi  $\alpha d\lambda + (\beta + i \sqrt{\alpha\gamma - \beta^2}) d\varphi$  par kaut-kādas funkcijas pilnu diferenciālu  $d(p + iq)$  pārvērs reizulis  $r = \rho + i\rho_1$ ; tad:

$$(\rho + i\rho_1) \{ \alpha d\lambda + (\beta + i \sqrt{\alpha\gamma - \beta^2}) d\varphi \} = d(p + iq).$$

Mainot  $+i$  uz  $-i$  dabonam:

$$(\rho - i\rho_1) \{ \alpha d\lambda + (\beta - i \sqrt{\alpha\gamma - \beta^2}) d\varphi \} = d(p - iq).$$

No abiem beidzamajiem vienādojumiem iznāk:

$$\left. \begin{aligned} \alpha d\lambda + (\beta + i \sqrt{\alpha\gamma - \beta^2}) d\varphi &= \frac{d(p + iq)}{\rho + i\rho_1}, \\ \alpha d\lambda + (\beta - i \sqrt{\alpha\gamma - \beta^2}) d\varphi &= \frac{d(p - iq)}{\rho - i\rho_1}. \end{aligned} \right\} \quad (364)$$

Šis izteiksmes ievietojam (363) formulā; tad:

$$\alpha (ds)^2 = \frac{1}{\rho^2 + \rho_1^2} (dp + i dq) (dp - i dq).$$

Apzīmējot  $\frac{1}{\alpha(\rho^2 + \rho_1^2)}$  ar  $h$ , dabūsim:

$$(ds)^2 = h (dp + i dq) (dp - i dq). \quad (365)$$

Ar šo formulu ir noteikts pirmās virsas elementa diferenciāls. Tādā pašā ceļā izteic arī otrās virsas (356) loku  $dS$ . Analoģiskā izteiksme būs:

$$(dS)^2 = H (dP + i dQ) (dP - i dQ). \quad (366)$$

Caur to mērogs pēc (358) formulas būs:

$$m = \sqrt{\frac{H(dP + i dQ) (dP - i dQ)}{h (dp + i dq) (dp - i dq)}} \dots (c).$$

Kā jau agrāki bija teikts, vienādleņķu projekcijai mērogs  $m$  nedrīkst būt atkarīgs no loku  $ds$  un  $dS$  virziena uz apskatāmām virsām, bet tam jābūt tikai  $\lambda$  un  $\varphi$  funkcijai. Analītiski šo prasību var formulēt tā, ka apakšradikāla lielums nedrīkst būt atkarīgs no neatkarīgo mainīgo lielumu diferenciāliem, jeb ar citiem vārdiem, skaitītajam ir jādalās ar saucēju. Šāda dalamības iespēja būs:

1) vai nu tad, kad  $dP + i dQ$  dalās ar  $dp + i dq$  un  $dP - i dQ$  ar  $dp - i dq$ , jeb

2) kad  $dP + i dQ$  dalās ar  $dp - i dq$  un  $dP - i dQ$  ar  $dp + i dq$ .

No šīm divi varbūtībām katra dod leņķupareizus attēlus, pirmā gadījumā tiešu, otrā — apgriestu. Otrais gadījums, kas ir it kā pirmā attēls plakanā spogulī, kur tas, kas ir labā pusē attēlojas kreisā un otrādi, nedod jaunu atrisinājumu un kartografijā nav lietojams.

Apskatot tikai  $dP + i dQ$  dalamību ar  $dp + i dq$ , dabūsim funkciju  $P + i Q$  un  $p + iq$  sakarību. Dalamības gadījumā

$$P + i Q = f(p + iq), \quad (367)$$

kur  $f$  ir kaut-kādas patvaļīgas funkcijas zīme. Tad:

$$dP + i dQ = f'(p + iq) (dp + i dq)$$

$$\text{un } \frac{dP + i dQ}{dp + i dq} = f'(p + iq).$$

Šāda izteiksme norāda uz dalamības iespēju. Ieliekot (367) formulā  $+i$  vietā  $-i$  un rīkojoties tāpat, dabūsim, ka

$$P - iQ = f(p - iq). \quad (368)$$

$$\text{un } \frac{dP - i dQ}{dp - i dq} = f'(p - iq).$$

Ja šīs sakarības pastāv, tad zemradikāla lielums nav atkarīgs no neatkarīgo mainīgo lielumu diferenciāliem, kamdēļ (367) un (368) pieņēmumi dos uzstādītās prasības apmierinājumu. Arī paša (367) vai (368) pieņēmuma iespējamību var pierādīt. Atgriezīsimies pie daļas

$$\frac{dP + i dQ}{dp + i dq}, \dots (d)$$

kurai nevajaga būt atkarīgai no neatkarīgo mainīgo lielumu diferenciāliem. Lielumi  $P$ ,  $Q$ ,  $p$ ,  $q$  ir  $\lambda$  un  $\varphi$  funkcijas; pieņemsim, ka

$$p = \phi_1(\lambda, \varphi), \\ q = \phi_2(\lambda, \varphi).$$

No šiem nolīdzinājumiem noteiksim  $\lambda$  un  $\varphi$ , kas, vismaz teorētiski, ir pilnīgi iespējams, jo  $\lambda$  un  $\varphi$  ir neatkarīgie mainīgie lielumi. Caur  $p$  un  $q$  izteiktās  $\lambda$  un  $\varphi$  nozīmes ieliksīm  $P$  un  $Q$  izteiksmes; tad šie pēdējie paši iznāks  $p$  un  $q$  funkcijas; tāpēc var pieņemt:

$$P = \Phi_1(p, q), \\ Q = \Phi_2(p, q).$$

Tagad pierādīsim, ka gadījumā, ja daļa (d) ir neatkarīga no diferenciāliem  $dp$  un  $dq$ , tad tas būs vienīgi tikai tanī gadījumā, kad

$$P \pm i Q = f(p \pm i q).$$

Lai to pierādītu, uzrakstīsim (d) daļas skaitītāja diferenciālu pilnīgā veidā:

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial p} dp + \frac{\partial P}{\partial q} dq + i \left( \frac{\partial Q}{\partial p} dp + \frac{\partial Q}{\partial q} dq \right)}{dp + i dq} = \\ = \frac{\frac{\partial P}{\partial p} + i \frac{\partial Q}{\partial p} + \left( \frac{\partial P}{\partial q} + i \frac{\partial Q}{\partial q} \right) \frac{dq}{dp}}{1 + i \frac{dq}{dp}}$$

Šī pēdējā izteiksme nebūs atkarīga no attiecības  $\frac{dq}{dp}$  tanī gadījumā, ja

$$\frac{\partial P}{\partial p} + i \frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{1}{i} \left( \frac{\partial P}{\partial q} + i \frac{\partial Q}{\partial q} \right),$$

$$\text{jeb } i \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{\partial P}{\partial q} + i \frac{\partial Q}{\partial q}.$$

Tā kā  $P$  un  $Q$  ir lietišķas funkcijas, tad no pēdējā vienādojuma iznāk:

$$\frac{\partial P}{\partial p} = \frac{\partial Q}{\partial q} \text{ un } \frac{\partial Q}{\partial p} = -\frac{\partial P}{\partial q}.$$

Šie nolīdzinājumi būs apmierināti, ja apmierināts nolīdzinājums:

$$P + iQ = f(p + iq).$$

Rekapitulēsim uzdevuma: „attēlot doto virsu uz otras dotās virsas tā, lai bezgalīgi mazās daļās iznāktu līdzība“ atrises gaitu. Papriekšu abu doto virsu nolīdzinājumus izteic parametriskā veidā (357); tad noteic atsevišķu koordinātu pieaugumus (360); ar to palīdzību sastāda loka bezgalīgi maza elementa nolīdzinājumu (362), kā divu lielumu kvadrātu summu un pēc tam izteic  $ds$  un  $dS$ , kā divu diferenciālo summu reizinājumu; beidzot katrai tādai  $M d\lambda + N d\varphi$  veida summai uziet integrējošo reizuļi. Šāda reizuļa uziešana ir uzdevuma visgrūtākā daļa, jo, vispār ņemot, tā noved pie diferenciālnolīdzinājuma ar parcelām atvasinātām integrācijas. Pēc integrējošā reizuļa uziešanas, funkciju  $P$ ,  $Q$ ,  $p$  un  $q$  aplese nav grūta, jo jautājums novests pie kvadrātūrām.

Ar uzskaitītām darbībām uzdevuma atrisinājums vispārīgā veidā ir pabeigts. Lai dabūtu atrisinājumus atsevišķos gadījumos, vajadzēs dot ar (367) un (368) nolīdzinājumiem noteiktām funkcijām daždažādas nozīmes un, beidzot, būs jānoteic šinīs funkcijās ievesto konstanto koeficientu nozīmes. Mērogu  $m$  katrā atsevišķā gadījumā aprēķina pēc (c) formulas. Ar (367) un (368) izteiksmju palīdzību to var izteikt sekoši:

$$m = \sqrt{\frac{H}{h}} f'(p + iq) f'(p - iq). \quad (369)$$

Nākošā, 48. §, apskatīta šīs vispārīgās teorijas pielietošana pie sferoīda virsas leņķupareizās attēlošanas uz plaknes un apskatīti arī atsevišķi atrisināšanas gadījumi, atkarībā no funkciju veida (367) un (369) nolīdzinājumos.

**48. Vispārīgās teorijas pielietošana kartogrāfijā.** — Augšā apskatītā vispārīgā teorijā noderīga ikuņas virsas vienādleņķīgai attēlošanai uz otras patvaļīgas virsas. Kartogrāfijā tomēr jāatrisina šaurāks uzdevums — zemes sferoidiskās virsas attēlošana uz plaknes. Šī uzdevuma atrisei vispārīgās iepriekšējā 47. § formulas var atvietot ar citām, vienkāršākām un vairāk piemērotākām sevišķiem gadījumiem.

Divi doto virsu vispārīgo nolīdzinājumu vietā tagad jāņem sferoīda un plaknes nolīdzinājumi taisnleņķu koordinātās. Ja koordinātu sākumu iedomāsimies zemes centrā, X un Y ass ekvatora plaknē un Z ass ies pa zemes griezes asi, tad sferoīda nolīdzinājums būs:

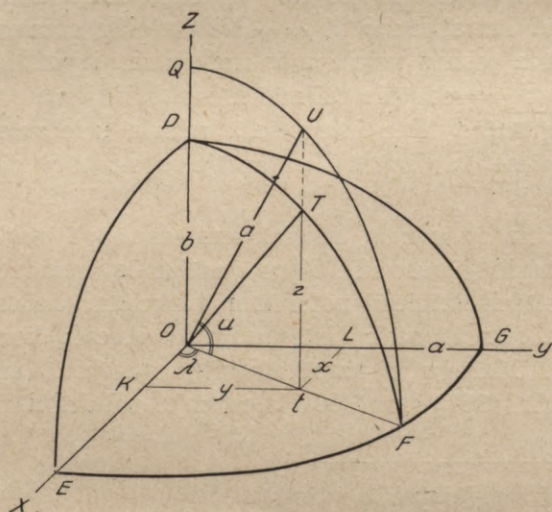
$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad (370)$$

kur  $a$  — ekvatora rādius un  $b$  griezes ass puse.

Plaknes nolīdzinājums ir daudz vienkāršāks, proti:

$$z = 0. \quad (371)$$

Šie abi nolīdzinājumi, (370) un (371), atbilst vispārīgās teorijas nolīdzinājumiem (355) un (356). Pārveidosim (370) nolīdzinājumu tā, lai tam būtu (357) nolīdzinājumu veids, t. i., izteiksim koordinātas  $x$ ,  $y$  un  $z$ , kā garuma un platuma funkcijas.



88. zīm.

Iedomāsimies, ka EPG (88. zīm.) ir sferoīda virsas astotā daļa, ka  $OE = OG = a$  un  $OP = b$  ir sferoīda pus-asis. Uz sferoīda virsas iedomāsimies punktu T, noteiktu ar taisnleņķu koordinātām  $OK = x$ ,  $Kt = y$  un  $Tt = z$ . Plakne OPTF, kas iet caur zemes centru O, polu P un punktu T, ir meridiāna plakne, kas stateniskā pret ekvatora plakni EOG;  $\sphericalangle FOE = \lambda$  noteic garumu starpību starp koordinātu plakni XOZ — sākuma meridiānu un punkta T meridiāna plakni. No

punkta O, kā centra, ar rādiusu  $OF = a$ , punkta T meridiāna plaknē novilksim loku QF un līniju tT turpināsim līdz krustojumam punktā U ar šo aploci. Savienojot U un O ar taisni OU dabūjam  $\sphericalangle UOF = u$ , ko, kā zināms, sauc par punkta T reducēto jeb pievesto platumu (sk. 14. un 18. lappuses). No taisnleņķu trīsstūriem KOT un tOU rakstām:

$$\begin{aligned} x &= Ot \cdot \cos \lambda, \\ y &= Ot \cdot \sin \lambda, \\ z &= Tt. \end{aligned}$$

No elipses nolīdzinājuma  $\frac{tT}{tU} = \frac{b}{a} = \sqrt{1-e^2}$ .

Bez tam:  $Ot = a \cos u$ ,  
 $tU = a \operatorname{sn} u$ .

Tāpēc punkta T koordinātas  $x$ ,  $y$  un  $z$ , kā gaņuma  $\lambda$  un pievestā platuma  $u$  funkcijas, iznāk:

$$\begin{aligned} x &= a \cos u \cos \lambda, \\ y &= a \cos u \operatorname{sn} \lambda, \\ z &= a \sqrt{1-e^2} \cdot \operatorname{sn} u. \end{aligned}$$

Sferoida virsas kaut-kāda punkta pievesto platumu  $u$  pēc tā paša punkta ģeografiskā platuma  $\varphi$  var noteikt pēc formulām (sk. 18. lpp.):

$$\cos u = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi}}, \text{ vai } \operatorname{sn} u = \operatorname{tg} u \cdot \cos u = \frac{\sqrt{1-e^2} \cdot \operatorname{sn} \varphi}{\sqrt{1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi}}.$$

Ievietojot šis  $\cos u$  un  $\operatorname{sn} u$  nozīmes augšējās formulās dabūsim punkta T koordinātas  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , kā ģeografiskā gaņuma un platuma funkcijas:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{a \cos \lambda \cos \varphi}{\sqrt{1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi}} = \frac{a \cos \lambda \cos \varphi}{W}, \\ y &= \frac{a \operatorname{sn} \lambda \cos \varphi}{\sqrt{1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi}} = \frac{a \operatorname{sn} \lambda \cos \varphi}{W}, \\ z &= \frac{a (1-e^2) \operatorname{sn} \varphi}{\sqrt{1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi}} = \frac{a (1-e^2) \operatorname{sn} \varphi}{W} \end{aligned} \right\} \quad (372)$$

Šīs formulas atbilst vispārīgās teorijas (357) formulām. Pieturoties pie (359) formulās pieņemtiem apzīmējumiem dabūsim:

$$\begin{aligned} a &= -\frac{a \operatorname{sn} \lambda \cos \varphi}{\sqrt{1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi}}, & a_1 &= -\frac{a (1-e^2) \cos \lambda \operatorname{sn} \varphi}{(\sqrt{1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi})^3}; \\ b &= \frac{a \cos \lambda \cos \varphi}{\sqrt{1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi}}, & b_1 &= -\frac{a (1-e^2) \operatorname{sn} \lambda \cos \varphi}{(\sqrt{1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi})^3}; \\ c &= 0, & c_1 &= \frac{a (1-e^2) \cos \varphi}{(\sqrt{1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi})^3}. \end{aligned}$$

Palīglielumi pēc (361) formulas ir:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi}, & \beta &= 0, & \gamma &= \frac{a^2 (1-e^2)^2}{(1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)^3} \end{aligned} \right\} \quad (373)$$

Ar šiem lielumiem (362) nolīdzinājums, pēc saīsināšanas ar  $\alpha$ , pieņem veidu:

$$(ds)^2 = \frac{a^2 \cos^2 \varphi (d\lambda)^2}{1 - e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi} + \frac{a^2 (1 - e^2)^2}{(1 - e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)^3} (d\varphi)^2,$$

jeb

$$(ds)^2 = \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \operatorname{Sn}^2 \varphi} \left( (d\lambda)^2 + \frac{(1 - e^2)^2}{\cos^2 \varphi (1 - e^2 \operatorname{Sn}^2 \varphi)^2} (d\varphi)^2 \right).$$

Kvadrātu summu iekavās, saskaņā ar vispārīgo teoriju, saliekam divi reizinātajos pēc (363) formulas; tad:

$$(ds)^2 = \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi} \left( d\lambda + i \frac{1 - e^2}{\cos \varphi (1 - e^2 \operatorname{Sn}^2 \varphi)} d\varphi \right) \times \\ \times \left( d\lambda - i \frac{1 - e^2}{\cos \varphi (1 - e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)} d\varphi \right),$$

kur  $i = \sqrt{-1}$ . Izteiksmju iekavās integrēšanai nav vajadzīgs ievest integrējošo reizuli ( $r=1$ ) un saskaņā ar (364) pirmo formulu iznāk (sk. 162. lpp.):

$$d\lambda + i \frac{1 - e^2}{\cos \varphi (1 - e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)} d\varphi = d(\lambda + i \ln U),$$

$$\text{kur } U = \frac{\operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)}{\operatorname{tg}^e \left( 45^\circ + \frac{\psi}{2} \right)} \text{ un } \operatorname{sn} \psi = e \operatorname{sn} \varphi \text{ (sk. 191. form. 162 lpp.)}$$

Tāpēc šini gadījumā (sk. 274. lpp.):

$$p + iq = \lambda + i \ln U,$$

$$h = \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi}.$$

Plaknei iznāk:

$$(dS)^2 = (dx)^2 + (dy)^2,$$

jeb, pēc salikšanas divi reizinātajos:

$$(dS)^2 = (dx + i dy)(dx - i dy)$$

un

$$dx + i dy = d(x + iy).$$

Tāpēc

$$P + iQ = x + iy$$

$$\text{un } H = 1.$$

Tā tad, lai sferoida virsu attēlotu vienādlenķīgi uz plaknes, ir jābūt sekošai sakarībai starp taisnleņķu koordinātām  $x$ ,  $y$  un ģeografisko garumu  $\lambda$  un platumu  $\varphi$  (pareizāki: platuma funkciju  $U$ ):

$$x + iy = f(\lambda + i \ln U), \quad (374)$$

kur, kā jau bija teikts pie (367) un (368) formulu izvešanas, zīme  $f$  izteic pilnīgi patvaļīgu funkciju.

Mērogam  $m$  pēc (369) formulas iznāk:

$$m = \frac{\sqrt{1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi}}{a \cos \varphi} \sqrt{f'(\lambda + i \ln U) f'(\lambda - i \ln U)}. \quad (375)$$

Sevišķi gadījumi. — Ņemsim dažus (374) un (375) formulas lietošanas piemērus, dodot funkcijai  $f$  dažādas nozīmes.

1) Visvienkāršākās ir lineārās funkcijas. Pieņemsim, ka (374) nolīdzinājums ir sekošs:

$$x + iy = k(\lambda + i \ln U), \quad (376)$$

kur  $k$  ir konstants reizinātājs. No šī vienkāršā nolīdzinājuma tieši dabonam divi sekošus:

$$\begin{aligned} x &= k\lambda, \\ y &= k \ln U. \end{aligned}$$

Kā redzams, pirmā nolīdzinājumā ieiet tikai gaņums  $\lambda$  un otrā tikai platums  $\varphi$ ; tāpēc šie nolīdzinājumi tieši dod projekcijas meridiānu un parallēļu nolīdzinājumus; viegli saprotams, ka šīnī gadījumā meridiāni un parallēles attēlojas ka savā savā starpā stateniskas taisnas līnijas. Konstantes  $k$  noteikšanai pieņemsim, ka galvenam mērogam ir jābūt uz ekvatora. Tādā gadījumā:

$$\begin{aligned} f(\lambda + i \ln U) &= k(\lambda + i \ln U), \\ f(\lambda - i \ln U) &= k(\lambda - i \ln U); \end{aligned}$$

kāpēc

$$\begin{aligned} f'(\lambda + i \ln U) &= k, \\ f'(\lambda - i \ln U) &= k. \end{aligned}$$

Tamdēļ pēc (375) formulas:

$$m = \frac{k \sqrt{1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi}}{a \cos \varphi}.$$

Ja uz ekvatora, kur  $\varphi = 0^\circ$ , mērogs  $m = 1$ , tad  $k = a$  un

$$\begin{aligned} x &= a\lambda, \\ y &= \frac{a}{\mu} \log U, \end{aligned}$$

$$m = \sqrt{1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi} \cdot \sec \varphi.$$

Šis ir jau zināmās 26. § (195) un (203) formulas; tāpēc šis vispārīgās teorijas īpašs gadījums dod Merkatora projekciju.

2) Ņemsim visvienkāršāko pakāpes funkciju un (374) formulai dosim veidu:

$$x + iy = ke^{i(\lambda + i \ln U)}, \quad (377)$$

kur  $k$  ir konstants reizinātājs un  $e$  naturālo logaritmu pamats.

Tā kā  $e^{\ln U} = U$ , tad  $x + iy = ke^{i\lambda - \ln U} = k \cdot \frac{e^{i\lambda}}{U}$ .

Tā kā  $e^{i\lambda} = \cos \lambda + i \operatorname{sn} \lambda$ , tad  $x + iy = \frac{k}{U} (\cos \lambda + i \operatorname{sn} \lambda)$ .

Tā kā komplekso lielumu vienādojumā lietiskās un imaginārās daļas ir vienādas, tad projekcijas kaut-kāda punkta koordinātām  $x$  un  $y$  dabūsim sekošas formulas:

$$x = \frac{k}{U} \cos \lambda,$$

$$y = \frac{k}{U} \operatorname{sn} \lambda.$$

Lai dabūtu meridiāna nolīdzinājumu, izslēgsim no šiem abiem nolīdzinājumiem platumu  $\varphi$ , jeb no platuma  $\varphi$  atkarīgo lielumu  $U$ . Dalīsim otro nol. ar pirmo; tad:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \lambda.$$

Tas nozīmē, ka meridiāni ir starveidīgi no viena punkta (koordinātu sākuma) izejošas taisnas līnijas un leņķi starp šīm līnijām ir vienlīdzīgi gaŗumu starpībām. Lai dabūtu paraleļu nolīdzinājumu, izslēgsim no tiem pašiem nolīdzinājumiem gaŗumu  $\lambda$ ; pacelsim tos kvadrātā un saskaitīsim; tad:

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{k}{U}\right)^2.$$

Redzam, ka paraleles ir koncentriskas aploces. Mēroga aplēsei noder formulas:

$$f(\lambda + i \ln U) = ke^{i(\lambda + i \ln U)},$$

$$f(\lambda - i \ln U) = ke^{-i(\lambda - i \ln U)}$$

No šejienes:

$$f'(\lambda + i \ln U) = ik e^{i(\lambda + i \ln U)}$$

$$f'(\lambda - i \ln U) = -ike^{-i(\lambda - i \ln U)}$$

$$\text{un } f'(\lambda + i \ln U) f'(\lambda - i \ln U) = k^2 e^{-2 \ln U} = \frac{k^2}{U^2}.$$

Pēdējo izteiksmi ieliekam mēroga vispārīgā formulā (375); tad:

$$m = \frac{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi}}{a \cos \varphi} \cdot \frac{k}{U}.$$

Ja atkal pieņemsim, ka uz ekvatora ir galvenais mērogs, tad  $k = a$  un iepriekšējās formulas pieņem sekošu veidu:

$$x = \frac{a}{U} \cos \lambda, \quad y = \frac{a}{U} \operatorname{sn} \lambda, \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \lambda,$$

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{U^2}, \quad m = \frac{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi}}{U \cos \varphi}.$$

Sfērai  $a = R$ ,  $e = 0$ ,  $U = \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)$  un pēdējās trīs formulas

šīnī gadījumā pārvēršās par jau pazīstamām formulām (82), (83) un (81) (sk. 72. un 73. lpp.). Tā tad šis vispārīgās teorijas sevišķais gadījums dod sferoīda virsas polāro stereografisko projekciju, kamēr 10. § tika apskatīta tikai sfēras stereografiskā projekcija.

3) Ņemsim sarežģītāku pakāpes funkciju, kurā bez konstantā reizināja  $k$  ietilpst vēl reizinātājs  $\alpha$ :

$$x + iy = ke^{i\alpha(\lambda + i \ln U)}. \quad (378)$$

Šo funkciju, tāpat kā iepriekšējā gadījumā, var izteikt sekoši:

$$x + iy = \frac{k}{U^\alpha} (\cos \alpha \lambda + i \operatorname{sn} \alpha \lambda).$$

Lietisko un šķietamo daļu vienlīdzība dod sekošas formulas projekcijas koordinātu  $x$  un  $y$  aplēsei:

$$x = \frac{k}{U^\alpha} \cos \alpha \lambda,$$

$$y = \frac{k}{U^\alpha} \operatorname{sn} \alpha \lambda.$$

Dalot otro nolīdzinājumu ar pirmo dabonam meridiānu nolīdzinājumu:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \alpha \lambda.$$

Tā tad meridiāni ir starveidīgi no viena punkta izejošās taisnes, kas krustojas zem leņķiem  $\delta = \alpha \lambda$ .

Paralēļu nolīdzinājumu dabūsim paceļot abus nolīdzin. kvadrātā un saskaitot:

$$x^2 + y^2 = \left( \frac{k}{U^\alpha} \right)^2.$$

Tāpēc paralēles ir koncentriski riņķi ar rādiusiem

$$\rho = \frac{k}{U^\alpha}.$$

Mēroga  $m$  aplēsei ir:

$$f(\lambda + i \ln U) = ke^{i\alpha(\lambda + i \ln U)}$$

$$\text{un } f(\lambda - i \ln U) = ke^{-i\alpha(\lambda - i \ln U)}$$

No šejienes

$$f'(\lambda + i \ln U) = i \alpha k e^{i\alpha(\lambda + i \ln U)}$$

$$f'(\lambda - i \ln U) = -i \alpha k e^{-i\alpha(\lambda - i \ln U)}$$

$$\text{un } f'(\lambda + i \ln U) f'(\lambda - i \ln U) = \alpha^2 k^2 e^{-2\alpha \ln U} = \frac{\alpha^2 k^2}{U^{2\alpha}}.$$

Ieliekot šo izteiksmi mēroga vispārīgā formulā, (375) un ņemot vērā ka sferoida paraleles rādius ir  $r = \frac{a \cos \varphi}{W}$  (sk. 15. lpp.), dabūsim

$$m = \frac{k \alpha}{r U^\alpha}.$$

Visas šīs formulas ir jau izvestas 38. §; tāpēc šīs vispārīgās teorijas sevišķais gadījums aptver dažādas vienādenķu koniskās projekcijas.

4) Beidzot, kā ceturto piemēru ņemsim vēl komplicētāku eksponentfunkciju ar diviem konstantiem reizinātājiem  $\alpha$  un  $\beta$ :

$$x + iy = \frac{k}{i} \frac{1 - \beta e^{-i\alpha(\lambda + i \ln U)}}{1 + \beta e^{-i\alpha(\lambda + i \ln U)}}. \quad (379)$$

Izdarot analogiskus iepriekšējiem pārveidojumus dabūsim:

$$x + iy = \frac{k}{i} \cdot \frac{1 - \beta (\cos \alpha \lambda - i \operatorname{sn} \alpha \lambda) U^\alpha}{1 + \beta (\cos \alpha \lambda - i \operatorname{sn} \alpha \lambda) U^\alpha}.$$

Reizinot labās puses skaitītāju un saucēju ar  $i \{1 + \beta (\cos \alpha \lambda + i \operatorname{sn} \alpha \lambda) U^\alpha\}$  pēc pārveidojuma dabūjam sekošu izteiksmi:

$$x + iy = k \cdot \frac{2\beta U^\alpha \operatorname{sn} \alpha \lambda + i(\beta^2 U^{2\alpha} - 1)}{1 + 2\beta U^\alpha \cos \alpha \lambda + \beta^2 U^{2\alpha}}.$$

Izmantojot lietiskās un šķietamās daļas vienlīdzību dabūjam sekošas formulas koordinātu  $x$  un  $y$  aplēsei:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{2k\beta U^\alpha \operatorname{sn} \alpha \lambda}{1 + 2\beta U^\alpha \cos \alpha \lambda + \beta^2 U^{2\alpha}}, \\ y &= \frac{k(\beta^2 U^{2\alpha} - 1)}{1 + 2\beta U^\alpha \cos \alpha \lambda + \beta^2 U^{2\alpha}}. \end{aligned} \right\} \quad (380)$$

Meridiānu nolīdzinājumu dabūsim, ja izslēgsim platuma funkciju  $U$ . Izdalot  $x$  ar  $y$  dabūjam kvadrātnolīdzinājumu ar  $\beta U^\alpha$  kā nezināmo lielumu; šī nol. pozitīvā sakne būs:

$$\beta U^\alpha = \frac{y}{x} \operatorname{sn} \alpha \lambda + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} \operatorname{sn}^2 \alpha \lambda + 1}.$$

Šo  $\beta U^\alpha$  nozīmi ievietojam pirmā no (380) nol.; pēc pārveidojumiem dabūjam:

$$x^2 + 2k \operatorname{ctg} \alpha \lambda \cdot x + y^2 = k^2,$$

jeb 
$$(x + k \operatorname{ctg} \alpha \lambda)^2 + y^2 = (k \operatorname{cosec} \alpha \lambda)^2 \quad (381)$$

Kā redzam, meridiāni ir ekscentriskas aplodes ar centru koordinātām  $x_1 = -k \operatorname{ctg} \alpha \lambda$ ,  $y_1 = 0$  un rādiusiem  $\rho_1 = k \operatorname{cosec} \alpha \lambda$ . (382)

Paralēļu nol. dabūsim izsleidot no (380) formulām gaŗumu  $\lambda$ ; no nolīdzinājuma ar  $y$  dabonam:

$$\cos \alpha \lambda = \frac{k (\beta^2 U^{2\alpha} - 1) - y (\beta^2 U^{2\alpha} + 1)}{2\beta U^\alpha y}.$$

Ieliekam šo nozīmi nolīdzinājumā ar  $x$ ; tad:

$$\operatorname{sn} \alpha \lambda = \frac{x (\beta^2 U^{2\alpha} - 1)}{2\beta U^\alpha y}.$$

No abu pēdējo vienādojumu kvadrātu summas pēc pārveidojumiem iznāk:

$$x^2 - 2k \frac{\beta^2 U^{2\alpha} + 1}{\beta^2 U^{2\alpha} - 1} y + y^2 + k^2 = 0,$$

jeb:

$$x^2 + \left( y - k \frac{\beta^2 U^{2\alpha} + 1}{\beta^2 U^{2\alpha} - 1} \right)^2 = \left( k \frac{2\beta U^\alpha}{\beta^2 U^{2\alpha} - 1} \right)^2. \quad (383)$$

Iznākums rāda, ka arī paralēles ir ekscentrisku riņķu loki ar centru koordinātām  $x_2 = 0$ ,  $y_2 = k \frac{\beta^2 U^{2\alpha} + 1}{\beta^2 U^{2\alpha} - 1}$  un rādiusiem

$$\rho_2 = k \frac{2\beta U^\alpha}{\beta^2 U^{2\alpha} - 1}. \quad (384)$$

Mēroga  $m$  aplēsei ir:

$$f(\lambda + i \ln U) = \frac{k}{i} \frac{1 - \beta e^{-i\alpha(\lambda + i \ln U)}}{1 + \beta e^{-i\alpha(\lambda + i \ln U)}},$$

$$f(\lambda - i \ln U) = -\frac{k}{i} \frac{1 - \beta e^{i\alpha(\lambda - i \ln U)}}{1 + \beta e^{i\alpha(\lambda - i \ln U)}}.$$

No šejienes:

$$f'(\lambda + i \ln U) = \frac{2k\alpha\beta e^{-i\alpha(\lambda + i \ln U)}}{(1 + \beta e^{-i\alpha(\lambda + i \ln U)})^2},$$

$$f'(\lambda - i \ln U) = \frac{2k\alpha\beta e^{i\alpha(\lambda - i \ln U)}}{(1 + \beta e^{i\alpha(\lambda - i \ln U)})^2}$$

un tāpēc:

$$f'(\lambda + i \ln U) f'(\lambda - i \ln U) = \frac{4k^2\alpha^2\beta^2 U^{2\alpha}}{\{1 + \beta U^\alpha (e^{i\alpha\lambda} + e^{-i\alpha\lambda}) + \beta^2 U^{2\alpha}\}^2}.$$

Ievietosim te:

$$e^{i\alpha\lambda} = \cos \alpha\lambda + i \sin \alpha\lambda,$$

$$e^{-i\alpha\lambda} = \cos \alpha\lambda - i \sin \alpha\lambda.$$

Iznākumu ievietosim mēroga vispārīgā formulā (375); tad:

$$m = \frac{2k\alpha\beta \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}{a \cos \varphi (\beta^2 U^\alpha + 2\beta \cos \alpha\lambda + U^{-\alpha})}. \quad (385)$$

Pēdējā gadījumā dabūtās (380) — (385) formulas ir jau pazīstamās 44. § formulas (345), (346), (328), (327), (344), (343) un (385); starpība ir tikai tā, ka tikko dabūtās formulās  $\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)$  vietā ir komplicētāka platuma funkcija, proti funkcija  $U$ ; bez tam (385) formulā sfērai jāņem  $a = R$  un  $e = 0$ .

Tāpēc šis vispārīgās teorijas sevišķais gadījums dod Lagranža projekcijas vispārinājumu sferoidam.

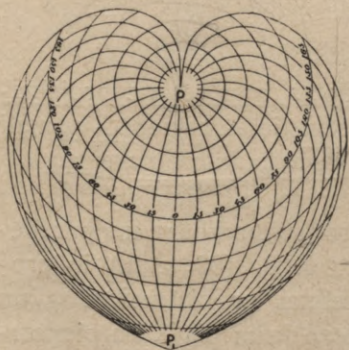
Slēgums. — Pagaidām Gausa teorija nav devusi kartografijai nevienu jaunu projekciju, bet gan devusi iespēju vispārināt visu agrāki zināmo vienādenķu projekciju formulas. Tā, piemēram, 44. §, pēc visai sarežģīta izveduma dabūtas Lagranža projekcijas formulas un pie tam tikai sfēras virsas attēlošanai; uz Gausa teorijas pamata šīs formulas dabūtas daudz vienkāršāki un pie tam tieši sferoida virsas attēlošanai uz plaknes.

## VIII. nodaļa.

### Vienāddielās projekcijas.

Iepriekšējās nodaļās jau apskatītas sekošas vienāddielās projekcijas: Lamberta zenitālā projekcija (16. §), trīs cilindriskās projekcijas (24., 25. un 34. §) un dažas koniskās projekcijas (37. §); tās ir tādas, kuŗu interpretācija no ģeometriskā viedokļa ir vienkārša. Šinī nodaļā apskatītas dažas citas ievērojamākās vienāddielās projekcijas un izvesta to vispārīgā teorija.

**49. Vernera projekcija.** — Nirnbergas zinātnieks, priesteris Verners (Johannes Werner, 1468—1528) izgudrojis vairākas projekcijas



89. zīm.

un to starpā 1514. g. arī vienu vienāddielu. Šinī projekcijā visas zemes virsa attēlojas sirds veidā (89. zīm.), kāpēc arī pašu projekciju dažreiz sauc par sirdsveidīgo.

Vernera projekcijas konstruēšanai novelk taisni  $PP_1$  (89. zīm.), kas attēlo sākuma meridiānu, un ap punktu  $P$ , kā centru, novelk koncentriskas aploces ar rādiusiem  $\rho$ , vienlīdzīgiem iztaisnotiem meridiānu lokiem no pola līdz attiecīgām paralēlēm; tāpēc

$$\rho = R \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right). \quad (386)$$

Šinī formulā  $R$  ir zemes rādius galvenā mērogā,  $\frac{\pi}{2}$  — aploces ceturtais daļas iztaisnots gaŗums pie rādiusa viens un  $\varphi$  ir attiecīgās paralēles platums.

Šī formula ir tāda pat, kā Posteļa projekcijas (135) formula. Uz katras tā novilktais aploces no sākuma meridiāna  $PP_1$  atliek paraleļu loku gaŗumus galvenā mērogā un caur dabūtiem punktiem novelk nepārtrauktas liknes, kas attēlos pārējos meridiānus. Šos paraleļu loku gaŗumus  $s$  ņem no gatavām tabulām (sk. tabulas paraugu sferoidam 19 lpp. un Latvijas platumiem pielikumā), jeb aprēķina pēc formulas:

$$s = \lambda R \cos \varphi, \quad (387)$$

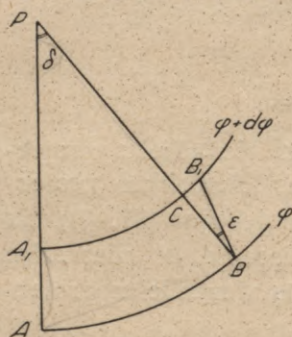
kur  $\lambda$  ir attiecīgā gaŗumu starpība, izteikta radiānos, resp. rādiusa

daļās. Tā kā pa riņķa lokiem tieši nevar atlikt aplēstos loka gaļumus, tad katrai paralēlei ir jāaprēķina leņķis  $\delta$  pie pola pēc formulas:

$$\delta = \frac{s}{\rho}.$$

Ieliekam te  $\rho$  un  $s$  nozīmes no iepriekšējām divi formulām, (386) un (387); tad:

$$\delta = \frac{\lambda \cos \varphi}{\frac{\pi}{2} - \varphi} \quad (388)$$



90. zīm.

Jo tālāku paralēle no pola, kas noder par centru, jo mazāks vienai un tai pašai gaļumu starpībai atbilstošais leņķis  $\delta$ ; tas sevišķi labi redzams no sekošiem skaitļiem, kas pēc (388)

formulas aprēķināti dažādiem platumiem pie  $\lambda = 360^{\circ}$ .

$\varphi = +90^{\circ}$	$+60^{\circ}$	$+30^{\circ}$	$0^{\circ}$	$-30^{\circ}$	$-60^{\circ}$	$-90^{\circ}$
$\delta = 360$	$343,8$	$297,7$	$229,2$	$148,9$	$68,8$	$0$

No meridiānu un paralēļu lokiem veidotās trapēces uz projekcijas ir vienādielas ar attiecīgām sfēras trapēcēm, jo tām vienādi pamati un augstumi; uz šī pamata Vernera projekcija ir laukumu pareiza.

Attēlu alterāciju šinī projekcijā mēro ar to, cik liela ir starpība starp taisno leņķi un leņķi, ko veido projekcijas meridiāni un paralēles savā starpā. Pieņemsim, ka loki  $AB$  un  $A_1B_1$  (90. zīm.) ir projekcijas divi bezgalīgi tuvas paralēles, noteiktas ar platumiem  $\varphi$  un  $\varphi + d\varphi$ ; punktu  $A$  un  $B$  gaļumu starpību nosauksim par  $\lambda$  un pieņemsim, ka tai uz projekcijas pie pola  $P$  atbilst leņķis  $BPA = \delta$ ; beidzot, pieņemsim, ka  $BB_1$  pēc gaļuma un virziena ir punkta  $B$  meridiāna loka elements. Leņķis  $PBB_1 = \epsilon$ , ko veido  $BB_1$  ar rādiusu  $PB$ , izteiks noteicamo alterāciju. Loka  $A_1B_1$  krustojuma punktu ar rādiusu  $PB$  apzīmēsim ar burtu  $C$ ; tad, uzskatot  $\sphericalangle B_1CB$  par taisnu, rakstam:

$$\operatorname{tg} \epsilon = \frac{CB_1}{CB} \quad \dots \quad (a)$$

No zīmējuma redzams, ka  $CB_1 = A_1B_1 - A_1C = \lambda R \cos(\varphi + d\varphi) - A_1P \cdot \delta$ . Šinī izteiksmē  $\cos(\varphi + d\varphi)$  izvīrzam rindā pēc Teilora formulas un aprobežojamies tikai ar pirmās pakāpes maziem lielumiem; dabūjam  $\cos(\varphi + d\varphi) = \cos \varphi - \operatorname{sn} \varphi d\varphi^*$ ; bez tam  $A_1P = R\left(\frac{\pi}{2} - \varphi - d\varphi\right)$ , saskaņā ar (386) formulu; ņemot vēl vērā (388) formulu dabūsim, ka:  $CB_1 = R(\delta - \lambda \operatorname{sn} \varphi) d\varphi$ .

\*) To pašu dabūsim ņemot nolīdzinājuma  $\cos(\varphi + d\varphi) = \cos \varphi \cos d\varphi - \operatorname{sn} \varphi \operatorname{sn} d\varphi$  labā pusē  $\cos d\varphi$  vietā 1 un  $\operatorname{sn} d\varphi$  vietā  $d\varphi$ .

Tā kā  $CB = AA_1 = R d\varphi$ , tad, ievietojot divi pēdējos lielumus (a) formulā, dabonam:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \delta - \lambda \operatorname{sn} \varphi. \quad (389)$$

No (388) formulas redzams, ka leņķis  $\delta$  ir proporcionāls gaņumam  $\lambda$ ; tāpēc leņķis  $\varepsilon$  aug ar gaņuma  $\lambda$  palielināšanu. Kad  $\lambda = 0^\circ$ , tad  $\varepsilon = 0^\circ$ ; tas nozīmē, ka uz vidējā meridiāna kontūras attēlojas nemainīgi. Attēla alterācijas nav arī uz pola, kur  $\varphi = 90^\circ$ ,  $\delta = \lambda$  un tā tad  $\varepsilon = 0^\circ$ . Vienai un tai pašai paralēlei leņķis  $\varepsilon$  būs vislielāks uz malejā meridiāna, kur  $\lambda$  ir vislielāks. Kad  $\lambda = 180^\circ$  (jeb  $\pi$ ), tad

$$\begin{aligned} \text{uz ekvatora } \operatorname{tg} \varepsilon &= 2, \quad \varepsilon = 63^\circ 26'; \\ \text{uz dienvidpola } \operatorname{tg} \varepsilon &= \pi, \quad \varepsilon = 72^\circ 21'. \end{aligned}$$

Tā tad punktā  $P_1$  (89. zīm.) leņķis starp malejiem meridiāniem ir  $144^\circ 41'$ .

Nākošā tabulā dotas leņķa  $\varepsilon$  skaitliskās nozīmes dažādiem paralēļu un meridiānu krustošanās punktiem, ar  $15^\circ$  lieliem intervāliem platumā un  $15^\circ$  vai  $30^\circ$  lieliem intervāliem gaņumā.

$\varphi$	$\lambda$									
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
$+90^\circ$	$0^0 0'$	$0^0 0'$	$0^0 0'$	$0^0 0'$	$0^0 0'$	$0^0 0'$	$0^0 0'$	$0^0 0'$	$0^0 0'$	$0^0 0'$
$+75$	0 0	0 20	0 41	1 1	1 22	1 42	2 2	2 43	3 24	4 5
$+60$	0 0	1 20	2 40	4 0	5 19	6 38	7 57	10 33	13 6	15 36
$+45$	0 0	2 54	5 47	8 38	11 26	14 12	16 53	22 2	26 50	31 15
$+30$	0 0	4 54	9 43	14 24	18 54	23 10	27 11	34 28	40 34	45 46
$+15$	0 0	7 9	14 5	20 37	26 39	32 6	36 58	45 6	51 26	56 24
0	0 0	9 28	18 26	26 34	33 41	39 48	45 0	53 8	59 2	63 26
$-15$	0 0	11 38	22 22	31 41	39 27	45 49	50 59	58 43	64 5	67 57
$-30$	0 0	13 27	25 34	35 39	43 44	50 6	55 8	62 24	67 19	70 47
$-45$	0 0	14 46	27 48	38 21	46 32	52 49	57 42	64 38	69 14	72 28
$-60$	0 0	15 28	28 58	39 42	47 54	54 9	58 56	65 41	70 8	73 14
$-75$	0 0	15 27	28 56	39 40	47 52	54 7	58 55	65 40	70 7	73 13
$-90$	0 0	14 40	27 38	38 9	46 19	52 37	57 31	64 29	69 6	72 21

No leņķa  $\varepsilon$  atkarājas līniju un leņķu alterācijas uz projekcijas. Pēc 90. zīm. mērogs pa meridiāniem  $m_m$ , t. i., loka  $BB_1 = CB : \cos \varepsilon$  attiecība pret  $R d\varphi$  iznāk:

$$m_m = \sec \varepsilon. \quad (390)$$

Mērogs uz meridiāna būs vienlīdzīgs galvenam tur, kur leņķis  $\varepsilon = 0$ , t. i. gar vidējo meridiānu un pie ziemeļpola. Zemāki dotas mēroga  $m_m$  skaitliskās nozīmes tiem pašiem punktiem, kādiem iepriekšējā tabulā aprēķinātas leņķu alterācijas.

$\varphi$	$\lambda$									
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	120°	150°	180°
+90	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
+75	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,001	1,001	1,002	1,003
+60	1,000	1,000	1,001	1,002	1,004	1,007	1,010	1,017	1,027	1,038
+45	1,000	1,001	1,005	1,011	1,020	1,031	1,045	1,079	1,121	1,170
+30	1,000	1,004	1,015	1,032	1,057	1,088	1,124	1,213	1,316	1,434
+15	1,000	1,008	1,031	1,068	1,119	1,180	1,252	1,417	1,604	1,807
0	1,000	1,014	1,054	1,118	1,202	1,302	1,414	1,667	1,944	2,236
-15	1,000	1,021	1,081	1,175	1,295	1,435	1,589	1,926	2,288	2,664
-30	1,000	1,028	1,108	1,231	1,384	1,559	1,749	2,159	2,592	3,039
-45	1,000	1,034	1,131	1,275	1,453	1,655	1,872	2,335	2,820	3,319
-60	1,000	1,038	1,143	1,300	1,492	1,707	1,938	2,429	2,942	3,468
-75	1,000	1,038	1,143	1,299	1,491	1,706	1,937	2,427	2,939	3,464
-90	1,000	1,034	1,129	1,272	1,448	1,647	1,862	2,321	2,803	3,297

Mērogs  $m_p$  pa paralelēm, kā tas tieši redzams no projekcijas konstruēšanas paņēmiena, ir vienlīdzīgs galvenam, t. i.:

$$m_p = 1. \quad (391)$$

Platību mērogam  $p$  arī jābūt visur 1; pēc (49) formulas:

$$p = m_m \cdot m_p \cdot \sin \Theta = \sec \varepsilon \cdot 1 \cdot \sin (90^\circ - \varepsilon) = 1.$$

Vislielākā leņķu alterācija  $\omega$  pēc (53) formulas iznāk:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varepsilon. \quad (392)$$

Sekojošā tabula, kas atbilst divi iepriekšējam, dotas leņķa  $2\omega$  skaitliskās nozīmes projekcijas dažādiem punktiem.

$\varphi$	$\lambda$									
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	120°	150°	180°
+90°	0° 0'	0° 0'	0° 0'	0° 0'	0° 0'	0° 0'	0° 0'	0° 0'	0° 0'	0° 0'
+75	0 0	0 20	0 41	1 1	1 22	1 42	2 3	2 43	3 24	4 5
+60	0 0	1 20	2 40	4 0	5 20	6 40	7 59	10 38	13 17	15 54
+45	0 0	2 54	5 48	8 41	11 33	14 25	17 15	22 53	28 23	33 46
+30	0 0	4 54	9 47	14 38	19 26	24 10	28 48	37 48	46 21	54 22
+15	0 0	7 11	14 18	21 19	28 10	34 49	41 14	53 17	64 11	73 56
0	0 0	9 32	18 56	28 4	36 52	45 14	53 8	67 23	79 37	90 0
-15	0 0	11 45	23 15	34 18	44 44	54 26	63 22	78 55	91 37	101 59
-30	0 0	13 38	26 54	39 28	51 7	61 45	71 19	87 28	100 11	110 15
-45	0 0	15 1	29 33	43 10	55 37	66 47	76 42	93 3	105 39	115 25
-60	0 0	15 45	30 56	45 5	57 55	69 21	79 24	95 49	108 17	117 53
-75	0 0	15 44	30 54	45 2	57 52	69 17	79 20	95 45	108 13	117 49
-90	0 0	14 55	29 21	42 53	55 16	66 25	76 18	92 38	105 15	115 2

Ievēribu pelna tas apstākļi, ka alterācijas  $\varepsilon$  un no šiem leņķiem atkarīgie lielumi  $m_m$  un  $\omega$  uz viena un tā paša meridiāna neaug vis nepārtraukti, sākot no ziemeļpola līdz dienvidpolam; bet no sākuma gan aug, sasniedz uz kaut-kādas paralēles maksimumu un pēc tam

sāk mazināties. Platumu  $\varphi_1$  paralēlei, uz kuŗas  $\epsilon$ ,  $m_m$  un  $2\omega$  ir vislielākie, dabūsim pielīdzinot nullei (389) nolīdzinājuma pirmo atvasināto pēc mainīgā  $\varphi$ , iepriekš atvietojot leņķi  $\delta$  ar (388) izteiksmi un uzskatot gaŗumu  $\lambda$  par konstantu lielumu. Šāda darbība noved pie transcendentā nolīdzinājuma:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 + \left( \frac{\pi}{2} - \varphi_1 \right) - \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \varphi_1} = 0. \quad (393)$$

Atrisinot šo nolīdzinājumu ar vairākkartīgu tuvināšanos un interpolāciju dabonam:  $\varphi_1 = -67^{\circ}12'$ .

Tā tad vislielākās alterācijas ir uz paralēles, kas tuvu dienvidus polāram riņķim. Uz šīs paralēles pie gaŗumiem  $\lambda = 90^{\circ}$  un  $\lambda = 180^{\circ}$  lielumi  $\epsilon$ ,  $m_m$  un  $2\omega$  ir sekoši:

$$\begin{aligned} \epsilon &= 59^{\circ}05' \text{ un } 73^{\circ}20', \\ m_m &= 1,948 \text{ un } 3,486, \\ 2\omega &= 79^{\circ}43' \text{ un } 118^{\circ}10'. \end{aligned}$$

Apreķināsim pēc (35) formulām (44. lpp.) indikatrisas pusasis a un b:

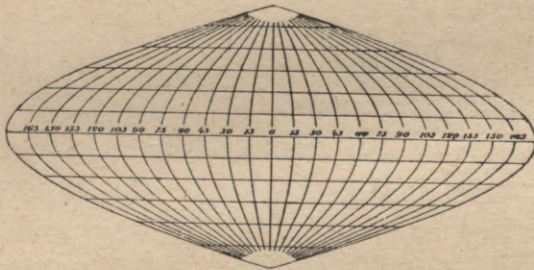
$$\begin{array}{l} \lambda = 90^{\circ} \qquad \qquad \lambda = 180^{\circ} \\ \varphi = 0^{\circ}0' \left\{ \begin{array}{l} a = 1,618 \\ b = 0,618 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} a = 2,414 = \sqrt{2} + 1 \\ b = 0,414 = \sqrt{2} - 1 \end{array} \right. \\ \varphi = -67^{\circ}12' \left\{ \begin{array}{l} a = 2,138 \\ b = 0,468 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} a = 3,617 \\ b = 0,276. \end{array} \right. \end{array}$$

Tā tad Vernera projekcija platības gan nemaina, bet ļoti liela mērā sagroza kontūrus un alterācijas aug ar attālināšanos no ziemeļpola un vidējā meridiāna. Šo projekciju varētu lietot visas Amerikas attēlošanai, jo augstos ziemeļplatumus šis kontinents tāļu stiepjas pa paralēli (ģeogr. gaŗumā) un pamazām sašaurinājas uz dienvidiem; neraugoties uz to, šo projekciju arī tur nelieto. Tāpēc viņa pelna ievēribu tikai no teorētiskā viedokļa, saskaņā ar ko tā uzskatāma par Bonna projekcijas (51. §) īpatnēju gadījumu.

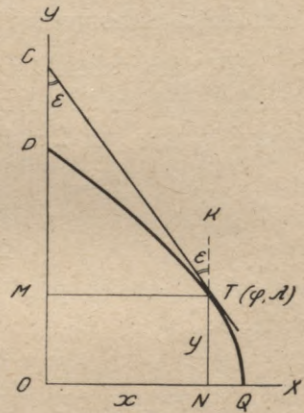
**50. Sansona projekcija** — Franču ģeogrāfs, karaļa Lui XIV. skolotājs Sansons (Nicolas Sanson, 1600—1667) izgudrojis vienādlieļu projekciju, kuŗu dažreiz, aiz pārpratuma, sauc par Flemstīda (John Flamsteed, 1646—1719) projekciju. Flemstīds bija Grinvičas observātorijas pirmais direktors un šīnī, Sansona izgudrotā, projekcijā sastādīja savas krietnās zvaigžņu kartes (Atlas coelestis), kuŗas tika izdotas tikai pēc viņa nāves, 1729. g. Sansons jau 1650. g. izdevis atlasu ar kartēm, konstruētām pēc viņa metodes.

91. zīm. attēlo Sansona projekciju visai zemes virsai ar meridiāniem un paralēlēm ik pa  $15^\circ$ .

Projekcijas konstruēšanai uz taisnes, kuŗu pieņem par valsts vidējo meridiānu, atliek iztaisnotos meridiānu loku gaŗumus starp divi attēlojamām blakus paralēlēm, t. i.,  $R(\varphi_2 - \varphi_1)$ ; caur dabūtiem punktiem novelk ne aploces, kā Vernera projekcijā, bet stateniskas pret vidējo meridiānu taisnes; šīs taisnes uz projekcijas attēlo paralēles. Uz katras taisnes, uz abām pusēm no vidējā meridiāna atliek iztaisnotus paralēļu loku gaŗumus starp divi attēlojamiem blakus meridiāniem, t. i.,  $\lambda R \cos \varphi$ , galvenā mērogā. Savienojot ar nepārtrauktām liknēm punktus, kas dabūti vienam un tam pašam  $\lambda$ , dabū attiecīgos meridiānus.



91. zīm.



92. zīm.

Tā kā uz projekcijas no divi blakus meridiāniem un divi blakus paralēlēm norobežoto trapeču pamati un augstumi ir vienādi ar attiecīgiem sfēras (jeb sferoida) paralēļu un meridiānu loku gaŗumiem, tad uz projekcijas katras atsevišķas trapeces platība ir vienlīdzīga atbilstošai sfēras (jeb sferoida) trapēces virsas platībai un tāpēc apskatāmā projekcija ir vienādiela.

Sansona projekcijas īpašību tuvākai izpētīšanai uziesim atsevišķu punktu koordinātu formulas. Par taisnleņķu koordinātu  $x$  asi ņemsim projekcijas ekvātoru un par  $y$  asi vidējo taisnlīnījisko meridiānu (92. zīm.). Ar platumu  $\varphi$  un gaŗumu  $\lambda$  noteiktā punkta  $T$  taisnleņķa koordinātas, kā platuma un gaŗuma funkcijas, būs:

$$x = ON = R \lambda \cos \varphi, \quad (394)$$

$$y = OM = NT = R \varphi, \quad (395)$$

kur  $R$  ir zemes sfēras rādius, samazināts galvenā mērogā. Lai dabūtu meridiānu nolīdzinājumu, izslēgsim no šiem abiem nol. platumu  $\varphi$ . No otrā nol. noteikto  $\varphi$  nozīmi ieliksīm pirmā nolīdzinājumā;

tad 
$$x = R \lambda \cos \frac{y}{R} = R \lambda \operatorname{sn} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{y}{R} \right). \quad (396)$$



No šīs tabulas un arī no (397) formulas redzams, ka leņķis  $\epsilon = 0$  uz vidējā meridiāna ( $\lambda = 0^0$ ) un uz ekvatora ( $\varphi = 0^0$ ); tas nozīmē, ka vidējais meridiāns ar paralelēm un visi meridiāni ar ekvatoru krustojās zem taisniem leņķiem; tā tad pa ekvatoru un vidējo meridiānu attēls ir platību un leņķu pareizs. Ar attālināšanos no vidējā meridiāna un ekvatora leņķis  $\epsilon$  nepārtraukti aug; malējām meridiānam ( $\lambda = \pi$ ) polā  $\text{tg } \epsilon = \pi$  un  $\epsilon = 72^0 21'$ ; tāpēc malējie meridiāni abos polos saiet zem leņķiem  $144^0 41'$  (91. zīm.); atcerēsimies, ka zem šāda leņķa dienvidpolā krustojas malējie meridiāni uz Vernera projekcijā.

Mērogus pa meridiāniem, tāpat kā Vernera projekcijā, noteic pēc formulas:

$$m_m = \sec \epsilon.$$

Paraleļu mērogi  $m_p$  un platību mērogi  $p$  ir  $= 1$ ; tāpēc nākošā tabulā doti tikai mērogi  $m_m$  un pie tam tiem pašiem punktiem, kādi ņemti iepriekšējā tabulā.

$\varphi$	$\lambda$									
	$0^0$	$15^0$	$30^0$	$45^0$	$60^0$	$75^0$	$90^0$	$120^0$	$150^0$	$180^0$
$90^0$	1,000	1,034	1,129	1,272	1,448	1,647	1,862	2,321	2,803	3,297
$75$	1,000	1,031	1,121	1,255	1,422	1,612	1,817	2,257	2,719	3,195
$60$	1,000	1,025	1,098	1,209	1,350	1,512	1,688	2,071	2,478	2,899
$45$	1,000	1,017	1,066	1,144	1,244	1,363	1,495	1,787	2,104	2,436
$30$	1,000	1,009	1,034	1,074	1,129	1,195	1,272	1,448	1,647	1,862
$15$	1,000	1,002	1,009	1,020	1,036	1,056	1,079	1,137	1,208	1,289
$0$	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Globa virsas bezgalīgi mazie riņķīši un kvadrātiņi attēlosies uz projekcijas ar vienādlīelām bezgalīgi mazām elipsēm un paralelogrammiem, izņemot vienīgi ekvatoru un vidējo meridiānu, kur tie attēlosies kā riņķīši un kvadrātiņi.

Leņķu vislielāko alterāciju aprēķina pēc vispārīgas (53) formulas, ņemot  $\theta = 90^0 - \epsilon$ ; šo aprēķinu iznākumi, reizināti ar divi, ir sekoši:

$\varphi$	$\lambda$									
	$0^0$	$15^0$	$30^0$	$45^0$	$60^0$	$75^0$	$90^0$	$120^0$	$150^0$	$180^0$
$90^0$	$0^0 0'$	$14^0 55'$	$29^0 21'$	$42^0 53'$	$55^0 16'$	$66^0 25'$	$76^0 18'$	$92^0 38'$	$105^0 15'$	$115^0 2'$
$75$	$0 0$	$14 25$	$28 23$	$41 33$	$53 39$	$64 36$	$74 22$	$90 39$	$103 19$	$113 13$
$60$	$0 0$	$12 56$	$25 33$	$37 34$	$48 47$	$59 5$	$68 27$	$84 25$	$97 10$	$107 22$
$45$	$0 0$	$10 35$	$20 59$	$31 2$	$40 38$	$49 40$	$58 5$	$73 2$	$85 35$	$96 0$
$30$	$0 0$	$7 29$	$14 55$	$22 13$	$29 21$	$36 15$	$42 53$	$55 16$	$66 25$	$76 18$
$15$	$0 0$	$3 53$	$7 45$	$11 36$	$15 26$	$19 14$	$22 59$	$30 20$	$37 26$	$44 15$
$0$	$0 0$	$0 0$	$0 0$	$0 0$	$0 0$	$0 0$	$0 0$	$0 0$	$0 0$	$0 0$

Līdzīgi tam, kā Vernera projekcijā tikai pie dienvidpolā, Sansona projekcijā pie abiem poliem alterācijas būs dažādas, atkarībā no

tā, kāds meridiāns ņemts par vidējo. Tas tāpēc, ka šinīs projekcijās vienam un tam pašam meridiānam abās pusēs minētos punktus nav kopīgas pieskares.

Tā kā ir gatavas tabulas (piemēram, šīs grāmatas pielikumā) meridiānu un paralēļu lokiem, tad Sansona projekcija konstruēšanas ziņā ir viena no visvienkāršākām, it īpaši vēl tāpēc, ka ievest zemes sfēriska saspiedumu arī nav grūti. Necīgās alterācijas ekvatora tuvumā padara to par sevišķi noderīgu tropu zemju attēlošanai. Gandrīz visos ģeografijas atlasos tādas pasaules daļas, kā Afrika, Dienvidamerika un Austrālija, tiek attēlotas Sansona projekcijā.

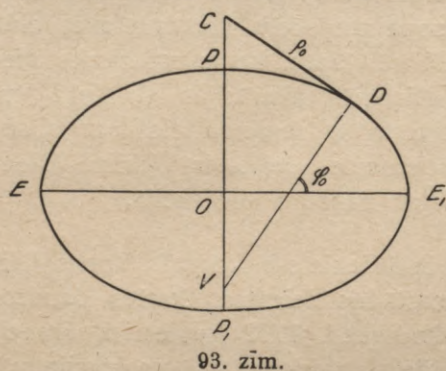
**51. Bonna projekcija.** — Franču inženiers-hidrografs Bonns (Rigobert Bonne, 1727—1795), kas sastādīja teicamas kartes daudzos sējumos izdotai „Encyclopédie Méthodique“, 1752. g. ieteica Francijas kartes sastādīšanai jaunu vienādlielu projekciju. Šī projekcija vēlāk guva lielu piekrišanu; 1803. g. to pieņēma Francijas armijas ģeografiskais dienests (Service géographique de l'Armée) Francijas kartes konstruēšanai mērogā  $\frac{1}{80000}$ . Daži autori šo projekciju sauc par pārveidoto Flemstīda projekciju (projection de Flamsteed modifiée).

Bonna projekcija tomēr nav pilnīgi jauna, jo norādījumi uz šādu attēlošanas veidu nomanāmi jau pie Aristoteles (384—322) kartēm; to pazinis arī Aleksandrijas Klaudijs Ptolemejs (150. g. pēc Kristus). Ptolemeja sistēmā nelielus pārgrozījumus ienesuši daži ģeografi, no kuriem būtu mināmi Piers Benewites (1520), Oronce Fine (1532), Guillaumē le Testu (1566).

Bonna projekcija ieņem vietu starp vienkāršo kona projekciju un sinusoidālo; viņa iegūst šo abi divi projekciju labās īpašības un tātad pašā laikā atbrīvojas kā no pirmās, tā otrās projekcijas trūkumiem.

Vienkāršā koniskā projekcijā galvenais mērogs ir uz visiem meridiāniem un uz vienas (pieskares) paralēles resp. platuma riņķa; turpretim uz visiem citiem platuma riņķiem mērogi ir lielāki par galveno (sk. 36. §, a). Uz sinusoidālās projekcijas galvenais mērogs tiek ieturēts uz visiem platuma riņķiem un tikai uz viena (vidējā) meridiāna; uz visiem citiem meridiāniem mērogi ir lielāki par galveno (50. §). Bonna projekcijā galvenais mērogs tiek ieturēts pa visām paralēlēm un vidējo meridiānu, bet projekcijas pārejās daļās vispār mērogs atšķiras no galvenā, salīdzinot daudz mazāk, nekā vienkāršā koniskā un sinusoidālā projekcijās. Paralēļu konstruēšanai Bonna projekcijā novelk koncentrisku loku sistēmu, tāpat kā vienkāršā koniskā projekcijā. Par vidējās paralēles rādiusu  $\rho_0$  ņem meridiāna pieskares

gaļumu no pieskares punkta līdz krustojumam ar turpināto zemes sferoīda asi; pieskares punktu ņem uz kartes (valsts) vidējās paralēles. Tā tad Bonna projekcija ir koniskā projekcija, kuŗu dabū izklājot konu, kas pieskares globam pa vidējo paralēli.



Ja  $EPE_1P_1$  (93. zīm.) ir meridiāna elipse un D tās punkts, noteikts ar platumu  $\varphi_0$  (Latvijas kartei, piemēram,  $56^{\circ}50' = \frac{1}{2}(58^{\circ}10' + 55^{\circ}30')$ ), tad meridiāna pieskare punktā D būs  $\rho_0 = CD = VD \cdot \cotg \varphi_0 = N_0 \cdot \cotg \varphi_0$ , (398)

kur  $VD = N_0 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0}}$  ir normāles jeb šķērsā līkuma rā-

diusa (sk. 16. lpp.) gaļums uz platumu  $\varphi_0$ .

Uz projekcijas par vidējo meridiānu ņem taisnu līniju un uz tās ņem visu paralēļu kopīgo centru; tāpēc vidējais meridiāns krusto visas paralēles zem taisniem leņķiem. Sākot no vidējā meridiāna atliek pa katru paralēli paralēļu loku gaļumus starp diviem blakus meridiāniem t. i.  $\frac{a \lambda \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$  (sk. 18. lpp.) galvenā mērogā, tāpat,

kā paskaidrots pie Vernerā projekcijas konstruēšanas (sk. 49. §).

Savienojot ar nepārtrauktām līknēm punktus, kas ir uz viena un tā paša meridiāna, dabūsim visus pārējos meridiānus, kā tas parādīts 94. zīmējumā, kuŗā attēlota visa zemes virsa Bonna projekcijā, pieņemot pieskares paralēles platumu  $\varphi_0 = 55^{\circ}$ .

Pieņemsim, ka OY ir vidējais taisnlīniskais meridiāns uz projekcijas (95. zīm.) un OM vidējās paralēles MN rādiuss  $\rho_0$ ; šīs paralēles centrs O ir par centru arī visām citām paralēlēm. Ar platumu  $\varphi$  noteiktās paralēles AB rādiusu  $\rho$  uz projekcijas aprēķina pēc formulas  $\rho = \rho_0 - s$ , (399)

kur s ir meridiāna loka gaļums AM starp paralēlēm, kuŗu platumi ir  $\varphi$  un  $\varphi_0$ ; šo loka gaļumu var ņemt tieši no gatavām tabulām (sk. pielikumā), jeb nelieliem attāļumiem aprēķina pēc formulas  $s = M(\varphi - \varphi_0)$ , kur M ir meridiāna līkuma rādiuss (sk. 16. un 19.—22. lpp.). Pēc tikko dotās formulas s iznāk pozitīvs, kad  $\varphi > \varphi_0$  un negatīvs, kad  $\varphi < \varphi_0$ ; pirmā gadījumā jāatņem, otrā jāpieskaita.

Pieņemsim, ka PBN ir ar gařumu  $\lambda$  noteiktā meridiāna daļa, skaitot gařumu no taisnlīniskā vidējā meridiāna Py.

Tā kā loka AB gařums uz projekcijas ir vienāds ar galvenā mērogā samazinātu attiecīgās paralēles loka gařumu uz sferoīda, tad nosaucot leņķi BOA par  $\delta$ , dabūsim:

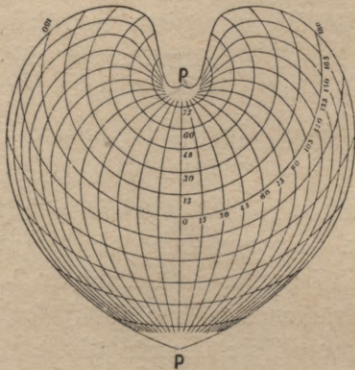
$$\frac{a \lambda \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi}} = \lambda N \cos \varphi = \rho \delta.$$

No šejienes

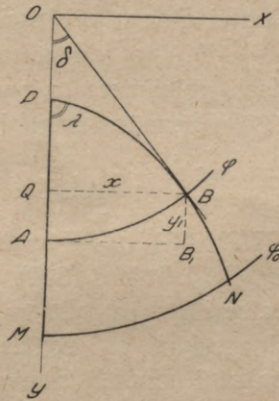
$$\delta = \frac{\lambda N \cos \varphi}{\rho}. \quad (400)$$

Arī Bonna projekciju lielā mērogā konstruē pēc punktiem, noteiktiem ar taisnleņķu koordinātu palīdzību. Piemēra dēļ uziesim taisnleņķu koordinātas  $x$  un  $y$  ar platumu  $\varphi$  un gařumu  $\lambda$  noteiktam punktam B. Par koordinātu sākumu ņemsim punktu O — visu paralēļu kopīgo centru;  $y$  asi virzīsim pa vidējo meridiānu PM uz apakšu un stateniski pret to ņemsim asi OX. Punkts B būs noteikts ar ordinātu  $OQ = y$  un abscisu  $QB = x$ . No taisnleņķa trīsstūra BOQ:

$$\left. \begin{aligned} y = OQ &= \overline{OB} \cdot \cos \delta = \rho \cos \delta \\ x = QB &= \overline{OB} \cdot \operatorname{sn} \delta = \rho \operatorname{sn} \delta \end{aligned} \right\} \quad (401)$$



94. zīm.



95. zīm.

Ar visām šīm formulām Bonna projekcijas konstruēšanas uzdevums ir pilnīgi atrisināts un darbības kārtība ir sekoša: pēc kartes, valsts vai apgabala vidējās paralēles platumā  $\varphi_0$  no (398) formulas aprēķina vidējās paralēles uz kartes rādiusu  $\rho_0$ ; tad pēc (399) for-

mulas aprēķina visu citu paralēļu rādījumus un, pēc tam pēc (400) un (401) formulām leņķus  $\delta$  un koordinātas visiem meridiānu un paralēļu krustošanās punktiem. Tā kā OM ir projekcijas vidējais meridiāns, tad koordinātas jāaprēķina tikai punktiem vidējā meridiāna vienā pusē, piemēram, uz rītiem, ņemot punktiem uz vakariem no vidējā meridiāna garumus  $\lambda$  ar negatīvu zīmi, kamdēļ leņķis  $\delta$  un abscisas  $x$  būs negatīvas; absolūtās nozīmes, turpretim, būs tādas pašas, kā rīta pusē. Parocīgāki ir aprēķināt ne ordinātu  $OQ = y$ , bet starpību  $AQ$  starp vidējā meridiāna  $PM$  un paralēles  $AB$  krustošanās punkta  $A$  ordinātu, resp. paralēles rādījumu  $\rho$  un punkta  $B$  ordinātu; nosaucot to par  $y'$  dabūsim:

$$AQ = BB_1 = y' = AO - QO = \rho - \rho \cos \delta = 2\rho \operatorname{sn}^2 \frac{\delta}{2}. \quad (402)$$

Saprotams, ka šīs paralēles un nākošo meridiānu uz rītiem krustošanas punktu noteikšanai  $\delta$  vietā jāņem  $2\delta, 3\delta, \dots, n\delta$ , kas savukārt, aprēķināti pēc  $2\lambda, 3\lambda, \dots, n\lambda$ . Viss sacītais par paralēles  $AB$  konstruēšanu ir spēkā pie visu citu pārējo paralēļu konstruēšanas. Savienojot punktus  $A, B \dots$  u. t. t. pakāpeniskā kārtībā ar nepārtrauktu līniju gar lekālu vai pat līnijālu dabūsim paralēles; savienojot, turpretim, punktus  $B, N \dots$ , noteiktus ar vienādiem  $\delta$ , dabūsim meridiānus.

**52. Skaitliskais piemērs.** — Aprēķināsim kartografisko tīklu Latvijas kartei Bonna projekcijā starp platumiem  $55^{\circ}30' - 58^{\circ}10'$  un garumā  $\pm 4^{\circ}0'$ , no vidējā meridiāna ( $24^{\circ}30'$  uz rītiem no Grinviča), punktiem, noteiktiem ar paralēlēm ik pa  $20'$  platumā un meridiāniem ik pa  $30'$  garumā mērogā  $1 : 500\,000$ .

**Atrise.** — Par vidējās paralēles platumu ņemsim  $\varphi_0 = \frac{1}{2}(55^{\circ}30' + 58^{\circ}10') = 56^{\circ}30'$ . Pēc (398) formulas  $\rho_0 = 4\,177\,735,481$  m. Pēc pielikumā dotās tabulas meridiāna loka garumiem  $B$ , dabūjam (399) formulā ieejošos meridiāna loka garumus  $s$  starp atsevišķām paralēlēm; tie ierakstīti zemāk dotās tabulas 2. slejā. Tālāki aprēķina projekcijas paralēļu rādījumus  $\rho$  pēc (399) formulas; tie ierakstīti minētās tabulas 3. slejā, bet 4. slejā ierakstīti šie rādījumi, samazināti projekcijas galvenā mērogā. Tabulas pedējā, 5. slejā, ierakstīti  $\delta$ , kas aprēķināti pēc (400) formulas; pārējos leņķus  $n\delta$  attiecīgo paralēļu un meridiānu krustošanās punktiem dabūsim dodot  $n$  lielumus no 1—8.

Platumi $\varphi$	Meridiāna loku garumi s starp atseviš- kām paralēlēm (metros)	Projekcijas paralēļu loku radiji $\rho$ (metros)	$\rho$ projekcijas mē- rogā 1:500 000 (centimetros)	$\delta$ pie $\lambda = 30'$
1	2	3	4	5
58°10'	18561,003	4029261,197	805,852	25°06",331
0	37120,542	4047822,200	809,564	" " ,430
57 40	37118,577	4084942,742	816,988	" " 587
20	37116,604	4122061,319	824,412	" " ,691
0	18557,558	4159177,923	831,836	" " ,742
56 50	18557,062	4177735,481	835,517	" " ,749
40	37112,624	4196292,543	839,258	" " ,742
20	37110,622	4233405,167	846,681	" " ,692
0	37108,608	4270515,789	854,103	" " ,592
55 40	18553,546	4307624,397	861,525	" " ,443
30		4326177,943	865,236	25°06",351

Uz šīs tabulas skaitļu pamata pēc (401) un (402) formulām aprēķinātās koordinātas x un y centimetros dod sekošu tabulu:

Sk. tabulu 300. lapp.

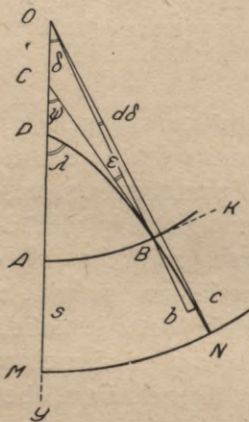
**53. Bonna projekcijas pētīšana.** — No konstruēšanas paņēmiena redzams, ka projekcijas trapēču pamati un augstumi ir vienādi ar galvenā mēroga samazinātiem globa atbilstošo trapēču pamatiem un augstumiem; tāpēc atbilstošās trapēces uz projekcijas un globa ir vienādlīelas. Globa bezgalīgi mazie riņķiši un kvadrātiņi uz projekcijas attēlojas kā riņķiši un kvadrātiņi tikai gar vidējo meridiānu un vidējo paralēli, bet projekcijas visās citās vietās tie attēlojas kā vienādlieli ellipses un paralēlogrammi, kuŗu lielās asis un diagonāles ziemeļrīta un dienvidvakara daļās iet no ziemeļvakariem uz dienvidrītiem, bet ziemeļvakara un dienvidrīta daļās — otrādi — no ziemeļrītiem uz dienvakariem (sal. 94. zīm.). Alterācijas aug ar attālināšanos no vidējā meridiāna un videjas paralēles.

Alterāciju pētīšanai uzskatīsim zemi par sfēru ar rādiusu R; tad formulas vienkāršosies, bet pētījumos no tā necelsies manāmas kļūdas; no šāda pieņēmuma sfērai (398) — (400) formulas iznāk:

$$\rho_0 = R \cotg \varphi_0. \quad (403)$$

φ	λ								
	± 0°30'	± 1°0'	± 1°30'	± 2°0'	± 2°30'	± 3°0'	± 3°30'	± 4°0'	
58°10'	x	5,884	11,770	17,654	23,534	29,416	35,299	41,177	47,051
	y'	0,021	0,088	0,193	0,344	0,537	0,773	1,053	1,375
0	x	5,911	11,825	17,735	23,648	29,556	35,465	41,370	47,272
	y'	0,022	0,088	0,194	0,345	0,540	0,777	1,058	1,381
57 40	x	5,969	11,933	17,902	23,869	29,835	35,799	41,757	47,717
	y'	0,022	0,089	0,196	0,349	0,545	0,785	1,068	1,395
20	x	6,023	12,041	18,065	24,084	30,110	36,124	42,145	48,159
	y'	0,022	0,090	0,198	0,352	0,550	0,792	1,078	1,408
0	x	6,077	12,149	18,227	24,303	30,381	36,449	42,524	48,592
	y'	0,022	0,091	0,200	0,355	0,555	0,799	1,088	1,420
56 40	x	6,132	12,258	18,390	24,520	30,652	36,775	42,904	48,968
	y'	0,022	0,092	0,202	0,358	0,560	0,806	1,097	1,433
20	x	6,186	12,367	18,552	24,737	30,923	37,100	43,283	49,460
	y'	0,023	0,092	0,204	0,361	0,565	0,813	1,107	1,446
0	x	6,240	12,475	18,715	24,953	31,190	37,425	43,654	49,885
	y'	0,023	0,093	0,205	0,365	0,570	0,820	1,116	1,458
55 40	x	6,290	12,583	18,873	25,166	31,453	37,742	44,026	50,306
	y'	0,023	0,094	0,207	0,388	0,574	0,827	1,126	1,470
55 30	x	6,317	12,638	18,955	25,260	31,581	37,900	44,211	50,519
	y'	0,023	0,095	0,207	0,369	0,577	0,830	1,130	1,478

(Turpinājums no 299. lp.)



96. zīm.

$$\rho = \rho_0 - R(\varphi - \varphi_0). \quad (404)$$

$$\delta = \frac{\lambda R}{\rho} \cos \varphi. \quad (405)$$

Leņķis  $\epsilon$ . — Attēla alterācijas raksturo leņķis starp meridiāniem un paralēlēm uz projekcijas.

Pieņemsim, ka 96. zīmējumā Bonna projekcijā attēloti divi meridiāni PM, PN un divi paralēles MN, AB. Punktā B novilksim paralēlei AB pieskari BK un meridiānam PBN pieskari BC. Novilksim paralēles AB rādiusu un turpināsim to par bezgalīgi mazu gaļumu Bb = dρ; uzstādīsim stateni bc pret Ob un vilksim to līdz krustojumam ar meridiānu punktā c. Leņķi CBO nosauksim par  $\epsilon$ . Meridiāna loka bezgalīgi mazu daļu Bc var uzskatīt par taisni un par pieskares BC turpinājumu; tāpēc  $\sphericalangle cBb = \epsilon$  un no taisnleņķa trīsstūra Bbc  $\text{tg } \epsilon = bc : Bb$ . Savienojot punktu c ar O dabū  $\sphericalangle cOb = d\delta$ , kas ir leņķa  $\delta$  bezgalīgi mazs pieaugums pie virzišanās pa meridiānu uz

dienvidiem par bezgalīgi mazu loku Bc. Tā kā  $Bb = d\rho$ ,  $Ob = \rho + d\rho$ , tad  $bc = (\rho + d\rho) d\delta$ , un  $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{(\rho + d\rho) d\delta}{d\rho}$ . Atmetot otrās šķiras

$$\text{lielumu } d\rho \cdot d\delta \text{ dabūsim: } \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\rho d\delta}{d\rho} \dots (a)$$

Tā kā  $\rho$  ir platuma funkcija, tad diferencējot (405) formulu pēc mainīgā  $\varphi$  dabonam:

$$\frac{d\delta}{d\varphi} = \frac{\lambda R}{\rho^2} \left( -\rho \operatorname{sn} \varphi - \cos \varphi \frac{d\rho}{d\varphi} \right).$$

No (404) formulas  $d\rho = -R d\varphi \dots$  (b); ieliekot šo nozīmi iepriekšējā formulā, iznāk:

$$\frac{d\delta}{d\varphi} = \frac{\lambda R}{\rho^2} \left( R \cos \varphi - \rho \operatorname{sn} \varphi \right) \dots (c)$$

Ieliekam (a) formulā (b) un (c) nozīmes; tad:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \lambda \left( \operatorname{sn} \varphi - \frac{R}{\rho} \cos \varphi \right). \quad (406)$$

Ši vienādojuma otrā daļa sastāv no divi reizinājumiem un leņķis  $\varepsilon$  būs nulle tad, kad viens no reizinājumiem būs nulle. Tāpēc attēla alterāciju uz projekcijas nebūs, pirmkārt, pie  $\lambda = 0$ , t. i., gar visu vidējo meridiānu un, otrkārt, kad otrs reizinājums būs nulle. Atvietojot pēdējā gadījumā  $\rho$  ar tā nozīmi (404) un  $\rho_0$  ar (403), dabūsim nol.:

$$\operatorname{cotg} \varphi - \operatorname{cotg} \varphi_0 = \varphi_0 - \varphi,$$

kas iespējams tikai tanī gadījumā, kad

$$\varphi = \varphi_0.$$

Tā tad otrā gadījumā attēla sagrozījumu nav gar visu vidējo paralēli. Visos citos projekcijas punktos leņķis  $\varepsilon$  nav nulle; tas nozīmē, ka meridiāna pieskare CB (96. zīm.) nav stateniska pret paralēles pieskari BK. Uz ziemeļiem no vidējās paralēles, kur  $\varphi > \varphi_0$ , iznāk  $\varepsilon > 0$ , bet uz dienvidiem no tās, t. i. punktiem, kuriem  $\varphi < \varphi_0$ ,  $\varepsilon < 0$ . Piemēram punktā B (96. zīm.), kas uz ziemeļiem no vidējās paralēles MN un uz rītiem no vidējā meridiāna PM, ziemeļrita leņķis CBK starp meridiānu un paralēli ir plats un  $= 90^\circ + \varepsilon$ . Apskatīsim sīkāk leņķa  $\varepsilon$  izmaiņas gar paralēlēm un meridiāniem.

Vienai un tai pašai paralēlei (406) nol. labās puses otrs reizinājums ir konstants lielums un leņķis  $\varepsilon$  augs ar gaŗuma  $\lambda$  palielināšanos, t. i., uz rītiem un vakariem no vidējā meridiāna. Vislielākais  $\varepsilon$  būs pie vislielākā  $\lambda$ , t. i., vienai un tai pašai paralēlei projekcijas malējos punktos.

Tagad apskatīsim, kā mainās leņķis  $\varepsilon$  uz viena un tā paša meridiāna. Pie  $\varphi = \pm 90^\circ$  (406) formula dod  $\operatorname{tg} \varepsilon = \pm \lambda$ . Salīdzinot šo rezultātu ar (397) formulu redzam, ka Bonna projekcijā leņķi  $\varepsilon$  uz poliem ir tādi paši kā Sansona projekcijā, un ar garumu  $\lambda = \pm 180^\circ$  jeb  $\pm \pi$  noteiktie malējie meridiāni tāpat saietas zem  $144^{\circ}41'$  liela leņķa, neraugoties uz to, kāda paralele ņemta par vidējo (jo formulā neieiet  $\varphi_0$ ). Izrādās tomēr, ka  $\varepsilon$  nozīmes uz poliem nav maksimālas; lai dabūtu tās, tad pielīdzinām (406) izteiksmes pirmo atvasināto pēc mainīgā  $\varphi$  nullei; iznāk sekošs transcendents nol.:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{R^2 - \rho^2}{R\rho}. \quad (407)$$

Šī nolīdzinājuma saknes dod platumus  $\varphi_1$  tām paralēlēm, uz kurām, pie katra dotā vidējās paraleles platuma  $\varphi_0$ , iznāk vislielākās leņķu alterācijas. Šīs saknes var apreķināt vienīgi ar pakāpenisku tuvošanos un interpolēšanu. Tā kā  $\rho > R$ , tad platumus  $\varphi_1$  iznāk negatīvs.

Leņķa  $\varepsilon$  vislielāko negatīvo nozīmi  $\varepsilon_1$  dabūsim, ja no (407) nol.  $\varphi_1$  nozīmi ievietosim (406) nolīdzinājumā; tā kā  $\sin \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi_1 \cos \varphi_1$ , tad

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \lambda \left( \operatorname{tg} \varphi_1 \cos \varphi_1 - \frac{R}{\rho} \cos \varphi_1 \right) = -\lambda \frac{\rho_1}{R} \cos \varphi_1. \quad (408)$$

Te  $\rho_1$  ir ar platumu  $\varphi_1$  noteiktās paraleles rādiuss uz projekcijas.

Zemāk dotās tabulas otrā un trešā slejās doti platumi  $\varphi_1$  un leņķu  $\varepsilon_1$  absolūti lielākās nozīmes, ņemot vidējās paraleles platumus  $\varphi_0$  ik pa  $15^\circ$  un izdarot apreķinus pēc (407) un (408) formulām.

$\varphi_0$	$\varphi_1$	$\varepsilon_1$	$m_m$
$90^\circ$	$-67^\circ 12'$	$-73^\circ 20'$	3,487
75	$-67 16$	$-73 20$	3,487
60	$-67 49$	$-73 18$	3,480
45	$-69 25$	$-73 11$	3,457
30	$-72 52$	$-72 58$	3,414
15	$-79 5$	$-72 38$	3,350
0	$-90 0$	$-72 21$	3,298

Kopsavilksim pētījumu iznākus: Uz viena un tā pašā meridiāna leņķis  $\varepsilon$  ir vislielākais uz ziemeļpola, kur  $\operatorname{tg} \varepsilon = \lambda$ ; no šejienes sākot līdz vidējai paralēlei ar platumu  $\varphi_0$  tas nepārtraukti mazinājas līdz  $\varepsilon = 0$ ; tājāki uz dienvidiem leņķis  $\varepsilon$  paliek negatīvs un vis-

lielākā absolūtā nozīme pēc (408) formulas iznāk dienvidpuslodē pie platuma, kas noteicams pēc (407) nolīdzinājuma; pēc tam leņķa  $\varepsilon$  absolūtā nozīme mazinājas un uz dienvidpola iegūst to pašu nozīmi ( $\operatorname{tg} \varepsilon = -\lambda$ ) kā uz ziemeļpola, bet tikai ar pretējo zīmi.

Turpmāk dota Bonna projekcijai leņķu  $\epsilon$  tabula, kas aprēķinata pēc (406) formulas pie vidējā platuma  $\varphi_0 = 55^\circ$  dažādiem punktiem ik pēc  $15^\circ$  platuma un  $30^\circ$  garuma.

$\varphi$	$\lambda$						
	$0^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
$+90^\circ$	$0^\circ 0'$	$+27^\circ 38'$	$+46^\circ 19'$	$+57^\circ 31'$	$+64^\circ 29'$	$+69^\circ 06'$	$+72^\circ 21'$
$+75$	$0 0$	$+ 6 50$	$+13 29$	$+19 46$	$+25 37$	$+30 56$	$+35 43$
$+60$	$0 0$	$+ 1 31$	$+ 3 01$	$+ 4 31$	$+ 6 01$	$+ 7 30$	$+ 8 59$
$+45$	$0 0$	$- 3 02$	$- 6 03$	$- 9 02$	$-11 58$	$-14 51$	$-17 39$
$+30$	$0 0$	$- 7 49$	$-15 20$	$-22 22$	$-28 45$	$-34 27$	$-39 27$
$+15$	$0 0$	$-12 45$	$-24 20$	$-34 09$	$-42 08$	$-48 31$	$-53 37$
$0$	$0 0$	$-17 30$	$-32 15$	$-43 25$	$-51 36$	$-57 37$	$-62 09$
$-15$	$0 0$	$-21 44$	$-38 34$	$-50 06$	$-57 54$	$-63 21$	$-67 19$
$-30$	$0 0$	$-25 09$	$-43 12$	$-54 37$	$-61 58$	$-66 55$	$-70 27$
$-45$	$0 0$	$-27 33$	$-46 13$	$-57 25$	$-64 24$	$-69 01$	$-72 17$
$-60$	$0 0$	$-28 49$	$-47 44$	$-58 47$	$-65 34$	$-70 01$	$-73 09$
$-75$	$0 0$	$-28 52$	$-47 48$	$-58 51$	$-65 37$	$-70 04$	$-73 11$
$-90$	$0 0$	$-27 38$	$-46 19$	$-57 31$	$-64 29$	$-69 06$	$-72 21$

Pie  $\varphi_0 = 90^\circ$  Bonna projekcija pārvēršas par Vernera projekciju un pie  $\varphi_0 = 0^\circ$  par Sansona projekciju.

Mērogs. — Šī paragrafa sākumā bija teikts, ka leņķa  $\epsilon$  lielums ir par mēru projekcijas attēlu alterācijām. Par to vēl pārliecināsimies izvedot formulu mērogam pa meridiānu. Ta kā pēc 96. zīmējuma meridiāna elements  $Bc = Bb \sec \epsilon = d\rho \sec \epsilon$  un globa atbilstošais meridiāna elements ir  $-R d\varphi$ , tad mērogs pa meridiāniem, ņemot vērā (b) formulu, būs:

$$m_m = - \frac{d\rho \sec \epsilon}{R d\varphi} = \sec \epsilon. \quad (409)$$

Pēc šīs formulas aprēķinātie vislielākie mērogi dažādiem gadījumiem doti aiziepriekšējās tabulas pēdējā slejā.

Mērogi pa paralēlēm un platību mērogi, kā tas izriet no konstruēšanas paņēmieniem, ir vienlīdzīgi vienam.

Leņķu vislielākās alterācijas aprēķina pēc (53) formulas, ņemot  $\Theta = 90^\circ \pm \epsilon$ ; tad

$$\operatorname{tg} \omega = \pm \frac{1}{2} \operatorname{tg} \epsilon. \quad (410)$$

Leņķis  $\psi$ . — Izsekosim, zem kāda leņķa  $\psi$  ar vidējo taisnlīnijisko meridiānu PM (96. zīm.) krustojas citu liklīņu meridiānu pieskares. Novelkot liklīņas meridiānam PBN pieskari BC punktā B dabūsim  $\sphericalangle BCA = \psi$  un trīsstūri COB; no pēdējā redzams, ka

$$\psi = \delta + \epsilon. \quad (411)$$

Leņķis  $\psi$  būs nulle un meridiāna pieskare uz projekcijas būs paralēla vidējam meridiānam pie  $\varepsilon = -\delta$ . Šo  $\varepsilon$  nozīmi ieliksīm (406) formulā un tās pašas formulas labā daļā pēc iekavu atvēršanas pēdējo locekli  $\frac{\lambda R \cos \varphi}{\rho}$  atvietosim ar  $\delta$ , saskaņā ar (400) formulu; tad iznāks:

$$\lambda \operatorname{sn} \varphi = \delta - \operatorname{tg} \delta. \quad (412)$$

Tā kā vienmēr  $\delta < \operatorname{tg} \delta$ , tad  $\varphi < 0^\circ$ ; tas nozīmē, ka uz katra meridiāna dienvidus puslodē ir punkts, kurā meridiāna pieskare ir paralēla vidējam meridiānam.

Šī punkta platumu dabonam no transcendentā nolīdzinājuma (412); maziem gaļumiem  $\lambda$  arī leņķis  $\delta$  ir mazs un tāds punkts nav tālu no ekvatora; ar gaļuma  $\lambda$  augšanu šis punkts virzās uz dienvidiem. Atsevišķā gadījumā, projekcijai uz 94. zīmējuma, pie  $\varphi_0 = 55^\circ$ , pieskare ar gaļumu  $\lambda = \pi$  ( $=180^\circ$ ) noteiktam malējam meridiānam ir paralēla vidējam meridiānam ar platumu  $\varphi = -30^\circ 39'$  noteiktā punktā; tad  $\delta = +70^\circ 33'$  un  $\varepsilon = -70^\circ 33'$ .

Punktiem, kas tālāki uz ziemeļiem, leņķis  $\psi > 0$  un punktiem, kas vairāk uz dienvidiem  $\psi < 0$ ; tā tad vispār likie meridiāni ir piegriezuši savu ieliekumu vidējam taisnlīnijiskam meridiānam; tomēr tas ir spēkā tikai līdz zināmam robežjošam gaļumam  $\lambda$ , kad tālākiem meridiāniem ir izliekuma maiņas punkts, kā tas redzams no 94. zīm. Šo punktu noteikšana ir grūta. Apmierināsimies ar to, ka uziesim punktu, kurā kaut-kāda meridiāna pieskare ir stateniska pret vidējo meridiānu, t. i., uziesim punktu, kurā meridiāna pieskare ar vidējo meridiānu veido leņķi  $\psi = 90^\circ$ . Šinī gadījumā no (411) formulas  $\operatorname{tg} \varepsilon = \operatorname{cotg} \delta$ . Ja šo tangensa nozīmi ieliksīm (406) formulā un atkal izdarīsim tādu pašu atvietošanu ar  $\delta$ , kā pie (412) formulas izvešanas, tad dabūsim:

$$\lambda \operatorname{sn} \varphi = \delta + \operatorname{cotg} \delta. \quad (413)$$

Tā kā pie maziem gaļumiem  $\lambda$  arī leņķis  $\delta$  ir mazs, bet  $\operatorname{cotg} \delta$  ir liels, tad uz meridiāniem ar maziem gaļumiem nav punktu, kur  $\psi = 90^\circ$ ; tādi punkti var būt tikai uz meridiāniem ar lieliem gaļumiem un vienmēr tikai ziemeļpuslodē, ja  $\varphi_0 > 0^\circ$ ; uz meridiāna, kur notiek izliekuma maiņa, tāds punkts ir viens, bet uz tālākiem meridiāniem — pa divi. Bonna projekcijai, aprēķinātai pie  $\varphi_0 = 55^\circ$  un parādītai 94. zīmējumā, stateniska pret vidējo meridiānu līnija būs pieskare meridiānam ar gaļumu  $\lambda = \pi$  divi punktos: pie  $\varphi = 89^\circ 23'$  (kur  $\delta = 19^\circ 40'$  un  $\varepsilon = 70^\circ 21'$ ) un pie  $\varphi = 25^\circ 54'$  (kur  $\delta = 134^\circ 02'$  un  $\varepsilon = -44^\circ 02'$ ).

Augšā izvestās Bonna projekcijas formulas un prātojumi attiecās uz visas zemes virsas attēlošanu šinī projekcijā. Ja attēlo atsevišķu valsti, tad vispārīgās formulas ir iespējams pārveidot tā, ka tās iznāk vienkāršākas un ērtākas skaitļošanai.

Vispirms pārveidosim (406) divlocekļu formulu leņķa  $\varepsilon$  aplēsei. Ja starpību starp patvaļīga punkta platumu  $\varphi$  un vidējās paralēles platumu  $\varphi_0$  nosauksim par  $\Delta\varphi$ , tad

$$\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$$

un (404) formula, ņemot vērā (403), pieņem veidu:

$$\rho = R (\cotg \varphi_0 - \Delta\varphi).$$

Pie izvirkšanās rindā būs atļauts ņemt mazā lieluma  $\Delta\varphi$  tikai pirmās divas pakāpes; tāpēc:

$$\operatorname{sn} \varphi = \operatorname{sn} \varphi_0 \left( 1 - \frac{(\Delta\varphi)^2}{2} \right) + \Delta\varphi \cdot \cos \varphi_0,$$

$$\operatorname{cos} \varphi = \operatorname{cos} \varphi_0 \left( 1 - \frac{(\Delta\varphi)^2}{2} \right) - \Delta\varphi \cdot \operatorname{sn} \varphi_0.$$

Ja šos lielumus ievietosim (406) formulā, tad pēc pārveidojuma, ar to pašu noteiktību iznāk:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \lambda \cdot \Delta\varphi \cdot \operatorname{cos} \varphi_0. \quad (414)$$

Šī formula rāda, ka Bonna projekcijā attēla alterācijas ir atkarīgas no trīs lielumiem: 1) no gaŗuma  $\lambda$ , t. i. no punkta attāļuma līdz vidējam meridianam, 2) no  $\Delta\varphi$ , t. i. no punkta attāļuma līdz vidējai paralēlei un 3) no  $\varphi_0$ , t. i. no vidējās paralēles platumā.

Leņķis  $\varepsilon$  ir nulle uz vidējā meridiāna, kur  $\lambda = 0$  un uz vidējās paralēles, kur  $\Delta\varphi = 0$ . Ar attāļināšanos no vidējā meridiāna un no vidējās paralēles attēla alterācijas aug; pie tam punktos uz ziemeļiem no vidējās paralēles leņķi  $\varepsilon$  ir pozitīvi, bet punktos uz dienvidiem — negatīvi.

Ja attēlo globa virsas nelielu daļu, tad  $\lambda$  un  $\Delta\varphi$  nav lieli, kāpēc arī leņķi  $\varepsilon$  nav lieli. Piemēram, Francijas kartei Bonna projekcijā, pie  $\varphi_0 = 45^\circ$  malējiem punktiem  $\lambda = 6^\circ$  un  $\Delta\varphi = 3^\circ$ , kāpēc leņķi  $\varepsilon$  neiznāk lielāki par  $\pm 0^\circ 13'$ . Europas kartei Bonna projekcijā ar  $\varphi_0 = 55^\circ$  malējiem punktiem  $\lambda = 20^\circ$  un  $\Delta\varphi = 12^\circ$ ; tāpēc te leņķi  $\varepsilon$  nav lielāki par  $\pm 2^\circ 24'$ . Pie noteikta leņķa  $\varepsilon$  (414) formula atgādina hiperbolas nolīdzinājumu, kas sastādīts attiecībā uz tās asimptotām ( $xy = C$ ); tāpēc uz Bonna projekcijas izokoliem ir hiperbolas zaru veids (sk. 99. zīmējumu). Kad leņķi  $\varepsilon$  ir mazi, tad (406) formulā ir atļauts  $\operatorname{tg} \varepsilon$  atvietot ar  $\varepsilon$ ; ieliekot šo nozīmi un arī  $\delta$  nozīmi no (405) formulas (411) formulā, dabonam:

$$\psi = \lambda \operatorname{sn} \varphi. \quad (415)$$

Vienam un tam pašam meridiānam gaņums  $\lambda$  ir konstants lielums un  $\psi$  būs vislielāks pie  $\varphi = 90^\circ$ , t. i. uz ziemeļpola; sākot no šejienes tas nepārtraukti mazinājas līdz 0 uz ekvatora; tāļaki tas paliek negatīvs un uz dienvidpola, kur  $\varphi = -90^\circ$ ,  $\psi = -\lambda$ . Tāpēc visi ar nelieliem gaņumiem  $\lambda$  noteiktie meridiāni ir līknes, kas ar savu ieliekumu piegriestas vidējam taisnlīnijiskam meridiānam. (Šis slēdziens nedod nekā jauna, jo pie tāda nonācām jau agrāk, izpētot (412) izteiksmi). Tā kā (415) izteiksmē pavisam neieiet vidējās paralēles platums, tad meridiānu veids ir vienīgi atkarīgs no gaņuma  $\lambda$ , bet pavisam nav atkarīgs no tā, kāda paralēle pieņemta par vidējo. Tāpēc uz divi Bonna projekcijām ar dažādām vidējām paralēlēm ar vienu un to pašu gaņumu noteiktie meridiāni attēlosies kā vienādas līknes (sinusoidas), bet ar vienu un to pašu platumu noteiktās paralēles — kā riņķi ar nevienādiem radijiem. Ar to izskaidrojams, ka 91. un 94. zīm. ar maziem gaņumiem noteiktie meridiāni ir vienādas līknes.

Kad  $\varphi = 0$ , tad  $\psi = 0$ ; tas nozīmē, ka uz ekvatora visu meridiānu pieskares ir paralēlas vidējam meridiānam un pie tam neatkarīgi no tā, kāda paralēle ņemta par vidējo pie projekcijas konstruēšanas.

Kad  $\varphi = \varphi_0$ , tad  $\varepsilon = 0$  un  $\psi = \delta$ ; tas nozīmē, ka meridiānu pieskares uz vidējās paralēles iet caur visu paralēļu kopīgo centru un sakrīt ar vidējās paralēles radijiem. Kad  $\varphi > \varphi_0$ , tad leņķis  $\varepsilon > 0$ ; tā tad meridiānu pieskares krusto vidējo taisnlīnijisko meridiānu starp paralēlēm un to centriem; kad  $\varphi < \varphi_0$ , tad leņķis  $\varepsilon < 0$  un meridiānu pieskares krusto vidējo meridiānu aiz visu paralēļu kopīgā centra.

Nevar teikt, ka Bonna projekcijai alterācijas būtu mazākas, nekā citām projekcijām; neraugoties uz to šī projekcija ir dabūjusi vislielāku izplatīšanos un gandrīz visos ģeografijas atlasos Europu, Āziju un Ziemeļameriku attēlo Bonna projekcijā. Šī projekcija sastādīta arī priekškaņa Eiropas Krievijas trīsverstes (t. i. mērogā 3 verstes 1 angļu collā = 1 : 126000) kaņa topografijas karte, kuņas izdošana uzsākta jau 1847. g.

Tagad pāriesim pie Bonna projekcijas sīkākas izpētīšanas.

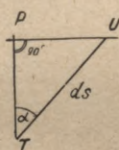
Azimutu alterācijas. — Ņemsim uz zemes virsas divi ļoti tuvus punktus T, U (97. zīm.) un savienosim tos ar loku  $TU = ds$ ; pieņemsim, ka šie abi punkti Bonna projekcijā attēlojas ar t, u un ka loks starp tiem  $tu = ds'$ . Tāļaki domāsim, ka PT un PU ir globa meridiāna un paralēles elementi, kam Bonna projekcijā atbilst meridiāna un paralēles elementi pt un pu. Trīsstūris TUP būs taisnleņķīgs punktā P, jo uz globa meridiāni un paralēles krustojas zem taisniem leņķiem; uz projekcijas atbilstošais trīsstūris tup, vispār ņemot, nebūs taisnleņķīgs. Ja no punkta t nolaidīsim stateni tq uz pu, tad šis statenis

ies paralēles pu radija virzienā. Saskaņā ar Bonna projekcijas konstruēšanas noteikumiem  $pu = PU$ ,  $qt = PT$ . Bez tam leņķis  $ptq = \varepsilon$ , jo pēc agrākā apzīmējuma tas ir leņķis starp paralēles radiju un meridiāna elementu resp. pieskari pie pēdējā, projekcijas dotā punktā. Globa loka elementa TU azimutu, t. i., leņķi PTU nosauksim par  $\alpha$  un uz projekcijas atbilstošo azimutu =  $\sphericalangle$  ptu par  $\alpha'$ . No zīmējuma redzam, ka

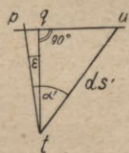
$$\operatorname{tg}(\alpha' - \varepsilon) = \frac{qu}{qt} = \frac{pu - pq}{qt} = \frac{PU}{PT} - \frac{pq}{qt} = \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \varepsilon.$$

To pašu leņķu starpības tangens pēc goniometrijas formulas ir  $\operatorname{tg}(\alpha' - \varepsilon) = \frac{\operatorname{tg} \alpha' - \operatorname{tg} \varepsilon}{1 + \operatorname{tg} \alpha' \operatorname{tg} \varepsilon}$ . . . (d); tāpēc  $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\operatorname{tg} \alpha' - \operatorname{tg} \varepsilon}{1 + \operatorname{tg} \alpha' \operatorname{tg} \varepsilon}$ .

Uzskatot te  $\operatorname{tg} \alpha'$  par nezināmo un atrisinot šo nolīdzinājumu dabonam:



$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\operatorname{tg} \alpha \cos^2 \varepsilon}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{sn} \varepsilon \cos \varepsilon}. \quad (416)$$



97. zīm.

Šī formula dod iespēju aplēst elementa azimutu  $\alpha'$  uz projekcijas pēc atbilstošā elementa dotā azimuta  $\alpha$  uz globa; iepriekš tomēr jāaprēķina šinī formulā ieejošais leņķis  $\varepsilon$  pēc (414) formulas. Pie ikkuŗas atsevišķas valsts attēlošanas leņķi  $\varepsilon$  nav lieli; tāpēc (416) formulu var vienkāršot un pārveidot tā, lai starpību  $\alpha' - \alpha$  varētu aplēst tieši. Šinī nolūkā ņem augšā uzrakstīto (d) formulu, ievieto tanī  $\operatorname{tg} \alpha'$  nozīmi (416) un izvirza  $\operatorname{sn} \varepsilon$  un  $\cos \varepsilon$  rindā; atmetot locekļus ar  $\varepsilon$  pakāpēs, augstākās par otro, pēc pārveidojumiem dabū:

$$\alpha' - \alpha = \varepsilon \operatorname{sn}^2 \alpha - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \operatorname{sn} 2\alpha \cos^2 \alpha. \quad (417)$$

Ja šī izteiksme dos nulli, tad azimutu alterācijas nebūs; tas būs tur, kur  $\varepsilon = 0$ , t. i. gar vidējo meridiānu un vidējo paralēli. Starpība  $\alpha' - \alpha$  aug ar  $\varepsilon$  augšanu resp. ar attālināšanos no vidējā meridiāna un vidējās paralēles; starpība būs vislielāka projekcijas stūros. Projekcijas vienā un tanī pašā punktā azimuts nemainās pie  $\alpha = 0^\circ$  un  $\alpha = 180^\circ$ , t. i. pa meridiānu; turpretim paralēles virzienā, pie  $\alpha = 90^\circ$  un  $\alpha = 270^\circ$ , kad  $\alpha' - \alpha = \varepsilon$ , azimutu izmaiņas būs vislielākas.

Leņķu alterācijas. — Katrs horizontālais leņķis ir divi līniju azimutu starpība. Ja uz globa leņķa malu azimutus nosauksim par  $\alpha$  un  $\beta$ , tad leņķis  $\gamma = \alpha - \beta$ . Uz projekcijas atbilstošā leņķa malu azimutus nosauksim par  $\alpha'$ ,  $\beta'$  un leņķi starp abām līnijām par  $\gamma'$ ; tad  $\gamma' = \alpha' - \beta'$ .

Uz (417) formulas pamata, ņemot tikai locekļus ar  $\varepsilon$  pirmā pakāpē, dabūsim:

$$\begin{aligned}\alpha' &= \alpha + \varepsilon \operatorname{sn}^2 \alpha, \\ \beta' &= \beta + \varepsilon \operatorname{sn}^2 \beta;\end{aligned}$$

tāpēc pēc otrās izteiksmes atņemšanas no pirmās iznāk:

$$\gamma' = \alpha' - \beta' = \gamma + \varepsilon (\operatorname{sn}^2 \alpha - \operatorname{sn}^2 \beta) = \gamma + \varepsilon \operatorname{sn} (\alpha + \beta) \operatorname{sn} (\alpha - \beta).$$

Vienkāršības dēļ nosauksim  $\frac{1}{2} (\alpha + \beta)$  par  $\alpha_0$ ; tad:

$$\gamma' - \gamma = \varepsilon \operatorname{sn} \gamma \operatorname{sn} 2\alpha_0. \quad (418)$$

No šīs formulas redzam, ka Bonna projekcijā leņķu alterācijas aug 1) ar leņķa  $\varepsilon$  augšanu, 2) ar leņķa  $\gamma$  augšanu no  $0^\circ$  līdz  $90^\circ$  un 3) ar vidējā azimuta  $\alpha_0$  augšanu no  $0^\circ$  līdz  $45^\circ$ . Leņķi nemainās gar vidējo meridiānu un gar vidējo paralēli, kur  $\varepsilon = 0$ . Nemainās arī tādi leņķi, kuŗu malas iet simmetriski pret meridiānu, jo tādiem leņķiem  $\alpha_0 = 0$ .

Līniju alterācijas. — No 97. zīmējuma:

$$\begin{aligned}tu &= ds' = tq \cdot \sec (\alpha' - \varepsilon), \\ TU &= ds = TP \cdot \sec \alpha.\end{aligned}$$

Tā kā Bonna projekcijai  $tq = TP$ , tad mērogs

$$m = \frac{tu}{TU} = \frac{\cos \alpha}{\cos (\alpha' - \varepsilon)}.$$

Pedējas daļas saucēja ieliekam  $\alpha'$  vietā tā nozīmi no (417) nol.; tad:

$$\begin{aligned}\cos (\alpha' - \varepsilon) &= \cos (\alpha + \varepsilon \operatorname{sn}^2 \alpha - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \operatorname{sn} 2\alpha \cos^2 \alpha - \varepsilon) = \\ &= \cos [\alpha - (\varepsilon \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \operatorname{sn} 2\alpha \cos^2 \alpha)] = \\ &= (1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \cos^4 \alpha) \cos \alpha + (\varepsilon \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \operatorname{sn} 2\alpha \cos^2 \alpha) \operatorname{sn} \alpha = \\ &= (1 + \frac{1}{2} \varepsilon \operatorname{sn} 2\alpha - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \cos^4 \alpha + \frac{1}{4} \varepsilon^2 \operatorname{sn}^2 2\alpha) \cos \alpha.\end{aligned}$$

$$\text{Tāpēc } m = (1 + \frac{1}{2} \varepsilon \operatorname{sn} 2\alpha - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \cos^4 \alpha + \frac{1}{4} \varepsilon^2 \operatorname{sn}^2 2\alpha)^{-1}.$$

Izvirzot šo izteiksmi rindā pēc Ņutona binoma formulas un atmetot locekļus ar  $\varepsilon$  pakāpēs, augstākās par otro, dabūsim:

$$m = 1 - \frac{1}{2} \varepsilon \operatorname{sn} 2\alpha + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \cos^4 \alpha. \quad (419)$$

Šī formula rāda, ka projekcijas dažādos punktos mērogs ir atkarīgs no leņķa  $\varepsilon$  un no elementa virziena. Ņemot tikai locekļus ar  $\varepsilon$  pirmā pakāpē, redzam, ka mērogs un līdz ar to līniju gaŗums visvairāk mainās pie azimutiem  $45^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $225^\circ$  un  $315^\circ$ . Kad azimuts  $\alpha = 0^\circ$ , jeb  $180^\circ$ , tad

$$m = m_m = 1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 = \sec \varepsilon, \text{ bet pie } \alpha = 90^\circ \text{ un } = 270^\circ,$$

$m = m_p = 1$ , kas pilnīgi saskan ar (409) formulu un tur teikto par paralēļu mērogu.

Ar polārkoordinātām noteikto punktu uznesšana. — Neraugoties uz to, ka pēc 94. un 99. zīm. paralēles un meridiāni ir likas līnijas, no blakus meridiāniem un blakus paralēlēm norobežotās figūras var uzskatīt par trapēcēm un tāpēc uz kartografiskā tīkla astronomiskos un triangulācijas punktus uznes tieši pēc to platumiem un garumiem. Apskatīsim te, kā uznest poligonometriska tīkla punktus, kuŗi noteikti ar polārām koordinātām resp. ar virzienu un garumu no trigonometriskā tīkla kāda punkta un malas.

Pieņemsim, ka uz projekcijas jau uznesti triangulācijas punkti T, U (98. zīm.) pēc to ģeografiskām koordinātām un jāuznes punkts t, kas uz zemes virsas noteikts ar leņķim UTt atbilstošo leņķi C un garumam Tt atbilstošu attālumu d. Uz kartes, no punkta T velk taisni TQ paralēli vidējam taisnlīnijiskam meridiānam; tāda jāvelk paralēli kartes lapas rāmja rīta vai vakara malai, jo uz katras lapas parasti attēlo taisnstūri, kam divas malas ir paralēlas vidējam meridiānam un divas — ziemeļ- un dienvid-stateniskas pret to. Domāsim, ka uz kartes TP ir punkta T meridiāns, kas ar taisni TQ veido leņķi  $PTQ = \psi$ . Šis pēdējais leņķis, kā arī leņķi  $\delta$ ,  $\epsilon$  ir zināmi visiem projekcijas meridiānu un paralēļu krustojuma punktiem un tāpēc tos viegli noteikt dotam punktam T ar interpolāciju. Zināms arī līnijas TU azimuts  $\alpha$  uz globa un viņam atbilstošais azimuts uz kartes, kas ir leņķis  $PTU = \alpha'$ , noteicams saskaņā ar (417) formulu.

Līnijas Tt azimutu uz globa nosauksim par  $\alpha_t$  un uz projekcijas atbilstošo azimutu, t. i., leņķi PTt par  $\alpha'_t$ . Uz (417) formulas pamata, atmetot locekļus ar  $\epsilon$  pakāpēs, augstākās par pirmo, ir:

$$\alpha'_t = \alpha_t + \epsilon \sin^2 \alpha_t \dots (e).$$

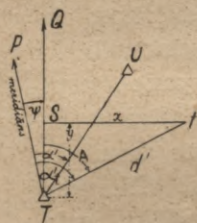
Lai uz projekcijas novilkta līnijas Tt virzienu, tad jāzin leņķis QTt, kuŗu nosauksim par A. Pēc zīmējuma

$$A = \alpha'_t - \psi.$$

Ievietojot te  $\alpha'_t$  nozīmi no (e) un  $\psi$  nozīmi no (411), dabonam:

$$A = \alpha_t - \delta - \epsilon \cos^2 \alpha_t. \quad (420)$$

Ar to ir noteikts līnijas Tt virziens uz kartes, attiecībā pret projekcijas vidējam taisnlīnijiskam un lapas kreisam un labam rāmjiem paralēlo līniju TQ; formulā ieieta līnijas Tt azimuts uz globa un kartes alterāciju leņķi  $\delta$ ,  $\epsilon$  punktā T. Pāriesim tagad pie garuma Tt noteikšanas. Šo garumu uz globa nosauksim par d un uz projekcijas par d'. Saskaņā ar 28. lappusē doto mēroga definējumu  $m = d' : d$ . Ieliekot



98. zīm.

te m nozīmi saskaņā ar (419) nol. un ņemot tikai locekļus ar  $\varepsilon$  pirmā pakāpē, dabūsim:

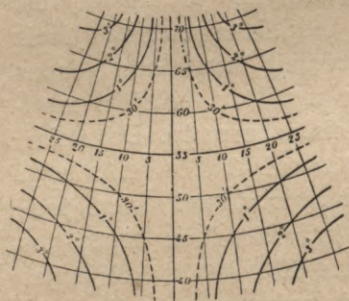
$$d' = d \left( 1 - \frac{1}{2} \varepsilon \operatorname{sn} 2\alpha_t \right). \quad (421)$$

Tā tad ar (420) un (421) formulām uzstādītais uzdevums ir atrisināts: uz projekcijas punkta  $t$  polārās koordinātas  $A$  un  $d'$  ir noteiktas, kā uz globa resp. sferoīda doto polāro kordinātu  $\alpha_t$  un  $d$  funkcijas.

Punkta  $t$  uznešana uz kartes praktiski būs ērtāka un pareizāka pēc taisnleņķu koordinātām. Šinī gadījumā par  $y$  asi var ņemt vidējām taisnlīnijiskam meridiānam paralēlo līniju  $PQ$  un par koordinātu sākumu punktu  $T$ ; tad:

$$\left. \begin{aligned} TS = y &= d' \cos A \\ St = x &= d' \operatorname{sn} A, \end{aligned} \right\} \quad (422)$$

kur  $A$  un  $d'$  jānoteic pēc (420) un (421) formulām.



99. zīm.

99. zīm. attēlo Bonna projekcijas tiklu Europas kartei starp platumiem  $40^{\circ}$ — $70^{\circ}$  un garumiem  $\pm 25^{\circ}$  no vidējā meridiāna. Pēc aprēķina vidējās paralēles platumš ņemts  $\varphi_0 = \frac{1}{2} (40^{\circ} + 70^{\circ}) = 55^{\circ}$ ; uz kartes meridiāni un paralēles novilkti ik pa  $5^{\circ}$ . Izokoli, t. i. liknes, kas savieno punktus ar vienādiem leņķiem  $\varepsilon$ , novilkti ik pa  $1^{\circ}$  ar nepārtrauktām līknēm un papildizokolas ar  $\varepsilon = 30'$  ar raustītu līniju. Kartes

pārējā centrālā daļā, kā redzams, alterācijas ir niecīgas.

Šis zīmējums rāda, ka Bonna projekcija sevišķi noderīga valstīm, kuŗu robežas iet pa šīs projekcijas izokoliem, t. i., tādām valstīm, kuŗām ir kvadrāta veids ar izgrieztiem stūriem ziemeļrītos, ziemeļvakaros, dienvidvakaros un dienvidrītos. Interesanti atzīmēt, ka Francija, kuŗai pirmai sastādīta karte Bonna projekcijā, patiešām atgādina kvadrātu ar izgrieztiem stūriem, bet šī kvadrāta stūri ir vīzīti uz ziemeļiem, vakariem, dienvidiem un rītiem, kāpēc taisni šai valstij Bonna projekcija parastā veidā ir mazāk izdevīga. Cita lieta būtu, ja iedomātos konu, kuŗa ass ar zemes asi veido zināmu leņķi, un aprēķinātu meridiāniem un paralēlēm atbilstošās palīglīknes un pēc tam šādu konu attēlotu Bonna projekcijā (sk. 39. §). Tādas kartes stūros leņķu alterācija būtu bijusi divreiz mazāka.

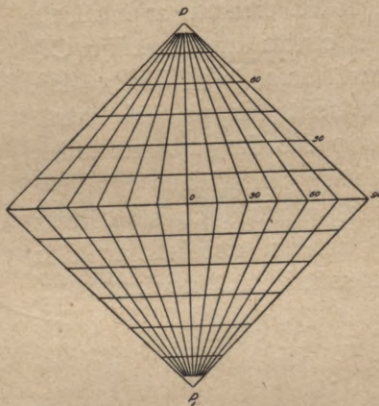
**54. Koliņjona projekcija.** — Franču inženiers Koliņjons (Charles Edouard Collignon), kas vienu laiku piedalījies Ļeņingradas-Ritupes

dzelzceļbūvē, izgudrojis visai vienkāršu vienādlielu projekciju austruma vai rietuma puslodes attēlošanai (sk. Journal de l'Ecole polytechnique, 41-e cahier, 1865). Šinī projekcijā visi meridiāni un visas paraleles ir taisnes, bet visa puslode attēlojas kā kvadrāts; tas redzams 100. zīmējumā, kas attēlo Koliņjona projekcijā pussferu ar meridiāniem un paralēlēm ik pēc  $15^{\circ}$  gaļumā un platumā.

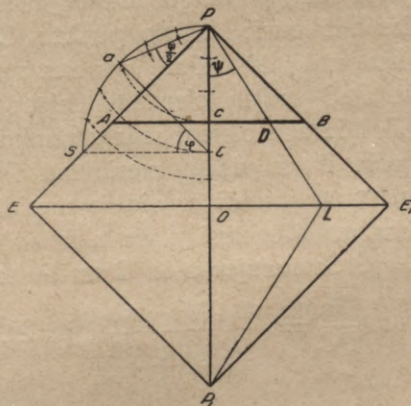
Ja kvadrāta pusdiagonāli nosauksim par  $k$ , tad kvadrāta platība būs  $2k^2$ ; lai šī kvadrāta platība būtu vienādliela ar pussfēras virsas platību, tad jāpastāv nolīdzinājumam:  $2k^2 = 2\pi R^2$ , kur  $R$  ir zemes sfēras radijs, samazināts pieņemtā galvenā mērogā un  $2\pi R^2$  pussfēras virsas laukums. No šī nol. iznāk:

$$k = R\sqrt{\pi}. \quad (423)$$

Kvadrāta diagonāle  $PP_1$  (100. zīm.) attēlo vidējo meridiānu un stateniskā pret to — ekvātoru; pēdējo sadala vienādās, piemēram, 12 daļās, ja meridiānus novelk ik pa  $15^{\circ}$  gaļuma; ar taisnēm dabūtos punktus savieno ar kvadrāta abām pretējām virsotnēm  $P, P_1$ , kas attēlo polus; tā dabūtās lauztās līnijas uz projekcijas attēlo meridiānus. Visiem dabūtiem trīsstūriem ar virsotnēm punktos  $P$  un  $P_1$  iznāk vienādi pamati un augstumi un tāpēc to platības netiekvien vienādas savā starpā, bet arī vienādlielas ar sfēras atbilstošo divsāni, norobežotu ar divi meridiāniem.



100. zīm.



101. zīm.

Platuma riņķus attēlo ar paralēli ekvātoram novilkām taisnēm; tās velk tā, lai uz projekcijas visas atsevišķas trapeces būtu vienādlielas ar zemes virsas trapēcēm, kas norobežotas ar tāda paša nosaukuma meridiāniem un paralēlēm. Tā, piemēram, ja taisne  $AB$  (101. zīm.) attēlo paralēli ar platumu  $\varphi$ , tad, trapeces  $EABE_1$  platībai

ir jābūt vienādlīelai ar sfēras joslas virsas laukuma pusi, ņemot joslu starp ekvatoru un paralēli ar norādīto platumu.

Trapēces augstumu  $Oc$  nosauksim par  $y$ ; tad

$$\frac{AB}{EE_1} = \frac{Pc}{PO} = \frac{PO-y}{PO}.$$

Tā kā  $PO = EO = k$ , tad  $AB = 2(R\sqrt{\pi} - y)$  un trapēces platība ir  $2Ry\sqrt{\pi} - y^2$ . Sfēras atbilstošās joslas virsas laukuma puse ir  $\pi R^2 \operatorname{sn} \varphi$  un uz laukumu vienādlīeluma pamata  $y$  aplēsei dabonam kvadrātnolīdzinājumu:

$$y^2 - 2R\sqrt{\pi} \cdot y + \pi R^2 \operatorname{sn} \varphi = 0,$$

no kurienes

$$y = R\sqrt{\pi} \pm R\sqrt{\pi(1 - \operatorname{sn} \varphi)}.$$

Tā kā augstumam  $y$  vienmēr ir jābūt mazākam par  $PO = k = R\sqrt{\pi}$ , tad saknei jāņem tikai apakšējā negatīvā zīme; pēc pārveidojumiem iznāk:

$$y = R\sqrt{\pi} [1 - \operatorname{sn}(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi) \sqrt{2}].$$

Neraugoties uz to, ka aplēse pēc šīs formulas nav grūta, Koliņjons atradis ļoti vienkāršu paņēmieni lieluma  $y$  konstruēšanai un tā tad visu paralēļu novilkšanai uz projekcijas pilnīgi grafiski. No  $P$  (101. zīm.) pa diagonāli  $PP_1$  atliek nogriezni  $PC$  vienādu ar kvadrāta malas  $PE$  pusi; dabūto punktu  $C$  ņem par centru un ar rādiiju  $CP$  konstruē riņķa loku  $PaS$ , kas būs aploces ceturtdaļa, jo  $\sphericalangle CPE = 45^\circ$ . Loku  $PaS$  sadala vienādās daļās, piemēram sešās, ik pa  $15^\circ$  katrā. No  $P$  līdz attiecīgiem iedaļu punktiem novilkto chordu garumus atliek no pola  $P$  pa vidējo meridiānu  $PO$  un dabūtie punkti būs paralēļu krustošanās punkti ar vidējo meridiānu. Atliek pierādīt konstruēšanas pareizību. Pieņemsim, ka  $a$  ir aploces  $PaS$  punkts, noteikts ar loku  $Sa = \varphi$ . Savienojot  $a$  ar  $C$  un  $P$  dabonam trīsstūri  $PaC$ , no kuŗa:

$$\frac{Pa}{PC} = \frac{\operatorname{sn}(90^\circ - \varphi)}{\operatorname{sn}(45^\circ + \frac{\varphi}{2})}, \text{ jo } \sphericalangle SCa = \varphi \text{ un } \sphericalangle SPa = \frac{1}{2}\varphi.$$

Tāpēc chorda  $Pa = 2PC \operatorname{sn}(45^\circ - \frac{\varphi}{2})$ . Tā kā pēc konstruēšanas noteikumiem

$$PC = \frac{1}{2}PE = \frac{1}{2}k\sqrt{2} = R\sqrt{\frac{1}{2}\pi}, \text{ tad } Pa = Pc = R\sqrt{2\pi} \operatorname{sn}(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)$$

$$\text{un } Oc = PO - Pc = R\sqrt{\pi} [1 - \operatorname{sn}(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi) \sqrt{2}] = y.$$

Ja projekciju konstruē lielā mērogā un poli  $P, P_1$  nenovietojas uz tās pašas lapas, tad projekcija jākonstruē pēc punktiem.

Pieņemsim, ka jādabū paralēles AB un ar gařumu  $\lambda$  noteiktā meridiāna PL krustošanās punkts D. Aprēķināsim abscisu  $cD = x$ . Tā kā  $cD : cB = \lambda : \frac{1}{2} \pi$ , tad  $cD = cB \cdot \frac{2\lambda}{\pi}$ . Tā kā  $cB = Pc = PO - y = R \sqrt{\pi} - y$ , tad projekcijas konstruēšanai pēc punktiem galīgās formulas būs:

$$\left. \begin{aligned} x &= (R \sqrt{\pi} - y) \cdot \frac{2\lambda}{\pi} = 2R \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \lambda \cdot \operatorname{sn} (45^\circ - \frac{1}{2} \varphi) \\ y &= R \sqrt{\pi} [1 - \operatorname{sn} (45^\circ - \frac{1}{2} \varphi) \sqrt{2}] \end{aligned} \right\} \quad (424)$$

Globa meridiānam, noteiktam ar ģeografisko gařumu  $\lambda$  uz projekcijas atbilst meridiāns  $PLP_1$ , kas ar vidējo taisnlīnijas projekcijas meridiānu veido leņķi  $LPO = \psi$ . Šo leņķi noteic no formulas:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{cD}{cP} = \frac{x}{PO - y} = \frac{x}{R \sqrt{\pi} - y}$$

Pēc  $x$  un  $y$  nozīmju ievietes te no (424) formulas iznāk:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2\lambda}{\pi} \quad (425)$$

Mērogi pa meridiānu un pa paralēli būs:

$$m_m = \frac{dy \cdot \sec \psi}{R d\varphi}, \quad m_p = \frac{dx}{R \cos \varphi d\lambda}$$

jeb:

$$\left. \begin{aligned} m_m &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos (45^\circ - \frac{1}{2} \varphi) \sec \psi \\ m_p &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sec (45^\circ - \frac{1}{2} \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (426)$$

Sekošā tabula dod ordinātu  $y$ , leņķu  $\psi$ , mērogu  $m_m$  un  $m_p$  skaitliskos lielumus projekcijas dažādiem punktiem ik pēc  $15^\circ$  platumā un gařumā, pieņemot  $R = 1$ .

$\varphi$	$y$	$m_p$	M ē r o g i $m_m$						
			$\lambda = 0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
90°	1.772	0.798	1.253	1.271	1.321	1.401	1.506	1.631	1.772
75	1.445	0.805	1.243	1.260	1.310	1.389	1.493	1.617	1.757
60	1.124	0.826	1.211	1.227	1.276	1.353	1.455	1.576	1.712
45	0.813	0.864	1.158	1.174	1.221	1.295	1.392	1.507	1.638
30	0.519	0.921	1.085	1.100	1.144	1.214	1.304	1.413	1.535
15	0.247	1.006	0.994	1.008	1.048	1.112	1.195	1.294	1.406
0	0.000	1.128	0.886	0.898	0.934	0.991	1.065	1.154	1.253
Leņķi $\psi =$			0° 0'	9° 28'	18° 26'	26° 34'	33° 41'	39° 48'	45° 0'

Leņķu vislielāko alterāciju aplēsei ieliek no (35) sistēmas otrā nolīdzinājuma  $a - b$  nozīmi (51) nol.; tad:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{1}{2} \sqrt{m_m^2 + m_p^2 - 2 m_m \cdot m_p \cdot \cos \psi}.$$

Ievietojot te  $m_m$ ,  $m_p$  un  $\psi$  nozīmes no (426) un (425) nol. pēc pārveidojumiem dabūjam:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\cos (45^\circ - \frac{1}{2} \varphi)}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{[\sec^2 (45 - \frac{1}{2} \varphi) - \frac{1}{2} \pi]^2 + \lambda^2}. \quad (427)$$

Sekošā tabula dod leņķa  $2\omega$  lielumu projekcijas dažādiem punktiem ik pēc  $15^\circ$  platumā un garumā.

$\varphi$	$\lambda$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$90^\circ$	25° 39'	28° 8'	34° 21'	42° 21'	50° 53'	59° 21'	67° 23'
75	24 42	27 14	33 32	41 37	50 12	58 41	66 45
60	21 46	24 30	31 9	39 27	48 10	56 43	64 50
45	16 45	19 58	27 17	35 59	44 53	53 32	61 42
30	9 23	13 55	22 28	31 39	40 43	49 22	57 31
15	0 39	9 30	18 50	27 56	36 41	45 1	52 52
0	13 48	16 9	21 38	28 20	35 25	42 28	49 21

No šīs tabulas redzams, ka uz meridiāniem, noteiktiem ar maziem garumiem, leņķi  $\omega$ , sākot no pola, papriekš mazinājas, sasniedz uz kāda platumā minimumu un pēc tam aug līdz pašam ekvātoram; turpretim uz meridiāniem, noteiktiem ar lielākiem garumiem, leņķis  $\omega$ , sākot no pola, nepārtraukti mazinājas līdz pašam ekvātoram, kur, tā tad, šī leņķa nozīme ir vismazākā.

Lai dabūtu platumu, pie kuŗa uz viena un tā paša meridiāna leņķim  $\omega$  ir vismazākā nozīme, ņemsim (427) izteiksmes pirmo atvasināto pēc mainīgā  $\varphi$ , pieņemot, saprotams,  $\lambda$  par nemainīgu; pielīdzinot šo atvasināto nullei, platumu  $\varphi_1$ , pie kuŗa leņķis  $\omega$  ir vismazākais, noteiksim no nol.:

$$\cos (45^\circ - \frac{1}{2} \varphi_1) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi^2 + 4\lambda^2}}. \quad (428)$$

Tā kā leņķa  $\varphi_1$  nozīmes var būt tikai starp  $0^\circ$  un  $90^\circ$ , tad  $\cos (45^\circ - \frac{1}{2} \varphi_1)$  var būt robežās starp  $\frac{1}{2} \sqrt{2}$  un 1; tāpēc (428) vienādojuma otrai daļai jābūt ne mazākai par  $\frac{1}{2} \sqrt{2}$ ; tad garumam  $\lambda$  iznāk vislielākā nozīme  $\frac{1}{2} \sqrt{16 - \pi^2}$  jeb  $70^\circ 56'$ .

Tā tad uz viena un tā paša meridiāna starp ekvātoru un polu leņķa  $\omega$  vismazākā nozīme var būt tikai tiem meridiāniem, kuŗus noteic garumi, mazāki par  $70^\circ 56'$ .

Meridiāniem, kuŗu gaŗumi ir lielāki, punkts, kuŗā leņķis  $\omega$  vismazāks, ir uz ekvātora.

Ievietojot no (428) formulas  $\varphi_1$  nozīmi (427) formulā, pēc pārveidojumiem dabūsim ikkuŗam meridiānam leņķa  $\omega$  vismazākās nozīmes noteikšanai sekošu nolīdzinājumu:

$$\operatorname{tg} \omega = \sqrt{\frac{\sqrt{\pi^2 + 4\lambda^2} - \pi}{2\pi}}. \quad (429)$$

Sekošā tabulā doti platumi  $\varphi_1$  un leņķa  $2\omega$  vismazākās nozīmes gaŗumiem no  $0^\circ$  līdz  $60^\circ$ , izdarot aplēsi pēc (428) un (429) formulām.

$\lambda$	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
$\varphi_1$	15 <sup>o</sup> 51'	14 <sup>o</sup> 50'	12 <sup>o</sup> 0'	7 <sup>o</sup> 58'	3 <sup>o</sup> 24'
$2\omega$	0 0	9 30	18 41	27 19	35 16

No tabulas redzams, ka punkti, noteikti ar platumu  $\pm 15^\circ 51'$  uz vidējā meridiāna ir vienīgie punkti uz projekcijas, kur  $\omega = 0$ ; tās ir vietas, kur leņķu alterāciju nav pavisam.

**55. Molveides projekcija.** — Vācu matemātiķis Molveide (Karl Brandan Mollweide, 1774—1825) izgudroja vienādlieļu projekciju, uz kuŗas ar taisnēm attēlojas tikai paralēles un vidējais meridiāns.



102. zīm.

Iedomāsimies riņķi ar radiju  $R\sqrt{2}$ , kur  $R$  ir zemes sfēras radijs, samazināts projekcijas galvenā mērogā; tāda riņķa laukums, saprotams, vienādlieļš ar pussfēras virsas laukumu (102. zīm.).

Riņķa diametru  $EE_1$  pieņemsim par ekvātoru uz projekcijas un lai chorda  $AB \parallel EE_1$  ir ar platumu  $\varphi$  noteikta paralēle. Šo paralēli uz projekcijas varēs novilkt, ja būs zinams leņķis  $EOA = \psi$ . Lai figūras  $EABE_1$  laukums būtu vienādlieļš ar sfēriskās joslas virsas laukuma pusi, ņemot šo joslu starp ekvātoru un ar platumu  $\varphi$  noteiktu paralēli, tad ir jāpastāv vienādojumam:  $\Delta ABO$  laukums + 2 sektoru  $EOA$  lauk. =  $\pi R^2 \operatorname{sn} \varphi$ .

Tā kā  $\Delta ABO$  laukums =  $\frac{1}{2} (R\sqrt{2})^2 \operatorname{sn} (180^\circ - 2\psi) = R^2 \operatorname{sn} 2\psi$  un sektora  $EOA$  laukums =  $\frac{1}{2} R\sqrt{2} \cdot \psi \cdot R\sqrt{2} = R^2 \cdot \psi$ , tad starp leņķi  $\psi$ , kas noteic paralēles  $AB$  vietu uz projekcijas un platumu  $\varphi$ , kas noteic atbilstošā platumā riņķa vietu uz zemes sfēras, pastāv sakarība:

$$\operatorname{sn} 2\psi + 2\psi = \pi \cdot \operatorname{sn} \varphi. \quad (430)$$

Šis nolīdzinājums nav ērts leņķa  $\psi$  tiešai aplēsei pēc dotā platuma  $\varphi$ ; labāki papriekšu uziet platumus  $\varphi$  pēc apaļos skaitļos ņemtiem leņķiem  $\psi$  un pēc tam ar interpolāciju noteikt leņķus  $\psi$ , atbilstošus platumiem  $\varphi$  apaļos skaitļos. Zemāk doti tāda platuma  $\varphi$  lēses iznākumi, ik pēc  $5^0$ ; tie noderīgi projekcijas sastādīšanai jebkurā mērogā, jo (430) nol. neieiet radijs  $R$ .

$\varphi$	$\psi$	$\varphi - \psi$	$\log \operatorname{sn} \psi$	$\log \cos \psi$	$\lg \operatorname{tg} \psi$
90 <sup>0</sup>	90 <sup>0</sup> 0' 0''	0 <sup>0</sup> 0' 0''	0.00 000	— ∞	+ ∞
85	78 03 46	6 56 14	9.99 050	9.31 563	0.67 487
80	70 58 42	9 01 18	9.97 562	9.51 312	0.46 250
75	64 57 58	10 02 02	9.95 716	9.62 650	0.33 066
70	59 31 54	10 28 06	9.93 546	9.70 506	0.23 040
65	54 28 17	10 31 43	9.91 053	9.76 426	0.14 627
60	49 40 31	10 19 29	9.88 218	9.81 098	0.07 119
55	45 04 34	9 55 26	9.85 006	9.84 890	0.00 115
50	40 37 45	9 22 15	9.81 369	9.88 021	9.93 348
45	36 18 08	8 41 52	9.77 235	9.90 628	9.86 607
40	32 04 17	7 55 43	9.72 507	9.92 808	9.79 699
35	27 55 05	7 04 55	9.67 044	9.94 626	9.72 418
30	23 49 36	6 10 24	9.60 635	9.96 131	9.64 504
25	19 47 10	5 12 50	9.52 957	9.97 357	9.55 600
20	15 47 03	4 12 57	9.43 459	9.98 331	9.45 128
15	11 48 45	3 11 15	9.31 114	9.99 071	9.32 043
10	7 51 49	2 08 11	9.13 613	9.99 589	9.14 024
5	3 55 41	1 04 19	8.83 571	9.99 898	8.83 674
0	0 0 0	0 0 0	— ∞	0.00 000	— ∞

Lielumu  $\operatorname{sn} \psi$  un  $\cos \psi$  plašāka tabula ar  $\varphi$  intervāliem  $30'$  dota Žermena grāmatā: A. Germain. *Traité des projections des cartes géographiques*, 1867, 321—322 lpp., Dica un Adamsa grāmatā: Ch. Deetz and O. Adams, *Elements of map projection with applications to map and chart construction*, U. S. Coast and Geodetic Survey, Special publication Nr. 68, Washington, 1921, 155—156 lp. un 255. lappusē citētās grāmatas L. Driencourt et J. Laborde II daļas (deuxième fascicule) 157—159 lp.

No šīs tabulas redzams, ka  $\psi$  vienmēr mazāks par  $\varphi$ , izņemot  $0^0$  un  $90^0$ , kad šie abi lielumi vienādi; tā tad leņķis  $\psi$  mainās starp tām pašām robežām  $0^0$  un  $90^0$ , kā platumus  $\varphi$ . Uziesim to platumu  $\varphi$ , pie kura starpība  $\varphi - \psi$  ir vislielāka. Saprotams, ka tas būs tur, kur leņķu  $\psi$  un  $\varphi$  pieaugumi ir vienādi, t. i., tur, kur  $d\psi = d\varphi$ .

Diferencējot (430) nol. dabūjam:

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{\pi \cos \varphi}{4 \cos^2 \psi} \quad (a)$$

Lai iznāktu  $d\psi = d\varphi$ , tad jābūt, lai

$$\pi \cos \varphi = 4 \cos^2 \psi. \quad (431)$$



Projekcijas kaut-kāda punkta T taisnleņķu koordinātām  $CS = x$  un  $ST = y$  dabūsim, uz konstruēšanas paņēmiena pamata, sekošas formulas:

$$\left. \begin{aligned} x &= R \sqrt{2} \frac{\lambda}{\pi} \cos \psi \\ y &= R \sqrt{2} \operatorname{sn} \psi \end{aligned} \right\} \quad (433)$$

Meridiānam  $PTP_1$  punktā T novilksim pieskari  $TQ$  un leņķi  $TQC$  starp šo pieskari un vidējo taisnlīnijisko meridiānu nosauksim par  $\varepsilon$ . Šis leņķis noder par projekcijas alterācijas mēru, jo tas norāda, par cik kādā punktā leņķis starp meridiānu un paraleli atšķiras no  $90^\circ$ ; tas redzams no zīmējuma punktā T. Turpinot pieskari  $QT$  līdz krustojumam ar  $x$  asi punktā  $T_1$  dabūsim leņķi  $QT_1E_1 = 90^\circ + \varepsilon$ ; tā kā  $\operatorname{cotg}(90^\circ + \varepsilon) = \frac{dy}{dx}$  tad  $\operatorname{tg} \varepsilon = -\frac{dx}{dy}$ .

Še ieejošos diferenciālus dabūsim no (433) nolīdzinājumiem, uzskatot vienam un tam pašam atsevišķam meridiānam gaļumu  $\lambda$  par konstantu lielumu un diferencējot pēc mainīgā  $\psi$ ; tad

$$dx = -2R \sqrt{2} \frac{\lambda}{\pi} \operatorname{sn} \psi \, d\psi,$$

$$dy = R \sqrt{2} \cos \psi \, d\psi.$$

$$\text{Tamdēļ } \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2\lambda}{\pi} \operatorname{tg} \psi. \quad (434)$$

Pēc šīs formulas aprēķinātie leņķi  $\varepsilon$  projekcijas dažādiem punktiem ik pēc  $15^\circ$  platuma un gaļuma sakopoti zemāk pievestā tabulā. Tā kā uz pola  $\operatorname{tg} \psi = \infty$ , tad aplēse izdarīta tikai līdz paralelei ar platumu  $89^\circ$ .

$\varphi$	$\lambda$							
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$	
$89^\circ$	00 0'	66° 52'	77° 56'	81° 54'	83° 54'	85° 07'	85° 56'	
75	0 0	19 38	35 31	46 57	54 59	60 44	64 58	
60	0 0	11 07	21 26	30 30	38 09	44 28	49 41	
45	0 0	6 59	13 46	20 10	26 06	31 28	36 18	
30	0 0	4 13	8 22	12 27	16 24	20 12	23 50	
15	0 0	2 0	3 59	5 58	7 56	9 53	11 49	
0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	

Mērogi. — Projekcijas meridiāna bezgalīgi mazam elementam  $ds$  uz  $y$  ass atbilst elements  $dy = ds \cdot \cos \varepsilon$  un uz sfēras atbilstošais elements ir  $R \, d\varphi$ ; tāpēc mērogs pa meridiāniem ir  $m_m = \frac{dy \cdot \sec \varepsilon}{R \, d\varphi}$  un

$$\text{mērogs pa parallēlēm ir } m_p = \frac{dx}{R \cos \varphi \cdot d\lambda}.$$

Diferenciālus  $dy$  un  $dx$  dabū no (433) formulas; bez tam vel vērā ņem (a) nol.; tad:

$$m_m = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\cos \varphi}{\cos \psi} \cdot \sec \varepsilon, \quad m_p = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{\cos \psi}{\cos \varphi}. \quad (435)$$

No šīm formulām redzams, ka mērogs pa meridiāniem ir atkarīgs no punkta platuma un gaņuma; mērogs pa parallēlēm ir atkarīgs tikai no platuma; tāpēc pēdējais ir konstants uz vienas un tās pašas parallels, kāds slēdziens arī tieši izriet no projekcijas konstruēšanas paņēmiena.

$\varphi$	$m_p$	M ē r o g i $m_m$						
		$\lambda = 0^0$	$15^0$	$30^0$	$45^0$	$60^0$	$75^0$	$90^0$
89 <sup>0</sup>	3.665	0.273	0.694	1.305	1.934	2.568	3.203	3.840
75	1.472	0.679	0.721	0.835	0.995	1.184	1.390	1.605
60	1.165	0.858	0.875	0.922	0.996	1.091	1.203	1.326
45	1.026	0.975	0.982	1.003	1.038	1.085	1.143	1.209
30	0.951	1.052	1.054	1.063	1.077	1.096	1.120	1.150
15	0.912	1.096	1.097	1.099	1.102	1.107	1.113	1.120
0	0.900	1.111	1.111	1.111	1.111	1.111	1.111	1.111

No šīs tabulas redzams, ka mērogs  $m_p$  sākot no pola, kur tas ir bezgalīgs, nepārtraukti mazinājas līdz ekvātoram; uz platuma 40<sup>0</sup>44' (sk. zemāk) tas ir 1. Mērogs  $m_m$  uz vidējā meridiāna, pie pola, ir nulle; no šejienes tas nepārtraukti aug līdz pašam ekvātoram; tas iznāk 1 uz tā paša platuma 40<sup>0</sup>44'. Uz citiem meridiāniem, līdz zināmajam noteiktam gaņumam, mērogs  $m_m$  pie pola =  $\infty$ ; pie virzes no šejienes uz dienvidiem tas nepārtraukti mazinājas, sasniedz vismazāko nozīmi un pēc tam sāk augt. Uz pārējiem meridiāniem pie pārvietes no pola līdz ekvātoram mērogs  $m_m$  nepārtraukti mazinājas no  $\infty$  līdz  $m_m = 1,111$ , kas ir mērogs pa visiem meridiāniem pie ekvātora.

Kā redzams, tad uz katra meridiāna ir punkts, kuņā mērogi  $m_m$  un  $m_p$  ir vienādi, kur, tā tad, meridiāns un paralele uz indikātrisas attēlojas, kā vienādi sajūgtie diametri. Tā kā uz projekcijas platības nemainās, tad abi sajūgtie diametri vispār ir lielāki par 1, izņemot vidējo taisnlīnijisko meridiānu. Uz pēdējā ( $\lambda = 0^0$ ), uz ziemeļiem un dienvidiem no ekvātora ir divi punkti, kuņos indikātrisa pārvēršās par riņķi; tur ne tikai  $m_m = m_p$ , bet vēl  $m_m = 1$  un  $m_p = 1$ . Tā kā uz vidējā meridiāna leņķis  $\varepsilon = 0$ , tad tādiem punktiem (435) formulas dod:

$$\pi \cos \varphi = 2\sqrt{2} \cdot \cos \psi. \quad (436)$$

Šī nolīdzinājuma kvadrātu saskaitot ar otrādi pārrakstītā (430) nolīdzinājuma kvadrātu dabonam meklējamo punktu platumu aplēsei sekošu transcendentu nolīdzinājumu:

$$8 \cos^2 \psi + 4 \psi \operatorname{sn} 2\psi + \operatorname{sn}^2 2\psi + 4 \psi^2 = \pi^2. \quad (437)$$

Tā saknes ir:  $\psi = \pm 32^{\circ}41',4$  un atbilstošie platumi  $\varphi = \pm 40^{\circ}44',2$ . Šī paša (437) nol. tālāka pētišana rāda, ka ģeometriskā vieta punktiem, kuriem  $m_m = 1$ , uz projekcijas attēlojas kā ovāla figūra un ka tās simmetrijas ass iet no ziemeļiem uz dienvidiem un tamdej sakrīt ar vidējo meridiānu; tā krusto vidējo meridiānu polā un uz plātuma  $40^{\circ}44'$ . Liknes visgarākā chorda sakrīt ar parallēli, kuŗu noteic plātums  $67^{\circ}09'$ ; no vidējā meridiāna tā iet uz rītiem un vakariem līdz garumam  $\pm 47^{\circ}01'$ . Šīs ovalās figūras iekšienes visos punktus mērogs  $m_m$  ir mazāks par 1, bet ārpusē lielāks par 1. Saprotams, ka tāda pat simmetriskā figūra ir arī uz dienvidiem no ekvatora, dienvidpuslodē.

Vislielākās leņķu alterācijas aplēsei no (35) sistēmas otrā nol. noteicam  $a - b$  un šo nozīmi ieliekam (51) nol.; tad:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{1}{2} \sqrt{m_m + m_p^2 - 2}. \quad (438)$$

Sekošā tabulā pievestas leņķu  $2\omega$  nozīmes projekcijas dažādiem punktiem ik pēc  $15^{\circ}$  platumā un garumā.

$\varphi$	$\lambda$						
	$0^{\circ}$	$15^{\circ}$	$30^{\circ}$	$45^{\circ}$	$60^{\circ}$	$75^{\circ}$	$90^{\circ}$
$90^{\circ}$	$180^{\circ} 0'$	$180^{\circ} 0'$	$180^{\circ} 0'$	$180^{\circ} 0'$	$180^{\circ} 0'$	$180^{\circ} 0'$	$180^{\circ} 0'$
$75$	$43 14$	$45 1$	$49 50$	$56 33$	$64 7$	$71 49$	$79 16$
$60$	$17 27$	$19 52$	$25 41$	$32 57$	$40 39$	$48 18$	$55 42$
$45$	$2 56$	$7 26$	$13 55$	$20 30$	$27 0$	$33 20$	$39 29$
$30$	$5 46$	$7 17$	$10 33$	$14 25$	$18 30$	$22 37$	$26 44$
$15$	$10 30$	$10 43$	$11 22$	$12 22$	$13 38$	$15 6$	$16 43$
$0$	$12 1$	$12 1$	$12 1$	$12 1$	$12 1$	$12 1$	$12 1$

Šī tabula rāda, ka leņķu izmaiņas Molveides projekcijā, vispār ņemot, ir diezgan lielas. Jau uz ekvatora  $2\omega = 12^{\circ}01'$  un uz malējiem meridiāniem (ar garumiem, lielākiem apmēram par  $45^{\circ}$ ) šis leņķis nepārtraukti aug līdz pašiem poliem, kur  $\omega = 180^{\circ}$ . Pa meridiāniem, noteiktiem ar mazākiem garumiem, leņķi  $2\omega$ , sākot no ekvatora, papriekšu mazinājas un pēc tam atkal sāk augt. Leņķis  $\omega = 0$  tikai divi punktos, uz vidējā meridiāna pie platumiem  $+$  un  $-40^{\circ}44'$ .

Molveides projekciju pats autors aprakstījis barona Cacha (Franz Xaver von Zach) izdotā žurnālā „Monatliche Correspondenz, 1805. g. II.“ No sākuma tā palika neievērota, bet vēlāki to it-kā no jauna atrada un citīgi ieteica franču fiziķis Babinē (Jacques Babinet, 1794—

—1872), kas to nosauca par homolografisko projekciju ( $\delta\mu\alpha\lambda\acute{o}\varsigma$ , vienmērīgs un  $\gamma\rho\acute{\alpha}\phi\omega$ , es rakstu).

Ja ekvatoru un visas paralēles turpināsim aiz pamatriņķa, atliksim agrāki aprēķinātos garumus un caur dabūtiem punktiem novilksim jaunas ellipses, tad Molveides projekcijā uz vienas ellipses, kuŗas asu attiecība 1 : 2, attēlosies visa zemes virsa. Neraugoties uz to, ka projekcijas malās sakropļojumi ir ļoti lieli, Molveides projekcijā visas zemes virsas vienādlielais attēls ir tuvāks īstenībai, nekā Sansona, Vernerā un Bonna projekcijās.



105. zīm.

Čikāgas universitātes profesors Pols Guds izgudrojis visai interesantu Molveides projekcijas pārveidojumu\*), ko viņš nosaucis par pārtraukto jeb sarauto homolografisko (interrupted homolographic) projekciju. Viņš ņēmis divi kombinācijas: pirmā panākts labāks kontinentu un otrā — labāks okeānu attēls. Kontinentu attēlošanai ņemtas sešas Molveides projekcijas un katrs kontinents novietots atsevišķas projekcijas vidū; tādā ceļā konstruētas sekošas (105. zīm.) kartes: 1) Eurāzijas karte no ekvatora līdz ziemeļpolam, starp meridiāniem  $40^{\circ}$  W un  $160^{\circ}$  W ar meridiānu  $60^{\circ}$  E kā taisnu līniju. Šo projekciju norobežo meridiāns  $40^{\circ}$  W, kas uz ziemeļiem no ekvatora iet pa Atlantijas okeānu un tikai pašos ziemeļos pa polāriem apgabaliem; austrumos par robežu

\*) Sk. Goode, J. P. Studies in Projections; Adapting the Homolographic Projection to the Portrayal of the Earth's Surface Entire. Bull. Geog. Soc. Phila., vol. 17, 1919; The Homolosine Projection. Ann. Am. Assoc. Geog., vol. 15, 1925; Goode's School Atlas, physical, political and economic, for american schools and colleges, Mc Nally and Co, Chicago — New York, 1923.

ir meridiāns  $160^{\circ}$  W, kas iet pa Kluso okeānu un tikai ziemeļos pa Aļaskas polāro daļu; 2) Amerikas karte uz ziemeļiem no ekvatora, no meridiāna  $160^{\circ}$  W līdz  $40^{\circ}$  W ar vidējo meridiānu  $100^{\circ}$  W kā taisni; 3) Dienvidamerikas karte starp meridiāniem  $20^{\circ}$  W un  $100^{\circ}$  W no Gr. ar centrālo meridiānu  $60^{\circ}$  W kā taisni; 4) Afrikas karte starp  $20^{\circ}$  W un  $90^{\circ}$  E ar vidējo meridiānu  $20^{\circ}$  E no Gr. kā taisni; 5) W dienvidpuslodes daļa no meridiāna  $90^{\circ}$  E līdz  $160^{\circ}$  W ar taisnlinijisko meridiānu  $150^{\circ}$  E, kas iet caur Austrāliju un 6) dienvidpuslodes daļas karte no  $100^{\circ}$  W līdz  $160^{\circ}$  W ar vidējo meridiānu  $160^{\circ}$  W. Visas šīs kartes saliek pa ekvatoru un dabū karti ar nepārtrauktu pāreju pa ekvatoru no vienas kartes uz otru; visa cietzeme tad iznāk bez pārtraukumiem un ar mazākām deformācijām, nekā vienā homalografiskā projekcijā ar vienu vienīgo taisnlinijisko meridiānu visai zemes lodei.

Labākai okeānu attēlošanai profesors Guds papriekš noteic katram okeānam vidējo meridiānu; viņš ņem: 1) Atlantijas okeānam par centrālo meridiānu ziemeļdaļai — meridiānu  $30^{\circ}$  W; 2) dienviddaļai — meridiānu  $20^{\circ}$  W; 3) Klusā okeāna ziemeļdaļai vidējā meridiāna ģeogr. garumu  $170^{\circ}$  W; 4) dienviddaļai —  $140^{\circ}$  W; 5) Indijas okeāna ziemeļdaļai vidējais meridiāns ir  $60^{\circ}$  E no Gr.; 6) dienviddaļai —  $90^{\circ}$  E no Gr. Šīm kartēm robežjošie meridiāni ir: 1)  $100^{\circ}$  W un  $20^{\circ}$  E, 2)  $70^{\circ}$  W un  $20^{\circ}$  E, 3)  $110^{\circ}$  E un  $100^{\circ}$  W, 4)  $140^{\circ}$  E un  $140^{\circ}$  W, 5)  $20^{\circ}$  E un  $110^{\circ}$  E un 6)  $20^{\circ}$  W un  $140^{\circ}$  E.

**56. Ekkerta projekcija.** — Profesors Maks Ekkerts (Max Eckert) divos sējumos iznākušās grāmatas „Die Kartenwissenschaft“ autors, būdams vēl jauns docents Ķīlē, izgudrojis vairākas jaunas projekcijas visas zemes lodes attēlošanai; viņš tās aprakstījis pazīstamā ģeografijas žurnālā „Petermann's Mitteilungen“ par 1906. g. (V, 97—109 lpp.) Visu šo projekciju kopējā pazīme ir tā, ka paralēles attēlojas ar taisnām līnijām, līdzīgi Sansona, Koliņjona un Molveides projekcijām. Lai pēc iespējas mazāk mainītos leņķi starp meridiāniem un paralēlēm, tad autors visus meridiānus velk caur abiem poliem, tāpat kā minētās projekcijās, bet pašus polus viņš attēlo ar divi malējām taisnām līnijām, kas paralēlas ekvatoram. Šīs malējās taisnes Ekkerts nosauc par polu līnijām (Pollinien). No visām Ekkerta izgudrotām projekcijām apskatīsim vienīgi vispilnīgāko. Tani sfēras virsu pārnes uz pustora ārējo virsu un pēdējo savukārt uz plakni, ieturot abos pārnesšanas gadījumos platību vienādlielumu.

Par toru (no latīņu vārda torus) sauc ķermeni, ko veido aplis, vai tā daļa, griezdamies ap apla plaknē esošu taisni, kas neiet caur apla centru.

Ekkerts liek pusaplim AEB (106. zīm.) ar centru O griezties ap taisni  $PP_1$ , kas attājumā  $OC = OE = r$  iet stateniski pret radiju EO resp. paralēli diametram AB.

Atcerēsimies teorētiskās mēchanikas divi teorēmas:

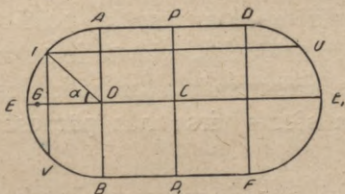
1) Apļa loka smaguma punkts atrodas uz radija, kas novilkts līdz loka (jeb līdz loka gala punktus savienjošās chordas) vidus punktam, attājumā  $x_0$  no loka centra, pie kam

$$\text{attājums } x_0 = \frac{\text{loka radijs} \times \text{chordas gaņums}}{\text{loka gaņums}}$$

2) Otrā ir Vīnes profesora, jezuita Paula Guldina (1577—1643) tā sauc. bārycentriskā teorēma: Plakana likne, griezdamās ap tās plaknē esošu asi, veido rotācijas virsu, kuņas laukums = veidojošās līnijas gaņums  $\times$  smaguma centra aprakstītā aploce pie viena apgrieziena\*).

Nebūs lieki aizrādīt, ka pirmā teorēma ir otrās secinājums.

Pēc 106. zīm. nosauksim riņķa loka TEV gaņumu par  $l$ , tā smaguma punkta G attājumu GO no centra O par  $x_0$ , chordu TV par  $c$ , tad uz pirmās teorēmas pamata  $x_0 = \frac{rc}{l}$ . (439)



106. zīm.

Uz otrās teorēmas pamata loks TEV, griezdamies ap diametru AB izveido sfēras virsas daļu, kuņas laukums ir  $2\pi x_0 \cdot l$ ; šīs pašas daļas laukums (uzskatot to kā sfēras virsas un divkāršās joslas TVBA virsas laukumu starpību) būs  $2\pi rc$ ; abu pedējo izteiksmju vienādība dod (439) formulu. Jāpiezīmē, ka šīs teorēmas zinājis jau Aleksandrijas Pappus.

Leņķi EOT nosauksim par  $\alpha$ ; tad  $TV = c = 2r \sin \alpha$  un loks  $TEV = l = 2r \alpha$ ; tāpēc  $x_0 = r \sin \alpha : \alpha \dots$  (440)

Loka TEV smaguma punkta G attājums no ass  $PP_1$  ir  $GC = x_0 + r$  un virsas laukums P, kuņu izveido loks TEV, griezdamies ap asi  $PP_1$ , būs:

$$P = 2\pi (x_0 + r) l = 4\pi r^2 (\alpha + \sin \alpha) \dots (a)$$

Šinī formulā ieejošos lielumus  $r$  un  $\alpha$  Ekkerts noteic izejot no pieņēmuma, lai laukuma P puse būtu vienādiela ar sfēras joslas virsas laukumu, ņemot joslu starp platuma riņķiem, noteiktiem ar

\*) Sk. Rozenauers. Statika. 25. lp., jeb Pauls Everss. Mechanika 1931; 129 — 130. lpp.

$\varphi$  un  $-\varphi$ ; tamdej, nosaucot sfēras radiju galvenā mērogā par  $R$ , iznāk:

$$\frac{1}{2}P = 4\pi R^2 \operatorname{sn} \varphi \dots (b)$$

No (a) un (b) formulām leņķa  $\alpha$  aplēsei toram ar radiju  $r$  dabūsim sekošu nolīdzinājumu:

$$\alpha + \operatorname{sn} \alpha = \frac{2R^2 \operatorname{sn} \varphi}{r^2} \dots (c)$$

Šis nolīdzinājums spēkā arī pie  $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ , kad  $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ ; ieliekot šis ekstrēmās nozīmes dabonam sekošu nol. radija  $r$  noteikšanai:

$$\frac{\pi}{2} + 1 = \frac{2R^2}{r^2},$$

no kurienes

$$r = \frac{2R}{\sqrt{\pi + 2}} \dots (441)$$

Šo  $r$  nozīmi ieliekam (c) nol.; dabūtais nol. saista leņķi  $\alpha$  ar platumu  $\varphi$  un zināmā mērā atgādina Molveides projekcijai izvesto (430) nol.:

$$\alpha + \operatorname{sn} \alpha = \frac{1}{2}(\pi + 2) \operatorname{sn} \varphi \dots (442)$$

Tā tad ar radiju  $r$  konstruētā tora virsas laukuma puse ir tikpat liela, kā ar radiju  $R$  konstruētas sfēras virsas laukums; pēc (442) formulas dažādiem platumiem aplēstie leņķi  $\alpha$  dod iespēju novilkt uz tora paralēles tā, ka pustora virsa sadalās joslās, vienādielās ar sfēras atbilstošām joslām. Ja vēl pustora virsu sadala ar vienādos attāļumos novilktiem meridiāniem, tad visa sfēras virsa būs pārnesta uz toru, ieturot laukumu vienādielumu.

Taļāki pustora virsu pārnes uz plakni pēc Sansona projekcijai pieņemtiem sfēras virsas pārnesšanas noteikumiem. Uz vidējo meridiānu attēlojošās taisnes atliek daļas, kas vienlīdzīgas meridiāna lokiem uz tora starp attiecīgām paralēlēm un caur dabūtiem punktiem novelk vidējam meridiānam stateniskas taisnes; pēc tam pa katru šo taisni uz abām pusēm no vidēja meridiāna atliek daļas, kas vienlīdzīgas paralēļu iztaisnotiem lokiem uz tora virsas un caur atbilstošiem punktiem novelk liknes no rokas jeb gar šablonu.

No 106. zīmējuma redzams, ka katras paralēles loka gaņums uz pustora virsas, ņemot vērā (441) formulu, ir:

$$\pi(r + r \cos \alpha) = \frac{4R}{\sqrt{\pi + 2}} \cdot \pi \cos^2 \frac{1}{2}\alpha$$

un meridiāna loka gaņums no ekvatora līdz paralēlei, noteiktai ar leņķi  $\alpha$ , ir:

$$r\alpha = \frac{2R\alpha}{\sqrt{\pi + 2}}$$

Tāpēc ar platumu  $\varphi$  un garumu  $\lambda$  uz sfēras noteiktam punktam uz projekcijas atbilst punkts, kuŗa taisnleņķu koordinātas  $x$  un  $y$  noteic pēc sekošām formulām:

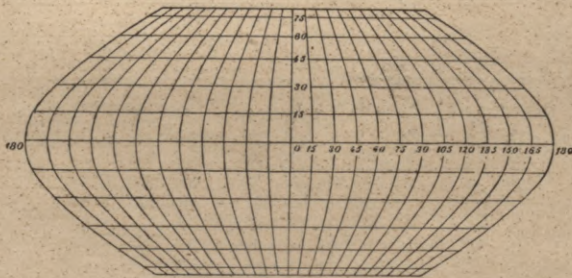
$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{2R\lambda}{\sqrt{\pi+2}} \cdot \cos^2 \frac{1}{2} \alpha \\ y &= \frac{2R\alpha}{\sqrt{\pi+2}} \end{aligned} \right\} \quad (443)$$

Te, kā jau bija teikts,  $R$  ir zemes sfēras radijs, samazināts projekcijas galvenā mērogā un leņķis  $\alpha$  aprēķināms katram dotam platumam  $\varphi$  no transcendentā (442) nolīdzinājuma; pēdējais, saprotams, jāatrisina ar vairākkārtīgu mēģinājumu un interpolāciju. Pats Ekkerts augšminētā rakstā ieteic asprātīgu konstrukciju leņķu  $\alpha$  noteikšanai grafiski pēc dotiem platumiem  $\varphi$ .

Nākošā tabulā pievesti leņķi  $\alpha$  un koordinātas  $x$ ,  $y$  projekcijas punktiem ik pēc  $15^0$  platumā, pieņemot  $R=1$ . Abscisas  $x$  dotas tikai malējā meridiāna ( $\lambda=\pi$ ) punktiem; citas abscisas dabū dalot tabulā dotos  $x$  ar 12 ( $180^0:15^0$ ) un reizinot iznākumu ar 1, 2, 3...

$\varphi$	$\alpha$	$\alpha - \varphi$	$x$	$y$
90 <sup>0</sup>	90 <sup>0</sup> 0'	0 <sup>0</sup> 0'	1,386	1,386
75	85 11	10 11	1,502	1,311
60	72 49	12 49	1,794	1,121
45	56 25	11 25	2,152	0,869
30	38 12	8 12	2,474	0,588
15	19 15	4 15	2,693	0,296
0	0 0	0 0	2,771	0,000

Vislielākā starpība  $\alpha - \varphi = 12^0 49'$  iznāk pie  $\varphi = 59^0 34'$  un  $\alpha = 72^0 23'$ .



107. zīm.

107. zīmējumā attēlota Ekkerta projekcijā visas zemes lodes virsa ar meridiāniem un paralēļiem ik pēc 15 platumu un garuma grādiem. Projekcijas meridiānu nolīdzinājumu dabūsim, ja no (443) formulām izslēgsim platumu  $\varphi$  jeb platumu funkciju  $\alpha$ . Pirmais nol. dod:

$$\alpha = 2 \operatorname{arc} \cos \sqrt{\frac{x \sqrt{\pi + 2}}{2R\lambda}}$$

So nozīmi ieliekam otrā formulā; tad:

$$y = \frac{4R}{\sqrt{\pi + 2}} \operatorname{arc} \cos \sqrt{\frac{x \sqrt{\pi + 2}}{2R\lambda}}$$

Šis nol. ir meridiānu nolīdzinājums, jo pie katra noteiktā gaļuma  $\lambda$  tas noteic sakarību starp diviem mainīgiem lielumiem, abscisu  $x$  un ordinātu  $y$ . Šis nol. rāda, ka Ekkerta projekcijā meridiāni ir sevišķa veida sinusoidas.

Lai dabūtu paralēļu nolīdzinājumu, tad jādabū izteiksme bez gaļuma  $\lambda$ ; tāda ir (443) formulas otrais nol.:

$$y = \frac{2R\alpha}{\sqrt{\pi + 2}}$$

Tā kā pie katra dotā platuma  $\varphi$  leņķis  $\alpha$  ir konstants lielums, tad  $y$  vienam un tam pašam platuma riņķam ir nemainīgs; tas nozīmē, ka platuma riņķi Ekkerta projekcijā attēlojas kā  $x$  asij paralēlas taisnes, kas arī bija jāsapaida, ņemot vērā viņu konstruēšanas paņēmieni.

Alterāciju izpētīšanai uziesim, zem kādiem leņķiem vidējo taisnlīnijisko meridiānu krusto meridiānu pieskares, kas novilkta meridiānu dažādos punktos.

Tā kā visas projekcijas paralēles ir stateniskas pret vidējo meridiānu, tad šie leņķi  $\varepsilon$  ir starpības starp taisno leņķi un leņķiem starp meridiāniem un paralēlēm (sal. 104. zīm.). Tā kā vispār  $\operatorname{tg} \varepsilon = -\frac{dx}{dy}$  (sk. 318. lp.), tad no (443) formulām iznāk:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{1}{2} \lambda \operatorname{sn} \alpha. \quad (444)$$

Sekošā tubulā pievesti leņķi  $\varepsilon$  projekcijas dažādiem punktiem ik pēc  $15^\circ$  platuma un  $30^\circ$  gaļuma.

$\varphi$	$\lambda$						
	$0^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
$90^\circ$	$0^\circ 0'$	$14^\circ 40'$	$27^\circ 28'$	$38^\circ 9'$	$46^\circ 19'$	$52^\circ 37'$	$57^\circ 31'$
$75$	$0 0$	$14 37$	$27 33$	$38 3$	$46 13$	$52 31$	$57 26$
$60$	$0 0$	$14 3$	$26 35$	$36 53$	$45 1$	$51 21$	$56 19$
$45$	$0 0$	$12 18$	$23 34$	$33 12$	$41 6$	$47 29$	$52 37$
$30$	$0 0$	$9 12$	$17 57$	$25 54$	$32 56$	$38 59$	$44 10$
$15$	$0 0$	$4 56$	$9 48$	$14 31$	$19 3$	$23 21$	$27 23$
$0$	$0 0$	$0 0$	$0 0$	$0 0$	$0 0$	$0 0$	$0 0$

Mērogus par meridiāniem un paralēlēm dabūsim ieliekot formulās:

$$m_m = \frac{dy \sec \epsilon}{R d\varphi}, \quad m_p = \frac{dx}{R \cos \varphi d\lambda}$$

dx un dy nozīmes no (443) formulām; iznāk:

$$\left. \begin{aligned} m_m &= \frac{1}{2} \sqrt{\pi + 2} \cos \varphi \sec^2 \frac{1}{2} \alpha \sec \epsilon, \\ m_p &= \frac{2}{\sqrt{\pi + 2}} \sec \varphi \cos^2 \frac{1}{2} \alpha \end{aligned} \right\} \quad (445)$$

Kā redzam, tad mērogs  $m_m$  pa meridiāniem ir atkarīgs no punkta platuma un garuma; turpretim mērogs  $m_p$  pa paralēlēm ir atkarīgs tikai no platuma, līdzīgi Molveides projekcijai.

Sekošā tabulā pievestas mērogu  $m_p$  un  $m_m$  nozīmes punktiem, kuŗi atbilst iepriekšējā tabulā dotiem punktiem.

$\varphi$	$m_p$	M ē r o g i $m_m$						
		$\lambda = 0^0$	$30^0$	$60^0$	$90^0$	$120^0$	$150^0$	$180^0$
$90^0$	$\infty$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
75	1,847	0,541	0,560	0,611	0,688	0,783	0,890	1,006
60	1,142	0,875	0,902	0,979	1,094	1,238	1,402	1,579
45	0,969	1,032	1,057	1,126	1,234	1,370	1,527	1,700
30	0,909	1,100	1,114	1,156	1,223	1,310	1,415	1,533
15	0,888	1,127	1,131	1,143	1,164	1,192	1,227	1,269
0	0,882	1,134	1,134	1,134	1,134	1,134	1,134	1,134

Vislielākās leņķu alterācijas  $\omega$  aprēķina tāpat, kā jau agrāki apskatītās projekcijās. Nepievedot šo leņķu tabulu aizradīsim, ka visiem punktiem uz ekvatora leņķis  $2\omega = 14^0 21'$  un ka uz projekcijas katrā puslodē ir tikai pa vienam punktam, kur  $\omega = 0$  un kur tanī pašā laikā  $m_m = m_p = 1$ . Abi punkti ir uz vidējā meridiāna ( $\lambda = 0^0$ ) starp paralēlēm ar platumiem  $45^0$  un  $60^0$ , uz ziemeļiem un dienvidiem no ekvatora. Šo punktu platumu noteic no transcendentā nolīdzinājuma:  $4(\alpha + \operatorname{sn} \alpha)^2 + (\pi + 2)(1 + \cos \alpha)^2 - (\pi + 2)^2 = 0 \dots$  (446), kuŗu dabū no (445) un (442) nolīdzinājumiem, izslēdzot platumu  $\varphi$ . Ši nolīdzinājuma sakne ir  $\alpha = 61^0 21'$ , kam atbilst  $\varphi = 49^0 16'$ .

Slēgums. — Salīdzinot zīmējumus, uz kuŗiem attēlota visa zemes virsa Lamberta cilindriskā, Sansona un Ekkerta projekcijās, redzam, ka pēdējā ir kaut-kas vidējs starp pirmām divi. Lamberta cilindriskā projekcijā visa zemes virsa attēlojas kā taisnstūris, kuŗa pamata attiecība pret augstumu ir  $\pi$ , kāpēc visas daļas, it īpaši polārie apgabali, saspiesti no ziemeļiem uz dienvidiem, jo īstenībā zemes ekvators tikai divreiz gaŗāks par meridiānu. Sansona projekcijā visa zemes virsa attēlojas kā figūra, kas norobežota ar divi sinusoidām un ekvatoriālās ass attiecība pret polāro ieturēta pareiza, t. i., 2 : 1;

neraugoties uz to polāro apgabalu sakropļojums ir ļoti liels. Beidzot, Ekkerta projekcijā visa zemes virsa attēlojas ar kvadrātu, kuŗam abās sānu malās pielikts pa sinusoidai; šinī projekcijā saīsināts ekvātors un vidējais meridiāns, lai gan ekvātorālās ass attiecība pret polāro ieturēta pareiza (2 : 1); poli attēlojas nevis kā punkti, bet kā taisnes — „polārās līnijas“.

Visas trīs projekcijas ietur platību vienādlielumu, bet pirmās divi, pietiekoši labi attēlojot ekvātorīālos apgabalus, sakropļo gandrīz līdz nepazīšanai polāros apgabalus. Trešā — Ekkerta projekcija, cenšas novērst pēdējo trūkumu, tomēr nesasniedz apmierinošus rezultātus un sakropļo visu joslu gar ekvātoru.

**57. Atvasinātās projekcijas.** — Jaunas projekcijas var izgudrot netikvien uzstādot jaunus konstruēšanas pamatus, bet arī dažādi kombinējot agrāki zināmos; tādas projekcijas bieži vien sauc par atvasinātām. Piemēra dēļ apskatīsim divi atvasinātās projekcijas, kas pieder pie vienādlielo projekciju sugas.

a) **Hammersa projekcija.** — Iepriekšējā § beigās bija aizrādīts, ka Ekkerta projekcija zināmā mērā ir vidēja starp Lamberta cilindrisko un Nikolaja Sansona sinusoidālo projekcijām, lai gan tās autors to izgudrojis pilnīgi neatkarīgi no abām minētām. Profesors Hammers (Ernst, Hermann, Heinrich), daudz agrāki par Ekkertu, tanī pašā ģeografijas žurnālā „Petermann's Mitteilungen“ par 1900. g. (46. sējums) aprakstījis projekciju, kuŗa patiesi aplēsta kā vidēja starp abām minētām Lamberta un Sansona projekcijām. Lamberta un Sansona projekcijām abscisas  $x$  noteic pēc (179) un (394) formulām sekoši:  $x = R\lambda$  un  $x = R\lambda \cos \varphi$ , kur abos gadījumos  $R$  ir zemes sfēras radijs galvenā mērogā,  $\lambda$  un  $\varphi$  projekcijas kaut-kāda punkta garums un platums. No šim divi izteiksmēm abscisai  $x$  Hammers ņēma aritmētisko vidējo, proti:

$$x = \frac{1}{2} R\lambda (1 + \cos \varphi) = R\lambda \cos^2 \frac{1}{2} \varphi \dots (a)$$

Lai projekcija būtu vienādliela, tad bezgalīgi maza paralelogramma laukumam uz projekcijas ( $dx \cdot dy$ ) ir jābūt vienādlielam ar bezgalīgi mazās trapēces virsas laukumu uz sfēras ( $R^2 \cos \varphi \cdot d\lambda \cdot d\varphi$ ), tā kā jābūt spēkā vienādojumam:

$$dx \cdot dy = R^2 \cdot \cos \varphi \cdot d\lambda \cdot d\varphi \dots (b)$$

Jaunā projekcijā, tāpat kā Lamberta cilindriskā un sinusoidālā projekcijās, paralēles attēlo kā taisnes; tāpēc pie noteikta platuma  $\varphi$  abscisa  $x$  ir atkarīga vienīgi no garuma  $\lambda$ ; tāpēc (a) izteiksme  $x$  ir garuma funkcija un

$$dx = R \cos^2 \frac{1}{2} \varphi \cdot d\lambda \dots (c)$$

Šo nozīmi ieliekam (b) formulā un atvietojam  $\cos \varphi$  ar  $\cos^2 \frac{1}{2} \varphi - \operatorname{sn}^2 \frac{1}{2} \varphi$ ; tad:

$$dy = R (1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \varphi) d\varphi$$

$$\text{un } y = R \varphi - R \int_0^\varphi \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \varphi \cdot d\varphi.$$

$$\text{Tā kā } \int \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \varphi \cdot d\varphi = 2 \int \frac{1 - \cos^2 \frac{1}{2} \varphi}{\cos^2 \frac{1}{2} \varphi} d(\frac{1}{2} \varphi) = 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi - \varphi,$$

tad uz projekcijas iekšra punkta koordinātas  $x$  un  $y$  ir:

$$\left. \begin{aligned} x &= R \lambda \cos^2 \frac{1}{2} \varphi, \\ y &= 2R (\varphi - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (447)$$

Leņķi  $\varepsilon$ , ko veido meridiāna pieskare ar vidējo taisnlīnijas meridiānu, noteic formula:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = - \frac{dx}{dy}.$$

Diferencējam (447) formulas un iznākumus ievietojam tikko dabūtā izteiksmē; iznāk:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{1}{2} \lambda \operatorname{tg} \varphi \cos^2 \frac{1}{2} \varphi. \quad (448)$$

Mērogiem pa meridiāniem un paralēlēm ņemam parastās formulas:

$$m_m = \frac{dy \operatorname{sec} \varepsilon}{R d\varphi}, \quad m_p = \frac{dx}{R \cos \varphi d\lambda},$$

kuŗas, ņemot vērā (447) form. diferencējumus, dod:

$$\left. \begin{aligned} m_m &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} \lambda \operatorname{sn} \varphi\right)^2 + \left(\cos \varphi \operatorname{sec}^2 \frac{1}{2} \varphi\right)^2} \\ m_p &= \operatorname{sec} \varphi \cos^2 \frac{1}{2} \varphi \end{aligned} \right\} \quad (449)$$

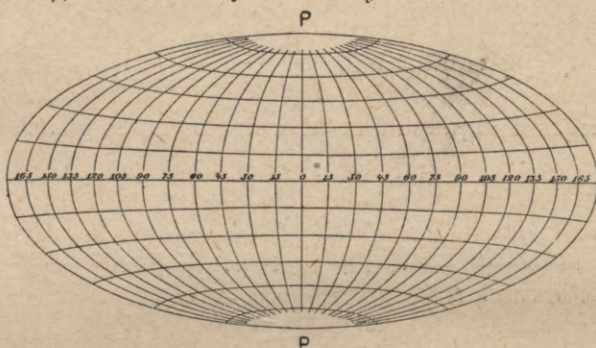
Leņķu vislielāko alterāciju aprēķinam pēc (438) formulas; tad

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{2} \lambda \operatorname{sn} \varphi\right)^2 + \left[\operatorname{sec} \varphi \operatorname{sec}^2 \frac{1}{2} \varphi (\cos^4 \frac{1}{2} \varphi - \cos^2 \varphi)\right]^2}. \quad (450)$$

Meridiānu veida un alterāciju izpētišanu atstāsim lasītājam. Aprobežosimies ar aizrādījumu, ka visas zemes virsas attēls šinī projekcijā atgādina 106. zīmējumu, tikai ar to starpību, ka vidējais meridiāns ir samazināts un ekvātors izstiepts; caur to Hammera projekcija vispār ir mazvērtīgāka par Ekkerta projekciju, ar ko arī varbūt ir izskaidrojams, ka tā līdz šim nav lietota ģeografisko karšu sastādīšanai.

b) Aitova projekcija. — Pagājušā gadu simtenī pazīstamā Parīzes izdevēja Ašetta (Louis François Hachette, 1800—1864) kar-

tografs Aitovs atrada, ka gadījumā, ja ņem ekvatoriālā projekcijā kartografisko tīklu puslodei ar meridiāniem un paralēlēm ik pēc  $n^0$ , no visiem meridiānu un paralēļu krustojuma punktiem nolaiž stāteņus uz taisni, kas attēlo ekvatoru, visus šos stāteņus pārdala uz pusēm un caur dabūtiem punktiem novelk nepārtrauktas liknes (izlaižot nepārās paralēles), tad iznāk jauns tīkls, kas attēlo visu zemes virsu



108. zīm.

ar meridiāniem un paralēlēm ik pēc  $2n^0$ . Tādā ceļā pēc Lorņja projekcijas (48. zīm.) konstruēts 108. zīmējums, kas attēlo vienādlīnu projekciju visās savās daļās. Šo projekciju tagad bieži lieto daudzos jaunākos atlasos visas zemes virsas attēlošanai uz vienas ellipses.

**58. Vispārīgā teorija.** — 47. § tika izpētīts vispārīgā veidā jautājums par to, ka vienu doto virsu projicēt uz otro virsu tā, lai pie projicēšanas dabūtais attēls būtu vienādleņķīgs jeb konforms. Ellipsoida virsas attēlošana uz plaknes ir vienīgi šīs vispārīgās teorijas sevišķs gadījums. Tādas vispārīgās teorijas vienādlīnām projekcijām nav un kartografijas mērķiem tāda īstenībā arī nav vajadzīga, jo kartografijai pietiek ar to, ka dabū ellipsoida virsas vienādlīnu attēlu uz plaknes. Šis jautājums jau nodarbinājis XVIII. gadu simteņa ģeometrus un to atrisinājis Getingenas profesors Maiers (Johann Mayer, 1752—1830), ievērojamā astronoma Tobiasa Maiera (1723—1762) dēls, rakstā „Gründliche und vollständige Anweisung zur Verzeichnung der Land-, See- und Himmelskarten, Erlangen, 1794.“

Caur punktu, noteiktu uz zemes ellipsoida virsas ar garumu  $\lambda$  un platumu  $\varphi$ , novilksim meridiānu un paralēli un atliksim pa tiem platumu un garumu pieauguma virzienos bezgalīgi mazus lokus; tad meridiāna un paralēles bezgalīgi maza loka elementi būs (sk. 19. un 18. lpp.):

$$\frac{a(1-e^2)d\varphi}{(1-e^2\text{sn}^2\varphi)^{3/2}} \text{ un } \frac{a\cos\varphi d\lambda}{(1-e^2\text{sn}^2\varphi)^{1/2}}, \dots (a)$$

kur  $a$  ir ellipsoida lielā pusass un  $e$  — tā ekscentritā.

Ja dabūtos punktus savienosim ar loku, tad uz ellipsoida virsas izveidosies bezgalīgi mazs taisnleņķa trīsstūris ar laukumu  $P$ , vienlīdzīgu kātetu, resp. meridiāna un paraleles elementu reizinājuma pu-  
sei, t. i.:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2(1-e^2)\cos\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^2} d\lambda d\varphi \dots (b)$$

Pieņemsim, ka ar gařumu  $\lambda$  un platumu  $\varphi$  uz zemes ellipsoida virsas noteiktam punktam, uz plaknes atbilst punkts, noteikts ar taisnleņķu koordinātām  $x$  un  $y$ . Caur šo pēdējo punktu novilksim meridiānu un paraleli, kas, vispār ņemot, uz plaknes attēlosies ar kautkādam liknēm. Uz šī meridiāna ņemsim bezgalīgi tuvu punktu pieaugošo platumu virzienā; šī punkta koordinātas, aprobežojoties ar bezgalīgi maziem pirmās šķiras lielumiem, var izteikt, kā sekošas summas:

$$x_2 = x + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi, y_2 = y + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi \dots (c)$$

Ja tāpat uz paraleles ņemsim bezgalīgi tuvu punktu pieaugošo gařumu virzienā, tad tā koordinātas, ar tādu pašu noteiktību, būs summas:

$$x_3 = x + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda \text{ un } y_3 = y + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda \dots (d)$$

Tā uz meridiāna un paraleles ņemtos abus punktus savienosim ar taisni; tad izveidojas bezgalīgi mazs trīsstūris, kuŗš, vispār ņemot, vairs nebūs taisnleņķīgs, jo vienādlielās projekcijas meridiāni un paraleles var krustoties zem patvaļīgiem leņķiem.

Plaknes trīsstūra platība  $P_1$  pēc trīsstūra virsotņu koordinātām  $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$  ir:

$$P_1 = \pm \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)].$$

Šini gadījumā  $x_1 = x, y_1 = y \dots (e)$ ; tāpēc, ņemot  $x_2, y_2$  un  $x_3, y_3$  augšējās nozīmes, dabonam:

$$P_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) d\lambda d\varphi \dots (f)$$

Ja laukums  $P$  uz ellipsoida ir tikpat liels, kā atbilstošais laukums  $P_1$  uz plaknes, tad jāpastāv nolīdzinājumam:

$$\frac{a^2(1-e^2)\cos\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^2} = \frac{\partial x}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} \quad (451)$$

Vienādlielās projekcijas konstruēšanas uzdevums pastāv iekš tam, lai uzietu tās funkcijas, kuŗās izteiktas taisnleņķu koordinātas  $x, y$  uz plaknes ar ģeografiskām koordinātām  $\varphi, \lambda$  uz ellipsoida. Tā kā (451)

nolidzinājums satur divi nezināmās neatkarīgo mainīgo  $x$  un  $y$  funkcijas, tad vienu no tām var izteikt kā pilnīgi patvaļīgu  $\lambda$  un  $\varphi$  funkciju; tikai pēc tam (451) nolidzinājums būs noteikts un būs iespējams noteikt otro funkciju. Pieņemsim ka

$$x = f(\lambda, \varphi), \quad (452)$$

kur simbols  $f$  apzīmē kaut-kādu patvaļīgi ņemtu funkciju. Lai dabūtu nolidzinājumu, kas izteic koordinātas  $y$  atkarību no garuma un platumā, tad ievēsim (451) nolidzinājumā ar (452) nolidzinājumu noteiktās funkcijas parciēlās atvasinātās

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} \text{ un } \frac{\partial x}{\partial \varphi}.$$

Pieņemsim, ka pēc (452) nol. diferencēšanas pēc mainīgiem  $\lambda$  un  $\varphi$  ir dabūts:

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = p \text{ un } \frac{\partial x}{\partial \varphi} = q \dots (g)$$

Šo atvasināto nozīmes ieliekam (451) nol. un, vienkāršības dēļ, otro daļu nosaucam par  $\omega$ ; tad:

$$p \frac{\partial y}{\partial \varphi} - q \frac{\partial y}{\partial \lambda} = \omega. \quad (453)$$

Šis ir pirmās šķiras lineārais diferenciālnolidzinājums ar parciēlām atvasinātām. Tā integrāls arī dos meklējamo  $y$ , atkarībā no  $\lambda$  un  $\varphi$ . Integrēšanas nolūkos sastādīsim diferenciālo nolidzinājumu sistēmu:

$$\frac{d\varphi}{p} = - \frac{d\lambda}{q} = \frac{dy}{\omega}.$$

jeb

$$p \, d\lambda + q \, d\varphi = 0. \quad (454)$$

Tagad no šīnī sistēmā ieejošiem mainīgiem ir jāizveido divi viena no otras neatkarīgas funkcijas tā, lai to pilnie diferenciāli būtu vienlīdzīgi nullei pēc tam, kad tanis ieliksīm  $dy$ ,  $d\lambda$  un  $d\varphi$  nozīmes no (454) sistēmas. Šīs funkcijas dabūsim, ja (454) sistēmu atrisināsim pēc patvaļīgiem konstantiem. Šīs funkcijas apzīmēsim ar  $\psi_1$  un  $\psi_2$  un (453) diferenciālnolidzinājuma kopējo integrālu nosauksim par

$$\Phi(\psi_1, \psi_2) = 0,$$

jeb, atrisinot pēc  $\psi_2$ :

$$\psi_2 = F(\psi_1). \quad (455)$$

kur  $\Phi$  un  $F$  ir pilnīgi patvaļīgu funkciju zīmes. Vajadzīgos divi neatkarīgos integrālus dod (454) sistēma; tās pirmais nolidzinājums pēc  $p$  un  $q$  nozīmju ievietošanas dod:

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} \cdot d\lambda + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot d\varphi = 0.$$

Salīdzinot šo nolīdzinājumu ar (452) redzam, ka

$$dx = df(\lambda, \varphi) = 0.$$

Integrācija dod  $C_1 = f(\lambda, \varphi)$ .

Tā tad  $f(\lambda, \varphi)$  ir pirmais meklējamais integrāls, proti  $\psi_1$ .

No (454) sistēmas otrā nolīdzinājuma

$$dy = \frac{\omega}{p} d\varphi,$$

$$\text{jeb} \quad y = \int \frac{\omega}{p} d\varphi + C_2.$$

No šejienes  $C_2 = y - \int \frac{\omega}{p} d\varphi$ , kas ir (454) sistēmas otrs meklējamais integrāls, proti  $\psi_2$ .

Tagad pēc (455) nol. iznāk:

$$y - \int \frac{\omega}{p} d\varphi = F[f(\lambda, \varphi)], \text{ jeb, ņemot vērā (452) nol.:}$$

$$y = F(x) + \int \frac{\omega}{p} d\varphi.$$

Tas ir (453) nolīdzinājuma kopējs integrāls.

Tā tad  $x$  un  $y$ , kā gaŗuma un platuma meklējamās funkcijas var izteikt sekoši:

$$\left. \begin{aligned} x &= f(\lambda, \varphi) \\ y &= a^2(1 - e^2) \int \frac{\cos \varphi}{p(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^2} d\varphi + F(x) \end{aligned} \right\} \quad (456)$$

Pie tam simboli  $f$  un  $F$  apzīmē pilnīgi patvaļīgas funkcijas un

$$p = \frac{\partial f(\lambda, \varphi)}{\partial \lambda}.$$

Ar to uzdevums par ellipsoīda virsas attēlošanu uz plaknes tā, lai platības iznāktu vienādielās, teorētiski ir pilnīgi atrisināts. Tā kā dabūtās galīgās formulās neieiet tikai viena vien, bet pat divi patvaļīgas funkcijas, un tā kā ir iespējama šo funkciju dažāda kombinācija, tad arī atrisinājumi var būt ļoti dažādi.

Praksē tomēr risinājums tikai tad novedis pie kvadrātūras, kad parcielā atvasinātā  $p$  nebūs atkarīga no  $\lambda$ , t. i., kad  $f(\lambda, \varphi)$  būs lineāra attiecībā uz  $\lambda$ . Ar šīm, tīri praktiskās dabas grūtībām vienādielo projekciju teorija atšķiras no vienādleņķu projekciju teorijas, kurā kā tas bija noskaidrots 48 §, pie ellipsoīda attēlošanas uz plaknes,

nolīdzinājuma integrēšanu varēja izdarīt vispārīgā veidā un atsevišķos gadījumos vairs nebija jāizdara nekāda funkciju integrēšana.

Tagad izvedisim vienādlīnām projekcijām formulas mērogiem pa meridiāniem un paralēlēm.

Iedomāsimies, tāpat kā agrāk, uz viena un tā paša projekcijas meridiāna divi bezgalīgi tuvus punktus; to koordinātas nosauksim par  $x_1, y_1$ , un  $x_2, y_2$ ; tad projekcijas meridiāna loka diferenciāls  $ds$  būs:

$$ds = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Ievietojot te koordinātu nozīmes (c) un (e) dabonam:

$$ds = d\varphi \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2}.$$

Analoģiski projekcijas paralēles loka diferenciāls  $ds_1$  iznāk:

$$ds_1 = d\lambda \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2}.$$

Mērogi  $m_m$  pa meridiāniem un  $m_p$  — pa paralēlēm ir projekcijas loku  $ds$  un  $ds_1$  attiecības pret ellipsoida atbilstošiem lokiem, noteiktiem pēc (a) formulas; tāpēc:

$$\left. \begin{aligned} m_m &= \frac{(1 - e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}{a(1 - e^2)} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2} \\ m_p &= \frac{(1 - e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}{a \cos \varphi} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (457)$$

Leņķi  $\theta$ , starp meridiānu un paralēli, kaut-kuŗā projekcijas punktā dabū no noteikuma, ka atbilstošo figūru platības uz ellipsoida un plaknes ir vienādlīnā; tad

$$\frac{a^2 (1 - e^2) \cos \varphi}{(1 - e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)^2} \cdot d\lambda \cdot d\varphi = ds \cdot ds_1 \cdot \operatorname{sn} \theta.$$

No šejienes

$$\operatorname{sn} \theta = \frac{1}{m_m m_p}. \quad (458)$$

Pēdējās trīs formulas (456), (457) un (458) dod visu vienādlīnā projekciju vispārīgo teoriju. Tās piemērošanas paskaidrojumam ņemsim divi vienkāršus sevišķus gadījumus:

1) Pieņemsim, ka nolīdzinājums  $x = f(\lambda, \varphi)$  dots sekošā veidā:

$$x = k\lambda, \quad (459)$$

kur  $k$  ir konstants lielums. Šinī gadījumā, saskaņā ar (g) vai (7'),  $p = k$  un no (456) sistēmas otrā nolīdzinājuma:

$$y = \frac{a^2(1-e^2)}{k} \int \frac{\cos \varphi \cdot d\varphi}{(1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)^2} + F(k\lambda).$$

Integrācijas atvieglošanai ievēsim palīgmainīgo lielumu  $z$  pēc nolīdzinājuma:

$$z = e \operatorname{sn} \varphi.$$

Tad  $dz = e \cos \varphi d\varphi$

un

$$\int \frac{\cos \varphi \cdot d\varphi}{(1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{(1-z^2)^2}.$$

Tā kā

$$\int \frac{dz}{(1-z^2)^2} = \frac{1}{2} \frac{z}{1-z^2} + \frac{1}{4} \ln \frac{1+z}{1-z},$$

tad

$$\int \frac{\cos \varphi d\varphi}{1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi} = \frac{\operatorname{sn} \varphi}{2(1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)} + \frac{1}{4e} \ln \frac{1+e \operatorname{sn} \varphi}{1-e \operatorname{sn} \varphi}$$

un tāpēc

$$y = \frac{a^2(1-e^2)}{2k} \left( \frac{\operatorname{sn} \varphi}{1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi} + \frac{1}{2e} \ln \frac{1+e \operatorname{sn} \varphi}{1-e \operatorname{sn} \varphi} \right) + F(k\lambda).$$

Funkcijas  $F$  noteikšanai pieņemsim ekvātoru uz projekcijas par  $x$  asi; tad pie  $\varphi = 0^\circ$  arī  $y = 0$ ; tādā gadījumā arī  $F(k\lambda) = 0$  un koordinātu  $x, y$  aplēsei iznāk formulas:

$$x = k\lambda$$

$$y = \frac{a^2(1-e^2)}{2k} \left( \frac{\operatorname{sn} \varphi}{1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi} + \frac{1}{2e} \ln \frac{1+e \operatorname{sn} \varphi}{1-e \operatorname{sn} \varphi} \right). \quad (460)$$

Mērogu aplēsei pēc (457) formulām jāuziet koordinātu  $x, y$  parciēlās atvasinātās no (460) nol.; iznāk:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{a^2(1-e^2) \cos \varphi}{k(1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)^2}, \quad \frac{\partial x}{\partial \lambda} = k \quad \text{un} \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = 0.$$

Ar šīm nozīmēm:

$$\left. \begin{aligned} m_m &= \frac{a \cos \varphi}{k(1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} \\ m_p &= \frac{k(1-e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}{a \cos \varphi} \end{aligned} \right\}. \quad (461)$$

un no (458) formulas:  $\operatorname{sn} \theta = 1$  un  $\theta = 90^\circ$ .

Pēdējais iznākums rāda, ka šai projekcijai meridiāni un paralēles attēlojas kā savstarpīgi stateniskas līnijas. Ja grib, lai uz ekvātorā iznāktu galvenais mērogs, tad pie  $\varphi = 0^\circ$  ir jābūt  $m_p = 1$ ; tas dod  $k = a$ .

Ja zemi uzskata par sfēru ar radiju  $R$ , tad (460) un (461) formulu vietā dabū:

$$x = R \lambda, \quad y = R \operatorname{sn} \varphi. \quad (462)$$

$$m_m = \cos \varphi, \quad m_p = \sec \varphi. \quad (463)$$

Šis ir pazīstamās Lamberta cilindriskās projekcijas (179), (180) un (182) formulas, kas jau apskatītas 25. § (sk. 157.lpp.). Vispārīgā teorija gan nav ienesusi neko jauna, bet toties devusi formulas ellipsoida virsas attēlošanai izocilindriskā projekcijā.

2) Pieņemsim, ka nolīdzinājums  $x = f(\lambda, \varphi)$  dots sekošā veidā:

$$x = \frac{a \lambda \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi}}. \quad (464)$$

t. i., ka abscisa  $x$ , kas vienlīdzīga paralēles radija reizinājumam ar gaļumu  $\lambda$ , ir iztaisnots paralēles loka gaļums starp punktiem ar gaļumu starpību  $\lambda$ .

Šinī gadījumā  $p = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi}}$  un (456) sistēmas otrais nolīdzinājums iznāk:

$$y = a(1 - e^2) \int \frac{d\varphi}{(1 - e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)^{3/2}} + F(x).$$

Formulas labās puses pirmais loceklis ir tas pats, kas 19. lappuses 2. formulā. Tāpēc arī šinī gadījumā elliptiskā integrāla aplēsei saliksim aiz integrāla zīmes stāvošo funkciju rindā un, ņemot vērā zemes ellipsoida mazo ekscentribu, atmetīsim locekļus, augstākus par  $e^4$ ; tad (tāpat kā (3) form., 20. lpp.) dabūsim:

$$\int \frac{d\varphi}{(1 - e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)^{3/2}} = \int \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi + \frac{15}{8} e^4 \operatorname{sn}^4 \varphi \right) d\varphi.$$

$$\text{Tā kā } \int d\varphi = \varphi, \quad \int \operatorname{sn}^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} (\varphi - \operatorname{sn} \varphi \cos \varphi),$$

$$\int \operatorname{sn}^4 \varphi d\varphi = \frac{3}{8} \varphi - \frac{3}{8} \operatorname{sn} \varphi \cos \varphi - \frac{1}{4} \operatorname{sn}^3 \varphi \cos \varphi, \text{ tad, reizinot šos in-}$$

tegrālus ar attiecīgiem koeficientiem un ievietojot rezultātus  $y$  izteiksmē, dasūsim:

$$y = a \left\{ \left( 1 - \frac{1}{4} e^2 - \frac{3}{64} e^4 \right) \varphi - \left( \frac{3}{4} e^2 - \frac{3}{64} e^4 \right) \operatorname{sn} \varphi \cos \varphi - \frac{15}{32} e^4 \operatorname{sn}^3 \varphi \cos \varphi \right\} + F(x).$$

Funkcijas  $F$  noteikšanai pieņemsim atkal, ka uz projekcijas ekvātors iet pa  $x$  asi, t. i., ka pie  $\varphi = 0$  arī  $y$  ir nulle; tad no šī nol. atkal iznāk  $F(x) = 0$  un projekcijas kaut kāda punkta koordinātu  $x$ ,  $y$  aplēsei iznāk sekošas formulas (atmetot locekļus augstākus par  $e^2$ ):

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{a \lambda \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi}}, \\ y &= a \left[ (1 - \frac{1}{4} e^2) \varphi - \frac{3}{4} e^2 \operatorname{sn} \varphi \cos \varphi \right] \end{aligned} \right\}. \quad (465)$$

Mērogu aplēsei ņemsim koordinātu  $x$ ,  $y$  parcielas atvasinātās:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = - \frac{a \lambda (1 - e^2) \operatorname{sn} \varphi}{(1 - e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)^{3/2}}, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{a (1 - e^2)}{(1 - e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sn}^2 \varphi}}, \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = 0.$$

Ieliekam šīs nozīmes (457) formulā; iznāk:

$$\left. \begin{aligned} m_m &= \sqrt{1 + \lambda^2 \operatorname{sn}^2 \varphi} \\ m_p &= 1 \end{aligned} \right\}. \quad (466)$$

un no (458) formulas:

$$\operatorname{sn} \Theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2 \operatorname{sn}^2 \varphi}}. \quad (467)$$

Nosaucot leņķi  $\theta - 90^\circ$  par  $\varepsilon$ , dabūsim

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \lambda \operatorname{sn} \varphi. \quad (468)$$

Formulas (465) ir Sansona projekcijas vispārinātās formulas ellipsoidam, jo pieņemot zemi par sfēru un ieliekot  $e = 0$ ,  $a = R$  tas pārvēršas par (394) un (395) formulām.

Ievēribu vēl pelna tas apstāklis, ka mērogu un leņķa  $\varepsilon$  izteiksmes (466) un (468) ir neatkarīgas no ellipsoida ekscentritātes un tā tad tās ellipsoidam ir tādas pat kā sfērai pēc (397) formulas un turpmākām.

Tā kā (465) grupas otrais nolīdzinājums nesatur gaŗuma  $\lambda$ , tad tas līdz ar to ir arī projekcijas paralēlu nolīdzinājums; kā redzams, uz projekcijas paraleles resp. platumu riņķi attēlojas ar  $x$  asij, t. i. ekvātoram paralleli ejošam taisnēm.

Izslēdzot no (465) nolīdzinājumiem platumu  $\varphi$  dabūsim meridiānu nolīdzinājumu; tomēr vispārīgā veidā to izdarīt nav iespējams un pat atmetot igreka nolīdzinājumā locekļus, kas augstāki par  $e^2$ , to izdarīt ir visai apgrūtināsi; ja, turpretim, zemi uzskatīsim par sfēru, t. i. pieņemsim  $e = 0$ , tad (465) nolīdzinājumi paliek par (394) un (395) nolīdzinājumiem, proti:

$$\begin{aligned} x &= R \lambda \cos \varphi, \\ y &= R \varphi \end{aligned}$$

un platuma izslēgšana tagad noved pie nolīdzinājuma:

$$x = R\lambda \operatorname{sn}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{R}\right),$$

kas ir jau agrāki dabūtais (396) sinusoidas nolīdzinājums, un, kuŗa dēļ arī pati projekcija nosaukta par sinusoidālo.

No šiem divi piemēriem redzams, ka vispārīgā teorija gan nav devusi jaunas projekcijas, bet gan devusi pazīstamo projekciju vispārīgākas formulas, kas noderīgas ellipsoida virsas tiešai attelošanai uz plaknes un šo projekciju sīkākai izpētīšanai.

Ja paraleles attelo ne ar taisnēm, bet riņķa lokiem, tad (456) formulas ir izdevīgāki atvietot ar nolīdzinājumiem, kuŗi dod projekcijas ikkuŗam punktam polārās koordinātas.

---



Pamataplāces radiju izdevīgi ņemt tā, lai mērogi uz vidējā meridiāna un ekvatora būtu vienādi galvenam; tad projekcijas pamataplāces radijam ir jābūt vienādam sfēras lielā riņķa aploces vienai ceturtdaļai, t. i., jābūt  $= \frac{1}{2} \pi R$ , kur  $R$  ir zemes radijs galvenā mērogā. Pieņemsim, ka aploce  $EPE_1P_1$  (110. zīm.) ir tāda, kur  $PP_1$  ir projekcijas vidējais meridiāns un  $EE_1$  ekvators. Tā kā  $PP_1 = EE_1 = \pi R$ , tad

$$\frac{1}{2} PP_1 = PC = CP_1 = \frac{1}{2} EE_1 = EC = CE_1 = \frac{1}{2} \pi R. \quad (469)$$

Ar platumu  $\varphi$  noteiktas paralēles  $AB$  novilkšanai uz vidējā meridiāna punktu  $O$  noteic no sekošas proporcijas:

$$\frac{CO}{CP} = \frac{\varphi}{\frac{1}{2} \pi}.$$

Ar garumu  $\lambda$  noteiktā meridiāna novilkšanai punktu  $K$  uz ekvatora noteic no līdzīgās proporcijas:

$$\frac{CK}{CE_1} = \frac{\lambda}{\frac{1}{2} \pi}.$$

No šīm abām proporcijām iznāk:

$$\begin{aligned} CO &= R\varphi, \\ CK &= R\lambda. \end{aligned} \quad (470)$$

Caur punktu  $O$  ekvatoram  $EE_1$  līdztekus novilkta taisne  $AB$  attēlo uz projekcijas ar platumu  $\varphi$  noteikto paralēli un riņķa loks  $PKP_1$ , kas iet caur abiem poliem  $P, P_1$  un punktu  $K$ , attēlo uz projekcijas ar garumu  $\lambda$  noteikto meridiānu.

Noteiksim meridiānam radiju un centra koordinātas. Šini nolūkā savienosim punktus  $P$  un  $K$  ar taisni un polā  $P$  novilksim pieskari  $PU$  punkta  $T$  meridiānam  $PTKP_1$ . Leņķi  $UPP_1$  nosauksim par  $\lambda_1$  un uziesim tā sakarību ar garumu  $\lambda$ .

Leņķis  $KPP_1 = \frac{1}{2} \lambda_1$ , jo leņķa  $UPP_1 = \lambda_1$  mērs ir loka  $PKP_1$  puse un leņķa  $KPP_1$  mērs ir loka  $KP_1$  puse, pie kam  $\cup PK = \cup KP_1$ ; tāpēc

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \lambda_1 = \frac{CK}{CP}.$$

Ņemot vērā (469) un (470) nol., dabūjam:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \lambda_1 = \frac{2\lambda}{\pi}. \quad (471)$$

Ja  $Q$  ir meridiāna loka  $PKP_1$  centrs, tad  $\sphericalangle POK = \lambda_1$  un radija  $\rho$  aprēķinam no zīmējuma rakstam:

$$\rho = QP = QK = QC + CK = \frac{1}{2} R \pi \operatorname{cotg} \lambda_1 + R\lambda.$$

Ja goniometrijas formulā:

$$\operatorname{cotg} \lambda_1 = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \lambda_1}{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \lambda_1}$$

atvietosim  $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \lambda_1$  ar (471) izteiksmi un iznākumu ieliksīm tikko dabūtā  $\rho$  izteiksmē, tad:

$$\rho = R \frac{\pi^2 + 4\lambda^2}{8\lambda}. \quad (472)$$

Projekcijas vidējo meridiānu  $PP_1$  pieņemsim par  $x$  asi un ekvatoru  $EE_1$  par  $y$  asi. Meridiāna  $PTKP_1$  centra  $Q$  koordinātas ir:

$$QC = x_1 = -R \frac{\pi^2 - 4\lambda^2}{8\lambda}, \quad y_1 = 0. \quad (473)$$

Attēla alterācijas raksturo leņķis starp meridiānu un paraleli projekcijas kaut-kādā punktā  $T$ . Šini punktā novilksim meridiānam  $PKP_1$  pieskari  $II$ , kas, saprotams, ir stateniska pret rādiju  $QT$ . Leņķi  $\angle ITB$  starp pieskari un paraleli  $AB$  nosauksim par  $90^\circ + \varepsilon$ ; tad  $\angle TQK = \varepsilon$  un

$$\operatorname{sn} \varepsilon = \frac{TS}{TQ} = \frac{OC}{\rho} = \frac{R\varphi}{\rho}.$$

Te  $\rho$  atvietojam ar tā izteiksmi (472); iznāk:

$$\operatorname{sn} \varepsilon = \frac{8\lambda\varphi}{\pi^2 + 4\lambda^2}. \quad (474)$$

Šī formula rāda, ka  $\varepsilon = 0$  tad, kad  $\lambda = 0$  un  $\varphi = 0$ ; tas norāda, ka meridiāni ar paralelēm krustojas zem taisniem leņķiem un attēla sakropļojumu nav uz vidējā meridiāna un ekvatora. Sakropļojumi nepārtraukti aug ar attālināšanos kā no vidējā meridiāna, tā arī no ekvatora.

Lai projekciju varētu konstruēt pēc punktiem, izvedisim taisnleņķu koordinātu  $x$  un  $y$  formulas. Projekcijas kaut-kāda punkta  $T$  taisnleņķu koordinātas būs  $CS = x$  un  $TS = y$ . No zīmējuma redzams, ka  $x = QS - QC = \rho \cos \varepsilon - \rho \cos \lambda_1$ , jeb, reizinot un dalot labā pusē skaitītāju un saucēju ar  $\cos \varepsilon + \cos \lambda_1$ , dabūjam:

$$x = \rho \frac{\cos^2 \varepsilon - \cos^2 \lambda_1}{\cos \varepsilon + \cos \lambda_1}. \quad (475)$$

Ar (474) form. palīdzību:

$$\cos^2 \varepsilon = 1 - \operatorname{sn}^2 \varepsilon = 1 - \frac{64\lambda^2 \varphi^2}{(\pi^2 + 4\lambda^2)^2}; \quad \text{tā kā}$$

$$\cos \lambda_1 = \cos^2 \frac{1}{2} \lambda_1 - \operatorname{sn}^2 \frac{1}{2} \lambda_1 = \frac{\cos^2 \frac{1}{2} \lambda_1 - \operatorname{sn}^2 \frac{1}{2} \lambda_1}{\cos^2 \frac{1}{2} \lambda_1 + \operatorname{sn}^2 \frac{1}{2} \lambda_1} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \lambda_1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \lambda_1}$$

tad ar (471) form. palīdzību:

$$\cos \lambda_1 = \frac{\pi^2 - 4\lambda^2}{\pi^2 + 4\lambda^2}.$$

Šīs nozīmes ieliekam (475) formulā; ņemot vēl vērā (472) formulu un vēl to, ka  $\cos \varepsilon = 2 \cos^2 \frac{1}{2} \varepsilon - 1$ , dabūjam:

$$x = \frac{R\lambda(\pi^2 - 4\varphi^2)}{(\pi^2 + 4\lambda^2) \cos^2 \frac{1}{2} \varepsilon - 4\lambda^2}. \quad (476)$$

$$\text{Ordināta } y = ST = CO = R\varphi. \quad (477)$$

Meridiāna mērogs  $m_m$  ir projekcijas meridiāna bezgalīgi maza loka  $\rho d\varepsilon$  attiecība pret meridiāna uz sfēras virsas bezgalīgi mazu loku  $R d\varphi$ ; tāpēc

$$m_m = \frac{\rho d\varepsilon}{R d\varphi}.$$

Diferencēsim (474) formulu pēc  $\varphi$ ; tad, ņemot vērā (472) formulu, dabūjam

$$\cos \varepsilon \frac{d\varepsilon}{d\varphi} = \frac{8\lambda}{\pi^2 + 4\lambda^2} = \frac{R}{\rho}$$

$$\text{un} \quad m_m = \sec \varepsilon. \quad (478)$$

$$\text{Uz parallēles mērogs } m_p = \frac{dx}{R \cos \varphi d\lambda}.$$

Diferencējot (474) formulu, kā  $\varepsilon$  funkciju, pēc mainīga  $\lambda$  un iznākumā ievietojot  $\sin \varepsilon$  nozīmi no tā paša (474) nol. dabūjam:

$$\frac{d\varepsilon}{d\lambda} = \frac{\pi^2 - 4\lambda^2}{\pi^2 + 4\lambda^2} \cdot \frac{\text{tg} \varepsilon}{\lambda}. \quad (479)$$

Diferencējam (476) nol. pēc  $\lambda$ , ņemot vērā, ka  $\varepsilon$  ir no  $\lambda$  atkarīgais mainīgais; pēc vienkāršiem pārveidojumiem ar (479) nol. palīdzību dabūjam:

$$\frac{dx}{d\lambda} = \frac{R(\pi^2 - 4\varphi^2)}{\cos \varepsilon [(\pi^2 + 4\lambda^2) \cos^2 \frac{\varepsilon}{2} - 4\lambda^2]}.$$

Tamdeļ

$$m_p = \frac{(\pi^2 - 4\varphi^2) \sec \varphi \sec \varepsilon}{(\pi^2 + 4\lambda^2) \cos^2 \frac{\varepsilon}{2} - 4\lambda^2}. \quad (480)$$

Platību mērogam  $p$  ar (478) formulas palīdzību dabūjam:

$$p = m_m \cdot m_p \cdot \cos \varepsilon = m_p. \quad (481)$$

No izvestām formulām redzams, ka uz ekvatora, kur  $\varphi = 0$ ,  $\varepsilon = 0$ ,  $m_m = 1$ ,  $m_p = p = 1$ . Uz pola, kur  $\varphi = \frac{1}{2} \pi$ ,

$$\sin \varepsilon = \frac{4\pi\lambda}{\pi^2 + 4\lambda^2}, \quad m_m = \frac{\pi^2 + 4\lambda^2}{\pi^2 - 4\lambda^2}, \quad m_p = p = \frac{4\pi(\pi^2 + 4\lambda^2)}{(\pi^2 - 4\lambda^2)^2}.$$

Uz vidējā taisnlīnijiskā meridiānā, kur  $\lambda = 0$ ,  $\varepsilon = 0$ ,  $m_m = 1$ ,  
 $m_p = p = \left(1 - \frac{4\varphi^2}{\pi^2}\right) \sec \varphi$ . Uz malējā meridiāna  $\lambda = \frac{1}{2}\pi$  un  $\operatorname{sn} \varepsilon = \frac{2\varphi}{\pi}$ ,

$$m_m = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 - 4\varphi^2}}, \quad m_p = p = \sec \varphi.$$

Leņķu alterāciju  $\omega$  noteic pēc (32) formulas. Lai gan attēla alterācijas Apiana projekcijai ir diezgan lielas, to tomēr arī vēl tagad lieto dažādos ģeografijas atlasos austruma un rietuma puslodes kartēm.

**60. Lorica projekcija.** — Gandrīz vienā laikā ar Apianu Šveices ģeografs Lorics (Heinrich Loritz, 1488—1563) izgudroja savu projekciju zemes pusložu attēlošanai. Viņa projekcijā meridiānus novēl tāpat, kā Apiana projekcijā, proti, tie ir riņķa loki, kas iet caur abi poliem un ekvatoru vienādās daļās dalošiem punktiem. Paralleles uz projekcijas iet gan līdztekus ekvatoram, bet to attāļumi no ekvatora ir citādi nekā Apianam. Šos attāļumus Lorics noteic tāpat, kā ekvatoriālā ortografiskā projekcijā. 111. zīmējums attēlo Lorica projekcijā veselu vakara vai rīta puslodi ar meridiāniem un paralelēm ik pēc  $15^\circ$  gaļuma un platumā.



111. zīm.

Meridiānu novilkšanai noder Apiana projekcijas (471) — (473) formulas. Projekcijas paraleļu attāļumus no ekvatora noteic pēc formulas, kas līdzīga ekvatoriālās ortografiskās projekcijas (72) formulai, proti:

$$y = \frac{1}{2} \pi R \operatorname{sn} \varphi. \quad (482)$$

Leņķi  $\varepsilon$ , starp pieskari meridiānam kaut-kādā punktā (110 zīm.) un vidējo taisnlīnijisko meridiānu noteic no noli-dzinājuma:

$$\operatorname{sn} \varepsilon = \frac{y}{p}.$$

Te ieliek  $\rho$  un  $y$  nozīmes no (472) un (482) nol.; iznāk:

$$\operatorname{sn} \varepsilon = \frac{4\pi \lambda \operatorname{sn} \varphi}{\pi^2 + 4\lambda^2}. \quad (483)$$

Lorica projekcijā, tāpat kā Apiana projekcijā, leņķi  $\varepsilon$  ir nulle uz ekvatora un vidējā meridiāna; ar attāļināšanos kā no viena, tā otra, tie nepārtraukti aug un pie  $\varphi = 90^\circ$  un  $\lambda = 90^\circ = \frac{1}{2}\pi$ ,  $\varepsilon = 90^\circ$ . Uz malējā meridiāna, t. i., pie  $\lambda = 90^\circ = \frac{1}{2}\pi$ ,  $\varepsilon = \varphi$ .

Projekcijas konstruēšanai pēc punktiem noder Apiāna projekcijas (475) formula:

$$x = \rho \frac{\cos^2 \varepsilon - \cos^2 \lambda_1}{\cos \varepsilon + \cos \lambda_1}.$$

Te ieejošos lielumus, radiju  $\rho$  un leņķi  $\lambda_1$  noteic pēc 59 § (472) un (471) formulām; leņķi  $\varepsilon$  noteic pēc (483) formulas. Pēc šo nozīmju ielikšanas dabūjam:

$$x = \frac{\pi^2 \lambda R \cos^2 \varphi}{(\pi^2 + 4\lambda^2) \cos^2 \frac{1}{2} \varepsilon - 4\lambda^2}. \quad (484)$$

Ordinātu  $y$  noteic pēc (482) formulas.

Mērogu pa meridiāniem noteic pēc formulas:

$$m_m = \frac{\rho}{R} \cdot \frac{d\varepsilon}{d\varphi}.$$

Diferencējot (483) nol. pēc  $\varphi$  un ņemot vērā (472) nol. dabūjam:

$$\cos \varepsilon \frac{d\varepsilon}{d\varphi} = \frac{4\pi\lambda \cos \varphi}{\pi^2 + 4\lambda^2} = \frac{\pi R}{2\rho} \cos \varphi;$$

$$\text{tad} \quad m_m = \frac{1}{2} \pi \cos \varphi \sec \varepsilon. \quad (485)$$

Uz ekvatora, pie  $\varphi = 0$ , pēc (483) formulas  $\varepsilon = 0$  un  $m_m = \frac{1}{2} \pi$ ; pa vidējo meridiānu  $m_m = \frac{1}{2} \pi \cos \varphi$ ; pa malējo meridiānu, pie  $\lambda = 90^\circ = \frac{1}{2} \pi$ ,  $m_m = \frac{1}{2} \pi$ , kas ir konstants lielums, sākot no ekvatora līdz pašam polam un arī to neizslēdzot; pa visiem citiem meridiāniem uz pola  $m_m = 0$ .

Mērogu pa paralēlēm dabūjam uz tāda paša pamata, kā Apiāna projekcijai; iznāk:

$$m_p = \frac{\pi^2 \cos \varphi \sec \varepsilon}{(\pi^2 + 4\lambda^2) \cos^2 \frac{1}{2} \varepsilon - 4\lambda^2}. \quad (486)$$

Uz ekvatora  $m_p = 1$ , uz pola  $= 0$ , uz vidējā meridiāna  $= \cos \varphi$  un uz malējā meridiāna  $= \sec \varphi$ .

Platības mērogam  $p$  dabūjam formulu:

$$p = \frac{1}{2} m_p \cos \varphi. \quad (487)$$

Uz ekvatora  $p = \frac{1}{2} \pi$ , uz pola  $p = 0$ , uz vidējā meridiāna  $p = \frac{1}{2} \pi \cos^2 \varphi$  un uz malējā meridiāna  $p = \frac{1}{2} \pi$ .

Leņķu vislielāko izmaiņu aprēķina pēc (32) formulas.

Uz ekvatora un vidējā meridiāna leņķi  $\omega$  var aprēķināt pēc formulas:

$$\text{sn } \omega = \frac{\pi - 2}{\pi + 2}. \quad (488)$$

Ši riņķa aplēsei punktiem, kas ir uz malejiem meridiāniem, noder formula:

$$\operatorname{sn} \omega = \sqrt{\frac{\pi^2 - 4\pi + 4 \sec^2 \varphi}{\pi^2 + 4\pi + 4 \sec^2 \varphi}}. \quad (489)$$

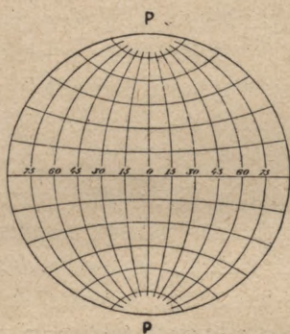
Liekas, ka Lorica projekciju neviens vairs nelieto. Apskatījam to vienīgi salīdzināšanas dēļ ar Apiāna projekciju, jo šīs abas projekcijas visai bieži sajauc.

**61, Globulārā jeb Nikolosi projekcija.** — Lai novērstu lielos sakropļojumus Apiāna un Lorica projekcijās sastādītās kartes, angļu kartografs, hidrografs un karšu izdevējs Ārons Arousmīzs (Aaron Arrow-smith, 1750—1823) nolēma konstruēt kā riņķa lokus netikvien meridiānus, bet arī paralēles. Jāaizrāda tomēr, ka Arousmīzs šo projekciju ievēda tikai vispārīgā lietošanā, bet tās konstruēšanu izdomājis jau daudz agrāk, jau 1642. g., itaļu teoloģijas doktors Nikolosi (Jean Baptiste Nicolosi, 1610—1670).

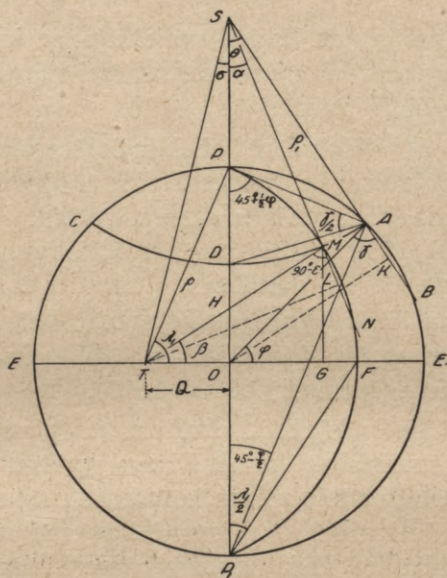
Šinī projekcijā ekvatoru un pirmo meridiānu attēlo divi savstarpēji stateniskas taisnes, kuŗu gaŗumu ņem galvenā mērogā; galveno meridiānu attēlo aploce, kuŗu konstruē uz polu līnijas, kā diametra. Katru riņķa ceturksni un visus četrus rādijus daļa vairākās vienādās daļās, atkarībā no tikla biezuma; piemēram, 112. zīmējumā tie sadalīti 6 vienādās daļās, lai novilkto meridiānus un paralēles ik pēc 15<sup>o</sup> gaŗumā un platumā. Pēc tam novelk riņķu lokus caur trīs dotiem punktiem: meridiānus — caur abiem poliem un ekvatora vienu sadaļas punktu, bet paralēles — caur pamatriņķa un vidējā meridiāna attiecīgiem sadaļu punktiem. Saprotams, ka meridiānu centri ir uz taisnes, kas attēlo ekvatoru, un uz šīs taisnes turpinājumiem; tāpat paralēļu centri ir uz taisnlīnijiskā vidējā meridiāna PP<sub>1</sub> jeb tā turpinājumiem. Šo tīri ģeometrisko, bet praktiski visai neērtu konstruējumu atvieto ar citu, aprēķinot meridiānu, paralēļu rādijus un centru koordinātas.

Pieņemsim, ka aplis PE<sub>1</sub>P<sub>1</sub>E (113. zīm.) ar centru O attēlo to meridiānu, kas norobežo attēlojamo puslodi. Vidējo meridiānu PP<sub>1</sub> un ekvatoru EE<sub>1</sub> attēlo taisnas līnijas, lai kā viens, tā otrs būtu attēloti galvenā mērogā, tad uz projekcijas PP<sub>1</sub> = EE<sub>1</sub> = 1/2 · 2πR un PO = 1/2 πR, kur R ir zemes sfēras rādijš pieņemtā galvenā mērogā. Formula rāda, ka projekcijas aploces rādijš ir vienāds ar zemes meridiāna aploces gaŗuma ceturto daļu. Pieņemsim, ka saskaņā ar augšā pieņemto konstruēšanas paņēmienu uz projekcijas novilkts ar gaŗumu λ noteiktais meridiāns PMFP<sub>1</sub>, un ar platumu φ noteiktā paralēle AMDC. Abu šo loku krustošānās punkts M uz projekcijas attēlos punktu, kuŗa ģeografiskās koordinātas ir λ un φ. Gaŗumu λ skaitisim

no videjā taisnlinijiskā meridiāna  $POP_1$ . Augšā jau bija teikts, ka projekcijas visu meridiānu un paralēļu centri ir uz taisnēm  $EE_1$  un  $PP_1$  jeb šo līniju turpinājumiem. Pieņemsim, ka meridiāna  $PMFP_1$  centrs ir punkts  $T$  un paralēles  $AMDC$  centrs punkts  $S$ .



112. zīm.



113. zīm.

Novilksim taisnes  $TM$ ,  $TP$  un  $TS$ ; sekantes  $SMN$  un  $SAB$ ; chordu  $FP_1$  un no  $M$  nolaidīsim stateni  $MG$  uz taisni  $EE_1$ .

Ģarumu  $TO$ , t. i. centra  $T$  attāļumu no videjā meridiāna nosauksim par  $Q$ , rādiu  $TP$  par  $\rho$  un ievēdīsim palīglenķi  $PTF = \lambda_1$ . Tā kā meridiāna lokam  $PMFP_1$  lenķis  $PTF$  ir centrālais, bet lenķis  $PP_1F$  ir riņķi ievilktais, tad

$$\sphericalangle PP_1F = \frac{1}{2} \lambda_1 \text{ un } \operatorname{tg} \frac{1}{2} \lambda_1 = \frac{OF}{OP_1}.$$

Pēc konstruēšanas noteikumiem  $OF = R \lambda$  un  $OP_1 = \frac{1}{2} \pi R$ , tamdēļ

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \lambda_1 = \frac{2\lambda}{\pi}. \quad (490)$$

Ši ir Apīana projekcijas (471) formula, un arī Loricā projekcijai meridiānu novilkšanas likums ir šāds pats. Tā tad šinīs projekcijās meridiānus novelk pēc viena un tā paša likuma.

No taisnlenķa trīsstūra  $TOP$ :

$$\rho = TP = PO \cdot \operatorname{cosec} \lambda_1 = \frac{1}{2} \pi R \operatorname{cosec} \lambda_1. \quad (491)$$

$$Q = TO = PO \cdot \operatorname{cotg} \lambda_1 = \frac{1}{2} \pi R \operatorname{cotg} \lambda_1. \quad (492)$$

Pēc (490) formulas aprēķinātie paligleņķi  $\lambda_1$ , pēc (491) formulas aprēķinātie radiji  $\rho$ , un pēc (492) formulas aprēķinātie attālumi  $Q$  meridiāniem ik pēc  $15^\circ$  gaļumā, un, pieņemot zemes radiju  $R=1$ , doti sekošā tabulā:

$\lambda =$	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$\lambda_1 =$	$0^\circ 0'$	$18^\circ 55'$	$36^\circ 52'$	$53^\circ 08'$	$67^\circ 23'$	$79^\circ 37'$	$90^\circ 0'$
$\rho =$	$\infty$	4,843	2,618	1,964	1,702	1,597	1,571
$Q =$	$\infty$	4,581	2,094	1,178	0,655	0,288	0,000

Pāriesim pie paralēles AMDC, noteiktas ar platumu  $\varphi$ ; tās radiju SA nosauksim par  $\rho_1$  un centra S attālumu SO no projekcijas centra nosauksim par  $q$ . Novilksim chordas AP un AD; ja leņķi ASO nosauksim par  $\theta$ , tad  $\sphericalangle DAS = 90^\circ - \frac{1}{2}\theta$ . Tā kā paralēle AMDC ir noteikta ar platumu  $\varphi$ , tad  $\sphericalangle AOE_1 = \varphi$ ,  $\sphericalangle POA = 90^\circ - \varphi$  un  $\sphericalangle OAP = \sphericalangle APO = 45^\circ + \frac{1}{2}\varphi$ . Ja leņķi BAO nosauksim par  $\gamma$ , tad  $\sphericalangle PAS = \sphericalangle OAS - \sphericalangle OAP = 180^\circ - \gamma - (45^\circ + \frac{1}{2}\varphi) \dots$  (a)

No trīsstūra OSA ar ārējo leņķi BAO =  $\gamma$  rakstam:

$$\gamma = 90^\circ - \varphi + \theta, \text{ kamdēļ}$$

$$\frac{1}{2}\varphi = 45^\circ + \frac{1}{2}(\theta - \gamma) \dots$$
 (b)

Šo nozīmi ieliekam (a) formulā; tad:

$$\sphericalangle PAS = 90^\circ - \frac{1}{2}(\gamma + \theta).$$

Tā kā  $\sphericalangle DAP = \sphericalangle DAS - \sphericalangle PAS$ , tad  $\sphericalangle DAP = \frac{1}{2}\gamma$  un  $\sphericalangle P_1AD = \sphericalangle P_1AP - \sphericalangle DAP = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma$ .

No trīsstūriem PAD un  $DAP_1$  rakstam:

$$\frac{DA}{DP} = \frac{\text{sn}(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)}{\text{sn}\frac{1}{2}\gamma} \text{ un } \frac{DA}{DP_1} = \frac{\text{sn}(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)}{\text{sn}(90^\circ - \frac{1}{2}\gamma)}; \text{ tā tad}$$

$$DA \cdot \text{sn}\frac{1}{2}\gamma = DP \text{ sn}(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi) = DP \cos(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi) \dots$$
 (c)

$$DA \cdot \cos\frac{1}{2}\gamma = DP_1 \cdot \text{sn}(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi) \dots$$
 (d)

pie kam

$$DP = OP - OD = \frac{1}{2}\pi R - R\varphi \text{ un}$$

$$DP_1 = OP_1 + OD = \frac{1}{2}\pi R + R\varphi.$$

Dalot (c) ar (d), un, atvietojot DP un  $DP_1$  ar tikko izvestām izteiksmēm, dabūsim:

$$\text{tg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{\pi - 2\varphi}{\pi + 2\varphi} \cotg(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi). \quad (493)$$

Ši nolīdzinājuma otrā daļa pie  $\varphi = 90^\circ$  ir nenoteikta izteiksme  $0 \cdot \infty$ , kuŗas patiesā nozīme ir  $\frac{2}{\pi}$ .

No (b) nolīdzinājuma tieši dabūjam formulu leņķa  $\theta$  aplēsei:

$$\theta = \gamma - (90^\circ - \varphi). \quad (494)$$

No trīsstūra OSA:

$$\frac{AS}{AO} = \frac{\text{sn}(90^\circ - \varphi)}{\text{sn } \theta} \text{ un } \frac{OS}{OA} = \frac{\text{sn}(180^\circ - \gamma)}{\text{sn } \theta},$$

jeb:

$$\rho_1 = \frac{1}{2} \pi R \cos \varphi \operatorname{cosec} \theta. \quad (495)$$

$$q = \frac{1}{2} \pi R \text{sn } \gamma \operatorname{cosec} \theta. \quad (496)$$

Abas pēdējas formulas ir ērtas aplēsei ar logaritmiem; tomēr no tām nav pietiekoši skaidri redzama lielumu  $\rho_1$  un  $q$  atkarība no platumas  $\varphi$ ; tāpēc šiem lielumiem izvedīsim citas formulas, no kurām būs redzama aprādītā sakarība. No 113. zīmējuma tieši rakstam:

$$\overline{SA}^2 = \overline{OS}^2 + \overline{OA}^2 - 2 \cdot \overline{OS} \cdot \overline{OA} \cdot \cos \text{SOA},$$

$$\overline{SD} = \overline{SO} - \overline{DO}, \text{ jeb:}$$

$$\rho_1^2 = q^2 + \left(\frac{1}{2} \pi R\right)^2 - \pi q R \text{sn } \varphi,$$

$$\rho_1^2 = q - R\varphi. \quad (497)$$

Izslēdzot no abiem pēdējiem nolīdzinājumiem lielumu  $\rho_1$  dabūjam:

$$q = \frac{\left(\frac{1}{2} \pi^2 - \varphi^2\right) R}{\pi \text{sn } \varphi - 2\varphi}. \quad (498)$$

Sekošā tabulā ierakstītas palīgleņķu  $\gamma$  un  $\theta$ , paralēļu radiju  $\rho_1$  un to centru attālumumu  $q$  no projekcijas centra skaitliskās nozīmes ik pēc  $15^\circ$  platumas, pieņemot  $R = 1$ .

$\varphi$	$\gamma$	$\theta$	$\rho_1$	$q$
90°	64° 58'	64° 58'	0,000	1,571
75	69 15	54 15	0,501	1,810
60	73 29	43 29	1,141	2,189
45	77 39	32 39	2,059	2,844
30	81 47	21 47	3,665	4,189
15	85 54	10 54	8,025	8,287
0	90 0	0 0	$\infty$	$\infty$

Pirmais, no kā spriež par projekcijas labumu un attēla pareizību, ir leņķis starp meridiāniem un paralēlēm uz projekcijas. Tas ir leņķis starp meridiāna un paralēles pieskarēm kaut-kādā punktā M. Ta kā globulārā projekcijā meridiāni un paralēles ir riņķu loki, tad šis leņķis ir vienāds leņķim starp radijiem MT un MS; pēc 113. zīm. tas nav taisns, bet plats. Leņķi NMT sauksim par  $90^\circ - \varepsilon$ ; lielums  $\varepsilon$  noderēs par sakropļošanas mēru leņķiem starp projekcijas meridiāniem

un paralelēm. Lai to noteiktu, nolaidīsim no punktiem T un O sta-  
teņus TL un OK uz chordām MN un AB, kas punktus L un K būs  
pārdalītas uz pusēm. No taisnleņķu trisstūriem TML un OAK rakstam:

$$\operatorname{sn} \varepsilon = \frac{ML}{MT} = \frac{ML}{\rho} \dots (e)$$

$$\cos \gamma = \frac{AK}{AO} = \frac{AK}{\frac{1}{2} \pi R} \dots (f)$$

Taisnes  $SP_1$  un SN ir no kopīga ārējā punkta S izejošās riņķa  
loka PMNFP<sub>1</sub> sekantes; tāpēc:

$$SP \cdot SP_1 = SM \cdot SN.$$

Tas pats sakāms par riņķa loka daļu PABP<sub>1</sub>, kāpēc

$$SP \cdot SP_1 = SA \cdot SB.$$

Tā kā  $SM = SA$ , tad  $SN = SB$  un  $SN - SM = SB - SA$  jeb  
 $MN = AB$  un  $ML = AK$ . Paturot prātā šo pēdējo vienādību, izda-  
lisim (e) ar (f), un, atvietosim  $\rho$  ar (491) izteiksmi; tad

$$\operatorname{sn} \varepsilon = \cos \gamma \operatorname{sn} \lambda_1. \quad (499)$$

Pēc šīs formulas aprēķinātie leņķi  $\varepsilon$  globulārās projekcijas dažā-  
diem punktiem doti sekošā tabulā.

$\varphi$	$\lambda$						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
90°	0° 0'	7° 53'	14° 43'	19° 47'	23° 0'	24° 36'	25° 2'
75	0 0	6 36	12 16	16 28	19 5	20 24	20 45
60	0 0	5 18	9 50	13 9	15 13	16 15	16 31
45	0 0	3 59	7 22	9 51	11 23	12 9	12 21
30	0 0	2 39	4 55	6 34	7 35	8 5	8 13
15	0 0	1 20	2 28	3 17	3 47	4 2	4 6
0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0

Atliek vēl noteikt dažus palīglieņus, kas atvieglo projekcijas  
atsevišķo punktu koordinātu aplēsi. Noteiksim arī mērogus uz me-  
ridiāniem un paralelēm. Leņķi OST nosauksim par  $\sigma$  (113. zīm.); no  
taisnleņķa trisstūra TOS:

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{OT}{OS} = \frac{Q}{q}.$$

No šejienes, ņemot vērā (492) un (496) formulas,

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{\operatorname{sn} \theta}{\operatorname{sn} \gamma \operatorname{tg} \lambda_1}. \quad (500)$$

Leņķu  $\sigma$  skaitliskie lielumi projekcijas dažādiem punktiem ir  
sekoši:

$\varphi$	$\lambda$							
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	
90°	90° 0'	71° 5'	53° 8'	36° 52'	22° 37'	10° 23'	0° 0'	
75	90 0	68 27	49 10	33 4	19 53	9 2	0 0	
60	50 0	64 28	43 44	28 18	16 39	7 30	0 0	
45	90 0	58 10	36 22	22 30	12 58	5 47	0 0	
30	90 0	47 34	26 34	15 42	8 53	3 56	0 0	
15	90 0	28 56	14 11	8 5	4 31	1 59	0 0	
0	90 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	

Nosauksim leņķus MSO un MTO attiecīgi par  $\alpha$  un  $\beta$ . No trīsstūra TSM:

$$\frac{TM}{TS} = \frac{\operatorname{sn}(\sigma + \alpha)}{\operatorname{sn}[180^\circ - (90^\circ - \varepsilon)]},$$

$$\frac{SM}{ST} = \frac{\operatorname{sn}(90^\circ - \sigma - \beta)}{\operatorname{sn}(90^\circ - \varepsilon)},$$

jeb

$$\frac{\rho}{TS} = \frac{\operatorname{sn}(\sigma + \alpha)}{\cos \varepsilon},$$

$$\frac{\rho_1}{ST} = \frac{\cos(\sigma + \beta)}{\cos \varepsilon}.$$

Tā kā  $ST = \frac{Q}{\operatorname{sn} \sigma} = \frac{q}{\cos \sigma}$  tad, ievietojot  $Q$ ,  $q$ ,  $\rho$  un  $\rho_1$  nozīmes (492), (496), (491) un (495), dabūjam:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sn}(\sigma + \alpha) &= \frac{\operatorname{sn} \sigma \cos \varepsilon}{\cos \lambda_1}, \\ \cos(\sigma + \beta) &= \frac{\cos \sigma \cos \varepsilon \cos \varphi}{\operatorname{sn} \gamma} \end{aligned} \right\} \quad (501)$$

Malējam meridiānam pie  $\lambda = 90^\circ$ , pirmā no šīm formulām ir nenoteikta izteiksme ( $\sigma = 0$ ,  $\lambda_1 = 90^\circ$ ); šinī gadījumā leņķa  $\alpha$  patiesā nozīme ir  $\theta$ ; tas redzams, no 113. zīmējuma un to var pierādīt arī analītiski. Šinī nolūkā minētā izteiksmē  $\cos \lambda_1$  atvietosim ar tā nozīmi no (500); iznāk:

$$\operatorname{sn}(\sigma + \alpha) = \frac{\cos \sigma \cos \varepsilon \operatorname{sn} \theta}{\operatorname{sn} \gamma \operatorname{sn} \lambda_1}.$$

Pie  $\sigma = 0$  un  $\lambda_1 = 90^\circ$  šis vienādojums dod

$$\operatorname{sn} \alpha = \frac{\cos \varepsilon \operatorname{sn} \theta}{\operatorname{sn} \gamma}.$$

Kad punkts M sakrīt ar punktu A, tad leņķis  $90^\circ - \varepsilon = \gamma$  un  $\cos \varepsilon = \operatorname{sn} \gamma$ ; tāpēc malējam meridiānam  $\alpha = \theta$ . Ja leņķi  $\alpha$  un  $\beta$  ir

jānoteic daudziem punktiem, kā tas, piemēram, ir nepieciešams pie zemāk doto tabulu sastādīšanas, tad ir jā rūpējās par aprēķinu kautkādu pārbaudi. Šādam nolūkam var noderēt visai vienkāršā sakarība starp leņķiem  $\alpha$ ,  $\beta$  un  $\epsilon$ , jo

$$\beta - \alpha = \epsilon. \quad (502)$$

Šīs formulas pareizība redzama pēc 113. zīmējuma no tā, ka  $\angle GMT = 90^\circ - \epsilon - \alpha = 90^\circ - \beta$ . no kā dabū norādīto sakarību.

Leņķu  $\alpha$  tabula.

$\varphi$	$\lambda$													
	0°		15°		30°		45°		60°		75°		90°	
90°	0°	0'	11°	2'	22°	10'	33°	20'	44°	23'	55°	1'	64°	58'
75	0	0	9	10	18	23	27	37	36	48	45	44	54	15
60	0	0	7	19	14	38	22	0	29	18	36	30	43	29
45	0	0	5	28	10	57	16	26	21	54	27	19	32	39
30	0	0	3	38	7	17	10	55	14	34	18	11	21	47
15	0	0	1	49	3	38	5	27	7	16	9	5	10	54
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Leņķu  $\beta$  tabula.

$\varphi$	$\lambda$													
	0°		15°		30°		45°		60°		75°		90°	
90°	0°	0'	18°	55'	36°	52'	53°	8'	67°	23'	79°	37'	90°	0'
75	0	0	15	46	30	39	44	5	55	53	66	8	75	0
60	0	0	12	37	24	28	35	9	44	31	52	44	60	0
45	0	0	9	27	18	19	26	17	33	17	39	28	45	0
30	0	0	6	17	12	12	17	29	22	9	26	16	30	0
15	0	0	3	9	6	6	8	44	11	4	13	8	15	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Kad jākonstruē globulāras (sferiskas) projekcijas tīkls lielā mērogā, piemēram, sienas kartēm, tad ir grūti novilkt ar cirkuli meridiānus un paralēles; to novilkšana ir grūta arī mazā mērogā maziem gaņumiem un platumiem. Tādos gadījumos projekcija jākonstruē pēc punktiem. Pieņemsim ekvatoru par x asi un vidējo meridiānu par y asi; tad projekcijas ikkuņa punkta taisnleņķu koordinātas x un y pēc 113. zīmējuma būs:

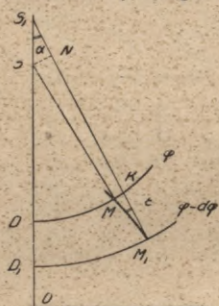
$$\left. \begin{aligned} x &= \rho_1 \operatorname{sn} \alpha \\ y &= \rho \operatorname{sn} \beta \end{aligned} \right\} \quad (503)$$

Lielumus  $\rho$ ,  $\rho_1$ ,  $\alpha$  un  $\beta$  var ņemt no augšā dotām tabulām; kad tīkls ir biezāks, tad tie jāaprēķina pēc (491), (495) un (501) formulas.

Mērogs pa meridiāniem. — Pēc 114. zīm. pieņemsim, ka  $DM$  un  $D_1M_1$  ir divi bezgalīgi tuvu paralēļu loki ar radijiem  $SD = \rho_1$  un  $S_1D_1 = \rho_1 + d\rho_1$ ; atbilstošos platumus nosauksim par  $\varphi$  un  $\varphi - d\varphi$ . Uz šīm paralēlēm ņemsim divi punktus  $M$  un  $M_1$  tā, lai tie būtu uz viena un tā paša, ar garumu  $\lambda$  noteiktā, meridiāna. Par sākuma meridiānu, no kuŗa sākās garumu skaitīšana, ņemsim vidējo taisnlīnijisko meridiānu  $SO$ .

Mērogs pa meridiāniem būs projekcijas bezgalīgi maza loka  $MM_1$  attiecība pret meridiāna uz sfēras virsas atbilstošo bezgalīgi mazo loku  $R d\varphi$ ; tāpēc

$$m_m = \frac{MM_1}{R d\varphi} \dots (m)$$



114. zīm.

No bezgalīgi mazā taisnleņķa trīsstūra  $MKM_1$ , kuŗā lokus  $MM_1$  un  $MK$  varam uzskatīt par taisnēm un kuŗā  $\sphericalangle MM_1K = \varepsilon$  un  $\sphericalangle K$  ir taisns rakstam:

$$MM_1 = M_1K \cdot \sec \varepsilon$$

$$\text{un } M_1K = S_1M_1 - KN - NS_1.$$

Pieņemot  $KN = MS$  un ievēdot agrākos apzīmējumus, dabūjam:

$$NS_1 = dq \cos \alpha,$$

$$S_1M_1 - KN = S_1M_1 - SM = d\rho_1.$$

Tāpēc  $M_1K = d\rho_1 - dq \cdot \cos \alpha$  un  $MM_1 = (d\rho_1 - dq \cos \alpha) \sec \varepsilon$ .

Pie pārejas no punkta  $M$  uz punktu  $M_1$  platumš pamazinājas, tāpēc (m) formulā pieaugums  $d\varphi$  jāņem negatīvs; tamdēļ

$$m_m = \left( \frac{dq}{d\varphi} \cos \alpha - \frac{d\rho_1}{d\varphi} \right) \frac{\sec \varepsilon}{R}. \quad (504)$$

Diferencējam (497) un (498) formulu:

$$\frac{d\rho_1}{d\varphi} = \frac{dq}{d\varphi} - R,$$

$$\frac{dq}{d\varphi} = \frac{2q - 2R\varphi - \pi q \cos \varphi}{\pi \operatorname{sn} \varphi - 2\varphi} = \frac{2\rho_1 - \pi q \cos \varphi}{\pi \operatorname{sn} \varphi - 2\varphi}.$$

Ieliekot šis nozīmes (504) formulā, un atvietojot  $\cos \alpha$  ar  $1 - 2 \operatorname{sn}^2 \frac{1}{2} \alpha$ , dabonam mērogam pa meridiānu formulu:

$$m_m = \left\{ 1 + \frac{2(\pi q \cos \varphi - 2\rho_1)}{R(\pi \operatorname{sn} \varphi - 2\varphi)} \operatorname{sn}^2 \frac{\alpha}{2} \right\} \sec \varepsilon. \quad (505)$$

Pēc šis formulas var aprēķināt mērogu  $m_m$  projekcijas visiem punktiem, izņemot tikai polu un punktus uz ekvatora, kur tā dod

nenoteiktas izteiksmes. Punktiem uz ekvatora leņķis  $\alpha = 0$ , bet ļoti maziem platumiem var ņemt

$$\alpha = \frac{R\lambda}{q} \text{ un } \text{sn}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{R^2\lambda^2}{4q^2}.$$

Ieliekot šo  $\text{sn}^2 \frac{1}{2} \alpha$  nozīmi (505) formulā, un, ņemot vērā (497) un (498) formulas, dabūjam:

$$m_m = \left\{ 1 + \frac{2(\pi \cos \varphi - 2)\lambda^2}{\pi^2 - 4\varphi^2} + \frac{4R\varphi\lambda^2}{q(\pi^2 - 4\varphi^2)} \right\} \sec \varepsilon.$$

Tā kā uz ekvatora  $\varphi = 0$ ,  $q = \infty$  un  $\varepsilon = 0$ , tad mērogs uz ekvatora meridiānu virzienā ir:

$$m_m = 1 + \frac{2(\pi - 2)}{\pi^2} \lambda^2. \quad (506)$$

Lai uzietu isto nozīmi mērogam  $m_m$  uz pola, aizvietosim (505) formulā lielumu  $\rho_1$  ar tā (495) izteiksmi; tad:

$$m_m = \left\{ 1 + \frac{2\pi}{R} \left( q - \frac{R}{\text{sn}\theta} \right) \frac{\cos \varphi}{\pi \text{sn} \varphi - 2\varphi} \text{sn}^2 \frac{\alpha}{2} \right\} \sec \varepsilon.$$

Pie  $\varphi = 90^\circ$  lieluma  $q$  istā nozīme pēc (498) formulas iznāk  $\frac{1}{2} \pi R$  un daļas  $\frac{\cos \varphi}{\pi \text{sn} \varphi - 2\varphi}$  nozīme ir 0,5; tāpēc pie poliem mērogs pa meridiāniem ir:

$$m_m = \left\{ 1 + \pi \left( \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\text{sn}\theta} \right) \text{sn}^2 \frac{\alpha}{2} \right\} \sec \varepsilon. \quad (507)$$

Sekošā tabulā dotas mēroga  $m_m$  skaitliskas nozīmes globulārās projekcijas dažādiem punktiem ik pēc  $15^\circ$  platuma un garuma.

$\varphi$	$\lambda$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$90^\circ$	1,000	1,023	1,090	1,191	1,314	1,444	1,571
$75$	1,000	1,021	1,082	1,177	1,296	1,430	1,571
$60$	1,000	1,019	1,076	1,165	1,281	1,418	1,571
$45$	1,000	1,018	1,070	1,155	1,269	1,409	1,571
$30$	1,000	1,017	1,067	1,148	1,261	1,402	1,571
$15$	1,000	1,016	1,064	1,144	1,255	1,398	1,571
$0$	1,000	1,016	1,063	1,143	1,254	1,396	1,571

Mērogs pa paralēlēm. — Pieņemsim, ka pēc 115. zīmējuma riņķa loki  $PF$  un  $PF_1$  attēlo uz projekcijas divi bezgalīgi tuvus meridiānus, noteiktus ar garumiem  $\lambda$  un  $\lambda - d\lambda$ ; lai  $T$  un  $T_1$  ir šo meridiānu centri, bet  $TM$  un  $T_1M_1$  šo meridiānu radiji. Ar platumu  $\varphi$  noteiktās paralēles bezgalīgi mazs elements starp šiem meridiāniem



Atvietojam te  $\rho$  un  $\rho_1$  ar viņu izteiksmēm (491) un (495); tad:

$$m_p = \frac{\pi \operatorname{sn} \alpha \operatorname{sec} \varepsilon}{2\lambda \operatorname{sn} \Theta}. \quad (509)$$

Pēc šīs formulas var aprēķināt mērogu  $m_p$  visiem projekcijas punktiem, izņemot punktus uz ekvatora un vidējā meridiāna, kur formula dod nenoteiktas izteiksmes. Uz ekvatora leņķis  $\alpha = 0$  un ļoti maziem platumiem var pieņemt

$$\operatorname{sn} \alpha = \frac{R\lambda}{\rho_1}.$$

Aizvietojot te radiju  $\rho_1$  ar tā (495) izteiksmi dabūsim

$$\operatorname{sn} \alpha = \frac{2\lambda \operatorname{sn} \Theta}{\pi \cos \varphi}.$$

Šo  $\operatorname{sn} \alpha$  nozīmi ievieto (509) formulā; tad punktiem ar ļoti maziem platumiem dabūjam:

$$m_p = \frac{\operatorname{sec} \varepsilon}{\cos \varphi},$$

bet punktiem uz paša ekvatora

$$m_p = 1. \quad (510)$$

kas, saprotams, arī bija sagaidāms, ņemot vērā projekcijas konstruēšanas paņēmieni.

Grūtāki ir uziet (509) izteiksmes īsto nozīmi punktiem uz vidējā meridiāna, kur  $\alpha = 0$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\lambda_1 = 0$  un  $\varepsilon = 0$ . Ņemsim pirmo no (501) formulām un saliksim  $\cos \varepsilon$  un  $\cos \lambda_1$  rindās; tā kā  $\varepsilon$  un  $\lambda_1$  ir mazi lielumi, tad sarindojumā būs atļauts aprobežoties tikai ar divi locekļiem; tad

$$\operatorname{sn}(\sigma + \alpha) = \operatorname{sn} \sigma \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 + \frac{1}{2} \lambda_1^2\right).$$

Ar tādu pašu noteiktību no (499) formulas

$$\varepsilon^2 = \cos^2 \gamma \cdot \lambda_1^2.$$

Tamdej

$$\operatorname{sn} \sigma \cos \alpha + \cos \sigma \operatorname{sn} \alpha = \operatorname{sn} \sigma \left(1 + \frac{1}{2} \lambda_1^2 \operatorname{sn}^2 \gamma\right).$$

Ši nolīdzinājuma abas puses daļa ar  $\operatorname{sn} \sigma$  un  $\operatorname{tg} \sigma$  atvieto ar tā nozīmi (500); tad  $\cos \alpha$ ,  $\operatorname{sn} \alpha$  un  $\operatorname{tg} \lambda_1$  izvirza rindā ar tādu pašu noteiktību, kā iepriekš; iznāk:

$$\alpha^2 - 2\lambda_1 \frac{\operatorname{sn} \gamma}{\operatorname{sn} \Theta} \alpha + \lambda_1^2 \operatorname{sn}^2 \gamma = 0.$$

Pie ļoti maziem garumiem (490) formulā tangensa vietā var ņemt pašu loku izteiktu radiānos; tad  $\lambda_1 = 4\lambda/\pi$  un iepriekšējais kvadrātnolīdzinājums attiecībā uz leņķi  $\alpha$  pieņem veidu:

$$\alpha^2 - \frac{8\lambda}{\pi} \cdot \frac{\operatorname{sn} \gamma}{\operatorname{sn} \Theta} \cdot \alpha + \frac{16\lambda^2}{\pi^2} \operatorname{sn}^2 \gamma = 0.$$

Saknes ir:  $\alpha_1 = \frac{4\lambda}{\pi} \operatorname{sn} \gamma \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \Theta$ ,  $\alpha_2 = \frac{4\lambda}{\pi} \operatorname{sn} \gamma \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Theta$ .

Pie maziem gaļumiem  $\lambda$  arī  $\alpha$  un  $\varepsilon$  ir mazi; tāpēc (509) formulā var ņemt  $\operatorname{sn} \alpha = \alpha$  un  $\operatorname{sec} \varepsilon = 1$ ; tā pārveidotā mēroga formulā ieliek tikko dabūtās  $\alpha_1$  un  $\alpha_2$  nozīmes; tad mērogam  $m_p$  uz vidējā meridiāna iznāk divi izteiksmes:

$$m_p' = \frac{\operatorname{sn} \gamma}{\operatorname{sn}^2 \frac{\Theta}{2}} \quad \text{un} \quad m_p'' = \frac{\operatorname{sn} \gamma}{\operatorname{cos}^2 \frac{\Theta}{2}}$$

Ekvātoram, kur  $\theta = 0$ , pirmā izteiksme dod  $m_p' = \infty$ , kaut gan jāiznāk 1; tas rāda, ka nolīdzinājuma pirmā sakne te neder un jāatmet. Tā tad punktiem uz vidējā meridiāna ( $\lambda = 0$ ) der tikai otrā sakne un mērogs pa paralēlēm ir

$$m_p = \frac{\operatorname{sn} \gamma}{\operatorname{cos}^2 \frac{\Theta}{2}} \quad (511)$$

Sekošā tabulā dotas mēroga  $m_p$  skaitliskās nozīmes globulārās projekcijas dažādiem punktiem.

$\varphi$	$\lambda$						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
90°	1,273	1,280	1,291	1,289	1,258	1,193	1,104
75	1,181	1,185	1,193	1,191	1,171	1,130	1,069
60	1,111	1,114	1,118	1,118	1,106	1,080	1,043
45	1,061	1,062	1,065	1,064	1,058	1,044	1,024
30	1,026	1,027	1,028	1,028	1,025	1,019	1,010
15	1,007	1,007	1,007	1,007	1,006	1,005	1,003
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Platību mērogu  $p$  un leņķu vislielāko alterāciju  $\omega$  aprēķina pēc (49) un (32) formulas, atvietojojot tur  $\theta$  ar  $90^\circ + \varepsilon$ . Pēc šīm formulām aprēķinātie lielumi dod sekošas divas tabulas:

Platību mērogu  $p$  tabula.

$\varphi$	$\lambda$						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
90°	1,273	1,297	1,361	1,445	1,521	1,567	1,571
75	1,181	1,202	1,261	1,345	1,434	1,514	1,571
60	1,111	1,131	1,185	1,268	1,367	1,471	1,571
45	1,061	1,079	1,130	1,211	1,316	1,438	1,571
30	1,026	1,043	1,092	1,173	1,281	1,415	1,571
15	1,007	1,023	1,071	1,150	1,260	1,401	1,571
0	1,000	1,016	1,063	1,143	1,254	1,396	1,571

Leņķu maksimālo alterāciju ( $2\omega$ ) tabula.

$\varphi$	$\lambda$							
	$0^{\circ}$	$15^{\circ}$	$30^{\circ}$	$45^{\circ}$	$60^{\circ}$	$75^{\circ}$	$90^{\circ}$	
$90^{\circ}$	$13^{\circ} 48'$	$15^{\circ} 3'$	$17^{\circ} 45'$	$20^{\circ} 37'$	$23^{\circ} 36'$	$27^{\circ} 31'$	$32^{\circ} 47'$	
75	9 30	10 47	13 33	16 39	20 13	24 48	30 34	
60	6 2	7 20	10 7	13 27	17 32	22 40	28 47	
45	3 23	4 40	7 24	10 57	15 30	21 4	27 25	
30	1 30	2 43	5 21	9 8	14 4	19 56	26 26	
15	0 22	1 26	4 1	8 1	13 13	19 16	25 51	
0	0 0	0 54	3 31	7 38	12 56	19 3	25 29	

Globulārā projekcija ir laimīgāka par citām, jo to bieži lieto Austrum- un Rietrumpuslodes attēlošanai. Ja pēc globulārās projekcijas principiem konstruē ne meridionālo, kā apskatītā gadījumā, bet polāro projekciju, tad dabū Posteļa projekciju (sk. 15. §).

**62. Arāgo projekcija.** — Ievērojamais franču astronoms Arāgo (François Dominique Arago, 1786—1853) savā „Populārā astronomijā” ievietojis Austrum- un Rietrumpuslodes kartes, kuŗu meridiānu un paralēļu tīkls konstruēts pēc sekošiem principiem.

Riņķī novilkti divi viens pret otru statenisķi diametri — vidējais meridiāns un ekvātors. Diametrs, kas attēlo vidējo meridiānu, ir sadalīts vienādās daļās, kuŗu skaits atkarājas no tīkla biezuma. Caur dabūtiem sadaļu punktiem novilkta pret vidējo meridiānu statenisķas taisnes, kas attēlo zemes paralēles. Visas šīs paralēles un ekvātoru sadala vienādās daļās un caur atbilstošiem sadaļu punktiem novelk nepārtrauktas līknes; šīs līknes ir ellipses un attēlo meridiānus.

116. zīmējums attēlo Arago projekcijā veselu puslodi ar meridiāniem un paralēlēm ik pēc  $15^{\circ}$ .

Lai mērogs uz vidējā meridiāna un ekvātora būtu vienāds galvenam, tad projekcijas pamatriņķa radijam  $\rho$  ir jābūt vienlīdzīgam ar meridiāna iztaisnotā loka ceturtdaļu; tad

$$\rho = \frac{1}{2} \pi R, \quad (512)$$

kur  $R$  ir zemes sfēras radijs galvenā mērogā.

Pēc 117. zīm. domāsim, ka riņķis  $PQP_1E$  attēlo projekcijas maļējo meridiānu, noteiktu ar gaŗumu  $\lambda = \pm 90^{\circ}$ , skaitot pēdējo nō vidējā taisnlīnijiskā meridiāna  $PP_1$ . Uz projekcijas patvaļīga punkta  $A$  platumu nosauksim par  $\varphi$  un gaŗumu par  $\lambda$ . Novilksim šī punkta paralēli  $MK$  un meridiānu  $PAP_1$ ; ekvātoru  $EQ$  pieņemsim par  $x$  asi un vidējo meridiānu  $PP_1$  par  $y$  asi. Punkta  $A$  taisnleņķu koordinātas būs:

$$\begin{aligned} x &= ON = MA \\ \text{un} \quad y &= AN = KL. \end{aligned}$$

Leņķi KOQ nosauksim par  $\psi$ ; nebūs lieki aizrādīt, ka šo leņķi bieži sauc par pārveidoto platumu (latitude modifiée). Ņemot vērā projekcijas konstruēšanas paņēmieni dabonam sekošu proporciju:

$$\frac{MA}{MK} = \frac{\lambda}{\frac{1}{2}\pi}$$

Uz konstrukcijas metodes pamata arī  
 $KL = MO = R\varphi$ .

Bez tam no taisnleņķa trīsstūra KOL:

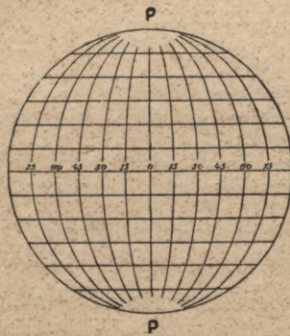
$$OL = OK \cos \psi = \rho \cos \psi = \frac{1}{2} \pi R \cos \psi.$$

Tā kā  $MK = OL$ , tad

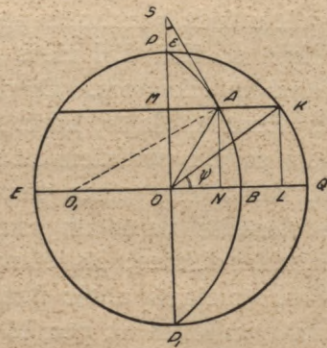
$$\left. \begin{aligned} x &= R\lambda \cos \psi \\ y &= R\varphi \end{aligned} \right\} \quad (513)$$

Palīgleņķa  $\psi$  noteikšanai

$$\operatorname{sn} \psi = \frac{KL}{KO} = \frac{2\varphi}{\pi} \quad (514)$$



116. zīm.



117. zīm.

Sekošā tabulā ierakstītas leņķu  $\psi$  skaitliskās nozīmes dažādiem platumiem ik pēc  $15^\circ$ . Vislielākā leņķu  $\varphi$  un  $\psi$  starpība ir  $18^\circ 57'$  uz platumu  $\varphi = 69^\circ 24'$ .

$\varphi$	$90^\circ$	$75^\circ$	$60^\circ$	$45^\circ$	$30^\circ$	$15^\circ$	$0^\circ$
$\psi$	$90^\circ 0'$	$56^\circ 27'$	$41^\circ 49'$	$30^\circ 0'$	$19^\circ 28'$	$9^\circ 36'$	$0^\circ 0'$

Pēc (514) un (513) formulas var aprēķināt visus nepieciešamos skaitļus projekcijas konstruēšanai pēc punktiem.

Meridiānu nolīdzinājums. — To dabūsim izsleidot no trīs nolīdzinājumiem (513) un (514) platumu  $\varphi$  un platumu funkciju  $\psi$ .

No (514) formulas  $\cos \psi = \sqrt{1 - \frac{4\varphi^2}{\pi^2}}$ . Te  $\varphi$  atvietosim ar tā nozīmi no (513) otrā nol.; tad

$$\cos \psi = \sqrt{1 - \frac{4y^2}{\pi^2 R^2}}.$$

Šo kosinusa nozīmi ievieojam pirmā no (513) nol.; tad:

$$x = R\lambda \sqrt{1 - \frac{4y^2}{\pi^2 R^2}}, \text{ jeb}$$

$$\frac{x^2}{(\lambda R)^2} + \frac{y^2}{(\frac{1}{2}\pi R)^2} = 1. \quad (515)$$

Šis nolīdzinājums rāda, ka patiesi Arāgo projekcijā meridiāni ir ellipses, kuņu pusasis ir  $\lambda R$  un  $\frac{1}{2}\pi R$ . Tās ir tādas pašas ellipses, kā Molveides projekcijā (sk. 318. lp.) un tāpēc arī no divi meridiāniem norobežotā divsānu laukums ir vienādliels.

Parallēļu nolīdzinājums. — No (513) formulām otrā nesatur gaŗuma  $\lambda$ , tāpēc ordinātas izteiksme dod parallēļu nol.; kā redzams, parallēles uz projekcijas ir taisnes, kas iet līdztekus ekvātoram, tāpat kā kvadrātiskā projekcijā, (sk. 164. form. 151. lpp.)

Leņķis  $\epsilon$ . — Alterāciju izpētīšanai novilksim meridiānam  $PAP_1$  (117. zīm.) punktā A pieskari AS un leņķi ASO nosauksim par  $\epsilon$ . Šis leņķis rāda, par cik leņķis starp meridiānu un parallēli uz projekcijas ir lielāks par  $90^\circ$ . No zīmējuma redzam, ka

$$\operatorname{tg} \epsilon = - \frac{dx}{dy}.$$

Uzskatīsim gaŗumu  $\lambda$  par konstantu lielumu un diferencēsim (513) nol.; tad

$$\begin{aligned} dx &= -R\lambda \operatorname{sn} \psi \cdot d\psi, \\ dy &= R \cdot d\varphi. \end{aligned}$$

Bez tam no (514) nol.:

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{2}{\pi} \sec \psi.$$

Tamdeļ

$$\operatorname{tg} \epsilon = \frac{2\lambda}{\pi} \operatorname{tg} \psi. \quad (516)$$

Leņķa  $\epsilon$  skaitlisko nozīmju tabula Arāgo projekcijas dažādiem punktiem ik pēc  $15^\circ$  platuma un gaŗuma ir sekojoša:

$\varphi$	$\lambda$													
	0°		15°		30°		45°		60°		75°		90°	
90°	0°	0'	90°	0'	90°	0'	90°	0'	90°	0'	90°	0'	90°	0'
75	0	0	14	6	26	41	37	0	45	9	51	29	56	27
60	0	0	8	29	16	36	24	6	30	48	36	42	41	49
45	0	0	5	30	10	54	16	6	21	3	25	42	30	0
30	0	0	3	22	6	43	10	2	13	16	16	25	19	28
15	0	0	1	37	3	13	4	50	6	26	8	1	9	36
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Mērogs pa meridiāniem, kā projekcijas un sfēras bezgalīgi mazu loku attiecība ir

$$m_m = \frac{dy \operatorname{sec} \varepsilon}{R d\varphi} = \operatorname{sec} \varepsilon. \quad (517)$$

Mērogs pa paralēlēm ir attiecība  $m_p = \frac{dx}{R \cos \varphi d\lambda}$ . Ievietojot te  $x$  atvasināto pēc mainīgā  $\lambda$  no (513) pirmās formulas dabūjam:

$$m_p = \cos \psi \operatorname{sec} \varphi. \quad (518)$$

$$\text{Platību mērogs } p = m_m \cdot m_p \cdot \cos \varepsilon = m_p. \quad (519)$$

Kā redzam, tas vienāds ar mērogu pa paralēli.

Turpmāk dota mērogu  $m_m$ ,  $m_p$  un  $p$  tabula projekcijas dažādiem punktiem. Lielums  $m_m$  ir atkarīgs no punkta platuma un gaļuma, bet lielumi  $m_p$  un  $p$  tikai no platuma.

$\varphi$	$m_p = p$	M ē r o g i $m_m$						
		$\lambda = 0^\circ$	15°	30°	45°	60°	75°	90°
90°	$\infty$	1,000	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
75	2,136	1,000	1,031	1,119	1,252	1,418	1,606	1,809
60	1,491	1,000	1,011	1,044	1,095	1,164	1,247	1,342
45	1,225	1,000	1,005	1,018	1,041	1,072	1,110	1,155
30	1,089	1,000	1,002	1,007	1,016	1,027	1,043	1,061
15	1,021	1,000	1,000	1,002	1,004	1,006	1,010	1,014
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Vislielākās lenķu alterācijas  $\omega$  aplēsei jālieto vispārīgā (32) formula; tikai punktiem uz vidējā meridiāna, kur  $\varepsilon = 0$  un  $m_m = 1$ , to var atvietot ar vienkāršāku:

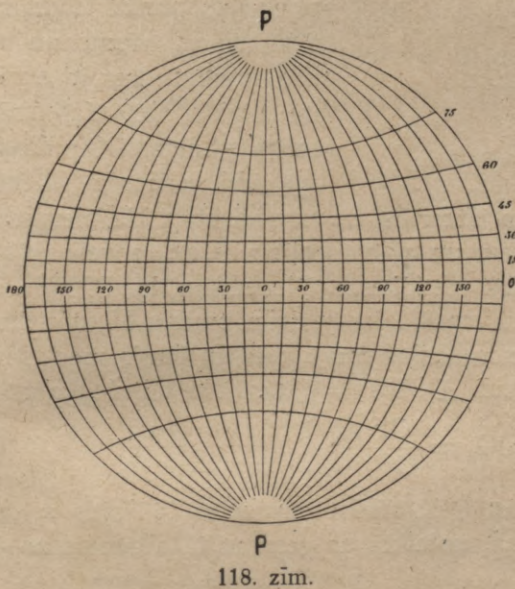
$$\operatorname{sn} \omega = \operatorname{tg} \frac{\varphi + \psi}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi - \psi}{2}. \quad (520)$$

Lenķu  $\omega$  skaitliskā nozīmes dažādiem punktiem Arāgo projekcijā ir sekojošas:

$\varphi$	$\lambda$													
	0°		15°		30°		45°		60°		75°		90°	
90°	180°	0'	180°	0'	180°	0'	180°	0'	180°	0'	180°	0'	180°	0'
75	42	28	43	24	46	2	50	0	54	51	60	11	65	42
60	22	43	23	43	26	28	30	25	35	6	40	9	45	21
45	11	36	12	36	15	14	18	46	22	46	26	59	31	16
30	4	52	5	50	8	6	10	50	13	46	16	47	19	48
15	1	9	1	57	3	22	4	56	6	29	8	3	9	38
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Arāgo projekciju nevar uzskatīt par vislabāko hemisfēras attēlošanai; neraugoties uz to, tā vēl tagad bieži sastopama ģeografijas atlasos.

**63. Grintena projekcija.** — Visas zemes virsas attēlošanai uz vienas kartes ir izgudrotas vairākas projekcijas, bet visām tām ir lieli trūkumi. Vislabākā ir Lagranža projekcija pie  $\alpha = 0,5$ ; šinī projekcijā viena apļa robežās attēlojas visa zemes virsa un pie tam tā, ka attēla bezgalīgi mazas daļas ir līdzīgas; tomēr arī viņai uz ekvatora mērogs mainās no 1 līdz 2.



Ģeografiskā žurnālā „Petermann's Mitteilungen“ par 1904. g. Čikāgas kartografs Grintens (Alphons van der Grinten) apraksta projekciju, kuŗa pēc Amerikas zinātnieku domām esot tik laba, ka atvietojoť globu.

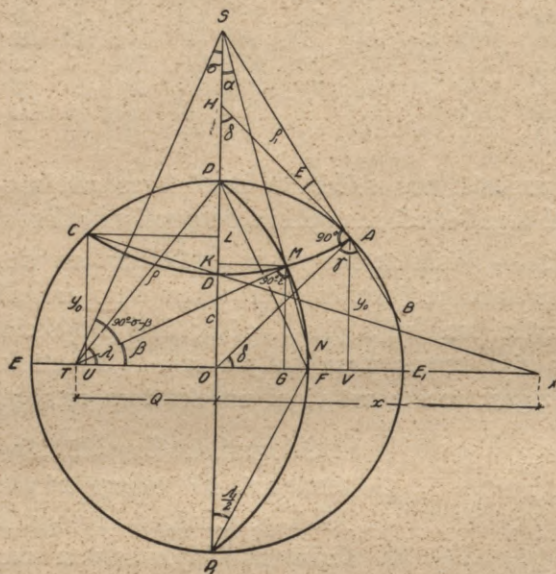
Šī projekcija attēlota 118. zīmējumā; tanī visi kontinenti un okeāni attēlojas diezgan tuvu īstenībai un mērogi gar ekvatoru visos virzienos vienādi ar galveno; lieli sakropļojumi iznāk tikai augstos platumos, bet uz pašiem poliem mērogi pat bezgalīgi reiz lielāki par

galveno. Pēdējais apstāklis nerada lielas neērtības, jo polārie apgabali maz izpētīti un maz pieejami.

Grintena projekcijā, tāpat kā Lagranža projekcijā, vidējais meridiāns  $PP_1$  un ekvators  $EE_1$  (119. zīm.) attēlojas kā taisnas līnijas. Pārējie meridiāni un visas paralēles attēlojas kā riņķu loki, tikai šo riņķu rādius un centru attālumus no projekcijas centra Grintena pro-

jekcijai aprēķina citādi nekā Lagranža projekcijai. Par projekcijas pamatu ņem apluci  $PE_1P_1E$ , ar radiju  $k$ , vienlīdzīgu ekvatora jeb kautkuŗa meridiāna iztaisnotam pusapkārtmēra garumam, t. i.:

$$k = \pi R, \quad (521)$$



119. zīm.

kur  $R$  ir zemes sfēras radijs projekcijas galvenā mērogā. Šinī apli novilkta savā starpā stateniski diametri  $PP_1$  un  $EE_1$ , pie kam, kā jau teikts,  $PP_1$  attēlo vidējo meridiānu un  $EE_1$  ekvatoru. Tā kā uz projekcijas attēlo visu zemes lodī, tad pamatriņķis  $PE_1P_1E$  ir vidējam meridiānam pretējs loks, kas ir meridiāns ar garumu  $\pm 180$ ; tamdēļ projekcijas punkti  $E$  un  $E_1$  attēlo sfēras vienu un to pašu punktu, kas ir ekvatora punkts, bet diametrāli pretējs punktam  $O$ . Ekvatoru  $EE_1$  sadala vienā-

dās daļās un to skaitu ņem atkarībā no meridiānu tikla biežuma. Caur dabūtiem sadaļu punktiem un abiem poliēm  $P, P_1$  novelk riņķu lokus, kas attēlos visus pārējos meridiānus. Pieņemsim, ka  $PMFP_1$  ir viens tāds loks ar centru  $T$  un uz šī loka ņemsim punktu  $M$ , noteiktu ar platumu  $\varphi$ . Leņķi  $PTF$  nosauksim par  $\lambda_1$ ; tā kā tas ir meridiāna loka  $PMF$  centrālais leņķis, tad  $\sphericalangle OP_1F = \frac{1}{2}\lambda_1$ . No taisnleņķa trīsstūra  $FOP_1$ :

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \lambda_1 = \frac{OF}{OP_1}.$$

Te  $OP_1 = k = \pi R$ ; tā kā  $OE_1$  atbilst garumam  $180^\circ$  jeb  $\pi$ , tad punkta  $F$ , kas ir uz meridiāna, noteikta ar garumu  $\lambda$ , attālums no  $O$  būs  $OF = R\lambda$ ; tāpēc

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \lambda_1 = \frac{R\lambda}{\pi R} = \frac{\lambda}{\pi}. \quad (522)$$

No trīsstūra  $TOP$  dabūsim meridiāna radiju  $TP = \rho$  un centra attālumu  $TO = Q$  no projekcijas centra  $O$ :

$$\rho = k \operatorname{cosec} \lambda_1, \quad (523)$$

$$Q = k \operatorname{cotg} \lambda_1. \quad (524)$$

Ar šādu konstruēšanas paņēmieni ir panākts, ka mērogs pa ekvātoru ir = 1, t. i., projekcijas galvenam mērogam.

Sekošā tabulā dotas palīgleņķu  $\lambda_1$ , kā arī lielumu  $\rho$  un  $Q$  nozīmes, aprēķinātas pēc (522) — (524) formulām dažādiem gaumiem ik pēc  $30^\circ$ , pieņemot  $k = \pi R = 1$ .

$\lambda$	$0^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
$\lambda_1$	$0^\circ 0'$	$18^\circ 55'$	$36^\circ 52'$	$53^\circ 08'$	$67^\circ 23'$	$79^\circ 37'$	$90^\circ 0'$
$\rho$	$\infty$	3,0833	1,6667	1,2500	1,0833	1,0167	1,0000
$Q$	$\infty$	2,9167	1,3333	0,7500	0,4167	0,1833	0,0000

Kā jau augšā bija teikts, arī paralēles ir riņķa loki. Tā kā riņķa stāvoklis ir noteikts ar trīs dotiem tā punktiem, tad jāzina riņķa krustošanās punkts ar vidējo meridiānu un abi krustošanās punkti ar pamatriņķi. Attālumu  $c = OD$ , no ekvatora līdz punktam, ko noteic ar platumu  $\varphi$  dotā paralēle krustojoties ar vidējo meridiānu, Lagranža projekcijā aprēķina pēc (349) formulas (pie  $\alpha = 0,5$ , sk. 268. lpp.). Grintens lieto to pašu formulu, tikai leņķa tangensa vietā viņš ņem pašu loku un  $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi$  vietā ņem  $\frac{2\varphi}{\pi}$ ; tāpēc Grintena projekcijai:

$$c = k \frac{\pi}{2\varphi} \left\{ 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^2} \right\}$$

jeb

$$c = k \frac{\pi - \sqrt{\pi^2 - 4\varphi^2}}{2\varphi}. \quad (525)$$

Paralēļu krustošanās punktus ar projekcijas pamatriņķi noteiks šo punktu ordinātas  $y_0 = AV = CU$  (119. zīm.). Novilksim paralēles lokā  $CDA$  sekanti  $CDX$  un turpināsim to līdz krustojumam ar ekvatora  $EE_1$  turpinājumu punktā  $X$ . Abscisu  $OX$  nosauksim par  $x$ . Divi izveidojušies taisnstūri  $CUX$  un  $DOX$  ir līdzīgi; tāpēc:

$$\frac{CU}{DO} = \frac{UX}{OX}.$$

No taisnleņķa trīsstūra  $OVA$ , kuram  $OA = k$  un  $AV = y_0$ ,  $OV = OU = \sqrt{k^2 - y_0^2}$ ; tāpēc  $UX = x + \sqrt{k^2 - y_0^2}$  un augšā uzrakstītā proporcija iznāk:

$$\frac{y_0}{c} = \frac{x + \sqrt{k^2 - y_0^2}}{x}.$$

Šis ir kvadrātnolidzinājums attiecībā uz  $y_0$ ; pozitīvā sakne ir:

$$y_0 = \frac{c}{c^2 + x^2} \left[ x^2 + \sqrt{x^2(k^2 - c^2) + k^2 c^2} \right]. \quad (a)$$

Ordināta  $y_0$  un abscisa  $x$  ir mainīgā lieluma  $c$  funkcijas, pie kam pats  $c$  jānoteic pēc (525) formulas, atkarībā no parallēles ģeografiskā platuma  $\varphi$ . Tā kā mērogam  $m_m$  meridiāna virzienā pa visu ekvatoru ir jābūt 1, tad jāatrod ir tāda funkcija, lai pie  $c=0$  iznāktu ordināta  $y_0$  nulle un abscisa  $x$  bezgalīga; tādas funkcijas visvienkāršākais veids iksam būs:

$$x = \frac{a^2}{c} \dots (b),$$

kur  $a^2$  vēl pagaidām ir lieluma  $c$  kaut kāda patvaļīga funkcija, kuŗa nepaliek par nulli tad, ja  $c=0$ . Ievietojam (b) nozīmi (a) formulā; dabūjam:

$$y_0 = \frac{c}{c^4 + a^4} \left[ a^4 + c \sqrt{a^4(k^2 - c^2) + k^2c^4} \right] \dots (c)$$

Ordinātas  $y_0$  vislielākā nozīmē ir pamatriņķa radijs  $k$ , un tad arī  $c$  paliek par  $k$ . Tā kā pie  $c=k$  izteiksmes (c) radikāls ir  $k^3$ , tad lieluma  $a^2$  atkarības no  $c$  noteikšanai iznāk vienādojums:

$$\sqrt{a^4(k^2 - c^2) + k^2c^4} = k^3,$$

no kurienes

$$a^2 = k \sqrt{k^2 + c^2}.$$

Ievietojot šo iznākumu (b) nolīdzinājumā dabūjam:

$$x = \frac{k \sqrt{k^2 + c^2}}{c}.$$

Tālāki šo abscisas  $x$  izteiksmi ievietojam (a) formulā; pēc vienkāršiem pārveidojumiem iznāk:

$$y_0 = \frac{k^2c}{k^2 - kc + c^2}. \quad (526)$$

Ja te vēl ievietosim  $c$  nozīmi no (525), tad ordinātu  $y_0$  dabūsim tieši kā platuma  $\varphi$  funkciju. Vīspirms

$$k^2 - kc + c^2 = \frac{k^2}{2\varphi^2} (\pi - \varphi) (\pi - \sqrt{\pi^2 - 4\varphi^2}) \quad \text{un pēc tam}$$

$$y_0 = \frac{k\varphi}{\pi - \varphi}. \quad (527)$$

Tagad nebūs grūti noteikt uz projekcijas parallēles loka CDA radiju  $\rho_1 = SA = SD$  un centra  $S$  attālumu  $SO$  no ekvatora. No punkta  $C$  nolaidīsim stateni  $CL$  uz radiju  $SD$ ; tā kā statenis, kas nolaists no aploces kaut kāda punkta uz diametru, ir vidējais proporcionālais starp diametra nogriežņiem, kādos statenis sadala diametru, tad

$$CL^2 = DL(2\rho_1 - DL).$$

Savukārt  $CL^2 = UO^2 = OV^2 = k^2 - y_0^2$  un  $DL = y_0 - c$ ; tāpēc

$k^2 - y_0^2 = (y_0 - c)(2\rho_1 - y_0 + c)$  un no šejienes

$$\rho_1 = \frac{k^2 - 2cy_0 + c^2}{2(y_0 - c)}.$$

Ievietojam te  $y_0$  nozīmi no (526); pēc nelieliem pārveidojumiem dabūjam sekošu formulu, kas noderīga jebkuŗas paralēles radija  $\rho_1$  aplēsei:

$$\rho_1 = \frac{k^3 - c^3}{2c^2}. \quad (528)$$

Paralēles centra attāļumu no ekvātorā dos formula

$$SO = q = \rho_1 + c$$

jeb, ievietojot  $\rho_1$  vietā (528) nozīmi:

$$q = \frac{k^3 + c^3}{2c^2}. \quad (529)$$

Uz projekcijas attēla sakropļošanas mērs vispirms ir starpība starp taisno leņķi un leņķi, ko veido meridiāns ar paralēli. Papriekš apskatīsim, cik liela šī starpība uz malējā meridiāna, ko attēlo pamatriņķis  $PAE_1P_1E$ . Novilksim pieskari  $AH$ ; tad  $\sphericalangle OAH = 90^\circ$ . Tā kā  $SA$  ir paralēles  $ADC$  radijs, tad meklējamā starpība ir  $\sphericalangle HAS = E$ . No trīsstūra  $SAH$ :

$$\frac{SH}{SA} = \frac{\text{sn } E}{\text{sn}(180^\circ - \delta)},$$

kur  $\delta = \sphericalangle AHO = \sphericalangle AOE_1$ ; pēdējā leņķa sinus ir  $y_0 : k$ ;  $SH = SO - HO = q - k \cos e \delta = q - k^2 : y_0$  un  $SA = \rho_1$ ; tāpēc no iepriekšējās proporcijas

$$\text{sn } E = \frac{\text{sn } \delta}{\rho_1} \left( q - \frac{k^2}{y_0^2} \right).$$

Ievietojot te  $q$ ,  $y_0$  un  $\rho_1$  izteiksmes no (529), (526) un (528) formulām dabūjam:

$$\text{sn } E = \frac{kc}{k^2 + kc + c^2}. \quad (530)$$

Atvietojojot te  $c$  ar tā izteiksmi (525) dabūjam vēl vienkāršāku formulu leņķa  $E$  aplēsei

$$\text{sn } E = \frac{\varphi}{\pi + \varphi}. \quad (531)$$

Kā redzam, leņķis  $E$  ir platuma funkcija. Lielumu  $c$ ,  $y_0$ ,  $\rho_1$ ,  $q$  un leņķu  $E$  skaitliskās nozīmes dažādiem platumiem  $\varphi$  ik pēc  $15^\circ$ , pieņemot  $k = \pi R = 1$ , dotas sekošā tabulā.

$\varphi$	$c$	$y_0$	$\rho_1$	$q$	$E$
90°	1,0000	1,0000	0,0000	1,0000	19°28'
75	0,5367	0,7143	1,4677	2,0043	17 06
60	0,3820	0,5000	3,2361	3,6180	14 29
45	0,2679	0,3333	6,8301	7,0981	11 32
30	0,1716	0,2000	16,8995	17,0711	8 13
15	0,0839	0,0909	70,9545	71,0384	4 25
0	0,0000	0,0000	$\infty$	$\infty$	0 0

Lai uzietu starpību starp 90° un to leņķi, ko projekcijas kaut-kādā punktā veido meridiāns ar parallēli, apskatīsim sekantes SAB un SMN. Spriežot tāpat kā pie (499) formulas izvešanas dabūsim, ka:

$$MN = AB \text{ un } \frac{1}{2} MN = TM \cdot \cos(90^\circ - \varepsilon), \text{ jeb } \operatorname{sn} \varepsilon = \frac{MN}{2\rho}.$$

Tāpat  $\cos \gamma = \frac{AB}{2OA}$ ; tāpēc  $\frac{\operatorname{sn} \varepsilon}{\cos \gamma} = \frac{OA}{\rho} = \frac{k}{\rho}$ . Ņemot vērā, ka  $\rho = k : \operatorname{sn} \lambda_1$  un  $\gamma = 90^\circ - E$ , dabūsim:

$$\operatorname{sn} \varepsilon = \operatorname{sn} E \cdot \operatorname{sn} \lambda_1. \quad (532)$$

Leņķa  $\varepsilon$  skaitliskās nozīmes Grintena projekcijā dažādiem punktiem ik pēc 15° platuma un 30° gaļuma ir sekošas.

$\varphi$	Gaļums $\lambda$							
	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	
90°	0° 0'	6° 12'	11° 32'	15° 28'	17° 55'	19° 08'	19° 28'	
75	0 0	5 28	10 10	13 37	15 45	16 49	17 06	
60	0 0	4 39	8 38	11 32	13 21	14 14	14 29	
45	0 0	3 43	6 54	9 12	10 38	11 21	11 32	
30	0 0	2 39	4 55	6 34	7 35	8 05	8 13	
15	0 0	1 26	2 39	3 32	4 04	4 20	4 25	
0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	

Nosauksim leņķi OST par  $\sigma$ ; no zīmējuma rakstam:

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{Q}{q}. \quad (533)$$

Ja attālumu  $c$  ņemsim  $= OP = k$ , tad pēc (529) formulas polam  $q = k$ . Atvietojot (533) formulā  $q$  ar  $k$  un  $Q$  ar tā nozīmi (524) dabūjam

$$\operatorname{tg} \sigma = \operatorname{cotg} \lambda_1 = \operatorname{tg}(90^\circ - \lambda_1) \text{ un } \sigma = 90^\circ - \lambda_1.$$

Sekošā tabula dod leņķa  $\sigma$  skaitliskās nozīmes dažādiem punktiem Grintena projekcijā.

$\varphi$	Gaņums $\lambda$						
	$0^{\circ}$	$30^{\circ}$	$60^{\circ}$	$90^{\circ}$	$120^{\circ}$	$150^{\circ}$	$180^{\circ}$
$90^{\circ}$	$90^{\circ} 0'$	$71^{\circ} 05'$	$53^{\circ} 08'$	$36^{\circ} 52'$	$22^{\circ} 37'$	$10^{\circ} 23'$	$0^{\circ} 0'$
$75$	$90 0$	$55 30$	$33 38$	$20 31$	$11 45$	$5 14$	$0 0$
$60$	$50 0$	$38 52$	$20 14$	$11 43$	$6 34$	$2 54$	$0 0$
$45$	$90 0$	$22 20$	$10 38$	$6 02$	$3 22$	$1 29$	$0 0$
$30$	$90 0$	$9 42$	$4 28$	$2 31$	$1 24$	$0 37$	$0 0$
$15$	$90 0$	$2 21$	$1 05$	$0 36$	$0 20$	$0 09$	$0 0$
$0$	—	$0 0$	$0 0$	$0 0$	$0 0$	$0 0$	$0 0$

Nosauksim par  $\alpha$  leņķi MSO, starp projekcijas vidējo meridiānu un paralēles radiju MS, kas novilkts uz paralēles punktu M, noteiktu ar gaņumu  $\lambda$ .

Tad no trīsstūriem SMT un SPT:

$$\frac{TM}{TS} = \frac{\text{sn}(\sigma + \alpha)}{\text{sn}[180^{\circ} - (90^{\circ} - \varepsilon)]} \quad \text{un} \quad \frac{TP}{TS} = \frac{\text{sn} \sigma}{\text{sn}[180^{\circ} - (90^{\circ} - \lambda_1)]};$$

tā kā  $TM = TP$ , tad

$$\frac{\text{sn}(\sigma + \alpha)}{\cos \varepsilon} = \frac{\text{sn} \sigma}{\cos \lambda_1}$$

$$\text{un} \quad \text{sn}(\sigma + \alpha) = \frac{\text{sn} \sigma \cos \varepsilon}{\cos \lambda_1}, \quad (534)$$

kas ir tāda pat, kā globulārās projekcijas (501) grupas pirmā formula.

Šī formula dod nenoteiktu izteiksmi malējam meridiānam, kur  $\lambda = 180^{\circ}$ , jo tad  $\sigma = 0$  un pēc (522) formulas  $\lambda_1 = 90^{\circ}$ . Lai šinī gadījumā uzietu leņķa  $\alpha$  isto nozīmi noteiksim no (533) un (524) formulām

$$\text{sn} \sigma = \frac{k \cos \sigma \cotg \lambda_1}{q}$$

Šo izteiksmi ievietojam (534) nolidzinājuma labā pusē; tad

$$\text{sn}(\sigma + \alpha) = \frac{k \cos \sigma \cos \varepsilon}{q \text{sn} \lambda_1}. \quad (535)$$

No šīs formulas malējam meridiānam, kad  $\sigma = 0$  un  $\lambda_1 = 90^{\circ}$ , leņķim  $\alpha$  dabūjam pilnīgi noteiktu lielumu; apzīmējot to ar  $\alpha_0$  un ņemot vērā, ka uz malējā meridiāna  $\varepsilon = E$ , dabūjam:

$$\text{sn} \alpha_0 = \frac{k}{q} \cos E. \quad (536)$$

Aprēķināsim leņķi  $MTE_1 = \beta$ , ko veido ar ekvātoru meridiāna rādijs, kas novilkts uz punktu M. No trīsstūra SMT:

$$\frac{SM}{ST} = \frac{\text{sn}(90^{\circ} - \sigma - \beta)}{\text{sn}(90^{\circ} + \varepsilon)}, \quad \text{jēb} \quad \frac{\rho_1 \text{sn} \sigma}{Q} = \frac{\cos(\sigma + \beta)}{\cos \varepsilon};$$

no šejienes:

$$\cos(\sigma + \beta) = \frac{\rho_1 \operatorname{sn} \sigma \cos \varepsilon}{Q} = \frac{\rho_1}{k} \operatorname{sn} \sigma \operatorname{tg} \lambda_1 \cos \varepsilon. \quad (537)$$

Polam  $\rho_1 = 0$ , tāpēc tam

$$\sigma + \beta = 90^\circ \text{ un } \beta = 90^\circ - \sigma = \lambda_1.$$

Leņķu  $\alpha$  un  $\beta$  aplēses pareizību pārbauda tāpat kā globulārā projekcijā pēc vienkāršas sakarības (502):

$$\beta - \alpha = \varepsilon.$$

Projekcijas konstruēšanai pēc punktiem noteiksim punkta M koordinātas:

$$\left. \begin{aligned} x &= OG = KM = \rho_1 \operatorname{sn} \alpha, \\ y &= OK = MG = \rho \operatorname{sn} \beta. \end{aligned} \right\} \quad (538)$$

Leņķu  $\alpha$  tabula.

$\varphi$	$\lambda$													
	0°		30°		60°		90°		120°		150°		180°	
90°	0°	0'	12°	44'	25°	20'	37°	40'	49°	28'	60°	28'	70°	32'
75	0	0	4	38	9	19	14	04	18	52	23	41	28	28
60	0	0	2	32	5	04	7	39	10	15	12	53	15	31
45	0	0	1	18	2	36	3	55	5	15	6	35	7	56
30	0	0	0	33	1	06	1	39	2	12	2	46	3	19
15	0	0	0	08	0	16	0	24	0	32	0	40	0	48
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Leņķu  $\beta$  tabula.

$\varphi$	$\lambda$													
	0°		30°		60°		90°		120°		150°		180°	
90°	0°	0'	18°	55'	36°	52'	53°	08'	67°	23'	79°	37'	90°	0'
75	0	0	10	07	19	29	27	41	34	37	40	30	45	34
60	0	0	7	10	13	42	19	11	23	36	27	07	30	0
45	0	0	5	0	9	30	13	08	15	53	17	56	19	28
30	0	0	3	12	6	01	8	13	9	48	10	50	11	32
15	0	0	1	34	2	55	3	56	4	36	5	01	5	13
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Mērogs pa meridiāniem. — Uz tāda paša prātojuma pamata kā globulārai projekcijai, šo mērogu var izteikt ar (504) formulu:

$$m_m = \left( \frac{dq}{d\varphi} \cos \alpha - \frac{d\rho_1}{d\varphi} \right) \frac{\sec \varepsilon}{R}.$$

Diferencējam (529), (528) un (525) formulas:

$$\frac{dq}{d\varphi} = \frac{c^3 - 2k^3}{2c^3} \cdot \frac{dc}{d\varphi},$$

$$\frac{d\rho_1}{d\varphi} = - \frac{c^3 + 2k^3}{2c^3} \cdot \frac{dc}{d\varphi},$$

$$\frac{dc}{d\varphi} = \frac{\pi^2 R (\pi - \sqrt{\pi^2 - 4\varphi^2})}{2\varphi^2 \sqrt{\pi^2 - 4\varphi^2}}.$$

Pēdējā formulā  $k$  atvietots ar  $\pi R$ . Ieliekot šis atvasinātās augšējā mēroga formulā dabūsim:

$$m_m = \left( \frac{c^3 - 2k^3}{2c^3} \cos \alpha + \frac{c^3 + 2k^3}{2c^3} \right) \frac{\pi^2 (\pi - \sqrt{\pi^2 - 4\varphi^2})}{2\varphi^2 \sqrt{\pi^2 - 4\varphi^2}} \sec \epsilon. \quad (539)$$

Binomu  $\left( \quad \right)$  iekavās var izteikt sekoši:

$$\frac{1}{2} (1 + \cos \alpha) + \frac{k^3}{c^3} (1 - \cos \alpha) = \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{2k^3}{c^3} \operatorname{sn}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Ievietojot te vēl  $c$  nozīmi no (525), dabonam:

$$m_m = \left( \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{16\varphi^3}{(\pi - \sqrt{\pi^2 - 4\varphi^2})^3} \operatorname{sn}^2 \frac{\alpha}{2} \right) \frac{\pi^2 (\pi - \sqrt{\pi^2 - 4\varphi^2})}{2\varphi^2 \sqrt{\pi^2 - 4\varphi^2}} \sec \epsilon. \quad (540)$$

Kā (539), tā (540) formula noder mēroga  $m_m$  aplēsei projekcijas iekuŗam punktam; atsevišķos gadījumos šīm formulām ir vienkāršāks veids.

Uz ekvatora, pie  $\varphi = 0$ , leņķi  $\alpha$  un  $\epsilon$  ir nulle, bet reizinis pie  $\sec \epsilon$  bez binoma  $\left( \quad \right)$  iekavas, pieņem nenoteiktu izteiksmi, bet kuŗas istā nozīme ir nulle; tāpēc uz ekvatora:

$$m_m = 1. \quad (541)$$

Šis rezultāts pilnīgi saskan ar projekcijas konstruešanas paņēmienu.

Uz pola, kur  $\varphi = \frac{1}{2} \pi$ , (539) un (540) formulu saucējos reizinis  $\sqrt{\pi^2 - 4\varphi^2}$  ir nulle; tāpēc uz pola

$$m_m = \infty. \quad (542)$$

Uz vidējā meridiāna  $\lambda = 0$ ,  $\alpha = 0$  un  $\epsilon = 0$  un, kā no (539), tā no (540) formulas, punktiem uz vidējā meridiāna iznāk:

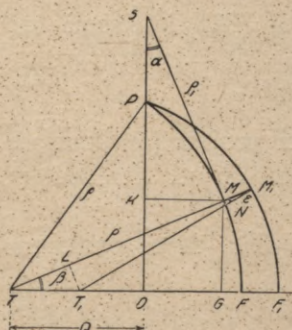
$$m_m = \frac{\pi^2 (\pi - \sqrt{\pi^2 - 4\varphi^2})}{2\varphi^2 \sqrt{\pi^2 - 4\varphi^2}}. \quad (543)$$

Grūtāki uziet mēroga  $m_m$  nozīmi malējam meridiānam, kas noteikts ar  $\lambda = 180^\circ$ ; tad  $\lambda_1 = 90^\circ$  un  $\epsilon = E$ . Šinī gadījumā no (530) formulas iznāk:

$$\cos E = \frac{(k + c) \sqrt{k^2 + c^2}}{k^2 + kc + c^2}.$$



Mērogs pa paralēlēm. — Iedomāsimies divi bezgalīgi tuvus meridiānus PF un PF<sub>1</sub> (120. zīm.), kas noteikti ar gaļumiem λ un λ + dλ. Uz šiem meridiāniem ņemsim divi punktus M un M<sub>1</sub> tā, lai tie iznāktu uz vienas un tās pašas paralēles ar platumu φ. Paralēles elements uz projekcijas ir MM<sub>1</sub>; atbilstošais elements uz sfēras ir R cos φ dλ; tāpēc mērogs pa paralēli ir:



120. zīm.

$$m_p = \frac{MM_1}{R \cos \varphi d\lambda}$$

Ja T un T<sub>1</sub> ir meridiānu loku PF un PF<sub>1</sub> centri, tad taisne TP = TM = ρ. Leņķi NM<sub>1</sub>M nosauksim par ε; elementārā trīsstūrī leņķi MNM<sub>1</sub> uzskatām par taisnu, tad

$$MM_1 = NM_1 \cdot \sec \varepsilon.$$

Tāļāki spriežam tāpat, kā tas darīts pie (508) formulas izvešanas.

$$\begin{aligned} M_1T_1 - MT &= d\rho \\ LT = TT_1 \cos \beta &= -dQ \cdot \cos \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} NM_1 = M_1T_1 - NT_1 = M_1T_1 - LM = M_1T_1 - (MT - LT) &= \\ = M_1T_1 - MT + LT = d\rho - dQ \cos \beta. \end{aligned}$$

Tapēc  $MM_1 = (d\rho - dQ \cdot \cos \beta) \sec \varepsilon$  un

$$m_p = \left( \frac{d\rho}{d\lambda} - \cos \beta \cdot \frac{dQ}{d\lambda} \right) \frac{\sec \varepsilon}{R \cos \varphi} \quad (d)$$

No taisnleņķa trīsstūra TOP:

$$\rho^2 - Q^2 = k^2.$$

Uzskatot k par konstantu lielumu diferencējam šo nolidzinājumu pēc λ; tad

$$2\rho \frac{d\rho}{d\lambda} - 2Q \frac{dQ}{d\lambda} = 0 \text{ un } \frac{d\rho}{d\lambda} = \frac{Q}{\rho} \frac{dQ}{d\lambda}.$$

Pēc 119. zīm.  $\cos \beta = \frac{Q+x}{\rho}$ . Šis divi pēdējās izteiksmes ievieto

(d) formulā; tad:

$$m_p = - \frac{x \sec \varepsilon dQ}{R\rho \cos \varphi d\lambda}$$

Diferencējam (522) un (524) nolidzinājumu pēc λ; ņemot vēl vērā (523) formulu dabūjam:

$$\frac{dQ}{d\lambda} = - \frac{\rho}{\lambda}.$$

Šo nozīmi ieliek iepriekšējā nol.; iznāk:

$$m_p = \frac{x \sec \varepsilon}{R \lambda \cos \varphi}. \quad (545)$$

Ja  $x$  atvietot ar tā izteiksmi no (538) un  $R$  ar (521) izteiksmi, tad

$$m_p = \frac{\pi \rho_1 \sin \alpha \sec \varepsilon}{k \lambda \cos \varphi}. \quad (546)$$

Šī formula ir ļoti ērta mēroga  $m_p$  aplēsei projekcijas iekuŗam punktam; tomēr sevišķos gadījumos to var atvietot ar vēl vienkāršāku formulu.

Punktiem uz ekvatora  $\varphi = 0$ ,  $\varepsilon = 0$  un  $x = R \lambda$ , tāpēc punktiem uz ekvatora no (545) formulas iznāk:

$$m_p = 1. \quad (547)$$

Šo iznākumu varēja pasacīt jau iepriekš, ņemot vērā projekcijas konstruēšanas paņēmienu. Uz pola mērogam no (545) un (546) formulām, kur saucējos ieiet reizinātājs  $\cos \varphi = \cos 90^\circ$ , iznāk

$$m_p = \infty. \quad (548)$$

Vidējam meridiānam, kur  $\lambda = 0$ ,  $\alpha = 0$ ,  $x = 0$ , kā (545), tā (546) formula dod nenoteiktu izteiksmi un parastā ceļā nav viegli uziet lieluma  $m_p$  īsto nozīmi. Ātrāki to panāk ar maksīgu paņēmienu. No punkta  $M$  (120. zīm.) nolaiž statēņus  $MK$  un  $MG$  uz  $PO$  un  $TF$ . No taisnleņķu trīsstūriem  $KSM$  un  $GTM$

$$\begin{aligned} KM^2 &= SM^2 - (OS - OK)^2, \\ MG^2 &= TM^2 - (TO + OG)^2, \end{aligned}$$

jeb, ievēdot agrākos apzīmējumus:

$$\begin{aligned} x^2 &= \rho_1^2 - (q - y)^2 = \rho_1^2 - (\rho_1 + c - y)^2, \\ y^2 &= \rho^2 - (Q + x)^2 = k^2 - 2Qx - x^2. \end{aligned} \quad (e)$$

Atņemot otro veīnādojumu no pirmā un saīsinot dabūjam:

$$2(\rho_1 + c)y = 2c\rho_1 + c^2 + k^2 - 2Qx.$$

Šī nolīdzinājuma abas daļas paceļ kvadrātā un  $y^2$  atvieto ar (e) izteiksmi; pēc pārveidošanas iznāk:

$$\begin{aligned} (2Q)^2 x^2 \left\{ 1 + \left( \frac{\rho_1 + c}{Q} \right)^2 \right\} + 2(2Q)x(2\rho_1^2 + 2\rho_1 c + c^2 - k^2) = \\ = (k^2 - c^2) \{ 4\rho_1(\rho_1 + c) - (k^2 - c^2) \}. \end{aligned}$$

Pamatriņķa radijs  $PO = k$  ir arī statēnis, kas nolaists no loka  $PF$  punkta  $P$  uz radiju  $TF$ , sadalot visu diametru  $2\rho$  divi daļas, no kuŗām viena ir  $OF = R\lambda$ ; tāpēc:

$$k^2 = R\lambda(2\rho - R\lambda) = R\lambda \{ 2(Q + R\lambda) - R\lambda \} = 2QR\lambda + (R\lambda)^2.$$

No šejienes

$$2Q = \frac{k^2 - (R\lambda)^2}{R\lambda}.$$

Šo nozīmi ievietosim iepriekšējā nol.; tad:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{k^2 - (R\lambda)^2}{R} \right)^2 \left( \frac{x}{\lambda} \right)^2 \left[ 1 + \left( \frac{\rho_1 + c}{Q} \right)^2 \right] + \\ & + 2 \left( \frac{k^2 - (R\lambda)^2}{R} \right) \frac{x}{\lambda} (2\rho_1^2 + 2\rho_1 c + c^2 - k^2) = \\ & = (k^2 - c^2) [4\rho_1(\rho_1 + c) - (k^2 - c^2)]. \end{aligned}$$

Kad gaņumi  $\lambda$  ir ļoti mazi, tad skaitītājos var atņemt locekļus ar  $\lambda^2$  un pieņemt  $Q = \infty$ ; no tā izvestais nolīdzinājums pieņem veidu:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{k^2 x}{R\lambda} \right)^2 + 2 \left( \frac{k^2 x}{R\lambda} \right) (2\rho_1^2 + 2\rho_1 c + c^2 - k^2) = \\ & = (k^2 - c^2) [4\rho_1(\rho_1 + c) - (k^2 - c^2)]. \end{aligned}$$

Šī kvadrātnolīdzinājuma pozitīvā sakne ir:

$$\begin{aligned} & \frac{k^2 x}{R\lambda} = k^2 - c^2, \\ \text{jeb} & \frac{x}{R\lambda} = \frac{k^2 - c^2}{k^2}. \end{aligned}$$

Šo sakni ievieto (545) formulā; tā kā pie  $\lambda = 0$  leņķis  $\varepsilon = 0$ , tad

$$m_p = \frac{k^2 - c^2}{k^2} \sec \varphi.$$

Ieliek te  $c$  nozīmi no (525) formulas; tad punktiem uz videjā meridiāna mērogā pa paralēlēm iznāk sekoši:

$$m_p = \frac{2 \sqrt{\pi^2 - 4\varphi^2}}{\pi + \sqrt{\pi^2 - 4\varphi^2}} \sec \varphi. \quad (549)$$

Tagad uziesim vienkāršāku izteiksmi mērogam  $m_p$  uz malējā meridiāna. No (546) formulas, pie  $\lambda = \pi$ ,  $\alpha = \alpha_0$  un  $\varepsilon = E$ ,

$$m_p = \frac{\rho_1 \operatorname{sn} \alpha_0 \sec E}{k \cos \varphi}.$$

Ieliekam te  $\operatorname{sn} \alpha_0$  nozīmi no (536); tad:

$$m_p = \frac{\rho_1}{q} \sec \varphi.$$

Izdala (528) nol. ar (529); c atvieta ar tā nozīmi (525) un iznākumu ieliek tikko dabūtā mēroga formulā; tad mērogs pa paralēlēm uz projekcijas malējā meridiāna iznāk:

$$m_p = \frac{(\pi + \varphi) \sqrt{\pi - 2\varphi}}{(\pi - \varphi) \sqrt{\pi + 2\varphi}} \sec \varphi. \quad (550)$$

Neskatoties uz to, ka uz pola mērogi  $m_p$  visiem gaļumiem ir vienlīdzīgi bezgalībai, mēroga uz malējā meridiāna attiecība pret mērogu uz vidējā meridiāna ir galīgs lielums, proti  $\frac{3}{4}$ . No (550) un (549) formulas:

$$\frac{m_p \text{ pie } \lambda = 180^\circ}{m_p \text{ pie } \lambda = 0^\circ} = \frac{(\pi + \varphi) (\pi + \sqrt{\pi^2 - 4\varphi^2})}{2(\pi - \varphi) (\pi + 2\varphi)} \dots (f)$$

Punktiem uz ekvatora, pie  $\varphi = 0$ , šī vienādojuma otrā daļa = 1, bet polā, pie  $\varphi = \frac{1}{2} \pi$ , tā =  $\frac{3}{4}$ . Uz vienas un tās pašas paralēles, pie gaļuma  $\lambda = 180^\circ$ , mēroga  $m_p$  attiecība pret mērogu  $m_p$  pie  $\lambda = 0^\circ$ , sākot no ekvatora, kur tā = 1, papriekš aug, uz noteikta platuma sasniedz maksimumu un pēc tam nepārtraukti pamazinājas līdz  $\frac{3}{4}$ . Lai aprēķinātu platumu paralēlei, uz kuŗas daļa (f) ir vislielākā, pielīdzināsim nullei tās pirmo atvasināto; meklējamā platuma noteikšanai iznāk ceturtais pakāpes nolīdzinājums:

$$\varphi^4 + 1,3 \pi \varphi^3 + 0,6 \pi^2 \varphi^2 - 0,1 \pi^3 \varphi - 0,1 \pi^4 = 0,$$

kuŗam ir tikai viena pozitīva sakne  $\varphi = 1,0688$  jeb  $\varphi = 61^\circ 14'$ . Uz paralēles, noteiktas ar šo platumu, mēroga  $m_p$  uz malējā meridiāna attiecība pret mērogu  $m_p$  uz vidējā meridiāna ir vislielākā un = 1,047.

Tā kā attiecība (f), sākot no ekvatora, kur tā ir 1, papriekšu pieaug līdz 1,047 un pēc tam pamazinājas līdz  $\frac{3}{4}$ , tad, saprotams, jābūt paralēlei, uz kuŗas šī attiecība no jauna = 1, t. i. mērogiem  $m_p$  uz vidējā un malējā meridiāniem jābūt vienādiem. Šinī gadījumā daļa (f) vienlīdzīga vienam un attiecīgās paralēles platuma noteikšanai iznāk nolīdzinājums:

$$(\pi + \varphi) (\pi + \sqrt{\pi^2 - 4\varphi^2}) = 2(\pi - \varphi) (\pi + 2\varphi).$$

Šim nol., bez saknes  $\varphi = 0$ , ir vēl otra:

$$\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{5}} = 80^\circ 30'$$

un attiecīgie mērogi  $m_p$  pēc (549) un (550) formulas iznāk = 3,744.

Ievietojot nozīmi  $\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{5}}$  (525) un (531) formulās dabūjam:

$$c = k \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \quad \text{sn } E = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

Šīs formulas rāda, ka paralēle, uz kuŗas mērogi  $m_p$  pie vidējā un malējiem meridiāniem vienādi, krusto vidējo meridiānu punktā, kuŗa attālums no ekvatora ir vienlīdzīgs ievilkta regulārā desmitstūra malai; šai paralēlei sn E (pie radija = 1) ir vienāds tāda paša daudzstūra malas pusei, bet pats leņķis  $E = 180^\circ$ . Tā tad projekcijas pētāmā īpašība pieder tai paralēlei, kas uz vidējā meridiāna dod zelta griezumā punktu, jeb vidējo meridiānu sadala maleja un videja attiecībā. Lai to pierādītu, pieņemsim radiju  $PO = k = 1$ ; tad zelta griezumā punktu noteic proporcija:

$$\frac{1}{c} = \frac{c}{1-c},$$

$$\text{no kuŗienes } c = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Sekošā tabulā ierakstītas mēroga  $m_p$  skaitliskas nozīmes Grintena projekcijas dažādiem punktiem.

$\varphi$	Ga r u m s $\lambda$						
	$0^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
$90^\circ$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
75	2,751	2,765	2,801	2,838	2,859	2,856	2,829
60	1,708	1,716	1,735	1,758	1,776	1,787	1,789
45	1,313	1,317	1,327	1,339	1,350	1,357	1,360
30	1,121	1,123	1,127	1,132	1,137	1,141	1,143
15	1,028	1,028	1,030	1,031	1,033	1,033	1,034
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Platību mērogs  $p$ . — Tā aplēsei jāņem vispārīgā (49) formula un jāieliek  $\theta = 90^\circ + \varepsilon$ ; iznāk:

$$p = m_m \cdot m_p \cdot \cos \varepsilon. \quad (551)$$

Ņemot mērogu  $m_m$  un  $m_p$  nozīmes ekvatoram, polam, vidējam un malējam meridiāniem no formulām (541) — (544) un (547) — (550), dabūjam:

$$\text{Uz ekvatora, pie } \varphi = 0 \dots p = 1. \quad (552)$$

$$\text{Uz pola, pie } \varphi = 90^\circ \dots p = \infty. \quad (553)$$

$$\text{Uz vidējā meridiāna, pie } \lambda = 0:$$

$$p = \frac{\pi^2 \{ \pi - \sqrt{\pi^2 - 4\varphi^2} \}^2}{4\varphi^4} \sec \varphi. \quad (554)$$

Uz malējā meridiāna, pie  $\lambda = 180^\circ$ :

$$p = \frac{\pi \sqrt{\pi} (\pi + \varphi)}{(\pi - \varphi)^2 \sqrt{\pi + 2\varphi}} \cdot \frac{\cos E}{\cos \varphi}. \quad (555)$$

Pēdējās divi formulas pie  $\varphi = 1/2 \pi$  dod bezgalību, bet šo lielumu attiecība iznāk:

$$\frac{p \text{ pie } \lambda = 180^\circ}{p \text{ pie } \lambda = 0^\circ} = \frac{\sqrt{\pi} (\pi + \varphi) 4\varphi^4 \cos E}{(\pi - \varphi)^2 \pi (\pi - \sqrt{\pi^2 - 4\varphi^2})^2 \sqrt{\pi + 2\varphi}}$$

No (531) formulas:

$$\cos E = \frac{\sqrt{\pi (\pi + 2\varphi)}}{\pi + \varphi};$$

tāpēc:

$$\frac{p \text{ pie } \lambda = 180^\circ}{p \text{ pie } \lambda = 0^\circ} = \left[ \frac{2\varphi^2}{(\pi - \varphi) (\pi - \sqrt{\pi^2 - 4\varphi^2})} \right]^2 \dots (g)$$

Šī attiecība uz ekvatora un pola = 1, uz visām pārējām paralēlēm tā lielāka par 1. Pielīdzinot (g) izteiksmes atvasināto nullei dabūjam:

$$\varphi = \frac{2}{5} \pi = 72^\circ.$$

Uz paralēles, noteiktas ar platumu  $72^\circ$ , platību mēroga uz malēja meridiāna attiecība pret platību mērogu uz vidējā meridiāna sasniedz savu maksimumu, kas ir 1,778.

Platību mērogu p skaitlisko nozīmju tabula dažādiem punktiem Grintena projekcijai ir sekoša:

$\varphi$	Ga ū m s λ						
	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
90°	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
75	6,410	6,569	7,041	7,797	8,800	10,003	11,355
60	2,626	2,684	2,850	3,122	3,492	3,953	4,500
45	1,625	1,652	1,730	1,857	2,031	2,250	2,514
30	1,224	1,238	1,275	1,338	1,423	1,532	1,663
15	1,050	1,055	1,071	1,097	1,133	1,178	1,232
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Leņķu alterācija. — Leņķu vislielākā alterācija  $\omega$  ir jāaprēķina pēc vispārīgās (32) formulas:

$$\operatorname{sn} \omega = \sqrt{\frac{m_m^2 + m_p^2 - 2m_m \cdot m_p \cdot \cos \varepsilon}{m_m^2 + m_p^2 + 2m_m \cdot m_p \cdot \cos \varepsilon}}$$

Uz ekvatora  $m_m$  un  $m_p = 1$ ,  $\varepsilon = 0$ ; tāpēc, kā to jau varēja paredzēt iepriekš, ekvatora punktiem  $\omega = 0$ .

Polam šī formula dod nenoteiktu izteiksmi; tomēr ar (540) un (546) formulas palīdzību, pie  $\varphi = 90^\circ$ :

$$\frac{m_m}{m_p} = \frac{\lambda}{3 \operatorname{sn} \alpha} \left( 1 + \operatorname{sn}^2 \frac{\alpha}{2} \right)$$

un polam, pie ikuŗa gaŗuma  $\lambda$ :

$$\operatorname{sn} \omega = \sqrt{\frac{\lambda^2 \left(1 + \operatorname{sn}^2 \frac{\alpha}{2}\right)^2 + 9 \operatorname{sn}^2 \alpha - 6\lambda \left(1 + \operatorname{sn}^2 \frac{\alpha}{2}\right) \cos \varepsilon \cdot \operatorname{sn} \alpha}{\lambda^2 \left(1 + \operatorname{sn}^2 \frac{\alpha}{2}\right)^2 + 9 \operatorname{sn}^2 \alpha + 6\lambda \left(1 + \operatorname{sn}^2 \frac{\alpha}{2}\right) \cos \varepsilon \cdot \operatorname{sn} \alpha}}. \quad (556)$$

Uz vidējā meridiāna, t. i. pie  $\lambda = 0$  un  $\alpha = 0$ , arī ūi formula pieŗem nenoteiktu veidu; tomēr uz pola pie maziem gaŗumiem pēc (522), (531) un (532) formulas var pieŗemt:  $\lambda_1 = \frac{2\lambda}{\pi}$ ,  $\varepsilon = \lambda_1 \cdot \operatorname{sn} E = \frac{2\lambda}{3\pi}$ ; polam  $\beta = \lambda_1$ ,  $\lambda_1 - \alpha = \varepsilon$ , kāpēc  $\alpha = \frac{4}{3} \cdot \frac{\lambda}{\pi}$ . Tamdēļ uz vidējā meridiāna, pie pola:

$$\operatorname{sn} \omega = \frac{4 - \pi}{4 + \pi}. \quad (557)$$

Uz malējā meridiāna, pie  $\lambda = \pi$ ,  $\varepsilon = E$ ,  $\alpha = \alpha_0$ ; pēc (531) un (536) formulas iznāk:  $\operatorname{sn} E = \frac{1}{3}$ ,  $\cos E = \operatorname{sn} \alpha_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$  un  $\operatorname{sn}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$ ; tāpēc pie pola uz malējā meridiāna:

$$\operatorname{sn} \omega = \sqrt{\frac{2\pi^2 + 9 - 8\pi}{2\pi^2 + 9 + 8\pi}}. \quad (558)$$

Sekoūa tabulā dotas leŗķa  $\omega$  skaitliskās nozīmes daŗādiem punktiem Grintena projekcijā; no tās redzams, ka leŗķiskie sakropļojumi uz ūis projekcijas nav lieli un nesasniedz pat  $30^\circ$ .

$\varphi$	Gaŗums $\lambda$						
	$0^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
$90^\circ$	$13^\circ 48'$	$14^\circ 06'$	$14^\circ 41'$	$15^\circ 56'$	$18^\circ 41'$	$23^\circ 29'$	$29^\circ 59'$
75	9 30	10 04	11 25	13 38	17 10	22 06	28 29
60	6 01	6 57	9 07	11 44	15 23	20 06	25 52
45	3 22	4 35	6 55	9 38	12 55	17 03	21 58
30	1 29	2 52	4 56	7 08	9 40	12 47	16 34
15	0 22	1 26	2 41	4 0	5 26	7 13	9 23
0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0

Apskatisim vēl paūa projekcijas izgudrotāja ieteikto paralēļu konstruēšanas paŗemienu; tomēr tūliņ jāaizrāda, ka paralēļu radiji un centru attālumi Grintena projekcijai vispār ir tik lieli, ka īstenībā izdarīt ūo konstruējumu ir ļoti grūti un, tā tad, ūi grafiskā konstruēšanas metode ir interesanta tikai no teorētiskā viedokļa.



No līdzīgiem taisnleņķa trīsstūriem DOQ un DKN:

$$\frac{OD}{OQ} = \frac{DK}{KN} = \frac{KO - DO}{KN},$$

no kuņienes, atmetot vidējo attiecību un atrisinot kā nolīdzinājumu attiecībā uz DO:

$$OD = \frac{OQ \cdot KO}{KN + OQ}.$$

Ievietojot te ieejošo lielumu augšā uzietās nozīmes un, ņemot vērā, ka  $OQ = k$ , dabūjam:

$$OD = k \cdot \frac{\pi - \sqrt{\pi^2 - 4\varphi^2}}{2\varphi}.$$

Tā tad nogrieznis OD patiesi ir vienlīdzīgs lielumam  $c$ , noteiktam analitiski ar (525) formulu.

Tālāki apskatīsim līdzīgus trīsstūrus LOQ un LKM; tad

$$\frac{OL}{OQ} = \frac{KL}{KM}.$$

Te ieejošie lielumi ir sekoši:  $OL = UC = y_0$ ,

$OQ = k$ ,  $KL = KO - y_0$ ,  $KM = KP = k - KO$ ; tāpēc:

$$y_0 = \frac{k\varphi}{\pi - \varphi}.$$

Ši izteiksme pilnīgi saskan ar (527) formulu; ja te ieliksīm no (525) formulas noteikto  $\varphi = \frac{\pi k c}{k^2 + c^2}$ , tad  $y_0$  iznāks tāds, kāds noteikts ar (526) formulu.

Beidzot, paraleles radija  $SD = \rho_1$  aplēsei rakstam:

$$CL^2 = DL(2\rho_1 - DL).$$

Tā kā  $CL^2 = k^2 - y_0^2$  un  $DL = y_0 - c$ , tad, ņemot vēl vērā (526) formulu, dabūjam  $\rho_1$  noteikšanai (528) un  $q = SO$  noteikšanai (529) formulu.

Aizrādīsim vēl, ka ar platumu  $72^\circ = \frac{2}{5}\pi$  noteiktās paraleles konstruēšana dod uz vidējā meridiāna punktus K, L un D, kas radiju PO sadala divkārši harmoniskā attiecībā\*).

\*) Ja starp četriem lielumiem  $a$ ,  $b$ ,  $c$  un  $d$  pastāv viena no sekošām sakarībām:

1)  $a - b = c - d$ ,

2)  $a : b = c : d$ ,

3)  $(a - b) : (c - d) = a : d$ ,

tad šie lielumi veido attiecīgi aritmētisko, geometrisko un harmonisko propor-

Par to pārliecinājas no sekošā: pieņemam radiju  $k$  par 1; pie  $\varphi = \frac{2}{5}\pi$ ,  $c = DO = \frac{1}{2}$ ,  $y_0 = LO = \frac{2}{3}$ ,  $KO = \frac{4}{5}$ . Harmoniskais vidējais starp 1 un  $\frac{2}{3}$  ir  $\frac{4}{5}$ .

Atcerēsimies, ka tieši uz tās pašas paralēles ( $\varphi = 72^\circ$ ), malējā un vidējā meridiānu platību mērogu attiecība ir vislielākā = 1,778.

Čikāgas ģeografiskā biedrība (The Geographical Publishing Company) ir izdevusi Grintena projekcijā ļoti elegantu pasaules karti ar pamatriņķa diametru 20 angļu collas; uz tās parādītas jūras straumes, kabeļu līnijas, svarīgāko kuģniecības sabiedrību jūras ceļi un daudz citas ļoti derīgas ziņas. Šī karte savā laikā bija ļoti izplatīta Amerikā un tas bija par iemeslu šīs kartes projekcijas sīkākai teorētiskai izpētīšanai šinī kursā. Pats Grintens rakstā: „Darstellung der ganzen Erdoberfläche auf einer kreisförmigen Projektionsebene“ žurnālā Petermann's Geogr. Mit. 1904. visu teoriju apskatījis ļoti īsi un pat ar nelielu kļūdu meridiānu mērogu izvedumā.

**64. Mendelējeva projekcija.** — Ievērojamais ķīmiķis Mendelējevs (1834—1907) savam pēdējam darbam: „Krievijas pētīšana“ pievienojis visas Krievijas karti, kas sastādīta līdz tam nelietotā patvaļīgā projekcijā un atgādina vienādstarpu konisku projekciju. Uz šīs projekcijas visi meridiāni attēloti ar taisnēm, kas starveidīgi iziet no viena kopīga punkta — pola projekcijas; paralēles attēlotas kā koncentrisku riņķu loki ar kopīgu centru polā.

Paralēļu radiji  $\rho$  ir vienādi ar iztaisnotiem sfēras meridiānu lokiem no pola līdz attiecīgai paralēlei, t. i., tos aprēķina pēc formulas:

$$\rho = R \left( \frac{1}{2}\pi - \varphi \right). \quad (559)$$

kur  $R$  ir zemes radijs projekcijas galvenā mērogā un  $\varphi$  — paralēles ģeografiskais platums.

Projekcijas. Pēdējais nosaukums cēlies no tā, ka vispilnīgākā akkorda (pamattonis, tercija, kvinta un oktāva) skaņu vibrēšanas skaitu izteic skaitļi 1,  $\frac{5}{4}$ ,  $\frac{3}{2}$  un 2, kas izveido harmonisko proporciju.

Ja abi vidējie lielumi vienādi, t. i.,  $b = c$ , tad iepriekšējās proporcijas sauc par nepārtrauktām; tādas būs:

- 1)  $a - c = c - d$ ,
- 2)  $a : c = c : d$ ,
- 3)  $(a - c) : (c - d) = a : d$ .

Trīs lielumu  $a$ ,  $c$  un  $d$ , no kuriem sastādās nepārtrauktā proporcija, vidējie locekļi  $c$  attiecīgi ir:

$$c_1 = \frac{1}{2}(a + d), \quad c_2 = \sqrt{ad}, \quad c_3 = \frac{2ad}{a + d}.$$

Šos locekļus pēc kārtas sauc par divi dotu lielumu  $a$  un  $d$  aritmetisko, geometrisko un harmonisko vidējo jeb vidu. Interessants ir vēl tas, ka šie trīs vidējie dod jaunu nepārtrauktu geometrisku proporciju:

$$c_1 : c_2 = c_2 : c_3.$$

Leņķi  $\delta$ , zem kuņiem uz projekcijas satekas divi blakus meridiāni polā, noteic no pieņēmuma, ka galvenam mērogam jāiznāk uz valsts vidējās paralēles. Ja par  $\varphi_0$  nosauksim valsts vidējās paralēles platumu, tad šīs paralēles loka garums uz sfēras starp divi meridiāniem ar garumu starpību  $\lambda$ , ir  $R \lambda \cos \varphi_0$ ; šīs paralēles radijs uz projekcijas, saskaņā ar (559) formulu, ir  $R (\frac{1}{2} \pi - \varphi_0)$ ; tā kā leņķis starp diviem blakus meridiāniem uz projekcijas ir  $\delta$ , tad:

$$R \delta (\frac{1}{2} \pi - \varphi_0) = R \lambda \cos \varphi_0,$$

$$\text{jeb } \delta = \frac{\lambda \cos \varphi_0}{90^\circ - \varphi_0}. \quad (560)$$

Abas formulas, (559) un (560), ir noderīgas projekcijas konstruēšanai sīkā mērogā; lielā mērogā paralēļu loku novilkšana ir neērta un konstruēšana jāizdara pēc punktiem, noteicot tiem taisnleņķu koordinātas pēc formulām:

$$x = \rho \sin \delta,$$

$$y = \rho \cos \delta,$$

pie kam koordinātu sākums ir polā un  $y$  ass iet pa valsts vidējo meridiānu.

Meridiāni un paralēles uz projekcijas krustojas zem taisniem leņķiem, kā tas ir visās koniskās projekcijas; tāpēc mērogiem pa meridiāniem un paralēlēm iznāk sekošas vienkāršas formulas:

$$m_m = -\frac{d\rho}{R d\varphi}, \quad m_p = \frac{\rho d\delta}{R \cos \varphi d\lambda}.$$

Ar (559) un (560) formulu palīdzību dabūjam:

$$m_m = 1, \quad m_p = \frac{(90^\circ - \varphi) \cos \varphi_0}{(90^\circ - \varphi_0) \cos \varphi}. \quad (561)$$

Šie mērogi tanī pašā laikā ir indikatrīsas pusasis; tāpēc leņķu vislielākai alterācijai pēc (31) pēdējās formulas iznāk:

$$\operatorname{tg} \left( 45^\circ \pm \frac{\omega}{2} \right) = \sqrt{m_p}. \quad (562)$$

Sekošā tabulā dotas radija  $\rho$ , mērogu  $m_m$ ,  $m_p$ ,  $p$  un leņķu  $2\omega$  skaitliskas nozīmes Europas kartes projekcijai no  $\varphi_1 = 40^\circ$  līdz  $\varphi_2 = 70^\circ$ , pie  $\varphi_0 = 55^\circ$  un  $R = 1$ . (Sk. 382. lappusē.)

Sfēras bezgalīgi mazie riņķiši Mendelējeva projekcijā attēlojas kā riņķiši tikai pa vidējo paralēli; uz ziemeļiem no tās riņķiši projicējas kā pa meridiāniem izstieptas ellipses, bet uz dienvidiem no tās — kā ellipses, izstieptas pa paralēlēm.

Salīdzinot attēla alterācijas Mendelējeva projekcijā ar alterācijām labākās koniskās projekcijas (sk. V. nod.) redzam, ka Mendelējeva pro-

$\varphi$	$\rho$	$m_m$	$m_p = p$	$2\omega$
70°	0,3491	1,000	0,958	2° 26'
65	0,4363	1,000	0,969	1 47
60	0,5236	1,000	0,983	0 58
55	0,6109	1,000	1,000	0 0
50	0,6981	1,000	1,020	1 07
45	0,7854	1,000	1,043	2 24
40	0,8727	1,000	1,070	3 51

jekciju nevar uzskatīt par soli uz priekšu. Tiesa gan, ka turpinot šīs projekcijas konstruēšanu līdz polam, pēdējais Mendelējeva projekcijā attēlosies kā punkts, bet nevis kā „pola līnija,“ kā tas ir vienādstarpu un vienād-

lielas koniskās projekcijas; tomēr šī priekšrocība nekrīt svarā, jo pola pareizai attēlošanai uz kādas valsts kartes nav nozīmes.



veido uz kona virsas ellipsi, kuŗas centrs ir C, lielā ass DF un mazā pusass vienlīdzīga CV, pie kam C ir līniju MM un TS krustošanās punkts un TS ir caur punktu C ejošā taisne perpendikulāra pret OX. Viegli pārliecināties par to, ka ellipses asu attiecība ir  $\sqrt{3} : \sqrt{2}$ . Ja par ellipses lielo asi ņem līniju DK, kas punktā D veido leņķi  $\text{ODK} = 105^\circ$ , tad uz kona virsas izveidotās ellipses asu attiecība būs  $= DK : 2 EH = DK : 2 \sqrt{EU \times EN} = \sqrt{3}$  un ellipses nolīdzinājums ir:

$$x^2 + 3y^2 = a^2. \quad (563)$$

Šo pēdējo ellipsi prof. Putniņš izmanto savu elliptisko projekciju konstruēšanai. Daļa, ko norobežo ordinātas noteiktas ar abscisām  $x = \pm \frac{1}{2}a$ , tiek izgriezta un izmesta. Sabīdot atlikušās daļas kopā, dabū figuru, kuŗas izmēri pa x un y asi ir vienādi un  $= a$ . Atzīmētā robežkontūrā tiek zīmēti divi dažādi gradu tikli: 1) ar ekvidistantām paralēlēm ( $P_1$ ) un 2) vienādlielā ( $P_2$ ). Nošķeļot ellipses augš- un apakšdaļu pa abscisu, noteiktu ar  $y = \pm \frac{1}{2}a$ , un ņemot pola līniju  $= a$ , dabūtas elliptiskās projekcijas  $P'_1$  un  $P'_2$ .

Novelkot pēc 122. zīmējuma līniju  $DP \parallel OK$  un pēc tam caur šo līniju plakni perpendikulāri zīmējuma plaknei, dabūjam uz kona virsas parabolu. Šo parabolu prof. R. Putniņš izmanto četru parabolisko projekciju konstruēšanai:  $P_3, P_4, P'_3$  un  $P'_4$ ; pirmās divas ir projekcijas bez pola līnijas, pēdējās divas — projekcijas ar polu līnijām; otrā un ceturta ir ekvivalentās projekcijas.

Ņemot līniju DL paralēli kona asij un atkal novelkot plakni perpendikulāri pret 122. zīmējuma plakni dabūjam hiperbolu. Ar šīs hiperbolas palīdzību konstruētas četras hiperboliskās projekcijas  $P_5, P_6, P'_5$  un  $P'_6$ . Arī te pirmās divas ir projekcijas bez pola līnijas un pēdējās divas — projekcijas ar polu līnijām; otrā un ceturta ir atkal ekvivalentās projekcijas.

No prof. Putniņa sešām projekcijām bez pola līnijām trīs ekvivalentās aizpilda robu starp Molveides un Kolinjoņa projekcijām, bet trīs pārējās — intervālu no Arago apļa līdz Kolinjoņa kvadrātam. Sešas projekcijas ar pola līnijām stāv radniecībā ar Ekkertā projekcijām.

Prof. Putniņa projekciju sīkāka pētišana pieder pie Latvijas kartogrāfijas turpmākiem uzdevumiem.

## XI. nodaļa.

### Slēgums.

66. **Projekciju izvēle.** — Kartografisko projekciju liela dažādība dod plašu izvēli, bet līdz ar to arī apgrūtina piemērotākās projekcijas noteikšanu zemes virsas vienas vai otras daļas attēlošanai. Vispirms ir jātiek skaidrībā par to, kādām vajadzībām jā sastāda karte. Piemēram, vispārīgiem pārskatiem, statistiskiem un administratīviem mērķiem ir vajadzīgas kartes, kurām nemainās platības, jūrniekiem un lidotājiem vissvarīgākā ir virzienu pareizība, kara mērķiem — pareiza attālumu noteikšana u. t. t. Tāpēc pašā sākumā ir jāizšķiras par to vai ir vajadzīga vienādleņķu, vai vienāddielu karte, jeb vai šīm abām kartes īpašībām nav tikai blakus nozīme uzstādīto mērķu saņemšanai. Tikai pēc tam, kad ir noskaidrots, vai projekcijai ir jābūt vienādleņķu, vienāddielu vai patvaļīgai, var izvēlēties atsevišķu projekciju. Saprotams, ka te var dot tikai vispārīgus aizrādījumus un tāpēc pašas izdevīgākās projekcijas izvēle galvenā kārtā atkarājas no kartografa piedzīvojumiem.

Visas globa virsas attēlošanai vienādleņķu projekcijā parasti lieto Merkatora projekciju, lai gan, izņemot jūrnieku un lidotāju vajadzības, izdevīgāka būtu bijusi Lagranža (otrais gadījums, sk. 268. lpp.) jeb Augusta projekcija; tomēr pastāvošos kartografiskos izdevumos abas šīs projekcijas nav sastopamas. Vienāddielu attēliem izdevīgākas ir izocilindriskā, sinusoidālā, Molveides, Aitova un Ekkerta projekcijas, kaut gan palaikam lieto gandrīz tikai vienīgi vienu no pirmajām trim. No patvaļīgām projekcijām visas zemes virsas attēlošanai visparocīgākā ir Grintena projekcija. Īpaši to var ieteikt jūras straumju, vēju un tā saucamo izolīniju (izotermu, izobaru u. t. t.) attēliem. Lai attēlotu zemes virsas daļu, kas lielāka par pussferu, tad var ņemt kādu no tikko uzskaitītajām projekcijām un arī Lagranža projekcijas citus gadījumus ( $\alpha < 1$ ), Erī projekciju un Klarka perspektīvo projekciju.

Ziemeļ- un dienvidpuslodes vienādleņķīgai attēlošanai ir jāņem polārā stereografiskā projekcija, vienāddielu — Lamberta zenitālā projekcija un patvaļīgai — Posteļa projekcija.

Austrum- un rietumpusložu vienādleņķīgam attēlam visparocīgākā ir ekvatoriālā resp. meridionālā stereografiskā projekcija, vienāddielu attēlam — Molveides un Lornja projekcijas un patvaļīgam — globulārā (sfēriskā) un Arago projekcijas.

Veselu pasaules daļu attēlam parasti ņem dažāda veida koniskās un polikoniskās projekcijas, kā arī Bonna projekciju. Par vidējo meridiānu kartei vienmēr ņem pasaules daļas vidējo meridiānu.

Europu attēlo vienkāršā koniskā, Gausa, Albersa vai Bonna projekcijās. Āziju un Ziemeļameriku arī attēlo šinīs projekcijās, lai gan šo kontinentu ievērojamā lieluma dēļ attēlam varētu lietot horizontāla stereografisko projekciju. Visas Amerikas attēlošanai ņem slīpo cilindrisko, polikonisko jeb pat Venera projekciju. Afriku un Dienvidameriku, kā pasaules daļas, kas ir ekvatora abās pusēs un pie tam neiet visai tālu no tā, parasti attēlo sinusoidālā projekcijā, kaut gan dažreiz ņem Merkatora projekciju vai pat visvienkāršāko no visām — kvadrātisko projekciju.

Atsevišķas valsts kartes sastādīšanai projekcijas izvēle ir atkarīga no valsts robežu kontūra un no virziena, kādā valsts teritorija ir visgaŗāka — pa meridiāniem vai pa paralelēm. Valstij ar apaļu kontūru visizdevīgākās ir dažādas zenitālās jeb tā sauktās azimutālās projekcijas, ņemot sfērai par plaknes pieskares punktu valsts ģeometrisko centru. Pa meridiānu izstieptās zemes, kā Skandināvija, Japāna, Palestīna, Amerikas piekrastes apgabali ir jāattēlo polikoniskās projekcijās vai Bonna projekcijā. Zemes, kas stiepjas pa paralelēm, kā Latvija un Krievija, ir jāattēlo dažādās koniskās projekcijās. Kaut kāda lielā riņķa loka virzienā izstieptās zemes ir jāattēlo šķērsā jeb slīpā cilindriskā projekcijā. Beidzot kaut kāda mazā riņķa loka virzienā izstieptas zemes ir jāattēlo šķērsā jeb slīpā koniskā projekcijā. Pats par sevi saprotams, ka vienu vai otru cilindrisko vai konisko projekciju ņem atkarībā no tā vai ir vajadzīgs vienāddenķīgs, vai vienādlīels, vai patvaļīgs attēls. Zemēm, kuŗām ir eliptisks veids, visnoderīgākā ir Lagranža projekcija, kas, kā zināms, ir stereografiskās projekcijas vispārinājums. Vienādo mērogu izokoliem Lagranža projekcijās vispār ir eliptisks veids un tikai īpatnējā gadījumā, stereografiskai projekcijai — riņķi. Lagranža projekcijas priekšrocības teorētiski ir pierādījis ievērojamais matemātiķis Čebiševs (1821—1894); pēc viņa pētījumiem katrai valstij visizdevīgākā projekcija ir tā, kuŗai gar visu valsts robežu mērogs nemainās. Citas te minētās kartografiskās projekcijas lieto speciāliem mērķiem, kas aizrādīts šīs grāmatas attiecīgās vietās; piemēram, ekvatoriālā (meridionāla) ortografiskā projekcija ir noderīga mēness redzamās virsas daļas kartei, centrālās projekcijas zvaigžņotās debess kartēm u. t. t.

Ģeografijas atlasos lietājamo projekciju skaits nav liels. Gandrīz vienmēr visu zemes virsu attēlo Merkatora projekcijā un tikai ļoti reti Molveides projekcijā. Ziemeļ- un dienvidpuslodes parasti zīmē

Posteļa projekcijā, bet austrum- un rietumpuslodes — ekvatoriāla stereografiskā vai globulārā (sfēriskā) projekcijā. Vēl mazāk ir to projekciju, kuŗas lieto pasaules daļām: Europu, Āziju, Ziemeļ- un Dienvidameriku (katru par sevi) un Austrāliju palaikam attēlo Bonna projekcijā, bet Afriku un Polinēzijas salas — Sansona projekcijā, kuŗa, kā zināms, ir Bonna projekcijas sevišķs gadījums. Atsevišķas valstis gandrīz vienmēr zīmē vienkāršā kōniskā projekcijā. Ir arī izdevumi, piemēram franču Šrādera atlas, kuŗā sastopama projekciju liela dažādība. 1926. gadā iznācis jauns zviedru atlas „Nordisk Vārlds atlas“ (Zetterstrand, S., och Rosén, K.) kuŗā deviņas svarīgas kartes ir taisītas cilindriskā vienādielā projekcijā: divas normālas (kad cilindrs pieskaras sfērai pa ekvatoru vai kad vispāri cilindra ass sakrīt ar zemes asi), piecas meridionālas (kad cilindra ass veido taisnu leņķi ar zemes asi) un divas slīpas. Dienvidamerikas kartei cilindrs pieskaras pa meridiānu, kas ir  $60^{\circ}$  W no Grīnvičas.

Uz ģeografiskām kartēm, ļoti reti norāda, kādā projekcijā tās sastādītas un kādi lielumi ņemti par pamatu pašas projekcijas aplēsei. Uz tādu datu vēlamību pat nepieciešamību griezis vērību jau Merkātors. Tā kā papīrs ar laiku neizbēgami izstiepjas un saraujas dažādos virzienos, tad nav lieki uz katras kartes atsevišķas lapas uzzīmēt un iespiest lineāro mērogu, ne tikai vienā vietā vien, bet uz katras loksnes gar visām četrām malām. Šim nolūkam vēl labāki var noderēt taisnleņķu koordinātu tīkls ar kvadrātu malu noteiktiem gaŗumiem. Lietojot šādu karti, varētu ņemt vērā papīra deformācijas vismaz divi galvenos virzienos.

Merkatora projekcijā un projekcijās, kuŗas lieto puslodes attēlošanai, mērogu maiņas ir ļoti lielas; tomēr šīs projekcijas lieto ļoti bieži, tāpēc ka tās dod iespēju attēlot uz vienas kartes visu zemes virsu. Šis apstāklis ir par iemeslu tam, ka daudziem jau no bērnības rodās nepareizs jēdziens par pasaules daļu, salu un atsevišķu zemju relatīvo lielumu resp. samēriem. Pats jēdziens par kartes projekcijas mēroga maiņām nav diez cik pazīstams. Redzot vienmēr visu zemes virsu attēlotu tikai Merkatora projekcijā, mēs parasti pārspīlejam polāro apgabalu samērus; šīnī projekcijā, piemēram, Grenlande izliekas daudz lielāka par Indiju, lielāka par Dienvidameriku un ir gandrīz tikpat liela kā Afrika, lai gan īstenībā Grenlandes platība ir divreiz mazāka par Indostāna pussalu, 8 reiz mazāka par Dienvidameriku un 15 reiz mazāka par Afriku.

Ģeografijas atlantos atsevišķu apgabalu vai valšķu kartes sastāda ļoti dažādos mērogos, ņemot par mērauklu valsts politisko nozīmi, vai izejot no tā, lai atlanta visas kartes būtu vienāda lieluma. Piemēram,

Vācijā iznākušos atlantos vācu kartes vienmēr iespiestas lielākā mērogā nekā citas valstis. Šai parādībai ir dibināts iemesls, jo katrai nācijai, saprotams, ir lielāka interese par savu zemi; tomēr no tā viegli vien rodas nepareizs jēdziens par dažādu zemju platību un samēriem. Šādu uzskatu nepareizību bieži vien nācās konstatēt pasaules kara laikā. Šāda nepareiza uzskata iespaidu gan mazina tas apstākļi, ka bez platības liela nozīme piekrit valsts iedzīvotāju blīvumam un kultūras līmenim.

Pareizu jēdzienu par dažādu zemju relatīviem samēriem var gūt vienīgi no globa, bet, kā jau pašā sākumā aizrādīts, globus pagatavo ļoti sīkā mērogā; tādus globus lieto tikai tā saucamās matēmatiskās ģeografijas apmācības sākumā. Globu nekad nelietā pie politiskās vai saimnieciskās ģeografijas apmācības. Šim nolūkam lieto vienīgi atlasus un sienas kartes, kam piemīt tikko norādītie trūkumi. Ja, piemēram, vajadzētu salīdzināt Francijas un Arģēntīnas reljefu, apdzīvoto vietu un ceļa tīklu biežumu, mežu daudzumu u. t. t., tad tas nebūtu iespējams izdarīt pēc šo zemju divi kartēm, kas ievietotas kādā ģeografijas atlasā: ne tikai projekcijas, bet mērogi un pat pieņemtie apzīmējumi uz šīm kartēm bieži vien pilnīgi atšķiras.

Tāpēc jau sen ir radusies doma sastādīt visas zemes virsas sīku karti vienādā mērogā un ar vienādiem pieņemtiem (konvencionāliem) apzīmējumiem. Tādu projektu sevišķi sīki savā laikā izstrādājis Vīnes ģeografijas institūta direktors Penks (Friedrich Karl Albrecht Penk). Viņš ieteica visas zemes virsas karti sastādīt un izdot tā saucamā daudzplākšņu jeb poliedriskā projekcijā, t. i. uz atsevišķām lapām un tā, lai katra lapa būtu ar noteiktiem meridiānu un paralēļu lokiem norobežota trapeza. Tā kā katras trapēzes laukums nav liels, tad tās attēls iznāktu kā plāns, bez praktiski manāmām alterācijām, kādas ir katrai projekcijai. Par nožēlošanu Penka proponētais mērogs 1 : 1 000 000 ir par lielu un kartes izdošana prasītu lielus līdzekļus. Ja mērogu ņemtu mazāku, tad pasākumu izvest būtu bijis daudz vieglāki un tā realizēšana, bez šaubām, ienestu pareizāku jēdzienu par atsevišķu zemju relatīviem samēriem un tāda atlanta kartes būtu viegli salīdzināt savā starpā.

**67. Vēsturisks pārskats.** — Kartografiskās projekcijas vispirms bija vajadzīgas zvaigžņotās debess attēlošanai, jo debess jums mums izliekas sfēriska. Par projekciju izgudrotāju uzskata Miletas Talesu, kas dzimis ap 640. gadu un miris ap 548. gadu priekš Kristus. Domā, ka zvaigžņu karšu sastādīšanai viņš izgudrojis centrālo projekciju. Pārējās perspektīvās projekcijas (no latīņu perspicere, caurskatīt, caur-

redzēt), kas tāpat noderīgas zvaigžņotās debess attēlošanai, arī izgudrotas senatnē; piemēram, ortografisko projekciju izgudroja Apollonijs un stereografisko — Hipparchs.

Senatnē zināmās zemes virsas daļas pirmo karti sastādījis Miletas Anaksimanders (610—547. g. pr. Kr.), Talesa skolnieks, kā to stāsta Strabons (apmēram no 58. g. priekš Kristus līdz apmēram 25. gad. pēc Kristus) savā ģeografijā (I. gr. 1. nod. 11 §); šīs kartes sastādīšanai pieņemtā projekcija nav zināma; var domāt, ka tā bijusi taisnstūru projekcija, kuŗai meridiāni un paralēles attēlojas kā savstarpīgi paralēlas un vienādos attāļumos novilkta taisnes; pie kam tās taisnes, kas attēlo paralēles, ir stateniskas pret paralēlēm, kas attēlo meridiānus. Hipparchs (ap 130. g. priekš Kr.) ir ievēdis jēdzienu par ģeografisko gaŗumu (*μῆκος*) un platumu (*πλάτος*), jo tanī laikā zināmās zemes virsas izplatījums no rītiem uz vakariem bija lielāks nekā no ziemeļiem uz dienvidiem. Marinus no Tirus sākuma meridiānu novilkta caur Kanārijas salām, ko tāpat pieņēma arī Ptolemejs. Vienkāršo konisko projekciju izgudrojis Ptolemejs un domā, ka viņš izgudrojis arī šīs projekcijas pārļobojumu, ko tagad sauc par Bonna projekciju. Ptolemejs ir atstājis lielu ģeografijas karšu krājumu, kuŗš vairākkārt ir izdots gravēšanas ceļā. Vienu tādu izdevumu ir publicējis pazīstamais ceļotājs un karšu kolekcionārs Nordenskjöld\*) (Adolf Erik Nordenskjöld, 1832—1901).

Drīz pēc Ptolemēja iestājās zinību pagrimšana un vidus laiki nav sekmējuši kartografijas attīstību. Pat arābi, kas labprāt nodarbojās ar zinātņi un ir ienesuši daudzās zinību nozarēs vērtīgus izgudrojumus, nav izdomājuši nevienu jaunu projekciju. Arābu ģeografi tikai pārzīmējuši un papildinājuši agrākās kartes. No viņiem visai pazīstams Albirini (973—1048).

Zinību un mākslas renesanses laikmets ietekmējis arī kartografijas attīstību. Kā zināms, XV. g. s. otrā puse un viss XVI. g. simtenis ir bijis vissvarīgāko ģeografisko atradumu laikmets, kas izsaucis arī daudzu jaunu karšu izdošanu. Uzieto zemju karšu apvienošanai, visas puslodes un drīz pēc tam visas zemes virsas attēlošanai nācās izgudrot jaunas projekcijas. Šinī laikmetā parādījās Apiāna, Loricā un Vernerā projekcijas, un pie tam tieši kuŗniecības vajadzībām — Merkatora projekcija. Pats Merkators 1584. g. izdod pirmo lielo ģeografisko atlantu, kas ievērojams ar savu rūpīgu izstrādājumu. Īstenībā gandrīz jau no šī laika Eiropas kartografija pieņēmusi savu tagadējo veidu. Šinī laikmetā izgudrots arī globs, uz kuŗa zemes

\*) A. E. Nordenskjöld. Facsimile — Atlas to the early history of cartography Stockholm, 1889.

virsu var attēlot ar vislielāko pareizību. Pastāv uzskats, ka pirmo globu izgatavojis jūrnieks un ģeografs Behaims (Martin Behaim, 1459—1506) Nirnbergā. Šis pirmais globs pabeigts Amerikas uziešanas gadā (1492) un uz tā, zināms, nav ne Amerikas, ne Austrālijas; Atlantijas okeāns apskalo Europas un Afrikas rietuma un Āzijas austruma krastus; Āzija ir iznākusi daudz lielāka, jo tās krasti pārbīdīti uz austrumiem.

La Īrs un Parāns XVII. g. s. izgudroja ārējās perspektīvās projekcijas, kas nebija zināmas antikai pasaulei, un Sansons savu vienādlielo projekciju. XVIII. g. s. parādās daudzas jaunas projekcijas; sākas projekciju pētīšana un vispārīgās teorijas izstrādāšana. Pie jaunām projekcijām manāma cenšanās pamazināt vai arī pilnīgi novērst atrastos trūkumus un nepilnības. Šinī gadsimtenī darbojušies Lamberts, Lagranžs un Eulers; viņi atstājuši rakstus, kas nodereja par pamatu kartografiskiem darbiem nākošā XIX. g. simtenī.

Tad nu uzstājas ar savām gluži jaunām projekcijām Molveide, Albers, Arāgo un daudzi otrās šķiras kartografi; 1825. g. iznāk Gausa slavenais darbs, kas pirmo reiz atrisina vispārīgo uzdevumu par vienas virsas attēlošanu uz otras tā, lai iznāktu bezgalīgi mazu daļu līdzība. Šis vispārīgās atrises sevišķs gadījums ir sferoida virsas attēlošana uz plaknes.

Pēc Gausa kartografijā pelna ievēribu Tisso ar savu grāmatu: „Memoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques. Paris. 1881.“ Bez īsas vispārīgās teorijas un daudzu zināmo projekciju apskates, Tisso savā memuārā ieteic jaunu paņēmieni nelielas valsts kartografiskā tīkla konstruēšanai tā, lai leņķi un līnijas mainītos vismazāk. Pēc šī paņēmiena atsevišķu punktu taisnleņķu koordinātu aplēse izvērsas par pakāpenisku mēģinājumu un grafisku konstruējumu. Tas, saprotams, saistīts ar praktiskām nērtībām, ar ko arī izskaidrojams, ka Tisso metodes maz lieto pie karšu izdošanas. Cerams tomēr, ka viņa paņēmieni nākotnē gūs lielāku piekrišanu, jo pēc tā sastādītām kartēm patiešām mazāk mainās leņķi un līnijas, un netiekvien no viena punkta izejošos virzienos, bet pa visu karti.

Beidzot arī tagadējā XX. g. s. kartografija attīstās. Par to, piemēram, liecina Grintena, Ekkerta, Guda un Putniņa jaunās projekcijas; 255. lappusē minētās L. Driencourt un J. Laborde grāmatas ceturta daļā aprakstīta Franču koloniālās artilērijas pulkveža-leitenanta J. Laborda izgudrotā projekcija, kuņa no 1926. gada pieņemta Madagaskaras ģeografiskā dienestā.

Dažas vēsturiskas ziņas par Latvijas kartogrāfiju sniedz profesors A. Spekke rakstā: „Quelques nouveaux matériaux pour l'histoire de la cartographie et de l'iconographie de l' Ancienne Livonie“ (sk. Latvijas universitātes raksti. Filoloģijas un filozofijas fakultātes serijs; II. sēj. Nr. 2, 1932).

Mērniecības komisārs Prāgā (Čehoslovākijā) inž. Dr. Fr. Mašeks ir izpētījis jautājumu par izdevīgākās projekcijas izvēli Latvijai (sk. „Mērniecības un Kultūrtechnikas Vēstnesis“ 1932. g. Nr. 3—9; 33—40 un 69—76 lapp.).

Jaunu projekciju izgudrošana un veco uzlabošana norāda, ka kartogrāfija vēl ir tālu no pilnības un ka šinī zinību nozarē vēl ir bagāts lauks tālākam sekmīgam darbam.

## Pielikums.

I. Galveno likuma radiju (metros) un to funkciju logaritmi. (Sk. 14. — 18. lapp).

$\varphi$	log M	log N	log r	$\log \frac{1}{r^2}$	log W	$\varphi$
	<b>6,80</b>	<b>6,80</b>	<b>6,80</b>	<b>— 20</b>	<b>9,999—10</b>	
0° 0'	17 351 0	46 434 6	31 892 8	6,393 621	—	0° 0'
5 0	17 681 3	46 544 7	32 113 0	6,393 577	9 889 9	5 0
10 0	18 662 4	46 871 7	32 767 0	6,393 447	9 562 9	10 0
15 0	20 264 3	47 405 7	33 835 0	6,393 233	9 028 9	15 0
20 0	22 439 1	48 130 7	35 284 9	6,392 943	8 304 0	20 0
25 0	25 121 4	49 024 8	37 073 1	6,392 585	7 409 9	25 0
30 0	28 230 0	50 061 0	39 145 5	6,392 171	6 373 7	30 0
35 0	31 671 1	51 208 0	41 439 6	6,391 712	5 226 6	35 0
40 0	35 340 4	52 431 4	43 885 9	6,391 223	4 003 5	40 0
45 0	39 127 2	53 693 4	46 410 3	6,390 718	2 741 3	45 0
30	39 507 9	53 820 3	46 664 1	6,390 667	2 614 4	30
46 0	39 888 5	53 947 1	46 917 8	6,390 616	2 487 5	46 0
30	40 268 9	54 073 9	47 171 4	6,390 566	2 360 7	30
47 0	40 649 0	54 200 6	47 424 8	6,390 515	2 234 0	47 0
30	41 028 5	54 327 2	47 677 9	6,390 474	2 107 5	30
48 0	41 407 7	54 453 5	47 930 6	6,390 414	1 981 1	48 0
30	41 786 0	54 579 5	48 182 8	6,390 363	1 855 0	30
49 0	42 163 6	54 705 4	48 434 5	6,390 313	1 729 1	49 0
30	42 540 3	54 831 1	48 685 7	6,390 263	1 603 6	30
50 0	42 916 1	54 956 3	48 936 2	6,390 213	1 520 0	50 0
30	43 290 6	55 081 2	49 185 9	6,390 163	1 353 5	30
51 0	43 663 9	55 205 6	49 434 7	6,390 113	1 229 0	51 0
30	44 035 8	55 329 6	49 682 7	6,390 063	1 105 1	30
52 0	44 406 3	55 453 1	49 929 7	6,390 014	0 981 6	52 0
30	44 775 2	55 576 0	50 175 6	6,389 965	0 858 6	30
53 0	45 142 4	55 698 4	50 420 4	6,389 916	0 736 2	53 0
30	45 507 7	55 820 2	50 664 0	6,389 867	0 614 4	30
54 0	45 871 2	55 941 3	50 906 3	6,389 819	0 493 3	54 0
30	46 232 6	56 061 8	51 147 2	6,389 771	0 372 8	30

$\varphi$	log M	log N	log r	$\log \frac{1}{r^2}$	log W	$\varphi$
	<b>6,80</b>	<b>6,80</b>	<b>6,80</b>	<b>6,38 -20</b>	<b>9,99-10</b>	
54° 30'	46 232 6	56 061 8	51 147 2	9 771	90 372 8	54° 30'
55 0	46 591 8	56 181 6	51 386 7	9 723	90 253 1	55 0
10	46 711 1	56 221 3	51 466 2	9 707	90 213 3	10
20	46 830 1	56 261 0	51 545 6	9 691	90 173 6	20
30	46 948 9	56 300 6	51 624 7	9 675	90 134 1	30
40	47 067 3	56 340 1	51 703 7	9 659	90 094 6	40
50	47 185 6	56 379 5	51 782 5	9 643	90 055 2	50
56 0	47 303 5	56 418 8	51 861 1	9 628	90 015 8	56 0
10	47 421 2	56 458 0	51 939 6	9 612	89 976 6	10
20	47 538 6	56 497 1	52 017 9	9 597	89 937 5	20
30	47 655 7	56 536 2	52 095 9	9 581	89 898 5	30
40	47 772 5	56 575 1	52 173 8	9 565	89 859 5	40
50	47 889 0	56 614 0	52 251 5	9 550	89 820 7	50
57 0	48 005 3	56 652 7	52 329 0	9 534	89 781 9	57 0
10	48 121 2	56 691 4	52 406 3	9 519	89 743 3	10
20	48 236 8	56 729 9	52 483 4	9 503	89 704 7	20
30	48 352 2	56 768 3	52 560 2	9 488	89 666 3	30
40	48 467 2	56 806 7	52 636 9	9 473	89 628 0	40
50	48 581 9	56 844 9	52 713 4	9 457	89 589 7	50
58 0	48 696 3	56 883 0	52 789 7	9 442	89 551 6	58 0
10	48 810 3	56 921 1	52 865 7	9 427	89 513 6	10
20	48 924 1	56 959 0	52 941 5	9 412	89 475 7	20
30	49 037 5	56 996 8	53 017 1	9 397	89 437 9	30
40	49 150 5	57 034 5	53 092 5	9 381	89 400 2	40
50	49 263 3	57 072 1	53 167 7	9 366	89 362 6	50
59 0	49 375 7	57 109 5	53 242 6	9 351	89 325 1	59 0
30	49 710 8	57 221 2	53 466 0	9 307	89 213 4	30
60 0	50 042 7	57 331 8	53 687 3	9 263	89 102 8	60 0
65 0	53 163 2	58 372 0	55 767 6	8 846	88 062 6	65 0
70 0	55 858 1	59 270 3	57 564 2	8 487	87 164 3	70 0
75 0	58 045 3	59 999 0	59 022 0	8 196	86 435 0	75 0
80 0	59 656 8	60 537 0	60 097 0	7 981	85 898 0	80 0
85 0	60 644 3	60 866 0	60 755 0	7 849	85 569 0	85 0
90 0	60 976 4	60 976 0	60 976 0	7 805	85 458 0	90 0

II. Meridāna loka garumi B (metros) no kvātora līdz punktam, noteiktam ar platumu  $\varphi$  (sk. 10. form. 21. lappusē).

$\varphi$	B (metros)	$\varphi$	B (metros)	$\varphi$	B (metros)
45° 0'	4 984 439,266	47 0	5 206 717,124	49 0	5 429 072,732
10	5 002 959,445	10	5 225 243,792	10	5 447 605,861
20	5 021 480,165	20	5 243 771,001	20	5 466 139,526
30	5 040 001,426	30	5 262 298,750	30	5 484 673,728
40	5 058 523,229	40	5 280 827,038	40	5 503 208,465
50	5 077 045,573	50	5 299 355,866	50	5 521 743,736
46 0	5 095 568,459	48 0	5 317 885,233	50 0	5 540 279,543
10	5 114 091,883	10	5 336 415,137	10	5 558 815,881
20	5 132 615,850	20	5 354 945,581	20	5 577 352,754
30	5 151 140,358	30	5 373 476,562	30	5 595 890,159
40	5 169 665,406	40	5 392 008,081	40	5 614 428,096
50	5 188 190,994	50	5 410 540,137	50	5 632 966,565

φ	B (metros)	φ	B (metros)	φ	B (metros)
51° 0'	5 651 505,565	55° 58'	6 204 207,726	56° 53'	6 306 266,201
10	5 670 045,094	59	6 206 063,199	54	6 308 121,949
20	5 688 585,153	56 0	6 207 918,679	55	6 309 977,701
30	5 707 125,742	1	6 209 774,160	56	6 311 833,461
40	5 725 666,858	2	6 211 629,648	57	6 313 689,224
50	5 744 208,502	3	6 213 485,142	58	6 315 544,992
52 0	5 762 750,675	4	6 215 340,641	59	6 317 400,765
10	5 781 293,371	5	6 217 196,144	57 0	6 319 256,544
20	5 799 836,593	6	6 219 051,653	1	6 321 112,326
30	5 818 380,341	7	6 220 907,165	2	6 322 968,114
40	5 836 924,612	8	6 222 762,685	3	6 324 823,908
50	5 855 469,406	9	6 224 618,208	4	6 326 679,704
53 0	5 874 014,723	10	6 226 473,737	5	6 328 535,508
10	5 892 560,560	11	6 228 329,271	6	6 330 391,316
20	5 911 106,918	12	6 230 184,809	7	6 332 247,129
30	5 929 653,796	13	6 232 040,353	8	6 334 102,948
40	5 948 201,193	14	6 233 895,902	9	6 335 958,769
50	5 966 749,107	15	6 235 751,455	10	6 337 814,597
54 0	5 985 297,540	16	6 237 607,014	11	6 339 670,430
10	6 003 846,486	17	6 239 462,578	12	6 341 526,267
20	6 022 395,949	18	6 241 318,147	13	6 343 382,111
30	6 040 945,925	19	6 243 173,720	14	6 345 237,957
40	6 059 496,415	20	6 245 029,299	15	6 347 093,810
50	6 078 047,417	21	6 246 884,883	16	6 348 949,667
55 0	6 096 598,931	22	6 248 740,471	17	6 350 805,529
10	6 115 150,952	23	6 250 596,065	18	6 352 661,397
20	6 133 703,484	24	6 252 451,664	19	6 354 517,268
30	6 152 256,523	25	6 254 307,267	20	6 356 373,147
31	6 154 111,856	26	6 256 162,877	21	6 358 229,029
32	6 155 967,193	27	6 258 018,491	22	6 360 084,915
33	6 157 822,535	28	6 259 874,109	23	6 361 940,808
34	6 159 677,882	29	6 261 729,733	24	6 363 796,704
35	6 161 533,234	30	6 263 585,361	25	6 365 652,606
36	6 163 388,591	31	6 265 440,995	26	6 367 508,513
37	6 165 243,953	32	6 267 296,632	27	6 369 364,424
38	6 167 099,321	33	6 269 152,275	28	6 371 220,342
39	6 168 954,693	34	6 271 007,926	29	6 373 076,261
40	6 170 810,069	35	6 272 863,580	30	6 374 932,189
41	6 172 665,452	36	6 274 719,238	31	6 376 788,120
42	6 174 520,839	37	6 276 574,902	32	6 378 644,056
43	6 176 376,232	38	6 278 430,571	33	6 380 499,998
44	6 178 231,629	39	6 280 286,244	34	6 382 355,943
45	6 180 087,032	40	6 282 141,923	35	6 384 211,895
46	6 181 942,440	41	6 283 997,607	36	6 386 067,851
47	6 183 797,853	42	6 285 853,297	37	6 387 923,811
48	6 185 653,270	43	6 287 708,989	38	6 389 779,777
49	6 187 508,693	44	6 289 564,688	39	6 391 635,747
50	6 189 364,121	45	6 291 420,392	40	6 393 491,724
51	6 191 219,554	46	6 293 276,101	41	6 395 347,704
52	6 193 074,992	47	6 295 131,815	42	6 397 203,689
53	6 194 930,435	48	6 296 987,533	43	6 399 059,680
54	6 196 785,883	49	6 298 843,257	44	6 400 915,674
55	6 198 641,336	50	6 300 698,985	45	6 402 771,675
56	6 200 496,794	51	6 302 554,719	46	6 404 627,680
57	6 202 352,258	52	6 304 410,457	47	6 406 483,690

φ	B (metros)	φ	B (metros)	φ	B (metros)
57° 48'	6 408 339,706	57° 57'	6 425 044,058	58° 6'	6 441 748,810
49	6 410 195,724	58	6 426 900,123	7	6 443 604,917
50	6 412 051,749	59	6 428 756,191	8	6 445 461,030
51	6 413 907,779	58 0	6 430 612,266	9	6 447 317,147
52	6 415 763,813	1	6 432 468,344	10	6 449 173,260
53	6 417 619,853	2	6 434 324,428	59 0	6 541 985,560
54	6 419 475,895	3	6 436 180,516	60 0	6 653 376,122
55	6 421 331,946	4	6 438 036,608		
56	6 423 188,000	5	6 439 892,707		

III. Garuma grads, platuma grads un grada nodalījuma laukums.

φ	1° garuma kilometros	φ	1° platuma kilometros	Grada nodalījuma laukums kvadrat-kilometros
0°	111,3 066	0°— 1°	110,5 638	12 305,86
1	111,2 897	1— 2	110,5 645	12 302,21
2	111,2 392	2— 3	110,5 658	12 294,91
3	111,1 550	3— 4	110,5 678	12 283,97
4	111,0 372	4— 5	110,5 705	12 269,38
5	110,8 858	5— 6	110,5 739	12 251,16
6	110,7 009	6— 7	110,5 779	12 229,30
7	110,4 824	7— 8	110,5 826	12 203,81
8	110,2 305	8— 9	110,5 879	12 174,69
9	109,9 452	9—10	110,5 939	12 141,95
10	109,6 266	10—11	110,6 005	12 105,61
11	109,2 748	11—12	110,6 077	12 065,66
12	108,8 900	12—13	110,6 156	12 022,12
13	108,4 721	13—14	110,6 241	11 975,00
14	108,0 214	14—15	110,6 331	11 924,30
15	107,5 379	15—16	110,6 428	11 870,05
16	107,0 219	16—17	110,6 531	11 812,25
17	106,4 734	17—18	110,6 639	11 750,92
18	105,8 926	18—19	110,6 752	11 686,07
19	105,2 797	19—20	110,6 871	11 617,71
20	104,6 348	20—21	110,6 996	11 545,87
21	103,9 582	21—22	110,7 126	11 470,56
22	103,2 500	22—23	110,7 260	11 391,81
23	102,5 105	23—24	110,7 399	11 309,62
24	101,7 398	24—25	110,7 543	11 224,02
25	100,9 382	25—26	110,7 691	11 135,03
26	100,1 059	26—27	110,7 844	11 042,66
27	99,2 432	27—28	110,8 001	10 946,96
28	98,3 502	28—29	110,8 162	10 847,94
29	97,4 274	29—30	110,8 326	10 745,61
30	96,4 748	30—31	110,8 494	10 640,03
31	95,4 929	31—32	110,8 666	10 531,20
32	94,4 819	32—33	110,8 840	10 419,15
33	93,4 421	33—34	110,9 018	10 303,91
34	92,3 738	34—35	110,9 198	10 185,52
35	91,2 773	35—36	110,9 380	10 064,01
36	90,1 529	36—37	110,9 565	9 939,40
37	89,0 010	37—38	110,9 752	9 811,73
38	87,8 219	38—39	110,9 940	9 681,03
39	86,6 160	39—40	110,0 131	9 547,34

φ	1 <sup>o</sup> garuma kilometros	φ	1 <sup>o</sup> platuma kilometros	Grada nodalījuma laukums kvadrāt-kilometros
40 <sup>o</sup>	85,3 836	40 <sup>o</sup> —41 <sup>o</sup>	111,0 322	9 410,70
41	84,1 251	41—42	111,0 515	9 271,14
42	82,8 408	42—43	111,0 708	9 128,69
43	81,5 311	43—44	111,0 902	8 983,41
44	80,1 965	44—45	111,1 097	8 835,32
45	78,8 373	45—46	111,1 292	8 684,47
46	77,4 539	46—47	111,1 487	8 530,91
47	76,0 468	47—48	111,1 681	8 374,68
48	74,6 163	48—49	111,1 875	8 215,81
49	73,1 629	49—50	111,2 068	8 054,35
50	71,6 870	50—51	111,2 260	7 890,36
51	70,1 891	51—52	111,2 451	7 723,87
52	68,6 696	52—53	111,2 640	7 554,95
53	67,1 290	53—54	111,2 828	7 382,62
54	65,5 677	54—55	111,3 014	7 209,96
55	63,9 863	55—56	111,3 197	7 033,99
56	62,3 851	56—57	111,3 379	6 855,79
57	60,7 647	57—58	111,3 557	6 675,40
58	59,1 256	58—59	111,3 733	6 492,88
59	57,4 682	59—60	111,3 906	6 308,28
60	55,7 931	60—61	111,4 075	6 121,66
61	54,1 008	61—62	111,4 241	5 933,07
62	52,3 918	62—63	111,4 403	5 742,57
63	50,6 665	63—64	111,4 562	5 550,22
64	48,9 257	64—65	111,4 716	5 356,09
65	47,1 697	65—66	111,4 866	5 160,22
66	45,3 991	66—67	111,5 011	4 962,68
67	43,6 145	67—68	111,5 152	4 763,54
68	41,8 163	68—69	111,5 289	4 562,85
69	40,0 052	69—70	111,5 420	4 360,68
70	38,1 818	70—71	111,5 546	4 157,09
71	36,3 465	71—72	111,5 666	3 952,15
72	34,4 999	72—73	111,5 782	3 745,92
73	32,6 427	73—74	111,5 891	3 538,47
74	30,7 753	74—75	111,5 995	3 529,86
75	28,8 984	75—76	111,6 094	3 120,17
76	27,0 125	76—77	111,6 186	2 909,45
77	25,1 182	77—78	111,6 271	2 697,79
78	23,2 162	78—79	111,6 351	2 485,23
79	21,3 069	79—80	111,6 425	2 271,87
80	19,3 910	80—81	111,6 492	2 057,76
81	17,4 691	81—82	111,6 553	1 842,97
82	15,5 418	82—83	111,6 608	1 627,58
83	13,6 097	83—84	111,6 655	1 411,65
84	11,6 733	84—85	111,6 695	1 195,26
85	9,7 333	85—86	111,6 729	978,48
86	7,7 903	86—87	111,6 757	761,37
87	5,8 448	87—88	111,6 777	544,02
88	3,8 976	88—89	111,6 791	326,48
89	1,9 491	89—90	111,6 798	108,84
90	0,0 000	45°—90°	5 016,4 165	208 565,31
		0°—45°	4 984,4 393	499 699,59
		0°—90°	10 000,8 558	708 264,90

IV. Paralleles resp. platuma riņķa loka  
garums metros Latvijas platumiem  $\varphi$ .  
(Sk. 19. lappusi).

$\varphi$	$\lambda = 1^0$ metros	$\lambda = 1'$ metros	$\lambda = 1''$ metros
55°10'	63 720,7 696	1 062,0 128	17,7 002
20	63 454,7 184	1 057,5 786	17,6 263
30	63 188,1 224	1 053,1 354	17,5 523
40	62 920,9 857	1 048,6 831	17,4 781
50	62 653,3 133	1 044,2 219	17,4 037
56 0	62 385,1 036	1 039,7 517	17,3 292
10	62 116,3 593	1 035,2 727	17,2 545
20	61 847,0 828	1 030,7 847	17,1 797
30	61 577,2 768	1 026,2 879	17,1 048
40	61 306,9 451	1 021,7 824	17,0 297
50	61 036,0 873	1 017,2 681	16,9 545
57 0	60 764,7 061	1 012,7 451	16,8 791
10	60 492,8 052	1 008,2 134	16,8 036
20	60 220,3 871	1 003,6 731	16,7 279
30	59 947,4 512	999,1 242	16,6 521
40	59 674,0 029	994,5 667	16,5 761
50	59 400,0 452	990,0 008	16,5 000
58 0	59 125,5 757	985,4 263	16,4 238
10	58 850,5 991	980,8 433	16,3 474
20	58 575,1 203	976,2 520	16,2 709
30	58 299,1 386	971,6 523	16,1 942

V. Log U pēc (191.) formu-  
las (162. lp.) un (271.) otrās  
formulas (217. lp.) Latvijas  
platumiem  $\varphi$ .

$\varphi$	Log U
58°10'	0,542 426 487
5	0,541 232 564
0	0,540 041 427
57 50	0,537 667 487
40	0,535 304 538
30	0,532 952 468
20	0,530 611 162
10	0,528 280 485
0	0,525 960 338
56 50	0,523 650 603
40	0,521 351 158
30	0,519 061 913
20	0,516 782 739
10	0,514 513 533
0	0,512 254 211
55 50	0,510 004 638
40	0,507 764 734
30	0,505 534 383
20	0,503 313 501
10	0,501 101 969
55 0	0,498 899 716

# Satura rādītājs.

Lapp.

Priekšvārds . . . . . 5

## I. NODAĻA.

### Ievads.

1. Kartografijas mērķis . . . . .	7
2. Projektiju šķirošana . . . . .	9
3. Zemes ellipsoids . . . . .	11
4. Mērogi . . . . .	26
5. Indikatrīsa jeb rādītāja . . . . .	37
6. Indikatrīsas elementi . . . . .	43
7. Alterācijas . . . . .	47

## II. NODAĻA.

### Perspektīvās projekcijas.

8. Vispārīgās formulas . . . . .	53
9. Ortografiskās projekcijas . . . . .	60
a) Polārā ortografiskā projekcija . . . . .	62
b) Ekvatoriālā ortografiskā projekcija . . . . .	64
c) Horizontālā ortografiskā projekcija . . . . .	66
10. Stereografiskās projekcijas . . . . .	71
a) Polārā stereografiskā projekcija . . . . .	72
b) Ekvatoriālā stereografiskā projekcija . . . . .	73
c) Horizontālā stereografiskā projekcija . . . . .	76
11. Centrālās jeb gnomoniskās projekcijas . . . . .	83
a) Polārā centrālā projekcija . . . . .	85
b) Ekvatoriālā centrālā projekcija . . . . .	86
c) Horizontālā centrālā projekcija . . . . .	87
12. Ārējās projekcijas . . . . .	92
a) La Ira projekcija . . . . .	99
b) Parāna projekcija . . . . .	101
c) Fišera projekcija . . . . .	104
d) Hammera projekcija . . . . .	106
e) Tisso perspektīves . . . . .	111
f) Klarka projekcija . . . . .	113
g) Lidmaņa projekcija . . . . .	117

## III. NODAĻA.

### Zenitālās projekcijas.

13. Vispārīgā teorija . . . . .	119
14. Konstruēšana pēc punktiem . . . . .	123
15. Posteļa projekcija . . . . .	125
16. Lamberta projekcija . . . . .	128
17. Izoperimetriskā likne . . . . .	131
18. Lornja projekcija . . . . .	134
19. Breizinga projekcija . . . . .	136
20. Eri projekcija . . . . .	137

#### IV. NODAĻA.

##### Cilindriskās projekcijas.

	Lapp.
21. Vispārīgā teorija . . . . .	147
22. Kvadrātiskā projekcija . . . . .	150
23. Vienādu taisnstūru projekcija . . . . .	152
24. Nevienādu taisnstūru vienādiela projekcija . . . . .	154
25. Lamberta cilindriskā projekcija . . . . .	156
26. Merkatora projekcija . . . . .	160
27. Loksodroma . . . . .	167
28. Navigācijas uzdevumi . . . . .	176
29. Uetča projekcija . . . . .	182
30. Epicilindriskās projekcijas ar nemainīgu redzes punktu . . . . .	184
31. Perspektīvās epicilindriskās projekcijas ar mainīgu redzes punktu . . . . .	184
32. Šķērsās cilindriskās projekcijas . . . . .	186
33. Slipās cilindriskās projekcijas . . . . .	187
34. Slipā vienādielā cilindriskā projekcija . . . . .	189

#### V. NODAĻA.

##### Koniskās projekcijas.

35. Vispārīgā teorija . . . . .	191
36. Vienādstarpu projekcijas . . . . .	194
a) Ptolemēja jeb vienkāršā koniskā projekcija . . . . .	194
b) Pārlabotā vienkāršā koniskā projekcija . . . . .	197
c) Deliļa projekcija . . . . .	198
d) Eulera projekcija . . . . .	200
e) Vitkovska projekcija . . . . .	202
37. Vienādielās projekcijas . . . . .	205
a) Pirmā Murdoch'a projekcija . . . . .	205
b) Otrā Murdoch'a projekcija . . . . .	207
c) Trešā Murdoch'a projekcija . . . . .	208
d) Albersa projekcija uz šķēļoša kona . . . . .	210
e) Albersa projekcija uz pieskares kona . . . . .	212
f) Pārlabotā vienādielā projekcija . . . . .	213
38. Vienādleņķu projekcijas . . . . .	216
a) Projekcija uz pieskares kona ar galveno mērogu uz pieskares paralēles . . . . .	219
b) Projekcija uz pieskares kona ar galveno mērogu uz pieskares paralēles un vienādiem mērogiem uz kartes malējām paralēlēm . . . . .	221
c) Projekcija uz šķēļoša kona ar vienādiem mērogiem uz valsts malējām paralēlēm un galveno mērogu uz dotās starpparalēles . . . . .	222
d) Projekcija ar galveno mērogu uz kartes divi dotām paralēlēm . . . . .	223
e) Projekcija ar vienādiem mērogiem uz valsts malējām paralēlēm un starpību starp vislielāko mērogu un 1 tikpat lielu, kā starpība starp 1 un vismazāko mērogu . . . . .	224
39. Šķērsās un slipās projekcijas . . . . .	226
40. Taisnleņķu koordinātas . . . . .	230

#### VI. NODAĻA.

##### Polikoniskās projekcijas.

41. Vispārīgās piezīmes . . . . .	234
42. Vienkāršā polikoniskā projekcija . . . . .	236
43. Taisnleņķu polikoniskā projekcija . . . . .	242

## VII. NODAĻA.

### Vienādleņķu projekcijas.

	Lapp.
44. Lagranža projekcija . . . . .	256
45. Sevišķie gadījumi . . . . .	266
46. Augusta projekcija . . . . .	272
47. Vispārīgā teorija . . . . .	272
48. Vispārīgās teorijas pielietošana kartografijā . . . . .	277

## VIII. NODAĻA.

### Vienādlielās projekcijas.

49. Vernera projekcija . . . . .	287
50. Sansona projekcija . . . . .	291
51. Bonna projekcija . . . . .	295
52. Skaitlisks piemērs . . . . .	298
53. Bonna projekcijas pētīšana . . . . .	299
54. Kollmjonā projekcija . . . . .	310
55. Molveides projekcija . . . . .	315
56. Ekkerta projekcija . . . . .	322
57. Atvasinātās projekcijas . . . . .	328
a) Hammera projekcija . . . . .	328
b) Aitova projekcija . . . . .	329
58. Vispārīgā teorija . . . . .	330

## IX. NODAĻA.

### Patvaļīgās projekcijas.

59. Apiāna projekcija . . . . .	339
60. Lōrica projekcija . . . . .	343
61. Globulārā jeb Nikolosi projekcija . . . . .	345
62. Arāgo projekcija . . . . .	357
63. Grintena projekcija . . . . .	361
64. Mendeļejeva projekcija . . . . .	370

## X. NODAĻA.

### Prof. Putniņa jaunas projekcijas pasaules kartēm.

65. Vispārīgā teorija . . . . .	383
---------------------------------	-----

## XI. NODAĻA.

### Slēgums.

66. Projekciju izvēle . . . . .	385
67. Vēsturisks pārskats . . . . .	388

### Pielikums.

I. Galveno likuma radiju (metros) un to funkciju logaritmi . . . . .	391
II. Meridiāna loka garumi B (metros) no ekvatora līdz punktam, noteiktam ar platumu $\varphi$ . . . . .	392
III. Garuma grāds, platuma grāds un grāda nodalījuma laukums . . . . .	394
IV. Paralleles, resp. platuma riņķa loka garums metros Latvijas platumiem . . . . .	396
V. Log U pēc (191) formulas (162. lp. p.) un (271) otrās formulas (217. lp. p.) Latvijas platumiem . . . . .	396

## Kļūdu izlabojums.

Lappuse	Rindīņa no augšas vai apakšas = (no ap.)	Iespiests	Jābūt
20	12	$\frac{1}{2} \cos^2 \varphi$	$\frac{1}{2} \cos 2\varphi$
21	6	-16,7299538	+16,7299538
30	1	$\overline{AA}^2$	$\overline{AA}_1^2$
42	2	$\frac{a}{b}$	$\frac{b}{a}$
	3	(28)	(29)
55	4	m	ω
	7 no ap.	$90^\circ = \varphi_0$	$90^\circ - \varphi_0$
58	14 no ap.	$\left[ \frac{(R+D\cos\Theta)^2 (\sin\Theta \cdot d\psi)^2}{(D+R\cos\Theta)^2} \right] \dots \left[ \frac{(R+D\cos\Theta)^2 + (\sin\Theta \cdot d\psi)^2}{(D+R\cos\Theta)^2} \right]$	
65	2	y = 0, λ = 0	λ = 0, y = 0
79	2	trīsstūri	trīsstūrī
84	2	L = T	L = R
105	4 no ap.	$\lim \left  \frac{D}{R} \right _{\Theta = 0^\circ}$	$\lim \left  \frac{D}{R} \right _{\Theta = 0^\circ}$
113	5	0,638	0,682
119	6 no ap.	sfēraida	sferoida
161	14	$\ln(1 \mp \sin\varphi)$	$\ln(1 \mp e \sin\varphi)$
190	19 no ap.	kateta	katetes
197	2	φ	φ <sub>0</sub>
	3	ρ <sub>0</sub> = 4179537 m	ρ <sub>0</sub> = 4169924 m

Šinī pašā lappusē dotā tabula jāatvieto ar sekošu:

φ	ρ (metros)
58° 0'	4 035 578,46
57 30	4 091 169,73
57 0	4 146 760,99
56 30	4 202 352,25
0	4 257 943,51
55 30	4 313 534,78



199	11	Θ <sub>0</sub>	Θ
201	7 no ap.	250	249
208	4	247	244
298	10 no ap.	56°30'	56°50'
307	18 no ap.	ņem augšā uzrakstīto (d) formulu	ņem formulu $\operatorname{tg}(\alpha' - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha' - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha' \operatorname{tg}\alpha}$
339	11	Erienwitz	Brienevitz

Jm 2246

---

---

IZNĀKUSI TĀ PAŠA AUTORA:

# MĒRNIECĪBA I.

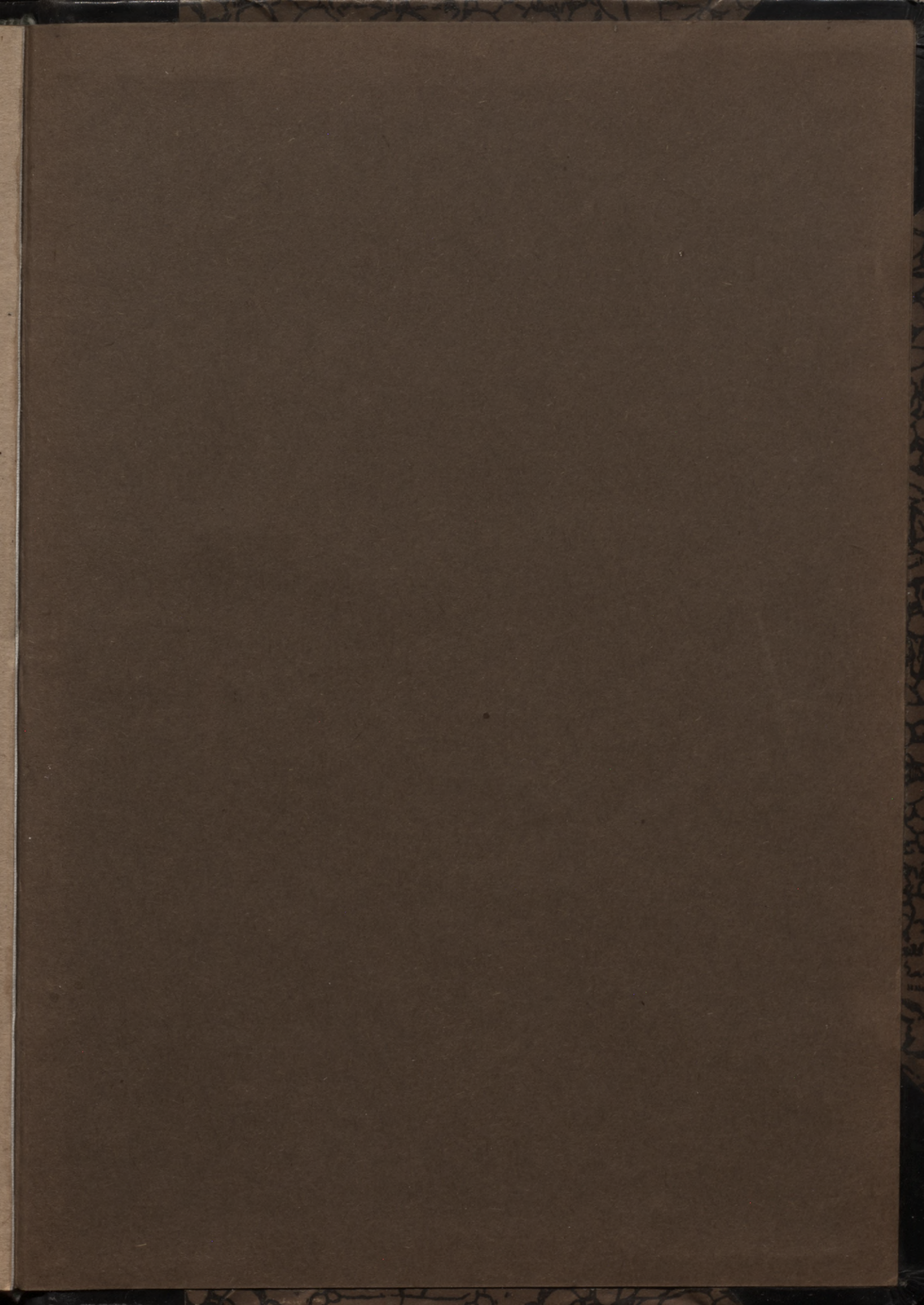
548 lappuses. 417. zīm. — Maksā Ls 5.—.

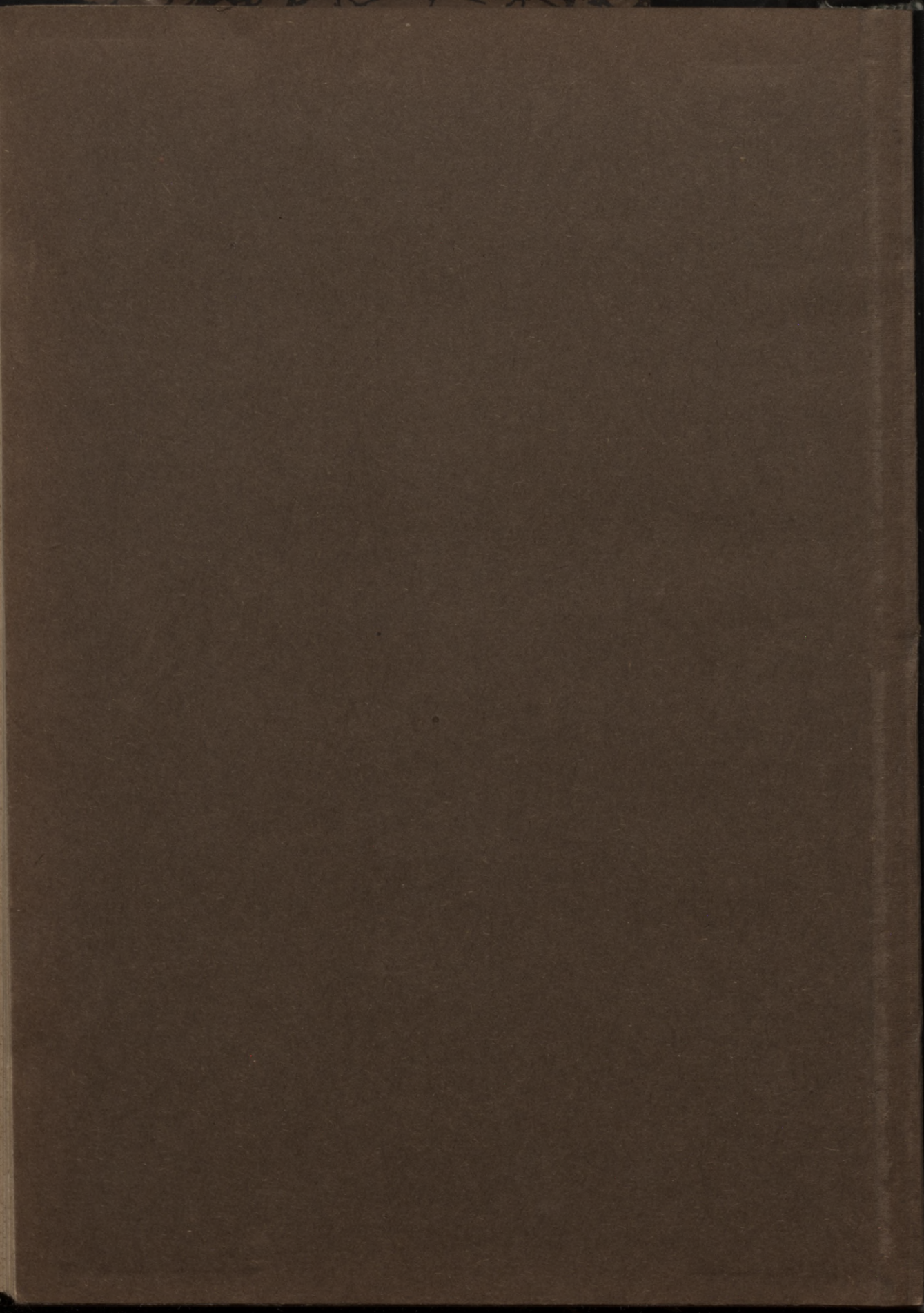
---

---

29. MAI 1933

Im 2246





2.40

LATVIJAS NACIONĀLĀ BIBLIOTĒKA



0308042343