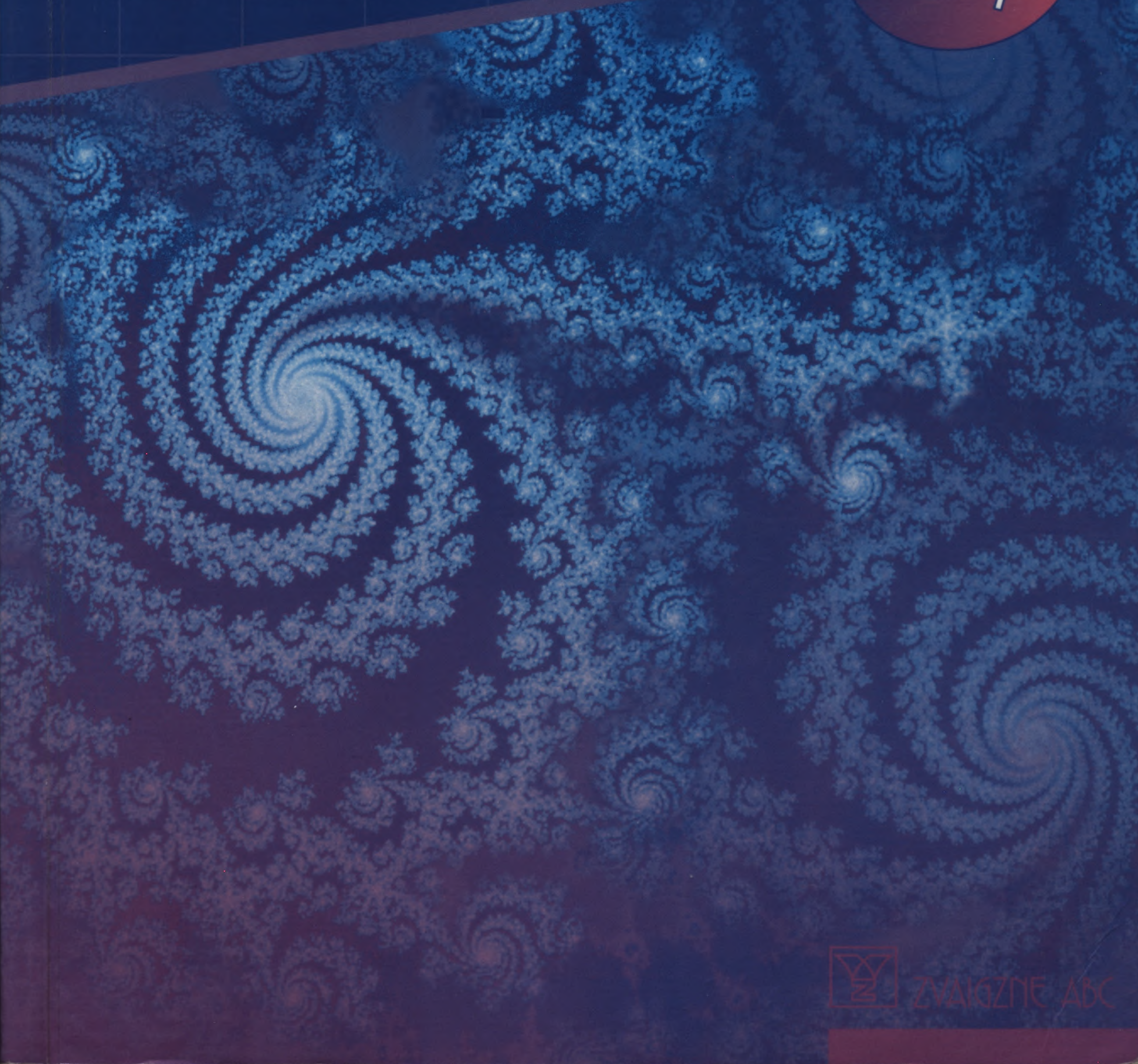
MATEMĀTISKĀ ANALĪZE

ar ģeometrijas un algebras elementiem

Inese Bula, Jānis Buls

I daļa



ZVAIGZNE ABC

Inese Bula, Jānis Buls

MATEMĀTISKĀ ANALĪZE

ar ģeometrijas un algebras elementiem

I daļa

ZVAIGZNE ABC

INESE BULA, JĀNIS BULS

MATEMĀTISKĀ ANALĪZE
ar ģeometrijas un algebras elementiem

I daļa

Redaktore *Ingrīda Kreicberga*

Apgāds Zvaigzne ABC, SIA, K. Valdemāra ielā 6, Rīgā, LV-1010. Red. nr. E-844.

A/s "Poligrāfists", K. Valdemāra ielā 6, Rīgā, LV-1010.

ISBN 9984-36-078-4

PRIEKŠVĀRDS

Mēs apzināmies, ka mūsu izklāsts ir saspringts un vietām pat telegrāfisks, tomēr mēs centāmies neizlaist neko būtisku un neaizmirst arī motivāciju, kāpēc viens vai otrs jēdziens tiek ieviests. Kas attiecas uz pierādījumiem, lai arī kā mēs tos mīlam, lielākoties komplicētākās teorēmas izklāstītas bez pierādījumiem, vai arī sniegtas tikai pierādījumu idejas, nemaz nepretendējot, ka lasītājs šos izlaidumus varētu patstāvīgi novērst. Mēs ņēmām vērā, ka šis kurss domāts studentiem, kas savu profesionālo darbību nesaistīs ar matemātiku, labākajā gadījumā to tikai lietos kā instrumentu dažādu atšķirīgu mērķu sasniegšanai. Nepacietīgāks lasītājs priekšmetu var sākt studēt sākot ar 3. nodaļu, vēlāk pēc vajadzības ielūkojoties arī 1. un 2. nodaļā. Visumā futbolu, tenisu vai šahu arī var sākt spēlēt, un tad laika gaitā iepazīties ar spēles noteikumiem. Vai matemātisko analīzi var apgūt vispār ignorējot pirmās četras nodaļas? Tāda nostāja mūsuprāt asociējas ar bridža spēli bez solīšanas. Galu galā mēs darbojamies konkrētos vēsturiskos apstākļos Latvijā, kur citu zinātņu pārstāvji, kaut arī nenoliedz matemātikas nozīmi, praksē studentiem, sastādot mācību programmas, matemātikai atvēl ļoti pieticīgu stundu skaitu. Neviļus rodas jautājums:

— Ko īsti gatavo Latvijas universitātes? Intelektuāli konkurētspējīgus speciālistus vai profesionālus zīmuļspicētājus?

Neapšaubāmi, ja darba tirgū ir liels zīmuļspicētāju pieprasījums, tad īstermiņā šāda nostāja ir attaisnojama. Galarezultāts ir tāds, ka visi ozolus grib cirst, bet neviens negrib tos stādīt. Vai to var saukt par universitātes izglītību, ja tās prioritāte nav jaunu pasniedzēju sagatavošana ar plašu uz nākotni vērstu zinātniski stratēģisku redzesloku?

Pēdējos 10 gados vērojamas visaptverošas intelektuālā pagrimuma tendences. Citādi nav izskaidrojama parādība, ka matemātika tiek mācīta intuitīva priekšstata līmenī pat tādās zinātņu nozarēs, kuru pilnvērtīga attīstība vispār nav iedomājama bez matemātikas. Augstākas un zemākas amatpersonas vietā un nevietā gvelž par konkurētspēju, mācību kvalitāti un intensifikāciju. Jādomā, ka turpmāk studijas bioloģijas fakultātē aizstās ar dažu stundu ekskursiju zooloģiskajā dārzā.

Nav dzirdēts, ka apmācot jaunāko medicīnas personālu, par pasniedzējiem strādātu šarlatāni. Toties pat Latvijas universitātēs matemātiku pasniedz cilvēki bez profesionālas matemātiskas izglītības. Daudzi atļaujas visā nopietnībā deklarēt, ka matemātika tā īsti nemaz nav vajadzīga, un to mazumiņu, kas nepieciešams vienā vai otrā nozarē var iemācīt arī neprofesionāli matemātiķi. Nedzīvojam jau izolētā vidē. Augstas amatpersonas visā nopietnībā Latvijā ievieš e–pārvaldi praktiski bez konsultācijām ar matemātiķiem.

Daži padomi lasītājam. Jūs turat rokās mācību grāmatu (I daļa; ar II daļas satura rādītāju var iepazīties grāmatas beigās), kas pieskaņota Latvijas universitātes datorzinātņu un optometrijas bakalaura studiju programmām. Tā kā augstākās matemātikas kursa pamatkodols ir matemātiskā analīze, tad šis mācību līdzeklis būs noderīgs arī citu specialitāšu studentiem. Šī iemesla dēļ grāmatā ietvertas arī tēmas, kas veltītas algebrai, ģeometrijai un diferenciālvienādojumiem. Tomēr lasītāju gribam brīdināt, ka ģeometrijai un parciālajiem diferenciālvienādojumiem atvēlēts ļoti pieticīgs lappušu skaits.

Grāmata izmantojama arī individuālajām studijām. Tā būs īsti piemērota slaistiem ar talanta iezīmēm. Te atsevišķi izdalītas definīcijas, teorēmas un piemēri. Pierādījuma sākums iezīmēts ar simbolu □, bet pierādījuma beigas — ar pildītu četrstūri ■. Ar pildītu četrstūri ■ atzīmētas arī katra piemēra beigas. Tā ka students, kas nonācis laika trūkumā, var ātri noorientēties, ko lasīt, bet ko var arī izlaist. Ceram, ka dzīvi vēl būtiskāk atvieglos gan priekšmetu, gan satura rādītājs, kas novietoti grāmatas beigās.

Autori nopietnām individuālajām studijām iesaka iegādāties vismaz 3 dažādas grāmatas par vienu tēmu. Tikai šādā gadījumā individuālās studijas ir efektīvas, jo atšķirībā no lekcijām jums nav iespējams uzdot precizējošus jautājumus.

Dažkārt dzīvē mēdz būt arī gaiši brīži. Mums ir patīkami tencināt kolēģus Jāni Cepīti, Andreju Cibuli, Vilni Detlovu, Hariju Kali, Pauli Ķikustu un Visvaldi Neimani. Mēs pateicamies arī Apgādam Zvaigzne ABC un it īpaši mūsu redaktorei Ingrīdai Kreicbergai. Pateicoties viņu labojumiem, ieteikumiem un kritiskajām piezīmēm darbs ir ieguvis pašreizējo izskatu. Nenoliedzami par darba saturu un pieļautajām neprecizitātēm atbild vienīgi paši autori.

Neliekuļosim, problēma ir nevis izklāstīt matemātiskās analīzes kursu maksimāli pilnā apjomā, bet tā, lai pēc šī kursa apgūšanas students varētu lasīt un saprast viņam noderīgo matemātisko literatūru. Lai tas kalpo par attaisnojumu mūsu nostājai!

1. nodaļa

PAMATNOSTĀDNES

Pamatjēdzieni un aksiomas

Attīstītas teorijas pamatiezīme ir "spēles noteikumu" fiksēšana. Tāpēc rodas uzdevums veidot teoriju ar vislielāko rūpību un loģisko precizitāti. Tie apgalvojumi, kurus izmanto kaut kādā pierādījumā, arī paši prasa pierādījumu ar kādu agrāku apgalvojumu palīdzību, savukārt agrākie apgalvojumi arī jāpierāda, utt. Kurā vietā šai spriedumu ķēdei būs gals (precīzāk — sākums)? Tāda vispār nav. Kāda ir izeja no aprakstītā šķietami bezcerīgā stāvokļa? Matemātiķi šo "Gordija mezglu" nav atraisījuši, bet vienkārši pārcirtuši. Proti, kādā vietā spriedumu ķēdē daži apgalvojumi tiek akceptēti **bez pierādījuma**. Tos sauc par **aksiomām**.

Līdzīga situācija ir ar jēdzieniem. Katrā definīcijā jaunais jēdziens tiek konstruēts ar citu jēdzienu palīdzību. Tā rezultātā katra definīcija saistās ar citām, kuras definē tos jēdzienus, kas apskatāmajā definīcijā tiek uzskatīti par zināmiem. Piemēram, par taisnes nogriezni sauc taisnes daļu, kas atrodas starp diviem punktiem. Bet kā definēt jēdzienus "taisne" un "starp"? Tātad definīcijas veido tādu pašu bezgalīgu virkni kā pierādījumi. Tādeļ dažus jēdzienus izvēlas **bez definīcijas**. Tos sauc par **pamatjēdzieniem**. Pamatjēdzienu un aksiomu izvēles pamatotība daudzējādā ziņā ir ārpus matemātikas. Te jābalstās gan uz filozofiju, praksi, gan zinātnes metodoloģiju. Matemātikas sistematizācija deviņpadsmitā gadsimta beigu posmā ļāva secināt, ka viens no perspektīvākajiem pamatjēdzieniem matemātikā ir kopas jēdziens. To var izvēlēties par vienīgo pamatjēdzienu visā matemātikā.

Noskaidrosim, ko mēs saprotam ar jēdzienu "**kopa**". Tā kā "kopa" ir pamatjēdziens, tad to nevar nodefinēt ar citu matemātisku jēdzienu palīdzību. To var tikai paskaidrot aprakstoši. Tēlaini izsakoties, kopa ir pelēko zirņu maisiņš. Zirņus pašus sauc par kopas elementiem, "maisiņš" kalpo par šo zirņu apvienotāju.

Tomēr nejauksim: "maisiņš" nav kopa, kopa ir visi zirņi šajā maisiņā. Ja mēs šo kopu apzīmēsim ar A, tad citus zirņus, kuru nav šajā maisiņā, piemēram, zaļos, mēs nesauksim par kopas A elementiem. Tāpat kā tos pelēkos zirņus, kuru nav šajā maisiņā, mēs nesauksim par kopas A elementiem.

Ja mēs gribam pateikt, ka pelēkais zirnis (apzīmēsim to ar p) ir kopas A elements, tad lietosim pierakstu $p \in A$. Simbolu $\in$ sauc par **piederības simbolu**. Ja gribam uzsvērt, ka zaļais zirnis (apzīmēsim to ar z) nav kopas A elements, tad lietosim pierakstu $z \notin A$.

Kopu teorijas aksiomātikas pamatā ir dažādas aksiomas, kuru uzdevums ir nodrošināt izvairīšanos no pārpratumiem un paradoksiem. Tieši aksiomas un tikai tās ir zināms pamatjēdzienu raksturojums, to netieša un apzināti nepilnīga "definīcija". Piemēram, sekojoša aksioma: eksistē kopa, kas nesatur nevienu elementu. Arī pārējās kopu teorijas aksiomas ir tikpat "acīm redzamas", tāpēc praksē aprobežojas ar tā saukto "naivo kopu teoriju". Tā balstās uz intuitīviem priekšstatiem, kas visiem cilvēkiem vairāk vai mazāk vienādi. Tā kā mūsu uzdevums nav kopu teorijas izpēte, tad arī mēs turpmāk darbosimies "naivās kopu teorijas" ietvaros, un lietosim kā sinonīmus vārdus "kopa", "klase", "sakopojums", "saime".

Izteikumu loģika

Ak, vai! Izrādās, lai korekti uzbūvētu teoriju, jāfiksē arī spriedumu sistēma jeb loģika, kas būs par pamatu apgalvojumu un teorēmu pierādījumos. Klasiskās matemātiskās loģikas vienkāršāko daļu, proti, izteikumu loģiku izdodas reducēt līdz "melnbaltai pasaulei". Kāda tad ir šī "melnbaltā pasaule"? Par pamatjēdzieniem izvēlas izteikumus. Intuitīvi, izteikumi ir apgalvojumi, kas ir vai nu patiesi vai aplami (t.i., kļūdaini). Tie noteikti nav nedz jautājuma, nedz izsaukuma teikumi. Izteikumu loģikas uzdevums — precizēt matemātikā lietoto vārdu: "un", "vai", "nav tiesa, ka", "ja ..., tad ...", "tad un tikai tad" saturu.

Tā par izteikuma A **negāciju** sauc izteikumu, ko pieraksta $\neg A$ un lasa "negācija no A", "nav tiesa, ka A" vai arī "ne A", pie kam jaunā izteikuma patiesuma vērtību nosaka tabula:

A	$\neg A$
a	p
p	a

Šajā tabulā apkopotais nozīmē: ja izteikums A ir aplams (a), tad izteikums $\neg A$ ir patiess (p); un otrādi, ja izteikums A ir patiess, tad izteikums $\neg A$ ir aplams.

Ieviesīsim arī četras divvietīgas loģikas operācijas.

A	B	$A\&B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
a	a	a	a	p	p
a	p	a	p	p	a
p	a	a	p	a	a
p	p	p	p	p	p

Tabula definē divu izteikumu A un B **konjunkciju** $A\&B$, **disjunkciju** $A \vee B$, **implikāciju** $A \Rightarrow B$ un **ekvivalenci** $A \Leftrightarrow B$.

Pierakstu $A\&B$ lasa "A un B" vai arī "A konjunkcija B". Pierakstu $A \vee B$ lasa "A vai B" vai arī "A disjunkcija B". Pierakstu $A \Rightarrow B$ lasa "ja A, tad B", "no A seko B" vai arī "A implicē B". Pierakstu $A \Leftrightarrow B$ lasa "A tad un tikai tad, ja B" vai arī "A ekvivalents B".

Izteikumus A un B sauc par **konjunkcijas** $A\&B$ (**disjunkcijas** $A \vee B$) **locekļiem**. Izteikumu A sauc par implikācijas $A \Rightarrow B$ **premisu**, izteikumu B — par **secinājumu**. Izteikumu A sauc par ekvivalences $A \Leftrightarrow B$ **kreiso pusi**, bet izteikumu B — par **labo pusi**. Satriecošākais šajā loģikā bez šaubām ir šāda teikuma patiesums: ja zirgs lido apraudzīt trejdeviņas zemes, tad trešdienās pūš patīkams dienvidvējš. Bet ievērosim, mēs dzīvojam "melnbaltā pasaulē" un interesējamies tikai par loģiskās secināšanas likumību. Izejas premisa taču ir aplama, tāpēc pašā loģiskās secināšanas darbībā mēs nesaskatām nekādus trūkumus. Lai arī cik šāda secināšanas shēma mums liktos primitīva, tomēr gandrīz visa matemātika būvēta tieši uz šiem pamatiem. Kamēr, izmantojot matemātiku, vilcieni, kuģi un lidmašīnas kursē nevainojami, mums nav nopietna iemesla no tās atteikties, un tātad arī no klasiskās matemātiskās loģikas. It sevišķi vēl tādēļ, ka loģika ir vienkārša un ērti lietojama matemātiskos pierādījumos.

Predikātu loģika

Izteikumu loģika aplūko apgalvojumus kā nedalāmas pamatvienības. Izteikumu loģikai nav svarīgs ne tas, kas tiek apgalvots, ne arī tas, par ko apgalvojums izteikts. Ievērota tiek vienīgi apgalvojuma patiesuma vērtība. Daudzos gadījumos šāda pieeja izrādās pārāk primitīva. Piemēram, var rasties vajadzība aplūkot vienu un to pašu īpašību attiecībā uz dažādiem objektiem vai arī — otrādi — nepieciešams aplūkot viena un tā paša objekta dažādas īpašības. Pieņemts rīkoties šādi.

Ja gribam teikt, ka objektam x piemīt īpašība P, tad lietojam pierakstu $P(x)$ un lasām "P no x". Šajā gadījumā P sauc par **predikātu**, bet x — par **indivīdu**. Tā rezultātā mēs nonākam pie predikātu loģikas. Ņemot konkrētu predikātu no fiksēta indivīda, vienmēr iegūstam izteikumu. Turpretīm, ja kaut viens no abiem — predikāts vai indivīds — ir mainīgs, tad attiecīgais apgalvojums nav izteikums, jo tam nevar piedēvēt nekādu patiesuma vērtību.

Ne retāk kā ikdienas dzīvē, arī matemātikā jārunā par aplūkoto vai pieminēto priekšmetu skaitu. Ļoti bieži sastopami tamlīdzīgi izteicieni kā "visām riņķa līnijām piemīt īpašība ..." vai "eksistē vismaz viens naturāls skaitlis, kuram ...". Matemātiskā loģika parāda, ka visus tos var reducēt uz diviem galējiem daudzuma novērtējumiem, kurus izsaka tā saucamie kvantori.

Pierakstu $\exists x\ P(x)$ lasa "eksistē tāds indivīds x, kuram $P(x)$" vai arī "eksistē vismaz viens x, kuram izpildās predikāts P", vai arī "vismaz vienam x piemīt īpašība P". Simbolu $\exists$ sauc par **eksistences kvantoru**. Jāpasvītro, ka eksistences kvantors neapgalvo *tieši* viena objekta eksistenci, bet gan *vismaz* viena objekta eksistenci ar uzrādīto īpašību. Lai izsacītu to, ka eksistē tieši viens objekts, jālieto garāka formula.

Pierakstu $\forall x\ P(x)$ lasa "visiem x $P(x)$" vai "visiem x izpildās P", vai "visiem x piemīt īpašība P". Simbolu $\forall$ sauc par **unversālkvantoru**. Skaidrs, ka vārds "visiem" netiek attiecināts uz absolūti visiem jebkādas dabas objektiem, ko vien var iedomāties, bet gan tikai uz visiem tās indivīdu kopas elementiem, par kuriem attiecīgajā brīdī ir runa (tā var būt kāda skaitļu kopa, funkciju kopa vai figūru kopa, utt.).

Lai arī kāda būtu klasiskās predikātu loģikas aksiomātika, tajā var pamatot šādas ekvivalences

$$\neg\exists x\ P(x) \Leftrightarrow \forall x \neg P(x),$$
$$\neg\forall x\ P(x) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x).$$

Garāku formulu lietošana bieži ir neērta, tāpēc ievieš saīsinājumus. Piemēram, pierakstu

$$\forall x \in A\ P(x)$$

uzskata par saīsinājumu formulai

$$\forall x\ (x \in A \Rightarrow P(x)),$$

bet pierakstu

$$\exists x \in A\ P(x)$$

lieto kā saīsinājumu formulai

$$\exists x\ (x \in A \,\&\, P(x)).$$

Īpaši populārs ir formulas

$$\exists x\, P(x) \,\&\, \forall y\, \forall z\, ((\, P(y) \,\&\, P(z)) \Rightarrow y = z\,)$$

saīsinājums $\exists! x\ P(x)$, kas izsakāms ar frāzi "eksistē tieši viens objekts x, kuram piemīt īpašība P".

Akurāti lietojot visus predikātu teorijas priekšrakstus, var parādīt, piemēram, ka formulas

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in Dom(f)\ [\, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon\,]$$

noliegums ekvivalents ar

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in Dom(f)\ [\, |x - x_0| < \delta \,\&\, |f(x) - a| \geq \varepsilon\,],$$

kur ar $Dom(f)$ apzīmēts funkcijas f definīcijas apgabals.

Parastās algebras formulās izdodas ietaupīt daļu no iekavām, norunājot, ka reizināšana saista ciešāk par saskaitīšanu. Līdzīga metode lietojama arī loģikas formulām. Parasti vienojas, ka loģiskās operācijas sakārtotas pēc ciešuma šādā secībā: visciešāk saista negācija ($\neg$) un kvantoru kompleksi ($\forall x, \exists x$), mazāk cieši konjunkcija ($\&$) un disjunkcija ($\vee$), vēl mazāk cieši implikācija ($\Rightarrow$) un ekvivalence ($\Leftrightarrow$). Saskaņā ar šo norunu negācija un kvantoru kompleksi saista vienādi cieši, tāpat konjunkcija un disjunkcija, arī implikācija un ekvivalence saista vienlīdz cieši. Tā formula

$$((\exists u\ f(u) < 0) \,\&\, (\exists v\ 0 < f(v))) \Rightarrow (\exists x\ f(x) = 0)$$

tagad pierakstāma kā: $\exists u\ f(u) < 0 \,\&\, \exists v\ 0 < f(v) \Rightarrow \exists x\ f(x) = 0$.

Operācijas ar kopām

Pierakstu $A = \{a_1, ..., a_n\}$ mēs lietosim kā saīsinājumu apgalvojumam: kopu, kas sastāv no elementiem $a_1, ..., a_n$, turpmāk apzīmēsim ar lielo burtu A. Savukārt pierakstu $B = \{x \,|\, P(x)\,\}$ mēs uztversim kā apgalvojumu: kopa B sastāv no visiem tiem un tikai tiem elementiem, kuriem piemīt īpašība P, citiem vārdiem, no tiem elementiem x, kuriem patiess apgalvojums $P(x)$. Izmantojot šo vienošanos, definēsim šādas darbības ar kopām:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{\, x \,|\, x \in A \vee x \in B\,\}, \\ A \cap B &= \{\, x \,|\, x \in A \,\&\, x \in B\,\}, \\ A \setminus B &= \{\, x \,|\, x \in A \,\&\, x \notin B\,\}. \end{aligned}$$

Operāciju $\cup$ sauc par kopu **apvienojumu**, $\cap$ — par **šķēlumu**, $\setminus$ — par kopu A un B **starpību**. Piemēram, $\mathbb{R}^0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ir reālo skaitļu kopa bez elementa 0.

Mēs teiksim, ka kopa A ir kopas B **apakškopa** un lietosim pierakstu $A \subseteq B$, ja izpildās nosacījums $\forall x \in A\ (x \in B)$. Šajā situācijā lietosim arī pierakstu $B \supseteq A$ un dažkārt teiksim, ka B ir kopas A **virskopa**. Ja $A \subseteq B$ un $A \neq B$, tad kopu A sauc par kopas B **īstu** apakškopu un lieto pierakstu $A \subset B$.

Speciāli izdalīsim kopu, kas nesatur nevienu elementu. To sauc par **tukšo** kopu, un tās apzīmēšanai parasti lieto pierakstu $\emptyset$. Atzīmēsim, ka jebkurai kopai A ir spēkā apgalvojums: $\emptyset \subseteq A$. Ja $A \neq \emptyset$, tad $\emptyset \subset A$.

Reālo skaitļu aksiomātika

Pieņemsim, ka kopa $\mathbb{R}$ satur vismaz divus elementus, tajā definētas divas divvietīgas operācijas $+$ (saskaitīšana) un $\cdot$ (reizināšana), kā arī — divvietīgs predikāts $\leq$ (mazāks, vienāds). Kopu $\mathbb{R}$ sauc par **reālo skaitļu lauku**, ja tā apmierina sekojošas aksiomas.

(i) $\forall x \forall y \forall z\,[\,(x+y)+z = x+(y+z)\,]$,
(ii) $\exists o \forall x\,(\,x+o = x\,)$,
(iii) $\forall x\, \exists y\,(\,x+y = o\,)$,
(iv) $\forall x \forall y\,(\,x+y = y+x\,)$.

Elementu o parasti apzīmē ar 0 un sauc par nulli; elementu y, kas figurē aksiomā (iii), apzīmē ar $-x$ un sauc par elementa x pretējo elementu.

(v) $\forall x \forall y \forall z\,[\,(x \cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)\,]$,
(vi) $\exists e \forall x\,(x \cdot e = x\,)$,
(vii) $\forall x \neq 0\, \exists y\,(\,x \cdot y = e\,)$,
(viii) $\forall x \forall y\,(\,x\cdot y = y \cdot x\,)$.

Elementu e parasti apzīmē ar 1 un sauc par vieninieku; elementu y, kas figurē aksiomā (vii), apzīmē ar x^{-1} un sauc par elementa x apgriezto elementu. Matemātikā pieņemts (ja nerodas pārpratumi) reizināšanas zīmi $\cdot$ nelietot. Tā, piemēram, $a\cdot b$ vietā raksta ab.

(ix) $\forall x \forall y \forall z\,[x(y+z) = xy+xz]$,
(x) $\forall x\,(x \leq x)$,
(xi) $\forall x \forall y\,(\,x \leq y \vee y \leq x)$,
(xii) $\forall x \forall y\,(\,x \leq y\,\&\,y \leq x \Rightarrow x = y)$,
(xiii) $\forall x \forall y \forall z\,(\,x \leq y\,\&\,y \leq z \Rightarrow x \leq z\,)$,
(xiv) $\forall x \forall y \forall z\,(\,x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z)$,
(xv) $\forall x \forall y \forall z\,(\,x \leq y\,\&\,0 \leq z \Rightarrow xz \leq yz)$.

Šīs visas aksiomas apmierina arī racionālo skaitļu kopa $\mathbb{Q}$, un tāpēc, lai reālo skaitļu kopu atšķirtu kaut vai no racionālo skaitļu kopas, nepieciešama vēl viena aksioma, tā sauktā nepārtrauktības aksioma.

Pieņemsim, ka $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ un $\emptyset \neq B \subseteq \mathbb{R}$. Ja $\forall x \in A\, \forall y \in B\ (x \leq y)$, tad lietosim pierakstu $A \leq B$. Atšķirībā no skaitļu salīdzināšanas kopu salīdzināšanai piemīt dažas īpatnības. Piemēram, ja $A = \{0,1,2\}$, $B = \{1,2,3\}$, tad nav tiesa, ka $A \leq B$, jo $2 \in A$, $1 \in B$ un $\neg(2 \leq 1)$. Tāpat arī $\neg(B \leq A)$.

Nepārtrauktības aksioma

(xvi) $\forall A \neq \emptyset\ \forall B \neq \emptyset\ [A \leq B \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}\,(A \leq \{c\} \leq B)]$.

Apskatītā reālo skaitļu aksiomātika dod iespēju pierādīt daudzas svarīgas reālo skaitļu īpašības, piemēram,

Arhimeda principu:

$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists k \in \mathbb{N}\ (k > x)$,

proti, katram fiksētam reālam skaitlim x eksistē par to lielāks naturāls skaitlis n.

Tagad mēs spējam nodemonstrēt, ka $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$.

1.1. APGALVOJUMS. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

□ Pieņemsim pretējo, proti, ka $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Ja reiz tā, tad $\sqrt{2}$ var uzrakstīt kā nesaīsināmu daļu $\frac{m}{n}$, kur $m \in \mathbb{N}$, gan $n \in \mathbb{N}$. No šejienes $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, tāpēc $2 = \frac{m^2}{n^2}$ jeb $2n^2 = m^2$, t.i., m^2 ir pāra skaitlis.

Ja m ir nepāra skaitlis, t.i., $m = 2s + 1$, tad $m^2 = 4s^2 + 4s + 1$ arī ir nepāra skaitlis. Tāpēc, lai m^2 būtu pāra skaitlis, arī m ir jābūt pāra skaitlim. Pieņemsim, ka $m = 2k$. Iegūstam $2n^2 = m^2 = 4k^2$ jeb $n^2 = 2k^2$. Līdzīgi kā iepriekš secinām, ka n nav nepāra skaitlis. Tātad $n = 2t$, t.i., n ir pāra skaitlis. Līdz ar to gan m, gan n ir pāra skaitļi, bet mēs taču pieņēmām, ka daļa $\frac{m}{n}$ nav saīsināma. Tā kā mūsu spriedumos kļūdu nav, tad atliek tikai viena iespēja, proti, pieņēmums, ka $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, ir kļūdains. ■

1.2. APGALVOJUMS. $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$.

□ (i) Aplūkosim šādas divas kopas

$$A = \{\, x \mid x \in \mathbb{Q} \,\&\, 0 \leq x \,\&\, x^2 < 2 \,\},$$
$$B = \{\, x \mid x \in \mathbb{Q} \,\&\, 0 \leq x \,\&\, x^2 > 2 \,\}.$$

Predikātu $x < y$ mēs lietojam vispārpieņemtā nozīmē, proti, tas ir saīsinājums formulai $x \leq y \,\&\, x \neq y$. Ņemsim vērā, ka $1 \in A$, tāpēc $A \neq \emptyset$. Tā kā $2 \in B$, tad arī $B \neq \emptyset$. No A un B definīcijām tieši izriet, ka $A \leq B$, tāpēc saskaņā ar nepārtrauktības aksiomu

$$\exists c \in \mathbb{R}\ A \leq \{c\} \leq B.$$

Parādīsim, ka $c^2 = 2$. Saskaņā ar aksiomu (xi) $c^2 \leq 2$ vai $2 \leq c^2$.

(ii) Pieņemsim, ka $c^2 < 2$, tad $2 - c^2 > 0$. Saskaņā ar Arhimeda principu

$$\exists n \in \mathbb{N} \left(n > \frac{1}{2 - c^2} \right) \quad \text{jeb} \quad 2 - c^2 > \frac{1}{n}.$$

Aplūkosim nevienādības

$$\frac{1}{25n^2} < \frac{4}{25n^2} < \dots < \frac{n^2}{25n^2} < \dots < \frac{(10n)^2}{25n^2}.$$

Tā kā $n \geq 1$, tad $2 - \frac{1}{25n^2} > 0$; savukārt

$$2 - \frac{100n^2}{25n^2} = 2 - 4 = -2 < 0,$$

tāpēc eksistē tāds $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k < 10n$, ka

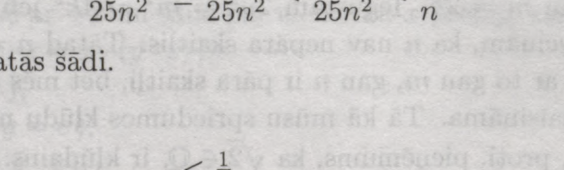
$$2 - \left(\frac{k+1}{5n} \right)^2 < 0 < 2 - \left(\frac{k}{5n} \right)^2.$$

Tātad $\left(\frac{k}{5n}\right)^2 < 2$ jeb $k^2 < 50n^2$, un tāpēc $k < 8n$. No šejienes

$$2 - \left(\frac{k}{5n} \right)^2 - 2 + \left(\frac{k+1}{5n} \right)^2 = \frac{k^2 - k^2 + 2k + 1}{25n^2} =$$

$$= \frac{2k+1}{25n^2} \leq \frac{3k}{25n^2} < \frac{24n}{25n^2} < \frac{1}{n}.$$

Zīmējumā tas izskatās šādi.



Tas viss pamato nevienādības

$$0 < 2 - \left(\frac{k}{5n} \right)^2 < \frac{1}{n} < 2 - c^2.$$

Tātad $c^2 < \left(\frac{k}{5n}\right)^2 < 2$ un tāpēc $\frac{k}{5n} \in A$. Iegūta pretruna, jo $A \leq \{c\}$.

(iii) Otra iespēja. Pieņemsim, ka $c^2 > 2$, tad $c^2 - 2 > 0$. Saskaņā ar Arhimeda principu

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad \left(c^2 - 2 > \frac{1}{n}\right).$$

Tālākais praktiski atkārto iepriekšējā punkta spriedumus. Iegūsim, ka

$$\tfrac{k+1}{5n} \in B \quad \text{un}$$

$$0 \leq \left(\tfrac{k+1}{5n}\right)^2 - 2 < \tfrac{1}{n} < c^2 - 2,$$

$$\text{t.i.,} \quad \frac{k+1}{5n} < c.$$

Tā ir pretruna, jo $\{c\} \leq B$.

(iv) Atliek tikai trešā iespēja, proti, $c^2 = 2$. ∎

Atzīmēsim, ka apgalvojuma pierādījumā kopas A un B ir racionālo skaitļu kopas $\mathbb{Q}$ apakškopas. Tātad definējot $\sqrt{2}$ mēs balstījāmies uz racionāliem skaitļiem, t.i., reālais skaitlis $\sqrt{2}$ iegūstams papildinot racionālo skaitļu kopu. Tādējādi reālie skaitļi tiek definēti kā racionālo skaitļu lauka paplašinājums. Jāpiebilst gan, ka reālo skaitļu aksiomātika pati par sevi neko tādu nespiež mums darīt.

Ja tik smagi jāpierāda, ka $\sqrt{2}$ ir iracionāls skaitlis, tad kā lai pierāda, ka ir vēl arī citi iracionāli skaitļi? Lasītāju pārņem bezcerība, un viņš saprot, ka matemātisko analīzi tā arī nekad neapgūs, un uz visiem laikiem aizver šo grāmatu, tālāk nelasot. Nu ko, senie grieķi vispār neatzina iracionālos skaitļus. Tomēr lasītāja daļējai mierināšanai atzīmēsim, ka šie jautājumi nav matemātiskās analīzes kursa uzmanības centrā, un mēs šeit tikai ilustrējām problēmas, kādas rodas, ja teoriju būvē ar maksimālo rūpību.

(iii) Otrā iespēja. Pieņemsim, ka $c^2 > 2$, tad $c^2 - 2 > 0$. Saskaņā ar Arhimēda principu

$$\exists n \in \mathbb{N}: \left(c^2 - 2 > \frac{1}{n} \right).$$

Tālākais praktiski atkārto iepriekšējā punkta spriedumus. Iegūsim, ka $\frac{k+1}{5n} \in B$,

$$0 \le \left(\frac{k+1}{5n}\right)^2 - 2 < \frac{1}{n} < c^2 - 2,$$

$$0 \le \frac{k+1}{5n} < c.$$

Tā ir pretruna, jo $\{c\} \le B$.

(iv) Atliek tikai trešā iespēja, proti, $c^2 = 2$. ■

Atzīmēsim, ka apgalvojuma pierādījumā kopas A un B ir racionālo skaitļu kopas $\mathbb{Q}$ apakškopas. Tātad definējot $\sqrt{2}$ mēs balstījāmies uz racionāliem skaitļiem. Reālais skaitlis $\sqrt{2}$ iegūstams papildinot racionālo skaitļu kopu. Tādējādi reālie skaitļi tiek definēti kā racionālo skaitļu lauka paplašinājums. Jāpiebilst gan, ka reālo skaitļu aksiomātika pati par sevi neko tādu nespiež mums darīt.

Ja tik smagi jāpierāda, ka $\sqrt{2}$ ir iracionāls skaitlis, tad kā lai pierāda, ka ir vēl arī citi iracionāli skaitļi? Lasītāju pārņem bezcerība, un viņš saprot, ka matemātisko analīzi tā arī nekad neapgūs, un uz visiem laikiem aizver šo grāmatu, tālāk nelasot. Nu ko, senie grieķi vispār neatzina iracionālos skaitļus. Tomēr lasītāja daļējai mierināšanai atzīmēsim, ka šie jautājumi nav matemātiskās analīzes kursa uzmanības centrā, un mēs šeit tikai ilustrējām problēmas, kādas rodas, ja teoriju būvē ar maksimālo rūpību.

2. nodaļa

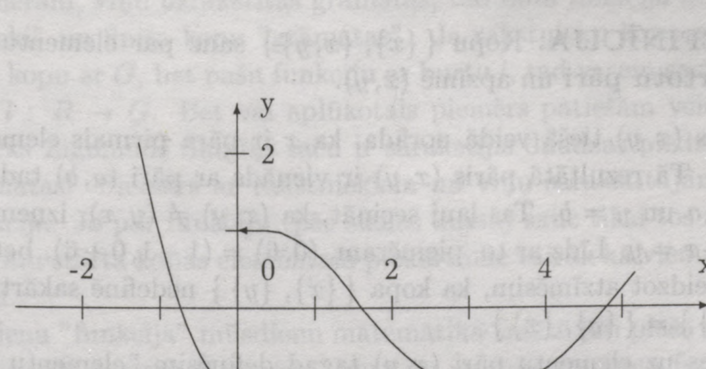
FUNKCIJAS

Funkcijas jēdziens

Skolas kursā jūs jau esat iepazinušies ar dažām funkcijām, kas pierakstītas analītiskā formā, piemēram, $y = 2x^2 - 1$, $y = \cos x$, utt. Taču šīs zināmās funkcijas neizsmeļ visu funkciju klasi. Piemēram, funkcija ir arī šāda:

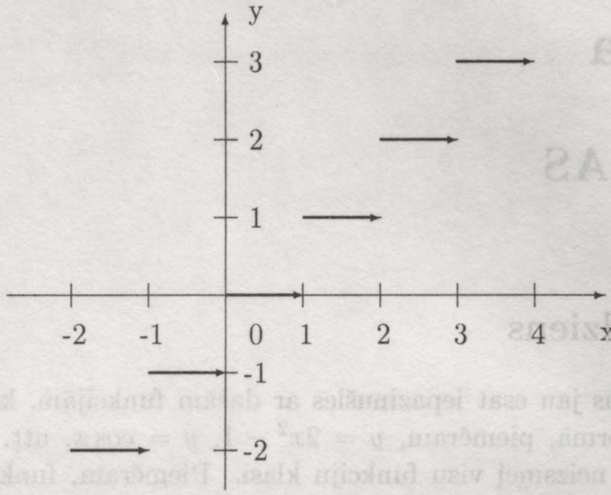
$$y = \begin{cases} 2x^2 - 1 & , \text{ ja } \quad x \leq 0; \\ \cos x & , \text{ ja } \quad x > 0; \end{cases}$$

tās grafiks dots 2.1. zīmējumā (bultiņa nozīmē, ka galapunkts nepieder grafikam).



2.1. zīm.

Funkcija ir arī $y = \lfloor x \rfloor = \max\{t \,|\, t \in \mathbb{Z} \,\&\, t \leq x\}$ — veselā daļa no x, kuras piekārtojuma būtību vieglāk formulēt vārdiski: tā katram reālam skaitlim x piekārto lielāko veselo skaitli, kas mazāks vai vienāds ar pašu x. Piemēram, $\lfloor 3,1 \rfloor = 3$, bet $\lfloor -3,1 \rfloor = -4$. Šo funkciju sauc par **veselās daļas funkciju**, tās grafiks dots 2.2. zīmējumā.



2.2. zīm. Funkcijas $y = \lfloor x \rfloor$ grafiks.

Kā formāli definēt funkciju?

Šajā nolūkā vispirms noskaidrosim Dekarta reizinājuma jēdzienu. Pieņemsim, ka dotas divas kopas X un Y.

2.1. DEFINĪCIJA. Kopu $\{\{x\}, \{x,y\}\}$ sauc par elementu $x \in X$, $y \in Y$ **sakārtotu pāri** un apzīmē (x, y).

Pieraksts (x, y) tiešā veidā norāda, ka x ir pāra pirmais elements, bet y — otrais. Tā rezultātā pāris (x, y) ir vienāds ar pāri (a, b) tad un tikai tad, ja $x = a$ un $y = b$. Tas ļauj secināt, ka $(x, y) \neq (y, x)$, izņemot vienu situāciju, ja $x = y$. Līdz ar to, piemēram, $(0, 6) = (1 - 1, 0 + 6)$, bet $(0, 6) \neq (6, 0)$. Visbeidzot atzīmēsim, ka kopa $\{\{x\}, \{y\}\}$ nedefinē sakārtotu pāri, jo $\{\{x\}, \{y\}\} = \{\{y\}, \{x\}\}$.

Balstoties uz elementu pāri (x, y) tagad definēsim "elementu trijnieku (x, y, z)", "elementu četrinieku (x, y, z, w)", vispārīgā gadījumā — "n - dimensionālu kortežu pār kopām A_1, A_2,..., A_n".

Ērtības labad kopu $\{1, 2, ..., n\}$ turpmāk apzīmēsim ar $\overline{1,n}$.

2.2. DEFINĪCIJA. Pāri $((x_1, ..., x_{n-1}), x_n)$, kur $\forall i \in \overline{1,n}$ $(x_i \in A_i)$, sauc par n **- dimensionālu kortežu** pār kopām A_1, A_2,...,A_n. Turpmāk n - dimensionāla korteža apzīmēšanai lietosim pierakstu $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

2.3. DEFINĪCIJA. Visu sakārtoto pāru (x,y), $x \in X$, $y \in Y$, kopu sauc par **kopu** X **un** Y **Dekarta reizinājumu** un apzīmē $X \times Y$.

Dekarta reizinājumā nav būtiski, vai $X = Y$ vai $X \neq Y$. Tātad

$$X \times Y = \{(x,y) \,|\, x \in X \,\&\, y \in Y\}.$$

Vispārīgā gadījumā Dekarta reizinājumu definē šādi.

2.4. DEFINĪCIJA. Par **kopu** A_1, A_2,...,A_n **Dekarta reizinājumu** $A_1 \times A_2 \times .... \times A_n$ sauc visu n - dimensionālu kortežu kopu pār kopām A_1, A_2,...,A_n, t.i.,

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \,|\, \forall i \in \overline{1,n}\, (x_i \in A_i)\}.$$

Ja $A = A_1 = A_2 = ... = A_n$, tad lieto apzīmējumu $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = A^n$.

2.5. Piemērs. Pieņemsim, ka $X = \{$suns, kaķis$\}$ — kopa, kas satur divus elementus: suni un kaķi, bet $Y = \{$Antra, Uldis$\}$ — kopa, kas arī satur divus elementus. To Dekarta reizinājums ir kopa $X \times Y$, kura saturēs četrus elementus — visus iespējamos pārus, kuru pirmais elements ir no kopas X, bet otrais elements — no kopas Y:
$X \times Y = \{$ (suns, Antra), (suns, Uldis), (kaķis, Antra), (kaķis, Uldis) $\}$. ■

Aprakstot funkcijas jēdzienu, pirmajā tuvinājumā var teikt šādi: ja vienas kopas objektiem, piemēram, rakstniekiem, piekārto citas kopas objektus, piemēram, viņu uzrakstītās grāmatas, tad dota funkcija ar starta kopu "rakstnieki" un finiša kopu "grāmatas". Ja rakstnieku kopu apzīmē ar R, grāmatu kopu ar G, bet pašu funkciju ar burtu l, tad varam sacīt, ka uzdota funkcija $l : R \to G$. Bet vai aplūkotais piemērs patiešām veido funkciju? Rakstnieks Zigmunds Skujiņš taču ir sarakstījis daudzas piedzīvojumu pilnas grāmatas! Piemērs ar rakstniekiem un viņu sarakstītajām grāmatām nav funkcija. Jo par funkciju (pēc skolas kursa) sauc tikai tos attēlojumus, kuri katram starta kopas elementam piekārto ne vairāk kā vienu finiša kopas elementu.

Jēdzienu "funkcija" mūsdienu matemātikā traktē ļoti plašā nozīmē. Pievērsīsimies vēl vienam piemēram, kurā nu jau būs aplūkota funkcija.

2.6. Piemērs. 9.klases skolēni Marta, Rita, Juris un Andrejs raksta kontroldarbu matemātikā, par kuru var saņemt atzīmi no 1 līdz 10. Marta kontroldarbu uzraksta uz 8, Rita un Andrejs — uz 6, bet Juris darbu nav nodevis un tāpēc atzīmi nesaņem.

Minētais apraksts mūsdienu izpratnē definē funkciju. Formāli izsakoties, ja ar X apzīmējam kopu

$$X = \{\text{Marta, Rita, Juris, Andrejs}\}$$

un ar Y apzīmējam kopu

$$Y = \{1,2,...,10\}$$

tad augstāk apskatītais apraksts definē piekārtojumu

$$f : \text{Marta} \mapsto 8$$
$$f : \text{Rita} \mapsto 6$$
$$f : \text{Andrejs} \mapsto 6.$$

Līdz ar to ir dota funkcija $f : X \to Y$ ar starta kopu X un finiša kopu Y. Katram kopas X elementam attēlojums f piekārto ne vairāk kā vienu kopas Y elementu. Juris nesaņēma kontroldarba atzīmi, tāpēc kopas X elementam "Juris" funkcija f nav definēta. Mūsu gadījumā $X \neq Y$. ■

Ciešāk ielūkojoties piemērā, ievērosim, ka darbojamies ar Dekarta reizinājuma $X \times Y$ daļu. Šī daļa ir pāri: (Marta,8), (Rita,6), (Andrejs,6). Varam šos pārus apvienot vienā kopā

$$G = \{ \text{(Marta,8), (Rita,6), (Andrejs,6)} \}$$

šo kopu sauc par funkcijas f grafiku. Trijnieks (X, Y, G) pilnībā definē funkciju f. Citiem vārdiem sakot, ja mums dota funkcijas f starta kopa X, finiša kopa Y un grafiks G, tad mums ir zināms viss par šo funkciju.

2.7. DEFINĪCIJA. Trijnieku $f = (X, Y, G)$, kur $G \subseteq X \times Y$, sauc par **funkciju** (lieto arī vārdu "**attēlojums**"), ja visiem kopas G elementiem (x, y), (x, z) ir spēkā vienādība $y = z$. Kopu X sauc par funkcijas f **starta** (jeb **izejas**) kopu, Y — par f **finiša** (jeb **ieejas**) kopu, bet G — par f **grafiku**.

Ja $(x, y) \in G$, tad lieto pierakstu $f(x) = y$ jeb $f : x \mapsto y$. Vispārīgs pieraksts $f : X \to Y$ norāda, ka f ir funkcija ar starta kopu X un finiša kopu Y.

Elementu $x \in X$ sauc par funkcijas f **argumentu** vai **neatkarīgo mainīgo**, bet $y \in Y$ - par **atkarīgo mainīgo**. Šajā situācijā saka arī, ka elementa x **attēls** ir elements y, bet elementa y **pirmtēls** ir elements x.

Ja $X = Y$, tad saka, ka funkcija f attēlo kopu X sevī.

Par funkcijas $f : X \to Y$ **definīcijas apgabalu** (angliski "*domain*") sauc kopu

$$Dom(f) = \{ x \in X \mid \exists y \in Y \; ((x, y) \in G) \},$$

par funkcijas $f : X \to Y$ **vērtību apgabalu** (angliski "*range*") sauc kopu

$$Ran(f) = \{ y \in Y \mid \exists x \in X \; ((x, y) \in G) \}.$$

Funkciju klases

2.8. DEFINĪCIJA. Funkciju $f : X_1 \to Y$ sauc par funkcijas $g : X_2 \to Y$ **sašaurinājumu** kopā X_1, ja $X_1 \subseteq X_2$ un $\forall x \in X_1 \, f(x) = g(x)$. Šajā situācijā mēdz lietot apzīmējumu $f = g|X_1$.

2.9. DEFINĪCIJA. Funkciju $f : X \to Y$ sauc par **visur definētu**, ja $\forall x \in X \; \exists y \in Y \; ((x, y) \in G)$.

2.10. DEFINĪCIJA. Visur definētu funkciju $f : A^n \to A$ sauc par **kopā** A **definētu** n**-vietīgu algebrisku operāciju.**

Saskaitīšana $(+)$ un reizināšana $(\cdot)$ ir divvietīgas algebriskas operācijas reālo skaitļu kopā $\mathbb{R}$.

2.11. DEFINĪCIJA. Funkciju $f : X \to Y$ sauc par **sirjekciju**, ja $Ran(f) = Y$.

2.12. DEFINĪCIJA. Funkciju $f : X \to Y$ sauc par **injekciju**, ja dažādiem elementiem $x_1, x_2 \in X$ atbilst atšķirīgi elementi $f(x_1), f(x_2) \in Y$, t.i., $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

2.13. DEFINĪCIJA. Ja visur definēts attēlojums $f : X \to Y$ vienlaicīgi ir gan sirjekcija, gan injekcija, tad to sauc par **bijekciju.**

Piemēram, funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 1$ ir visur definēta, tā ir gan sirjekcija, gan injekcija, tāpēc bijekcija, bet $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lfloor x \rfloor$ ir visur definēta, bet nav ne sirjekcija, ne injekcija. Vēlāk, runājot par inversajām funkcijām, mēs konstatēsim, ka injekcijas ir tās "labās" funkcijas, kurām var meklēt inversās funkcijas.

2.14. DEFINĪCIJA. Ja $f : X \to Y$ un $g : W \to Z$, tad funkciju $F : X \to Z$, kas definēta ar nosacījumu:

$$\forall x \in X \quad F(x) = g(f(x)),$$

sauc par funkciju f un g **kompozīciju** (jeb **superpozīciju**, jeb **saliktu** funkciju) un apzīmē $g \circ f$.

Tātad funkciju kompozīcija $g \circ f$ ir trijnieks (X, Z, F), kur

$$F = \{\, (x, z) \mid \exists y \in Y \cap W \; (f : x \mapsto y \,\&\, g : y \mapsto z) \,\}.$$

2.15. Piemērs. Ja $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 6\sqrt{x}$, $g(x) = \cos^3 x$, tad $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \cos^3(6\sqrt{x})$, bet $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 6\sqrt{\cos^3 x}$. Tātad vispārīgā gadījumā $f \circ g \neq g \circ f$. ∎

Iepazīstoties ar reālo pasauli, mēs sastopamies ar raksturojošiem lielumiem, kuri mainās procesa laikā. Piemēram, gaisa temperatūra gada laikā vai preces pieprasījums atkarībā no cenas. Tāpēc funkcijas jēdziens ir viens no vissvarīgākajiem matemātikas jēdzieniem.

Šajā matemātiskās analīzes kursā mēs vispirms aplūkosim **viena reālā mainīgā** funkcijas, t.i., $f : X \to \mathbb{R}$, kur $X \neq \emptyset$ un $X \subseteq \mathbb{R}$, mazliet vēlāk — **daudzargumentu funkcijas**, t.i., $f : X \to \mathbb{R}$, kur $X \neq \emptyset$ un $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Ar funkcijām, kuras pieņem skaitliskas vērtības, var veikt dažādas aritmētiskas operācijas. Ja dotas divas reālvērtīgas funkcijas f un g, kuras definētas vienā un tajā pašā kopā X, tad $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, arī $\frac{f}{g}$, cf ($c \in \mathbb{R}$ — konstante) ir reālvērtīgas funkcijas, kur, piemēram, $\forall x \in X$ $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, ja vien $g(x) \neq 0$.

Funkciju klasifikācija

Pamatelementārās funkcijas ir:

1. konstantes funkcijas $y = C$, $C \in \mathbb{R}$,
2. pakāpes funkcijas $y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$,
3. eksponentfunkcijas $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$,
4. logaritmiskās funkcijas $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$,
5. trigonometriskās funkcijas $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg} x$, $y = \mathrm{ctg} x$,
6. inversās trigonometriskās funkcijas (ciklometriskās) $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg} x$, $y = \mathrm{arcctg} x$.

2.16. DEFINĪCIJA. Funkcijas, kuras iegūstamas no pamatelementārām funkcijām ar kompozīcijas, saskaitīšanas, atņemšanas, reizināšanas, kā arī dalīšanas palīdzību (tās izmantojot tikai galīgu skaitu reižu) sauc par **elementārām** funkcijām.

Piemēram, elementāras funkcijas ir $y = \log_3(4x+5)$, $y = \frac{\sin x + 8\cos x}{3x^2+6(x-1)\mathrm{tg}5x}$, $y = 128^{(2x-\arcsin x)}$ u.c.

Ja funkcija izveidota, izpildot ar tās argumentu algebriskas darbības (saskaitīšana, atņemšana, reizināšana, dalīšana, kāpināšana racionāla skaitļa pakāpē) galīgā skaitā, tad tādu funkciju sauc par **algebrisku** funkciju. Funkcijas, kas nav algebriskas, sauc par **transcendentām** funkcijām. Piemēram, visas trigonometriskās un to inversās funkcijas ir transcendentas funkcijas, kā arī logaritmiskās, eksponentfunkcijas un pakāpes funkcijas ar iracionāliem kāpinātājiem.

Algebriskās funkcijas iedalāmas polinomos, racionālās funkcijās un iracionālās funkcijās.

Funkciju

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

kur a_n, $a_{n-1}, ...$, a_1, $a_0 \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, sauc par **polinomu.**

Par **racionālu** funkciju sauc divu polinomu dalījumu, t.i., $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kur $P(x)$ un $Q(x)$ ir polinomi.

Par **iracionālu** funkciju sauc tādu funkciju, kura nav racionāla funkcija un kura satur galīgā skaitā kompozīcijas no racionālām funkcjām, pakāpes funkcijām ar racionāliem kāpinātājiem un aritmētiskām darbībām. Piemēram, iracionāla funkcija ir $y = \dfrac{x - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^{\frac{2}{3}} + 1}}$.

Iepazīstoties ar reālo pasauli, mēs sastopamies ar raksturojošiem lielumiem, kuri mainās [illegible] atkarībā no gada laika [illegible] funkcijas jēdziens ir viens no [illegible].

[illegible] reālvērtīgās funkcijas, t.i., $f : X \to \mathbb{R}$ [illegible] vienā un tajā pašā kopā X, tad [illegible] konstante) ir reālvērtīgas funkcijas, [illegible] $\forall x \in X$ $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, ja vien $g(x) \neq 0$.

Funkciju klasifikācija

Pamatelementārās funkcijas ir:

1. konstantes funkcijas $y = C$, $C \in \mathbb{R}$,
2. pakāpes funkcijas $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$,
3. eksponentfunkcijas $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$,
4. logaritmiskās funkcijas $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$,
5. trigonometriskās funkcijas $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$,
6. inversās trigonometriskās funkcijas (ciklometriskās) $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

2.10. DEFINĪCIJA. Funkcijas, kuras iegūstamas no pamatelementārām funkcijām ar kompozīcijas, saskaitīšanas, atņemšanas, reizināšanas, kā arī dalīšanas palīdzību (tās izmantojot tikai galīgu skaitu reižu) sauc par **elementārām funkcijām**.

Piemēram, elementāras funkcijas ir $y = \log_3(8x+5)$, $y = \frac{[illegible]}{x^2+4(x-1)\lg x^2}$, $y = 12^{[illegible]}$ u.c.

Ja funkcija ir noteikta, izpildot ar tās argumentu algebriskas darbības (saskaitīšana, atņemšana, reizināšana, dalīšana, kāpināšana racionāla skaitļa pakāpē) galīgu skaitu, tad šādu funkciju sauc par algebrisku funkciju. Funkcijas, kas nav algebriskas, sauc par transcendentām funkcijām. Piemēram, visas trigonometriskās un to inversās funkcijas ir transcendentas funkcijas, kā arī logaritmiskās, eksponentfunkcijas un pakāpes funkcijas ar iracionāliem kāpinātājiem.

Algebriskās funkcijas iedalās polinomos, racionālās funkcijās un iracionālās funkcijās.

3. nodaļa

ROBEŽAS

Mūsu tuvākais mērķis ir noskaidrot, kā varētu aprakstīt kāda procesa tiekšanos uz savu robežstāvokli. Mēs vēlamies uzsvērt, ka robežas jēdziens nav nekas cits, kā mainīga procesa modelis, ko mēs raksturojam ar vārdiem "tiekšanās", "stabilizācija", "robežpāreja" vai "robeža". Ja jums termins "robeža" asociējas ar kaut ko citu, nevis mūsu piedāvāto aprakstu, tad tas nebūt nenozīmē, ka jūsu priekšstats par robežu ir aplams. Tas tikai nesakrīt ar šeit formulēto un matemātikā lietoto robežas jēdzienu. Ja matemātiķi, balstoties uz dabaspētnieku prasībām, būtu izdomājuši kaut ko intuitīvi vieglāk uztveramu par esošo robežas jēdzienu, tad viņi nešaubīgi atmestu šobrīd tik vispārpieņemtos smagnējos formulējumus par labu metodoloģiski un praktiski ērtākiem.

Lietojums gan tehnikā, gan citās eksaktās zinātnēs (mūsdienās arī sociālās zinātnēs) ir izšķirošs arguments, kāpēc studentiem māca tik sarežģītu matemātikas nozari, kā robežteoriju.

Intuitīva robežas izpratne

Apskatīsim funkciju $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$. Ievērosim, ka tā nav definēta punktā 2 (reālo skaitļu kopas $\mathbb{R}$ elementus mēdz saukt arī par **punktiem**). Tomēr mēs varam jautāt:

— Kā mainīsies funkcijas $f(x)$ vērtības, ja argumenta x vērtības tuvosies punktam 2 ?

Šāds jautājums netiešā veidā norāda, ka funkciju $f(x)$ mēs aplūkojam dinamiskā attīstībā.

x	$f(x)$
2,2	13,24
2,1	12,61
2,01	12,0601
2,001	12,006001
2,0001	12,00060001
$\downarrow$	$\downarrow$
2	?
$\uparrow$	$\uparrow$
1,9999	11,99940001
1,999	11,994001
1,99	11,9401
1,9	11,41
1,8	10,84

Neviļus rodas sajūta: ja x tiecas uz 2, tad funkcijas $f(x)$ vērtības tiecas uz 12. Matemātiķi šajā situācijā lieto pierakstu

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = 12\,.$$

Viss demonstrētais gan nav nekas cits, kā tikai ilustrācija, tomēr zināmā mērā tā raksturo funkcijas $f(x)$ izturēšanos.

Intuitīva robežas definīcija

Teiksim, ka funkcijas $f(x)$ robeža ir skaitlis a argumentam x tiecoties uz x_0, ja visām mainīgā x vērtībām, kas atrodas tuvu punktam x_0, funkcijas $f(x)$ vērtības ir tuvu punktam a. Piedevām šajā nostādnē parasti prasa, lai $x \neq x_0$. Līdz ar to nav būtiski, vai funkcija $f(x)$ ir definēta vai nav definēta punktā x_0.

Vārds "tuvu" intuitīvi ir ērti uztverams, tomēr tam piemīt viens būtisks trūkums, proti, nav īsti skaidrs, kādās situācijās lietojams šis termins "tuvu". Tā, piemēram, mikropasaulē 3 mm var izrādīties ļoti liels attālums, bet astronomijā — arī 3 km ir tuvu, faktiski vērā neņemams lielums. Matemātiķi no šīs ķēpas tomēr kaut kā ir izķepurojušies.

Lai rosinātu iztēli, pievērsīsimies kāda objekta ω kustībai kosmiskajā starpzvaigžņu telpā. Iedomāsimies, ka šis objets ω atrodas pietiekami tālu no Zemes, un tāpēc tā novērošana ir apgrūtināta. Mēs tikai ar zināmu precizitāti varam noteikt tā atrašanās vietu.

Ja ilggadēju novērojumu rezultātā mēs esam nonākuši pie secinājuma, ka objekts ω ir nokļuvis zvaigznes α gūstā un tā šo ojektu ω aizvien vairāk pievelk (pievelk tik spēcīgi, ka beigu beigās tas nokritīs uz zvaigznes α), tad laika gaitā attālums starp ω un α kļūst aizvien mazāks.

Ko tad nozīmē "attālums kļūst aizvien mazāks"?

Citiem vārdiem sakot, ja mēs nofiksēsim kādu zvaigznes α apkārtni, tad pienāks tāds laika moments, pēc kura objekts ω no šīs apkārtnes vairs neizies.

Taču — paies daži gadsimti, mūsu novērojumu precizitāte kļūs lielāka, un mēs spēsim fiksēt daudz tuvāku zvaigznes α apkārtni. Ja nu izrādīsies, ka pienācis arī tāds laika moments, pēc kura objekts ω no šīs jaunās apkārtnes vairs neizkļūs, tad mums radīsies daudz lielāka pārliecība, ka ω tiešām nonācis zvaigznes α gūstā un tā šo objektu ω pievelk aizvien vairāk.

Tātad — lai cik arī mazu apkārtni ap zvaigzni α mēs nefiksētu, vienmēr jāpienāk tādam momentam, pēc kura ω vairs no šīs apkārtnes neiziet.

Intervāli un apkārtnes

Kā tad mēs varētu nonākt pie jēdziena "funkcijas robeža"?

Vispirms jāsāk ar matemātikā vispārpieņemtām definīcijām.

Pieņemsim, ka $a < b$, tad kopas

$$
\begin{array}{ll}
]-\infty; a[= \{x \mid x \in \mathbb{R} \,\&\, x < a\}, &]-\infty; a] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \,\&\, x \leq a\}; \\
]a; b[= \{x \mid x \in \mathbb{R} \,\&\, a < x < b\}, & [a; b[= \{x \mid x \in \mathbb{R} \,\&\, a \leq x < b\}, \\
]a; b] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \,\&\, a < x \leq b\}, & [a; b] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \,\&\, a \leq x \leq b\}; \\
[b; +\infty[= \{x \mid x \in \mathbb{R} \,\&\, b \leq x\}, &]b; +\infty[= \{x \mid x \in \mathbb{R} \,\&\, b < x\}
\end{array}
$$

sauc par **intervāliem**, turklāt kopas $]-\infty; a[$, $]a; b[$, $]b; +\infty[$ sauc par **vaļējiem intervāliem**, bet kopu $[a; b]$ — par **slēgtu intervālu**. Ievērosim, ka šajos apzīmējmos $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$.

3.1. DEFINĪCIJA. Kopu

$$\mathfrak{U}(x_0, \delta) =]\, x_0 - \delta; x_0 + \delta\, [$$

sauc par **punkta x_0 delta apkārtni.** Savukārt kopu

$$\overset{\circ}{\mathfrak{U}}(x_0, \delta) =]\, x_0 - \delta; x_0 + \delta\, [\setminus \{x_0\}$$

sauc par **punkta x_0 caurdurtu delta apkārtni.**

Precīza robežas definīcija

3.2. DEFINĪCIJA. Skaitli a sauc par **funkcijas $f(x)$ robežu, kad x tiecas uz x_0 pa kopu X**, ja katram pozitīvam skaitlim ε eksistē tāds pozitīvs skaitlis δ, ka visiem kopas X elementiem no funkcijas f definīcijas apgabala izpildās nosacījums:

$$\text{ja} \quad x \in \overset{\circ}{\mathfrak{U}}(x_0, \delta), \quad \text{tad} \quad f(x) \in \mathfrak{U}(a, \varepsilon).$$

Šajā situācijā lieto pierakstu $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = a$.

Simboliski to visu var noformēt šādi: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = a \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in X \cap Dom(f)\ [\, x \in \mathfrak{U}(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in \mathfrak{U}(a, \varepsilon)\,].$$

Atzīmēsim, ka robežas definīcija ir saturīga tikai tad, ja

$$\forall\delta > 0\ [X \cap Dom(f) \cap \mathfrak{U}(x_0, \delta) \neq \emptyset].$$

Ja kopa $X =]-\infty; x_0[$, tad lieto pierakstu $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = a$;

ja kopa $X =]\, x_0; +\infty\,[$, tad lieto pierakstu $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a$;

ja kopa $X = Dom(f)$, tad lieto pierakstu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$.

Pirmajā gadījumā saka, ka a ir funkcijas $f(x)$ robeža punktā x_0 **no kreisās puses**, otrajā — **no labās puses**. Tās sauc par **vienpusējām robežām**. Trešais gadījums ir viens no svarīgākajiem, tāpēc robežas definīciju formulēsim šai situācijai speciāli.

Skaitli a sauc par **funkcijas** $f(x)$ **robežu, kad** x **tiecas uz** x_0, ja katram pozitīvam skaitlim ε eksistē tāds pozitīvs skaitlis δ, ka visiem funkcijas f definīcijas apgabala elementiem x izpildās nosacījums:

$$\text{ja} \quad x \in \mathfrak{U}(x_0, \delta), \quad \text{tad} \quad f(x) \in \mathfrak{U}(a, \varepsilon).$$

Simboliski tas izskatās šādi: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in Dom(f)\ [\, x \in \mathfrak{U}(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in \mathfrak{U}(a, \varepsilon)\,].$$

Apkārtņu vietā var lietot arī nevienādības, tad robežas definīciju pieraksta šādi: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in Dom(f)\ [\, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon\,].$$

Visbeidzot pievērsīsim uzmanību faktam, ka literatūrā tomēr nav pilnīgas vienprātības robežas definīcijas formulējumā. Mēdz lietot arī šādu definīciju (mēs aprobežosimies ar simbolisko pierakstu):

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = a \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

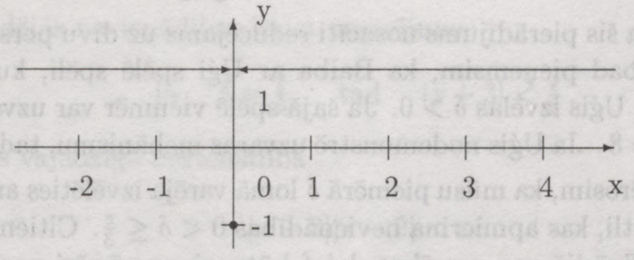
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in X \cap Dom(f)\ [\, x \in \overset{\circ}{\mathfrak{U}}(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in \mathfrak{U}(a, \varepsilon)\,]$$

jeb nevienādību formā: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = a \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in X \cap Dom(f)\ [\, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon\,].$$

Šī nianse attiecas uz vēlmi punktu x_0 izslēgt no aplūkojamo elementu saraksta. Tā rezultātā funkcijai

$$y = \begin{cases} 1 \ , & \text{ja} \quad x \neq 0; \\ -1 \ , & \text{ja} \quad x = 0; \end{cases} \qquad [\text{sk. 3.1. zīm.}]$$



3.1. zīm.

punktā 0 robeža eksistē, kaut arī tā nesakrīt ar pašu funkcijas y vērtību šai punktā.

Kā jau ievadā teicām, ja matemātiķi būtu atraduši mazāk samudžinātu robežas definīciju, kas apmierinātu arī citu nozaru prasības, viņi nešaubīgi pārietu uz šo ērtāko definīciju. Vēl līdz šim tas matemātiķiem nav izdevies, tāpēc lietojam šo te vācu matemātiķa Karla Teodora Vilhelma Veierštrāsa ieteikto definīciju. Šīs definīcijas galvenā priekšrocība ir tās lietojums matemātiski precīzos un korektos pierādījumos. Vairs nerodas domstarpības un pārpratumi, tomēr pati definīcija lielam vairumam nespeciālistu nebūt neliekas dabiska.

3.3. Piemērs. $\lim\limits_{x\to 2}(3x+2) = 8$.

Ievietojot izteiksmē $3x+2$ mainīgā x vietā 2, iegūsim skaitli 8. Taču šobrīd mūsu rīcībā nav nekāda pamatojuma, lai varētu apgalvot, ka šādā veidā nosakāma robeža $\lim\limits_{x\to 2}(3x+2)$. Tā ir tikai hipotēze, kas jāpierāda ar robežas definīcijas palīdzību, t.i., jāparāda, ka

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \ [\,|x-2| < \delta \Rightarrow |3x+2-8| < \varepsilon\,].$$

Pierādījuma gaitā pēdējo nevienādību pakāpeniski aizstāsim ar ekvivalentām nevienādībām.

$$|3x+2-8| < \varepsilon\,, \qquad |3x-6| < \varepsilon\,,$$

$$3\,|x-2| < \varepsilon\,, \qquad |x-2| < \tfrac{\varepsilon}{3}\,.$$

No šīm savstarpēji ekvivalentajām nevienādībām izriet:

$$\text{ja} \quad \delta = \tfrac{\varepsilon}{3}, \quad \text{tad} \quad |3x + 2 - 8| < \varepsilon\,.$$

Tāpēc δ lomā var izraudzīties tieši $\frac{\varepsilon}{3}$. Līdz ar to pierādīts, ka jebkuram $\varepsilon > 0$ var izraudzīties $\delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{3}$ tā, lai būtu spēkā nosacījums:

$$[\,|x - 2| < \delta \Rightarrow |3x + 2 - 8| < \varepsilon\,].$$

Tas saskaņā ar robežas definīciju arī nozīmē, ka $\lim\limits_{x\to 2}(3x + 2) = 8\,.$ ■

Atzīmēsim, ka šis pierādījums nosacīti reducējams uz divu personu spēli. Uzskatāmības labad pieņemsim, ka Baiba ar Uģi spēlē spēli, kurā Baiba izvēlas $\varepsilon > 0$, bet Uģis izvēlas $\delta > 0$. Ja šajā spēlē vienmēr var uzvarēt Uģis, tad $\lim\limits_{x\to 2}(3x+2) = 8$. Ja Uģis nodemonstrē uzvaras mehānismu, tad tas jau ir pierādījums. Ievērosim, ka mūsu piemērā δ lomā varēja izvēlēties arī jebkuru citu pozitīvu skaitli, kas apmierina nevienādības $0 < \delta \le \frac{\varepsilon}{3}$. Citiem vārdiem sakot robežas definīcijā nav prasības, lai δ būtu viennozīmīgi nosakāms kā ε funkcija.

3.4. Piemērs. $\lim\limits_{x\to -3}(x^2 + x) = 6\,.$
Tagad jau mums ir zināma pieredze, tomēr sākumā vienmēr ir lietderīgi uzrakstīt robežas definīciju konkrētajam gadījumam:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x\ [\,|x + 3| < \delta \Rightarrow |x^2 + x - 6| < \varepsilon\,].$$

Sākam pārveidot nevienādību $|x^2 + x - 6| < \varepsilon$. Atšķirībā no iepriekšējā piemēra nav redzams, ko darīt tālāk. Tomēr, ja atceramies Vjeta teorēmu, tad iegūstam vienādību $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$. Tā rezultātā

$$|x^2 + x - 6| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; |x + 3||x - 2| < \varepsilon\,.$$

Esam ieguvuši reizinātāju $|x + 3|$, tomēr $|x - 2|$ vēl joprojām "maisās pa kājām". Tagad vērts vēlreiz pievērsties implikācijai

$$|x + 3| < \delta \Rightarrow |x^2 + x - 6| < \varepsilon\,.$$

Mums taču interesē secināšana nevis ekvivalence, bez tam δ izvēlē mēs esam ierobežoti tikai ar vienu nosacījumu, proti, $\delta > 0$. Tas norāda, ka δ lomā var derēt arī 1. Var derēt gan vēl nenozīmē "der", tomēr izmēģināt var.

Kas notiks, ja $\delta = 1$? Tad

$$|x + 3| < \delta\,, \quad |x + 3| < 1\,,$$

tāpēc

$$|\,x - 2\,| = |\,x + 3 - 3 - 2\,| \le |\,x + 3\,| + 5 < 6\,.$$

Tātad esam parādījuši:

$$|x+3| < 1 \Rightarrow |x-2| < 6\,.$$

Tas uzvedina mūs aplūkot nevienādību

$$|x+3|\,6 < \varepsilon\,.$$

No pēdējās nevienādības izriet nosacījums:

$$\text{ja} \quad \delta = \tfrac{\varepsilon}{6}, \quad \text{tad} \quad |x+3| < \tfrac{\varepsilon}{6}\,.$$

Bet mums vajadzīga nevienādība

$$|x+3||x-2| < \varepsilon\,.$$

Tagad pienācis izšķirošais moments. Ja $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{6}, 1\}$ (tas nozīmē, ka $\delta \le \frac{\varepsilon}{6}$ un arī $\delta \le 1$), tad

1) $|x+3| < 1$, un tāpēc $|x-2| < 6$;
2) $|x+3| < \frac{\varepsilon}{6}$, un tāpēc $|x+3|\,6 < \varepsilon$.

Līdz ar to mūsu rīcībā ir divas nevienādības:

$$|x+3|\,6 < \varepsilon \quad \text{un} \quad |x-2| < 6\,.$$

No šīm abām nevienādībām izriet, ka

$$|x^2+x-6| = |x+3||x-2| < |x+3|\,6 < \frac{\varepsilon}{6}\,6 = \varepsilon\,.$$

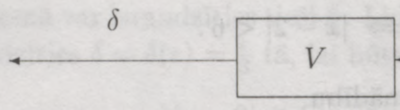
Tātad:

$$|x+3| < \delta = \min\{\tfrac{\varepsilon}{6}, 1\} \Rightarrow |x^2+x-6| < \varepsilon\,.$$

Tas saskaņā ar robežas definīciju arī nozīmē, ka $\lim\limits_{x \to -3} (x^2+x) = 6\,.$ ∎

Visu pierādījumu var sadalīt divās daļās, kā to mēdz darīt ģeometrisku figūru konstrukcijas uzdevumos. Pirmā daļa — tā ir analīze līdz mēs atrodam, kāds δ varētu būt derīgs. Otrā daļa — pierādījums, kas demonstrē, ka izvēlētais δ atbilst visām robežas definīcijas prasībām. Parasti jau no analīzes ir skaidra pierādījuma shēma, tāpēc lielākoties aprobežojas ar analīzi.

Tas, ko mēs darījām, interpretējams arī citādi. Mēs "būvējām iekārtu V" [sk. 3.2. zīm.], kas darbojas šādi. Ja šīs iekārtas ievadā padod kādu



3.2. zīm.

$\varepsilon > 0$, tad iekārtas izejā parādās $\delta > 0$, piedevām:

$$|x+3| < \delta \Rightarrow |x^2+x-6| < \varepsilon.$$

Mūsu gadījumā iekārta V darbojas sekojoši:
(i) aprēķina skaitli $\frac{\varepsilon}{6}$;
(ii) atrod $\min\{\frac{\varepsilon}{6}, 1\}$;
(iii) skaitli $\min\{\frac{\varepsilon}{6}, 1\}$ izvēlas par δ .

Neskatoties uz to, ka mums izdevās uzminēt robežu, tai sekojošā analīze un pierādījums jāvērtē kā nogurdinoša, gara un komplicēta procedūra. Šī iemesla dēļ arī attīsta robežteoriju. Tās pirmais uzdevums ir izanalizēt praksē biežāk sastopamos gadījumus, tā atvieglojot izpratni par šo visumā sarežģīto koncepciju. Tas ir tāpat kā ar lāpstu var rakt zemi, tomēr lielus kanālus izdevīgāk rakt ar ekskavatoriem.

Robežas unitāte

3.5. DEFINĪCIJA. Punktu x_0 sauc par kopas $X \subseteq \mathbb{R}$ **pieskaršanās punktu**, ja $\forall \varepsilon > 0 \;\; \mathfrak{U}(x_0, \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$.

Kā jau iepriekš netieši minējām, robežteorija kļūst saturīga tikai tajos gadījumos, ja mainīgais x tiecas uz kopas X pieskaršanās punktu x_0. Šī iemesla dēļ turpmāk uzskatīsim (ja speciāli tas netiks atrunāts), ka x_0 ir kopas $X \cap Dom(f)$ pieskaršanās punkts.

3.6. TEORĒMA (robežas unitātes teorēma). Eksistē ne vairāk kā viena funkcijas $f(x)$ robeža x-am tiecoties uz x_0.

□ Pieņemsim pretējo, proti, ka

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = a \neq b = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x).$$

Konkrētības labad uzskatīsim, ka $a < b$, un ņemsim $\varepsilon = \frac{b-a}{2} > 0$. Saskaņā ar robežas definīciju šai ε vērtībai atbilst tāds $\delta > 0$, ka visiem $x \in X \cap Dom(f)$ izpildās nosacījums:

$$|\,x - x_0\,| < \delta \Rightarrow |\,f(x) - a\,| < \varepsilon \,\&\, |\,f(x) - b\,| < \varepsilon\,.$$

No šejienes $f(x) - a < \varepsilon$, $b - f(x) < \varepsilon$. Pēc šo nevienādību saskaitīšanas $b - a < 2\varepsilon = b - a$. Pretruna! ■

Robežas unitātes teorēmas lietojums parasti saistās ar iespējām atsevišķos gadījumos pierādīt, ka funkcijai $f(x)$ robeža $x \to x_0$ nemaz neeksistē. Un visbeidzot, ja divas reizes, rēķinot funkcijas $f(x)$ robežu $x \to x_0$, katru reizi iegūts cits rezultāts, esat drošs, vismaz reizi kļūdījāties.

3.7. TEORĒMA. Ja $X \subseteq Y$ un $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in Y}} f(x) = a$, tad $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) = a$.

□ Brīvi izvēlēsimies $\varepsilon > 0$, tad saskaņā ar doto atrodams tāds $\delta > 0$, ka $\forall x \in Y \cap Dom(f)$ izpildās nosacījums:

$$|\,x - x_0\,| < \delta \Rightarrow |\,f(x) - a\,| < \varepsilon\,.$$

Ja reiz tā, tad arī $\forall x \in X \cap Dom(f)$ izpildās nosacījums:

$$|\,x - x_0\,| < \delta \Rightarrow |\,f(x) - a\,| < \varepsilon\,,$$

kas arī nozīmē, ka $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) = a$. ■

3.8. Piemērs. Pieņemsim, ka kopā X definēta funkcija $f(x) = c \in \mathbb{R}$, tad $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) = c$.

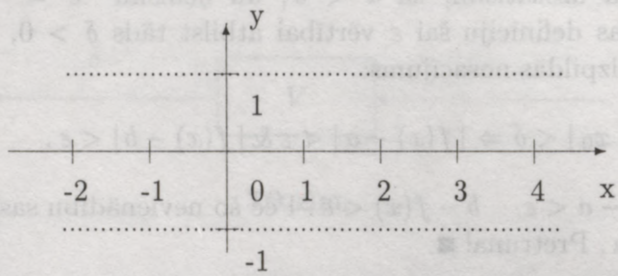
Dotais piemērs ir netipisks, jo pierādījuma gaitā varam neinteresēties par $\varepsilon > 0$.

$$|\,f(x) - c\,| = |\,c - c\,| = 0\,,$$

un tas ir mazāks par jebkuru pozitīvu ε. Turklāt šī vienādība ir spēkā neatkarīgi no tā, cik "tālu" x_0 atrodas no $x \in X$, tāpēc δ lomā var ņemt jebkuru pozitīvu skaitli. ■

3.9. Piemērs. Apskatīsim Dirihlē funkciju [sk. 3.3. zīm.]:

$$D(x) = \begin{cases} -1\,, & \text{ja } x \in \mathbb{Q};\\ \;\;1\,, & \text{ja } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$



3.3. zīm. Dirihlē funkcija.

Saskaņā ar iepriekš demonstrēto piemēru

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathbb{Q}}} D(x) = -1\,, \quad \text{bet} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x\notin\mathbb{Q}}} D(x) = 1\,.$$

Punkts 0 ir gan kopas $\mathbb{Q}$ pieskaršanās punkts, gan arī kopas $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ pieskaršanās punkts, tāpēc varam balstīties uz 3.7. teorēmu. Tā dod tiesības mums apalvot: ja vispār eksistē $\lim\limits_{x\to 0} D(x)$, tad

$$\lim_{x\to 0} D(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathbb{Q}}} D(x) = -1\,.$$

Tāpat šī teorēma dod iespēju apgalvot: ja vispār eksistē $\lim\limits_{x\to 0} D(x)$, tad

$$\lim_{x\to 0} D(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\notin\mathbb{Q}}} D(x) = 1\,.$$

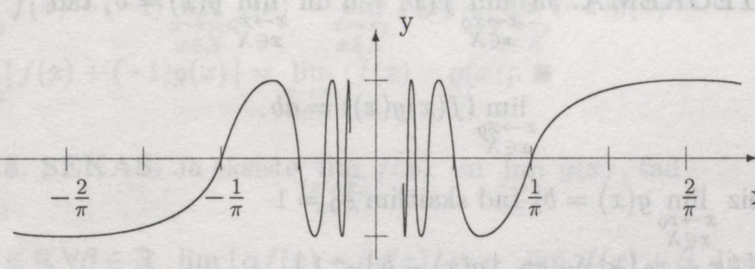
Savukārt robežas unitātes teorēma spiež mums secināt: ja reiz

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathbb{Q}}} D(x) = -1 \neq 1 = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\notin\mathbb{Q}}} D(x)\,,$$

tad robeža $\lim\limits_{x\to 0} D(x)$ vispār neeksistē. ■

Lūk, arī mēs nodemonstrējām, kā robežas unitātes teorēma var kalpot tīri praktiskiem mērķiem!

3.10. Piemērs. $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ neeksistē [sk. 3.4. zīm.].



3.4. zīm. $y = \sin\frac{1}{x}$.

Ņemsim vērā iepriekšējā piemērā gūto pieredzi. Izvēlēsimies kopas

$$X_1 = \left\{ \frac{2}{\pi + 4\pi k} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}_+ \right\} \quad \text{un} \quad X_2 = \left\{ \frac{2}{-\pi + 4\pi k} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}_+ \right\}.$$

$$\text{Funkcija} \quad \sin\tfrac{1}{x}|X_1 = 1\,, \quad \text{tāpēc} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x\in X_1}} \sin\tfrac{1}{x} = 1\,.$$

$$\text{Funkcija} \quad \sin\tfrac{1}{x}|X_2 = -1\,, \quad \text{tāpēc} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x\in X_2}} \sin\tfrac{1}{x} = -1\,.$$

Līdz ar to $x \to 0$ funkcijai $\sin\frac{1}{x}$ robeža neeksistē. ■

Aritmētiskās darbības ar robežām

3.11. TEORĒMA. Ja $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) = a$ un $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} g(x) = b$, tad

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} (f(x) + g(x)) = a + b\,.$$

□ Brīvi izvēlētam $\varepsilon > 0$ skaitlis $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, tāpēc saskaņā ar robežas definīciju

$$\exists\,\delta_1 > 0 \quad [\,|\,x - x_0\,| < \delta_1 \Rightarrow |\,f(x) - a\,| < \tfrac{\varepsilon}{2}\,],$$
$$\exists\,\delta_2 > 0 \quad [\,|\,x - x_0\,| < \delta_2 \Rightarrow |\,g(x) - b\,| < \tfrac{\varepsilon}{2}\,].$$

No šejienes, ja $|\,x - x_0\,| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, tad
$|\,[\,f(x) + g(x)\,] - [\,a + b\,]\,| = |\,[\,f(x) - a\,] + [\,g(x) - b\,]\,| \le$
$\le |\,f(x) - a\,| + |\,g(x) - b\,| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$ ■

3.12. TEORĒMA. Ja $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\in X}} f(x)=a$ un $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\in X}} g(x)=b$, tad

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\x\in X}} (f(x)g(x))=ab\,.$$

□ (i) Ja reiz $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\in X}} g(x)=b$, tad skaitlim $\varepsilon_0=1$

$\exists\,\delta_1>0\quad[\,|\,x-x_0\,|<\delta_1\;\Rightarrow\;|\,g(x)-b\,|<1\,]$.
No šejienes $|\,g(x)\,|=|\,g(x)-b+b|\le|\,g(x)-b|+|\,b|<1+|\,b\,|$.
(ii) Brīvi izraudzītam $\varepsilon>0$ skaitlis $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{|\,a\,|+|\,b\,|+1}>0$. Saskaņā ar doto

$$\exists\,\delta_2>0\quad[\,|\,x-x_0\,|<\delta_2\;\Rightarrow\;|\,g(x)-b\,|<\varepsilon_1\,]\quad\text{un}$$
$$\exists\,\delta_3>0\quad[\,|\,x-x_0\,|<\delta_3\;\Rightarrow\;|\,f(x)-a\,|<\varepsilon_1\,]\,.$$

(iii) Ja $|\,x-x_0\,|<\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$, tad

$$\begin{aligned}&|\,f(x)g(x)-ab\,|=|\,f(x)g(x)-ag(x)+ag(x)-ab\,|\le\\&\le|\,f(x)g(x)-ag(x)\,|+|\,ag(x)-ab\,|=\\&=|\,g(x)\,|\,|\,f(x)-a\,|+|\,a\,|\,|\,g(x)-b\,|<\\&<(\,1+|\,b\,|\,)\varepsilon_1+|\,a\,|\,\varepsilon_1=(\,1+|\,a\,|+|\,b\,|\,)\varepsilon_1=\varepsilon\,.\ \blacksquare\end{aligned}$$

3.13. SEKAS. Ja eksistē $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\in X}} f(x)$, tad

$$\forall\alpha\in\mathbb{R}\ \lim_{\substack{x\to x_0\\x\in X}}[\,\alpha f(x)\,]=\alpha\lim_{\substack{x\to x_0\\x\in X}} f(x)\,.$$

□ Vienādība $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\in X}}\alpha=\alpha$ nav nekas cits kā 3.8. piemērs. Savukārt vienādību $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\in X}}\alpha\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\in X}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\in X}}[\alpha\, f(x)]$ pamato 3.12. teorēma.
Tā rezultātā $\alpha\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\in X}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\in X}}\alpha\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\in X}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\in X}}[\,\alpha f(x)\,]\,.\ \blacksquare$

3.14. SEKAS. Ja eksistē $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\in X}} f(x)$ un $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\in X}} g(x)$, tad

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\x\in X}}(f(x)-g(x))=\lim_{\substack{x\to x_0\\x\in X}} f(x)-\lim_{\substack{x\to x_0\\x\in X}} g(x)\,.$$

□ Vienādība $(-1)\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\in X}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\in X}}(-1)g(x)$ nav nekas cits kā 3.13. sekas.

Savukārt vienādību $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\in X}} f(x)+\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\in X}}(-1)g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\in X}}[\,f(x)+(-1)g(x)]$ pamato 3.11. teorēma. Tā rezultātā $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\in X}} f(x)-\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\in X}} g(x)=$

$$= \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) + (-1)\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} g(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) + \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} (-1)g(x) =$$

$$= \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} [\, f(x) + (-1)g(x)\,] = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} (f(x) - g(x)). \ \blacksquare$$

3.15. SEKAS. Ja eksistē $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x)$ un $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} g(x)$, tad

$$\forall\alpha\in\mathbb{R}\ \forall\beta\in\mathbb{R}\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} [\,\alpha f(x) + \beta g(x)\,] = \alpha \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) + \beta \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x).$$

□ Ņemt vērā 3.14. seku pierādījuma shēmu. ■

3.16. TEORĒMA. Ja $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) = a \neq 0$, tad $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a}$.

□ (i) Tā kā $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) = a \neq 0$, tad skaitlim $\varepsilon_0 = \frac{|a|}{2}$

$\exists\,\delta_1 > 0 \quad [\,|\,x - x_0\,| < \delta_1 \Rightarrow |\,f(x) - a\,| < \frac{|a|}{2}\,]$. No šejienes

$|\,f(x)\,| = |\,a + f(x) - a\,| \geq ||\,a\,| - |\,f(x) - a\,|| > ||\,a\,| - \frac{|a|}{2}| = \frac{|a|}{2}$.

(ii) Brīvi izraudzītam $\varepsilon > 0$ skaitlis $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon\,|\,a\,|^2}{2} > 0$. Saskaņā ar doto

$$\exists\,\delta_2 > 0 \quad [\,|\,x - x_0\,| < \delta_2 \Rightarrow |\,f(x) - a\,| < \varepsilon_1\,].$$

(iii) Ja $|\,x - x_0\,| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, tad

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a - f(x)}{a f(x)}\right| = \frac{|f(x) - a|}{|\,a\,|\,|f(x)|} \leq \frac{2\,\varepsilon_1}{|\,a\,|^2} = \varepsilon.\ \blacksquare$$

3.17. SEKAS. Ja $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) = a$ un $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} g(x) = b \neq 0$, tad

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}.$$

□ Vienādība $\frac{1}{b} = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} \frac{1}{g(x)}$ nav nekas cits kā 3.16. teorēma. Savukārt vienādību $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} \frac{1}{g(x)} \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} \frac{1}{g(x)} f(x)$ pamato 3.12. teorēma. Tā rezultātā $\frac{a}{b} = \frac{1}{b}a = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} \frac{1}{g(x)} \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} \frac{1}{g(x)} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} \frac{f(x)}{g(x)}$. ■

Robežpāreja nevienādībās

3.18. TEORĒMA. Ja kādā punkta x_0 apkārtnē

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \text{un} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = a = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} h(x),$$

$$\text{tad} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} g(x) = a.$$

□ Ja reiz $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = a = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} h(x)$, tad jebkuram brīvi izraudzītam $\varepsilon > 0$ var atrast tādus pozitīvus δ_1, δ_2, ka izpildās sekojoši nosacījumi: $|\, x - x_0 \,| < \delta_1 \Rightarrow |\, f(x) - a \,| < \varepsilon$ un $|\, x - x_0 \,| < \delta_2 \Rightarrow |\, h(x) - a \,| < \varepsilon$. No šejienes $a - \varepsilon < f(x)$ un $h(x) < a + \varepsilon$.

Saskaņā ar doto atrodama tāda apkārtne $\mathfrak{U}(x_0, \delta_0)$, ka $\forall x \in \mathfrak{U}(x_0, \delta_0)\ f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Ja $|\, x - x_0 \,| < \delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$, tad $a - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < a + \varepsilon$, tāpēc $|\, g(x) - a \,| < \varepsilon$. ■

Piektajā nodaļā mēs pierādīsim, ka

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

balstoties uz tikko pamatoto teorēmu.

4. nodaļa

NEPĀRTRAUKTAS FUNKCIJAS

Pamatdefinīcijas

4.1. DEFINĪCIJA. Funkciju $f(x)$ sauc par **nepārtrauktu punktā** x_0, ja $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Funkciju $f(x)$ sauc par **nepārtrauktu kopā** X, ja funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta katrā kopas X punktā x_0.

Mūsu tuvākais mērķis iepazīstināt ar šīs definīcijas citiem ekvivalentiem formulējumiem. Funkciju $\Delta x = x - x_0$ sauc par **argumenta x pieaugumu punktā** x_0, savukārt $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ sauc par **funkcijas $f(x)$ pieaugumu punktā** x_0. Funkcijas Δy apzīmēšanai mēdz lietot arī pierakstu $\Delta f(x_0)$. Ievērosim, ka $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, t.i., $\Delta f(x_0)$ var uzlūkot arī kā argumenta Δx funkciju.

4.2. TEORĒMA. Funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta punktā x_0 tad un tikai tad, ja $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$.

$\square$ $\Rightarrow$ Ja reiz $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, tad brīvi izvēlētam $\varepsilon > 0$ var atrast tādu $\delta > 0$, ka izpildās nosacījums: $|x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. No šejienes: $|\Delta x| < \delta \Rightarrow |\Delta y| < \varepsilon$. Tātad $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$.
$\Leftarrow$ Tā kā $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$, tad brīvi izraudzītam $\varepsilon > 0$ atrodams tāds $\delta > 0$, ka izpildās nosacījums: $|\Delta x| < \delta \;\Rightarrow\; |\Delta y| < \varepsilon$. No šejienes: $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Līdz ar to $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. $\blacksquare$

4.3. DEFINĪCIJA. Funkciju $u(x)$ sauc par **bezgalīgi mazu funkciju** x–am tiecoties uz x_0, ja $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 0$.

Pēdējā teorēma parāda, ka $\Delta f(x_0)$ ir bezgalīgi maza funkcija lielumam

$\Delta x \to 0$. Šajā gadījumā mēdz teikt, ka bezgalīgi mazam argumenta pieaugumam Δx punktā x_0 atbilst bezgalīgi mazs funkcijas pieaugums $\Delta f(x_0)$.

4.4. TEORĒMA. Ja $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_1}} f(x) = a = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_2}} f(x)$, tad

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_1 \cup X_2}} f(x) = a.$$

□ Saskaņā ar doto brīvi izraudzītam $\varepsilon > 0$

$$\exists \delta_1 > 0 \; \forall x \in X_1 \cap Dom(f) \; [\, |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon \,],$$
$$\exists \delta_2 > 0 \; \forall x \in X_2 \cap Dom(f) \; [\, |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon \,].$$

No šejienes, ja $|x - x_0| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, tad

$$\forall x \in (X_1 \cup X_2) \cap Dom(f) \; |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Tātad $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_1 \cup X_2}} f(x) = a$. ■

4.5. DEFINĪCIJA. Funkciju $f(x)$ sauc par **nepārtrauktu punktā x_0 no kreisās puses**, ja $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$. Funkciju $f(x)$ sauc par **nepārtrauktu punktā x_0 no labās puses**, ja $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

4.6. TEORĒMA. Funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta punktā x_0 tad un tikai tad, ja tā šajā punktā ir nepārtraukta gan no labās, gan kreisās puses.

□ sk. 3.7. un 4.4. teorēmu. ■

No teorēmām par summas, starpības, reizinājuma un dalījuma robežām iegūstam šādu teorēmu.

4.7. TEORĒMA. Punktā x_0 nepārtrauktu funkciju summa, starpība, reizinājums un dalījums (ja daļas saucējs punktā x_0 nav nulle) ir punktā x_0 nepārtrauktas funkcijas.

4.8. Piemērs. Konstantai funkcijai $f(x) = c$ un jebkuram x_0 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$ (sk. 3.8. piemēru). Tas nozīmē, ka konstanta funkcija ir nepārtraukta visā reālo skaitļu kopā $\mathbb{R}$. ■

4.9. Piemērs. Funkcijai $g(x) = x$ un jebkuram $x_0 \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = x_0$.

Saskaņā ar robežas definīciju mums jāpierāda, ka

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \; [\, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon \,].$$

Mūsu gadījumā nosacījums

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$$

izskatās šādi:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |x - x_0| < \varepsilon .$$

No šejienes izriet, ka δ lomā var izvēlēties ε. Tas demonstrē, ka funkcija $g(x) = x$ ir nepārtraukta visā reālo skaitļu kopā $\mathbb{R}$. ■

Atgādināsim, ka jebkuru racionālu funkciju iegūst summējot, reizinot un dalot nepārtrauktas funkcijas $f(x) = c$ un $g(x) = x$. Tāpēc no 4.7. teorēmas izriet nākamā teorēma.

4.10. TEORĒMA. Racionāla funkcija ir nepārtraukta visos šīs funkcijas definīcijas apgabala punktos.

Tagad atgriezīsimies pie 3.3. un 3.4. piemēra. Ņemot vērā tikko formulēto teorēmu

$$\lim_{x \to 2}(3x + 2) = 3 \cdot 2 + 2 = 8$$

un

$$\lim_{x \to -3}(x^2 + x) = (-3)^2 - 3 = 6 .$$

Šie aprēķini [salīdziniet ar 3. nodaļā izklāstītajiem pierādījumiem] spilgti demonstrē, kādu intelektuālo spēku ekonomiju var sniegt teorija.

4.11. APGALVOJUMS. Ja $f|X = g|X$, $X \subseteq Y$ un

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in Y}} g(x) = a, \quad \text{tad} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = a.$$

□ Vienādība $a = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} g(x)$ nav nekas cits kā 3.7. teorēma. Savukārt kopā X funkcijas f un g sakrīt. Tas pamato vienādību

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} g(x) . \ ■$$

4.12. Piemērs. Aprēķināsim $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$.

Ievērosim, ka $\left.\dfrac{x^3 - 8}{x - 2}\right| \mathbb{R}\setminus\{2\} = x^2 + 2x + 4 \big| \mathbb{R}\setminus\{2\}$, tāpēc saskaņā ar 4.11. apgalvojumu un 4.10. teorēmu

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \to 2}(x^2 + 2x + 4) = 2^2 + 2 \cdot 2 + 4 = 12.$$

Tas pamato iepriekšējā nodaļā izvirzīto hipotēzi, ka $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}=12$. ∎

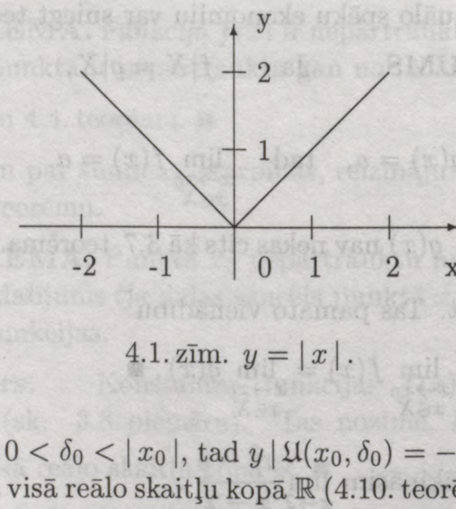
4.13. APGALVOJUMS. Ja $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x)=a$ un

$$\exists\delta_0>0\ [\,f\mid X\cap\mathfrak{U}(x_0,\delta_0)=g\mid X\cap\mathfrak{U}(x_0,\delta_0)\,],\quad \text{tad}\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} g(x)=a.$$

□ Pieņemsim, ka $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x)=a$, tad brīvi izvēlētam $\varepsilon>0$ eksistē tāds $\delta_1>0$, kam izpildās nosacījums: $|x-x_0|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon$. No šejienes: ja $|x-x_0|<\delta=\min\{\delta_0,\delta_1\}$, tad $|f(x)-a|<\varepsilon$, bet tā kā kopā $\mathfrak{U}(x_0,\delta_0)$ funkcijas $f(x)$ un $g(x)$ sakrīt, tad arī $|g(x)-a|<\varepsilon$. Līdz ar to: $|x-x_0|<\delta \Rightarrow |g(x)-a|<\varepsilon$, kas saskaņā ar robežas definīciju nozīmē, ka $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} g(x)=a$. ∎

4.14. SEKAS. Ja $\exists\delta_0>0\ f\mid\mathfrak{U}(x_0,\delta_0)=g\mid\mathfrak{U}(x_0,\delta_0)$ un funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta punktā x_0, tad arī funkcija $g(x)$ ir nepārtraukta punktā x_0.

4.15. Piemērs. Funkcija $y=|x|$ ir nepārtraukta visā reālo skaitļu kopā $\mathbb{R}$.



4.1. zīm. $y=|\,x\,|$.

Ja $x_0<0\,\&\,0<\delta_0<|\,x_0\,|$, tad $y\,|\,\mathfrak{U}(x_0,\delta_0)=-x$, un tā kā funkcija $-x$ ir nepārtraukta visā reālo skaitļu kopā $\mathbb{R}$ (4.10. teorēma), tad funkcija $y=|x|$ ir nepārtraukta punktā x_0 (4.14. sekas). Ja turpretī $x_0>0\,\&\,0<\delta_0<x_0$, tad $y\,|\,\mathfrak{U}(x_0,\delta_0)=x$, un tā kā funkcija x ir nepārtraukta visā reālo skaitļu kopā $\mathbb{R}$, tad funkcija $y=|x|$ ir nepārtraukta punktā x_0. Visbeidzot, ja $x_0=0$, tad $\lim\limits_{x\to 0^-}|\,x\,|=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=0=\lim\limits_{x\to 0^+}x=\lim\limits_{x\to 0^+}|\,x\,|$, tāpēc funkcija $y=|x|$ ir nepārtraukta punktā 0 (4.6. teorēma). ∎

4.16. TEORĒMA. Ja funkcija $g(y)$ ir nepārtraukta punktā y_0 un $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$, tad $\lim\limits_{x\to x_0} (g\circ f)(x) = g(\lim\limits_{x\to x_0} f(x))$.

□ Tā kā $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$, tad mums jāpierāda, ka $\lim\limits_{x\to x_0} (g\circ f)(x) = g(y_0)$. Funkcija $g(y)$ ir nepārtraukta punktā y_0, tāpēc brīvi izraudzītam $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $\eta > 0$, ka $|\,g(y) - g(y_0)\,| < \varepsilon$, ja tikai $|\,y - y_0\,| < \eta$. Ja reiz $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$, tad

$$\exists\delta > 0\ [\,|\,x - x_0\,| < \delta \ \Rightarrow\ |\,f(x) - y_0\,| < \eta\,],$$

tādēļ $|\,g(f(x)) - g(y_0)\,| < \varepsilon$. Līdz ar to

$$|\,x - x_0\,| < \delta \ \Rightarrow\ |\,(g\circ f)(x) - g(y_0)\,| < \varepsilon\,,$$

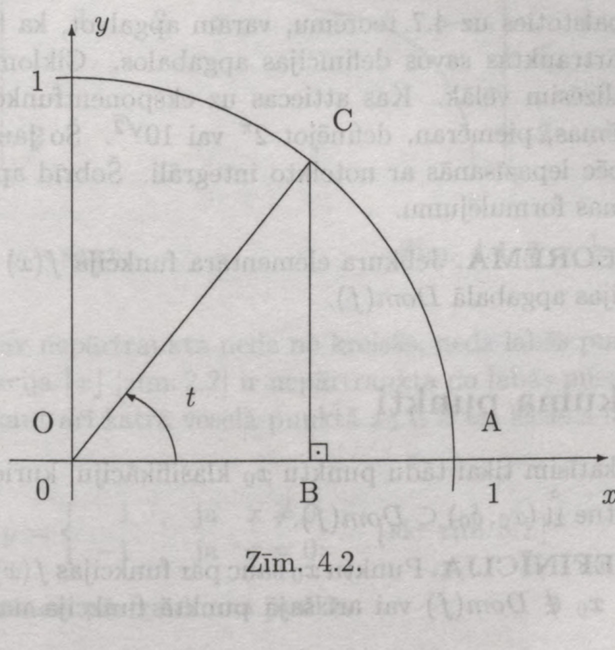
kas saskaņā ar robežas definīciju arī nozīmē, ka $\lim\limits_{x\to x_0} (g\circ f)(x) = g(y_0)$. ■

4.17. SEKAS. Ja funkcija $g(y)$ ir nepārtraukta punktā y_0, bet $f(x)$ ir nepārtraukta punktā x_0 un $f(x_0) = y_0$, tad funkciju kompozīcija $(g\circ f)(x)$ ir nepārtraukta punktā x_0.

Tas dod iespēju secināt: ja $g(y)$ ir nepārtraukta visā reālo skaitļu kopā $\mathbb{R}$, bet $f(x)$ ir nepārtraukta kopā X, tad $(g\circ f)(x)$ ir nepārtraukta kopā X.

4.18. LEMMA. $|\,\sin t\,| \le |\,t\,|$.

□ Tā kā $|\,\sin t\,| \le 1$ jebkuram $t\in\mathbb{R}$, tad nevienādība $|\,\sin t\,| \le |\,t\,|$ ir spēkā, ja $|\,t\,| \ge 1$. Tagad pievērsīsimies gadījumam $0 < t < 1$.



Zīm. 4.2.

4.2. zīm. $\sin t = |BC|$, bet $t = \smile{AC}$. Ņemsim vērā, ka perpendikuls $|BC|$ ir īsākais attālums līdz taisnei OB, tādēļ

$$\sin t = |BC| \leq \overset{\smile}{AC} = t\,.$$

Ja $-1 < t < 0$, tad $0 < -t < 1$, tāpēc

$$|\sin t| = |-\sin t| = |\sin(-t)| = \sin(-t) \leq -t = |-t| = |t|\,. \blacksquare$$

4.19. APGALVOJUMS. Funkcija $y = \sin x$ ir nepārtraukta visā reālo skaitļu kopā $\mathbb{R}$.

□ Pieņemsim, ka $x_0 \in \mathbb{R}$. Mums jāpierāda (sk. 4.2. teorēmu), ka $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, t.i., $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x\ [\,|\Delta x| < \delta \Rightarrow |\Delta y| < \varepsilon\,]$. Ņemsim vērā, ka $\Delta y = \sin x - \sin x_0 = 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2}$. No šejienes, balstoties uz 4.18. lemmu: $|\Delta y| = 2|\sin \frac{\Delta x}{2}|\,|\cos \frac{x + x_0}{2}| \leq 2\frac{|\Delta x|}{2} = |\Delta x|$. Tā rezultātā, ja $|\Delta x| < \delta = \varepsilon$, tad $|\Delta y| < \varepsilon$, kas saskaņā ar robežas definīciju arī nozīmē, ka $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0\,.$ ■

4.20. SEKAS. Funkcija $y = \cos x$ ir nepārtraukta visā reālo skaitļu kopā $\mathbb{R}$.

□ Ņemsim vērā, ka $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$. Tā kā funkcijas $\sin t$ un $\frac{\pi}{2} - x$ ir nepārtrauktas visā reālo skaitļu kopā $\mathbb{R}$, tad (4.17. sekas) šo funkciju kompozīcija ir nepārtraukta visā reālo skaitļu kopā $\mathbb{R}$. ■

Tagad, balstoties uz 4.7. teorēmu, varam apgalvot, ka funkcijas tg$x$ un ctg$x$ ir nepārtrauktas savos definīcijas apgabalos. Ciklometriskās funkcijas mēs analizēsim vēlāk. Kas attiecas uz eksponentfunkciju a^x, tad šeit rodas problēmas, piemēram, definējot 2^π vai $10^{\sqrt{2}}$. Šo jautājumu rūpīgāk analizēsim pēc iepazīšanās ar noteikto integrāli. Šobrīd aprobežosimies ar šādas teorēmas formulējumu.

4.21. TEORĒMA. Jebkura elementāra funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta savā definīcijas apgabalā $Dom(f)$.

Pārtraukuma punkti

Mēs apskatīsim tikai tādu punktu x_0 klasifikāciju, kuriem eksistē caurdurta apkārtne $\overset{\circ}{\mathfrak{U}}(x_0, \delta_0) \subseteq Dom(f)$.

4.22. DEFINĪCIJA. Punktu x_0 sauc par funkcijas $f(x)$ **pārtraukuma punktu**, ja $x_0 \notin Dom(f)$ vai arī šajā punktā funkcija nav nepārtraukta.

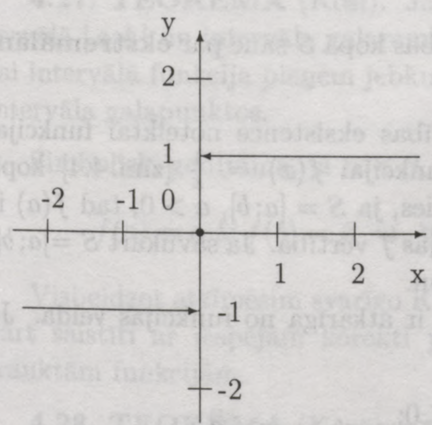
Ja pārtraukuma punktā x_0 eksistē vienpusējās robežas, tad šo pārtraukuma punktu sauc par **pirmā veida** pārtraukuma punktu. Šajā situācijā starpību $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ sauc par funkcijas $f(x)$ **lēcienu** punktā x_0. Ja lēciens vienāds ar 0, tad pārtraukuma punktu x_0 sauc par funkcijas $f(x)$ **novēršamu** pārtraukuma punktu. Pārtraukuma punktu, kas nav pirmā veida pārtraukuma punkts, sauc par **otrā veida** pārtraukuma punktu.

Funkcijai

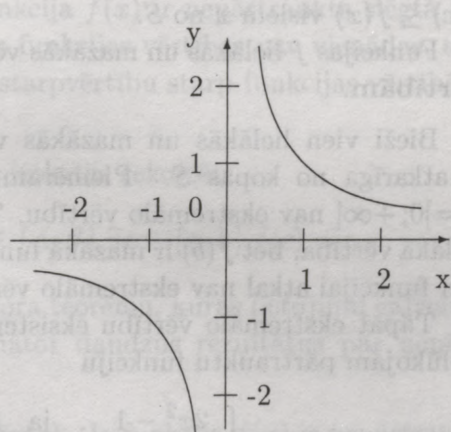
$$y = \begin{cases} 2x^2 - 1 & , \text{ ja } \; x \le 0; \\ \cos x & , \text{ ja } \; x > 0; \end{cases} \quad [\text{sk. zīm. } 2.1]$$

punkts x_0 ir pirmā veida pārtraukuma punkts (lēciens šai punktā ir 2), turklāt punktā 0 funkcija ir nepārtraukta no kreisās puses.

Arī funkcijai sgn$x$ (signum no x) [zīm. 4.3] punktā 0 lēciens ir 2, jo $\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1$, bet $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1$, kaut arī sgn0=0. Tātad funkcija



Zīm. 4.3. $y = \operatorname{sgn} x$.



Zīm. 4.4. $y = \frac{1}{x}$.

sgn$x$ punktā 0 nav nepārtraukta nedz no kreisās, nedz labās puses.

Turpretī funkcija $\lfloor x \rfloor$ [zīm. 2.2] ir nepārtraukta no labās puses visā reālo skaitļu kopā $\mathbb{R}$, kaut arī katrā veselā punktā $x_0 \in \mathbb{Z}$ tai lēciens ir 1.

Funkcijai

$$y = \begin{cases} 1 & , \text{ ja } \; x \ne 0; \\ -1 & , \text{ ja } \; x = 0; \end{cases} \quad [\text{sk. zīm. } 3.1]$$

punkts 0 ir novēršams pārtraukuma punkts.

Savukārt funkcijai $\dfrac{x^3-8}{x-2}$ [4.12. piemērs] punkts 2 ir novēršams pārtraukuma punkts, kaut arī pati funkcija šai punktā nav definēta.

Funkcijai $\frac{1}{x}$ [zīm. 4.4] punkts 0 ir otrā veida pārtraukuma punkts, tāpat kā funkcijai $\sin\frac{1}{x}$ [zīm. 3.4].

Savukārt Dirihlē funkcijai [zīm. 3.3] visi reālās skaitļu ass $\mathbb{R}$ punkti ir otrā veida pārtraukuma punkti neskatoties uz to, ka tās definīcijas apgabals arī ir $\mathbb{R}$.

Nepārtrauktu funkciju īpašības

4.23. DEFINĪCIJA. Pieņemsim, ka punkts c pieder funkcijas f definīcijas apgabalam $Dom(f)$ un $S \subseteq Dom(f)$.

$f(c)$ sauc par funkcijas f **lielāko (maksimālo) vērtību kopā** S, ja $f(c) \geq f(x)$ visiem x no S.

$f(c)$ sauc par funkcijas f **mazāko (minimālo) vērtību kopā** S , ja $f(c) \leq f(x)$ visiem x no S.

Funkcijas f lielākās un mazākās vērtības kopā S sauc par **ekstremālām vērtībām**.

Bieži vien lielākās un mazākās vērtības eksistence noteiktai funkcijai ir atkarīga no kopas S. Piemēram, funkcijai $f(x) = \frac{1}{x}$ [zīm. 4.4] kopā $S =]0; +\infty[$ nav ekstremālo vērtību. Toties, ja $S = [a; b]$, $a > 0$, tad $f(a)$ ir lielākā vērtība, bet $f(b)$ ir mazākā funkcijas f vērtība. Ja savukārt $S =]a; b[$, tad funkcijai atkal nav ekstremālo vērtību.

Tāpat ekstremālo vērtību eksistence ir atkarīga no funkcijas veida. Ja aplūkojam pārtrauktu funkciju

$$y = \begin{cases} 2x^2 - 1 & , \text{ ja } \ x \leq 0; \\ \cos x & , \text{ ja } \ x > 0; \end{cases} \quad [\text{sk. zīm. } 2.1],$$

tad kopā $S = [0; 4]$ tai nav lielākās vērtības, taču ir mazākā vērtība $y(0) = y(\pi) = -1$.

4.24. DEFINĪCIJA. Kopu $Y \subseteq \mathbb{R}$ sauc par **ierobežotu no apakšas**, ja $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall y \in Y\ (M \leq y)$. Savukārt, ja $\exists N \in \mathbb{R}\ \forall y \in Y\ (N \geq y)$, tad kopu Y sauc par **ierobežotu no augšas**. Ja kopa Y ierobežota gan no apakšas, gan augšas, tad kopu Y sauc par **ierobežotu**. Šo terminoloģiju attiecina arī uz reāla argumenta funkcijām. Tā funkciju $f(x)$ sauc par **ierobežotu** kopā $X \subseteq Dom(f)$, ja $Y = \{\, y \,|\, y = f(x) \& x \in X \,\}$ ir ierobežota kopa. Līdzīgi definē kopā X gan **no apakšas**, gan **augšas ierobežotu** funkciju.

4.25. TEORĒMA (Veierštrāsa teorēma nepārtrauktām funkcijām). Slēgtā intervālā $[a; b]$ nepārtraukta funkcija ir ierobežota. Šai intervālā tā sasniedz gan savu mazāko, gan lielāko vērtību.

Tuvināti atrodot vienādojumu reālās saknes, atrisinot nevienādības, kā arī daudzos spriedumos un pierādījumos izmanto Koši teorēmas par nepārtrauktām funkcijām.

4.26. TEORĒMA (Koši). Ja funkcija ir nepārtraukta slēgtā intervālā $[a; b]$, vienā no intervāla galapunktiem tās vērtība ir pozitīva, bet otrā — negatīva, tad vismaz vienā intervāla iekšējā punktā funkcijas vērtība ir nulle.

Teorēmai ir vienkārša ģeometriska interpretācija: ja nepārtrauktas funkcijas vērtības intervāla $[a; b]$ galos ir skaitļi ar pretējām zīmēm, tad vismaz vienā intervāla iekšējā punktā funkcijas grafiks krusto Ox asi — šai punktā funkcijas vērtība ir nulle [sk. zīm. 2.1, kur $y(1) > 0$, $y(2) < 0$ un $y(\frac{\pi}{2}) = 0$, $\frac{\pi}{2} \in [1; 2]$].

4.27. TEORĒMA (Koši). Ja funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta slēgtā intervālā $[a; b]$ un intervāla galapunktos funkcijas vērtības nav vienādas, tad šai intervālā funkcija pieņem jebkuru starpvērtību starp funkcijas vērtībām intervāla galapunktos.

Simboliski gadījumā, ja $\alpha < \beta$, tas izskatās sekojoši:

$$f(a) = \alpha \,\&\, f(b) = \beta \;\Rightarrow\; \forall \gamma \in [\alpha; \beta]\; \exists c \in [a; b]\; f(c) = \gamma.$$

Visbeidzot atzīmēsim svarīgo Kantora teorēmu, kuras lietojumi galvenokārt saistīti ar iespējām korekti pamatot daudzus rezultātus par nepārtrauktām funkcijām.

4.28. TEORĒMA (Kantora teorēma). Ja funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta slēgtā intervālā $[a; b]$, tad

$$\forall \varepsilon > 0\; \exists \delta > 0\; \forall x \in [a; b]\; \forall x' \in [a; b]\; [\,|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon\,].$$

Funkciju, kas apmierina teorēmas secinājuma nosacījumu, sauc par **vienmērīgi nepārtrauktu** funkciju.

Šīs teorēmas nosacījumu sabalansētību raksturo kaut vai tāds fakts, ka vaļējā intervālā analogs secinājums var izrādīties arī aplams. Par to var pārliecināties, izanalizējot vaļējā intervālā $]0; 1[$ nepārtrauktu funkciju $y = \frac{1}{x}$.

4.25. TEORĒMA (Veierštrāsa teorēma par nepārtrauktām funkcijām). *Slēgtā intervālā $[a;b]$ nepārtraukta funkcija ir ierobežota. Šajā intervālā tā sasniedz gan savu mazāko, gan lielāko vērtību.*

Tuvināti atrodot vienādojumu reālās saknes, atrisinot nevienādības, kā arī daudzos spriedumos un pierādījumos izmanto Koši teorēmas par nepārtrauktām funkcijām.

4.26. TEORĒMA (Koši). *Ja funkcija ir nepārtraukta slēgtā intervālā $[a;b]$, vienā no intervāla galapunktiem tās vērtība ir pozitīva, bet otrā — negatīva, tad vismaz vienā intervāla iekšējā punktā funkcijas vērtība ir nulle.*

Teorēmai ir vienkārša ģeometriska interpretācija: ja nepārtrauktas funkcijas vērtības intervāla $[a;b]$ galos ir skaitļi ar pretējām zīmēm, tad vismaz vienā intervāla iekšējā punktā funkcijas grafiks krusto Ox asi — šai punktā funkcijas vērtība ir nulle [sk. zīm. 2.1, kur $y(1) > 0$, $y(2) < 0$ un $y(\frac{4}{3}) = 0$, $\frac{4}{3} \in]1;2[$].

4.27. TEORĒMA (Koši). *Ja funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta slēgtā intervālā $[a;b]$ un intervāla galapunktos funkcijas vērtības nav vienādas, tad šai intervālā funkcija pieņem jebkuru starpvērtību starp funkcijas vērtībām intervāla galapunktos.*

Simboliski pierakstot, ja $\alpha \leq \beta$, tas izskatās šādi:

$$f(a) = \alpha \;\&\; f(b) = \beta \Rightarrow \forall \gamma \in [\alpha;\beta]\; \exists c \in [a;b]\; f(c) = \gamma.$$

Visbeidzot atzīmēsim svarīgo Kantora teorēmu, kuras lietojumi galvenokārt saistīti ar iespējām korekti pamatot daudzus rezultātus par nepārtrauktām funkcijām.

4.28. TEORĒMA (Kantora teorēma). *Ja funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta slēgtā intervālā $[a;b]$, tad*

$$\forall \varepsilon > 0\; \exists \delta > 0\; \forall x \in [a;b]\; \forall x' \in [a;b]\; [\,|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon\,].$$

Funkciju, kas apmierina teorēmas secinājumā minēto nosacījumu, sauc par vienmērīgi nepārtrauktu funkciju. Šīs teorēmas nosacījums, ka intervāls ir slēgts, ir būtisks fakts, jo vaļējā intervālā analoģisks secinājums var izrādīties aplams. Par to var pārliecināties, izanalizējot vaļējā intervālā $]0;1[$ nepārtraukto funkciju $\frac{1}{x}$.

5. nodaļa

DIFERENCĒŠANA

Pieskares jēdziens

Eiklīda definīcija par pieskari kā taisni caur vienu līknes punktu ir viennozīmīgi skaidrojama riņķa līnijas gadījumā, bet citām līknēm šī definīcija var izrādīties aplama. Izmantojot robežas jēdzienu, mēs nonāksim pie precīzāka pieskares apraksta.

Pieņemsim, ka P ir patvaļīgi fiksēts punkts uz līnijas un Q ir tuvs kustīgs punkts [5.1. zīm.] arī uz līnijas.

5.1. DEFINĪCIJA. Taisni, kas iet caur punktiem P un Q, sauc par **sekanti**.

5.2. DEFINĪCIJA. Par līnijas **pieskari** punktā P sauc sekantes robežpozīciju (ja tāda eksistē), kad punkts Q tuvojas un sasniedz punktu P.

Tā kā šī definīcija satur tādus iepriekš nedefinētus jēdzienus, kā *sekantes robežpozīcija, punkts Q tuvojas un sasniedz punktu P*, tad šai paragrāfā izklāstīto uzskatīsim par 5.2. definīcijas precizējumu. Vispirms vienosimies, ka pieskare punktā P eksistē, ja sekantes robežstāvoklis nav atkarīgs no tā, kurā pusē punktam P izraudzīts punkts Q.

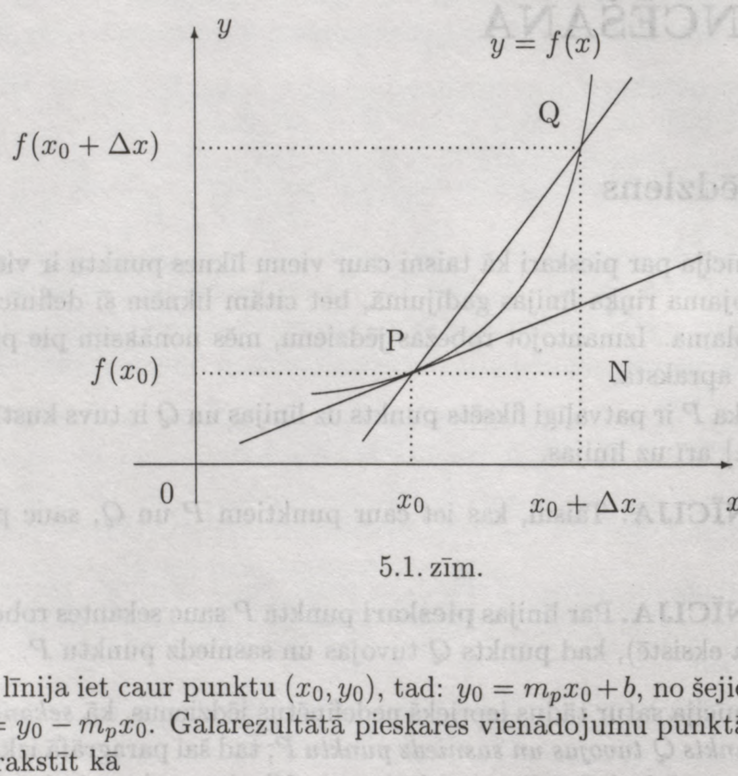
Pieņemsim, ka līnijas vienādojums ir $y = f(x)$ un punkta P koordinātas ir $(x_0, f(x_0))$, savukārt tuvam punktam Q koordinātas ir $(x_0+h, f(x_0+h))$. Tad sekantes caur punktiem P un Q virziena koeficients atrodams kā [sk. 5.1. zīm.]:

$$m_{sec} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{|QN|}{|PN|}.$$

No šejienes seko, ka pieskares (ja tāda eksistē), kas iet caur punktu P, virziena koeficients meklējams kā šāda robeža:

$$m_{pieskares} = \lim_{h\to 0} m_{sec} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Lai atrastu pieskares vienādojumu $y = m_p x + b$ ar zināmu virziena koeficientu m_p punktā (x_0, y_0), tad mums jānoskaidro koeficienta b vērtība. Tā



5.1. zīm.

kā līnija iet caur punktu (x_0, y_0), tad: $y_0 = m_p x_0 + b$, no šejienes iegūsim, ka $b = y_0 - m_p x_0$. Galarezultātā pieskares vienādojumu punktā (x_0, y_0) varam uzrakstīt kā

$$y - y_0 = m_p(x - x_0).$$

Momentānais ātrums

Ja ar automašīnu divās stundās nobrauc 80 km, tad vidējais ātrums ir 40 km stundā. Taču braukšanas laikā spidometrs visu laiku nerāda 40, sākumā tas rāda 0, tad varbūt pat 60, beigās atkal 0. Ko tad patiesībā rāda spidometrs?

Pieņemsim, ka materiāls punkts kustas nevienmērīgi pa taisni. Izvēloties kustības taisni par koordinātu asi, punkta stāvokli katrā laika momentā t

nosaka punkta koordināta x. Funkciju $x = x(t)$, kas izsaka materiāla punkta koordinātas x atkarību no laika t, sauc par materiāla punkta **kustības likumu**. Ja kustības likums ir zināms, tad katrā laika momentā ir zināma arī materiāla punkta atrašanās vieta. Tātad laika momentā t punkta koordināta ir $x(t)$, bet momentā $t+\Delta t$ tā ir $x(t+\Delta t)$. Intervālā starp minētajiem laika momentiem punkts ir veicis attālumu $\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t)$. Kustības **vidējo ātrumu** intervālā $[t; t+\Delta t]$ definē kā noietā ceļa attiecību pret kustības laiku, t.i.,

$$v_{vid} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

Lai raksturotu kustību laika momentā t, izmanto momentānā ātruma jēdzienu. Vidējā ātruma v_{vid} robežu, kad $\Delta t \to 0$, sauc par **momentāno ātrumu** laika momentā t, t.i.,

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{vid} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

Redzam, ka pieskares virziena koeficientu un momentāno ātrumu iegūst pēc analoģiskas formulas, atšķirīgi ir tikai nosaukumi vienam un tam pašam jēdzienam.

Atvasinājuma definīcija

Organismu pieaugums (bioloģijā), robežpeļņa (ekonomikā), vadu blīvums (fizikā), vielas šķīšanas ātrums (ķīmijā) ir citas versijas par to pašu tēmu kā pieskares virziena koeficients vai momentānais ātrums. Labs matemātiķis atbrīvojas no pielietojumu dažādajiem raksturiem.

5.3. DEFINĪCIJA. Pieņemsim, ka $\mathfrak{U}(x_0, \delta_0) \subseteq Dom(f)$. Funkciju f sauc par **atvasināmu punktā** x_0, ja eksistē robeža

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \in \mathbb{R}.$$

Šīs robežas vērtību sauc par **funkcijas atvasinājumu punktā** x_0 un apzīmē ar $f'(x_0)$. Atvasinājuma atrašanas darbību sauc gan par **atvasināšanu**, gan par **diferencēšanu.**

Tātad funkcijas f atvasinājums ir vienāds ar funkcijas un argumenta pieaugumu attiecības robežu, kad argumenta pieaugums tiecas uz 0. Tas nozīmē, ka atvasinājuma definīcijā minēto robežu var pierakstīt arī šādi:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Piemēram, funkcijas $f(x) = x^3$ atvasinājumu punktā 7 var pierakstīt šādi:

$f'(7) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(7+\Delta x)^3 - 7^3}{\Delta x}$ vai arī $f'(7) = \lim\limits_{x \to 7} \frac{x^3 - 7^3}{x - 7}$.

Diferencēšana funkcijai f piekārto jaunu funkciju $f' : x \mapsto f'(x)$. Šo funkciju $f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sauc par funkcijas f atvasinājumu. Neapmulstiet, jo atvasinājuma darbības apzīmēšanai lieto vairākus atšķirīgus apzīmējumus. Tas nozīmē, ka sekojoši pieraksti ir ar vienādu nozīmi:

$$f',\ y',\ Df,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{df}{dx}.$$

5.4. Piemērs. Atradīsim funkcijas $f(x) = \sqrt{5x-2}$, $x > \frac{2}{5}$, atvasinājumu:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{5(x+h)-2} - \sqrt{5x-2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5(x+h)-2-(5x-2)}{h(\sqrt{5(x+h)-2}+\sqrt{5x-2})} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{5h}{h(\sqrt{5(x+h)-2}+\sqrt{5x-2})} = \frac{5}{2\sqrt{5x-2}}. \ \blacksquare$$

Funkcijas atvasinājums un nepārtrauktība

Ja līnijai eksistē pieskare dotā punktā, tad līnija šajā punktā nevar izdarīt "lēcienu", t.i., tā ir nepārtraukta šajā punktā.

5.5. TEORĒMA. Ja funkcijai f punktā x_0 eksistē atvasinājums, tad f ir nepārtraukta punktā x_0.

□ Mums jāpierāda, ka $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Funkcijas $f(x)$ vērtību patvaļīgā definīcijas apgabala punktā $x \neq x_0$ varam pierakstīt kā:

$$f(x) = f(x_0) - f(x_0) + f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0).$$

Tagad meklējam robežu:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left(f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)\right).$$

Tā kā robeža no konstantes ir konstante, funkcijai f punktā x_0 eksistē atvasinājums un $y = x$ ir nepārtraukta funkcija, tad

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) + \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0} (x - x_0) =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0). \blacksquare$$

Pretējais apgalvojums vispārīgā gadījumā nav spēkā – no funkcijas nepārtrauktības punktā neseko funkcijas atvasinājuma eksistence šajā punktā. Kā piemēru var minēt funkciju $f(x) = |x|$, kuru aplūkosim punktā 0. Zinām, ka šī funkcija ir nepārtraukta 0 punktā, bet tai neeksistē atvasinājums punktā 0:

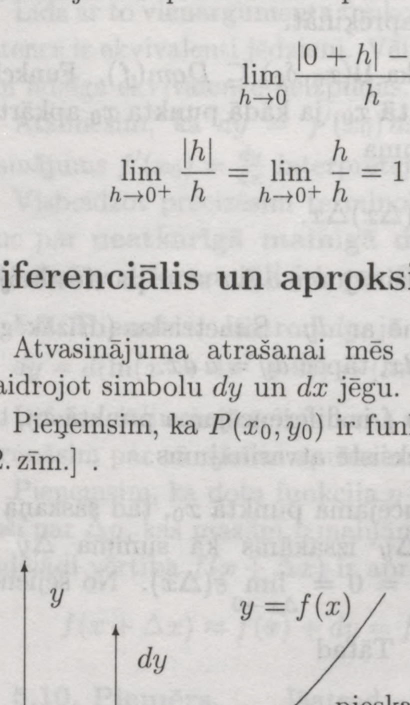
$$\lim_{h \to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}, \quad \text{bet}$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \neq -1 = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h}.$$

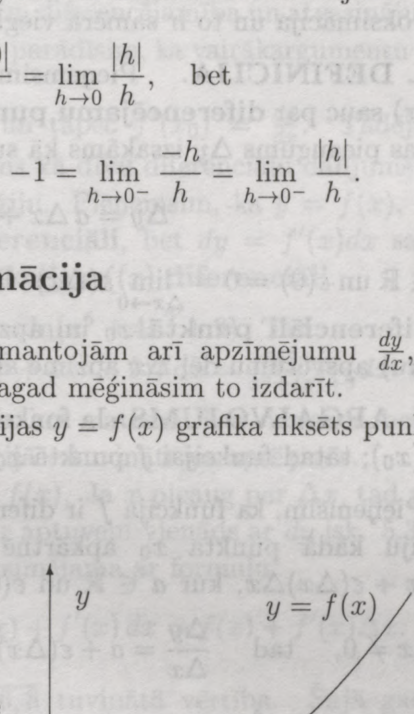
Diferenciālis un aproksimācija

Atvasinājuma atrašanai mēs izmantojām arī apzīmējumu $\frac{dy}{dx}$, nepaskaidrojot simbolu dy un dx jēgu. Tagad mēģināsim to izdarīt.

Pieņemsim, ka $P(x_0, y_0)$ ir funkcijas $y = f(x)$ grafika fiksēts punkts [sk. 5.2. zīm.] .



5.2. zīm.



5.3. zīm.

Izveidosim jaunu koordinātu asu sistēmu šādi: P ir sākumpunkts, ass dx ir paralēla x asij un ass dy ir paralēla y asij. Jaunajā koordinātu sistēmā pieskarei punktā P ir īpaši vienkāršs vienādojums, proti, $dy = k\,dx$, kur k ir virziena koeficients. Bet virziena koeficients k jaunajā koordinātu sistēmā ir tāds pats kā vecajā Oxy - koordinātu sistēmā: $k = f'(x_0)$. Līdz ar to pieskares vienādojums ir pierakstāms kā $dy = f'(x_0)\,dx$.

Šo apzīmējumu jēga ir tāda, ka līknei $y = f(x)$ pieskare atrodas ļoti tuvu punkta $P(x_0, y_0)$ tuvā apkārtnē. Ja x - am dodam mazu pieaugumu $\Delta x = dx$, tad atbilstošais funkcijas y pieaugums ir $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$, bet pieskares vienādojums ir $dy = f'(x_0)dx$. Redzam [5.3. zīm.], ka dy ir laba Δy aproksimācija un to ir samērā viegli aprēķināt.

5.6. DEFINĪCIJA. Pieņemsim, ka $\mathfrak{U}(x_0, \delta_0) \subseteq Dom(f)$. Funkciju $y = f(x)$ sauc par **diferencējamu punktā** x_0, ja kādā punkta x_0 apkārtnē funkcijas pieaugums Δy izsakāms kā summa

$$\Delta y = a\,\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x,$$

kur $a \in \mathbb{R}$ un $\varepsilon(0) = 0 = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x)$. Reizinājumu $a\,\Delta x$ sauc par **funkcijas** $f(x)$ **diferenciāli punktā** x_0 un apzīmē ar dy. Simetrisku (drīzāk gan estētisku) apsvērumu dēļ Δx apzīmē ar dx, tāpēc $dy = a\,dx$.

5.7. APGALVOJUMS. Ja funkcija f ir diferencējama punktā x_0, tad $a = f'(x_0)$; tātad funkcijai f punktā x_0 eksistē atvasinājums.

□ Pieņemsim, ka funkcija f ir diferencējama punktā x_0, tad saskaņā ar definīciju kādā punkta x_0 apkārtnē Δy izsakāms kā summa $\Delta y = a\,\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x$, kur $a \in \mathbb{R}$ un $\varepsilon(0) = 0 = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x)$. No šejienes, ja $\Delta x \neq 0$, tad $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = a + \varepsilon(\Delta x)$. Tātad

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [a + \varepsilon(\Delta x)] = \lim_{\Delta x \to 0} a + \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = a. \blacksquare$$

5.8. APGALVOJUMS. Ja funkcijai f punktā x_0 eksistē atvasinājums, tad tā ir diferencējama šai punktā.

□ Ja reiz funkcijai f punktā x_0 eksistē atvasinājums, tad $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Definēsim funkciju

$$\varepsilon(\Delta x) = \begin{cases} \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) & , \text{ ja } \Delta x \neq 0; \\ 0 & , \text{ ja } \Delta x = 0, \end{cases}$$

tad, ņemot vērā 5.5. teorēmu,

$$\Delta y = f'(x_0)\,\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x.$$

Kā arī

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) \right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} f'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0. \blacksquare$$

Līdz ar to vienargumenta funkcijām diferencējamība un atvasinājuma eksistence ir ekvivalenti jēdzieni. Vēlāk parādīsim, ka vairākargumentu funkcijām līdzīga ekvivalence neizpildās.

Atzīmēsim, ka $dy = f'(x_0)\,dx$ un tāpēc $f'(x_0) = \frac{dy}{dx}$. Tādējādi atvasinājums $f'(x_0) = \frac{dy}{dx}$ interpretējams kā divu diferenciāļu dalījums.

Visbeidzot precizēsim terminoloģiju. Pieņemsim, ka $y = f(x)$, tad dx sauc par **neatkarīgā mainīgā diferenciāli**, bet $dy = f'(x)dx$ sauc par **mainīgā** y **diferenciāli** jeb par **funkcijas** $f(x)$ **diferenciāli**.

5.9. Piemērs. Jāatrod dy, ja $y = \ln(x^6 + 4x^2 + 9)$. Tad $dy = d(\ln(x^6 + 4x^2 + 9)) = (\ln(x^6 + 4x^2 + 9))'dx = \frac{6x^5+8x}{x^6+4x^2+9}dx$. $\blacksquare$

Diferenciālim ir noteikta loma vairākos matemātikas virzienos, bet tagad parunāsim par tā nozīmi aproksimācijā – tuvinātajos aprēķinos.

Pieņemsim, ka dota funkcija $y = f(x)$. Ja x pieaug par Δx, tad y atbilstoši par Δy, kas mazām izmaiņām ir aptuveni vienāds ar dy [sk. 5.3. zīm.]. Tādējādi vērtība $f(x + \Delta x)$ ir aproksimējama ar formulu

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)\,dx = f(x) + f'(x)\Delta x.$$

5.10. Piemērs. Jāatrod $\sqrt{16,8}$ tuvinātā vērtība. Šajā gadījumā $x_0 = 16$, $\Delta x = 0,8$, $f(x) = \sqrt{x}$ un $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Tāpēc $\sqrt{16,8} \approx \sqrt{16} + \frac{1}{2\sqrt{16}} \cdot 0,8 = 4 + \frac{1}{8} \cdot 0,8 = 4 + 0,1 = 4,1$. $\blacksquare$

No aproksimācijas formulas varam izteikt

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\,dx\,.$$

Šo formulu lieto kļūdu novērtēšanā.

Ja mērāmā lieluma patiesā vērtība ir a, bet izmērītā vērtība ir x, tad starpību $|a - x|$ sauc par mērījuma **absolūto kļūdu**. Tā kā a nav zināms, tad nav iespējams atrast precīzu absolūto kļūdu. Taču dažkārt var novērtēt maksimāli iespējamo absolūto kļūdu. Parasti par šo maksimāli iespējamo absolūto kļūdu tiek ņemta mēraparāta viena iedaļa. Tomēr absolūtā kļūda neraksturo mērījuma kvalitāti. Tāpēc mērījuma raksturošanai lieto arī **relatīvo kļūdu** – absolūtās kļūdas attiecību pret izmērīto lielumu: $\frac{|a-x|}{x} \leq \frac{\Delta x}{x}$, kur ar Δx apzīmēta maksimāli iespējamā absolūtā kļūda.

Pieņemsim, ka $y = f(x)$ ir formula, pēc kuras aprēķina lielumu y, ja lieluma x vērtība ir x_0 un tā ir izmērīta ar maksimāli iespējamo absolūto kļūdu Δx, t.i., $x = x_0 \pm \Delta x$. Aprēķinot pēc dotās formulas, iegūsim vērtību $y_0 = f(x_0)$, kas arī ir atrasta ar zināmu maksimāli iespējamo absolūto kļūdu Δy. Lai novērtētu šo kļūdu Δy, lieto funkcijas $y = f(x)$ diferenciāli. Aprēķinātā lieluma absolūtā kļūda Δy ir funkcijas $y = f(x)$ pieauguma modulis, ja arguments ir izmainījies par Δx, tāpēc

$$|\Delta y| = |f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)| \approx |df(x_0)| = |f'(x_0)\,dx| = |f'(x_0)|\Delta x.$$

5.11. Piemērs. Kuba šķautnes garums ir 2 cm ar mērījuma absolūto kļūdu $\pm 0,05$ cm. Jāizskaitļo kuba tilpums un jānovērtē aprēķinu kļūda!
$V = x^3 = 2^3 = 8$ (cm^3) — kuba tilpums;
$\Delta V \approx |f'(x)|\Delta x = 3x^2\,\Delta x = 3 \cdot 2^2 \cdot 0,05 = 3 \cdot 4 \cdot 0,05 =$
$= 0,60$ (cm^3) — aptuvenā absolūtā kļūda;
$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{0,6}{8} = 0,075$ jeb $7,5\%$ — relatīvā kļūda. ■

Atvasināšanas likumi

Meklēt funkcijas atvasinājmu pēc atvasinājuma definīcijas lielākoties nav nepieciešams. Tikai jāzina un jāievēro atvasināšanas likumi un elementāro funkciju atvasināšanas formulas.

5.12. TEORĒMA. Ja f un g ir diferencējamas funkcijas, tad
1. $(kf(x))' = kf'(x)$, kur $k \in \mathbb{R}$ - konstante;
2. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$;
3. $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$;
4. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
5. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0.$

□ Vispirms pierādīsim 2. un 4. likumu.

Pievērsīsim uzmanību 2. likumam:

$$(f(x) + g(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right) =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x) + g'(x).$$

Par 4.likumu:

$$(f(x)g(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x) \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$$

$$= f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

Sadalīšana robežās ir pieļaujama, jo atsevišķās robežas eksistē: $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$, jo f ir diferencējama funkcija, tāpēc nepārtraukta; $\lim\limits_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x)$ un $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$, jo f un g ir diferencējamas funkcijas; $\lim\limits_{h\to 0} g(x) = g(x)$, jo $g(x)$ attiecībā pret mainīgo h ir konstante.

Tagad varam pierādīt 1.likumu, uztverot $kf(x)$ kā divu funkciju reizinājumu un lietojot 4.likumu:

$$(kf(x))' = k'f(x) + kf'(x) = kf'(x),$$

jo
$$k' = \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

3.likumu, izmantojot iepriekš pierādītos 2. un 1.likumu, pierāda sekojoši: $(f(x) - g(x))' = (f(x) + (-g(x)))' = f'(x) + (-g(x))' = f'(x) - g'(x)$.

Lai pierādītu 5.likumu, vispirms atradīsim $\left(\frac{1}{g(x)}\right)'$, $g(x) \neq 0$:

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(x)-g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-(g(x+h)-g(x))}{h} \frac{1}{g(x+h)} \frac{1}{g(x)}.$$

Robežas no atsevišķajiem reizinātājiem eksistē, jo g ir diferencējama funkcija un tātad arī nepārtraukta, t.i.,

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \lim_{h\to 0} \frac{-(g(x+h)-g(x))}{h} \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)} \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x)} =$$

$$= -g'(x)\frac{1}{g(x)}\frac{1}{g(x)} = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}.$$

No iegūtā rezultāta seko, ka

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)' =$$

$$= \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x)\frac{-g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}. \blacksquare$$

Elementāro funkciju atvasināšana

Nākamajā teorēmā mēs parādīsim, kā var atvasināt dažas biežāk lietojamās elementārās funkcijas. Citu funkciju atvasināšanu apskatīsim mazliet vēlāk.

5.13. TEORĒMA. Ir spēkā sekojošas formulas:

1. $\boldsymbol{k' = 0}$, kur $k \in \mathbb{R}$ — konstante,
2. $\boldsymbol{(x^n)' = nx^{n-1}}$, $n \in \mathbb{R}$,
3. $\boldsymbol{(\sin x)' = \cos x}$,
4. $\boldsymbol{(\cos x)' = -\sin x}$,
5. $\boldsymbol{(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}}$,
6. $\boldsymbol{(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}}$,
7. $\boldsymbol{(a^x)' = a^x \ln a}$, $a > 0$,
8. $\boldsymbol{(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}}$, $a > 0$, $a \neq 1$,
9. $\boldsymbol{(\ln x)' = \dfrac{1}{x}}$,
10. $\boldsymbol{(e^x)' = e^x}$,
11. $\boldsymbol{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$,
12. $\boldsymbol{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$,
13. $\boldsymbol{(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}}$,
14. $\boldsymbol{(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}}$.

□ Patreizējā brīdī mēs pierādīsim tikai pirmās sešas formulas, pārējās pierādīsim vēlāk, kad iztirzāsim jautājumu par pakāpes funkcijām un tām inversajām [sk. 12.nodaļu]. No skolas kursa noteikti ir pazīstamas funkcijas a^x un $\log_a x$, funkcijas $\ln x$ un e^x ir to speciālgadījumi: $\ln x = \log_e x$, kur e ir Eilera skaitlis. Skaitlis e ir iracionāls, tā tuvinātā vērtība ir $2,718281828459$.

1. $(k)' = \lim\limits_{h \to 0} \frac{k-k}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$

2. Formulu $(x^n)' = nx^{n-1}$ mēs pierādīsim tikai veselām pakāpēm (izņemot 0, jo $x^0 = 1$ un tā ir konstante, gadījums, kas apskatīts 1.formulā). Vispirms apskatīsim situāciju, kad $n > 0$:

$$(x^n)' = \lim_{y\to x} \frac{y^n - x^n}{y-x} = \lim_{y\to x} \frac{(y-x)(y^{n-1}+y^{n-2}x+\ldots+yx^{n-2}+x^{n-1})}{y-x} =$$

$$= \lim_{y\to x} \sum_{k=0}^{n-1} y^{n-1-k}x^k = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \lim_{y\to x} y^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k x^{n-1-k} = nx^{n-1}.$$

Ja $n < 0$, tad $-n > 0$ un varam izmantot atvasināšanas 5.likumu:

$$(x^n)' = \left(\frac{1}{x^{-n}}\right)' = \frac{1' x^{-n} - 1(x^{-n})'}{x^{-2n}} =$$

$$= \frac{0-(-n)x^{-n-1}}{x^{-2n}} = nx^{-n-1-(-2n)} = nx^{n-1}.$$

To, ka formula $(x^n)' = nx^{n-1}$ ir patiesa jebkuram reālam skaitlim n, pierādīsim vēlāk, kad būsim korekti definējoši pakāpes funkciju x^α, $x > 0$, jebkurai reālai pakāpei α [sk. 12.21.definīciju un tālākos secinājumus].

3. $$(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x\cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(-\sin x \frac{1-\cos h}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}\right) = -\sin x \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h} + \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} =$$

$$= -\sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x,$$

jo var pierādīt, ka $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h} = 0$ un $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$. Pēdējās robežas atrašana izraisa īpašu interesi, tāpēc par šo robežu parunāsim atsevišķi nākošajā paragrāfā.

4. $$(\cos x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} =$$

$$= -\cos x \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h} - \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = -\cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 = -\sin x.$$

5. $$(\mathrm{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

6. $$(\mathrm{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{(\sin x)^2} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}. \ \blacksquare$$

5.14. Piemēri. 1. $(3x^4 - \sqrt{x} + \sin x)' = 12x^3 - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \cos x.$

2. $((x^2-3)\ln x)' = (x^2-3)' \ln x + (x^2-3)(\ln x)' = 2x\ln x + \frac{x^2-3}{x}.$

3. $$\left(\frac{12+3\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(12+3\sin x)'\cos x - (12+3\sin x)(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

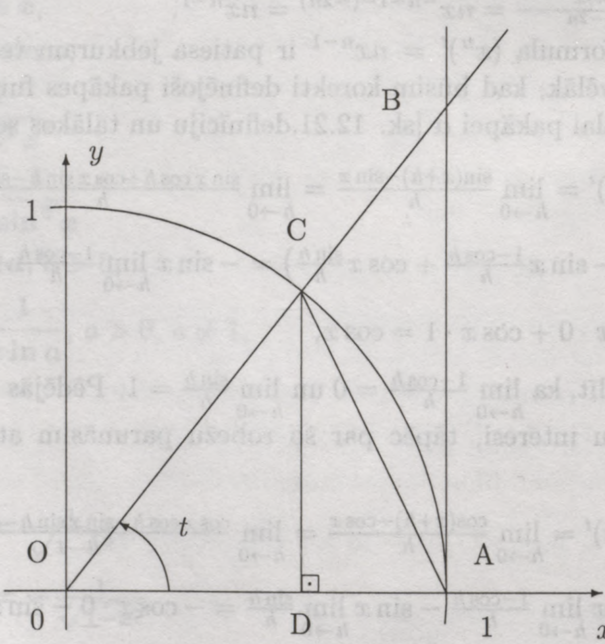
$$= \frac{3\cos x \cos x - (12+3\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{3\cos^2 x + 12\sin x + 3\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{3+12\sin x}{\cos^2 x}. \ \blacksquare$$

Robeža $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}$

Augstāk minētā robeža ir viena no ievērojamākajām robežām matemātiskās analīzes kursā. Tās atrašanu mēs balstīsim uz ģeometriskiem apsvērumiem un pieņēmuma, ka protam atrast trijstūru un sektoru laukumus.

5.15. TEORĒMA. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t} = 1$

□ Pieņemsim, ka $t > 0$. Apskatīsim vienības riņķi. Konstruēsim riņķa sektoru OAC ar rādiusu $R = 1$ un centra leņķi t [sk. 5.4. zīm.].



5.4. zīm.

No zīmējuma redzam, ka $\triangle OAB$ laukums ir lielāks par sektora OAC laukumu, kurš savukārt ir lielāks par $\triangle OAC$ laukumu. Noskaidrosim šo laukumu lielumus!

Tā kā $|OA| = R = 1$ un attālums $|AB|$ taisnleņķa trijstūrī OAB atrodams no sakarības $\text{tg}t = \frac{|AB|}{|OA|} = |AB|$, tad

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}|OA|\cdot|AB| = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \text{tg}t = \frac{\text{tg}t}{2}.$$

Tā kā riņķa sektora laukums ir vienāds ar atbilstošā riņķa līnijas loka un rādiusa reizinājuma pusi un līnijas loka garums ir vienāds ar rādiusa un atbilstošā centra leņķa (radiānos) reizinājumu, tad

$$S_{OAC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}\cdot R = \frac{1}{2}\cdot R\cdot t\cdot R = \frac{t}{2}.$$

Tā kā $|OC| = R = 1$ un attālums $|CD|$ taisleņķa trijstūrī OCD atrodams no sakarības $\sin t = \frac{|CD|}{|OC|} = |CD|$, tad

$$S_{\triangle OAC} = \frac{1}{2}|OA|\cdot|CD| = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin t = \frac{\sin t}{2}.$$

Esam ieguvuši šādas nevienādības:

$$S_{\triangle OAB} > S_{OAC} > S_{\triangle OAC} \quad \text{jeb} \quad \frac{\operatorname{tg} t}{2} > \frac{t}{2} > \frac{\sin t}{2}.$$

Pareizināsim pēdējo nevienādību ar $\frac{2}{\sin t} > 0$ (jo $t > 0$) un iegūsim:

$$\frac{\operatorname{tg} t}{\sin t} = \frac{1}{\cos t} > \frac{t}{\sin t} > 1$$

jeb apskatot apgrieztos lielumus:

$$1 > \frac{\sin t}{t} > \cos t.$$

Pāriesim šajā nevienādībā uz robežām, kad t tiecas uz 0 no labās puses:

$$\lim_{t\to 0^+} 1 \le \lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t} \le \lim_{t\to 0^+}\cos t, \quad \text{t.i.,} \quad 1 \le \lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t} \le 1.$$

No 3.18. teorēmas par robežpāreju nevienādībās seko, ka

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t} = 1.$$

Ievērosim, ka $\sin t$ ir nepāra funkcija un ja $t < 0$, tad $-t > 0$, tāpēc

$$\lim_{t\to 0^-}\frac{\sin t}{t} = \lim_{t\to 0^-}\frac{-\sin t}{-t} = \lim_{t\to 0^-}\frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{-t\to 0^+}\frac{\sin(-t)}{-t} = 1.$$

Tādējādi eksistē abas vienpusējās robežas, tās ir vienādas, tāpēc

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1. \;\blacksquare$$

Tikko pierādīto robežu izmanto daudzu nenoteiktību $\frac{0}{0}$ novēršanai.

5.16. Piemēri. 1. $\lim\limits_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{t}{2}}{t} =$

$$= \lim_{\substack{t\to 0\\ (\frac{t}{2}\to 0)}} \frac{\sin\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} = \lim_{\substack{t\to 0\\ (\frac{t}{2}\to 0)}} \frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} \lim_{t\to 0} \sin\frac{t}{2} = \sin 0 = 0.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 9x}{\sin 3x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 9x \cdot 3x \cdot 3}{9x \ \sin 3x} = 3.$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{2x\sin x\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}\cdot 3}{2x\sin x\cdot 1} =$

$$= 3\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2\frac{x}{2}\cdot x}{4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot\sin x} = \frac{3}{4}. \ \blacksquare$$

Funkciju kompozīcijas atvasināšana

Kā rīkoties, lai atrastu, piemēram, funkcijas $y = (3x^2 - 8x + 1)^{10}$ atvasinājumu? Vai patiešām nepieciešams kāpināt 10 pakāpē? Nē, izrādās, iespējama ērtāka metode.

5.17. TEORĒMA. Ja funkcija g ir diferencējama punktā a un f ir diferencējama punktā $g(a)$, tad funkciju kompozīcija $f\circ g$ ir diferencējama punktā a un $(f\circ g)'(a) = f'(b)\cdot g'(a)$, kur $b = g(a)$.

□ Pēc dotā f ir diferencējama punktā b, t.i., funkcijas f pieaugums punktā b izsakāms kā summa

$$f(b+h) - f(b) = f'(b)h + \varepsilon(h)h, \tag{5.1}$$

kur $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0 = \varepsilon(0)$. Ja vienādībā (5.1) aizvietojam b ar $g(a)$ un h ar $g(a+\Delta x) - g(a)$, tad:

$$(f\circ g)(a+\Delta x) - (f\circ g)(a) = f'(b)\cdot(g(a+\Delta x) - g(a)) + \varepsilon(h)\cdot(g(a+\Delta x) - g(a)).$$

Izdalam abas vienādības puses ar Δx:

$$\frac{(f\circ g)(a+\Delta x) - (f\circ g)(a)}{\Delta x} =$$

$$= f'(b)\frac{g(a+\Delta x) - g(a)}{\Delta x} + \varepsilon(h)\frac{g(a+\Delta x) - g(a)}{\Delta x}.$$

Tā kā g ir diferencējama punktā a, tad g ir nepārtraukta šajā punktā, tāpēc

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} [g(a + \Delta x) - g(a)] = 0$. Tagad atsaucoties uz 4.16. teorēmu varam aprēķināt

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(h) = \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(g(a + \Delta x) - g(a)) =$$
$$= \varepsilon(\lim_{\Delta x \to 0}(g(a + \Delta x) - g(a))) = \varepsilon(0) = 0.$$

Secinām, ka

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f \circ g)(a + \Delta x) - (f \circ g)(a)}{\Delta x} =$$
$$= f'(b) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(a + \Delta x) - g(a)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(h) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(a + \Delta x) - g(a)}{\Delta x} =$$
$$= f'(b)\, g'(a) + 0 \cdot g'(a) = f'(b)\, g'(a),$$

t.i., $(f \circ g)'(a) = f'(b)\, g'(a)$. ■

Šī teorēma ļauj iepazītās atvasināšanas formulas gadījumā, ja arguments ir mainīgā x funkcija (salikta funkcija), pierakstīt sekojošā veidā:

$((u(x))^n)' = n(u(x))^{n-1} \cdot u'(x)$, $n \in \mathbb{R}$,

$(\sin u(x))' = \cos u(x) \cdot u'(x)$,

$(\cos u(x))' = -\sin u(x) \cdot u'(x)$,

$(\operatorname{tg} u(x))' = \dfrac{1}{\cos^2 u(x)} \cdot u'(x)$,

$(\operatorname{ctg} u(x))' = -\dfrac{1}{\sin^2 u(x)} \cdot u'(x)$,

$(a^{u(x)})' = a^{u(x)} \ln a \cdot u'(x)$, $a > 0$,

$(\log_a u(x))' = \dfrac{1}{u(x) \ln a} \cdot u'(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$,

$(\ln u(x))' = \dfrac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$,

$(e^{u(x)})' = e^{u(x)} \cdot u'(x)$,

$(\arcsin u(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2(x)}} \cdot u'(x)$,

$(\arccos u(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2(x)}} \cdot u'(x)$,

$(\operatorname{arctg} u(x))' = \frac{1}{1+u^2(x)} \cdot u'(x)$,

$(\operatorname{arcctg} u(x))' = -\frac{1}{1+u^2(x)} \cdot u'(x)$.

5.18. Piemēri. 1. $\left((3x^2-8x+1)^{10}\right)' =$
$= 10(3x^2-8x+1)^9\cdot(3x^2-8x+1)' = 10(3x^2-8x+1)^9(6x-8)$.

2. $\left(\cos\frac{x^2+5}{x+1}\right)' = -\sin\frac{x^2+5}{x+1}\left(\frac{x^2+5}{x+1}\right)' = -\sin\frac{x^2+5}{x+1}\frac{2x(x+1)-(x^2+5)}{(x+1)^2} =$
$= -\frac{x^2+2x-5}{(x+1)^2}\sin\frac{x^2+5}{x+1}$.

3. Kompozīciju var veidot arī trīs un vairāk funkcijas, tad jārīkojas līdzīgi kā iepriekš.

$\left(\ln\sin^3(4x-7)\right)' = \frac{1}{\sin^3(4x-7)}\left(\sin^3(4x-7)\right)' =$
$= \frac{1}{\sin^3(4x-7)}3\sin^2(4x-7)\,(\sin(4x-7))' =$
$= \frac{3}{\sin(4x-7)}\cos(4x-7)\,(4x-7)' = \frac{12\cos(4x-7)}{\sin(4x-7)} = 12\mathrm{ctg}(4x-7)$. ■

Izmantojot 5.17. teorēmu par funkciju kompozīcijas atvasināšanu, varam pamatot, ka formula $(x^n)' = nx^{n-1}$ **ir patiesa arī tajā gadījumā, kad n ir racionāls skaitlis.**

□ Vispirms apskatīsim pierādījumu gadījumam, kad $n = \frac{1}{q}$, kur q ir pozitīvs vesels skaitlis.

No algebras kursa ir zināms, ka

$$a^q - b^q = (a-b)(a^{q-1} + a^{q-2}b + ... + ab^{q-2} + b^{q-1}) \quad \text{jeb}$$

$$\frac{a-b}{a^q-b^q} = \frac{1}{a^{q-1} + a^{q-2}b + ... + ab^{q-2} + b^{q-1}}.$$

Ja $f(x) = x^{\frac{1}{q}}$, tad

$$f'(x) = \lim_{t\to x}\frac{t^{\frac{1}{q}} - x^{\frac{1}{q}}}{t-x} = \lim_{t\to x}\frac{t^{\frac{1}{q}} - x^{\frac{1}{q}}}{(t^{\frac{1}{q}})^q - (x^{\frac{1}{q}})^q} =$$

$$= \lim_{t\to x}\frac{1}{t^{\frac{q-1}{q}} + t^{\frac{q-2}{q}}x^{\frac{1}{q}} + ... + t^{\frac{1}{q}}x^{\frac{q-2}{q}} + x^{\frac{q-1}{q}}} = \frac{1}{qx^{\frac{q-1}{q}}} = \frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1}.$$

Ja p ir vesels skaitlis, tad, izmantojot teorēmu par funkciju kompozīcijas atvasināšanu [5.17.teorēma], iegūsim

$$\left(x^{\frac{p}{q}}\right)' = \left(\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p\right)' = p\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p-1}\cdot\left(x^{\frac{1}{q}}\right)' = px^{\frac{p-1}{q}}\cdot\frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}.\ ■$$

Augstāku kārtu atvasinājumi

Diferencējot funkciju f, rezultātā mēs iegūstam funkciju f'. Ja mēs atkal diferencējam funkciju f', iegūsim citu funkciju, kuru apzīmē ar f'' un sauc par funkcijas f **otro atvasinājumu**. Turpinot diferencēšanas darbību, varam iegūt f trešās kārtas atvasinājumu utt. Tātad $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$, $n = 1, 2, \ldots$.

Pirmā atvasinājuma atrašanai izmantojām apzīmējumus

$$f'(x) = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{\mathrm{df(x)}}{\mathrm{dx}} = D_x y = D_x f(x).$$

Līdzīgus apzīmējumus lieto arī augstāku kārtu atvasinājumu apzīmēšanai

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dx^2}} = \frac{\mathrm{d^2f(x)}}{\mathrm{dx^2}} = D_x^2 y = D_x^2 f(x),$$

$$f'''(x) = \frac{\mathrm{d^3y}}{\mathrm{dx^3}} = \frac{\mathrm{d^3f(x)}}{\mathrm{dx^3}} = D_x^3 y = D_x^3 f(x), \text{ utt.}$$

5.19. Piemērs. Ja $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 9$, tad $f'(x) = 12x^2 - 12x$, $f''(x) = 24x - 12$, $f'''(x) = 24$, $f^{\mathrm{IV}}(x) = 0$. Tā kā $0' = 0$, tad visi pārējie augstāku kārtu atvasinājumi ir 0. ■

Apslēptu (implicitu) funkciju atvasināšana

5.20. DEFINĪCIJA. Ja funkcija $y = y(x)$ uzdota ar vienādojumu, kas nav atrisināts attiecībā pret y, tad šādu funkciju sauc par **apslēptu** jeb **implicitu funkciju.**

5.21. Piemēri. Apslēptas funkcijas ir
1. $y^2 + 4y = 5x^6$,
2. $\sin xy = 1$. ■

Jāatzīmē, ka ne katrs vienādojums nosaka funkciju, piemēram, vienādojumu $x^2 + y^2 = -1$ neapmierina neviens reālu skaitļu x un y pāris.

Izmantojot 5.17. teorēmu par funkciju kompozīcijas atvasināšanu, jebkurai konkrētai apslēptai funkcijai var atrast atvasinājumu. Piemēram, kā atvasināt $y^2 + 4y = 5x^6$? Mainīgais y jāuztver kā argumenta x funkcija un vienādības abas puses jāatvasina pēc x:

$2y \cdot y' + 4y' = 30x^5$ jeb $y' = \frac{30x^5}{2y+4}$.

Varam ievērot, ka y' izteiksme satur gan x, gan y. Ja mēs vēlamies atrast līknes pieskari kādā zināmā līknes punktā, tad virziena koeficienta atrašana īpašas grūtības nerada.

5.22. Piemērs. Atrast funkcijas $xy - 3y = x^2 + 1$ atvasinājumu. Atvasinājumu funkcijai y atradīsim divos dažādos veidos.

1.veids. Izsakām funkciju y kā argumenta x funkciju: $y = \frac{x^2+1}{x-3}$ un atrodam atvasinājumu:

$y' = \frac{2x(x-3)-(x^2+1)}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x-1}{(x-3)^2}$.

2.veids. Atvasinām funkciju y kā apslēptu funkciju:

$y + xy' - 3y' = 2x$ jeb $y' = \frac{2x-y}{x-3}$ —

atvasinājums satur gan x, gan y. Lai pārliecinātos, ka iegūts tas pats rezultāts kā 1.veidā, nepieciešams 2.veidā iegūtajā atvasinājuma izteiksmē y vietā ievietot funkcijas y analītisko izteiksmi ar argumentu x:

$y' = \frac{2x - \frac{x^2+1}{x-3}}{x-3} = \frac{2x^2-6x-x^2-1}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x-1}{(x-3)^2}$. ■

Ja vienādojums ar x un y nosaka funkciju $y = f(x)$ un ja tā ir diferencējama, tad apslēptās funkcijas atvasināšanas metode korekti izsaka y'. Bet ne vienmēr patvaļīgai funkcijai to var pateikt.

5.23. Piemērs. Formula $x^2 + y^2 = 25$ nosaka divas nepārtrauktas funkcijas $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ un $g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$. Abas šīs funkcijas ir diferencējamas intervālā $]-5;5[$.

Funkciju $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ var pierakstīt kā $x^2 + (f(x))^2 = 25$. Tad, atvasinot to kā apslēptu funkciju, iegūsim:

$2x + 2f(x) \cdot f'(x) = 0$ jeb $f'(x) = \frac{-x}{f(x)} = -\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$.

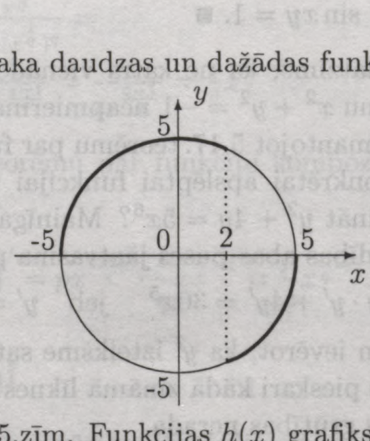
Līdzīgi: $g'(x) = \frac{-x}{g(x)} = \frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$.

Ja atvasinām $x^2 + y^2 = 25$, tad $2x + 2y \cdot y' = 0$ un iegūsim

$$y' = -\frac{x}{y} = \begin{cases} \frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}, & y = f(x); \\ \frac{x}{\sqrt{25-x^2}}, & y = g(x). \end{cases}$$

Tomēr ievērosim, ka $x^2 + y^2 = 25$ nosaka daudzas un dažādas funkcijas, piemēram [skatīt 5.5 zīm.],

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{25 - x^2}, & -5 \le x \le 2; \\ -\sqrt{25 - x^2}, & 2 < x \le 5. \end{cases}$$



5.5.zīm. Funkcijas $h(x)$ grafiks.

Šī funkcija nav nepārtraukta punktā 2, tas nozīmē, ka tā nav arī diferencējama šajā punktā. ■

6. nodaļa

FUNKCIJU PĒTĪŠANA I

Funkcijas lielākā un mazākā vērtība

Runājot par nepārtrauktām funkcijām, mēs jau agrāk [4. nodaļa] atzīmējām, ka nepārtraukta funkcija slēgtā intervālā $[a; b]$ sasniedz savu lielāko un mazāko vērtību. Kā atrast tos punktus, kuros funkcija sasniedz šīs ekstremālās vērtības? Izrādās, ka tas var notikt tikai noteiktos punktos, proti, **intervāla galapunktos** vai **stacionārajos punktos** – punktos, kuros funkcijas atvasinājums ir 0, vai **singulārajos punktos** – punktos, kuros funkcijas atvasinājums neeksistē. Kopā visus šos triju veidu punktus sauc par **kritiskajiem punktiem.**

To, ka īpaša loma ir stacionārajiem punktiem, rāda nākamā teorēma.

FERMĀ TEORĒMA (ekstremālās vērtības eksistences nepieciešamais nosacījums). Pieņemsim, ka funkcija f ir definēta intervālā I. Ja diferencējama funkcija f punktā c sasniedz savu ekstremālo vērtību un c nav intervāla galapunkts, tad $f'(c) = 0$.

□ Ērtības labad pieņemsim, ka $f(c)$ ir maksimālā vērtība (ja tā ir minimālā vērtība, pierāda analoģiski). Tad $f(x) \leq f(c)$ jeb $f(x) - f(c) \leq 0$, visiem $x \in I$.

Ja $x < c$, tad $x - c < 0$ un

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0. \tag{6.1}$$

Ja $x > c$, tad $x - c > 0$ un

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0. \tag{6.2}$$

Tā kā f ir diferencējama funkcija, tad eksistē tās atvasinājums punktā c, t.i., eksistē

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

No nevienādībām (6.1) un (6.2) seko, ka

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0, \quad \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

Ņemot vērā $f'(c)$ eksistenci, jāsecina, ka $f'(c) = 0$. ■

Tātad, lai atrastu nepārtrauktas funkcijas ekstremālās vērtības slēgtā intervālā, jārīkojas sekojoši:
1) jāatrod kritiskie punkti,
2) jāizskaitļo funkcijas vērtības šajos punktos.

6.1. Piemērs. Jāatrod funkcijas $f(x) = 2x^3 - 24x + 1$ ekstremālās vērtības intervālā $[-3; 1]$.

Atrodam atvasinājumu $f'(x) = 6x^2 - 24$, pielīdzinām to 0 un iegūsim divus stacionāros punktus -2 un 2, bet $2 \notin [-3; 1]$. Tātad kritiskie punkti ir -3, -2 un 1. Izrēķinām funkcijas vērtības šajos punktos:
$f(-3) = 2 \cdot (-27) + 72 + 1 = 19$,
$f(-2) = 2 \cdot (-8) + 48 + 1 = 33$,
$f(1) = 2 - 24 + 1 = -21$.
Secinām, ka intervālā $[-3; 1]$ funkcijas $f(x) = 2x^3 - 24x + 1$ lielākā vērtība ir $f(-2) = 33$, bet mazākā vērtība ir $f(1) = -21$. ■

Monotonitāte

6.2. DEFINĪCIJA. Pieņemsim, ka funkcija f ir definēta intervālā I. Funkciju f sauc par **augošu** intervālā I, ja

$$\forall x_1, x_2 \in I \; [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)].$$

Funkciju f sauc par **dilstošu** intervālā I, ja

$$\forall x_1, x_2 \in I \; [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)].$$

Funkciju f sauc par **stingri monotonu** intervālā I, ja tā ir dilstoša vai augoša šajā intervālā.

Lai pamatotu augšanas un dilšanas pietiekamos nosacījumus, mums būs nepieciešami divi palīgrezultāti – Rolla lemma un Lagranža teorēma.

ROLLA LEMMA. Pieņemsim, ka $f(x)$ ir intervālā $[a;b]$ nepārtraukta funkcija, intervāla iekšējos punktos tā ir diferencējama funkcija un intervāla galapunktos $f(x)$ vērtības ir vienādas: $f(a) = f(b)$. Tad eksistē vismaz viens tāds punkts $c \in]a;b[$, ka $f'(c) = 0$.

□ Pieņemsim, ka M un m attiecīgi ir funkcijas $f(x)$ lielākā un mazākā vērtība intervālā $[a;b]$. Pēc nepārtrauktu funkciju īpašībām (Veierštrāsa teorēma) šādas vērtības eksistē.

Ja $M = m$, tad $f(x)$ ir intervālā $[a;b]$ konstanta funkcija un tad $f'(x) = 0$ jebkuram x.

Ja $m < M$, tad vismaz viens no skaitļiem m vai M atšķiras no $f(a) = f(b)$. Pieņemsim, ka $M \neq f(a)$ (gadījumu $m \neq f(a)$ pierāda analoģiski). Tas nozīmē, ka eksistē tāds punkts $c \in]a;b[$, kurā funkcija $f(x)$ sasniedz savu lielāko vērtību $M = f(c)$. Tā kā punktā c funkcija ir diferencējama, tad pēc Fermā teorēmas $f'(c) = 0$. ■

Rolla lemmai ir vienkārša ģeometriskā interpretācija — ja lemmas nosacījumi ir spēkā, tad funkcijas $y = f(x)$ grafikam eksistē tāds punkts $(c, f(c))$, kurā novilktā pieskare ir paralēla abscisu asij.

LAGRANŽA TEORĒMA (vidējās vērtības teorēma). Pieņemsim, ka $f(x)$ ir intervālā $[a;b]$ nepārtraukta funkcija un tā ir diferencējama intervāla iekšējos punktos. Tad intervālā $]a;b[$ eksistē vismaz viens tāds punkts c, ka $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

□ Apskatīsim intervālā $[a;b]$ funkciju $F(x) = f(x) - \lambda x$ un definēsim koeficientu λ tā, lai $F(a) = F(b)$, t.i., $f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b$, no šejienes seko, ka $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Funkcija F apmierina visus Rolla teorēmas nosacījumus:

1) tā ir nepārtraukta kā nepārtrauktu funkciju starpība;

2) tā ir diferencējama, jo pēc teorēmas nosacījumiem $f(x)$ ir diferencējama, $(\lambda x)' = \lambda$ un diferencējamu funkciju starpība ir diferencējama funkcija;

3) $F(a) = F(b)$.

Tāpēc $\exists c \in]a;b[\quad F'(c) = 0$. Esam ieguvuši, ka $0 = F'(c) = f'(c) - \lambda$ jeb $f'(c) = \lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ■

Fermā, Rolla un Lagranža teorēmas matemātiskās analīzes pamatkursā pieņemts saukt par diferenciālrēķinu pamatteorēmām.

Tagad mēs varam pierādīt funkcijas augšanas un dilšanas pietiekamos nosacījumus.

6.3. TEORĒMA. Pieņemsim, ka $f(x)$ ir intervālā $[a;b]$ nepārtraukta funkcija un tā ir diferencējama visos intervāla iekšējos punktos.
1) Ja $f'(x) > 0$, visiem $x \in]a;b[$, tad f ir augoša intervālā $]a;b[$.
2) Ja $f'(x) < 0$, visiem $x \in]a;b[$, tad f ir dilstoša intervālā $]a;b[$.

□ Pierādījumu veiksim 1) gadījumā — 2) gadījumā tas ir līdzīgs.

Pieņemsim, ka $\forall x \in]a;b[\ f'(x) > 0$, un izvēlēsimies divus patvaļīgus punktus x_1, $x_2 \in]a;b[$ tādus, ka $x_2 > x_1$. Tad saskaņā ar Lagranža teorēmu

$$\exists c \in]x_1;x_2[\quad f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Tā kā visiem $x \in]a;b[\ f'(x) > 0$, tad arī $f'(c) > 0$, tas nozīmē, ka

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0.$$

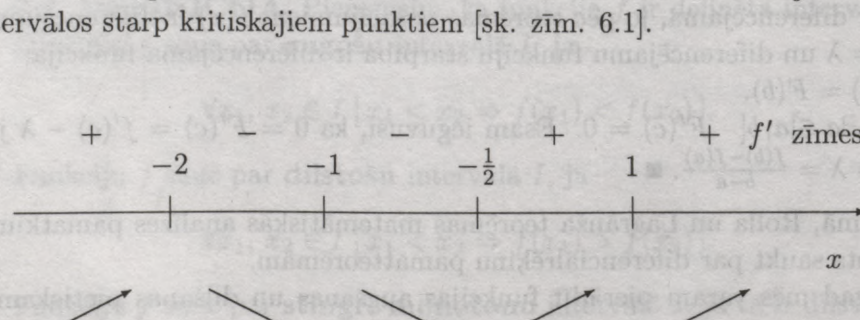
Tā kā $x_2 > x_1$, t.i., $x_2 - x_1 > 0$, tad jāsecina, ka $f(x_2) > f(x_1)$, kas arī nozīmē, ka funkcija $f(x)$ ir augoša intervālā $]a;b[$. ■

6.4. Piemērs. Jānosaka funkcijas $f(x) = \frac{4x+5}{1-x^2}$ augšanas un dilšanas intervāli.

Atrodam funkcijas atvasinājumu

$$f'(x) = \frac{4(1-x^2) + 2x(4x+5)}{(1-x^2)^2} = \frac{2(2x^2+5x+2)}{(1-x^2)^2}.$$

Atrodam kritiskos punktus:
1) stacionāros punktus atradīsim kā vienādojuma $2x^2 + 5x + 2 = 0$ saknes, tās ir $x_1 = -2$ un $x_2 = -\frac{1}{2}$;
2) singulārie punkti ir $x_3 = -1$ un $x_4 = 1$.
Atliekam šos punktus uz koordinātu ass un nosakām atvasinājuma zīmes intervālos starp kritiskajiem punktiem [sk. zīm. 6.1].



6.1. zīm.

Esam ieguvuši, ka funkcija aug $]-\infty;-2[\cup]-\frac{1}{2};1[\cup]1;+\infty[$ un dilst $]-2;-1[\cup]-1;-\frac{1}{2}[$. Punktos -1 un 1 atvasinājums neeksistē, bet vispārīgā gadījumā tie var ietekmēt atvasinājuma zīmi. Taču, ja singulārais punkts neietekmē atvasinājuma zīmi (kā tas ir šajā gadījmā), tad tomēr tas ir jāizslēdz no monotonitātes intervāla, ja tas ir arī funkcijas pārtraukuma punkts. ■

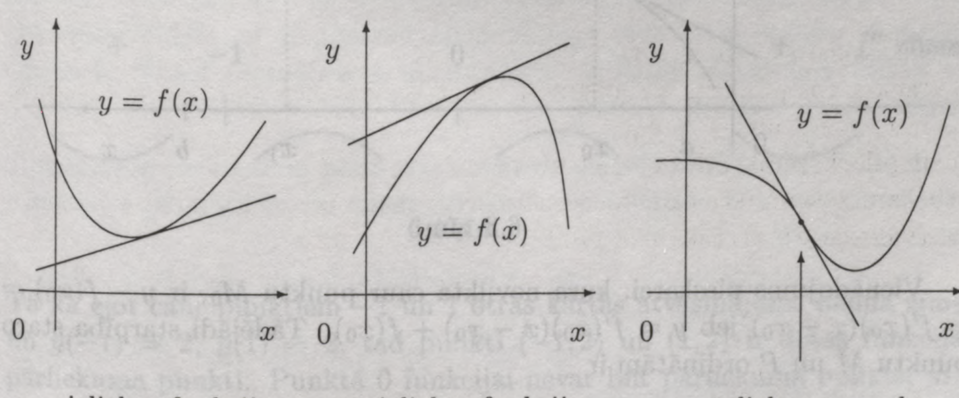
Ieliektība un izliektība

6.5. DEFINĪCIJA. Diferencējamu funkciju $f(x)$ un tās grafiku intervālā $]a;b[$ sauc par **izliektu** (izliektu uz augšu), ja grafiks atrodas zem jebkuras grafika pieskares minētajā intervālā.

Diferencējamu funkciju $f(x)$ un tās grafiku intervālā $]a;b[$ sauc par **ieliektu** (izliektu uz leju), ja grafiks atrodas virs jebkuras grafika pieskares minētajā intervālā.

6.6. DEFINĪCIJA. Funkcijas grafika punktu, kas atdala grafika izliekto daļu no ieliektās daļas, sauc par grafika **pārliekuma punktu** (infleksijas punktu).

Ilustrācijas augstāk minētajām definīcijām redzamas 6.2.zīmējumā.



6.2. zīm.

Kā var noteikt ieliekuma un izliekuma intervālus, to apraksta nākamā teorēma.

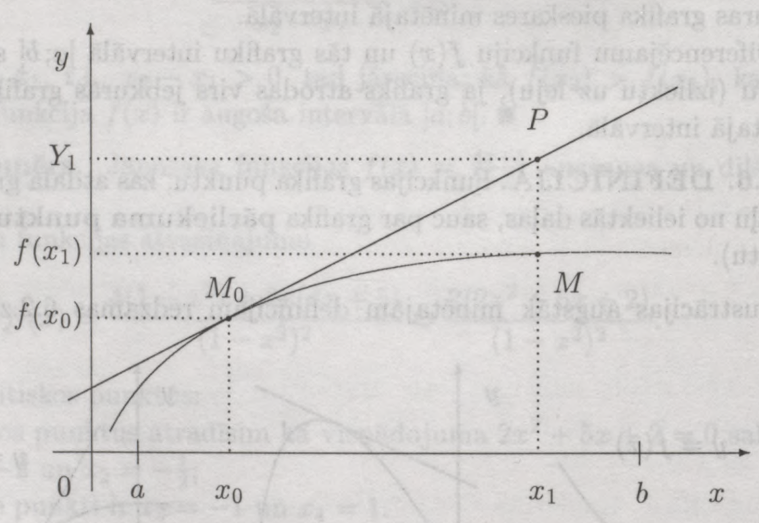
6.7. TEORĒMA (ieliekuma un izliekuma noteikšanas pietiekamie nosacījumi). Pieņemsim, ka funkcijai $f(x)$ intervālā $]a;b[$ eksistē otrās kārtas atvasinājumi.

1) Ja $\forall x \in]a;b[\quad f''(x) > 0,$ tad $f(x)$ ir ieliekta funkcija šajā intervālā.

2) Ja $\forall x \in]a;b[\quad f''(x) < 0,$ tad $f(x)$ ir izliekta funkcija šajā intervālā.

□ Pierādījumu veiksim 2) gadījumā; 1) gadījumā tas ir analoģisks.

Tātad $f''(x) < 0$ visiem $x \in]a;b[$. Izvēlamies patvaļīgu punktu M_0 ar koordinātām $M_0(x_0, f(x_0))$, kur $x_0 \in]a;b[$, un novelkam šajā punktā pieskari. Mums ir jāpierāda, ka funkcijas grafiks intervālā $]a;b[$ atrodas zem pieskares. Ja $M(x_1, f(x_1))$ ir funkcijas grafika punkts un $P(x_1, Y_1)$ ir atbilstošais ar to pašu abscisu pieskares punkts, tad jāpierāda, ka ir spēkā nevienādība $Y_1 > f(x_1)$ [6.3.zīmējums].



6.3. zīm.

Vienādojums pieskarei, kura novilkta caur punktu M_0, ir $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ jeb $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Tādējādi starpība starp punktu M un P ordinātām ir

$$f(x_1) - Y_1 = f(x_1) - (f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0)) = f(x_1) - f(x_0) - f'(x_0)(x_1 - x_0).$$

Labās puses starpību $f(x_1) - f(x_0)$ pārveidosim pēc Lagranža teorēmas

$$f(x_1) - f(x_0) = f'(c)(x_1 - x_0),$$

kur punkts c atrodas starp x_0 un x_1. Tad

$$f(x_1) - Y_1 = f'(c)(x_1 - x_0) - f'(x_0)(x_1 - x_0) = (x_1 - x_0)(f'(c) - f'(x_0)).$$

Starpību $f'(c) - f'(x_0)$ arī var pārveidot pēc Lagranža teorēmas, jo pēc dotā $f(x)$ ir divreiz diferencējama:

$$f'(c) - f'(x_0) = f''(c_1)(c - x_0),$$

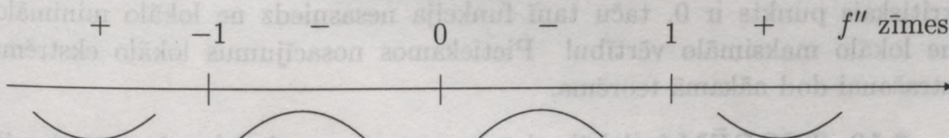
kur c_1 atrodas starp c un x_0. Rezultātā esam ieguvuši

$$f(x_1) - Y_1 = (x_1 - x_0)(c - x_0)f''(c_1).$$

Tā kā c atrodas starp x_0 un x_1, tad starpības $x_1 - x_0$ un $c - x_0$ ir ar vienādām zīmēm, to reizinājums ir pozitīvs. Pēc dotā $f''(x) < 0$ jebkuram $x \in]a; b[$, tātad arī punktā c_1: $f''(c_1) < 0$. Tādējādi $f(x_1) - Y_1 < 0$, un funkcijas grafiks ir izliekts. ■

Tātad punkti, kuros funkcijas otrās kārtas atvasinājums ir vienāds ar nulli vai neeksistē varētu būt pārliekuma punktu kandidāti. Pareizo secinājumu izdarīt palīdzēs otrās kārtas atvasinājuma zīmju izmaiņa.

6.8. Piemēri. 1. Funkcijas $y = 3x^2 - \frac{1}{x^2}$ otrās kārtas atvasinājums ir $y'' = 6\frac{x^4-1}{x^4}$. Kritiskie punkti ir -1, 0 un 1. Nosakām atvasinājuma zīmes:



6.4.zīm.

Tā kā ejot caur punktiem -1 un 1 otrās kārtas atvasinājums maina zīmes un $y(-1) = 2$, $y(1) = 2$, tad punkti $(-1, 2)$ un $(1, 2)$ ir dotās funkcijas pārliekuma punkti. Punktā 0 funkcijai nevar būt pārliekuma punkts, jo 0 nepieder definīcijas apgabalam. Tiesa, šoreiz arī otrās kārtas atvasinājuma zīmes neizmainījās ejot caur šo punktu.

2. Savkārt funkcijai $y = \sqrt[5]{x-2}$ otrās kārtas atvasinājums ir $y'' = \frac{-4}{25\sqrt[5]{(x-2)^9}}$, kas liecina, ka vienīgais pārliekums varētu būt punktā 2. Un tā patiešām arī ir, jo ejot caur šo punktu atvasinājums maina zīmi no + uz − un 2 ir arī funkcijas definīcijas apgabala punkts. Tātad punkts $(2, 0)$ ir piemērā dotās funkcijas pārliekuma punkts. ■

Lokālie ekstrēmi

Nodaļas sākumā mēs iztirzājām jautājumu, kā atrast funkcijas lielāko un mazāko vērtību dotā kopā. Dažkārt šīs vērtības sauc par **globālajām** atšķirībā no tā saucamajām **lokālajām**. Jebkurā gadījmā atcerieties, ka globālās ekstremālās vērtības ir arī lokālās.

6.9. DEFINĪCIJA. Pieņemsim, ka funkcijas f definīcijas apgabals S satur punktu c.

$f(c)$ sauc par funkcijas f **lokālo minimālo vērtību**, ja eksistē tāds intervāls $]a;b[$, kurš satur punktu c, ka $f(c)$ ir (globālā) minimālā vērtība kopā $]a;b[\cap S$.

$f(c)$ sauc par funkcijas f **lokālo maksimālo vērtību** , ja eksistē tāds intervāls $]a;b[$, kurš satur punktu c, ka $f(c)$ ir (globālā) maksimālā vērtība kopā $]a;b[\cap S$.

$f(c)$ sauc par **lokālo ekstremālo vērtību**, ja tā ir lokālā minimālā vai lokālā maksimālā vērtība.

Meklējot lokālās ekstremālās vērtības, jāapskata funkcijas kritiskie punkti — stacionārie (atvasinājums ir 0) un singulārie (atvasinājums neeksistē) punkti. Nevar apgalvot, ka jebkurā kritiskajā punktā funkcija sasniedz lokālo ekstremālo vērtību. Kā vienāršāko pretpiemēru var minēt funkciju $y = x^3$, kuras pirmās kārtas atvasinājums ir $y' = 3x^2$ un līdz ar to vienīgais kritiskais punkts ir 0, taču tanī funkcija nesasniedz ne lokālo minimālo, ne lokālo maksimālo vērtību! Pietiekamos nosacījumus lokālo ekstrēmu atrašanai dod nākamā teorēma.

6.10. TEORĒMA (lokālo ekstrēmu atrašanas pietiekamie nosacījumi). Pieņemsim, ka f ir nepārtraukta funkcija vaļējā intervālā $]a;b[$, kurš satur kritisko punktu c.

Ja $\forall x \in]a;c[\ f'(x) > 0$, un $\forall x \in]c;b[\ f'(c) < 0$, tad $f(c)$ ir funkcijas f lokālā maksimālā vērtība.

Ja $\forall x \in]a;c[\ f'(x) < 0$, un $\forall x \in]c;b[\ f'(c) > 0$, tad $f(c)$ ir funkcijas f lokālā minimālā vērtība.

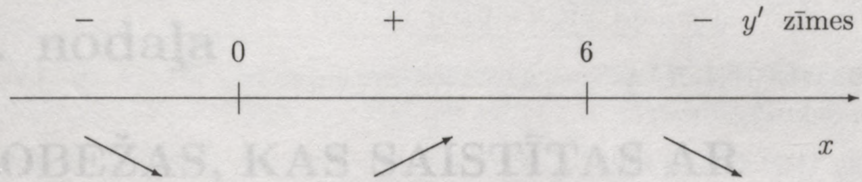
Ja $f'(x)$ ir ar vienu un to pašu zīmi abpus c, tad $f(c)$ nav funkcijas f lokālā ekstremālā vērtība.

□ Ja $\forall x \in]a;c[\ f'(x) > 0$, tad f ir augoša funkcija intervālā $]a;c[$. Ja $\forall x \in]c;b[\ f'(x) < 0$, tad f ir dilstoša funkcija intervālā $]c;b[$. Tādējādi $\forall x \in]a;b[\ (\,x \neq c \Rightarrow f(x) < f(c)\,)$. Seko, ka $f(c)$ ir funkcijas maksimālā vērtība intervālā $]a;b[$.

Pārējos divus teorēmas apgalvojumus pierāda analoģiski. ■

6.11. Piemērs. Atradīsim funkcijas $y = \frac{x-3}{x^2}$ ekstremālās vērtības!

Tā kā $y' = \frac{x^2-(x-3)2x}{x^4} = \frac{6-x}{x^3}$, tad kritiskie punkti ir $x_1 = 6$ un $x_2 = 0$. Nosakām pirmās kārtas atvasinājuma zīmes:



6.5. zīm.

Tā kā punktā 0 funkcija nav definēta, tad tajā funkcija nesasniedz ekstremālās vērtības. Bet punkts $(6, \frac{1}{12})$, ņemot vērā zīmju maiņu no + uz −, ir lokālais maksimuma punkts jeb $\frac{1}{12}$ ir lokālā maksimālā vērtība, ko funkcija sasniedz punktā 6. ■

Lokālie ekstrēmi

Nodaļas sākumā mēs [illegible], ka atrast funkcijas lielāko un mazāko vērtību dotā kopā. [illegible] vērtības sauc par globālajām atšķirībā no tā saucamajām lokālajām. Jebkurā gadījumā atcerieties, ka globālās ekstremālās vērtības ir arī lokālās.

6.9. DEFINĪCIJA. Pieņemsim, ka funkcijas f definīcijas apgabals S satur punktu c.

$f(c)$ sauc par funkcijas f **lokālo minimālo vērtību**, ja eksistē tāds intervāls $]a;b[$, kurš satur punktu c, ka $f(c)$ ir (globālā) minimālā vērtība kopā $]a;b[\cap S$.

$f(c)$ sauc par funkcijas f **lokālo maksimālo vērtību**, ja eksistē tāds intervāls $]a;b[$, kurš satur punktu c, ka $f(c)$ ir (globālā) maksimālā vērtība kopā $]a;b[\cap S$.

$f(c)$ sauc par **lokālo ekstremālo vērtību**, ja tā ir lokālā minimālā vai lokālā maksimālā vērtība.

Meklējot lokālās ekstremālās vērtības, jāapskata funkcijas kritiskie punkti — stacionārie (atvasinājums ir 0) un singulārie (atvasinājums neeksistē) punkti. Nevar apgalvot, ka jebkurā kritiskajā punktā funkcija sasniedz lokālo ekstremālo vērtību. Kā vienkāršāko pretpiemēru var minēt funkciju $y = x^3$, kuras pirmās kārtas atvasinājums ir $y' = 3x^2$ un līdz ar to vienīgais kritiskais punkts ir 0, taču tajā funkcija nesasniedz ne lokālo minimālo, ne lokālo maksimālo vērtību! Pietiekamos nosacījumus lokālo ekstrēmu atrašanai dod nākamā teorēma.

6.10. TEORĒMA (lokālo ekstrēmu atrašanas pietiekamie nosacījumi). Pieņemsim, ka f ir nepārtraukta funkcija vaļējā intervālā $]a;b[$, kurš satur kritisko punktu c.

Ja $\forall x \in]a;c[\ f'(x) > 0$, un $\forall x \in]c;b[\ f'(c) < 0$, tad $f(c)$ ir funkcijas f lokālā maksimālā vērtība.

Ja $\forall x \in]a;c[\ f'(x) < 0$, un $\forall x \in]c;b[\ f'(c) > 0$, tad $f(c)$ ir funkcijas f lokālā minimālā vērtība.

Ja $f'(x)$ ir ar vienu un to pašu zīmi abpus c, tad $f(c)$ nav funkcijas f lokālā ekstremālā vērtība.

□ Ja $\forall x \in]a;c[\ f'(x) > 0$, tad f ir augoša funkcija intervālā $]a;c]$. Ja $\forall x \in [c;b[\ f'(x) < 0$, tad f ir dilstoša funkcija intervālā $[c;b[$. Tādējādi $\forall x \in]a;b[\ (x \neq c \Rightarrow f(x) < f(c))$. Seko, ka $f(c)$ ir funkcijas maksimālā vērtība intervālā $]a;b[$.

Pārējos divus teorēmas apgalvojumus pierāda analoģiski. ■

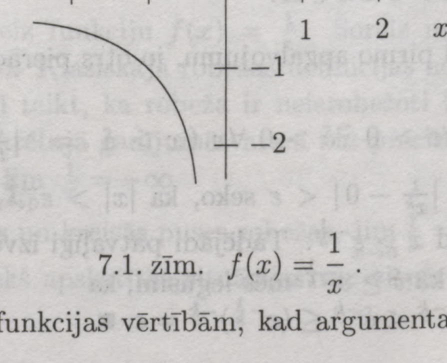
7. nodaļa

ROBEŽAS, KAS SAISTĪTAS AR BEZGALĪBU

Robežas, kad arguments tiecas uz bezgalību

Bezgalības jēdziens šī vārda plašākajā nozīmē ir drīzāk filozofijas kategorija nekā matemātikas nozarei piederošs jēdziens. Tomēr arī matemātikā bez tā neiztikt. Matemātiskās analīzes kursa ietvaros ar bezgalībām $+\infty$ vai $-\infty$ tiek apzīmēti noteikti skaitļu intervāli. Proti, $[a;+\infty[=\{x\in\mathbb{R}|\,a\leq x\}$ un $]-\infty;b]=\{x\in\mathbb{R}|\,x\leq b\}$, kur $a,b\in\mathbb{R}$. Ievērojiet, ka ∞ nav skaitlis un ar to nevar izpildīt aritmētiskās darbības.

Apskatīsim funkciju $f(x)=\frac{1}{x}$, $x>0$ [7.1.zīm.].



7.1. zīm. $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

Kas notiek ar funkcijas vērtībām, kad argumenta vērtības aizvien pieaug, citiem vārdiem sakot, x tiecas uz plus bezgalību? $x \to +\infty$ jāsaprot tā, ka x kļūst aizvien lielāks un lielāks, bez ierobežojuma. Varam sastādīt tabulu ar atbilstošām argumenta un funkcijas vērtībām:

x	10	100	1000	10000	$\to +\infty$
y	0,1	0,01	0,001	0,0001	$\to 0$

Un tātad vispārīgā gadījumā robežas, kad arguments neierobežoti pieaug, varam definēt šādi:

7.1. DEFINĪCIJA.

(i) $(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L) \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$
$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in Dom(f)\ (x > \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon))$;

(ii) $(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L) \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$
$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in Dom(f)\ (x < -\delta\ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon))$;

(iii) $(\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L) \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$
$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in Dom(f)\ (|x| > \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon))$.

Ievērojiet, ka, piemēram, izteikums $x > \delta$ nozīmē, ka x mainās pa visu kopu $]\delta; +\infty[$, bet izteikums $|x| > \delta$ nozīmē $x \in]-\infty; -\delta[\cup]\delta; +\infty[$ (tātad ∞ nozīme, ka vienlaikus tiek pieļauta argumenta tiekšanās gan uz + bezgalību, gan uz - bezgalību).

Ir spēkā apgalvojums

7.2. APGALVOJUMS.
1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^k} = 0, \quad k > 0$;
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^k} = 0, \quad k > 0\,\&\,k \in \mathbb{Z}$.

□ Pierādīsim tikai pirmo apgalvojumu, jo otrs pierādāms analoģiski.

Mums jāpierāda:
$(\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^k} = 0) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x\ (x > \delta\ \Rightarrow\ |\frac{1}{x^k} - 0| < \varepsilon))$. No pēdējās nevienādības $|\frac{1}{x^k} - 0| < \varepsilon$ seko, ka $|x| > \varepsilon^{-\frac{1}{k}}$. Tā kā $x \to +\infty$ (t.i., $x \in]\delta; +\infty[$), tad $x > \varepsilon^{-\frac{1}{k}}$. Tādējādi patvaļīgi izvēlētam $\varepsilon > 0$ atbilstošo $\delta > 0$ izvēloties kā $\delta \geq \varepsilon^{-\frac{1}{k}}$ mēs iegūsim, ka
$|\frac{1}{x^k} - 0| = \frac{1}{x^k} = x^{-k} < \delta^{-k} \leq (\varepsilon^{-\frac{1}{k}})^{-k} = \varepsilon$. ■

Gadījumā, kad gan $x \to +\infty$, gan $x \to -\infty$, robežas vērtība ir viena un tā pati, tad varam apskatīt tikai vienu kopīgo gadījumu $x \to \infty$. No 7.2. apgalvojuma seko, ka $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^k} = 0$, ja tikai $k > 0$ un $k \in \mathbb{Z}$.

Atzīmēsim, ka rēķinot robežas, kad $x \to \pm\infty$, var lietot robežu teorēmas un to sekas [3.11-3.18]. Pierādījumi šiem gadījumiem ir analoģiski klasisko robežu pierādījumiem.

Tādējādi, ņemot vērā 7.2. apgalvojumu un robežu teorēmas, protam izrēķināt daudzas robežas, kad veidojas robežu nenoteiktība $\frac{\infty}{\infty}$.

7.3. Piemēri.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+3}{1-x^2+5x^3} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^3}(\frac{1}{x}+\frac{3}{x^3})}{\cancel{x^3}(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x}+5)} = \frac{0+0}{0-0+5} = 0.$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3-2x^2+2}{3x^3-9} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^3}(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^3})}{\cancel{x^3}(3-\frac{9}{x^3})} = \frac{1-0+0}{3-0} = \frac{1}{3}.$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3-5x^2+1}{2-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3(2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^3})}{x(\frac{2}{x}-1)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2(2-0+0)}{0-1} = \lim\limits_{x\to\infty}(-2x^2)$ — šī robeža neeksistē klasiskajā nozīmē, bet robežvērtību mēs varētu pierakstīt kā $-\infty$, jo $x \to \infty$ atbilstoši $x^2 \to +\infty$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-x}{3-\sqrt{4x^2+x-2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}(\frac{1}{x}-1)}{\cancel{x}(\frac{3}{x}-\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}})} = \frac{0-1}{0-\sqrt{4+0-0}} = \frac{1}{2}.$ ■

Vispārīgā gadījumā, ievērojot iepriekšējo piemēru rezultātus, varam secināt

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \begin{cases} 0, & \text{ja } n < m, \\ \frac{p}{q}, & \text{ja } n = m, \\ \pm\infty, & \text{ja } n > m, \end{cases}$$

kur $P_n(x)$ un $Q_m(x)$ ir tādas funkcijas, kurām var noteikt mainīgā x lielāko pakāpi: funkcijai $P_n(x)$ tā ir n, bet funkcijai $Q_m(x)$ tā ir m; p un q ir koeficienti pie šīm augstākajām pakāpēm.

Bezgalīgas robežas

Apskatīsim vēlreiz funkciju $f(x) = \frac{1}{x}$. Šoreiz mēs interesēsimies par situāciju, kad $x \to 0$. Klasiskajā robežas definīcijas nozīmē šī robeža neeksistē, bet varam arī teikt, ka robeža ir neierobežoti liela vai pierakstīt šo spriedumu ∞. Konkrētajā gadījumā varam pat precizēt un rakstīt

$\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

jeb, nešķirojot labās un kreisās puses robežas, $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x} = \infty$.

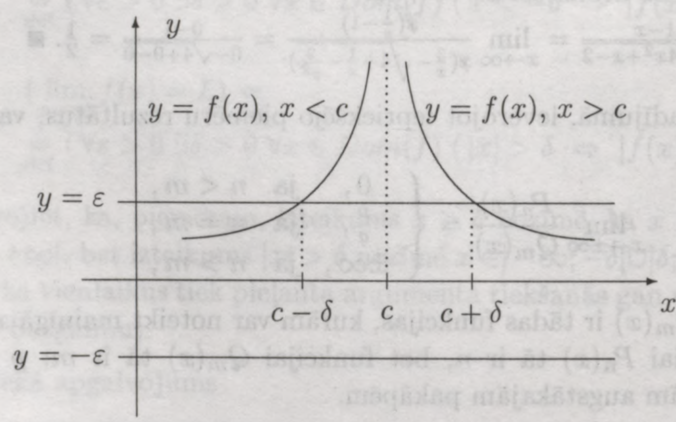
Teorētiski iepriekš apskatītās situācijas var vispārināt un dot sekojošu definīciju

7.4. DEFINĪCIJA. $(\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = +\infty) \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$
$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $(\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in Dom(f)\ (\,0 < x - c < \delta\ \Rightarrow\ f(x) > \varepsilon\,))$.

Jāņem vērā, ka varam apskatīt arī kreisās puses robežu, kā arī c var būt arī $+\infty$ vai $-\infty$, vai ∞. Attiecīgi pati robežvērtība var tikt novērtēta kā $+\infty$ vai $-\infty$, vai ∞.

Tikai iegaumējiet, ka funkcijai, kuras vērtības tiecas uz $\pm\infty$, nav robežas klasiskajā nozīmē. Sakot, ka funkcijai robeža ir bezgalība, tiek tikai uzsvērts, ka $f(x)$ vērtības neierobežoti pieaug, argumentam tiecoties uz c.

Noskaidrosim, kāda ir ģeometriskā interpretācija definīcijai
$(\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty) \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$
$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $(\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in Dom(f)\ (\,0 < |x - c| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x)| > \varepsilon\,))$.
Lai to izdarītu, izvēlēsimies patvaļīgu $\varepsilon > 0$ vērtību un konstruēsim joslu, ko ierobežo taisnes $y = \varepsilon$ un $y = -\varepsilon$ [7.2. zīmējums].



7.2.zīm.

Saskaņā ar definīciju, eksistē tāda punkta c apkārtne $]c-\delta; c+\delta[\setminus\{c\}$, ka funkcijas $f(x)$ grafika daļa, kas atbilst šai apkārtnei, atrodas ārpus minētās joslas. Ja ε vērtība tiek palielināta, tad vispārīgā gadījumā δ samazinās. Seko, ka grafiks neierobežoti tuvojas taisnei $x = c$, t.i., šī taisne ir grafika vertikālā asimptota.

7.5. DEFINĪCIJA. Funkciju $f(x)$ sauc par **bezgalīgi lielu** x-am tiecoties uz c, ja $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$.

Bezgalīgi lielām funkcijām vispārīgā gadījumā nevar attiecināt teorēmas par robežām. Tomēr

1) bezgalīgi lielas funkcijas un ierobežotas funkcijas summa ir bezgalīgi liela funkcija;

2) divu bezgalīgi lielu funkciju reizinājums ir bezgalīgi liela funkcija.

Bet divu bezgalīgi lielu funkciju summa *ne vienmēr* ir bezgalīgi liela funkcija.

7.6. Piemēri.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+2-4}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}$.

2. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{3}{x-2}-\frac{1}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x+6-1}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x+5}{x^2-4}\overset{11}{\underset{0}{=}}\infty$,

pie tam $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\frac{3}{x-2}-\frac{1}{x^2-4}\right)=+\infty$, bet $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\frac{3}{x-2}-\frac{1}{x^2-4}\right)=-\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{5x^2+2x-4}-3x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x^2+2x-4-9x^2}{\sqrt{5x^2+2x-4}+3x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-4x^2+2x-4}{\sqrt{5x^2+2x-4}+3x}=-\infty$ (skaitītājā lielāka pakāpe),

bet $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{5x^2+2x-4}-3x)=+\infty$, jo iekavās esošā pirmā izteiksme tiecas uz $+\infty$, bet otrā uz $-\infty$. Atņemot no pirmās otro, rezultātā mēs palielinām izteiksmes vērtību (t.i., $+\infty-(-\infty)=+\infty$). ∎

Bezgalīgi lielas funkcijas ir cieši saistītas ar bezgalīgi mazām funkcijām.

7.7. DEFINĪCIJA. Funkciju $f(x)$ sauc par **bezgalīgi mazu** x-am tiecoties uz c, ja $\lim\limits_{x\to c}f(x)=0$.

7.8. APGALVOJUMS. Ja funkcija $f:X\to\mathbb{R}$ ir bezgalīgi liela x-am tiecoties uz c, tad funkcija $\frac{1}{f}$ ir bezgalīgi maza x-am tiecoties uz c.

□ Pieņemsim, ka esam fiksējuši $\varepsilon>0$. Pēc dotā $\lim\limits_{x\to c}f(x)=\infty$, tātad eksistē tāds δ, ka

$\forall x\in Dom(f)\ (0<|x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)|>\frac{1}{\varepsilon})$ jeb $|\frac{1}{f(x)}|<\varepsilon$,

bet tas arī nozīmē, ka $\lim\limits_{x\to c}\frac{1}{f(x)}=0$. ∎

Apgrieztais apgalvojums ir spēkā tikai tajā gadījumā, kad $f(x)\neq 0$.

Ņemot vērā iepriekš sacīto, varam dažas robežu nenoteiktās situācijas novērtēt kā:

$\frac{a}{0^+}=+\infty$; $\frac{a}{0^-}=-\infty$; $\frac{a}{0}=\infty$; $\frac{a}{+\infty}=0$; $\frac{a}{-\infty}=0$; $\frac{a}{\infty}=0$.

Lopitāla kārtula

Apskatīsim trīs robežas:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$;

2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)}=\frac{4}{3}$;

3) $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^2+x}{\sqrt{3-x}-2} = \lim\limits_{x\to-1} \frac{x(x+1)(\sqrt{3-x}+2)}{3-x-4} = \lim\limits_{x\to-1} \frac{x(x+1)(\sqrt{3-x}+2}{-(x+1)} =$
$= \lim\limits_{x\to-1} \frac{x(\sqrt{3-x}+2)}{-1} = 4.$

Visos trijos robežu gadījumos mums ir jānovērš nenoteiktība $\frac{0}{0}$, bet katrā gadījumā mēs šo novēršanu panākam ar citu paņēmienu. Vai tomēr nevar visas šādas situācijas apvienot un risināt ar vienu metodi? Izrādās, ka jau 1696.gadā franču matemātiķis Lopitāls ir publicējis rezultātu:

7.9. TEORĒMA (Lopitāla kārtula nenoteiktības $\frac{0}{0}$ gadījumā). Pieņemsim, ka $\lim\limits_{x\to u} f(x) = \lim\limits_{x\to u} g(x) = 0$. Ja $\lim\limits_{x\to u} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ eksistē tādā nozīmē, ka robeža ir galīgs skaitlis vai $\pm\infty$, tad

$$\lim_{x\to u} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to u} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

kur u var būt $-\infty, +\infty, a, a^-, a^+$ (dotajā gadījumā $a \in \mathbb{R}$).

Izmantojot šo teorēmu, iepriekš apskatītās trīs robežas varam risināt šādi:

7.10. Piemēri.
1. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{x} \overset{\text{L.k.}}{=} \lim\limits_{x\to0} \frac{\cos x}{1} = 1;$
2. $\lim\limits_{x\to2} \frac{x^2-4}{x^2-x-2} \overset{\text{L.k.}}{=} \lim\limits_{x\to2} \frac{2x}{2x-1} = \frac{4}{3};$
3. $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^2+x}{\sqrt{3-x}-2} \overset{\text{L.k.}}{=} \lim\limits_{x\to-1} \frac{2x+1}{\frac{-1}{2\sqrt{3-x}}} = \frac{-1\cdot2\cdot2}{-1} = 4.$ ■

Taču esiet uzmanīgi, lietojot Lopitāla kārtulu! Piemēram,

$\lim\limits_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2+3x} \overset{\text{L.k.}}{=} \lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{2x+3} \overset{\text{L.k.}}{=} \lim\limits_{x\to0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$

ir *aplam* izrisināts uzdevums, otreiz lietot Lopitāla kārtulu nevar, jo $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{2x+3} = \frac{0}{3} = 0$. Vispārīgā gadījumā, ja saglabājas nenoteiktība $\frac{0}{0}$, var Lopitāla kārtulu pielietot viena uzdevuma risināšanā vairākkārtīgi.

7.11. Piemērs. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x-x}{x^3} \overset{\text{L.k.}}{=} \lim\limits_{x\to0} \frac{\cos x-1}{3x^2} \overset{\text{L.k.}}{=} \lim\limits_{x\to0} \frac{-\sin x}{6x} \overset{\text{L.k.}}{=}$
$= \lim\limits_{x\to0} \frac{-\cos x}{6} = -\frac{1}{6}.$ ■

7.9. teorēmas pierādījums balstās uz Košī vidējās vērtības teorēmu:

7.12. TEORĒMA (Košī vidējās vērtības teorēma). Pieņemsim, ka funkcijas f un g ir diferencējamas intervālā $]a;b[$ un nepārtrauktas visā intervālā $[a;b]$. Ja $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in]a;b[$, tad $\exists c \in]a;b[$, ka

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

□ Pie dotajiem teorēmas nosacījumiem varam lietot Lagranža teorēmu [6.nodaļa] un iegūt, ka

$$\exists c_1 \in]a;b[: \quad f(b) - f(a) = f'(c_1)(b-a),$$
$$\exists c_2 \in]a;b[: \quad g(b) - g(a) = g'(c_2)(b-a).$$

Ja $c_1 = c_2$, tad mēs iegūsim prasīto, taču vispārīgā gadījumā tā tas varētu arī nebūt. Taču no otrās izteiksmes seko, ka $g(b) - g(a) \neq 0$, jo pēc teorēmas nosacījumiem $g'(c_2) \neq 0$, $c_2 \in]a;b[$.

Lai pamatotu prasīto, apskatīsim sekojošu funkciju:

$$s(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Ievērosim, ka $s(a) = 0 = s(b)$. Funkcija s ir nepārtraukta intervālā $[a;b]$ un diferencējama tā iekšienē — tas seko no funkciju f un g dotajām īpašībām. Varam pielietot Lagranža teorēmu un secināt, ka $\exists c \in]a;b[$:

$$s'(c) = \frac{s(b) - s(a)}{b-a} = \frac{0-0}{b-a} = 0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c).$$

Izdarot attiecīgus pārveidojumus, iegūsim teorēmas apgalvojumā prasīto. ■

Lopitāla kārtulas (7.9. teorēmas) pierādījums.

□ Mēs pierādīsim tikai to gadījumu, kad $x \to a^+$ un robežvērtība ir reāls skaitlis.

No robežas $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ eksistences seko, ka atvasinājumi $f'(x)$ un $g'(x)$ eksistē kaut kādā punkta a labās puses apkārtnē $]a;b[$ un $g'(x) \neq 0$ šajā apkārtnē. Mēs nezinām, vai funkcijas f un g ir punktā a definētas, bet mēs zinām, ka $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = 0$ un $\lim\limits_{x \to a^+} g(x) = 0$, tāpēc punktā a funkciju f un g vērtības definēsim (vai pārdefinēsim) vienādas ar 0, tādējādi panākot, ka punktā 0 abas funkcijas ir no labās puses nepārtrauktas.

Tagad mēs varam lietot Košī vidējās vērtības teorēmu un secināt, ka

$$\exists c \in]a;b[\quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Tā kā $f(a) = g(a) = 0$, tad $\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Gadījumā, kad $b \to a^+$, arī $c \to a^+$, iegūsim, ka

$$\lim_{b \to a^+} \frac{f(b)}{g(b)} = \lim_{c \to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

kas ir ekvivalents ar sākumā izvirzīto hipotēzi.

Līdzīgs pierādījums būs tajos gadījumos, kad $x \to a^-$ vai $x \to a$. Pierādījums kļūst komplicētāks, ja $x \to \infty$. ■

Ļoti tipisks robežu nenoteiktības gadījums ir $\frac{\infty}{\infty}$. Izrādās, arī te var lietot Lopitāla kārtulu, jo ir spēkā

7.13. TEORĒMA (Lopitāla kārtula nenoteiktības $\frac{\infty}{\infty}$ gadījumā). Pieņemsim, ka $\lim\limits_{x\to u}|f(x)| = \lim\limits_{x\to u}|g(x)| = +\infty$. Ja $\lim\limits_{x\to u}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ eksistē tādā nozīmē, ka robeža ir galīgs skaitlis vai $\pm\infty$, tad

$$\lim_{x\to u}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to u}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

kur u var būt $-\infty, +\infty, a, a^-, a^+$ (dotajā gadījumā $a \in \mathbb{R}$).

Izmantojot 7.13. teorēmu, varam atrast šādas robežas:

7.14. Piemēri.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x} \overset{\text{L.k.}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{e^x} \overset{\text{L.k.}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x}{e^x} \overset{\text{L.k.}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6}{e^x} = 0$

(vispārīgā gadījumā $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x} = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$);

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha} \overset{\text{L.k.}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$, $\alpha > 0$;

3. $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} \overset{\text{L.k.}}{=} \lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x\cdot\frac{-1}{\sin^2 x}} = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}(-\sin x) = 1\cdot 0 = 0.$ ■

Arī dažas citu veidu nenoteiktības $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0 vai 1^∞ var pārveidot formā $\frac{0}{0}$ vai $\frac{\infty}{\infty}$ un pielietot Lopitāla kārtulu to atrašanai.

7.15. Piemēri.

1. $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim\limits_{x\to1^+}\frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} \overset{\frac{0}{0}\text{L.k.}}{=} \lim\limits_{x\to1^+}\frac{x\cdot\frac{1}{x}+\ln x - 1}{(x-1)\frac{1}{x}+\ln x} =$

$= \lim\limits_{x\to1^+}\frac{x\ln x}{x-1+x\ln x} \overset{\frac{0}{0}\text{L.k.}}{=} \lim\limits_{x\to1^+}\frac{x\cdot\frac{1}{x}+\ln x}{1+x\cdot\frac{1}{x}+\ln x} = \frac{1+0}{1+1+0} = \frac{1}{2};$

2. $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x \overset{0\cdot\infty}{=} \lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}\text{L.k.}}{=} \lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x(-\frac{1}{x^2})} = \lim\limits_{x\to0^+}(-x) = 0;$

3. $\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}} \overset{1^\infty}{=} \lim\limits_{x\to0} e^{\ln(1-x)^{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-x)}{x}} \overset{\frac{0}{0}\text{L.k.}}{=} e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-1}{1-x}} = \frac{1}{e}.$ ■

8. nodaļa

FUNKCIJU PĒTĪŠANA II

Asimptotas

Pieņemsim, ka funkcija $f(x)$ ir definēta punkta c apkārtnē (t.i., definēta intervālā $]c-\varepsilon; c+\varepsilon[\setminus \{c\})$.

8.1. DEFINĪCIJA. Taisni $x = c$ sauc par funkcijas $f(x)$ grafika **vertikālo asimptotu**, ja izpildās kaut viens no nosacījumiem

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty \text{ jeb } +\infty$$
$$\text{vai } \lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty \text{ jeb } +\infty.$$

Tātad, lai atrastu funkcijas grafika vertikālo asimptotu, nepieciešams atrast tādu punktu c, uz kuru tiecoties, funkcija ir bezgalīgi liela. Droši var apgalvot, ka vispārīgā gadījumā, ja $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ir racionāla funkcija ($P(x)$ un $Q(x)$ ir polinomi), tad $x = c$ būs funkcijas $f(x)$ vertikālā asimptota, ja $Q(c) = 0$, bet $P(c) \neq 0$.

8.2. Piemērs. Funkcijas $y = \frac{x^2+3x-1}{x-2}$ vertikālā asimptota ir $x = 2$, jo $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+3x-1}{x-2} \stackrel{9}{=}_{0} \infty$. Pie tam, $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x^2+3x-1}{x-2} \stackrel{9}{=}_{0^-} -\infty$ un $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x^2+3x-1}{x-2} \stackrel{9}{=}_{0^+} +\infty$. ■

8.3. DEFINĪCIJA. Ja eksistē tādi skaitļi a un b, ka

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x\to -\infty)}} (f(x) - (ax+b)) = 0,$$

tad taisni $y = ax + b$ sauc par funkcijas $f(x)$ grafika **slīpo asimptotu.**

Šādas asimptotas eksistence nozīmē, ja x tiecas uz bezgalību (plus vai mīnus), funkcija uzvedas gandrīz kā lineāra funkcija, t.i., starpība starp abām ir bezgalīgi mazs lielums.

Atradīsim asimptotas parametrus a un b. Pēc definīcijas

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} (f(x) - (ax + b)) = 0,$$

izmantojot robežu īpašības:

$$b = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} (f(x) - ax). \tag{8.1}$$

Šajā formulā parametrs a nav zināms. Lai to noteiktu, definīcijas vienādību pierakstīsim kā

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} x\left(\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x}\right) = 0.$$

Tā kā $x \to +\infty$ (vai $-\infty$), tad, lai robeža būtu vienāda ar 0, otrā reizinātāja robežai jābūt vienādai ar 0, t.i.,

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \left(\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x}\right) = 0.$$

No pēdējās robežu vienādības seko, ka

$$a = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{b}{x}\right) = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{f(x)}{x}. \tag{8.2}$$

8.4. DEFINĪCIJA. Slīpo asimptotu $y = b$ $(a = 0)$ sauc par **horizontālo asimptotu.**

Ja kaut viena no robežām (8.1), (8.2) neeksistē, tad funkcijai $y = f(x)$ slīpo asimptotu (arī horizontālo) nav.

Jāņem vērā, ka dotai funkcijai vispārīgā gadījumā jāmeklē atsevišķi robežas, kad x tiecas uz plus vai mīnus bezgalībām, tas nozīmē, ka funkcijas grafikam var būt divas dažādas slīpās asimptotas.

8.5. Piemērs. Aplūkosim iepriekš apskatīto funkciju $y = \frac{x^2+3x-1}{x-2}$. Vispirms atradīsim koeficientu a:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x-1}{x(x-2)} = 1,$$

jo neatkarīgi no tā, vai x tiecas uz plus vai mīnus bezgalību, daļas skaitītāja un saucēja augstākās pakāpes ir vienādas, bet robežvērtība ir vienāda ar koeficientu dalījumu pie šīm augstākajām pakāpēm.

Tagad varam meklēt koeficientu b:

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+3x-1}{x-2} - 1 \cdot x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x-1-x^2+2x}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x-1}{x-2} = 5.$$

Tātad dotās funkcijas slīpā asimptota ir $y = x + 5$. ■

Gadījumā, ja dotā funkcija ir racionāla

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \& \quad \deg Q \leq \deg P \leq \deg Q + 1\,,$$

kur lietots apzīmējums $\deg P$ un $\deg Q$ — polinoma $P(x)$ un polinoma $Q(x)$ pakāpe, tad asimptotas var meklēt, izdalot skaitītāju ar saucēju. Tā tas ir arī pēdējā piemērā:

$$\begin{array}{l} (x^2 + 3x - 1) : (x - 2) = x + 5 \\ \underline{x^2 - 2x} \\ \phantom{x^2 -{}} 5x - 1 \\ \phantom{x^2 -{}} \underline{5x - 10} \\ \phantom{x^2 - 5x -{}} 9 \end{array}$$

Tas nozīmē, ka $y = \frac{x^2+3x-1}{x-2} = x + 5 + \frac{9}{x-2}$. Seko, ka $y = x + 5$ ir funkcijas slīpā asimptota, jo

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x-1}{x-2} - (x+5)\right) = \lim_{x\to\infty}\left(x + 5 + \frac{9}{x-2} - (x+5)\right) =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{9}{x-2} = 0.$$

Funkciju pētīšana

Ar jēdzienu "funkciju pētīšana" saprot funkcijas analītiskās izteiksmes izpēti, kuras rezultātā var uzskicēt dotās funkcijas grafiku. Izpētē ietilpst:

1) funkcijas definīcijas apgabala noteikšana;
2) paritātes noteikšana;
3) krustpunktu ar koordinātu asīm atrašana;
4) I kārtas atvasinājuma atrašana un no tā izrietošo secinājumu konstatēšana: augšanas un dilšanas intervālu noteikšana, maksimuma un minimuma punktu noteikšana;
5) II kārtas atvasinājuma atrašana un no tā izrietošo secinājumu konstatēšana: ieliekuma un izliekuma intervālu noteikšana, pārliekuma punktu noteikšana;
6) asimptotu atrašana;
7) grafika konstruēšana (ja nepieciešams, papildus punktu vērtību atrašana).

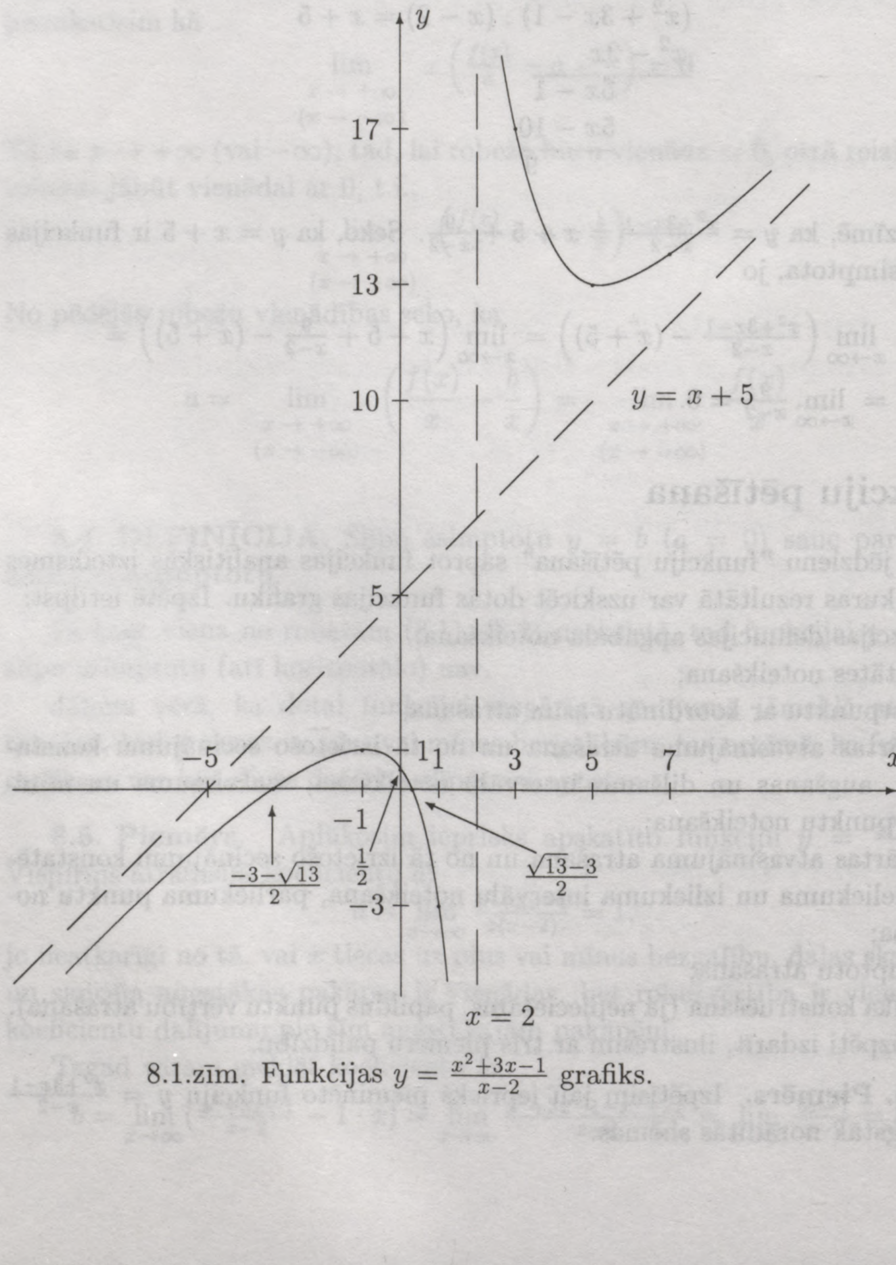
Kā šo izpēti izdarīt, ilustrēsim ar trīs piemēru palīdzību.

8.6. Piemērs. Izpētīsim jau iepriekš pieminēto funkciju $y = \frac{x^2+3x-1}{x-2}$ pēc augstāk norādītās shēmas.

1) Dotā funkcija nav definēta punktā 2, tātad tās definīcijas apgabals ir $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

2) Tā kā $y(-x) = \frac{x^2-3x-1}{-x-2}$ nesakrīt ne ar $y(x)$, ne ar $-y(x)$, tad funkcija nav ne pāra, ne nepāra funkcija.

3) Ja $x = 0$, tad $y = \frac{1}{2}$. Savukārt, ja $y = 0$, tad jārisina kvadrātvienādojums $x^2 + 3x - 1 = 0$. Atradīsim, ka tā saknes ir $x_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$. Tātad krustpunkti ar asīm ir $(0; \frac{1}{2})$, $(\frac{-3-\sqrt{13}}{2}; 0)$ un $(\frac{-3+\sqrt{13}}{2}; 0)$.



8.1.zīm. Funkcijas $y = \frac{x^2+3x-1}{x-2}$ grafiks.

4) Tā kā $y' = \frac{(2x+3)(x-2)-(x^2+3x-1)}{(x-2)^2} = \frac{2x^2-x-6-x^2-3x+1}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x-5}{(x-2)^2}$, tad funkcijai ir trīs kritiskie punkti: $x_1 = 2$ (singulārais punkts), $x_2 = -1$ un $x_3 = 5$ (stacionārie punkti). Nosakām atvasinājuma zīmes, ejot caur šiem punktiem:

$$\begin{array}{ccccccccl} + & -1 & - & 2 & - & 5 & + & & y' \text{ zīmes} \\ \hline & | & & | & & | & & \rightarrow & x \\ \nearrow & & \searrow & & \searrow & & \nearrow & & \end{array}$$

8.2.zīm.

Pēc 8.2.zīmējuma redzams, ka funkcija aug intervālos $]-\infty; -1[$, $]5; +\infty[$ un dilst intervālos $]-1; 2[$, $]2; 5][$. Zīmju maiņa rāda, ka punktā -1 funkcija sasniedz lokālo maksimālo vērtību, t.i., punkts $(-1; 1)$ ir lokālais maksimuma punkts, un punktā 5 funkcija sasniedz lokālo minimālo vērtību, t.i., punkts $(5; 13)$ ir lokālais minimuma punkts.

5) No otrā atvasinājuma $y'' = \frac{(2x-4)(x-2)^2-2(x-2)(x^2-4x-5)}{(x-2)^4} =$ $\frac{(2x-4)(x-2)-2(x^2-4x-5)}{(x-2)^3} = \frac{2x^2-8x+8-2x^2+8x+10}{(x-2)^3} = \frac{18}{(x-2)^3}$ redzam, ka intervālā $]-\infty; 2[$ grafiks ir izliekts (negatīva otrā atvasinājuma zīme), bet intervālā $]2; +\infty[$ grafiks ir ieliekts (pozitīva otrā atvasinājuma zīme). Punktā 2 funkcijai nav pārliekums, jo 2 nepieder definīcijas apgabalam.

6) Asimptotas mēs esam atraduši jau iepriekš, tās ir: $x = 2$ — vertikālā asimptota un $y = x + 5$ — slīpā asimptota.

7) Grafika precizēšanai atradīsim dažas papildus punktu vērtības: $y(1) = -3$, $y(3) = 17$ un $y(7) = 13\frac{4}{5}$. Grafika skice dota 8.1. zīmējumā. ■

8.7. Piemērs. Izpētīsim funkciju $y = xe^{-x^2}$!

1) Definīcijas apgabals ir visu reālo skaitļu kopa $\mathbb{R}$.

2) $y(-x) = -xe^{-x^2} = -y(x)$ — nepāra funkcija, tas nozīmē, ka tās grafiks ir simetrisks pret koordinātu sākumpunktu, un turpmākos pētījumus varam veikt tikai attiecībā uz $x \in [0; +\infty[$.

3) Vienīgais krustpunkts ar asīm ir $(0; 0)$.

4) $y' = e^{-x^2} + x(-2x)e^{-x^2} = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$ — kritiskais punkts $(x \geq 0)$ ir $x_1 = \sqrt{0,5} \approx 0,7$.

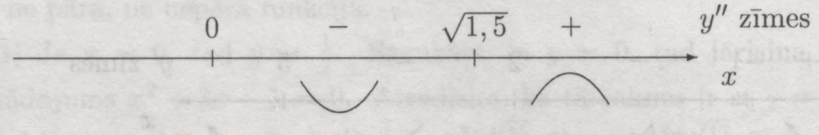
$$\begin{array}{cccccl} 0 & + & \sqrt{0,5} & - & & y' \text{ zīmes} \\ \hline | & & | & & \rightarrow & x \\ & \nearrow & & \searrow & & \end{array}$$

8.3.zīm.

Kā rāda 8.3.zīmējums, funkcija aug intervālā $[0; \sqrt{0,5}[$ un dilst intervālā

$]\sqrt{0,5};+\infty[$, tāpēc punkts $(\sqrt{0,5};\frac{1}{\sqrt{2e}})$ ir funkcijas maksimuma punkts.

5) $y''=-4xe^{-x^2}+(1-2x^2)(-2x)e^{-x^2}=-2x(3-2x^2)e^{-x^2}$ — nenegatīvie kritiskie punkti ir $x_1=0$ un $x_2=\sqrt{1,5}\approx 1,2$.



8.4.zīm.

Otrās kārtas atvasinājuma zīmes liecina, ka intervālā $]0;\sqrt{1,5}[$ grafiks ir izliekts, bet intervālā $]\sqrt{1,5};+\infty[$ grafiks ir ieliekts, punkts $(\sqrt{1,5};\sqrt{\frac{3}{2e^3}})$ ir pārliekuma punkts, tāds ir arī $(0;0)$.

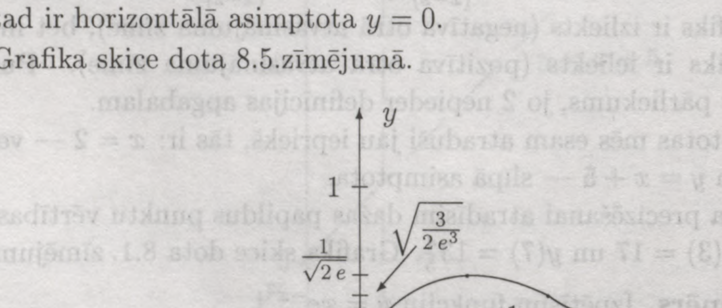
6) Vertikālo asimptotu nav, jo nav pārtraukuma punktu. Atradīsim slīpās:

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{xe^{-x^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}e^{-x^2}=0 \quad \text{un}$$

$$b=\lim_{x\to\infty}xe^{-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x^2}}\overset{\frac{\infty}{\infty}\text{L.k.}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2xe^{x^2}}=0$$

Tātad ir horizontālā asimptota $y=0$.

7) Grafika skice dota 8.5.zīmējumā.



8.5.zīm. Funkcijas $y=xe^{-x^2}$ grafiks.

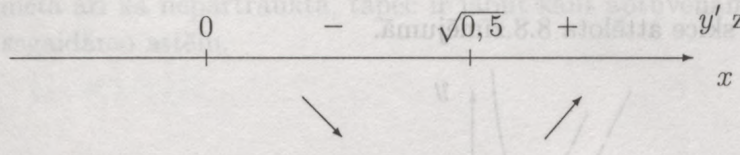
8.8. Piemērs. Izpētīsim funkciju $y=\frac{2x^2-3x+1}{|x|}$!

1) Definīcijas apgabals ir $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

2) Tā kā $y(-x)=\frac{2x^2+3x+1}{|x|}$, tad funkcija nav ne pāra, ne nepāra.

3) $x\neq 0$, bet, ja $y=0$, tad jāatrod kvadrātvienādojuma $2x^2-3x+1=0$ saknes un tās ir $x_1=\frac{1}{2}$ un $x_2=1$. Tātad dotajai funkcijai ar x-asi ir krustpunkti $(\frac{1}{2};0)$ un $(1;0)$.

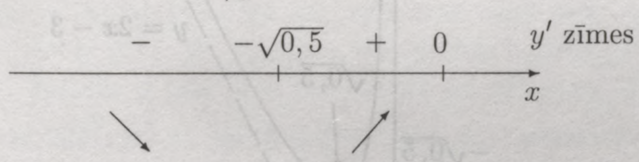
4) $x > 0$: $y' = \left(\frac{2x^2-3x+1}{x}\right)' = \left(2x - 3 + \frac{1}{x}\right)' = 2 - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^2-1}{x^2}$ — kritiskais punkts ir $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{0,5} \approx 0,7$.



8.6.zīm.

No 8.6.zīmējuma redzams, ka funkcija dilst intervālā $]0; \frac{1}{\sqrt{2}}[$ un aug intervālā $]\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty[$, tāpēc šajā kritiskajā punktā funkcija sasniedz savu lokālo minimālo vērtību. $y(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 2\sqrt{2} - 3 \approx -0,2$.

$x < 0$: $y' = \left(\frac{2x^2-3x+1}{-x}\right)' = \left(-2x + 3 - \frac{1}{x}\right)' = -2 + \frac{1}{x^2} = \frac{-2x^2+1}{x^2}$ — kritiskais punkts ir $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{0,5} \approx -0,7$.



8.7.zīm.

No 8.7.zīmējuma redzams, ka funkcija dilst intervālā $]-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}[$ un aug intervālā $]-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0[$, tāpēc arī šajā kritiskajā punktā funkcija sasniedz savu lokālo minimālo vērtību. $y(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = 2\sqrt{2} + 3 \approx 5,8$.

5) $x > 0$: $y'' = \left(2 - \frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3} > 0$ — intervālā $]0; +\infty[$ funkcija ir ieliekta.

$x < 0$: $y'' = \left(-2 + \frac{1}{x^2}\right)' = \frac{-2}{x^3} > 0$ — intervālā $]-\infty; 0[$ funkcija arī ir ieliekta.

6) $x = 0$ ir vertikālā asimptota, jo $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x^2-3x+1}{|x|} = \infty$, pie tam $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2x^2-3x+1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ un arī $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{2x^2-3x+1}{-x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-1}{x} = +\infty$.

Runājot par slīpajām asimptotām, šis ir tas gadījums, kad patiešām eksistēs divas atšķirīgas asimptotas, kad x tiecas uz $+\infty$ un kad x tiecas uz $-\infty$:

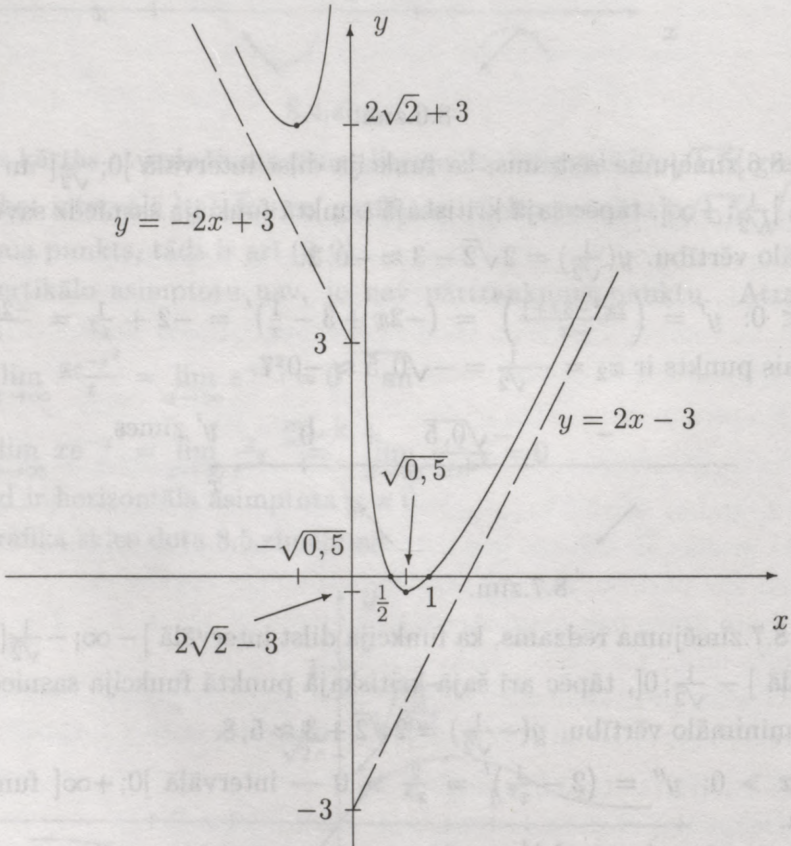
$k_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2-3x+1}{x^2} = 2$,

$b_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^2-3x+1}{x} - 2x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2x - 3 + \frac{1}{x} - 2x\right) = -3$,

$k_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2-3x+1}{-x^2} = -2$,

$b_2 = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2-3x+1}{-x}+2x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-2x+3-\frac{1}{x}+2x) = 3,$
tātad funkcijai ir slīpā asimptota $y = 2x - 3$, kad $x \to +\infty$, un ir slīpā asimptota $y = -2x + 3$, kad $x \to -\infty$.

7) Grafika skice attēlota 8.8.zīmējumā.



8.8.zīm. Funkcijas $y = \frac{2x^2-3x+1}{|x|}$ grafiks.

Apskatītā funkciju pētīšanas shēma ļauj sekmīgi uzskicēt daudzu funkciju grafikus, taču ne visus! Praksē nākas saskarties arī ar tādām funkcijām, kurām atrisināt vienādojumus $y = 0$, $y' = 0$ vai $y'' = 0$ ar mums pazīstamajām metodēm ir neiespējami. Šādos gadījumos minētos vienādojumus var mēģināt risināt tuvināti. Var rīkoties arī tā, ka grafiku zīmējam pa punktiem, nemēģinot noteikt ne ekstrēmus, ne pārliekuma punktus. Un pastāv vēl viena iespēja, kā tikt pie grafika skices, ļaujot to darīt datoram — šodien ir atrodamas daudzas un dažādas datoru programmu paketes, kas prot uzzīmēt jebkuras funkcijas grafiku norādītā intervālā. Tomēr datoru programmas dažkārt mēdz arī zīmēt aplam! Ja funkcijai ir pārtraukuma punkti izpētes intervālā, tad esiet uzmanīgi! Datora zīmētajā bildē funkcija var tikt uzzīmēta arī kā nepārtraukta, tāpēc ir jābūt kaut aptuvenam priekšstatam par sagaidāmo attēlu.

9. nodaļa

NENOTEIKTAIS INTEGRĀLIS

Nenoteiktā integrāļa definīcija

Viens no diferenciālrēķinu pamatuzdevumiem ir atrast dotai funkcijai tās atvasinājumu. Taču dažkārt ir nepieciešams atrisināt apgriezto uzdevumu — atrast tādu funkciju $F(x)$, kuras atvasinājums ir dotā funkcija $f(x)$, t.i., atrast tādu funkciju $F(x)$, ka $F'(x) = f(x)$ vai $dF(x) = f(x)\,dx$.

9.1. DEFINĪCIJA. Par dotās funkcijas $f(x)$ **primitīvo funkciju** sauc tādu funkciju $F(x)$, kuras atvasinājums ir vienāds ar doto funkciju $f(x)$.

Gribētos uzzināt, vai katrai funkcijai eksistē primitīvā funkcija. Atbilde ir pozitīva tādā nozīmē, ka plašai funkciju klasei primitīvās funkcijas eksistē, proti, jebkurai kādā intervālā nepārtrauktai funkcijai šajā intervālā eksistē primitīvā funkcija. Ja funkcijai ir pārtraukuma punkti, tad tās primitīvo funkciju meklē tikai tajos intervālos, kuros tā ir nepārtraukta.

Ievērosim, ka dotai funkcijai primitīvā funkcija nav noteikta viennozīmīgi.

9.2. Piemērs. Funkcijai $f(x) = 5x^3$ primitīvā funkcija ir $F(x) = \frac{5}{4}x^4$, bet tai ir arī citas primitīvās funkcijas, piemēram, $\frac{5}{4}x^4 + 10$ vai $\frac{5}{4}x^4 - \pi$, vispārīgi varam sacīt, ka $\frac{5}{4}x^4 + C$, kur C ir kaut kāda reāla konstante, ir funkcijas $f(x)$ primitīvā funkcija. ■

9.3. TEORĒMA. Ja visiem x no vaļēja intervāla $]a;b[$ ir spēkā, ka funkciju $F(x)$ un $G(x)$ atvasinājumi ir vienādi, tad

$$\exists C\, \forall x \in]a;b[\ (\, F(x) = G(x) + C\,).$$

□ Definēsim funkciju $H(x) = F(x) - G(x)$. Pēc teorēmas nosacījumiem $\forall x \in]a;b[\ (\, H'(x) = F'(x) - G'(x) = 0\,)$.

Izvēlēsimies divus patvaļīgus atšķirīgus punktus x un x_1 no intervāla $]a;b[$. Tā kā funkcija $H(x)$ ir diferencējama intervāla $]a;b[$ iekšienē (jo $F(x)$ un $G(x)$ ir tādas), tad tā ir diferencējama arī intervāla ar galapunktiem x un x_1 iekšienē un nepārtraukta šajā intervālā, tātad tā apmierina Lagranža teorēmas nosacījumus, tāpēc starp punktiem x un x_1 atradīsies tāds punkts c, ka

$$H'(c) = \frac{H(x) - H(x_1)}{x - x_1}.$$

Pēc teorēmas nosacījumiem $H'(c) = 0$, tāpēc $H(x) = H(x_1)$ — šī pēdējā nevienādība būs spēkā jebkuram x no intervāla $]a;b[$. Esam ieguvuši, ka funkcija $H(x)$ ir konstanta: $H(x) = C$. Secinām, ka $C = F(x) - G(x)$ jeb $F(x) = G(x) + C$. ■

Šī teorēma apgalvo, ka dotai funkcijai primitīvās funkcijas savstarpēji var atšķirties tikai par konstantu saskaitāmo.

9.4. DEFINĪCIJA. Funkcijas $f(x)$ primitīvās funkcijas vispārīgo veidu $F(x) + C$, kur $F(x)$ ir $f(x)$ kaut kāda primitīvā funkcija un C ir patvaļīga konstante, sauc par funkcijas $f(x)$ **nenoteikto integrāli** un apzīmē ar simbolu $\int f(x)\,dx$, t.i.,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C. \tag{9.1}$$

Apzīmējumā (9.1) funkciju $f(x)$ sauc par **zemintegrāļa funkciju**, bet $f(x)\,dx$ — par **zemintegrāļa izteiksmi**; x sauc par **integrācijas mainīgo**, bet C — par **integrācijas konstanti**. Simbolu $\int$ sauc par **integrēšanas darbības simbolu.**

Nenoteiktā integrāļa atrašana un īpašības

9.5. TEORĒMA. Ja $n \in \mathbb{R}$ un $n \neq -1$, tad

$$\boldsymbol{\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.}$$

□ Lai pierādītu rezultātu formā $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, ir pietiekami parādīt, ka $(F(x) + C)' = f(x)$. Tātad mūsu gadījumā:

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)' = \frac{1}{n+1} \cdot (n+1) \cdot x^{n+1-1} + C' = x^n + 0 = x^n. \ ■$$

Iegaumējiet, ka speciālgadījumā $\int dx = \int 1\,dx = \int x^0\,dx = x + C$. Līdzīgā veidā kā 9.5. teorēmā var pamatot sekojošas integrēšanas pamatformulas:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$
$$\int \sin x\, dx = -\cos x\, dx + C,$$
$$\int \cos x\, dx = \sin x + C,$$
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$$
$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1$$
$$\int e^x dx = e^x + C,$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C,$$
$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{|a|} \operatorname{arctg} \frac{x}{|a|} + C, \quad a \neq 0.$$

Īpašas atzīmēšanas vērta ir pirmā uzrakstītā formula $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$. Lai pierādītu tās pareizību, jāapskata divi gadījumi:
1) ja $x > 0$, tad $(\ln x + C)' = \frac{1}{x}$;
2) ja $x < 0$, tad $(\ln|x| + C)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$.

Pēdējā formula ir iegūstama ar lineāras substitūcijas palīdzību [sk. 9.12. Piemēra 3. uzdevumu].

Atzīmēsim, ka tieši no nenoteiktā integrāļa definīcijas izriet šādas vienādības:

$$\left(\int f(x)\, dx\right)' = f(x),$$
$$d\left(\int f(x)\, dx\right) = f(x)\, dx,$$
$$\int f'(x)\, dx = f(x) + C,$$
$$\int df(x) = f(x) + C.$$

Turklāt visas integrēšanas formulas saglabā savu veidu, ja neatkarīgā mainīgā x vietā ievieto jebkuru šī mainīgā diferencējamu funkciju $u = g(x)$, t.i., ja $\int f(x)\, dx = F(x) + C$, tad $\int f(u)\, du = F(u) + C$. Šis apgalvojums izriet no sekojošiem spriedumiem: no vienādības $\int f(x)\, dx = F(x) + C$ seko, ka $dF(x) = f(x)\, dx$; saliktu funkciju atvasinot, iegūsim, ka $dF(u) = F'(u)\, du = f(u)\, du$, kur u var būt jebkura argumenta x diferencējama funkcija; saskaņā ar nenoteiktā integrāļa definīciju: $\int f(u)\, du = F(u) + C$.

Līdzīgi kā diferencēšanas operators ir lineārs, tā arī nenoteiktais integrālis ir uztverams kā lineārs operators, jo:

9.6. TEORĒMA. Pieņemsim, ka eksistē nenoteiktie integrāļi $\int f(x)\,dx$ un $\int g(x)\,dx$, tad

1. $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$, kur $k \in \mathbb{R}$ — konstante;
2. $\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$;
3. $\int (f(x)-g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$.

□ 1. Pieņemsim, ka $\int f(x)\,dx = F(x)+C$. Tad $F'(x) = f(x)$ un $(kF(x))' = kf(x)$. No nenoteiktā integrāļa definīcijas seko, ka

$$k\int f(x)\,dx = k(F(x)+C) = kF(x)+C_1 = \int kf(x)\,dx,$$

kur $C_1 = kC$ — konstante.

2. Pieņemsim, ka $\int f(x)\,dx = F(x)+C$ un $\int g(x)\,dx = G(x)+C$. Tā kā $F'(x) = f(x)$ un $G'(x) = g(x)$, tad $F(x)+G(x)$ ir primitīvā funkcija summai $f(x)+g(x)$, tāpēc

$$\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = (F(x)+C_1)+(G(x)+C_2) =$$
$$= (F(x)+G(x))+(C_1+C_2) = (F(x)+G(x))+C = \int (f(x)+g(x))\,dx.$$

3. Trešo apgalvojumu pierāda analoģiski kā otro. ■

Atzīmēsim, ka 2. un 3. apgalvojums ir spēkā jebkuram galīgam skaitam funkciju.

9.7. Piemērs. $\int (6x^4+\sin x-7)\,dx = \int 6x^4\,dx + \int \sin x\,dx - \int 7\,dx =$
$= 6\int x^4\,dx + \int \sin x\,dx - 7\int dx = \frac{6}{5}x^5 + C_1 - \cos x + C_2 - 7x + C_3 =$
$= \frac{6}{5}x^5 - \cos x - 7x + C$. ■

Parasti, risinot uzdevumus, ievēro 9.6. teorēmu, bet katrā darbības solī nenorāda, kurš no teorēmas apgalvojumiem tiek izmantots; tāpat parasti summā vai starpībā katram nenoteiktajam integrālim neraksta savu integrācijas konstanti, bet gan pieraksta vienu kopīgo.

9.8. Piemērs. $\int \left(\sqrt[3]{t} + \frac{2}{t^3} - \frac{10}{\cos^2 t}\right) dt = \int \left(t^{\frac{1}{3}} + 2t^{-3} - 10\frac{1}{\cos^2 t}\right) dt =$
$= \frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + 2\frac{t^{-2}}{-2} - 10\mathrm{tg}t + C = \frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{t^2} - 10\mathrm{tg}t + C$. ■

Ne vienmēr zemintegrāļa funkcija ir tik vienkārša kā 9.7. un 9.8. piemērā. Dažkārt būs nepieciešams veikt algebriskus pārveidojumus un tikai tad varēs nointegrēt.

9.9. Piemēri. 1. $\int \left(\frac{x^2-2x\cos x}{x} + \frac{3x+3x^3}{1+x^2}\right) dx = \int (x-2\cos x+3x)dx =$
$= \int (4x - 2\cos x dx = 2x^2 - 2\sin x + C$.

2. $\int \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx = \int \left(\sin^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right) dx =$
$= \int (1-\sin x)dx = x + \cos x + C$. ■

Bet vairumā gadījumu būs par maz tikai ar prasmi pārzināt nenoteikto integrāļu tabulu.

Substitūcijas jeb aizvietošanas metode

Viena no integrēšanas pamatmetodēm, kuru var pielietot ļoti daudzos gadījumos, ir substitūcijas jeb aizvietošanas metode. Tās būtība ir sekojoša: zemintegrāļa funkcijas argumentu pārveido pēc kādas formulas (substitūcijas) tā, lai integrālis attiecībā pret jauno mainīgo būtu vienkāršāks nekā dotais sākotnējais integrālis.

9.10. TEORĒMA. Pieņemsim, ka funkcija $x = \varphi(t)$ ir definēta un ir diferencējama intervālā $[a; b]$. Pieņemsim, ka intervālā $[a; b]$ ir definēta salikta funkcija $f(x) = f(\varphi(t))$. Ja funkcijai $f(x)$ eksistē primitīvā funkcija $F(x)$, tad

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

□ Tā kā primitīvā funkcija $F(x)$ ir definēta tajā pašā kopā kā funkcija $f(x)$ un eksistē salikta funkcija $f(\varphi(t))$, tad eksistē arī salikta funkcija $F(\varphi(t))$. Diferencējot saliktu funkciju (ņemot vērā, ka $F'(x) = f(x)$), iegūsim, ka

$$(F(\varphi(t)))' = (F(\varphi(t)))'_x\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t),$$

t.i., funkcijai $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ intervālā $[a; b]$ ir primitīvā funkcija $F(\varphi(t))$, tāpēc

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C.$$

Ievērojot, ka $F(\varphi(t)) + C = (F(x) + C)|_{x=\varphi(t)} = \int f(x)\,dx$, iegūsim formulu

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \blacksquare$$

Nedrīkst aizmirst, ka pēc tam, kad integrālis ar substitūcijas palīdzību ir atrasts, rezultāts jāizsaka ar sākotnējo mainīgo.

9.11. Piemērs. $\int \sin(3x - 7)\,dx = *$
apzīmējam: $3x - 7 = t$
atrodam atbilstošos diferenciāļus: $d(3x - 7) = dt$ jeb $3dx = dt$, jeb $dx = \frac{dt}{3}$
$* = \int \sin t \frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{3}\cos t + C = -\frac{1}{3}\cos(3x - 7) + C.$ ■

Vispārīgā gadījumā, kad mēs lineāru izteiksmi $ax+b$ aizstājam ar jaunu mainīgo t, iegūsim nenoteikto integrāļu vienādību ($d(ax+b)=dt$ jeb $adx=dt$, jeb $dx=\frac{dt}{a}$):

$$\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}\int f(t)\,dt.$$

Iegaumējot šo sakarību, lineāru substitūciju gadījumā integrēšanu varam veikt bez jauna mainīgā tiešas ievešanas.

9.12. Piemēri. 1. $\int\frac{dx}{\cos^2(5x+2)}=\frac{1}{5}\mathrm{tg}(5x+2)+C$,

2. $\int(0,2x-4)^{10}dx=\frac{1}{0,2}\frac{(0,2x-4)^{11}}{11}+C=\frac{5}{11}(0,2x-4)^{11}+C$,

3. $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{(\frac{x}{a})^2+1}=\frac{1}{a^2}\cdot a\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}+C=\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}+C.$ ■

Citos gadījumos būtu vēlams norādīt, kādu substitūciju esam izmantojuši.

9.13. Piemērs. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{4x+5}}=*$

aizvietojam $\sqrt{4x+5}=t$ jeb $4x+5=t^2$, tad $4dx=2tdt$ jeb $dx=\frac{t}{2}dt$, kā arī $x=\frac{t^2-5}{4}$

$*=\int\frac{\frac{t^2-5}{4}}{t}\frac{t}{2}dt=\frac{1}{8}\int(t^2-5)dt=\frac{1}{8}(\frac{t^3}{3}-5t)+C=\frac{1}{24}(4x+5)^{\frac{3}{2}}-\frac{5}{8}(4x+5)^{\frac{1}{2}}+C.$

Šajā piemērā var lietot arī citu substitūciju, proti, $4x+5=t$, tad $dx=\frac{dt}{4}$ un $x=\frac{t-5}{4}$, tāpēc

$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{4x+5}}=\int\frac{\frac{t-5}{4}}{\sqrt{t}}\frac{dt}{4}=\frac{1}{16}\int(t^{\frac{1}{2}}-5t^{-\frac{1}{2}})dt=$

$=\frac{1}{16}\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-10t^{\frac{1}{2}}\right)+C=\frac{1}{24}(4x+5)^{\frac{3}{2}}-\frac{5}{8}(4x+5)^{\frac{1}{2}}+C.$ ■

Dabīgi, ka atbildes ir vienādas. Taču vispār var būt arī tāda situācija, kad tās atšķiras par konstantu saskaitāmo — tas iespējams saskaņā ar 9.3. teorēmu. Divu risinājumu atbildes ārēji var atširties arī gadījumā, ja izmantoti atšķirīgi trigonometriskie pārveidojumi.

9.14. Piemērs. $\int\frac{dx}{\cos^2x\sin^2x}=\int\frac{4\,dx}{(2\cos x\sin x)^2}=4\int\frac{dx}{\sin^22x}=$

$=-\frac{4}{2}\mathrm{ctg}2x+C=-2\mathrm{ctg}2x+C,$

bet var risināt arī tā:

$\int\frac{dx}{\cos^2x\sin^2x}=\int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\cos^2x\sin^2x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2x}+\frac{1}{\sin^2x}\right)dx=\mathrm{tg}x-\mathrm{ctg}x+C.$

Šajā gadījumā:

$\mathrm{tg}x-\mathrm{ctg}x=\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^2x-\cos^2x}{\cos x\sin x}=\frac{-\cos2x}{\frac{1}{2}\sin2x}=-2\mathrm{ctg}2x.$ ■

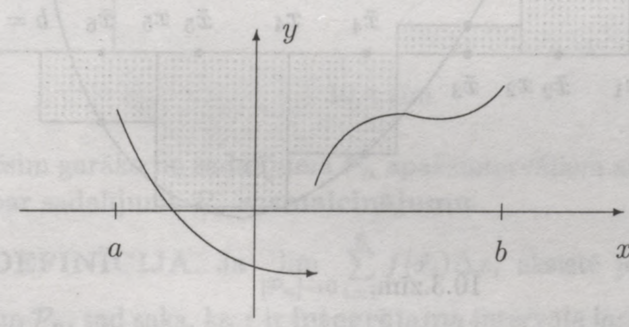
Kādas substitūcijas būtu visieteicamākās dažos citos gadījumos un kā atrast dažās noteiktās situācijās nenoteiktos integrāļus, par to runāsim vēlāk 15. nodaļā.

10. nodaļa

NOTEIKTAIS INTEGRĀLIS

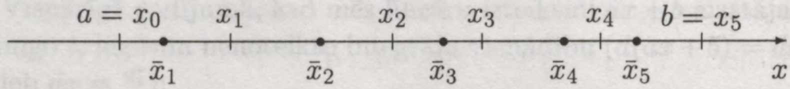
Rīmaņa summa un noteiktais integrālis

Apskatīsim funkciju f, kas definēta slēgtā intervālā $[a;b]$. Tā var pieņemt gan pozitīvas, gan negatīvas vērtības, kā arī tā var būt pārtraukta, piemēram, kā 10.1. zīmējumā.



10.1.zīm.

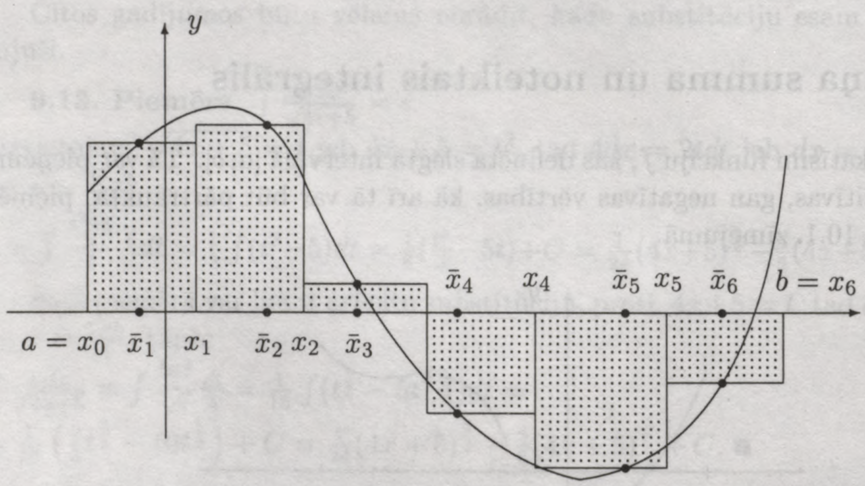
Sadalīsim intervālu $[a;b]$ apakšintervālos (ne obligāti vienāda garuma) ar galapunktiem $a = x_0 < x_1 < ... < x_i < ... < x_{n-1} < x_n = b$ un apzīmēsim $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i \in \overline{1,n}$. Galīgo punktu kopu $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ sauc par intervāla $[a;b]$ **sadalījumu**, mēs šo kopu apzīmēsim ar $\mathcal{P}_n$. Katrā no apakšintervāliem $[x_{i-1}; x_i]$ izvēlēsimies punktu $\bar{x}_i$ (tas var būt arī galapunkts), $i \in \overline{1,n}$. Sadalījumu $\mathcal{P}_n$ kopā ar izvēlētajiem punktiem $\bar{x}_i$, $i \in \overline{1,n}$, sauc par **izvēles sadalījumu**. Ja nerodas pārpratumi, tad izvēles sadalījumus arī mēdz saukt par sadalījumiem un lieto to pašu apzīmējumu. 10.2. zīmējumā parādīts viens no iespējamajiem intervāla $[a;b]$ izvēles sadalījumiem $\mathcal{P}_5$.



10.2.zīm.

10.1. DEFINĪCIJA. Summu $R(\mathcal{P}_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$ sauc par izvēles sadalījumam $\mathcal{P}_n$ atbilstošo funkcijas f **Rīmaņa summu.**

Ar Rīmaņa summu mēs esam aprēķinājuši taisnstūru ar malas garumiem $f(\bar{x}_i)$ un Δx_i, $i \in \overline{1,n}$, laukumu summu, tikai jāņem vērā, ka taisnstūriem zem x-ass ir negatīva laukuma skaitliskā vērtība [skatīt 10.3. zīmējumu].



10.3.zīm.

10.2. Piemērs. Aprēķināsim Rīmaņa summu funkcijai $f(x) = 2x - 2$ intervālā $[0;3]$, sadalot intervālu 6 vienāda garuma apakšintervālos un $\bar{x}_i$ izvēloties kā apakšintervālu viduspunktus. Tad

$x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{3}{2}$, $x_4 = 2$, $x_5 = \frac{5}{2}$, $x_6 = 3$ un

$\bar{x}_1 = \frac{1}{4}$, $\bar{x}_2 = \frac{3}{4}$, $\bar{x}_3 = \frac{5}{4}$, $\bar{x}_4 = \frac{7}{4}$, $\bar{x}_5 = \frac{9}{4}$, $\bar{x}_6 = \frac{11}{4}$, un

$f(\frac{1}{4}) = -\frac{3}{2}$, $f(\frac{3}{4}) = -\frac{1}{2}$, $f(\frac{5}{4}) = \frac{1}{2}$, $f(\frac{7}{4}) = \frac{3}{2}$, $f(\frac{9}{4}) = \frac{5}{2}$, $f(\frac{11}{4}) = \frac{7}{2}$, un

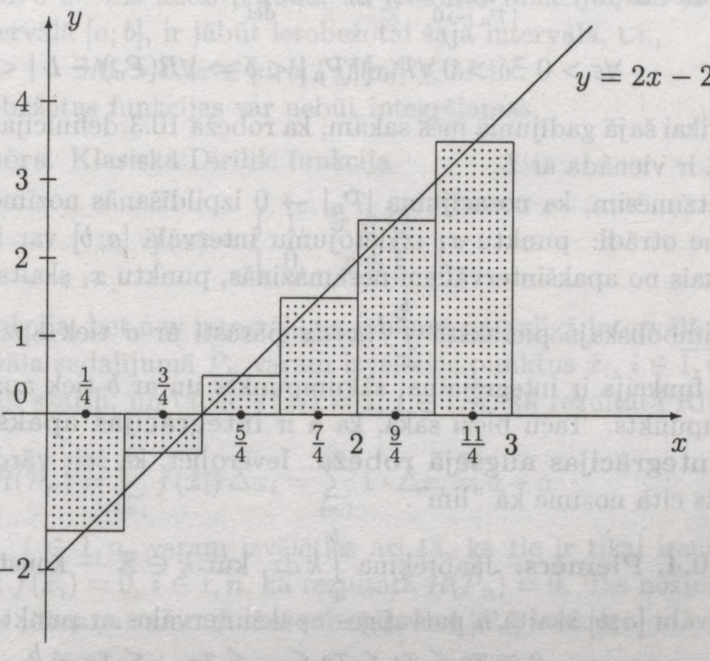
$\Delta x_i = \frac{1}{2}$, $i \in \overline{1,6}$.

Rīmaņa summa šim konkrētajam izvēles sadalījumam ir

$R = \sum\limits_{i=1}^{6} f(\bar{x}_i)\Delta x_i = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{6} f(\bar{x}_i) =$

$= \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{2} = 3.$

Šī piemēra situācija ilustrēta 10.4. zīmējumā. ■



10.4.zīm.

Apzīmēsim garāko no sadalījuma $\mathcal{P}_n$ apakšintervāliem ar $|\mathcal{P}_n|$. Šo skaitli $|\mathcal{P}_n|$ sauc par sadalījuma $\mathcal{P}_n$ **sasmalcinājumu.**

10.3. DEFINĪCIJA. Ja $\lim\limits_{|\mathcal{P}_n|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$ eksistē jebkuram izvēles sadalījumam $\mathcal{P}_n$, tad saka, ka f ir **integrējama** intervālā $[a;b]$ un šo summas robežu sauc par **noteikto** (jeb **Rīmaņa**) **integrāli**, un apzīmē

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\mathcal{P}_n|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i.$$

Vienādība $\lim\limits_{|\mathcal{P}_n|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i = L$ jāsaprot sekojoši. Skaitli L sauc par **Rīmaņa summas** $R(\mathcal{P}_n)$ **robežu** sasmalcinājumam $|\mathcal{P}_n|$ tiecoties uz 0, ja katram pozitīvam skaitlim ε eksistē tāds pozitīvs skaitlis δ, ka visiem intervāla $[a;b]$ izvēles sadalījumiem $\mathcal{P}_n$ izpildās nosacījums:

$$\text{ja} \quad |\mathcal{P}_n| < \delta, \qquad \text{tad} \quad \left|\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i - L\right| < \varepsilon.$$

Šajā situācijā lieto pierakstu $\lim\limits_{|\mathcal{P}_n|\to 0} R(\mathcal{P}_n) = L$. Simboliski to visu var noformēt šādi: $\lim\limits_{|\mathcal{P}_n|\to 0} R(\mathcal{P}_n) = L \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall\mathcal{P}_n\ [\,|\,\mathcal{P}_n\,| < \delta \Rightarrow |\,R(\mathcal{P}_n) - L\,| < \varepsilon\,].$$

Tikai šajā gadījumā mēs sakām, ka robeža 10.3. definīcijas nozīmē eksistē un tā ir vienāda ar L.

Atzīmēsim, ka nosacījuma $|\mathcal{P}_n| \to 0$ izpildīšanās nozīmē, ka $n \to +\infty$, bet ne otrādi: punktu x_i izvietojumu intervālā $[a;b]$ var izvēlēties tā, ka garākais no apakšintervāliem nesamazinās, punktu x_i skaitam pieaugot.

Simboliskajā pierakstā $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ parasti ar a tiek apzīmēts intervāla, kurā funkcija ir integrējama, sākumpunkts un ar b tiek apzīmēts intervāla beigupunkts. Taču bieži saka, ka a ir **integrācijas apakšējā robeža** un b ir **integrācijas augšējā robeža**. Ievērojiet, ka šeit vārds "robeža" tiek lietots citā nozīmē kā "lim".

10.4. Piemērs. Jāaprēķina $\int\limits_a^b k\,dx$, kur $k \in \mathbb{R}$ — konstante. Sadalīsim intervālu $[a;b]$ skaitā n patvaļīgos apakšintervālos ar punktiem

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

Tā kā zemintegrāļa funkcija $f(x) = k$ ir konstante, tad neatkarīgi no tā, kā izvēlēti punkti $\bar{x}_i \in [x_{i-1}; x_i]$, $i \in \overline{1,n}$, Rīmaņa summa būs formā

$$R(\mathcal{P}_n) = k\Delta x_1 + k\Delta x_2 + k\Delta x_3 + ... + k\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} k\Delta x_i = k\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = k(b-a).$$

Redzam, ka Rīmaņa summa dotajai funkcijai nav atkarīga ne no sadalījuma $\mathcal{P}_n$, ne no punktu $\bar{x}_i$ izvēles, tāpēc funkcija $y = k$ ir integrējama un

$$\int\limits_a^b k\,dx = \lim_{|\mathcal{P}_n|\to 0} R(\mathcal{P}_n) = \lim_{|\mathcal{P}_n|\to 0} k(b-a) = k(b-a). \ \blacksquare$$

Integrējamas funkcijas

10.3. definīcijā mēs ieviesām integrējamas funkcijas jēdzienu. Gribētos zināt, vai jebkura funkcija ir integrējama? Atbilde ir negatīva. Piemēram, funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

nav integrējama intervālā $[0;1]$. Jo Rīmaņa summas saskaitāmo, kas izvēlēts no apakšintervāla $[0;x_1]$, var padarīt pēc patikas lielu, atbilstoši izvēloties $\bar{x}_1$ pietiekami tuvu 0. Šis fakts parāda, ka jebkurai funkcijai, lai tā būtu integrējama intervālā $[a;b]$, ir jābūt ierobežotai šajā intervālā, t.i.,

$$\exists M > 0\, \forall x \in [a;b]\ (\,|f(x)| \le M\,).$$

Bet pat ierobežotas funkcijas var nebūt integrējamas.

10.5. Piemērs. Klasiskā Dirihlē funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

ir ierobežota funkcija, bet nav integrējama jebkurā patvaļīgā intervālā $[a;b]$, $a \ne b$. Jo intervāla sadalījumā $\mathcal{P}_n$ varam izvēlēties punktus $\bar{x}_i$, $i \in \overline{1,n}$, tā, ka tie ir racionāli skaitļi, un tāpēc $f(\bar{x}_i) = 1$, $i \in \overline{1,n}$, kā rezultātā Rīmaņa summa

$$R(\mathcal{P}_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = b - a.$$

Bet punktus $\bar{x}_i$, $i \in \overline{1,n}$, varam izvēlēties arī tā, ka tie ir tikai iracionāli skaitļi, un tāpēc $f(\bar{x}_i) = 0$, $i \in \overline{1,n}$, kā rezultātā $R(\mathcal{P}_n) = 0$. Tas nozīmē, ka Dirihlē funkcijas Rīmaņa summai nav robežas, kad $|\mathcal{P}_n| \to 0$. ■

10.6. TEORĒMA. Ja funkcija f ir ierobežota intervālā $[a;b]$ un ja tā ir nepārtraukta šajā intervālā, iespējams, izņemot galīgu skaitu punktu, tad funkcija f ir integrējama intervālā $[a;b]$.

Tātad speciālgadījumā, kad f ir nepārtraukta visā intervālā $[a;b]$, tad f ir integrējama intervālā $[a;b]$ (nepārtraukta funkcija slēgtā intervālā ir ierobežota).

10.5. piemērā Dirihlē funkcijai ir bezgalīgi daudz pārtraukuma punktu, tāpēc tā neapmierina 10.6.teorēmas integrējamības nosacījumus. Atzīmēsim, ka no 10.6. teorēmas seko, ka jebkurā slēgtā intervālā $[a;b]$ integrējamas ir šādas funkcijas:

1) polinomi,

2) $\sin x$, $\cos x$,

3) racionālas funkcijas tajos intervālos, kas nesatur tos punktus, kuros saucējs vienāds ar 0.

Noteiktā integrāļa īpašības

Šajā paragrāfā mēs uzskaitīsim svarīgākās noteikto integrāļu īpašības, kuras formulēsim kā teorēmas un pierādīsim.

No noteiktā integrāļa definīcijas tieši seko divas īpašības:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

10.7. TEORĒMA Ja funkcija f ir integrējama intervālā $[a;b]$, tad tā ir integrējama jebkurā intervāla $[a;b]$ apakšintervālā $[c;d] \subseteq [a;b]$.

□ Tā kā šī kursa uzdevums nav izvērst pierādījuma tehniku, tad mēs to izlaidīsim. Ieinteresētu lasītāju brīdinām, ka pierādījums nebūt nav triviāls. ■

10.8. TEORĒMA (aditivitāte). Ja $[a;b] = [a;c] \cup [c;b]$ un f ir integrējama intervālā $[a;b]$, tad $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

□ Tā kā funkcija f ir integrējama intervālā $[a;b]$, tad Rīmaņa summas robeža nav atkarīga no intervāla $[a;b]$ sadalījuma veida. Tāpēc, sastādot Rīmaņa summu, intervālu sadalam tā, lai punkts c būtu viens no sadalījuma punktiem. Tad summas aditivitātes dēļ Rīmaņa summu varam sadalīt divās summās, pirmajā summā apvienojot tos saskaitāmos, kas atbilst sadalījuma punktiem no intervāla $[a;c]$, bet otrajā summā ietverot tos saskaitāmos, kas atbilst sadalījuma punktiem no intervāla $[c;b]$. Ļaujot katrā no intervāliem $[a;c]$ un $[c;b]$ sasmalcinājumam $|\mathcal{P}_n|$ tiekties uz 0, iegūsim:

$$\lim_{|\mathcal{P}_n|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i \bigg|_{\bar{x}_i\in[a;c]} + \lim_{|\mathcal{P}_n|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i \bigg|_{\bar{x}_i\in[c;b]} =$$

$$= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \blacksquare$$

Patiess apgalvojums ir arī $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ (pierādiet to paši!). Tātad punktu a, b un c izvietojums nav būtisks; lai lietotu šo īpašību, svarīgi tikai, lai funkcija būtu integrējama plašākajā intervālā.

10.9. TEORĒMA (salīdzināšana). Ja funkcijas f un g ir integrējamas intervālā $[a;b]$ un $\forall x \in [a;b]\ (\,f(x) \le g(x)\,)$, tad

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

□ Izveidosim patvaļīgu sadalījumu $\mathcal{P}_n$ intervālā $[a;b]$ ar punktiem $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Pieņemsim, ka katram i atbilst noteikts punkts $\bar{x}_i$ no i-tā apakšintervāla $[x_{i-1}; x_i]$, $i \in \overline{1,n}$. Varam secināt: $f(\bar{x}_i) \leq g(\bar{x}_i)$, $i \in \overline{1,n}$, kā arī $f(\bar{x}_i)\Delta x_i \leq g(\bar{x}_i)\Delta x_i$, $i \in \overline{1,n}$, tāpēc $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i \leq \sum\limits_{i=1}^{n} g(\bar{x}_i)\Delta x_i$. Tā kā funkcijas f un g ir integrējamas, tad eksistē robežas no Rīmaņa summām, turklāt nevienādības zīme saglabājas, t.i.,

$$\lim_{|\mathcal{P}_n|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i \leq \lim_{|\mathcal{P}_n|\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

jeb
$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx. \ \blacksquare$$

10.10. SEKAS. Ja f ir integrējama intervālā $[a;b]$ un

$$\forall x \in [a;b]\ (\, f(x) \geq 0\,), \quad \text{tad} \quad \int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

10.11. TEORĒMA (ierobežotība). Ja funkcija f ir integrējama intervālā $[a;b]$ un ja eksistē tādas reālas konstantes m un M, ka

$$\forall x \in [a;b]\ (\, m \leq f(x) \leq M\,), \quad \text{tad} \quad m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

□ Pierādīsim labās puses nevienādību, kreisās puses nevienādību pamato analoģiski. Apzīmēsim $\forall x \in [a;b]\ (\, g(x) = M\,)$. Tādā gadījumā mūsu rīcībā ir nosacījums $\forall x \in [a;b]\ (\, f(x) \leq M = g(x)\,)$; varam izmantot iepriekš pierādīto salīdzināšanas īpašību un 10.4. piemēra rezultātu un secināt

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b M\,dx = M(b-a). \ \blacksquare$$

10.12. TEORĒMA (vidējās vērtības teorēma). Ja funkcija f ir nepārtraukta intervālā $[a;b]$, tad eksistē tāds punkts c starp a un b, ka

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

□ Tā kā funkcija f ir nepārtraukta slēgtā intervālā, tad tai eksistē mazākā vērtība m un lielākā vērtība M šajā intervālā:

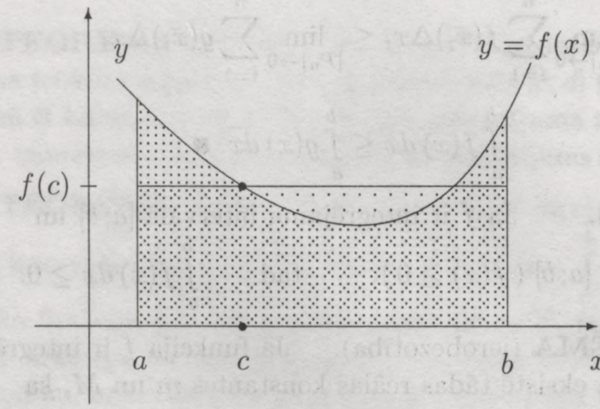
$$\forall x \in [a;b]\ (\, m \leq f(x) \leq M\,).$$

No ierobežotības īpašības seko, ka

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) \quad \text{jeb} \quad m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M.$$

Funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta intervālā $[a;b]$, tāpēc tā pieņem jebkuru starpvērtību starp divām savām vērtībām m un M, t.i.,

$$\exists c \in [a;b] \ (f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx) \text{ jeb } \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a). \blacksquare$$



10.5.zīm.

Ģeometriski šī īpašība nozīmē, ka laukums, kas atrodas zem līknes $f(x)$ grafika, ir vienāds ar tāda taisnstūra laukumu, kura viena mala ir intervāls $[a;b]$, bet otra skaitliski vienāda ar līknes $f(x)$ vērtību kādā intervāla punktā c (skatīt 10.5. zīmējumu).

Skaitli $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$ sauc par **funkcijas** $f(x)$ **vidējo vērtību intervālā** $[a;b]$. Lai ieraudzītu šī izteikuma jēgu, apskatīsim tādu sadalījumu $\mathcal{P}_n$ intervālā $[a;b]$ ar punktiem $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$, ka $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ visiem $i \in \overline{1,n}$. Dažādo sadalījuma punktu vērtību $f(x_1)$, $f(x_2)$,..., $f(x_n)$ vidējā vērtība ir

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{n} =$$

$$= \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{b-a}{n} = \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i.$$

Vienādības labajā pusē atrodas funkcijas $f(x)$ Rīmaņa summa intervālā $[a;b]$, kura tiecas uz noteikto integrāli $\int_a^b f(x)\,dx$, ja $n \to +\infty$ (jo f ir nepārtraukta, tāpēc integrējama). Tādējādi $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$ dabīgi vispārina vidējās vērtības ierasto nozīmi.

Šeit tālāk pierādītā teorēma nav tikai viena no daudzajām noteiktā integrāļa īpašībām, šim rezultātam ir nozīmīgs raksturs — daudzās mācību grāmatās ar tā palīdzību pierāda kopsakarību starp noteikto un nenoteikto integrāli.

Vispirms definēsim jaunu jēdzienu. Pieņemsim, ka funkcija f ir integrējama intervālā $[a;b]$ un x ir patvaļīgs punkts no šī paša intervāla. Tādā gadījumā mainīgajam x atbilst viens vienīgs skaitlis $\int_a^x f(t)\,dt$, tādējādi tiek definēta funkcija

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

ar definīcijas apgabalu $[a;b]$. Šo funkciju $G(x)$ sauc par **integrāli ar mainīgu augšējo robežu.**

10.13. TEORĒMA (noteiktā integrāļa atvasināšana). Pieņemsim, ka f ir nepārtraukta funkcija slēgtā intervālā $[a;b]$ un $x \in [a;b]$. Tad

$$G'(x) = \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x),$$

t.i., noteiktā integrāļa atvasinājums pēc mainīgās augšējās robežas ir vienāds ar zemintegrāļa funkciju no šīs augšējās robežas.

□ Mums ir jāpierāda, ka $G'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{G(x+h)-G(x)}{h} = f(x)$.

Fiksējam patvaļīgi $x \in [a;b]$.

Pēc noteiktā integrāļa aditivitātes īpašības funkcijas $G(x)$ pieaugumu varam izteikt

$$G(x+h) - G(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Pieņemsim, ka $h > 0$ (gadījums, kad $h < 0$, pierādāms analoģiski) un m un M ir funkcijas f attiecīgi mazākā un lielākā vērtība intervālā $[x;x+h]$. No ierobežotības īpašības seko, ka

$$mh \le \int_x^{x+h} f(t)\,dt \le Mh \quad \text{vai} \quad mh \le G(x+h) - G(x) \le Mh.$$

Izdalīsim nevienādību ar $h > 0$:

$$m \leq \frac{G(x+h) - G(x)}{h} \leq M.$$

Konkrētās m un M vērtības ir atkarīgas no h, taču, tā kā f ir nepārtraukta funkcija, tad $h \to 0$, abas vērtības m un M tiecas uz $f(x)$. Pēc teorēmas par robežpāreju nevienādībās (3.18. teorēma) iegūsim

$$\lim_{h \to 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = f(x). \blacksquare$$

No šīs teorēmas seko, ka katrai nepārtrauktai funkcijai f eksistē primitīvā funkcija formā $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$.

10.14. Piemēri. 1. $\left(\int\limits_1^x (t^3+1)dt\right)'$ var aprēķināt divējādi:

a) $\left(\int\limits_1^x (t^3+1)dt\right)' = \left(\left(\frac{t^4}{4}+t\right)\Big|_1^x\right)' = \left(\frac{x^4}{4} + x - \frac{1}{4} - 1\right)' = x^3 + 1$ vai

b) izmantojot 10.12. teorēmu, secināt uzreiz, ka $\left(\int\limits_1^x (t^3+1)dt\right)' = x^3 + 1.$

2. $\left(\int\limits_{2x^3-1}^5 (6t-9)dt\right)'$ — šajā gadījumā vispirms jāveic integrācijas robežu apmaiņa un tad integrālis jāatvasina, ievērojot 10.13. teorēmu un to, ka augšējā integrācijas robeža ir mainīgā x funkcija (t.i., jāatvasina kā salikta funkcija):

$$\left(\int\limits_{2x^3-1}^5 (6t-9)dt\right)' = \left(-\int\limits_5^{2x^3-1} (6t-9)dt\right)' =$$

$$= -(6(2x^3-1)-9)\cdot(2x^3-1)' = (-12x^3+6+9)\cdot 6x^2 = 18x^2(5-4x^3). \blacksquare$$

Noteiktajam integrālim tāpat kā diferencēšanas operācijai piemīt linearitātes īpašības:

10.15. TEORĒMA (linearitāte). Pieņemsim, ka f un g ir integrējamas funkcijas intervālā $[a;b]$ un $k \in \mathbb{R}$ ir konstante. Tad kf un $f+g$, kā arī $f-g$ ir integrējamas funkcijas un

1) $\int\limits_a^b kf(x)\,dx = k\int\limits_a^b f(x)\,dx,$

2) $\int\limits_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx,$

3) $\int\limits_a^b (f(x)-g(x))\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx - \int\limits_a^b g(x)\,dx.$

□ Pierādījumi seko no summas linearitātes un robežu īpašībām:

1) $$\int_a^b kf(x)\,dx = \lim_{|\mathcal{P}_n|\to 0}\sum_{i=1}^{n} kf(\bar{x}_i)\Delta x_i = \lim_{|\mathcal{P}_n|\to 0} k\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i =$$
$$= k\lim_{|\mathcal{P}_n|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i = k\int_a^b f(x)\,dx;$$

2) analoģiski kā 1);

3) izmantojam 2) un 1) īpašību $\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx = \int_a^b (f(x)+(-1)g(x))\,dx =$
$= \int_a^b f(x) + \int_a^b (-g(x))\,dx = \int_a^b f(x) + (-1)\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x) - \int_a^b g(x)\,dx.$ ■

Noteiktā integrāļa aprēķināšana

Pamēģināsim aprēķināt vēl kādu noteikto integrāli pēc definīcijas.

10.16. Piemērs. Aprēķināsim $\int_0^2 x\,dx$.

Sadalīsim intervālu $[0;2]$ vienāda garuma n apakšintervālos ar punktiem
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$
Apakšintervālu garums būs $\Delta x_i = \Delta x = \frac{2}{n}$, $i \in \overline{1,n}$. Pie kam, ja $n \to +\infty$, tad arī $|\mathcal{P}_n| = \Delta x \to 0$. Punktus $\bar{x}_i \in [x_{i-1}; x_i]$ izvēlēsimies vienādus ar atbilstošo apakšintervālu labajiem galapunktiem, t.i., $\bar{x}_i = x_i = i\frac{2}{n}$, $i \in \overline{1,n}$. Atbilstošā Rīmaņa summa ir:

$$R(\mathcal{P}_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} i\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{2}{n} = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i =$$
$$= \frac{4}{n^2}(1+2+3+...+n) = \frac{4}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2(n+1)}{n}.$$

Tad $\lim_{|\mathcal{P}_n|\to 0} R(\mathcal{P}_n) = \lim_{n\to+\infty} R(\mathcal{P}_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{2(n+1)}{n} = 2.$

Tātad $\int_0^2 x\,dx = 2.$

Pēdējo vienādību mēs drīkstam rakstīt tikai tad, ja varam parādīt, ka robeža no Rīmaņa summas nav atkarīga no sadalījuma $\mathcal{P}_n$. Šajā gadījumā, sastādot Rīmaņa summu, mēs izdarījām pieņēmumus, kas atviegloja summas sastādīšanu. Taču, ja mēs zinām 10.6. teorēmu, tad mēs zinām, ka funkcija $f(x) = x$ ir integrējama intervālā $[0;2]$, tāpēc pietiek sastādīt

Rīmaņa summu vienalga kādam sadalījumam $\mathcal{P}_n$, kuram var panākt, ka $|\mathcal{P}_n| \to 0$, palielinot punktu skaitu n. Tad šādas Rīmaņa summas robeža būs meklētais noteiktais integrālis. ■

Kā redzams no šī piemēra, tad, aprēķinot noteikto integrāli pēc definīcijas, parādās nepieciešamība izskaitļot dažādas summas (konkrētajā piemērā $\sum\limits_{i=1}^{n} i$, vispārīgā gadījumā $\sum\limits_{i=1}^{n} i^m$, kur $m \in \mathbb{N}$). Aprēķināt šādas summas ir ne vienmēr vienāršs uzdevums. Ir daudz ērtāks ceļš, kā aprēķināt noteiktos integrāļus.

10.17. TEORĒMA. Pieņemsim, ka funkcija f ir nepārtraukta (tātad integrējama) intervālā $[a;b]$, un pieņemsim, ka funkcija F ir funkcijas f primitīvā funkcija. Tad

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

□ Izveidosim intervālā $[a;b]$ sadalījumu $\mathcal{P}_n$ ar punktiem $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$. Patiesas ir vienādības
$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - ... - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0) =$
$= \sum\limits_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1}))$.
Funkcija $F(x)$ intervālā $[x_{i-1}; x_i]$ ir nepārtraukta un diferencējama, tāpēc varam lietot Lagranža teorēmu un iegūt:

$$\exists \bar{x}_i \in]x_{i-1}; x_i[\quad F'(\bar{x}_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}},\ i \in \overline{1,n},$$

jeb, tā kā $F'(x) = f(x)$, tad $F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\bar{x}_i)\cdot\Delta x_i$.
Tādējādi $\quad F(b) - F(a) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$.
Vienādības kreisajā pusē atrodas konstants lielums, bet labajā pusē funkcijas f Rīmaņa summa intervālā $[a;b]$. Liekot $|\mathcal{P}_n| \to 0$, mēs iegūsim:

$$\lim_{|\mathcal{P}_n|\to 0} (F(b) - F(a)) = F(b) - F(a) = \lim_{|\mathcal{P}_n|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)\,dx. \ ■$$

Formulu $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ sauc par **Ņūtona-Leibnica formulu**. Šī formula parāda, kā noteikto integrāli aprēķināt, ja protam noteikt nenoteikto integrāli, proti, ja esam atraduši $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, tad vienādības labajā pusē vispirms ievietojam x vietā augšējo robežu b, pēc tam apakšējo robežu a un izskaitļojam to starpību: $F(b)+C-(F(a)+C) = F(b) - F(a)$. Konstante C saīsinās, tāpēc turpmākajā, rēķinot noteiktos integrāļus, varam to nepierakstīt

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a).$$

10.18. Piemēri. 1. $\int\limits_a^b k\,dx = kx\big|_a^b = k(b-a)$, kur $k \in \mathbb{R}$ ir konstante.

2. $\int\limits_a^b x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})$, $n \neq -1$.

3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx = -\cos x\big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\cos\frac{\pi}{4} + \cos 0 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. $\int\limits_1^2 \frac{x+1}{(x^2+2x)^2}dx$ — šajā gadījumā varam rīkoties šādi: vispirms atrodam nenoteikto integrāli ar substitūcijas metodi un pēc tam izskaitļojam noteikto integrāli. $\int \frac{x+1}{(x^2+2x)^2}dx = *$

$\big|\ x^2 + 2x = t, \qquad (2x+2)\,dx = dt, \qquad (x+1)\,dx = \frac{1}{2}dt\ \big|$

$* = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2}\frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{2(x^2+2x)} + C.$

Tāpēc $\int\limits_1^2 \frac{x+1}{(x^2+2x)^2}dx = -\frac{1}{2(x^2+2x)}\Big|_1^2 = -\frac{1}{2(4+4)} + \frac{1}{2(1+2)} = \frac{1}{6} - \frac{1}{16} = \frac{5}{48}$. ■

Noteiktā integrāļa aprēķināšana vispārīgā gadījumā ir divu soļu process: vispirms mēs atrodam nenoteikto integrāli un tad pielietojam Ņūtona - Leibnica formulu. Ja nenoteiktais integrālis ir vienkāršs (tabulas integrālis), tad noteiktā integrāļa atrašana ir ātri izdarāma, bet, ja nepieciešama substitūcija, tad patiešām noteiktā integrāļa aprēķināšana jāveic minētajos divos soļos. Taču var rīkoties arī mazliet savādāk, to pieļauj nākamā teorēma.

10.19. TEORĒMA (substitūcijas metode). Pieņemsim, ka funkcijai g eksistē nepārtraukts atvasinājums intervālā $[a;b]$ un funkcija f ir nepārtraukta visām funkcijas g vērtībām. Tad

$$\int\limits_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

□ Tā kā $f(g(x))$ ir nepārtraukta intervālā $[a;b]$, tad tā ir integrējama funkcija un varam apskatīt tai atbilstošo integrāli ar mainīgu augšējo robežu $\int\limits_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a;b]$. No 10.13. teorēmas seko, ka

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$$

ir funkcijas f primitīvā funkcija.

Pēc Ņūtona – Leibnica formulas [10.17. teorēma] seko, ka

$$\int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du = F(u)|_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a)). \tag{10.1}$$

Savukārt, pielietojot substitūcijas metodi nenoteiktajam integrālim, iegūsim, ka

$$\int f(g(x))g'(x)\ dx = * \quad \left| \begin{array}{c} g(x) = t \\ g'(x)\,dx = dt \end{array} \right|$$

$$* = \int f(t)\,dt = F(t) + C = F(g(x)) + C.$$

Ņemot vērā Ņūtona – Leibnica formulu, iegūsim

$$\int\limits_a^b f(g(x))g'(x)\ dx = F(g(x))|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)). \tag{10.2}$$

Vienādībām (10.1) un (10.2) ir vienādas labās puses, tāpēc vienādām ir jābūt arī to kreisajām pusēm, tātad

$$\int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du = \int\limits_a^b f(g(x))g'(x)\,dx. \ ■$$

10.20. Piemēri. 1. $\int\limits_0^1 \frac{x^3}{(x^4+1)^3} dx = *$

$$\left| \begin{array}{ll} x^4 + 1 = t & 0 \le x \le 1 \\ 4x^3\,dx = dt & 1 \le t = x^4 + 1 \le 2 \\ x^3\,dx = \frac{1}{4}dt & \end{array} \right|$$

$$* = \frac{1}{4}\int_1^2 \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{4}\frac{t^{-2}}{-2}\Big|_1^2 = -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}-1\right) = \frac{3}{32}.$$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^5 x\, dx = *$ $\left|\begin{array}{ll} \cos x = t & x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ -\sin x\, dx = dt & x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0 \\ \sin x\, dx = -dt & \end{array}\right|$

$$* = -\int_1^0 t^5\, dt = -\frac{t^6}{6}\Big|_1^0 = -\frac{1}{6}(0-1) = \frac{1}{6}. \blacksquare$$

Substitūcijas metodes izmantošana ļauj pierādīt divas nākošās teorēmas, kuras atvieglo noteikto integrāļu atrašanu dažos speciālgadījumos.

10.21. TEORĒMA. Ja f ir pāra funkcija, tad $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx$.

Ja f ir nepāra funkcija, tad $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$.

□ izmantojot aditivitātes īpašību [10.8. teorēma], varam rakstīt

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_{-a}^{0} f(x)\, dx + \int_0^a f(x)\, dx.$$

Pirmajā labās puses saskaitāmajā izdarīsim substitūciju $-x = u$, tad $du = -dx$ un no $-a \le x \le 0$ sekos, ka $0 \le u \le a$.

Ja f ir pāra funkcija, tad $f(-x) = f(x)$, tāpēc

$$\int_{-a}^{0} f(x)\, dx = \int_{-a}^{0} f(-x)\, dx = -\int_{-a}^{0} f(-x)\,(-dx) = -\int_a^0 f(u)\, du = \int_0^a f(u)\, du.$$

$\int_0^a f(u)\, du = \int_0^a f(x)\, dx$, jo simbola u maiņa pret simbolu x integrāļa vērtību neizmaina. Galarezultātā esam ieguvuši, ka

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_{-a}^{0} f(x)\, dx + \int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a f(x)\, dx + \int_0^a f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx.$$

Ja f ir nepāra funkcija, tad $f(-x) = -f(x)$, tāpēc

$$\int_{-a}^{0} f(x)\, dx = -\int_{-a}^{0} f(-x)\, dx = \int_{-a}^{0} f(-x)\,(-dx) = \int_a^0 f(u)\, du =$$

$$= -\int_0^a f(u)\,du = -\int_0^a f(x)\,dx.$$

Secinām, ka nepāra funkcijas f gadījumā

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = -\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 0. \blacksquare$$

10.22. Piemērs. $\int\limits_{-2}^{2} (3x^2 + x^3 - 8\sin x + \cos x)\,dx =$

$= \int\limits_{-2}^{2} (3x^2 + \cos x)\,dx + \int\limits_{-2}^{2} (x^3 - 8\sin x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{2} (3x^2 + \cos x)\,dx + 0 =$

$= 2(x^3 + \sin x)|_0^2 = 2(8 + \sin 2 - 0 - 0) = 16 + 2\sin 2.$ ■

10.23. TEORĒMA. Ja funkcija f ir periodiska ar periodu p, tad

$$\int_{a+p}^{b+p} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

□ Atgādināsim, ka funkciju f sauc par **periodisku**, ja eksistē tāds skaitlis p, ka $f(x+p) = f(x)$ visiem x no f definīcijas apgabala. Mazāko no šādiem skaitļiem p sauc par periodiskas funkcijas **periodu**.

Integrālī $\int\limits_{a+p}^{b+p} f(x)\,dx$ lietosim substitūciju $u = x - p$, tad $x = u + p$, $du = dx$ un no $a + p \le x \le b + p$ seko, ka $a \le u = x - p \le b$. Savietojot, iegūsim, ka

$$\int_{a+p}^{b+p} f(x)\,dx = \int_a^b f(u+p)\,du = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(x)\,dx. \blacksquare$$

10.24. Piemērs. $\int\limits_0^{2\pi} |\sin x|\,dx = 2\int\limits_0^{\pi} \sin x\,dx = 2(-\cos)|_0^{\pi} =$

$= -2(\cos\pi - \cos 0) = -2(-1-1) = 4$, jo pēc pēdējās teorēmas

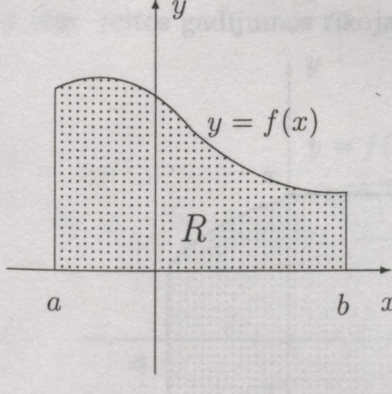
$\int\limits_0^{\pi} |\sin x|\,dx = \int\limits_{\pi}^{2\pi} |\sin x|\,dx$, bet $\sin x = |\sin x|$, ja $x \in [0;\pi]$. ■

11. nodaļa

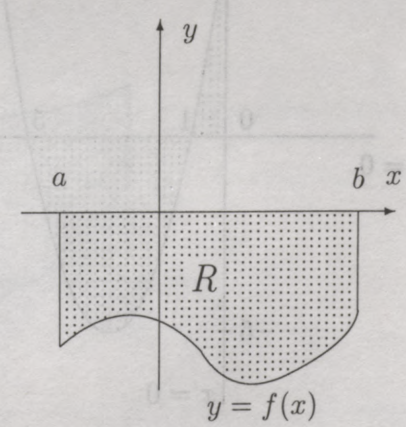
NOTEIKTĀ INTEGRĀĻA LIETOJUMI

Plaknes apgabala laukuma aprēķināšana

Izveidojot noteiktā integrāļa jēdzienu, mēs risinājām problēmu, kā aprēķināt laukumu tāda veida figūrai R plaknē, kuru ierobežo x ass, taisnes $x = a$ un $x = b$ un līknes $f(x)$ grafiks [sk. 11.1. zīm.]. Šādu figūru pieņemts saukt par **līklīnijas trapeci**.



11.1.zīm.



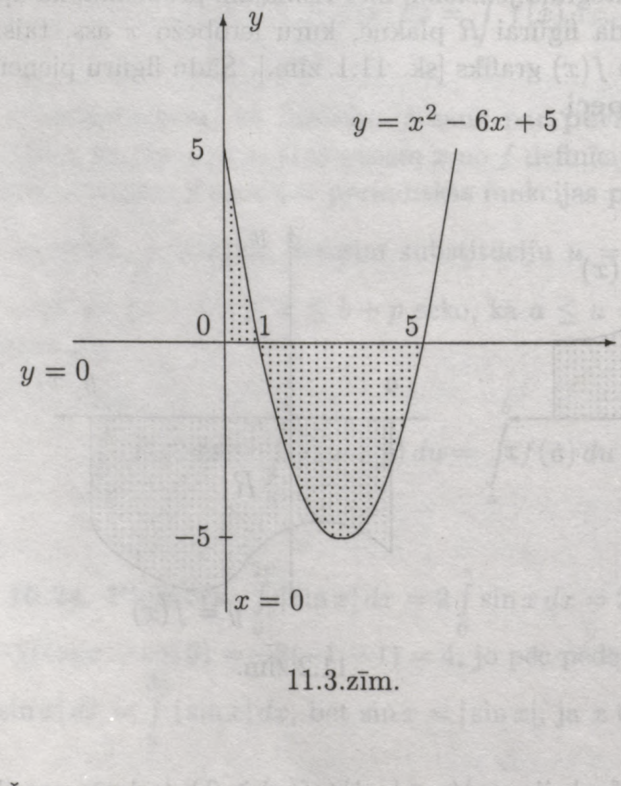
11.2.zīm.

Ja f ir nepārtraukta funkcija un $\forall x \in [a; b]\,(\, f(x) \geq 0\,)$, tad pēc noteiktā integrāļa definīcijas seko, ka

$$L(R) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Laukums skaitliski izsakās ar nenegatīvu skaitli. Ja līknes $y = f(x)$ grafiks atrodas zem x-ass, tad $\int_a^b f(x)\,dx$ ir negatīvs skaitlis un tāpēc nevar būt laukuma skaitliskā vērtība. Taču pēc absolūtās vērtības $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$ šis lielums izsaka laukuma [kā 11.2. zīm.] skaitlisko vērtību, tātad, ja $\forall x \in [a;b]\,(\,f(x) \leq 0\,)$, tad $L(R) = -\int_a^b f(x)\,dx$.

11.1. Piemērs. Jāaprēķina laukums apgabalam, kuru ierobežo parabola $y = x^2 - 6x + 5$ un taisnes $y = 0$, $x = 0$ [sk. 11.3. zīm.].



11.3.zīm.

Šajā gadījumā varam rēķināt tā:

$$L = \int_0^1 (x^2 - 6x + 5)\,dx + \left(-\int_1^5 (x^2 - 6x + 5)\,dx \right) =$$
$$= \left(\tfrac{x^3}{3} - \tfrac{6x^2}{2} + 5x \right)\Big|_0^1 - \left(\tfrac{x^3}{3} - \tfrac{6x^2}{2} + 5x \right)\Big|_1^5 =$$
$$= \tfrac{1}{3} - 3 + 5 - \left(\tfrac{125}{3} - 75 + 25 - \tfrac{1}{3} + 3 - 5 \right) = 13 \text{ (l.v.)} \blacksquare$$

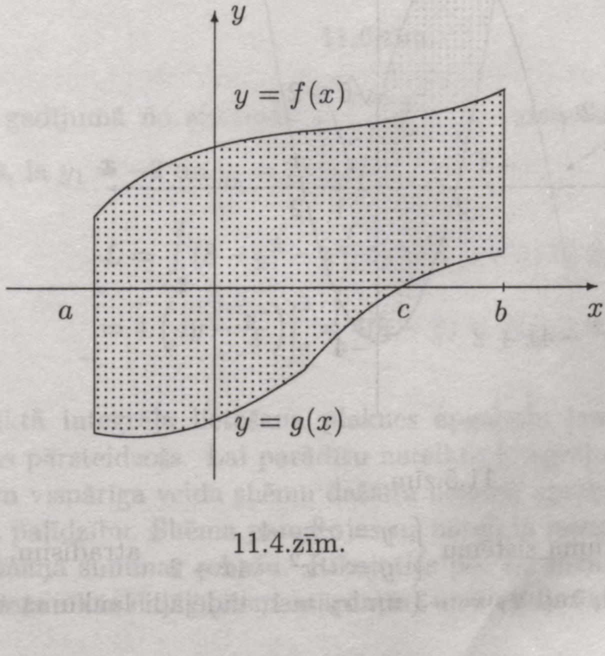
Ievērosim, ka 11.1. piemērā un tam līdzīgos gadījumos varam laukumu skaitliski izteikt sekojošā veidā:

$$L = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Plaknes apgabalu var ierobežot ne tikai koordinātu asis, taisnes $x = a$, $x = b$ un funkcijas $y = f(x)$ grafika daļa. Apskatīsim nepārtrauktas funkcijas $y = f(x)$ un $y = g(x)$ ar īpašību: $\forall x \in [a;b]\,(\,g(x) \leq f(x)\,)$. Šo līniju grafiku kopā ar taisnēm $x = a$ un $x = b$ ierobežoto laukumu varam aprēķināt pēc formulas:

$$L = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

Kā ilustrāciju šīs formulas pareizībai varam apskatīt situāciju, kāda parādīta 11.4. zīm. (citos gadījumos rīkojas analoģiski).

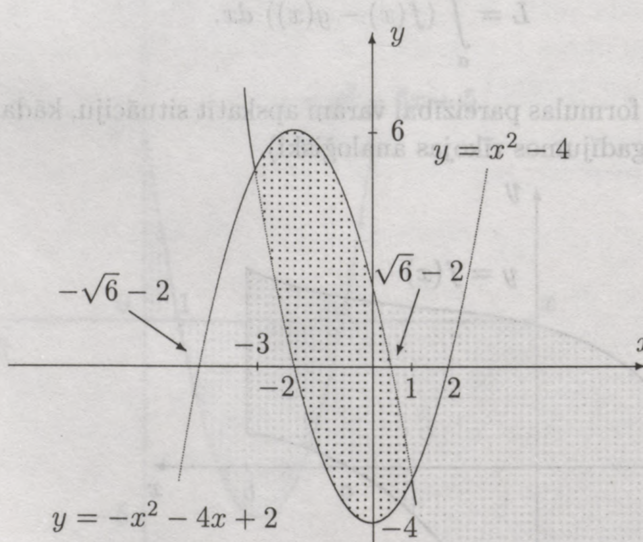


11.4.zīm.

$\int\limits_a^b f(x)\,dx$ izsaka laukuma skaitlisko vērtību tādam apgabalam, kuru ierobežo līnijas $x = a$, $x = b$, $y = 0$ un $y = f(x)$. Lai iegūtu iesvītrotā apgabala laukuma skaitlisko vērtību, minētajam integrālim klāt jāpieskaita $-\int\limits_a^c g(x)\,dx$ un jāatņem $\int\limits_c^b g(x)\,dx$, t.i., ņemot vērā noteiktā integrāļa īpašības, iegūsim:

$$L = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \left(-\int\limits_a^c g(x)\,dx\right) - \int\limits_c^b g(x)\,dx =$$
$$= \int\limits_a^b f(x)\,dx - \left(\int\limits_a^c g(x)\,dx + \int\limits_c^b g(x)\,dx\right) =$$
$$= \int\limits_a^b f(x)\,dx - \int\limits_a^b g(x) = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

11.2. Piemērs. Jāaprēķina laukums apgabalam, kuru ierobežo parabolas $y = x^2 - 4$ un $y = -x^2 - 4x + 2$.



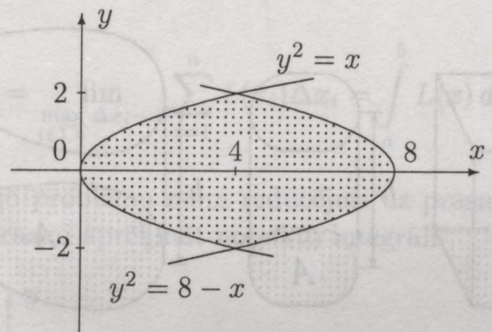
11.5.zīm.

Risinot vienādojumu sistēmu $\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = -x^2 - 4x + 2 \end{cases}$ atradīsim, ka dotās līnijas krustojas tad, kad $x_1 = -3$ un $x_2 = 1$, tādējādi laukuma skaitliskā vērtība ir atrodama ar šādu integrāli

$$L = \int_{-3}^{1} \left(-x^2 - 4x + 2 - (x^2 - 4)\right) dx =$$
$$= \int_{-3}^{1} (-2x^2 - 4x + 6)\, dx = 2\left(-\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 3x\right)\Big|_{-3}^{1} =$$
$$= 2\left(-\tfrac{1}{3} - 1 + 3 - 9 + 9 + 9\right) = 21\tfrac{1}{3} \text{ (l.v.)}. \ \blacksquare$$

Dažkārt ērtāk laukumu ir aprēķināt, uztverot ierobežoto laukumu kā balstītu uz y ass, nevis kā iepriekš uz x ass balstītu.

11.3. Piemērs. Jāaprēķina laukums apgabalam, kuru ierobežo līnijas $y^2 = x$ un $y^2 = 8 - x$.



11.6.zīm.

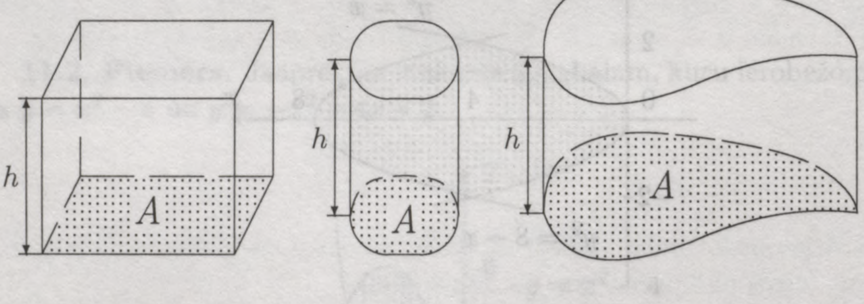
Šajā gadījumā no sistēmas $\begin{cases} x = y^2 \\ x = 8 - y^2 \end{cases}$ atradīsim, ka dotās līnijas krustojas, ja $y_1 = -2$ un $y_2 = 2$, tāpēc

$$L = \int_{-2}^{2} (8 - y^2 - y^2)\, dy = 4\int_{0}^{2} (4 - y^2)\, dy$$
$$= 4\left(4y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{0}^{2} = 4(8 - \tfrac{8}{3}) = 21\tfrac{1}{3} \text{ (l.v.)}. \ \blacksquare$$

Noteiktā integrāļa lietošana plaknes apgabalu laukumu aprēķināšanā nav nekas pārsteidzošs. Lai parādītu noteikto integrāļu lietošanas iespējas, aplūkosim vispārīga veida shēmu dažādu lielumu aprēķināšanai ar noteiktā integrāļa palīdzību. Shēma pamatojas uz noteiktā integrāļa definīciju, kura satur Rīmaņa summas robežu. Rīkojoties pēc šīs shēmas, aprēķināmo objektu sadala sīkās daļās (elementārdaļās) un šo daļu lielumu aprēķināšanai izmanto tuvinājumus tā, lai, palielinot dalījumu skaitu, precizitāte pieaugtu. Summējot elementārdaļu lielumu aptuvenās vērtības, iegūsim meklētā objekta lieluma aptuveno vērtību. Summu varam uzskatīt par noteiktas funkcijas Rīmaņa summu. Tādā gadījumā, ja objekts tiek sadalīts aizvien sīkākās daļās, varam panākt, ka Rīmaņa summas robeža ir noteiktais integrālis, kura vērtība ir meklētais objekta lielums. Jāņem tikai vērā, ka, lai šo shēmu varētu lietot, aprēķināmā objekta lielumam ir jābūt saistītam ar noteiktu intervālu $[a; b]$ un šajā intervālā definētu funkciju.

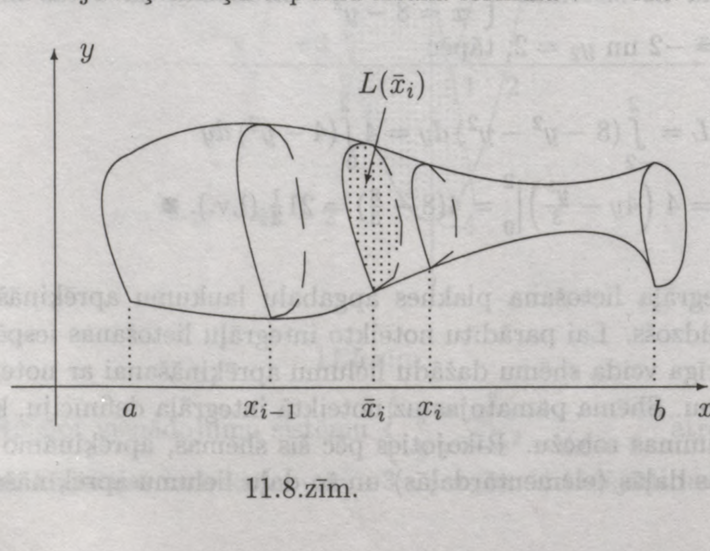
Ķermeņa tilpuma aprēķināšana

Kā atrod ķermeņa tilpumu? Sāksim ar vienkāršākajiem ķermeņiem, kurus varētu nosaukt par cilindriskiem ķermeņiem [11.7. zīm.].



11.7.zīm.

Šie ķermeņi balstīti uz plaknes apgabalu ar laukumu A, un to augstums ir h. Tādējādi ķermeņu tilpumu izsaka formula $V = Ah$.

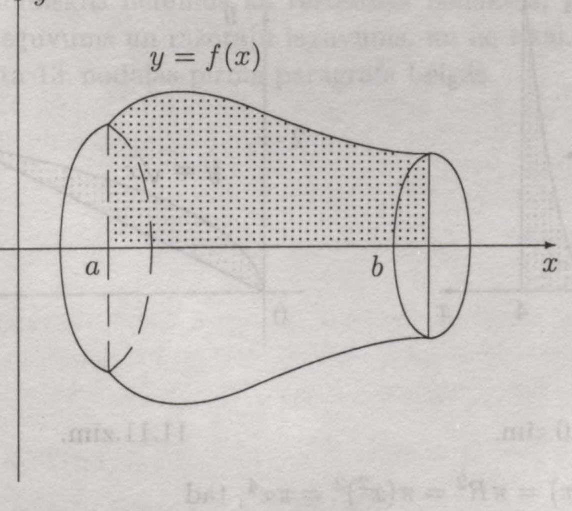


11.8.zīm.

Apskatīsim ķermeni, kurš dots 11.8.zīm. Sadalīsim nogriezni $[a; b]$ patvaļīgos apakšintervālos $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_i < ... < x_n = b$. Caur šiem punktiem novilksim plaknes, kas perpendikulāras pret x asi. Šīs plaknes sadala ķermeni n "plāksnēs". i-tā "plāksne" atrodas starp "plāksnēm", kas iet caur punktiem x_{i-1} un x_i. Tās tilpums ir aptuveni vienāds ar taisna cilindra tilpumu, kurš balstīts uz tādu pamatu, kurš veidojas ķermenim šķeļoties ar plakni, kas iet caur kaut kādu punktu $\bar{x}_i \in [x_{i-1}; x_i]$. Ja pamata laukums ir $L(\bar{x}_i)$, augstums $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, tad $V_i = L(\bar{x}_i)\Delta x_i$. Visu "plākšņu" tilpumu summa ir aptuveni vienāda ar dotā ķermeņa tilpumu $V \approx \sum\limits_{i=1}^{n} L(\bar{x}_i)\Delta x_i$. Labajā pusē atrodas Rīmaņa summa. Ja funkcija $L(x)$ ir nepārtraukta intervālā $[a; b]$, tad eksistēs Rīmaņa summas robeža, kad $\max\limits_{i \in \overline{1,n}} \Delta x_i \to 0$ un tā būs vienāda ar ķermeņa tilpumu:

$$V = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ i \in \overline{1,n}}} \sum_{i=1}^{n} L(\bar{x}_i)\Delta x_i = \int_a^b L(x)\,dx.$$

Līdz ar to sākotnējo problēmu esam reducējuši uz prasmi noteikt laukuma funkciju $L(x)$ un prasmi aprēķināt noteikto integrāli.



11.9.zīm.

Kā speciālgadījumu apskatīsim rotācijas ķermeņa tilpuma aprēķināšanu.

Rotācijas ķermenis rodas, rotējot līklīniju trapecei ap taisno pamatu [11.9. zīm.].

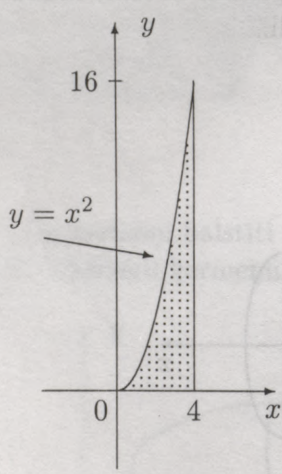
Izvēlēsimies koordinātu sistēmu tā, lai trapeces pamats atrastos uz x ass, un pieņemsim, ka tas ir intervāls $[a;b]$. Pieņemsim, ka pati trapece atrodas xy-plaknē un tās liektā pamata vienādojums ir $y = f(x)$. x asij perpendikulārie rotācijas ķermeņa šķēlumi ir riņķi ar rādiusu $R = f(x)$, tāpēc šķēluma laukumi $L(x)$ ir aprēķināmi pēc formulas

$$L(x) = \pi R^2 = \pi f^2(x).$$

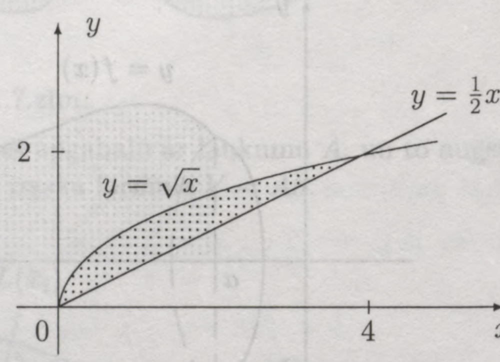
Tādējādi rotācijas ķermeņa tilpumu varam aprēķināt

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

11.4. Piemērs. Jāatropd tilpums ķermenim, kas rodas, rotējot ap x asi plaknes apgabalam, kuru ierobežo x ass, parabola $y = x^2$ un taisne $x = 4$ (11.10. zīm.).



11.10.zīm.



11.11.zīm.

Tā kā $L(x) = \pi R^2 = \pi(x^2)^2 = \pi x^4$, tad

$V = \pi \int_0^4 x^4\,dx = \pi \frac{x^5}{5}\Big|_0^4 = \pi \frac{4^5}{5} = \frac{1024\pi}{5}$ (t.v.) ■

Gadījumā, kad ap x asi rotē figūra, kuru ierobežo līnijas ar vienādojumiem $y = f(x)$ un $y = g(x)$, $x \in [a;b]$, kur $\forall x \in [a;b]$ $(\,f(x) \geq g(x) \geq 0\,)$, rotācijas ķermeņa tilpumu varam aprēķināt ar sekojoša noteiktā integrāļa palīdzību

$$V = \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x))\,dx.$$

Analoģiskas formulas būs lietojamas tanī gadījumā, ja rotācija notiek ap y asi.

11.5. Piemērs. Aprēķināsim tilpumu ķermenim, kas rodas, rotējot ap y asi plaknes apgabalam, kuru ierobežo līnijas $y = \sqrt{x}$ un $y = \frac{1}{2}x$ (11.11.zīm.).

Tā kā sistēmas $\begin{cases} x = 2y \\ x = y^2 \end{cases}$ atrisinājums ir $(0;0)$ un $(4;2)$ un $\forall y \in [0;2]\,(\,2y \geq y^2 \geq 0\,)$, tad

$V = \pi \int\limits_0^2 ((2y)^2 - (y^2)^2)\,dy = \pi \int\limits_0^2 (4y^2 - y^4)\,dy =$

$= \pi(\frac{4y^3}{3} - \frac{y^5}{5})\Big|_0^2 = \pi(\frac{4\cdot 8}{3} - \frac{32}{5}) = \frac{64}{15}\pi$ (t.v.) ■

Ar noteiktā integrāļa palīdzību var aprēķināt ne tikai laukumu vai tilpumu. 13. nodaļā mēs parādīsim, kā aprēķināt līknes loka garumu un rotācijas ķermeņa virsmas laukumu. Taču ar noteiktā integrāļa palīdzību var aprēķināt arī tādus fizikālus lielumus kā darbs, masu centri un inerces momenti, tādus ekonomiskus lielumus kā ražošanas izmaksas, peļņas pieaugums, patērētāju ieguvums un ražotāju ieguvums, un ne tikai. Ideja, kā to izdarīt, ir aprakstīta 13. nodaļas pirmā paragrāfa beigās.

12. nodaļa

TRANSCENDENTAS FUNKCIJAS

Atgādināsim, ka par transcendentām funkcijām sauc visas tās funkcijas, kuras nav algebriskas [sk. 2. nodaļas paragrāfu par funkciju klasifikāciju]. Šajā paragrāfā mēs tuvāk iepazīsimies ar dažām samērā bieži lietotām transcendentām funkcijām, tādām kā logaritma funkcija un eksponentfunkcija. Noskaidrosim, kā paplašināt funkciju saimi, izmantojot jēdzienu par inverso funkciju, un kā atrast šādu funkciju atvasinājumus.

Naturālā logaritma funkcija

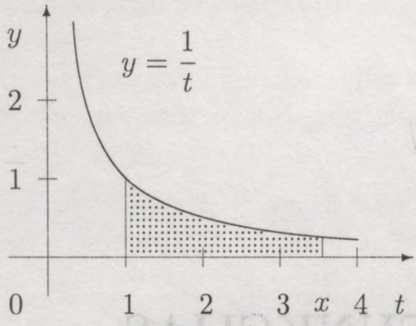
12.1. DEFINĪCIJA. Par **naturālā logaritma funkciju**, kuru apzīmē ar ln, sauc funkciju, kura definēta ar sakarību

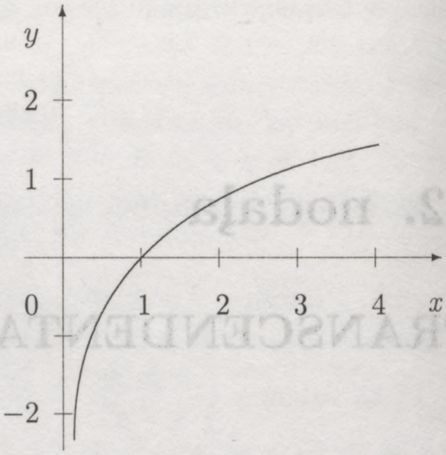
$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}, \qquad x > 0.$$

Ja $x > 1$, tad, ņemot vērā noteiktā integrāļa īpašības, seko, ka $\ln x$ vērtība ir vienāda ar līklīniju trapeces, kuras malas veido funkciju $t = 1$, $t = x$, $y = 0$ un $y = \frac{1}{t}$ grafiki [sk. 12.1. zīm.], ierobežoto laukumu.

Tāpēc, piemēram, ir spēkā $\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t} dt = 0$. Savukārt, ievērojot integrāļa ar mainīgu augšējo robežu atvasināšanas teorēmu [10.12. teorēma] iegūsim, ka

$$(\ln x)' = \left(\int_1^x \frac{dt}{t}\right)' = \frac{1}{x}, \qquad x > 0.$$





12.1. zīm. $\int\limits_1^x \frac{dt}{t}$, $x > 0$. 12.2. zīm. $y = \ln x$.

Saliktas funkcijas gadījumā rīkosimies pēc formulas

$$(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Izmantojot to, atradīsim, ka $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, ja $x \neq 0$. Tādējādi esam pierādījuši jau agrāk lietoto nenoteiktā integrāļa formulu, proti,

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, \qquad x \neq 0.$$

12.2. TEORĒMA. Naturālā logaritma funkcijai piemīt šādas īpašības:

(i) $\ln 1 = 0$;
(ii) $\ln ab = \ln a + \ln b$;
(iii) $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$;
(iv) $\ln a^\gamma = \gamma \ln a$, kur $a, b > 0$ un $\gamma \in \mathbb{Q}$.

□ Tas, ka $\ln 1 = 0$, jau pamatots paragrāfa sākumā.

(ii) Tā kā $x > 0$ ir spēkā

$$(\ln ax)' = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x} \quad \text{un} \quad (\ln x)' = \frac{1}{x},$$

tad pēc teorēmas par primitīvo funkciju savstarpējo atšķirību [9.3. teorēma] ir atrodama tāda konstante C, ka

$$\ln ax = \ln x + C.$$

Lai atrastu šo konstanti C, izvēlēsimies $x = 1$:

$$\ln a = \ln 1 + C = C.$$

Esam ieguvuši, ka $\ln ax = \ln x + \ln a$. Ja $x = b$, tad tā ir teorēmā minētā vienādība $\ln ab = \ln a + \ln b$.

(iii) Vispirms ievērosim, ka

$$0 = \ln 1 = \ln(b \cdot \tfrac{1}{b}) = \ln b + \ln \tfrac{1}{b}, \quad \text{t.i.,} \quad \ln \tfrac{1}{b} = -\ln b.$$

Tāpēc $\ln\frac{a}{b} = \ln(a\cdot\frac{1}{b}) = \ln a + \ln\frac{1}{b} = \ln a + (-\ln b) = \ln a - \ln b$.

(iv) Tā kā $x > 0$ ir spēkā $(\ln x^\gamma)' = \frac{1}{x^\gamma}\cdot\gamma x^{\gamma-1} = \frac{\gamma}{x}$ un $(\gamma\ln x)' = \gamma\cdot\frac{1}{x} = \frac{\gamma}{x}$, tad līdzīgi kā (ii) gadījumā $\ln x^\gamma = \gamma\ln x + C$. Ja izvēlamies $x = 1$, tad $C = 0$. Tādējādi $\ln x^\gamma = \gamma \ln x$ un speciālgadījumā $\ln a^\gamma = \gamma\ln a$. ■

Logaritmējot reizinājuma, daļas vai pakāpes izteiksmes, mēs iegūsim vienkāršāku izteiksmi, tāpēc reizēm ir ērti diferencēšanas procesu veikt, vispirms izteiksmi logaritmējot. Šādu metodi sauc par **logaritmisko atvasināšanu**. Visērtāk to demonstrēt ar piemēra palīdzību.

12.3. Piemērs. Jāatvasina funkcija $y = |\sin x|^{x^3}$.
Vispirms izteiksmes abas puses logaritmējam:

$$\ln y = \ln(|\sin x|^{x^3}) = x^3\ln|\sin x|.$$

Atvasinām abas vienādības puses:

$$\frac{y'}{y} = 3x^2\ln|\sin x| + x^3(\ln|\sin x|)'.$$

Tā kā $(\ln|\sin x|)' = \begin{cases} \frac{1}{\sin x}\cos x = \mathrm{ctg}x, & \sin x > 0; \\ \frac{1}{-\sin x}(-\cos x) = \mathrm{ctg}x, & \sin x < 0, \end{cases}$

tad $y' = |\sin x|^{x^3}x^2(3\ln|\sin x| + x\mathrm{ctg}x)$. ■

Lai uzzīmētu naturālā logaritma funkcijas grafiku [12.2.zīm.], ņemsim vērā vairākas likumsakarības, kas piemīt šai funkcijai:

1) funkcijas definīcijas apgabals ir $]0; +\infty[$;

2) tā kā $\ln 1 = 0$, tad x asi grafiks krusto punktā $x = 1$;

3) tā kā $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$, ja $x > 0$, tad funkcija ir augoša visā definīcijas apgabalā;

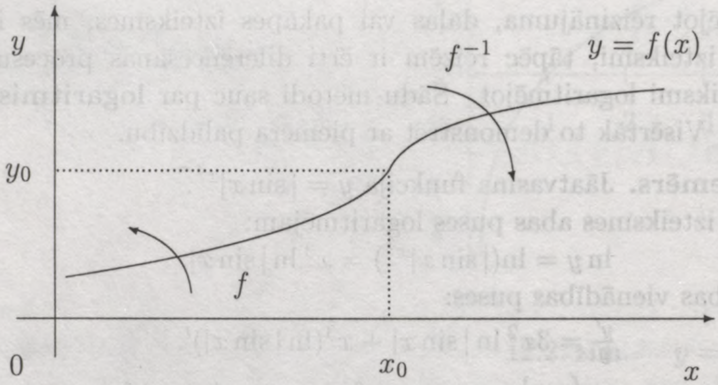
4) tā kā $(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0$, ja $x > 0$, tad funkcijas grafiks ir izliekts.

Tā kā eksistē $(\ln x)'$, tad funkcija ir nepārtraukta visā definīcijas apgabalā, un no naturālā logaritma funkcijas definīcijas $\ln x = \int\limits_1^x \frac{dt}{t}$ seko, ka $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$ un $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x = -\infty$.

Naturālā logaritma vērtības ir tabulētas pēc metodes, kuru mēs apskatīsim vēlāk [18.nodaļa]. Ir zināms, ka $\ln 2 \approx 0,6931$, $\ln 3 \approx 1,0986$, $\ln 10 \approx 2,3026$.

Inversās funkcijas un to atvasinājumi

Viens no veidiem, kā palielināt pazīstamo funkciju skaitu, ir apskatīt tā saucamās inversās jeb apvērstās funkcijas. Ideja ir šāda. Funkcija f piekārto skaitlim x_0 no definīcijas apgabala $Dom(f)$ vienu vērtību y_0 no funkcijas f vērtību apgabala $Ran(f)$. Ja mums ir palaimējies kā, piemēram, 12.3. zīmējumā, tad eksistē inversā funkcija f^{-1}, t.i., katram y no $Ran(f)$ pretējā ceļā var atrast to x no $Dom(f)$, ka $f(x) = y$; f^{-1} definīcijas apgabals ir $Ran(f)$, bet vērtību apgabals ir $Dom(f)$.



12.3. zīm.

Piemēram, ja $y = 3x$, tad $x = f^{-1}(y) = \frac{1}{3}y$; ja $y = x^3 - 1$, tad $x = \sqrt[3]{y+1}$.

12.4. DEFINĪCIJA. Trijnieku $f^{-1} = (Y, X, G^{-1})$, kur $G^{-1} = \{\, (y,x) \mid (x,y) \in G \,\}$, sauc par funkcijas $f = (X, Y, G)$ **inverso** jeb **apvērsto** funkciju, ja f^{-1} ir funkcija.

Tagad pievērsiet uzmanību skolas kursā sniegtajam inversās funkcijas skaidrojumam [mēs ceram, ka lasītājs šo skaidrojumu atceras] un jūs sapratīsiet, kāpēc matemātiķi mūsdienās izšķīrušies par funkcijas definīciju, kas balstās uz kopu teorijas nostādnēm. Jā, vienreiz ir jāpārvar intelektuālais kūtrums, toties turpmākās teorijas daļas būvējamas pēc vienotas shēmas, un tāpēc kļūst pārskatāmākas.

12.5. APGALVOJUMS. Ja funkcijai f eksistē inversā funkcija f^{-1}, tad funkcijai f^{-1} arī eksistē inversā funkcija un $(f^{-1})^{-1} = f$.

□ Ja reiz funkcijai $f = (X, Y, G)$ eksistē inversā funkcija, tad trijnieks $f^{-1} = (Y, X, G^{-1})$ ir funkcija, un tādēļ ir jēga runāt par inversās funkcijas f^{-1} inverso funkciju $(f^{-1})^{-1} = (X, Y, (G^{-1})^{-1})$. Tā kā $(x,y) \in G \Leftrightarrow (y,x) \in G^{-1}$, tad

$$(G^{-1})^{-1} = \{\, (x,y) \mid (y,x) \in G^{-1} \,\} = \{\, (x,y) \mid (x,y) \in G \,\} = G\,.$$

Līdz ar to $(f^{-1})^{-1} = (X, Y, (G^{-1})^{-1}) = (X, Y, G) = f$. ■

12.6. APGALVOJUMS. Ja funkcijai f eksistē inversā funkcija f^{-1}, tad

(i) $\forall x \in Dom(f)\, [\, (f^{-1} \circ f)(x) = x\,]$ un

(ii) $\forall y \in Ran(f)\, [\, (f \circ f^{-1})(y) = y\,]$.

□ Pieņemsim, ka $f = (X, Y, G)$, tad $f^{-1} = (Y, X, G^{-1})$, kur
$$G^{-1} = \{\, (y, x) \mid (x, y) \in G\, \}.$$

(i) Pieņemsim, ka $x \in Dom(f)$, tad $(x, f(x)) \in G \,\&\, (f(x), x) \in G^{-1}$. No šejienes $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$.

(ii) Pieņemsim, ka $y \in Ran(f)$, tad $\exists x \in X\, [\, (x, y) \in G\,]$, tāpēc $(y, x) \in G^{-1}$. No šejienes $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$. ■

Taču ne katrai funkcijai eksistē inversā funkcija. Piemēram, $y = x^2$ vai $y = \sin x$. Būtisks kritērijs, lai funkcijai eksistētu inversā, ir šāds.

12.7. TEORĒMA. Funkcijai f eksistē inversā funkcija f^{-1} tad un tikai tad, ja f ir injekcija.

□ $\Rightarrow$ Pieņemsim, ka funkcijai $f = (X, Y, G)$ eksistē inversā funkcija $f^{-1} = (Y, X, G^{-1})$, tad $G^{-1} = \{\, (y, x) \mid (x, y) \in G\, \}$. Tā kā f^{-1} ir funkcija, tad [2.7. definīcija]
$$\forall (y_1, x_1) \in G^{-1}\, \forall (y_2, x_2) \in G^{-1}\, [\, y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 = x_2\,]. \tag{12.1}$$

Pieņemsim, ka funkcija f nav injekcija, tad
$$\exists u_1\, \exists u_2\, \exists v\, [\, u_1 \neq u_2 \,\&\, (u_1, v) \in G \,\&\, (u_2, v) \in G\,].$$

Tas nozīmē, ka $(v, u_1) \in G^{-1}$ un $(v, u_2) \in G^{-1}$, kas ir pretrunā ar (12.1). Tātad pieņēmums, ka f nav injekcija ir bijis kļūdains.

$\Leftarrow$ Pieņemsim, ka $f = (X, Y, G)$ ir injekcija, tad saskaņā ar 12.4. definīciju atliek pierādīt, ka $f^{-1} = (Y, X, G^{-1})$ ir funkcija. Tas nozīmē, ka mums jāprot pierādīt nosacījums (12.1) jeb ekvivalentā formā
$$\forall (x_1, y_1) \in G\, \forall (x_2, y_2) \in G\, [\, x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2\,].$$

Bet tas taču nav nekas cits, kā apgalvojums, ka f ir injekcija. Tā kā f saskaņā ar doto ir injekcija, tad tas arī ir viss pierādījums. ■

Ģeometriski šis kritērijs izsaka sakarību, ka funkcijas $y = f(x)$ grafiks ar patvaļīgu horizontālu taisni krustojas ne vairāk kā vienā punktā. Taču šādu kritēriju ir grūti pārbaudīt. Viens no ērtākajiem kritērijiem inversās funkcijas eksistencei ir noskaidrošana, vai funkcija ir stingri monotona, t.i., vai tā ir augoša vai dilstoša visā definīcijas apgabalā. Nepārtrauktām funkcijām šis nosacījums ir ekvivalents ar inversās funkcijas eksistenci.

12.8. TEORĒMA. Intervālā I nepārtrauktai funkcijai $f : I \to \mathbb{R}$ eksistē inversā funkcija tad un tikai tad, ja tā ir stingri monotona šajā intervālā.

$\square$ $\Rightarrow$ Uzskatīsim, ka funkcijai f eksistē inversā funkcija, tad saskaņā ar tikko pierādīto teorēmu f ir injekcija, tāpēc jebkuriem diviem dažādiem intervāla I punktiem x un y ir spēkā nevienādība $f(x) \neq f(y)$. Pieņemsim, ka f nav stingri monotona, tad eksistē tādi intervāla I punkti $a < b < c$, ka izpildās viens no sekojošiem nosacījumiem:
(i) $f(a) < f(b) > f(c)$ vai
(ii) $f(a) > f(b) < f(c)$.
Konkrētības labad pieņemsim, ka $f(a) < f(c)$, tad (i) gadījumā tas nozīmē, ka $f(a) < f(c) < f(b)$. Līdz ar to varam apgalvot [4.27. teorēma], ka $\exists x \in [a;b]\ f(x) = f(c)$. Tātad f nav injekcija. Pretruna!

Pieņēmums $f(a) < f(c)$ (ii) gadījumā ļauj secināt, ka $f(b) < f(a) < f(c)$. Līdzīgi kā iepriekš varam apgalvot [4.27. teorēma], ka $\exists y \in [b;c]\ f(y) = f(a)$. Atkal iegūta pretruna, jo tas demonstrē ka f nav injekcija.

$\Leftarrow$ Uzskatīsim, ka f ir stingri monotona, tad f ir vai nu augoša, vai dilstoša.

(i) Pieņemsim, ka f ir augoša, tad izpildās nosacījums:

$$\forall x \in I\ \forall y \in I\ [\, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)\,].$$

Tātad, ja $x \neq y$, tad $f(x) \neq f(y)$, t.i., f ir injekcija.

(ii) Pieņemsim, ka f ir dilstoša, tad izpildās nosacījums:

$$\forall x \in I\ \forall y \in I\ [\, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)\,].$$

Atkal, ja $x \neq y$, tad $f(x) \neq f(y)$, t.i., f ir injekcija.

Tātad abos gadījumos f ir injekcija. Tagad atsaucoties uz 12.5. teorēmu secinām: funkcijai f eksistē inversā funkcija. $\blacksquare$

Šī teorēma nepārprotami norāda, ka trigonometriskām funkcijām inversās funkcijas neeksistē visā definīcijas apgabalā. Bet mēs varam izvēlēties tādus intervālus, kuros trigonometriskās funkcijas ir stingri monotonas. Tās gan vairs nebūs pašas trigonometriskās funkcijas, bet to sašaurinājumi, toties šiem sašaurinājumiem, ja tie izvēlēti kā stingri monotonas funkcijas, eksistē inversās funkcijas. Neko darīt, jāsamierinās ar šo funkciju sašaurinājumiem.

12.9. DEFINĪCIJA. Funkcijas $y = \sin x|[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ inverso funkciju sauc par **arksinusu**. Raksta $y = \arcsin x$, lasa "y ir arksinuss no x".

Funkcijas $y = \cos x|[0, \pi]$ inverso funkciju sauc par **arkkosinusu**. Raksta $y = \arccos x$, lasa "y ir arkkosinuss no x".

Funkcijas $y = \mathrm{tg} x|] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ inverso funkciju sauc par **arktangensu**. Raksta $y = \mathrm{arctg}\, x$, lasa "y ir arktangenss no x".

Funkcijas $y = \mathrm{ctg} x|]0, \pi[$ inverso funkciju sauc par **arkkotangensu**. Raksta $y = \mathrm{arcctg}\, x$, lasa "y ir arkkotangenss no x".

12.10. TEORĒMA. Intervālā I stingri monotonas nepārtrauktas funkcijas $f : I \to f(I)$ inversā funkcija $f^{-1} : f(I) \to I$ ir stingri monotona nepārtraukta funkcija.

□ Pieņemsim, ka $I = [a; b]$ un f ir dilstoša. Pārējo gadījumu pierādījumus piedāvājam lasītājam kā vingrinājumu, jo tie pēc būtības visi pārstāstāmi pēc vienas un tās pašas shēmas.

(i) Uzskatīsim, ka $\alpha = f(b)$, bet $\beta = f(a)$, tad

$$\forall x \in [a; b]\, [\, \alpha = f(b) \le f(x) \le f(a) = \beta\,],$$

jo f ir dilstoša. Tātad [4.27. teorēma] $f(I) = [\alpha; \beta]$.

(ii) Pieņemsim, ka $f = (I, f(I), G)$. Mūsu gadījumā $I = [a; b]$, bet $f(I) = [\alpha; \beta]$. Tā kā f ir stingri monotona, tad [12.8. teorēma] tai eksistē inversā funkcija $f^{-1} = ([\alpha; \beta], [a; b], G^{-1})$.

(iii) Pieņemsim, ka $\alpha \le y_1 < y_2 \le \beta$, tad

$$\exists x_1 \in [a; b]\, \exists x_2 \in [a; b]\, [\, f(x_1) = y_1 \,\&\, f(x_2) = y_2\,].$$

Tas nozīmē, ka $(y_1, x_1) \in G^{-1}$ & $(y_2, x_2) \in G^{-1}$. Tā kā $y_1 \ne y_2$ un f ir injekcija [12.7. teorēma], tad $x_1 \ne x_2$. Tātad $x_1 < x_2$ vai $x_2 < x_1$.

Pieņemsim, ka $x_1 < x_2$, tad $y_1 = f(x_1) > f(x_2) = y_2$, jo f ir dilstoša. Pretruna, jo saskaņā ar y_1, y_2 izvēli $y_1 < y_2$. Atliek tikai otra iespēja, proti, $f^{-1}(y_1) = x_1 > x_2 = f^{-1}(y_2)$. Tātad f^{-1} ir dilstoša.

(iv) Pārejam pie nepārtrauktības pierādījuma. Katram $y_0 \in [\alpha; \beta]$ mums jāpierāda apgalvojums

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall y \in [\alpha; \beta]\, [\, |\, y - y_0\,| < \delta \Rightarrow |\, f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\,| < \varepsilon\,].$$

Ievērosim, ka nosacījums $|\, y - y_0\,| < \delta$ ekvivalents ar $y_0 - \delta < y < y_0 + \delta$. Tātad mums jāpierāda: ja

$$\alpha \le y \le \beta \,\&\, y_0 - \delta < y < y_0 + \delta, \tag{12.2}$$

tad

$$|\, f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\, | < \varepsilon\,.$$

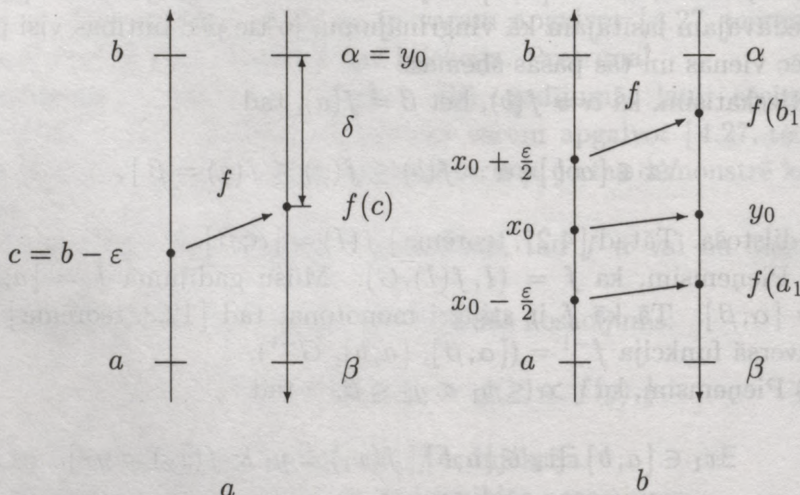
1. Ja $y_0 = \alpha$, tad $f^{-1}(y_0) = b$. Izvēlamies $c = \max\{a; b-\varepsilon\}$, un aprēķinām $\delta = f(c) - \alpha$ [sk. 12.4*a*. zīmējumu]. Tā ka $c \neq b$, tad $\delta > 0$.

Tagad nosacījums (12.2) iegūst izskatu $\alpha \leq y < \alpha + \delta$, jo $y_0 = \alpha$. Tā kā f^{-1} ir dilstoša, tad

$$c = f^{-1}(\alpha+\delta) < f^{-1}(y) \leq f^{-1}(\alpha) = b = f^{-1}(y_0)\,.$$

No šejienes $\quad 0 \leq f^{-1}(y_0) - f^{-1}(y) < b - c \leq \varepsilon.$

Tātad $\quad |\, f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\, | < \varepsilon\,.$



12.4. zīm.

2. Uzskatīsim, ka $y_0 \in\,]\alpha; \beta[$ un $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Izrēķinām $b_1 = \min\{b, x_0 + \frac{\varepsilon}{2}\}$, $a_1 = \max\{a, x_0 - \frac{\varepsilon}{2}\}$, un izvēlamies [skatīt 12.4*b*. zīmējumu] $\delta = \min\{y_0 - f(b_1), f(a_1) - y_0\}$. No šejienes

$$\delta \leq y_0 - f(b_1) \;\&\; \delta \leq f(a_1) - y_0$$

jeb $\quad f(b_1) \leq y_0 - \delta \;\&\; f(a_1) \geq y_0 + \delta\,.$

Savukārt nosacījums (12.2) dotajā gadījumā iegūst izskatu $y_0 - \delta < y < y_0 + \delta$. Tā kā f^{-1} ir dilstoša, tad

$$a_1 \leq f^{-1}(y_0+\delta) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0-\delta) \leq b_1\,.$$

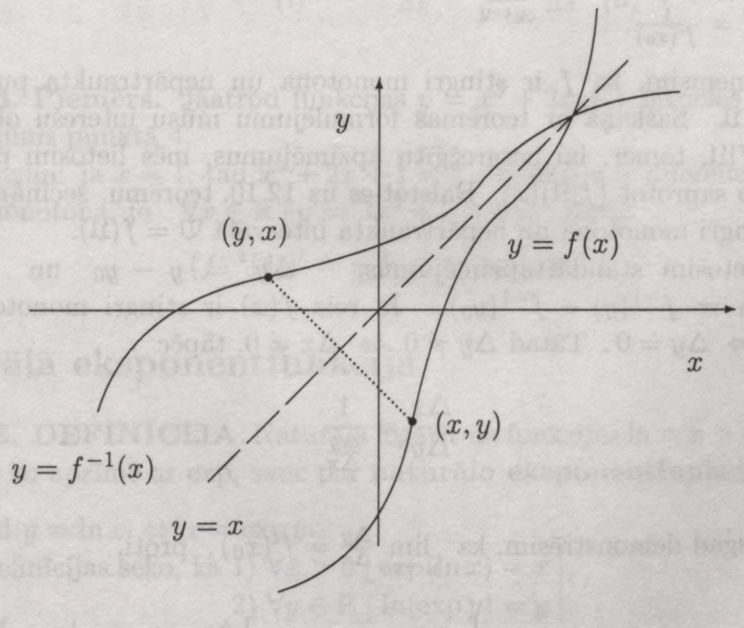
Ja reiz $x_0 = f^{-1}(y_0)$, tad $a_1 < y_0 < b_1$, un tāpēc

$$| f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) | < b_1 - a_1 \leq \varepsilon .$$

3. Ja $y_0 = \beta$, tad $f^{-1}(y_0) = a$, un pierādījums faktiski kopē 1. punktā aprakstīto, tādēļ to lasītājam piedāvājam kā vingrinājumu. ■

12.11. Piemērs. Funkcijai $y = 4x^3 + 6x - 12$ eksistē inversā funkcija, jo $\forall x \in \mathbb{R}$ [$f'(x) = 12x^2 + 6 > 0$], t.i., funkcija ir augoša visā definīcijas apgabalā. ■

Šis piemērs parāda ceļu, kā atrast inversās funkcijas noteiktās kopās funkcijām, kurām visā definīcijas apgabalā nevar būt inversās funkcijas. Tad definīcijas apgabalu mēs varam iedalīt intervālos, kuros dotā funkcija tikai aug (vai tikai dilst); tā kā šādā apakšintervālā funkcija ir stingri monotona, tad šajā kopā tai eksistē inversā funkcija.



12.5. zīm.

Pieņemsim, ka funkcijai f eksistē inversā, tad $x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$. No šejienes seko, ka funkcijas f un f^{-1} nosaka vienus un tos pašus punktu (x, y) pārus un tām ir identiski grafiki, tikai $y = f(x)$ definīcijas apgabals ir inversās funkcijas vērtību apgabals un $x = f^{-1}(y)$ definīcijas apgabals ir dotās funkcijas vērtību apgabals. Ja mēs gribam, lai funkcijas f un tās inversās funkcijas definīcijas apgabals atrastos uz vienas ass, tad inversās funkcijas grafiks skicējams plaknē kā līkne, kas ir simetriska pret taisni $y = x$ [sk. 12.5. zīm.].

12.12. Piemērs. Atrast formulu funkcijai $f^{-1}(x)$, ja $y = f(x) = \frac{x}{1-x}$.

Tā kā $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} > 0$, $\forall x \in Dom(f)$, tad dotajai funkcijai inversā funkcija eksistē.

Izteiksim x kā funkciju no y:

$$y(1-x) = x \Rightarrow y - yx = x \Rightarrow y = x(1+y) \Rightarrow x = \frac{y}{1+y},$$

tātad $f^{-1}(y) = \frac{y}{1+y}$, tas nozīmē, ka $f^{-1}(x) = \frac{x}{1+x}$. ∎

Inversās funkcijas atvasinājumu atrast palīdzēs teorēma:

12.13. TEORĒMA. Ja funkcija f ir nepārtraukta un stingri monotona punkta x_0 apkārtnē un tai punktā x_0 eksistē atvasinājums $f'(x_0) \neq 0$, tad inversajai funkcijai f^{-1} eksistē atvasinājums punktā $y_0 = f(x_0)$ un $(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)}$.

□ Pieņemsim, ka f ir stingri monotona un nepārtraukta punkta x_0 apkārtnē $\mathfrak{U}$. Saskaņā ar teorēmas formulējumu mūsu interešu objekts ir funkcija $f|\mathfrak{U}$, tomēr, lai nesarežģītu apzīmējumus, mēs lietosim pierakstu $f(x)$ ar to saprotot $(f|\mathfrak{U})(x)$. Balstoties uz 12.10. teorēmu, secinām, ka arī f^{-1} ir stingri monotona un nepārtraukta intervālā $\mathfrak{V} = f(\mathfrak{U})$.

(i) Lietosim standartapzīmējumus: $\Delta y = y - y_0$ un $\Delta x = x - x_0 = f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)$. Ja reiz $f(x)$ ir stingri monotona, tad $\Delta x = 0 \Leftrightarrow \Delta y = 0$. Tātad $\Delta y \neq 0 \Leftrightarrow \Delta x \neq 0$, tāpēc

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

(ii) Tagad demonstrēsim, ka $\lim\limits_{y \to y_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$, proti,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in \mathfrak{V} \left[0 < |\Delta y| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) \right| < \varepsilon \right].$$

Saskaņā ar doto

$$\lim_{u \to x_0} \frac{f(u) - f(x_0)}{u - x_0} = f'(x_0), \quad \text{t.i.,}$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall u \in \mathfrak{U} \left[0 < |u - x_0| < \eta \Rightarrow \left| \frac{f(u) - f(x_0)}{u - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon \right].$$

Tā kā f^{-1} ir nepārtraukta funkcija [12.10. teorēma], tad $\lim\limits_{y \to y_0} \Delta x = 0$, t.i.,

$$\forall \eta > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in \mathfrak{V}\ [\,|\Delta y| < \delta \Rightarrow |\Delta x| < \eta\,].$$

Līdz ar to, ja $0 < |\Delta y| < \delta$, tad $0 < |\Delta x| < \eta$. No šejienes, ja $u = f^{-1}(y) = x$, tad

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\right| < \varepsilon \quad \text{jeb} \quad \left|\frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} - f'(x_0)\right| < \varepsilon.$$

Tātad $\left|\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0)\right| < \varepsilon$; tas arī nozīmē, ka $\lim\limits_{y \to y_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$.

(iii) Un tagad pāriesim pie teorēmas tieša pierādījuma.

$$(f^{-1}(y_0))' = \lim_{y \to y_0} \frac{\Delta x}{\Delta y} \underset{\text{(i)}}{=} \lim_{y \to y_0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{y \to y_0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} \underset{\text{(ii)}}{=} \frac{1}{f'(x_0)}. \ \blacksquare$$

12.14. Piemērs. Jāatrod funkcijas $y = x^3 + 2x + 1$ inversās funkcijas atvasinājums punktā 4.

Ievērosim: ja $x = 1$, tad $x^3 + 2x + 1 = 4$. Funkcija ir diferencējama un stingri monotona, jo $\forall x \in \mathbb{R}\ [\,y' = 3x^2 + 2 > 0\,]$, tāpēc

$$(f^{-1}(4))' = \left.\frac{1}{3x^2 + 2}\right|_{x=1} = \frac{1}{5}. \ \blacksquare$$

Naturālā eksponentfunkcija

12.15. DEFINĪCIJA. Naturālā logaritma funkcijas $\ln x$, $x > 0$, inverso funkciju, ko apzīmē ar exp, sauc par **naturālo eksponentfunkciju**.

Tātad $y = \ln x \Leftrightarrow x = \exp y$.

No definīcijas seko, ka 1) $\forall x > 0\ [\,\exp(\ln x) = x\,]$,

un 2) $\forall y \in \mathbb{R}\ [\,\ln(\exp y) = y\,]$.

12.16. DEFINĪCIJA. Ar **simbolu** e tiek apzīmēts vienīgais pozitīvais reālais skaitlis, kuram $\ln e = 1$.

Tā kā $\ln e = 1$, tad $\exp 1 = e$; e ir iracionāls skaitlis, tā tuvinājums ir $e \approx 2,718281828459045$.

Tā kā racionāliem skaitļiem γ mūsu rīcībā ir vienādības

$$e^\gamma = \exp(\ln e^\gamma) = \exp(\gamma \ln e) = \exp \gamma,$$

tad tas attaisno **definīciju:**

$$\forall x \in \mathbb{R}\,[\,e^x = \exp x\,]\,.$$

Ņemot vērā šo definīciju:

1) $\forall x > 0\,[\,e^{\ln x} = \exp(\ln x) = x\,]$,

un 2) $\forall y \in \mathbb{R}\,[\,\ln(e^y) = \ln(\exp y) = y\,]$.

12.17. TEORĒMA. Naturālajai eksponentfunkcijai piemīt īpašības:

1. $e^a e^b = e^{a+b}$;
2. $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$, kur $a, b \in \mathbb{R}$.

□ 1. $e^a e^b = \exp(\ln(e^a e^b)) = \exp(\ln e^a + \ln e^b) = \exp(a+b) = e^{a+b}$.

2. Pierāda analoģiski kā 1. gadījumu. ■

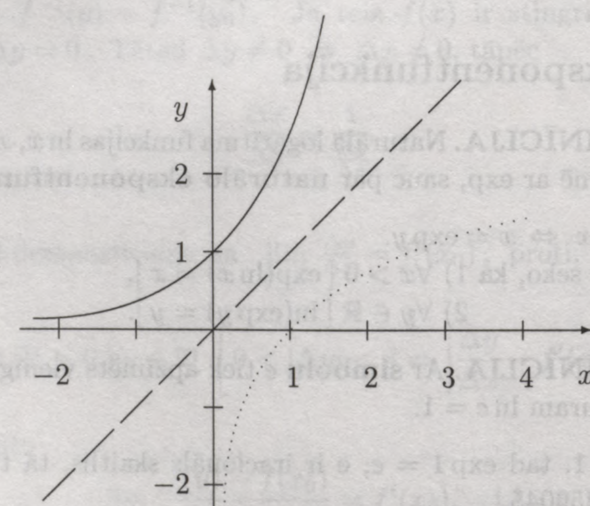
Tā kā exp un ln ir inversas funkcijas, tad no 12.13. teorēmas seko, ka $e^x = \exp x$ ir diferencējama funkcija. Pieņemsim, ka $y = e^x$, tad $x = \ln y$. Atvasināsim pēdējās vienādības abas puses: $1 = \frac{1}{y} \cdot y'$, esam ieguvuši, ka $y' = y$, t.i.,

$$(e^x)' = e^x.$$

No šīs formulas seko, ka

$$\int e^x\,dx = e^x + C.$$

Funkcijas $y = e^x$ grafiku iegūsim no funkcijas $y = \ln x$ grafika, atspoguļojot to simetriski pret taisni $y = x$ [sk. 12.6. zīm.].



12.6. zīm. $y = e^x$.

Eksponentfunkcijas un logaritmiskās funkcijas

Funkcija e^x ir definēta visiem reāliem skaitļiem, tomēr, vai ir jēga tādam pierakstam kā, piemēram, $2^{\sqrt{2}}$ vai π^e? Tāpēc mēs interesējamies par skaitļa $a > 0$ jebkuru reālu pakāpi x. Ja $\gamma = \frac{p}{q}$ ir racionāls skaitlis, $p, q \in \mathbb{Z}$, kur $q \neq 0$, tad $a^\gamma = (\sqrt[q]{a})^p$. Taču mēs zinām, ka

$$a^\gamma = \exp(\ln a^\gamma) = \exp(\gamma \ln a) = e^{\gamma \ln a}.$$

Skaitļa e pakāpe ir definēta visiem reāliem skaitļiem x, tāpēc šī pēdējā vienādība ļauj definēt jebkādu reāla skaitļa pakāpi jebkuram reālam skaitlim a, kur $a > 0$.

12.18. DEFINĪCIJA. Jebkuram $a > 0$ un jebkuram reālam skaitlim x **eksponentfunkcija**, kuru apzīmē ar a^x, tiek definēta ar sakarību

$$a^x = e^{x \ln a}.$$

Svarīgākās eksponentfunkcijas īpašības dotas nākamajā teorēmā.

12.19. TEORĒMA. Eksponentfunkcijai piemīt īpašības:
1. $a^x a^y = a^{x+y}$;
2. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$;
3. $(a^x)^y = a^{xy}$;
4. $(ab)^x = a^x b^x$;
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

□ 1. $a^x a^y = e^{x \ln a} e^{y \ln a} = e^{x \ln a + y \ln a} = e^{(x+y) \ln a} = a^{x+y}$.

2. $\frac{a^x}{a^y} = \frac{e^{x \ln a}}{e^{y \ln a}} = e^{x \ln a - y \ln a} = e^{(x-y) \ln a} = a^{x-y}$.

3. $(a^x)^y = (e^{x \ln a})^y = e^{y \ln e^{x \ln a}} = e^{y\,(x \ln a)} = e^{(yx) \ln a} = e^{(xy) \ln a} = a^{xy}$.

4. $(ab)^x = e^{x \ln ab} = e^{x(\ln a + \ln b)} = e^{x \ln a + x \ln b} = e^{x \ln y} e^{x \ln b} = a^x b^x$.

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = e^{x \ln \frac{a}{b}} = e^{x(\ln a - \ln b)} = e^{x \ln a - x \ln b} = \frac{e^{x \ln a}}{e^{x \ln b}} = \frac{a^x}{b^x}$. ■

Eksponentfunkcijas atvasinājuma formulu varam iegūt, izmantojot šīs funkcijas definīciju:

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a}(x \ln a)' = a^x \ln a.$$

Nenoteiktā integrāļa formula seko no atvasināšanas formulas:

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

Ievērosim, ka a^x atvasinājuma funkcija $a^x \ln a$ ir dilstoša, ja $\ln a < 0$ jeb $0 < a < 1$, un tā ir augoša, ja $a > 1$. Abos šajos gadījumos eksponentfunkcijai eksistē inversā funkcija.

12.20. DEFINĪCIJA. Eksponentfunkcijas a^x, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$, inverso funkciju, kuru apzīmē ar $\log_a x$, sauc par **logaritmisko funkciju pie bāzes** a.

Tātad $y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$. Ievērosim, ka $\log_e x = \ln x$.

Mēs jau 12.3. piemērā bez pierādījuma izmantojām vienādību $\ln x^\alpha = \alpha \ln x$, kaut arī iracionāliem α vēl joprojām nav definēta funkcija $y = x^\alpha$.

12.21. DEFINĪCIJA. Ja $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, tad funkciju $e^{\alpha \ln x}$ sauc par **pakāpes funkciju** un lieto apzīmējumu x^α. Šīs funkcijas definīcijas apgabals $Dom(x^\alpha) =]0; +\infty[$.

12.22. SEKAS. $\forall \alpha \in \mathbb{R}\, \forall x > 0\, [\, \ln x^\alpha = \alpha \ln x\,]$.

$\square$ $\ln x^\alpha = \ln e^{\alpha \ln x} = \alpha \ln x$. ■

5. nodaļā mēs pierādījām, ka atvasināšanas formula $(x^n)' = nx^{n-1}$ ir patiesa, ja n ir racionāls skaitlis. Tagad mēs varam parādīt, ka šī formula ir spēkā jebkuram reālam skaitlim n, jo

$$(x^n)' = (e^{n \ln x})' = e^{n \ln x} \cdot \frac{n}{x} = x^n \cdot \frac{n}{x} = nx^{n-1}.$$

Ņemsim vērā, ka $y = \log_a x$ tad un tikai tad, ja $x = a^y$, tādēļ $\ln x = y \ln a$ jeb $y = \frac{\ln x}{\ln a}$, t.i., $y = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$. Tāpēc

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

12.23. SEKAS. $\forall \alpha \in \mathbb{R}\, \forall x > 0\, [\, \log_a x^\alpha = \alpha \log_a x\,]$.

$\square$ $\log_a x^\alpha = \dfrac{\ln x^\alpha}{\ln a} = \dfrac{\alpha \ln x}{\ln a} = \alpha \log_a x$. ■

Izmantojot sakarību $a = e^{\ln a}$, $a > 0$, varam atvasināt tādas izteiksmes, kurās mainīgā x funkcija tiek kāpināta pakāpē, kura arī ir mainīgā x funkcija.

12.24. Piemērs. Ja $y = x^x$, $x > 0$, tad $y = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$, un tāpēc

$$y' = e^{x \ln x}(x \ln x)' = e^{x \ln x}(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1).$$

Ievērosim, ka atvasināt mēs varam arī izmantojot logaritmisko atvasināšanu: ja $y = x^x$, tad $\ln y = x \ln x$ un $\frac{1}{y} y' = \ln x + 1$ jeb

$$y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)\,. \;■$$

Nenoteiktība 1^∞

Izrādās, ka nenoteiktību 1^∞ dažkārt var novērst izmantojot robežas, kas saistītas ar skaitli e.

12.25. TEORĒMA. $\lim\limits_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e, \quad \lim\limits_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^t = e.$

□ Apskatīsim funkciju $f(x) = \ln x$, tad $f'(x) = \frac{1}{x}$, speciālgadījumā $f'(1) = 1$. No atvasinājuma definīcijas izriet, ka

$$1 = f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)-\ln 1}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(1+h) = \lim_{h\to 0}\ln(1+h)^{\frac{1}{h}}.$$

Tā kā $g(x) = e^x$ ir nepārtraukta funkcija, tad mēs varam to iznest pirms robežas zīmes [4.16. teorēma]:

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h\to 0}\exp[\ln(1+h)^{\frac{1}{h}}] = \exp[\lim_{h\to 0}\ln(1+h)^{\frac{1}{h}}] = \exp 1 = e.$$

Otro robežu varam reducēt uz pirmo, lietojot substitūciju $h = \frac{1}{t}$. ■

12.26. Piemērs. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3+n}{n+7}\right)^{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+7-4}{n+7}\right)^{\sqrt{n}} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{-4}{n+7}\right)\right)^{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-4}{n+7}\right)^{\frac{n+7}{-4}\cdot\frac{-4}{n+7}\cdot\sqrt{n}} =$$
$$= \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-4}{n+7}\right)^{\frac{n+7}{-4}}\right)^{\frac{-4}{n+7}\cdot\sqrt{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-4\sqrt{n}}{n+7}} = e^0 = 1. \ ■$$

12.27. Piemērs. Šajā piemērā apskatīsim trīs dažādas situācijas.

1. Bankā tiek atvērts konts, kurā noguldа 500 Ls ar salikto procentu likmi 10% gadā. Cik liels uzkrājums būs pēc 5 gadiem?

Bankā ar noguldījuma sākumkapitālu A_0 un salikto procentu likmi p% gadā pēc pirmā noguldījuma gada uzkrājuma summa būs

$$A_1 = A_0 + A_0 i = A_0(1+i), \text{ kur } i = \frac{p}{100} = 0,01p,$$

pēc diviem gadiem

$$A_2 = A_1 + A_1 i = A_1(1+i) = A_0(1+i)^2,$$

pēc n gadiem

$$A_n = A_{n-1} + A_{n-1}i = A_{n-1}(1+i) = A_0(1+i)^n.$$

Tātad uzkrājums pēc 5 gadiem būs

$$A_5 = 500(1+0,1)^5 \approx 805,26 \text{ Ls}.$$

2. Bankā tiek atvērts konts, kurā nogulda 500 Ls ar salikto procentu likmi 10% gadā, pie tam uzkrājuma procenti tiek pieskaitīti katru dienu. Cik liels uzkrājums būs pēc 5 gadiem?

Atšķirībā no 1. uzdevuma uzkrājuma summa mainās katru dienu, bet jāņem vērā, ka procentu likme attiecas uz visu gadu (=365 dienas), tāpēc pēc pirmās dienas uzkrājums būs

$$A(1) = 500(1 + \tfrac{0,1}{365}) \approx 500,17 \text{ Ls},$$

pēc otrās dienas

$$A(2) = 500(1 + \tfrac{0,1}{365})^2 \approx 500,27 \text{ Ls},$$

pēc pieciem gadiem

$$A_5 = A(5 \cdot 365) = 500(1 + \tfrac{0,1}{365})^{5 \cdot 365} \approx 824,30 \text{ Ls}.$$

3. Bankā tiek atvērts konts, kurā nogulda 500 Ls ar salikto procentu likmi 10% gadā, pie tam uzkrājuma procenti tiek aprēķināti nepārtraukti. Cik liels uzkrājums būs pēc 5 gadiem?

Šoreiz mēs varam uzskatīt, ka gads tiek sadalīts h laika periodos un $h \to +\infty$. Līdz ar to pēc n gadiem uzkrājumā esošā summa ir aprēķināma kā

$$A_n = \lim_{h \to +\infty} A_0(1 + \tfrac{i}{h})^{hn} = A_0 \lim_{h \to +\infty} ((1 + \tfrac{i}{h})^{\frac{h}{i}})^{\frac{i}{h} \cdot hn} = A_0 e^{in},$$

(jo i ir fiksēts un tāpēc $\frac{i}{h} \to 0$, kad $h \to +\infty$).

Tātad $A_5 = 500e^{0,5} \approx 824,36$ Ls.

Kā redzams 2. un 3. uzdevumā atbildes atšķiras tikai nedaudz. Tāpēc vispārīgā gadījumā aptuvenos aprēķinos ērti ir lietot tieši formulu $A_n = A_0 e^{in}$, kur A_0 ir sākumkapitāls, $i = \frac{p}{100}$, p ir procentu likme, n — laika periods (gadu skaits). ■

Inverso trigonometrisko funkciju atvasināšana

Mēs jau zinām, ka $(\sin x)' = \cos x$ un $(\cos x)' = -\sin x$, kā arī $(\mathrm{tg} x)' = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{1}{\cos^2 x}$ un $(\mathrm{ctg} x)' = (\frac{\cos x}{\sin x})' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Ar ko būs vienādi $(\arcsin x)'$, $(\arccos x)'$, $(\mathrm{arctg}\, x)'$, $(\mathrm{arcctg}\, x)'$?

Funkcijas $y = \arcsin x$ inversā funkcija $x = \sin y \mid [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ ir stingri monotona un intervāla iekšienē $x'_y = \cos y \neq 0$, tāpēc varam lietot inversās funkcijas atvasināšanas 12.13. teorēmu un iegūt, ka

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Tātad $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$. Analoģiski atradīsim, ka $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$.

Ņemsim vērā, ka $y = \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} y \,|\,]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. Funkcijas $y = \operatorname{arctg} x$ atvasinājumu iegūsim, izmantojot jau labi zināmo 12.13.teorēmu:

$$y' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\operatorname{tg} x)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Līdz ar to $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$. Analoģiski atradīsim, ka $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.
Atbilstošās nenoteikto integrāļu formulas ir

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$$

Vispārīgā gadījumā $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C,\ a > 0$, jo

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{dx}{a^2(1+(\frac{x}{a})^2)} = \left| \begin{array}{l} \frac{x}{a} = t \\ \frac{1}{a}dx = dt \\ dx = a\,dt \end{array} \right| = \frac{1}{a^2}\int \frac{a\,dt}{1+t^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} t + C =$$

$$= \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

Hiperboliskās funkcijas

Hiperboliskās funkcijas tiek definētas, izmantojot naturālo eksponentfunkciju.

12.28. DEFINĪCIJA. Par **hiperbolisko sinusu** sauc funkciju $\operatorname{sh} x$, kura definēta ar sakarību $\forall x \in \mathbb{R}\,[\,\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\,]$.

Par **hiperbolisko kosinusu** sauc funkciju $\operatorname{ch} x$, kura definēta ar sakarību $\forall x \in \mathbb{R}\,[\,\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\,]$.

Par **hiperbolisko tangensu** sauc funkciju $\operatorname{th} x$, kura definēta ar sakarību $\forall x \in \mathbb{R}\,[\,\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,]$.

Par **hiperbolisko kotangensu** sauc funkciju $\operatorname{cth} x$, kura definēta ar sakarību $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,[\,\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\,]$.

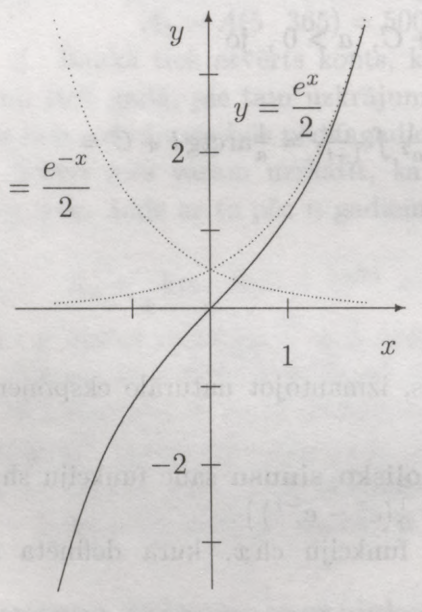
Izmantojot hiperbolisko funkciju definīcijas, var pierādīt vairākas formulas, kuras pēc ārējā izskata atgādina atbilstošās trigonometrisko funkciju formulas, piemēram,

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,$$
$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x,$$
$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x.$$

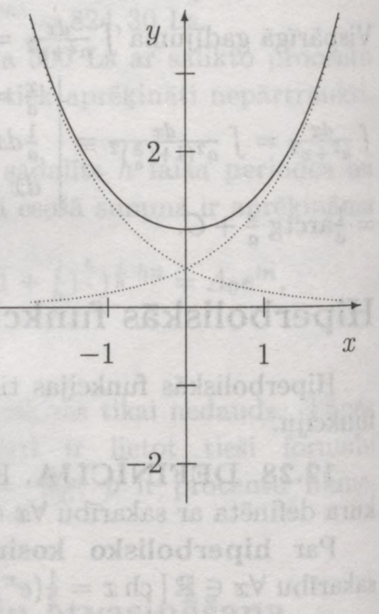
Funkcijas $y = \operatorname{sh} x$ grafiks iegūstams, konstruējot $y = \frac{1}{2}e^x$ un $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ grafikus un atbilstošās šo grafiku punktu ordinātas atņemot vienu no otras. Funkcija $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ ir nepāra funkcija, jo

$$\operatorname{sh}(-x) = \tfrac{1}{2}(e^{-x} - e^x) = -\tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -\operatorname{sh} x.$$

Ievērosim, ka punktā $x = 0$ funkcijas $\operatorname{sh} x$ vērtība ir $\operatorname{sh} 0 = \frac{1}{2}(e^0 - e^0) = 0$, un, ja $x > 0$, tad $\operatorname{sh} x > 0$, bet, ja $x < 0$, tad $\operatorname{sh} x < 0$; turklāt $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sh} x = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2}$, jo $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$. Tātad, pieaugot x vērtībām, funkcijas $\operatorname{sh} x$ grafiks tuvojas funkcijas $\frac{e^x}{2}$ grafikam. Funkcijas $\operatorname{sh} x$ grafiks dots 12.7. zīmējumā.



12.7. zīm. $y = \operatorname{sh} x$.



12.8. zīm. $y = \operatorname{ch} x$.

Savukārt funkciju $\operatorname{ch} x$ iegūsim, grafiku $y = \frac{1}{2}e^x$ un $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ punktu ordinātas sasummējot. Funkcija $\operatorname{ch} x$ ir pāra funkcija un punktā $x = 0$ tās vērtība ir 1, un $\forall x \in \mathbb{R}\ \operatorname{ch} x > 0$. Taču $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{ch} x = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2}$, t.i., arī funkcijas $\operatorname{ch} x$ grafiks, pieaugot x vērtībām, tuvojas funkcijas $\frac{e^x}{2}$ grafikam. No otras puses, samazinoties x vērtībām, funkcijas $\operatorname{ch} x$ grafiks tuvojas funkcijas $\frac{e^{-x}}{2}$ grafikam. Funkcijas $\operatorname{ch} x$ grafiks dots 12.8. zīmējumā.

Līdzīgā veidā mēs varam analizēt arī funkcijas $\operatorname{th} x$ un $\operatorname{cth} x$, to grafiki atbilstoši doti 12.9. un 12.10. zīmējumā.

Ņemot vērā $\operatorname{sh} x$ definīciju, atradīsim šīs funkcijas atvasinājumu:

$$(\mathbf{sh}\,x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \mathbf{ch}\,x.$$

Līdzīgi $(\mathbf{ch}\,x)' = \mathbf{sh}\,x, \quad (\mathbf{th}\,x)' = \dfrac{1}{\mathbf{ch}^2\,x}, \quad (\mathbf{cth}\,x)' = -\dfrac{1}{\mathbf{sh}^2\,x}.$

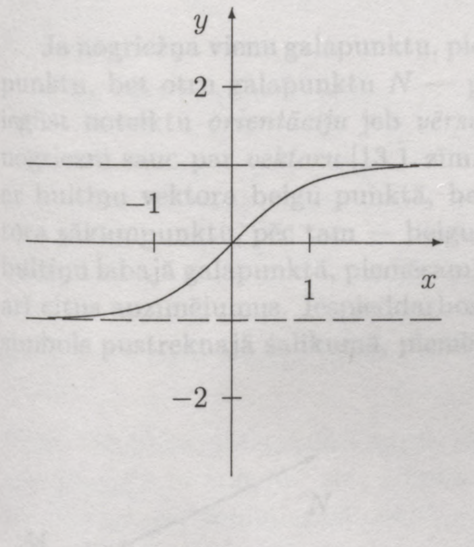
Pamatintegrāļu tabulu varam papildināt:

$$\int \mathbf{sh}\,x\,dx = \mathbf{ch}\,x + C,$$

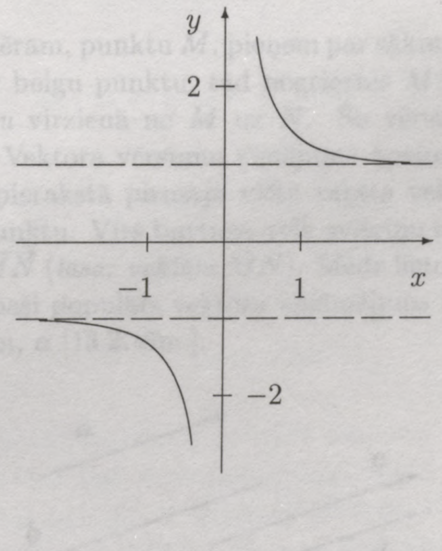
$$\int \mathbf{ch}\,x\,dx = \mathbf{sh}\,x + C,$$

$$\int \frac{1}{\mathbf{ch}^2\,x}dx = \mathbf{th}\,x + C,$$

$$\int \frac{1}{\mathbf{sh}^2\,x}dx = -\mathbf{cth}\,x + C.$$



12.9. zīm. $y = \mathrm{th}\,x$.



12.10. zīm. $y = \mathrm{cth}\,x$.

12.29. Piemēri. 1. $y' = \left(\sin\left(\frac{1}{\mathrm{ch}\,x}\right)\right)' = \cos\left(\frac{1}{\mathrm{ch}\,x}\right) \cdot ((\mathrm{ch}\,x)^{-1})' =$

$$= \cos\left(\frac{1}{\mathrm{ch}\,x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\mathrm{ch}^2\,x}\right) \cdot \mathrm{sh}\,x = -\cos\left(\frac{1}{\mathrm{ch}\,x}\right)\frac{\mathrm{th}\,x}{\mathrm{ch}\,x}.$$

2. $\int \mathrm{th}\,x\,dx = \int \frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x}dx = \left| \begin{array}{c} \mathrm{ch}\,x = u \\ \mathrm{sh}\,x\,dx = du \end{array} \right| = \int \frac{du}{u} =$

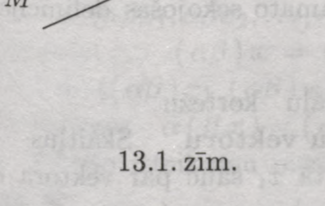
$$= \ln|u| + C = \ln \mathrm{ch}\,x + C. \blacksquare$$

13. nodaļa

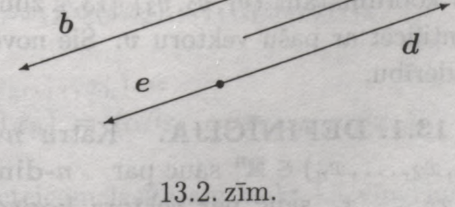
VEKTORFUNKCIJAS

Vektori

Ja nogriežņa vienu galapunktu, piemēram, punktu M, pieņem par sākumpunktu, bet otru galapunktu N — par beigu punktu, tad nogrieznis MN iegūst noteiktu *orientāciju* jeb *vērsumu* virzienā no M uz N. Šo vērsto nogriezni sauc par *vektoru* [13.1. zīm.]. Vektora vērsumu zīmējumā apzīmē ar bultiņu vektora beigu punktā, bet pierakstā pirmajā vietā raksta vektora sākumpunktu, pēc tam — beigu punktu. Virs burtiem velk svītriņu ar bultiņu labajā galapunktā, piemēram, $\overrightarrow{MN}$ (*lasa: vektors* MN). Mēdz lietot arī citus apzīmējumus. Iespieddarbos īpaši populārs vektora apzīmējums ir simbols pustreknajā salikumā, piemēram, $\boldsymbol{a}$ [13.2. zīm.].



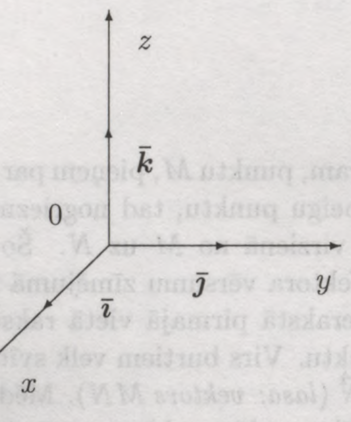
13.1. zīm.



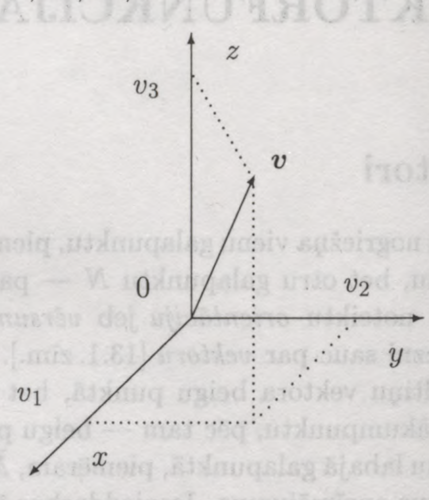
13.2. zīm.

Atbilstošā nogriežņa MN garumu $|MN|$ sauc par vektora *garumu* jeb *moduli*. Vektorus, kuri savā starpā ir paralēli vai arī atrodas uz vienas taisnes, sauc par *kolineāriem* vektoriem. 13.2. zīmējumā attēlotie vektori $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ un $\boldsymbol{e}$ ir kolineāri vektori. Kolineāri vektori var būt vienādi vērsti, piemēram, $\boldsymbol{a}$ un $\boldsymbol{c}$ [13.2. zīm.], vai pretēji vērsti, piemēram, $\boldsymbol{a}$ un

$\boldsymbol{b}$ [13.2. zīm.]. Kolineārus vektorus, kuriem ir vienādi garumi un vienādi vērsumi sauc par *vienādiem vektoriem.* Visus savstarpēji vienādos vektorus dažkārt mēdz uzlūkot par vienu un to pašu vektoru, ar to akcentējot, ka vektora jēdzienā ir nozīgs tikai tā vērsums un garums, bet ne novietojums. Tādus vektorus sauc par *brīvajiem vektoriem.* Trīs vektorus, kuru garums ir viena vienība un kuru vērsums sakrīt attiecīgi ar x ass, y ass un z ass vērsumu, sauc par *koordinātu asu vienības vektoriem* [13.3. zīm.]. Tos parasti apzīmē ar $\bar{\imath}$ (x ass vērsums), $\bar{\jmath}$ (y ass vērsums) un $\bar{\boldsymbol{k}}$ (z ass vērsums). Mēdz lietot arī citus apzīmējumus, piemēram, $\boldsymbol{e}^1$, $\boldsymbol{e}^2$, $\boldsymbol{e}^3$.



13.3. zīm.



13.4. zīm.

Ja mēs vektora $\boldsymbol{v}$ sākumpunktu novietojam Dekarta koordinātu sistēmas $Oxyz$ sākumpunktā, tad vektors pilnībā tiek noteikts ar tā galapunkta koordinātām (v_1, v_2, v_3) [13.4. zīm.], tāpēc koordinātas (v_1, v_2, v_3) var identificēt ar pašu vektoru $\boldsymbol{v}$. Šie novērojumi pamato sekojošas definīcijas lietderību.

13.1. DEFINĪCIJA. Katru n-dimensionālu kortežu $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sauc par **n-dimensionālu vektoru**. Skaitļus $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sauc par vektora **koordinātām**, tā x_i sauc par vektora i-to koordināti. Divus vektorus $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sauc par **vienādiem vektoriem**, ja $\forall i \in \overline{1, n}\ x_i = y_i$. Vektoru $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$ sauc par vektoru $\boldsymbol{x}$ un $\boldsymbol{y}$ **summu**, bet vektoru $\alpha\boldsymbol{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$ sauc par vektora $\boldsymbol{x}$ **reizinājumu** ar skaitli $\alpha \in \mathbb{R}$. Vektoru $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ sauc par **nulles** vektoru, bet $-\boldsymbol{x} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ sauc par vektora $\boldsymbol{x}$ **pretējo** vektoru. Pieraksta

$x+(-y)$ vietā lieto saīsinājumu $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$, un to sauc par vektoru $\boldsymbol{x}$ un $\boldsymbol{y}$ **starpību**. Visu n-dimensionālo vektoru kopu $\mathbb{R}^n$ ar tajā iepriekš definētajām operācijām sauc par **lineāru n-dimensionālu vektoru telpu $\mathbb{R}^n$ pār reālo skaitļu lauku $\mathbb{R}$.**

Atkarībā no apskatāmā jautājuma dažreiz ir izdevīgāk operēt ar vektoriem, citreiz — ar punktiem. Bieži n-dimensionālu vektoru telpu neatšķir no n-dimensionālas punktu kopas un abos gadījumos lieto vienu un to pašu apzīmējumu $\mathbb{R}^n$. Atzīmēsim, ka vajadzētu lietot terminus *punktu kopa* $\mathbb{R}^n$ un *vektoru telpa* $\mathbb{R}^n$.

Ja telpā $\mathbb{R}^3$ ir dota koordinātu sistēma $Oxyz$, tad punkta $M \in \mathbb{R}^3$ stāvokli telpā nosaka vektors $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$, ko sauc par punkta M *rādiusvektoru*. Šo nostādni un terminu "rādiusvektors" mēdz pārnest arī uz kopu $\mathbb{R}^n$. Lai nerastos pārpratumi, mēs punkta M koordinātas pierakstīsim šādi: $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, toties rādiusvektora $\overrightarrow{OM}$ koordinātas — formā $\overrightarrow{OM} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

13.2. APGALVOJUMS. Ja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, bet $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$, tad

(i) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$;

(ii) $\boldsymbol{0}+\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}$;

(iii) $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$;

(iv) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$;

(v) $\alpha(\beta\boldsymbol{x}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{x}$;

(vi) $\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}$;

(vii) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}$;

(viii) $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

□ Ilustrācijai pierādīsim (v) izteikumu. Pieņemsim, ka $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, tad $\alpha(\beta\boldsymbol{x}) = \alpha(\beta(x_1, x_2, \ldots, x_n)) =$
$= \alpha(\beta x_1, \beta x_2, \ldots, \beta x_n) = (\alpha(\beta x_1), \alpha(\beta x_2), \ldots, \alpha(\beta x_n)) =$
$= (\alpha\beta x_1, \alpha\beta x_2, \ldots, \alpha\beta x_n)$.
Savukārt $(\alpha\beta)\boldsymbol{x} = (\alpha\beta)(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$
$= ((\alpha\beta)x_1, (\alpha\beta)x_2, \ldots, (\alpha\beta)x_n) = (\alpha\beta x_1, \alpha\beta x_2, \ldots, \alpha\beta x_n)$.
No šejienes $\alpha(\beta\boldsymbol{x}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{x}$.

Pārējo izteikumu pierādījumus ieteicam lasītājam veikt kā vingrinājumu. ■

Skalārais reizinājums

13.3. DEFINĪCIJA. Par vektoru $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ **skalāro reizinājumu** sauc skaitli

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

Turpmāk lietosim pierakstu $\boldsymbol{x}^2$, lai apzīmētu skalāro reizinājumu $\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}$.

13.4. APGALVOJUMS. Ja $\alpha \in \mathbb{R}$, bet $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$, tad

(i) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{x}^2 = 0$;

(ii) $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{x}^2 > 0$;

(iii) $(\alpha\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = \alpha(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}(\alpha\boldsymbol{y})$;

(iv) $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}\boldsymbol{z}$;

(v) $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}\boldsymbol{x}$.

□ Ilustrācijai pierādīsim (ii) izteikumu. Pieņemsim, ka n-dimensionāls vektors $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Tā kā $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, tad vismaz viena koordināta $x_k \neq 0$. No šejienes $\boldsymbol{x}^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geq x_k^2 > 0$. Pārējo izteikumu pierādījumus ieteicam lasītājam veikt kā vingrinājumu. ■

13.5. DEFINĪCIJA. Divus nenulles vektorus $\boldsymbol{x}$ un $\boldsymbol{y}$ sauc par **ortogonāliem** jeb **perpendikulāriem vektoriem**, ja $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = 0$. Šajā situācijā mēs lietosim pierakstu $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$

Mūsu tuvākais mērķis — parādīt, ka 3 dimensiju vektoru telpā $\mathbb{R}^3$ šādi definētā perpendikularitāte sakrīt ar skolas ģeometrijas kursā lietoto jēdzienu.

13.6. LEMMA (Švarca nevienādība). Ja $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, tad $(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y})^2 \leq \boldsymbol{x}^2\boldsymbol{y}^2$.

□ Izvēlamies $\alpha = \boldsymbol{y}^2$, bet $\beta = -\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$, tad saskaņā ar 13.4. apgalvojuma (i) un (ii) izteikumu $0 \leq (\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y})^2$. No šejienes $0 \leq \alpha^2\boldsymbol{x}^2 + 2\alpha\beta\,\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} + \beta^2\boldsymbol{y}^2$ jeb

$$0 \leq (\boldsymbol{y}^2)^2\boldsymbol{x}^2 - 2\boldsymbol{y}^2(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y})^2 + (\boldsymbol{x}\boldsymbol{y})^2\boldsymbol{y}^2. \tag{13.1}$$

Ja $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$, Švarca nevienādība pārvēršas par vienādību, un tāpēc lemma ir jāpierāda situācijā, kurā $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$. Šajā gadījumā $\boldsymbol{y}^2 > 0$, tādēļ pēc saīsināšanas ar $\boldsymbol{y}^2$ nevienādība (13.1) iegūst izskatu $0 \leq \boldsymbol{y}^2\boldsymbol{x}^2 - 2(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y})^2 + (\boldsymbol{x}\boldsymbol{y})^2$ jeb $0 \leq \boldsymbol{x}^2\boldsymbol{y}^2 - (\boldsymbol{x}\boldsymbol{y})^2$. ■

13.7. DEFINĪCIJA. Skaitli $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{\boldsymbol{x}^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ sauc par vektora $\boldsymbol{x}$ **garumu (moduli, normu)**.

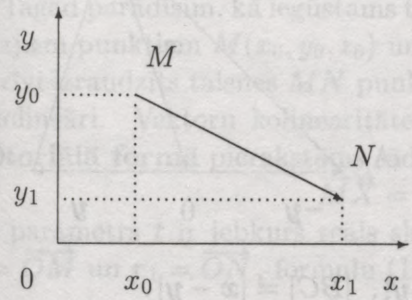
Telpā $\mathbb{R}^3$ rādiusvektora $\overrightarrow{OM}$ modulis $|\overrightarrow{OM}|$ ir nogriežņa OM garums. Lietojot Pitagora teorēmu [13.5. zīm.], plaknes Oxy vektora $\overrightarrow{MN}$ garuma kvadrāts $|\overrightarrow{MN}|^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2$. Rezultātā

$$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2},$$

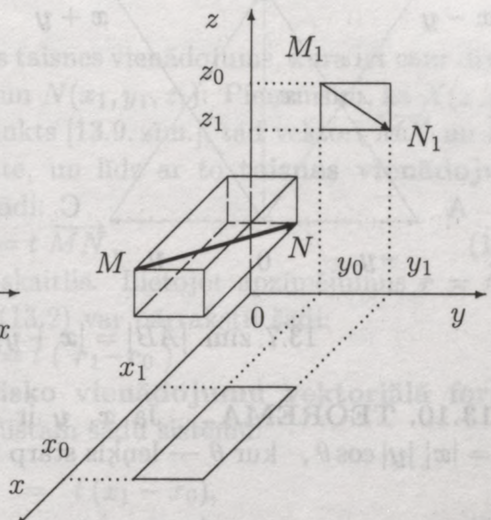
kas arī ir attālums starp punktiem M un N. Tāpat, balstoties uz Pitagora teorēmu, iegūstam [13.6. zīm.], ka telpā $\mathbb{R}^3$ vektora $\overrightarrow{MN}$ garuma kvadrāts $|\overrightarrow{MN}|^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2$. Tātad

$$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2},$$

kas arī ir attālums starp punktiem M un N kopā $\mathbb{R}^3$. Savukārt no Švarca nevienādības jebkurā vektoru telpā $\mathbb{R}^n$ izriet, ka $|\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|$.



13.5. zīm.



13.6. zīm.

13.8. APGALVOJUMS (trijstūra nevienādība). Ja $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, tad $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$.

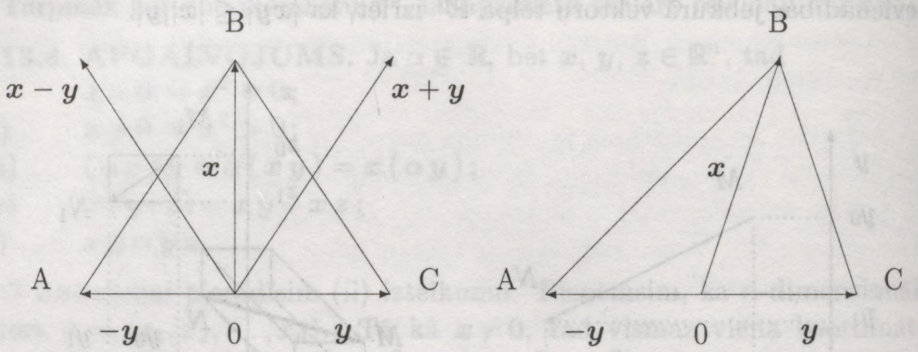
□ Tā kā visi trīs skaitļi $|\boldsymbol{x}|$, $|\boldsymbol{y}|$ un $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|$ ir nenegatīvi, tad nevienādība $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$ ekvivalenta ar $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2 \leq (|\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|)^2$. Tagad izmantosim Švarca nevienādību. $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2 = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^2 = \boldsymbol{x}^2 + 2\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^2 \leq$ $\leq |\boldsymbol{x}|^2 + 2|\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y}| + |\boldsymbol{y}|^2 \leq |\boldsymbol{x}|^2 + 2|\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}| + |\boldsymbol{y}|^2 = (|\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|)^2$. ■

13.9. TEORĒMA. Telpā $\mathbb{R}^3$ nenulles vektori $\boldsymbol{x}$ un $\boldsymbol{y}$ ir perpendikulāri tad un tikai tad, ja $\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y} = 0$.

□ Ja reiz $\boldsymbol{x}$ un $\boldsymbol{y}$ ir nenulles vektori, tad $|\boldsymbol{x}| \neq 0 \neq |\boldsymbol{y}|$. No šejienes izriet, ka vektori $\boldsymbol{x}$ un $\boldsymbol{y}$ ir perpendikulāri [Mēs pieņemam, ka lasītājs ir pazīstams ar vektoriem skolas pamatkursa ietvaros.] tad un tikai tad, ja $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}| = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ [ievērojam, ka $0B$ ir trijstūra ABC mediāna; skatīt 13.7. zīm.]. Tas nozīmē, ka jāizpildās šādām ekvivalentām vienādībām

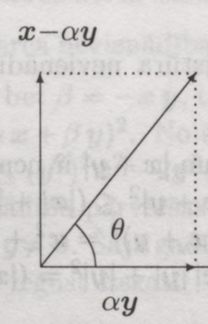
$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^2 = (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2, && \boldsymbol{x}^2 + 2\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^2 = \boldsymbol{x}^2 - 2\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^2, \\ &2\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y} = -2\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y}, && 4\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y} = 0. \end{aligned}$$

Pēdējā vienādība iespējama tad un tikai tikai tad, ja $\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y} = 0$. ■



13.7. zīm. $|AB| = |x+y|$, $|BC| = |x-y|$.

13.10. TEORĒMA. Ja x, y ir telpas $\mathbb{R}^3$ nenulles vektori, tad $x\,y = |x|\,|y|\cos\theta$, kur θ — leņķis starp vektoriem x un y.



13.8. zīm.

□ Pieņemsim, ka $x \neq 0 \neq y$, tad vektora x projekcija uz vektoru y ir vektoram y kolineārs vektors $\alpha\,y$ [skatīt 13.8. zīm.]. Vektors $x - \alpha\,y$ ir perpendikulārs vektoram y [13.8. zīm.], tāpēc $0 = (x - \alpha\,y)y = $ $= x\,y - \alpha y^2$. Tātad $\alpha = \dfrac{x\,y}{y^2}$. Savukārt $\cos\theta = \dfrac{\alpha\,|y|}{|x|}$, tādēļ $\cos\theta =$ $= \dfrac{x\,y\,|y|}{y^2\,|x|} = \dfrac{x\,y\,|y|}{|x|\,|y|^2} = \dfrac{x\,y}{|x|\,|y|}$. Līdz ar to $|x|\,|y|\cos\theta = x\,y$. ■

Ja kaut viens no vektoriem x vai y ir 0 vektors, tad $x\,y = |x|\,|y|\cos\theta$ jebkurai leņķa θ vērtībai. Kārtības labad gan atzīmēsim, ka šai situācijā leņķis starp vektoriem $\boldsymbol{x}$ un $\boldsymbol{y}$ nav definēts.

Taisnes un plaknes

Tagad parādīsim, kā iegūstams taisnes vienādojums, kura iet caur diviem dotajiem punktiem $M(x_0, y_0, z_0)$ un $N(x_1, y_1, z_1)$. Pieņemsim, ka $X(x, y, z)$ ir brīvi izraudzīts taisnes MN punkts [13.9. zīm.], tad vektori $\overrightarrow{MX}$ un $\overrightarrow{MN}$ ir kolineāri. Vektoru kolinearitāte, un līdz ar to **taisnes vienādojums vektoriālā formā** pierakstāms šādi:

$$\overrightarrow{MX} = t\,\overrightarrow{MN}\,, \tag{13.2}$$

kur parametrs t ir jebkurš reāls skaitlis. Lietojot apzīmējumus $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OX}$, $\boldsymbol{r}_0 = \overrightarrow{OM}$ un $\boldsymbol{r}_1 = \overrightarrow{ON}$, formulu (13.2) var pārrakstīt šādi:

$$\boldsymbol{r}\text{-}\boldsymbol{r}_0 = t\ (\ \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0\ ).$$

To sauc par **taisnes parametrisko vienādojumu vektoriālā formā**. Savukārt **koordinātu formā** iegūstam šādu sistēmu:

$$\begin{cases} x - x_0 &= t\,(x_1 - x_0), \\ y - y_0 &= t\,(y_1 - y_0), \\ z - z_0 &= t\,(z_1 - z_0). \end{cases} \tag{13.3}$$

Ja dotie punkti M un N ir koordinātu plaknes Oxy punkti, tad sistēma (13.3) satur tikai divus vienādojumus

$$\begin{cases} x - x_0 &= t\,(x_1 - x_0), \\ y - y_0 &= t\,(y_1 - y_0). \end{cases} \tag{13.4}$$

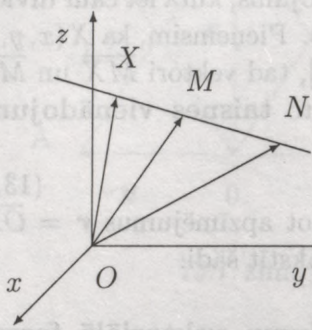
Tā kā $M \neq N$, tad $x_1 - x_0 \neq 0$ vai $y_1 - y_0 \neq 0$. Pirmajā gadījumā $t = \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}$, un tāpēc

$$y - y_0 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}(y_1 - y_0) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) = k(x - x_0), \tag{13.5}$$

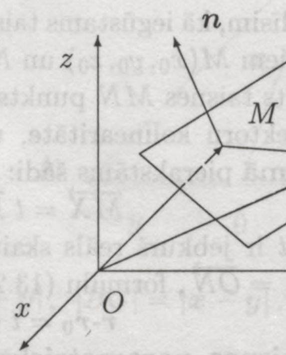
kur $k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$. Šo koeficientu k sauc par taisnes **virziena koeficientu**. Vienādojumu (13.5) var pārrakstīt no skolas kursa jau labi zināmā izskatā: $y = kx + y_0 - kx_0 = kx + b$, kur $b = y_0 - kx_0$. Ja turpretī $x_1 - x_0 = 0$, tad sistēma (13.4) ir sekojoša:

$$\begin{cases} x - x_0 &= 0, \\ y - y_0 &= t\,(y_1 - y_0). \end{cases}$$

Ņemsim vērā, ka $y_1 - y_0 \neq 0$, tādēļ, parametram t mainoties pa visu reālo skaitļu kopu $\mathbb{R}$, arī y pieņem jebkuru reālu vērtību. Rezultātā mēs iegūstam taisnes vienādojumu $x = x_0$. Otru vienādojumu $y - y_0 = t\,(y_1 - y_0)$ šajā gadījumā varam nerakstīt, jo pēc būtības tas tikai norāda, ka y var būt jebkurš reāls skaitlis.



13.9. zīm.



13.10. zīm.

Plaknes $\mathfrak{P}$ novietojums telpā ir fiksēts, ja zināms:
(i) punkts $M \in \mathfrak{P}$ un
(ii) vismaz viena taisne, kas perpendikulāra plaknei $\mathfrak{P}$.
Taisnes lomai noder arī kāds nenulles vektors, kas perpendikulārs plaknei $\mathfrak{P}$. Šo nenulles vektoru $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3)$ sauc par **plaknes normālvektoru**. Pieņemsim, ka punkti $M(x_0, y_0, z_0)$ un $X(x, y, z)$ atrodas plaknē $\mathfrak{P}$, tad vektori $\overrightarrow{MX}$ un $\boldsymbol{n}$ ir perpendikulāri [13.10. zīm.], vai arī $\overrightarrow{MX} = \mathbf{0}$. Līdz ar to, ņemot vērā 13.9. teorēmu, plaknes vienādojums vektoriālā formā ir

$$\boldsymbol{n}\,\overrightarrow{MX} = 0\,. \tag{13.6}$$

Lietojot apzīmējumus $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OX}$ un $\boldsymbol{r}_0 = \overrightarrow{OM}$, vienādojumu (13.6) var pārrakstīt šādi: $\boldsymbol{n}\,(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = 0$. To sauc par **plaknes vienādojumu vektoriālā formā**. Tātad $0 = \boldsymbol{n}\,(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) =$
$= (n_1, n_2, n_3)\ (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) =$
$= Ax + By + Cz + D$, kur $A = n_1$, $B = n_2$, $C = n_3$ un $D = -n_1 x_0 - n_2 y_0 - n_3 z_0$. Parasti literatūrā plaknes vienādojums tiek reprezentēts izskatā:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

ko sauc par **plaknes vispārīgo vienādojumu**.

Vektoriālais reizinājums

Pieņemsim, ka kopā $\mathbb{R}^3$ doti trīs punkti $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ un $M_3(x_3, y_3, z_3)$, kas neatrodas uz vienas taisnes. Šie trīs punkti viennozīmīgi fiksē kādu plakni $\mathfrak{P}$. Mūsu tuvākais mērķis: sastādīt šīs plaknes $\mathfrak{P}$ vienādojumu.

Turpmāko ērtību labad lietosim šādus apzīmējumus:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12};$$

$$\begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \bar{\imath} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \bar{\jmath} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \bar{k}.$$

13.11. DEFINĪCIJA. Par vektoru $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ un $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ **vektoriālo reizinājumu** sauc vektoru

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

13.12. APGALVOJUMS. Ja $\alpha \in \mathbb{R}$, bet $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$, tad

(i) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$;

(ii) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$;

(iii) $(\alpha \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \alpha(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \times (\alpha \boldsymbol{b})$;

(iv) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{c})\, \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b}\boldsymbol{c})\, \boldsymbol{a}$;

(v) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{a} \;\&\; \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{b}$;

(vi) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 \boldsymbol{b}^2 - (\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})^2$.

□ Ilustrācijai pierādīsim (ii) izteikumu. Atzīmēsim, ka

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a'_{21} + a''_{21} & a'_{22} + a''_{22} \end{vmatrix} = a_{11}(a'_{22} + a''_{22}) - (a'_{21} + a''_{21})a_{12} =$$

$$= a_{11}a'_{22} - a'_{21}a_{12} + a_{11}a''_{22} - a''_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a''_{21} & a''_{22} \end{vmatrix}.$$

Tas pamato sekojošos pārveidojumus. Pieņemsim, ka $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ un $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$, tad

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2+c_2 & b_3+c_3 \end{vmatrix} \bar{\imath} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1+c_1 & b_3+c_3 \end{vmatrix} \bar{\jmath} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 \end{vmatrix} \bar{k} =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \right) \bar{\imath} - \left(\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \right) \bar{\jmath} +$$

$$+ \left(\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right) \bar{k} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}.$$

Pārējo izteikumu pierādījumus ieteicam lasītājam veikt kā vingrinājumu. ■

13.13. SEKAS. Ja $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ir telpas $\mathbb{R}^3$ nenulles vektori, tad $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\,|\sin\theta|$, kur θ — leņķis starp vektoriem $\boldsymbol{a}$ un $\boldsymbol{b}$.

□ Pieņemsim, ka $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{b}$, tad [pēc dotās un 13.10. teorēmas]

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 &= (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2 - (\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})^2 = \\ &= |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta)^2 = \\ &= |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2(1-\cos^2\theta) = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin^2\theta\,. \ ■ \end{aligned}$$

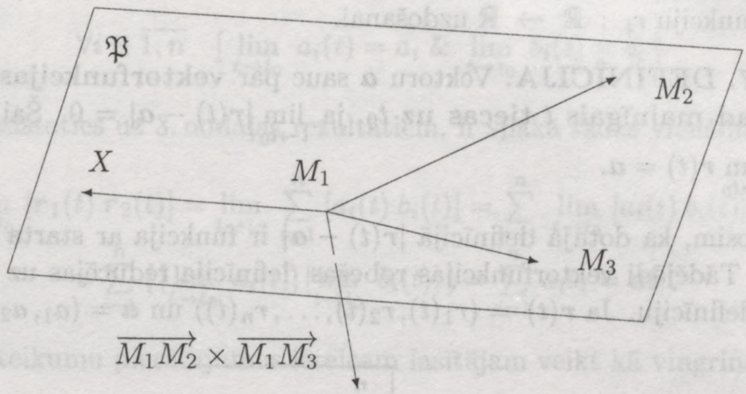
Var parādīt, ka vektora $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ vērsums orientēts uz to pusi, no kuras skatoties pirmo reizinātāju $\boldsymbol{a}$ ar otro reizinātāju $\boldsymbol{b}$ redz sakļaujamies pa īsāko ceļu pozitīvajā virzienā. Citādi sakot vektors $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ vērsts tā, lai triju vektoru $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ sistēmai būtu labā orientācija.

Tagad atgriezīsimies pie paragrāfa sākumā formulētā uzdevuma sastādīt vienādojumu plaknei $\mathfrak{P}$, kas iet caur trim dotajiem punktiem $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ un $M_3(x_3, y_3, z_3)$. Mēs tikko pierādījām (13.12. apgalvojuma (v) izteikums), ka $\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} \perp \overrightarrow{M_1M_2}$ & $\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} \perp \overrightarrow{M_1M_3}$ [13.11. zīm.]. Tātad $\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} \perp \mathfrak{P}$, t.i., $\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}$ ir plaknes $\mathfrak{P}$ normālvektors. Atliek vairs tikai sastādīt **plaknes vienādojumu vektoriālā formā**. Pieņemsim, ka punkts $X(x, y, z)$ atrodas plaknē, tad

$$(\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3})\,\overrightarrow{M_1X} = 0\,,$$

jeb **koordinātu formā**

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0,$$



13.11. zīm.

kur

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} (x - x_1) -$$

$$- \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} (y - y_1) + \begin{vmatrix} x_2 - y_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} (z - z_1).$$

13.14. DEFINĪCIJA. Skaitli $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ sauc par **vektoru** $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ **jaukto reizinājumu.**

13.15. SEKAS. Plaknes vienādojums vektoriālā formā:

$$(\overrightarrow{M_1X}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}) = 0.$$

Vektorfunkcijas robeža un nepārtrauktība

13.16. DEFINĪCIJA. Attēlojumu $\boldsymbol{r} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sauc par **vektorfunkciju.**

Ja telpā $\mathbb{R}^n$ izvēlēta koordinātu sistēma, tad vektorfunkcijai ir samērā vienkārša ģeometriskā interpretācija, proti, vektorfunkcijas $\boldsymbol{r} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ visas vērtības var uztvert kā rādiusvektorus $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u_1, u_2, \ldots, u_m)$. Turpmāk šajā nodaļā detalizētāk iepazīsimies ar vienargumenta vektorfunkcijām, t.i., vektorfunkcijām $\boldsymbol{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

Ņemsim vērā, ka katram $t \in Dom(\boldsymbol{r})$ tiek piekārtots kāds vektors $\boldsymbol{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), \ldots, r_n(t))$. Tātad vektorfunkcijas $\boldsymbol{r}$ uzdošana ekvivalenta n funkciju $r_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uzdošanai.

13.17. DEFINĪCIJA. Vektoru $\boldsymbol{a}$ sauc par **vektorfunkcijas** $\boldsymbol{r}(t)$ **robežu, kad mainīgais** t **tiecas uz** t_0, ja $\lim\limits_{t\to t_0} |\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a}| = 0$. Šai situācijā raksta $\lim\limits_{t\to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{a}$.

Ievērosim, ka dotajā definīcijā $|\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a}|$ ir funkcija ar starta un finiša kopu $\mathbb{R}$. Tādējādi vektorfunkcijas robežas definīcija reducējas uz funkcijas robežas definīciju. Ja $\boldsymbol{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), \ldots, r_n(t))$ un $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, tad

$$|\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} [r_i(t) - a_i]^2}\,.$$

Tāpēc $\quad \forall i \in \overline{1,n} \quad |r_i(t) - a_i| \le |\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a}|\,.$

No šejienes

$$\lim_{t\to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{a} \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in \overline{1,n} \ \lim_{t\to t_0} r_i(t) = a_i. \tag{13.7}$$

13.18. DEFINĪCIJA. Vektorfunkciju $\boldsymbol{r}(t)$ sauc par **nepārtrauktu punktā** t_0, ja $\lim\limits_{t\to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t_0)$. Vektorfunkciju $\boldsymbol{r}(t)$ sauc par **nepārtrauktu kopā** X, ja vektorfunkcija $\boldsymbol{r}(t)$ ir nepārtraukta katrā kopas X punktā t_0.

Ekvivalence (13.7) ļauj apgalvot, ka vektorfunkcija ir nepārtraukta kādā punktā tad un tikai tad, ja šajā punktā ir nepārtrauktas visas koordinātu funkcijas $r_i(t)$.

13.19. APGALVOJUMS. Ja $\lim\limits_{t\to t_0} f(t) = \alpha$, bet $\lim\limits_{t\to t_0} \boldsymbol{r}_1(t) = \boldsymbol{a}$ un $\lim\limits_{t\to t_0} \boldsymbol{r}_2(t) = \boldsymbol{b}$, tad

(i) $\lim\limits_{t\to t_0} |\boldsymbol{r}_1(t)| = |\boldsymbol{a}|\,;$

(ii) $\lim\limits_{t\to t_0} [\boldsymbol{r}_1(t) \pm \boldsymbol{r}_2(t)] = \boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b}\,;$

(iii) $\lim\limits_{t\to t_0} [f(t)\, \boldsymbol{r}_1(t)] = \alpha \boldsymbol{a}\,;$

(iv) $\lim\limits_{t\to t_0} [\boldsymbol{r}_1(t)\, \boldsymbol{r}_2(t)] = \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\,;$

(v) $\lim\limits_{t\to t_0} [\boldsymbol{r}_1(t) \times \boldsymbol{r}_2(t)] = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\,.$

□ Ilustrācijai pierādīsim (iv) izteikumu. Pieņemsim, ka

$$r_1(t) = (a_1(t), a_2(t), \ldots, a_n(t)), \quad a = (a_2, a_2, \ldots, a_n),$$
$$r_2(t) = (b_1(t), b_2(t), \ldots, b_n(t)), \quad b = (b_2, b_2, \ldots, b_n), \quad \text{tad}$$

$$\forall i \in \overline{1,n} \quad [\lim_{t\to t_0} a_i(t) = a_i \ \& \ \lim_{t\to t_0} b_i(t) = b_i\,].$$

Tagad, balstoties uz 3. nodaļas rezultātiem, ir spēkā šādas vienādības.

$$\lim_{t\to t_0} [r_1(t)\, r_2(t)] = \lim_{t\to t_0} \sum_{i=1}^{n} [a_i(t)\, b_i(t)] = \sum_{i=1}^{n} \lim_{t\to t_0} [a_i(t)\, b_i(t)] =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} [\,[\lim_{t\to t_0} a_i(t)]\,[\lim_{t\to t_0} b_i(t)]\,] = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = ab\,.$$

Pārējo izteikumu pierādījumus ieteicam lasītājam veikt kā vingrinājumu. ■

13.20. APGALVOJUMS. Ja vektorfunkcija $r(x)$ ir nepārtraukta punktā x_0, bet $\lim_{t\to t_0} f(t) = x_0$, tad $\lim_{t\to t_0} (r \circ f)(t) = r(\lim_{t\to t_0} f(t))$.

□ Tā kā $\lim_{t\to t_0} f(t) = x_0$, tad mums jāpierāda, ka $\lim_{t\to t_0} (r \circ f)(t) = r(x_0)$. Pieņemsim, ka $r(x) = (r_1(x), r_2(x), \ldots, r_n(x))$, tad visas funkcijas $r_i(x)$ punktā x_0 ir nepārtrauktas. No 4.16. teorēmas izriet, ka

$$\lim_{t\to t_0} (r \circ f)(t) = \lim_{t\to t_0} (\,(r_1 \circ f)(t), (r_2 \circ f)(t), \ldots, (r_n \circ f)(t)\,) =$$
$$= (\,\lim_{t\to t_0} (r_1 \circ f)(t), \lim_{t\to t_0} (r_2 \circ f)(t), \ldots, \lim_{t\to t_0} (r_n \circ f)(t)\,) =$$
$$= (\,r_1(\lim_{t\to t_0} f(t)), r_2(\lim_{t\to t_0} f(t)), \ldots, r_n(\lim_{t\to t_0} f(t))\,) =$$
$$= (\,r_1(x_0), r_2(x_0), \ldots, r_n(x_0)\,) = r(x_0)\,. \ ■$$

Vektorfunkcijas atvasināšana un integrēšana

13.21. DEFINĪCIJA. Pieņemsim, ka eksistē punkta t_0 apkārtne $\mathfrak{U}(t_0, \delta_0) \subseteq \mathit{Dom}(r)$, tad vektoru $r'(t_0)$ sauc par **vektorfunkcijas $r(t)$ atvasinājumu punktā** t_0, ja $r'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \dfrac{r(t) - r(t_0)}{t - t_0}$. Šai situācijā mēdz teikt arī, ka **vektorfunkcija $r(t)$ ir diferencējama punktā** t_0. Vektorfunkciju $r(t)$ sauc par **diferencējamu kopā** X, ja katrā kopas X punktā t eksistē atvasinājums $r'(t)$.

13.22. APGALVOJUMS. Ja vektorfunkcija $r(t)$ diferencējama punktā t_0, tad $r(t)$ ir nepārtraukta punktā t_0.

□ Balstoties uz (13.7) secinām, ka $\boldsymbol{r}'(t_0) = (r_1'(t_0), r_2'(t_0), \ldots, r_n'(t_0))$, kur $\boldsymbol{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), \ldots, r_n(t))$. Tad [5.5. teorēma] visas funkcijas $r_i(t)$ ir nepārtrauktas punktā t_0. Tas nozīmē, ka $\boldsymbol{r}(t)$ ir nepārtraukta punktā t_0. ■

13.23. APGALVOJUMS. Ja $f' = f'(t)$, $\boldsymbol{r}_1' = \boldsymbol{r}_1'(t)$ un $\boldsymbol{r}_2' = \boldsymbol{r}_2'(t)$, tad

(i) $(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2)' = \boldsymbol{r}_1' + \boldsymbol{r}_2'$;

(ii) $(f\,\boldsymbol{r}_1)' = f'\,\boldsymbol{r}_1 + f\,\boldsymbol{r}_1'$;

(iii) $(\boldsymbol{r}_1\,\boldsymbol{r}_2)' = \boldsymbol{r}_1'\,\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1\,\boldsymbol{r}_2'$;

(iv) $(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2)' = \boldsymbol{r}_1' \times \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2'$.

□ Ilustrācijai pierādīsim (iv) izteikumu. Pieņemsim, ka $\boldsymbol{r}_1$ un $\boldsymbol{r}_2$ ir diferencējamas punktā t_0, tad atsaucoties uz iepriekš pierādītajiem apgalvojumiem varam rakstīt:

$$(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2)'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2)(t) - (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2)(t_0)}{t - t_0} =$$

$$= \lim_{t\to t_0} \frac{\boldsymbol{r}_1(t) \times \boldsymbol{r}_2(t) - \boldsymbol{r}_1(t_0) \times \boldsymbol{r}_2(t_0)}{t - t_0} =$$

$$= \lim_{t\to t_0} \frac{\boldsymbol{r}_1(t) \times \boldsymbol{r}_2(t) - \boldsymbol{r}_1(t_0) \times \boldsymbol{r}_2(t) + \boldsymbol{r}_1(t_0) \times \boldsymbol{r}_2(t) - \boldsymbol{r}_1(t_0) \times \boldsymbol{r}_2(t_0)}{t - t_0} =$$

$$= \lim_{t\to t_0} \frac{[\boldsymbol{r}_1(t) - \boldsymbol{r}_1(t_0)] \times \boldsymbol{r}_2(t)}{t - t_0} + \lim_{t\to t_0} \frac{\boldsymbol{r}_1(t_0) \times [\boldsymbol{r}_2(t) - \boldsymbol{r}_2(t_0)]}{t - t_0} =$$

$$= \lim_{t\to t_0} \frac{\boldsymbol{r}_1(t) - \boldsymbol{r}_1(t_0)}{t - t_0} \times \lim_{t\to t_0} \boldsymbol{r}_2(t) + \boldsymbol{r}_1(t_0) \times \lim_{t\to t_0} \frac{\boldsymbol{r}_2(t) - \boldsymbol{r}_2(t_0)}{t - t_0} =$$

$$= \boldsymbol{r}_1'(t_0) \times \boldsymbol{r}_2(t_0) + \boldsymbol{r}_1(t_0) \times \boldsymbol{r}_2'(t_0) = (\boldsymbol{r}_1' \times \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2')(t_0).$$

Pārējo izteikumu pierādījumus ieteicam lasītājam veikt kā vingrinājumu. ■

13.24. APGALVOJUMS. Ja vektorfunkcija $\boldsymbol{r}(x)$ ir diferencējama punktā x_0, bet $f(t)$ — diferencējama punktā t_0, kur $f(t_0) = x_0$, tad $(\boldsymbol{r} \circ f)'(t_0) = f'(t_0)\,\boldsymbol{r}'(x_0)$.

□ Pieņemsim, ka $\boldsymbol{r}(x) = (r_1(x), r_2(x), \ldots, r_n(x))$, tad visas funkcijas $r_i(x)$ punktā x_0 ir diferencējamas. Atsaucoties uz 5.17. teorēmu varam rakstīt:

$$(\boldsymbol{r} \circ f)'(t_0) = (\,(r_1 \circ f)'(t_0), (r_2 \circ f)'(t_0), \ldots, (r_n \circ f)'(t_0)\,) =$$

$$= (\, r_1'(x_0)\, f'(t_0), r_2'(x_0)\, f'(t_0), \dots, r_n'(x_0)\, f'(t_0)\,) =$$
$$= (\, f'(t_0)\, r_1'(x_0), f'(t_0)\, r_2'(x_0), \dots, f'(t_0)\, r_n'(x_0)\,) =$$
$$= f'(t_0)\,(\, r_1'(x_0), r_2'(x_0), \dots, r_n'(x_0)\,) = f'(t_0)\, \boldsymbol{r}'(x_0). \ \blacksquare$$

Apskatīsim vektorfunkciju $\boldsymbol{r}(t)$, kas definēta slēgtā intervālā $[a; b]$. Sadalīsim intervālu $[a; b]$ apakšintervālos ar galapunktiem

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_{k-1} < t_k = b$$

un apzīmēsim $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i \in \overline{1,k}$. Galīgu punktu kopu $\{t_0, t_1, \dots, t_k\}$ sauc par intervāla $[a; b]$ **sadalījumu** un apzīmē ar $\mathcal{P}$. Katrā no apakšintervāliem $[t_{i-1}; t_i]$ brīvi izvēlēsimies punktu ξ_i (tas var būt arī galapunkts). Sadalījumu $\mathcal{P}$ kopā ar izvēlētajiem punktiem ξ_i, $i \in \overline{1,k}$, sauc par **izvēles sadalījumu**. Ja nerodas pārpratumi, tad izvēles sadalījumu apzīmē tāpat kā sadalījumu.

13.25. DEFINĪCIJA. Summu $R(\mathcal{P}) = \sum\limits_{i=1}^{k} \Delta t_i\, \boldsymbol{r}(\xi_i)$ sauc par vektorfunkcijas $\boldsymbol{r}(t)$ **Rīmaņa summu**, kas atbilst izvēles sadalījumam $\mathcal{P}$. (Ievērosim, ka $k = k(\mathcal{P})$, t.i., k ir atkarīgs no konkrētā $\mathcal{P}$ izvēles.) Skaitli $|\,\mathcal{P}\,| = \max\limits_{i \in \overline{1,k}} \{\, \Delta t_i \,\}$ sauc par sadalījuma $\mathcal{P}$ **sasmalcinājumu.** Vektoru $\int\limits_a^b \boldsymbol{r}(t)\, dt$ sauc par **Rīmaņa summas robežu sasmalcinājumam $|\,\mathcal{P}\,|$ tiecoties uz** 0, ja katram pozitīvam skaitlim ε eksistē tāds pozitīvs skaitlis δ, ka visiem intervāla $[a; b]$ izvēles sadalījumiem $\mathcal{P}$ izpildās nosacījums:

$$\text{ja} \quad |\,\mathcal{P}\,| < \delta, \quad \text{tad} \quad \Big|\, \int\limits_a^b \boldsymbol{r}(t)\, dt - R(\mathcal{P}) \,\Big| < \varepsilon.$$

Turpmāk lietosim šādu pierakstu $\lim\limits_{|\mathcal{P}| \to 0} R(\mathcal{P}) = \int\limits_a^b \boldsymbol{r}(t)\, dt$ un vektoru $\int\limits_a^b \boldsymbol{r}(t)\, dt$ sauksim par **Rīmaņa integrāli no vektorfunkcijas $\boldsymbol{r}(t)$**. Simboliski šo definīciju var pierakstīt šādi: $\lim\limits_{|\mathcal{P}| \to 0} R(\mathcal{P}) = \int\limits_a^b \boldsymbol{r}(t)\, dt \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \mathcal{P}\ [\,|\,\mathcal{P}\,| < \delta \Rightarrow \Big|\, \int\limits_a^b \boldsymbol{r}(t)\, dt - R(\mathcal{P}) \,\Big| < \varepsilon\,].$$

Pieņemsim, ka $\boldsymbol{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t))$, tad

$$R(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{k} \Delta t_i\, \boldsymbol{r}(\xi_i) = \sum_{i=1}^{k} \Delta t_i\, (\, r_1(\xi_i), r_2(\xi_i), \dots, r_n(\xi_i)\,) =$$
$$= (\, \sum_{i=1}^{k} r_1(\xi_i)\, \Delta t_i, \sum_{i=1}^{k} r_2(\xi_i)\, \Delta t_i, \dots, \sum_{i=1}^{k} r_n(\xi_i)\, \Delta t_i\,).$$

Ja $\int\limits_a^b \boldsymbol{r}(t)\,dt = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, tad $|\int\limits_a^b \boldsymbol{r}(t)\,dt - R(\mathcal{P})\,| =$

$$= |\,(\,v_1 - \sum_{i=1}^{k} r_1(\xi_i)\,\Delta t_i, v_2 - \sum_{i=1}^{k} r_2(\xi_i)\,\Delta t_i, \ldots, v_n - \sum_{i=1}^{k} r_n(\xi_i)\,\Delta t_i\,)\,| \geq$$

$$\geq |\,v_j - \sum_{i=1}^{k} r_1(\xi_i)\,\Delta t_i\,| \quad \text{katram } j \in \overline{1,n}.$$

Tas demonstrē, ka

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} R(\mathcal{P}) = \int\limits_a^b \boldsymbol{r}(t)\,dt \quad \Leftrightarrow \quad \forall j \in \overline{1,n} \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{i=1}^{k} r_j(\xi_i)\,\Delta t_i = \int\limits_a^b r_j(t)\,dt\,.$$

Tātad $\int\limits_a^b \boldsymbol{r}(t)\,dt = (\int\limits_a^b r_1(t)\,dt, \int\limits_a^b r_2(t)\,dt, \ldots, \int\limits_a^b r_n(t)\,dt\,).$

13.26. Piemērs. Jāatrod vektorfunkcijas $\boldsymbol{r}(t) = (4t, \frac{\ln t}{t}, \sin t{+}5)$ Rīmaņa integrālis intervālā $[1; e]$.

Tā kā 1) $\int\limits_1^e 4t\,dt = \frac{4t^2}{2}\Big|_1^e 2e^2 - 2,$

2) $\int\limits_1^e \frac{\ln t}{t}\,dt = \left| \begin{array}{l} \ln t = u \\ \frac{1}{t}\,dt = du \end{array} \right| = \int\limits_0^1 u\,du = \frac{u^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2},$

3) $\int\limits_1^e (\sin t + 5)dt = (-\cos t + 5t)|_1^e = -\cos e + \cos 1 + 5e - 5,$

tātad $\int\limits_1^e \boldsymbol{r}(t)\,dt = (2e^2 - 2; \frac{1}{2}; \cos 1 - \cos e + 5e - 5).$ ■

Nepārtrauktas līknes

Mehānikā, pētot punkta kustību, būtiska ir ne tikai trajektorijas forma, bet arī arī tas, kā mainās punkta stāvoklis atkarībā no laika. Pieņemsim, ka materiāls punkts M kustas plaknē $\mathbb{R}^2$ laika sprīdī $a \leq t \leq b$. Ja ar x un y apzīmē punkta M Dekarta koordinātas, tad katrā laika momentā t koordinātu x un y vērtības atkarīgas no šī t. Tātad x un y ir laika t funkcijas: $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$, $t \in [\,a; b\,]$. Tas pamato šādas definīcijas izvēli.

13.27. DEFINĪCIJA. Attēlojumu $\boldsymbol{\varphi} : [\,a; b\,] \to \mathbb{R}^n$ sauc par **nepārtrauktu līkni** L **telpā** $\mathbb{R}^n$, ja

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)),$$

kur $\forall i \in \overline{1,n}$ $\varphi_i : [a;b] \to \mathbb{R}$ ir intervālā $[a;b]$ nepārtrauktas funkcijas. Mainīgo $t \in [a;b]$ sauc par līknes **parametru**, bet $Ran(\varphi)$ — par līknes **veidotājkopu**. Vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t), \\ x_2 = \varphi_2(t), \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n = \varphi_n(t), \end{cases} t \in [a;b]$$

sauc par līknes L **parametriskajiem vienādojumiem**. Saka, ka $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ir **līknes L punkts**, ja $\exists t_0 \in [a;b]$ $\varphi(t_0) = y_0$. Mēdz teikt, ka $y_1 = \varphi(t_1)$ **atrodas pirms** $y_2 = \varphi(t_2)$, ja $a \le t_1 < t_2 \le b$. Tādējādi līkne L būtībā ir orientēta. Visbeidzot atzīmēsim: kaut arī līkne L telpā $\mathbb{R}^n$ nav nekas cits, kā nepārtraukta vektorfunkcija [13.27. definīcija], tomēr ļoti bieži tās vērtības uztver kā telpas $\mathbb{R}^n$ punktus nevis vektorus, un līknes veidotājkopu identificē ar pašu līkni. Dažkārt tas izraisa arī pārpratumus.

Nepārtraukto līkņu klase ir ļoti plaša, jo vienīgais nosacījums ir prasība, lai visas funkcijas $\varphi_i(t)$ būtu nepārtrauktas intervālā $[a;b]$. Tāpēc šī klase satur arī tādas līknes, kas neatbilst intuitīviem priekšstatiem par līkni, t.i., to veidotājkopas skolas kursā (un ne tikai skolas kursā) parasti par līknēm nesauc. Tā 19. gadsimta beigās itāļu matemātiķis Džuzepe Peāno konstruēja nepārtrauktu līkni, kas iet caur visiem kvadrāta $[0;1]^2$ punktiem. Šo līkni literatūrā sauc par *Peāno līkni.* Lai izslēgtu tādas līknes, definīcijai jāpievieno vēl citi nosacījumi, piemēram, var aprobežoties tikai ar *diferencējamām līknēm*, t.i., aplūkot intervālā $[a;b]$ diferencējamas funkcijas.

Jāpiebilst gan, ka dotā līknes definīcija nebūt neietver visas punktu kopas, kuras "dabīgi" saukt par līknēm. Šī iemesla dēļ arī nepārtrauktus attēlojumus $\varphi : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^n$ mēdz saukt par *nepārtrauktām līknēm*, kur $\mathcal{I}$ lomā izvēlas patvaļīgus intervālus [intervāla definīciju skatīt 3. nodaļā],

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$$

un $\forall i \in \overline{1,n}$ $\varphi_i : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ ir kopā $\mathcal{I}$ nepārtrauktas funkcijas.

13.28. DEFINĪCIJA. Nepārtrauktu līkni $\varphi : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^n$ sauc par **nepārtraukti diferencējamu līkni** L telpā $\mathbb{R}^n$, ja φ ir intervālā $\mathcal{I}$ diferencējama vektorfunkcija un φ' kopā $\mathcal{I}$ ir nepārtraukta vektorfunkcija. Ja turklāt vēl $\forall t \in \mathcal{I}$ $\varphi'(t) \neq \mathbf{0}$, tad šādu līkni sauc par **gludu**.

Diemžēl literatūrā nav vienotas terminoloģijas. Dažkārt *nepārtraukti diferencējamas* līknes sauc par *gludām*, bet *gludas* — par *regulārām* līknēm.

Infīmi un suprēmi

13.29. DEFINĪCIJA. Skaitli ν sauc par kopas $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}$ **minoranti**, ja $\forall x \in X\ \nu \leq x$; skaitli μ sauc par kopas $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}$ **mažoranti**, ja $\forall x \in X\ \mu \geq x$. Kopu X sauc par **ierobežotu no apakšas**, ja tai eksistē vismaz viena minorante; kopu X sauc par **ierobežotu no augšas**, ja tai eksistē vismaz viena mažorante. Lielāko minoranti sauc par kopas X **infīmu** un apzīmē ar $\inf X$; mazāko mažoranti sauc par kopas X **suprēmu** un apzīmē ar $\sup X$.

Balstoties uz reālo skaitļu aksiomātiku iespējams pierādīt sekojošu teorēmu.

13.30. TEORĒMA. Katrai no apakšas ierobežotai kopai eksistē infīms; katrai no augšas ierobežotai kopai eksistē suprēms.

Kopas X infīmu definē vienādu ar $-\infty$, ja X nav ierobežota no apakšas; savukārt kopas X suprēmu definē vienādu ar $+\infty$, ja X nav ierobežota no augšas.

Līknes loka garums

Uzskatīsim, ka līkni L plaknē nosaka ar parametriskajiem vienādojumiem

$$x = x(t),\ y = y(t), \quad a \leq t \leq b,$$

kur $x(t)$ un $y(t)$ ir dotajā intervālā $[a; b]$ nepārtrauktas funkcijas. Pieņemsim, ka $\mathcal{P}$ ir intervāla $[a; b]$ sadalījums:

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_i < ... < t_{k-1} < t_k = b.$$

Sadalīsim līkni k daļās ar atbilstošiem punktiem

$$M_0(x(t_0), y(t_0)),\ M_1(x(t_1), y(t_1)), \ldots, M_k(x(t_k), y(t_k)),$$

kā tas ir parādīts 13.12. zīmējumā. Savienojot šos punktus ar nogriežņiem, iegūsim lauztu līniju. Šo lauzto līniju $M_0M_1 \ldots M_k$ sauksim par līknē *ievilktu lauztu līniju.* Ja nogriežņa $M_{i-1}M_i$ garumu apzīmē ar s_i, $i \in \overline{1, k}$, tad ievilktās lauztās līnijas garums ir

$$S(\mathcal{P}) = s_1 + s_2 + ... + s_k = \sum_{i=1}^{k} s_i.$$

Atzīmēsim, ka lielums $S(\mathcal{P})$ atkarīgs vienīgi no sadalījuma $\mathcal{P}$. Jo vairāk punktu izvēlēsimies uz līknes, jo ticamāk, ka ievilktās lauztās līnijas garums mazāk atšķirsies no līknes patiesā garuma. Tas pamato šādas definīcijas izvēli.

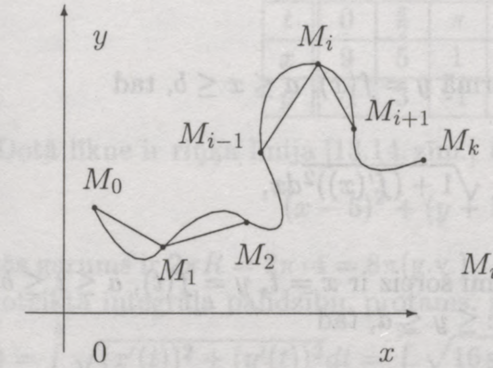
13.31. DEFINĪCIJA. Par līknes L **garumu** $s(L)$ sauc

$$\sup \{ S(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ ir intervāla } [a;b] \text{ sadalījums } \}.$$

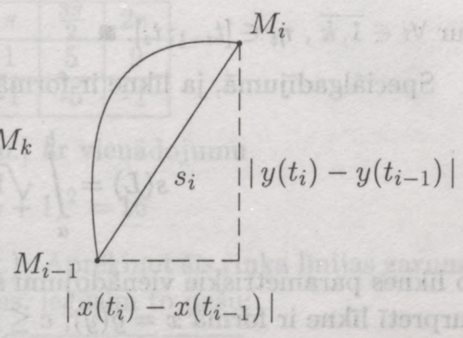
Līkni L sauc par **rektificējamu**, ja $s(L) \in \mathbb{R}$.

13.32. TEORĒMA. Intervālā $[a;b]$ nepārtraukti diferencējama līkne L ir rektificējama:

$$s(L) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$



13.12. zīm.



13.13. zīm.

□ Mēs aprobežosimies tikai ar pierādījuma idejas izklāstu, jo detalizēts pierādījums balstās uz materiālu, kas šajā grāmatā nav aplūkots. Izmantojot Pitagora teorēmu, varam aprēķināt nogriežņa $M_{i-1}M_i$ garumu [13.13. zīm.]:

$$s_i = \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}.$$

Pēc Lagranža teorēmas eksistē tādi divi punkti ξ_i, $\zeta_i \in [t_{i-1}; t_i]$, ka

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\xi_i)\Delta t_i,$$
$$y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\zeta_i)\Delta t_i,$$

kur $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Tādējādi

$$s_i = \sqrt{(x'(\xi_i)\Delta t_i)^2 + (y'(\zeta_i)\Delta t_i)^2} = \sqrt{(x'(\xi_i)^2 + (y'(\zeta_i))^2}\Delta t_i$$

un $$S(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{k} s_i = \sum_{i=1}^{k} \sqrt{(x'(\xi_i)^2 + (y'(\zeta_i))^2}\Delta t_i.$$

Esam gandrīz ieguvuši funkcijas $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ Rīmaņa summu. Tā kā līkne L ir nepārtraukti diferencējama intervālā $[a; b]$, tad izdodas pierādīt, ka robežgadījumā

$$s(L) = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} S(\mathcal{P}) = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{i=1}^{k} \sqrt{(x'(\eta_i)^2 + (y'(\eta_i))^2} \Delta t_i =$$

$$= \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt,$$

kur $\forall i \in \overline{1,k}$, $\eta_i \in [t_{i-1}; t_i]$. ■

Speciālgadījumā, ja līkne ir formā $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, tad

$$s(L) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,$$

jo līknes parametriskie vienādojumi šoreiz ir $x = t$, $y = f(t)$, $a \leq t \leq b$. Ja turpretī līkne ir formā $x = g(y)$, $c \leq y \leq d$, tad

$$s(L) = \int_c^d \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy,$$

jo līknes parametriskie vienādojumi šai situācijā ir $x = g(t)$, $y = t$, $c \leq t \leq d$.

Uzskatīsim, ka līkni L telpā $\mathbb{R}^3$ nosaka parametrisko vienādojumu trijnieks $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, kur $x(t)$, $y(t)$ un $z = z(t)$ ir dotajā intervālā $[a; b]$ nepārtrauktas funkcijas. Līdzīgi kā plaknes gadījumā var parādīt: ja līkne L ir nepārtraukti diferencējama intervālā $[a; b]$, tad

$$s(L) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Atzīmēsim, ja $\varphi(t)$ ir intervālā $[a; b]$ nepārtraukti diferencējama līkne L, tad

$$s(L) = \int_a^b |\, \varphi'(t) \,|\, dt$$

gan plaknes, gan telpiskai līknei, t.i., pēc pieraksta formas formulas ir identiskas.

13.33. Piemērs. Aprēķināsim līknes $y = x^{\frac{3}{2}}$ loka garumu starp punktiem, kuriem $x = 0$ un $x = 5$.

Šajā gadījumā līknes loka garums ir aprēķināms šādi:

$$s(L) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2 dx} = \int_0^5 \sqrt{1 + (\tfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}})^2 dx} = \int_0^5 (1 + \tfrac{9}{4}x)^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$\frac{4}{9}\frac{2(1+\frac{9}{4}x)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^5 = \frac{8}{27}(\sqrt{(\tfrac{49}{4})^3} - 1) = \frac{335}{27}\,(\text{g.v.}) \blacksquare$$

13.34. Piemērs. Uzzīmēsim līkni, kas dota parametriskajā formā $x = 4\cos t + 5$, $y = 4\sin t - 1$, $0 \leq t \leq 2\pi$, un aprēķināsim tās garumu.

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	9	5	1	5	9
y	-1	3	-1	-5	-1

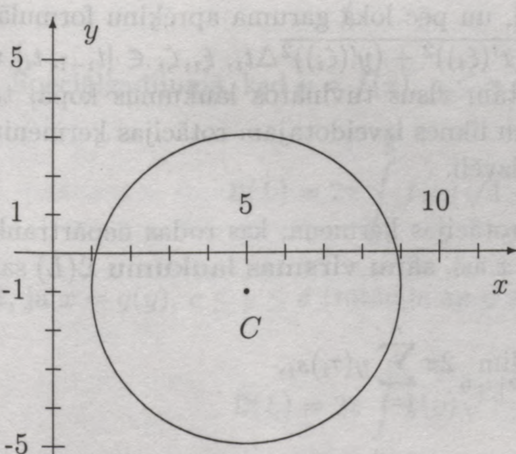
Dotā līkne ir riņķa līnija [13.14. zīm.] ar vienādojumu

$$(x-5)^2 + (y+1)^2 = 16$$

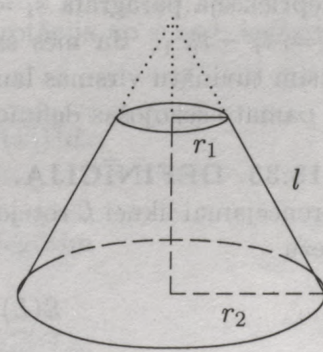
un tās garums ir $2\pi R = 2\pi \cdot 4 = 8\pi$(g.v.). Aprēķinot šīs riņķa līnijas garumu ar noteiktā integrāļa palīdzību, protams, iegūsim to pašu:

$$s(L) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{16\sin^2 t + 16\cos^2 t} dt =$$

$$= 4\int_0^{2\pi} dt = 4t|_0^{2\pi} = 8\pi\ (\text{g.v.}) \blacksquare$$



13.14. zīm.



13.15. zīm.

Rotācijas ķemeņa virsmas laukuma aprēķināšana

Ja nepārtraukti diferencējama plaknes līkne rotē ap koordinātu asi, tad tā veido *rotācijas ķermeņa virsmu.* Mūsu mērķis ir noskaidrot, cik liels ir šīs virsmas laukums.

Lai atrastu *rotācijas ķermeņa virsmas laukumu,* vispirms atcerēsimies, ka nošķeltam konusam, tādam kā 13.15.zīmējumā, sānu virsmas laukums ir aprēķināms pēc formulas $L = 2\pi \cdot \frac{r_1+r_2}{2} \cdot l$, kur r_1, r_2 ir pamatu rādiusi, l — tā veidule.

Pieņemsim, ka $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, definē nepārtraukti diferencējamu līkni Oxy plaknes I kvadrantā. Sadalot intervālu $[\alpha;\beta]$ n daļās ar punktiem

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = \beta,$$

tiek sadalīts arī n daļās līknes loks atbilstoši ar punktiem $M_i(x_i, y_i)$. Vienkāršības labad pieņemsim, ka

$$x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n,$$
$$y_0 < y_1 < y_2 < ... < y_n.$$

Savienojot šos punktus ar nogriežņiem, iegūsim lauztu līniju. Apzīmēsim ar s_i lauztās līnijas i-tās daļas garumu. Ja līkne, kā arī lauztā līnija rotē ap x asi, tad lauztās līnijas izveidotā rotācijas ķermeņa virsmas laukums tuvināti būs vienāds ar līknes izveidoto rotācijas ķermeņa virsmas laukumu. Lauztās līnijas i-tās daļas izveidotais rotācijas ķermenis ir nošķelts konuss, tāpēc tā laukumu varam aprēķināt pēc formulas $2\pi \cdot \frac{y_{i-1}+y_i}{2} \cdot s_i = 2\pi y(\tau_i)s_i$, kur $y(\tau_i) = \frac{y_{i-1}+y_i}{2}$, $\tau_i \in [t_{i-1};t_i]$, un pēc loka garuma aprēķinu formulām no iepriekšējā paragrāfa $s_i = \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\zeta_i))^2}\Delta t_i$, $\xi_i, \zeta_i \in [t_{i-1};t_i]$ un $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Ja mēs saskaitām visus tuvinātos laukumus kopā, tad iegūsim tuvinātu virsmas laukumu līknes izveidotajam rotācijas ķermenim. Tas pamato sekojošas definīcijas izvēli.

13.35. DEFINĪCIJA. Par rotācijas ķermeņa, kas rodas nepārtraukti diferencējamai līknei L rotējot ap x asi, **sānu virsmas laukumu** $\mathfrak{L}(L)$ sauc robežu

$$\mathfrak{L}(L) = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} 2\pi \sum_{i=1}^{n} y(\tau_i)s_i,$$

t.i., $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall\mathcal{P}\ [\,|\mathcal{P}| < \delta \Rightarrow |\,\mathfrak{L}(L) - 2\pi \sum\limits_{i=1}^{n} y(\tau_i)s_i\,| < \varepsilon]$.

13.36. TEORĒMA. Intervālā $[\alpha;\beta]$ nepārtraukti diferencējamai līknei L

$$\mathfrak{L}(L) = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

□ Tāpat kā 13.32. teorēmas pierādījumā mēs aprobežosimies tikai ar pierādījuma idejas izklāstu. Ievērosim, ka

$$2\pi \sum_{i=1}^{n} y(\tau_i)s_i = 2\pi \sum_{i=1}^{n} y(\tau_i)\sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\zeta_i))^2}\Delta t_i,$$

kas gandrīz ir funkcijas $2\pi y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ Rīmaņa summa $2\pi \sum\limits_{i=1}^{n} y(\eta_i)\sqrt{(x'(\eta_i))^2 + (y'(\eta_i))^2}\Delta t_i$, kur $\eta_i \in [t_{i-1}; t_i]$. Tā kā līkne L ir nepārtraukti diferencējama intervālā $[\alpha; \beta]$, tad izdodas pierādīt, ka

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} 2\pi \sum_{i=1}^{n} y(\tau_i)s_i = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} 2\pi \sum_{i=1}^{n} y(\eta_i)\sqrt{(x'(\eta_i))^2 + (y'(\eta_i))^2}\Delta t_i. \ \blacksquare$$

Ja rotācija notiek ap y asi, tad iepriekšējie spriedumi paliek spēkā un

$$\mathfrak{L}(L) = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

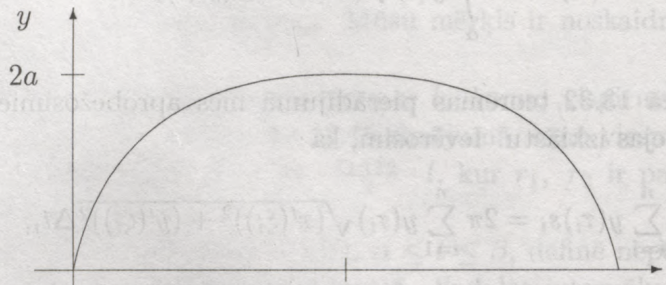
Speciālgadījumā, kad $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ (rotācija ap x asi), iegūsim

$$\mathfrak{L}(L) = 2\pi \int_{a}^{b} f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx,$$

bet, ja $x = g(y)$, $c \leq y \leq d$ (rotācija ap y asi), iegūsim

$$\mathfrak{L}(L) = 2\pi \int_{c}^{d} g(y)\sqrt{1 + (g'(y))^2}dy.$$

13.37. Piemērs. Aprēķināsim laukumu virsmai, kas rodas, rotējot cikloīdai $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $a > 0$, ap x asi.



13.16. zīm.

Cikloīdas attiecīgais fragments ir redzams 13.16.zīmējumā. Tā kā rotācija notiek ap x asi, tad

$$\mathfrak{L} = 2\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt =$$

$$= 2\pi \int\limits_{0}^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{(a\sin t)^2 + (a(1-\cos t))^2}dt =$$

$$= 2\pi a^2 \int\limits_{0}^{2\pi} (1-\cos t)\sqrt{\sin^2 t + 1 - 2\cos t + \cos^2 t}dt =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi a^2 \int\limits_{0}^{2\pi} (1-\cos t)\sqrt{1-\cos t}dt =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi a^2 \int\limits_{0}^{2\pi} (1-\cos t)^{\frac{3}{2}}dt = 2\sqrt{2}\pi a^2 \int\limits_{0}^{2\pi} (2\sin^2 \tfrac{t}{2})^{\frac{3}{2}}dt = 8\pi a^2 \int\limits_{0}^{2\pi} \sin^3 \tfrac{t}{2}dt =$$

$$= 8\pi a^2 \int\limits_{0}^{2\pi} (1-\cos^2 \tfrac{t}{2})\sin \tfrac{t}{2}\, dt = * \left| \begin{array}{ll} \cos \frac{t}{2} = u & t = 0 \Rightarrow u = 1 \\ -\frac{1}{2}\sin \frac{t}{2}dt = du & t = 2\pi \Rightarrow u = -1 \\ \sin \frac{t}{2}dt = -2du & \end{array} \right|$$

$$* = -16\pi a^2 \int\limits_{1}^{-1} (1-u^2)du = 32\pi a^2 \int\limits_{0}^{1} (1-u^2)du = 32\pi a^2 (u - \tfrac{u^3}{3})|_0^1 =$$

$$= \tfrac{64\pi a^2}{3} \text{ (l.v.)} \blacksquare$$

14. nodaļa

ALGEBRISKAS LĪKNES

Pamatdefinīcija

14.1. DEFINĪCIJA. Koordinātu plaknes Oxy punktu kopu L sauc par **algebrisku līkni**, ja šīs kopas L koordinātas apmierina vienādojumu $p(x,y)=0$, kur $p:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ir kāds divargumentu polinoms, t.i.,

$$p(x,y)=\sum_{(i,j)\in P} a_{ij}x^iy^j.$$

Šeit P ir kopas $\mathbb{N}^2$ galīga apakškopa un $\forall (i,j)\in P\ (a_{ij}\neq 0)$. Skaitli $\deg p = \max\limits_{(i,j)\in P}\{i+j\}$ sauc par algebriskās līknes **kārtu**.

Mēs tuvāk iepazīsimies ar 1. un 2. kārtas algebriskām līknēm. Atzīmēsim, ka ne jebkura algebriska līkne intuitīvā nozīmē uzskatāma par līkni. Tā, piemēram, vienādojums $x^2+y^2=0$ koordinātu plaknē Oxy reprezentē vienu vienīgu punktu $O(0,0)$.

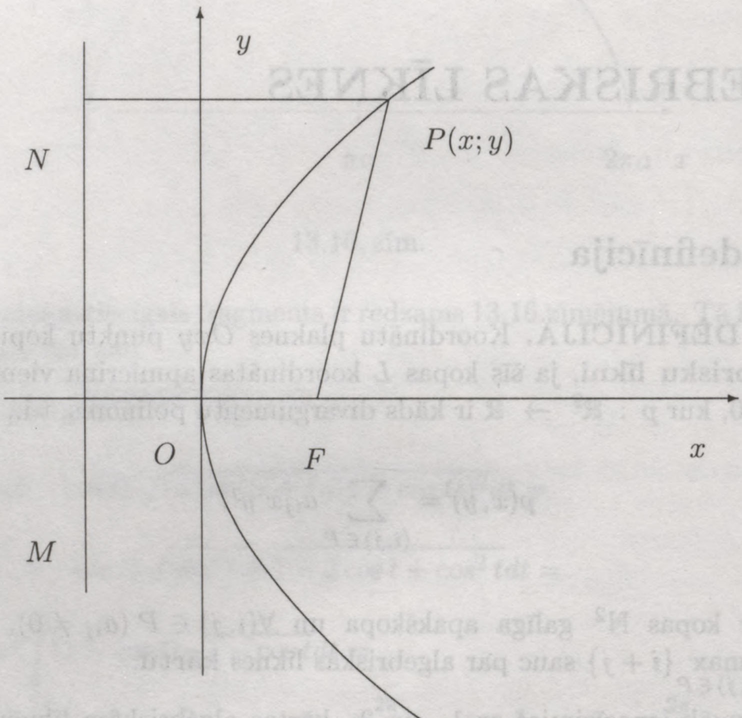
Vispirms pievērsīsim uzmanību 1. kārtas algebriskām līknēm. Vienādojumu

$$ax+by+c=0 \tag{14.1}$$

sauc par **taisnes vispārīgo vienādojumu**. Ja $b=0$, tad vienādojums (14.1) pārrakstāms izskatā $ax+c=0$. Šai gadījumā $a\neq 0$ (citādi (14.1) nav 1. kārtas algebriska līkne), tāpēc $x=-\frac{c}{a}$, kas ir ordinātu asij paralēlas taisnes vienādojums. Ja turpretī $b\neq 0$, tad vienādojums (14.1) pārrakstāms izskatā $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$, kas saskaņā ar (13.5) ir taisnes vienādojums. Šī taisne iet caur punktu $Q(0,-\frac{c}{b})$; tās virziena koeficients $k=-\frac{a}{b}$. Līdz ar to vienīgās 1. kārtas algebriskās līknes ir taisnes.

Parabola

14.2. DEFINĪCIJA. Plaknes punktu kopu, kuras visiem punktiem attālums līdz dotajam punktam F ir vienāds ar attālumu līdz fiksētai taisnei MN, sauc par **parabolu**. Punktu F sauc par parabolas **fokusu**, bet taisni MN — par **direktrisi**. (Šeit pieņemts, ka direktrise neiet caur fokusu.)



14.1. zīm.

Koordinātu sistēmu izraudzīsimies tā, lai fokusa koordinātas ir $F(\frac{p}{2}; 0)$, bet direktrises vienādojms $x = -\frac{p}{2}$ [14.1. zīm.]. Ja $P(x; y)$ ir parabolas punkts, tad attālums līdz fokusam $r = \sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + y^2}$, bet attālums līdz direktrisei $d = x + \frac{p}{2}$. Saskaņā ar prabolas definīciju $r = d$, tāpēc

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}.$$

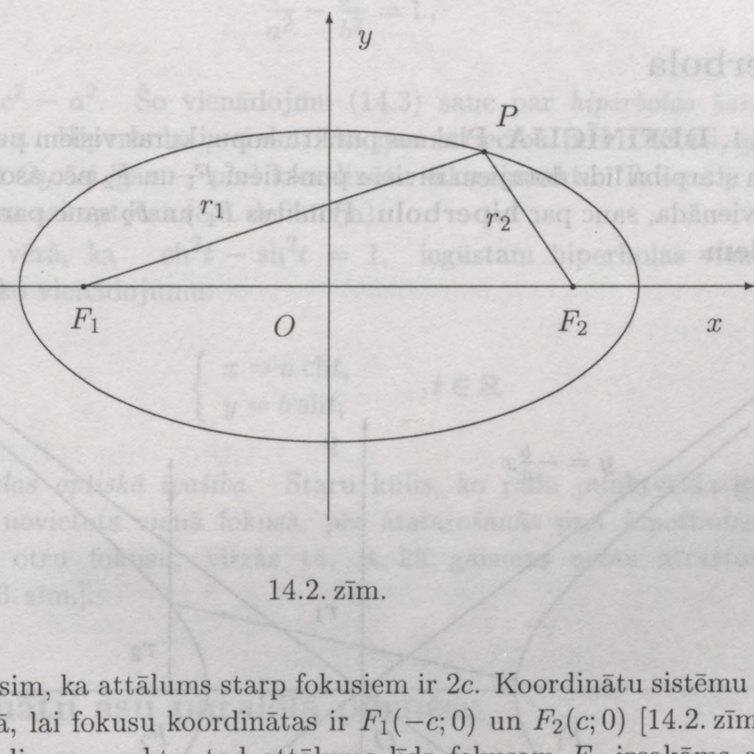
Kāpinot kvadrātā un savelkot līdzīgos locekļus, iegūstam $y^2 = 2px$, ko sauc par *parabolas kanonisko vienādojumu.* Parabola ir simetriska attiecībā pret

Ox asi. Parabolas simetrijas asi sauc par *parabolas asi* jeb *fokālo asi*. Fokālās ass krustpunktu ar parabolu sauc par *parabolas virsotni*.

Parabolas optiskā īpašība. Staru kūlis, ko rada punktveida gaismas avots, kas novietots parabolas fokusā pēc atstarošanās pret parabolu ir paralēls.

Elipse

14.3. DEFINĪCIJA. Plaknes punktu kopu, kuras visiem punktiem attālumu summa līdz dotajiem diviem punktiem F_1 un F_2 ir vienāda, sauc par **elipsi**. Punktus F_1 un F_2 sauc par elipses **fokusiem**.



14.2. zīm.

Pieņemsim, ka attālums starp fokusiem ir $2c$. Koordinātu sistēmu izraudzīsimies tā, lai fokusu koordinātas ir $F_1(-c;0)$ un $F_2(c;0)$ [14.2. zīm.]. Ja $P(x;y)$ ir elipses punkts, tad attālums līdz fokusam F_1 izsakāms ar formulu $r_1 = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$, bet attālums līdz fokusam F_2 — ar formulu $r_2 = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$. Attālumus r_1 un r_2 sauc par punkta P *fokālajiem rādiusiem*. Saskaņā ar definīciju lielums $r_1 + r_2$ elipsei ir konstante, ko apzīmēsim ar $2a \geq 2c$. No šejienes $r_2 = 2a - r_1$. Pēc kāpināšanas kvadrātā un dažiem pārveidojumiem iegūstam $cx + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$. Vēlreiz kāpinot kvadrātā, izteiksme pārveidojama formā

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \tag{14.2}$$

kur $b^2 = a^2 - c^2$. Šo vienādojumu (14.2) sauc par *elipses kanonisko vienādojumu.* Elipse ir simetriska gan attiecībā pret Ox asi, gan attiecībā pret Oy asi, gan — pret koordinātu sākumpunktu.

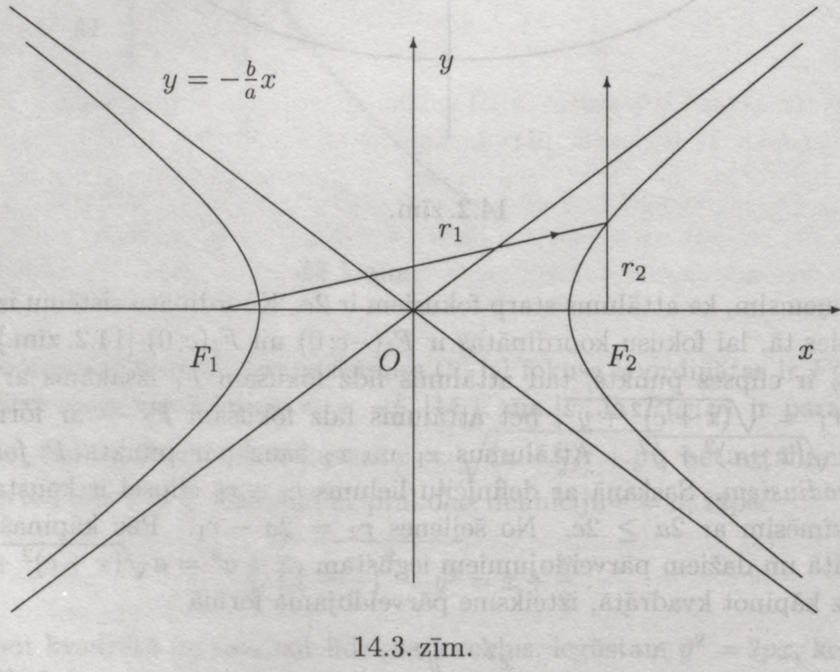
Ņemot vērā, ka $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, iegūstam elipses parametrisko vienādojumu:

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \qquad t \in [0; 2\pi[.$$

Elipses optiskā īpašība. Staru kūlis, ko rada punktveida gaismas avots, kas novietots vienā fokusā, pēc atstarošanās pret elipsi krustojas otrā fokusā.

Hiperbola

14.4. DEFINĪCIJA. Plaknes punktu kopu, kuras visiem punktiem attālumu starpība līdz dotajiem diviem punktiem F_1 un F_2 pēc asolūtās vērtības ir vienāda, sauc par **hiperbolu**. Punktus F_1 un F_2 sauc par hiperbolas **fokusiem**.



14.3. zīm.

Pieņemsim, ka attālums starp fokusiem ir $2c$. Koordinātu sistēmu izraudzīsimies tā, lai fokusu koordinātas ir $F_1(-c;0)$ un $F_2(c;0)$ [14.3. zīm.]. Ja $P(x;y)$ ir hiperbolas punkts, tad attālums līdz fokusam F_1 izsakāms ar formulu $r_1 = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$, bet attālums līdz fokusam F_2 — ar formulu $r_2 = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$. Attālumus r_1 un r_2 sauc par punkta P *fokālajiem rādiusiem.* Saskaņā ar definīciju lielums $|r_1 - r_2|$ hiperbolai ir konstante, ko apzīmēsim ar $2a \leq 2c$. No šejienes $r_1 = r_2 \pm 2a$. Pēc kāpināšanas kvadrātā un dažiem pārveidojumiem iegūstam $cx - a^2 = \mp a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$. Vēlreiz kāpinot kvadrātā, izteiksme pārveidojama formā

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{14.3}$$

kur $b^2 = c^2 - a^2$. Šo vienādojmu (14.3) sauc par ***hiperbolas kanonisko vienādojumu.*** Hiperbola ir simetriska gan attiecībā pret Ox asi, gan attiecībā pret Oy asi, gan — pret koordinātu sākumpunktu. Taisnes $y = \pm\frac{b}{a}x$ ir hiperbolas asimptotas (8.3. definīcija).

Ņemot vērā, ka $\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t = 1$, iegūstam hiperbolas viena zara parametrisko vienādojumu:

$$\begin{cases} x = a\,\mathrm{ch}t, \\ y = b\,\mathrm{sh}t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

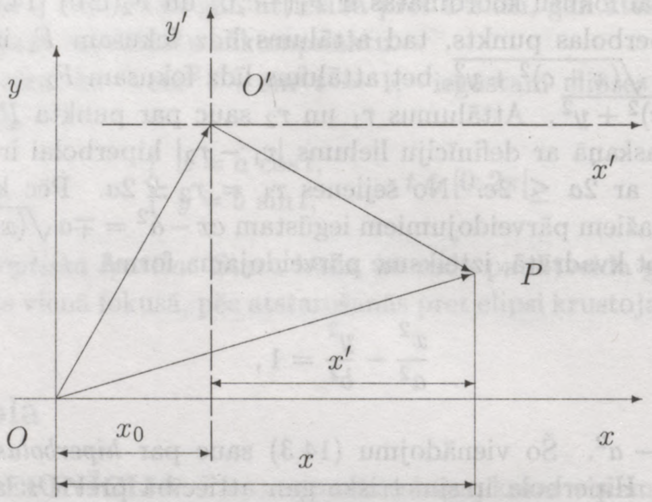
Hiperbolas optiskā īpašība. Staru kūlis, ko rada punktveida gaismas avots, kas novietots vienā fokusā, pēc atstarošanās pret hiperbolas zaru, kas apliec otru fokusu, virzās tā, it kā gaismas avots atrastos otrā fokusā [14.3. zīm.].

Koordinātu asu paralēlā pārnese

Pieņemsim, ka koordinātu sistēma $O'x'y'$ iegūta no koordinātu sistēmas Oxy, pārbīdot koordinātu sākuma punktu [14.4. zīm.].

Ja punktu O' un P koordinātas sistēmā Oxy attiecīgi ir $O'(x_0;y_0)$ un $P(x;y)$, bet sistēmā $O'x'y'$ attiecīgi — $O'(0;0)$ un $P(x';y')$, tad

$$\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0. \end{cases}$$



14.4. zīm.

Tā rezultātā punkta P *jaunās koordinātas* atkarībā no vecajām koordinātām atrodamas pēc formulas

$$\begin{cases} x' = x - x_0, \\ y' = y - y_0 \,. \end{cases}$$

Riņķa līnija

14.5. DEFINĪCIJA. Plaknes punktu kopu, kuras visi punkti atrodas vienādā attālumā no kāda fiksēta punkta C, sauc par **riņķa līniju**. Punktu C sauc par riņķa līnijas **centru**. Attālumu no brīvi izraudzīta riņķa līnijas punkta līdz tās centram sauc par **rādiusu**.

Ja $P(x;y)$ ir riņķa līnijas punkts, $C(x_0;y_0)$ — centrs, bet r — rādiuss, tad attālums no $P(x;y)$ līdz centram C izsakāms ar formulu

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \quad \text{jeb} \quad r^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2,$$

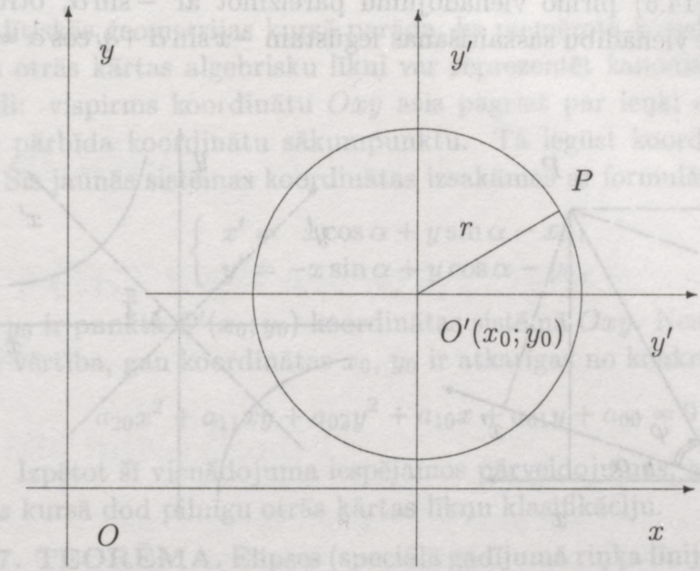
kas ir riņķa līnijas vienādojums.

Izvēlamies jaunu koordinātu sistēmu $O'x'y'$, kur punkta O' lomā ņemam riņķa līnijas centru $C(x_0;y_0)$.

Jaunajās koordinātās [skatīt 14.5. zīm.] riņķa līnijas vienādojums iegūst izskatu

$$x'^2 + y'^2 = r^2,$$

ko sauc par *riņķa līnijas kanonisko vienādojumu*.



14.5. zīm.

Koordinātu asu pagriešana

Pieņemsim, ka koordinātu sistēma $Ox'y'$ iegūta no koordinātu sistēmas Oxy pagriežot, koordinātu asis [14.6. zīm.] par leņķi α. Ja punkta P koordinātas sistēmā Oxy ir $P(x;y)$, bet sistēmā $Ox'y'$ — $P(x';y')$, tad

$$x = |OP|\cos(\alpha+\varphi) = |OP|(\cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi) =$$
$$= |OP|\cos\varphi\cos\alpha - |OP|\sin\varphi\sin\alpha = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha.$$

Līdzīgi,

$$y = |OP|\sin(\alpha+\varphi) = |OP|(\sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi) =$$
$$= |OP|\cos\varphi\sin\alpha + |OP|\sin\varphi\cos\alpha = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

Tātad

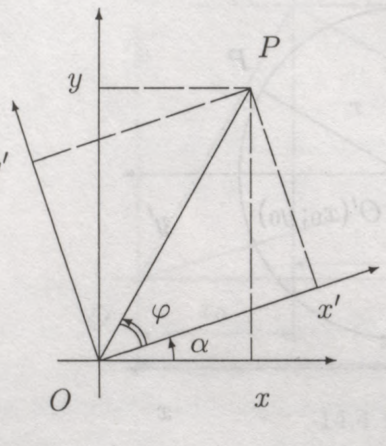
$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha\,, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha\,. \end{cases} \tag{14.4}$$

No šejienes

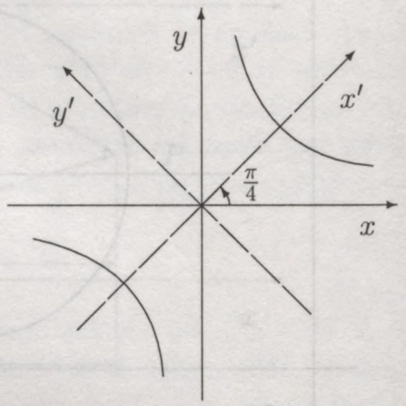
$$x\cos\alpha = x'\cos^2\alpha - y'\cos\alpha\sin\alpha\,,$$
$$y\sin\alpha = x'\sin^2\alpha + y'\cos\alpha\sin\alpha\,;$$

pēc abu vienādību saskaitīšanas $x\cos\alpha + y\sin\alpha = x'$.

Sistēmas (14.5) pirmo vienādojumu pareizinot ar $-\sin\alpha$, otro — ar $\cos\alpha$, pēc abu vienādību saskaitīšanas iegūstam $-x\sin\alpha + y\cos\alpha = y'$.



14.6. zīm.



14.7. zīm.

Tā rezultātā punkta P *jaunās koordinātas* atkarībā no vecajām koordinātām atrodamas pēc formulas

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases}$$

14.6. Piemērs. Apgrieztās proporcionalitātes sakarības $y = \frac{1}{x}$ grafiku sauc par hiperbolu. Taču šis vienādojums nav hiperbolas kanoniskais vienādojums. Koordinātu sistēmas Oxy asis [14.7. zīm.] pagriežot par leņķi $\frac{\pi}{4}$ iegūstam

$$\begin{cases} x = x'\cos\frac{\pi}{4} - y'\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'), \\ y = x'\sin\frac{\pi}{4} + y'\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y'). \end{cases}$$

Ja vienādojumu $y = \frac{1}{x}$ pārraksta formā $yx = 1$, tad jaunajā koordinātu sistēmā $Ox'y'$ tas iegūst izskatu $\frac{1}{2}(x'^2 - y'^2) = 1$ jeb

$$\frac{x'^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{y'^2}{(\sqrt{2})^2} = 1,$$

kas ir hiperbolas kanoniskais vienādojums.

Otrās kārtas algebrisko līkņu klasifikācija

Analītiskās ģeometrijas kursā parāda, ka piemērotā koordinātu sistēmā jebkuru otrās kārtas algebrisku līkni var reprezentēt kanoniskā formā. To veic šādi: vispirms koordinātu Oxy asis pagriež par leņķi α un pēc tam paralēli pārbīda koordinātu sākumpunktu. Tā iegūst koordinātu sistēmu $O'x'y'$. Šīs jaunās sistēmas koordinātas izsakāmas ar formulām

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha - x_0\,, \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha - y_0\,, \end{cases} \tag{14.5}$$

kur x_0, y_0 ir punkta $O'(x_0; y_0)$ koordinātas sistēmā Oxy. Neapšaubāmi gan leņķa α vērtība, gan koordinātas x_0, y_0 ir atkarīgas no konkrētās līknes

$$a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_{00} = 0 \tag{14.6}$$

izskata. Izpētot šī vienādojuma iespējamos pārveidojumus, analītiskās ģeometrijas kursā dod pilnīgu otrās kārtas līkņu klasifikāciju.

14.7. TEORĒMA. Elipses (speciālā gadījumā riņķa līnijas), parabolas, hiperbolas un taisnes ir vienīgās otrās kārtas līknes.

Šādam teorēmas formulējumam gan nepieciešams neliels precizējošs komentārs. No vienādojuma (14.6), pārveidojot saskaņā ar formulām (14.5), iespējams iegūt tieši vienu no sekojošām kanoniskām formām.

1. $x'^2 + y'^2 = r^2$ — riņķa līnija;
2. $\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = 1$ — elipse;
3. $\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = -1$ — imagināra elipse;
4. $\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = 0$ — imagināri saistītas krustiskas taisnes;
5. $y'^2 = 2px'$ — parabola;
6. $y'^2 = a^2$ — paralēlas taisnes;
7. $y'^2 = -a^2$ — paralēlas imagināri saistītas taisnes;
8. $y'^2 = 0$ — divas sakrītošas taisnes;
9. $\dfrac{x'^2}{a^2} - \dfrac{y'^2}{b^2} = 1$ — hiperbola;
10. $\dfrac{x'^2}{a^2} - \dfrac{y'^2}{b^2} = 0$ — divas krustiskas taisnes.

15. nodaļa

INTEGRĒŠANAS METODES

Parciālā integrēšana

Metode ir bāzēta uz divu funkciju reizinājuma atvasinājuma formulu. Pieņemsim, ka mums ir dotas divas nepārtrauktas un diferencējamas funkcijas $u = f(x)$ un $v = g(x)$. Tad

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Integrējot abas vienādības puses, iegūsim:

$$\begin{aligned}&\int (f(x)g(x))'\,dx = f(x)g(x) + C = \\ &= \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx = \int g(x)\,df(x) + \int f(x)\,dg(x) \\ &\text{jeb } \int f(x)\,dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)\,df(x).\end{aligned}$$

Simboliskā pierakstā:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Šo formulu sauc par **integrēšanas pa daļām** jeb **parciālās integrēšanas** formulu. Metodes lietošanai ir jēga tajos gadījumos, kad zemintegrāļa izteiksmi var sadalīt divos tādos reizinātājos u un dv, lai izteiksmju dv un $v\,du$ integrēšana būtu vieglāks uzdevums nekā sākotnējās izteiksmes nointegrēšana. Vispārīgā gadījumā $\int dv = v + C$ — labās puses funkcija v netiek noteikta viennozīmīgi, taču integrēšanas pa daļām formulā v lomā var ņemt jebkuru funkciju, kuras diferenciālis ir dv.

Integrēšanas pa daļām metodi ieteicams lietot šādos gadījumos:

1) $\int P(x)f(x)\,dx$, ja $P(x)$ ir polinoms un $f(x)$ lomā ir $\sin(kx+b)$ vai $\cos(kx+b)$, vai a^{kx+b}, kur $a, k, b \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, $a > 0$, $a \neq 1$; tad
apzīmē: $P(x) = u$ un $f(x)\,dx = dv$;

2) $\int P(x)f(x)\,dx$, ja $P(x)$ ir polinoms un $f(x)$ lomā ir $\ln(kx+b)$ vai $\arcsin(kx+b)$, vai $\arccos(kx+b)$, vai $\operatorname{arctg}(kx+b)$, vai $\operatorname{arcctg}(kx+b)$, $k, b \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$; tad apzīmē: $f(x) = u$ un $P(x)\,dx = dv$;

3) $\int f(x)g(x)\,dx$, ja $f(x) = a^{kx+b}$ un $g(x)$ ir $\sin(kx+b)$ vai $\cos(kx+b)$, $a, k, b \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, $a > 0$, $a \neq 1$;
apzīmē: $f(x) = u$, $g(x)\,dx = dv$ vai arī otrādāk: $g(x) = u$, $f(x)\,dx = dv$; metodi pielieto divreiz, meklējamo nenoteikto integrāli izsaka no iegūtās integrāļu vienādības.

Protams, ir arī citi gadījumi, kad ieteicams lietot tieši integrēšanas pa daļām metodi.

Noteikto integrāļu gadījumā parciālās integrēšanas formulu simboliski var pierakstīt:

$$\int_a^b u\,dv = uv|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

15.1. Piemēri. 1. $\int (3x+1)\sin 2x\,dx = *$

$$\left|\begin{array}{ll} 3x+1 = u & \sin 2x\,dx = dv \\ \text{diferencē} & \text{integrē, izvēlas } C = 0 \\ d(3x+1) = 3\,dx = du & \int \sin 2x\,dx = \int dv \\ & -\frac{1}{2}\cos 2x = v \end{array}\right|$$

$* = (3x+1)(-\frac{1}{2}\cos 2x) - \int(-\frac{1}{2}\cos 2x)3\,dx =$
$= -\frac{1}{2}(3x+1)\cos 2x + \frac{3}{2}\int \cos 2x\,dx =$
$= -\frac{1}{2}(3x+1)\cos 2x + \frac{3}{4}\sin 2x + C.$

Ja uzdevums nav pārāk sarežģīts, tad risināšanas gaitā var arī nenorādīt, kas apzīmēts ar u un kas ar dv. Tā šajā konkrētajā gadījumā var rēķināšanas izvedumus pierakstīt sekojošā veidā:

$\int(3x+1)\sin 2x\,dx = \int(3x+1)\frac{d(\cos 2x)}{-2} =$
$= -\frac{1}{2}(3x+1)\cos 2x - \int \frac{\cos 2x}{-2} d(3x+1) = -\frac{1}{2}(3x+1)\cos 2x + \frac{3}{2}\int \cos 2x\,dx =$
$= -\frac{1}{2}(3x+1)\cos 2x + \frac{3}{4}\sin 2x + C.$

2. $\int x^2 \ln(x+1)\,dx = \frac{x^3}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{x+1}dx = *$

$$\left|\begin{array}{lll} \ln(x+1) = u & x^2\,dx = dv & x^3 : (x+1) = x^2 - x + 1 \\ \frac{1}{x+1}dx = du & \frac{x^3}{3} = v & \underline{x^3 + x^2} \\ & & -x^2 \\ & & \underline{-x^2 - x} \\ & & x \\ & & \underline{x+1} \\ & & -1 \end{array}\right|$$

$* = \frac{x^3}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{3}\int(x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1})\,dx =$

$= \frac{x^3}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{3}(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln(x+1)) + C =$

$= \frac{1}{3}(x^3+1)\ln(x+1) - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{6} - \frac{x}{3} + C.$

3. $\int e^{3x+1}\sin x\,dx = * \left| \begin{array}{ll} e^{3x+1} = u & \sin x\,dx = dv \\ 3e^{3x+1}\,dx = du & -\cos x = v \end{array} \right|$

$* = -e^{3x+1}\cos x + 3\int e^{3x+1}\cos x\,dx = ** \left| \begin{array}{ll} e^{3x+1} = u & \cos x\,dx = dv \\ 3e^{3x+1}\,dx = du & \sin x = v \end{array} \right|$

(otrreiz lietojot metodi, apzīmēšana jāveic tāpat kā pirmajā reizē, t.i., $e^{3x+1} = u$, pretējā gadījumā iegūsim sākotnējo integrāli)

$* = -e^{3x+1}\cos x + 3(e^{3x+1}\sin x - 3\int e^{3x+1}\sin x\,dx) =$

$= e^{3x+1}(-\cos x + 3\sin x) - 9\int e^{3x+1}\sin x\,dx \quad \Rightarrow$

$10\int e^{3x+1}\sin x\,dx = e^{3x+1}(3\sin x - \cos x) + C_0 \quad \Rightarrow$

$\int e^{3x+1}\sin x\,dx = \frac{1}{10}e^{3x+1}(3\sin x - \cos x) + C$, kur konstante $C = \frac{C_0}{10}$.

4. $\int(x^3 + 7x^2)2^x\,dx = * \left| \begin{array}{ll} x^3 + 7x^2 = u & 2^x\,dx = dv \\ (3x^2 + 14x)dx = du & \frac{2^x}{\ln 2} = v \end{array} \right|$

$* = \frac{2^x}{\ln 2}(x^3 + 7x^2) - \frac{1}{\ln 2}\int(3x^2 + 14x)2^x\,dx = ** \left| \begin{array}{ll} 3x^2 + 14x = u & 2^x\,dx = dv \\ (6x + 14)dx = du & \frac{2^x}{\ln 2} = v \end{array} \right|$

$** = \frac{2^x}{\ln 2}(x^3 + 7x^2) - \frac{1}{\ln 2}(\frac{1}{\ln 2}(3x^2 + 14x)2^x - \frac{1}{\ln 2}\int(6x + 14)2^x\,dx) = ***$

$\left| \begin{array}{ll} 6x + 14 = u & 2^x\,dx = dv \\ 6\,dx = du & \frac{2^x}{\ln 2} = v \end{array} \right|$

$*** = \frac{2^x}{\ln 2}(x^3 + 7x^2 - \frac{3x^2 + 14x}{\ln 2}) + \frac{1}{\ln^2 2}(\frac{1}{\ln 2}(6x + 14)2^x - \frac{6}{\ln 2}\int 2^x\,dx) =$

$= \frac{2^x}{\ln 2}(x^3 + 7x^2 - \frac{3x^2 + 14x}{\ln 2}) + \frac{2^x}{\ln^3 2}((6x + 14) - \frac{6}{\ln 2}) + C =$

$= \frac{2^x}{\ln 2}(x^3 + 7x^2) - \frac{2^x}{\ln^2 2}(3x^2 + 14x) + \frac{2^x}{\ln^3 2}(6x + 14) - \frac{6 \cdot 2^x}{\ln^4 2} + C.$

No 4. piemēra varētu secināt, ka metode jāpielieto tik reizes, cik liela ir polinoma kārta sākotnējā integrālī. Tomēr tā nebūs visos gadījumos, piemēram, 2. piemērā iztikām tikai ar vienu apzīmēšanu.

5. $\int \arcsin^2 x\,dx = * \left| \begin{array}{ll} \arcsin^2 x = u & dx = dv \\ \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = du & x = v \end{array} \right|$

$* = x\arcsin^2 x - 2\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = **$

$\left| \begin{array}{lll} \arcsin x = u & \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = du & \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = dv \\ v = \int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\frac{(-\frac{1}{2})dt}{\sqrt{t}} = * & \left| \begin{array}{l} 1 - x^2 = t \\ -2x\,dx = dt \end{array} \right| & * = -\frac{1}{2}\cdot 2t^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{1-x^2} \end{array} \right|$

$** = x\arcsin^2 x - 2(-\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \int\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx) =$

$= x\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C.$ ■

Racionālu funkciju integrēšana

Racionālas funkcijas veido ļoti svarīgu funkciju klasi, jo nenoteiktos integrāļus no racionālām funkcijām vienmēr ir iespējams izteikt ar elementārām funkcijām. Ļoti daudzus neracionālu funkciju integrāļus ar piemērotu substitūciju palīdzību var pārveidot par racionālu funkciju integrāļiem. Tāpēc tagad iepazīsimies ar racionālu funkciju integrēšanas mākslu.

Vispirms atgādināsim, ka par racionālu funkciju $R(x)$ sauc tādu funkciju, kura ir pierakstāma kā divu polinomu $Q(x)$ un $P(x)$ dalījums: $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Ja skaitītāja polinoma $P(x)$ pakāpe ir lielāka vai vienāda ar saucēja polinoma $Q(x)$ pakāpi, tad iespējams polinomus izdalīt un rezultātā iegūt izteiksmi

$$R(x) = W(x) + \frac{Z(x)}{Q(x)},$$

kur $W(x)$ ir kaut kāds polinoms, bet $Z(x)$ ir polinoms ar zemāku pakāpi kā $Q(x)$.

15.2. Piemērs. $\frac{x^5+2x^3-x+233}{x^2+3x-4} = x^3 - 3x^2 + 15x - 57 + \frac{230x+5}{x^2+3x-4}$, jo

$$\begin{array}{l}
(x^5 + 2x^3 - x + 233) : (x^2 + 3x - 4) = x^3 - 3x^2 + 15x - 57 \\
\underline{x^5 + 3x^4 - 4x^3} \\
\quad -3x^4 + 6x^3 - x + 233 \\
\quad \underline{-3x^4 - 9x^3 + 12x^2} \\
\qquad 15x^3 - 12x^2 - x + 233 \\
\qquad \underline{15x^3 + 45x^2 - 60x} \\
\qquad\quad -57x^2 + 59x + 233 \\
\qquad\quad \underline{-57x^2 - 171x + 228} \\
\qquad\qquad 230x + 5 \quad \blacksquare
\end{array}$$

Iepriekš aprakstītās darbības mērķis ir pārveidot doto racionālo funkciju tā, lai to būtu iespējams integrēt. Polinomu $W(x)$ mēs varam integrēt, izmantojot integrēšanas pamatformulu $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$. Problēma rodas prasmē integrēt **īstu racionālu funkciju** $\frac{Z(x)}{Q(x)}$ (polinoma kārta skaitītājā ir mazāka par polinoma kārtu saucējā).

Izrādās, ka īstu racionālu funkciju var sadalīt tā saucamajās **elementārdaļās**, kuras ir iespējams integrēt. Kā to izdarīt?

Algebras kursā pierāda apgalvojumu, ka jebkuru polinomu $Q(x)$ var sadalīt reizinātājos:

$$Q(x) = A(x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x-\gamma),$$

kur A ir koeficients pie augstākās pakāpes, bet $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ ir vienādojuma $Q(x) = 0$ saknes. Polinomam var būt vienkāršas un vairākkārtīgas reālas saknes, kā arī kompleksas saknes. Ja polinomam $Q(x)$ ir vairākkārtīgas saknes, tad

$$Q(x) = A(x-\alpha)^r(x-\beta)^s \ldots (x-\gamma)^t,$$

kur $r, s, \ldots, t$ ir veseli skaitļi, kuri norāda atbilstošo sakņu kārtu, turklāt $r + s + \ldots + t = n$, t.i., sakņu kārtu norādošo skaitļu summa sakrīt ar polinoma $Q(x)$ pakāpi. Savukārt, ja polinomam $Q(x)$ ir kompleksa sakne $\alpha = a + bi$ ar kārtu r, tad šim polinomam vienlaicīgi ir arī r-kārtīga sakne $\overline{\alpha} = a - bi$. Ievērosim, ka

$$\begin{aligned}(x-\alpha)^r(x-\overline{\alpha})^r &= [(x-(a+bi))(x-(a-bi))]^r = \\ &= [x^2 - x(a+bi) - x(a-bi) + (a+bi)(a-bi)]^r = \\ &= [x^2 - ax - bix - ax + bix + a^2 - abi + abi - b^2i^2]^r = \\ &= [x^2 - 2ax + a^2 + b^2]^r = (x^2 + 2px + q)^r,\end{aligned}$$

kur $p = -a$, $q = a^2 + b^2$, $p^2 - q < 0$. Tādējādi katram saistītam sakņu pārim atbilst viens kvadrāttrinoms.

Īstas racionālas funkcijas elementārdaļu veidu pilnībā nosaka polinoma $Q(x)$ reizinātāji

$$Q(x) = A(x-\alpha)^r(x-\beta)^s \ldots (x^2 + 2px + q)^t \ldots$$

Algebras kursā pierāda teorēmu, ka

$$\begin{aligned}\frac{Z(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \ldots + \frac{A_r}{(x-\alpha)^r} + \ldots \\ + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + 2px + q} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + 2px + q)^2} + \ldots + \frac{M_tx + N_t}{(x^2 + 2px + q)^t} \ldots,\end{aligned}$$

kur $A_1, A_2, \ldots, A_r, \ldots, M_1, N_1, M_2, N_2, \ldots, M_t, N_t, \ldots$ ir reālas konstantes. Šādi pierakstītu racionālu funkciju sauc par tās **izvirzījumu elementārdaļās**.

Lai noteiktu konstantes $A_1, A_2, \ldots, A_r, \ldots, M_1, N_1, M_2, N_2, \ldots, M_t, N_t, \ldots$, abas vienādības puses pareizina ar $Q(x)$, tāpēc galarezultātā pēc saīsināšanas mēs iegūsim vienādību, kas saista divus polinomus. Kreisajā pusē atradīsies polinoms $Z(x)$, bet labajā pusē polinoms, kas satur nezināmos koeficientus. Koeficienti jānosaka tā, lai abu pušu polinomi būtu vienādi. Pielīdzinot koeficientus pie vienādajām polinomu pakāpēm, mēs iegūsim lineāru vienādojumu sistēmu, no kuras atradīsim nezināmos koeficientus $A_1, A_2, \ldots, A_r, \ldots, M_1, N_1, M_2, N_2, \ldots, M_t, N_t, \ldots$. Šeit izklāstīto metodi, kā īstu racionālu funkciju izvirzīt elementārdaļās, sauc par **nenoteikto koeficientu metodi**.

15.3. Piemērs. Jāsadala izteiksme $\frac{x^3-2x^2+5}{(x-2)^2(x^2+1)}$ elementārdaļās.

Tā kā šī izteiksme ir īsta racionāla funkcija, kuras saucējs ir sadalīts reizinātājos, tad

$$\frac{x^3-2x^2+5}{(x-2)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1},$$

kur A, B, C, D ir pagaidām nezināmi koeficienti. Pareizinot abas puses ar $(x-2)^2(x^2+1)$, iegūsim:

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 + 5 &= A(x-2)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x-2)^2 = \qquad (15.1)\\ &= Ax^3 + Ax - 2Ax^2 - 2A + Bx^2 + B +\\ &\qquad + Cx^3 - 4Cx^2 + 4Cx + Dx^2 - 4Dx + 4D =\\ &= (A+C)x^3 + (-2A + B - 4C + D)x^2 +\\ &\qquad + (A + 4C - 4D)x + (-2A + B + 4D). \end{aligned}$$

Pielīdzinot koeficientus pie vienādajām mainīgā pakāpēm, iegūsim vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} 1 &= A + C,\\ -2 &= -2A + B - 4C + D,\\ 0 &= A + 4C - 4D,\\ 5 &= -2A + B + 4D. \end{cases}$$

Doto vienādojumu sistēmu var atrisināt, piemēram, ar Gausa metodi. Bet var izmantot arī iegūto vienādību (15.1). Ja (15.1) mainīgā x vietā ievietojam 2, tad

$$8 - 8 + 5 = 0 + 5B + 0, \text{ tātad } B = 1.$$

Ievietojot B vērtību sistēmā, saskaitot kopā pirmo, trešo un ceturto vienādojumu, iegūsim, ka $C = 1$, tad $A = 0$ un $D = 1$. Tātad $\frac{x^3-2x^2+5}{(x-2)^2(x^2+1)} = \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{x+1}{x^2+1}$. ■

Racionālas funkcijas $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ integrēšana būs paveikta, ja nointegrēsim polinomu $W(x)$ un īstu racionālu funkciju $\frac{Z(x)}{Q(x)}$. Īstas racionālas funkcijas integrēšana reducējas uz elementārdaļu nointegrēšanu. No iepriekš aprakstītā seko, ka ir iespējami četru veidu elementārdaļu integrāļi:

I $\displaystyle\int \frac{A}{x-\alpha}dx = A\ln|x-\alpha| + C,$

kur A ir konstante, α ir $Q(x)$ sakne un C ir integrācijas konstante;

II $\displaystyle\int \frac{A}{(x-\alpha)^r}dx = \int A(x-\alpha)^{-r}dx = \frac{A}{1-r}(x-\alpha)^{1-r} + C, \quad r > 1;$

III $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{x^2+2px+q}dx;$

IV $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{(x^2+2px+q)^r}dx, \quad r>1,$

pie tam vienādojumam $x^2+2px+q$ nav reālu sakņu, t.i., $p^2-q<0$.

Izskaitļosim III veida integrāli. Izdalīsim vispirms zemintegrāļa funkcijas saucējā pilno kvadrātu:

$$x^2+2px+q=(x+p)^2+q-p^2,$$

tas ļauj lietot substitūciju $x+p=t$, $dx=dt$ un ērtības labad apzīmēsim $q-p^2=h>0$ (tā ir konstante):

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+2px+q}dx=\int \frac{A(t-p)+B}{t^2+h}dt=A\int \frac{t\,dt}{t^2+h}+(B-Ap)\int \frac{dt}{t^2+h}.$$

Pirmo integrāli atradīsim, apzīmējot $t^2+h=u$, $2t\,dt=du$:

$$\int \frac{t\,dt}{t^2+h}=\frac{1}{2}\int \frac{du}{u}=\frac{1}{2}\ln|u|+C_0=\frac{1}{2}\ln(t^2+h)+C_0.$$

Otrais integrālis atrodams, izmantojot pamatintegrāļu tabulas integrāli

$$\int \frac{dz}{z^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{z}{a}+C, \quad a>0.$$

Galarezultātā esam ieguvuši, ka

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+2px+q}dx=\frac{A}{2}\ln(t^2+h)+C_0+(B-Ap)\frac{1}{\sqrt{h}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{h}}+C_1=$$

$$=\frac{A}{2}\ln(x^2+2px+q)+\frac{B-Ap}{\sqrt{h}}\operatorname{arctg}\frac{x+h}{\sqrt{h}}+C,$$

kur $C_0+C_1=C$.

15.4. Piemērs. $\int \frac{3x-7}{x^2+4x+9}dx=\int \frac{3x-7}{(x+2)^2+5}dx=*$

$x+2=t,\ dx=dt,\ x=t-2$

$*=\int \frac{3(t-2)-7}{t^2+5}dt=\int \frac{3t}{t^2+5}dt-\int \frac{13\,dt}{t^2+5}=\left|\begin{array}{l} t^2+5=u \\ 2t\,dt=du \quad \text{jeb } t\,dt=\frac{du}{2}\end{array}\right|$

$=\frac{3}{2}\int \frac{du}{u}-13\int \frac{dt}{t^2+5}=\frac{3}{2}\ln(t^2+5)-\frac{13}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}}+C=$

$=\frac{3}{2}\ln(x^2+4x+9)-\frac{13}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{5}}+C.$ ■

Lai aprēķinātu IV veida integrāli, rīkosimies šādi:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+2px+q)^r}dx=\int \frac{Ax+B}{((x+p)^2+(q-p^2))^r}dx=*\left|\begin{array}{l} x+p=t \\ dx=dt\end{array}\right|$$

$$* = \int \frac{A(t-p)+B}{(t^2+q-p^2)^r}dt = \int \frac{At}{(t^2+q-p^2)^r}dt + \int \frac{B-Ap}{(t^2+q-p^2)^r}dt.$$

Pirmo integrāli varam atrast ar substitūcijas $t^2+q-p^2=u$, $2t\,dt=du$, $t\,dt=\frac{1}{2}du$ palīdzību:

$$\int \frac{At}{(t^2+q-p^2)^r}dt = \frac{A}{2}\int\frac{du}{u^r} = \frac{A}{2}\frac{u^{-r+1}}{-r+1}+C_0 = \frac{A}{2(1-r)((x+p)^2+q-p^2)^{r-1}}+C_0$$

$$= \frac{A}{2(1-r)(x^2+2px+q)^{r-1}}+C_0.$$

Otrajā integrālī vispirms izdarīsim dažus pārveidojumus

$$\int \frac{B-Ap}{(t^2+q-p^2)^r}dt = \int \frac{B-Ap}{(q-p^2)^r((\frac{t}{\sqrt{q-p^2}})^2+1)^r}dt = * \left| \begin{array}{l} \frac{t}{\sqrt{q-p^2}} = z \\ dt = \sqrt{q-p^2}\,dz \end{array} \right|$$

$$= \frac{(B-Ap)\sqrt{q-p^2}}{(q-p^2)^r}\int\frac{dz}{(z^2+1)^r}.$$

Integrāli

$$I_r = \int \frac{dz}{(z^2+1)^r}$$

atradīsim ar parciālās integrēšanas metodes palīdzību

$$I_r = \int\frac{dz}{(z^2+1)^r} = \int\frac{(z^2+1)-z^2}{(z^2+1)^r}dz = I_{r-1} - \int\frac{z^2\,dz}{(z^2+1)^r} = *$$

$u=z$, $dv = \frac{z\,dz}{(z^2+1)^r}$, tad $du=dz$ un

$$v = \int\frac{z\,dz}{(z^2+1)^r} = \left| \begin{array}{l} z^2+1=w \\ 2z\,dz = dw \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int\frac{dw}{w^r} = \frac{1}{2}\frac{w^{-r+1}}{-r+1} = \frac{1}{2(1-r)(z^2+1)^{r-1}}$$

$$* = I_{r-1} - \left(\frac{z}{2(1-r)(z^2+1)^{r-1}} - \frac{1}{2(1-r)}\int\frac{dz}{(z^2+1)^{r-1}}\right) =$$

$$= \frac{z}{2(r-1)(z^2+1)^{r-1}} + \left(1-\frac{1}{2(r-1)}\right)I_{r-1} = \frac{z}{2(r-1)(z^2+1)^{r-1}} + \frac{2r-3}{2(r-1)}I_{r-1}.$$

Esam ieguvuši **redukcijas formulu**, ar kuras palīdzību var atrast IV tipa elementārdaļu integrāļus:

$$\int\frac{dz}{(z^2+1)^r} = \frac{z}{2(r-1)(z^2+1)^{r-1}} + \frac{2r-3}{2(r-1)}\int\frac{dz}{(z^2+1)^{r-1}}.$$

15.5. Piemērs. $\int \frac{4x-3}{(4x^2+8x+9)^2}dx = \int \frac{4x-3}{((2x+2)^2+5)^2}dx = *$

$2x+2=t$, $2\,dx = dt$, $dx = \frac{1}{2}dt$, $x = \frac{t-2}{2}$

$* = \frac{1}{2}\int \frac{4\frac{t-2}{2}-3}{(t^2+5)^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t-7}{(t^2+5)^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t\,dt}{(t^2+5)^2} - \frac{7}{2}\int \frac{dt}{(t^2+5)^2}.$

Pirmajā integrālī lietojam substitūciju $t^2+5=z$, $2t\,dt = dz$, tad
$\frac{1}{2}\int \frac{2t\,dt}{(t^2+5)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{2}\frac{z^{-1}}{-1} + C_0 = \frac{-1}{2(t^2+5)} + C_0 = \frac{-1}{2(4x^2+8x+9)} + C_0.$

Otro integrāli pārveidojam tā, lai varētu lietot redukcijas formulu:

$$-\frac{7}{2}\int \frac{dt}{(t^2+5)^2} = -\frac{7}{50}\int \frac{dt}{((\frac{t}{\sqrt{5}})^2+1)^2} = \left| \begin{array}{c} \frac{t}{\sqrt{5}} = z \\ dt = \sqrt{5}\,dz \end{array} \right| = -\frac{7\sqrt{5}}{50}\int \frac{dz}{(z^2+1)^2} =$$

$$= -\frac{7\sqrt{5}}{50}\left(\frac{z}{2(z^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2+1}\right) = -\frac{7\sqrt{5}}{50}\frac{t}{2\sqrt{5}(\frac{t^2}{5}+1)} - \frac{7\sqrt{5}}{100}\operatorname{arctg} z + C_1 =$$

$$= -\frac{7t}{20(t^2+5)} - \frac{7\sqrt{5}}{100}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}} + C_1 = \frac{-7(2x+2)}{20(4x^2+8x+9)} - \frac{7\sqrt{5}}{100}\operatorname{arctg}\frac{2x+2}{\sqrt{5}} + C_1 =$$

$$= \frac{-7(x+1)}{10(4x^2+8x+9)} - \frac{7\sqrt{5}}{100}\operatorname{arctg}\frac{2(x+1)}{\sqrt{5}} + C_1.$$

Rezultātā esam ieguvuši, ka

$$\int \frac{4x-3}{(4x^2+8x+9)^2}dx = \frac{-1}{2(4x^2+8x+9)} - \frac{7(x+1)}{10(4x^2+8x+9)} - \frac{7\sqrt{5}}{100}\operatorname{arctg}\frac{2(x+1)}{\sqrt{5}} + C =$$

$$= \frac{-7x-12}{10(4x^2+8x+9)} - \frac{7\sqrt{5}}{100}\operatorname{arctg}\frac{2(x+1)}{\sqrt{5}} + C. \blacksquare$$

Dažu iracionālu funkciju integrēšana

Daudzas iracionālas izteiksmes var integrēt, pārveidojot zemintegrāļa funkciju. Metodes būtība it tāda, ka jāatrod tāda substitūcija, kas "iracionālu" integrāli pārvērš par "racionālu". Šajā paragrāfā mēs apskatīsim tikai dažus iracionālu funkciju integrāļus.

Apzīmēsim ar $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funkciju, kura ir mainīgo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ racionāla funkcija. Piemēram, $\frac{x^3+\sqrt{x}}{x+\sqrt{(1+x^2)^3}} = R(x, \sqrt{x}, \sqrt{1+x^2})$.

Lai integrētu

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_n}\right) dx,$$

kur $n \in \mathbb{N}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$ un $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{Q}$, ieteicams lietot substitūciju

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m,$$

kur m ir racionālo skaitļu $p_1, p_2, \ldots, p_n$ kopīgais saucējs.

15.6. Piemērs. $\int \frac{9+\sqrt[5]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^3}}dx$ — šī integrāļa zemintegrāļa funkcija ir racionāla funkcija attiecībā pret mainīgajiem x, $\sqrt{x}$ un $\sqrt[5]{x}$ ($a = d = 1$, $b = c = 0$). Kopīgais saucējs ir 10, tāpēc jālieto substitūcija $x = t^{10}$, $dx = 10t^9\,dt$. Savietojot iegūsim racionālas funkcijas integrāli:

$$\int \frac{9+\sqrt[5]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^3}}dx = \int \frac{9+t^2}{t^5+t^6}10t^9\,dt = 10\int \frac{(9+t^2)t^9}{t^5(1+t)}dt = 10\int \frac{t^6+9t^4}{1+t}dt = *$$

$(t^6+9t^4):(t+1) = t^5 - t^4 + 10t^3 - 10t^2 + 10t - 10$, atlikumā 10, tāpēc

$$* = 10\int (t^5 - t^4 + 10t^3 - 10t^2 + 10t - 10 + \tfrac{10}{1+t})dt =$$

$$= 10(\tfrac{t^6}{6} - \tfrac{t^5}{5} + 10\tfrac{t^4}{4} - 10\tfrac{t^3}{3} + 10\tfrac{t^2}{2} - 10t + 10\ln|1+t|) + C =$$

$$= \tfrac{5}{3}x^{\frac{3}{5}} - 2x^{\frac{1}{2}} + 25x^{\frac{2}{5}} - \tfrac{100}{3}x^{\frac{3}{10}} + 50x^{\frac{1}{5}} - 100x^{\frac{1}{10}} + 100\ln(1 + x^{\frac{1}{10}}) + C. \blacksquare$$

Integrāļa

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx, \quad a \neq 0, \quad b^2 - 4ac \neq 0,$$

gadījumā atrisinājumu var iegūt ar kādu no tā saucamajām **Eilera substitūcijām**, proti, kvadrātsakne $\sqrt{ax^2+bx+c}$ tiek apzīmēta ar kādu no izteiksmēm (+ vai − pēc brīvas izvēles):

$$\begin{aligned} &\pm\sqrt{ax} \pm t,\ a > 0;\\ &\pm xt \pm \sqrt{c},\ c > 0,\\ &\pm(x - x_1)t;\\ &\pm(x - x_2)t, \end{aligned}$$

kur x_1, x_2 ir vienādojuma $ax^2 + bx + c$ reālas saknes.

15.7. Piemērs. $\int \frac{1-\sqrt{1+x+4x^2}}{x\sqrt{1+x+4x^2}}dx = *$

Tā kā vienādojumam $4x^2 + x + 1 = 0$ reālu sakņu nav, tad varam lietot kādu no substitūcijām $\pm 2\sqrt{x} \pm t$ vai $\pm xt \pm 1$. Mēs apzīmēsim

$$\begin{aligned} &\sqrt{4x^2+x+1} = tx + 1;\ \text{izteiksim } x,\\ &4x^2 + x + 1 = t^2x^2 + 2tx + 1 \mid : x,\ (x \neq 0),\\ &4x + 1 = t^2x + 2t,\\ &x(4 - t^2) = 2t - 1,\\ &x = \tfrac{2t-1}{4-t^2}. \end{aligned}$$

Atradīsim diferenciāļus $dx = d\left(\frac{2t-1}{4-t^2}\right) = \frac{2(t^2-t+4)}{(4-t^2)^2}dt.$

Izteiksim arī $t = \frac{\sqrt{1+x+4x^2}-1}{x}$ un ievērosim, ka

$\sqrt{1+x+4x^2} = tx + 1 = t \cdot \frac{2t-1}{4-t^2} + 1 = \frac{2t^2-t+4-t^2}{4-t^2} = \frac{t^2-t+4}{4-t^2}.$

$$* = \int \frac{1-\frac{t^2-t+4}{4-t^2}}{\frac{2t-1}{4-t^2}\,\frac{t^2-t+4}{4-t^2}}\,\frac{2(t^2-t+4)}{(4-t^2)^2}dt = 2\int \frac{4-t^2-t^2+t-4}{(4-t^2)(2t-1)}dt = 2\int \frac{t(1-2t)}{(4-t^2)(2t-1)}dt =$$

$$= -2\int \frac{t\,dt}{4-t^2} = \left| \begin{array}{c} 4-t^2=u \\ -2t\,dt = du \end{array} \right| = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|4-t^2| + C =$$

$$= \ln\left|4 - \left(\frac{\sqrt{1+x+4x^2}-1}{x}\right)^2\right| + C = \ln\left|\frac{4x^2-(1+x+4x^2-2\sqrt{1+x+4x^2}+1)}{x^2}\right| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{2\sqrt{1+x+4x^2}-x-2}{x^2}\right| + C. \blacksquare$$

Eilera substitūcijas daudzos gadījumos noved pie darbietilpīgiem algebriskiem pārveidojumiem, tāpēc, ja tas iespējams, izmanto citas substitūcijas. Speciālgadījumā, ja jānointegrē

a) $\int R(x; \sqrt{a^2-x^2})\,dx,\ a>0,$

b) $\int R(x; \sqrt{a^2+x^2})\,dx,\ a>0,$

c) $\int R(x; \sqrt{x^2-a^2})\,dx,\ a>0,$

tad var lietot substitūcijas:

a) $x = a\sin t,\ -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2},\ t = \arcsin\frac{x}{a}$, tad $dx = a\cos t\,dt$,
$a^2 - x^2 = a^2 - a^2\sin^2 t = a^2(1-\sin^2 t) = a^2\cos^2 t,\ \sqrt{a^2-x^2} = a\cos t$;

b) $x = a\,\mathrm{sh}\,t$, kur $\mathrm{sh}\,t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ — hiperboliskais sinuss, tad
$dx = a\,\mathrm{sh}'t\,dt = a\,\mathrm{ch}\,t\,dt$;
$a^2 + x^2 = a^2 + a^2\mathrm{sh}^2 t = a^2(1+\mathrm{sh}^2 t) = a^2\mathrm{ch}^2 t,\ \sqrt{x^2+a^2} = a\,\mathrm{ch}\,t$;
tā kā $x = a\,\mathrm{sh}\,t = \frac{a}{2}(e^t - e^{-t})$, tad $\frac{2x}{a} = e^t - e^{-t}$ — pareizināsim abas vienādības puses ar e^t un iegūsim kvadrātvienādojumu attiecībā pret mainīgo e^t: $(e^t)^2 - \frac{2x}{a}e^t - 1 = 0$. Šim vienādojumam ir divas saknes $\frac{x}{a} + \sqrt{(\frac{x}{a})^2+1}$ un $\frac{x}{a} - \sqrt{(\frac{x}{a})^2+1}$, tā kā $e^t > 0$, tad der tikai pirmā sakne, tāpēc $e^t = \frac{x}{a} + \sqrt{(\frac{x}{a})^2+1}$, logaritmējot iegūsim, ka
$t = \ln e^t = \ln(\frac{x}{a} + \sqrt{(\frac{x}{a})^2+1}) = \ln\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) - \ln a$;

c) ja $x > 0$, tad $x = a\,\mathrm{ch}\,t,\ t \ge 0$, kur $\mathrm{ch}\,t = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$ — hiperboliskais kosinuss, tad $dx = a\,\mathrm{ch}'t\,dt = a\,\mathrm{sh}\,t\,dt$;
$x^2 - a^2 = a^2\mathrm{ch}^2 t - a^2 = a^2(\mathrm{ch}^2 t - 1) = a^2\mathrm{sh}^2 t,\ \sqrt{x^2-a^2} = a\,\mathrm{sh}\,t$;
tā kā $x = a\,\mathrm{ch}\,t = \frac{a}{2}(e^t + e^{-t})$, tad $\frac{2x}{a} = e^t + e^{-t}$ — pareizinot abas vienādības puses ar e^t, iegūsim kvadrātvienādojumu: $(e^t)^2 - \frac{2x}{a}e^t + 1 = 0$. Šim vienādojumam ir divas saknes $\frac{x}{a} + \sqrt{(\frac{x}{a})^2-1}$ un $\frac{x}{a} - \sqrt{(\frac{x}{a})^2-1}$. Par atrisinājumu neder otrā sakne, jo
$e^t = \frac{x}{a} - \sqrt{(\frac{x}{a})^2-1} = \mathrm{ch}t - \sqrt{\mathrm{ch}^2 t - 1} = \mathrm{ch}t - \mathrm{sh}t =$
$= \frac{e^t+e^{-t}}{2} - \frac{e^t-e^{-t}}{2} = e^{-t}$— iegūta pretruna.
Bet par atrisinājumu der pirmā sakne

$$e^t = \frac{x}{a} + \sqrt{(\frac{x}{a})^2 - 1},$$

logaritmējot iegūsim, ka

$t = \ln(\frac{x}{a} + \sqrt{(\frac{x}{a})^2 - 1}) = \ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a} = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) - \ln a.$

Gadījumā, ja $x < 0$, tad $x = -a\,\mathrm{ch}\,t$, $t \geq 0$, $dx = -a\,\mathrm{sh}\,t\,dt$, $\sqrt{x^2 - a^2} = a\,\mathrm{sh}\,t$;

tā kā $x = -a\,\mathrm{ch}\,t = -\frac{a}{2}(e^t + e^{-t})$, tad $(e^t)^2 + \frac{2x}{a}e^t + 1 = 0$. Šim vienādojumam ir saknes $-\frac{x}{a} - \sqrt{(\frac{x}{a})^2 - 1}$ un $-\frac{x}{a} + \sqrt{(\frac{x}{a})^2 - 1}$. Līdzīgi kā iepriekš tieši pārbaudot var secināt, ka par vienādojuma atrisinājumu der otrā sakne, t.i.,

$$e^t = -\frac{x}{a} + \sqrt{(\frac{x}{a})^2 - 1},$$

logaritmējot iegūsim, ka

$t = \ln(-\frac{x}{a} + \sqrt{(\frac{x}{a})^2 - 1}) = \ln\frac{-x+\sqrt{x^2-a^2}}{a} = \ln(\sqrt{x^2 - a^2} - x) - \ln a.$

15.8. Piemēri. 1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = *$

$x = a\,\mathrm{sh}\,t$, $dx = a\,\mathrm{ch}\,t\,dt$, $\sqrt{x^2 + a^2} = a\,\mathrm{ch}\,t$, $t = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \ln a$

$$* = \int \frac{a\,\mathrm{ch}\,t\,dt}{a\,\mathrm{ch}\,t} = \int dt = t + C_0 = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \ln a + C_0 =$$

$= \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C.$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = *$

$x = a\sin t$, $dx = a\cos t\,dt$, $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t$, $t = \arcsin\frac{x}{a}$

$* = \int \frac{a\cos t\,dt}{a\cos t} = \int dt = t + C = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

Bet šo integrāli var atrast arī ar lineāras substitūcijas palīdzību, atceroties, ka $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$, proti,

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} = \frac{1}{a} \cdot a \cdot \arcsin\frac{x}{a} + C = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$

Iespējami divi gadījumi:

1) $x > 0$, tad $x = a\,\mathrm{ch}\,t$, $dx = a\,\mathrm{sh}\,t\,dt$, $\sqrt{x^2 - a^2} = a\,\mathrm{sh}\,t$, $t = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) - \ln a$ un

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{a\,\mathrm{sh}\,t\,dt}{a\,\mathrm{sh}\,t} = \int dt = t + C_0 = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) - \ln a + C_0 =$$

$= \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C.$

2) $x < 0$, tad $x = -a\,\mathrm{ch}\,t$, $dx = -a\,\mathrm{sh}\,t\,dt$, $\sqrt{x^2 - a^2} = a\,\mathrm{sh}\,t$, $t = \ln(\sqrt{x^2 - a^2} - x) - \ln a$ un

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{-a\,\mathrm{sh}\,t\,dt}{a\,\mathrm{sh}\,t} = -\int dt = -t + C_0 =$$

$= -\ln(\sqrt{x^2 - a^2} - x) + \ln a + C_0 = \ln\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}-x} + C_1 = \ln\frac{\sqrt{x^2-a^2}+x}{x^2-a^2-x^2} + C_1 =$

$= \ln(-\sqrt{x^2-a^2}-x) - \ln a^2 + C_1 = \ln(-\sqrt{x^2-a^2}-x) + C.$

Apvienojot abus gadījumus kopā, iegūsim

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C,\ |x| > |a|.$ ■

Līdz ar to pamatintegrāļu tabulu papildināsim ar trim nenoteiktajiem integrāļiem, kuri būs nepieciešami tālākajā izklāstā,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C,$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C.$$

Eilera substitūcijas nelietosim, piemēram, integrālī

$$\int \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

kur $P_n(x)$ ir polinoms ar augstāku pakāpi kā 0. Šādu integrāli var risināt ar **nenoteikto koeficientu metodi**, proti, ir spēkā vienādība

$$\int \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad (15.2)$$

kur $Q_{n-1}(x)$ ir $(n-1)$-kārtas polinoms ar pagaidām nezināmiem reāliem koeficientiem un λ ir pagaidām nezināms reāls skaitlis. Vienādības (15.2) abas puses atvasina un pareizina ar $\sqrt{ax^2+bx+c}$, rezultātā iegūst polinomu vienādību, no kuras var atrast skaitli λ un polinoma $Q_{n-1}(x)$ koeficientus. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ var integrēt, izdarot atbilstošus pārveidojumus, pēc vienas no trim iepriekš izceltajām formulām.

Integrāli

$$\int P_n(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$$

var pareizināt un izdalīt ar $\sqrt{a^2+bx+c}$, rezultātā iegūstot tikko aprakstīto integrāli.

15.9. Piemērs.

$\int \frac{24x^3+4x^2-34x-29}{\sqrt{4x^2+12x+13}}dx = (Ax^2+Bx+C)\sqrt{4x^2+12x+13} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+12x+13}}$

Atvasinām abas vienādības puses, ņemot vērā, ka $(\int f(x)\,dx)' = f(x)$:

$$\frac{24x^3+4x^2-34x-29}{\sqrt{4x^2+12x+13}}=$$
$$=(2Ax+B)\sqrt{4x^2+12x+13}+(Ax^2+Bx+C)\frac{4x+6}{\sqrt{4x^2+12x+13}}+\frac{\lambda}{\sqrt{4x^2+12x+13}}.$$

Pareizinām abas vienādības puses ar $\sqrt{4x^2+12x+13}$:

$$\begin{aligned}&24x^3+4x^2-34x-29=\\&\quad=(2Ax+B)(4x^2+12x+13)+(Ax^2+Bx+C)(4x+6)+\lambda=\\&\quad=12Ax^3+(30A+8B)x^2+(26A+18B+4C)x+(13B+6C+\lambda).\end{aligned}$$

Lai polinomi būtu vienādi, tad atbilstošajiem koeficientiem pie vienādajām pakāpēm ir jābūt vienādiem, tā rezultātā iegūsim vienādojumu sistēmu:

$$\left.\begin{array}{ll}x^3: & 12A=24,\\ x^2: & 30A+8B=4,\\ x^1: & 26A+18B+4C=-34,\\ x^0: & 13B+6C+\lambda=-29.\end{array}\right\}$$

No vienādojumu sistēmas atradīsim, ka

$$A=2,\ B=-7,\ C=10 \text{ un } \lambda=2.$$

Esam ieguvuši, ka

$$\int\frac{24x^3+4x^2-34x-29}{\sqrt{4x^2+12x+13}}dx=(2x^2-7x+10)\sqrt{4x^2+12x+13}+2\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+12x+13}}.$$

Tā kā $4x^2+12x+13=(2x+3)^2+4$, tad

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+12x+3}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(2x+3)^2+4}}=\left|\begin{array}{c}2x+3=u\\2dx=du\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u^2+4}}=$$
$$=\frac{1}{2}\ln(u+\sqrt{u^2+4})+C_0=\frac{1}{2}\ln(2x+3+\sqrt{4x^2+12x+13})+C_0.$$

Gala rezultātā

$$\int\frac{24x^3+4x^2-34x-29}{\sqrt{4x^2+12x+13}}dx=$$
$$=(2x^2-7x+10)\sqrt{4x^2+12x+13}+\ln(2x+3+\sqrt{4x^2+12x+13})+C_0. \blacksquare$$

Integrāļus formā

$$\int x^m(ax^n+b)^p dx$$

sauc par **diferencējamā binoma** integrāļiem, $a,b\in\mathbb{R}$, $m,n,p\in\mathbb{Q}$, un a,b,n,p nav 0. Atkarībā no m,n un p vērtībām lieto substitūcijas:

a) ja p ir vesels skaitlis, tad $x=t^k$, kur k ir daļu m un n kopīgais saucējs;

b) ja $\frac{m+1}{n}$ ir vesels skaitlis, tad $ax^n+b=t^s$, kur s ir daļas p saucējs;

c) ja $\frac{m+1}{n}+p$ ir vesels skaitlis, tad $a+bx^{-n}=t^s$, kur s ir daļas p saucējs;

d) ja nav spēkā neviens no iepriekš minētajiem trim gadījumiem, tad integrāli nevar izteikt kā elementāru funkciju kompozīciju (to apgalvo Čebiševa teorēma).

15.10. Piemērs. $\int \frac{x^7}{\sqrt[4]{1+x^4}}dx = \int x^7(1+x^4)^{-\frac{1}{4}}dx = *$
$m=7$, $n=4$, $p=-\frac{1}{4}$: a) $p \notin \mathbb{Z}$, b) $\frac{m+1}{n} = \frac{7+1}{4} = 2 \in \mathbb{Z}$, tāpēc lietojam substitūciju $1+x^4 = t^4$, tad $x = (t^4-1)^{\frac{1}{4}}$ un $dx = t^3(t^4-1)^{-\frac{3}{4}}dt$, kā arī $t = (1+x^4)^{\frac{1}{4}}$
$* = \int (t^4-1)^{\frac{7}{4}}t^{-1}t^3(t^4-1)^{-\frac{3}{4}}dt = \int t^2(t^4-1)dt = \int (t^6-t^2)dt =$
$= \frac{t^7}{7} - \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{7}(1+x^4)^{\frac{7}{4}} - \frac{1}{3}(1+x^4)^{\frac{3}{4}} + C = \frac{1}{7}(1+x^4)^{\frac{3}{4}}(x^4-\frac{4}{3}) + C.$ ■

Nobeidzot šo paragrāfu, atzīmēsim, ka integrāli formā

$$\int R(x, \sqrt{P_n(x)})\,dx$$

vispārīgā gadījumā nevar izteikt kā elementāru funkciju kompozīciju, ja $P_n(x)$ ir polinoms ar augstāku pakāpi nekā 2.

Trigonometrisko funkciju integrēšana

Kombinējot substitūcijas metodi ar trigonometrisko funkciju identitātēm, iespējams integrēt plašu trigonometrisko funkciju saimi. Mēs apskatīsim biežāk lietojamās substitūcijas un atbilstošos trigonometriskos pārveidojumus.

Ar $R(u,v)$ apzīmēsim racionālu funkciju ar argumentiem u un v. Integrāļus formā

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$$

ir iespējams vienmēr pārveidot par integrāļiem no racionālas funkcijas, lietojot **universālo trigonometrisko substitūciju**

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \quad x \in]-\pi;\pi[.$$

Lietojot šo substitūciju, $\sin x$ un $\cos x$ tiek aizvietoti ar šādām izteiksmēm:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cos^2\frac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} =$$

$$= 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \cos^2\frac{x}{2} =$$

$$= (1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2})\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Sakarību starp diferenciāļiem atradīsim, ievērojot, ka

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \text{ jeb } x = 2\operatorname{arctg} t, \text{ tāpēc } dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Tādējādi

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

15.11. Piemērs. $\int \frac{dx}{\sin x - 2\cos x + 2} = \int \frac{2\,dt}{(1+t^2)\left(\frac{2t}{1+t^2} - \frac{2-2t^2}{1+t^2} + 2\right)} =$

$= \int \frac{2\,dt}{(1+t^2)\frac{2t-2+2t^2+2+2t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2\,dt}{4t^2+2t} = \int \frac{dt}{2t^2+t} = \int \frac{dt}{t(2t+1)} = *$

$\frac{A}{t} + \frac{B}{2t+1} = \frac{2At+A+Bt}{t(2t+1)} = \frac{1}{t(2t+1)} \Rightarrow$

$$\begin{cases} 2A + B = 0, \\ A = 1. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = 1, \\ B = -2A = -2. \end{cases}$$

$* = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{2t+1}\right) dt = \ln|t| - \frac{2}{2}\ln|2t+1| + C = \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}\right| + C.$ ■

Universālā trigonometriskā substitūcija bieži vien rada smagus algebriskus pārveidojumus, tāpēc to lieto tikai tajos gadījumos, kad nevar izmantot kādu citu vienkāršāku substitūciju. Piemēram, ja zemintegrāļa funkcija ir ar īpašībām

1) $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, tad apzīmē $\cos x = t$, $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$;

2) $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, tad apzīmē $\sin x = t$, $x \in]0; \pi[$;

3) $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, tad apzīmē $\operatorname{tg} x = t$, $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

Apskatīsim atbilstošus piemērus, kā izmantojamas šīs substitūcijas.

15.12. Piemēri. 1. $\int \frac{dx}{\sin x(1+\cos x)} = *$

Tā kā $R(-\sin x, \cos x) = \frac{1}{-\sin x(1+\cos x)} = -\frac{1}{\sin x(1+\cos x)} =$

$= -R(\sin x, \cos x)$, tad lietojam substitūciju $\cos x = t$, $-\sin x\,dx = dt$.

$* = -\int \frac{-\sin x\,dx}{\sin^2 x(1+\cos x)} = -\int \frac{-\sin x\,dx}{(1-\cos^2 x)(1+\cos x)} = -\int \frac{dt}{(1-t^2)(1+t)} =$

$= -\int \frac{dt}{(1-t)(1+t)^2} = **$

$\frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} + \frac{C}{(1+t)^2} = \frac{A+2At+At^2+B-Bt^2+C-Ct}{(1-t)(1+t)^2} = \frac{1}{(1-t)(1+t)^2},$

iegūsim sistēmu $\begin{cases} A - B = 0, \\ 2A - C = 0, \\ A + B + C = 1, \end{cases}$ saskaitot visus trīs vienādojumus kopā, iegūsim, ka $4A = 1$, tātad $A = \frac{1}{4}$, $B = A = \frac{1}{4}$, $C = 2A = \frac{1}{2}$.

$** = -\int\left(\frac{1}{4(1-t)} + \frac{1}{4(1+t)} + \frac{1}{2(1+t)^2}\right)dt =$

$= -\frac{1}{4}\ln|1-t| - \frac{1}{4}\ln|1+t| + \frac{1}{2}\frac{1}{1+t} + C = -\frac{1}{4}\ln|1-t^2| + \frac{1}{2(1+t)} + C =$

$= -\frac{1}{4}\ln(1-\cos^2 x) + \frac{1}{2(1+\cos x)} + C = -\frac{1}{4}\ln(\sin^2 x) + \frac{1}{2(1+\cos x)} + C.$

2. $\int \frac{2\sin x + 5\cos x}{\sin^2 x\cos x + 9\cos^3 x}dx = *$

Tā kā $R(-\sin x, -\cos x) = \frac{-2\sin x - 5\cos x}{\sin^2 x(-\cos x) - 9\cos^3 x} = \frac{2\sin x + 5\cos x}{\sin^2 x\cos x + 9\cos^3 x} =$

$= R(\sin x, \cos x)$, tad lietojam substitūciju $\operatorname{tg} x = t$, $\frac{1}{\cos^2 x}dx = dt$.

$* = \int \frac{\cos x(2\operatorname{tg} x + 5)}{\cos^3 x(\operatorname{tg}^2 x + 9)}dx = \int \frac{2\operatorname{tg} x + 5}{\operatorname{tg}^2 x + 9}\frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{2t+5}{t^2+9}dt =$

$= \int \frac{2t}{t^2+9}dt + \int \frac{5}{t^2+9}dt = **$

Pirmajā integrālī varam lietot substitūciju $t^2 + 9 = u$, tad $2t\,dt = du$.

$** = \int \frac{du}{u} + \frac{5}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3} = \ln|u| + \frac{5}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3} + C =$

$= \ln(t^2+9) + \frac{5}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3} + C = \ln(\operatorname{tg}^2 x + 9) + \frac{5}{3}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{3} + C.$ ■

Ja speciālgadījumā jāatrod integrālis

$$\int \sin^m x\cos^n x\,dx, \quad m, n \in \mathbb{Z},$$

tad atkarībā no m un n vērtībām rīkojas šādi:

1) ja m ir nepāra skaitlis, tad apzīmē $\cos x = t$;

2) ja n ir nepāra skaitlis, tad apzīmē $\sin x = t$;

3) ja m un n ir pāra skaitļi, bet vismaz viens no tiem ir negatīvs, tad apzīmē $\operatorname{tg} x = t$;

4) ja m un n ir pozitīvi pāra skaitļi, tad pāriet uz divkāršā leņķa trigonometriskajām funkcijām

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},\ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},\ \sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

un rīkojas atbilstoši situācijai.

15.13. Piemēri. 1. $\int \frac{dx}{\sin x\cos^2 x} = *$

Tā kā $m = -1$ un $n = 2$, tad $\cos x = t$, $-\sin x\,dx = dt$.

$* = -\int \frac{-\sin x\,dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = -\int \frac{-\sin x\,dx}{(1-\cos^2 x)\cos^2 x} = -\int \frac{dt}{(1-t^2)t^2} =$

$= -\int \frac{dt}{(1-t)(1+t)t^2} = **$

$\frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} + \frac{C}{t} + \frac{D}{t^2} = \frac{A(1+t)t^2 + B(1-t)t^2 + C(1-t^2)t + D(1-t^2)}{(1-t^2)t^2} =$

$$= \frac{At^2+At^3+Bt^2-Bt^3+Ct-Ct^3+D-Dt^2}{(1-t^2)t^2} = \frac{1}{(1-t^2)t^2};$$

$$\begin{cases} A-B-C=0, \\ A+B-D=0, \\ C=0, \\ D=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A-B=0, \\ A+B=1, \\ C=0, \\ D=1, \end{cases} \Rightarrow A=\tfrac{1}{2},\ B=\tfrac{1}{2},\ C=0,\ D=1.$$

$$** = -\int \left(\frac{1}{2(1-t)} + \frac{1}{2(1+t)} + \frac{1}{t^2}\right) dt = \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln|t+1| + \frac{1}{t} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right| + \frac{1}{\cos x} + C = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{\cos x+1} + \frac{1}{\cos x} + C.$$

2. $\int \sin^2 x\cos^6 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3 dx =$

$$= \frac{1}{16}\int (1-\cos^2 2x)(1+\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{16}\int \sin^2 2x(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int (\sin^2 2x + 2\sin^2 2x\cos 2x + \sin^2 2x\cos^2 2x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int \left(\tfrac{1}{2}(1-\cos 4x) + 2\sin^2 2x\cos 2x + (\tfrac{1}{2}\sin 4x)^2\right) dx = *$$

$$\begin{array}{c} \sin 2x = t \\ 2\cos 2x\,dx = dt \end{array}$$

$$* = \frac{1}{32}\int (1-\cos 4x)\,dx + \frac{1}{16}\int t^2\,dt + \frac{1}{64}\int \frac{1-\cos 8x}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{32}(x - \tfrac{1}{4}\sin 4x) + \frac{1}{16}\frac{\sin^3 2x}{3} + \frac{1}{128}(x - \tfrac{1}{8}\sin 8x) + C =$$

$$= \frac{1}{48}\sin^3 2x - \frac{1}{128}\sin 4x - \frac{1}{1024}\sin 8x + \frac{5}{128}x + C. \blacksquare$$

Dažos gadījumos, kad jāintegrē trigonometrisko funkciju $\sin x$ un $\cos x$ reizinājums, var izlīdzēties ar trigonometriskajām identitātēm:

$$\sin\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)),$$
$$\sin\alpha\sin\beta = -\tfrac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)),$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)).$$

15.14. Piemērs. $\int \sin 2x\cos(4x+5)\,dx =$

$$= \tfrac{1}{2}\int (\sin(2x+4x+5) + \sin(2x-4x-5))\,dx =$$
$$= \tfrac{1}{2}\int (\sin(6x+5) - \sin(2x+5))\,dx =$$
$$= \tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{6}\cos(6x+5) + \tfrac{1}{2}\cos(2x+5)) + C =$$
$$= \tfrac{1}{4}\cos(2x+5) - \tfrac{1}{12}\cos(6x+5) + C. \blacksquare$$

Jāatzīmē, ka ne jebkurš integrālis no elementāras funkcijas integrējot ir izsakāms ar elementāru funkciju. Piemēram, tā sauktie **Freneļa integrāļi** $\int \sin x^2\,dx$ un $\int \cos x^2\,dx$, kā arī $\int \frac{\sin x}{x}dx$ neizsakās kā elementāru funkciju kompozīcija. Integrāli $\int \frac{\sin x}{x}dx$ sauc par **integrālo sinusu** un apzīmē ar $Si(x)$.

15.15. Piemērs. Izteiksim ar integrālo sinusu un elementārajām funkcijām integrāli $\int \frac{\sin^3 x}{x} dx$.

$\int \frac{\sin^3 x}{x} dx = \int \frac{\sin x}{x} \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \int \frac{\sin x - \sin x \cos 2x}{2x} dx =$

$= \int \frac{\sin x - \frac{1}{2}(\sin 3x + \sin(-x))}{2x} dx = \int \frac{2\sin x - \sin 3x + \sin x}{4x} dx =$

$= \frac{1}{4} \int \frac{3\sin x - \sin 3x}{x} dx = \frac{1}{4} \int \left(\frac{3\sin x}{x} - \frac{3\sin 3x}{3x} \right) dx =$

$= \frac{3}{4} Si(x) - \frac{3}{4} \int \frac{\sin 3x}{3x} \frac{d(3x)}{3} = \frac{3}{4} Si(x) - \frac{1}{4} Si(3x) + C.$ ■

16. nodaļa

NEĪSTIE INTEGRĀĻI

Definējot noteikto integrāli $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, mēs pieņēmām, ka $[a;b]$ ir galīgs intervāls. Noteiktais integrālis šķietami zaudē jēgu, ja integrācijas intervāls ir bezgalīgs vai arī ja integrējamajai funkcijai ir otrā veida pārtraukuma punkti integrējamības intervālā. Taču dažkārt iespējams noteiktā integrāļa jēdzienu attiecināt arī uz šiem gadījumiem.

Izšķir triju veidu neīstos integrāļus:

1.veida: viena vai abas integrācijas robežas ir bezgalības;

2.veida: zemintegrāļa funkcijai integrācijas intervālā ir galīgs skaits tādu otrā veida pārtraukuma punktu, kuros eksistē bezgalīgas vienpusējās robežas;

3.veida: vienlaikus gan 1. veida, gan 2. veida.

Pirmā veida neīstie integrāļi

Tātad vispirms tuvāk iepazīsimies ar pirmā veida neīstajiem integrāļiem, kuriem integrācijas intervāla vismaz viens galapunkts nav ierobežots. Tādā gadījumā

16.1. DEFINĪCIJA. Par funkcijas f **pirmā veida neīsto integrāli** intervālā $]-\infty;b]$ vai $[a;+\infty[$ sauc robežu no integrāļa $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, kad $a \to -\infty$ vai $b \to +\infty$, t.i.,

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Ja labās puses robežas eksistē un tās ir galīgas, tad saka, ka atbilstošais neīstais integrālis **konverģē** un ir vienāds ar šo robežu. Pretējā gadījumā saka, ka neīstais integrālis **diverģē**.

16.2. Piemērs. $\int\limits_{-\infty}^{-1} x^2 e^{-x^3} dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{-1} x^2 e^{-x^3} dx =$

$$\left| \begin{array}{ll} -x^3 = t & a \le x \le -1 \\ -3x^2\,dx = dt & -a^3 \le t \le 1 \\ x^2 dx = -\frac{1}{3}\,dt & \end{array} \right| = \lim_{a\to-\infty} (-\tfrac{1}{3}) \int\limits_{-a^3}^{1} e^t\,dt = -\tfrac{1}{3} \lim_{a\to-\infty} e^t\Big|_{-a^3}^{1} =$$

$= -\frac{1}{3} \lim\limits_{a\to-\infty} (e^1 - e^{-a^3}) = -\frac{1}{3}(e - (+\infty)) = +\infty$ — integrālis diverģē. ■

16.3. DEFINĪCIJA. Ja abi neīstie integrāļi

$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \text{ un } \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx,\ a \in \mathbb{R}$$

konverģē, tad saka, ka **konverģē** arī $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ un tas ir vienāds ar abu augstāk minēto integrāļu summu. Pretējā gadījumā $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ **diverģē**.

16.4. Piemērs. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ — apskata atsevišķi neīstos integrāļus $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2}$ un $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ (parasti a izvēlas vienādu ar 0):

$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{a\to-\infty} \operatorname{arctg} x\big|_a^0 = \operatorname{arctg} 0 - \lim\limits_{a\to-\infty} \operatorname{arctg} a =$
$= 0 - (-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$,

$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} x\big|_0^b = \lim\limits_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0 =$
$= \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$.

Tātad $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ — integrālis konverģē. ■

Varbūtību teorijā nozīmīgu lomu spēlē normālā sadalījuma varbūtību blīvuma funkcija $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Nav viegli parādīt, ka

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi},$$

ko sauc par Puasona integrāli. Izmantojot varbūtību integrāli, var pierādīt, ka augstāk minētās varbūtību blīvuma funkcijas matemātiskā cerība ir 0 un dispersija ir 1, t.i., $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx = 0$ un $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 1$.

Pieņemsim, ka līkne $y = \frac{1}{x}$, kas definēta intervālā $[1;+\infty[$, rotē ap x-asi, izveidojot tā saucamo **Gabriela tauri**. Tad var parādīt, ka šīs taures tilpums V ir galīgs lielums:

$$V = \pi\int\limits_1^{+\infty} f^2(x)\,dx = \pi\int\limits_1^{+\infty} (\tfrac{1}{x})^2\,dx = \pi\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b x^{-2}\,dx = \pi\lim_{b\to+\infty}\left(-\tfrac{1}{x}\right)\Big|_1^b =$$

$$= -\pi\lim_{b\to+\infty}(\tfrac{1}{b}-1) = \pi \text{ (t.v.)},$$

bet taures virsmas laukums L ir bezgalīgs:

$$L = 2\pi\int\limits_1^{+\infty} f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx = 2\pi\int\limits_1^{+\infty}\tfrac{1}{x}\sqrt{1+(-\tfrac{1}{x^2})^2}dx =$$

$= 2\pi\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}dx = 2\pi\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}dx$ — iegūtais ir diferencējamā binoma integrālis [c)gadījums, 15.nodaļa], taču neīstā integrāļa vērtību mēs novērtēsim no apakšas, pašu integrāli precīzi neskaitļojot.

Tā kā $x > 1$, tad $\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3} > \frac{\sqrt{x^4}}{x^3} = \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x}$, tāpēc

$$\int\limits_1^b\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}dx > \int\limits_1^b\frac{1}{x}dx = \ln|x|\,\Big|_1^b = \ln b - \ln 1 = \ln b.$$

Un tātad $L = 2\pi\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}dx > 2\pi\lim\limits_{b\to+\infty}\ln b = +\infty$.

Kā šo paradoksu izskaidrot, atstājam lasītāja ziņā.

Vispārīgā gadījumā varam apskatīt neīstos integrāļus $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ un secināt: ja $p \neq 1$, tad

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b x^{-p}dx = \lim_{b\to+\infty}\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{b^{p-1}}-1\right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-p}, & p > 1 \text{ (konverģē)}, \\ +\infty, & p < 1 \text{ (diverģē)}. \end{cases}$$

Ja $p = 1$, arī tad integrālis diverģē (skatīt augstāk par Gabriela tauri).

Otrā veida neīstie integrāļi

16.5. DEFINĪCIJA. Ja funkcija f ir pārtraukta intervāla $[a;b]$ galapunktā b un $\lim\limits_{x\to b^-}|f(x)| = +\infty$, tad par funkcijas f **otrā veida neīsto integrāli** intervālā $[a;b]$ sauc robežu no integrāļa $\int\limits_a^t f(x)\,dx$, kad $t \to b^-$, t.i.,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int\limits_a^t f(x)\,dx.$$

Ja labās puses robeža eksistē un tā ir galīga, tad saka, ka integrālis **konverģē** , pretējā gadījumā — **diverģē**. Analoģiski tiek definēts otrā veida neīstais integrālis, ja pārtraukuma punkts ir a un $\lim\limits_{x\to a^+}|f(x)| = +\infty$.

16.6. Piemērs. $\int\limits_0^1 \frac{3}{x-1}dx = \lim\limits_{b\to 1^-}\int\limits_0^b \frac{3}{x-1}dx = \lim\limits_{b\to 1^-} 3\ln|x-1|\Big|_0^b =$
$= 3\lim\limits_{b\to 1^-}(\ln|b-1| - \ln 1) = -\infty$ — integrālis diverģē.

Pēc analoģijas: $\int\limits_1^2 \frac{3}{x-1}dx = \lim\limits_{a\to 1^+}\int\limits_a^2 \frac{3}{x-1}dx = \lim\limits_{a\to 1^+} 3\ln|x-1|\Big|_a^2 =$
$= 3\lim\limits_{a\to 1^+}(\ln 1 - \ln|a-1|) = +\infty$ — integrālis diverģē. ■

Pieņemsim, ka funkcija f ir nepārtraukta kopā $[a;b]\setminus\{c\}$, kur $c \in]a;b[$, un $\lim\limits_{x\to c}|f(x)| = +\infty$.

16.7. DEFINĪCIJA. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$ — ja abi labās puses integrāļi konverģē, tad **konverģē** arī dotais un tas ir vienāds ar labās puses integrāļu summu; ja kāds no labās puses integrāļiem diverģē, tad **diverģē** arī dotais integrālis.

16.8. Piemērs. $\int\limits_1^7 \frac{dx}{(x-3)^2} = \int\limits_1^3 \frac{dx}{(x-3)^2} + \int\limits_3^7 \frac{dx}{(x-3)^2}$.
Tālāk apskatīsim atsevišķi labās puses neīstos integrāļus:
$\int\limits_1^3 \frac{dx}{(x-3)^2} = \lim\limits_{b\to 3^-} \frac{-1}{x-3}\Big|_1^b = \lim\limits_{b\to 3^-} \frac{1}{3-b} - \frac{1}{2} = +\infty$ — integrālis diverģē, tāpēc otru labās puses neīsto integrāli apskatīt nav vajadzīgs.

Secinām, ka $\int\limits_1^7 \frac{dx}{(x-3)^2}$ ir diverģents neīstais integrālis. ■

Interesi izraisa integrālis $\int\limits_0^b \frac{1}{x^p}dx$, kur $b > 0$ ir konstante. Ja $p = 1$, tad

$$\int_0^b \frac{1}{x}dx = \lim_{t\to 0^+} \ln|x|\Big|_t^b = \lim_{t\to 0^+}(\ln b - \ln t) = +\infty \text{ — integrālis diverģē.}$$

Ja $p \neq 1$, tad $\int\limits_0^b \frac{1}{x^p}dx = \lim\limits_{t\to 0^+} \int\limits_t^b x^{-p}dx = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_t^b =$

$$= \frac{1}{1-p} \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{b^{p-1}} - \frac{1}{t^{p-1}}\right) = \begin{cases} \frac{1}{(1-p)b^{p-1}}, & p < 1 \text{ (konverģē)}, \\ +\infty, & p > 1 \text{ (diverģē)}. \end{cases}$$

Integrāļus $\int\limits_0^b \frac{1}{x^p}dx$ un $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx$ bieži izmanto, lai ar salīdzināšanas palīdzību (līdzīgi, kā Gabriela taures virsmas laukuma aprēķināšanas gadījumā) noteiktu neīsto integrāļu konverģenci vai diverģenci. Svarīgs šis jautājums kļūst gadījumā, ja mēs neīstos integāļus skaitļojam ar datora palīdzību. Proti, ja mēs, iepriekš nezinot, ka integrālis diverģē, liekam izskaitļot šī integrāļa vērtību datoram, tad praktiski pareizu atbildi nedabūsim — dators izdos kaut kādu skaitlisku atbildi, kura mums ļaus kļūdaini secināt, ka integrālis konverģē.

Trešā veida neīstie integrāļi

Trešā veida neīstie integrāļi sevī ietver iepriekš aprakstītos pirmo divu veidu integrāļus, tāpēc to aprēķināšana notiek pēc augstāk minētajām definīcijām. Vispirms doto integrāli sadala vairākos integrāļos tā, lai katrs no tiem būtu tikai viens no iepriekš aplūkotajiem neīsto integrāļu veidiem.

16.9. Piemērs. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x}dx = \int\limits_0^1 \frac{\ln x}{x}dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}dx.$

Ievērosim, ka $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\cdot \ln x = -\infty$, tātad patiešām dotais integrālis var tikt sadalīts divos dažāda veida neīstajos integrāļos. Integrācijas intervāla iekšējos punktos pārtraukuma punktu dotajai funkcijai nav.

Apskatīsim pirmo neīsto integrāli (otrā veida):

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x}dx = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{\ln x}{x}dx = \left| \begin{array}{ll} \ln x = t & a \le x \le 1 \\ \frac{1}{x}dx = dt & \ln a \le t \le 0 \end{array} \right| = \lim_{a\to 0^+}\int_{\ln a}^0 t\,dt =$$

$$= \lim_{a\to 0^+} \frac{t^2}{2}\Big|_{\ln a}^0 = \lim_{a\to 0^+}\left(0 - \tfrac{1}{2}\ln^2 a\right) = -\infty \text{ — šis otrā veida neīstais integrālis}$$

diverģē. Neatkarīgi no tā, kā uzvedas integrālis $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}dx$, dotais integrālis diverģē. ■

Salīdzināšana

Iepriekš pieminējām, ka neīsto integrāļu konverģences konstatēšana ir nepieciešama tad, ja vēlamies iegūt integrāļa skaitlisko vērtību ar datora palīdzību. Neīstā integrāļa konverģenci vai diverģenci bieži vien var noskaidrot ar salīdzināšanas teorēmu palīdzību. Tās dažkārt spēs atbildi dot arī gadījumā, ja zemintegrāļa funkcijai primitīvo funkciju nevar atrast vai varbūt tāda pat neeksistē.

16.10. TEORĒMA. Pieņemsim, ka dotas divas nepārtrauktas funkcijas $f(x)$ un $g(x)$ intervālā $[a;\alpha[$, kur $\alpha \in \mathbb{R}$ un $\lim\limits_{x\to\alpha^+} |f(x)| = \lim\limits_{x\to\alpha^+} |g(x)| = +\infty$ vai arī $\alpha = +\infty$, un visiem $x \in [a;\alpha[$: $0 \le f(x) \le g(x)$ Tādā gadījumā:

1) ja $\int\limits_a^\alpha g(x)\,dx$ konverģē, tad konverģē arī $\int\limits_a^\alpha f(x)\,dx$;

2) ja $\int\limits_a^\alpha f(x)\,dx$ diverģē, tad diverģē arī $\int\limits_a^\alpha g(x)\,dx$.

16.11. SEKAS. Ja funkcijas $f(x) \ge 0$ un $g(x) > 0$ intervālā $[a;\alpha[$ un $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, $x \in [a;\alpha[$, tad

1) ja $0 \le k < +\infty$ un $\int\limits_a^\alpha g(x)\,dx$ konverģē, tad konverģē arī $\int\limits_a^\alpha f(x)\,dx$;

2) ja $0 < k \le +\infty$ un $\int\limits_a^\alpha g(x)\,dx$ diverģē, tad diverģē arī $\int\limits_a^\alpha f(x)\,dx$.

16.12. TEORĒMA. Ja neīstais integrālis $\int\limits_a^\alpha |f(x)|\,dx$ konverģē un $\forall b \in]a;\alpha[$ eksistē $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, tad konverģē arī $\int\limits_a^\alpha f(x)\,dx$, kur $\alpha \in \mathbb{R}$ un $\lim\limits_{x\to\alpha^+} |f(x)| = +\infty$ vai arī $\alpha = +\infty$.

16.13. DEFINICIJA. Ja $\forall b \in]a;\alpha[$ eksistē $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ un konverģē neīstais integrālis $\int\limits_a^\alpha |f(x)|\,dx$, tad saka, ka integrālis $\int\limits_a^\alpha f(x)\,dx$ **konverģē absolūti**.

Salīdzināšanu izdara ar tādiem neīstajiem integrāļiem, kuru uzvedība ir zināma.

Bieži izmanto iepriekšējos paragrāfos apskatītos integrāļus:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \text{konverģē}, & p > 1, \\ \text{diverģē}, & p \le 1, \end{cases}$$

$$\int\limits_0^{b} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \text{konverģē}, & p < 1, \\ \text{diverģē}, & p \ge 1. \end{cases}$$

Minētā pirmā neīstā integrāļa uzvedība neizmainīsies, ja integrācijas robežas 1 vietā dota cita robeža $a > 0$ vai ja zemintegrāļa funkcijas $\frac{1}{x^p}$ vietā dota funkcija $\frac{1}{(x-k)^p}$, kur k tāda konstante, lai intervālā visiem $x \in [a; +\infty[$ būtu $x - k \neq 0$. Savukārt minētajā otrajā neīstajā integrālī integrācijas robežas 0 vietā var būt arī cits skaitlis a, ja vien zemintegrāļa funkcija tad ir $\frac{1}{(x-a)^p}$. Tātad

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{(x-k)^p} = \begin{cases} \text{konverģē}, & p > 1, \\ \text{diverģē}, & p \le 1, \end{cases} \quad a > 0,\ k \notin [a; +\infty[,$$

$$\int\limits_a^{b} \frac{dx}{(x-a)^p} = \begin{cases} \text{konverģē}, & p < 1, \\ \text{diverģē}, & p \ge 1. \end{cases}$$

Iesakām lasītājam pašam pārliecināties, ka patiešām šīs integrāciju robežu un zemintegrāļa funkciju izmaiņas neietekmē integrāļu uzvedību!

16.14. Piemērs. 1. Neīsto integrāli $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos^2 3x}{\sqrt{1+x^4}} dx$ var salīdzināt ar konverģentu integrāli $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$, jo $0 \le \frac{\cos^2 3x}{\sqrt{1+x^4}} \le \frac{1}{x^2}$, tāpēc dotais integrālis arī konverģē.

2. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x\sqrt{x}} dx$ — šis integrālis ir tikai pirmā veida integrālis, jo

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sin^2 x}{x\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0+} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\sin x} = 1 \cdot 0 = 0 \neq \infty.$$

Tā kā ir spēkā nevienādības $0 \le \frac{\sin^2 x}{x\sqrt{x}} \le \frac{1}{x\sqrt{x}}$, tad dotais neīstais integrālis konverģē, jo $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$ konverģē un $\int\limits_0^{1} \frac{\sin^2 x}{x\sqrt{x}} dx$ ir konstants lielums.

3. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^2} dx$ ir otrā veida neīstais integrālis, jo

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{x^2} = \lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{x} = +\infty.$$

Varam salīdzināt ar $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{x^2}$ — diverģentu neīsto integrāli. Ir spēkā nevienādības $0 \leq \frac{\sin x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$, $x \in]0;\pi]$, taču diverģences pamatošanai tās neder, tāpat 17.11.sekas arī nav lietojamas, jo $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x \cdot x^2}{x^2 \cdot 1} = 0$. Bet tā kā

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x \cdot x}{x^2 \cdot 1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

tad varam salīdzināt ar $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{x}$ — arī diverģentu neīsto integrāli — un secināt, ka dotais integrālis diverģē.

4. Neīstā integrāļa $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\ln x}$ zemintegrāļa funkcija nav definēta integrācijas apakšējai robežai 0, bet $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0$, savukārt $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{\ln x} = -\infty$, tātad šis integrālis ir otrā veida neīstais integrālis. Ievērosim, ka zemintegrāļa funkcija intervālā $]0;1[$ ir negatīva, tāpēc, lai lietotu salīdzināšanas teorēmu, apskatīsim integrāli $-\int\limits_0^1 \left(-\frac{dx}{\ln x}\right) = \int\limits_1^0 \left(-\frac{dx}{\ln x}\right)$. Salīdzināsim doto integrāli ar $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x-1} = -\int\limits_1^0 \frac{dx}{x-1}$, kurš diverģē. Tā kā

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1\cdot(x-1)}{\ln x \cdot 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1\cdot x}{1} = 1 \in]0;+\infty[,$$

tad arī dotais integrālis diverģē.

5. $\int\limits_e^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+\ln x}dx$ — skaitītājs var būt gan pozitīvs, gan negatīvs, tāpēc apskatīsim $\int\limits_e^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2+\ln x}dx$. Tā kā $0 \leq \frac{|\sin x|}{x^2+\ln x} \leq \frac{1}{x^2}$, $x \in [e;+\infty[$, un $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ konverģē, tad $\int\limits_e^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+\ln x}dx$ konverģē absolūti (tātad konverģē). ■

17. nodaļa

RINDAS

Lai pārvarētu ar integrēšanu saistītās grūtības, Ņūtons un Leibnics zemintegrāļa funkciju izteica kā polinomu ar bezgalīgu locekļu skaitu. Pielietojot tādām izteiksmēm parastās algebras kārtulas, 18.gs. matemātiķi veica daudzus ievērojamus atklājumus. Tomēr izrādījās, ka, pielietojot bezgalīgām summām algebras kārtulas bez ierobežojumiem, var pieļaut arī kļūdas. Kļuva nepieciešams precīzi formulēt bezgalīgu rindu pamatjēdzienus un stingri pierādīt to īpašības. Šajā un arī nākamajā nodaļā mēs iepazīstināsim lasītāju ar svarīgākajiem rezultātiem rindu teorijā.

Virknes

17.1. DEFINĪCIJA. Visur definētu funkciju $f : \mathbb{N} \to A$ sauc par kopas A elementu **virkni**. Ja kopas $\mathbb{N}$ lomā ir kāda galīga skaitļu kopas $\mathbb{N}$ apakškopa $\{k, k+1, \ldots, k+n\}$, tad visur definēto funkciju $f : \{k, k+1, \ldots, k+n\} \to A$ sauc par kopas A elementu **galīgu virkni**. Ja A lomā ir reālo skaitļu kopa $\mathbb{R}$ vai arī komplekso skaitļu kopa $\mathbb{C}$, tad šādas virknes sauc par **skaitļu virknēm**. Mūs galvenokārt interesēs reālo skaitļu virknes.

Matemātiķi mīl vismaz divas svētas lietas. Pirmkārt, mēs vēlamies būt ļoti precīzi, otrkārt, katru lietu mēs cenšamies gan pateikt, gan pierakstīt pēc iespējas īsāk. Tipisks piemērs ir gadījums ar jēdzienu "virkne". It kā viss būtu ļoti precīzi, bet nav taču ērti katru reizi lietot trijnieka pierakstu $f = (\mathbb{N}, A, V)$. Vai to visu var pasniegt daudz pārskatāmāk? Izrādās var.

Virknes f pierakstā var aprobežoties ar tās grafiku V. Tālāk — virknes V pierakstāmas izskatā $V = \{(n, a_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. (Mēs jau virknes f grafiku V saucam par virkni: īsti precīzi tas nav, toties ērti, un pārpratumi arī nerodas.) Atmetīsim figūriekavas un virkni V pierakstīsim šādi $(1, a_1), (2, a_2), \ldots, (n, a_n), \ldots$ Mēs varam iet tālāk un virknes pierakstā atmest pāru pirmos elementus. Tā mēs nonākam pie pieraksta $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

Tagad mēs uzskatāmi redzam, no kurienes radies termins "virkne". Elementi taču ir sarindoti viens aiz otra virknē. Iesim vēl tālāk un lietosim šādu pierakstu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, līdz visbeidzot atmetam paskaidrojošo pierakstu $n \in \mathbb{N}$. Skaidrs tāpat no virknes definīcijas, ka $n \in \mathbb{N}$. Līdz ar to virkni f iespējams pierakstīt izteikti kompakti, proti, $f = (a_n)$.

Te nu gan jābrīdina lasītājs. Mēs ieguvām izteikti īsu pierakstu, tomēr šis tas mums jāpatur prātā. Ja mēs visu atceramies, tad varam lietot īsu pierakstu. Ja esam aizmāršas, tad — neko darīt — jāraksta garāk.

17.2. DEFINĪCIJA. Virknes $\{(n, a_n) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ elementu (n, a_n) sauc par virknes n-to **locekli** (entais loceklis) jeb **vispārīgo locekli**. Elementu a_n sauc par n-tā locekļa **vērtību**.

Parasti tomēr tik stingri neievēro šo terminoloģiju, un saka:

— Virknes n-tais loceklis ir a_n, — ar to saprotot virknes n-tā locekļa vērtību.

Līdz ar to terminu "virknes n-tais loceklis" mēdz lietot divās nozīmēs, pārsvarā gan ar to saprotot n-tā locekļa vērtību. Arī mēs turpmāk tā darīsim.

Praksē virknes (a_n) elementus pieraksta tā, lai lasītājs varētu nepārprotami nosaukt visus virknes elementus, tāpēc cenšas uzrādīt pietiekoši daudzus virknes locekļus vai uzrāda virknes n-to locekli kā funkciju ar argumentu n, vai arī norāda rekursīvo formulu.

Piemēram,

$$\begin{array}{ll} & 1, 4, 7, 10, 13, \ldots \\ \text{vai} & a_n = 3n - 2, \quad n \geq 1, \\ \text{vai} & a_n = a_{n-1} + 3, \quad n \geq 2,\ a_1 = 1. \end{array}$$

Ievērojiet, ka iepriekš minētie piemēri ilustrē vienu un to pašu virkni.

Apskatīsim vēl četras virknes:

$$\begin{array}{llll} 1) & a_n = 1 - \frac{1}{n},\ n \geq 1, & \text{jeb} & 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots \\ 2) & b_n = 1 + (-1)^n \frac{1}{n},\ n \geq 1, & \text{jeb} & 0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{6}, \frac{6}{7}, \ldots \\ 3) & c_n = (-1)^n + \frac{1}{n},\ n \geq 1, & \text{jeb} & 0, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{7}{6}, -\frac{6}{7}, \ldots \\ 4) & d_n = 0,999;\ n \geq 1, & \text{jeb} & 0,999;\ 0,999;\ 0,999; \ldots \end{array}$$

Šīs virknes satur elementus, kuri ir tuvu skaitlim 1. Vai šīs virknes tiecas (*konverģē*) uz 1? Korekta atbilde ir tāda, ka pirmās divas konverģē, bet pēdējās divas nekonverģē. Virknes konverģences jēdziens šeit tiek minēts līdzīgā nozīmē kā funkcijas robeža, kad arguments tiecas uz pluss bezgalību.

Tā kā naturāls arguments var tiekties tikai uz pluss (un nevis mīnuss) bezgalību, tad turpmākajā pierakstā lietosim apzīmējumu $n \to \infty$ (nevis $n \to +\infty$).

17.3. DEFINĪCIJA. Skaitli a sauc par **virknes** (a_n) **robežu** (vai arī **virkne** (a_n) **konverģē** uz skaitli a), ja katram pozitīvam skaitlim ε eksistē tāds pozitīvs skaitlis δ, ka visiem virknes (a_n) elementiem a_n izpildās nosacījums:

$$\text{ja} \quad n > \delta, \quad \text{tad} \quad a_n \in \mathfrak{U}(a, \varepsilon).$$

Simboliski tas izskatās šādi: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

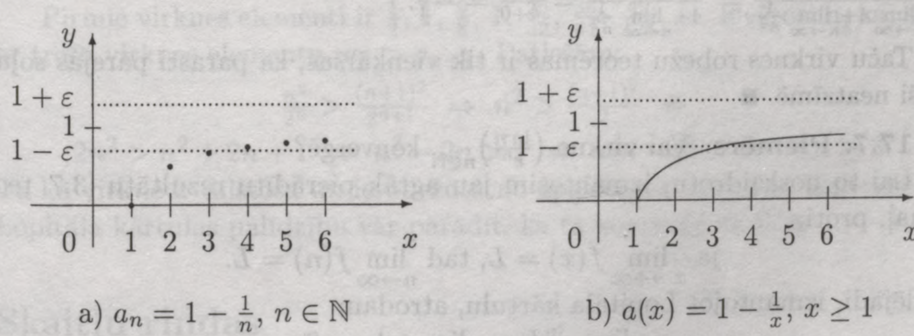
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall n \in \mathbb{N} \, [\, n > \delta \Rightarrow a_n \in \mathfrak{U}(a, \varepsilon) \,].$$

Apkārtņu vietā var lietot arī nevienādības, tad robežas definīcija iegūst šādu izskatu: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall n \in \mathbb{N} \, [\, n > \delta \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon \,].$$

Tādu virkni sauc par **konverģentu**. Virkni, kurai neeksistē galīga robeža, sauc par **diverģentu** virkni. Saka, ka šāda virkne **diverģē**.

Lai ieraudzītu atšķirību starp funkcijas robežas jēdzienu un virknes konverģences jēdzienu, aplūkosim funkciju $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, un $a(x) = 1 - \frac{1}{x}$, $x \geq 1$, grafikus 17.1. zīmējumā.



a) $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ b) $a(x) = 1 - \frac{1}{x}$, $x \geq 1$

17.1. zīm.

Vienīgā atšķirība ir tā, ka virknes gadījumā funkcijas definīcijas apgabals ir naturālie skaitļi. Pirmajā gadījumā mēs pierakstīsim $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, otrajā — $\lim\limits_{x\to+\infty} a(x) = 1$.

17.4. Piemērs. Pierādīsim, ka $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$, ja $p > 0$.

Tā kā mēs esam jau iepazinušies ar funkcijas robežām, tad šīs robežas eksistence un robežvērtība 0 nekādu pārsteigumu nerada. Taču vispārīgā gadījumā funkcijas robežas jēdziens atšķiras no virknes robežas jēdziena.

Izvēlēsimies patvaļīgu $\varepsilon > 0$. Izvēlēsimies δ lielāku par $\varepsilon^{-\frac{1}{p}}$. Tad visiem $n \in \mathbb{N}$, $n > \delta$, izpildīsies

$|a_n - a| = |\frac{1}{n^p} - 0| = \frac{1}{n^p} < \frac{1}{\delta^p} < \frac{1}{\left(\varepsilon^{-\frac{1}{p}}\right)^p} = \varepsilon.$ ■

Arī robežu teorēmas konverģentām virknēm ir tādas pašas kā funkcijām, kurām eksistē robežas. Tāpēc formulēsim šīs teorēmas bez pierādījuma.

17.5. TEORĒMA. Pieņemsim, ka $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ir konveģentas virknes un k ir konstante. Tad:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} k = k$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} k\,a_n = k \lim\limits_{n\to\infty} a_n$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;
4. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, ja vien $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

17.6. Piemērs. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-3n^2}{4n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}-3}{4+\frac{1}{n^2}} \overset{5.t}{=} \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}-3)}{\lim\limits_{n\to\infty}(4+\frac{1}{n^2})} \overset{3.t}{=}$

$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} 3}{\lim\limits_{n\to\infty} 4 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} \overset{1.t}{=} \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}-3}{4+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} = \frac{0-3}{4+0} = -\frac{3}{4}.$

Taču virknes robežu teorēmas ir tik vienkāršas, ka parasti pārejas soļus īpaši neatzīmē. ■

17.7. Piemērs. Vai virkne $\left(\frac{\ln n}{e^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konverģē?

Lai to noskaidrotu, izmantosim jau agrāk pierādītu rezultātu [3.7. teorēma], proti,

$$\text{ja } \lim_{x\to+\infty} f(x) = L, \text{ tad } \lim_{n\to\infty} f(n) = L.$$

Tādējādi, izmantojot Lopitāla kārtulu, atrodam

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{xe^x} = 0,$$

tāpēc virkne $\left(\frac{\ln n}{e^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konverģē uz 0. ■

Virkņu konverģences noteikšanā var palīdzēt arī šāda teorēma (robežpārejas nevienādībās 3.18. teorēmas speciālgadījums).

17.8. TOERĒMA. Pieņemsim, ka virknes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konverģē uz skaitli L un ka $a_n \leq b_n \leq c_n$ visiem $n \geq K$ (kur K ir fiksēts naturāls skaitlis). Tad arī virkne $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konverģē uz L.

17.9. Piemērs. Parādīsim, ka virkne $\left(\frac{\sin^5 n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konverģē uz 0.

Ja $n \geq 1$, tad $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin^5 n}{n} \leq \frac{1}{n}$. Tā kā $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = 0$ un $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, tad piemērā minētā virkne pēc iepriekš formulētās teorēmas konverģē uz 0. ∎

17.10. TEORĒMA. Ja $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = 0$, tad $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

□ Tā kā $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$, tad teorēmas apgalvojums seko no 17.8. teorēmas. ∎

Apskatīsim patvaļīgu **nedilstošu (neaugošu)** virkni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, t.i., tādu, ka $a_n \leq a_{n+1}$ $(a_n \geq a_{n+1})$ visiem n, $n \geq K$, kur K ir fiksēts naturāls skaitlis. Nedilstošas virknes, piemēram, ir virknes, kuru n-tie locekļi ir $a_n = n^2$ vai $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, bet neaugošas virknes, piemēram, ir $b_n = -n^2$ vai $b_n = 1 + \frac{1}{n}$. Abos gadījumos pirmās virknes ir diverģentas, bet otrās — konverģentas. Vispārīgā gadījumā ir lietojama sekojoša teorēma.

17.11. TEORĒMA (monotono virkņu teorēma). Ja nedilstoša (neaugoša) virkne $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ir no augšas (no apakšas) ierobežota ar skaitli B, tad šī virkne konverģē uz skaitli A, kur $A \leq B$ $(A \geq B)$.

Ar jēdzienu **monotona** virkne tiek apzīmēta tāda virkne, kura ir vai nu neaugoša vai nedilstoša.

17.12. Piemērs. Parādīsim, ka virkne $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{n^2}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konverģē, izmantojot 17.11. teorēmu.

Pirmie virknes elementi ir $\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}, \frac{36}{64}, \frac{49}{128}, \ldots$. Ievērosim, ka, sākot ar trešo virknes elementu, $a_n > a_{n+1}$. Patiešām:

$$\frac{n^2}{2^n} > \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \Rightarrow n^2 > \frac{(n+1)^2}{2} \Rightarrow$$

$$2n^2 > n^2 + 2n + 1 \Rightarrow n^2 - 2n > 1 \Rightarrow n(n-2) > 1, \quad \forall n \geq 3.$$

Tā kā virkne ir dilstoša un ierobežota no apakšas ar 0, tad tā konverģē. Ar Lopitāla kārtulas palīdzību var parādīt, ka tā konverģē uz 0. ∎

Skaitļu rindas

17.13. DEFINĪCIJA. Virkņu pāri $((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (u_n)_{n\in\mathbb{N}})$, kur $\forall n\; u_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, sauc par **skaitļu rindu** un lieto pierakstu $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ jeb $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Virknes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ locekļus sauc par **rindas locekļiem**, bet a_n sauc par rindas **n-to** jeb **vispārīgo locekli**. Savukārt virknes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ locekļus sauc par rindas n **locekļu parciālsummām**, bet u_n — par **n-to parciālsummu**.

17.14. DEFINĪCIJA. Rindu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} r_k$, kur $\forall k \; r_k = a_{n+k}$, sauc par rindas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***n*-to atlikumu** un lieto pierakstu

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots .$$

Piemēram, ja dota rinda

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{2^n},$$

tad var izveidot sekojošas parciālsummas:

$u_1 = \frac{1}{2}$,

$u_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$,

$u_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$,

....

$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$.

Šīs rindas n-tais atlikums ir

$$R_n = \tfrac{1}{2^{n+1}} + \tfrac{1}{2^{n+2}} + \dots = \tfrac{1}{2^n}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \dots\right).$$

Rindu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ sauc par **bezgalīgas ģeometriskās progresijas rindu** vai īsāk par **ģeometrisko progresiju**. Ģeometriskās progresijas pirmo n locekļu summa ir vienāda ar

$$u_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1},$$

kur a_1 ir pirmais rindas loceklis, bet q ir kvocients. Apskatāmajā piemērā

$$u_n = \frac{\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \tfrac{1}{2^n}.$$

Ievērosim, ka $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1 - 0 = 1$. Tā ir būtiska šīs konkrētās rindas īpašība, jo ne katras rindas parciālsummu virknei eksistē galīga robeža. Mēs teiksim

17.15. DEFINĪCIJA. Ja parciālsummu virknei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eksistē galīga robeža u, tad rindu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sauc par **konverģentu** un saka, ka rindas summa ir u, t.i., $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = u$. Ja parciālsummu virknei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ neeksistē galīga robeža, tad rindu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sauc par **diverģentu**.

Tātad rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ ir konverģenta un $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$.

17.16. APGALVOJUMS. Ģeometriskā progresija $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} =$ $= a + aq + aq^2 + \ldots \quad (a \neq 0)$ konverģē, ja kvocients $|q| < 1$, bet diverģē, ja $|q| \geq 1$.

□ Patiešām, ja $q = 1$, tad $u_n = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{n \text{ saskaitāmie}} = na$ un

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} na = \infty$ — tātad rinda diverģē.

Kā jau iepriekš atzīmējām, ģeometriskās progresijas pirmo n locekļu summa aprēķināma pēc formulas $u_n = \frac{a(q^n-1)}{q-1}$, tāpēc

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a(q^n-1)}{q-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{aq^n}{q-1} - \frac{a}{q-1} = \frac{a}{q-1}\left(\lim\limits_{n\to\infty} q^n - 1\right)$ —

šī robeža eksistē, ja $|q| < 1$ un ir vienāda ar $\frac{a}{1-q}$; ja turpretī $|q| > 1$, tad robeža $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$; ja $q = -1$, tad robeža neeksistē. ■

Ģeometriskās progresijas vispārīgais loceklis ir $a_n = aq^{n-1}$. No iepriekš aprakstītā izriet, ka ģeometriskā progresija konverģē tad un tikai tad, ja $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Vai šis nosacījums ir spēkā visām konverģentām rindām? Atbilde ir noliedzoša, bet puse no apgalvojuma ir patiesa.

17.17. TEORĒMA (konverģences nepieciešamais un diverģences pietiekamais nosacījums). Ja rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverģē, tad $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Ja $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ (arī tad, ja šī robeža neeksistē), tad rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverģē.

□ Pieņemsim, ka rindas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ n locekļu parciālsumma ir u_n un $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$. Tā kā $a_n = u_n - u_{n-1}$, tad

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} u_n - \lim_{n\to\infty} u_{n-1} = u - u = 0. \blacksquare$$

17.18. Piemērs. Rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3n^4+n}$ diverģē, jo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{3n^4+n} = \frac{1}{3} \neq 0. \blacksquare$$

Konverģences nepieciešamais nosacījums nav pietiekams, t.i., rinda, kuras vispārīgā locekļa robeža ir 0, var arī diverģēt. Klasisks piemērs šai situācijai ir **harmoniskā rinda**

$$\sum_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ — konverģences nepieciešamais nosacījums ir spēkā, bet harmoniskā rinda diverģē, jo parciālsummu virkne $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ir neierobežota. Patiešām, fiksētam n:

$$u_n = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \dots + \tfrac{1}{n} =$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{1}{9} + \dots + \tfrac{1}{16}\right) + \dots + \tfrac{1}{n} >$$

$$> 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{4} + \tfrac{4}{8} + \tfrac{8}{16} + \dots + \tfrac{1}{n} = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \dots + \tfrac{1}{n}.$$

Redzam, ka izvēloties n pietiekoši lielu, mēs varam pēdējā summā saskaitāmo $\frac{1}{2}$ skaitu iegūt tik lielu, cik vēlamies, t.i., $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$.

17.19. TEORĒMA. Ja rindas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ un $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ir konverģentas un c ir konstante, tad konverģentas rindas ir arī $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c\,a_n$ un $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, turklāt

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c\,a_n = c\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$,

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

□ No dotā seko, ka robežas $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ un $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ eksistē. Izmantojot galīgu summu un virkņu robežu īpašības, būs spēkā vienādības

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c\,a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} c\,a_k = \lim\limits_{n\to\infty} c \sum\limits_{k=1}^{n} a_k =$

$= c \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = c \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$,

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k\right) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k + \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} b_k = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. ■

17.20. TEORĒMA. Ja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverģē un $c \neq 0$, tad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c\,a_n$ arī diverģē.

□ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c\,a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} c\,a_k = c \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ — tā kā pēdējā robeža neeksistē, tad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c\,a_n$ diverģē. ■

Ja divas rindas diverģē, tad to summa var būt gan konverģenta rinda (piemēram, ja $a_n = -b_n$), gan diverģenta rinda (piemēram, $a_n = b_n$).

17.21. TEORĒMA (grupēšana). Ja konverģentas rindas locekļi tiek sagrupēti patvaļīgi, tad jauniegūtā rinda konverģē uz to pašu summu kā sākotnējā rinda.

□ Pieņemsim, ka dota rinda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ un $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ir tās parciālsummu virkne. Ja $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ ir rinda, kura iegūta, sagrupējot rindas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ locekļus, un kuras parciālsummu virkne ir $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$, tad jebkuram s_m, $m \in \mathbb{N}$, atradīsies tāds u_n, $n \in \mathbb{N}$, ka $s_m = u_n$. Piemēram, ja

$$s_4 = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + (a_6 + a_7),$$

tad $s_4 = u_7$. Tas nozīmē, ka $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ir $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ apakšvirkne. Savukārt tas nozīmē, ja $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$, tad arī $\lim\limits_{m\to\infty} s_m = u$. ■

Ja mūsu rīcībā ir konverģenta rinda un mēs atmetam galīgu skaitu rindas pirmo locekļu, tad iegūsim joprojām konverģentu rindu. To garantē nākamā teorēma.

17.22. TEORĒMA. Rinda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverģē tad un tikai tad, ja konverģē jebkurš tās atlikums.

□ Atgādināsim, ka rindas konverģence nozīmē rindas parciālsummu virknes konverģenci. Tāpēc lietosim sekojošus apzīmējumus:

$u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ — rindas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ n-tā parciālsumma;

$r_{ml} = \sum\limits_{k=1}^{l} a_{m+k}$ — m-tā atlikuma $\sum\limits_{k=m+1}^{\infty} a_k$ $l-$tā parciālsumma.

Fiksēsim patvaļīgu $m \in \mathbb{N}$. Tad visiem n, kuriem $n > m$, izpildās vienādība

$$u_n = u_m + r_{ml}, \text{ kur } m + l = n.$$

Liekot $n \to +\infty$, arī $l \to +\infty$, un otrādi. Ja rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverģē, tad eksistē $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. No robežu teorēmām seko, ka tad eksistē arī $\lim\limits_{l\to+\infty} r_{ml}$, — tātad m-tais atlikums konverģē. Un otrādi, ja eksistē $\lim\limits_{l\to+\infty} r_{ml}$, tad arī eksistē $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, kas nozīmē rindas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverģenci. ■

Nenegatīvas skaitļu rindas

17.23. DEFINĪCIJA. Rindu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sauc par **nenegatīvu skaitļu**

rindu (saka arī — pozitīvu skaitļu rinda), ja $\forall n\ a_n \geq 0$.

No iepriekš sacītā seko, ka par doto rindu svarīgi ir noskaidrot:
1) vai tā konverģē vai diverģē un
2) ja tā konverģē, tad kāda ir tās summa.
Uz pirmo jautājumu ir vieglāk atbildēt; vispārīgā gadījumā patvaļīgai rindai dažkārt ir grūti pateikt, vai tās summa ir lielāka par nulli, vai taisni otrādi — tās summa ir negatīva. Tāpēc tagad apskatīsim nenegatīvu skaitļu rindas. Noskaidrosim dažus testus, ar kuru palīdzību var noteikt, vai nenegatīvu skaitļu rinda konverģē vai diverģē.

17.24. TEORĒMA (ierobežoto summu tests jeb Veierštrāsa teorēma). Nenegatīvo skaitļu rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverģē tad un tikai tad, ja tās parciālsummu virkne ir ierobežota no augšas.

□ Pieņemsim, ka $u_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Tā kā $a_n \geq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, tad $u_{n+1} \geq u_n$, t.i., virkne $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ir nedilstoša. Pēc 17.11. teorēmas virkne $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konverģēs tad, ja eksistēs tāds skaitlis u, ka $u_n \leq u$ visiem $n = 1, 2, \ldots$ Ja šāds skaitlis neeksistē ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nav ierobežota), tad virkne $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverģē. ■

17.25. Piemērs. Parādīsim, ka rinda $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konverģē.

Mūsu mērķis ir parādīt, ka parciālsummas ir ierobežotas no augšas. Vispirms ievērosim, ka
$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \geq 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^{n-1}$$
un tāpēc $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. Tādējādi
$$u_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} =$$
$$= \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{1 \cdot ((\frac{1}{2})^n - 1)}{\frac{1}{2} - 1} = 2(1 - (\tfrac{1}{2})^n) < 2.$$
Pēc pēdējās teorēmas seko, ka rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konverģē. ■

17.26. TEORĒMA (salīdzināšanas tests). Pieņemsim, ka dotas divas rindas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ un $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, kuru locekļi apmierina nevienādības $0 \leq a_n \leq b_n$ jebkuram n, $n \geq N$. Tad:
a) ja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverģē, tad konverģē arī $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$;
b) ja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverģē, tad diverģē arī $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

□ Mēs pieņemsim, ka $N = 1$ (gadījums $N > 1$ ir līdzīgs). Lai pierādītu a), pieņemsim, ka $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Ja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverģē, piemēram, uz B, tad $S_n \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_n \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$, un pēc ierobežoto summu testa seko, ka $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverģē.

Otrs apgalvojums b) seko no pirmā a), proti, ja pieņemtu pretējo, ka $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverģē, tad arī rindai $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ būtu jākonverģē, taču dots, ka $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — diverģē. ■

Salīdzināšanai parasti izvēlas kādu no pazīstamajām rindām, par kurām ir zināms, ka tās konverģē vai diverģē, proti, salīdzināšanu izdara ar

1) ģeometrisko progresiju $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Aq^{n-1}$ ($A \neq 0$ — konstante), kura konverģē, ja $|q| < 1$, un diverģē, ja $|q| \geq 1$;

2) harmonisko rindu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, kura diverģē;

3) **vispārināto harmonisko rindu** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$, kura konverģē, ja $k > 1$, un diverģē, ja $k \leq 1$, — ka tas ir tā, mēs to pierādīsim mazliet vēlāk ar integrālā testa palīdzību (17.36. piemērs).

17.27. Piemēri. 1. Vai rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{6n^2-5}$ konverģē vai diverģē?

Tā kā $\frac{2n}{6n^2-5} > \frac{2n}{6n^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n}$, tad dotā rinda diverģē, jo $\frac{1}{3} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ir diverģenta rinda (viena trešdaļa no harmoniskās rindas).

2. Vai rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n(n^2+3)}$ konverģē vai diverģē?

Ievērosim, ka $\frac{n^2}{3^n(n^2+3)} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \frac{n^2}{n^2+3} < \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ konverģē (ģeometriskā progresija, kuras kvocients $\frac{1}{3} < 1$), tāpēc konverģē arī dotā rinda. ■

17.28. TEORĒMA (dalījuma robežas tests). Pieņemsim, ka dotas divas rindas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ un $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, $a_n \geq 0$, $b_n > 0$, visiem $n = 1, 2, \ldots$, un $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$. Tad:

a) ja $0 < k < \infty$, tad dotās rindas konverģē vai diverģē vienlaicīgi;

b) ja $k = 0$ un $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverģē, tad arī $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverģē;

c) ja $k=\infty$ un $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverģē, tad arī $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverģē.

$\square$ Izvēlēsimies $\varepsilon=\frac{k}{2}$. No $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k$ eksistences seko, ka

$$\exists N\ \forall n\geq N\ \left|\frac{a_n}{b_n}-k\right|<\frac{k}{2},\ \text{t.i.,}$$

$$-\frac{k}{2}<\frac{a_n}{b_n}-k<\frac{k}{2}\ \Rightarrow\ \frac{k}{2}<\frac{a_n}{b_n}<\frac{3k}{2}$$

tātad visiem n, $n\geq N$, $b_n<\frac{2}{k}a_n$ un $a_n<\frac{3k}{2}b_n$. Ņemot vērā salīdzināšanas testu (17.26. teorēmu), iegūsim teorēmas a) apgalvojumu.

Pieņemsim, ka $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$ un $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ir konverģenta rinda. Izvēlamies $\varepsilon=1$, tad

$$\exists N\ \forall n\geq N\ \left|\frac{a_n}{b_n}\right|<1\quad\text{jeb}\quad\frac{a_n}{b_n}<1\ \Rightarrow a_n<b_n$$

($a_n, b_n\geq 0$, jo apskatām nenegatīvas skaitļu rindas, kā arī $b_n>0$ — pēc dotā). Tā kā rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverģē, tad pēc salīdzināšanas testa a) gadījuma arī $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverģē.

Gadījumā, ja $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=+\infty$ un $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ir diverģenta rinda, rīkojamies līdzīgi kā iepriekš. Izvēlamies $\varepsilon=1$, tad

$$\exists N\ \forall n\geq N\ \left|\frac{a_n}{b_n}\right|>1\quad\text{jeb}\quad\frac{a_n}{b_n}>1,\quad\text{t.i.,}\quad\forall n>N\ a_n>b_n.$$

No salīdzināšanas testa b) gadījuma seko, ka $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverģē. ■

17.29. Piemēri. 1. Rindas $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-2)^2}$ vispārīgo elementu dalīsim ar konverģentas rindas $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ vispārīgo elementu un meklēsim robežu, n tiecoties uz bezgalību,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n-2)^2}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n-2)^2}=1,$$

atliek secināt, ka $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-2)^2}$ ir konverģenta rinda.

2. Vai rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$ konverģē vai diverģē?

Ja salīdzinām ar konverģentu rindu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, tad

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n \cdot n^2}{n^2 \cdot 1} = \lim_{n\to\infty} \ln n = \infty.$$

Tests nav lietojams.

Ja salīdzinām ar diverģentu rindu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, tad

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n \cdot n}{n^2 \cdot 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} \overset{\text{Lopitāla k.}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Atkal tests nav lietojams.

"Pa vidu" starp rindām $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ un $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ir konverģenta rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, salīdzināsim ar to:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n \cdot n^{\frac{3}{2}}}{n^2 \cdot 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \overset{\text{Lopitāla k.}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0.$$

Secinām, ka rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ konverģē. ■

17.30. TEORĒMA (Dalambēra tests). Pieņemsim, ka $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ir nenegatīvu skaitļu rinda un $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \varrho$:

a) ja $\varrho < 1$, tad rinda konverģē;

b) ja $\varrho > 1$, tad rinda diverģē;

c) ja $\varrho = 1$, tad tests nav lietojams.

□ a) Tā kā $\varrho < 1$, tad atradīsies tāds skaitlis r, ka $\varrho < r < 1$ (piemēram, $r = \frac{\varrho+1}{2}$). Izvēlēsimies N tik lielu, lai visiem n, $n \geq N$, būtu spēkā nevienādība $\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$ (tāda N eksistence seko no tā, ka $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \varrho < r$). Tādā gadījumā

$$\begin{aligned}
&a_{N+1} < ra_N, \\
&a_{N+2} < ra_{N+1} < r^2 a_N, \\
&a_{N+3} < ra_{N+2} < r^2 a_{N+1} < r^3 a_N, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Rinda $ra_N + r^2 a_N + r^3 a_N + \ldots = \sum\limits_{n=N}^{\infty} a_N r^n$ ir ģeometriskā progresija ar kvocientu $0 < r < 1$, tā konverģē. Pēc salīdzināšanas testa (a) gadījums) konverģē arī rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

b) Tā kā $\varrho > 1$, tad eksistē tāds N, ka $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ visiem n, $n \geq N$. Tātad

$$a_{N+1} > a_N,$$
$$a_{N+2} > a_{N+1} > a_N,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Tā kā $a_n > a_N$ visiem n, $n > N$, tad tas nozīmē, ka robeža $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ nevar būt vienāda ar 0 — izpildās rindas diverģences pietiekamais nosacījums (17.17. teorēma).

c) Mēs zinām, ka rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverģē, bet $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverģē. Tā kā gan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

gan arī

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1,$$

tad gadījumā, ja $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, ar Dalambēra testa palīdzību nevar noteikt, vai rinda konverģē vai diverģē. ■

17.31. Piemēri. 1. Rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$ diverģē, jo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! \cdot 10^n}{10^{n+1} \cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{10} = \infty > 1.$$

2. Rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ konverģē, jo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{\frac{-(n+1)n}{-(n+1)}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{-(n+1)}} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1. \ ■$$

17.32. TEORĒMA (Košī tests). Pieņemsim, ka $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ir nenegatīvu skaitļu rinda un $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \varrho$:

a) ja $\varrho < 1$, tad rinda konverģē;
b) ja $\varrho > 1$, tad rinda diverģē;
c) ja $\varrho = 1$, tad tests nav lietojams.

□ a) Līdzīgi kā Dalambēra testa pierādījumā atradīsies tāds skaitlis r, ka $\varrho < r < 1$. Tā kā $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \varrho$, tad atradīsies tāds N, ka visiem n, $n \geq N$, $\sqrt[n]{a_n} < r$. Tādā gadījumā

$$\begin{aligned} &a_N < r^N, \\ &a_{N+1} < r^{N+1} \\ &a_{N+2} < r^{N+2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Rinda $\sum\limits_{n=N}^{\infty} r^n$ ir konverģenta ģeometriskā progresija ($q < 1$). Pēc salīdzināšanas testa a) gadījuma rinda $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ konverģē, bet tad konverģē arī dotā rinda.

b) Tā kā $\varrho > 1$, tad eksistēs tāds N, ka visiem n, $n > N$, $\sqrt[n]{a_n} > 1$ jeb $a_n > 1$, un nav izpildīts konverģences nepieciešamais nosacījums, tātad rinda diverģē.

c) Rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverģē un $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverģē, taču abos gadījumos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \quad \text{un} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2 = 1, \quad \text{jo}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln n} = \exp \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} \overset{\text{Lopitāla k.}}{=}$$

$$= \exp \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \exp 0 = e^0 = 1. \ \blacksquare$$

17.33. Piemēri. 1. Rinda $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln n}\right)^n$ konverģē, jo

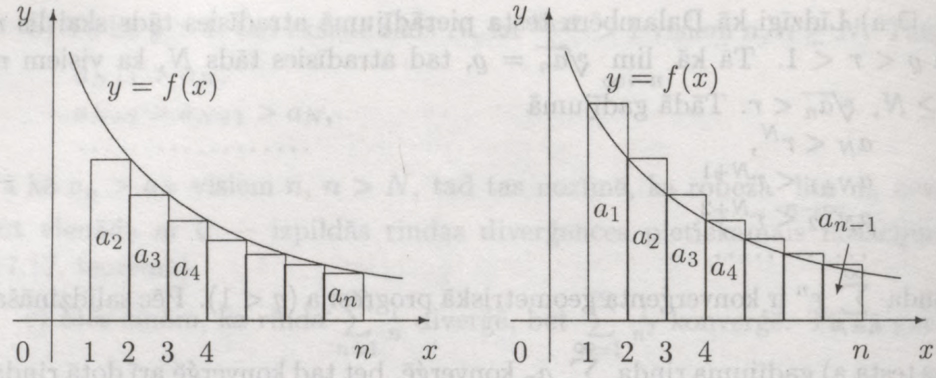
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{\ln n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1.$$

2. Rinda $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3n}{2n+5}\right)^n$ divergē, jo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n}{2n+5}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{2n+5} = \frac{3}{2} > 1. \ \blacksquare$$

17.34. TEORĒMA (integrālais tests). Pieņemsim, ka f ir nepārtraukta, pozitīva, neaugoša funkcija, kura definēta intervālā $[1; +\infty[$, un $a_n = f(n)$ visiem $n \in \mathbb{N}$. Rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverģē tad un tikai tad, ja konverģē neīstais integrālis $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$.

□ 17.2. zīmējumā parādīts, kā ar rindas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ parciālsummām var tuvināti aprēķināt neīsto integrāli. Atzīmēsim, ka viena taisnstūra iesvītrotais laukums ir skaitliski vienāds ar tā augstumu (jo platums jeb garums ir 1 vienība). No zīmējuma secinām, ka



a) b)

17.2.zīm.

$$\sum_{k=2}^{n} a_k \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} a_k. \tag{17.1}$$

Pieņemsim, ka $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$ konverģē. Tad no (17.1) kreisās puses nevienādības iegūsim, ka

$$S_n = a_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k \leq a_1 + \int_1^n f(x)\,dx \leq a_1 + \int_1^{\infty} f(x)\,dx\ .$$

Parciālsummas ir ierobežotas no augšas, pēc ierobežoto summu testa (17.24. teorēma) seko, ka $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ir konverģenta rinda.

No otras puses, pieņemsim, ka rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverģē. Tad no (17.1) labās puses nevienādības visiem $t \leq n$ būs spēkā:

$$\int_1^t f(x)\,dx \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} a_k \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Tā kā funkcija $y(t) = \int\limits_1^t f(x)\,dx$ ir ierobežota no augšas, tad eksistē $\lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_1^t f(x)\,dx$, t.i., neīstais integrālis $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$ konverģē. ■

Pēdējās teorēmas apgalvojumu bieži pieraksta sekojošā formā: rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ un neīstais integrālis $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$ konverģē vai diverģē vienlaicīgi.

17.35. Piezīme. Iepriekšējās teorēmas apgalvojums neizmainās, ja skaitli 1 visur teorēmā aizstāj ar jebkuru citu naturālu skaitli.

17.36. Piemēri. 1. Ar integrālā testa palīdzību var noteikt, kad konverģē vai diverģē vispārinātā harmoniskā rinda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \ldots, \ k - \text{ konstante.}$$

Ja $k > 0$, funkcija $f(x) = \frac{1}{x^k}$ ir nepārtraukta, pozitīva un dilstoša intervālā $[1; \infty[$, pie tam, $f(n) = \frac{1}{n^k}$.

Ja $k \neq 1$, tad

$$\int_1^{+\infty} x^{-k}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b x^{-k}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \left. \frac{x^{-k+1}}{-k+1} \right|_1^b =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \frac{b^{1-k} - 1}{1-k} = \begin{cases} \infty, & k < 1, \\ \frac{1}{k-1}, & k > 1. \end{cases}$$

Ja $k = 1$, tad

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \ln x \Big|_1^b = \lim_{b \to +\infty} \ln b = +\infty.$$

Gadījumā, ja $k \leq 0$, rindas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ vispārīgais loceklis netiecas uz 0: $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^k} \neq 0$ — rinda diverģē. Tātad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \quad \begin{matrix} \text{konverģē,} & \text{ja } k > 1, \\ \text{diverģē,} & \text{ja } k \leq 1. \end{matrix}$$

2. Noskaidrosim rindas $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ uzvedību.

Funkcija $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ intervālā $[2; +\infty[$ ir nepārtraukta un pozitīva, tā ir arī monotoni dilstoša, jo

$$f'(x) = \frac{-(\ln x + 1)}{x^2 \ln^2 x} < 0, \quad \forall x \in [2; +\infty[.$$

Atbilstošais neīstais integrālis diverģē, jo

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \to +\infty} \int_2^b \frac{dx}{x \ln x} = * \left| \begin{matrix} \ln x = t & 2 \leq x \leq b \\ \frac{1}{x}\, dx = dt & \ln 2 \leq t \leq \ln b \end{matrix} \right|$$

$$* = \lim_{b \to +\infty} \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{dt}{t} = \lim_{b \to +\infty} \ln t \Big|_{\ln 2}^{\ln b} = \lim_{b \to +\infty} (\ln \ln b - \ln \ln 2) = +\infty.$$

Tātad rinda $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ diverģē. ■

Alternējošas skaitļu rindas

17.37. DEFINĪCIJA. Skaitļu rindu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sauc par **alternējošu rindu**, ja tās locekļu zīmes pēc kārtas mainās.

Ja pieņemam, ka $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots > 0$, tad alternējošu rindu var pierakstīt šādi

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1} a_n + \cdots.$$

Piemēram, alternējoša harmoniskā rinda

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Kā zināms, harmoniskā rinda diverģē, vēlāk mēs pierādīsim, ka alternējoša harmoniskā rinda konverģē (17.39. piemērs) un tās summa ir $\ln 2$ (17.59. piemērs).

Alternējošas rindas konverģences pietiekamais nosacījums ir šāds.

17.38. TEORĒMA (Leibnica kritērijs). Ja alternējošas rindas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ locekļiem ir spēkā

1) $\exists N \; \forall k \geq N \; a_k \geq a_{k+1} \geq a_{k+2} \geq \cdots > 0$,

2) $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$,

tad rinda konverģē un, aproksimējot rindas summu S ar n-to parciālsummu S_n, kļūda nav lielāka par a_{n+1} locekli, t.i., $|S - S_n| \leq a_{n+1}$. Ja $N = 1$, tad $0 < S < a_1$.

□ Pieņemsim, ka $a_n > a_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ (gadījumā, ja virkne $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ir dilstoša sākot ar kārtas numuru N, $N > 1$, pierādījums ir analoģisks, jo galīga skaita rindas locekļu atmešana neietekmē rindas konverģenci [17.22. teorēma]). Ar S_n apzīmēsim n-to parciālsummu:

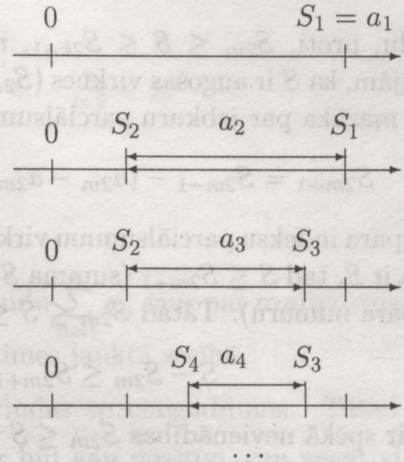
$S_1 = a_1,$

$S_2 = a_1 - a_2 = S_1 - a_2,$

$S_3 = a_1 - a_2 + a_3 = S_2 + a_3,$

$S_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = S_3 - a_4,$

$\dots$



17.3. zīm.

Ievērosim, ka parciālsummas ar pāra indeksiem $S_2, S_4, \dots$ ir ierobežotas no augšas ($\leq S_1 = a_1$) un augošas, proti, pāra indeksu parciālsummas var pierakstīt formā

$$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) + \dots + (a_{2m-1} - a_{2m}), \qquad m = 1, 2, \dots,$$

tā kā iekavās esošās summas ir nenegatīvas, jo $a_n \geq a_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, tad $S_{2m} \leq S_{2m+2}$. No virknes $(S_{2m})_{m \in \mathbb{N}}$ ierobežotības no augšas un monotonitātes seko, ka virkne konverģē [17.11. teorēma]:

$$\lim_{m \to +\infty} S_{2m} = S \leq a_1 = S_1.$$

Parādīsim, ka parciālsummu virkne ar nepāra indeksiem konverģē uz to pašu robežu. Patiešām,

$$S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}, \qquad m = 1, 2, \dots,$$

pēc teorēmas nosacījumiem $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$, tāpēc

$$\lim_{m \to +\infty} S_{2m+1} = \lim_{m \to +\infty} (S_{2m} + a_{2m+1}) = \lim_{m \to +\infty} S_{2m} + \lim_{m \to +\infty} a_{2m+1} = S.$$

Esam pierādījuši, ka $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = S$ — tātad rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ konverģē.

Ievērosim, ka jebkura parciālsumma ar pāra indeksu nepārsniedz parciālsummu ar nepāra indeksu (skatīt 17.3. zīmējumu) un rindas summa atrodas pa vidu, proti, $S_{2m} \leq S \leq S_{2k+1}$, $m, k = 1, 2, \ldots$. No vienas puses jau parādījām, ka S ir augošas virknes $(S_{2m})_{m\in\mathbb{N}}$ robeža, tāpēc $S_{2m} \leq S$ (summa S nav mazāka par jebkuru parciālsummu ar pāra numuru). No otras puses

$$S_{2m+1} = S_{2m-1} - (a_{2m} - a_{2m+1}) \leq S_{2m-1}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

t.i., nepāra indeksu parciālsummu virkne $(S_{2m+1})_{m\in\mathbb{N}}$ ir dilstoša un, tā kā tās robeža ir S, tad $S \leq S_{2m+1}$ (summa S nav lielāka par jebkuru parciālsummu ar nepāra numuru). Tātad $S_{2m} \leq S \leq S_{2m+1}$, $m = 1, 2, \ldots$, tāpēc

$$S - S_{2m} \leq S_{2m+1} - S_{2m} = a_{2m+1}, \tag{17.2}$$

tāpat ir spēkā nevienādības $S_{2m} \leq S \leq S_{2m-1}$, $m = 1; 2, \ldots$, tāpēc

$$S_{2m-1} - S \leq S_{2m-1} - S_{2m} = a_{2m}. \tag{17.3}$$

No nevienādībām (17.2) un (17.3) seko, ka $|S - S_n| \leq a_{n+1}$ visiem $n = = 1, 2, \ldots$. ■

17.39. Piemēri. 1. Alternējoša harmoniskā rinda

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

konverģē, jo 1) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \cdots$ un 2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Ja mums jānoskaidro šīs rindas summa ar noteiktu precizitāti, piemēram, 0,01, tad mēs izmantosim pēdējās teorēmas apgalvojumu, ka $|S - S_n| \leq a_{n+1}$ un atradīsim to numuru n, kuram $a_{n+1} \leq 0,01$. Konkrētajā gadījumā: $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \leq 0,01$, seko, ka $n \geq 99$.

2. Pierādīsim, ka $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{2^n}$ konverģē.

Rinda ir alternējoša un

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{2^n} \overset{\text{Lopitāla k.}}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2}{2^n \ln 2} \overset{\text{Lopitāla k.}}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{6n}{2^n \ln^2 2} \overset{\text{Lopitāla k.}}{=}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{6}{2^n \ln^3 2} = 0,$$

bet tās pirmie locekļi neveido dilstošu virkni: $\frac{1}{2}$, 2, $3\frac{3}{8}, \ldots$. Parādīsim, ka virkne $\left(\frac{n^3}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ir dilstoša, sākot no piektā locekļa. Apskatīsim funkciju $f(x) = \frac{x^3}{2^x}$ un atradīsim tās atvasinājumu

$$f'(x) = \frac{3x^2\, 2^x - x^3\, 2^x \ln 2}{2^{2x}} = \frac{x^2\, 2^x\, (3 - x\ln 2)}{2^{2x}}.$$

Funkcija būs dilstoša, ja $f'(x) < 0$, t.i.

$$3 < x \ln 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{\ln 2} < x,$$

tā kā $4 < \frac{3}{\ln 2} < 5$, tad $n \geq 5$. ■

Maiņzīmju rindas

17.40. DEFINĪCIJA. Skaitļu rindu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sauc par **maiņzīmju rindu**, ja rindas locekļiem ir gan +, gan − zīmes jauktā secībā.

Alternējoša rinda ir maiņzīmju rindas speciālgadījums. Tātad rindas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ locekļi $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ var būt gan pozitīvi, gan negatīvi.

17.41. Piemērs. Rindas $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} - \frac{1}{64} + \frac{1}{125} + \cdots$ ik ceturtais loceklis ir ar negatīvu zīmi. Vai šī rinda konverģē? Leibnica kritērijs šeit nav lietojams. Bet rinda $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \frac{1}{125} + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ — vispārinātā harmoniskā rinda $(k = 3)$ konverģē. ■

Apskatīsim līdz ar $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ rindu, kuras locekļi ir dotās rindas locekļu absolūtās vērtības, t.i., $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

17.42. TEORĒMA (absolūtās konverģences tests). Ja konverģē rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, tad konverģē arī $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

□ Apzīmēsim $a_n + |a_n| = b_n$, tad $a_n = b_n - |a_n|$, turklāt

$$0 \leq b_n \leq 2|a_n|.$$

Pēc dotā rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverģē, tad konverģē arī $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$, tāpēc pēc salīdzināšanas testa [17.26. teorēma] konverģē $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$. No konverģentu rindu īpašībām [17.19. teorēma] seko, ka konverģentu rindu starpība ir konverģenta rinda, tātad rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n - \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverģē. ■

Pretējais apgalvojums vispārīgā gadījumā nav spēkā. Piemēram, alternējoša harmoniskā rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konverģē, bet rinda, kuras locekļi ir alternējošās rindas absolūtās vērtības, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverģē.

17.43. DEFINĪCIJA. Rindu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sauc par **absolūti konverģentu**, ja konverģē rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (saka arī, ka tad rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverģē absolūti**).

17.44. DEFINĪCIJA. Rindu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sauc par **nosacīti konverģentu**, ja tā konverģē, bet rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverģē (saka arī, ka tad rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverģē nosacīti**).

Visi iepriekš aprakstītie testi pozitīvām skaitļu rindām der arī absolūtās konverģences noteikšanai. Bet speciālgadījumā Dalambēra tests [17.30. teorēma] ir pārfrazējams sekojoši.

17.45. TEORĒMA (Dalambēra tests absolūtai konverģencei). Pieņemsim, ka $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ir maiņzīmju rinda un eksistē $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \varrho$. Tadā gadījumā:

a) ja $\varrho < 1$, tad rinda konverģē absolūti (tātad konverģē);
b) ja $\varrho > 1$, tad rinda diverģē;
c) ja $\varrho = 1$, tad tests nav lietojams.

□ a) un c) tieši seko no Dalambēra testa [17.30. teorēma]. b) gadījums prasa paskaidrojumus. Pēc Dalambēra testa, ja $\varrho > 1$, seko, ka $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverģē, bet mēs apgalvojam, ka arī $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverģē. Kāpēc? Tā kā

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1,$$

tad pietiekoši lieliem n, teiksim $n \geq N$, $|a_{n+1}| > |a_n|$. Tādējādi $|a_n| > |a_N|$ visiem $n \geq N$, un līdz ar to $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ — ir izpildījies diverģences pietiekamais nosacījums. ■

17.46. Piemēri. 1. Apskatīsim rindu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{5^n}{n!}$ un atbilstošo pozitīvo skaitļu rindu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$. Lietojam 17.45. teorēmu:

$$\varrho = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5^{n+1}\, n!}{(n+1)!\, 5^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5}{n+1} = 0 < 1 —$$

secinām, ka rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{5^n}{n!}$ konverģē absolūti.

2. Noskaidrosim rindas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n!)}{n^3}$ uzvedību!

Ja mēs uzrakstītu rindas pirmos 100 locekļus, tad redzētu, ka + un − zīmes mainās jauktā secībā. Rindu ir grūti analizēt tiešā veidā, taču

$$\left|\frac{\sin(n!)}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}.$$

Tā kā rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ konverģē, tad pēc salīdzināšanas testa [17.26. teorēma] konverģē $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n!)|}{n^3}$. Atliek secināt, ka dotā rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n!)}{n^3}$ konverģē absolūti.

3. Rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1+\frac{3}{n}\right)^{2n}$ diverģē. Kāpēc?

Rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{3}{n}\right)^{2n}$ diverģē, jo

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{2n} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}\cdot 2\cdot 3} = e^6 \ne 0.$$

Šī paša iemesla dēļ diverģē arī dotā rinda, atšķirība tikai tāda, ka $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n \left(1+\frac{3}{n}\right)^{2n}$ neeksistē (n tiecoties uz $+\infty$, virknes vērtības tiecas gan uz e^6, gan uz $-e^6$).

4. Rindas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ atbilstošā rinda, kas sastāv no dotās rindas locekļu absolūtajām vērtībām, ir diverģenta vispārinātā harmoniskā rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\left(k=\frac{1}{2}\le 1\right)$. Dotā rinda ir alternējoša rinda, tās konverģenci vai diverģenci varam noskaidrot ar Leibnica kritērija palīdzību:

$$1)\ 1 > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \cdots > \frac{1}{\sqrt{n}} > \cdots;$$

$$2)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Leibnica kritērija nosacījumi ir apmierināti, tātad dotā rinda konverģē, varam arī teikt — konverģē nosacīti. ■

17.47. TEORĒMA (komutatīvā īpašība). Ja rinda konverģē *absolūti* un tās summa ir S, tad rinda, kas iegūta no dotās rindas, mainot vietām dotās rindas locekļus, arī konverģē absolūti un tās summa ir S.

□ Pieņemsim, ka rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ ir iegūta no $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, mainot vietām tās locekļus. Parādīsim vispirms, ka rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ konverģē un tās summa ir S.

Fiksēsim $\varepsilon > 0$. Tā kā $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverģē absolūti, tad atradīsies tāds indekss n_0, ka

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| - \sum_{n=1}^{n_0} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tātad ir spēkā nevienādība

$$\left|S - \sum_{n=1}^{n_0} a_n\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{n_0} a_n\right| = \left|\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Izvēlēsimies tādu indeksu m_0, ka rindas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ parciālsummā $\sum\limits_{n=1}^{m_0} u_n$ ietilpst visi parciālsummas $\sum\limits_{n=1}^{n_0} a_n$ saskaitāmie. Jebkuram m, $m > m_0$, apzīmēsim $s_m = \sum\limits_{n=1}^{m} u_n - \sum\limits_{n=1}^{n_0} a_n$. No indeksa m_0 izvēles seko, ka summas s_m saskaitāmie ir rindas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ locekļi ar indeksiem, kuri ir lielāki par n_0. Tā kā summas s_m absolūtā vērtība nepārsniedz tās locekļu absolūto vērtību summu, tad

$$|s_m| \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tāpēc $m > m_0$ būs spēkā

$$\left|S - \sum_{n=1}^{m} u_n\right| = \left|S - \left(\sum_{n=1}^{n_0} a_n + s_m\right)\right| \leq \left|S - \sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| + |s_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tas nozīmē, ka $\lim\limits_{m\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{m} u_n = S$. Citiem vārdiem sakot, rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ konverģē un tās summa ir S.

Rindas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ absolūtā konverģence seko no tikko pierādītās daļas, ja to pielietojam rindai $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Patiešām, ja rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverģē absolūti, t.i., konverģē (arī absolūti) rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, tad pēc augstāk pierādītā konverģē arī rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$, kas arī nozīmē rindas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ absolūto konverģenci. ■

Ja rinda konverģē *nosacīti*, tad iespējams tā mainīt vietām tās locekļus, ka jauniegūtā rinda konverģē uz jebkuru citu summu vai pat diverģē. Piemēram, alternējoša harmoniskā rinda

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = S$$

konverģē nosacīti. Samainīsim šīs rindas locekļus vietām tā, lai katram pozitīvajam loceklim sekotu divi pēc kārtas ņemti negatīvi locekļi un aprēķināsim iegūto summu:

$$\begin{aligned}
&1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \dots + \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{2n} - \tfrac{1}{2n+2} + \dots = \\
&= (1 - \tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{4} + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6}) - \tfrac{1}{8} + \dots + (\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{2n}) - \tfrac{1}{2n+2} + \dots = \\
&= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \dots + \tfrac{1}{2n} - \tfrac{1}{2n+2} \dots = \\
&= \tfrac{1}{2}\Big(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \dots + \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1} + \dots\Big) = \tfrac{1}{2}S -
\end{aligned}$$

pēc rindas locekļu samainīšanas rindas summa ir samazinājusies uz pusi.

Pakāpju rindas

Līdz šim mēs apskatījām konstanšu rindas, t.i., rindas ar locekļiem, kuri ir skaitļi. Tagad apskatīsim funkciju rindas. Precīzāk, pieņemsim, ka mums ir dota virkne $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$, kuras locekļi ir argumenta x funkcijas ar kopīgu definīcijas apgabalu.

17.48. DEFINĪCIJA. Funkciju virkņu pāri $((u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}, (s_n(x))_{n\in\mathbb{N}})$, kur $\forall n\ s_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$, sauc par **funkciju rindu** un lieto pierakstu $u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$ jeb $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Virknes $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ locekļus sauc par **rindas locekļiem**, bet $u_n(x)$ sauc par rindas **n-to** jeb **vispārīgo locekli**. Savukārt virknes $(s_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ locekļus sauc par rindas n locekļu **parciālsummām**, bet $s_n(x)$ — par **n-to parciālsummu.**

Ja argumenta x vietā ievieto noteiktu skaitlisku vērtību c no rindas locekļu definīcijas apgabala, tad iegūst skaitļu rindu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(c)$, kura var konverģēt vai diverģēt atkarībā no c izvēles.

17.49. DEFINĪCIJA. Visu to argumenta x vērtību kopu, kurām skaitļu rinda konverģē, sauc par funkciju rindas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ **konverģences apgabalu.**

17.50. Piemērs. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 3x}{9} + \cdots + \frac{\sin nx}{n^2} + \cdots$ — šīs rindas visi locekļi ir definēti intervālā $]-\infty;+\infty[$. Rinda, kas sastādīta no dotās rindas locekļu absolūtajām vērtībām, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin nx|}{n^2}$ konverģē, jo

$$\forall x \in]-\infty;+\infty[: \quad 0 \le \frac{|\sin nx|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$$

un salīdzināmā rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverģē. Tātad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ konverģē abolūti, tāpēc apskatāmās funkciju rindas konverģences apgabals ir intervāls $]-\infty;+\infty[$. ■

Vispārīgā gadījumā funkciju rindas konverģences apgabalu noteikšana nav vienkāršs uzdevums un prasa speciālas zināšanas. Mūsu grāmatas ietvaros mēs labi iepazīsimies tikai ar funkciju rindu speciālgadījumu — pakāpju rindām.

17.51. DEFINĪCIJA. Par **pakāpju rindu** sauc tādu funkciju rindu, kuras locekļi ir pakāpes funkcijas ar naturāliem kāpinātājiem, t.i., rindu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

(šeit $a_0 x^0$ tiek interpretēts kā a_0 pat, ja $x = 0$), kur $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \cdots$ ir reāli koeficienti.

Arī, runājot par pakāpju rindu, mēs vēlēsimies noskaidrot, kad tā konverģē un, ja konverģē, tad kāda ir tās summa. Kā šos jautājumus risināt?

17.52. Piemēri. 1. Apskatīsim pašu vienkāršāko gadījumu, proti, rindu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a\, x^n = a + ax + ax^2 + ax^3 + \cdots, \quad a \ne 0.$$

Šo pakāpju rindu mēs jau labi pazīstam — tā ir ģeometriskā progresija, tā konverģē, ja kvocients ir $-1 < x < 1$, un tās summa ir $S(x) = \frac{a}{1-x}$.

2. Kad konverģē rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\, 2^n}$?

Rindas locekļi var būt gan pozitīvi, gan negatīvi, atkarībā no x izvēles. Izmantosim 17.45. teorēmu, apskatot rindu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n\, 2^n}$:

$$\varrho = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\, |x|^{n+1}\, 2^n}{(n+1)\, |x|^n\, 2^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} \frac{|x|}{2} = \frac{|x|}{2}.$$

Tātad rinda konverģē absolūti (t.i., konverģē), ja $\frac{|x|}{2} < 1$, un diverģē, ja $\frac{|x|}{2} > 1$, jeb konverģē, ja $|x| < 2$, un diverģē, ja $|x| > 2$. Ja $x = 2$ vai $x = -2$, teorēma atbildi nedod. Taču, ja $x = 2$, tad rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n\,2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ir harmoniskā rinda, kura diverģē. Savukārt, ja $x = -2$, tad rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ir alternējoša harmoniskā rinda, kura konverģē. Rezultātā dotā rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\,2^n}$ konverģē intervālā $[-2; 2[$. ■

Izrādās, ka pakāpju rindas konverģences apgabals vienmēr ir attiecībā pret koordinātu sākumpunktu simetrisks intervāls, izņemot, iespējams, galapunktus.

17.53. TEORĒMA (Ābela teorēma). Pakāpju rindas $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ konverģences apgabals ir viena no sekojošām triju veidu kopām:

1) $\{0\}$;

2) intervāls $]-R; R[$, iespējams, ieskaitot kādu no galapunktiem;

3) $]-\infty; +\infty[$.

Turklāt pakāpju rinda konverģē absolūti konverģences intervāla iekšienē.

□ Pieņemsim, ka rinda konverģē punktā $x = x_1 \neq 0$. Tad $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\, x_1^n = 0$, tāpēc

$$\exists N\ \forall n \geq N\ (\,|a_n\, x_1^n| < 1).$$

Tādējādi visiem x, kuriem $|x| < |x_1|$,

$$|a_n\, x^n| = |a_n\, x_1^n| \left|\frac{x}{x_1}\right|^n < \left|\frac{x}{x_1}\right|^n, \quad \forall n \geq N.$$

Rinda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_1}\right|^n$ konverģē, jo tā ir ģeometriskā progresija ar kvocientu $\left|\frac{x}{x_1}\right|^n < 1$. Tāpēc, izmantojot salīdzināšanas testu, konverģē arī rinda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n\, x^n|$. Mēs esam parādījuši, ka, ja pakāpju rinda konverģē punktā x_1, tad tā konverģē (absolūti) visiem tiem x, kuriem $|x| < |x_1|$.

Pieņemsim, ka pakāpju rinda diverģē punktā x_2. Tad tā diverģēs visiem tiem x, kuriem $|x| > |x_2|$. Patiešām, ja mēs pieņemtu, ka rinda konverģē punktā x_1, kuram $|x_1| > |x_2|$, tad mēs nonāktu pie pretrunas, jo tad vajadzētu (pēc salīdzināšanas testa) rindai konverģēt arī punktā x_2.

Iepriekš apskatītie divi gadījumi ietver iespēju, ka konverģences apgabals ir vienā no teorēmas apgalvojumā uzrādītajiem veidiem. ■

17.54. DEFINĪCIJA. Intervālu $]-R;R[$ sauc par pakāpju rindas **konverģences intervālu**, bet skaitli R — par pakāpju rindas **konverģences rādiusu**.

Tātad, lai noteiktu pakāpju rindas konverģences intervālu, jāprot noteikt tās konverģences rādiuss. Tā kā rinda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ intervālā $]-R;R[$ konverģē absolūti, tad reizē ar doto rindu apskatīsim šīs rindas locekļu absolūto vērtību rindu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$. Ja visi rindas koeficienti nav 0, tad varam lietot Dalambēra vai Košī konverģences testus. Pēc Dalambēra testa rinda konverģē, ja

$$1 > \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}\, x^{n+1}}{a_n\, x^n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| = |x| \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

$$\text{jeb} \quad |x| < \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{17.4}$$

Rinda diverģē, ja $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}\, x^{n+1}}{a_n\, x^n}\right| > 1$ jeb

$$|x| > \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{17.5}$$

No (17.4) un (17.5) seko, ka pakāpju rindas konverģences rādiusu var aprēķināt pēc formulas (**Dalambēra formula**)

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,$$

ja vien šī robeža eksistē. Lietojot Košī konverģences testu, iegūsim formulu (**Košī formula**)

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}},$$

protams, ja vien šī robeža eksistē.

Jautājums par pakāpju rindas konverģenci rindas konverģences intervāla $]-R;R[$ galapunktos ir jānoskaidro atsevišķi, ievietojot x vietā skaitļus $-R$ un R, t.i., jāapskata skaitļu rindas $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(-R)^n$ un $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, R^n$. Vispārīgā gadījumā ir iespējama situācija, kad $R=\infty$, t.i., rinda konverģē intervālā $]-\infty;+\infty[$, bet, ja $R=0$, tad rinda konverģē tikai punktā $x=0$.

17.55. Piemērs. Noteiksim konverģences intervālu rindai $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+2\cdot 3^n}}$.

Pēc Dalambēra formulas

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{(n+1)^2+2\cdot 3^{n+1}}}{\sqrt{n^2+2\cdot 3^n}} = 3.$$

Pārbaudīsim intervāla galapunktus -3 un 3:

1) rinda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{\sqrt{n^2+2\cdot 3^n}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+2}}$ ir alternējoša rinda, var lietot Leibnica kritēriju:

$\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} > \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+2}}$, $n = 1, 2, \ldots$ — dilstoša virkne,

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} = 0$,

secinām, ka galapunktā -3 rinda konverģē;

2) rinda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n^2+2\cdot 3^n}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2}}$ ir pozitīvu skaitļu rinda, to varam salīdzināt ar diverģento harmonisko rindu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ [dalījuma robežas tests, 17.28. teorēma]

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+2}} = 1,$$

secinām, ka galapunktā 3 rinda diverģē.

Tātad atbilde uz piemēra sākumā uzstādīto jautājumu ir intervāls $[-3; 3[$. ■

17.56. DEFINĪCIJA. Rindu formā

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1 (x-a) + a_2 (x-a)^2 + \cdots,$$

kur $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ir reāli koeficienti un a ir konstante, sauc par **vispārināto pakāpju rindu.**

Iepriekš aprakstītā teorija pakāpju rindām ir pilnībā lietojama arī vispārināto pakāpju rindu gadījumā. Proti, apzīmējot $x - a = t$, varam vispārināto pakāpju rindu pierakstīt kā pakāpju rindu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.

17.57. Piemērs. Jāatrod rindas $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n(x-2)}{2n+1}\right)^n$ konverģences kopa.

Apzīmēsim $x - 2 = t$ un atradīsim rindas $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{nt}{2n+1}\right)^n$ konverģences apgabalu. Konverģences rādiusa atrašanai lietosim Košī formulu

$$R = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n} = 2.$$

Pārbaudīsim intervāla galapunktus:

1) $t=-2$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-2n}{2n+1}\right)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n$ — alternējoša rinda, kurai vispārīgais loceklis netiecas uz 0, jo

$$\lim_{n\to+\infty}\left|(-1)^n\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n\right|=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+1-1}{2n+1}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{-1}{2n+1}\right)^{\frac{-(2n+1)\,n}{-(2n+1)}}=\exp\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{-(2n+1)}=\exp(\tfrac{-1}{2})=\tfrac{1}{\sqrt{e}}\neq 0;$$

2) $t=2$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n$ — pozitīva skaitļu rinda, kuras vispārīgais loceklis arī netiecas uz 0 tāpat kā galapunktā -2.

Tātad rinda $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t\,n}{2n+1}\right)^n$ konverģences apgabals ir $]-2;2[$, t.i.,

$$-2<t=x-2<2 \quad \text{jeb} \quad 0<x<4\,.$$

Rinda $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(x-2)\,n}{2n+1}\right)^n$ konverģē intervālā $]0;4[$. ■

Darbības ar pakāpju rindām

Ar pakāpju rindām var veikt vairākas darbības. Divas pakāpju rindas var sareizināt, var izdalīt, darbības veicot kā ar polinomiem. Pakāpju rindas locekļus var arī diferencēt un integrēt, iegūstot jaunas rindas. Šo apgalvojumu formulēsim teorēmas veidā.

17.58. TEORĒMA. Pieņemsim, ka pakāpju rindas

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,x^n=a_0+a_1\,3+a_2\,x^2+a_3\,x^3+\cdots$$

summa ir $S(x)$ un rinda konverģē intervālā I. Ja x pieder intervāla I iekšienei, tad

(i) $S'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n\,x^n)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\,a_n\,x^{n-1}=a_1+2a_2\,x+3a_3\,x^2+\cdots,$

(ii) $\int\limits_0^x S(t)\,dt=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^x a_n\,t^n\,dt=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}=$

$$=a_0\,x+\tfrac{1}{2}a_1\,x^2+\tfrac{1}{3}a_2\,x^3+\tfrac{1}{4}a_3\,x^4+\cdots$$

un jauniegūtajām rindām ir tāds pats konverģences rādiuss kā dotajai.

Šo teorēmu mēs nepierādīsim. Atzīmēsim tikai, ka dotais apgalvojums ir speciālgadījums daudz vispārīgākai teorēmai par funkciju rindām.

17.59. Piemērs. Pielietosim 17.58. teorēmu ģeometriskajai progresijai

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

kura konverģē intervālā $]-1;1[$.

17.58. teorēma ļauj rindas locekļus atvasināt un rezultātā iegūsim rindu

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2},$$

kura arī konverģē intervālā $]-1;1[$.

Integrējot sākumā dotās rindas locekļus, iegūsim atkal jaunu rindu

$$\int\limits_0^x 1\,dt + \int\limits_0^x t\,dt + \int\limits_0^x t^2\,dt + \int\limits_0^x t^3\,dt + \cdots = x + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{x^4}{4} + \cdots =$$
$$= \int\limits_0^x \tfrac{1}{1-t}\,dt = -\ln|1-t|\Big|_0^x = -\ln(1-x),$$

kura arī konverģē intervālā $]-1;1[$. Ja abās vienādības pusēs aizstājam x ar $-x$ un pareizinām ar -1, iegūsim rindu

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{x} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \quad -1 < x < 1.$$

Ja $x = 1$, tad rindas labajā pusē ir alternējoša harmoniskā rinda, kura konverģē (pēc Leibnica kritērija). Tāpēc mēs tagad varam apgalvot, ka alternējošas harmoniskās rindas summa ir $\ln 2$. ■

Tādējādi, ja mēs labi esam izpētījuši vienu pakāpju rindu, mums ir iespēja iegūt informāciju par vēl divām citām pakāpju rindām.

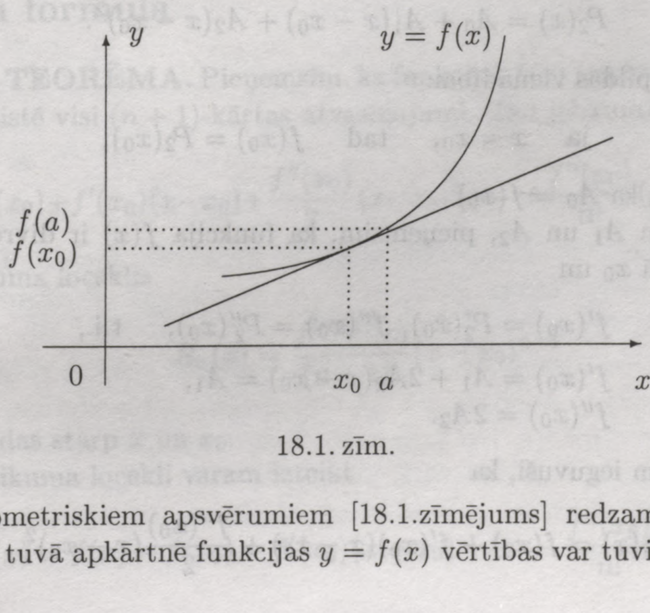
18. nodaļa

TEILORA FORMULA

Teilora polinoms

Reālajās vajadzībās bieži vien mēs izmantojam nevis noteiktu lielumu precīzas vērtības, bet gan to tuvinājumus, piemēram, $\frac{1}{3} \approx 0,33$ vai $e \approx 2,7$. Šajā nodaļā mēs noskaidrosim, kā dota punkta apkārtnē dotu funkciju var aizstāt ar polinomu un kā funkcijas vērtību šajā apkārtnē var tuvināti aizstāt ar polinoma vērtību.

Vienkāršākajā gadījumā mēs gribētu funkciju aizstāt ar lineāru izteiksmi. Pieņemsim, ka dotajai funkcijai f eksistē pirmās kārtas atvasinājums punktā x_0. Tādā gadījumā punktā $(x_0, f(x_0))$ funkcijas f grafikam varam novilkt pieskari, kuras vienādojums ir $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.



18.1. zīm.

No ģeometriskiem apsvērumiem [18.1.zīmējums] redzams, ka punkta $(x_0, f(x_0))$ tuvā apkārtnē funkcijas $y = f(x)$ vērtības var tuvināti aprēķināt kā pieskares vērtības:

$$f(a) \approx f(x_0) + f'(x_0)(a - x_0)$$

(a pieder punkta x_0 apkārtnei).

Labās puses polinomu

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

sauc par funkcijas $f(x)$ **pirmās kārtas Teilora polinomu punkta** x_0 **apkārtnē**.

18.1. Piemērs. Atrast $P_1(x)$ punktā $x_0 = 1$ funkcijai $f(x) = \ln x$ un tuvināti atrast $\ln 0,9$ un $\ln 1,5$.

Atrodam $f'(x) = \frac{1}{x}$ un $f'(x_0) = f'(1) = 1$, kā arī $f(1) = \ln 1 = 0$, tāpēc $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0 + 1(x - 1) = x - 1$, t.i., $\ln x \approx x - 1$ un $\ln 0,9 \approx 0,9 - 1 = -0,1$, $\ln 1,5 \approx 1,5 - 1 = 0,5$ — precīzākas šīs vērtības attiecīgi ir $-0,1054$ un $0,4055$. Kā redzams, pirmajā gadījumā aproksimācija ir labāka, tas ir tāpēc, ka punkts 0,9 atrodas tuvāk punktam 1 nekā 1,5. ■

Precīzākus tuvinājumus mēs iegūsim arī ar augstākas kārtas Teilora polinomu palīdzību. Tāpēc iepazīsimies ar šiem polinomiem un noskaidrosim, cik lielu maksimāli varam pieļaut kļūdu, veicot funkcijas aizstāšanu ar Teilora polinomu.

Funkcijai $y = f(x)$ punktā x_0 otrās kārtas Teilora polinomu meklēsim pēc analoģijas ar pirmās kārtas polinomu formā

$$P_2(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2.$$

Turklāt ir jāizpildās vienādībai:

$$\text{ja} \quad x = x_0, \quad \text{tad} \quad f(x_0) = P_2(x_0),$$

tāpēc iegūsim, ka $A_0 = f(x_0)$.

Lai atrastu A_1 un A_2, pieņemsim, ka funkcija $f(x)$ ir divreiz diferencējama punktā x_0 un

$$f'(x_0) = P_2'(x_0), \; f''(x_0) = P_2''(x_0), \quad \text{t.i.,}$$

$$f'(x_0) = A_1 + 2A_2(x - x_0) = A_1,$$
$$f''(x_0) = 2A_2.$$

Rezultātā esam ieguvuši, ka

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2.$$

Turpinot šo procedūru, vispārīgā gadījumā, ja funkcija $f(x)$ ir n-reizes diferencējama punktā x_0, iegūsim **n-tās kārtas Teilora polinomu**:

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Gadījumā, ja $x_0 = 0$, atbilstošo Teilora polinomu sauc par **Maklorēna polinomu**:

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n.$$

18.2. Piemērs. Atradīsim Maklorēna polinomu funkcijai $f(x) = e^x$. Zināms, ka

$$f'(x) = f''(x) = \cdots = f^n(x) = e^x \text{ un}$$
$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^n(0) = e^0 = 1.$$

Tādējādi punkta 0 apkārtnē

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Tā, piemēram, $e^{0,8} \approx 1 + 0,8 + \frac{0,8^2}{2} = 2,12$. Cik precīzs tuvinājums ir šis skaitlis? Atbildi uz šo jautājumu dosim nākamajā paragrāfā. ■

Teilora formula

18.3. TEORĒMA. Pieņemsim, ka funkcijai $f(x)$ punkta x_0 vaļējā apkārtnē $\mathfrak{U}(x_0)$ eksistē visi $(n+1)$-kārtas atvasinājumi. Tad jebkuram $x \in \mathfrak{U}(x_0)$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

kur atlikuma loceklis

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

un c atrodas starp x un x_0.

□ Atlikuma locekli varam izteikt

$$R_n(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \cdots - \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Uzskatīsim, ka x ir nofiksēts (konstante), bet x_0 aizvietosim ar mainīgo t un definēsim jaunu funkciju g:

$$g(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \cdots - \frac{f^n(t)}{n!}(x-t)^n - R_n(x)\frac{(x-t)^{n+1}}{(x-x_0)^{n+1}}.$$

Ja $t = x$, tad $g(x) = 0$, ja $t = x_0$, tad $g(x_0) = 0$ (ņemot vērā atlikuma locekļa $R_n(x)$ definīciju).

Tātad izveidojusies situācija: $g(t)$ ir nepārtraukta funkcija (tā ir polinoms) intervālā ar galapunktiem x_0 un x ($[x_0; x]$ vai $[x; x_0]$), tā ir atvasināma intervāla iekšienē un $f(x_0) = f(x) = 0$, varam izmantot Rolla lemmu [no 6. nodaļas]:

$$\exists c \text{ starp } x \text{ un } x_0, \text{ ka } g'(c) = 0.$$

Rezultātā iegūsim:

tā kā $g'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + R_n(x)\,(n+1)\frac{(x-t)^n}{(x-x_0)^{n+1}}$, tad

$$g'(c) = 0 = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n + R_n(x)\,(n+1)\frac{(x-c)^n}{(x-x_0)^{n+1}},$$

izsakot $R_n(x)$, iegūsim, ka

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)\,(x-c)^n(x-x_0)^{n+1}}{n!\,(n+1)\,(x-c)^n} = \frac{f^{(n+1)}(c)\,(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}. \blacksquare$$

Formulu

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)\,(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

sauc par funkcijas $f(x)$ **Teilora formulu ar atlikuma locekli Lagranža formā** punkta x_0 apkārtnē. Ja $x_0 = 0$, tad to sauc par **Maklorēna formulu** ar atlikuma locekli Lagranža formā.

Ja mēs neprotam aprēķināt funkcijas $f(x)$ vērtību punktā x, tad precīzu R_n vērtību noteikt neizdodas. Tā kā nav zināma arī c vērtība, bet tikai intervāls, kuram c pieder, tad praktiskos lietojumos tiek aprēķināta maksimālā $|R_n|$ vērtība dotajā intervālā. Tātad tiek veikta $|R_n|$ augšējās robežas noteikšana. Bieži te palīdz nevienādības, piemēram, $|a \pm b| \leq |a| + |b|$, kā arī saucēja samazināšana, tādējādi palielinot daļas vērtību.

18.4. Piemērs. Aprēķināsim $e^{0,8}$ ar precizitāti 0,01!

Atlikuma loceklis funkcijai e^x punkta $x_0 = 0$ apkārtnē ir

$$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1},\ 0 < c < x.$$

Tā kā $0 < c < 0,8$, tad $e^c < e^{0,8} < 3$, kā arī $(0,8)^{n+1} < 1^{n+1} = 1$, tad varam novērtēt $R_n(x) < \frac{3}{(n+1)!} \cdot 1 = \frac{3}{(n+1)!}$.

Mums vajag atrast tādu n, lai $R_n(x) < 0,01$.

Mēs meklēsim tādu n, lai $\frac{3}{(n+1)!} \le 0,01$, jo tad $R_n(x) < \frac{3}{(n+1)!} \le 0,01$.

$n = 1: \quad \frac{3}{2!} = 1,5$

$n = 2: \quad \frac{3}{3!} = 0,5$

$n = 3: \quad \frac{3}{4!} = 0,125$

$n = 4: \quad \frac{3}{5!} = 0,025$

$n = 5: \quad \frac{3}{6!} = \frac{1}{240} \approx 0,004 < 0,01$

Tātad, lai atrastu $e^{0,8}$ ar precizitāti 0,01, mums jāatrod funkcijas e^x atbilstošais 5. kārtas Maklorēna polinoms un jāizskaitļo tā vērtība punktā 0,8:

$$e^{0,8} \approx 1 + 0,8 + \frac{(0,8)^2}{2} + \frac{(0,8)^3}{3!} + \frac{(0,8)^4}{4!} + \frac{(0,8)^5}{5!} \approx$$
$$\approx 1,8 + 0,32 + 0,085 + 0,017 + 0,003 = 2,225.$$

Tā kā pieļaujamā kļūda ir 0,01, tad otrais cipars aiz komata izteiksmē 2,225 var būt nepareizs: mazākais tas var būt 1, lielākais 3, abos gadījumos skaitļi 2,21 un 2,23 tiek noapaļoti kā 2,2. Vispār konkrētajā gadījumā ($n = 5$) mēs esam ieguvuši, ka $R_5(x) < \frac{1}{240} \approx 0,004$, tātad faktiski kļūda tiek pieļauta trešajā ciparā aiz komata ± 4, bet tad atbilde pieder intervālam $]2,221; 2,229[$, rezultātā mēs esam droši par pirmajiem diviem cipariem aiz komata. Taču, ja jautājums ir tāds, ka jāatrod $e^{0,8}$ ar precizitāti 0,01, tad kā pareizā atbilde der gan 2,22, gan 2,23, jo, ja pareizā atbilde pieder intervālam $]2,221; 2,229[$, tad gan 2,22, gan 2,23 no tās neatšķirsies vairāk kā par 0,01. ■

Analoģiski kā e^x gadījumā Maklorēna formulas ar Lagranža atlikuma locekļiem atrod arī citām funkcijām. Pazīstamākās no tām:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+2}(x) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+2}(x),$$

kur $|R_{2n+2}(x)| = \left|\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\cos c\right| \le \frac{|x^{2n+3}|}{(2n+3)!}$, c starp x un 0

(tā kā $\sin x$ izvirzījums nesatur pāra pakāpes, tad atlikuma locekļa kārta ir par vienu lielāka nekā izvirzījuma pakāpe);

$$\cos x = 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \tfrac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \tfrac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n+1}(x),$$

kur $|R_{2n+1}(x)| = \left| \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos c \right| \le \frac{|x^{2n+2}|}{(2n+2)!}$, c starp x un 0

(tā kā $\cos x$ izvirzījums nesatur nepāra pakāpes, tad atlikuma locekļa kārta ir par vienu lielāka nekā izvirzījuma pakāpe);

$$\ln(1+x) = x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3} - \tfrac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \tfrac{x^n}{n} + R_n(x) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \tfrac{x^k}{k} + R_n(x), \quad x > -1,$$

kur $|R_n(x)| = \left| \frac{(-1)^n n!\, x^{n+1}}{(1+c)^{n+1}(n+1)!} \right| \le \frac{|x^{n+1}|}{n+1}$, $c > 0$;

$$(1+x)^\alpha = 1 + \tfrac{\alpha}{1!} x + \tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \tfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots$$
$$+ \tfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n + R_n(x) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \tfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-(k-1))}{k!} x^k + R_n(x),$$

kur $R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}(1+c)^{\alpha-n-1} x^{n+1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \ne 0$, $x > -1$.

Speciālgadījumā:

$$\tfrac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + R_n(x),$$
$$\tfrac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + R_n(x),$$
$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \tfrac{x^k}{k} + R_n(x).$$

Bieži atlikuma locekli pieraksta nevis Lagranža formā, bet gan **Peāno formā**, t.i.,

$$R_n(x) = o(x^n) \text{ vai } R_n(x - x_0) = o((x - x_0)^n).$$

Šis pieraksts $o(x^n)$ nozīmē, ka atlikums ir augstākas kārtas bezgalīgi maza funkcija salīdzinājumā ar x^n:

$$\lim_{x \to 0} \frac{o(x^n)}{x^n} = 0 \quad \text{vai attiecīgi} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Vajadzētu tikai ielāgot: ja a ir konstante, tad

$$a\, o(x^n) = o(x^n), \quad o((ax)^n) = o(x^n),$$

bet $x\,o(x^n) = o(x^{n+1})$, $o(x^m) + o(x^k) = o(x^m)$, ja $m \le k$.

18.5. Piemērs. Jāatrod Maklorēna formula funkcijai $f(x) = (x^2+1)\cos x$ līdz $o(x^{2n+1})$.

Mēs zinām, ka $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$, tāpēc

$$(x^2+1)\cos x = x^2\cos x + \cos x =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+2}}{(2k)!} + o(x^{2n+3}) + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+2}}{(2k)!} + 1 + \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^{2(k+1)}}{(2(k+1))!} + o(x^{2n+3}) =$$

$$= 1 + \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{(-1)^k}{(2k)!} + \frac{(-1)^{k+1}}{(2(k+1))!} \right) x^{2k+2} + o(x^{2n+3}) =$$

$$= 1 + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(2k+1)(2k+2)-1}{(2(k+1))!} x^{2k+2} + o(x^{2n+3}) =$$

$$= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(2k+1)(2k+2)-1}{(2(k+1))!} x^{2k+2} + o(x^{2n+1})$$

(pēdējā summā augstākā pakāpe ir $2(n-1)+2 = 2n-2+2 = 2n$, bet atlikuma locekļa pakāpe ir par 1 lielāka, tāpēc $o(x^{2n+1})$). ■

Līdz šim šajā nodaļā aprakstītais it kā nav saistīts ar 17. nodaļā aplūkotajām rindām. Izrādās, ka tā tas gluži nav, jo ir spēkā

18.6. TEORĒMA. Ja pakāpju rinda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ intervālā I konverģē uz funkciju $f(x)$, tad šīs rindas koeficienti ir funkcijas $f(x)$ Teilora formulas koeficienti, t.i., $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

□ Pēc teorēmas nosacījumiem

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \tag{18.1}$$

visiem x no x_0 apkārtnes. Ņemot vērā 17.58. teorēmu, abas vienādības (18.1) puses var galīgu skaitu reižu atvasināt, rezultātā iegūstot izteiksmi

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot a_n + (n+1)n\cdots 2\cdot a_{n+1}(x-x_0) +$$
$$+ (n+2)(n+1)\cdots 3\cdot a_{n+2}(x-x_0)^2 + \cdots, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Ja $x = x_0$, tad $f^{(n)}(x_0) = n!\,a_n$ jeb $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. ■

Ņemot vērā šo teorēmu bieži vien, formulējot uzdevumu par funkcijas Teilora (vai Maklorēna) formulas atrašanu, saka arī tā: izvirzīt funkciju Teilora (vai Maklorēna) rindā.

18.7. Piemērs. Izvirzīt hiperbolisko kosinusu $\operatorname{ch} x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ Teilora rindā punkta 1 apkārtnē!

Tā kā $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$ un $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$ ir e^x un e^{-x} Maklorēna rindas, tad $\frac{e^x+e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ ir $\operatorname{ch} x$ izvirzījums 0 punkta apkārtnē. Punkta 1 apkārtnē rinda būs izskatā

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{(2n)!}.$$

Tā kā rinda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(2n)!}$ konverģē uz visas skaitļu ass, jo pēc Dalambēra formulas tās konverģences rādiuss ir

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2(n+1))!}{(2n)!} = \lim_{n\to+\infty} (2n+1)(2n+2) = +\infty,$$

tad arī rinda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{(2n)!}$ konverģē uz visas skaitļu ass un tās summa ir funkcija $\operatorname{ch} x$. ■

PRIEKŠMETU RĀDĪTĀJS

SATURS

II DAĻAS SATURS

3.–

Inese Bula, Dr. math.,
LU asociētā profesore

Specializējas nekustīgo punktu teorijā, matemātiskajā ekonomikā un haosa teorijā. Vācijas Apmaiņas Dienesta stipendiāte (1993.–1994.). Kopā ar vīru audzina meitu un dēlu.

Jānis Buls, Dr. math.,
LU docents

Specializējas diskrētajā matemātikā, matemātiskajā kibernētikā, algebrā, algoritmu teorijā un kriptogrāfijā.

ISBN 9984-36-078-4
9 789984 360782

ZVAIGZNE ABC