51
706

J. RĀTS

TĒLOTĀJA ĢEOMETRIJA

LATVIJAS VALSTS IZDEVNIECĪBA

51
706

L

J. RĀTS

TĒLOTĀJA ĢEOMETRIJA

Otrais izdevums

LATVIJAS VALSTS IZDEVNIECĪBA
RĪGĀ 1959

Latv. PSR Valsts Bibliotēka
Inv. 60-771
0309065760

Ю. Раат

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Латвийское государственное издательство

На латышском языке

LATV. PSR VALSTS BIBLIOTEKA

Rāts Juris Jāņa d.

TĒLOTĀJA ĢEOMETRIJA.

Redaktors U. Grīnfelds.
Mākslinieciskā redaktore N. Šakirjanova.
Tehniskā redaktore N. Ērenšteine.
Korektore A. Cakare
Nodota salikšanai 1959. g. 21. maijā. Parakstīta iespiešanai 1959. g. 26. oktobrī. Papīra formāts 60×92¹/₁₆. 24,0 fiz. iespiedl.; 24,0 uzsk. iespiedl.; 25,18 izdevn. l. Metiens 3000 eks. JT 25107. Maksā 9 rbļ. 05 kap.

Latvijas Valsts izdevniecība Rīgā, Padomju bulv. 24. Izdevn. Nr. 12079/Z858. Iespiesta Latvijas PSR Kultūras ministrijas poligrafiskās rūpniecības pārvaldes 2. tipografijā Rīgā, Dzirnavu ielā 57. Pasūt. Nr. 2131.
515

PRIEKŠVĀRDS

Tēlotājas ģeometrijas mācību grāmata, kas pirmajā izdevumā iznāca divos atsevišķos sējumos, iznāk tagad apvienotā izdevumā. Lai samazinātu grāmatas apjomu, jaunajā izdevumā ir svītrota visa viela, kas neietilpst tehnisko fakultāšu mācību programās un kas bija paredzēta studentu patstāvīgajam zinātniskajam darbam. Bez tam profilā projekciju plakne, lai varētu to izmantot uzdevumu risināšanai, ir ievesta jau pašā sākumā.

Grāmatai ir vairākas īpatnības. Liela uzmanība veltīta t. s. tehniskās telpas apjautai, tāpēc aplūkoti ne tikai ģeometriski ķermeņi, bet arī ķermeņi, kas maz atšķiras no tehniskajiem ķermeņiem. Lai tuvinātu ģeometrisko rasējumu tehniskajam rasējumam, mazāk lietota projekciju ass; tās izvēle izmantota kā metode, ar kuru var vienkāršot atrisinājumus. Pavisam maza vieta ierādīta pēdu elementiem, jo tiem ir niecīga praktiska nozīme un bez tiem pozicionālo uzdevumu atrisināšanu visos attēlojuma veidos var unificēt. Ortogonālās projekcijās maz izmantoti paskaidrojošie (telpiskie) attēli, jo tie traucē attīstīt telpas apjautu. Parādīta konstrukciju palīgmetodu (projekciju plakņu maiņas, pagriešanas) cieša savstarpēja sakarība, pat identitāte. Ķermeņu ēnas ortogonālās projekcijās parādītas galvenokārt pretskatā, iztirzājot visas īpatnības, ar kādām sastopamies, konstruējot saliktu (tehnisku) daudzskaldņu ēnas. Projekciju plakņu jēdziens ir atdalīts no koordinātu plakņu jēdziena, lai, konstruējot ķermeņa aksonometrisko attēlu, par koordinātu asīm varētu izmantot paša ķermeņa šķautnes un tādējādi vienkāršot attēla konstruēšanu. Liela vērība pievērsta tiem praksē bieži sastopamajiem gadījumiem, kad attēlojamā objekta atsevišķie elementi ir neizdevīgā stāvoklī pret projekciju plaknēm.

Izsaku pateicību Latvijas Valsts universitātes Inženierceltniecības fakultātes Grafikas katedras un Mehānikas fakultātes Mašīnu elementu un mašīnu mehānismu teorijas katedras mācību spēku kolektīviem par lietišķajiem norādījumiem.

Autors

Jelgavā, 1958. gada jūlijā

IEVADS

Tēlotājas ģeometrijas uzdevums ir aplūkot metodes, kā telpas objektus (punktus, līnijas, virsmas un ķermeņus) attēlot plaknē un kā atrisināt ģeometriskus uzdevumus par šiem telpas objektiem ar to attēlu palīdzību.[1]

Tēlotājā ģeometrijā ir vairākas attēlošanas metodes. To izvēle atkarīga no prasībām, kādas uzstādām konstruējamam attēlam.

Labam attēlam vajadzētu būt tādam, lai 1) aplūkotājs no tā iegūtu pēc iespējas pilnīgāku īstenības ilūziju (uzskatāmība!), 2) no tā ar pēc iespējas vienkāršākiem paņēmieniem varētu noteikt attēlotā objekta atsevišķo elementu izmērus (izmērojamība!).

Izgatavot rasējumu, kam būtu abas šīs īpašības, tomēr nav vienmēr iespējams. Vienmēr jārēķinās ar kompromisu starp abām prasībām. Attēlošanas metodes izvēle atkarīga no tā, kuru no šīm prasībām atzīstam par svarīgāku.

Ģeometriski visvienkāršākais paņēmiens kāda telpas objekta attēlošanai ir šī objekta *projecēšana attēlu* jeb *projekciju plaknē*. Par projekciju plakni parasti izvēlas rasējuma plakni. Uzskatot telpas objektu par punktu sakopojumu, tā attēlošanai pietiek konstruēt tikai raksturīgāko punktu projekcijas.

Iedomāsimies telpā kādu attēlu plakni P un punktu O ārpus šīs plaknes (1. ras.). Izvēlēsimies vēl kādu punktu A un vilksim caur punktiem O un A taisni, līdz tā krustosies ar plakni P kādā punktā A'.

Punktu O sauksim par *projekciju centru* jeb *redzes punktu*, taisni caur punktiem O un A par *projecētāju* jeb *redzes staru* un punktu A' par telpas punkta A *attēlu* jeb *projekciju* izvēlētā projekciju plaknē P.

Lai konstruētu kādu citu punktu B un C projekcijas, caur šiem punktiem un projekciju centru O jāvelk atkal projecētāji stari un jāatrod to krustpunkti B' un C' ar projekciju plakni P.

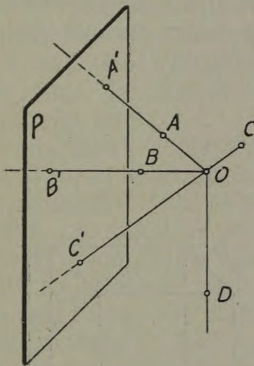
Tā kā caur katru punktu var novilkt tikai vienu projecētāju staru, tad katram punktam ir pilnīgi noteikta projekcija. Vienīgi, ja projecētājs stars caur punktu ir paralēls projekciju plaknei, tad šim punktam neeksistē projekcija izvēlētajā attēlu plaknē P. Tādi punkti

[1] Telpas objektus attēlot var arī uz kādas patvaļīgas, parasti cilindriskas vai sfēriskas virsmas. Šīs tēlotājas ģeometrijas metodes t. s. *panorāmu* un *kupolu perspektīvu* te neaplūkosim.

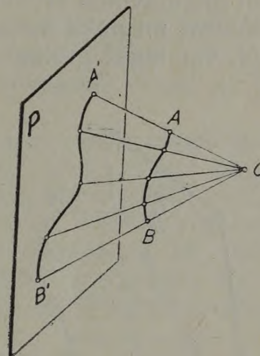
veido plakni, kas paralēla attēlu plaknei un iet caur punktu O (piem., 1. ras. punkts D).

Kādas l ī n i j a s AB (2. ras.) projekciju dabū, konstruējot tās atsevišķo punktu projekcijas. Caur šiem līnijas punktiem vilktie projecētāji stari veido t. s. *projecētāju virsmu,* kuras šķēluma līnija ar attēlu plakni P ir dotās līnijas projekcija $A'B'$.

Tāpat konstruē patvaļīgas virsmas vai ķermeņa projekcijas.



1. ras.



2. ras.

Aplūkotā projecēšanas metode ir raksturīga ar to, ka visi projecētāji stari iet caur vienu kopēju centru O. Tāpēc šo metodi sauc par *centrālās projecēšanas metodi* un priekšmeta attēlu — par priekšmeta *centrālo projekciju.*[1] Tā kā projecētāja virsma te ir koniska virsma, tad iegūto attēlu mēdz saukt arī par *konisko projekciju.*

Bez tikko minētās metodes tēlotājā ģeometrijā lieto arī t. s. *p a r a l ē l ā s p r o j e c ē š a n a s* metodi, kad visi projecētāji stari paralēli kādam dotajam virzienam v (3. ras.). Šo metodi var uzskatīt par iepriekšējās metodes speciālu gadījumu, kad projekciju centrs atrodas bezgalībā.

Caur kādas līnijas AB punktiem vilkti projecētāji stari tad veido cilindrisku projecētāju virsmu, kuras veidules paralēlas v. Tās šķēluma līnija $A'B'$ ar attēlu plakni P ir dotās līnijas AB *paralēlprojekcija* jeb *cilindriskā projekcija.*

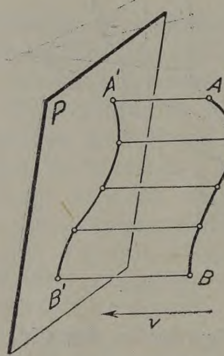
Paralēlprojekcijā projecētājus starus vispār var izvēlēties patvaļīgā slīpumā pret attēlu plakni. Ja projecētāji stari ir p e r p e n d i k u l ā r i attēlu plaknei, tad tādu paralēlprojekciju sauc par *taisno* jeb *ortogonālo projekciju;* visos pārējos gadījumos paralēlprojekciju sauc par *slīpo* jeb *klinogonālo projekciju.*

Lai no kāda priekšmeta attēla iegūtu tādu pašu redzes iespaidu kā no paša priekšmeta, aplūkojot attēlu, jācenšas novietot aci projekciju centrā O. Tā kā praktiski aci varam novietot tikai galīgā

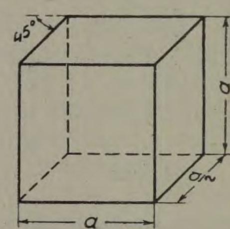
[1] Tāda centrāla projekcija ir, piem., kāda priekšmeta fotografisks attēls. Projekcijas centrs tad ir fotoaparāta objektīva lēcas fokuss.

attālumā no attēlu plaknes, tad, aplūkojot priekšmeta paralēlprojekciju, nekad negūsim tādu pašu redzes iespaidu, kā aplūkojot pašu telpas priekšmetu.

Arī priekšmetu centrālā projekcija tikai tad dos īstenībai atbilstošu ilūziju, ja attiecībā uz projekciju centra O un attēlu plaknes P novietojumu telpā relatīvi pret attēlojamo priekšmetu būs ievēroti vēl daži papildu nosacījumi, par kuriem būs runa vēlāk. Pēc šiem nosacījumiem pagatavotos attēlus centrālā projekcijā sauc par *perspektīviem attēliem* un pašu metodi — *par perspektīvu.* Šos nosacījumus ignorējot, var iegūt greizus attēlus (karikatūras).



3. ras.



4. ras.

Vislielākā uzskatāmība tātad var būt tikai telpas objektu perspektīvām projekcijām. Izmērojamība tām turpretim vissliktākā. Ortogonālās projekcijas savukārt ir labi mērojamas, bet ar vāju uzskatāmību. Vidēju stāvokli starp abiem projekciju veidiem ieņem klinogonālās projekcijas.

Tehniskos rasējumus parasti izpilda ortogonālās projekcijās. Abi pārējie projekciju veidi tās tikai papildina. Tā, piemēram, kādas celtnes projektā parasti vienmēr dod arī šīs celtnes kopskatu perspektīvā. Ja kopskatā ir kādas nepilnības, tad, izdarot tanī vēlamos papildinājumus, šos papildinājumus konstruē arī attēlos ortogonālās projekcijās. Dažādo būvkonstrukciju ortogonālo projekciju ilustrēšanai savukārt lieto to attēlus klinogonālā projekcijā vai t. s. *aksonometrijā.* Ar aksonometrisko projekciju mēdz papildināt arī kādas komplicētākas mašīndaļas tehnisko rasējumu.

Minēto iemeslu dēļ ortogonālās projekcijas ieņem galveno vietu šai darbā. Bet, tā kā tās ir vismazāk uzskatāmas, tad konstrukciju un telpisko sakarību ilustrēšanai kā palīglīdzeklis jau pašā sākumā ir izmantoti arī telpas objektu attēli slīpā projekcijā.

Ja attēlu plakne ir rasējumu plakne, tad samērā uzskatāmu kāda ķermeņa attēlu šai plaknē var dabūt, attēlojot rasējumu plaknei paralēlās ķermeņa šķautnes dabiskā lielumā, bet tai perpendikulārās šķautnes 45° (arī 30° vai 60°) slīpumā pret horizontālo virzienu un divreiz saīsinātas. Šādā slīpā projekcijā, piemēram, 4. rasējumā attēlots kubs, kam divas plaknes ir paralēlas rasējuma plaknei. Pie šādiem nosacījumiem ar P apzīmētais paralelograms iepriekšējos rasējumos ir attēls taisnstūrim, kam divas malas paralēlas, pārējās divas perpendikulāras rasējuma plaknei. Tāda veida t. s. «telpiskos attēlus» atsevišķos gadījumos izmantosim arī turpmāk, un tie mums noderēs kā telpisku modeļu aizstājēji.[1]

Tehnisko rasējumu bieži vien mēdz saukt par tehnikas valodu. Ja tā, tad tēlotājai ģeometrijai varētu piešķirt šīs valodas gramatikas lomu. Tai jānoskaidro tehniskās rasēšanas likumi un jāiemāca tos pareizi lietot.

Nodarbības tēlotājā ģeometrijā bez tam palīdz izkopt spēju attēlotās figūras iedomāties telpiski jeb, kā saka, «lasīt» pagatavotos rasējumus. Šīs t. s. *telpas apjautas* izkopšanai jāveltī nopietna uzmanība, jau sākot ar pirmajiem rasējumiem. Nekādā ziņā necensties tēlotājas ģeometrijas likumus mehāniski iemācīties, bet vienmēr tos saistīt ar attēlotā objekta pareizo telpisko priekšstatu. Ne likumus iemācīties (tas nāks pats par sevi), bet redzēt, kā attēlotie objekti izvietoti telpā!

Labs palīglīdzeklis telpas apjautas izkopšanai ir cita pagatavotu rasējumu lasīšana. Šim nolūkam var izmantot attēlus jebkurā tēlotājas ģeometrijas mācību grāmatā. Pie tam ieteicams mēģināt šos attēlus izprast, neņemot palīgā paskaidrojumus tekstā. Sākumā tas varbūt būs pagrūti, bet ar laiku veiksies arvien labāk.

Aplūkojot gatavu rasējumu, jāspēj no tā iegūt tik skaidru telpisku priekšstatu, ka tas neradītu nekādu šaubu par attēlojamā objekta uzbūvi un tā atsevišķo elementu izkārtojumu telpā. Tāpat attēlus pagatavot vai izpildīt tajos kādas papildu konstrukcijas pareizi varēs tikai tas, kam rasējot vienmēr būs skaidrs telpisks priekšstats par attēlojamo objektu.

Tehnisko rasējumu uzskatāmības palielināšanai bieži ņem vērā arī ķermeņa apgaismojumu. Ķermeņa krītošo ēnu noteikšana zināmā mērā ir tīri ģeometriskas dabas uzdevums, kādēļ arī ietilpst tēlotājas ģeometrijas interešu lokā.

Noslēgumā aizrādīsim vēl uz dažiem turpmāk lietotajiem apzīmējumiem un saīsinājumiem.

Punktus vienmēr apzīmēsim ar lielajiem burtiem, dažreiz arī arābu vai romiešu cipariem; līnijas (taisnas vai līkas) ar mazajiem burtiem; plaknes ar alfabēta vidējiem lielajiem burtiem: $P, Q, R, S\ldots$ alfabēta pēdējos burtus X, Y, Z, rezervējot koordinātu asu, bet mazos — x, y, z punktu koordinātu apzīmējumiem.

[1] Paralēli šiem telpiskajiem attēliem (kā arī tur, kur to trūkst) lasītājs var, protams, lietot arī paša pagatavotos telpiskos modeļus. Izmantot šo paņēmienu kā metodi telpisko sakarību noskaidrošanai katrā gadījumā tomēr nav ieteicams. Par kāda objekta novietojumu telpā jāievingrinās spriest jau no šī objekta ortogonālā attēla, un tikai tur, kur tas neizdodas, var ņemt palīgā modeli.

Viena un tā paša punkta, līnijas vai plaknes dažādās projekcijas vienā rasējumā apzīmēsim, pieliekot attiecīgā objekta apzīmējumam pa labi augšā akcentu, piemēram, a', a'', a''', ... (*lasi:* a prim, a divi prim utt.).[1]

Burtam pa labi apakšā pievienotie indeksi, kā a_1, a_2, ..., p_{12}, p_{13}, ... (lasi: a viens, a divi, p viens divi, p viens trīs, ...) apzīmē dažādus vienādas dabas objektus. Ar zvaigznīti pie burta, piemēram, A_*, t_*, apzīmēsim punkta resp. taisnes krītošo ēnu kādā plaknē.

Bez parastajām zīmēm $\parallel$ (paralēls), $\perp$ (perpendikulārs), $=$ (vienlīdzīgs), $\neq$ (nav vienlīdzīgs), $\approx$ (aptuveni vienlīdzīgs), $\equiv$ (identisks, sakrīt ar) utt. lietosim t a i s n a l e ņ ķ a apzīmēšanai rasējumā zīmi ⦝ (taišņu krustojuma vietā loks ar punktu, sk., piem., 29. ras.), lai palīdzētu rasējumā ātri orientēties arī bez paskaidrojuma tekstā. P a r a l ē l u t a i š ņ u uzrādīšanai rasējumā ieteicams tās pārsvītrot ar vienu vai vairākām šķērssvītriņām (sk., piem., 33. ras. taisnes B_1B' un C_1C').

---

[1] Šie dažādie apzīmējumi lielāko tiesu domāti paskaidrojuma teksta vajadzībām. Praktiskos vingrinājumos projekcijas var apzīmēt arī bez akcenta, t. i., ar to pašu burtu, ar kādu apzīmējam telpas objektu. Lai pārāk nepārslogotu rasējumus, jācenšas iztikt ar mazāk apzīmējumiem vai pat pavisam bez tiem.

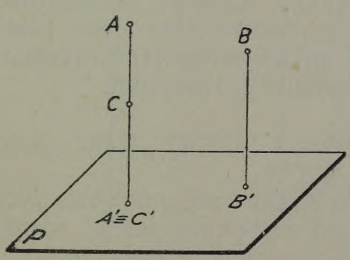
I NODAĻA

ORTOGONĀLO PROJEKCIJU PAMATJĒDZIENI

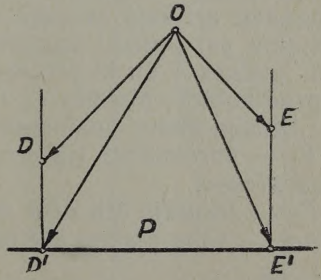
1. §. PUNKTA PROJEKCIJAS

1. Attēlošanas shēma. Mūsu tuvākais uzdevums ir noskaidrot jautājumu, kā iespējams attēlot vienu vai vairākus telpā patvaļīgi novietotus punktus, lai no iegūtā attēla varētu dabūt pareizu priekšstatu par šo punktu relatīvo novietojumu telpā.

Par attēlu plakni pagaidām iedomāsimies telpā horizontālu plakni P (5. ras.). Ja A, B un C ir attēlojamie punkti, tad šo punktu ortogonālās projekcijas A', B' un C' dabūsim, velkot no katra punkta perpendikulu pret attēlu plakni un nosakot šo perpendikulu krustpunktus A', B' un C' ar plakni P. Ir iespējams, ka daži no punktiem, kā, piemēram, A un C, atrodas uz kopēja perpendikula pret attēlu plakni. Šiem punktiem tad ir kopējs attēla punkts, t. i., $A' \equiv C'$.



5. ras.

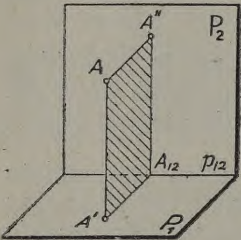


6. ras.

Iedomāsimies tagad kādu novērotāju, kas no punkta O skatās pret attēlu plakni. Situācija shematiski attēlota 6. rasējumā, kur taisne P reprezentē iepriekšējo attēlu plakni.

Punkti D un E ir atkal divi telpas punkti, bet D' un E' — šo punktu ortogonālās projekcijas. Kamēr novērotājs ir galīgā attālumā no plaknes P, redzes iespaids, ko tā acs uztver no attēliem D' un E', ir citāds nekā redzes iespaids no pašiem telpas punktiem D un E. Jo tālāk novērotājs attālināsies no attēlu plaknes, jo mazāks kļūs leņķis starp ik diviem redzes stariem, no kuriem viens iet uz telpas punktu, bet otrs uz tā attēlu. Tas norāda, ka iegūtie attēli tikai t u v i n ā j u m ā dod to pašu redzes iespaidu, ko paši telpas punkti, pie kam šis tuvinājums ir jo labāks, jo tālāk novērotājs atrodas virs attēlu plaknes.

Jautāsim tagad, vai, izmantojot konstruētos attēlus, nevar vismaz ar mērīšanu noteikt punktu izkārtojumu telpā. Mēs zinām, ka katram no tiem jāatrodas uz perpendikula, kas no attēla punkta vilkts pret attēla plakni. Bet šie attēli mums nedod iespēju spriest par to, cik tālu katrs punkts atrodas no attēlu plaknes. Jau redzējām, ka visiem punktiem, kas atrodas uz kopēja perpendikula, ir viena un tā pati projekcija. Lai šie attālumi, tāpat attālumi starp šiem telpas punktiem, būtu nosakāmi, ir vajadzīgi tātad vēl kādi papildinājumi.



7. ras.

Attēlošanas metodi varētu papildināt, pierakstot katram attēla punktam skaitli t. s. *koti,* kas norāda punkta attālumu no attēlu plaknes kādās iepriekš izvēlētās mēra vienībās. Šādas *kotētas projekcijas* palaikam lieto topografijā. Tās ietilpst arī visos projektos, kas saistīti ar apvidus pārveidošanu.[1] Parasto tehnisko objektu attēlošanai tās neder, jo jau pie samērā vienkāršiem objektiem skaitļu būtu tik daudz, ka tie apgrūtinātu rasējuma lasīšanu un padarītu to neuzskatāmu.

Attēlošanas metodi izdevīgāk papildināt, lietojot vēl otru projekciju plakni — perpendikulāru iepriekšējai. Projecējot punktus ortogonāli arī šajā jaunajā attēlu plaknē, dabūjam iztrūkstošo norādījumu par punktu augstumiem virs horizontālās attēlu plaknes. Kāds punkts A un tā projekcijas A' un A'' divās šādās savstarpēji perpendikulārās plaknēs P_1 un P_2 parādīti 7. rasējumā.

Lietosim šādus apzīmējumus:

P_1 — *horizontālā* jeb *pirmā projekciju (attēlu) plakne,* arī *virsskata plakne.*

P_2 — *frontālā* jeb *otrā projekciju plakne,* arī *pretskata plakne.*

p_{12} — (abu plakņu šķēluma taisne) *projekciju ass* jeb vienkārši *ass.*

A' — punkta A *horizontālā* jeb *pirmā projekcija,* arī *virsskats.*

A'' — punkta A *frontālā* jeb *otrā projekcija,* arī *pretskats.*

AA' — *horizontāli projecētājs stars,* arī *pirmais projecētājs (redzes) stars.*

AA'' — *frontāli projecētājs stars,* arī *otrais projecētājs (redzes) stars.*

Caur abiem projecētājiem stariem AA' un AA'' vilktā plakne (ras. iesvītrota) ir perpendikulāra abām projekciju plaknēm P_1 un P_2, tādēļ tā ir perpendikulāra arī abu plakņu šķēluma taisnei — projekciju asij. Šī plakne šķeļ projekciju plaknes pa savstarpēji perpendikulārām taisnēm $A'A_{12}$ un $A''A_{12}$, kas ir perpendikulāras arī projekciju asij. Telpas figūra $AA'A_{12}A''$ tātad ir taisnstūris, tādēļ

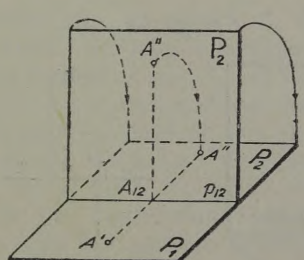
$$AA' = A''A_{12} \text{ un } AA'' = A'A_{12}.$$

[1] Šo metodi atsevišķi iztirzāsim VIII nodaļā.

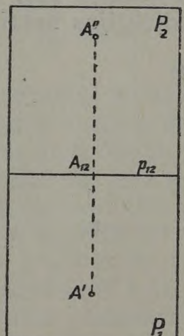
Redzam, ka punkta attālumus līdz projekciju plaknēm P_1 un P_2 nosaka, izmērījot tā projekciju attālumus līdz projekciju asij. *Punkta attālums* līdz *horizontālajai projekciju plaknei (punkta augstums) vienlīdzīgs tā frontālās projekcijas attālumam līdz projekciju asij, bet punkta attālums līdz frontālajai projekciju plaknei (punkta dziļums) vienlīdzīgs tā horizontālās projekcijas attālumam līdz projekciju asij.*

Aplūkojot vienlaicīgi kāda punkta abas projekcijas, var gūt pilnīgu pārskatu par šī punkta novietojumu telpā. Ja arī divu telpas punktu attēli kādā projekcijā sakrīt (piem., punktu A un C attēli 5. ras.), tad otrā projekcijā šie punkti attēlojas kā divi atsevišķi attēlu punkti, un tāpēc var novērtēt abu telpas punktu augstumu starpību. Kāda punkta abas projekcijas divās savstarpēji perpendikulārās plaknēs tātad var pilnīgi aizstāt pašu telpas punktu.

2. Projekciju plakņu savietošana. Lai iepriekš aizrādītā veidā attēlotu kādu telpas objektu, būtu jālieto divas savstarpēji perpendikulāras plaknes, piemēram, divi rasēšanas dēļi. Arī konstrukciju izpildīšana divās plaknēs praktiski neērta. Lai iztiktu ar v i e n u rasējuma plakni, abus attēlus pēc to pagatavošanas savieto vienā plaknē.



8. ras.



9. ras.

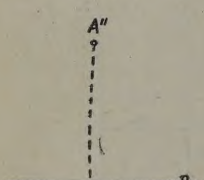
Praktisku apsvērumu dēļ projekciju plakņu savietošanu parasti izdara šādi (sk. 8. ras.). Atstājot horizontālo projekciju plakni P_1 uz vietas, pagriež frontālo projekciju plakni P_2 ap projekciju asi, kamēr tā sakrīt ar horizontālo plakni. Punkta A frontālā projekcija A'' pagriežot pārvietojas pa riņķa loku, un, tā kā taisnes nogrieznis $A''A_{12}$ visu laiku perpendikulārs projekciju asij, tad *pēc plakņu savietošanas punkta abas projekcijas atrodas uz kopēja perpendikula pret projekciju asi.*

Horizontālo projekciju plakni izdevīgāk iedomāties novietotu rasējuma (grāmatas lapas) plaknē. Pēc pagriešanas arī frontālā projekciju plakne tad nogulsies šai plaknē un abas projekcijas atradīsies viena virs otras kā 9. rasējumā. Lai pēc punkta A savietotajām projekcijām varētu spriest par paša punkta novietojumu telpā, frontālā projekciju plakne iepriekš jāiedomājas pacelta vertikāli. Tad punktos A' un A'' attiecīgi pret plaknēm P_1 un P_2 vilktie perpendikuli krustodamies noteiks telpas punktu A.

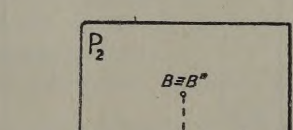
Tā kā projekciju plaknes ir neierobežotas uz visām pusēm, tad savietotā rasējumā plakņu ierobežotāju kontūru un apzīmējumus parasti atmet, atzīmē tikai projekciju asi (10. ras.). Plakņu norobežojumus uzskatāmības dēļ turpmāk lietosim tikai paskaidrojošiem attēliem slīpā projekcijā. Tāpat turpmāk īsuma dēļ ar vārdiem «dots punkts» sapratīsim, ka dotas šī punkta abas projekcijas.

3. Punkti projekciju plaknē. Projekciju plaknes P_1 un P_2 var vienmēr izvēlēties tā, lai visi attēlojamie punkti atrastos virs plaknes P_1 un plaknes P_2 priekšpusē. Daži no punktiem var atrasties arī pašās projekciju plaknēs. Aplūkosim, kādas ir šo punktu projekcijas.

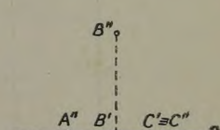
Punkts A (11. ras.) atrodas horizontālā projekciju plaknē, tādēļ šajā plaknē atrodas arī punkta A frontāli projecētājs stars. Punkta frontālā projekcija A'' atrodas uz projekciju ass, bet horizontālā projekcija A' sakrīt ar pašu telpas punktu. Punkts B atrodas plaknē P_2, tādēļ tā frontālā projekcija $B'' \equiv B$ un horizontālā projekcija B' ir uz projekciju ass. Punkts C atrodas uz projekciju ass, tādēļ tā abas projekcijas sakrīt un atrodas uz šīs ass.



10. ras.



11. ras.



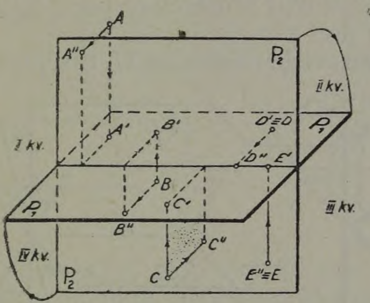
12. ras.

12. rasējums ir šo pašu punktu attēlu savietots rasējums. Redzam, ka *punkts atrodas projekciju plaknē, ja vismaz viena tā projekcija atrodas uz projekciju ass.*

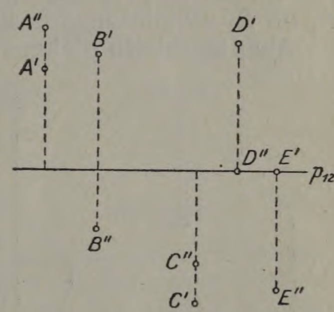
4. Telpas kvadranti. Projekciju ass dala katru no projekciju plaknēm divās daļās: horizontālo projekciju plakni — priekšējā un pakaļējā, frontālo projekciju plakni — virsējā un apakšējā daļā (13. ras.). Projekciju plaknes sadala visu telpu četros ceturkšņos jeb *kvadrantos,* kurus numurēsim šādā kārtībā:

I kvadrants — virs P_1 un priekšā P_2
II kvadrants — virs P_1 un aiz P_2
III kvadrants — zem P_1 un aiz P_2
IV kvadrants — zem P_1 un priekšā P_2

Ja attēlojamam objektam ir galīgi izmēri, tad projekciju plaknes vienmēr varam izvēlēties tā, lai objekts viss atrastos I kvadrantā. Praksē izpildot dažādas konstrukcijas, dažreiz tomēr jāturpina attēlotā priekšmeta šķautnes uz vienu vai otru pusi, tāpēc tās var iesniegties arī citos kvadrantos. Šī iemesla dēļ nepieciešams arī aplūkot, kā attēlojas projekciju plaknēs pārējo kvadrantu punkti.



13. ras.



14. ras.

Pieņemsim, ka punkti A, B un C atrodas attiecīgi II, III un IV kvadrantā. Savietojot projekciju plaknes, punktu horizontālās projekcijas paliek uz vietas, bet frontālās projekcijas pārvietojas. Punkta A frontālā projekcija, tāpat kā I kvadranta punktiem, atrodas plaknes P_2 augšējā daļā un pēc savietošanas pāries horizontālās plaknes P_1 pakaļējā daļā, kur atrodas arī punkta horizontālā projekcija. Punktiem B un C frontālās projekcijas atrodas plaknes P_2 apakšējā daļā un pēc savietošanas nonāks plaknes P_1 priekšējā daļā. Novietojot tagad horizontālo projekciju plakni rasējuma plaknē, dabūjam 14. rasējumu.

Redzam, ka II kvadranta punktiem abas projekcijas ir virs projekciju ass, bet IV kvadranta punktiem — zem tās; III kvadranta punktiem horizontālā projekcija ir virs projekciju ass, bet frontālā — zem projekciju ass, tātad otrādi nekā I kvadranta punktiem. Ja punkts atrodas kādā no projekciju plaknēm, piemēram, punkti D un E, tad viena tā projekcija atrodas uz projekciju ass.

5. Sakrītošo projekciju plakne. Speciālā gadījumā punkta abas projekcijas var sakrist. Tāda īpašība ir, piemēram, punktiem A un B 15. rasējumā. Noskaidrosim, kur atrodas šie punkti.

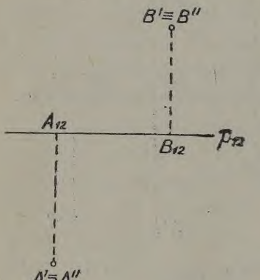
Punkta A abas projekcijas atrodas zem projekciju ass, tādēļ tam jāatrodas IV kvadrantā. Punkta B abas projekcijas atrodas virs projekciju ass, tam jābūt II kvadranta punktam. Katram no šiem punktiem abu projekciju attālumi līdz asij ir vienādi. Tas nozīmē, ka katrs no tiem atrodas vienādā attālumā no abām projekciju plaknēm P_1 un P_2, proti, II un IV kvadranta bisektrišu plaknē.

Punktu A un B stāvokli tā esam noteikuši, izmantojot vienīgi to projekciju savietoto rasējumu. Abu punktu un to projekciju telpiskais attēls parādīts 16. ras. Šajā rasējumā uzskatāmi demonstrēta arī projekciju sakrišana pie plakņu savietošanas.

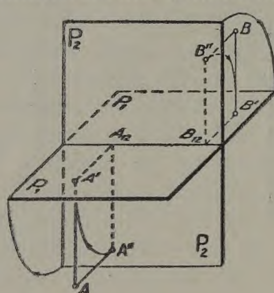
Abas projekcijas savietotā rasējumā sakrīt tikai tiem punktiem, kas atrodas II un IV kvadranta bisektrišu plaknē. Šo bisektrišu plakni tādēļ sauc par *sakrītošo projekciju plakni.*

Bisektrišu plakni, kas dala uz pusēm I un III kvadrantu, sauc par *simetrisko projekciju plakni.* Tās punktu projekcijas pēc plakņu P_1 un P_2 savietošanas ir simetriskas pret projekciju asi.

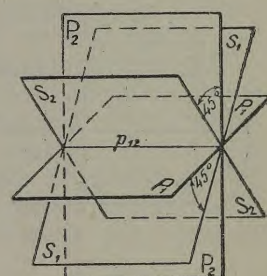
Abas bisektrišu plaknes S_1 un S_2 atsevišķi parādītas 17. rasējumā.



15. ras.



16. ras.



17. ras.

6. Profilā projekciju plakne; telpas oktanti. Kaut gan ar abām projekcijām divās savstarpēji perpendikulārās plaknēs katrs punkts telpā ir pilnīgi noteikts, dažus uzdevumus tomēr var atrisināt vienkāršāk, ja izmanto vēl trešo projekciju plakni, perpendikulāru plaknēm P_1 un P_2. Šo jauno projekciju plakni P_3 sauc par *profilo projekciju plakni* jeb *sānskata plakni,* bet kāda punkta projekciju šajā plaknē par tā *profilo projekciju* jeb *sānskatu.* Tehniskajos rasējumos, kur ķermeņus parasti attēlo vismaz trīs projekcijās, par trešo projekciju plakni parasti izvēlas šādu profilu plakni.

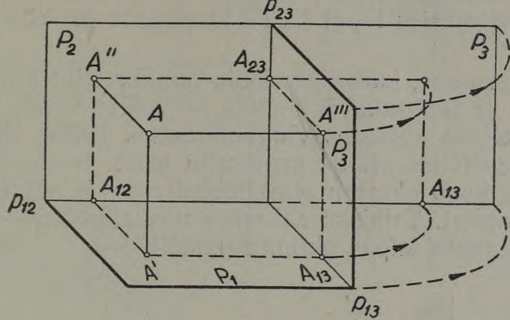
Punkta A projekcijas trijās savstarpēji perpendikulārās plaknēs parādītas 18. rasējumā. Bez projekciju ass p_{12} te izveidojas vēl divas asis, kuras apzīmē ar p_{13} un p_{23}. Projekciju plaknes savieto vienā plaknē, pagriežot plakni P_3 ap asi p_{23}, kamēr tā sakrīt ar plakni P_2; pēc tam plaknes P_2 un P_3 kopā griež ap asi p_{12}, līdz tās sakrīt ar horizontālo projekciju plakni P_1.[1]

Pēc plakņu savietošanas punkta A profilā projekcija A''' atrodas ar tā frontālo projekciju A'' uz kopēja perpendikula pret projekciju asi p_{23}, bet, tā kā $A_{23}A''' = AA'' = A_{12}A'$, tad profilās projekcijas attālums no ass p_{23} ir vienāds ar horizontālās projekcijas attā-

[1] Savietot var arī, pagriežot projekciju plakni P_1 ap asi p_{12}, bet projekciju plakni P_3 — ap asi p_{23}, kamēr abas plaknes sakrīt ar plakni P_2.

lumu no ass p_{12}. Izmantojot šo īpašību, var noteikt punkta profilo projekciju, ja zināma horizontālā un frontālā projekcija (sk. 19. ras); no frontālās projekcijas A'' velk $A''A''' \perp p_{23}$ un atliek $A_{23}A''' = A_{12}A'$.

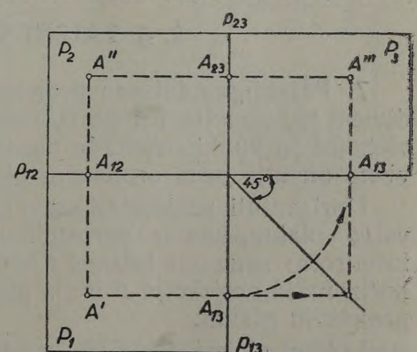
Velkot no projekciju asu krustpunkta palīgstaru 45° slīpumā pret asīm, punkta profilo projekciju var konstruēt arī bez mērcirkuļa



18. ras.

(sk. ras.). Tai pašā nolūkā var izmantot arī riņķa loku ar centru asu krustpunktā. Šo pēdējo paņēmienu gan vairāk lieto uzskatāmības dēļ, jo tas ir neprecīzs. Ja jau cirkuli vispār lieto, tad labāk attālumu $A_{23}A''' = A_{12}A'$ atlikt tieši, jo tā iztiek bez liekām palīglīnijām.

Projekciju plaknes P_1, P_2 un P_3 sadala telpu astoņās daļās t. s. *oktantos*. Telpas oktantus, kas atrodas pa kreisi no profilās projekciju plaknes, numurē tāpat kā telpas kvadrantus, bet oktantus, kas atrodas pa labi no profilās projekciju plaknes sanumurē ar skaitļiem V, VI, VII un VIII, pie kam V oktants atrodas pret I, VI pret II, VII pret III un VIII pret IV oktantu (izgatavot modeli!).

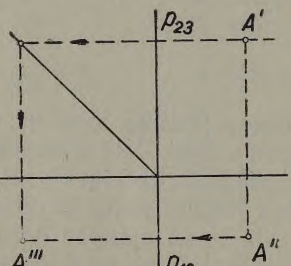


19. ras.

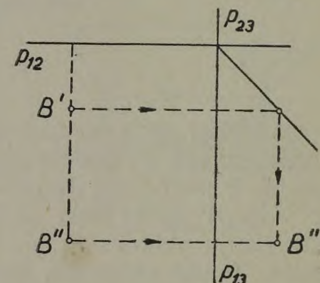
Konstruējot attēlus trīs savstarpēji perpendikulārās plaknēs, attēlojamo objektu parasti iedomājas novietotu pirmajā oktantā. Izrādās tomēr, ka iepriekš konstatētā sakarība starp kāda punkta trim projekcijām ir spēkā arī visos pārējos oktantos. Tā, piemēram, ja punkts atrodas VII oktantā (tātad pret III oktantu), tā horizontālā un frontālā projekcija apmainās vietām un abas bez tam atrodas pa labi no projekciju ass p_{23} (sk. 20. ras.). Lai noteiktu punkta profilo projekciju A''', izmantojam atkal palīgstaru — projekciju asu veidotā leņķa bisektrisi: no A' velk perpendikulu pret vertikālo asi $p_{13} \equiv p_{23}$, bet no tā krustpunkta ar bisektrisi — perpendikulu pret asi p_{12}, līdz kamēr pēdējais krusto perpendikulu, kas no frontālās projekcijas vilkts pret vertikālo asi $p_{23} \equiv p_{13}$. Līdzīgi rīkojamies, ja dotas, piemēram, punkta A projekcijas A'' un A''' un ir jānosaka A'.

Blakus 21. rasējumā parādītas vēl kāda cita oktanta punkta B trīs projekcijas. Šis punkts atrodas IV oktantā, jo tas atrodas pa kreisi no profilās projekciju plaknes un tā horizontālā un frontālā projekcija novietojusies tāpat kā IV kvadranta punktiem (sal. ar 13. un 14. ras.).

Tādus uzdevumus, kuros pēc kāda punkta triju projekciju savietota rasējuma ir jānosaka šī punkta stāvoklis telpā, varam ieteikt lasītājam kā telpas apjautas vingrinājumus. Dažas no projekcijām pie tam var izvēlēties arī uz projekciju asīm. Ieteicams noskaidrot arī, piemēram, kādu oktantu punktiem divas vai pat visas trīs projekcijas var sakrist. Telpisko sakarību noskaidrošanai var izmantot no papes izgatavotu telpas oktantu modeli.



20. ras.



21. ras.

2. §. TAISNES PROJEKCIJAS

7. Patvaļīgas taisnes projekcijas. Kāda taisne t ir noteikta ar diviem tās punktiem A un B, tādēļ tās projekcijas t' un t'' dabū, savienojot šo punktu vienāda nosaukuma projekcijas, t. i., projekcijas vienā un tajā pašā projekciju plaknē (22. ras.).

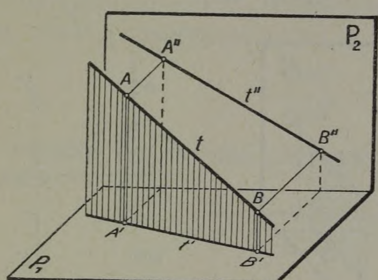
Horizontāli projecētāji stari caur taisnes t atsevišķiem punktiem veido plakni, kas ir perpendikulāra plaknei P_1. Šo plakni (ras. iesvītrota) sauc par taisnes t *horizontāli projecētāju plakni*. Taisnes horizontālā projekcija t' ir šīs plaknes šķēluma taisne ar horizontālo projekciju plakni.

Līdzīgi plakni $AA''B''B$, kas ir perpendikulāra frontālajai projekciju plaknei P_2, sauc par taisnes t *frontāli projecētāju plakni*. Tā šķeļ plakni P_2 pa taisni t'', kas ir taisnes t frontālā projekcija.

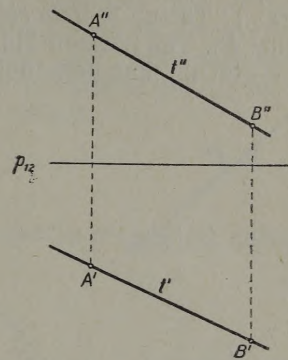
Taisnes savietotās projekcijas parādītas 23. rasējumā.

Taisne t ir pilnīgi noteikta, ja dotas tās abas projekcijas t' un t''. Iedomāsimies, ka plakne P_2 pagriezta sākotnējā stāvoklī un caur t' un t'' vilktas projecētājas plaknes. Šo plakņu šķēluma līnija ir taisne *t*. Turpmāk īsuma dēļ ar vārdiem «dota taisne» vai «konstruēt taisni» sapratīsim, ka dotas vai jākonstruē šīs taisnes abas projekcijas.

Ja taisne atrodas projekciju plaknē, viena tās projekcija sakrīt ar projekciju asi.

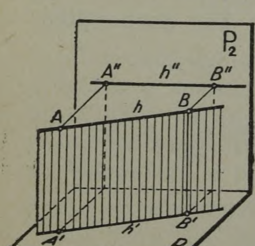


22. ras.

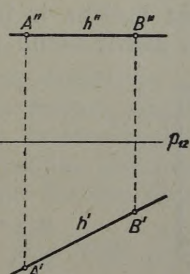


23. ras.

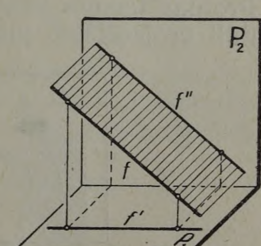
8. **Horizontālas un frontālas taisnes.** Taisne *h* (24. un 25. ras.) ir paralēla horizontālajai projekciju plaknei P_1. Tādu taisni sauksim par *horizontālu taisni.* Tā kā šīs taisnes visi punkti ir vienādā attālumā no plaknes P_1, tad tās frontālā projekcija ir paralēla projekciju asij. Katrs šīs taisnes nogrieznis, piemēram, *AB,* attēlojas horizontālajā projekcijā savā īstajā garumā, nogriežņa frontālās projekcijas garums atkarīgs no taisnes slīpuma pret plakni P_2.



24. ras.



25. ras.



26. ras.

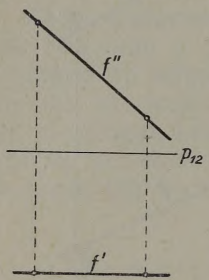
Taisne *f* (26. un 27. ras.) ir paralēla frontālajai projekciju plaknei, kādēļ to sauksim par *frontālu taisni.* Tās visi punkti ir vienādā attālumā no plaknes P_2, tāpēc tās horizontālā projekcija ir paralēla projekciju asij. Katrs šīs taisnes nogrieznis projecējas savā īstajā lielumā tikai frontālajā projekcijā.

Taisne var būt reizē horizontāla un frontāla. Tāda ir katra taisne, kas paralēla projekciju asij. Tādas taisnes abas projekcijas ir para-

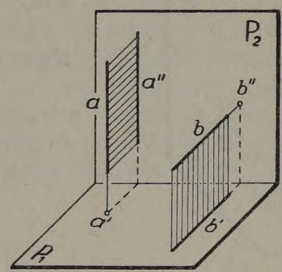
LATV. PSR VALSTS BIBLIOTĒKA

lēlas projekciju asij, un katrs šīs taisnes nogrieznis attēlojas savā īstajā lielumā kā horizontālajā, tā frontālajā projekciju plaknē.

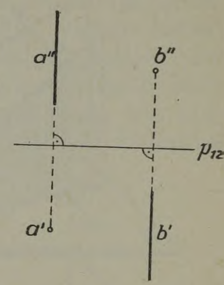
9. **Projecētājas taisnes.** Par projecētājām taisnēm sauksim taisnes, kas perpendikulāras kādai no projekciju plaknēm (28. un 29. ras.). Taisne a ir *horizontāli projecētāja taisne,* perpendikulāra plaknei P_1. Tās horizontālā projekcija ir punkts, bet frontālā projekcija — taisne, kas perpendikulāra projekciju asij.



27. ras.



28. ras.

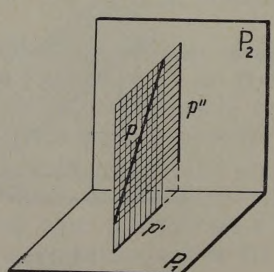


29. ras.

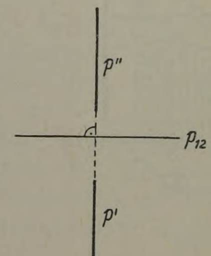
Taisne b ir *frontāli projecētāja taisne,* perpendikulāra plaknei P_2. Tās frontālā projekcija ir punkts, bet horizontālā projekcija — taisne, perpendikulāra projekciju asij.

10. **Profilas taisnes.** Par profilu taisni sauc taisni, kas perpendikulāra projekciju asij (30. un 31. ras.). Speciālā gadījumā tā var projekciju asi arī krustot.

Profilas taisnes raksturīga īpašība ir tā, ka tās horizontāli un frontāli projecētājas plaknes sakrīt vienā plaknē, kas perpendiku-



30. ras.



31. ras.

lāra projekciju asij. Taisnes abas projekcijas tādēļ ir perpendikulāras projekciju asij.

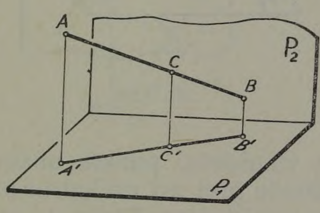
Profila taisne ar tās abām projekcijām nav pietiekami noteikta, jo visām profilām taisnēm, kas atrodas vienā un tai pašā projecētājā plaknē, ir vienādas projekcijas. Šī iemesla dēļ *profilai taisnei bez* *abām projekcijām vēl ir jādod divu tās punktu abas projekcijas vai arī taisnes profilā projekcija.*

11. Taisnes nogriežņa dalīšana dotā attiecībā. Projecēsim kādu taisnes nogriezni AB vienā no projekciju plaknēm, piemēram, P_1 (32. ras.). Ja uz AB ņemsim kādu punktu C, tad tā projekcijai C' jāatrodas uz taisnes nogriežņa projekcijas $A'B'$. Pamatojoties uz ģeometrijas teorēmu, ka divas taisnes, krustojoties ar paralēlām taisnēm, dalās proporcionālās daļās, varam rakstīt:

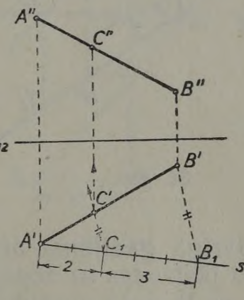
$$\frac{A'C'}{C'B'}=\frac{AC}{CB}.$$

Iedomājoties taisnes nogriezni AB projecētu plaknē P_2, dabūsim, ka arī

$$\frac{A''C''}{C''B''}=\frac{AC}{CB}.$$



32. ras.



33. ras.

Tas rāda, ka ortogonālā projekcijā divu vienas taisnes nogriežņu attiecība ir vienāda ar šo taisnes nogriežņu projekciju attiecību — un otrādi.[1] Tā, piemēram, taisnes nogriežņa viduspunkta projekcija ir taisnes nogriežņa projekcijas viduspunktā.

Mainot abās projekcijās locekļu kārtību, dabūjam

$$\frac{AC}{A'C'}=\frac{CB}{C'B'}\ \text{resp.}\ \frac{AC}{A''C''}=\frac{CB}{C''B''},$$

t. i., *ortogonālā projekcijā kādas taisnes nogriežņi mainās konstantā attiecībā.* Maiņas lielums ir atkarīgs no taisnes slīpuma pret projekciju plaknēm (sk. tālāk 13. nodalījumu).

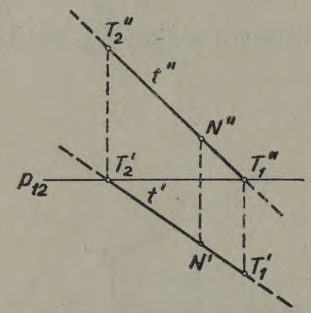
Pamatojoties uz šo īpašību, iespējams sadalīt taisnes nogriezni AB kādā iepriekš dotā attiecībā, dalot šajā attiecībā taisnes nogriežņa abas projekcijas.

Lai, piemēram, sadalītu taisnes nogriezni AB (33. ras.) attiecībā 2 : 3, dalīsim šajā attiecībā vispirms vienu tā projekciju, teiksim,

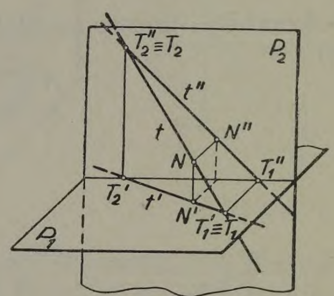
[1] Šis likums der arī taisnes nogriežņu slīpām projekcijām.

$A'B'$. No A' velkam patvaļīgā virzienā staru s un uz tā atliekam piecas $(2+3)$ patvaļīgi izvēlētas vienības. Savienojot B_1 ar B' un velkot $C_1C' \| B_1B'$, dabūjam punktu C', kas dala $A'B'$ attiecībā $2:3$. Velkot tagad no C' perpendikulu pret projekciju asi līdz $A''B''$, dabūjam punkta C frontālo projekciju C'', pie kam arī $A''C'' : C''B'' = 2:3$. Ar C' un C'' tad ir noteikts telpas punkts C, kas dala taisnes nogriezni AB attiecībā $2:3$.

12. Punkts uz taisnes. Atrisināsim tagad uzdevumu: *dota taisne t un kāda tās punkta C viena projekcija; konstruēt punkta otro projekciju.*



34. ras.



35. ras.

Vispārīgā gadījumā atrisinājums vienkāršs: punkta abām projekcijām jāatrodas uz kopēja perpendikula pret asi un katrai projekcijai — uz tā paša nosaukuma taisnes projekcijas. Tāpēc, ja ir dota, piemēram, punkta frontālā projekcija N'' (sk. 34. ras.), tad horizontālo projekciju N' dabū, velkot no N'' perpendikulu pret projekciju asi un nosakot tā krustpunktu ar taisnes horizontālo projekciju t'.

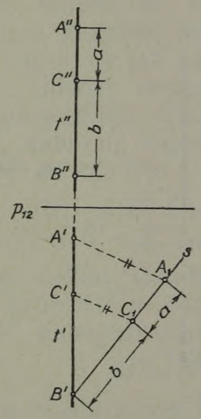
Aplūkosim taisnes pēdu noteikšanu abās projekciju plaknēs, ja taisne parādīta tai pašā rasējumā (sk. arī telpisko 35. ras.).[1] Ievērosim, ka taisnes pēda ir punkts, kas vienlaicīgi atrodas uz dotās taisnes un kādā no projekciju plaknēm. Tāpēc taisnes pēdas projekcijām jāatrodas uz dotās taisnes projekcijām, bez tam vienai pēdas projekcijai jāatrodas uz projekciju ass. Taisnes horizontālās pēdas frontālo projekciju T_1'' tādēļ dabū, turpinot t'' līdz projekciju asij, bet frontālās pēdas horizontālo projekciju T_2' kā t' krustpunktu ar asi. Pret punktiem T_1'' un T_2' uz taisnes attiecīgām projekcijām atrodas tās pēdu projekcijas T_1' un T_2''.

Vispārīgā gadījumā pēdas dala taisni trijās daļās, kas katra atrodas savā kvadrantā. Iedomājoties projekciju plaknes necaurredzamas, novērotājam (ko varam iedomāties vienmēr I kvadrantā) ir

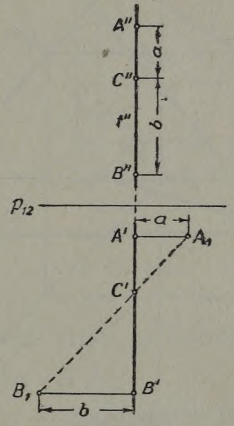
[1] Par taisnes *pēdu* sauc tās krustpunktu ar kādu plakni, parasti projekciju plakni. Taisnes krustpunktus ar projekciju plaknēm P_1, P_2 un P_3 sauc attiecīgi par tās *horizontālo, frontālo* un *profilo* pēdu.

redzama tikai tā taisnes daļa, kas atrodas pirmajā kvadrantā. Uzskatāmības dēļ ieteicams tikai šo taisnes daļu izvilkt ar nepārtrauktu līniju.[1]

Iepriekš aprakstīto paņēmienu kāda taisnes punkta projekciju noteikšanai nevar lietot, ja t ir profila taisne (36. ras.). Tā, piemēram, ja dota kāda profilas taisnes punkta C frontālā projekcija C'' un jānosaka šī punkta horizontālā projekcija C', tad no C'' vilktais perpendikuls pret asi saplūst ar taisnes horizontālo projekciju un C' nevar noteikt.



36. ras.



37. ras.

Tā kā profila taisne ir definēta ar divu tās punktu A un B projekcijām, tad punktu C' var konstruēt, ievērojot, ka tam jādala taisnes nogriežņa AB horizontālā projekcija tādā pašā attiecībā, kādā C'' dala taisnes nogriežņa frontālo projekciju $A''B''$. Lai sadalītu $A'B'$ šajā attiecībā, no punkta B' velk patvaļīgā virzienā staru s un uz tā atliek $B'C_1 = B''C''$ un $C_1A_1 = C''A''$. Savienojot A_1 ar A' un velkot $C_1C' \| A_1A'$, dabū meklēto projekciju C', jo

$$\frac{B'C'}{C'A'} = \frac{B'C_1}{C_1A_1} = \frac{B''C''}{C''A''}.$$

Cits paņēmiens, kas arī pamatojams ar proporcionāliem taisnes nogriežņiem, parādīts 37. rasējumā. Caur A' un B' velk starus paralēli projekciju asij un atliek uz tiem $A'A_1 = A''C''$; $B'B_1 = B''C''$. Savienojot A_1 ar B_1, dabū punkta horizontālo projekciju C'.

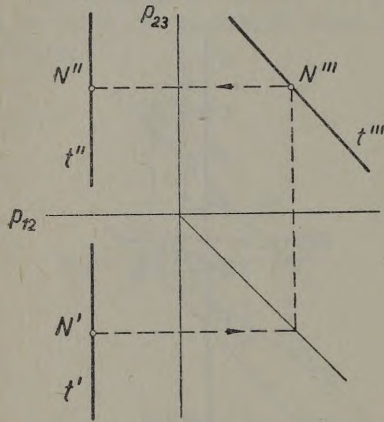
Līdzīgi izpilda konstrukciju, ja ir dota punkta horizontālā projekcija C' un jānosaka tā frontālā projekcija C''.

Ja profilā taisne ir definēta ar trim projekcijām, tad tās patvaļīga

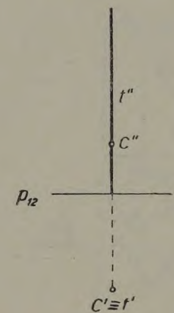
[1] Redzamības noteikšanai gan ir nozīme vienīgi kā telpas apjautas vingrinājumam, jo visas kāda attēlojamā objekta šķautnes vienmēr atrodas I kvadrantā.

punkta N projekciju noteikšanai izmanto taisnes profilo projekciju (38. ras.).

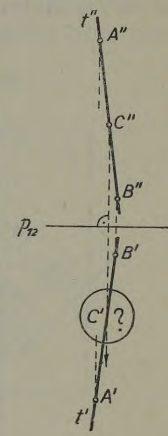
Aplūkosim vēl gadījumu, kad taisne t ir projecētāja taisne. Ja t ir horizontāli projecētāja taisne (39. ras.) un dota punkta C frontālā projekcija C'', tad horizontālā projekcija $C' \equiv t'$. Ja dota horizontālā projekcija C', tad frontālo projekciju C'' nevar noteikt. Uzdevums tādā gadījumā ir nenoteikts; punkta C'' noteikšanai jābūt dotam vēl kādam nosacījumam.



38. ras.



39. ras.



40. ras.

Bieži dotā taisne atrodas *«gandrīz profilā stāvoklī»*, t. i., tās projekcijas ir gandrīz perpendikulāras projekciju asij (40. ras.). Arī tad punkta C horizontālo projekciju C' (ja dots C'') nevar noteikt tieši. Perpendikuls no C'' pret projekciju asi krusto taisnes horizontālo projekciju ļoti mazā leņķī, un C' nevar precīzi noteikt. Precīzāk to nosaka, lietojot kādu no paņēmieniem, kas jau parādīti profilām taisnēm.

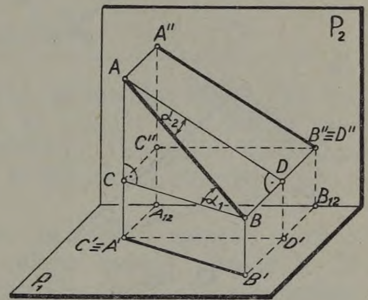
Vispār ieteicams konstrukcijās nelietot šādu t. s. *slīdošu* krustošanos. Ja punktu C', kas noteikts ar slīdošu krustošanos, izmantojam vēl tālākām konstrukcijām, tad kļūda var ievērojami pieaugt un rezultātā varam dabūt pilnīgi nepareizu rasējumu, lai gan ģeometriski konstrukcijas izpildītas pareizi.

Stingri jāievēro, ka *divas taisnes krustojoties tikai tad pietiekami precīzi nosaka punktu, ja to krustošanās nav slīdoša.* Šī iemesla dēļ 37. rasējumā taisnes nogriežņus $A'A_1$ un $B'B_1$ uz paralēlajiem stariem dažreiz izdevīgāk atlikt divas vai vairākas reizes, lai dabūtu iespējami asāku krustošanos. Līdzīgi arī taisne gandrīz profilā stāvoklī ir tikai tad pietiekami noteikta, ja dotas tās divu punktu projekcijas vai arī taisnes profilā projekcija.

Tāpat jāaizrāda, ka divi punkti ne vienmēr pietiekami precīzi nosaka taisni. *Praksē taisni varam uzskatīt par pietiekami precīzi* *noteiktu ar diviem punktiem tikai tad, ja šie punkti neatrodas ļoti tuvu viens otram.*

Ja gribam dabūt tiešām precīzus rezultātus, šie aizrādījumi ir konsekventi jāievēro.

13. Taisnes nogriežņa īstā garuma noteikšana; taisnes slīpums pret projekciju plaknēm. 41. rasējumā slīpā projekcijā uzskatāmi attēlots patvaļīgs taisnes nogrieznis AB un tā abas projekcijas $A'B'$ un $A''B''$. Noskaidrosim, kā iespējams noteikt šī taisnes nogriežņa īsto garumu, ja dots tikai tā projekciju savienots rasējums.



41. ras.

Velkot taisnes nogriežņa horizontāli projecētājā plaknē taisni $BC \| B'A'$, dabūjam taisnleņķa trīsstūri ABC ar katetēm

$$CB = A'B' \text{ un}$$
$$AC = AA' - BB' = A''A_{12} - B''B_{12}.$$

Līdzīgi, velkot taisnes nogriežņa frontāli projecētājā plaknē taisni $AD \| A''B''$, dabūjam otru taisnleņķa trīsstūri ABD ar katetēm

$$AD = A''B'' \text{ un } BD = B'B_{12} - A'A_{12}.$$

Abiem trīsstūriem ir kopēja hipotenūza — dotais taisnes nogrieznis AB.

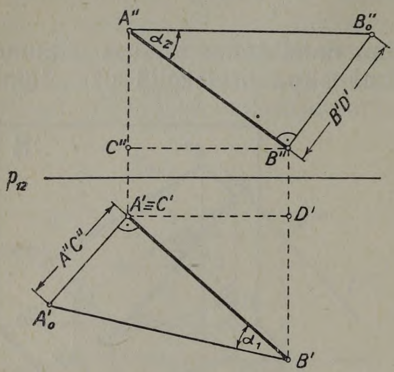
Vispār tātad pastāv šāds sakars starp taisnes nogriežņa un tā projekciju garumiem. *Taisnes nogriežņa īstais garums ir hipotenūza taisnleņķa trīsstūrī, kam viena katete ir taisnes nogriežņa horizontālā (resp. frontālā) projekcija, bet otra katete ir taisnes nogriežņa galapunktu frontālo (resp. horizontālo) projekciju attālumu starpība līdz projekciju asij.*

Izmantojot šo sakaru, var noteikt taisnes nogriežņa īsto garumu savietotā rasējumā. Konstrukciju izpildījums parādīts 42. rasējumā. Taisnleņķa trīsstūri varam konstruēt vai nu pie $A'B'$, vai $A''B''$. Otra katete ir $A'_0A' = A''C''$ vai $B''_0B'' = B'D'$; taisnes nogriežņa īstais garums $AB = A'_0B' = A''B''_0$.

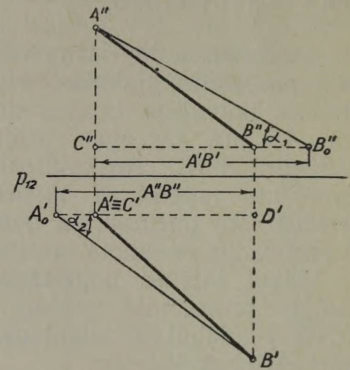
Kāds cits paņēmiens parādīts 43. rasējumā. Šajā rasējumā taisnleņķa trīsstūri konstruēti pēc katetēm $A''C''$ resp. $B'D'$. Šī konstrukcija ir vēl parocīgāka, jo nav jākonstruē taisnais leņķis pie A' resp. B'' kā 42. rasējumā.

Abas konstrukcijas dod reizē arī taisnes nogriežņa AB slīpuma leņķus α_1 un α_2 (1. un 2. slīpuma leņķi) pret projekciju plaknēm P_1 un P_2. Leņķi starp taisni un plakni, kā zināms, mērī ar leņķi starp taisni un tās ortogonālo projekciju šajā plaknē. Bet, tā kā $BC \| A'B'$ un $AD \| A''B''$, tad $\alpha_1 = \sphericalangle ABC$ un $\alpha_2 = \sphericalangle BAD$, t. i., α_1 un α_2 ir viens no šaurajiem leņķiem attiecīgajā taisnleņķa trīsstūrī (pie katetes, kas vienāda ar $A'B'$ resp. $A''B''$).

Ja taisnes nogrieznis AB ir profilā stāvoklī (44. ras.), tad abi taisnleņķa trīsstūri ir kongruenti un $\alpha_1+\alpha_2=90°$. Leņķu α_1 un α_2 noteikšanai šai gadījumā pietiek konstruēt tikai vienu no trīsstūriem.



42. ras.

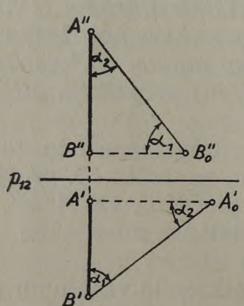


43. ras.

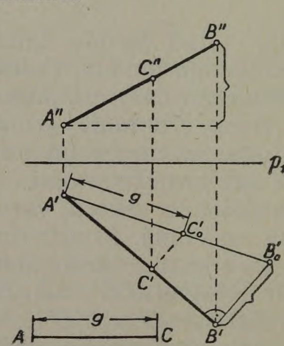
Ievērosim vēl, ka taisnes nogriežņa ortogonālās projekcijas garums vispār ir m a z ā k s par pašu taisnes nogriezni (katete mazāka par hipotenūzu). Skaitliski

$$A'B'=AB\cos\alpha_1 \text{ un } A''B''=AB\cos\alpha_2.$$

Vienīgi gadījumā, kad taisnes nogrieznis ir paralēls projekciju plaknei, tas šai plaknē attēlojas nesaīsināti.



44. ras.



45. ras.

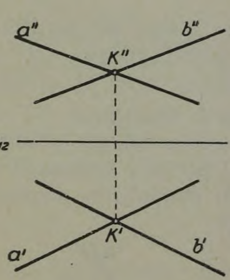
Ja taisnes nogrieznis ir paralēls frontālai projekciju plaknei, tā slīpuma leņķis ir vienāds ar leņķi, ko taisnes nogriežņa frontālā projekcija veido ar projekciju asi p_{12}. Analogi nosaka horizontālas taisnes slīpuma leņķi pret frontālo projekciju plakni. Tā kā profils taisnes nogrieznis ir paralēls profilai projekciju plaknei, tā slīpumu pret projekciju plaknēm P_1 un P_2 var noteikt arī izmantojot taisnes nogriežņa profilās projekcijas: leņķis α_2 tad ir leņķis, ko taisnes nogriežņa profilā projekcija veido ar projekciju asi p_{23}.

Bieži jāatrisina apgrieztais uzdevums: *uz dotā taisnes nogriežņa AB no punkta A atlikt dotā garuma taisnes nogriezni* $AC=g$ (45. ras.). Tādā gadījumā vispirms nosaka taisnes nogriežņa AB īsto garumu, uz tā atliek doto nogriezni g un no punkta C'_0 ar apgrieztā secībā izpildītu konstrukciju atrod punktus C' un C'' uz taisnes nogriežņa projekcijām $A'B'$ un $A''B''$.

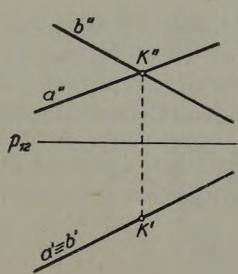
3. §. DIVAS TAISNES

Divas taisnes telpā var būt paralēlas, perpendikulāras, tās var krustoties vai šķērsoties. Noskaidrosim, kā noteikt divu taišņu savstarpējo stāvokli pēc to savietotiem attēliem. Gadījumi, kad kāda no taisnēm vai abas ir profilā stāvoklī, te jāapskata atsevišķi.

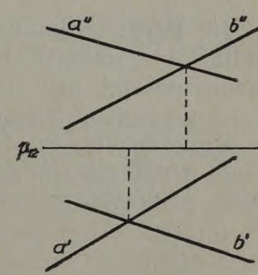
14. Krustiskas un šķērsas taisnes. Ja divas taisnes a un b k r u s t o j a s (46. ras.), tad tām ir viens kopējs punkts K. Šī punkta horizontālajai projekcijai K' jāatrodas reizē uz abu taišņu horizontālajām projekcijām, bet frontālajai projekcijai K'' — uz abu taišņu frontālajām projekcijām, t. i., K' un K'' ir taišņu atbilstošo projekciju krustpunkti. Kā viena punkta divām projekcijām punktiem



46. ras.



47. ras.



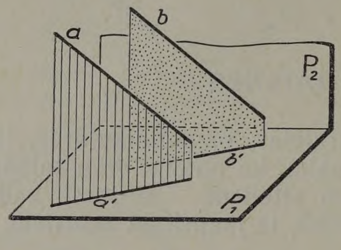
48. ras.

K' un K'' bez tam jāatrodas uz kopēja perpendikula pret projekciju asi. Apgriezti — *ja divu taišņu vienāda nosaukuma projekcijas krustojas punktos, kas atrodas uz kopēja perpendikula pret projekciju asi, tad šīs taisnes krustojas.*

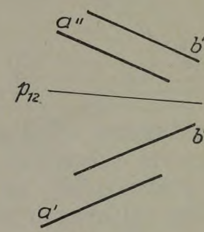
Speciālā gadījumā, ja abas taisnes atrodas vienā un tajā pašā projecētājā plaknē, t. i., to projekcijas vienā no projekciju plaknēm sakrīt, tad taisnes krustojas, ja to abas pārējās projekcijas krustojas. Tāds gadījums parādīts 47. rasējumā, kur abas taisnes atrodas vienā un tai pašā horizontāli projecētājā plaknē.

Ja taisnes a un b š ķ ē r s o j a s, tām nav neviena kopēja punkta. To vienāda nosaukuma projekcijas tādēļ krustojas punktos, kas neatrodas uz kopēja perpendikula pret projekciju asi (48. ras.).

15. Paralēlas taisnes. Ja divas taisnes ir paralēlas, tad arī to vienādā nosaukuma projecētājas plaknes ir paralēlas (49. ras.) un tāpēc šķeļ projekciju plaknes pa paralēlām taisnēm a' un b' resp. a'' un b''. Tātad, *ja taisnes ir paralēlas, tad ir paralēlas gan šo taišņu horizontālās, gan frontālās projekcijas* (50. ras.).



49. ras.



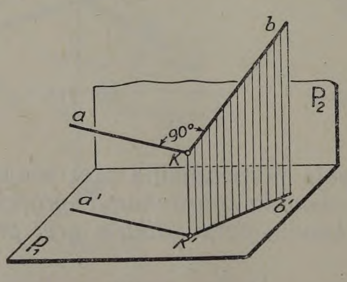
50. ras.

Pareizs arī apgriezts apgalvojums: *ja divu taišņu vienāda nosaukuma projekcijas ir pa pāriem paralēlas, tad arī pašas taisnes ir paralēlas.*

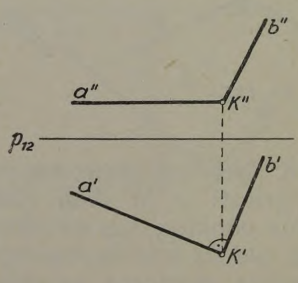
Tā kā paralēlām taisnēm ir vienāds slīpums pret projekciju plaknēm, tad *paralēlu taišņu nogriežņu projekcijas saīsinās vienādā attiecībā.*

16. Perpendikulāras taisnes. Jautājums par taišņu perpendikularitāti ir sarežģītāks. Vai divas taisnes ir perpendikulāras vai ne varam noteikt pēc ortogonālām projekcijām tikai tad, ja vismaz viena no tām ir horizontāla vai frontāla taisne.

Konstatēsim, ka *divu savstarpēji perpendikulāru taišņu ortogonālās projekcijas kādā projekciju plaknē ir savstarpēji perpendikulāras, ja vismaz viena no taisnēm ir paralēla šai projekciju plaknei.*



51. ras.



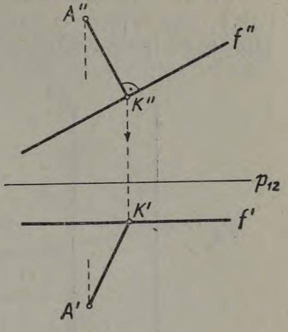
52. ras.

Ņemsim divas tādas taisnes a un b, pie kam a paralēla plaknei P_1 (51. ras.). Tā kā $a \perp b$ un $a \perp KK'$ (kā horizontāla taisne pret horizontāli projecētāju staru), tad a ir perpendikulāra taisnes b horizontāli projecētājai plaknei, un, tā kā $a \| a'$, tad arī a' ir perpendikulāra tai pašai plaknei. Bet, ja taisne ir perpendikulāra plaknei, tad tā ir perpendikulāra visām šīm plaknes taisnēm, tādēļ $a' \perp b'$.

Var pierādīt, ka ir pareizs arī apgrieztais apgalvojums, t. i., *ja divu taišņu ortogonālās projekcijas kādā no projekciju plaknēm ir savstarpēji perpendikulāras un ja vismaz viena no taisnēm ir paralēla šai projekciju plaknei, tad arī pašas telpas taisnes ir savstarpēji perpendikulāras.*

Šī nosacījuma dēļ, piemēram, taisnes a un b, kuru projekcijas dotas 52. (savietotā) rasējumā, ir perpendikulāras, jo a paralēla plaknei P_1 un abu taišņu horizontālās projekcijas ir perpendikulāras.

Pamatojoties uz iepriekš teikto, varam atrisināt šādu uzdevumu: *noteikt attālumu no punkta A līdz frontālai taisnei f* (53. ras.).



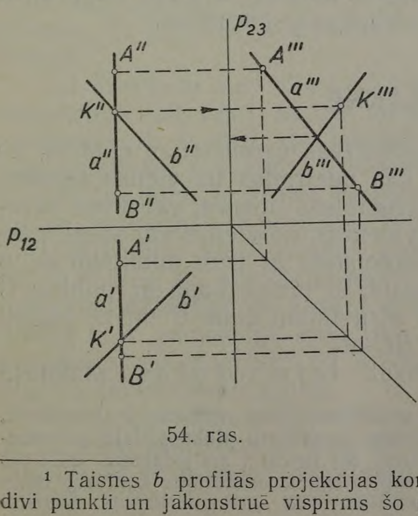
53. ras.

No punkta A'' velkam taisni $A''K'' \perp f''$ un no punkta K'' perpendikulu pret projekciju asi līdz krustpunktam ar f' punktā K'; punktu K' savienojam ar A'. Tad $A'K'$ un $A''K''$ ir meklētā attāluma projekcijas. Atliek tikai vēl noteikt taisnes nogriežņa AK īsto garumu.

Līdzīgi nosaka punkta attālumu līdz horizontālai taisnei, tikai tad perpendikuls jāvelk no punkta horizontālās projekcijas pret taisnes horizontālo projekciju.

Vispārīgā gadījumā jautājums par taišņu perpendikularitāti saistīts ar jautājumu par divu taišņu veidotā leņķa lielumu, ko aplūkosim vēlāk (sk. 52. nodalījumu).

17. Gadījumi, kad viena no taisnēm vai abas ir profilas taisnes. Iepriekš konstruētās likumības tad vairs nav spēkā. Tā, piemēram, ja taisne a (54. ras.) ir profila taisne (dota ar diviem punktiem A un B), bet taisne b — patvaļīga taisne, tad šo taišņu horizontālās un frontālās projekcijas krustosies punktos K' un K'', kas ir uz kopēja perpendikula, arī tad, ja pašas taisnes telpā nekrustojas. Punkts K apskatītajā piemērā nepieder a b ā m taisnēm, jo abu taišņu frontālo un profilo projekciju[1] krustpunkti neatrodas uz kopēja perpendikula pret asi p_{23}, tāpēc taisnes šķērsojas.



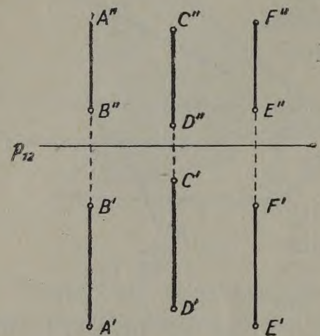
54. ras.

Ka taisnes a un b šajā gadījumā ir šķērsas taisnes, re-

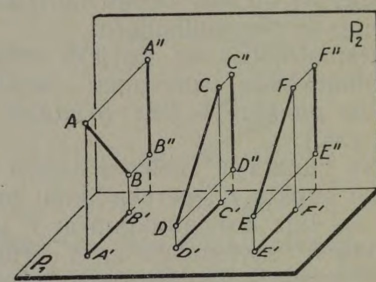
[1] Taisnes b profilās projekcijas konstruēšanai uz taisnes iepriekš jāizvēlas divi punkti un jākonstruē vispirms šo punktu profilās projekcijas.

dzams arī no tā, ka punkti K' un K'' nedala vienādā attiecībā profilās taisnes nogriežņa AB atbilstošās projekcijas (K' atrodas tuvāk B', bet K'' tuvāk A'').

Ja ir doti vairāki profili taisnes nogriežņi AB, CD un EF (55. ras.), tad visu šo taisnes nogriežņu horizontālās un frontālās projekcijas ir paralēlas, kaut gan, piemēram, taisnes nogriežņi AB un CD nav paralēli (sk. 56. ras.). Var formulēt papildu nosacījumus, kā pēc divu projekciju savietotā rasējuma spriest par šo taisnes nogriežņu savstarpējo novietojumu. Tā, piemēram, no 55. rasējuma var secināt, ka punkts A, salīdzinot ar punktu B, ir tālāk tiklab no horizontālās, kā arī no frontālās projekciju plaknes, turpretim otram taisnes nogrieznim CD punkts C ir tālāk no plaknes P_1, bet tuvāk plaknei P_2, salīdzinot ar punktu D. Taisnes nogriežņu CD un EF paralelitāti var noskaidrot, nosakot, piemēram, to slīpumus pret kādu no projekciju plaknēm. Tas nav jādara, ja konstruējam šo taisnes nogriežņu profilās projekcijas: paralēli ir tikai tie profilie taisnes nogriežņi, kuru profilās projekcijas ir paralēlas.



55. ras.



56. ras.

4. §. PLAKNE

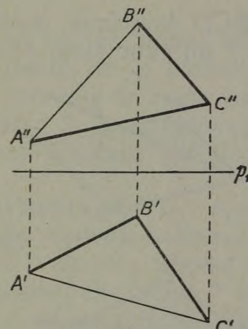
18. Plaknes definīcija. No elementārās ģeometrijas zināms, ka plakni definē vai nu trīs punkti, kas neatrodas uz vienas taisnes, taisne un punkts ārpus tās, divas krustiskas taisnes, vai divas paralēlas taisnes. Šīs definīcijas ir ekvivalentas, no vienas var viegli pāriet uz citām. Tā, piemēram, ja plakne dota ar trim punktiem A, B un C, tad, velkot caur A un B taisni, šī taisne kopā ar punktu C nosaka to pašu plakni; velkot vēl otru taisni caur B un C, plakni var definēt ar šīm taisnēm AB un BC utt.

Praktiski rasējumos attēlo tikai i e r o b e ž o t a s plaknes.[1]

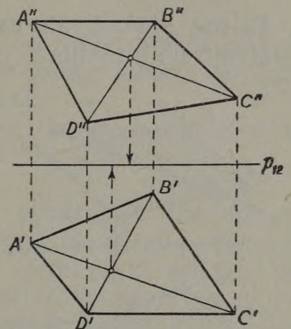
[1] Tehniskie objekti (mašīnu daļas, mehānismi utt.) vienmēr ir ierobežoti, Tāpēc turpmāk ar vārdu «plakne» sapratīsim ierobežotu plaknes daļu («ierobežota plakne», «plaknes gabals»). Bieži īsuma dēļ lietosim arī jēdzienus «plaknes šķautne», «plaknes virsotne», ar kuriem sapratīsim ierobežotājas kontūras malu vai virsotni.

Ierobežotāja kontūra vispār var būt jebkura lauzta līnija. Ja ierobežojuma līniju var izvēlēties brīvi, tad zīmēsim plakni kā paralelogramu vai trīsstūri. Dažos gadījumos plakni definēsim arī ar divām krustiskām taisnēm.

19. Trīsstūra un paralelograma projekcijas. Izvēloties patvaļīgi trīs punktu vienāda nosaukuma projekcijas un tās savienojot, dabūsim kāda telpas trīsstūra projekcijas (57. ras.).



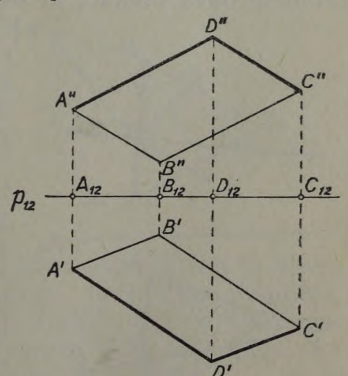
57. ras.



58. ras.

Izvēloties patvaļīgi četru punktu projekcijas, šie punkti vispār neatradīsies vairs vienā plaknē, bet veidos telpas četrstūri. Tāds gadījums attēlots 58. rasējumā, par ko var pārliecināties, novelkot četrstūra projekcijām diagonāles. Tā kā taišņu AC un BD vienāda nosaukuma projekcijas krustojas punktos, kas neatrodas uz kopēja perpendikula pret projekcijas asi, tad AC un BD ir šķērsas taisnes, t. i., tās neatrodas vienā plaknē.

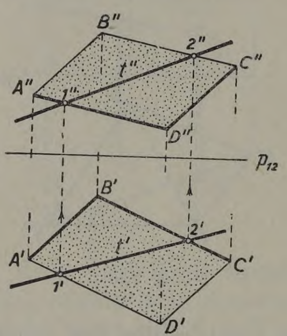
Lai uzzīmētu paralelograma projekcijas (59. ras.), tā trīs virsotņu, piemēram, A, B un C, projekcijas varam izvēlēties patvaļīgi. Virsotnes D projekcijas dabū, ievērojot, ka paralēlu taišņu projekcijas ir paralēlas taisnes. Lai pārbaudītu konstrukcijas pareizību, jāatceras, ka punkta D abām projekcijām jāatrodas uz kopējā perpendikula pret projekciju asi. Bez tam projekciju ass nogriežņiem $A_{12}B_{12}$ un D_{12} C_{12} jābūt vienlīdzīgiem.



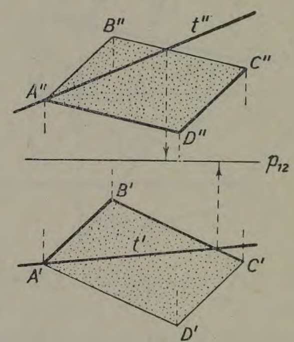
59. ras.

Lai ortogonālās projekcijas padarītu uzskatāmākas, attēlojamās, ar kontūru norobežotās plaknes var iedomāties ar zināmu biezumu. Sakarā ar to plaknes šķautnes, kas ir augstāk virs plaknes P_1 (tuvāk novērotājam, kas skatās pret P_1), horizontālajā projekcijā vilksim ar treknākām līnijām. Frontālajā projekcijā ar treknākām līnijām zīmēsim plaknes tās šķautnes, kas tuvāk novērotājam, kurš skatās pret frontālo projekciju plakni P_2. Jāievēro pie tam, ka tuvāk novērotājam ir tās šķautnes, kas iziet no tam tuvākās plaknes virsotnes. Tā 57. rasējumā, skatoties pret P_1, tuvākā ir virsotne *B* (tas redzams no šīs virsotnes frontālās projekcijas), bet, skatoties pret P_2, tuvākā ir virsotne *C*; 59. rasējumā abos skata virzienos tuvākā ir virsotne *D*.

20. Taisne plaknē. Ja uz plaknes ABCD kontūras izvēlamies divus patvaļīgus punktus *1* un *2* (60. ras.) un caur šiem punktiem

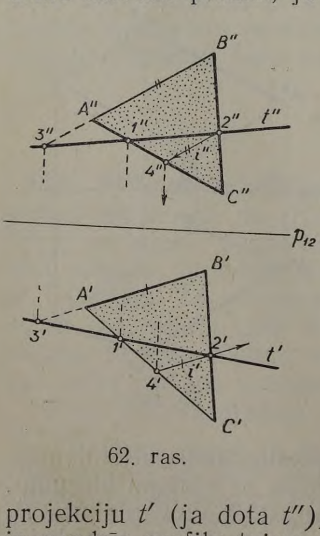


60. ras.



61. ras.

velkam taisni *t*, tad šī taisne atrodas plaknē *ABCD*. Kāda taisne tātad atrodas plaknē, ja tā krusto divas šīs plaknes taisnes divos dažādos punktos. Tā 61. rasējumā taisnei *t* ar plakni *ABCD* ir tikai viens kopējs punkts *A*, jo plaknes taisni *BC* tā nekrusto, bet šķērso; taisne *t* šai gadījumā neatrodas plaknē *ABCD*.



62. ras.

Ja gribam kādā plaknē iezīmēt taisni, tās vienu projekciju varam izvēlēties patvaļīgi. Otrā projekcija tad ir viennozīmīgi noteikta. Izvēloties, piemēram, 60. rasējumā taisnes horizontālo projekciju *t'* brīvi, frontālo projekciju *t''* dabū, nosakot frontālās projekcijas punktiem *1* un *2*, kuros taisne *t* krusto plaknes šķautnes *AD* un *BC*.

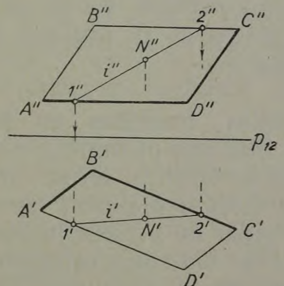
Īpatnēju pieeju prasa tie gadījumi, kad kāda no plaknes taisnēm ir profila vai gandrīz profila taisne. Tā 62. rasējumā, konstruējot taisnes *t* horizontālo projekciju *t'* (ja dota *t''*), punktu *2'* nevaram konstruēt tieši, jo *BC* ir gandrīz profila taisne (slīdoša krustošanās!). Projekcijas *t'* precīzākai konstruēšanai var izmantot punktu *3*, kurā taisne *t* krusto šķautnes *AB* pagarinājumu, vai arī novilkt caur punktu *2* palīgtaisni *i*, kas paralēla kādai no plaknes kontūras taisnēm. Darbību kārtība pēdējā gadījumā šāda (rasējumā parādīta bultiņām): $i''\|A''B''$ caur *2''*; perpendikuls no *4''* pret projekciju asi līdz *A'C'*; $i'\|A'B'$ caur *4'* dod meklēto punktu *2'* uz *B'C'*.[1]

Te jāatzīmē vēl sekojošais. Taisnes *i* noteikšanai izmantots punkts *4* un virziens *AB*. Taisne atrodas plaknē arī tad, ja tai ir viens kopējs punkts ar plakni un tā ir paralēla kādai plaknes taisnei.

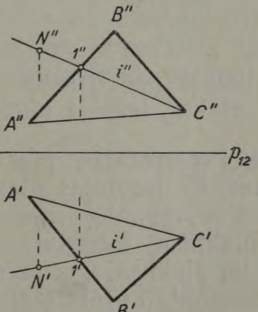
Tātad vispār: *taisne atrodas plaknē, ja tai ir vismaz vai nu divi kopēji punkti ar šo plakni, vai arī viens kopējs punkts ar plakni un kopējs virziens ar kādu šīs plaknes taisni.*

Punkta *2'* konstruēšanai var lietot arī kādu no agrāk aplūkotajiem paņēmieniem (sk. 36. un 37. ras.).

21. Punkts plaknē. *Punkts atrodas plaknē, ja tas atrodas uz kādas šīs plaknes taisnes.* Lai noskaidrotu, piemēram, vai punkts *N* (63. ras.) atrodas plaknē *ABCD*, caur vienu tā projekciju, teiksim *N''*, velkam palīgtaisni *i''* un atrodam tai atbilstošo horizontālo projekciju *i'* ar nosacījumu, lai taisne *i* atrastos plaknē *ABCD*. Ja horizontālā projekcija *i'* iet caur *N'*, tad punkts *N* atrodas plaknē *ABCD*.



63. ras.



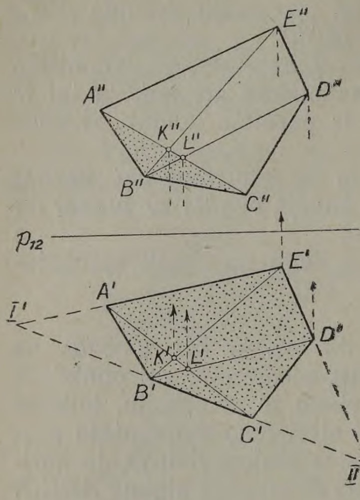
64. ras.

Otrādi, ja mēs gribam plaknē iezīmēt kādu punktu, tad tā vienu projekciju varam izvēlēties patvaļīgi. Otru projekciju dabūsim, ievērojot, ka tai jāatrodas uz palīgtaisnes *i* atbilstošās projekcijas. Lai ietaupītu palīglīnijas, šo palīgtaisni varam vilkt caur kādu jau zināmu plaknes punktu, piemēram, caur kādu tās virsotni.

Te vēl jāatgādina, ka plaknes kontūru mēs esam izvēlējušies tikai uzskatāmības dēļ. Teorētiski plakni varam iedomāties paplašinātu neierobežoti uz visām pusēm. No šī viedokļa arī, piemēram, punkts *N*

[1] Ja būtu dota arī plaknes profilā projekcija, tad punkta *2* horizontālo projekciju var noteikt arī ar tā profilās projekcijas palīdzību.

(64. ras.) jāuzskata kā plaknes ABC punkts, jo tas atrodas uz šīs plaknes taisnes i. Arī šādus punktus dažreiz izdevīgi lietot konstrukciju izpildīšanā (sk., piem., 62. ras. punktu *3*).



65. ras.

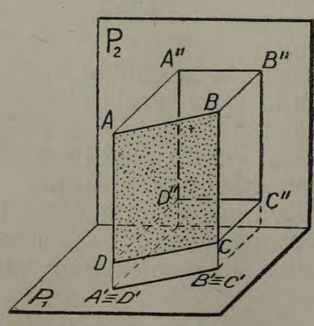
Atrisināsim uzdevumu: *dota kāda daudzstūra horizontālā projekcija un tā triju virsotņu frontālās projekcijas. Konstruēt daudzstūra frontālo projekciju.*

65. rasējumā dotas abas projekcijas trim daudzstūra virsotnēm A, B un C. Ar trīsstūri ABC daudzstūra plakne ir viennozīmīgi noteikta. Virsotņu D un E frontālās projekcijas var konstruēt, ievērojot, ka arī šīm virsotnēm jāatrodas trīsstūra ABC plaknē. Kā palīgtaisnes izmantotas daudzstūra diagonāles BD un BE. Darbību kārtība norādīta ar bultiņām.

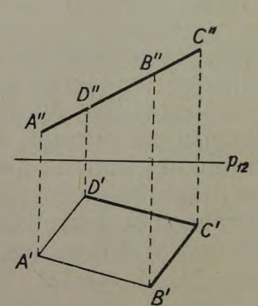
Konstrukciju iespējams izpildīt vēl precīzāk, ja daudzstūri papildina līdz trīsstūrim $IEII$ (horizontālā projekcija $I'E'II'$) un konstruē vispirms šī trīsstūra frontālo projekciju $I''E''II''$. Tā kā trīsstūris $IEII$ lielāks par trīsstūri ABC, tad, nosakot ar šo trīsstūri daudzstūra plakni, iespēja kļūdīties ir mazāka.

22. Projecētājas plaknes. Horizontālas, frontālas un profilas plaknes. Projecētājas plaknes jēdziens tika jau pieminēts, definējot taisnes ortogonālo projekciju. Attiecinot šo terminu arī uz ierobežotām plaknēm, mēs turpmāk par projecētājām plaknēm īsuma dēļ sauksim plaknes, kas perpendikulāras kādai no projekciju plaknēm.

Horizontāli projecētāja plakne $ABCD$ ar tās abām ortogonālajām projekcijām plaknē P_1 un P_2 telpiski attēlota 66. rasējumā. Vienkār-



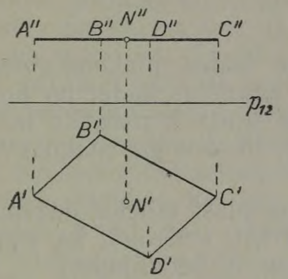
66. ras.



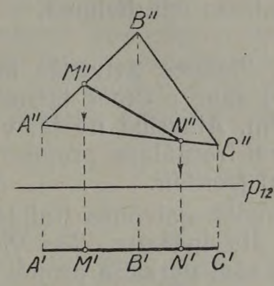
67. ras.

šības dēļ šī plakne zīmēta kā taisnstūris (divas šķautnes paralēlas, divas perpendikulāras plaknei P_1). Tāpēc plaknes frontālā projekcija ir taisnstūris (sk. 16. nodalījumu), bet horizontālajā projekcijā plaknes visi punkti attēlojas uz kopējas taisnes.

Ja plaknes viena projekcija ir taisne, tad šī projekcija viena pati pilnīgi nosaka plaknes stāvokli telpā. Tāpēc to sauc par plaknes



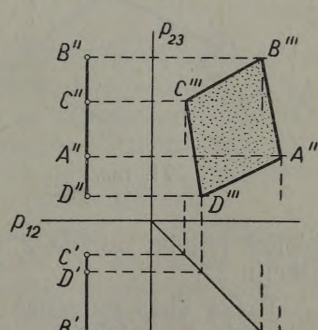
68. ras.



69. ras.

raksturīgo projekciju. Frontāli projecētājai plaknei (67. ras.) raksturīgā projekcija ir plaknes frontālā projekcija.

68. rasējumā plaknes frontālā projekcija ir paralēla projekciju asij. Tas nozīmē, ka visi plaknes punkti atrodas vienādā attālumā no horizontālās projekciju plaknes, tātad plakne ir paralēla šai projekciju plaknei. Tādu plakni sauksim par *horizontālu plakni.* Horizontālajā projekcijā plaknes kontūra un tās ierobežotais laukums attēlojas īstā lielumā.



70. ras.

Ja iepriekšējā rasējumā ir dota kāda plaknes punkta N horizontālā projekcija N', tā frontālo projekciju N'' dabū, velkot perpendikulu pret projekciju asi līdz plaknes raksturīgajai projekcijai. Ja turpretim dota punkta frontālā projekcija N'', tā horizontālo projekciju noteikt nevar. Punkta N' noteikšanai tad jābūt dotam vēl kādam papildnosacījumam. Ievērosim, ka kāds punkts vai taisne atrodas plaknē, ja tā viena projekcija atrodas uz plaknes raksturīgās projekcijas.

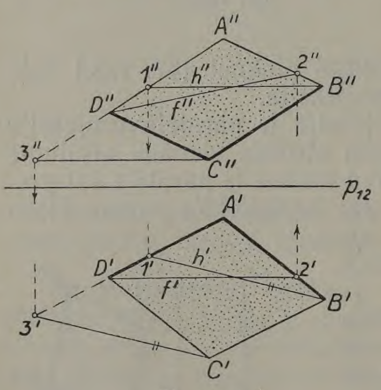
69. rasējumā attēlota horizontāli projecētāja plakne ar tajā iezīmētu taisnes nogriezni MN. Šai piemērā bez tam plaknes raksturīgā (horizontālā) projekcija ir paralēla projekciju asij, t. i., pati plakne ir paralēla frontālajai projekciju plaknei. Tādu plakni sauksim par *frontālu plakni.* Trīsstūra laukums un taisnes nogrieznis MN frontālajā projekcijā redzami īstā lielumā.

Plakni, kas perpendikulāra a b ā m projekciju plaknēm, sauc par *profilu plakni.* Tāda plakne abās projekcijās attēlojas par projekciju asij perpendikulāriem taisnes nogriežņiem.

Profilu četrstūra plakni redzam 70. rasējumā. Lai šādā plaknē iezīmētās figūras vai pašu plaknes kontūru varētu saskatīt, nepieciešams konstruēt arī plaknes profilo projekciju. Tā kā plakne šai gadījumā ir paralēla profilai projekciju plaknei, tad to šajā projekcijā redzam īstā lielumā.

23. Plaknes galvenās līnijas. Par kādas plaknes *galvenajām līnijām* sauc plaknes taisnes, kas ir paralēlas kādai no projekciju plaknēm. Atkarībā no tā, vai galvenā līnija ir paralēla horizontālajai vai frontālajai projekciju plaknei, to sauc par plaknes *horizontāli* vai *frontāli.*

Plaknes galvenās līnijas iespējams plaši izlietot dažādu uzdevumu atrisināšanai. Tās viegli konstruēt, ievērojot, ka viena projekcija tām paralēla projekciju asij (sk. 8. nodalījumu).



71. ras.

Atrisināsim uzdevumu: *plaknē ABCD (71. ras.) konstruēt vienu horizontāli un vienu frontāli.*

Vienkāršības dēļ horizontāli vilksim caur virsotni *B*. Lai konstruētu horizontāles projekcijas, caur *B''* velkam $h'' \| p_{12}$ un atrodam tās krustpunktu *1''* ar paralelograma malu *A''D''*; horizontālā projekcija *h'* iet caur *B'* un punktam *1''* atbilstošo horizontālo projekciju *1'* uz *A'D'*.

Tāpat konstruē plaknes frontāles projekcijas. Iesākam ar tās horizontālo projekciju $f' \| p_{12}$. Ja frontāle vilkta caur kādu virsotni *D*, tās frontālās projekcijas konstruēšanai pietiek noteikt punkta *2*, kurā tā krusto malu *AB*, frontālo projekciju *2''*.

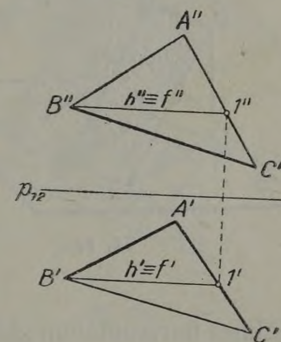
Tā kā abas galvenās līnijas atrodas dotajā plaknē, to vienāda nosaukuma projekcijām bez tam jākrustojas punktos, kas atrodas uz kopēja perpendikula pret projekciju asi. Pēdējo apstākli var izmantot precizitātes kontrolei.

Dažos uzdevumos ir izdevīgi galveno līniju vilkt ā r p u s dotā plaknes gabala (bet paralelograma *ABCD* plaknē). Tādas galvenās līnijas piemērs 71. rasējumā ir horizontāle *3C*. Konstrukcija analoģiska iepriekšējai, tikai punkts *3* ir horizontāles krustpunkts ar malas *AD* pagarinājumu. Horizontālā projekcija *3'C'* ir paralēla *h'*, jo visas plaknes horizontāles ir savstarpēji paralēlas.

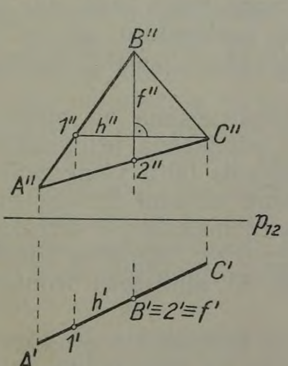
Atsevišķā gadījumā abu galveno līniju virzieni var sakrist, t. i., plaknes horizontāles var būt reizē arī tās frontāles. Tāds gadījums parādīts 72. rasējumā. Šajā rasējumā galvenās līnijas ir reizē paralēlas abām projekciju plaknēm, tātad paralēlas projekciju asij. Arī trīsstūra ABC plakne šai gadījumā ir paralēla projekciju asij, tātad perpendikulāra profilai projekciju plaknei. Par to var pārliecināties, konstruējot trīsstūra ABC profilo projekciju: tā būs taisnes nogrieznis. Tādu plakni sauc par *profili projecētāju plakni.*

Izpildot turpmāk konstrukcijas ar plakni, gadījums, kad plakne ir paralēla projekciju asij, jāaplūko vienmēr atsevišķi, jo tam var būt savas īpatnības. Tā kā pēc plaknes divām projekcijām nevar noteikt, vai tā ir paralēla projekciju asij, tad svarīgi noskaidrot, kā uzzīmēt patvaļīgu plakni, lai tā nebūtu paralēla projekciju asij.

Ievērosim virsotņu kārtību pēdējā rasējumā. Nolasot šīs virsotnes abās projekcijās tādā kārtībā, kā tās novietotas relatīvi pret to attālumiem no projekciju ass, t. i., lasot tās no augšas uz leju — vai otrādi, frontālajā projekcijā dabū $A''B''C''$ vai $C''B''A''$ un horizontālajā projekcijā $A'B'C'$ vai $C'B'A'$. Katru reizi virsotnes B projekcija tiek nosaukta starp virsotņu A un C projekcijām. Citādi tas ir 71. rasējumā, kur frontālajā projekcijā virsotnes mainās kārtībā $A''B''D''C''$ (vai $C''D''B''A''$), bet horizontālajā projekcijā $A'D'B'C'$ (vai $C'B'D'A'$). Virsotnes B frontālā projekcija te ierindojas starp virsotņu A un D projekcijām, bet tās horizontālā projekcija starp virsotņu D un C projekcijām. Virsotņu kārtība (iepriekš minētā nozīmē) ir sajaukta. Izrādās, ka sajaukta virsotņu kārtība abās projekcijās ir pietiekams (bet ne nepieciešams!) nosacījums, lai plakne nebūtu paralēla projekciju asij.



72. ras.



73. ras.

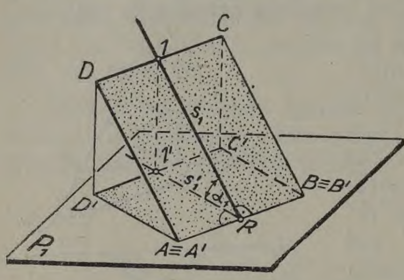
Vispārīgā gadījumā plaknes horizontāles un frontāles var krustoties patvaļīgā leņķī. Šis leņķis vienlīdzīgs nullei, ja plakne paralēla projekciju asij. Ja plakne ir projecētāja plakne, tās horizontāles un frontāles krustojas taisnā leņķī, pie kam viena no galvenajām līnijām vienmēr ir projecētāja taisne.

Horizontāli projecētāja plakne ar vienu tās galveno līniju pāri attēlota 73. rasējumā. Plaknes frontāle f šai gadījumā ir projecētāja taisne. Tās horizontālā projekcija ir punkts, bet frontālā projekcija — projekciju asij perpendikulāra taisne. Tā kā frontālajā projekcijā h'' un f'' veido savā starpā taisnu leņķi ($h'' \| p_{12}$; $f'' \perp p_{12}$

un frontāle ir paralēla frontālajai projekciju plaknei, tad arī telpā abas galvenās līnijas krustojas taisnā leņķī (sk. 16. nodalījumu).

Horizontālām plaknēm horizontāle var būt jebkura plaknes taisne, frontālām plaknēm katra plaknes taisne ir šīs plaknes frontāle.

24. Plaknes slīpuma līnijas; plaknes slīpums pret projekciju plaknēm. Bez plaknes galvenajām līnijām jāatzīmē vēl t. s. plaknes *slīpuma līnijas*. Tās ir plaknes taisnes, kas perpendikulāras plaknes galvenajām līnijām. Atkarībā no tā, vai slīpuma līnijas ir perpendikulāras plaknes horizontālēm vai frontālēm, tās sauc par *pirmā* vai *otrā veida slīpuma līnijām*.



74. ras.

Viena pirmā veida slīpuma līnija s_1 parādīta 74. rasējumā. Plakne $ABCD$ šoreiz zīmēta kā paralelograms, pie kam tās divas malas AB un CD ir plaknes horizontāles (viena no tām atrodas plaknē P_1). Pirmā veida slīpuma līnija s_1 ir perpendikulāra abām plaknes horizontālēm AB un CD.[1] Sakarā ar 16. nodalījumu taisnais leņķis starp slīpuma līniju s_1 un plaknes horizontāli arī horizontālajā projekcijā attēlojas kā taisns leņķis, t. i., s'_1 jābūt perpendikulārai $A'B'$ resp. $C'D'$.

Tā kā s_1 un s'_1 abas perpendikulāras plaknes horizontālei AB, tad leņķis $s_1 Rs'_1$ ir plaknes $ABCD$ slīpuma leņķis ar horizontālo projekciju plakni P_1.[2] Pirmā veida slīpuma līniju tādēļ var izmantot, lai noteiktu plaknes slīpumu pret horizontālo projekciju plakni P_1. Otrā veida slīpuma līnija s_2 savukārt nosaka plaknes slīpumu pret frontālo projekciju plakni P_2.

Plaknes pirmā veida slīpuma līnijas konstruēšana un plaknes slīpuma pret P_1 (pirmā slīpuma leņķa α_1) noteikšana ortogonālās projekcijās parādīta 75. rasējumā. Lai rasējums būtu vienkāršāks, slīpuma līnija vilkta caur paralelograma vienu virsotni B. Vispirms konstruēta viena plaknes horizontāle h un perpendikulāri h' iezīmēta slīpuma līnijas horizontālā projekcija $s'_1 \equiv B'S'$. Slīpuma līnijas frontālo projekciju dabū, atrodot punktam S' atbilstošo frontālo projekciju S'' un to savienojot ar B''.

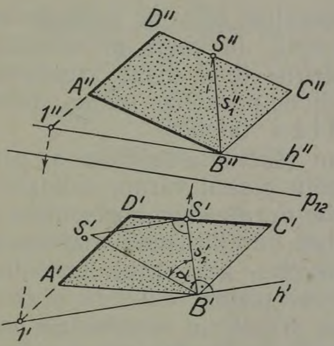
Lai noteiktu tagad plaknes slīpumu pret horizontālo projekciju plakni, ir jānosaka taisnes nogriežņa BS slīpums pret P_1. Uz $B'S'$ kā katetes konstruē taisnleņķa trīsstūri, kura otra katete ir taisnes

[1] 74. rasējuma četrstūra malas $AD \parallel BC \parallel s_1$, t. i., arī AD un BC ir plaknes $ABCD$ slīpuma līnijas, tāpēc četrstūrim $ABCD$ jābūt taisnstūrim.

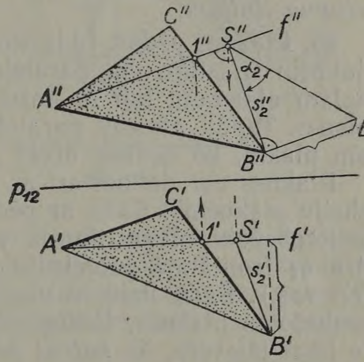
[1] Pēc divplakņu kakta leņķa definīcijas.

nogriežņa BS galapunkta frontālo projekciju attālumu starpība līdz projekciju asij (sk. 13. nodalījumu). Šaurais leņķis pie s'_1 ir meklētais plaknes pirmais slīpuma leņķis α_1.

76. rasējumā konstruēta viena trīsstūra plaknes otrā veida slīpuma līnija s_2 un tās slīpuma leņķis α_2 ar frontālo projekciju plakni. Vispirms konstruē vienu trīsstūra plaknes frontāli f un velk $s''_2 \perp f''$. Pārskatāmības dēļ slīpuma līnija zīmēta ārpus trīsstūra (bet trīsstūra plaknē!) un vilkta tikai līdz frontālei f. Punkts S'' ir slīpuma



75. ras.



76. ras.

līnijas krustpunkta ar f frontālā projekcija. Ar S' un B' ir noteikta slīpuma līnijas horizontālā projekcija s'_2. Taisnes nogriežņa BS slīpums α_2 pret frontālo projekciju plakni ir reizē trīsstūra plaknes slīpums pret šo plakni. Konstrukcija analoģiska iepriekšējai un saprotama no rasējuma.

Atzīmēsim vēl, ka no visām plaknes līnijām vislielāko leņķi ar projekciju plakni veido slīpuma līnija. Kamēr katrs kādas galvenās līnijas nogrieznis vienā projekcijā attēlojas īstā lielumā, taisnes nogriežņi, kas atrodas uz galvenai līnijai perpendikulārās slīpuma līnijas, šai projekcijā tiek visvairāk saīsināti.

Horizontāli projecētājām plaknēm galvenās līnijas ir reizē plaknes slīpuma līnijas. Tā, piemēram, 73. rasējumā $f \equiv s_1$ un $h \equiv s_2$. Plaknes otrais slīpuma leņķis α_2 šai gadījumā ir leņķis starp plaknes horizontālo projekciju un projekciju asi, bet pirmais slīpuma leņķis $\alpha_1 = 90°$.

Frontāli projecētājām plaknēm (sk., piem., 67. ras.) $\alpha_2 = 90°$, bet α_1 ir leņķis starp plaknes frontālo projekciju un projekciju asi. Plaknes pirmā veida slīpuma līnijas tām ir identiskas ar plaknes frontālēm, bet otrā veida slīpuma līnijas ar plaknes horizontālēm, kas šai gadījumā ir frontāli projecētājas taisnes.

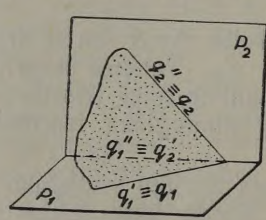
Ja plakne ir paralēla projekciju asij (72. ras.), tad tās abu veidu slīpuma līnijas sakrīt. Slīpuma līnijas te ir profilas taisnes, un plaknes slīpuma noteikšanai pietiek noteikt tikai, piemēram, tās pirmo slīpuma leņķi α_1. Otrais slīpuma leņķis α_2 ir šī leņķa papildinājums līdz 90°(sk.13. nodalījumu).

Raksturīgi vēl, ka plakne ir pietiekami definēta jau ar vienu slīpuma līniju. Tiešām, ja ir dota, piemēram, plaknes pirmā veida slīpuma līnija s_1, tad ir zināms arī plaknes horizontāles h virziens $h \perp s_1$, bet ar divām krustiskām taisnēm h un s_1 plaknes stāvoklis ir noteikts.

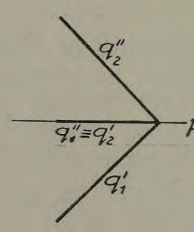
Plaknes pirmā veida slīpuma līnijas mēdz saukt arī par plaknes *krituma līnijām.*

25. Plaknes pēdas. Līdz šim esam operējuši tikai ar ierobežotām plaknēm trīsstūra vai paralelograma veidā. Ja vienu no trīsstūra malām atmetam, tad to pašu plakni definē tikai divas krustiskas taisnes. Tāpat, atmetot paralelograma divas paralēlās malas, dabūjam plakni, ko nosaka divas p a r a l ē l a s taisnes.

Plaknes var definēt arī ar tās pēdām (šķēluma taisnēm ar projekciju plaknēm). Šādu ar pēdām definētu plakni varam salīdzināt ar ierobežotu plakni, kuras viena mala q_1 atrodas horizontālajā, otra q_2 frontālajā projekciju plaknē, bet pārējās malas atmestas (77. ras.). Šādā uztverē visas konstrukcijas, kas agrāk izpildītas ierobežotās plaknēs, līdzīgi izpilda arī ar pēdām definētā plaknē. Te tikai jāievēro, ka *katras pēdas viena projekcija atrodas uz projekciju ass* (sk. 78. ras., kur parādītas plaknes Q pēdu q_1 un q_2 projekcijas savietotās projekciju plaknēs).



77. ras.



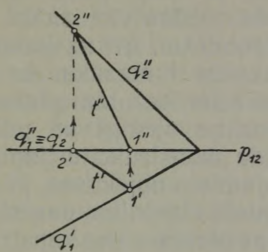
78. ras.

Aplūkosim dažus piemērus. Ja ir dota kādas plaknes taisnes t horizontālā projekcija t' (79. ras.), tad tās frontālo projekciju dabū, ievērojot, ka taisnei jākrusto abas pēdas q_1 un q_2. Atzīmējot šo krustpunktu horizontālās projekcijas *1'* un *2'*, atrodam to frontālās projekcijas *1''* un *2''* un tad pašu taisnes frontālo projekciju t''.

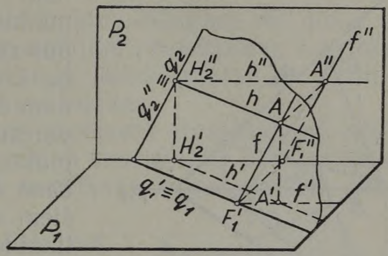
Punkti *1* un *2* ir taisnes t pēdas plaknēs P_1 un P_2, tādēļ, *lai taisne atrastos plaknē, tās pēdām jāatrodas uz plaknes pēdām,* un otrādi, *plakne iet caur taisni, ja tās pēdas iet caur taisnes pēdām.* Līdzīgi, izmantojot palīgtaisnes, iespējams konstruēt dotajā plaknē arī kādu punktu. Tam nolūkam ērti izmantot plaknes galvenās līnijas — horizontāli vai frontāli (80. ras.). Tā kā plaknes horizontālo pēdu varam uzskatīt par to plaknes horizontāli, kas atrodas plaknē

P_1, un visas plaknes horizontāles ir paralēlas, tad h ir paralēla q_1. Plaknes frontāle f savukārt ir paralēla plaknes frontālajai pēdai q_2 — plaknes frontālei, kas atrodas plaknē P_2.

Blakus (81. ras.) parādīts konstrukcijas izpildījums savietotā rasējumā. Rasējumā atzīmētas abas galvenās līnijas caur punktu



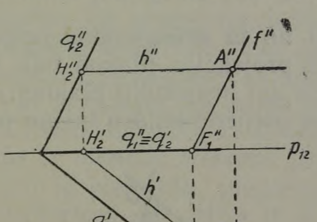
79. ras.



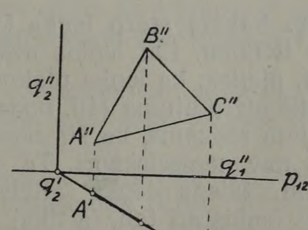
80. ras.

A, kaut gan punkta A projekciju konstruēšanai pietiek ar vienu galveno līniju. Punkti F_1 un H_2 ir galveno līniju pēdas, F_1 — frontāles horizontālā pēda, H_2 — horizontāles frontālā pēda. Katrai galvenajai līnijai ir tikai viena pēda, jo tās ir paralēlas katra savai projekciju plaknei.

Ja plakne ir perpendikulāra kādai projekciju plaknei (projecētāja plakne), tad tās viena pēda ir perpendikulāra šai projekciju plaknei. Horizontālajai projekciju plaknei perpendikulāra plakne attēlota



81. ras.



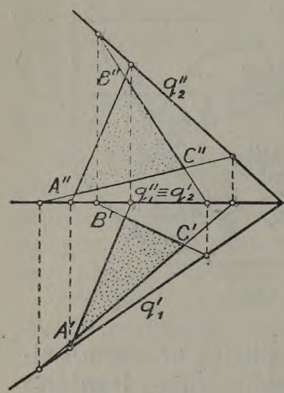
82. ras.

82. rasējumā. Plaknes frontālā pēda q_2 ir perpendikulāra plaknei P_1, tās frontālā projekcija q''_2 perpendikulāra projekciju asij. Plaknē iezīmēts arī patvaļīgs trīsstūris ABC. Šī trīsstūra horizontālā projekcija ir taisnes nogrieznis uz q_1'.

Ja plakne ir paralēla kādai projekciju plaknei (horizontāla vai frontāla plakne), tai ir tikai viena pēda — paralēla projekciju asij (salīdz. ar 22. nodalījumu).

Atzīmēsim vēl, ka gadījumā, ja mums ir dota kāda ierobežota plakne, iespējams konstruēt arī šīs plaknes pēdas. Tā, piemēram,

83. rasējumā, kur plakne dota ar trīsstūri ABC, plaknes pēdas konstruē, nosakot taišņu AB, BC un AC pēdas un tās savienojot. Arī otrādi, ja plakne dota ar pēdām q_1 un q_2, ir iespējams vienmēr no plaknes «izgriezt» kādu norobežotu plaknes gabalu.

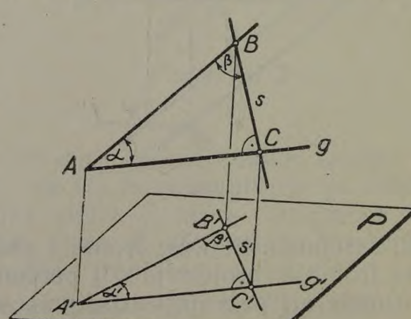


83. ras.

Plaknes attēlošana ar pēdām praktiski ir neērta, jo bieži pēdu krustpunkts vai pašas pēdas var iznākt ārpus rasējuma robežām. Arī uzskatāmība šādām plaknēm ir mazāka. Ar pēdām definētām neierobežotām plaknēm varētu būt nozīme vienīgi kā palīgplaknēm dažādu konstrukciju izpildīšanā ar attēlojamiem objektiem, jo pašiem attēlojamiem objektiem parasti ir tikai ierobežotas plaknes. Bet konstrukcijām, kā vēlāk redzēsim, lielāko tiesu tiek izmantotas projecētājas palīgplaknes. Tādas plaknes ir noteiktas jau ar vienu (raksturīgo) projekciju, citiem vārdiem — vienu pēdu. Plaknes otra pēda konstrukcijās ir pilnīgi lieka.

Arī tais gadījumos, kad palīgplakne nav projecētāja plakne, izdevīgāk to definēt ne ar pēdām, bet ar plaknes galvenajām līnijām, t. i., ar divām krustiskām taisnēm h un f.

26. Sakars starp leņķa īsto lielumu un tā ortogonālās projekcijas lielumu. Lai leņķis attēlotos kādā projekciju plaknē īstā lielumā, pietiek, ka leņķa plakne ir paralēla šai projekciju plaknei. No agrākā aizrādījuma (16. nodalījumā) par perpendikulāru taišņu projekcijām redzams, ka šis nosacījums nav nepieciešams. Tā, piemēram, taisna leņķa attēls ir taisns leņķis arī tad, ja tikai viena tā mala ir paralēla projekciju plaknei. Noskaidrosim te, vai iespējami vēl kādi citi gadījumi, kad leņķa projekcijas lielums vienāds ar paša leņķa lielumu, un kāds ir sakars starp leņķa un tā projekcijas lielumiem.



84. ras.

Vispirms pieņemsim, ka leņķis α ir šaurs un ka leņķa viena mala g ir leņķa plaknes galvenā līnija attiecībā pret projekciju plakni P (84. ras.). Novilksim leņķa plaknes vienu slīpuma līniju $s \perp g$. Tā kā $g \parallel P$, tad arī $\measuredangle A'C'B' = 90°$. Taisnleņķa trīsstūros ABC un $A'B'C'$ viena katete $A'C' = AC$, bet otra $B'C' < BC$.

(kā taisnes nogriežņa BC ortogonāla projekcija), tāpēc arī $\alpha_1 < \alpha$. Tātad *šaurs leņķis, kam viena mala ir leņķa plaknes galvenā līnija, ortogonālā projekcijā samazinās.*

Tajos pašos trīsstūros $\beta' > \beta$ (kā nevienādu leņķu papildleņķi), tādēļ *šaurs leņķis, kam viena mala ir leņķa plaknes slīpuma līnija, ortogonālā projekcijā palielinās.*

Aplūkojot leņķa α un β blakus leņķus, dabūjam vēl divus nosacījumus par platu leņķu ortogonālajām projekcijām. Iepriekšējos nosacījumos tikai vārda «šaurs» vietā jāliek «plats» un vārdi «samazinās» un «palielinās» jāapmaina vietām.

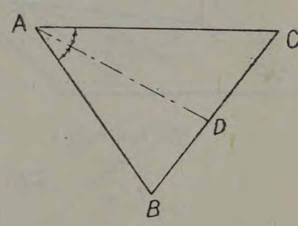
No iepriekšējiem nosacījumiem iespējams atvasināt arī sekojošu vispārīgu nosacījumu, kas derīgs tiklab šauriem, kā platiem leņķiem.

Ja caur kāda leņķa virsotni novelkam leņķa plaknes galveno un slīpuma līniju, tad,

1) ja leņķis galveno līniju ieslēdz, bet slīpuma līniju izslēdz, tas ortogonālā projekcijā samazinās;

2) ja leņķis galveno līniju izslēdz, bet slīpuma līniju ieslēdz, tas ortogonālā projekcijā palielinās;

3) ja leņķis ieslēdz vai izslēdz abas šīs līnijas, par tā lielumu ortogonālā projekcijā nekā nevar pateikt.



85. ras.

Jautājums par leņķa projekcijas un paša leņķa lielumu attiecību ir sarežģītāks nekā jautājums par taisnes nogriežņa un tā projekciju lielumu attiecību. Tā, piemēram, leņķa bisektrises attēls ne vienmēr ir leņķa projekcijas bisektrise, kaut gan taisnes nogriežņa viduspunkta attēls vienmēr ir projekcijas viduspunkts.

Var konstatēt, ka *leņķa projekcijas dalījumam uz pusēm atbilst paša leņķa dalījums uz pusēm vienīgi tanī gadījumā, ja abas leņķa malas ir vienādā slīpumā pret projekciju plakni.*

Lai to pierādītu, pieņemsim, ka trīsstūra ABC (85. ras.) leņķa A bisektrises AD attēls ir šī trīsstūra projekcijas $A'B'C'$ bisektrise $A'D'$. Izmantojot trīsstūra leņķa bisektrises īpašību, varam rakstīt:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \quad \text{(telpas trīsstūrim) un}$$

$$\frac{B'D'}{D'C'} = \frac{A'B'}{A'C'} \quad \text{(projekcijas trīsstūrim).}$$

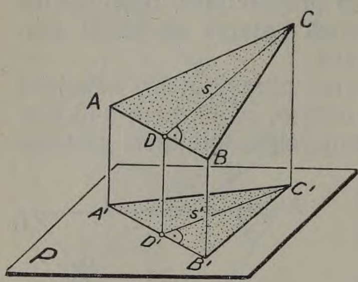
Saskaņā ar 11. nodalījumu $\frac{BD}{DC} = \frac{B'D'}{D'C'}$, tādēļ arī $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$ jeb $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$. Bet šī pēdējā proporcija ir pareiza vienīgi tad, ja abiem taisnes nogriežņiem AB un AC ir vienāds slīpums pret projekciju plakni, jo tikai tad tie abi saīsinās vienādā attiecībā.

27. Plaknes gabala un tā projekcijas laukumu attiecība. Konstatēsim, ka starp plaknes gabala laukumu L un tā projekcijas laukumu L' pastāv sakarība

$$L' = L \cos \alpha,$$

kur α ir plaknes gabala slīpuma leņķis ar doto projekciju plakni.

Vispirms pieņemsim, ka plaknes gabals ir ierobežots ar trīsstūri ABC (86. ras.), pie kam mala AB ir paralēla projekciju plaknei P, t. i., atrodas uz trīsstūra plaknes galvenās līnijas. Novilksim caur virsotni C trīsstūra plaknes slīpuma līniju s. Slīpuma līnijas nogrieznis CD tad ir trīsstūra ABC augstums, tā projekcija C' D' — projekcijas trīsstūra augstums. Tā kā $AB = A'B'$ un slīpuma līnija s veido leņķi α ar projekciju plakni P, tad



86. ras.

$$L' = \frac{A'B' \cdot C'D'}{2} = \frac{AB}{2} \cdot CD \cos \alpha = L \cos \alpha.$$

Ja neviena trīsstūra mala nav paralēla projekciju plaknei, tad, novelkot vienu trīsstūra plaknes galveno līniju, varam sadalīt to divos trīsstūros, kam viena mala ir paralēla projekciju plaknei. Tā kā formula ir pareiza katram no šiem trīsstūriem, tad tā ir pareiza arī kopējam trīsstūrim. Tā ir pareiza arī tanī gadījumā, kad plakni norobežotāja figūra ir patvaļīgs daudzstūris, jo katru daudzstūri ar diagonālēm var vienmēr sadalīt atsevišķos trīsstūros.

Pēc šīs formulas iespējams izrēķināt plaknes gabala laukumu, ja zināms tā projekcijas laukums un slīpums pret projekciju plakni.

5. §. TAISNE UN PLAKNE. DIVAS PLAKNES

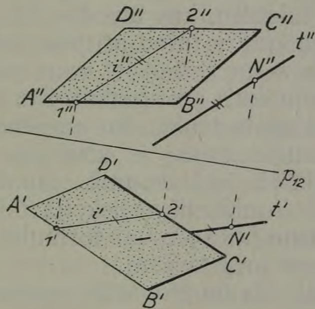
Līdz šim esam apskatījuši tikai gadījumus, kad taisne atrodas plaknē. Noskaidrosim tagad nosacījumus, kad taisne ir paralēla vai perpendikulāra plaknei, kā arī paralēlu un perpendikulāru plakņu pazīmes.

28. Taisne paralēla plaknei. *Taisne ir paralēla plaknei, ja tā ir paralēla kādai plaknes taisnei.* Pamatojoties uz šo stereometrijas teorēmu, iespējams savietotā rasējumā konstruēt taisni, kas paralēla dotajai plaknei, kā arī noskaidrot rasējumā attēloto taišņu un plakņu paralelitāti.

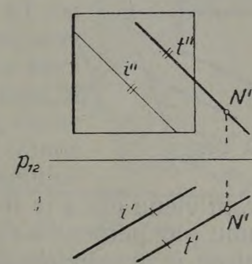
Lai, piemēram, caur kādu punktu N paralēli dotajai plaknei $ABCD$ (87. ras.) novilktu patvaļīgu taisni t, jāiezīmē vispirms šai plaknē kāda palīgtaisne i un caur punktu N jāvelk $t \| i$ $(t' \| i',\ t'' \| i'')$.

Gluži tāpat, ja gribam noskaidrot, vai kāda taisne ir paralēla plaknei, zīmējam vienā projekcijā, piemēram, horizontālajā, $i' \| t'$ un nosakām taisnes i frontālo projekciju tā, lai taisne i atrastos dotajā plaknē. Taisne t ir paralēla plaknei tikai tad, ja arī taišņu t un i frontālās projekcijas ir paralēlas.

Tādu taišņu, kas būtu paralēlas plaknei $ABCD$, caur doto punktu var novilkt bezgalīgi daudz. Par palīgtaisni i var izmantot arī kādu no plaknes šķautnēm. Palīgtaisnes izvēle ir ierobežota, ja meklējamai taisnei jāapmierina vēl kāds papildnosacījums. Tā, piemēram,



87. ras.



88. ras.

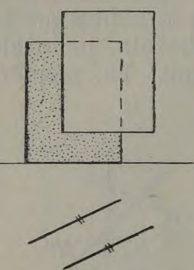
ja taisnei t jābūt paralēlai arī kādai projekciju plaknei, tad palīgtaisnei i jābūt plaknes galvenajai līnijai, t. i., tās vienai projekcijai jābūt paralēlai projekciju asij. Tādā gadījumā caur punktu N var novilkt tikai vienu taisni, kas izpilda abus šos nosacījumus.

Ja dotā plakne ir projecētāja plakne (88. ras.), palīgtaisne i nav jākonstruē. Plaknes viena projekcija tad ir taisne un taisnes t vienai projekcijai jābūt paralēlai šai plaknes raksturīgajai projekcijai. Otra taisnes t projekcija var būt patvaļīga, jo katram izvēlētam šīs projekcijas virzienam iespējams vienmēr piesaistīt atbilstošu taisnes i virzienu.

Aplūkosim tagad apgriezto uzdevumu — caur doto punktu vilkt plakni, paralēlu dotajai taisnei. Tādas plaknes atkal varam novilkt neierobežotā skaitā. Tās visas iet caur kopēju taisni, kas vilkta caur doto punktu paralēli dotajai taisnei. Katru no tām varam definēt ar šo kopējo taisni un vēl kādu patvaļīgu taisni caur doto punktu. Lai uzdevumam būtu tikai viens atrisinājums, jābūt dotam vēl kādam papildnosacījumam. Tā, piemēram, ja plaknei jābūt perpendikulārai kādai projekciju plaknei (kā 88. ras.), tad tās raksturīgajai projekcijai jābūt paralēlai attiecīgai taisnes projekcijai u. tml.

29. Paralēlas plaknes. *Divas plaknes ir paralēlas, ja vienas plaknes divas krustiskas taisnes ir paralēlas otrai plaknei.* Noskaidrojot plakņu paralelitāti, par šīm divām taisnēm var izvēlēties arī plakņu neparalēlās šķautnes. Lai atrisinātu apgriezto uzdevumu, t. i., caur patvaļīgu punktu novilktu plakni, kas paralēla dotajai plaknei, caur šo punktu jāvelk divas taisnes, paralēlas dotās plaknes divām krustiskām taisnēm. Ar šīm divām taisnēm ir noteikta plakne, kas paralēla dotajai.

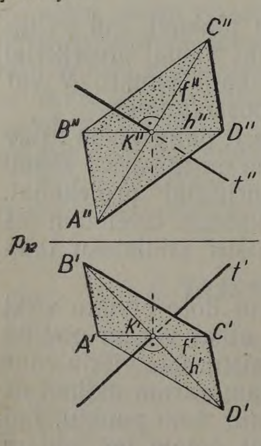
Plaknes, kas perpendikulāras vienai un tai pašai projekciju plaknei, ir paralēlas, ja to raksturīgās projekcijas ir paralēlas (89. ras.).



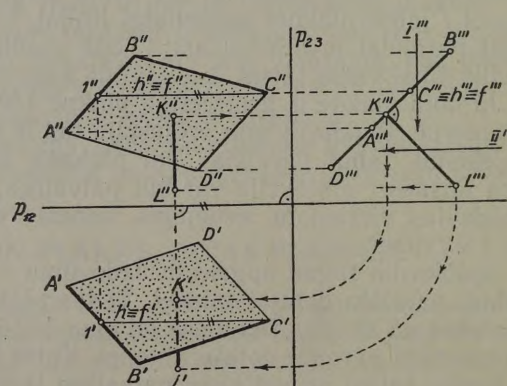
89. ras.

30. Taisne perpendikulāra plaknei. Ja taisne ir perpendikulāra plaknei, tad tā ir perpendikulāra visām taisnēm, kas atrodas šai plaknē. Tā ir perpendikulāra tātad arī plaknes galvenajām līnijām h un f, kas iet caur punktu, kurā vilkts perpendikuls pret plakni. Bet mums ir zināms, ka taisnais leņķis, ko perpendikuls veido ar horizontālo taisni h, attēlojas horizontālajā projekcijā īstā lielumā, tāpat īstā lielumā attēlojas frontālajā projekcijā taisnais leņķis, kam viena mala ir frontāla taisne f. Tāpēc var formulēt šādu nosacījumu par perpendikulārās taisnes projekcijām.

Ja taisne ir perpendikulāra plaknei, tās horizontālā projekcija ir perpendikulāra plaknes horizontāles horizontālajai projekcijai, bet frontālā projekcija perpendikulāra plaknes frontāles frontālajai projekcijai.



90. ras.



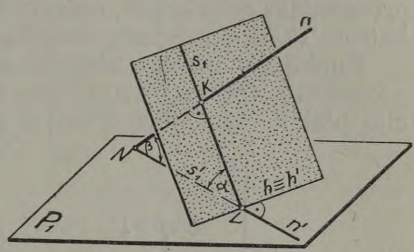
91. ras.

90. rasējumā plakne dota paralelograma veidā, pie kam paralelograma diagonāles ir reizē plaknes galvenās līnijas. Ja caur diagonāļu krustpunktu K vilkta taisne t perpendikulāri šai plaknei, tad sakarā ar iepriekšējo $t' \perp h'$ un $t'' \perp f''$.

Otrādi, ja $t' \perp h'$ un $t'' \perp f''$, tad taisne t ir perpendikulāra plaknei. Šo īpašību var izmantot, lai no kāda punkta novilktu perpendikulu pret doto plakni. Vispirms jākonstruē plaknes galvenās līnijas un tad no punkta jāvelk taisne ar minētajām īpašībām.

Te ir tikai viens izņēmums, proti, ja plakne ir paralēla projekciju asij (profili projecētāja plakne). Tā kā plaknes abas galvenās līnijas h un f tad sakrīt un ir paralēlas projekciju asij, tad perpendikuls ir profila taisne un tas ir pietiekami noteikts tikai tad, ja ir dotas vēl tā divu punktu projekcijas.

Konstrukcijas izpildīšanai šai gadījumā nepieciešama profilā projekciju plakne (sk. 91. ras.). Dotās plaknes profilā projekcija ir taisnes nogrieznis, bet perpendikula attēls ir perpendikulārs šai plaknes raksturīgajai projekcijai. Tagad varam izvēlēties perpendikula divu punktu K un L profilās projekcijas un pēc tām noteikt arī šo punktu pārējās projekcijas.



92. ras.

Lai caur doto punktu novilktu plakni, kas perpendikulāra dotajai taisnei, caur šo punktu velk vienu horizontālu un vienu frontālu taisni perpendikulāri dotajai. Meklētā plakne ir noteikta ar šīm divām taisnēm — plaknes galvenajām līnijām. Atsevišķi jāaplūko, tāpat kā iepriekš, gadījums, kad taisne ir profila taisne.

Plaknei kādā punktā vilktu perpendikulu īsuma dēļ mēdz saukt par plaknes *normāli,* bet plakni, kas perpendikulāra dotajai taisnei, par šīs taisnes *normālplakni.*

Iedomāsimies kādā plaknes punktā K (92. ras.) novilktu normāli n un pirmā veida slīpuma līniju s_1. Abu šo taišņu horizontālās projekcijas sakrīt, jo taisnes ir perpendikulāras plaknes horizontālei h. Tā kā normāle n ir perpendikulāra arī slīpuma līnijai s_1, tad trīsstūris KLN ir taisnleņķa trīsstūris. Šai trīsstūrī α un β ir leņķi, ko plakne resp. tās normāle veido ar projekciju plakni P_1. Tātad, zinot plaknes slīpumu pret kādu no projekciju plaknēm, mēs zinām arī plaknes normāles slīpumu pret šo projekciju plakni: normāles slīpuma leņķis ir plaknes slīpuma leņķa papildleņķis. Tāpat, ja mēs kādā uzdevumā esam noteikuši taisnes slīpumu, tad šīs taisnes normālplaknes slīpums vairs atsevišķi nav jānosaka.

31. Perpendikulāras plaknes. Lai konstruētu plakni Q, perpendikulāru kādai plaknei R, varam rīkoties divējādi:

1) novilkt plaknei R kādu normāli n un plakni Q vilkt caur šo normāli;[1]

2) vilkt taisni, paralēlu R, un plakni Q, perpendikulāru šai taisnei.

Lai dabūtu vienu pašu atrisinājumu, jābūt dotam vēl kādam papildnosacījumam.

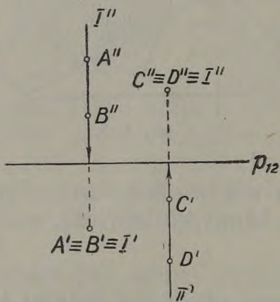
---

[1] Plakni Q var definēt, piemēram, ar normāli n un vēl kādu otru taisni, kas vai nu krusto šo normāli, vai ir tai paralēla.

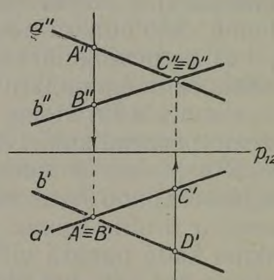
32. Redzamības noteikšana projekcijās. Attēlojot rasējumā vienlaicīgi vairākus objektus, tie pa daļai vai pilnīgi var aizsegt viens otru. Tā 87. rasējuma virsskatā daļu taisnes t aizsedz plakne $ABCD$, 89. rasējumā viena plakne pretskatā aizsedz otru, bet 90. rasējumā, plakne aizsedz daļu taisnes t gan virsskatā, gan pretskatā.[1] Lai padarītu attēlus uzskatāmākus, tādos gadījumos ir jānosaka katra objekta atsevišķo daļu redzamība.

Jautājumu par redzamību iespējams vienmēr reducēt uz jautājumu par punktu redzamību. Tā kā visus objektus attēlojam divās ortogonālās projekcijās, redzamība jānoskaidro katrā projekcijā resp. katram skata virzienam atsevišķi.

Punkti var aizsegt viens otru tikai tad, ja tie atrodas uz kopēja projecētāja (redzes) stara, t. i., uz kopēja perpendikula, pret projekciju plakni. Tādi, piemēram, ir punkti A, B un C, D 93. rasējumā.



93. ras.



94. ras.

Pirmie divi atrodas uz kopēja horizontāli projecētāja stara I, un to horizontālās projekcijas sakrīt. Virsskatā punkts A aizsedz punktu B, jo, raugoties šai virzienā, punkts A ir novērotājam tuvāk nekā punkts B (tā frontālā projekcija tālāk no projekcijas ass). Punkti C un D atrodas uz kopēja frontāli projecētāja stara II, un pretskatā tos redzam kā vienu punktu, pie kam punkts D kā novērotājam tuvākais punkts aizsedz punktu C (abi skata virzieni rasējumā parādīti ar bultiņām).

Punktu redzamību kādā projekcijā tātad nosaka šo punktu otro projekciju novietojums relatīvi pret projekciju asi. *Redzams kādā projekcijā vienmēr tas punkts, kam otrā projekcija ir tālāk no projekciju ass.*

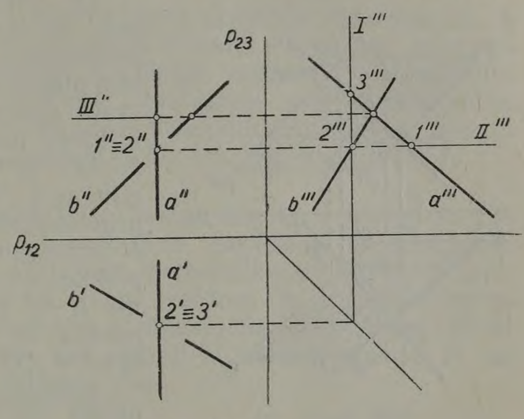
Izlietosim tagad šos nosacījumus, lai noteiktu 94. rasējumā attēloto šķērso taišņu a un b redzamību.

Sāksim ar redzamības noteikšanu horizontālajā projekcijā. Abu taišņu horizontālo projekciju krustpunkts ir taisnes a punkta A un

[1] Ar vārdiem «virsskats» un «pretskats» te (un turpmāk) īsuma dēļ apzīmēts novērotāja skata virziens pret attiecīgo projekciju plakni, bet ne pašas projekcijas. Pie tam frontālā projekciju plakne jāiedomājas pacelta perpendikulāri rasējuma plaknei.

taisnes b punkta B kopējā projekcija $A' \equiv B'$. Tā kā punkts A no horizontālās projekciju plaknes ir tālāk nekā punkts B, tad virsskatā šai šķērsošanās vietā taisne a aizsedz taisni b.[1] Rasējumā tas uzskatāmi parādīts, zīmējot b' šai vietā ar pārtraukumu.

Tāpat noskaidrojam taišņu redzamību pretskatā šķērsošanās vietā $C'' \equiv D''$. Tā kā taisnes b punkts D ir tālāk no frontālās projekciju plaknes nekā taisnes a punkts C, tad šai šķērsošanās vietā taisne b pretskatā aizsedz taisni a. Projekcija a'' zīmēta ar pārtraukumu pie b''.



95. ras.

Lai noteiktu kādas taisnes redzamību attiecībā pret profilu taisni, izmantojam šo taišņu profilās projekcijas. Tā 95. rasējumā šķērsošanās vietā 1—2 pretskatā profilās taisnes a punkts 1 aizsedz otras taisnes b punktu 2, jo attiecīgais frontāli projecētājs stars II šo punktu sastop papriekš (sk. profilo projekciju: II''' ir šā projecētāja stara profilā projekcija). Arī šķērsošanās vietā 3—2 virsskatā taisne a aizsedz taisni b, jo horizontāli projecētājs stars I, kas profilā projekcijā attēlojas kā vertikāls stars, sastop vispirms taisnes a punktu 3 un tikai pēc tam punktu 2 uz taisnes b.

Ja profilo projekciju plakni izmanto tikai kā palīglīdzekli konstrukcijai, tad redzamības noteikšana profilā projekcijā nav obligāta. Ja turpretim profilo projekciju konstruē, lai papildinātu kāda komplicētāka telpas objekta attēlus horizontālā un frontālā projekciju plaknē (kā mēdz darīt tehniskos rasējumos), tad redzamības noteikšana ir obligāta arī šajā projekcijā. Tādā gadījumā šķērsošanās vietā sānskatā ir jāpievelk profili projecētājs stars III (sk. ras., III frontālā projekcija III'' ir perpendikulāra asij p_{23}) un jānoskaidro, kā novietotas punktu frontālās projekcijas attiecībā pret asi p_{23}.

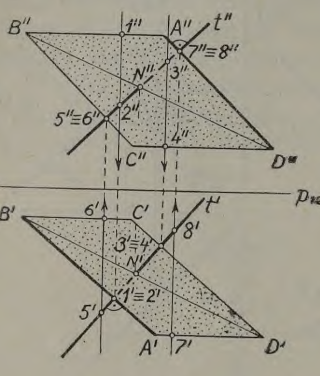
Iepriekšējo divu šķērso taišņu redzamības noteikšanas shēmu var tālāk izlietot, lai noskaidrotu taisnes redzamību attiecībā pret kādu plakni, plaknes redzamību attiecībā pret otru plakni utt.

Noteiksim, piemēram, redzamību 96. rasējumā. Tāpat kā 90. rasējumā caur plaknes punktu N (uz diagonāles BD) novilkts pret plakni perpendikuls t ($t' \perp A'B'$, $t'' \perp A''D''$, jo AB un AD ir plaknes galvenās līnijas). Jānosaka šī perpendikula t redzamība.

---

[1] Par šķērsošanās vietu sauksim punktu, kurā krustojas šķērso taišņu projekcijas jeb vietu, kurā šķietami sakrīt abu šķērso taišņu divi punkti (šķērsošanās vieta atkarīga no skata virziena).

Redzamības noteikšanai horizontālajā projekcijā izmantojam šķērso taišņu pārus *t, AB* un *t, CD*. No frontālās projekcijas redzams, ka šķērsošanās vietā *1—2* taisne *t* iet zem šķautnes *AB*, bet šķērsošanās vietā *3—4* virs šķautnes *CD*. Pa kreisi no punkta *N* tātad taisne *t* virsskatā atrodas zem plaknes, pa labi no *N* — virs plaknes *ABCD*. Taisnes nogriezni *N—2* virsskatā neredzam, tādēļ horizontālajā projekcijā to atzīmējam ar pārtrauktu līniju.



96. ras.

Lai noskaidrotu redzamību frontālajā projekcijā, nosakām taisnes *t* novietojumu attiecībā pret tai šķērsajām plaknes šķautnēm *BC* un *AD* pretskatā. Šķērsošanās vietā *5—6* taisne *t* ir tuvāk novērotājam (punkta *5* horizontālā projekcija ir tālāk no projekciju ass), tādēļ taisne *t* šai vietā ir priekšā plaknei *ABCD* un līdz punktam *N* ir redzama. Punktā *N* taisne pāriet plaknes otrā pusē un taisnes nogrieznis *N—8* pretskatā nav redzams. To parāda arī taisnes novietojums pret šķautni *AD* šķērsošanās vietā *7—8*.

Redzamības noteikšanu var vienkāršot, noskaidrojot, kā pēc plaknes projekcijām noteikt, vai abos skata virzienos redzam plaknes vienu un to pašu vai dažādās puses. Var pārliecināties, ka *plakne abos skata virzienos redzama no vienas un tās pašas vai dažādām pusēm atkarībā no tā, vai plaknes kontūras projekciju virsotnēm ir vienādi vai pretēji vērsta numerācija.*

Tā, piemēram, 96. rasējumā horizontālajā projekcijā virsotnes sakārtotas pulksteņa rādītāja kustības virzienā $(A' \to B' \to C' \to D' \to A')$, bet frontālajā projekcijā pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam $(A'' \to B'' \to C'' \to D'' \to A'')$. Plakne šai piemērā katrā projekcijā redzama no citas puses.[1] Ja virsskatā taisne *t* pa labi no punkta *N* ir viscaur redzama, tad pretskatā daļa taisnes pa labi no *N* ir aizsegta ar plakni (sal. ar 90. ras., kur plakne abās projekcijās redzama no tās pašas puses!). Redzamību vienā projekcijā tātad var vienmēr saistīt ar redzamību otrā projekcijā.

Taisnes redzamības noteikšana attiecībā pret plakni vienkāršojas, ja plakne ir projecētājā stāvoklī pret kādu no projekciju plaknēm. Tā, piemēram, 91. rasējumā profilā projekcijā tieši redzams, ka horizontāli projecētājus starus *I* plakne *ABCD* aiztur, tādēļ virsskatā

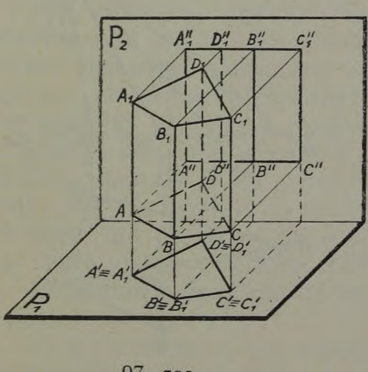
[1] Iedomāsimies plaknē *ABCD* novietotu kabatas pulksteni tā, lai tā ciparnīca būtu redzama virsskatā. Pulksteņa rādītāji pārvietodamies tad rādīs pēc kārtas uz punktiem *A, B, C* un *D*. Pretskatā mēs redzēsim rādītājus pārvietojamies pretējā virzienā, t. i., pretskatā mēs skatāmies uz pulksteni un reizē plakni *ABCD* no pretējās puses.

perpendikula KL daļa, kas ir plaknes kontūras iekšpusē, nav redzama. Frontāli projecētāji stari II turpretim krusto vispirms perpendikulu KL, tādēļ tas pretskatā viscaur redzams.

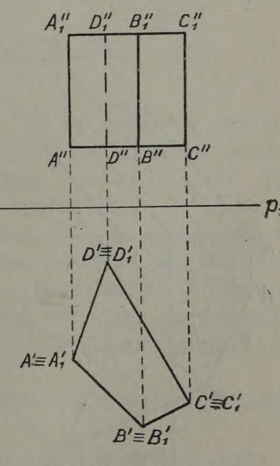
6. §. DAUDZSKALDŅU PROJEKCIJAS

Daudzskaldņa projekciju konstruēšana praktiski reducējas uz tā virsotņu un šķautņu projekciju konstruēšanu. Pagaidām sniegsim tikai daudzskaldņu attēlošanas vispārīgu aprakstu, noskaidrojot galvenokārt redzamības jautājumu. Jautājumu par daudzskaldņa projekciju konstruēšanu pēc dotajiem nosacījumiem par tā lielumu un stāvokli telpā tuvāk iztirzāsim vēlāk (sk. 54. nodalījumu).

33. Taisnas prizmas projekcijas. Taisna četrstūra prizma un tās projekcijas plaknēs P_1 un P_2 uzskatāmi parādītas 97. rasējumā. Prizma novietota ar sānu šķautnēm perpendikulāri horizontālajai projekciju plaknei. Arī prizmas sānu skaldnes ir perpendikulāras plaknei P_1 (horizontāli projecētājas plaknes); tās attēlojas šai plaknē kā taisnes nogriežņi. Prizmas abi pamati ir paralēli plaknei P_1 un attēlojas šai plaknē īstā lielumā, pie kam abu pamatu projekcijas sakrīt. Frontālajā projekcijā prizmas sānu



97. ras.



98. ras.

šķautnes attēlojas īstajā lielumā un perpendikulāri projekciju asij; tās abi pamati (kā horizontālas plaknes) attēlojas par taisnes nogriežņiem, kas paralēli projekciju asij.

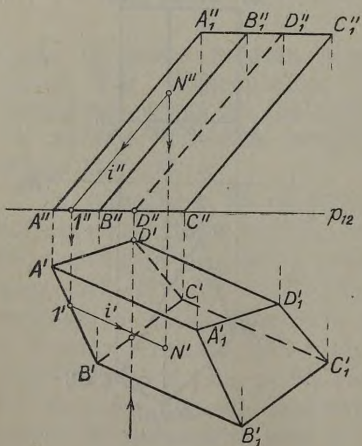
98. rasējums ir prizmas projekciju savietots rasējums. Šis savietotais rasējums dod mums pilnīgu priekšstatu par prizmas stāvokli telpā. Horizontālā projekcija attēlo prizmu, kādu mēs to redzam virsskatā, bet frontālā projekcija — tā, kā to redzam pretskatā. No abām

projekcijām var noteikt arī prizmas izmērus un tās atsevišķo elementu attālumus no projekciju plaknēm.

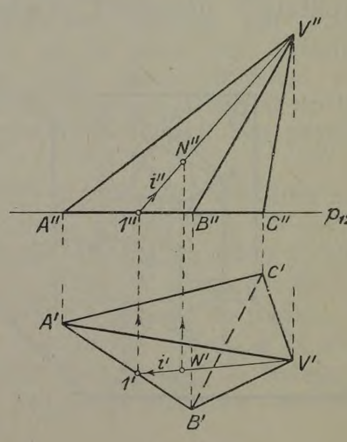
Līniju, kas atdala kāda daudzskaldņa redzamo daļu no neredzamās, sauc par daudzskaldņa *apveidu*, pie kam tas mainās atkarībā no tā, kādā virzienā mēs daudzskaldni aplūkojam. Tā iepriekšējā piemērā prizmas apveids virsskatā ir četrstūris $A_1B_1C_1D_1A_1$, bet pretskatā daudzstūris $AA_1B_1C_1CBA$. Daudzskaldņa apveids vispārīgā gadījumā ir telpas daudzstūris (kam virsotnes neatrodas vienā plaknē), un tikai speciālā gadījumā tas var būt plaknes daudzstūris (kā prizmai virsskatā).

Daudzskaldņa apveids attiecīgajā projekcijā vienmēr redzams; tā projekcija dod daudzskaldņa projekcijas kontūru. Redzamība tādēļ jānosaka tikai tām daudzskaldņa šķautnēm, kam projekcijas atrodas apveida projekcijas iekšpusē. Prizmas šķautņu BB_1 un DD_1 redzamība pretskatā viegli nosakāma, pievelkot to horizontālajām projekcijām projekciju asij perpendikulārus starus. Šķautne DD_1 pretskatā nav redzama, jo to aizsedz skaldne ABB_1A_1.

34. Slīpas prizmas un piramīdas projekcijas. 99. rasējumā attēlota slīpa četrstūra prizma, bet 100. rasējumā patvaļīga trīsstūra piramīda. Abu daudzskaldņu pamati atrodas horizontālajā projekciju plaknē, un tie frontālajā projekcijā attēlojas uz projekciju ass.



99. ras.

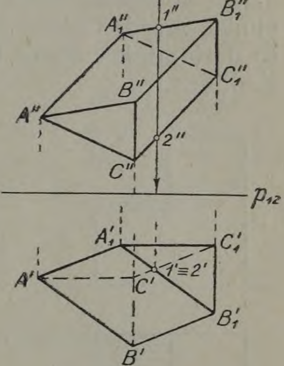


100. ras.

Redzamību pretskatā nosaka, iedomājoties abu ķermeņu pamatiem pievilktus frontāli projecētājus starus. Tā kā virsotnes A, B un C abos piemēros pretskatā redzamas, tad redzamas arī no šīm virsotnēm izejošās sānu šķautnes (sānu šķautnes caur A un C sastāda ķermeņu apveidus pretskatā). Prizmas virsotni D pretskatā aizsedz pamata šķautne BC, tādēļ šī virsotne un no tās izejošā sānu šķautne pretskatā nav redzama. Virsskatā neredzam prizmas šķautnes BC

un CD un piramīdas šķautni BC. Tāpat šai skata vērsumā neredzam prizmas sānu šķautni CC_1, kas iziet no neredzamās pamata virsotnes C.

Nosakot redzamību var griezt vērību arī uz agrāk teikto par plakņu virsotņu numerācijas virzienu projekcijās. Tā, piemēram, ja esam noskaidrojuši, ka prizmas skaldne ABB_1A_1 pretskatā redzama, tad tā redzama arī virsskatā, jo šīs skaldnes abām projekcijām ir vienāds virsotņu numerācijas virziens. Prizmas skaldnes BB_1C_1C projekcijām turpretim ir pretēji virsotņu numerācijas virzieni, tāpēc virsskatā mums pievērsta tās pretējā puse (iekšpuse) un šī skaldne virsskatā nav redzama. Neredzamas virsskatā ir prizmas šķautnes CC_1 un BC, kā arī skaldnes $ABCD$ un CC_1D_1D, kas pieķļaujas šīm šķautnēm.



101. ras.

Iepriekšējos divos rasējumos konstruēts vēl punkts N, kas atrodas uz prizmas skaldnes ABB_1A_1 resp. uz piramīdas skaldnes ABV. Punkta viena projekcija abos gadījumos izvēlēta patvaļīgi, bet otras projekcijas konstruēšanai punkts piesaistīts plaknei ar palīgtaisni i, kas pirmajā gadījumā paralēla prizmas sānu šķautnēm, bet otrajā gadījumā iet caur piramīdas virsotni V. Konstrukciju gaita parādīta ar bultiņām.

101. rasējumā attēlota trīsstūra prizma. Tā kā neviena prizmas skaldne nav projecētāja plakne, tad redzamības noteikšanai izmantojam vispārīgo noteikumu par šķērsu taišņu redzamību. Tā, piemēram, virsskatā šķērsošanās vietā 1—2 šķautne A_1B_1 ir tālāk no horizontālās projekciju plaknes nekā šķautne CC_1 ($1''$ ir tālāk no projekciju ass nekā $2''$) un ir redzama. Redzams tādēļ virsskatā arī prizmas pamats $A_1B_1C_1$, bet pamats ABC — neredzams. Tā kā pamata $A_1B_1C_1$ frontālajai projekcijai ir pretējs virsotņu numerācijas virziens, tad pretskatā to (no ārpuses) neredzam, bet redzam gan šai skata virzienā pamatu ABC utt.

Redzamības noteikšanai resp. tās kontrolei var ievērot arī sekojošo:

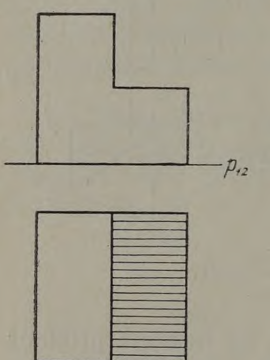
1) divu redzamu vai neredzamu šķautņu attēli nedrīkst starp to galapunktiem krustoties;

2) šķautnes, kas iziet no kāda punkta apveida projekcijas iekšpusē, ir vai nu visas redzamas, vai visas neredzamas atkarībā no tā, vai pats punkts šajā projekcijā ir redzams vai neredzams.

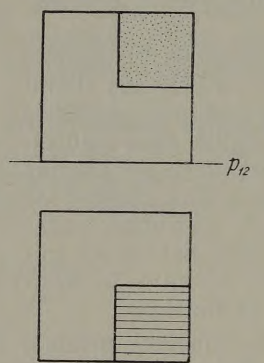
Aplūkosim, kā šos pēdējos noteikumus izmantot redzamības noteikšanai 101. rasējumā. Prizmas virsotne B ir vistālāk no frontālās projekciju plaknes, un pretskatā tai jābūt redzamai. Sakarā ar otro nosacījumu ir redzamas pretskatā arī visas no virsotnes B izejošās šķautnes, bet šķautne A_1C_1 sakarā ar pirmo nosacījumu šai skata vērsumā nav redzama. Tapat konstatējam, ka virsotne C kā plaknei

P_1 vistuvākā virsotne virsskatā nav redzama, neredzamas šai skata virzienā arī no virsotnes C izejošās šķautnes AC, BC un CC_1.

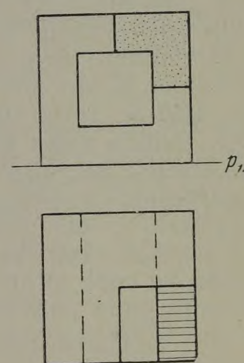
35. Salikti daudzskaldņi. Visiem iepriekš aplūkotajiem daudzskaldņiem šāda kopīga īpašība. Iedomājoties daudzskaldņa jebkuru skaldni paplašinātu uz visām pusēm, visi daudzskaldņa punkti vienmēr atrodas vienā pusē šīs skaldnes plaknei. Tādus daudzskaldņus sauksim par *vienkāršiem daudzskaldņiem.* Šķeļot šādu daudzskaldni ar kādu patvaļīgu plakni, tas sadalās divās atsevišķās daļās, no kurām katra par sevi ir atkal vienkāršs daudzskaldnis (tā punkti atrodas vienā pusē šķēlējai plaknei). Pakāpeniski atkārtojot šo darbību, iespējams tā dabūt visdažādākā veida vienkāršos daudzskaldņus.[1]



102. ras.



103. ras.



104. ras.

Daudzskaldni, kam visi punkti neatrodas katras tās skaldnes vienā pusē, sauksim par *saliktu daudzskaldni.* Tādu daudzskaldni dabū, piemēram, izšķeļot daļu no vienkāršā daudzskaldņa, bet to tikpat labi var iedomāties saliktu no diviem vai vairākiem vienkāršiem daudzskaldņiem.

Apskatīsim dažus saliktu daudzskaldņu piemērus, kad tie novietoti speciālā stāvoklī pret projekciju plaknēm.

102. rasējumā attēlots divās projekcijās kubs ar izgriezumu tā augšējā labajā pusē (no kuba izšķelta taisna prizma ar tilpumu, vienlīdzīgu $^1/_4$ no kuba tilpuma). 103. rasējumā parādīts kubs ar izgriezumu ($^1/_8$ no kuba tilpuma) labajā augšējā stūrī, bet 104. rasējumā kubs ar jau samērā komplicētāku izgriezumu. Katru no šiem daudzskaldņiem varam iedomāties saliktu no divām vai vairākām taisnām prizmām.

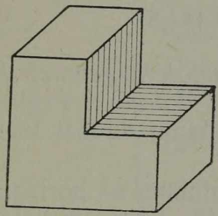
105., 106. un 107. rasējumā doti šo ķermeņu paskaidrojošie attēli (tai pašā secībā) slīpā projekcijā.

---

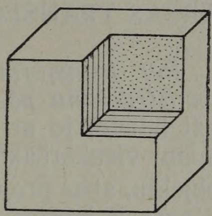
[1] Par daudzskaldņa šķēlumiem ar plakni sk. 58. nodalījumu.

Līdzīgi varam veidot neierobežotā skaitā arī citus saliktus daudzskaldņus. Ja abi ķermeņi — sākotnējais un no tā izšķeltais — novietoti speciālā stāvoklī pret projekciju plaknēm, tad veidotā daudzskaldņa projekcijas var viegli konstruēt.[1] Visos pārējos gadījumos uzdevums ir saistīts ar jautājumu par daudzskaldņu savstarpējā šķēluma kontruēšanu, tādēļ pie tā vēl atgriezīsimies.

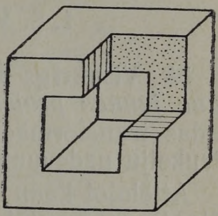
Praksē sastopamie ķermeņi (izņemot tos, kas ierobežoti ar līkām virsmām) lielāko tiesu ir šādi salikti daudzskaldņi.



105. ras.



106. ras.



107. ras.

[1] Šādi vingrinājumi ļoti piemēroti telpas apjautas izkopšanai.

II NODAĻA

TRANSFORMĀCIJAS

1. §. VIENKĀRŠAS TRANSFORMĀCIJAS

36. Vispārīgs apskats. *Par transformāciju tēlotājā ģeometrijā sauc jaunas projekcijas konstruēšanu pēc divām dotajām.* Praksē šādas transformācijas bieži izlieto, jo ar to palīdzību daudzi konstrukciju uzdevumi atrisināmi vienkāršāk.

Attēlojot kādu telpas objektu, abas projekciju plaknes — horizontālo P_1 un frontālo P_2 — parasti izvēlas tā, lai tās būtu paralēlas attēlojamā objekta galvenajām jeb t. s. *dominējošajām* šķautnēm. Tad šīs šķautnes vismaz vienā no projekciju plaknēm attēlojas īstajā lielumā, un konstruētos attēlus viegli mērīt (t. i., viegli var noteikt objekta īsto lielumu). Izdarot ar attēliem dažas k o n s t r u k c i j a s, tomēr var izrādīties, ka dažos gadījumos jākonstruē iepriekš priekšmeta vai vismaz atsevišķas sīkdaļas attēls kādā jaunā projekciju plaknē, kas attiecībā uz šo sīkdaļu novietota izdevīgāk.

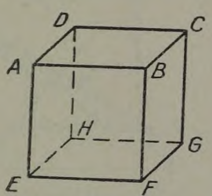
Trešā projekcija nepieciešama vēl šādu apsvērumu dēļ. Katru telpas objektu varam uzskatīt kā punktu sakopojumu. Aplūkosim, piemēram, vienkāršāko gadījumu, kad attēlojamam objektam nav līku līniju un virsmu. Tāda objekta attēlošanai pietiek konstruēt tā raksturīgāko punktu, proti, tā ierobežotāju šķautņu galapunktu projekcijas. Lai šos punktus pareizā kārtībā savienotu, nepieciešams katru no tiem apzīmēt ar savu alfabēta burtu. Tāpēc jau vienkāršos rasējumos burtu ir tik daudz, ka tie lieki saraibina rasējumu, traucējot tā lasīšanu. Šos apzīmējumus gatavā rasējumā atmetot, var savukārt rasties pārpratumi.

Ilustrācijai aplūkosim kuba projekcijas, kura virsotņu apzīmējumi (slīpā projekcijā) parādīti 108. rasējumā. Izvēloties projekciju plaknes P_1 un P_2 attiecīgi paralēlas kuba apakšējai un priekšējai skaldnei, kuba horizontālā un frontālā projekcija būs kvadrāts (109. ras.). Ja savietotajā rasējumā apzīmējumus izdzēstu, tad abi attēli vairs nebūtu saprotami. Tādu pašu attēlu dabū arī, piemēram, projecējot atsevišķi ķermeņus, ko no kuba atšķeļ tā diagonālplaknes *ABGH* vai *CDEF* vai pašas šīs diagonālplaknes. Tādas pašas projekcijas ir arī taisnam riņķa cilindram, kura ass ir paralēla projekciju asij un augstums vienāds ar pamata diametru.

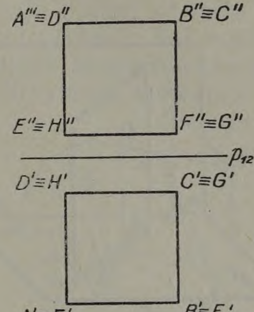
Lai šādi pārpratumi nerastos, tehniskos rasējumos, kur iztiek bez apzīmējumiem, attēlus vienmēr konstruē vismaz trijās projekciju plaknēs.

Jaunus attēlus varam dabūt divējādi: vai nu aizstājot dotās projekciju plaknes ar jaunām tā, lai pētījamais telpas objekts ieņemtu pret jaunajām projekciju plaknēm kādu izdevīgāku stāvokli, vai arī mainot paša objekta stāvokli telpā, projekciju plaknes atstājot nemainītas. Tēlotājā ģeometrijā šim nolūkam izstrādātas divas metodes:

1) projekciju plakņu maiņas metode,
2) pagriešanas metode.



108. ras.



109. ras.

37. **Projekciju plakņu maiņas metode.** Uzdevumu atrisināšanai parasti pietiek mainīt tikai vienu no sākotnējām projekciju plaknēm. Aizstājot kādu no projekciju plaknēm, piemēram, frontālo plakni P_2, ar jaunu plakni P_3, nepieciešams, lai P_3 būtu perpendikulāra pret horizontālo plakni P_1. Tad visas likumības, kas agrāk konstatētas plakņu pārim P_1 un P_2, būs spēkā arī jaunajam plakņu pārim P_1 un P_3. Analoģiski, aizstājot horizontālo projekciju plakni P_1 ar kādu citu plakni, jaunā projekciju plakne jāizvēlas perpendikulāra frontālajai projekciju plaknei P_2.

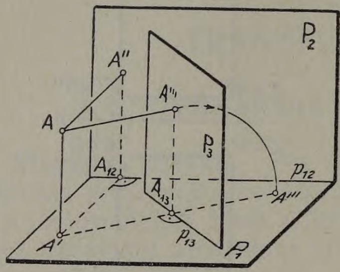
Ja A' un A'' ir punkta A horizontālā resp. frontālā projekcija (110. ras.) un gribam konstruēt tā jauno frontālo projekciju A''' plaknē $P_3 \perp P_1$, tad jāievēro, ka projekcijas A''' attālums no jaunās projekciju ass p_{13} ir vienāds ar punkta A attālumu no plaknes P_1, t. i., ar tā vecās frontālās projekcijas A'' attālumu no projekciju ass p_{12}.

Jāatzīmē, ka jaunā frontālā plakne P_3 vairs nav frontāla, bet šis nosaukums paturēts tikai analoģijas dēļ. Plakne P_3 būs frontāla tikai tad, ja skatīsimies pret to projecētāja stara AA''' virzienā (AA''' — jaunais frontāli projecētājs stars).

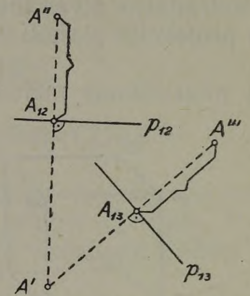
Jauno frontālo projekciju plakni P_3 savieto ar horizontālo projekciju plakni, pagriežot to ap projekciju asi p_{13}. Projekcijas A' un A''' pēc savietošanas atrodas uz kopēja perpendikula pret jauno projekciju asi, pie kam $A'''A_{13} = A''A_{12}$. Novietojot savietotās plaknes rasējuma plaknē, iegūstam 111. rasējumu.

Plakni P_3 varēja izvēlēties arī pa kreisi no punkta A, bet tad tās savietošana ar P_1 būtu jāizdara uz otru pusi. Pretējā gadījumā, attēlojot komplicētākus telpas objektus, to jaunā frontālā projekcija var aizsegt horizontālo projekciju un rasējums būs neskaidrs. Citiem vārdiem, projekciju plaknes *vienmēr jāsavieto tā, lai attēlojamais objekts attiecībā pret jauno plakņu pāri atrastos I kvadrantā.*

Aplūkosim tagad, kā var mainīt h o r i z o n t ā l o projekciju plakni (112. ras.). Jauno horizontālo projekciju plakni apzīmēsim

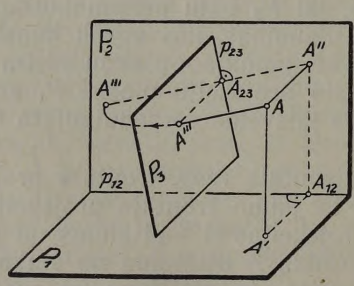


110. ras.

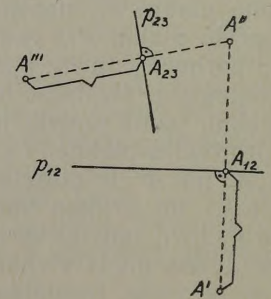


111. ras.

tāpat ar P_3, bet jauno asi — plakņu P_3 un P_2 šķēluma taisni — ar p_{23}. (Plakne P_3 nav vairs horizontāla, un tās nosaukums paturēts tikai analoģijas dēļ.) Jaunās horizontālās projekcijas A''' attālums no projekciju ass p_{23} vienāds ar punkta A attālumu no plaknes P_2, t. i., ar punkta horizontālās projekcijas A' attālumu no projekciju ass p_{12}.



112. ras.



113. ras.

Plakņu savietošanu var izdarīt tā: vispirms savietojam plakni P_3 ar P_2 (ap projekciju asi p_{23}) un pēc tam abas kopā, pagriežot ap projekciju asi, p_{12} savietojam, kā parasti, ar plakni P_1.[1]

Projekciju savietots rasējums parādīts 113. rasējumā. Projekcijas A'' un A''' atrodas atkal uz kopēja perpendikula pret projekciju asi p_{23}, pie kam $A'''A_{23}=A'A_{12}$.

Apvienojot abus gadījumus, dabūjam šādu noteikumu:

Lai konstruētu punkta jauno projekciju, tad no tā atstājamās pro-

---

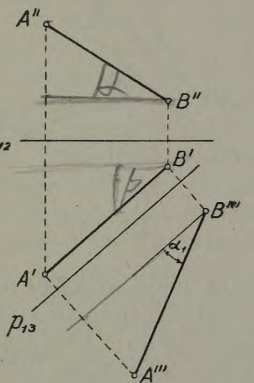
[1] Par jaunu horizontālo projekciju plakni varam uzskatīt arī jau agrāk izmantoto profilo projekciju plakni.

jekcijas jāvelk perpendikuls pret jauno asi un no tā krustpunkta ar jauno asi jāatliek aizstājamās projekcijas attālums no vecās ass.

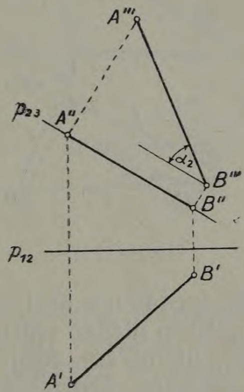
Metodes ilustrācijai aplūkosim dažus piemērus.

1. piemērs. *Noteikt taisnes nogriežņa AB īsto garumu un slīpumu pret projekciju plaknēm P_1 un P_2 (114. ras.).*

Ņemsim jaunu frontālo projekciju plakni ar tādu aprēķinu, lai taisnes nogrieznis būtu paralēls šai plaknei. Šai nolūkā jaunā projekciju ass p_{13} jāizvēlas paralēla taisnes nogriežņa horizontālajai projekcijai $A'B'$. Ass attālumu no $A'B'$ varam izvēlēties patvaļīgi (ass var arī sakrist ar $A'B'$).



114. ras.



115. ras.

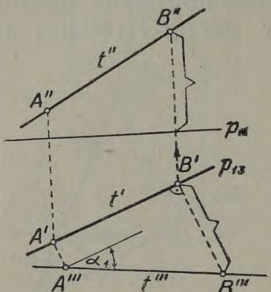
Taisnes nogriežņa jauno frontālo projekciju dabūsim, konstruējot tā galapunktu jaunās projekcijas. Tā kā taisnes nogrieznis ir paralēls jaunajai projekciju plaknei, tas šai plaknē attēlojas īstajā lielumā, t. i., $A'''B''' = AB$. Šī konstrukcija dod reizē arī taisnes nogriežņa slīpuma leņķi α_1 pret plakni P_1; tas ir leņķis, ko taisnes nogriežņa jaunā projekcija veido ar jauno projekciju asi.

Ja uzdevumu atrisina, mainot horizontālo projekciju plakni, tad projekciju ass p_{23} jāizvēlas paralēla taisnes nogriežņa frontālajai projekcijai $A''B''$. Vienkāršības dēļ 115. rasējumā tā vilkta tieši caur $A''B''$. Taisnes nogrieznis tādā gadījumā atrodas jaunajā horizontālajā projekciju plaknē P_3 (jo tā frontālā projekcija atrodas uz projekciju ass), un tā projekcija $A'''B'''$ sakrīt ar pašu taisnes nogriezni AB.

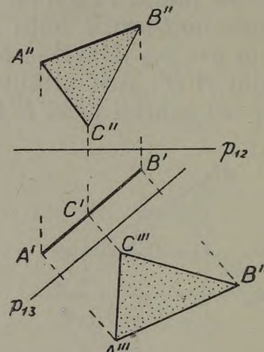
Taisnes nogriežņa slīpums α_2 pret frontālo projekciju plakni ir leņķis, ko taisnes nogriežņa jaunā horizontālā projekcija veido ar projekciju asi p_{23}.

2. piemērs. *Dota taisnes t horizontālā projekcija t', kāda taisnes punkta A abas projekcijas A' un A'' un taisnes slīpums α_1 pret horizontālo projekciju plakni. Konstruēt taisnes frontālo projekciju t'' (116. ras.).*

Izvēloties jauno projekciju asi $p_{13} \equiv t'$, konstruējam vispirms taisnes jauno frontālo projekciju t''', ievērojot, ka tai jāveido leņķis α_1 ar projekciju asi p_{13}. Izvēloties tagad kāda cita taisnes punkta B projekcijas B' un B''', nosakām šī punkta frontālo projekciju B''. Caur A'' un B'' novelkam meklēto taisnes frontālo projekciju t''.

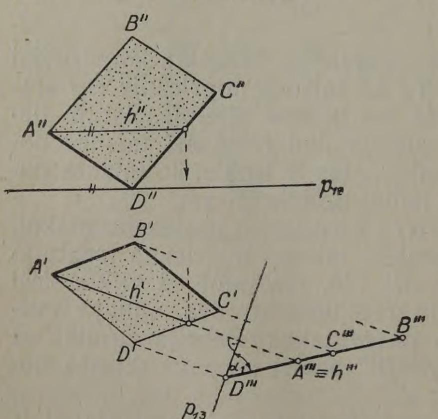


116. ras.



117. ras.

Leņķi, ko taisnes horizontālā projekcija veido ar kādu horizontālajā projekciju plaknē iepriekš izvēlētu virzienu (par šo virzienu var izvēlēties, piemēram, projekciju ass p_{12} virzienu), mēdz saukt par taisnes *azimutu*. Iepriekšējo uzdevumu tad iespējams formulēt arī šādi: caur doto punktu vilkt taisni ar doto azimutu un doto slīpumu pret horizontālo projekciju plakni.



118. ras.

Ja taisni t 116. rasējumā uzskatām par kādas plaknes pirmā veida slīpuma līniju s_1, tad iepriekšējais uzdevums dod iespēju caur doto punktu A novilkt p l a k n i ar doto slīpumu α_1 pret horizontālo projekciju plakni. Ar slīpuma līniju plaknes stāvoklis telpā ir viennozīmīgi noteikts (sk. 24. nodalījumu).

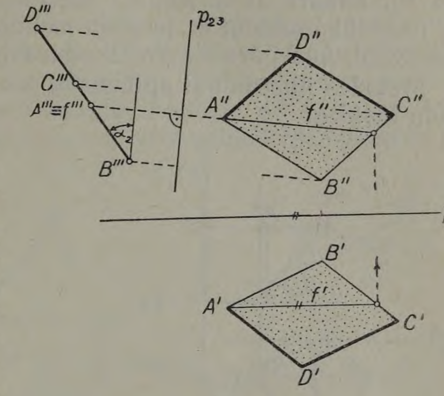
3. piemērs. *Noteikt īsto lielumu trīsstūrim ABC, kas ir horizontāli projecētājā stāvoklī (117. ras.).*

Lietojam jaunu frontālo projekciju plakni P_3, izvēloties projekciju asi p_{13} paralēli plaknes horizontālajai (raksturīgajai) projekcijai. Attiecībā pret projekciju plakni P_3 trīsstūris ABC tad ir frontālā stāvoklī un attēlojas šai plaknē īstajā lielumā.

Tāpat nosaka īsto lielumu plaknes gabalam, kas ir frontāli projecētājā stāvoklī (izvēlas jaunu horizontālo projekciju plakni tā, lai jaunā projekciju ass būtu paralēla plaknes gabala frontālajai projekcijai).

4. **piemērs.** *Mainot kādu no projekciju plaknēm, panākt, lai dotā plakne ABCD attiecībā pret jauno projekciju plakni kļūtu par projecētāju plakni.*

Jaunajai frontālajai projekciju plaknei (118. ras.) jābūt perpendikulārai plaknes horizontālei h, tādēļ jaunā projekciju ass p_{13} jāizvēlas perpendikulāra h'. To pašu panāk, arī izmainot horizontālo projekciju plakni P_1 (119. ras.). Jaunā projekciju ass p_{23} te jāņem perpendikulāra plaknes frontāles projekcijai f''. Abos gadījumos attiecīgā plaknes galvenā līnija attēlojas jaunajā projekciju plaknē kā punkts un pati plakne — kā taisnes nogrieznis, kas rāda, ka plakne pret jauno projekciju plakni tiešām ir projecētājā stāvoklī.

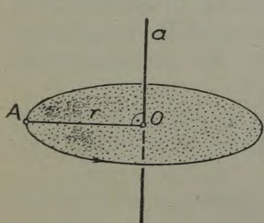


119. ras.

Katra no šīm konstrukcijām dod reizē arī vienu no plaknes slīpuma leņķiem α_1 vai α_2 pret projekciju plaknēm P_1 resp. P_2 (sk. ras.). Tas ir leņķis, ko plaknes raksturīgā projekcija veido ar jauno projekciju asi.

38. Pagriešanas metode. Projekciju plakņu maiņu varam aizstāt ar paša attēlojamā objekta pārvietojumu. Starp abiem paņēmieniem, kā vēlāk redzēsim, nav lielas atšķirības.

Vienkāršākais pārvietojums ir *translācija* jeb *paralēlpārvietojums.* Šai pārvietojumā kāda ķermeņa visi punkti pārvietojas pa paralēlām taisnēm. Viegli konstatēt, ka translācija nevar dot vēlamo rezultātu, jo ķermeņa šķautņu virzieni relatīvi pret projekciju plaknēm šādā pārvietojumā nemainās.



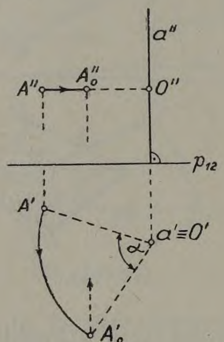
120. ras.

Radikālāku izmaiņu dod ķermeņa *pagriešana* jeb *rotācija* ap kādu nekustīgu *rotācijas asi,* ko iedomājamies saistītu ar pašu pārvietojamo ķermeni. Speciālā gadījumā rotācijas ass var būt arī paša ķermeņa kāda šķautne.

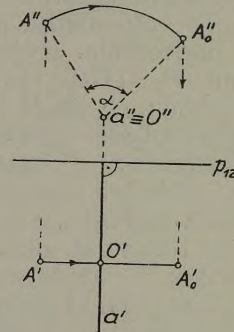
Rotējot ap nekustīgu asi a, katrs ķermeņa punkts A (120. ras.) izveido riņķa līniju, kuras plakne ir perpendikulāra rotācijas asij. Šo plakni sauc par punkta A *rotācijas plakni,* tās krustpunktu O ar asi — par *rotācijas centru,* bet punkta attālumu r no centra O — par *rotācijas rādiusu.* Visā rotācijas laikā rotācijas rādiuss ar rotācijas asi veido taisnu leņķi.

Kā izvēlēties rotācijas asi? Izdevīgi to izvēlēties perpendikulāru kādai no projekciju plaknēm, jo tad konstrukcijas ir vienkāršākas. Tiešām, izvēloties rotācijas asi, piemēram, perpendikulāru plaknei P_1, visu pagriežamo punktu rotācijas plaknes ir paralēlas plaknei P_1. Sakarā ar to punktu kustības trajektorijas attēlojas plaknē P_1 par riņķa lokiem ar to pašu rādiusu, bet plaknē P_2 — kā taisnes nogriežņi, kas paralēli projekciju asij.

Metodes ilustrācijai aplūkosim, kā pagriezt atsevišķu punktu par kādu leņķi α.



121. ras.



122. ras.

Pagriežot punktu A (121. ras.) ap asi a, kas perpendikulāra horizontālajai projekciju plaknei, tā horizontālā projekcija A' izveido riņķa loku ar rādiusu $O'A'$. Apzīmējot punkta A horizontālo projekciju jaunajā stāvoklī ar A'_0, tā frontālo projekciju A''_0, dabūjam, ievērojot, ka abām projekcijām arī pēc pagriešanas jāatrodas uz kopēja perpendikula pret projekciju asi.

Punkta A pagriešana ap asi $a \perp P_2$ parādīta 122. rasējumā. Šai gadījumā pa riņķa loku pārvietojas punkta frontālā projekcija, bet paralēli projekciju asij pārvietojas punkta horizontālā projekcija. Pēc pagriešanas punkta abas projekcijas A'_0 un A''_0 atkal atrodas uz kopēja perpendikula pret projekciju asi.

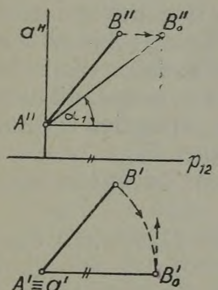
Tāpat varam izdarīt taisnes, plaknes un arī kāda ķermeņa pagriešanu. Ilustrācijai aplūkosim piemērus, līdzīgus tiem, ko atrisinājām ar plakņu maiņas metodi.

1. piemērs. *Noteikt taisnes nogriežņa AB īsto garumu un slīpumu pret projekciju plaknēm P_1 un P_2.*

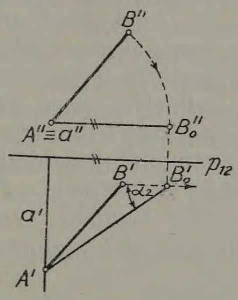
Lai pagrieztu taisni ap kādu asi, pietiek pagriezt ap šo asi divus patvaļīgus taisnes punktus. Pagriešanu varam vienkāršot, izvēloties rotācijas asi caur kādu taisnes punktu. Šis punkts pagriežot tad paliek uz vietas, un taisnes pagriešanai pietiek pagriezt tikai v i e n u tās punktu.

Lai noteiktu taisnes nogriežņa īsto lielumu, tas jāpagriež kādai projekciju plaknei paralēlā stāvoklī. Ja taisnes nogriezni gribam pagriezt frontālā stāvoklī, rotācijas ass jāizvēlas perpendikulāra horizontālajai projekciju plaknei; lai pagrieztu to horizontālā stāvoklī, rotācijas ass jāizvēlas perpendikulāra frontālajai projekciju plaknei.

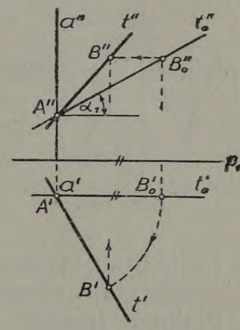
Abi pagriešanas paņēmieni parādīti 123. un 124. rasējumā. Rotācijas ass a abos gadījumos iet caur taisnes nogriežņa galapunktu A. Pagriežot taisnes nogriezni, kamēr tā viena projekcija kļūst paralēla projekciju asij, otra jaunā projekcija dod taisnes nogriežņa īsto garumu. Šai projekcijā īstajā lielumā attēlojas arī viens no taisnes nogriežņa slīpuma leņķiem α_1 vai α_2 pret projekciju plaknēm P_1 resp. P_2.



123. ras.



124. ras.



125. ras.

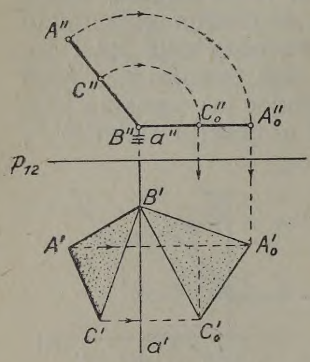
2. piemērs. *Caur doto punktu A vilkt taisni ar doto azimutu (t. i., horizontālās projekcijas virzienu) un slīpumu* α_1 *pret horizontālo projekciju plakni (125. ras.).*

Ja rotācijas asi a izvēlamies caur punktu A perpendikulāri projekciju plaknei P_1, tad rotācijas kustības jebkurā momentā taisnes projekcijas iet caur punkta A projekcijām. Pieņemsim, ka taisne t pagriezta frontālā stāvoklī. Tad taisnes horizontālā projekcija t'_0 ir paralēla projekciju asij, bet frontālā projekcija t''_0 veido doto leņķi α_1 ar projekciju asi.

Izvēloties tagad uz taisnes kādu patvaļīgu punktu B (projekcijas B'_0 un B''_0), pagriežam taisni atpakaļ, kamēr tās horizontālā projekcija sakrīt ar doto projekciju t'. Punkta B horizontālā projekcija B'_0, pārvietodamās pa riņķa loku ar centru punktā A', nonāks punktā B', bet frontālā projekcija B''_0, pārvietodamās paralēli projekciju asij, nonāks punktā B'' uz perpendikula no B' pret projekciju asi. Velkot caur A'' un B'' taisni, dabūjam taisnes t frontālo projekciju t''.

Atzīmēsim vēl, ka līdzīgi varam atrisināt jau agrāk iztirzāto uzdevumu: uz dotās taisnes no dotā punkta atlikt dotā garuma taisnes nogriezni AB. Lai to izdarītu, dotais taisnes nogrieznis iepriekš jāatliek paralēli plaknei P_2 uz taisnes frontālās projekcijas (uz horizontālās projekcijas, ja taisni pagriežam paralēli horizontālajai projekciju plaknei). Šo konstrukciju varam izmantot, lai pēc dotas taisnes punkta vienas projekcijas konstruētu šī punkta otru projekciju tais gadījumos, kad taisne ir profila vai gandrīz profila.[1]

3. piemērs. *Noteikt īsto lielumu trīsstūrim ABC, kas ir frontāli projecētājā stāvoklī (126. ras.).*



126. ras.

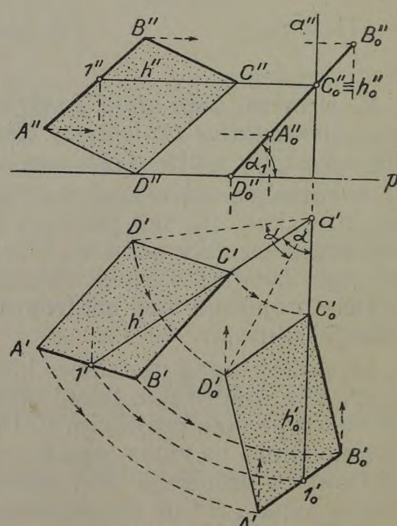
Rotācijas asi a vienkāršības dēļ izvēlamies caur trīsstūra vienu virsotni, piemēram, B, un perpendikulāru plaknei P_2. Pagriežot trīsstūri, kamēr tā frontālā projekcija kļūst paralēla projekciju asij, pats trīsstūris kļūst paralēls plaknei P_1 (horizontāls trīsstūris) un attēlojas šajā plaknē īstajā lielumā.

Analoģiski nosaka īsto lielumu plaknes gabalam (daudzstūrim), kas ir horizontāli projecētājā stāvoklī, tikai tad rotācijas ass jāizvēlas perpendikulāra plaknei P_1 un trīsstūris jāpagriež frontālā stāvoklī (paralēli plaknei P_2).

4. piemērs. *Pagriezt plakni projecētājā stāvoklī.*

Aplūkosim vispirms, kā pagriezt plakni $ABCD$ (127. ras.) frontāli projecētājā stāvoklī.

Plaknei frontāli projecētājā stāvoklī horizontāles ir frontāli projecētājas taisnes (sk. 23. nodalījumu), tādēļ konstruējam vispirms vienu plaknes horizontāli h (vienkāršības dēļ caur virsotni C). Rotācijas asi a izvēlamies perpendikulāru horizontālajai projekciju plaknei, vienkāršības dēļ — caur kādu horizontāles punktu.



127. ras.

Griežam horizontāli h, kamēr tās horizontālā projekcija h'_0 ir perpendikulāra projekciju asij. Izmērām leņķi α, par kādu bija jāpagriež h, un par šo pašu leņķi pagriežam plaknes pārējos punktus. Tos savienojot, dabūjam plaknes jauno horizontālo projekciju $A'_0\ B'_0\ C_0'\ D'_0$.

Konstruējam tagad plaknes jauno frontālo projekciju, ņemot vērā, ka plaknes punktu frontālās projekcijas pagriežot pārvietojas paralēli projekciju asij un ka pēc rotācijas kāda punkta abām projek-

[1] Abi šie uzdevumi atrisināmi arī ar projekciju plakņu maiņas metodi.

cijām jāatrodas uz kopēja perpendikula pret projekciju asi. Plaknes jaunā frontālā projekcija ir taisnes nogrieznis, t. i., plakne pēc pagriešanas tiešām ir perpendikulāra frontālajai projekciju plaknei.

Ievērosim vēl, ka, pagriežot plakni ap asi, kas perpendikulāra horizontālai projekciju plaknei, tās taišņu slīpumi pret horizontālo projekciju plakni nemainās. Tā, piemēram, horizontāle h arī pēc pagriešanas ir paralēla plaknei P_1. Arī plaknes pirmā veida slīpuma līnijas veido to pašu leņķi ar horizontālo projekciju plakni, kāds tām bija sākotnējā stāvoklī. Tas nozīmē, ka plaknes slīpuma leņķis α_1 pagriešanā nemainās un ar šo konstrukciju var noteikt plaknes slīpumu pret horizontālo projekciju plakni. Leņķis α_1 ir leņķis, ko plaknes raksturīgā projekcija veido ar projekciju asi.

Tāpat varam pagriezt plakni arī horizontāli projecētājā stāvoklī, tikai tad vispirms jākonstruē viena plaknes frontāle un rotācijas ass jāizvēlas perpendikulāra frontālajai projekciju plaknei. Ieteicams rotācijas asi izvēlēties caur kādu frontāles punktu. Plakne jāgriež tik ilgi, kamēr tās frontāle kļūst perpendikulāra horizontālajai projekciju plaknei. Leņķis, ko plaknes jaunā horizontālā projekcija veido ar projekciju asi, ir plaknes *2.* slīpuma leņķis α_2.

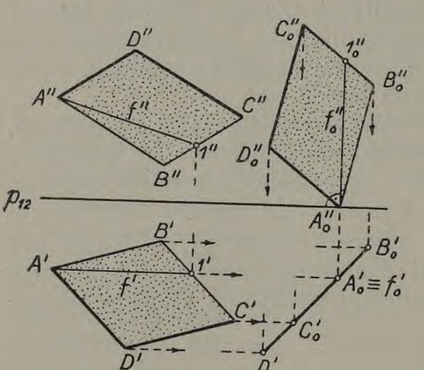
Pagriežot kādu objektu, stingri jāievēro sekojošais. Ja gribam, lai objekta horizontālā projekcija nonāktu vēlamā stāvoklī pret projekciju asi, tad rotācijas ass jāizvēlas perpendikulāra horizontālajai projekciju plaknei (piem., 127. ras. $h'_o \perp p_{12}$). Ja vēlamā stāvoklī jānovieto objekta frontālā projekcija (piem., 126. ras.), rotācijas ass jāizvēlas perpendikulāra frontālajai projekciju plaknei. Kādas projekcijas vēlamais stāvoklis katrā atsevišķā gadījumā atkarīgs no uzdevuma nosacījumiem.

39. Objekta pagriešana, neuzrādot rotācijas asi. Abu metodu salīdzinājums. Sīkāk aplūkojot iepriekš izpildītās konstrukcijas (123.—127. ras.), redzam, ka, pagriežot objektu ap asi, kas perpendikulāra kādai projekciju plaknei, tā projekcija šajā plaknē savu veidu un lielumu nemaina — mainās tikai šīs projekcijas novietojums relatīvi pret projekciju asi. Objekta otrās projekcijas visi punkti (izņemot, protams, tos, kas atrodas uz rotācijas ass) pārvietojas paralēli projekciju asij, un rezultātā mainās ne tikai šīs projekcijas novietojums, bet arī veids un lielums. Iegaumējot šīs īpašības, iespējams pagriezt objektu, rotācijas asi nemaz neuzrādot un neinteresējoties par katra atsevišķa objekta punkta rotācijas rādiusiem. Nemainot aplūkojamā objekta vienas projekcijas veidu un lielumu, pārzīmējam šo projekciju relatīvi pret projekciju asi vēlamā stāvoklī un pēc tam konstruējam objekta otru projekciju, kā iepriekš aizrādīts.

Objekta pagriešanu tātad iespējams aizstāt ar tā vienas projekcijas pārzīmēšanu, tāpēc konstrukcijas kļūst ievērojami vienkāršākas. Bez tam šim paņēmienam vēl ir tā priekšrocība, ka pārzīmēšanu varam izdarīt vienmēr tā, lai jaunās projekcijas nesegtu iepriekšējās.

Tā, piemēram, lai plakni *ABCD* (128. ras.) pagrieztu horizontāli projecētājā stāvoklī, pārzīmējam tās frontālo projekciju tā, lai frontāle būtu perpendikulāra horizontālajai projekciju plaknei ($f''_0 \perp p_{12}$), un plaknes virsotņu horizontālās projekcijas pārvietojam pa projekciju asij paralēlām taisnēm. Plaknes jaunā horizontālā projekcija ir taisnes nogrieznis, t. i., pati plakne jaunajā stāvoklī ir perpendikulāra horizontālajai projekciju plaknei. Var pierādīt, ka pārvietojums, kas realizēts 128. rasējumā, tiešām atbilst rotācijas pārvietojumam. Varam konstruēt, piemēram, šīs rotācijas ass projekcijas. Tās frontālā projekcija ir taisnes nogriežņu $A''\,A''_0$, $B''\,B''_0$, $C''C''_0$ un $D''D''_0$ vidusperpendikulu krustpunkts, bet horizontālā projekcija — projekciju asij perpendikulāra taisne (rasējumā šī konstrukcija nav parādīta).[1]

Salīdzināsim šo rasējumu ar 119. rasējumu, kur to pašu uzdevumu atrisinājām ar projekciju plakņu maiņas metodi. Jauno projekciju plakni P_3 119. rasējumā varam iedomāties kā tās pašas v e c ā s horizontālās projekciju plaknes P_1 jaunu stāvokli, kādu tā ieņem pēc pagriešanas ap kādu frontālajai projekciju plaknei P_2 perpendikulāru rotācijas asi. Pagriežot projekciju plakni P_1, kamēr tā kļūst perpendikulāra paralelograma plaknes frontālei f, paralelograms šai plaknē attēlojas kā taisnes nogrieznis. Tā kā plakne P_2 un pats paralelograms paliek uz vietas, tad paralelograma punktu attālumi no P_2 nemainās, t. i., nemainās šo punktu jauno horizontālo projekciju attālumi no jaunās projekciju ass p_{23}.



128. ras.

Definējot 128. rasējuma paralelograma pagriešanu ap asi, kas perpendikulāra frontālajai projekciju plaknei, kā pārvietojumu, kurā nemainās tā punktu attālumi līdz frontālajai projekciju plaknei, redzam, ka starp abiem paņēmieniem nav lielas atšķirības. Vienā gadījumā pārzīmējam projekciju asi p_{12} vēlamā stāvoklī p_{23} pret objekta frontālo projekciju, otrā gadījumā pārzīmējam objekta frontālo projekciju vēlamā stāvoklī pret projekciju asi p_{12}. Objekta jaunās horizontālās projekcijas konstruēšana abos gadījumos ir vienāda.

Gluži tāpat pagriešana ap asi, kas perpendikulāra horizontālajai projekciju plaknei (t. i., pārvietojums, kurā nemainās figūras punktu attālumi līdz horizontālajai projekciju plaknei), atbilst agrāk aplūkotai frontālās projekciju plaknes maiņai.

Tātad, konstruējot jaunu attēlu pēc diviem dotajiem, varam rīko-

---

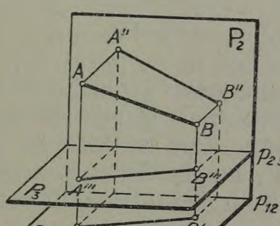
[1] Viegli pierādīt, ka minēto nogriežņu vidusperpendikuli krustojas vienā punktā.

ties divējādi: **pārzīmēt projekciju asi** vēlamā stāvoklī pret kādu no dotā objekta projekcijām vai arī **pārzīmēt kādu no objekta projekcijām** vēlamā stāvoklī pret projekciju asi. No šī viedokļa jaunās projekcijas konstruēšana abos gadījumos ir vienāda, dažāda ir tikai šo konstrukciju telpiskā interpretācija.

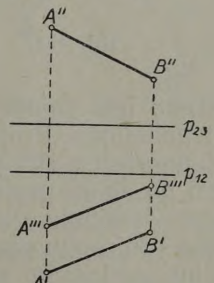
Minēto apsvērumu dēļ turpmākām konstrukcijām no abām transformāciju metodēm lielāko tiesu izlietosim tikai plakņu maiņas metodi.

Projekciju plakņu maiņas metodes priekšrocība ir tā, ka jaunās projekcijas konstruēšana te nav saistīta ar vienas iepriekšējās projekcijas pārzīmēšanu. Pagriešanas metodes priekšrocība savukārt ir tās lielāka uzskatāmība.

40. Projekciju ass atmešana. Aplūkosim kāda taisnes nogriežņa AB projekcijas projekciju pamatplaknēs P_1 un P_2 un kādā jaunā horizontālā projekciju plaknē P_3, kas paralēla horizontālajai projekciju plaknei P_1 (129. ras.). Jaunā projekciju ass p_{23} paralēla asij p_{12}, tādēļ taisnes nogriežņa jaunā horizontālā projekcija $A'''B'''$ iznāk paralēla un vienlīdzīga tā horizontālajai projekcijai $A'B'$.



129, ras.



130. ras.

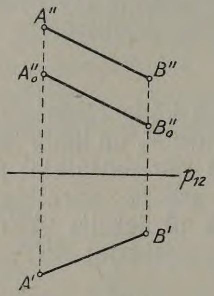
Projekciju plaknes P_2 un P_3 parastā veidā savietojot ar plakni P_1, iegūstam 130. rasējumu. Taisnes nogriežņa jaunā projekcija ir novietojusies tuvāk projekciju asij p_{12}, bet tās punktu attālumi no jaunās ass p_{23} ir tādi paši kā projekcijas $A'B'$ attālumi no vecās projekciju ass p_{12}.

Tāpat konstruē taisnes nogriežņa jauno frontālo projekciju plaknē, kas paralēla frontālajai projekciju plaknei P_2.

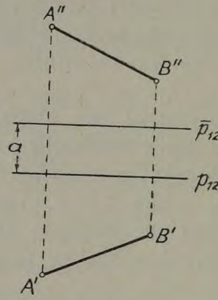
Kādas projekciju plaknes, piemēram, plaknes P_1, maiņu, kā agrāk aizrādīts, var saprast arī kā šīs plaknes pārvietojumu jaunā stāvoklī P_3. Šai speciālajā gadījumā tas ir paralēlpārvietojums frontālai projekciju plaknei paralēlā virzienā. Bet projekciju plaknes pārvietojuma vietā varam iedomāties atbilstoši pārvietotu pašu taisnes nogriezni AB.

Šāds paralēlpārvietojums realizēts 131. rasējumā. Taisnes nogriežņa projekcijas $A'B'$ un $A''_0\,B''_0$ te ir tādā pašā stāvoklī pret projekciju asi p_{12}, kādā ir projekcijas $A''B''$ un $A'''B'''$ pret jauno projekciju asi p_{23} 130. rasējumā. Abos gadījumos mainījušies taisnes nogriežņa AB attālumi līdz horizontālajai projekciju plaknei, jo ir mainījušies tā frontālo projekciju attālumi līdz projekciju asij.

Aplūkosim tagad, kādu pārmaiņu rada projekciju ass pārbīdīšana, ja taisnes nogriežņa AB projekcijas atstāj nemainītas (132. ras.). Pārbīdot projekciju asi p_{12} par nogriezni a uz augšu jaunā stāvoklī $\bar{p}_{12} \| p_{12}$, taisnes nogriežņa visu punktu attālumi no horizontālās projekciju plaknes P_1 par nogriezni a samazinās, bet



131. ras.



132. ras.

to attālumi līdz frontālajai projekciju plaknei P_2 par to pašu nogriezni palielinās. Projekciju ass pārbīdīšanai tātad atbilst tāds taisnes nogriežņa AB paralēlpārvietojums, kurā mainās tā punktu attālumi no abām projekciju plaknēm P_1 un P_2. Taisnes nogriežņa paralēlpārvietojuma vietā, protams, varam iedomāties pārvietotas arī pašas projekciju plaknes P_1 un P_2.

Ja nu projekciju asi pilnīgi atmetam, tad taisnes nogriežņa punktu attālumus līdz projekciju plaknēm vairs nevar noteikt. Tomēr taisnes nogriežņa stāvoklis pret projekciju plaknēm ar tā abām projekcijām ir pilnīgi noteikts.

Tiešām, ja ir dotas taisnes nogriežņa AB divas projekcijas, tad ir zināms arī projekciju ass v i r z i e n s. Tas ir perpendikulārs taisnei, kas savieno kāda taisnes nogriežņa punkta abas projekcijas (piem., 132. ras. $A'A''$). Sakarā ar to varam noteikt ne tikai taisnes nogriežņa īsto garumu un slīpumu pret projekciju plaknēm, bet pagriezt arī taisnes nogriezni ap asi, kas perpendikulāra kādai no projekciju plaknēm.

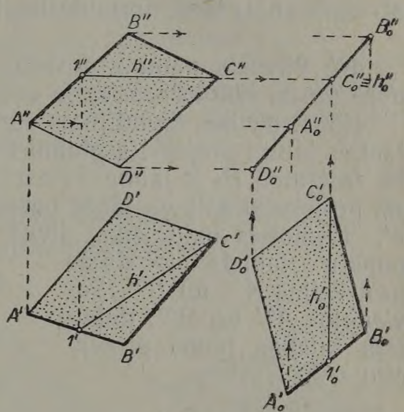
Visus agrāk iztirzātos uzdevumus par punktu, taisni un plakni, izņemot uzdevumus, kas atrisināti ar projekciju plakņu maiņas metodi,[1] var atrisināt arī bez projekciju ass palīdzības. Izlietojot uzdevumu atrisināšanai plakņu maiņas metodi, savukārt var projekciju asi izvēlēties tā, lai būtu vieglāk izpildīt konstrukcijas. Projekciju ass izvēle tādējādi kļūst par principu atrisinājumu vienkāršošanai.

---

[1] Te neietilpst arī uzdevumi, kuros izlieto taisnes un plaknes pēdas. Tas vēlreiz rāda, ka pēdas nav piemērotas praktisku uzdevumu atrisināšanai.

Ilustrācijai aplūkosim piemēru, kā pagriezt paralelograma $ABCD$ plakni (133. ras.) frontāli projecētājā stāvoklī neizmantojot projekciju asi (sal. arī ar 127. ras.).

Konstruējam vispirms plaknes vienas horizontāles projekcijas h' un h''. Tās frontālajai projekcijai jābūt paralēlai projekciju ass virzienam, proti, perpendikulārai virzienam $A'A''$. Horizontālo projekciju h' dabū, velkot $1''1' \| A''A'$. Tālāk pārzīmējam paralelograma horizontālo projekciju tā, lai projekcija h'_0 būtu perpendikulāra projekciju ass virzienam resp. paralēla $A'A''$. Frontālās projekcijas punktus pārnesam paralēli h''. Tādā veidā esam atrisinājuši uzdevumu, neizmantojot projekciju asi, bet vienīgi paturot prātā tās virzienu.



133. ras.

Taisni, kas savieno kāda punkta divas projekcijas (piem., iepriekšējā uzdevumā taisni $A'A''$), vienosimies nosaukt par *kārtotāju līniju* jeb vienkārši *kārtotāju* (tā punkta vienai projekcijai piekārto otru projekciju). Visos turpmākos uzdevumos, kur projekciju ass nebūs uzrādīta, kārtotājas virziens mums aizstās projekciju ass virzienu.

Tehniskajos rasējumos projekciju asi nekad neuzrāda. Lai tuvinātu ģeometrisko rasējumu tehniskajam rasējumam, arī mums jāpierod iztikt bez tās.

2. §. SALIKTAS TRANSFORMĀCIJAS

41. Vispārīgs apskats. Dažreiz pēc kāda telpas objekta divām dotajām projekcijām jākonstruē tā trešā projekcija plaknē P, kas nav perpendikulāra n e v i e n a i no vecajām projekciju plaknēm P_1 un P_2 jeb, kas ir tas pats, jākonstruē objekta jaunā projekcija, ja dots projecētāju staru virziens v. Tādā gadījumā transformācija jāizdara divreiz pēc kārtas.

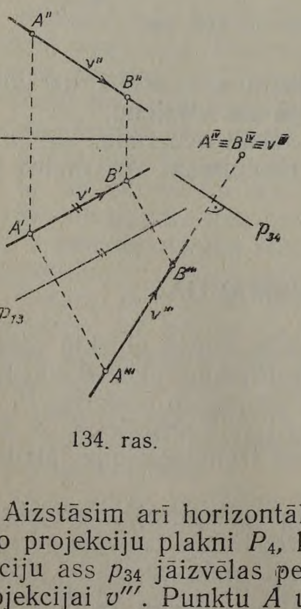
Tas izskaidrojams ar to, ka līdz šim apskatītajās projekciju plakņu maiņās jaunā projekciju plakne katrreiz bija izvēlēta perpendikulāra vismaz vienai no vecajām projekciju plaknēm. Tā kā plakne P nav perpendikulāra nevienai no projekciju plaknēm, tad starp tām un plakni P jāieslēdz kāda projekciju palīgplakne P_3, kas reizē perpendikulāra plaknei P un kādai no dotajām projekciju plaknēm P_1 vai P_2.

Uzdevums nevienkāršojas arī tad, ja plaknes P vietā pievēršam uzmanību tikai dotajam projecēšanas virzienam v. Tā kā šis virziens ir perpendikulārs plaknei P, tam jābūt paralēlam kādai plaknei, kas perpendikulāra plaknei P. Bet virziens v vispār nav paralēls nevienai no projekciju plaknēm P_1 vai P_2, tādēļ starp šīm projekciju plaknēm un plakni P jāieslēdz atkal projekciju palīgplakne P_3, kas reizē paralēla virzienam v un perpendikulāra kādai no dotajām projekciju plaknēm P_1 vai P_2.

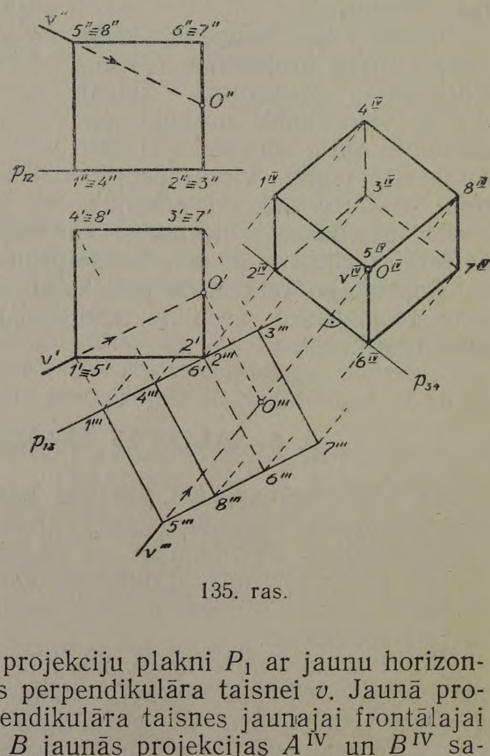
Abas iepriekš minētās problēmas bieži izmanto citu uzdevumu atrisināšanai, tādēļ formulēsim tās katru atsevišķi.

42. **Pirmais pamatuzdevums.** *Mainīt projekciju plaknes tā, lai dotā taisne kļūtu projecētāja taisne.*

Konstrukcijas izpildījums parādīts 134. rasējumā. Vispirms izvēlamies jaunu projekciju plakni P_3, kas paralēla dotajai taisnei v. Tā kā rasējumā P_3 ir jauna frontālā projekciju plakne[1], tad jaunajai projekciju asij p_{13} jābūt paralēlai taisnes horizontālai projekcijai v'. Izvēloties uz taisnes divus punktus A un B, konstruējam šo punktu jaunās frontālās projekcijas A''' un B'''. Savienojot A''' un B''', dabūjam taisnes jauno projekciju v'''.



134. ras.



135. ras.

Aizstāsim arī horizontālo projekciju plakni P_1 ar jaunu horizontālo projekciju plakni P_4, kas perpendikulāra taisnei v. Jaunā projekciju ass p_{34} jāizvēlas perpendikulāra taisnes jaunajai frontālajai projekcijai v'''. Punktu A un B jaunās projekcijas A^{IV} un B^{IV} sakrīt, jo aizstāto projekciju A' un B' attālumi līdz asij p_{13} (tā tagad ir vecā ass!), kas jāatliek no jaunās ass p_{34}, ir vienādi.

[1] Ja par plakni P_3 izvēlas jaunu horizontālo projekciju plakni, tad jaunā projekciju ass jāņem paralēla taisnes frontālajai projekcijai v''.

Taisne v pret plakni P_4 nu ir projecētājā stāvoklī. Ja bez taisnes v ir dotas vēl kāda cita telpas objekta divas projekcijas, tad šis telpas objekts, projecēts kopā ar taisni v plaknē P_4, attēlojas šai plaknē tā, kā to redzam, skatoties ar bultiņu atzīmētajā taisnes v virzienā pret attēlojamo objektu (projecēšana dotajā skata virzienā).

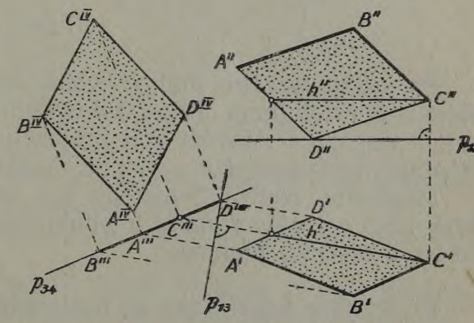
Sacīto ilustrē 135. rasējums. Pēc kuba attēliem projekciju pamatplaknēs P_1 un P_2 konstruēts kuba attēls projecētāju staru v virzienā. Virzienu v nosaka taisne caur kuba virsotni *5* un profilās skaldnes *2—3—7—6* viduspunktu *O*. Tāpat kā 134. rasējumā atkal vispirms konstruē kuba projekciju plaknē $P_3 \| v$, pēc tam plaknē $P_4 \perp v$.

Tā kā attiecībā pret projekciju plakni P_4 neviena kuba skaldne vairs nav speciālā stāvoklī, tad kuba attēls šai plaknē ir uzskatāmāks par tā sākotnējiem attēliem plaknēs P_1 un P_2. Tā šis paņēmiens var noderēt uzskatāmu attēlu konstruēšanai.

43. Otrais pamatuzdevums. *Mainīt projekciju plaknes, tā, lai dotā plakne kļūtu par vienu no projekciju plaknēm (136. ras.).*

Konstrukciju vienkāršošanai projekciju asis var izvēlēties caur kādu no plaknes virsotņu projekcijām. Vispirms var mainīt frontālo projekciju plakni tā, lai plakne *ABCD* būtu perpendikulāra jaunajai frontālajai projekciju plaknei P_3 (sal. ar 118. ras.). Tad *ABCD* attēls šai plaknē ir taisnes nogrieznis $B'''D'''$.

Izvēloties tagad jauno projekciju asi p_{34} caur $B'''D'''$, par jauno horizontālo projekciju plakni P_4 kļūst pati plakne *ABCD*.



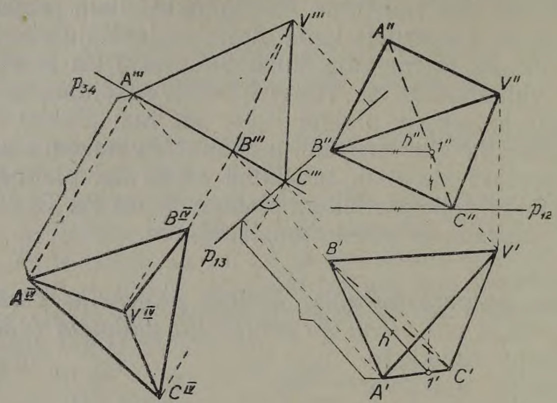
136. ras.

Rasējumā konstruēta arī paralelograma *ABCD* jaunā horizontālā projekcija $A^{IV}\ B^{IV}\ C^{IV}\ D^{IV}$, atliekot no ass p_{34} virsotņu horizontālo projekciju attālumus līdz asij p_{13}. Paralelograms *ABCD* šai jaunajā projekcijā attēlojas īstajā lielumā.

Ja bez plaknes *ABCD* dotas vēl kāda cita telpas objekta divas projekcijas, tad šī objekta projekcija plaknē P_4 parādīs, kāds attēlojamais objekts izskatās, ja to aplūko perpendikulāri dotajai plaknei *ABCD*.

Sacīto paskaidro 137. rasējums. Te pēc kādas trīsstūra piramīdas *VABC* attēliem projekciju pamatplaknēs P_1 un P_2 konstruēts šīs piramīdas attēls pamata *ABC* plaknē P_4; konstrukcijā izmantota projekciju plakne P_3, perpendikulāra plaknei *ABC* resp. šīs plaknes horizontālei *h*.

Iepriekšējo paņēmienu var izmantot arī, lai plaknē iezīmētu kādu dotā lieluma figūru vai izpildītu tajā kādas citas konstrukcijas. Tiešām, tā kā 136. rasējumā paralelograms $ABCD$ plaknē P_4 (rasējuma plaknē!) attēlojas īstā lielumā, tad īstā lielumā šai plaknē attēlosies visas plaknes $ABCD$ figūras. Izpildot vajadzīgās konstrukcijas, var iegūt šo figūru projekcijas arī plaknēs P_1 un P_2.



137. ras.

Projekciju plakņu maiņas vietā, kā redzējām, var izdarīt paša objekta pārvietojumu. Tātad, lai izpildītu kādas konstrukcijas plaknē, kas ir vispārīgā stāvoklī pret projekciju plaknēm P_1 un P_2, vienmēr jāizdara divas projekciju plakņu maiņas vai divas rotācijas.

Iespējams izstrādāt metodi, kas konstrukcijas ievērojami vienkāršo. Šīs metodes pamatā ir punkta pagriešana ap asi, kas p a r a l ē l a projekciju plaknei.

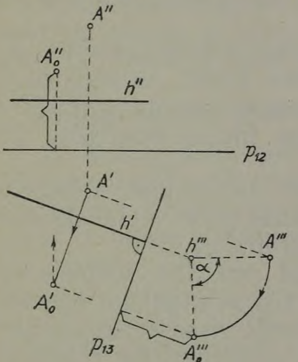
44. Punkta pagriešana ap horizontālu vai frontālu asi. Līdz šim esam iztirzājuši tikai pagriešanu ap asi, kas p e r p e n d i k u l ā r a kādai no projekciju plaknēm. Iepriekš aplūkotais 1. pamatuzdevums dod iespēju pagriezt arī ap asi, kas ir vispārīgā stāvoklī pret projekciju pamatplaknēm. Praktiska nozīme tomēr ir tikai pagriešanai ap horizontālu vai frontālu asi.

Punkta A pagriešana ap horizontālu asi h parādīta 138. rasējumā. Izvēloties jaunu frontālo projekciju plakni P_3, kas perpendikulāra h ($p_{13} \perp h'$), šo pagriešanu reducē uz pagriešanu ap projekciju plaknei perpendikulāru asi. Pagriežot punktu A par kādu leņķi α, tā jaunā frontālā projekcija pārvietojas pa riņķa loku, bet horizontālā projekcija A' pārvietojas paralēli projekciju asij p_{13}. Pēc pagriešanas punkta projekcijas A'_0 un A'''_0 atrodas uz kopēja perpendikula pret projekciju asi p_{13}. Zinot abas šīs projekcijas, varam konstruēt punkta frontālo projekciju A''_0.

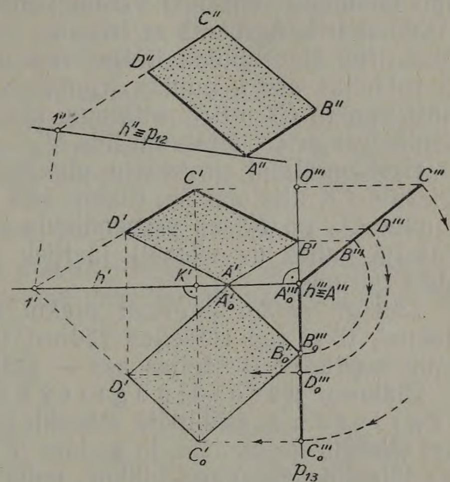
Līdzīgi varam pagriezt punktu arī ap frontālu asi, tikai tad iepriekš perpendikulāri dotajai asij jāizvēlas jauna horizontālā projekciju plakne.

Ar taisni h un punktu A ārpus tās ir definēta kāda plakne. Iepriekšējais rasējums tātad parāda arī šīs plaknes pagriešanu par dotu leņķi α ap h. Pagriežot punktu A, kamēr punkta frontālā projekcija A_0'' nonāk uz h'', plakne kļūst paralēla horizontālajai projekciju plaknei (h'' tad ir tās frontālā projekcija).

45. Plaknes paralēlpagriešana. Plaknes pagriešanu, lai tā būtu paralēla kādai projekciju plaknei, sauk-



138. ras.



139. ras.

sim par plaknes *paralēlapgriešanu*. To realizē, pagriežot ap plaknes horizontāli vai pagriežot ap plaknes frontāli.

Ilustrācijai aplūkosim paralelograma $ABCD$ plaknes paralēlpagriešanu (139. ras.).

Konstruējam plaknes horizontāli h un plaknes jauno frontālo projekciju plaknē $P_3 \perp h$. Horizontāli h te izdevīgi izvēlēties caur virsotni A un ņemt $p_{12} \equiv h''$.

Pagriežam tagad plakni ap horizontāli h, kamēr tās jaunā projekcija kļūst paralēla projekciju asij p_{13}. Sakarā ar speciālo projekciju ass p_{12} izvēli šī projekcija sakrīt ar p_{13}, t. i., pēc pagriešanas paralelograma plakne s a v i e t o j a s ar horizontālo projekciju plakni P_1.

Ievērojot, ka plaknes virsotņu horizontālās projekcijas pagriezienā pārvietojas perpendikulāri rotācijas ass h horizontālajai projekcijai h', plaknes frontālajai projekcijai $A_0''' C_0'''$ piekārtojam atbilstošo horizontālo projekciju $A_0' B_0' C_0' D_0'$, kas pie tam ir plaknes gabala attēls īstā lielumā.

Plaknes paralēlpagriešanu var nedaudz vienkāršot, ievērojot šādu apsvērumu. Plaknes katrs punkts pagriežot pārvietojas (telpā) pa riņķa loku, kura plakne ir perpendikulāra rotācijas asij h (sk. 38. nodalījumu). Punkta rotācijas rādiuss visā kustības laikā, kā zināms, ir perpendikulārs rotācijas asij. Tā kā rotācijas ass ir plaknes galvenā līnija, tad punkta rotācijas rādiuss ir plaknes s l ī -

p u m a l ī n i j a s nogrieznis starp punktu un rotācijas asi. Bet kāda taisnes nogriežņa īsto garumu varam noteikt kā hipotenūzas garumu attiecīgā taisnleņķa trīsstūrī (sk. 13. nodalījumu).

Tā, piemēram, lai noteiktu virsotnes C rotācijas rādiusu, pietiek noteikt slīpuma līnijas nogriežņa CK $(C'K' \perp h')$ īsto garumu. Attiecīgo taisnleņķa trīsstūri varam konstruēt uz $C'K'$ kā katetes (šis trīsstūris ir kongruents ar trīsstūri $O'''C'''A'''$). Pie tam nemaz nav jākonstruē šīs slīpuma līnijas frontālā projekcija, jo punktam K'' kā rotācijas ass h punkta frontālajai projekcijai jāatrodas uz h'', tādēļ punktu C'' un K'' attālumu starpība līdz projekciju asij p_{12} ir vienlīdzīga ar C'' attālumu līdz h''.

Horizontālajai projekciju plaknei paralēls slīpuma līnijas nogrieznis CK attēlojas šai plaknē īstā garumā. Tāpēc, lai konstruētu punktu C'_0 no K' uz perpendikula $C'K'$ pagarinājuma (punkts K rotācijā paliek uz vietas!) jāatliek slīpuma līnijas nogriežņa CK īstais garums.

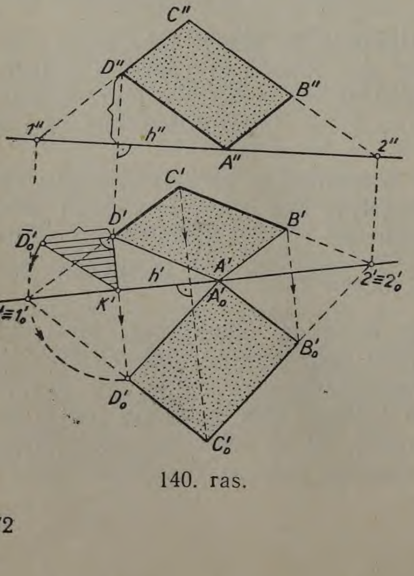
Līdzīgi varam pagriezt plakni paralēli frontālajai projekciju plaknei, tikai tad rotācijas rādiusi ir plaknes otrā veida slīpuma līniju nogriežņi (rotācijas ass — plaknes frontāle).

Plaknes p a r a l ē l p a g r i e š a n a, kā arī tās a t p a k a ļ - p a g r i e š a n a sākotnējā stāvoklī pieder pie svarīgākām operācijām tēlotājā ģeometrijā, jo ar tām ir iespējams visas konstrukcijas, kas jāizpilda patvaļīgā plaknē, reducēt uz konstrukcijām rasējuma plaknē.

Ievērojot šo abu operāciju lielo nozīmi, aplūkosim tās atsevišķi, piegriežot galveno vērību konstrukciju praktiskajam izkārtojumam.

46. Plaknes gabala īstā lieluma noteikšana ar paralēlpagriešanu (140. ras.).

Plakne $ABCD$ un horizontāle h izvēlēta tāpat kā iepriekšējā rasējumā. Konstruējam vienas virsotnes, piemēram, virsotnes D, jauno projekciju D_0 pēc pagriešanas. Šai nolūkā nosakām vispirms rotācijas rādiusa DK īsto garumu, t. i., hipotenūzu $K'\overline{D}'_0$ taisnleņķa trīsstūrī $D'\overline{D}'_0K'$. Šī taisnleņķa trīsstūra katetes $\overline{D}'_0D'$ garums vienlīdzīgs virsotnes D frontālās projekcijas attālumam līdz rotācijas ass frontālajai projekcijai. Uz perpendikula $D'K'$ pagarinājuma atliekam $K'\overline{D}'_0 = K'K'D'_0$.



140. ras.

Tāpat varētu noteikt arī plaknes pārējo virsotņu jaunās projekcijas. Bet to ir iespējams izdarīt vienkāršāk, ja ievērojam, ka visi rotācijas ass h punkti (kā, piem., punkts A) pagriešanā paliek uz vietas.

Turpinām paralelograma malu CB līdz krustpunktam 2 ar rotācijas asi h. Kopā ar punktu 1, ko izmantojām plaknes horizontāles konstruēšanai, mums jau ir divi punkti. Ja ir noteikts punkts D'_0, tad ir noteikts arī paralelograma malas DC jaunās projekcijas virziens $1'_0D'_0$. Virsotnes C jauno projekciju C'_0 tātad varam noteikt kā perpendikula no C' pret h' krustpunktu ar taisni $1'_0\,D'_0$. Tāpat nosaka arī punktu B'_0, iepriekš savienojot C'_0 un $2'_0$.

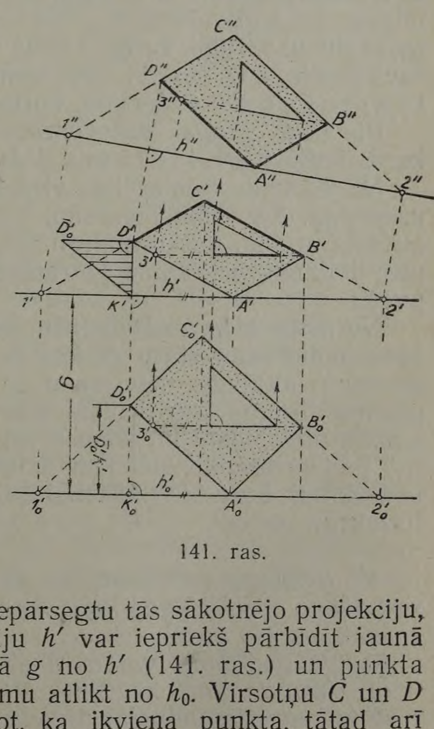
Redzam, ka plaknes jaunās projekcijas konstruēšanai pietiek noteikt tās vienas virsotnes rotācijas rādiusu. Pārējo virsotņu projekcijas tad dabū, nosakot punktus, kuros plaknes malas krusto rotācijas asi.

Līdzīgi pagriež plakni paralēli frontālajai projekciju plaknei.

47. Konstrukcijas patvaļīgā plaknē. Pieņemsim, ka iepriekšējā rasējuma trīsstūra $1C2$ plaknē jāiezīmē dotā lieluma paralelograms. Šai nolūkā ar paralēlpagriešanu iepriekš nosakām trīsstūra plaknes īsto lielumu $1'_0C'_02'_0$, iezīmējam tajā paralelogramu $A'_0B'_0C'_0D'_0$ un ar pretējā secībā izpildītu konstrukciju nosakām vispirms paralelograma horizontālo projekciju $A'B'C'D'$, pēc tam frontālo projekciju $A''B''C''D''$.

No praktiskā viedokļa šim paņēmienam tomēr ir viens trūkums. Tā kā plakne pēc paralēlpagriešanas virsskatā redzama no pretējās puses nekā sākotnējā stāvoklī (tās virsotņu projekcijām ir pretēja numerācija!), tad konstruējamās figūras jāzīmē ačgārni, kas var dažreiz radīt pārpratumus.

No šīs neērtības var izvairīties, pagriežot plakni pretējā virzienā.



141. ras.

Lai plaknes jaunā projekcija nepārsegtu tās sākotnējo projekciju, rotācijas ass horizontālo projekciju h' var iepriekš pārbīdīt jaunā stāvoklī $h'_0 \| h'$ patvaļīgā attālumā g no h' (141. ras.) un punkta D rotācijas rādiusa KD īsto garumu atlikt no h_0. Virsotņu C un D jaunās projekcijas dabū, ievērojot, ka ikviena punkta, tātad arī punktu 1 un 2, abām horizontālajām projekcijām jāatrodas uz kopēja perpendikula pret h'.

Rasējumā parādīts arī, kā paralelograma plaknē iezīmēt kādu dota lieluma figūru, piemēram, taisnleņķa trīstūri (viena katete — uz plaknes horizontāles, otra — uz plaknes slīpuma līnijas, hipotenūza paralēla plaknes šķautnei BC). Vispirms iezīmējam to īstā lielumā plaknes īstā lieluma figūrā, pēc tam ar pretējā secībā izpildītu konstrukciju nosakām trīsstūra horizontālo projekciju plaknes sākotnējā stāvoklī. Ja rotācijas ass horizontālo projekciju h' uz brīdi iedomājamies kā projekciju asi, tad šī konstrukcija ir analoģiska punkta vai taisnes iezīmēšanai plaknē (sk. 20. un 21. nodalījumu).

Pēc trīsstūra horizontālās projekcijas var viegli konstruēt tā frontālo projekciju.

3. §. TRANSFORMĀCIJU IZLIETOŠANA METRISKU UZDEVUMU ATRISINĀŠANAI

48. **Iepriekšēji aizrādījumi.** Visi tēlotājas ģeometrijas uzdevumi iedalāmi divās lielās būtiski dažādās grupās. Pie pirmās grupas uzdevumiem pieder t. s. *pozicionālie* uzdevumi, kuros neietilpst attāluma un leņķa (vispār — lieluma) jēdziens. Tādi ir visi agrāk aplūkotie uzdevumi, kuros ir runa tikai par punktu, taišņu un plakņu savstarpējo stāvokli. Pie šiem uzdevumiem pieder arī visi t. s. krustošanās uzdevumi, kurus iztirzāsim nākošajā nodaļā.

Pie otrās grupas uzdevumiem pieder t. s. *metriskie* uzdevumi, kuros ietilpst arī lieluma jēdziens.

No tēlotājas ģeometrijas viedokļa visvienkāršākie ir pozicionālie uzdevumi. Kā vēlāk redzēsim, tos arī slīpā un centrālā projekcijā atrisina ar tām pašām palīglīnijām kā ortogonālās projekcijās, kamēr metriskie uzdevumi katram attēlojuma veidam prasa īpatnēju pieeju.

No metriskiem uzdevumiem līdz šim jau esam aplūkojuši: attāluma noteikšanu starp diviem punktiem (taisnes nogriežņa īstais garums), attāluma noteikšanu no punkta līdz taisnei (spec. gad.), plaknes figūras īstā lieluma noteikšanu, perpendikula vilkšanu no punkta pret plakni un taisnes vai plaknes slīpumu noteikšanu relatīvi pret projekciju plaknēm. Iztirzāsim vēl dažus citus šīs grupas uzdevumus, kuru atrisināšanai ērti izmantot iepriekš aplūkoto transformāciju metodi.

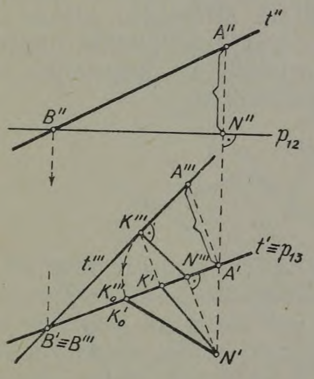
49. **Attāluma noteikšana no punkta līdz taisnei.** Šī uzdevuma atrisināšanu speciālā gadījumā, kad taisne ir horizontāla vai frontāla, apskatījām jau agrāk (sk. 53. ras.). Lai šo uzdevumu atrisinātu arī vispārīgā gadījumā, varam rīkoties divējādi:

1. Varam mainīt kādu no projekciju plaknēm tā, lai dotā taisne t kļūtu paralēla jaunajai projekciju plaknei.

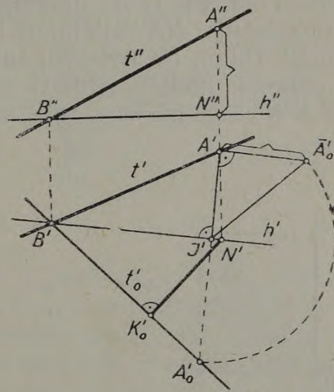
Šī konstrukcija parādīta 142. rasējumā. Ja projekciju ass p_{12} iepriekš nav dota, to izdevīgi izvēlēties caur dotā punkta N frontālo projekciju N'' (perpendikulāri kārtotājai $N'N''$). Jaunā projekciju ass p_{13} jāizvēlas paralēla t', vislabāk $p_{13} \equiv t'$. Nosakām taisnes jauno frontālo projekciju t''', izvēloties iepriekš uz tās divus punktus A

un B un atrodot to jaunās projekcijas A''' un B'''. Vienkāršības dēļ projekcijas A', A'' var ņemt uz kārtotājas $N'N''$ un B'' uz projekciju ass p_{12}.

Taisne t tagad atrodas jaunajā frontālajā projekciju plaknē P_3, jo tās horizontālā projekcija ir uz projekciju ass p_{13}. Perpendikuls NK no dotā punkta pret taisni attēlojas kā perpendikuls $N'''K'''$ pret t'''; šī perpendikula horizontālo projekciju $N'K'$ dabū, ievērojot, ka projekcijām K' un K''' jāatrodas uz kopēja perpendikula pret projekciju *asi* p_{13}.



142. ras.



143. ras.

Taisnes nogriežņa NK projekcijas nav paralēlas projekciju asij p_{13}, tāpēc tās ir īsākas par NK. Nogriežņa NK īsto garumu nosakām, pagriežot to paralēli plaknei P_1. Ja punktu N pagriežot atstājam uz vietas, tad taisnes nogriezni NK varam pat savietot ar plakni P_1, kā tas arī izdarīts rasējumā.

Jāatzīmē vēl, ka taisnes nogriežņa NK projekcijas varēja arī neiezīmēt, jo projekcijas $N'''K'''$ garumu varam izmērīt ar cirkuli. Tā iespējams ietaupīt vēl dažas konstrukciju palīglīnijas.

2. Otrajā atrisinājuma variantā (redzams 143. ras.) izmantots fakts, ka punkts N kopā ar taisni t nosaka plakni.

Caur punktu N novelkam šīs plaknes horizontāli h un pagriežam plakni paralēli horizontālai projekciju plaknei. Lai to izdarītu, jāpagriež tikai taisnes t viens punkts A, jo punkts B pagriežot paliek uz vietas.

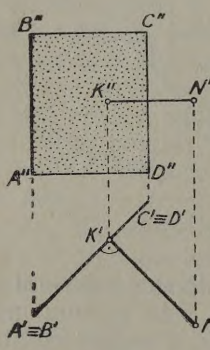
Konstruējam punkta A rotācijas rādiusa (slīpuma līnijas nogriežņa) AJ īsto garumu $\bar{A}'_0J'$, ko atliekam no J' uz perpendikula $A'J'$ pagarinājuma. Savienojot A'_0 ar B', dabūjam taisnes t projekciju t'_0 plaknei P_1 paralēli pagrieztā stāvoklī.

Tā kā pagrieztā stāvoklī punkts N un taisne t atrodas horizontālā plaknē, tad tajā varam izpildīt konstrukcijas kā rasējuma plaknē. Šajā gadījumā perpendikula $N'K'_0$ pret t'_0 garums ir reizē meklētā attāluma īstais lielums.

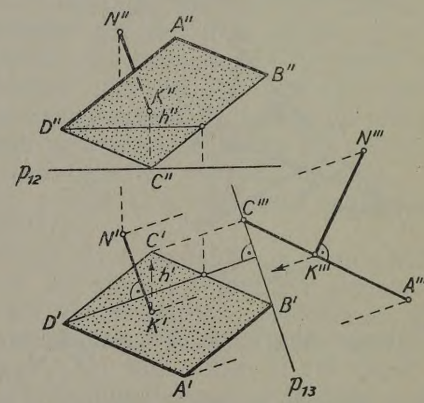
Atzīmēsim vēl, ka līdzīgi nosaka *attālumu starp divām paralēlām taisnēm,* jo arī tad pietiek noteikt vienas taisnes patvaļīga punkta attālumu līdz otrai taisnei.

50. Attāluma noteikšana no punkta līdz plaknei. Aplūkosim vispirms šī uzdevuma atrisināšanu speciālā gadījumā, kad dotā plakne ir projecētāja plakne.

Attālumu no punkta līdz plaknei mēra pa perpendikulu no punkta pret šo plakni. Ja plakne ir perpendikulāra horizontālajai projekciju plaknei (144. ras.), šis perpendikuls ir horizontāla taisne un tās nogrieznis NK attēlojas horizontālajā projekciju plaknē īstā lielumā.[1] Tātad, lai noteiktu šai speciālā gadījumā punkta attālumu līdz plaknei, pietiek izmērīt punkta horizontālās projekcijas attālumu $N'K'$ līdz plaknes raksturīgajai projekcijai.



144. ras.



145. ras.

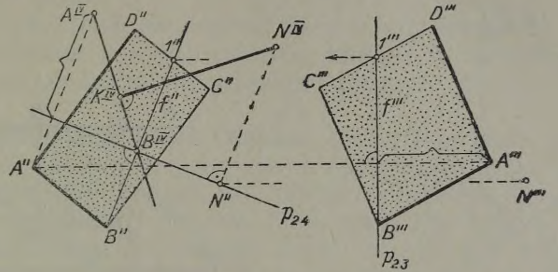
Vispārīgo gadījumu (145. ras.) var reducēt uz iepriekšējo, izvēloties jaunu projekciju plakni, perpendikulāru dotajai plaknei $ABCD$. Rasējumā jaunā frontālā projekciju plakne iet caur asi p_{13} perpendikulāri h'. Taisnes nogrieznis $N'''K'''$ ir meklētais attālums.

Rasējumā konstrukcija vēl papildināta, nosakot arī perpendikula horizontālo un frontālo projekciju. Punkta K frontālo projekciju dabū, ievērojot, ka tās attālums no projekciju ass p_{12} vienāds ar projekcijas K''' attālumu līdz p_{13}. Noteikta arī perpendikula redzamība virsskatā un pretskatā.

146. rasējumā šī paša uzdevuma atrisināšanai izmantotas plaknes un punkta frontālā un profilā projekcija. Konstruējam vispirms plaknes frontāli f ($f''' \perp A''\ A'''$). Izvēloties projekciju asi $p_{23} \equiv f'''$ un jauno projekciju asi p_{24} caur N'' perpendikulāri f'', atrisinājums

[1] Punkts K ir perpendikula krustpunkts ar plakni, jo, kā no rasējuma redzams, tas reizē atrodas uz perpendikula un reizē dotajā plaknē. Par taisnes un plaknes krustpunkta noteikšanu vispārīgā gadījumā sk. 55. nodalījumu.

vienkāršojas, jo plaknes jaunās horizontālās projekcijas konstruēšanai ir jānosaka tikai tās viena punkta, piemēram, A, jaunā projekcija A^{IV} (B^{IV} ir p_{24} un f'' krustpunktā). Plaknes jaunā projekcija atrodas uz taisnes $A^{IV}B^{IV}$. No punkta jaunās projekcijas N^{IV} velkam perpendikulu pret šo taisni; šī perpendikula garums $N^{IV}K^{IV}$ ir meklētais attālums.



146. ras.

Šai piemērā projekciju asis p_{23} un p_{24} vilktas pa vidu dotās plaknes projekcijām. Lai nerastos pārpratumi, konstruējot jauno projekciju, jāievēro, ka punktiem, kuru profilās projekcijas atrodas vienā pusē projekciju asij p_{23}, arī jaunās projekcijas ir vienā pusē projekciju asij p_{24}. Ja, piemēram, plaknes jaunās projekcijas konstruēšanai izmantotu punktu C, tad C^{IV} būtu jāmeklē pretējā pusē asij p_{24}, jo arī punkti C''' un N''' ir katrs savā pusē asij p_{23}.

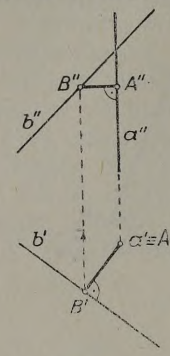
Atzīmēsim vēl, ka līdzīgi nosaka *attālumu starp taisni un tai paralēlu plakni.* Lai to izdarītu, jāizvēlas uz taisnes patvaļīgs punkts un jānosaka tā attālums līdz plaknei. *Attālums starp divām paralēlām plaknēm* ir attālums starp plakņu raksturīgajām projekcijām.

51. Attāluma noteikšana starp divām šķērsām taisnēm. Ar attālumu starp divām šķērsām taisnēm ir jāsaprot īsākais attālums starp diviem punktiem, no kuriem katrs atrodas uz savas taisnes. Šo attālumu mērī pa taisni, kas ir perpendikulāra abām dotajām taisnēm. Lai atrisinātu šo uzdevumu, aplūkosim vispirms gadījumus, kad viena no taisnēm vai abas atrodas kādā speciālā stāvoklī pret projekciju plaknēm.

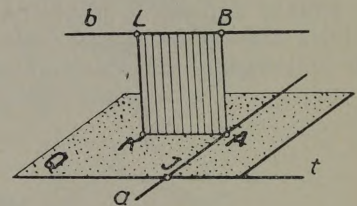
Ja viena no taisnēm, piemēram, a (147. ras.), ir perpendikulāra horizontālajai projekciju plaknei, bet otra taisne b vispārīgā stāvoklī, attālumu starp šīm taisnēm nosaka, izmērījot attālumu starp to horizontālajām projekcijām. Tiešām, tā kā taisnes nogrieznis AB, pa kuru jāmērī attālums, ir perpendikulārs taisnei a, bet a ir paralēla plaknei P_2, tad taisnes nogriežņa frontālā projekcija ir perpendikulāra taisnes a frontālajai projekcijai (sk. 16. nodalījumu).

Bez tam taisnes nogrieznis AB ir horizontāls (perpendikuls pret vertikālu taisni), tādēļ tā horizontālajai projekcijai jābūt perpendikulārai taisnes b horizontālajai projekcijai. Kā horizontāls taisnes nogrieznis tas horizontālā projekcijā attēlojas īstā garumā.

Mainot divreiz projekciju plaknes, ir iespējams katru taisni, kas ir vispārīgā stāvoklī, transformēt par projecētāju taisni (sk. 42. nodalījumu). Uzdevuma atrisināšanu vispārīgā gadījumā tādēļ iespējams vienmēr reducēt uz šo speciālo gadījumu. Konstrukciju izpil-



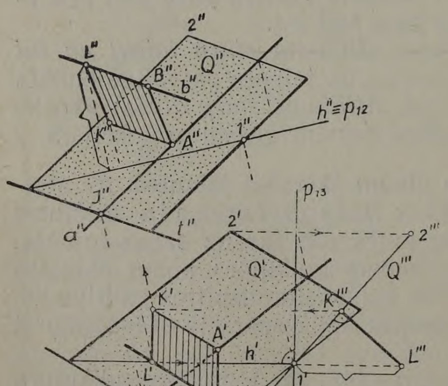
147. ras.



148. ras.

dījumu te neatkārtosim, bet tā vietā iztirzāsim dažus citus vienkāršākus atrisinājuma variantus.

Ja a un b ir dotās šķērsās taisnes (sk. 148. ras. slīpā projekcijā), tad caur vienas taisnes a patvaļīgu punktu J varam novilkt otrai taisnei b paralēlu taisni t. Taisnes a un t nosaka plakni Q, kas ir paralēla taisnei b (rasējumā šī plakne zīmēta kā paralelograms). Attālums starp taisnēm a un b ir vienāds ar attālumu starp taisni b un plakni Q resp. ar taisnes b kāda patvaļīga punkta L attālumu līdz šai plaknei.



149. ras.

Konstrukciju izpildījums ortogonālās projekcijās parādīts 149. rasējumā. Vienkāršības dēļ projekciju ass $p_{12} \equiv h''$, jaunā projekciju ass p_{13} vilkta caur $1'$ perpendikulāri h' (tiek lietota jauna frontālā projekciju plakne) un taisnes b punkta L horizontālā projekcija L' izvēlēta uz h'. Plaknes Q jaunās frontālās projekcijas Q''' konstruēšanai tad pietiek noteikt vēl viena tās punkta 2 jauno projekciju $2'''$.

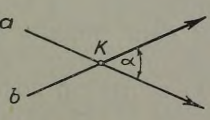
Lai noteiktu uz taisnēm a un b punktus A un B, kas ir vistuvāk viens otram, izpildīta vēl šāda papildu konstrukcija (sk. arī 148. ras.).

No perpendikula *LK* krustpunkta *K* ar plakni *Q* vilkta taisne $KA \parallel b$ un no tās krustpunkta *A* ar taisni *a* vilkts $AB \parallel LK$. Punkti *A* un *B* ir meklētie, jo figūra *LKAB* ir paralelograms (rasējumā šis paralelograms uzskatāmības dēļ iesvītrots).

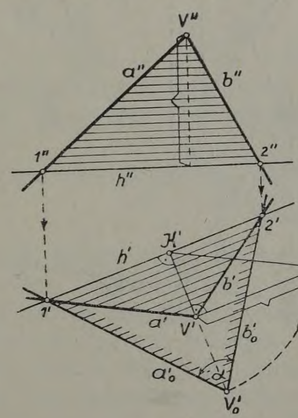
Attālumu starp taisnēm *a* un *b* var noteikt arī bez jaunas projekciju plaknes palīdzības, tieši nosakot perpendikula *LK* krustpunktu *K* ar plakni *Q* un pēc tam atrodot taisnes nogriežņa *LK* īsto garumu. Tā kā tiešo paņēmienu taisnes krustpunkta noteikšanai ar plakni aplūkosim nākošajā nodaļā, tad arī šī varianta izpildījumu atstājam pašam lasītājam vēlākam laikam.

52. Leņķis starp divām taisnēm. Divas krustiskas taisnes[1] veido savā starpā divus leņķus, kas ir viens otra blakus leņķi. Ja gribam vienu no tiem izslēgt, tad katrai no taisnēm jāpiešķir noteikts vērsums jeb pozitīvais virziens (150. ras.). Par leņķi α starp tādām *orientētām* taisnēm tad varētu saukt mazāko leņķi, par kādu jāpagriež viena no taisnēm ap krustpunktu *K*, līdz sakrīt ar otru taisni (taisnes sakrīt tikai tad, ja to vērsumi sakrīt).

Praktiskām vajadzībām šāda taišņu orientācija nav nepieciešama. Pietiek aplūkot tikai leņķi, ko veido divi no viena punkta izejoši stari, pie kam vienmēr domāsim šo staru veidoto mazāko leņķi.



150. ras.



151. ras.

Kā noteikt pēc projekcijām kāda leņķa īsto lielumu? Tā kā divas krustiskas taisnes nosaka plakni, tad leņķa īsto lielumu var noteikt ar to pašu paņēmienu, ar kādu nosaka plaknes gabala īsto lielumu, proti, ar leņķa plaknes paralēlpagriešanu.

Lai noteiktu taišņu *a* un *b* (151. ras.) veidoto leņķi α, pagriežam leņķa plakni (rasējumā iesvītrota) ap tās horizontāli *h* paralēli horizontālajai projekciju plaknei. Tā kā taišņu *a* un *b* krustpunkti *1* un *2* ar horizontāli *h* pagriežot paliek uz vietas, tad jāpagriež tikai leņķa virsotne *V*. Šai nolūkā konstruē punkta *V* rotācijas rādiusu

[1] Vispār var būt runa arī par leņķi starp divām šķērsām taisnēm. Šo leņķi var definēt ar leņķi, ko veido divi no patvaļīga punkta vilkti stari, kas ir paralēli dotajām taisnēm.

$\overline{K'V'}_0$ un atliek to uz perpendikula $K'V'$ pret h'. Savienojot V'_0 ar $1'$ un $2'$, dabūjam pagrieztā leņķa projekciju, t. i., meklēto leņķa īsto lielumu.

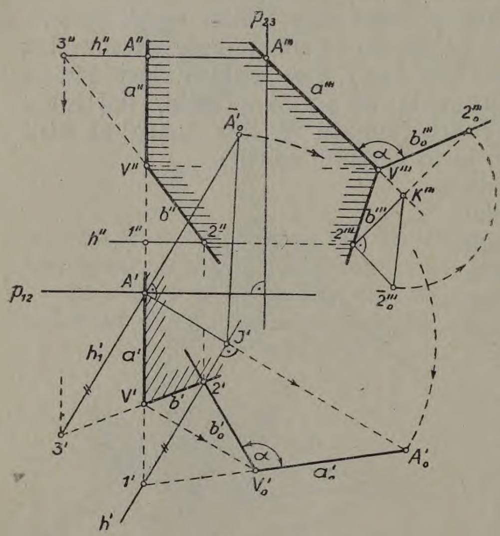
152. rasējumā parādīts atsevišķs gadījums, kad leņķa viena mala a ir profila taisne. Lai leņķa plakne būtu noteikta, te jābūt dotām vēl taisnes a kāda punkta A abām projekcijām A' un A''. Atzīmēsim uzdevuma atrisinājuma divus variantus:

1. Var pagriezt leņķa plakni ap tās horizontāli kā iepriekšējā piemērā.

Lai konstruētu horizontāli h novelk h'' un nosaka punktiem $1''$ un $2''$ atbilstošās horizontālās projekcijas $1'$ un $2'$. Tā kā punkts 1 atrodas uz profilās taisnes a, tad tā horizontālo projekciju dabū, ievērojot, ka punktam V' jādala taisnes nogrieznis $A'1'$ tādā pašā attiecībā, kādā V'' dala taisnes nogriezni $A''1''$.

Pagriežot leņķa plakni ap h, punkti 1 un 2 paliek uz vietas. Lai konstruētu punktu A un V jaunās horizontālās projekcijas A'_0 un V'_0 pietiek konstruēt vienīgi punkta A rotācijas rādiusu $1'\bar{A}'_0$, jo punktam V'_0 jāatrodas uz $A'_0 1'$.

Konstrukcija mazliet vienkāršojas, ja horizontāli velk caur punktu A (rasējumā šī horizontāle apzīmēta ar h_1) un nosaka projekcijas tās krustpunktam 3 ar leņķa malas b pagarinājumu. Pagriežot leņķa plakni ap šo horizontāli, punkti A un 3 paliek uz vietas. Lai konstruētu leņķa jaunas projekcijas, pietiek noteikt vienīgi punkta V jauno projekciju (konstrukcija nav parādīta).



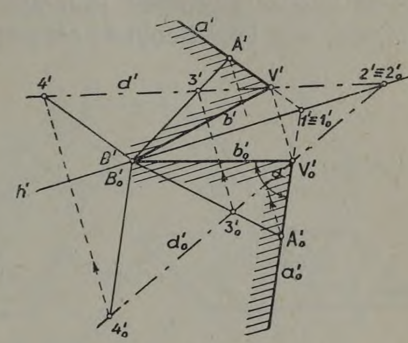
152. ras.

2. Var izmantot profilo projekciju plakni.

Projekciju asi p_{12} izvēlamies caur A', bet p_{23} perpendikulāru p_{12}. Konstruējam leņķa profilo projekciju un pagriežam leņķi ap taisni a, kas šai gadījumā ir leņķa plaknes profilā līnija (paralēla profilajai projekciju plaknei). Leņķa plakne tad tiek pagriezta paralēli profilajai plaknei. Lai noteiktu leņķa īsto lielumu, pietiek konstruēt tikai viena punkta 2 jauno profilo projekciju $2'''_0$ (rotācijas rādiuss $K'''\bar{2}'''_0$; $\bar{2}'''\bar{2}'''_0 = 1''2''$).

Ar leņķa īstā lieluma noteikšanu saistās arī visi uzdevumi par leņķa dalīšanu kādā iepriekš dotā attiecībā. Tā, piemēram, lai konstruētu dotā leņķa bisektrises projekcijas, konstruē bisektrises projekciju, kad leņķa plakne ir horizontālā stāvoklī (dalot leņķi α uz pusēm), pēc tam — bisektrises projekcijas sākotnējā stāvoklī.

Šī konstrukcija ir vienkārša tais gadījumos, kad bisektrise krusto rotācijas asi rasējuma robežās. Aplūkosim, piemēram, 153. rasējumu, kur parādītas leņķa horizontālās projekcijas sākotnējā un pagrieztā stāvoklī. Ja d'_0 ir leņķa α bisektrises projekcija leņķa plaknes horizontālajā stāvoklī, tad tās horizontālo projekciju d' plaknes sākotnējā stāvoklī dabū, ievērojot, ka šīm abām projekcijām jākrustojas uz horizontāles projekcijas h' (krustpunkts *2* pagriežot paliek uz vietas). Ja turpretim bisektrises krustpunkts ar rotācijas asi nav rasējuma plaknes robežās, tad var izmantot kādu citu leņķa plaknes taisni, ar kuru tai ir labāka krustošanās. Par tādu var ņemt, piemēram, taisni *AB* vai arī leņķa malai *a* paralēlu taisni *B4* ($B'_0 4'_0 \| a'_0$ un $B'4' \| a'$, jo pagriežot taišņu paralelitāte saglabājas). Krustpunktu *3* un *4* abām projekcijām jāatrodas uz perpendikuliem pret h'.



153. ras.

Bisektrises frontālo projekciju, kas rasējumā nav parādīta, nosaka kā parasti.

53. Leņķis starp taisni un plakni; leņķis starp divām plaknēm. Līdz šim esam aplūkojuši tikai leņķus, ko taisne vai plakne veido ar projekciju plaknēm. Vispārīgā gadījumā šos leņķus varēja noteikt ar vienkāršu transformāciju (plakņu maiņu vai rotāciju). Lai patvaļīga plakne kļūtu par projekciju plakni, savukārt bija jāizdara divas pakāpeniskas transformācijas. Ja pašreizējos uzdevumus gribētu reducēt uz jau iztirzātiem, tad vispārīgā gadījumā būtu vajadzīgas pavisam trīs transformācijas, kas mazinātu konstrukciju precizitāti.

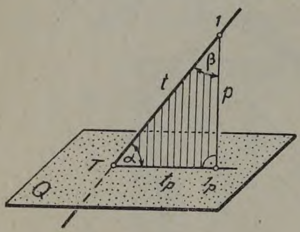
Lai atrastu vienkāršāku atrisinājumu, abi šie jaunie uzdevumi jāaplūko patstāvīgi. Kā tūliņ redzēsim, tos var reducēt uz leņķa noteikšanu starp divām taisnēm.

Leņķi starp taisni un plakni, kā zināms, mērī ar leņķi starp taisni un tās ortogonālo projekciju šai plaknē. Tā taisne t (154. ras.) veido ar plakni Q leņķi α, ja t_p ir taisnes t projekcija plaknē Q. Šī projekcija nemaz nav jākonstruē[1], jo vienkāršāk ir noteikt leņķi, ko taisne t veido ar perpendikulu p no patvaļīga taisnes punkta *1* pret plakni Q. Ja β ir t un p veidotais š a u r a i s leņķis, tad

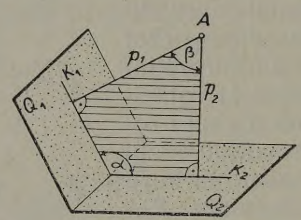
$$\alpha = 90° - \beta.$$

[1] Projekcijas t_p konstruēšanai būtu jānosaka taisnes t un no patvaļīga taisnes punkta *1* pret plakni vilkta perpendikula p krustpunkti T un 1_p ar plakni.

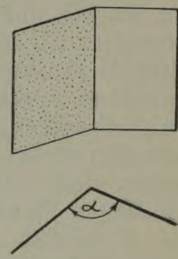
Leņķi starp divām plaknēm Q_1 un Q_2 (155. ras.) var noteikt šādi. No patvaļīga punkta A divplakņu kakta iekšpusē velk perpendikulus p_1 un p_2 pret šīm plaknēm. Ar p_1 un p_2 ir noteikta plakne, kas perpendikulāra abām plaknēm (sk. 31. nodalījumu), tātad perpendikulāra arī divplakņu kakta šķautnei. Šī plakne krusto plaknes Q_1 un Q_2 pa taisnēm k_1 un k_2, kas nosaka divplakņu kakta leņķi α. Taisnes k_1 un k_2 nav jākonstruē, jo leņķis α ir leņķa $\beta = \measuredangle (p_1, p_2)$ papildinājums līdz 180° (leņķi ar savstarpēji perpendikulārām malām).



154. ras.



155. ras.



156. ras.

Leņķa noteikšanu abos gadījumos tātad iespējams reducēt uz leņķa noteikšanu starp divām taisnēm. Konstrukciju izpildījumu ortogonālās projekcijās atstājam lasītājam kā vingrinājumu.

Divplakņu kakta leņķi var noteikt vienkāršāk, izlietojot projekciju plakņu maiņas metodi.

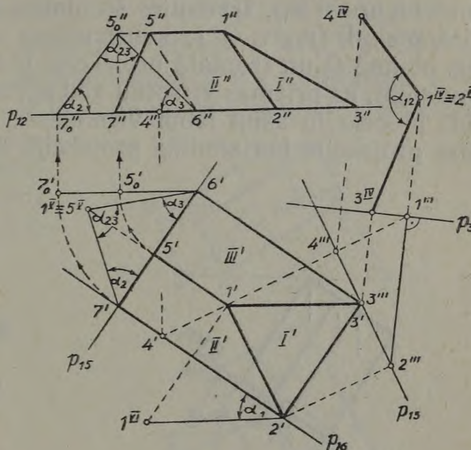
Ievērosim vispirms, ka gadījumā, ja divplakņu kakta šķautne ir perpendikulāra kādai projekciju plaknei (156. ras.), tad arī abas plaknes ir perpendikulāras tai pašai projekciju plaknei, t. i., attēlojas tajā kā taisnes nogriežņi. Leņķis starp abām plaknēm ir leņķis starp plakņu raksturīgajām projekcijām.

Šis konstatējums dod iespēju arī vispārīgā gadījumā konstrukcijai nepieciešamo transformāciju skaitu reducēt uz divām, jo ar divām transformācijām pietiek, lai patvaļīgu šķautni transformētu šajā speciālajā stāvoklī.

Ilustrācijai aplūkosim leņķu noteikšanu starp prizmas skaldnēm *I*, *II* un *III* (157. ras.).

Lai noteiktu, piemēram, skaldņu *I* un *II* veidoto leņķi, izvēlamies vispirms jaunu frontālo projekciju plakni paralēli šķautnei 1—2 (ass $p_{13} \| 1'2'$) un pēc tam jaunu horizontālo projekciju plakni perpendikulāri šķautnei 1—2 (ass $p_{34} \perp 1''' \, 2'''$). Šīs šķautnes jaunā horizontālā projekcija ir punkts $1^{IV} \equiv 2^{IV}$. Pašu skaldņu jaunās horizontālās projekcijas var konstruēt vienkāršāk, nosakot katras skaldnes kāda punkta (kas neatrodas uz šķautnes 1—2) jaunās projekcijas. Tādi punkti ir izvēlēti sekojoši: skaldnē *I* punkts 3 un skaldnē *II* punkts 4; pēdējais vienkāršības dēļ uz šķautnes 2—7 ar horizontālo projekciju $4'$ uz perpendikula $1'1'''$ pret p_{13}. Savienojot 3^{IV} un 4^{IV} ar 1^{IV}, dabūjam skaldņu jaunās horizontālās projekcijas (precīzāk — tikai šo projekciju virzienus) un meklēto leņķi α_{12} starp šīm skaldnēm.

Skaldņu *II* un *III* kopējā šķautne *1—5* ir paralēla horizontālajai projekciju plaknei, tādēļ šo skaldņu veidotā leņķa noteikšanai pietiek ar vienu transformāciju. Jauno frontālo projekciju plakni var izvēlēties perpendikulāru šķautnei *1—5*, izvēloties projekciju asi $p_{15} \perp 1'5'$ (vienkāršības dēļ tā vilkta caur $7'6'$). Leņķis α_{23} starp skaldņu jaunajām projekcijām ir leņķis starp skaldnēm *II* un *III*. Šī konstrukcija dod reizē arī skaldņu *II* un *III* slīpuma leņķus α_2 un α_3 ar horizontālo projekciju plakni.



157. ras.

Te jāpiezīmē, ka leņķi starp skaldnēm *II* un *III* var noteikt, arī nosakot leņķi starp šķautnēm *5—6* un *5—7*, kas ir perpendikulāras divplakņu kakta šķautnei. Šī leņķa plakne ir perpendikulāra horizontālajai projekciju plaknei, tādēļ leņķa īstā lieluma noteikšanai tā jāpagriež frontālā stāvoklī (sk. ras.).[1]

Rasējumā noteikts arī leņķis α_1, ko skaldne *I* veido ar horizontālo projekciju plakni, izvēloties vēl vienu frontālo projekciju plakni — perpendikulāru šķautnei *2—3* (ass $p_{16} \perp 2'3'$).

Apskatītais paņēmiens dod iespēju arī sadalīt kādu divplakņu kaktu iepriekš noteiktā attiecībā. Lai konstruētu, piemēram, skaldņu *I* un *II* veidotā divplakņu kakta bisektrisu plaknes projekcijas, ievērosim, ka šīs bisektrisu plaknes jaunā horizontālā projekcija ir leņķa α_{12} bisektrise. Bisektrisu plaknes kāda punkta *B* projekcijas B^{IV} un B''' (ras. nav parādītas) varam izvēlēties patvaļīgi (B^{IV} uz leņķa α_{12} bisektrises un B''' uz perpendikula no B^{IV} pret p_{34}). Konstruējot tagad šī punkta pārējās projekcijas B' un B'', tās kopā ar šķautnes *1—2* projekcijām $1'2'$ un $1''2''$ nosaka viennozīmīgi bisektrisu plaknes horizontālo un frontālo projekciju.

54. Daudzskaldņu projekciju konstruēšana pēc dotajiem nosacījumiem. Līdz šim esam aplūkojuši tikai projekciju konstruēšanu daudzskaldņiem, kas novietoti speciālā stāvoklī pret projekciju plaknēm. Ar transformāciju metodi var attēlot daudzskaldņus arī pie vispārīgākiem nosacījumiem.

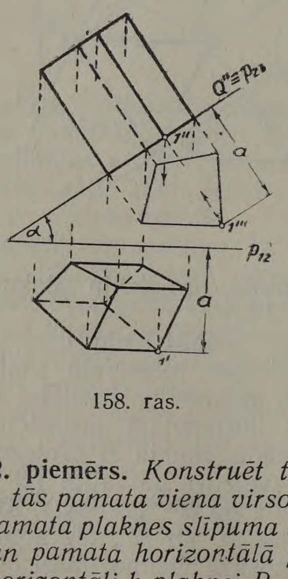
---

[1] Arī iepriekšējo konstrukciju var saprast kā šīs leņķa plaknes pagriešanu ap tās horizontāli *6—7* līdz savietošanai ar horizontālo projekciju plakni.

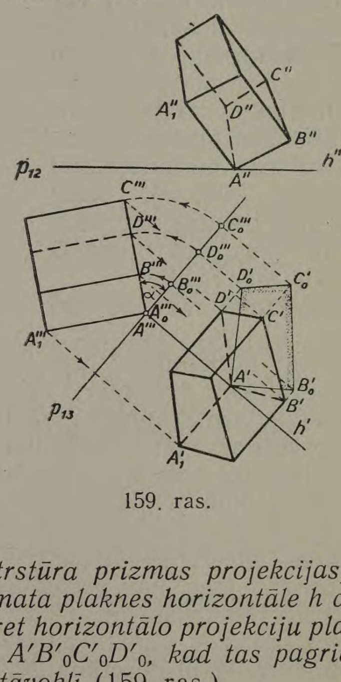
Aplūkosim dažus raksturīgākos piemērus. Atzīmēsim, ka bez uzdevumā minētajiem nosacījumiem par daudzskaldņu novietojumu turpmāk jāuzskata par dotiem arī visi daudzskaldņu noteikšanai vajadzīgie lielumi.

1. piemērs. *Konstruēt projekcijas taisnai četrstūra prizmai, kuras pamats ir frontāli projecētājā plaknē Q dotā slīpumā* α *pret horizontālo projekciju plakni (158. ras.).*

Plaknes Q frontālā projekcija ir taisne Q'', kas veido leņķi α ar projekciju asi p_{12}. Izvēloties šo plakni par jauno horizontālo projekciju plakni ($p_{23} \equiv Q''$), konstruējam vispirms dotās prizmas attēlus plaknē Q un frontālā projekciju plaknē P_2 (sk. 33. nodalījumu). Ievērojot, ka prizmas virsotņu abu horizontālo projekciju attālumiem līdz procekciju asīm jābūt vienādiem, iespējams konstruēt arī prizmas projekciju horizontālā projekciju plaknē P_1.



158. ras.



159. ras.

2. piemērs. *Konstruēt taisnas četrstūra prizmas projekcijas, ja dota tās pamata viena virsotne A, pamata plaknes horizontāle h caur A, pamata plaknes slīpuma leņķis* α *pret horizontālo projekciju plakni* P_1 *un pamata horizontālā projekcija* $A'B'_0C'_0D'_0$, *kad tas pagriests ap horizontāli h plaknei* P_1 *paralēlā stāvoklī* (159. ras.).

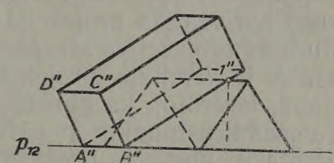
Izvēloties jaunu frontālo projekciju plakni $P_3 \perp h$, prizmas pamats $ABCD$ pagrieztā stāvoklī attēlojas uz projekciju ass p_{13}. Pagriežot tagad pamata plakni par leņķi α ap horizontāli h, pamata raksturīgā projekcija $A'''B'''D'''C'''$ veidos leņķi α ar projekciju asi p_{13}. Prizmas sānu šķautnes jaunajā frontālā projekciju plaknē attēlojas īstā lielumā perpendikulāri pamata raksturīgajai projekcijai, bet horizontālajā projekciju plaknē paralēli projekciju asij.

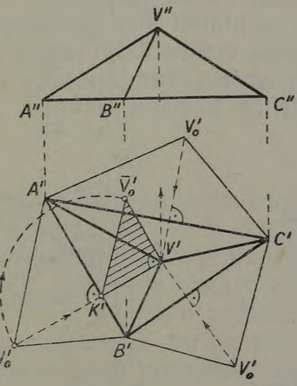
Pēc šīs prizmas divām projekcijām var konstruēt tās frontālo projekciju plaknē $P_2 (p_{12} \equiv h'')$.

3. piemērs. *Konstruēt projekcijas trīsstūra piramīdai, ja piramīdas pamats ir horizontālā stāvoklī un dotas visas tās šķautnes (160. ras.).*

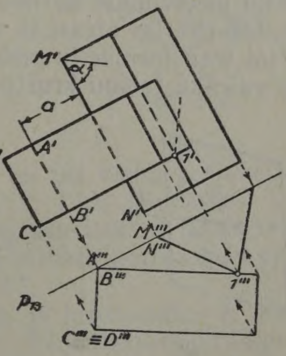
Konstruējam vispirms piramīdas pamata ABC abas projekcijas un tās sānu skaldņu ABV, BCV, ACV horizontālās projekcijas plaknei P_1 paralēli pagrieztā stāvoklī. Pagriežot sānu skaldnes attiecīgi ap AB, BC un AC, piramīdas virsotnes projekcijas V'_0 pārvietojas perpendikulāri šo šķautņu projekcijām un virsotnes horizontālo projekciju dabū kā šo trīs perpendikulu kopējo krustpunktu V'.

Lai noteiktu tagad virsotnes frontālo projekciju, pie viena no šiem perpendikuliem konstruējam taisnleņķa trīsstūri $K'V'\overline{V}'_0$ (KV ir plaknes ABV slīpuma līnija) ar hipotenūzu $K'\overline{V}'_0$ vienlīdzīgu rotācijas rādiusam $V_0'K'$. Katetes $V'\overline{V}'_0$ garums ir virsotnes V attālums līdz pamata skaldnei ABC (piramīdas augstums), t. i., tās frontālās projekcijas attālums līdz skaldnes ABC frontālajai projekcijai.





160. ras.



161. ras.

4. piemērs. *Pie regulāras trīsstūra prizmas, kas atrodas horizontālā projekciju plaknē, pieslieta regulāra četrstūra prizma. Konstruēt abu prizmu projekcijas, ja trīsstūra prizmas sānu šķautnes veido leņķi α ar frontālo projekciju plakni un četrstūra prizma atbalstās horizontālajā projekciju plaknē ar pamata šķautni AB attālumā a no trīsstūra prizmas (161. ras.).*

Konstruējam vispirms abu prizmu projekcijas jaunajā frontālajā projekciju plaknē, kas izvēlēta perpendikulāri šķautnei MN resp. AB. Šai plaknē īstā lielumā attēlojas trīsstūra prizmas pamats un četrstūra prizmas divas sānu skaldnes. Papildinām tagad prizmu horizontālās projekcijas un pēc tam konstruējam, kā parasti, abu prizmu frontālās projekcijas. Kontrole: punktiem $1'$ un $1''$ jāatrodas uz kopēja perpendikula pret projekcijų asi.

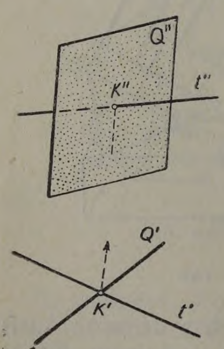
III NODAĻA

KRUSTOŠANĀS UZDEVUMI

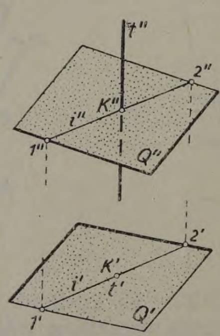
1. §. TAIŠŅU, PLAKŅU UN DAUDZSKALDŅU KRUSTOŠANĀS

55. Taisnes krustošanās ar plakni. Taisnes krustpunktu ar plakni var noteikt tieši, jo dotā plakne Q ir projecētāja plakne (162. ras.). Plaknes horizontālā projekcija Q' tad ir taisnes nogrieznis. Uz šīs raksturīgās projekcijas atrodas visu plaknes punktu, tātad arī krustpunkta K horizontālā projekcija. Krustpunkta frontālo projekciju K'' dabū, ievērojot, ka punkts K tai pašā laikā ir taisnes t punkts.

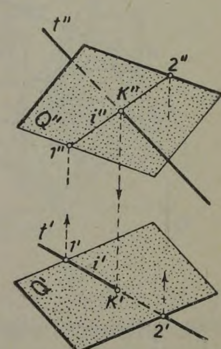
Taisnes krustpunktu ar patvaļīgu plakni varētu noteikt, transformējot plakni vispirms projecētājā stāvoklī. Tā kā turpmākos konstrukciju uzdevumos taisnes krustpunkts ar plakni būs jānosaka ļoti bieži, tad svarīgi atrast tā noteikšanai kādu vienkāršāku paņēmienu, atstājot transformāciju metodi tiem gadījumiem, kur jānosaka vienā laikā vairāku taišņu krustpunkti ar vienu un to pašu plakni.



162. ras.



163. ras.

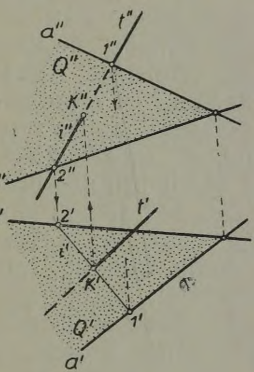


164. ras.

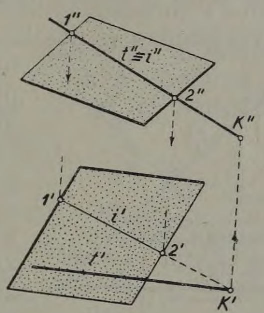
Aplūkosim vispirms gadījumu, kad plakne Q ir patvaļīga plakne, bet taisne t — projecētāja taisne (163. ras.). Tā kā taisnes viena (horizontālā) projekcija ir punkts, tad šis punkts ir arī krustpunkta K projekcija K'. Krustpunkta otru projekciju dabūsim, nosakot punktu K'' uz t'' tā, lai punkts K atrastos dotajā plaknē Q. Tam nolūkam velkam caur K' patvaļīgu taisni i' un nosakām i'' tā, lai arī taisne i atrastos plaknē Q (sk. 20. nodalījumu). Taisnes i'' krustpunkts ar t'' ir meklētā krustpunkta frontālā projekcija K''.

Līdzīgi varam rīkoties arī gadījumā, ja taisne t ir patvaļīga taisne (164. ras.). Palīgtaisni i izvēlamies tā, lai tās viena projekcija, piemēram, i', sakristu ar taisnes t projekciju t'. Taisnes i un krustpunkta K frontālās projekcijas i'' un K'' nosaka kā iepriekš, bet krustpunkta horizontālā projekcija K' ir kārtotājas $K''K'$ krustpunkts ar t'.

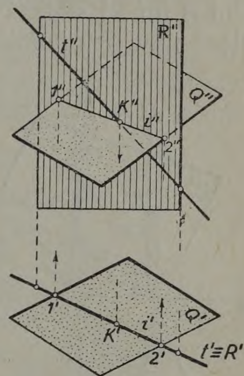
Punkts K ir taisnes t krustpunkts ar plakni Q, jo tas reizē atrodas uz taisnes t un uz plaknes Q taisnes i.



165. ras.



166. ras.



167. ras.

Palīgtaisni i varēja izvēlēties arī tā, lai tās viena projekcija sakristu ar taisnes t f r o n t ā l o projekciju. Tāds paņēmiens lietots 165. rasējumā, kur plakne dota ar divām krustiskām taisnēm a un b. Šajā gadījumā vispirms nosakām krustpunkta horizontālo projekciju K' un pēc tam frontālo projekciju K''.

Konstrukcija derīga arī tai gadījumā, ja krustpunkts K atrodas ārpus plaknes norobežojuma (166. ras.). Tādu taisnes krustpunktu ar plakni sauksim par *fiktīvu* krustpunktu atšķirībā no iepriekšējā t. s. *reālā* krustpunkta.

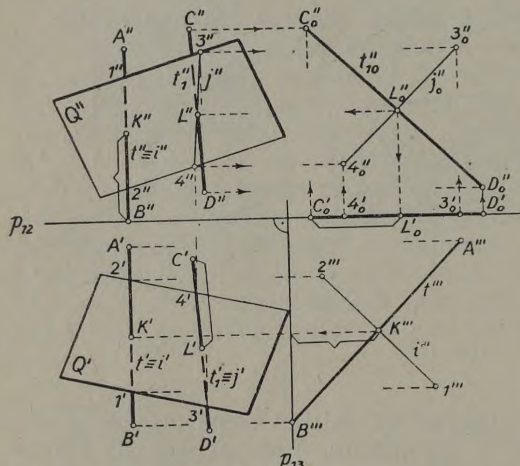
Ja plakne ir paralēla taisnei t, tad arī palīgtaisne i ir paralēla t $(i' \| t')$. Tā iegūst jau pazīstamo kritēriju par taisnes un plaknes paralelitāti (sk. 28. nodalījumu).

Apskatītajām konstrukcijām var dot arī šādu telpisku interpretāciju (167. ras.). Iedomāsimies caur taisni t vilktu horizontāli projecētāju palīgplakni R. Šī plakne rasējumā uzskatāmības dēļ ir norobežota ar četrstūri, bet šim norobežojumam nav būtiskas nozīmes. Abu plakņu šķēluma taisne, ko dabū, nosakot plaknes divu šķautņu krustpunktus 1 un 2 ar plakni, ir agrāk lietotā palīgtaisne i. Tā kā abas taisnes t un i atrodas vienā un tai pašā plaknē R, tām noteikti jākrustojas kādā punktā K. Šim punktam kā taisnes i punktam jāatrodas tai pašā laikā arī plaknē Q.

Konstrukcijas 165. un 166. rasējumā atbilstoši var interpretēt, izmantojot frontāli projecētāju palīgplakni caur doto taisni. Šai interpretācijai būs nozīme dažās tālākās konstrukcijās, tādēļ ir vēlams to iegaumēt.

Iepriekšējos rasējumos visur noteikta arī taisnes t redzamība relatīvi pret plakni Q, izmantojot agrāk aplūkotos aizrādījumus (sk. 32. nodalījumu).

56. Profilas taisnes krustošanās ar plakni. Ja dota profila taisne (168. ras.), tad palīgtaisne i un taisne t (kas dota ar diviem punktiem A un B) sedzas a b ā s projekcijās, tādēļ te iepriekšējais paņēmiens nav lietojams. Krustpunkta K noteikšanai te jālieto transformācijas metode, pie kam pietiek konstruēt tikai abu taišņu t un i (ne pašas plaknes) jaunās projekcijas t''' un i'''. Rasējumā tās ir profilas projekcijas, bet tikpat labi varēja lietot arī patvaļīgi jaunu frontālo (arī horizontālo!) projekciju plakni.¹ Nosakot krustpunkta jauno projekciju K''', ar apgrieztu konstrukciju dabū vispirms K', tad K''.



168. ras.

Te atkārtoti jāuzsver, ka praksē grūtības rada ne tik daudz tie gadījumi, kad taisne ir profila, bet gan gadījumi, kad tā ir gandrīz profila. Tāda, piemēram, ir otra taisne t_1 iepriekšējā rasējumā. Šīs taisnes precīzai noteikšanai dotas divu tās punktu C un D projekcijas. Palīgtaisnes j un dotās taisnes t_1 frontālās projekcijas gan nesedzas, bet šo projekciju slīdošas krustošanās dēļ krustpunkta projekciju L'' nevar precīzi noteikt.

Lai noteiktu krustpunktu L precīzāk, nepieciešama kāda transformācija. Rasējumā horizontāli projecētāja plakne R, kurā atrodas taisne t_1 un j, pagriezta frontālā stāvoklī. Nosakot krustpunkta frontālo projekciju L''_0 šai pagrieztā stāvoklī, ar apgrieztu konstrukciju dabū projekcijas L'' un L'.

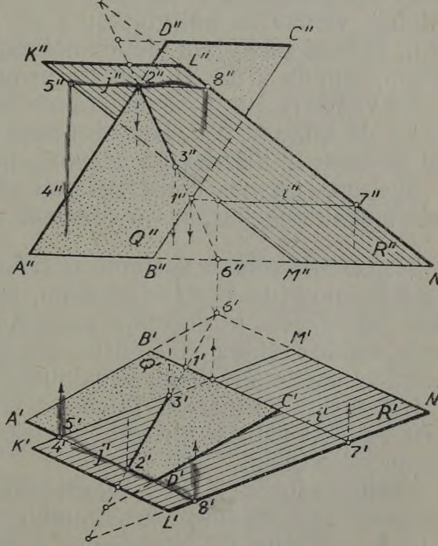
Būtu maldīgi iedomāties, ka taisnes slīdošo krustošanos ar palīgtaisni var vienmēr novērst ar transformāciju. Tas izdosies tikai tad, ja slīdošā krustošanās ir radusies no abu taišņu kopīgās projecētājas plaknes R neizdevīga novietojuma attiecībā pret projekciju plaknēm,

¹ Transformāciju var izdarīt arī tādējādi, ka konstruē taisnes t un plaknes Q (ne palīgtaisnes i) attēlus projekciju plaknē, kas perpendikulāra dotajai plaknei, t. i., reducējot uzdevumu uz 162. rasējuma uzdevumu.

bet ne no šo taišņu stāvokļa vienai attiecībā pret otru. Ja taisne ir gandrīz paralēla plaknei Q, tad arī telpā ar palīgtaisni tai ir slīdoša krustošanās un jauna attēla konstruēšana nekādu uzlabojumu nedos.

57. Divu plakņu šķēluma taisnes konstruēšana. Divu plakņu šķēluma speciāls gadījums, kad viena plakne ir projecētāja plakne, ir ilustrēts jau ar 167. rasējumu. Plakņu Q un R šķēluma taisne šai rasējumā noteikta, nosakot plaknes Q divu šķautņu krustpunktus ar plakni R.

Līdzīgi rīkojamies arī gadījumā, ja dotas patvaļīgas plaknes. Tā 169. rasējumā plakņu Q un R šķēluma taisnes konstruēšanai noteikti plaknes Q šķautņu BC un AD krustpunkti 1 un 2 ar plakni R, lietojot horizontāli projecētājas palīgplaknes caur šīm šķautnēm (palīgtaisnes i un j).



169. ras.

Raksturīgi, ka šķautnei BC ar plakni R ir fiktīvs krustpunkts. Šķēluma taisnes konstruēšanai šo fiktīvo krustpunktu tomēr var labi izmantot, tikai, abus punktus savienojot, jāievēro, ka šķēluma taisne ir reāla vienīgi abu plakņu kopējā daļā, t. i., starp punktiem 2 un 3, un tikai šī daļa jāizvelk ar nepārtrauktu līniju.

Pakavēsimies mazliet pie redzamības noteikšanas projekcijās.

Šķēluma taisne abās projekcijās ir vienmēr redzama. Plakņu Q un R pārējo taišņu redzamības noteikšanai ievērosim vispirms, ka šķautne DC virsskatā ir redzama, jo tās frontālā projekcija ir visaugstāk. Arī šķautne DA no punkta D līdz krustpunktam 2 šai skata virzienā tādēļ ir redzama, bet pa kreisi no krustpunkta tā atrodas jau zem plaknes R, tātad šīs plaknes robežās neredzama. Šķērsošanās vietā 4—5 plaknes R šķautne KM tātad atrodas virs AD (sal. arī punktu 4 un 5 frontālās projekcijas!) un ir redzama līdz krustpunktam 3 ar plakni Q, bet pa labi no 3 plaknes Q robežās ir neredzama. Plaknes Q šķautne BC šķērsošanās vietā ar KM savukārt atrodas virs KM un plaknes R robežās ir redzama.

Redzamība pretskatā nosakāma līdzīgi, vai arī salīdzinot kādas plaknes abu projekciju virsotņu numerācijas virzienus.

Vēl daži aizrādījumi par pašas šķēluma taisnes konstruēšanu.

Tā kā šķēluma taisne atrodas abās plaknēs, tad, turpinot to uz abām pusēm, tai jākrusto arī plakņu pārējās šķautnes vai šo šķautņu pagarinājumi. Krustpunktu projekcijām pa pāriem jāatrodas uz kopējas kārtotājas. Šo īpašību var izlietot konstrukciju precizitātes pārbaudei, bez tam tā rāda, ka ir pilnīgi vienalga, kuras šķautnes izvēlamies šķēluma taisnes konstruēšanai.

Iztirzātajā piemērā var konstatēt dažas raksturīgas īpašības, kas dod iespēju konstrukcijas vienkāršot. Tā, piemēram, šķautnes AB un MN atrodas kopējā frontāli projecētājā plaknē (frontālās projekcijas $A''B''$ un $M''N''$ ir uz kopējas taisnes), tādēļ tās pašas savstarpēji krustojas punktā *6* uz šķēluma taisnes. Bez tam horizontāli projecētājas plaknes caur BC un AD, kuras lietojām šķēluma taisnes noteikšanai, ir paralēlas plaknes R šķautnēm KL un MN (sk. 28. nodalījumu), tādēļ arī palīgtaisnes i un j paralēlas tām pašām šķautnēm resp. paralēlas ir arī šo četru taišņu frontālās projekcijas. Tas nedaudz vienkāršo palīgtaišņu i un j frontālo projekciju konstruēšanu, jo tādā gadījumā pietiek noteikt katras taisnes v i e n a punkta (piem., punktu *7* un *8*) frontālo projekciju.

Šo vienkāršojumu nozīmi tomēr nedrīkstam pārspīlēt. Tie galvenokārt derīgi kontrolei. Bez tam tiem ir nozīme visos tais gadījumos, kad plaknes ir neizdevīgā stāvoklī pret projekciju plaknēm.

Šķēluma taisnes konstruēšanai vienmēr ieteicams izvēlēties tās plakņu šķautnes, kurām var precīzāk noteikt krustpunktus.

58. **Daudzskaldņu šķēlumi ar taisni un plakni.** Lai noteiktu taisnes krustpunktus ar daudzskaldni, lieto šādu vispārīgu paņēmienu. Caur taisni velk projecētāju palīgplakni un nosaka šīs plaknes un daudzskaldņa šķēluma figūru; taisnes un šķēluma figūras krustpunkti ir meklētie taisnes krustpunkti ar daudzskaldni.

Noteiksim, piemēram, taisnes t krustpunktus ar trīsstūra prizmu (170. ras.), šķeļot šo prizmu iepriekš ar frontāli projecētāju plakni R caur doto taisni.

Šķēluma figūru $A_1B_1C_1$ viegli konstruēt, ja ievēro, ka tās virsotņu (prizmas sānu šķautņu krustpunktu ar plakni R) frontālās projekcijas A''_1, B''_1 un C''_1 atrodas uz kopējas taisnes $t'' \equiv R''$. Punktiem A''_1, B''_1 un C''_1 piekārtojam atbilstošās horizontālās projekcijas A'_1, B'_1, C'_1, kuras savienojot dabūjam šķēluma figūras horizontālo projekciju $A'_1B'_1C'_1$.

Atzīmējam tagad taisnes un trīsstūra $A_1B_1C_1$ krustpunktu horizontālās projekcijas K' un L'. Pēc šīm horizontālajām projekcijām nosakām taisnes krustpunktu frontālās projekcijas K'' un L''. Punkti K un L ir meklētie taisnes t krustpunkti ar prizmu.

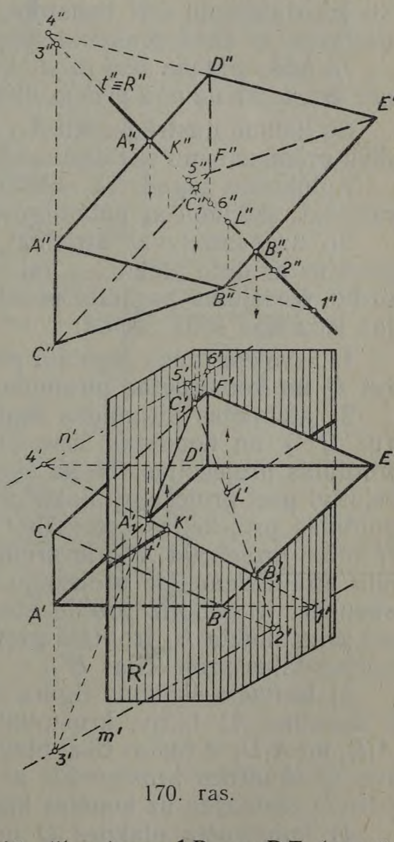
Noteiksim vēl taisnes t redzamību, pieņemot, ka pašas prizmas šķautņu redzamība jau noteikta (sk. 34. nodalījumu).

Skaldne $ABED$ un tātad arī krustpunkts[1] K ir redzami abās projekcijās, tādēļ abās projekcijās redzama arī taisnes daļa pa kreisi

[1] Krustpunkts K atrodas skaldnē $ABED$, jo tas atrodas uz šīs skaldnes taisnes A_1B_1.

no punkta *K* (par pēdējo var pārliecināties arī, aplūkojot šķērsās taisnes *t* un *AD*). Otrs krustpunkts *L* turpretim abās projekcijās ir neredzams, jo atrodas skaldnē *BCFE*, kas abās projekcijās neredzama. Neredzama (prizmas apveidu projekciju iekšpusē) tādēļ ir arī taisnes daļa pa labi no punkta *L*. Taisnes nogrieznis starp punktiem *K* un *L* atrodas prizmas iekšpusē; uzskatāmības dēļ ieteicams šo daļu neizvilkt pat ar pārtrauktu līniju.

Plakne *R* rasējumā ir norobežota ar daudzstūri un domāta kā necaurredzama. Tas ietekmē arī pašas prizmas redzamību virsskatā. Taisnes krustpunktu noteikšanai šis norobežojums, protams, nav nepieciešams. Norobežojumu atmetot, plakni *R* varam iedomāties caurredzamu (t. i., nereālu), un tādā gadījumā tā prizmas redzamību neietekmē.



170. ras.

Frontāli projecētājas plaknes vietā varēja lietot arī horizontāli projecētāju palīgplakni caur taisni *t*. Aplūkotajā piemērā gan šāda plakne šķeltu prizmu ne vairs pa trīsstūri, bet pa četrstūri, jo plaknes horizontālā projekcija ($\equiv t'$) tad šķeltu abu prizmas pamatu šķautņu projekcijas pavisam četros punktos. Palīgplakni tādēļ ieteicams izvēlēties vienmēr tā, lai tās šķēlums ar daudzskaldni būtu pēc iespējas vienkāršāka figūra.

Apskatot plakni *R* neatkarīgi no taisnes *t*, ar iepriekšējo piemēru ir parādīts arī, kā konstruēt daudzskaldņa šķēlumu ar šādu projecētāju plakni. Aizrādīsim vēl uz dažām kontrolēm, kādas te iespējams izdarīt.

Pagarinot skaldnes *ABED* šķēluma taisni A_1B_1 uz abām pusēm, tā krusto arī šīs skaldnes pārējās šķautnes *AB* un *DE* (precīzāk — šo šķautņu pagarinājumus) punktos *1* un *4*. Šie punkti ir prizmas šķautņu *AB* un *ED* fiktīvie krustpunkti ar plakni *R*, un to projekcijām pa pāriem jāatrodas uz kopējas kārtotājas.

Gluži tāpat taisne B_1C_1 krustojas ar prizmas šķautnēm *BC* un *EF* punktos *2* un *5*, un taisne A_1C_1 — ar šķautnēm *AC* un *DF* punktos *3* un *6*. Tas dod iespēju pārbaudīt, cik precīzi konstruētas šķēluma taisnes.

Tā kā punkti *1*, *2* un *3* reizē atrodas plaknē *R* un prizmas pamata ABC skaldnē, tad tiem jāatrodas uz kopējas taisnes m, kas ir abu plakņu (fiktīva) šķēluma taisne. Arī punkti *4*, *5* un *6* atrodas uz vienas taisnes n — plaknes R un prizmas augšējā pamata DEF šķēluma taisnes. Abas taisnes m un n bez tam ir paralēlas, jo tās ir plaknes R šķēluma taisnes ar paralēlām prizmas pamatu skaldnēm (horizontālās projekcijas $m' \| n'$, bet frontālās projekcijas sakrīt ar plaknes R projekciju R'').

Punktus *1*, *2*, . . ., *6* varam iedomāties arī kā triju plakņu — plaknes R, prizmas viena pamata un vienas sānskaldnes — krustpunktus. Šo konstatējumu ērti izmantot konstrukcijām un kontrolēm, tāpēc izteiksim to šādā praktiski piemērotākā formā:

Ja kāda plakne šķeļ divas citas plaknes, tad abas šķēluma taisnes krustojas uz abu pēdējo plakņu šķēluma taisnes.[1]

Šo likumu ilustrē punkti A_1, B_1 un C_1, kas tāpat ir triju plakņu — divu prizmas sānu skaldņu un plaknes R — krustpunkti.

Aplūkosim tagad, kā noteikt kāda daudzskaldņa, piemēram, piramīdas, šķēlumu ar patvaļīgu plakni Q (171. ras.).

Šo uzdevumu var atrisināt, nosakot piramīdas šķautņu krustpunktus ar doto plakni — vai nu tieši, vai ar transformācijas palīdzību. Rasējumā parādīts pēdējais paņēmiens, pie kam konstrukcijas izdarītas šādā secībā:

1) izvēlēta jauna frontālā projekciju plakne perpendikulāri plaknei Q un konstruētas piramīdas un plaknes Q jaunās projekcijas;

2) atzīmētas piramīdas šķautņu krustpunktu jaunās projekcijas (uz Q''') un noteiktas šiem punktiem atbilstošās horizontālās un frontālās projekcijas. Tā kā šķautne AV ir gandrīz profilā stāvoklī relatīvi pret projekciju plaknēm P_1 un P_3, tad krustpunkta A_1 horizontālās projekcijas precīzākai noteikšanai konstruēta vispirms tā frontālā projekcija A''_1, ievērojot, ka šī punkta abu frontālo projekciju attālumiem līdz projekciju asīm jābūt vienādiem. Šķautne BV savukārt ir gandrīz profilā stāvoklī pret plaknēm P_1 un P_2, tādēļ arī krustpunkta B_1 frontālā projekcija B''_1 noteikta neatkarīgi no tā horizontālās projekcijas B'_1;

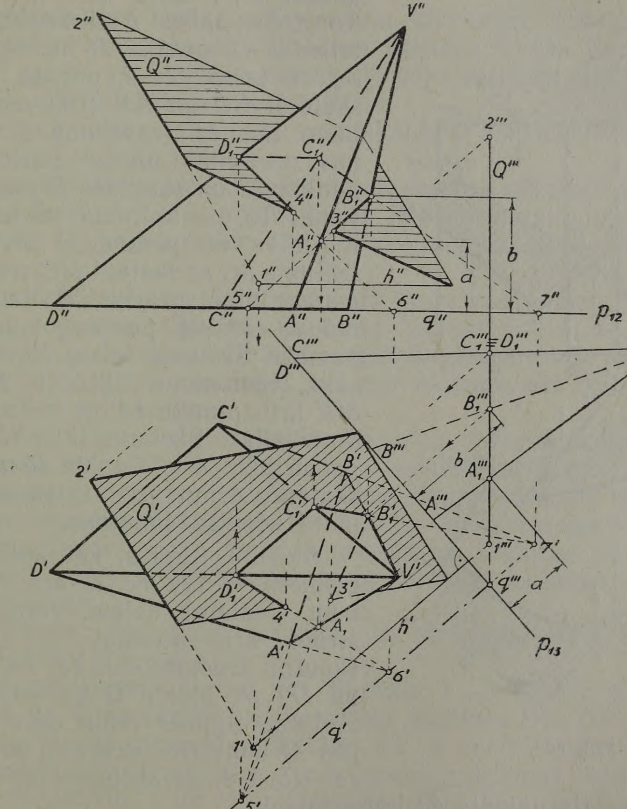
3) iezīmēta šķēluma figūra un noteikta tās redzamība. Tā kā A_1 ir šķautnes AV fiktīvs krustpunkts ar plakni Q, tad šķēluma taisnes A_1B_1 un A_1D_1 ir reālas tikai plaknes Q robežās. Punkti *3* un *4* ir plaknes Q šķautnes krustpunkti ar piramīdu, tādēļ to projekcijām pa pāriem jāatrodas uz kopējas kārtotājas;

4) konstruēta plaknes Q un piramīdas pamata plaknes (t. i., plaknes P_1) šķēluma taisne q (plaknes Q horizontālā pēda: q''' uz p_{13} un $q' \perp p_{13}$). Uzskatot piramīdas pamatu kā piramīdas šķēlumu ar horizontālo projekciju plakni, izdarīta šāda kontrole: katra piramīdas sānu skaldne šķeļ plakni Q un projekciju plakni P_1 pa taisnēm, kas krustojas uz kopējas taisnes q. Tā kā gadījuma dēļ pamata mala DC ir paralēla taisnei q, tad arī šķēluma figūras mala D_1C_1 ir paralēla šai taisnei resp. taisnei DC. Kā plaknes Q horizontālei

[1] Izņēmuma gadījumā šīs trīs taisnes var būt arī paralēlas.

taisnes C_1D_1 frontālajai projekcijai jābūt paralēlai projekciju asij.

Iztirzāto paņēmienu plaknes šķēluma konstruēšanai ieteicams lietot tajos gadījumos, kad vairākas daudzskaldņa šķautnes ir profilā vai gandrīz profilā stāvoklī. Pārējos gadījumos lietderīgāk šķautņu krustpunktus noteikt tieši, izmantojot bez tam kādu no aizrādītajām kontroles metodēm.

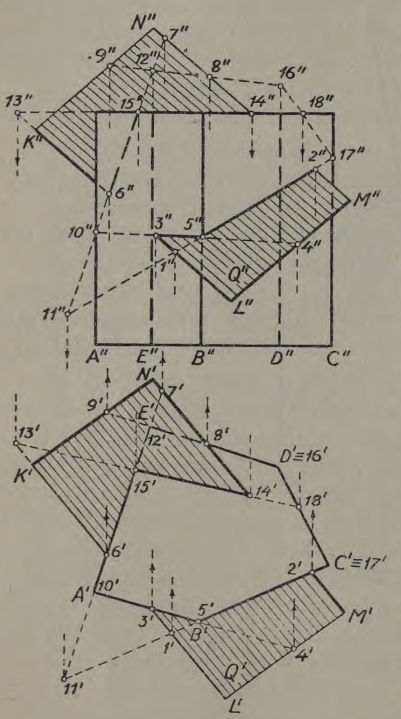


171. ras.

Tas pats sakāms arī par tiem gadījumiem, kad daudzskaldņa skaldnes ir projecētājā stāvoklī. Kā piemēru aplūkosim taisnas prizmas un patvaļīgas plaknes Q šķēluma konstruēšanu, pie kam izvēlēsimies vispārīgo gadījumu, kad plakne Q šķeļ arī prizmas viena pamata skaldni (172. ras.).

Galvenās grūtības iesācējiem te sagādā krustpunktu pareiza savienošana. Lai izvairītos no kļūdām, ieteicams konstruēt atsevišķi katras skaldnes šķēluma taisni ar doto plakni Q. Konstrukcijām var izmantot arī plaknes *Q* šķautņu fiktīvos krustpunktus ar prizmas skaldnēm.

Rasējumā noteiktas vispirms prizmas sānu skaldņu *BC* un *AB* šķēluma taisnes *1—2* un *3—4* (punkti *1* un *4* ir šķautņu *KL* resp. *LM* fiktīvie krustpunkti ar skaldnēm *BC* resp. *AB*)[1]. Tām jākrustojas kādā punktā *5* uz prizmas sānu šķautnes *B*, kas ir šķautnes *B* krustpunkts ar plakni *Q*. Tālāk noteiktas skaldņu *AE* un *ED* šķēluma taisnes *6—7* un *8—9* ar plakni *Q*. Kontroles: taisne *6—7* krustojas ar taisni *3—4* punktā *10* uz šķautnes *A*, ar taisni *1—2* punktā *11* uz skaldņu *BC* un *AE* (fiktīvās) šķēluma taisnes (rasējumā šī taisne nav parādīta) un ar taisni *8—9* punktā *12* uz šķautnes *E* pagarinājuma. Tā kā šķēluma taisne *8—9* ir fiktīva un plaknei *Q* nav reāla šķēluma arī ar skaldni *DC* (redzams horizontālajā projekcijā), tad plaknei *Q* jāšķeļ prizmas augšējais pamats. Šķēluma taisni *13—14* nosaka, izmantojot šķautņu *KL* un *MN* krustpunktu *13* un *14* frontālās projekcijas. Šķēluma taisne krustojas ar taisni *6—7* punktā *15* uz sānu skaldnes *AE* un prizmas augšējā pamata kopējās šķautnes.



172. ras.

Šķēluma figūru, kas aplūkotajā piemērā sastāv no divām atsevišķām (reālām) daļām, varēja konstruēt arī, nosakot p r i z m a s šķautņu krustpunktus (*5, 10, 12, 16* un *17*) ar plakni *Q* un papildinot šķēluma figūras reālo daļu (plaknes *Q* kontūras iekšpusē) ar taisni *14—15*, t. i., ar šķēluma figūras un prizmas augšējā pamata šķēluma taisni.

Varēja arī meklēt vienīgi r e ā l o s plaknes *Q* šķautņu resp. prizmas šķautņu krustpunktus *2, 5, 3, 6, 15* un *14*, tikai tad jāuzmanās, šos punktus savienojot. *Jāsavieno pa pāriem tikai tie punkti, kas atrodas vienā un tai pašā prizmas skaldnē.*

Praktiskajos uzdevumos, protams, nav jāizpilda visas apskatītās konstrukcijas un kontroles. Konstrukciju izvēle katrā atsevišķā gadījumā atkarīga no plakņu savstarpējā novietojuma. Kontrole jāizdara vismaz tais gadījumos, kad plakņu novietojums ir konstruktīvi neizdevīgs.

---

[1] Īsuma dēļ prizmas sānu skaldnes apzīmējam ar diviem burtiem pie skaldnes apakšējās šķautnes.

59. Daudzskaldņu savstarpēja krustošanās. Divu daudzskaldņu šķēluma figūra sastāv no taisnēm, pa kurām savstarpēji šķeļas abu ķermeņu skaldnes. Šķēluma figūras virsotnes ir punkti, kuros krustojas viena daudzskaldņa šķautnes ar otra daudzskaldņa skaldnēm. Atkarībā no tā, vai viens daudzskaldnis otru tikai sāniski iešķeļ vai pilnīgi «caururbj», šķēluma figūra sastāv no viena vai diviem noslēgtiem daudzstūriem, kas vispār ir telpas daudzstūri, t. i., to malas neatrodas vienā un tai pašā plaknē.

Daudzskaldņa šķēluma figūru var konstruēt, nosakot atsevišķi katras viena daudzskaldņa skaldnes šķēluma figūru ar otru daudzskaldni tā, kā tas iztirzāts agrāk. Kopējo šķēluma figūru veido šo atsevišķo šķēluma figūru reālās daļas.

Atrisinot uzdevumus par daudzskaldņu krustošanos, ieteicams pieturēties pie šāda plāna:

1) noskaidrot atsevišķi katra daudzskaldņa redzamību neatkarīgi no otra daudzskaldņa, atzīmējot ar nepārtrauktām līnijām redzamās, bet ar pārtrauktām līnijām — neredzamās daudzskaldņu šķautnes;

2) noteikt šķēluma figūru un tās malu redzamību. Kādā skata virzienā redzamas tikai tās šķēluma figūras malas, ko veido abu daudzskaldņu šai skata virzienā redzamās skaldnes. Ja nav redzama kaut viena no abām skaldnēm, tad nav redzama arī šķēluma taisne, kas atrodas šai skaldnē;

3) izlabot katra daudzskaldņa šķautņu redzamību, ievērojot, kā to ietekmē otrs daudzskaldnis. Te ieteicams izmantot jau noteikto šķēluma figūras redzamību. Ja šķēluma figūras virsotne kādā projekcijā nav redzama, tad arī no tās izejošā daudzskaldņa šķautne vismaz otra daudzskaldņa apveida projekcijas iekšpusē nav redzama. Tās šķautņu daļas, kas atrodas kāda ķermeņa iekšpusē, vēlams nemaz neparādīt.

Noteiksim, piemēram, prizmas un piramīdas savstarpējā šķēluma figūru (173. ras.).

Šķēluma figūra sastāv no figūrām *1—2—3—4, 5—6—7* un *7—8—4, 1—5,* pa kurām prizmas sānu skaldnes *DE, DF* un *EF* šķeļ piramīdu. Tā kā piramīdas šķautne *BV* ir profilā stāvoklī, tad tās krustpunktu *2* un *6* noteikšanai var izmantot prizmas šķautnes *D* fiktīvos krustpunktus *I* un *II* ar piramīdas skaldnēm *ABV* un *BCV*. Ja punktu *2* un *6* konstruēšanai izmanto profilo projekciju,[1] tad punktus *I* un *II* var izmantot precizitātes kontrolei. Arī punktus *III, IV, V* un *VI,* ja tie nav izlietoti šķēluma figūras konstruēšanai, var izmantot kā kontrolpunktus (sk. nosacījumu 92. lpp.).

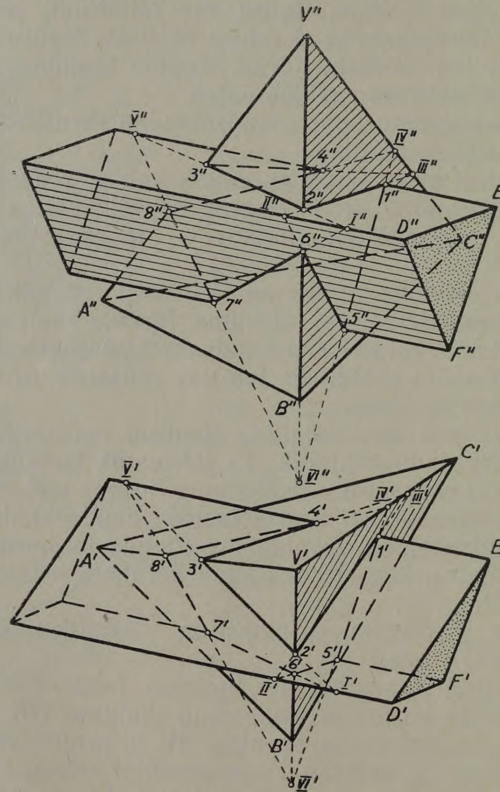
Divu daudzskaldņu šķēluma konstruēšanai var izvēlēties arī citu paņēmienu. Var meklēt tieši katra daudzskaldņa šķautņu r e ā l o s krustpunktus ar otru daudzskaldni un tos pareizā kārtībā savienot. Šis paņēmiens jau prasa zināmu ievingrināšanos — gan lai noteiktu,

[1] Te jāatgādina, ka tādā gadījumā pietiek konstruēt tikai šķautnes BV un prizmas šķēluma ar projecētāju (profilu) palīgplakni caur BV (ne abu ķermeņu) profilās projekcijas (sal. ar 56. nodalījumu).

kurām daudzskaldņa šķautnēm eksistē reāli krustpunkti ar otru daudzskaldni, gan lai noteiktos krustpunktus pareizi savienotu.

Ilustrēsim šo paņēmienu ar iepriekšējo uzdevumu.

No rasējuma redzams, ka prizmas abu pamatu šķautnēm nav reālu krustpunktu ar piramīdu, jo vismaz viena projekcija katrai no tām atrodas ārpus piramīdas apveida tā paša nosaukuma projekcijas. Tā paša apstākļa dēļ arī piramīdas pamata šķautnei AB nav reālu krustpunktu ar prizmu.

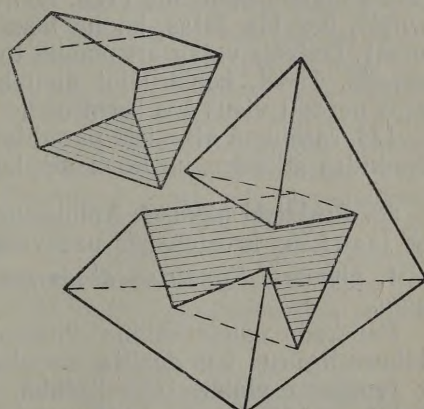


173. ras.

Piramīdas šķautnei AV turpretim noteikti jākrusto prizma, jo punkts A ir zemāk, punkts V augstāk par prizmu (sk. frontālo projekciju), bet šķautnes AV horizontālā projekcija visa atrodas prizmas apveida projekcijas iekšpusē. No horizontālās projekcijas pat redzams, ka šķautnei AV jākrusto tieši prizmas skaldnes DE un EF, jo skaldnes DF projekcija atrodas ārpus šķautnes projekcijas un šo skaldni šķautne AV nekrusto. Ar šo šķautni AV varam sākt konstrukciju.

Noteikuši šķautnes AV krustpunktu *3* ar prizmas skaldni DE, spriežam tālāk šādi. Tā kā punkts *3* atrodas prizmas skaldnē DE un piramīdas skaldnē *ABV*, tad šai punktā sākas abu šo skaldņu šķēluma taisne, ko var konstruēt, nosakot vēl vienas šo skaldņu šķautnes krustpunktu ar otru skaldni. Viegli konstatēt, ka šķērsošanās vietā šķautne *D* ir tuvāk nekā šķautne *BV*, tādēļ reāls krustpunkts ir tikai šķautnei *BV* (ar skaldni *DE*), bet ne šķautnei *D*. Nosakām šo krustpunktu *2* un savienojam ar punktu *3*, noskaidrojot tai pašā reizē arī šķēluma taisnes *3—2* redzamību.

Tā kā *BV* atrodas arī piramīdas sānu skaldnē *BCV*, tad punktā *2* sākas šīs skaldnes un prizmas skaldnes *DE* šķēluma taisne. Šķērsošanās vietā (pretskatā) šķautne *E* ir tuvāk nekā šķautne *CV*, tādēļ tikai tai ir reāls krustpunkts *1*, ko savienojam ar punktu *2*. Punkts *1* jau atrodas prizmas sānu skaldnē *EF*, tādēļ šai punktā sākas šīs skaldnes šķēluma taisne ar piramīdas skaldni *BCV* utt. Tā turpinām, kamēr atgriežamies izejas punktā *3*. Ja tādējādi ir izmantoti visi šķautņu (reālie) krustpunkti (kā šai piemērā), tad šķēluma figūra sastāv no viena noslēgta daudzstūra, pretējā gadījumā tā sadalās divos (vai vairākos!) atsevišķos daudzstūros.



174. ras.

Ar iepriekšējiem aizrādījumiem pilnīgi pietiek, lai konstruētu jebkuru divu daudzskaldņu šķēluma figūru. Praksē bieži gadās, ka abi daudzskaldņi ir kādā speciālā stāvoklī pret projekciju plaknēm, tad šķautņu krustpunktu noteikšana ir vienkāršāka. Bet, tā kā šie speciālie gadījumi ir mazāk uzskatāmi, tad kļūdas parasti rodas tieši krustpunktu savienošanā. Lai nāktu iesācējiem talkā un dotu iespēju šīs kļūdas izlabot, izstrādāta vesela rinda mehānisku paņēmienu. Visi šie paņēmieni balstās uz šāda likuma: *ka divas šķēluma figūras virsotnes jāsavieno tikai tad, ja tās abas atrodas katra daudzskaldņa vienā un tai pašā skaldnē.*

Savienošanas tabula		Piramīdas skaldnes		
		ABV	BCV	ACV
Prizmas skaldnes	DE	3 — 2	2 — 1	3 — 4
	EF	7 — 8	1 — 5	4 — 8
	FD	7 — 6	5 — 6	—

Konstruējot šķautņu reālos krustpunktus, var rezultātus reģistrēt tabulā, kur atzīmētas abu daudzskaldņu tās skaldnes, kurās šie krustpunkti atrodas. Tā galu galā visi krustpunkti sagrupējas tādā kārtībā, kādā tie pa pāriem jāsavieno (sk. 97. lpp. tabulu, kas sastādīta iepriekšējam uzdevumam).

Krustošanās uzdevumi ir ļoti labs palīglīdzeklis telpas apjautas izkopšanai, tādēļ nedrīkst šim mehāniskajam paņēmienam piešķirt pārāk lielu nozīmi. Vienmēr jācenšas visas konstrukcijas uztvert telpiski, nevis izpildīt mehāniski.

Praksē bieži jānosaka divu ķermeņu krustošanās. Atkarībā no uzdevuma nosacījumiem mūs var interesēt vai nu no abiem ķermeņiem saliktais ķermenis (173. ras.), vai arī katrs no ķermeņiem atsevišķi, bez tās daļas, ko no tiem izšķeļ otrs ķermenis (t. s. atlikums). Dažreiz vajag arī noteikt to daļu, kas no katra ķermeņa tiek izšķelta. Tādēļ, konstruējot divu ķermeņu šķēlumu, vienmēr ieteicams parādīt visus šos ķermeņus.

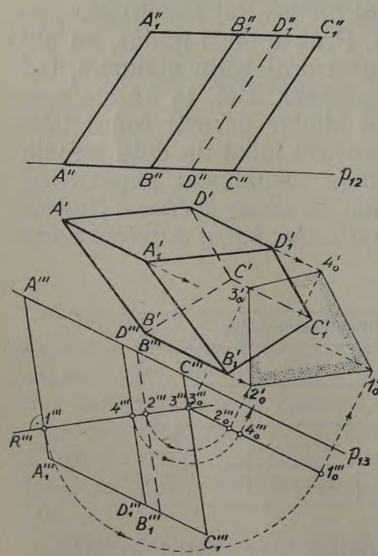
174. rasējumā atsevišķi parādīts (gan tikai frontālajā projekcijā) piramīdas atlikums un ķermenis, ko no piramīdas izšķeļ prizma.

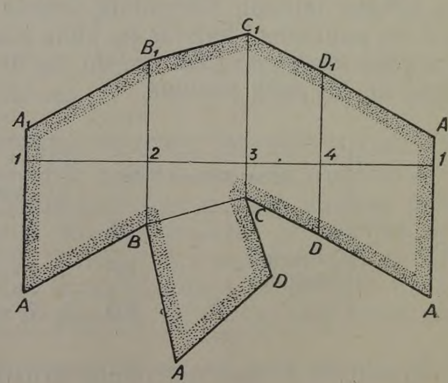
60. **Praktiski piemēri.** Aplūkosim dažus praktiskus piemērus, kuros jāatrisina krustošanās uzdevumi.

1. piemērs. *Konstruēt dotās prizmas (175. ras.) virsmas izklājumu.*

Par kāda daudzskaldņa virsmas izklājumu, kā zināms, sauc plaknes figūru, kas dabūta, savietojot visas daudzskaldņa skaldnes ar rasējuma plakni tādā kārtībā, kādā tās novietotas uz daudzskaldņa. Tādi virsmas izklājumi jākonstruē, izgatavojot, piemēram, modeļus vai šablonus dažādiem metala lējumiem, apdares akmeņiem vai būvkoku savienojumiem.

Patvaļīga daudzskaldņa virsmas izklājumu parasti dabū, nosakot pēc kārtas tā skaldņu īstā lieluma figūras un saliekot tās blakus vienu otrai tā, lai to vienlīdzīgās malas sakristu. Slīpas prizmas gadījumā


175. ras.


176. ras.

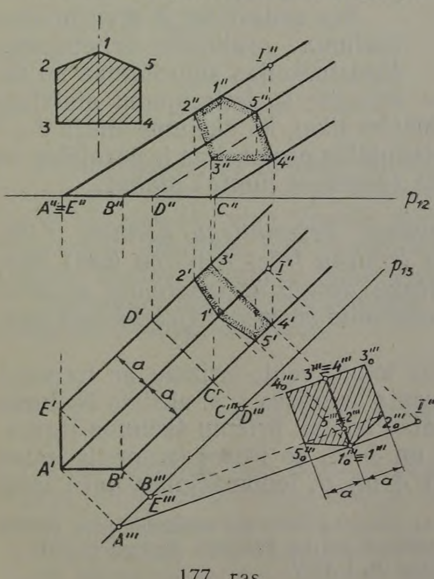
izklājuma konstruēšanai var izmantot arī šīs prizmas *normālšķēlumu,* t. i., šķēlumu ar plakni, kas perpendikulāra prizmas sānu šķautnēm.

Šī konstrukcija izpildīta 175. rasējumā.

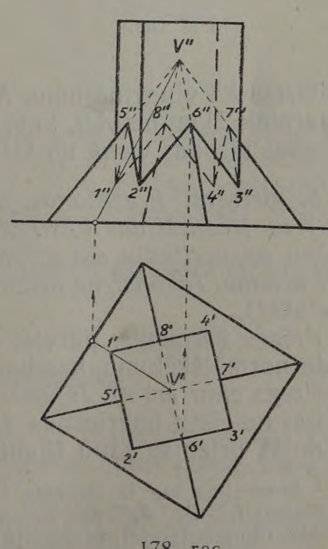
Paralēli prizmas sānu šķautnēm vispirms izvēlas jaunu frontālo projekciju plakni P_3, kurā šīs šķautnes attēlojas īstajā lielumā. Pēc tam prizmu šķeļ ar palīgplakni R perpendikulāri tās sānu šķautnēm. Plakne R ir perpendikulāra arī plaknei P_3 un attēlojas tajā par taisni R''' ($R''' \perp A'''A_1'''$), uz kuras atrodas arī prizmas normālšķēluma projekcija $1'''4'''2'''3'''$. Nosakām vēl šķēluma figūras īsto lielumu, pagriežot tās plakni paralēli horizontālajai projekciju plaknei. Zinot, ka šķēluma figūras, virsotņu horizontālās projekcijas tā pagriežot, pārvietojas paralēli projekciju asij p_{13}, t. i., prizmas sānu šķautņu horizontālo projekciju virzienā, šo virsotņu horizontālās projekcijas nemaz nav konstruētas. Izklājot tagad rasējuma plaknē vispirms prizmas sānu virsmu, šķēluma figūra izklājas kā taisne *12341* (176. ras.; $1—2=1'_0—2'_0$ utt.). Punktos *1, 2* utt. velk perpendikulus šai taisnei un uz tiem atliek taisnes nogriežņus $1—A=1'''—A'''$, $1—A_1=1'''—A_1'''$, $2—B=2'''—B'''$ utt. Punktus *A, B* utt. savienojot, dabū prizmas sānu virsmas izklājumu, kam piezīmē vēl abus prizmas pamatus $ABCD$ un $A_1B_1C_1D_1$ (176. ras. piezīmēts tikai prizmas apakšējais pamats $ABCD$).

2. piemērs. *Konstruēt jumta krēsla stūra spāres projekcijas, ja dotas tās ārējās šķautnes A—I projekcijas A′—I′, A″—I″ un normālšķēlums jeb t. s. profils 12345 (177. ras.).*

Izvēlamies jaunu frontālo projekciju plakni P_3 un konstruējam



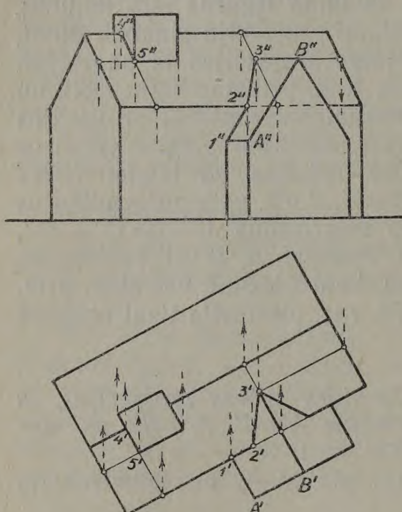
177. ras.



178. ras.

šķautnes $A—I$ jauno projekciju $A'''—I'''$. Normālšķēluma attēls plaknē P_3 ir taisnes nogrieznis $1'''3'''$, kas perpendikulārs $A'''—I'''$. Iezīmējam arī normālšķēluma projekciju $1_0'''2_0'''3_0'''4_0'''5_0'''$ ap tā simetrijas asi paralēli plaknei P_3 pagrieztā stāvoklī.[1] Pēc tam konstruējam normālšķēluma un pašas spāres horizontālās un frontālās projekcijas.

3. piemērs. *Konstruēt regulāras prizmas un piramīdas šķēluma figūru, ja abu ķermeņu pamati atrodas horizontālā plaknē (kvadrātiska šķērsgriezuma stabs ar piramīdas veida pamatu; sk. 178. ras.).*



179. ras.

Šķēluma figūras virsotnes dabū, nosakot vispirms prizmas šķautņu krustpunktus ar attiecīgajām piramīdas sānu skaldnēm (punkti *1, 2, 3, 4*) un pēc tam piramīdas šķautņu krustpunktus ar prizmas sānu skaldnēm (punkti *5, 6, 7, 8*). Simetrijas dēļ punktiem *1, 2, 3, 4* (tāpat punktiem *5, 6, 7, 8*) jāatrodas vienādā augstumā virs pamata plaknes.

4. piemērs. *Māja ar piebūvi un skursteni (179. ras.). Jānosaka piebūves un skursteņu šķēluma līnijas ar mājas sienas resp. jumta plakni.*

Šis uzdevums ir divu prizmu šķēluma praktisks izlietojums. Konstrukcijas saprotamas no rasējuma; to iztirzājumu atstājam lasītājam kā vingrinājumu. Atzīmēsim tikai, ka šķēluma līnija $1—2$ ir paralēla šķautnei AB, jo to horizontālās projekcijas ir paralēlas un tās abas atrodas vienā un tai pašā (piebūves jumta) plaknē.

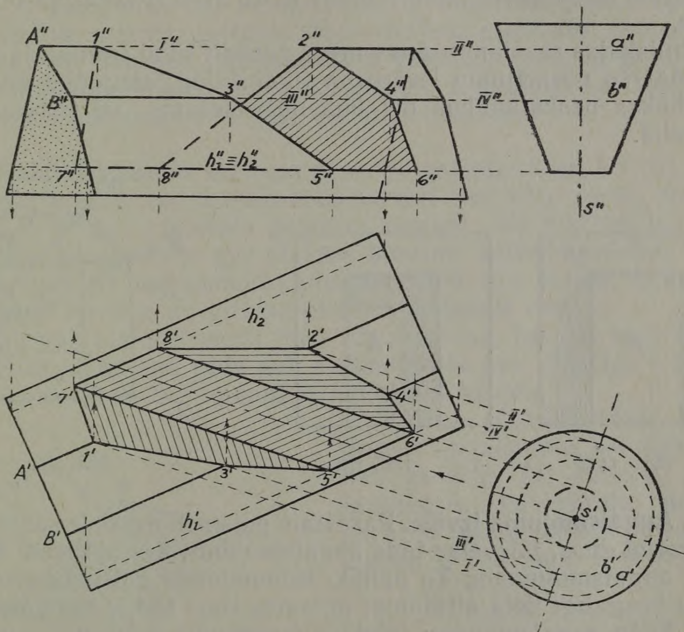
5. piemērs. *Frezēšanas uzdevums. Prizmatisku ķermeni (180. ras.) uz frēzmašīnas apstrādā ar konisku frēzi (ras. pa labi), kas, rotējot ap vertikālu asi s, pārvietojas dotajā horizontālajā virzienā pret prizmu. Jākonstruē prizmas atlikuma ķermenis (frēzēšanas gala produkts).*

Frēzes ķermenis, pārvietojoties telpā, veido prizmu ar trapeces veida normālšķēlumu, kas kongruents ar frēzes t. s. aksiālo šķēlumu (šķēlums caur asi *s*). Jānosaka tātad šo abu prizmu šķēluma figūra.

Lai noteiktu nogriežņus $1—2$ un $3—4$, ko frēzes ķermenis izšķeļ no dotās prizmas sānu šķautnēm A un B, iedomāsimies pašu frēzi

[1] Simetrijas ass ir šķēluma figūras plaknes frontāle attiecībā pret plakni P_3. Figūru $1_0'''\ 2_0'''\ 3_0'''\ 4_0'''\ 5_0'''$ var uzskatīt arī kā šķēluma figūras projekciju jaunajā (horizontālajā) projekciju plaknē $P_4 \perp A—I$.

šķeltu ar horizontālām palīgplaknēm caur šķautnēm A un B. Šīs palīgplaknes šķeļ frēzes konisko virsmu pa aplocēm a un b (frontālajā projekcijā šo aploču attēli ir taisnes nogriežņi, kas ir vienlīdzīgi ar aploču diametriem). Frēzes kustībā šīs aploces pārvietojas attiecīgi starp paralēlām taisnēm I, II un III, IV, kas vilktas aploču pieskares kustības virzienā. Punkti 1, 2, 3, 4 ir šo pieskaru krustpunkti ar prizmas šķautnēm A un B.



180. ras.

Frēzes augšējais pamats doto prizmu neskar, bet apakšējā pamata plakne šķeļ prizmu pa horizontālēm h_1 un h_2. Uz šīm horizontālēm atrodas šķēluma figūras punkti 5, 6, 7, 8, kuru horizontālās projekcijas dabūjam, velkot pieskares frēzes pārvietošanās virzienā konusa apakšējā pamata riņķa projekcijai.

Savienojot konstruētos punktus ar taisnēm, dabūjam no prizmas izšķeltās virsmas kontūras.

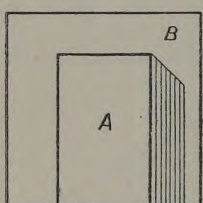
2. §. ĒNU KONSTRUĒŠANA

Ķādu ķermeni mēs redzam tikai tad, ja tas ir apgaismots. Lai iegūtu pilnīgāku īstenības ilūziju, šis apgaismojums jāņem vērā, arī konstruējot ķermeņu attēlu.

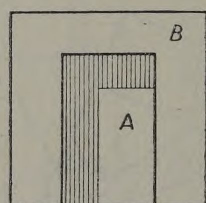
No ķermeņa ēnu veidojumiem iespējams pat spriest par paša ķermeņa veidu un lielumu. Ilustrācijai salīdzināsim, piemēram, 181. un

182. rasējumu, kur frontālajā projekcijā attēloti divi ķermeņi kopā ar to ēnām. Kaut gan abu ķermeņu projekcijas ir identiskas, tomēr, pat pavirši aplūkojot attēlus, var spriest, ka pirmais ķermenis satur izvirzījumu *A*, kas met ēnu uz dziļāk novietoto skaldni *B*, kamēr otrajam ķermenim ēnu met skaldne *B* uz dziļāk novietoto skaldni *A* (ja *B* ir siena, tad *A* ir niša šai sienā). Zinot gaismas avota novietojumu, varam, kā vēlāk redzēsim, noteikt arī izvirzījuma resp. nišas *A* izmērus. Ēnas attēls tātad zināmā mērā aizstāj ķermeņa otru projekciju.

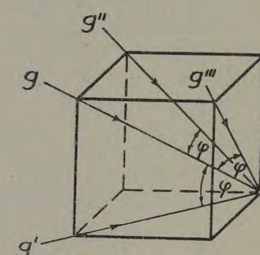
Tehniskajos rasējumos ēnas mēdz parādīt tikai frontālajā projekcijā. Mēs šo nosacījumu ievērosim tikai daļēji, atzīmējot ēnas, kur tas labākas uzskatāmības dēļ būs nepieciešams, arī horizontālajā projekcijā.



181. ras.



182. ras.



183. ras.

61. Apgaismojuma izvēle. Parastais gaismas avots ir saule, tādēļ, konstruējot ēnas, jāizvēlas tāds apgaismojums, kas aptuveni atbilstu saules apgaismojumam. To panāk, iedomājoties gaismas avotu, novietotu bezgalīgi lielā attālumā; gaismas stari tad ir savstarpēji paralēli. Tādu apgaismojumu tēlotājā ģeometrijā sauc par *paralēlapgaismojumu* jeb vienkārši par *saules apgaismojumu.*[1]

Kaut gan gaismas staru virziens atkarībā no saules stāvokļa var būt dažāds, tehniskajos rasējumos to mēdz izvēlēties pilnīgi noteiktu, proti, tā, lai šī virziena horizontālās un frontālās projekcijas veidotu 45° leņķi ar projekciju asi. Tad konstrukcijām var ērti izmantot rasējamo sliedi un 45° trīsstūri, kā arī ievērojami vienkāršot pašas konstrukcijas.

Gaismas staru virzienu uzskatāmāk var definēt šādi. Pieņemsim, ka dots kubs, kam skaldnes attiecīgi paralēlas projekciju plaknēm, tad gaismas staru virzienu nosaka kuba diagonāles virziens *g* (183. ras.), pie kam vērsums jāizvēlas tā, lai novērotājam, kas pagriezies pret frontālo projekciju plakni, gaismas avots atrastos aizmugurē pa kreisi augšā.

Tomēr jāatzīmē, ka tādu gaismas staru slīpums φ pret projek-

[1] Konstruējot ēnas perspektīvos attēlos, dažreiz lieto arī t. s. *centrālo apgaismojumu,* kādu dod galīgā attālumā novietots gaismas punkts (griestu spuldze, ielas laterna).

ciju plaknēm nav vienāds ar 45°. Ja a ir kuba šķautnes garums, tad $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707$ un $\varphi \approx 35°$. Tā kā kuba diagonāles slīpums pret visām projekciju plaknēm (arī profilo projekciju plakni) ir viens un tas pats, tad arī gaismas stari ar katru no projekciju plaknēm veido vienu un to pašu leņķi φ.

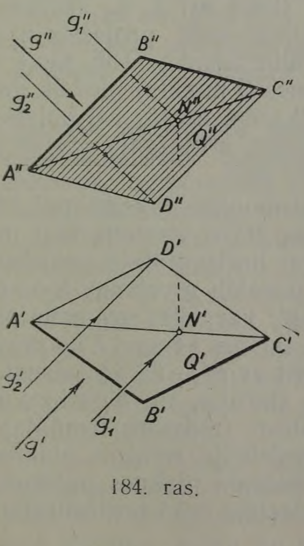
Turpmāk stingri pie šī t. s. *diagonālapgaismojuma* nepieturēsimies, jo ir jārēķinās, ka, lietojot dažreiz konstrukcijām projekciju plakņu maiņas metodi, gaismas staru virziens mainīsies. Jāprot konstruēt ēnas arī tad, kad gaismas staru virziens ir patvaļīgs. Diagonālapgaismojuma priekšrocības aplūkosim, iztirzājot ēnu konstruēšanas praktiskus piemērus (sk. 68. nodalījumu).

62. Plaknes gaismas un ēnas puse. Ja gaismas stari krīt uz kādu norobežotu plakni, tad apgaismota parasti tiek tikai viena plaknes puse, proti, tā, kas pievērsta gaismas avotam. Aiz plaknes ir tumša telpas daļa, ko norobežo gar plaknes kontūru slīdošie gaismas stari.

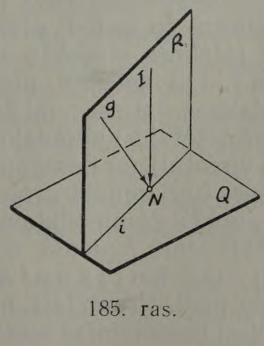
Novietojot aiz apgaismotās plaknes kādu citu plakni, tā pilnīgi vai pa daļai atrodas no pirmās plaknes *krītošajā ēnā.*

Arī pirmās plaknes viena puse atrodas ēnā, bet šai ēnai ir cits raksturs. Tā kā šo ēnu rada pati plakne un tā nav atkarīga no citas plaknes klātbūtnes, tad to sauc par plaknes *pašēnu.*

Katrai plaknei tātad viena puse ir apgaismota, bet otra atrodas pašēnā. Te, dabiski, rodas jautājums, kā varam noteikt, kura no abām pusēm katrā projekcijā ir redzama. Šim jautā-



184. ras.

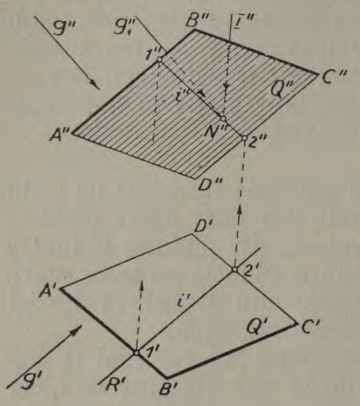


185. ras.

jumam ir svarīga nozīme k r ī t o š o ēnu konstruēšanā, jo kāds objekts var mest ēnu tikai uz plaknes apgaismoto pusi.

Kādā projekcijā redzam plaknes gaismas vai ēnas pusi atkarībā no tā, vai gaismas avots un attiecīgais redzes punkts (projekcijas centrs) atrodas plaknes vienā un tai pašā vai pretējās pusēs, t. i., vai gaismas stari un attiecīgie projecētāji stari pienāk plaknei no vienas vai dažādām pusēm.

Apskatīsim, piemēram, 184. rasējumu, kur bez plaknes Q dotas arī gaismas staru virziena g projekcijas g' un g'' (gaismas staru vērsums parādīts ar bultiņu). Izvēlēsimies plaknē Q kādu punktu N (piemēram, uz diagonāles AC) un iezīmēsim gaismas staru g_1, kas krīt šai plaknes punktā. Noskaidrojam, ka šķērsošanās vietās stars g_1 virsskatā ir augstāk par plaknes šķautni AB, bet pretskatā tālāk par AB. Virsskatā tātad redzam apgaismoto, bet pretskatā pašēnā atrodošos plaknes pusi (rasējumā pēdējā ir iesvītrota).



186. ras.

Punkta N vietā vienkāršības dēļ varēja ņemt arī kādu plaknes kontūras punktu (piemēram, virsotni D un gaismas staru g_2), pie kam pietiek noteikt, kādu plaknes pusi redzam vienā projekcijā. Atkarībā no plaknes virsotņu numerācijas virziena otrā projekcijā tad redzam to pašu vai pretējo plaknes pusi.

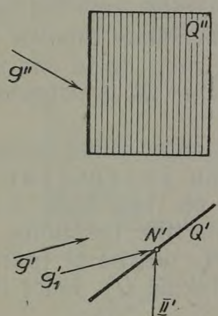
Plaknes apgaismojuma noteikšanai var lietot arī t. s., *šķēluma metodi.* Paralēli gaismas staru virzienam velk projecētāju palīgplakni R, kas šķeļ doto plakni Q pa kādu taisni i (185. ras.). Ja šīs taisnes kādā punktā N (kas ir arī plaknes Q punkts) pievelk gaismas staru g un projecētāju staru I, tad atkarībā no tā, vai abi šie stari atrodas taisnes i vienā vai pretējās pusēs, attiecīgajā projekcijā redzam plaknes apgaismoto vai pašēnas pusi.

Izlietosim šo metodi plaknes apgaismojuma noteikšanai 186. rasējumā (plaknes stāvoklis un gaismas staru virziens tādi paši kā 184. ras.). Lai noteiktu, piemēram, vai horizontālajā projekcijā redzam plaknes gaismas vai ēnas pusi, paralēli g velkam horizontāli projecētāju palīgplakni R ($R' \| g'$; var vilkt arī caur plaknes Q kādu virsotni) un nosakām šķēluma taisnes frontālo projekciju i'' (taisnes horizontālā projekcija sakrīt ar R'). Tā kā taisnei i patvaļīgā punktā N pievilktais gaismas stars g_1 un horizontāli projecētājs stars I pienāk no vienas puses (redzams frontālajā projekcijā!), tad horizontālajā projekcijā redzam plaknes apgaismoto pusi. Frontālajā projekcijā redzam plaknes pašēnas pusi, jo virsotņu numerācijas virziens te ir pretējs nekā horizontālajā projekcijā.

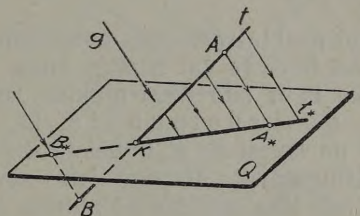
Varēja arī vispirms noteikt apgaismojumu frontālajā projekcijā. Kā palīgplakne tādā gadījumā jāizvēlas frontāli projecētāja plakne paralēli g ($R'' \| g''$), pievelkot gaismas staru g' un frontāli projecētāju staru II šķēluma taisnes i horizontālajai projekcijai.

Plaknes apgaismojuma noteikšana vienkāršojas, ja plakne ir projecētājā stāvoklī. Projecētājas palīgplaknes R un plaknes Q šķēluma taisnes i viena projekcija tad sakrīt ar plaknes Q projekciju. Tā 187. rasējumā, pat nepievelkot gaismas staru g_1 un frontāli projecētāju staru II, varam konstatēt, ka frontālajā projekcijā redzam plaknes Q pašēnas, bet ne apgaismoto pusi.

Speciālā gadījumā, *ja gaismas stari ir paralēli plaknei (slīd gar plakni), tad uzskata, ka plaknes abas puses atrodas pašēnā.*



187. ras.



188. ras.

Ievērosim vēl, ka, izvēloties gaismas avotu aizmugurē pa kreisi augšā, horizontālām plaknēm apgaismota vienmēr ir augšējā puse, frontālām plaknēm priekšējā puse, bet profilām plaknēm kreisā puse, kamēr pretējās puses atrodas pašēnā.

63. Punkta un taisnes krītošās ēnas. Kāda punkta A krītošo ēnu A_* plaknē Q dabū, nosakot caur šo punktu vilktā gaismas stara krustpunktu A_* ar plakni Q (188. ras.). Analoģiski kādas taisnes t krītošā ēna ir tās atsevišķo punktu krītošo ēnu ģeometriskā vieta.

Visi caur taisnes atsevišķiem punktiem vilktie gaismas stari veido t. s. *gaismas plakni.* Taisnes ēna ir taisne, pa kuru šī gaismas plakne šķeļ doto plakni Q. Ja gaismas starus iedomājamies kā projecētājus starus, tad punkta krītošo ēnu kādā plaknē paralēlapgaismojuma gadījumā var uzskatīt arī par punkta paralēlprojekciju šai plaknē. Ķaut gan vispārīgā gadījumā tā ir slīpa projekcija, ko aplūkosim vēlāk, šis aizrādījums tomēr var palīdzēt turpmāk noteikt kāda objekta ēnu veidojuma raksturu.

Projekcijas un krītošās ēnas jēdzieni, protams, ir identiski tikai no ģeometriskā viedokļa. Kā fizikālas dabas parādība punkta krītošā ēna eksistē tikai pie zināmiem nosacījumiem par punkta stāvokli relatīvi pret gaismas avotu un plakni. Dabiski, ka punktam var būt īsta ēna tikai tad, ja 1) tas atrodas s t a r p gaismas avotu un plakni un 2) caur punktu vilktam gaismas staram ir reāls krustpunkts ar plakni.

Tomēr ēnu konstrukcijām var izmantot arī tos punktus, kas neapmierina minētos nosacījumus. Ja nav izpildīti abi vai pirmais no šiem nosacījumiem, tad tādu punkta ēnu turpmāk sauksim par *neīstu ēnu,* ja nav izpildīts tikai otrais nosacījums — par *fiktīvu ēnu.* Bez tam punkta ēnu sauksim par fiktīvu arī tad, ja starp plakni un punktu vai gaismas avotu un punktu atrodas vēl kāda cita plakne, kas uztver punkta reālo ēnu resp. gaismas starus. Kā vēlāk redzēsim, arī šādas punktu fiktīvas un neīstas ēnas dažreiz var ērti izmantot ķermeņa reālo ēnu konstruēšanai.

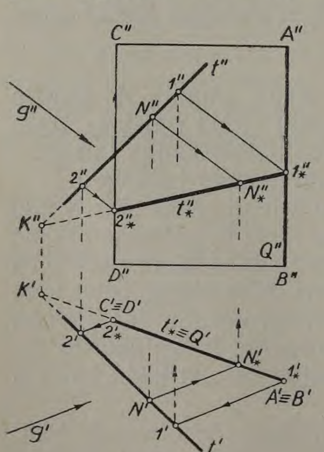
Lai konstruētu taisnes krītošo ēnu kādā plaknē, pietiek noteikt tās divu punktu (īstās, fiktīvās vai neīstās) ēnas šai plaknē. Par vienu taisnes punktu dažreiz izdevīgi izvēlēties taisnes (reālo vai fiktīvo) krustpunktu K ar plakni (sk. 188. ras.), jo tā ēna ir pats punkts. *Taisnes krītošai ēnai vienmēr jāiet caur tās krustpunktu ar plakni.*

Kaut gan taisnes ēnas noteikšanai var izmantot tiklab tās punktu īstās, kā fiktīvās vai neīstās ēnas, krītošo ēnu iezīmējot, jāievēro, ka tā ir īsta tikai plaknes robežās un pie tam tikai vienā pusē no krustpunkta. Tā, piemēram, 188. rasējumā punktam B pa kreisi no K ir neīsta krītošā ēna B_* plaknē Q (punkts B un gaismas avots atrodas katrs savā pusē plaknei Q), tādēļ taisnes ēna ir īsta tikai pa labi no punkta K.

Atzīmēsim dažus atsevišķus taisnes ēnas konstruēšanas piemērus.

1. piemērs. *Taisnes ēna projecētājā plaknē (189. ras.).*

Nosakām taisnes t (fiktīvo) krustpunktu K ar plakni Q un tās patvaļīga punkta N ēnu N_* (sk. 59. nodalījumu). Taisnes ēna, kas redzama tikai pretskatā, ir īsta vienīgi plaknes Q *robežās,* t. i., starp punktiem 1_* un 2_*.

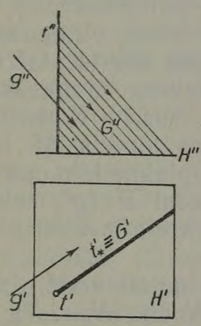


189. ras.

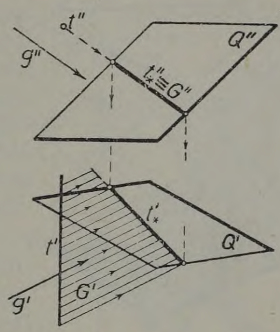
Ja taisnes krustpunkts K ar plakni neatrodas rasējuma robežās, taisnes krītošās ēnas konstruēšanai jānosaka divu tās punktu ēnas. Praksē sastopamos piemēros plaknes Q divas šķautnes parasti ir perpendikulāras kādai projekciju plaknei. Tādā gadījumā ieteicams izvēlēties tieši tos taisnes punktus, kas met ēnas uz šīm šķautnēm. Aplūkotajā piemērā tādas šķautnes ir AB un CD, bet 1_* un 2_* ir taisnes punktu 1 un 2 ēnas uz tām. Šo ēnu horizontālās projekcijas $1'_*$ un $2'_*$ ir jau iepriekš zināmas, tāpēc jākonstruē tikai ēnas punktu frontālās projekcijas $1''_*$ un $2''_*$. To izdara, nosakot vispirms punktu 1 un 2 horizontālās, bet pēc tam frontālās projekcijas. Šo paņēmienu var lietot arī tad, ja kāds no punktiem 1_* un 2_* ir fiktīvs ēnas punkts.

2. piemērs. *Plaknei paralēlas taisnes ēna.* Speciālā gadījumā, ja taisne ir paralēla plaknei, tās krītošā ēna ir paralēla pašai taisnei (punkts *K* iepriekšējā rasējumā tad ir bezgalībā; sk. arī 193. ras. šķautnes *BC* ēnu); tās projekcijas paralēlas taisnes tā paša nosaukuma projekcijām. Ēnas konstruēšanai tad pietiek noteikt viena taisnes punkta ēnu plaknē. Katra šīs taisnes nogriežņa ēnas garums ir vienlīdzīgs ar paša taisnes nogriežņa garumu.

3. piemērs. *Projecētājas taisnes ēna.* Kādai projekciju plaknei perpendikulāras taisnes ēna jebkurā šai projekciju plaknei paralēlā plaknē ir paralēla gaismas stara attiecīgajai projekcijai. Tā, piemēram, ja taisne *t* ir horizontāli projecētāja taisne (190. ras.), tās ēna



190. ras.



191. ras.

t_* un šīs ēnas projekcija t'_* h o r i z o n t ā l a j ā plaknē H ir paralēla gaismas stara horizontālajai projekcijai g'. Gluži tāpat frontāli projecētājas taisnes ēna f r o n t ā l a j ā plaknē ir paralēla gaismas stara frontālajai projekcijai g''.

Arī projecētājas taisnes ēna p a t v a ļ ī g ā plaknē *Q* (191. ras.) attēlojas vienā projekcijā kā taisne, kas paralēla gaismas stara attiecīgajai projekcijai, kaut gan pati ēna nav paralēla šai gaismas stara projekcijai. Ēnas otru projekciju dabū, ievērojot, ka t_* ir plaknes *Q* taisne.

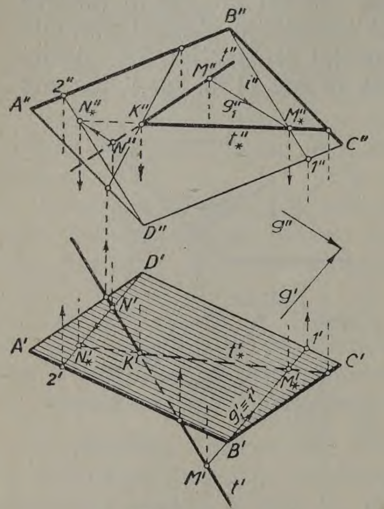
Gaismas plaknes *G* abos gadījumos ir projecētājas plaknes (rasējumā iesvītrotas), un to viena projekcija ir taisne. Uz šīs taisnes jāatrodas arī taisnes *t* ēnas attiecīgajai projekcijai.

Tātad vispār, *ja taisne ir perpendikulāra kādai projekciju plaknei, tās ēnas projekcija šajā plaknē ir paralēla gaismas stara tā paša nosaukuma projekcijai neatkarīgi no tā, kādās plaknēs šī ēna krīt.*

Šis noteikums labi jāievēro, jo tam ir liela praktiska nozīme ēnu konstruēšanā.

4. piemērs. *Vispārīgais gadījums — patvaļīgas taisnes ēna patvaļīgā plaknē (192. ras.).*

Nosakām vispirms taisnes *t* krustpunktu *K* ar plakni, taisnes redzamību un plaknes apgaismojumu. Apskatītajā piemērā plaknes apgaismoto pusi redzam pretskatā, bet pašēnas pusi virsskatā (pārbaudīt!). Tā kā īsta ēna taisnei var būt tikai uz plaknes apgaismotās puses, tad jau iepriekš varam pateikt, ka īstu ēnu metīs tā taisnes daļa, kas ir pa labi no krustpunkta K (šī daļa atrodas gaismas avota pusē). Izvēlamies uz šīs daļas kādu punktu M un nosakām tā ēnu M_*. Caur šo punktu iet taisnes krītošā ēna t_*.



192. ras.

Lai noteiktu gaismas stara g_1 krustpunktu M_* ar plakni, rasējumā izmantota horizontāli projecētāja palīgplakne caur g_1, kas šķeļ doto plakni pa taisni i (sal. ar 164. ras.). Tā kā palīgplakne ir paralēla gaismas staru virzienam, tad ar tās palīdzību var vienlaicīgi noteikt arī plaknes apgaismojumu (sal. ar 186. ras.). Konstrukcijas vienkāršošanai punkts M izvēlēts tā, lai šī palīgplakne ietu caur dotās plaknes virsotni B (g'_1 caur B'), kaut gan to varēja izvēlēties pilnīgi patvaļīgi.

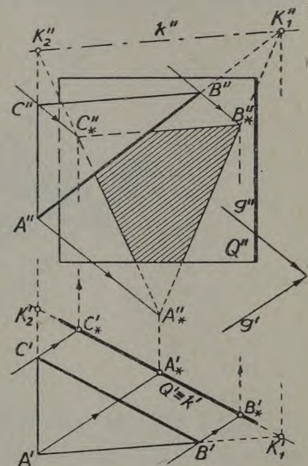
Rasējumā noteikta vēl otra taisnes punkta N ēna N_*. Tā ir neīsta, jo stara vērsums no N uz N_* ir pretējs gaismas staru vērsumam. Tā kā taisnes nogrieznis KN_* atrodas uz taisnes M_*K pagarinājuma, tad šo neīsto ēnu N_* var izmantot ne tikvien taisnes krītošās ēnas konstruēšanai, bet arī krustpunkta K noteikšanai. Tas rāda, ka visu uzdevumu varējām atrisināt arī apgrieztā secībā.

64. Plaknes krītošās ēnas. Lai konstruētu ēnu, ko viena plakne met uz otru, jānosaka un jāsavieno pirmās plaknes virsotņu krītošās ēnas otrajā plaknē. Caur pirmās plaknes kontūras punktiem vilktie paralēlie gaismas stari veido t. s. *gaismas prizmu;* krītošās ēnas kontūra ir šīs gaismas prizmas šķēluma figūra ar ēnu uztverošo plakni.

193. rasējumā konstruēta trīsstūra ABC krītošā ēna horizontāli projecētājā plaknē Q. Virsotnes A ēna A_* plaknē Q ir fiktīva, bet virsotnes C ēna C_* pretskatā ir aizsegta ar paša trīsstūra plakni. Tas ņemts arī vērā, iesvītrojot trīsstūra krītošo ēnu. Tā ir īsta tikai plaknes Q robežās, un no tās redzama tikai ar trīsstūra plakni neaizsegtā daļa.

Rasējumā noteikta arī trīsstūra (fiktīva) šķēluma taisne k ar plakni Q, nosakot šķautņu AB un AC (fiktīvos) krustpunktus K_1 un K_2 ar šo plakni. Šķautņu AB un AC ēnām A_*B_* un A_*C_* pagarinājumā jāiet caur K_1 un K_2. Tā kā trešā šķautne BC ir paralēla plaknei Q, tās ēna B_*C_* ir paralēla un vienlīdzīga šķautnei BC, tātad paralēla arī šķēluma taisnei k.

Iedomāsimies tagad novērotāju, kas skatās uz trīsstūri ABC gaismas staru virzienā g — dotajā vai tam pretējā vērsumā. Novērotājam abos gadījumos ir pievērstas trīsstūra un plaknes Q vienādās, proti, vai nu apgaismotās, vai pašēnas puses. Trīsstūris ABC abos gadījumos tam sedzas ar ēnas trīsstūri $A_*B_*C_*$, t. i., abiem trīsstūriem ir vienāds virsotņu numerācijas virziens. Vienāds virsotņu numerācijas virziens ir arī abu trīsstūru attēliem kādā projekciju plaknē, ja vien abas plaknes šai projekcijā redzamas no vienādām (gaismas vai pašēnas) pusēm.



193. ras.

Šis konstatējums dod iespēju noteikt plaknes apgaismojumu, ja iepriekš ir noteiktas tās krītošās ēnas kādā citā plaknē, kuras apgaismojums zināms. *Divas plaknes kādā projekcijā redzamas no vienādām (gaismas vai pašēnas) pusēm, ja vienas plaknes un tās krītošās ēnas otrā plaknē kontūru projekcijām ir vienāds virsotņu numerācijas virziens.*

Vienkāršāku likumu dabū, izmantojot abu plakņu šķēlumu taisni, kas praktiskos piemēros parasti ir zināma vai viegli nosakāma. *Divas plaknes kādā projekcijā redzamas no vienādām (gaismas vai pašēnas) pusēm, ja kāds vienas plaknes punkts un tā krītošā ēna otrā plaknē šai projekcijā attēlojas vienā pusē abu plakņu šķēluma taisnes projekcijai.*

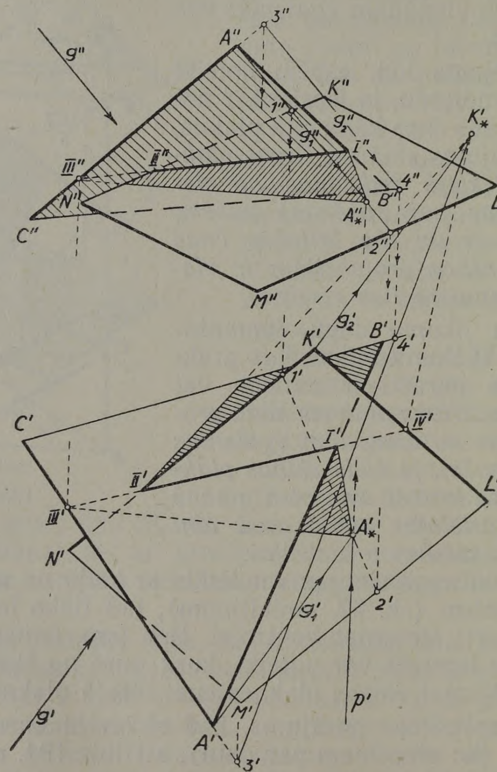
Ja abu plakņu apgaismojums noteikts ar kādu no agrāk aplūkotajiem paņēmieniem (sk. 62. nodalījumu), tad tikko formulētos nosacījumus var ērti izmantot kontrolei. Bez tam, izmantojot pēdējo nosacījumu, jau iepriekš var pateikt, kurā pusē no šķēluma taisnes jāatrodas meklējamai vienas plaknes ēnai otrajā plaknē.

Samērā komplicētāks gadījums, kad abām plaknēm ir reāla šķēluma taisne (ko pieņemam par dotu), attēlots 194. rasējumā. Šai rasējumā ēnu met kā trīsstūra, tā paralelograma plakne.

Lai noteiktu trīsstūra plaknes krītošo ēnu paralelograma plaknē, pietiek noteikt vienas tās virsotnes, piemēram, A, ēnu A_* šai plaknē. Rasējumā šī ēna noteikta ar gaismas stara g_1 frontāli projecētājas plaknes palīdzību (palīgtaisne *1—2*). Savienojot A_* ar šķautņu AB un AC krustpunktiem *I* un *III* ar paralelograma plakni, dabūjam šīs ēnas kontūru.

Tā kā palīgtaisnei *1—2* punktā A_* pievilktais gaismas stars g_1 un frontāli projecētājs stars p pienāk no vienas puses (redzams horizontālajā projekcijā), tad pretskatā redzam paralelograma plaknes apgaismoto pusi. Arī virsskatā redzam šīs plaknes apgaismoto pusi, jo abās projekcijās plaknes virsotņu numerācijas virzieni sakrīt. Salīdzinot punktu A un A_* projekciju novietojumus attiecībā pret šķēluma taisnes projekcijām, konstatējam, ka trīsstūra plaknes apgaismotā puse redzama tikai virsskatā.[1]

Lai beidzot noteiktu tikai virsskatā redzamo paralelograma plaknes ēnu trīsstūra plaknē, meklējam virsotnes K ēnu K_* šai plaknē (palīgtaisne 3—4). Savienojot K_* ar šķautņu KN un KL krustpunktiem II un IV ar trīsstūra plakni, dabūjam šīs ēnas kontūru, pie kam tikai daļa no šīs kontūras ir trīsstūra plaknes robežās.



194. ras.

Lai rasējumā atšķirtu pašēnas no krītošām ēnām, pēdējās vienmēr atzīmēsim ar blīvāku svītrojumu. Tas nepieciešams ne tikai konstrukciju labākai izpratnei, bet arī tādēļ, ka fizikāli starp abiem ēnu veidiem ir atšķirība. Pie šī jautājuma vēl atgriezīsimies (sk. 69. nodalījumu).

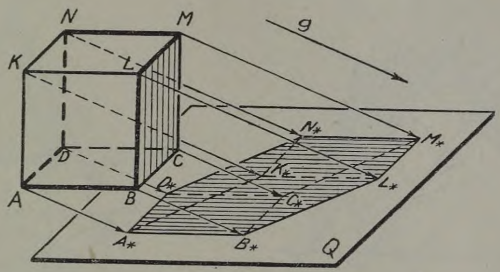
Atzīmēsim vēl, ka gadījumā, ja viena no plaknēm ir paralēla

---

[1] Par to var pārliecināties arī, salīdzinot trīsstūru ABC un $A_*B_*C_*$ virsotņu numerāciju vienāda nosaukuma projekcijām. Virsotņu B un C (neīstās!) ēnas rasējumā nav parādītas; tām jābūt uz A_*—I un A_*—III pagarinājumiem aiz krustpunktiem I un III.

gaismas staru virzienam, tās ēna otrā plaknē reducējas par taisni, kas sakrīt ar abu plakņu (reālo vai fiktīvo) šķēluma taisni.

65. Daudzskaldņu ēnas. Iedomāsimies telpā kādu daudzskaldni, piemēram, kubu un plakni Q (195. ras.). Lai dotajā paralēlapgaismojumā g noteiktu kuba krītošo ēnu plaknē Q, varētu meklēt katras kuba skaldnes ēnu atsevišķi; kuba kopējā ēna tad sastādītos no tā atsevišķo skaldņu ēnām. Bet tas, kā tūliņ redzēsim, nav nepieciešams.



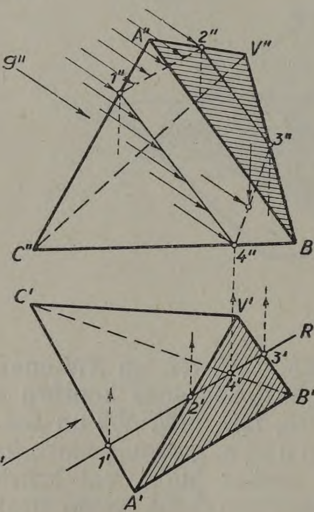
195. ras.

Rasējumā kuba šķautņu BC, CD, AK, CM, KL un KN ēnas krīt kuba kopējās ēnas iekšpusē, bet kuba krītošās ēnas kontūru veido tikai ēnas, ko met kuba šķautnes AB, BL, LM, MN, ND un DA. Tās ir šķautnes, kuras skar gar kubu slīdošie gaismas stari, kamēr pārējie gaismas stari vai nu nemaz neskar kubu, vai krusto tā virsmu divos punktos. Visas šīs šķautnes kopā veido noslēgtu telpas daudzstūri $ABLMNDA$, kas atdala kuba virsmas apgaismoto daļu no tās daļas, kas atrodas pašēnā. Šo daudzstūri, kas rasējumā iezīmēts treknākām līnijām, sauksim par kuba *pašēnas kontūru*, bet atsevišķās šķautnes par kuba *pašēnas šķautnēm*.

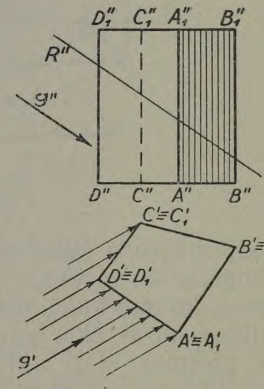
Kāda daudzskaldņa krītošās ēnas kontūra tātad ir šī daudzskaldņa pašēnas kontūras krītošā ēna. Šī iemesla dēļ, izpildot ēnu konstrukcijas, jācenšas vispirms noteikt ķermeņu pašēnas kontūras.

Vispārīgais paņēmiens kāda daudzskaldņa pašēnu noteikšanai ir jau agrāk aprakstītā šķēluma metode (sk. 62. nodalījumu). Tā, lai noteiktu 196. rasējumā attēlotās piramīdas pašēnas, šķeļam to ar projecētāju, piemēram, horizontāli projecētāju palīgplakni R, kas paralēla gaismas staru virzienam g ($R' \| g'$). Pievelkot šķēluma figūras $1—2—3—4$ atsevišķām malām pa gaismas staram un horizontāli projecētājam staram, iespējams noskaidrot katras atsevišķas skaldnes apgaismojumu.

Te nepieciešami tomēr daži papildnorādījumi. Jāņem vērā, ka, aplūkojot daudzskaldņus, mūs interesē tikai tā ārējās virsmas apgaismojums, tādēļ, izmantojot agrākos nosacījumus tīri mehāniski, varam viegli kļūdīties. Tā, piemēram, skaldne BCV (apskatot to izolēti no pārējām) virsskatā ir redzama no apgaismotās puses, jo tās šķēluma taisnei *3—4* abi pievilktie stari pienāk no vienas puses (sk. frontālo projekciju!). Bet, tā kā šai skata virzienā pret mums ir šīs skaldnes iekšpuse, tad tās ārpuse atrodas pašēnā. Bez šiem neērtajiem spriedumiem, kas būtu jāizdara par katru skaldni atsevišķi, varam arī iztikt. Pievelkot šķēluma figūrai tikai gaismas starus (kas visi atrodas figūras plaknē R), redzam, ka tiem ir pievērstas tikai malas *1—2* un *1—4*, tādēļ tikai skaldnes ACV un ABC, kurās atrodas šīs malas, ir apgaismotas, kamēr pārējās skaldnes ABV un BCV atrodas pašēnā. Pašēnas kontūra tātad ir daudzstūris $ABCVA$.



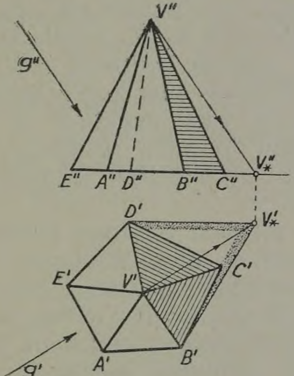
196. ras.



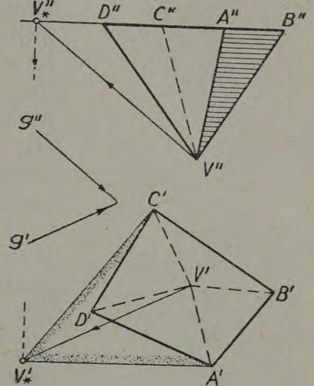
197. ras.

Apskatītajā piemērā pašēnas kontūrā ietilpst visas daudzskaldņa virsotnes. Ja mums būtu jākonstruē arī šī daudzskaldņa krītošā ēna kādā plaknē, šai gadījumā varētu neievērot tā pašēnas kontūru, jo krītošās ēnas kontūras noteikšanai tā kā tā jāmeklē visu daudzskaldņa virsotņu ēnas. Varam konstruēt tātad vispirms daudzskaldņa krītošo ēnu un tikai pēc tam noteikt pašēnas kontūru, proti, salīdzinot virsotņu numerācijas vērsumus katras skaldnes un tās krītošās ēnas projekcijām. Bet tas pats daudzskaldnis var atrasties arī tādā stāvoklī, ka pašēnā (vai apgaismota) tam ir tikai viena skaldne. Tādā gadījumā pašēnas kontūrā ietilptu tikai trīs daudzskaldņa virsotnes un daudzskaldņa krītošās ēnas noteikšanai būtu lieki meklēt arī tā ceturtās virsotnes ēnu. Gluži tāpat, ja jākonstruē ēna, ko met uz šo daudzskaldni kāds cits objekts, ir svarīgi izzināt jau iepriekš daudzskaldņa pašēnas, jo tad jānosaka ēna tikai uz tā apgaismotajām skaldnēm.

Pašēnu noteikšana vienkāršojas, ja daudzskaldnis ir taisna prizma, kam sānu šķautnes perpendikulāras kādai no projekciju plaknēm. Tā, ja 197. rasējumā attēloto prizmu iedomājamies šķeltu ar frontāli projecētāju plakni R, paralēlu gaismas staru virzienam g, tad šķēluma figūras horizontālā projekcija sakrīt ar pašas prizmas projekciju. Pievelkot šķēluma figūrai gaismas starus (pietiek jau ar malējiem gaismas stariem), redzam, ka prizmas sānu skaldnes AA_1D_1D un DD_1C_1C ir apgaismotas, bet pārējās sānu skaldnes atrodas pašēnā. Tā kā no prizmas pamatiem apgaismots ir tikai augšējais (redzams tieši), tad pašēnas kontūra ir daudzstūris $AA_1B_1C_1CDA$.



198. ras.



199. ras.

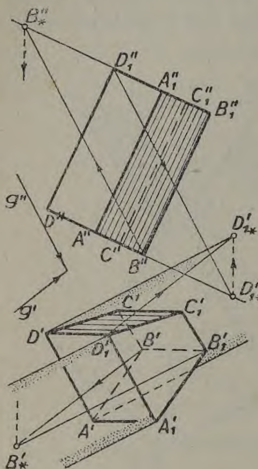
Aizrādīsim vēl uz kādu citu paņēmienu daudzskaldņa pašēnas noteikšanai. Pēc šī paņēmiena vispirms meklē daudzskaldņa krītošo ēnu tā pamata plaknē. Apskatīsim atsevišķi pašēnas noteikšanu piramīdai un prizmai.

Lai noteiktu piramīdas pašēnu (sk. 198. ras.), konstruējam virsotnes V ēnu tās pamata plaknē un no šī ēnas punkta velkam starus, kas pieskaras piramīdas pamata daudzstūrim. Tā kā pamata krītošā ēna ir pats pamats, tad ABV_*DEA ir krītošās ēnas kontūra un tai atbilstošā figūra $ABVDEA$ ir meklētā pašēnas kontūra. Piramīdas skaldnes ABV, AVE un EVD šai gadījumā ir apgaismotas, bet piramīdas pamats un skaldnes BVC un CVD atrodas pašēnā.

Piramīdas pamats rasējumā vienkāršības dēļ izvēlēts projecētājā stāvoklī, bet tikpat labi to varēja izvēlēties patvaļīgi. Paņēmienu var lietot arī tad, ja piramīdas virsotnes ēna pamata plaknē ir neīsta (199. ras.), tikai jāievēro, ka šai gadījumā pašēnā atrodas nevis tās piramīdas skaldnes, kas relatīvi pret pašēnas kontūru novietotas tai pašā pusē, kur V_* (kā iepriekšējā gadījumā), bet pretējā pusē.

Atzīmēsim vēl, ka gadījumā, ja piramīdas virsotnes ēna ir īsta, piramīdas pamats atrodas pašēnā; ja šī ēna ir neīsta, tad pamats ir apgaismots. Ja virsotne met ēnu pamata kontūras iekšpusē, tad pirmajā gadījumā ir apgaismotas visas piramīdas sānu skaldnes, bet otrajā gadījumā — tās visas atrodas pašēnā.

Lai noteiktu 200. rasējumā attēlotās prizmas pašēnu (tā var būt arī slīpa prizma), atrodam vispirms tās vienas sānu šķautnes, piemēram, DD_1, krītošo ēnu DD_{1*} prizmas pamata plaknē $ABCD$. Prizmas sānu šķautnes ir paralēlas, tādēļ met paralēlas ēnas šai plaknē. Redzam, ka daļu no krītošās ēnas kontūras veido bez DD_{1*} arī prizmas šķautnes AA_1 ēna, jo pārējo šķautņu ēnas krīt starp šīm abām. Šķautnes DD_1 un AA_1 tātad ir prizmas pašēnas šķautnes.



200. ras.

Rasējumā konstruēta arī prizmas sānu šķautnes BB_1 neīstā ēna prizmas augšējā pamata plaknē. Paralēli $B_1 B_*$ vilktie stari, kas pieskaras šī pamata kontūrai, sastāda daļu no prizmas krītošās ēnas kontūras šajā plaknē. Šie stari iet caur punktiem A_1 un D_1, kādēļ dabūjam to pašu rezultātu, ko iepriekš, t. i., ka AA_1 un DD_1 ir prizmas pašēnas šķautnes.

Lai noteiktu prizmas pašēnas kontūru, jāzina, vēl tās pamatu apgaismojums. Apskatītajā piemērā prizmas pamati ir perpendikulāri frontālajai projekciju plaknei, tādēļ apgaismojumu viegli noteikt frontālajā projekcijā. Vispārīgā gadījumā varam spriest tāpat kā piemēros ar piramīdu: ja sānu šķautnes krītošā ēna kādā prizmas pamata plaknē ir īsta, tad šis pamats ir pašēnā, bet ja neīsta, tad šis pamats ir apgaismots. Tā kā šai piemērā apgaismots ir prizmas augšējais pamats un sānu skaldne AA_1D_1D, tad pašēnas kontūra ir $AA_1B_1C_1D_1DA$.

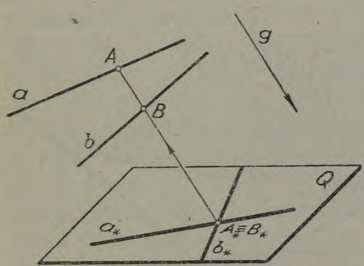
66. Netiešais paņēmiens ēnu konstruēšanā. Lai konstruētu ēnu, kas no viena ķermeņa krīt uz otru, jānosaka caur pirmā ķermeņa pašēnas kontūru vilktās gaismas prizmas šķēlums ar otru ķermeni. Katrā atsevišķā gadījumā jāatrisina tātad samērā komplicēts divu ķermeņu krustošanās uzdevums.

Ja ir zināmas abu ķermeņu krītošās ēnas vienā un tajā pašā plaknē, tad no viena ķermeņa uz otru krītošo ēnu nosaka nesalīdzināmi vienkāršāk, lietojot t. s. *netiešo paņēmienu.* Šis paņēmiens pamatojas uz šāda vienkārša principa.

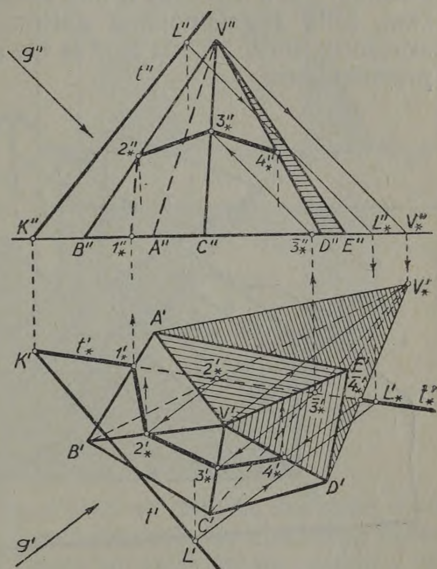
Ja dotajā gaismas staru virzienā g divu taišņu a un b krītošās ēnas kādā plaknē Q ir a_* un b_* (201. ras.), tad šo ēnu krustpunkts ir kāda taisnes a punkta A un taisnes b punkta B kopējā ēna $A_*=B_*$. No šī kopējā ēnas punkta velkot pretēji vērstu gaismas staru, dabūjam pašus punktus A un B, pie kam, ja šis stars krusto vispirms taisni b, tad krustpunkts B ir punkta A krītošā ēna uz taisnes b.

Noteiksim ar šo paņēmienu taisnes krītošo ēnu uz piramīdas (202. ras.).

Vispirms nosakām taisnes un piramīdas krītošās ēnas piramīdas pamata plaknē un piramīdas pašēnu. Taisnes ēna t sākas tās krustpunktā K ar pamata plakni un iet caur tās patvaļīga punkta L ēnu L_*. Šī ēna ir īsta tikai ārpus piramīdas krītošās ēnas kontūras. Punktā 1_* ēna tiek lauzta un pāriet piramīdas sānu skaldnē AVB. Ēnas virzienu šajā skaldnē dabū, nosakot punktu 2_*, kur kāds taisnes punkts met ēnu uz piramīdas šķautnes BV. Punktu 2_* konstruējam ar netiešo paņēmienu, velkot pretēji vērstu gaismas staru no punkta 2_*, kurā krustojas šķautnes BV un taisnes t ēnas piramīdas pamata plaknē. Punktā 2_* ēna tiek atkal lauzta un pāriet skaldnē BVC un tālāk caur punktu 3_* skaldnē CVD. Punktus 3_* un 4_* nosakām tāpat kā punktu 2_*. Tā kā DV ir pašēnas šķautne, tad punktā 4_* taisnes ēna uz piramīdas beidzas; tā pārlec piramīdas pamata plaknē.



201. ras.



202. ras.

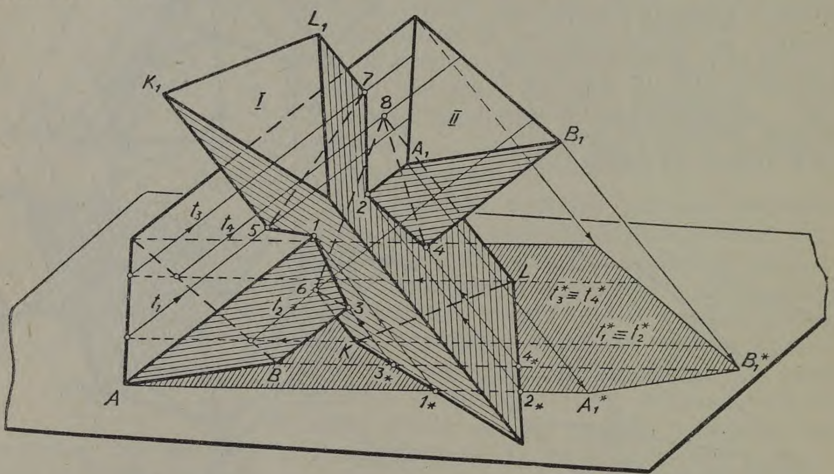
Jāaizrāda, ka aprakstītajā veidā pietiek noteikt tikai taisnes ēnas horizontālo projekciju. Tās frontālo projekciju dabū, nosakot parastā veidā lūzuma punktu frontālās projekcijas. Vienīgi punktu $3''_*$ uz šķautnes $C''V''$ nevaram tieši pārnest, jo CV ir gandrīz profilā stāvoklī. To precīzāk dabū ar pretēji g'' vērstu staru no punkta 3_* frontālās projekcijas.

Taisnes t ēnu uz piramīdas varējām noteikt arī citādi, proti, kā gaismas plaknes caur t šķēlumu ar piramīdu. Šī gaismas plakne ir noteikta ar taisni t un vienu gaismas staru, piemēram, LL_*, vai trīsstūri KLL_*. Te tikai jāievēro, ka taisnes īsto ēnu veido vienīgi šķēluma figūras tā daļa, kas atrodas uz piramīdas apgaismotajām skaldnēm.

Netiešo paņēmienu tīrā veidā praktiskām ēnu konstrukcijām izmanto reti. Palaikam to lieto tikai atsevišķu krītošās ēnas kontūras punktu noteikšanai. Plašāk šo paņēmienu izmanto galvenokārt liektu virsmu ēnu konstrukcijās.

Netiešo paņēmienu var izmantot arī kā metodi divu ķermeņu šķēluma konstruēšanai. Paskaidrosim to ar uzskatāmu piemēru.

Divu prizmu *I* un *II* (203. ras.) šķēlumu var uztvert par prizmas *I* krītošo ēnu (ieskaitot arī tās fiktīvo daļu) uz prizmas *II*, ja par gaismas staru virzienu ņemts prizmas *I* sānu šķautņu virziens. Tiešām, šādā apgaismojumā gaismas stari slīd gar prizmas *I* sānu skaldnēm, un šī prizma izpilda tās augšējā pamata kontūras gaismas prizmas lomu.



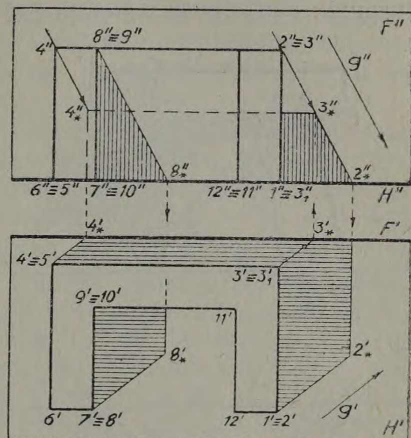
203. ras.

Konstruējam abu prizmu krītošās ēnas prizmas *II* pamata plaknē. Tā kā rasējumā vienkāršības dēļ abu prizmu pamati izvēlēti kopējā plaknē, tad prizmas *I* krītošās ēnas kontūra sakrīt ar tās apakšējā pamata kontūru. No punktiem 1_*, 2_* un 3_*, 4_*, kuros pamata kontūra krusto prizmas *II* sānu šķautņu AA_1 un BB_1 ēnas, velkot pretēji vērstus gaismas starus līdz attiecīgajām šķautnēm, dabūjam šo šķautņu krustpunktus *1, 2* un *3, 4* ar prizmu *I*. Lai noteiktu punktus, kuros prizmas *I* šķautnes krusto prizmu *II*, sameklējam taisnes t_1, t_2 un t_3, t_4, kam ēnas iet caur prizmas *I* krītošās ēnas virsotnēm *K* un *L*. Meklētie krustpunkti *5,6* un *7,8* ir punkti, kuros šīs taisnes krusto prizmas *I* šķautnes KK_1 un LL_1.

Līdzīgi nosaka arī prizmas un piramīdas vai divu piramīdu šķēlumu, tikai pēdējā gadījumā gaismas avots jāizvēlas vienas piramīdas virsotnē, t. i., jākonstruē iepriekš ēnas centrālajā apgaismojumā.

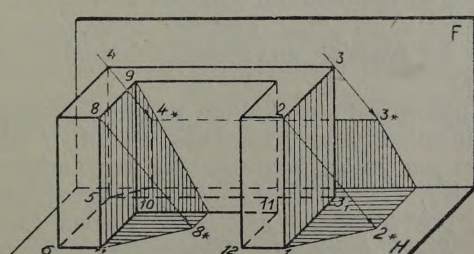
67. Saliktu daudzskaldņu ēnas. Noteiksim 204. rasējumā attēlotā daudzskaldņa (taisna prizma ar *U* veida pamatu) pašēnas, kā arī krītošās ēnas horizontālā daudzskaldņa pamata plaknē *H* un frontālajā plaknē *F*. Labākas uzskatāmības dēļ griezīsim vērību arī uz šo pašu objektu attēlu 205. rasējumā slīpā projekcijā.

Tā kā horizontālajām plaknēm apgaismota ir augšējā, frontālajām plaknēm — priekšējā un profilām plaknēm — kreisā puse, tad daudzskaldņa pašēnas kontūra ir ar skaitļiem no *1* līdz *12* apzīmētā figūra. Lai noteiktu daudzskaldņa krītošās ēnas kontūru, jānoskaidro šīs pašēnas kontūras krītošā ēna.



204. ras.

Sāksim ar pašēnas šķautni *1*—*2*. Šī šķautne met ēnu plaknē *H*, kas sākas punktā *1* un (kā projecētājas taisnes ēna) iet gaismas stara horizontālās projekcijas virzienā. Punktā 2_* sākas pašēnas šķautnes *2*—*3* ēna, kas ir paralēla pašai šķautnei (jo šķautne *2*—*3* ir paralēla *H*) un iet līdz plaknei *F*. Uz plakņu *H* un *F* kakta šķautnes šī ēna tiek lauzta un tālāk iet jau plaknē *F* (virziens — *g″*) līdz punkta *3* ēnai šai plaknē. Plaknē *F* atrodas arī šķautnes *3*—*4* ēna, kā arī daļa no šķautnes *4*—*5* ēnas, pie kam šīs ēnas ir paralēlas pašām šķautnēm (šķautnes *4*—*5* un daļa no šķautnes *3*—*4* ēnas pretskatā aizsegtas ar pašu daudzskaldni). Uz divplakņu kakta šķautnes ēnas kontūra atkal tiek lauzta un tālāk iet uz punktu *5* un pa šķautnēm *5*—*6* un *6*—*7*. Šķautnes *7*—*8* ēna vienlīdzīga un paralēlā šķautnes *1*—*2* ēnai, bet šķautnes 8—9 ēna daļēji



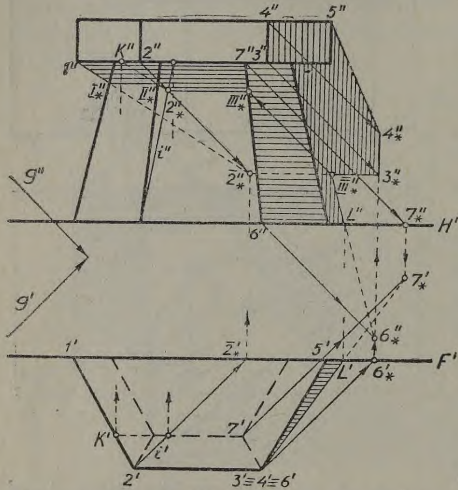
205. ras.

krīt uz paša daudzskaldņa. Izslēdzot pagaidām no apskata šķautni *9*—*10*, kurai te ir īpatnēja loma, šķautnēm *10*—*11*, *11*—*12* un *12*—*1* ēnas atkal sakrīt ar pašām šķautnēm un punktā *1* krītošās ēnas kontūra noslēdzas.

Redzam, ka arī salikta daudzskaldņa krītošās ēnas kontūra sastāv no tā pašēnas šķautņu krītošām ēnām. Izņēmums ir šķautne

9—10, kas it kā neiekļaujas šī nosacījuma rāmjos. Bez tam krītošā ēna te daļēji atrodas ne vien plaknēs *H* un *F*, bet arī uz paša daudzskaldņa.

Pašēnas šķautne *9—10* atšķiras no pārējām pašēnas šķautnēm ar to, ka tā gan atdala daudzskaldņa pašēnas skaldni no apgaismotas skaldnes, bet daļa no pēdējās atrodas krītošā ēnā. Tādu šķautni turpmāk sauksim par *pasīvu* pašēnas šķautni atšķirībā no pārējām t. s. *aktīvām* pašēnas šķautnēm. Pasīva pašēnas šķautne nevar mest ēnu, jo tā ir neapgaismota.



206. ras.

Arī daļa no šķautnes *10—11* ir pasīva, tomēr (praktisku apsvērumu dēļ) šo šķautni pieskaitīsim aktīvajām pašēnas šķautnēm. Iedomājoties daudzskaldni nedaudz paceltu virs plaknes *H,* tā krītošās ēnas kontūru sastādīs arī daļa no šķautnes *10—11* krītošās ēnas, un tikai daļa no tās atradīsies ēnas kontūras iekšpusē. Turpretim šķautni *9—10* krītošās ēnas konstrukcijā varam pilnīgi ignorēt.

Iesācējiem dažkārt ir grūti orientēties, kurās vietās tieši ir jābūt krītošām ēnām uz paša daudzskaldņa. Tādos gadījumos var palīdzēt šāds vienkāršs nosacījums:

Ja daudzskaldņa apgaismotā skaldne ar skaldni, kas ir pašēnā, saiet kopā ieliektā leņķī[1]*, tad vienmēr izveidojas pasīva pašēnas šķautne un pār šo šķautni no pašēnas skaldnes uz apgaismoto skaldni krīt ēna.*

Apskatītajā piemērā daudzskaldņa pamats atrodas plaknē *H,* kas uztver daļu daudzskaldņa krītošās ēnas. *Plakni H šai gadījumā varam uzskatīt arī par paša daudzskaldņa sastāvdaļu.* Tad šķautnes *5—6, 6—7, 10—11, 11—12* un *12—1* vairs nevar uzskatīt par pašēnas šķautnēm, bet to vietā nāk klāt jaunas (pasīvas) pašēnas šķautnes $1—3_1$, $3_1—5$ un *7—10.* Pašēnas kontūra nu sastādās no divām atsevišķām daļām $1—2—3—4—5—3_1—1$ un *7—8—9—10—7,* pie kam katrai daļai pēdējās trīs virsotnes norobežo pasīvās pašēnas šķautnes. Pāri tām daudzskaldnis met ēnu, kuras kontūras sastāda aktīvo šķautņu ēnas.

Izmantojot šo papildinājumu, var samazināt aktīvo pašēnas šķautņu skaitu, tāpēc ievērosim to arī turpmāk, konstruējot ķermeņa ēnas plaknēs, kurās novietots pats ķermenis.

[1] Leņķus, kas mazāki par 180° sauc par ieliektiem leņķiem.

Noteiksim, piemēram, ēnas daudzskaldnim, kas sastāv no nošķeltas piramīdas un prizmatiskas plates (206. ras.). Daudzskaldnis novietots horizontālajā plaknē H un piekļaujas frontālajai plaknei F.

Aktīvā pašēnas kontūra platei ir $1—2—3—4—5$, bet piramīdai — šķautne $6—7$. Par pēdējo var pārliecināties, konstruējot šķautnes $6—7$ ēnu $6—7_*$ plaknē H. Šīs šķautnes ēna plaknē F sākas lūzuma punktā L uz plakņu H un F kakta šķautnes un iet virzienā uz piramīdas virsotni. Rasējumā piramīdas virsotne nav parādīta, bet virziens uz to noteikts, konstruējot vēl punkta 6 (fiktīvo) ēnu 6_* plaknē F.

Punktu $3—4$ ēnas krīt plaknē F, bet punkta 2 ēna — piramīdas priekšējā skaldnē. Lai noteiktu caur virsotni 2 vilktā gaismas stara krustpunktu 2_* ar slīpo plakni, izmantota horizontāli projecētāja palīgplakne (palīgtaisne i). Konstruējot punkta 2 f i k t ī v o ēnu $\overline{2}_*$ plaknē F, dabū šai plaknē krītošās ēnas kontūras nogriežņus $1—I_*$ un $\overline{III}_*—3_*$. Punktā I_* ēnas kontūra pāriet piramīdas malējā skaldnē, pie kam šķautnes $1—2$ ēna $I_*—II_*$ ir paralēla pašai šķautnei ($1—2$ ir paralēla skaldnei). Punktā II_* ēnas kontūra pāriet piramīdas priekšējā skaldnē un iet uz punktu 2_* (kontrole: $II_*—2_*$ pagarinājumā iet caur šķautnes $1—2$ krustpunktu K ar šo plakni). Punktā 2_* sākas šķautnes $2—3$ (tai paralēla) ēna, kas iet līdz piramīdas pašēnas šķautnei $6—7$, no punkta III_* taisot lēcienu frontālajā plaknē F.

Tā kā punkts $\overline{III}_*$, no kura turpinās krītošās ēnas kontūra plaknē F, noteikts jau iepriekš, tad ēnu uz piramīdas varēja konstruēt arī apgrieztā secībā: vispirms ar pretēji vērstu gaismas staru no $\overline{III}_*$ nosaka punktu III_* (netiešais paņēmiens), tad 2_* (kā caur punktu 2 vilktā gaismas stara krustpunktu ar taisni $III_*—2_*$) un beidzot punktu II_* un I_*.

68. Praktiski piemēri. Tā kā visos turpmākajos piemēros izvēlēsimies diagonālapgaismojumu, tad vispirms konstatēsim, kādi vienkāršojumi ar to sasniedzami Jāpasvītro, ka šie vienkāršojumi attiecas tikai uz ēnu konstruēšanu f r o n t ā l ā s ēnu uztverošajās plaknēs.

Konstruēsim, kā parasti, kāda atsevišķa punkta A krītošo ēnu A_* frontālajā plaknē F (207. ras.). Novelkot caur A''_* horizontālu taisni A''_*A_2, dabūjam vienādsānu taisnleņķa trīsstūri $A_2A''A''_*$, kas kongruents ar trīsstūri $A_1A'A'_*$. Ja punkta A attālumu līdz plaknei F resp. A' attālumu līdz F' apzīmējam ar a, tad arī $A''A_2 = A_2A''_* = a$. Punkta A ēnas frontālo projekciju A''_* tātad var noteikt, atliekot vispirms attālumu a no A'' pa kārtotāju uz leju un pēc tam to pašu attālumu no punkta A_2 pa labi. Punkta A ēnu frontālajā plaknē tātad var konstruēt, neizmantojot horizontālo projekciju, ja vien zināms punkta attālums līdz ēnu uztverošajai plaknei.

Vilksim tagad caur punktu A divas frontālas taisnes — horizontālu taisni h un vertikālu taisni v. Šo taišņu ēnas h_* un v_* iet caur

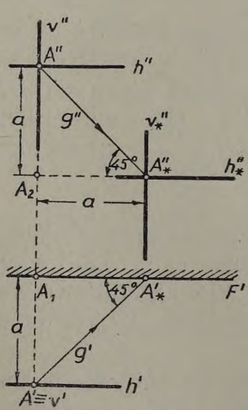
A_* un ir attiecīgi paralēlas taisnēm h un v. No šejienes iespējams formulēt šādu nosacījumu:

Frontālajai plaknei paralēlas horizontālas vai vertikālas taisnes ēna attēlojas frontālajā projekcijā tādā attālumā no šīs taisnes frontālās projekcijas, kāds ir taisnes attālums no ēnu uztverošās frontālās plaknes.

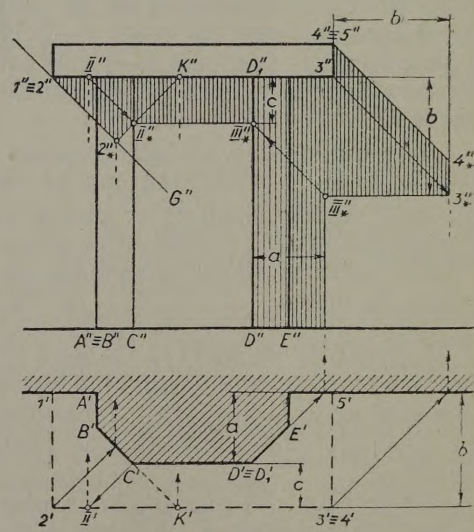
Līdzīgu nosacījumu var formulēt arī ēnām horizontālās plaknēs, bet, tā kā tehniskos rasījumos ēnas parāda vienīgi frontālajā projekcijā, tad praktiska nozīme ir tikai iepriekš minētajam nosacījumam.

Šis nosacījums bez tam pierāda jau pašā sākumā izteikto apgalvojumu, ka no ķermeņa ēnu veidojumiem var spriest par ķermeņa veidu un samēriem pat tad, ja zināma tikai viena (t. i., frontālā) šī ķermeņa projekcija. Tā 181. un 182. rasējumā attēlotā sienas izvirzījuma biezums resp. nišas dziļums vienāds ar atzīmētās ēnas platumu.

Aplūkosim tagad praktiskus ēnu konstruēšanas piemērus, par objektiem izvēloties dažas arhitektūras veidojumu sīkdaļas.



207. ras.



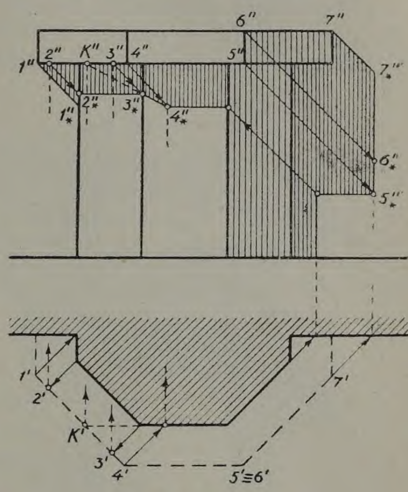
208. ras.

1. piemērs. *Prizmatisks sienas izvirzījums (pilastrs) ar tādu pašu dzegu (208. ras.).*

Horizontālajā projekcijā parādīts pilastra un sienas horizontāls griezums; ar pārtrauktām līnijām atzīmēta dzegas projekcija. Ēnas atzīmētas tikai frontālajā projekcijā.

Pilastra sānu plakne DE veido 45° leņķi ar sienas plakni, tādēļ diagonālapgaismojumā gaismas stari slīd gar šo plakni, un (pēc norunas) tā atrodas pašēnā, t. i., DD_1 ir pilastra pašēnas šķautne. Šīs vertikālās šķautnes ēna uz sienas attēlojas frontālajā projekcijā kā vertikāla taisne attālumā *a* (šķautnes attālums līdz sienai) no $D''D''_1$. Gluži tāpat dzegas pašēnas šķautnes *2—3* un *3—4* met sienas plaknē sev paralēlas ēnas, pie kam $\overline{III}''_*—3''_*$ un $3''_*—4''_*$ atrodas attālumā *b* no *2''—3''* resp. *3''—4''* (rasējumā parādīta arī visu minēto šķautņu ēnu noteikšana, izmantojot gaismas staru horizontālo projekciju).

Daļa no dzegas ēnas krīt arī pilastra priekšējā plaknē *CD;* tās platums *c* vienāds ar šķautnes *2—3* attālumu līdz šai plaknei. Šīs ēnas kontūru var noteikt arī, sameklējot punktu *II* uz šķautnes *2—3,* kas met ēnu II_* tieši uz pilastra šķautnes *C* vai nosakot punktu III_* uz *D* ar pretēji vērstu gaismas staru no $\overline{III}_*$.



209. ras.

Ēna no sienas plaknei perpendikulārās dzegas šķautnes *1—2* pretskatā redzama kā taisne, kas sakrīt ar gaismas stara caur *2* frontālo projekciju. Tas tādēļ, ka gaismas plakne *G* caur *1—2* ir frontāli projecētāja plakne (sal. ar 191. ras.) un tās šķēlums ar sienu un pilastru attēlojas kā taisne, kas sakrīt ar šīs gaismas plaknes frontālo projekciju. Punktā 2_* sākas šķautnes *2—3* ēna plaknē *BC,* kas iet uz II_* un pagarinājumā uz šķautnes *2—3* krustpunktu *K* ar plakni *BC.*

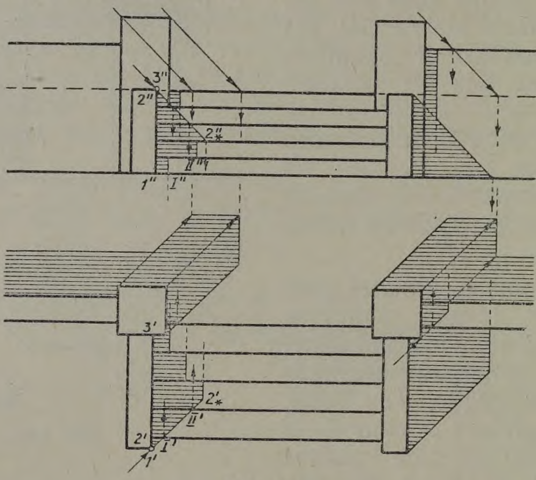
209. rasējumā parādīts vēl kāds cits pilastra un dzegas izveidojums ar ēnām. Ievērosim, ka arī dzegas plakne *5—6—7* te ir paralēla gaismas staru virzienam, tādēļ tās krītošā ēna sienas plaknē reducējas par vertikālu taisni $5_*—6_*—7_*$. Arī dzegas ēna pilastra plaknēs nedaudz mainījusies, bet tās konstrukcija visumā atbilst konstrukcijai iepriekšējā rasējumā.

2. piemērs. *Kāpņu uzeja terasē (210. ras.).*

Labākas izpratnes dēļ rasējumā parādītas arī ēnu horizontālās projekcijas. Ēna, ko met kāpņu labā sānu siena, atgādina 204. rasējumā attēlotā daudzskaldņa kreisā spārna ēnu. Tā kā no pārējām ēnām, atskaitot ēnas, ko uz terases frontālās sienas met abi stūra stabi, pretskatā redzama tikai tā, ko uz kāpieniem met kāpņu kreisā siena, tad tuvāk aplūkosim vienīgi šīs ēnas noteikšanu.

Šīs ēnas kontūru sastāda sānu sienas vertikālās pašēnas šķautnes *1—2* un horizontālās pašēnas šķautnes *2—3* krītošās ēnas. Vispirms konstatējam, ka punkta *2* īstā ēna 2_* atrodas uz kāpņu otrā kāpiena horizontālās plaknes. Šķautnes *1—2* ēnas horizontālā projekcija ir taisne līdz pat punktam $2'_*$, bet tās frontālā projekcija ir lauzta līnija, kuras vertikālos locekļus dabū ar kārtotājām no punktiem I' un II'. Šķautnes $2—3$ ēnas attēls savukārt ir taisne frontālajā projekcijā. Šīs ēnas horizontālo projekciju (tāpat šķautnes $1—2$ ēnas frontālo projekciju) var dabūt arī, ievērojot nosacījumu par tās atsevišķo daļu attālumiem no šķautnes $2—3$ horizontālās projekcijas (resp. šķautnes $1—2$ frontālās projekcijas).

Frontālajā projekcijā redzam vēl ēnas, ko met abi stūra stabi uz terases frontālo plakni. Šo ēnu platums vienāds ar staba, pašēnas šķautnes attālumu līdz šai plaknei.

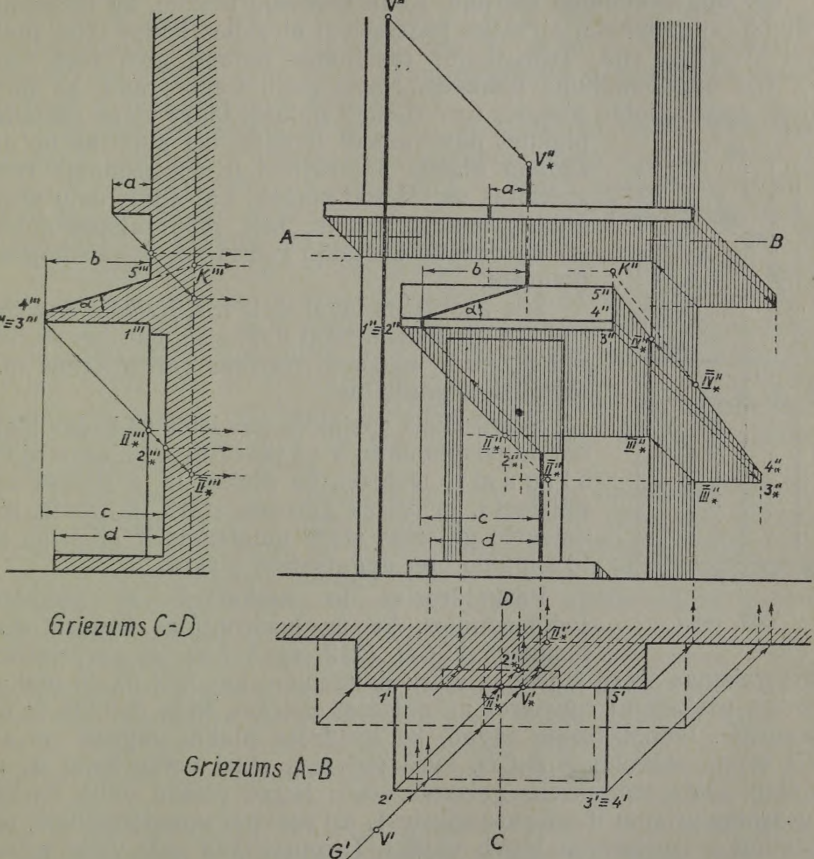


210. ras.

3. **piemērs.** *Ēkas fasādes izvirzījums ar ieeju (portāls; 211. ras.).* Durvju priekšā atrodas platforma, virs ieejas aizsargjumts, virs tā portāla dzega. Portāla priekšā vertikāla kārts (karoga masts). Ēnu konstruešanai bez horizontālā griezuma $A—B$ izmantots arī profilais griezums $C—D$ jeb t. s. *profils.* Pēdējais ēnu konstrukcijām pat piemērotāks par horizontālo griezumu $A—B$. Aprakstīsim te tikai aizsargjumta un vertikālās kārts ēnas konstruēšanu.

Aizsargjumta aktīvā pašēnas kontūra ir figūra $1—2—3—4—5$. Šķautne $1—2$ ir perpendikulāra frontālajai projekciju plaknei, tādēļ tās ēna neatkarīgi no tā, kādās plaknēs tā krīt, pretskatā redzama kā taisne, kas paralēla gaismas stara frontālajai projekcijai. Tā izbeidzas durvju plaknē punktā 2_*, no kura sākas horizontālās šķautnes $2—3$ ēna, kas ir paralēla pašai šķautnei. Šķautne $2—3$ met ēnu arī portāla priekšējā plaknē un uz mājas sienas. Šīs ēnas dabū, izmantojot profilu (punkti II_* un $\overline{II}_*$) vai arī horizontālo griezumu $A—B$ (vispirms punktu 3_*, tad punktu III_* ar pretēji vērstu gaismas staru no $\overline{III}_*$). Šķautnes $4—5$ ēnas virzienu mājas sienas plaknē nosaka virziens no punkta 4_* uz šķautnes fiktīvo krustpunktu K ar sienu (K nosaka, izejot no profila). Tās pašas šķautnes ēnu $5—IV_*$

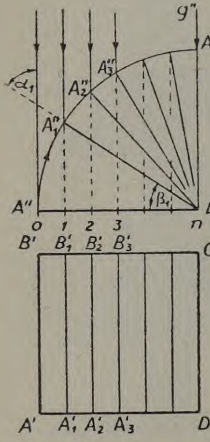
uz portāla var dabūt, nosakot ar netiešo paņēmienu punktu IV_* un savienojot to ar punktu 5 (var izmantot arī punkta 4 fiktīvo ēnu portāla priekšējā plaknē). Ēnām $5—IV_*$ un $\overline{IV}_*—4_*$ kā ēnām paralēlās plaknēs jābūt paralēlām.



211. ras.

Vertikālās kārts ēna uz portāla konstruēta, velkot caur kārti gaismas plakni *G* (tā ir vertikāla) un nosakot šīs plaknes šķēlumu ar portālu. Tā kā plaknes *G* slīpums pret frontālo un profilo projekciju plakni ir vienāds (=45°), tad šķēluma, t. i., kārts ēnas, frontālā projekcija (ieskaitot arī tās fiktīvo daļu) ir kongruenta ar šķēluma profilo projekciju, kas sakrīt ar profilā griezuma *C—D* kontūru. Iznāk, ka šīs ēnas noteikšanai pietiek konstruēt kārts virsotnes *V* ēnu uz portāla un, sākot ar punktu V''_*, zīmēt ēnas figūru, kongruentu ar profilu *C—D*. Šis rezultāts izriet no 120. lpp. formulētā nosacījuma par vertikālas taisnes un tās ēnas projekciju attālumiem, jo attālumu vietā mēs te mērījam attālumu starpības *a, b, c* un *d* (sk. 211. ras.). Ja profils nebūtu dots, tad šos lielumus varētu izmērīt arī horizontālajā griezumā *A—B*.

69. Apgaismojuma mērogs. Kāda ķermeņa plakne, kā redzējām, var būt apgaismota, atrasties pašēnā vai atrasties kādas citas plaknes krītošajā ēnā. Tehniskajos rasējumos parasti ņem vērā tikai šīs trīs apgaismojuma pakāpes. Novērojumi tomēr rāda, ka dabā visas apgaismotās plaknes nav vienādi gaišas, tāpat visas apēnotās plaknes nav vienādi tumšas, bet atkarībā no dažādiem blakus apstākļiem ir apgaismotas resp. apēnotas vairāk vai mazāk. Lai attēls dotu pilnīgāku īstenības ilūziju, tajā jābūt atspoguļotām arī šo dažādo apstākļu radītajām apgaismojuma niansēm.



212. ras.

Šos apstākļus tuvāk pētī t. s. *fizikālā ēnu teorija*. Te atzīmēsim tikai dažus šīs teorijas secinājumus, kuru iegūšana neprasa sarežģītākus matemātiskus aprēķinus.

Svarīgākais apstāklis, kas ietekmē kādas plaknes apgaismojumu, ir uz tās krītošo gaismas staru slīpums. Dabiski, ka plakne ir jo stiprāk apgaismota, jo vairāk gaismas staru tā uztver. Bet uztverto gaismas staru daudzums ir atkarīgs no to slīpuma pret apgaismoto plakni.

Paskaidrosim to uzskatāmi ar piemēru. Iedomāsimies, ka uz horizontālas kvadrātiskas plaknes *ABCD* (212. ras.) krīt tai perpendikulāri gaismas stari. Gaismas staru daudzumu, kas krīt uz šo plakni, varam uzskatāmi raksturot ar gaismas prizmu, kam pamats ir šis kvadrāts. Iedomāsimies tagad, ka kvadrāta plakni pagriež ap asi *CD* jaunā stāvoklī A_1B_1CD, kurā gaismas stari veido leņķi α_1 ar plakni. Daļa iepriekšējo gaismas staru tagad plakni vairs neskar (gaismas prizma ir sašaurinājusies), un plaknes apgaismojums, salīdzinot ar iepriekšējo, kļuvis vājāks. Turpinot tādā pašā veidā griezt plakni, uz tās kritīs arvien mazāk gaismas staru un robežgadījumā, kad plakne kļūs paralēla gaismas stariem, to skars tikai gar to slīdošie gaismas stari. Plaknes apgaismojuma intensitāte tātad ir tieši proporcionāla gaismas prizmas šķērsgriezuma laukumam.

Gaismas prizmas šķērsgriezuma laukums jebkurā kvadrāta stāvoklī ir vienlīdzīgs ar kvadrāta plaknes horizontālās projekcijas laukumu. Apzīmējot kvadrāta laukumu ar *L*, prizmas šķērsgriezuma laukums tad vienlīdzīgs $L . \cos \beta$, kur β ir leņķis, ko pagrieztā plakne veido ar sākotnējo plakni resp. ar horizontālo projekciju plakni. Kā staru slīpuma leņķa α papildleņķis, šis leņķis vienlīdzīgs ar leņķi starp gaismas staru un plaknes normāles virzienu jeb ar t. s. gaismas staru *krišanas* leņķi.

Plakņu dažādo apgaismojumu salīdzināšanai tātad mums ir šāds kritērijs: *plaknes apgaismojuma intensitāte ir tieši proporcionāla gaismas staru krišanas leņķa kosinusam.*

No sacītā izriet, ka kāda plakne ir visspilgtāk apgaismota, ja gaismas stari krīt uz to perpendikulāri ($\beta=0$), bet visvājāk, ja tie ir tai paralēli ($\beta=90°$). Apzīmējot maksimālajam apgaismojumam atbilstošo plaknes aptumšojumu ar 0, bet minimālajam apgaismojumam atbilstošo aptumšojumu ar n (n — vesels skaitlis, vislabāk pārskaitlis: 6, 8, 10, ...), aptumšojuma starppakāpes varam apzīmēt ar skaitļiem no 1 līdz (n—1).

Dalot taisnes nogriezni *A″D″ n* vienlīdzīgās daļās, pirmajam dalījuma punktam 1 atbilst staru slīpuma leņķis α_1 resp. krišanas leņķis β_1, otrajam dalījuma punktam 2 — leņķis α_2 (β_2) utt. Šo dalījumu tagad varam izmantot kā mērogu krāsas toņu izvēlei plakņu dažādi apgaismoto laukumu atēnošanai.

Laukumu atēnošanu izdara, to pārklājot atkārtoti ar vienu un to pašu iepriekš izvēlētu krāsas pamattoni atbilstoši plaknes aptumšojuma pakāpei.[1] Ir gan novērots, ka, ieklājot atkārtoti ar vienu un to pašu pamattoni, starpība ar iepriekš sasniegto atēnojumu kļūst arvien niecīgāka. Šī nevienmērīguma izlīdzināšanai pirms katras jaunas ieklāšanas var krāsu nedaudz pastiprināt. Pamattoni ieteicams izvēlēties ļoti vāju, lai pat pēc n-kārtējas ieklāšanas atēnojums neiznāktu par tumšu.

Lai aprakstītā veidā rasējumā parādītu kāda daudzskaldņa atsevišķo skaldņu dažādo apgaismojumu, iepriekš jānosaka gaismas staru slīpums α pret katru no šīm skaldnēm. Iezīmējot šo leņķu papildleņķus β apgaismojuma mērogā, nolasa vajadzīgo pamattoņu skaitu. Ja leņķis β nesakrīt ne ar vienu no mērogā atzīmētajiem leņķiem, tad jāņem tuvākam leņķim atbilstošais pamattoņu skaits.

Tā kā gaisma no apkārtējiem priekšmetiem atstarojas (reflektējas), tad arī plaknes, kas atrodas pašēnā, tiek apgaismotas. Katrā atsevišķā gadījumā gaismas refleksijas radīto iespaidu grūti novērtēt, tāpēc parasti pieņem, ka *reflektētie stari ir pretēji vērsti un divreiz vājāki par tiešajiem gaismas stariem.* Tā, piemēram, ja dalījumu skaits n=6 (tāds dalījums ir 212. ras.), tad pašēnas plakne, kas ir perpendikulāra dotajam gaismas staru virzienam, jāieklāj visgaišāk, proti, ar trim pamattoņiem. Plaknes slīpumam pret staru virzienu mainoties no 90° līdz 0°, atēnojums jāpapildina uz katrām divām iepriekšējā mēroga iedaļām vēl par vienu pamattoni, lai robežgadījumā tās atēnojums tiktu izteikts ar 6 pamattoņiem, t. i., ar to pašu pamattoņu skaitu, kāds ir apgaismotai plaknei šai stāvoklī.

Vispār, *ja plaknes gaismas puses aptumšojuma pakāpe ir p, tad tās pašēnas puses aptumšojums ir ar pakāpi* $p_1=\frac{1}{2}(n+p)$.

Ja uz daudzskaldni krīt ēna no citiem ķermeņiem, tad vistumšāk apēnotas tiek tās skaldnes, kas citādi būtu visgaišākās. Tā kā šim

[1] Ieklāšanai vispiemērotāka atšķaidīta ieberzta ķīniešu tuša vai neitrāltinte. Var lietot arī parastās akvareļkrāsas; nav ieteicama parastā (pudeļu) tuša, jo ar to nav iespējams dabūt vienmērīgu ieklājumu.

apēnojumam jābūt lielākam par apgaismotās skaldnes maksimālo aptumšojumu n, tad var ievērot šādu nosacījumu:

Ja uz plakni, kam aptumšojuma pakāpe ir p, krīt ēna, tad ēnas pārklātā laukuma apēnojuma pakāpe ir $p_2 = 2n - p$.

Paturot iedalījumu skaitu $n = 6$, noteiksim, piemēram, frontālas plaknes aptumšojuma pakāpes diagonālapgaismojumā. Tā kā gaismas stari veido 35° leņķi ar plakni (sk. 61. nodalījumu) tad, iezīmējot apgaismojuma mērogā šī leņķa papildleņķi 55°, konstatējam, ka šīs plaknes gaismas puses aptumšojuma pakāpe aptuveni ir 2. Plaknes pašēnas puses apēnojums (kas rasējumā gan nav redzams) tad iznāk $p_1 = \frac{1}{2}(6+2) = 4$ un plaknē krītošās ēnas apēnojuma pakāpe $p_2 = 12 - 2 = 10$.

Iepriekšējā iztirzājumā ņemti vērā tikai daži faktori, kas ietekmē apgaismojumu. Bez tam visu laiku esam domājuši, ka ķermeņa virsma ir nespodra, kādēļ gaismu tā atstaro uz visām pusēm vienmērīgi (gaismas izkliede). Gludām virsmām nāktu klāt vēl atspoguļojuma efekti. Arī atmosfēras apstākļi var lielākā vai mazākā mērā ietekmēt gaismas refleksiju. Tā novērojumi rāda, ka atmosfēras ietekmē arī kāda ķermeņa skaldnes, kas ir pašēnā vai krītošā ēnā, nav apēnotas viscaur vienmērīgi. Mēs aprobežosimies tikai ar līdzšinējiem slēdzieniem, kas ir pietiekami, lai ar minimālu piepūli sasniegtu ēnu atveidojumā jau visai ievērojamu efektu.

Tehniskajos rasējumos parasti ieklāj krītošās ēnas divreiz tumšākas par pašēnām. Ēnas tad ieteicams ieklāt šādā secībā. Vispirms ar izvēlētu krāsas toni (ķīniešu tuša, neitrāltinte) ieklāj visus pašēnas un krītošās ēnas laukumus un pēc krāsas iežūšanas krītošās ēnas laukumus ar to pašu krāsu ieklāj vēlreiz. Ja vēlas pašam ķermenim piešķirt kādu nokrāsu, tad ieteicams to izdarīt tikai pēc atēnošanas, lai šo nokrāsu iegūtu arī apēnotās ķermeņa skaldnes.

IV NODAĻA

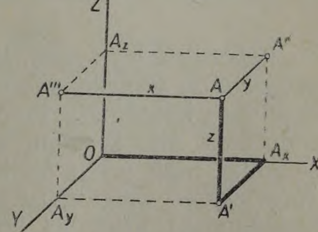
AKSONOMETRISKĀS PROJEKCIJAS

1. §. ORTOGONĀLĀ AKSONOMETRIJA

70. Ortogonālās aksonometrijas jēdziens un uzdevums. Konstruējot kāda ķermeņa ortogonālās projekcijas, parasti viegli sameklēt ķermenī trīs savstarpēji perpendikulārus t. s. dominējošos virzienus un projekciju pamatplaknes P_1, P_2 un (profilo) P_3 izvēlēties tā, lai katra no tām būtu paralēla diviem, bet perpendikulāra trešajam virzienam. Tādējādi vienkāršojas gan pati projekciju konstruēšana, gan arī šo projekciju izmantošana ģeometrisko uzdevumu atrisināšanā.

Tomēr tā konstruētiem attēliem ir arī nopietns trūkums, jo tad vairākām ķermeņa šķautnēm un skaldnēm, vismaz vienā projekcijā attēls būs punkts resp. taisnes nogrieznis. Tāpēc šādi attēli ir ar vāju uzskatāmību.

Lai kāda komplicētāka ķermeņa (vai tā sīkdaļas) attēlu padarītu saprotamāku, nepieciešams dažreiz ķermeni attēlot arī kādā citā patvaļīgi pret projekciju pamatplaknēm pagrieztā stāvoklī. Agrāk iztirzātā transformāciju metode šim nolūkam ir neērta, jo uzskatāma attēla konstruēšanai ir jāizdara divas pakāpeniskas transformācijas (sk. 42. nodalījumu). Aplūkosim tādēļ te kādu citu metodi, kas uzskatāmu attēlu konstruēšanu ievērojami vienkāršo.

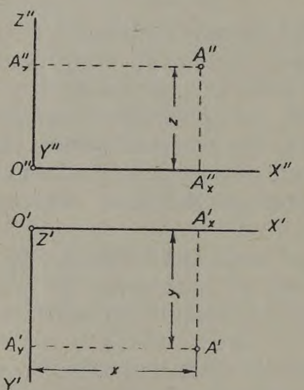


213. ras.

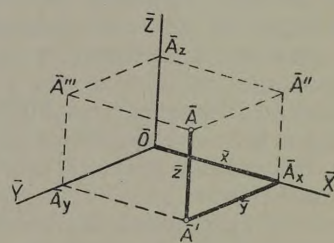
Metodes ilustrācijai aplūkosim, kā konstruēt ķermeņa kāda atsevišķa punkta A jauno projekciju.

Punkta stāvokļa noteikšanai telpā izmantosim no analitiskās ģeometrijas pazīstamo Dekarta taisnleņķa koordinātu jēdzienu. Ja caur patvaļīgu telpas punktu O t. s. *koordinātu sākumu* novelkam trīs savstarpēji perpendikulāras taisnes — *koordinātu asis* X, Y un Z (213. ras.), tad punkta A stāvoklis telpā ir noteikts, ja zināmas tā *koordinātes,* t. i., attālumi līdz *koordinātu plaknēm* XOY, XOZ un YOZ. Trīs no koordinātu sākuma O izejošos starus X, Y un Z sauksim par *koordinātu triedru.*

Ja A', A'' un A''' ir punkta A ortogonālās projekcijas koordinātu plaknēs XOY, XOZ un YOZ (vienkāršības dēļ šīs projekcijas apzīmētas tāpat kā punkta projekcijas projekciju pamatplaknēs P_1, P_2 un P_3), tad rasējumā attēlotā punkta A attālumi līdz koordinātu plaknēm ir šī punkta attālumi līdz tā attiecīgajām projekcijām. Šos attālumus, kas mērīti attiecīgi X, Y un Z ass virzienā, sauc par dotā punkta x, y un z koordinātēm. Ja caur punktu A paralēli koordinātu plaknēm novelk trīs plaknes, tad šīs plaknes kopā ar koordinātu plaknēm ierobežo t. s. *koordinātu paralēlskaldni.* Lai pēc dotajām koordinātēm noteiktu punkta stāvokli telpā, pietiek konstruēt šī paralēlskaldņa trīs šķautnes t. s. *koordinātu figūru* $OA_xA'A$ (rasējumā šī figūra atzīmēta treknākām līnijām).[1] Punkta kādu koordināti pie tam uzskata par pozitīvu vai negatīvu atkarībā no tā, vai attiecīgais koordinātu figūras nogrieznis atlikts koordinātu ass pozitīvā vai negatīvā virzienā (Dekarta princips).



214. ras.



215. ras.

Iedomāsimies tagad, ka mums ir dotas kāda ķermeņa punkta A ortogonālās projekcijas projekciju pamatplaknēs P_1 un P_2 (214. ras.). Izvēloties koordinātu asis X, Y un Z paralēli ķermeņa dominējošām šķautnēm, mēs ķermeni piesaistām šai taisnleņķa koordinātu sistēmai. Šādi izvēloties koordinātu asis, punkta koordinātes x un y (precīzāk — koordinātu paralēlskaldņa šķautnes, kas reprezentē šīs koordinātes) attēlojas horizontālajā projekcijā īstajā lielumā, bet koordināte z (arī x) īstā lielumā attēlojas frontālajā projekcijā.

Iedomāsimies tagad ķermeni kopā ar koordinātu triedru pagrieztu kādā citā stāvoklī un projecētu attēlu plaknē P, ko turpmāk vienmēr iedomāsimies vertikālā stāvoklī. Ja kopā ar ķermeņa punktu A projecējam arī punkta A koordinātu paralēlplakni, tad pēc plaknes P savietošanas ar rasējuma plakni iegūsim attēlu, kāds ir 215. rasējumā. Koordinātu figūru $OA_x\ A'A$, kas ir telpas figūra, te attēlojusies par plaknes figūru $\bar{O}\bar{A}_x\ \bar{A}'\bar{A}$. Tā kā ortogonālajā projekcijā taisnes nogriežņu attēli īsāki par pašiem nogriežņiem, tad šīs

[1] Šīs figūras vietā, protams, var izmantot arī koordinātu figūras $OA_xA''A$, $OA_y\ A'A$ utt.

figūras atsevišķo nogriežņu garumi $\bar{x}$, $\bar{y}$ un $\bar{z}$ ir mazāki par atbilstošās koordinātu figūras atsevišķo nogriežņu garumiem x, y un z. Skaitļus

$$a = \frac{\bar{x}}{x}, \qquad b = \frac{\bar{y}}{y}, \qquad c = \frac{\bar{z}}{z}$$

sauksim par koordinātu sagrozījumu koeficientiem[1], jo tie rāda, kādā attiecībā mainās ķermeņa punktu attiecīgās koordinātes.

Zinot pagriezto koordinātu asu projekciju virzienus un koeficientus a, b un c, iespējams konstruēt ķermeņa jebkura punkta ortogonālo projekciju plaknē P pēc tā koordinātēm x, y un z. Lai to izdarītu, jākonstruē katram punktam atbilstošās koordinātu figūras attēls, atliekot $\overline{O}\bar{A}_x = a \cdot x$, $\bar{A}_x\bar{A}' = b \cdot y$ un $\bar{A}'\bar{A} = c \cdot z$; punkts $\bar{A}$ tad ir meklētais punkta A attēls projekciju plaknē P.

Sakarā ar to nozīmi, kāda te ir koordinātu asīm, aprakstīto metodi pagriezta ķermeņa attēla konstruēšanai sauc par *aksonometrisko metodi*, īsāk — par *aksonometriju*, un iegūto ķermeņa attēlu plaknē P — par ķermeņa *ortogonāli aksonometrisko attēlu*. Koordinātu asu attēlus $\overline{X}$, $\overline{Y}$ un $\overline{Z}$ sauksim par *aksonometriskām asīm*, to kopējo krustpunktu $\overline{O}$ par *aksonometrisko koordinātu sākumu* un kāda punkta koordinātu paralēlskaldņa attēla šķautņu garumus $\bar{x}$, $\bar{y}$ un $\bar{z}$ — par punkta aksonometriskām *koordinātēm*.

Aksonometrijas galvenais uzdevums — uzskatāmu attēlu konstruēšana.

71. Ortogonālās aksonometrijas pamatlikumi. Pirms pārejam pie kāda ķermeņa aksonometriskā attēla konstruēšanas, jānoskaidro, kā konstruēt aksonometrisko asu virzienus un kā noteikt sagrozījumu koeficientus a, b un c.

Lai iegūtu kāda ķermeņa uzskatāmu attēlu, ķermenis kopā ar koordinātu triedru jāpagriež tā, lai neviena no koordinātu asīm nebūtu paralēla aksonometrisko attēlu plaknei P. Katra attēlu plaknei P paralēla plakne (vai pati plakne P), tātad vienmēr krusto koordinātu asis X, Y un Z attiecīgi punktos A, B un C (216. ras.). Šos punktus savienojot, dabūjam trīsstūri ABC, kura malas ir koordinātu plakņu galvenās līnijas attiecībā pret projekciju plakni P. Šo trīsstūri, kam ir svarīga nozīme ortogonālās aksonometrijas teorijā, sauksim par *galveno trīsstūri*.

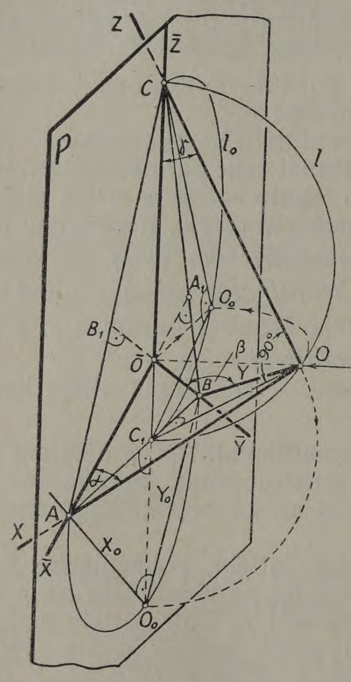
Noskaidrosim šī galvenā trīsstūra īpašības.

Tā kā galvenā trīsstūra mala AB ir koordinātu plaknes XOY galvenā līnija un Z ass ir perpendikulāra šai plaknei, tad Z ass ortogonālā projekcija $\overline{Z}$ plaknē P ir perpendikulāra malas AB ortogonālajai projekcijai plaknē P (sk. 30. nodalījumu), t. i., $\overline{Z} \perp AB$. Līdzīgi konstatē, ka $\overline{X} \perp BC$ un $\overline{Y} \perp AC$. *Aksonometrisko asu virzieni tātad sakrīt ar galvenā trīsstūra augstumu virzieniem un aksonometrisko koordinātu sākums $\overline{O}$ ir galvenā trīsstūra ortocentrs.*

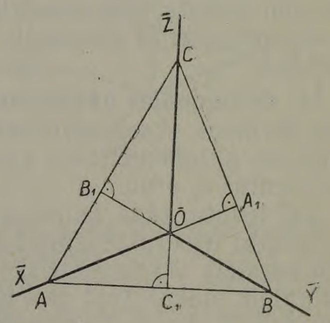
[1] Termina «sagrozījuma koeficients» vietā mēdz lietot arī terminu «kropļojuma koeficients».

No koordinātu sākuma O pret galvenā trīsstūra malām vilktie perpendikuli OA_1, OB_1 un OC_1 (rasējumā parādīts tikai pēdējais) ir atbilstošo koordinātu plakņu slīpuma līnijas, un to ortogonālās projekcijas sakrīt ar galvenā trīsstūra augstumiem. Tā kā trīsstūris AOB ir taisnleņķa trīsstūris $(X \perp Y)$ un OC_1 ir perpendikuls pret šī trīsstūra hipotenūzu, tad punktam C_1 jāatrodas starp A un B. Tas pats sakāms par punktiem A_1 un B_1, kam jāatrodas starp B un C resp. A un C. Aksonometrisko koordinātu sākums $\overline{O}$ tātad vienmēr atrodas galvenā trīsstūra iekšpusē, t. i., *galvenais trīsstūris ir šaurleņķa trīsstūris, un aksonometriskās asis savā starpā veido platus leņķus.*[1]

Var pierādīt arī apgriezto apgalvojumu, proti, ka no patvaļīga attēlu (rasējuma) plaknes punkta $\overline{O}$ vilktus trīs starus $\overline{X}$, $\overline{Y}$ un $\overline{Z}$, kas veido savā starpā platus leņķus (217. ras.), var vienmēr uz-



216. ras.



217. ras.

skatīt par trīs savstarpēji perpendikulāru koordinātu asu ortogonāliem attēliem. Tiešām, izvēloties, piemēram, uz stara $\overline{X}$ patvaļīgu punktu A, velkot $AB \perp \overline{Z}$, $BC \perp \overline{X}$ un savienojot C ar A, redzams, ka $\overline{O}$ kā divu trīsstūra ABC augstumu krustpunkts ir šī trīsstūra ortocentrs, tādēļ arī $\overline{Y} \perp AC$. Ja šī trīsstūra augstumu pamati ir A_1 B_1 un C_1, tad uz punktā $\overline{O}$ pret plakni P vilktā projecētāja stara var atrast pavisam divus tādus pret plakni P simetriskus punktus O (vienu priekšā, otru aiz plaknes P), ka $OC \perp OC_1$. Šie punkti ir caur $\overline{O}$ vilktā projecētāja stara krustpunkti ar riņķi, kurš konstruēts uz

[1] Ar piezīmi — ja par aksonometriskām asīm izvēlamies to koordinātu pusasu attēlus, kas k r u s t o attēlu plakni P (sal. 219. ras.).

CC_1 kā diametra un kura plakne ir perpendikulāra plaknei P (sk. 216. ras., kur iezīmēta tā riņķa daļa l, kas ir priekšā plaknei P). Iedomāsimies tagad telpas punktu O, savienotu arī ar A un B, un apzīmēsim $OA \equiv X$, $OB \equiv Y$ un $OC \equiv Z$. Tā kā projecētājas plaknes caur X, Y un Z ir attiecīgi perpendikulāras trīsstūra malām BC, CA un AB, tad arī $X \perp BC$, $Y \perp CA$ un $Z \perp AB$ (ja taisne perpendikulāra plaknei, tā ir perpendikulāra arī katrai plaknes taisnei). Bet no $Z \perp OC_1$ un $Z \perp AB$ seko, ka Z ir perpendikulāra plaknei OAB jeb $Z \perp X$ un $Z \perp Y$. Gluži tāpat no $X \perp Z$ un $X \perp BC$ seko, ka X ir perpendikulāra plaknei OBC, tātad arī $X \perp Y$. Koordinātu asis X, Y un Z tātad ir savstarpēji perpendikulāras, un trīsstūris ABC ir koordinātu sistēmas galvenais trīsstūris.

Tā kā šim galvenajam trīsstūrim atbilst pavisam divi simetriski pret plakni P novietoti punkti O, tad tam atbilst pavisam divi pret plakni P simetriski koordinātu triedri. Ja viens no triedriem veido trijplakņu kaktu, kas novērotājam pievērsts ar ieliekto pusi, tad simetriskais triedrs veido trijplakņu kaktu, kas novērotājam pievērsts ar izliekto pusi.

Te gan jāatgādina, ka, konstruējot trīsstūri ABC, mēs virsotni A izvēlējāmies patvaļīgi. Izvēloties virsotni A citā vietā uz x, dabūsim citu trīsstūri ABC, bet līdzīgu iepriekšējam. Šim trīsstūrim atbilst koordinātu triedrs (un tam simetriskais triedrs), ko dabū no iepriekšējā ar translāciju perpendikulāri attēlu plaknei P. Bet, tā kā šādā translācijā koordinātu triedra un ar to saistītā ķermeņa attēls plaknē P nemainās, tad ir pierādīta šāda ortogonālās aksonometrijas pamatteorēma:

No aksonometrisko attēlu plaknes P patvaļīga punkta $\overline{O}$ trīs šai plaknē novilktus starus, kas veido savā starpā platus leņķus, var vienmēr uzskatīt par trīs no kāda telpas punkta O izejošu savstarpēji perpendikulāru staru ortogonālu attēlu. Izvēloties punkta O attālumu līdz attēlu plaknei P, ar šo attēlu ir noteikts tikai viens koordinātu triedrs, ja vien piesakām, kuru ar šo triedru veidoto trijplakņu kaktu domājam — to, kas novērotājam pievērsts ar ieliekto, vai to, kas novērotājam pievērsts ar izliekto pusi.

Ja aksonometrisko asu izvēlē pieļaujama zināma brīvība, tad sakarā ar tikko pierādīto pamatteorēmu sagrozījuma koeficienti a, b un c ar šo izvēli jau ir noteikti. Tiešām, tā kā punkta A koordināte x ir OA un aksonometriskā koordināte $\overline{x}$ ir $\overline{O}A$, tad

$$a = \frac{\overline{x}}{x} = \frac{\overline{O}A}{OA} = \cos\alpha,$$

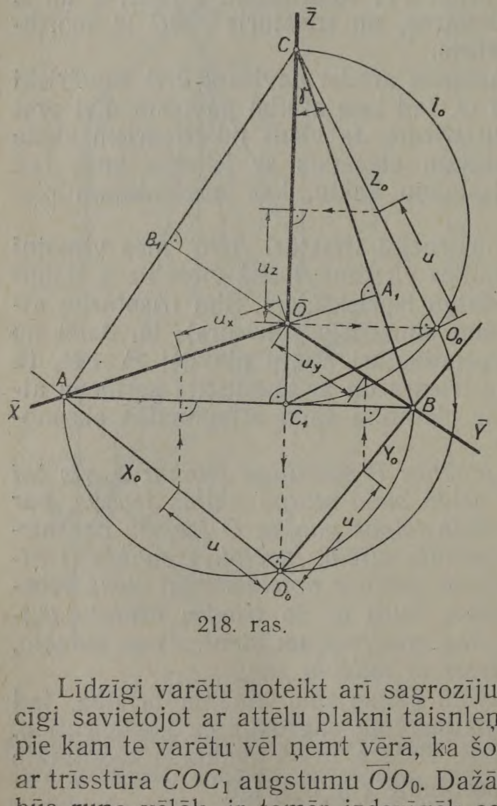
kur α ir leņķis, ko X ass veido ar attēlu plakni P (sk. 216. ras.). Analoģiski konstatējam, ka

$$b = \frac{\overline{O}B}{OB} = \cos\beta,$$

$$c = \frac{\overline{O}C}{OC} = \cos\gamma,$$

kur β un γ ir leņķi, ko ar plakni P veido koordinātu asis Y un Z. *Sagrozījumu koeficienti a, b un c tātad ir vienādi ar koordinātu asu slīpuma leņķu kosinusiem.* Tā kā ar aksonometrisko asu izvēli koordinātu asu slīpums ir noteikts viennozīmīgi (translācijā asu slīpums nemainās un divu pret plakni P simetrisku taišņu slīpumi ir vienādi), tad viennozīmīgi ir noteikti arī sagrozījumu koeficienti a, b un c.

Lai pēc izvēlētajiem akonometrisko asu virzieniem $\bar{X}$, $\bar{Y}$ un $\bar{Z}$ noteiktu sagrozījumu koeficientus a, b un c, konstruējam vispirms galveno trīsstūri ABC, kam augstumu virzieni sakrīt ar aksonometrisko asu virzieniem (218. ras.). Savietojam tagad taisnleņķa trīsstūri COC_1 ar attēlu (t. i., rasējuma) plakni P, pagriežot to ap hipotenūzu CC_1 (sk. arī 216. ras.). Tad punkta O projekcija $\bar{O}$ pārvietojas perpendikulāri CC_1 un punkta O savietoto stāvokli O_0 dabūjam, ievērojot, ka punktam O_0 jāatrodas uz pusriņķa l_0, kas konstruēts uz CC_1 kā diametra. Ja no punkta O_0 uz O_0C atliekam kādu taisnes nogriezni ar garumu u un nosakām ar atpakaļ pagriešanu šī taisnes nogriežņa aksonometriskā attēla garumu u_z, tad



218. ras.

$$\frac{u_z}{u} = \cos\gamma = c.$$

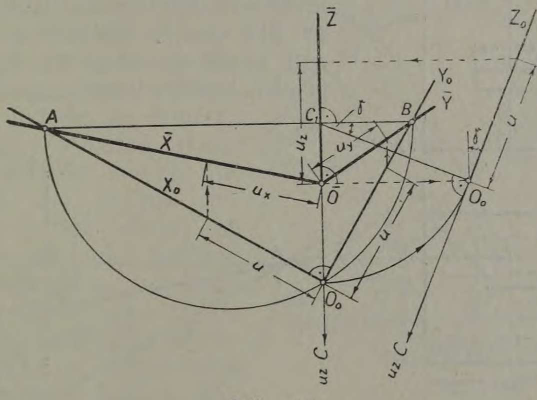
Līdzīgi varētu noteikt arī sagrozījumu koeficientus a un b, attiecīgi savietojot ar attēlu plakni taisnleņķa trīsstūrus AOA_1 un BOB_1, pie kam te varētu vēl ņemt vērā, ka šo trīsstūru augstumi ir vienādi ar trīsstūra COC_1 augstumu $\overline{OO_0}$. Dažādu apsvērumu dēļ, par kuriem būs runa vēlāk, ir tomēr izdevīgāk savietot ar attēlu plakni taisnleņķa trīsstūri AOB, pagriežot to ap hipotenūzu AB. Šī trīsstūra virsotnes savietojumu O_0 dabū, ievērojot, ka projekcija $\bar{O}$ pagriežot pārvietojas perpendikulāri rotācijas asij AB un savietotā stāvoklī (kā taisna leņķa virsotnei) tai jāatrodas uz pusriņķa, kas konstruēts uz AB kā diametra (var atlikt arī jau iepriekš noteikto slīpuma līnijas nogriežņa C_1O īsto garumu C_1O_0).

Atliekot uz koordinātu asu savietojumiem X_0 un Y_0 no punkta O_0 tos pašus nogriežņus u un nosakot to projekcijas u_x un u_y atpakaļ pagrieztā stāvoklī, dabūjam

$$a = \frac{u_x}{u} \text{ un } b = \frac{u_y}{u}.$$

Ja lielums u ir kāda iepriekš pieņemta mērvienība, tad lielumi u_x, u_y un u_z rāda, kā šī vienība mainās, ja to pēc kārtas novietojam uz koordinātu asīm X, Y un Z. Skaitļus u_x, u_y un u_z tādēļ mēdz saukt par garuma vienībai u atbilstošām *aksonometriskām vienībām*.

Ja kāda no koordinātu asīm, piemēram, Z ass, veido ļoti mazu leņķi γ ar attēlu plakni P, tad galvenā trīsstūra virsotne C var iznākt ārpus mūsu rīcībā esošā rasējuma laukuma pat tad, ja virsotni A izvēlamies ļoti tuvu aksonometrisko koordinātu sākumam $\overline{O}$. Tādā gadījumā ir izdevīgāk iepriekšējo konstrukciju izpildīt citā secībā,



219. ras.

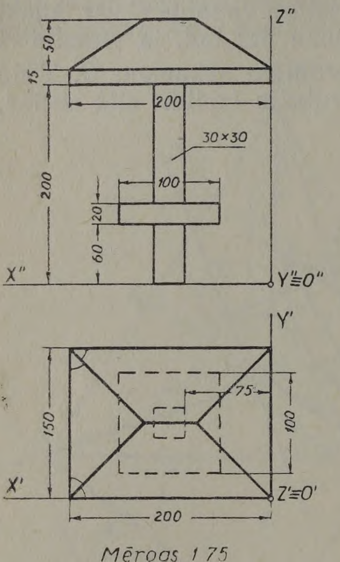
proti, savietot vispirms ar attēlu plakni trīsstūri AOB (219. ras.) un tikai tad trīsstūri COC_1. Tā kā punkts C nav rasējuma robežās, tad trīsstūra COC_1 virsotnes O savietojumu O_0 dabū, ievērojot, ka tam jāatrodas uz perpendikula $\overline{O}O_0$ pret $\overline{Z}$ asi attāluma C_1O_0 *no virsotnes* C_1, kas noteikts, savietojot trīsstūri AOB. Atliekot tagad uz X_0,Y_0 un Z_0 garuma vienību u, dabūjam, kā iepriekš, aksonometriskās vienības u_x, u_y un u_z.

Lai dabūtu kāda priekšmeta labu, īstenībai atbilstošu attēlu, koordinātu triedrs jānovieto pret attēlu plakni P tā, lai Z ass veidotu vismazāko leņķi ar attēlu plakni (sk. 72. nodalījumu). Aksonometrisko vienību u_x, u_y un u_z noteikšanai tad jāizmanto tikko aprakstītais paņēmiens.

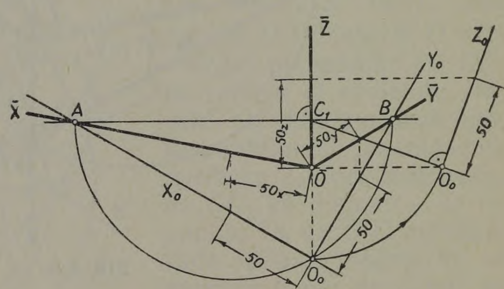
Izvēloties aksonometrisko asu virzienus un nosakot sagrozījumu koeficientus a, b un c resp. aksonometriskās vienības u_x, u_y un u_z, iespējams konstruēt ķermeņa aksonometrisko attēlu, konstruējot tā atsevišķo punktu aksonometriskos attēlus un tos atbilstoši savienojot. Lai nebūtu jāaprēķina ķermeņa katra punkta eksonometriskās koordinātes, ieteicams iepriekš konstruēt vēl t. s. koordinātu *sagrozījumu mērogus*. Šos mērogus, kuru veids var būt dažāds, apskatīsim reizē ar konkrētiem aksonometrisko attēlu konstruēšanas piemēriem.

72. **Ķermeņa ortogonāli aksonometriskā attēla konstruēšana.** Pieņemsim, ka doti attēlojamā ķermeņa (sarga nojumes) ortogonāli attēli projekciju plaknēs P_1 un P_2 (220. ras.), pie kam šie attēli konstruēti kādā zināmā mērogā, pieņemsim 1 : 75. Attēliem pierakstīti ķermeņa izmēri (cm), tādēļ tos var uzskatīt arī par attēlojamā ķermeņa brīvrokas skicēm. Jākonstruē šī ķermeņa aksonometriskais attēls mērogā 1 : 40, tātad ar apmēram divkāršu palielinājumu.

Izvēlamies vispirms koordinātu asis X, Y un Z (par šo asu projekcijām var izmantot arī doto attēlu simetrijas asis) un zīmējam (221. ras.) koordinātu triedra aksonometrisko attēlu, ievērojot agrākos aizrādījumus (sal. ar 219. ras.). Atliekot uz koordinātu asu savietojumiem X_0, Y_0 un Z_0 iepriekš izvēlētu vienību $u=50$, nosakām

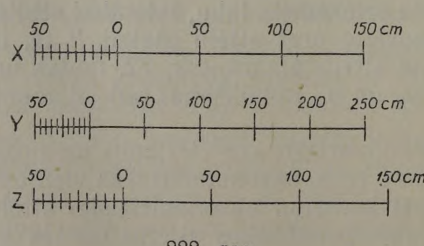


220. ras.



221. ras.

aksonometriskās vienības $u_x = 50_x$, $u_y = 50_y$ un $u_z = 50_z$. Vienības garums $u=50$ pie tam jāatliek atbilstoši ņemtajam mērogam (šai piemērā 1 :40), t. i., $u = \frac{50\text{ cm}}{40} = 1{,}25$ cm.

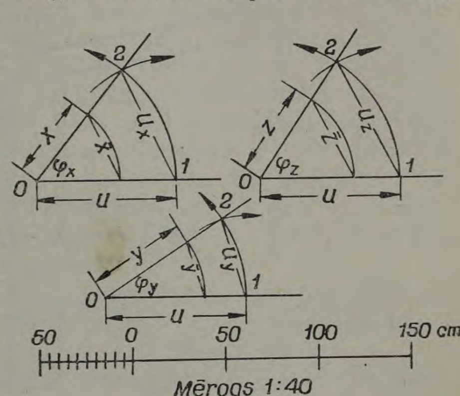


222. ras.

Konstruējam tagad koordinātu sagrozījumu mērogus. Atzīmēsim divus praksei vispiemērotākos mērogu veidus.

Pirmais veids — parastie *lineārie mērogi,* kas atsevišķi katrai koordinātu asij, — parādīts 222. rasējumā. Katra mēroga iedaļas (mēroga pamata) garums ir attiecīgi 50_x, 50_y un 50_z, pie kam viena iedaļa kreisā galā sadalīta, kā parasti, vēl sīkākās daļās (vienai apakšiedaļai atbilst dabā 5 cm).

Otrs veids — t. s. *leņķu mērogi* — parādīts 223. rasējumā. Izvēloties patvaļīgu, ne pārāk mazu nogriezni u, atliekam to pēc kārtas uz koordinātu asu savietojumiem un nosakām tam atbilstošos sagrozītos garumus u_x, u_y un u_z. Leņķu φ_x, φ_y un φ_z konstruēšanai no punkta O ar rādiusu $O—1=u$ velk riņķa loku, no punkta 1 to krusto ar otru, rādiusu u_x (*resp.* u_y vai u_z) loku un krustpunktu 2 savieno ar punktu O. Ja tagad gribam dabūt ķermeņa kāda punkta koordinātei atbilstošo aksonometrisko koordināti, tad ar šīs koordinātes garuma rādiusu velkam no O loku un izmērījam tā hordas garumu starp leņķa malām. Pati horda pie tam nemaz nav jāzīmē, arī loka vietā pietiek atrast tā krustpunktus ar leņķa malām. Leņķus φ_x, φ_y un φ_z var konstruēt arī ar kopēju malu $O—1$, bet tad viegli iespējama mērogu samainīšana. Atzīmēsim vēl, ka mēroga φ_x konstruēšanai par u un u_x varēja izvēlēties arī nogriežņus O_0A resp. $\overline{OA}$ un mēroga φ_y konstruēšanai par u un u_y attiecīgi nogriežņus O_0B un $\overline{OB}$, kas 221. rasējumā tieši izmērījami. Ja aksonometrisko attēlu gribam zīmēt citā mērogā nekā dotos ortogonālos attēlus, tad leņķu mērogi papildināmi vēl ar t. s. *aksonometrisko mērogu* — šai gadījumā tātad ar lineāro mērogu 1 : 40.



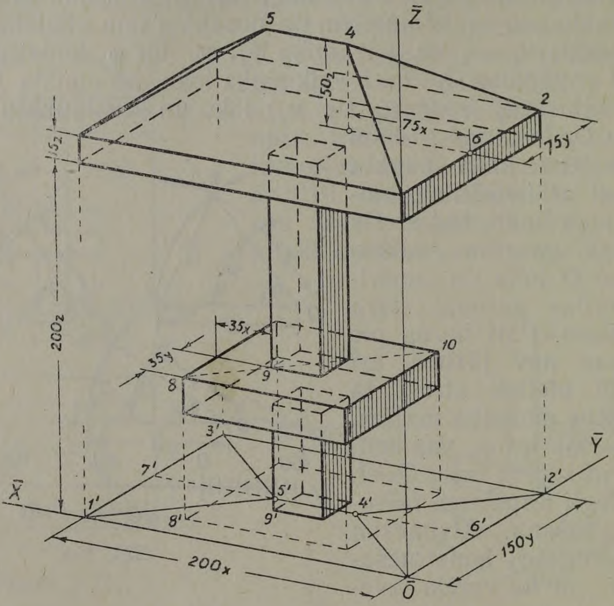
223. ras.

Šādus leņķu mērogus ieteicams lietot visos tais gadījumos, kad jānosaka tikai nedaudz aksonometrisko koordinātu, jo šos mērogus vieglāk izgatavot. Bez tam tie ir piemērotāki tad, ja ķermeņa ortogonālajos attēlos nav atzīmēti ķermeņa dabiskie izmēri un ķermeņa šķautņu garumi jāmērī tieši rasējumā. Lineāro mērogu priekšrocība tā, ka tos var izmantot arī tad, ja ķermeņa ortogonālie attēli doti kā ar izmēriem papildinātas brīvrokas skices.

Pēc tādējādi paveiktiem sagatavošanās darbiem var stāties pie paša ķermeņa aksonometriskā attēla konstruēšanas. Lai 221. rasējumā konstruētās palīglīnijas nesaraibinātu konstruējamo attēlu, aksonometriskās asis $\overline{X}$, $\overline{Y}$ un $\overline{Z}$ uzzīmētas 224. rasējumā par jaunu.

Ķermeņa aksonometriskā attēla konstruēšanu parasti sāk ar tā horizontālās projekcijas aksonometriskā attēla jeb t. s. *aksonomet-*

riskā virsskata konstruēšanu.[1] Iesācējiem šis paņēmiens jo sevišķi ieteicams visos tais gadījumos, kad vairums ķermeņa horizontālās projekcijas punktu nav paša ķermeņa punkti, kā tas ir pašlaik apskatāmā piemērā. Aksonometriskā virsskata konstruēšanai jānosaka ķermeņa horizontālās projekcijas punktu aksonometriskās koordinātes $\bar{x}$ un $\bar{y}$ un jāatliek tās aksonometrisko asu $\bar{X}$ un $\bar{Y}$ virzienos.



224. ras.

Konstrukcijai bez tam var izmantot jau pazīstamās ortogonālo projekciju īpašības, proti, ka paralēlas taisnes attēlojas par paralēlām taisnēm un šo taišņu nogriežņi saīsinās vienādā attiecībā. Tā, piemēram, punktu *3'* dabū kā no punktiem *1'* un *2'* aksonometrisko asu virzienos vilktu taišņu krustpunktu, punktus *4'* un *5'*, atliekot uz paralelograma viduslīnijas *6'—7'* taisnes nogriežņus $6'—4' = 7'—5' = 75_x$ utt.[2]

Ķermeņa punktu aksonometriskos attēlus tagad dabū, velkot no šo punktu aksonometriskajiem virsskatiem starus paralēli $\bar{Z}$ asij un atliekot uz šiem stariem katra punkta aksonometrisko koordinātī $\bar{z}$.

[1] Dažos gadījumos izdevīgāk iesākt ar ķermeņa frontālās (vai profilās) projekcijas aksonometriskā attēla — t. s. aksonometriskā pretstata (resp. sānskata) — konstruēšanu.

[2] Punktu aksonometriskie virsskati te apzīmēti tāpat kā to parastās horizontālās projekcijas. Lai vienkāršotu apzīmējumus, pie šī principa, ja tas nevar radīt pārpratumus, pieturēsimies arī turpmāk. Tā kāda punkta aksonometrisko attēlu turmāk apzīmēsim tāpat kā pašu telpas punktu, ne ar svītriņu virs apzīmējuma kā agrāk.

Ņemot vērā šķautņu paralelitāti, arī te iespējami vienkāršojumi. Konstruētos punktus atbilstoši savienojot, dabūjam paša ķermeņa aksonometrisko attēlu. Rasējumā atzīmētas arī ķermeņa neredzamās šķautnes, kaut gan aksonometriskos attēlos parasti to nedara.

Pietiekami ievingrinoties, aksonometriskā attēla konstruēšanu var izpildīt arī bez aksonometriskā virsskata palīdzības, konstruējot iepriekš kādu atsevišķu ķermeņa vienkāršu sastāvdaļu un pārējās daļas pakāpeniski «piebūvējot» klāt. Protams, tad ir jābūt skaidram telpiskajam priekšstatam par attēlojamo objektu. Lai vienkāršotu konstrukcijas, der ievērot sekojošo.

Ja taisne, kas savieno divus punktus (piem., *2* un *4)* nav paralēla nevienai koordinātu plaknei, tad, lai, izejot no viena punkta, konstruētu otru, jāatliek vienmēr trīs koordinātu nogriežņi *(*75_y, 75_x un 50_z*)*. Ja turpretim savienotāja taisne (piem., *8—9)* ir paralēla kādai koordinātu plaknei, bet nav paralēla nevienai koordinātu asij, tad tam pašam nolūkam jāatliek tikai divi koordinātu nogriežņi *(*35_y un 35_x*;* punktu *9* var noteikt arī ar diagonāli *8—10)*. Beidzot, ja savienotāja taisne ir paralēla kādai koordinātu asij (piem., *2—6)*, tad otru punktu var noteikt, atliekot vienu koordinātu nogriezni. Ievērosim, ka koordinātu vietā te varam operēt ar koordinātu nogriežņiem, t. i., ar koordinātu diferencēm.

Ja ir konstruēti koordinātu sagrozījumu lineārie mērogi, tad var arī apgriezti no aksonometriskā attēla noteikt punktu telpiskās koordinātas un konstruēt ķermeņa parastos ortogonālos attēlus.

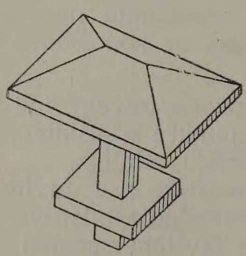
Noskaidrosim tagad, kā izvēlēties aksonometrisko asu virzienus, lai būtu garantija, ka iegūsim tiešām labus, īstenībai atbilstošus attēlus. Elementārākā prasība ir, lai Z ass, kas izvēlēta paralēli ķermeņa vertikālajām šķautnēm, arī attēlā būtu vertikāla. Lai gan Z ass ir sagāzta attiecībā pret attēlu plakni P, aksonometriskais attēls radīs ilūziju par ķermeņa šķautņu vertikalitāti.

Z ass slīpuma leņķi γ tomēr nedrīkstam izvēlēties pārāk lielu. Pieredze rāda, ka, izvēloties Z ass slīpumu pret attēlu plakni ievērojami lielāku par 20° (224. ras. $\gamma=20°$), ilūzija par šķautņu vertikalitāti izzūd. Par sacīto var pārliecināties, aplūkojot 225. rasējumu, kur tas pats objekts attēlots, kad Z ass slīpums $\gamma=40°$. Šis attēls vairs nedod tik pilnīgu īstenības ilūziju, objekts jau liekas sagāzts pret novērotāju.

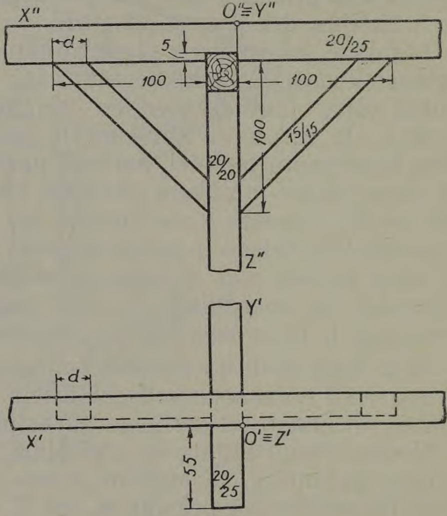
Lai dabūtu labu ortogonāli aksonometrisku attēlu, ieteicams rīkoties šādi (sk. 221. ras.). Izvēlas vispirms $\overline{Z}$ un Z_0 tā, lai leņķis starp abiem virzieniem nepārsniegtu 20°. Tālāk velk $O_0C_1 \perp Z_0$, $O_0\overline{O} \perp \overline{Z}$ un caur C_1 taisni, perpendikulāru $\overline{Z}$. Nosakot tagad koordinātu sākuma O savietojumu O_0 zem C_1 (loks ar rādiusu C_1O_0), iezīmē X_0 un Y_0 (vienu virzienu var izvēlēties brīvi). Krustpunktus A un B savienojot ar $\overline{O}$, dabū aksonometriskās asis $\overline{X}$ un $\overline{Y}$.

Koordinātu asu X un Y savietojumus X_0 un Y_0 ieteicams izvēlēties tā, lai aksonometriskās asis $\overline{X}$ un $\overline{Y}$ veidotu ar $\overline{Z}$ asi nevienādus leņķus, t. i., lai $AC_1 \neq C_1B$. Konstruētais aksonometriskais attēls tad dos tuvināti to pašu redzes iespaidu, kādu iegūstam, aplūkojot attēlojamo ķermeni vai nu vairāk no sāniem, vai vairāk no priekšas, bet abos gadījumos mazā slīpumā pret ķermeņa horizontālajām plaknēm.

Tā kā katram galvenajam trīsstūrim telpā atbilst pavisam divi koordinātu triedri, kas novietoti simetriski pret attēlu (t. i., rasējuma) plakni *P*, tad atkarībā no tā, kuru no šiem abiem triedriem izvēlamies, dabūjam divus dažādus ķermeņa aksonometriskos attēlus. Tā 221. rasējumā mēs izvēlējāmies to triedru, kas ir attēlu plaknes priekšpusē, t. i., kura veidotais trijplakņu kakts ir pievērsts novērotājam ar izliekto pusi. Rezultātā dabūjām attēlu, kas rāda ķermeni skatā no augšas,



225. ras.



226. ras.

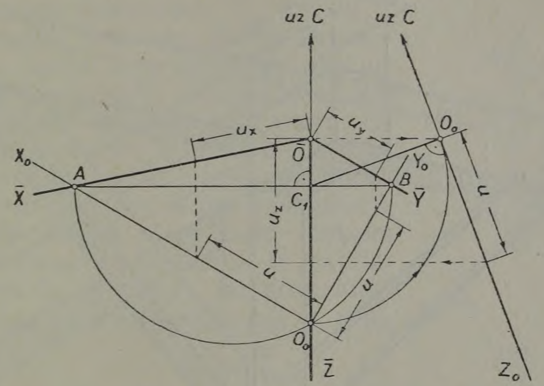
tādēļ šo aksonometrisko attēlu arī sauksim par *augšskatu*. Ja mēs tai pašā rasējumā būtu izvēlējušies otru triedru, t. i., to, kura veidotais trijplakņu kakts pievērsts novērotājam ar ieliekto pusi, tad iegūtu ķermeņa t. s. *apakšskatu*. Šo attēlu varam dabūt no iepriekšējā, ja, nemainot ķermeņa apveida projekcijas redzamību, pārējo ķermeņa šķautņu redzamību izmainām uz pretējo. Te gan jābrīdina, ka tādā veidā izmainītais attēls vispār nav d o t ā ķermeņa, bet tā atspoguļojuma attēls (spoguļa plakne — attēlu plakne *P*).[1] Vienīgi ķermeņiem ar divām simetrijas asīm horizontālajā projekcijā (kā šai gadījumā) spoguļattēls sakrīt ar ķermeņa attēlu līdz šim apskatītajā nozīmē.

Tamlīdzīgu pārpratumu novēršanai vienmēr jāievēro sekojošais. Iedomāsimies, ka esam nostājušies koordinātu triedra veidotā trijplakņu kakta iekšpusē ar muguru pret *Z* asi (sk. 220. ras.). Tad *X* ass atradīsies no mums pa kreisi, bet *Y* ass pa labi. Tāda pati orientācija ir aksonometriskām asīm 224. rasējumā. Pagriežoties ar mu-

[1] Par ķermeņu atspoguļojumiem būs runa VII nodaļā.

guru pret Z asi simetriskā triedra veidotajā trijplakņu kaktā, X un Y asu orientācija būs pretēja (X ass pa labi, Y ass pa kreisi), tādēļ, lai dabūtu pareizu ķermeņa apakšskatu, attiecīgi jāmaina koordinātu triedra orientācija arī 220. rasējumā.[1]

Ķermeņa apakšskata konstruēšanu aplūkosim atsevišķā piemērā. Attēlojamais objekts — būvkonstrukcijas sīkdaļa (konstruktīvs mezgls), kuras ortogonālie attēli (mērogā 1 : 50) doti 226. rasējumā. Piesaistot objektu koordinātu triedram, atšķirībā no iepriekšējā piemēra Z ass pozitīvais vērsums ir uz leju.



227. ras.

Ievērojot agrākos aizrādījumus, izvēlamies vispirms aksonometriskās asis (227. ras.) un konstruējam kādas patvaļīgas vienības u sagrozījumus u_x, u_y un u_z. Tā kā leņķi starp aksonometriskām asīm izvēlēti tādi paši kā 221. rasējumā, tad arī sagrozījumi iznāk tie paši. Aksonometrisko koordinātu atlikšanai tādēļ var izmantot tos pašus leņķu mērogus, kas konstruēti 223. rasējumā. Lineāros mērogus te nav ieteicams lietot, jo aksonometriskā attēla konstruēšanai jānosaka tikai nedaudzu ķermeņa šķautņu sagrozījumi.

Aksonometrisko mērogu izvēlēsimies 1 : 25, t. i., aksonometrisko attēlu salīdzinājumā ar dotajiem attēliem zīmēsim divreiz palielinātu. Tā kā abu mērogu attiecība ir vienkārša, šis aksonometriskais (lineārais) mērogs nav jākonstruē. Ir tikai jāatceras, ka katra koordināte jāatliek divkārt palielināta.

Lai dabūtu apakšskatu, koordinātu triedra veidotais trijplakņu kakts jāiedomājas pievērsts novērotājam ar izliekto pusi. Arī koordinātu triedra orientācija abos rasējumos tad sakrīt.

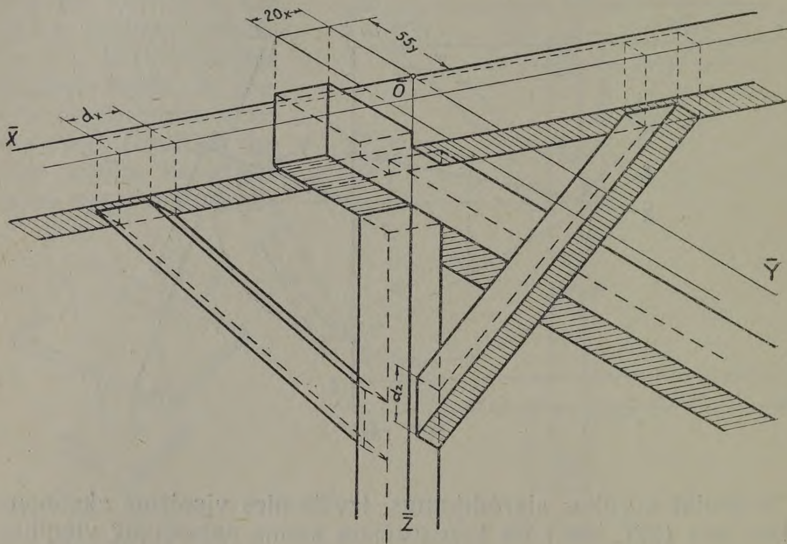
Iesākam atkal ar aksonometriskā virsskata konstruēšanu (sk. 228. ras.). Atšķirībā no iepriekšējā piemēra te šis virsskats iznāk ķermeņa attēla augšpusē, citādi konstrukciju izpilda pilnīgi analo-

---

[1] Analitiskā ģeometrijā šai sakarībā runā par kreiso resp. labo koordinātu sistēmu.

ģiski. Velkot katra aksonometriskā virsskata punktā $\overline{Z}$ asij paralēlus starus un atliekot uz šiem stariem katra punkta aksonometrisko koordinātu $\overline{z}$, dabūjam ķermeņa punktu aksonometriskos attēlus un, pēdējos savienojot, paša ķermeņa aksonometrisko attēlu.

Arī šai gadījumā varēja iztikt bez aksonometriskā virsskata un ķermeņa attēla konstruēšanu sākt, piemēram, ar kādas atsevišķas sijas attēla konstruēšanu, pārējo siju attēlus piezīmējot klāt pakāpeniski.



228. ras.

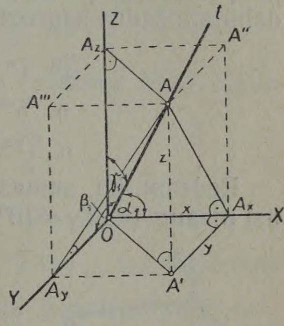
Attēlojuma izvēle katrā atsevišķā gadījumā ir atkarīga no uzdevuma, kāds jāpilda attēlam. Lai dabūtu īstenībai atbilstošus attēlus, ķermeņus, kurus esam pieraduši aplūkot no augšas, nav izdevīgi attēlot apakšskatā. Izņēmums varētu būt gadījumā, ja gribam parādīt kādu ķermeņa sīkdaļu, kas augšskatā ir aizsegta. Dažreiz atkal (kā pēdējā piemērā) dabiskāk parādīt ķermeni tieši apakšskatā.

73. Ortogonāli aksonometrisko attēlu speciāli veidi. Līdz šim aplūkoto aksonometrisko attēlu konstruēšanu apgrūtina tas apstāklis, ka koordinātu asīm paralēlās (dominējošās) ķermeņa šķautnes sagrozās dažādā attiecībā un ir jāsagatavo katrai asij savs sagrozījuma mērogs. Zināmu vienkāršojumu dabū, izvēloties divus vai pat visus trīs sagrozījumus vienādus. Noskaidrosim, kā ir jāizvēlas aksonometrisko asu virzieni, lai iegūtu šādus sagrozījumus.

Pieņemsim, ka gribam panākt, lai būtu vienādi sagrozījumi pa Y un Z asi, t. i., lai $b=c$. Tā kā $b=\cos\beta$, $c=\cos\gamma$, tad ir jāprasa, lai $\beta=\gamma$. Taisnleņķa trīsstūri $BO\overline{O}$ un $CO\overline{O}$ (sk. 216. ras.) ar kopēju malu $O\overline{O}$ tad ir kongruenti, tādēļ $B\overline{O}=\overline{O}C$, no tā tālāk seko, ka punkts $\overline{O}$ un galvenā trīsstūra virsotne A atrodas uz malas BC vidusperpendikula. Galvenajam trīsstūrim tātad jābūt vienādsānu trīsstūrim $(AB=AC)$ un $\overline{X}$ asij — šī trīsstūra virsotnes leņķa A un reizē leņķa $\overline{Y}\overline{O}\overline{Z}$ bisektrisei. Pie līdzīga slēdziena nonākam, pieņemot vienādus sagrozījumus pa X un Z vai X un Y asīm.

Rezultātā esam tātad ieguvuši šādu noteikumu aksonometrisko asu izvēlei: *lai sagrozījumi divu asu virzienos būtu vienādi, tad vienai aksonometriskajai asij jābūt pārējo divu asu veidotā leņķa bisektrisei.*

Lai izstrādātu praktisku shēmu aksonometrisko asu izvēlei šajā speciālajā gadījumā, konstatēsim iepriekš sakaru, kāds pastāv ortogonālajā aksonometrijā starp sagrozījumu koeficientiem a, b un c.



229. ras.

Tā kā sagrozījumu koeficientus izsaka ar koordinātu asu slīpuma leņķu kosinusiem, tad jāsameklē sakars starp šiem leņķiem resp. to kosinusiem. Šie leņķi ir papildleņķi leņķiem α_1, β_1 un γ_1, ko projecētājs stars OO veido ar koordinātu asīm X, Y un Z. Bet

$$\cos\alpha=\sin\alpha_1,\ \cos\beta=\sin\beta_1,$$
$$\cos\gamma=\sin\gamma_1,$$

tādēļ jāsameklē sakars starp leņķiem, ko patvaļīga taisne t caur O (229. ras.) veido ar koordinātu asīm X, Y un Z.

Ja x, y un z ir taisnes t patvaļīga punkta A koordinātes, tad

$$x^2+y^2=(OA')^2 \text{ un } (OA')^2+z^2=(OA)^2,$$
$$\text{tādēļ } x^2+y^2+z^2=(OA)^2$$

$$\text{jeb } \left(\frac{x}{OA}\right)^2+\left(\frac{y}{OA}\right)^2+\left(\frac{z}{OA}\right)^2=1.$$

No taisnleņķa trīsstūriem OAA_x, OAA_y un OAA_z atrodam, ka $x=OA\cdot\cos\alpha_1$, $y=OA\cdot\cos\beta_1$, $z=OA\cdot\cos\gamma_1$. Ievietojot šīs vērtības iepriekšējā vienādojumā, dabū

$$\cos^2\alpha_1+\cos^2\beta_1+\cos^2\gamma_1=1,$$

un tālāk

$$(1-\sin^2\alpha_1)+(1-\sin^2\beta_1)+(1-\sin^2\gamma_1)=1,$$
$$\sin^2\alpha_1+\sin^2\beta_1+\sin^2\gamma_1=2,$$
$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2$$

jeb

$$(1)\qquad a^2+b^2+c^2=2,$$

t. i., *ortogonālā aksonometrijā sagrozījumu koeficientu kvadrātu summa vienlīdzīga ar divi.*

Izvēloties sagrozījumus pa Y un Z asīm vienādus, $\beta=\gamma$ un

$$\cos^2\alpha+2\cos^2\gamma=2.$$

No pēdējās sakarības izriet, ka

$$\cos\alpha=\sqrt{2(1-\cos^2\gamma)}=\sqrt{2}\sin\gamma.$$

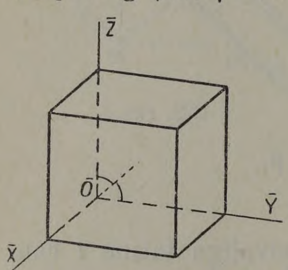
Lai iegūtu īstenībai atbilstošus attēlus, tad, kā agrāk aizrādījām, jāizvēlas $\gamma=20°$. No pēdējās sakarības atsevišķām γ vērtībām dabūjam šādus sagrozījumus pa X asi:

ja $\gamma=20°$, $a=\cos\alpha\approx0{,}48$;

„ $\gamma=15°$, $a=\cos\alpha\approx0{,}37$;

„ $\gamma=10°$, $a=\cos\alpha\approx0{,}25$.

Redzam, ka, samazinot leņķi γ (tātad arī β), sagrozījums pa X asi pieaug (kad $\gamma=10°$, X asij paralēlās šķautnes jau attēlojas apm. 4 reizes saīsinātas). Pieredze rāda, ka visdabiskākos attēlus dabū, ņemot $\beta=\gamma\approx20°$ ($b=c=\cos 20°\approx0{,}94$). Tādi leņķi, piemēram, ņemti, attēlojot 230. rasējumā kubu. Lai gan X asij paralēlās kuba šķautnes ir attēlojušās stipri saīsināti, attēls tomēr samērā labi reprezentē kubu. Ja Y un Z ass slīpums pret attēlu plakni ir mazāks, lielais sagrozījums X ass virzienā jau ietekmē attēlu nelabvēlīgi.



230. ras.

Izvēloties sagrozījumu koeficientus, aksonometrisko asu virzieni ir viennozīmīgi noteikti. Leņķus starp aksonometriskajām asīm varam aprēķināt, izejot atkal no galvenā trīsstūra. Bet, pirms pārējam pie šiem aprēķiniem, izdarīsim vēl vienu vienkāršojumu.

Izvēlēsimies sagrozījumu koeficientus

$$a=\frac{c}{2},\quad b=c,$$

kas aptuveni atbilst iepriekš noskaidrotai sagrozījumu koeficientu vēlamajai attiecībai.[1] No vienādojuma (1) tad dabū

$$\frac{c^2}{4}+c^2+c^2=2,$$

kas dod

(2) $$c=b=\sqrt{8/9}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\approx0{,}94,\ a\approx0{,}47.$$

[1] Var ņemt arī $a=c$, $b=\frac{c}{2}$.

Noteiksim tagad, kādiem ir jābūt leņķiem starp aksonometriskajām asīm, lai iegūtu šādus sagrozījumus. Vienādsānu taisnleņķa trīsstūrī BOC (sk. 216. ras.)

$$BC=\sqrt{(OB)^2+(OC)^2}=\sqrt{2(OC)^2}=OC\sqrt{2},$$

bet vienādsānu trīsstūrī $B\bar{O}C$

$$\bar{O}\bar{B}=\bar{O}\bar{C}=OC\,.\cos\gamma=OC\,.\,c=OC\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

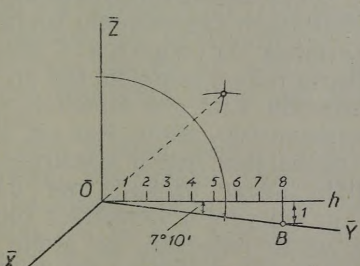
$$BA_1=A_1C=\frac{1}{2}BC=OC\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Apzīmējot leņķi $B\bar{O}A_1$ ar δ, no taisnleņķa trīsstūra $B\bar{O}A_1$ dabū

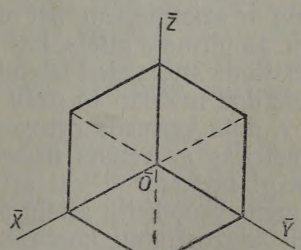
$$\sin\delta=\frac{BA_1}{\bar{O}B}=OC\frac{\sqrt{2}}{2}:OC\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{3}{4},$$

kam atbilst $\delta\approx48°35'$, tādēļ $\measuredangle\ \bar{Y}\bar{O}\bar{Z}=2\delta=97°10'=90°+7°10'$.

Tā kā $\bar{Z}$ asi parasti izvēlas vertikālu un $\operatorname{tg} 7°10'\approx\frac{1}{8}$, tad iegūstam šādu grafisku paņēmienu aksonometrisko asu konstruēšanai (sk. 231. ras.). No brīvi izvēlēta aksonometrisko koordinātu sākuma $\bar{O}$ velk horizontālu taisni h, uz kuras no punkta $\bar{O}$ atliek astoņas patvaļīgas vienības, bet no galapunkta 8 vertikāli uz leju — vienu šo vienību. Stars $\bar{O}B$ tad dod $\bar{Y}$ ass virzienu, bet $\bar{X}$ asi dabūjam kā leņķa $\bar{Y}\bar{O}\bar{Z}$ bisektrises turpinājumu.



231. ras.



232. ras.

Aksonometrisku attēlu, kam sagrozījumi divu asu virzienos izvēlēti vienādi, mēdz saukt par *dimetrisku attēlu (projekciju)* atšķirībā no vispārīgā t. s. *trimetriskā attēla.*

Vēl lielāku vienkāršojumu dabū, izvēloties vienādus visus trīs sagrozījumu koeficientus. Sakarā ar iepriekšējo katra aksonometriskā ass tad ir abu pārējo asu veidotā leņķa bisektrise, t. i., aksonometriskās asis veido savstarpēji 120° leņķus. Uz šādām aksonometriskām asīm konstruētu attēlu sauc par *izometrisku attēlu.* No vienādojuma (1) dabū, ka sagrozījumu koeficienti šai gadījumā ir

$$(3) \qquad a=b=c=\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 0{,}82.$$

Salīdzināšanai 232. rasējumā šādā izometriskā projekcijā (apakšskatā) parādīts kubs. Kuba apveida projekcija ir regulārs sešstūris. Tā kā Z ass slīpums γ ir apmēram 35° ($\cos 35^\circ \approx 0{,}82$), tad attēls nedod ilūziju par ķermeņa vertikalitāti. Šī iemesla dēļ ortogonāli izometriskus attēlus praksē lieto samērā reti. Ja arī vienkāršas konstrukcijas dēļ šo attēlojumu veidu kādreiz izvēlas, tad ieteicams iztikt bez sagrozījumu mēroga, atliekot koordinātu nogriežņus nesagrozītus, t. i., zīmēt attēlu ar palielinājumu $1 : 0{,}82 \approx 1{,}22$. Attiecīgu palielinājumu var izvēlēties arī, konstruējot ķermeņa ortogonāli dimetrisko attēlu, un tādējādi arī šeit iztikt bez sagrozījumu mērogiem.

Ja, konstruējot ķermeņa izometrisku vai dimetrisku attēlu, gadās, ka dažu ķermeņa šķautņu attēli sakrīt, nepieciešams mainīt attēlojuma veidu, t. i., pāriet uz trimetrisku attēlojumu.

2. §. SLĪPĀ AKSONOMETRIJA

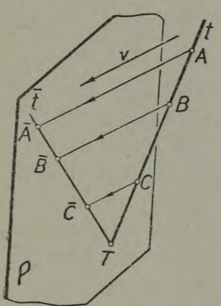
74. Slīpo projekciju īpašības. Iedomāsimies, ka esam izvēlējušies aksonometrisko asu virzienus un noteikuši iepriekš aprakstītā veidā koordinātu sagrozījumu koeficientus. Izmainīsim tagad patvaļīgi kādu no šiem sagrozījumu koeficientiem (to palielinot vai pamazinot) un konstruēsim kāda ķermeņa divus aksonometriskos attēlus, vienu ar sākotnējiem, bet otru ar izmainītiem sagrozījumu koeficientiem. Ja pirmais attēls, kas ir dotā ķermeņa o r t o g o n ā l i aksonometriskais attēls, dod īstenībai atbilstošu redzes iespaidu, tad arī otrs attēls dod tuvināti to pašu redzes iespaidu, kaut gan šis attēls vairs n a v dotā ķermeņa ortogonāli aksonometrisks attēls. Par cik aksonometrijas galvenais uzdevums ir uzskatāmu attēlu konstruēšana, svarīgi noskaidrot, vai arī otru attēlu nevar uzskatīt par d o t ā ķermeņa projekciju attēlu plaknē P, jo tad varētu vienkāršot koordinātu sagrozījumu koeficientus. Kā vēlāk redzēsim, šo attēlu var vienmēr uzskatīt par dotā ķermeņa s l ī p u projekciju tai pašā attēlu plaknē P, tādēļ to atšķirībā no iepriekšējā arī sauc par dotā ķermeņa *slīpi aksonometrisko attēlu.*

Pirms pārejam pie slīpās aksonometrijas likumu iztirzāšanas, atzīmēsim dažas vienkāršas slīpo projekciju īpašības.

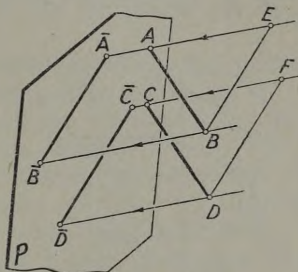
Ja P (233. ras.) ir attēlu plakne[1] un v — projecēšanas virziens (kas nav perpendikulārs plaknei P), tad par kāda punkta A slīpo projekciju $\bar{A}$ šai plaknē, kā zināms, sauc caur punktu A vilktā projecētāja stara krustpunktu ar plakni P. Punkta un vispār kāda tel-

[1] Plakni P, tāpat kā līdz šim, vienmēr iedomājamies vertikālā stāvoklī.

pas objekta slīpo projekciju var uzskatīt arī par tā ēnu plaknē P, kad v ir gaismas staru virziens, tādēļ objektu slīpajām projekcijām ir tās pašas īpašības kā to ēnām paralēlapgaismojumā. Tā taisnes t slīpā projekcija $\bar{t}$ vispār (ja t nav paralēla v) ir taisne, kas iet caur dotās taisnes krustpunktu T (pēdu) ar attēlu plakni; paralēlu taišņu projekcijas ir paralēlas; attēlu plaknei paralēls taisnes nogrieznis vai plaknes daļa attēlojas šai plaknē īstā lielumā, nogriežņa projekcija paralēla pašam telpas taisnes nogrieznim utt.



233. ras.



234. ras.

Ja AB un BC ir divi taisnes t nogriežņi (233. ras.), tad, tāpat kā ortogonālajā projekcijā (sk. 11. nodalījumu), tie attēlojas ar vienādu saīsinājumu, t. i., $\overline{AB} : AB = \overline{BC} : BC$. Divi taisnes nogriežņi saīsinās vienādā attiecībā arī tad, ja tie neatrodas uz vienas, bet divām paralēlām taisnēm (234. ras.). Par to var pārliecināties, novelkot $EB \| \overline{AB}$ un $FD \| \overline{CD}$ un ievērojot trīsstūru ABE un CDF līdzību. Piezīmēsim vēl, ka atkarībā no projecēšanas virziena saīsināšanās koeficients var būt arī lielāks par vienu, t. i., slīpā projekcijā kāda taisnes nogriežņa attēls var būt arī garāks par pašu taisnes nogriezni.

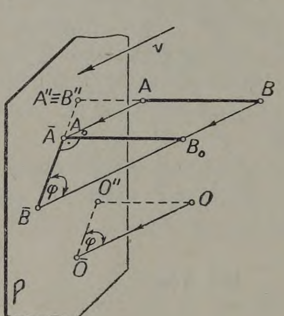
Attēlu plaknei perpendikulāru taisnes nogriežņu attēli ir taisnes nogriežņi, kas paralēli projecētāja stara v o r t o g o n ā l a j a i projekcijai attēlu plaknē P (235. ras.). Izmantojot šo likumu, kas pazīstams jau no ēnu teorijas (sk., piem., 190. ras.), var noteikt projecētāju staru slīpumu pret attēlu plakni, ja ir zināms kāda plaknei P perpendikulāra taisnes nogriežņa AB garums un slīpā projekcija $\overline{AB}$. Tiešām, ar translāciju paralēli v var pārvietot taisnes nogriezni stāvoklī A_0B_0, kurā A_0 sakrīt ar $\bar{A}$, bet taisnes nogriežņa slīpā projekcija $\overline{AB}$ nemainās. Tā kā trīsstūris $B_0\overline{AB}$ ir taisnleņķa trīsstūris, kam abas katetes ir zināmas, tad ir zināms arī projecētāju staru virziens $v \| B_0\bar{B}$.

Te gan jāpiezīmē, ka šis virziens ir viennozīmīgi noteikts tikai tad, ja ir zināms, kurā pusē attēlu plaknei taisnes nogrieznis AB atrodas. Ja tas pats taisnes nogrieznis atrodas otrā pusē plaknei P tai pašā attālumā no tās, tad projecētāju staru virziens (ja projekcijas $\overline{A}\overline{B}$ virziens un garums paliek tas pats) ir simetrisks iepriekšējam attiecībā pret attēlu plakni P.

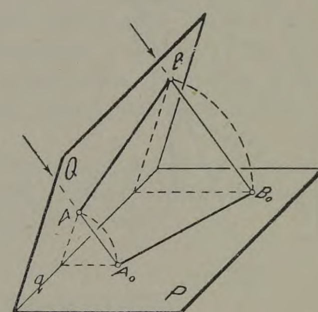
Apzīmējot ar φ stara v slīpumu pret attēlu plakni P, varam rakstīt

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{\overline{A}\overline{B}}{A_0 B_0} = \frac{\overline{A}\overline{B}}{AB},$$

t. i., *attēlu plaknei perpendikulāru taisnes nogriežņu sagrozījuma koeficients ir vienlīdzīgs projecētāju staru slīpuma leņķa kotangensam.*



235. ras.



236. ras.

Slīpuma leņķi φ, starp citu, var noteikt, ja ir zināma kāda punkta O ortogonālā projekcija O'', slīpā projekcija $\overline{O}$ un attālums no plaknes P (235. ras.), jo tad iespējams konstruēt taisnleņķa trīsstūri $OO''\overline{O}$, kam šaurais leņķis pie katetes $O''\overline{O}$ ir leņķis φ.

Ortogonālo projekciju metodei tik svarīgā teorēma par taisna leņķa projekcijām (sk. 16. nodalījumu) te vispār vairs nav spēkā. Var konstatēt, ka taisns leņķis, kam t i k a i v i e n a mala paralēla attēlu plaknei, attēlojas slīpā projekcijā par taisnu leņķi vienīgi tad, ja projecētāju staru virziens ir perpendikulārs šai malai. Arī kādai plaknei perpendikulāras taisnes projekcija tādēļ vispār nav perpendikulāra plaknes galveno līniju projekcijām.

Atzīmēsim vēl kādu speciālu gadījumu, kad taisns leņķis (vispār plaknes figūra) slīpā projekcijā attēlojas nesagrozīti. Izvēlēsimies patvaļīgā plaknē Q (236. ras.) kādu figūru — vienkāršības dēļ taisnes nogriezni AB — un savietosim šo plakni ar plakni P, pagriežot ap tās galveno līniju (pēdu) q. Punkti A un B pagriežot izveido riņķa lokus, pie kam abas rotācijas plaknes ir perpendikulāras rotācijas asij q. Šo riņķa loku hordas AA_0 un BB_0, t. s. *rotācijas hordas,* ir savstarpēji paralēlas, pie tam perpendikulāras plakņu Q un P veidotā divplakņu kakta bisektrisu plaknei. Kāda taisnes nogriežņa savietojumu ar plakni tādēļ var uzskatīt arī par taisnes nogriežņa slīpo projekciju šai plaknē rotācijas hordu virzienā.

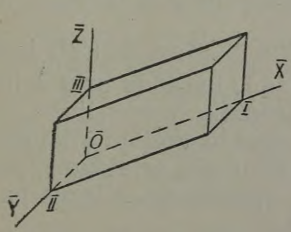
Izmantojot šo faktu, var formulēt sekojošu noteikumu par taisna leņķa (vispār plaknes figūras) projekcijām:

Plaknes figūra attēlojas slīpā projekcijā īstā lielumā arī tad, ja projecēšanas virziens ir perpendikulārs attēlu un figūras plakņu veidotā divplakņu kakta bisektrisu plaknei.

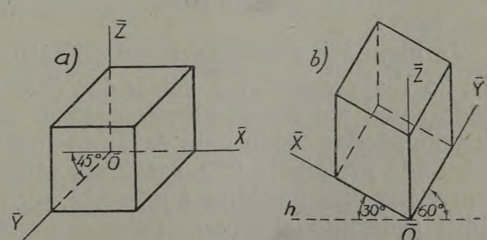
75. Aksonometrisko asu izvēle slīpā aksonometrijā. Slīpās aksonometrijas speciāli veidi. Kāda ķermeņa slīpi aksonometrisko attēlu konstruē tāpat kā tā ortogonāli aksonometrisko attēlu, ja vien zināms, kā izvēlēties aksonometrisko asu virzienus un kā noteikt sagrozījumu koeficientus katrai asij.

Izrādās, ka slīpā aksonometrijā aksonometrisko asu virzienus un sagrozījumu koeficientus var izvēlēties pilnīgi patvaļīgi. Šis apgalvojums izriet no t. s. Polkes teorēmas: *no viena punkta plaknē vilktus trīs patvaļīga garuma un virziena taisnes nogriežņus, kas neatrodas uz kopējas taisnes, var vienmēr uzskatīt par no viena telpas punkta vilktu trīs vienāda garuma savstarpēji perpendikulāru taisnes nogriežņu paralēlprojekcijām.*

Šai aksonometrijas pamatteorēmai tomēr ir vairāk teorētiska nekā praktiska nozīme, tādēļ tās pierādījumu neaplūkosim. Pēc šīs teorēmas iznāk, ka, piemēram, pat tādu attēlu kā 237. raseiums ar ļoti nevienādām aksonometriskām vienībām $\bar{O}I=u_x$, $\bar{O}II=u_y$, $\bar{O}III=u_z$ drīkstam tomēr uzskatīt par kāda kuba slīpi aksonometrisku attēlu. Kas kādreiz novērojis groteskos ēnu veidojumus, ko vertikāli priekšmeti īsi pirms saulrieta met horizontālajā plaknē, tam iepriekšējais apgalvojums vairs neliksies pārspīlēts. Un tomēr par kuba a t t ē l u šī vārda īstajā nozīmē mēs šādu projekciju uzskatīt nevaram, jo tas nedod mums to redzes iespaidu, kādu esam pieraduši iegūt, aplūkojot kubu.[1] Lai dabūtu īstenībai atbilstošāku kuba attēlu, gribot negribot ir jāuzliek kādi ierobežojumi gan aksonometrisko asu virzieniem, gan koordinātu sagrozījumu koeficientiem.



237. ras.



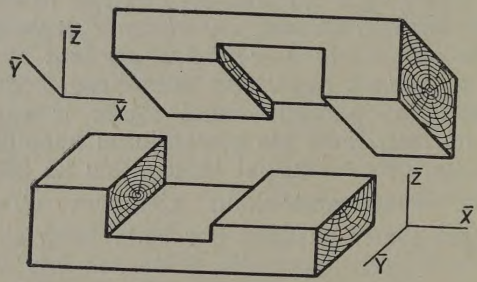
238. ras.

Teorēmā nav nekas minēts arī par kuba šķautņu (pēdējā interpretācijā) un to attēlu garumu attiecību. Pēc dotajiem aksonomet-

[1] Lai iegūtu pilnīgāku īstenības ilūziju, attēls 237. rasējumā ir jāaplūko ļoti mazā leņķī pret rasējuma plakni, aptuveni *X* ass vērsumā.

risko asu virzieniem šos sagrozījumu koeficientus pa asīm, tāpat projecētāju (redzes) staru virzienu pret attēlu plakni, ir samērā grūti noteikt. Ja, konstruējot kāda ķermeņa slīpi aksonometrisko attēlu, sagrozījumu koeficientus izvēlamies patvaļīgus, tad vispār neiegūsim dotā ķermeņa, bet tam līdzīga ķermeņa projekciju, t. i., dotā ķermeņa palielinātu vai pamazinātu attēlu.[1]

Praksē, konstruējot kāda ķermeņa slīpi aksonometrisku attēlu, attēlu plakni P parasti izvēlas paralēli kādai no koordinātu plaknēm, dažreiz arī paralēlu Z asij. Tas atbilst slīpās aksonometrijas uzdevumam — vienkāršot aksonometrisko attēlu konstruēšanu salīdzinājumā ar attēlu konstruēšanu ortogonālajā aksonometrijā. Šai sakarībā tuvāk aplūkosim tikai šos speciālos slīpās aksonometrijas veidus, pie kam (salīdzināšanai) kopā ar koordinātu asīm attēlosim arī ar šīm asīm saistītu kubu.



239. ras.

Iedomāsimies attēlu plakni P savietotu ar kādu no koordinātu plaknēm un projecētāju staru slīpumu pret attēlu plakni $\varphi=45°$. Tad kuba skaldnes, kas ir paralēlas plaknei P, attēlosies šai plaknē īstā lielumā, proti, kvadrātu veidā, bet pārējo skaldņu attēli būs rombi, jo arī plaknei P perpendikulārās kuba šķautnes attēlojas nesagrozīti ($\operatorname{ctg}\varphi=1$).

Ja plakne P savietota ar koordinātu plakni XOZ un šaurais leņķis, ko $\bar{Y}$ ass veido ar $\bar{X}$ asi, ir 45° (238. a ras.), tad tādu projekciju mēdz saukt par *kavalieru perspektīvu* (arī frontālo izometriju)[2]. Šo aksonometrijas veidu lieto dažādu tehnisku objektu sīkdaļu attēlošanai. Šādā projekcijā 239. rasējumā attēlots divu siju salaidums, pie kam viena sija parādīta augšskatā, otra — apakšskatā. Blakus parādīti attiecīgie aksonometrisko asu virzieni.

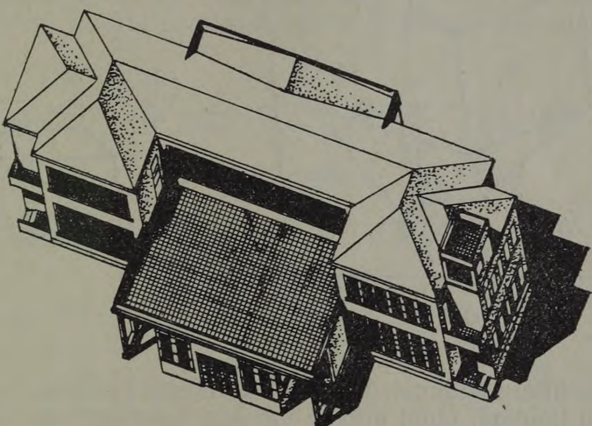
Ja plakne P savietota ar koordinātu plakni XOY (238. b ras.), tad tādu aksonometrijas veidu sauc par *militāro perspektīvu*. Leņķi, ko $\bar{X}$ un $\bar{Y}$ ass veido ar horizontālo virzienu h (ar virzienu, perpen-

[1] Jāatzīmē, ka jēdzieni «projekcija» un «attēls», stingri ņemot, ir identiski tikai tai gadījumā, ja attēls konstruēts mērogā 1 : 1.

[2] Par kavalieri (franču — *cavalier*) agrāk sauca mākslīgu paaugstinājumu forta vidū, kur novietoja cietokšņa smago artilēriju.

dikulāru $\overline{Z}$ asij), parasti ir 30° un 60°. Šo attēlojuma veidu lielāko tiesu izmanto nocietinājumu, komplicētāku celtņu vai pat vesela celtņu kompleksa attēlošanai (240. ras.).

Tā kā attēlu plakni parasti izvēlas vertikālu, tad dabiskāk iedomāties, ka ķermeņa militārā perspektīva iegūta, novietojot Z asi paralēli attēlu plaknei P (241. ras.). Ja projecētāju staru virzienu izvēlamies paralēlu plaknei Q, kas iet caur Z asi perpendikulāri plaknei P, un ja šie stari veido 45° leņķi ar attēlu plakni, tad tie ir



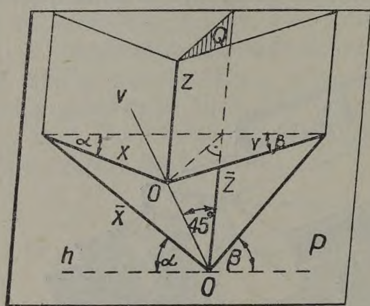
240. ras.

perpendikulāri plakņu P un XOY veidotā divplakņu kakta bisektrisu plaknei. Sakarā ar agrāk konstatēto noteikumu (sk. 74. nodalījumu) visas figūras, kas atrodas plaknē XOY, tātad arī taisnais leņķis starp X un Y asīm, arī šai gadījumā attēlosies plaknē P īstajā lielumā. Leņķi α un β, ko aksonometriskās asis $\overline{X}$ un $\overline{Y}$ veido ar horizontālo virzienu h, ir leņķi, ko koordinātu asis X un Y veido ar attēlu plakni P. Šinī uztverē abiem iepriekš minētajiem aksonometrijas veidiem — kavalieru un militārajai perspektīvai — atšķirība ir tikai koordinātu asu X un Y stāvoklī pret attēlu plakni. Pirmajā gadījumā viena no šīm asīm ir paralēla attēlu plaknei, bet otrajā gadījumā abas ir slīpas pret attēlu plakni. Šim faktam būs nozīme turpmāk pozicionālo uzdevumu atrisināšanai aksonometrijā (sk. 3. §).

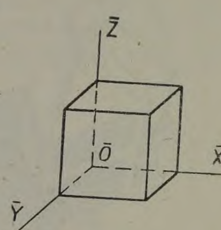
Abas tikko minētās projekcijas ir izometriskas projekcijas (koordinātu sagrozījumu koeficienti $a=b=c=1$). Atstājot attēlu plakni P savietotu ar koordinātu plakni XOZ (kā pirmajā gadījumā), bet izmainot projecēšanas virzienu, iegūsim ķermeņa dimetrisku projekciju, jo y koordinātes vairs neattēlosies īstajā lielumā. Ja sagrozījums pa Y asi $b=\frac{1}{2}$(242. ras.), tad tādu aksonometrijas veidu mēdz saukt par *kabineta projekciju* (arī frontālo dimetriju). Šo projekcijas veidu līdz šim izmantojām paskaidrojošiem («telpiskiem») attēliem.

Tādā nosacījumā konstruētie attēli ir jau tuvāk īstenībai. Šauro leņķi, ko $\bar{Y}$ ass veido ar $\bar{X}$ (resp. $\bar{Z}$) asi, parasti izvēlas 45°, bet tikpat labi var ņemt 30° vai 60° leņķus (rasēšanas trīsstūru leņķi!). No neērtības, ka Y asij paralēlās ķermeņa šķautnes jāatliek attēlā divreiz saīsinātas, var izvairīties, zīmējot divreiz palielinātus attēlus.

Aplūkotajiem slīpās aksonometrijas veidiem salīdzinājumā ar ortogonāli aksonometriskajām projekcijām ir tā priekšrocība, ka



241. ras.



242. ras.

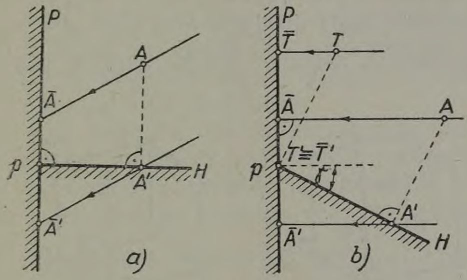
vienai koordinātu plaknei paralēlās ķermeņa šķautnes vienmēr attēlojas īstā lielumā, tādēļ attēlus var ātri konstruēt un viegli mērīt. Tomēr šādiem attēliem (kā visām slīpām projekcijām) piemīt trūkums: īstenībai atbilstoša redzes iespaida iegūšanai tie jāaplūko ieslīpi pret rasējuma plakni, proti, projecētāju staru virzienā. Šo iemeslu dēļ slīpajā aksonometrijā nav lietderīgi attēlu plakni izvēlēties slīpi pret visām koordinātu asīm, jo tādā gadījumā attēli zaudē savu galveno priekšrocību. Vienīgi attēlojot komplicētākas būvkonstrukcijas, dažreiz rodas nepieciešamība atkāpties no šiem priekšstatiem. Lai labāk parādītu būvkonstrukcijas atsevišķo sīkdaļu telpisko sakarību, var izvēlēties arī citus aksonometrisko asu virzienus un sagrozījumu koeficientus.

3. §. KONSTRUKCIJAS AKSONOMETRISKĀ ATTĒLĀ

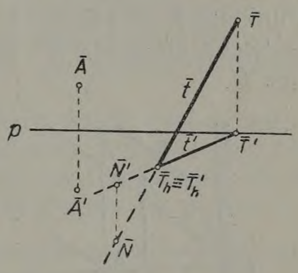
76. Pozicionālie uzdevumi. Ēnu konstruēšana aksonometrijā. Līdz šim esam aplūkojuši ķermeņa aksonometriskā attēla konstruēšanu, izmantojot ķermeņa ortogonālo attēlu savietotā rasējumā. Dažos gadījumos tomēr ir nepieciešams aksonometriskā attēlā izpildīt kādas papildu konstrukcijas, kas savietotā rasējumā nav uzrādītas, tādēļ īsumā iztirzāsim šo konstrukciju pamatelementus.

Atzīmēsim vispirms, ka kāda punkta stāvoklis telpā ar tā (ortogonāli vai slīpi) aksonometrisko projekciju nav viennozīmīgi noteikts, jo visiem punktiem, kas atrodas uz kopēja projecētāja stara, ir viena un tā pati projekcija. Punkta stāvoklis telpā ir viennozīmīgi noteikts tikai tad, ja bez tā aksonometriskās projekcijas dots arī aksonometriskais virsskats, jo tad ir iespējams iezīmēt šī punkta koordinātu figūru (sk. 215. ras.) un izmērīt tā aksonometriskās koordinātes $\bar{x}$, $\bar{y}$ un $\bar{z}$. Zinot sagrozījumu koeficientus a, b un c, iespējams tālāk noteikt punkta telpas koordinātes x, y un z.

Iesaistot attēlojamo punktu koordinātu sistēmā, koordinātu plakni XOY vienmēr izvēlējāmies paralēlu horizontālajai projekciju plaknei P_1 (sk., piem., 214. ras.). Šo koordinātu plakni, ko apzīmēsim ar H, turpmāk izdalīsim no pārējām koordinātu plaknēm un sauksim par pamata plakni, jo tajā parasti novietosim attēlojamos objektus.



243. ras.

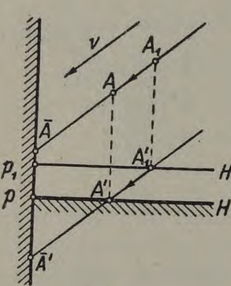


244. ras.

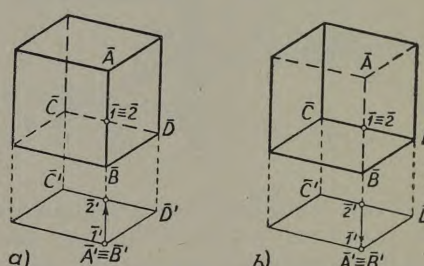
No koordinātu sistēmas tagad var atbrīvoties un attēlošanas procesu iedomāties vienkāršāk šādi. Dota vertikāla attēlu plakne P un pamata plakne H. Iepriekš apskatītajos slīpās aksonometrijas atsevišķajos veidos plakne H ir horizontāla, bet ortogonālās aksonometrijas gadījumā tā veido leņķi γ ar horizontālu plakni (sk. shematiskos attēlus 243. a, b ras.). Tā kā Z ass attēlu parasti izvēlamies vertikālu, tad plakne H abos gadījumos šķeļ attēlu plakni pa horizontālu taisni p, ko sauksim par *pamata līniju*. Ja A ir kāds telpas punkts un A' tā ortogonālā projekcija plaknē H — sauksim to īsāk par punkta A virsskatu, tad šo punktu attēlus plaknē P, t. i., aksonometrisko attēlu $\bar{A}$ un aksonometrisko virsskatu $\bar{A}'$ dabū, velkot caur abiem punktiem (slīpi vai ortogonāli) projecētājus starus un nosakot to krustpunktus ar attēlu plakni. Punktam A (un jebkuram citam telpas punktam) tādējādi attēlu plaknē tiek piekārtoti divi punti $\bar{A}$ un $\bar{A}'$, pie kam abi šie punkti atrodas uz kopēja perpendikula pret pamata līniju p. Ja plakni P savietojam ar rasējuma plakni, tad iegūstam punkta A abus attēlus kā 244. rasējumā.

Var konstatēt, ka visus iepriekšējās nodaļās izvirzītos pozicionālos uzdevumus, t. i., uzdevumus, kuros neietilpst lieluma jēdziens, arī aksonometrijā var atrisināt ar tām pašām līnijām, ja vien par objekta horizontālo projekciju plaknē P_1 izvēlamies tā aksonometrisko virsskatu un frontālo projekciju plaknē P_2 — objekta aksonometrisko attēlu. Izņēmums ir vienīgi tie uzdevumi, kuros izmanto taisnes vai plaknes pēdas.

Lai teikto paskaidrotu, aplūkosim, piemēram, 244. rasējumu, kurā parādīti arī patvaļīgas taisnes t abi aksonometriskie attēli $\bar{t}$ un $\bar{t}'$. Ar T_h šai rasējumā apzīmēts taisnes krustpunkts ar pamata plakni H — taisnes p ē d a šai plaknē. Atšķirībā no attēliem projekciju plaknēs P_1 un P_2 (sal. ar 34. ras.) šī punkta abi attēli $\bar{T}_h$ un $\bar{T}'_h$ sakrīt. Tas nozīmē, ka *sakrītošo projekciju plaknes* (sk. 5. nodalījumu) *loma te ir pamata plaknei H*. Punkts T, kura aksonometriskais virsskats atrodas uz pamata līnijas, atrodas aksonometrisko projekciju plaknē P tikai slīpās aksonometrijas gadījumos, kamēr ortogonālajā aksonometrijā šis punkts atrodas plaknē, kas vilkta caur pamata līniju p perpendikulāri pamata plaknei H (sk. arī 243. ras.). Punktam N uz taisnes t aksonometriskais attēls $\bar{N}$ ir z e m aksonometriskā virsskata $\bar{N}'$, tādēļ punkts N atrodas z e m pamata plaknes H.



245. ras.



246. ras.

To pašu atšķirību novērojam, attēlojot ar pēdām kādu plakni. Lai gan arī tad par vienu plaknes pēdu varētu izvēlēties tās šķēluma līniju ar plakni caur p, perpendikulāru H, tomēr tās īpatnējās nozīmes dēļ, kāda ir plaknei H, atšķirība starp virsskatiem abos attēlojuma veidos paliks. Analoģiju varētu panākt vienīgi tad, ja arī plaknes pēdas projekciju plaknē P_1 vietā izvēlamies tās pēdu sakrītošu projekciju plaknē S_1 (sk. 5. un 25. nodalījumu).

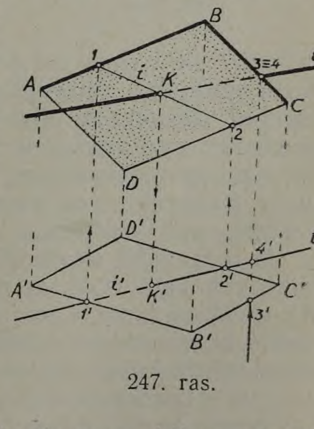
Visus pārējos pozicionālos uzdevumus var atrisināt ar tām pašām līnijām kā agrāk. Ja ir zināmi kāda objekta abi aksonometriskie attēli, tad pozicionālo uzdevumu atrisināšanai varam iztikt bez pamata līnijas p. Tiešām, pamata līnijas pārvietojumam kādā citā stāvoklī p_1 (245. ras.) atbilst pamata plaknes un punktu A un A' pārvietojums projecēšanas virzienā v, un, tā kā arī kāda objekta visi pārējie punkti šādā translācijā pārvietojas par vienu un to pašu nogriezni $AA_1 = A'A'_1$, tad šo punktu savstarpējais novietojums nemainās. Šī iemesla dēļ pamata līniju turpmāk nezīmēsim, bet tās virzienu aizvietosim ar k ā r t o t ā j a s l ī n i j a s virzienu, t. i., ar taisni, kas savieno kāda punkta abus aksonometriskos attēlus. Ja apskatām tikai pozicionālos uzdevumus, nav svarīgs (ortogonālās aksonometrijas gadījumā) arī pamata plaknes H slīpums γ.

Daži aizrādījumi nepieciešami vēl par **r e d z a m ī b a s** noteikšanu aksonometriskos attēlos. Apskatīsim 246. rasējuma attēlus a un b. Šai rasējumā doti kuba attēli augšskatā un apakšskatā kopā ar šo kubu aksonometriskajiem virsskatiem (abi kubi nedaudz pacelti virs pamata plaknēm H). Rasējumā atzīmēti punkti 1 un 2 (1 — uz šķautnes AB, 2 — uz šķautnes CD), kuru aksonometriskie attēli sakrīt. Taisnes nogrieznis, kas savieno punktus 1 un 2, abos gadījumos attēlojas plaknē P kā punkts. Šis taisnes nogrieznis ir paralēls projecēšanas virzienam v, un tā aksonometriskais virsskats $\overline{1'—2'}$ ir paralēls kārtotājas virzienam. Redzam, ka šķautņu AB un CD šķērsošanās vietā $1—2$ augšskatā novērotājam ir tuvāk tas punkts, kam aksonometriskais virsskats ir zemāks, bet apakšskatā tieši pretēji — tuvāk ir tas no punktiem, kam aksonometriskais virsskats ir augstāk. Šis noteikums ir spēkā kā ortogonālās, tā slīpās aksonometrijas gadījumā.

Lai pierastu pie konstrukcijām aksonometriskajos attēlos, aplūkosim tagad dažus pozicionālo uzdevumu piemērus. Vienkāršības dēļ punktu abus aksonometriskos attēlus turpmāk atkal apzīmēsim tāpat kā pašus telpas punktus resp. to ortogonālās projekcijas plaknē H.

1. piemērs. *Konstruēt taisnes t krustpunktu ar paralelograma plakni $ABCD$ un noteikt redzamību (247. ras.).*

Lai noteiktu taisnes un paralelograma krustpunktu, izvēlēsimies, tāpat kā agrāk (sal. ar 164. ras.), palīgtaisni i, kuras aksonometriskais virsskats i' sakrīt ar dotās taisnes aksonometrisko virsskatu t'.[1] Noteiksim šīs palīgtaisnes aksonometrisko attēlu i, ievērojot, ka tai jāatrodas dotajā plaknē, t. i., jākrusto plaknes šķautnes AB un DC (punktiem 1 un 2 jāatrodas attiecīgi uz šo šķautņu aksonometriskiem attēliem un pa pāriem uz kopējas kārtotājas). Taisnes krustpunkts K ar plakni ir taisnes krustpunkts ar palīgtaisni i. Rasējumā atzīmēts arī šī krustpunkta aksonometriskais virsskats, kaut gan tā nozīme te ir nesvarīga, jo pēc aksonometriskā attēla pagatavošanas aksonometrisko virsskatu parasti izdzēš.



247. ras.

Lai noteiktu taisnes **r e d z a m ī b u** aksonometriskajā attēlā, ir jānoskaidro, kurš no punktiem, piemēram, šķēršošanās vietā $3—4$, ir novērotājam tuvāk. Ja attēls 247. rasējumā ir augšskats, tad tuvāk novērotājam ir punkts 3 un BC, jo tā aksonometriskais virsskats ir zemāk par taisnes t punkta 4 aksonometrisko virsskatu. Aksonometriskajā attēlā taisnes nogrieznis

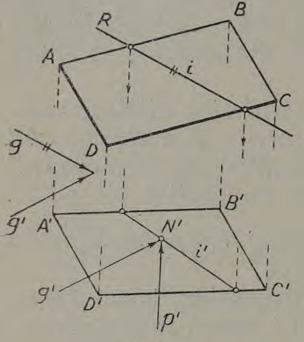
[1] Taisni i arī šeit var iedomāties kā plaknes $ABCD$ šķēlumu ar palīgplakni, kas vilkta caur taisni t perpendikulāri H, tikai jāatgādina, ka šī palīgplakne vispār nav vertikāla.

starp punktiem *4* un *K* tātad ir neredzams. Redzamību aksonometriskajā virsskatā nosaka analoģiski.

Lai palielinātu uzskatāmību, šķautnes, kas iziet no novērotājam tuvākās plaknes virsotnes *B*, aksonometriskajā attēlā atzīmētas treknākām līnijām.

2. piemērs. *Noskaidrot, vai plakne ABCD (248. ras.) dotajā apgaismojumā g redzama aksonometriskajā attēlā no gaismas vai ēnas puses.*

Pieņemsim, ka paralēli dotajam gaismas staru virzienam vilkta projecētāja palīgplakne *R*, t. i., plakne, kas paralēla projecēšanas virzienam *v* (ar virzieniem *g* un *v* šīs gaismas plaknes virziens ir viennozīmīgi noteikts). Plaknes *R* aksonometriskais attēls (raksturīgā projekcija) ir gaismas stara virziena aksonometriskajam attēlam *g* paralēla taisne. Šī plakne šķeļ doto plakni *ABCD* pa taisni *i*, kuras aksonometriskais attēls sakrīt ar plaknes aksonometrisko attēlu *R*. Nosakām šīs taisnes aksonometrisko virsskatu *i'* un iedomājamies tās patvaļīgā punktā *N* pievilktu gaismas staru *g* un projecētāju staru *p* (aksonometriskais virsskats *p'* paralēls kārtotāju virzienam; sk. arī 246. ras.). Aksonometriskajā attēlā redzam plaknes gaismas vai ēnas pusi atkarībā no tā, vai abi stari *g'* un *p'* pienāk taisnei *i'* no vienas vai pretējām pusēm. Pie tam jāievēro, ka augšskata gadījumā projecētājs stars aksonometriskajā virsskatā attēlojas ar vērsumu no apakšas uz augšu, bet apakšskata gadījumā — ar vērsumu no augšas uz leju (sk. 246. ras. taisnes nogriežņa *1—2* vērsumu no novērotājam tuvākā punkta uz tālāko). Ja 248. rasējumu pieņemam par augšskatu, tad aksonometriskais attēls rāda plaknes apgaismoto pusi.

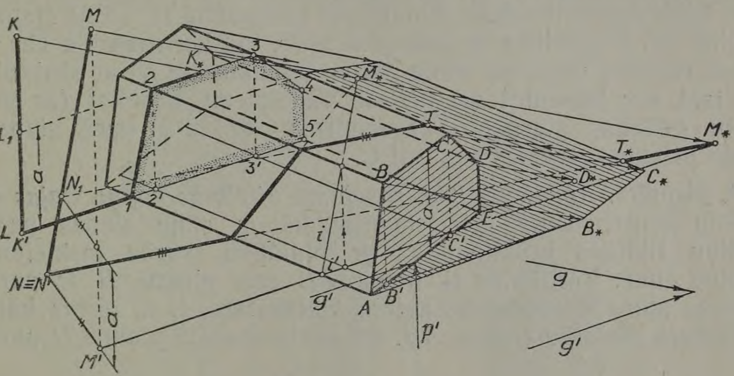


248. ras.

Ja redzamību aksonometriskajā virsskatā identificējam ar redzamību virsskatā (t. i., ar redzamību skatoties no augšas pret plakni *H*) neatkarīgi no tā, vai, konstruējot šo aksonometrisko virsskatu, plakni *H* redzam no augšas vai apakšas, tad starp redzamību abos aksonometriskajos attēlos ir šāds sakars: ja abiem attēliem ir vienāds virsotņu numerācijas virziens, tad abi attēli rāda plakni no vienas puses augšskatā, bet, ja virsotņu numerācijas virzieni attēlos ir pretēji, tad abi attēli rāda plakni no vienas puses apakšskatā. Ievērojot šo noteikumu, plaknes apgaismojuma noteikšanai var izmantot arī gaismas plakni *R*, kas perpendikulāra pamata plaknei *H* (horizontāli projecētāju plakni), nosakot apgaismojumu vispirms aksonometriskajā virsskatā. Apgaismojumu aksonometriskajā attēlā tad dabū, ņemot vērā plaknes virsotņu numerāciju abos attēlos. Šādu palīgplakni ieteicams lietot daudzskaldņu pašēnas noteikšanai, jo tad ir runa tikai par ārējās virsmas apgaismojumu, un šo apgaismojumu var noteikt, pievelkot gaismas starus šķēluma figūras aksonometriskajam attēlam (sal. ar 196. ras.).

3. piemērs. *Taisna prizma ar sānu skaldni novietota pamata plaknē H (249. ras.). Konstruēt šīs prizmas pašēnas un krītošās ēnas. Noteikt ēnas, ko pamata plaknē un uz prizmu met divi stabi KL un MN, no kuriem viens novietots perpendikulāri, bet otrs slīpi pret pamata plakni H.*

Prizmas sānu skaldne BC ir paralēla pamata plaknei H (šķautne $BC \| AE$), tādēļ dotajā apgaismojumā (gaisma krīt no augšas uz plakni H) šī skaldne, tāpat skaldne AB, ir apgaismota. No prizmas



249. ras.

pamata $ABCDE$ virsskatam (kas sakrīt ar šķautnes AE aksonometrisko attēlu) pievilktiem stariem g' un p' redzams, ka šis pamats atrodas pašēnā (sal. ar 187. ras.), tādēļ prizmas divas pašēnas šķautnes ir AB un BC. Konstruējam šo šķautņu ēnas plaknē H: šķautnes AB ēna sākas punktā A un iet uz virsotnes B ēnu B_*, kas ir caur punktu B vilktā gaismas stara pēda plaknē H (staru g un g', kas vilkti caur B resp. B', krustpunkts); šķautnes BC ēna B_*C_* ir vienlīdzīga un paralēla pašai šķautnei. Arī prizmas sānu šķautnes C ēna ir paralēla un vienlīdzīga pašai šķautnei, un, tā kā šķautnes D ēna iznāk tuvāk prizmai (par to var pārliecināties, nosakot arī virsotnes D ēnu D_*), tad šķautnes C ēna sastāda daļu krītošās ēnas kontūras, t. i., arī šķautne C ir prizmas pašēnas šķautne.

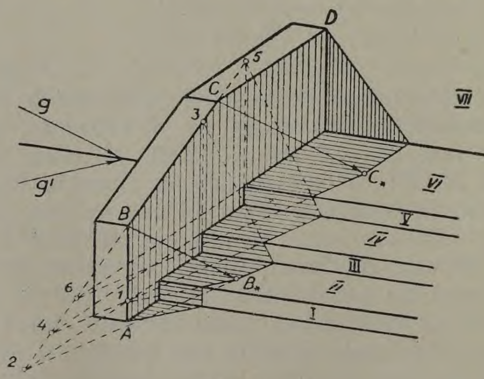
Vertikālā staba KL ēna pamata plaknē H iet gaismas stara aksonometriskā virsskata virzienā. Lai noteiktu šī staba ēnu uz prizmas skaldnēm, šķeļam prizmu ar gaismas plakni caur KL (šķēluma figūra 1—2—3—4—5 iesvītrota). Staba ēna ir īsta tikai līdz punkta K ēnai K_*, kas ir caur punktu K vilktā gaismas stara krustpunkts ar šķēluma figūras malu 2—3. Šo šķēluma figūru var izmantot arī, lai noteiktu prizmas sānu skaldņu apgaismojumu. Tā kā gaismas stariem ir pievērstas tikai šķēluma figūras malas 1—2 un 2—3, tad apgaismotas ir vienīgi prizmas sānu skaldnes AB un BC.

Staba galapunkta K ēnu uz skaldnes BC var noteikt arī, ievērojot, ka staba ēnai šajā skaldnē jābūt paralēlai tā ēnai plaknē H (jo skaldne $BC \| H$). Bez tam tai jāiet caur staba (fiktīvo) krustpunktu L_1 ar skaldni BC. Šo krustpunktu dabū, atliekot LL_1, vienlīdzīgu ar prizmas sānu skaldnes BC augstumu a virs pamata plaknes H. Var iztikt vispār bez šķēluma figūras $1—2—3—4—5$, jo, zinot ēnas $L—1$ un $2—K_*$, staba ēnu skaldnē AB dabū, savienojot punktus 1 un 2.

Lai noteiktu staba MN ēnu, konstruējam vispirms tā galapunkta M ēnu M_* plaknē H. Ēna plaknē H iet no staba pamata N virzienā uz M_*, uz šķautnes A tiek lauzta un tālāk iet virzienā uz $\overline{M}_*$, kas ir punkta M fiktīvā ēna prizmas sānu skaldnē AB (attiecīgā gaismas stara krustpunkts noteikts, izmantojot palīgtaisni i). Tā kā staba ēna skaldnē BC ir paralēla tā ēnai plaknē H, tad konstrukciju var vienkāršot, nosakot vispirms staba fiktīvo krustpunktu N_1 ar skaldni BC. Bez tam var izmantot arī netiešo paņēmienu, nosakot (ar pretēji vērstu gaismas staru no T_*) vispirms punktu T, kurā staba ēna krusto prizmas pašēnas šķautni C.

4. piemērs. *Konstruēt 250. rasējumā attēlotās kāpņu daļas ēnas.*

Ēnu konstruēšanai ērti izmantot kāpņu sānu sienas pašēnas šķautņu fiktīvos krustpunktus ar plaknēm, kurās meklējam šo šķautņu ēnas. Vertikālās šķautnes AB ēna plaknē H ir paralēla gaismas stara aksonometriskajam virsskatam, t. i., pirmā kāpiena vertikālajā plaknē paralēla AB, bet horizontālajā plaknē II paralēla



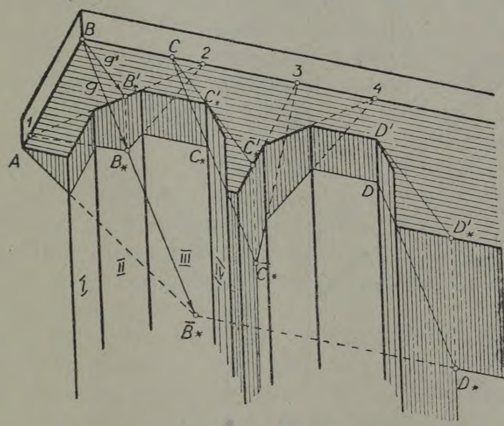
250. ras.

ēnai plaknē H. Šķautnes ēnai plaknē II turpinājumā jāiet caur punktu 1 — šķautnes fiktīvo krustpunktu ar plakni II. Punktā B_* sākas slīpās šķautnes BC ēna, kuras virzieni plaknēs II, III, IV, V un VI ir noteikti ar šīs šķautnes krustpunktiem 2, 3, 4, 5 un 6 ar attiecīgajām plaknēm. Punktā C_* sākas šķautnes CD ēna, kas ir paralēla pašai šķautnei (jo $CD \| VI$) un, pārejot vertikālajā (sienas) plaknē VII, iet uz šķautnes krustpunktu D ar šo plakni.

Raksturīgs šajā piemērā ir tas apstāklis, ka ēnu konstruēšanā nemaz netika izmantots kāpņu aksonometriskais virsskats, kas rasējumā arī nemaz nav parādīts. Šis paņēmiens ērts visos gadījumos, kad pašēnas šķautņu fiktīvos krustpunktus var viegli noteikt.

Lai ar ēnu veidojumiem panāktu vēlamo efektu, konstruējot ēnas aksonometrijā, parasti iepriekš neizvēlas gaismas staru virzienu g, bet kāda atsevišķa punkta vai taisnes ēnu. Tā šai piemērā, lai punkta B ēna B_* neiznāktu pārāk tuvu kāpienu šķautnēm (kas padarītu ēnu veidojumu neskaidru), var izvēlēties iepriekš šo punktu B_*. Gaismas stara virziena abi attēli tad ir noteikti ar virzieniem B—B_* un 1—B_*.

5. piemērs. *Konstruēt ēnas arhitektūras veidojuma sīkdaļai, kas sastāv no diviem ar prizmatisku plati pārsegtiem pilastriem (251. ras.).*

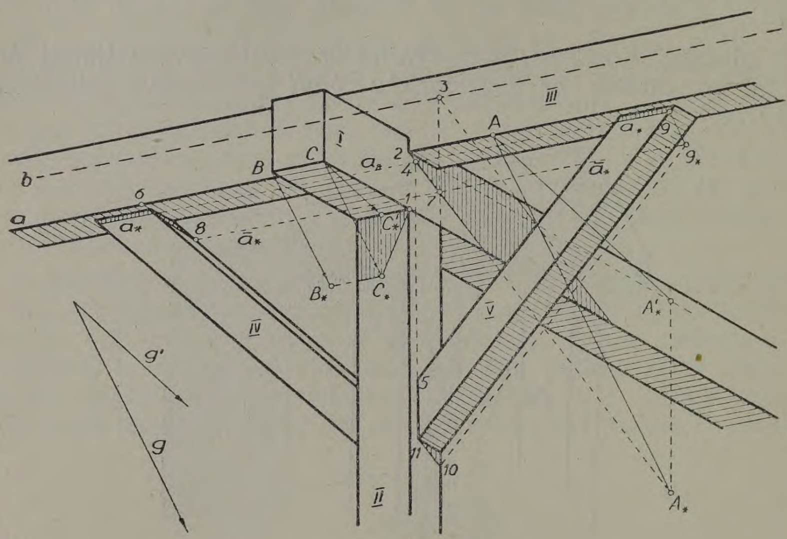


251. ras.

Izvēlamies vispirms izdevīgā vietā punkta B ēnu B_* pilastra plaknē II. Ja par pamata plakni H pieņemam plates apakšējo plakni, tad gaismas stara aksonometriskā virsskata virziens ir BB'_*, bet aksonometriskā attēla virziens — BB_*. Šķautnes AB ēna pilastra plaknē II iet no B_* uz šķautnes krustpunktu 1 ar šo plakni, plaknē I ēna ir paralēla pašai šķautnei (jo $AB \| I$), un celtnes sienas plaknē ēnas kontūra izbeidzas punktā A. Šķautnes BC ēna pilastra plaknē II savukārt iet no punkta B_* uz šķautnes krustpunktu 2 ar šo plakni un plaknē III — paralēli pašai šķautnei.

Pievelkot pilastra aksonometriskajam virsskatam (kas sakrīt ar tā augšējo pamatu) starus paralēli g', konstatējam, ka pilastra plakne IV atrodas pašēnā, tāpēc punktā C_* uz pašēnas šķautnes ēnas kontūra pārlec otra pilastra plaknēs, kur to var noteikt tāpat kā uz pirmā pilastra. Ēnas kontūru papildina vēl pirmā pilastra pašēnas šķautnes ēna, kas no punkta C_* iet vertikāli uz leju. Beidzot nosakām vēl otra pilastra pašēnas šķautnes, kā arī šķautnes BC ēnas celtnes sienas plaknē, pie kam te bez punkta D ēnas var izmantot arī punkta B fiktīvo ēnu $\overline{B}_*$ šai plaknē.

6. piemērs. *Būvkonstrukcijas sīkdaļas ēnas (252. ras.).* Gaismas staru virzienu definējam ar sijas I stūrpunkta C ēnu C_* sijas II priekšējā plaknē. Konstruējot punkta C_* virsskatu C'_* sijas I apakšējā plaknē, g un g' virzienus nosaka attiecīgi ar virzieniem CC_* un CC'_* (šie virzieni parādīti arī atsevišķi). No punkta C_* šķautnes BC ēna iet paralēli pašai šķautnei, bet šķautnes $C—1$ ēna — uz šīs šķautnes krustpunktu 1 ar sijas II priekšējo plakni.



252. ras.

Šī ēna rāda, ka visu siju priekšējās plaknes, kā arī siju I un II labās plaknes, ir apgaismotas, turpretim siju horizontālās apakšējās plaknes atrodas pašēnā. Sijas III priekšējā apakšējā šķautne a tādēļ met ēnu uz siju I, ko nosaka, konstruējot kāda šīs šķautnes patvaļīga punkta A ēnu A_* uz šīs sijas. Lai to izdarītu, jānosakā caur punktu A vilktā gaismas stara krustpunkts ar sijas I plakni. Uzskatot par virsskata (pamata) plakni sijas III apakšējo plakni, punkta A_* virsskatam A'_* jāatrodas, no vienas puses, uz attiecīgā gaismas stara virsskata, bet, no otras puses, uz attiecīgās plaknes virsskata, t. i., uz šīs plaknes šķēluma taisnes $2—A'_*$ ar sijas III apakšējo plakni. Vertikāli zem A'_* uz gaismas stara caur A atrodas punkts A_*, un $2—A_*$ ir meklētā šķautnes a ēna. Otra sijas III pašēnas šķautne ir augšējā (neredzamā) šķautne b, un tās ēnu uz sijas I dabū, velkot no šīs šķautnes (fiktīvā) krustpunkta 3 ar sijas I attiecīgo plakni staru paralēli $2—A_*$.

Tālāk nosakām šķautnes a ēnu a_* uz kopējai plaknei piederošām siju IV un V priekšējām plaknēm. Viens šīs ēnas fiktīvs punkts ir punkts 4, kurā ēnas kontūra $2—A_*$ krusto siju IV un V priekšējo plakni, t. i., ēnas kontūras krustpunkts ar šīs plaknes un sijas *I* labās plaknes fiktīvo šķēluma taisni *4—5*. Tā kā $a_* \| a$, tad ēnas reālām daļām jāatrodas uz taisnes, kas vilkta caur punktu *4* paralēli šķautnei *a*.

Lai noteiktu ēnu, ko šķautne *a* met uz sijas *IV* slīpo augšējo plakni, jānosaka vēl tikai viens šīs ēnas punkts (viens punkts ir ēnas a_* lūzuma punkts uz sijas *IV* labās priekšējās šķautnes). Par šo punktu varētu izvēlēties šķautnes *a* fiktīvo krustpunktu *6* ar attiecīgo plakni, bet, tā kā tas ir pārāk tuvu jau zināmajam ēņas (lūzuma) punktam, tad šie abi punkti pietiekami precīzi nenosaka ēnas kontūru. Izdevīgāk tāpēc arī te izmantot šķautnes *a* fiktīvo ēnu $\bar{a}_*$ siju *IV, II* un *V* kopējā pakaļējā plaknē. Tā ir taisne, kas vilkta caur punktu *7* (sk. ras.) paralēli pašai šķautnei *a*. Šī taisne krusto sijas *IV* augšējo pakaļējo šķautni punktā *8*, kas pieder meklētajai ēnas kontūrai. Tā kā šis punkts ir šķautnes *a* īsts ēnas punkts, tad no tā seko arī, ka sijas *IV* augšējā plakne ir apgaismota.

Apskatīto metodi taisnes ēnas noteikšanai slīpā plaknē ļoti ērti izmantot, un to vispār var formulēt šādi.[1] Lai noteiktu patvaļīgas taisnes *t* ēnu kādā slīpā plaknē *Q*, meklē vispirms tās vieglāk konstruējamās ēnas $t_1{}^*$ un $t_2{}^*$ plaknēs Q_1 un Q_2, kas ir paralēlas vai perpendikulāras pamata plaknei *H*. Ja k_1 un k_2 ir plaknes *Q* šķēluma taisnes ar plaknēm Q_1 resp. Q_2, tad taisnes ēnu plaknē *Q* dabū, savienojot ēnu $t_1{}^*$ un $t_2{}^*$ attiecīgos krustpunktos ar šīm šķēluma taisnēm k_1 un k_2.

Pēc iepriekš noteiktās ēnas $\bar{a}_*$ var arī viegli spriest, vai sijas *V* apakšējā (slīpā) plakne ir apgaismota vai atrodas pašēnā. Velkot caur punktu *9* (ēnas a_* krustpunkts ar sijas *V* labo priekšējo šķautni) gaismas staru līdz krustpunktam ar $\bar{a}_*$, dabūjam šī punkta ēnu 9_* sijas *V* pakaļējā plaknē. Tā kā šis punkts atrodas ārpus sijas *V*, tad šīs sijas apakšējā plakne atrodas pašēnā. Sijas pašēnas šķautnes (fiktīvā) ēna 9_*—*10* ir paralēla pašai šķautnei, un šīs ēnas krustpunkts *10* ar sijas *II* vertikālo šķautni dod pašēnas šķautnes vienu ēnas punktu sijas *II* labajā plaknē. Punktu *10* savienojot ar *11*, dabūjam pašu krītošās ēnas kontūru.

Jāatzīmē vēl, ka zināmā gaismas staru virzienā sijas *I* gals var mest ēnu arī uz siju *IV*. Arī sijas *II* kreisā priekšējā šķautne met īstu ēnu uz siju *IV*, bet šo ēnu aizsedz pati sija *II*.

Iztirzātais piemērs rāda, ka, rūpīgi apsverot katrreizējos īpatnējos apstākļus, ēnas konstrukcijas pat samērā komplicētos gadījumos var izpildīt ar pavisam maz palīglīnijām. Bez tam raksturīgi vēl, ka arī šajā piemērā centāmies iztikt bez ķermeņa aksonometriskā virsskata. Tā vietā izmantojām dažu atsevišķu ķermeņa plakņu virsskatus, pie tam ne kopējā (pamata) plaknē *H*, bet tādā pašā ķermeņa horizontālajā plaknē, kas katrā atsevišķā gadījumā bija konstrukcijām izdevīgāka.

---

[1] Uz šo metodi jau aizrādījām, nosakot 249. rasējuma stabu ēnas prizmas saldnē *AB*.

V NODAĻA

PLAKNES FIGŪRU ĢEOMETRISKĀ RADNIECĪBA

1. §. AFINITĀTE

77. Punktu radniecības jēdziens; kolineācija. Starp kādas plaknes figūras divām ortogonālajām projekcijām, tāpat starp plaknes figūru un tās ortogonālo, slīpo vai centrālo projekciju jeb, kas ir tas pats, starp plaknes figūru un tās ēnu kādā citā plaknē pastāv vienmēr zināma sakarība. Pagaidām zinām tikai to, ka katram vienas figūras punktam ir piekārtots viens noteikts otras figūras punkts. Pētot šo sakarību sīkāk, iespējams atklāt vēl citas īpašības, kas raksturīgas šādam piekārtojumam.

Ja figūras plakne atrodas patvaļīgā stāvoklī pret attēlu plakni (vai plakni, kurā krīt tās ēna), tad — arī otrādi — katram figūras attēla (ēnas) punktam atbilst viens noteikts pašas figūras punkts. Tādā gadījumā saka, ka figūras un tās attēla (ēnas) punkti piekārtoti *savstarpēji viennozīmīgi.*

Plaknes figūras punktu vietā varam runāt arī par visu figūras plaknes punktu piekārtojumu vai nu tās pašas, vai kādas citas plaknes punktiem. Tādā gadījumā varam runāt par divām plaknes punktu *kopām.* Saka, ka starp divām (vienas vai divu dažādu plakņu) punktu kopām pastāv *ģeometriska radniecība,* ja to punkti piekārtoti viens otram pēc kāda noteikta likuma. Tādus likumus var dot visdažādākos veidos. Izvēloties, piemēram, katrā plaknē pa koordinātu sistēmai un apzīmējot punktu koordinātes attiecīgi ar x, y un $\bar{x}$, $\bar{y}$, piekārtojuma likumu var izteikt a n a l i t i s k i ar sakarībām

$$\bar{x}=f_1(x,y),$$
$$\bar{y}=f_2(x,y),$$

kur f_1 un f_2 ir kaut kādas vienvērtīgas koordinātu x un y funkcijas. Ja no šiem vienādojumiem var izteikt apgriezti x un y kā vienvērtīgas $\bar{x}$ un $\bar{y}$ funkcijas, tad ar šiem vienādojumiem ir definēts starp abām punktu kopām kāds savstarpēji viennozīmīgs piekārtojums.

Ar iepriekš minēto piekārtojumu kādas taisnes punktiem vienā plaknē tiek piekārtoti otrā plaknē punkti, kas vispār var veidot l ī k n i. Ja turpretim piekārtojums ir izvēlēts tā, lai katrai taisnei vienā plaknē atbilstu taisne otrā plaknē, tad tādu piekārtojumu sauc par *kolineāciju* un saka, ka abas plaknes jeb abas punktu kopas ir *kolineāri radniecīgas:*

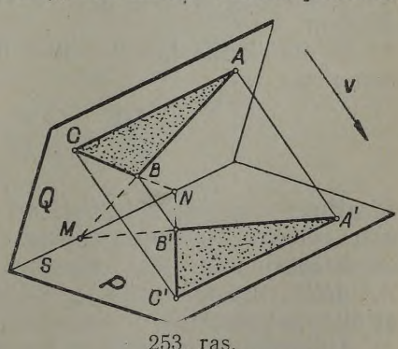
Kolineācija tātad ir tāda savstarpēji viennozīmīga divu plakņu punktu radniecība, kurā ikvienai vienas plaknes taisnei atbilst noteikta otras plaknes taisne.

Tāda kolineāra radniecība pastāv starp kādas plaknes figūras divām ortogonālajām projekcijām, starp plaknes figūru un tās ortogonālo, slīpo vai centrālo projekciju, starp plaknes figūru un tās ēnu kādā citā plaknē. Šajos gadījumos analitiskā likuma vietā piekārtojums definēts grafiski, proti, ar projecēšanas metodi.

Visu iepriekš teikto var attiecināt tiklab uz plaknes, kā telpas figūrām, tikai pēdējā gadījumā piekārtojums nebūs vairs savstarpēji viennozīmīgs. Tā, piemēram, kāda daudzskaldņa ikvienam punktam atbilst pilnīgi noteikts attēla (ēnas) punkts, bet ne otrādi. Tas pats sakāms par radniecību starp daudzskaldņa divām ortogonālajām projekcijām. Tādēļ turpmāk, runājot par figūru ģeometrisko radniecību, domāsim vienmēr par plaknes figūrām.

Kaut gan katrā no pieminētajiem piemēriem var saskatīt kolineāru radniecību, tomēr starp šiem atsevišķajiem gadījumiem ir arī zināmas atšķirības. Pastāv dažādi kolineācijas veidi, ar kuriem pakāpeniski iepazīsimies.

78. Radniecība starp plaknes figūru un tās paralēlprojekciju. Ja ir dotas telpā divas plaknes P un Q un projecēšanas virziens v, kas nav paralēls nevienai plaknei (253. ras.), tad katrai vienas plaknes figūrai atbilst pilnīgi noteikta figūra — tās paralēlprojekcija otrā plaknē. Tā kā punktu piekārtojums tad ir savstarpēji viennozīmīgs, tad par projekciju plakni varam uzskatīt tiklab vienu, kā otru plakni.



253. ras.

Pieņemsim, ka projekciju plakne ir plakne P un noskaidrosim, kāds sakars pastāv starp plaknes Q kādu figūru, piemēram, trīsstūri ABC un tā projekciju $A'B'C'$ plaknē P. Caur trīsstūra malas AB punktiem vilktie projecētāji stari veido p r o j e c ē t ā j u plakni, kas krusto plakņu Q un P šķēluma taisni s punktā M. Ja trīsstūra virsotnes A projekcija A' ir noteikta kā caur punktu A vilkta projecētāja stara krustpunkts ar projekciju p l a k n i P, tad virsotnes B projekcijas konstruēšanai pietiek noteikt caur punktu B vilktā projecētāja stara krustpunktu ar t a i s n i $A'M$. Tāpat nosaka arī virsotnes C projekciju C' (ievērojot ka atbilstošajām malām $B'C'$ un BC jākrustojas uz plakņu kopējās taisnes s). Ja kāda no trīsstūra malām, kā, piemēram, AC, ir paralēla šķēluma taisnei s, tad arī tās projekcija ir paralēla šai šķēluma taisnei.

Starp abu plakņu figūrām ABC un $A'B'C'$ pastāv šāda ģeometriska sakarība jeb radniecība:

1) Katram vienas figūras punktam atbilst viens pilnīgi noteikts otras figūras punkts, pie kam atbilstošie punkti atrodas uz paralēliem stariem.

2) Katrai vienas figūras taisnei atbilst viena pilnīgi noteikta otras figūras taisne, pie kam atbilstošās taisnes krustojas punktos, kas atrodas uz kopējas taisnes.[1]

Tādu ģeometrisku sakarību starp divu plakņu figūrām sauc par *afinitāti,* bet pašas figūras par *afini radniecīgām,* īsāk — *afinām* figūrām.

79. Afinitāte starp divām vienas plaknes figūrām. Abas afini radniecīgās figūras iepriekšējā piemērā bija katra savā plaknē. Svarīgāks ir otrs afinitātes gadījums, kad abas figūras atrodas vienā un tai pašā plaknē. Tādu sakarību dabūjam, piemēram, projecējot paralēli abas plaknes kopā ar tajās iezīmētām figūrām kādā trešā plaknē (tāda paralēlprojekcija starp citu ir arī pats 253. ras.). Tā kā paralēlprojekcijā paralēlas taisnes attēlojas par paralēlām taisnēm, tad abu telpas figūru projekcijas būs atkal afini radniecīgas, tikai afinās figūras tagad atradīsies vienā un tai pašā plaknē.

Afinitāti vienā plaknē dabūjam arī šādi. Atstājot plakni P uz vietas, pagriezīsim plakni Q ap šķēluma taisni s uz vienu vai otru pusi, kamēr tā savietojas ar plakni P. Atbilstošās taisnes arī pēc savietošanas krustosies uz kopējas taisnes; jākonstatē tikai vēl tas, ka atbilstošie punkti pēc savietošanas atradīsies uz paralēliem stariem.

Tā kā kādas taisnes divu nogriežņu attiecība paralēlprojekcijā nemainās, tad

$$\frac{AB}{BM}=\frac{A'B'}{B'M} \text{ un } \frac{CB}{BN}=\frac{C'B'}{B'N}.$$

Šī attiecība paliek tāda pati arī pēc plakņu savietošanas. Novietojot abas plaknes rasējuma plaknē, dabūjam 254. rasējumu, kur plakņu ierobežotājas taisnes atmestas. No pirmās proporcijas dabū, ka $AA' \parallel BB'$, bet no otrās — $CC' \parallel BB'$, t. i., ka taisnes, kas savieno atbilstošos punktus, ir paralēlas.

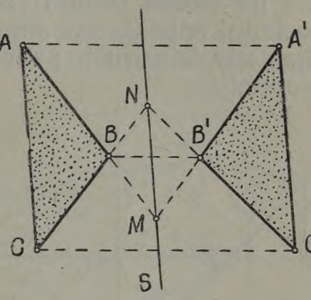
Atšķirībā no iepriekšējā šīs paralēlās taisnes vairs nevar uzskatīt par projecētājiem stariem, tādēļ nosauksim tās par *afinitātes stariem.* Tāpat taisni s, uz kuras krustojas radniecīgo figūru atbilstošās taisnes, sauksim turpmāk par *afinitātes asi.* Afinitātes staru kopējo virzienu sauksim par *afinitātes virzienu,* bet kādai plaknes figūrai afinitātē atbilstošu figūru par tās *afino attēlu.*

Afiniem attēliem piemīt tādas pašas īpašības, kādas ir figūras paralēlprojekcijām. Tā kādas taisnes divu nogriežņu attiecība, kā

[1] Arī atbilstošās malas AC un $A'C'$ krustojas uz tās pašas taisnes, tikai to krustpunkts atrodas bezgalībā (sk. arī 83. nodalījumu).

jau redzējām, ir vienāda ar atbilstošo nogriežņu attiecību. Tas pats sakāms arī par divu paralēlu taisnes nogriežņu attiecību.

Ka paralēlu taišņu atbilstošās taisnes ir paralēlas, var secināt arī tieši no afinitātes definīcijas. Pieņemot, ka atbilstošās taisnes krustojas, dabūjam pretrunu, jo tad šim krustpunktam trūktu afinitatē atbilstošā punkta. Tā kā afinitātes asij atbilstošā taisne ir pati afinitātes ass, tad no tā seko arī, ka afinitātes asij paralēlai taisnei atbilstšai asij paralēla taisne.



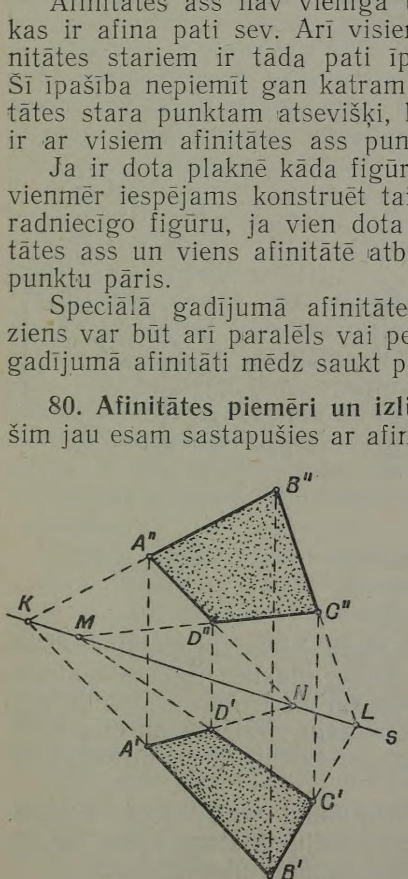
254. ras.

Afinitātes ass nav vienīgā taisne, kas ir afina pati sev. Arī visiem afinitātes stariem ir tāda pati īpašība. Šī īpašība nepiemīt gan katram afinitātes stara punktam atsevišķi, kā tas ir ar visiem afinitātes ass punktiem.

Ja ir dota plaknē kāda figūra, tad vienmēr iespējams konstruēt tai afini radniecīgo figūru, ja vien dota afinitātes ass un viens afinitātē atbilstošs punktu pāris.

Speciālā gadījumā afinitātes virziens var būt arī paralēls vai perpendikulārs afinitātes asij. Pēdējā gadījumā afinitāti mēdz saukt par *ortogonālu* afinitāti.

80. Afinitātes piemēri un izlietojumi. Parādīsim tagad, kur līdz šim jau esam sastapušies ar afini radniecīgām figūrām un kā iespējams izmantot afinitāti dažādu tēlotājas ģeometrijas uzdevumu atrisināšanai.



255. ras.

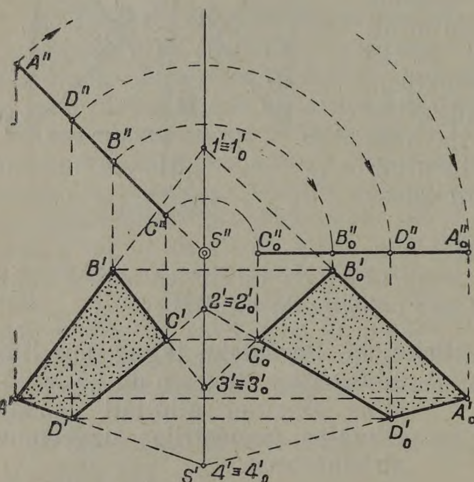
Sāksim ar kādas plaknes figūras divām ortogonālajām projekcijām — horizontālo un frontālo projekciju (255. ras.).

Afinitātes pirmais noteikums te acīm redzot izpildīts, jo abu projekciju atbilstošie punkti atrodas uz paralēliem stariem — kārtotājām. Konstatēsim, ka ir izpildīts arī otrs noteikums, t. i., ka atbilstošās taisnes krustojas uz kopējas taisnes — afinitātes ass.

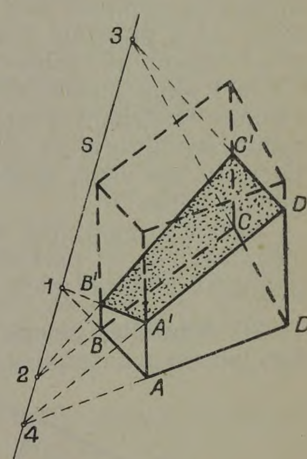
Turpināsim figūras kādas malas, piemēram, AB, abas projekcijas līdz krustpunktam K. Punkts K ir vienlaicīgi kāda taisnes AB punkta horizontālā un frontālā projekcija. Abu projekciju sakrišana rāda, ka attiecīgais telpas punkts atrodas sakrītošo projekciju plaknē (sk. 5. nodalījumu). Tas pats sakāms par punktiem L, M un N, kurus dabū, turpinot figūras pārējo malu projekcijas.

Visi šie punkti atrodas uz kopējas taisnes s, kas ir dubultattēls figūras plaknes šķēlumam ar sakrītošo projekciju plakni. Figūras abas projekcijas ir afini radniecīgas figūras ar taisni s — t. s. *sakrītošo projekciju asi* kā afinitātes asi.

Kādas plaknes figūras divas savietotas ortogonālās projekcijas tātad definē kādu noteiktu afinitāti. Arī otrādi, ja ir dota plaknes figūras viena projekcija un trīs šīs projekcijas punktu (kas neatrodas uz vienas taisnes) atbilstošās otrās projekcijas, tad ir viennozīmīgi noteikta arī afinitātes ass, un pārējo punktu otrās projekcijas var konstruēt, pamatojoties uz afino radniecību starp abām projekcijām.



256. ras.



257. ras.

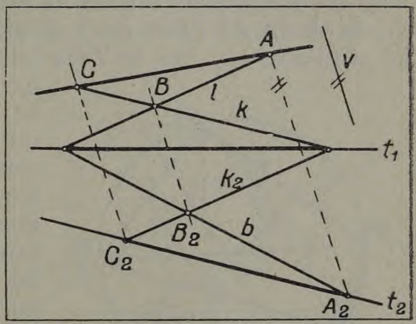
Tāda pati radniecība pastāv arī starp jebkurām citām atbilstošām projekcijām, piemēram, starp kādas plaknes figūras horizontālo un jauno frontālo projekciju, frontālo un profilo projekciju utt., tikai te ir cits afinitātes virziens (kārtotāju virziens) un cita afinitātes ass — dubultattēls figūras plaknes šķēlumam ar attiecīgo sakrītošo projekciju plakni.

Ja figūras plakne ir perpendikulāra kādai p r o j e k c i j u plaknei, tad tās projekcija ir taisne. Tādā gadījumā starp abām figūras projekcijām vairs nav savstarpēji viennozīmīga piekārtojuma.

Apskatīsim vēl citus afinu figūru piemērus.

Aplūkosim vispirms 256. rasējumu, kur parādīta plaknes $ABCD$ pagriešana ap frontālai projekciju plaknei perpendikulāru asi s paralēli horizontālajai projekciju plaknei. Plaknes virsotņu horizontālās projekcijas, kā zināms, šādā rotācijā pārvietojas perpendikulāri rotācijas ass horizontālajai projekcijai s' un, figūras abu horizontālo projekciju $A'B'C'D'$ un $A'_0B'_0C'_0D'_0$ atbilstošās malas turpinot, krustojas uz s', jo rotācijas ass punkti kustībā paliek uz vietas. Abas horizontālās projekcijas tātad ir afini radniecīgas figūras ar s' kā afinitātes asi. Ja figūras kāda punkta, piemēram, A, projekcija pagrieztā stāvoklī A'_0 ir konstruēta, tad pārējo punktu jaunās horizontālās projekcijas konstruē, izmantojot afinitāti starp abām projekcijām. Šo afinitāti netieši esam izmantojuši jau agrāk visos uzdevumos, kuros tika izdarīta pagriešana ap kādu noteiktu rotācijas asi.

Aplūkosim tagad 257. rasējumā attēloto figūru, iedomājoties to pagaidām kā «telpisku» figūru. Rasējumā parādīta nošķelta četrstūra prizma, pie kam ar s apzīmēta šķēlējas plaknes krustošanās taisne ar prizmas pamata skaldni. Šķēluma figūra $A'B'C'D'$ ir afini radniecīga ar prizmas pamatu $ABCD$. Afinitātes stari ir prizmas sānu šķautnes un afinitātes ass — taisne s. Punkti 1, 2, 3 un 4 ir punkti, kuros krustojas abu figūru plaknes ar prizmas sānu plaknēm (trīs plaknes krustojas vienā punktā!).



258. ras.

Uzskatot tagad 257. rasējumu kā nošķeltās prizmas ortogonālu vai slīpu paralēlprojekciju rasējuma plaknē, varam teikt, ka prizmas šķēluma un tās pamata projekcijas ir afinas figūras ar abu figūru plakņu šķēluma taisnes projekciju kā afinitātes asi un prizmas sānu šķautņu projekciju virzienu kā afinitātes virzienu.

Figūru $ABCD$ varam uzskatīt arī par figūras $A'B'C'D'$ ēnu prizmas pamata plaknē paralēlapgaismojumā (paralēli prizmas sānu šķautnēm), tādēļ analoģiska radniecība pastāv starp kādas plaknes figūras un tās ēnas paralēlprojekcijām. Un, beidzot, uzskatot figūras $A'B'C'D'$ un $ABCD$ par kādas plaknes figūras aksonometrisko attēlu un aksonometrisko virsskatu (arī pretskatu vai sānskatu), redzam, ka šāda radniecība pastāv arī starp abām aksonometriskajām projekcijām.

Visi iztirzātie piemēri parāda, ka afinitāti var plaši izmantot tēlotājas ģeometrijas uzdevumu atrisināšanā. Ar šiem piemēriem, pie tam vēl nav izsmeltas visas izmantošanas iespējas. Kā piemēru, kam nav nekāda sakara ar projecēšanas metodi un ko tomēr var atrisināt ar afinitātes palīdzību, var minēt sekojošo (258. ras.).

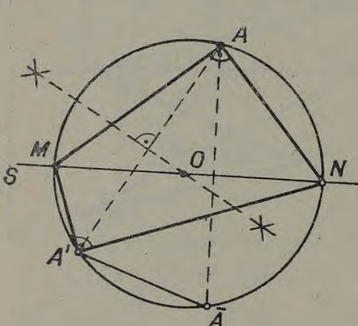
Dotas divas taisnes t_1 un t_2, kas krustojas ārpus rasēšanas dēļa. Caur punktu A jāvelk trešā taisne, kas ietu caur to pašu krustpunktu.

Izvēlamies taisni t_1 par afinitātes asi un meklējam taisnei t_2 afinu taisni t caur punktu A, kurai tātad jāiet caur taisnes t_2 krustpunktu ar afinitātes asi t_1. Izvēloties arī patvaļīgu afinitātes virzienu v, punktam A tad atbilst punkts A_2, palīgtaisnei l caur A — taisne b

un kādai citai patvaļīgai taisnei k caur taisnes l patvaļīgu punktu B atbilst taisne k_2 caur atbilstošo punktu B_2. Taisnes k_2 krustpunktam C_2 ar taisni t_2 atbilst punkts C uz taisnes k, un, tā kā šim punktam jāatrodas uz taisnei t_2 atbilstošās taisnes caur punktu A, tad taisne AC ir meklētā.

81. Afinitātes galvenie virzieni. Divām krustiskām taisnēm, kā redzējām, afinitātē atbilst krustiskas taisnes. Divām perpendikulārām taisnēm pie tam atbilst taisnes, kas vispār krustojas patvaļīgā leņķī. Noskaidrosim tagad jautājumu, vai plaknē, kurā definēta kāda afinitāte, eksistē tādas divas perpendikulāras taisnes, kam arī atbilstošās taisnes ir perpendikulāras.

Ja A un A' (259. ras.) ir afinitātē atbilstoši punkti ar taisni s kā afinitātes asi, tad meklētā taisnā leņķa malām jākrusto afinitātes ass tā, lai leņķi MAN un $MA'N$ iznāktu taisni. Tas nozīmē, ka punktiem A un A' jāatrodas uz *riņķa līnijas,* kam centrs O ir uz afinitātes ass s. Šo centru dabū kā taisnes nogriežņa AA' vidusperpendikula krustpunktu ar afinitātes asi. Meklētos taisnos leņķus dabū, savienojot afinitātē atbilstošos punktus A un A' ar punktiem M un N, kuros riņķa līnija krusto afinitātes asi. Konstrukcija paliek spēkā arī tad, ja punkti A un A' atrodas vienā pusē afinitātes asij.



259. ras.

Ja tagad novilksim vēl citas taisnes, kas attiecīgi paralēlas taisnēm AM un AN, tad šīm perpendikulārajām taisnēm afinitātē atbilstošās taisnes būs arī savstarpēji perpendikulāras. Virzienus AM un AN, $A'M$ un $A'N$ tādēļ sauc par afinitātes *galvenajiem virzieniem;* ik divām šajos virzienos vilktām savstarpēji perpendikulārām taisnēm afinitātē atbilstošās taisnes ir savukārt perpendikulāras.

Apskatītais paņēmiens afinitātes galveno virzienu noteikšanai nav derīgs, ja riņķa līnijas centrs iznāk ārpus rasējuma robežām. Tādā gadījumā jāievēro, ka punkta A ortogonāli simetriskais punkts $\bar{A}$ attiecībā pret afinitātes asi arī atrodas uz riņķa līnijas, un taisne $A'N$ ir leņķa $AA'\bar{A}$ bisektrise, jo leņķi $AA'N$ un $NA'\bar{A}$ balstās uz vienāda garuma riņķa lokiem (sk. ras.). Virzienu $A'N$ tātad var noteikt, arī neizmantojot riņķa līniju, bet tad ir zināmi virzieni $A'M \perp A'N$, MA un $AN \perp MA$.

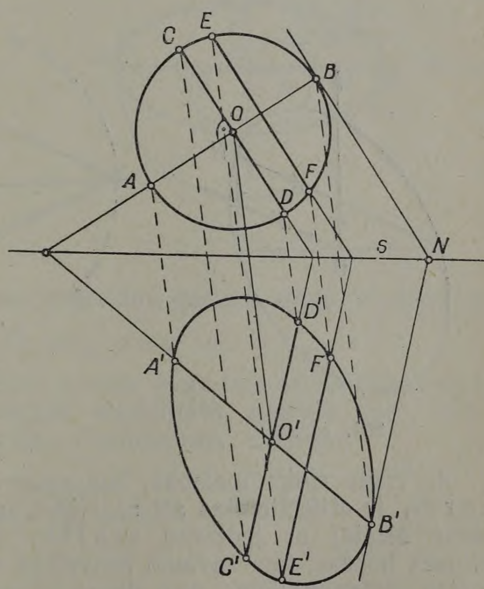
Ja afinitātes virziens AA' ir perpendikulārs afinitātes asij (ortogonāla afinitāte), tad viens no glavenajiem virzieniem ir paralēls, bet otrs — perpendikulārs afinitātes asij. Ja punkti A un A' ir ortogonāli simetriski pret afinitātes asi, tad ik diviem perpendikulāriem virzieniem caur punktu A atbilst perpendikulāri virzieni caur punktu A', jo ikvienai figūrai tad atbilst ortogonāli simetriska figūra.

Tā kā afini radniecīgās figūras varam vienmēr iedomāties kā vienā plaknē savietotas divas plaknes figūras (no kurām viena ir otras paralēlprojekcija), tad agrāk formulētajiem noteikumiem par taisna leņķa paralēlprojekcijām (sk. 74. nodalījumu), var pievienot sekojošo:

Katrā plaknē vienmēr eksistē divi tādi perpendikulāri virzieni, kuru paralēlprojekcijas dotajā virzienā kādā citā plaknē ir savukārt perpendikulāras.

82. Elipse kā riņķa afins attēls.[1] Analitiskā ģeometrijā elipsi parasti definē kā tādu punktu ģeometrisko vietu, kam attālumu summa līdz diviem dotajiem punktiem (t. s. fokusiem) ir pastāvīgs lielums. Izmantojot iepriekš apskatīto afinitātes jēdzienu, elipsi var definēt arī kā riņķa afinu attēlu. Izmantojot šo definīciju, var pamatot svarīgākās elipses īpašības ar atbilstošām riņķa īpašībām.

Izvēloties afinitātes asi s un vienu afinitātē atbilstošu punktu pāri O un O' (260. ras.), zīmējam riņķi ar centru punktā O un konstruējam tam afinitātē atbilstošo figūru. Konstruētajai figūrai — elipsei ir šādas īpašības:



260. ras.

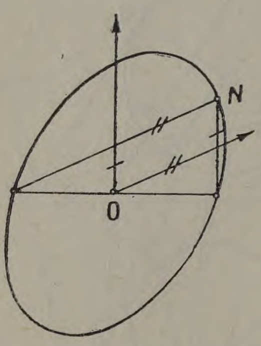
1. Visas elipses hordas, kas iet caur punktu O', dalās šai punktā uz pusēm, jo tāda īpašība ir atbilstošajiem riņķa diametriem, bet kādas taisnes divu nogriežņu attiecība afinitātē nemainās. Punktu O' tādēļ *sauc* par *elipses centru* un hordas, kas iet caur šo centru — *par elipses diametriem.*

2. Diviem perpendikulāriem riņķa diametriem AB un CD atbilst elipses diametri $A'B'$ un $C'D'$, kas vispār nav perpendikulāri. Tā kā riņķa diametrs AB dala uz pusēm visas tam perpendikulārās hordas CD, EF utt., tad tas pats sakāms par elipses diametru $A'B'$ un atbilstošajām hordām $C'D'$, $E'F'$ utt. Var pārliecināties, ka tāda pati īpašība ir elipses diametram $C'D'$ attiecībā pret visām hordām, kas paralēlas diametram $A'B'$. Tādus divus elipses diametrus, no kuriem

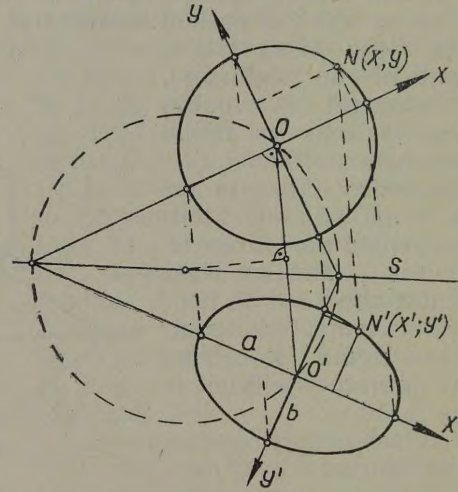
[1] Šeit un turpmāk termins «riņķis» īsuma dēļ lietots termina «riņķa līnija» vietā.

katrs dala otram paralēlās hordas uz pusēm, sauc par elipses *saistītiem diametriem* un pašus virzienus — par *saistītiem virzieniem*. Saistītie diametri $A'B'$ un $C'D'$ ir diviem perpendikulārajiem riņķa diametriem AB un CD afinitātē atbilstošie diametri. Diviem citiem perpendikulārajiem riņķa diametriem atbilst atkal divi saistīti diametri, tādēļ elipsei ir bezgalīgi daudz saistīto diametru pāru.

3. Tā kā paralēlām taisnēm afinitātē atbilst paralēlas taisnes, tad viena saistīta diametra galapunktos vilktās pieskares elipsei ir paralēlas otram saistītam diametram (rasējumā parādīta tikai pieskare punktā B'). Riņķim apvilktam kvadrātam tātad afinitātē atbilst elipsei apvilkts paralelograms, kura malas ir paralēlas elipses saistītiem virzieniem.



261. ras.



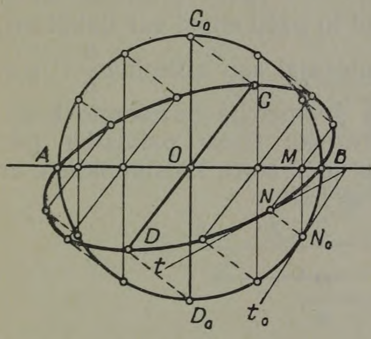
262. ras.

4. Visas riņķa īpašības, kas satur jēdzienu «perpendikulārs», ir attiecināmas arī uz elipsi, ja vien jēdzienu «perpendikulārs» aizstāj ar jēdzienu «saistīts». Tā, piemēram, ik divas elipses hordas, kas savieno patvaļīgu elipses punktu ar kāda diametra galapunktiem, dod divus elipses saistītos virzienus (sk. 261. ras.), jo atbilstošās riņķa hordas ir perpendikulāras. Tāpat saistītus virzienus dod arī ikviena elipsei apvilkta paralelograma diagonāles, jo šim paralelogramam atbilst riņķim apvilkts rombs (kvadrāts tikai tad, ja paralelograma malas paralēlas saistītiem virzieniem), kam diagonāles ir perpendikulāras.

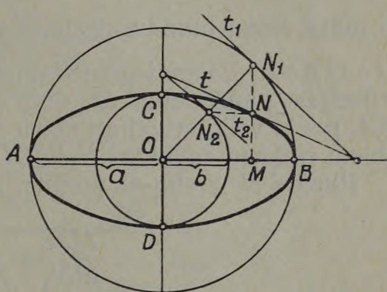
Konstruēsim tagad afinitātes galvenos virzienus X,Y un X',Y'. Šī konstrukcija, kas atsevišķi izpildīta 262. rasējumā, rāda, ka katrai elipsei eksistē viens pāris savstarpēji perpendikulāru saistīto diametru. Šos savstarpēji perpendikulāros saistītos diametrus sauc par *elipses asīm* (lielo un mazo) un to galapunktus par elipses virsotnēm. Elipse ir slīpi simetriska pret ikvienu tās diametru (simetrijas virziens — saistītā diametra virziens), bet ortogonāli simetriska pret abām asīm. Speciālā gadījumā, kad centri O un O' ir ortogonāli simetriski pret afinitātes asi s, elipse reducējas par riņķi. Šai gadījumā, kā redzējām jau agrāk, galvenie virzieni ir nenoteikti, jo riņķim visi saistītie diametri ir savstarpēji perpendikulāri.

Tagad varam arī konstatēt, ka ar riņķa afino attēlu definētā līnija tiešām ir elipse. Izvēloties galvenos virzienus X,Y un X',Y' par koordinātu asīm un apzīmējot riņķa rādiusu ar r, bet elipses pusasis ar a un b, riņķa vienādojums ir

$$x^2+y^2=r^2.$$



263. ras.



264. ras.

Tā kā afinitātē paralēlu taisnes nogriežņu garumi izmainās vienādā attiecībā, tad

$$x:r=x':a \text{ un } y:r=y':b,$$

kur x,y un x',y' ir patvaļīga riņķa punkta N un tam atbilstošā elipses punkta N' koordinātes attiecīgajā koordinātu sistēmā (sk. ras.). Ievietojot pēdējās sakarības riņķa vienādojumā, dabūjam

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1,$$

kas ir elipses vienādojums.

Līdzīgi pierāda, ka elipses afins attēls ir atkal elipse (speciālā gadījumā riņķis). Tas seko arī no tā, ka jaunajam afinajam attēlam ir tādas pašas īpašības kā iepriekšējam.

Noskaidrosim tagad, kā var izmantot afinitāti, lai konstruētu elipsi, kad dots viens pāris tās saistīto diametru vai asis.

Aplūkosim vispirms gadījumu, kad doti elipses saistītie diametri AB un CD (263. ras.). Tad par afinitātes asi izdevīgi izvēlēties vienu no diametriem, piemēram, AB, un konstruēt uz tā riņķi kā elipsei afinitātē atbilstošo figūru. Elipses diametram AB tad atbilst riņķa diametrs AB, bet saistītajam diametram CD — riņķa diametrs $C_0D_0 \perp AB$. Virziens C_0C ir afinitātes virziens, un jebkuru elipses punktu, piemēram, N, dabū, ievērojot, ka, no vienas puses, tam jāatrodas ar atbilstošo riņķa punktu N_0 uz kopēja afinitātes stara, bet, no otras puses, — uz taisnei $N_0M \| C_0D_0$ afinitātē atbilstošās taisnes $MN \| CD$. To pašu riņķi varam izmantot arī, lai konstruētu elipses punktā N pieskari; tai jākrustojas ar punktā N_0 riņķim vilkto pieskari uz afinitātes ass.

Ja saistīto diametru vietā dotas elipses asis, tad iepriekšējā konstrukcija vairs neder, jo afinitātes virziens tad ir perpendikulārs afinitātes asij AB. Tādā gadījumā elipsi var uzskatīt par riņķa (ar diametru AB) ortogonāli afinu attēlu, kas radies, riņķa punktu attālumus līdz afinitātes asij samazinot attiecībā $\frac{b}{a}$. Ja par afinitātes asi skaitām elipses m a z o asi CD, tad to pašu elipsi var dabūt arī, šī mazā riņķa punktu attālumus līdz mazajai asij attiecībā $\frac{a}{b}$ p a l i e l i n o t. Esam ieguvuši analitiskā ģeometrijā pazīstamo konstrukcijas paņēmienu ar divu koncentrisku riņķu palīdzību (sk. 264. ras.): velk patvaļīgu staru ON_1 un no šī stara krustpunktiem ar abiem riņķiem savukārt $N_1N \| CD$ un $N_2N \| AB$.

Punkts N ir elipses punkts, jo

$$\frac{MN}{MN_1} = \frac{ON_2}{ON_1} = \frac{b}{a}.$$[1]

Līdzīgi pierāda, ka punktu N un N_2 attālumi līdz asij CD attiecas tāpat kā elipses pusasis a un b. Rasējumā parādīta arī pieskares t konstruēšana elipses punktā N. Saskaņā ar divējādi definēto afinitāti tai jāiet tiklab caur punktu, kurā pieskare t_1 riņķa punktā N_1 krusto afinitātes asi AB, kā arī caur punktu, kurā pieskare t_2 otram riņķim krusto afinitātes asi CD.

No iepriekšējā var secināt vēl sekojošo:

1) riņķa paralēlprojekcija (ortogonāla un slīpa) vai ēna paralēlapgaismojumā kādā plaknē ir elipse (spec. gad. riņķis);

2) riņķa cilindra šķēlums ar plakni, kas nav paralēla cilindra veidulēm, ir elipse vai spec. gad. riņķis.

Riņķa projekcijas (ēnas) un cilindra šķēlumus sīkāk iztirzāsim vēlāk. Tad aplūkosim arī dažus citus elipses konstruēšanas paņēmienus.

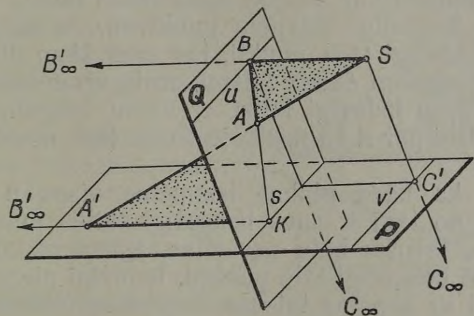
2. §. PERSPEKTIVITĀTE

83. Telpas bezgalīgi tālie (neīstie) elementi. Afinitātes jēdziens, kā redzējām, bija cieši saistīts ar paralēlprojekcijas jēdzienu. Vēl vairāk, visas paralēlprojekciju īpašības var atvasināt no afinu figūru īpašībām. Apskatīsim tagad kādu citu ģeometriskas radniecības veidu, kas saistīts ar figūru c e n t r ā l ā s projekcijas jēdzienu.

[1] Šī konstrukcija un pierādījums der arī gadījumam, kad AB un CD ir patvaļīgi saistīti diametri.

Bet, pirms pāriet pie tā, ir jāatzīmē viena būtiska atšķirība starp abiem projekciju veidiem.

Projecējot paralēli vienas plaknes punktus kādā citā plaknē, katram pirmās plaknes punktam atbilst pilnīgi noteikts otrās plaknes punkts — un otrādi. Izdarot centrālo projecēšanu šis savstarpēji viennozīmīgais sakars turpretim vispār nav spēkā. Lai par to pārliecinātos, aplūkosim 265. rasējumu, kur plaknes Q punkti tiek projecēti no projekciju centra S attēlu plaknē P. Katram plaknes Q punktam A var noteikt centrālo projekciju A', ja vien projecētājs stars SA nav paralēls attēlu plaknei P. Ja turpretim projecētājs stars



265. ras.

ir paralēls plaknei P, kā, piemēram, stars caur punktu B, tad atbilstošo punktu B' nav iespējams noteikt. Gluži tāpat plaknes P punktiem, kā, piemēram C', kas atrodas uz plaknei Q paralēliem projecētājiem stariem, trūkst atbilstošā punkta plaknē Q. Tas pats sakāms par taisnēm u un v' plaknē Q un P, kas vilktas attiecīgi caur punktiem B un C' paralēli abu plakņu šķēluma taisnei s. Šīm abām taisnēm neeksistē atbilstošās taisnes otrā plaknē, jo projecētājas plaknes caur šīm taisnēm ir paralēlas vienai no abām plaknēm.

Šādi izņēmuma gadījumi rada neērtības, formulējot centrālo projekciju īpašības. No šīm neērtībām iespējams izvairīties, ievedot telpas *bezgalīgi tālo* jeb *neīsto elementu* (punktu, taišņu, plakņu) jēdzienu.

Pieņemsim, ka caur punktu A un taisni BS novilkta plakne, kas šķeļ plakni Q pa taisni BK un plakni P pa taisni $A'K \| BS$. Ja tagad punktu A pārbīdīsim pa taisni BK, tuvinot to punktam B, tad punkta A projekcija A' pārvietosies pa taisni $A'K$, neierobežoti attālinoties no punkta K. Robežgadījumā, kad projecētājs stars SA sakrīt ar staru $SB \| P$, saka, ka punkts A' kļūst par taisnes KA' bezgalīgi tālo (neīsto) punktu, citiem vārdiem, punkta B projekcija ir taisnes KA' bezgalīgi tālais punkts. Rasējumā šo projekciju apzīmē, pieliekot bultiņu un apzīmējumu B'_∞.

Mēs tātad vienosimies kādas dotās taisnes «īstos» punktus papildināt vēl ar vienu neīsto jeb bezgalīgi tālo punktu, kas pie tam ir kopējs visām taisnēm, kas paralēlas dotajai.

Bezgalīgi tālais punkts tādējādi mums atvieto taisnes virziena jēdzienu. Tai vietā, lai teiktu: caur punktu ārpus taisnes vilkt šai taisnei paralēlu taisni, varam teikt: caur punktu ārpus taisnes vilkt taisni uz to pašu bezgalīgi tālo punktu. Tāpat varam teikt, ka kādas plaknes divas taisnes krustojas vienmēr vienā punktā — īstā, ja taisnes nav paralēlas, neīstā, ja taisnes paralēlas.

Intuitīvs priekšstats par punktu, kas pārvietojas bezgalībā pa kādu taisni, varētu likt domāt, ka taisnes parastos punktus vajadzētu papildināt ar diviem bezgalīgi tāliem punktiem — pa vienam katrā taisnes vērsumā. Bet tādā gadījumā noteikums, ka caur diviem punktiem var novilkt tikai vienu taisni, nebūtu attiecināms vairs uz bezgalīgi tālajiem punktiem. Ja uz katras taisnes atrastos divi bezgalīgi tālie punkti, tad caur šiem diviem punktiem varētu novilkt bezgalīgi daudz taišņu, proti, visas taisnes, kas paralēlas dotajai. Tāpēc izdevīgi iztikt ar vienu bezgalīgi tālo punktu, t. i., uzskatīt taisni par it kā noslēgtu līniju (kas noslēdzas bezgalīgi tālajā punktā).

Pieņemsim, ka kādā plaknē iezīmētas visas neparalēlās taisnes. Katrai no tām ir savs bezgalīgi tālais punkts, jo pretējā gadījumā dažas taisnes būtu paralēlas. Katrā plaknē tātad ir neierobežoti daudz bezgalīgi tālo punktu. Izdevīgi pieņemt, ka visi šie punkti novietoti uz kopējas taisnes — plaknes *bezgalīgi tālās (neīstās) taisnes.* Tam pamatā ir šāds vienkāršs apsvērums. Katra parasta taisne drīkst krustot plaknes bezgalīgi tālo punktu ģeometrisko vietu (kaut kādu līniju) tikai vienā punktā, jo parasti taisnei ir tikai viens bezgalīgi tālais punkts. Bet līnija, kuru patvaļīga taisne krusto vienā punktā, var būt tikai taisne.

Paralēlām plaknēm ir kopēja bezgalīgi tālā taisne. Visām plaknēm telpā, kas nav paralēlas, ir katrai sava bezgalīgi tālā taisne. Šīs bezgalīgi tālās taisnes, līdzīgu apsvērumu dēļ kā iepriekš, izdevīgi iedomāties novietotas vienā plaknē — telpas *bezgalīgi tālā plaknē,* kas reizē ir visu telpas bezgalīgi tālo punktu ģeometriskā vieta.

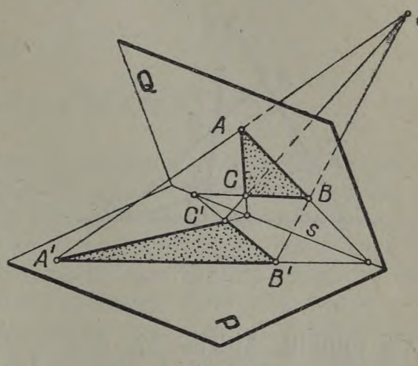
Ievedot šos papildinājumus, atkrīt vajadzība pēc norunām tajos izņēmuma gadījumos, kad projecētājs stars vai projecētāja plakne ir paralēla attēlu plaknei. Atgriežoties pie 265. rasējuma, varam tagad teikt, ka punkta B projekcija plaknē P ir projecētājam staram SB paralēlo plaknes P taišņu kopējais bezgalīgi tālais punkts B'_{∞} (tas ir reizē arī stara SB bezgalīgi tālais punkts!). Tāpat taisnes u projekcija plaknē P ir plaknes P bezgalīgi tālā taisne u'_{∞}, taisne v' ir plaknes Q bezgalīgi tālās taisnes v_{∞} projekcija, bet C' — plaknes Q kāda bezgalīgi tālā punkta C_{∞} attēls plaknē P.

Telpu, kas papildināta ar bezgalīgi tāliem jeb neīstiem elementiem, sauc par *projektīvu* telpu, kamēr telpu bez šiem elementiem — par *afinu.*

84. Radniecība starp plaknes figūru un tās centrālo projekciju. Pieņemsim, ka dotas divas plaknes P un Q projekciju centrs S, no kura vienas plaknes punkti tiek projecēti otrā plaknē (266. ras.).

Sakarā ar iepriekšējo katram vienas plaknes punktam atbilst pilnīgi noteikts otras plaknes (īsts vai neīsts) punkts, un otrādi, t. i., arī centrālā projekcijā tagad piekārtojums ir savstarpēji viennozīmīgs. Kuru no abām plaknēm skaitām par projekciju plakni, nav svarīgi.

Konstruējot plaknē Q kādu figūru, piemēram, trīsstūri ABC, un nosakot tā centrālo projekciju $A'B'C'$ plaknē P, var konstatēt, ka starp abām figūrām pastāv šāda ģeometriska sakarība jeb radniecība:



266. ras.

1) katram vienas figūras punktam atbilst viens pilnīgi noteikts otras figūras punkts, pie kam atbilstošie punkti atrodas uz stariem, kas iet caur kopēju punktu S;

2) katrai vienas figūras taisnei atbilst viena pilnīgi noteikta otras figūras taisne, pie kam atbilstošās taisnes krustojas punktos, kas atrodas uz kopējas taisnes s.

Tādu ģeometrisku sakarību starp divu plakņu figūrām sauc par *perspektivitāti*[1], bet pašas figūras par *perspektīvi radniecīgām,* īsāk — *perspektīvām* figūrām.

Speciālā gadījumā, kad projekciju centrs ir telpas bezgalīgi tālais punkts, perspektivitāte pāriet afinitātē.

85. Perspektivitāte vienā plaknē. Abas perspektīvi radniecīgās figūras 266. rasējumā bija jāiedomājas divās dažādās plaknēs. Praktiski nozīmīgāka ir perspektivitāte starp divām v i e n a s plaknes figūrām. Tādu radniecību var dabūt, piemēram, ja abas plaknes kopā ar tajās iezīmētajām figūrām projecējam paralēli kādā trešā plaknē. Par tādu paralēlprojekciju r a s ē j u m a plaknē varam uzskatīt arī 266. rasējumu.[2]

Runājot par perspektivitāti vienā plaknē, projekciju centrs S, taisne s un projecētāji stari zaudē to nozīmi, kāda tiem bija agrāk. Starus, kas savieno atbilstošos punktus, sauc par *perspektivitātes stariem,* to kopējo krustpunktu S par *perspektivitātes centru,* bet taisni s, uz kuras krustojas atbilstošās taisnes, par *perspektivitātes asi.*

Perspektivitāte ir noteikta, ja dots perspektivitātes centrs, perspektivitātes ass un viens atbilstošu punktu pāris A,A' (267. ras.). Lai noteiktu kādam citam punktam B perspektivitātē atbilstošo punktu B', jāievēro, ka tam jāatrodas uz perspektivitātes stara SB un uz taisnei AB perspektivitātē atbilstošās taisnes $A'K$.

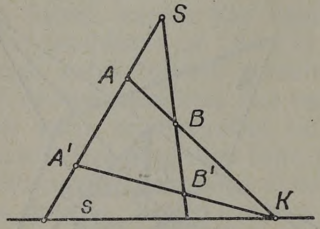
---

[1] Termina perspektivitāte vietā bieži lieto arī terminu *perspektīvā* (arī *centrālā) kolineācija.*

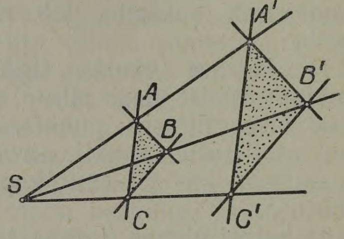
[2] Perspektivitāti vienā plaknē mēdz saukt arī par *homoloģiju.*

Speciālā gadījumā perspektivitātes ass var būt arī plaknes bezgalīgi tālā taisne (268. ras.). Šai gadījumā atbilstošās taisnes ir paralēlas un perspektīvās figūras līdzīgas. Šādu perspektivitāti mēdz saukt par *homotēciju*.

Perspektivitātes asij paralēlām taisnēm atbilstošās taisnes ir savukārt paralēlas perspektivitātes asij, jo iet caur tās bezgalīgi



267. ras.



268. ras.

tālo punktu. Abiem līdz šim apskatītajiem kolineācijas veidiem — afinitātei un perspektivitātei — šī īpašība tātad ir kopēja. No otras puses, tā kā plaknes īstiem punktiem perspektivitātē atbilstošie punkti var būt arī neīsti punkti — un otrādi, tad vispār paralēlām taisnēm perspektivitātē atbilstošās taisnes krustojas vienā punktā, kas ir šo paralēlo taišņu kopējā bezgalīgi tālā punkta atbilstošais punkts. Tāpat kādas taisnes divu nogriežņu (vai divu paralēlu taisnes nogriežņu) attiecība perspektivitātē nemainās vienīgi tad, ja taisne ir paralēla perspektivitātes asij.

VI NODAĻA

LĪKŅU UN VIRSMU PROJEKCIJAS

Līkņu un virsmu attēlošanai parasti izmanto ortogonālo projekciju metodi un tikai atsevišķos gadījumos, lai dabūtu uzskatāmākus attēlus, ņem palīgā arī aksonometrisko vai perspektīvo projekciju metodi. Tādēļ arī mēs visas konstrukcijas izpildīsim galvenokārt divās ortogonālās projekcijās. Aksonometriskos attēlus izmantosim tikai tur, kur tie nepieciešami labākai izpratnei, dodot pie reizes arī paša aksonometriskā attēla konstruēšanas aprakstu. Par līkņu un virsmu perspektīvo attēlu konstruēšanu runāsim atsevišķi nākošajā nodaļā, bet līkņu un virsmu vispārīgās īpašības formulēsim jau tagad visiem trim attēlojuma veidiem reizē.

1. §. VISPĀRĪGI JĒDZIENI PAR LĪKNĒM

Līkni parasti definē kā tādu punktu ģeometrisku vietu, kas izpilda kādus iepriekš dotus noteikumus. Šie noteikumi var būt vai nu aprakstoši (piem., riņķis ir tādu punktu ģeometriska vieta, kas ir vienādā attālumā no dotā punkta — riņķa centra), vai izteikti analitiski ar sakarību starp līknes punktu koordinātēm.

Mūsu nodoms nav dot šeit izsmeļošu līkņu teoriju, lietojot kādu noteiktu pētīšanas metodi. Ar līknēm mēs turpmāk sastapsimies, runājot par virsmu attēlošanu vai šķēlumu un ēnu konstruēšanu, tādēļ no vispārīgās līkņu teorijas izvēlēsimies tikai tos pamatjēdzienus, kas ir nepieciešami šī mūsu konkrētā uzdevuma atrisināšanai.

86. Plaknes līknes. Līkni, kam visi punkti atrodas vienā plaknē, sauc par *plaknes līkni,* pretējā gadījumā līkni sauc par *telpas līkni.* Izvēloties līknes plaknē koordinātu sistēmu, plaknes līkni var definēt analitiski ar vienādojumu

$$f(x,y)=0,$$

kas saista līknes punktu koordinātes. Ja šis vienādojums ir *algebrisks,* t. i., ja $f(x,y)$ ir vesela racionāla x un y funkcija (polinoms) ar reāliem koeficientiem, tad līkni sauc par *algebrisku,* pretējā gadījumā — par *transcendentu.* Par algebriskas plaknes līknes *kārtu* sauc tās vienādojuma pakāpi.

Algebriskās līknes raksturošanai izdevīgi ievest arī līknes *imagināro punktu* jēdzienu. Tie ir punkti, kuru koordinātes x un y (kas apmierina līknes vienādojumu) ir imagināri skaitļi. Tā kā vienādojuma koeficienti ir reāli skaitļi, tad arī skaitļiem x un y saistīti imaginārie skaitļi apmierina vienādojumu un nosaka t. s. līknes *saistīti imagināro punktu.* Papildinot līknes reālos punktus ar šādiem imagināriem punktiem, var formulēt šādas algebrisku plaknes līkņu raksturīgās īpašības:

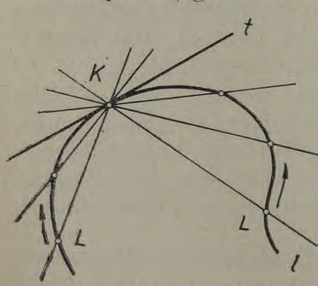
1) *katra taisne krusto n-tās kārtas algebrisku līkni n punktos;*

2) *divām n-tās un m-tās kārtas algebriskām līknēm tai pašā plaknē ir* $n \cdot m$ *kopēju punktu.*[1]

Pēdējā īpašība seko no tā, ka divu *n-tās* un *m-tās* pakāpes algebrisku vienādojumu sistēmai ir $m \cdot n$ atrisinājumu. Tā kā taisni varam uzskatīt kā pirmās kārtas algebrisku līkni, tad no 1. īpašības seko, ka katrai *n-tās* kārtas līknei ir n bezgalīgi tālie punkti (līknes krustpunkti ar plaknes bezgalīgi tālo taisni), pie kam daļa no tiem vai pat visi (kā, piem., elipsei) var būt arī imagināri.

Projecējot kādā plaknē algebrisku līkni kopā ar taisni, kas to krusto, katrs krustpunkts attēlojas par krustpunktu, tādēļ *n-tās kārtas algebriskas līknes projekcija vispār ir atkal n-tās kārtas algebriska līkne.* Šai īpašībai ir nozīme līknes projekciju konstruēšanā. Ja līkne ir, piemēram, trešās kārtas, tad neviena taisne to nedrīkst krustot vairāk nekā trīs punktos. No otras puses, jāaizrāda tomēr, ka no līknes veida vien (ja nav zināms tās veidošanās likums) vēl nevar spriest par tās kārtu, nevar pat noteikt, vai tā ir algebriska vai transcendenta līkne.

87. Līknes pieskare un asimptota; singulārie punkti. Pieskari t kādā patvaļīgā līknes l punktā K (269. ras.) definē kā sekantes KL robežstāvokli, kad punkts L, pārvietojoties pa līkni, sakrīt ar punktu K. Mēdz teikt arī, ka *pieskare ir taisne, kas iet caur diviem bezgalīgi tuviem līknes punktiem,* vai, citiem vārdiem, taisne ir pieskare, ja tā krusto līkni divos bezgalīgi tuvos punktos. Tas jāievēro, novērtējot taisnes krustpunktu skaitu ar algebrisku līkni.

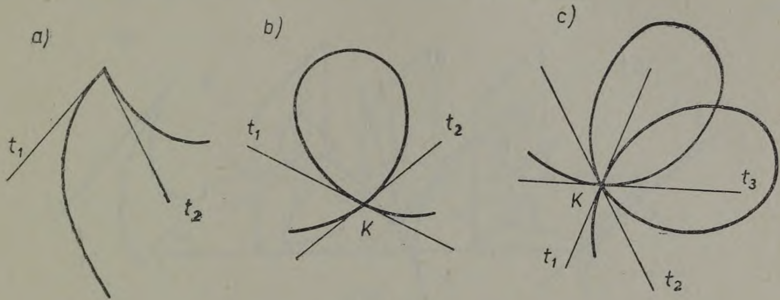


269. ras.

Ja punkts L tuvojas punktam K no otras puses, tad sekante KL var nonākt tai pašā robežstāvoklī kā iepriekš (kā 269. ras.) vai kādā citā robežstāvoklī (270. a ras.). Pēdējais gadījums iespējams tikai transcendentām līknēm; punktu K tādā gadījumā sauc par *stūrpunktu.*

[1] Jāizslēdz gadījumi, kad līkne sadalījusies divās vai vairākās zemākās kārtas līknēs. Tāds otrās kārtas līknes piemērs ir divas taisnes. Tāpat divas līknes ar kārtām p un q var uzskatīt kā līkni ar kārtu $p+q$, kas saskaldījusies divās līknēs. Tādām sairušām augstākās kārtas līknēm kopējs var būt arī viss līknes atsevišķais zars.

Arī algebriskām līknēm var būt punkti ar divām vai vairākām pieskarēm, proti, tajos gadījumos, kad caur punktu iet vairāki līknes zari, veidojot cilpas. Katram līknes zaram caur šo punktu tomēr ir tikai viena pieskare. Atkarībā no tā, vai caur punktu K iet divi, trīs, ..., n līknes zari, to sauc par *divkāršu* jeb *dubultpunktu* (270. ras. *b*), *trīskāršu* (270. ras. *c*), ..., *n-kārtēju* līknes punktu. Tādus punktus mēdz saukt arī par līknes *mezgla punktiem.*



270. ras.

Katra taisne caur n-kārtīgu punktu krusto līkni šai punktā n reizes, proti, katru no n zariem vienreiz. Ja taisne ir p i e s k a r e kādam līknes zaram, tai ar šo zaru ir d i v i kopīgi bezgalīgi tuvi punkti, tādēļ tā krusto līkni šai punktā $(n+1)$ reizi. Katrai *n-tās* kārtas algebriskajai līknei, ja vien tā nav sadalījusies atsevišķās līknēs, iespējams augstākais $(n-1)$-kārtējs punkts. Tā, piemēram, divkāršs punkts iespējams tikai trešās un augstākas kārtas līknēm; divkāršs punkts otrās kārtas līknei eksistē tikai tad, ja tā sadalījusies divās taisnēs.

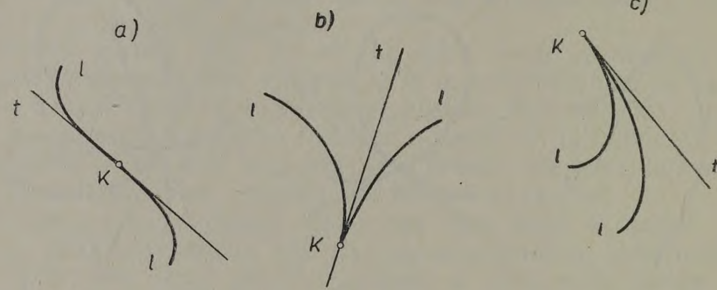
Vairākkārtīgi punkti pieder pie t. s. līknes *singulāriem* punktiem, un tiem ir nozīme kādas noteiktas kārtas algebrisku līkņu klasifikācijā. Mums nozīmīgāki tomēr ir citāda veida singulārie punkti, proti, tādi, kuros eksistē tikai viena pieskare, bet singularitāte izpaužas līknes novietojumā attiecībā pret šo pieskari. Tāda veida singulāri punkti ir (sk. 271. ras.) a) *pārliekšanās* jeb *infleksijas punkts*[1], b) *pirmā veida asuma punkts* un c) *otrā veida asuma punkts.* Visi šie punkti, kā to tālāk redzēsim, var izveidoties, vai nu projecējot plaknē telpas līknes, vai konstruējot divu virsmu šķēluma figūru. Pieskarei t ar līkni katrā no šiem gadījumiem ir trīs kopēji bezgalīgi tuvi punkti.

Par kāda plaknes līknes punkta raksturu var spriest jau no līknes vienas projekcijas, ja vien projecēšanas virziens nav paralēls līknes plaknei. Šādā gadījumā ir spēkā vienkāršs likums: *plaknes līknes singularitātes veids projekcijā nemainās.*

---

[1] Parastajā klasifikācijā līknes pārliekšanās punktu gan neskaita par singulāru punktu.

Zināmas novirzes no šī likuma var būt līkņu perspektīvajos attēlos. Ja projecētājs stars caur kādu līknes punktu ir paralēls attēlu plaknei, tad šis punkts attēlojas par plaknes bezgalīgi tālo punktu. Neraugoties uz to, pieskare tādā līknes punktā var attēloties arī par plaknes īstu taisni. Tādu taisni — pieskari līknei tās bezgalīgi tālajā punktā — sauc par *asimptotu.* Lai iepriekš formulēto likumu varētu attiecināt arī uz līknes perspektīvajiem attēliem, līknes bezgalīgi tālajiem punktiem mēdz piedēvēt tā paša veida singularitātes.



271. ras.

Visus līknes punktus, kas nav singulāri, sauc par *regulāriem* punktiem. Lai kādā regulārā punktā K novilktu pēc iespējas precīzi līknei pieskari, jātuvina lineāla (trīsstūra) mala šim punktam no līknes ieliektās puses tā, lai tā vienmēr krustotu līkni abās pusēs K apmēram vienādā attālumā no K.

Atzīmēsim vēl, ka algebriskas līknes ir viscaur nepārtrauktas, tādēļ tās ir vienmēr noslēgtas vai sastāv no atsevišķiem noslēgtiem līknes zariem. Atkarībā no līknes tipa tās var noslēgties vai nu plaknes galīgā, vai bezgalīgi tālajā punktā (piem., hiperbola). Arī algebriskās līknes pieskare mainās viscaur nepārtraukti, jo, kā jau minēts, algebriskai līknei nav stūrpunktu.

Taisni, kas vilkta perpendikulāri pieskarei caur pieskaršanās punktu, sauc par līknes *normāli* šai punktā.

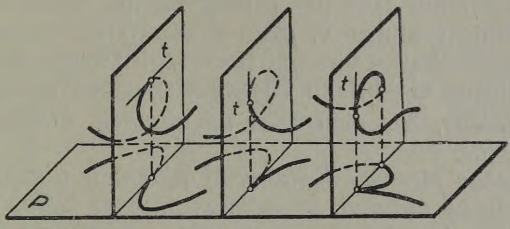
88. Telpas līknes. Izvēloties telpā koordinātu sistēmu, katru telpas līkni var definēt analitiski ar diviem vienādojumiem

$$f_1(x,y,z)=0,\ f_2(x,y,z)=0.$$

Ja šie vienādojumi ir algebriski, arī pašu telpas līkni sauc par *algebrisku,* pretējā gadījumā — līkni sauc par *transcendentu.* Papildinot līknes reālos punktus ar imagināriem punktiem, *katra plakne krusto algebrisku telpas līkni vienāda skaita punktos. Šis konstantais krustpunktu skaits ir algebriskās līknes kārta.*

Telpas līknes projekcija kādā plaknē vispār ir plaknes līkne ar to pašu kārtu, jo, šķeļot telpas līkni ar kādu projecētāju plakni, katram līknes krustpunktam atbilst tikai viens līknes projekcijas krustpunkts ar taisni — plaknes raksturīgo projekciju[1]. Līknes pieskare pie tam attēlojas vienmēr par pieskari, tāpat līknes pārliekšanās punkts, mezgla punkts vai asuma punkts — par tādu pašu līknes projekcijas punktu.

Tomēr iespējams, ka līknes projekcijai ir kāds singulārs punkts arī tad, ja atbilstošais telpas punkts ir regulārs līknes punkts. Tādēļ vienīgi tad, ja ir dotas telpas līknes divas projekcijas, var diezgan droši spriest par pašas telpas līknes veidu.



272. ras.

Iespējamos trīs gadījumus, kad kāds telpas līknes regulārs punkts attēlojas par singulāru punktu, ilustrē 272. rasējums. Ja līknes pieskare nav paralēla projecēšanas virzienam, tad projekcijā var izveidoties pārliekšanās punkts. Ja turpretim pieskare ir projecētāja taisne, attiecīgais punkts var attēloties par līknes projekcijas pirmā vai otrā veida asuma punktu. Sacītais attiecas tiklab uz līknes paralēlprojekciju, kā centrālo projekciju.

V 2. §. VISPĀRĪGI JĒDZIENI PAR VIRSMĀM

89. Virsmas definīcija. Analitiskā ģeometrijā virsmu definē kā punktu ģeometrisko vietu, kas izpilda kādus zināmus, iepriekš dotus noteikumus. Grafiskām konstrukcijām šāda definīcija nav piemērota, nerunājot nemaz par to, ka, attēlojot visus virsmas punktus, tie aizsegs attēlu plakni.

Atšķirībā no šīs definīcijas var arī teikt, ka virsma veidojas kādai līnijai, t. s. veidulei pārvietojoties pēc kāda noteikta likuma telpā. Šī veidule pie tam var palikt vai nu visu laiku nemainīga, vai arī mainīt savu lielumu. Parasti aplūko tādas virsmas, kurām veidules maiņa un tās kustība notiek pēc kāda likuma. Diezgan bieži tomēr izmanto arī virsmas, kas definētas ar grafiski dotu līkņu

[1] Te gan ir jāievēro, ka atsevišķos gadījumos divi vai vairāki līknes posmi var attēloties par kopēju līkni (piem., riņķis par taisnes nogriezni); līknes projekcija tādā gadījumā reducējas par zemākas kārtas līkni. Tā paša iemesla dēļ iespējams pat, ka kāda transcendenta telpas līkne (kam ir bezgalīgi daudz krustpunktu ar plakni) attēlojas par algebrisku līkni (sk., piem., 349. ras. horizontālo projekciju).

s a i m i. Šādas virsmas, kurām tātad matemātiskais veidošanās likums nav zināms, sauc par *grafiskām virsmām,* un par tām runāsim atsevišķi vēlāk (sk. 118. nodalījumu). Pie tādām virsmām pieder arī t. s. *topografiskās virsmas,* kuru pētīšanai lieto kotēto projekciju metodi (sk. VIII nod.).

Analitiskā ģeometrijā virsmu definē ar vienādojumu $f(x,y,z)=0$, kas saista virsmas punktu koordinātes. Ja šo vienādojumu ar algebriskiem pārveidojumiem var pārveidot tā, ka kreisā pusē ir vesela racionāla koordinātu funkcija, tad virsmu sauc par *algebrisku,* pretējā gadījumā virsmu sauc par *transcendentu.* Vienādojuma locekļu augstāko pakāpi (mainīgo x, y un z kāpinātāju summu) sauc par *virsmas kārtu.* Pieskaitot virsmai tās imagināros punktus, iespējams formulēt sekojošus algebrisku virsmu vispārīgos likumus:

1. *Katra taisne, kas neatrodas uz virsmas, krusto n-tās kārtas virsmu n punktos.*

2. *Algebriskas virsmas šķēlums ar plakni ir algebriska līkne ar tādu pašu kārtu kā virsmai, jo šķēlējas plaknes kādas taisnes krustpunkts ar virsmu ir reizē tās krustpunkts ar šķēluma līniju.*

3. *Divas virsmas ar kārtām m un n vispār krustojas pa telpas līkni ar kārtu* $m \cdot n$, jo kāda patvaļīga plakne šķeļ abas virsmas pa līknēm ar kārtu m un n, kas savukārt krustojas $m \cdot n$ punktos (sk. 86. nodalījumu). Šie krustpunkti ir arī vienīgie, kas kādai plaknei ir kopīgi ar abu virsmu šķēluma līniju. Divas otrās kārtas virsmas (piem., lode, riņķa konuss vai cilindrs, elipsoīds utt.) tātad šķeļas pa ceturtās kārtas līkni, kas atsevišķos gadījumos var sadalīties divās līknēs. Speciālā gadījumā:

4. *Ja divām otrās kārtas virsmām ir kopēja viena otrās kārtas līkne (konika), tad šīs virsmas šķeļas vēl pa vienu otrās kārtas līkni (koniku).*

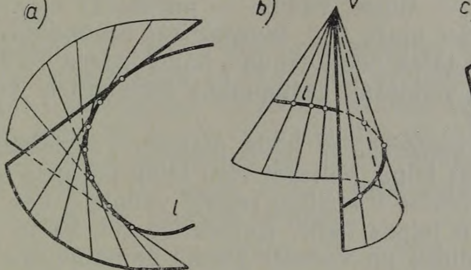
5. *Ja divām otrās kārtas virsmām ir kopēja simetrijas plakne, tad abu virsmu šķēluma līknes ortogonālā projekcija šai simetrijas plaknē ir otrās kārtas līkne.*

90. Virsmu klasifikācija. Atkarībā no veidulēm virsmas var iedalīt šādās divās galvenās grupās jeb klasēs: *taišņu virsmās,* kuru veidules ir taisnes, un *līkņu virsmās,* kuru veidules ir patvaļīgas līknes. Taišņu virsmai raksturīgi, ka caur katru tās punktu var novilkt taisni, kas visa atrodas uz virsmas. Taisnes kustību vispārīgā gadījumā var noteikt ar trīs līknēm, t. s. *vadulēm,* kuras tai visā kustības laikā jākrusto. Atsevišķos gadījumos kustības noteikumi var būt arī vienkāršāki.

Aplūkosim dažus taišņu virsmu piemērus.

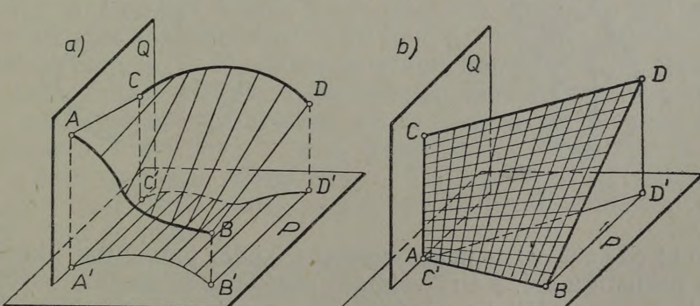
Pieņemsim, ka telpā dota līkne l (273. ras. a), kurai visos punktos novilktas pieskares. Šīs pieskares veido liektu virsmu (plakni vienīgi tai gadījumā, ja l ir plaknes līkne), ko sauc par līknes *pieskaru virsmu.* Līkne l ir virsmas t. s. *asuma šķautne,* uz kuras krustojas ik divas bezgalīgi tuvas līknes pieskares.

Speciālā gadījumā arī v i s a s veidules var iet caur vienu un to pašu punktu. Tādas taišņu virsmas veidojas, griežoties taisnei ap kādu punktu t. s. *virsotni*. Atkarībā no tā, vai virsotne ir īsts vai neīsts telpas punkts, dabū *konisku* vai *cilindrisku* virsmu (273. ras. *b* un *c*). Veidules kustība ir noteikta, ja dota virsotne V (resp. tās virziens) un vadule l, kas veidulei visu laiku jākrusto. Atkarībā no vadules formas iespējams dabūt visdažādāka veida koniskas un cilindriskas virsmas. *Ja vadule ir n-tās kārtas algebriska līkne, tad arī koniskā vai cilindriskā virsma ir ar to pašu kārtu.*



273. ras.

Ja taisne, pārvietojoties telpā, slīd pa divām vadulēm AB un CD (274. ras. *a*), paliekot pie tam visu laiku paralēla kādai plaknei Q (t. s. virzienu plaknei), tad veidojas virsma, ko sauc par *cilindroīdu*[1]. Speciālā gadījumā, ja viena no vadulēm ir taisne, dabū t. s. *konoīdu*. Ja vadules ir divas šķērsas taisnes (274. ras. *b*), tad izveidojas



274. ras.

virsma, ko sauc par *hiperbolisko paraboloīdu* jeb *greizo plakni*. Šai gadījumā to pašu virsmu var veidot arī ar taisni, kas slīd pa šķērsām taisnēm AC un BD, visu laiku paliekot paralēla plaknei P.

Visas taišņu virsmas var iedalīt divās apakšklasēs: *izklājamās* taišņu virsmās (kas ir izklājamas plaknē; piemēram: koniska, cilin-

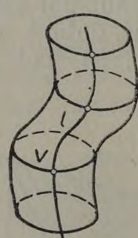
[1] Virzienu plakni var aizstāt arī šīs plaknes bezgalīgi tālā taisne: cilindroīds ir virsma, kam trešā vadule ir kādas plaknes bezgalīgi tālā taisne.

driska un pieskaru virsma) un *greizās* taišņu virsmās (cilindroīds, konoīds, greizā plakne u. c.). Izklājamām virsmām raksturīgi, ka ik divas bezgalīgi tuvas veidules tām iet caur kopēju (īstu vai neīstu) punktu, kamēr greizo taišņu virsmu ik divas bezgalīgi tuvas veidules ir šķērsas («greizas») taisnes. Katra virsma, ko dabū, patvaļīgi salokot kādu plakni (papīra lapu), ir izklājama taišņu virsma.

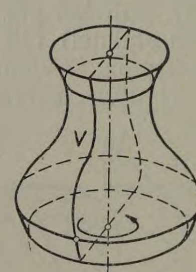
Arī līkņu virsmas iedala divās apakšklasēs atkarībā no tā, vai veidule kustībā maina savu lielumu vai ne. Pirmās grupas virsmu piemēri ir *trīsasu elipsoīds* (veidule un vadule ir elipses), *eliptiskais paraboloīds* (veidule — elipse, vadule — parabola) u. c. Pie otrās grupas virsmām pieder visas t. s. *kinemātiski veidojamās virsmas,* ko savukārt klasificē tālāk pēc kustības, kādu izdara veidule telpā.

Atzīmēsim dažas visbiežāk sastopamās kinemātiski veidojamās virsmas.

B ī d v i r s m a s veidojas, ja kāda plaknes vai telpas līkne v (275. ras.) pārvietojas telpā, paliekot visu laiku paralēla savam sākuma stāvoklim.[1] Veidules v kustību regulē vadule l, kas tāpat var būt gan plaknes, gan telpas līkne. Raksturīgi vēl, ka to pašu bīdvirsmu dabū, ja veidules un vadules lomas apmaina. Ja viena no abām līknēm ir taisne, tad veidojas cilindriska virsma, bet, ja abas ir taisnes (vai plaknes līknes kopējā plaknē), tad bīdvirsma ir plakne.



275. ras.



276. ras.

R o t ā c i j a s v i r s m a s veidojas, kādai patvaļīgai līknei rotējot ap nekustīgu asi. Katrs veidules punkts šādā kustībā pārvietojas pa riņķi, t. s. *paralēli,* kam te ir līknes — vadules loma. Katra plakne caur rotācijas asi šķeļ rotācijas virsmu pa t. s. *meridiānu,* pie kam visi meridiāni ir kongruenti. Rotācijas ass ir katra meridiāna simetrijas ass, kas to dala divos pusmeridiānos. Par veiduli parasti izvēlas tieši šādu pusmeridiānu (sk. 276. ras.). Speciālā gadījumā, ja veidule ir taisne, dabū t. s. *rotācijas konusus* vai *cilindrus,* kas ir otrās kārtas algebriskas virsmas. Vispār, *ja veidule ir algebriska līkne ar kārtu n, tad rotācijas virsma ir algebriska virsma ar kārtu 2n.* Izņē-

[1] Divas (kongruentas) līknes ir paralēlas, ja tās var savietot vienu ar otru translācijas kustībā.

mumi ir gadījumos, kad otrās kārtas līknes rotē ap kādu no savām asīm; tad izveidojas virsmas ar to pašu kārtu, t. i., otrās kārtas virsmas (lode, rotācijas elipsoīds, paraboloīds, hiperboloīds). Virsmu, kas veidojas, riņķim rotējot ap asi, kas atrodas riņķa plaknē un neiet caur tā centru, sauc par *toru*. Speciālā gadījumā, ja riņķis rotācijas asi nekrusto, veidojas t. s. *gredzena virsma*.

Skrūves virsmas veidojas kādai (plaknes vai telpas) līknei izdarot skrūves kustību, kas ir vienmērīgas rotācijas ap nekustīgu asi un vienmērīgas translācijas rotācijas ass virzienā rezultējošā kustība.

Atzīmēsim vēl, ka virsma var veidoties arī pārvietojoties telpā kādai citai vienkāršākai virsmai (veidulei). Šādu virsmu sauc par kādas virsmu saimes *aptverošo virsmu*. Tā, piemēram, lodei pārvietojoties telpā tā, ka tās centrs kustas pa taisni, veidojas rotācijas cilindrs. Ja pie tam mainās arī lodes rādiuss, dabūjam patvaļīgu rotācijas virsmu. Ja lodes centru ģeometriskā vieta ir patvaļīga līkne, dabūjam t. s. *cauruļu virsmas*.

Katru virsmu, kā redzējām, var veidot ar dažādiem paņēmieniem. Attēlojot virsmas plaknē vai izpildot kādas konstrukcijas ar tām, priekšroka vienmēr jādod tam paņēmienam, ar kuru konstrukcijas var izpildīt vienkāršāk un precīzāk. Tuvāk par to runāsim, aplūkojot katra veida virsmu atsevišķi.

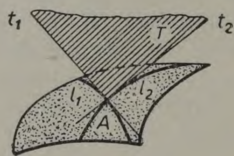
91. Virsmas pieskaru plakne un normāle. Virsmu šķēlumi. Pieņemsim, ka caur kādu patvaļīgu virsmas punktu A (277. ras.) novilktas visas iespējamās līknes uz virsmas un katrai līknei novilkta pieskare šai punktā. Visām t. s. «gludām» virsmām, šīs pieskares vispār atrodas kopējā plaknē T, ko sauc par virsmas *pieskaru plakni* izvēlētajā punktā. Tā kā plakne ir pilnīgi noteikta jau ar divām taisnēm, tad pieskaru plaknes konstruēšanai caur doto punktu A jāvelk divas pēc iespējas vienkāršākas līknes l_1 un l_2 un jānovelk šīm līknēm punktā A pieskares t_1 un t_2. Konstrukcija vēl vairāk vienkāršojas, ja dotā virsma ir taišņu virsma. Tādā gadījumā jāvelk pieskare punktā A tikai vienai līknei, jo par otru līkni var izvēlēties taisni — veiduli caur šo punktu.

Taisni, kas vilkta caur punktu A perpendikulāri pieskaru plaknei T, sauc par *virsmas normāli* šai punktā.

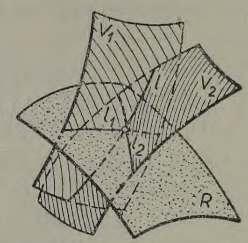
Virsmas šķēlumu ar patvaļīgu plakni vispār nosaka, konstruējot un savienojot tās atsevišķo veiduļu krustpunktus ar šo plakni. Šo vispārīgo paņēmienu tomēr nav ieteicams lietot, pirms nav apsvērtas visas konstrukciju vienkāršošanas iespējas. Tā, piemēram, ja ir zināms, ka šķēluma līknei jābūt elipsei, tad šī šķēluma konstruēšana «pa punktiem» ir neērta un dod neprecīzu rezultātu. Tādā gadījumā jācenšas iepriekš noteikt elipses asis vai saistītos diametrus un pašu līkni konstruēt, izejot no šiem elementiem.

Ja šķēlums ir kāda augstākas kārtas līkne, tās projekcijas precīzākai izvilkšanai var izmantot arī pieskares šķēluma līknes dažos punktos. Tā kā katrai pieskarei, no vienas puses, jāatrodas pieskaru plaknē caur attiecīgo virsmas punktu, bet, no otras puses (kā plaknes līknes pieskarei), — pašā šķēlējā plaknē, tad *šķēluma līknes pieskare kādā punktā ir caur šo punktu vilktās pieskaru plaknes krustošanās taisne ar šķēlēju plakni.*

T a i s n e s k r u s t o š a n o s a r v i r s m u nosaka analoģiskī kā krustošanos ar daudzskaldni, t. i., kā taisnes krustpunktus ar šķēluma figūru, pa kuru patvaļīga plakne caur taisni šķeļ doto virsmu.



277. ras.



278. ras.

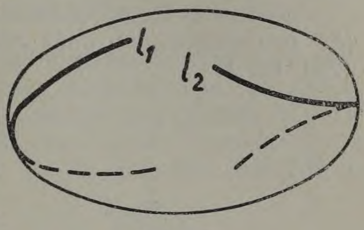
Lai noteiktu d i v u v i r s m u s a v s t a r p ē j ā š ķ ē l u m a l ī n i j u, abas virsmas iepriekš šķeļ ar kādu palīgvirsmu saimi. Ja kāda no palīgvirsmām R (278. ras.) šķeļ abas dotās virsmas V_1 un V_2 pa palīglīknēm l_1 un l_2, tad abu līkņu krustpunkts ir meklētās šķēluma līknes l punkts. Palīgvirsmu izvēli katrā atsevišķā gadījumā nosaka uzdevuma noteikumi. Par palīgvirsmām parasti izvēlas plaknes, bet atsevišķos gadījumos izdevīgāk izvēlēties citas virsmas. Palīgvirsmas vai plaknes vienmēr jāizvēlas tā, lai palīglīknes l_1 un l_2 būtu visvienkāršākās.

Šķēluma līknes projekcijas precīzākai izvilkšanai arī ieteicams iepriekš noteikt pieskares dažos šīs līknes punktos. Tā kā katrai pieskarei reizē jāatrodas abās pieskaru plaknēs, kas novilktas caur attiecīgo punktu katrai virsmai, tad *šķēluma līknes pieskare kādā punktā ir abām virsmām caur šo punktu vilkto pieskaru plakņu šķēluma taisne.*

92. Virsmu attēlošana. Ja no virsmas attēliem prasām vienīgi to, lai tie dotu iespēju atrisināt dažādus ģeometriskus uzdevumus par pašu virsmu, tad pietiek attēlot tikai tos virsmas elementus, kas to viennozīmīgi raksturo. Šim nolūkam pietiek, piemēram, jau ar atsevišķu virsmas veiduļu attēliem (virsmas skeletu) vai pat ar vadules projekcijām un norādījumu, kā konstruēt projekcijas virsmas veidulei caur patvaļīgu vadules punktu. Ja turpretim attēliem jābūt arī uzskatāmiem, tad jāiezīmē vēl virsmas redzamā apveida projekcijas.

Virsmas redzamais apveids ir līnija, kuras punktos projecētāji stari pieskaras virsmai. Paralēli projecējot, šie stari veido cilindrisku virsmu, centrāli projecējot, — konisku virsmu; redzamā apveida projekcija ir šo projecētāju virsmu šķēlums ar attēlu plakni. Ja virsma ir attēlota kā tās veiduļu skelets, tad *redzamā apveida projekcija ir šī skeleta aptverošā līnija.*

Virsmas redzamais apveids atdala virsmas daļu, kas, skatoties projecēšanas virzienā, ir redzama no šai virzienā neredzamās daļas. Ja uz virsmas ir kāda līkne, kas tikai daļēji atrodas virsmas redzamajā daļā, tad *līknes projekcijai ir jāpieskaras virsmas redzamā apveida projekcijai.* Izņēmums ir vienīgi tai gadījumā, kad krustpunktā ar redzamo apveidu līknes pieskare ir šī punkta projecētājs stars (sk. 279. ras.; sal. arī ar 272. ras.).



279. ras.

Lai attēlotu kādu virsmu plaknē un izpildītu ar to kādas konstrukcijas, ir jāprot atrisināt šādi četri pamatuzdevumi: 1) konstruēt virsmas veidules projekcijas jebkurā stāvoklī, 2) konstruēt virsmas redzamā apveida projekcijas, 3) konstruēt patvaļīga virsmas punkta projekcijas un 4) konstruēt pieskaru plaknes projekcijas ikvienā virsmas punktā.

Šīs konstrukcijas ievērojami vienkāršojas, ja virsma ir kādā speciālā stāvoklī pret projekciju plaknēm. Vispārīgā gadījumā jālieto transformāciju metode.

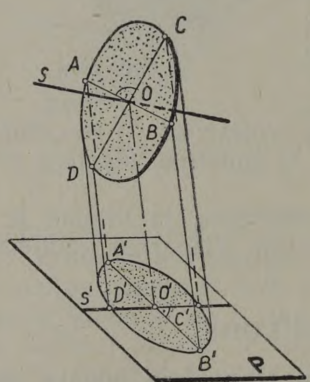
3. §. RIŅĶIS UN LODE

93. **Riņķa ortogonālās projekcijas.** Iepriekšējā nodaļā jau noskaidrojām, ka riņķa paralēlprojekcija vispār ir elipse. Arī elipses galvenās īpašības mums jau zināmas. Tāpēc aplūkosim tikai tos jautājumus, kas saistās ar riņķa ortogonālajām projekcijām. Pieņemsim, ka telpā dots kāds riņķis, kas tiek ortogonāli projecēts attēlu plaknē P (280. ras.). Šī riņķa diametru attēli ir elipses diametri, pie kam lielākais elipses diametrs — elipses lielā ass — atbilst riņķa diametram AB, kas ir paralēls attēlu plaknei, t. i., atrodas uz riņķa plaknes galvenās līnijas. Riņķa diametrs CD, kas ir perpendikulārs diametram AB, atrodas uz riņķa plaknes slīpuma līnijas. Kā plaknes slīpuma līnijas nogrieznim tam jāattēlojas perpendikulāri plaknes galvenās līnijas projekcijai $A'B'$, bet, tā kā plaknes slīpuma līnija veido vislielāko leņķi ar attēlu plakni (kas ir plaknes slīpuma leņķis pret attēlu plakni), tad šis diametrs ortogonālā projekcijā saīsinās visvairāk; tā attēls ir elipses mazā ass $C'D'$.

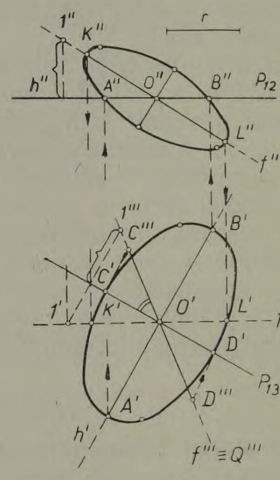
Ja riņķa plaknes slīpuma leņķi apzīmējam ar α, elipses pusasis ar a un b un riņķa rādiusu ar r, tad $b=r\cos\alpha=a\cos\alpha$. Izmantojot šo sakarību, var noteikt elipses mazās pusass garumu, ja zināms riņķa plaknes slīpums pret attēlu plakni. Apgriezti katru elipsi var uzskatīt par tāda riņķa ortogonālu projekciju, kura rādiuss ir vienāds ar elipses lielo pusasi un kura plaknes slīpums noteikts ar sakarību $\cos\alpha=\dfrac{b}{a}$.

Caur riņķa centru O, novilktu taisni s, kas perpendikulāra riņķa plaknei, sauksim par *riņķa asi*. Tā kā plaknes normāle attēlojas perpendikulāri plaknes galvenās līnijas projekcijai, tad *riņķa ass ortogonālās projekcijas virziens sakrīt vienmēr ar elipses mazās ass virzienu*. Šim faktam ir liela nozīme riņķa ortogonāli aksonometrisko attēlu konstruēšanā, ko apskatīsim vēlāk.

Aplūkosim tagad konkrētu uzdevumu: *konstruēt riņķa ortogonālās projekcijas, ja dota riņķa plakne Q, centrs O un rādiuss r* (281. ras.).



280. ras.



281. ras.

Riņķa plakne rasējumā dota ar plaknes galvenajām līnijām caur riņķa centru O. Ja plakne būtu dota kā norobežots plaknes gabals, tad vispirms būtu jākonstruē šīs galvenās līnijas. Tā kā par elipses lielo asi katrā projekcijā attēlojas tas riņķa diametrs, kas ir paralēls attiecīgajai projekciju plaknei, tad riņķa abu projekciju lielās asis $A'B'$ un $K''L''$ dabū, atliekot uz attiecīgās galvenās līnijas projekcijas nogriežņus $O'A'$, $O'B'$, $O''K''$ un $O''L''$ vienlīdzīgus dotajam riņķa rādiusam. Nosakot tagad punktiem A' un B' atbilstošās frontālās projekcijas A'' un B'', tāpat punktiem K'' un L'' atbilstošās horizontālās projekcijas K' un L', dabūjam katrai elipsei vēl divus punktus. Izmantojot šos punktus, elipses konstrukciju katrā projekcijā var pabeigt neatkarīgi no otras projekcijas (sk. 94. nodalījumu).

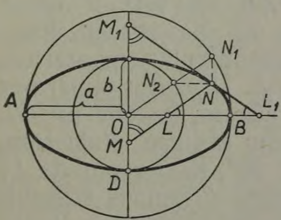
Tai pašā rasējumā parādīts, kā nosaka riņķa horizontālās projekcijas mazo asi. Lai to izdarītu, perpendikulāri riņķa plaknei caur riņķa centru vilkta jauna frontālā projekciju plakne (projekciju asis: $p_{12}\equiv h''$, $p_{13}\perp h'$). Riņķa plaknes Q jaunā frontālā projekcija Q''' ir taisne, kas vilkta caur O' un frontāles patvaļīga punkta 1 jauno projekciju $1'''$, bet paša riņķa jaunā projekcija ir taisnes nogrieznis $C'''D'''=2r$. Velkot no punktiem C''' un D''' perpendikulus pret projekciju asi p_{13}, dabūjam šiem punktiem atbilstošās horizontālās projekcijas C' un D', kas ir meklētās mazās ass galapunkti (leņķis $C'''O'C'$ ir riņķa plaknes slīpuma leņķis pret horizontālo projekciju plakni). Tāpat nosaka arī riņķa frontālās projekcijas mazo asi.

Atzīmēsim vēl, ka elipses asīm vienā projekcijā atbilst otras projekcijas elipses saistītie diametri, pie kam mazās ass galapunktiem atbilstošajos punktos vilktās pieskares ir paralēlas projekciju asij p_{12}.

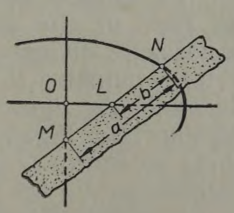
94. Praktiski paņēmieni, kā konstruēt elipses. Atgriezīsimies pie jau agrāk (264. ras.) pieminētās elipses konstrukcijas ar diviem koncentriskiem riņķiem (sk. 282. ras.). Caur elipses punktu N paralēli staram ON_1 novilksim vēl staru NM, kas krusto elipses lielo asi punktā L, bet mazo asi — punktā M. Tā kā četrstūri ON_1NM un ON_2NL ir paralelogrami, tad

$$NM = N_1O = a,$$
$$NL = N_2O = b.$$

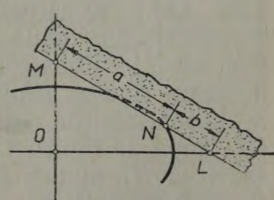
Izmantojot šīs sakarības, var atvasināt šādu ar vienkāršiem palīglīdzekļiem izpildāmu elipses konstrukciju. Uz kādas papīra strēmeles taisni nogrieztās malas atzīmē punktu N un atliek uz vienu un to pašu pusi no šīs iezīmes taisnes nogriežņus $NM=a$ un $NL=b$. Ja tagad papīra strēmeli pieliek pie dotajām elipses asīm tā, lai iezīme L atrastos uz lielās, bet iezīme M — uz mazās ass, tad iezīme N dos elipses punktu (sk. 283. ras.). Pārbīdot papīra strēmeli citā stāvoklī, bet vienmēr tā, lai iezīmes L un M paliktu uz tās pašas ass, dabū arvien jaunus elipses punktus. Šis vienkāršais princips ir pamatā arī visiem parasti lietojamiem elipses cirkuļiem jeb elipsografiem. Ja $a=b$, tad elipse reducējas par riņķi.



282. ras.



283. ras.

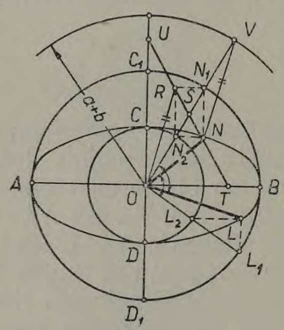


284. ras.

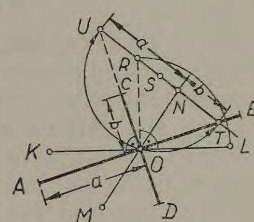
Kāda cita konstrukcija ar papīra strēmeli parādīta 284. rasējumā. Šai rasējumā abu pusasu iezīmes atrodas katra savā pusē punktam N. Ja, strēmelīti pārbīdot, iezīmes L un M, tāpat kā iepriekš, slīd attiecīgi pa elipses lielo un mazo asi, tad punkts N pārvietojas pa elipsi ar tām pašām pusasīm. Par to var pārliecināties, aplūkojot 282. rasējumā taisni M_1L_1 caur punktu N, kas krusto katru elipses asi tādā pašā leņķī kā stars MN, tāpēc $NM_1 = NM = a$, bet $NL_1 = NL = b$.

Izmantojot papīra strēmeli, var atrisināt arī sekojošu uzdevumu, kas praktiskās konstrukcijās jārisina ļoti bieži: *konstruēt elipsi,* *ja dota viena ass un viens elipses punkts.* Atzīmējot uz papīra strēmeles dotās (lielās vai mazās) pusass garumu, pieliek to pie dotā punkta N tā, lai viena iezīme sakristu ar punktu N, bet otra atrastos uz dotās ass vidusperpendikula (sk. 283. un 284. ras.). Tad gar strēmeles malu mērītais taisnes nogrieznis no punkta N līdz dotajai asij ir otras pusass garums. Kaut gan šo pašu konstrukciju var izpildīt arī ar cirkuļa un lineāla (trīsstūra) palīdzību, tomēr paņēmienam ar papīra strēmeli ir ievērojamas priekšrocības, jo tad var iztikt bez palīglīnijām.

Ja asu vietā doti elipses saistītie diametri, tad iepriekš jācenšas noteikt asis. Aplūkosim tādēļ arī elipses asu konstruēšanas paņēmienu.



285. ras.

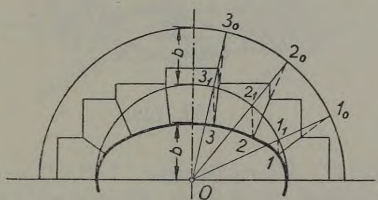


286. ras.

Pieņemsim pagaidām, ka elipses asis AB un CD ir dotas (285. ras.). Konstruējam atkal uz šīm asīm kā diametriem divus koncentriskus riņķus un nosakām diviem perpendikulāriem stariem ON_1 un OL_1 atbilstošos elipses punktus N un L. Uzskatot elipsi par lielākam riņķim afinitātē atbilstošu figūru, redzam, ka ON un OL ir elipses saistītie rādiusi. Pagriežot tagad vienu rādiusu, piemēram, OL, kopā ar figūru OLL_1L_2 ap centru O par 90°, kamēr punkts L_1 sakrīt ar N_1, punkts L_2 sakritīs ar N_2, bet punkts L nonāks stāvoklī R un figūra NN_1RN_2 būs taisnstūris. Pagarinot šī taisnstūra diagonāli RN, līdz tā krusto elipses asis punktos T un U, konstatējam, ka $SO=ST=SU$, $NT=UR=ON_2=b$ un $NU=RT=ON_1=a$. No šīs analizes izriet sekojoša t. s. *Rica elipses asu konstrukcija,* izmantojot dotos saistītos diametrus KL un MN (sk. 286. ras.).

Pagriežam vienu no saistītiem rādiusiem, piemēram, OL, par 90° stāvoklī OR un velkam caur punktu R un otra saistītā diametra galapunktu N taisni. Atliekot uz šīs taisnes no taisnes nogriežņa RN viduspunkta S uz katru pusi $ST=SU=SO$ un savienojot punktus T un U ar centru O, dabūjam elipses asu virzienus, pie kam OT ir lielās ass virziens, jo lielajai asij vienmēr jāatrodas starp abu saistīto diametru veidotā m a z ā k ā l e ņ ķ a malām. Lai dabūtu elipses asu galapunktus, jāatliek vēl no centra O uz abām pusēm attiecīgo asu virzienos $OA=OB=UN$ (vai RT) un $OC=OD=NT$ (vai UR).

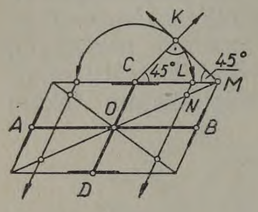
No 285. rasējuma var atvasināt arī vienkāršu elipses n o r m ā ļ u konstruēšanas paņēmienu. Velkot šai rasējumā vēl taisni $NV \| OR$, līdz tā krusto punktā V staru ON_1, konstatējam, ka $\triangle OSR=\triangle VSN$ (viena mala un leņķi vienlīdzīgi), tādēļ $SV=OS$, no tā tālāk seko, ka $N_1V=ON_2=b$. Punkts V tātad atrodas uz riņķa, kam rādiuss ir $a+b$ un centrs punktā O. Tā kā elipses pieskare punktā N ir paralēla saistītajam rādiusam OL (saistīto diametru īpašība), bet $OL \perp OR$ (pēc konstrukcijas), tad šī pieskare ir perpendikulāra taisnei OR un tātad arī taisnei NV, t. i., taisne NV ir elipses normāle punktā N. Šo normāles konstrukciju var izmantot, piemēram, lai no darinātiem akmeņiem veidotai eliptiskai arkai iezīmētu salaidumu šuves, kurām jābūt perpendikulārām eliptiskajam lokam (sk. 287. ras.).



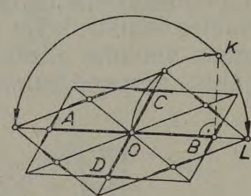
287. ras.

Atsevišķos gadījumos, kad netiek prasīta liela precizitāte (piem., ēnu konstrukcijās), kā arī tad, kad ir jākonstruē tikai neliela daļa no elipses, elipses konstruēšanai var izmantot arī t. s. *astoņu punktu metodi*. Ja AB un CD ir elipses saistītie diametri vai asis (288. ras.), tad konstruē vispirms paralelogramu, kam šie diametri ir viduslīnijas. Uzskatot elipsi par riņķim afinitātē atbilstošu figūru (vai tā paralēloprojekciju), saistītiem diametriem AB un CD atbilst divi savstarpēji perpendikulāri riņķa diametri un konstruētajam paralelogramam — riņķim apvilkts kvadrāts. Tā kā riņķa rādiuss attiecas pret kvadrāta pusdiagonāli kā $1:\sqrt{2}$, tad tādā pašā attiecībā jādala elipsei arī paralelograma diagonāles. Ikvienu no četriem elipses punktiem uz paralelograma diagonālēm, piemēram, punktu N, tādēļ dabūsim, sadalot pusdiagonāli OM attiecībā $ON:OM=1:\sqrt{2}$. Ievērojot elipses simetrijas īpašības, konstrukciju ieteicams izpildīt šādi: uz CM kā hipotenūzas konstruē vienādsānu taisnleņķa trīsstūri CKM, caur punktu K no centra C velk pusriņķi un no tā krustpunktiem ar paralelograma malu — diametram CD paralēlas taisnes. Pēdējās krusto paralelograma diagonāles meklētajos punktos, jo, piemēram, $ON:OM=CL:CM=CK:CM=1:\sqrt{2}$.

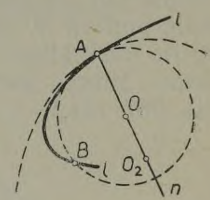
Metodes otrs variants parādīts 289. rasējumā. Uz saistītiem diametriem (vai asīm) AB un CD konstruētā paralelograma diagonāles ir elipses divi saistītie virzieni, jo šīm diagonālēm afinitātē atbilstošās kvadrāta diagonāles ir savstarpēji perpendikulāras. Iedomāsimies elipsei atbilstošajam riņķim apvilktu vēl otru kvadrātu, kura malas paralēlas pirmā kvadrāta diagonālēm. Šī kvadrāta virsotnes atrodas uz pirmā kvadrāta viduslīnijām un malas pieskaras riņķim punktos, kas atrodas uz pirmā kvadrāta diagonālēm. Tādas pašas īpašības ir arī otram kvadrātam afinitātē atbilstošajam paralelogramam. Tāpēc, lai konstruētu šo otro paralelogramu, pietiek noteikt tā vienu virsotni L tā, lai $OB:OL=1:\sqrt{2}$, jo tādā attiecībā ir riņķa rādiusa un kvadrāta pusdiagonāles garumi. Rasējumā virsotne L noteikta šādi: $BK \perp OB$, $BK=OB$, riņķa loks caur punktu



288. ras.



289. ras.



290. ras.

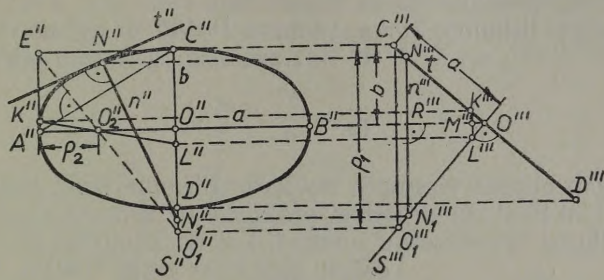
K ar centru punktā O. Pierādījums: $OB:OL=BK:OL=BK:OK=$ $=1:\sqrt{2}$ (vienādsānu taisnleņķa trīsstūra OBK hipotenūza OK rasējumā nav novilkta). Šī konstrukcija reizē dod arī pieskares elipses punktos uz pirmā paralelograma diagonālēm.

Elipse ir ortogonāli simetriska pret abām asīm, bet tieši pret neprecizitātēm simetrijā, sevišķi elipses virsotņu tuvumā, acs ir ļoti jutīga. Tādēļ precīzākai elipses uzzīmēšanai bez abām asīm ieteicams konstruēt vēl t. s. *lieluma riņķus* elipses virsotnēs.

Paskaidrosim tuvāk šo jēdzienu. Novelkot kādā līknes punktā A normāli n (sk. 290. ras.) un velkot riņķi ar centru O_1 uz normāles, kas pieskaras līknei punktā A, šim riņķim bez diviem kopējiem bezgalīgi tuviem punktiem ar līkni pieskaršanās punktā A ir vispār vēl viens kopējs punkts ar līkni — krustpunkts B. Mainot centru, var panākt, ka punkts B tuvojas punktam A un pie kāda noteikta lieluma rādiusa sakrīt ar A. Šai robežstāvoklī riņķim punktā A ir jau trīs kopēji bezgalīgi tuvi punkti ar līkni, un tas piekļaujas šai punktā līknei ciešāk nekā jebkurš cits riņķis. Šo riņķi sauc par *liekuma riņķi* līknes punktā A, bet tā centru — par *liekuma centru*.

Lai atrastu vienkāršāku paņēmienu, kā konstruēt liekuma riņķi, doto elipsi uzskatīsim par kāda riņķa ortogonālo, piemēram, frontālo, projekciju (291. ras.). Riņķa projekcija plaknē, kas perpendikulāra tā diametram AB (riņķa plaknes frontālei), ir taisnes nogrieznis $C'''D'''$, kas vienāds ar riņķa diametru. Riņķa ass s frontālā projekcija sakrīt ar elipses mazo asi, bet jaunajā projekcijā tā attēlojas par riņķa plaknes raksturīgai projekcijai perpendikulāru taisni s'''.

Pieņemsim, ka patvaļīgā riņķa punktā N novilkta pieskare t un šai pieskarei perpendikulāra plakne caur to pašu punktu. Šī plakne ir perpendikulāra riņķa plaknei un iet caur riņķa asi s. Visas šai palīgplaknē novilktās taisnes krusto riņķa asi un ir perpendikulāras pieskarei t. Tāda īpašība ir arī šīs palīgplaknes frontālei n, kas iet caur punktu N. Taisnes n frontālo projekciju n'' dabū, velkot vispirms caur N''' taisni $n''' \| p_{23}$ (jeb $\perp O''O'''$) un krustpunktam N_1''' (ar s''') atbilstošo punktu N_1'' (uz s'') savienojot ar N''. Tā kā pieskare t ir perpendikulāra palīgplaknei, tad $t'' \perp n''$, t. i., n'' ir elipses normāle punktā N''.



291. ras.

Iepriekš atvasināto elipses normāles konstrukcijas paņēmienu varam izmantot liekuma riņķu konstruēšanai elipses virsotnēs, jo liekuma centru kādā līknes punktā varam uzskatīt par šai punktā vilkto divu bezgalīgi tuvu līknes normāļu krustpunktu. Lai noteiktu, piemēram, liekuma centru elipses virsotnē C'', ievērosim vispirms, ka elipses normāle punktā C'' ir taisne s''. Ja tagad punkts N'' tuvojas punktam C'', tad n''' tuvojas taisnei $C'''O_1''' \| n'''$, bet frontālā projekcijā abu normāļu krustpunkts N_1'' tuvojas punktam O_1''' atbilstošajam punktam O_1'', kas arī ir meklētais liekuma centrs elipses virsotnē C''.

Apzīmējot liekuma riņķa rādiusu $O_1''C''$ ar ρ_1, no taisnleņķa trīsstūra $C'''O'''O_1'''$ seko $a^2 = b\rho_1$ (katete ir vidējais proporcionālais starp hipotenūzu un savu projekciju uz tās) jeb

$$\rho_1 = \frac{a^2}{b}.$$

No šīs sakarības var atvasināt šādu liekumu centra O_1'' konstrukciju, neizmantojot palīgprojekcijas: *velk pieskares elipses virsotnēs A''* un C'' *un no šo pieskaru krustpunkta E'' — perpendikulu pret hordu $A''C''$; perpendikula krustpunkts ar elipses mazo asi ir elipses virsotnes C'' liekuma centrs,* jo no trīsstūru O_1'' $C''E''$ un $A''C''E''$ līdzības seko tā pati sakarība $\rho_1 : a = a : b$.

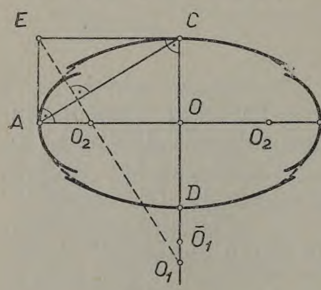
Tā kā elipses virsotne D'' ir virsotnes C'' simetriskais punkts pret elipses lielo asi, tad tā liekuma centru dabū, atliekot uz mazās ass no D'' uz augšu jau noteikto liekuma rādiusu ρ_1. Tāpēc atliek tikai noskaidrot, kā noteikt liekuma centru vienā no elipses lielās ass galapunktiem, piemēram, virsotnē A''. Ja punkts K'' ir punkta A'' bezgalīgi tuvais punkts, kas atrodas uz elipses pieskares punktā A'', tad liekuma centru punktā A'' dabū, nosakot iepriekš aizrādītā veidā elipses normāli punktā K'' un šīs normāles krustpunktu O_2'' ar elipses lielo asi (normāli punktā A''). Šai gadījumā ir spēkā sakarības (sal. ar 291. ras.):

$A''O_2'':O''O_2'' = A''K'':O''L'' = M'''K''':M'''L''' = b:(\rho_1-b) = A''E'':O''O_1''$, kas rāda, ka punkts O_2'' *ir jau agrāk novilktās taisnes* $E''O_1''$ *krustpunkts ar elipses lielo asi.*

Apzīmējot liekuma riņķa rādiusu $O_2''A''$ ar ρ_2, no taisnleņķa trīsstūru $E''A''O''_2$ un $C''A''O''$ līdzības seko $\rho_2:b=b:a$ jeb

$$\rho_2=\frac{b^2}{a}.$$

Kaut gan elipses virsotnēs novilktie liekuma riņķi teorētiski saplūst ar elipsi tikai tās virsotnēs, praktiski ar tiem var aizstāt krietnu daļu no elipses tās virsotņu tuvumā. Lai noskaidrotu, cik lielu daļu drīkst aizstāt ar riņķu lokiem, vajadzīga pieredze. Iesācējiem tādēļ ieteicams vienmēr konstruēt arī pietiekamā skaitā elipses punktus un pirms izvilkšanas tušā iepriekš rūpīgi uzzīmēt elipsi ar zīmuli. Elipses loki, kas vairs nav aizstājami ar liekuma riņķu lokiem, izvelkami ar lekāla palīdzību, pie kam, lai neizjauktu simetriju, visiem četriem elipses starpgabaliem ieteicams lietot vienu un to pašu (atzīmētu) lekāla daļu. Kad elipses zīmēšanas iemaņas apgūtas, ja nav nepieciešama liela precizitāte, var iztikt bez atsevišķu elipses punktu konstruēšanas. Vienīgi tais gadījumos, kad elipses asu garumu atšķirība ir liela (liela ekscentritāte), ieteicams noteikt vēl elipses «diagonālpunktus» (izmantojot papīra strēmeli vai ar astoņu punktu metodi). Vēl viens praktisks paņēmiens ir tāds, ka konstruētos liekuma centrus piebīda mazliet tuvāk elipses centram. Sacīto ilustrē 292. rasējums, kur elipses kreisajai pusei izmantoti konstruētie liekuma centri O_1 un O_2, bet labajai pusei centri $\bar{O}_1$ un $\bar{O}_2$, kas ir nedaudz tuvāk elipses centram O.

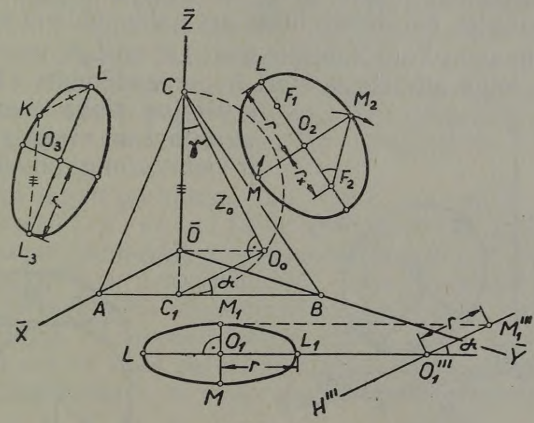


292. ras.

Iepriekš aprakstītie praktiskie elipses konstruēšanas paņēmieni labi jāiegaumē. Turpmāk šīs konstrukcijas vairs neatkārtosim, bet uzskatīsim elipsi par dotu, ja būs zināms vai nu viens pāris tās saistīto diametru (resp. asis), vai arī tikai viena ass un viens punkts.

95. Riņķa aksonometriskā attēla konstruēšana; mēroga elipses. Riņķa aksonometriskos attēlus galvenokārt jākonstruē, attēlojot aksonometrijā ķermeņus, kas ierobežoti ar līkām (cilindriskām, koniskām vai rotācijas) virsmām. Apskatīsim vispirms vienkāršāko, bet praksē visbiežāk sastopamo gadījumu, kad riņķa plakne *ir paralēla kādai koordinātu plaknei.* Tā kā koordinātu sistēmu var brīvi izvēlēties, tad vienkāršības dēļ varam vienmēr pieņemt, ka riņķis atrodas tieši kādā no koordinātu plaknēm.

Konstruējot riņķa *ortogonāli aksonometrisko* attēlu, varam izmantot to, kas teikts par riņķa asi agrāk (sk. 93. nodalījumu). Riņķa ass šai gadījumā ir paralēla kādai koordinātu asij, tādēļ tās (ortogonālās) projekcijas virziens (kas ir arī elipses mazās ass virziens) sakrīt ar atbilstošās aksonometriskās ass virzienu. Elipses *lielā* ass ir perpendikulāra šai aksonometriskajai asij (paralēla attiecīgajai galvenā trīsstūra malai), un tās garums vienāds ar riņķa diametra garumu.



293. ras.

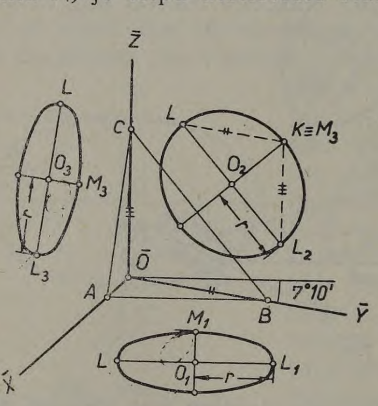
Ortogonāli aksonometriskie attēli trīs riņķiem, kas atrodas katrs savā koordinātu plaknē, parādīti 293. rasējumā. Elipsu lielās asis LL_1, LL_2 un LL_3 ir attiecīgi perpendikulāras aksonometriskajām asīm $\overline{Z}, \overline{X}$ un $\overline{Y}$. Elipses mazā ass MM_1 riņķim pamata plaknē H (koordinātu plaknē XOY) noteikta, konstruējot vispirms Z ass slīpuma leņķi γ pret attēlu plakni (sal. ar 218. ras.) un pamata plaknes profilās projekcijas virzienu H'''. Ja uz H''' atliekam $O_1'''M_1'''=r$, tad punktu M_1 dabū kā punktam M_1''' atbilstošo aksonometriskā attēla punktu.

Tā kā par elipses mazo asi ortogonālajā projekcijā vienmēr attēlojas tas riņķa diametrs, kas atrodas uz plaknes H slīpuma līnijas pret attēlu plakni, un plaknes H slīpuma leņķis ir $90° - \gamma$ (plaknes normāles Z slīpuma leņķa papildleņķis), tad

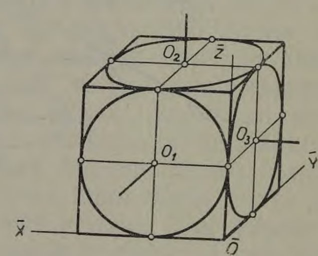
$$O_1M_1 = r \cos\,(90° - \gamma) = r \sin \gamma.$$

Arī pārējo divu riņķu attēliem mazo pusasu garumus tādēļ var noteikt, nosakot iepriekš riņķa plaknei perpendikulārās koordinātu ass slīpumu pret attēlu plakni. Ievērojot tomēr sakaru, kāds pastāv starp kādas plaknes un tās normāles slīpuma leņķiem, konstrukciju var nedaudz vienkāršot, izmantojot tikai (iepriekš jau pagatavotos) koordinātu sagrozījumu mērogus. Šī konstrukcija, kas parādīta riņķim koordinātu plaknē YOZ, ir šāda. Uz lielās ass no centra O_2 atliek taisnes nogriezni $O_2F_2=r_x$. Par šo nogriezni attēlojas taisnes nogrieznis r, ja to atliek uz riņķa plaknei perpendikulārās X ass (dabū no sagrozījumu mēroga X asij). Elipses mazās ass galapunktus M un M_2 dabū, aizcērtot no punkta F_2 ar rādiusa r loku caur centru O_2 novilkto elipses mazās ass virzienu. Tiešām, tā kā $r_x:r=\cos\alpha$ (α ir X ass slīpums pret attēlu plakni), tad $\sphericalangle O_2F_2M_2=\alpha$ un $O_2M=O_2M_2=r\sin\alpha$, kas saskan ar jau iepriekš atzīmēto rezultātu.[1]

Riņķim koordinātu plaknē XOZ 293. rasējumā parādīta vēl trešā elipses konstrukcija. No elipses lielās ass galapunktiem paralēli aksonometriskajām asīm $\overline{X}$ un $\overline{Z}$ vilktie stari LK un L_3K krustojas elipses punktā K, jo telpā atbilstošie stari ir perpendikulāri ($X\perp Z$), tātad krustojas riņķa punktā. Bet ar vienu asi un vienu punktu elipse ir viennozīmīgi noteikta.



294. ras.



295. ras.

Ortogonāli d i m e t r i s k a s projekcijas gadījumā, kur sagrozījumi pa Y un Z asīm ir vienādi (294. ras.), pēdējā konstrukcija riņķim YOZ plaknē dod tieši elipses mazās ass galapunktu, jo galvenais trīsstūris ABC, trīsstūris $\overline{O}BC$ un tātad arī trīsstūris LKL_2 ($LK\|\overline{Y}$, $L_2K\|\overline{Z}$) ir vienādsānu trīsstūri. Ja sagrozījumu koeficienti ir $b=c=0{,}94$, $a=0{,}47$ (sk. 73. nodalījumu), tad pārējo divu riņķu attēli ir kongruentas elipses ar mazās pusass garumiem $O_1M_1=$ $=O_3M_3=\frac{1}{3}\,r$, jo $\sin\gamma=\sin 20°\approx\frac{1}{3}$. Ortogonāli i z o m e t r i s k a s projekcijas gadījumā visi trīs (vienāda lieluma) riņķi attēlojas kā kongruentas elipses, kuru mazo asu galapunktus nosaka kā 294. rasējumā riņķim YOZ plaknē. Skaitliski mazās pusass garums šai gadījumā vienlīdzīgs $0{,}58\,r$, jo $\alpha=\beta=\gamma\approx35°$ un $\sin 35°\approx0{,}58$.

[1] Punkti F_1 un F_2 uz lielās ass, kas ir attālumā r_x no elipses centra, ir elipses fokusi, jo $O_2F_1=O_2F_2=\sqrt{r^2-(O_2M_2)^2}=\sqrt{a^2-b^2}$, ja a un b ir elipses pusasis.

Ja, konstruējot ortogonāli dimetriskos attēlus, Y un Z asij paralēlās ķermeņa šķautnes nesaīsina, bet X asij paralēlās šķautnes saīsina divreiz, tad dabū attēlu ar palielinājumu 1:0,94 = 1,06. Tādā gadījumā elipsu lielās pusasis jāņem 1,06 r, bet mazās pusasis attiecīgi 0,95 r un 0,35 r. Ja ortogonālajā izometrijā saīsinājumus pa asīm neizdara, tad elipsu pusasu izmēri ir 1,22 r un 0,71 r.

Lai riņķus, kas atrodas koordinātu plaknēs, attēlotu slīpā aksonometrijā, zīmē vispirms koordinātu asīm paralēlo riņķa diametru attēlus, kas ir attēlu elipsu saistītie diametri. Ar šiem saistītajiem diametriem elipses ir viennozīmīgi noteiktas. Ilustrācijai aplūkot 295. rasējumu, kur Kabineta projekcijā attēlots kubs ar tā skaldnēs iezīmētiem riņķiem. Kuba skaldne, kas paralēla koordinātu plaknei XOZ, un riņķis šai skaldnē attēlojas nesagrozīti (bez kropļojumiem), bet pārējo (redzamo) kuba skaldņu attēli ir paralelogrami, kam viduslīnijas ir elipsu saistītie diametri. Atgādināsim vēl, ka elipsu lielās asis šai gadījumā nav perpendikulāras koordinātu (resp. riņķu) asīm, kā tas bija ortogonālās aksonometrijas gadījumā.

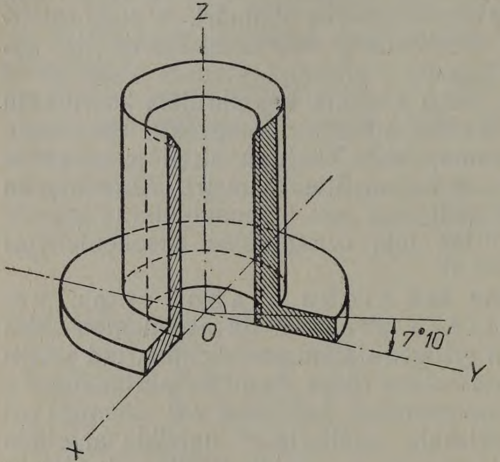
Aplūkosim tagad gadījumu, kad riņķa plakne ir patvaļīgā stāvoklī pret attēlu plakni. Ja aksonometriskais attēls jākonstruē pēc dotajām ortogonālajām projekcijām, tad jācenšas noteikt atkal divu perpendikulāru riņķa diametru aksonometriskos attēlus. Ortogonālās aksonometrijas gadījumā var izmantot arī riņķa asi. Riņķa aksonometriskais attēls te ir noteikts ar riņķa centra, riņķa ass un kāda patvaļīga riņķa punkta attēliem, jo elipses lielās ass attēls vienāds ar riņķa diametru un perpendikulārs riņķa ass attēlam.

296. rasējumā ortogonālajā dimetrijā attēlota daļa no cilindriskas caurules ar atloku un konisku ieurbumu augšējā galā.[1] Elipsu lielās asis ir perpendikulāras aksonometriskajai Z asij (riņķa asij) un vienlīdzīgas ar attiecīgo riņķu diametriem, bet mazo asu garums ir $^1/_3$ no riņķa diametra. Tā kā visi riņķi atrodas paralēlās plaknēs, tad arī jebkuru citu paralēlo diametru garumu attiecība, tāpat liekuma rādiusu attiecība attiecīgo asu galapunktos ir vienāda ar pašu riņķu rādiusu attiecību. Ja vienai elipsei liekuma rādiusu garumi noteikti, tad pārējo elipsu liekuma rādiusu noteikšanai var konstruēt līdzīgus sagrozījumu mērogus kā aksonometriskajām koordinātēm.

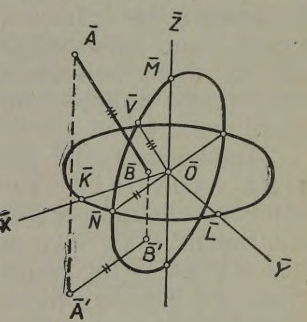
Riņķa aksonometriskos attēlus var izmantot arī taisnes nogriežņu mērīšanai aksonometrijā. Pieņemsim, ka telpā dota lode ar centru koordinātu sākumpunktā O un ar rādiusu, vienlīdzīgu kādai iepriekš izvēlētajai mēra vienībai u. Katra plakne caur koordinātu sākumpunktu šķeļ lodes virsmu pa lielo riņķi, kura aksonometriskais attēls ir t. s. *mēroga elipse*. Ja plakne izvēlēta paralēli dotajam taisnes nogrieznim, tad šo mēroga elipsi var izmantot taisnes nogriežņa garuma noteikšanai.

[1] No ķermeņa izgriezts viens kvadrants. Tādus iedomātus izgriezumus lieto tehniskajos rasējumos, lai parādītu ķermeņa iekšpusi. Tos var ērti izmantot arī paša aksonometriskā attēla konstruēšanai. Pēc attēla pagatavošanas šie palīggriezumi ir atkal jāizdzēš.

Apskatīsim konkrētu piemēru. Taisnes nogrieznis AB dots ar aksonometrisko attēlu $\bar{A}\bar{B}$ un aksonometrisko virsskatu $\bar{A}'\bar{B}'$ (297. ras.). Konstruējam vispirms elipsi ar saistītiem pusdiametriem $\bar{O}\bar{K}=u_x$ un $\bar{O}\bar{L}=u_y$, kas ir attēls vienības riņķim koordinātu plaknē XOY (u_x un u_y ir mēra vienības sagrozījumi pa X un Y asīm). Velkam $\bar{O}\bar{N}\|\bar{A}'\bar{B}'$ un uz $\bar{O}\bar{N}$ un $\bar{O}\bar{M}=u_z$ kā saistītiem pusdiametriem konstruējam otru elipsi, kas ir lodes virsmas šķēlums ar taisnes nogriežnim AB paralēlu plakni, tātad meklētā mēroga elipse. Velkot tagad



296. ras.



297. ras.

$\bar{O}\bar{V}\|\bar{A}\bar{B}$, dabū taisnes nogriezni $\bar{O}\bar{V}$, kas ir aksonometriskā vienība virzienam $\bar{A}\bar{B}$. Attiecība starp $\bar{A}\bar{B}$ un $\bar{O}\bar{V}$ garumiem ir telpas taisnes nogriežņa AB īstais garums.

Ja taisnes nogrieznis atrodas kādā koordinātu plaknē vai tai paralēlā plaknē, tad tā mērīšanai jākonstruē tikai viena elipse. Šī elipse ir aksonometriskais attēls vienības riņķim, kas atrodas attiecīgajā koordinātu plaknē.

96. Lodes projekcijas[1]. Lodes redzamais apveids, projecējot to no galīgā attālumā vai bezgalībā novietota projekciju centra, ir riņķis, pa kuru pieskaras lodei projecētājs konuss resp. cilindrs. Šī redzamā apveida projekcija tātad vispār ir konika. Ortogonālajā projekcijā redzamais apveids ir attēlu plaknei paralēls lodes lielais riņķis, bet apveida projekcija — tam kongruents riņķis.

Ja lodes centrs O un rādiuss r ir doti, lodes apveida abas ortogonālās projekcijas var viegli konstruēt (298. ras.). Lai izpildītu dažādas konstrukcijas ar lodi, svarīgāk ir noskaidrot, kā novietoti lodes atsevišķo punktu abu apveidu attēli. Ievērosim vispirms, ka lodes horizontālā apveida riņķis (ko redzam virsskatā) attēlojas frontālajā projekcijā kā horizontāls diametrs caur O''. Virsskatā

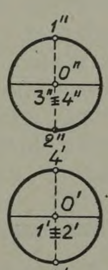
[1] Ar lodi īsuma dēļ sapratīsim lodes virsmu.

tādēļ ir redzami tikai tie lodes punkti, kam frontālās projekcijas atrodas virs šī diametra, pie kam lodes augstākā punkta *1* un zemākā punkta *2* horizontālās projekcijas sakrīt ar O'. Frontālā apveida riņķa horizontālā projekcija ir savukārt horizontāls diametrs caur O', un frontālajā projekcijā redzam tikai tos lodes punktus, kam horizontālās projekcijas ir zem šī diametra. Novērotājam tuvākā punkta *3* un tālākā punkta *4* (pret frontālo projekciju plakni skatoties) frontālās projekcijas sakrīt ar O''.

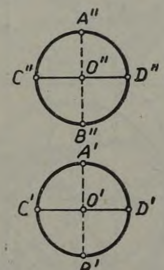
Lai šī sakarība būtu skaidrāka, ieteicams šos attēlus salīdzināt ar attēliem 299. rasējumā, kas nav lodes, bet sakrītošo projekciju plaknei paralēlas elipses attēli (elipses lielā ass ir AB, bet mazā ass CD; asu garumu attiecība 2:1).

Visvieglāk uz lodes var konstruēt attēlu plaknēm paralēlus riņķus. Šos riņķus izmanto, lai atrisinātu pamatuzdevumu:

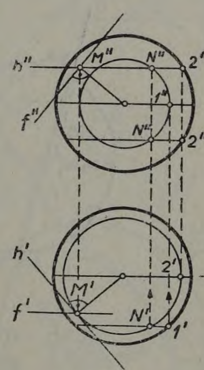
Pēc dota kāda lodes punkta vienas projekcijas konstruēt šī punkta otru projekciju (300. ras.).



298. ras.



299. ras.



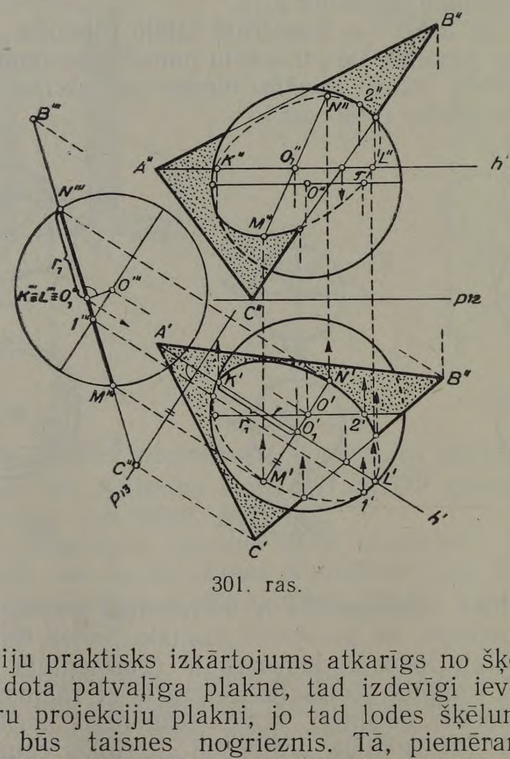
300. ras.

Rasējumā dota lodes punkta N horizontālā projekcija N' un parādīti divi paņēmieni, kā konstruēt frontālo projekciju. Vienreiz izmantots frontālais lodes riņķis caur N (horizontālā projekcija — horda caur N', frontālā projekcija — riņķis ar rādiusu, vienlīdzīgu pusei no šīs hordas garuma), otrreiz izmantots horizontāls riņķis caur punktu N (horizontālā projekcija — riņķis caur N', frontālā projekcija — horizontāla horda, kuras garums vienlīdzīgs šī riņķa diametram). Redzam, ka projekcijai N' atbilst pavisam divas projekcijas N''. Vienīgi tad, ja iepriekš zināms, kurā lodes daļā (augšējā vai apakšējā) punkts atrodas, atrisinājums ir viennozīmīgs. Ja N' vietā dota punkta frontālā projekcija N'', konstrukciju izpilda analoģiski.

Tai pašā rasējumā parādīts arī, kā konstruē pieskaru plakni kādā patvaļīgā lodes punktā M (punktu M konstruē tāpat kā iepriekš). Pieskaru plakne noteikta ar tās galvenajām līnijām h un f, kas ir perpendikulāras lodes rādiusam — virsmas normālei šai punktā.

Ja punkts atrodas uz kāda no lodes redzamajiem apveidiem, tad pieskaru plakne ir projecētāja plakne, kuras raksturīgā projekcija ir pieskare šī apveida attiecīgajai projekcijai.

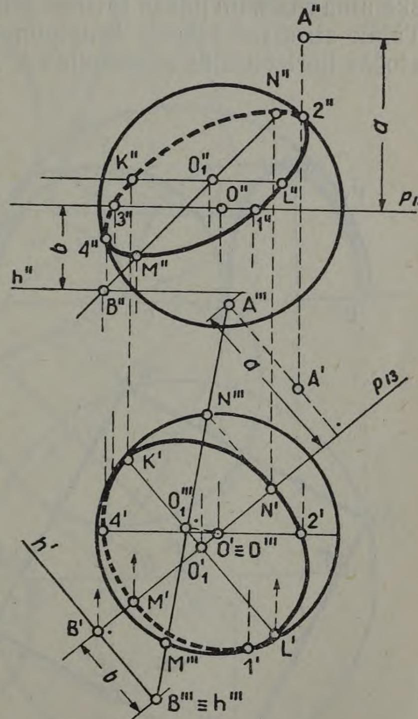
Lodes šķēlums ar plakni ir riņķis, tā ortogonālie attēli tātad ir elipses, kuru lielās asis atrodas uz attiecīgo plaknes galveno līniju projekcijām. Tā kā riņķa centrs ir no lodes centra vilktā perpendikula krustpunkts ar plakni, tad šķēluma riņķa rādiusu dabū kā kateti taisnleņķa trīsstūrī, kam otras katetes garums ir vienāds ar abu centru attālumu, bet hipotenūza — lodes rādiuss. Lodes šķēluma konstruēšanu tātad var reducēt uz 281. rasējumā attēloto riņķa projekciju konstruēšanu.



301. ras.

Konstrukciju praktisks izkārtojums atkarīgs no šķēlējas plaknes stāvokļa. Ja dota patvaļīga plakne, tad izdevīgi ievest jaunu, tai perpendikulāru projekciju plakni, jo tad lodes šķēluma attēls jaunajā plaknē būs taisnes nogrieznis. Tā, piemēram, ja plakne ir dota trīsstūra veidā (301. ras.), tad, konstruējot iepriekš lodes un plaknes jaunās projekcijas, nosakām šķēluma riņķa centra jauno projekciju O_1''' un rādiusu r_1, ar ko ir noteikta arī riņķa horizontālā projekcija. Pēc šīm divām projekcijām var konstruēt arī frontālo projekciju, kas ir noteikta jau ar elipses saistītajiem diametriem $K''L''$ un $M''N''$, kas atbilst elipses asīm $K'L'$ un $M'N'$ horizontālajā projekcijā. Vēl jāievēro, ka šķēluma riņķis ir reāls tikai trīsstūra plaknes robežās, tādēļ te nāk klāt vēl trīsstūra malu krustpunkti, kuru projekcijām pa pāriem jāatrodas uz kopēja perpendikula pret projekciju asi. Šos punktus var izmantot kontrolei vai arī riņķa frontālās projekcijas zīmēšanai, ja nevēlas konstruēt projekcijas asis. Tam nolūkam var izmantot arī, piemēram, punktus *1* un *2*, kas atrodas uz lodes attiecīgajiem redzamajiem apveidiem ($1''$ jābūt uz lodes frontālās projekcijas horizontālā diametra, bet $2''$ — uz frontālās projekcijas kontūras). Šķēluma figūras redzamību nosaka tāpat kā iepriekš.

Nākošā — 302. rasējumā atrisināts tas pats uzdevums, tikai plakne šoreiz definēta ar tās horizontāli *h* un vienu punktu *A*. Atšķirībā no iepriekšējā rasējuma jaunā frontālā projekciju plakne, tāpat arī horizontālā projekciju plakne, ir vilktas caur lodes centru *O*. Tā kā lodes jaunā projekcija sakrīt ar tās horizontālo projekciju, tad atliek konstruēt vēl tikai plaknes jauno projekciju. Tam nolūkam bez punkta *A* jaunās projekcijas A''' noteikta vēl kāda plaknes horizontāles punkta *B* jaunā projekcija B''', kas ir arī pašas horizontāles jaunā projekcija. Tālākā atrisinājuma gaita tāda pati kā iepriekšējā piemērā. Plakne šai rasējumā domāta caurredzama (nereāla), tādēļ tā lodes redzamību neietekmē.



302. ras.

Šķēluma figūras konstruēšana ievērojami vienkāršojas, ja šķēlēja plakne ir projecētājā stāvoklī. Ilustrācijai 303. rasējumā parādīta puslode, kas šķelta ar horizontāli projecētājām plaknēm caur puslodes pamata riņķī ievilkta kvadrāta malām. Šķēluma pusriņķu frontālās projekcijas ir puselipses, kuras viegli konstruēt pēc to pusasīm. Pusriņķi virs *BC* un *AD* krusto lodes frontālo apveidu punktos *1* un *2*. Ja atšķeltās daļas noņemam nost, tad no puslodes frontālā apveida paliek pāri tikai riņķa loks starp šiem punktiem.[1]

Iepriekšējā rasējumā parādīta vēl pusriņķa *AEB* patvaļīga punkta *N* frontālās projekcijas konstrukcija, kas atšķiras no 300.

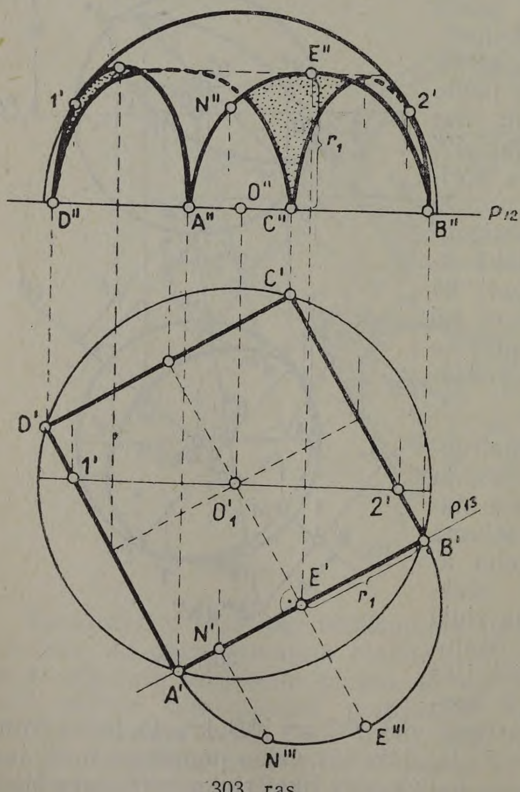
---

[1] Ar šādu no četriem vertikāliem pusriņķiem ierobežotu puslodi sastopamies velvju konstrukcijās, un to sauc par *pilno buru velvi*. Kādas citas, t. s. *lēzenās buru velves* pamatā ir taisnstūris, kura diagonāle ir mazāka par lodes diametru.

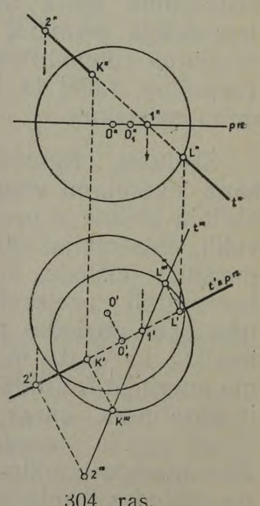
rasējumā parādītās. Ja pusriņķa plakni iedomājamies kā jauno frontālo projekciju plakni, tad tā jaunā frontālā projekcija ir pusriņķis uz $A'B'$ kā diametra. Izvēloties uz šī pusriņķa kādu patvaļīgu punktu N''', nosakām vispirms tam atbilstošo horizontālo projekciju N' un pēc šīm divām projekcijām — punkta N frontālo projekciju N''.

Tikko aprakstīto paņēmienu var izlietot krustpunktu noteikšanai taisnei ar lodi (sk. 304. ras.). Lai to izdarītu, šķeļam lodi ar horizontāli projecētāju palīgplakni caur doto taisni t un konstruējam šķēluma riņķa un pašas taisnes jauno frontālo projekciju šajā plaknē. Tālāk atrodam taisnes krustpunktu projekcijām K''' un L''' atbilstošās horizontālās projekcijas K', L' un frontālās projekcijas K'', L''.

Lodes un kāda daudzskaldņa savstarpējā šķēluma konstruēšana ilustrēta 305. ras. ar šādu frēzēšanas uzdevumu: *konstruēt lodes atlikuma ķermeni, ko dabū, apstrādājot to ar konisku frēzi.* Rasē-

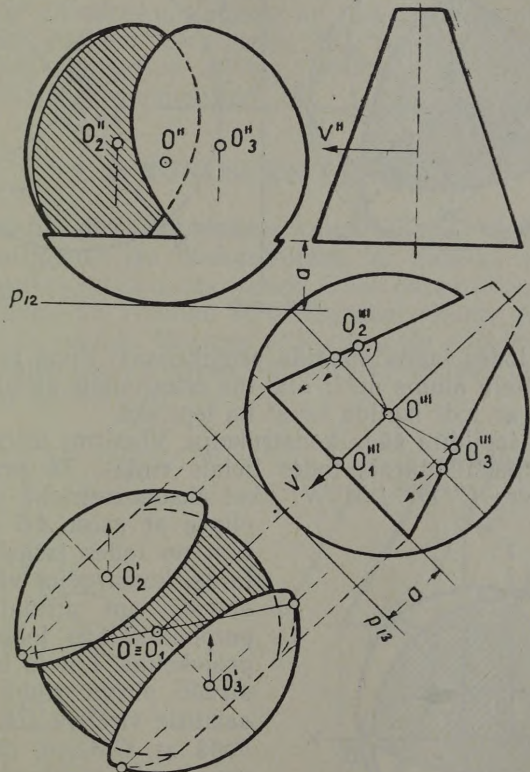


303. ras.



304. ras.

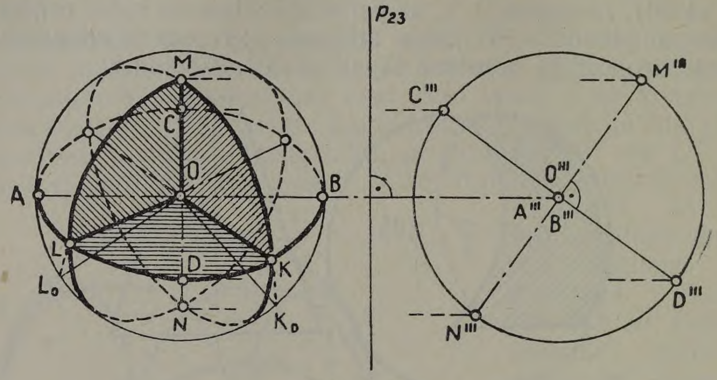
jumā parādīta tikai frēzes ķermeņa frontālā projekcija. Horizontālā projekciju plakne izvēlēta perpendikulāri frēzes asij, bet frontālā projekciju plakne (uzskatāmāka attēla iegūšanai) vilkta patvaļīgā slīpumā pret frēzes kustības virzienu v. Izvēloties perpendikulāri šim virzienam jaunu frontālo projekciju plakni, dabūjam frēzes prizmas (prizma, ko kustībā izveido frēzes ķermenis) jauno frontālo projekciju. Šī projekcija ir vienādsānu trapece, kas kongruenta ar frēzes frontālo projekciju resp. ar frēzes t. s. aksiālo šķēlumu. Frēzes prizmas sānu skaldnes iešķeļ lodes virsmu pa trīs riņķu lokiem, kas jaunajā projekciju plaknē attēlojas par taisnes nogriežņiem. Iešķēluma riņķu centru jaunās projekcijas O_1''', O_2''' un O_3''' dabū tāpat kā 301. rasējumā, t. i., ar perpendikuliem no lodes centra jaunās projekcijas O'''. Arī lodes atlikuma ķermeņa horizontālās un frontālās projekcijas konstruē tāpat kā 301. rasējumā.



305. ras.

Lai konstruētu lodes un patvaļīga skaldņa šķēlumu, jākonstruē atsevišķu skaldņu šķēlumi ar lodi. Jaunās frontālās projekciju plaknes ieteicams vienmēr izvēlēties caur lodes centru perpendikulāri attiecīgās skaldnes galvenajai līnijai.

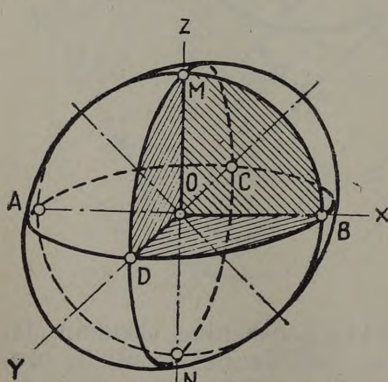
Vēl dažus vārdus par lodes aksonometrisko attēlu konstruēšanu. Vispirms jāpasvītro, ka lodes ortogonāli aksonometriskais attēls ir riņķis, kura rādiuss vienlīdzīgs lodes rādiusam. Bez tam, kā tūliņ redzēsim, lode šai gadījumā ir definēta jau tad, ja bez pašas lodes aksonometriskā attēla ir doti vēl kāda tās diametra galapunktu aksonometriskie attēli. Tiešām, ja ir doti lodes un kāda tās diametra, piemēram, MN attēli (sk. 306. ras.), tad, izvēloties paralēli šim diametram jaunu (profilo) projekciju plakni un lodes centra jauno projekciju O''' (uz kārtotājas $OO''' \perp p_{23}$), lodes un diametra MN jaunās projekcijas var viegli konstruēt (M''' un N'''



306. ras

jāatrodas uz lodes jaunā apveida projekcijas). Kopā ar lodes aksonometrisko attēlu mums nu ir divi tās ortogonālie attēli, tādēļ visas konstrukcijas ar lodi izpilda tāpat kā iepriekš.

Rasējumā izpildīta šāda konstrukcija. Vispirms iezīmēts diametram MN perpendikulārais lodes lielais riņķis. Tā profilā projekcija ir diametrs $C'''D''' \perp M'''N'''$, bet aksonometriskā projekcija — elipse ar asīm AB un CD. Bez tam no lodes izšķelts viens oktants, konstruējot vēl divu (savstarpēji un pirmajam riņķim) perpendikulāru lodes lielo riņķu projekcijas. Lai to izdarītu, konstruēti pirmā riņķa attēla divi saistītie virzieni OK un OL, kas kopā ar OM, pa pāriem ņemti, nosaka abu pārējo elipsu saistītos virzienus. Virzieni OK un OL noteikti, pagriežot «horizontālo» riņķi ap diametru AB paralēli attēlu plaknei, izvēloties $OK_0 \perp OL_0$ un pagriežot atpakaļ sākotnējā stāvoklī. Virzienus OK, OL un OM var uzskatīt arī par aksonometrisko asu virzieniem, kaut gan visas konstrukcijas var izpildīt arī bez šo aksonometrisko asu palīdzības.



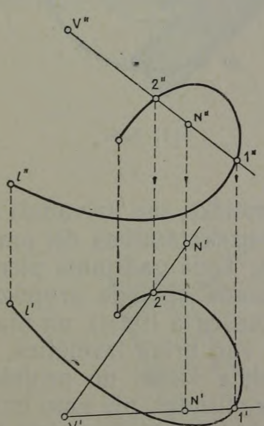
307. ras.

Lodes s l ī p i aksonometriskā attēla (Kabineta projekcijas) konstruēšana parādīta 307. rasējumā. Šai rasējumā iepriekš konstruēti trīs savstarpēji perpendikulāru lodes lielo riņķu attēli, izvēloties savstarpēji perpendikulāros riņķa diametrus AB, CD un MN paralēli aksonometrisko asu virzieniem. Diametri AB un MN attēlojas īstajā lielumā (pats riņķis — par riņķi), bet diametrs CD divreiz saīsināts. Lodes redzamā apveida projekcija ir elipse, kas aptver visu trīs riņķu attēlus (tās mazā ass vienlīdzīga lodes diametram). Uzskatāmības dēļ arī šeit $^1/_8$ no lodes izņemta ārā.

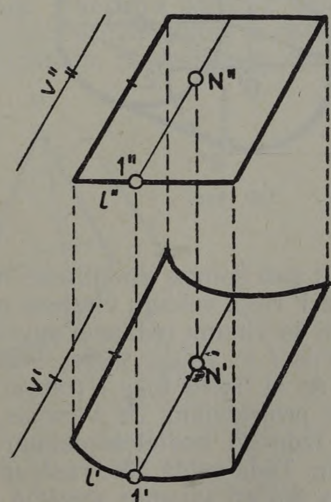
Tā kā lodes attēli slīpā aksonometrijā ir elipses, tad slīpi aksonometriskā metode tās attēlošanai nav visai piemērota. Tas pats sakāms arī par cilindrisku, konisku un rotācijas virsmu slīpi aksonometriskajiem attēliem (sk., piem., 323. ras.). Ja vēlamies iegūt labus, īstenībai atbilstošus attēlus, ieteicams šīs virsmas attēlot tikai ortogonālajā aksonometrijā.

4. §. KONUSI UN CILINDRI

97. Attēlošana; pieskaru plaknes konstruēšana. Nodaļas sākumā (sk. 89. nodalījumu) jau noskaidrojām, ka koniska virsma (īsāk konuss) ir noteikta, ja dota tās vadule l, kas parasti vienmēr ir kāda plaknes līkne, un virsotne V. Cilindrisku virsmu (cilindru) definē vadule l un veiduļu virziens v. Konusu un cilindru attēlošanai vadules l un virsotnes V (resp. virziena v) attēlus tādēļ turpmāk uzskatīsim par dotiem.



308. ras.

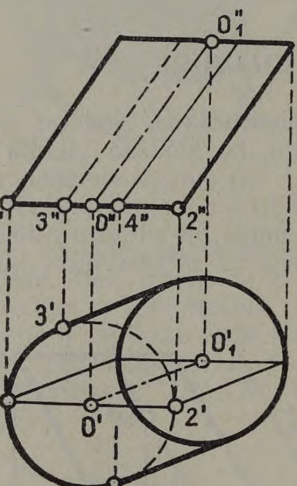


309. ras.

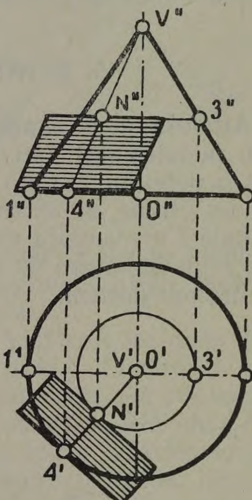
Atrisināsim *pamatuzdevumu: pēc kāda dotās virsmas punkta vienas projekcijas konstruēt tā otru projekciju.*

Ja ir dotas, piemēram, konusa vadules l un virsotnes V divas ortogonālās projekcijas (308. ras.) un kāda konusa punkta frontālā projekcija N'', tad horizontālās projekcijas N' konstruēšanai izmanto konusa veidules, kuru frontālās projekcijas iet caur N''. Ja $V''N''$ krusto vadules frontālo projekciju l'' punktos $1''$ un $2''$ un ja tiem atbilstošie punkti horizontālajā projekcijā ir $1'$ un $2'$, tad V'—$1'$ un V'—$2'$ ir veidulu horizontālās projekcijas un uz tām atrodas meklētā punkta horizontālā projekcija N'. Redzam, ka atkarībā no vadules formas uzdevumam ir viens vai vairāki atrisinājumi.

Cilindram atrisinājuma gaita ir līdzīga, tikai virsotnes V vietā tad ir dots veidulu virziens v (V ir telpas bezgalīgi tālais punkts). Arī citos attēlojuma veidos (aksonometrijā, perspektīvā) šo pozicionālo uzdevumu atrisina analoģiski.



310. ras.



311. ras.

Kaut gan konuss un cilindrs ir pilnīgi noteikti jau ar vaduli l un virsotni V resp. veidulu virzienu v, labākas uzskatāmības dēļ parasti zīmē arī šo virsmu redzamo apveidu attēlus. Tādā gadījumā pieņem, ka vadule l ir galīgs līknes loks, un redzamā apveida projekcijas sastāv no šī līknes loka l (tā var būt arī noslēgta līkne) un malējo veidulu projekcijām. Ja virsmas stāvokli var brīvi izvēlēties, tad vaduli izdevīgi novietot plaknē, kas paralēla kādai no projekciju plaknēm. Tādā veidā 309. rasējumā attēlots cilindrs, pie kam uzskatāmības dēļ arī virsmas augšējā daļa norobežota ar līkni, kas kongruenta ar vaduli l. Rasējumā parādīta arī patvaļīga virsmas punkta N iezīmēšana.

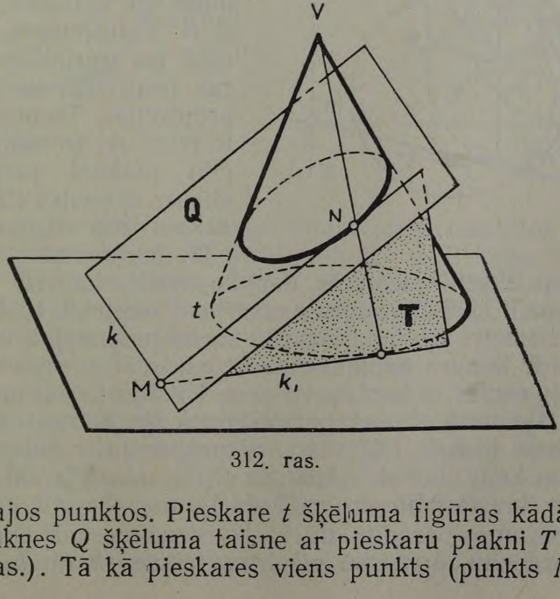
Praktiska nozīme ir galvenokārt tam gadījumam, kad vadule ir riņķis. Tā kā parasti apskata tikai ierobežotus konusus resp. cilindrus, tad virsmas vaduli turpmāk sauksim par tās *pamatu* (cilindram tādi ir divi, augšējais un apakšējais). Taisni, kas savieno tāda riņķa cilindra abu pamatu centrus (riņķa konusa pamata centru ar virsotni), sauc par cilindra (konusa) asi. Cilindrs (konuss) ir taisns vai slīps atkarībā no tā, vai tā ass ir perpendikulāra vai slīpa pret pamata plakni.

Slīpa riņķa cilindra ortogonālas projekcijas parādītas 310. rasējumā. Cilindra frontālā apveida projekcija ir paralelograms, bet horizontālā apveida projekcija sastāv no abu pamatu loku un malējo veiduļu projekcijām. Ievērot, ka frontālā apveida veiduļu horizontālās projekcijas iet caur riņķu horizontālo diametru galapunktiem *1′* un *2′*. Tas jāņem vērā, nosakot cilindra punktu redzamību projekcijās.

Taisns riņķa konuss attēlots 311. rasējumā. Šai rasējumā parādīts arī kāds cits paņēmiens kā konstruēt konusa punktu *N*, izmantojot veidules vietā horizontālo riņķi caur punktu *N*. Šai konstrukcijai ir priekšrocība visos tajos gadījumos, kad veidule caur punktu *N* ir profilā stāvoklī.

Pēdējā rasējumā parādīts arī, kā konstruē pieskaru plakni punktā *N*. Tā kā konuss un cilindrs ir taišņu virsmas, tad pieskaru plakne punktā *N* pieskaras virsmai pa visu veiduli caur izvēlēto punktu. Tāpēc pieskaru plakni var noteikt ar šo veiduli un pieskari virsmas pamatam punktā *4* uz tās pašas veidules. Uzskatāmības dēļ pieskaru plakne rasējumā norobežota, bet šim norobežojumam nav praktiskas nozīmes.

98. **Šķēlumi ar plakni un taisni.** Šķēluma figūras atsevišķus punktus dabū, nosakot atsevišķu veiduļu krustpunktus ar doto plakni. Konstruējot šķēluma figūru pēc punktiem, nepieciešams noteikt arī

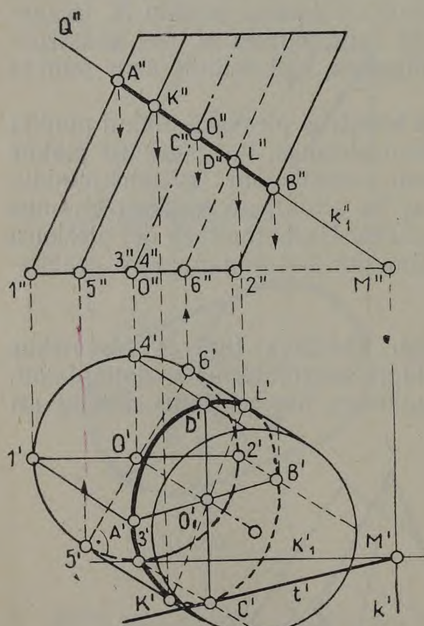


312. ras.

pieskares šajos punktos. Pieskare *t* šķēluma figūras kādā punktā *N* ir dotās plaknes *Q* šķēluma taisne ar pieskaru plakni *T* šai punktā (sk. 312. ras.). Tā kā pieskares viens punkts (punkts *N*) vienmēr zināms, tad pietiek noteikt vēl vienu tās punktu M. Šo punktu visvieglāk dabū, meklējot iepriekš plakņu Q un T šķēluma taisnes k un k_1 ar kādu trešo plakni, parasti konusa resp. cilindra pamata plakni. Punkts M ir abu šo taišņu krustpunkts. Ja par trešo plakni izvēlas pamata plakni, taisne k_1 ir pieskare virsmas pamata līknei.

Šķēluma līkne un pamata līkne ir perspektīvas (cilindra gadījumā — afinas) figūras ar taisni k kā radniecības asi. Iepriekš aprakstīto pieskares konstrukciju tādēļ var pamatot arī ar šo radniecību.

Slīpa riņķa cilindra šķēlums ar frontāli projecētāju plakni Q parādīts (ortogonālās projekcijās) 313. rasējumā. Šai rasējumā sameklēti vispirms šķēluma figūras (elipses) horizontālās projekcijas saistītie diametri $A'B'$ un $C'D'$. Tā kā cilindra šķēlumu var uzskatīt par pamata riņķa paralēlprojekciju plaknē Q, šo diametru galapunktus dabū kā pamata riņķa divu perpendikulāru diametru *1—2* un *3—4* galapunktiem atbilstošos punktus uz attiecīgajām cilindra veidulēm.

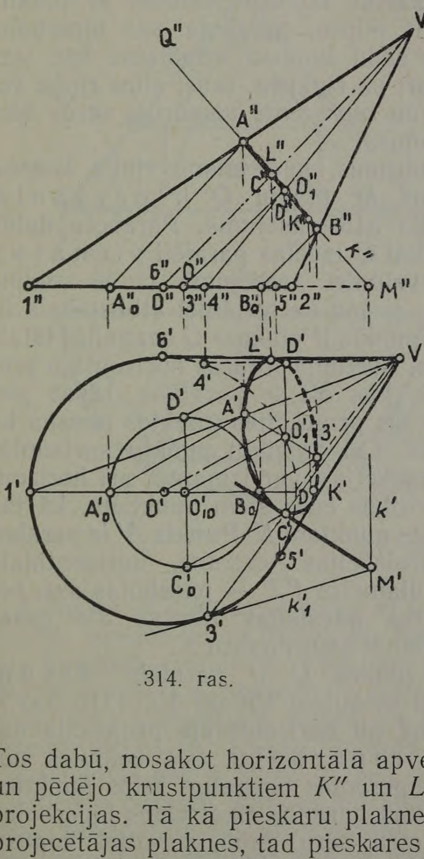


313. ras.

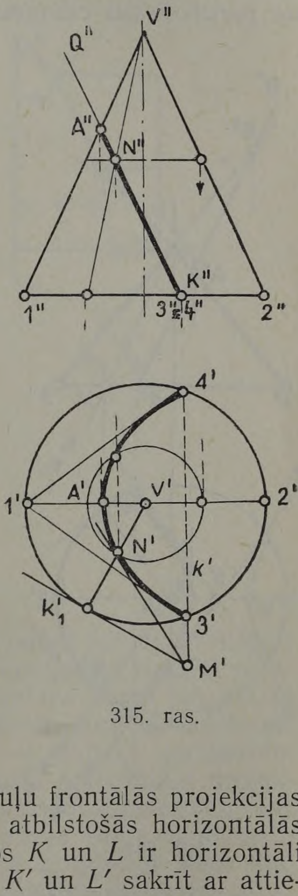
Konusam (314. ras.) konstrukciju sāk ar frontālo projekciju. Elipses centra frontālā projekcija O''_1 arī šai gadījumā ir taisnes nogriežņa $A''B''$ viduspunkts, tikai atšķirībā no iepriekšējā gadījuma tas neatrodas uz konusa ass projekcijas. Pieņemot, ka O''_1 ir reizē arī frontālajai projekciju plaknei perpendikulārā elipses diametra CD attēls, nosakām abu diametru AB un CD horizontālās projekcijas tāpat kā iepriekšējā piemērā. Var konstatēt, ka AB un CD arī šajā gadījumā ir šķēluma elipses saistītie diametri, t. i., $A'B'$ un $C'D'$ ir saistītie diametri šķēluma horizontālajai projekcijai, kaut arī šķēluma figūra ir konusa pamata riņķa c e n t r ā l ā projekcija plaknē Q (projekciju centrs — konusa virsotne V). Par to var pārliecināties, konstruējot šķēluma elipses paralēlprojekciju konusa ass virzienā konusa pamata plaknē (sk. ras.). Šī projekcija ir (vispārīgā gadījumā) elipse, kam diametri A_0B_0 un C_0D_0 sakarā ar 313. rasējumā konstatēto ir savstarpēji perpendikulāri.

Abos rasējumos parādīts arī, kā konstruē pieskari elipses punktā C. Lai to izdarītu, konstruē vispirms taisnes k un k_1, pa kurām konusa pamata plakni šķeļ plakne Q un pieskaru plakne šai punktā. Pieskare iet caur abu šo taišņu krustpunktu M. Pieskaru konstruēšana ir nepieciešama vismaz tai gadījumā, kad virsmas pamats ir patvaļīga plaknes līkne.

Kaut gan elipse ar diviem saistītiem diametriem ir jau viennozīmīgi noteikta, ieteicams katrreiz konstruēt arī punktus, kuros elipse pieskaras virsmas redzamā apveida projekcijai (punkti K' un L').[1]



314. ras.



315. ras.

Tos dabū, nosakot horizontālā apveida veiduļu frontālās projekcijas un pēdējo krustpunktiem K'' un L'' ar Q'' atbilstošās horizontālās projekcijas. Tā kā pieskaru plaknes punktos K un L ir horizontāli projecētājas plaknes, tad pieskares punktos K' un L' sakrīt ar attiecīgo veiduļu horizontālajām projekcijām.

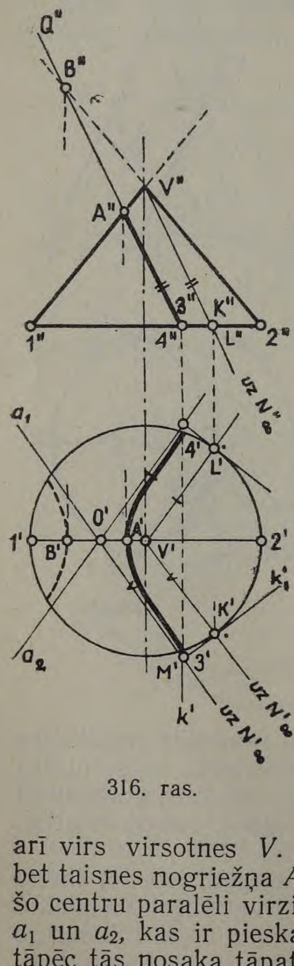
Šķēluma figūras īsto lielumu nosaka, kā parasti, ievedot jaunu horizontālo projekciju plakni paralēli plaknei Q vai pagriežot plakni Q paralēli horizontālajai projekciju plaknei (pārzīmējot raksturīgo projekciju projekciju asij paralēlā stāvoklī). Arī te ieteicams konstruēt vispirms elipses saistīto diametru AB un CD jaunās projekcijas un pašu elipsi konstruēt pēc šiem diametriem.

---

[1] Šie šķēluma punkti atdala figūras redzamo daļu no neredzamās daļas.

Ja cilindra vai konusa ass ir paralēla frontālajai projekciju plaknei, tad konstrukcija iepriekšējos rasējumos dod tieši elipses asis. Taisna cilindra gadījumā šķēluma elipses mazā ass ir vienāda ar cilindra diametru, bet lielā ass vienlīdzīga elipses frontālās projekcijas $A''B''$ garumam.

Ja virsmas pamats ir otrās kārtas līkne, tad arī pati virsma ir otrās kārtas. Atkarībā no līknes veida izšķir *eliptiskus, hiperboliskus un paraboliskus cilindrus*[1]. Konusiem šī klasifikācija lieka, jo katra otrās kārtas konusa šķēlums ar plakni var būt elipse, parabola vai hiperbola. Katru šādu konusu iespējams bez tam šķelt arī pa riņķiem, tādēļ *slīps riņķa konuss jau reprezentē vispārīgu otrās kārtas konusu.*



316. ras.

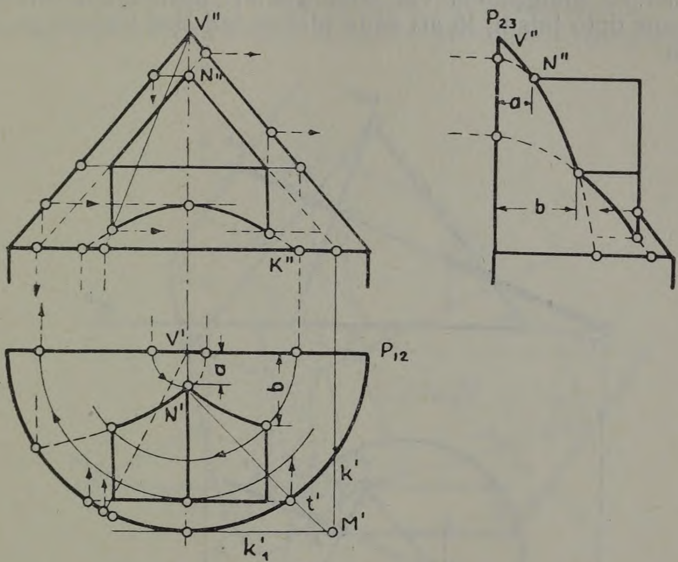
Gadījums, kad taisna riņķa konusa šķēlums ar plakni Q ir p a r a b o l a, parādīts 315. rasējumā. Parabolu dabū, ja plakni Q izvēlas paralēli v i e n a i konusa veidulei (rasējumā tā ir veidule $V—2$), jo tad šai veidulei atbilstošais figūras punkts ir plaknes Q bezgalīgi tālais punkts. Šķēluma figūras horizontālo projekciju, kas arī ir parabola, tāpat pieskares šīs projekcijas punktos nosaka kā iepriekš. Lai noteiktu punktu horizontālās projekcijas, var izmantot arī horizontālos riņķus caur šiem punktiem, kā tas parādīts punktam N. Punkts A' ir parabolas projekcijas virsotne, horizontālais riņķa diametrs $1'2'$ — parabolas ass, bet pieskares parabolas hordas $3'4'$ galapunktos iet caur punktu $1'$.

Ja plakne Q ir paralēla d i v ā m konusa veidulēm VK un VL (316. ras.), šķēlumā un horizontālajā projekcijā dabūjam h i p e r b o l u. Šīs veidules nosaka hiperbolas bezgalīgi tālos punktus. Rasējumā parādīts tikai viens hiperbolas zars, otru zaru dabū, turpinot konusu arī virs virsotnes V. Punkti A' un B' ir hiperbolas virsotnes, bet taisnes nogriežņa $A'B'$ viduspunkts O' — hiperbolas centrs. Caur šo centru paralēli virzieniem $V'K'$ un $V'L'$ iet hiperbolas asimptotas a_1 un a_2, kas ir pieskares hiperbolas bezgalīgi tālajos punktos, un tāpēc tās nosaka tāpat kā parastās pieskares.

Iepriekšējo divu konstrukciju praktisks izlietojums redzams 317. rasējumā. Šai rasējumā attēlota trīs projekcijās puse no cilin-

[1] Var pierādīt, ka katru eliptisku cilindru var šķelt arī pa riņķiem, tādēļ eliptiskais cilindrs ir identisks ar (slīpu vai taisnu) riņķa cilindru.

driska torņa augšējās daļas ar konisku jumtu un prizmatisku piebūvi. Piebūves jumta plaknes ir paralēlas konusa frontālā apveida veidulēm un šķeļ konusu pa parabolas lokiem; piebūves sienas ir paralēlas konusa asij (tātad divām konusa veidulēm) un šķeļ konusu pa hiperbolas lokiem. Konstrukcija saprotama no rasējuma, un tās iztirzājumu atstājam lasītājam kā vingrinājumu.



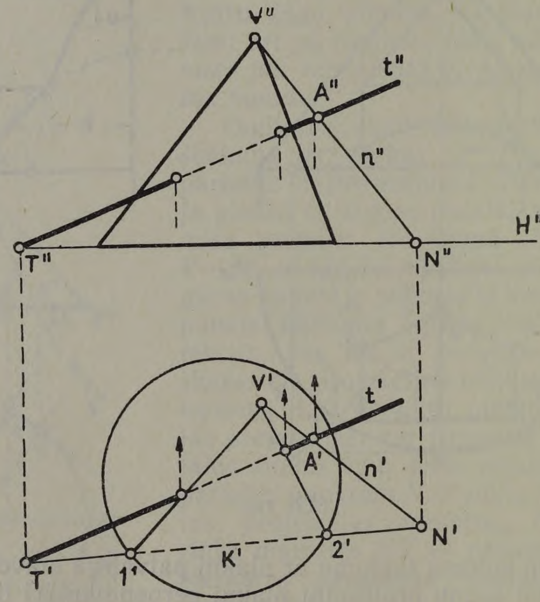
317. ras.

Cilindra un konusa šķēlumu ar plakni patvaļīgā stāvoklī vislabāk noteikt, ievedot jaunu projekciju plakni perpendikulāri dotajai plaknei. Taisnam cilindram, kam ass perpendikulāra kādai projekciju plaknei, piemēram, plaknei P_1, konstrukcija ievērojami vienkāršojas, jo šķēluma horizontālā projekcija ir riņķis — cilindra horizontālā apveida projekcija. Pašas šķēluma elipses asis horizontālā projekcijā attēlojas par šī riņķa diviem perpendikulāriem diametriem, kas ir attiecīgi paralēli plaknes horizontāles un pirmā veida slīpuma līnijas horizontālajām projekcijām. Frontālajā projekcijā šiem diametriem atbilst šķēluma elipses projekcijas saistītie diametri.

T a i s n e s k r u s t p u n k t u n o t e i k š a n a i a r k o n u s u izvēlas caur taisni palīgplakni, kuras šķēlums ar konusu būtu visvienkāršākais. Tādu šķēlumu dod plakne caur konusa virsotni, kas šķeļ konusu pa divām veidulēm. Šī plakne ir definēta ar pašu taisni t un vienu palīgtaisni n caur konusa virsotni V un taisnes t kādu patvaļīgu puktu A (318. ras.). Nosakām vispirms abu šo taišņu krustpunktus T un N ar konusa pamata plakni H un, šos punktus savienojot, pašas palīgplaknes šķēluma taisni k ar plakni H. Palīgplaknes šķēlums ar konusu ir veidules caur taisnes k krustpunktiem

1 un *2* ar konusa pamata līkni, un taisnes t krustpunkti ar šīm veidulēm ir meklētie taisnes krustpunkti ar konusu.

Konstrukcija paliek tā pati arī tad, ja konusa vietā ir cilindrs, tikai tad palīgtaisne n jāizvēlas paralēla cilindra veidulēm. Ja taisnes viena projekcija, piemēram, horizontālā, iet caur konusa virsotnes projekciju resp. ja šī projekcija paralēla cilindra veiduļu projekcijām, tad kā palīgplakni var izmantot arī horizontāli projecētāju plakni caur doto taisni, jo arī šāda plakne tad šķeļ virsmu pa divām veidulēm.

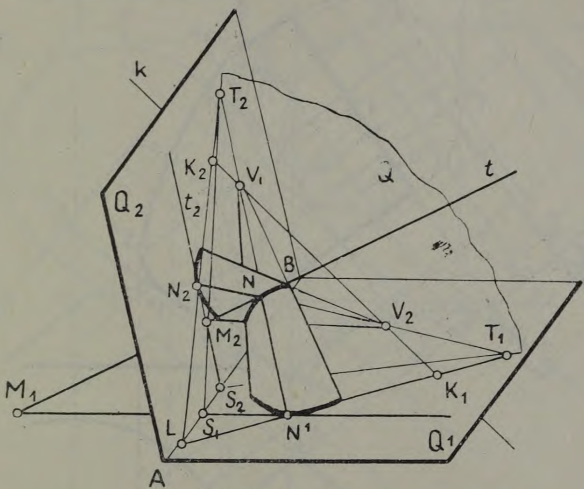


318. ras.

99. Konusu un cilindru savstarpēja šķelšanās; šķēlumi ar lodi. Parastā metode cilindru un konusu savstarpējā šķēluma konstruēšanai ir jau agrāk iztirzātā palīgplakņu metode. Palīgplaknes vienmēr jācenšas izvēlēties tā, lai tās šķeltu abas virsmas pa visvienkāršāk konstruējamām līnijām — virsmas veidulēm. Šo veiduļu krustpunkti dod meklētās šķēluma figūras punktus.

Apskatīsim vispirms vispārīgo gadījumu, kad abu virsmu pamati ir dažādās plaknēs un pašas virsmas patvaļīgā stāvoklī pret projekciju plaknēm. Lai noteiktu, piemēram, divu konusu šķēluma līniju (319. ras.), konstruē vispirms abu konusu pamata plakņu Q_1 un Q_2 šķēluma taisni AB un konusa virsotņu V_1 un V_2 savienotājas taisnes k krustpunktus K_1 un K_2 ar šīm plaknēm. Katra palīgplakne Q nu ir noteikta ar taisni k un patvaļīgu punktu L uz abu pamatu kopējās šķautnes. Tā šķeļ pamata plaknes pa taisnēm LK_1 un LK_2, bet konusu veidules dabū, savienojot attiecīgās virsotnes ar šo taišņu krustpunktiem N_1 un N_2 ar pamata līknēm. Izvēloties citu punktu L uz šķautnes AB, dabū jaunu palīgplakni Q un divas citas konusu veidules, kuru krustpunkts ir atkal viens šķēluma figūras punkts. Visas šīs palīgplaknes šķeļ pamatu plaknes Q_1 un Q_2 pa taisnēm, kas iet caur punktiem K_1 un K_2 un krustojas uz kopējās šķautnes AB.

Lai noteiktu pieskari kādā šķēluma figūras punktā N, ievērosim, ka pieskaru plakne pirmajam konusam šai punktā šķeļ plakni Q_1 pa



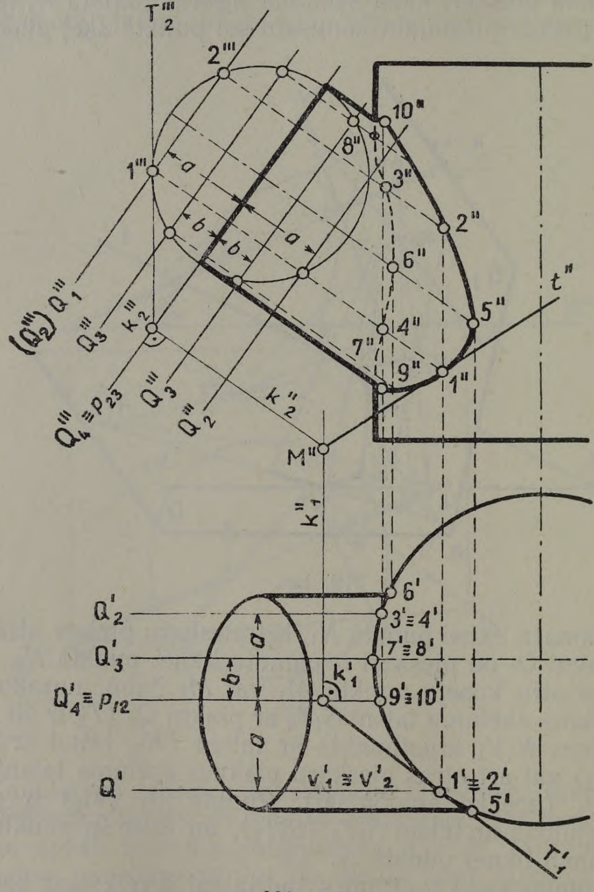
319. ras.

pieskari t_1 pamata līknei punktā N_1, bet pieskaru plakne otram konusam šķeļ plakni Q_2 pa pieskari t_2 pamata līknei punktā N_2. Abu pieskaru plakņu otru kopējo punktu M_1 vai M_2 dabū, nosakot pirmās pieskaru plaknes šķēluma taisni S_1T_2 ar plakni Q_2 (T_2 ir šīs pieskaru plaknes taisnes N_1V_1 krustpunkts ar taisni LK_2, tātad krustpunkts ar plakni Q_2) vai arī otras pieskaru plaknes šķēluma taisni S_2T_1 — ar plakni Q_1 (nosaka analoģiski). Punkts M_1 (M_2) ir pieskares t_1 (t_2) krustpunkts ar taisni S_2T_1 (S_1T_2), un caur šo punktu iet pieskare t šķēluma līknei punktā N.

Ja otra konusa vietā ir cilindrs, tad taisni k velk caur konusa virsotni V_1 paralēli cilindra veidulēm. Ja cilindra veidules ir paralēlas plaknei Q_1, tad taisnes k krustpunkts K_1 ir plaknes Q_1 bezgalīgi tālais punkts un palīgplaknes Q šķeļ plakni Q_1 pa taisnēm, kas paralēlas cilindra veidulēm. Ja a b a s virsmas ir cilindri, palīgplaknes šķeļ abas pamatu plaknes pa attiecīgo cilindru veidulēm paralēlām taisnēm (abi punkti K_1 un K_2 ir plakņu bezgalīgi tālie punkti).

Praksē šādā vispārīgā veidā šķelšanās uzdevumus jārisina reti. Parasti abu ķermeņu pamati vai asis ir kādā speciālā stāvoklī pret projekciju plaknēm, un tāpēc šo vispārīgo metodi var vienkāršot vai arī izmantot pavisam citu metodi. Tā, piemēram, lai noteiktu riņķa konusu vai cilindru šķēlumus, ja to pamati ir horizontālā plaknē, var izmantot arī horizontālas palīgplaknes, jo tās šķeļ abus ķermeņus pa riņķiem, kuru horizontālās projekcijas atkal ir riņķi u. tml.

Visbiežāk jānosaka divu taisnu riņķa cilindru krustošanās. Tāds piemērs ir 320. rasējums. Viena cilindra ass šai rasējumā ir perpendikulāra horizontālajai projekciju plaknei, bet otra paralēla frontā-

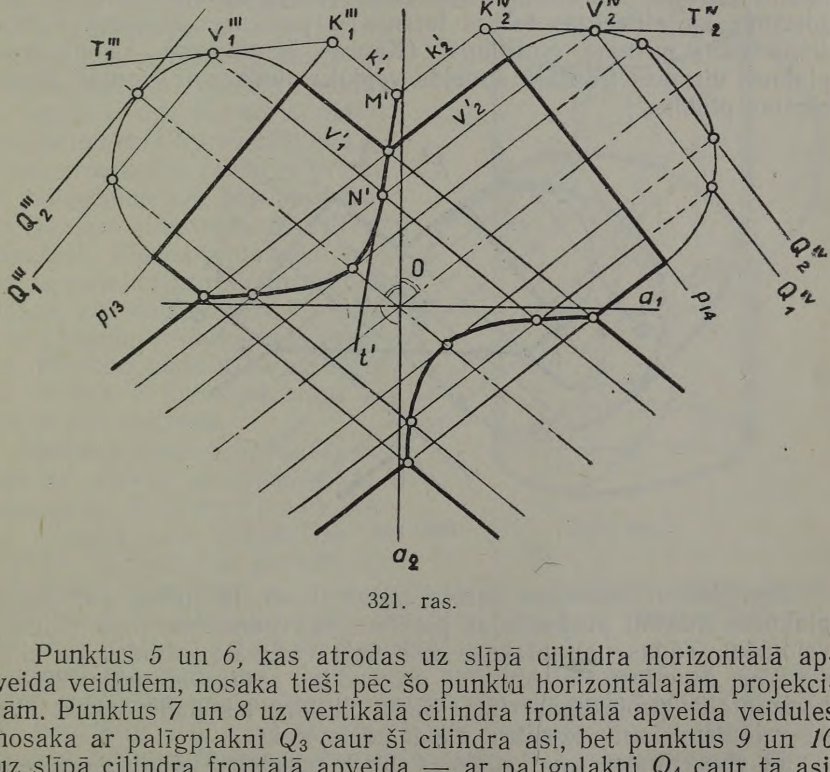


320. ras.

lajai projekciju plaknei, pie kam cilindru asis nekrustojas. Par palīgplaknēm Q izvēlētas frontālas plaknes, kas šķeļ abus cilindrus pa veidulēm. Vertikālā cilindra veidules, kas ir vertikālas taisnes, var konstruēt tieši. Lai konstruētu slīpā cilindra veidules, ievesta jauna horizontālā projekciju plakne perpendikulāra šī cilindra asij[1]. Šai

[1] Izmantot slīpā cilindra veidulu konstruēšanai tā pamata horizontālo projekciju nav ieteicams, jo neprecizitātes, kas pieļautas elipses konstruēšanā, atsauksies uz šķēluma figūras precizitāti.

jaunajā plaknē slīpais cilindrs attēlojas par riņķi, bet palīgplaknes — par projekciju asij paralēlām taisnēm tādā pašā attālumā no ass kā horizontālā projekcijā. Ņemot vērā riņķa simetriju pret asi p_{23}, konstrukcijai pietiek izmantot pusriņķi un zīmēt palīgplakņu jaunās projekcijas vienā pusē asij. Šķēluma figūras redzamības noteikšanai jāievēro, ka šķēluma figūras kāds punkts kādā skata virzienā ir redzams tikai tad, ja tas atrodas uz abu virsmu veidulēm, kas redzamas šajā skata virzienā.



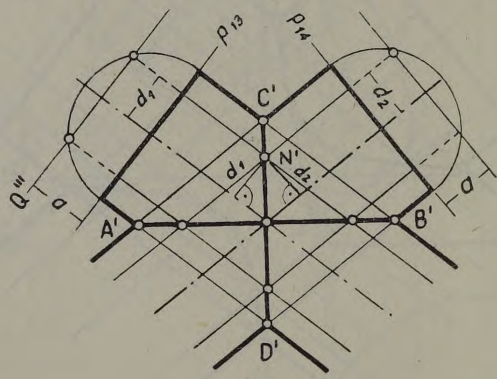
321. ras.

Punktus *5* un *6*, kas atrodas uz slīpā cilindra horizontālā apveida veidulēm, nosaka tieši pēc šo punktu horizontālajām projekcijām. Punktus *7* un *8* uz vertikālā cilindra frontālā apveida veidules nosaka ar palīgplakni Q_3 caur šī cilindra asi, bet punktus *9* un *10* uz slīpā cilindra frontālā apveida — ar palīgplakni Q_4 caur tā asi. Visi šie punkti ir t. s. *raksturīgie* šķēluma figūras punkti, un tie katrā krustošanās uzdevumā obligāti jānosaka.

Lai noteiktu pieskari kādā patvaļīgā šķēluma figūras punktā, piemēram, punktā *1*, velkam pieskaru plaknes T_1 un T_2 abām virsmām šajā punktā un nosakām to šķēluma taisnes k_1 un k_2 ar kādu brīvi izvēlētu plakni (rasējumā — palīgplakne Q_4 caur slīpā cilindra asi). Vertikālā cilindra pieskaru plakne T_1 ir horizontāli projecētāja plakne, kam raksturīgā projekcija T'_1 ir pieskare cilindra horizontālajai projekcijai punktā *1'*. Slīpā cilindra pieskaru plakne T_2 ir perpendikulāra jaunajai horizontālajai projekciju plaknei ar raksturīgo projekciju T'''_2 — pieskari šī cilindra jaunajai projekcijai punktā

$1'''$. Taišņu k_1 un k_2 horizontālās projekcijas k'_1 un k'''_2 ir plakņu T_1 un T_2 raksturīgo projekciju krustpunkti ar plaknes Q_4 raksturīgajām projekcijām, bet frontālās projekcijas ir cilindru veiduļu frontālajām projekcijām paralēlas taisnes. Šo taišņu krustpunkts M ir meklētais pieskares t punkts.

Nosakot analoģiski pieskares šķēluma figūras projekcijas raksturīgajos punktos, var pārliecināties, ka pieskares punktos $5''$ un $6''$ ir vertikālas taisnes (taisne k_2 šai gadījumā ir plaknes Q_4 bezgalīgi tālā taisne, bet punkts M taisnes k_1 bezgalīgi tālais punkts), bet pieskares pārējos punktos ir attiecīgās frontālā apveida veidules. Jāpiezīmē, ka attiecīgās telpas taisnes ir pieskares šķēluma figūrai telpā tikai pirmajā gadījumā. (Kāpēc? Ņemt vērā, ka pieskaru plaknes virsmas frontālā apveida veiduļu punktos ir frontāli projecētājas plaknes.)



322. ras.

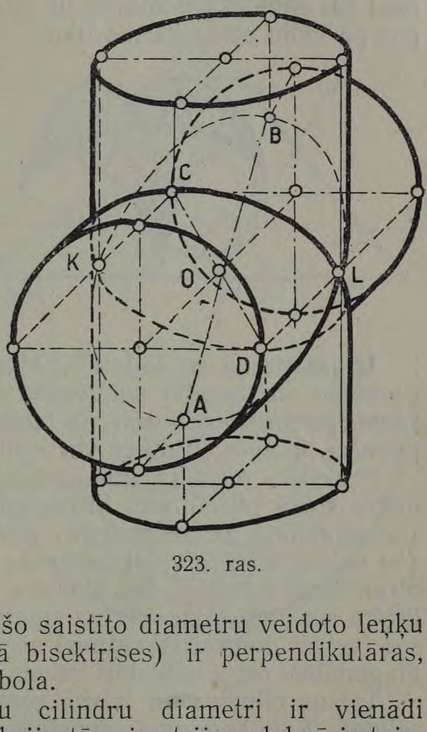
Iepriekšējo uzdevumu varēja atrisināt arī, izvēloties par palīgplaknēm frontāli projecētājas plaknes, kas paralēlas slīpā cilindra veidulēm. Tādas palīgplaknes gan šķeļ vertikālo cilindru pa elipsēm, bet šo elipsu horizontālās projekcijas sedzas ar paša cilindra horizontālās projekcijas riņķi. Slīpo cilindru šīs palīgplaknes šķeļ pa veidulēm, kuras konstruē tāpat kā iepriekš.

Ja abu cilindru asis krustojas un ir paralēlas kādai, piemēram, horizontālajai projekciju plaknei, tad šķēluma figūras konstruēšanai pietiek ar šo cilindru horizontālo projekciju.[1] Ja par horizontālo projekciju plakni izvēlamies plakni caur cilindru asīm, tad abi cilindri un tātad arī pati šķēluma līkne ir novietota ortogonāli simetriski pret šo plakni. Šķēluma līkne, kas ir ceturtās kārtas līkne, te horizontālajā projekcijā attēlojas par otrās kārtas līkni, jo ik divu tās simetrisko punktu projekcijas sedzas. Šis likums ir vispārīgs. *Ja divām otrās kārtas virsmām ir kopēja simetrijas plakne, tad šķē-*

[1] Ar šāda veida uzdevumiem sastopamies, piemēram, pie divu cilindrisku velvju salaidumiem.

luma līknes ortogonālā projekcija šajā plaknē ir otrās kārtas līkne. Šī iemesla dēļ varam pievērst uzmanību tikai abu cilindru tai daļai, kas ir virs horizontālās projekciju plaknes.

Pieņemsim vispirms, ka abu cilindru diametri ir dažādi (321. ras.). Šķēluma figūras konstruēšanai ievedam divas jaunas projekciju plaknes, attiecīgi perpendikulāras cilindru asīm, bet par palīgplaknēm Q izvēlamies horizontālas plaknes. Kādas palīgplaknes abas jaunās projekcijas ir taisnes, kas paralēlas attiecīgajai projekciju asij un atrodas vienādos attālumos no tās. Šo taišņu krustpunkti ar cilindru jaunajām projekcijām ir veiduļu jaunās projekcijas un to horizontālās projekcijas dod četrus šķēluma figūras projekcijas punktus (vienīgi palīgplakne Q_2, kas pieskaras mazākajam cilindram, dod divus punktus). Pie palīgplaknēm pieder arī pati horizontālā projekciju plakne, kas dod cilindru horizontālā apveida veiduļu krustpunktus. Pieskari kādā šķēluma figūras punktā N konstruē tāpat kā iepriekšējā piemērā.



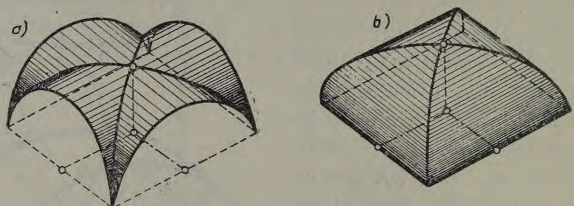
323. ras.

Šķēluma figūras projekcija sastāv no diviem atsevišķiem zariem, tātad ir h i p e r b o l a, kurai cilindra asu projekcijas ir saistītie diametri. Var pierādīt, ka hiperbolas asimptotas a_1 un a_2 ir šo saistīto diametru veidoto leņķu bisektrises. Tā kā asimptotas (kā bisektrises) ir perpendikulāras, tad līkne ir v i e n ā d s ā n u hiperbola.

Speciālā gadījumā, kad abu cilindru diametri ir vienādi (322. ras.), šķēluma figūras projekcija tās simetrijas plaknē ir taisnes nogriežņi $A'B'$ un $C'D'$. Par to var pārliecināties arī tieši, konstruējot šķēluma figūru ar iepriekšējo metodi. Kāda patvaļīga līknes projekcijas punkta N' attālumi d_1 un d_2 līdz abām asīm ir vienādi, t. i., šo punktu ģeometriskā vieta ir taisne — abu asu veidotā leņķa bisektrise. Pati šķēluma figūra šai gadījumā sadalās divās otrās kārtas līnijās — elipsēs, kuru mazās asis vienlīdzīgas cilindra diametram, bet lielās asis ir $A'B'$ un $C'D'$.

Divu šādu cilindru šķēluma konstruēšana aksonometrijā (Kabineta projekcijā) parādīta 323. rasējumā. Te abu cilindru asis krustojas taisnā leņķī, tādēļ abas elipses (telpā) ir kongruentas. Elipsu saistītie diametri AB, KL un CD, KL konstruēti, izmantojot cilindru pamatu attēla saistītos diametrus, kas ir paralēli attiecīgajām aksonometriskajām asīm. Punkti K un L ir abu elipsu krustpunkti, ka abas elipses (kopā ņemtas) uzskatām par vienu ceturtās kārtas līkni, tad šie punkti ir līknes dubultpunkti. Ievērosim, ka šajos punktos abām virsmām ir kopēja pieskaru plakne. Izrādās, ka arī šis likums ir vispārīgs. *Ja kādā šķēluma līknes punktā abām virsmām ir kopēja pieskaru plakne, tad šis punkts ir līknes dubultpunkts.*

Vispārīgā gadījumā ir spēkā arī šāda teorēma: *ja divām otrās kārtas virsmām ir kopēja viena otrās kārtas līkne, tad tām ir kopēja vēl viena otrās kārtas līkne.* Tā, piemēram, divi otrās kārtas konusi vai cilindri vai konuss un cilindrs ar kopēju pamatu šķeļas vispār pa kādu otrās kārtas līkni.[1]



324. ras.

Ir pazīstama arī šāda t. s. *Monža teorēma: ja divām otrās kārtas virsmām var apvilkt vai ievilkt trešo otrās kārtas virsmu, tad tās šķeļas pa plaknes līknēm.* Šo teorēmu jau ilustrē iepriekš apskatītais piemērs, jo abos cilindros var ievilkt lodi ar to pašu rādiusu.

Praktisks piemērs, kur sastopamies ar divu taisnu vienāda diametra riņķa puscilindru krustošanos taisnā leņķī, ir 324. rasējumā (ortogonālajā aksonometrijā) attēlotās t. s. *krusta (a)* un *klostera (b) velves.* Krusta velvi veido tās abu puscilindru daļas, kas atrodas otra cilindra ārpusē, bet klostera velvi — tās daļas, kas ir otra cilindra iekšpusē. Abu velvju pamati ir kvadrāti, un abas šķēluma elipses (velves diagonālšķautnes) atrodas plaknēs, kas iet caur kvadrāta diagonālēm perpendikulāri velves pamata plaknei.

Taisna cilindra un taisna konusa krustošanās redzama 325. rasējumā. Šai rasējumā atrisināts uzdevums: *taisnam nošķeltam (pus)konusam paralēli asij izurbt cilindrisku caurumu.* Lai parādītu urbuma attēlus divos skata virzienos, izdarīti pavisam divi urbumi.

Lai konstruētu šķēluma līnijas patvaļīgu punktu N, šķeļam abus ķermeņus ar horizontālu plakni Q pa riņķiem, kuru horizontālās projekcijas var viegli konstruēt (riņķis uz cilindra attēlojas par cilindra pamata riņķi). Pēc krustpunkta N horizontālās projekcijas N' nosaka tā frontālo projekciju N''. Lai noteiktu priekšējā cilindra malējos punktus, palīgplakni izvēlas tā, lai tā šķeltu konusu pa riņķi, kas krusto cilindra malējās veidules. Tāpat nosaka arī šķēluma figūras

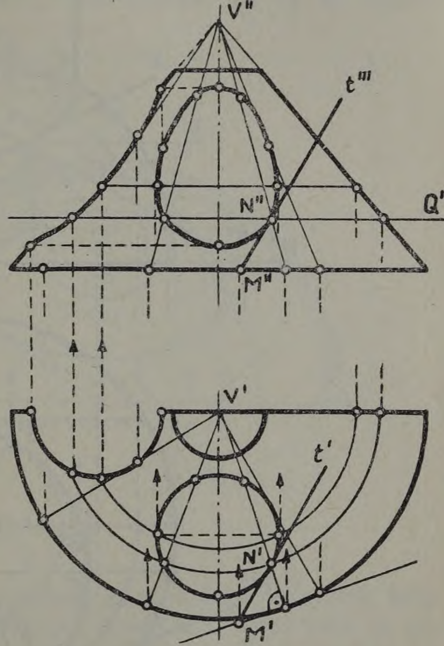
[1] Šai teorēmai ir nozīme ēnu konstruēšanā liektām virsmām. Tā, piemēram, ēna, ko pamata līkne met uz otrās kārtas konusa vai cilindra iekšējās virsmas, ir otrās kārtas līkne (sk. 375. un 386. ras.).

augstāko un zemāko punktu, velkot horizontālajā projekcijā riņķus caur cilindra pamata riņķa augstāko un zemāko punktu. Šie riņķi rasējumā nav parādīti, bet šķēluma figūras attiecīgie punkti noteikti, izejot no malējā cilindra augstākā un zemākā punkta, kas atrodas uz šī cilindra frontālā apveida veidulēm.

Iepriekšējā horizontālo palīgplakņu metode ir neprecīza, ja gribam noteikt punktus, kas ir pēdējo divu raksturīgo punktu tuvumā, jo palīgriņķim horizontālā projekcijā tad ir slīpa krustošanās. Lai noteiktu šos punktus, izdevīgāk izvēlēties palīgplaknes caur konusa asi, kas šķeļ abas virsmas pa veidulēm.

Pieskare līknes patvaļīgā punktā N konstruēta sakarā ar agrākiem aizrādījumiem (konstrukcija saprotama no rasējuma).

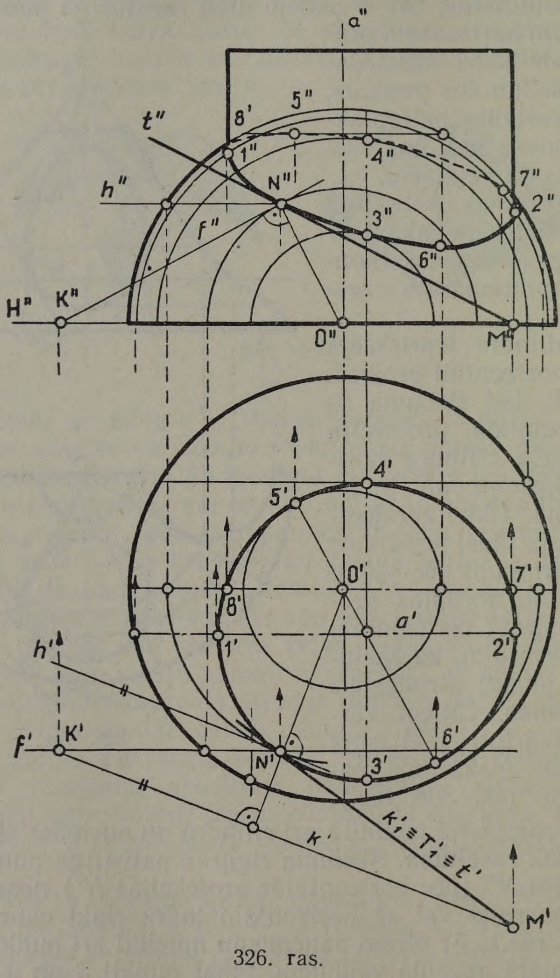
Tā kā cilindrs iepriekšējā piemērā ir horizontāli projecētajā stāvoklī, tad šķēluma figūras horizontālā projekcija sakrīt ar paša cilindra horizontālo projekciju un ir iepriekš zināma. Tikko aprakstīto konstrukciju tādēļ iespējams interpretēt arī šādi: pēc šķēluma figūras horizontālās projekcijas konstruēt tās frontālo projekciju, ievērojot, ka šķēluma figūras punkti atrodas uz konusa virsmas. Citiem vārdiem, ir atkārtoti jāatrisina pašā sākumā apskatītais pamatuzdevums (sk. 308. ras.).



325. ras.

Šajā interpretācijā izpildīta arī cilindra un puslodes šķēluma konstruēšana 326. rasējumā. Šķēluma figūras patvaļīga punkta N frontālo projekciju N'' (pēc horizontālās projekcijas N') nosaka ar frontālo lodes pusriņķi vai ar horizontālo lodes riņķi caur šo punktu (sal. ar 300. ras.). Ar pirmo paņēmienu noteikti arī punkti *1* un *2* uz cilindra frontālā apveida veidulēm, tāpat punkti *3* un *4* uz cilindra priekšējās un pakaļējās veidules. Ar otro paņēmienu noteikts šķēluma figūras augstākais punkts *5* un zemākais punkts *6* (velkot no $0'$ kā centra riņķus, kas pieskaras cilindra horizontālās projekcijas riņķim). Pieskaršanās punktus $5'$ un $6'$ precizāk dabū, ievērojot, ka tie atrodas uz abu riņķu centru līnijas. Rasējumā atzīmēti arī punkti *7* un *8*, kas atrodas uz puslodes frontālā apveida.

Lai šķēluma figūru iezīmētu precīzāk, rasējumā parādīta arī pieskares konstruēšana līknes patvaļīgā punktā N. Šai nolūkā noteiktas iepriekš abu pieskaru plakņu T un T_1 šķēluma taisnes k un k_1 ar abu ķermeņu pamata plakni H. Pieskaru plakne T_1 cilindram te ir horizontāli projecētāja plakne, un šķēluma taisnes k_1 horizontālā projekcija sakrīt ar plaknes raksturīgo projekciju T'_1, kas ir pieskare punktā N' cilindra horizontālās projekcijas riņķim. Lodes pieskaru plaknes



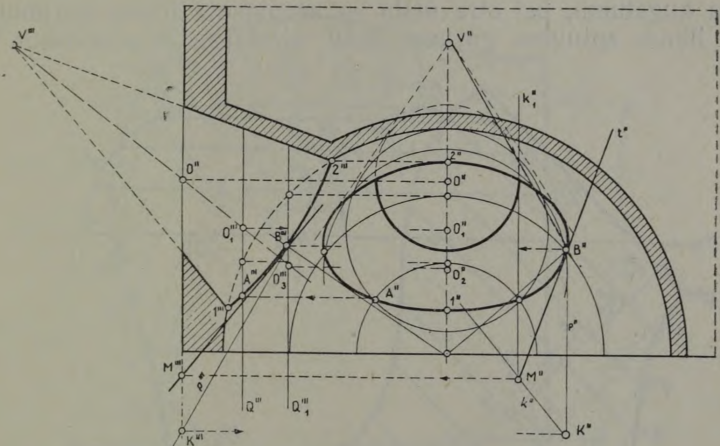
326. ras.

T šķēluma taisni k ar pamata plakni dabū, nosakot šīs pieskaru plaknes frontāles f krustpunktu K ar plakni H un ievērojot, ka taisne k ir pieskaru plaknes horizontāle[1]. Abu taišņu krustpunkts M ir pieskares t punkts.

[1] Pieskaru plaknes galveno līniju konstruēšanu sk. 300. rasējumā.

Horizontāli projecētāja plakne caur cilindra asi un lodes centru ir šķēluma līknes simetrijas plakne (šajā plaknē atrodas līknes augstākais un zemākais punkts). Līknes projekcija šai plaknē vai tai paralēlā jaunā frontālā projekciju plaknē ir otrās kārtas līkne. Var konstatēt (piem., analītiski), ka tā ir parabolas loks.

Apskatīsim vēl kādu slīpa riņķa konusa un lodes šķēluma praktisku izlietojumu. Sfēriskā velvē jāiebūvē divi vienāda lieluma koniski iesprieşļi (327. ras.), kam vertikālie šķēlumi ir riņķi. Sfēriskā velve dota frontālā griezumā caur lodes centru, un, tā kā malējo



327. ras.

iespriesli varam uzskatīt par vidējā iesprieşļa profilo projekciju, konstrukciju var izpildīt vienā projekcijā.[1] Koniskais iesprieslis ir noteikts ar frontālajai projekciju plaknei paralēlo pamatu (centrs O) un virsotni V.

Par palīgplaknēm izvēlamies frontālās plaknes Q. Katra šāda plakne šķeļ vidējo iespriesli pa riņķiem, bet puslodi pa pusriņķiem, kuru rādiusus un centrus nosaka no «profilās» projekcijas. Nosakot šo līniju krustpunktu frontālās projekcijas, ar kārtotājām pārnesam tos arī «profilā» projekcijā. Vidējā iesprieşļa šķēluma ar lodi attēls ir ceturtās kārtas līkne, kamēr malējā iesprieşļa šķēluma projekcija ir otrās kārtas līkne, proti, hiperbolas loks.

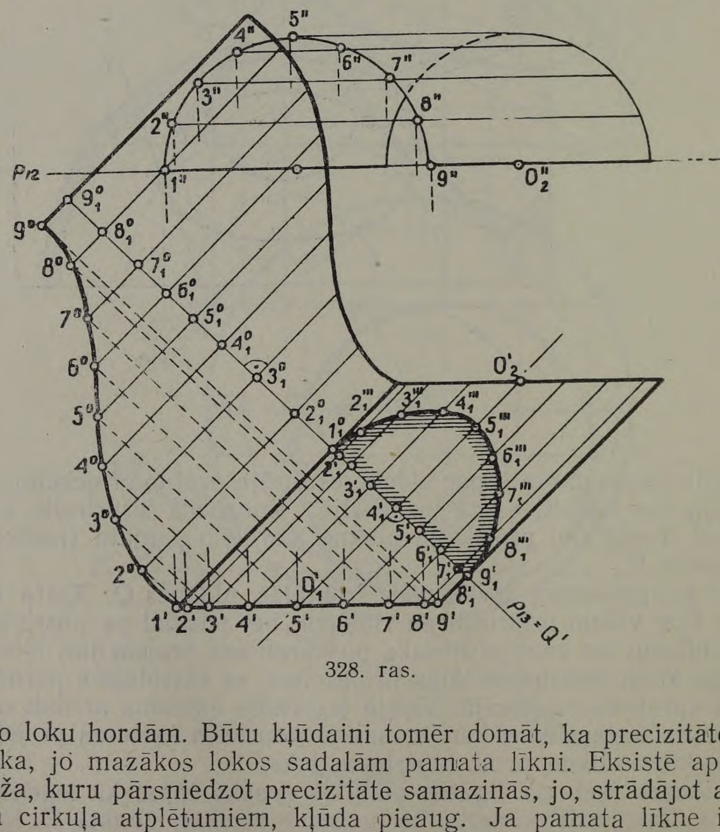
Pieskares šķēluma figūras punktos nosaka tāpat kā iepriekšējā piemērā. Rasējumā parādīts, kā konstruē pieskari punktā B. Lai to izdarītu, nosaka vispirms abu pieskaru plakņu šķēluma taisnes k un k_1 ar konusa pamata plakni. Taisnes k_1 frontālā projekcija ir pie-

---

[1] Šādu paņēmienu praksē bieži izmanto (sal., piem., ar 325. ras.). Lai parādītu reizē abu šķēlumu konstruēšanu, malējā iesprieşļa punktu projekcijas rasējumā atzīmētas kā vidējā iesprieşļa punktu profilās projekcijas.

skare konusa pamata projekcijas atbilstošajā punktā (uz kopējās veidules ar punktu B''), bet taisnes k'' noteikšanai konstruēta lodes pieskaru plaknes «profilās» līnijas p (profilajai projekciju plaknei paralēlās plaknes galvenās līnijas) krustpunkts K ar konusa pamata plakni. Nosakot taišņu k''_1 un k'' krustpunktam M'' atbilstošo «profilo» projekciju M''', dabū arī pieskari t''' malējā iesprieš|a projekcijas punktā B'''.

100. Cilindru un konusu virsmas izklājums. Izklājot taisnu cilindru, dabūjam taisnstūri, kam viena mala vienāda ar cilindra augstumu, bet otra mala — ar pamata līknes garumu. Pamata līknes aptuveno garumu dabū, aizstājot tās atsevišķos lokus

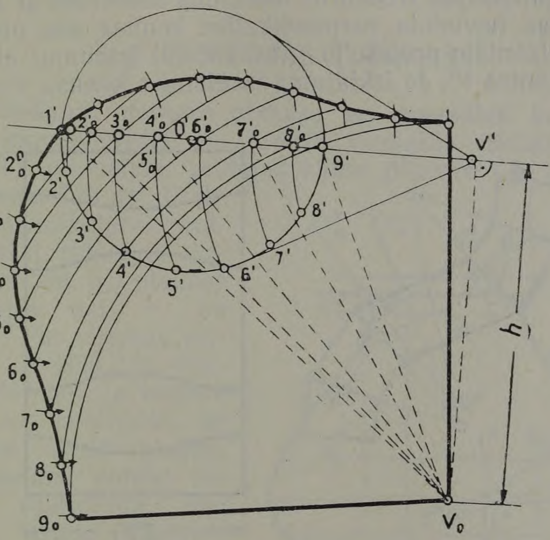


328. ras.

ar šo loku hordām. Būtu kļūdaini tomēr domāt, ka precizitāte ir jo lielāka, jo mazākos lokos sadalām pamata līkni. Eksistē apakšējā robeža, kuru pārsniedzot precizitāte samazinās, jo, strādājot ar maziem cirkuļa atplētumiem, kļūda pieaug. Ja pamata līkne ir riņķis, ieteicams tā garumu labāk a p r ē ķ i n ā t (piem., ar logaritmisko lineālu).

S l ī p a c i l i n d r a izklājuma pagatavošanai izmanto normālšķēluma metodi. Ja cilindra veidules ir patvaļīgā stāvoklī pret projekciju plaknēm, vispirms jākonstruē cilindra projekcija plaknē, kas paralēla tā veidulēm.

Slīpa riņķa puscilindra izklājuma konstruēšana parādīta 328. rasējumā. Cilindra veidules šai rasējumā ir paralēlas horizontālajai projekciju plaknei, tādēļ normālšķēluma plakne Q ir horizontāli projecētāja plakne (raksturīgā projekcija Q' perpendikulāra cilindra ass projekcijai). Dalām pamata pusriņķi vienādās daļās, nosakām attiecīgo cilindra veiduļu krustpunktus 1_1, 2_1 ... 9_1 un šķēluma figūras (puselipses) īsto lielumu — projekciju jaunā frontālā projekciju

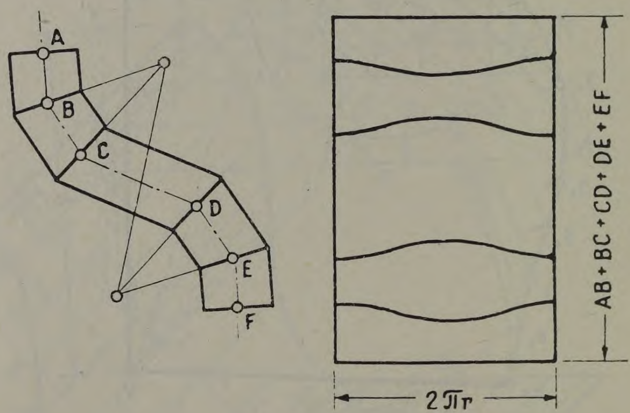


329. ras.

plaknē $P_3 \equiv Q$. Tā kā šķēluma figūras punktu augstumi virs horizontālās projekciju plaknes P_1 ir vienādi ar attiecīgo cilindra veiduļu frontālo projekciju attālumiem līdz projekciju asij p_{12}, šķēluma figūras frontālā projekcija nemaz nav jākonstruē. Izklājot tagad cilindru, normālšķēlums pāriet cilindra veidulēm perpendikulārā taisnē. Uz šīs taisnes atliekam no normālšķēluma paņemtos aptuvenos loku garumus, dabūtajos punktos velkam tai perpendikulāras taisnes un uz pēdējām atliekam cilindra veiduļu nogriežņus starp pamata riņķiem un plakni Q. Galapunktus savienojot ar gludām līknēm, dabūjam cilindra pamata pusriņķiem atbilstošās līknes. Analoģiski iespējams arī jebkurai citai līknei uz cilindra virsmas atrast tai atbilstošo līkni izklājumā.

T a i s n s r i ņ ķ a k o n u s s izklājas pa riņķa sektoru, kam rādiuss ir vienāds ar konusa veidules garumu, bet loks — ar pamata riņķa garumu. Sektora loka garumu var noteikt aptuveni, atliekot atkārtoti uz tā pietiekami mazus konusa pamata riņķa lokus vai arī aprēķinot pēc formulas. Apskatīsim sīkāk tādēļ tikai s l ī p a r i ņ ķ a k o n u s a izklājuma konstruēšanu.

Ja ir zināms konusa augstums h, tad izklājuma konstruēšanai pietiek zināt tā vienu projekciju konusa pamata plaknē (329. ras.). Ja pie tam vēl ievērojam, ka horizontāli projecētāja plakne caur konusa asi ir konusa simetrijas plakne, konstrukciju var vēl vienkāršot un izpildīt šādi: konusa pamata pusriņķi, kas ir vienā pusē taisnei $O'V'$, dala pietiekami mazos, piemēram, astoņos, vienādos lokos un nosaka īstos garumus veidulēm, kas iet caur dalījuma punktiem. Attiecīgos taisnleņķa trīsstūrus ieteicams konstruēt ar kopēju kateti $V'V_0=h$, kas novietota perpendikulāri konusa ass projekcijai, un veidulu horizontālo projekciju (otro katetu) garumus atlikt ar riņķa lokiem no centra V'. Ja izklājumā izvēlamies konusa virsotni punktā



330. ras.

V_0 un no šī punkta kā centra velkam riņķa lokus caur punktiem $1' \equiv 1'_0, 2'_0, 3'_0, \ldots, 9' \equiv 9'_0$, tad uz šiem lokiem jāatrodas izklājuma atbilstošajiem punktiem $1_0, 2_0, \ldots, 9_0$. Ja vēl punktu 1_0 izvēlamies punktā $1'$, tad pārējos punktus dabū, aizcērtot pēc kārtas iepriekš novilktos lokus ar lokiem $1'2_0=1'2'$, $2_03_0=2'3'$ utt. Savienojot šos punktus ar gludu līkni, dabūjam tikai pusi no konusa pamata riņķa izklājuma. Otru pusi dabū, ievērojot, ka tā ir simetriska attiecībā pret taisni $1'V_0$.

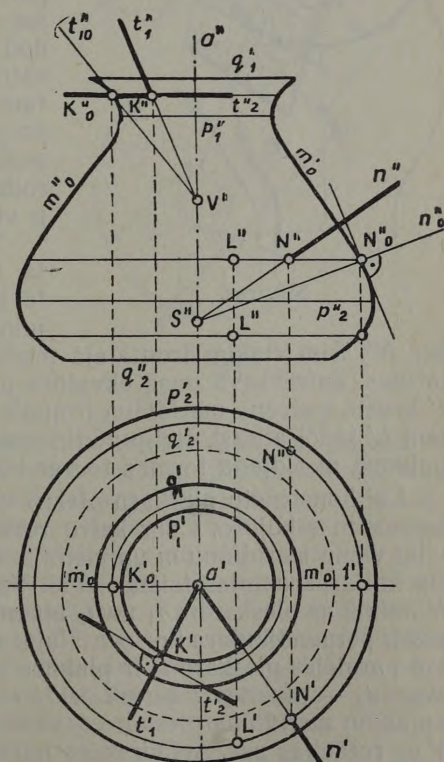
Apskatīsim vēl vienu praktisku uzdevumu. Ir jākonstruē izklājums lietusūdens novadcaurules līkumam, kas sastāv no pieciem vienāda diametra cilindriem (330. ras.).

Cilindri krustojas pa elipsēm, kas atrodas bisektrisu plaknēs, t. i., plaknēs, kas dala salaiduma leņķus uz pusēm. Raksturīgi, ka no visu šo cilindru izklājumiem iespējams salikt taisnstūri, kam platums ir vienāds ar cilindru apkārtmēru, bet augstums vienlīdzīgs caurules ass nogriežņu AB, BC, CD, DE un EF summai. Tātad visu caurules līkumu var izgatavot no vienas skārda loksnes bez atgriezumiem.

Atzīmēsim vēl, ka jāņem vērā arī materiāla biezums, jo, skārdu salokot, tā ārējā virsma tiek izstiepta, bet iekšējā saspiesta. Neizmainās tikai vidējā, t. s. neitrālā kārta. Iepriekšējā piemērā tādēļ skārda platums praktiski jāņem $2\pi\,(r+\frac{b}{2})$, kur b ir skārda biezums. Līdzīga korekcija jāieved arī jebkuras citas virsmas izklājuma izmēros.

5. §. ROTĀCIJAS VIRSMAS

101. Attēlošana; pieskaru plaknes un normāles konstruēšana. Rotācijas virsmas pieder pie praksē visplašāk izplatītajām virsmām. Tās, kā jau teikts, veidojas kādai plaknes vai telpas līknei rotējot ap nekustīgu asi. Plaknes, kas perpendikulāras rotācijas asij, šķeļ rotācijas virsmu pa *paralēlēm,* bet plaknes caur rotācijas asi — pa *meridiāniem.* Par virsmas veiduli parasti izvēlas tās pusmeridiānu. Arī tad, ja veidule ir līkne, kas neatrodas ar rotācijas asi vienā plaknē, ieteicams vienmēr noteikt tās meridiānu. Meridiānu, kas ir paralēls attēlu plaknei, sauc par virsmas *galveno meridiānu.*

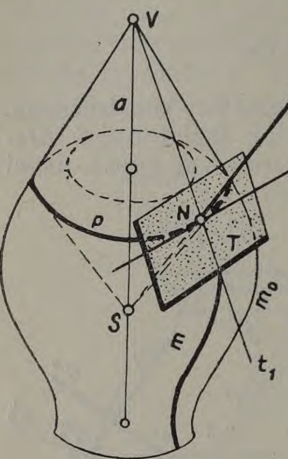


331. ras.

Lai rotācijas virsmu attēlotu ortogonālās projekcijās, rotācijas asi parasti izvēlas perpendikulāru kādai projekciju plaknei. Izvēloties, piemēram, rotācijas asi $a\perp P_1$, attēlu plaknei P_2 paralēlais (galvenais) meridiāns m_0 (331. ras.) attēlojas frontālajā projekcijā īstajā lielumā, bet horizontālajā projekcijā — par taisni m'_0 caur a' perpendikulāri kārtotājai. Galvenais meridiāns veido virsmas frontālo apveidu, bet horizontālais apveids sastāv no paralēlēm p_1 un p_2, kuras punktos pieskares meridiānam ir horizontāli projecētājas taisnes. Bez šiem riņķiem horizontālā projekcijā parādītas vēl paralēles q_1 un q_2, kas norobežo virsmu un kas vispār nepieder pie virsmas horizontālā apveida. Virsmas horizontālā apveida paralēles mēdz saukt arī par tās e k v a t o r i e m.

Atrisināsim tagad pamatuzdevumu: *dota kāda virsmas punkta viena projekcija; konstruēt tā otru projekciju.*

Konstrukcijai izmantojam paralēles caur attiecīgajiem punktiem, jo tās ir visvienkāršākās līnijas uz rotācijas virsmas. Ja ir dota, piemēram, kāda virsmas punkta N frontālā projekcija N'' (sk. ras.), tad zīmējam vispirms attiecīgās paralēles frontālo projekciju — horizontālu taisni caur N'' un pēc šīs paralēles krustpunkta ar galveno meridiānu frontālās projekcijas $1''$ nosakām šī punkta horizontālo projekciju $1'$. Paralēles horizontālā projekcija ir riņķis caur $1'$, un kārtotājas caur N'' krustpunkts ar šo riņķi dod meklēto punktu N'. Vispār te katram frontālās projekcijas punktam atbilst divi punkti horizontālajā projekcijā. Vienīgi, ja zināms, kurā pusē galvenā meridiāna plaknei atrodas telpas punkts N, atrisinājums ir viennozīmīgs.

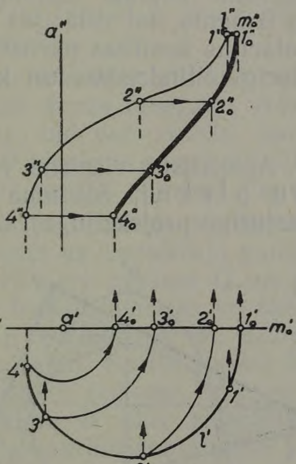


332. ras.

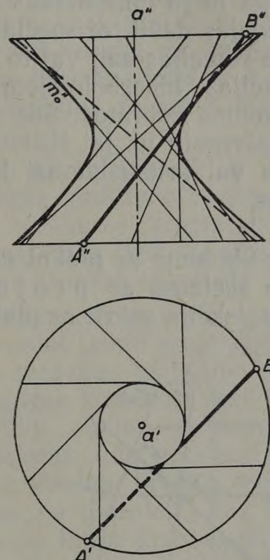
Tāpat nosaka kāda telpas punkta L frontālo projekciju, ja dota tā horizontālā projekcija L'. Rasējumā L' izvēlēts uz tā paša riņķa kur N'. Šim riņķim frontālajā projekcijā atbilst divas horizontālas taisnes, katra savā pusē ekvatora projekcijai p''_2, jo kārtotāja caur $1'$ krusto galvenā meridiāna frontālo projekciju divos punktos. Punktam L' tādēļ atbilst divi punkti frontālajā projekcijā, bet atkarībā no galvenā meridiāna formas to var būt arī vairāk.

Lai konstruētu pieskaru plakni un normāli kādā virsmas punktā, ievērosim sekojošo. Caur katru rotācijas virsmas punktu N var novilkt vienu meridiānu m un vienu paralēli p (332. ras.), pie kam abas šīs līnijas krustojas taisnā leņķī. Virsmas pieskaru plakni T punktā N definē ar pieskarēm t_1 un t_2 abām līnijām šai punktā. Ja rotācijas ass ir perpendikulāra horizontālajai projekciju plaknei (kā 331. ras.), tad paralēles pieskare t_2 ir plaknes T horizontāle, bet meridiāna pieskare t_1 — plaknes T pirmā veida slīpuma līnija. Punktam N rotējot ap asi a, meridiāna pieskare t_1 veido taisnu riņķa konusu ar virsotni V uz rotācijas ass. Arī virsmas n o r m ā l e n punktā N krusto rotācijas asi kādā punktā S, izveidojot rotācijā otru riņķa konusu ar virsotni šai punktā.

Lai konstruētu tagad pieskaru plakni kādā punktā K (331. ras.), iegriežam vispirms punktu K galvenā meridiāna plaknē, t. i., griežam šo punktu, kamēr tā frontālā projekcija nonāk stāvoklī K''_0 uz m''_0. Šai punktā novelkam pieskari t''_{10} galvenā meridiāna projekcijai m''_0 un atzīmējam tās krustpunktu V'' ar rotācijas ass projekciju a''. Pieskares t_1 frontālā projekcija t''_1 sākotnējā stāvoklī iet caur V'', bet horizontālā projekcija t'_1 — caur rotācijas ass horizontālo projekciju a'. Paralēles pieskares frontālā projekcija t''_2 sakrīt ar pašas paralēles frontālo projekciju, bet horizontālā projekcija $t'_2 \perp t'_1$.



333. ras.



334. ras.

Analoģiski nosaka arī virsmas normāli kādā tās punktā N (sk. ras.). Punktu N iegriež galvenā meridiāna plaknē un velk normāli n''_0 galvenā meridiāna frontālajai projekcijai m''_0 jaunajā stāvoklī N''_0 (t. i., perpendikulāri līknes pieskarei šai punktā). Virsmas normāle iet caur taisnes n_0 krustpunktu S ar rotācijas asi.

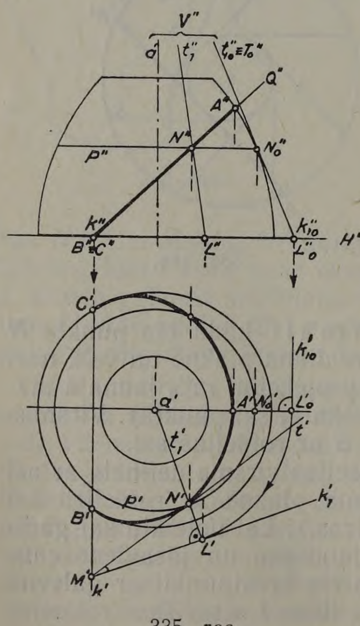
Apskatīsim tagad gadījumu, kad rotācijas virsma definēta ar asi α un patvaļīgu līkni l, kas neatrodas vienā plaknē ar rotācijas asi un vispār var būt arī telpas līkne (333. ras.). Lai noteiktu šai gadījumā virsmas galveno meridiānu m_0, jānosaka un jāsavieno caur līknes atsevišķiem punktiem vilkto paralēļu krustpunkti ar galvenā meridiāna plakni G. Tie ir punkti, kuros līkne l atsevišķos rotācijas momentos krusto galvenā meridiāna plakni.

Interesants piemērs šai sakarībā ir virsma, kurai veidule ir rotācijas asij šķērss taisnes nogrieznis AB (334. ras.). Virsma, kas te izveidojas, ir rotācijas hiperboloīds, par ko var pārliecināties, piemēram, nosakot pēc iepriekšējā parauga tā galveno meridiānu m_0. Rasējumā šī konstrukcija nav parādīta, bet uzskatāmības dēļ ir iezīmētas taisnes nogriežņa AB projekcijas atsevišķos rotācijas momentos. Galvenā meridiāna frontālo projekciju m''_0 dabū arī kā visu veidulu frontālo projekciju aptverošo līniju. Hiperbolas asimptotas dod taisnes nogriežņa projekcijas frontālajai projekciju plaknei paralēlā stāvoklī (paralēli galvenā meridiāna plaknei).

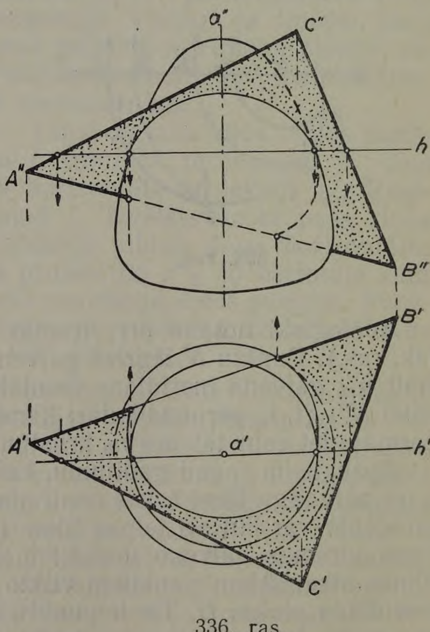
Rotācijas hiperboloīds, ko parasti veido, griežot hiperbolu ap tās imagināro asi, tātad ir uzskatāms arī kā taišņu virsma. Šī virsma ir zināmā mērā cilindriskas un koniskas virsmas vispārinājums, jo abas pēdējās dabū tai speciālajā gadījumā, kad taisne — veidule ir paralēla rotācijas asij vai to krusto.

Rotācijas hiperboloīdiem ir praktiska nozīme dažāda veida hiperboloīdos zobratos. Šos zobratus izmanto, lai rotācijas kustību ap asi pārnestu uz tai šķērsu asi. Rotācijas kustības pārnešanai uz paralēlu vai krustisku asi lieto attiecīgi cilindriskus un koniskus zobratus.

102. Šķēlums ar plakni un taisni. Apskatīsim vispirms rotācijas virsmas šķēlumu ar p r o j e c ē t ā j u p l a k n i. Šķēluma figūras viena projekcija sakrīt ar plaknes raksturīgo projekciju, un tās otras



335. ras.



336. ras.

projekcijas konstruēšanai jāatrisina iepriekš iztirzātais pamatuzdevums. Tā, piemēram, ja plakne Q ir frontāli projecētāja plakne (335. ras.), tad iepriekš jau ir zināma šķēluma figūras frontālā projekcija. Tās horizontālo projekciju dabū, nosakot katram frontālās projekcijas punktam atbilstošo horizontālo projekciju.

Pieskare t šķēluma figūras punktā N ir šai punktā vilktās pieskaru plaknes T šķēluma taisne ar plakni Q. Otru šīs pieskares punktu M dabū, nosakot, kā to jau agrāk darījām, plakņu Q un T šķēluma taisnes ar kādu brīvi izvēlētu plakni, piemēram, rotācijas ķermeņa pamata plakni H. Plakne Q šķeļ plakni H pa taisni k, kas perpendikulāra frontālai projekciju plaknei, bet plaknes T šķēluma taisne k_1 iet caur punkta N meridiāna pieskares t_1 krustpunktu L ar plakni H perpendikulāri šī meridiāna plaknei. Abu šo taišņu krustpunkts ir meklētais punkts M. Analoģiski nosaka pieskares arī pārējos šķēluma figūras punktos. Šķēluma figūras virsotnē A pieskare ir paralēla taisnei k, jo arī plaknes T šķēluma taisne k_1 ir paralēla šai taisnei.

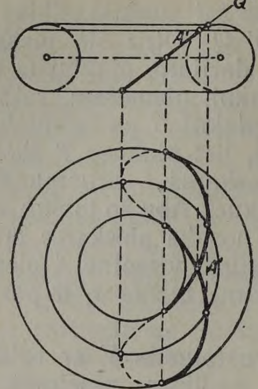
Ja punkta N meridiāna pieskares t_1 krustpunkts V ar rotācijas asi iznāk ārpus rasējuma robežām (tāds gadījums rasējumā tieši attēlots), tad var noteikt meridiāna pieskares krustpunktu L ar plakni H vispirms pagrieztā stāvoklī (vai pašu šķēluma taisni k_1 šai stāvoklī) un tad pagriezt šos elementus atpakaļ sākotnējā stāvoklī.

Rotācijas virsmas šķēluma konstruēšanu ar patvaļīgu plakni Q var reducēt uz iepriekšējo gadījumu, ievedot jaunu projekciju plakni, perpendikulāru plaknei Q un paralēlu rotācijas asij. Var iztikt arī bez šīs transformācijas un šķēluma figūras konstruēšanai izmantot palīgplakņu metodi, līdzīgi kā divu virsmu šķēluma līnijas konstruēšanai. Sacīto ilustrē 336. rasējums, kur noteikta trīsstūra plaknes ABC šķēluma līnija ar rotācijas virsmu. Ikviena horizontāla palīgplakne H šķeļ rotācijas virsmu pa paralēli, bet trīsstūra plakni — pa horizontāli, pie kam abu šo līniju krustpunkti ir šķēluma figūras punkti. Vispirms nosakām šo punktu horizontālās projekcijas un tad ar kārtotājām dabūjam to frontālās projekcijas uz attiecīgās palīgplaknes raksturīgās projekcijas. Šķēluma figūra ir reāla tikai trīsstūra plaknes robežās. Punkti, kuros tā krusto trīsstūra malu AB, ir šīs malas krustpunkti ar rotācijas virsmu. Pieskares šķēluma figūras punktos konstruē tāpat kā iepriekš, nosakot vispirms trīsstūra plaknes un attiecīgās pieskaru plaknes šķēluma taisnes k un k_1 ar kādu horizontālu plakni.

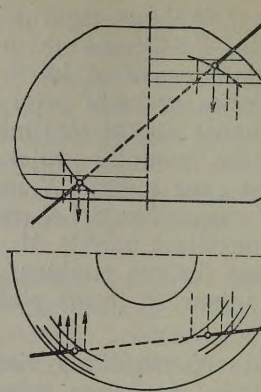
Gadījumos, kad plakne Q ir reizē pieskaru plakne kādā virsmas punktā, šķēluma figūrai ir zināmas īpatnības. Atkarībā no galvenā meridiāna formas tad var izveidoties šķēluma līknes ar dubultpunktiem vai asuma punktiem. Dubultpunkts izveidojas tad, ja pieskaršanās punktā attiecīgais virsmas meridiāns ir ieliekts pret rotācijas asi, bet asuma punkts tad, ja pieskaršanās punkts ir attiecīgā meridiāna pārliekšanās punkts.

Šķēluma līkne ar dubultpunktu parādīta 337. rasējumā. Šai rasējumā konstruēts gredzena virsmas (sk. 90. nodalījumu) šķēlums ar frontāli projecētāju plakni — pieskaru plakni virsmai punktā A uz galvenā meridiāna, kas tad arī ir šķēluma līknes dubultpunkts.

Apskatīsim tagad, kā noteikt kādas taisnes krustošanos ar rotācijas virsmu. Lai to izdarītu, velk vispirms caur taisni, kā pa-

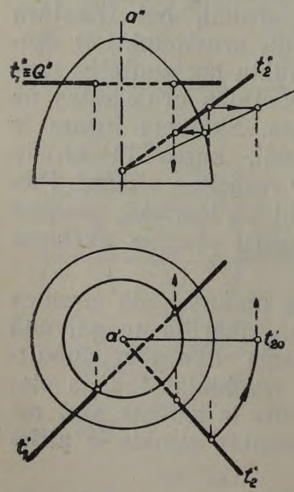


337. ras.



338. ras.

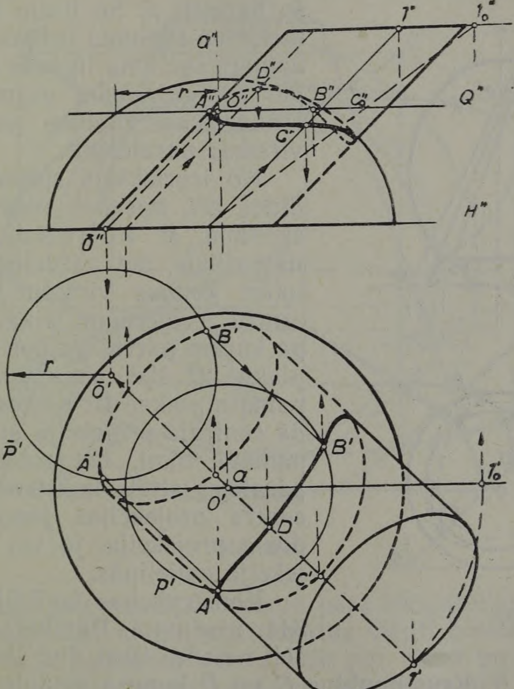
rasti, kādu patvaļīgu palīgplakni un nosaka tās šķēluma līkni ar rotācijas virsmu. Ja rotācijas ass ir perpendikulāra horizontālajai projekciju plaknei, kā tas ir 338. rasējumā, tad par palīgplakni izdevīgāk izvēlēties horizontāli projecētāju plakni. Šķēluma līknes horizontālā projekcija tad sakrīt ar plaknes raksturīgo projekciju Q', pie kam tās frontālo projekciju pietiek iezīmēt tikai sagaidāmo krustpunktu tuvumā. Lielākas precizitātes dēļ ieteicams paralēles izvēlēties vispirms frontālajā projekcijā, kur izmērīt arī šo paralēļu rādiusus.



339. ras.

Speciālā gadījumā, ja taisne ir horizontālā stāvoklī, kā taisne t_1 339. ras., par palīgplakni jāņem horizontāla plakne Q, jo tā šķeļ rotācijas virsmu pa paralēli, kuru viegli konstruēt. Ja, beidzot, taisne krusto rotācijas asi, kā taisne t_2 339. ras., tās krustpunktu nosaka arī bez palīgplaknes palīdzības. Lai to izdarītu, taisni iepriekš pagriež paralēli frontālajai plaknei (iegriež galvenā meridiāna plaknē) un nosaka tās krustpunktu šai stāvoklī ar virsmas galveno meridiānu. Ar atpakaļ pagriešanu tad dabū taisnes krustpunktu sākotnējā stāvoklī.

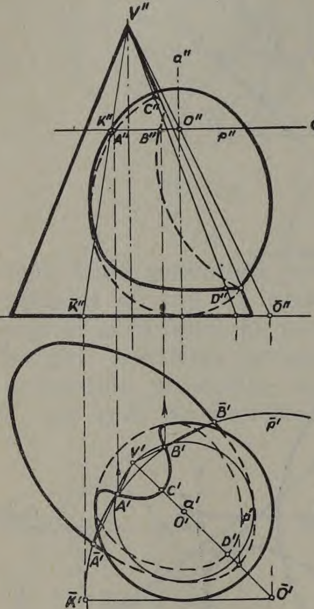
103. Rotācijas virsmas krustošanās ar cilindru un konusu. Rotācijas virsmas un t a i s n a cilindra krustošanās mums nav vairs jāaplūko, jo šāds gadījums ir jau ilustrēts ar 326. rasējumu. Šai rasējumā šķēluma figūras viena projekcija (plaknē, kas perpendikulāra cilindra asij) jau iepriekš zināma un jānosaka tikai tai atbilstošā otra projekcija. Lai noteiktu rotācijas virsmas šķēlumu ar *slīpu riņķa cilindru* (vai konusu), kam pamats ir horizontālajā plaknē, var izmantot horizontālas palīgplaknes, kas šķeļ abas virsmas pa riņķiem. Riņķu horizontālās projekcijas tad viegli konstruēt, un šo projekciju krustpunkti dod šķēluma figūras horizontālās projekcijas punktus, kam atbilstošie punkti frontālajā projekcijā ir uz attiecīgās palīgplaknes raksturīgās projekcijas.



340. ras.

Lai gan iepriekšējo metodi var izmantot arī tad, ja cilindra pamats ir *komplicētāka līkne*, tomēr neērtības tad rada cilindra šķēlumu horizontālo projekciju atkārtota zīmēšana. No šīs neērtības var izvairīties, lietojot šādu mākslīgu paņēmienu, kas parādīts 340. rasējumā. Abas šķēluma figūras, pa kurām kāda horizontāla palīgplakne Q šķeļ dotās virsmas, projecē paralēli cilindra veidulēm cilindra pamata plaknē H. Cilindra horizontālā šķēluma projekcija tad sedzas ar tā pamata līkni, bet rotācijas virsmas šķēluma (paralēles) projekcijas iezīmēšanai pietiek noteikt tā centra O projekciju $\overline{O}$ un izmērīt rādiusu frontālajā projekcijā. Tā iegūto projekciju krustpunktus $\overline{A}$ un $\overline{B}$ projecējot atpakaļ plaknē Q, dabūjam divus šķēluma figūras punktus A un B. Analoģiski nosaka pārējos šķēluma figūras punktus. Tā kā divas cilindra veidules krusto rotācijas asi, tad šo veiduļu krustpunktus C un D ar rotācijas virsmu var noteikt arī ar iepriekšējā rasējumā parādīto paņēmienu. Pieskares šķēluma figūras punktos nosaka ar parasto paņēmienu.

Iepriekš aprakstītajai metodei var dot arī šādu interpretāciju. Projecētāji stari caur paralēles p punktiem veido cilindrisku virsmu, kas krusto doto cilindru pa veidulēm $\bar{A}A$ un $\bar{B}B$, bet rotācijas virsmu pa šo paralēli p. Šo līniju krustpunkti ir meklētās šķēluma līnijas punkti. Šādā uztverē šķēluma figūras konstruēšanai par palīgvirsmām esam izmantojuši cilindriskas virsmas caur rotācijas virsmas paralēlēm[1].



341. ras.

No iepriekšējā sprieduma var vadīties arī, nosakot rotācijas virsmas šķēlumu ar konusu, kam pamats nav riņķis, bet patvaļīga līkne. Izvēloties konusa virsotni par projekciju centru, projecējam atkal abas līknes, pa kurām patvaļīga horizontāla palīgplakne Q šķeļ abas virsmas, konusa pamata plaknē H. Konusa šķēlums šādā centrālā projekcijā attēlojas par tā pamata līkni, bet rotācijas virsmas paralēles attēla konstruēšanai bez tās centra projekcijas jānosaka arī rādiusa projekcija, jo tas centrālā projekcijā palielinās.

Konstrukcijas izpildījums redzams 341. rasējumā. Pārskatāmības dēļ arī šeit noteikti tikai divi šķēluma figūras punkti A un B. Krustpunktus C un D konusa veidulēm, kas krusto rotācijas asi, var noteikt, iegriežot iepriekš šīs veidules rotācijas virsmas galvenā meridiāna plaknē.

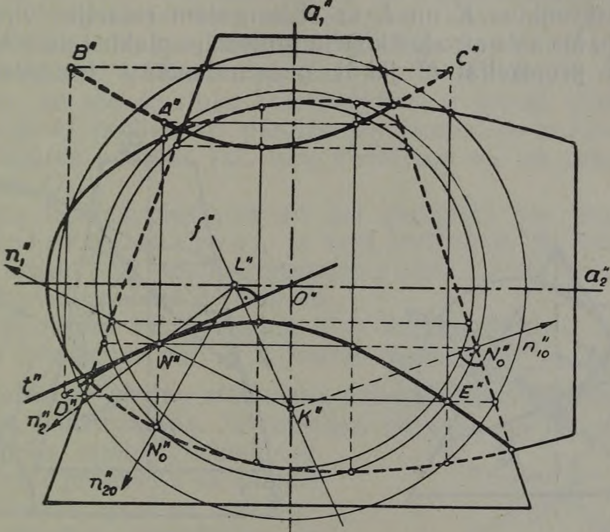
Metodi var interpretēt arī tā: šķēluma figūras konstruēšanai par palīgvirsmām izmantotas koniskas virsmas caur rotācijas virsmas paralēlēm ar virsotnēm dotā konusa virsotnē V.

104. Rotācijas virsmu savstarpēja krustošanās. Palīgložu metode šķēluma figūras konstruēšanai. Ja abu rotācijas virsmu asis ir savstarpēji paralēlas, bet perpendikulāras horizontālajai projekciju plaknei, tad atsevišķus šķēluma figūras punktus dabū, šķeļot abas

[1] Trešā interpretācija varētu būt vēl šāda: šķēluma figūra ir cilindra augšējā pamata ēna uz rotācijas virsmas paralēlapgaismojumā paralēli cilindra veidulēm. Konstrukcija izriet no ēnu konstruēšanas netiešā paņēmiena (sal. ar 388. ras.).

virsmas ar horizontālām palīgplaknēm. Katra tāda palīgplakne šķeļ virsmas pa riņķiem, kas krustojoties dod divus šķēluma figūras punktus.

Apskatīsim tuvāk gadījumu, kad abu virsmu asis krustojas. Šķēluma figūras konstruēšanai tad izdevīgi palīgplakņu vietā lietot palīglodes ar centru abu rotācijas asu krustpunktā. Katra tāda lode šķeļ abas virsmas pa paralēlēm, un ir jānosaka tikai šo paralēļu krustpunkti. Izvēloties pie tam projekciju plakni paralēli abām asīm



342. ras.

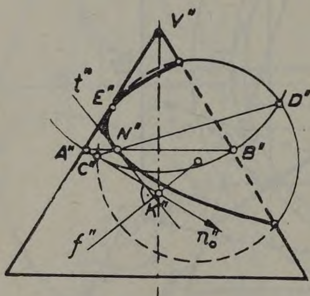
(vai caur tām), abu rotācijas virsmu paralēles attēlojas šai plaknē par taisnes nogriežņiem un krustpunktus viegli noteikt; vēl vairāk, konstrukciju tādā gadījumā var izpildīt pat vienā projekcijā.

Konstrukcijas izpildījums redzams 342. rasējumā, kur viena no rotācijas virsmām ir rotācijas konuss. Mazākā, vēl izmantojamā lode, ir tā, kas pieskaras patvaļīgajai rotācijas virsmai, t. i., kuras projekcija (mazākais riņķis) pieskaras šīs virsmas galvenā meridiāna projekcijai. Tā dod četrus šķēluma figūras punktus, kuru projekcijas (simetrijas dēļ) ik pa divām sakrīt (pieskares šajos līknes projekcijas punktos ir horizontālas taisnes). Nākošā šai rasējumā attēlotā lode šķeļ abas rotācijas virsmas ik pa divām paralēlēm, kas vispār varētu dot astoņus šķēluma figūras punktus, tātad četrus projekcijas punktus. Kaut gan apskatītajā piemērā no šiem punktiem tikai seši ir reāli, šķēluma līknes projekcijas precīzākai konstruēšanai var izmantot arī punktu A'', kurā abu rotācijas virsmu attiecīgo paralēļu projekcijas krustojas tikai pagarinājumā[1]. Tāpat var

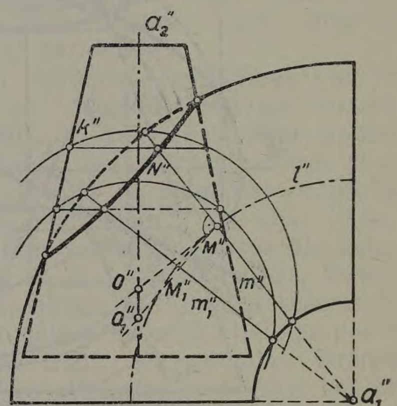
[1] Šis punkts ir telpas līknes divu (saistīti) imagināro punktu kopīgais attēls.

izmantot arī punktus B'', C'' un D'', ko dod rasējumā izvēlētā trešā palīglode.

Rasējumā parādīts arī, kā konstruē pieskari šķēluma figūras projekcijas patvaļīgā punktā N''. Pieskaru plakņu vietā izmantotas abu virsmu normāles n_1 un n_2 punktā N (šo normāļu konstrukcija jau apskatīta 331. ras.). Ar šīm abām normālēm ir definēta šķēluma līknes normālplakne punktā N, un, tā kā līknes pieskare ir perpendikulāra normālplaknei, tad pieskares projekciju t'' dabū, nosakot normālplaknes frontāli f. Tā ir taisne, kas savieno abu normāļu krustpunktus K un L ar attiecīgajām rotācijas virsmu asīm a_1 un a_2, jo šīs asis atrodas kopējā projekciju plaknei paralēlā plaknē. Pieskares projekcijai t'' jābūt perpendikulārai frontāles projekcijai f''.



343. ras.



344. ras.

Atzīmēsim vēl, ka punktu K'' un L'' noteikšanai pietiek jau ar normāļu projekcijām n_{10}'' un n_{20}'' abu galveno meridiānu kopējā plaknē iegrieztā stāvoklī un normāļu projekcijas n_1'' un n_2'' sākotnējā stāvoklī nemaz nav jākonstruē.

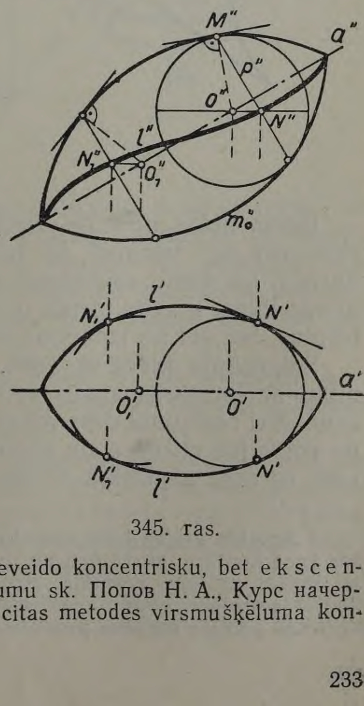
Apskatīto palīgložu metodi var izmantot arī divu rotācijas cilindru vai konusu vai konusa un cilindra savstarpējā šķēluma konstruēšanai, ja vien šo virsmu asis krustojas (kā, piem., 321. ras.). To var izmantot arī kādas rotācijas virsmas un lodes šķēluma konstruēšanai, jo lode ir rotācijas virsma, kam par asi var izvēlēties jebkuru tās diametru. Tā, piemēram, lodes un rotācijas konusa šķēluma konstruēšanai (343. ras.; lodes centrs atrodas frontālā plaknē caur konusa asi) palīgložu centru var izvēlēties konusa virsotnē V. Šķēluma figūra ir ceturtās kārtas līkne ar punktu E kā dubultpunktu (šai punktā abām virsmām ir kopēja pieskaru plakne), bet projekcija — parabolas loks. Pieskares konstruēšanai punktā N'' pietiek vilkt virsmas normāli n_0'' konusam (galvenā meridiāna plaknē iegrieztā stāvoklī), jo visas lodes normāles iet caur tās centru.

Ja divu rotācijas virsmu asis *šķērsojas*, tad palīgložu metodi vispār vairs nevar izmantot. Tādā gadījumā jācenšas attēlot abas virsmas tā, lai vismaz vienas rotācijas virsmas ass būtu perpendikulāra kādai projekciju plaknei, un tad lietot palīgplaknes perpendikulāri šai asij. Atsevišķos gadījumos, kā, piemēram, 344. rasējumā apskatītajā piemērā (tora kvadranta šķēlums ar rotācijas konusu), tomēr var izvēlēties palīgložu saimi, kas šķeļ abas virsmas pa riņķiem. Tiešām, ja m ir tora meridiāns (projekcijā attēlojas kā taisnes nogrieznis, kas pagarinājumā iet caur tora ass projekciju a_1''), tad palīglodes centram caur šo meridiāna riņķi jāatrodas uz riņķa ass. Palīglode, kam centrs ir šīs riņķa ass krustpunkts O ar konusa asi a_2, šķeļ arī konusu pa riņķi k (otrs šķēluma riņķis te mūs neinteresē), un abu šo riņķu krustpunktiem ir kopējs attēla punkts N''. Analoģiski izvēlas arī pārējās palīglodes un nosaka pārējos šķēluma figūras punktus (sk. tora meridiānu m_1 un jaunās palīglodes centru O_1)[1].

Šķēluma figūras pieskares arī šai gadījumā var konstruēt ar *normālplakņu metodi*, ja vien ievērojam, ka tora virsmas normāles krusto abu virsmu simetrijas plakni (attēlu plakni) meridiāna riņķu viduspunktā M resp. M_1.

Šķēluma figūra šai gadījumā ir 8. kārtas līkne ($2 \cdot 4 = 8$), bet projekcija (simetrijas dēļ) ir 4. kārtas līknes loks.

105. Rotācijas virsmu attēlošana patvaļīgā stāvoklī; aksonometrisko attēlu konstruēšana. Ja rotācijas virsmas ass ir paralēla vai perpendikulāra attēlu plaknei, tad tās ortogonālo projekciju šai plaknē sastāda virsmas galvenā meridiāna resp. ekvatoru projekcijas. Ja virsmas ass ir *slīpa* pret attēlu plakni, tad tās paralēles attēlojas šai plaknē par elipsēm un virsmas redzamā apveida projekciju varētu dabūt kā šo elipsu aptverošo līkni. Tā kā konstruēt daudzas elipses ir grūti, tad aplūkosim kādu vienkāršāku metodi, kur apveida projekcijas konstruēšanai izmanto rotācijas virsmā ievilktas lodes.

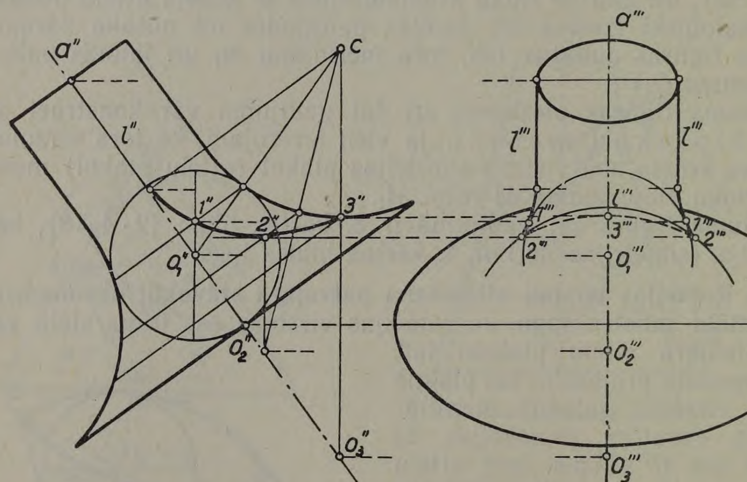


345. ras.

Šo palīgložu metodi ilustrē 345. rasējums, kur vienkāršības dēļ rotācijas virsmas ass a ir izvēlēta paralēla frontālajai projekciju plaknei (vispārīgā gadījumā būtu jāizdara iepriekš viena transformā-

[1] Atšķirībā no iepriekšējā te palīglodes neveido koncentrisku, bet *ekscentrisku* virsmu saimi. Tuvāk par šo jautājumu sk. Попов Н. А., Курс начертательной геометрии, 1947., kur aplūkotas arī citas metodes virsmušķēluma konstruēšanai.

cija). Virsmas frontālais apveids tad ir galvenais meridiāns m_0. Lai noteiktu kādu patvaļīgu horizontālā apveida punktu N, velkam vispirms patvaļīgu paralēli p un lodi, kas pieskaras virsmai pa šo paralēli. Šīs lodes centrs ir galvenā meridiāna punktā M vilktās normāles krustpunkts ar rotācijas virsmas asi. Lodes horizontālā apveida (ekvatora) frontālā projekcija ir riņķa horizontālais diametrs, bet tā krustpunkts N'' ar p'' ir (simetrijas dēļ) divu virsmas horizontālā apveida punktu kopējais attēls. Šo punktu horizontālās projekcijas uz lodes ekvatora horizontālās projekcijas ir simetriskas pret asi a'. Tā kā paralēles p punktos ievilktai lodei un rotācijas virsmai ir kopējas pieskaru plaknes, tad riņķa pieskares punktos N' ir reizē pieskares meklētā apveida horizontālajai projekcijai.



346. ras.

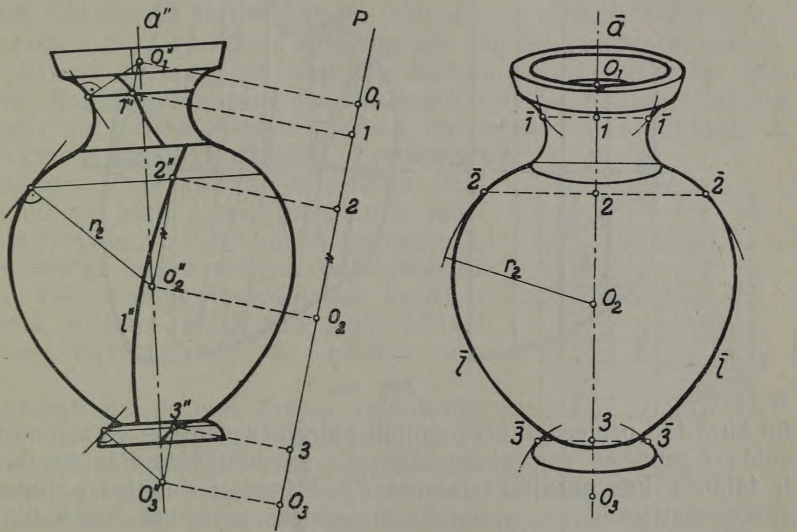
Horizontālā apveida punktu noteikšanai ložu frontālās projekcijas var arī nezīmēt, kā tas parādīts punktu pārim N_1. Apveida līnija l, ko dabū, savienojot visus tā konstruētos punktus, vispār ir telpas līkne, un tās forma ir atkarīga ne vien no galvenā meridiāna formas, bet arī no rotācijas virsmas ass slīpuma pret attēlu plakni.[1]

Sekojošajā piemērā (346. ras.) redzēsim kādu raksturīgu īpatnību, ar ko sastopamies rotācijas virsmu apveida līniju konstruēšanā. Šai rasējumā dota atkal frontālā projekcija virsmai, kas salikta no rotācijas cilindra un virsmas, kam galvenais meridiāns ir riņķa loks ar centru punktā C (šī galvenā meridiāna daļas normāles ir

---

[1] Apveida līnijas l horizontālo projekciju var uzskatīt arī par virsmas krītošās ēnas kontūru, ko tā met horizontālajā plaknē paralēlapgaismojumā vertikāli no augšas uz leju. Frontālā projekcija l'' tādā gadījumā ir vismaz pašēnas kontūras projekcija šādā apgaismojumā. Šīs kontūras noteikšanai tādēļ var lietot arī visas pārējās metodes pašēnas kontūras noteikšanai (sk. tālāk 7. §).

riņķa rādiusi). Jākonstruē rotācijas virsmas profilā projekcija resp. tās profilā apveida līnija. Šī profilā apveida frontālo projekciju l'' konstruējam kā iepriekš, tikai palīgložu profilā apveida riņķi te frontālajā projekcijā attēlojas kā ložu frontālo projekciju vertikālie diametri. Apveida līnijas projekcija cilindriskajā daļā s sakrīt ar rotācijas virsmas ass projekciju, bet pārējā daļā noliecas pa labi un nobeidzas galvenā meridiāna punktā $3''$, kurā pieskare meridiānam ir horizontāla taisne. Apveida līnija l profilā projekcijā redzama tikai līdz punktiem 2, kuros pieskares līknei ir profili projecētājas taisnes.



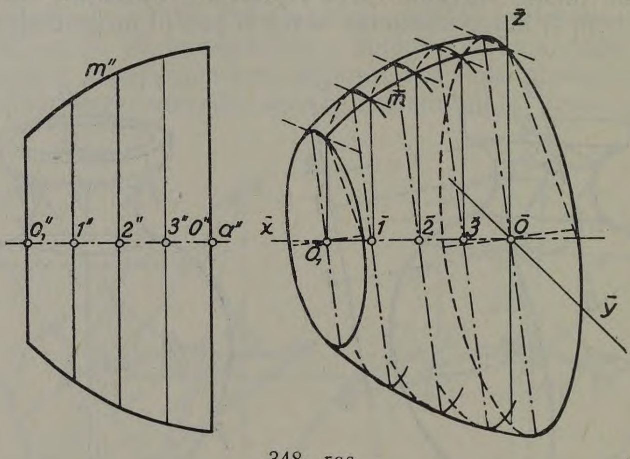
347. ras.

Punkti $2'''$ tādēļ ir šīs līnijas attēla asuma punkti (sal. ar 272. ras.). Pārējo apveida līnijas daļu profilā projekcijā neredzam, jo šajā daļā projecētāji stari pieskaras virsmai no iekšpuses. Rotācijas virsmas profilās projekcijas kontūru papildina vēl abu tās noslēdzošo paralēļu projekcijas, kas (iepriekšējā nozīmē) pie virsmas apveida līnijas l nepieder.

Apveida līknes jauno projekciju var dabūt arī kā palīgložu projekciju aptverošo līniju. Lai saprastu, kā veidojas asuma punkti, jāizmanto apveida līknes projekcija l''.

Pieņemsim tagad, ka rotācijas virsmas frontālā projekcija ir tās profilā projekcija. Tad iepriekš konstruēto profilo projekciju varam uzskatīt arī par virsmas ortogonāli aksonometrisku attēlu, kur virsmas ass a virziens ir koordinātu ass Z virziens (leņķis starp projekcijām a'' un a''' ir Z ass slīpuma leņķis γ). Ar iepriekšējo piemēru tātad parādīts paņēmiens, kā konstruēt šādu aksonometrisko attēlu. Ja aksonometriskais attēls jākonstruē pēc jau dotajām virsmas ortogonālajām projekcijām v i e n k ā r š ā stāvoklī, tad vienu no projekcijām (plaknē, kas paralēla rotācijas asij) būtu iepriekš jāpārzīmē vajadzīgajā stāvoklī pret aksonometrisko $\bar{Z}$ asi ($\bar{X}$ vai $\bar{Y}$ asi, ja rotācijas virsmas ass izvēlēta X un Y asu virzienā).

Šo pārzīmēšanu var ietaupīt, ja dotajam attēlam, piemēram, rotācijas virsmas frontālajai projekcijai (sk. 347. ras.), blakus novelkam taisni P, ko uzskatām par aksonometrisko projekciju plakni



348. ras.

un kurā tad projecējam ortogonāli palīgložu centrus un virsmas apveida l punktus (palīgložu attiecīgo apveidu frontālās projekcijas ir taisnes, kas paralēlas taisnei P). Pārnesot dabūtos punktus uz aksonometriskās ass $\bar{a}$, dabūjam iepriekš aizrādītā veidā līknes $\bar{l}$ punktu aksonometriskos attēlus. Aksonometriskais attēls arī šeit jāpapildina ar virsmas atsevišķo daļu norobežojošo paralēļu attēliem.

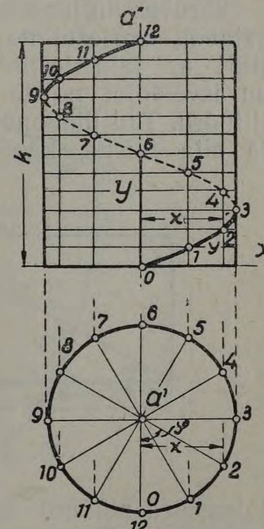
Aplūkosim tagad rotācijas virsmas s l ī p i aksonometriskā attēla konstruēšanai, pie kam aplūkosim tikai vienkāršāko gadījumu, kad jāattēlo samērā neliela rotācijas virsmas daļa (348. ras.), kas dota ar frontālo projekciju. Pieņemsim, ka attēlojamās virsmas ass ir paralēla kādai no izvēlētās koordinātu sistēmas asīm. Šai gadījumā var konstruēt virsmas atsevišķo paralēļu attēlus un zīmēt tā dabūto elipsu aptverošo līkni. Ja rotācijas virsmas ass ir paralēla X asij, tad virsmas attēlu Kabineta projekcijā (sk. ras. pa labi) dabū, zīmējot vispirms koordinātu plaknei XOZ (vai XOY) paralēlā meridiāna m un abu virsmu noslēdzošo (plaknei YOZ paralēlo) riņķu attēlus. Nosakot šo elipsu asis, pārējo brīvi izvēlēto paralēļu attēlu asis dabū vienkāršāk, ievērojot, ka to garumi attiecas tāpat kā atbilstošo paralēļu rādiusi (konstrukcija: taisnes, kas savieno attiecīgo asu galapunktus ar saistītā diametra galapunktiem uz meridiāna $\bar{m}$, ir paralēlas). Bez tam parasti pietiek izzīmēt šīs elipses tikai lielo asu galapunktu tuvumā, kur tās var atvietot arī ar liekuma riņķu lokiem.

Sarežģītākajām rotācijas virsmām šī primitīvā metode ir neērta. Vienīgi, ja rotācijas virsmas ass ir paralēla Y asij, tā vēl būtu lietojama, jo rotācijas virsmas paralēles tad attēlojas nesagrozīti. Pazīstamas arī citas metodes, kas konstrukciju ievērojami vienkāršo. Tuvāk tās neiztirzāsim, jo jāatceras, ka liektu virsmu uzskatāmu attēlu iegūšanai piemērotāka tomēr ir ortogonāli aksonometriskā metode.

6. §. SKRŪVES LĪNIJAS UN VIRSMAS

106. Cilindriskā skrūves līnija. *Cilindriskā skrūves līnija veidojas, ja kāds punkts, rotējot ap nekustīgu asi, tai pašā laikā pārvietojas šīs ass virzienā, pie kam abu kustību ātrumu attiecība neizmainās.* Nekustīgo asi sauc par *skrūves līnijas asi,* punkta attālumu līdz asij par *skrūves līnijas rādiusu,* bet taisno riņķa cilindru, uz kura virsmas atrodas pati līkne, — *par skrūves cilindru.* Par skrūves līnijas *kāpi* sauc attālumu, par kādu punkts pārvietojas skrūves līnijas ass virzienā pilnā apgriezienā. Izšķir *labo* un *kreiso* skrūves līniju atkarībā no tā, vai, skatoties translācijas kustības vērsumā, rotācija notiek pulksteņa rādītāja kustības virzienā vai tai pretējā virzienā.

Aprakstītais skrūves līnijas veidošanās likums nosaka arī tās konstrukciju. Ja skrūves līnijas ass a ir izvēlēta perpendikulāri horizontālajai projekciju plaknei (349. ras.), tad skrūves līnijas horizontālā projekcija ir riņķis, kura rādiuss vienāds ar skrūves līnijas rādiusu. Lai konstruētu tās frontālo projekciju, dalām šo riņķi un (ras. brīvi izvēlēto) skrūves līnijas kāpi k vienādās, piemēram, 12 daļās un nosakām katram dalījuma punktam horizontālā projekcijā atbilstošā augstumā punktu frontālā projekcijā, kā rasējumā parādīts.



349. ras.

Konstatēsim tagad, ka skrūves līnijas frontālā projekcija ir *sinusoīda.* Tiešām, izvēloties koordinātu sistēmas sākumu punktā O, X asi horizontālu un Y asi vertikālu (sk. rasējumu), kāda patvaļīga līknes punkta 2 abscisu var izteikt (no horizontālās projekcijas) ar sakarību

$$x = r \sin \varphi,$$

kur r ir skrūves līnijas rādiuss, bet φ — leņķis, par kādu punkts pagriezts no sākotnējā stāvokļa O. Šī punkta ordināti dabū, ievērojot, ka pēc skrūves līnijas veidošanas likuma

$$\varphi : 2\pi = y : k.$$

Izsakot no pēdējās sakarības φ un ievietojot iepriekšējā sakarībā, dabūjam

$$x = r \sin \frac{2\pi}{k} y,$$

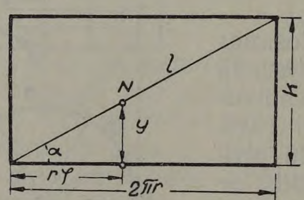
kas apgalvojumu pierāda.

Iedomāsimies skrūves cilindru pāršķeltu pa veiduli 0—12 un izklātu plaknē tā, lai tā ārpuse būtu pievērsta skatītājam. Skrūves līnija tad izklāsies par taisni l (sk. 350. ras.). Tas seko no pašas skrūves līnijas definīcijas, jo patvaļīga punkta N augstums izklājumā:

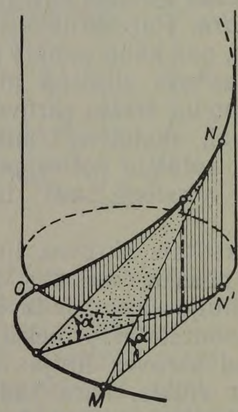
$$y = \frac{\varphi}{2\pi} \cdot k = \frac{k}{2\pi r} \cdot r\varphi,$$

tātad proporcionāls atbilstošajam skrūves cilindra pamata riņķa lokam $r\varphi$.

Skrūves līnijas modeli viegli pagatavot, izgriežot no papīra taisnstūri ar tajā iezīmētu diagonāli un izveidojot no tā taisnu riņķa cilindru. Tad diagonāle (vai jebkura cita taisne, kas nav paralēla



350. ras.



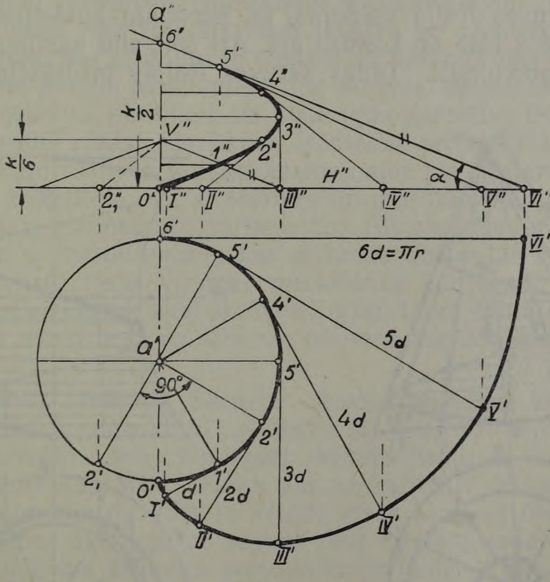
351. ras.

taisnstūra malām) izveidos skrūves līniju. Skrūves līnija tātad ir īsākā līnija (ģeodēziskā līnija) starp diviem punktiem uz šā cilindra virsmas.

Tā kā taisne l izklājumā veido vienādus leņķus ar visām cilindra veidulēm, tad arī *skrūves līnija krusto visas cilindra veidules vienā un tai pašā leņķī.* Visām līknes pieskarēm tādēļ ir vienāds slīpums pret skrūves cilindra pamata plakni. Šo slīpuma leņķi α sauc par skrūves līnijas *kāpes leņķi.* Ja $\alpha = 0°$, tad skrūves līnija deģenerējas par riņķi, ja $\alpha = 90°$ — par taisni — skrūves cilindra veiduli.

Lai noskaidrotu citas skrūves līnijas pieskaru īpašības un pašu pieskaru konstruēšanu, izsekosim tuvāk skrūves cilindra virsmas daļas izklāšanai, kas ir zem skrūves līnijas. Domāsim, piemēram, cilindrisko trīsstūri ONN' (351. ras.) atlocītu tā, ka tas visu laiku paliek sastieptā stāvoklī. Tad trīsstūra virsotne O zīmēs cilindra pamata plaknē līkni, kas ir cilindra pamata riņķa evolv e n t e, jo riņķa loks ON' kļūst par riņķa pieskari MN'. Cilindriskais trīsstūris kļūst par taisnleņķa trīsstūri MNN', kura hipotenūza MN ir pieskare skrūves līnijai punktā N, jo šī trīsstūra plakne pieskaras cilindram pa veiduli NN'. Hipotenūzas MN slīpuma leņķis pret cilindra pamata plakni ir vienāds ar skrūves līnijas kāpes leņķi.

Izmantojot šo īpašību, var atvasināt šādu paņēmienu pieskares konstruēšanai skrūves līnijas punktos (sk. 352. ras., kur parādīta tikai puse no 349. ras. attēlotā skrūves līnijas loka). Velkam skrūves līnijas horizontālās projekcijas punktos $1', 2', 3', \ldots$ pieskares un atliekam uz tām nogriežņus $\frac{2\pi r}{12}=d$, $\frac{2\pi r}{12}\cdot 2=2d$, $3d$ utt. un atrodam to galapunktiem $I', II', III', \ldots$ atbilstošos punktus frontālajā projekcijā uz skrūves cilindra pamata plaknes H frontālās pro-



352. ras.

jekcijas. Punktus $I'', II'', III'', \ldots$ savienojot ar attiecīgajiem skrūves līnijas frontālās projekcijas punktiem, dabūjam meklētās pieskares šajos punktos.

Apskatītā pieskaru konstrukcija ir neērta, jo iepriekš jākonstruē riņķa evolvente. Aizrādīsim tādēļ vēl uz kādu citu paņēmienu, kur izmanto t. s. *virziena konusu*.

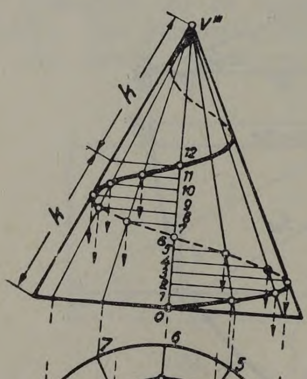
Līknes virziena konusu veido visas caur kādu patvaļīgu telpas punktu vilktās taisnes, kas ir paralēlas līknes pieskarēm. Tā kā skrūves līnijai visas pieskares veido vienādus leņķus α ar pamata plakni, tad tās virziena konuss ir taisns r i ņ ķ a k o n u s s. Ja šo konusu konstruējam virs skrūves cilindra pamata riņķa, tad tā virsotne V atrodas uz skrūves līnijas ass a. Virziena konusa augstums tad ir

$$h = r \operatorname{tg} \alpha = r \cdot \frac{k}{2\pi r} = \frac{k}{2\pi} \approx \frac{k}{6},$$

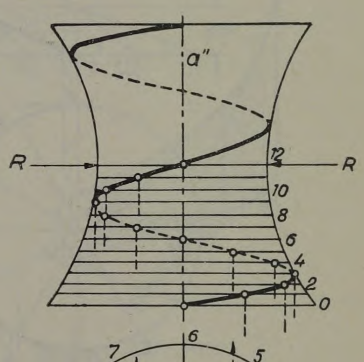
pie kam praktiski pietiek ar šo tuvināto lielumu $\frac{k}{6}$.

Lai konstruētu tagad kādā skrūves līnijas punktā, piemēram, punktā 2, pieskari (sk. 352. ras.), zīmē vispirms attiecīgās virziena konusa veidules horizontālo projekciju $a'2'_1$, paralēlu riņķa pieskarei punktā $2'$ (skrūves līnijas pieskares horizontālajai projekcijai), t. i., perpendikulāru rādiusam $a'2'$. Atbilstošo frontālās projekcijas punktu $2_1''$ tad savieno ar V'' un velk $2''II'' \| 2_1''V''$.

107. Koniskā skrūves līnija; skrūves līnijas uz rotācijas virsmas. Koniskā skrūves līnija veidojas, ja, punktam kustoties pa konusa veiduli, pēdējā rotē ap konusa asi. Arī šeit abu kustību ātrumi parasti ir proporcionāli. Tādas skrūves līnijas projekcijas parādītas



353. ras.



354. ras.

353. rasējumā. Koniskajām skrūves līnijām, konstruē vispirms tās punktu frontālās projekcijas (attiecīgā augstumā uz attiecīgās veidules frontālās projekcijas) un pēc tam šiem punktiem atbilstošās horizontālās projekcijas. Par koniskās skrūves līnijas kāpi sauc attā-

lumu, par kādu pārvietojas punkts pa konusa veiduli viena pilna apgrieziena laikā.

Koniskās skrūves līnijas frontālā projekcija ir sinusoīdai līdzīga līkne ar dilstošu amplitūdu, bet horizontālā projekcija — *Arhimeda spirāle* (seko no definīcijas). Arī izklājumā šī skrūves līnija pāriet Arhimeda spirālē, tādēļ skrūves līnija n a v konusa virsmas ģeodēziskā līnija.

Analoģiski var definēt arī skrūves līniju uz patvaļīgas rotācijas virsmas, proti, kā līniju, ko veido kāds punkts, kustoties pa virsmas meridiānu, ja pats meridiāns tai pašā laikā rotē ap virsmas asi. Izvēloties patvaļīgu galvenā meridiāna loku (sk. 354. ras.) par skrūves līnijas kāpi, dalām to atkal vienlīdzīgās daļās un tikpat daļās dalām kādas patvaļīgas rotācijas virsmas paralēles horizontālo projekciju. Skrūves līnijas horizontālo projekciju dabū, atliekot no centra a' uz novilktajiem rādiusiem (meridiānu horizontālajām projekcijām) punkta attālumus līdz rotācijas asij ikkatrā no atzīmētajiem kustības momentiem. Šie attālumi ir vienādi ar galvenā meridiāna atbilstošo dalījuma punktu attālumiem līdz skrūves līnijas asij. Pēc horizontālās projekcijas punktiem uz attiecīgās paralēles frontālās projekcijas sameklē atbilstošos līknes frontālās projekcijas punktus.

Ar koniskām skrūves līnijām sastopamies pie dažiem speciāliem koniskajiem zobratiem, bet ar skrūves līnijām uz rotācijas virsmām, konstruējot t. s. gliemežratu pārnesumus. Šīs skrūves līnijas nedrīkst sajaukt ar t. s. *loksodromām,* kas ir tādas līnijas uz rotācijas virsmas, kas krusto visus virsmas meridiānus konstantā leņķī. Tāda īpašība bija tikai cilindriskai skrūves līnijai, tādēļ cilindrisku skrūves līniju varētu saukt arī par skrūves cilindra loksodromu.

108. Skrūves virsmas. Skrūves virsma veidojas kādas līnijas skrūves kustībā ap nekustīgu asi. Katrs šīs līnijas — virsmas veidules punkts izveido telpā cilindrisku skrūves līniju ar kopēju asi un vienāda lieluma kāpi. Par veiduli var uzskatīt arī ikvienu citu līkni uz skrūves virsmas, ja vien tā krusto visas skrūves līnijas uz tās. Skrūves virsmas šķēlumu ar plakni caur tās asi sauc par skrūves virsmas *profilu,* bet šķēlumu perpendikulāri asij — par tās *normālšķēlumu.*

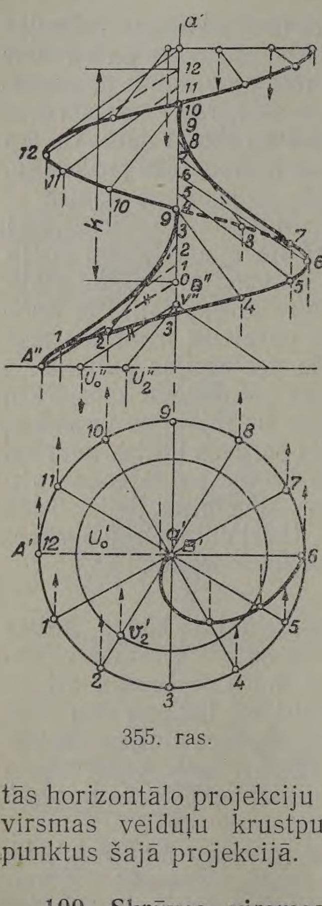
Ja veidule ir taisne, tad skrūves virsmu sauc par *helisoīdu*[1]. Izšķir *taisnus* un *greizus* helisoīdus atkarībā no tā, vai veidule ir perpendikulāra vai slīpa pret helisoīda asi; vaļējus un slēgtus helisoīdus atkarībā no tā, vai veidule un helisoīda ass ir šķērsas vai krustiskas taisnes. Visi helisoīdi, izņemot skrūves līnijas pieskaru virsmu, ir neizklājamas taišņu virsmas.

Greizs, slēgts helisoīds attēlots 355. rasējumā. Virsmas veidule šai gadījumā ir taisnes nogrieznis AB, kas sākotnējā stāvoklī ir paralēls frontālajai projekciju plaknei. Helisoīda frontālā apveida projekciju dabū, konstruējot tā veidules frontālās projekcijas atse-

[1] No franču helice — skrūves līnija.

viškos kustības momentos un zīmējot šo projekciju aptverošo līniju. Projekcijas kontūra jāpapildina vēl ar veidules galapunkta A veidotās skrūves līnijas projekciju un skrūves virsmas ass nogriezni, pa kuru slīd otrs veidules galapunkts B.

Tā kā pilna apgrieziena laikā veidules galapunkts B pārvietojas pa asi par doto kāpi k, tad veiduļu projekcijas var konstruēt divējādi: vai nu konstruējot vispirms punkta A veidoto skrūves līniju un tās atsevišķos punktus savienojot ar atbilstošajiem kāpes k dalījuma punktiem, vai arī izmantojot **veiduļu virziena konusu.** Virziena konusa virsotni V var izvēlēties patvaļīgā punktā uz helisoīda ass. Tā frontālā apveida kreisā veidule attēlojas ar taisni $U_0'' V'' \| A''B''$, kas nosaka tā pamata riņķa rādiusu. Lai noteiktu ar virziena konusa palīdzību virsmas veidules projekciju kādā patvaļīgā stāvoklī, piemēram, stāvoklī 2—2, tad caur kāpes dalījuma punktu 2 velk taisni 2—2 paralēlu attiecīgajai konusa veidulei U_2V (šīs veidules horizontālā projekcija sakrīt ar virsmas veidules horizontālo projekciju $2—B'$) un uz šīs taisnes no horizontālās projekcijas pārnes virsmas veidules otru galapunktu 2.

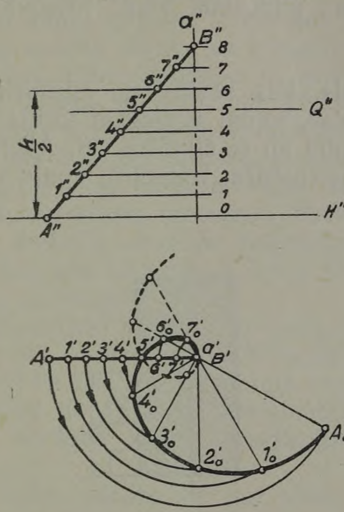


355. ras.

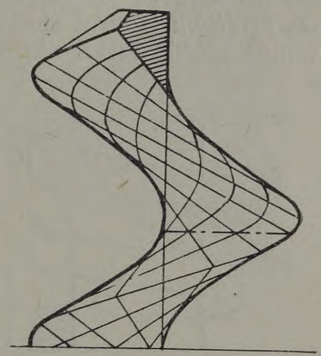
Attēlotais helisoīds vēl norobežots apakšā ar virsmas veiduli AB un augšā ar līkni, pa kuru virsmu šķeļ attiecīgajā augstumā izvēlēta horizontāla plakne. Šī līkne, kā to vēlāk konstatēsim, ir Arhimeda spirāle, un tās horizontālo projekciju (īstajā lielumā) dabū, savienojot atsevišķo virsmas veiduļu krustpunktu frontālajām projekcijām atbilstošos punktus šajā projekcijā.

109. Skrūves virsmas normālšķēluma noteikšana. Iepriekšējā rasējumā attēlotā greizā helisoīda normālšķēlumu varam noteikt arī ar šādu zemāk aprakstītu paņēmienu, kuram ir tā priekšrocība, ka tas lietojams arī gadījumā, ja virsmas veidule ir patvaļīga (plaknes vai telpas) līkne. Bez tam, izmantojot šo paņēmienu, vajag zināt tikai virsmas veidules AB projekcijas un virsmas kāpi k, kas kopā ar skrūves kustības virzienu jau viennozīmīgi nosaka virsmu.

Dalām kāpi k vienādās, vislabāk 12 daļās un atzīmējam šo dalījumu uz skrūves virsmas ass no pamata plaknes H uz augšu (sk. 356. ras.). Caur dalījuma punktiem velkam horizontālas palīgplaknes un nosakām abas projekcijas (vispirms frontālo, tad horizontālo) punktiem, kuros palīgplaknes krusto veiduli AB. Katrs no šiem punktiem kustībā izveido skrūves līniju, un skrūves virsmas šķēlumu ar kādu patvaļīgu horizontālu plakni Q (rasējumā šī plakne ņemta caur dalījuma punktu *5*) varētu dabūt, nosakot atsevišķo skrūves līniju krustpunktus ar šo plakni. No skrūves līniju konstruēšanas tomēr varam izvairīties, izmantojot šādu apsvērumu: lai punktu A



356. ras.



357. ras.

«uzskrūvētu» plaknes Q līmenī, šis punkts jāpagriež par leņķi $\frac{5}{12}\cdot 360° = 5 . 30°$; lai šai līmenī nonāktu virsmas veidules punkts *1*, tas jāpagriež par leņķi $\frac{4}{12} . 360° = 4 \cdot 30°$ utt. Tā kā punkts *5* jau atrodas plaknē Q, tad tas nav jāgriež, bet punkti *6* un *7* virs plaknes Q jāpagriež pretējā virzienā (par leņķiem 30° un $2 \cdot 30°$). Izpildot šai pagriešanai atbilstošo konstrukciju horizontālajā projekcijā, dabūjam šajā projekcijā normālšķēlumu īstajā lielumā. Normālšķēlums ir Arhimeda spirāle, jo tās punktu rādiusvektori ir proporcionāli attiecīgajam pagriešanas leņķim.

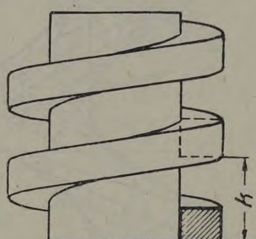
Pieņemsim tagad, ka veidule AB pagarināta otrā pusē skrūves virsmas asij. Šī veidules daļa tad papildinās mūsu virsmu, un arī virsmas normālšķēlumā dabūsim papildinājumu, kas rasējumā atzīmēts ar pārtrauktu līniju. Abi Arhimeda spirāles zari, krustojoties punktā *5'*, izveidos cilpu, kas rāda, ka tādējādi paplašinātā virsma šķeļas pati ar sevi (padomāt par palīgplakņu metodi divu virsmu šķēluma figūras noteikšanai)[1]. Šī šķelšanās notiek pa

[1] Turpinot virsmas veiduli neierobežoti uz *abām* pusēm, dabūjam helisoīdu, kas vairākkārt šķeļas pats ar sevi. Šīs šķēluma līnijas sauc par virsmas *dubultlīknēm*.

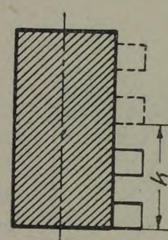
skrūves līniju, ko kustībā izveido punkts *5*. Virsmas daļa starp asi un šo skrūves līniju (t. s. *korķu viļķa virsma*) atsevišķi parādīta 357. rasējumā. Šīs virsmas normālšķēlums ir iepriekš pieminētā Arhimeda spirāles cilpa, bet profils — vienādsānu trīsstūris ar pamatu uz skrūves virsmas ass.

Visos iepriekš apskatītajos gadījumos esam lietojuši labās skrūves līnijas. Kreisās skrūves kustības gadījumā visas rotācijas ir jāizdara pretējā virzienā.

110. Skrūves. Skrūves ir ķermenis, kas sastāv no cilindriskas *serdes* un skrūves *vītnes,* kas veidojas, kādai noslēgtai figūrai — *vītnes profilam* izdarot skrūves kustību ap šī cilindra asi. Atkarībā no vītnes profila izšķir skrūves ar taisnstūra, trīsstūra, apaļu u. c. vītni.

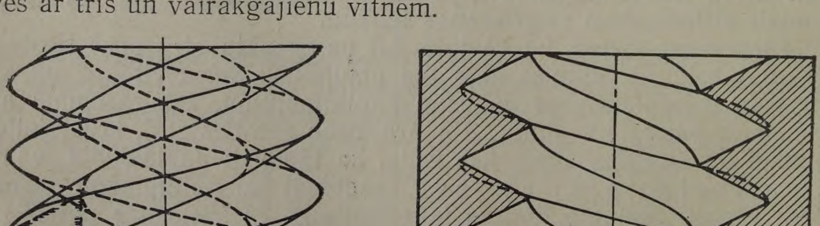


358. ras.



359. ras.

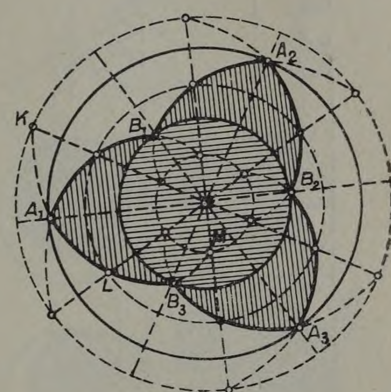
Skrūve ar taisnstūra vītni parādīta 358. rasējumā. Šādas skrūves attēlošanai pietiek konstruēt skrūves līnijas caur visām četrām taisnstūra virsotnēm. Lai dabūtu lietojamu skrūvi (padomāt par uzgriezni!), skrūves kāpe jāizvēlas vienāda ar vismaz divkāršu taisnstūra augstumu. Ja kāpi *k* izvēlamies divreiz lielāku par šo minimālo, tad vītnes profils (sk. shematisko 359. ras.) pēc pilna apgrieziena skrūves kustībā nonāk tādā stāvoklī, ka ir iespējams izveidot vēl otru vītni uz skrūves serdes ar kongruentu profilu. Tā veidoto skrūvi sauc par skrūvi ar *divgājienu vītni* atšķirībā no iepriekšējās, kas ir skrūve ar viengājiena vītni. Analoģiski iespējams veidot skrūves ar trīs un vairākgājienu vītnēm.



360. ras.

Vītnes ķermenis no augšas un apakšas ierobežots ar taisnu (slēgtu) helisoīdu, bet no sāniem — ar cilindriskām virsmām.

Skrūve ar trīsstūra vītni attēlota 360. rasējumā. Vītnes profils ir vienādsānu trīsstūris, kas ar pamatu piekļaujas skrūves serdei. Lai dabūtu lietojamu skrūvi, skrūves kāpe jāizvēlas vienāda ar trīsstūra pamata malas garumu vai arī ar vairākkārtēju tās garumu. Rasējumā kāpes garums ir vienāds ar trīskāršu profila pamata garumu, tādēļ dabūta skrūve ar trīsgājienu vītni. Vītnes augšējā un apakšējā virsma ir daļa no greiza (slēgta) helisoīda. Lai uzzīmētu skrūves frontālo projekciju, konstruē vispirms skrūves līnijas, ko veido trīsstūra virsotnes. Skrūves frontālā apveida projekciju sastāda abu šo skrūves līniju kopējās pieskares.[1]



361. ras.

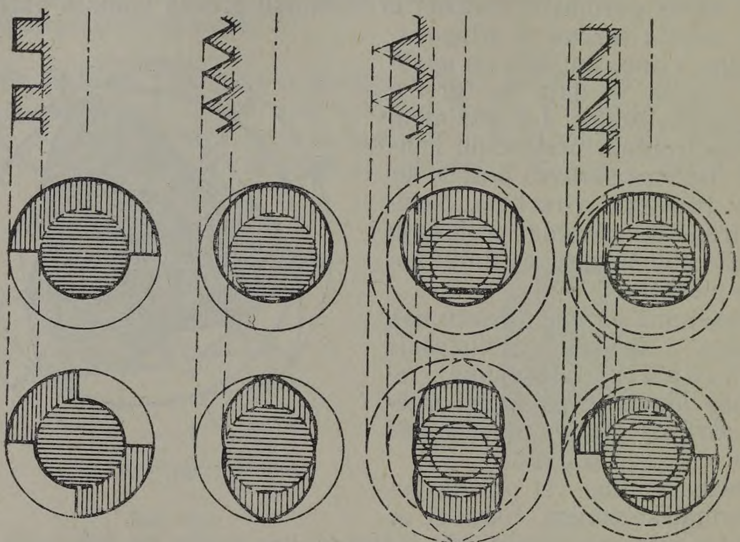
Rasējumā pa labi (griezumā) parādīts skrūvei atbilstošais uzgrieznis. Rasējumā redzamās līknes ir pa kreisi attēloto skrūves līniju neredzamās daļas.

Dažus vārdus vēl par skrūvju normālšķēlumiem. Skrūvei ar trīsstūra vītni normālšķēlums ir figūra, kas sastāv no Arhimeda spirāļu lokiem, pie kam, piemēram, skrūvei ar trīsgājienu vītni šī figūra sastāv no trīs kongruentiem izciļņiem ap serdes šķēluma riņķi (361. ras.). Ārējie punkti A_1, A_2 un A_3 atrodas uz riņķa, kam rādiuss ir vienāds ar lielākās skrūves līnijas rādiusu, pie kam leņķi starp šo punktu rādiusiem ir 120°. Tā kā punktos B_1, B_2 un B_3 uz serdes riņķa izciļņi saiet kopā, tad atliek noskaidrot vēl, kā konstruēt Arhimeda spirāļu lokus starp šiem punktiem A un B.

Lai iezīmētu pietiekami precīzi, piemēram, Arhimeda spirāles loku A_1B_3, ievērosim Arhimeda spirāles īpašību, ka vienādiem rotācijas leņķiem atbilst vienāda rādiusvektoru garuma maiņa. Bez riņķiem caur A_1 un B_3 tādēļ velkam vēl dažus riņķus tā, lai to rādiusu garumi mainītos aritmētiskā progresijā. Rasējumā rādiusu garumu diference ir puse no punktu A_1 un B_3 rādiusu garumu starpības. Tas dod iespēju noteikt spirāles punktus K, L un M uz rādiusiem, kas ar punktu A_1 un B_3 rādiusiem veido 30° leņķus. Savienojot punktus K, A_1, L, B_3 un M, dabū meklēto Arhimeda spirāles loku. No Arhimeda spirāles normālšķēluma kontūrai pieder tikai loks starp punktiem A_1 un B_3.

[1] Tas pareizi tikai zināmā tuvinājumā, jo īstenībā apveida līnija sastāv no līkņu lokiem (sal. ar 355. ras.). Praksē parasti apmierinās ar shematisku skrūves attēlojumu, identificējot apveidu ar skrūves virsmas profilu un skrūves līnijas aizstājot ar taisnēm.

Dažāda vītnes profila skrūvju normālšķēlumi parādīti 362. rasējumā. Augšējā rindā doti skrūvju vītņu profili, bet vidējā un apakšējā rindā šo skrūvju normālšķēlumi attiecīgi vien- un divgājienu vītnēm. Ja skrūves vītnes profils ir patvaļīga līka līnija, tās normālšķēluma konstruēšanai jāizmanto jau agrāk aplūkotais vispārīgais paņēmiens.[1]



362. ras.

Skrūvju šķēlumus ar patvaļīgu plakni vai skrūves virsmas šķēlumu ar kādu citu (parasti rotācijas) virsmu sīkāk neaplūkosim. Aizrādīsim tikai, ka pēdējā gadījumā var lietot atkal palīgplakņu metodi, izvēloties palīgplaknes perpendikulāri skrūves asij vai arī caur skrūves asi. Tā kā visi šādi šķēlumi ir kongruenti, tad pietiek konstruēt tikai vienu no tiem un tālāk izlīdzēties ar «uzskrūvēšanu» šī šķēluma plaknē (pirmajā gadījumā) vai ar iegriešanu frontālajā plaknē caur skrūves asi. Pie komplicētākajiem uzdevumiem jau pieder šādi divi uzdevumi: 1) noteikt skrūves vītnes profilu, ko izveido dotās formas speciāls frēzes ķermenis, un 2) noteikt, kā jāizveido pats frēzes ķermenis, lai ar to varētu izfrēzēt dotā profila skrūves.

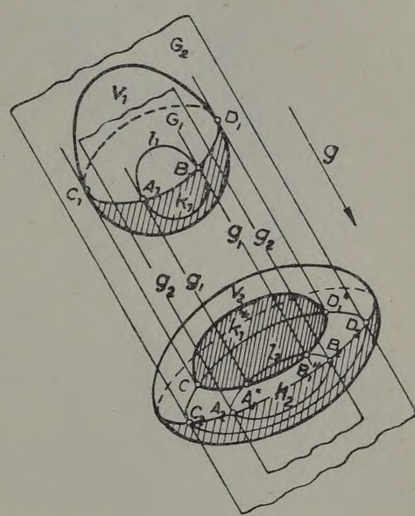
7. §. ĒNU KONSTRUĒŠANA

111. Vispārīgi aizrādījumi. Kādas virsmas pašēnas kontūru sastāda tie virsmas punkti, kuros gaismas stari pieskaras vir-

[1] Jāpiebilst, ka skrūvēm, ko parasti izmanto, seržu diametri lielāki par vītnes izmēriem. Lai parādītu skaidrāk konstrukciju, rasējumā šī pareizā samēru attiecība ir ignorēta.

smai. Visi šie stari veido (no vienas vai vairāk daļām sastāvošu) *gaismas cilindru,* un virsmas krītošās ēnas kontūra uz kādas citas virsmas vai plaknes ir gaismas cilindra šķēluma līnija ar šo virsmu vai plakni.

Visprimitīvākā metode ēnu konstruēšanai ir t. s. *šķēluma metode.* Lai noteiktu pēc šīs metodes krītošo ēnu, ko kāda virsma V_1 met uz otras virsmas V_2 (363. ras.), kā arī šo abu virsmu pašēnas, abas virsmas šķeļ ar plaknēm, kas paralēlas gaismas staru virzienam g (centrālajā apgaismojumā ar plaknēm caur doto gaismas avotu). Ja kāda no šīm palīgplaknēm, piemēram, G_1, šķeļ abas virsmas pa līnijām l_1 un l_2, bet g_1 un g_2 ir gaismas stari, kas pieskaras šīm līnijām, tad pieskaršanās punkti A_1, B_1 un A_2, B_2 ir attiecīgo virsmu pašēnas kontūru punkti, bet punkti A^*_1, B^*_1, kuros pieskares līnijai l_1 krusto līniju l_2, ir virsmas V_1 krītošās ēnas kontūras punkti uz virsmas V_2. Atkārtojot to ar pārējām palīgplaknēm, nosakām vairākus šo kontūru punktus, kurus savienojot dabūjam abas pašēnas kontūras k_1 un k_2 un krītošās ēnas kontūru k^*_1.

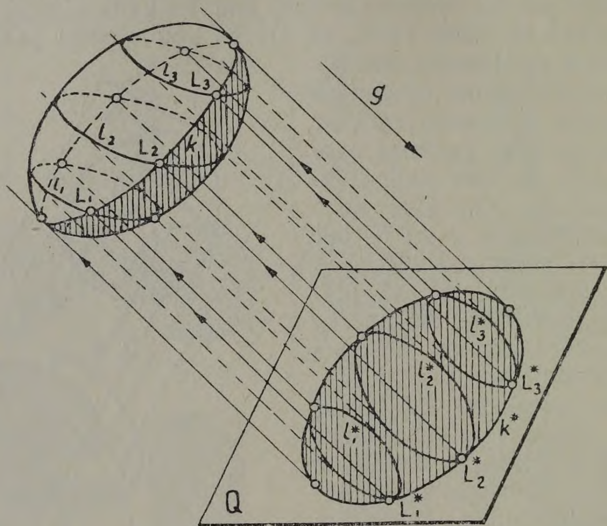


363. ras.

Apskatītās metodes priekšrocība ir tā, ka tā dod reizē pašēnas un krītošās ēnas kontūru punktus. Metodes trūkums ir tās samērā nelielā precizitāte. Tā kā virsmas krītošās ēnas kontūra ir tās pašēnas kontūras krītošā ēna, tad labāk vispirms noteikt tieši šo pašēnas kontūru. Šim nolūkam dažreiz var izmantot šādu jau agrāk lietoto netiešo paņēmienu. Izvēlas uz dotās virsmas patvaļīgas līnijas l_1, l_2, $l_3, \ldots$, ko viegli konstruēt, un nosaka šo līniju krītošās ēnas kādā brīvi izvēlētā plaknē Q (364. ras.). Pēc tam novelk šo ēnu aptverošo līkni k^*, kas ir virsmas krītošās ēnas kontūra šai plaknē. No punktiem L^*_1, L^*_2, $L^*_3, \ldots$, kuros aptverošā līnija pieskaras ēnām l_1^*, l_2^*, $l_3^*, \ldots$, velk tagad pretējā virzienā gaismas starus līdz krustpunktiem L_1, L_2, $L_3, \ldots$ ar līknēm l_1, l_2, $l_3, \ldots$ Šie punkti ir meklētās pašēnas kontūras punkti.

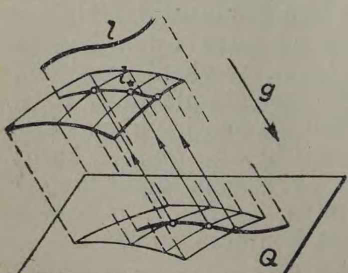
Ar šo netiešo paņēmienu var noteikt arī krītošo ēnu, ko uz virsmas met kāda patvaļīga līnija l vai kādas citas virsmas pašēnas kontūra. Izvēloties atkal uz virsmas patvaļīgas līnijas (tās var būt tās pašas līnijas, ko izmantoja virsmas pašēnas kontūras noteikšanai), meklē šo līniju, kā arī līnijas l krītošās ēnas kādā palīgplaknē Q (365. ras.). No ēnu krustpunktiem pretējā virzienā vilktie gaismas stari, krustojoties ar izvēlētajām palīglīnijām uz virsmas, dod līnijas l krītošās ēnas l_* punktus.

Atzīmēsim vēl kādu trešo paņēmienu, ko gan lieto tikai rotācijas virsmu p a š ē n a s kontūru noteikšanai. Šai paņēmienā izmanto rotācijas virsmā ievilktas (apvilktas) lodes vai konusus (sk. 366. ras.).



364. ras.

Ja kāda lode vai konuss pieskaras rotācijas virsmai pa paralēli p, tad punkti, kuros lodes (konusa) pašēnas kontūra krusto šo paralēli, ir rotācijas virsmas pašēnas kontūras punkti, jo šajos punktos abām virsmām ir kopēja pieskaru plakne, kas ir paralēla gaismas staru virzienam. Tā kā lodes un konusa pašēnas kontūras viegli konstruēt, tad šī palīgložu resp. palīgkonusu metode ir viena no precīzākajām metodēm, ar kuru var noteikt rotācijas virsmu pašēnas kontūru.

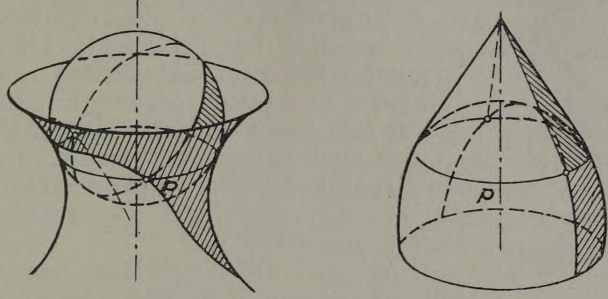


365. ras.

Iepriekš iztirzātos paņēmienus praktiskajām ēnu konstrukcijām izmanto reti. Palaikam vienas un tās pašas virsmas dažu pašēnas kontūras punktu noteikšanai lieto vienu metodi, bet citus punktus nosaka ar citu metodi. Tas it sevišķi attiecas uz saliktu ķermeņu ēnu konstruēšanu. Ļoti bieži izmanto arī transformāciju metodi. Lai samazinātu palīgelementu skaitu un uzlabotu konstrukciju precizitāti, ieteicams labi iegaumēt vēl šādus vispārīgus noteikumus.

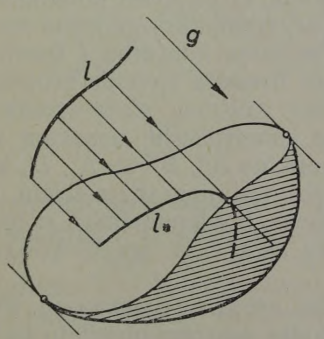
1. Virsmas redzamā apveida, pašēnas kontūras un krītošās ēnas

kontūras p r o j e k c i j ā m ir vienmēr kopēja pieskare gaismas staru projekcijas virzienā, kaut gan telpā atbilstošais gaismas stars šīs trīs kontūras k r u s t o (sk., piem., 364. ras.). Virsmas pašēnas kontūras punktus, kuros tā krustojas ar virsmas redzamo apveidu, tātad var vienmēr noteikt, pievelkot tās apveida projekcijai pieskares paralēli gaismas staru virziena attiecīgajai projekcijai.

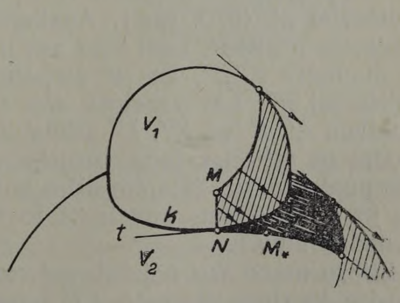


366. ras.

2. Ja kādas līnijas krītošā ēna uz virsmas krusto virsmas pašēnas kontūru (367. ras.), tad krustpunktā vilktā pieskare krītošai ēnai ir šai punktā pievilktais gaismas stars. Tas kļūs saprotams, ja ievērosim, ka līknes krītošā ēna ir tās gaismas cilindra šķēluma līnija ar virsmu un ka pieskare ir šai krustpunktā novilkto abu virsmu pieskaru plakņu šķēluma taisne, bet abas pieskaru plaknes iet caur šo gaismas staru.



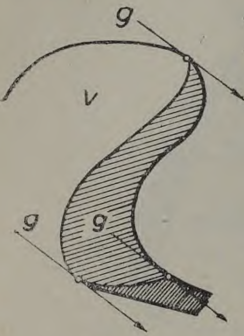
367. ras.



368. ras.

3. Ja divas virsmas V_1 un V_2 (368. ras.) krustojas pa līkni k, tad virsmas V_1 krītošās ēnas kontūra uz virsmas V_2 sākas punktā N, kurā virsmas V_1 pašēnas kontūra krusto šķēluma līkni k, un tai šai punktā ir kopēja pieskare t ar līkni k. Tas izskaidrojams ar to, ka gaismas cilindram un virsmai V_1 punktā N ir kopēja pieskaru plakne, kurai var būt tikai v i e n a šķēluma taisne ar virsmas V_2 pieskaru plakni šai punktā.

4. Ja punkts M (368. ras.) ir virsmas V_1 pašēnas kontūras lūzuma punkts, t. i., ja šai punktā virsmas pašēnas kontūrai ir divas dažādas pieskares, tad krītošās ēnas kontūrai punktā M_* tomēr ir tikai viena pieskare, t. i., šī kontūra punkta M_* apkārtnē ir g l u d a līkne. Tas izskaidrojams ar to, ka virsmas V_1 pieskaru plakne punktā M satur abas pieskares un tātad ir šo abu pieskaru kopējā gaismas plakne.



369. ras.

5. Ja gaismas stari pieskaras virsmas pašēnas kontūrai, tad šai punktā sākas krītošā ēna, kuras kontūru veido virsmas pašēnas kontūras ēna uz virsmas, pie tam krītošā ēna pieskaras tam pašam gaismas staram (369. ras.).

Šos punktus nedrīkst sajaukt ar punktiem, kuros pašēnas kontūra krusto virsmas apveidu, jo pēdējā gadījumā pieskaršanās notiek tikai projekcijā.

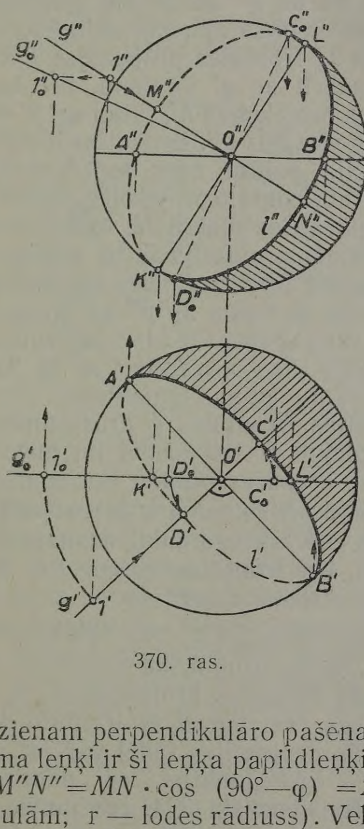
Kaut gan dažos speciālos gadījumos var būt arī izņēmumi no šiem vispārīgajiem noteikumiem, tomēr praksē ar šiem norādījumiem pietiek, lai iegūtu zināmu pārskatu par konstruējamo ēnu raksturu. Pārejam tagad pie ēnu konstruēšanas praksē biežāk izmantojamām virsmām.

112. Lodes ēnas. Lodes pašēnas kontūra paralēlapgaismojumā ir lodes lielais riņķis l, kura plakne ir perpendikulāra gaismas staru virzienam. Tās horizontālā projekcija ir elipse, kuras lielā ass ir attēlu plaknei paralēlā riņķa l diametra attēls, tātad lodes horizontālā apveida projekcijas diametrs $A'B'$, kas perpendikulārs gaismas stara projekcijai g' (370. ras.). Analoģiski, pašēnas kontūras l frontālā projekcija ir elipse, kam lielā ass ir lodes frontālā apveida projekcijas diametrs $K''L''$, kas ir perpendikulārs gaismas stara frontālai projekcijai g''. Lai pabeigtu abu elipsu konstrukciju, nosakām vēl punktiem A', B' un K'', L'' atbilstošos punktus A'', B'' un K', L', kas atrodas uz attiecīgo lodes projekciju horizontālajiem diametriem. Ar šiem punktiem un lielajām asīm abas elipses ir viennozīmīgi noteiktas, jo ir iespējams konstruēt to mazās asis $C'D'$ un $M''N''$ (sk. 94. nodalījumu.).

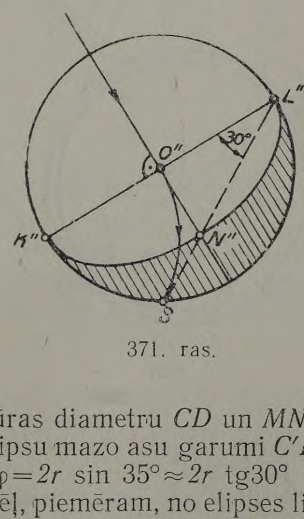
Elipsu mazo asu noteikšanai var lietot arī šādu paņēmienu. Pieņemsim, ka riņķa diametrs CD kopā ar lodes centram pievilkto gaismas staru g, pagriezts ap lodes vertikālo diametru paralēli f r o n t ā l a j a i projekciju plaknei. Šai stāvoklī $C''_0D''_0 \perp g''_0$, bet $C'_0D'_0$ atrodas uz g'_0. Pagriežot tagad diametru CD atpakaļ sākotnējā stāvoklī, dabūjam meklēto elipses mazo asi $C'D'$. Gluži tāpat pagriežot gaismas staru g h o r i z o n t ā l a j a i projekciju plaknei paralēlā stāvoklī, nosaka arī pašēnas kontūras frontālās projekcijas mazo asi $M''N''$. Pagriešanas vietā var abos gadījumos izmantot arī jaunu projekciju plakni, paralēlu gaismas staram g. Vienkāršības dēļ abas projekciju asis (veco un jauno) ieteicams izvēlēties caur lodes centra projekcijām, jo tad lodes jaunā projekcija sakrīt ar vienu no vecajām projekcijām un ir jākonstruē tikai gaismas stara g jaunā projekcija.

Zinot lodes pašēnas kontūru, nav grūti noteikt arī lodes krītošās ēnas kontūru kādā patvaļīgā plaknē. Tā ir elipse, kuras saistītie diametri atbilst pašēnas kontūras diametriem AB un CD vai KL un MN. Ja ēnu uztverošā plakne ir horizontāla vai frontāla plakne, tad šo saistīto diametru vietā dabūjam pašas krītošās ēnas kontūras asis.

Diagonālapgaismojumā lodes pašēnas kontūras var konstruēt ievērojami vienkāršāk. Vispirms jau abas elipses tad ir kongruentas, jo gaismas staru slīpums pret abām projekciju plaknēm ir vienāds ($\varphi = 35°$). Bet, tā kā gaismas stara



370. ras.



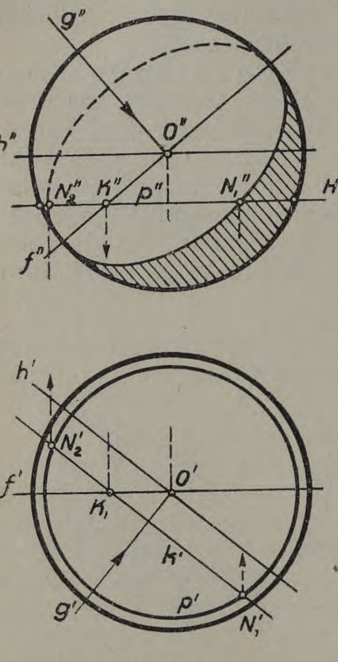
371. ras.

virzienam perpendikulāro pašēnas kontūras diametru CD un MN slīpuma leņķi ir šī leņķa papildleņķi, tad elipsu mazo asu garumi $C'D' = M''N'' = MN \cdot \cos\ (90° - \varphi) = 2r \sin \varphi = 2r \sin 35° \approx 2r\ \mathrm{tg}30°$ (pēc tabulām; r — lodes rādiuss). Velkot tādēļ, piemēram, no elipses lielās ass galapunkta L'' (371. ras.) 30° slīpumā staru $L''S$ pret šo asi, tā krustpunkts ar mazās ass virzienu dod meklēto mazās ass galapunktu N'', jo $O''N'' = O''L'' \cdot \mathrm{tg}\ 30° = r\ \mathrm{tg}30°$. Staru L'' var novilkt vai nu ar 30° trīsstūri, vai arī nosakot punktu S ar loku $O''S$ no centra K'', kā rasējumā parādīts.

Atrisināsim tagad šādu uzdevumu, ko turpmāk izmantosim rotācijas virsmas pašēnas kontūras noteikšanai ar palīgložu metodi: *noteikt lodes pašēnas kontūras punktus N_1 un N_2, kas atrodas uz patvaļīga lodes horizontālā riņķa — paralēles p* (372. ras.).

Meklētie punkti ir punkti, kuros lodes pašēnas kontūras plakne — apzīmēsim to ar Q — krusto paralēli p. Šo plakni var definēt ar tās galvenajām līnijām h un f caur lodes centru, pie kam $h' \perp g'$ un $f'' \perp g''$, jo $Q \perp g$. Nosakām vispirms plaknes Q šķēluma taisni k ar lodes paralēles p plakni H. Kā horizontāla taisne tā iet caur frontāles krustpunktu K ar plakni H paralēli horizontālei h. Šīs taisnes k krustpunkti ar paralēli p ir meklētie pašēnas kontūras punkti N_1 un N_2.

Mēģināsim tagad šo konstrukciju vienkāršot tā, lai to varētu izmantot rotācijas virsmas pašēnas noteikšanai diagonālapgaismojumā.[1] Tā kā g' un g'' šai gadījumā veido 45° leņķus ar projekciju asi, tad plaknes Q frontāles projekcijas f'' virziens sakrīt ar g' virzienu, bet horizontāles projekcijas h', tātad arī k' virziens ir virziens g''. Izvēloties frontālo projekciju plakni caur lodes centru, bet par horizontālo projekciju plakni — lodes paralēles plakni H, lodes centra horizontālā projekcija ir uz projekciju ass $p_{12} \equiv H''$, bet paralēles horizontālā projekcija ir riņķis ap p'' kā diametru (373. ras.; pašas lodes horizontālā projekcija nav parādīta, jo tā konstrukcijām netika izmantota). Abas projekcijas frontāles f krustpunktam K ar plakni H tad sakrīt un meklēto pašēnas kontūras punktu horizontālās projekcijas N'_1 un N'_2 ir taisnes $k' \| g''$ caur $K' \equiv K''$ krustpunkti ar paralēles p riņķi, bet frontālās projekcijas N''_1 un N''_2 atrodas uz $H'' \equiv p''$.



372. ras.

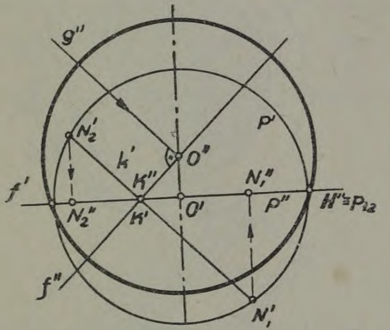
Konstrukciju var vēl tālāk vienkāršot, ja ievērojam, ka taisnes k' un f'', tāpat paralēles projekcija p', ir simetriskas pret paralēles frontālo projekciju p''. Punktu N_1 un N_2 frontālās projekcijas tādēļ var arī dabūt, projecējot uz p'' taisnes f'' krustpunktus ar paralēles projekciju p'. Šī konstrukcija parādīta atsevišķi 374. rasējumā, un tādā veidā to arī izmanto, lai noteiktu rotācijas virsmu pašēnas kontūras punktus. Raksturīgi, ka konstrukcijas var izpildīt jau vienā projekcijā, pie kam ir jāzina tikai paralēles p un lodes centra frontālās projekcijas.

Aplūkosim tagad, kā konstruēt ēnas tukšai puslodei, kuras malas riņķis l ir paralēls frontālajai projekciju plaknei un kuras atvērums vērsts pret skatītāju (375. ras.). Ja vienkāršības dēļ puslodes sienas domājam bez biezuma, tad tās iekšpusē apgaismota ir tā daļa, kura ārpusē atrodas pašēnā — un otrādi. Krītošā ēna l_*,

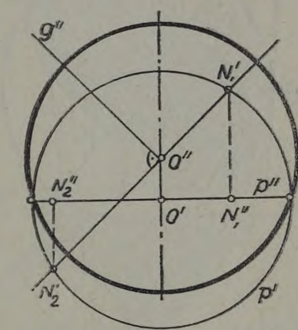
[1] Konstrukcijas izpildīšanu patvaļīgam gaismas staru virzienam atstājam lasītājam kā vingrinājumu.

ko puslodes iekšpusē met tās malas pusriņķis KML, ir otrās kārtas līkne, jo gaismas cilindram caur l jau ir viena kopēja otrās kārtas līkne ar lodi — pats riņķis l (sk. 4. likumu 250. lpp.). Šī krītošā ēna ir pusriņķis ap KL kā diametru, jo uz lodes virsmas nav iespējamas citas otrās kārtas līnijas.

Rasējumā parādīts, kā konstruēt šīs abas ēnu kontūras, nemaz neizmantojot puslodes horizontālo projekciju, ja vien zināms gaismas staru projekcijas virziens g''' jaunajā horizontālajā projekciju palīgplaknē, kas paralēla gaismas staru virzienam g. Izvēloties frontālo un jauno horizontālo projekciju plakni caur lodes centru



373. ras.

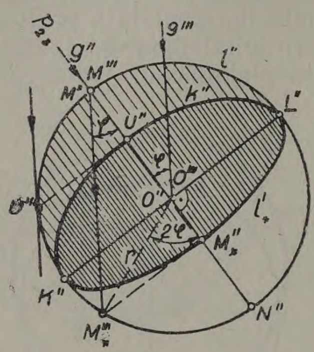


374. ras.

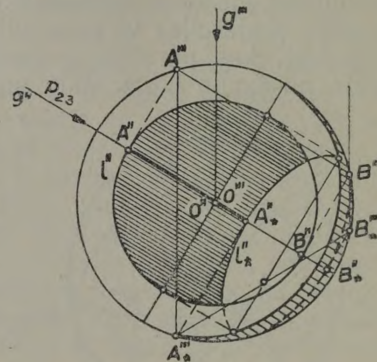
O, puslodes jaunā projekcija ir pusriņķis $M''K''N''$, un pašēnas kontūras projekcijas k'' mazās ass galapunkts U'' atbilst punktam U''', kurā šim pusriņķim pieskaras paralēli g''' vilktais stars (pašēnas kontūras jaunā projekcija ir taisnes nogrieznis $U'''O'''$). Krītošās ēnas kontūras l_* mazās pusass galapunkts M_* ir punkts, kurā met ēnu riņķa l diametra MN galapunkts M, un to arī nosaka vispirms jaunajā horizontālajā projekcijā.

Apzīmējot ar φ gaismas staru slīpumu pret frontālo projekciju plakni (φ ir leņķis, ko g''' veido ar projekciju asi p_{23}), redzam, ka $\measuredangle\ M''_*O''M'''_*=2\varphi$, tādēļ $O''M''_*=b=r\cos 2\varphi=r(1-2\sin^2\varphi)$. Diagonālapgaismojumā $\varphi=35°$ un $\sin\varphi\approx \mathrm{tg}30°=\frac{1}{\sqrt{3}}$, tādēļ šai speciālajā gadījumā krītošās ēnas kontūras mazās pusass garums aptuveni vienāds ar $b=\frac{r}{3}$.

Nedaudz vispārīgāks uzdevums atrisināts 376. rasējumā. Šai rasējumā no tukšas lodes atšķelts segments, kas mazāks par tās pusi, pie kam šķēluma riņķis l novietots paralēli frontālajai projekciju plaknei kā iepriekšējā piemērā. Riņķa l krītošā ēna l_* lodes iekšpusē atkal ir riņķis, un tā projekcijas asis konstruē tāpat kā iepriekš, izmantojot palīgprojekciju jaunā horizontālā projekciju plaknē, kas paralēla gaismas staram g un iet caur lodes centru. Šai projekcijā riņķis l attēlojas par taisnes nogriezni $A'''B'''\|g''$. Ja caur A''' un B''' paralēli g''' vilktie stari krusto lodes frontālā apveida projekciju (kas ir reizē tās jaunā apveida projekcija) punktos A'''_* un B'''_*, tad taisnes nogrieznis $A'''_*B'''_*$ ir krītošās ēnas jaunā projekcija, pēc kuras frontālo projekciju viegli noteikt. Lodes pašēnas kontūru nosaka, kā agrāk aizrādīts.



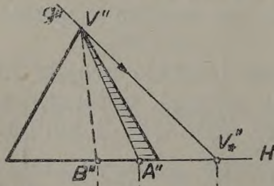
375. ras.



376. ras.

Kādas patvaļīgas līknes (piem., kādas citas virsmas pašēnas kontūras) ēnu uz lodes virsmas visērtāk noteikt ar netiešo paņēmienu. Atsevišķus piemērus te neapskatīsim, jo šī konstrukcija ne ar ko neatšķiras no ēnu konstruēšanas patvaļīgām rotācijas virsmām, par kurām būs runa tālāk.

113. Konusu un cilindru ēnas. Konusu un cilindru ēnas nosaka līdzīgi kā piramīdu un prizmu ēnas. Arī šai gadījumā parasti nosaka vispirms pašēnas kontūru un tikai tad meklē krītošo ēnu plaknē vai uz kādas citas virsmas.

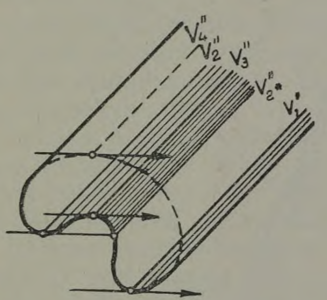


377. ras.

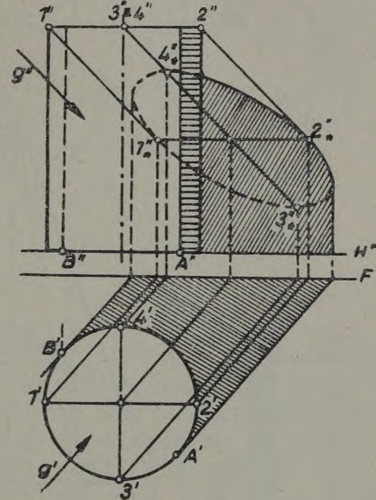
Lai noteiktu **konusa** pašēnas kontūru, meklē vispirms tā virsotnes krītošo ēnu V_* tā pamata plaknē H (377. ras.) un velk no šī punkta pieskares V_*A un V_*B konusa pamata līknei. Konusa veidules VA un VB tad ir virsmas pašēnas veidules, pa kurām tai pieskaras dotajā virzienā vilktie gaismas stari. Analoģiski rīkojas, ja konuss ir apgriezts ar pamatu uz augšu, tikai tad konusa virsotnes ēna ir neīsta un pašēnā atrodas tā konusa virsmas daļa, kas relatīvi pret pašēnas kontūru novietota virsotnes ēnai V_* pretējā pusē.

Rasējumā parādīts rotācijas konuss, bet teiktais attiecas tikpat labi arī uz slīpu riņķa konusu vai konusu, kam pamats ir patvaļīga plaknes līkne. Pēdējā gadījumā ir iespējams arī, ka no punkta V_* var novilkt vairāk nekā divas pieskares konusa pamata līknei, t. i., ka konusa virsmai ir vairāk nekā divas pašēnas veidules, no kurām dažas var mest ēnu arī uz paša konusa virsmas.

Cilindra pašēnas kontūru nosaka tāpat kā konusa pašēnas kontūru, ja vien cilindru uzskatām par konusu, kam virsotne ir bezgalībā. Konstruē vispirms ēnu, ko cilindra pamata plaknē met cilindra ass (ja ir riņķa cilindrs), kāda cilindra veidule vai vispār kāda cilindra veidulei paralēla taisne, un velk šīs ēnas virzienā pieskares cilindra pamata līknei, t. i., taisnes uz kopējo bezgalīgi tālo punktu.



378. ras.



379. ras.

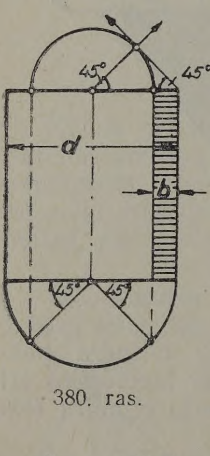
Caur pieskaršanās punktiem vilktās veidules ir cilindra pašēnas veidules. Ja pamata līkne ir patvaļīga, tad var izveidoties arī pasīvas pašēnas veidules, pār kurām krīt ēna uz paša cilindra (sk. 378. ras., kur parādīta cilindra frontālā projekcija).

Jāuzsver, ka cilindra veidulu ēnas virziens nav paralēls gaismas staru projekcijas virzienam. Vienīgi, ja cilindra veidules ir perpendikulāras kādai projekciju plaknei, piemēram, plaknei P_1, tad pašēnas veidules iet caur punktiem, kuros pamata līknes horizontālajai projekcijai pieskaras paralēli g' vilktās pieskares. Šādā stāvoklī 379. rasējumā parādīts rotācijas cilindrs, kuram konstruēta arī krītoša ēna (reālā ēna) pamata plaknē H un frontālā plaknē F. Krītošo ēnu plaknē F norobežo bez pašēnas veidulu A un B ēnām arī cilindra augšējā pamata pusriņķa ēna šai plaknē. Uzskatot pēdējo par riņķa paralēlprojekciju, noteikti arī šīs elipses saistītie diametri, kas atbilst diviem perpendikulāriem riņķa diametriem $1—2$ un $3—4$.

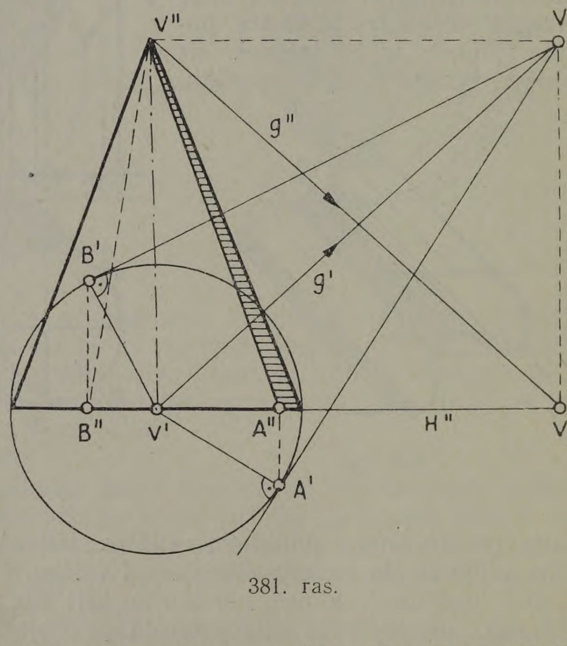
Rotācijas cilindram diagonālapgaismojumā šai stāvoklī pašēnas kontūru ērti noteikt jau vienā projekcijā, kā tas parādīts 380. rasējumā. Lai to izdarītu, ap pamata frontālo projekciju kā diametru velk pusriņķi un no tā centra — starus 45° slīpumā pret horizontālo virzienu. Caur šo staru krustpunktiem ar pusriņķi iet pašēnas veidulu frontālās projekcijas. Šīs konstrukcijas vietā var lietot arī citu konstrukciju, kas parādīta pie cilindra augšējā pamata (sal. arī ar 288. ras.).

Apzīmējot cilindra diametru ar d, frontālajā projekcijā redzamās pašēnas platumu b diagonālapgaismojumā var izteikt ar formulu

$$b=\frac{d}{2}-\frac{d}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{d}{4}(2-\sqrt{2})\approx\frac{d}{7}.$$



380. ras.



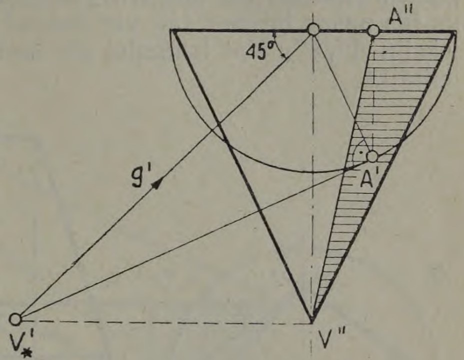
381. ras.

Šo rezultātu var ērti izmantot cilindra pašēnas kontūras noteikšanai brīvrokas zīmējumos, pie kam to var izmantot arī rotācijas cilindriem, kam asis perpendikulāras frontālajai vai profilajai projekciju plaknei.

Arī rotācijas konusiem, kam ass perpendikulāra kādai projekciju plaknei, var atvasināt vienkāršu konstrukciju pašēnas noteikšanai vienā projekcijā. Tā kā tehniskajos rasējumos visbiežāk jārasē tieši tādi konusi, tad pie šīs konstrukcijas jāpakavējas sīkāk. Bez tam šo konstrukciju varēs izmantot arī, nosakot ar palīgkonusu metodi ēnas patvaļīgai rotācijas virsmai.

Lai konstruētu pašēnu, piemēram, tikai frontālajā projekcijā attēlotajam rotācijas konusam 381. rasējumā, pieņemsim, ka frontālā projekciju plakne iet caur konusa asi, bet konusa pamata plakne ir horizontālā projekciju plakne. Tad konusa horizontālā projekcija ir riņķis ap konusa pamata frontālo projekciju kā diametru. Tālāk konstrukciju izpilda kā 377. rasējumā, t. i., nosaka konusa virsotnes ēnu V_* tā pamata plaknē H, no punkta V'_* velk pieskares konusa pamata horizontālajai projekcijai un nosaka pieskaršanās punktiem atbilstošos punktus frontālajā projekcijā, caur kuriem iet konusa pašēnas veiduļu frontālās projekcijas.

Lai precīzāk noteiktu pieskaršanās punktus, jāievēro, ka riņķa pieskare ir perpendikulāra tā rādiusam.

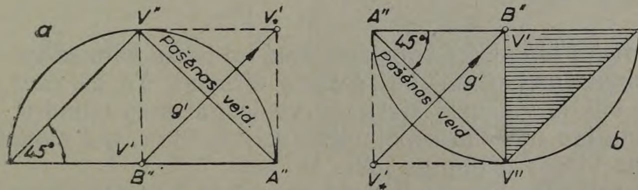


382. ras.

Diagonālapgaismojumā (kā 381. ras.) var iztikt arī bez gaismas stara frontālās projekcijas g'', jo punkts V'_* tad ir vienādā augstumā ar konusa virsotnes projekciju V''. Šis vienkāršojums izmantots 382. rasējumā, nosakot (redzamo) pašēnas veiduli konusam, kas apgāzts ar virsotni uz leju.

Konusa pašēnas redzamās daļas lielums (pie nemainīga gaismas staru virziena) ir atkarīgs no veiduļu slīpuma leņķa pret pamata plakni. Ja šo leņķi samazinām, tad 381. rasējumā pašēna samazinās, bet 382. rasējumā pieaug.

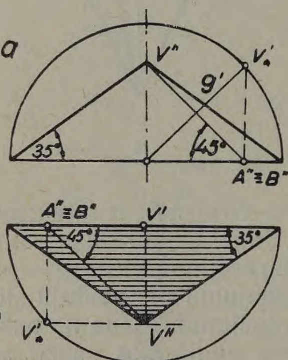
Konusa pašēnas kontūras diagonālapgaismojumā pie veiduļu slīpuma 45° pret pamata plakni parādītas 383. rasējumā. Viena no pašēnas veiduļu projekcijām šajā rasējumā abos gadījumos sakrīt ar



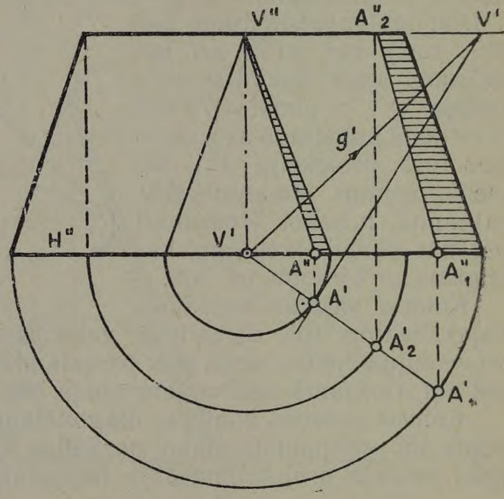
383. ras.

konusa ass projekciju, bet otra — ar vienu no konusa frontālā apveida veidulēm, tādēļ pirmajā gadījumā pašēnā atrodas $^1/_4$, bet otrajā gadījumā $^3/_4$ no konusa virsmas. Samazinot konusa veiduļu slīpumu līdz gaismas staru slīpuma leņķim $\varphi = 35°$ pret horizontālo projekciju plakni, gaismas stars caur virsotni V slīd pa konusa virsmu un virsotnes ēna (īsta vai neīsta; sk. 384. ras. *a, b*) krīt uz pamata riņķa. Abas pašēnas veidules tad saplūst, un pirmajā gadījumā visa konusa virsma ir apgaismota, bet otrajā gadījumā tā visa atrodas pašēnā. Šīs vienīgās pašēnas veidules frontālā projekcija veido 45° leņķi ar horizontālo virzienu, un to var konstruēt arī tieši.

Ja konusa virsotne atrodas ārpus rasējuma laukuma, kā tas ir 385. rasējumā, tad konusu var vispirms pārbīdīt tā ass virzienā tik tālu, kamēr tā virsotne nonāk rasējuma laukumā. Izmantojot tagad konusa šķēlumu šai stāvoklī ar pamata plakni H, konstruējam tā redzamo pašēnas veiduli VA tāpat kā iepriekš. Tā kā arī nošķeltā konusa pašēnas veidules A_1A_2 horizontālajai projekcijai ir jāatrodas uz tās pašas taisnes, tad var noteikt arī tai atbilstošo frontālo projekciju $A''_1A''_2$. Var izmantot pie tam arī veidules VA un A_1A_2 paralelitāti.[1]



384. ras.



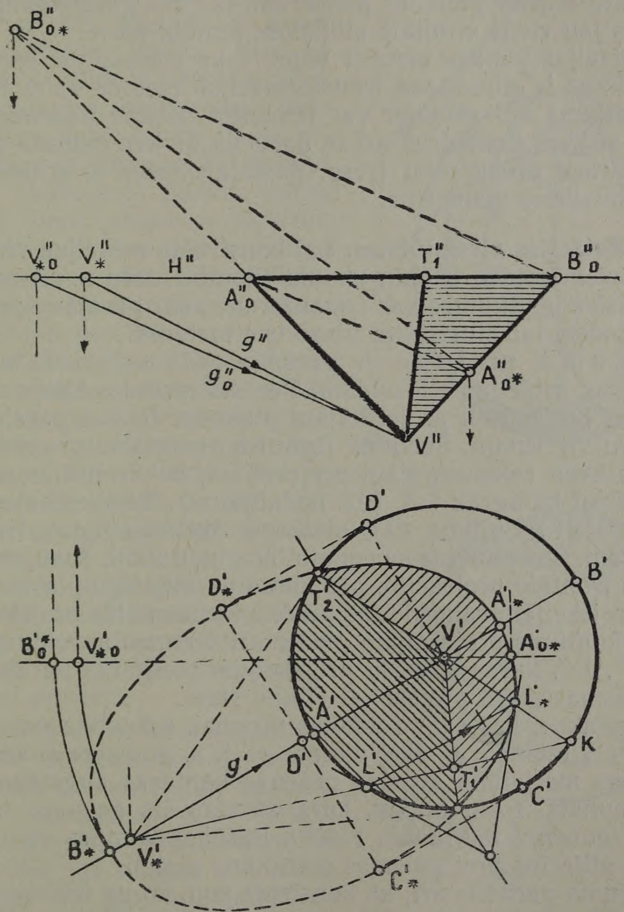
385. ras.

Apskatīsim tagad, kā konstruēt ēnu, ko tukša konusa vai cilindra pamata riņķis met uz tā iekšējās virsmas. Tā kā caur pamata punktiem vilktie gaismas stari tad veido gaismas cilindru, kam ar doto virsmu jau ir viena kopēja otrās kārtas līkne, tad pamata riņķa krītošā ēna vispār ir elipses loks.

Tukša rotācijas konusa krītošā ēna uz tā iekšējās virsmas parādīta 386. rasējumā. Šai rasējumā vispirms atrasta konusa virsotnes (neīsta) ēna V_* tā pamata plaknē un pēc tās noteiktas konusa pašēnas veidules VT_1 un VT_2. Krītošās ēnas reālā daļa sākas punktos T_1 un T_2, un to met pamata riņķa loks T_1AT_2. Tā kā paralēli gaismas stariem caur konusa virsotni vilktā horizontāli projecētāja plakne ir šīs ēnas simetrijas plakne, tad uz tās atrodas viena no elipses asīm. Šai simetrijas plaknei paralēlā jaunā frontālā projekciju plaknē ēnas elipse attēlotos par taisnes nogriezni. Bez jaunās projekciju plaknes tomēr var iztikt, pagriežot konusu kopā ar gaismas staru g

[1] Tā kā 385. rasējumā attēlots rotācijas konuss, tad punktus A_1 un A_2 var noteikt arī ar palīgložu metodi. Konstrukcijas izpildījumu atstājam lasītājam kā vingrinājumu.

caur tā virsotni paralēli frontālajai projekciju plaknei. Pēc pagriešanas ēnas elipses frontālā procekcija ir taisnes nogrieznis $A''_{0*}B''_{0*}$, ko dabū, velkot paralēli g''_0 starus caur pamata punktiem A''_0 un B''_0. Punkti A''_{0*} un B''_{0*} ir ēnas elipses ass galapunkti, un pēc šo punktu atbilstošajām horizontālajām projekcijām pagrieztā stāvoklī nosaka arī to projekcijas A'_* un B'_* sākotnējā stāvoklī. Elipses otrā ass iet



386. ras.

caur taisnes nogriežņa $A'_*B'_*$ viduspunktu O', un tā atbilst gaismas stara projekcijai g' perpendikulārajam pamata riņķa diametram $C'D'$.

Atsevišķus ēnas elipses punktus var dabūt arī ar šādu netiešo paņēmienu. Ja KV ir patvaļīga konusa veidule, tad KV_* ir šīs veidules (neīsta) ēna konusa pamata plaknē H. Tā kā pamata riņķa ēna šai plaknē ir pats riņķis, tad, velkot no abu (t. i., konusa veidules un pamata riņķa) ēnu krustpunkta L gaismas staru, dabū punktu L_* uz veidules KV, kas ir punkta L ēna. Analoģiski nosaka jebkuru citu elipses punktu. Pieskares šajos punktos dabū, ievērojot, ka elipse ir pamata riņķim afinitātē atbilstoša figūra ar abu figūru plakņu šķēluma taisni $T_1T_2 \equiv s$ kā afinitātes asi. Afinitāti var izmantot arī, lai noteiktu elipses punktus, piemēram, tās asu galapunktus, ja vien ir zināms jau viens afinitātē atbilstošs punktu pāris.

Ja rotācijas konusa vietā ir slīps riņķa konuss vai konuss, kam pamata līkne ir elipse, tad transformācijas metode vairs neder. Bet tādā gadījumā vēl vienmēr var izmantot netiešo paņēmienu. Ēnas elipses saistītos diametrus arī te dabū kā diviem pamata riņķa perpendikulāriem diametriem (resp. pamata elipses saistītiem diametriem) atbilstošos diametrus.

114. Rotācijas virsmu ēnas. Lai konstruētu rotācijas virsmu pašēnas, vispiemērotākā ir palīgvirsmu (konusu, ložu u. c.) metode. Tā kā atsevišķos gadījumos var izmantot arī abas pārējās agrāk apskatītās metodes, tad ilustrēsim visas trīs metodes.

Šķēluma metode ir parādīta 387. rasējumā, kur noteiktas pašēnas rotācijas elipsoīdam. Pēc šīs metodes šķeļam vispirms virsmu ar horizontāli projecētājām plaknēm G, kas paralēlas gaismas staru virzienam. Šķēluma figūru horizontālās projekcijas atrodas uz plakņu raksturīgajām projekcijām, bet frontālās projekcijas nosaka tāpat kā agrāk (sk. 102. nodalījumu). Tālāk nosaka punktus, kuros paralēli g'' vilktie stari pieskaras šķēluma figūru frontālajām projekcijām. Šos punktus savienojot ar gludu līkni, dabūjam pašēnas kontūras frontālo projekciju, pēc kuras uz attiecīgo plakņu raksturīgajām projekcijām sameklē tās punktu horizontālās projekcijas.[1] Pie pašēnas kontūras projekcijām pieder arī virsmas apveidu punkti A', B' un C'', D'', kuros apveidu projekcijām pieskaras paralēli attiecīgajai gaismas stara projekcijai vilktie stari.

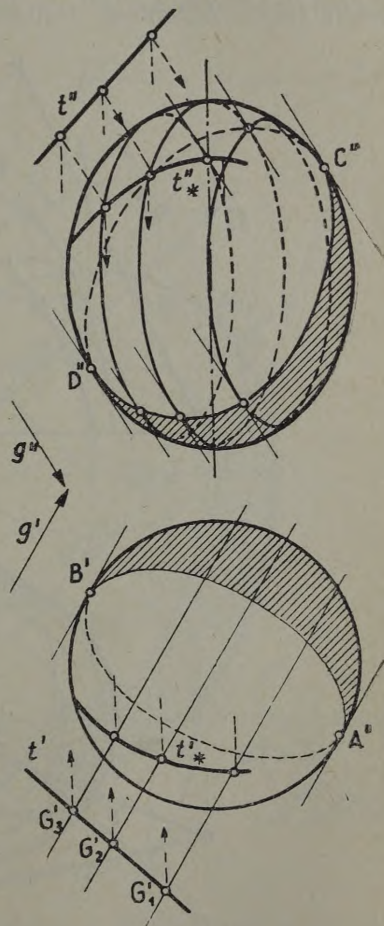
Palīgplakne, kas caur rotācijas virsmas asi vilkta paralēli gaismas stara virzienam g, šķeļ virsmu pa t. s. *gaismas meridiānu.* Uz šī gaismas meridiāna atrodas pašēnas kontūras augstākais un zemākais punkts. Pašu plakni, kurā atrodas šis gaismas meridiāns, sauc par *gaismas meridiāna plakni.* Pašēnas kontūra vienmēr ir simetriska attiecībā pret gaismas meridiāna plakni.

Rasējumā parādīts arī, kā konstruēt ēnu, ko uz virsmas met patvaļīga taisne t. Lai izmantotu jau iepriekš novilktās palīgplaknes, atzīmē (horizontālajā projekcijā) punktus, kuros šīs plaknes krusto taisni t, un caur šo punktu frontālajām projekcijām paralēli g'' velk atkal starus līdz attiecīgajām šķēluma līknēm. Šo staru krustpunktus ar šķēluma līknēm savienojot, dabūjam vispirms taisnes

[1] Pašēnas kontūra (tātad arī katra tās projekcija) ir elipse. Tas seko no teorēmas, kuru te sniedzam bez pierādījuma: *katrs otrās kārtas virsmai apvilktais konuss vai cilindrs ir arī otrās kārtas un pieskaras šai virsmai pa otrās kārtas līkni.*

ēnas frontālo projekciju, pēc tam tai atbilstošo horizontālo projekciju.

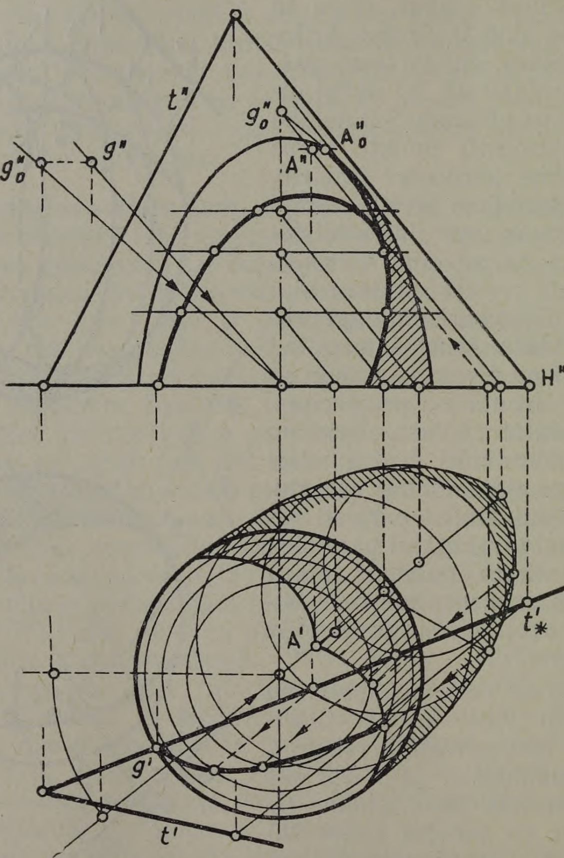
N e t i e š o p a ņ ē m i e n u ilustrēsim ar 388. rasējumu. Šai rasējumā iepriekš izvēlas uz rotācijas virsmas dažas paralēles un meklē to ēnas kādā patvaļīgā horizontālā plaknē, piemēram, rotācijas virsmas pamata plaknē H. Tā kā paralēļu ēnas ir tām kongruenti riņķi, tad pietiek noteikt paralēļu centru ēnas šai plaknē un zīmēt attiecīga rādiusa riņķus. Visu šo ēnu aptverošā līkne ir virsmas krītošās ēnas kontūra, bet virsmas pašēnas kontūru dabū kā šai līknei atbilstošo līkni uz virsmas. Šai nolūkā jānosaka (aptuveni) punkti, kuros aptverošā līkne pieskaras riņķiem, un no šiem punktiem jāvelk pretējā virzienā gaismas stari līdz atbilstošajam riņķim uz rotācijas virsmas. Tā kā parasti pretēja virziena stariem ar paralēlēm horizontālajā projekcijā ir slīdoša krustošanās, tad ieteicams vai nu vispirms noteikt šo krustpunktu frontālās projekcijas, vai arī izmantot rādiusus, kas no katras paralēles ēnas centra vilkti pret attiecīgo pieskaršanās punktu. Šiem rādiusiem atbilst paralēli rādiusi virsmas attiecīgajai paralēlei, un pretēji vērsto gaismas staru krustpunktus ar šiem rādiusiem horizontālajā projekcijā var noteikt pietiekami precīzi.



387. ras.

Rasējumā ar netiešo paņēmienu konstruēta arī ēna, ko uz rotācijas virsmas met patvaļīga taisne t, pie kam izmantotas jau iepriekš noteiktās paralēļu ēnas plaknē H. Konstruējam arī taisnes t ēnu šai plaknē un no tās krustpunktiem ar paralēļu ēnām velkam pretēji vērstus gaismas starus līdz attiecīgajai paralēlei, vajadzības gadījumā izmantojot atkal rādiusus, kas vilkti uz šiem krustpunktiem, vai arī nosakot ēnas punktus vispirms frontālajā projekcijā. Šos krustpunktus savienojot, dabūjam meklēto taisnes krītošo ēnu.

Atzīmēsim vēl, ka virsmas krītošās ēnas kontūras tālāko punktu dod tās pašēnas kontūras augstākais punkts A, kas atrodas uz gaismas meridiāna. Tā kā visas paralēles, kas atrodas virs šī punkta, met ēnas krītošās kontūras iekšpusē un ēnas kontūras veidošanā nepiedalās, tad ieteicams katrreiz noteikt iepriekš šo punktu A. Lai to izdarītu, nosaka vispirms gaismas stara frontālās projekcijas virzienu g_0'', kad tas pagriezts paralēli frontālajai projekciju plaknei un velk šai virzienā staru, kas pieskaras gaismas meridiānam šajā pagrieztajā stāvoklī, t. i., kas pieskaras virsmas galvenajam meridiānam. Atzīmējot frontālajā projekcijā pieskaršanās punktu



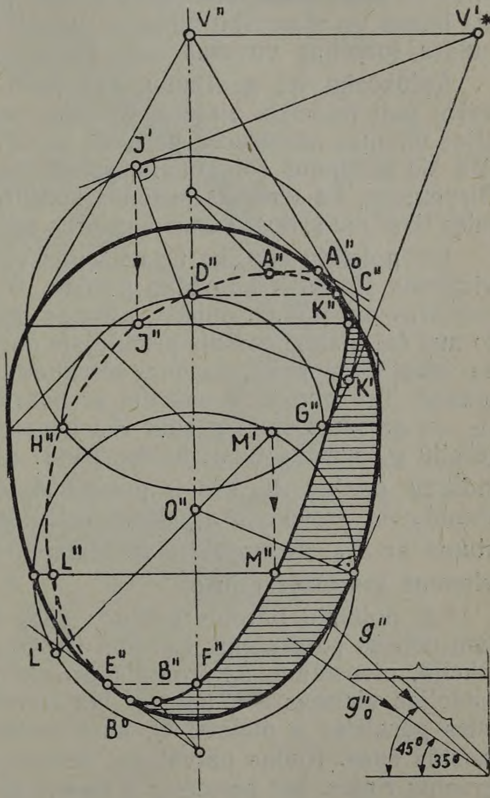
388. ras.

A_0'', gaismas staru kopā ar pieskaršanās punktu pagriež atpakaļ sākotnējā stāvoklī.

Rotācijas virsmas pašēnas konstruēšana (diagonālapgaismojumā) ar palīgvirsmu metodi parādīta 389. rasējumā. Pašēnas kontūras augstākais punkts A'' un zemākais punkts B'' noteikti, apvelkot rotācijas virsmai konusus, kam veidulu slīpums pret pamata plakni ir 35° (sk. arī 384. ras. *a*, *b*)[1]. Punkti C'' un E'' uz frontālā apveida projekcijas, tāpat punkti D'' un F'' uz profilā meridiāna projekcijas, noteikti ar konusiem, kam veidu|u slīpums ir 45° (sk. arī 383. ras. *a*, *b*). Punkti G'' un H'' uz ekvatora noteikti kā punkti, caur kuriem iet rotācijas virsmai apvilktā vertikālā cilindra pašēnas veidules (sk. arī 380. ras.). Bez šiem raksturīgajiem punktiem noteikti vēl punkti J'', K'' un L'', M'' uz divām patvaļīgām rotācijas virsmas paralēlēm. Pirmajā gadījumā izmantota palīgkonusu metode (sk. 381. ras.), bet otrajā gadījumā (tā kā konusa virsotne iznāk ārpus rasējuma robežām) — palīgložu metode (sk. 374. ras.).

Atzīmēsim vēl, ka gadījumā, ja rotācijas virsma ir simetriska attiecībā pret ekvatora plakni, kā, piemēram, 387. rasējumā, tad pašēnas kontūra ir simetriska attiecībā pret ekvatora centru.

Apskatītajā piemērā pašēnas kontūru noteicām, neizmantojot virsmas horizontālo projekciju. Ja ir jānosaka tomēr vēl ēna, ko rotācijas virsma met kādā plaknē vai uz citas virsmas, tad iepriekš jāatrod arī pašēnas kontūras horizontālā projekcija. Vienīgi ēnas noteikšanai f r o n t ā l a j ā plaknē F var iztikt ar frontālo projekciju vien, ja tikai zināms rotācijas virsmas ass attālums d no šīs plaknes. Pašēnas kontūras punktu attālumus no plaknes F dabū, pieskaitot vai atņemot no d šo punktu attālumus no galvenā meridiāna plaknes. Punktiem uz rotācijas virsmas profilā meridiāna šis attālums vienlīdzīgs ar attiecīgās paralēles rādiusu, ekvatora punktiem, tāpat augstākajam un zemākajam punktam — ar šo punktu



389. ras.

---

[1] Nepieciešamo 35° virzienu var dabūt arī bez transportiera, pagriežot gaismas staru paralēli frontālajai projekciju plaknei, kā to darījām iepriekšējā piemērā, vai ar konstrukciju, kas rasējumā parādīta pa labi apakšā.

projekciju attālumiem līdz rotācijas ass projekcijai. Patvaļīga punkta attālumu līdz galvenā meridiāna plaknei dabū, konstruējot uz attiecīgās paralēles frontālās projekcijas kā diametra pusriņķi un nosakot vertikālās pushordas garumu caur attiecīgā punkta projekciju. Zinot pašēnas kontūras punktu attālumus no plaknes F, šo punktu ēnas plaknē F var viegli konstruēt (sk. 207. ras.).

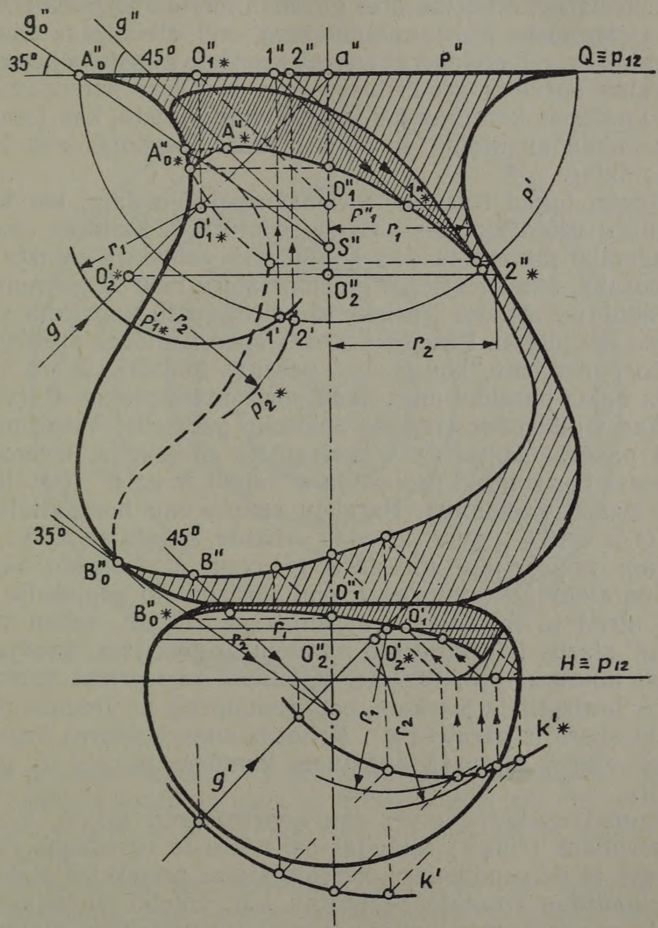
Lai noteiktu ēnu, ko kāda patvaļīga līkne l met uz pašas rotācijas virsmas, ieteicams lietot netiešo paņēmienu, nosakot vispirms šīs līknes un atsevišķu virsmas paralēļu ēnas plaknē, kas perpendikulāra rotācijas virsmas asij, kā to darījām iepriekšējā piemērā.

Aplūkosim vēl gadījumu, kad krītošo ēnu uz rotācijas virsmas veido pati rotācijas virsma. Krītošās ēnas kontūru var veidot rotācijas virsmas noslēdzošā paralēle vai arī patvaļīga pašēnas kontūra. Abi šie gadījumi (diagonālapgaismojumā) parādīti 390. rasējumā. Pieņemsim, ka virsmas pašēnas kontūra jau noteikta un pakavēsimies tikai pie krītošās ēnas kontūras noteikšanas.

Lai noteiktu ēnu, ko uz rotācijas virsmas met paralēle p, meklē vispirms šīs ēnas augstāko punktu. Šis punkts, tāpat kā pašēnas kontūras augstākais punkts, atrodas gaismas meridiāna plaknē, un to met šai plaknē esošais priekšējais paralēles punkts A. Pieņemsim, ka, tāpat kā iepriekš, gaismas meridiāns iegriezts galvenā meridiāna plaknē. Tad punkts A sakritīs ar paralēles p kreiso malējo punktu A_0 un gaismas stars g caur A ieņems stāvokli g_0 caur A_0 (tā projekciju g_0'' nosaka tāpat kā iepriekš). Šis stars krusto galveno meridiānu punktā A_{0*}, kas ir punkta A_0 ēna šai pagrieztā stāvoklī. Punkta A_* projekcija atpakaļgrieztā stāvoklī atrodas vienādā augstumā ar A_{0*}'' un uz 45° stara caur g_0'' krustpunktu S'' ar rotācijas virsmas ass projekciju a''.

Lai noteiktu pārējos krītošās ēnas kontūras punktus, izmantojam netiešo paņēmienu. Lai konstrukcijas varētu izpildīt vienā projekcijā, pieņemam, ka frontālā projekciju plakne vilkta atkal caur rotācijas virsmas asi, bet par horizontālo projekciju plakni izvēlamies paralēles p plaknei Q, kurā meklējam arī atsevišķo paralēļu neīstās ēnas. Kādas patvaļīgas paralēles ēna plaknē Q ir tai kongruents riņķis, bet paralēles p ēna ir pati paralēle. Paralēļu centru ēnu noteikšanai jāievēro, ka pie augšminētās speciālās projekciju plakņu izvēles centru horizontālās projekcijas sakrīt ar rotācijas ass horizontālo projekciju a' uz Q''. Lai tādēļ noteiktu, piemēram, paralēles p_1 centra O_1 ēnas projekcijas, velk caur O_1'' staru paralēli g'' līdz krustpunktam ar Q''. Šis krustpunkts ir ēnas frontālā projekcija $O_1''{}_*$; zem tās uz stara g' caur a' atrodas horizontālā projekcija $O_1'{}_*$. Ja vēl ievērojam, ka diagonālapgaismojumā paralēļu centru ēnu horizontālās projekcijas atrodas vienādā augstumā ar šo centru frontālajām projekcijām, tad tās var noteikt arī, vienkārši turpinot paralēļu frontālās projekcijas līdz krustpunktam ar g'. Tā ir noteikta otras paralēles p_2 centra O_2 ēnas horizontālā projekcija.

$O_2'^*$. Ap punktiem $O_1'^*$ un $O_2'^*$ vilktie riņķi $p'_1{}^*$ un $p'_2{}^*$ ar rādiusiem r_1 un r_2, kas attiecīgi vienādi ar paralēļu p_1 un p_2 rādiusiem, ir šo paralēļu ēnu horizontālās projekcijas. Katrs no šiem riņķiem gan krusto paralēles p horizontālo projekciju p' divos punktos, bet tikai



390. ras.

punktiem $1'$ un $2'$ atbilst krītošās ēnas kontūras punkti 1_* un 2_*, kas atrodas rotācijas virsmas redzamajā daļā. Šo punktu frontālās projekcijas dabū, atzīmējot vispirms $1''$ un $2''$ uz Q'' un caur pēdējiem velkot paralēli g'' starus līdz krustpunktiem ar attiecīgās paralēles frontālo projekciju.

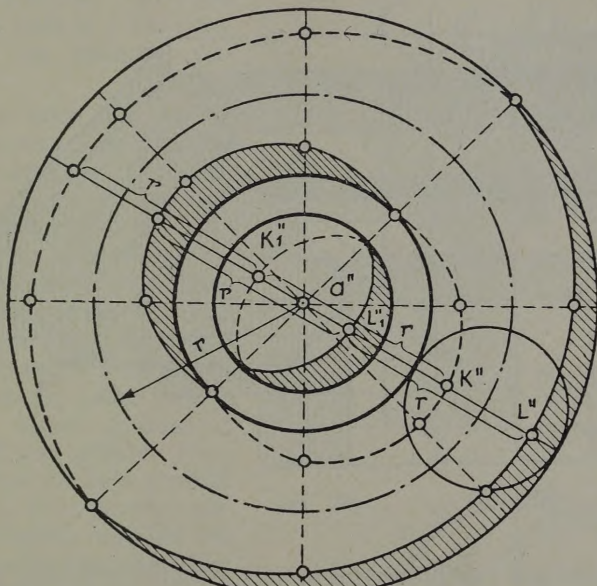
Rasējumā tā noteikti divi krītošās ēnas kontūras punkti. Ēnas precīzākai iezīmēšanai jāizvēlas vairākas paralēles cita zem citas, kamēr nonākam pie paralēles, kurai krītošās ēnas punkts jau atrodas virsmas pašēnā (rasējumā tā ir paralēle p_2). Savienojot dabūtos punktus, jāievēro, ka augstākajā punktā A''_* ēnas kontūrai ir horizontāla pieskare, bet krustpunktā ar virsmas pašēnas kontūru pieskare ir paralēla g''. Tā kā virsmas galvenais un profilais meridiāns ir simetrisks attiecībā pret gaismas meridiāna plakni, tad krītošās ēnas kontūras krustpunktam ar a'' vēl atbilst tai pašā augstumā punkts uz galvenā meridiāna pa kreisi no augstākā punkta A''_*.

Rasējumā parādīta arī krītošās ēnas kontūras neredzamā daļa. Tā krusto pašēnas kontūras neredzamo daļu punktā, kas (simetrijas dēļ) ir vienādā augstumā ar punktu, kurā krustojas abu kontūru redzamās daļas.

Aplūkosim tagad rotācijas virsmas apakšējo daļu, kur krītošās ēnas kontūru veido virsmas pašēnas kontūra k. Krītošās ēnas kontūras augstāko punktu te dod kontūras k zemākais punkts B. Šo punktu nosaka, atkal iegriežot gaismas staru caur B galvenā meridiāna plaknē un atrodot iepriekš tā krustpunktu pagrieztā stāvoklī ar galveno meridiānu. Pārējos krītošās ēnas kontūras punktus dabū ar netiešo paņēmienu, konstruējot pašēnas kontūras k un virsmas apakšējās daļas paralēļu ēnas kādā horizontālā plaknē H (vislabāk plaknē, kas vilkta caur virsmas apakšējo paralēli). Vispirms tātad jānosaka pašēnas kontūras k horizontālā projekcija, ievērojot, ka rotācijas ass horizontālā projekcija a' tagad ir uz H'' (sk. 101. nodalījuma pamatuzdevumu). Paralēļu centru ēnu horizontālās projekcijas $O_1'{}_*$ un $O_2'{}_*$ atkal atrodas vienādā augstumā ar šo centru frontālajām projekcijām uz stara g' caur a'. Nosakot tāpat kā iepriekš paralēļu un kontūras k ēnu horizontālo projekciju krustpunktus, atrod to frontālās projekcijas uz H'' un, velkot no tām paralēli g'' starus līdz attiecīgo paralēļu projekcijām, dabūjam krītošās ēnas kontūras punktus. Arī šeit tāpat kā iepriekš punktā B''_* kontūrai ir horizontāla pieskare, bet krustpunktā ar virsmas pašēnas kontūru pieskare ir paralēla g''. Krītošās ēnas kontūras krustpunktam ar a'' atbilst tai pašā augstumā kontūras punkts uz galvenā meridiāna.

Noslēgumā apskatīsim vēl ēnu konstruēšanu toram, kam galvenais meridiāns (riņķis) rotācijas asi nekrusto (gredzena virsma). Ja tora ass ir perpendikulāra horizontālajai projekciju plaknei, tā pašēnas kontūras frontālo projekciju var noteikt ar palīgvirsmu metodi. Ja ass ir perpendikulāra frontālajai projekciju plaknei, varētu ar šo metodi noteikt vispirms pašēnas horizontālo projekciju un pēc tās atrast frontālo projekciju. Vienkāršāk tomēr pēdējā gadījumā lietot šādu speciālu metodi (sk. 391. ras.).

Pieņemam, ka torā ievilktas dažas lodes, kas pieskaras tam pa meridiāna riņķiem. Šo ložu pašēnas kontūru krustpunkti ar meridiāna riņķiem pieder tora pašēnas kontūrai. Tā kā visas palīglodes ir kongruentas, tad pietiek pašēnu konstruēt tikai vienai palīglodei. Šo palīglodi visizdevīgāk izvēlēties tā, lai tās centra frontālā projekcija sakristu ar rotācijas ass projekciju a''. Lai tagad noteiktu tora pašēnas kontūras punktus K un L, kas atrodas uz patvaļīga meridiāna riņķa, pieņemam, ka lode, kas pieskaras šim meridiānam, translācijā pārvietota tā, ka tā sakrīt ar iepriekš izvēlēto lodi. Ja taisne caur ložu centriem projekcijā krusto lodes pašēnas kontūru punktos K''_1 un L''_1, tad tie ir punkti, kuros translācijā pāriet meklētie punkti K'' un L''. Punktus K'' un L'' tātad dabū, atliekot $K''_1K''=$ $=L''_1 L''=r$, kur r ir tora meridiānu centru veidotā riņķa rādiuss. Tāpat nosaka pārējos pašēnas kontūras punktus.[1]



391. ras.

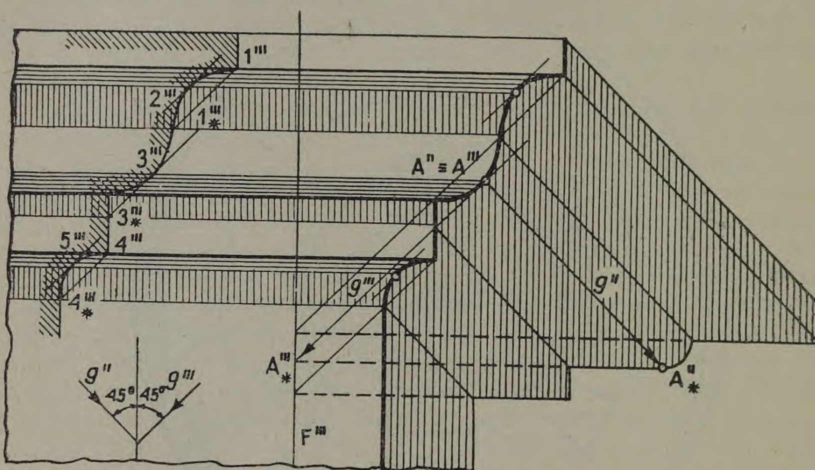
Tora pašēnas kontūra sastāv no divām atsevišķām daļām. Redzamā pašēnas kontūras daļa pa kreisi augšā met ēnu vēl uz paša tora virsmas (sal. ar 369. ras.), bet tā ir niecīga un tāpēc rasējumā nav parādīta.

Aplūkoto metodi tora pašēnas noteikšanai var izmantot arī vispārīgā gadījumā, kad virsmas pusmeridiāns ir konika, kam ass ir paralēla rotācijas virsmas asij. Šai gadījumā iepriekš pārbīda meridiānu tā, lai tā ass sakristu ar rotācijas virsmas asi, un konstruē ēnas rotācijas virsmai, kas veidojas, meridiānam šai jaunajā stāvoklī rotējot ap asi. Tālākā konstrukcija tāda pati kā tikko aprakstītā, tikai palīglodes vietā te ir kāda otrās kārtas rotācijas virsma — rotācijas elipsoīds, paraboloīds vai hiperboloīds.

[1] Līkni, ko dabū no kādas citas līknes l, pamazinot vai palielinot tās rādiusvektorus par konstantu lielumu, sauc par *konhoīdu*. Tora pašēnas kontūras projekcija tātad ir lodes pašēnas kontūras projekcijas — elipses konhoīda attiecībā pret tās centru a''.

115. Praktiski piemēri. Ar iepriekšējām metodēm un aizrādījumiem pietiek, lai varētu konstruēt ēnas jebkuram objektam, kas ierobežots koniskām, cilindriskām un rotācijas virsmām. Apskatīsim virkni piemēru, ar kuriem biežāk sastopamies praksē. Kur tas būs iespējams, aizrādīsim uz dažiem konstrukciju vienkāršojumiem.

C i l i n d r i s k u virsmu ēnas ir, piemēram, dažāda veida *dzegām*. Ja cilindra veidules ir paralēlas projekciju asij, kā 392. rasējumā, tad ēnu konstruēšanai varam izmantot dzegas profilu, ko



392. ras.

iepriekš iezīmējam rasējumā (pa kreisi) parādītā stāvoklī. Pievelkot šim profilam starus, kas paraleli gaismas stara profilajai projekcijai g''', dabūjam reizē punktus *1, 2, 3, 4, 5,* caur kuriem iet dzegas pašēnas veidules, un punktus 1_*, 3_*, 4_*, caur kuriem iet šo pašēnas veiduļu krītošās ēnas uz dzegas virsmas (pārējās pašēnas veidules ir pasīvas).[1] Ja dzega ir ar aplauzumu t a i s n ā l e ņ ķ ī, kā apskatītajā gadījumā, varam iztikt bez šī profila, jo tā vietu tad izpilda t. s. diagonālprofila frontālā projekcija.

Rasējumā parādīta arī ēna, ko dzega met uz frontālās ēkas sienas. Vertikalā līnija F''' rāda dzegas izvirzījumu no šīs sienas, un to var uzskatīt par šīs sienas profilo projekciju. Ēnas konstrukcija saprotama no rasējuma.

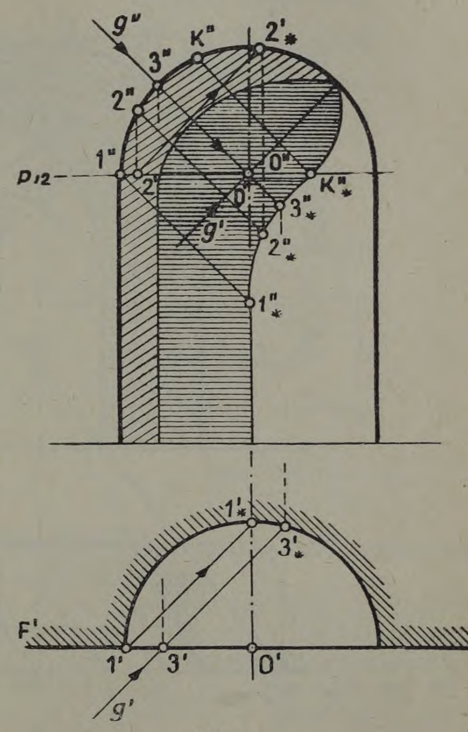
Ēnas, ko cilindriskas, koniskas un lodes virsmas met uz to iekšējās virsmas, var novērot dažādās nišās. Tā 393. rasējums rāda cilindrisku nišu, kas augšā noslēgta ar lodes kvadrantu. Ēnas uz l o d e s iekšējās virsmas nosaka tāpat kā agrāk. Ēnu, ko riņķa

---

[1] Diagonālapgaismojumā stari g''', tāpat kā g'', veido 45° leņķus ar projekciju asi. Ja dzegas normālšķēlums nav profilā stāvoklī, virziens g''' ir gaismas staru projekcijas virziens normālšķēluma plaknei paralēlā projekciju plaknē.

loks starp punktiem *1* un *K* un cilindra malējā veidule met uz c i l i n d r a iekšējās virsmas, dabū, izmantojot nišas horizontālo griezumu. Bez šī griezuma var arī iztikt, ja pieņem, ka horizontālā projekciju plakne vilkta caur lodes centru *O*, un ja par frontālo projekciju plakni izvēlamies frontālo sienu *F*. Cilindra horizontālā projekcija tad sakrīt ar lodes frontālā apveida projekciju, bet lodes pusriņķa horizontālā projekcija atrodas uz projekciju ass p_{12}. Šādā interpretācijā kļūst saprotama rasējumā parādītā pusriņķa punkta *2* ēnas noteikšana uz cilindra virsmas.

Riņķa loka ēna uz cilindra virsmas ir ceturtās kārtas līkne, jo veidojas, otrās kārtas gaismas cilindram krustojoties ar doto otrās kārtas cilindrisko virsmu. Punktā K_* tā pieskaras krītošās ēnas kontūrai uz lodes, jo šai punktā lodei un cilindram ir kopēja pieskaru plakne, tātad kopēja šķēluma taisne (pieskare) ar pieskaru plakni gaismas cilindram šajā punktā. Punktā 1_* ēnas kontūra pieskaras cilindra malējās veidules ēnai, kuras attēls diagonālapgaismojumā sakrīt ar cilindra ass attēlu.

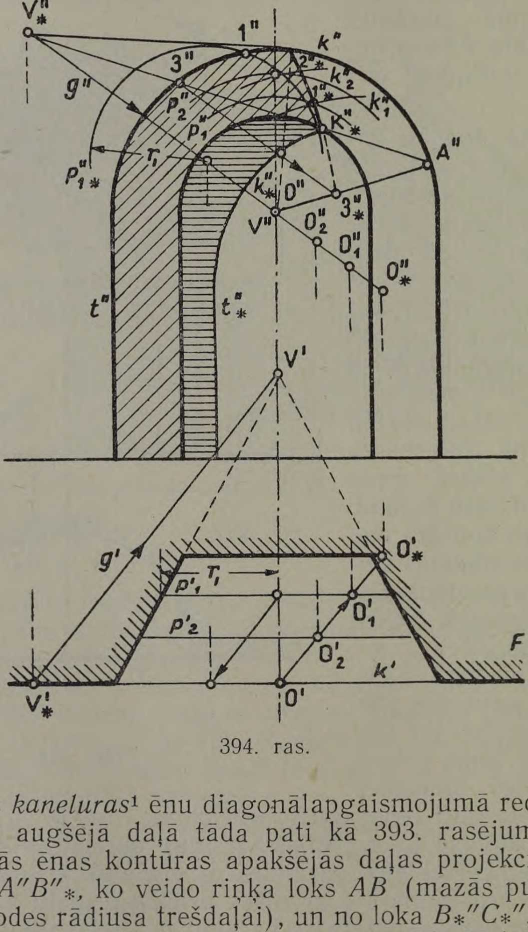


393. ras.

Nākošais piemērs (394. ras.) rāda konusveidīgi pārsegtas nišas ēnu uz tās iekšējās virsmas. Ēnas noteikšanai uz nišas konusveidīgās daļas parādīti pavisam 3 paņēmieni. Punkts 1_* uz paralēles p_1 (uzskatot konusu kā rotācijas virsmu) noteikts vispirms ar netiešo paņēmienu, meklējot paralēles p_1 (neīsto) krītošo ēnu sienas plaknē un no krustpunkta *1* ar nišas priekšējo malu *k*, velkot gaismas staru līdz krustpunktam ar paralēli p_1. Bet šo pašu punktu 1_*, tāpat punktu 2_* uz otras paralēles p_2, var noteikt, arī meklējot pusriņķa *k* ēnas k_1 un k_2 šo paralēļu plaknēs. Lai to izdarītu, nosaka pusriņķa *k* centra *O* ēnas O_1 un O_2 šajās plaknēs. Ēnu k_1 un k_2 krustpunkti ar p_1 un p_2 dod meklētos punktus. Trešais paņēmiens rasējumā ilustrēts, nosakot (fiktīvo) ēnas punktu 3_* uz patvaļīgas konusa veidules *AV*. Šīs veidules neīstā ēna plaknē *F* ir taisne AV_*, tādēļ punkts 3_* atrodas uz kopējā gaismas stara ar tās krustpunktu

3 ar pusriņķi k. Šim pēdējam paņēmienam ir tā priekšrocība, ka to var lietot arī tad, kad koniskā niša izveidota sienā, kas nav frontālajā stāvoklī.

Krītošas ēnas kontūru uz nišas dibensienas veido nišas priekšējās malas t un riņķa k ēnas (riņķa centra ēna ir O_*). Punktā K_* uz nišas šķautnes tai pieslēdzas ēnas kontūra uz nišas koniskās daļas.

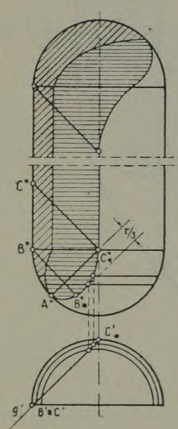


394. ras.

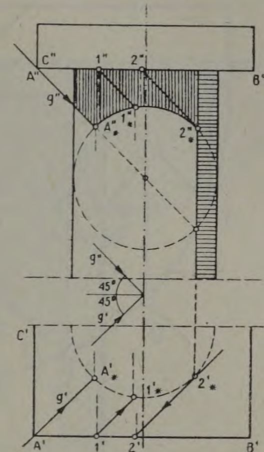
Frontālas *kaneluras*[1] ēnu diagonālapgaismojumā redzam 395. rasējumā. Ēna augšējā daļā tāda pati kā 393. rasējumā attēlotajai nišai. Krītošās ēnas kontūras apakšējās daļas projekcija sastāv no elipses loka $A''B''_*$, ko veido riņķa loks AB (mazās pusass garums vienlīdzīgs lodes rādiusa trešdaļai), un no loka $B_*''C_*''$, ko veido kaneluras priekšējās malas taisnes nogrieznis BC. Pēdējo visvienkāršāk konstruēt, ievērojot, ka tam atbilstošā horizontālā projekcija atrodas uz stara g', kas vilkts caur $B'=C'$. Atliek tātad izvēlēties uz lodes virsmas atsevišķas paralēles un pēc to horizontālo projekciju krustpunktiem ar $B'C_*$ atrast atbilstošos punktus uz paralēļu frontālajām projekcijām.

[1] Kanelura — cilindriska ierieva kolonā ar sfēriski izveidotiem galiem.

Tālāk aplūkosim divus piemērus, kuros noteiksim ēnas, ko uz vertikāla cilindra met kvadrātiska vai cilindriska plate (sk. 396. un 397. ras.; horizontālajā projekcijā parādītas tikai šo objektu priekšējās daļas). Kāda patvaļīga plates pašēnas kontūras punkta *1* ēnu 1_* uz cilindra nosaka tieši. Ēnu 2_* uz cilindra pašēnas kontūras nosaka, izmantojot šīs ēnas horizontālās projekcijas $2_*'$, kā



395. ras.



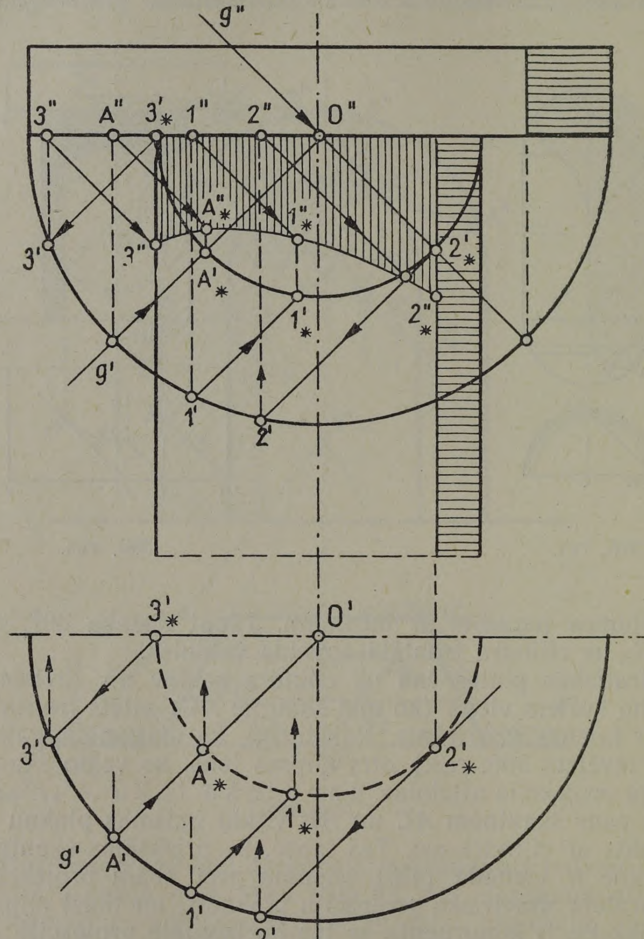
396. ras.

tas rasējumos parādīts ar bultiņām. Tāpat nosaka 397. rasējumā punktu 3_* uz cilindra frontālā apveida veidules.

Kvadrātiskās plates ēna uz cilindra sastāv no diviem elipses lokiem, no kuriem viena (ko met šķautne *AC*) attēls frontālajā projekcijā ir taisnes nogrieznis. Raksturīgi, ka diagonālapgaismojumā (tāds ir izvēlēts 396. ras.) otrs elipses loks, ko veido šķautne *AB*, frontālajā projekcijā attēlojas p a r r i ņ ķ a l o k u $A''_*1''_*2''_*$, kura centrs ir caur šķautnēm *AC* un *AB* vilkto gaismas plakņu kopējais krustpunkts ar cilindra asi. Tas tāpēc, ka priekšējās šķautnes gaismas plakne ir vienādā (45°) slīpumā pret abām projekciju plaknēm (paralēla simetrisko projekciju plaknei), un tādēļ elipses frontālā projekcija ir kongruenta ar tās horizontālo projekciju — riņķi.

Cilindriskās plates ēna uz cilindra ir ceturtās kārtas līkne, kas ir simetriska pret gaismas meridiāna plakni (punkts *A* ir ēnas augstākais punkts). Šīs līknes frontālo projekciju dabū nedaudz precīzāk, ja par horizontālo projekciju plakni izvēlas plates apakšējā pamata plakni, kā to jau praktizējām agrāk. Plates pašēnas kontūras centra *O* abas projekcijas tad sakrīt un abu cilindru pašēnas veidules iet caur punktiem, kuros g'' caur O'' krusto abus riņķa lokus — šo cilindru jaunās horizontālās projekcijas (sal. ar 380. ras.).

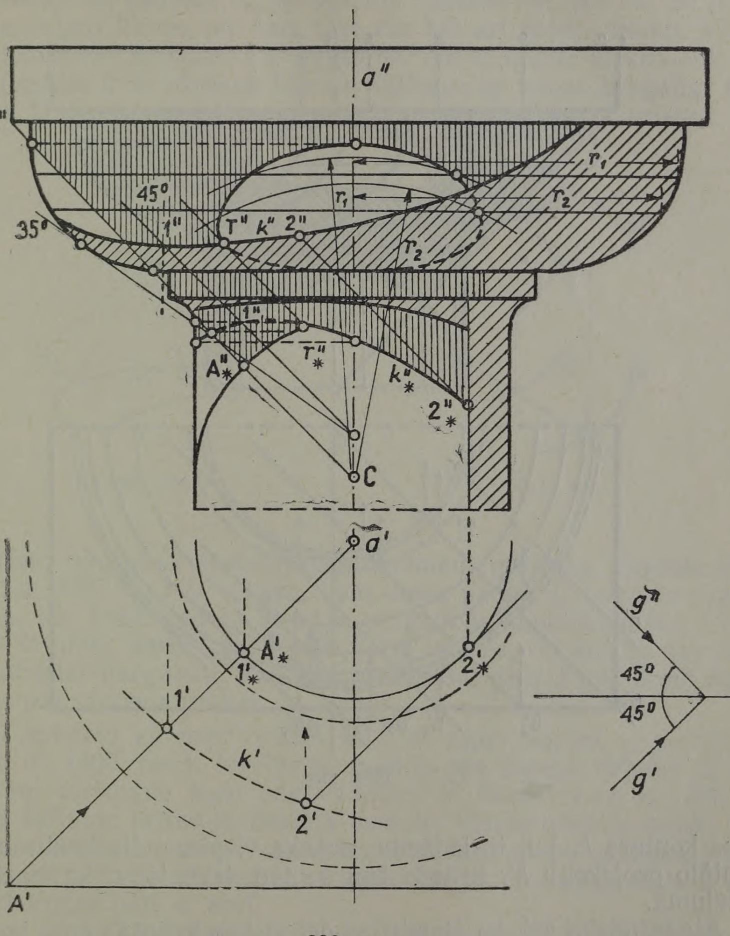
Noslēgumā apskatīsim vēl *toskāniskā kapiteļa* ēnas diagonālapgaismojumā, pie kam aprakstīsim tikai k r ī t o š o ē n u konstruēšanu kapiteļa augšējai daļai (398. ras.; horizontālajā projekcijā parādīta tikai daļa no kapiteļa). Ēna, ko met kvadrātiskās plates, t. s. *abaka* frontālajai projekciju plaknei perpendikulārā pašēnas



397. ras.

šķautne, frontālajā projekcijā attēlojas par taisnes nogriezni. Ja frontālo projekciju plakni domājam vilktu caur kapiteļa asi *a*, tad kapiteļa projekcija profilā plaknē caur asi *a* sedzas ar tā frontālo projekciju, un iepriekšējo ēnu var uzskatīt par profilo projekciju ēnai, ko met abaka p r i e k š ē j ā pašēnas šķautne. Šīs ēnas frontālo projekciju tad dabū, nosakot profilās projekcijas punktiem atbilstošos punktus frontālajā projekcijā.

Diagonālapgaismojumā iespējams šo konstrukciju nedaudz vienkāršot, izmantojot šādu apsvērumu. Abaka priekšējās šķautnes ēna



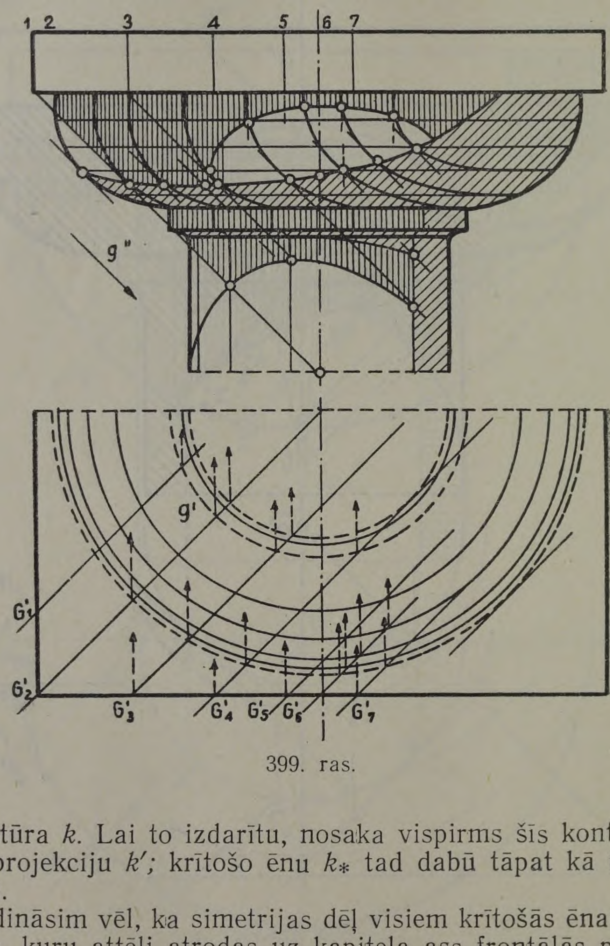
398. ras.

uz kapiteļa cilindriskās daļas (stumbra) frontālajā projekcijā attēlojas par riņķa loku ar centru punktā C (sal. ar 396. ras.). Lai noteiktu tādēļ ēnu, ko šī šķautne met uz *ehina*[1], pieņemam, ka caur ehina atsevišķām paralēlēm ar rādiusiem r_1, r_2,... vilkti vertikāli cilindri. Tā kā šķautnes ēnas uz šiem cilindriem frontālajā projekcijā

[1] Ehins — kapiteļa galvas daļa zem abaka, kas ierobežota ar rotācijas virsmu.

attēlojas par riņķa lokiem ar rādiusiem r_1, r_2, ... un centriem punktā C, tad šo riņķa loku krustpunkti ar attiecīgo paralēļu projekcijām pieder krītošās ēnas kontūrai.

Atliek konstruēt vēl ēnu, ko uz kapiteļa stumbra met ehina paš-



399. ras.

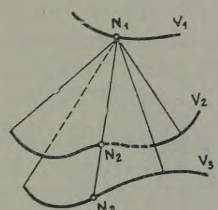
ēnas kontūra k. Lai to izdarītu, nosaka vispirms šīs kontūras horizontālo projekciju k'; krītošo ēnu k_* tad dabū tāpat kā iepriekšējā rasējumā.

Atgādināsim vēl, ka simetrijas dēļ visiem krītošās ēnas kontūras punktiem, kuru attēli atrodas uz kapiteļa ass frontālās projekcijas, atbilst punkti uz virsmas galvenā meridiāna — un otrādi.

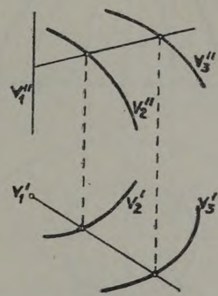
Salīdzināšanai 399. rasējumā parādīta tā paša kapiteļa ēnu noteikšana ar šķēluma metodi. Pavisam izmantoti 7 šķēlumi. Pievelkot šķēluma figūru frontālajām projekcijām starus g'', dabū reizē pašēnas un krītošās ēnas kontūras punktus. Kaut gan šī metode ir uzskatāmāka, pašu šķēlumu konstruēšana tomēr prasa daudz laika. Šķēluma metodi tādēļ lieto galvenokārt ēnu konstruēšanai t. s. grafiskām virsmām, kur citas metodes nav piemērotas (sk. 118. nodalījumu).

8. §. PAPILDINĀJUMI

116. Greizās taišņu virsmas. Greiza taišņu virsma vispār veidojas, ja taisne — veidule, pārvietojoties telpā, pastāvīgi krusto trīs dotās līknes — vadules v_1, v_2, v_3.[1] Šīs vadules var būt vai nu plaknes, vai telpas līknes, pie kam tām var būt arī kopēji punkti. Viena no vadulēm var atrasties arī bezgalībā, tad to definē ar virziena konusu (vadule ir šī virziena konusa šķēlums ar telpas bezgalīgi tālo plakni). Dažas no vadulēm vai pat visas trīs var būt arī taisnes. Tā,



400. ras.



401. ras.

piemēram, no agrāk apskatītajām virsmām greizais slēgtais helisoīds (sk. 355. ras.) ir virsma, kam viena vadule ir taisne — skrūves ass, bet trešā vadule atrodas bezgalībā; konoīdam tikai viena vadule ir līkne, kamēr abas pārējās ir taisnes, no kurām savukārt viena atrodas bezgalībā. Virziena konuss šai pēdējā gadījumā deģenerējas par virziena plakni.

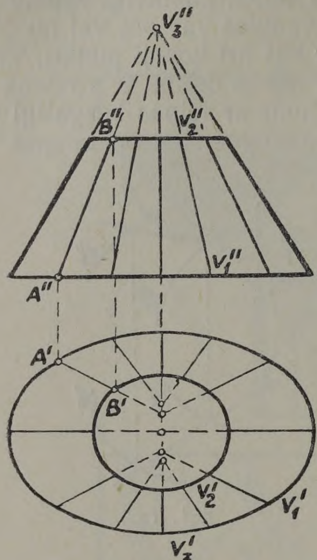
Lai noteiktu virsmas veiduli, kas iet caur vadules v_1 patvaļīgu punktu N_1 (400. ras.), izvēlas šo punktu par kopēju virsotni divām koniskām virsmām, kam par vadulēm ir līknes v_2 un v_3. Abu šo virsmu šķēluma taisne ir meklētā veidule. Vispār abas koniskās virsmas var krustoties arī pa vairākām veidulēm, citiem vārdiem, vadules var būt arī virsmas vairākkārtīgas līknes, pa kurām virsma vairākkārt šķeļas pati ar sevi.

Ja ir zināms (divās projekcijās) lielāks skaits virsmas veiduļu, varam atrisināt arī dažādus uzdevumus par šo virsmu. Tā, piemēram, virsmas šķēlumu ar patvaļīgu plakni dabū, savienojot veiduļu krustpunktus ar šo plakni. Kādas taisnes krustpunktus ar virsmu dabū, nosakot iepriekš virsmas šķēlumu ar projecētāju plakni caur šo taisni. Arī katra virsmas punkta vienai projekcijai tādā veidā iespējams piekārtot otru projekciju.

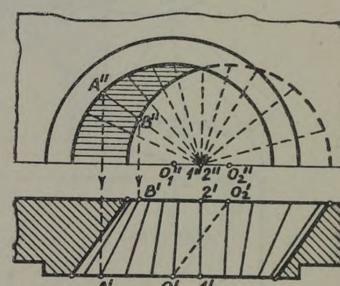
[1] Dažu vai visu šo līkņu vietā var dot arī virsmas, kurām veidulei jebkurā stāvoklī jāpieskaras. No šī gadījuma var pāriet uz iepriekšējo, pieņemot par vadulēm līknes, ko uz katras virsmas sastāda veidules pieskaršanās punkti.

Praksē gandrīz vienmēr jāaplūko virsmas, kurām viena vadule ir taisne, pie kam tā var būt arī kādas plaknes bezgalīgi tālā taisne, t. i., var tikt aizstāta ar virziena plakni. Virsmas atsevišķo veiduli tad var noteikt, velkot caur šo taisni (resp. paralēli virziena plaknei) plakni un savienojot tās krustpunktus ar abām pārējām vadulēm.

Visvienkāršāk konstrukciju izpilda tad, ja vadule ir perpendikulāra resp. virziena plakne ir paralēla kādai no projekciju plaknēm. Pirmajā gadījumā visas veidules



402. ras.

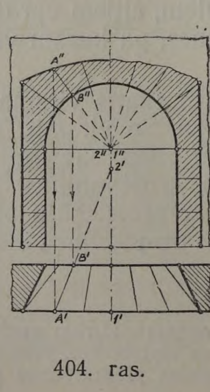


403. zīm.

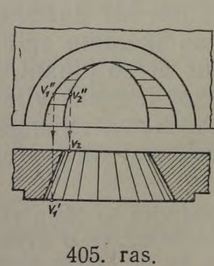
vienā projekcijā iet caur kopēju punktu (sk. 401. ras.), bet otrajā gadījumā veidules vienā projekcijā attēlojas paralēli projekciju asij.

Ilustrēsim augšminēto ar dažiem praktiskiem piemēriem.

Ja divas līknes, piemēram, divas elipses, kas atrodas horizontālajās plaknēs ar centriem uz kopējas vertikālas taisnes un ar paralēlām asīm, ir jāsavieno ar greizu taišņu virsmu, tad par trešo vaduli var izvēlēties taisni, kas perpendikulāra frontālajai (arī profilai)



404. ras.



405. ras.

projekciju plaknei (sk. 402. ras.). Visu veidu]u frontālās (profilās) projekcijas tad iet caur kopēju punktu. Par trešo vaduli varēja izvēlēties arī vertikālo taisni caur abu elipsu centriem, jo tad savukārt veidu]u horizontālās projekcijas iet caur kopēju punktu.

Greizās taišņu virsmas attēlotas 403. un 404. rasējumā. Pirmajā gadījumā divas vadules ir kongruenti pusriņķi ar centriem O_1 un O_2, kas atrodas frontālajās plaknēs, bet otrajā gadījumā priekšējā pusriņķa vietā ir lauzta līnija, kas sastāv no riņķa loka un divām vertikālām taisnēm. Trešā vadule ir atkal frontāli projecētāja taisne *1—2*, tādēļ virsmas patvaļīgo veiduli AB konstruē tāpat kā veiduli AB iepriekšējā piemērā.

Pēdējais piemērs (405. ras.) rāda arku, kuras virsmas veidošanai trešās vadules vietā izvēlēta horizontāla virziena plakne. Veidu]u frontālās projekcijas tad ir projekciju asij paralēlas taisnes, un tām atbilstošās horizontālās projekcijas var viegli noteikt.

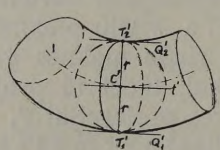
117. Cauruļu virsmas. Cauruļu virsma, īsāk — caurule, veidojas kādai lodei pārvietojoties telpā tā, ka tās centrs visu laiku paliek uz dotās līknes l, t. s. caurules viduslīnijas jeb ass (406. ras.). Kādā noteiktā kustības momentā lode pieskaras caurulei pa lielo riņķi, kura plakne ir perpendikulāra caurules ass pieskarei t lodes centrā C. Šīs lodes apveids ortogonālajā projekcijā ir savukārt tās lodes lielais riņķis, kura plakne ir paralēla attēlu plaknei. Abu lielo riņķu kopējais diametrs T_1T_2 ir pirmā riņķa plaknes galvenā līnija attiecībā pret izvēlēto projekciju plakni, tādēļ tā projekcija $T'_1T'_2$ ir perpendikulāra caurules ass pieskares projekcijai t', citiem vārdiem — atrodas uz caurules ass projekcijas normāles caur C'. Lodes pieskaru plaknes Q_1 un Q_2 diametra T_1T_2 galapunktos ir perpendikulāras attēlu plaknei, un tās ir reizē pieskaru plaknes caurules virsmai punktos T_1 un T_2. Punkti T'_1 un T'_2 tādēļ ir virsmas apveida projekcijas punkti un taisnes Q'_1 un Q'_2 (pieskaru plakņu raksturīgās projekcijas), kas ir paralēlas t', ir pieskares šajos apveida projekcijas punktos.

Caurules apveida projekcijas punktus tātad dabū, velkot caurules ass projekcijas punktos normāles un atliekot uz tām no līknes uz abām pusēm lodes rādiusu. Saka arī, ka caurules virsmas apveida projekciju veido divas no caurules ass attālumā r vilktās paralēllīknes (iepriekš aprakstītajā nozīmē).

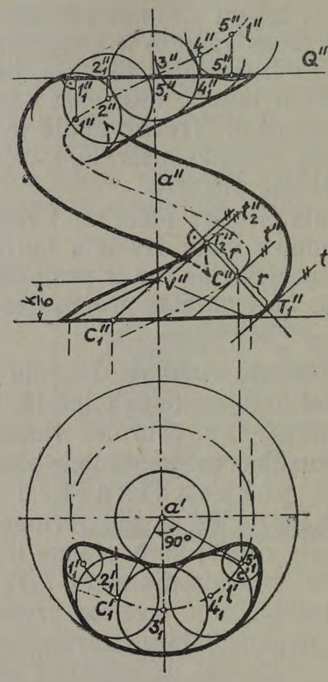
Pēc šī vienkāršā aizrādījuma 407. rasējumā konstruēta apveida frontālā projekcija caurulei, kuras ass l ir cilindriska skrūves līnija. Lai konstruētu normāli caurules ass patvaļīgā punktā, izmantots skrūves līnijas virziena konuss, kas dod pieskares virzienu skrūves līnijai šajā punktā (rasējumā tas parādīts skrūves līnijas punktam C; sal. arī ar 352. ras.).

Raksturīgi, ka apveida projekcijai šai gadījumā izveidojas asuma punkti, kuros apveida līnija no redzamās daļas pāriet neredzamajā.[1] Tādi asuma punkti izveidojas vispār tajos caurules ass projekcijas posmos, kuros liekuma riņķi līknei kļūst mazāki par caurules rādiusu. Pieņemot, ka šis posms aizstāts ar riņķa loku, lodes centram C izejot šo posmu, caurules ass projekcijas normāle rotē ap liekuma centru. Šīs rotācijas rezultātā arī izveidojas abi asuma punkti.[2]

Rasējumā parādīts arī, kā konstruēt caurules šķēlumu ar horizontālu plakni Q. Katra lode, kas pieskaras caurulei, šķeļas ar šo plakni pa riņķi, kura centrs atrodas uz vertikālas taisnes caur lodes centru un kura radiusu nosaka frontālajā projekcijā. Šķēluma figūras horizontālo projekciju



406. ras.



407. ras.

dabū kā šo riņķu horizontālo projekciju aptverošo līkni.

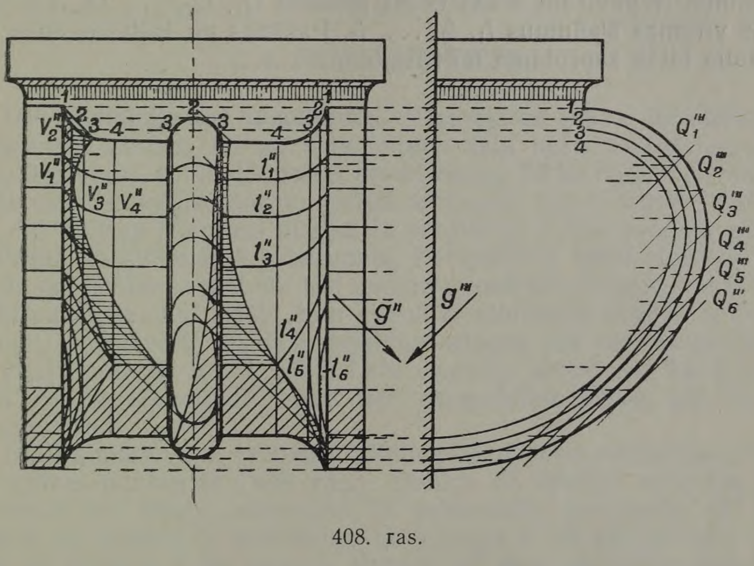
Atzīmēsim vēl, ka lode, kas kustībā veido cauruļu virsmu, arī var mainīt savu lielumu. Šo vispārīgo gadījumu tomēr te neaplūkosim. Bez tam tā pati cauruļu virsma veidojas, arī riņķim pārvietojoties telpā tā, ka tā centrs visu laiku paliek uz caurules ass, bet riņķa plakne katrā stāvoklī ir perpendikulāra caurules asij, t. i., tās pieskarēm. Cauruļu virsmas tātad pieder pie t. s. cikliskām virsmām, kas veidojas, riņķim pēc kaut kāda likuma pārvietojoties telpā.

---

[1] Rasējumā par caurules asi izvēlēta labā skrūves līnija. Kreisās skrūves līnijas gadījumā redzamība asuma punktu tuvumā būtu pretēja.

[2] Kā pamācošu vingrinājumu varētu ieteikt attēlot dažādos stāvokļos pret attēlu plakni g r e d z e n a v i r s m u, ko arī varam uzskatīt par cauruļu virsmu. Tā kā caurules ass projekcija šai gadījumā ir elipse un liekuma riņķus elipses lielās ass galapunktos viegli konstruēt, tad asuma punktu veidošanās viegli izsekojama.

118. Grafiskās virsmas. Ja virsmas veidošanās likums nav zināms vai arī to grūti formulēt, tad tādu virsmu var definēt grafiski, dodot pietiekamā skaitā tās šķēlumus ar plaknēm vai kādām citām virsmām. Tādas grafiskas virsmas izmanto diezgan bieži. Tā, piemēram, kāda kuģa korpusa ārējās virsmas formu mēdz noteikt, dodot virkni tā horizontālo vai vertikālo šķēlumu. Arī dažādu mašīndaļu un arhitektūras sīkdaļu attēlošanai šo metodi bieži izlieto.



408. ras.

Pieņemsim tātad, ka kāda virsma ir dota ar divās projekcijās attēlotām līknēm v_1, v_2 ..., kuras sauksim par virsmas veidulēm. Tad var konstruēt arī šīs virsmas šķēlumus ar projecētājām plaknēm, jo šie šķēlumi vienā projekcijā attēlojas par taisnēm uz plakņu rakstūrīgajām projekcijām. Šo taišņu krustpunktiem ar veidulēm šajā projekcijā var piekārtot veiduļu punktus otrā projekcijā un, pēdējos savienojot, dabūt pašas šķēluma figūras otru projekciju. Ar šādu palīgplakņu palīdzību var atrisināt visus pārējos uzdevumus: noteikt patvaļīgas taisnes krustpunktus ar virsmu, virsmas punkta vienai projekcijai (kas neatrodas tieši uz veidules projekcijas) piekārtot otru projekciju, noteikt virsmas šķēlumu ar patvaļīgu plakni vai kādu citu virsmu.

Lai konstruētu tādas grafiskas virsmas ēnas, šķeļam virsmu ar projecētājām plaknēm, kas paralēlas gaismas staru virzienam, un velkam gaismas starus, kas pieskaras šķēluma līknēm. Savienojot šos pieskaršanās punktus, dabūjam virsmas pašēnas kontūru, bet, savienojot punktus, kuros šie gaismas stari attiecīgo šķēluma līkni pirmo reizi krusto, dabūjam virsmas krītošās ēnas kontūru.

Ilustrācijai 408. rasējumā parādīta ēnu konstruēšana frontālā un profilā projekcijā dotajai konsolei. Atskaitot cilindriskās daļas, konsole ir ierobežota ar grafisku virsmu, kas noteikta ar 13 profilai plaknei paralēlām veidulēm, no kurām pirmās četras, kas atrodas kreisajā pusē, apzīmētas ar v_1, v_2, v_3 un v_4. Visas pārējās veidules ir ar kādu no šīm četrām kongruentas, tādēļ to profilās projekcijas sakrīt; to augšējie galapunkti abās projekcijās apzīmēti ar skaitļiem *1, 2, 3, 4*. Par palīgplaknēm izvēlētas profili projecētājas plaknes. Rasējumā ir pavisam sešas tādas plaknes Q_1, Q_2, ..., Q_6, kas dod sešus virsmas šķēlumus l_1, l_2, ..., l_6. Pašēnas un krītošās ēnas noteikšana tālāk saprotama no rasējuma.

VII NODAĻA

PERSPEKTĪVA

1. §. PAMATJĒDZIENI.

119. Definīcija un apzīmējumi. Perspektīva māca, kā konstruēt priekšmetu attēlus, lai no tiem iegūtu tādu pašu redzes iespaidu, kādu iegūstam, aplūkojot pašus priekšmetus. Tā kā mēs kādu priekšmetu vienmēr aplūkojam no galīgā attāluma, tad tā attēls tikai tad var dot pilnīgu īstenības ilūziju, ja projekciju centrs izvēlēts galīgā attālumā no attēlojamā priekšmeta. Perspektīva tātad izmanto centrālās projecēšanas metodi. Bet ne katra centrālā projekcija dod perspektīvu attēlu. Lai attēls dotu īstenībai atbilstošu ilūziju, to pagatavojot jāņem vērā vēl daži papildnosacījumi par projekciju centra un attēlu plaknes izvēli. Tikai tādu centrālo projekciju, kurā ņemti vērā visi šie nosacījumi, sauc par perspektīvu attēlu jeb īsāk — perspektīvu.[1]

Izvēlēsimies telpā vertikālu attēlu plakni P un projekciju centru jeb redzes punktu O (409. ras.). Punkta O stāvokli attiecībā pret plakni P var fiksēt, atzīmējot tā ortogonālo projekciju O'' šajā plaknē un uzrādot tā attālumu d no plaknes P, kā arī uzdodot, kurā pusē no plaknes P tas atrodas. Punktu O'' sauc par *galveno punktu*, un to, lai izvairītos no iespējamiem pārpratumiem, turpmāk apzīmēsim ar G. Lielumu d sauc par redzes punkta attālumu jeb īsāk — par *distanci*. Plaknē P iezīmēto riņķi ar centru punktā G un rādiusu d sauc par *distancriņķi*. Redzes punkta stāvokli telpā var noteikt arī ar šo distancriņķi, ja vien zināms, kurā pusē no attēlu plaknes tam jāatrodas.

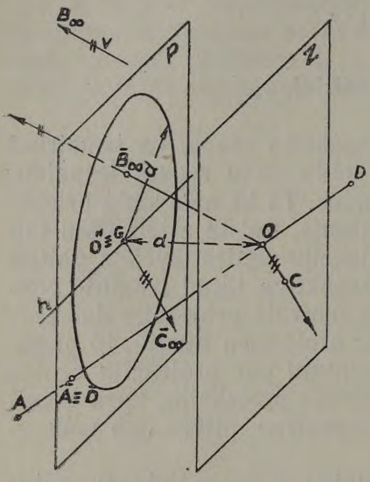
Horizontālo taisni h caur galveno punktu G attēlu plaknē sauc par *horizontu* un plakni caur redzes punktu O un šo taisni par *horizonta plakni* (rasējumā nav parādīta).

Patvaļīga telpas punkta A perspektīvu, kā zināms, dabū, velkot caur šo punktu no punkta O projecētāju jeb redzes staru un nosakot tā krustpunktu $\bar{A}$ ar attēlu plakni. Tāpat nosaka arī kāda patvaļīga telpas bezgalīgi tālā punkta B_∞ (dots ar virzienu v) perspektīvu $\bar{B}_\infty$; redzes stars tad jāvelk paralēli dotajam virzienam v. Ja punkts atrodas attēlu plaknē, tā projekcija ir pats telpas punkts. Redzes

[1] No šī viedokļa saprotams, kādēļ arī dažus paralēlprojekciju veidus mēdz saukt par perspektīvām. Tādas «paralēlperspektīvas» ir, piemēram, jau agrāk apskatītās Kavalieru un Militārās perspektīvas.

staru *OG*, kas iet caur galveno punktu (tātad perpendikulāri attēlu plaknei) sauc par *galveno staru.*

Visiem punktiem, kas atrodas uz kopējā projecētāja stara, ir viena un tā pati projekcija, tātad telpas punkts ar savu projekciju vien nav noteikts. Tā noteikšanai jābūt dotiem vēl kādiem papildnosacījumiem. Ja, piemēram, ir zināms vēl, ka tam jāatrodas uz kādas iepriekš dotas taisnes vai plaknes, tad tā vieta telpā ir noteikta.



409. ras.

Pieņemsim, ka telpā dota vēl plakne *Z*, kas vilkta caur redzes punktu *O* paralēli attēlu plaknei. Šīs plaknes punktu attēli atrodas bezgalībā, jo šo punktu projecētāji stari ir paralēli attēlu plaknei (sk. ras. punktu *C*). Plakni *Z* tādēļ sauc par *zuduma plakni* (tās punktu projekcijas it kā «pazūd»). Zuduma plakne dala telpu divās daļās. Telpas daļu, kurā atrodas attēlu plakne *P*, sauc par *redzes* jeb *reālo telpu*, bet pārējo — par *ģeometrisko* jeb *virtuālo telpu*. Kamēr katrs redzes telpas punkts un tā projekcija atrodas vienā pusē redzes punktam *O*, ikviens ģeometriskās telpas punkts (tāds ir rasējumā punkts *D*) ar tā attēlu atrodas katrs savā pusē punktam *O*. Novērotājam, kas atrodas punktā *O* un pagriezies pret attēlu plakni, šie ģeometriskās telpas punkti nav redzami, tādēļ to attēliem ir tikai ģeometriska nozīme. Dažādu konstrukciju izpildīšanai tos tomēr var tikpat labi izmantot kā redzes telpas punktus[1].

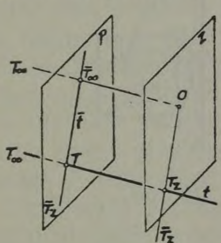
Patvaļīgas t a i s n e s perspektīva ir taisne, ko dabū, velkot caur telpas taisni projecētāju (redzes) plakni un nosakot tās šķēlumu ar attēlu plakni. Vienīgi taisnēm caur redzes punktu attēls ir punkts. Visām taisnēm zuduma plaknē ir kopējs attēls — plaknes *P* bezgalīgi tālā taisne.

120. Taisnes satekpunkts. Pieņemsim, ka telpā dota taisne t, kas neiet caur redzes punktu un nav paralēla attēlu plaknei (410. ras.). Tādā gadījumā tā krusto attēlu plakni punktā T un zuduma plakni punktā T_z. Punktu T sauc par taisnes *pēdu*, bet punktu T_z — par taisnes *zuduma punktu*. Taisnes perspektīva $\bar{t}$ iet caur pēdu T uz punkta T_z attēlu $\bar{T}_z$, kas ir attēlu plaknes neīsts (bezgalīgi tālais) punkts. Tā kā pēdējais pieder reizē taisnei OT_z un taisnei $\bar{t}$, tad *taisnes perspektīva ir paralēla caur tās zuduma punktu vilktajam redzes staram.*

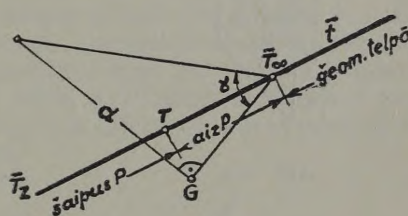
[1] Tāds ģeometriskās telpas punkts ir, piemēram, Saule, ja tā atrodas novērotājam aiz muguras (sk. 134. nodalījumu).

Taisnei t paralēli vilktais projecētājs stars, ko turpmāk īsuma dēļ sauksim par *paralēlstaru*, krusto attēlu plakni punktā $\overline{T}_\infty$, kas ir taisnes bezgalīgi tālā punkta T_∞ attēls. Šo taisnes t bezgalīgi tālā punkta perspektīvu sauksim par taisnes *satekpunktu*. Ir jāpasvītro, ka tas n e a t r o d a s uz pašas taisnes t (kā punkti T un T_z), bet ir vienīgi tās attēla punkts.

Taisnes pēda T un zuduma punkts T_z dala taisni trīs daļās. Taisnes daļai, kas atrodas aiz attēlu plaknes, perspektīvā atbilst ierobežota garuma taisnes nogrieznis starp punktiem T un $\overline{T}_\infty$, turpretim galīgajam taisnes nogrieznim starp punktiem T un T_z atbilst taisnes nogriežņa $\overline{T}_\infty T$ neierobežots pagarinājums aiz punkta T; taisnes daļai, kas atrodas ģeometriskā telpā, atbilst taisnes nogriežņa $T\overline{T}_\infty$ neierobežots pagarinājums aiz punkta $\overline{T}_\infty$. Iedomājoties kādu punktu, kas vienmērīgā ātrumā pārvietojas pa taisni t,



410. ras.



411. ras.

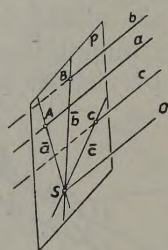
varam pārliecināties, ka šī punkta attēls kustas pa taisni $\overline{t}$ n e v i e n m ē r ī g i. Tā ātrums pieaug, attālinoties no satekpunkta $\overline{T}_\infty$, bet tuvojas nullei, tuvojoties šim satekpunktam. Tas apstiprina jau agrāk konstatēto īpašību, ka taisnes triju punktu attiecība perspektīvā izmainās (sk. 85. nodalījumu).

Taisnes triju punktu attiecība nemainās vienīgi tajā gadījumā, kad taisne ir paralēla attēlu plaknei. Šai gadījumā taisnes pēda, satekpunkts un zuduma punkts ir (viens un tas pats) taisnes bezgalīgi tālais punkts; taisnes perspektīva ir paralēla pašai telpas taisnei. No šejienes seko arī, ka *attēlu plaknei paralēlas plaknes figūras attēls ir tai līdzīga figūra.*

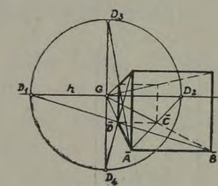
Pieņemsim, ka attēlu plakne ir rasējuma plakne un O ir redzespunkts virs tās. Ja ir dota taisnes pēda T un satekpunkts $\overline{T}_\infty$ (sk. 411. ras.), tad taisnes stāvoklis telpā ir viennozīmīgi noteikts, ja vien ir dots galvenais punkts G un distance d. Taisne t telpā iet caur punktu T paralēli redzes staram $O\overline{T}_\infty$. Var noteikt arī taisnes slīpuma leņķi α pret attēlu plakni. Lai to izdarītu, ir tikai jāsavieto (telpas) taisnleņķa trīsstūris $OG\overline{T}_\infty$ ar rasējuma plakni, pagriežot to ap kateti $G\overline{T}_\infty$; šaurais leņķis pie virsotnes $\overline{T}_\infty$ ir meklētais leņķis α. Rasējumā parādīta arī taisnes attēla atsevišķo daļu atbilstība taisnes daļām telpā.

Paralēlām taisnēm ir kopējs bezgalīgi tālais punkts, tādēļ arī kopējs satekpunkts, ko vienkāršības dēļ turpmāk apzīmēsim ar kopēju burtu S (412. ras.). *Paralēlas taisnes tātad vispār attēlojas par taisnēm, kas iet caur kopēju punktu S — to kopējā paralēlstara krustpunktu ar attēlu plakni.* Izņēmums ir gadījumā, kad taisnes ir paralēlas attēlu plaknei. Tādu *frontālu* taišņu perspektīvas ir paralēlas, jo to satekpunkts ir bezgalībā. Tā, piemēram, *vertikālas taisnes arī perspektīvā attēlojas par vertikālām taisnēm.*

Apgrieztais apgalvojums ne katrreiz ir pareizs. Jāņem vērā, ka arī krustiskām taisnēm var būt paralēli attēli, proti, ja šis krustpunkts ir taišņu kopējais zuduma punkts. Tāpat taisnes, kuru attēli



412. ras.



413. ras.

iet caur kopēju punktu, var arī nebūt paralēlas, bet vienīgi krustot redzes staru, kas vilkts uz šo punktu. No šādiem pārpratumiem var izvairīties, noskaidrojot, kādi ir katrā atsevišķā gadījumā šo taišņu satekpunkti.

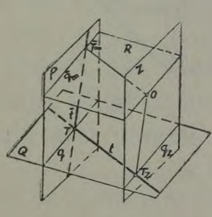
Speciālā gadījumā, *ja taisnes ir perpendikulāras attēlu plaknei, to satekpunkts ir galvenais punkts G. Horizontālu taišņu satekpunkti atrodas uz horizonta, jo visi paralēlstari tad atrodas horizonta plaknē.*

Pieņemsim, ka telpā dotas taisnes, kas veido vienu un to pašu leņķi α ar attēlu plakni. Šo taišņu paralēlstari tad veido rotācijas konusu ar virsotni punktā O un galveno staru kā asi. Šis konuss krusto attēlu plakni pa t. s. *slīpuma riņķi* ar centru galvenā punktā G un rādiusu $r = d\operatorname{ctg}\alpha$. Uz šī riņķa atrodas arī visu šo taišņu satekpunkti. Speciālā gadījumā, ja $\alpha = 45°$, tad $r = d$ un slīpuma riņķis reducējas par distancriņķi. *Distancriņķis tātad ir tādu taišņu satekpunktu ģeometriska vieta, kas veido 45° leņķi ar attēlu plakni.*

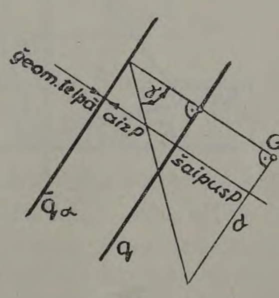
Distancriņķa krustpunktus D_1 un D_2 ar horizontu sauc par *distancpunktiem* (413. ras.). Tie ir satekpunkti visām horizontālajām taisnēm, kas veido 45° leņķi ar attēlu plakni. Ar distancpunktu palīdzību var konstruēt attēlu, piemēram, horizontālajam kvadrātam $ABCD$, kam malas AB un CD ir frontālā stāvoklī, ja ir zināms vienas šīs malas attēls $\bar{A}\bar{B}$. Tiešām, tā kā šai malai perpendikulārās malas AC un BD ir perpendikulāras attēlu plaknei, to satekpunkts ir galvenais punkts G. No otras puses, tā kā kvadrāta diagonāles veido 45° leņķi ar attēlu plakni, tad to satekpunkti ir distancpunkti D_1 un D_2. Šo diagonāļu attēli krusto taisnes $\bar{A}G$ un $\bar{B}G$ kvadrāta pārējo divu virsotņu attēlu punktos $\bar{C}$ un $\bar{D}$. Rasējumā konstruēts arī attēls kubam, kam par pamatu ir kvadrāts $ABCD$. Kuba frontālās skaldnes attēlojas kā kvadrāti, bet attēlu plaknei perpendikulārās šķautnes kā taisnes, kas iet uz kopēju satekpunktu G. Kuba kreisās (arī labās) sānu skaldnes diagonāļu attēli turpinājumā iet caur distancriņķa vertikālā diametra galapunktiem D_3 un D_4 — šo diagonāļu satekpunktiem.

121. Plaknes satektaisne. Pieņemsim, ka telpā dota plakne Q, kas neiet caur projekciju centru O un nav paralēla attēlu plaknei P (414. ras.). Plaknes Q šķēluma taisni q ar attēlu plakni sauc par tās *pēdu,* bet šķēluma taisni q_z ar zuduma plakni Z — par tās *zuduma taisni.* Visi projecētāji stari, kas ir paralēli plaknei Q, veido projecētāju (redzes) plakni R, kurai ar plakni Q ir kopēja bezgalīgi tālā taisne q_∞. Plakne R šķeļ attēlu plakni P pa taisni $\bar{q}_\infty$, kas ir plaknes Q bezgalīgi tālās taisnes q_∞ perspektīvais attēls. Šo *plaknes Q bezgalīgi tālās taisnes perspektīvu sauc par tās satektaisni, un tā ir vienmēr paralēla plaknes pēdai q.* Plaknes satektaisne neatrodas uz pašas plaknes, kā tās zuduma taisne q_z, kuras perspektīva ir plaknes P bezgalīgi tālā taisne.

Paralēlām plaknēm ir kopēja bezgalīgi tālā taisne, tātad arī



414. ras.



415. ras.

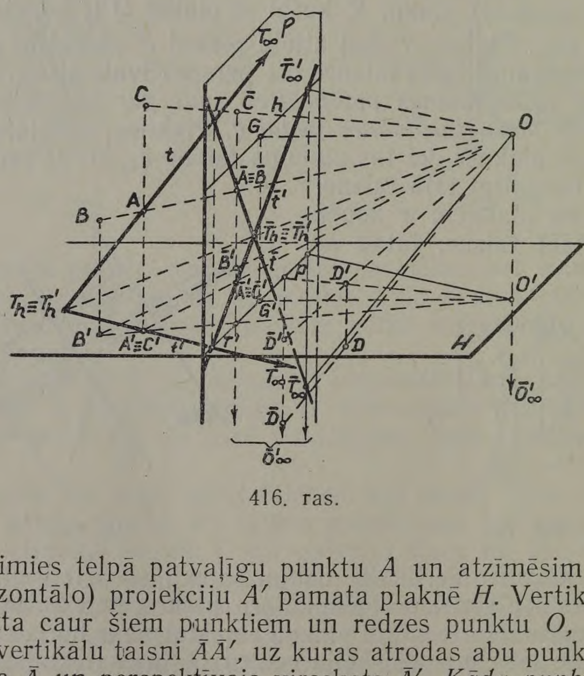
kopēja satektaisne. Vertikālu plakņu satektaisnes ir vertikālas taisnes, bet attēlu plaknei perpendikulāru plakņu satektaisnes iet caur galveno punktu. Horizontālu plakņu satektaisne ir horizonts.

Ja plakne iet caur projekciju centru O, tās satektaisne sakrīt ar pēdu, kas ir reizē šīs plaknes attēls. Attēlu plaknei paralēlas plaknes pēda un satektaisne ir šīs plaknes bezgalīgi tālā taisne.

Ja plakne nav paralēla attēlu plaknei, tās stāvoklis telpā ar tās pēdu un satektaisni ir viennozīmīgi noteikts, ja vien ir zināms galvenais punkts G un distance d. Tā 415. rasējumā, kur par attēlu plakni izvēlēta rasējuma plakne, plaknei Q telpā jāiet caur pēdu q paralēli plaknei, kas iet caur punktu O (virs rasējuma plaknes) un plaknes satektaisni $\bar{q}_\alpha$. Rasējumā parādīts arī, kā noteikt plaknes Q slīpuma leņķi pret attēlu plakni.

2. §. PIEMĒROTĀ PERSPEKTĪVA

122. Punkta un taisnes attēlošana; pozicionālie uzdevumi. Izvēlēsimies bez vertikālās attēlu plaknes P un redzes punkta O vēl vienu horizontālu plakni H, kas neiet caur redzes punktu (416. ras.). Šo plakni, uz kuras parasti iedomāsimies novietotus attēlojamos priekšmetus, sauksim par *pamata plakni* un tās šķēluma taisni p ar attēlu plakni — par *pamata līniju*. Plaknes H satektaisne ir horizonts h, un visi punkti pamata plaknē, kas atrodas aiz attēlu plaknes, attēlojas starp pamata līniju un horizontu. Novilksim caur redzes punktu arī galveno staru un atzīmēsim tā krustpunktu ar horizontu — galveno punktu G. Redzes punkta ortogonālo projekciju O' pamata plaknē H sauksim par *redzes punkta pamatu,* bet galvenā punkta projekciju (uz pamata līnijas) — par *galvenā punkta pamatu.*



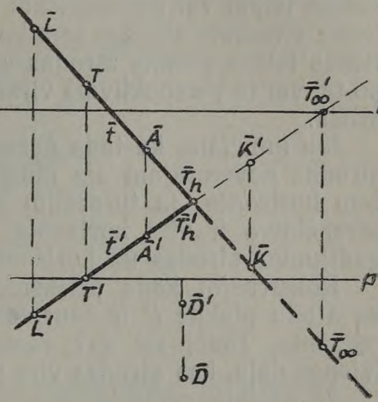
416. ras.

Izvēlēsimies telpā patvaļīgu punktu A un atzīmēsim tā ortogonālo (horizontālo) projekciju A' pamata plaknē H. Vertikālā plakne, kas novilkta caur šiem punktiem un redzes punktu O, šķeļ attēlu plakni pa vertikālu taisni $\bar{A}\bar{A}'$, uz kuras atrodas abu punktu attēli — perspektīva $\bar{A}$ un perspektīvais virsskats $\bar{A}'$. *Kāda punkta perspektīva un perspektīvais virsskats tātad vienmēr atrodas uz kopēja perpendikula pret pamata līniju.*

Varam pārliecināties, ka šis noteikums attiecas arī uz telpas bezgalīgi tālajiem punktiem. Ja, piemēram, T_∞ ir kādas taisnes t, bet T'_∞ šīs taisnes projekcijas t' bezgalīgi tālais punkts, tad šo punktu perspektīvas $\bar{T}_\infty$ un $\bar{T}'_\infty$ — abu taišņu satekpunkti atkal atrodas uz kopēja perpendikula pret pamata līniju, jo abu taišņu paralēlstari OT_∞ un OT'_∞ atrodas kopējā vertikālā plaknē. Satekpunkts $\bar{T}'_\infty$ taisnes projekcijai t' pamata plaknē pie tam vienmēr atrodas uz horizonta.

Ja ir doti punkta abi perspektīvie attēli $\bar{A}$ un $\bar{A}'$, tad punkta stāvoklis telpā ir viennozīmīgi noteikts. Telpas punktu A dabū, velkot caur tā perspektīvo virsskatu $\bar{A}'$ projecētāju staru un tā krustpunktā A' ar pamata plakni — staru perpendikulāri pamata plaknei. Pēdējā krustpunkts ar projecētāju staru caur $\bar{A}$ ir meklētais telpas punkts A.

No diviem punktiem A un B, kas atrodas uz kopēja redzes stara, tālāk no novērotāja ir tas punkts, kura perspektīvais virsskats ir tuvāk horizontam, bet no diviem punktiem A un C, kuru perspektīvie virsskati sakrīt, augstāk virs pamata plaknes ir tas punkts, kura perspektīva ir augstāk. Punktiem pamata plaknē abi perspektīvie attēli sakrīt, bet punktiem attēlu plaknē perspektīvie virsskati atrodas uz pamata līnijas.



417. ras.

Aplūkosim tuvāk 416. rasējumā attēloto taisni t un tās perspektīvos attēlus $\bar{t}$ un $\bar{t}'$. Taisnes t perspektīvo virsskatu dabū, savienojot tās horizontālās projekcijas t' pēdu T' uz pamata līnijas ar satekpunktu $\bar{T}'_\infty$ uz horizonta. Taisnes t perspektīvu $\bar{t}$ dabū, savienojot tās pēdu T, kas atrodas uz punktā T' vilktā perpendikula pret pamata līniju, ar satekpunktu $\bar{T}_\infty$, kas savukārt atrodas uz kopēja perpendikula pret pamata līniju ar punktu $\bar{T}'_\infty$. Abi attēli krustojas punktā $\bar{T}_h \equiv \bar{T}'_h$, kas ir taisnes pēdas plaknē H perspektīvais attēls. Šī sakarība starp abu taišņu t un t' pēdu un satekpunktiem labi jāievēro, jo tā dod iespēju noteikt telpas taisnes t pēdu un satekpunktu, izmantojot šīs taisnes perspektīvos attēlus $\bar{t}$ un $\bar{t}'$.

Ievērosim vēl, ka par vertikālām taisnēm perpektīvā attēlojas ne vien taisnes, kas perpendikulāras pamata plaknei (kā, piem., taisne AA'), bet arī visas taisnes, kas iet caur redzes punkta pamatu O'. Tas tādēļ, ka punkts O' ir šo taišņu kopējais zuduma punkts, kura perspektīva ir attēlu plaknes bezgalīgi tālais punkts $\bar{O}'_\infty$, kas ir noteikts ar pamata plaknei perpendikulāro virzienu OO'. Šādas taisnes p a m a t a plaknē, kas iet caur redzes punkta pamatu O', var ērti izmantot punkta perspektīvā attēla konstruēšanai (sk. 124. nodalījumu).

Apskatīsim tagad, kā attēlojas piemērotā perspektīvā punkti, kas atrodas dažādās telpas daļās. Ja pamata plakne (kā parasti) ir izvēlēta zem redzes punkta, tad visiem redzes telpas punktiem perspektīvie virsskati atrodas virs vai zem pamata līnijas atkarībā no tā, vai šie punkti atrodas aiz attēlu plaknes vai tās priekšpusē. Tā no 417. rasējumā attēlotajiem punktiem (attēlu plakne ir rasējuma plakne) punkti D un L atrodas attēlu plaknes priekšpusē, bet punkti A, K un T_h — aiz attēlu plaknes (sal. arī ar 416. ras.). Atkarībā no tā, vai kāda redzes telpas punkta perspektīva atrodas virs vai zem tā perspektīvā virsskata, pats telpas punkts atrodas virs vai zem pamata plaknes. Tā 417. rasējumā attēlotie punkti A, T un L atrodas virs, bet punkti D un K zem pamata plaknes. Kāds punkts pieder redzes telpai vai ģeometriskai telpai atkarībā no tā, vai tā perspektīvais virsskats atrodas zem vai virs horizonta. Un, beidzot, ģeometriskās telpas punkts atrodas virs vai zem pamata plaknes atkarībā no tā, vai tā perspektīvais virsskats atrodas virs vai zem perspektīvā attēla.

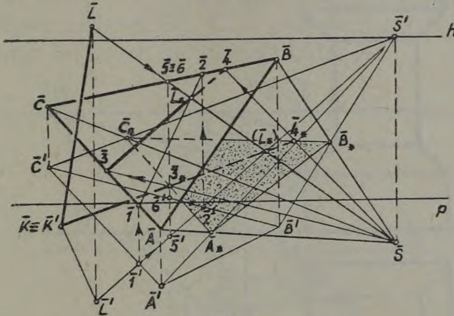
Jau minējām, ka tāds ģeometriskās telpas punkts ir saule, ja tā atrodas novērotājam aiz muguras; tās perspektīva tad vienmēr ir zem horizonta. Ja turpretim saule atrodas aiz attēlu plaknes, tās perspektīva ir virs horizonta. Saules perspektīvais virsskats abos gadījumos atrodas uz horizonta.

Konstruējot kāda priekšmeta perspektīvu, vienmēr pieņemsim, ka attēlu plakne P ir caurredzama, bet pamata plakne — necaurredzama. Tādēļ arī 417. rasējumā kā redzama parādīta tikai tā taisnes daļa, kas atrodas virs pamata plaknes.

Ja objekta perspektīvo virsskatu uz laiku iedomājamies par tā horizontālo projekciju, bet perspektīvo attēlu par tā frontālo projekciju, tad visus pozicionālos uzdevumus arī perspektīvā var atrisināt ar tām pašām līnijām kā ortogonālajās projekcijās. Atšķirība ir vienīgi tajos uzdevumos, kur izmantojam taisnes vai plaknes pēdas. Atšķirība no a k s o n o m e t r i s k ā attēlojuma veida ir tā, ka telpas bezgalīgi tālie punkti perspektīvā tiek attēloti tāpat kā galīgā attālumā novietoti punkti un ka galīgā attālumā novietoto punktu attēli var būt arī attēlu plaknes bezgalīgi tālie punkti. Šī iemesla dēļ arī ēnas perspektīvā konstruē ar tām pašām līnijām kā centrāla, tā paralēlapgaismojuma gadījumā.

Sacītā ilustrācijai atrisināsim šādu pozicionālu uzdevumu: *konstruēt paralēlapgaismojumā taisnes nogriežņa KL ēnu uz trīsstūra ABC. Paralēlapgaismojums noteikts ar paralēlo gaismas staru satekpunktu — saules attēlu* $\overline{S}$. *Konstruēt arī taisnes nogriežņa un trīsstūra ēnas pamata plaknē (418. ras.).*

Lai konstruētu taisnes nogriežņa KL ēnu trīsstūra plaknē, rasējumā noteikta vispirms punkta L ēna L_* šai plaknē. Horizontāli projecētāja plakne, kas ir noteikta ar gaismas staru LS un tā horizontālo projekciju $L'S'$, šķeļ trīsstūra plakni un pa taisni *1—2,* kuras krustpunkts ar gaismas staru LS ir meklētais ēnas punkts L_*. Tāpat varētu noteikt vēl taisnes nogriežņa KL kāda cita punkta ēnu trīsstūra plaknē vai arī noteikt paša taisnes nogriežņa KL krustpunktu ar trīsstūra plakni, caur kuru jāiet taisnes nogriežņa ēnai trīsstūra plaknē. Rasējumā tai vietā noteikts punkts *3,* kurā ēna krusto trīsstūra malu AC. Šai nolūkā konstruētas vispirms taisnes nogriežņa un trīsstūra ēnas pamata plaknē H. Atsevišķa punkta ēnas attēls, kā zināms, ir gaismas stara abu attēlu krustpunkts. Taisnes nogriežņa KL ēna plaknē H sākas punktā K un iet uz punkta L fiktīvo ēnu (L_*). No šīs ēnas krustpunkta 3_* ar malas AC ēnu A_*C_* velkot pretēji vērstu gaismas staru $S—3_*$ (netiešais paņēmiens!), dabū meklēto punktu 3. Kontroles dēļ arī punktiem 4 un 4_*, kuros, taisnes nogriežņa ēnas pagarinot, krusto trīsstūra malu BC resp. ēnas kontūru B_*C_*, arī jāatrodas uz kopēja gaismas stara $S—4$.

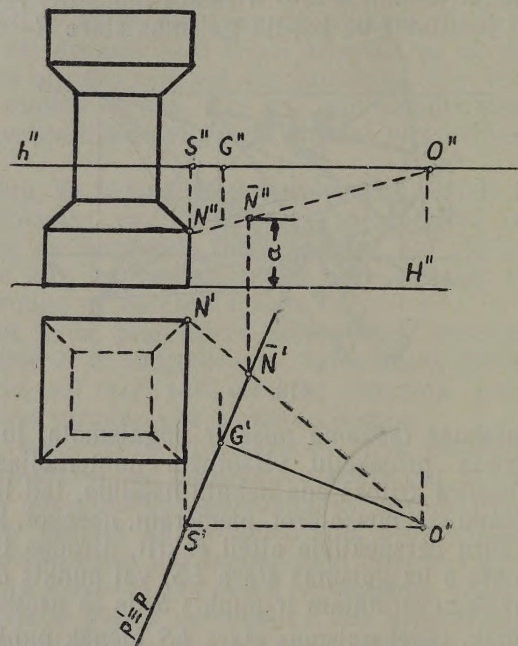


418. ras.

Trīsstūra plaknes redzamā puse ir apgaismota, jo trīsstūra un tā krītošās ēnas projekciju virsotnēm numerācijas virziens ir vienāds. Ja trīsstūra krītošā ēna nebūtu noteikta, tad trīsstūra plaknes apgaismojumu var noskaidrot, piemēram, nosakot, kurš no punktiem 5 un 6, kuru perspektīvie attēli sakrīt, atrodas tuvāk novērotājam, vai punkts 5 uz gaismas stara LS, vai punkts 6 uz trīsstūra malas BC. Tuvāk novērotājam ir punkts 5, jo tā perspektīvais virsskats $\overline{5}'$ ir zemāk, tādēļ gaismas stars LS pienāk punktā L_* no attēlā redzamās puses, t. i., šī puse ir apgaismota.

123. Stara pēdas metode perspektīvas konstruēšanai (radiālā perspektīva). Šī ir visvecākā no perspektīvas metodēm kāda priekšmeta attēla konstruēšanai. Ja priekšmeta abi ortogonālie attēli doti (419. ras.), tad kā horizontālo projekciju plakni vienmēr varam izvēlēties pamata plakni H. Perspektīvā attēla plaknes P horizontālā projekcija P' tad sakrīt ar pamata līniju p. Izvēloties redzes punkta abas projekcijas O' un O'', galvenā punkta G abas projekcijas dabū, nosakot parastā veidā galvenā stara OG krustpunktu ar attēlu plakni P. Horizonta frontālā projekcija h'' ir taisne caur O'' un G''.

Lai noteiktu tagad kāda patvaļīga punkta N perspektīvu, velkam caur šo punktu redzes staru ON un nosakām tā krustpunktu $\overline{N}$ ar plakni P. Šī krustpunkta horizontālā projekcija $\overline{N}'$ atrodas uz attēlu plaknes raksturīgās projekcijas $P'=p$, bet frontālā projekcija $\overline{N}''$ ir kārtotājas krustpunkts ar staru $O''N''$. Ja atkārtotu to tāpat ar visiem pārējiem attēlojamā objekta punktiem, tad galu galā mēs dabūtu nevis dotā objekta perspektīvo attēlu, bet šī attēla frontālo projekciju[1]. Lai dabūtu nesagrozītu attēlu, iedomāsimies attēlu plakni P savietotu (kaut kur blakus) ar rasējuma plakni tā, lai pamata līnija p būtu horizontālā stāvoklī (sk. 420. ras.). Novelkot te arī horizontu h (tā attālums no p vienāds ar h'' attālumu no H'') un atzīmējot galveno punktu G un galvenā punkta pamatu



419. ras.

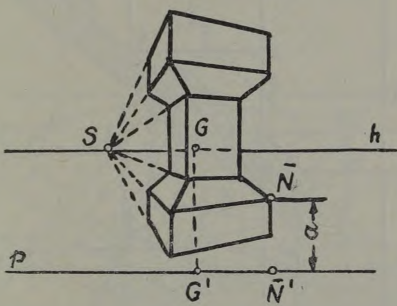
G', punkta N attēlu $\overline{N}$ šai rasējumā dabū, atliekot vispirms uz pamata līnijas nogriezni $G'\overline{N'}$ (no iepriekšējā rasējuma) un uz perpendikula $\overline{N'}\overline{N}$ pret pamata līniju — punkta $\overline{N}''$ attālumu no H''. Tādā veidā šai rasējumā var pārnest arī visus pārējos punktus. Tos pareizā kārtībā savienojot, dabūjam meklēto perspektīvo attēlu.

Stara pēdas metodi perspektīvas konstruēšanai tagad izmanto samērā reti. Tai varētu būt nozīme vienīgi dažādu neregulāru ķermeņu attēlošanā. Ja attēlojamā objekta šķautnēm eksistē dominējoši virzieni, tad izdevīgi konstrukcijai izmantot arī šo šķautņu satekpunktus. Bet tādā gadījumā, kā to tālāk redzēsim, varam iztikt jau ar objekta horizontālo projekciju vien; objekta frontālā projekcija ir vajadzīga tikai, lai izmērītu punktu augstumus virs pamata plaknes H. Par cik tomēr arī iepriekš apskatītajam objektam ir

[1] Šī frontālā projekcija būtu identiska ar perspektīvo attēlu tikai tad, ja attēlu plakni P izvēlētos frontālā stāvoklī.

dominējuši virzieni, noskaidrosim jau šeit šo virzienu satekpunktu konstruēšanu.

Apskatītajā piemērā tādi dominējošie virzieni ir projekciju ass virziens un frontālajai projekciju plaknei perpendikulārais virziens. Tā kā frontālajai projekciju plaknei perpendikulāro šķautņu satekpunkts neatrodas rasējuma robežās, tad ir noteikts tikai projekciju asij paralēlo šķautņu satekpunkts S. 419. rasējumā vilkts paralēlstars OS un noteikts tā krustpunkts ar plakni P (S' uz p, bet S'' uz h''). Punktu S pārnes 420. rasējumā, atliekot pareizā vērsumā uz horizonta nogriezni $GS = G'S'$. Visu projekciju asij paralēlo šķautņu attēli turpinājumā iet caur šo satekpunktu S.



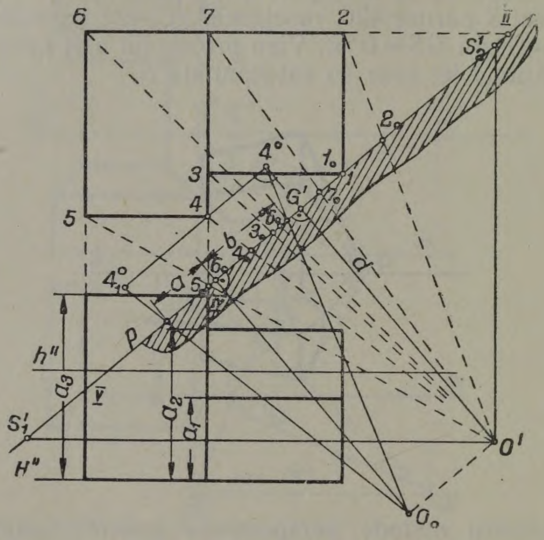
420. ras.

124. Arhitektu metode perspektīvas konstruēšanai; augstuma mērogs. Pēc šīs metodes *konstruē vispirms dotā objekta perspektīvo virsskatu, bet pašu telpas punktu perspektīvos attēlus dabū, atliekot uz perpendikuliem, kas virsskata punktos vilkti pret pamata līniju, attiecīgo punktu augstumus virs pamata plaknes.*

Ilustrēsim šo metodi, konstruējot 421. rasējumā dotā objekta perspektīvu. Lai ietaupītu vietu, objekta horizontālā projekcija šai rasējumā novietota v i r s frontālās projekcijas. Attēlu plakne P vienkāršības dēļ izvēlēta caur objekta vienu šķautni, jo tad šī šķautne attēlojas perspektīvā īstajā lielumā. Pēc tam kad izvēlēts arī redzes punkta pamats O' un noteikts galvenā punkta pamats G', nosakām vispirms abu horizontālajā projekcijā dominējošo virzienu satekpunktu S_1 un S_2 horizontālās projekcijas S'_1 un S'_2 un punktus $1_0, 2_0, \ldots, 7_0$, kuros caur redzes punkta pamatu O' uz objekta horizontālās projekcijas virsotnēm vilktie stari krusto pamata līniju p.

Iezīmējam tagad atsevišķi (422. ras.) pamata līniju p un horizontu h, kura augstums parādīts frontālajā projekcijā. Uz kopēja perpendikula pret pamata līniju izvēlamies galveno punktu G un tā pamatu G'. Šajā attēlā uz pamata līnijas pārnesam (visērtāk ar papīra strēmeli) arī punktus $1_0, 2_0, \ldots, 7_0$, bet satekpunktus S_1 un S_2 dabū, atliekot tieši uz horizonta no galvenā punkta G nogriežņus $S_1G = S'_1G'$ un $GS_2 = G'S'_2$.

Tā kā taisnes caur redzes punkta pamatu O' attēlojas perspektīvā kā vertikālas taisnes (O' ir šo taišņu zuduma punkts), tad perspektīvā virsskata virsotnes jāmeklē uz perpendikuliem[1], kas punktos $1_0, 2_0, \ldots, 7_0$ vilkti pret pamata līniju. Perspektīvā virsskata konstruēšanu sākam no punkta *1* uz pamata līnijas. Taisne *1—2* perspektīvā iet uz satekpunktu S_2, bet virsotne *2* ir šīs taisnes krustpunkts ar vertikālo taisni 2_0—*2*. Velkot no punkta *1* taisni uz otru



421. ras.

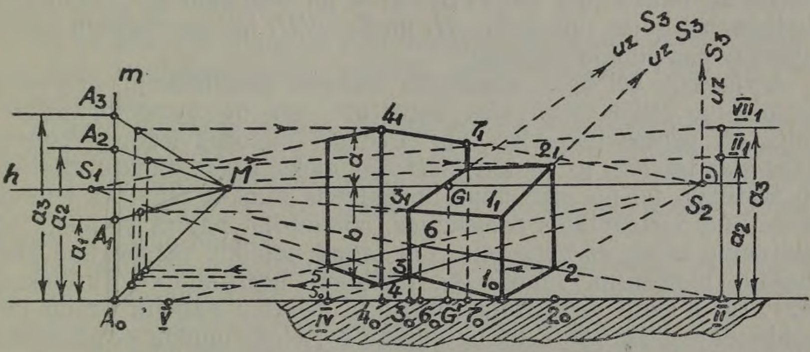
satekpunktu S_1, dabū arī virsotni *3* uz perpendikula 3_0—*3* pret pamata līniju. Analoģiski, izmantojot attiecīgo satekpunktu, nosaka arī pārējās virsotnes *4, 5, 6* un *7*.

Ja punkts *1* neatrastos uz pamata līnijas, tā perspektīvas noteikšanai jāizmanto arī attiecīgās taisnes pēda, kas pamata plaknes taisnēm atrodas uz pamata līnijas. Šī konstrukcija parādīta taisnei *2—6,* kuras pēda *II* noteikta, pagarinot horizontālajā projekcijā malu *6—2* līdz pamata līnijai un pārnesot šī punkta attālumu no galvenā punkta pamata G' perspektīvā attēlā. Arī taisnēm *4—7* un *5—6* pagarinājumā jāiet caur punktiem *IV* un *V* uz pamata līnijas, kas ir attiecīgo telpas taišņu pēdas attēlu plaknē (punkts *IV* rasējumos gadījuma dēļ sakrīt ar punktu 5_0).

Apskatīsim tagad, kā konstruēt pašu perspektīvo attēlu, t. i., kā atlikt perspektīvā atsevišķo telpas punktu augstumus virs pamata plaknes. Tā kā vertikālā šķautne $1—1_1$ atrodas attēlu plaknē, tad perspektīvā tā attēlojas īstajā lielumā. Lai noteiktu vertikālo

[1] Šos perpendikulus varam iedomāties arī kā caur redzes punktu *O* un tā pamatu O' vilkto vertikālo plakņu šķēlumus ar attēlu plakni *P*.

šķautņu $2—2_1$ un $7—7_1$ augšējos punktus 2_1 un 7_1, velkam taisnes $7—2$ pēdas punktā II perpendikulu pret pamata līniju un attiecīgos augstumus a_2 un a_3 (no frontālās projekcijas) atliekam vispirms uz šī perpendikula. Taisnes, kas vilktas no dabūtajiem punktiem II_1 un VII_1 uz satekpunktu S_1, tad iet caur meklētajiem punktiem 2_1 un 7_1. Tas tāpēc, ka telpā taisnes $II—S_1$, $II_1—S_1$ un $VII_1—S_1$ ir horizontālā stāvoklī (kopējais satekpunkts S_1 atrodas uz horizonta), tādēļ figūrai $2—II—II_1—2_1$ resp. $7—II—VII_1—7_1$ telpā atbilst taisnstūris, kura viena mala atrodas attēlu plaknē, tātad attēlojas īstajā lielumā. Ar šiem punktiem 1_1, 2_1 un 7_1 pietiek, lai aplūkotajā gadījumā



422. ras.

pabeigtu perspektīvas konstruēšanu, jo pārējos punktus dabū, izmantojot satekpunktus S_1 un S_2. Arī slīpajām šķautnēm caur punktiem 1_1 un 3_1 jāiet caur to kopējo satekpunktu S_3, kas atrodas ar satekpunktu S_2 uz kopēja perpendikula pret horizontu (rasējumā šis punkts nav parādīts).

Ja viens vai abi satekpunkti S_1 un S_2 neatrodas rasējuma robežās (tuvāk par šo jautājumu sk. 131. nodalījumu), kāda punkta augstuma atlikšanai var izmantot arī patvaļīgu punktu uz horizonta. Velkot no šī punkta vienu staru caur punkta perspektīvo virsskatu, bet otru caur punkta perspektīvu, attālums starp šo staru pēdām ir šī augstuma īstais lielums. Ja ir dots komplicētāks objekts, lai nesaraibinātu rasējumu, ieteicams tomēr punktu augstumus atlikt ar t. s. *augstuma mēroga* palīdzību, kuru pēc tā izmantošanas var izdzēst. Uz patvaļīgas pamata līnijai perpendikulāras taisnes m (sk. 422. ras. pa kreisi) atliek no pamata līnijas visus augstumus a_1, a_2 un a_3 un atzīmētos punktus A_0, A_1, A_2, A_3 savieno ar patvaļīgu punktu M (t. s. mērpunktu) uz horizonta. Taisnēm A_0M, A_1M, A_2M un A_3M telpā atbilst paralēlas horizontālas taisnes, kas atrodas kopējā vertikālā plaknē (šīs plaknes pēda attēlu plaknē ir taisne m). Lai noteiktu tagad perspektīvā kādu punktu, teiksim 4_1, kura īstais augstums virs pamata plaknes ir a_3, velkam no šī punkta perspektīvā virsskata 4 horizontālu taisni līdz taisnei A_0M, t. s.

zemes līnijai, pēc tam no krustpunkta ar A_0M vertikālu taisni līdz t. s. *gaisa līnijai* A_3M un no krustpunkta ar pēdējo — horizontālu taisni līdz vertikālajai taisnei caur perspektīvo virsskatu *4*. Šī otrā horizontālā taisne iet caur meklēto punktu 4_1. Lai nesaraibinātu rasējumu, ieteicams šīs palīgtaisnes nevilkt visā garumā, bet strādāt tikai ar aizcirtumiem.

Ar šī augstuma mēroga palīdzību rasējumā pārbaudīti arī jau iepriekš noteiktie punkti 3_1 un 2_1, izmantojot pārējās gaisa līnijas A_1M un A_2M. Arī iepriekš pa labi konstruētā figūra punktu 2_1 un 7_1 noteikšanai ir tāds augstuma mērogs, kam mērpunkts ir satekpunkts S_1, tikai zemes līnijas S_1—II te iet tieši caur šo punktu virsskatiem, bet gaisa līnijas S_1—II_1 un S_1—VII_1 iet caur pašiem meklētajiem telpas punktu attēliem.

Atzīmēsim vēl kādu apskatītās metodes modifikāciju, pēc kuras perspektīvo attēlu iespējams konstruēt, arī neizmantojot pamata līniju un perspektīvo virsskatu. Pēc šīs metodes iezīmē vispirms vertikālās taisnes, uz kurām jāatrodas meklētajiem punktu attēliem. Šo vertikālo taišņu attālumus no galvenā punkta tāpat kā iepriekš pārnes no horizontālās projekcijas, izmantojot papīra strēmeli, šos attālumus atliek uz horizonta. Lai tagad noteiktu perspektīvā kādu punktu, piemēram, punktu 4_1, izpildām horizontālajā projekcijā (421. ras.) šādu papildkonstrukciju. Turpinām pamata līnijai perpendikulāro taisni $O'G'$ un no punkta *4* (telpas punkta 4_1 horizontālās projekcijas) velkam perpendikulu pret $O'G'$ līdz krustpunktam 4° ar šo taisni. Pārvietojam tagad telpas punktu 4_1 translācijā paralēli pamata līnijai tā, lai tā horizontālā projekcija sakristu ar punktu 4°. Šādā translācijā punkta perspektīvais attēls pārvietosies paralēli horizontam, tātad arī tā augstums nemainīsies. Lai noteiktu, kāds ir punkta attēla augstums virs horizonta šai pārvietotajā stāvoklī, pamata plaknei perpendikulāro plakni caur redzes punktu O un galveno punktu G, kurā atrodas tagad arī telpas punkts 4_1, savietojam ar pamata plakni, pagriežot ap taisni $O'G'$. Tad punkts 4_1 nonāks stāvoklī 4_1^0, redzes punkts O stāvoklī O_0, bet galvenais punkts G stāvoklī G_0, pie kam taisnes nogrieznis 4_0—4_1^0 ir vienāds ar punkta 4_1 augstumu virs pamata plaknes, bet O_0 attālums no O', tāpat G_0 attālums no G', ir vienāds ar horizonta augstumu. Novelkam tagad savietoto redzes staru O_0—4_1^0 un nosakām tā krustpunktu ar pamata līniju p. Šī krustpunkta attālums a no G_0 tad ir punkta 4_1 augstums perspektīvajā attēlā virs horizonta. Tā kā arī punkta 4_1 horizontālā projekcija *4* ir attēlojamā objekta punkts, tad, novelkot redzes staru O_0—4°, dabūjam arī šī punkta attālumu b no horizonta.

Tāpat nosaka arī perspektīvā attēla punktu 2_1. Attēla konstruēšanu pabeidz, izmantojot iepriekš novilktās vertikālās taisnes un abus satekpunktus S_1 un S_2.

125. Redzes punkta un attēlu plaknes izvēle. Vispilnīgāko īstenības ilūziju perspektīvais attēls dod tad, ja to aplūkojam no punkta, kas, attēlu pagatavojot, bija izvēlēts par projekciju centru. Tādēļ dabiski projekciju centru izvēlēties tā, lai aplūkotājam būtu ērtāk apskatīt attēlu tieši no šī redzes punkta. Pieredze rāda, ka, aplūkojot kādu priekšmetu, mēs cenšamies vienmēr nostāties tādā attālumā, lai varētu to ietvert vienā skatienā, galvu negrozot. Šis attālums ir atkarīgs no cilvēka acs redzes leņķa.

Cilvēka acs normālais redzes leņķis vertikālajā virzienā ir 110—125°, bet horizontālajā virzienā 140—175°. Bet ne visi priekšmeti, kas atrodas redzes laukā, redzami vienādi skaidri; tuvāk redzes lauka malām novietotie priekšmeti izskatās miglaini un izplūduši. Visskaidrāk mēs redzam tos priekšmetus, kas atrodas t. s. skaidras redzes lauka robežās. Tam atbilstošais redzes leņķis ir ap 53°.

Tā kā mēs attēlojam ne vien priekšmetu, bet arī daļu tā apkārtnes, tad, izvēloties redzes punktu, ieteicams pieturēties pie šāda priekšraksta:

Redzes punktu izvēlēties vienmēr tā, lai viss attēlojamais priekšmets atrastos taisna riņķa konusa iekšpusē, kura virsotne ir redzes punktā, ass perpendikulāra attēlu plaknei un virsotnes attālums no attēlu plaknes (distance) vienāds ar 1—3 kārtīgu konusa pamata diametru attēlu plaknē.

Ievērojot šos nosacījumus, leņķis pie redzes konusa virsotnes būs 53—18°. Labākais redzes leņķis ir 28°. Tam atbilstošā distance ir vienāda ar divkāršu konusa pamata diametru.

Konstruējot pēc dotajiem ortogonālajiem attēliem kādas celtnes perspektīvu, jāizvēlas tāds redzes punkts, no kura lielākā daļa skatītāju šo celtni aplūkos dabā. Redzes punkta pamatu O' horizontālajā projekcijā (plānā) izvēlas tā, lai leņķis starp stariem, kas vilkti no O' un pieskaras objekta horizontālās projekcijas kontūrai, nepārsniegtu 28° (šim nolūkam var izmantot no papes izgrieztu šī redzes leņķa šablonu). Novelkot šī leņķa bisektrisi, dabūjam galvenā stara horizontālo projekciju, bet, novelkot šai bisektrisei perpendikulāru taisni (parasti caur kādu horizontālās projekcijas kontūras virsotni), dabūjam attēlu plaknes horizontālo projekciju — pamata līniju p.

Ja, novelkot pēc tam vēl citus redzes starus uz raksturīgākajiem objekta punktiem, izrādītos, ka dažas raksturīgas objekta šķautnes viena otru aizsedz, redzes punkts ir jāmaina, kaut arī redzes leņķis pie tam pārsniegtu 28°. Dažreiz, mainot redzes punktu, var atkāpties arī no noteikuma, lai pamata līnija būtu perpendikulāra redzes leņķa bisektrisei. *Nekādā ziņā tomēr galvenā stara projekcija nedrīkst atrasties ārpus redzes leņķa vidējās trešdaļas.*

Lielāku redzes leņķi izmanto iekštelpu attēlošanai, jo izvēlēties tālāk redzes punktu bieži traucē telpas sienas. Lai labāk izceltu attēlojamās telpas dziļumu, dažreiz redzes punktu izvēlas arī telpas ārpusē, t. i., iedomājas priekšējo sienu izņemtu. Izmantot konsekventi šo paņēmienu tomēr nav ieteicams, jo ar to sagrozām īstenību. Nav ieteicams izvēlēties arī pārāk lielu distanci (pārāk mazu redzes leņķi), jo tad perspektīvie attēli jau līdzīgi ortogonālajiem attēliem.

Redzes punkta izvēli ietekmē arī attēlojamā objekta augstums. Ja augstums ievērojami pārsniedz platumu, distanci ieteicams ņemt vienādu ar objekta divkāršu augstumu virs horizonta.

Par horizonta (redzes punkta augstuma) izvēli nevar dot stingrus priekšrakstus. Parasti horizontu izvēlas normāla auguma cilvēka acs augstumā, tātad 1,6—1,8 m virs pamata plaknes, atliekot to mērogā, kādā konstruēti objekta ortogonālie attēli. Zems horizonts augstiem objektiem vēl vairāk izceļ to grandiozitāti. Augsts horizonts dod attēlu ar labāku priekšstatu par celtnes plānu. Attēlojot celtņu grupu, horizontu izvēlas parasti augstu, lai priekšējās celtnes neaizsegtu pārējās. Dažreiz t. s. putna perspektīvās horizonta augstums ir 100 m un pat vēl vairāk. Augstu horizontu izvēlas arī tad, ja jāattēlo atsevišķas celtnes, kam ir komplicēts plāns.

Atkarībā no attēlu plaknes novietojuma pret objektu izšķir *frontālo perspektīvu* un *stūra perspektīvu*. Frontālā perspektīvā attēlu plakni novieto paralēli vienam no dominējošajiem virzieniem, stūra perspektīvā — slīpi[1]. Frontālajā perspektīvā parasti attēlo simetriski apbūvētus laukumus un ielas, bet atsevišķas celtnes attēlo stūra perspektīvā. Arī iekštelpas palaikam attēlo frontālajā perspektīvā, pie kam redzes punktu tad parasti izvēlas tuvāk vienai telpas sānu sienai, lai otra siena būtu labāk pavērta skatam un lai attēls nebūtu vienmuļš.

Tā kā grūti iepriekš paredzēt, cik labs būs perspektīvais attēls, ieteicams izgatavot iepriekš vairākus objekta shematiskus attēla variantus un, tikai iegūstot apmierinošu rezultātu, pabeigt perspektīvas konstruēšanu.

126. Perspektīvu palielinājumi. Kā jau agrāk aizrādīts, no perspektīvā attēla tikai tad iegūstam tādu pašu redzes iespaidu kā no paša telpas objekta, ja to aplūkojam no redzes punkta *O*. Bet aplūkotājs ne vienmēr rēķināsies ar izvēlēto distanci; parasti tā viņam nemaz nav zināma. Līdz šim neesam pievērsuši uzmanību noteikumam, ka projekciju centrs jāizvēlas tā, lai aplūkotājam būtu ērtāk apskatīt attēlu tieši no šī redzes punkta. Citiem vārdiem, neesam rēķinājušies ar t. s. normālo redzes attālumu.

Cilvēka normālais redzes attālums, lasot grāmatu, ir 20—25 cm, tādēļ arī izvēlētā distance nedrīkstētu būt par to mazāka.[2] Lielākus attēlus aplūko no vēl lielāka attāluma. Bet izvēlēties šādu distanci mums līdz šim kavēja ierobežotais rasēšanas laukums, jo arī attie-

[1] Leņķi, ko veido pamata līnija ar vienu no dominējošiem virzieniem, stūra perspektīvā ieteicams izvēlēties apmēram vienādu ar 30°, bet nekad 45°, jo tad attēls iznāk monotons.

[2] Šī fakta nozīmi nedrīkst tomēr pārspīlēt. Ja redzes leņķis paliek normas robežās, tad arī attēli, kas pagatavoti ar mazāku distanci, nedod sliktu vai nepareizu iespaidu, aplūkojot tos no lielāka attāluma. Lasītājs par to var pārliecināties, aplūkojot, piemēram, 422. rasējumu, kur distance ir niecīga (ap 4 cm). Tāpat arī, ja 420. rasējumā attēlotais objekts izskatās greizs, tad tam par iemeslu nav tik daudz niecīgā distance, bet gan tas apstāklis, ka objekta augstums ievērojami pārsniedz platumu (redzes leņķis vertikālajā virzienā te ir ap 60°).

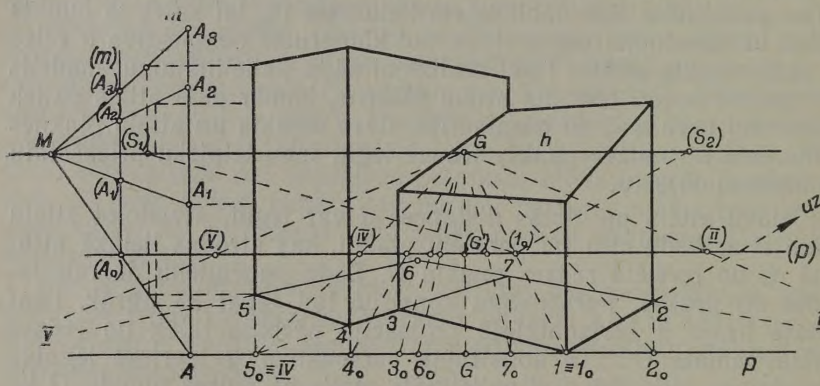
cīgie ortogonālie attēli (lai distance nepārsniegtu trīskāršu redzes konusa pamata diametra garumu) tad būtu jāzīmē lielākā mērogā. Bez tam dominējošo virzienu satekpunkti tad iznāktu ļoti tālu no galvenā punkta un būtu grūti tos izmantot attēla konstruēšanai. Lai no šīm grūtībām izvairītos, distanci var sākumā izvēlēties mazāku un pēc tam perspektīvo attēlu palielināt.

Tādi palielinājumi ir nepieciešami arī šādu apsvērumu dēļ. Perspektīvos attēlus parasti konstruē lieliem objektiem, kuru ortogonālie attēli vienmēr ir doti samazinātā mērogā. Pēc šiem ortogonālajiem attēliem konstruētā perspektīva tātad nav paša objekta, bet tā samazinātā m o d e ļ a attēls. Bet, tā kā šo modeli varam iedomāties palielinātu līdz dabiskajam lielumam tā, lai katrs tā punkts paliktu uz sākotnējā redzes stara, tad konstruētā perspektīva ir reizē arī paša objekta attēls. Tikai realizējot šādu palielinājumu, modelis būtu jāaizbīda ļoti tālu aiz attēlu plaknes, kamēr pats attēls paliek nesamērīgi tuvu acij. Šī nesamērība starp objekta un attēlu plaknes attālumiem no redzes punkta traucē iegūt labu telpisku priekšstatu par attēloto objektu.

Lielāku attēlu pie dotās distances d var iegūt, atvietojot attēlu plakni P ar kādu citu tai paralēlu plakni, kas atrodas lielākā attālumā d_1 no izvēlētā redzes punkta O. Šādu paņēmienu dažreiz izmanto arī praksē. Perspektīvu konstruē tad tāpat kā agrāk, tikai pamata līniju p horizontālajā projekcijā pārbīda tālāk no redzes punkta pamata O'. Tā konstruētā perspektīva ir iepriekš iegūtās perspektīvas attiecībā $d_1:d$ palielināts attēls ar redzes punktu O kā homotēcijas (līdzības) centru. Ik divi abu attēlu punkti (arī taišņu satekpunkti) tātad atrodas uz kopēja redzes stara caur punktu O. Vienīgais izņēmums ir taišņu pēdas, kas šai homotēcijā neatbilst viena otrai.

Tā kā taišņu pēdām ir liela nozīme perspektīvas konstruēšanā, tad ir izdevīgāk attēlu palielināt tā, lai arī katrs pēdas punkts pārietu tās pašas taisnes pēdas punktā. To var izdarīt, ja p a r l ī d z ī b a s c e n t r u i z v ē l a s n e v i s r e d z e s p u n k t u O, b e t g a l v e n o p u n k t u G un ja palielina ne vien attēlu, bet arī pašu telpas objektu un tā attālumu no attēlu plaknes un arī distanci d. Ja palielinātā distance ir d_1, tad palielinājuma mērogs ir $d_1:d$. Patvaļīgs objekta punkts N šajā palielinājumā pārvietojas pa staru GN jaunā stāvoklī N_1 tā, ka $GN_1:GN=d_1:d$; tas pats notiek ar šī punkta attēlu $\overline{N}$. Tā kā līdzības centrs G atrodas attēlu plaknē, tad pati attēlu plakne paliek uz vietas, bet katrs attēla punkts $\overline{N}$ pārvietojas pa staru $G\overline{N}$ šai plaknē jaunā stāvoklī $\overline{N}_1$ tā, ka $G\overline{N}_1:G\overline{N}=d_1:d$. Arī redzes punkts O pāriet redzes punktā O_1 uz tā paša galvenā stara, pie kam $O_1G=d_1$.

Šādā veidā mērogā $d_1:d$ palielinātu attēlu iespējams dabūt arī tieši, nemaz nekonstruējot iepriekš mazo attēlu pie distances d. Tiešā konstrukcija parādīta 423. rasējumā, kur attēlots perspektīvā 421. rasējumā dotais objekts. Izvēloties horizontu h un galveno punktu G uz tā, zīmējam vispirms nepalielinātā attēla pamata līniju (p) un uz tās atzīmējam galvenā punkta pamatu (G'). Turpinām tagad taisni $G(G')$ zem pamata līnijas (p) un atzīmējam galvenā punkta pamatu G' palielinātajam attēlam tā, lai attiecība $GG':G(G')$ būtu vienāda ar izvēlēto palielinājumu $d_1:d$ (rasējumā izvēlēts divkāršs palielinājums, bet vispār attiecība $d_1:d$ var būt patvaļīgs, arī nesamērojams skaitlis). Caur G' paralēli (p) novelkam palielinātā attēla pamata līniju p. Pārnesam tagad no ortogonālā attēla uz mazā attēla pamata līnijas (p) tāpat kā iepriekš punktus 1_0, 2_0, ..., 7_0, kā arī pēdas punktus II, IV un V un no galvenā punkta G velkam caur šiem punktiem starus līdz krustpunktiem ar palielinātā attēla



423. ras.

pamata līniju p. Palielinātā attēla perspektīvā virsskata virsotnes $1, 2, \ldots, 7$ atrodas uz perpendikuliem, kas punktos $1_0, 2_0, \ldots, 7_0$ vilkti pret pamata līniju p, bet perspektīvā virsskata malas iet caur pēdām I, II, IV un V uz satekpunktiem S_1 un S_2, kuru attālumi no galvenā punkta G izmainīti tai pašā attiecībā. Ja šie satekpunkti iznāk tālu ārpus rasējuma robežām, tad bez tiem var arī iztikt, ja vien ievēro šādu apsvērumu.[1] Tā kā palielinātā attēla taisnes ir paralēlas atbilstošajām mazā attēla taisnēm, tad, piemēram, malai $1—2$ jābūt paralēlai (1_0) — (S_2), bet malai $1—3$ paralēlai (1_0) — (S_1) utt., kur (S_1) un (S_2) ir mazā attēla satekpunkti.

Pēc tam kad perspektīvais virsskats gatavs, paša objekta punktu perspektīvas dabū, izmantojot palielinātā augstuma mērogu, kā tas parādīts rasējumā pa kreisi.

Ja palielinājuma attiecība $d_1:d$ ir vesels skaitlis, visus lielumus uz pamata līnijas p un uz augstuma mēroga m var atlikt attiecīgi palielinātus arī tieši. Ja ortogonāliem attēliem ir konstruēts lineārais mērogs, tad palielinātā attēla konstruēšanai var pagatavot atsevišķu lineāro mērogu arī šim perspektīvajam attēlam.

[1] Par konstrukcijām nesasniedzamu satekpunktu gadījumā sk. 131. nodalījumu.

Atgādināsim vēlreiz, ka starp abiem palielinājuma veidiem ir atšķirība. Ja palielinājumu izdara, pārbīdot tālāk no redzes punkta attēlu plakni, tad pamata līnijas attālums no horizonta nemainās. Ja palielinājumu izdara no galvenā punkta kā homotēcijas centra, tad attiecībā $d_1{:}d$ izmainās arī pamata līnijas attālums no horizonta.

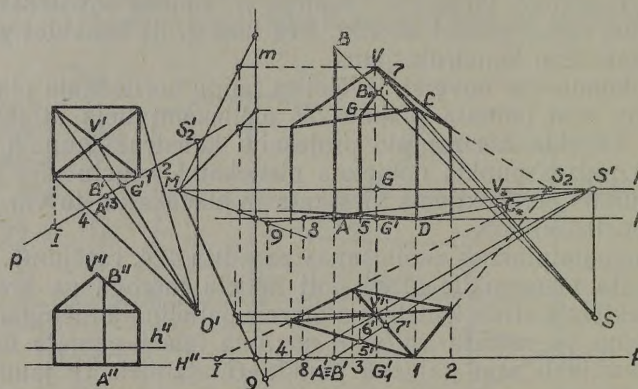
127. Pamata plaknes nolaišana vai pacelšana. Konstruējot kāda arhitektūras objekta perspektīvu ar normālu horizonta augstumu (1,6—1,8 m), šī objekta perspektīvais virsskats iznāk stipri saspiests; perspektīvā virsskata taisnēm ir slīdoša krustošanās, un krustpunktus nevar precīzi noteikt. Bez tam grūti izmantot perspektīvo virsskatu ēnu konstrukcijām.

Šos trūkumus var novērst, izvēloties jaunu horizontālu plakni H_1, kas atrodas zem pamata plaknes H pietiekami lielā attālumā no horizonta. Objekta horizontālo projekciju konstruē jaunajā plaknē H_1. Tā kā redzes punkts novietots pietiekami augstu virs plaknes H_1, tad jaunais perspektīvais virsskats ir plašāks un to var ērti izmantot konstrukcijām.

Šāda pamata plaknes «nolaišana» parādīta 424. rasējumā. Attēlojamā objekta ortogonālie attēli doti nelielā mērogā pa kreisi, bet pats perspektīvais attēls konstruēts divreiz palielinātā mērogā. Patvaļīgā attālumā no pamata līnijas p novilkta jauna pamata līnija p_1, uz kuras vertikāli zem galvenā punkta G atzīmēts tā jaunais pamats G'_1. Uz šīs jaunās pamata līnijas no horizontālās projekcijas pārnesti punkti *1, 2, 3, 4* un *I*, divreiz palielinot to attālumus līdz G'. Pazeminātā virsskata perspektīvas konstruēšanai izmantoti tie paši satekpunkti S_1 un S_2, jo abas pamata plaknes ir paralēlas un tātad ir paralēlas arī abu horizontālo projekciju atbilstošās taisnes šajās plaknēs (rasējumā satekpunkts S_1 nav parādīts, jo tas atrodas ārpus rasējuma robežām). Punktu augstumu atlikšanai perspektīvā izmantots augstuma mērogs, kas papildināts ar pazemināto zemes līniju caur punktu, kurā mēroga taisne m krusto pazemināto pamata līniju p_1. Paši augstumi uz mēroga taisnes atlikti (divreiz palielināti) no īstās pamata līnijas p.

Rasējumā parādīts arī, kā šo pazemināto perspektīvo virsskatu izmantot ēnu konstrukcijām. Noteikta ēna, ko uz attēlotā objekta met vertikāls stabs AB. Staba ēna pamata plaknē H sākas punktā A un iet virzienā uz saules staru virsskata satekpunktu S'. Lai noteiktu precīzāk punktu *5*, kurā ēna pāriet ēkas vertikālajā plaknē, nosakām vispirms šī punkta pazemināto virsskatu *5'*, velkot caur staba pazemināto virsskatu $A' \equiv B'$ staru uz satekpunktu S'. Ar pazeminātā virsskata palīdzību nosaka arī taisni *6—7*, pa kuru gaismas plakne caur AB krusto ēkas jumta priekšējo plakni. Uz šīs taisnes atrodas staba galapunkta B ēna B_*. To dabū, velkot no B gaismas staru uz saules satekpunktu S.

Bez tam vēl rasējumā noteikta ēna, ko pamata plaknē H met ēkas vertikālā šķautne CD un virsotne V. Šķautnes CD ēna iet virzienā uz satekpunktu S' līdz punktam, kurā gaismas stars CS krusto tā perspektīvo virsskatu DS'. Tā kā virsotnes V perspektīvais virsskats nav konstruēts, tad tā ēnas noteikšanai izmantots pazeminātais virsskats V'. Caur šo punktu līdz krustpunktam 8 ar pamata līniju p_1 velk gaismas stara pazemināto virsskatu $S'V'$ un no atbilstošā punkta uz pamata līnijas p — gaismas stara virsskatu 8—S'. Pēdējā krustpunkts ar gaismas staru VS ir meklētais ēnas punkts V_*. Ja punkts 8 iznāk ārpus rasējuma robežām, tā vietā var izmantot arī punktu 9, kurā stars $S'V'$ krusto pazemināto zemes līniju (sk. rasējumu).



424. ras.

Pamata plaknes nolaišanas vietā dažos gadījumos ir izdevīgāk izdarīt tās p a c e l š a n u. Tādā gadījumā jaunā pamata līnija jāizvēlas pietiekamā augstumā v i r s horizonta. Visas konstrukcijas izpilda analoģiski.

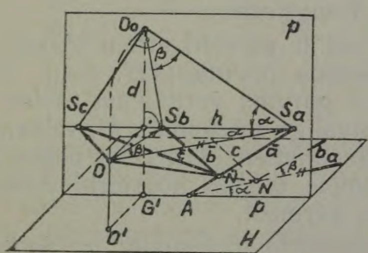
Pamata plaknes nolaišanai resp. pacelšanai ir vēl tā priekšrocība, ka visas palīglīnijas tad iznāk ārpus perspektīvā attēla aizņemtā laukuma. Pēc perspektīvā attēla pagatavošanas perspektīvo virsskatu var ērti izdzēst.

128. Leņķu mērīšana un dalīšana perspektīvā; savietošanas metode perspektīvas konstruēšanai. Konstruējot objekta perspektīvu, ieteicams objekta ortogonālos attēlus izmantot tikai galveno līniju noteikšanai un pārējās līnijas iekonstruēt perspektīvā attēlā tieši, neizmantojot ortogonālos attēlus. Lai to izdarītu, ir svarīgi zināt, kā pēc perspektīviem attēliem noteikt taisnes nogriežņu un leņķu īstos lielumus, kā uz dotās taisnes atlikt dotā garuma taisnes nogriezni, kā konstruēt taisni, kas ar doto taisni veidotu dotu leņķi, un kā dalīt doto taisnes nogriezni vai leņķi iepriekš dotajā attiecībā.

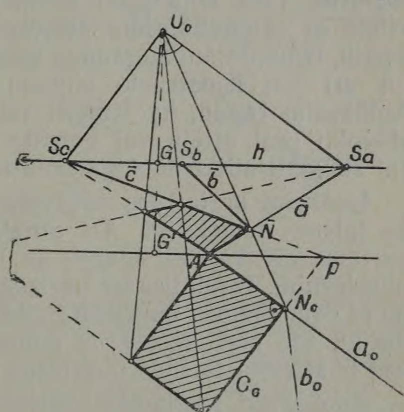
Aplūkosim vispirms leņķu attēlošanu, pie kam praktiskām vajadzībām (perspektīvā virsskata konstruēšanai) pietiek aplūkot leņķus pamata plaknē. Pieņemsim, ka caur patvaļīgu punktu N pamata plaknē ir jānovelk horizontāla taisne a, kas veidotu doto leņķi α ar pamata līniju p (425. ras.). Šīs taisnes satekpunktu S_a, kā zināms, dabū, velkot no redzes punkta O paralēlstaru līdz krustpunktam ar horizontu. Ievērosim, ka šis paralēlstars OS_a veido leņķi α arī ar horizontu.

Pieņemsim tagad, ka horizonta plakne savietota ar attēlu plakni P, pagriežot to ap horizontu. Tad redzes punkts nonāks stāvoklī O_0 uz perpendikula GO_0 pret horizontu attālumā d no galvenā punkta G, bet paralēlstars OS_a — stāvoklī O_0S_a. Lai noteiktu tātad perspektīvo attēlu taisnei, kas telpā veido leņķi α ar pamata līniju, no savietotā redzes punkta jāvelk stars O_0S_a, kas veido doto leņķi ar horizontu; dabūtais krustpunkts S_a ar horizontu ir meklētais taisnes satekpunkts.

Pieņemsim tagad, ka no tā paša punkta N jānovelk otra horizontāla taisne b, kas ar taisni a dotu leņķi β. Tā kā arī abi para-



425. ras.



426. ras.

lēlstari veido šo leņķi β, tad taisnes b satekpunkta S_b noteikšanai no savietotā redzes punkta O_0 jāvelk stars O_0S_b, kas ar staru O_0S_a veido leņķi β. Analoģiski, lai no punkta N novilktu taisni c, p e r p e n d i k u l ā r u dotajai taisnei a, no punta O_0 jānovelk perpendikulāri O_0S_a stars O_0S_c, kura krustpunkts S_c ar horizontu ir meklētās taisnes satekpunkts. Savietoto redzes punktu O_0 tāpat var izmantot arī kāda leņķa sadalīšanai dotajā attiecībā.

Pieņemsim tagad, ka arī pamata plakne H savietota ar attēlu plakni, pagriežot to t a i p a š ā virzienā ap pamata līniju p. Novietojot attēlu plakni P rasējuma plaknē, dabūjam 426. rasējumu, kur plakni norobežotājas taisnes atmestas. Taisnes a, b un c savietotā stāvoklī a_0, b_0 un c_0 ir attiecīgi paralēlas virzieniem O_0S_a, O_0S_b un O_0S_c. Visas plaknes H figūras un to attēli plaknē P ir p e r s p e k t ī v i r a d n i e c ī g a s figūras ar redzes punktu O kā perspektivitātes centru un pamata līniju p kā perspektivitātes asi. Šī perspektivitāte saglabājas arī pēc pamata plaknes savietošanas, tikai perspektivitātes centru O nomaina savienotais redzes punkts O_0 (sk. 85.

nodalījumu). Šādu pamata un horizonta plaknes savietošanu tādēļ var izmantot, lai ar šīs perspektivitātes palīdzību konstruētu attēlojamā objekta perspektīvo virsskatu.

Rasējumā šī metode ilustrēta, konstruējot perspektīvo attēlu taisnstūrim, kura malas balstās uz taisnēm a_0 un c_0. Ja kādam perspektivitātes staram ar atbilstošām taisnēm ir slīpa krustošanās, taisnstūra virsotņu attēlu konstruēšanai var izmantot arī, piemēram, taisnes, kas ir perpendikulāras pamata līnijai. Tām perspektivitātē atbilstošās taisnes iet caur galveno punktu G — šo taišņu satekpunktu.

129. Taisnes nogriežņu mērīšana, atlikšana un dalīšana perspektīvā. Līdz šim esam aplūkojuši vienīgi, kā atlikt perspektīvā attēlā ar ortogonālajām projekcijām dotos augstumus. Lai to izdarītu, izmantojām augstuma mērogu. Augstuma mērogu var izmantot arī jau konstruēto objekta vertikālo šķautņu mērīšanai. Aplūkosim tagad, kā izmērīt taisnes nogriežņus, kas ir kādā citā stāvoklī pret attēlu vai pamata plakni, resp. kā uz dotās taisnes šai stāvoklī atlikt dotā garuma taisnes nogriezni.

Iesāksim ar taisnes nogriežņiem, kas ir paralēli attēlu plaknei. Ja taisnes nogrieznis AB atrodas pamata plaknē (427. ras.), tā garumu var noteikt līdzīgi, kā nosaka garumu vertikālam taisnes nogrieznim. Izvēloties uz horizonta patvaļīgu mērpunktu M, velkam no tā caur taisnes nogriežņa attēla galapunktiem starus līdz pamata līnijai. Šie stari izšķeļ uz pamata līnijas taisnes nogriezni A_0B_0, kas ir attēlotā taisnes nogriežņa īstais garums[1].

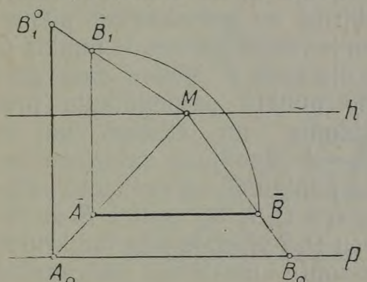
Analoģiski rīkojamies, atrisinot apgriezto uzdevumu: uz dotās taisnes no dotā punkta A atlikt dotā garuma taisnes nogriezni AB. Caur punktu $\bar{A}$ novelkam staru MA_0, atliekam uz pamata līnijas doto garumu A_0B_0 un savienojam punktu B_0 ar mērpunktu M. Taisne B_0M tad atšķels uz taisnes attēla meklētā taisnes nogriežņa attēla otru galapunktu $\bar{B}$.

Iepriekšējo uzdevumu varēja atrisināt arī savādāk. Pieņemsim, ka taisnes nogrieznis AB pagriezts ap punktu A pamata plaknei perpendikulārā stāvoklī AB_1. Tā kā taisnes nogrieznis paliek tai pašā frontālajā plaknē, tad tā perspektīvais garums nemainās. Bet taisnes nogriežņa īsto garumu $A_0B_1^0$ šai stāvoklī var noteikt, izmantojot augstuma mērogu.

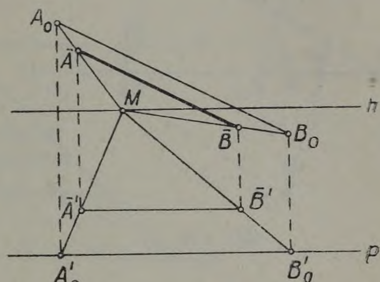
Tāpat varētu rīkoties, ja dots patvaļīgs taisnes nogrieznis (428. ras.). Labāk tomēr izmantot citu paņēmienu: no patvaļīga mērpunkta M velkam caur taisnes nogriežņa perspektīvā virsskata galapunktiem $\bar{A}'$ un $\bar{B}'$ starus līdz pamata līnijai un šo staru krustpunktos A_0' un B_0' — perpendikulus pret pamata līniju; savienojot

[1] Patiesībā — attiecīgā mērogā saīsinātais garums. Vienkāršības dēļ pieņemam, ka perspektīvais attēls ir konstruēts dabiskajā lielumā.

punktus A_0 un B_0, kuros šos perpendikulus krusto stari $M\bar{A}$ un $M\bar{B}$, dabūjam taisnes nogriežņa AB īsto garumu A_0B_0. Tā kā $A_0B_0 \| \bar{A}\bar{B}$, tad var iztikt arī ar vienu no punktiem A_0' vai B_0'. To der ievērot, atliekot uzdotās taisnes nogriezni. Ja dotais taisnes nogrieznis AB ir paralēls reizē pamata plaknei, tā garuma noteikšanai pietiek noteikt tā horizontālās projekcijas $A'B'$ īsto garumu. Lai atliktu doto taisnes nogriezni uz šādas taisnes, to atliek vispirms uz taisnes horizontālās projekcijas un galapunktus ar perpendikuliem pret plakni H pārnes uz pašas taisnes.



427. ras.

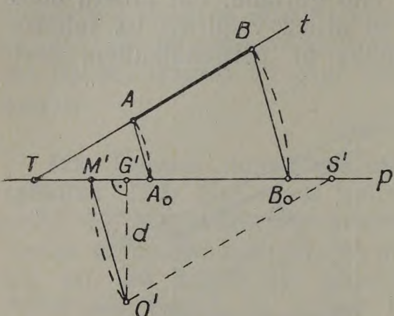


428. ras.

Iepriekšējos rasējumos izpildītās konstrukcijas var interpretēt telpiski kā dotā taisnes nogriežņa un tā horizontālās projekcijas translācijas pārvietojumu virzienā no redzes punkta O uz mērpunktu M līdz sakrišanai ar attēlu plakni P. Ja taisnes nogrieznis ir patvaļīgā stāvoklī kā pret pamata plakni H, tā arī pret attēlu plakni P, tad tādā translācijā to nav iespējams savietot ar attēlu plakni. Lai noskaidrotu, kā noteikt taisnes nogriežņa īsto garumu šai vispārīgajā gadījumā, pieņemsim vispirms, ka taisnes nogrieznis atrodas pamata plaknē H. Šāda taisnes nogriežņa īsto garumu var dabūt, pagriežot to ap tā nesējas taisnes t pēdu T, kamēr tas sakrīt ar pamata līniju. Lai labāk saprastu šo pagriešanu, aplūkosim 429. rasējumu, kur parādītas redzes punkta O un taisnes nogriežņa AB horizontālās projekcijas. Pagriežot taisnes nogriezni stāvoklī A_0B_0, tā galapunkti A un B pārvietojas pa riņķa lokiem, kuru hordas AA_0 un BB_0 ir savstarpēji paralēlas un atrodas plaknē H. Ja ir zināms šo rotācijas hordu virziens, tad punktus A_0 un B_0 uz pamata līnijas var noteikt, velkot šai virzienā caur punktiem A un B starus līdz krustpunktiem ar pamata līniju. Ja tālāk ir zināms šo rotācijas hordu satekpunkts, tad ir iespējams punktus A_0 un B_0 noteikt arī perspektīvā attēlā.

Rotācijas hordu satekpunktu M dabū, velkot no redzes punkta O paralēlstaru līdz krustpunktam ar horizontu. Ja OS ir taisnes t paralēlstars, kas nosaka tās satekpunktu S, tad telpā trīsstūri TAA_0 un SOM ir līdzīgi, un, tā kā $TA_0=TA$, tad arī $SM=SO$. No šejienes izriet šāds paņēmiens rotācijas hordu satekpunkta — mērpunkta M noteikšanai: *patvaļīgas pamata plaknes taisnes mērpunktu M dabū, atliekot uz horizonta no šīs taisnes satekpunkta S redzes punkta O attālumu līdz šim satekpunktam.*

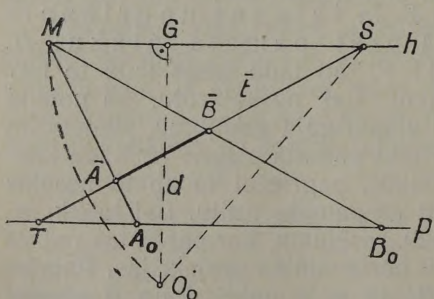
Tā kā taisni t varējām pagriezt arī uz otru pusi, tad nav svarīgi, uz kuru pusi no satekpunkta S mērpunktu M atliek. Lai izvairītos no slīdošas krustošanās, ieteicams tomēr to atlikt vienmēr tajā pusē no satekpunkta, kurā atrodas taisnes pēda T.



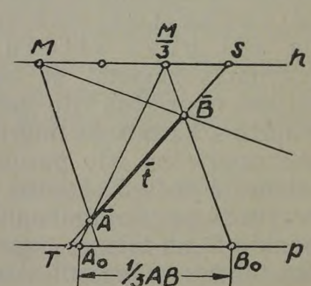
429. ras.

Lai izpildītu konstrukciju perspektīvajā attēlā (sk. 430. ras.), atšķirībā no iepriekšējiem piemēriem ir jāzina galvenais punkts G un distance d. Velkot caur galveno punktu perpendikulu pret horizontu un atliekot uz tā $GO_0 = d$, dabūjam savietoto redzes punktu O_0 un savietoto paralēlstaru O_0S. No centra S ar rādiusu O_0S vilktais loks tad krusto horizontu meklētajā mērpunktā M (garumu O_0S var atlikt arī tieši, nemaz nesavienojot O_0 ar S un nevelkot riņķa loku). Taisnes $M\bar{A}$ un $M\bar{B}$ ir rotācijas hordu attēli, un tās izšķeļ uz pamata līnijas īstā garuma taisnes nogriezni A_0B_0.

Gadījumā, ja mērpunkts iznāk ārpus rasējuma laukuma (kas gadās samērā reti) vai mērījamais taisnes nogrieznis ir tik garš, ka tā īstā garuma taisnes nogrieznim pietrūkst vietas uz pamata līnijas



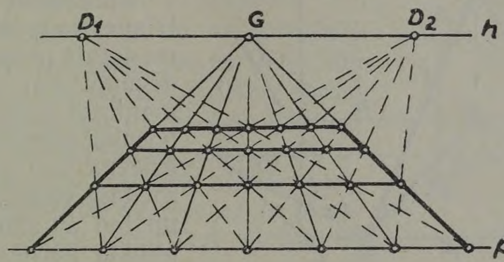
430. ras.



431. ras.

(sk. 431. ras.), tad var izmantot t. s. daļu jeb *reducētos mērpunktus* $\frac{M}{n}$, kuru attālumi no satekpunkta S ir $\frac{1}{n}$ no īstā mērpunkta M attāluma. Ja, piemēram, mērpunkta M vietā izmanto mērpunktu $\frac{M}{3}$, tad viegli konstatēt, ka no šī mērpunkta vilktie stari caur taisnes nogriežņa attēla galapunktiem izšķeļ uz pamata līnijas taisnes nogriezni A_0B_0, kura garums ir tikai $\frac{1}{3}$ no dotā taisnes nogriežņa īstā garuma. Tāpat, ja šādu mērpunktu $\frac{M}{3}$ izmanto dotā taisnes nogriežņa AB atlikšanai uz dotās taisnes, tad uz pamata līnijas jāatliek nevis viss taisnes nogrieznis AB, bet tikai tā trešdaļa.

Šādus reducētos mērpunktus ērti izmantot taisnes nogriežņu atlikšanai palielinātā perspektīvā attēlā. Kā reducētos mērpunktus



432. ras.

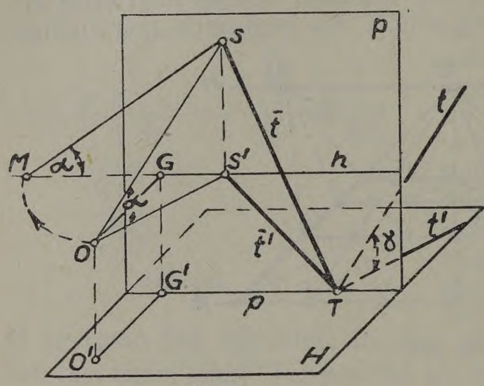
šai gadījumā var izlietot «mazā attēla» mērpunktus. Atliekot uz «lielā attēla» pamata līnijas ortogonālajā projekcijā izmērītos taisnes nogriežņus nesaīsinātus, dabūjam šo taisnes nogriežņu perspektīvos attēlus ar vajadzīgo palielinājumu.

Lai noteiktu īsto garumu taisnes nogrieznim, kas ir patvaļīgā stāvoklī pret pamata plakni, nosaka vispirms mērpunktu tā horizontālajai projekcijai un tālāk rīkojas tāpat kā 428. rasējumā. Ja taisnes nogrieznis ir paralēls pamata plaknei, tā garumu nosaka, izmērījot tā horizontālās projekcijas garumu. Arī dotā taisnes nogriežņa atlikšanu uz šādas horizontālas taisnes izdara, atliekot doto taisnes nogriezni vispirms uz taisnes horizontālās projekcijas.

Attēlu plaknei perpendikulāru taišņu mērpunkti ir distancpunkti D_1 un D_2. Šie distancpunkti 432. rasējumā izmantoti, lai pamata plaknē iezīmētu kvadrātu tīklu, kuru malas ir paralēlas un perpendikulāras pamata līnijai. Taisnēm caur satekpunktiem D_1 un D_2 tad telpā atbilst taisnes, kas veido 45° leņķus kā ar pamata līniju p, tā ar taisnēm, kas ir perpendikulāras šai pamata līnijai, tātad paralēlas kvadrātu diagonālēm.

Attēlu plaknei paralēlām taisnēm satekpunkts atrodas bezgalībā. Tad, kā redzējām, par mērpunktu var izmantot ikvienu horizonta punktu.

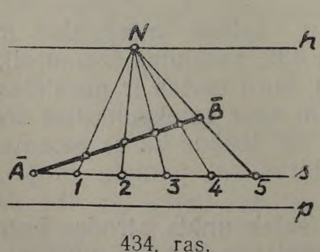
Mērpunktu var izmantot arī, lai noteiktu patvaļīgas taisnes satekpunktu. Aplūkosim šai sakarībā 433. rasējumu, kur parādīta satekpunkta noteikšana taisnei t, kas ar pamata plakni H, t. i., ar savu horizontālo projekciju t', veido leņķi α. So pašu leņķi tad veido arī taišņu t un t' paralēlstari OS' un OS. Iedomāsimies tagad trīsstūri OSS' savietotu ar attēlu plakni P, pagriežot to ap leņķa α plaknes satektaisni SS'. Redzes punkts O tad nonāks punktā M — taisnes horizontālās projekcijas t' mērpunktā. Lai noteiktu tātad patvaļīgas taisnes satekpunktu S, no tās horizontālās projekcijas t' mērpunkta M jānovelk stars, kas veido leņķi α ar horizontu, un jānosaka tā krustpunkts ar perpendikulu, kas taisnes horizontālās projekcijas satekpunktā S' vilkts pret horizontu.



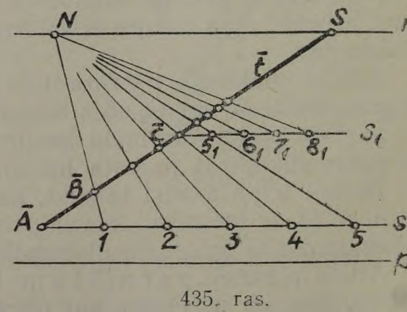
433. ras.

Aplūkosim tagad kāda taisnes nogriežņa sadalīšanu dotajā proporcijā. Šo uzdevumu var atrisināt, izmantojot mērpunktu, proti, nosakot iepriekš taisnes nogriežņa īsto garumu, izdarot tajā vajadzīgo dalījumu un tad ar stariem no mērpunkta pārnesot šo dalījumu perspektīvajā attēlā. Izrādās tomēr, ka var iztikt bez mērpunkta un uzdevumu atrisināt vienkāršāk. Tā kā patvaļīga taisnes nogriežņa sadalīšanai dotajā proporcijā pietiek sadalīt šai proporcijā tā horizontālo projekciju (dalījuma punktus pēc tam var pārnest ar perpendikuliem pret plakni H uz paša taisnes nogriežņa), tad aplūkosim tikai pamata plaknē novietotu taisnes nogriežņu dalīšanu dotajā proporcijā.

Lai sadalītu perspektīvā attēloto taisnes nogriezni AB (434. ras.), piemēram, piecās vienlīdzīgās daļās, velkam caur attēla galapunktu



434. ras.

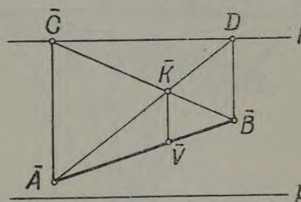


435. ras.

$\bar{A}$ pamata līnijai paralēlu staru s un atliekam uz tā no punkta $\bar{A}$ piecus patvaļīga garuma, bet vienādus taisnes nogriežņus. Velkot tagad caur punktu 5 un taisnes nogriežņa attēla otru galapunktu $\bar{B}$ staru līdz krustpunktam N ar horizontu un no punkta N starus uz pārējiem punktiem *1, 2, 3* un *4*, dabūjam taisnes nogriežņa dalījumam atbilstošos punktus perspektīvā attēlā $\bar{A}\bar{B}$. Konstrukcija kļūst saprotama, ja ievērosim, ka no punkta *N* vilktajiem stariem atbilst telpā paralēlas taisnes un ka uz stara *s* atliktajiem vienāda garuma taisnes nogriežņiem arī telpā atbilst vienāda garuma taisnes nogriežņi.

Iepriekš aprakstītajā veidā iespējams perspektīvā doto taisnes nogriezni sadalīt arī jebkurā citā iepriekš dotajā proporcijā.

Līdzīgi atrisina arī šādu uzdevumu: uz dotās taisnes *t* atlikt atkārtoti taisnes nogriezni *AB*, kura perspektīvais attēls jau iepriekš noteikts (435. ras.). Lai to izdarītu, velk atkal caur $\bar{A}$ staru $s \| p$ un no patvaļīga punkta *N* uz horizonta staru $N\bar{B}$ līdz krustpunktam *1* ar staru *s*. Atliekot tagad taisnes nogriezni $\bar{A}$—*1* atkārtoti uz stara *s* un savienojot dalījuma punktus ar *N*, taisnes nogrieznis $\bar{A}\bar{B}$ tiek atkārtoti atlikts arī perspektīvā uz taisnes *t*. Ja atkārtotai atlikšanai pietrūkst vietas uz stara *s*, var, piemēram, caur punktu $\bar{C}$ vilkt otru staru $s_1 \| p$ un atlikšanu turpināt uz šī stara, atliekot uz šī stara taisnes nogriezni $\bar{C}$—5_1, ko stars *N*—*5* atšķeļ uz stara s_1.



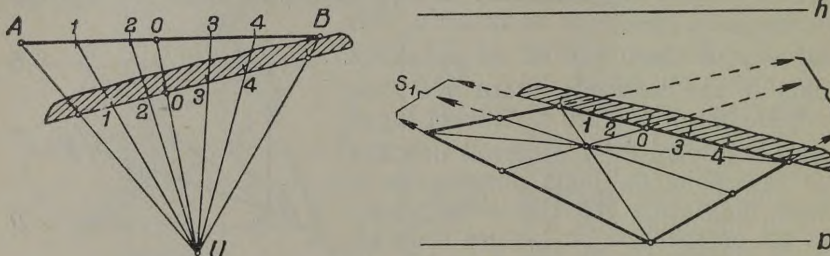
436. ras.

Ļoti bieži taisnes nogrieznis jādala uz pusēm. H o r i z o n t ā l a taisnes nogriežņa *AB* viduspunkta *V* attēlu $\bar{V}$ var noteikt ar citu paņēmienu arī šādi (sk. 436. ras.). Uz $\bar{A}\bar{B}$ konstruē četrstūri $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$, kam divas malas perpendikulāras horizontam, bet mala $\bar{C}\bar{D}$ atrodas uz horizonta. Meklētais punkts $\bar{V}$ tad atrodas ar četrstūra diagonāļu krustpunktu $\bar{K}$ uz kopēja perpendikula pret horizontu. Konstrukcija kļūst saprotama, ja ievērojam, ka četrstūrim $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ telpā atbilst taisnstūris, bet caur taisnstūra diagonāļu krustpunktu paralēli malām *AC* un *BD* vilktā taisne dala pārējās malas uz pusēm.

Šai konstrukcijai ir tā priekšrocība, ka tās izpildīšanai nav nepieciešams cirkulis (vienādo taisnes nogriežņu atlikšanai) kā iepriekšējos gadījumos. Strādājot ar aizcirtumiem, var arī samazināt palīglīniju skaitu. Kaut gan, dalot katra taisnes nogriežņa pusi tāpat atkal uz pusēm, taisnes nogriezni *AB* varētu sadalīt arī četrās (vispārīgi 2^n) daļās, tomēr sīkākam iedalījumam ērtāk izmantot agrāk apskatīto paņēmienu.

Noslēgumā (bez pamatojuma) aplūkosim vēl kādu citu paņēmienu kā taisnes nogriezni sadalīt vienādās vai proporcionālās daļās. Šo paņēmienu izlieto tad, j a v i e n s u n t a s p a t s d a l ī j u m s j ā p ā r n e s p e r s p e k t ī v ā u z v a i r ā k i e m d a ž ā d i s a ī s i n ā t i e m t a i s n e s n o g r i e ž ņ i e m. Noskaidrosim, piemēram, kā sadalīt perspektīvā attēlotā kvadrāta malas ar skalu *AB* dotajā proporcijā (sk. 437. ras.). Šai nolūkā izvēlamies vispirms patvaļīgu punktu *U*, ko savienojam ar dotās skalas dalījuma punktiem.

Novelkot arī staru uz skalas AB v i d u s p u n k t u, esam pagatavojuši t. s. *dalītāju mērogu.* Lai tagad sadalītu kādu no kvadrāta malām dotajā proporcijā, nosakām šīs malas viduspunkta attēlu O (piem., izmantojot kvadrāta diagonāles un viduslīniju) un, pieliekot kvadrāta malas attēlam papīra strēmeli, atzīmējam uz tās šo punktu O un abus attēla galapunktus. Pēc tam papīra strēmeli uzliekam uz dalītāja mēroga un pagrozām tā, lai atzīmētie malējie punkti atrastos uz mēroga malējiem stariem AU un BU, bet punkts O uz vidējā



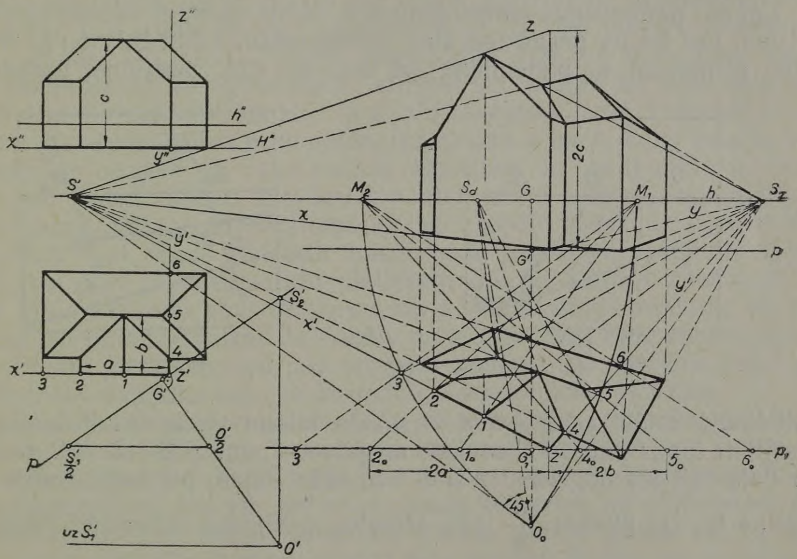
437. ras.

stara OU. Atzīmējam tagad punktus, kuros papīra strēmeles taisno malu krusto pārējie mēroga stari, un, papīra strēmeli ar atzīmēto skalu pieliekot otrreiz kvadrāta malas attēlam, atzīmējam uz tā dabūtos dalījuma punktus. Šie punkti ir skalai AB perspektīvā atbilstošie dalījuma punkti. Tāpat var sadalīt tai pašā attiecībā arī pārējās kvadrāta malas.

Dalītāja mēroga priekšrocība ir tā, ka tas palīdz atslogot perspektīvo attēlu no palīglīnijām, kas būtu nepieciešamas taisnes nogriežņu dalīšanai perspektīvā pēc iepriekš apskatītā paņēmiena. Dalītāja mērogu ērti izmantot, piemēram, dažādu dzegu attēlu konstruēšanai (sk. 455. un 456. ras.).

130. Aksonometriskā jeb koordinātu metode perspektīvas konstruēšanai. Iepriekš apskatītos paņēmienus, kā atlikt taisnes nogriežņus uz dotās taisnes, varam izmantot objekta perspektīvā attēla konstruēšanai, ja dotas tā atsevišķo punktu koordinātes. Izvēlamies koordinātu sistēmu un konstruējam vispirms koordinātu asu perspektīvos attēlus. Koordinātu asis X un Y izvēlas pamata plaknē H. Objekta perspektīvo virsskatu konstruē, izmantojot šo asu mērpunktus. Lai konstruētu pašu perspektīvo attēlu, augstumus (z koordinātes) atliekam uz Z ass. Par koordinātu asīm izdevīgi ņemt attēlojamā objekta šķautnes un attēlu plakni izvēlēties caur Z asi. Šīs aksonometriskās metodes priekšrocība ir tā, ka var iztikt ar samērā maz palīglīnijām un metodi var lietot arī tad, ja ortogonālie attēli ir doti ar izmēriem papildinātās brīvrokas skicēs.

Metode ilustrēta 438. rasējumā. Rasējumā pa kreisi parādīts, kā dotajos ortogonālajos attēlos izvēlēties koordinātu asis X, Y un Z. Izvēloties pēc agrāk formulētajiem noteikumiem horizontālajā projekcijā redzes punkta pamatu O', nosakām X un Y asu satekpunktu S_1 un S_2 attālumus no galvenā punkta G, kurus attiecīgajā palielinājumā (rasējumā — divas reizes) pārnes uz horizonta perspektīvajā attēlā.[1] Tā kā X ass satekpunkts S_1 ortogonālajā attēlā ir ārpus rasējuma laukuma, tad, velkot no taisnes nogriežņa $O'G'$ viduspunkta $\frac{O'}{2}$ staru paralēli X', noteikts vispirms punkts $\frac{S'_1}{2}$, kas ir divreiz tuvāk galvenā punkta pamatam G' nekā punkts S'_1. X un Y asu mērpunkti M_1 un M_2 perspektīvā attēlā noteikti, atliekot (ievērojot palie-



438. ras.

linājumu) $S_2M_2=2S'_2O'$ un $S_1M_1=4\frac{S'_1}{2}\frac{O'}{2}$ vai arī izmantojot redzes punkta savietojumu O_0.

Tā kā izvēlētā horizonta augstums ir samērā mazs, tad pamata plakne ir nolaista, izvēloties patvaļīgā attālumā no horizonta jaunu pamata līniju p_1. Punktu x un y koordinātes (divreiz palielinātas) atliktas no koordinātu sākuma punkta attēla uz šīs pamata līnijas un ar mērpunktu palīdzību pārnestas uz X un Y asu virsskata (pazeminātā pamata plaknē H_1) perspektīvajiem attēliem X' un Y'. Lai konstruētu pazeminātā perspektīvā virsskatu, izmantots arī jumta diagonālšķautņu satekpunkts S_d, ko dabū, dalot leņķi $S_1O_0S_2$ uz pusēm (pārējo jumta diagonālšķautņu satekpunkts atrodas ārpus rasējuma robežām).

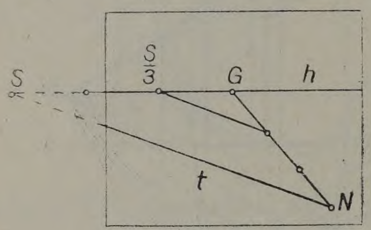
---

[1] Ja ortogonālie attēli ir doti brīvrokas skicēs, tad nosaka aptuveni tikai vienu no satekpunktiem S_1 vai S_2. Otru satekpunktu tad dabū tieši perspektīvajā attēlā, izmantojot savietoto redzes punktu O_0 un ievērojot, ka $S_1O_0 \perp S_2O_0$.

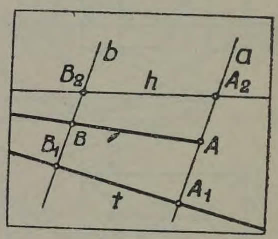
Ēkas perspektīvā attēla konstruēšanai visi vajadzīgie augstumi atlikti izvēlētajā palielinājumā uz Z ass, izmantojot kā mērpunktu satekpunktu S_1.

131. Konstrukcijas ar nesasniedzamiem satekpunktiem. Attēlojot kādu objektu stūra perspektīvā, rodas grūtības, kad kāds no dominējošo (horizontālo) virzienu satekpunktiem S ir ārpus rasējuma laukuma. Aplūkosim tādēļ dažus paņēmienus, kas dod iespēju perspektīvajā attēlā novilkt taisnes uz šādiem nesasniedzamiem satekpunktiem.

Lai šos paņēmienus varētu izmantot, jābūt zināmai vismaz vienai taisnei, kas iet uz nesasniedzamo satekpunktu. Tādu taisni var noteikt, piemēram, ar paņēmienu, ko lietojām 423. rasējumā, nosakot



439. ras.



440. ras.

palielinātā attēla perspektīvā virsskata taišņu virzienus. Patvaļīgu rasējuma lapas punktu N savieno ar galveno punktu G (sk. 439. ras.) un dala taisnes nogriezni NG n vienādās daļās, pie kam skaitli n izvēlas tā, lai punkts $\frac{S}{n}$ jau atrastos rasējuma laukumā.[1] Savienojot galvenajam punktam tuvāko dalījuma punktu ar $\frac{S}{n}$, dabūjam virzienu, kādā jāvelk caur punktu N meklētā taisne t uz nesasniedzamo satekpunktu S.

Ja tādu taisni esam noteikuši, tad katru citu taisni uz to pašu satekpunktu varam noteikt šādi. Lai noteiktu, piemēram, taisni caur punktu A (440. ras.), velkam caur šo punktu patvaļīgu taisni a un patvaļīgā attālumā no šīs taisnes — otru tai paralēlu taisni b, kas krusto taisni t un horizontu attiecīgi punktos A_1, A_2 un B_1, B_2. Nosakot uz taisnes b punktu B, kas dala taisnes nogriezni B_1B_2 tai pašā attiecībā, kādā punkts A dala taisnes nogriezni A_1A_2, un savienojot

[1] Punkts $\frac{S}{n}$ ir n reižu tuvāk galvenajam punktam nekā nesasniedzamais satekpunkts S, un tā attālumu no galvenā punkta dabū ortogonālajā attēlā, velkot no $\frac{O}{n}$ staru paralēli attiecīgajam dominējošajam virzienam līdz krustpunktam $\frac{S}{n}$ ar pamata līniju (sal. ar 438. ras., kur $n=2$).

šo punktu ar A, dabūjam meklēto taisni[1]. Kaut gan taišņu a un b virziens var būt patvaļīgs, vienkāršāk tomēr to izvēlēties perpendikulāru horizontam.

Aplūkoto paņēmienu izdevīgi izmantot tajos gadījumos, kad visi punkti, caur kuriem jāvelk taisnes uz nesasniedzamo satekpunktu, atrodas uz kopējas taisnes, piemēram, objekta vertikālās šķautnes, jo tad var sadalīt proporcionālās daļās uzreiz visu šai taisnei paralēli novilkto taisni resp. otru objekta vertikālo šķautni. Ja turpretim punkti ir izkaisīti pa visu rasējuma plakni, tad, lai samazinātu palīglīniju skaitu, ieteicams šāds tuvināts paņēmiens: rasējuma lapas kreisajā un labajā malā novelk pa vienai horizontam perpendikulārai taisnei, kas krusto taisni t punktos A_1 un B_1, bet horizontu punktos A_2 un B_2 (441. ras.). Taisnes nogriežņus A_1A_2 un B_1B_2 dala tagad vienāda skaita vienādās daļās, atliekot šīs iedaļas arī zem taisnes t un virs horizonta h, cik tālu to atļauj rasējuma lapa. Tādējādi dabūjam divas vertikālas proporcionālas skalas a un b, kuru iedaļas numurē ar vieniem un tiem pašiem skaitļiem ar nullpunktu uz horizonta. Katra taisne, kas savieno abu skalu vienāda apzīmējuma dalījuma punktus, turpinājumā iet caur kopējo nesasniedzamo satekpunktu. Lai tagad noteiktu taisni caur patvaļīgu rasējuma lapas punktu A uz šo satekpunktu, pieliekam klāt punktam A lineālu tā, lai tā mala krustotu abas taisnes a un b atbilstošajos punktos, un pēc tam novelkam šo taisni. Ja lineāla mala neiet tieši caur apzīmētajiem dalījuma punktiem, tad pēc acumēra novērtē, lai novilktā līnija atbilstošos dalījuma intervālus sadalītu proporcionālās daļās.

Aprakstītā proporcionālo skalu metode ir jo precīzāka, jo sīkāki ir abu skalu dalījumi. Tomēr nav ieteicams izmantot par 2 mm sīkākus dalījumus. Ja ir bieži jāstrādā ar šādiem nesasniedzamiem satekpunktiem, tad var arī abas skalas konstruēt uz atsevišķām papīra strēmelēm, kurām jābūt tik garām, lai to galus varētu piespraust vai pielīmēt pie rasējamā dēļa malām. Šādas, uz atsevišķām papīra strēmelēm pagatavotas skalas var izmantot vairākkārtīgi, jo, tās attiecīgi pārbīdot, var vienmēr panākt, lai, nullpunktiem paliekot uz horizonta, tās krustotu doto taisni t vienāda nosaukuma dalījuma punktos.

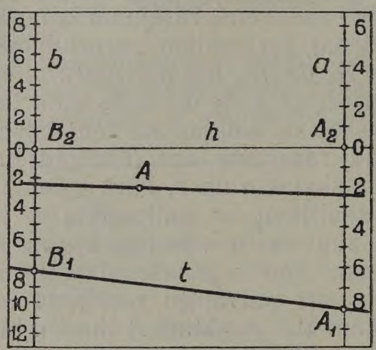
Gadījumos, kad attēlojamā objekta a b u dominējošo virzienu satekpunkti ir nesasniedzami, vienu no skalām — kopēju abiem virzieniem — var novietot rasējamā dēļa vidū, bet abas pārējās skalas katru savā malā rasējamam dēlim.

Bez jau iztirzātajiem paņēmieniem taišņu novilkšanai uz nesasniedzamiem satekpunktiem var izmantot arī mehāniskas palīgierīces — dažāda veida t. s. *satekpunktu lineālus*. Lielākā daļa šo lineālu konstruēti, izmantojot šādu ģeometrisku teorēmu: *ja trīs no viena punkta C izejošas, nekustīgi savā starpā saistītas taisnes a, b un c pārbīdām plaknē tā, lai pirmās divas ietu vienmēr caur nekustīgiem punktiem A un B, tad arī trešā taisne c iet vienmēr caur vienu un*

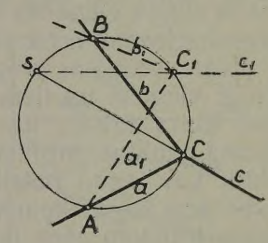
[1] Šo taisni var noteikt arī ar 258. vai 268. rasējumā parādītajiem paņēmieniem.

to pašu punktu S (442. ras.). Tiešām, tā kā leņķis, ko veido taisnes *a* un *b*, kustībā nemainās ($\sphericalangle ACB = \sphericalangle AC_1B$), tad punkts *C* pārvietojas pa riņķa loku, kas vilkts caur punktiem *A*, *B* un *C*. Bet, tā kā nemainās arī leņķis, ko veido taisnes *a* un *c*, tad taisne *c* atšķeļ no riņķa vienu un to pašu loku *AS*, t. i., šī taisne iet pastāvīgi caur vienu un to pašu punktu *S*.

Parastais satekpunktu lineāls sastāv no trīs atsevišķām daļām — lineāla kājām *a* un *b* un paša lineāla *c*, kas savā starpā saistītas ar nostiprināmu vārstes savienojumu (sk. 443. ras. pa kreisi). Katras daļas viena šķautne, ko sauksim par *galveno*



441. ras.



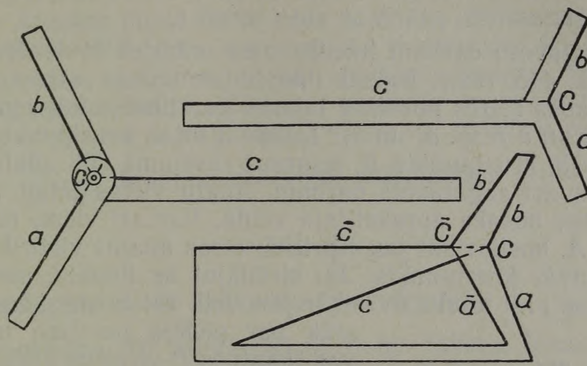
442. ras.

šķautni, iet caur savienojuma centru *C*. Šīs galvenās šķautnes rasējumā ievilktas treknākām līnijām un apzīmētas ar burtiem *a*, *b* un *c*. Šķautnes *a* un *b* slīd gar rasējuma dēlī iespraustām adatām *A* un *B*, šķautni *c* izmanto pašu taišņu novilkšanai uz nesasniedzamo satekpunktu *S*. Vārstes savienojums ļauj mainīt leņķus, ko veido savā starpā lineāla atsevišķās daļas. Tas ir nepieciešams, sagatavojot lineālu darbam. Strādājot ar lineālu, vārstes savienojumu nostiprina ar skrūvīti.

Bez šāda trīsdaļīga satekpunktu lineāla var izmantot arī vienkāršāk pagatavojamu lineālu b e z vārstes savienojuma. To var izgriezt no biezas papes vai kāda cita materiāla (443. ras. augšā). Tā kā šādam lineālam nevar mainīt leņķus starp galvenajām šķautnēm, tad tā izmantošanas iespējas ir šaurākas. Var tomēr šādā vienkāršā ceļā pagatavot arī lineālus ar vairākām galvenām šķautnēm. Viens tāds lineāls parādīts 443. rasējumā (apakšā). Šim lineālam par galvenajām šķautnēm *a*, *b* un *c* var izmantot arī šķautnes *a*, *b* un *c* vai arī *a*, *b* un *c*.

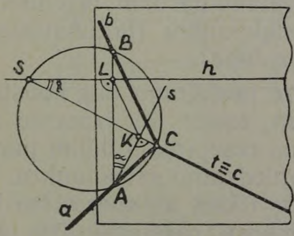
Noskaidrosim tagad, kā šos lineālus sagatavot darbam, pie kam iztirzāsim vispirms gadījumu, kad mūsu rīcībā ir lineāls ar vārstes savienojumu.

Rasējamā dēļa malā, vislabāk uz horizontam perpendikulāras taisnes, iesprauž divas adatas *A* un *B* — vienu virs, otru zem horizonta (444. ras.). No punkta *A* pēc tam velk perpendikulu *s* pret doto taisni *t*, kas iet uz nesasniedzamo satekpunktu *S*. Šī perpendikula krustpunktu K ar taisni t savieno ar punktu L, kurā taisne AB krusto horizontu, un no punkta B paralēli LK velk taisni līdz krustpunktam C ar taisni t. Ja tagad vārstes centru novieto punktā C un abas lineāla kājas ar galvenām šķautnēm a un b pieliek adatām A un B, bet paša lineāla galveno šķautni c savieto ar taisni t, tad pēc vārstes savienojuma nostiprināšanas lineāls ir sagatavots darbam.

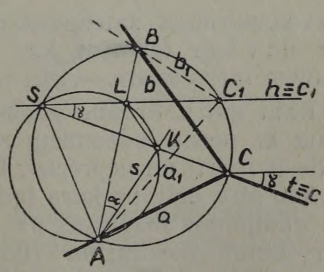


443. ras.

Abas adatas A un B var iespraust arī patvaļīgās vietās uz rasējamā dēļa (vienu virs, otru zem horizonta), kā tas parādīts 445. rasējumā. Jāievēro tikai, lai leņķis α, ko taisne s veido ar taisni AB, būtu vienāds ar leņķi, ko taisne t veido ar horizontu, kā tas ir arī pirmajā gadījumā. Pierādījums abiem gadījumiem ir vienāds: tā kā $\measuredangle KAL = \measuredangle KSL$, tad punkti A, K, L un S atrodas uz kopējas riņķa līnijas (sk. 445. ras.), un tādēļ arī $\measuredangle SAL = \measuredangle SKL$; bet, tā kā $\measuredangle SCB = \measuredangle SKL$ (pēc konstrukcijas: $BC \| LK$), tad $\measuredangle SCB = \measuredangle SAB$,



444. ras.

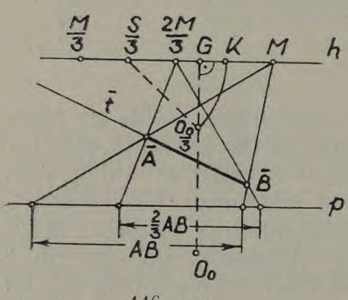


445. ras.

kas rāda, ka arī punkti C, A, B un S atrodas uz kopēja riņķa un (sakarā ar teorēmu) lineāla galvenā šķautne c kustībā vienmēr tiek vērsta uz nesasniedzamo satekpunktu S.

Bez šīm palīgkonstrukcijām var arī iztikt un lineālu sagatavot darbam mēģinājumu ceļā: pieliek vispirms galveno šķautni c pie horizonta un lineāla kāju galvenās šķautnes piebīda adatām A un B, pēc tam vārstes savienojumu nostiprina. Tad, liekot kājām a un b slīdēt gar adatām, pārvieto lineālu jaunā stāvoklī ar galveno šķautni c uz dotās taisnes t. Ja tas pirmajā gājienā neizdodas, pārvieto lineālu atkal sākotnējā stāvoklī, pārbīda to nedaudz horizonta virzienā un (atbrīvojot vārstes savienojumu) lineāla kājas atliec atkal līdz adatām. Šo operāciju atkārto tikmēr, kamēr lineāla šķautne c pēc pārbīdīšanas tieši sakrīt ar doto taisni t.

Lai sagatavotu darbam lineālu bez vārstes savienojuma, rīkojas šādi (sk. 445. ras.). Pieliek lineālu pēc kārtas taisnei t un horizontam h, abās reizēs novelkot taisnes gar lineāla kāju galvenajām šķautnēm a un b resp. a_1 un b_1. Taišņu a un a_1 krustpunktā A, tāpat taišņu b un b_1 krustpunktā B, iesprauž rasējamā dēlī adatas, līdz ar ko lineāls ir arī sagatavots darbam. Adatu vietas tātad te iepriekš neizvēlas, bet nosaka aprakstītajā veidā. Var arī vienu no adatām, piemēram, A, nostiprināt jau iepriekš; otras adatas vietu tad nosaka taišņu b un b_1 krustpunkts. Ja, strādājot ar lineālu, savienojuma vieta atduras pret adatu B, bet ir jānovelk vēl taisnes, kas iet augstāk par pēdējo novilkto taisni, tad var šķautnes B virzienā atlikt nogriezni $BB_1 = AB$ un punktā B_1 iespraust trešo adatu. Tālāk pārvietojot lineālu, tā abas kājas slīdēs gar adatām B un B_1 un lineāla šķautnes c virzienā vilktās taisnes ies atkal uz to pašu satekpunktu.



446. ras.

Ja ir vairāki nesasniedzami satekpunkti, tad ieteicams katram satekpunktam lietot savu lineālu. Ja satekpunkts neatrodas uz horizonta, kā, piemēram, gaismas staru satekpunkts ēnas konstruējot, satekpunktu lineālu sagatavo darbam, orientējoties pēc divām taisnēm, kas iet uz šo satekpunktu (horizontālajām taisnēm otras taisnes vietu izpildīja horizonts).

Kaut gan iztirzātie paņēmieni atrisina jautājumu par konstrukcijām ar nesasniedzamiem satekpunktiem, tomēr tos izmanto reti, jo tie ir neērti un neprecīzi. Praksē blakus rasējamam dēlim parasti novieto otru dēli, uz kura tad fiksē nesasniedzamo satekpunktu. Dažos gadījumos ieteicams pat satekpunktus fiksēt uz speciālām latiņām, kuras piestiprina (horizontālā līmenī) rasējamā dēļa abos galos. Šāds paņēmiens paātrina darbu un padara to precīzāku.

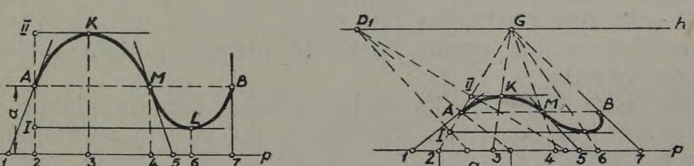
Perspektīvo attēlu zīmēšanai pēc dotajiem ortogonālajiem attēliem izmanto arī dažādus aparātus — t. s. *perspektografus*. To praktiskā vērtība pagaidām tomēr ir apšaubāma.

Noslēgumā aplūkosim vēl, kā noteikt horizontālu taišņu mērpunktu, ja satekpunkts ir nesasniedzams. Ja taisnes t satekpunkts S nav rasējuma robežās, tad atzīmē vispirms uz horizonta punktu

$\frac{S}{n}$ (sk. 446. ras., kur $n=3$). Atliekot uz galvenā punktā vilktā perpendikula pret horizontu nogriezni $G\frac{O_0}{n}=\frac{1}{n}GO_0$, velkam ar rādiusu $\frac{S}{n}\frac{O_0}{n}$ un ar centru punktā $\frac{S}{n}$ loku līdz krustpunktam K ar horizontu. Atliekot tagad uz to pašu pusi, kur atrodas punkts K, nogriezni $GM=n\cdot GK$, dabūjam meklēto mērpunktu M, kas parasti vienmēr atrodas rasējuma robežās. Ja šis mērpunkts izrādās neizdevīgs taisnes nogriežņu atlikšanai uz dotās taisnes t, tad, atliekot no šī mērpunkta pret satekpunktu S vienu vai vairākas reizes taisnes nogriezni $\frac{O_0}{n}\frac{S}{n}$, dabūjam reducētos mērpunktus $\frac{n-1}{n}M$, $\frac{n-2}{n}M$, $\ldots, \frac{1}{n}M$.

Rasējumā, kur $n=3$, šādi reducētie mērpunkti ir $\frac{2M}{3}$ un $\frac{M}{3}$. Ja taisnes nogriežņa AB atlikšanai uz dotās taisnes izmantojam, piemēram, reducēto mērpunktu $\frac{2M}{3}$, tad uz pamata līnijas jāatliek $\frac{2}{3}$ no taisnes nogriežņa AB īstā garuma.

132. Līkņu un virsmu perspektīvas konstruēšana. Patvaļīgas līknes perspektīvo attēlu dabū, nosakot pietiekamā skaitā tās punktu attēlus un savienojot tos ar nepārtrauktu līkni. Lai iztiktu ar mazāk punktiem, ieteicams konstruēt arī līknes pieskaru attēlus tās raksturīgākajos punktos.

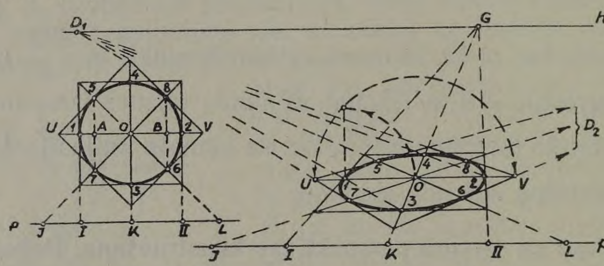


447. ras.

Kādas pamata plaknē H novietotas līknes perspektīvas konstruēšana parādīta 447. ras. Rasējumā pa kreisi šī līkne dota īstajā lielumā, noteiktā attālumā no pamata līnijas p. Zinot galveno punktu G un distancpunktu D_1 ($D_1G=d$), līknes atsevišķos punktus perspektīvajā attēlā pārnes, izmantojot pamata līnijai paralēlas un perpendikulāras palīgtaisnes. Pēdējās perspektīvā iet uz galveno punktu G, bet pamata līnijai paralēlās taisnes dabū, nosakot ar distancpunkta D_1 palīdzību, piemēram, punktus I, A un II, kuros tās krusto malējo taisni $2-G$ (distancpunkts D_1 ir šīs taisnes mērpunkts). Reizē ar to ir noteiktas arī līknes pieskares, kas ir paralēlas vai perpendikulāras pamata līnijai, pārējās pieskares nosaka to krustpunkti ar pamata līniju.

Analoģiski konstruē arī attēlus līknēm vertikālajā plaknē. Par palīgtaisnēm šai gadījumā izvēlas plaknes horizontālās un vertikālās taisnes. Horizontālo taišņu augstumus nosaka ar augstuma mēroga palīdzību, bet vertikālo taišņu pamatus — ar plaknes pamata mērpunkta palīdzību. Ja vertikālā plakne ir ierobežota, var iztikt arī ar tās horizontālās un vertikālās malas dalīšanu proporcionālās daļās atbilstoši dalījumam ortogonālajā attēlā.

Komplicētāku, neregulāru kontūru attēlošanai ieteicams šo kontūru ieslēgt kvadrātā (vai taisnstūrī), kuru tad sadala sīkākos kvadrātos. Pēc tam konstruē šī kvadrāta tīkla perspektīvo attēlu, kurā iezīmē tad pašu kontūru. Ja kvadrāta viena mala ir paralēla pamata līnijai, tad šo kvadrāta tīklu var izmantot arī augstumu atlikšanai (sal. ar 427. ras.).



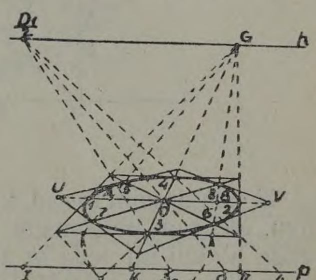
448. ras.

Visbiežāk jākonstruē r i ņ ķ a perspektīvais attēls. Mēs apskatīsim tikai gadījumu, kad riņķis nekrusto zuduma plakni un tai nepieskaras, tātad attēlojas par elipsi. Parastā metode attēla konstruēšanai te ir jau agrāk apskatītā astoņu punktu metode (sk. 94. nodalījumu).

Pieņemsim vispirms, ka riņķis atrodas pamata plaknē H. Apvilksim šim riņķim divus kvadrātus, no kuriem pirmajam divas malas ir frontālā stāvoklī, bet otram — 45° slīpumā pret pamata līniju, t. i., paralēlas pirmā kvadrāta diagonālēm (sk. 448. ras., ortogonālais attēls pa kreisi zīmēts divreiz mazākā mērogā). Šie kvadrāti ortogonālajā attēlā nav jāzīmē, jo, lai konstruētu riņķa perspektīvo attēlu, pietiek zināt riņķa rādiusu r, riņķa centra O attālumu $OK=a$ līdz pamata līnijai un no riņķa centra pret pamata līniju vilktā perpendikula krustpunktu K ar pamata līniju. Pieņemot, ka galvenais punkts un distance doti un punkts K atlikts perspektīvajā attēlā pareizā attālumā no galvenā punkta pamata, attēlu konstruē šādi: atliek uz pamata līnijas $KI=KII=r$, $KJ=KL=a$ un no punktiem I un II velk taisnes uz galveno punktu G, bet no punktiem L un J — uz distancpunktiem D_1 un D_2 (pēdējais nav rasējuma robežās). Uz šīm taisnēm atrodas pirmā kvadrāta pamata līnijai perpendikulāro malu un abu diagonāļu attēli, ar ko ir noteikts arī riņķa centrs O, abu pamata līnijai paralēlo kvadrāta malu, kā arī pamata līnijai paralēlā riņķa diametra $1—2$ attēli, t. i., mums ir zināmi četri elipses punkti un pieskares šajos punktos.

Lai noteiktu tagad četrus pārējos elipses punktus, konstruējam arī otra kvadrāta perspektīvo attēlu. Lai to izdarītu, jānosaka punkti U un V uz attēlu plaknei paralēlā diametra $1—2$ attēla un jāvelk caur šiem punktiem taisnes uz distancpunktiem D_1 un D_2 (kontrole: šīm taisnēm jākrustojas uz taisnes KG). Tā kā frontālu taisnes nogriežņu attiecība perspektīvā nemainās, tad $O1 : OU = O2 : OV = 1 : \sqrt{2}$ un punktu U un V noteikšanai varam izmantot jau agrāk apskatīto paņēmienu (sk. 289. ras.).

Ja distancpunkti ir nesasniedzami un punkta D_1 vietā dots reducētais distancpunkts $\frac{D_1}{2}$ (449. ras.), uz pamata līnijas jāatliek $KO_0 = \frac{a}{2}, O_0 3_0 = O_0 4_0 = \frac{r}{2}$; taisnes caur punktiem 3_0, O_0 un 4_0 uz reducēto distancpunktu $\frac{D_1}{2}$ tad krusto taisni KG punktos 3, O un 4. Novelkot arī taisnes IG un IIG $(KI = KII = r)$, reizē ar to ir noteiktas pirmā kvadrāta malas, viduslīnijas un diagonāles. Lai konstruētu (neizmantojot distancpunktus) otra kvadrāta attēlu, nosaka virspirms punktus 5, 6, 7 un 8 uz pirmā kvadrāta diagonāļu attēliem. Tā kā pirmā kvadrāta divas malas ir frontālā stāvoklī, tad ir jāsadala tikai vienas šīs malas attēla abas puses attiecībā $1 : \sqrt{2}$ (kā 288. ras.) un no dalījuma punktiem jāvelk stari uz galveno punktu G. Otrā kvadrāta virsotnes U un V tagad var noteikt vienkāršāk, ievērojot, ka punkti A un B, kuros iepriekš novilktie stari krusto frontālā riņķa diametra attēlu, ir taisnes nogriežņu OU un OV viduspunkti (sal. ar ortogonālo attēlu 448. ras.). Velkot caur U taisnes uz punktiem 5 un 7 un caur V taisnes uz 6 un 8 (kam jākrustojas uz KG), dabūjam otrā kvadrāta malu attēlus — pieskares elipsei punktos 5, 6, 7 un 8.

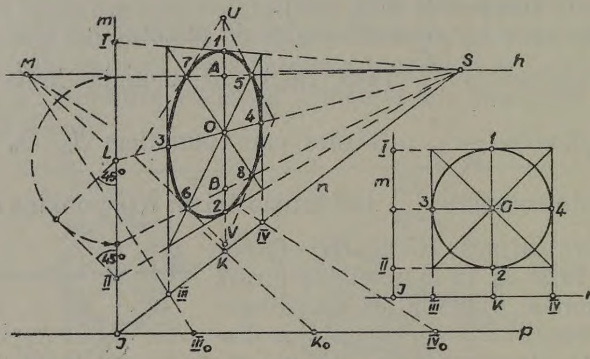


449. ras.

Ja attēlu plaknei paralēlā riņķa diametra attēls $1—2$ j a u i e p r i e k š d o t s, tad attēlu plaknei perpendikulārā diametra attēlu $3—4$ dabū, velkot 448. rasējumā caur punktiem 1 un 2 starus uz distancpunktu D_1. Ja tikai $\frac{D_1}{2}$ ir sasniedzams (kā 449. ras.), tad šie stari jāvelk caur taisnes nogriežņu $O—1$ un $O—2$ viduspunktiem. Ja pirmā kvadrāta attēls ir noteikts, tad otrā kvadrāta attēlu dabū tāpat kā iepriekš.

Kaut gan elipses asu konstruēšana mūs šoreiz neinteresē, elipses precīzākai iezīmēšanai ieteicams asis tomēr kaut aptuveni noteikt.

Der ievērot: ja pamata līnijai perpendikulārais riņķa diametrs arī perspektīvā attēlojas perpendikulāri horizontam, t. i., ja punkts K sakrīt ar galvenā punkta pamatu G', tad diametra attēls $3—4$ ir reizē elipses mazā ass; lielā ass šai gadījumā ir paralēla pamata līnijai un iet caur taisnes nogriežņa $3—4$ viduspunktu. Visos pārējos gadījumos elipses lielā ass ir slīpa pret pamata līniju, pie kam tuvāk pamata līnijai ir ass kreisais vai labais gals atkarībā no tā, vai punkts K atrodas pa kreisi vai pa labi no galvenā punkta pamata G'. Zīmējot elipsi, jācenšas simetriju attiecībā pret tās abām asīm saglabāt.



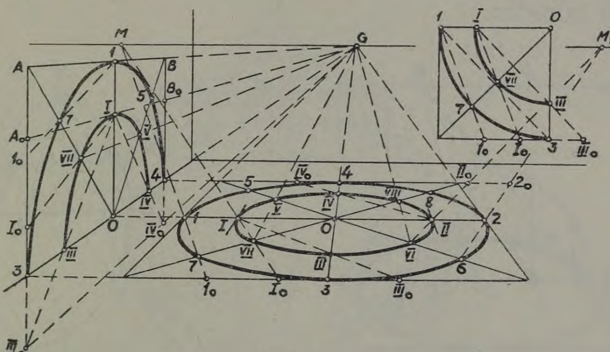
450. ras.

Noskaidrosim tagad, kā konstruēt v e r t i k ā l a r i ņ ķ a perspektīvu, pie kam pieņemsim, ka riņķa plaknes šķēluma taisne n ar pamata plakni un pēda m attēlu plaknē jau noteiktas, tāpat zināms ir taisnes n mērpunkts M (sk. 450. ras., kur pa labi divreiz samazinātā mērogā dots riņķa stāvoklis attiecībā pret taisnēm m un n). Ja riņķim apvilkts kvadrāts ar vertikālām un horizontālām malām, tad šī kvadrāta attēla konstruēšana ir analoģiska 449. rasējumā izpildītajai konstrukcijai, tikai galvenā punkta G vietā šai gadījumā ir taisnes n satekpunkts S, bet distancpunkta vietā — taisnes n mērpunkts M. Punktus III, K un IV uz taisnes n perspektīvā attēla dabū, atliekot uz pamata līnijas šo punktu attālumus līdz taisnei m $(K_0III_0=K_0IV_0=r)$ un velkot starus uz mērpunktu M. Punktus U un V uz riņķa vertikālā diametra attēla (pieskaru novilkšanai diagonālpunktos) dabū, atliekot $AU=BV=OA$ $(=OB)$.

Ja ir jākonstruē vairāku k o n c e n t r i s k u r i ņ ķ u attēli, tad pietiek konstruēt tikai viena riņķa attēlu (tāpat kā iepriekš). Pārējo riņķu attēlus tad dabū vienkāršāk šādi (sk. 451. ras.). Lai noteiktu, piemēram, elipsi, kas iet caur punktu I uz attēlu plaknei paralēlā lielākā riņķa diametra attēla, velk caur punktiem 1 un 7 taisni līdz horizontam un no dabūtā punkta M — taisni caur punktu I; pēdējās krustpunkts ar diagonāli dod lielākās elipses punktam 7 atbilstošo mazās elipses punktu VII, bet stara $VIIG$ krustpunkts V ar otru diagonāli ir punktam 5 atbilstošais punkts. Lai noteiktu punktam 3

atbilstošo punktu III, atliekam $3III_0 = I_0I_0$ un punktu $3III_0$ savienojam ar punktu I. Atliekot tagad $OII = OI$, pārējos elipses punktus VI, $VIII$ un IV dabūjam analoģiski, izmantojot punktu M_1 uz horizonta un atliekot $4IV_0 = 2_0II_0$. Konstrukcija kļūst saprotama, ja salīdzina perspektīvo attēlu ar rasējumā pa labi doto ortogonālo attēlu un ievēro, ka stariem uz punktu M (resp. M_1) telpā atbilst paralēli stari.

Analoģiski konstruē arī vertikālu koncentrisku riņķu attēlus. Konstrukcija ilustrēta rasējumā pa kreisi ar diviem pusriņķiem. Tā kā taisnes $1—7$ satekpunkts M iznāk ārpus rasējuma laukuma (ver-



451. ras.

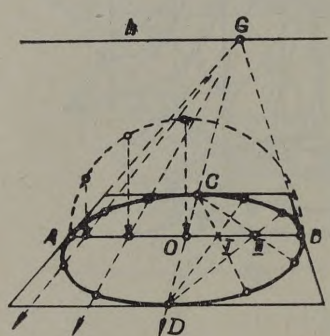
tikāli virs galvenā punkta G), tad, izmantojot galveno punktu, nosaka vispirms taisnes nogrieznim II atbilstošos (telpā vienlīdzīgos) taisnes nogriežņus AA_0 un BB_0 un atliek $I_0I_0 = 3III_0 = AA_0$ resp. $4IV_0 = BB_0$. Savienojot punktus I_0, III_0 un IV_0 ar punktu I, dabūjam mazās elipses punktus VII, III un IV, bet punktu V dabū vienkāršāk, novelkot no VII staru uz galveno punktu G.

Riņķa sadalīšanai vienādās daļās perspektīvā attēlā atzīmēsim divus paņēmienus (sk. 452. ras.). Lai sadalītu riņķi, piemēram, 12 daļās, nosakām vispirms tā frontālā diametra attēlu AB. Lai to izdarītu, apvelkam elipsei trapeci, kuras divas malas paralēlas pamata līnijai, bet pārējās divas turpinājumā iet caur galveno punktu; frontālā diametra attēls tad iet caur trapeces diagonāļu krustpunktu paralēli pamata līnijai. Pēc tam konstruējam uz AB kā diametra pusriņķi, ko sadalām 6 vienādās daļās. Dalījuma punktus projecējam ortogonāli uz diametra AB un caur dabūtajiem punktiem velkam taisnes uz galveno punktu G. Šīs taisnes krusto elipsi meklētajos punktos.

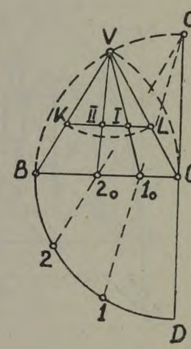
Rasējumā ar šādu paņēmienu sadalīta tikai elipses kreisā puse, bet labās puses sadalīšanai izmantots otrs paņēmiens[1]. Pēc šī paņēmiena zīmējam atsevišķi patvaļīga rādiusa pusriņķi (sk. 453. ras.)

[1] Šo paņēmienu lieto tad, ja vienāda skaita daļās jāsadala vairāki dažāda lieluma perspektīvā attēloti riņķi.

un atzīmējam uz tā ceturtdaļriņķa BD vēlamo dalījumu. Caur dalījuma punktiem velkam starus uz pusriņķa diametra galapunktu C un atzīmējam krustpunktus 1_0 un 2_0 uz rādiusa OB. Tālāk no punkta B kā no centra velkam ar rādiusu BO loku OV un punktu V savienojam ar punktiem B, 2_0, 1_0 un O. Tādējādi esam konstruējuši dalītāju mērogu j e b k u r a riņķa sadalīšanai perspektīvā vienāda skaita (šai gadījumā 12) daļās. Lai tagad sadalītu 452. rasējumā attēloto riņķi 12 daļās, velkam no punkta V ar rādiusu OB (no 452. ras.) loku KL un savienojam K un L ar taisni. Hordas KL dalījumu (ar papīra strēmeli) pārnesot 452. rasējumā uz OB (un OA) un velkot caur tā dabūtajiem punktiem no C un D starus, pēdējie krusto elipsi meklētajos punktos.



452. ras.



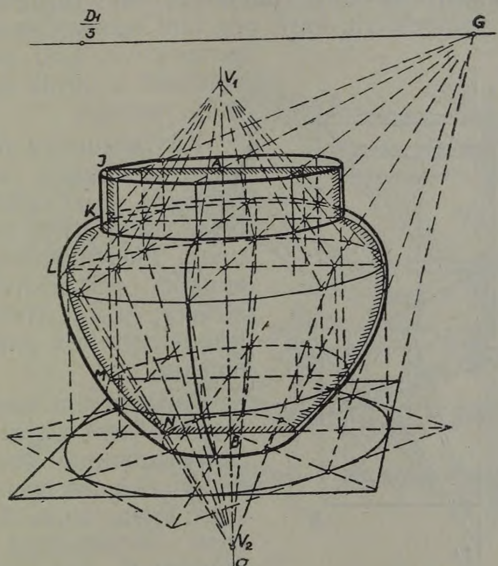
453. ras.

Analoģiski var sadalīt arī vertikālu riņķi, tikai pamata līnijai paralēlā riņķa diametra vietā tad jākonstruē iepriekš vertikālā riņķa diametra attēls.

Aplūkosim tagad liektu virsmu attēlošanu, pie kam aprobežosimies tikai ar rotācijas virsmām. Pieņemsim, ka daļa no virsmas galvenā meridiāna ir taisnes nogrieznis, tad būsim ilustrējuši arī rotācijas cilindra attēlošanu. Pieņemsim vēl, ka rotācijas virsmas ass perpendikulāra pamata plaknei H.

Pieņemot, ka rotācijas virsmas ass a attēls, tāpat tās augšējās un apakšējās noslēdzošās paralēles centru attēli (izmantojot augstuma mērogu) jau noteikti, konstruējam plaknei paralēlā virsmas meridiāna attēlu (454. ras.). Tālāk konstruējam attēlus atsevišķām virsmas paralēlēm, kas izvēlētas caur attēlu plaknei paralēlā meridiāna raksturīgākajiem punktiem J, K, L, M un N. Tā kā šo paralēļu attēlu plaknei paralēlo diametru attēli jau zināmi, tad attēlu plaknei perpendikulāro diametru galapunktu attēlus dabū, izmantojot reducēto distancpunktu $\frac{D_1}{3}$, kas vēl atrodas rasējuma robežās (sk. paskaidrojumu pie 449. ras.). Lai varētu precīzāk uzzīmēt elipses, ieteicams noteikt arī to diagonālpunktus.

Lai nepārslogotu attēlu ar palīglīnijām, rasējumā šīs konstrukcijas izpildītas šādā secībā. Vispirms ir konstruēts rotācijas virsmas lielākās paralēles (caur punktu *L)* perspektīvais virsskats, nosakot tāpat kā iepriekš astoņus elipses punktus. Šīs paralēles perspektīvas punkti noteikti, ievērojot, ka attēlu plaknei perpendikulārā diametra un hordu virzieni perspektīvā iet caur galveno punktu *G* un ka atbilstošie punkti atrodas uz vertikālajām taisnēm. Tālāk konstruētas elipses caur meridiāna punktiem *K* un *N,* ievērojot, ka to



454. ras.

astoņiem punktiem jāatrodas ar līdzīgi novietotajiem lielākās elipses punktiem uz taisnēm caur punktu V_1 resp. V_2, kuros rotācijas virsmas asi krusto taisnes caur *LK* un *LN*. Beidzot ir noteiktas elipses caur meridiāna punktiem *J* un *M,* kas atrodas uz kopējas vertikālas taisnes caur punktu *K*. To konstrukcija (izejot no elipses caur punktu *K)* ir analoģiska lielākās elipses konstrukcijai pēc tai atbilstošās paralēles perspektīvā virsskata.

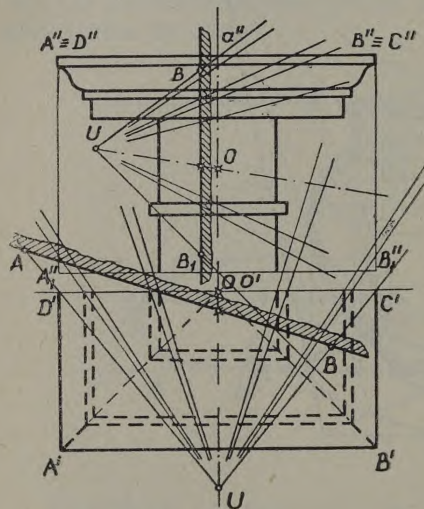
Savienojot tagad visu elipsu līdzīgi novietotos punktus, dabūjam rotācijas virsmas pārējo meridiānu attēlus[1]. Tā kā paralēles kopā ar meridiāniem veido rotācijas virsmas skeletu, tad rotācijas virsmas redzamā apveida projekciju tagad dabū kā šī skeleta projekcijas aptverošo līniju.

Rotācijas virsmu pietiekami precīza attēlošana ir konstruktīvi grūts perspektīvas uzdevums. Ir zināmi gan vairāki paņēmieni, ar

[1] No šiem pārējiem trīs meridiāniem rasējumā parādīts tikai virsmas profilais meridiāns.

kuriem virsmas redzamā apveida punktus var noteikt tieši, bez virsmas skeleta palīdzības, bet to teorētiskais pamatojums samērā komplicēts.

133. Praktiski piemēri. Viens no svarīgākajiem uzdevumiem ir dažādu d z e g u perspektīvas konstruēšana. Praktisks paņēmiens šī uzdevuma atrisināšanai ir dzegas profilu iezīmēšana dzegas aplauzuma vietās un salaidumā ar ēkas sienu. Dzegas ķermeni iepriekš ieslēdz paralēlskaldnī (apvalkā) un vispirms konstruē šī paralēlskaldņa perspektīvu, kurā pēc tam iekonstruē pašas dzegas perspektīvu. Ļoti piemērots šim nolūkam ir agrāk aplūkotais dalītājs mērogs.



455. ras.

Kā raksturīgu piemēru aplūkosim vienkāršā *antablementa*[1] augšējās daļas attēlošanu, kura ortogonālie attēli doti 455. rasējumā. Pieņemot, ka šī ķermeņa apvalka perspektīva jau konstruēta, aprakstīsim tikai, kā iekonstruēt tajā pašu attēlojamo objektu.

Konstruējam vispirms antablementa ass[2] attēlu a (sk. 456. ras.), izmantojot šim nolūkam vai nu apvalka abu horizontālo taisnstūru taisno leņķu A un A_1 bisektrisu satekpunktu (diagonālpunktu) S_d, vai (ja pēdējais nav rasējuma robežās) nosakot malu CD un C_1D_1 viduspunktu attēlus. Pēc tam iezīmējam diagonālčetrstūrus AEE_1A_1 un BEE_1B_1, kuros atrodas antablementa diagonālprofili. Sadalām tagad malas AB un DC tādā pašā attiecībā, kādā horizontālajā projekcijā (455. ras.) dalās mala $D'C'$, konstruējot pie šīs malas dalītāju mērogu (sal. ar 437. ras.). Savienojot atbilstošos dalījuma punktus, dabūsim proporcionālu dalījumu arī uz taisnes nogriežņiem AE un BE. Analoģiski sadalām perspektīvā arī paralēlskaldņa vertikālās šķautnes AA_1, BB_1, DD_1 un EE_1 atbilstoši antablementa ass dalījumam frontālajā projekcijā.[3] Savienojot taisnes nogriežņu AA_1, BB_1 un DD_1 dalījuma punktus ar attiecīgiem taisnes nogriežņa EE_1 dalījuma punktiem, kā

---

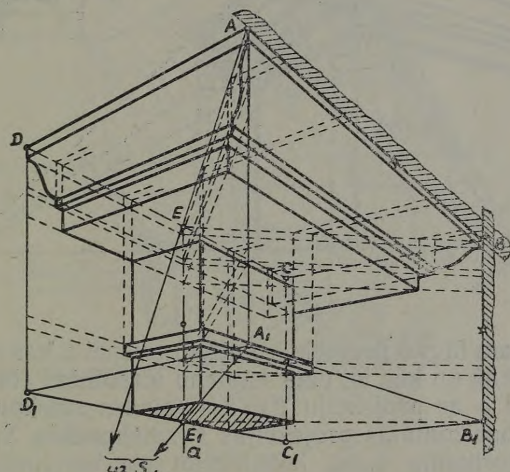
[1] Par antablementu sauc antīkās arhitektūras stilos divdalīto vai trīsdalīto sienas joslu, parasti virs atbalstu locekļiem (kolonām, pilastriem).

[2] Par dzegas asi sauc abu dzegas diagonālplakņu (bisektrisu plakņu) šķēluma taisni.

[3] Tā kā taisnes nogriežņi ir paralēli attēlu plaknei, tad dalītāja mēroga viduslīnija nav nepieciešama, ja vien papīra strēmeles, ko lieto dalījumu pārnešanai, tur vertikālā stāvoklī.

arī velkot no iepriekš dabūtajiem taisnes nogriežņu AE, BE un DE dalījuma punktiem vertikālas taisnes, diagonālplaknēs AEE_1A_1 un BEE_1B_1 un ēkas sienas plaknē DEE_1D_1 izveidojas četrstūru tīkls, kurā var iezīmēt antablementa attiecīgo profilu. Savienojot pēc tam profilu atbilstošos punktus ar taisnēm, dabūjam paša antablementa attēlu.

Konstrukcija ievērojami vienkāršojas, ja ir pieejami antablementa dominējošo virzienu satekpunkti. Tādēļ ieteicams šos satekpunktus fiksēt kaut kā ārpus rasējuma robežām vai arī izmantot konstrukcijām satekpunktu lineālu.

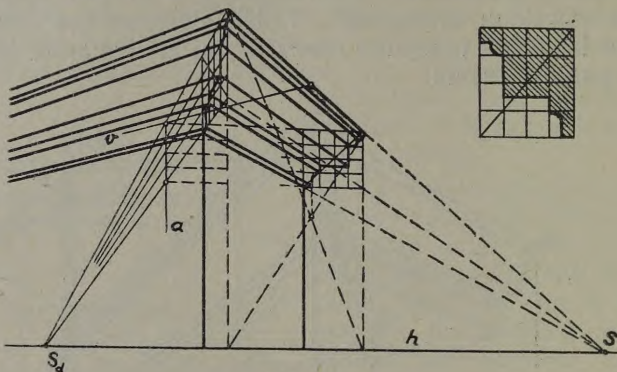


456. ras.

Bieži vien profilu iezīmēšanai perspektīvā tos ieslēdz iepriekš vienāda lieluma taisnstūru vai kvadrātu tīklā, kā tas parādīts 457. rasējumā. Dzegas apvalka diagonālplakņu vertikālās šķautnes šai rasējumā perspektīvā jādala vienādās daļās, bet horizontālo šķautņu dalījumu dabū, izmantojot vienu četrstūra diagonāli. Dzegas ass a rasējumā noteikta ar diagonālpunkta S_d un dzegas ķermeņa augšējās plaknes viduslīnijas v palīdzību.

Nākošajā piemērā aplūkosim, kā konstruēt kāpņu perspektīvu. Kāpnes ir dotas ar horizontālo projekciju un ar griezumu gar labās puses margu iekšējo plakni, kas savietots ar pamata plakni H (sk. 458. ras.). Ar šo griezumu ir noteikti kāpienu augstumi un bez tam ir zināms arī kāpņu slīpuma leņķis α. Parādīsim, kā šo slīpuma leņķi izmantot kāpienu šķautņu attēlošanai perspektīvā, pie kam mēģināsim iztikt bez kāpņu perspektīvā virsskata. Lai konstrukcijas būtu labāk saprotamas, perspektīvo attēlu zīmēsim zem horizontālās projekcijas vai (kā to diezgan bieži praktizē) pieņemsim, ka horizontālā projekcija pārzīmēta uz pauspapīra un novietota vēlamā stāvoklī virs izvēlētā horizonta.

Attēlu plakni izvēlamies caur kreisās puses margu priekšējo vertikālo šķautni un nosakām parastā veidā dominējošo virzienu satekpunktus S_1 un S_2. Kaut gan punkts S_2 nav rasējuma robežās, vienkāršības dēļ tomēr pieņemsim, ka tas kaut kādā veidā ir fiksēts uz rasējamā dēļa. Atliekot no S_1 pa labi taisnes nogriezni $S'_1M'_1 = S'_1O'$, nosakām arī taisnēm uz S_1 piederīgo mērpunktu M_1.



457. ras.

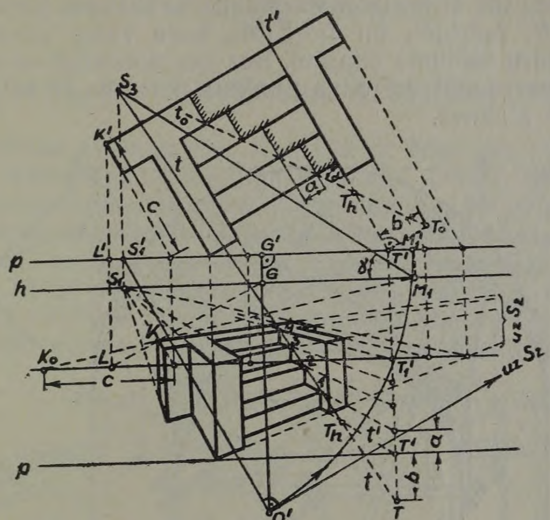
Konstruējam tagad perspektīvo attēlu taisnei t, kas atrodas kāpņu griezuma plaknē un kas iet caur kāpienu virsotnēm (tās savietojums t_0 veido leņķi α ar projekciju t'). Šīs taisnes satekpunkts S_3 atrodas virs tās horizontālās projekcijas t' satekpunkta S_1, bet S_3 augstumu virs horizonta dabū, konstruējot pie horizonta leņķa α ar virsotni mērpunktā M_1 (sal. ar 433. ras.). Taisnes t pēdu T dabū, nosakot vispirms tai savietojumā atbilstošo punktu T_0 un atliekot perspektīvā attēlā vertikāli uz leju $TT' = T_0T' = b$. Taisne t perspektīvā attēlā iet caur tās pēdu T un satekpunktu S_3. Ja punkts T nav rasējuma robežās, taisnes t attēla konstruēšanai var izmantot arī tās pēdu T_h pamata plaknē.

Atliekot perspektīvā attēlā uz vertikālās taisnes caur T' (augstumu mēroga) kāpienu augstumus a un velkot caur dalījuma punktiem starus uz satekpunktu S_1, pēdējie krustos iepriekš iezīmēto taisni t kāpienu virsotņu punktos *1, 2, 3* un *4*. Šie punkti, caur kuriem iet katra kāpiena trīs savstarpēji perpendikulārās šķautnes, ievērojami atvieglo kāpņu perspektīvas konstruēšanu.

Lai kāpņu pārējās daļas perspektīvu konstruētu bez perspektīvā virsskata palīdzības, pieņemam, ka pamata plakne pacelta kāpņu augšējās horizontālās plaknes līmenī (zīmējot jaunu pamata līniju p_1). Tālākai konstrukcijai bez šai līmenī novietoto taišņu pēdām attēlu plaknē (uz p_1) un satekpunktiem S_1 un S_2 var izmantot (kā tas parādīts punktam K) arī mērpunktu M_1 un galveno punktu G.

No praktiskajiem piemēriem, kuros jāattēlo liektas virsmas, aplūkosim k r u s t a v e l v e s perspektīvas konstruēšanu. Krusta velve, kā jau iepriekšējā nodaļā aizrādīts, veidojas, krustojoties taisnā leņķī diviem vienāda diametra riņķa puscilindriem. Tā kā šie cilindri šķeļas pa divām puselipsēm, tad uzdevums reducējas uz četru pusriņķu — cilindru pamatu un divu puselipsu attēlu konstruēšanu.

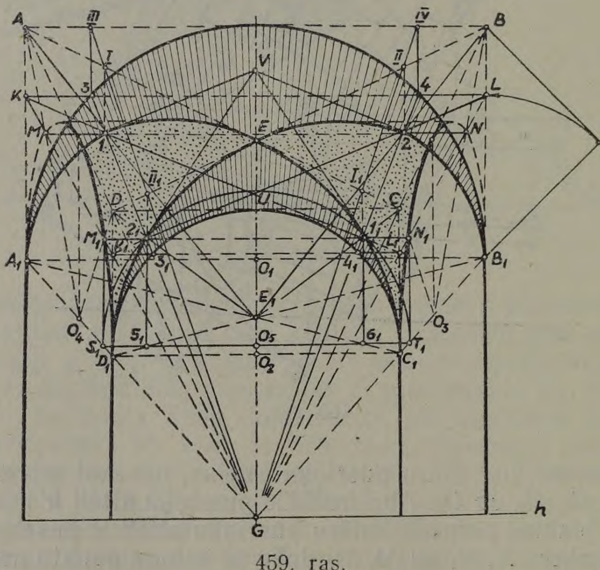
Šādas krusta velves frontāla perspektīva parādīta 459. rasējumā. Vispirms attēlo abu puscilindru kopējo apvalku — paralēlskaldni, kam pamati ir kvadrāti $ABCD$ un $A_1B_1C_1D_1$. Šī paralēlskaldņa sānu



458. ras.

skaldnēs iezīmē visu četru pusriņķu attēlus, nosakot iepriekš centru attēlus O_1, O_2, O_3 un O_4. Abu frontālo pusriņķu attēli ir pusriņķi, bet abu attēlu plaknei perpendikulāro pusriņķu attēli ir puselipses, kuru diagonālpunktus N, N_1 un M, M_1 dabū ar astoņu punktu metodi, t. i., nosakot vispirms punktus L, L_1 un K, K_1, kas dala paralēlskaldņa vertikālo šķautņu attēlus attiecībā $1:\sqrt{2}$. Tā kā abu cilindru šķēluma līnijas atrodas paralēlskaldņa diagonālplaknēs ar kopējo virsotni E augšējā kvadrāta diagonāļu krustpunktā un kopējo centru E_1 apakšējā kvadrāta diagonāļu krustpunktā, tad viegli sameklēt arī šiem punktiem attēlā atbilstošos punktus. Vēl divus punktus uz katras no šīm puselipsēm dabū kā paralēlskaldņa diagonālčetrstūru AA_1C_1C un BB_1D_1D diagonālpunktus 1, 1_1 un 2, 2_1, t. i., punktus uz šo četrstūru diagonālēm E_1A, E_1C un E_1B, E_1D. Tie ir punkti, kuros šīs diagonāles krusto plaknēs vilktās taisnes KL_1 un LK_1 (astoņu punktu metode). Atliekot vēl no pēdējo divu taišņu krustpunkta vertikāli uz augšu $UV=E_1U$, dabūjam punktu V, kurā krustojas šajos četros elipsu punktos vilktās pieskares (sal. ar 450. ras.). Kopā ar punktiem A_1, B_1, C_1 un D_1 mums tagad ir pa pieciem punktiem uz katras puselipses, kā arī pieskares šajos punktos, tādēļ abas līknes varam samērā precīzi uzzīmēt.

Punkti 1 un 2, tāpat punkti 2_1 un 1_1 atrodas uz attēlu plaknei paralēlā cilindra veidulēm MN un M_1N_1, bet punkti 1 un 2_1, tāpat punkti 2 un 1_1 atrodas pa pāriem uz attēlu plaknei perpendikulārā cilindra veidulēm $3—3_1$ un $4—4_1$. Visas šīs veidules atrodas kopējā horizontālā plaknē, kas šķeļ paralēlskaldni pa četrstūri KLL_1K_1. Ja pieņem, ka paralēlskaldnis ir reāls, ar izgriezumiem pa abiem puscilindriem, tad šī horizontālā plakne to šķeļ pa kvadrātiem $13KM$, $24LN$, $1_14_1L_1N_1$ un $2_13_1K_1M_1$, kuru viena virsotne atrodas uz abu cilindru šķēluma elipsēm. Bez jau noteiktajiem elipsu punktiem tādēļ var dabūt arī citus punktus, izmantojot vēl citas tādas horizontālas plaknes.



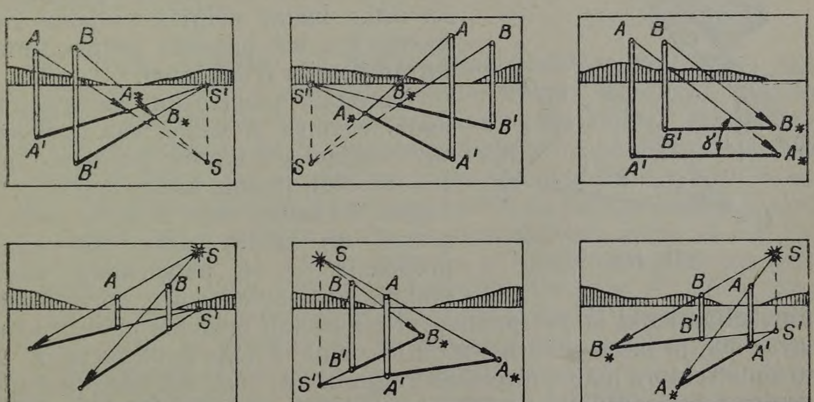
459. ras.

Šo horizontālo plakņu vietā var izvēlēties arī vertikālas plaknes vai nu caur attēlu plaknei perpendikulārā, vai tai paralēlā cilindra veidulēm. Pirmajā gadījumā gan šādas plaknes šķeļ attēlu plaknei paralēlo cilindru pa pusriņķiem, kas perspektīvā attēlojas par puselipsēm, bet šo puselipsu vietā var izmantot plakņu šķēlumus ar paralēlskaldņa diagonālplaknēm. Rasējumā parādītas divas tādas palīgplaknes — viena caur cilindra veiduli $3—3_1$, kas šķeļ paralēlskaldni pa taisnēm $3—III$ un $III—II_1$, bet diagonālplaknes pa taisnēm $I—1$ un $II_1—2_1$, un otra caur cilindra veiduli $4—4_1$ (attiecīgās šķēluma taisnes $4—IV$, $IV—I_1$, $II—2$ un $I_1—1_1$). Parādīta arī viena vertikāla palīgplakne caur attēlu plaknei paralēlā cilindra veiduli M_1N_1, kas šķeļ paralēlskaldni pa taisnēm M_1S_1 un N_1T_1, bet attēlu plaknei perpendikulāro cilindru pa pusriņķi $T_11_12_1S_1$ ar centru punktā O_5, kura vietā var izmantot arī šīs plaknes šķēluma taisnes $2_1—5_1$ un $1_1—6_1$ ar diagonālplaknēm.

Šo palīgplakņu metodi šķēluma līnijas atsevišķu punktu noteikšanai varam ieteikt lasītājiem kā labu telpas apjautas vingrinājumu. Bez jau minētajām palīgplaknēm var izmantot arī palīgplaknes caur jebkurām paralēlskaldņa horizontālajām šķautnēm, nosakot to šķēlumus ar diagonālplaknēm un vienu no abiem cilindriem. Analoģiski izpilda konstrukcijas arī stūra perspektīvā, tikai tad abu cilindru pamati attēlojas par puselipsēm.

3. §. ĒNU KONSTRUĒŠANA. ATSPOGUĻOJUMI

134. Gaismas avota izvēle. Konstruējot ēnas perspektīvā, gaismas avotu izvēlas gan bezgalīgā attālumā (saule, mēness), gan galīgā attālumā (lampa, laterna). Apgaismojumu no galīga attāluma parasti izmanto iekštelpu attēlojumos (interjeros), kaut gan atsevišķos gadījumos arī te lieto saules apgaismojumu (apgaismojums caur logu). Tā kā perspektīvā nav būtiskas atšķirības starp galīgā un bezgalīgā attālumā novietotiem punktiem, tad arī ēnu konstruēšanā dažādiem gaismas avotiem principā nav atšķirības.



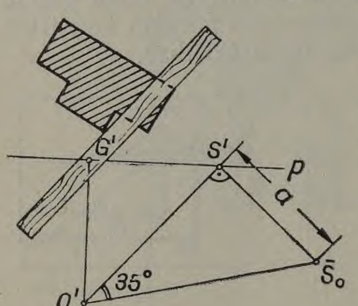
460. ras.

Gaismas avota dažādos novietojumus attiecībā pret novērotāju paskaidro 460. rasējums; šai rasējumā uzskatāmības dēļ parādītas arī divu vertikālu stabu ēnas pamata plaknē pie attiecīgi izvēlētā gaismas avota. Augšējā rindā pirmos divos attēlos saule (vai mēness) S atrodas novērotājam aiz muguras, pie kam pirmajā gadījumā novērotājam kreisajā, otrajā gadījumā labajā pusē. Ēnas abos gadījumos krīt prom no novērotāja (tie ir praksē visbiežāk sastopamie gadījumi).[1] Trešajā attēlā saule (mēness) atrodas pa kreisi

[1] Jāpiezīmē, ka punkts S ir tīri ģeometrisks punkts, jo, skatoties pret attēlu plakni, mēs gaismas avotu neredzam, kā tas ir apakšējā rindā parādītajos gadījumos.

no novērotāja, pie kam gaismas stari (arī ēnas) krīt paralēli attēlu plaknei, veidojot leņķi α ar pamata plakni. Šo gadījumu praksē gandrīz nekad neizmanto, jo te ir tikai viens noteikts gaismas staru horizontālās projekcijas virziens (azimuts) un reti iespējams panākt vēlamu ēnu efektu. Otrajā rindā pirmais attēls rāda sauli (mēnesi) novērotājam priekšā pa labi, pie kam ēnas krīt pret novērotāju. Arī šādu gaismas avota stāvokli izvēlas tikai atsevišķos gadījumos, piemēram, kad attēlotajā celtnē ietilpst arkas vai kolonas; tādā gadījumā gaisma, krītot caur ailēm, veido efektīvu gaismas un ēnu rotaļu. Pēdējie divi attēli rāda galīgā attālumā novietotu gaismas avotu (spuldzi), pie kam pirmajā gadījumā tuvāk, otrajā gadījumā tālāk par abiem attēlotajiem stabiem. Atšķirībā no iepriekšējiem gadījumiem te gaismas avota perspektīvais virsskats vairs neatrodas uz horizonta.

Viena vai otra gaismas avota, tā stāvokļa un gaismas staru virziena izvēle ir atkarīga gan no attēlojamā objekta rakstura, tā ģeogrāfiskā novietojuma, gan arī no gadalaika un dienas perioda, kādā gatavais objekts tiks parasti aplūkots. Pie tam jāvadās vienmēr no estētiskiem apsvērumiem un nav jāaizmirst, ka ēnas kādas celtnes projektā nav pašmērķis, bet līdzeklis celtnes formu un proporciju izteikšanai.



461. ras.

Turpmāk pieņemsim, ka gaismas avots vienmēr ir saule, kas novietota novērotājam aizmugurē. Izvēloties saules stāvokli, jāzina, kādus drīkst ņemt leņķus, ko saules stari veido ar pamata plakni un saules staru horizontālā projekcija — ar perspektīvā attēla plakni. Par saules staru horizontālās projekcijas leņķi ar perspektīvā attēla plakni nekādus priekšrakstus nevar dot, jo tas ir atkarīgs no attēlojamā objekta konfigurācijas un no konstruktora mākslinieciskās gaumes. Var tikai dot šādu padomu: vispirms horizontālajā projekcijā mēģināt noskaidrot, kādas objekta daļas būs pašēnā un cik platas būs krītošās ēnas no atsevišķiem objekta izvirzījumiem. Saules staru horizontālās projekcijas leņķi ar perspektīvā attēla plakni jāmēģina izvēlēties tā, lai ēnas platums nebūtu vienāds ar izvirzījuma perspektīvā attēla platumu, jo tad attēls ir vienmuļš. Leņķi, ko gaismas stari veido ar pamata plakni, ieteicams izvēlēties apmēram 35°, t. i., tādu pašu, kādu gaismas stari veido ar šo plakni diagonālapgaismojumā, jo tad ēnas no dzegām nekad neiznāks par lielām. Tāds aptuveni mūsu apstākļos ir saules staru virziens pusdienas laikā aprīlī vai augustā.

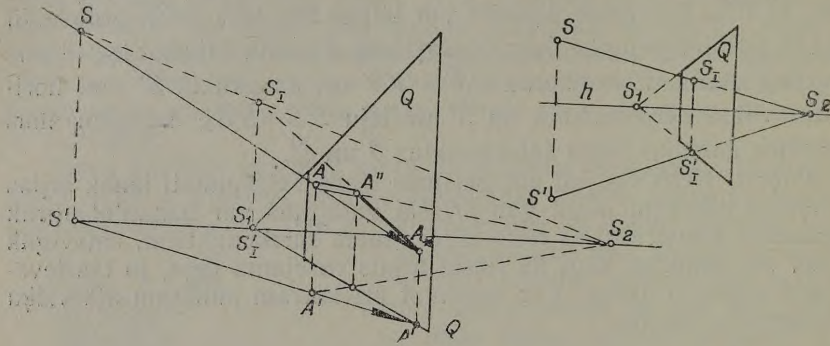
Aplūkosim konkrētu piemēru: kā izvēlēties gaismas staru virzienu 461. rasējumā horizontālajā projekcijā attēlotajai celtnei ar portālu. Pieliekot portāla stūrim lineālu tā, lai krītošā ēna no portāla būtu vai nu platāka, vai šaurāka par paša portāla izvirzījuma platumu perspektīvajā attēlā, novelkam gar lineāla malu gaismas stara horizontālās projekcijas virzienu un nosakām šī virziena satekpunkta projekciju S'. Pēc tam, pieņemot, ka saule atrodas novērotājam pa kreisi aizmugurē, konstruējam pie $O'S'$ leņķi $\alpha \approx 35^\circ$ $(\operatorname{tg} 35^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2})$. Nosakām tagad attālumu a, kādā atradīsies paša gaismas stara satekpunkts $\overline{S}$ no tā projekcijas satekpunkta $\overline{S'}$ (uz horizonta). Šai nolūkā konstruējam uz $O'S'$ kā katetes taisnleņķa trīsstūri $O'S'\overline{S}_0$, ko varam uzskatīt par telpas trīsstūra $O\overline{S'}\overline{S}$ projekciju ap $O\overline{S'}$ paralēli pamata plaknei pagrieztā stāvoklī. Atliekot tagad perspektīvā attēlā uz horizonta $G\overline{S'} = G'S'$ un uz punktā $\overline{S'}$ pret horizontu vilktā perpendikula no $\overline{S'}$ uz leju $\overline{S'}\overline{S} = S'\overline{S}_0$, dabūjam abus meklētos gaismas staru satekpunktus $\overline{S}$ un $\overline{S'}$.

Parasti viens vai pat abi gaismas staru satekpunkti iznāk ārpus rasējuma robežām. Kaut gan arī šai gadījumā var izmantot agrāk apskatītās konstrukcijas nesasniedzamiem satekpunktiem, izdevīgāk tomēr šos punktus kaut kā fiksēt ārpus rasējamā dēļa, jo tas ievērojami atvieglo darbu. Var izmantot arī katram punktam atsevišķu satekpunkta lineālu.

135. Ēnas vertikālās un horizontālās plaknēs. Aplūkosim 462. rasējumu, kur attēlota vertikāla plakne Q, kas atbalstās pamata plaknē, un gaismas avots S (saule), kas uzskatāmības dēļ izvēlēts novērotājam priekšā. Ar S_1 apzīmēts plaknes Q horizontālo taišņu satekpunkts, bet ar S_2 — plaknei Q perpendikulārā virziena satekpunkts. Rasējumā parādīts, kā noteikt patvaļīga punkta ēnu A_* plaknē Q, ja ir doti abi šī punkta attēli — perspektīvais attēls A un perspektīvais virsskats A'. Lai to izdarītu, no gaismas avota perspektīvā virsskata S' caur punkta perspektīvo virsskatu A' vilkts stars $S'A'$ un noteikts tā krustpunkts A'_* ar plaknes Q perspektīvo virsskatu — taisni Q'. Punkts A'_* ir meklētās ēnas perspektīvais virsskats, bet punkta ēnas attēls A_* noteikts, ievērojot, ka, no vienas puses, tam jāatrodas uz vertikālās taisnes (kārtotājas) caur punktu A'_*, bet, no otras puses, — uz stara, kas vilkts caur gaismas avota un punkta perspektīvajiem attēliem S un A.

Vilksim tagad caur punktu A perpendikulu pret plakni Q un noteiksim tā krustpunktu ar šo plakni. Perpendikula abu attēlu virzieni iet uz satekpunktu S_2, tādēļ krustpunktu A'' nosaka tāpat, kā noteicām gaismas stara krustpunktu A_* ar plakni Q. Ja uzskatāmības dēļ pieņemsim, ka perpendikula nogrieznis AA'' ir reāla taisne (piem., kāda objekta pašēnas šķautne), tagad $A''A_*$ ir šīs taisnes ēna plaknē Q.

Mēģināsim taisnes nogriežņa AA'' ēnu plaknē Q noteikt vienkāršāk, proti, neizmantojot šīs taisnes nogriežņa perspektīvo virsskatu. Šai nolūkā atcerēsimies, ka kādas taisnes ēna plaknē ir attiecīgās gaismas plaknes šķēluma taisne ar šo plakni. Ēnas satekpunktam tātad jāatrodas uz abu plakņu satektaisnēm — tas ir abu šo satektaišņu krustpunkts. Tā kā plaknes Q satektaisne ir vertikālā taisne S_1S_I, bet gaismas plaknes satektaisne ir taisne SS_2 (jo šī taisne savieno gaismas plaknes divu taišņu SA un AA'' satekpunktus S un S_2), tad abu šo taišņu krustpunkts S_I ir taisnes nogriežņa ēnas satekpunkts. Zinot šo satekpunktu, taisnes nogriežņa ēnu var noteikt, velkot staru S_I A'' un nosakot tā krustpunktu ar gaismas staru SA, t. i., neizmantojot gaismas stara perspektīvo virsskatu.



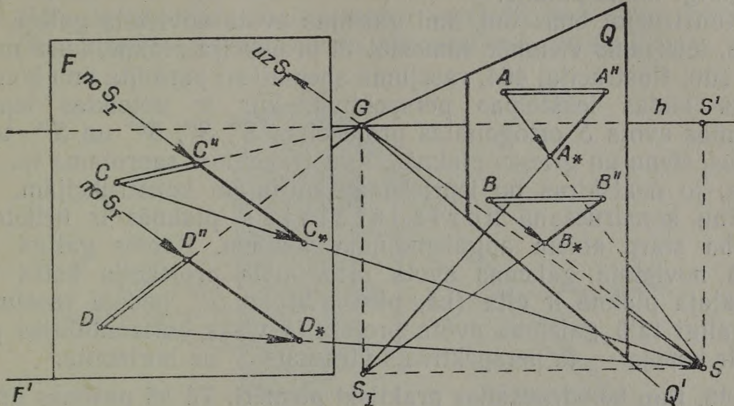
462. ras.

Šim paņēmienam ir liela praktiska vērtība, jo ar to var ēnu konstrukcijas izpildīt nesalīdzināmi vienkāršāk. To ieteicams lietot visos tajos gadījumos, kad ir jānosaka vairāku plaknei Q perpendikulāru šķautņu ēnas šai plaknē. Visu šo ēnu virzieni krustojas kopējā satekpunktā S_1.

Iepriekšējai konstrukcijai var dot arī šādu interpretāciju. Mēs zinām, ka plaknei perpendikulāras taisnes ēnas virziens ir paralēls gaismas stara ortogonālās projekcijas virzienam šai plaknē. Šis virziens apskatītajā piemērā ir virziens S_1A_*, un, tā kā šī virziena satekpunkts ir S_I tad punkts S_I nav nekas cits kā gaismas avota S ortogonālā projekcija plaknē Q. Šī telpas bezgalīgi tālā punkta projekciju nosaka tāpat kā punkta A projekciju A'', proti, velkot caur punktiem S un S' perpendikulus pret plakni Q, kas perspektīvā iet uz visu plaknei Q perpendikulāro taišņu satekpunktu S_2, un nosakot perpendikula $S'S_2$ krustpunktam ar Q', t. i., punktam $S'_I \equiv S_1$, atbilstošo punktu S_I uz perpendikula SS_2. Šī interpretācija vēlreiz parāda, ka perspektīvā ar telpas neīstiem elementiem varam operēt tāpat kā ar īstiem, t. i., galīgā attālumā novietotiem telpas elementiem.

Rasējumā pa labi salīdzināšanai parādīts, kā konstruē galīgā attālumā novietota gaismas avota ortogonālās projekcijas S_I plaknē Q. Pieņemot, ka gaismas avota perspektīvais virsskats S' pārbīdīts pa kārtotāju vertikāli uz augšu, punkts S'_I tuvosies satekpunktam S_1, un tajā momentā, kad punkts S' nonāks uz horizonta h, punkts S'_I sakritīs ar punktu S_1.

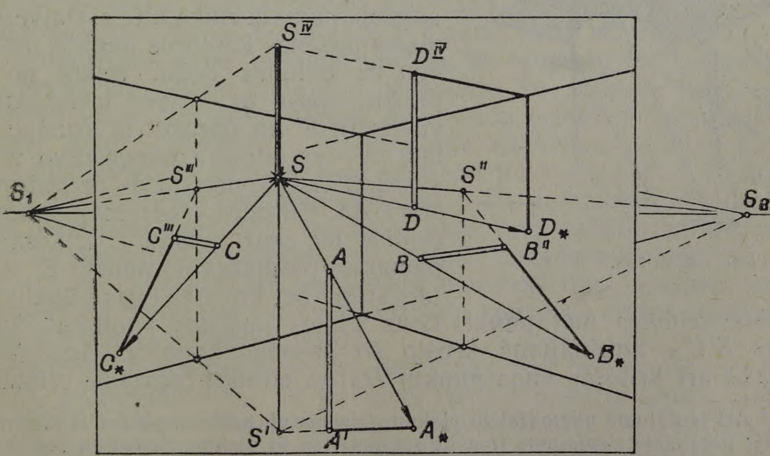
Apskatīsim tagad gadījumus, kad vertikālā plakne ir kādā speciālā stāvoklī pret attēlu plakni. Ja plakne perpendikulāra attēlu plaknei kā plakne Q 463. rasējumā, tās horizontālo taišņu satekpunkts ir galvenais punkts G, bet plaknei perpendikulāro taišņu satekpunkts ir bezgalībā — šīs taisnes telpā un to perspektīvas ir para-



463. ras.

lēlas horizontam. Gaismas avota ortogonālo projekciju S_I plaknē Q tādēļ dabū, nosakot horizontālās taisnes caur S krustpunktu ar vertikālo taisni (plaknes Q satektaisni) caur G. Ēnu konstrukciju tālāk izpilda tāpat kā iepriekšējā gadījumā.

Ja plakne ir frontālā stāvoklī, kā plakne F 463. rasējumā, tad plaknei perpendikulāro taišņu satekpunkts ir galvenais punkts G, bet tās horizontālo taišņu satekpunkts ir bezgalībā (uz horizonta).



464. ras.

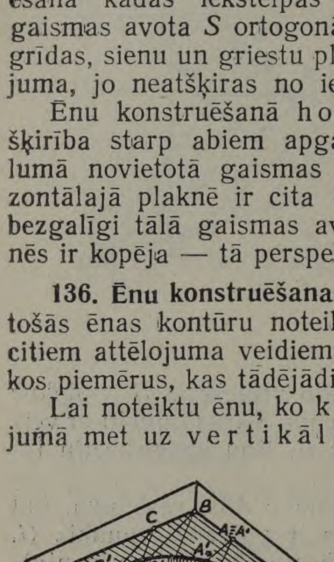
Tā kā perpendikulāro taišņu paralēlās ēnas tad ir frontālas taisnes, tad arī perspektīvā tās attēlojas kā paralēlas taisnes ar virzienu SG. Pēdējais apgalvojums izriet no tā, ka plaknes F satektaisne šai gadījumā ir bezgalībā, tādēļ arī gaismas avota ortogonālā projekcija S_I plaknē F ir frontālajai plaknei perpendikulārā stara SG bezgalīgi tālais punkts.

Konstruējot ēnas tad, kad gaismas avots novietots galīgā attālumā, ieteicams vienmēr sameklēt tā projekciju plaknē, kurā meklējam ēnu. Ilustrācijai 464. rasējumā shematiski parādīta ēnu konstruēšana kādas iekštelpas perspektīvā, kur ir noteiktas iepriekš gaismas avota S ortogonālās projekcijas S', S'', S''' un S^{IV} telpas grīdas, sienu un griestu plaknēs. Konstrukcija ir saprotama no rasējuma, jo neatšķiras no iepriekš apskatītajām konstrukcijām.

Ēnu konstruēšanā horizontālajās plaknēs ir neliela atšķirība starp abiem apgaismojuma veidiem. Kamēr galīgā attālumā novietotā gaismas avota ortogonālā projekcija katrā horizontālajā plaknē ir cita (kā, piem., S' un S^{IV} pēdējā rasējumā), bezgalīgi tālā gaismas avota projekcija visās horizontālajās plaknēs ir kopēja — tā perspektīvais virsskats S' uz horizonta.[1]

136. Ēnu konstruēšanas praktiski piemēri. Tā kā pašēnas un krītošās ēnas kontūru noteikšanas principi perspektīvā tie paši, kas citiem attēlojuma veidiem, tad iztirzāsim te tikai dažus raksturīgākos piemērus, kas tādējādi papildinās agrāk apskatītos.

Lai noteiktu ēnu, ko kvadrātiska plate saules apgaismojumā met uz vertikāla riņķa cilindra (465. ras.), ir izdevīgi par pamata plakni H izvēlēties plates apakšējo horizontālo plakni, jo plates perspektīvais virsskats tad ir šīs plaknes attēla kontūra, bet cilindra perspektīvais virsskats — tā augšējā pamata riņķa attēls. Patvaļīga plates pašēnas kontūras punkta $A \equiv A'$ ēnu uz cilindra dabū, velkot no šī punkta staru uz saules perspektīvo virsskatu S' un nosakot tā krustpunktam A'_* ar cilindra perspektīvo virsskatu atbilstošo punktu A_* uz gaismas stara AS. Cilindra (redzamā) pašēnas veidule iet caur punktu C'_*, kurā tā pamatam pieskaras no punkta S' vilktais stars, bet krītošās ēnas punktu C_* uz šīs veidules met punkts C uz plates pašēnas kontūras, kurā stars $S'C'_*$ turpinājumā krusto šo pašēnas kontūru. Analoģiski nosaka arī krītošās ēnas punktu D_* uz cilindra apveida veidules.

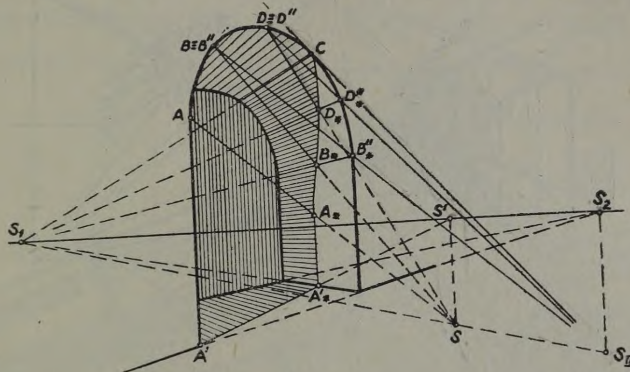


465. ras.

[1] Arī jautājumā par paralēlu plakņu gaismas un pašēnas pusēm ir atšķirība. Kamēr paralēlapgaismojumā ir apgaismotas visu šo plakņu vienas un tās pašas puses, centrālā apgaismojumā katras plaknes apgaismojums ir atkarīgs no gaismas avota novietojuma relatīvi pret šo plakni.

t. i., — velkot no S' staru caur šīs veidules pieskaršanās punktu D'_* cilindra pamata riņķa attēlam.

Konstruējot ēnas perspektīvā, bieži vien iepriekš gaismas avotu neizvēlas, bet gan izvēlas kāda punkta krītošo ēnu piemērotā vietā. Ja iepriekšējā rasējumā, piemēram, būtu izvēlējušies punkta B ēnu B_* uz cilindra, tad gaismas avota perspektīvo virsskatu S' dabū kā stara BB'_* krustpunktu ar horizontu; vertikāli zem tā uz gaismas stara BB_* atrodas gaismas avota perspektīvais attēls S.

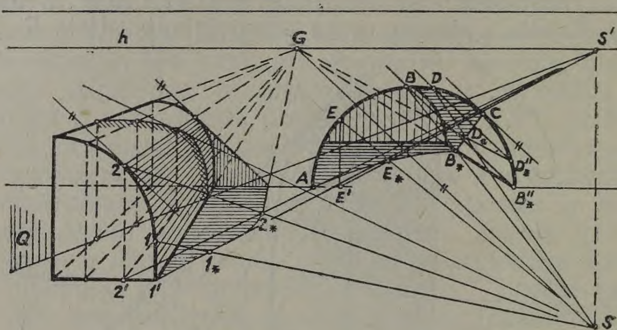


466. ras.

C i l i n d r i s k a s   n i š a s ēna uz tās iekšējās virsmas parādīta 466. rasējumā. Šai rasējumā gaismas avots tāpat kā iepriekš izvēlēts aizmugurē, tikai kreisajā pusē novērotājam. Lai ēna iznāktu vēlamā dziļumā, var izvēlēties iepriekš kāda nišas priekšējās malas punkta A ēnu A_* un pēc tās noteikt abus Saules attēlus S un S'. Priekšējās malas pārējās daļas ēnu dabū, nosakot gaismas avota ortogonālo projekciju S_{II} priekšējā plaknē (sal. ar 462. ras.). Nišas cilindriskās daļas pašēnas veidule iet caur punktu C, kurā nišas priekšējam lokam pieskaras no punkta S_{II} vilktais stars, tādēļ krītošās ēnas kontūras pārejo daļu veido priekšējā loka daļa no punkta A līdz punktam C. Šīs kontūras atsevišķos punktus B_* un D_* dabū, ievērojot, ka to o r t o g o n ā l ā s   p r o j e k c i j a s   s i e n a s   p l a k n ē ir cilindra veiduļu S_1B_* un S_1D_* galapunkti B''_* un D''_* šajā plaknē un stari BS_{II} un DS_{II} caur šiem punktiem ir gaismas staru ortogonālās projekcijas šajā plaknē. Ēnas konstrukcija tātad ir analoģiska konstrukcijai iepriekšējā piemērā, tikai gaismas staru perspektīvā virsskata vietā izmantojam gaismas staru projekcījas sienas (cilindra pamata) plaknē.

Iepriekšējo konstrukciju (arī 465. ras.) var interpretēt vēl šādi. Tā kā, piemēram, BS_{II} ir gaismas stara projekcija sienas plaknē, tad BB''_* ir nišas cilindriskās daļas veidules $B_*B''_*$ (neīstā) ēna šajā plaknē un B ir punkts, kurā šī ēna krusto cilindra pamata ēnu tai pašā plaknē (pēdējā sakrīt ar pašu kontūru). Izmantojot netiešo paņēmienu, punktu B_* dabū, velkot no abu ēnu krustpunkta B gaismas staru BS līdz krustpunktam ar cilindra veiduli $B_*B''_*$.

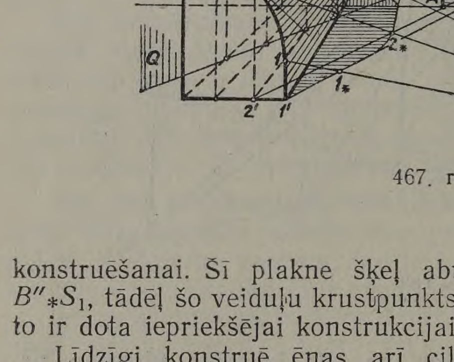
Ēnas kontūra starp C un B_* ir (telpā un attēlā) elipses loks, jo veidojas, nišas cilindram šķeļoties ar gaismas cilindru caur riņķa loku BC (BC ir kopējs abiem cilindriem). Plakni BB''_*B_* tādēļ var uzskatīt arī par vienu no palīgplaknēm, kas izmantota šī šķēluma



467. ras.

konstruēšanai. Šī plakne šķeļ abus cilindrus pa veidulēm BS un B''_*S_1, tādēļ šo veiduļu krustpunkts ir meklētais ēnas punkts B_*. Ar to ir dota iepriekšējai konstrukcijai vēl viena interpretācija.

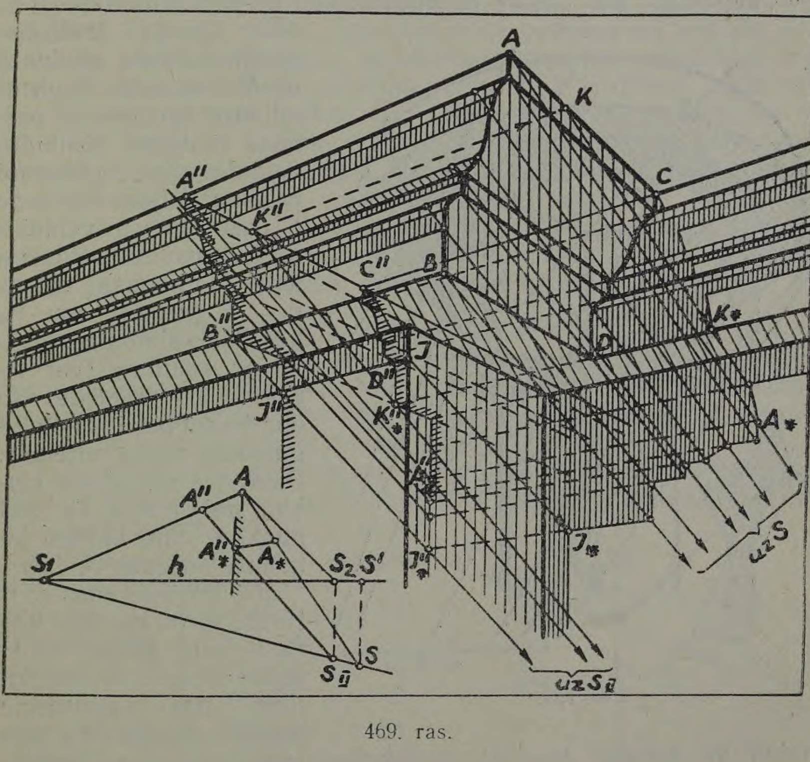
Līdzīgi konstruē ēnas arī cilindriskajai nišai, kas izveidota frontālajā sienā (467. ras.), tikai tad gaismas stari (cilindra veiduļu neīstās ēnas) sienas plaknē attēlojas paralēli virzienam SG (sal. ar 463. ras.). Nišas priekšējā loka daļas AB ēnas noteikšanai pamata plaknē izmanto, kā parasti, gaismas avota perspektīvo virsskatu S', kā tas parādīts rasējumā punktam E. Rasējumā parādīta arī ēnu noteikšana otram cilindram, kas tāpat novietots perpendikulāri sienas plaknei. Cilindra pašēnas veidule iet caur punktiem, kuros pamata līknēm pieskaras paralēli SG vilktie stari, bet šo pašēnas veiduli var noteikt arī, pievelkot gaismas staru cilindra šķēluma līnijai ar paralēli gaismas stariem vilktu vertikālu plakni Q. Cilindra krītošās ēnas konstruēšana saprotama no rasējuma.



468. ras.

Nākošajā — 468. rasējumā parādītas ēnas, ko veido caur cilindrisku logu telpā ieplūstošie gaismas stari (saules attēls virs horizonta). Tā kā punkti apzīmēti ar tiem pašiem burtiem kā iepriekšējā piemērā, tad arī šī konstrukcija saprotama no rasējuma. Vienīgi punkta N ēna N_* uz palodzes noteikta, uzskatot arī palodzi par cilindriskās virsmas sastāvdaļu.

Cilindrisku virsmu ēnas piemērs redzams arī 469. rasējumā, kur noteiktas d z e g a s pašēnas un krītošās ēnas. Lai krītošās ēnas iznāktu vēlamajā platumā, šai rasējumā atkal ir vispirms izvēlēta dzegas vaiņagojošās daļas punkta A ēna A_* ēkas sienas plaknē. Ēnu konstruēšanai ir noteikts dzegas normālprofils $A''B''J''$ un $C''D''A''_*$ (pēc diagonālprofiliem AB un CD), kas iezīmēts patvaļīgā vietā iz-

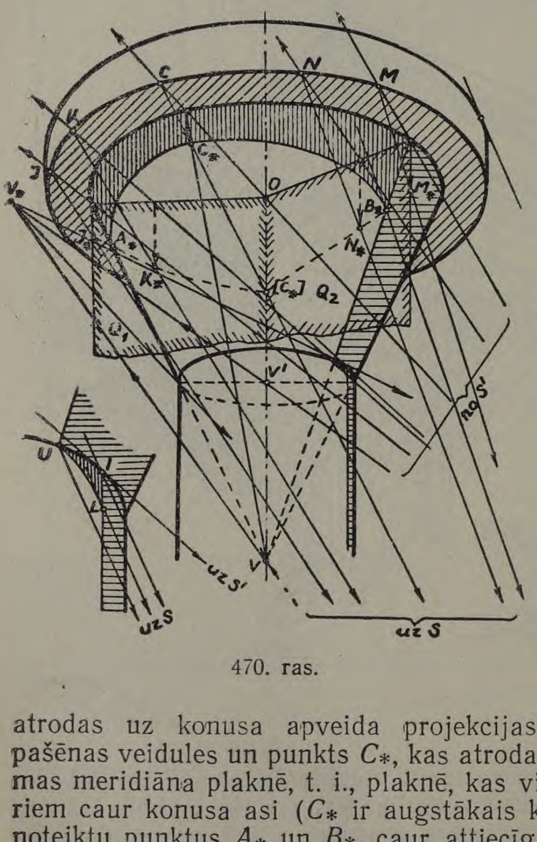


469. ras.

vēlētajā ēkas sienai perpendikulārajā plaknē. Tā kā A'' un A''_* ir punktu A un A_* ortogonālās projekcijas šai profila plaknē, tad ar šiem punktiem ir noteikta attiecīgā gaismas stara projekcija šai plaknē un var konstruēt arī gaismas avota projekciju S_{II} šai plaknē un gaismas avota perspektīvo attēlu S. Tā kā abi šie punkti iznāk ārpus rasējuma robežām, tad šī konstrukcija shematiski parādīta atsevišķi rasējuma kreisajā apakšējā stūrī.

Dzegas pašēnas un krītošās ēnas uz pašas dzegas virsmas nosaka tāpat kā ortogonālajās projekcijās, t. i., pievelkot profilam starus uz satekpunktu S_{II} (sal. ar 392. ras.). Šī konstrukcija ir parādīta rasējumā tikai dzegai sienas izvirzītajā daļā, bet pārējā daļā parādīta vienīgi atsevišķā krītošās ēnas punkta K_* noteikšana (netiešais paņēmiens: no $K''_* \equiv D''$ pretēji vērsts stars līdz K'', tad taisne $K''K$ uz satekpunktu S_1 un beidzot gaismas stars KS līdz krustpunktam K_* ar attiecīgo dzegas šķautni). Pārējos šīs daļas punktus nosaka analoģiski. Arī dzegas krītošās ēnas ēkas sienas plaknē nosaka, izmantojot dzegas normālprofilu un starus uz punktiem S_{II} un S.

Noslēgumā aplūkosim, kā konstruēt ēnu kādam vienkāršam kolonas kapitelim, kas sastāv no cilindriskas un koniskas daļas (sk. 470. ras.). Izvēloties gaismas avota attēlus S un S', nosakām vispirms cilindru un konusa pašēnas veidules. Cilindru veidules dabū, pievelkot pamatu līnijām starus no S', bet konusa veidules noteikšanai konstruējam iepriekš konusa virsotnes V (neīsto) ēnu V_* kapiteļa salaiduma plaknē ar stumbru (var iepriekš arī izvēlēties šo ēnu V_* un pēc tās noteikt gaismas avota attēlus). Pieskares salaiduma riņķim no punkta V_* dod punktus, caur kuriem iet konusa pašēnas veidules.



470. ras.

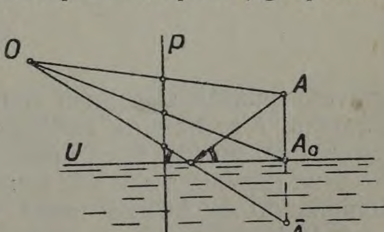
No krītošās ēnas kontūras, ko uz kapiteļa virsmas met abaka apakšējais riņķis, ir noteikti tikai trīs raksturīgie punkti: punkts A_*, kas atrodas uz konusa apveida projekcijas, punkts B_* uz konusa pašēnas veidules un punkts C_*, kas atrodas uz konusa veidules gaismas meridiāna plaknē, t. i., plaknē, kas vilkta paralēli gaismas stariem caur konusa asi (C_* ir augstākais krītošās ēnas punkts). Lai noteiktu punktus A_* un B_*, caur attiecīgajām veidulēm un konusa asi velk palīgplaknes Q_1 un Q_2 un nosaka vispirms ēnas, ko šajās plaknēs met abaka loki JKC un MNC. Šo ēnu (elipsu) krustpunkti ar attiecīgajām veidulēm ir meklētie punkti A_* un B_* (palīgvirsu metode). Augstāko punktu C_* nosaka, konstruējot konusa šķēlumu — veiduli C_*V ar iepriekš minēto gaismas meridiāna plakni un ievērojot, ka šī plakne šķeļ konusa pamatu pa taisni OC. No punkta C vilktais gaismas stars krusto veiduli meklētajā punktā C_*.

Bez minētajām ēnām rasējumā parādīta vēl ēna, ko uz stumbra augšējās daļas met konusa pašēnas veidu!e. Tā kā šī ēna ir niecīga, tad ar praksei pietiekamu precizitāti var pieņemt, ka tās krustpunkts L ar stumbra pašēnas veiduli atrodas uz gaismas stara, kas vilkts pa vidu gaismas stariem US un IS (sk. pa kreisi šīs sīkdaļas palielināto attēlu). Punktā U šai krītošai ēnai ir kopēja pieskare ar stumbra augšējā pamata riņķi, bet punktā L tās pieskare (tāpat kā punktā B_* uz kapiteļa) ir šai punktā pievilktais gaismas stars.

Konstruējot ēnas p a t v a ļ ī g a i r o t ā c i j a s v i r s m a i parasti lieto šķēluma metodi, kas dod reizē pašēnas un krītošās ēnas kontūras punktus. Šķēlumu noteikšanai vispirms jākonstruē rotācijas virsmas patvaļīgu paralēļu perspektīvie virsskati kādā brīvi izvēlētā horizontālajā plaknē. Lai noteiktu ēnu, ko uz rotācijas virsmas met kāda cita objekta pašēnas šķautne, arī šai gadījumā ieteicams lietot palīgvirsmu metodi. Par palīgvirsmām izdevīgi izvēlēties cilindriskas virsmas caur rotācijas virsmas paralēlēm. Nosakot krītošās ēnas vispirms uz šiem cilindriem, ēnas kontūras punktus uz rotācijas virsmas dabū kā iepriekšējo ēnu krustpunktus ar attiecīgajām paralēlēm — cilindru šķēlumiem ar rotācijas virsmu.

137. Atspoguļojumi. Konstruējot kādas celtnes perspektīvu, parasti mēdz attēlot arī tās tuvāko apkārtni. Ja celtne novietota pie ūdens baseina, tad jāparāda tās atspoguļojums ūdenī. Arī iekštelpu perspektīvās, ja gribam parādīt telpā novietoto priekšmetu atspoguļojumu kādā spogulī, ir jāatrisina līdzīgs uzdevums.

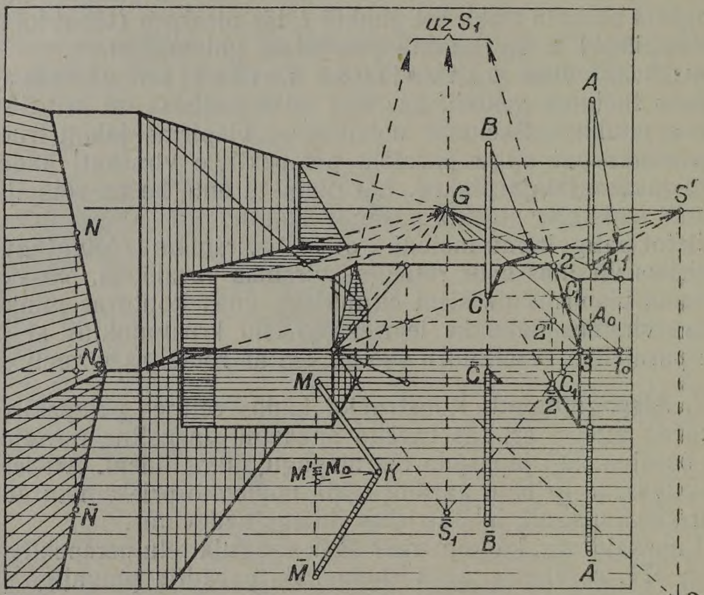
Lai noskaidrotu, kā konstruēt šādu spoguļattēlu perspektīvas, aplūkosim 471. rasējumu, kurā shematiski parādīta patvaļīga punkta A atspoguļošanās ūdenī. Izmantojot fizikas likumu, ka atspoguļotais stars vienmēr veido ar spoguļplakni U tādu pašu leņķi kā krītošais stars, varam secināt, ka novērotājs O neatkarīgi no tā atrašanās vietas redzēs punkta spoguļattēlu $\bar{A}$ šķietami tādā attālumā no spoguļplaknes U (uz perpendikula $A\bar{A}$ pret spoguļplakni), kādā punkts A atrodas no tās. *Katrs punkts un tā spoguļattēls tātad vienmēr ir novietoti ortogonāli simetriski pret spoguļplakni.* Tas attiecas tiklab uz atspoguļojumiem ūdenī, kā arī uz atspoguļojumiem jebkurā citā spoguļplaknē. No šī pamatlikuma var atvasināt visus pārējos likumus spoguļattēla perspektīvas konstruēšanai.



471. ras.

Visvienkāršāk konstruēt perspektīvos attēlus atspoguļojumiem ūdenī, jo, tā kā perpendikuls $A\bar{A}$ ir paralēls attēlu plaknei P, tad tā viduspunkts A_0 — perpendikula pamats spoguļplaknē — vienmēr attēlojas kā perpendikula attēla viduspunkts. Lai konstruētu kāda punkta atspoguļojuma perspektīvu, jānosaka tātad attēls tā perpendikula pamatam spoguļplaknē.

Jautājuma tuvākai noskaidrošanai aplūkosim 472. rasējumā attēloto atspoguļojumu ūdenī. Lai noteiktu, piemēram, vertikālā staba AA' atspoguļojumu, meklējam tā krustpunktu A_0 ar ūdens līmeņa plakni. Šai nolūkā no patvaļīga punkta uz horizonta, kaut vai no



472. ras.

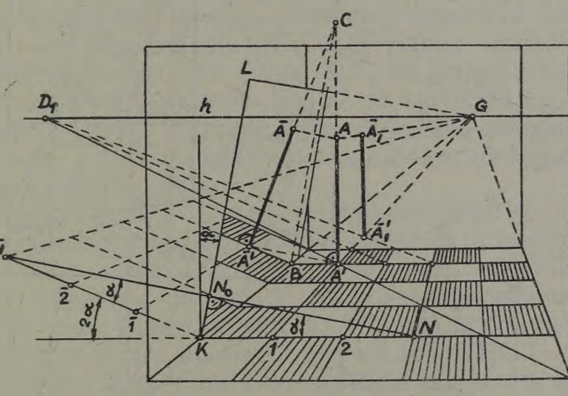
galvenā punkta G velkam caur staba pamatu A' staru līdz krustpunktam 1 ar baseina vertikālās sienas augšējo šķautni un pēdējo projecējam punktā 1_0 uz ūdens līmeņa svītras. Savienojot punktu 1_0 ar G un turpinot stabu līdz krustpunktam ar šo taisni, dabūjam meklēto punktu A_0. Atliekot tagad no punkta A_0 taisnes nogriezni $A_0\bar{A} = A_0A$, dabūjam staba galapunkta A atspoguļojumu $\bar{A}$.[1]

Kāda punkta atspoguļojumu var noteikt arī bez šāda augstuma mēroga, ja vien iepriekš ir noteikts jau atspoguļojums taisnei, kas atrodas tai pašā plaknē. Tā, piem., lai noteiktu punkta C atspoguļojumu $\bar{C}$, velkam horizontālu taisni CC_1 līdz plaknes šķautnei $2—3$ un nosakām punkta C_1 atspoguļojumu $\bar{C}_1$ uz šķautnes atspoguļojuma $\bar{2}—\bar{3}$. Vertikāli zem C uz taisnes CC_1 atspoguļojuma $\bar{C}_1\bar{C}$, kas arī ir

[1] Ja baseina malas nebūtu precīzi norobežotas (dabisks baseins), tad stars jāturpina līdz krustpunktam 1 ar pamata līniju un jāatliek no punkta 1 uz leju nogrieznis $1—1_0$, vienāds ar ūdens līmeņa dziļumu zem pamata plaknes.

horizontāla taisne, atrodas meklētais punkts $\overline{C}$. Arī punktā C novietotā staba galapunkta B atspoguļojumu nu dabū, vienkārši atliekot $\overline{C}\overline{B}=CB$.

Tāpat nosaka arī visu pārējo punktu (arī ēnu) atspoguļojumus ($N_0\overline{N}=N_0N$, $M_0\overline{M}=M_0M$ utt.). Konstrukciju vienkāršošanai vai precizitātes kontrolei der ievērot vēl, ka 1) horizontālas taisnes atspoguļojums horizontālajā spoguļplaknē ir horizontāla taisne, kas iet uz to pašu satekpunktu; 2) patvaļīgas taisnes atspoguļojuma satekpunkts ir ortogonāli simetrisks ar dotās taisnes satekpunktu attiecībā pret horizontu. Pēdējais nosacījums jāņem vērā, piemēram, konstruējot slīpo taišņu MK un $2—3$ atspoguļojumus, ja iepriekš nav zināmi to perspektīvie virsskati ūdens līmeņa plaknē (sk. ras. taišņu $2—3$ un $\overline{2}—\overline{3}$ satekpunktus S_1 un $\overline{S}_1$; ir jābūt $\overline{S}_1G=GS_1$).

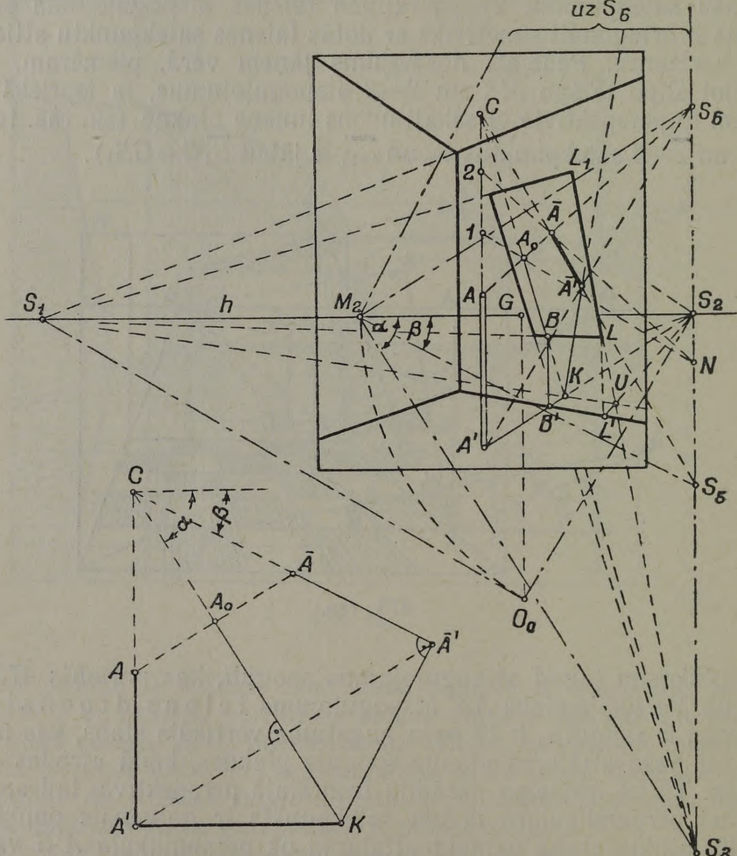


473. ras.

Aplūkosim tagad atspoguļojumus spogulī, kas parādīts 473. rasējumā. Vertikālā staba AA' atspoguļojums telpas dibensienā, kas visa ir spogulis, ir tā paša augstuma vertikāls stabs, kas novietots tai pašā attālumā viņpus spoguļa plaknes, kādā atrodas stabs no tās. Tā kā iekštelpa parādīta frontālajā perspektīvā, tad spoguļplaknei perpendikulāro taišņu satekpunkts ir galvenais punkts G, un, lai atliktu staba pamata attālumu uz perpendikula $A'G$ var izmantot, piemēram, distancpunktu D_1.[1] Vertikālā staba atspoguļošanai pie telpas kreisās sienas novietotajā spogulī ievērosim, ka stabs un tā atspoguļojums atrodas kopējā frontālā plaknē. Atspoguļojums tātad attēlojas par stabam ortogonāli simetrisku figūru attiecībā pret spoguļa plaknes slīpuma līniju $BC\|KL$, pa kuru spoguļa plakni šķeļ frontālā plakne caur stabu AA'. Rasējumā vēl

[1] Uzskatāmības dēļ telpas grīdā iezīmēts kvadrātu tīkls (parkets), kura atspoguļojums parādīts gan tikai pie telpas kreisās sienas novietotajā spogulī. Bez tam nav ņemts vērā, ka arī šis otrs spogulis attēlosies frontālajā spogulī.

atsevišķi parādīts, kā nosaka patvaļīga grīdas punkta N atspoguļojumu $\overline{N}$ ($NN_0 \perp KL$, $N_0\overline{N} = N_0N$). Ja spoguļa sānu šķautnes nav tā plaknes slīpuma līnijas, bet kādas citas taisnes vai pat līkas līnijas, tad punktu $\overline{N}$ dabū, ievērojot, ka trīsstūris $NK\overline{N}$ ir vienādsānu trīsstūris, kam pamata leņķi vienādi ar spoguļa plaknes slīpuma leņķi α pret sienas plakni, un frontālās taisnes KN atspoguļojums $K\overline{N}$ veido



474. ras.

leņķi 2 α ar pamata (grīdas) plakni H. Spoguļa plaknes slīpuma līniju KL tad dabū kā šī vienādsānu trīsstūra virsotnes K leņķa bisektrisi.

Aplūkosim tagad vēl vispārīgāku gadījumu, kad iekštelpa attēlota stūra perspektīvā un spoguļa apakšējā horizontālā mala atbalstās sienas plaknē kādā zināmā augstumā virs grīdas plaknes (sk. 474. ras.). Ar S_1 un S_2 ir apzīmēti abu dominējošo horizontālo virzienu satekpunkti, bet ar O_0 — redzes punkta savietojums ar attēlu plakni. Spoguļa taisnstūra veida ierāmējuma attēlu uzskatām kā dotu; tā sānu malu satekpunkts ir punkts S_3, kas atrodas vertikāli zem (šo malu perspektīvā virsskata) satekpunkta S_2.

Spoguļa abas slīpās šķautnes ir spoguļa plaknes slīpuma līnijas attiecība pret pamata plakni H. Nosakot to horizontālajām projekcijām, t. i., virzienam uz S_2, atbilstošo mērpunktu M_2 ($S_2M_2 = S_2O_0$) un savienojot M_2 ar šo slīpuma līniju satekpunktu S_3, leņķis α, ko taisne M_2S_3 veido ar horizontu, ir šo līniju slīpuma leņķis pret pamata plakni H (sal. ar 433. ras.). Velkot tagad $M_2S_4 \perp M_2S_3$ un nosakot šī perpendikula krustpunktu ar vertikālo taisni caur S_2, dabūjam spoguļa plaknei perpendikulārā virziena satekpunktu S_4.

Lai noteiktu tagad kāda patvaļīga punkta A atspoguļojumu $\bar{A}$, ir jāvelk caur šo punktu perpendikuls pret spoguļa plakni un jānosaka vispirms tā krustpunkts A_0 — perpendikula pamats spoguļa plaknē. Lai iztiktu bez spoguļa plaknes perspektīvā virsskata, par palīgplakni caur perpendikulu AS_4 izvēlēsimies vertikālu plakni Q, kuras satektaisne ir vertikālā taisne S_2S_4. Šī palīgplakne šķeļ grīdas plakni pa taisni $A'B'S_2$, sienas plakni pa vertikālu taisni $B'B$, bet spoguļa plakni pa tās slīpuma līniju BA_0, kas perspektīvā iet uz satekpunktu S_3. Uz šīs pēdējās taisnes atrodas meklētais perpendikula pamats spoguļa plaknē.

Lai atliktu no punkta A_0 uz perpendikula pagarinājuma aiz spoguļa plaknes taisnes nogriezni $A_0\bar{A}$, kas telpā būtu vienāds ar punkta A attālumu līdz spoguļa plaknei, izvēlamies uz palīgplaknes Q satektaisnes patvaļīgu punktu N, no kura projecējam punktu A_0 uz vertikālās taisnes caur punktu A. Atliekot uz šīs vertikālās taisnes no dabūtā punkta *1* uz augšu taisnes nogriezni *1*—*2*=A—*1* un savienojot punktu *2* ar punktu N, novilktā taisne ies caur meklēto punktu $\bar{A}$. Konstrukcija kļūst saprotama, ja ievērojam, ka taisnes A—*2* un $A\bar{A}$ atrodas kopējā plaknē Q, bet taisnes *1*—N un *2*—N telpā ir paralēlas, jo punkts N ir šo taišņu satekpunkts (atrodas uz plaknes Q satektaisnes)[1].

Ja ir jānosaka, piemēram, vertikālā staba attēlošanai, arī punkta A perspektīvā virsskata A' spoguļattēls $\bar{A}'$, tad to var izdarīt analoģiski. Vienkāršāk tomēr to noteikt (ja $\bar{A}$ jau noteikts), ievērojot, ka taisnēm AA', A_0B un $\bar{A}\bar{A}'$ jākrustojas tāpat kā iepriekšējā rasējumā kopējā punktā C. Vēl lietderīgāks izrādās šāds paņēmiens.

Tā kā visu vertikālo taišņu atspoguļojumiem jābūt savstarpēji paralēliem, tad to perspektīvajiem attēliem jāiet uz kopēju satekpunktu S_5, kas atrodas uz palīgplaknes Q vertikālās satektaisnes. Šo punktu S_5 var noteikt, nosakot vertikālo taišņu spoguļattēlu slīpuma leņķi β pret pamata plakni H. Šai nolūkā izzīmējam atsevišķi (īstajā lielumā vai perspektīvā attēla AA' mērogā) trīsstūri $CA'K$

---

[1] Šis paņēmiens, kā atlikt doto taisnes nogriezni uz patvaļīgas taisnes, ir analoģisks agrāk apskatītajam paņēmienam, kā atliek taisnes nogriezni uz **horizontālas taisnes (sal. ar 435. ras.)**, tikai te horizonta vietā, t. i., horizontālās plaknes satektaisnes vietā, ir ņemta vertikālās plaknes satektaisne.

($\measuredangle A'CK=90°-\alpha$) un konstruējam šim taisnleņķa trīsstūrim ortogonāli simetrisko trīsstūri $C\bar{A}'K$ attiecībā pret hipotenūzu CK (sk. figūru rasējumā pa kreisi apakšā). Leņķis β tad ir leņķa $A'C\bar{A}'$ papildinājums līdz 90°. Atliekot šo leņķi pie mērpunkta M_2 zem horizonta, tā apakšējā mala ies uz meklēto satekpunktu S_5. Izmantojot šo satekpunktu, vertikālā staba pamata spoguļattēlu $\bar{A}'$ dabū kā taišņu $\bar{A}S_5$ un $A'S_4$ krustpunktu.

Tā kā parasti objekti, kuru spoguļattēlus gribam konstruēt, ir ar vertikālām šķautnēm, tad lietderīgi jau pašā sākumā noteikt šo satekpunktu S_5, jo tad nav katrreiz par jaunu jāmeklē kādas vertikālas šķautnes un tās spoguļattēla kopējais punkts C.

Bez vertikālām šķautnēm atspoguļojamiem objektiem var būt arī horizontālas šķautnes dominējošos virzienos. Šķautnes, kas iet virzienā uz satekpunktu S_1, tātad paralēli spoguļa plaknei, arī spoguļattēlā iet uz šo pašu satekpunktu, jo šie spoguļattēli ir horizontālas taisnes, kas pie tam ir paralēlas dotajām. Šķautnes, kas iet virzienā uz satekpunktu S_2, turpretim atspoguļojas par taisnēm, kas ir slīpas pret pamata plakni, jo arī spoguļa plakne ir slīpa pret pamata plakni. Tāda taisne ir, piemēram, taisne $A'B'$. Lai noteiktu šīs taisnes (un visu tai paralēlo taišņu) atspoguļojuma satekpunktu S_6, turpinām to līdz krustpunktam K ar taisnes $\bar{A}_0B$ pagarinājumu un savienojam punktu K ar punktu $\bar{A}'$. Taisne $K\bar{A}'$ ir taisnes $A'K$ spoguļattēls, kam turpinājumā jāiet caur satekpunktu S_6 uz plaknes Q satektaisnes (apskatītajā piemērā šis punkts nav rasējuma robežās). Šo satekpunktu var noteikt jau iepriekš, ievērojot, ka telpā taisne $K\bar{A}'$ ar taisni $\bar{A}\bar{A}'$ veido taisnu leņķi (sk. atsevišķo figūru 474. ras.). Velkot tādēļ no mērpunkta M_2 perpendikulu pret taisni M_2S_5, šis perpendikuls krustos plaknes Q satektaisni meklētajā satekpunktā S_6.

Punkts K atrodas uz taisnes, pa kuru spoguļa plakne šķeļ pamata (grīdas) plakni H. Tā kā uz šīs taisnes krustojas visas horizontālās taisnes ar saviem spoguļattēliem, tad atspoguļojumu konstrukcijām bez satekpunktiem S_5 un S_6 ir izdevīgi noteikt arī šo šķēluma taisni. Tās satekpunkts ir punkts S_1, bet atsevišķu tās punktu U dabū kā spoguļa plaknes malas LL_1 krustpunktu ar šīs malas perspektīvo virsskatu $L'S_2$.

Ja ir iepriekš noteikti abi satekpunkti S_5 un S_6 un spoguļa plaknes šķēluma taisne ar grīdas plakni — sauksim to par grīdas līniju, tad patvaļīga telpas punkta A un tā projekcijas A' grīdas plaknē spoguļattēlus var noteikt daudz vienkāršāk, pat bez iepriekš lietotā dalījuma punkta N. Velk $A'S_2$ līdz krustpunktam K ar grīdas līniju, tad KS_6 un pēc tam $A'S_4$ līdz krustpunktam $\bar{A}'$ ar KS_6. Tālāk velk AS_4 un $\bar{A}'S_5$ līdz to savstarpējam krustpunktam $\bar{A}$.

Vēl ir jāņem vērā šāds svarīgs apstāklis. Iepriekš izpildītajās konstrukcijās mēs pieņēmām, ka atspoguļojamo punktu perspektīvie attēli jau ir iepriekš doti. Bet ir iespējams, ka spogulī atspoguļojas arī tie punkti, kas atrodas ārpus perspektīvajā attēlā parādītās telpas daļas, pat, piemēram, punkti, kas atrodas novērotājam aizmugurē. Tādā gadījumā nav citas iespējas kā papildināt (pēc dotā ortogonālā attēla) perspektīvo attēlu arī ar šo punktu abiem perspektīvajiem attēliem un noskaidrot, kuri no dotajiem punktiem dotajam redzes punktam būs redzami spogulī. Iespējams konstruktīvi noteikt, kāda telpas daļa vispār būs redzama spogulī, tomēr šo jautājumu sīkāk neaplūkosim.

4. §. PAPILDINĀJUMI

138. Konstrukcijas slīpā plaknē. Dažreiz ir jāizpilda kādas metriskas konstrukcijas arī plaknē, kas ir vispārīgā stāvoklī pret attēlu plakni, piemēram, jāiekonstruē šīs plaknes perspektīvajā attēlā kādas dota lieluma un veida figūras attēls, jānosaka šai plaknē kādi punkti u. tml. Tādā gadījumā mums ir jāatrisina līdzīgs uzdevums, kādu atrisinājām, konstruējot kāda objekta perspektīvo virsskatu pēc tā projekcijas pamata plaknē H. Izrādās, ka visi agrāk apskatītie paņēmieni un likumi viegli pielāgojami arī šim vispārīgajam gadījumam, tādēļ lūkosim šo jautājumu noskaidrot.

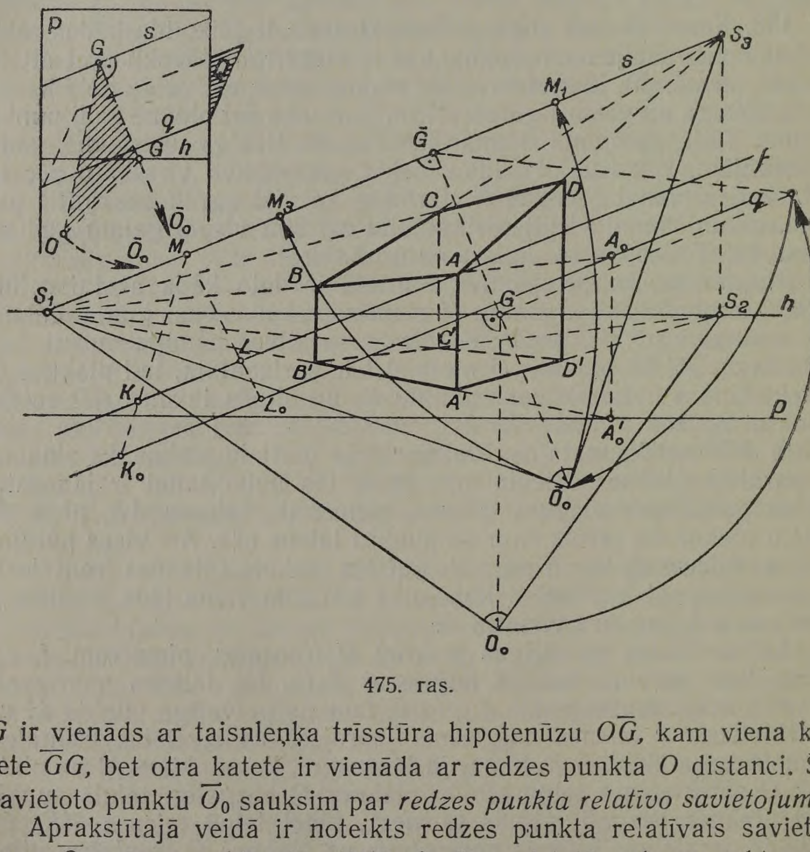
Pieņemsim, ka perspektīvajā attēlā ir dota kāda ar taisnstūri $ABCD$ ierobežota slīpa plakne Q, piemēram, kādas ēkas jumta plakne, un ir zināmi arī visi nepieciešamie perspektīvas pamatelementi (sk. 475. ras.). Tā kā plaknes Q mala AB ir horizontāla, tad plaknes Q satektaisne s ir taisne caur punktu S_1 un slīpās taisnes AD satekpunktu S_3, kas atrodas vertikāli virs šīs taisnes perspektīvā virsskata $A'D'$ satekpunkta S_2. Plaknes pēda q attēlu plaknē, kā zināms, ir paralēla plaknes satektaisnei, tādēļ tās noteikšanai ir jānosaka kādas patvaļīgas plaknes taisnes, piemēram, taisnes AB, pēda A_0 attēlu plaknē un jāvelk caur šo punktu taisne $q \| s$. Arī visas pārējās taisnes plaknē Q, kas ir paralēlas attēlu plaknei (plaknes frontāles), ir paralēlas satektaisnei s. Rasējumā iezīmēta viena tāda frontāle f, proti, caur taisnstūra virsotni A.

Lai uz kādas patvaļīgas plaknes Q frontāles, piemēram, f, atliktu dota garuma taisnes nogriezni K_0L_0, šis taisnes nogrieznis jāatliek vispirms uz pēdas q un pēc tam no patvaļīga punkta M uz satektaisnes s taisnes nogrieznis jāprojecē uz izvēlētās frontāles. Konstrukcija kļūst saprotama, ja ievērosim, ka punktam M uz plaknes Q satektaisnes telpā atbilst plaknes Q bezgalīgi tālais punkts (uz plaknes bezgalīgi tālās taisnes), tādēļ telpā taisnes MK_0 un ML_0 ir paralēlas. Taisnes nogriežņus uz plaknes Q frontāles atliek tātad tāpat kā uz pamata plaknes H frontālajām taisnēm, tikai pamata līnijas un horizonta, t. i., pamata plaknes pēdas un satektaisnes vietā jāizmanto plaknes Q attiecīgie elementi.

Lai atliktu taisnes nogriežņus uz patvaļīgas plaknes Q taisnes, jānosaka tāpat kā agrāk šo taišņu mērpunkti uz satektaisnes s. Pieņemsim, ka telpā caur redzes punktu O novilkta plakne, kas ir paralēla plaknei Q (sk. paskaidrojošo attēlu 475. ras. pa kreisi augšā). Šī plakne šķeļ attēlu plakni pa plaknes Q satektaisni s.

Novilksim šai paralēlplaknē perpendikulu no punkta O pret satektaisni s. Šī perpendikula krustpunktu ar satektaisni sauksim par *relatīvo galveno punktu* un apzīmēsim ar $\overline{G}$. Taisne, kas savieno abus galvenos punktus G un $\overline{G}$, ir perpendikulāra satektaisnei s, jo $G\overline{G}$ ir taisnes $O\overline{G}$ ortogonālā projekcija plaknē P.

Pieņemsim tagad, ka paralēlplakne pagriezta ap satektaisni s, kamēr tā sakrīt ar attēlu plakni P. Redzes punkts O tad novietojas punktā $\overline{O}_0$ uz perpendikula $\overline{G}G$ turpinājuma, pie kam tā attālums no



475. ras.

$\overline{G}$ ir vienāds ar taisnleņķa trīsstūra hipotenūzu $O\overline{G}$, kam viena katete $\overline{G}G$, bet otra katete ir vienāda ar redzes punkta O distanci. Šo savietoto punktu $\overline{O}_0$ sauksim par *redzes punkta relatīvo savietojumu*.

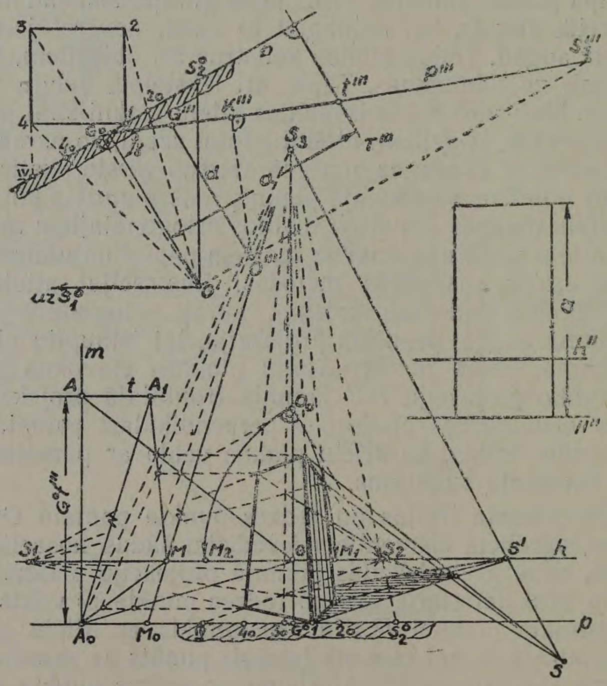
Aprakstītajā veidā ir noteikts redzes punkta relatīvais savietojums $\overline{O}_0$ arī perspektīvajā attēlā. Ar šī savietotā redzes punkta palīdzību nu ir iespējams, piemēram, novilkt plaknē Q taisni, kas ar doto taisni veidotu doto leņķi, kā arī noteikt abu šo taišņu mērpunktus tāpat, kā to darījām gadījumā, kad taisnes atradās pamata plaknē. Tā, piemēram, savienojot punktu $\overline{O}_0$ ar satekpunktiem S_1 un S_3, dabūjam taišņu AB un AD savietotos paralēlstarus (kam tātad jāveido taisns leņķis), atliekot uz satektaisnes $S_1M_1 = S_1\overline{O}_0$, dabūjam taisnes AB mērpunktu M_1, bet, atliekot no relatīvā galvenā punkta $\overline{G}$ uz abām pusēm relatīvo distanci $\overline{G}\overline{O_0}$, dabūjam relatīvos distancpunktus — satekpunktus taisnēm, kas plaknes Q frontāles krusto 45° leņķī, utt. Tādējādi visas konstrukcijas, ko agrāk izpildījām pamata plaknē H, var analoģiski izpildīt plaknē Q. Vienīgi horizonta, pamata līnijas un savietotā redzes punkta O_0 vietā jāizvēlas plaknes satektaisne, plaknes pēda un relatīvais savietotais redzes punkts $\overline{O_0}$.

139. Perspektīvā attēla konstruēšana slīpā plaknē. Perspektīvos attēlus slīpā plaknē konstruē visos tajos gadījumos, kad attēlojamais objekts ir tik augsts, ka, aplūkojot to dabā, novērotājam ir jāvērš skatiens uz augšu. Tādus attēlus konstruē arī objektiem, kas parasti tiks aplūkoti no lidmašīnas. Tāpat arī iekštelpu, velvju vai griestu attēlojumos bieži vien mēdz izvēlēties attēlu plakni slīpi pret pamata plakni, piemēram, ja gribam attēlot kāpņu uzeju, ko parasti arī vienmēr aplūkosim ar kāpšanas virzienā augšup vērstu skatienu. Attēlojot augstus objektus vertikālajā plaknē, redzes punkts būtu jāizvēlas tālu no attēlu plaknes un attēli tuvotos ortogonālajiem attēliem.

Šādu attēlu pagatavošanai ar maziem papildinājumiem var lietot visas jau agrāk apskatītās metodes. Ilustrācijai attēlosim slīpā plaknē regulāru četrstūra prizmu, kuras ortogonālie attēli doti 476. rasējumā augšā (frontālā projekcija, lai ietaupītu vietu, novietota rasējuma labajā malā). Attēlu plaknes stāvoklis parādīts ar tās ortogonālo projekciju P''' jaunajā frontālajā projekciju plaknē, kas vilkta caur redzes punktu O perpendikulāri pamata līnijai p. Ar α apzīmēts leņķis, ko attēlu plakne veido ar pamata plakni H; $O'O'''$ ir horizonta augstums.

Atstājot pamata līnijas un redzes punkta pamata O' jēdzienus negrozītus, pārējiem elementiem ievedīsim šādus nosacītus apzīmējumus (sk. reizē to projekcijas jaunajā projekciju plaknē). Par galveno staru sauksim staru, kas no redzes punkta O vilkts plaknē P_3 paralēli pamata plaknei H. Tā krustpunkts ar attēlu plakni P ir galvenais punkts G, bet tam atbilstošais punkts uz pamata līnijas — galvenā punkta pamats $G°$. Attālumu no redzes punkta O līdz galvenajam punktam G sauksim par distanci, kaut gan šis attālums netiek mērīts pa perpendikulu pret attēlu plakni. Visi šie nosacītie apzīmējumi izvēlēti tāpēc, lai būtu analoģija ar agrāk apskatītajām metodēm.

Perspektīvā attēla pagatavošanu arī te iesāksim ar tā perspektīvā virsskata konstruēšanu. Vispirms novelkam horizontu H un pamata līniju p, kas atrodas attālumā $G°G'''$ viens no otra, un izvēlamies galveno punktu G, ar ko ir noteikts arī galvenā punkta pamats $G°$ (iepriekš minētā nozīmē) uz pamata līnijas p. Lietojot arhitektu metodi, velkam no objekta horizontālās projekcijas virsotnēm starus uz redzes punkta pamatu O' un krustpunktus (ar papīra strēmeles palīdzību) pārnesam uz perspektīvā attēla pamata līnijas. Lai noteiktu, kā šie stari attēlojas perspektīvā, pieņemsim, ka caur kādu no tiem, piemēram, caur staru $O'2$, novilkta vertikāla palīgplakne Q. Tā kā šajā palīgplaknē atrodas arī redzes punkts O, tad šī plakne šķeļ attēlu plakni pa taisni, uz kuras atrodas arī stara $O'2$ perspektīvais attēls. Lai dabūtu šo šķēluma taisni perspektīvajā attēlā, ievērosim, ka tā sākas punktā 2_0 uz pamata līnijas un iet uz punktu S_3, kurā perpendikulāri pamata plaknei H vilktais redzes stars krusto attēlu plakni P. Šis punkts perspektīvajā attēlā atrodas vertikāli virs galvenā punkta G, attālumā $GS_3 = G'''S'''_3$, ko dabū jaunajā frontālajā projekcijā.



476. ras.

Šo pašu rezultātu varēja dabūt arī citādi. Uz iepriekš noteiktās taisnes atrodas arī objekta vertikālās šķautnes (caur punktu 2) attēls, jo šī šķautne atrodas tai pašā palīgplaknē. Punkts S_3 ir visu objekta vertikālo šķautņu kopējais satekpunkts. Stara $0'2$ attēlam tādēļ jāiet caur tā pēdu 2_0 attēlu plaknē P uz šo vertikālo šķautņu satekpunktu S_3, kuru nosaka tāpat kā iepriekš.

Visi stari pamata plaknē caur redzes punkta pamatu tātad attēlojas par taisnēm, kas no šo staru pēdām uz pamata līnijas iet uz vertikālo taišņu satekpunktu S_3. Atšķirība no šo staru perspektīvo attēlu konstruēšanas vertikālā plaknē ir tikai tā, ka pēdējā gadījumā šis satekpunkts S_3 ir bezgalībā.

Lai pabeigtu perspektīvā virsskata konstruēšanu, jānosaka vēl dominējošo horizontālo virzienu satekpunkti S_1 un S_2. Lai to izdarītu, pieņemam atkal, ka caur redzes punktu O paralēli šiem virzieniem novilktas vertikālas palīgplaknes, kas krusto pamata līniju punktos S_1^0 un S_2^0 (pirmais nav rasējuma robežās). Šīs palīgplaknes šķeļ attēlu plakni P atkal pa taisnēm, kas sākas punktos S_1^0 un S_2^0 uz pamata līnijas un iet uz vertikālo taišņu satekpunktu S_3. Tā kā uz šīm taisnēm jāatrodas arī attiecīgo paralēlstaru krustpunktiem ar horizontu, tad satekpunktus S_1 un S_2 dabū, pārnesot uz perspektīvā attēla pamata līnijas punktus S_1^0 un S_2^0 un nosakot taišņu $S_1^0S_3$ un $S_2^0S_3$ krustpunktus ar horizontu. Dominējošo taišņu attēli iet caur šo taišņu pēdām uz pamata līnijas p uz attiecīgajiem satekpunktiem S_1 un S_2 un, krustojoties ar iepriekš novilktajām taisnēm, tie nosaka objekta perspektīvā virsskata virsotņu punktus.

Atzīmēsim vēl, ka taišņu vietā, kas iet caur redzes punkta pamatu O', varēja izmantot arī taisnes, kas vilktas no stara $O'G°$ krustpunkta ar zuduma plakni. Šo krustpunktu dabū, velkot no O''' staru paralēli attēlu plaknes projekcijai P''' līdz krustpunktam ar $O'G°$. Atšķirībā no iepriekšējām taisnēm šo taišņu attēli ir perpendikulāri pamata līnijai, jo zuduma plaknes punkta attēls ir plaknes P bezgalīgi tālais punkts.

Aplūkosim tagad, kā konstruēt pašu perspektīvo attēlu. Vertikālo šķautņu attēli, kā jau minējām, iet uz satekpunktu S_3. Lai atliktu šo šķautņu augstumus perspektīvā, varam arī šeit konstruēt augstuma mērogu. Lai to izdarītu, pieņemsim, ka dotajā augstumā a vilkta horizontāla palīgplakne T, kas šķeļ attēlu plakni pa horizontam paralēlu taisni — šīs plaknes pēdu t. Jaunajā frontālajā projekcijā šī palīgplakne attēlojas par galvenā stara projekcijai $O'''G'''$ paralēlu taisni T''', bet tās pēda t — par punktu t''' uz attēlu plaknes projekcijas P'''. Perspektīvajā attēlā šī pēda atrodas attālumā $G°t'''$ no plaknes H pēdas — pamata līnijas p.

Tā kā plaknēm T un H ir kopēja satektaisne h, tad katra vertikāla plakne tās šķeļ pa taisnēm, kuras atrodas attālumā a cita virs citas un kuru perspektīvas krustojas uz šīs satektaisnes. Attēlu plakni P šāda vertikāla plakne šķeļ pa taisni, kas vispār ir slīpa pret pamata līniju. Vienīgi, ja vertikālā plakne ir perpendikulāra pamata līnijai p, tā šķeļ attēlu plakni pa taisni, kas perpendikulāra pamata līnijai. Tā kā plaknes T un H tāda plakne šķeļ pa taisnēm, kuru perspektīvas krustojas galvenajā punktā G, tad augstuma mērogu konstruē šādi: velk no patvaļīga punkta A_0 uz pamata līnijas perpendikulu m pret horizontu un atliek uz tā $A_0A = G°t'''$; savienojot punktus A_0 un A ar galveno punktu G, dabū zemes līniju A_0G un gaisa līniju AG. *Augstuma mērogu tālāk var izmantot tāpat kā parasti, tikai no zemes līnijas uz gaisa līniju ir jāpāriet pa taisnēm, kas vilktas uz vertikālo taišņu satekpunktu* S_3.

Ja galvenā punkta G vietā par mērpunktu augstumu atlikšanai izvēlas patvaļīgu punktu M uz horizonta (sk. ras.), tad zemes līnija ir taisne MA_0, bet atbilstošā gaisa līnija ir taisne caur punktu

A_1, kurā taisni t krusto taisne $A_0A_1 \| MS_3$. Tas kļūst saprotams, ja ievērojam, ka MS_3 ir taisne, pa kuru attēlu plakni šķeļ vertikālā plakne caur redzes punktu O, kas ir paralēla virzienam OM uz šo mērpunktu M (sal. ar satekpunktu S_1 un S_2 konstrukciju).

Tā kā pamata plakne H šai gadījumā relatīvi pret attēlu plakni ir slīpā stāvoklī, tad *objekta perspektīvā virsskata konstruēšana ir dotā lieluma figūras iezīmēšana slīpajā plaknē.* Tādā gadījumā galvenajam punktam G un distancei d ir tikai relatīva nozīme, jo īstais galvenais punkts tad ir punkts K, kurā attēlu plakni krusto no redzes punkta O novilktais perpendikuls, bet OK ir distance parastajā nozīmē. Sakars starp abām distancēm redzams trīsstūrī $O'''K'''G'''$, kuru izmantojām jau agrāk, kad bija runa par konstrukcijām slīpā plaknē (sk. 138. nodaļījumu). Redzes punkta savietojumu O_0 ar attēlu plakni P arī te dabū, atliekot no galvenā punkta vertikāli uz leju vai uz augšu šī trīsstūra hipotenūzu $O'''G'''=d$. Tad var noteikt dominējošo virzienu mērpunktus M_1 un M_2 un perspektīvā virsskata konstruēšanai izmantot aksonometrisko metodi. Savietojot tai pašā vērsumā arī pamata plakni, perspektīvā virsskata konstruēšanai varam lietot arī agrāk apskatīto savietošanas metodi (sk. 128. nodaļījumu).

Rasējumā parādīts vēl, kā konstruē ēnas paralēlapgaismojumā. Abi saules attēli šai rasējumā atrodas uz kopēja stara, kas vilkts no satekpunkta S_3; citādi viss paliek kā agrāk.

Konstruējot perspektīvo attēlu slīpā plaknē, bez palīgprojekcijas jaunajā frontālajā projekciju plaknē varam iztikt, izsakot attēla konstruēšanai nepieciešamos lielumus ($G°G$, GO_0, GS_3 un A_0A) atkarībā no ortogonālajās projekcijās tieši izmērījamiem lielumiem un leņķa α. Ja šie lielumi perspektīvajā attēlā atlikti, tad tālākā konstrukcija ir analoģiska konstrukcijai vertikālā plaknē, tikai vertikālo palīgtaišņu vietā perspektīvā attēlā viscaur ir jāizvēlas taisnes uz satekpunktu S_3.

Konstrukcija paliek tāda pati arī tad, ja attēlu plakni sagāžam uz pretējo pusi, tikai satekpunkts S_3 tad ir z e m pamata līnijas. Objekts tad attēlojas uz augšu paplašinātā veidā, t. i., tāds, kādu mēs to redzam, aplūkojot no lielāka augstuma (aerofotografija!).

140. Perspektīvo attēlu nepilnības. Bieži ir dzirdami pārmetumi, ka ar centrālās projecēšanas metodi pagatavotie attēli nedod to pašu redzes iespaidu, kādu iegūstam, aplūkojot pašu telpas objektu. Tā, piemēram, lodes redzamais apveids, izņemot gadījumu, kad tās centrs atrodas uz galvenā stara, vienmēr attēlojas kā elipse, kaut gan mēs esam pieraduši redzēt to kā riņķi, lai arī no kādas vietas mēs to aplūkotu. Tāpat, attēlojot frontālajā perspektīvā vienāda lieluma kolonu rindu, malējās kolonas attēlojas platākas, kaut gan īstenībā to novērot nevar.

Šādus īstenības sagrozījumus, protams, nevar pamanīt, ja mēs attēlu aplūkojam no tās vietas, kurā bija izvēlēts projekciju centrs, attēlu pagatavojot, bet tie iedarbojas traucējoši, vienīgi attēlu aplūkojot vairāk iesāņus. Šādi sagrozījumi rodas tādēļ, ka projecētāji stari krusto attēlu plakni jo slīpāk, jo vairāk tie novirzās no galvenā stara. Aplūkojot objektus dabā, šādi sagrozījumi nerodas tāpēc, ka mēs netveram vienā skatienā uzreiz visus objektus, bet ļaujam skatienam ātri slīdēt no viena objekta uz otru, tātad katru objektu projecējam it kā jaunā, attiecīgajam skata virzienam perpendikulārā plaknē.

Šādus atsevišķi iegūtus iespaidus savienot vienā kopējā attēlā nav iespējams, jo mēs nonāktu pretrunās. Tā, piemēram, aplūkojot jau minēto kolonu rindu, mēs malējās kolonas redzam ne vien tievākas, bet arī īsākas, jo aplūkojam tās mazākā redzes leņķī. Ja gribētu šo efektu pārnest arī attēlā, tad kolonu pārsedzošā daļa būtu jāattēlo izliekta uz augšu, kas ir pretrunā ar prasību, lai katra taisne attēlotos kā taisne, bet nevis kā līkne.

Atsevišķos gadījumos iespējams starp attēliem, kas konstruēti, ievērojot perspektīvas likumus, un atsevišķu iespaidu rezultātā iegūtajiem r e d z e s attēliem atrast izlīdzinājumu. Tā, piemēram, aplūkotajā piemērā ar kolonu rindu varētu visas kolonas attēlot vienādā platumā, tāpat attēla malā novietotajām lodes apveida projekcijām varētu piedot riņķa formu, ja vien šie objekti nav saistīti ar citiem, kas šādu izlīdzinājumu nepieļauj. Kā atrast pieņemamu kompromisu, tas katrā atsevišķā gadījumā ir atkarīgs no konstruktora estētiskās izjūtas, un te nekādus priekšrakstus nevaram dot.

VIII NODAĻA

KOTĒTĀS PROJEKCIJAS

Ja attēlojamā objekta viena dimensija, piemēram, augstums, salīdzinot ar tā pārējām dimensijām (garumu un platumu), ir niecīga, tā attēlošanai neviena no iepriekš apskatītajām metodēm nav piemērota. Tādā gadījumā objektu projecē ortogonāli tikai vienā — parasti horizontālā projekciju plaknē, papildinot attēlu ar skaitļiem, t. s. *kotēm*, kas rāda atsevišķu objekta punktu attālumus no šīs attēlu plaknes. Tehnikā šādu kotēto projekciju metodi lieto galvenokārt apvidus reljefa attēlošanai, kā arī dažādu zemes būvju (ceļu, tiltu, tuneļu) ieprojektēšanai šajā apvidū.

1. §. PAMATJĒDZIENI

141. Punktu un taišņu attēlošana. Visus telpas punktus turpmāk orientēsim attiecībā pret horizontālu plakni *H*, kuru sauksim par *pamata* jeb *nulles līmeņa* plakni, pie kam augstumus v i r s šīs pamata plaknes apzīmēsim ar pozitīviem, bet z e m šīs plaknes — ar negatīviem skaitļiem[1]. Šī pamata plakne parasti ir reizē arī attēlu plakne, kaut gan par attēlu plakni var izmantot arī katru citu horizontālu plakni.

Atsevišķu telpas punktu kotētās projekcijas parādītas 477. rasējumā, kur attēlu (pamata) plakne ir rasējuma plakne. Punktu kotes pierakstītas iekavās pie katra punkta horizontālās projekcijas, pie kam visi augstumi vienmēr tiek mērīti vienās un tajās pašās iepriekš izvēlētās mēra vienībās, parasti metros. Tā kā visus attēlus parasti konstruē samazinātā mērogā, tad katram rasējumam pievieno arī skaitlisku vai grafisku mērogu.

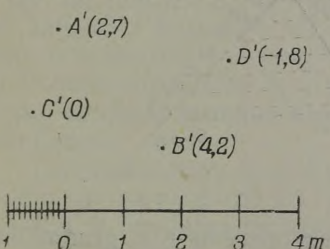
Visas pamata plaknei paralēlās plaknes sauc par *griezuma plaknēm*, pie kam visi punkti ar vienādām kotēm atrodas kopējā griezuma plaknē. Katra griezuma plakne ir noteikta ar to pašu koti, kāda ir visiem tās punktiem. Konstrukcijām parasti izmanto griezuma plaknes, kuru kotes ir kādi noteikti veseli skaitļi. Šādas griezuma

[1] Atsevišķos gadījumos, piemēram, attēlojot jūras dibena reljefu, arī punktu d z i ļ u m u s, t. i., attālumus līdz jūras līmeņa plaknei, ko izvēlas par nulles līmeņa plakni, mēdz apzīmēt ar pozitīviem skaitļiem.

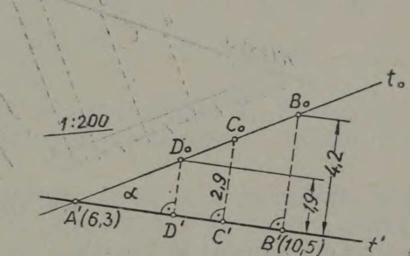
plaknes sauksim par *galvenajām griezuma plaknēm,* bet attālumu starp šīm plaknēm (augstumu starpību) — par *griezuma augstumu.*

Patvaļīga telpas t a i s n e t ir noteikta ar tās projekciju t' un divu tās punktu A un B kotētām projekcijām (478. ras.). Lai noteiktu kāda cita taisnes punkta C koti (ja tā projekcija C' dota), savietojam horizontāli projecētāju plakni caur taisni t ar patvaļīgu griezuma plakni, visērtāk ar griezuma plakni caur kādu no abiem dotajiem punktiem, kas tādā gadījumā tiek uzskatīta par rasējuma (attēlu) plakni.

Rasējumā taisne, kas dota ar punktiem A (6,3) un B (10,5), savietota ar griezuma plakni caur punktu A. Punkts A savietojot tādēļ paliek uz vietas, bet punkta B savietojums B_0 atrodas uz perpendikula $B'B_0$ pret taisnes projekciju t' attālumā 10,5—6,3=4,2 no B'. Ja punkta C savietojums C_0 atrodas 2,9 vienību attālumā no t', tad punkta C kote ir 6,3+2,9=9,2.



477. ras.



478. ras.

Ar šādu savietošanu iespējams noteikt arī uz taisnes t kādu punktu D, kura kote, teiksim 8,2, iepriekš dota. Tā kā šī punkta attālums no griezuma plaknes caur A ir 8,2—6,3=1,9, tad punktā D savietojums (uz t_0) atrodas 1,9 vienību attālumā no t', ar ko ir noteikta arī punkta projekcija D' (uz t').

Pēdējo uzdevumu var atrisināt arī neatkarīgi no iepriekšējās telpiskās interpretācijas. Tā kā taisnes t patvaļīgu nogriežņu horizontālo projekciju garumi attiecas tāpat kā to galapunktu augstumu starpības, tad, apzīmējot punkta A, B un C kotes ar a, b un c, varam rakstīt

$$A'C' : C'B' = (c-a) : (b-c).$$

Punktu C' tātad var noteikt, sadalot taisnes nogriezni $A'B'$ attiecībā $(c-a) : (b-c)$.

Savietojot taisni, dabūjam reizē tās slīpuma leņķi α pret pamata plakni H (sk. ras.). Šī leņķa tangensu sauc par taisnes *kritumu.* Apzīmējot to ar k, varam rakstīt

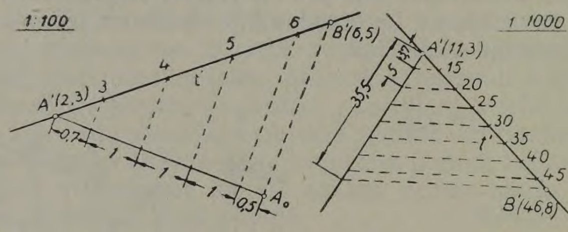
$$k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{d}{l},$$

kur $d = B_0B'$ ir punktu A un B augstumu (līmeņu) starpība, bet $l = A'B'$ ir punktu A un B t. s. horizontālais attālums (attālums starp punktu A un B horizontālajām projekcijām). *Taisnes kritumu tātad var izteikt ar tās divu punktu augstumu (līmeņu) starpības un šo punktu horizontālā attāluma attiecību.*

Ja punktu A un B augstumu starpība $d=1$, tad šo punktu horizontālo attālumu sauc par taisnes *intervālu*. Apzīmējot to ar i, varam rakstīt

$$\operatorname{tg}\alpha = k = \frac{1}{i},$$

t. i., *kritums ir intervāla apgriezts lielums*. Jo lielāks ir taisnes slīpuma leņķis, jo mazāks tās intervāls. Vertikālajām taisnēm $i=0$, horizontālajām taisnēm $i=\infty$, taisnēm, kas veido 45° leņķi ar pamata plakni, $i=1$. Vienāda slīpuma taisnēm ir vienādi intervāli.



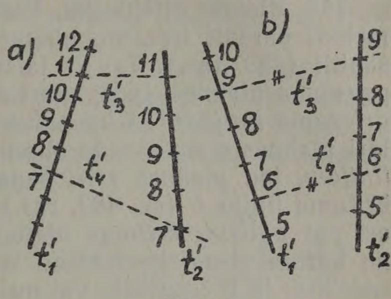
479. ras.

Izmantojot kotētās projekcijas, vienmēr operē ar t. s. *graduētām taisnēm*. Taisne ir graduēta, ja ir attēloti arī punkti, kuros tā krusto galvenās griezuma plaknes. Ja taisne ir dota ar punktiem A un B, kuru kotes a un b ir veseli skaitļi un griezuma augstums vienāds ar izvēlēto mēra vienību, tad taisnes graduēšanai jāsadala taisnes nogrieznis $A'B'$ $(b—a)$ vienādās daļās, pierakstot katram dalījuma punktam attiecīgo koti. Taisnes graduēšana vispārīgā gadījumā dažādiem griezuma augstumiem (1 m un 5 m) parādīta 479. rasējumā, pie kam augstumu starpības uz (patvaļīgas) palīgtaisnes $A'A_0$ var atlikt arī palielinātā mērogā. Attālums starp dalījuma punktiem pirmajā gadījumā ir vienāds ar taisnes intervālu, bet otrajā gadījumā — ar pieciem taisnes intervāliem.

Taisne ir noteikta, ja ir dota tās projekcija, kāda tās punkta kote, taisnes intervāls (vai kritums) un tās krituma vērsums, jo ar to ir dots taisnes graduējums. Krituma vērsumu, ja tas ir nepieciešams, mēdz norādīt ar bultiņu uz taisnes projekcijas.

Taisnes graduējumu mēdz saukt arī par tās krituma mērogu, sevišķi, ja viena iedaļa sadalīta vēl sīkākās daļās. Šāds krituma mērogs dod iespēju ērti noteikt jebkura taisnes punkta koti. Tādēļ turpmāk ar vārdiem «noteikt taisni» sapratīsim, ka jānosaka šīs taisnes krituma mērogs.

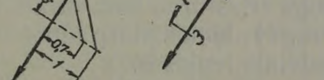
142. Divas taisnes. Lai noteiktu, vai divas ar krituma mērogu dotās taisnes t_1 un t_2 k r u s t o j a s, ir jānosaka iepriekš aprakstītajā veidā to projekciju krustpunktam atbilstošo telpas punktu (uz vienas un otras taisnes) kotes. Ja šīs kotes vienādas, taisnes krustojas, pretējā gadījumā — šķērsojas. Ja abu taišņu projekciju krustpunkts atrodas ārpus rasējuma robežām, vienkāršāk ir vilkt caur taišņu vienādi kotētiem punktiem divas taisnes t_3 un t_4 (sk. 480. ras. *a* un *b*). Ja taisnes t_1 un t_2 krustojas, tās abas atrodas kopējā plaknē un taisnēm t_3 un t_4 (tāpat to projekcijām) kā šīs plaknes horizontālēm jābūt paralēlām.



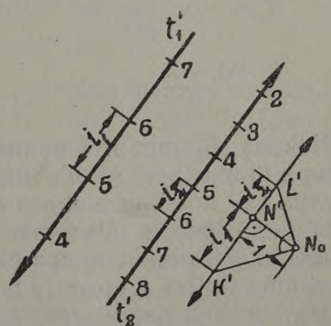
480. ras.

P a r a l ē l ā m   t a i s n ē m ir paralēlas projekcijas un vienādi, kā arī vienādi vērsti krituma mērogi. Lai tādēļ atrisinātu uzdevumu: *caur doto punktu A (4,7) vilkt taisni t_1, paralēlu dotajai taisnei t* (sk. 481. ras.), ir jāvelk caur A' taisne $t'_1 \| t'$ un jāatliek uz tās no punkta A' taisnes t krituma vērsumā *0,7i,* kur i ir taisnes t intervāls. Tādējādi dabūjam taisnes t_1 krituma mēroga punktu *4.* Šī mēroga pārējos dalījuma punktus dabū, pārnesot uz taisnes t'_1 taisnes t' graduējumu.

Lai noskaidrotu, kad divas taisnes t_1 un t_2 ar paralēlām projekcijām ir p e r p e n d i k u l ā r a s, pieņemam, ka caur patvaļīgu punktu N novilktas taisnēm t_1 un t_2 paralēlas taisnes un ka taišņu t_1 un t_2 kopējā projecētāja plakne savietota ar griezuma plakni H_1,



481. ras.

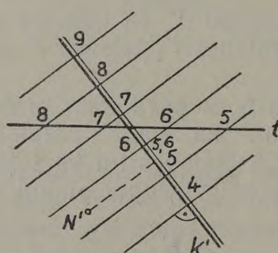


482. ras.

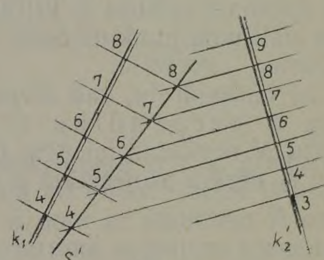
kas atrodas par vienu vienību zemāk nekā punktā N (482. ras.). Savienojot punkta N savietojumu N_0 ar abu palīgtaišņu krustpunktiem K un L ar plakni H_1 ($N'K' = i_1$, $N'L' = i_2$), perpendikularitātes gadījumā jābūt $\measuredangle K'N_0L' = 90°$. No tā seko, ka perpendikulāru taišņu kritumiem jābūt pretēji vērstiem, bez tam, kā tas seko no taisnleņķa trīsstūra $K'N_0L'$, jābūt $i_1 \cdot i_2 = 1$, t. i., abu taišņu intervāliem jābūt savstarpēji apgrieztiem skaitļiem. Tas dod iespēju caur patvaļīgu telpas punktu novilkt taisni, perpendikulāru dotajai taisnei.

Jautājums par taišņu perpendikularitāti vispārīgā gadījumā (kad taišņu projekcijas nav paralēlas) ir saistīts ar leņķa noteikšanu starp divām taisnēm, t. i., ar leņķa plaknes paralēlpagriešanu (sk. 145. nodalījumu.).

143. Plakņu attēlošana. Plaknes attēlošanai ar kotēto projekciju metodi parasti izmanto plaknes horizontāles, kuru kotes ir veseli skaitļi (483. ras.). Tās ir taisnes, pa kurām plakni šķeļ galvenās griezuma plaknes, tādēļ precīzāk tās būtu saukt par *(galvenajām) griezuma līnijām.* Tā kā plaknes horizontāles attēlojas perpendikulāri plaknes pirmā veida slīpuma līnijām jeb t. s. plaknes *krituma līnijām,* tad plaknes attēlošanai pietiek attēlot vienu tās graduētu krituma līniju *k* (sk. 483. ras.). Šādu graduētu krituma līniju sauc arī par *plaknes krituma mērogu,* pie kam to zīmē ar dubultlīniju, no kurām viena, ko faktiski izmanto, ir treknāka. Plakne tātad ir noteikta, ja ir uzzīmēts vai nu tās krituma mērogs, vai tās galveno griezuma līniju (horizontāļu) sistēma.



483. ras.



484. ras.

Plaknes slīpums pret pamata plakni *H* ir vienāds ar tās krituma līnijas slīpumu pret šo plakni. Šī leņķa tangensu sauc par *plaknes kritumu.* Lai noteiktu plaknes slīpuma leņķi α, uz tās krituma līnijas intervāla kā katetes jākonstruē taisnleņķa trīsstūris, kam otra katete vienāda ar garuma vienību (dotajā mērogā); leņķis starp hipotenūzu un krituma līnijas projekciju tad ir meklētais leņķis α.

Lai pēc kāda patvaļīga plaknes punkta *N* projekcijas N' noteiktu šī punkta koti, ir jāvelk caur punktu *N* plaknes horizontāle (sk. 483. ras.) un ir jānolasa tās krustpunkta kote uz krituma mēroga.

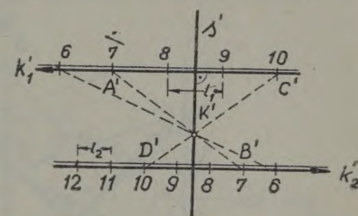
Ja dotajā plaknē atrodas kāda taisne *t,* tad tās projekcijas t' krustpunkti ar plaknes horizontālēm graduē šo taisni (sk. 483. ras.). Ja apgriezti, — caur doto taisni gribam novilkt patvaļīgu plakni, caur tās krituma mēroga dalījuma punktiem jāvelk patvaļīgā virzienā paralēlas taisnes, kuras tad var uzskatīt par plaknes horizontālēm. Velkot šīm horizontālēm perpendikulāru taisni, dabūjam arī graduētu plaknes krituma līniju, t. i., krituma mērogu.

Ja plakne ir noteikta ar kotētu punktu un graduētu taisni, tad, savienojot šo punktu ar taisnes vienādi kotēto punktu, dabūjam plaknes horizontāļu virzienu. Pārējās plaknes horizontāles iet caur taisnes krituma mēroga dalījuma punktiem paralēli šim virzienam.

Lai konstruētu plaknes krituma mērogu gadījumā, ja plakne ir noteikta ar t r i m p u n k t i e m A, B un C, konstruē vispirms krituma mērogu taisnei caur diviem dotajiem punktiem, piemēram, A un B, un pēc tam nosaka horizontāles plaknei, kas tagad noteikta ar taisni AB un punktu C tāpat kā iepriekš.

Noskaidrosim tagad, kā konstruē d i v u p l a k ņ u š ķ ē l u m a t a i s n i. Vispārīgā gadījumā, kad abu plakņu horizontālēm virzieni ir dažādi, šķēluma taisni s dabū, savienojot abu plakņu vienādi kotēto horizontāļu krustpunktus, kas reizē graduē šo taisni (484. ras.).

Ja abām plaknēm ir vienādi kritumi, šķēluma taisnes projekcija ir horizontāļu veidotā leņķa bisektrise.



485. ras.

Ja abu plakņu horizontāles ir paralēlas, arī šķēluma taisne ir paralēla šīm horizontālēm. Tās konstruēšanai tādēļ jānosaka tikai viens tās punkts. Šo punktu varētu noteikt, šķeļot abas plaknes ar kādu trešo plakni, kas nav ne paralēla, ne perpendikulāra pamata plaknei H. Vienkāršāku konstrukciju tomēr dod šāds apsvērums. Ja k'_1 un k'_2 ir abu plakņu (paralēlie) krituma mērogi (485. ras.), bet i_1 un i_2 šo mērogu intervāli, tad taisnes $A'B'$ un $C'D'$ caur abu mērogu vienādi kotētiem dalījuma punktiem dalās krustpunktā K' konstantā attiecībā

$$A'K' : B'K' = C'K' : D'K' = i_1 : i_2.$$

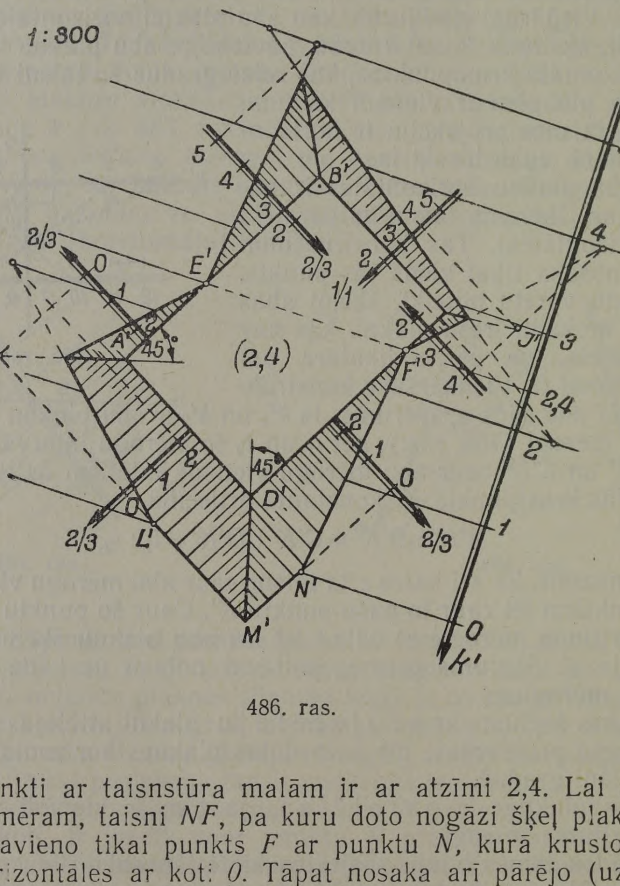
Tas nozīmē, ka arī katra cita taisne caur abu mērogu vienādi kotētiem punktiem iet caur to pašu punktu K'. Caur šo punktu (perpendikulāri krituma mērogiem) tātad iet arī abu plakņu šķēluma taisnes projekcija s'. Šķēluma taisnes koti var nolasīt uz kāda no plakņu krituma mērogiem.

Plaknes šķēlums ar p r o j e c ē t ā j u plakni attēlojas uz pēdējās raksturīgās projekcijas, pie kam dotās plaknes horizontāles šo šķēlumu taisni graduē.

Divas plaknes ir p a r a l ē l a s, ja tām ir vienādi un vienādi vērsti krituma mērogi.

Dažādos zemes būvju projektos bieži jānosaka divu plakņu šķēlums. Aplūkosim ilustrācijai šādu uzdevumu: *slīpā nogāzē dotajā augstumā un vietā ierīkot taisnstūra veida horizontālu platformu.* Nogāzes plakne dota ar krituma mērogu k', bet nogāzē izveidojamā horizontālā platforma ar tās kontūras projekciju $A'B'C'D'$ un koti 2,4 (sk. 486. ras.). Tā kā nogāzes horizontāle 2,4 krusto platformu punktos E un F, tad augstāk par nogāzi stāvošā platformas daļa $AEFD$ jāizveido ar uzbērumu, bet zemāk stāvošā daļa $EBCF$ — ar ierakumu. Uzbēruma un ierakuma nogāzes izvēlētas ar kritumu $\frac{2}{3}$, izņemot ierakuma nogāzes plakni caur taisnstūra malu BC, kuras kritums (slīpuma leņķa tangess) vienāds arī 1.[1] Uzdevums būs atrisināts, ja noteiksim uzbēruma un ierakuma nogāžu savstarpējā šķēluma taisnes un šo nogāžu šķēlumus ar dotās nogāzes plakni.

Konstruējam vispirms ierakuma un uzbēruma nogāžu krituma mērogus, ievērojot, ka to intervāli ir $\frac{3}{2}$ un 1 (plaknei caur BC) un



486. ras.

to krustpunkti ar taisnstūra malām ir ar atzīmi 2,4. Lai noteiktu tagad, piemēram, taisni NF, pa kuru doto nogāzi šķeļ plakne caur DF, ir jāsavieno tikai punkts F ar punktu N, kurā krustojas abu plakņu horizontāles ar kot: *0*. Tāpat nosaka arī pārējo (uzbēruma un ierakuma) plakņu šķēlumus ar doto nogāzi. Šo taišņu krustpunktus savienojot ar taisnstūra virsotnēm, dabūjam arī uzbēruma un ierakuma plakņu savstarpējā šķēluma taisnes. Dabūtā figūra jāpapildina ar taisnēm LM un MN, kas ir platformas nogāžu šķēluma taisnes ar pamata (nulles līmeņa) plakni.

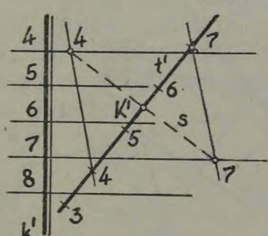
[1] Šo nogāžu kritumi vispār ir atkarīgi no zemes sastāva. Smilšainai zemei kritumu parasti izvēlas no $\frac{1}{2}$ līdz $\frac{2}{3}$.

Uzdevumu varēja atrisināt arī, nosakot vispirms platformas nogāžu savstarpējā šķēluma taisnes (sk. ras. taisnes AK un CJ), pie kam jāatceras, ka vienāda krituma plaknes šķeļas pa taisnēm, kuru projekcijas daļa leņķi starp šo plakņu horizontālēm uz pusēm (sk. ras. taisnes AK un DM).

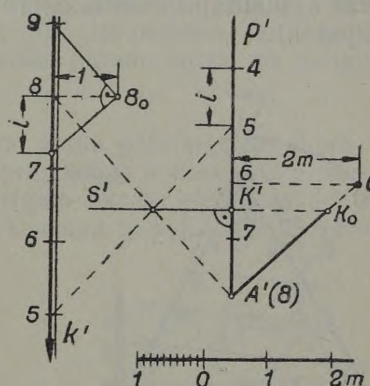
Lai palielinātu attēla uzskatāmību, uzbēruma un ierakuma nogāzes mēdz vēl krituma vērsumā iesvītrot, kā tas parādīts rasējumā.

144. Taisne un plakne. Taisne ir paralēla plaknei, ja tā ir paralēla kādai plaknes taisnei. Bet divu taišņu paralēlitāti nosaka to vienādie un vienādi vērstie krituma mērogi. Noskaidrosim tādēļ vēl tikai, kad taisne krustojas ar plakni un kā novilkt perpendikulu pret plakni.

Lai noteiktu taisnes t krustpunktu ar plakni, kas dota ar mērogu k' (sk. 487. ras.), velkam caur taisnes krituma mēro-



487. ras.



488. ras.

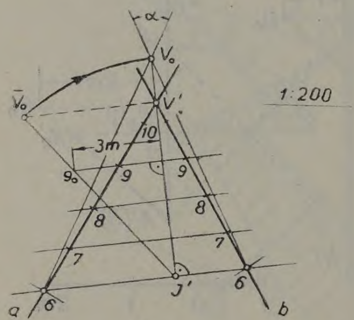
ga patvaļīgajiem dalījuma punktiem, piemēram, 4 un 7, savstarpēji paralēlas taisnes, kuras varam uzskatīt par kādas patvaļīgas palīgplaknes (caur t) horizontālēm. Savienojot punktus, kuros šīs horizontāles krusto vienādi kotētās plaknes horizontāles, dabūjam palīgplaknes šķēluma taisni s ar doto plakni. Šīs taisnes krustpunkts K ar taisni t ir meklētais taisnes krustpunkts ar doto plakni. Speciālā gadījumā, kad taisnes un plaknes krituma mērogi ir paralēli, par palīgplakni var izvēlēties arī plakni, kurai krituma mērogs ir dotās taisnes krituma mērogs, t. i., šķēluma taisnes s noteikšanai var izmantot 485. rasējumā parādīto paņēmienu.

Lai taisne būtu perpendikulāra plaknei, tās projekcijai jābūt perpendikulārai plaknes horizontāļu projekcijām, tātad paralēlai plaknes krituma mērogam. Bez tam, tā kā šai taisnei jābūt perpendikulārai plaknes krituma līnijai, tad taisnes un plaknes intervāliem jābūt savstarpēji apgrieztiem skaitļiem, bet kritumiem — pretēji vērstiem (sk. 142. nodalījumu).

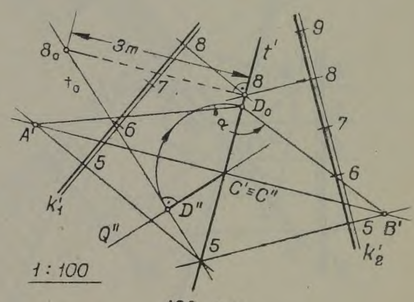
Izmantojot šo secinājumu, var noteikt attālumu no dotā punkta A līdz plaknei, kas dota ar krituma mērogu k' (sk. 488. ras.).

Lai to izdarītu, graduējam vispirms perpendikulu p, kas vilkts caur punktu A pret plakni un, pieņemot šo graduēto taisni par palīgplaknes krituma mērogu, nosakām palīgplaknes un dotās plaknes šķēluma taisni s (sal. ar 485. ras.). Perpendikula p krustpunkts K ar taisni s ir tā krustpunkts ar doto plakni. Taisnes nogriežņa AK īsto lielumu AK_0 (punkta attālumu līdz dotajai plaknei) nosaka, savietojot perpendikulu ar griezuma plakni caur punktu A.

145. Plaknes paralēlpagriešana. Lai noteiktu kādas figūras īsto lielumu, kas atrodas dotajā plaknē, vai izpildītu šajā plaknē kādas metriskas konstrukcijas, plakne ir jāpagriež paralēli pamata (attēlu) plaknei. Pagriešanu parasti izdara ap kādu horizontāli — plaknes galveno griezuma līniju, pie kam konstrukciju izpilda analoģiski agrāk apskatītajai konstrukcijai divās projekcijās (sk. 46. un 47. nodalījumu.).



489. ras.



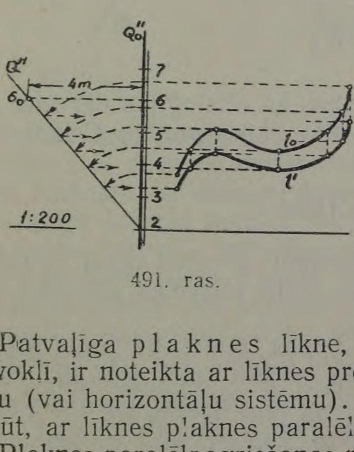
490. ras.

Noteiksim, piemēram, leņķi, ko veido 489. rasējumā attēlotās krustiskās taisnes a un b. Lai to izdarītu, pagriežam leņķa plakni ap kādu tās horizontāli, piemēram, 6—6, kamēr tā sakrīt ar griezuma plakni caur šo horizontāli. Tā kā leņķa virsotnes V rotācijas rādiuss VJ atrodas uz leņķa plaknes krituma līnijas un plaknes horizontāles šo taisni graduē, tad rotācijas rādiusa īsto lielumu $J'\overline{V}_0$ dabū, savietojot šo graduēto krituma līniju ar iepriekš izvēlēto griezuma plakni (sal. ar 478. ras.). Atliekot tagad $J'V_0 = J'\overline{V}_0$, dabū leņķa virsotnes stāvokli pēc pagriešanas ap horizontāli 6—6, bet, savienojot dabūto punktu V_0 ar punktiem 6 uz taisnēm a un b (kas rotācijā paliek uz vietas), atrodam meklēto leņķi α.

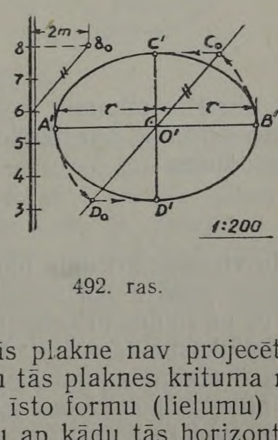
Leņķi starp divām plaknēm visvienkāršāk var noteikt, šķeļot abas plaknes ar palīgplakni Q perpendikulāri abu plakņu kopējai šķautnei (kas iepriekš jānosaka) un pagriežot šo normālšķēlumu paralēli attēlu plaknei. Pašu normālšķēlumu var arī nekonstruēt un leņķa īsto lielumu noteikt šādi (sk. 490. ras.). Velkam patvaļīgu perpendikulu $A'B'$ pret abu plakņu šķēluma taisnes projekciju t', ko pieņemam par palīgplaknes Q horizontāli ar koti 5 (punkti A un B atrodas uz abu doto plakņu ar skaitli 5 kotētām horizontālēm). Savietojot tagad taisni t ar griezuma plakni H_5 caur šo horizontāli, dabūjam taisni t_0. Ja par projekciju plakni pieņemam griezuma plakni H_5, tad taisni t_0 varam uzskatīt par taisnes t projekciju (savietotā stāvoklī) tās horizontāli projecētajā plaknē. Palīgplakne Q šajā (vertikālajā) projekciju plaknē attēlojas kā taisne $Q'' \perp t_0$ caur palīgplaknes horizontāles AB un taisnes t (horizontālo) projekciju krustpunktu $C' \equiv C''$. Taisnes t_0 krustpunkts D'' ar Q'' ir leņķa virsotnes jaunā projekcija, bet $C''D''$ ir šīs virsotnes rādiuss (īstā lielumā) rotācijā ap horizontāli AB. Atliekot $C'D_0 = C''D''$ un savienojot D_0 ar punktiem A' un B', dabūjam meklēto abu plakņu veidoto leņķi α.

Leņķa noteikšanu starp taisni un plakni, tāpat pārējos agrāk iztirzātos metriskos uzdevumus ar kotēto projekciju metodi atrisina tāpat kā ar ortogonālajām projekcijām divās projekciju plaknēs. Bieži vien ir izdevīgi izmantot palīgprojekciju plaknes, kā to darījām jau iepriekšējā piemērā. Zinot atsevišķo punktu kotes, šīs palīgprojekcijas var viegli konstruēt.

146. Līkņu un virsmu attēlošana. Kāda patvaļīga (plaknes vai telpas) līkne ir noteikta, ja bez tās projekcijas ir dotas vēl pietiekoši daudz tās punktu kotes. Likumsakarīgām līknēm pietiek arī ar tādu tās elementu kotētām projekcijām, kas dod iespēju noteikt jebkuru līknes punktu.



491. ras.



492. ras.

Patvaļīga plaknes līkne, ja vien tās plakne nav projecētājā stāvoklī, ir noteikta ar līknes projekciju un tās plaknes krituma mērogu (vai horizontāļu sistēmu). Šīs līknes īsto formu (lielumu) var dabūt, ar līknes plaknes paralēlpagriešanu ap kādu tās horizontāli.

Plaknes paralēlpagriešanas metodi izmanto arī, lai dotajā plaknē iezīmētu dotā lieluma un formas līkni. Šai nolūkā (sk. 491. ras.) iezīmējam rasējuma plaknē vispirms līkni īstajā lielumā, konstruējam līknes plaknes Q projekciju Q'' vertikālā plaknē caur plaknes Q krituma mērogu un pieņemam, ka plakne Q savietota ar horizontālo projekciju (rasējuma) plakni[1]. Tā kā plaknes Q vertikālā pro-

[1] Par horizontālo projekciju plakni, konstruējot jauno projekciju 491. rasējumā, izvēlēta griezuma plakne caur horizontāli *2* (plakne Q pagriezta ap šo horizontāli).

jekcija pēc pagriešanas sakrīt ar plaknes krituma mērogu, tad nav grūti ar atpakaļpagriešanu noteikt līknes projekciju kotēto projekciju plaknē.

Lai iezīmētu dotajā plaknē riņķi (sk. 492. ras.), pietiek zināt tā centra projekciju O' un rādiusu r. Riņķa diametrs, kas atrodas uz plaknes horizontāles, attēlojas (īstajā lielumā) par elipses lielo asi $A'B'$, bet riņķa diametrs uz plaknes krituma līnijas dod mazo asi $C'D'$. Nosakot ar krituma mērogu šīs krituma līnijas savietojuma virzienu un atliekot uz tās savietojuma (griezuma plaknē caur riņķa centru O) $O'C_0 = O'D_0 = r$, elipses mazās ass galapunktus dabū kā šiem punktiem C_0 un D_0 atbilstošos punktus.

No telpas līknēm atzīmēsim vispirms t. s. *vienāda krituma līknes,* kuru pieskares veido konstantu leņķi α ar pamata plakni H. Tāda līkne, piemēram, ir arī agrāk aplūkotā cilindriskā skrūves līnija, tādēļ vienāda krituma līkni varētu saukt arī par vispārīga veida cilindrisko skrūves līniju. Izklājot līknes (projecētāju) cilindru plaknē, vienāda krituma līkne pāriet taisnē, kas veido leņķi α ar līknes projekcijas (cilindra pamata) izklājumu (sal. ar 350. ras.). Tāda līkne tādēļ ir noteikta, ja dota tās projekcija un divu tās punktu A un B kotes. Tiešām, apzīmējot šo punktu kotes ar a un b un līknes projekcijas loka garumu starp punktu projekcijām A' un B' ar $[A'B']$, no līknes cilindra izklājuma dabū

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b-a}{[A'B']}.$$

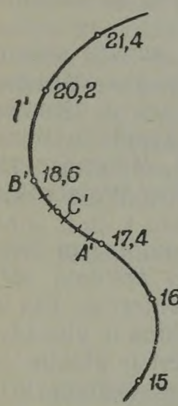
Bet, zinot šo slīpuma leņķa α tangensu, ko analoģijas dēļ sauc par *līknes kritumu,* var izrēķināt katra cita līknes punkta C koti c no vienādojuma

$$c - a = [A'C'] \operatorname{tg}\alpha.$$

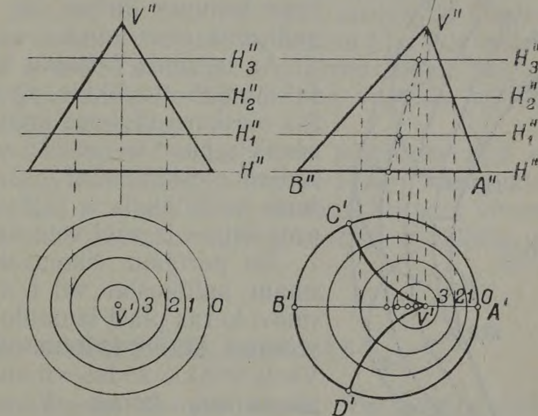
Šādu vienāda krituma līkni tādēļ iespējams graduēt tāpat kā taisni. Vienīgi punktu horizontālo attālumu vietā jāizvēlas attālumi, kas mērīti pa līknes projekciju.

Aplūkosim tagad patvaļīgu telpas līkni l, uz kuras projekcijas l' atzīmēts pietiekams skaits tās punktu kotes (sk. 493. ras.). Lai noteiktu koti kādam tās punktam C, kura projekcija atrodas starp līknes punktu A un B kotētām projekcijām, varam tuvināti pieņemt, ka līknes loks starp punktiem A un B kopā ar punktu C pieder vienāda krituma līknei, kuras projekcija sakrīt ar dotās līknes projekciju. Graduējot šo līknes loku, nosakām šī punkta koti, kas zināmā tuvinājumā ir vienāda ar dotās līknes punkta koti c (rasējumā $c \approx 18{,}0$). Precīzāk punkta C koti var noteikt, izklājot projecētāju cilindru, kas iet caur līkni l, plaknē. Līknes projekcija (cilindra normālšķēlums) tad izklājas pa taisni l'_0, bet līknes l izklājumu l_0 nosaka, atliekot dotajos līknes projekcijas punktos (izklājumā) uz cilindra veidulēm šo punktu kotes un savienojot dabūtos punktus ar gludu līkni[1]. Izmērījot tagad punktam C'_0 atbilstošā punkta C_0 augstumu virs l'_0, dabūjam meklēto koti c. Tādā pašā veidā var precīzāk noteikt uz līknes projekcijas l' punktu, kura kote iepriekš dota.

Līknes l pieskare punktā C attēlojas par tās projekcijas l pieskari punktā C'. Tās graduējumu visprecīzāk dabū no cilindra izklājuma, jo pieskares slīpums pret pamata plakni ir vienāds ar līknei l_0 punktā C_0 vilktās pieskares slīpumu pret taisni l'_0. Pirmajā tuvinājumā tās graduējumu dabū, uzskatot to par pieskari vienāda krituma līknei caur punktu C ar to pašu projekciju l'.



493. ras.



494. ras.

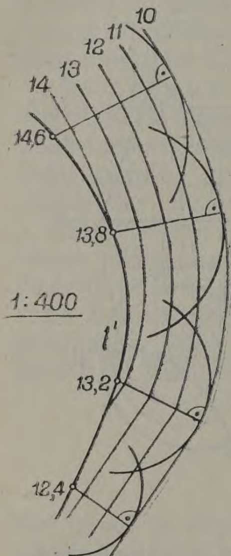
Lai attēlotu patvaļīgas virsmas ar kotēto projekciju metodi, izmanto t. s. *virsmas horizontāles,* kas ir virsmas šķēlumi ar griezuma plaknēm. Ilustrācijai 494. rasējumā dotas (apakšā) taisna un slīpa riņķa konusa kotētās projekcijas, pie kam, lai rasējumu varētu labāk saprast, parādītas arī šo konusu un griezuma plakņu frontālās projekcijas. Taisna konusa horizontāles attēlojas kotēto projekciju plaknē par koncentriskiem riņķiem, kuru rādiusi mainās aritmētiskā progresijā. Slīpa konusa horizontāles attēlojas kā ekscentriski riņķi. Abu virsmu horizontāļu novietojums dod iespēju ne vien atšķirt abus konusus vienu no otra (pēc to kotētajām projekcijām), bet arī pateikt, vai attēlotais konuss ir vērsts ar virsotni uz augšu vai uz leju. Pēdējā gadījumā horizontāļu kotes virsotnes projekcijas virzienā nevis pieaug, bet samazinās.

Pieņemsim, ka abiem konusiem novilktas dažas veidules un konstruētas to horizontālās projekcijas. Virsmas horizontāles šīs veidules graduē, pie kam taisna konusa visām veidulēm kritums ir vienāds (jo ir vienādi to intervāli), bet slīpa konusa veidulēm —

[1] Ja līkne l atrodas uz topogrāfiskās virsmas, tad dabūto līkni l_0 sauc par virsmas *garenprofilu* pa līkni l. Šādiem garenprofiliem ir svarīga nozīme ceļu un kanālu ieprojektēšanai apvidū. Vienāda krituma līnijas garenprofils ir taisne.

dažāds. No slīpā konusa veidulēm vislielākais kritums ir veidulei AV, jo tās (kotētai) projekcijai ir vismazākie intervāli.

Līnijas uz virsmas, kas (telpā un projekcijā) ir perpendikulāras virsmas horizontālēm, sauc par *virsmas krituma līnijām.* Taisnā konusa krituma līnijas ir visas tā veidules, bet slīpajam konusam tikai veidules AV un BV ir tā virsmas krituma līnijas; pārējās slīpā konusa krituma līnijas ir līknes (rasējumā parādītas divas šādas krituma līnijas CV un DV). Caur katru virsmas punktu parasti iet tikai viena krituma līnija un tikai caur atsevišķiem punktiem var iet vairākas vai pat bezgalīgi daudzas krituma līnijas, kā, piemēram, apskatītajā gadījumā caur konusa virsotni V.



495. ras.

Ar *virsmas kritumu* kādā tās punktā saprot šai punktā novilktās pieskaru plaknes kritumu. Šīs pieskaru plaknes krituma mērogs ir vienmēr paralēls caur šo punktu vilktās virsmas krituma līnijas pieskarei šai pašā punktā. Virsmas kritums vislielākais ir tajās vietās, kur horizontāļu projekcijas ir sablīvētas visciešāk.

No pārējām likumsakarīgi veidotajām virsmām aplūkosim vēl t. s. *vienāda krituma virsmas,* kuras plaši izmanto ceļu būvniecībā. Tās ir virsmas, kurām kritums visos punktos ir vienāds. Vienkāršākie šādas virsmas piemēri ir plakne un taisns riņķa konuss. V i s p ā r ī g u vienāda krituma virsmu veido taisns riņķa konuss, pārvietodamies telpā tā, ka tā virsotne slīd pa patvaļīgu līkni — vaduli, bet ass paliek perpendikulāra plaknei H. Šādas virsmas kritums ir vienāds ar tās veidotāja konusa kritumu. Vienāda krituma virsmas ir izklājamas taišņu virsmas.

Vienāda krituma virsma ir noteikta, ja dots tās kritums un vadule, jo tad var konstruēt virsmas horizontāles. Šī konstrukcija ir attēlota 495. rasējumā, kur noteiktas horizontāles virsmai, kuras vadule ir patvaļīga telpas līkne l un kuras kritums ir $^2/_3$. Lai noteiktu, piemēram, virsmas horizontāli ar koti 10, pieņemam, ka līknes l kotētajos punktos pielikti taisni riņķa konusi, t. s. *krituma konusi,* kuru veidulēm (konusu krituma līnijām) ir tāds pats kritums kā dotajai virsmai. Tā kā krituma konusu veiduļu intervāli ir $^3/_2$, tad šo konusu (ar skaitli 10 kotēto) horizontāļu rādiusi ir

$$(12{,}4-10)\,^3/_2=3{,}6 \text{ m};$$

$$(13{,}2-10)\,^3/_2=4{,}8 \text{ m};$$

$$(13{,}8-10)\,^3/_2=5{,}7 \text{ m};$$

$$(14{,}6-10)\,^3/_2=6{,}9 \text{ m};$$

Iezīmējot attiecīgajos līknes projekcijas punktos šāda rādiusa riņķa lokus, virsmas horizontāli *10* dabū kā šo loku aptverošo līniju[1]. Tāpat varētu noteikt arī pārējās virsmas horizontāles. Vienkāršāk tomēr ir graduēt tagad (intervālos $^3/_2$) konusu veidules, kas vilktas caur horizontāles *10* un riņķa loku pieskaršanās punktiem, un vilkt meklētās horizontāles tieši caur atbilstošajiem dalījuma punktiem. Atzīmēsim vēl, ka rasējumā parādītās krituma konusu veidules ir taisnes, pa kurām šiem konusiem pieskaras dotā vienāda krituma virsma. Tās tātad ir reizē arī šīs taišņu virsmas veidules. Bez tam, tā kā tās ir perpendikulāras virsmas horizontālēm, tad tās ir dotās virsmas krituma līnijas. Šo krituma līniju projekciju virzieni sakrīt ar dotās līknes — vadules projekcijas normāļu virzieniem vienīgi tad, kad vadule ir horizontāla plaknes līkne. Šai gadījumā arī pati vadule ir virsmas horizontāle, un vienāda krituma virsma reducējas par konisku virsmu.

Apskatītajā piemērā vadules *l* daļa starp punktiem *12,4* un *13,2* ir taisnes nogrieznis. Virsmas daļa starp veidulēm, kas vilktas šajos punktos, ir plakne. Lai novilktu tātad vienāda krituma virsmu caur doto taisni (kas nav horizontālajā stāvoklī), ir jālieto tas pats paņēmiens.

2. §. TOPOGRAFISKĀS VIRSMAS

147. Topografiskā virsma un tās attēlošana. Par topografisku virsmu sauc ierobežotu zemes virsmas daļu, kuras punktos zemes pievilkšanas spēka virzienā vilktās taisnes var uzskatīt par paralēlām. Pieņemot, ka jūras līmeņa virsma turpināta zem cietzemes un uzskatot tās daļu zem topografiskās virsmas par pamata (nulles līmeņa) plakni, topografiskās virsmas punktus nosaka ar to kotētām projekcijām šajā plaknē.

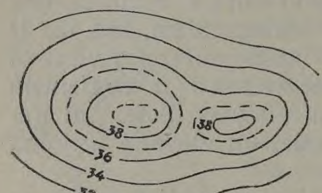
Topografisko virsmu attēlo ar tās horizontāļu kotētajām projekcijām (sk. 496. ras.). Topografiskā virsma ir jo precīzāk noteikta, jo mazāks ir izvēlētais griezuma augstums. Tehniskajos plānos (mērogs ne mazāks kā 1 : 5000) to izvēlas 1—5 m, meliorācijas plānos pat līdz 0,25 m. Sīka mēroga kartēm un kalnainiem rajoniem griezuma augstumu izvēlas lielāku. Par normālu griezuma augstumu uzskata 2 mm kartes mērogā, jo šādam griezuma augstumam un nogāzes slīpumam 45° horizontāles vēl nesaplūst. Apvidus sīkāku daļu (pauguru) attēlošanai lieto vēl *pushorizontāles* vai pat *ceturtdaļhorizontāles;* pirmās zīmē ar pārtrauktām līnijām, otrās — ar punktētām līnijām.

Katra horizontāle apvidū tiek noteikta, uzmērījot tikai atsevišķus tās punktus, pie kam tiek pieņemts, ka horizontāle starp ik diviem tā noteiktiem punktiem tikai nedaudz atšķiras no taisnes. Tālāk tiek

[1] Tāda paša augstuma horizontāli dabū arī līknes *l* kreisajā pusē. Praksē tomēr ir nepieciešams vilkt virsmu tikai vienā pusē vadulei *l*, tādēļ arī rasējumā parādīta tikai šī virsmas daļa.

pieņemts, ka topografiskā virsma starp divām blakus horizontālēm formu maina ļoti maz. Topografiskā virsma ar horizontālēm tātad ir noteikta tikai aptuveni, bet ne likumsakarīgi. Tā kā tiek izslēgta arī vertikālu sienu un pārkaru krauju eksistence, tad katra vertikāla taisne krusto topografisko virsmu tikai vienā punktā, un dažāda augstuma horizontāles projekcijā nekad nekrustojas.[1]

Horizontāles vienmēr ir slēgtas līknes. Uzskatāmu priekšstatu par tām varam iegūt, ja doto pauguraino apvidu iedomājamies kā salu, ko apskalo jūra. Iedomājoties, ka jūras līmenis pastāvīgi ceļas, brīžos, kad tas būs pacēlies dotā griezuma augstumā, krasta līnija būs attiecīgā augstuma horizontāle.



496. ras.

Topografiskās virsmas formu studijām bieži izmanto arī *reljefa modeļus*. Lai pagatavotu tādu modeli, uzmeklē reljefa kartē viszemāko horizontāli un nākošo uz augšu; ar kopējamā papīra palīdzību pārzīmē tās abas uz noteikta biezuma papes gabala un izgriež papes gabalu pa zemāko horizontāli. Uz cita tā paša biezuma papes gabala pārzīmē otro un trešo horizontāli, izgriež pa otro horizontāli un uzlīmē pirmajam papes gabalam tai vietā, kur to rāda tur uzzīmētā otrā horizontāle utt. Tā pagatavots reljefa modelis ir ar nedabisku terasētu virsmu. Piezieżot terases ar kādu masu, var iegūt reljefa modeli ar izlīdzinātu virsmu. Reljefa modeļa mērogs horizontālajā virzienā ir tāds pats kā kartē, bet vertikālajā virzienā atkarībā no papes biezuma tas ir lielāks vai mazāks. Lēzenas reljefa formas parasti attēlo reljefa modelī, vairākkārtīgi palielinot vertikālo mērogu, jo tad iegūst izteiksmīgāku attēlu.

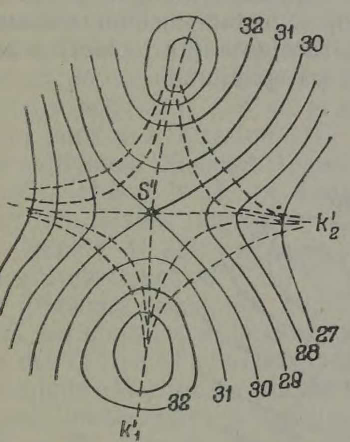
Topografiskās kartēs kā virsmas paaugstinājumi, tā arī iedobumi attēlojas ar noslēgtām horizontālēm. Ja šīs horizontāles nenoslēdzas kartes robežās, tad paaugstinājumu no iedobuma var atšķirt pēc nelīdzenuma vispārīgā rakstura un ūdeņiem, kas arvien ieņem zemākās vietas. Lai karti varētu vieglāk lasīt, nogāzes virzienu bieži parāda ar krituma virzienā dažās vietās perpendikulāri horizontālēm novilktām svītriņām.

Topografiskās virsmas atsevišķo pauguru vai ieplaku punktus, kuros pieskaru plaknes ir horizontālas, sauc par *virsotnēm* resp. *dibena punktiem*. Horizontāla pieskaru plakne ir arī t. s. virsmas *seglu punktos*. Virsmas seglu punkts ir zemākais punkts starp diviem pauguriem un reizē augstākais punkts starp divām ieplakām (sk. 497. ras. punktu S). Horizontālei, ja tā iet šī punkta augstumā, šai punktā ir dubultpunkts. Izņēmuma gadījumā tādā punktā ar horizontālu pieskaru plakni var saiet kopā arī vairāki pauguri un ieplakas; tad šis punkts ir attiecīgās horizontāles vairākkārtīgs punkts.

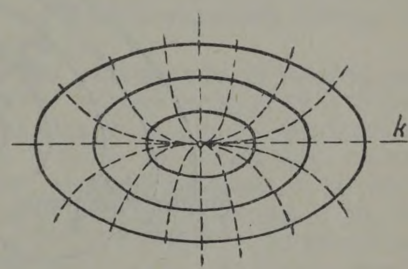
[1] Dažreiz par topografiskām virsmām mēdz saukt arī likumsakarīgas virsmas ar šo īpašību.

Par topografiskās virsmas *krituma līnijām* sauc līnijas, kas ir perpendikulāras tās horizontālēm (sk. pārtrauktās līnijas 497. ras.). Šo līniju virzienā aptuveni plūst strauta ūdeņi, vismaz kustības sākumā, kad to kustības enerģija ir niecīga un nespēj pagriezienos plūsmu novirzīt no šīm horizontālēm perpendikulārā virzienā.

Katrā virsotnes vai dibena punktā saiet bezgalīgi daudz krituma līniju. Tas viegli saprotams, ja ievērojam, ka topografiskajai virsmai šo punktu apkārtnē ir rotācijas virsmas raksturs; krituma līnijas varam aptuveni uzskatīt par šīs virsmas meridiāniem. Virsmas h o r i z o n t ā l e s virsotņu apkārtnē gan vairāk atgādina līdzīgas



497. ras.



498. ras.

un līdzīgi novietotas elipses, kuru centri atrodas uz vertikālas taisnes caur virsotni (sk. 498. ras.). Izsekojot krituma līniju virzieniem projekcijā, var pārliecināties, ka krituma līnijas, tuvojoties centram, pieliecas elipsu lielajai asij un centrā pieskaras tai; izņēmums ir vienīgi ar krituma līniju, kas attēlojas elipsu mazās ass virzienā. Krituma līnijai k, kura iet caur elipsu l i e l o asu galapunktiem un kurai tiecas piekļauties pārējās krituma līnijas, ir sevišķa nozīme. Paugura gadījumā to sauc par *ūdensšķirtnes līniju*, bet ieplakas gadījumā — par *ielejas takas līniju*.[1]

Caur katru seglu punktu iet d i v a s krituma līnijas, proti, viena ūdensšķirtnes līnija un viena ielejas takas līnija (sk. 497. ras. līnijas k_1 un k_2). Pirmā savieno divu pauguru virsotnes, otra — divu ieplaku dibena punktus.

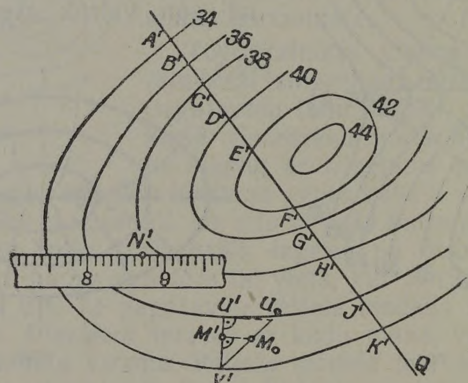
148. Pamatuzdevumi par topografisku virsmu. Izmantojot topografiskās virsmas attēlojumu ar tās horizontāļu kotētajām projekcijām, atrisināsim tagad virkni pamatuzdevumu.

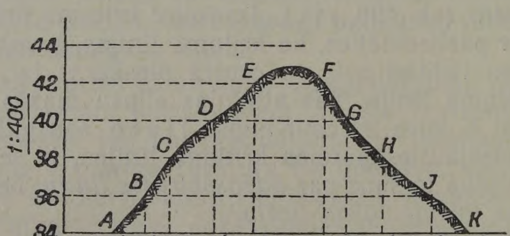
a) *Virsmas profilu noteikšana.* Par topografiskās virsmas profilu sauc tās šķēlumu ar vertikālu plakni. Virsmas profila konstru-

---

[1] Pilnīgi apmierinoša šo līniju ģ e o m e t r i s k a definīcija līdz šim nav atrasta.

ēšana parādīta 499. rasējumā, kur noteikts profils pa taisni Q, ko pieņem par profila plaknes projekciju. Profila īsto formu dabū, profila plakni savietojot ar griezuma plakni, kas iet caur zemāko horizontāli. Lai atbrīvotu horizontāļu plānu no palīglīnijām, rasējumā šis savietojums konstruēts no horizontālēm brīvajā vietā. Uz brīvi izvēlētas horizontālas taisnes pārnes (ar papīra strēmeli) punktus, kuros horizontāles krusto dotā virziena taisni Q, velk šajos punktos vertikālas taisnes un atliek uz tām attiecīgo punktu augstumus. Savienojot dabūtos punktus ar gludu līkni, iegūstam meklēto virsmas profilu. Lai profils būtu izteiksmīgāks, rasējumā (kā to bieži praktizē) augstumi atlikti ar desmitkārtīgu pārspīlējumu.





499. ras.

No konstruētā savietojuma redzams, ka profila loki starp divām blakus horizontālēm (izņemot augstākā punkta apkārtni, kur profilu nevar precīzi noteikt) tikai nedaudz atšķiras no taisnes nogriežņiem. Virsmas dotā virziena profils tādēļ ir jo stāvāks, jo tuvāk horizontāļu plānā sablīvējas tā krustpunkti ar virsmas horizontālēm. Ja i ir attālums starp diviem krustpunktiem kādā vietā un h ir griezuma augstums, tad $\frac{h}{i}$ ir aptuveni profila kritums šajā vietā.

b) *Patvaļīga virsmas punkta kotes noteikšana.* Visprecīzāk kāda virsmas punkta koti pēc tā dotās projekcijas var noteikt, izvēloties profila plakni Q caur šo punktu, nosakot (ja vajadzīgs ar augstumu pārspīlējumu) profila īsto formu un punkta vietu uz profila un izmērījot tā augstumu virs griezuma plaknes, ar kuru profils savietots (grafiskā interpolācija). Tā kā profila loku starp divām blakus horizontālēm aptuveni varam uzskatīt par taisnes nogriezni, tad parasti nosaka šī pēc iespējas abām horizontālēm perpendikulāri izvēlētā taisnes nogriežņa savietojumu ar zemākās horizontāles plakni. Lai noteiktu, piemēram, kāda kote ir punktam M starp horizontālēm *34* un *36* uz 499. rasējumā attēlotās virsmas, savietojam izvēlēto taisnes nogriezni UV ar griezuma plakni caur horizontāli *34*, pie kam punkta U augstumu (2 m) virs šīs plaknes var atlikt arī ar pārspīlējumu. Nosakot tagad punkta M savietojumu M_0 uz $V'U_0$, punkta M kote ir 34+m, kur m ir pēc izvēlētā augstumu mēroga izmērītais taisnes nogriežņa $M'M_0$ garums.

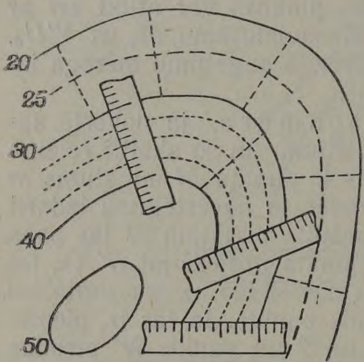
Punkta M koti var noteikt arī pēc a c u m ē r a, ja novērtē aptuveni attiecības $M'V' : U'V'$ skaitlisko lielumu un šo skaitli reizina ar griezuma augstumu. Dabūtais skaitlis ir punkta M augstums m virs horizontāles *34* plaknes. Ērtāk ir tomēr šo novērtējumu izdarīt ar m ē r l ī n e ā l a palīdzību, kā tas parādīts punktam N tai pašā rasējumā. Mērlineālu pieliek kotējamā punkta projekcijai N' tā, lai divas lineāla galvenā dalījuma svītriņas novietotos uz horizontālēm *36* un *38*, starp kurām atrodas kotējamais punkts. Ja tās ir, piemēram, centimetra mērlineāla svītriņas *8* un *9* un punkts N' atrodas pret lineāla dalījuma svītriņu *8,7*, tad punkts N atrodas par $0{,}7 \times 2 = 1{,}4$ m augstāk nekā zemākā horizontāle, tā kote tātad ir $36 + 1{,}4 = 37{,}4$ m.

Iepriekš apskatītos paņēmienus izlieto arī, lai atrisinātu apgriezto uzdevumu — noteikt uz virsmas punktu ar doto koti, kas atrodas dotajā profila plaknē. Šādu uzdevumu atkārtoti jārisina, ja doto horizontāļu plānu vēlamies papildināt ar *starphorizontālēm*, kas bieži nepieciešamas konstrukciju precīzākai izpildīšanai.

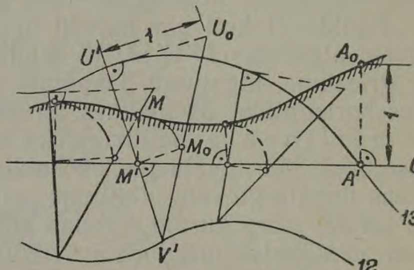
Lai, piemēram, dotajā horizontāļu plānā (sk. 500. ras.) starp horizontālēm *20* un *30* iezīmētu pushorizontāli *25*, tad tās punktus visprecīzāk dabū, konstruējot iepriekš vairākus virsmas profilus. Parasti tomēr novelk starp šīm horizontālēm tām pēc iespējas perpendikulārus taisnes nogriežņus, nosaka to viduspunktus un savieno pēdējos ar abām horizontālēm pielāgotu līkni. Ja abas horizontāles kādā vietā attālinās tālāk viena no otras, tad pushorizontāles punktus šajā vietā dabū, velkot nevis taisnes nogriežņus, bet virsmas krituma līnijas un dalot to lokus starp abām horizontālēm uz pusēm.

Ja horizontāles nav stipri izliektas, tad papildu horizontāļu konstruēšanai ērtāk izmantot mērlineālu. Lai, piemēram, tai pašā rasējumā starp horizontālēm *30* un *40* ieslēgtu trīs ceturtdaļhorizontāles, pieliekam mērlineālu tā, lai divas galvenās iedaļas atrastos uz horizontālēm *30* un *40*, un atzīmējam rasējumā punktus, kas dala attālumu starp abām galvenajām iedaļām četrās daļās. Pārbīdot lineālu tā, lai abas galvenās iedaļas paliktu uz horizontālēm *30* un *40*, analoģiski atrod arī pārējos ceturtdaļhorizontāļu punktus. Šis paņēmiens nav lietojams vairs tajās vietās, kur horizontāles ir stiprāk izliektas.

Dažreiz jākonstruē virsmas profils pa taisni Q', kas novietota starp divām blakus horizontālēm, kā tas redzams 501. rasējumā. Tādā gadījumā var vai nu ieslēgt starp šīm horizontālēm dažas starphorizontāles, vai, kas ir vienkāršāk, noteikt atsevišķu virsmas profila punktu kotes tā, kā noteicām punktu M un N kotes 499. rasējumā. Rasējumā šo punktu kotes (precīzāk — šo punktu augstumi virs griezuma plaknes caur zemāko horizontāli *12*) noteiktas, savietojot taisnes nogriežņus caur izvēlētajiem punktiem ar griezuma plakni caur horizontāli *12*. Ar šo pašu griezuma plakni savietots arī pats virsmas profils.



500. ras.



501. ras.

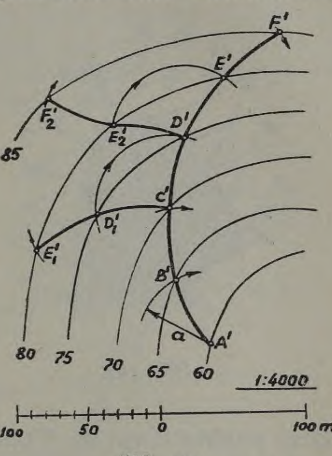
c) *Dotā krituma līnijas noteikšana uz topografiskās virsmas.* Šim jautājumam var būt praktiska nozīme dzelzceļu un zemesceļu projektēšanai kalnainā apvidū. Lai ceļam pēc iespējas garākā gabalā būtu pastāvīgs kritums, tā viduslīnijai jāveido vienāda krituma līnija uz dotās topografiskās virsmas.

Šo uzdevumu var aptuveni atrisināt šādi. Uzskatot šīs līnijas loku starp divām blakus horizontālēm par taisnes nogriezni, šī taisnes nogriežņa projekcijai ir pastāvīgs garums $a=hi$, kur h ir dotās topografiskās virsmas griezuma augstums un i ir dotajam kritumam atbilstošais intervāls. Ja virsmas griezuma augstums, piemēram, ir 5 m kā 502. rasējumā attēlotajai virsmai un konstruējamās līnijas kritumam jābūt 1 : 10, tad $a=5 \,.\, 10=50$ m. Lai tādēļ caur kādu virsmas punktu A uz horizontāles *60* novilktu šāda krituma līniju, paņem šo garumu (dotajā mērogā) cirkulī un no punkta A' aizcērt nākošo horizontāli *65* punktā B', no B' aizcērt ar to pašu garumu horizontāli *70* punktā C' utt. Savienojot dabūtos punktus ar gludu līkni, dabūjam aptuvenu meklētās līnijas projekciju. Atrisinājums ir jo precīzāks, jo mazāks ir griezuma augstums h. Griezuma augstuma samazināšanai var ieslēgt arī iepriekš pus- vai pat ceturtdaļhorizontāles.

Vispār caur katru virsmas punktu, kā, piemēram, caur punktiem *C* un *D*, iet divas dotā krituma līnijas. Vienīgi, ja ar rādiusu *a* vilktais riņķa loks nākošajai horizontālei pieskaras vai nemaz nekrusto, caur šo punktu iet tikai viena dotā krituma līnija vai arī tā šinī punktā izbeidzas.

Uzdevumu — caur diviem dotajiem punktiem vilkt vienāda krituma līniju — parasti atrisina atkārtotu mēģinājumu ceļā.

d) *Virsmas krituma noteikšana kādā punktā.* Virsmas kritumu kādā punktā mērī ar šai punktā vilktās pieskaru plaknes kritumu. Lai to noteiktu, konstruē (ar interpolāciju) vispirms palīghorizontāli caur doto punktu, velk šajā punktā pieskari palīghorizontālei un nosaka virsmas profilu pa taisni, kas vilkta caur punktu perpendikulāri pieskarei. Nosakot tagad dotajam punktam atbilstošo punktu uz profila un velkot šajā punktā profilam pieskari, pēdējās slīpums pret pamata plakni ir arī meklētais pieskaru plaknes slīpums pret šo plakni.



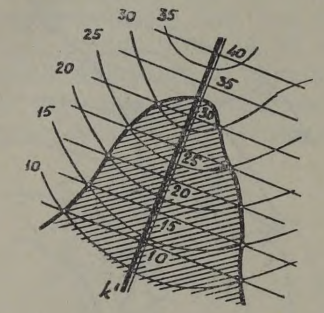
502. ras.

149. Krustošanās uzdevumi. Lai noteiktu topografiskās virsmas šķēlumu ar plakni, kas dota ar krituma mērogu k' (sk. 503. ras.), novelkam šai plaknē atsevišķas horizontāles un nosakām to krustpunktus ar tai pašā augstumā vilktām virsmas horizontālēm. Savienojot dabūtos punktus ar gludu līkni, dabūjam meklēto šķēluma līniju. Tā kā rasējumā plaknes un virsmas horizontāles *35* vairs nekrustojas, tad šķēluma līnija nesniedzas līdz šai horizontālei. Šķēluma figūras īsto formu dabū ar šķēluma plaknes paralēlpagriešanu ap kādu tās horizontāli (sk. 145. nodalījumu).

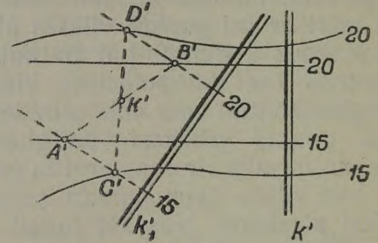
Dažreiz gadās, ka plaknes horizontāles ir novietotas gandrīz paralēli virsmas horizontālēm, kā tas, piemēram, redzams 504. rasējumā. Tādā gadījumā izvēlas patvaļīgu palīgplakni (krituma mērogs k'_1) un nosaka iepriekš tās šķēluma līnijas *AB* un *CD* ar doto plakni un doto virsmu. Abu palīglīniju *AB* un *CD* krustpunkts *K* pieder meklējamai šķēluma līnijai. Apskatīto uzdevumu izmanto, kad ir jānosaka zemes virsmas šķēlums ar kaut kāda slāņaina zemes ieža (plakanu) virsmu. Slāņa virsmas stāvokli nosaka ar urbumiem trijos zemes virsmas punktos, kas neatrodas uz kopējas taisnes.

Graduētas taisnes krustošanos ar topografisku virsmu parasti nosaka, konstruējot virsmas profilu pa šo taisni. Taisnes krustpunkti ar šo profilu ir taisnes krustpunkti ar virsmu. Šos krustpunktus dabū vispirms profila un taisnes savietojumā, bet to projekcijas ir šiem profila punktiem atbilstošie punkti uz taisnes projekcijas. Vispārīgā gadījumā tomēr ir vienkāršāk profila vietā izmantot virsmas šķēlumu ar patvaļīgu palīgplakni caur doto taisni. Šīs palīgplaknes horizontāles caur taisnes krituma mēroga dalījuma punktiem var izvēlēties tādā virzienā, kāds ir izdevīgāks šķēluma figūras noteikšanai.

Tāds krustošanās uzdevums jāatrisina, ja gribam, piemēram, noteikt, vai no kāda virsmas punkta A ir redzams kāds cits šīs vir-



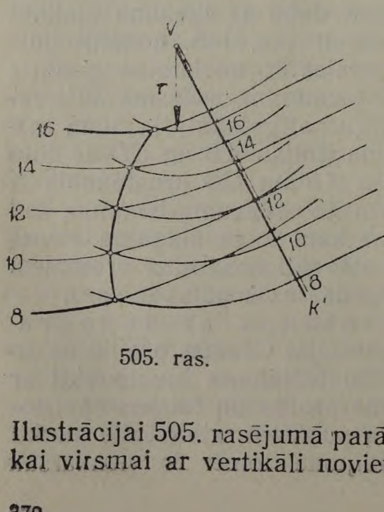
503. ras.



504. ras.

smas punkts B vai ne. Tas būs redzams tikai tad, ja taisne caur šiem punktiem virsmu nekrusto. Tāpat atrisina šo uzdevumu, ja abi punkti A un B ir dotajā augstumā virs topografiskās virsmas. Šāds krustošanās uzdevums ir jāatrisina arī, lai noteiktu, vai ir iespējams dotos punktus zem topografiskās virsmas savienot ar taisni, kas nekur neiziet topografiskās virsmas virspusē. Tam ir nozīme, piemēram, tuneļu būvē.

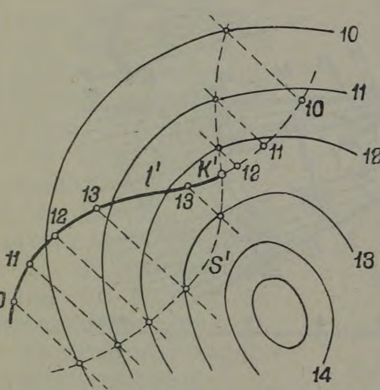
Lai noteiktu, kāds ir redzamības lauks, skatoties no kāda dotā apvidus punkta, caur punkta projekciju velk vairākas taisnes un nosaka virsmas profilus pa šīm taisnēm. Velkot tagad šo profilu savietojumos pieskares no dotā punkta savietojuma un savienojot šiem pieskaršanās punktiem atbilstošos punktus projekcijā, dabūjam līniju, kas atdala topografiskās virsmas redzamo daļu no neredzamās.



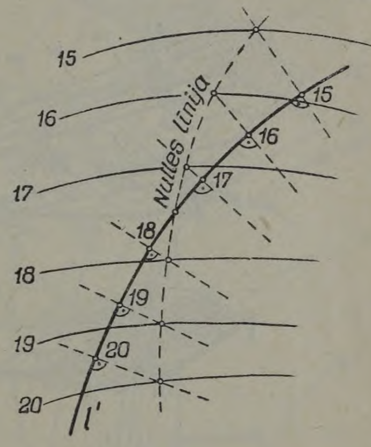
505. ras.

T o p o g r a f i s k ā s v i r s m a s š ķ ē l u m u a r p a t v a ļ ī g u v i r s m u nosaka, konstruējot virsmai tai pašā griezuma augstumā vilktās horizontāles un savienojot abu virsmu vienādi kotēto horizontāļu krustpunktus ar gludu līkni. Ilustrācijai 505. rasējumā parādīta šķēluma konstruēšana topografiskai virsmai ar vertikāli novietotu rotācijas konusu, kurš pieslēdzas dotajai ar krituma mērogu k' plaknei, tai pieskardamies, un kura virsotne ir punktā V. Iepriekš ir iezīmētas šī konusa horizontāles, kas iet caur plaknes krituma mēroga (caur V') dalījuma punktiem.

Tāpat konstruē arī vispārīgas vienāda krituma virsmas šķelšanos ar doto topografisko virsmu. Ja tikai dažas šīs virsmas horizontāles krusto topografiskās virsmas horizontāles, tad šķēluma līniju var konstruēt precīzāk, nosakot arī dažu virsmas veiduļu krustpunktus ar topografisko virsmu, izmantojot virsmas profilus pa šīm veidulēm. Praksē parasti šķēluma līnijas konstruē gandrīz vai vienīgi ar profilu palīdzību.



506. ras.



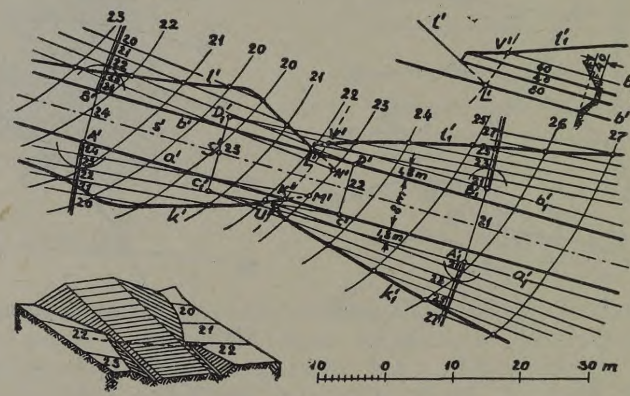
507. ras.

Kādas līknes krustpunktus ar topografisko virsmu nosaka, velkot caur līkni piemēroti izvēlētu palīgvirsmu un nosakot tās šķēlumu ar topografisko virsmu. Līknes krustpunkti ar šo šķēluma figūru ir līknes krustpunkti ar doto topografisko virsmu. Par palīgvirsmām parasti izvēlas horizontālus cilindrus, kuru veiduļu virzienu projekcijā var izvēlēties patvaļīgu. Lai noteiktu, piemēram, 506. rasējumā dotās līknes l krustpunktu ar topografisko virsmu, velkam caur līknes kotētajiem punktiem paralēlas taisnes, nosakām to krustpunktus ar tā paša augstuma virsmas horizontālēm un savienojam tos ar līkni s. Abu līkņu krustpunkts K ir meklētais līknes krustpunkts ar virsmu. Rasējumā līknes l daļa, kas atrodas zem topografiskās virsmas, parādīta ar pārtrauktu līniju.

Palīgcilindra vietā caur doto virsmu var izvēlēties arī patvaļīgu (greizu) taišņu virsmu; tās veidulēm tikai ir jābūt horizontālām. Ja virsmas veiduļu projekcijas ir perpendikulāras līknes projekcijai l' (tātad telpā veidules ir perpendikulāras līknei l), tad šāda greizā virsma šķeļ doto topografisko virsmu pa t. s. *nulles līniju* (sk. 507. ras.). Šai nulles līnijai ir svarīga loma ceļu projektēšanā kalnainā apvidū. Ja l ir projektējamā ceļa ass, tad tās stāvoklis attiecībā pret nulles līniju parāda, kādi zemes pārvietojumi, būvējot šo ceļu, būs jāizdara (sk., piem., tālāk 509. ras.).

150. Praktiski piemēri. Iepriekš apskatīto konstrukciju praktiskus izlietojumus parādīsim šādos piemēros.

a) *Dzelzceļa stigas ierīkošana dotajā apvidū.* Dots apvidus horizontāļu plāns (ar mērogu), stigas klātnes ass projekcija s', tās punkts S' ar koti 23 m, klātnes platums 8 m, kāpums 5% un stigas nogāžu kritumi — uzbērumā 1:2, ierakumā 2:3. Jānosaka nogāžu šķēlumi ar apvidus virsmu (sk. 508. ras.).

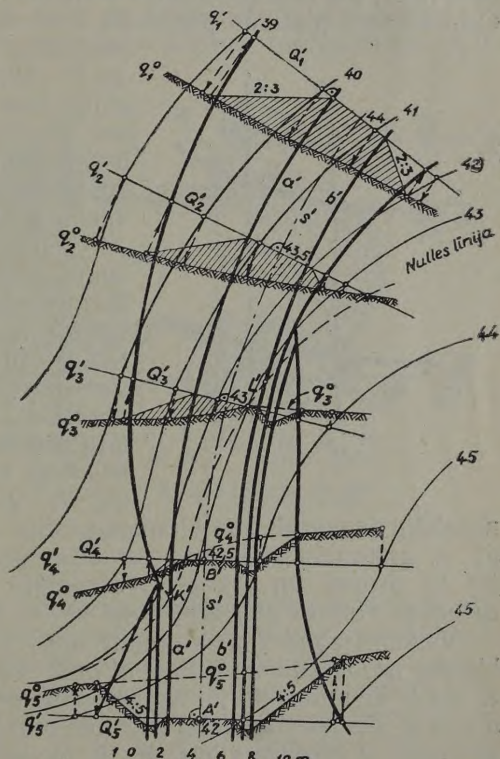


508. ras.

Konstruējam vispirms stigas klātnes krituma mērogu. Tā kā klātnes ass ir tās krituma līnija un klātnes kritums ir 1:20, tad krituma mērogu dabū, atliekot no punkta S' pa ass projekciju s' uz abām pusēm intervālu 20 m pēc dotā mēroga. Caur dabūtajiem punktiem perpendikulāri s' vilktās taisnes ir klātnes horizontāles, bet paralēli s' attālumā 4 m vilktās taisnes a' un b' ir klātnes malu projekcijas.

No klātnes ass krituma mēroga redzams, ka stigas klātne pa kreisi no tās horizontāles *22* atrodas virs apvidus virsmas, bet pa labi no tās — zem apvidus virsmas; pa kreisi no šīs horizontāles tātad ir jāizveido uzbērums, bet pa labi ierakums. Uzbēruma nogāžu (vienāda krituma) virsmas ir caur taisnēm a un b vilktās plaknes ar kritumu 1:2. Izvēloties uz a un b punktus A un B, teiksim, ar koti 24, par krituma konusu virsotnēm, velkot tātad (dotajā mērogā) ap A' un B' riņķa lokus ar rādiusu $2 \times 2 = 4$ m, no klātnes malu punktiem C un D ar koti 22 šiem lokiem vilktās pieskares tad ir abu nogāžu horizontāles ar koti 22. Ar to ir noteikti arī abu nogāžu krituma mērogi, jo to virzieni ir perpendikulāri šīm horizontālēm un intervāli ir 2 m. Nosakot tagad nogāžu horizontāļu krustpunktus ar tā paša augstuma topografiskās virsmas horizontālēm, dabūjam uzbēruma nogāžu šķēlumus k un l ar topografisko virsmu. Lai šo līkņu krustpunktus K un L ar stigas klātnes malām noteiktu precīzāk, atrod vēl līkņu punktus M un N, kuru projekcijas atrodas jau starp malu a un b projekcijām. Šajos punktos stiga no uzbēruma pāriet ierakumā, pie kam stigas klātne šķeļ topografisko virsmu pa līniju KL (nulles līniju), ko aptuveni var uzskatīt par taisnes nogriezni.

No līnijas KL uz leju stiga jāizveido ar ierakumu, pie kam ierakuma nogāžu atūdeņošanai jāizveido stigas abās pusēs ūdens novadgrāvji. Izvēloties grāvju platumus 1,8 m, zīmējam 1,8 m attālumā no stigas klātnes malu projekcijām taisnes a'_1 un b'_1, kas ir klātnes malu augstumā novietoto grāvju malu a_1 un b_1 projekcijas. Atstājot pagaidām pie malas šo novadgrāvju izveidojumu, velkam caur a_1 un b_1 ierakuma nogāžu plaknes ar kritumu 2:3 un nosakām to šķēlumus k_1 un l_1 ar topografisko virsmu. Šo nogāžu krituma mērogus nosaka tāpat kā uzbēruma nogāžu krituma mērogus, t. i., izvēloties grāvja malu punktus A_1 un B_1 ar koti 21 kā krituma konusa virsotnes, velkam ap šo punktu projekcijām ar 3 m rādiusu (divi intervāli) riņķa lokus un no punktiem C'_1 (23) un D'_1 (23) uz grāvja malu projekcijām pieskares šiem riņķa lokiem. Pēdējās ir nogāžu horizontāles ar koti 23, bet nogāžu krituma mērogi novietoti tām perpendikulāri.

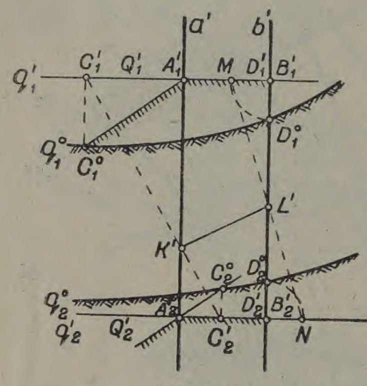


509. ras.

Ierakuma nogāžu augšējās malas — šķēluma līnijas k_1 un l_1 krusto grāvju malas punktos U un V uz nulles līnijas. Šo punktu apkārtnē sākas ūdens novadgrāvji. Labās puses grāvja sākuma izveidojums, trīs reizes palielināts, parādīts atsevišķi rasējuma augšējā stūrī pa labi; kreisā apakšējā stūrī dots visas pārejas vietas no uzbēruma uz ierakumu ortogonāli aksonometrisks attēls. Novadgrāvju sākuma formas precīzam izveidojumam patiesībā būtu jānosaka grāvja sānu un dibena plakņu šķēlumi ar topografisko virsmu, ko praksē parasti nekad nedara.

Vēl jāatzīmē, ka novadgrāvji būtu jāierīko arī gar uzbēruma pakāji. Tāpat zemākā vietā — starp horizontālēm būtu nepieciešama ūdens caurteka. Bet tie jau ir tīri tehniskas dabas jautājumi, tādēļ tos sīkāk neaplūkosim.

b) *Ceļa uzbēruma un ierakuma nogāžu kontūru noteikšana ar šķērsprofilu palīdzību.* Apvidus reljefs dots ar horizontāļu plānu (sk. 509. ras.), pie tam horizontāles vilktas ar griezuma augstumu 1 m. Ceļa klātnes platums paredzēts 4 m ar kāpumu 5%. Klātnes ass projekcija s' starp punktiem A' (42) un B' (42,5) iet pa taisni, bet tālāk pa riņķa loku ar rādiusu 50 m. Uzbēruma nogāzēm jābūt ar kritumu 2:3, bet ierakumu nogāzēm — 4:5. Ierakuma vietā ceļa abās pusēs jāierīko ūdens novadgrāvji.



510. ras.

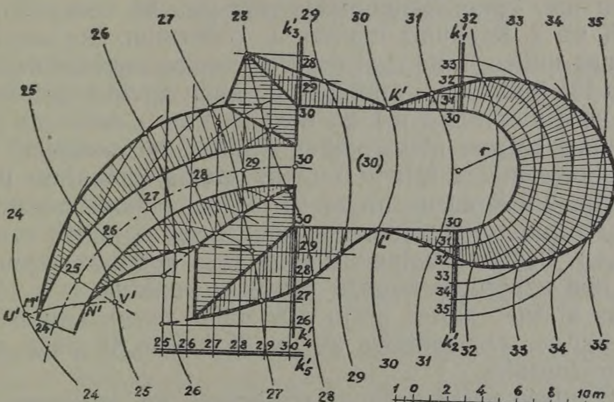
Graduējam ceļa klātnes asi ar griezuma plaknēm ik pa 0,5 m. Tā kā klātnes ass kāpums ir 5%, tad tās intervāls ir 100:5=20, pusintervāls tātad — 10 m. Caur dabūtajiem punktiem novelkam klātnes ass projekcijas normāles, kas ir ceļa klātnes horizontāļu projekcijas (sal. ar 507. ras.). Izvēlamies tagad profila plaknes Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 caur šīm horizontālēm un nosakām topografiskās virsmas profilu savietojumus q_1^0, q_2^0, q_3^0, q_4^0, q_5^0 ar griezuma plaknēm caur attiecīgajām horizontālēm. Savienojot šo profilu un klātnes horizontāļu savstarpējos krustpunktus, dabūjam klātnes asij atbilstošo nulles līniju.

Velkam tagad 2 m attālumā abās pusēs klātnes ass projekcijai klātnes norobežojuma līnijas a' un b' un atzīmējam to krustpunktus K' un L' ar nulles līniju. No rasējuma redzams, ka gar klātnes malu a virs K būs jāierīko uzbērums, bet zem K — ierakums, bet gar klātnes malu b uzbērums būs virs L, ierakums — zem L. Profilu q_1 un q_2 apkārtnē ceļš tātad ies pa uzbērumu, bet profila q_5 apkārtnē — pa ierakumu, kamēr profilu q_3 un q_4 apkārtnē ceļa labā puse būs jānorok, bet kreisā puse jāuzber. Ceļa abās pusēs no punktiem K un L uz leju jāierīko ūdens novadgrāvji.

Izvēloties grāvju dziļumu 0,5 m, dibena platumu 0,5 m un sānu kritumus 2:3 un 4:5, piezīmējam tagad attiecīgām ceļa klātnes horizontālēm arī pašus ceļa šķērsprofilus (kopā ar grāvjiem) un atzīmējam to krustpunktus ar apvidus profiliem. Nosakot un savienojot šiem punktiem atbilstošos punktus projekcijā, dabūjam arī meklētās uzbēruma un ierakuma kontūras. Reizē dabū arī ūdens novadgrāvju kontūras.

Jāpiezīmē, ka sakarā ar ceļa kāpumu izvēlētās profila plaknes Q_1, Q_2, . . ., Q_5 ceļa uzbēruma un ierakuma nogāzes nešķeļ pa to krituma līnijām. Tomēr rasējumā ceļa šķērsprofili konstruēti tā, it kā šīs plaknes tās šķeltu pa krituma līnijām, t. i., ar sānu kritumiem 2:3 resp. 4:5. Atšķirība no īstajiem (ceļu un grāvju) kritumiem parasti tomēr ir tik niecīga, ka to var ignorēt.

Apskatītajai metodei uzbēruma un ierakuma kontūru noteikšanai ir tā priekšrocība, ka to var lietot arī tad, kad apvidus profili zināmos attālumos viens no otra gar projektējamo ceļu ir noteikti ar tiešiem mērījumiem. Ja, piemēram, ir noteikti divi viens otram sekojoši profili q_1 *un* q_2 (sk. 510. ras.) un konstruēti to savietojumi q_1^0 un q_2^0 ar griezuma plaknēm caur ceļa klātnes horizontālēm A_1B_1



511. ras.

un A_2B_2, no kuriem redzams, ka starp šiem profiliem uzbērumu nomaina ierakums, tad ceļa klātnes nulles līniju KL var noteikt šādi. Pieņemsim, ka caur ceļa klātnes malu a vilkta dambja nogāzes plakne. Šī plakne šķeļ profila plaknes Q_1 un Q_2 pa paralēlām taisnēm A_1C_1 un A_2C_2, kas savietojumā krusto apvidus profilus q_1^0 un q_2^0 attiecīgi punktos C_1^0 un C_2^0. Ja C_1' un C_2' ir šiem punktiem atbilstošās horizontālās projekcijas, tad taisne $C_1'C_2'$ aptuveni ir daļa no šīs nogāzes plaknes šķēluma ar apvidus virsmu, tās krustpunkts K' ar a' tātad ir meklētās nulles līnijas projekcijas punkts. Tāpat nosaka nulles līnijas projekcijas otru punktu L'.

Punktus K' un L' var noteikt arī, izvēloties v e r t i k ā l a s plaknes caur klātnes malām a un b. Vertikālā plakne, piemēram, caur malu b šķeļ apvidu pa līkni, kuras daļu starp profiliem q_1 un q_2 parasti var uzskatīt par taisni $D_1D_2(D_1'D_2' \equiv B_1'B_2')$; tās krustpunkts ar ceļa klātnes malu b ir meklētais punkts L. Tā kā $B_1L:B_2L = B_1D_1:B_2D_2$, tad tādā pašā attiecībā punktam L' jādala arī taisnes nogriežņa B_1B_2 projekcija $B_1'B_2'$. Taisnes nogriežņu B_1D_1 un B_2D_2 garumus varam dabūt no to savietojumiem $B_1'D_1^0$ un $B_2'D_2^0$, tādēļ punkta L' noteikšanai var atlikt uz paralēlajām taisnēm caur B_1' un B_2' pretējos vērsumos $B_1'M = B_1'D_1^0$ un $B_2'N = B_2'D_2^0$ un vilkt taisni

MN. Ja mala b ir horizontāla, tad šo konstrukciju var interpretēt arī kā taisnes D_1D_2 savietošanu ar griezuma plakni caur malu b.

c) *Zemes darbu kontūru noteikšana, izveidojot dotajā apvidū horizontālu platformu ar piebraukšanas rampu.* Dots apvidus reljefa horizontāļu plāns ar tajā iezīmētām platformas un rampas klātnes kontūru projekcijām (sk. 511. ras.). Uzbēruma nogāžu kritums paredzēts 2:3, ierakuma nogāžu kritums — 1:1, bet rampas klātnes kritums — 1:3. Platformas līmeņa kote ir 30 m.

Platformas uzbēruma un ierakuma kontūras nosaka analoģiski 486. rasējumā attēlotajai platformai, tikai daļa ierakuma nogāzes ir koniska virsma, kuras horizontāles attēlojas kā koncentriski riņķi. Punktos K un L ierakums mainās ar uzbērumu; horizontāle *30* te ir platformas nulles līnija. Lai noteiktu rampas uzbēruma kontūras, graduējam tās klātnes asi atbilstoši dotajam apvidus griezuma augstumam 1 m (intervāls 3 m) un novelkam caur dalījuma punktiem perpendikulāri klātnes asij rampas klātnes horizontāles. Punktos, kuros šīs horizontāles krusto rampas malas, domājam novietotus dotā krituma 2:3 konusus un ar to palīdzību konstruējam rampas nogāžu horizontāles (rasējumā šie konusi nav parādīti; konstrukciju sk. 495. ras.). Pēdējo krustpunkti ar tā paša augstuma apvidus horizontālēm dod uzbēruma nogāžu kontūras punktus.

Rampas klātnes nulles līniju MN dabū, nosakot punktus U un V, kuros klātnes horizontāles *24* un *25* krusto tā paša augstuma apvidus horizontāles.

Uzskatāmības palielināšanai uzbēruma un ierakuma nogāzes krituma līniju virzienā iesvītrotas.

ĪSS VĒSTURISKS APSKATS

Kaut gan tēlotājas ģeometrijas kā zinātnes vēsture ir samērā jauna, tās pirmsākumi meklējami jau sirmā senatnē. Tā seno eģiptiešu papirusa ruļļos ir atrasti tā laika celtņu attēli virsskatā un pretskatā. Tāpat jau seno romiešu celtnieka *Vitruviusa (Vitruviuss)* grāmatā «De Architektura», kas ir vecākā šai nozarē, atrodam norādījumus par t. s. *ikonografiju* un *ortografiju* kā kāda telpas objekta attēlošanas metodi. Šī metode, ko izmanto tēlotājā ģeometrijā, tās sākotnējā formā gan māca, kā telpas objektus attēlot plaknē, bet tanī trūkst jebkādu norādījumu, kā atrisināt dažādus uzdevumus par šiem telpas objektiem ar to attēlu palīdzību, kas, kā zināms, ir otrs no tēlotājas ģeometrijas galvenajiem uzdevumiem.

Viduslaikos, sakarā ar akmens velvju celtniecību, radās vajadzība pēc jaunas zinātnes — *stereotomijas* (akmens griešana), kuras empīriskie priekšraksti atrodami *Delorma (de l'Orme)* 1576. gadā iespiestajā darbā «Traité de l'Architecture». Franču matemātiķis *Dezargs (Desargues)* 1640. gadā gan mēģina konstrukcijas pamatot zinātniski, bet sarežģītā izteiksmes veida dēļ viņa darbs negūst plašāku ievērību. Tikai 1739. gadā franču kara inženieris *Frezjē (Frézier)* savā plašajā darbā par stereotomiju, kas, blakus minot, aptver vairāk nekā 1400 lappuses, kā pirmais atdala teoriju no pielietojumiem, tādējādi dodot stereotomijai zinātnisku pamatojumu.

Parādot, ka visi grafiskie atrisinājumi ir atvasināmi no neliela skaita pamatuzdevumiem, franču matemātiķis *Monžs (Monge)* no stereotomijas kā palīgzinātnes rada tēlotāju ģeometriju kā jaunu matemātikas disciplīnu, kas balstās uz stingri zinātniskiem pamatiem. Savā darbā «Géométrie descriptive» 1795. gadā Monžs dod sistemātisku virsskata un pretskata metodes pamatojumu. Sasaistot abus attēlus kopā (Monža metode), viņš panāk ne tikvien to, ka visus jau agrāk atrisinātos uzdevumus var atrisināt daudz vienkāršāk, bet ka var atrisināt arī uzdevumus, ko agrāk atrisināt neprata.

Jaunās zinātnes šūpulis Krievijā ir Satiksmes ceļu inženieru institūts Pēterpilī (Институт инженеров путей сообщения), kas dibināts 1809. gadā. Tēlotāju ģeometriju šai institūtā sākumā māca franču valodā Monža skolnieks *Potjē (Potier)* no Politehniskās skolas Parīzē.

1821. gadā Potjē vietā sāk strādāt *Sevastjanovs (А. Я. Севастьянов)*, kas saraksta arī pirmo patstāvīgo lekciju kursu krievu valodā. Desmit gadus vēlāk iznāk vēl divas viņa grāmatas, kurās viņš aplūko tēlotājas ģeometrijas izmantošanu zīmēšanā, ēnu teoriju, perspektīvu un optiskos attēlojumus, kā arī pielietojumus gaisa un krāsu perspektīvā, karšu projekcijās un gnomonikā (mācība par saules pulksteņiem).

Tālāk jau tēlotāja ģeometrija sāk ātri izplatīties. Parādās arvien jauni oriģināldarbi krievu valodā, galvenokārt mācību grāmatas, no kurām ievērojamākās ir *Makarova (Н. И. Макаров), Kurdjumova (В. У. Курдюмов) un Riņina (Н. А. Рынин)*. Laikā no 1913. līdz 1917. gadam parādās arī pirmie lielākie teorētiskie darbi, bet arī tiem ir vairāk metodisks raksturs.[1]

Tikai pēc Lielās Oktobra revolūcijas stāvoklis krasi mainās. Pie augstākajām mācību iestādēm tiek organizētas patstāvīgas katedras, kas apvieno visus grafisko disciplīnu veidus, tādējādi nodrošinot darbā vienotu līniju. Tiek sarakstīts liels skaits kandidāta disertāciju gan ar teorētisku, gan praktisku nozīmi (pielietojumi statikā, mērinstrumentu un darba rīku izgatavošanas tehnikā u. c.). Parādās arī pirmās doktora disertācijas, kā, piemēram, *Kargina «Par grafisko aprēķinu precizitāti»* (Каргин Д. И., О точности графических вычислений) un *Četveruhina «Nosacīto attēlojumu teorija»* (Четверухин Н. Ф., Теория условных изображений), kas dod spēcīgu impulsu tēlotājas ģeometrijas tālākai attīstībai.[2] Pēdējā laikā sāk izveidoties arī pavisam jauna (galvenokārt būvmehānikas vajadzībām) grafisko attēlojumu metode, kas operē ar vektoru teorijas elementiem — t. s. *vektoru tēlotāja ģeometrija* (vektoru kotētās projekcijas).[3]

Mūsu modernās tehnikas straujā attīstība neatlaidīgi prasa pēc jaunām dažādu matemātikas vienādojumu tuvinātām atrisināšanas metodēm, un te grafiskajām metodēm salīdzinājumā ar analitiskajām metodēm ir lielas priekšrocības. Grafisko metodu uzdevums ir katrā atsevišķā gadījumā atrast piemērotu, t. i., konstruktīvi pēc iespējas vienkāršāku, attēlojumu (projecēšanas aparātu), kas atļautu problēmu reducēt uz vienkāršāku. Pie tam jāpiezīmē, ka tiklab attēlošanas, kā arī attēlojamo objektu jēdzieni šodien tiek saprasti daudz plašākā nozīmē. Izveidot piemērotu projecēšanas aparātu nozīmē atrast tādu savstarpēji viennozīmīgu piekārtojumu, kas dotajai «objektu» v a r i e t ā t e i piekārto pilnīgi noteiktu «attēlu» varietāti. Var minēt problēmu par četrdimensiju telpas attēlošanu plaknē (t. s. četrdimensiju telpas tēlotāju ģeometriju), kur objektu varietāti veido Minkovska—Einšteina telpas «punkti» (parastās telpas punkti saistīti ar laika koordināti), bet attēlu varietāti sastāda parastās plaknes visi punktu pāri, vai arī *ciklografiju,* kur parastās telpas punktiem piekārto visus riņķus plaknē.

No pārējiem plašāk pazīstamiem attēlojumiem varētu minēt šādus t. s. *kinemātiskos attēlojumus:*

a) divu pēdu metode, pēc kuras katrai taisnei telpā piekārto divus punktus, kuros šī taisne krusto divas nekustīgas plaknes. Šo metodi, kuru apslēptā

[1] Var minēt *Dješevoju* (М. А. Дешевой) un *Riņinu,* kas mēģina apskatīt visas tēlotājas ģeometrijas metodes no vispārīgāka redzes viedokļa, un *Fjodorovu* (Е. С. Федоров), kas pētī tēlotājas ģeometrijas izmantošanu kristalografijā.

[2] Pēdējās disertācijas pamatproblēma: cik elementus — parametrus katrā attēlojuma veidā drīkst izvēlēties patvaļīgi un kāds ir šo parametru eksistences apgabals, t. i., kādām parametru vērtībām atbilst reāls projecēšanas aparāts.

[3] Sk., piemēram, Шор Я. Б., Векторные методы начертательной геометрии и их приложения в механике, kas iespiests rakstu krājumā «Вопросы современной начертательной геометрии». Гостехиздат, 1947.

veidā izmantojām perspektīvā (taisnes pēdas attēlu plaknē un telpas bezgalīgi tālajā plaknē), izmanto taišņu virsmu pētīšanā (šādai virsmai tādējādi tiek piekārtotas divas līknes dotajās plaknēs);

b) metode, pēc kuras kādai līknei telpā piekārto divas līknes plaknē — līknes projekciju šai plaknē un līknes pieskaru krustpunktu ģeometrisko vietu ar šo plakni;

c) metode, pie kuras kādas virsmas punktiem piekārto bez šo punktu projekcijām plaknē vēl virsmas pieskaru plakņu šķēlumus ar šo plakni.

Tādējādi tēlotāja ģeometrija šodien arvien vairāk paplašina savu darbības sfēru un pēc ilgāka perioda, kurā tā attīstījās kā tehnisko zinātņu palīgdisciplīna, nonāk atkal ciešā sakarā ar pārējām ģeometrijas nozarēm, pie kam jauno attēlojumu studijas dod arvien kaut kādas jaunas atziņas. Tēlotājas ģeometrijas nākotnes uzdevums ir meklēt attēlojumus, kas dotu iespēju dažādas matemātikas, fizikas un citas dabas zinātņu problēmas atrisināt grafiski.

Atrast vispiemērotāko attēlojumu vai noskaidrot šāda attēlojuma iespējamību ir problēmas, kas šodien tikai atsevišķos gadījumos ir daudzmaz apmierinoši atrisinātas.

IZMANTOTĀ LITERATŪRA

1. J. Kalniņš, Tēlotājas ģeometrijas kurss, 1922.
2. Добряков А. И., Курс начертательной геометрии, 1949.
3. Рынин Н. А., Начертательная геометрия, 1939.
4. Попов Н. А., Курс начертательной геометрии, 1947.
5. Гордон В. О. и Семенцов-Огиевский М. А., Курс начертательной геометрии, 1949.
6. Чалый А. Т., Начертательная геометрия, 1949.
7. Ананов Д. Т., Курс начертательной геометрии, 1935.
8. Глаголев Н. А., Начертательная геометрия, 1946.
9. Вольберг О. А., Лекции по начертательной геометрии, 1947.
10. Макаров Н. И., Полный курс начертательной геометрии, 1898.
11. Добряков А. И., Коковин И. Н., Князьков М. А., Тени классических фрагментов в ортогональных проекциях, 1938.
12. Марфельд Р. Р., Построение архитектурных перспектив, 1930.
13. Рынин Н. А., Линейная перспектива, 1918.
14. Барышников А. П., Перспектива, 1949.
15. Дейнеко В. Ф., Теория перспективы, 1949.
16. Вольберг О. А., Основные идеи проективной геометрии, 1949.
17. Рынин Н. А., Методы изображения, 1916.
18. Глаголев Н. А., Проективная геометрия, 1936.
19. Четверухин Н. Ф., Высшая геометрия, 1939.
20. Соков В. С., Проекции с числовыми отметками, 1935.
21. Вопросы современной начертательной геометрии, сборник статей под редакцией Четверухина Н. Ф., 1947.
22. Гаспар Монж, Сборник статей к двухсотлетию со дня рождения, изд. Академии наук СССР, 1947.
23. Müller E., Lehrbuch der darstellenden Geometrie, I/II, 1908/16.
24. Scheffer G., Lehrbuch der darstellenden Geometrie, I/II, 1919/20.
25. Bartell K., Haack W., Kotierte Projektionen, 1933.

SATURS

II nodaļa

TRANSFORMĀCIJAS

III nodaļa

KRUSTOŠANĀS UZDEVUMI

IV nodaļa

AKSONOMETRISKĀS PROJEKCIJAS

V nodaļa

PLAKNES FIGŪRU ĢEOMETRISKA RADNIECĪBA

VI nodaļa

LĪKŅU UN VIRSMU PROJEKCIJAS

VII nodaļa

PERSPEKTĪVA

VIII nodaļa

KOTĒTĀS PROJEKCIJAS

Pamanīto kļūdu labojums

Lpp.	Rinda	Iespiests	Jābūt
72.	5. no apakšas	$K'\bar{D}'_0 = K'K'D'_0$	$K'\bar{D}'_0 = K'D'_0$
80.	4. no apakšas	$\bar{2}'''\bar{2}_0''' = 1''\ 2''$	$2'''\bar{2}_0''' = 1''\ 2''$
197.	12. no augšas	2 : 1	$\sqrt{2} : 1$
215.	1. no apakšas	krustpunkti, ka	krustpunkti. Ja
265.	1. no augšas	$O'_2{}^*$. Ap punktiem $O'_1{}^*$ un $O'_2{}^*$ vilktie riņķi $p'_1{}^*$ un $p'_2{}^*$	O'_{2*}. Ap punktiem O'_{1*} un O'_{2*} vilktie riņķi p'_{1*} un p'_{2*}
283.	411. ras.	augšējā kreisajā stūrī jābūt burtam O.	

2060

LATVIJAS NACIONĀLĀ BIBLIOTĒKA
0309065760

9 05

2060