

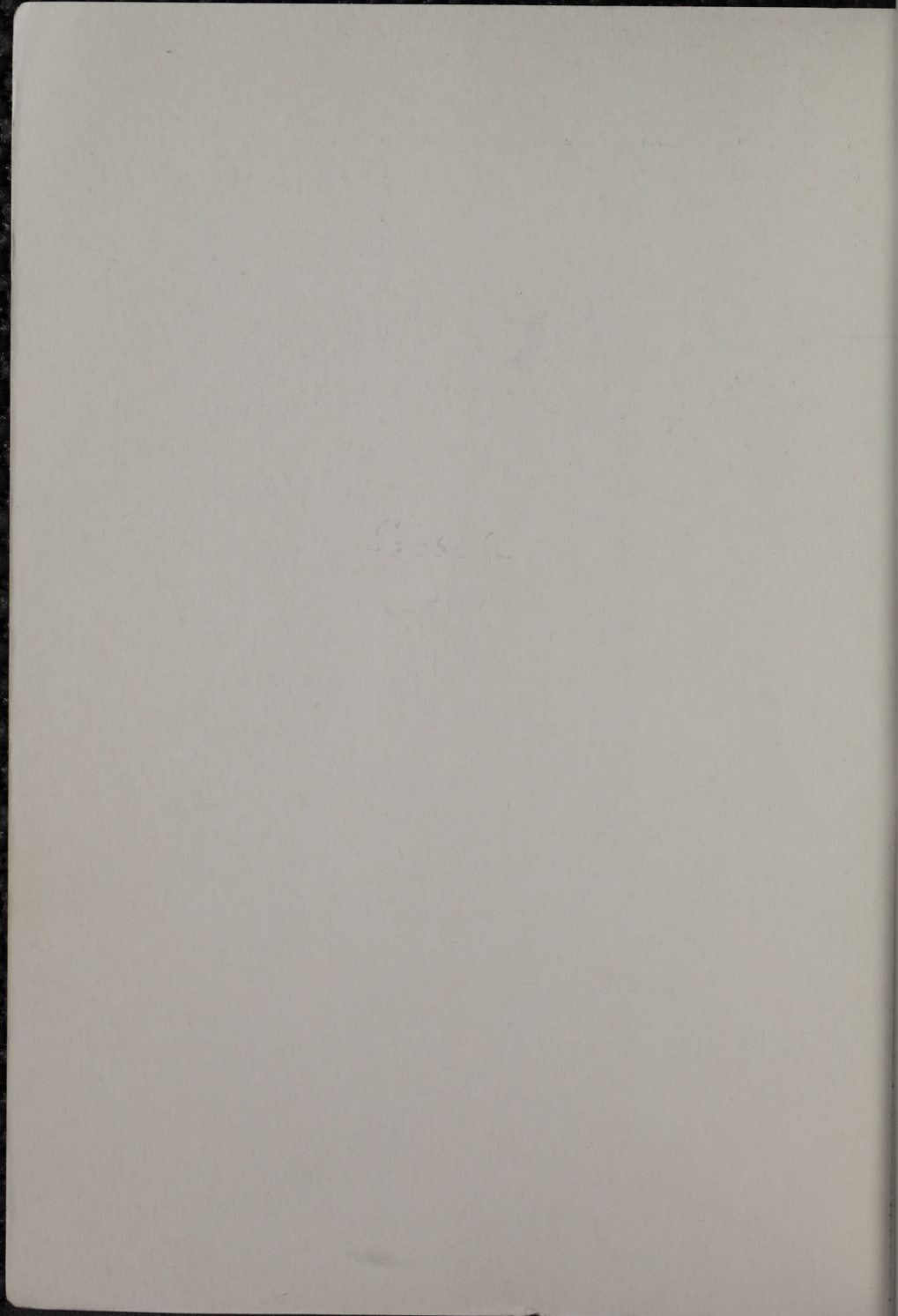
Māris Buiķis  
Biruta Siliņa

# Matemātika

Definīcijas  
Formulas  
Aprēķinu  
algoritmi



ZVAIGZNE ABC



97-3  
- 429

L  
5B

Māris Buiķis  
Biruta Siliņa

# Matemātika

Definīcijas  
Formulas  
Aprēķinu  
algoritmi

1. Algebras elementi

- 1.1. Kopas, daļiņas ar kopām
- 1.2. Reālo skaitļu kopa
- 1.3. Algebriski pārveides
- 1.4. Kombinatorikas elementārie

2. Funkcijas, vienādojumi

- 2.1. Vienas rādītāja funkcijas
- 2.2. Pakāpes funkcijas
- 2.3. Eksponentfunkcijas un
- 2.4. Trigonometriskās un inversās funkcijas
- 2.5. Hiperboliskās un
- 2.6. Vienādojumu sistēmu atrisināšana un interpolācijas polinomi

3. Ģeometrija

- 3.1. Plānmetrija
- 3.2. Stereometrija

4. Analītiskā ģeometrija

- 4.1. Vektori
- 4.2. Koordinātu sistēmas plaknē un telpā
- 4.3. Vienkrāšņi analītiskie
- 4.4. Taisne plaknē
- 4.5. Taisne telpā
- 4.6. Plakne
- 4.7. Otrās kārtas līnijas
- 4.8. Otrās kārtas virsmas
- 4.9. Dažādi svarīgākie līnijas



ZVAIGZNE ABC

510 (075.8)

Bu 240

Grāmata vecāko klašu skolēniem, studentiem  
un visiem matemātikas lietotājiem

Latvijas Nacionālā  
BIBLIOTĒKA

~~97-9-412~~  
0304007422

Māris Buiķis, Biruta Silīņa

**MATEMĀTIKA**

Definīcijas, formulas, aprēķinu algoritmi

© 1997, apgāds «Zvaigzne ABC»

Red. nr. E-63

Redaktors U. Grinfelds

Mākslinieciskais redaktors R. Štrauhs

Tehniskā redaktore L. Vasilevska

Korektore Z. Stikute

Maketētājs R. Lejasmeiers

Apgāds «Zvaigzne ABC», SIA,

K. Valdemāra ielā 105, Rīgā, LV-1013.

Reģistr. nr. 2-1060.

Latvijas-Somijas SIA «Madonas poligrāfists»,

Saieta laukumā 2, Madonā, LV-4801.

Pasūt. nr. 617.

ISBN 9984-04-398-3

## SATURS

Priekšvārds .....	7
1. Algebras elementi .....	9
1.1. Kopas, darbības ar kopām .....	9
1.2. Reālo skaitļu kopa $R$ un tās apakškopas .....	11
1.3. Algebriski pārveidojumi .....	12
1.4. Kombinatorikas elementi .....	19
2. Funkcijas, vienādojumi, nevienādības .....	21
2.1. Veselas racionālas funkcijas jeb polinomi .....	22
2.2. Pakāpes funkcijas .....	26
2.3. Eksponentfunkcijas un logaritmiskās funkcijas .....	27
2.4. Trigonometriskās un inversās trigonometriskās funkcijas .....	29
2.5. Hiperboliskās un inversās hiperboliskās funkcijas ...	41
2.6. Vienādojuma sakņu tuvinātas atrašanas metodes un interpolācijas polinomi .....	44
3. Ģeometrija .....	47
3.1. Planimetrija .....	47
3.2. Stereometrija .....	56
4. Analītiskā ģeometrija .....	64
4.1. Vektori .....	64
4.2. Koordinātu sistēmas plaknē un telpā .....	68
4.3. Vienkāršākie analītiskās ģeometrijas uzdevumi .....	71
4.4. Taisne plaknē .....	72
4.5. Taisne telpā .....	74
4.6. Plakne .....	76
4.7. Otrās kārtas līnijas .....	77
4.8. Otrās kārtas virsmas .....	81
4.9. Dažas svarīgākās līnijas plaknē .....	84

5. Lineārā algebra .....	87
5.1. Kompleksie skaitļi .....	87
5.2. Polinomi .....	90
5.3. Determinanti .....	92
5.4. Matricas .....	95
5.5. Lineāru vienādojumu sistēmas .....	98
6. Diferenciālrēķini .....	101
6.1. Virkņu un funkciju robežas .....	101
6.2. Funkciju nepārtrauktība .....	106
6.3. Vienargumenta funkcijas pirmais atvasinājums .....	107
6.4. Vienargumenta funkcijas augstāku kārtu atvasinājumi .....	110
6.5. Diferencējamu funkciju īpašības .....	111
6.6. Pamatteorēmas par diferencējamām funkcijām .....	114
6.7. Vienargumenta funkcijas diferenciāļi .....	116
6.8. Atvasinājumu izmantošana funkcijas $y=f(x)$ pētīšanā .....	117
6.9. Vairākargumentu funkcijas .....	120
6.10. Vairākargumentu funkcijas parciālie atvasinājumi .....	122
6.11. Vairākargumentu funkcijas diferenciāļi. Teilora formula .....	125
6.12. Vairākargumentu funkciju ekstrēmi .....	127
7. Diferenciālģeometrija .....	129
7.1. Plaknes līknes loka diferenciālis, loka garums, pieskare un normāle .....	129
7.2. Leņķis starp līknēm, līknes liekums, liekuma rādiuss, liekuma riņķis un centrs .....	131
7.3. Līkņu saimes apliecēja, evolūta un evolvente .....	133
7.4. Singulārie punkti .....	134
7.5. Asimptotas .....	135
7.6. Telpas līkne un tās lokālie elementi .....	136
7.7. Virsma un tās lokālie elementi .....	139
8. Integrālrēķini .....	144
8.1. Nenoteiktais integrālis un tā pamatīpašības .....	144
8.2. Pamatintegrāļu tabula .....	145
8.3. Racionālu funkciju integrēšana .....	146
8.4. Iracionālu funkciju integrēšana ( $R$ – racionāla funkcija) .....	148
8.5. Trigonometrisku funkciju integrēšana .....	150
8.6. Ekspontfunkciju un hiperbolisku funkciju integrēšana .....	151

8.7. Parciālās integrēšanas lietojumi .....	151
8.8. Nenoteikto integrāļu tabula .....	152
8.9. Noteiktā integrāļa definīcija un pamatīpašības .....	168
8.10. Noteiktā integrāļa aprēķināšana .....	170
8.11. Noteiktā integrāļa lietojumi .....	173
8.12. Neīstie integrāļi .....	178
8.13. Integrāļi, kas atkarīgi no parametra .....	181
8.14. Eilera integrāļi .....	184
8.15. Noteikto integrāļu tabula .....	185
8.16. Divkāršais integrālis un tā lietojumi .....	188
8.17. Trīskāršais integrālis un tā lietojumi .....	191
8.18. Līnijintegrāļi .....	195
8.19. Virsmas integrāļi .....	200
9. Diferenciālvienādojumi .....	205
9.1. Pirmās kārtas vienādojumi .....	205
9.2. Augstāku kārtu vienādojumi .....	209
9.3. Lineāru diferenciālvienādojumu sistēmas ar konstantiem koeficientiem .....	214
9.4. Diferenciālvienādojumu atrisināšanas skaitliskās metodes .....	216
9.5. Parciālie diferenciālvienādojumi .....	217
9.6. Siltuma vadīšanas vienādojums nestacionāram procesam .....	221
10. Kompleksā mainīgā funkciju teorija .....	223
10.1. Reāla argumenta kompleksas funkcijas .....	223
10.2. Kompleksā mainīgā funkcijas .....	223
10.3. Kompleksā mainīgā funkcijas atvasinājums. Analītiskas funkcijas. Konformā attēlošana .....	227
10.4. Kompleksā mainīgā funkcijas integrāļi .....	229
10.5. Rindas ar kompleksiem locekļiem un anal. f. izvirzīšana pakāpju rindā. Nulles un izolētie singulārie punkti .....	230
10.6. Rezīdiji, to aprēķināšana un lietojumi .....	232
11. Laplasa transformācija. Operatoru rēķini .....	235
11.1. Oriģināls, attēls un Laplasa transformācijas pamatīpašības .....	235
11.2. Inversā Laplasa transformācija. Oriģināla atrasana, ja dots attēls .....	237
11.3. Operatoru metodes lietojumi .....	238
11.4. Laplasa transformācijas pamatformulas .....	241

12. Rindas .....	243
12.1. Skaitļu rindas .....	243
12.2. Funkciju rindas .....	245
12.3. Furjē rinda. Furjē integrālis .....	247
13. Lauka teorijas elementi .....	250
13.1. Skalārs lauks .....	250
13.2. Vektoru lauks .....	252
13.3. Vektoru lauka plūsma un cirkulācija .....	254
13.4. Speciāli vektoru lauki .....	257
13.5. Operatoru $\nabla$ un $\Delta$ lietojumi pirmās un otrās kārtas lauku darbībās .....	258
14. Varbūtību teorija un matemātiskā statistika .....	260
14.1. Gadījuma notikumi .....	260
14.2. Gadījuma lielumi .....	262
14.3. Matemātiskā statistika .....	267
Pielikums .....	270
Gamma funkcija .....	270
Besela funkcijas .....	271
1. veida eliptiskie integrāļi .....	276
2. veida eliptiskie integrāļi .....	276
Pilnie eliptiskie integrāļi .....	277
Laplasa funkcijas vērtību tabula .....	278
Alfabētiskais rādītājs .....	280

## PRIEKŠVārds

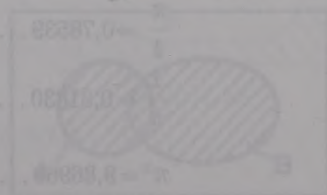
## PRIEKŠVārds

Labai matemātiskai bāzei ir īpaša nozīme dažādu tehnisku un ekonomisku zinātņu nozaru speciālistu sagatavošanā. Gan mācoties augstāko matemātiku, gan veidojot dažādu problēmu matemātiskos modeļus, bieži rodas nepieciešamība izmantot matemātikas formulas un pamatlikumus. Grāmata galvenokārt domāta lasītājam (inženierim, tehnisko specialitāšu studentam), kurš jau apguvis matemātikas pamatkursu, zina, ka viņa darbā nepieciešamā formula ir un atliek tikai to ātri atrast. Tādēļ arī paskaidrojumu grāmatā ir maz, ne vienmēr ir minēti visi ierobežojumi par mainīgajiem un formulu lietošanu.

Formulu krājums sastāv no 14 nodaļām, taču katras nodaļas ietvaros nav īpaši izdalīta skolas kursā vai augstskolā apgūstamā viela. Nav domāts arī par nodaļu loģisko saistību, jo šis formulu krājums nevar aizvietot mācību grāmatu vai tās konspektu. Tādēļ, lai atrastu kādu formulu, lasītājam lietderīgi izmantot ne vien nodaļu un paragrāfu nosaukumus, bet arī alfabētisko rādītāju.

Iespējamās nepilnības, kuras var atklāties praktiskā darbā ar šo grāmatu, autori centīsies novērst nākamajos izdevumos. Jau iepriekš pateicoties par jūsu norādījumiem, lūdzam tos adresēt apgādam «Zvaigzne ABC».

Autori



## GRIEĶU ALFABĒTA BURTI

Lielais burts	Mazais burts	Burta nosaukums	Lielais burts	Mazais burts	Burta nosaukums
A	$\alpha$	alfa	N	$\nu$	nī
B	$\beta$	bēta	Ξ	$\xi$	ksī
Γ	$\gamma$	gamma	O	o	omikrons
Δ	$\delta$	delta	Π	$\pi$	pi
E	$\epsilon$	epsilons	P	$\rho$	ro
Z	$\zeta$	zēta	Σ	$\sigma$	sigma
H	$\eta$	ēta	T	$\tau$	tau
Θ	$\theta$	thēta	Υ	$\upsilon$	ipsilons
I	$\iota$	jota	Φ	$\phi$	fī
K	$\kappa$	kapa	X	$\chi$	hī
Λ	$\lambda$	lambda	Ψ	$\psi$	psī
M	$\mu$	mī	Ω	$\omega$	omega

## MATEMĀTISKAS KONSTANTES

$$\pi = 3,14159 \dots$$

$$e = 2,71828 \dots$$

$$2\pi = 6,28318 \dots$$

$$\frac{1}{e} = 0,36787 \dots$$

$$\frac{\pi}{2} = 1,57079 \dots$$

$$e^2 = 7,38905 \dots$$

$$\frac{\pi}{4} = 0,78539 \dots$$

$$\sqrt{e} = 1,64872 \dots$$

$$\frac{1}{\pi} = 0,31830 \dots$$

$$\sqrt[3]{e} = 1,39561 \dots$$

$$\pi^2 = 9,86960 \dots$$

$$\frac{1}{e^2} = 0,13533 \dots$$

# 1. ALGEBRAS ELEMENTI

## 1.1. KOPAS, DARBĪBAS AR KOPĀM

### Kopas

Kopu  $A$ , kuras elementi ir  $x, y, \dots$ , apzīmē šādi:

$$A = \{x, y, \dots\}.$$

Simbols  $\in$  — *pieder pie*,  $\bar{\in}$  jeb  $\notin$  — *nepieder pie*;

$x \in A$  — elements  $x$  pieder pie kopas  $A$ ;

$x \bar{\in} A$  — elements  $x$  nepieder pie kopas  $A$ .

Kopa  $A$ , kuras elementi  $x$  ir tādi, ka tiem ir spēkā (izpildās) nosacījums  $P$ :

$$A = \{x : x \text{ izpildās nosacījums } P\};$$

$\emptyset$  — *tukša kopa*;

$A \subset B$  — kopa  $A$  ir kopas  $B$  *apakškopa*;

$A = B$  — kopas  $A$  un  $B$  *sakrīt (ir vienādas)*.

### Kopu apvienojums

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ vai } x \in B\} \quad (1.1. \text{ zīm.}).$$

Īpašības:

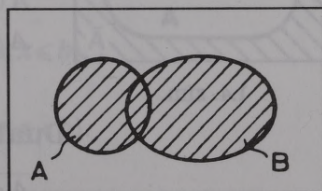
$$A \cup B = B \cup A,$$

$$A \cup A = A,$$

$$A \cup \emptyset = A,$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$A \subset (A \cup B), \quad B \subset (A \cup B).$$

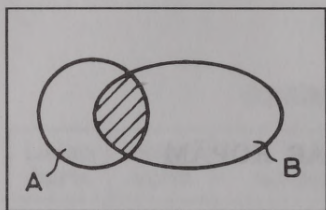


1.1. zīm.

## Kopu šķēlums

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ un } x \in B\} \quad (1.2. \text{ zīm.}).$$

Īpašības:



1.2. zīm.

$$A \cap B = B \cap A,$$

$$A \cap A = A,$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset,$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C,$$

$$(A \cap B) \subset A, (A \cap B) \subset B,$$

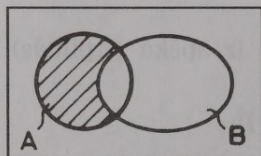
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

## Kopu starpība

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ un } x \notin B\} \quad (1.3. \text{ zīm.}).$$

Īpašības:



1.3. zīm.

$$A \setminus A = \emptyset,$$

$$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C),$$

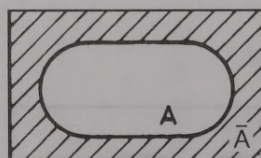
$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B),$$

$$A = (A \cap B) \cup (A \setminus B).$$

## Kopu papildinājums līdz pilnai kopai $G$

$$\text{Ja } A \subset G, \text{ tad } \bar{A} = \{x : x \in G \text{ un } x \notin A\} \quad (1.4. \text{ zīm.}).$$

Īpašības:



1.4. zīm.

$$\bar{\bar{A}} = A,$$

$$\text{ja } A \subset B, \text{ tad } \bar{A} \supset \bar{B},$$

$$A \cup \bar{A} = G,$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset.$$

## Dualitātes princips

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B},$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}.$$

## 1.2. REĀLO SKAITĻU KOPA $R$ UN TĀS APAKŠKOPAS

### Svarīgākās $R$ apakškopas

Naturālo skaitļu kopa  $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ .

Veselo skaitļu kopa  $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ .

Racionālo skaitļu kopa  $Q = \left\{ \frac{m}{n} : m \in Z, n \in N \right\}$ .

$$N \subset Z \subset Q \subset R.$$

### Darbības ar reāliem skaitļiem un to īpašības

Pamatdarbības ir *saskaitīšana, atņemšana, reizināšana un dalīšana*.

*Saskaitīšanas komutatīvā īpašība:*  $a + b = b + a$ .

*Saskaitīšanas asociatīvā īpašība:*  $(a + b) + c = a + (b + c)$ .

*Distributīvā īpašība reizināšanai attiecībā pret saskaitīšanu:*

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

*Reizināšanas komutatīvā īpašība:*  $a \cdot b = b \cdot a$ .

*Distributīvā īpašība reizināšanai attiecībā pret atņemšanu:*

$$(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c.$$

Svarīgākās darbību īpašības:

$$a + 0 = a,$$

$$a \cdot 1 = a,$$

$$a : 1 = a,$$

$$a - 0 = a,$$

$$a \cdot 0 = 0,$$

$$a : 0 \text{ — nav izpildāma,}$$

$$a - a = 0,$$

$$0 \cdot 0 = 0,$$

$$0 : a = 0 \quad (a \neq 0),$$

$$a : a = 1.$$

### Reālo skaitļu intervāli

*Slēgts intervāls, segments:*

$$[a; b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}.$$

*Atvērtais intervāls:*

$$(a; b) = \{x \in R : a < x < b\}.$$

*Pusatvērtais intervāls:*

$$(a; b] = \{x \in R : a < x \leq b\},$$

$$[a; b) = \{x \in R : a \leq x < b\}.$$

Bezgalīgi intervāli, stari:

$$[a; +\infty) = \{x \in \mathbf{R} : x \geq a\},$$

$$(a; +\infty) = \{x \in \mathbf{R} : x > a\},$$

$$(-\infty; a] = \{x \in \mathbf{R} : x \leq a\},$$

$$(-\infty; a) = \{x \in \mathbf{R} : x < a\}.$$

Reālo skaitļu taisne:  $\mathbf{R} = (-\infty; +\infty)$ .

### 1.3. ALGEBRISKI PĀRVEIDOJUMI

#### Daļas

Īsta daļa:  $\frac{a}{b} \in (-1, 1)$ , t. i.,  $a < b$  ( $b \neq 0$ ).

Neīsta daļa:  $\frac{a}{b}$ , ja  $a > b$  ( $b \neq 0$ ).

Daļas paplašināšana:  $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$  ( $b \neq 0, c \neq 0$ ).

Daļas saīsināšana:  $\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$  ( $b \neq 0, c \neq 0$ ).

#### Darbības ar daļām

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad (c \neq 0),$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{b \cdot d} \quad (b \neq 0, d \neq 0),$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad (b \neq 0, d \neq 0),$$

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} \quad (b \neq 0),$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad (b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0).$$

#### Proporcijas

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (b \neq 0, d \neq 0),$$

$a$  un  $d$  — proporcijas ārējie locekļi,  
 $b$  un  $c$  — proporcijas iekšējie locekļi.

Proporcijas pamatīpašība:

$$a \cdot d = b \cdot c.$$

Atsevišķu proporcijas locekļu izteikšana ar pārējiem:

$$a = \frac{b \cdot c}{d}; \quad b = \frac{a \cdot d}{c}; \quad c = \frac{a \cdot d}{b}; \quad d = \frac{b \cdot c}{a}.$$

Ja proporcija  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ir pareiza, tad pareizas ir arī šādas proporcijas:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}; \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c}; \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a};$$

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}; \quad \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}; \quad \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c};$$

$$\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}; \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}.$$

## Procenti

1% no skaitļa  $A$  ir  $\frac{A}{100}$ ;

$p$ % no skaitļa  $A$  ir  $\frac{A \cdot p}{100}$ .

Ja  $B$  ir  $p$ % no skaitļa  $A$ , tad  $A = \frac{B \cdot 100}{p}$ .

## Pakāpes un saknes

Pakāpes ar veseliem kāpinātājiem:

$$a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a \quad (n \text{ reizes, } n \in \mathbf{N}),$$

$$a^1 = a; \quad a^0 = 1; \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0, n \in \mathbf{N}).$$

Īpašības:

$$a^m a^n = a^{m+n},$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n},$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

$n$ -tās pakāpes saknes:

$\sqrt[n]{a}$  — skaitļa  $a \geq 0$   $n$ -tās pakāpes aritmētiskā sakne ir tāds skaitlis  $b \geq 0$ , kuram ir spēkā vienādība  $b^n = a$ .

$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$  — skaitļa  $a$  kvadrātsakne,

$\sqrt[3]{a}$  — skaitļa  $a$  kubsakne.

Īpašības:  $\sqrt[n]{0} = 0$ ;  $\sqrt[n]{1} = 1$ ;  $\sqrt[n]{a^n} = a$ ;  $(\sqrt[n]{a})^n = a$ ;

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a}.$$

### Pakāpes ar racionāliem kāpinātājiem

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}, n \geq 2, a > 0).$$

Īpašības ( $a > 0, b > 0, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}$ ):

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y};$$

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x};$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

### Atbrīvošanās no saknes saucējā

Daļu, kurai saucējā ir sakne, var vienmēr paplašināt tā, ka saucējs kļūst racionāls.

Piemēri:

$$\frac{x}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{x \cdot \sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x^3} \cdot \sqrt[4]{x}} = \frac{x \cdot \sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x^4}} = \frac{x \cdot \sqrt[4]{x}}{x} = \sqrt[4]{x};$$
$$\frac{a}{b + \sqrt{c}} = \frac{a(b - \sqrt{c})}{(b + \sqrt{c})(b - \sqrt{c})} = \frac{a(b - \sqrt{c})}{b^2 - c}.$$

### Reāla skaitļa modulis jeb absolūtā vērtība

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{ja } a \geq 0 \\ -a, & \text{ja } a < 0 \end{cases} \quad (a \in \mathbf{R}).$$

Īpašības:  $|a| = |-a|$ ;  $|a| \geq 0$ ;

$$|x| = a \Leftrightarrow x = \pm a;$$

$$|x| < a \Leftrightarrow x \in (-a; a); \quad |x| \leq a \Leftrightarrow x \in [-a; a];$$

$$|x| > a \Leftrightarrow x \in (-\infty; -a) \cup (a; +\infty);$$

$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \in (-\infty; -a] \cup [a; +\infty);$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|; \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0);$$

$$|a| - |b| \leq |a+b| \leq |a| + |b|;$$

$$|a| - |b| \leq |a-b| \leq |a| + |b|;$$

$$|a+b| \leq |a| + |b|;$$

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|.$$

### Signum jeb zīme

$$\operatorname{sgn} a = \begin{cases} +1, & \text{ja } a > 0 \\ 0, & \text{ja } a = 0 \\ -1, & \text{ja } a < 0, \end{cases}$$

$$\operatorname{sgn} a = \frac{a}{|a|}, \quad a \neq 0.$$

### Nevienādības

Par nevienādību sauc burtu vai skaitļu izteiksmes, kuras savienotas ar vienu no zīmēm  $>$ ,  $<$ ,  $\geq$ ,  $\leq$ .

Īpašības. *Simetrija*: ja  $a > b$ , tad  $b < a$ .

*Transitīvā īpašība*: ja  $a > b$  un  $b > c$ , tad  $a > c$ .

Ja  $a > b$ , tad  $a \pm c > b \pm c$ .

Ja  $a > b$  un  $c > d$ , tad  $a + c > b + d$ .

Ja  $a > b$  un  $c < d$ , tad  $a - c > b + d$ .

Ja  $a > b$  un  $c > 0$ , tad  $a \cdot c > b \cdot c$ ,  $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ .

Ja  $a > b$  un  $c < 0$ , tad  $ac < bc$ ,  $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ .

Ja  $a > b$  un skaitļiem  $a$  un  $b$  ir vienādas zīmes, tad  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ .

### Summas un reizinājuma zīmes

$$\sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n \quad (m \leq n);$$

$$\prod_{i=m}^n a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_n \quad (m \leq n).$$

Īpašības:

$$\sum_{i=1}^n (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^n a_i \pm \sum_{i=1}^n b_i;$$

$$\sum_{i=1}^n c \cdot a_i = c \sum_{i=1}^n a_i;$$

$$\sum_{i=1}^m a_i + \sum_{i=m+1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_i \quad (m < n);$$

$$\sum_{i=1}^n c = n \cdot c;$$

$$\prod_{i=1}^n (a_i \cdot b_i) = \prod_{i=1}^n a_i \cdot \prod_{i=1}^n b_i;$$

$$\prod_{i=1}^n (c \cdot a_i) = c^n \prod_{i=1}^n a_i;$$

$$\prod_{i=1}^m a_i \cdot \prod_{i=m+1}^n a_i = \prod_{i=1}^n a_i;$$

$$\prod_{i=1}^n c = c^n.$$

## Progresijas

Skaitļu virkni  $a_n$  sauc par aritmētisku progresiju ar pirmo locekli  $a_1$  un diferenci  $d$ , ja 1)  $a_1 = a$  un 2)  $a_{n+1} = a_n + d$ .

Īpašības:

$$a_{n+1} - a_n = a_{k+1} - a_k;$$

$$a_{n+1} = \frac{a_{n+2} + a_n}{2}; \quad a_n = a_1 + d(n-1).$$

Aritmētiskās progresijas pirmo  $n$  locekļu summa:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \quad \left( S_n = \sum_{i=1}^n a_i \right);$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n.$$

Skaitļu virkni  $a_n$  sauc par ģeometrisku progresiju ar kvocientu  $q \neq 0$ , ja

$$a_{n+1} = a_n \cdot q, \quad a_1 \neq 0.$$

Īpašības:

$$a_{n+1} : a_n = a_{k+1} : a_k;$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Ģeometriskās progresijas pirmo  $n$  locekļu summa:

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1} \quad \left( S_n = \sum_{i=1}^n a_i \right);$$

$$S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}.$$

Bezgalīgas ģeometriskās progresijas  $a + aq + aq^2 + \dots$  locekļu summa:

$$S = \frac{a}{1 - q}, \quad \text{ja } |q| < 1.$$

### Saišinātās reizināšanas formulas

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2);$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2);$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

### Dažas svarīgākās identitātes

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4};$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2;$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3};$$

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1);$$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3};$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1};$$

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

Latvijas Nacionālā  
BIBLIOTĒKA

97-9.412

## Nenegatīvu skaitļu vidējā aritmētiskā un vidējā ģeometriskā salīdzināšana

$$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2} \quad (\text{vienādība tikai tad, ja } a=b);$$

$$\sqrt{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \quad (\text{vienādība tikai tad, ja } a_1 = a_2 = \dots = a_n);$$

$$\frac{2a \cdot b}{a^2 + b^2} \leq 1 \quad (a, b > 0) \quad (\text{vienādība tikai tad, ja } a=b);$$

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \quad (a > 0) \quad (\text{vienādība tikai tad, ja } a=1).$$

*Košī-Buņakovska nevienādība:*

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2).$$

*Bernulli nevienādība:*

$$(1+h)^n \geq 1+n \cdot h \quad (h > -1, n \in \mathbf{N});$$

$$(1+h_1)(1+h_2)\dots(1+h_n) \geq 1+h_1+h_2+\dots+h_n$$

(visi skaitļi  $h_1, h_2, \dots, h_n$  ar vienādām zīmēm un lielāki nekā  $-1$ );

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}};$$

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n} \quad (n > 1).$$

### Logaritmi

$\log_a b$  ( $a > 0, a \neq 1, b > 0$ ) — skaitļa  $b$  logaritms pie bāzes  $a$  ir skaitlis, kurā jākāpina bāze  $a$ , lai iegūtu skaitli  $b$ :

$$a^{\log_a b} = b.$$

$\lg b$  — decimāllogaritms (logaritms pie bāzes 10):

$$\lg b = \log_{10} b; \quad 10^{\lg b} = b.$$

$\ln b$  — naturālais logaritms (logaritms pie bāzes  $e$ ):

$$\ln b = \log_e b; \quad e^{\ln b} = b.$$

### Sakarības starp logaritmiem pie dažādām bāzēm

$$\log_b N = M \cdot \log_a N, \quad \text{kur } M = \frac{1}{\log_a b};$$

$$\ln b = \frac{\lg b}{\lg e} = \frac{\lg b}{M_1}, \quad \text{kur } M_1 = \frac{1}{\ln 10} \approx 0,4343.$$

## Logaritmu īpašības

$$\log_a a = 1; \log_a 1 = 0;$$

$$\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v \quad (u > 0, v > 0);$$

$$\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v; \quad \log_a \frac{1}{v} = -\log_a v;$$

$$\log_a u^v = v \cdot \log_a u; \quad \log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \log_a u \quad (n \in \mathbb{N}, n \neq 1).$$

### 1.4. KOMBINATORIKAS ELEMENTI

#### Faktoriāls

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Lielām  $n$  vērtībām  $n!$  vērtību var tuvināti aprēķināt pēc Stirlinga formulas:

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

Faktoriāla vispārinājums ir gamma funkcija  $\Gamma$ .

#### Kombinācijas, variācijas, permutācijas

Par *kombinācijām* no  $n$  elementiem pa  $k$  ( $k \leq n$ ) sauc  $n$  elementu kopas apakškopas, kuras satur  $k$  elementus un atšķiras cita no citas ar pašiem elementiem.

Kombināciju skaits no  $n$  pa  $k$ :

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (0! = 1).$$

Par *variācijām* no  $n$  elementiem pa  $k$  ( $k \leq n$ ) sauc  $n$  elementu kopas apakškopas, kuras satur  $k$  elementus un kuras atšķiras cita no citas ar pašiem elementiem vai to kārtību.

Variāciju skaits no  $n$  pa  $k$ :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Par *permutācijām* sauc  $n$  elementu kopas sakārtojumus, kuri cits no cita atšķiras tikai ar elementu kārtību.

$n$  elementu kopas permutāciju skaits:

$$P_n = n!.$$

Svarīgākās formulas:

$$C_n^k = C_n^{n-k}; \quad C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1};$$

$$C_n^0 = C_n^n = 1.$$

$$A_n^0 = 1; \quad A_n^n = P_n;$$

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n;$$

$$C_n^k = k! \cdot A_n^k.$$

### Ņūtona binoma formula

$$(a+b)^1 = a+b;$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4;$$

.....

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n b^n$$

$(n \in \mathbb{N}).$

Binomiālos koeficientus  $C_n^k$  var noteikt no t. s. *Paskāla trijstūra*:

n									
0								1	
1							1	1	
2						1	2	1	
3					1	3	3	1	
4				1	4	6	4	1	
5			1	5	10	10	5	1	
6		1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
...	.....								

## 2. FUNKCIJAS, VIENĀDOJUMI, NEVIENĀDĪBAS

---

### Pamatjēdzieni un apzīmējumi

Par *funkciju jeb attēlojumu* sauc atbilstību starp divām kopām, kurā katram pirmās kopas elementam ir piekārtots ne vairāk kā viens otrās kopas elements. Piekārtošanas likumu parasti apzīmē ar  $y=f(x)$ .

$D(f)$  — funkcijas  $f=f(x)$  definīcijas apgabals.

$E(f)=\{f(x):x\in D(f)\}$  — funkcijas vērtību apgabals.

$f$  sauc par *pāra funkciju*, ja no tā, ka  $x\in D(f)$ , seko, ka arī  $-x\in D(f)$  un ir spēkā vienādība

$$f(-x)=f(x).$$

$f$  sauc par *nepāra funkciju*, ja no tā, ka  $x\in D(f)$ , seko, ka arī  $-x\in D(f)$  un ir spēkā vienādība

$$f(-x)=-f(x).$$

$f$  sauc par *periodisku funkciju ar periodu  $T$* , ja jebkuram  $x\in D(f)$  arī  $x+T\in D(f)$  un

$$f(x+T)=f(x).$$

$f$  sauc par *augošu funkciju kopā  $I\subset\mathbf{R}$* , ja jebkuriem tādiem  $x_1, x_2\in I$ , kuriem  $x_1<x_2$ , ir spēkā nevienādība

$$f(x_1)<f(x_2).$$

$f$  sauc par *nedilstošu funkciju kopā  $I\subset\mathbf{R}$* , ja jebkuriem tādiem  $x_1, x_2\in I$ , kuriem  $x_1<x_2$ , ir pareiza nevienādība

$$f(x_1)\leq f(x_2).$$

$f$  sauc par *dilstošu funkciju kopā  $I\subset\mathbf{R}$* , ja jebkuriem tādiem  $x_1, x_2\in I$ , kuriem  $x_1<x_2$ , ir pareiza nevienādība

$$f(x_1)>f(x_2).$$

$f$  sauc par *neaugošu funkciju kopā  $I\subset\mathbf{R}$* , ja jebkuriem tādiem  $x_1, x_2\in I$ , kuriem  $x_1<x_2$ ,

$$f(x_1)\geq f(x_2).$$

Augošas, nedilstošas, dilstošas un neaugošas funkcijas sauc par *monotonām funkcijām*.

$f^{-1}$  sauc par *funkcijas f inverso jeb apvērsto funkciju*, ja  $f^{-1}$  iegūta no  $f$ , mainot vietām definīcijas apgabalu  $D(f)$  ar vērtību apgabalu  $E(f)$  un  $f^{-1}(f(x)) = x$ .

$f^{-1}$  eksistē tikai monotonām funkcijām. Savstarpēji inversu funkciju  $f$  un  $f^{-1}$  grafiki ir simetriski pret taisni  $y = x$  (pret I un III kvadranta leņķu bisektrisi).

Lai iegūtu funkcijas  $f$  inverso funkciju, no vienādojuma  $y = f(x)$  izsaka mainīgo  $x$  un iegūtajā izteiksmē mainīgos  $x$  un  $y$  maina vietām.

## 2.1. VESELAS RACIONĀLAS FUNKCIJAS JEB POLINOMI

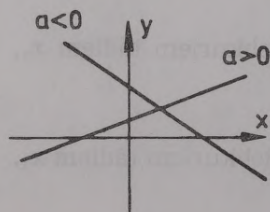
### Lineāras funkcijas

$$y = ax + b \quad (a, b \in \mathbf{R});$$

$$D(f) = \mathbf{R}; \quad E(f) = \mathbf{R}, \text{ ja } a \neq 0; \quad E(f) = \{b\}, \text{ ja } a = 0.$$

$a$  — taisnes virziena koeficients;  $a = \operatorname{tg} \varphi$ , kur  $\varphi$  ir leņķis, ko taisne veido ar  $x$  ass pozitīvo virzienu.

Funkcija ir augoša, ja  $a > 0$ , un dilstoša, ja  $a < 0$ .



2.1. zīm.

Funkcijas grafiks ir taisne (2.1. zīm.).

Lineāra vienādojuma  $ax + b = 0$  atrisinājumu kopa ir

$$M = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}, \text{ ja } a \neq 0.$$

Ja  $a = 0$  un  $b = 0$ , tad  $M = \mathbf{R}$ .

Ja  $a = 0$  un  $b \neq 0$ , tad  $M = \emptyset$ .

Lineāras nevienādības  $ax + b > 0$  atrisinājumu kopa ir

$$M = \left( -\frac{b}{a}; +\infty \right), \text{ ja } a > 0, \text{ un } M = \left( -\infty; -\frac{b}{a} \right), \text{ ja } a < 0.$$

Ja  $a = 0$ ,  $b > 0$ , tad  $M = \mathbf{R}$ .

Ja  $a = 0$ ,  $b \leq 0$ , tad  $M = \emptyset$ .

## Kvadrātiskas funkcijas

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0, \quad D(f) = \mathbf{R}.$$

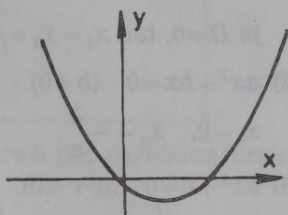
1. Ja  $a > 0$ , tad

$$E(f) = \left[ \frac{4ac - b^2}{4a}; +\infty \right).$$

Funkcija ir dilstoša intervālā  $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$

un augoša intervālā  $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ .

Funkcijas grafiks ir parabola ar virsotni punktā  $\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ , zari vērsti uz augšu (2.2. zīm.).



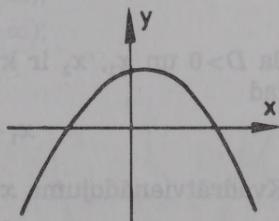
2.2. zīm.

2. Ja  $a < 0$ , tad

$$E(f) = \left(-\infty; \frac{4ac - b^2}{4a}\right].$$

Funkcija ir augoša intervālā  $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$

un dilstoša intervālā  $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ , zari vērsti uz leju (2.3. zīm.).



2.3. zīm.

## Kvadrātvienādojums $ax^2 + bx + c = 0$ ( $a \neq 0$ )

Diskriminants  $D = b^2 - 4ac$ .

Ja  $D > 0$ , tad kvadrātvienādojuma atrisinājumu kopa ir

$M = \{x_1, x_2\}$ , kur

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ja  $D = 0$ , tad  $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ .

Ja  $D < 0$ , tad  $M = \emptyset$ .

## Daži speciālgadījumi

1)  $x^2 + px + q = 0, \quad D = p^2 - 4q.$

Ja  $D > 0$ , tad  $x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \quad x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q};$

ja  $D = 0$ , tad  $x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}.$

2)  $ax^2 + bx = 0 \quad (b \neq 0).$

$x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{b}{a}.$

3)  $ax^2 + c = 0 \quad (a \cdot c < 0).$

$x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}, \quad x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}.$

## Vjeta teorēma

Ja  $D > 0$  un  $x_1, x_2$  ir kvadrātvienādojuma  $ax^2 + bx + c = 0$  saknes, tad

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Kvadrātvienādojuma  $x^2 + px + q = 0$  gadījumā  $x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q.$

## Kvadrāttrinoma sadalīšana reizinātājos

Ja  $D > 0$ , tad  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$

Ja  $D = 0$ , tad  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$

## Kvadrātnevienādības

$D$  — diskriminants,  $x_1, x_2$  — kvadrātnevienādojuma saknes ( $x_1 < x_2$ ),  
 $M$  — nevienādības atrisinājumu kopa.

1)  $ax^2 + bx + c > 0$

$D$	$a$	$M$
$> 0$	$> 0$	$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$
$> 0$	$< 0$	$(x_1; x_2)$
$= 0$	$> 0$	$(-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty) = \mathbf{R} - \{x_1\}$
$= 0$	$< 0$	$\emptyset$
$< 0$	$> 0$	$\mathbf{R}$
$< 0$	$< 0$	$\emptyset$

$$2) ax^2 + bx + c \geq 0$$

$D$	$a$	$M$
$> 0$	$> 0$	$(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$
$> 0$	$< 0$	$[x_1; x_2]$
$= 0$	$> 0$	$\mathbf{R}$
$= 0$	$< 0$	$\{x_1\}$
$< 0$	$> 0$	$\mathbf{R}$
$< 0$	$< 0$	$\emptyset$

Nevienādības  $ax^2 + bx + c < 0$  un  $ax^2 + bx + c \leq 0$  pēc pareizināšanas ar  $-1$  reducējas uz iepriekš aplūkotajām.

### Daži speciālgadījumi

$$1) x^2 - a^2 > 0, \quad M = (-\infty; -|a|) \cup (|a|; +\infty);$$

$$2) x^2 - a^2 \geq 0, \quad M = (-\infty; -|a|] \cup [|a|; +\infty);$$

$$3) x^2 - a^2 < 0, \quad M = (-|a|; |a|);$$

$$4) x^2 - a^2 \leq 0, \quad M = [-|a|; |a|];$$

$$5) x^2 + a^2 > 0 \quad (a \neq 0), \quad M = \mathbf{R};$$

$$6) x^2 + a^2 \geq 0, \quad M = \mathbf{R};$$

$$7) x^2 + a^2 < 0, \quad M = \emptyset;$$

$$8) x^2 + a^2 \leq 0 \quad (a \neq 0), \quad M = \emptyset.$$

### Bikvadrātvienādojumi

$$ax^4 + bx^2 + c = 0.$$

Reducējas uz kvadrātvienādojumu ar substitūciju  $x^2 = y$ .

### $n$ -tās pakāpes polinoms

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n.$$

$$D(f) = \mathbf{R},$$

$E(f)$  ir atkarīgs no tā, vai  $n$  ir pāra vai nepāra skaitlis, kā arī no  $a_0$  zīmes.

Vienādojuma

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

sakņu atrašanai vispārīgas formulas nav. Šī vienādojuma dažādo sakņu skaits var būt  $0, 1, 2, \dots, n$ .

## Polinomu dalīšana

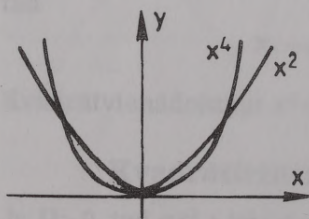
Piemērs.

$$\begin{array}{r}
 x^5 + 3x^4 - x^3 + 6x^2 - 2x + 1 \\
 -(x^5 \quad - 2x^3 + x^2) \\
 \hline
 3x^4 + x^3 + 5x^2 - 2x \\
 -(3x^4 \quad - 6x^2 + 3x) \\
 \hline
 x^3 + 11x^2 - 5x + 1 \\
 -(x^3 \quad - 2x + 1) \\
 \hline
 11x^2 - 3x
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l}
 x^3 - 2x + 1 \\
 x^2 + 3x + 1
 \end{array} \right.$$

Tātad

$$\frac{x^5 + 3x^4 - x^3 + 6x^2 - 2x + 1}{x^3 - 2x + 1} = x^2 + 3x + 1 + \frac{11x^2 - 3x}{x^3 - 2x + 1}$$

## 2.2. PAKĀPES FUNKCIJAS



2.4. zīm.

$$y = x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

a)  $\alpha = 2n, \quad n \in \mathbf{N}$  (2.4. zīm.):

$$y = x^{2n}.$$

$$D(f) = \mathbf{R}, \quad E(f) = [0; +\infty).$$

Funkcija  $x^{2n}$  ir pāra funkcija, dilstoša intervālā  $(-\infty; 0]$ , augoša intervālā  $[0; +\infty)$ .

b)  $\alpha = 2n - 1, \quad n \in \mathbf{N}$  (2.5. zīm.):

$$y = x^{2n-1}.$$

$$D(f) = \mathbf{R}, \quad E(f) = \mathbf{R}.$$

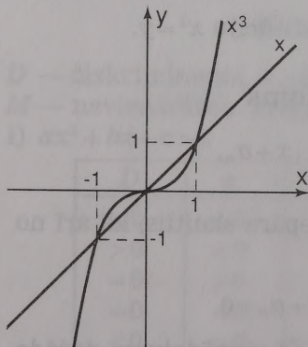
Funkcija  $x^{2n-1}$  ir nepāra funkcija, augoša.

c)  $\alpha = -2n, \quad n \in \mathbf{N}$  (2.6. zīm.):

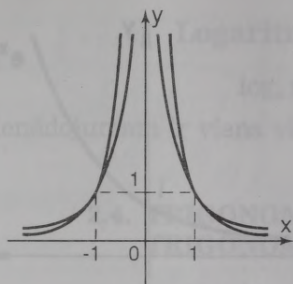
$$y = \frac{1}{x^{2n}}.$$

$$D(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}, \quad E(f) = (0; +\infty).$$

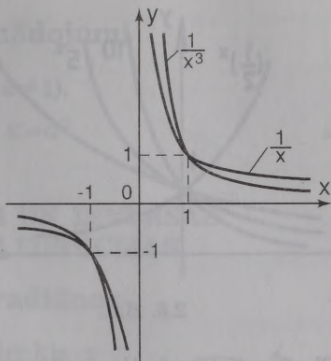
Pāra funkcija, augoša intervālā  $(-\infty; 0)$ , dilstoša intervālā  $(0; +\infty)$ .



2.5. zīm.



2.6. zīm.



2.7. zīm.

d)  $\alpha = -2n + 1$ ,  $n \in \mathbf{N}$  (2.7. zīm.).

$D(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ ;  $E(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ .

Nepāra funkcija, dilstoša intervālos  $(-\infty; 0)$  un  $(0; +\infty)$ .

e) Ja  $\alpha = \frac{m}{n}$  ( $m$  un  $n$  veseli skaitļi,  $n \neq \pm 1$ ), tad

$$y = x^\alpha = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}.$$

Izšķir šādus gadījumus.

1) Ja  $\alpha > 0$ ,  $f$  grafiks iet caur punktiem  $(0; 0)$  un  $(1; 1)$ . Ja  $n$  ir pāra skaitlis, tad  $D(f) = [0; +\infty)$ ; ja  $n$  ir nepāra skaitlis, tad  $D(f) = (-\infty; \infty)$ .

Ja  $n$  ir nepāra, bet  $m$  — pāra skaitlis, tad grafiks ir simetrisks pret  $y$  asi; ja  $n$  un  $m$  ir nepāra skaitļi, tad grafiks simetrisks pret koordinātu sākumpunktu.

Ja  $n > m$ , tad grafika pieskare punktā  $(0; 0)$  ir  $Oy$  ass.

2) Ja  $\alpha < 0$ , tad punktā  $x = 0$   $f$  nav definēta ( $x = 0$  ir pārtraukuma punkts).

Ja  $n$  ir pāra skaitlis, tad  $D(f) = (0; +\infty)$ , ja  $n$  — nepāra skaitlis, tad  $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ .

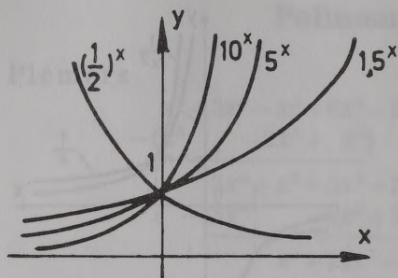
Funkciju grafiki iet caur punktu  $(1; 1)$ . Grafiku asimptotas ir koordinātu assis. Ekstrēmu nav.

### 2.3. EKSPONENTFUNKCIJAS UN LOGARITMISKĀS FUNKCIJAS

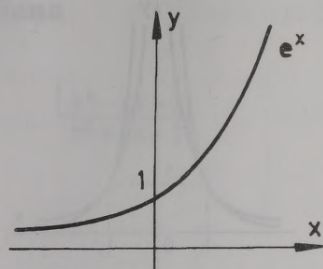
$$y = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1 \quad (2.8. \text{zīm.}).$$

$D(f) = \mathbf{R}$ ,  $E(f) = (0; +\infty)$ .

Funkcija augoša, ja  $a > 1$ ; ja turpretī  $0 < a < 1$ , tad funkcija ir dilstoša.



2.8. zīm.



2.9. zīm.

Ekspontfunkcija ir logaritmiskās funkcijas inversā (apvērstā) funkcija, jo visiem  $x \in \mathbf{R}$

$$a^{\log_a x} = x.$$

Ja  $a = e$ , tad  $y = e^x$  — eksponente (2.9. zīm.).

### Ekspontvienādojumi $a^x = b$ ( $a > 0$ , $a \neq 1$ )

a) Ja  $b > 0$ , tad vienādojumam ir viens vienīgs atrisinājums

$$x = \log_a b;$$

b) ja  $b \leq 0$ , tad vienādojumam atrisinājuma nav.

### Logaritmiskās funkcijas

$$y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1) \quad (2.10. \text{ zīm.}).$$

$$D(f) = (0; +\infty), \quad E(f) = \mathbf{R}.$$

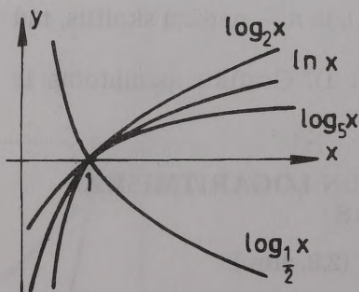
Ja  $0 < a < 1$ , funkcija ir dilstoša; ja  $a > 1$ , — augoša.

Logaritmiskā funkcija ir eksponentfunkcijas inversā funkcija, jo

$$\log_a a^x = x \quad \text{visiem } x \in \mathbf{R}.$$

Ja  $a = e$ , tad logaritmisko funkciju sauc par *natūralo logaritmu* un apzīmē šādi:

$$y = \ln x.$$



2.10. zīm.

## Logaritmiskie vienādojumi

$$\log_a x = b \quad (a > 0, a \neq 1).$$

Vienādojumam ir viena vienīga sakne  $x = a^b$ .

## 2.4. TRIGONOMETRISKĀS UN INVERSĀS TRIGONOMETRISKĀS FUNKCIJAS

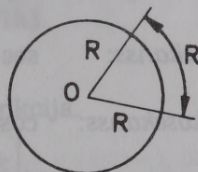
### Leņķu mērīšana radiānos

Riņķa līnijas (saīsināti: r. l.) centra leņķis  $x$  mērīts radiānos:

$$x = \frac{l}{R},$$

kur  $l$  — r. l. loka garums,  $R$  — rādiuss.

1 radiāns (rad) ir centra leņķis, kas balstās uz r. l. loku  $l = R$  (2.11. zīm.).



2.11. zīm.

### Sakarības starp leņķa lieluma mērvienībām

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45'' \text{ jeb } 1 \text{ rad} = 57,29577^\circ \dots,$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} = 0,017453 \dots \text{ rad},$$

$$1' = \frac{\pi}{180 \cdot 60} \text{ rad}, \quad 1'' = \frac{\pi}{180 \cdot 60 \cdot 60} \text{ rad},$$

$$x^\circ = \frac{180}{\pi} x \text{ (rad)}, \quad x \text{ (rad)} = \frac{\pi}{180} x^\circ.$$

$$\text{Piemēram, } 360^\circ = 2\pi, \quad 180^\circ = \pi, \quad 90^\circ = \frac{\pi}{2}, \quad 270^\circ = \frac{3\pi}{2}.$$

### Trigonometriskās funkcijas

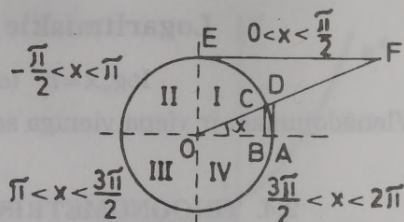
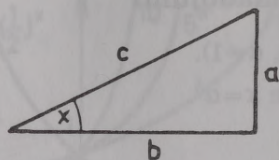
2.12. zīmējumā redzams taisnleņķa  $\triangle$  un trigonometriskais riņķis ( $R = 1$ ).

*sinuss:*

$$\sin x = BC = \frac{a}{c};$$

*kosinuss:*

$$\cos x = OB = \frac{b}{c};$$



2.12. zīm.

tangenss:  $\operatorname{tg} x = AD = \frac{a}{b}$ ;

kotangenss:  $\operatorname{ctg} x = EF = \frac{b}{a}$ ;

sekanss:  $\sec x = OD = \frac{c}{b}$  ( $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ );

kosekanss:  $\operatorname{cosec} x = OF = \frac{c}{a}$  ( $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$ ).

### Trigonometrisko funkciju vērtību zīmes

Kvadrants	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	$\sec x$	$\operatorname{cosec} x$
I	+	+	+	+	+	+
II	+	-	-	-	-	+
III	-	-	+	+	-	-
IV	-	+	-	-	+	-

### Trigonometrisko funkciju raksturojums

	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
$D(f)$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R} \setminus \left\{ (2k+1) \frac{\pi}{2} \right\}$	$\mathbf{R} \setminus \{k\pi\}$
$E(f)$	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Nulles	$k\pi$	$\frac{\pi}{2} + k\pi$	$k\pi$	$\frac{\pi}{2} + k\pi$
Poli	—	—	$(2k+1) \frac{\pi}{2}$	$k\pi$
Ekstrēmi	$\frac{\pi}{2} + k\pi$	$k\pi$	—	—

	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
Pārlietuma punkti	$k\pi$	$\frac{\pi}{2} + k\pi$	$k\pi$	$\frac{\pi}{2} + k\pi$
Asimptotas	—	—	$y = (2k+1)\frac{\pi}{2}$	$y = k\pi$
Periods	$2\pi$	$2\pi$	$\pi$	$\pi$

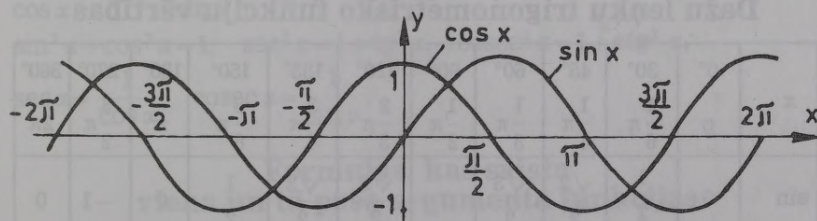
## Trigonometrisko funkciju grafiki

1.  $y = \sin x$  (2.13. zīm.).

Grafiks — *sinusoīda*. Periods  $T = 2\pi$ . Nepāra funkcija.

Funkcija augoša intervālos  $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$ .

Funkcija dilstoša intervālos  $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).



2.13. zīm.

2.  $y = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$  (2.13. zīm.).

Grafiks ir *sinusoīda*. Periods  $T = 2\pi$ . Pāra funkcija.

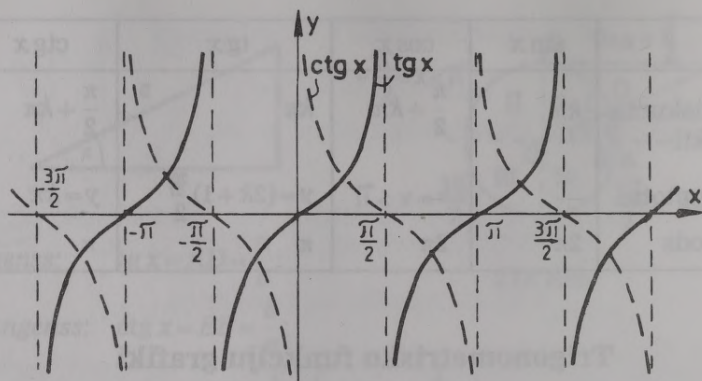
Funkcija augoša intervālos  $[\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k]$ .

Funkcija dilstoša intervālos  $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

3.  $y = \operatorname{tg} x$  (2.14. zīm.).

Grafiks — *tangensoīda*. Nepāra funkcija. Periods  $T = \pi$ .

Funkcija augoša katrā intervālā  $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).



2.14. zīm.

4.  $y = \text{ctg } x = -\text{tg} \left( \frac{\pi}{2} + x \right)$  (2.14. zīm.).

Grafiks — *tangensoīda*. Nepāra funkcija. Periods  $T = \pi$ .

Funkcija dilstoša katrā intervālā  $(\pi k; \pi + \pi k)$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ).

### Dažu leņķu trigonometrisko funkciju vērtības

$x$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
$x$	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$2\pi$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\mp\infty$	0
ctg	$\mp\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\mp\infty$	0	$\mp\infty$
sec	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	$\pm\infty$	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1	$\mp\infty$	1
cosec	$\mp\infty$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	$\pm\infty$	-1	$\mp\infty$

## Redukcijas formulas ( $0 < x < \frac{\pi}{2}$ )

Argu- ments Fun- kcija	$-x$	$90^\circ \pm x$ $(\frac{\pi}{2} \pm x)$	$180^\circ \pm x$ $(\pi \pm x)$	$270^\circ \pm x$ $(\frac{3}{2}\pi \pm x)$	$360^\circ \pm x$ $(2\pi \pm x)$
sin	$-\sin x$	$\cos x$	$\mp \sin x$	$-\cos x$	$\pm \sin x$
cos	$\cos x$	$\mp \sin x$	$-\cos x$	$\pm \sin x$	$\cos x$
tg	$-\operatorname{tg} x$	$\mp \operatorname{ctg} x$	$\pm \operatorname{tg} x$	$\mp \operatorname{ctg} x$	$\pm \operatorname{tg} x$
ctg	$-\operatorname{ctg} x$	$\mp \operatorname{tg} x$	$\pm \operatorname{ctg} x$	$\mp \operatorname{tg} x$	$\pm \operatorname{ctg} x$

Ja  $x > 360^\circ$ , tad

$$\sin(360^\circ \cdot n + x) = \sin x, \quad \cos(360^\circ \cdot n + x) = \cos x;$$

savukārt

$$\operatorname{tg}(180^\circ \cdot n + x) = \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg}(180^\circ \cdot n + x) = \operatorname{ctg} x.$$

### Trigonometrijas formulas. Pamatidentitātes

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha, \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1,$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \sec^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha, \quad \operatorname{cosec}^2 \alpha = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha,$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

### Formulas, kas saista vienu un tā paša argumenta funkcijas

Formulās pirms saknes ir zīme + vai - atkarībā no tā, kurā kvadrantā atrodas leņķis  $\alpha$ .

$$\sin \alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec} \alpha} = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}},$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sec \alpha} = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} = \sqrt{\sec^2 \alpha - 1},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 \alpha - 1}}.$$

## Divkārša un trīskārša leņķa formulas

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha, & \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \\ \sin 3\alpha &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha, & \cos 3\alpha &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha, \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, & \operatorname{ctg} 2\alpha &= \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}, \\ \operatorname{tg} 3\alpha &= \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}, & \operatorname{ctg} 3\alpha &= \frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha - 3 \operatorname{ctg} \alpha}{3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}.\end{aligned}$$

## Pusleņķa formulas

$$\begin{aligned}\sin \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, & \cos \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}, \\ \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}.\end{aligned}$$

## Funkciju pakāpes

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha), & \cos^2 \alpha &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha), \\ \sin^3 \alpha &= \frac{1}{4}(3 \sin \alpha - \sin 3\alpha), & \cos^3 \alpha &= \frac{1}{4}(\cos 3\alpha + 3 \cos \alpha), \\ \sin^4 \alpha &= \frac{1}{8}(\cos 4\alpha - 4 \cos 2\alpha + 3), \\ \cos^4 \alpha &= \frac{1}{8}(\cos 4\alpha + 4 \cos 2\alpha + 3).\end{aligned}$$

## Funkcijas no leņķu summas un starpības

$$\begin{aligned}\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta, \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta, \\ \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, & \operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) &= \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha}.\end{aligned}$$

## Funkciju summa un starpība

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad \operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \pm \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin \alpha \sin \beta},$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \sin \beta}, \quad \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cos \beta}.$$

## Funkciju reizinājums

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)),$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)),$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)).$$

## Sinusoidāli lielumi

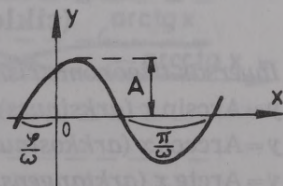
Sinusoidāls lielums jeb *harmoniska funkcija* ir

$$y = f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) = A \sin\left(\omega\left(x + \frac{\varphi}{\omega}\right)\right),$$

kur  $A$  — amplitūda,  $\omega$  — leņķiskā frekvence,  $\varphi$  — fāze.

Funkcijas grafiku (2.15. zīm.) (vispārināto sinusoīdu) iegūst no  $\sin x$  grafika šādi:

- 1) to saspiežot (ja  $|A| < 1$ ) vai izstiepjot (ja  $|A| > 1$ )  $y$  ass virzienā  $A$  reizes (turklāt atspoguļojot pret abscisu asi, ja  $A < 0$ );



2.15. zīm.

2) izstiepjot  $x$  ass virzienā  $\frac{1}{\omega}$  reizes, t. i., periodu  $T=2\pi$  aizstājot ar periodu  $\frac{2\pi}{\omega}$ ;

3) pārvietojot abscisu ass virzienā par  $\left(-\frac{\varphi}{\omega}\right)$  vienībām.

Funkcijas  $y$  vērtības:  $-A \leq y \leq A$ ; maksimumi atrodas punktos  $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi + 2\pi n\right)/\omega$ , bet minimumi — punktos  $\left(-\frac{\pi}{2} - \varphi + 2\pi n\right)/\omega$ .

**Fizikālā interpretācija.** Ja  $x=t$  ir laiks, tad  $f(t)=A \sin(\omega t + \varphi)$  raksturo harmoniskās svārstības;  $A$  — *svārstību amplitūda*;  $\varphi$  — *sākuma fāze*;  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  — *svārstību periods*;  $\frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$  — *svārstību frekvence*;  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  — *leņķiskā jeb cikliskā frekvence* (svārstību skaits  $2\pi$  sekundēs).

Funkciju  $f(t)$  var pierakstīt arī šādi:

$$f(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t,$$

kur  $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$ .

Ja svārstības summējas (turklāt tām ir viena un tā pati frekvence), tad arī to summai ir tāda pati frekvence:

$$\sum_{i=1}^n A_i \sin(\omega t + \varphi_i) = A \sin(\omega t + \varphi).$$

Ja  $n=2$ , tad  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$ ,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

## Trigonometrisko funkciju inversās (ciklometriskās) funkcijas

*Inversās trigonometriskās funkcijas ir*

$y = \operatorname{Arcsin} x$  (*arksinuss*), ja  $x = \sin y$ ,

$y = \operatorname{Arccos} x$  (*arkkosinuss*), ja  $x = \cos y$ ,

$y = \operatorname{Arctg} x$  (*arktangenšs*), ja  $x = \operatorname{tg} y$ ,

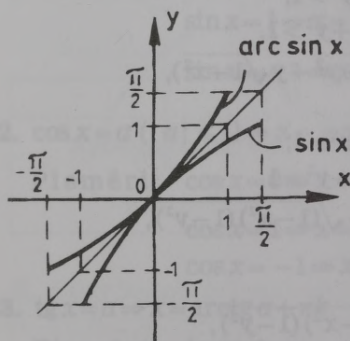
$y = \operatorname{Arctg} x$  (*arkkotangenšs*), ja  $x = \operatorname{ctg} y$  ( $y$  mērīts radiānos).

To galvenās vērtības  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ,  $\operatorname{arctg} x$ ,  $\operatorname{arcctg} x$  raksturo šāda tabula:

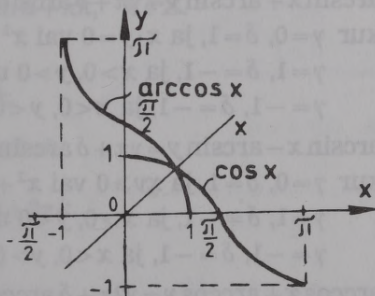
	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arcctg} x$
$D(f)$	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
$E(f)$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	$[0; \pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	$(0; \pi)$
Asimptotas	—	—	$y = -\frac{\pi}{2};$ $y = \frac{\pi}{2}$	$y = 0; y = \pi$

### Ciklometrisko funkciju grafiki

1.  $y = \arcsin x$  (2.16. zīm.).  
Nepāra funkcija, augoša.



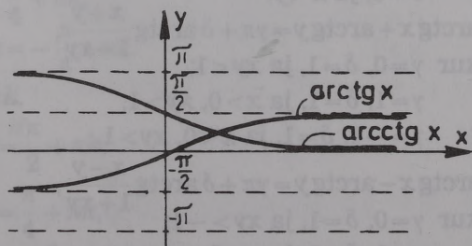
2.16. zīm.



2.17. zīm.

2.  $y = \arccos x$  (2.17. zīm.).  
Dilstoša funkcija.

3.  $y = \operatorname{arctg} x$  (2.18. zīm.).  
Nepāra funkcija, augoša.



2.18. zīm.

4.  $y = \operatorname{arcctg} x$  (2.18. zīm.).  
Dilstoša funkcija.

## Formulas, kas saista viena un tā paša argumenta inversās trigonometriskās funkcijas

$$\arcsin x = -\arcsin(-x) = \frac{\pi}{2} - \arccos x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\arccos x = \pi - \arccos(-x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\operatorname{arctg} x = -\operatorname{arctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\operatorname{arccotg} x = \pi - \operatorname{arccotg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

### Ciklometrisko funkciju summa un starpība

$$\arcsin x + \arcsin y = \gamma\pi + \delta \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}),$$

kur  $\gamma=0, \delta=1$ , ja  $x \cdot y \geq 0$  vai  $x^2 + y^2 \leq 1$ ;

$\gamma=1, \delta=-1$ , ja  $x > 0, y > 0$  un  $x^2 + y^2 > 1$ ;

$\gamma=-1, \delta=-1$ , ja  $x < 0, y < 0$  un  $x^2 + y^2 > 1$ .

$$\arcsin x - \arcsin y = \gamma\pi + \delta \arcsin(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}),$$

kur  $\gamma=0, \delta=1$ , ja  $xy \geq 0$  vai  $x^2 + y^2 \leq 1$ ;

$\gamma=1, \delta=-1$ , ja  $x > 0, y < 0$  un  $x^2 + y^2 > 1$ ;

$\gamma=-1, \delta=-1$ , ja  $x < 0, y > 0$  un  $x^2 + y^2 > 1$ .

$$\arccos x + \arccos y = \gamma 2\pi + \delta \arccos(xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}),$$

kur  $\gamma=0, \delta=1$ , ja  $x+y \geq 0$ ;

$\gamma=1, \delta=-1$ , ja  $x+y < 0$ .

$$\arccos x - \arccos y = \delta \arccos(xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}),$$

kur  $\delta=-1$ , ja  $x \geq y$ ;

$\delta=1$ , ja  $x < y$ .

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \gamma\pi + \delta \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy},$$

kur  $\gamma=0, \delta=1$ , ja  $xy < 1$ ;

$\gamma=1, \delta=1$ , ja  $x > 0, xy > 1$ ;

$\gamma=-1, \delta=1$ , ja  $x < 0, xy > 1$ .

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \gamma\pi + \delta \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy},$$

kur  $\gamma=0, \delta=1$ , ja  $xy > -1$ ;

$\gamma=1, \delta=1$ , ja  $x > 0, xy < -1$ ;

$\gamma=-1, \delta=1$ , ja  $x < 0, xy < -1$ .

## Sakarības starp ciklometriskām un logaritmiskām funkcijām

$$\arcsin x = -i \ln(ix + \sqrt{1-x^2}),$$

$$\arccos x = -i \ln(x + \sqrt{x^2-1}),$$

$$\arctg x = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+ix}{1-ix},$$

$$\operatorname{arctctg} x = -\frac{1}{2i} \ln \frac{ix+1}{ix-1} = \frac{1}{2i} \ln \frac{ix-1}{ix+1}.$$

## Trigonometriskie vienādojumi un nevienādības

1.  $\sin x = a (|a| \leq 1) \Rightarrow x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Piemēri:  $\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k,$

$$\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,$$

$$\sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

2.  $\cos x = a (|a| \leq 1) \Rightarrow x = \pm \arccos a + 2\pi k.$

Piemēri:  $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k,$

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi k,$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi k.$$

3.  $\operatorname{tg} x = a \Rightarrow x = \arctg a + \pi k.$

Piemēri:  $\operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow x = \pi k,$

$$\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k,$$

$$\operatorname{tg} x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi k.$$

4.  $\operatorname{ctg} x = a \Rightarrow x = \operatorname{arctctg} a + \pi k.$

Piemēri:  $\operatorname{ctg} x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k,$

$$\operatorname{ctg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k,$$

$$\operatorname{ctg} x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + \pi k.$$

## Nevienādības

1.  $\sin x < a$ .

$M$  — nevienādības atrisinājumu kopa,  $k \in \mathbf{Z}$ .

$a$	$M$
$-1 < a \leq 1$	$-\pi - \arcsin a + 2\pi k < x < \arcsin a + 2\pi k$
$a > 1$	$\mathbf{R}$
$a \leq -1$	$\emptyset$

2.  $\sin x > a$ .

$a$	$M$
$-1 \leq a < 1$	$\arcsin a + 2\pi k < x < \pi - \arcsin a + 2\pi k$
$a < -1$	$\mathbf{R}$
$a \geq 1$	$\emptyset$

3.  $\cos x < a$ .

$a$	$M$
$-1 < a \leq 1$	$\arccos a + 2\pi k < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi k$
$a > 1$	$\mathbf{R}$
$a \leq -1$	$\emptyset$

4.  $\cos x > a$ .

$a$	$M$
$-1 \leq a < 1$	$-\arccos a + 2\pi k < x < \arccos a + 2\pi k$
$a < -1$	$\mathbf{R}$
$a \geq 1$	$\emptyset$

5.  $\operatorname{tg} x < a \Rightarrow -\frac{\pi}{2} + \pi k < x < \operatorname{arctg} a + \pi k$ .

6.  $\operatorname{tg} x > a \Rightarrow \operatorname{arctg} a + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$ .

7.  $\operatorname{ctg} x < a \Rightarrow \operatorname{arcctg} a + \pi k < x < \pi + \pi k$ .

8.  $\operatorname{ctg} x > a \Rightarrow \pi k < x < \operatorname{arcctg} a + \pi k$ .

## 2.5. HIPERBOLISKĀS UN INVERSĀS HIPERBOLISKĀS FUNKCIJAS

1. *Hiperboliskais sinuss*  $y = \text{sh } x$ ,  $\text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .

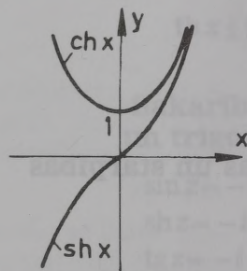
$D(f) = \mathbf{R}$ ,  $E(f) = \mathbf{R}$ .

Nepāra funkcija, augoša (2.19. zīm.).

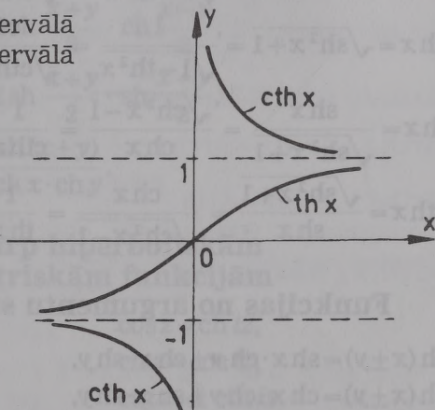
2. *Hiperboliskais kosinuss*  $y = \text{ch } x$ ,  $\text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ .

$D(f) = \mathbf{R}$ ,  $E(f) = [1; +\infty)$ .

Pāra funkcija, dilstoša intervālā  $(-\infty; 0]$  un augoša intervālā  $[0; +\infty)$  (2.19. zīm.).



2.19. zīm.



2.20. zīm.

3. *Hiperboliskais tangenss*  $y = \text{th } x$ ,  $\text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ .

$D(f) = \mathbf{R}$ ,  $E(f) = (-1; 1)$ .

Nepāra funkcija, augoša (2.20. zīm.).

4. *Hiperboliskais kotangenss*  $y = \text{cth } x$ ,  $\text{cth } x = \frac{\text{ch } x}{\text{sh } x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ .

$D(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ ,  $E(f) = \mathbf{R} \setminus [-1; 1]$ .

Nepāra funkcija, dilstoša intervālos  $(-\infty; 0)$  un  $(0; +\infty)$  (2.20. zīm.).

### Hiperboliskās trigonometrijas formulas

Hiperboliskām funkcijām ir spēkā formulas, kuras ir līdzīgas parastās trigonometrijas formulām.

## Pamatidentitātes

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{th} x \cdot \operatorname{ch} x = 1, \quad \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{th} x, \quad \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \operatorname{cth} x.$$

## Formulas, kuras saista viena un tā paša argumenta funkcijas

$$\operatorname{sh} x = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1} = \frac{\operatorname{th} x}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cth}^2 x - 1}},$$

$$\operatorname{ch} x = \sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}} = \frac{\operatorname{cth} x}{\sqrt{\operatorname{cth}^2 x - 1}},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}}{\operatorname{ch} x} = \frac{1}{\operatorname{cth} x},$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1}}{\operatorname{sh} x} = \frac{\operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}} = \frac{1}{\operatorname{th} x}.$$

## Funkcijas no argumentu summas un starpības

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \cdot \operatorname{th} y}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{1 \pm \operatorname{cth} x \cdot \operatorname{cth} y}{\operatorname{cth} x \pm \operatorname{cth} y}.$$

## Divkāŗša argumenta formulas

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x,$$

$$\operatorname{th} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}, \quad \operatorname{cth} 2x = \frac{1 + \operatorname{cth}^2 x}{2 \operatorname{cth} x}.$$

## Muavra formula

$$(\operatorname{ch} x \pm \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch} nx \pm \operatorname{sh} nx.$$

## Pusargumenta formulas

$$\operatorname{sh} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} (\operatorname{ch} x - 1)} \quad (\text{«+» zīme, ja } x > 0, \text{ un «-» zīme, ja } x < 0),$$

$$\operatorname{ch} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{ch} x + 1)},$$

$$\operatorname{th} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + 1}, \quad \operatorname{cth} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1} = \frac{\operatorname{ch} x + 1}{\operatorname{sh} x}.$$

### Funkciju summa un starpība

$$\operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x \pm y}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{x \mp y}{2},$$

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x + y}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{x - y}{2},$$

$$\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x + y}{2} \cdot \operatorname{sh} \frac{x - y}{2},$$

$$\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y = \frac{\operatorname{sh}(x \pm y)}{\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y}.$$

### Sakarības starp hiperboliskām un trigonometriskām funkcijām

$$\sin z = -i \operatorname{sh} iz,$$

$$\cos z = \operatorname{ch} iz,$$

$$\operatorname{sh} z = -i \sin iz,$$

$$\operatorname{ch} z = \cos iz,$$

$$\operatorname{tg} z = -i \operatorname{th} iz,$$

$$\operatorname{ctg} z = i \operatorname{cth} iz,$$

$$\operatorname{th} z = -i \operatorname{tg} iz,$$

$$\operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg} iz.$$

### Inversās hiperboliskās funkcijas

Par mainīgā  $x$  *inversām hiperboliskām funkcijām* sauc lielumus, kurus definē ar šādām vienādībām:

$$\text{Area sinuss:} \quad y = \operatorname{Arsh} x, \text{ ja } x = \operatorname{sh} y,$$

$$\text{Area kosinuss:} \quad y = \operatorname{Arch} x, \text{ ja } x = \operatorname{ch} y,$$

$$\text{Area tangenss:} \quad y = \operatorname{Arth} x, \text{ ja } x = \operatorname{th} y,$$

$$\text{Area kotangenss:} \quad y = \operatorname{Arcth} x, \text{ ja } x = \operatorname{cth} y.$$

### Inverso hiperbolisko funkciju izteikšana ar logaritmisko funkciju

$$\operatorname{Arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad \operatorname{Arch} x = \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (x \geq 1),$$

$$\operatorname{Arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (|x| < 1), \quad \operatorname{Arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \quad (|x| > 1).$$

## Sakars starp inversām hiperboliskām funkcijām

$$\operatorname{Arsh} x = \pm \operatorname{Arch} \sqrt{x^2 + 1} = \operatorname{Arth} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \operatorname{Arcth} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x},$$

$$\operatorname{Arch} x = \pm \operatorname{Arsh} \sqrt{x^2 - 1} = \pm \operatorname{Arth} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \pm \operatorname{Arcth} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

$$\operatorname{Arth} x = \operatorname{Arsh} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \pm \operatorname{Arch} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{Arcth} \frac{1}{x},$$

$$\operatorname{Arcth} x = \operatorname{Arsh} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \pm \operatorname{Arch} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{Arth} \frac{1}{x},$$

$$\operatorname{Arsh} x \pm \operatorname{Arsh} y = \operatorname{Arsh} (x\sqrt{1 + y^2} \pm y\sqrt{1 + x^2}),$$

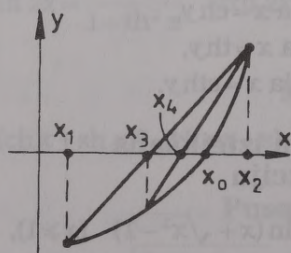
$$\operatorname{Arch} x \pm \operatorname{Arch} y = \operatorname{Arch} (xy \pm \sqrt{(x^2 - 1)(y^2 - 1)}),$$

$$\operatorname{Arth} x \pm \operatorname{Arth} y = \operatorname{Arth} \frac{x \pm y}{1 \pm xy},$$

$$\operatorname{Arcth} x \pm \operatorname{Arcth} y = \operatorname{Arcth} \frac{1 \pm x \cdot y}{x \pm y}.$$

## 2.6. VIENĀDOJUMA SAKŅU TUVINĀTAS ATRAŠANAS METODES UN INTERPOLĀCIJAS POLINOMI

### Hordu jeb lineārās interpolācijas metode



2.21. zīm.

Ja vienādojumam  $f(x) = 0$  intervālā  $(x_1; x_2)$  ir sakne  $x_0$  un  $f(x)$  ir nepārtraukta funkcija, tad par saknes tuvinātu vērtību var ņemt skaitli

$$x_3 = \frac{(x_2 - x_1)f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} \quad (2.21. \text{zīm.}).$$

Lietojot šo metodi atkārtoti, iegūst nākošos saknes  $x_0$  tuvinājumus  $x_4, x_5, \dots, x_n, \dots$ :

$$x_n = \frac{(x_{n-1} - x_{n-2})f(x_{n-2})}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}.$$

## Nūtona jeb pieskaru metode

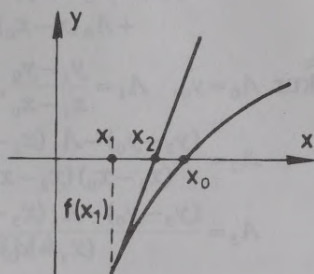
Ja funkcija  $f(x)$  ir diferencējama un  $x_1$  ir vienādojuma  $f(x)=0$  saknes  $x_0$  tuvināta vērtība, tad par saknes nākošo tuvinājumu var ņemt skaitli

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \quad f'(x_1) \neq 0.$$

Vispārīgajā gadījumā  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ .

Metodi var lietot, ja (2.22. zīm.)

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right| \leq m < 1.$$



2.22. zīm.

## Iterāciju metode

Vienādojums  $f(x)=0$  ir jāpārveido ekvivalentā vienādojumā  $x = \varphi(x)$ . Ja  $x_1$  ir saknes  $x_0$  tuvināta vērtība, tad par saknes nākamajiem tuvinājumiem var ņemt skaitļus

$$x_2 = \varphi(x_1), \quad x_3 = \varphi(x_2), \quad \dots, \quad x_{n+1} = \varphi(x_n).$$

Metodi var lietot, ja  $|\varphi'(x)| \leq m < 1$ . Praktiski metodi ir vērts lietot, ja  $|\varphi'(x)| < 0,8$ . Gadījumā, ja  $|\varphi'(x)| > 1$ , metodi var lietot inversajai funkcijai.

## Interpolācijas polinomi

Ja plaknē ir doti  $n+1$  punkti  $M_0(x_0, y_0), M_1(x_1, y_1), \dots, M_n(x_n, y_n)$ , tad var izveidot  $n$ -tās pakāpes polinomu  $P_n(x)$ , kuram  $P_n(x_i) = y_i$ ,  $i=0, 1, 2, \dots, n$ .  $P_n(x)$  sauc par *interpolācijas polinomu*.

*Lagranža interpolācijas polinoms:*

$$\begin{aligned} P_n(x) = & y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} + \\ & + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} + \dots + \\ & + y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} + \dots + \\ & + y_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}. \end{aligned}$$

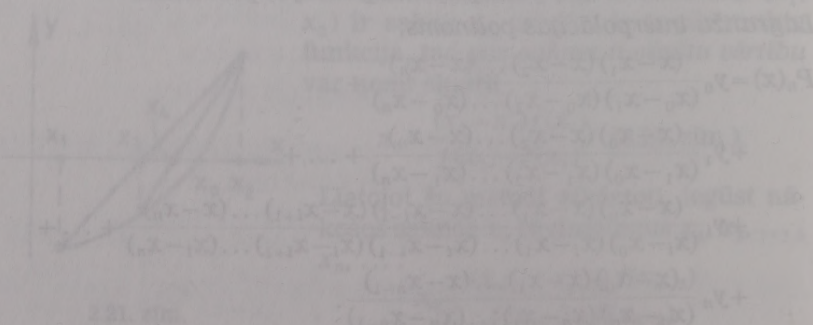
Nūtona interpolācijas polinoms:

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + A_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}),$$

kur  $A_0 = y_0$ ,  $A_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ ,

$$A_2 = \frac{(y_2 - y_0) - A_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)},$$

$$A_3 = \frac{(y_3 - y_0) - A_1(x_3 - x_0) - A_2(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}, \dots$$



### 3. ĢEOMETRIJA

#### 3.1. PLANIMETRIJA

##### Apzīmējumi

$\triangle$  — trijstūris,

$AB$  — nogrieznis ( $A, B$  — galapunkti),

$\sphericalangle ABC$ ,  $\sphericalangle B$  — leņķis ar virsotni punktā  $B$ ,

$\sphericalangle (a, b)$  — leņķis, kura malas ir stari  $a$  un  $b$ ,

$1^\circ$  — viens grāds,  $\frac{1}{180}$  no izvērstā leņķa,

$1'$  — viena minūte,  $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$ ,

$1''$  — viena sekunde,  $1'' = \left(\frac{1}{60}\right)'$ ,

$1 \text{ rad}$  — viens radiāns,  $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$ .

Leņķa mērus saista sakarība

$$\alpha^\circ = \alpha \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad.}$$

##### Trijstūris ( $\triangle$ )

Divu  $\triangle$  malu summa ir lielāka nekā trešā mala:  $a + b > c$  (3.1. zīm.).

Iekšējo leņķu summa:  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ .

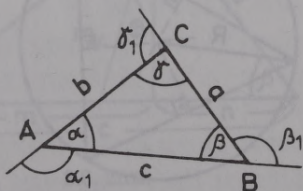
Ārējo leņķu summa:  $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 360^\circ$ ,

$\alpha_1 = \beta + \gamma$ ,  $\beta_1 = \alpha + \gamma$ ,  $\gamma_1 = \alpha + \beta$ .

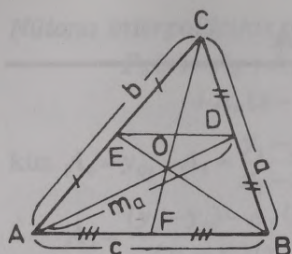
Sinusu teorēma:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

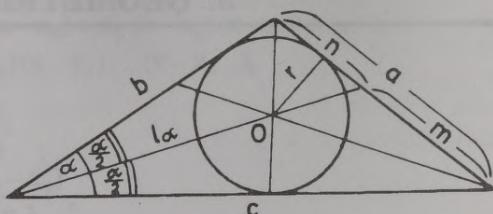
( $R$  — ap  $\triangle$  apvilktais r. l. rādiuss).



3.1. zīm.



3.2. zīm.



3.3. zīm.

*Kosinusu teorēma:*

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \end{aligned}$$

*Perimetrs*  $2p = a + b + c$  ( $p$  — *pusperimetrs*).

$\triangle$  *mediāna* ir taisnes nogrieznis, kas savieno  $\triangle$  virsotni ar pretējās malas viduspunktu.  $\triangle$  *mediānas krustojas vienā punktā* —  $\triangle$  *smaguma centrā*  $O$  (3.2. zīm.). Šajā punktā katra mediāna sadalās attiecībā 2:1 (skaitot no virsotnes):

$$OA : OD = OB : OE = OC : OF = 2 : 1.$$

Mediānas  $AD = m_a$  garums:

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}.$$

$\triangle$  *bisektrise* ir taisnes nogrieznis, kas sadala  $\triangle$  iekšējo leņķi uz pusēm.  $\triangle$  *bisektrises krustojas vienā punktā*, kas ir  $\triangle$  *ievilktais r. l. centrs* (3.3. zīm.);  $r$  — *ievilktais r. l. rādiuss*.

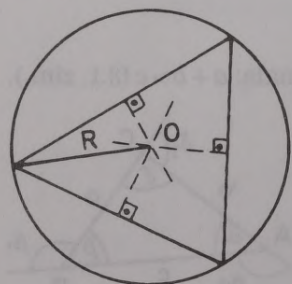
$l_\alpha$  *bisektrises garums:*

$$l_\alpha = \frac{1}{b+c} \sqrt{bc((b+c)^2 - a^2)}.$$

Ja bisektrise sadala malu  $a$  nogriežņos  $m$  un  $n$ , tad  $\frac{m}{n} = \frac{c}{b}$ .

$\triangle$  *malas vidusperpendikuls* ir taisne, kas perpendikulāra  $\triangle$  malai un iet caur tās viduspunktu.

$\triangle$  *malu vidusperpendikuli krustojas vienā punktā*  $O$ , kas ir  $\triangle$ -im *apvilktās r. l. centrs* (3.4. zīm.);  $R$  — *apvilktās r. l. rādiuss*.



3.4. zīm.

$\triangle$  *augstums* ir perpendikula nogrieznis, kas novilkts no  $\triangle$  virsotnes pret pretējo malu vai tās pagarinājumu (3.5. zīm.  $h_c$ ).

$\triangle$  *augstumi krustojas vienā punktā* — ortocentrā.

Augstuma  $CK = h_c$  garums:

$$h_c = \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Augstumu īpašība:

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

Vienādmalu  $\triangle$  ( $a=b=c$ ) vienā un tajā pašā punktā atrodas ievilktais un apvilktās r. l. centrs, smaguma centrs un ortocentrs.

$\triangle$  *viduslīnija* ir taisnes nogrieznis, kas savieno  $\triangle$  divu malu viduspunktus (3.2. zīm.  $ED$ ), turklāt tā ir 1) paralēla pamatam ( $ED \parallel AB$ ), 2) vienāda ar pamata pusi ( $ED = \frac{1}{2}AB$ ).

$$\begin{aligned} \triangle \text{ laukums: } S &= \frac{1}{2} ch_c = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{2} ac \sin \beta = \\ &= \frac{1}{2} bc \sin \alpha = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (Hērona formula)} = \frac{abc}{4R} = pr. \end{aligned}$$

$$\text{Taisnleņķa } \triangle \text{ (3.6. zīm.): } \gamma = \frac{\pi}{2} = 90^\circ, \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

*Pitagora teorēma:*  $a^2 + b^2 = c^2$ , kur  $a, b$  — katetes;  $c$  — hipotenūza.

Augstums  $h^2 = m \cdot n$ ;

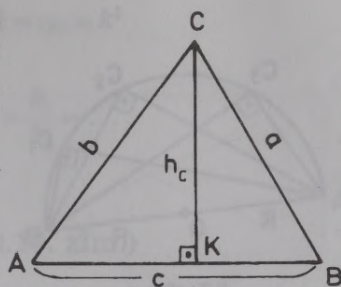
$$b^2 = mc, \quad a^2 = nc.$$

$$\text{Mediāna } m_c = \frac{c}{2}, \quad R = \frac{c}{2};$$

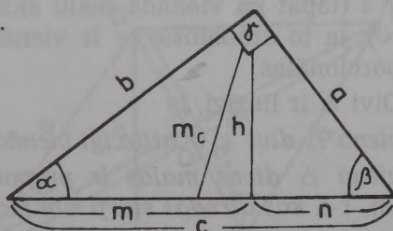
$$r = \frac{1}{2}(a+b-c), \quad S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch.$$

$$a = c \sin \alpha = c \cos \beta, \quad b = c \sin \beta = c \cos \alpha, \quad 3.6. \text{ zīm.}$$

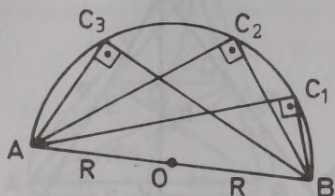
$$a = b \operatorname{tg} \alpha = b \operatorname{ctg} \beta, \quad b = a \operatorname{tg} \beta = a \operatorname{ctg} \alpha.$$



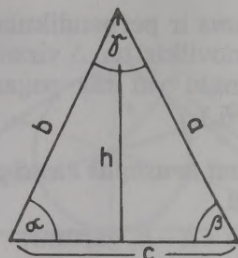
3.5. zīm.



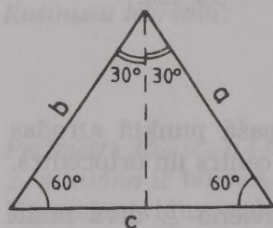
3.6. zīm.



3.7. zīm.



3.8. zīm.



3.9. zīm.

Ja taisnleņķa  $\triangle$ -iem ir kopīga hipotenūza, tad taisno  $\triangle$ -u virsotņu ģeometriskā vieta ir r. l., kuras centrs ir hipotenūzas viduspunkts, bet R ir vienāds ar hipotenūzas pusi (3.7. zīm.).

Vienādsānu  $\triangle$  (3.8. zīm.):  $a=b$ ,  $\alpha=\beta = \frac{\pi-\gamma}{2}$ ,  $h = m_c = l_\gamma = \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}}$  (augstums, mediāna un bisektrise — sakrītoši

lielumi),  $S = \frac{1}{2} ch = \frac{1}{2} a^2 \sin \gamma$ .

Vienādmalu  $\triangle$  (3.9. zīm.):  $a=b=c$ ,  $m=h=l = \frac{1}{2} a\sqrt{3}$ ,  $R = a \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $r = a \frac{\sqrt{3}}{6}$ ,  $R=2r$ ,  $S = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$ .

### Trijstūru (daudzstūru) līdzība

$\triangle$ -i (tāpat kā vienāda malu skaita daudzstūri) ir *līdzīgi* (raksta  $\sim$ ), ja to atbilstošie  $\triangle$  ir vienādi, bet atbilstošās malas — proporcionālas.

Divi  $\triangle$  ir līdzīgi, ja

- viena  $\triangle$  divi  $\triangle$  ir attiecīgi vienādi ar otra  $\triangle$  diviem  $\triangle$ ;*
- viena  $\triangle$  divas malas ir proporcionālas otra  $\triangle$  divām malām un  $\triangle$ -i, kas atrodas starp šīm malām, ir vienādi;*
- viena  $\triangle$  trīs malas ir proporcionālas otra  $\triangle$  trim malām.*

Līdzīgu figūru laukumi S un S' attiecas tāpat kā atbilstošo elementu (malu, augstumu, diagonāļu, ...) kvadrāti:

$$S:S' = a_1^2 : a_2^2 = b_1^2 : b_2^2 = \dots = k^2$$

$$\text{jeb } S = k^2 S'.$$

Proporcionalitātes koeficients  $k = \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \dots$

### Paralelograms (3.10. zīm.)

Paralelogramā:  $AB \parallel CD$ ,  $AB = CD$ ,  
 $AD \parallel BC$ ,  $AD = BC$ ,  $\sphericalangle DAB = \sphericalangle BCD$ ,  
 $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDA$ ,  $\alpha + \beta = \pi$ .

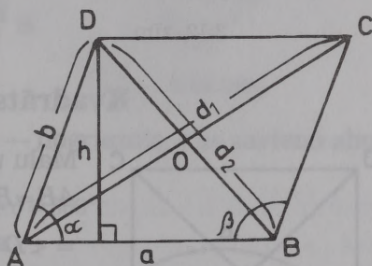
Diagonāļu ( $d_1$ ,  $d_2$ ) īpašības:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2), \quad AO = OC,$$

$$BO = OD.$$

Laukums  $S = ah = ab \sin \alpha =$

$$= \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \sphericalangle (AOD).$$



3.10. zīm.

### Rombs (3.11. zīm.)

Malu un  $\sphericalangle$  īpašības:  $AB \parallel CD$ ,  $BC \parallel DA$ ,  $AB = BC = CD = DA = a$ ,  
 $\sphericalangle DAB = \sphericalangle BCD$ ,  $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDA$ .

Diagonāļu īpašības:

$$AC \perp BD, \quad d_1^2 + d_2^2 = 4a^2, \quad \sphericalangle DAO =$$

$$= \sphericalangle OAB = \sphericalangle BCO = \sphericalangle OCD = \frac{\alpha}{2},$$

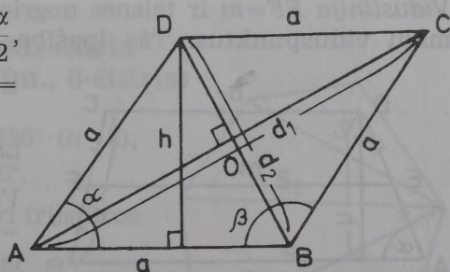
$$\sphericalangle ABO = \sphericalangle OBC = \sphericalangle CDO =$$

$$= \sphericalangle ADO = \frac{\beta}{2}, \quad d_1 = 2a \cos \frac{\alpha}{2},$$

$$d_2 = 2a \sin \frac{\alpha}{2}.$$

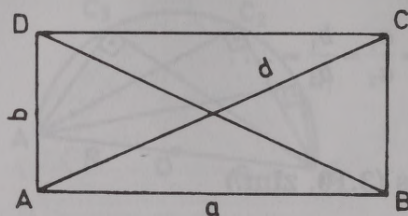
Laukums

$$S = ah = a^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2.$$



3.11. zīm.

### Taisnstūris (3.12. zīm.)



3.12. zīm.

Malu un  $\sphericalangle$  īpašības:

$$\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = \frac{\pi}{2},$$

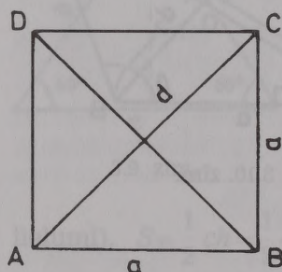
$AB \parallel CD$ ,  $AB = CD$ ,  $BC \parallel DA$ ,  
 $BC = DA$ .

Diagonāles:

$$AC = BD = d = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Laukums  $S = ab$ .

### Kvadrāts (3.13. zīm.)



3.13. zīm.

Malu un  $\sphericalangle$  īpašības:

$$AB = BC = CD = DA = a, \quad \sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = \frac{\pi}{2}.$$

Diagonāles:  $AC = BD = d = a\sqrt{2}$ .

$$\text{Laukums } S = a^2 = \frac{1}{2} d^2.$$

### Trapece (3.14. zīm.)

$a$ ,  $b$  — trapeces pamati,  $h$  — augstums.

Malu īpašības:

$AB \parallel CD$ ,  $AD \nparallel CB$ .

Viduslīnija  $EF = m$  ir taisnes nogrieznis, kas savieno neparalēlo malu viduspunktus. Tās īpašības:  $EF \parallel AB$ ,  $EF \parallel DC$ ,  $EF =$

$$= m = \frac{1}{2} (a + b).$$

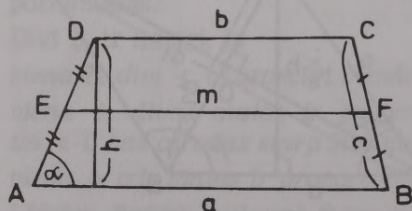
$$\text{Laukums } S = \frac{1}{2} (a + b) \cdot h = m \cdot h.$$

Vienādsāņu trapecēi  $AD =$   
 $= CB = c$ ,  $\sphericalangle A = \sphericalangle B$ ,  $\sphericalangle D = \sphericalangle C$ ,

laukums

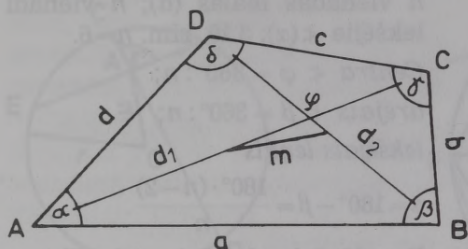
$$S = (a - c \cdot \cos \alpha) \cdot c \sin \alpha =$$

$$= (b + c \cdot \cos \alpha) \cdot c \sin \alpha.$$

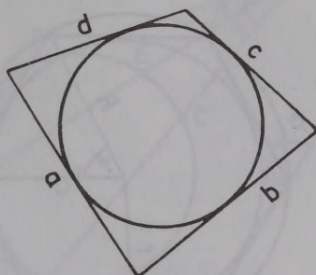


3.14. zīm.

### Četrstūris (3.15. zīm.)



3.15. zīm.



3.16. zīm.

$AC=d_1$ ,  $BD=d_2$  — diagonāles;  $m$  — nogrieznis, kas savieno abu diagonāļu viduspunktus.

Jebkurā izliektā četrstūrī  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$ .

Malas un diagonāles saista formula

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = d_1^2 + d_2^2 + 4m^2.$$

Laukums  $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$ .

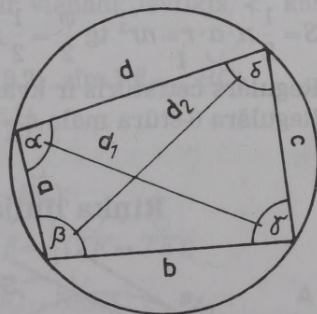
Četrstūrī var ievilkt r. l., ja  $a + c = b + d$  (3.16. zīm.).

Ap četrstūrī var apvilkt r. l., ja  $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$  (3.17. zīm.).

Ievilkā četrstūrī  $ac + bd = d_1 d_2$ ,

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

$$p = \frac{1}{2} (a + b + c + d).$$



3.17. zīm.

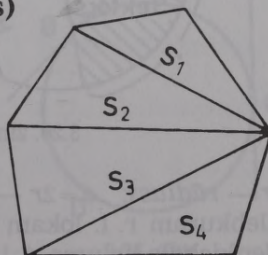
### Daudzstūris (3.18. zīm., 6-stūris)

$n$ -stūrī: iekšējo  $\sphericalangle$  summa  $= 180^\circ \cdot (n-2)$ ;

ārējo  $\sphericalangle$  summa  $= 360^\circ$ .

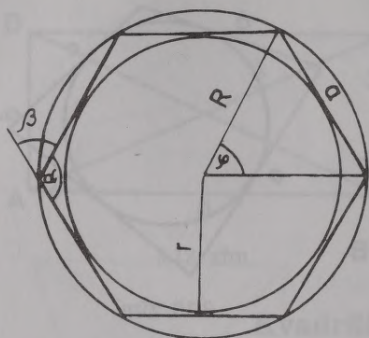
$S$  aprēķina, sadalot daudzstūrī trijstūros

(3.18. zīm.):  $S = \sum_{i=1}^k S_i$ .



3.18. zīm.

### Regulārs daudzstūris (3.19. zīm.)



3.19. zīm.

$n$  vienādas malas ( $a$ );  $n$  vienādi iekšējie  $\sphericalangle(\alpha)$ ; 3.19. zīm.  $n=6$ .

Centra  $\sphericalangle \varphi = 360^\circ : n$ ;

ārējais  $\sphericalangle \beta = 360^\circ : n$ ;

iekšējais leņķis

$$\alpha = 180^\circ - \beta = \frac{180^\circ \cdot (n-2)}{n}$$

Regulārā daudzstūrī var ievilkt un ap to var apvilkt riņķa līniju ( $R$  — apvilktās r. l. rādiuss,  $r$  — ievilktās r. l. rādiuss jeb apotēma).

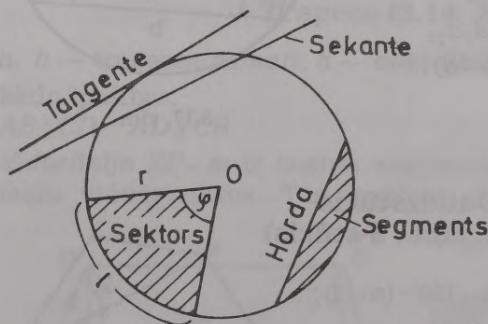
$$n\text{-stūra mala } a = 2R \sin \frac{\pi}{n} = 2r \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} = 2\sqrt{R^2 - r^2} = 2R \sin \frac{\varphi}{2} = 2r \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

$$S = \frac{1}{2} n \cdot a \cdot r = nr^2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} nR^2 \cdot \sin \varphi = \frac{1}{4} na^2 \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$$

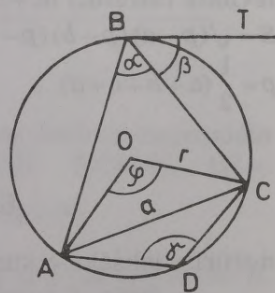
Regulārs četrstūris ir kvadrāts.

Regulāra 6-stūra mala  $a=R$ .

### Riņķa līnija un riņķis (3.20. zīm.)



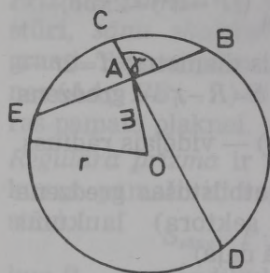
3.20. zīm.



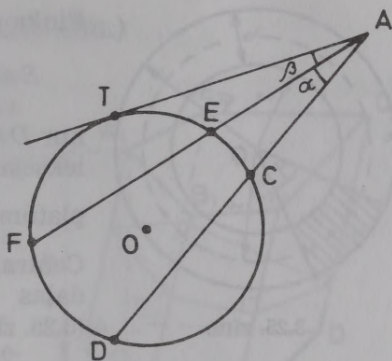
3.21. zīm.

$r$  — rādiuss;  $d=2r$  — diametrs.

Jebkurai r. l. lokam (piem., 3.21. zīm. lokam AC) šeit lietots tā leņķiskais lielums, t. i., lokam atbilstošā centra  $\sphericalangle \varphi$  lielums.



3.22. zīm.



3.23. zīm.

R. l. raksturīgie leņķi:

ievilktie  $\sphericalangle$  (3.21. zīm.)  $\alpha = \frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ ,  $\gamma = \pi - \frac{1}{2}\varphi$ ; visi ievilktie  $\sphericalangle$ ,

kas balstās uz viena un tā paša loka, ir vienādi; ievilkts  $\sphericalangle$ , kas balstās uz diametra, ir taisns;

$\sphericalangle$  starp hordu un pieskari (tangenti  $T$ , 3.21. zīm.)  $\beta = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$ ;

$\sphericalangle$  starp hordām (3.22. zīm.)  $\gamma = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{CB} + \overset{\frown}{ED})$ ;

$\sphericalangle$  starp sekantēm (3.23. zīm.)  $\alpha = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{DF} - \overset{\frown}{EC})$ ;

$\sphericalangle$  starp pieskari un sekanti (3.23. zīm.)  $\beta = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{TF} - \overset{\frown}{TE})$ ;

$\sphericalangle$  starp pieskarēm (3.24. zīm.)  $\psi = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BDC} - \overset{\frown}{BEC})$ .

Hordu īpašības:  $a = 2r \sin \frac{\varphi}{2}$  (3.21. zīm.),

$AC \cdot AD = AB \cdot AE = r^2 - m^2$  (3.22. zīm.).

Sekansu īpašības (3.23. zīm.):

$AC \cdot AD = AE \cdot AF = AT^2$ .

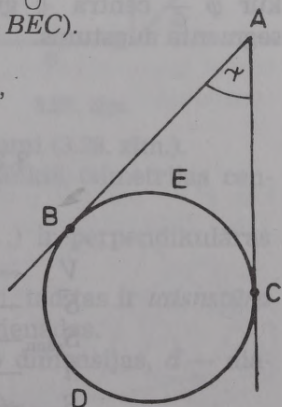
R. l. garums  $C = 2\pi r = \pi d$ .

$\varphi$  radiānu liela loka garums  $l = \varphi \cdot r$ .

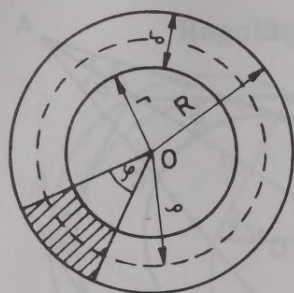
$\varphi^\circ$  liela loka garums  $l = \frac{\pi r \varphi}{180}$ .

Riņķis — plaknes daļa, ko ierobežo r. l.

Riņķa laukums  $S = \pi r^2 = \frac{1}{4} \pi d^2$ .



3.24. zīm.



3.25. zīm.

Riņķa gredzena laukums (3.25. zīm.)

$$S = \pi(R^2 - r^2) = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = 2\pi\rho\delta,$$

kur  $D = 2R$  — ārējais diametrs;  $d = 2r$  — iekšējais diametrs;  $\delta = R - r$  — gredzena platums;  $\rho = \frac{1}{2}(R + r)$  — vidējais rādiuss.

Centra leņķim  $\varphi^\circ$  atbilstošas gredzena daļas (gredzena sektora) laukums (3.25. zīm. iesvītrotā daļa)

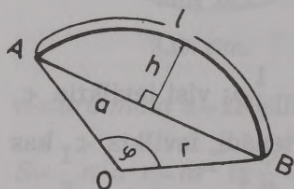
$$S_\varphi = \frac{\pi\varphi}{360}(R^2 - r^2) = \frac{\pi\varphi}{180}\rho \cdot \delta.$$

$\varphi$  rad liela sektora laukums (3.20. zīm.)

$$S_{\text{sekt}} = \frac{1}{2}r^2\varphi = \frac{lr}{2},$$

kur loka garums  $l = \frac{\pi r\varphi}{180}$  ( $\varphi$  — centra  $\sphericalangle$  grādos).

$\varphi^\circ$  liela sektora laukums  $S_{\text{sekt}} = \frac{\pi r^2\varphi}{360}$ .



3.26. zīm.

Segmenta laukums (3.26. zīm.)

$$S_{\text{segm}} = \frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi\varphi}{180} - \sin\varphi\right) = \frac{1}{2}(lr - a(r - h)),$$

kur  $\varphi$  — centra  $\sphericalangle$  grādos,  $a = 2r \sin \frac{\varphi}{2}$  — horda,  $h = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{4}$  — segmenta augstums.

## 3.2. STEREOMETRIJA

### Apzīmējumi

- $V$  — tilpums,
- $S$  — pilna virsma,
- $S_{\text{sānu}}$  — sānu virsma,
- $h$  — augstums,
- $S_{\text{pam}}$  — pamata laukums,
- $F$  — perpendikulāršķeluma laukums.

### Prizma (3.27. zīm.)

Prizmas pamati — vienādi daudzstūri, sānu skaldnes — paralelogrami. Taisnai prizmai visas šķautnes ( $AA_1, BB_1, \dots$ ) ir perpendikulāras pamata plaknei.

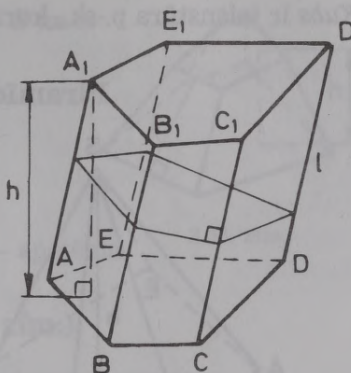
Regulāra prizma ir taisna prizma, kuras pamati ir regulāri daudzstūri.

$$S_{\text{sānu}} = P \cdot l,$$

kur  $P$  — perpendikulāršķēluma perimetrs,  $l$  — sānu šķautnes garums (taisnai prizmai  $l = h$ ).

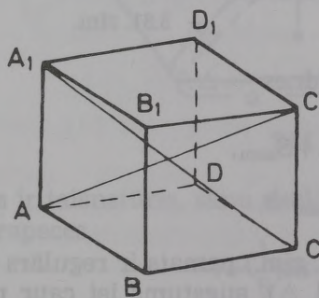
$$S = 2S_{\text{pam}} + S_{\text{sānu}},$$

$$V = S_{\text{pam}} \cdot h = F \cdot l.$$

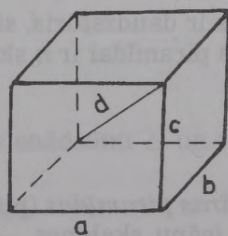


3.27. zīm.

### Paralēlskaldnis (p.-sk.)



3.28. zīm.



3.29. zīm.

P.-sk. ir prizma, kuras pamati ir paralelogrami (3.28. zīm.).

Visas četras diagonāles krustojas vienā punktā (simetrijas centrā), daloties tajā uz pusēm.

Taisnā p.-sk. sānu šķautnes ( $AA_1, BB_1, \dots$ ) ir perpendikulāras pamata plaknei.

Ja p.-sk. ir taisns un tā pamati — taisnstūri, tad tas ir *taisnstūra p.-sk.* Taisnstūra p.-sk. visas diagonāles ir vienādas.

Ja  $a, b, c$  ir taisnstūra p.-sk. šķautnes jeb dimensijas,  $d$  — diagonāle, tad

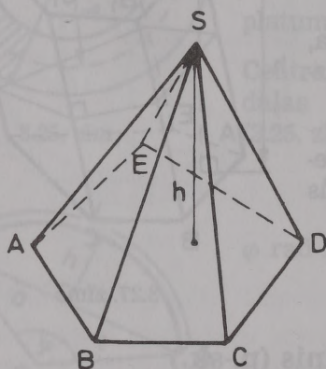
$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \quad (3.29. \text{ zīm.});$$

$$V = a \cdot b \cdot c; \quad S = 2(ab + bc + ca).$$

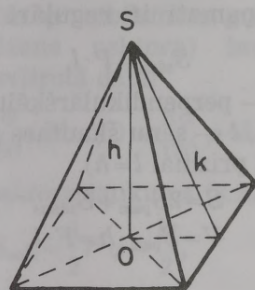
## Kubs

Kubs ir taisnstūra p.-sk., kurā  $a=b=c$ ,  $d=a\sqrt{3}$ ,  $S=6a^2$ ,  $V=a^3$ .

### Piramīda (3.30. zīm.)



3.30. zīm.



3.31. zīm.

Pamats ir daudzstūris, sānu skaldnes —  $\Delta$ .  
 $n$ -stūra piramīdai ir  $n$  skaldnes.

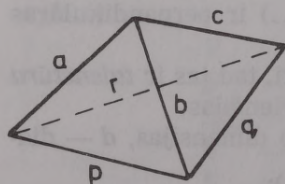
$$S = S_{\text{pam}} + S_{\text{sānu}},$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{pam}} \cdot h.$$

Regulāras piramīdas (piem., 3.31. zīm.) pamats ir regulārs daudzstūris (sānu skaldnes — vienādi  $\Delta$ ), augstums iet caur pamata centru un

$$S_{\text{sānu}} = \frac{1}{2} P \cdot k,$$

kur  $P$  — pamata perimetrs,  $k$  — sānu skaldnes augstums jeb apotēma.



3.32. zīm.

$\Delta$  piramīdu sauc par *tetraedru* (3.32. zīm.).

Regulārā tetraedrā visas šķautnes ir vienādas:  $a=b=c=p=q=r$  un

$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}.$$

### Nošķelta piramīda (3.33. zīm.)

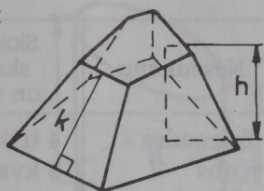
Abi pamati ir paralēli; to laukumi —  $S$  un  $s$ :

$$V = \frac{h}{3}(S + s + \sqrt{S \cdot s}).$$

Regulārai nošķeltai piramīdai

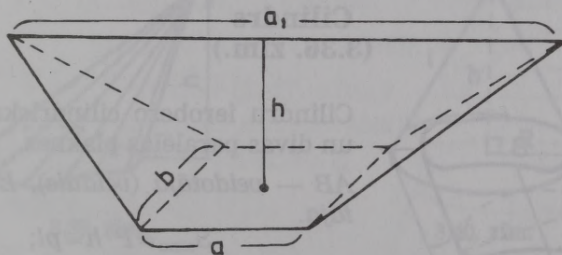
$$S_{\text{sānu}} = \frac{k}{2}(P + p),$$

kur  $P$  un  $p$  — pamatu perimetri;  $k$  — apotēma.



3.33. zīm.

### Ķīlis (3.34. zīm.)



3.34. zīm.

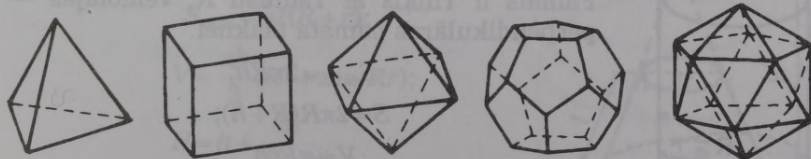
Pamats ir taisnstūris, sānu skaldnes — vienādsānu  $\triangle$  un vienādsānu trapeces.

$$V = \frac{1}{6}(2a + a_1) \cdot b \cdot h,$$

kur  $a$ ,  $a_1$ ,  $b$  — šķautnes;  $h$  — augstums.

### Regulārs daudzskaldnis (reg. d.-sk.)

Reg. d.-sk. visas skaldnes ir regulāri vienādi daudzstūri (3.35. zīm.).

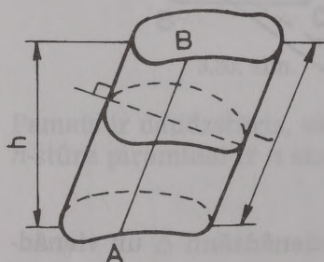


3.35. zīm.

Eksistē pieci reg. d.-sk.; to nosaukumi un elementi sakārtoti tabulā ( $a$  — šķautne):

Nosaukums	Skaldņu skaits un veids	Šķautņu skaits	Virsoņu skaits	$S$	$V$
Tetraedrs	4 trijstūri	6	4	$1,7321a^2$	$0,1179a^3$
Kubs	6 kvadrāti	12	8	$6a^2$	$a^3$
Oktaedrs	8 trijstūri	12	6	$3,4641a^2$	$0,4714a^3$
Dodekaedrs	12 piecstūri	30	20	$20,6457a^2$	$7,6631a^3$
Ikosaedrs	20 trijstūri	30	12	$8,6603a^2$	$2,1817a^3$

### Cilindrs (3.36. zīm.)



3.36. zīm.

Cilindru ierobežo cilindriska virsma un divas paralēlas plaknes.

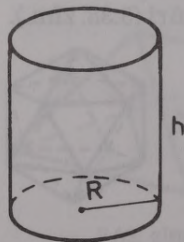
$AB$  — veidotāja (veidule),  $L$  — vadītāja.

$$S_{\text{sānu}} = P \cdot h = pl;$$

$$V = S_{\text{pam}} \cdot h = F \cdot l,$$

kur  $P$  — pamata perimetrs;  $F$  — šķērsriezuma laukums ( $\perp$  veidulei);  $p$  — tā perimetrs;  $l$  — veidules garums.

### Taisns riņķa cilindrs (3.37. zīm.)



Pamats ir riņķis ar rādiusu  $R$ , veidotājas — perpendikulāras pamata plaknei.

$$S_{\text{sānu}} = 2\pi R h;$$

$$S = 2\pi R(R + h);$$

$$V = \pi R^2 h.$$

3.37. zīm.

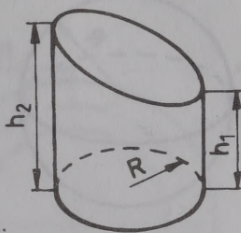
### Nošķelts riņķa cilindrs (3.38. zīm.)

$$S_{\text{sānu}} = \pi R(h_1 + h_2),$$

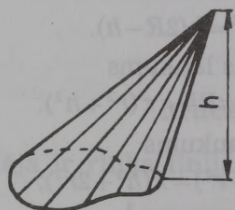
$$S = \pi R(h_1 + h_2 + R + \sqrt{R^2 + \frac{1}{4}(h_2 - h_1)^2}),$$

$$V = \pi R^2 \frac{h_1 + h_2}{2}.$$

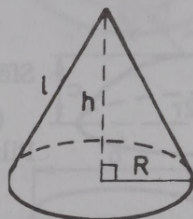
3.38. zīm.



### Konuss (k.) (3.39. zīm.)



3.39. zīm.



3.40. zīm.

K. ierobežo koniska virsma un pamats, kas atrodas plaknē.

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{pam}} \cdot h.$$

Taisna riņķa k. (3.40. zīm.) pamats ir riņķis ar rādiusu  $R$ , bet augstums iet caur riņķa centru ( $l$  — veidule):

$$S_{\text{sānu}} = \pi Rl = \pi R \sqrt{R^2 + h^2}; \quad S = \pi R(R + l); \quad V = \frac{1}{3} \pi R^2 h.$$

### Nošķelts konuss (3.41. zīm.)

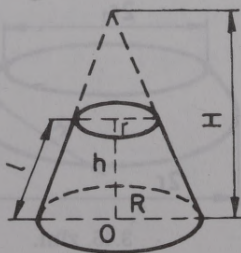
$$l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2};$$

$$S_{\text{sānu}} = \pi l(R + r);$$

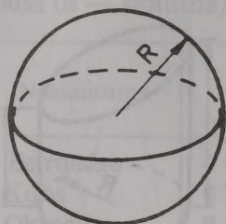
$$V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr);$$

$$H = h + \frac{hr}{R - r}.$$

3.41. zīm.



### Lode (3.42. zīm.)



3.42. zīm.

$R$  — rādiuss;  $2R=d$  — diametrs.

*Sfēra* — lodes virsma, kuras laukums

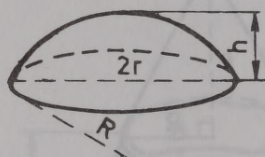
$$S = 4\pi R^2 = \pi d^2 = \sqrt[3]{36\pi V^2};$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi d^3}{6} = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{S^3}{\pi}};$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

### Lodes segments (3.43. zīm.)

$$r^2 = h(2R - h).$$



3.43. zīm.

Sfēriskās virsmas laukums

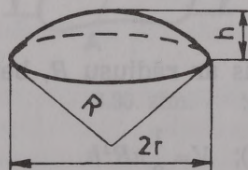
$$S_{sf.} = 2\pi R h = \pi(r^2 + h^2).$$

Pilnās virsmas laukums

$$S = \pi(2R h + r^2) = \pi(h^2 + 2r^2);$$

$$V = \frac{1}{6}\pi h(h^2 + 3r^2) = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h).$$

### Lodes sektors (3.44. zīm.)

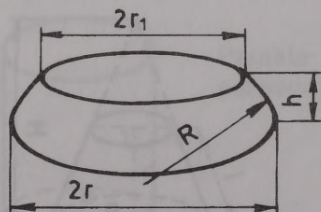


3.44. zīm.

$$S = \pi R(2h + r);$$

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$$

### Lodes slānis (3.45. zīm.)



3.45. zīm.

$$R^2 = r^2 + \frac{1}{4h^2}(r^2 - r_1^2 - h^2)^2.$$

Sfēriskās virsmas laukums

$$S_{sf.} = 2\pi R h;$$

$$S = \pi(2R h + r^2 + r_1^2);$$

$$V = \frac{1}{6}\pi h(3r^2 + 3r_1^2 + h^2).$$

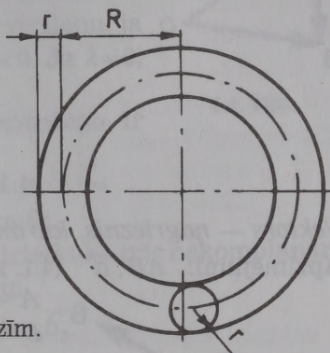
### Gredzens ar riņķa šķērs griezumu jeb tors

(3.46. zīm.)

$$S = 4\pi^2 Rr;$$

$$V = 2\pi^2 Rr^2 = \frac{1}{4}\pi^2 d^2 D,$$

kur  $R$  — gredzena vidējais rādiuss;  
 $D$  — vidējais diametrs;  $r$  — gredzena šķērs griezumā riņķa rādiuss  
 ( $d$  — diametrs).



3.46. zīm.

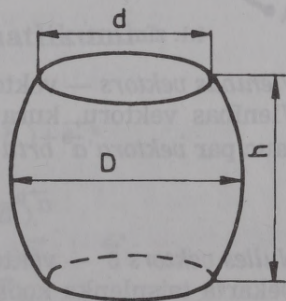
### Muca (3.47. zīm.)

Ja veidotāja ir riņķa līnijas loks, tad

$$V \approx 0,262h(2D^2 + d^2).$$

Ja veidotāja ir paraboliska, tad

$$V \approx \pi h(8D^2 + 4Dd + 3d^2)/60.$$



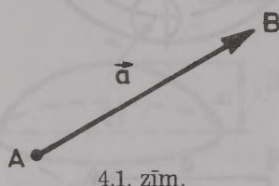
3.47. zīm.

## 4. ANALĪTISKĀ ĢEOMETRIJA

### 4.1. VEKTORI

*Vektors* — nogrieznis, kuram ir noteikts garums un virziens.

Apzīmējumi:  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{a}$  (4.1. zīm.).



$A$  — vektora sākumpunkts,  $B$  — vektora galapunkts.

Vektora garums jeb modulis:  $|\overrightarrow{AB}|$ ,  $|\vec{a}|$ .  
*Kolineāri vektori* — paralēli vienai un tai pašai taisnei.

*Komplanāri vektori* — paralēli vienai un tai pašai plaknei.

*Vienības vektors* — vektors, kura modulis ir 1.

Vienības vektoru, kura virziens sakrīt ar vektora  $\vec{a}$  virzienu, sauc par vektora  $\vec{a}$  ortu un apzīmē ar  $\vec{a}^0$ :

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \Rightarrow \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^0.$$

*Nulles vektors*  $\vec{0}$  — vektors, kura garums ir 0.

Dekarta taisnleņķa koordinātu sistēmas  $Ox$ ,  $Oy$  un  $Oz$  asu ortus apzīmē ar  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  un  $\vec{k}$ .

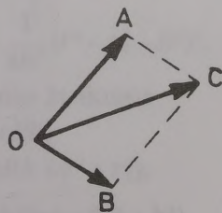
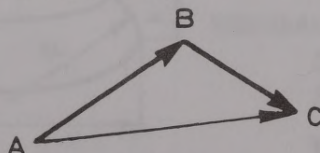
*Punkta  $M$  rādiusvektors* — vektors  $\overrightarrow{OM}$ , kura sākums ir koordinātu sistēmas sākumpunktā  $O$ , bet galapunkts ir  $M$ .

**Vektoru summa.** Vektorus saskaita pēc *trijstūra likuma*:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \quad (4.2. \text{ zīm.})$$

jeb pēc *paralelograma likuma*:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} \quad (4.3. \text{ zīm.}).$$



**Vektoru starpība:**  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$  (4.4. zīm.).

Vektora  $\vec{a}$  reizinājums ar skaitli  $\lambda$  — jauns vektors  $\lambda\vec{a}$ , kurš ir kolineārs ar  $\vec{a}$ , kura garums ir  $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$  un kura virziens sakrīt ar  $\vec{a}$  virzienu, ja  $\lambda > 0$ , un ir pretējs  $\vec{a}$  virzienam, ja  $\lambda < 0$ . Ja  $\lambda = 0$ , tad  $\lambda\vec{a} = \vec{0}$ .

Vektoru  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  lineāra kombinācija ir vektors

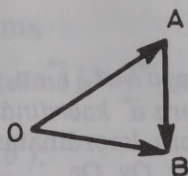
$$\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n,$$

kur  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — patvaļīgi reāli skaitļi.

Jebkuru vektoru  $\vec{a}$  var vienīgā veidā izteikt kā trīs nekomplanāru vektoru  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$  lineāru kombināciju:

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{b}_1 + \alpha_2\vec{b}_2 + \alpha_3\vec{b}_3.$$

Saskaitāmos  $\alpha_1\vec{b}_1, \alpha_2\vec{b}_2, \alpha_3\vec{b}_3$  sauc par vektora  $\vec{a}$  komponentēm.



4.4. zīm.

## Vektoru algebras pamatlikumi

- 1)  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ ,
- 2)  $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ ,
- 3)  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ ,
- 4)  $(\lambda_1 \cdot \lambda_2)\vec{a} = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot \vec{a})$ ,
- 5)  $\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{a} = (\lambda_1 + \lambda_2)\vec{a}$ ,
- 6)  $\lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} = \lambda(\vec{a} + \vec{b})$ ,
- 7)  $0 \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$ .

## Vektora projekcija uz ass

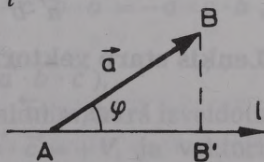
Apzīmē  $\text{pr}_l\vec{a}$  — vektora  $\vec{a}$  projekcija uz ass  $l$  (4.5. zīm.).

$$AB' = \text{pr}_l\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi.$$

Projekcijas īpašības:

$$\text{pr}_l(\vec{a} + \vec{b}) = \text{pr}_l\vec{a} + \text{pr}_l\vec{b},$$

$$\text{pr}_l(\lambda\vec{a}) = \lambda \cdot \text{pr}_l\vec{a}.$$



4.5. zīm.

## Vektora koordinātas

Ja  $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$ , tad skaitļus  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$  sauc par vektora  $\vec{a}$  koordinātām Dekarta taisnleņķa koordinātu sistēmā. Vektora koordinātas ir šī vektora projekcijas uz koordinātu asīm  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ .

Ja  $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ , tad apzīmē  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ .

**Koordinātu formulas.** Ja  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  un  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , tad

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z),$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z),$$

$$\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z),$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Ja vektora sākumpunkts ir  $A(x_1, y_1, z_1)$  un galapunkts ir  $B(x_2, y_2, z_2)$ , tad

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

## Vektoru skalārais reizinājums

Divu vektoru *skalārais reizinājums* ir skaitlis, kuru definē šādi:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi, \text{ kur } \varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Ja  $\vec{a} = \vec{0}$  vai  $\vec{b} = \vec{0}$ , tad  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .

Skalārā reizinājuma īpašības:

$$1) \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a},$$

$$2) \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b},$$

$$3) \vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 = |\vec{a}|^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a^2},$$

$$4) (\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\alpha \vec{b}),$$

$$5) \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

Ja  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  un  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , tad

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

**Leņķis starp vektoriem:**

$$\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

$$\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

## Vektoru vektoriālais reizinājums

Divu vektoru  $\vec{a}$  un  $\vec{b}$  vektoriālais reizinājums (apzīmē  $\vec{a} \times \vec{b}$  jeb  $[\vec{a} \cdot \vec{b}]$ ) ir vektors, kuram

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |[\vec{a} \cdot \vec{b}]| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b});$$

$$[\vec{a} \cdot \vec{b}] \perp \vec{a}, \quad [\vec{a} \cdot \vec{b}] \perp \vec{b},$$

vektori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  un  $[\vec{a} \cdot \vec{b}]$  veido labo trijnieku, t. i., skatoties no vektora  $[\vec{a} \cdot \vec{b}]$  galapunkta, išākais pagrieziens no vektora  $\vec{a}$  uz  $\vec{b}$  tiek veikts pretēji pulksteņa rādītāju kustības virzienam.

Vektoriālā reizinājuma īpašības:

- 1)  $[\vec{a} \cdot \vec{b}] = -[\vec{b} \cdot \vec{a}]$ ,
- 2)  $[(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b}] = [\vec{a} \cdot (\lambda \vec{b})] = \lambda [\vec{a} \cdot \vec{b}]$ ,
- 3)  $[(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}] = [\vec{a} \cdot \vec{c}] + [\vec{b} \cdot \vec{c}]$ ,
- 4)  $[\vec{a} \cdot \vec{b}] = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$ ,
- 5) ja  $\vec{a}$  un  $\vec{b}$  nav kolineāri, tad  $|[\vec{a} \cdot \vec{b}]|$  ir vienāds ar laukumu paralelogramam, kurš izveidots uz vektoriem  $\vec{a}$  un  $\vec{b}$ .

Vektoriālā reizinājuma izteiksme koordinātās:

ja  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  un  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , tad

$$[\vec{a} \cdot \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (b_z a_y - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}.$$

## Vektoru jauktais reizinājums

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = [\vec{a} \cdot \vec{b}] \cdot \vec{c}.$$

Jauktā reizinājuma īpašības:

- 1)  $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  — komplanāri,
- 2)  $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} = -\vec{b} \cdot \vec{a} \cdot \vec{c} = -\vec{c} \cdot \vec{b} \cdot \vec{a} = -\vec{a} \cdot \vec{c} \cdot \vec{b}$ ,
- 3)  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} \cdot \vec{d} = \vec{a} \cdot \vec{c} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{c} \cdot \vec{d}$ ,
- 4)  $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot (\lambda \vec{c}) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c})$ ,
- 5)  $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \pm V$ , kur  $V$  — tilpums paralēlskaldnim, kurš izveidots uz vektoriem  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  un  $\vec{c}$ , pie tam  $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = +V$ , ja vektori  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  veido labo trijnieku, un  $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = -V$ , ja vektori  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  veido kreiso trijnieku.

Jauktā reizinājuma izteiksme koordinātās:

ja  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$  un  $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$ , tad

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

**Vektora virziena kosinusi:** ja  $\vec{r} = (x, y, z)$  un  $\alpha, \beta, \gamma$  — leņķi, kurus veido vektors  $\vec{r}$  ar  $Ox, Oy, Oz$  asīm, tad

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Ja  $|\vec{e}| = 1$ , tad  $\vec{e} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ .

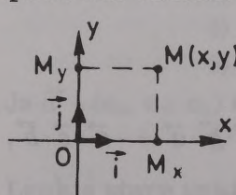
## 4.2. KOORDINĀTU SISTĒMAS PLAKNĒ UN TELPĀ

Punkta stāvokli plaknē un telpā var noteikt, izmantojot dažādas koordinātu sistēmas. Skaitļus, kuri nosaka punkta atrašanās vietu dotajā koordinātu sistēmā, sauc par *punkta koordinātām* šajā sistēmā.

### Koordinātu sistēmas plaknē

Plaknē visbiežāk tiek izmantota Dekarta koordinātu sistēma un polārā koordinātu sistēma.

**Dekarta taisnleņķa koordinātu sistēmu** veido divas savstarpēji perpendikulāras taisnes — *koordinātu asis*, uz kurām ir izraudzīts pozitīvais virziens un izvēlēta garuma vienība (4.6. zīm.).



$O$  — koordinātu sākumpunkts,  
 $Ox$  — abscisu ass,  
 $Oy$  — ordinātu ass,  
 $\vec{i}, \vec{j}$  ( $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1, \vec{i} \perp \vec{j}$ ) — bāzes vektori,  
 $x = OM_x$  — punkta  $M$  abscisa ( $M_x$  — punkta  $M$  projekcija uz  $Ox$  ass paralēli  $Oy$  asij),  
 $y = OM_y$  — punkta  $M$  ordināta ( $M_y$  — punkta  $M$  projekcija uz  $Oy$  ass paralēli  $Ox$  asij).

4.6. zīm.

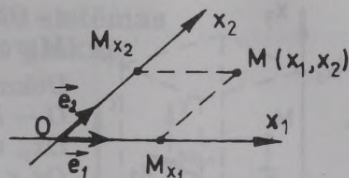
**Dekarta slīpleņķa (afīnā) koordinātu sistēma:**

$O$  — koordinātu sākumpunkts (4.7. zīm.),

$Ox_1, Ox_2$  — koordinātu asis,

$x_1 = OM_{x_1}$ ,  $x_2 = OM_{x_2}$  — punkta  $M$  koordinātas ( $M_{x_1}$  — punkta  $M$  projekcija uz  $Ox_1$  ass paralēli  $Ox_2$  asij; analogiski  $M_{x_2}$ ),

$\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  — bāzes vektori.



4.7. zīm.

**Polārā koordinātu sistēma:**

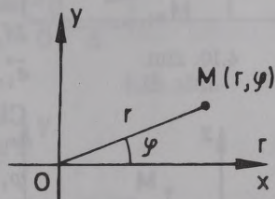
$O$  — *pols* (4.8. zīm.),

$Ox$  jeb  $Or$  — *polārā ass*,

$r = |OM|$  — *polārais rādiuss*,

$\varphi$  — *polārais leņķis*.

Par punkta  $M$  polārajām koordinātām sauc šī punkta rādiusvektoru  $r$  un polāro leņķi  $\varphi$  (leņķi, kuru veido taisne  $OM$  un polārā ass  $Ox$ ). Polārā leņķa pozitīvais atskaites virziens ir no polārās ass pretēji pulksteņa rādītāju kustības virzienam.



4.8. zīm.

Polārā rādiusa  $r$  un polārā leņķa  $\varphi$  galvenās vērtības:

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad \text{vai} \quad -\pi < \varphi \leq \pi.$$

Ja polārā ass sakrīt ar  $Ox$  asi, tad starp punkta Dekarta koordinātām un polārajām koordinātām pastāv šādas sakarības:

$$x = r \cdot \cos \varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x},$$

$$y = r \cdot \sin \varphi, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

## Koordinātu sistēmas telpā

**Dekarta taisnleņķa koordinātu sistēma.**

$O$  — *koordinātu sākumpunkts* (4.9. zīm.),

$Ox$  — *abscisu ass*,  $Oy$  — *ordinātu ass*,

$Oz$  — *aplikātu ass*,

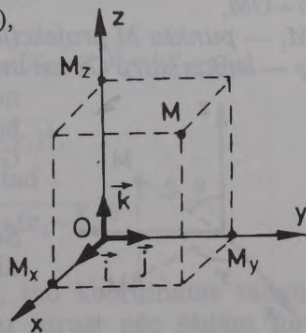
$\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  ( $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ ,  $\vec{i} \perp \vec{j}$ ,

$\vec{i} \perp \vec{k}$ ,  $\vec{j} \perp \vec{k}$ ) — *bāzes vektori*,

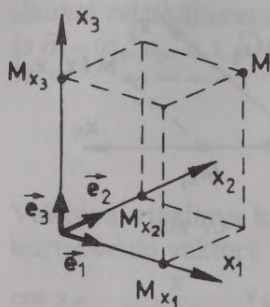
$Oxy$ ,  $Oxz$ ,  $Oyz$  — *koordinātu plaknes*.

$x = OM_x$  — *punkta  $M$  abscisa* ( $M_x$  — punkta  $M$  projekcija uz  $Ox$  ass paralēli  $Oyz$  plaknei),

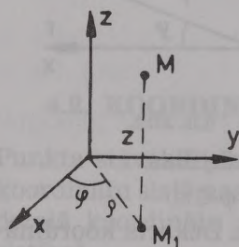
$y = OM_y$  — *punkta  $M$  ordināta* ( $M_y$  — punkta  $M$  projekcija uz  $Oy$  ass paralēli  $Oxz$  plaknei),



4.9. zīm.



4.10. zīm.



4.11. zīm.

$z = OM_z$  — punkta  $M$  aplikāta ( $M_z$  — punkta  $M$  projekcija uz  $Oz$  ass paralēli  $Oxy$  plaknei).

### Dekarta slīplēnķa koordinātu sistēma.

$O$  — koordinātu sākumpunkts (4.10. zīm.),

$Ox_1, Ox_2, Ox_3$  — koordinātu asis,

$Ox_1x_2, Ox_1x_3, Ox_2x_3$  — koordinātu plaknes,

$x_i = OM_{x_i}$  ( $i=1, 2, 3$ ) — punkta  $M$  koordinātas

( $M_{x_1}$  — punkta  $M$  projekcija uz  $Ox_1$  ass paralēli  $Ox_2x_3$  plaknei; analogiski  $M_{x_2}$  un  $M_{x_3}$ ),

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  — bāzes vektori (nekomplanāri).

### Cilindriskā koordinātu sistēma.

Punkta koordinātas parasti apzīmē ar  $\rho, \varphi, z$  (4.11. zīm.).

$\rho = OM_1$  ( $M_1$  — punkta  $M$  projekcija  $Oxy$  plaknē),

$\varphi$  — leņķis starp  $Ox$  asi un taisni  $OM_1$  (pozitīvais atskaites virziens no  $Ox$  ass pretēji pulksteņa rādītāju kustības virzienam).

Galvenās  $\rho, \varphi, z$  vērtības:

$$0 \leq \rho < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty.$$

Sakars starp Dekarta un cilindriskām koordinātām:

$$x = \rho \cdot \cos \varphi, \quad y = \rho \cdot \sin \varphi, \quad z = z.$$

### Sfēriskā koordinātu sistēma.

Punkta  $M$  koordinātas —  $\rho, \varphi, \theta$  (4.12. zīm.):

$\rho = OM$ ,

$M_1$  — punkta  $M$  projekcija  $Oxy$  plaknē,

$\varphi$  — leņķis starp  $Ox$  asi un taisni  $OM_1$  (pozitīvais atskaites virziens no  $Ox$  ass pretēji pulksteņa rādītāju kustības virzienam).

Galvenās  $\rho, \varphi, \theta$  vērtības:

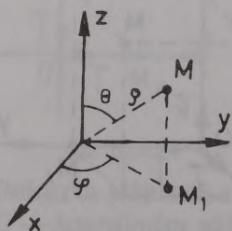
$$0 \leq \rho < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Sakars starp Dekarta un sfēriskām koordinātām:

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi,$$

$$y = \rho \sin \theta \sin \varphi,$$

$$z = \rho \cos \theta.$$



4.12. zīm.

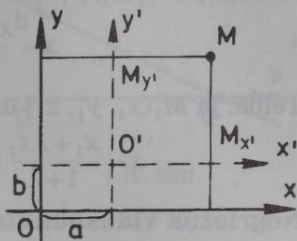
## Dekarta koordinātu sistēmas transformācijas plaknē

**Paralēlā pārnese:**

$$Ox \parallel O'x', \quad Oy \parallel O'y' \quad (4.13. \text{ zīm.}).$$

Ja  $(x, y)$  — punkta  $M$  koordinātas sistēmā  $Oxy$ , bet  $(x', y')$  —  $M$  koordinātas sistēmā  $O'x'y'$ , tad

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b, \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b. \end{cases}$$



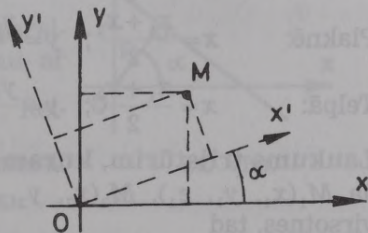
4.13. zīm.

**Koordinātu asu pagrieziens**

(4.14. zīm.):

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{cases}$$



4.14. zīm.

**Koordinātu sistēmas paralēlā pārnese un pagrieziens:**

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + a \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + b, \end{cases} \quad \begin{cases} x' = (x - a) \cos \alpha + (y - b) \sin \alpha \\ y' = -(x - a) \sin \alpha + (y - b) \cos \alpha. \end{cases}$$

### 4.3. VIENKĀRŠĀKIE ANALĪTISKĀS ĢEOMETRIJAS UZDEVUMI

**Attālums  $d$  starp diviem punktiem:**

Uz taisnes: ja  $M_1(x_1)$  un  $M_2(x_2)$ , tad  $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|$ ,  
plaknē: ja  $M_1(x_1, y_1)$  un  $M_2(x_2, y_2)$ , tad

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

telpā: ja  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  un  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ , tad

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

**Nogriežņa dalīšana dotajā attiecībā  $\lambda$ :**

ja  $M_1$  un  $M_2$  ir nogriežņa galapunkti, tad koordinātas tādām punktam  $M$ , kuram  $M_1M:MM_2 = \lambda$ , var atrast pēc šādām formulām.

Uz taisnes: ja  $M_1(x_1)$  un  $M_2(x_2)$ , tad  $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$ .

Plaknē: ja  $M_1(x_1, y_1)$  un  $M_2(x_2, y_2)$ , tad

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Telpā: ja  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  un  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ , tad

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

**Nogriežņa viduspunkta koordinātas.**

Uz taisnes:  $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ .

Plaknē:  $x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ .

Telpā:  $x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$ .

**Laukums trijstūrim, kuram dotas virsotņu koordinātas.**

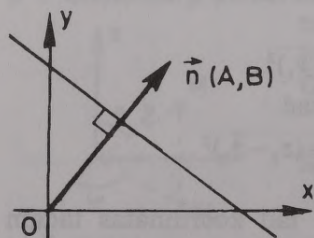
Ja  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  un  $M_3(x_3, y_3, z_3)$  — trijstūra virsotnes, tad

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2}$$

Ja trijstūris atrodas  $Oxy$  plaknē, tad

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

#### 4.4. TAISNE PLAKNĒ



4.15. zīm.

Vispārīgais taisnes vienādojums (4.15. zīm.)

$$Ax + By + C = 0,$$

$\vec{n} = (A, B)$  — taisnes *normālvektors*;  
 $\vec{n}$  — perpendikulārs taisnei.

Vispārīgā taisnes vienādojuma speciālgadījumi:

- 1)  $Ax + By = 0$  — taisne, kura iet caur koordinātu sākumpunktu,
- 2)  $By + C = 0$  — taisne paralēla  $Ox$  asij,

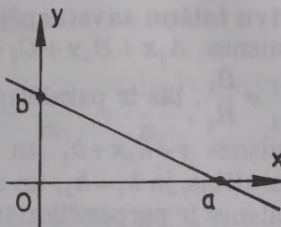
3)  $Ax + C = 0$  — taisne paralēla  $Oy$  asij,

4)  $Ax = 0$  —  $Oy$  ass,

5)  $By = 0$  —  $Ox$  ass.

**Taisnes vienādojums asu nogriežņos**  
(taisne caur punktiem  $(a, 0)$  un  $(0, b)$ ):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (4.16. \text{ zīm.}).$$



4.16. zīm.

**Taisnes normālvienādojums** (4.17. zīm.):  
 $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$  — kur  $\alpha$  ir leņķis, kuru taisnes normāle veido ar  $Ox$  ass pozitīvo virzienu;  $p$  — attālums no koordinātu sākumpunkta līdz taisnei.

Vienādojumu normālformā iegūst, pareizinot vispārīgo taisnes vienādojumu ar normējošo reizinātāju  $\mu = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ .

Reizinātāja zīme tiek ņemta pretēja  $C$  zīmei.

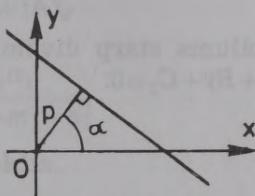
**Taisnes kanoniskais vienādojums:**

$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m}$ , kur  $\vec{a} = (l, m)$  — taisnes virziena vektors, bet

$M_0(x_0; y_0)$  — punkts, caur kuru iet taisne.

Vienādojums taisnei, kas novilkta caur diviem punktiem  $M_0(x_0; y_0)$  un  $M_1(x_1; y_1)$ :

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0}$$



4.17. zīm.

**Taisnes parametriskie vienādojumi:**

$$\begin{cases} x = x_0 + lt & (x_0, y_0) \text{ — punkts, caur kuru iet taisne,} \\ y = y_0 + mt & \vec{a} = (l, m) \text{ — taisnes virziena vektors.} \end{cases}$$

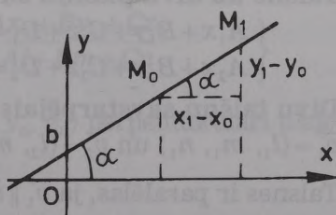
**Taisnes vienādojums ar virziena koeficientu** (4.18. zīm.):

$$y - y_0 = k(x - x_0), \text{ kur } k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

**Attālums no punkta  $(x_0, y_0)$  līdz taisnei**

$$d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p|,$$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$



4.18. zīm.

### Divu taisņu savstarpējais novietojums.

Taisnes  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  un  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  krustojas, ja  $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ , tās ir paralēlas, ja  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ , un sakrīt, ja  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ .

Taisnes  $y = k_1x + b_1$  un  $y = k_2x + b_2$  krustojas, ja  $k_1 \neq k_2$ , tās ir paralēlas, ja  $k_1 = k_2$ , un sakrīt, ja  $k_1 = k_2$ ,  $b_1 = b_2$ .

Taisnes ir perpendikulāras, ja  $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$  jeb  $k_1k_2 = -1$ .

Leņķis starp divām taisnēm:

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}.$$

Attālums starp divām paralēlām taisnēm  $Ax + By + C_1 = 0$  un  $Ax + By + C_2 = 0$ :

$$d = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

## 4.5. TAISNE TELPĀ

### Taisnes parametriskie vienādojumi:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt, \end{cases} \quad \text{kur } (x_0, y_0, z_0) \text{ ir punkts uz taisnes,} \\ \vec{v} = (l, m, n) \text{ — taisnes virziena vektors.}$$

### Taisnes kanoniskie vienādojumi:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Vienādojumi taisnei, kas novilkta caur diviem punktiem  $(x_0; y_0; z_0)$  un  $(x_1; y_1; z_1)$ :

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.$$

### Taisne kā divu plakņu šķēluma līnija:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \quad \text{nedrīkst būt } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

### Divu taisņu savstarpējais novietojums:

$\vec{v}_1 = (l_1, m_1, n_1)$  un  $\vec{v}_2 = (l_2, m_2, n_2)$  — taisņu virziena vektori.

Taisnes ir paralēlas, ja  $\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$  jeb  $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$ ,

perpendikulāras — ja  $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$  jeb  $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$ .

### Attālums starp divām paralēlām taisnēm.

Ja taisnes dotas ar vienādojumiem

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \quad \text{un} \quad \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2},$$

tad  $\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$  un

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2-z_1 & x_2-x_1 \\ n_1 & l_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ l_1 & m_1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}}.$$

### Leņķis starp divām taisnēm:

$$\cos \varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

### Taisnes un plaknes savstarpējais stāvoklis.

Ja  $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$  un  $Ax + By + Cz + D = 0$  ir taisnes un plaknes vienādojumi, tad:

taisne un plakne krustojas, ja  $Al + Bm + Cn \neq 0$ ,

taisne atrodas plaknē, ja  $Al + Bm + Cn = 0$  un

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0,$$

taisne ir paralēla plaknei, ja  $Al + Bm + Cn = 0$  un

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0,$$

taisne un plakne ir perpedikulāras, ja  $\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$ .

### Leņķis starp taisni un plakni:

$$\sin \varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

### Taisnes un plaknes krustpunkta koordinātas ir

$$x = x_0 + lt_1,$$

$$y = y_0 + mt_1, \quad \text{kur } t_1 = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0}{Al + Bm + Cn}.$$

$$z = z_0 + nt_1$$

Vienādojums taisnei caur punktu  $(x_0, y_0, z_0)$  perpedikulāri plaknei  $Ax + By + Cz + D = 0$ :

$$x = x_0 + At,$$

$$y = y_0 + Bt,$$

$$z = z_0 + Ct.$$

## 4.6. PLAKNE

Plaknes vispārīgais vienādojums ir

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Vektors  $\vec{n} = (A, B, C)$  — plaknes normālvektors,  $\vec{n}$  ir perpendikulārs plaknei.

Vispārīgā plaknes vienādojuma speciālgadījumi:

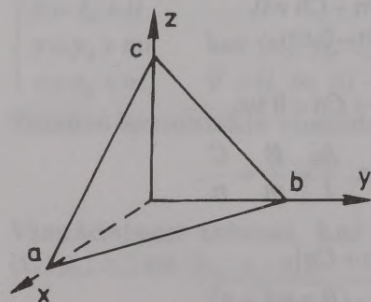
- 1)  $Ax + By + Cz = 0$  — plakne iet caur koordinātu sākumpunktu,
- 2)  $By + Cz + D = 0$  — plakne paralēla  $Ox$  asij,
- 3)  $Ax + Cz + D = 0$  — plakne paralēla  $Oy$  asij,
- 4)  $Ax + By + D = 0$  — plakne paralēla  $Oz$  asij,
- 5)  $Cz + D = 0$  — plakne paralēla  $Oxy$  plaknei,
- 6)  $By + D = 0$  — plakne paralēla  $Oxz$  plaknei,
- 7)  $Ax + D = 0$  — plakne paralēla  $Oyz$  plaknei,
- 8)  $By + Cz = 0$  — plakne iet caur  $Ox$  asi,
- 9)  $Ax + Cz = 0$  — plakne iet caur  $Oy$  asi,
- 10)  $Ax + By = 0$  — plakne iet caur  $Oz$  asi.

Plaknes vienādojums asu nogriežņos (plakne caur punktiem

$(a, 0, 0)$ ,  $(0, b, 0)$  un  $(0, 0, c)$ ;

4.19. zīm.):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$



4.19. zīm.

Plaknes normālvienādojums:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0,$$

kur  $\alpha, \beta, \gamma$  — plaknes normālvektora un koordinātu asu veidotie leņķi;  $p$  — attālums no koordinātu sākumpunkta līdz plaknei. Plaknes normālvienādojumu iegūst, pareizinot vispārīgo plaknes vienādojumu ar normējošo reizinātāju  $\mu = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ . Reizinātāja  $\mu$  zīme ir pretēja  $D$  zīmei.

Vienādojums plaknei, kas iet caur punktu  $(x_0, y_0, z_0)$  perpendikulāri vektoram  $(A, B, C)$ :

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Vienādojums plaknei, kas iet caur punktu  $(x_0, y_0, z_0)$  un ir paralēla diviem nekolineāriem vektoriem  $(l_1, m_1, n_1)$  un  $(l_2, m_2, n_2)$ :

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Vienādojums plaknei, kas iet caur trim punktiem  $(x_0, y_0, z_0)$ ,  $(x_1, y_1, z_1)$  un  $(x_2, y_2, z_2)$ :

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Attālums no punkta  $(x_0, y_0, z_0)$  līdz plaknei  $Ax + By + Cz + D = 0$ :

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

### Divu plakņu savstarpējais novietojums.

Ja  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  un  $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$  ir plakņu vienādojumi, tad plaknes ir

1) paralēlas, ja  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ ,

2) sakrītošas, ja  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ ,

3) perpendikulāras, ja  $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ .

### Leņķis starp divām plaknēm

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Attālums starp divām paralēlām plaknēm

$$d = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

## 4.7. OTRĀS KĀRTAS LĪNIJAS

### Riņķa līnija

Vienādojums riņķa līnijai ar rādiusu  $R$  un centru koordinātu sākumpunktā:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Parametriskie vienādojumi ir šādi:

$$\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t. \end{cases}$$

Vienādojums riņķa līnijai ar rādiusu  $R$  un centru punktā  $(a, b)$ :

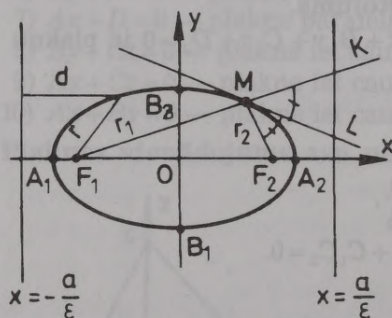
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

Laukums  $S = \pi R^2$ ; parametriskie vienādojumi

$$\begin{cases} x = a + R \cos t \\ y = b + R \sin t. \end{cases}$$

## Elipse

Pieņemsim, ka plaknē doti divi punkti  $F_1$  un  $F_2$ , attālums starp kuriem ir  $2c$ , un dots skaitlis  $a$  ( $a > c$ ). Par *elipsi* sauc to punktu ģeometrisko vietu, kuriem attālumu summa līdz punktiem  $F_1$  un  $F_2$  ir vienāda ar  $2a$ . Punktus  $F_1(-c, 0)$  un  $F_2(c, 0)$  sauc par *elipses fokusiem* (4.20. zīm.).



4.20. zīm.

$A_1A_2$  — lielā ass,  $B_1B_2$  — mazā ass,  $O$  — centrs,  $A_1, A_2, B_1, B_2$  — virsotnes,  $r_1 = F_1M$  un  $r_2 = F_2M$  — fokālie rādiusi,

$$a^2 - c^2 = b^2.$$

Kanoniskais vienādojums

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ekscentricitāte

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1.$$

Fokālie rādiusi  $r_1 = a + \varepsilon x$ ,  $r_2 = a - \varepsilon x$ .

Fokālais parametrs  $p = \frac{b^2}{a}$ .

Direktrises — mazajai asij paralēlas taisnes  $x = -\frac{a}{\varepsilon}$  un  $x = \frac{a}{\varepsilon}$ , kuras atrodas attālumā  $\frac{a}{\varepsilon}$  no tās.

Direktrišu pamatīpašība:  $\frac{r}{d} = \varepsilon$ , kur  $r$  — elipses punkta fokālais rādiuss,  $d$  — attālums no punkta līdz tuvākajai direktrisei.

Patvaļīgā elipses punktā  $(x_0, y_0)$  novilkta pieskares vienādojums:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Pieskares īpašība: jebkuram elipses punktam  $M \angle F_2ML = \angle LMK$ .  
 Patvaļīgā elipses punktā  $(x_0, y_0)$  novilkta *normāles vienādojums*:

$$y - y_0 = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0} (x - x_0).$$

*Elipses parametriskie vienādojumi* ir

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t. \end{cases}$$

Laukums  $S = \pi ab$ .

## Hiperbola

Pieņemsim, ka plaknē doti divi punkti  $F_1$  un  $F_2$ , attālums starp kuriem ir  $2c$ , un dots skaitlis  $a$  ( $0 < a < c$ ). Par *hiperbolu* sauc to punktu ģeometrisko vietu, kuriem attālumu starpība līdz punktiem  $F_1$  un  $F_2$  pēc moduļa ir vienāda ar  $2a$ . Punktus  $F_1(-c, 0)$  un  $F_2(c, 0)$  sauc par *hiperbolas fokusiem* (4.21. zīm.).

$A_1 A_2 = 2a$  — reālā ass,  
 $B_1 B_2 = 2b$  — imaginārā ass,  
 $O$  — hiperbolas centrs,  $A_1$  un  $A_2$  — hiperbolas virsotnes,  $r_1 = F_1 M$  un  $r_2 = F_2 M$  — fokālie rādiusi,

$$c^2 - a^2 = b^2.$$

*Hiperbolas kanoniskais vienādojums* ir  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

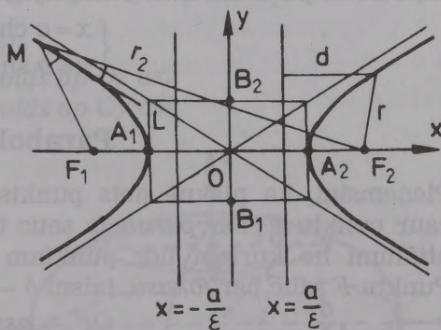
*Ekscentricitāte*  $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1$ .

*Fokālie rādiusi*

$$\begin{aligned} r_1 &= \varepsilon x + a, & r_2 &= \varepsilon x - a && \text{— labajam zaram,} \\ r_1 &= -(\varepsilon x + a), & r_2 &= -(\varepsilon x - a) && \text{— kreisajam zaram.} \end{aligned}$$

*Fokālais parametrs*  $p = \frac{b^2}{a}$ .

*Direktrises* ir imaginārajai asij paralēlas taisnes  $x = -\frac{a}{\varepsilon}$ ,  $x = \frac{a}{\varepsilon}$ , kuras atrodas attālumā  $\frac{a}{\varepsilon}$  no tās.



4.21. zīm.

Direktrises pamatīpašība:  $\frac{r}{d} = \varepsilon$ , kur  $r$  — hiperbolas punkta fokālais rādiuss,  $d$  — attālums no hiperbolas punkta līdz tuvākai direktrisei.

Patvaļīgā hiperbolas punktā  $(x_0, y_0)$  novilkta pieskares vienādojums  $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$ .

Hiperbolas pieskares īpašība: jebkuram hiperbolas punktam  $M$  ir spēkā vienādība  $\sphericalangle F_1ML = \sphericalangle F_2ML$ .

Patvaļīgā hiperbolas punktā  $(x_0, y_0)$  novilkta normāles vienādojums ir  $y - y_0 = -\frac{a^2 y_0}{b^2 x_0} (x - x_0)$ .

Hiperbolas asimptotu vienādojumi ir  $y = \frac{b}{a}x$ ,  $y = -\frac{b}{a}x$ .

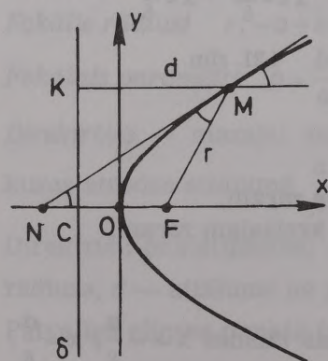
Saistītās hiperbolas vienādojums ir  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ .

Hiperbolas parametriskie vienādojumi ir

$$\begin{cases} x = a \operatorname{ch} t \\ y = b \operatorname{sh} t. \end{cases}$$

## Parabola

Pieņemsim, ka plaknē dots punkts  $F$  un taisne  $\delta$ , kura neiet caur punktu  $F$ . Par *parabolu* sauc to punktu ģeometrisko vietu, attālumi no kuriem līdz punktam  $F$  un taisnei  $\delta$  ir vienādi. Punktu  $F$  sauc par *fokusu*, taisni  $\delta$  — par *direktrisi*.



4.22. zīm.

$OF$  — *ass*,  $O$  — *virsošne*,  $CF = p$  — *parabolas parametrs*,  $r = FM$  — *fokālais rādiuss* (4.22. zīm.).

*Kanoniskais vienādojums* ir  $y^2 = 2px$ .

*Ekscentricitāte*  $\varepsilon = \frac{FM}{MK} = 1$ .

*Fokālais rādiuss* ir  $r = x + \frac{p}{2}$ .

*Direktrises vienādojums* ir  $x = -\frac{p}{2}$ .

Patvaļīgā parabolas punktā  $(x_0, y_0)$  novilkta pieskares vienādojums ir  $yy_0 = p(x + x_0)$ .

Parabolas pieskares īpašība: jebkuram parabolas punktam  $M$   
 $\sphericalangle FMN = \sphericalangle FNM$ .

Patvaļīgā parabolas punktā  $(x_0, y_0)$  novilkta *normāles vienādojums* ir  $y - y_0 = -\frac{y_0}{p}(x - x_0)$ .

Parabolas parametriskie vienādojumi ir

$$x = \frac{t^2}{2p},$$

$$y = t.$$

## 4.8. OTRĀS KĀRTAS VIRSMAS

### Elipsoīds

*Kanoniskais vienādojums*  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ,  $a, b, c$  — pusasis  
 (4.23. zīm.).

Ja  $a \neq b \neq c$ , — trīsas elipsoīds.

Ja  $a = b \neq c$ , — rotācijas elipsoīds ap  $Oz$  asi.

Ja  $a = c \neq b$ , — rotācijas elipsoīds ap  $Oy$  asi.

Ja  $b = c \neq a$ , — rotācijas elipsoīds ap  $Ox$  asi.

Ja  $a = b = c$ , — sfēra

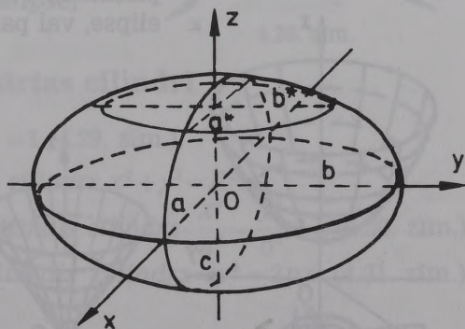
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Šķēļot elipsoīdu ar plaknēm, kuras paralēlas koordinātu plaknēm, veidojas elipses.

*Elipsoīda tilpums*

$$V = \frac{4}{3} \pi abc.$$

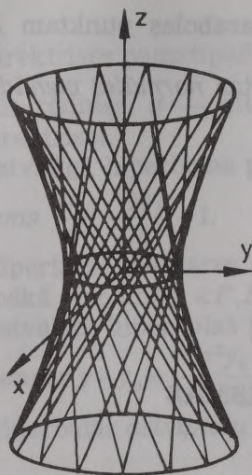
Lodes tilpums  $V = \frac{4}{3} \pi a^3$ .



4.23. zīm.

### Viendobuma hiperboloīds

*Kanoniskais vienādojums*  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ,



4.24. zīm.

$a, b$  — pusasis,  $c$  — imaginārā pusass (4.24. zīm.).

Ja  $a = b$ , — rotācijas viendobuma hiperboloīds ap  $Oz$  asi.

Šķeļot viendobuma hiperboloīdu ar plaknēm, kuras paralēlas koordinātu plaknēm, veidojas vai nu elipse, vai parabola, vai hiperbola, vai taisņu pāris.

### Divdobumu hiperboloīds

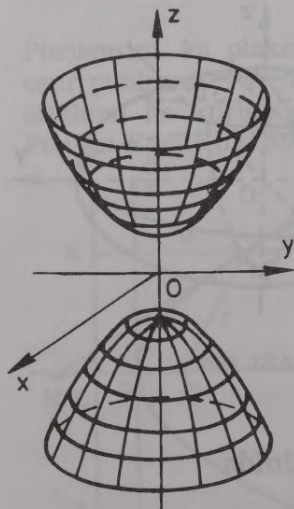
Kanoniskais vienādojums

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

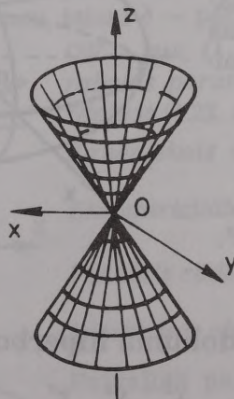
$a, b$  — imaginārās pusasis,  $c$  — pusass (4.25. zīm.).

Ja  $a = b$  — rotācijas divdobumu hiperboloīds ap  $Oz$  asi.

Šķeļot divdobumu hiperboloīdu ar koordinātu plaknēm paralēlām plaknēm, veidojas vai nu hiperbola, vai elipse, vai parabola.



4.25. zīm.



4.26. zīm.

### Konuss

Kanoniskais vienādojums

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

(4.26. zīm.).

Ja  $a = b$  — rotācijas konuss ap  $Oz$  asi.

Šķeļot konusu ar koordinātu plaknēm paralēlām plaknēm, veidojas vai nu elipse, vai hiperbola, vai parabola, vai krustisku taisņu pāris.

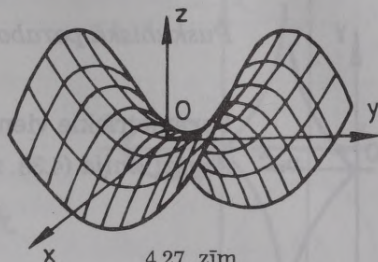
## Hiperboliskais paraboloids

Kanoniskais vienādojums

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$$

(4.27. zīm.).

Šķēļot hiperbolisko paraboloidu ar koordinātu plaknēm paralēlām plaknēm, veidojas vai nu hiperbola, vai parabola, vai taisņu pāris.



4.27. zīm.

## Eliptiskais paraboloids

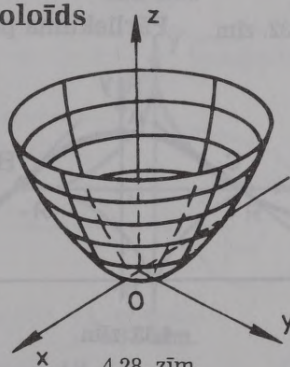
Kanoniskais vienādojums

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$$

(4.28. zīm.).

Ja  $p=q$  — rotācijas paraboloids ap  $Oz$  asi.

Šķēļot eliptisko paraboloidu ar koordinātu plaknēm paralēlām plaknēm, veidojas vai nu elipse, vai parabola, vai punkts.



4.28. zīm.

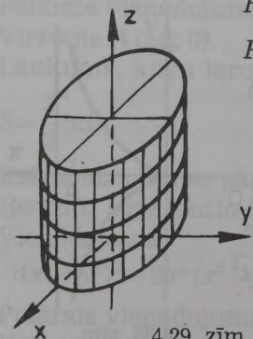
## 2. kārtas cilindri

Eliptiskais cilindrs  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (4.29. zīm.).

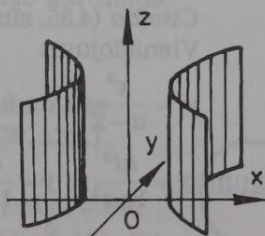
Ja  $a=b=R$ , — taisns riņķa cilindrs  $x^2 + y^2 = R^2$ .

Hiperboliskais cilindrs  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  (4.30. zīm.).

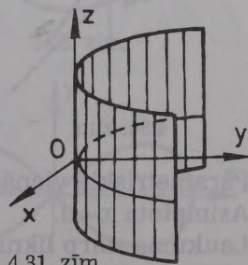
Paraboliskais cilindrs  $y^2 = 2px$  (4.31. zīm.).



4.29. zīm.

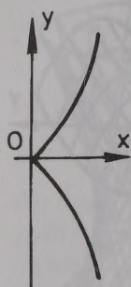


4.30. zīm.



4.31. zīm.

#### 4.9. DAŽAS SVARĪGĀKĀS LĪNIJAS PLAKNĒ



4.32. zīm.

*Puskubiskā parabola* (4.32. zīm.). Vienādojums

$$y = ax^{\frac{3}{2}}.$$

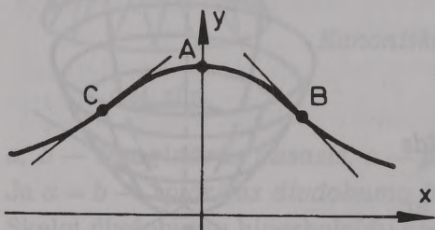
Parametriskie vienādojumi  $x = t^2, y = at^3$ .

*Anjēzi līnija* (4.33. zīm.). Vienādojums

$$y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}, \quad a > 0.$$

Asimptota  $y = 0$ , maksimums  $A(0; a)$ .

Pārliekuma punkti  $B\left(\frac{a}{\sqrt{3}}; \frac{3a}{4}\right)$  un  $C\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}; \frac{3a}{4}\right)$ .



4.33. zīm.

Laukums starp līkni un  $Ox$  asi  $S = \pi a^2$ .

*Dekarta lapa* (4.34. zīm.).

Vienādojums

$$x^3 + y^3 = 3axy, \quad a > 0.$$

Parametriskie vienādojumi

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

Asimptota  $x + y + a = 0$ .

Virsoņe  $A\left(\frac{3}{2}a; \frac{3}{2}a\right)$ .

Cilpas laukums  $S_1 = \frac{3}{2}a^2$ .

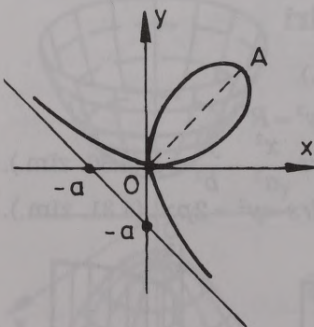
Laukums starp līkni un asimptotu

$$S_2 = \frac{3}{2}a^2.$$

*Cisoīda* (4.35. zīm.).

Vienādojums

$$y^2 = \frac{x^3}{a-x}, \quad a > 0.$$

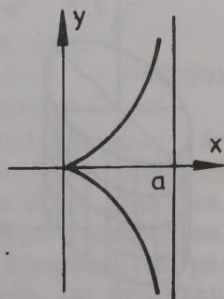


4.34. zīm.

Parametriskie vienādojumi  $x = \frac{at^2}{1+t^2}, y = \frac{at^3}{1+t^2}$ .

Asimptota  $x = a$ .

Laukums starp līkni un asimptotu  $S = \frac{3}{4}\pi a^2$ .



4.35. zīm.

*Strofoīda* (4.36. zīm.). Vienādojums

$$y^2 = x^2 \frac{a+x}{a-x}, \quad a > 0.$$

Parametriskie vienādojumi

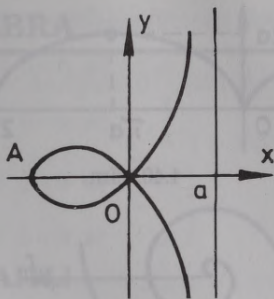
$$x = a \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad y = at \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}.$$

Asimptota  $x = a$ . Virsotne  $A(-a; 0)$ .

Cilpas laukums  $S_1 = 2a^2 - \frac{1}{2} \pi a^2$ .

Laukums starp līkni un asimptotu

$$S_2 = 2a^2 + \frac{1}{2} \pi a^2.$$



4.36. zīm.

*Astroīda* (4.37. zīm.). Vienādojums

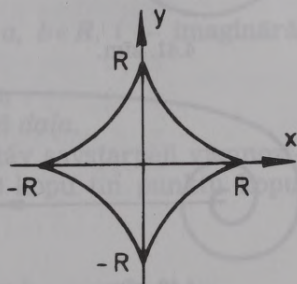
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}.$$

Parametriskie vienādojumi

$$x = R \cos^3 t, \quad y = R \sin^3 t.$$

Laukums, ko ierobežo astroīda,

$$S = \frac{3}{8} \pi R^2.$$



4.37. zīm.

Astroīdas garums  $l = 6R$ .

*Kardioīda* (4.38. zīm.). Vienādojums

$$(x^2 + y^2)^2 - 2ax(x^2 + y^2) = a^2 y^2, \quad a > 0.$$

Parametriskie vienādojumi

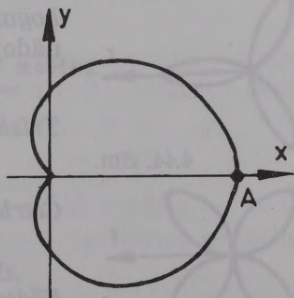
$$x = a \cos t (1 + \cos t), \quad y = a \sin t (1 + \cos t).$$

Polārais vienādojums  $r = a(1 + \cos \varphi)$ .

Virsotne  $A(2a; 0)$ .

Laukums, kuru ierobežo kardioīda,

$$S = \frac{3}{2} \pi a^2.$$



4.38. zīm.

Kardioīdas līknes garums  $l = 8a$ .

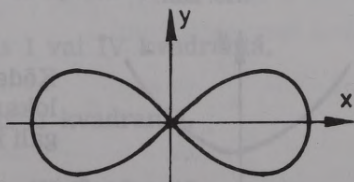
*Bernulli lemniskāta* (4.39. zīm.).

Vienādojums

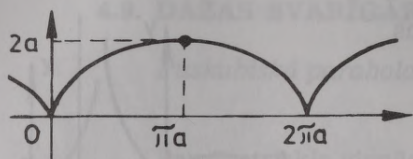
$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0, \quad a > 0.$$

Polārais vienādojums  $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ .

Katras cilpas laukums ir  $S = a^2$ .



4.39. zīm.



4.40. zīm.

*Cikloīda* (4.40. zīm.). Parametriskie vienādojumi

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad a > 0.$$

Vienas arkas garums  $l = 8a$ .

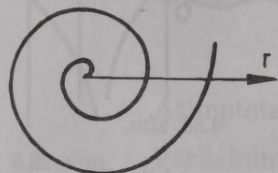
Laukums zem vienas arkas  $S = 3\pi a^2$ .

*Arhimēda spirāle* (4.41. zīm.). Polārais vienādojums

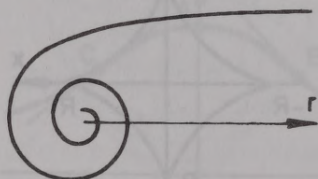
$$r = a\varphi.$$

*Hiperboliskā spirāle* (4.42. zīm.). Polārais vienādojums

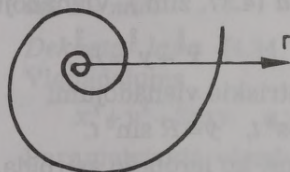
$$r = \frac{a}{\varphi}.$$



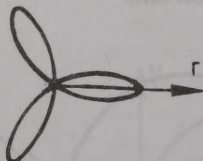
4.41. zīm.



4.42. zīm.



4.43. zīm.



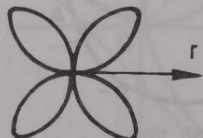
4.44. zīm.

*Logaritmiskā spirāle* (4.43. zīm.). Polārais vienādojums

$$r = a^{\varphi} \quad (a > 0).$$

*Trīslapu roze* (4.44. zīm.). Polārais vienādojums

$$r = a \sin 3\varphi.$$



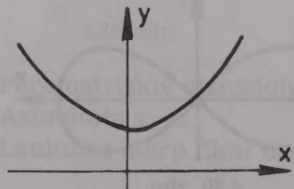
4.45. zīm.

*Četrslapu roze* (4.45. zīm.). Polārais vienādojums

$$r = a \sin 2\varphi.$$

*Ķēdes līnija* (4.46. zīm.). Vienādojums

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}.$$



Ķēdes līnijas formu ieņem homogēns, lokans, neizstiepjams smags diegs, kura gali ir nostiprināti.

4.46. zīm.

## 5. LINEĀRĀ ALGEBRA

### 5.1. KOMPLEKSIE SKAITĻI

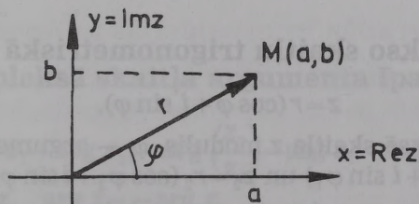
#### Komplekso skaitļu algebriskā forma

Apzīmējumi un terminoloģija:  $z = a + ib$ ,  $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $i$  — imaginārā vienība,  $i^2 = -1$ .

$a = \operatorname{Re} z$  — kompleksā skaitļa  $z$  reālā daļa,

$b = \operatorname{Im} z$  — kompleksā skaitļa  $z$  imaginārā daļa.

$Oxy$  — kompleksā plakne (5.1. zīm.). Pastāv savstarpēji viennozīmīga atbilstība starp komplekso skaitļu kopu un punktu kopu kompleksajā plaknē.



5.1. zīm.

$Ox$  — reālā ass,  $Oy$  — imaginārā ass.

Ja  $b = 0$ , tad  $z = a$  — reāls skaitlis.

Ja  $a = 0$ , tad  $z = ib$  — tīri imaginārs skaitlis.

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  — kompleksā skaitļa modulis.

$\varphi$  — kompleksā skaitļa arguments;  $-\pi < \varphi \leq \pi$ :

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \arctg \frac{b}{a}, & \text{ja } z \text{ atrodas I vai IV kvadrantā,} \\ \arctg \frac{b}{a} + \pi, & \text{ja } z \text{ atrodas II kvadrantā,} \\ \arctg \frac{b}{a} - \pi, & \text{ja } z \text{ atrodas III kvadrantā.} \end{cases}$$

Daži speciālgadījumi:

$$\arg z = \begin{cases} 0, & \text{ja } b=0 \text{ un } a>0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{ja } a=0 \text{ un } b>0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{ja } a=0 \text{ un } b<0 \\ \pi, & \text{ja } a<0 \text{ un } b=0. \end{cases}$$

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k.$$

### Darbības ar kompleksiem skaitļiem

$$z_1 + z_2 = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d),$$

$$z_1 - z_2 = (a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d),$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

### Komplekso skaitļu trigonometriskā forma

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

kur  $r$  — kompleksā skaitļa  $z$  modulis,  $\varphi$  — arguments.

Ja  $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$  un  $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ , tad

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

**Muavra formula:**  $(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ .

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right),$$

$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ .

Daži speciālgadījumi:

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

$$\sqrt[n]{i} = \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

## Kompleksi saistītā skaitļa īpašības

$\bar{z} = a - ib$  — kompleksā skaitļa  $z = a + ib$  *kompleksi saistītais skaitlis*.

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2,$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

$$\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n, \quad z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

## Kompleksā skaitļa moduļa īpašības

$$|\bar{z}| = |z|, \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad |z^n| = |z|^n,$$

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

## Kompleksā skaitļa argumenta īpašības

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2,$$

$$\arg(z^n) = n \arg z, \quad \arg \bar{z} = -\arg z.$$

## Kompleksa skaitļa eksponenciālā forma

$$z = r e^{i\varphi},$$

kur  $r$  — kompleksā skaitļa  $z$  modulis,  $\varphi$  — arguments.

$$\bar{z} = r e^{-i\varphi} = r(\cos \varphi - i \sin \varphi) = r(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)),$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad z^n = r^n e^{in\varphi},$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

## 5.2. POLINOMI

*n*-tās pakāpes polinoma vispārīgā forma

$$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

$a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}$  — polinoma koeficienti,  $a_0 \neq 0$ .

### Polinoma saknes

Skaitli  $\alpha$  sauc par polinoma  $p(x)$  vienkāršu sakni, ja

$$p(x) = (x - \alpha) q(x) \text{ un } q(\alpha) \neq 0.$$

Skaitli  $\alpha$  sauc par polinoma sakni ar kārtu  $m$ , ja

$$p(x) = (x - \alpha)^m \varphi(x) \text{ un } \varphi(\alpha) \neq 0.$$

**Algebras pamatteorēma:**

$$p(x) = a_0 ((x - \alpha_1)(x - \bar{\alpha}_1))^{k_1} \dots ((x - \alpha_l)(x - \bar{\alpha}_l))^{k_l} (x - \beta_1)^{m_1} \dots \\ \dots (x - \beta_s)^{m_s}$$

$$\text{un } 2k_1 + \dots + 2k_l + m_1 + \dots + m_s = n.$$

### Lagranža interpolācijas polinoms

Zinot  $n$ -tās kārtas polinoma  $p(x)$  vērtības  $n+1$  punktos  $p(x_0) = C_0$ ,  $p(x_1) = C_1, \dots, p(x_n) = C_n$ , var atrast polinoma vērtības jebkurā citā punktā:

$$p(x) = \sum_{i=0}^n \frac{C_i (x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

### Vjeta teorēma

Ja  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  ir polinoma

$$p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

saknes (katra sakne tiek ņemta tik reizes, kāda ir saknes kārtā), tad

$$a_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n),$$

$$a_2 = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \dots + \alpha_1 \alpha_n + \alpha_2 \alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1} \alpha_n,$$

$$a_3 = -(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 + \dots + \alpha_{n-2} \alpha_{n-1} \alpha_n),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{n-1} = (-1)^{n-1} (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} + \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-2} \alpha_n + \dots + \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n),$$

$$a_n = (-1)^n \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n.$$

Ja  $n=2$ ,  $p(x)=x^2+a_1x+a_2$ , tad  $a_1=-(\alpha_1+\alpha_2)$ ,  $a_2=\alpha_1\alpha_2$ .

Ja  $n=3$ ,  $p(x)=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ , tad  $a_1=-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$ ,

$$a_2=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3, \quad a_3=-\alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

### Trešās pakāpes polinoma sakņu atrašana

Vienādojumu  $x^3+ax^2+bx+c=0$  ar substitūciju  $x=y-\frac{a}{3}$  var reducēt uz vienādojumu  $y^3+py+q=0$ . Šim vienādojumam saknes atrod pēc *Kardāno formulām*

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

pie tam jāņem tikai tās sakņu vērtības

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad \text{un} \quad \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

kurām  $\alpha\beta = -\frac{p}{3}$ .

### Polinoma sakņu robežas

Polinoma  $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$  sakņu moduļu augšējā robeža ir  $1+\frac{A}{|a_0|}$ , kur  $A=\max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|\}$ .

Polinoma pozitīvo sakņu augšējā robeža ir  $1+\sqrt[n]{\frac{B_0}{a}}$ , kur  $a_0>0$ , bet  $B$  ir lielākais no polinoma negatīvo sakņu moduļiem.

Polinoma pozitīvo sakņu apakšējā robeža ir  $\frac{1}{N_1}$ , kur  $N_1$  — polinoma  $x^n \cdot p\left(\frac{1}{x}\right)$  pozitīvo sakņu augšējā robeža.

Polinoma negatīvo sakņu augšējā robeža ir  $-\frac{1}{N_2}$ , kur  $N_2$  ir polinoma  $x^n \cdot p\left(-\frac{1}{x}\right)$  pozitīvo sakņu augšējā robeža.

Polinoma negatīvo sakņu augšējā robeža ir  $-N_3$ , kur  $N_3$  ir polinoma  $p(-x)$  pozitīvo sakņu augšējā robeža.

Polinoma pozitīvo sakņu augšējās robežas atrašana ar *Ņūtona metodi*: ja polinomam  $p(x)$  ir  $a_0>0$  un  $p(c)>0$ ,  $p'(c)>0$ , ...,  $p^{(n)}(c)>0$ , tad  $c$  ir pozitīvo sakņu augšējā robeža.

## Polinoma sakņu tuvināta atrašana

**Nūtona metode:** ja polinoma  $p(x)$  vienkārša sakne  $\alpha$  atrodas intervālā  $(a, b)$  un šajā intervālā nav citu polinoma sakņu, kā arī nav sakņu polinomiem  $p'(x)$  un  $p''(x)$ , tad par tuvinātu saknes vērtību var ņemt skaitli

$$c = a^* - \frac{p(a^*)}{p'(a^*)},$$

kur  $a^*$  ir tas no skaitļiem  $a$  un  $b$ , kuram  $p(x)$  zīme sakrīt ar  $p''(x)$  zīmi.

**Lineārās interpolācijas metode:** ja polinoma  $p(x)$  vienkārša sakne  $\alpha$  atrodas intervālā  $(a, b)$ , tad par tuvinātu saknes vērtību var ņemt skaitli

$$c = \frac{bp(a) - ap(b)}{p(a) - p(b)}.$$

Hurvica determinants: par polinoma

$$p(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

*Hurvica determinantu* sauc determinantu

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

**Hurvica kritērijs:** polinoma  $p(x)$  visu sakņu reālās daļas ir negatīvas tad un tikai tad, ja Hurvica determinanta visi galvenie minori ir pozitīvi.

Ja  $n=2$ :  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ .

Ja  $n=3$ :  $a_1 > 0$ ,  $a_1a_2 - a_3 > 0$ ,  $a_3 > 0$ .

## 5.3. DETERMINANTI

### Determinanta definīcija

Par skaitļu  $1, 2, \dots, n$  permutācijas  $i_1, i_2, \dots, i_n$  inversiju skaitu sauc to elementu pāru skaitu, kuri veido inversiju, t. i., to pāru skaitu, kuriem  $l < j$ , bet  $i_l > i_j$ .

Permutācijas  $i_1, i_2, \dots, i_n$  inversiju skaitu apzīmēsim ar  $I(i_1, i_2, \dots, i_n)$ . Permutāciju sauc par *pāra vai nepāra* atkarībā no tā, vai  $I(i_1, i_2, \dots, i_n)$  ir pāra vai nepāra skaitlis.

Par kvadrātiskas matricas  $A=(a_{ij})$  determinantu  $|A| = \Delta = \det A$  sauc skaitli, kurš ir vienāds ar

$$\Delta = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n)} (-1)^{I(i_1, i_2, \dots, i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n},$$

kur  $\sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n)}$  nozīmē, ka summēts tiek pa visām iespējamām skaitļu 1, 2, ...,  $n$  permutācijām.

$$\text{Ja } n=2, \text{ tad } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\text{Ja } n=3, \text{ tad } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + \\ + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

### Determinanta minori un algebriskie papildinājumi

Par  $n$ -tās kārtas determinanta  $\Delta$  elementa  $a_{ij}$  minoru  $M_{ij}$  sauc  $(n-1)$ -ās kārtas determinantu, kuru iegūst, no  $\Delta$  izsvītrojot  $i$ -to rindu un  $j$ -to kolonnu.

Par determinanta

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\ n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\ n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1\ 1} & a_{n-1\ 2} & \dots & a_{n-1\ n-1} & a_{n-1\ n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\ n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

galvenajiem minoriem sauc determinantus

$$\Delta_1 = |a_{11}| = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \\ \Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\ n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\ n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1\ 1} & a_{n-1\ 2} & \dots & a_{n-1\ n-1} \end{vmatrix}, \quad \Delta_n = \Delta.$$

Par determinanta  $\Delta$  elementa  $a_{ij}$  algebrisko papildinājumu sauc tā minoru ar noteiktu zīmi:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Determinanta izvirzījums pēc  $i$ -tās rindas elementiem:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{ik}.$$

Determinanta izvirzījums pēc  $j$ -tās kolonnas elementiem:

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{kj}A_{kj}.$$

Ja  $A$  un  $B$  ir kvadrātiskas matricas, tad

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

### Determinantu īpašības

1.  $\det A = \det A^T$ .
2. Ja determinanta kādas rindas jeb kolonnas visi elementi ir nulles, tad determinants ir vienāds ar 0.
3. Ja determinantā maina vietām divas kaut kādas rindas jeb kolonnas, tad determinanta zīme mainās uz pretējo.
4. Kādas determinanta rindas jeb kolonnas visu elementu kopīgo reizinātāju var iznest pirms determinanta zīmes.
5. Ja determinants satur divas proporcionālas rindas jeb kolonnas, tad tas ir vienāds ar nulli.
6. Determinanta vērtība nemainās, ja kādai rindai jeb kolonnai pieskaita citu rindu jeb kolonnu, pareizinātu ar kādu skaitli.
7. Determinants ir vienāds ar nulli, ja kāda tā rinda jeb kolonna ir citu rindu jeb kolonnu lineāra kombinācija.

$$8. \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} + b_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} + b_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} + b_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

## 5.4. MATRICAS

### Apzīmējumi, terminoloģija

Par  $m \times n$  matricu sauc  $m \cdot n$  skaitļu (*matricas elementu*) sistēmu, kuri izvietoti taisnstūrveida tabulā  $m$  rindās un  $n$  kolonnās.

Apzīmējumi.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$A = (a_{ij})_{mn} \quad \text{jeb} \quad A = (a_{ij}).$$

Visu  $m \times n$  matricu kopu apzīmē ar  $M_{mn}$ .

Divas  $m \times n$  matricas ir vienādas, ja vienādi ir visi atbilstošie elementi.

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{— nulles matrica.}$$

$(a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n})$  — matrica rinda.

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix} \quad \text{— matrica kolonna.}$$

Ja  $m = n$ , matricu sauc par  $n$ -tās kārtas kvadrātisku matricu.

Visu  $n$ -tās kārtas kvadrātisku matricu kopu apzīmē ar  $M_n$ .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{— augšējā trīsstūrmatrixa,}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{— apakšējā trīsstūrmatrixa,}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{— diagonālmatrixa,}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix} \text{— skalāra matrica,}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{— vienības matrica}$$

jeb  $E = (\delta_{ij})$ , kur  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ja } i=j \\ 0, & \text{ja } i \neq j \end{cases}$  — Kronekera simbols.

### Matricu saskaitīšana

Ja  $A = (a_{ij})$  un  $B = (b_{ij}) \in M_{mn}$ , tad par *matricu A un B summu* sauc matricu  $C = (c_{ij}) \in M_{mn}$ , kur  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ . Apzīmē  $C = A + B$ .

Īpašības.

$$\begin{aligned} A + B &= B + A, \\ (A + B) + C &= A + (B + C), \\ A + 0 &= A. \end{aligned}$$

### Matricu atņemšana

Ja  $A = (a_{ij})$  un  $B = (b_{ij}) \in M_{mn}$ , tad par *matricu A un B starpību* sauc matricu  $C = (c_{ij}) \in M_{mn}$ , kur  $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ . Apzīmē  $C = A - B$ .

### Matricas reizinājums ar skaitli

Ja  $A = (a_{ij}) \in M_{mn}$ , tad par *matricas A reizinājumu ar skaitli  $\lambda$*  sauc matricu  $B = (b_{ij}) \in M_{mn}$ , kur  $b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$ . Apzīmē  $B = \lambda \cdot A$ .

Īpašības.

$$\begin{aligned} 1 \cdot A &= A, \\ \lambda(\mu A) &= (\lambda \cdot \mu)A, \\ \lambda(A + B) &= \lambda A + \lambda B, \\ (\lambda + \mu)A &= \lambda A + \mu A. \end{aligned}$$

## Matricu reizināšana

Ja  $A = (a_{ij}) \in M_{mn}$  un  $B = (b_{ij}) \in M_{np}$ , tad par *matricu A un B reizinājumu* sauc matricu  $C = (c_{ij}) \in M_{mp}$ , kur

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Īpašības.

$$A \cdot E = E \cdot A = A,$$

$$A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0,$$

$$(A \cdot B) C = A(B \cdot C),$$

$$\alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B),$$

$$(A + B) C = AC + BC,$$

$$C(A + B) = CA + CB.$$

## Matricu transponēšana

Par matricas

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

transponēto matricu sauc matricu

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Īpašības.

$$(A^T)^T = A,$$

$$(\alpha A)^T = \alpha A^T,$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T,$$

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

## Dažas speciālas matricu klases

$A = A^T$  — *simetriska matrica*, t. i.,  $a_{ij} = a_{ji}$ ,

$A \cdot A^T = E$  — *ortogonāla matrica*, t. i.,  $\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot a_{jk} = \delta_{ij}$ ,

$\det A = 0$  — *singulāra (deģenerēta) matrica*,

$\det A \neq 0$  — *nesingulāra (nedeģenerēta) matrica*.



$a_{ij}$  ( $i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n$ ) — sistēmas koeficienti,  
 $b_i$  — brīvie locekļi,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — nezināmie.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ — sistēmas matrica,}$$

$$A^* = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \text{ — paplašinātā sistēmas matrica.}$$

Lineāras vienādojumu sistēmas pieraksts matricu formā:

$$A \cdot X = b,$$

kur  $A$  — sistēmas matrica,  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ .

Ja  $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ , tad sistēmu sauc par *homogēnu sistēmu*.  
 Ja sistēmai eksistē vismaz viens atrisinājums, tad sistēmu sauc par *saderīgu*.

Sistēmu, kurai nav neviena atrisinājuma, sauc par *nesaderīgu*.  
 Saderīgu sistēmu sauc par *noteiktu*, ja tai eksistē tikai viens atrisinājums.

Saderīgu sistēmu sauc par *nenoteiktu*, ja tai eksistē vairāk nekā viens atrisinājums.

### Kronekera—Kapelli teorēma

Lineāru vienādojumu sistēma ir saderīga tad un tikai tad, ja sistēmas matricas rangs sakrīt ar paplašinātās sistēmas matricas rangu, t. i., ja

$$\text{rang } A = \text{rang } A^*.$$

Homogēnai sistēmai vienmēr eksistē triviālais atrisinājums  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ , tātad homogēna sistēma vienmēr ir saderīga. Homogēnai sistēmai eksistē netriviāli atrisinājumi, ja  $\text{rang } A < n$ , t. i., sistēmas matricas rangs ir mazāks nekā nezināmo skaits.

## Krāmera formulas

Ja  $m=n$  un  $\det A \neq 0$ , tad sistēma ir saderīga un tai eksistē viens vienīgs atrisinājums

$$X = A^{-1} \cdot b$$

jeb

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A},$$

kur  $\det A_i$  — determinants, kas iegūts no  $\det A$ ,  $i$ -to kolonnu aizvietojojot ar brīvo locekļu kolonnu.

Vispārīgajā gadījumā lineāru vienādojumu sistēmu parasti risina ar *Gausa izslēgšanas metodi*.

## 6. DIFERENCIĀLRĒĶINI

### 6.1. VIRKŅU UN FUNKCIJU ROBEŽAS

#### VirKNes robeža

$\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  — skaitļu virkne.

Skaitli  $a$  sauc par virknes  $\{a_n\}$  robežu, ja jebkuram  $\varepsilon > 0$  eksistē tāds skaitlis  $N$  (atkarīgs no  $\varepsilon$ ), ka visiem  $n > N$  ir spēkā nevienādība

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

VirKNes, kurām eksistē robeža, sauc par *konverģējošām*. Apzīmē

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

#### VirKNu robežu īpašības

Ja  $\{a_n\}$  un  $\{b_n\}$  ir divas konverģējošas virKNes, tad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \quad (\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0).$$

Ja  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  un  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  un visiem  $n$   $a_n \leq b_n$ , tad  $a \leq b$ .

Ja  $a_n \leq c_n \leq b_n$  visiem  $n$  un  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ , tad  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ .

#### Dažas robežas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, \quad \text{ja } |q| < 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0, \quad \text{ja } |q| < 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^a}{a^n} = 0, \text{ ja } a > 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \text{ ja } a > 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \dots + a_k}{b_0 n^k + b_1 n^{k-1} + \dots + b_k} = \frac{a_0}{b_0} \quad (b_0 \neq 0).$$

### Bezgalīgi mazas un bezgalīgi lielas virknes

Virkni  $\{a_n\}$ , kuras robeža ir 0, sauc par *bezgalīgi mazu*.

Virkni  $\{a_n\}$  sauc par *bezgalīgi lielu*, ja virkne  $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$  ir bezgalīgi maza. Apzīmē  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

Īpašības.

Ja  $\{a_n\}$  ir bezgalīgi maza virkne, tad  $\{c \cdot a_n\}$  arī ir bezgalīgi maza ( $c$  — konstante).

Ja  $\{a_n\}$  un  $\{b_n\}$  ir bezgalīgi mazas, tad  $\{a_n + b_n\}$  arī ir bezgalīgi maza virkne.

### Neenoteiktības

Ja  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  un  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ , tad izteiksme  $\frac{a_n}{b_n}$  sauc par *neenoteiktību* ar veidu  $\frac{0}{0}$ .

Ja  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  un  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ , tad izteiksme  $\frac{a_n}{b_n}$  sauc par *neenoteiktību* ar veidu  $\frac{\infty}{\infty}$ .

Ja  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  un  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ , tad izteiksme  $a_n \cdot b_n$  sauc par *neenoteiktību* ar veidu  $0 \cdot \infty$ .

Ja  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  un  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ , tad izteiksme  $a_n + b_n$  sauc par *neenoteiktību* ar veidu  $\infty - \infty$ .

Ja  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$  un  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ , tad izteiksmi  $a_n^{b_n}$  sauc par nenoteiktību ar veidu  $1^\infty$ .

Nenoteikto izteiksmju robežas nav nosakāmas, ja nav zināmi abu virkņu  $\{a_n\}$  un  $\{b_n\}$  elementu izmaiņas likumi.

## Funkcijas robeža

$U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  — punkta  $x_0$  apkārtnē ( $\delta > 0$ ).

Skaitli  $A$  sauc par funkcijas  $f(x)$  robežu punktā  $x_0$ , ja funkcija ir definēta kādā punkta  $x_0$  apkārtnē, izņemot varbūt pašu punktu  $x_0$ , un katram  $\varepsilon > 0$  var atrast tādu  $\delta > 0$ , ka visiem  $x \neq x_0$ , kuriem  $|x - x_0| < \delta$ , ir spēkā nevienādība  $|f(x) - A| < \varepsilon$ .

Apzīmē:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ .

Skaitli  $A$  sauc par funkcijas  $f(x)$  robežu punktā  $x_0$  no kreisās puses, ja  $f(x)$  ir definēta kādā apkārtnē  $(x_0 - \Delta, x_0)$  un katram  $\varepsilon > 0$  var atrast tādu  $\delta > 0$ , ka visiem  $x < x_0$ , kuriem  $x_0 - x < \delta$ , ir spēkā nevienādība

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Apzīmē:  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A$ .

Skaitli  $A$  sauc par funkcijas  $f(x)$  robežu punktā  $x_0$  no labās puses, ja  $f(x)$  ir definēta kādā apkārtnē  $(x_0, x_0 + \Delta)$  un katram  $\varepsilon > 0$  var atrast tādu  $\delta > 0$ , ka visiem  $x > x_0$ , kuriem  $x - x_0 < \delta$ , ir spēkā nevienādība

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Apzīmē:  $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A$ .

Skaitli  $A$  sauc par funkcijas robežu, kad  $x$  tiecas uz  $+\infty$ , ja funkcija ir definēta visiem  $x > a$  ( $a$  — patvaļīgs skaitlis), un katram  $\varepsilon > 0$  var atrast tādu  $\Delta > 0$ , ka visiem  $x > \Delta$

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Apzīmē:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ .

## Funkciju robežu īpašības

Ja  $f(x)$  un  $g(x)$  ir divas funkcijas, kurām eksistē robeža punktā  $x_0$ , tad

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \quad (\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad c = \text{const.}$$

Ja  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$  un  $f(x) \leq g(x)$ , tad  $A \leq B$ .

Ja kādā punkta  $x_0$  apkārtnē  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$  un

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A, \text{ tad } \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A.$$

Visas šīs īpašības ir spēkā, ja  $x_0$  vietā ņem  $+\infty$  vai  $-\infty$ .

## Dažas robežas

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ — pirmā ievērojamā robeža,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \text{ — otrā ievērojamā robeža,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+kx)^{\frac{m}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{mx} = e^{km},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{e^x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^x = 1.$$

## Bezgalīgi mazas un bezgalīgi lielas funkcijas

Funkciju  $f(x)$  sauc par *bezgalīgi mazu*, kad  $x \rightarrow x_0$ , ja  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ .

Funkciju  $f(x)$  sauc par *bezgalīgi lielu punktā*  $x_0$ , ja funkcija  $\frac{1}{f(x)}$  ir bezgalīgi maza, kad  $x \rightarrow x_0$ .

Īpašības. Ja  $f(x)$  ir bezgalīgi maza, kad  $x \rightarrow x_0$ , un  $c$  — patvaļīgs skaitlis, tad  $c \cdot f(x)$  arī ir bezgalīgi maza funkcija, kad  $x \rightarrow x_0$ .

Punktā  $x_0$  bezgalīgi mazu funkciju summa galīgā skaitā arī ir bezgalīgi maza funkcija, kad  $x \rightarrow x_0$ .

## Bezgalīgi mazu funkciju salīdzināšana

Funkciju  $f(x)$  sauc par *augstākas kārtas bezgalīgi mazu funkciju nekā*  $g(x)$ , kad  $x \rightarrow x_0$ , ja

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Apzīmē  $f(x) = o(g(x))$ , kad  $x \rightarrow x_0$ .

Divas funkcijas  $f(x)$  un  $g(x)$  sauc par *vienas kārtas bezgalīgi mazām funkcijām*, kad  $x \rightarrow x_0$ , ja

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = C, \quad C \in \mathbf{R} \text{ un } C \neq 0.$$

Apzīmē  $f(x) = O(g(x))$ , kad  $x \rightarrow x_0$ .

Funkcijas  $f(x)$  un  $g(x)$  sauc par *ekvivalentām bezgalīgi mazām funkcijām*, kad  $x \rightarrow x_0$ , ja

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Apzīmē  $f(x) \sim g(x)$ , kad  $x \rightarrow x_0$ .

## Nenoteiktības

Ja  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ , tad izteiksmi  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  sauc par nenoteiktību ar veidu  $\frac{0}{0}$ , kad  $x \rightarrow x_0$ .

Ja  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ , tad izteiksmi  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  sauc par nenoteiktību ar veidu  $\frac{\infty}{\infty}$ , kad  $x \rightarrow x_0$ .

Ja  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  un  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ , tad izteiksmi  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x)$  sauc par nenoteiktību ar veidu  $0 \cdot \infty$ , kad  $x \rightarrow x_0$ .

Ja  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  un  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ , tad izteiksmei  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x))$  sauc par nenoteiktību ar veidu  $\infty - \infty$ .

Ja  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$  un  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ , tad izteiksmei  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)}$  sauc par nenoteiktību ar veidu  $1^\infty$ .

Punkta  $x_0$  vietā var būt arī  $+\infty$  vai  $-\infty$ .

Nenoteiktību vērtības nav nosakāmas, nezinot abu funkciju  $f(x)$  un  $g(x)$  maiņas likumus.

## 6.2. FUNKCIJU NEPĀRTRAUKTĪBA

Funkciju  $f(x)$  sauc par *nepārtrauktu punktā*  $x_0$ , ja tā ir definēta kādā punkta  $x_0$  apkārtnē un jebkuram  $\varepsilon > 0$  eksistē tāds  $\delta > 0$ , ka visiem  $x$ , kuriem  $|x - x_0| < \delta$ , ir spēkā nevienādība

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Funkcija  $f(x)$  ir nepārtraukta punktā  $x_0$  tad un tikai tad, ja

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

### Nepārtrauktu funkciju īpašības

Ja  $f(x)$  un  $g(x)$  ir nepārtrauktas punktā  $x_0$ , tad

- 1)  $f(x) \pm g(x)$  arī ir nepārtraukta punktā  $x_0$ ,
- 2)  $f(x) \cdot g(x)$  arī ir nepārtraukta punktā  $x_0$ ,
- 3)  $\frac{f(x)}{g(x)}$  arī ir nepārtraukta punktā  $x_0$ , ja  $g(x_0) \neq 0$ ,
- 4) ja  $\varphi(t)$  ir nepārtraukta punktā  $t_0$  un  $f(x)$  ir nepārtraukta punktā  $x_0 = \varphi(t_0)$ , tad saliktā funkcija  $f(\varphi(t))$  ir nepārtraukta punktā  $t_0$ .

Ja  $f(x)$  ir nepārtraukta katrā kopas  $I \subset \mathbf{R}^1$  punktā, tad  $f(x)$  sauc par *nepārtrauktu kopā*  $I$ .

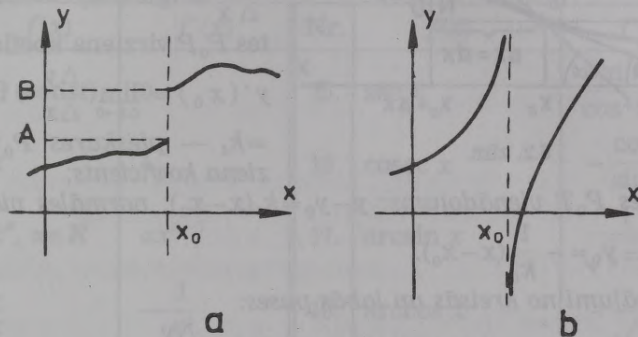
Funkciju  $f(x)$  sauc par *gabaliem nepārtrauktu intervālā*  $(a, b)$ , ja tā ir nepārtraukta katrā intervālā  $(a, x_1)$ ,  $(x_1, x_2)$ , ...,  $(x_{n-1}, b)$ , kur

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b.$$

Nepārtrauktas funkcijas grafīks ir nepārtraukta līnija.

## Funkcijas pārtraukuma punkti

Funkciju sauc par *pārtrauktu punktā*  $x_0$ , ja šajā punktā tā nav nepārtraukta. Punktu  $x_0$  sauc par funkcijas *pārtraukuma punktu*. Punktu  $x_0$  sauc par funkcijas  $f(x)$  *pirmā veida pārtraukuma punktu*, ja  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = B$  un  $A \neq B$  (6.1. zīm. a).



6.1. zīm.

Punktu  $x_0$  sauc par funkcijas  $f(x)$  *otrā veida pārtraukuma punktu*, ja funkcijai šajā punktā robeža neeksistē vai vismaz no vienas puses funkcijas robeža ir  $+\infty$  vai  $-\infty$  (6.1. zīm. b).

## Veierštrāsa teorēma

Ja funkcija  $f(x)$  ir nepārtraukta slēgtā intervālā  $[a, b]$ , tad tā ir ierobežota un sasniedz savu lielāko un mazāko vērtību.

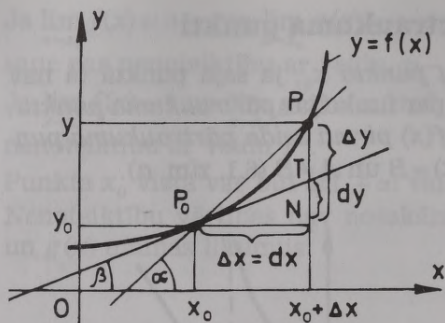
### 6.3. VIENARGUMENTA FUNKCIJAS PIRMAIS ATVASINĀJUMS

Definīcija. Funkcijas  $y=f(x)$  *pirmās kārtas (pirmais) atvasinājums punktā*  $x_0$  ir

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

kur  $\Delta x$  — argumenta, bet  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  — funkcijas  $f(x)$  pieaugums.

Ja šī robeža ir galīga, tad  $f(x)$  sauc par *diferencējamu punktā*  $x_0$ ; turklāt tā ir arī nepārtraukta šajā punktā.



6.2. zīm.

Apzīmējumi:  $y'$ ,  $\dot{y}$ ,  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{df}{dx}$ ,  
 $\frac{d}{dx}f$ ,  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$

Ģeometriski (6.2. zīm.):

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha = k_s$  — sekantes  $P_0P$  virziena koeficients;

$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \beta = k_t$  — pieskares  $P_0T$  virziena koeficients;

pieskares  $P_0T$  vienādojums:  $y - y_0 = k_t(x - x_0)$ ; normāles vienādojums:

$$y - y_0 = -\frac{1}{k_t}(x - x_0).$$

Atvasinājumi no kreisās un labās puses:

$$f'_-(x_0) = f'(x_0 - 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

$$f'_+(x_0) = f'(x_0 + 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Ja  $f$  ir diferencējama punktā  $x = x_0$ , t. i., eksistē  $f'(x_0)$ , tad  $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$ .

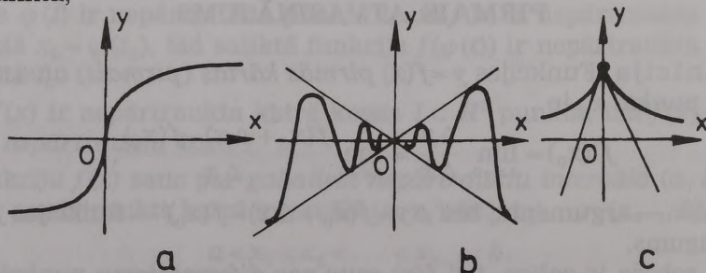
Ja  $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$ , tad  $f$  nav diferencējama punktā  $x_0$ .

Punktā  $x_0 = 0$  nediferencējamu funkciju piemēri doti 6.3. zīm.:

a)  $f'(0) = \infty$ ; b)  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  neeksistē; c)  $f'_-(0) \neq f'_+(0)$ .

Funkcija  $f$  ir

1) diferencējama intervālā  $I = (a, b)$ , ja tā ir diferencējama katrā  $I$  punktā;



6.3. zīm.

- 2) diferencējama, ja tā diferencējama  $D(f)$ ;  
 3) nepārtraukti diferencējama, ja  $f'(x)$  eksistē un ir nepārtraukta;  
 4) gabaliem gluda intervālā  $I$ , ja  $f(x)$  — nepārtraukta un  $f'(x)$  gabaliem nepārtraukta šajā intervālā.

### Elementāro funkciju atvasinājumi

Nr.	$f(x)$	$f'(x)$	Nr.	$f(x)$	$f'(x)$
1.	$C$ (const)	0	15.	$\sec x$	$\frac{\sin x}{\cos^2 x}$
2.	$x$	1	16.	$\operatorname{cosec} x$	$-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$
3.	$x^\alpha, \alpha \in \mathbf{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	17.	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4.	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	18.	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5.	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	19.	$\arctg x$	$\frac{1}{1+x^2}$
6.	$e^x$	$e^x$	20.	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
7.	$a^x$	$a^x \ln a$	21.	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
8.	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	22.	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
9.	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	23.	$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
10.	$\lg x$	$\frac{1}{x} \lg e$	24.	$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
11.	$\sin x$	$\cos x$	25.	$\operatorname{arsh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
12.	$\cos x$	$-\sin x$	26.	$\operatorname{arch} x, x > 1$	$\pm \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
13.	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	27.	$\operatorname{arth} x,  x  < 1$	$\frac{1}{1-x^2}$
14.	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	28.	$\operatorname{arcth} x,  x  > 1$	$\frac{1}{1-x^2}$

Piezīme. Lietderīgi izmantot arī šādus likumus:

$$1) \left( \frac{1}{f(x)} \right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)};$$

$$2) (\sqrt{f(x)})' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}};$$

$$3) (\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)};$$

$$4) (u^v)' = (e^{v \ln u})' = v u^{v-1} \cdot u' + u^v \ln u \cdot v',$$

kur  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$ .

#### 6.4. VIENARGUMENTA FUNKCIJAS AUGSTĀKU KĀRTU ATVASINĀJUMI

Funkcijas  $y=f(x)$  2., 3., ...,  $n$ -tās kārtas atvasinājumi punktā  $x$  ir

$$f''(x) = (f'(x))' = f^{(2)}(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x) = \frac{d^2 y}{dx^2};$$

$$f'''(x) = (f''(x))' = f^{(3)}(x) = \frac{d^3}{dx^3} f(x) = \frac{d^3 y}{dx^3};$$

$$\dots$$

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))' = \frac{d^n}{dx^n} f(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Ja eksistē  $f^{(n)}(x)$ , tad  $f$  sauc par  $n$  reizes diferencējamu, bet, ja  $f$  un  $f^{(n)}(x)$  ir nepārtrauktas funkcijas, — par  $n$  reizes nepārtraukti diferencējamu funkciju.

#### Vienkāršāko funkciju $n$ -tās kārtas atvasinājumi

Nr.	$f(x)$	$n$ -tais atvasinājums $f^{(n)}(x)$
1.	$x^m$	$m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)x^{m-n}$
2.	$x^n, n \in \mathbb{N}$	$n!$
3.	$e^x$	$e^x$
4.	$e^{mx}$	$m^n e^{mx}$
5.	$a^x$	$a^x (\ln a)^n$
6.	$\ln x$	$(-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n}$

Nr.	$f(x)$	$n$ -tais atvasinājums $f^{(n)}(x)$
7.	$\log_a x$	$(-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n \ln a}$
8.	$\sin x$	$\sin \left( x + \frac{n\pi}{2} \right)$
9.	$\cos x$	$\cos \left( x + \frac{n\pi}{2} \right)$
10.	$\sin mx$	$m^n \sin \left( mx + \frac{n\pi}{2} \right)$
11.	$\cos mx$	$m^n \cos \left( mx + \frac{n\pi}{2} \right)$
12.	$\operatorname{sh} x$	$\begin{cases} \operatorname{sh} x, & \text{ja } n=2k \\ \operatorname{ch} x, & \text{ja } n=2k+1 \end{cases}$
13.	$\operatorname{ch} x$	$\begin{cases} \operatorname{ch} x, & \text{ja } n=2k \\ \operatorname{sh} x, & \text{ja } n=2k+1 \end{cases}$
14.	$u \cdot v$	$u^{(n)}v + \binom{n}{1}u^{(n-1)}v' + \binom{n}{2}u^{(n-2)}v'' + \dots +$ $+ \binom{n}{n-1}u'v^{(n-1)} + uv^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}u^{(n-k)}v^{(k)}$ <p><i>Leibnica formula</i></p> $(u = u(x), v = v(x); u^{(0)} = u, v^{(0)} = v, \binom{n}{k} = C_n^k)$

## 6.5. DIFERENCĒJAMU FUNKCIJU ĪPAŠĪBAS

- $(cf(x))' = cf'(x)$ ,  $c$  — const.
- $(u \pm v)' = u' \pm v'$  ( $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$ ).
- $(uv)' = u'v + uv'$ .
- $(u \cdot v \cdot w)' = u'vw + uv'w + uvw'$ .
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ ,  $v \neq 0$ .
- $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ .

6. Ja  $y=f(u)$ ,  $u=g(v)$ ,  $v=h(x)$ , tad saliktas funkcijas  $y=f(g(h(x)))$  atvasinājums ir

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot g'(v) \cdot h'(x) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

7. Ja  $y=f(x)$  diferencējama un monotona intervālā  $(a, b)$  un  $f'(x) \neq 0$ , tad tās inversā funkcija  $x=g(y)$  arī ir diferencējama un

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

8. Leibnica formula:

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)},$$

$$\text{kur } \binom{n}{k} = C_n^k, u = u(x), v = v(x), u^{(0)} = u, v^{(0)} = v.$$

9. Ja  $y=f(x)$  ir dota parametriski ar vienādojumiem  $x=\varphi(t)$ ,  $y=\psi(t)$ , tad

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} = \frac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\varphi}(t)} \quad (\dot{\varphi}(t) \neq 0);$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\ddot{\psi}(t) \cdot \dot{\varphi}(t) - \dot{\psi}(t) \cdot \ddot{\varphi}(t)}{(\dot{\varphi}(t))^3}.$$

10. Ja funkcijā  $y=f(x)$  pāriet uz polārajām koordinātām pēc formulām  $x=r \cos \varphi$ ,  $y=r \sin \varphi$ , tad

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r' \sin \varphi + r \cos \varphi}{r' \cos \varphi - r \sin \varphi} \quad \left( r' = \frac{dr}{d\varphi} \right).$$

11. Ar vienādojumu  $F(x, y)=0$  (apslēptā veidā) dotas funkcijas  $y=f(x)$  atvasinājumi:

$$\frac{dy}{dx} = y' = - \frac{\partial F}{\partial x} \Big/ \frac{\partial F}{\partial y} = -F'_x / F'_y;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = - \frac{F''_{xx} (F'_y)^2 - 2F''_{xy} \cdot F'_x \cdot F'_y + F''_{yy} (F'_x)^2}{(F'_y)^3}$$

$(F'_x, F'_y, F''_{xx}, F''_{yy}, F''_{xy})$  parciālie atvasinājumi).

To pašu rezultātu iegūst, atbilstošo skaitu reizes atvasinot  $F(x, y)=0$  un ievērojot to, ka  $y$  ir argumenta  $x$  funkcija.

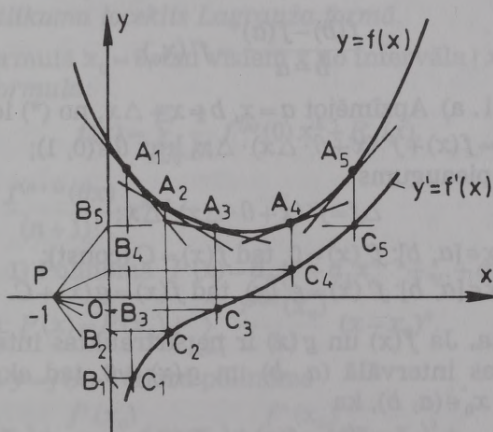
12. Logaritmiskā atvasināšana. Ja  $y = f(x) = u(x)^{v(x)}$ , tad  $\ln y = v \ln u$  un

$$\frac{1}{y} \cdot y' = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u}, \text{ t. i.,}$$

$$y' = (u(x))^{v(x)} \left( v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)} \right).$$

Šo metodi (pirms atvasināšanas logaritmēt pie bāzes  $e$ ) izmanto arī tad, ja  $f(x)$  izteiksme ir sarežģīta un satur vairāku funkciju reizinājumus, dalījumus, pakāpes, saknes.

13. Grafiskā atvasināšana (6.4. zīm.).



6.4. zīm.

- 1) Uz  $Ox$  negatīvās pusass izvēlas punktu, t. s. polu  $P$  (6.4. zīm.  $P(-1; 0)$ );
- 2)  $y = f(x)$  grafika punktos  $A_1, A_2, A_3, \dots$  novelk pieskares un tām paralēlus nogriežņus caur  $(.) P$  līdz atbilstošajiem krustpunktiem ar  $Oy$  asi —  $B_1, B_2, B_3, \dots$ ;
- 3) caur  $B_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ) novelk horizontāles, līdz tās krusto punktu  $A_i$  vertikāles atbilstoši punktos  $C_i$ ;
- 4) caur  $C_i$  novelk līniju — atvasinājuma  $y' = f'(x)$  grafiku.

## 6.6. PAMATTEORĒMAS PAR DIFERENCĒJAMĀM FUNKCIJĀM

**Fermā teorēma.** Ja  $y=f(x)$  ir definēta intervālā  $(a, b)$ , šī intervāla punktā  $x_0$  sasniedz savu vislielāko vai vismazāko vērtību, t. i.,  $f(x_0) > f(x)$  vai  $f(x_0) < f(x)$ , un eksistē galīgs  $f'(x_0)$ , tad  $f'(x_0) = 0$ .

**Rolla teorēma.** Ja  $f(x)$  ir nepārtraukta intervālā  $[a, b]$ , diferencējama intervālā  $(a, b)$  un  $f(a) = f(b)$ , tad eksistē vismaz viens tāds  $(.) x_0 \in I$ , ka  $f'(x_0) = 0$ .

**Lagranža teorēma.** Ja  $f(x)$  ir nepārtraukta intervālā  $[a, b]$ , diferencējama intervālā  $(a, b)$ , tad eksistē vismaz viens tāds  $(.) x_0 \in (a, b)$ , ka

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0). \quad (*)$$

Secinājumi. a) Apzīmējot  $a = x$ ,  $b = x + \Delta x$ , no (\*) iegūst

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x + \theta \cdot \Delta x) \cdot \Delta x, \text{ kur } \theta \in (0, 1);$$

tātad  $f(x)$  pieaugums

$$\Delta f = f'(x + \theta \cdot \Delta x) \cdot \Delta x;$$

b) ja visiem  $x \in [a, b]$ :  $f'(x) = 0$ , tad  $f(x) = C$  (const);

c) ja visiem  $x \in [a, b]$ :  $f'(x) = g'(x)$ , tad  $f(x) = g(x) + C$ .

**Koši teorēma.** Ja  $f(x)$  un  $g(x)$  ir nepārtrauktas intervālā  $[a, b]$ , diferencējamas intervālā  $(a, b)$  un  $g(x) \neq 0$ , tad eksistē vismaz viens tāds  $(.) x_0 \in (a, b)$ , ka

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

**Lopitāla teorēma** (kārtula nenoteiktību  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$  noskaidrošanai).

Ja funkcijām  $f(x)$  un  $g(x)$  eksistē galīgi atvasinājumi punkta  $x_0$  apkārtnē\* ( $g'(x) \neq 0$ ) un  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$  vai  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ , tad

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Šeit  $x_0$  var būt gan galīgs, gan arī  $+\infty$  vai  $-\infty$ .

\* Pašā  $(.) x_0$  funkcijas var nebūt definētas.

**Teilora teorēma.** Ja punkta  $x_0$  apkārtņē  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  funkcija  $y = f(x)$  ir  $n+1$  reizi nepārtraukti diferencējama, tad visiem  $x$  no šīs apkārtnes

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \\ + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + R_n(x) = \\ = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + R_n(x), \quad \text{— Teilora formula,}$$

$$\text{kur } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} = O((x-x_0)^{n+1}),$$

$\theta \in (0, 1)$  — atlikuma loceklis Lagranža formā.

Ja Teilora formulā  $x_0 = 0$ , tad visiem  $x$  no intervāla  $|x| < \varepsilon$  ir spēkā Maklorēna formula:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k + R_n(x),$$

$$\text{kur } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Piezīmes. 1) Polinoma  $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$  Teilora formula:  $P(x) = P(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$ .

2) Funkcijas  $y = f(x)$  Teilora polinoms

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \dots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n.$$

Teilora (Maklorēna) formula dažām elementārām funkcijām:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1;$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_{2m}(x),$$

$$R_{2m}(x) = \frac{\sin^{(2m+1)}(\theta x)}{(2m+1)!} x^{2m+1};$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + R_{2m+1}(x),$$

$$R_{2m+1}(x) = \frac{\cos^{(2m+2)}(\theta x)}{(2m+2)!} x^{2m+2};$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + R_n(x),$$

$$\text{kur } 1) x \in [0; 1]: R_n(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \quad 0 < \theta < 1;$$

$$2) x \in [-1; 0]: R_n(x) = (-1)^n \frac{(1-\theta)^n x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}, \quad 0 < \theta < 1;$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + R_n(x), \quad x \in [-1, 1],$$

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!} (1+\theta x)^{\alpha-n-1} (1-\theta)^n x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1;$$

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{2m+1} + R_{2m+2}(x), \quad x \in [-1, 1],$$

$$|R_{2m+2}(x)| \leq \frac{x^{2m+3}}{2m+3}.$$

## 6.7. VIENARGUMENTA FUNKCIJAS DIFERENCIĀĻI

Diferencējamas funkcijas  $y=f(x)$  pieauguma

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x \quad (*)$$

galveno daļu  $f'(x) \cdot \Delta x = O(\Delta x)$ , kas ir lineāra attiecībā pret  $\Delta x$  ( $\alpha \cdot \Delta x = o(\Delta x)$ ), sauc par  $f$  pirmās kārtas diferenciāli un apzīmē ar

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x$$

vai arī

$$dy = df(x) = f'(x) dx$$

( $\Delta x = dx$  — neatkarīgā mainīgā diferenciālis) un

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

t. i., — atvasinājums ir divu diferenciāļu dalījums.

No (\*) izriet, ka 1)  $\Delta y \approx dy$ ; 2)  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1$  (šādā gadījumā raksta  $\Delta y \sim dy$ ). Tādējādi aprēķinos mazus pieaugumus var aizvietot ar diferenciāliem.

Ģeometriski (sk. 6.2. zīm.):  $\Delta y = PN$ ,  $dy = TN$ , t. i., ordinātas pieaugums, kāds rodas intervālā  $[x_0, x_0 + \Delta x]$ ,  $f(x)$  grafiku aizvietojo ar pieskares nogriezni  $P_0T$ .

Pirmās kārtas diferenciāļa vienkāršākās īpašības ( $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$ ):

1)  $d(Cu) = C du$  ( $C$  — const),

2)  $d(u \pm v) = du \pm dv$ ,

3)  $d(u \cdot v) = u dv + v du$ ,

4)  $d(u \cdot v \cdot w) = uv dw + uw dv + vw du$ ,

5)  $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$ ,

6) ir spēkā *formas invariance*, t. i.,  $dy = f'(x) dx$  neatkarīgi no tā, vai  $x$  ir neatkarīgais mainīgais vai arī funkcija no cita argumenta.

Ja  $y = f(x)$  ir  $n$  reizes ( $n > 1$ ) diferencējama, tad tās 2., 3., ...,  $n$ -tās kārtas diferenciālis ir

$$d^2y = d(dy) = f''(x) (dx)^2 = f''(x) dx^2,$$

$$d^3y = d(d^2y) = f'''(x) (dx)^3 = f'''(x) dx^3,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$d^n y = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x) (dx)^n = f^{(n)}(x) dx^n.$$

Tātad

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

(lasa:  $d n y$  pēc  $dx$   $n$ -tajā), t. i.,  $f^{(n)}(x)$  ir vienāds ar divu diferenciāļu dalījumu, bet vienīgi tad, ja  $x$  ir neatkarīgais mainīgais.

### 6.8. ATVASINĀJUMU IZMANTOŠANA FUNKCIJAS $y = f(x)$ PĒTĪŠANĀ

Intervālā  $I = (a, b)$  funkcija  $f$  ir *monotoni augoša (dilstoša)*, ja visiem  $x \in I$   $f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) \leq 0$ ).

Funkcijas  $f$  vērtība  $f(x_0)$ ,  $x_0 \in I$ , ir tās *lokālais ekstrēms (maksimums vai minimums) intervālā  $I$* , ja šajā intervālā eksistē

tāda (.)  $x_0$  apkārtne  $|x - x_0| < \varepsilon$ , kurā

$$f(x_0) > f(x) \quad (\text{t. i., } \Delta f < 0) \text{ — maksimums } M$$

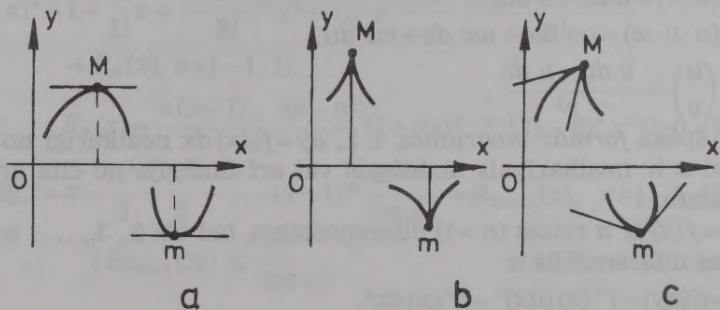
vai

$$f(x_0) < f(x) \quad (\text{t. i., } \Delta f > 0) \text{ — minimums } m.$$

*Ekstrēma eksistences nepieciešamais nosacījums:*

ja  $f(x_0)$  ir  $f$  ekstrēms ( $M$  vai  $m$ ), tad  $f'(x_0) = 0$  ( $x_0$  — *stacionārais* (.) vai  $f'(x_0)$  neeksistē.

Stacionāros (.) un (.), kuros  $f'(x)$  neeksistē (t. i.,  $f'(x) \rightarrow \infty$  vai  $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$ ), sauc par *kritiskiem punktiem*. Atbilstoši ģeometriski: pieskare paralēla  $Ox$  asij (6.5. zīm. a), perpendikulāra  $Ox$  asij (6.5. zīm. b) vai pieskares šajā punktā veido dažādus leņķus ar  $Ox$  asi (6.5. zīm. c).



6.5. zīm.

*Ekstrēma eksistences pietiekamie nosacījumi:*

ja  $f'(x_0) = 0$  un  $f$  nepārtraukti diferencējama attiecīgo skaitu reīzu (.)  $x_0$  apkārtņē, tad  $f$  ekstrēmu nosaka pēc vienas no trim teorēmām:

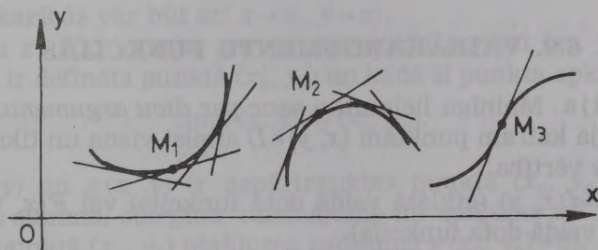
Teorēma	maksimums $M = f(x_0)$	minimums $m = f(x_0)$
par 1. atvasin. zīmes maiņu	$f'(x < x_0) > 0, f'(x > x_0) < 0$	$f'(x < x_0) < 0, f'(x > x_0) > 0$
par 2. atvasin. zīmi	$f''(x_0) < 0$	$f''(x_0) > 0$
par augstākas kārtas atvasin. izmantošanu	$f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$ bet $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ un $n = 2k$ (pāra sk.)	
	$f^{(2k)}(x_0) < 0$	$f^{(2k)}(x_0) > 0$
	(ja $n = 2k + 1$ — ekstrēma nav)	

Funkcijas  $f$  lielākā un mazākā vērtība tās definīcijas apgabalā  $D(f)$  vai intervālā  $[a, b]$  ( $\max_{x \in [a, b]} f(x)$ ,  $\min_{x \in [a, b]} f(x)$ ) ne vienmēr sakrīt ar  $f$  ekstrēmumiem.

$\max_{x \in [a, b]} f(x)$  un  $\min_{x \in [a, b]} f(x)$  nosaka, salīdzinot

- 1) visus  $M$  un  $m$  (no  $D(f)$  vai  $[a, b]$ ),
- 2)  $f(a)$ ,  $f(b)$  (vai  $D(f)$  galapunktos).

Definīcija.  $f$  grafiks ir *ieliekts*, ja visi liknes punkti atrodas virs jebkuras no pieskarēm, kas novilkta liknes punktos (6.6. zīm. (.)  $M_1$  un tā apkārtne); pretējā gadījumā — grafiks ir *izliekts* ((.)  $M_2$  un tā apkārtne).



6.6. zīm.

Analītiski: kādā intervālā  $I$   $f$  grafiks ir ieliekta (izliekta) likne tad un tikai tad, ja visiem  $x \in I$   $f''(x) > 0$  ( $f''(x) < 0$ ). Funkcijai  $f(x)$  punkts  $(x_0, f(x_0))$  ir pārliekuma punkts (p. p.), ja, ejot caur šo punktu,  $f$  grafiks pārliecas no vienas pieskares puses uz otru (mainās ieliekuma un izliekuma intervāli — 6.6. zīm. (.)  $M_3$ ).

P. p. eksistences nepieciešamais nosacījums:  $f''(x_0) = 0$ .

P. p. eksistences pietiekamie nosacījumi:

- 1) ja  $f''(x_0) = 0$  un  $f''(x < x_0) < 0$ ,  $f''(x > x_0) > 0$  vai arī  $f''(x < x_0) > 0$ ,  $f''(x > x_0) < 0$ , tad  $(x_0, f(x_0))$  — p. p.;
- 2) ja  $f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ , bet  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$  un  $n = 2k + 1$  (nepāra sk.), tad  $(x_0, f(x_0))$  — p. p.

Izmantojot atvasinājumus,  $f(x)$  pētīšanu veic šādā secībā.

1. No  $f(x)$  nosaka

- 1)  $D(f)$ ;
- 2)  $f(x) = 0$  (t. i.,  $f$  nulles);
- 3)  $f$  — pāra vai nepāra;
- 4) periodiskumu;

- 5)  $f$  pārtraukuma punktus un vertikālās asimptotas;
  - 6) slīpās asimptotas.
2. No  $f'(x)$  nosaka
    - 1) monotonitātes (augšanas un dilšanas intervālus);
    - 2) lokālos ekstrēmus.
  3. No  $f''(x)$  nosaka
    - 1) ieliekuma un izliekuma intervālus;
    - 2) pārliekuma punktus.
  4. Caur 1.—3. iegūtajiem punktiem  $(x_i; f(x_i))$  skicē  $f(x)$  grafiku (nepieciešamības gadījumā papildus aprēķina dažas  $f$  vērtības).

## 6.9. VAIRĀKARGUMENTU FUNKCIJAS

Definīcija. Mainīgu lielumu  $u$  sauc par *divu argumentu*  $x$  un  $y$  *funkciju*, ja katram punktam  $(x, y) \in D$  atbilst viena un tikai viena mainīgā  $u$  vērtība.

Raksta  $u=f(x, y)$  (atklātā veidā dota funkcija) vai  $F(x, y, u)=0$  (apslēptā veidā dota funkcija).

Analogi definē trīs argumentu funkciju  $u=f(x, y, z), \dots$ , kā arī  $n$  argumentu funkciju  $u=f(x, y, z, \dots, t)$ .

Ģeometriski funkcijas  $z=f(x, y)$  definīcijas apgabals ir kāds  $xOy$  plaknes apgabals  $D$ , bet  $z=f(x, y)$  grafiks — virsma.

### Divargumentu funkcijas robeža un nepārtrauktība

Skaitli  $A$  sauc par divargumentu *funkcijas*  $z=f(x, y)$  *robežu punktā*  $(x_0, y_0)$ , ja šī funkcija ir definēta kādā punkta  $(x_0, y_0)$  apkārtnē, izņemot varbūt pašu šo punktu, un jebkuram  $\varepsilon > 0$  var atrast tādu  $\delta > 0$ , ka visiem punktiem  $(x, y)$ , kuriem  $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ , izpildās  $|f(x, y) - A| < \varepsilon$ .

Apzīmējums:  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$ .

*Funkcijai*  $z=f(x, y)$  *punktā*  $(x_0, y_0)$  *robeža ir*  $\infty$  *(bezgalība)*, ja šī funkcija ir definēta kādā punkta  $(x_0, y_0)$  apkārtnē, izņemot varbūt pašu šo punktu, un jebkuram  $N > 0$  var atrast tādu  $\delta > 0$ , ka  $|f(x, y)| > N$ , ja vien  $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ .

Apzīmējums:  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = \infty$ .

Īpašības.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} (f(x, y) \pm g(x, y)) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) \pm \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} g(x, y);$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} (f(x, y) \cdot g(x, y)) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} g(x, y);$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)}{\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} g(x, y)} \quad \left( \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} g(x, y) \neq 0 \right).$$

Šajās sakarībās var būt arī  $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$ .

Funkciju  $z = f(x, y)$  sauc par *nepārtrauktu punktā*  $(x_0, y_0)$ , ja šī funkcija ir definēta punktā  $(x_0, y_0)$  un kādā šī punkta apkārtnē un

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Ja  $f(x, y)$  un  $g(x, y)$  ir nepārtrauktas punktā  $(x_0, y_0)$ , tad šo funkciju summa, starpība, reizinājums un dalījums arī ir nepārtraukti punktā  $(x_0, y_0)$  (dalījuma gadījumā  $g(x_0, y_0) \neq 0$ ).

### Vairākargumentu funkcijas robeža un nepārtrauktība

Skaitli  $A$  sauc par vairākargumentu funkcijas  $u = f(x, y, z, \dots, t)$  robežu punktā  $(x_0, y_0, \dots, t_0)$ , ja šī funkcija ir definēta kādā punkta  $(x_0, y_0, \dots, t_0)$  apkārtnē, izņemot varbūt pašu šo punktu, un jebkuram  $\varepsilon > 0$  var atrast tādu  $\delta > 0$ , ka visiem punktiem  $(x, y, \dots, t)$ , kuriem

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \dots + (t-t_0)^2} < \delta,$$

ir spēkā nevienādība

$$|f(x, y, \dots, t) - A| < \varepsilon.$$

Apzīmējums:  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0 \\ \dots \\ t \rightarrow t_0}} f(x, y, \dots, t) = A$ .

Vairākargumentu funkcijas robežai ir spēkā tās pašas īpašības, kuras ir divargumentu funkcijas robežai.

Funkciju  $u=f(x, y, \dots, t)$  sauc par *nepārtrauktu punktā*  $(x_0, y_0, \dots, t_0)$ , ja šī funkcija ir definēta punktā  $(x_0, y_0, \dots, t_0)$  un kādā šī punkta apkārtnē un

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0 \\ \dots \\ t \rightarrow t_0}} f(x, y, \dots, t) = f(x_0, y_0, \dots, t_0).$$

Nepārtrauktu vairākargumentu funkciju summa, starpība, reizinājums un dalījums arī ir nepārtrauktas funkcijas.

**Veierštrāsa teorēma.** Slēgtā apgabalā nepārtraukta vairākargumentu funkcija sasniedz savu minimālo un maksimālo vērtību.

## 6.10. VAIRĀKARGUMENTU FUNKCIJAS PARCIĀLIE ATVASINĀJUMI

Funkcijas  $u=f(x, y, z, \dots, t)=f$  *parciālais atvasinājums pēc  $x$  punktā*  $P_0(x_0, y_0, z_0, \dots, t_0) \in \mathbf{R}^n$  ir robeža (ja tā eksistē):

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0, \dots, t_0) - f(x_0, y_0, z_0, \dots, t_0)}{\Delta x} = \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x f(P_0)}{\Delta x} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{P_0} = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0, \dots, t_0)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1)$$

Parciālā atvasinājuma (1) citi apzīmējumi:  $u'_x$ ,  $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{P_0}$ ,  $f'_x$ . Lasa: *df* parciāli pēc  $dx$ .

Šeit  $\Delta_x f(P_0)$  ir parciālais pieaugums pēc  $x$ .

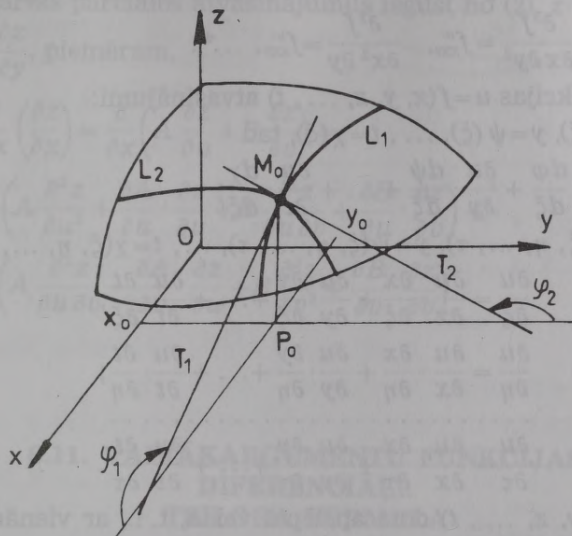
Analogi definē pārējos parciālos atvasinājumus  $\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{P_0}$ ,  $\left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{P_0}$ ,  $\dots$ ,  $\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{P_0}$ .

Ja  $z=f(x, y)$ , tad  $P_0(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$  ( $xOy$  plakne) un

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{P_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x};$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{P_0} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

**Definīcija.** Funkciju  $f$  sauc par *diferencējamu pēc  $x, y, z, \dots, t$  kādā kopā  $E \subset D(f)$* , ja katrā  $E$  punktā eksistē parciālie atvasinājumi pēc  $x, y, \dots, t$ . Ja turklāt tie ir nepārtraukti, tad  $f$  sauc par *nepārtraukti diferencējamu* (punktā vai kopā).



6.7. zīm.

Parciālos atvasinājumus atrod, izmantojot vienargumenta funkcijas atvasināšanas likumus ((6.3.), (6.5.)), pārējos mainīgos uzskatot par konstantēm.

Ģeometriski: ja  $z=f(x, y)$  attēlo virsmu (6.7. zīm.) un līnijas  $L_1, L_2$  rodas, šķeļot virsmu ar plaknēm  $x=x_0, y=y_0$ , bet  $T_1, T_2$  — līniju  $L_1, L_2$  atbilstošās pieskares punktā  $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ , tad

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial x} = \operatorname{tg} \varphi_1, \quad \frac{\partial f(P_0)}{\partial y} = \operatorname{tg} \varphi_2, \quad \text{kur } \sphericalangle \varphi_1 = \sphericalangle (T_1, Ox), \quad \sphericalangle \varphi_2 = \sphericalangle (T_2, Oy).$$

Funkcijas  $u=f(x, y, z, \dots, t)$  otrās kārtas (otros) parciālos atvasinājumus iegūst, atvasinot pirmo parciālo atvasinājumu pēc tā paša mainīgā kā pirmo reizi (rodas  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}, \dots$ ; lasa:

$d$  divi  $f$  pēc  $dx$  kvadrātā) vai arī pēc cita mainīgā (rodas t. s. jauktie atvasinājumi:  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = f''_{xz}, \dots$ ).

Ja 2. kārtas jauktie parciālie atvasinājumi (piem.,  $f''_{xy}$  un  $f''_{yx}$ ) ir nepārtraukti kādā ( $\cdot$ )  $P_0$  apkārtnē, tad tie ir vienādi šajā apkārtnē ( $f''_{xy} = f''_{yx}$ ).

Augstākās kārtas parciālos atvasinājumus definē analogi:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = f'''_{xxx}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = f'''_{xyy}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = f'''_{xxy}, \quad \dots^*.$$

Saliktas funkcijas  $u=f(x, y, z, \dots, t)$  atvasinājumi:

1) ja  $x=\varphi(\xi), y=\psi(\xi), \dots, t=\chi(\xi)$ , tad

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{d\varphi}{d\xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{d\psi}{d\xi} + \dots + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{d\chi}{d\xi};$$

2) ja  $x=\varphi(\xi, \eta, \dots, \tau), y=\psi(\xi, \eta, \dots, \tau), \dots, t=\chi(\xi, \eta, \dots, \tau)$ , tad

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} + \dots + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} + \dots + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial \eta};$$

$$\dots$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \tau} + \dots + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau}.$$

Ja  $u=f(x, y, z, \dots, t)$  dota apslēptā veidā, t. i., ar vienādojumu  $F(x, y, \dots, t, u)=0$ , tad

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_u}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_u}, \quad \dots, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{F'_t}{F'_u}.$$

### Pāreja uz jauniem mainīgajiem parciālajos atvasinājumos

Ja funkcijā  $z=f(x, y)$  pāriet uz jauniem mainīgajiem  $u$  un  $v$  pēc formulām  $x=\varphi(u, v), y=\psi(u, v)$ , tad

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u};$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v}.$$

No šīm sakarībām iegūst

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A \frac{\partial z}{\partial u} + B \frac{\partial z}{\partial v}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = C \frac{\partial z}{\partial u} + D \frac{\partial z}{\partial v}, \quad (2)$$

kur  $A, B, C, D$  — argumentu  $u$  un  $v$  funkcijas.

\*  $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$  nozīmē to, ka vispirms  $f$  parciāli atvasina vienu reizi pēc  $x$ ,

bet pēc tam — turpina parciāli atvasināt divas reizes pēc  $y$ .

Otrās kārtas parciālos atvasinājumus iegūst no (2),  $z$  vietā liekot

$\frac{\partial z}{\partial x}$  un  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , piemēram,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( A \frac{\partial z}{\partial u} + B \frac{\partial z}{\partial v} \right) = \\ &= A \left( A \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial A}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} + B \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial B}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \right) + \\ &+ B \left( A \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial A}{\partial v} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} + B \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{\partial B}{\partial v} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \right). \end{aligned}$$

### 6.11. VAIRĀKARGUMENTU FUNKCIJAS DIFERENCIĀĻI. TEILORA FORMULA

Funkcijas  $u=f(x, y, z, \dots, t)$  parciālais diferenciālis, piem., pēc  $x$  ir

$$d_x f = d_x u = \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$

Funkciju  $f$  sauc par *diferencējamu* ( $\cdot$ )  $P_0(x_0, y_0, \dots, t_0)$ , ja, pārejot uz tam tuvu punktu  $P(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, \dots, t_0 + \Delta t)$ ,  $f$  pieaugums

$$\Delta u = f(P) - f(P_0) = \left( \frac{\partial u}{\partial x} dx + \dots + \frac{\partial u}{\partial t} dt \right) \Big|_{P_0} + o(\Delta \rho), \quad (1)$$

kur  $\Delta \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + \dots + (\Delta t)^2}$  ( $\Delta x = dx, \Delta y = dy, \dots, \Delta t = dt$ ).

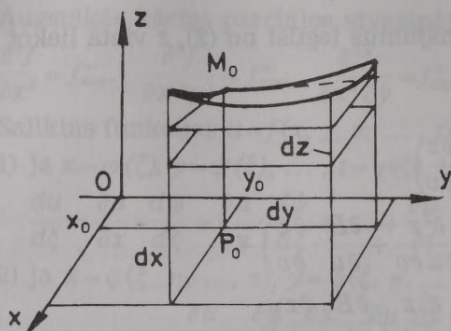
Pieauguma  $\Delta u$  galvenā — lineārā daļa ir *f pilnais diferenciālis* ( $\cdot$ )  $P_0$ , un to apzīmē ar  $du$ :

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \dots + \frac{\partial u}{\partial t} dt.$$

Tātad izteiksmē (1)

$$\Delta u = du + o(\Delta \rho) \text{ vai arī}$$

$$\Delta u \approx du \quad (o(\Delta \rho) \rightarrow 0, \text{ ja } \Delta \rho \rightarrow 0).$$



6.8. zīm.

Ģeometriski: funkcijas  $z = f(x, y)$  (virsmas Dekarta koordinātu sistēmā) pilnais diferenciālis

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad (2)$$

ir pieaugums, kādu iegūst  $f$ , ja virsmu aizvieto ar tās pieskarplakni caur ( $\cdot$ )  $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  (6.8. zīm.).

Diferenciāli (2) var pierak-

stīt, lietojot simbolisku operatoru  $\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy$ :

$$dz = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right) z,$$

kur  $\frac{\partial}{\partial x} dx \cdot z$  nozīmē  $\frac{\partial z}{\partial x} dx$ ,  $\frac{\partial}{\partial y} dy \cdot z$  nozīmē  $\frac{\partial z}{\partial y} dy$ .

Ja  $z = f(x, y)$  ir diferencējama, tad  $f$  otrās kārtas pilnais diferenciālis

$$d^2z = d(dz) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 \cdot z.$$

$z = f(x, y)$   $n$ -tās kārtas diferenciālis

$$d^n z = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n \cdot z,$$

bet funkcijai  $u = f(x, y, z, \dots, t)$ :

$$d^n u = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \dots + \frac{\partial}{\partial t} dt \right)^n \cdot u.$$

Ja funkcija  $z = f(x, y)$  ir  $n+1$  reizi nepārtraukti diferencējama ( $\cdot$ )  $P_0(x_0, y_0)$  apkārtnē, tad to var attēlot ar Teilora formulu.

Ja  $n=2$ ,

$$f(x, y) = f(P_0) + f'_x(P_0) \Delta x + f'_y(P_0) \Delta y + \frac{1}{2!} (f''_{xx}(P_0) \Delta x^2 + 2f''_{xy}(P_0) \Delta x \cdot \Delta y + f''_{yy}(P_0) \Delta y^2) + R_2,$$

kur  $\Delta x = dx = x - x_0$ ,  $\Delta y = dy = y - y_0$ ,

$$R_2 = O(\Delta \rho^3) \text{ — atlikuma loceklis,}$$

$$\Delta \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Patvaļīgam  $n$ :

$$f(x, y) = f(P_0) + \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right) f(P_0) + \\ + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 \cdot f(P_0) + \dots + \\ + \frac{1}{n!} \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n \cdot f(P_0) + R_n,$$

$$\text{kur } R_n = O(\Delta \rho^{n+1}) = \frac{1}{(n+1)!} \left( \frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^{n+1} \times \\ \times f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)$$

ir atlikuma loceklis Lagranža formā ( $\theta \in (0, 1)$ ).

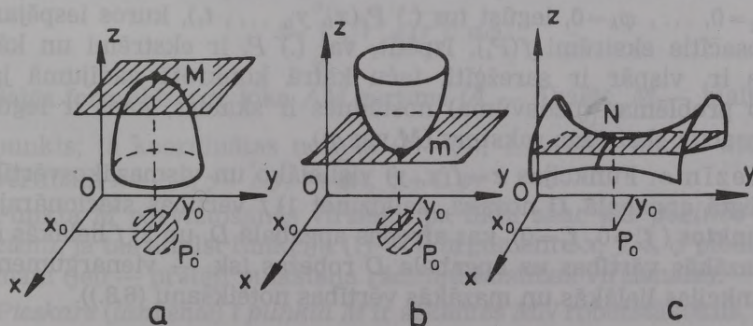
## 6.12. VAIRĀKARGUMENTU FUNKCIJU EKSTRĒMI

Funkcijai  $u = f(x, y, z, \dots, t) = f$  punktā  $P_0(x_0, y_0, z_0, \dots, t_0)$  ir *lokāls ekstrēms* — *maksimums*  $M = f(P_0)$  vai *minimums*  $m = f(P_0)$  — ja eksistē tāda ( $\cdot$ )  $P_0$  apkārtnē, kuras punktiem  $P(x, y, z, \dots, t)$  ir spēkā

$$f(P) < f(P_0) \quad (\Delta f < 0)$$

$$f(P) > f(P_0) \quad (\Delta f > 0).$$

Pirmajā gadījumā  $f$  ir *maksimums*  $M = f(P_0)$ , bet otrajā — *minimums*  $m = f(P_0)$ . Ģeometriski: ja  $f(P_0)$  ir  $M$  vai  $m$ , tad virsmas  $z = f(x, y)$  pieskarplakne, kas novilkta caur punktu  $P_0$ , ir paralēla  $xOy$  plaknei (6.9. zīm. *a* un *b*). Tas ir nepieciešams, bet ne pietiekams nosacījums ekstrēma eksistencei ( $\cdot$ )  $P_0$ . Piem., 6.9. zīm. *c*  $f$  vērtība  $f(P_0)$  nav ne  $M$ , ne  $m$  ( $N$  — virsmas seglu punkts).



6.9. zīm.

Funkcijas  $z = f(x, y)$  ekstrēmus atrod šādi:

- 1) atrisina sistēmu  $f'_x = 0, f'_y = 0$  (ekstrēma eksistences nepieciešamais nosacījums), iegūstot stacionāros ( $\cdot$ )  $P_i(x_i, y_i)$ ;
- 2) punktos  $P_i$  pārbauda ekstrēma eksistences pietiekamos nosacījumus. Lai to izdarītu, vispirms aprēķina

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{P_i}, \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{P_i}, \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{P_i} \quad \text{un}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Ja  $\Delta > 0$ , tad  $f(P_i)$  ir ekstrēms, pie tam

$$f(P_i) = M, \quad \text{ja } A < 0,$$

bet

$$f(P_i) = m, \quad \text{ja } A > 0.$$

Ja  $\Delta < 0$ , tad  $f$  ekstrēma ( $\cdot$ )  $P_i$  nav, bet, ja  $\Delta = 0$ , — jāveic papildu pētījumi.

$n$  argumentu funkcijas  $u = f(x, y, z, \dots, t)$  gadījumā parasti jautājumu par  $M$  un  $m$  eksistenci stacionārajos punktos  $P_i$  (vienādojumu  $f'_x = 0, f'_y = 0, \dots, f'_t = 0$  atrisinājumi) noskaidro, izpētot  $f$  izturēšanos šo punktu apkārtnē (pēc  $\Delta f$  zīmes).

Funkcijas  $u = f(x, y, \dots, t)$   $M$  un  $m$  pie  $k < n$  papildnosacījumiem  $\varphi_i(x, y, \dots, t) = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), t. i., nosacītos ekstrēmus atrod, izmantojot  $k$  nenoteiktos reizinātājus  $\lambda_i$  un izpētot  $n + k$  argumentu palīgfunkciju (t. s. *Lagranža funkciju*):

$$\Phi(x, y, \dots, t, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = f(x, y, \dots, t) + \sum_{i=1}^k \lambda_i \varphi_i(x, y, \dots, t).$$

Atrisinot  $n + k$  vienādojumu sistēmu  $\Phi'_x = 0, \Phi'_y = 0, \dots, \Phi'_t = 0, \varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \dots, \varphi_k = 0$ , iegūst tos ( $\cdot$ )  $P_i(x_i, y_i, \dots, t_i)$ , kuros iespējami nosacītie ekstrēmi  $f(P_i)$ . Izpētīt, vai ( $\cdot$ )  $P_i$  ir ekstrēmi un kādi tie ir, vispār ir sarežģīti, taču katrā konkrētā gadījumā jau no problēmas (uzdevuma) nostādnes ir skaidrs, kāds ir iegūtā nosacītā ekstrēma raksturs ( $M$  vai  $m$ ).

Piezīme. Funkcijas  $z = f(x, y)$  vislielāko un vismazāko vērtību slēgtā apgabalā  $D$  nosaka, salīdzinot 1)  $f$  vērtības stacionārajos punktos ( $f'_x = 0, f'_y = 0$ ), kas atrodas apgabalā  $D$ , un 2)  $f$  lielākās un mazākās vērtības uz apgabala  $D$  robežas (sk. — vienargumenta funkcijas lielākās un mazākās vērtības noteikšanu (6.8.)).

## 7. DIFERENCIĀLĢEOMETRIJA

Visos vienādojumos izmantotās funkcijas ir nepārtraukti diferencējamas nepieciešamo skaitu reizes.

### 7.1. PLAKNES LĪKNES LOKA DIFERENCIĀLIS, LOKA GARUMS, PIESKARE UN NORMĀLE

Loka diferenciālis  $ds \approx \Delta s$ .

1) Dekarta koordinātās (atkarībā no līnijas)

$$y=f(x) \quad (1) \quad ds = \sqrt{1+(y')^2} dx;$$

$$x=\varphi(y) \quad (2) \quad ds = \sqrt{1+(x')^2} dy;$$

$$x=\varphi(t), y=\psi(t) \quad (3) \quad ds = \sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2} dt;$$

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(y')^2} dx = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1+(x')^2} dy = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2} dt.$$

2) Polārajās koordinātās

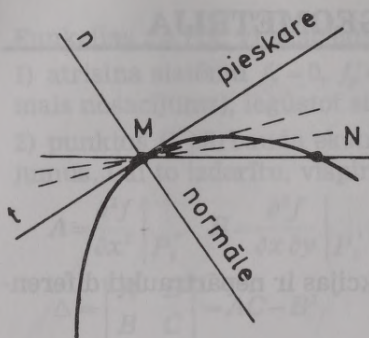
$$r=f(\varphi) \quad (4) \quad ds = \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi,$$

$$s = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi.$$

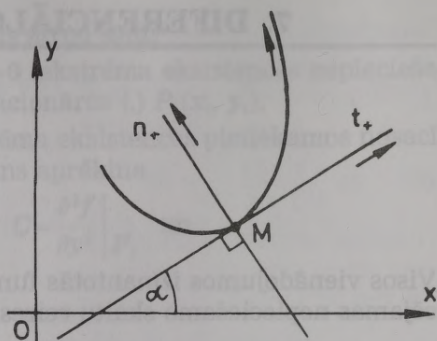
Šajās formulās  $s$  ir loka  $AM$  garums ( $A$  — fiksēts,  $M$  — mainīgs punkts; tā koordinātas nosaka (1)—(4);  $\Delta s = MN$ , kur  $N$  atbilst vērtībām  $x + \Delta x$ ,  $y + \Delta y$ ,  $t + \Delta t$ ,  $\varphi + \Delta \varphi$ ).

Punkta  $M$  pārvietošanās virzienu pa līkni sauc par *pozitīvo virzienu*, ja tas atbilst funkciju (1)—(4) argumentu  $x$ ,  $y$ ,  $t$ ,  $\varphi$  pieaugumam (jeb — pretēji pulksteņa rādītāju kustības virzienam).

*Pieskare (tangente)  $t$  punktā  $M$*  ir sekantes  $MN$  robežstāvoklis, kad  $N \rightarrow M$ , pārvietojoties pa līkni.



7.1. zīm.

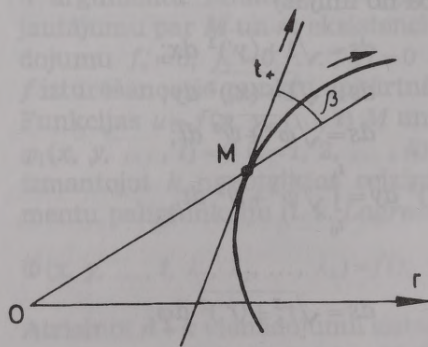


7.2. zīm.

Normāle  $n$  punktā  $M$  ir taisne, kas perpendikulāra pieskarei šajā punktā (7.1. zīm.).

Pieskares pozitīvais virziens  $t_+$  atbilst līknes pozitīvajam virzienam, bet normāli ar pozitīvo virzienu  $n_+$  iegūst,  $t_+$  pagriežot par  $90^\circ$  pozitīvajā virzienā.

Ja  $\alpha$  ir leņķis, ko  $t_+$  veido ar  $Ox$  ass pozitīvo virzienu (7.2. zīm.),  $\beta$  — leņķis starp polāro rādiusu  $r=OM$  un  $t_+$  (līknei  $r=f(\varphi)$ ) (7.3. zīm.), tad



7.3. zīm.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}, \quad \sin \alpha = \frac{dy}{ds},$$

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds};$$

$$\operatorname{tg} \beta = r \left| \frac{dr}{d\varphi} \right|, \quad \sin \beta = r \frac{d\varphi}{ds},$$

$$\cos \beta = \frac{dr}{ds}.$$

Caur līnijas punktu  $M_0(x_0, y_0)$  novilktais pieskares vienādojums:

$$y=f(x)$$

$$y-y_0=y'(x_0)(x-x_0);$$

$$F(x, y)=0$$

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)=0;$$

$$x=\varphi(t), y=\psi(t)$$

$$\dot{\psi}_0(x-x_0)-\dot{\varphi}_0(y-y_0)=0.$$

Atbilstošie normāles vienādojumi:

$$y-y_0=-\frac{1}{y'(x_0)}(x-x_0),$$

$$F'_y(M_0)(x-x_0) - F'_x(M_0)(y-y_0) = 0,$$

$$\dot{\varphi}_0(x-x_0) + \dot{\psi}_0(y-y_0) = 0.$$

7.4. zīmējumā attēloti biežāk lietoti līknes elementi ( $y = f(x)$ ;  
 $r = f(\varphi)$ ):

*pieskares nogrieznis*

$$MT = |y \sqrt{1+(y')^2} / y'|;$$

*polārās pieskares nogrieznis*

$$MT' = |r \sqrt{r^2 + (r')^2} / r'|;$$

*subtangente*

$$PT = |y / y'|;$$

*polārā subtangente*

$$OT' = |r^2 / r'|;$$

*normāles nogrieznis*

$$MN = |y \sqrt{1+(y')^2}|;$$

*polārās normāles nogrieznis*

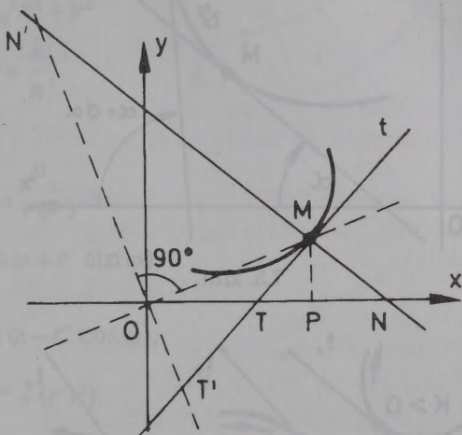
$$MN' = \sqrt{r^2 + (r')^2};$$

*subnormāle*

$$PN = |y \cdot y'|;$$

*polārā subnormāle*

$$ON' = |r'|.$$



7.4. zīm.

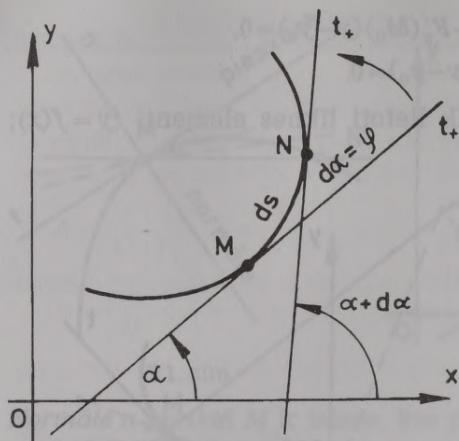
## 7.2. LENĶIS STARP LĪKNĒM, LĪKNES LIEKUMS, LIEKUMA RĀDIUSS, LIEKUMA RIŅĶIS UN CENTRS

Punkts  $M_0(x_0, y_0)$  ir līkņu  $y = f(x)$  un  $y = g(x)$   $n$ -tās kārtas saskares ( $\cdot$ ), ja  $f(x_0) = g(x_0)$ ,  $f'(x_0) = g'(x_0)$ , ...,  $f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0)$ ,  $f^{(n+1)}(x_0) \neq g^{(n+1)}(x_0)$ .

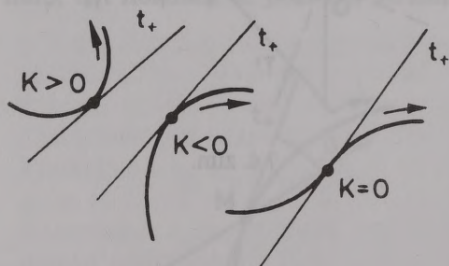
Par lenķi  $\varphi$  starp līknēm  $\Gamma_1: y = f(x)$  un  $\Gamma_2: y = g(x)$  to krustpunktā  $M_0(x_0, y_0)$  sauc lenķi starp šo līkņu «pozitīvajām» pieskarēm (sk. (7.1.)):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{g'(x_0) - f'(x_0)}{1 + f'(x_0) \cdot g'(x_0)}$$

(lenķa  $\varphi$  atskaites virziens — pozitīvais virziens).



7.5. zīm.



7.6. zīm.

Līknes liekums punktā  $M$  (7.5. zīm.)

$$K = \lim_{N \rightarrow M} \frac{\varphi}{|MN|},$$

kur  $\varphi = \alpha(N) - \alpha(M)$  ir pieskares pagrieziņa lenķis;  $\alpha(M), \alpha(N)$  — lenķi starp  $t_+$  un  $Ox$  atbilstoši punktos  $M$  un  $N$ ;  $|MN|$  — loka garums.

Ja  $\varphi = d\alpha$ ,  $|MN| = ds$ , tad

$$K = \frac{d\alpha}{ds}.$$

Iespējamās dažādas  $K$  vērtības (7.6. zīm.): jo lielāks  $|K|$ , jo līkne izliektāka (taisnei  $K \equiv 0$ ), bet  $K$  ekstrēmu punktus sauc par līknes virsotnēm.

Liekuma rādiuss  $R = 1/|K|$  (riņķa līnijai ar rādiusu  $a$  liekuma rādiuss  $R = a$ , bet taisnei —  $R = \infty$ ).

Riņķi ar rādiusu  $R$  un centru  $C(\xi; \eta)$  sauc par līknes

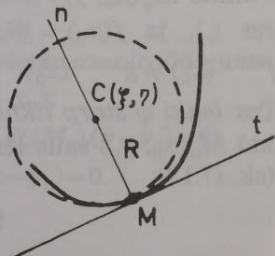
liekuma riņķi punktā  $M$ , bet  $C$  — par liekuma centru (7.7. zīm.).  $C$  atrodas uz  $n$ , kas novilkta līknes ieliekuma virzienā. Atkarībā no līknes uzdošanas veida  $K$  un  $C(\xi; \eta)$  aprēķina šādi:

$$y = y(x) \quad K = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}},$$

$$\xi = x - \frac{y'(1 + (y')^2)}{y''},$$

$$\eta = y + \frac{1 + (y')^2}{y''};$$

$$F(x, y) = 0 \quad K = \frac{m}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2}},$$



7.7. zīm.

$$\xi = x + \frac{F'_x}{m}, \quad \eta = y + \frac{F'_y}{m},$$

kur  $m = -(F'_y)^2 \cdot F''_{xx} + 2F'_x \cdot F'_y \cdot F''_{xy} - (F'_x)^2 F''_{yy} / ((F'_x)^2 + (F'_y)^2)$ ;

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad K = \frac{n}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}},$$

$$\xi = x - \frac{\dot{y}}{n}, \quad \eta = y + \frac{\dot{x}}{n},$$

kur  $n = (\dot{x} \cdot \ddot{y} - \ddot{x} \cdot \dot{y}) / (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ ;

$$r = r(\varphi) \quad K = \frac{p}{r^2 + (r')^2},$$

$$\xi = r \cos \varphi - \frac{1}{p} (r \cos \varphi + r' \sin \varphi),$$

$$\eta = r \sin \varphi - \frac{1}{p} (r \sin \varphi - r' \cos \varphi),$$

kur  $p = (r^2 + 2(r')^2 - r \cdot r'') / (r^2 + (r')^2)$ .

### 7.3. LĪKŅU SAIMES APLIECĒJA, EVOLŪTA UN EVOLVENTE

*Līkņu saimes apliecēja* ir līnija, kurai katrā punktā pieskaras kāda no dotās saimes līknēm (7.8. zīm.).

Līkņu saimes  $F(x, y, \alpha) = 0$  apliecēju iegūst, izslēdzot parametru  $\alpha$  no vienādojumiem

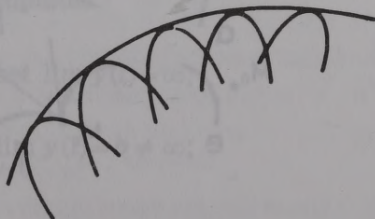
$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$$

( $F''_{\alpha\alpha} \neq 0$  un  $F'_x \cdot F''_{\alpha y} - F'_y \cdot F''_{\alpha x} \neq 0$ ).

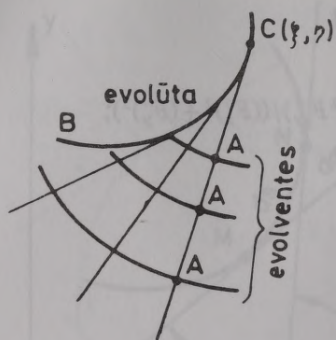
Līkni  $B$ , kuru izveido liekuma centri  $C(\xi, \eta)$ , sauc par dotās līknes  $A$  *evolūtu*, bet pašu līkni  $A$  — par *evolventi*.

Evolūta ir evolventes normāļu saimes apliecēja.

Ja dota evolūta  $B$ , tad tās evolventi  $A$  iegūst, «notinot» nostieptu diegu no kontūras ar



7.8. zīm.



7.9. zīm.

evolūtas formu. Vienai evolūtai atbilst evolventu saime (7.9. zīm.).

Evolūtas parametriskie vienādojumi iegūstami, izsakot  $\xi$ ,  $\eta$  atkarībā no parametriem  $x$ ,  $y$ ,  $t$  vai  $\varphi$  (sk. liekuma centra koordinātas). Sakarību starp  $B$  koordinātām  $\xi$ ,  $\eta$  iegūst, izslēdzot no šiem vienādojumiem parametrus.

A atrašanai no  $\xi$  un  $\eta$  izteiksmēm iegūst diferenciālvienādojumu sistēmu.

#### 7.4. SINGULĀRIE PUNKTI

Punkts  $M_0(x_0, y_0)$  ir līknes  $F(x, y) = 0$  *singulārais* ( $\cdot$ ), ja  $F(x_0, y_0) = F'_x(x_0, y_0) = F'_y(x_0, y_0) = 0$ , turklāt tas ir *dubultpunkts* (jeb *mezgla punkts*; 7.10. zīm. a), ja

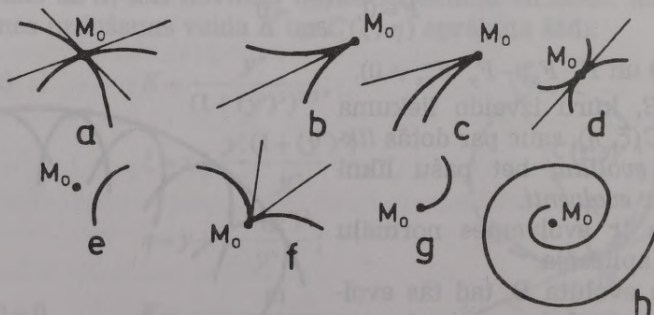
$$(F''_{xy})^2 > F''_{xx} \cdot F''_{yy} \quad (\text{ir divas pieskares});$$

*atgriezes punkts* (7.10. zīm. b, c) vai *pašpieskaršanās punkts* (7.10. zīm. d), ja

$$(F''_{xy})^2 = F''_{xx} \cdot F''_{yy} \quad (\text{ir kopīga pieskare});$$

*izolēts punkts* (7.10. zīm. e), ja

$$(F''_{xy})^2 < F''_{xx} \cdot F''_{yy} \quad (\text{nav reālas pieskares}).$$



7.10. zīm.

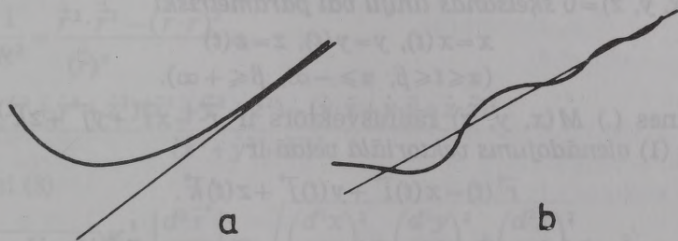
Transcendentām funkcijām ir šādi singulārie punkti: *lūzuma punkts* (7.10. zīm. *f* — dažādas pieskares); *gala punkts* (7.10. zīm. *g*); *asimptotiskais punkts* (7.10. zīm. *h*).

Iespējams arī, ka vienā punktā apvienojas divas vai vairākas singularitātes.

## 7.5. ASIMPTOTAS

Taisni sauc par *līknes asimptotu*, ja līknes punkta *M* attālums līdz taisnei tiecas uz 0, kad (*.*) *M* bezgalīgi attālinās no koordinātu sākumpunkta.

Līkne asimptotai neierobežoti tuvojas (asimptotiski tuvojas) vai nu no vienas puses (7.11. zīm. *a*), vai arī vījoties ap to (7.11. zīm. *b*).



7.11. zīm.

Līknei  $y=f(x)$  var būt

- 1) *vertikālās asimptotas* (to skaits — neierobežots)  $x=a$  — tās nosaka tāpat kā  $f(x)$  2. veida pārtraukuma punktus;
- 2) *slīpās asimptotas*  $y=kx+b$  (ne vairāk kā divas), kur

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx).$$

Līknei  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$  ir šādas asimptotas:

$x=a$  — *vertikālā asimptota*, ja

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a \neq \infty, \quad \text{bet} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \infty;$$

$y=b$ , ja

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \infty, \quad \text{bet} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = b \neq \infty;$$

$y=kx+b$  — *slīpā asimptota*, ja

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \infty \quad \text{un} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \infty,$$

bet eksistē galīgas robežas

$$k = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)}, \quad b = \lim_{t \rightarrow t_0} (y(t) - kx(t)).$$

Polārajās koordinātās līknei  $r = f(\varphi)$  leņķis  $\alpha$  nosaka asimptotas virzienu, ja  $\lim_{\varphi \rightarrow \alpha} r = \infty$ , bet asimptotas attālums no pola  $p = \lim_{\varphi \rightarrow \alpha} (r \sin(\alpha - \varphi))$ .

## 7.6. TĒLPAS LĪKNE UN TĀS LOKĀLIE ELEMENTI

Līkni (līniju) telpā galvenokārt attēlo kā *divu virsmu*  $f(x, y, z) = 0$  un  $g(x, y, z) = 0$  šķelšanās līniju vai parametriski

$$\begin{aligned} x &= x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \\ (\alpha \leq t \leq \beta, \quad \alpha \geq -\infty, \quad \beta \leq +\infty). \end{aligned} \quad (1)$$

Ja līknes (.)  $M(x, y, z)$  rādiusvektors ir  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , tad līknes (1) vienādojums vektoriālā veidā ir

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}. \quad (2)$$

Dažkārt vienādojumos (1) un (2) parametrs  $t = s = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$  ir līnijas loka garums starp punktiem  $A$  un  $M$  (atbilstoši  $t_0$  un  $t$ ):

$$\begin{aligned} x &= x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s), \\ \vec{r}(s) &= x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k}. \end{aligned} \quad (3)$$

Līknes pozitīvo virzienu nosaka  $t$  pieaugošās vērtības vai  $s$  atskaites virziens.

### Loka diferenciālis

#### 1. Dekarta koordinātās

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt,$$

$$ds = |d\vec{r}| = |\vec{r}'(t)dt| = \left| \frac{d\vec{r}(s)}{ds} ds \right|.$$

#### 2. Cilindriskajās koordinātās

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2}.$$

### 3. Sfēriskajās koordinātās

$$ds = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\varphi^2}.$$

Pieskares pozitīvais virziens  $t_+$  atbilst līknes pozitīvajam virzienam;

pieskares vienības vektors ir  $\vec{t} = \frac{d\vec{r}(s)}{ds}$  ( $|\vec{t}| = 1$ ).

Galvenā normāle ir taisne, kas perpendikulāra pieskarei; tās pozitīvais virziens  $n_+$  — līknes ieliekuma virzienā; vienības vektors  $\vec{n}$

kolineārs ar vektoru  $\frac{d^2\vec{r}(s)}{ds^2}$ , t. i.,  $\frac{d^2\vec{r}(s)}{ds^2} = K \cdot \vec{n}$ , kur  $K$  — līknes

liekums;  $R = 1/K$  — liekuma rādiuss.

Līknei (2)

$$K^2 = \frac{1}{R^2} = \frac{\dot{\vec{r}}^2 \cdot \ddot{\vec{r}}^2 - (\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}})^2}{(\dot{\vec{r}})^3} = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2) - (\dot{x} \cdot \ddot{x} + \dot{y} \cdot \ddot{y} + \dot{z} \cdot \ddot{z})^2}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^3}.$$

Līknei (3)

$$K = \left| \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right| = \sqrt{\left( \frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2z}{ds^2} \right)^2}$$

( $K > 0$ , taisnei  $K = 0$ ).

Liekuma centrs ( $\xi, \eta, \zeta$ ) atrodas uz galvenās normāles  $R$  vienību attālumā no atbilstošā līknes punkta un

$$\xi = x + R^2 \frac{d^2x}{ds^2}, \quad \eta = y + R^2 \frac{d^2y}{ds^2}, \quad \zeta = z + R^2 \frac{d^2z}{ds^2}.$$

Liekuma riņķis ir riņķis ar centru ( $\xi, \eta, \zeta$ ) un rādiusu  $R$ .

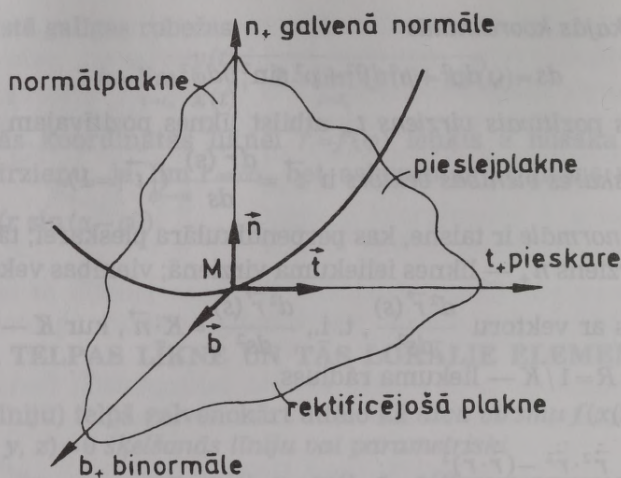
Pievienojot vektoriem  $\vec{t}$  un  $\vec{n}$  binormāles ( $b_+$ ) vienības vektoru  $\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$ , iegūst telpas līnijas kustīgo triedru  $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$  punktā  $M$ .

Vektori  $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$  ir savstarpēji perpendikulāri, ar labo sakārtojumu. Katrā līnijas punktā  $M$  (izņemot singulāros punktus)  $\vec{t}, \vec{n}$  un  $\vec{b}$  nosaka trīs savstarpēji perpendikulāras plaknes:

$\vec{t}$  un  $\vec{n}$  — pieslejplakni (jeb oskulējošo pl.),

$\vec{n}$  un  $\vec{b}$  — normālpakni,

$\vec{t}$  un  $\vec{b}$  — rektificējošo plakni (7.12. zīm.).



7.12. zīm.

Ja  $\Delta s$  ir attālums starp diviem tuviem līknes punktiem  $M_1$  un  $M_2$ , bet  $\Delta \varepsilon$  — leņķis starp binormālēm šajos punktos, tad *vērpe*  $T$  un *vērpes rādiuss*  $\tau$  ir šādi:

$$T = \frac{1}{\tau} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta s} = \frac{d\varepsilon}{ds} \quad (\varepsilon \text{ — vērpes leņķis}).$$

$T > 0$  vai  $T < 0$  atkarībā no tā, vai, skatoties no pieslejplaknes  $b_+$  virzienā, līkne vijas augšup vai lejup (labā vai kreisā skrūve). Ja  $T = 0$  visos līknes punktos, tad līkne atrodas plaknē.

Līknei (3)

$$T = \frac{1}{\tau} = R^2 \left( \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \cdot \frac{d^3\vec{r}}{ds^3} \right) = \frac{1}{(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2} \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix},$$

kur  $x' = \frac{dx}{ds}, \dots$ ,

bet līknei (2)

$$T = \frac{1}{\tau} = R^2 \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}'' \cdot \vec{r}'''}{|\vec{r}'|^3} = \frac{R^2}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^3} \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \ddot{\ddot{x}} & \ddot{\ddot{y}} & \ddot{\ddot{z}} \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Piemērs. Aprēķināt liekumu un vērpi skrūves līnijai  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$  ( $a > 0$ ),  $z = bt$  ( $b > 0$  — labā skrūves līnija — 7.13. zīm.,  $b < 0$  — kreisā skrūves līnija).

$$\text{Aizvietojot } t \text{ ar } s = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt = \\ = t \sqrt{a^2 + b^2},$$

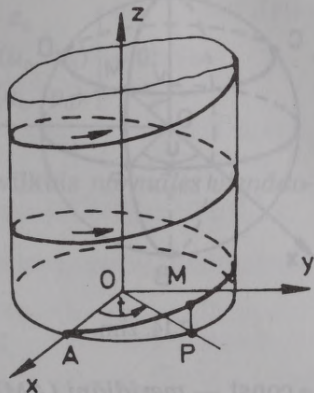
$$x = a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y = a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$z = \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$K = \frac{1}{R} = \sqrt{(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} = \\ = \text{const.}$$

$$T = \frac{(a^2 + b^2)^2}{a} \cdot \frac{1}{(( -a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + b^2)^{3/2}} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} -a \sin t & a \cos t & b \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \\ a \sin t & -a \cos t & 0 \end{vmatrix} = \frac{b}{a^2 + b^2} = \text{const.}$$



7.13. zīm.

Frenē formulas ir vienības vektoru  $\vec{t}$ ,  $\vec{n}$  un  $\vec{b}$  atvasinājumi pēc parametra  $s$ :

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = K \cdot \vec{n}, \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = -K \cdot \vec{t} + T \cdot \vec{b}, \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = -T \cdot \vec{n}.$$

## 7.7. VIRSMA UN TĀS LOKĀLIE ELEMENTI

Virsmu telpā analītiski var uzdot šādi:

$$\text{atklātā veidā:} \quad z = z(x, y), \quad (1)$$

$$\text{apslēptā veidā:} \quad F(x, y, z) = 0, \quad (2)$$

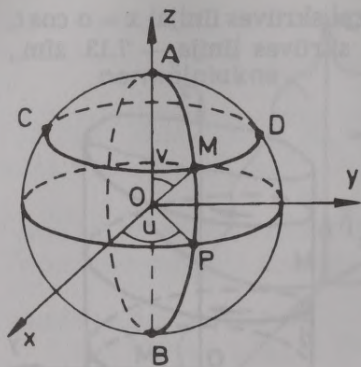
parametriskā veidā:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (3)$$

vektoriālā veidā:

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k} \quad (4)$$

( $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  — virsmas punkta  $M(x, y, z)$  rādiusvektors).



7.14. zīm.

= const — meridiāni (AMB),  $v = \text{const}$  — paralēles (CMD).

Virsmas koordinātu līniju  $F(u, v) = 0$  pieskaru vektori punktā  $M(u, v)$  ir

$$\vec{r}_1 = \vec{r}'_u(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \vec{k},$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}'_v(u, v) = \frac{\partial x}{\partial v} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \vec{k}.$$

Vienības vektori  $\vec{e}_1 = \vec{r}_1 / |\vec{r}_1|$ ,  $\vec{e}_2 = \vec{r}_2 / |\vec{r}_2|$  ( $\vec{r}_1 \neq \vec{r}_2$ ) nosaka pieskarplakni (.)  $M$ , t. i., plakni, kurā atrodas visas koordinātu līniju pieskares.

Taisni, kas  $\perp$  pieskarplaknei (.)  $M$ , sauc par normāli; tās vienības

vektors  $\vec{N} = \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|}$  ( $|\vec{N}| = 1$ ) vērsts tā, ka kustīgais triedr

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{N}$  veido labo sakārtotumu.

Vektors

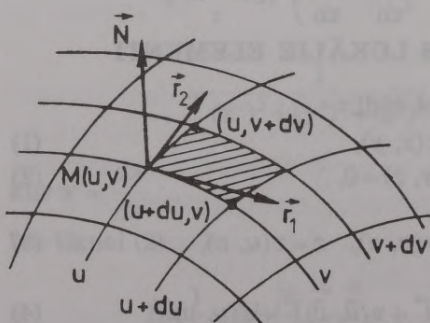
$$d\vec{S} = (\vec{r}_1(u, v) \times \vec{r}_2(u, v)) du dv$$

ir vērsts vektora  $\vec{N}$  virzienā, bet

$$|d\vec{S}| = |\vec{r}_1 \times \vec{r}_2| du dv \approx S_{\text{paralelogr.}}$$

(7.15. zīm.).

Caur virsmas punktu  $M(x_0, y_0, z_0)$  novilktais pieskarplaknes vienādojums ir šāds:



7.15. zīm.

virsmai (1):  $z - z_0 = z'_x(M_0)(x - x_0) + z'_y(M_0)(y - y_0)$ ;

virsmai (2):  $F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0$ ;

virsmai (3): 
$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_u(u_0, v_0) & y'_u(u_0, v_0) & z'_u(u_0, v_0) \\ x'_v(u_0, v_0) & y'_v(u_0, v_0) & z'_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0$$
;

virsmai (4):  $(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{N}(M_0) = 0$ .

Caur virsmas punktu  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  novilktais *normāles vienādojumi* attiecīgi ir šādi:

virsmai (1):  $\frac{x - x_0}{z'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{z'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$ ;

virsmai (2):  $\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}$ ;

virsmai (3):  $\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}}$ ;

virsmai (4):  $\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{N}(M_0) \quad (-\infty < \lambda < \infty)$ .

Virsmas punktus, kuros  $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \vec{0}$ , sauc par *singulāriem punktiem*.

Virsmas  $F(x, y, z) = 0$  singulāro punktu nosacījums ir  $F'_x = F'_y = F'_z = 0$  (konisks (.)).

Ja virsmas vienādojumi ir (3) vai (4), tad *loka MN garums*  $\Delta s \approx ds$ , kur  $M(u, v)$ ,  $N(u + du, v + dv)$ , bet virsmas *pirmā kvadrātiskā forma* ir

$$\Phi_1 = ds^2 = (d\vec{r})^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

kur  $E = (\vec{r}_1)^2 = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2$ ,

$$F = \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = x'_u \cdot x'_v + y'_u \cdot y'_v + z'_u \cdot z'_v,$$

$$G = (\vec{r}_2)^2 = (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2,$$

turklāt nesingulāros punktos  $E > 0$ ,  $G > 0$ ,  $EG - F^2 > 0$ .

Līnijas  $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$  *loka garums uz virsmas* ir

$$s = \int_{t_0}^{t_1} ds = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt,$$

*slēgta virsmas apgabala D laukums* —

$$S = \iint_D dS = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Ja  $\alpha$  ir leņķis starp divām virsmas līnijām  $\vec{r} = \vec{r}(u_1(t), v_1(t))$   $\vec{r} = \vec{r}(u_2(t), v_2(t))$  punktā  $M$  (t. i., leņķis starp pozitīvajām pieska-  
rēm), tad

$$\cos \alpha = \frac{E\dot{u}_1\dot{u}_2 + F(\dot{u}_1\dot{v}_2 + \dot{v}_1\dot{u}_2) + G\dot{v}_1\dot{v}_2}{\sqrt{E\dot{u}_1^2 + 2F\dot{u}_1\dot{v}_1 + G\dot{v}_1^2} \cdot \sqrt{E\dot{u}_2^2 + 2F\dot{u}_2\dot{v}_2 + G\dot{v}_2^2}}$$

Ja  $\varphi$  ir leņķis starp koordinātu līnijām, tad

$$\cos \varphi = \frac{F}{\sqrt{EG}} \quad \text{vai} \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}$$

Virsmas izliektību nosaka otrā kvadrātiskā forma

$$\Phi_2 = -d\vec{N} \cdot d\vec{r} = \vec{N} d^2\vec{r} = L du^2 + 2M du dv + N dv^2,$$

$$\text{kur } L = \vec{N} \cdot \vec{r}''_{uu} = -\vec{N}'_u \cdot \vec{r}'_u = \frac{\vec{r}''_{uu} \cdot \vec{r}'_u \cdot \vec{r}'_v}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$M = \vec{N} \cdot \vec{r}''_{uv} = -\vec{N}'_u \cdot \vec{r}'_v = -\vec{N}'_v \cdot \vec{r}'_u = \frac{\vec{r}''_{uv} \cdot \vec{r}'_u \cdot \vec{r}'_v}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$N = \vec{N} \cdot \vec{r}''_{vv} = -\vec{N}'_v \cdot \vec{r}'_v = \frac{\vec{r}''_{vv} \cdot \vec{r}'_u \cdot \vec{r}'_v}{\sqrt{EG - F^2}}$$

( $\vec{N}$  — virsmas normāles vienības vektors).

Virsmas šķēlums punktā  $M$  ar plakni, kurā atrodas virsmas normāle, ir virsmas normālšķēlums. Tā liekums

$$K_n = -\frac{d\vec{r} \cdot d\vec{N}}{ds^2} = L \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2M \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + N \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = \frac{\Phi_2}{\Phi_1}.$$

Eksistē divi, savstarpēji perpendikulāri virzieni, kuru atbilstošo normālšķēlumu liekumi (.)  $M$  ir galvenie liekumi  $k_1$  un  $k_2$ . Tos iegūst, atrisinot vienādojumu

$$(EG - F^2)k^2 - (EN + LG - 2FM)k + LN - M^2 = 0.$$

Ja  $\varphi$  ir leņķis starp virzieniem, kurus nosaka  $k_1$  un  $k_2$ , tad

$$k_n = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi \quad (\text{Eilera formula}).$$

Galveno liekumu rādiusi:  $R_1 = \frac{1}{k_1}$ ,  $R_2 = \frac{1}{k_2}$ .

Virsmas vidējais liekums

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}.$$

*Pilnais (Gausa) liekums*

$$K = k_1 \cdot k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Virsmai  $z = f(x, y)$   $R_1$  un  $R_2$  iegūst, atrisinot vienādojumu

$$(rt - s^2)R^2 + h(2pqs - (1 + p^2)t - (1 + q^2)r)R + h^4 = 0,$$

$$\text{kur } p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad h = \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Galveno normālšķēlumu plaknes ir savstarpēji perpendikulāras;

to virzienus nosaka  $\frac{dy}{dx}$  vērtība, ko iegūst, atrisinot vienādojumu

$$(tpq - s(1 + q^2))\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (t(1 + p^2) - r(1 + q^2))\frac{dy}{dx} + s(1 + p^2) - rpq = 0.$$

*Virsmas punktu klasifikācija:*

$K > 0$  — eliptisks (.),

$K < 0$  — hiperbolisks (.),

$K = 0$  — parabolisks (.).

Par virsmas ģeodēzisko līniju sauc tādu līkni, kuras katrā punktā galvenā normāle sakrīt ar virsmas normāli. Īsākais attālums (pa virsmu) starp diviem virsmas punktiem ir ģeodēziskās līnijas loka garums starp tiem.

Ģeodēziskās līnijas diferenciālvienādojums virsmai  $z = f(x, y)$  ir šāds:

$$(1 + p^2 + q^2)\frac{d^2y}{dx^2} = pt\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + (2ps - qt)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (pr - 2qs)\frac{dy}{dx} - qr.$$

## 8. INTEGRĀLRĒĶINI

### 8.1. NENOTEIKTAIS INTEGRĀLIS UN TĀ PAMATĪPAŠĪBAS

Intervālā  $(a, b)$  diferencējama funkcija  $F(x)$  ir funkcijas  $f(x)$  primitīvā funkcija, ja visiem  $x \in (a, b)$   $F'(x) = f(x)$ .

Funkciju kopu  $F(x) + C$  sauc par *nenoteikto integrāli no funkcijas  $f$* :

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

$C$  — patvaļīga konstante;  $f(x)$  — zemintegrāļa funkcija;  $f(x) dx$  — zemintegrāļa izteiksme.

#### Pamatīpašības

1.  $\left(\int f(x) dx\right)' = f(x)$ ,  $d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx$ .
2.  $\int F'(x) dx = F(x) + C$ ,  $\int dF(x) = F(x) + C$ .
3.  $\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$ ,  
 $\alpha, \beta$  — konstantes.

#### Pamatmetodes

1. *Mainīgā substitūcija* (pāreja uz jaunu mainīgo):
  - a)  $\int f(u(x)) u'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + C = F(u(x)) + C$ ;
  - b) ja  $x = \varphi(t)$ ,  $\varphi'(t) \neq 0$ ,  $F$  — funkcijas  $g(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$  primitīvā funkcija, tad

$$\int g(x) dx = \int g(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(t) + C,$$

kur  $t$  jāizsaka ar  $x$ , izmantojot  $x = \varphi(t)$  inverso funkciju.

2. *Parciālā integrēšana*:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

( $u, v$  — diferencējamas funkcijas).

Lietderīgi atcerēties šādas sakarības.

1. Ja  $\int f(x) dx = F(x) + C$ , tad  $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$ ,  $a \neq 0$ .

2.  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$ .

3.  $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = \int \frac{d(f(x))}{\sqrt{f(x)}} = 2\sqrt{f(x)} + C$ .

## 8.2. PAMATINTEGRĀĻU TABULA

Visām primitīvajām funkcijām jāpievieno integrācijas konstante; piemēram,  $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$ .

<p><b>Pakāpes funkcijas</b></p> $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$ $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}$ $\int \frac{dx}{x} = \ln x $ <p><b>Trigonometriskās funkcijas</b></p> $\int \sin x dx = -\cos x$ $\int \cos x dx = \sin x$ $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x $ $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x $ $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$ $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$ <p><b>Daļveida racionālās funkcijas</b></p> $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$ $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{a+x}{a-x} \right $	<p><b>Eksponentfunkcijas</b></p> $\int e^x dx = e^x$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$ <p><b>Hiperboliskās funkcijas</b></p> $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x$ $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x$ $\int \operatorname{th} x dx = \ln \operatorname{ch} x$ $\int \operatorname{cth} x dx = \ln \operatorname{sh} x $ $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x$ $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x$ <p><b>Iracionālās funkcijas</b></p> $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a}$ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln x + \sqrt{x^2+a} $
--	--

### 8.3. RACIONĀLU FUNKCIJU INTEGRĒŠANA

Veselu racionālu funkciju (polinomu)  $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) integrē pa locekļiem, izmantojot formulu

$$\int ax^n dx = a \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Daļveida racionāla funkcija

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} \quad (Q_m(x) \text{ ir } m\text{-tās, } P_n(x) \text{ — } n\text{-tās pakāpes polinoms})$$

pirms integrēšanas jāpārveido atkarībā no  $m$  un  $n$  vērtībām.

1. gadījums:  $m < n$ . Ja saucēja polinoma sadalījums reizinātājos ir  $P_n(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_r)^{k_r} (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{l_s}$  ( $k_1 + k_2 + \dots + k_r + 2l_1 + \dots + 2l_s = n$ ; kvadrātiskajiem reizinātājiem reālu sakņu nav, t. i.,  $\frac{p_\mu^2}{4} - q_\mu < 0$ ,  $\mu = 1, 2, \dots, s$ ), tad  $R(x)$  sadala elementārdaļās šādi:

$$\begin{aligned} R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = & \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \frac{A_2}{(x - \alpha_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x - \alpha_1)^{k_1}} + \\ & + \frac{B_1}{x - \alpha_2} + \frac{B_2}{(x - \alpha_2)^2} + \dots + \frac{B_{k_2}}{(x - \alpha_2)^{k_2}} + \dots + \\ & + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{M_{l_1}x + N_{l_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}} + \dots + \\ & + \frac{E_1x + F_1}{x^2 + p_sx + q_s} + \frac{E_2x + F_2}{(x^2 + p_sx + q_s)^2} + \dots + \frac{E_{l_s}x + F_{l_s}}{(x^2 + p_sx + q_s)^{l_s}}, \end{aligned}$$

$A, B, M, N, E, F$  — nezināmas konstantes. Vienādojot saucējus un izmantojot divu polinomu identitātes nosacījumu (divi polinomi identiski sakrīt tad un tikai tad, ja koeficienti pie vienādām  $x$  pakāpēm ir vienādi), iegūst tik vienādojumu, cik koeficientu  $A, B, \dots$  jānosaka (*nenoteikto koeficientu metode*).

Ja  $P_n(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$ , t. i., visas saucēja saknes ir reālas un dažādas, tad

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \dots + \frac{A_n}{x - \alpha_n},$$

kur  $A_i = \left( \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} (x - \alpha_i) \right) \Big|_{x = \alpha_i}$ .

## Elementārdaļu integrēšana

1.  $\int \frac{A dx}{x-\alpha} = A \ln |x-\alpha| + C.$
2.  $\int \frac{A dx}{(x-\alpha)^k} = \frac{A}{(1-k)(x-\alpha)^{k-1}} + C \quad (k \neq 1).$
3.  $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx \quad \left(\frac{p^2}{4} - q < 0\right)$  ar substitūciju  $x + \frac{p}{2} = t$  izsaka kā lineāru kombināciju no integrāļiem

$$\int \frac{t dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{2} \ln(t^2+a^2) + C \quad \text{un}$$

$$\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C.$$

4.  $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} dx \quad \left(\frac{p^2}{4} - q < 0, n > 1\right)$  ar substitūciju  $x + \frac{p}{2} = t$  izsaka ar integrāļiem

$$\int \frac{t dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}} + C \quad \text{un}$$

$$\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{t}{2(n-1)a^2(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2} \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}}$$

(rekurences formula).

2. gadījums:  $m \geq n$ . Izdalot  $Q_m(x)$  ar  $P_n(x)$ , iegūst  $R(x) = S(x) + \frac{Q(x)}{P(x)}$ , kur  $S(x)$ ,  $Q(x)$ ,  $P(x)$  — polinomi, bet  $Q(x)$  pakāpe ir zemāka nekā  $P(x)$  pakāpe.

$\frac{Q(x)}{P(x)}$  integrēšanu — sk. 1. gadījumu.

### Ostrogradska metode

Ja  $\frac{Q(x)}{P(x)}$  ir īsta racionāla daļa (t. i.,  $Q(x)$  ir  $m$ -tās pakāpes,  $P(x)$  —  $n$ -tās pakāpes polinoms un  $m \leq n-1$ ), tad

$$\int \frac{Q(x)}{P(x)} dx = \frac{Q_1(x)}{P_1(x)} + \int \frac{Q_2(x)}{P_2(x)} dx, \quad (*)$$

kur  $P_1(x)$  ir polinomu  $P(x)$  un  $P'(x)$  lielākais kopīgais dalītājs,  
 $P_2(x) = \frac{P(x)}{P_1(x)}$ ;  $Q_1(x), Q_2(x)$  — polinomi ar nenoteiktiem koeficientiem, turklāt  $Q_1(x)$  pakāpe ir par vienu zemāka nekā  $P_1(x)$  pakāpe, bet  $Q_2(x)$  pakāpe — par vienu zemāka nekā  $P_2(x)$  pakāpe.  
 Atvasinot (\*), iegūst vienādību polinomu  $Q_1(x)$  un  $Q_2(x)$  koeficientu noteikšanai:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \left( \frac{Q_1(x)}{P_1(x)} \right)' + \frac{Q_2(x)}{P_2(x)}$$

#### 8.4. IRACIONĀLU FUNKCIJU INTEGRĒŠANA ( $R$ — racionāla funkcija)

1. Vienkāršākie gadījumi, kuros ar atbilstošu substitūciju iegūst integrāli no racionālas funkcijas.

	Integrālis	Substitūcija
1.	$\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{r}{s}}\right) dx$	$x = t^k$ , kur $k$ — daļu $\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$ kopsaucējs
2.	$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx,$ $m \in \mathbf{N}, m > 1, ad - bc \neq 0$	$\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$
3.	$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$ 1) ja $a > 0$ 2) ja $c \geq 0$ 3) ja $b^2 - 4ac > 0$ : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ 4) $ax^2 + bx + c$ izsakot kā kvadrātu summu vai starpību, iegūst šāda veida integrāļus:	<i>Eilera substitūcijas:</i> $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{ax}$ $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c}$ $ax^2+bx+c = t(x-x_i),$ kur $i=1$ vai $i=2$
	$\int R(x, \sqrt{x^2+a^2}) dx$	$x = a \operatorname{tg} t$ vai $x = a \operatorname{sh} t$
	$\int R(x, \sqrt{x^2-a^2}) dx$	$x = \frac{a}{\cos t}$ vai $x = a \operatorname{ch} t$
	$\int R(x, \sqrt{a^2-x^2}) dx$	$x = a \sin t$ vai $x = a \cos t$

	Integrālis	Substitūcija
4.	$\int x^m (a + bx^n)^p dx$ , kur $x^m (a + bx^n)^p$ — diferenciālais binoms; $a, b \in \mathbf{R}$ , $m, n, p \in \mathbf{Q}$ — izsakāms ar elementārām funk- cijām tikai šādos gadījumos: 1) $p \in \mathbf{Z}$ 2) $\frac{m+1}{n} \in \mathbf{Z}$ 3) $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbf{Z}$	$x = t^q$ , kur $q$ — daļu $m$ un $n$ kopsaucējs $a + bx^n = t^r$ , kur $r$ — daļas $p$ saucējs $ax^{1-n} + b = t^r$ , kur $r$ — daļas $p$ saucējs

$$2. \int \frac{P_n(x) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = P_{n-1}(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

$P_n(x)$  — dotais  $n$ -tās pak. polinoms,  $P_{n-1}(x)$  —  $n-1$  pak. polinoms ar nenoteiktiem koeficientiem.  $P_{n-1}(x)$  koeficientus un  $\lambda$  nosaka, atvasinot vienādības abas puses, vienādojot saucējus un pielīdzinot koeficientus pie vienādām  $x$  pakāpēm vienādojuma abās pusēs.

### 3. Eliptiskos integrāļus

$$\int R(x, \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}) dx,$$

$$\int R(x, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + ex + f}) dx$$

parasti nav iespējams izteikt ar elementārām funkcijām; katru šādu integrāli var pārveidot par atbilstoši I, II vai III veida elip-

tisko integrāli ( $t = \sin \varphi$ ,  $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ):

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (0 < k < 1),$$

$$\int \frac{1-k^2 t^2}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} dt = \int \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad (0 < k < 1),$$

$$\int \frac{dt}{(1+h^2 t^2) \sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} = \int \frac{d\varphi}{(1+h \sin^2 \varphi) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (0 < k < 1).$$

Atbilstošos noteiktos integrāļus

$$\int_0^{\psi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = F(k, \psi), \quad \int_0^{\psi} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = E(k, \psi),$$

$$\int_0^{\psi} \frac{d\varphi}{(1+h \sin^2 \varphi) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \Pi(h, k, \psi)$$

sauc par I, II un III veida *nepilniem eliptiskiem integrāļiem*.

Ja  $\psi = \frac{\pi}{2}$ , no I un II veida nepilniem eliptiskiem integrāļiem iegūst pilnos eliptiskos integrāļus:

$$K = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}},$$

$$E = E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi.$$

Nepilno un pilno eliptisko integrāļu vērtības dotas tabulā.

## 8.5. TRIGONOMETRISKO FUNKCIJU INTEGRĒŠANA

$\int R(\sin x, \cos x) dx$  vienmēr var pārveidot par integrāli no racionālas funkcijas ar *universālo substitūciju*  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$   $\left(\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}\right)$ .

Vienkāršākie gadījumi.

1. Ja  $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ , tad  $\operatorname{tg} x = t$

$$\left(\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, dx = \frac{dt}{1+t^2}\right).$$

2. Ja  $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ , tad  $\cos x = t$ .

3. Ja  $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ , tad  $\sin x = t$ .

4.  $\int \sin^n x dx$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Ja  $n = 2k + 1$ , tad  $\cos x = t$ . Ja  $n = 2k$ , tad pakāpi pakāpeniski pazemina, izmantojot formulu  $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ .

5.  $\int \cos^n x \, dx, n \in \mathbf{N}$ . Integrē analogi iepriekšējam ( $\sin x = t; \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ ).

6.  $\int \sin^n x \cdot \cos^m x \, dx$ . Integrē kā 2. vai 3. gadījumā, ja  $n$  vai  $m$  ir nepāra skaitlis ( $n, m \in \mathbf{N}$ ).

Ja  $n$  un  $m$  ir nepāra skaitlis (vai pāra skaitlis), tad  $\operatorname{tg} x = t$  (sk. 1.).

Ja  $n$  un  $m$  ir pāra skaitļi, tad var izmantot formulas

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{\sin 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x),$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

7.  $\int \operatorname{tg}^n x \, dx, \operatorname{tg} x = t$ .

8.  $\int \operatorname{ctg}^n x \, dx, \operatorname{ctg} x = t$ .

Piezīme. Lielām  $n$  un  $m$  vērtībām (4., 5., 6., 7., 8.) lietderīgi izmantot atbilstošas rekurences formulas.

### 8.6. EKSPONENTFUNKCIJU UN HIPERBOLISKU FUNKCIJU INTEGRĒŠANA

1.  $\int R(e^{mx}, e^{nx}, \dots, e^{px}) \, dx$ , kur  $m, n, \dots, p \in \mathbf{Q}$ . Ar substitūciju

$$e^x = t \quad (dx = \frac{1}{t} dt) \text{ iegūst } \int R(t^m, t^n, \dots, t^p) \cdot \frac{1}{t} dt, \text{ kuru savukārt ar}$$

substitūciju  $t = z^r$  ( $r$  — daļu  $m, n, \dots, p$  — kopsaucējs) pārveido par integrāli no racionālas funkcijas.

2.  $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) \, dx$  aprēķina, aizvietojojt hiperboliskās funkcijas ar eksponentfunkcijām, vai arī analogi kā atbilstošās tri-

gonometriskās funkcijas. Universālā substitūcija  $\operatorname{th} \frac{x}{2} = t$

$$\left( \operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1-t^2} \right).$$

### 8.7. PARCIĀLĀS INTEGRĒŠANAS LIETOJUMI

Parciālās integrēšanas formulu

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

izmanto (vienu vai vairākas reizes), integrējot funkcijas, kurās ietilpst logaritmi, inversās trigonometriskās, inversās hiperboliskās,

eksponentfunkcijas, trigonometriskās funkcijas saistībā ar pakāpes funkcijām vai polinomiem  $P(x)$ . Tā, piemēram, parciāli integrē

$$e^{ax} \cdot x^m, \sin bx \cdot x^m, \dots (x^m = u), m > 0, m \in \mathbb{N};$$

$$P(x) \cdot e^{ax}, P(x) \cdot \sin ax, \dots (P(x) = u);$$

$$P(x) \cdot \ln ax, P(x) \cdot \operatorname{arctg} ax, \dots (P(x) dx = dv).$$

Dažkārt integrāli aprēķina, parciāli integrējot atkārtoti un tādējādi iegūstot atkal doto integrāli. Rodas vienādojums, no kura aprēķina meklēto integrāli. Tā, piemēram, aprēķina  $\int e^{ax} \cos bx dx$  un  $\int e^{ax} \sin bx dx$  (parciāli integrē divas reizes, pie tam abas reizes par funkciju  $u$  izvēlas vienu un tā paša veida funkciju — vai nu eksponentfunkciju, vai arī trigonometrisko funkciju).

## 8.8. NENOTEIKTO INTEGRĀĻU TABULA

### Norādījumi

1. Visiem integrāļiem jāpievieno integrācijas konstante  $C$ .
2. Integrāļos izmantotās konstantes  $a, b, \dots \neq 0$ .
3. Gadījumā, kad primitīvā funkcija dota pakāpju rindas veidā, tā nav izsakāma ar elementārām funkcijām.

### Integrāļi no racionālām funkcijām

$$1. \int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)} (ax+b)^{n+1}, \quad n \neq -1.$$

$$2. \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln |ax+b|.$$

$$3. \int \frac{x dx}{ax+b} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln |ax+b|.$$

$$4. \int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{x+b}{x+a} \right|, \quad a \neq b.$$

$$5. \int \frac{dx}{(ax+b)^2} = -\frac{1}{a(ax+b)}.$$

$$6. \int \frac{x dx}{(ax+b)^2} = \frac{b}{a^2(ax+b)} + \frac{1}{a^2} \ln |ax+b|.$$

$$7. \int \frac{x^n dx}{(ax+b)^2} = -\frac{x^n}{a(ax+b)} + \frac{n}{a} \int \frac{x^{n-1}}{ax+b} dx.$$

8. 
$$\int \frac{x dx}{(ax+b)^n} = \frac{1}{a^2} \left( \frac{b}{(n-1)(ax+b)^{n-1}} - \frac{1}{(n-2)(ax+b)^{n-2}} \right) \quad (n \neq 1, 2).$$
9. 
$$\int \frac{x^2 dx}{ax+b} = \frac{x^2}{2a} - \frac{bx}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} \ln |ax+b|.$$
10. 
$$\int \frac{x^2 dx}{(ax+b)^2} = \frac{x}{a^2} - \frac{b^2}{a^3(ax+b)} - \frac{2b}{a^3} \ln |ax+b|.$$
11. 
$$\int \frac{x^2 dx}{(ax+b)^3} = \frac{1}{a^3} \left( \ln |ax+b| + \frac{2b}{ax+b} - \frac{b^2}{2(ax+b)^2} \right).$$
12. 
$$\int \frac{x^2 dx}{(ax+b)^n} = \frac{1}{a^3} \left( -\frac{1}{(n-3)(ax+b)^{n-3}} + \frac{2b}{(n-2)(ax+b)^{n-2}} - \frac{b^2}{(n-1)(ax+b)^{n-1}} \right) \quad (n \neq 1, 2, 3).$$
13. 
$$\int \frac{x^n dx}{(ax+b)^m} = -\frac{x^n}{(m-1)a(ax+b)^{m-1}} + \frac{n}{a(m-1)} \int \frac{x^{n-1} dx}{(ax+b)^{m-1}} \quad (m > 1).$$
14. 
$$\int \frac{dx}{x(ax+b)} = \frac{1}{b} \ln \left| \frac{x}{ax+b} \right|.$$
15. 
$$\int \frac{dx}{x(ax+b)^2} = \frac{1}{b(ax+b)} + \frac{1}{b^2} \ln \left| \frac{x}{ax+b} \right|.$$
16. 
$$\int \frac{dx}{x^2(ax+b)} = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2} \ln \left| \frac{ax+b}{x} \right|.$$
17. 
$$\int \frac{dx}{x^2(ax+b)^2} = -\frac{a}{b^2(ax+b)} - \frac{1}{b^2x} + \frac{2a}{b^3} \ln \left| \frac{ax+b}{x} \right|.$$
18. 
$$\int \frac{dx}{x^n(ax+b)^m} = -\frac{1}{(n-1)bx^{n-1}(ax+b)^{m-1}} - \frac{a(m+n-2)}{b(n-1)} \int \frac{dx}{x^{n-1}(ax+b)^m} \quad (n > 1).$$
19. 
$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$
20. 
$$\int \frac{x dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2+a^2).$$
21. 
$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} \quad (n > 1).$$

$$22. \int \frac{x dx}{(x^2+a^2)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} \quad (n > 1).$$

$$23. \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|.$$

$$24. \int \frac{dx}{(a^2-x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(a^2-x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} \int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{n-1}} \quad (n > 1).$$

$$25. \int \frac{x dx}{(a^2-x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)(a^2-x^2)^{n-1}} \quad (n > 1).$$

$$26. \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \begin{cases} -\frac{2}{2ax+b}, & \text{ja } 4ac-b^2=0 \\ \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}, & \text{ja } 4ac-b^2>0 \\ \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \ln \left| \frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}} \right|, & \text{ja } b^2-4ac>0. \end{cases}$$

$$27. \int \frac{x dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{2a} \ln |ax^2+bx+c| - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

$$28. \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{2ax+b}{(n-1)(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{(2n-3)2a}{(n-1)(4ac-b^2)} \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}, \quad n > 1, 4ac-b^2 \neq 0.$$

$$29. \int \frac{x dx}{(ax^2+bx+c)^n} = -\frac{bx+2c}{(n-1)(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{(n-1)(4ac-b^2)} \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}, \quad n > 1, 4ac-b^2 \neq 0.$$

$$30. \int \frac{dx}{x^3+a^3} = \frac{1}{6a^2} \ln \frac{(x+a)^2}{|x^2-ax+a^2|} + \frac{1}{a^2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-a}{a\sqrt{3}}.$$

$$31. \int \frac{dx}{(x^3+a^3)^2} = \frac{x}{3a^3(x^3+a^3)} + \frac{2}{3a^3} \int \frac{dx}{x^3+a^3}.$$

32.  $\int \frac{x dx}{x^3+a^3} = -\frac{1}{6a} \ln \frac{(x+a)^2}{|x^2-ax+a^2|} + \frac{1}{a\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-a}{a\sqrt{3}}$ .
33.  $\int \frac{dx}{x(x^3+a^3)} = \frac{1}{3a} \ln \left| \frac{x^3}{x^3+a^3} \right|$ .
34.  $\int \frac{dx}{x(x^3+a^3)^2} = \frac{1}{3a^3(x^3+a^3)} + \frac{1}{3a^6} \ln \left| \frac{x^3}{x^3+a^3} \right|$ .
35.  $\int \frac{dx}{x^4+a^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}a^3} \ln \left| \frac{x^2+a\sqrt{2}x+a^2}{x^2-a\sqrt{2}x+a^2} \right| + \frac{1}{2\sqrt{2}a^3} \operatorname{arctg} \frac{ax\sqrt{2}}{a^2-x^2}$ .
36.  $\int \frac{x dx}{x^4+a^4} = \frac{1}{2a^2} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{a^2}$ .
37.  $\int \frac{x^2 dx}{x^4+a^4} = -\frac{1}{4\sqrt{2}a} \ln \left| \frac{x^2+ax\sqrt{2}+a^2}{x^2-ax\sqrt{2}+a^2} \right| + \frac{1}{2\sqrt{2}a} \operatorname{arctg} \frac{ax\sqrt{2}}{a^2-x^2}$ .
38.  $\int \frac{dx}{x^4-a^4} = -\frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{1}{4a^3} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right|$ .
39.  $\int \frac{x dx}{x^4-a^4} = -\frac{1}{4a^2} \ln \left| \frac{x^2+a^2}{x^2-a^2} \right|$ .
40.  $\int \frac{x^2 dx}{x^4-a^4} = \frac{1}{4a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + \frac{1}{2a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$ .

### Integrāļi no iracionālām funkcijām

41.  $\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}$ .
42.  $\int x \sqrt{a^2-x^2} dx = -\frac{1}{3} \sqrt{(a^2-x)^3}$ .
43.  $\int x^2 \sqrt{a^2-x^2} dx = -\frac{x}{4} \sqrt{(a^2-x^2)^3} + \frac{a^2}{8} \left( x \sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right)$ .
44.  $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2-x^2} - a \ln \left| \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} \right|$ .
45.  $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \arcsin \frac{x}{a}$ .

$$46. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}.$$

$$47. \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$48. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}.$$

$$49. \int \frac{dx}{x \sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right|.$$

$$50. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 x}.$$

$$51. \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|.$$

$$52. \int x \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 \pm a^2)^3}.$$

$$53. \int x^2 \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{2x^3 \pm a^2 x}{8} \sqrt{x^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8} \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|.$$

$$54. \int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2 + a^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} \right|.$$

$$55. \int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2 - a^2} - a \arccos \frac{a}{x}.$$

$$56. \int \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x} + \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|.$$

$$57. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|.$$

$$58. \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2}.$$

$$59. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \mp \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|.$$

$$60. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + a^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} \right|.$$

$$61. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arccos} \frac{a}{x}.$$

$$62. \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = \mp \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}.$$

$$63. \int \sqrt{ax^2+bx+c} dx = \frac{2ax+b}{4a} \sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{4ac-b^2}{8a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

$$64. \int x\sqrt{ax^2+bx+c} dx = \frac{1}{3a} \sqrt{(ax^2+bx+c)^3} - \frac{b(2ax+b)}{8a^2} \sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b(4ac-b^2)}{16a^2} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

$$65. \int x^2\sqrt{ax^2+bx+c} dx = \frac{6ax-5b}{24a^2} \sqrt{(ax^2+bx+c)^3} + \frac{5b^2-4ac}{16a^2} \int \sqrt{ax^2+bx+c} dx.$$

$$66. \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln |2\sqrt{a(ax^2+bx+c)} + 2ax+b|, & \text{ja } a > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{Arsh} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}, & \text{ja } a > 0, 4ac-b^2 > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \ln |2ax+b|, & \text{ja } a > 0, 4ac-b^2 = 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{arcsin} \frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}, & \text{ja } a < 0, 4ac-b^2 < 0. \end{cases}$$

$$67. \int \frac{x dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{a} \sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

$$68. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{2ax-3b}{4a^2} \sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{3b^2-4ac}{8a^2} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

## Integrāļi no trigonometriskām funkcijām

69.  $\int \sin ax \, dx = -\frac{1}{a} \cos ax.$
70.  $\int \sin(ax+b) \, dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b).$
71.  $\int \sin^2 ax \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin 2ax.$
72.  $\int \sin^n ax \, dx = -\frac{\sin^{n-1} ax \cdot \cos ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} ax \, dx$   
( $n$  — vesels sk.,  $n > 0$ ).
73.  $\int x \cdot \sin ax \, dx = \frac{1}{a^2} \sin ax - \frac{x}{a} \cos ax.$
74.  $\int x^n \sin ax \, dx = -\frac{1}{a} x^n \cos ax + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos ax \, dx \quad (n > 0).$
75.  $\int \frac{\sin ax}{x} \, dx = ax - \frac{(ax)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{(ax)^5}{5 \cdot 5!} - \frac{(ax)^7}{7 \cdot 7!} + \dots$
76.  $\int \frac{\sin ax}{x^n} \, dx = -\frac{1}{n-1} \frac{\sin ax}{x^{n-1}} + \frac{a}{n-1} \int \frac{\cos ax}{x^{n-1}} \, dx \quad (n \neq 1).$
77.  $\int \frac{dx}{\sin ax} = \frac{1}{a} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{ax}{2} \right|.$
78.  $\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a} \operatorname{ctg} ax.$
79.  $\int \frac{dx}{\sin^n ax} = -\frac{1}{a(n-1)} \frac{\cos ax}{\sin^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax} \quad (n > 1).$
80.  $\int \frac{dx}{1 \pm \sin ax} = \frac{1}{a} \operatorname{tg} \left( \frac{ax}{2} \mp \frac{\pi}{4} \right).$
81.  $\int \frac{x \, dx}{1 + \sin ax} = \frac{x}{a} \operatorname{tg} \left( \frac{ax}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{2}{a^2} \ln \left| \cos \left( \frac{ax}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right|.$
82.  $\int \frac{x \, dx}{1 - \sin ax} = \frac{x}{a} \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right) + \frac{2}{a^2} \ln \left| \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right) \right|.$
83.  $\int \frac{\sin ax \, dx}{1 \pm \sin ax} = \pm x + \frac{1}{a} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} \mp \frac{ax}{2} \right).$
84.  $\int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax.$

85.  $\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b).$
86.  $\int \cos^2 ax dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4a} \sin 2ax.$
87.  $\int \cos^n ax dx = \frac{\cos^{n-1} ax \cdot \sin ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} ax dx$   
( $n > 0$  — vesels sk.).
88.  $\int x \cdot \cos ax dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \sin ax.$
89.  $\int x^n \cos ax dx = \frac{1}{a} x^n \sin ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sin ax dx$  ( $n > 0$ ).
90.  $\int \frac{\cos ax}{x} dx = \ln |ax| - \frac{(ax)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(ax)^4}{4 \cdot 4!} - \frac{(ax)^6}{6 \cdot 6!} + \dots$
91.  $\int \frac{\cos ax}{x^n} dx = -\frac{\cos ax}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{a}{n-1} \int \frac{\sin ax}{x^{n-1}} dx$  ( $n \neq 1$ ).
92.  $\int \frac{dx}{\cos ax} = \frac{1}{a} \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|.$
93.  $\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a} \operatorname{tg} ax.$
94.  $\int \frac{dx}{\cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1)} \frac{\sin ax}{\cos^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} ax}$  ( $n > 1$ ).
95.  $\int \frac{dx}{1 + \cos ax} = \frac{1}{a} \operatorname{tg} \frac{ax}{2}.$
96.  $\int \frac{dx}{1 - \cos ax} = -\frac{1}{a} \operatorname{ctg} \frac{ax}{2}.$
97.  $\int \frac{x dx}{1 + \cos ax} = \frac{x}{a} \operatorname{tg} \frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2} \ln \left| \cos \frac{ax}{2} \right|.$
98.  $\int \frac{x dx}{1 - \cos ax} = -\frac{x}{a} \operatorname{ctg} \frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2} \ln \left| \sin \frac{ax}{2} \right|.$
99.  $\int \frac{\cos ax dx}{1 + \cos ax} = x - \frac{1}{a} \operatorname{tg} \frac{ax}{2}.$
100.  $\int \frac{\cos ax dx}{1 - \cos ax} = -x - \frac{1}{a} \operatorname{ctg} \frac{ax}{2}.$

101.  $\int \sin ax \cdot \sin bx \, dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} \quad (|a| \neq |b|).$
102.  $\int \cos ax \cdot \cos bx \, dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} \quad (|a| \neq |b|).$
103.  $\int \sin ax \cdot \cos ax \, dx = \frac{1}{2a} \sin^2 ax.$
104.  $\int \sin ax \cdot \cos bx \, dx = -\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} \quad (|a| \neq |b|).$
105.  $\int \sin^2 ax \cdot \cos^2 ax \, dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4ax}{32a}.$
106.  $\int \sin^n ax \cdot \cos ax \, dx = \frac{1}{a(n+1)} \sin^{n+1} ax \quad (n \neq -1).$
107.  $\int \sin ax \cdot \cos^n ax \, dx = -\frac{1}{a(n+1)} \cos^{n+1} ax \quad (n \neq -1).$
108.  $\int \sin^n ax \cdot \cos^m ax \, dx = -\frac{\sin^{n-1} ax \cdot \cos^{m+1} ax}{a(n+m)} +$   
 $+\frac{n-1}{n+m} \int \sin^{n-2} ax \cdot \cos^m ax \, dx = \frac{\sin^{n+1} ax \cdot \cos^{m-1} ax}{a(n+m)} +$   
 $+\frac{m-1}{n+m} \int \sin^n ax \cdot \cos^{m-2} ax \, dx \quad (n, m > 0).$
109.  $\int \frac{dx}{\sin ax \cdot \cos ax} = \frac{1}{a} \ln |\operatorname{tg} ax|.$
110.  $\int \frac{dx}{\sin ax \cdot \cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1) \cos^{n-1} ax} + \int \frac{dx}{\sin ax \cdot \cos^{n-2} ax} \quad (n \neq 1).$
111.  $\int \frac{dx}{\sin^n ax \cdot \cos ax} = \frac{1}{a(n-1) \sin^{n-1} ax} + \int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax \cdot \cos ax} \quad (n \neq 1).$
112.  $\int \frac{dx}{\sin^n ax \cdot \cos^m ax} = \frac{-1}{a(n-1) \sin^{n-1} ax \cdot \cos^{m-1} ax} +$   
 $+\frac{n+m-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax \cdot \cos^m ax}, \quad (m > 0, n > 1) =$   
 $= \frac{1}{a(m-1) \sin^{n-1} ax \cdot \cos^{m-1} ax} + \frac{n+m-2}{m-1} \int \frac{dx}{\sin^n ax \cdot \cos^{m-2} ax},$   
 $(m > 1, n > 0).$

113.  $\int \frac{\sin ax}{\cos^n ax} dx = \frac{1}{a(n-1) \cos^{n-1} ax} \quad (n \neq 1).$
114.  $\int \frac{\sin^2 ax}{\cos ax} dx = -\frac{1}{a} \sin ax + \frac{1}{a} \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2} \right) \right|.$
115.  $\int \frac{\sin^2 ax}{\cos^n ax} dx = \frac{\sin ax}{a(n-1) \cos^{n-1} ax} - \frac{1}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} ax} \quad (n \neq 1).$
116.  $\int \frac{\sin^n ax}{\cos ax} dx = -\frac{\sin^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int \frac{\sin^{n-2} ax}{\cos ax} dx \quad (n \neq 1).$
117.  $\int \frac{\sin^n ax}{\cos^m ax} dx =$   
 $= \frac{\sin^{n+1} ax}{a(m-1) \cos^{m-1} ax} - \frac{n-m+2}{m-1} \int \frac{\sin^n ax}{\cos^{m-2} ax} dx \quad (m \neq 1) =$   
 $= -\frac{\sin^{n-1} ax}{a(n-m) \cos^{m-1} ax} + \frac{n-1}{n-m} \int \frac{\sin^{n-2} ax}{\cos^m ax} dx \quad (m \neq n) =$   
 $= \frac{\sin^{n-1} ax}{a(m-1) \cos^{m-1} ax} - \frac{n-1}{m-1} \int \frac{\sin^{n-1} ax}{\cos^{m-2} ax} dx \quad (m \neq 1).$
118.  $\int \frac{\cos ax}{\sin^n ax} dx = -\frac{1}{a(n-1) \sin^{n-1} ax} \quad (n \neq 1).$
119.  $\int \frac{\cos^2 ax}{\sin ax} dx = \frac{1}{a} \left( \cos ax + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{ax}{2} \right| \right).$
120.  $\int \frac{\cos^2 ax}{\sin^n ax} dx = -\frac{1}{n-1} \left( \frac{\cos ax}{a \sin^{n-1} ax} + \int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax} \right) \quad (n \neq 1).$
121.  $\int \frac{\cos^n ax}{\sin ax} dx = \frac{\cos^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int \frac{\cos^{n-2} ax}{\sin ax} dx \quad (n \neq 1).$
122.  $\int \frac{\cos^n ax}{\sin^m ax} dx =$   
 $= -\frac{\cos^{n+1} ax}{a(m-1) \sin^{m-1} ax} - \frac{n-m+2}{m-1} \int \frac{\cos^n ax}{\sin^{m-2} ax} dx \quad (m \neq 1) =$   
 $= \frac{\cos^{n-1} ax}{a(n-m) \sin^{m-1} ax} + \frac{n-1}{n-m} \int \frac{\cos^{n-2} ax}{\sin^m ax} dx \quad (m \neq n) =$   
 $= -\frac{\cos^{n-1} ax}{a(m-1) \sin^{m-1} ax} - \frac{n-1}{m-1} \int \frac{\cos^{n-2} ax}{\sin^{m-2} ax} dx \quad (m \neq 1).$

123.  $\int \frac{dx}{\cos ax \pm \sin ax} = \pm \frac{1}{a\sqrt{2}} \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{ax}{2} \pm \frac{\pi}{8} \right) \right|.$
124.  $\int \frac{dx}{(\cos ax \pm \sin ax)^2} = \frac{1}{2a} \operatorname{tg} \left( ax \mp \frac{\pi}{4} \right).$
125.  $\int \frac{\cos ax \, dx}{\cos ax \pm \sin ax} = \frac{x}{2} \pm \frac{1}{2a} \ln |\sin ax \pm \cos ax|.$
126.  $\int \frac{\sin ax \, dx}{\cos ax \pm \sin ax} = \pm \frac{x}{2} - \frac{1}{2a} \ln |\sin ax \pm \cos ax|.$
127.  $\int \frac{\cos ax \, dx}{\sin ax (1 \pm \cos ax)} = -\frac{1}{2a(1 \pm \cos ax)} \pm \frac{1}{2a} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{ax}{2} \right|.$
128.  $\int \frac{\sin ax \, dx}{\cos ax (1 \pm \sin ax)} = \frac{1}{2a(1 \pm \sin ax)} \pm \frac{1}{2a} \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|.$
129.  $\int \operatorname{tg} ax \, dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos ax|.$
130.  $\int \operatorname{tg}^n ax \, dx = \frac{1}{a(n-1)} \operatorname{tg}^{n-1} ax - \int \operatorname{tg}^{n-2} ax \, dx \quad (n \neq 1).$
131.  $\int \frac{\operatorname{tg}^n ax \, dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a(n+1)} \operatorname{tg}^{n+1} ax \quad (n \neq -1).$
132.  $\int \operatorname{ctg} ax \, dx = \frac{1}{a} \ln |\sin ax|.$
133.  $\int \operatorname{ctg}^n ax \, dx = -\frac{1}{a(n-1)} \operatorname{ctg}^{n-1} ax - \int \operatorname{ctg}^{n-2} ax \, dx \quad (n \neq 1).$
134.  $\int \frac{\operatorname{ctg}^n ax \, dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a(n+1)} \operatorname{ctg}^{n+1} ax \quad (n \neq -1).$

### Integrāļi no eksponentfunkcijām

135.  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad (a \neq 1).$
136.  $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}.$
137.  $\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1).$
138.  $\int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx.$

$$139. \int \frac{e^{ax}}{x} dx = \ln|x| + \frac{ax}{1 \cdot 1!} + \frac{(ax)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(ax)^3}{3 \cdot 3!} + \dots$$

$$140. \int \frac{e^{ax}}{x^n} dx = \frac{1}{n-1} \left( -\frac{e^{ax}}{x^{n-1}} + a \int \frac{e^{ax}}{x^{n-1}} dx \right) \quad (n \neq 1).$$

$$141. \int \frac{dx}{\alpha + \beta e^{ax}} = \frac{x}{\alpha} - \frac{1}{a \cdot \alpha} \ln|\alpha + \beta e^{ax}| \quad (\alpha \neq 0).$$

$$142. \int \frac{dx}{(\alpha + \beta e^{ax})^2} = \frac{1}{a \cdot \alpha^2} \ln \left| \frac{e^{ax}}{\alpha + \beta e^{ax}} \right| + \frac{1}{a\alpha(\alpha + \beta e^{ax})} \quad (\alpha \neq 0).$$

$$143. \int \frac{e^{ax} dx}{\alpha + \beta e^{ax}} = \frac{1}{a \cdot \beta} \ln|\alpha + \beta e^{ax}| \quad (\beta \neq 0).$$

$$144. \int e^{ax} \cdot \ln x dx = \frac{1}{a} (e^{ax} \cdot \ln|x| - \int \frac{e^{ax}}{x} dx).$$

$$145. \int e^{ax} \cdot \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx).$$

$$146. \int e^{ax} \cdot \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx).$$

$$147. \int e^{ax} \cdot \sin^n x dx = \frac{e^{ax} \cdot \sin^{n-1} x}{a^2 + n^2} (a \sin x - n \cos x) + \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2} \int e^{ax} \sin^{n-2} x dx.$$

$$148. \int e^{ax} \cdot \cos^n x dx = \frac{e^{ax} \cdot \cos^{n-1} x}{a^2 + n^2} (a \cos x + n \sin x) + \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2} \int e^{ax} \cdot \cos^{n-2} x dx.$$

### Integrāļi no hiperboliskām funkcijām

$$149. \int \operatorname{sh} ax dx = \frac{1}{a} \operatorname{ch} ax.$$

$$150. \int \operatorname{ch} ax dx = \frac{1}{a} \operatorname{sh} ax.$$

$$151. \int \operatorname{sh}^n ax \, dx = \frac{1}{an} \operatorname{sh}^{n-1} ax \cdot \operatorname{ch} ax - \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sh}^{n-2} ax \, dx \quad (n > 0) = \\ = \frac{1}{a(n+1)} \operatorname{sh}^{n+1} ax \cdot \operatorname{ch} ax - \frac{n+2}{n+1} \int \operatorname{sh}^{n+2} ax \, dx \quad (n < 0, n \neq -1).$$

$$152. \int \operatorname{ch}^n ax \, dx = \frac{1}{an} \operatorname{sh} ax \cdot \operatorname{ch}^{n-1} ax + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{ch}^{n-2} ax \, dx \quad (n > 0) = \\ = -\frac{1}{a(n+1)} \operatorname{sh} ax \cdot \operatorname{ch}^{n+1} ax + \frac{n+2}{n+1} \int \operatorname{ch}^{n+2} ax \, dx \quad (n < 0, n \neq -1).$$

$$153. \int \frac{dx}{\operatorname{sh} ax} = \frac{1}{a} \ln \left| \operatorname{th} \frac{ax}{2} \right|.$$

$$154. \int \frac{dx}{\operatorname{ch} ax} = \frac{2}{a} \operatorname{arctg} e^{ax}.$$

$$155. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 ax} = -\frac{1}{a} \operatorname{cth} ax.$$

$$156. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 ax} = \frac{1}{a} \operatorname{th} ax.$$

$$157. \int x \cdot \operatorname{sh} ax \, dx = \frac{1}{a} x \cdot \operatorname{ch} ax - \frac{1}{a^2} \operatorname{sh} ax.$$

$$158. \int x \cdot \operatorname{ch} ax \, dx = \frac{1}{a} x \cdot \operatorname{sh} ax - \frac{1}{a^2} \operatorname{ch} ax.$$

$$159. \int \operatorname{th} ax \, dx = \frac{1}{a} \ln(\operatorname{ch} ax).$$

$$160. \int \operatorname{cth} ax \, dx = \frac{1}{a} \ln |\operatorname{sh} ax|.$$

$$161. \int \operatorname{th}^2 ax \, dx = x - \frac{\operatorname{th} ax}{a}.$$

$$162. \int \operatorname{cth}^2 ax \, dx = x - \frac{\operatorname{cth} ax}{a}.$$

$$163. \int \operatorname{th}^n ax \, dx = -\frac{1}{a(n-1)} \operatorname{th}^{n-1} ax + \int \operatorname{th}^{n-2} ax \, dx \quad (n \neq 1).$$

$$164. \int \operatorname{cth}^n ax \, dx = -\frac{1}{a(n-1)} \operatorname{cth}^{n-1} ax + \int \operatorname{cth}^{n-2} ax \, dx \quad (n \neq 1).$$

$$\begin{aligned}
 165. \int \frac{\text{ch}^n ax}{\text{sh}^m ax} dx &= \\
 &= \frac{1}{a(n-m)} \frac{\text{ch}^{n-1} ax}{\text{sh}^{m-1} ax} + \frac{n-1}{n-m} \int \frac{\text{ch}^{n-2} ax}{\text{sh}^m ax} dx \quad (n \neq m) = \\
 &= -\frac{1}{a(m-1)} \frac{\text{ch}^{n+1} ax}{\text{sh}^{m-1} ax} + \frac{n-m+2}{m-1} \int \frac{\text{ch}^n ax}{\text{sh}^{m-2} ax} dx \quad (m \neq 1) = \\
 &= -\frac{1}{a(m-1)} \frac{\text{ch}^{n-1} ax}{\text{sh}^{m-1} ax} + \frac{n-1}{m-1} \int \frac{\text{ch}^{n-2} ax}{\text{sh}^{m-2} ax} dx \quad (m \neq 1).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 166. \int \frac{\text{sh}^m ax}{\text{ch}^n ax} dx &= \\
 &= \frac{1}{a(m-n)} \frac{\text{sh}^{m-1} ax}{\text{ch}^{n-1} ax} - \frac{m-1}{m-n} \int \frac{\text{sh}^{m-2} ax}{\text{ch}^n ax} dx \quad (m \neq n) = \\
 &= \frac{1}{a(n-1)} \frac{\text{sh}^{m+1} ax}{\text{ch}^{n-1} ax} - \frac{m-n+2}{n-1} \int \frac{\text{sh}^m ax}{\text{ch}^{n-2} ax} dx \quad (n \neq 1) = \\
 &= -\frac{1}{a(n-1)} \frac{\text{sh}^{m-1} ax}{\text{ch}^{n-1} ax} + \frac{m-1}{n-1} \int \frac{\text{sh}^{m-2} ax}{\text{ch}^{n-2} ax} dx \quad (n \neq 1).
 \end{aligned}$$

$$167. \int \text{sh} ax \cdot \text{sh} bx dx = \frac{1}{a^2 - b^2} (a \text{sh} bx \cdot \text{ch} ax - b \text{ch} bx \cdot \text{sh} ax) \quad (a^2 \neq b^2).$$

$$168. \int \text{ch} ax \cdot \text{ch} bx dx = \frac{1}{a^2 - b^2} (a \text{sh} ax \cdot \text{ch} bx - b \text{sh} bx \cdot \text{ch} ax) \quad (a^2 \neq b^2).$$

$$169. \int \text{ch} ax \cdot \text{sh} bx dx = \frac{1}{a^2 - b^2} (a \text{sh} bx \cdot \text{sh} ax - b \text{ch} bx \cdot \text{ch} ax) \quad (a^2 \neq b^2).$$

$$170. \int \text{sh}(ax+b) \cdot \sin(cx+d) dx = \frac{1}{a^2 + c^2} (a \text{ch}(ax+b) \cdot \sin(cx+d) - c \text{sh}(ax+b) \cdot \cos(cx+d)).$$

$$171. \int \text{sh}(ax+b) \cdot \cos(cx+d) dx = \frac{1}{a^2 + c^2} (a \text{ch}(ax+b) \cdot \cos(cx+d) + c \text{sh}(ax+b) \cdot \sin(cx+d)).$$

$$172. \int \text{ch}(ax+b) \cdot \cos(cx+d) dx = \frac{1}{a^2 + c^2} (a \text{sh}(ax+b) \cdot \cos(cx+d) + c \text{ch}(ax+b) \cdot \sin(cx+d)).$$

### Integrāļi no logaritmiskām funkcijām

$$173. \int \ln x dx = x \cdot \ln x - x.$$

$$174. \int (\ln x)^n dx = x \cdot (\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} dx \quad (n \neq -1).$$

175.  $\int \frac{dx}{\ln x} = \ln |\ln x| + \ln x + \frac{(\ln x)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(\ln x)^3}{3 \cdot 3!} + \dots$
176.  $\int \frac{dx}{(\ln x)^n} = -\frac{x}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{dx}{(\ln x)^{n-1}} \quad (n \neq 1).$
177.  $\int x^n \ln x \, dx = x^{n+1} \left( \frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \quad (n \neq -1).$
178.  $\int x^m (\ln x)^n \, dx = \frac{x^{m+1} (\ln x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int x^m (\ln x)^{n-1} \, dx \quad (m, n \neq -1).$
179.  $\int \frac{(\ln x)^n}{x} \, dx = \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1).$
180.  $\int \frac{dx}{x^n \ln x} = \ln |\ln x| - (n-1) \ln x + \frac{(n-1)^2 (\ln x)^2}{2 \cdot 2!} - \frac{(n-1)^3 (\ln x)^3}{3 \cdot 3!} + \dots$
181.  $\int \frac{dx}{x \cdot (\ln x)^n} = -\frac{1}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} \quad (n \neq 1).$
182.  $\int \sin(\ln x) \, dx = \frac{x}{2} (\sin(\ln x) - \cos(\ln x)).$
183.  $\int \cos(\ln x) \, dx = \frac{x}{2} (\sin(\ln x) + \cos(\ln x)).$
184.  $\int e^{ax} \ln x \, dx = \frac{1}{a} \left( e^{ax} \ln x - \int \frac{e^{ax}}{x} \, dx \right).$

### Integrāļi no inversām trigonometriskām un inversām hiperboliskām funkcijām

185.  $\int \arcsin \frac{x}{a} \, dx = x \cdot \arcsin \frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2}.$
186.  $\int x \cdot \arcsin \frac{x}{a} \, dx = \left( \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{4} \sqrt{a^2 - x^2}.$
187.  $\int x^2 \cdot \arcsin \frac{x}{a} \, dx = \frac{x^3}{3} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{9} (x^2 + 2a^2) \sqrt{a^2 - x^2}.$
188.  $\int \arccos \frac{x}{a} \, dx = x \cdot \arccos \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}.$

189.  $\int x \cdot \arccos \frac{x}{a} dx = \left( \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) \arccos \frac{x}{a} - \frac{x}{4} \sqrt{a^2 - x^2}$ .
190.  $\int x^2 \cdot \arccos \frac{x}{a} dx = \frac{x^3}{3} \arccos \frac{x}{a} - \frac{x^2 + 2a^2}{9} \sqrt{a^2 - x^2}$ .
191.  $\int \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln(a^2 + x^2)$ .
192.  $\int x \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = \frac{a^2 + x^2}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{ax}{2}$ .
193.  $\int x^2 \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{ax^2}{6} + \frac{a^3}{6} \ln(a^2 + x^2)$ .
194.  $\int x^n \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{a^2 + x^2} dx \quad (n \neq -1)$ .
195.  $\int \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = x \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln(a^2 + x^2)$ .
196.  $\int x \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = \frac{a^2 + x^2}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{ax}{2}$ .
197.  $\int x^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{ax^2}{6} - \frac{a^2}{6} \ln(a^2 + x^2)$ .
198.  $\int x^n \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{a^2 + x^2} dx \quad (n \neq -1)$ .
199.  $\int \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} dx = x \cdot \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} - \sqrt{x^2 + a^2}$ .
200.  $\int \operatorname{Arch} \frac{x}{a} dx = x \cdot \operatorname{Arch} \frac{x}{a} - \sqrt{x^2 - a^2}$ .
201.  $\int \operatorname{Arth} \frac{x}{a} dx = x \cdot \operatorname{Arth} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln |a^2 - x^2| \quad (|x| < |a|)$ .
202.  $\int \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} dx = x \cdot \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln |x^2 - a^2| \quad (|x| > |a|)$ .

Piezīme. Ne vienmēr  $\int f(x) dx$  ir izsakāms ar elementārajām funkcijām. Tas nenozīmē to, ka primitīvā funkcija neeksistē. Tā jāatrod citādi, piemēram, ar rindu palīdzību. Elementāri neintegrojamu  $f$  piemēri ( $n \in \mathbb{N}$ ):

$e^{-x^2}$ ,  $e^{x^2}$ ,  $e^x/x^n$ ,  $e^x \cdot \ln x$ ,  $\sin x^2$ ,  $\cos x^2$ ,  $\sin x/x^n$ ,  $\cos x/x^n$ ,  $x/\sin x$ ,  $x/\cos x$ ,  $x^2/\sin x$ ,  $x^2/\cos x$ ,  $x/\sin^3 x$ ,  $x/\cos^3 x$ ,  $x \cdot \operatorname{tg} x$ ,  $x \cdot \operatorname{ctg} x$ ,  $\operatorname{tg} x/x$ ,  $\operatorname{ctg} x/x$ ,  $\arcsin x/x$ ,  $\arccos x/x$ ,  $\operatorname{arctg} x/x$ ,  $\operatorname{arctg} x/x$ ,  $x/\ln x$ ,

$$\begin{aligned} & 1/(x^2 \ln x), \quad \ln(\sin x), \quad \ln(\cos x), \quad \ln(\operatorname{tg} x), \quad x/\operatorname{sh} x, \quad x/\operatorname{ch} x, \\ & 1/\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}, \quad x^2/\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}, \quad \sqrt{1-k^2 \sin^2 x}, \\ & 1/\sqrt{1-k^2 \sin^2 x} \text{ (visur } 0 < k < 1). \end{aligned}$$

## 8.9. NOTEIKTĀ INTEGRĀĻA DEFINĪCIJA UN PAMATĪPAŠĪBAS

Par intervālā  $[a, b]$  definētas un ierobežotas funkcijas  $f$  noteikto integrāli sauc skaitli

$$I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sigma = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad (1)$$

(ja šī robeža eksistē neatkarīgi no  $x_i$  un  $\xi_i$  izvēles).

Šeit:  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ ;  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ;

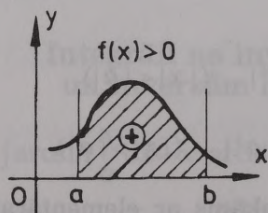
$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ;  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$ ;  $\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$  —  $f$  integrālsumma;

$a, b$  — apakšējā, augšējā robeža;  $f(x)$  — zemintegrāļa funkcija;  
 $f(x) dx$  — zemintegrāļa izteiksme.

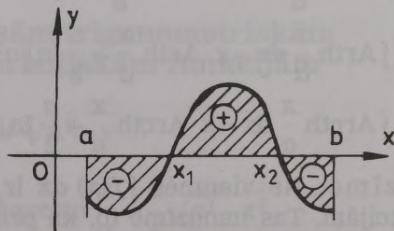
Ja  $f$  ir monotona un gabaliem nepārtraukta intervālā  $[a, b]$ , tad (1) eksistē, t. i., funkcija  $f$  ir integrējama.

Ģeometriski  $I = S$  — līklīniju trapeces laukums, ja  $f \geq 0$  (8.1. zīm.).

Ja  $f \leq 0$ , tad  $S = -\int_a^b f(x) dx$ .



8.1. zīm.



8.2. zīm.

Ja  $f$  krusto  $Ox$  asi vienu vai vairākas reizes, tad  $I$  vienāds ar atbilstošo laukumu algebrisko summu, bet

$$S = \sum |I_k| \quad (8.2. \text{ zīm. } S = |I_1| + |I_2| + |I_3|).$$

## Pamatīpašības

1.  $\int_a^a f(x) dx = 0.$

2.  $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx.$

3. Jebkuriem trim skaitļiem  $a, b, c$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

4.  $\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx.$

5.  $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx, \quad \alpha, \beta = \text{const.}$

6. Ja intervālā  $[a; b] f(x) \leq g(x)$ , tad

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

7. Vidējās vērtības teorēmas:

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a) \quad (\text{I teorēma}),$$

kur  $f(\xi) = \mu$  — funkcijas  $f$  vidējā vērtība.

Ja  $f, g$  — nepārtrauktas intervālā  $[a; b]$  un  $g$  saglabā savu zīmi, tad eksistē vismaz viens tāds  $(\cdot) \xi \in (a, b)$ , ka

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$$

(I teorēmas vispārinājums).

Ja  $m \leq f(x) \leq M$ , tad

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

Ja  $f$  — monotona un  $g$  — integrējama intervālā  $[a; b]$ , tad

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = f(a) \int_a^{\xi} g(x) dx + f(b) \int_{\xi}^b g(x) dx$$

(II teorēma).

8.  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$

9. Ja  $f$  ir nepārtraukta intervālā  $[a; b]$ , tad arī  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  ir nepārtraukta un  $F'(x) = f(x)$ .

## 8.10. NOTEIKTĀ INTEGRĀLA APRĒĶINĀŠANA

### 1. Nūtona—Leibnica formula.

Ja  $[a, b]$  eksistē  $f(x)$  primitīvā funkcija  $F(x)$  ( $F'(x) = f(x)$ ), t. i.,  $\int f(x) dx = F(x) + C$ , tad

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

### 2. Substitūcijas metode.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt,$$

kur  $x = \varphi(t)$  — monotona un nepārtraukti diferencējama;  
 $\varphi(a) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$ .

### 3. Parciālā integrēšana.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = \int_a^b u \cdot dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du,$$

$u, v$  — nepārtraukti diferencējamas funkcijas.

### 4. Integrālis no pāra vai nepāra funkcijas simetriskā intervālā $[-a, a]$ :

ja  $f(-x) = f(x)$  (pāra f.), tad

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx;$$

ja  $f(-x) = -f(x)$  (nepāra f.), tad

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

5. Ja  $f$  ir periodiska, t. i.,  $f(x+T) = f(x)$ , tad  $I = \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) dx$  nav atkarīgs no  $Ox$  ass ( $\cdot$ )  $x_0$  izvēles.

### 6. Rindu izmantošana.

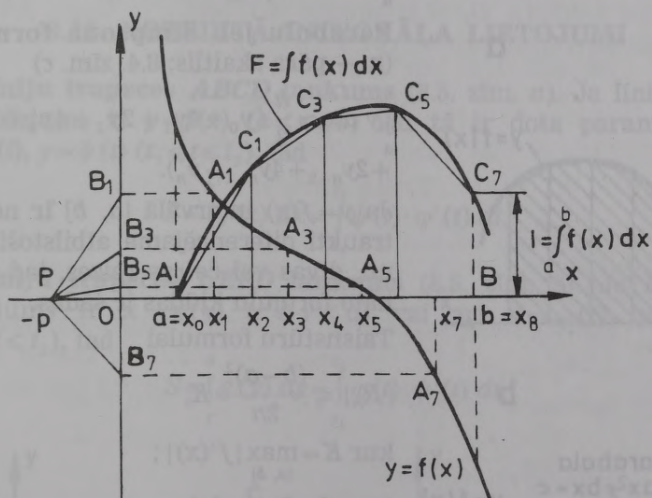
Ja  $f(x)$  var izteikt kā vienmērīgi konverģentas funkciju rindas summu

$$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \dots + \varphi_n(x) + \dots, \text{ tad}$$

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \varphi_1(x) dx + \int_a^b \varphi_2(x) dx + \dots + \int_a^b \varphi_n(x) dx + \dots$$

7. Grafiskā integrēšana (8.3. zīm.).

- 1) Uz  $Ox$  negatīvās pusass izvēlas t. s. *polu* — punktu  $P(-p, 0)$ ;
- 2) nogriežni  $AB$  sadala  $2n$  vienādās daļās — zīmējumā  $a=x_0, x_1, x_2, \dots, x_7, x_8=b$ ;
- 3) uz  $f(x)$  grafika atliek abscisām  $x_1, x_3, \dots$  atbilstošās ordinātas  $A_1, A_3, \dots$ , tās pārnesot uz  $Oy$  asi (punkti  $B_1, B_3, \dots$ );
- 4) caur  $A$  novelk taisni  $\parallel PB_1$  līdz krustpunktam  $C_1$  ar vertikāli  $x=x_2$ , caur  $C_1$  novelk taisni  $\parallel PB_3$  līdz krustpunktam  $C_3$  ar vertikāli  $x=x_4, \dots$ ;
- 5) caur  $C_i$  novelk līniju  $F(x)=\int f(x) dx$ ;
- 6)  $I = \int_a^b f(x) dx$  skaitliski vienāds ar nogriežņu  $OP$  un  $BC_7$  garumu reizinājumu; ja  $p=1$ , tad  $I=BC_7$ .



8.3. zīm.

8. Tuvinātās metodes.

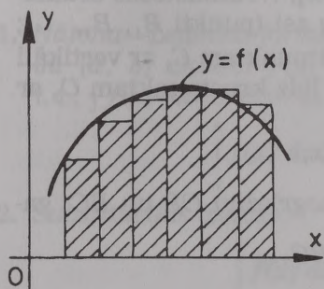
Ja  $y=f(x)$ , tad  $\int_a^b y dx \approx I_n$  jeb  $\int_a^b y dx = I_n + R_n$  ( $R_n$  — kļūda), kur  $I_n$  ir galīga summa, ko iegūst šādi:

- 1)  $[a, b]$  sadala  $n$  vienādās daļās  $a=x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n=b; x_i = a + ih$ , kur  $h = \frac{b-a}{n}$  — dalījuma intervāla garums ( $0 \leq i \leq n$ );

2) aprēķina  $y_i=f(x_i)$  ( $i=0, 1, 2, \dots, n$ );

3) izmanto vienu no integrāļa tuvinātās aprēķināšanas formulām.

**Taisnstūru formula** (8.4. zīm. a)



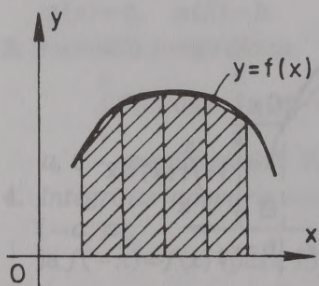
a

$$\int_a^b y \, dx \approx h(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1})$$

vai

$$\int_a^b y \, dx \approx h(y_1 + y_2 + \dots + y_n).$$

**Trapeču formula** (8.4. zīm. b)



b

$$\int_a^b y \, dx \approx h \left( \frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right).$$

**Parabolu jeb Simpsona formula** ( $n$  — pāra skaitlis; 8.4. zīm. c)

$$\int_a^b y \, dx \approx \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n).$$

Ja  $y=f(x)$  intervālā  $[a, b]$  ir nepārtraukti diferencējama atbilstoši vienu, divas vai četras reizes, tad tuvināto formulu kļūdas ir šādas.

Taisnstūru formulai

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \cdot K,$$

kur  $K = \max_{[a, b]} |f'(x)|$ ;

trapeču formulai

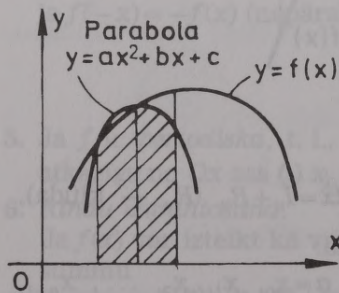
$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot K,$$

kur  $K = \max_{[a, b]} |f''(x)|$ ;

Simpsona formulai

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} \cdot K,$$

kur  $K = \max_{[a, b]} |f^{(4)}(x)|$ .



c

8.4. zīm.

Palielinot  $n$ , visas formulas kļūst precīzākas. Ja  $n$  ir viens un tas pats, tad trapeču formula ir precīzāka nekā taisnstūru formula, bet Simpsona formula — precīzāka nekā trapeču formula. Izmantojot tuvinātās formulas, parasti aprēķina integrāļa aptuvenās vērtības  $I_n$  un  $I_{2n}$  (dalījuma punktu skaitam  $n$  un  $2n$ ) un, salīdzinot tās, atstāj visus sakrītošos ciparus.

Piezīme. Ja  $f(x)$  primitīvo funkciju  $F(x)$  atrast ir grūti vai  $f$  nav integrējama elementārās funkcijās, tad  $I$  noteikšanai jālieto sarežģītākas metodes, piemēram, var izmantot kompleksā mainīgā funkciju teoriju vai teorēmas par integrēšanu vai diferencēšanu pēc parametra.

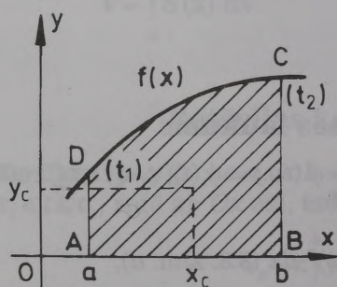
### 8.11. NOTEIKTĀ INTEGRĀĻA LIETOJUMI

**Līklīniju trapeces  $ABCD$  laukums** (8.5. zīm. *a*). Ja līnijas  $DC$  vienādojums ir  $y=f(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) vai tā ir dota parametriski  $x=\varphi(t)$ ,  $y=\psi(t)$  ( $t_1 \leq t \leq t_2$ ), tad

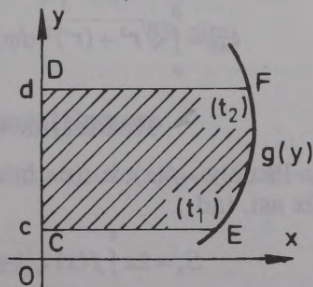
$$S = \int_a^b f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \cdot \varphi'(t) dt.$$

**Līklīniju trapeces  $CEFD$  laukums** (8.5. zīm. *b*). Ja  $EF$  vienādojums ir  $x=g(y)$  ( $c \leq y \leq d$ ) vai arī  $x=\varphi(t)$ ,  $y=\psi(t)$  ( $t_1 \leq t \leq t_2$ ), tad

$$S = \int_c^d g(y) dy = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t) \cdot \psi'(t) dt.$$

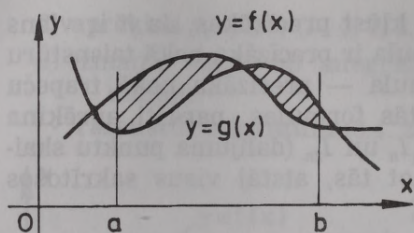


a

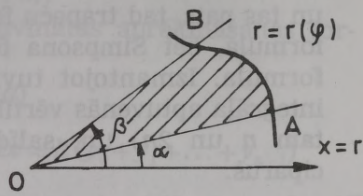


b

8.5. zīm.



8.6. zīm.



8.7. zīm.

Laukums figūrai, ko ierobežo līnijas  $y=f(x)$ ,  $y=g(x)$ ,  $x=a$ ,  $x=b$  (8.6. zīm.),

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Līklīniju sektora  $OAB$  laukums (8.7. zīm.), ja līnija  $AB$  dota polārajās koordinātās ( $r=r(\varphi)$ ,  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ ),

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi.$$

### Loka garums

Līnijas loka  $DC$  (sk. 8.5. zīm. a),  $EF$  (sk. 8.5. zīm. b) un  $AB$  (sk. 8.7. zīm.) garums:

$$l_{DC} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_{t_2}^{t_1} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt,$$

$$l_{EF} = \int_c^d \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt,$$

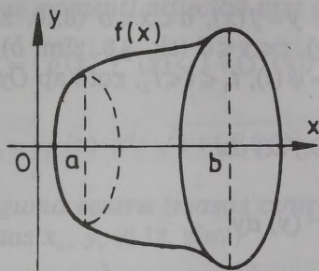
$$l_{AB} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi.$$

### Rotācijas virsmas laukums

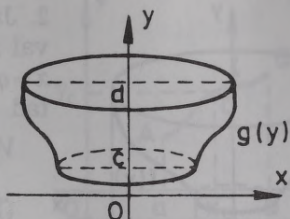
1. Ja līkne  $y=f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , vai  $x=\varphi(t)$ ,  $y=\psi(t)$ ,  $t_1 \leq t \leq t_2$ , rotē ap  $Ox$  asi, tad

$$S_x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (8.8. \text{ zīm. } a),$$

$$S_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$



a



b

8.8. zīm.

2. Ja līkne  $x=g(y)$ ,  $c \leq y \leq d$ , vai  $x=\varphi(t)$ ,  $y=\psi(t)$ ,  $t_1 \leq t \leq t_2$ , rotē ap  $Oy$  asi, tad

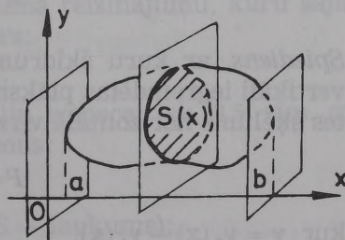
$$S_y = 2\pi \int_c^d g(y) \sqrt{1+(g'(y))^2} dy \quad (8.8. \text{ zīm. } b),$$

$$S_y = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

### Ķermeņa tilpums

Ja zināms ķermeņa šķēluma laukums  $S$ , kas  $\perp$  kādai asij (piemēram,  $Ox$  asij 8.9. zīm.), tad

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$



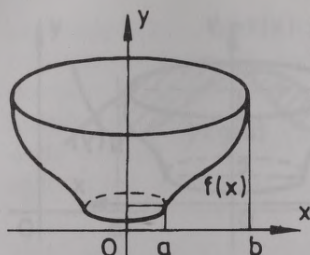
8.9. zīm.

### Rotācijas ķermeņa tilpums

1. Ja līkne  $y=f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$  (8.8. zīm. a), vai  $x=\varphi(t)$ ,  $y=\psi(t)$ ,  $t_1 \leq t \leq t_2$ , rotē ap  $Ox$  asi, tad

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx,$$

$$V_x = \pi \int_{t_1}^{t_2} \psi^2(t) \cdot \varphi'(t) dt.$$



8.10. zīm.

2. Ja līkne  $y=f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$  (8.10. zīm.), vai  $x=g(y)$ ,  $c \leq y \leq d$  (sk. 8.8. zīm. b), vai  $x=\varphi(t)$ ,  $y=\psi(t)$ ,  $t_1 \leq t \leq t_2$ , rotē ap  $Oy$  asi, tad

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx,$$

$$V_y = \pi \int_c^d g^2(y) dy,$$

$$V_y = \pi \int_{t_1}^{t_2} \varphi^2(t) \cdot \psi'(t) dt.$$

### Lietojumi fizikā un mehānikā

*Ceļš, ko veic materiāls punkts, pārvietojoties ar ātrumu  $v=v(t)$ :*

$$s = \int_{t_0}^T v(t) dt.$$

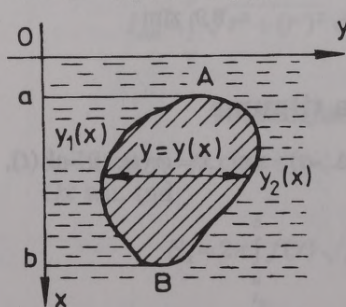
*Darbs, ko veic spēks  $F=F(x)$ , pārvietojot ķermeni pa  $Ox$  asi ( $a \leq x \leq b$ ), ja  $F$  darbojas ass virzienā:*

$$A = \int_a^b F(x) dx.$$

*Spiediens, ar kuru šķidrums (īpatnējais svars  $\gamma$ ) spiež uz tajā vertikāli iegremdētas plāksnītes vienu pusi, ja  $y=y(x)$  — plāksnītes šķēlums horizontālā virzienā (8.11. zīm.):*

$$P = \int_a^b \gamma x \cdot y dx,$$

kur  $y = y_2(x) - y_1(x)$ .



8.11. zīm.

*Materiālas līknes  $y=f(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) ar lineāro blīvumu  $\rho = \rho(x)$  masa*

$$m = \int_a^b \rho(x) \sqrt{1+(f'(x))^2} dx,$$

*statiskie momenti attiecībā pret asīm*

$$M_x = \int_a^b \rho(x) \cdot f(x) \sqrt{1+(f'(x))^2} dx,$$

$$M_y = \int_a^b \rho(x) \cdot x \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} dx,$$

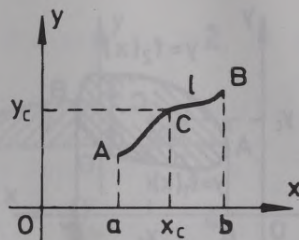
inerces momenti attiecībā pret asīm

$$I_x = \int_a^b \rho(x) \cdot f^2(x) \sqrt{1+(f'(x))^2} dx,$$

$$I_y = \int_a^b \rho(x) \cdot x^2 \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} dx.$$

Smaguma centra (masas centra) koordinātas  $x_c, y_c$  (8.12. zīm.).

$$x_c = \frac{1}{m} M_y, \quad y_c = \frac{1}{m} M_x,$$



8.12. zīm.

homogēnai līnijai ( $\rho(x) = \text{const}$ ,  $l$  — loka AB garums)

$$x_c = \frac{1}{l} \int_a^b x \sqrt{1+(f'(x))^2} dx;$$

$$y_c = \frac{1}{l} \int_a^b f(x) \sqrt{1+(f'(x))^2} dx.$$

**Guldena 1. teorēma.** Rotācijas ķermeņa virsmas laukums  $S$ , kuru izveido plaknes līnijas loks, rotējot ap asi, kas atrodas vienā plaknē ar šo līniju un to nekrusto, ir vienāds ar līnijas loka garuma  $l$  un tādas riņķa līnijas garuma reizinājumu, kuru šajā rotācijā apraksta loka smaguma centrs:

$$S = l \cdot 2\pi y_c.$$

Homogēnai plaknes figūrai — līklīniju trapecei (sk. 8.5. zīm.  $a$ ;  $0 \leq y \leq f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ ) ar blīvumu  $\rho = \text{const}$

masa

$$m = \rho S = \rho \int_a^b f(x) dx \quad (S \text{ — laukums});$$

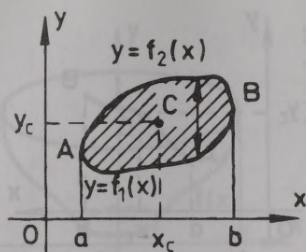
statiskie momenti attiecībā pret asīm

$$M_x = \frac{1}{2} \rho \int_a^b f^2(x) dx, \quad M_y = \rho \int_a^b x \cdot f(x) dx;$$

smaguma centra (masas centra) koordinātas:

$$x_c = \frac{1}{m} M_y = \frac{1}{S} \int_a^b x \cdot f(x) dx, \quad y_c = \frac{1}{m} M_x = \frac{1}{2S} \int_a^b f^2(x) dx.$$

**Guldena 2. teorēma.** Tilpums rotācijas ķermenim, kas rodas, plaknes figūrai rotējot ap asi, kas atrodas vienā plaknē ar šo figūru un to nekrusto, ir vienāds ar figūras laukuma  $S$  un tādas



8.13. zīm.

riņķa līnijas garuma reizinājumu, kuru šajā rotācijā apraksta smaguma centrs:

$$V = S \cdot 2\pi y_c.$$

*Inerces moments homogēnai plaknes figūrai (8.13. zīm.) attiecībā pret Oy asi*

$$I_x = \rho \int_a^b x^2 y \, dx,$$

$\rho$  — blīvums,  $y$  — Oy asij paralēla šķēluma garums.

*Smaguma centra (masas centra) koordinātas 8.13. zīmējumā dotaī homogēnai plaknes figūrai*

$$x_c = \frac{1}{S} \int_a^b x (f_2(x) - f_1(x)) \, dx,$$

$$y_c = \frac{1}{2S} \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x)) \, dx,$$

kur  $S$  — laukums.

## 8.12. NEĪSTIE INTEGRĀĻI (n. i.)

### Integrāļi ar bezgalīgām robežām

Definīcija.

$$\int_a^{+\infty} f(x) \, dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_a^N f(x) \, dx, \quad (1)$$

$$\int_{-\infty}^a f(x) \, dx = \lim_{M \rightarrow -\infty} \int_M^a f(x) \, dx, \quad (2)$$

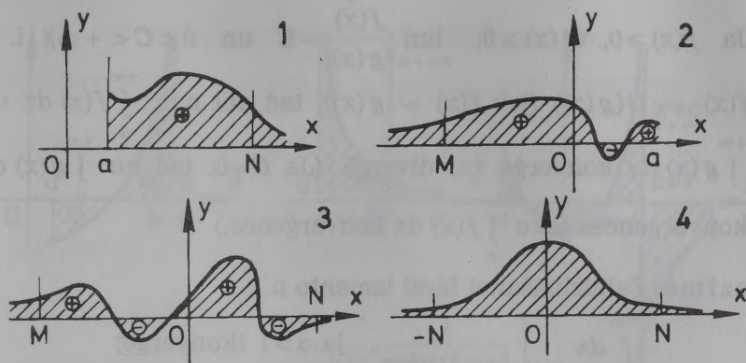
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx &= \int_{-\infty}^c f(x) \, dx + \int_c^{+\infty} f(x) \, dx = \\ &= \lim_{M \rightarrow -\infty} \int_M^c f(x) \, dx + \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_c^N f(x) \, dx \quad (3) \end{aligned}$$

( $c$  — jebkurš skaitlis;  $M \neq N$ ).

Ja šīs robežas eksistē un ir galīgas, tad n. i. *konverģē (eksistē)*. Pretējā gadījumā — n. i. *diverģē (neeksistē)*.

Iespējams, ka (3) diverģē, bet eksistē tā galvenā vērtība

$$\text{v. p. } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = \lim_{N \rightarrow -\infty} \int_N^N f(x) \, dx. \quad (4)$$



8.14. zīm.

N. i. (1), (2), (3) un (4) ģeometriski attēloti 8.14. zīmējumā.

Ja funkcijai  $f(x)$  intervālā  $[a; +\infty)$  eksistē nepārtraukta primitīvā funkcija  $F(x)$ , tad

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(+\infty) - F(a) = F(x) \Big|_a^{+\infty},$$

kur  $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ .

Ja robežas (1), (2), (3) aprēķināt ir grūti vai arī jānoskaidro tikai tas, vai n. i. konverģē vai diverģē, izmanto kādu no konverģences pietiekamiem nosacījumiem (pazīmēm)\*.

1. Ja konverģē  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ , tad konverģē arī (1) un to sauc par *absolūti konverģentu*, bet  $f(x)$  — par *absolūti integrējamu intervālā*  $[a, +\infty)$ .
2. Ja intervālā  $[a, +\infty)$   $0 \leq f(x) \leq g(x)$ , tad no  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  konverģences seko  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  konverģence, bet no  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  diverģences —  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  diverģence.

\* Konverģences pazīmes formulētas n. i. (1), jo n. i. (2) un (3) tās ir analogas, bet n. i. (3) konverģencei nepieciešama abu saskaitāmo konverģence.

3. Ja  $f(x) \geq 0$ ,  $g(x) \geq 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = C$  un  $0 < C < +\infty$ , t. i.,

$f(x) = O(g(x))$  (jeb  $f(x) \sim g(x)$ ), tad abi n. i.  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  un  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  konverģē vai diverģē. (Ja  $C=0$ , tad no  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  konverģences seko  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  konverģence.)

Piezīme. Salīdzināšanai bieži izmanto n. i.

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}}, & \text{ja } \alpha > 1 \text{ (konverģē)} \\ \infty, & \text{ja } \alpha \leq 1 \text{ (diverģē)}. \end{cases}$$

$$(a > 0)$$

### Integrāļi no pārtrauktām funkcijām

Definīcija. Ja  $f(x)$  ir definēta intervālā  $[a, b)$  vai arī intervālā  $[a, b]$ , bet  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \infty$  ( $x=b$  ir  $f(x)$  singulārais punkts), tad n. i.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx. \quad (5)$$

Ja šī robeža eksistē un ir galīga, tad n. i. *konverģē (eksistē)*. Pretējā gadījumā — n. i. *diverģē (neeksistē)*.

Analogi definē n. i. no  $f(x)$ , ja tās singulārais punkts ir  $x=a$  vai  $x=c$ , kur  $a < c < b$ :

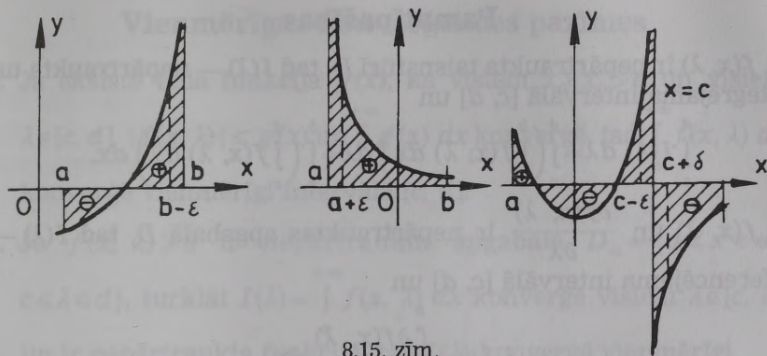
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx, \quad (6)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{c+\delta}^b f(x) dx. \quad (7)$$

Iespējams, ka (7) diverģē, bet eksistē tā galvenā vērtība

$$\text{v. p. } \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right).$$

N. i. (5), (6), (7) geometriski ilustrēti 8.15. zīmējumā.



8.15. zīm.

Ja jānoskaidro vienīgi tas, vai n. i. (5), (6), (7) konverģē vai diverģē, tad izmanto kādu no iepriekšminētajām trim pazīmēm, pieskaņojot tās atbilstoši dotajam n. i.

Salīdzināšanai izmanto n. i.

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} (b-a)^{1-\alpha}, & \text{ja } \alpha < 1 \text{ (konverģē)} \\ \infty, & \text{ja } \alpha \geq 1 \text{ (diverģē)}. \end{cases}$$

Var izmantot arī  $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$  ar tādu pašu vērtību.

Piezīme. N. i. (7) nedrīkst izmantot Ņūtona—Leibnica formulu

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b$$

(funkcijai  $f(x)$  jābūt nepārtrauktai intervālā  $[a, b]$ ).

### 8.13. INTEGRĀLI, KAS ATKARĪGI NO PARAMETRA

Ja  $f(x, \lambda)$  definēta taisnstūrī  $D = \{a \leq x \leq b, c \leq \lambda \leq d\}$ , tad

$$I(\lambda) = \int_a^b f(x, \lambda) dx$$

sauc par *integrāli, kas atkarīgs no parametra  $\lambda$*  ( $f(x, \lambda)$  — integrējama pēc  $x$ ).

## Pamatīpašības

Ja  $f(x, \lambda)$  ir nepārtraukta taisnstūrī  $D$ , tad  $I(\lambda)$  — nepārtraukta un integrējama intervālā  $[c, d]$  un

$$\int_c^d I(\lambda) d\lambda = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, \lambda) dx \right) d\lambda = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, \lambda) d\lambda \right) dx.$$

Ja  $f(x, \lambda)$  un  $\frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda}$  ir nepārtrauktas apgabālā  $D$ , tad  $I(\lambda)$  — diferencējama intervālā  $[c, d]$  un

$$I'(\lambda) = \int_a^b \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda} dx.$$

Ja  $a = a(\lambda)$  un  $b = b(\lambda)$  ir nepārtrauktas un diferencējamas intervālā  $[c, d]$  un  $f(x, \lambda)$ ,  $\frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda}$  nepārtrauktas apgabālā  $D$ , tad

$I(\lambda) = \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(x, \lambda) dx$  ir diferencējama intervālā  $[c, d]$  un

$$I'(\lambda) = \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda} dx + b'(\lambda) f(b(\lambda), \lambda) - a'(\lambda) f(a(\lambda), \lambda).$$

Ja  $f(x, \lambda)$  ir definēta apgabālā  $D_\infty = \{a \leq x < \infty, c \leq \lambda \leq d\}$  un katram  $\lambda \in [c, d]$  ir integrējama (kā neīstais integrālis) pēc  $x$  intervālā  $[a, +\infty)$ , tad  $I(\lambda) = \int_a^{+\infty} f(x, \lambda) dx$  sauc par *intervālā  $[c, d]$  konverģentu neīsto integrāli*.

Ja  $f(x, \lambda)$  ir definēta kopā  $\{a \leq x < b, c \leq \lambda \leq d\}$  un jebkuram  $\lambda \in [c, d]$   $\int_a^b f(x, \lambda) dx$  konverģē, tad  $I(\lambda) = \int_a^b f(x, \lambda) dx$  sauc par *neīsto integrāli* (no neierobežotas funkcijas, kad  $x = b$ ). Tā kā abiem n. i. piemīt analogas īpašības, tad turpmāk aplūkoti tikai viena veida n. i. — pa  $D_\infty$ .

Ja  $I(\lambda) = \int_a^{+\infty} f(x, \lambda) dx$  konverģē visiem  $\lambda \in [c, d]$ , tad to sauc par *vienmērīgi konverģentu intervālā  $[c, d]$* , ja katram  $\varepsilon > 0$  eksistē tāds  $x(\varepsilon)$ , ka jebkuram  $A > x(\varepsilon)$  un visiem  $\lambda \in [c, d]$

$$\left| \int_A^{+\infty} f(x, \lambda) dx \right| < \varepsilon.$$

## Vienmērīgas konverģences pazīmes

1. Ja eksistē tāda funkcija  $g(x)$ , ka visiem  $x \geq x_0 > a$  un visiem  $\lambda \in [c, d]$   $|f(x, \lambda)| \leq g(x)$  un  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  konverģē, tad  $\int_a^{+\infty} f(x, \lambda) dx$  konverģē vienmērīgi intervālā  $[c, d]$ .

2. Ja  $f(x, \lambda) \geq 0$  ir nepārtraukta apgalabā  $D_\infty = \{a \leq x < \infty, c \leq \lambda \leq d\}$ , turklāt  $I(\lambda) = \int_a^{+\infty} f(x, \lambda) dx$  konverģē visiem  $\lambda \in [c, d]$  un ir nepārtraukta funkcija, tad  $I(\lambda)$  konverģē vienmērīgi.

3. Ja  $f(x, \lambda)$  ir ierobežota apgalabā  $D_\infty$  un integrējama pēc  $x \in [a, R]$ , tad no  $\int_a^{+\infty} |h(x)| dx$  konverģences izriet  $\int_a^{+\infty} f(x, \lambda) h(x) dx$  vienmērīgā konverģence.

Ja  $f(x, \lambda)$  ir nepārtraukta apgalabā  $D_\infty$  un  $I(\lambda)$  konverģē vienmērīgi intervālā  $[c, d]$ , tad arī  $I(\lambda)$  ir nepārtraukta intervālā  $[c, d]$ , t. i., jebkuram  $\lambda_0 \in [c, d]$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \int_a^{+\infty} f(x, \lambda) dx = \int_a^{+\infty} f(x, \lambda_0) dx;$$

turklāt  $I(\lambda)$  var integrēt:

$$\int_c^d I(\lambda) d\lambda = \int_c^d d\lambda \int_a^{+\infty} f(x, \lambda) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x, \lambda) d\lambda$$

( $d$  vietā var būt jebkurš  $\lambda \in [c, d]$ ).

Ja  $f(x, \lambda)$  un  $\frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda}$  ir nepārtrauktas apgalabā  $D_\infty$ ,  $I(\lambda)$  kon-

verģē intervālā  $[c, d]$ , bet  $\int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda} dx$  konverģē vienmērīgi,

tad  $I(\lambda)$  ir diferencējama  $[c, d]$  un

$$I'(\lambda) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda} dx.$$

## 8.14. EILERA INTEGRĀĻI

1. Beta funkcija  $B(p, q)$  jeb I veida Eilera integrālis

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx, \quad p > 0, q > 0, \quad (1)$$

$$B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} dx, \quad p > 0, q > 0.$$

B funkcijas īpašības:

1)  $B(p, q) = B(q, p)$ ;

2)  $B(p, q) = \frac{p-1}{p+q-1} B(p-1, q), \quad p > 1, q > 0$ ;

$B(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p, q-1), \quad p > 0, q > 1$ ;

3)  $B(p, n) = \frac{(n-1)!}{p(p+1)(p+2)\dots(p+n-1)}, \quad n \in \mathbf{N}$ ;

$B(m, n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}, \quad m, n \in \mathbf{N}$ ;

4)  $B(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad 0 < p < 1.$

2. Gamma funkcija  $\Gamma(x)$  jeb II veida Eilera integrālis\*.

$\Gamma(x)$  (faktoriāla vispārinājumu) definē divējādi:

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt & (\text{Eilera integrālis; } x > 0) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)} & (\text{jebkuram } x). \end{cases}$$

$\Gamma(x)$  grafiks redzams 8.16. zīm., bet tās vērtības atrodamas tabulā. Dažas biežāk lietojamās vērtības:

$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad n \in \mathbf{N}; \quad \Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ ;

$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}; \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}; \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2};$

---

\*  $x$  var būt arī komplekss lielums. Funkcijai  $\Gamma(z)$  ir 1. kārtas poli, ja  $z = -n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ); res  $\Gamma(-n) = \frac{(-1)^n}{n!}$ , bet  $\frac{1}{\Gamma(z)}$  ir analītiska.

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi},$$

$$\text{kur } (2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)(2n-1).$$

Pamatīpašības:

$$1) \Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1) \text{ (lieliem } x);$$

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$$

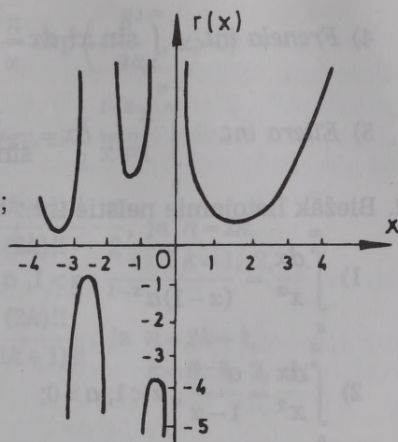
(ja  $x < 1$  un  $x \neq 0, -1, -2, \dots$ );

$$2) \Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x};$$

$$3) \Gamma(x) \cdot \Gamma(-x) = \frac{-\pi}{x \cdot \sin \pi x};$$

$$4) \Gamma\left(\frac{1}{2} + x\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2} - x\right) = \frac{\pi}{\cos \pi x};$$

$$5) \Gamma(x) \cdot \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}} \cdot \Gamma(2x) \text{ (Ležandra formula).}$$



8.16. zīm.

I un II veida Eilera integrāļus saista formula

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

## 8.15. NOTEIKTO INTEGRĀĻU TABULA

1. Īpaša nosaukuma integrāļi (int.):

$$1) \text{ Dirihlē int. } \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha;$$

$$2) \text{ Puasona int. } \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

$$3) \text{ Laplasa int. } \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{\beta^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2|\beta|} e^{-|\alpha\beta|}, \beta \neq 0,$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \cdot \sin \alpha x}{\beta^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha \cdot e^{-|\alpha\beta|};$$

$$4) \text{ Frenēļa int. } \int_{-\infty}^{\infty} \sin x^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cos x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}};$$

$$5) \text{ Eilera int. } \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

2. Biežāk lietojamie neīstie int.:

$$1) \int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}}, \quad \alpha > 1, a > 0;$$

$$2) \int_0^a \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \quad \alpha < 1, a > 0;$$

$$3) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2};$$

$$4) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}};$$

$$5) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}};$$

$$6) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2};$$

$$7) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(\alpha^2+x^2)(\beta^2+x^2)} = \frac{\pi}{2\alpha\beta(\alpha+\beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0;$$

$$8) \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha > 0;$$

$$9) \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!, \quad n=0, 1, 2, \dots;$$

$$10) \int_0^{+\infty} x^2 e^{-a^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^3}, \quad a > 0;$$

$$11) \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cdot \cos \beta x dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \alpha > 0;$$

$$12) \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cdot \sin \beta x dx = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \alpha > 0;$$

$$13) \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \cdot \cos \beta x dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right), \quad \alpha > 0;$$

$$14) \int_0^{+\infty} x \cdot e^{-\alpha x^2} \cdot \sin \beta x \, dx = \frac{\beta}{4\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right), \alpha > 0;$$

$$15) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) \, dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2;$$

$$16) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx = \begin{cases} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{ja } n=2k, \\ & k=1, 2, \dots \\ \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, & \text{ja } n=2k+1, \\ & k=0, 1, 2, \dots; \end{cases}$$

$$17) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \frac{\pi}{2|ab|}, \quad ab \neq 0;$$

$$18) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a \cos x} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}, \quad 0 \leq a < 1;$$

$$19) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-a^2 \cos^2 x} = \frac{\pi}{2\sqrt{1-a^2}}, \quad |a| < 1.$$

3. Integrāļi, kas reducējami uz Eilera integrāļiem:

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x \, dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2}\right), \quad p > -1, q > -1;$$

$$2) \int_0^1 x^m \cdot (1-x^n)^p \, dx = \frac{1}{n} B\left(\frac{m+1}{n}, p+1\right), \quad n > 0, m > -1, p > -1;$$

$$3) \int_0^{+\infty} \frac{x^m \, dx}{(1+x^n)^p} = \frac{1}{n} B\left(\frac{m+1}{n}, p - \frac{m+1}{n}\right), \quad 0 < \frac{m+1}{n} < p;$$

$$4) \int_0^{+\infty} x^n e^{-ax} \, dx = \begin{cases} \frac{1}{a^{n+1}} \Gamma(n+1), & a > 0, n > -1 \\ \frac{n!}{a^{n+1}}, & a > 0, n \in \mathbb{N}; \end{cases}$$

$$5) \int_0^{+\infty} x^m e^{-x^n} dx = \frac{1}{|n|} \Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right), \quad \frac{m+1}{n} > 0;$$

$$6) \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^p dx = \Gamma(p+1), \quad p > -1.$$

## 8.16. DIVKĀRŠAIS INTEGRĀLIS (∬) UN TĀ LIETOJUMI

Par apgabālā  $D$  (kontūrs  $L$  — tā robeža) nepārtrauktas funkcijas  $f(M) = f(x, y)$  divkāršo integrāli sauc skaitli

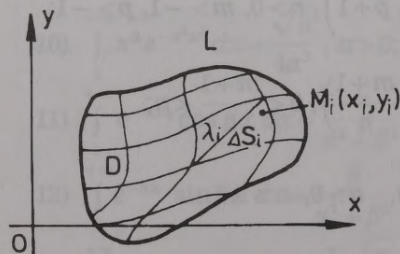
$$\iint_D f(M) d\sigma = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta \sigma_i,$$

ja šī robeža eksistē neatkarīgi no  $D$  sadalījuma veida  $n$  elementārgabalos  $\Delta S_i$  (to laukumi —  $\Delta \sigma_i$ ) un no ( $\cdot$ )  $M_i$  izvēles tajos (8.17. zīm.).

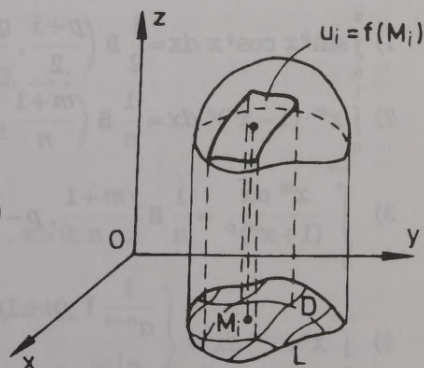
Šeit  $D$  ir integrācijas apgabals;  $d\sigma$  — laukuma diferenciālis;  $\lambda = \max d_i$ , kur  $d_i$  —  $\Delta S_i$  diametrs, t. i., maksimālais attālums starp tā robežas punktiem.

Ģeometriskā interpretācija:

- 1)  $\iint_D f(M) d\sigma = V$  — cilindriskā ķermeņa tilpums, kuru ierobežo virsma  $u = f(M) = f(x, y)$ ,  $xOy$  plaknes apgabals  $D$  un cilindriskā virsma, kuras vadītāja ir kontūrs  $L$ , bet veidotājas ir  $\parallel Oz$  asij (8.18. zīm.);



8.17. zīm.



8.18. zīm.

2)  $\iint_D d\sigma = S_D$  ir apgabala  $D$  laukums.

Pamatīpašības ir analogas noteiktā integrāļa īpašībām, kur atbilstoši  $[a, b]$  vietā ir apgabala  $D$  mērs, t. i., laukums  $S_D$ . Piemēram, vidējās vērtības teorēma: ja  $f(M)$ ,  $g(M)$  ir nepārtrauktas apgabalā  $D$ , bet  $g(M)$  saglabā savu zīmi, tad eksistē tāds  $(\cdot) M_0 \in D$ , ka

$$\iint_D f(M) g(M) d\sigma = f(M_0) \iint_D g(M) d\sigma;$$

ja  $g(M)=1$ , tad  $\iint_D f(M) d\sigma = f(M_0) \cdot S_D$ , kur  $f(M_0)$  ir  $f(M)$  vidējā vērtība apgabalā  $D$ .

### $\iint$ aprēķināšana jeb pāreja uz atkārtoto integrāli

1. Dekarta koordinātās:  $D$  sadalīts apgabalos  $\triangle S_i$  ar koordinātu līnijām  $x = \text{const}$  un  $y = \text{const}$ . Laukuma diferenciālis (elements)

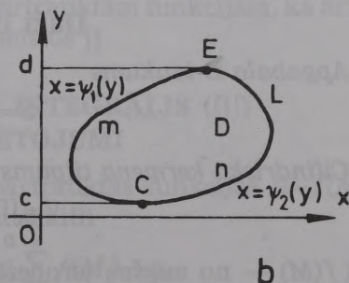
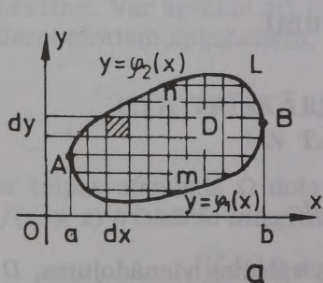
$$d\sigma = dx \cdot dy,$$

bet kontūru  $L$  var izteikt divējādi: kā  $\overset{\curvearrowright}{A}mB + \overset{\curvearrowright}{B}nA$  (8.19. zīm. a) vai  $\overset{\curvearrowright}{C}mE + \overset{\curvearrowright}{E}nC$  (8.19. zīm. b), t. i., atbilstoši

$$D: \begin{cases} \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \\ a \leq x \leq b \end{cases} \quad \text{vai} \quad D: \begin{cases} \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \\ c \leq y \leq d; \end{cases}$$

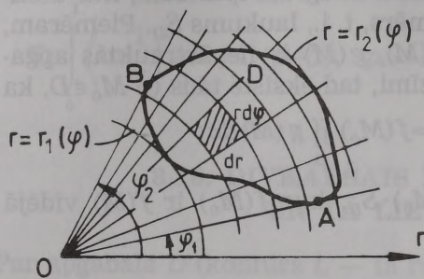
$$\iint_D f(M) d\sigma = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx =$$

$$= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy = \int_c^d \left( \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx.$$



8.19. zīm.

2. Polārajās koordinātās:  $D$  sadalīts ar koordinātu līnijām  $r = \text{const}$  (r. l. ar centru polā) un  $\varphi = \text{const}$  (stari no pola);



8.20. zīm.

$$d\sigma = r d\varphi dr,$$

$$D: \begin{cases} r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi) \\ \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \end{cases} \quad (8.20. \text{ zīm.})$$

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi;$$

$$\iint_D f(M) d\sigma =$$

$$= \iint_D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi dr =$$

$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left( \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr \right) d\varphi =$$

$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r dr.$$

3. Jebkurā līklīniju koordinātu sistēmā  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ :

$$d\sigma = |J| du dv,$$

kur  $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$  — jakobiāns (lineārās deformācijas koefi-

cients, pārejot no apgabala  $D$  uz apgabalu  $G$   $uOv$  plaknē);

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(x(u, v); y(u, v)) \cdot |J(u, v)| du dv.$$

Piezīme. Ja  $u = r$ ,  $v = \varphi$  un  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , tad  $|J(r, \varphi)| = r$ , t. i., iegūst  $\iint$  polārajās koordinātās (sk. 2.).

## Daži lietojumi

1. Apgabala  $D$  laukums

$$S = \iint_D d\sigma.$$

2. Cilindriska ķermeņa tilpums

$$V = \iint_D f(M) d\sigma$$

( $f(M)$  — no augšas ierobežojošās virsmas vienādojums,  $D$  — tās projekcija).

### 3. Virsmas laukums

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy,$$

kur  $z=f(x, y)$  — virsmas vienādojums,  $D$  — tās projekcija  $xOy$  plaknē.

### 4. Plaknes figūras masa

$$m = \iint_D \rho(x, y) dx dy$$

(figūra aizņem apgabalu  $D$ ;  $\rho(x, y)$  — blīvums).

### 5. Statiskie momenti attiecībā pret koordinātu asīm un sākumpunktu

$$M_x = \iint_D y \cdot \rho(x, y) dx dy,$$

$$M_y = \iint_D x \cdot \rho(x, y) dx dy,$$

$$M_O = \iint_D \rho(x, y) \sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$$

### 6. Masas centra koordinātas

$$x_c = \frac{1}{m} M_y, \quad y_c = \frac{1}{m} M_x.$$

### 7. Inerces momenti attiecībā pret koordinātu asīm un sākumpunktu

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) dx dy,$$

$$I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) dx dy,$$

$$I_O = I_x + I_y.$$

Piezīme. Var aplūkot arī  $\iint$  no pārtrauktām funkcijām, kā arī pa neierobežotiem apgabaliem, t. s. neīstos  $\iint$ .

## 8.17. TRĪSKĀRŠAIS INTEGRĀLIS ( $\iiint$ ) UN TĀ LIETOJUMI

Par telpas apgabala  $\Omega$  dotas nepārtrauktas funkcijas  $u=f(M) = f(x, y, z)$  trīskāršo integrāli sauc skaitli

$$\iiint_{\Omega} f(M) dv = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta v_i,$$

ja šī robeža eksistē neatkarīgi no  $\Omega$  sadalījuma veida  $n$  elementār-  
apgabalos  $\Delta\omega_i$  (to tilpumi ir  $\Delta v_i$ ) un no  $(.) M_i$  izvēles tajos.

Šeit:  $\Omega$  — integrācijas apgabals;  $dv$  — tilpuma diferenciālis;  
 $\lambda = \max d_i$ , kur  $d_i$  —  $\Delta\omega_i$  diametrs, t. i., maksimālais attālums  
starp tā robežas punktiem.

Ģeometriskā interpretācija: ja  $f(M) \equiv 1$ , tad

$$\iiint_{\Omega} dv = V \quad (\text{apgabala } \Omega \text{ tilpums}).$$

Pamatīpašības ir analogas noteiktā integrāļa un  $\iint$  īpašībām.

Piemēram, vidējās vērtības teorēma:

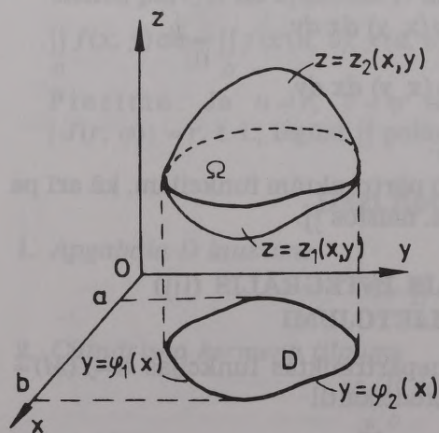
$$\iiint_{\Omega} f(M) dv = f(M_0) \cdot V,$$

kur  $f(M_0)$  — funkcijas  $f(M)$  vidējā vērtība apgabalā  $\Omega$  ( $(.) M_0 \in \Omega$ ),  
 $V$  — apgabala  $\Omega$  tilpums.

### $\iiint$ aprēķināšana (pāreja uz atkārtoto integrāli)

1. Dekarta koordinātās:  $\Omega$  sadala elementārdaļās ar koordinātu  
virsmām  $x = \text{const}$ ,  $y = \text{const}$ ,  $z = \text{const}$  (koordinātu plaknēm  
|| plaknes). Tilpuma diferenciālis

$$dv = dx \cdot dy \cdot dz.$$



8.21. zīm.

Integrēšanas secība atkarīga  
no tā, kurā plaknē projicē in-  
tegrācijas apgabalu  $\Omega$ .

Ja  $\Omega$  ir cilindrisks ķermenis,  
kuru no apakšas un augšas  
ierobežo virsmas  $z = z_1(x, y)$   
un  $z = z_2(x, y)$ , bet tā projek-  
cija  $xOy$  plaknē ir  $D$  (8.21.  
zīm.), tad

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(M) dx dy dz &= \\ &= \iint_D \left( \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(M) dz \right) dx dy = \\ &= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(M) dz. \end{aligned}$$

2. Līklīniju koordinātu sistēmā  $u, v, w$ : ja funkcijas

$$x = x(u, v, w),$$

$$y = y(u, v, w),$$

$$z = z(u, v, w)$$

savstarpēji viennozīmīgi attēlo telpas apgabalu  $\Omega$  par apgabalu  $G$  (telpā ar koordinātām  $u, v, w$ ), tad  $\Omega$  elementārdaļās sadala koordinātu virsmas  $u = \text{const}$ ,  $v = \text{const}$  un  $w = \text{const}$ .

Tilpuma diferenciālis

$$dv = |J| du dv dw,$$

kur  $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$  (jakobiāns),

$$\iiint_{\Omega} f(M) dv = \iiint_G f(x(u, v, w); y(u, v, w); z(u, v, w)) \cdot |J| du dv dw.$$

Biežāk lietojamās līklīniju koordinātas ir cilindriskās un sfēriskās koordinātas.

*Cilindriskās koordinātas* (8.22. zīm.):

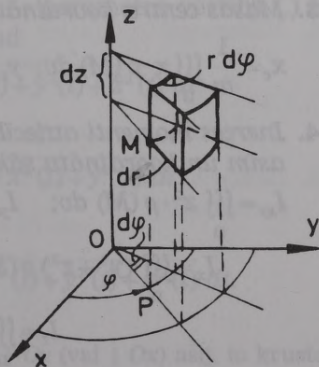
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z \quad (0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ \quad -\infty < z < +\infty). \end{cases}$$

Apgabalu  $\Omega$  sadala elementārdaļās ar koordinātu virsmām  $r = \text{const}$  (taisni riņķa cilindri),  $\varphi = \text{const}$  (pusplaknes caur  $Oz$  asi),  $z = \text{const}$  (plaknes, kas  $\parallel xOy$  plaknei),

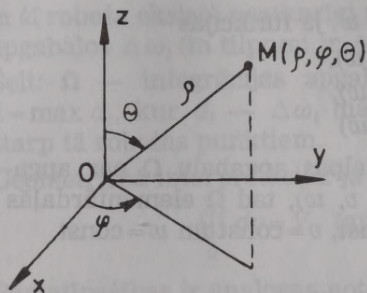
$$|J| = r, \quad dv = r dr d\varphi dz,$$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv =$$

$$= \iiint_G f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \cdot r dr d\varphi dz.$$



8.22. zīm.



8.23. zīm.

Sfēriskās koordinātas (8.23. zīm.):

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \\ z = \rho \cos \theta \quad (0 \leq \rho < \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ \quad 0 \leq \theta \leq \pi). \end{cases}$$

Apgabalu  $\Omega$  sadala elementārdaļās ar koordinātu virsmām  $\rho = \text{const}$  (sfēras ar centru ( $\cdot$ )  $O$ ),  $\varphi = \text{const}$  (pusplaknes caur  $Oz$  asi),  $\theta = \text{const}$  (konusi ar virsotni ( $\cdot$ )  $O$  un simetrijas asi  $Oz$ ),

$$|J| = \rho^2 \sin \theta, \quad dv = \rho^2 \sin \theta \, d\varphi \, d\rho \, d\theta,$$

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(M) \, dv = \\ & = \iiint_{\Omega} f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \cdot \rho^2 \sin \theta \, d\varphi \, d\rho \, d\theta. \end{aligned}$$

## Daži lietojumi

### 1. Ķermeņa tilpums

$$V = \iiint_{\Omega} dv.$$

### 2. Ķermeņa masa

$$m = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \quad (\rho(x, y, z) \text{ — blīvums}).$$

### 3. Masas centra koordinātas

$$x_c = \frac{1}{m} \iiint_{\Omega} x \cdot \rho(M) \, dv; \quad y_c = \frac{1}{m} \iiint_{\Omega} y \cdot \rho(M) \, dv; \quad z_c = \frac{1}{m} \iiint_{\Omega} z \cdot \rho(M) \, dv.$$

### 4. Inerces momenti attiecībā pret koordinātu plaknēm, koordinātu asīm un koordinātu sākumpunktu:

$$I_{xy} = \iiint_{\Omega} z^2 \cdot \rho(M) \, dv; \quad I_{yz} = \iiint_{\Omega} x^2 \cdot \rho(M) \, dv; \quad I_{zx} = \iiint_{\Omega} y^2 \cdot \rho(M) \, dv;$$

$$I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \rho(M) \, dv; \quad I_y = \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2) \rho(M) \, dv;$$

$$I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho(M) \, dv;$$

$$I_O = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \rho(M) \, dv.$$

Piezīme. Var aplūkot arī  $\iiint$  no pārtrauktām funkcijām, kā arī  $\iiint$  pa neierobežotiem apgabaliem (neīstos  $\iiint$ ).

### 8.18. LĪNIJINTEGRĀĻI (I. int.)

#### Līnijintegrālis pēc loka garuma

Ja  $u=f(M)$  ir nepārtraukta funkcija katrā līnijas  $L$  punktā, tad par I veida I. int. jeb I. int. pēc loka garuma sauc skaitli

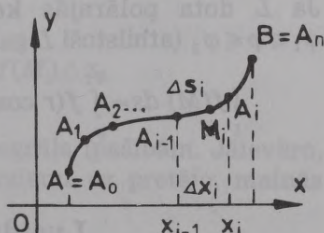
$$\int_L f(M) ds = \lim_{\substack{\max \Delta s_i \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta s_i$$

(ja robeža eksistē neatkarīgi no  $L$  sadalījuma veida elementārajos lokos  $\Delta l_i$  (to garums ir  $\Delta s_i$ ) un no ( $\cdot$ )  $M_i$  izvēles uz tiem).

Šeit:  $L$  — gabaliem gluda līnija (vai kontūrs — slēgta līnija) plaknē (8.24. zīm.) vai telpā\*;  $M(x, y, z)$  vai  $M(x, y, z)$ ;  $ds$  — loka diferenciālis.

Visas īpašības ir analogas noteiktā integrāļa īpašībām.

Jāievēro, ka  $\Delta s_i > 0$ , tātad arī  $ds > 0$ . I veida I. int. aprēķina, pārejot uz noteikto integrāli.



8.24. zīm.

1. Ja līnija  $L$  dota parametriskā veidā

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

kur  $t_0$  — parametra vērtība ( $\cdot$ )  $A$ ,  $t_1$  — parametra vērtība ( $\cdot$ )  $B$  ( $A$  un  $B$  izvēlas tā, lai būtu  $t_0 < t_1$ ), tad

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt.$$

Plaknē

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t), y(t)) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt.$$

Telpā

$$\int_L f(x, y, z) ds = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt.$$

\* Turklāt  $L$  ir tāda, ka katra taisne, kas  $\parallel Oy$  (vai  $\parallel Ox$ ) asij, to krusto tikai vienu reizi. Pretējā gadījumā līniju  $L$  sadala daļās un I. int. aprēķina kā iegūto sastāvdaļu summu.

2. Ja plaknes līnija  $L$  dota atklātā veidā ar vienādojumu  $y = \varphi(x)$  un  $a, b$  — punktu  $A, B$  abscisas ( $a < b$ ), tad

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f(x, \varphi(x)) \cdot \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx;$$

ja  $L$  vienādojums ir  $x = \psi(y)$  un  $c, d$  — punktu  $A, B$  ordinātas ( $c < d$ ), tad

$$\int_L f(x, y) ds = \int_c^d f(\psi(y), y) \cdot \sqrt{1 + (\psi'(y))^2} dy.$$

Ja telpas līnija ir dota ar vienādojumiem  $y = \varphi(x), z = \psi(x)$  un  $a, b$  — punktu  $A, B$  abscisas ( $a < b$ ), tad

$$\int_L f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x, \varphi(x), \psi(x)) \cdot \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2 + (\psi'(x))^2} dx.$$

Ja  $L$  dota polārajās koordinātās ar vienādojumu  $r = r(\varphi)$ ,  $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$  (atbilstoši  $L$  galapunktiem), tad

$$\int_L f(M) ds = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r \cos \varphi; r \sin \varphi) \cdot \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi.$$

## I veida l. int. lietojumi

1. Līnijas  $L$  loka  $AB$  garums

$$l_{AB} = \int_L ds.$$

2. Nehomogēnas līnijas  $L$  loka  $AB$  masa

$$m = \int_L \rho(M) ds,$$

$\rho(M)$  — lineārais blīvums.

3. Nehomogēnas līnijas  $L$  loka  $AB$  smaguma centra (masas centra) koordinātas

$$x_c = \frac{1}{m} \int_L x \cdot \rho(M) ds;$$

$$y_c = \frac{1}{m} \int_L y \cdot \rho(M) ds;$$

$$z_c = \frac{1}{m} \int_L z \cdot \rho(M) ds.$$

## Līnijintegrālis pēc koordinātām

Ja  $u=f(M)$  ir nepārtraukta līnijas  $L$  punktos, tad par II veida l. int. jeb l. int. pēc mainīgā  $x$  sauc skaitli

$$\int_L f(M) dx = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{i=1}^n f(M_i) \cdot \Delta x_i,$$

ja šī robeža eksistē neatkarīgi no  $L$  sadalījuma veida elementārajās lokos  $\Delta s_i$  un no  $(.) M_i$  izvēles uz tiem.

Šeit  $L$  ir gabaliem gluda līnija (vai kontūrs);  $\Delta x_i$  ir  $\Delta s_i$  projekcija uz  $Ox$  ass:  $\Delta x_i = \text{pr}_{Ox} \Delta s_i$  (sk. 8.24. zīm.).

Analogi definē l. int. pēc mainīgā  $y$  (un telpā arī pēc  $z$ ), ja  $f(M_i)$  reizina ar  $\Delta s_i$  projekciju uz  $Oy$  ass (uz  $Oz$  ass):

$$\int_L f(M) dy = \lim_{\substack{\max \Delta y_i \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta y_i;$$

$$\int_L f(M) dz = \lim_{\substack{\max \Delta z_i \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta z_i.$$

Visas īpašības ir analogas noteiktā integrāļa īpašībām. Jāievēro, ka, mainot integrācijas ceļa (loka) virzienu uz pretējo, mainās l. int. zīme:

$$\int_{L^+} f(M) dx = - \int_{L^-} f(M) dx$$

( $L^+$  — sākotnējais virziens, bet  $L^-$  — pretējais virziens).

II veida l. int. aprēķina, pārejot uz noteikto integrāli.

Ja  $L$  dota parametriski

$$\text{telpā } \left\{ \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array} \right\} \text{ plaknē} \quad (t_0 \leq t \leq t_1),$$

kur  $t_0$  un  $t_1$  atbilst loka  $AB$  galapunktiem  $A$  un  $B$ , tad

$$\int_L f(M) dx = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t), y(t)) \cdot \dot{x}(t) dt,$$

$$\int_L f(M) dy = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t), y(t)) \cdot \dot{y}(t) dt,$$

$$\int_L f(M) dz = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \dot{z}(t) dt,$$

$$\int_L f(M) dy = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \dot{y}(t) dt,$$

$$\int_L f(M) dz = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \dot{z}(t) dt.$$

Uz šo veidu pāriet arī tad, ja  $L$  dota atklātā veidā ar vienādojumu  $y = \varphi(x)$  (plaknē) vai vienādojumiem  $y = \varphi(x)$ ,  $z = \psi(x)$  (telpā), par parametru pieņemot  $x$ .

Integrācijas robežas ir atbilstošās  $A$  un  $B$  abscisas  $a$  un  $b$ .

Par II veida I. int. *pilno formu*\* plaknē sauc

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy, \quad (1)$$

bet telpā —

$$\int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz. \quad (2)$$

II veida I. int. ar divkāršo integrāli saista *Grīna formula*

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

kur  $P$ ,  $Q$  — nepārtraukti diferencējamas apgabālā  $D$ , bet  $D$  robeža — kontūrs  $L$  — tiek apiets pozitīvajā virzienā (t. i., tā, ka, pārvietojoties pa  $L$ ,  $D$  paliek kreisajā pusē);  $\oint$  — apzīmē I. int. pa noslēgtu līniju (kontūru).

Apgabala  $D$  laukums

$$S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx.$$

II veida I. int. (1) nav atkarīgs no integrācijas ceļa formas, ja eksistē tāda funkcija  $u(x, y)$ , ka zemintegrāļa izteiksme ir tās pilnais diferenciālis:

$$P dx + Q dy = du, \quad \text{t. i.,} \quad P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Funkcijas  $u(x, y)$  (un I. int. (1)) eksistences nosacījums ir

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

(šiem atvasinājumiem jābūt nepārtrauktiem).

\* Šāda veida I. int. lietojumus sk. nodaļā «Lauku teorija».

Funkcija  $u(x, y)$  ir pilnā diferenciāļa  $du$  primitīvā funkcija jeb vektoru lauka  $P\vec{i} + Q\vec{j}$  potenciāls. Pastāvot nosacījumam  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ , 1. int. (1) pa jebkuru slēgtu kontūru ir vienāds ar 0.

Ja dots  $du$ , tad

$$u(x, y) = \int_{A(x_0, y_0)}^{M(x, y)} P dx + Q dy,$$

kur  $AM$  — jebkura līnija, kas savieno šos punktus;  $A(x_0, y_0)$  — brīvi izraudzīts punkts ( $du$  jābūt definētai ( $\cdot$ )  $A$ );  $M(x, y)$  — punkts ar mainīgām koordinātām.

Ērtāk integrēt pa lauztu līniju, kuras posmi  $\parallel$  koordinātu asīm, piemēram, pa  $AKM$  (8.25. zīm.):

$$u(x, y) = \int_{AK} + \int_{KM} + u(x_0, y_0) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy + C.$$

Analogi telpā: 1. int. (2) nav atkarīgs no integrācijas ceļa (pa jebkuru slēgtu kontūru ir 0), ja

$$P dx + Q dy + R dz = du(x, y, z), \text{ t. i., } P = \frac{\partial u}{\partial x}, Q = \frac{\partial u}{\partial y}, R = \frac{\partial u}{\partial z};$$

$u(x, y, z)$  eksistences (1. int. (2) integrējamības) nosacījums ir

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

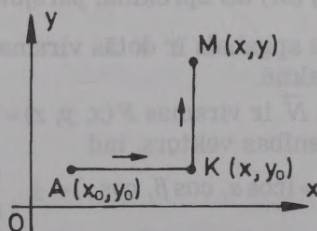
(šiem atvasinājumiem jābūt neātrauktiem).

Ja dots  $du$ , tad

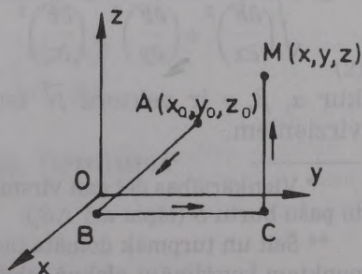
$$u(x, y, z) = \int_{A(x_0, y_0, z_0)}^{M(x, y, z)} P dx + Q dy + R dz,$$

bet ērtākais integrācijas ceļš ir lauza līnija, piemēram,  $ABCM$  (8.26. zīm.):

$$u(x, y, z) = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CM} + u(x_0, y_0, z_0) = \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z) dz + C.$$



8.25. zīm.



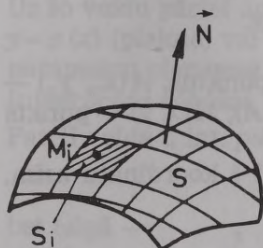
8.26. zīm.

### 8.19. VIRSMAS INTEGRĀĻI (v. int.)\*

#### I veida v. int. jeb integrālis pa virsmu (8.27. zīm.)

Ja  $f(M) = f(x, y, z)$  ir nepārtraukta virsmas  $S$  punktā, tad par I veida v. int. sauc

$$\iint_S f(M) dS = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta S_i,$$



8.27. zīm.

ja šī robeža eksistē neatkarīgi no  $S$  sadalījuma veida  $n$  elementāragabalos  $\Delta S_i$  un no ( $\cdot$ )  $M_i$  izvēles tajos.

Šeit:  $S$  — virsma, kuras vienādojums ir  $z = \varphi(x, y)$  vai  $F(x, y, z) = 0$  ( $\varphi$  vai  $F$  — nepārtraukti diferencējama funkcija);  $\lambda = \max d_i$ ;  $dS > 0$  — virsmas laukuma diferenciālis.

Slēgtai virsmai lieto apzīmējumu  $\oiint_S$ .

Īpašības ir analogas  $\iint_S$  īpašībām.

I veida v. int. nav atkarīgs no virsmas puses (normāles  $\vec{N}$ ) izvēles.

$\iint_S f(M) dS$  aprēķina, pārejot uz divkāršo integrāli, kura integrācijas apgabals ir dotās virsmas  $S$  projekcija atbilstošajā koordinātu plaknē.

Ja  $\vec{N}$  ir virsmas  $F(x, y, z) = 0$  (vai  $z = \varphi(x, y)$ )\*\* normāle,  $\vec{n}$  — tās vienības vektors, tad

$$\begin{aligned} \vec{n} &= (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \pm \frac{\text{grad } F}{|\text{grad } F|} = \\ &= \pm \frac{\frac{\partial F}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} = \pm \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}}, \end{aligned} \quad (1)$$

kur  $\alpha, \beta, \gamma$  ir vektora  $\vec{N}$  leņķi ar koordinātu asu pozitīvajiem virzieniem.

\* Vienkāršības dēļ gan virsma, gan tās laukums apzīmēti ar vienu un to pašu burtu  $S$  (tāpat arī  $\Delta S_i$ ).

\*\* Šeit un turpmāk domāta tāda virsma  $S$ , kuras jebkuram projekcijas punktam koordinātu plaknē atbilst viens vienīgs punkts uz virsmas. Pretējā gadījumā  $S$  jāsadala daļās un v. int. jāaprēķina kā sastāvdaļu summa.

$$dS = \frac{dx dy}{|\cos \gamma|}; \quad dS = \frac{dx dz}{|\cos \beta|}; \quad dS = \frac{dy dz}{|\cos \alpha|}$$

(atkarībā no plaknes, kurā projicē virsmu  $S$ ). Tā, piemēram, ja  $S$  projicē  $xOy$  plaknē, tad

$$\iint_S f(M) dS = \iint_{S_{xy}} f(x, y, z) \cdot \frac{dx dy}{|\cos \gamma|} \Big|_{z=z(x, y)},$$

kur  $S_{xy} = \text{pr}_{xOy} S$ .

Analogi I veida v. int. aprēķina pārējos gadījumos. Ievērojot virsmas vienādojumu, jāpāriet tikai uz tiem mainīgajiem, kurus nosaka projekciju plaknē.

Ja  $z = \varphi(x, y)$  un  $\text{pr}_{xOy} S = D$ , tad

$$\iint_S f(M) dS = \iint_D f(x, y, \varphi(x, y)) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

Ja  $S$  dota parametriskā veidā ar vienādojumiem  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $z = z(u, v)$ , kur  $(u, v) \in \Omega$  (atbilstoši virsmai  $S$ ), tad

$$\iint_S f(M) dS = \iint_{\Omega} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

kur  $E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$ ;

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v},$$

vai arī

$$\iint_S f(M) dS = \iint_{\Omega} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv,$$

$$\text{kur } A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}. \quad (2)$$

### Daži I veida v. int. lietojumi

1) Virsmas laukums  $S$  ( $f(M) \equiv 1$ )

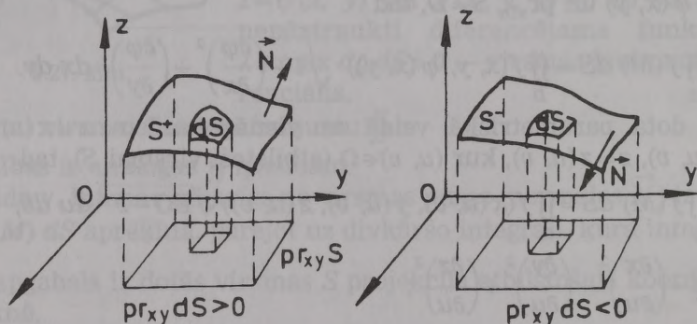
$$S = \iint_S dS.$$

2) Ja virsmas  $S$  blīvums  $\rho = \rho(M)$ , tad tās masa

$$m_S = \iint_S \rho(M) dS.$$

## II veida v. int. jeb integrālis pa virsmas projekciju

Pieņemsim, ka  $S$  ir orientēta gluda virsma. To virsmas  $S$  pusi, kurai  $\vec{N}$  veido šauru leņķi ar atbilstošo asi, sauc par *pozitīvo pusi* (apzīmē  $S^+$ ), bet otru pusi, kurai  $\vec{N}$  veido platu leņķi ar asi, sauc par *negatīvo pusi* (apzīmē  $S^-$ ; 8.28. zīm.). Slēgtas virsmas ārpusi uzskata par  $S^+$ , bet iekšpusi — par  $S^-$ .



8.28. zīm.

Ja funkcijas  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$ , kā arī funkcija, kas nosaka virsmu  $S$ , ir nepārtraukti diferencējamas funkcijas, tad iespējami šādi II veida v. int.:

$$\iint_S R(M) dx dy, \quad \iint_S P(M) dy dz, \quad \iint_S Q(M) dx dz. \quad (3)$$

II veida v. int. pilnā forma ir

$$\iint_S P dy dz + Q dx dz + R dx dy. \quad (4)$$

II veida v. int. definīcija ir analoga I veida v. int. definīcijai ar vienu atšķirību: funkcijas vērtība  $(.) M_i$  tiek reizināta ar  $\Delta S_i$  projekciju koordinātu plaknē. Tā, piemēram,

$$\iint_S R(M) dx dy = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{i=1}^n R(M_i) \cdot \text{pr}_{xy} \Delta S_i.$$

Integrāļu (3) un (4) īpašības ir analogas divkāršā integrāļa īpašībām. Specifiska īpašība: mainot virsmas pusi, II veida v. int. zīme mainās uz pretējo:

$$\iint_{S^-} R(M) dx dy = - \iint_{S^-} R(M) dx dy.$$

Gadījumā, kad  $S$  projekcija kādā plaknē nav viennozīmīga, virsma jāsadala daļās.

II veida v. int. aprēķina, pārejot uz divkāršo integrāli; tā integrācijas apgabals ir  $S$  projekcija atbilstošajā plaknē; trešais mainīgais jāizsaka no virsmas vienādojuma; katra integrāļa priekšā ir + zīme, ja  $\vec{N}$  atbilstošo asi veido šauru leņķi ( $\cos \alpha > 0$ ,  $\cos \beta > 0$ ,  $\cos \gamma > 0$ ; sk. (1)), bet - zīme — pretējā gadījumā. Piemēram, ja  $S$  vienādojums ir  $z = \varphi(x, y)$ ,  $(x; y) \in D$ , kur  $D = \text{pr}_{xy} S$ , un  $\angle(\vec{N}, Oz) = \gamma < \frac{\pi}{2}$  ( $\cos \gamma > 0$ ), tad

$$\iint_S R(M) dx dy = \iint_D R(x, y, \varphi(x, y)) dx dy.$$

Ja  $\angle(\vec{N}, Oz) = \gamma > \frac{\pi}{2}$  ( $\cos \gamma < 0$ ), tad

$$\iint_S R(M) dx dy = - \iint_D R(x, y, \varphi(x, y)) dx dy.$$

Ja  $S$  dota parametriski ar vienādojumiem  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $z = z(u, v)$  ( $u, v \in \Omega$  (atbilstoši virsmai  $S$ )), tad

$$\iint_S P dy dz + Q dx dz + R dx dy = \pm \iint_{\Omega} (PA + QB + RC) du dv,$$

kur  $A, B, C$  izteiksmes — sk. (2), bet zīme atkarīga no izvēlētās virsmas puses.

I un II veida v. int. saista formula

$$\begin{aligned} \iint_S P dy dz + Q dx dz + R dx dy &= \\ &= \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS, \end{aligned}$$

kur izvēlētajai virsmas pusei atbilst  $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  (sk. (1)).

Līnijas integrāli un virsmas integrāli saista *Stoksa formula*

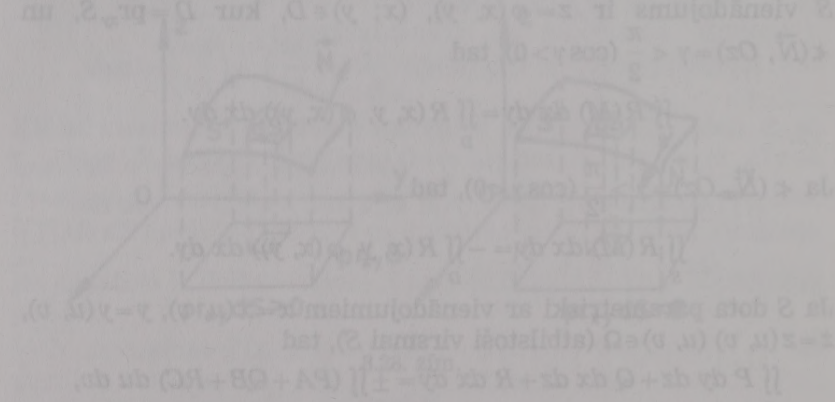
$$\begin{aligned} \oint_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz &= \\ &= \iint_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \end{aligned}$$

kur  $S$  — jebkura virsma, kas balstās uz kontūru (slēgto līniju)  $L$ ;  $L$  apiešanas virziens ar virsmas  $\vec{N}$  saskaņots pēc labās rokas likuma.

Virsmas integrāli un trīskāršo integrāli saista *Gausa—Ostrogradska formula*

$$\iint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy = \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

kur  $\Omega$  — telpas apgabals, ko ierobežo virsma  $S$  ( $P, Q, R$  — nepārtraukti diferencējamas funkcijas).



I un II veida v. int. saista formula

$$\iint_S P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma = \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

kur ievēlējām virsmas pusē atpazīt  $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  (sk. (I)).

$$\iint_S P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma = \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

## 9. DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMI

---

### 9.1. PIRMĀS KĀRTAS VIENĀDOJUMI

Pirmās kārtas diferenciālvienādojums ir vienādojums

$$F(x, y, y') = 0,$$

kurš satur meklējamo funkciju, neatkarīgo mainīgo un meklējamās funkcijas pirmo atvasinājumu jeb diferenciāli.

Pirmās kārtas vienādojumi, kuri atrisināti pret  $y'$ :

$$y' = f(x, y).$$

#### Eksistences un unitātes teorēma

Pieņemsim, ka apgabalā  $G$  funkcija  $f(x, y)$  ir nepārtraukta pēc  $x$  un katrā slēgtā ierobežotā apgabalā  $G_1 \subset G$  apmierina Lipšica nosacījumu pēc  $y$ :

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq K |y_2 - y_1|.$$

Tad katram apgabala  $G$  punktam  $(x_0, y_0)$  var atrast tādu intervālu  $[a, b]$  ( $a < x_0 < b$ ), kurā eksistē viens vienīgs vienādojuma  $y' = f(x, y)$  atrisinājums, kam  $y(x_0) = y_0$ .

#### Svarīgākās integrējamo vienādojumu klases

Funkciju  $\varphi(x, C)$  ( $C$  — patvaļīga konstante), kura apmierina pirmās kārtas diferenciālvienādojumu, sauc par šī vienādojuma *vispārīgo atrisinājumu*. Visiem turpmāk apskatītajiem vienādojumiem dotas vispārīgā atrisinājuma atrašanas metodes.

Vienādojumam ar *atdalāmiem mainīgajiem*

$$f_1(x) dx + f_2(y) dy = 0$$

vispārīgais atrisinājums ir

$$\int f_1(x) dx + \int f_2(y) dy = C.$$

### Homogēnu vienādojumu

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

( $M(x, y)$  un  $N(x, y)$  ir vienādas kārtas homogēnas funkcijas, t. i.,  $M(tx, ty) = t^n M(x, y)$ ,  $N(tx, ty) = t^n N(x, y)$ ) var reducēt uz vienādojumu ar atdalāmiem mainīgajiem, pārejot uz jaunu nezināmo funkciju  $u = \frac{y}{x}$ .

$$\text{Vienādojums } \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right).$$

Ja punkts  $(x_0, y_0)$  ir taisņu  $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$  un  $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$  krustpunkts, tad substitūcija  $u = x - x_0$ ,  $v = y - y_0$  reducē apskatāmo vienādojumu uz homogēnu vienādojumu

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1 u + b_1 v}{a_2 u + b_2 v}\right).$$

Ja taisnes  $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$  un  $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$  ir paralēlas, tad substitūcija  $z = a_1 x + b_1 y$  reducē apskatāmo vienādojumu uz vienādojumu

$$\frac{dz}{dx} = b_1 f\left(\frac{a_1 z + a_1 c_1}{a_2 z + a_1 c_2}\right) + a_1$$

ar atdalāmiem mainīgajiem.

Par vienādojumu pilnos diferenciāļos sauc vienādojumu

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0,$$

$$\text{kur } \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Eksistē tāda funkcija  $u(x, y)$ , ka

$$du = M(x, y) dx + N(x, y) dy.$$

Šajā gadījumā  $u(x, y) = C$  ir vienādojuma vispārīgais integrālis. Funkcija  $u(x, y)$  ir iegūstama integrējot:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy.$$

### Integrētājs faktors

Funkciju  $\mu(x, y)$  sauc par vienādojuma  $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$  integrētāju faktoru (integrētāju reizinātāju), ja vienādojums

$$\mu(x, y) M(x, y) dx + \mu(x, y) N(x, y) dy = 0$$

ir vienādojums pilnos diferenciāļos.

Integrētājs faktors apmierina vienādojumu

$$N \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Ja  $\frac{1}{N} \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)$  ir funkcija tikai no  $x$ , tad  $\mu = \mu(x)$ .

Ja  $\frac{1}{M} \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)$  ir funkcija tikai no  $y$ , tad  $\mu = \mu(y)$ .

**Lineārs vienādojums** ir  $y' + P(x)y = Q(x)$ . Tā vispārīgais atrisinājums ir  $y = e^{-\int P(x) dx} (C + \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx)$ .

Vienādojumu  $y' + P(x)y = 0$  sauc par *lineāru homogēnu vienādojumu*. Tā vispārīgais atrisinājums ir  $y = C e^{-\int P(x) dx}$ .

**Bernulli vienādojumu**

$$y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha \quad (\alpha \neq 0, \alpha \neq 1)$$

ar substitūciju  $u = y^{1-\alpha}$  var reducēt uz lineāru vienādojumu

$$u' + (1-\alpha)P(x)u = (1-\alpha)Q(x).$$

**Rikati vienādojumu**

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

vispārīgajā gadījumā nevar integrēt kvadrātūrās. Ja ir zināms viens Rikati vienādojuma partikulārais atrisinājums  $y_1$ , tad ar

substitūciju  $u = \frac{1}{y - y_1}$  Rikati vienādojumu var reducēt uz lineāru vienādojumu.

### Vienādojumi, kuri nav atrisināti pret $y'$

**Lagranža vienādojums** ir

$$y = x \varphi(y') + \psi(y').$$

Diferencējot abas puses pēc  $x$  un apzīmējot  $y' = p$ , iegūst vienādojumu, kurš ir lineārs pret  $x$  kā funkciju no  $p$ .

**Klero vienādojums**  $y = xy' + \psi(y')$  ir Lagranža vienādojuma speciālgadījums.

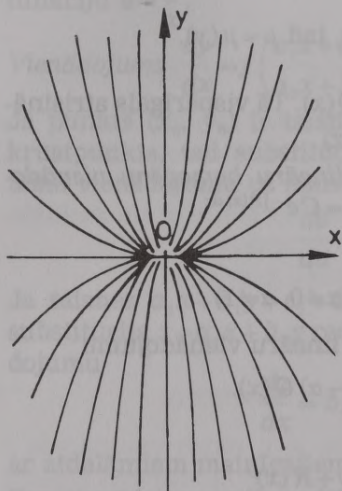
Vienādojuma  $y' = \frac{ax + by}{cx + dy}$  atrisinājumu izturēšanās  
singulārā punkta  $(0, 0)$  apkārtnē

Atrisinājumu izturēšanās punkta  $(0, 0)$  apkārtnē ir atkarīga no raksturīgā vienādojuma

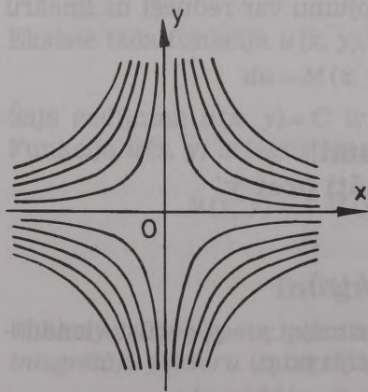
$$\lambda^2 - (b+c)\lambda + bc - ad = 0$$

saknēm. Iespējami šādi gadījumi:

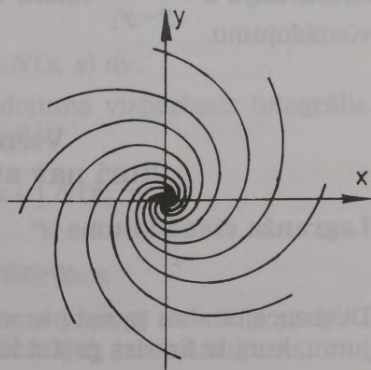
- 1) saknes ir reālas un ar vienādām zīmēm. Šajā gadījumā singulārais punkts ir mezgla punkts (9.1. zīm.);
- 2) saknes ir reālas un ar dažādām zīmēm. Singulārais punkts ir segla punkts (9.2. zīm.);
- 3) saknes ir kompleksi saistītas. Singulārais punkts ir fokuss (9.3. zīm.);
- 4) saknes ir tīri imagināras. Singulārais punkts ir centrs (9.4. zīm.);
- 5) ja saknes ir reālas un vienādas, tad iespējamā atrisinājumu izturēšanās attēlota 9.5. un 9.6. zīm.



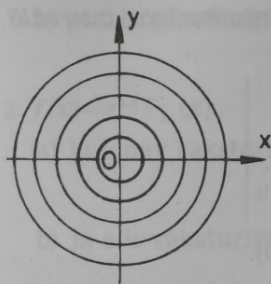
9.1. zīm.



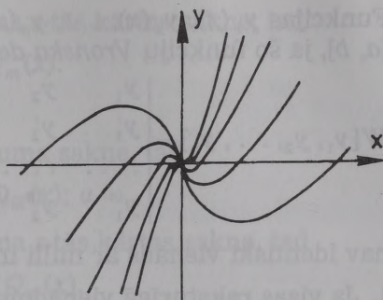
9.2. zīm.



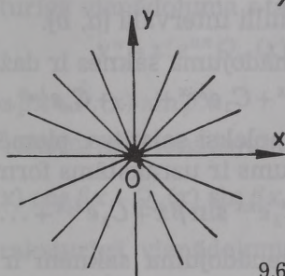
9.3. zīm.



9.4. zīm.



9.5. zīm.



9.6. zīm.

## 9.2. AUGSTĀKU KĀRTU VIENĀDOJUMI

Par  $n$ -tās kārtas vienādojumu sauc vienādojumu

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Vienādojumu ar konstantiem koeficientiem

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x)$$

sauc par *lineāru nehomogēnu diferenciālvienādojumu*. Ja  $f(x) \equiv 0$ , tad vienādojums ir homogēns,

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0.$$

Tā raksturīgais vienādojums ir

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — raksturīgā vienādojuma saknes.

### Vienādojuma vispārīgais atrisinājums

Ja  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  ir lineāri neatkarīgi **homogēna** diferenciālvienādojuma atrisinājumi, tad šī vienādojuma *vispārīgais atrisinājums* ir

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \dots + C_ny_n(x).$$

Funkcijas  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  ir *lineāri neatkarīgas intervālā*  $[a, b]$ , ja šo funkciju *Wronska determinants*

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

nav identiski vienāds ar nulli intervālā  $[a, b]$ .

1. Ja visas raksturīgā vienādojuma saknes ir dažādas, tad

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

Ja starp saknēm ir kompleksi saistītas, piemēram,  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ,  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ , tad atrisinājums ir uzrakstāms formā

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x + C_3 e^{\lambda_3 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

2. Ja starp raksturīgā vienādojuma saknēm ir vairākkārtīgas, piemēram,  $\lambda_1$  ir  $k$ -tās kārtas sakne, bet pārējās saknes — vienkāršas, tad

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} + \dots + C_k x^{k-1} e^{\lambda_1 x} + C_{k+1} e^{\lambda_{k+1} x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

Gadījumā, kad kompleksi saistītas saknes, piemēram,  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ,  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ , ir ar kārtu  $k$ , atrisinājumu var pierakstīt formā

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + x e^{\alpha x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) + \dots + x^{k-1} e^{\alpha x} (C_{2k-1} \cos \beta x + C_{2k} \sin \beta x) + \dots$$

Lineāra **nehomogēna**  $n$ -tās kārtas vienādojuma ar konstantiem koeficientiem

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 = f(x)$$

*vispārīgais atrisinājums ir atbilstošā homogēnā vienādojuma vispārīgā atrisinājuma un nehomogēnā vienādojuma kāda partikulārā atrisinājuma summa.*

Gadījumos, kad funkcijai  $f(x)$  ir speciāls veids, ir iespējams noteikt nehomogēnā vienādojuma partikulārā atrisinājuma  $y^*$  formu. ( $P_m(x)$  un  $\hat{P}_l(x)$  — dotie  $m$ -tās un  $l$ -tās pakāpes polinomi,  $Q_m(x)$  un  $\hat{Q}_k(x)$  — meklējamie polinomi, kuru pakāpe nav lielāka kā  $m$  un  $k$ .)

1.  $f(x) = P_m(x)$ :

a) ja sakne 0 nav raksturīgā vienādojuma sakne, tad

$$y^* = Q_m(x);$$

b) ja 0 ir raksturīgā vienādojuma  $s$ -tās kārtas sakne, tad

$$y^* = x^s Q_m(x).$$

2.  $f(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$ :

a) ja  $\alpha$  nav raksturīgā vienādojuma sakne, tad

$$y^* = e^{\alpha x} Q_m(x);$$

b) ja  $\alpha$  ir raksturīgā vienādojuma  $s$ -tās kārtas sakne, tad

$$y^* = x^s e^{\alpha x} Q_m(x).$$

3.  $f(x) = P_m(x) \cos \beta x + \hat{P}_l(x) \sin \beta x$ :

a) ja  $\pm i\beta$  nav raksturīgā vienādojuma saknes, tad

$$y^* = Q_k(x) \cos \beta x + \hat{Q}_k(x) \sin \beta x, \quad k = \max\{m; l\};$$

b) ja  $\pm i\beta$  ir raksturīgā vienādojuma  $s$ -tās kārtas sakne, tad

$$y^* = x^s (Q_k(x) \cos \beta x + \hat{Q}_k(x) \sin \beta x), \quad k = \max\{m; l\}.$$

4.  $f(x) = e^{\alpha x} (P_m(x) \cos \beta x + \hat{P}_l(x) \sin \beta x)$ :

a) ja  $\alpha \pm i\beta$  nav raksturīgā vienādojuma sakne, tad

$$y^* = e^{\alpha x} (Q_k(x) \cos \beta x + \hat{Q}_k(x) \sin \beta x), \quad k = \max\{m; l\};$$

b) ja  $\alpha \pm i\beta$  ir raksturīgā vienādojuma  $s$ -tās kārtas sakne, tad

$$y^* = x^s e^{\alpha x} (Q_k(x) \cos \beta x + \hat{Q}_k(x) \sin \beta x), \quad k = \max\{m; l\}.$$

### Superpozīcijas princips

Ja  $y_k(x)$  ir vienādojuma

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f_k(x)$$

atrisinājums, tad  $y = \sum_{k=1}^m y_k(x)$  ir vienādojuma

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = \sum_{k=1}^m f_k(x)$$

atrisinājums.

## Lineāra nehomogēna vienādojuma vispārīgā atrisinājuma atrašana ar Lagranža konstantu variācijas metodi

Ja homogēnā vienādojuma

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

vispārīgais atrisinājums

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x),$$

$C_1, C_2, \dots, C_n$  — patvaļīgas konstantes,

ir zināms, tad nehomogēnā vienādojuma

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x)$$

vispārīgo atrisinājumu var meklēt formā

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \dots + C_n(x)y_n(x).$$

Funkcijas  $C_k$  atrod no sistēmas

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1^{(l)}(x) + C_2'(x)y_2^{(l)}(x) + \dots + C_n'(x)y_n^{(l)}(x) = 0, & l=0, 1, \dots, n-2, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases}$$

### Eilera vienādojums

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = f(x).$$

Substitūcija  $x = e^t$  Eilera vienādojumu reducē uz lineāru vienādojumu ar konstantiem koeficientiem.

### Beseļa diferenciālvienādojums

Par *Beseļa vienādojumu* sauc 2. kārtas lineāru diferenciālvienādojumu

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - p^2) y = 0, \quad p \text{ — vienādojuma indekss.}$$

Šī vienādojuma atrisinājumus sauc par *Beseļa funkcijām*. Tikai

tad, ja  $p = \frac{2k+1}{2}$ ,  $k \in \mathbf{N}$ , Beseļa funkcijas ir izsakāmas ar elementārām funkcijām. Pārējām  $p$  vērtībām atrisinājumu iegūst rindas veidā:  $y = x^p (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)$ . Pēc ievietošanas vienādojumā un koeficientu noteikšanas iegūst

$$J_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+p}}{2^{2m+p} \cdot k! \Gamma(p+m+1)} \text{ —}$$

$p$ -tās kārtas pirmā veida Beseļa funkcijas (*cilindriskās funkcijas*).

Beseļa vienādojuma vispārīgais atrisinājums racionālam  $p$  ir

$$y = C_1 J_p(x) + C_2 J_{-p}(x).$$

Ja  $p \in \mathbf{R}$ , tad vispārīgais atrisinājums ir 1. un 2. veida Beseļa funkciju summa:

$$y = C_1 J_p(x) + C_2 Y_p(x),$$

$$\text{kur } Y_p(x) = \lim_{m \rightarrow p} \frac{J_m(x) \cos m\pi - J_{-m}(x)}{\sin m\pi}.$$

Sakarības starp dažādas kārtas pirmā veida Beseļa funkcijām:

$$J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x} J_p(x),$$

$$\frac{dJ_p(x)}{dx} = -\frac{p}{x} J_p(x) + J_{p-1}(x),$$

$$\frac{d}{dx} (x^p J_p(x)) = x^p J_{p-1}(x).$$

Analoģiskas sakarības ir spēkā arī funkcijām  $Y_p(x)$ .

### Augstāku kārtu vienādojumi, kuriem var pazemināt kārtu

1. Vienādojums, kas atklāti nesatur neatkarīgo mainīgo:

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Substitūcija  $y' = p$  pazemina vienādojuma kārtu par vienu. Šajā gadījumā

$$y'' = p \frac{dp}{dy}; \quad y''' = p^2 \frac{d^2 p}{dy^2} + p \left( \frac{dp}{dy} \right)^2; \dots$$

2. Vienādojums, kas nesatur meklējamo funkciju:

$$F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Substitūcija  $y' = p$  pazemina vienādojumu kārtu par vienu.

3. Vienādojums, kas nesatur  $y, y', \dots, y^{(k-1)}$ :

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Substitūcija  $y^{(k)} = p$  pazemina vienādojuma kārtu par  $k$  vienībām.

4. Vienādojums, kas homogēns attiecībā pret mainīgiem  $y, y', \dots, y^{(n)}$ :

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

kur  $F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) = t^\alpha F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ .

Substitūcija  $z = \frac{y'}{y}$  pazemina vienādojuma kārtu par vienu.





Nehomogēnās sistēmas vispārīgais atrisinājums ir atbilstošās homogēnās sistēmas vispārīgā atrisinājuma un nehomogēnās sistēmas kāda partikulārā atrisinājuma summa. Nehomogēnās sistēmas vispārīgā atrisinājuma atrašanai var izmantot Lagranža konstantu variācijas metodi.

#### 9.4. DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMU ATRISINĀŠANAS SKAITLISKĀS METODES

##### Eilera laužto līniju metode

Jārisina Košī uzdevums intervālā  $[a, b]$ :

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = y_0,$$

$h$  — metodes solis;  $x_i = a + ih$  — dalījuma punkti,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

$$y'(a) = f(a, y_0),$$

$$y_1 = y_0 + hy'(a), \quad y'_1 = f(x_1, y_1),$$

$$y_2 = y_1 + hy'_1 = y_1 + hf(x_1, y_1),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y'_i = f(x_i, y_i),$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

##### Runges—Kuta metode

Jārisina Košī uzdevums intervālā  $[a, b]$ :

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = y_0;$$

$h$  — metodes solis.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} (k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3) + O(h^5),$$

kur  $k_0 = f(x_i, y_i)$ ,

$$k_1 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_0\right),$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_1\right),$$

$$k_3 = f(x_i + h, y_i + hk_2).$$

Kļūdas novērtējums —  $O(h^5)$ .

## 9.5. PARCIĀLIE DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMI

### Pirmās kārtas parciālie diferenciālvienādojumi

Par *lineāru 1. kārtas parciālo diferenciālvienādojumu* sauc vienādojumu

$$X_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = Y, \quad (1)$$

kur  $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — meklējamā funkcija, bet  $X_i = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) un  $Y = Y(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — dotās funkcijas.

Ja  $X_i$  un  $Y$  atkarīgas arī no  $u$ , tad (1) sauc par *kvazilineāru*.

Ja  $Y \equiv 0$ , tad (1) sauc par *homogēnu vienādojumu*:

$$X_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \quad (2)$$

Ja  $\varphi_i(x_1, \dots, x_n) = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) ir t. s. *arakteristiku sistēmas*

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n}$$

pirmintegrāli, tad (2) *vispārīgais atrisinājums* ir

$$u = \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}),$$

kur  $\Phi$  — jebkura funkcija, kurai eksistē nepārtraukti parciālie atvasinājumi pēc  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$ .

Nehomogēna vai kvazilineāra vienādojuma (1) atrisinājumu meklē aplēptā veidā:

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = C,$$

kur funkcija  $V$  ir homogēna vienādojuma

$$X_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial V}{\partial x_n} + Y \frac{\partial V}{\partial u} = 0$$

atrisinājums. Tā *arakteristiku sistēmu*

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{du}{Y}$$

sauc par dotā parciālā diferenciālvienādojuma (1) *arakteristiku sistēmu*.



paraboliskā tipa kanoniskais vienādojums

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right);$$

eliptiskā tipa kanoniskais vienādojums

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Diferenciālvienādojumu  $A(dy)^2 - 2B dx dy + C(dx)^2 = 0$  vai

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{-\delta}}{A} \quad (5)$$

sauc par parciālā diferenciālvienādojuma (4) *harakteristisko vienādojumu*.

Hiperboliska tipa vien. eksistē divas reālu karakteristikū saimes

$$\varphi(x, y) = C_1, \quad \psi(x, y) = C_2.$$

Pārejot uz jauniem mainīgajiem  $\xi = \varphi(x, y)$ ,  $\eta = \psi(x, y)$ , vien. (4) reducē uz kanonisko veidu.

Paraboliska tipa vien. abas karakteristikū saimes ir sakrītošas, t. i., no (5) iegūst tikai vienu integrāli  $\varphi(x, y) = C$ . Lai iegūtu kanonisko veidu, jaunus mainīgos izvēlas šādi:

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

kur  $\psi(x, y)$  — jebkura funkcija, kurai

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \neq 0.$$

Eliptiskā tipa gadījumā vienādojuma (5) karakteristikas ir

$$\varphi(x, y) \pm i\psi(x, y) = C_{1,2},$$

kur  $\varphi(x, y)$  un  $\psi(x, y)$  — reālas funkcijas.

Redukcija uz kanonisko veidu notiek ar substitūciju  $\xi = \varphi(x, y)$ ,  $\eta = \psi(x, y)$ .

Jaukta tipa vien. var reducēt uz atbilstošiem kanoniskiem veidiem tajos apgabalos, kuros to tips saglabājas.

## Biežāk sastopamo 2. kārtas parciālo diferenciālvienādojumu atrisinājumi

1. *Košī problēma vienkāršākajam viļņu vienādojumam* — stīgas brīvo svārstību vienādojumam (*Dalambēra metode*)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u \Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x).$$

Vienādojumu reducē uz kanonisko veidu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad (6)$$

pārejot uz jauniem mainīgajiem  $\xi = x - at$ ,  $\eta = x + at$ .

Vienādojuma (6) vispārīgais atrisinājums ir

$$u(\xi, \eta) = \theta_1(\xi) + \theta_2(\eta),$$

kur  $\theta_1, \theta_2$  — patvaļīgas, divreiz diferencējamas funkcijas.

Izvēloties  $\theta_1$  un  $\theta_2$  tā, lai  $u(x, t)$  apmierinātu sākuma nosacījumus, iegūst dotās problēmas atrisinājumu ar *Dalambēra formulu*:

$$u = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz.$$

2. *Jaukta veida problēma vienā galā nostiprinātas stīgas svārstību vienādojumam*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < +\infty, t > 0;$$

robežnosacījums  $u \Big|_{x=0} = 0$ ;

sākuma nosacījumi  $u \Big|_{t=0} = \varphi(x)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x)$ .

Atrisinājums

$$u(x, t) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(z) dz,$$

kur  $\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{ja } x > 0 \\ -\varphi(-x), & \text{ja } x < 0, \end{cases}$   $\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{ja } x > 0 \\ -\psi(-x), & \text{ja } x < 0. \end{cases}$

3. *Jaukta veida problēma galos nostiprinātas stīgas svārstību vienādojumam (mainīgo atdalīšanas jeb Furjē metode)*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l;$$

sākuma nosacījumi  $u \Big|_{t=0} = \varphi(x)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x)$ ;

robežnosacījumi  $u \Big|_{x=0} = 0$ ;  $u \Big|_{x=l} = 0$ .

Meklējot atrisinājumu kā divu funkciju reizinājumu

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t),$$

doto vienādojumu reducē uz diviem diferenciālvienādojumiem

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad \text{un} \quad T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0,$$

$$\lambda = \frac{k\pi}{l} \quad (k=1, 2, \dots) \text{ — \u0177pa\u0161v\u0113rt\u012bbas,}$$

$$X(x) = B \sin \frac{k\pi}{l} x \text{ — \u0177pa\u0161funkcijas,}$$

$$T(t) = C \cos \frac{ak\pi}{l} t + D \sin \frac{ak\pi}{l} t.$$

Katrai  $\lambda$  v\u0113rt\u012bbai atbilst

$$u_k(x, t) = \sin \frac{k\pi}{l} x \left( a_k \cos \frac{ak\pi}{l} t + b_k \sin \frac{ak\pi}{l} t \right) \quad (k=1, 2, \dots),$$

kur  $a_k, b_k$  — const, kas satur  $B, C, D$ .

*Probl\u0113mas atrisin\u0113jums*

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{ak\pi}{l} t + b_k \sin \frac{ak\pi}{l} t \right) \sin \frac{k\pi}{l} x,$$

kur

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx, \quad b_k = \frac{2}{ak\pi} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx.$$

## 9.6. SILTUMA VAD\u0126\u0160ANAS VIEN\u0113DOJUMS NESTACION\u0113RAM PROCESAM

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

Siltuma apmai\u0137u neierobe\u0137oti gar\u0113 stien\u012b apraksta vien\u0113dojums

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

ar s\u0113kuma nosac\u012bjumu  $u \Big|_{t=0} = f(x)$ .

Atrisin\u0113jums ir *Puasona integr\u0113lis*

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \exp\left(-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}\right) d\xi.$$

No viena gala ierobežota stieņa siltuma apmaiņu apraksta vienādojums

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x < +\infty,$$

ar sākuma nosacījumu  $u|_{t=0} = f(x)$  un robežnosacījumu  $u|_{x=0} = \varphi(t)$ .

Atrisinājums

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} f(\xi) \left( \exp\left(-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}\right) - \exp\left(-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2 t}\right) \right) d\xi + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^t \varphi(\eta) \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-\eta)}\right) \cdot (t-\eta)^{-\frac{3}{2}} d\eta.$$

Siltuma apmaiņu galīga garuma stienī apraksta vienādojums

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l,$$

ar sākuma nosacījumu  $u|_{t=0} = f(x)$  un robežnosacījumiem  $u|_{x=0} = A$ ,  $u|_{x=l} = B$ .

Atrisinājums

$$u(x, t) = A + \frac{B-A}{l} x + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left(-\frac{a^2 \pi^2 n^2 t}{l^2}\right) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

$$\text{kur } A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx - \frac{2}{n\pi} (A + (-1)^{n+1} B).$$

Laplasa vienādojums

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{jeb} \quad \Delta u = 0,$$

$$\text{kur } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{— Laplasa operators.}$$

Dirihlē problēma riņķim:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u|_{r=R} = f(\varphi)$$

( $\varphi$ ,  $r$  — polārās koordinātas).

Atrisinājums

$$u(\varphi, r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(t-\varphi) + r^2} dt.$$

## 10. KOMPLEKSĀ MAINĪGĀ FUNKCIJU TEORIJA

### 10.1. REĀLA ARGUMENTA KOMPLEKSAS FUNKCIJAS

$$z(t) = f(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in \mathbf{R},$$

sauc par *reāla argumenta kompleksu funkciju*.  $z(t)$  ģeometriski attēlo līkni, kuras parametriskie vienādojumi ir  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ .

Piemēram,  $z(t) = z_0 + Re^{it}$ ,  $0 \leq t < 2\pi$ , ir riņķa līnija ar centru ( $\cdot$ )  $z_0 = x_0 + iy_0$ , rādiusu  $R$  (10.1. zīm.), jo saskaņā ar Eilera formulu

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

iegūstam, ka

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + R \cos t, \\ y(t) = y_0 + R \sin t. \end{cases}$$

*Robeža, nepārtrauktība, integrālis* tiek definēti tāpat kā reālā mainīgā funkciju gadījumā atbilstoši  $z(t)$  reālajai daļai un imaginārajai daļai

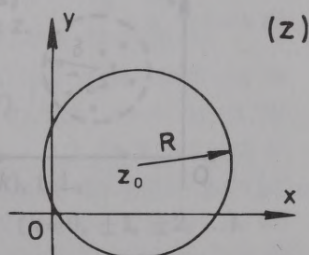
$$\operatorname{Re} z(t) = x(t), \quad \operatorname{Im} z(t) = y(t).$$

Piemēram,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) + i \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \alpha + i\beta;$$

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t), \quad z'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t};$$

$$\int_{t_1}^{t_2} z(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} x(t) dt + i \int_{t_1}^{t_2} y(t) dt.$$



10.1. zīm.

### 10.2. KOMPLEKSĀ MAINĪGĀ FUNKCIJAS

#### Definīcija, robeža, nepārtrauktība

*Kompleksā mainīgā funkcija* (k. m. f.) ir attēlojums

$$w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y), \quad (1)$$

kas  $z$  plaknes apgabalu  $D=D(f)$  attēlo par  $w$  plaknes apgabalu  $W=E(f)$ ,  
 $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ ,  $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ .

$f(z)$  ir vienvērtīga vai daudzvērtīga funkcija\*.

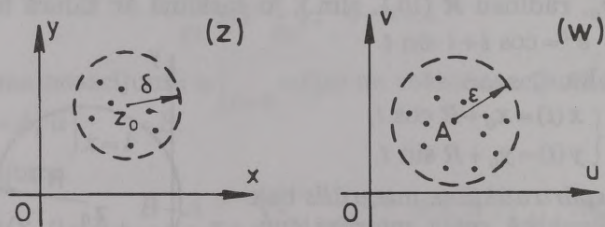
Ja  $f(z_0) = 0$ , tad  $z_0$  sauc par *funkcijas  $f$  nulli*.

Funkcija  $f(z)$  ir ierobežota apgabalā  $G \subset C$ , ja visiem  $z \in G$   $|f(z)| < M$  ( $M = \text{const}$ ).

Skaitli  $A = \alpha + i\beta$  sauc par  $f(z)$  *robežu*, kad  $z \rightarrow z_0 = x_0 + iy_0$  (raksta  $A = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ ), ja

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = \alpha \quad \text{un} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = \beta.$$

Robežas definīciju var formulēt arī šādi:  $A = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ , ja katram  $\varepsilon > 0$  var atrast tādu  $\delta > 0$ , ka no nevienādības  $|z - z_0| < \delta$  izriet nevienādība  $|f(z) - A| < \varepsilon$  (10.2. zīm.).



10.2. zīm.

Ja  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ , tad  $f(z)$  ir *nepārtraukta* ( $\cdot$ )  $z = z_0$ . Vai arī  $f(z)$  ir nepārtraukta, ja no tā, ka  $|\Delta z| \rightarrow 0$  izriet, ka  $|\Delta w| = |f(z + \Delta z) - f(z)| \rightarrow 0$ , t. i.,  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta w = 0$  ( $u(x, y)$  un  $v(x, y)$  — nepārtrauktas ( $\cdot$ )  $(x_0, y_0)$ ).

$w = f(z)$  ir nepārtraukta apgabalā  $D$ , ja tā nepārtraukta katrā tā punktā.

Nepārtrauktu  $f$  īpašības ir analogas reālā argumenta nepārtrauktu  $f$  īpašībām. Tā, piemēram, polinoms  $P_n(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$  ir nepārtraukta funkcija visiem  $z$ , bet daļveida racionāla  $f$

$$R(z) = \frac{Q_m(z)}{P_n(z)} \quad \text{ir nepārtraukta tās definīcijas apgabalā.}$$

\* Piemēram,  $w = z^2$  — vienvērtīga,  $w = \sqrt[n]{z}$  —  $n$  vērtīga,  $w = \operatorname{Ln} z$  — bezgalīgi daudzvērtīga funkcija.

## Vienkāršākās kompleksā mainīgā funkcijas

### 1. Algebriskās funkcijas:

$$w = az + b; \quad w = \frac{az + b}{cz + d}; \quad P_n(z); \quad R(z);$$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \dots, \quad \text{kur } |z| < 1.$$

### 2. Eksponentfunkcija

$$w = e^z = \exp z = e^x (\cos y + i \sin y), \quad \text{t. i.,}$$

$$\operatorname{Re} e^z = e^x \cdot \cos y, \quad \operatorname{Im} e^z = e^x \cdot \sin y,$$

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots, \quad z \in \mathbf{C} \quad (|z| < \infty).$$

Īpašības.

$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}; \quad e^{z + 2\pi i} = e^z; \quad |e^z| = e^x;$$

$$\operatorname{Arg} e^z = y + 2\pi k, \quad \text{kur } k \in \mathbf{Z}; \quad \arg e^z = y; \quad e^{2\pi ki} = 1; \quad e^{(2k+1)\pi i} = -1.$$

Eilera formulas

$$e^{\pm zi} = \cos z \pm i \sin z.$$

### 3. Naturālais logaritms

$$w = \operatorname{Ln} z \quad (z = e^w).$$

Ja  $z = \rho e^{i\varphi} = |z| e^{i \arg z}$ , tad

$$\operatorname{Ln} z = \ln \rho + i(\varphi + 2\pi k), \quad \text{t. i.,}$$

$$\operatorname{Re} (\operatorname{Ln} z) = \ln \rho, \quad \operatorname{Im} (\operatorname{Ln} z) = \varphi + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Logaritma galvenā vērtība

$$\ln z = \ln \rho + i\varphi \quad (-\pi < \varphi \leq \pi).$$

Īpašības.

$$\operatorname{Ln} z_1 \cdot z_2 = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2;$$

$$\operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2;$$

$$\operatorname{Ln} z^n = n \operatorname{Ln} z.$$

### 4. Trigonometriskās funkcijas:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{1}{\operatorname{tg} z};$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad |z| < \infty;$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots, |z| < \infty.$$

$$\sin(z+2\pi) = \sin z, \quad \cos(z+2\pi) = \cos z;$$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \quad \cos^2 z - \sin^2 z = \cos 2z;$$

$$\sin 2z = 2 \sin z \cdot \cos z,$$

$$\sin(z_1+z_2) = \sin z_1 \cdot \cos z_2 + \cos z_1 \cdot \sin z_2,$$

$$\cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 - \sin z_1 \cdot \sin z_2;$$

$$\operatorname{Re} \sin z = \sin x \cdot \operatorname{ch} y, \quad \operatorname{Im} \sin z = \cos x \cdot \operatorname{ch} y,$$

$$\operatorname{Re} \cos z = \cos x \cdot \operatorname{ch} y, \quad \operatorname{Im} \cos z = -\sin x \cdot \operatorname{sh} y;$$

$$\sin z = -i \operatorname{sh} iz, \quad \cos z = \operatorname{ch} iz,$$

$$\operatorname{tg} z = -i \operatorname{th} iz, \quad \operatorname{ctg} z = i \operatorname{cth} iz.$$

### 5. Hiperboliskās funkcijas:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{1}{\operatorname{th} z},$$

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, |z| < \infty;$$

$$\operatorname{sh}(z+2\pi i) = \operatorname{sh} z, \quad \operatorname{ch}(z+2\pi i) = \operatorname{ch} z,$$

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1, \quad \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z = \operatorname{ch} 2z,$$

$$\operatorname{sh} 2z = 2 \operatorname{sh} z \cdot \operatorname{ch} z;$$

$$\operatorname{Re} \operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x \cdot \cos y, \quad \operatorname{Im} \operatorname{sh} z = \operatorname{ch} x \cdot \sin y,$$

$$\operatorname{Re} \operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \cdot \cos y, \quad \operatorname{Im} \operatorname{ch} z = -\operatorname{sh} x \cdot \sin y;$$

$$\operatorname{sh} z = -i \operatorname{sin} iz, \quad \operatorname{ch} z = \operatorname{cos} iz,$$

$$\operatorname{th} z = -i \operatorname{tg} iz, \quad \operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg} iz.$$

### 6. Inversās trigonometriskās un inversās hiperboliskās funkcijas.

Definē tāpat kā reālā argumenta gadījumā, piemēram,

$w = \operatorname{Arcsin} z$ , ja  $z = \sin w$ .

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2}),$$

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2-1}),$$

$$\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}, \quad \operatorname{Arctg} z = -\frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{iz+1}{iz-1},$$

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2+1}), \quad \operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2-1}),$$

$$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}, \quad \operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z+1}{z-1}.$$

Šo funkciju galvenās vērtības ( $\arcsin z, \dots$ ) iegūst, Ln vietā rakstot  $\ln$ , piemēram,  $\arcsin z = -i \ln(iz + \sqrt{1-z^2})$ .

### 10.3. KOMPLEKSA MAINĪGĀ FUNKCIJAS ATVASINĀJUMS. ANALĪTISKAS FUNKCIJAS. KONFORMĀ ATTĒĻOŠANA

$f(z)$  sauc par *diferencējamu* ( $\cdot$ )  $z$ , ja šajā punktā eksistē atvasinājums

$$w' = f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

$f(z)$  atvasinājuma eksistences (diferencējamības) nosacījumi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

ir t. s. *Košī—Rīmaņa jeb Dalambēra—Eilera nosacījumi*.

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}.$$

$f(z)$  ir diferencējama apgabalā  $D$ , ja tā diferencējama visiem  $z \in D$ . Ja  $f(z)$  un  $g(z)$  ir diferencējamās apgabalā  $D$ , tad tādas ir arī

$$f(z) \pm g(z), f(z) \cdot g(z), \frac{f(z)}{g(z)}.$$

Diferencēšanas pamatlikumi analogi reālā mainīgā funkcijām. Definīcija. Vienvērtīgu  $f$ .  $f(z)$  sauc par *analītisku jeb regulāru funkciju* ( $\cdot$ )  $z_0$ , ja tā ir diferencējama kādā šī punkta apkārtnē.  $f(z)$  ir anal. f. ( $\cdot$ )  $z = z_0$  ( $z = \infty$ ), ja to var attēlot ar riņķī  $|z - z_0| < R$  (atbilstoši  $|z| > R$ ) konverģentu pakāpju rindu:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \left( f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} \right).$$

$f(z)$  ir anal. f., kad  $z = \infty$ , ja  $F(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$  ir anal. punktā  $z = 0$ ;

$$f'(\infty) = -\left(z^2 \cdot F'(z)\right) \Big|_{z=0}.$$

$f(z)$  ir anal. f. apgabalā  $D$ , ja tā ir anal. katrā  $D$  punktā. Punktus, kuros  $f(z)$  nav anal., sauc par  $f(z)$  *singulārajiem punktiem*.

$z_0 \in D$  sauc par  $f(z)$  izolētu singulāru punktu, ja ap to var apvilkt tādu riņķi, ka tā iekšpusē citu sing. punktu nav (izol. sing. punktu klasifikāciju sk. 10.5.).

Elementārās funkcijas (algebriskās, transcendentās) ir analītiskas visā  $z$  plaknē, izņemot dažus izol. sing. punktus.

### Analītiskas funkcijas $f(z) = u + iv$ pamatīpašības

1. Re  $f(z) = u(x, y)$  un Im  $f(z) = v(x, y)$  ir saistītās harmoniskās funkcijas; tās apmierina Laplasa vienādojumu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Ja viena  $f$ . zināma (piemēram,  $u(x, y)$ ), tad otru nosaka ar precizitāti līdz kompleksai konstantei:

$$v(x, y) = \int \frac{\partial u}{\partial x} dy + \varphi(x),$$

$$\text{kur } \varphi'(x) = -\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\partial u}{\partial x} dy\right).$$

2. Katrā regulārā punktā funkcijai  $f(z)$  eksistē jebkuras kārtas atvasinājums.
3. Ja  $f(z)$  ir anal. apgabālā  $\overline{D} = D + L$  ( $L$  — apgabala  $D$  robeža), tad  $|f(z)|$  savu vislielāko vērtību sasniedz uz apgabala robežas (*moduļa maksimuma princips*).
4. Ja  $f(z)$  ir anal. un ierobežota visā  $z$  plaknē, tad  $f(z) = \text{const}$  (*Liuvilla teorēma*).

Definīcija. Punkta  $z_0$  apkārtnes attēlojumu ar anal. f.  $f(z)$  ( $f'(z_0) \neq 0$ ) sauc par *konformu*, ja attēlojumā leņķi starp līnijām saglabājas (leņķu konservatīvisms), bet izmēru deformācijas koeficients ir nemainīgs:  $k = |f'(z_0)|$ .

Tātad bezgalīgi mazas figūras ar virsotni  $(.) z_0$  attēlojas par līdzīgām figūrām ar virsotni  $(.) w_0 = f(z_0)$ , bet attēlojuma pagrieziena leņķis ir  $\arg f'(z_0)$ .

Ja turklāt saglabājas leņķu atskaites virziens, tad ir I veida konformais attēlojums; ja leņķu atskaites virziens mainās uz pretējo, tad ir II veida konformais attēlojums.

Attēlojums ar anal. f. ir konforms visur, kur  $f'(z) \neq 0$ , un otrādi.

## 10.4. KOMPLEKSĀ MAINĪGĀ FUNKCIJAS INTEGRĀĻI

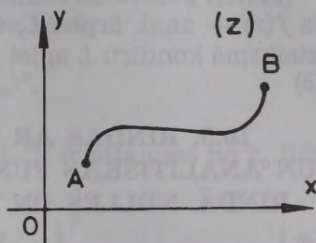
Ja  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ,  $AB$  ir līnijas loks  $z$  plaknē (10.3. zīm.), tad

$$\int_{AB} f(z) dz = \int_{AB} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i(v(x, y) dx + u(x, y) dy).$$

Ja līnija  $AB$  dota parametriskā veidā

$$z = z(t) = x(t) + iy(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad \text{tad}$$

$$\int_{AB} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) \cdot z'(t) dt.$$



10.3. zīm.

K. m. f. integrāļa īpašības analogas II veida līnijas integrāļa īpašībām. Tā, piemēram,

$$\int_{AB} f(z) dz = - \int_{BA} f(z) dz;$$

ja visos  $AB$  punktos  $|f(z)| \leq M$ , tad

$$\left| \int_{AB} f(z) dz \right| \leq M \cdot l \quad (l \text{ — loka } AB \text{ garums}).$$

Ja  $f(z)$  ir anal. f. apgabālā  $D$ , tad integrālis nav atkarīgs no integrācijas ceļa, proti,

$$\int_{AB} f(z) dz = \int_A^B f(z) dz = F(B) - F(A) = F(z) \Big|_A^B$$

(Ņūtona—Leibnica formula), kur  $F$  — funkcijas  $f(z)$  primitīvā funkcija ( $F'(z) = f(z)$ ). Anal. f. primitīvo funkciju atrod pēc tādām pašām formulām kā reālā mainīgā gadījumā.

Ja  $f(z)$  ir analītiska viensakarīgā apgabālā  $D$  un nepārtraukta uz tā robežas  $L$ , tad ir spēkā šādas teorēmas un formulas.

### 1. Košī teorēma

$$\oint_L f(z) dz = 0.$$

### 2. Košī integrālā formula

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in D.$$

### 3. Jebkuram $z \in D$ , $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Šeit visos integrāļos kontūrs  $L$  tiek apiets pozitīvajā virzienā (pretēji pulksteņa rādītāju kustības virzienam).  
 Ja  $f(z)$  — anal. ārpus  $L$ , tad Košī integrālajā formulā un  $f^{(n)}(z)$  izteiksmē kontūru  $L$  apiet negatīvajā virzienā.

### 10.5. RINDAS AR KOMPLEKSIEM LOCEKĻIEM UN ANALĪTISKAS FUNKCIJAS IZVIRZĪŠANA PAKĀPJU RINDĀ. NULLES UN IZOLĒTIE SINGULĀRIE PUNKTI

VirKNES  $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$  robeža ir skaitlis  $z$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z,$$

ja katram  $\varepsilon > 0$  var atrast tādu  $n$ , sākot no kura visi skaitļi  $z_n, z_{n+1}, \dots$  atrodas ( $\cdot$ )  $z$  apkārtņē, t. i.,  $|z - z_n| < \varepsilon$ .

Rinda

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \quad (1)$$

konverģē uz skaitli  $S$  (rindas summa), ja

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n,$$

kur  $S_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n$ .

(1) konverģē absolūti, ja konverģē rinda

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|. \quad (2)$$

Ja (2) diverģē, bet (1) konverģē, tad rindu (1) sauc par *nosacīti konverģentu*.

Funkciju rinda  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  definē kādu funkciju tām  $z$  vērtībām, kurām tā konverģē.

Pakāpju rinda

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (3)$$

( $a_n$  — kompleksas const,  $z = z_0$  — rindas centrs) konverģē riņķī

$$|z - z_0| < R, \quad (4)$$

kura rādiuss (konverģences rādiuss) ir

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \text{vai} \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Savā konverģences riņķī (4) rinda (3) konverģē vienmērīgi, t. i., to var diferencēt un integrēt pa locekļiem.

Ja  $f(z)$  ir anal. f. riņķī (4), tad tās *Teilora rinda* ir

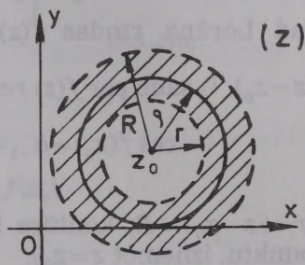
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (5)$$

kur  $a_n = \frac{f^n(z_0)}{n!}$ , bet  $R = \min |z_k - z_0|$ , t. i.,  $R$  ir attālums no  $z_0$  līdz tuvākajam  $f(z)$  singulārajam punktam.

Ja  $f(z)$  ir anal. gredzenā  $r < |z - z_0| < R$  (10.4. zīm.) (iespējami arī gadījumi:  $r = 0$ ,  $R = \infty$ ), tad  $f(z)$  *Lorāna rinda* ir

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (6)$$

kur  $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z - z_0| = \rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$ ,  $r < \rho < R$ .



10.4. zīm.

Ja  $z_0$  ir anal. f.  $f(z)$   $k$ -tās kārtas nulle, tad

1)  $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0, f^{(k)}(z_0) \neq 0;$

2)  $f(z) = (z - z_0)^k \varphi(z)$ , kur  $\varphi(z_0) \neq 0;$

3)  $f(z) = a_k (z - z_0)^k + a_{k+1} (z - z_0)^{k+1} + \dots, a_k \neq 0;$

4) gadījumā  $z_0 = \infty$   $f(z) = z^{-k} \varphi(z)$ , kur  $\varphi(\infty) \neq 0$ .

Ja  $z = z_0 \neq \infty$  ir anal. f.  $f(z)$  izolēts singulārs punkts, tad to klasificē atkarībā no tā, cik saskaitāmo ar negatīvām  $z - z_0$  pakāpēm ir Lorāna rindā (6):

1)  $z_0$  ir *novēršams singulārs punkts*, ja

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \text{const});$$

2)  $z_0$  ir  *$k$ -tās kārtas pols*, ja

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_{-k} \neq 0 \quad (\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty).$$

Tādējādi funkcija  $F(z) = \frac{1}{f(z)}$  ir anal. punktā  $z = z_0$  un  $z_0$  ir  $F(z)$   $k$ -tās kārtas nulle;

3)  $z_0$  ir *būtiski singulārs punkts*, ja

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \text{ neeksistē}).$$

Piezīme. Ja  $z = \infty$ , funkcijai  $f(z)$  ir tāda pati singularitāte kā funkcijai  $f\left(\frac{1}{z}\right)$  punktā  $z = 0$ .

## 10.6. REZĪDIJI, TO APRĒKINĀŠANA UN LIETOJUMI

Ja  $f(z)$  punktā  $z = z_0$  ir analītiska vai  $z_0'$  ir izolēts singulārs punkts, tad Lorāna rindas  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$  koeficientu  $a_{-1}$  (pie  $(z-z_0)^{-1}$ ) sauc par  $f(z)$  rezīdiju punktā  $z = z_0$ :

$$\operatorname{res} f(z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho} f(z) dz, \quad r < \rho < R$$

( $r < |z-z_0| < R$ ; kontūra  $|z-z_0| = \rho$  iekšpusē nav citu singulāru punktu, izņemot  $z = z_0$ ).

### Rezīdiju aprēķināšana

1. Ja  $z_0$  ir funkcijas  $f(z)$  regulārs punkts vai novēršams singulārs punkts, tad  $\operatorname{res} f(z_0) = 0$ .
2. Ja  $z = z_0$  ir  $f(z)$   $k$ -tās kārtas pols, tad

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (f(z)(z-z_0)^k).$$

Ja  $z = z_0$  ir  $f(z)$  1. kārtas (vienkāršs) pols un  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ , kur  $\varphi(z), \psi(z)$  — analītiskas f. punktā  $z_0$ ,  $\varphi(z_0) \neq 0$  ( $\psi(z_0) = 0$ ), tad

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Rezīdiji bezgalīgi tālajā punktā:

$$1) \operatorname{res} f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho} f(z) dz,$$

kur  $f(z)$  — anal. apgabalā  $\rho \leq |z| < \infty$ , bet kontūrs tiek apiets negatīvajā virzienā;

- 2) ja ir zināms  $f(z)$  izvirsījums Lorāna rindā  $z_0 = \infty$  apkārtne, tad  $\operatorname{res} f(\infty) = -a_{-1}$ , kur  $a_{-1}$  — koeficients pie  $\frac{1}{z}$ ;

3) res  $f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} (-z \cdot f(z))$ , ja šī robeža eksistē.

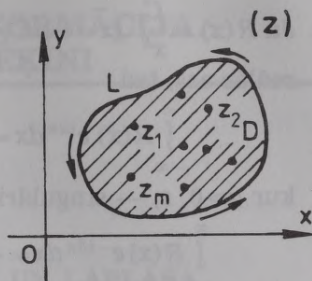
Ja funkcijai  $f(z)$  ir  $m$  galīgi singulārie punkti  $z_k$  ( $k=1, 2, \dots, m$ ), tad

$$\text{res } f(\infty) = - \sum_{k=1}^m \text{res } f(z_k).$$

**Pamatteorēma.** Ja  $f(z)$  — analītiska apgabālā  $\bar{D}$  ( $\bar{D} = D + L$ , kur  $L$  ir  $D$  robeža), bet kontūru  $L$  iekšpusē atrodas galīgs skaits izolētu singulāru punktu  $z_k$ ,  $k=1, 2, \dots, m$  (10.5. zīm.), tad

$$\oint_L f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{res } f(z_k)$$

( $L$  tiek apiets pozitīvajā virzienā).



10.5. zīm.

### Pamatteorēmas lietojumi, aprēķinot integrāļus no reāla argumenta funkcijām

$$1. \int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right) \cdot \frac{dz}{z}$$

( $R$  — racionāla funkcija).

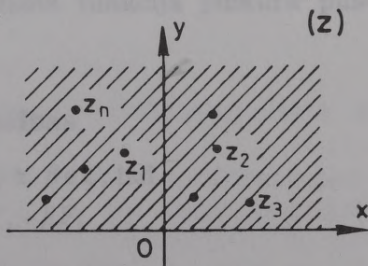
2. Ja  $f(z)$  ir anal. f. pusplaknē  $\text{Im } z \geq 0$ , izņemot galīgu skaitu singulāros punktus  $z_1, z_2, \dots, z_n$  ( $\text{Im } z_k > 0$ ) (10.6. zīm.), un  $z=0$

ir vienādojuma  $f\left(\frac{1}{z}\right) = 0$  nulle ar kārtu  $m \geq 2$ , tad

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res } f(z_k).$$

Ja  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m$  ir funkcijas  $f(z)$  singulārie punkti apakšējā pusplaknē ( $\text{Im } \zeta_k < 0$ ), tad

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = -2\pi i \sum_{k=1}^m \text{res } f(\zeta_k).$$



10.6. zīm.

3. Ja  $R(x) \sim \frac{C}{x^k}$  ( $x \rightarrow \infty$ ,  $C \neq 0$ ,  $k \geq 1$ ) un tā nav vienāda ar nulli uz reālās ass, tad

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} (R(z) \cdot e^{i\alpha z}) \Big|_{z=z_k},$$

kur  $\alpha > 0$ ,  $z_k$  — singulārie punkti augšējā pusplaknē ( $\operatorname{Im} z_k > 0$ );

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{-i\beta x} dx = -2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{res} (R(z) \cdot e^{-i\beta z}) \Big|_{z=\zeta_k},$$

kur  $\beta > 0$ ,  $\zeta_k$  — singulārie punkti apakšējā pusplaknē;

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cdot \sin \alpha x dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cdot e^{i\alpha x} dx;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cdot \cos \alpha x dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cdot e^{i\alpha x} dx.$$

4. Ja racionālai funkcijai  $R(x)$

- 1) augšējā pusplaknē ir galīgs skaits izolētu singulāru punktu  $z_1, z_2, \dots, z_n$  ( $\operatorname{Im} z_k > 0$ ; pārējos pusplaknes punktos  $R(x)$  — analītiska);
- 2) uz reālās ass ir 1. kārtas (vienkārši) poli  $x_1, x_2, \dots, x_m$ ;
- 3)  $|R(z)| \rightarrow 0$ , ja  $z \rightarrow \infty$  ( $\operatorname{Im} z \geq 0$ ), tad

$$\begin{aligned} \text{v. p. } \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cdot e^{i\alpha x} dx &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} (R(z) \cdot e^{i\alpha z}) \Big|_{z=z_k} + \\ &+ \pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{res} (R(z) \cdot e^{i\alpha z}) \Big|_{z=x_k}. \end{aligned}$$

# 11. LAPLASA TRANSFORMĀCIJA. OPERATORU RĒĶINI

## 11.1. ORIGINĀLS, ATTĒLS UN LAPLASA TRANSFORMĀCIJAS PAMATĪPAŠĪBAS

Par *originālu* sauc funkciju  $f(t) = u(t) + iv(t)$  ( $t \in \mathbf{R}$ ), ja

1) visiem  $t \geq 0$   $f(t)$  ir gabaliem nepārtraukta,  $n$  reizes nepārtraukti diferencējama un

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t);$$

2)  $f(t) = 0$  visiem  $t < 0$ ;

3) eksistē tādi skaitļi  $M > 0$  un  $s_0 \geq 0$ , ka

$$|f(t)| \leq Me^{s_0 t}.$$

Par  $f(t)$  *attēlu* sauc funkciju  $F(p)$ , ko definē Laplasa integrālis

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt, \quad (*)$$

kur  $p = s + i\sigma$  — operators.

Lieto šādu saīsinātu pierakstu:  $f \doteq F$ ,  $f(t) \doteq F(p)$ ,  $F(p) \doteq f(t)$ ,  $F(p) = L\{f(t)\}$ .\*

Origināla  $f(t)$  attēls  $F(p)$  eksistē (t. i., integrālis (\*) konverģē) un ir analītiska funkcija pusplaknē  $\text{Re } p = s > s_0$ . Turklāt  $F(p) \rightarrow 0$ , ja  $\text{Re } p \rightarrow +\infty$  un  $F(p)$  — ierobežota funkcija jebkurā pusplaknē  $s \geq s_0$ .

### Pamatīpašības

1. **Linearitāte:** ja  $f_1 \doteq F_1$  un  $f_2 \doteq F_2$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ , tad

$$\alpha f_1 + \beta f_2 \doteq \alpha F_1 + \beta F_2.$$

\* Iespējami arī citādi pieraksti:  $F(p) = L[f(t)]$ ,  $f(t) \doteq F(p)$ ,  $f(t) \circ \rightarrow \circ \rightarrow F(p)$  u. c.

2. Līdzības teorēma:

$$f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \quad \alpha \in \mathbf{R}, \quad \alpha > 0.$$

3. Novēlojuma teorēma:

$$f(t-\tau) \doteq e^{-p\tau} F(p), \quad \tau \in \mathbf{R}, \quad \tau > 0 \text{ un } f(t) \doteq F(p).$$

4. Apsteiguma teorēma:

$$f(t+t_0) \doteq e^{pt_0} (F(p) - \int_0^{t_0} f(t) e^{-pt} dt), \quad t_0 > 0, \quad f(t) \doteq F(p).$$

5. Pārbīdes teorēma:

$$e^{-\alpha t} \cdot f(t) \doteq F(p+\alpha), \quad \alpha \in \mathbf{C}, \quad f(t) \doteq F(p).$$

6. Periodiska oriģināla attēls: ja  $f(t) = f(t+T)$ , tad

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-pT}} \int_0^T f(t) e^{-pt} dt.$$

7. Oriģināla diferencēšanas teorēma: ja  $f(t) \doteq F(p)$ , tad

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0),$$

$$f''(t) \doteq p^2 F(p) - pf(0) - f'(0),$$

$$\dots$$
$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),$$

$$\text{kur } f^{(k)}(0) = \lim_{t \rightarrow +0} f^{(k)}(t) \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1), \quad f^{(0)}(0) = f(0).$$

8. Oriģināla integrēšanas teorēma:

$$\int_0^t f(t) dt \doteq \frac{1}{p} F(p), \quad f(t) \doteq F(p).$$

9. Attēla diferencēšanas teorēma: ja  $f(t) \doteq F(p)$ , tad

$$-tf(t) \doteq F'(p),$$

$$t^2 f(t) \doteq F''(p),$$

$$\dots$$
$$(-1)^n t^n f(t) \doteq F^{(n)}(p).$$

10. Attēla integrēšanas teorēma: ja  $f(t) \doteq F(p)$ , tad

$$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^\infty F(q) dq.$$

11. Diferencēšana pēc parametra: ja  $f(t, x) \doteq F(p, x)$ , tad

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \doteq \frac{\partial F(p, x)}{\partial x}, \quad x \in [x_1, x_2].$$

## 12. Robežteorēmas:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t),$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t).$$

## 13. Attēlu reizināšanas jeb Borēla teorēma:

$$F(p) \cdot G(p) = f(t) * g(t),$$

kur  $f(t)$ ,  $g(t)$  — nepārtrauktas funkcijas,  $f(t) = F(p)$ ,  
 $g(t) = G(p)$ , bet  $f * g$  — to konvolūcija, proti,

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \quad (f(t) * g(t) = g(t) * f(t)).$$

## 14. Diamela formula nepārtrauktiem oriģināliem:

$$pF(p) \cdot G(p) = f(0) \cdot g(t) + \int_0^t f'(\tau) g(t-\tau) d\tau;$$

$$pF(p) \cdot G(p) = g(0) \cdot f(t) + \int_0^t g'(\tau) f(t-\tau) d\tau.$$

## 11.2. INVERSĀ LAPLASA TRANSFORMĀCIJA. ORIGINĀLA ATRAŠANA, JA DOTS ATTĒLS

Ja  $F(p) = L\{f(t)\}$  ir analītiska apgabālā  $\text{Re } p \geq s_0$ ,  $\lim_{|p| \rightarrow \infty} F(p) = 0$

vienmērīgi attiecībā pret  $\arg p$  un  $\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} |F(p)| dp < \infty$ ,

tad  $F(p)$  *inversā Laplasa transformācija*  $f(t)$  ir šāda:

$$L^{-1}\{F(p)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) e^{pt} dp. \quad (*)$$

Ja  $t = t_0$  ir  $f(t)$  I veida pārtraukuma punkts, tad

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) e^{pt} dp = \frac{f(t_0 - 0) + f(t_0 + 0)}{2}.$$

Pēc dotā attēla  $F(p)$  tā oriģinālu  $f(t)$  samērā reti aprēķina, izmantojot formulu (\*). To dara vienīgi tad, ja  $f(t)$  neizdodas atrast, izmantojot Laplasa transformācijas pamatformulas (11.4.) un galvenās īpašības (11.1.). Operatoru rēķinu lietojumos  $F(p)$  parasti iegūst kā rindu vai daļveida racionālu funkciju.

### Pirmā izvērses teorēma.

Ja  $F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{p^{n+1}}$  — Lorāna rinda, kas konverģē apgabālā  $|p| > R$ , tad

$$f(t) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{n!} t^n, & \text{ja } t \geq 0 \\ 0, & \text{ja } t < 0. \end{cases}$$

### Otrā izvērses teorēma.

Ja  $F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}$  — īsta racionāla daļa, kur  $F_1(p)$  —  $m$ -tās pakāpes,  $F_2(p)$  —  $n$ -tās pakāpes polinoms,  $m < n$  un saucējam  $F_2(p)$  ir  $n$  dažādas reālas saknes, tad

$$F(p) \doteq f(t) = \sum_{i=1}^n \frac{F_1(p_i)}{F_2'(p_i)} e^{p_i t}.$$

Ja turklāt viena no saucēja  $F_2(p)$  saknēm ir  $p=0$ , t. i.,  $F_2(p) = p\Phi(p)$ , tad

$$F(p) \doteq f(t) = \frac{F_1(0)}{\Phi(0)} + \sum_i \frac{F_1(p_i)}{p_i \Phi'(p_i)} e^{p_i t}.$$

Ja  $F_2(p) = (p-p_1)^{m_1} (p-p_2)^{m_2} \dots (p-p_k)^{m_k}$ , kur  $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$ , tad

$$F(p) \doteq f(t) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{(m_i-1)!} \lim_{p \rightarrow p_i} (F(p) \cdot (p-p_i)^{m_i} e^{p_i t})^{(m_i-1)}.$$

Piezīme. Daļas  $F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}$  ( $m < n$ ) oriģinālu var iegūt arī šādi:

$F(p)$  sadala elementārdaļās (sk. (8.3.)) un, izmantojot pamatformulas, atrod atbilstošos oriģinālus.

## 11.3. OPERATORU METODES LIETOJUMI

1. Košī problēmas atrisināšana lineāram diferenciālvienādojumam ar konstantiem koeficientiem:

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t), \quad (1)$$

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}.$$





### 5. Voltēra integrālvienādojuma atrisināšana.

Voltēra integrālvienādojumā

$$ax(t) = f(t) + \lambda \int_0^t k(t-\tau) x(\tau) d\tau \quad (4)$$

konvolūcijai  $\int_0^t k(t-\tau) x(\tau) d\tau = k * x = K(p) \cdot X(p)$  un vienādojumam atbilstošais operatoru vienādojums ir

$$aX(p) = F(p) + \lambda \cdot K(p) \cdot X(p),$$

kur  $f(t) = F(p)$ ,  $x(t) = X(p)$ ,  $k(t) = K(p)$ .

Izsakot  $X(p)$  un atrodot tā oriģinālu, ir iegūts (4) atrisinājums  $x(t)$ . Vienādojuma (4) atrisinājumu var iegūt arī šādi:

$$x(t) = \frac{1}{a} f(t) + \frac{\lambda}{a} (\varphi(t) * f(t)),$$

kur  $\varphi(t) * f(t) = \int_0^t \varphi(\tau) f(t-\tau) d\tau = \int_0^t \varphi(t-\tau) f(\tau) d\tau$ ,

bet  $\varphi(t)$  atrod no sakarības

$$\frac{K(p)}{a - \lambda \cdot K(p)} = \Phi(p) = \varphi(t).$$

### 11.4. LAPLASA TRANSFORMĀCIJAS PAMATFORMULAS

Nr.	Oriģināls	Attēls	Nr.	Oriģināls	Attēls
1.	1	$\frac{1}{p}$	7.	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
2.	$t^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	8.	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
3.	$t^\alpha (\alpha > -1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$	9.	$\text{sh } \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
4.	$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p - \lambda}$	10.	$\text{ch } \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$
5.	$t^n e^{\lambda t}, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{(p - \lambda)^{n+1}}$	11.	$t \sin \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$
6.	$t^\alpha e^{\lambda t} (\alpha > -1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(p - \lambda)^{\alpha+1}}$	12.	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$

Nr.	Origināls	Attēls	Nr.	Origināls	Attēls
13.	$t \operatorname{sh} \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 - \omega^2)^2}$	18.	$e^{\lambda t} \operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 - \omega^2}$
14.	$t \operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p^2 + \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2}$	19.	$te^{\lambda t} \sin \omega t$	$\frac{2\omega(p - \lambda)}{((p - \lambda)^2 + \omega^2)^2}$
15.	$e^{\lambda t} \cdot \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$	20.	$te^{\lambda t} \cos \omega t$	$\frac{(p - \lambda)^2 - \omega^2}{((p - \lambda)^2 + \omega^2)^2}$
16.	$e^{\lambda t} \cdot \cos \omega t$	$\frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$	21.	$\delta(t)$	1
17.	$e^{\lambda t} \cdot \operatorname{sh} \omega t$	$\frac{\omega}{(p - \lambda)^2 - \omega^2}$	22.	$\delta(t - a), a > 0$	$e^{-ap}$

II. A. LAPĀSA TRANSFORMĀCIJAS PAMATFORMULAS

Nr.	Origināls	Attēls
1.	$1$	$\frac{1}{p}$
2.	$e^{-at}$	$\frac{1}{p + a}$
3.	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{p + a}{(p + a)^2 + \omega^2}$
4.	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p + a)^2 + \omega^2}$
5.	$e^{-at} \operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p + a}{p^2 - (a + \omega)^2}$
6.	$e^{-at} \operatorname{sh} \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - (a + \omega)^2}$
7.	$t e^{-at}$	$\frac{1}{(p + a)^2}$
8.	$t e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{p + a - \omega^2}{(p + a)^2 + \omega^2}$
9.	$t e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{2\omega a}{(p + a)^2 + \omega^2}$
10.	$t^2 e^{-at}$	$\frac{2}{(p + a)^3}$
11.	$t^2 e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{p + a - 3\omega^2}{(p + a)^2 + \omega^2}$
12.	$t^2 e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{6\omega a}{(p + a)^2 + \omega^2}$
13.	$t^3 e^{-at}$	$\frac{6}{(p + a)^4}$
14.	$t^3 e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{p + a - 5\omega^2}{(p + a)^2 + \omega^2}$
15.	$t^3 e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{12\omega a}{(p + a)^2 + \omega^2}$

## 12. RINDAS

### 12.1. SKAITĻU RINDAS

Izteiksmi  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ , kur  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  — bezgalīga skaitļu virkne, sauc par *skaitļu rindu*. Summas  $s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, \dots, s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  sauc par *rindas parciālsummām*,  $a_n$  — par *rindas vispārīgo locekli*.

Ja parciālsummju virkne  $\{s_n\}$  konverģē un  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S$ , tad saka, ka *rinda konverģē un  $S$  ir rindas summa*; raksta  $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

Ja  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  neeksistē, tad rindu sauc par *diverģējošu*.

$r_n = S - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m} + \dots = \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m$  ir *rindas atlikums*.

### Rindu īpašības

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  — rindas  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverģences nepieciešamais noteikums.
- Atmetot galīgu skaitu rindas sākuma locekļu, rindas izturēšanās (konverģence vai diverģence) nemainās.
- Ja  $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , tad  $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = cS$  ( $c$  — reāls skaitlis).
- Ja  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_1$  un  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S_2$ , tad rinda  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$  arī konverģē un  $S_1 \pm S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ .

### Pozitīvu rindu salīdzināšanas kritērijs.

Ja  $a_n \geq 0, n = 1, 2, \dots$ , tad rindu sauc par pozitīvu rindu.

Ja rindas

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots, \quad (\text{A})$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots \quad (\text{B})$$

ir pozitīvas un, sākot no kāda  $n$ , ir spēkā nevienādība  $a_n \geq b_n$ , tad

no rindas (A) konverģences seko rindas (B) konverģence un no rindas (B) diverģences seko rindas (A) diverģence.

### Dalambēra konverģences kritērijs.

$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$  — pozitīva rinda un  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ .

Ja  $q < 1$ , tad rinda konverģē, ja  $q > 1$ , — rinda diverģē, ja  $q = 1$ , tad šis kritērijs nedod atbildi, t. i., rinda var būt gan konverģējoša, gan diverģējoša.

### Košī konverģences kritērijs.

$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$  — pozitīva rinda un  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ .

Ja  $q < 1$ , tad rinda konverģē, ja  $q > 1$ , — rinda diverģē, ja  $q = 1$ , tad šis kritērijs nedod atbildi.

**Košī integrālais kritērijs.** Rinda, kuras vispārīgais loceklis ir  $a_n = f(n)$ , konverģē, ja  $f(x)$  ir monotoni dilstoša funkcija un neīstais integrālis  $\int_a^\infty f(x) dx$  konverģē ( $a \geq 1$  — patvaļīgs skaitlis). Ja šis integrālis diverģē, tad arī rinda diverģē.

## Absolūtā un nosacītā konverģence

Rindu

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots, \quad (\text{A})$$

kuras locekļi var būt ar dažādām zīmēm, sauc par *absolūti konverģējošu*, ja konverģē rinda

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots \quad (\text{B})$$

Ja rinda (B) diverģē, bet (A) konverģē, tad (A) sauc par *nosacīti konverģējošu rindu*.

Absolūti konverģējošu rindu īpašības.

1. Absolūti konverģējošas rindas summa nemainās, ja maina rindas locekļu kārtību (maina vietām rindas locekļus). Šāda īpašība nepiemīt nosacīti konverģējošām rindām.
2. Absolūti konverģējošas rindas var ne vien pa locekļiem saskaitīt un atņemt, bet arī reizināt kā parastus polinomus.

## Alternējošas rindas

Rindu  $a_1 - a_2 + a_3 - \dots \pm a_n \mp a_{n+1} \pm \dots$ , kur  $a_n$  — pozitīvi skaitļi, sauc par *alternējošu rindu*.

**Leibnica kritērijs.** Lai alternējoša rinda konverģētu, ir pietiekami, ka  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  un  $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > \dots$ .

Alternējošas rindas atlikuma novērtēšana:

$$|r_n| = |S - s_n| < |a_{n+1}|.$$

### Dažu skaitļu rindu summas

$$1) 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots = e;$$

$$2) 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots \pm \frac{1}{n!} \mp \dots = \frac{1}{e};$$

$$3) 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \pm \frac{1}{n} \mp \dots = \ln 2;$$

$$4) 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 2;$$

$$5) 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots \pm \frac{1}{2^n} \mp \dots = \frac{2}{3};$$

$$6) 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \pm \frac{1}{2n-1} \mp \dots = \frac{\pi}{4}.$$

### 12.2. FUNKCIJU RINDAS

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ — funkciju rinda.}$$

Visas tās mainīgā  $x$  vērtības  $x_0$ , ar kurām funkcijas  $f_n(x)$  ( $n=1, 2, \dots$ ) ir definētas un skaitļu rinda  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$  konverģē, veido funkciju rindas  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  konverģences apgabalu  $D$ .

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) \text{ — funkciju rindas } n\text{-tā parciālsomma;}$$

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) \text{ — rindas summa, kur } x \in D;$$

$$r_n(x) = S(x) - s_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \text{ — funkciju rindas atlikums.}$$

### Funkciju rindas konverģence un vienmērīgā konverģence

Funkciju rindu  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  sauc par *vienmērīgi konverģējošu apgabālā  $D$* , ja jebkuram pēc patikas mazam skaitlim  $\varepsilon > 0$  var atrast

tādu skaitli  $N$ , ka visiem  $x$  no apgabala  $D$  ir spēkā nevienādība  $|S(x) - s_n(x)| < \varepsilon$ , ja vien  $n > N$ .

Ja šāds skaitlis  $N$ , kurš ir kopīgs visiem  $x$  no apgabala  $D$ , neeksistē, t. i., lai kāds arī būtu  $n$ , konverģences apgabalā  $D$  var atrast tādu  $x$ , ka  $|S(x) - s_n(x)| > \varepsilon$ , tad funkciju rindu sauc par nevienmērīgi konverģējošu apgabalā  $D$ .

### **Veierštrāsa vienmērīgas konverģences pazīme.**

Rinda  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  apgabalā  $D$  konverģē vienmērīgi, ja eksistē tāda konverģējoša pozitīvu skaitļu rinda  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ , ka visiem  $x$  no apgabala  $D$

$$|f_n(x)| \leq c_n.$$

### **Vienmērīgi konverģējošu rindu īpašības**

1. Ja funkcijas  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$  ir nepārtrauktas kādā apgabalā un rinda  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  šajā apgabalā konverģē vienmērīgi, tad rindas summa  $S(x)$  ir šajā apgabalā nepārtraukta.

Ja rinda nekonverģē vienmērīgi, tad rindas summa  $S(x)$  var būt pārtraukta funkcija.

2. *Robežpāreja aiz summas zīmes.*

Ja funkcijas  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$  ir definētas apgabalā  $D$ ,

$\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = c_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ), rinda  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  apgabalā  $D$  konverģē vienmērīgi un  $x_0 \in D$ , tad  $\lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = C$ , kur  $C = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ .

3. *Funkciju rindas integrēšana pa locekļiem.*

Ja  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$  ir nepārtrauktas intervālā  $[a, b]$ , rinda

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  konverģē vienmērīgi šajā intervālā un  $S(x)$  ir šīs rindas summa, tad  $\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx$ .

4. Ja  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$  ir nepārtraukti diferencējamas intervālā  $[a, b]$ , rinda  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  konverģē šajā intervālā, rinda

$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$  vienmērīgi konverģē šajā intervālā un  $S(x)$  ir rindas  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  summa, tad  $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ .

### Pakāpju rindas

Funkciju rindu  $a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots$  sauc par *pakāpju rindu*.

Pakāpju rindu īpašības.

1. Pakāpju rinda absolūti konverģē intervālā  $(a-R, a+R)$ , kur  $R$  — pakāpju rindas konverģences rādiuss. Konverģences rādiusu atrod pēc šādām formulām:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}, \quad R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Konverģences intervāla galapunktos  $x = a - R$  un  $x = a + R$  pakāpju rinda var konverģēt vai diverģēt.

2. Ja pakāpju rinda  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  konverģē punktā  $x = x_1 > 0$ , tad tā vienmērīgi konverģē intervālā  $(-x_1 + \varepsilon, x_1)$ , kur  $\varepsilon > 0$  — pēc patikas mazs.

3. Ja  $R_1$  ir pakāpju rindas  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  konverģences rādiuss,  $R_2$  — pakāpju rindas  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  konverģences rādiuss un  $\alpha, \beta$  — reāli skaitļi, tad pakāpju rinda  $\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) x^n$  konverģē, ja  $|x| < \min\{R_1, R_2\}$ .

### 12.3. FURJĒ RINDA. FURJĒ INTEGRĀLIS

Ja funkcija  $f(x)$  ir periodiska ar periodu  $2\pi$ , tad to var izvirzīt *trigonometriskā Furjē rindā*:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

kur  $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n=0, 1, 2, \dots;$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n=1, 2, \dots,$$

sauc par šīs funkcijas *Furjē koeficientiem*.

Ja  $f(x)$  ir pāra funkcija, tad  $b_n=0$ ,  $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$  un

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Ja  $f(x)$  ir nepāra funkcija, tad  $a_n=0$ ,  $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$  un

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Ja funkcija  $f(x)$  ir gabaliem nepārtraukta un gabaliem monotona, tad

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{1}{2} (f(x-0) + f(x+0)).$$

**Beseļa nevienādība:**

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx.$$

**Parsevāla vienādība.** Ja  $f(x)$  ir integrējama funkcija, tad

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx.$$

*Furjē rinda kompleksā formā* ir pierakstāma šādi:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad \text{kur } c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Ja  $f(x)$  ir periodiska ar periodu  $2l$ , tad šīs funkcijas izvirkājums Furjē rindā ir

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

kur  $a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx, \quad n=0, 1, 2, \dots,$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx, \quad n=1, 2, \dots$$

## Furjē integrālis

Ja  $f(x)$  ir gabaliem nepārtraukta un absolūti integrējama intervālā  $(-\infty, \infty)$ , tad

$$\int_0^{\infty} (a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x) d\lambda$$

sauc par funkcijas  $f(x)$  Furjē integrāli, kur

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x dx, \quad b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \lambda x dx.$$

Ja  $f(x)$  ir pāra funkcija, tad  $b(\lambda) = 0$ ,  $a(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos \lambda x dx$  un Furjē integrālis ir  $\int_0^{\infty} a(\lambda) \cos \lambda x d\lambda$ .

Ja  $f(x)$  ir nepāra funkcija, tad  $a(\lambda) = 0$ ,  $b(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \sin \lambda x dx$  un Furjē integrālis ir  $\int_0^{\infty} b(\lambda) \sin \lambda x d\lambda$ .

Ja funkcijai  $f(x)$  var būt tikai pirmā veida pārtraukumi, jebkuru galīgu intervālu var sadalīt galīgā skaitā intervālu, katrā no kuriem  $f(x)$  ir nepārtraukta un monotona, pie tam integrālis

$\int |f(x)| dx$  konverģē, tad

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda(x-t)} dx = \frac{1}{2} (f(t-0) + f(t+0)).$$

Šis vienādības kreiso pusi sauc par Furjē integrāli kompleksā formā.

Funkcijas  $f$  Furjē transformācija:

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx.$$

Apģieztā Furjē transformācija:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda.$$

Funkcijas  $f$  kosinus transformācija:

$$F_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos \lambda x dx.$$

Funkcijas  $f$  sinus transformācija:

$$F_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin \lambda x dx.$$

## 13. LAUKA TEORIJAS ELEMENTI

### 13.1. SKALĀRS LAUKS

Ja katram punktam  $M \in \Omega$  ( $\Omega$  — telpas apgabals) katrā laika momentā  $t$  ir piekārtots skalārs lielums — funkcija  $u = u(M, t)$ , tad apgalā  $\Omega$  ir definēts *skalārs lauks*.\*

Ja  $\Omega$  dots Dekarta koordinātās, tad  $M(x, y, z)$  un  $u = u(x, y, z, t)$  vai arī  $u = u(\vec{r}, t)$ , kur  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  ir punkta  $M$  rādiusvektors; cilindriskās koordinātās  $(r, \varphi, z)$  skalārais lauks ir  $u = u(r, \varphi, z, t)$ ; sfēriskās koordinātās  $(\rho, \varphi, \theta)$  —  $u = u(\rho, \varphi, \theta, t)$ .

Ja  $u(M, t)$  definēta tikai kādā plaknē, tad tādu skalāru lauku sauc par *plakanu lauku*.

Ja  $u = u(M)$  (t. i.,  $u$  nav atkarīga no laika  $t$ ), tad skalāro lauku sauc par *stacionāru lauku*.

Plakanu stacionāru skalāru lauku grafiski attēlo ar līmeņlīnijām, bet skalāru lauku telpā — ar līmeņvirsmām; to vienādojums ir  $u(M) = C$ ,  $C$  — const. Piemēram, virsmu telpā, kuras visos punktos elektriskajam potenciālam ir konstanta vērtība, sauc par ekvipotenciālu virsmu.

Līmeņlīniju biežums atsevišķās apgabala vietās raksturo skalārā lauka izmaiņas straujumu: līmeņlīniju sabiezinājums norāda, ka skalārā lieluma vērtības pieaug (vai samazinās) strauji, bet līmeņlīniju retinājums, ka — mazāk strauji.

Skalāra lauka  $u = u(M)$  izmaiņas ātrumu, ejot no ( $\cdot$ )  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  ass  $l$  virzienā, raksturo  $u(x, y, z)$  atvasinājums virzienā  $l$ :

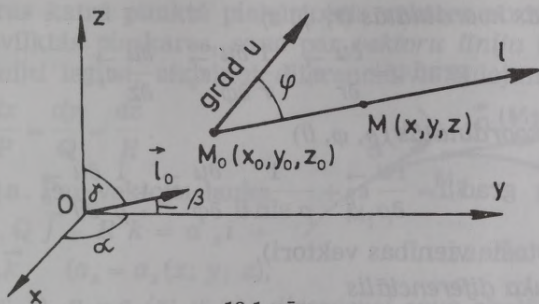
$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta u(M_0)}{\Delta r} = \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{u(M) - u(M_0)}{M_0 M}$$

jeb

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma,$$

kur  $\vec{l}_0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  (13.1. zīm.).

\* Tiek pieņemts, ka  $u$  — nepārtraukti diferencējama pēc saviem argumentiem vajadzīgo skaitu reizi.



13.1. zīm.

$$\frac{\partial u}{\partial l} \text{ var izteikt arī šādi: } \frac{\partial u}{\partial l} = |\vec{l}| \cdot \frac{\partial u}{\partial l^0} \quad (|\vec{l}^0| = 1).$$

Ja  $\vec{n}$  ir līmeņvirsmas normāles  $\vec{N}$  vienības vektors (funkcijas  $u$  augšanas virzienā) punktā  $M$ , tad  $\frac{\partial u}{\partial n}$  ir vislielākā vērtība salīdzinājumā ar jebkuru  $\frac{\partial u}{\partial l}$  šajā punktā un

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial n} \cos \angle(\vec{l}^0, \vec{n}).$$

Skalāra lauka  $u(\vec{r})$  gradients ir vektors  $\text{grad } u$ , kas vērsts pa līmeņvirsmas normāli lauka augšanas virzienā; tā garums

$$|\text{grad } u| = \frac{\partial u}{\partial n} \left( \vec{n} = \pm \frac{\text{grad } u}{|\text{grad } u|} \right).$$

Plakanā skalārā laukā  $u = u(x, y)$  vektors  $\text{grad } u$  ir perpendikulārs līmeņlīnijas pieskarei.

Atvasinājums  $\frac{\partial u}{\partial l} = \vec{l} \cdot \text{grad } u = \text{pr}_{\vec{l}}(\text{grad } u) = |\text{grad } u| \cdot \cos \varphi$  ( $u$  atvasinājums virzienā  $l$  ir vienāds ar  $\text{grad } u$  projekciju uz šo virzienu). Dekarta koordinātās  $(x; y; z)$

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} = \nabla u,$$

$$|\text{grad } u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2},$$

kur Hamiltona diferenciālais operators  $\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$ ;

cilindriskajās koordinātās ( $r, \varphi, z$ )

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{e}_z;$$

sfēriskajās koordinātās ( $\rho, \varphi, \theta$ )

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$$

( $\vec{e}$  — atbilstošie vienības vektori).

Skalārā lauka diferenciālis

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Gradianta īpašības:

$$\text{grad } C = 0, \quad C — \text{const};$$

$$\text{grad } (u + v) = \text{grad } u + \text{grad } v; \quad \text{grad } Cu = C \text{ grad } u;$$

$$\text{grad } (u \cdot v) = v \cdot \text{grad } u + u \cdot \text{grad } v;$$

$$\text{grad} \left( \frac{u}{v} \right) = \frac{v \cdot \text{grad } u - u \cdot \text{grad } v}{v^2};$$

$$\text{grad } f(u) = f'(u) \cdot \text{grad } u; \quad \text{grad } u^n = nu^{n-1} \text{ grad } u;$$

$$\text{grad} |\vec{r}| = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}).$$

### 13.2. VEKTORU LAUKS

Ja katram punktam  $M \in \Omega$  ( $\Omega$  — telpas apgabals) katrā laika momentā  $t$  ir piekārtots vektors

$$\vec{a}(M, t) = \vec{a}(\vec{r}, t) = P(M, t)\vec{i} + Q(M, t)\vec{j} + R(M, t)\vec{k}$$

( $M(x, y, z)$  — telpas punkts;  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  — tā rādiusvektors), tad apgabalā  $\Omega$  ir definēts *vektoru lauks*.

Ja  $\vec{a} = \vec{a}(M)$  (t. i.,  $\vec{a}$  nemainās laikā), tad vektoru lauku sauc par *stacionāru lauku*.

Ja katram punktam  $M \in \Omega$  piekārtoti vienādi vektori  $\vec{a} = (P; Q; R)$ , kur  $P, Q, R — \text{const}$ , tad vektoru lauku sauc par *homogēnu lauku*.

Ja visiem apgabala punktiem piekārtotie vektori ir paralēli kādai plaknei, tad lauku sauc par *plaknes vektoru lauku*.

Līniju, kuras katrā punktā piekārtotais vektors atrodas uz šajā punktā novilktais pieskares, sauc par *vektoru līniju* (13.2. zīm.); vektoru līniju iegūst, atrisinot diferenciālvienādojumu sistēmu

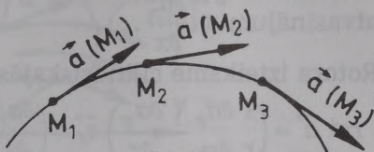
$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Definīcija. Par vektoru lauka

$$\vec{a} = P \vec{i} + Q \vec{j} + R \vec{k} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad (a_x = a_x(x; y; z),$$

$a_y = a_y(x; y; z), a_z = a_z(x; y; z)$ ) *divergenci* sauc skalāru lielumu

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{a}.$$



13.2. zīm.

Ar šo formulu divergenci ir dota *Dekarta koordinātās*, tās izteiksme *cilindriskajās koordinātās* ( $r, \varphi, z$ ) ir

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z};$$

bet *sfēriskajās koordinātās* ( $\rho, \varphi, \theta$ )

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 a_\rho) \right) + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta a_\theta) \right).$$

Divergences īpašības:

$$\operatorname{div} \vec{C} = 0, \quad \vec{C} = \text{const}; \quad \operatorname{div} \vec{r} = 3;$$

$$\operatorname{div} (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \operatorname{div} \vec{a}_1 + \operatorname{div} \vec{a}_2;$$

$$\operatorname{div} (C \vec{a}) = C \cdot \operatorname{div} \vec{a}, \quad C = \text{const};$$

$$\operatorname{div} (u \cdot \vec{a}) = u \cdot \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \cdot \operatorname{grad} u;$$

$$\operatorname{div} (u \cdot \vec{C}) = \vec{C} \cdot \operatorname{grad} u, \quad \vec{C} = \text{const};$$

$$\operatorname{div} (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = \vec{a}_2 \cdot \operatorname{rot} \vec{a}_1 - \vec{a}_1 \cdot \operatorname{rot} \vec{a}_2.$$

Definīcija. Par vektoru lauka  $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$  *rotoru* sauc vektoru

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

jeb simboliskā pierakstā

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Determinantu aprēķina, izvirzot pēc 1. rindas un ievērojot to, ka katrs «reizinājums», piemēram,  $\frac{\partial}{\partial x} \cdot a_y$ , nozīmē atbilstošo parciālo atvasinājumu:  $\frac{\partial a_y}{\partial x}$ .

Rotora izteiksme cilindriskajās koordinātās ( $r$ ;  $\varphi$ ;  $z$ ) ir

$$\text{rot } \vec{a} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left( \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\varphi + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (r a_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z;$$

bet sfēriskajās koordinātās ( $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$ ) —

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{a} = & \left( \frac{1}{\rho \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot a_\varphi) - \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \right) \right) \vec{e}_\rho + \\ & + \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho a_\theta)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\rho}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi + \left( \frac{1}{\rho \sin \theta} \cdot \frac{\partial a_\rho}{\partial \varphi} - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho a_\varphi) \right) \right) \vec{e}_\theta. \end{aligned}$$

Rotora īpašības:

$$\text{rot } \vec{C} = \vec{0}, \quad \vec{C} = \text{const}; \quad \text{rot } \vec{r} = \vec{0};$$

$$\text{rot}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \text{rot } \vec{a}_1 + \text{rot } \vec{a}_2;$$

$$\text{rot}(u \cdot \vec{a}) = u \cdot \text{rot } \vec{a} + \text{grad } u \times \vec{a};$$

$$\text{div}(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = \vec{a}_2 \cdot \text{rot } \vec{a}_1 - \vec{a}_1 \cdot \text{rot } \vec{a}_2.$$

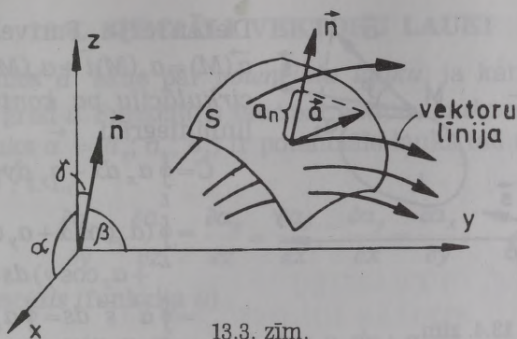
### 13.3. VEKTORU LAUKA PLŪSMA UN CIRKULĀCIJA

Definīcija. Par vektoru lauka  $\vec{a}(M) = a_x(M)\vec{i} + a_y(M)\vec{j} + a_z(M)\vec{k}$  plūsmu caur virsmas apgabalu  $S$  virzienā, kuru nosaka tās normāles vienības vektors  $\vec{n} = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$ , sauc virsmas integrāli

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_S a_n \, dS = \\ &= \iint_S (a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma) \, dS = \\ &= \iint_S a_x \, dy \, dz + a_y \, dx \, dz + a_z \, dx \, dy, \end{aligned}$$

kur  $a_n$  ir vektora  $\vec{a}$  projekcija uz vektoru  $\vec{n}$  (13.3. zīm.; virsmas integrāļa aprēķināšanu sk. (8.19.)).

$\Pi$  raksturo vektoru lauka  $\vec{a}$  intensitāti attiecīgajā apgabalā. Ja  $\Pi > 0$ , — vektoru lauks izplūst caur virsmu  $S$ , bet, ja  $\Pi < 0$ , — ieplūst caur šo virsmu.



13.3. zīm.

Ja  $S$  ir slēgta virsma, tad

$$\Pi = \oiint_S a_n dS$$

izsaka starpību starp to vektoru līniju daudzumu, kas caur virsmu ieplūst un izplūst; ja turklāt  $\Pi > 0$ , tad virsmas  $S$  norobežotajā apgabalā atrodas vektoru lauka avoti, bet, ja  $\Pi < 0$ , — tad noplūdes.

Ja  $\Pi = \oiint_S a_n dS = 0$ , tad vektoru lauku sauc par *solenoidālu*.

Vektoru lauka *avota vai noplūdes intensitāti* ( $\cdot$ )  $M_0$  raksturo

$$\operatorname{div} \vec{a} (M_0) = \lim_{S \rightarrow M_0} \frac{1}{V} \cdot \oiint_S a_n dS,$$

kur  $V$  — apgabals (tā tilpums), ko ierobežo virsma  $S$ ; pieraksts  $S \rightarrow M_0$  nozīmē to, ka virsma «savelkas» punktā  $M_0$ .

*Gausa—Ostrogradska formula* ir

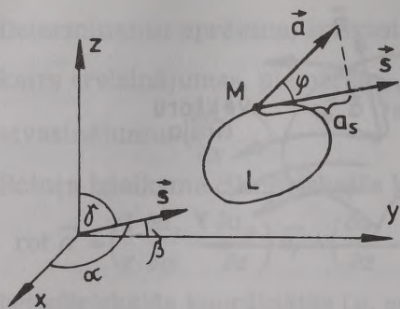
$$\oiint_S a_x dy dz + a_y dx dz + a_z dx dy = \iiint_V \left( \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dV$$

jeb vektoriālā formā —

$$\oiint_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dV, *$$

kur  $S$  ir ārpusē virsmai, kas ierobežo telpas apgabalu  $V$ ;  $\vec{n}$  — ārējās normāles vienības vektors.

\* Pieņemot, ka  $\vec{dS}$  ir tāds vektors, ka  $|\vec{dS}| = dS$ , bet  $\vec{dS} \uparrow \vec{n}$ , G.—O. formula ir  $\oiint_S \vec{a} \cdot \vec{dS} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dV$ .



13.4. zīm.

Definīcija. Par vektoru lauka  $\vec{a}(M) = a_x(M)\vec{i} + a_y(M)\vec{j} + a_z(M)\vec{k}$  cirkulāciju pa kontūru  $L$  sauc līnijintegrāli

$$\begin{aligned} C &= \oint_L a_x dx + a_y dy + a_z dz = \\ &= \oint_L (a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + \\ &\quad + a_z \cos \gamma) ds = \\ &= \oint_L \vec{a} \cdot \vec{s} ds = \oint_L a_s ds, \end{aligned}$$

kur  $\vec{s} = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$  ir pieskares vienības vektors (13.4. zīm.),  $a_s$  ir  $\vec{a}$  projekcija uz  $\vec{s}$  (līnijintegrāļa aprēķināšanu sk. (8.18.)).  $C$  raksturo darbu, kādu veic lauks  $\vec{a}$ , pārvietojot vienības elementu pa kontūru  $L$ .  $C$  intensitāte ( $\cdot$ )  $M_0$  ir

$$\lim_{L \rightarrow M_0} \frac{1}{S} \oint_L a_s ds = \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n} = (\text{rot } \vec{a})_n,$$

kur  $S$  ir kontūra  $L$  ietvertā virsmas apgabala laukums; pieraksts  $L \rightarrow M_0$  nozīmē to, ka «kontūrs tiek savilkts» punktā  $M_0$ ;  $(\text{rot } \vec{a})_n$  ir  $\text{rot } \vec{a}$  projekcija uz virsmas  $S$  normāles vienības vektoru. Ja  $\langle \vec{n}, \text{rot } \vec{a} \rangle = 0$ , tad

$$\max \left( \lim_{L \rightarrow M_0} \frac{1}{S} \oint_L a_s ds \right) = |\text{rot } \vec{a}(M_0)|.$$

Stoksa formula

$$\begin{aligned} &\oint_L a_x dx + a_y dy + a_z dz = \\ &= \iiint_S \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) dx dz + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

jeb vektoriālā formā

$$\oint_L \vec{a} \cdot \vec{ds} = \iiint_S \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n} dS,$$

kur  $\vec{ds} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$ ,  $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  ir virsmas  $S$  normāles vienības vektors, kas vērstas tā, lai, apejot kontūru  $L$ , virsma  $S$  atrastos pa kreisi.

\* Stoksa formulas īsāks pieraksts ir šāds:  $\oint_L \vec{a} \cdot \vec{ds} = \iiint_S \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{dS}$ .

### 13.4. SPECIĀLI VEKTORU LAUKI

Vektoru lauku  $\vec{a}$  sauc par *potenciālu lauku*, ja katrā apgabala punktā  $\vec{a} = \text{grad } u$ . Funkciju  $u$  sauc par *vektoru lauka  $\vec{a}$  potenciālu*. Vektoru lauks  $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$  ir potenciāls lauks tad un tikai tad, ja  $\text{rot } \vec{a} = \vec{0}$ , t. i.,

$$\frac{\partial a_z}{\partial y} = \frac{\partial a_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial a_x}{\partial z} = \frac{\partial a_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial a_y}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial y}.$$

*Lauka potenciāls* (funkcija  $u$ )

$$u(x, y, z) = \int_{M_0 M} a_x dx + a_y dy + a_z dz,$$

kur  $M_0 M$  — brīvi izraudzīta līnija, kas savieno  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  un  $M(x; y; z)$ .

Potenciāla lauka īpašības: 1) tas ir *bezvirpuļu lauks* ( $\text{rot } \vec{a} = \vec{0}$ ); 2) cirkulācija pa jebkuru slēgtu kontūru vienāda ar nulli; 3) lauka veiktais darbs nav atkarīgs no pārvietošanās līnijas formas, bet tikai no sākumpunkta un galapunkta novietojuma.

Vektoru lauku  $\vec{a}$  sauc par *solenoidālu lauku*, ja visos apgabala punktos  $\text{div } \vec{a} = 0$ .

Solenoidālā laukā vektoru plūsma caur jebkuru vektoru caurules šķērsriezumu (13.5. zīm.) ir konstants lielums; plūsma caur jebkuru slēgtu virsmu ir vienāda ar nulli ( $\Pi = 0$ ).

Vektoru lauku  $\vec{a}$  sauc par *harmonisku*, ja tas ir gan potenciāls, gan solenoidāls, t. i., ja

$$\text{div } \vec{a} = 0 \quad \text{un} \quad \vec{a} = \text{grad } u.$$

Harmoniska lauka potenciāls  $u$  apmierina *Laplasa vienādojumu*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{jeb} \quad \Delta u = 0,$$

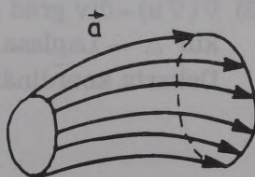
kur Laplasi operators  $\Delta$  (delta):

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

(operators  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ ).

Cilindriskajās koordinātās ( $r, \varphi, z$ )

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$



13.5. zīm.

Sfēriskajās koordinātās ( $\rho, \varphi, \theta$ )

$$\Delta u = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right).$$

Laplasa vienādojuma  $\Delta u = 0$  atrisinājumus sauc par *harmoniskām funkcijām*.

### 13.5. OPERATORU $\nabla$ UN $\Delta$ LIETOJUMI PIRMĀS UN OTRĀS KĀRTAS LAUKU DARBĪBĀS

Lietojot Hamiltona operatoru  $\nabla$  (simbolisku vektoru), pirmās kārtas lauku darbības var pierakstīt šādi:

$$\text{grad } u = \nabla \cdot u, \quad \text{div } \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a}, \quad \text{rot } \vec{a} = \nabla \times \vec{a},$$

kur  $u = u(M)$  — skalārs, bet  $\vec{a} = \vec{a}(M)$  — vektoriāls lauks.

Dekarta koordinātās  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ .

Operatora  $\nabla$  īpašības:

- 1)  $\nabla (\sum c_i X_i) = \sum c_i \nabla X_i$ , kur  $c_i = \text{const}$ ;  $X_i = X_i(M)$  — skalāra vai vektoriāla funkcija;
- 2) ja  $X = X(M)$ ,  $Y = Y(M)$ ,  $Z = Z(M)$  — vektoriāli vai skalāri lielumi, tad

$$\begin{aligned} \nabla (X \cdot Y \cdot Z) &= \nabla (X \cdot Y \cdot Z) + \nabla (X \cdot Y \cdot Z) + \nabla (X \cdot Y \cdot Z) = \\ &= Y \cdot Z \cdot \nabla X + X \cdot Z \cdot \nabla Y + X \cdot Y \cdot \nabla Z, \end{aligned}$$

t. i.,  $\nabla$  iedarbojas uz katru funkciju pēc kārtas (bultīņa norāda — uz kuru funkciju).

Iespējamās šādas otrās kārtas lauku darbības (jebkurā laukā):

- 1)  $\nabla (\nabla \times \vec{a}) = \text{div rot } \vec{a} = 0$ ;
- 2)  $\nabla \times (\nabla u) = \text{rot grad } u = 0$ ;
- 3)  $\nabla (\nabla u) = \text{div grad } u = \Delta u$ ,

kur  $\Delta$  — Laplasa operators  $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ .

Dekarta koordinātās

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

(cilindriskajās un sfēriskajās koordinātās — sk. (13.4.));

$$4) \nabla(\nabla \vec{a}) = \text{grad div } \vec{a};$$

$$5) \nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \text{rot rot } \vec{a}.$$

Abas pēdējās darbības saista formula  $\nabla(\nabla \vec{a}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \Delta \vec{a}$ , t. i., Laplasa operators no vektora  $\vec{a}$  ir aprēķināms šādi:

$$\Delta \vec{a} = \Delta a_x \vec{i} + \Delta a_y \vec{j} + \Delta a_z \vec{k} = \left( \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} \right) \vec{k}.$$

## 14. VARBŪTĪBU TEORIJA UN MATEMĀTISKĀ STATISTIKA

### 14.1. GADĪJUMA NOTIKUMI

Notikumu  $A_1, A_2, \dots, A_n$  *summa*  $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \sum_{k=1}^n A_k$  jeb  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$  ir notikums, kurš iestājas (realizējas) tad un tikai tad, ja iestājas vismaz viens no notikumiem  $A_k, k=1, 2, \dots, n$ .

Notikumu  $A_1, A_2, \dots, A_n$  *reizinājums*  $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n$  jeb  $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n = \bigcap_{k=1}^n A_k$  ir notikums, kurš iestājas tad un tikai tad, ja iestājas visi notikumi  $A_k, k=1, 2, \dots, n$ .

$\emptyset$  — *nieespējams notikums*;  $\Omega$  — *drošs notikums*.

Īpašības:

$$\begin{aligned} A + A &= A, & A \cdot A &= A, \\ A + \emptyset &= A, & A \cdot \emptyset &= \emptyset, \\ A + \Omega &= \Omega, & A \cdot \Omega &= A, \\ A + B &= B + A, & A \cdot B &= B \cdot A, \\ A(B + C) &= AB + AC. \end{aligned}$$

Notikumus  $A$  un  $B$  sauc par *nesavienojamiem*, ja  $A \cdot B = \emptyset$ .

$P(A)$  — notikuma  $A$  *varbūtība*;  $0 \leq P(A) \leq 1$ .

**Klasiskā varbūtības aprēķināšanas formula.**

Ja gadījuma mēģinājums ir ar  $n$  vienādi varbūtiem iznākumiem, tad jebkuram ar šo mēģinājumu saistītam notikumam  $A$

$$P(A) = \frac{n_A}{n},$$

kur  $n_A$  ir notikumam  $A$  labvēlīgo iznākumu skaits.

**Varbūtību saskaitīšanas teorēma:**

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

Ja notikumi  $A$  un  $B$  ir nesavienojami, tad

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Notikumus  $A$  un  $B$  sauc par *neatkarīgiem*, ja

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

$P(A/B)$  — notikuma  $A$  nosacītā varbūtība, t. i., varbūtība, ka iestājas notikums  $A$ , ja  $B$  ir noticis:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow P(A/B) = P(A) \text{ un } P(B/A) = P(B).$$

Varbūtību reizināšanas teorēma:

$$P(A \cdot B) = P(A/B) \cdot P(B) = P(B/A) \cdot P(A).$$

### Pilnās varbūtības formula

Ja  $A \subset H_1 + H_2 + \dots + H_n$ ,  $H_i \cdot H_j = \emptyset$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , tad

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(A/H_k) \cdot P(H_k).$$

Baijesa formula:

$$P(H_i/A) = \frac{P(A/H_i) \cdot P(H_i)}{\sum_{k=1}^n P(A/H_k) \cdot P(H_k)}.$$

Neatkarīgo mēģinājumu shēma

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k},$$

kur  $P_n(k)$  — varbūtība, ka  $n$  neatkarīgos mēģinājumos  $A$  ir noticis  $k$  reizes ( $k=0, 1, \dots, n$ ) un  $P(A)=p$ .

Varbūtība, ka notikums  $A$  ir noticis  $n$  reizes, ir

$$P_n(n) = p^n.$$

Varbūtība, ka notikums  $A$  nenotiks ne reizi, ir

$$P_n(0) = (1-p)^n.$$

Varbūtība, ka notikums notiks vismaz vienu reizi, ir

$$P(A \text{ notiks vismaz 1 reizi}) = 1 - (1-p)^n.$$

Varbūtība, ka notikums  $A$  notiks ne mazāk kā  $k_1$  un ne vairāk kā  $k_2$  reizes, ir vienāda ar

$$P_n(k_1) + P_n(k_1+1) + \dots + P_n(k_2).$$

## Neatkarīgo mēģinājumu shēmas robežteorēmas

**Puasona teorēma:**

$$P_n(k) \approx \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad \lambda = np.$$

**Lokālā Muavra—Laplasa teorēma:**

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}.$$

**Integrālā Muavra—Laplasa teorēma.**

Ja  $\mu$  ir skaits, cik reizes  $n$  neatkarīgos mēģinājumos ir noticis notikums  $A$ , tad

$$P(k_1 \leq \mu \leq k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right),$$

kur  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  — Laplasa funkcija.

Visvarbūtīgākais notikuma  $A$  iestāšanās skaits  $n$  neatkarīgos mēģinājumos ir  $k_0 = [(n+1)p]$ , ja  $(n+1)p$  nav vesels skaitlis. Ja  $(n+1)p$  ir vesels skaitlis, tad ir divas visvarbūtīgākās vērtības  $(n+1)p-1$  un  $(n+1)p$ .

## 14.2. GADĪJUMA LIELUMI

Gadījuma lielumu, kuram ir galīgs vai sanumurējams skaits vērtību, sauc par *diskrētu gadījuma lielumu*. Šādu gadījuma lielumu  $X$  uzdod ar sadalījuma rindas palīdzību:

Vērtība	$x_1$	$x_2$	...	$x_k$	...	$p_i = P(X = x_i), \quad i = 1, 2, \dots,$ $0 \leq p_i \leq 1, \quad \sum_i p_i = 1.$
Varbūtība	$p_1$	$p_2$	...	$p_k$	...	

Gadījuma lielumu  $X$  sauc par *nepārtrauktu*, ja eksistē tāda funkcija  $p(x) \geq 0$ , ka  $\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$  un jebkuriem reāliem  $\alpha$  un  $\beta$

$$P(\alpha \leq X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} p(x) dx.$$

Funkciju  $p(x)$  sauc par *sadalījuma blīvuma funkciju*.

Par gadījuma lieluma  $X$  varbūtību sadalījuma funkciju sauc funkciju  $F(x) = P(X < x)$ ,  $x \in (-\infty, \infty)$ .

Sadalījuma funkcijas īpašības:

- 1)  $0 \leq F(x) \leq 1$ ;
- 2) ja  $x_1 < x_2$ , tad  $F(x_1) \leq F(x_2)$ ;
- 3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ ;
- 4)  $F(x)$  ir nepārtraukta no kreisās puses;
- 5)  $P(\alpha \leq X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$ ; 6)  $F'(x) = p(x)$ .

## Gadījuma lielumu skaitliskie raksturotāji

### Matemātiskā cerība

$$MX = \begin{cases} \sum x_i p_i, & \text{ja } X \text{ — diskrets gadījuma lielums,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx, & \text{ja } X \text{ — nepārtraukts gadījuma lielums.} \end{cases}$$

Īpašības.

$$MC = C, \quad C \text{ — konstante;}$$

$$M(cX) = cMX;$$

$$M(X_1 + X_2) = MX_1 + MX_2;$$

$$M(X_1 \cdot X_2) = MX_1 \cdot MX_2, \text{ ja } X_1 \text{ un } X_2 \text{ ir neatkarīgi.}$$

**Dispersija**  $DX = M(X - MX)^2 = MX^2 - (MX)^2$ ;

$$DX = \begin{cases} \sum x_i^2 p_i - (MX)^2, & \text{ja } X \text{ — diskrets gadījuma lielums,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx - (MX)^2, & \text{ja } X \text{ — nepārtraukts gadījuma} \\ & \text{lielums.} \end{cases}$$

Īpašības:

$$D(C) = 0, \quad C \text{ — konstante;}$$

$$D(cX) = c^2 DX;$$

$$D(X_1 + X_2) = DX_1 + DX_2, \text{ ja } X_1 \text{ un } X_2 \text{ ir neatkarīgi.}$$

$\sigma(X) = \sqrt{DX}$  — vidējā kvadrātiskā novirze.

### Gadījuma lieluma $X$ $k$ -tās kārtas sākuma moments

$$\alpha_k = M(X^k) = \begin{cases} \sum x_i^k p_i, & \text{ja } X \text{ — diskrēts,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x) dx, & \text{ja } X \text{ — nepārtraukts.} \end{cases}$$

### Gadījuma lieluma $X$ $k$ -tās kārtas centrālais moments

$$\mu_k(x) = M(X - MX)^k = \begin{cases} \sum (x_i - MX)^k p_i, & \text{ja } X \text{ — diskrēts,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^k p(x) dx, & \text{ja } X \text{ — nepārtraukts.} \end{cases}$$

### Divu gadījuma lielumu $X$ un $Y$ kovariācija

$$K_{XY} = M((X - MX)(Y - MY)).$$

$$\text{Korelācijas koeficients } r_{XY} = \frac{K_{xy}}{\sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY}}.$$

Īpašības.

- 1)  $-1 \leq r_{XY} \leq 1$ ;
- 2)  $Y = kX + b \Leftrightarrow |r_{xy}| = 1$ .

## Svarīgākie varbūtību sadalījumi

### Binomiālais varbūtību sadalījums:

$$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k=0, 1, 2, \dots, n;$$
$$MX = np, \quad DX = np(1-p).$$

### Puasona varbūtību sadalījums:

$$P(X=k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad k=0, 1, 2, \dots, \lambda > 0,$$
$$MX = \lambda, \quad DX = \lambda.$$

### Vienmērīgais varbūtību sadalījums intervālā $[a, b]$ .

$$\text{Sadalījuma funkcija } F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

$$\text{Blīvuma funkcija } p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x > b, \end{cases}$$

$$MX = \frac{a+b}{2}, \quad DX = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

### Eksponenciālais varbūtību sadalījums.

$$\text{Sadalījuma funkcija } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \end{cases} \quad \lambda > 0.$$

$$\text{Blīvuma funkcija } p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \end{cases}$$

$$MX = \frac{1}{\lambda}; \quad DX = \frac{1}{\lambda^2}.$$

### Normālais jeb Gausa varbūtību sadalījums.

Sadalījuma funkcija

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}} du, \quad a \in \mathbf{R}, \sigma > 0, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Blīvuma funkcija

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad MX = a, \quad DX = \sigma^2.$$

Ja  $a=0$ ,  $\sigma=1$ , tad sadalījumu sauc par *standarta normālo sadalījumu*.

$$P(\alpha \leq X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

$$\text{kur } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du \text{ — Laplasa funkcija;}$$

$$P(|X-a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

### $\chi^2$ varbūtību sadalījums.

Ja  $X_1, X_2, \dots, X_n$  savā starpā neatkarīgi standarta normāli gadījuma lielumi, tad

$$\chi_n^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 = X$$

sauc par  $\chi_n^2$  (*hī kvadrātā*) *gadījuma lielumu* ar  $n$  brīvības pakāpēm.

$$\text{Blīvuma funkcija } p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^{n-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, & x \geq 0, \end{cases}$$

$$MX = n, \quad DX = 2n.$$

### Stjudenta varbūtību sadalījums.

Gadījuma lieluma  $t_n = \frac{X}{\sqrt{\frac{1}{n} \chi_n^2}}$  varbūtību sadalījumu, kur  $X$  —

standarta normāls gadījuma lielums un  $\chi_n^2$  — no  $X$  neatkarīgs  $\chi^2$  gadījuma lielums, sauc par *Stjudenta varbūtību sadalījumu* ar  $n$  brīvības pakāpēm.

$$\text{Blīvuma funkcija } p(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}}}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

**Čebiševa nevienādība.** Ja gadījuma lielumam  $X$  eksistē dispersija  $DX$ , tad jebkuram  $\varepsilon > 0$

$$P(|X - MX| > \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

### Lielo skaitļu likums (Čebiševa teorēma).

Ja  $X_1, X_2, \dots$  ir pa pāriem nekorelēti gadījuma lielumi ar vienmērīgi ierobežotām dispersijām  $DX_n \leq c$ ,  $n \geq 1$ , tad jebkuram  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n MX_i\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

### Centrālā robežteorēma.

Ja  $X_1, X_2, \dots$  ir neatkarīgi un vienādi sadalīti gadījuma lielumi ar  $MX_n = a$ ,  $DX_n = \sigma^2$ ,  $n \geq 1$ , tad normēto summu

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - na}{\sigma\sqrt{n}}$$

sadalījuma likumu virkne konverģē uz standarta normālo sadalījumu.

### 14.3. MATEMĀTISKĀ STATISTIKA

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — izlase,  $x_i, i=1, 2, \dots, n$ , — izlases elementi,  $n$  — izlases apjoms.

Empīriskā sadalījuma funkcija  $F_n^*(x) = \frac{n_x}{n}$ , kur  $n_x$  ir to izlases elementu skaits, kuri mazāki nekā  $x$ .

Jebkuram  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|F_n^*(x) - F(x)| < \varepsilon) = 1.$$

#### Empīriskie novērtējumi

Empīriskā matemātiskā cerība  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  — matemātiskās cerības novērtējums.

Empīriskā dispersija  $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$  — dispersijas novērtējums.

Izlabotā empīriskā dispersija  $S_{\text{lab}}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$  — nenovirzīts dispersijas novērtējums.

Empīriskie momenti  $\hat{\alpha}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k$  —  $k$ -tās kārtas sākuma momenta novērtējums.

#### Gadījuma lielumu $X$ un $Y$ empīriskais korelācijas moments

Ja  $((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n))$  — izlase, tad

$\hat{K}_{XY} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$  — korelācijas momenta novērtējums,

$\hat{r}_{XY} = \frac{\hat{K}_{XY}}{s_X \cdot s_Y}$  — korelācijas koeficienta novērtējums,

kur  $s_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ ,  $s_Y = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$ .

Ticamības intervāli normālā sadalījuma parametriem:

a) matemātiskai cerībai  $MX=a$

$$P\left(\bar{x} - \frac{t_\gamma \cdot s}{\sqrt{n-1}} \leq a \leq \bar{x} + \frac{t_\gamma \cdot s}{\sqrt{n-1}}\right) = \gamma,$$

kur  $\bar{x}$  ir empīriskā matemātiskā cerība;  $s^2$  — empīriskā dispersija;  $n$  — izlases apjoms;  $t_\gamma$  apmierina nosacījumu

$$P(|t_{n-1}| < t_\gamma) = \gamma,$$

kur  $t_{n-1}$  — Stjudenta gadījuma lielums ar  $(n-1)$  brīvības pakāpi,  $\gamma$  — ticamības varbūtība;

b) dispersijai  $DX=\sigma^2$

$$P\left(\frac{ns^2}{t_1} \leq \sigma^2 \leq \frac{ns^2}{t_2}\right) = \gamma,$$

kur  $t_1$  un  $t_2$  apmierina nosacījumus

$$P(\chi_{n-1}^2 < t_1) = \frac{1+\gamma}{2},$$

$$P(\chi_{n-1}^2 < t_2) = \frac{1-\gamma}{2},$$

$\chi_{n-1}^2$  ir  $\chi^2$  — gadījuma lielums ar  $(n-1)$  brīvības pakāpi.

### Dažu sadalījuma parametru maksimālās ticamības novērtējumi

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — izlase.

1. Binomiālā sadalījuma parametra  $p=P(A)$  novērtējums:

$$\hat{p} = \frac{n_A}{n},$$

kur  $n_A$  — skaits, cik reizes ir iestājies notikums  $A$ ,  $n$  — izlases apjoms.

2. Puasona sadalījuma parametra  $\lambda$  novērtējums:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

3. Eksponenciālā sadalījuma parametra  $\lambda$  novērtējums:

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}$$

4. Normālā sadalījuma parametra  $a$  un  $\sigma^2$  novērtējumi:

$$\hat{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$$

kur  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ .

	(x) T	x	(x) T	x	(x) T	x
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003
0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004
0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005
0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006
0.0007	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007
0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008
0.0009	0.0009	0.0009	0.0009	0.0009	0.0009	0.0009
0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010
0.0011	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011
0.0012	0.0012	0.0012	0.0012	0.0012	0.0012	0.0012
0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013
0.0014	0.0014	0.0014	0.0014	0.0014	0.0014	0.0014
0.0015	0.0015	0.0015	0.0015	0.0015	0.0015	0.0015
0.0016	0.0016	0.0016	0.0016	0.0016	0.0016	0.0016
0.0017	0.0017	0.0017	0.0017	0.0017	0.0017	0.0017
0.0018	0.0018	0.0018	0.0018	0.0018	0.0018	0.0018
0.0019	0.0019	0.0019	0.0019	0.0019	0.0019	0.0019
0.0020	0.0020	0.0020	0.0020	0.0020	0.0020	0.0020
0.0021	0.0021	0.0021	0.0021	0.0021	0.0021	0.0021
0.0022	0.0022	0.0022	0.0022	0.0022	0.0022	0.0022
0.0023	0.0023	0.0023	0.0023	0.0023	0.0023	0.0023
0.0024	0.0024	0.0024	0.0024	0.0024	0.0024	0.0024
0.0025	0.0025	0.0025	0.0025	0.0025	0.0025	0.0025
0.0026	0.0026	0.0026	0.0026	0.0026	0.0026	0.0026
0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027
0.0028	0.0028	0.0028	0.0028	0.0028	0.0028	0.0028
0.0029	0.0029	0.0029	0.0029	0.0029	0.0029	0.0029
0.0030	0.0030	0.0030	0.0030	0.0030	0.0030	0.0030
0.0031	0.0031	0.0031	0.0031	0.0031	0.0031	0.0031
0.0032	0.0032	0.0032	0.0032	0.0032	0.0032	0.0032
0.0033	0.0033	0.0033	0.0033	0.0033	0.0033	0.0033
0.0034	0.0034	0.0034	0.0034	0.0034	0.0034	0.0034
0.0035	0.0035	0.0035	0.0035	0.0035	0.0035	0.0035
0.0036	0.0036	0.0036	0.0036	0.0036	0.0036	0.0036
0.0037	0.0037	0.0037	0.0037	0.0037	0.0037	0.0037
0.0038	0.0038	0.0038	0.0038	0.0038	0.0038	0.0038
0.0039	0.0039	0.0039	0.0039	0.0039	0.0039	0.0039
0.0040	0.0040	0.0040	0.0040	0.0040	0.0040	0.0040
0.0041	0.0041	0.0041	0.0041	0.0041	0.0041	0.0041
0.0042	0.0042	0.0042	0.0042	0.0042	0.0042	0.0042
0.0043	0.0043	0.0043	0.0043	0.0043	0.0043	0.0043
0.0044	0.0044	0.0044	0.0044	0.0044	0.0044	0.0044
0.0045	0.0045	0.0045	0.0045	0.0045	0.0045	0.0045
0.0046	0.0046	0.0046	0.0046	0.0046	0.0046	0.0046
0.0047	0.0047	0.0047	0.0047	0.0047	0.0047	0.0047
0.0048	0.0048	0.0048	0.0048	0.0048	0.0048	0.0048
0.0049	0.0049	0.0049	0.0049	0.0049	0.0049	0.0049
0.0050	0.0050	0.0050	0.0050	0.0050	0.0050	0.0050

# PIELIKUMS

## GAMMA FUNKCIJA

$x$	$\Gamma(x)$	$x$	$\Gamma(x)$	$x$	$\Gamma(x)$	$x$	$\Gamma(x)$
1,00	1,00000	1,25	0,90640	1,50	0,88623	1,75	0,91906
01	0,99433	26	0,90440	51	0,88659	76	0,92137
02	0,98884	27	0,90250	52	0,88704	77	0,92376
03	0,98355	28	0,90072	53	0,88757	78	0,92623
04	0,97844	29	0,89904	54	0,88818	79	0,92877
1,05	0,97350	1,30	0,89747	1,55	0,88887	1,80	0,93138
06	0,96874	31	0,89600	56	0,88964	81	0,93408
07	0,96415	32	0,89464	57	0,89049	82	0,93685
08	0,95973	33	0,89338	58	0,89142	83	0,93969
09	0,95546	34	0,89222	59	0,89243	84	0,94261
1,10	0,95135	1,35	0,89115	1,60	0,89352	1,85	0,94561
11	0,94740	36	0,89018	61	0,89468	86	0,94869
12	0,94359	37	0,88931	62	0,89592	87	0,95184
13	0,93993	38	0,88854	63	0,89724	88	0,95507
14	0,93642	39	0,88785	64	0,89864	89	0,95838
1,15	0,93304	1,40	0,88726	1,65	0,90012	1,90	0,96177
16	0,92980	41	0,88676	66	0,90167	91	0,96523
17	0,92670	42	0,88636	67	0,90330	92	0,96877
18	0,92373	43	0,88604	68	0,90500	93	0,97240
19	0,92089	44	0,88581	69	0,90678	94	0,97610
1,20	0,91817	1,45	0,88566	1,70	0,90864	1,95	0,97988
21	0,91558	46	0,88560	71	0,91057	96	0,98374
22	0,91311	47	0,88563	72	0,91258	97	0,98768
23	0,91075	48	0,88575	73	0,91467	98	0,99171
24	0,90852	49	0,88595	74	0,91683	99	0,99581
1,25	0,90640	1,50	0,88623	1,75	0,91906	2,00	1,00000

Ja  $x < 1$  ( $x \neq 0, -1, -2, \dots$ ) un  $x > 2$ ,  $\Gamma(x)$  aprēķina, lietojot formulas

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}, \quad \Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1).$$

BESELA FUNKCIJAS

$x$	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$K_0(x)$	$K_1(x)$
0,0	+1,0000	+0,0000	$-\infty$	$-\infty$	+1,000	0,0000	$\infty$	$\infty$
0,1	0,9975	0,0499	-1,5342	-6,4590	1,003	+0,0501	2,4271	9,8538
0,2	0,9900	0,0995	1,0811	3,3238	1,010	0,1005	1,7527	4,7760
0,3	0,9776	0,1483	0,8073	2,2931	1,023	0,1517	1,3725	3,0560
0,4	0,9604	0,1960	0,6060	1,7809	1,040	0,2040	1,1145	2,1844
0,5	+0,9385	+0,2423	-0,4445	-1,4715	1,063	0,2579	0,9244	1,6564
0,6	0,9120	0,2867	0,3085	1,2604	1,092	0,3137	0,7775	1,3028
0,7	0,8812	0,3290	0,1907	1,1032	1,126	0,3719	0,6605	1,0503
0,8	0,8463	0,3688	-0,0868	0,9781	1,167	0,4329	0,5653	0,8618
0,9	0,8075	0,4059	+0,0056	0,8731	1,213	0,4971	0,4867	0,7165
1,0	+0,7652	+0,4401	+0,0883	-0,7812	1,266	0,5652	0,4210	0,6019
1,1	0,7196	0,4709	0,1622	0,6981	1,326	0,6375	0,3656	0,5098
1,2	0,6711	0,4983	0,2281	0,6211	1,394	0,7147	0,3185	0,4346
1,3	0,6201	0,5220	0,2865	0,5485	1,469	0,7973	0,2782	0,3725
1,4	0,5669	0,5419	0,3379	0,4791	1,553	0,8861	0,2437	0,3208
1,5	+0,5118	+0,5579	+0,3824	-0,4123	1,647	0,9817	0,2138	0,2774
1,6	0,4554	0,5699	0,4204	0,3476	1,750	1,085	0,1880	0,2406
1,7	0,3980	0,5778	0,4520	0,2847	1,864	1,196	0,1655	0,2094
1,8	0,3400	0,5815	0,4774	0,2237	1,990	1,317	0,1459	0,1826
1,9	0,2818	0,5812	0,4968	0,1644	2,128	1,448	0,1288	0,1597

$x$	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$K_0(x)$	$K_1(x)$
2,0	+0,2239	+0,5767	+0,5104	-0,1070	2,280	1,591	0,1139	0,1399
2,1	0,1666	0,5683	0,5183	-0,0517	2,446	1,745	0,1008	0,1227
2,2	0,1104	0,5560	0,5208	-0,0015	2,629	1,914	0,08927	0,1079
2,3	0,0555	0,5399	0,5181	0,0523	2,830	2,098	0,07914	0,09498
2,4	0,0025	0,5202	0,5104	0,1005	3,049	2,298	0,07022	0,08372
2,5	-0,0484	+0,4971	+0,4981	+0,1459	3,290	2,517	0,06235	0,07389
2,6	0,0968	0,4708	0,4813	0,1884	3,553	2,755	0,05540	0,06528
2,7	0,1424	0,4416	0,4605	0,2276	3,842	3,016	0,04926	0,05774
2,8	0,1850	0,4097	0,4359	0,2635	4,157	3,301	0,04382	0,05111
2,9	0,2243	0,3754	0,4079	0,2959	4,503	3,613	0,03901	0,04529
3,0	-0,2601	+0,3391	+0,3769	+0,3247	4,881	3,953	0,03474	0,04016
3,1	0,2921	0,3009	0,3431	0,3496	5,294	4,326	0,03095	0,03563
3,2	0,3202	0,2613	0,3070	0,3707	5,747	4,734	0,02759	0,03164
3,3	0,3443	0,2207	0,2691	0,3879	6,243	5,181	0,02461	0,02812
3,4	0,3643	0,1792	0,2296	0,4010	6,785	5,670	0,02196	0,02500
3,5	-0,3801	+0,1374	+0,1890	+0,4102	7,378	6,206	0,01960	0,02224
3,6	0,3918	0,0955	0,1477	0,4154	8,028	6,793	0,01750	0,01979
3,7	0,3992	0,0538	0,1061	0,4167	8,739	7,436	0,01563	0,01763
3,8	0,4026	+0,0128	0,0645	0,4141	9,517	8,140	0,01397	0,01571
3,9	0,4018	-0,0272	+0,0234	0,4078	10,37	8,913	0,01248	0,01400

$x$	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$K_0(x)$	$K_1(x)$
4,0	-0,3971	-0,0660	-0,0169	+0,3979	11,30	9,759	0,01116	0,01248
4,1	0,3887	0,1033	0,0561	0,3846	12,32	10,69	0,009980	0,01114
4,2	0,3766	0,1386	0,0938	0,3680	13,44	11,71	0,008927	0,009938
4,3	0,3610	0,1719	0,1296	0,3484	14,67	12,82	0,007988	0,008872
4,4	0,3423	0,2028	0,1633	0,3260	16,01	14,05	0,007149	0,007923
4,5	-0,3205	-0,2311	-0,1947	+0,3010	17,48	15,39	0,006400	0,007078
4,6	0,2961	0,2566	0,2235	0,2737	19,09	16,86	0,005730	0,006325
4,7	0,2693	0,2791	0,2494	0,2445	20,86	18,48	0,005132	0,005654
4,8	0,2404	0,2985	0,2723	0,2136	22,79	20,25	0,004597	0,005055
4,9	0,2097	0,3147	0,2921	0,1812	24,91	22,20	0,004119	0,004521
5,0	-0,1776	-0,3276	-0,3085	+0,1479	27,24	24,34	3691	4045
5,1	0,1443	0,3371	0,3216	0,1137	29,79	26,68	3308	3619
5,2	0,1103	0,3432	0,3313	0,0792	32,58	29,25	2966	3239
5,3	0,0758	0,3460	0,3374	0,0445	35,65	32,08	2659	2900
5,4	0,0412	0,3453	0,3402	+0,0101	39,01	35,18	2385	2597
5,5	-0,0068	-0,3414	-0,3395	-0,0238	42,69	38,59	2139	2326
5,6	+0,0270	0,3343	0,3354	0,0568	46,74	42,33	1918	2083
5,7	0,0599	0,3241	0,3282	0,0887	51,17	46,44	1721	1866
5,8	0,0917	0,3110	0,3177	0,1192	56,04	50,95	1544	1673
5,9	0,1220	0,2951	0,3044	0,1481	61,38	55,90	1386	1499

$x$	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$K_0(x)$	$K_1(x)$
6,0	+0,1506	-0,2767	-0,2882	-0,1750	67,23	61,34	1244	1344
6,1	0,1773	0,2559	0,2694	0,1998	73,66	67,32	1117	1205
6,2	0,2017	0,2329	0,2483	0,2223	80,72	73,89	1003	1081
6,3	0,2238	0,2081	0,2251	0,2422	88,46	81,10	09001	09691
6,4	0,2433	0,1816	0,1999	0,2596	96,96	89,03	08083	08693
6,5	+0,2601	-0,1538	-0,1732	-0,2741	106,3	97,74	07259	07799
6,6	0,2740	0,1250	0,1452	0,2857	116,5	107,3	06520	06998
6,7	0,2851	0,0953	0,1162	0,2945	127,8	117,8	05857	06280
6,8	0,2931	0,0652	0,0864	0,3002	140,1	129,4	05262	05636
6,9	0,2981	0,0349	0,0563	0,3029	153,7	142,1	04728	05059
7,0	+0,3001	-0,0047	-0,0259	-0,3027	168,6	156,0	04248	04542
7,1	0,2991	+0,0252	+0,0042	0,2995	185,0	171,4	03817	04078
7,2	0,2951	0,0543	0,0339	0,2934	202,9	186,3	03431	03662
7,3	0,2882	0,0826	0,0628	0,2846	222,7	206,8	03084	03288
7,4	0,2786	0,1096	0,0907	0,2731	244,3	227,2	02772	02953
7,5	+0,2663	+0,1352	+0,1173	-0,2591	268,2	249,6	02492	02653
7,6	0,2516	0,1592	0,1424	0,2428	294,3	274,2	02240	02383
7,7	0,2346	0,1813	0,1658	0,2243	323,1	301,3	02014	02141
7,8	0,2154	0,2014	0,1872	0,2039	354,7	331,1	01811	01924
7,9	0,1944	0,2192	0,2065	0,1817	389,4	363,9	01629	01729

$x$	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$K_0(x)$	$K_1(x)$
8.0	+0,1717	+0,2346	+0,2235	-0,1581	427,6	399,9	01465	01554
8.1	0,1475	0,2476	0,2381	0,1331	469,5	439,5	01317	01396
8.2	0,1222	0,2580	0,2501	0,1072	515,6	483,0	01185	01255
8.3	0,0960	0,2657	0,2595	0,0806	566,3	531,0	01066	01128
8.4	0,0692	0,2708	0,2662	0,0535	621,9	583,7	009588	01014
8.5	+0,0419	+0,2731	+0,2702	-0,0262	683,2	641,6	008626	009120
8.6	+0,0146	0,2728	0,2715	+0,0011	750,5	705,4	007761	008200
8.7	-0,0125	0,2697	0,2700	0,0280	824,4	775,5	006983	007374
8.8	0,0392	0,2641	0,2659	0,0544	905,8	852,7	006283	006631
8.9	0,0653	0,2559	0,2592	0,0799	995,2	937,5	005654	005964
9.0	-0,0903	+0,2453	+0,2499	+0,1043	1094	1031	005088	005364
9.1	0,1142	0,2324	0,2388	0,1275	1202	1134	004579	004825
9.2	0,1367	0,2174	0,2245	0,1491	1321	1247	004121	004340
9.3	0,1577	0,2004	0,2086	0,1691	1451	1371	003710	003904
9.4	0,1768	0,1816	0,1907	0,1871	1595	1508	003339	003512
9.5	-0,1939	+0,1613	+0,1712	+0,2032	1753	1658	003006	003160
9.6	0,2090	0,1395	0,1502	0,2171	1927	1824	002706	002843
9.7	0,2218	0,1166	0,1279	0,2287	2119	2006	002436	002559
9.8	0,2323	0,0928	0,1045	0,2379	2329	2207	002193	002302
9.9	0,2403	0,0684	0,0804	0,2447	2561	2428	001975	002072
10.0	-0,2459	+0,0435	+0,0557	+0,2490	2816	2671	001778	001865

### 1. VEIDA ELIPTISKIE INTEGRĀĻI:

$$F(k, \varphi), k = \sin \alpha.$$

$\varphi$	$\alpha$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0°	0°	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	0°	0,1745	0,1746	0,1746	0,1748	0,1749	0,1751	0,1752	0,1753	0,1754	0,1754
20	0°	0,3491	0,3498	0,3499	0,3508	0,3520	0,3533	0,3545	0,3555	0,3561	0,3564
30	0°	0,5236	0,5243	0,5263	0,5294	0,5334	0,5379	0,5422	0,5459	0,5484	0,5493
40	0°	0,6981	0,6997	0,7043	0,7116	0,7213	0,7323	0,7436	0,7535	0,7604	0,7629
50	0°	0,8727	0,8756	0,8842	0,8982	0,9173	0,9401	0,9647	0,9876	1,0044	1,0107
60	0°	1,0472	1,0519	1,0660	1,0896	1,1226	1,1643	1,2126	1,2619	1,3014	1,3170
70	0°	1,2217	1,2286	1,2495	1,2853	1,3372	1,4068	1,4944	1,5959	1,6918	1,7354
80	0°	1,3963	1,4056	1,4344	1,4846	1,5597	1,6660	1,8125	2,0119	2,2653	2,4362
90	0°	1,5708	1,5828	1,6200	1,6858	1,7868	1,9356	2,1565	2,5046	3,1534	$\infty$

### 2. VEIDA ELIPTISKIE INTEGRĀĻI:

$$E(k, \varphi), k = \sin \alpha.$$

$\varphi$	$\alpha$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0°	0°	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	0°	0,1745	0,1745	0,1744	0,1743	0,1742	0,1740	0,1739	0,1738	0,1737	0,1736
20	0°	0,3491	0,3489	0,3483	0,3473	0,3462	0,3450	0,3438	0,3429	0,3422	0,3420
30	0°	0,5236	0,5229	0,5209	0,5179	0,5141	0,5100	0,5061	0,5029	0,5007	0,5000
40	0°	0,6981	0,6966	0,6921	0,6851	0,6763	0,6667	0,6575	0,6497	0,6446	0,6428
50	0°	0,8727	0,8698	0,8614	0,8483	0,8317	0,8134	0,7954	0,7801	0,7697	0,7660
60	0°	1,0472	1,0426	1,0290	1,0076	0,9801	0,9493	0,9184	0,8914	0,8728	0,8660
70	0°	1,2217	1,2149	1,1949	1,1632	1,1221	1,0750	1,0266	0,9830	0,9514	0,9397
80	0°	1,3963	1,3870	1,3597	1,3161	1,2590	1,1926	1,1225	1,0565	1,0054	0,9848
90	0°	1,5708	1,5589	1,5238	1,4675	1,3931	1,3055	1,2111	1,1184	1,0401	1,0000

PILNIE ELIPTISKIE INTEGRĀĻI:

$$k = \sin \alpha.$$

$\alpha^\circ$	K	E	$\alpha^\circ$	K	E	$\alpha^\circ$	K	E
0	1,5708	1,5708	30	1,6858	1,4675	60	2,1565	1,2111
1	1,5709	1,5707	31	1,6941	1,4608	61	2,1842	1,2015
2	1,5713	1,5703	32	1,7028	1,4539	62	2,2132	1,1920
3	1,5719	1,5697	33	1,7119	1,4469	63	2,2435	1,1826
4	1,5727	1,5689	34	1,7214	1,4397	64	2,2754	1,1732
5	1,5738	1,5678	35	1,7312	1,4323	65	2,3088	1,1638
6	1,5751	1,5665	36	1,7415	1,4248	66	2,3439	1,1545
7	1,5767	1,5649	37	1,7522	1,4171	67	2,3809	1,1453
8	1,5785	1,5632	38	1,7633	1,4092	68	2,4198	1,1362
9	1,5805	1,5611	39	1,7748	1,4013	69	2,4610	1,1272
10	1,5828	1,5589	40	1,7868	1,3931	70	2,5046	1,1184
11	1,5854	1,5564	41	1,7992	1,3849	71	2,5507	1,1096
12	1,5882	1,5537	42	1,8122	1,3765	72	2,5998	1,1011
13	1,5913	1,5507	43	1,8256	1,3680	73	2,6521	1,0927
14	1,5946	1,5476	44	1,8396	1,3594	74	2,7081	1,0844
15	1,5981	1,5442	45	1,8541	1,3506	75	2,7681	1,0764
16	1,6020	1,5405	46	1,8691	1,3418	76	2,8327	1,0686
17	1,6061	1,5367	47	1,8848	1,3329	77	2,9026	1,0611
18	1,6105	1,5326	48	1,9011	1,3238	78	2,9786	1,0538
19	1,6151	1,5283	49	1,9180	1,3147	79	3,0617	1,0468
20	1,6200	1,5238	50	1,9356	1,3055	80	3,1534	1,0401
21	1,6252	1,5191	51	1,9539	1,2963	81	3,2553	1,0338
22	1,6307	1,5141	52	1,9729	1,2870	82	3,3699	1,0278
23	1,6365	1,5090	53	1,9927	1,2776	83	3,5004	1,0223
24	1,6426	1,5037	54	2,0133	1,2681	84	3,6519	1,0172
25	1,6490	1,4981	55	2,0347	1,2587	85	3,8317	1,0127
26	1,6557	1,4924	56	2,0571	1,2492	86	4,0528	1,0086
27	1,6627	1,4864	57	2,0804	1,2397	87	4,3387	1,0053
28	1,6701	1,4803	58	2,1047	1,2301	88	4,7427	1,0026
29	1,6777	1,4740	59	2,1300	1,2206	89	5,4349	1,0008
30	1,6858	1,4675	60	2,1565	1,2111	90	$\infty$	1,0000

$$F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} = \int_0^{\sin \varphi} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-k^2 t^2}},$$

$$E(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi} d\psi = \int_0^{\sin \varphi} \sqrt{\frac{1-k^2 t^2}{1-t^2}} dt,$$

$$K = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t} \sqrt{1-k^2 t^2}},$$

$$E = E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi} d\psi = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2 t^2}{1-t^2}} dt.$$

$$\text{LAPLASA FUNKCIJAS } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

VĒRTĪBU TABULA

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3888
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

## ALFABĒTISKAIS RĀDĪTĀJS

- abscesa 68, 69  
 absolūtā konverģence 179, 422  
   — vērtība 14  
 absolūti integrējama funkcija 179  
 afīnā koordinātu sistēma 68  
 algebras pamatteorēma 90  
 algebriski pārveidojumi 12  
 algebriskie papildinājumi 93, 98  
 alternējošas rindas 244  
 analītiska funkcija 227, 228  
 Anjēzi līnija 84  
 apakškopa 9  
 apgabala laukums 190  
 apgabals 120  
 apgriezta Furjē transformācija 249  
   — matrica 98  
 apliecēja 133  
 aplikāta 69, 70  
 apotēma 58  
 apslēptā veidā dota funkcija 120  
   — — dotas funkcijas atvasinājumi 112  
 apvērsta funkcija 22  
 argumenta pieaugums 107  
 Arhimēda spirāle 86  
 aritmētiska progresija 16  
   — sakne 14  
 arkksinuss 36, 37  
 arkktangenss 36, 37  
 arksinuss 36, 37  
 arktangenss 36, 37  
 asimptota 135  
 asimptotas 80  
   — attālums no pola 136  
 astroīda 85  
 atkārtotais integrālis 189, 192  
 atlikuma loceklis Lagranža formā 115,  
   127  
 attālums no punkta līdz plaknei 77  
   — — — — taisnei 73  
   — starp diviem punktiem 71  
   — — paralēlām taisnēm 75  
 attēla integrēšanas teorēma 236  
 attēls 235, 239  
 attēlu reizināšana 237  
 augoša funkcija 21  
 augstākas kārtas atvasinājumi 110  
   — — bezgalīgi maza funkcija 105  
   — — diferenciālvienādojumi, kam var  
   pazemināt kārtu 213  
   — — parciālie atvasinājumi 124  
 atvasinājumi 107  
 atvasinājumu izmantošana funkcijas  
   pētīšanā 117  
  
**Baijesa formula** 261  
 bāze 18  
 bāzes vektori 69, 70  
 Bernulli diferenciālvienādojums 207  
   — lemniskāta 85  
   — nevienādība 18  
 Besela diferenciālvienādojums 212  
   — funkcijas 212, 271–275  
   — nevienādība 248  
 beta funkcija 184  
 bezgalīga ģeometriskā progresija 17  
 bezgalīgi lielas funkcijas 105  
   — — virknes 102  
   — — mazas funkcijas 105  
   — — virknes 102  
   — mazu funkciju salīdzināšana 105  
 bezvirpuļu lauks 257  
 bikvadrātviendājumi 25  
 binomiālais varbūtību sadalījums 264  
 binomiālie koeficienti 20  
 binormāle 137  
 blīvuma funkcija 262  
 Borēla teorēma 237, 239  
 būtiski singulārs punkts 231  
  
 centra leņķis 54  
 centrālā robežteorēma 266  
 centrālie momenti 264  
 cikloīda 86  
 ciklotriskās funkcijas 36  
   — un logaritmiskās funkcijas 39  
 ciklotrisko funkciju grafiki 37  
 cilindra vadītāja 60  
   — veidotāja 60  
 cilindri 83  
  
 cilindriskā koordinātu sistēma 70  
 cilindriskā ķermeņa tilpums 188, 190  
   — virsma 188  
 cilindriskās funkcijas 212  
 cilindrs 60  
 cirkulācija 256  
 cisoīda 84

Čebiševa nevienādība 266  
— teorēma 266  
četrlapu roze 86  
četrstūris 53  
četrstūrī ievilkta riņķa līnija 53  
četrstūrim apvilkta riņķa līnija 53

Dalambēra–Eilera nosacījumi 227  
Dalambēra kritērijs 244  
— metode 219  
darbības ar daļām 12  
— — kompleksiem skaitļiem 88  
— — reāliem skaitļiem 11  
daudzstūris 53  
daudzstūru līdzība 50  
daudzvērtīga funkcija 224  
definīcijas apgabals 21, 120  
deģenerēta matrica 97  
Dekarta koordinātu sistēmas transformācijas 71  
— lapa 84  
— slīpņķa koordinātu sistēma 68  
— taisnleņķa koordinātu sistēma 68, 69  
determinanta algebriskie papildinājumi 93  
— īpašības 94  
— izvīzījums 94  
— minori 93  
determinanti 92, 93  
diagonālmatrix 96  
Diamela formula 237, 239  
diferencējama funkcija 107, 108, 109, 122, 125  
diferencējamu funkciju īpašības 111  
diferenciālais operators 251  
diferenciālais 116, 125  
diferenciālvienādojumi 205, 238, 239  
diferenciālvienādojumu sistēmas 214, 215, 216, 240  
dilstoša funkcija 21  
dimensijas 57  
direktrises 78, 79, 89  
Dirihlē integrālis 185  
— problēma 222  
diskrēti gadījuma lielumi 262  
diskriminants 23  
dispersija 263  
divdobumu hiperboloīds 82  
divergence 253, 258, 259  
divkārsšais integrālis 188–191  
divu argumentu funkcijas 120

— — — ekstrēmi 127, 128  
— plakņu savstarpējais novietojums 77  
— taisņu savstarpējais novietojums 74  
drošs notikums 260  
dualitātes princips 10

Eilera diferenciālvienādojums 212  
— formula 142  
— integrālis 184, 186  
— laužto līniju metode 216  
— substitūcijas 148  
eksistences un unitātes teorēma 205  
eksponenciālais varbūtību sadalījums 265  
eksponentfunkcijas 27, 225  
eksponentfunkciju integrēšana 151  
eksponentvienādojumi 28  
ekstrēms 117, 118  
ekvipotenciālā virsma 250  
ekvivalentas bezgalīgi mazas funkcijas 105  
elementārdaļu integrēšana 147  
elementāri neintegrējamas funkcijas 167, 168  
elementāro funkciju atvasinājumi 109  
empīriskais korelācijas moments 267  
empīriskā sadalījuma funkcija 267  
empīriskie novērtējumi 267  
elipse 78, 79  
elipsoīds 81  
eliptiska tipa parciālais diferenciālvienādojums 218, 219  
eliptiskais paraboloids 83  
eliptiskie integrāļi 149, 276  
eliptisks cilindr 83  
evolūta 133  
evolvente 133

faktoriāls 19  
Fermā teorēma 114  
fokālie rādiusi 78, 79, 80  
fokusi 78, 79, 80  
Frenē formulas 139  
Freneļa integrālis 186  
funkcija 21  
funkcijas ekstrēmi 117  
— ieliekums un izliekums 119  
— lielākā un mazākā vērtība 118  
— monotonitāte 117  
— noteikšana, ja dots tās diferenciālais 199, 206

- pārtraukuma punkti 107
- pētīšana 119
- pieaugums 107
- robeža 103, 120, 121
- funkciju nepārtrauktība 106, 121, 122
- rindas 245
- Furjē integrālis 249
- koeficienti 248
- metode 220
- rinda 247
- — kompleksā formā 248
- transformācija 249
  
- gabaliem gluda funkcija 109
- nepārtraukta funkcija 106, 109
- gadījuma lieluma varbūtību sadalījuma funkcija 263
- lielumi 262
- lielumu centrālie momenti 264
- — kovariācija 264
- — sadalījuma blīvuma funkcija 262
- — sākuma momenti 264
- — skaitliskie raksturotāji 263
- notikumi 260
- galvenā normāle 137
- vērtība 178, 180
- galvenie liekumi 142
- gamma funkcija 19, 184, 270
- Gausa–Ostrogradska formula 255
- Gausa varbūtību sadalījums 265
- gradients 251, 252, 258, 259
- grafiskā atvasināšana 113
- integrēšana 171
- grāds 47
- gredzens ar riņķa šķērsriezumu 63
- Grīna formula 198
- Guldena 1. un 2. teorēma 177
  
- ģeodēziskā līnija 143
- ģometrija 47
- ģeometriskā progresija 16
  
- Hamiltona operators** 251, 258
- harakteristiku saimes 219
- sistēma 217
- harakteristiskais vienādojums 219
- harmoniska funkcija 35, 258
- harmoniskas svārstības 36
- harmonisks lauks 257
- Hērona formula 49
- hiperbola 79
- hiperboliskā spirāle 86
- hiperboliskais cilindrs 83
- paraboloīds 83
- hiperboliskās funkcijas 41, 42, 226
- un trigonometriskās funkcijas 43
- hiperbolisku funkciju integrēšana 151
- hipotenūza 49
- homogēna funkcija 206
- sistēma 99
- homogēns diferenciālvienādojums 206, 209, 210
- lauks 252
- parciālais diferenciālvienādojums 217
- horda 54
- hordu īpašības 55
- metode 44
- Hurvica determinants un kritērijs 92
  
- ieliekta līkne (grafiks) 119
- ievilkts lenķis 55
- imaginārā vienība 87
- inerces momenti 177, 191, 194
- integrācijas apgabals 188, 192
- integrālis no pāra un nepāra funkcijas 170
- — periodiskas funkcijas 170
- pa virsmas projekciju 202
- pa virsmu 200
- integrālsумma 168, 188, 191, 195, 197
- integrāļi ar bezgalīgām robežām 178
- , kas atkarīgi no parametra 181
- , kas reducējas uz Eilera integrāļiem 187
- no pārtrauktām funkcijām 180
  
- integrāļu aprēķināšana, lietojot rezidjus 233
- konverģences pazīmes 179, 180
- integrētājs faktors 206
- interpolācijas polinomi 45
- intervāli 11
- inversā funkcija 22
- Laplasa transformācija 237
- matrica 98
- inversās funkcijas atvasinājums 112
- hiperboliskās funkcijas 43, 226
- trigonometriskās funkcijas 36, 38, 39, 44, 226
- inversijas 92
- īpašfunkcijas un īpašvērtības 221

- iracionālu funkciju integrēšana 148
- Ista daļa 12
- īterāciju metode 45
- izlase 267
- izliekta līkne (grafiks) 119
- izolēts singulārs punkts 228
- izvērses teorēmas 238
  
- jakobiāns 193
- jauktais atvasinājums 123
  - reizinājums 67
  
- kanoniskie vienādojumi 218
- Kardāno formulas 91
- kardioīda 85
- katete 49
- klasiskā varbūtība 260
- Klero diferenciālvienādojums 207
- kolineāri vektori 64
- kolonna 93
- kombinatorikas elementi 19
- kombinācijas 19
- komplanāri vektori 64, 67
- kompleksā mainīgā funkcija 223, 225
  - — funkcijas atvasinājums 227
  - — — ierobežotība 224
  - — — integrāli 229
  - — — nepārtrauktība 224
  - — — nulle 224
  - — — robeža 224
- kompleksie skaitļi 87, 88, 89
- komplekso skaitļu algebriskā forma 87
  - — eksponenciālā forma 89
  - — trigonometriskā forma 88
- konforms attēlojums 228
- konisks punkts 141
- kontūrs 197
- konuss 61, 82
- konverģences rādiuss 230, 247
- konverģējošas skaitļu virknes 101
- konvolūcija 237, 241
- koordinātas 68, 69, 70
- koordinātu asu pagrieziens 71
  - plaknes 69
  - sistēma plaknē 68, 69
  - sistēmas telpā 69, 70
- kopas 9, 10
- korelācijas koeficients 264, 267
- kosekanss 30
- kosinus transformācija 249
- kosinuss 29
  
- kosinusu teorēma 48
- Košī–Bunakovska nevienādība 18
- Košī integrālā formula 229
  - kritērijs 244
  - problēma 218
- Košī–Rimaņa nosacījumi 227
- Košī teorēma 114, 229
- kovariācija 264
- kotangenss 30
- Krāmera formulas 100
- kritiskie punkti 118
- Kronekera–Kapelli teorēma 99
- Kronekera simbols 96
- kubs 58
- kvadrātiska matrica 95
- kvadrātiskas funkcijas 23
- kvadrātnevienādības 24
- kvadrāts 52
- kvadrātviensējuma atrisinājums 23
- kvazilineārs parciāldiferenciālvienādojums 217
- kvocients 16
  
- ķēdes līnija 86
- ķermeņa tilpums 175, 190, 194
- ķīlis 59
  
- labais trijnieks 67
- Lagranža diferenciālvienādojums 207
  - interpolācijas polinoms 45, 90
  - konstantu variācijas metode 212
  - teorēma 114
- Laplasa funkcija 262
  - funkcijas tabula 278, 279
  - integrālis 185, 235
  - operators 222, 257, 258, 259
  - transformācija 235
  - transformācijas pamatformulas 241, 242
  - — pamatīpašības 235, 236, 237
  - vienādojums 222, 257
- lauka potenciāls 257
- laukuma diferenciālis 188, 189, 190
- laukums 174, 190, 198
- Leibnica formula 111, 112
  - kritērijs 244
- leņķis 29, 47
  - starp divām plaknēm 77
  - — — taisnēm 75
  - — koordinātu līnijām 142
  - — līknēm 131

- — taisni un plakni 75
- — vektoriem 66
- — virsmas līnijām 142
- Ležandra formula 185
- liekuma centrs un riņķis 132, 137
- lielo skaitļu likums 266
- līklīniju koordinātu līnijas 140
  - sektora laukums 174
  - trapeces laukums 168, 173, 174
- līkne (līnija) telpā 136
- līknes asimptota 135
  - liekums 132, 137
  - pozitīvais virziens 129
  - virsotnes 132
- līmeņlīnijas 250
- līmeņvirsmas 250, 251
- lineāras funkcijas 22
  - nevienādības 22
- lineārā interpolācija 44, 92
- lineāri neatkarīgas funkcijas 210
- lineārs diferenciālvienādojums 207, 209
  - parciālais diferenciālvienādojums 217
- lineāru vienādojumu sistēmas 98
- līnijintegrālis pēc koordinātām 197, 198
  - — loka garuma 195
- Lipšica nosacījumi 205
- Liuvilla teorēma 228
- lode 62
- logaritmi 18
- logaritmiskā atvasināšana 113
  - spirāle 86
- logaritmiskās funkcijas 27, 28
- logaritmiski vienādojumi 29
- loka diferenciālis 129, 136, 137
  - garums 129, 136, 141, 174, 196
- lokālais ekstrēms 117, 127
- Lopitāla teorēma (kārtula) 114
- Lorāna rinda 231
- mainīgo atdalīšanas metode 205, 220**
- Maklorēna formula 115
- maksimālā ticamība 268, 269
- maksimums 117, 118, 127
- masa 176, 191, 194, 196, 202
- masas centrs 177, 191, 194, 196
- matemātiskā cerība 263
  - statistika 267
- matricas 95, 96, 97
  - elementārie pārveidojumi 98
  - rangs 98
- transponēšana 97
- meridiāni 140
- minimums 117, 118, 127
- minors 93
- moduļa maksimuma princips 228
- monotonas funkcijas 22
- monotoni augoša (dilstoša) funkcija 117
- Muavra formula 42, 88
- Muavra–Laplasa teorēmas 262
- muca 63
- n argumentu funkcija 120**
- reizes diferencējama funkcija 110
- naturālais logaritms 18, 28, 225
- naturālo skaitļu kopa 11
- neatkarīgi notikumi 261
- neatkarīgo mēģinājumu shēma 261
  - — shēmas robežteorēmas 262
- neaugoša funkcija 21
- nedeģenerēta matrica 97
- nediferencējama funkcija 108
- nedilstoša funkcija 21
- neiespējams notikums 260
- nehomogēns diferenciālvienādojums 209, 210
- neīsta daļa 12
- neīstā integrāļa galvenā vērtība 178, 180
- neīstie integrāļi 178
- nenoteikta izteiksme 103
  - sistēma 99
- nenoteiktais integrālis 144
- nenoteiktā integrāļa pamatīpašības 144
  - — pamatmetodes 144
- nenoteiktie integrāļi no eksponentfunkcijām 162, 163
  - — — hiperboliskām funkcijām 163–165
  - — — inversām trigonometriskām un inversām hiperboliskām funkcijām 166, 167
  - — — iracionālām funkcijām 155–157
  - — — logaritmiskām funkcijām 165, 166
  - — — racionālām funkcijām 152–155
  - — — trigonometriskām funkcijām 158–162
- nenoteiktības 102, 105, 106
- nenoteikto integrāļu tabula 152–167

— koeficientu metode 146  
 nepāra funkcija 21  
 nepārtraukti diferencējama funkcija 109, 122  
 — gadījuma lielumi 262  
 nepārtrauktība 106, 121  
 nepārtrauktu funkciju īpašības 106, 121  
 nepilnie eliptiskie integrāļi 150  
 nesaderīga sistēma 99  
 nesavienojami notikumi 260  
 nesingulāra matrica 97  
 netriviālie atrisinājumi 99  
 nevienādības 15  
 nogriežņa dalīšana 71  
 — viduspunkts 72  
 normālais varbūtību sadalījums 265  
 normāle 130, 140, 141, 251  
 normāles nogrieznis 131  
 — pozitīvais virziens 130  
 — vienādojums 108, 130  
 normālplakne 137  
 normālšķēlums 142  
 normālvektors 72, 76  
 normējošais reizinātājs 73, 76  
 nosacītā konverģence 244  
 — varbūtība 261  
 nosacītie ekstrēmi 128  
 nošķelta piramīda 59  
 nošķelts konuss 61  
 — riņķa cilindrs 61  
 noteikta sistēma 99  
 noteiktais integrālis 168  
 noteiktā integrāļa aprēķināšana 170  
 — — lietojumi 173–177  
 — — pamatīpašības 169  
 noteikto integrāļu tabula 185–188  
 notikumu reizinājums 260  
 — summa 260  
 — varbūtība 260  
 $n$ -tās kārtas atvasinājumi 110, 111  
 — — diferenciālis 117, 126  
 — — diferenciālvienādojumi 209  
 — — saskares punkts 131  
 nulles matrica 95  
 — vektors 64

Ņūtona binoms 20  
 — interpolācijas polinoms 46  
 Ņūtona–Leibnisa formula 170, 229  
 Ņūtona metode 45, 91, 92

operatoru metodes lietojumi 238  
 — vienādojums 239, 240  
 ordināta 68, 69  
 ordinātas pieaugums 116  
 oriģināls 235  
 ortogonāla matrica 97  
 orsts 64  
 oskulējošā plakne 137  
 Ostrogradska metode 147  
 otrā ievērojamā robeža 104  
 — kvadrātiskā forma 142  
 — veida līnijas integrālis 197  
 — — — integrāļa pilnā forma 198  
 — — pārtraukuma punkts 107  
 — — virsmas integrālis 202  
 otrās kārtas daļējie atvasinājumi 123  
 — — — diferenciālvienādojumi 218  
 — — — virsmas 81

pakāpes 13  
 — ar racionāliem kāpinātājiem 14  
 — funkcijas 26  
 pakāpju rinda 230, 247  
 pamatintegrāļu tabula 145  
 pamatteorēma par rezīdiem 233  
 paplašinātā matrica 99  
 pāra funkcija 21  
 parabola 23, 80, 81  
 paraboliskais cilindrs 83  
 parabolu formula 172  
 paralelograma likums 64  
 paralelograms 51  
 paralēlā pārnese 71  
 paralēles 140  
 paralēlskalnis 57  
 parametriski dotas funkcijas atvasinājumi 112  
 daļējais diferenciālis 125  
 — pieaugums 122  
 daļēji integrēšana 144, 151, 170  
 daļējie atvasinājumi 122, 123, 124  
 — diferenciālvienādojumi 217, 218, 219  
 daļējsumma 243  
 pārbīdes teorēma 236  
 pārliekuma punkti 119  
 Parsevāla vienādība 248  
 partikulārais atrisinājums 210  
 pārtraukta funkcija 107  
 Paskāla trijstūris 20  
 periodiska funkcija 21  
 permutācijas 19, 92

- perpendikulāršķēlums 57  
 pieaugums 107  
 pieskare 129  
 pieskares nogrieznis 131  
 — pagrieziņa leņķis 132  
 — pozitīvais virziens 130  
 — vienādojums 108, 130  
 — virziena koeficients 108  
 pieskarplakne 140, 141  
 pieskaru metode 45  
 pieslejplakne 137  
 pilnais diferenciālis 125  
 — liekums 143  
 pilnā varbūtība 261  
 pilnie eliptiskie integrāļi 150, 277  
 piramīda 58  
 pirmā ievērojamā robeža 104  
 — kvadrātiskā forma 141  
 — veida līnijas integrālis 195  
 — — — integrāļu lietojumi 196  
 — — pārtraukuma punkts 107  
 — — virsmas integrālis 200  
 — — — integrāļa lietojumi 201  
 — — — — aprēķināšana 201  
 pirmās kārtas atvasinājums 107  
 — — diferenciālvienādojumi 205, 206, 207  
 — — diferenciālis 116, 117  
 pirmintegrāļi 217  
 Pitagora teorēma 49  
 plakans lauks 250  
 plakne 76  
 plaknes vektoru lauks 252  
 — vienādojumi 76, 77  
 planimetrija 47  
 plūsma 254  
 polārais leņķis 69, 140  
 — rādiuss 69  
 polārā koordinātu sistēma 69  
 — subnormāle 131  
 polārās normāles nogrieznis 131  
 — pieskares nogrieznis 131  
 polinoma saknes 90, 91, 92  
 polinoms 25, 90  
 polinomu dalīšana 26  
 pols 69, 231  
 potenciāls lauks 257  
 pozitīvas rindas 243  
 primitīvā funkcija 144  
 prizma 57  
 procenti 13  
 progresijas 16  
 proporcijas 12, 13  
 Puasona integrālis 185, 221  
 — teorēma 262  
 — varbūtību sadalījums 264  
 puskubiskā parabola 84  
 racionālas funkcijas sadalīšana elementārdaļās 146  
 racionālo skaitļu kopa 11  
 racionālu funkciju integrēšana 146  
 radiāns 47  
 rādiusvektors 64, 68, 69  
 raksturīgais vienādojums 208, 209, 214  
 reāla argumenta kompleksas funkcijas 223  
 — skaitļa modulis 14  
 reālo skaitļu apakškopas 11, 12  
 redukcijas formulas 33  
 regulāra funkcija 227  
 — nošķelta piramīda 59  
 — piramīda 58  
 — prizma 57  
 regulārs daudzskaldnis 59, 60  
 — daudzstūris 54  
 — tetraedrs 58  
 rektificējošā plakne 137  
 rezīdiji 232  
 rezīdiju pamatteorēma 233  
 Rikati diferenciālvienādojums 207  
 rinda 230, 231, 243  
 rindas atlikums 243, 245  
 — integrēšana pa locekļiem 246  
 — summa 230, 243, 245  
 rindu diverģence 243  
 — īpašības 243  
 — izmantošana 170  
 — konverģence 230, 243, 244, 245  
 riņķa diametrs 54  
 — gredzens 56  
 — horda 54  
 — laukums 55  
 — līnija 54, 77  
 — līnijas centra leņķis 29  
 — — garums 55  
 — — loka garums 55  
 — — parametriskie vienādojumi 77  
 — — rādiuss 54  
 — loks 54  
 — segments 54, 56  
 — sekante, sektors, tangente 54

riņķis 54  
robeža 101, 120  
Rolla teorēma 114  
rombs 51  
rotācijas divdobumu hiperboloīds 82  
— elipsoīds 81  
— konuss 82  
— ķermeņa tilpums 175  
— paraboloids 83  
— viendobuma hiperboloīds 174  
— virsmas laukums 174  
rotors 253, 254, 256, 258  
Runges—Kuta metode 216

adalījuma blīvuma funkcija 262  
— rinda 262  
saderīga sistēma 99  
saīsinātās reizināšanas formulas 17  
saistītas harmoniskas funkcijas 228  
saknes 14  
— tuvināta vērtība 44  
sākuma momenti 264  
saliktas funkcijas atvasinājums 112  
saskares punkts 131  
segļu punkts 127, 208  
segments 11, 54  
sekanss 30  
sekante 54, 55  
sektors 54  
sfēra 81  
sfēriskā koordinātu sistēma 70  
signum 15  
siltuma vadīšanas vienādojums 221  
simetriska matrica 97  
simetriski grafiki 22  
Simpsona formula 172  
singulāra matrica 97  
singulārie punkti 134, 141, 208, 228  
sinusoīda 31  
sinusoidāli lielumi 35  
sinus transformācija 249  
sinuss 29  
sinusu teorēma 47  
sistēmas koeficienti 99  
— matrica 99  
skaitļu rindas 243  
— rindu summas 245  
— virkne 101  
skalāra lauka atvasinājums 250, 251  
— matrica 96  
skalārs lauks 250

skaldnes 57  
skrūves līnija 139  
slēgtas virsmas ārpusē, iekšpusē 202  
smaguma centrs 177, 178, 191, 194, 196  
solenoidāls lauks 255, 257  
stacionārais punkts 118, 128  
stacionārs lauks 250, 252  
standarta normālais adalījums 265  
statistiskie momenti 176, 177, 191  
stereometrija 56  
Stirlinga formula 19  
stīgas svārstību vienādojums 219, 220  
Stjūdenta varbūtību adalījums 266  
Stoksa formula 203, 256  
strofoīda 85  
subnormāle 131  
substitūcijas metode 144, 170  
subtangente 131  
superpozīcijas princips 211

šķautnes 57

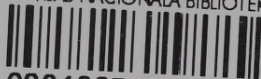
taisne kā divu plakņu šķēluma līnija 74  
— plaknē 72  
— telpā 74  
— un plakne 75  
taisnes vienādojums 72, 73, 74  
— un plaknes krustpunkts 75  
— — — savstarpējais stāvoklis 75  
— virziena koeficients 22  
taisnleņķa trijstūris 49  
taisns riņķa cilindrs 60, 83  
— — konuss 61  
taisnstūra paralēlskaldnis 57  
taisnstūris 52  
taisnstūru formula 172  
tangensoīda 31, 32  
tangenss 30  
tangente 54, 129  
Teilora formula 115, 126  
— rinda 231  
tetraedrs 58  
ticamības intervāli 268  
tilpuma diferenciālis 192  
tilpums 175, 190, 194  
tors 63  
trapece 52  
trapeču formula 172  
trešās pakāpes polinoma sakņu atrašana 91  
trigonometrijas formulas 33, 34, 35

- trigonometriskais riņķis 29
- trigonometriskā rinda 247
- trigonometriskās funkcijas 29, 225
- trigonometriskie vienādojumi un nevienādības 39
- trigonometrisko funkciju grafiki 31
  - — integrēšana 150
  - — raksturojums 30
  - — vērtības 32
- trijstūra laukums 49, 72
  - likums 64
  - ortocentrs 49
  - smaguma centrs 48
  - trijstūris 47, 48, 49
  - trijstūrim apvilktā riņķa līnija 48
  - trijstūrī ievilkta riņķa līnija 48
  - trijstūru līdzība 50
  - triviālais atrisinājums 99
  - trīskāršais integrālis 191
  - trīskāršā integrāļa aprēķināšana 192, 193, 194
    - — lietojumi 194
  - trīslapu roze 86
  - trīsstūrmatrixa 95
- universālā substitūcija 150, 151
- vadītāja 60
- vairākargumentu funkcijas 120
  - — diferenciāli 125
  - — ekstrēmi 127
  - — daļējie atvasinājumi 122
  - — robeža un nepārtrauktība 121
- varbūtība 260
- varbūtību reizināšanas teorēma 261
  - sadalījuma funkcija 263
  - sadalījumi 264, 265, 266
  - saskaitīšanas teorēma 260
- variācijas 19
- veidotāja (veidule) 60
- Veierštrāsa pazīme 246
  - teorēma 107, 122
- vektora virziena kosinusi 68
- vektors 64, 65, 66
- vektoru algebras pamatlikumi 65
  - jauktais reizinājums 67
  - lauka avots 255
  - — cirkulācija 256
  - — intensitāte 254
  - — noplūde 255
  - — potenciāls 257
- — plūsma 254
- lauks 252
- lineāra kombinācija 65
- līnijas 253
- skalārais reizinājums 66
- starpība 65
- summa 64
- vektoriālais reizinājums 67
- vesela racionāla funkcija 22
- veselo skaitļu kopa 11
- vērpe 138
- vērtību apgabals 21
- vidējā aritmētiskā salīdzināšana 18
  - geometriskā salīdzināšana 18
- vidējās vērtības teorēma 169, 189, 192
- vienas kārtas bezgalīgi mazas funkcijas 105
- vienādojuma sakņu tuvināta atrašana 44
- vienodobuma hiperboloīds 81
- vienības matrica 96
- vienkārša sakne 90
- vienmērīgais varbūtību sadalījums 264
- vienmērīgās konverģences pazīmes 183
- vienmērīgi konverģentas rindas 245, 246
  - konverģenti integrāļi 182
- viļņu vienādojums 219
- virkne 101
- virknes robeža 101, 230
- virisma 120, 139
- virsmas galveno liekumu rādiusi 142
  - ģeodēziskā līnija 143
  - integrālis 200
  - laukuma diferenciālis 200
  - laukums 141, 191, 201
  - normāles vienības vektors 200
  - normālšķelums 142
  - orientācija 202
  - punktu klasifikācija 143
  - vidējais liekums 142
- virziena koeficients 22
  - kosinusi 68
- vispārīgais atrisinājums 205, 209, 210, 212, 217
- Vjeta teorēma 24, 90
- Voltēra integrālvienādojums 241
- Vronska determinants 210
- zemintegrāļa funkcija 144, 168
  - izteiksme 144, 168

**OBLIGĀTAIS  
EKSEMPĻĀRS**

2. 80

LATVIJAS NACIONĀLA BIBLIOTEKA



0304007422

97-3  
L 429

Grāmata vecāko klašu skolēniem,  
studentiem un  
visiem matemātikas lietotājiem  
matemātikas jēdzienu,  
formulu un pamatlikumu  
ātrai uzziņai

Algebras elementi  
Funkcijas, vienādojumi, nevienādības  
Ģeometrija  
Analītiskā ģeometrija  
Lineārā algebra  
Diferenciālrēķini  
Diferenciālģeometrija  
Integrālrēķini  
Diferenciālvienādojumi  
Kompleksā mainīgā funkciju teorija  
Laplasa transformācija, operatoru rēķini  
Rindas  
Lauku teorijas elementi  
Varbūtību teorija un matemātiskā statistika



ZVAIGZNE ABC

ISBN 9984-04-398-3