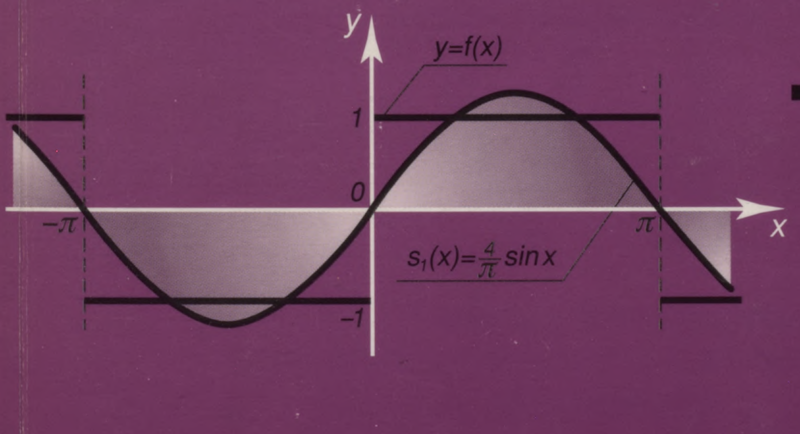
Kārlis ŠTEINERS

AUGSTĀKĀ MATEMĀTIKA

26., 27. Skaitļu un funkciju rindas
28. Furjē rindas un integrālis
29., 30. Kompleksā mainīgā funkciju teorijas un operatoru rēķinu elementi



VI

Lekciju konspekts inženierzinātņu un dabaszinātņu studentiem

ZVAIGZNE ABC

Kārlis ŠTEINERS

AUGSTĀKĀ MATEMĀTIKA

26., 27. nodaļa. **Skaitļu un funkciju rindas**
28. nodaļa. **Furjē rindas un integrālis**
29., 30. nodaļa. **Kompleksā mainīgā funkciju teorijas un operatoru rēķinu elementi**

VI

Lekciju konspekts inženierzinātņu un dabaszinātņu studentiem

ZVAIGZNE ABC

51 (075.8)
Št 310

Augstākās matemātikas lekciju konspekta 6. grāmatā ietvertas 5 nodaļas: 26. un 27. nodaļā aplūkoti **galvenie rindu teorijas pamatjautājumi** - ar skaitļu rindām un funkciju rindām saistīti jēdzieni, sakarības un metodes; 28. nodaļā - **Furjē rindas un Furjē integrālis** (šiem jautājumiem ir īpaša nozīme dažādos lietojumos procesu pētīšanā); 29. nodaļā - **kompleksā mainīgā funkciju teorijas elementi**, bet 30. nodaļā - **operatoru rēķini** (Laplasa transformācija).

Aplūkoto jautājumu kopsavilkumi, svarīgākās formulas vai uzdevumu risinājumu piemēri ir izvietoti uz krāsu fona.

Praktiskajām nodarbībām par 26., 27. un 28. nodaļas tematiem ir izmantojams «Uzdevumu krājums augstākajā matemātikā»; Apgāds Zvaigzne ABC, 4. izd., 2001. (autori Dz. Bože, L. Biezā, B. Siliņa, A. Strence); savukārt *uzdevumi par kompleksā mainīgā funkcijām* (29. nodaļa) *un operatoru rēķiniem* (30. nodaļa) pievienoti atbilstošās nodaļas noslēgumā (šos uzdevumus sagatavojuši RTU mācībspēki).

ISBN 9984-22-350-7

XXVI NODAĻA

SKAITĻU RINDAS

26.1. §. SKAITĻU RINDAS JĒDZIENS

Aritmētikā skaitļu saskaitīšanas darbība ir definēta tikai tad, ja saskaitāmo skaits ir galīgs. Tomēr matemātikā bieži ir nepieciešams vispārināt šo darbību bezgalīgi daudzu saskaitāmo gadījumam.

Lai noskaidrotu šo jautājumu, aplūko **bezgalīgu skaitļu virkni**

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots .$$

Savienojot virknes locekļus ar «+» zīmi, formāli iegūst izteiksmi ar bezgalīgi daudz saskaitāmajiem; šādu izteiksmi sauc par **skaitļu rindu**.

Definīcija

Par skaitļu rindu sauc izteiksmi

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots;$$

lietojot summas simbolu $\sum$, šo izteiksmi apzīmē ar $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ un raksta

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n;$$

a_n sauc par rindas vispārīgo locekli.

Noskaidrosim, ko nozīmē jēdziens «**bezgalīgi daudzu saskaitāmo summa**». Pakāpeniski saskaitot rindas locekļus, iegūst šādas izteiksmes:

$$\begin{aligned} &S_1=a_1, \\ &S_2=a_1+a_2, \\ &S_3=a_1+a_2+a_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n. \end{aligned}$$

Šīs izteiksmes sauc par **skaitļu rindas parciālsummām**. Parciālsummas veido virkni

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots,$$

kurai meklē robežu $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, t. i., noskaidro, kā mainās parciālsummas, ja saskaitāmo skaits neierobežoti palielinās.

Definīcija

Ja rindas parciālsummām S_n eksistē galīga robeža S, t. i.,

$$\lim_{n\to\infty} S_n=S,$$

tad saka, ka rinda konverģē; skaitli S sauc par rindas summu un raksta

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=S.$$

Ja robeža $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ neeksistē vai arī ja tā ir bezgalība, tad saka, ka **rinda diverģē**.

Piemērs. Aplūkosim skaitļu rindu, kas sastādīta no **bezgalīgas ģeometriskās progresijas** locekļiem:

$$a+aq+aq^2+aq^3+\ldots+aq^{n-1}+\ldots .$$

Šīs rindas parciālsumma S_n ir ģeometriskās progresijas pirmo n locekļu summa, kuru aprēķina pēc formulas

$$S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

Lai noskaidrotu, vai dotā rinda konverģē, un atrastu tās summu, atrodam robežu

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a(1-q^n)}{1-q}=\frac{a}{1-q}\cdot\lim_{n\to\infty}(1-q^n)=\frac{a}{1-q}(1-\lim_{n\to\infty}q^n).$$

Ja $|q|<1$, tad $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$ un $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{a}{1-q}$.

Ja $|q|>1$, tad $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=\infty$ un $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$.

Ja $q=1$, tad $S_n=a+a+a+\ldots+a=na$ un $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}na=\infty$.

Ja $q=-1$, tad $S_n=a-a+a-a+\ldots=\begin{cases}0, & \text{ja } n \text{ – pāra skaitlis,}\\ a, & \text{ja } n \text{ – nepāra skaitlis,}\end{cases}$

tātad šajā gadījumā $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ neeksistē.

Ja $0<q<1$, tad ģeometriskā progresija ir dilstoša. Līdz ar to secinām, ka **bezgalīgas dilstošas ģeometriskās progresijas rinda konverģē un tās summa**

$$S=\frac{a}{1-q}.$$

Ja skaitļu rindā

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\ldots$$

nosvītro pirmos n locekļus, tad iegūst citu rindu –

$$a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\ldots,$$

ko sauc par dotās **rindas atlikumu**.

Ir spēkā šāda **teorēma**.

Ja skaitļu rinda konverģē, tad konverģē arī jebkurš šīs rindas atlikums. Ja konverģē rindas atlikums, tad arī dotā rinda konverģē.

26.2. §. RINDAS KONVERĢENCES NEPIECIEŠAMAIS NOSACĪJUMS

Rindu praktiskos lietojumos ir jānoskaidro, vai aplūkotā rinda konverģē; dažkārt pat nav nepieciešams atrast rindas summu. Konverģences **nepieciešamo nosacījumu** formulē kā šādu **teorēmu**.

Ja skaitļu rinda konverģē, tad tās vispārīgā locekļa robeža ir nulle, kad $n\to\infty$, t. i.,

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

Pierādījums

Dots: rinda konverģē, tātad $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Jāpierāda: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Tā kā

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

un

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1},$$

tad

$$S_n = S_{n-1} + a_n \quad \text{jeb} \quad a_n = S_n - S_{n-1}.$$

No šejienes, izmantojot doto, iegūstam

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0. \quad \square$$

Piebildīsim, ka **apgrieztā teorēma nav spēkā**. Tas nozīmē, ka, *ja rindas vispārīgā locekļa robeža ir nulle, tad rinda var arī nekonverģēt.*

Piemērs. **Aplūkosim skaitļu rindu**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots .$$

Šo rindu sauc par **harmonisko rindu**.

Acīmredzami harmoniskās rindas vispārīgā locekļa robeža ir nulle:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Taču šī **rinda diverģē**, jo tās parciālsummas neierobežoti palielinās.

Patiešām, tā kā

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{1}{2},$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > S_2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4 \cdot \frac{1}{2},$$

$$S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > S_4 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} > 4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 5 \cdot \frac{1}{2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_{2^n} > (n+2) \cdot \frac{1}{2} = \frac{n+2}{2},$$

tad

$$\lim_{n\to\infty} S_{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2} = \infty,$$

t. i., *rinda diverģē.*

Secinājums

Ja rindas vispārīgā locekļa robeža nav nulle, tad rinda diverģē.

Piemērs. **Pierādīt, ka diverģē rinda** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n-2}$.

Pierādījums

Tā kā

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{3 - \frac{2}{n}} = \frac{2}{3} \neq 0,$$

tad nav izpildīts konverģences nepieciešamais nosacījums, un *tātad rinda diverģē.*

Piemērs. **Aprēķināt rindas**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \ldots$$

summu S, izmantojot rindas konverģences definīciju.

Tā kā

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n,$$

tad atradīsim rindas parciālsummu S_n.

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

Lai vienkāršotu šo parciālsummas izteiksmi, pārveidosim rindas vispārīgo locekli a_n divu vienkāršāko daļu (parciāldaļu) summā šādi:

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{2n-1} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Izmantojot iegūto vispārīgā locekļa a_n formulu, atrodam parciālsummas S_n izteiksmi:

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{2n+1-1}{2(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

Līdz ar to

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Tātad dotā rinda konverģē, un tās summa $S = \frac{1}{2}$.

26.3. §. POZITĪVU SKAITĻU RINDU KONVERĢENCES PIETIEKAMIE NOSACĪJUMI

Lai, izmantojot konverģences definīciju, noskaidrotu, vai skaitļu rinda konverģē, ir jāpierāda, ka rindas parciālsummām eksistē robeža. Robežas eksistences pierādīšanai parasti izmanto **Veierštrāsa teorēmu**: *ja skaitļu virkne ir monotona un ierobežota, tad tai eksistē robeža.* No teorēmas iegūst šādu secinājumu.

Ja skaitļu rindas parciālsummas ir monotoni augošas un ierobežotas no augšas, tad parciālsummām eksistē robeža; tātad rinda konverģē.

Aplūkosim teorēmas par konverģences pietiekamiem nosacījumiem skaitļu rindām ar pozitīviem locekļiem (šīs teorēmas sauc par **konverģences kritērijiem**).

1. SALĪDZINĀŠANAS KRITĒRIJS

Teorēma

Ja divu pozitīvu skaitļu rindu

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots \tag{1}$$

un

$$b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n+\ldots \tag{2}$$

locekļiem ir spēkā nevienādības

$$0<a_n\leqslant b_n, \qquad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

tad 1) ***mazāko skaitļu rinda*** (1) ***konverģē, ja konverģē lielāko skaitļu rinda*** (2),

2) ***lielāko skaitļu rinda*** (2) ***diverģē, ja diverģē mazāko skaitļu rinda*** (1),

3) ***abas rindas vai nu konverģē, vai arī diverģē, ja eksistē robeža***

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=C\neq\begin{cases}0\\ \infty\end{cases}.$$

Pierādījums

Apzīmēsim doto rindu parciālsummas šādi:

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=A_n, \qquad b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n=B_n.$$

1) Dots: $0<a_n\leqslant b_n$ $(n\in \boldsymbol{N})$,

rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverģē, t. i., $\exists \lim\limits_{n\to\infty} B_n=B$.

Jāpierāda: rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverģē, t. i., $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

Pierādīsim, ka parciālsummas A_n ir monotoni augošas un ierobežotas no augšas. Tā kā visiem n ir $a_n>0$, tad

$$A_{n+1}=A_n+a_{n+1}>A_n,$$

t. i., *parciālsummas ir monotoni augošas.*

Tā kā $a_n\leqslant b_n$ visiem n, tad arī

$$A_n\leqslant B_n.$$

Savukārt, ja pozitīvu skaitļu b_n parciālsummas B_n robeža ir skaitlis B, tad

$$B_n<B.$$

No nevienādībām

$$A_n\leqslant B_n<B$$

izriet, ka monotoni augošas parciālsummas A_n ir ierobežotas no augšas. Tātad eksistē galīga robeža

$$\lim_{n\to\infty} A_n,$$

t. i., rinda (1) konverģē.

2) Dots: $0<a_n\leqslant b_n$, rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverģē, t. i., $\lim\limits_{n\to\infty} A_n=\infty$.

Jāpierāda: rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverģē.

Tā kā $A_n\leqslant B_n$ un $\lim\limits_{n\to\infty} A_n=\infty$, tad arī $\lim\limits_{n\to\infty} B_n=\infty$, t. i., rinda (2) diverģē.

3) Dots: $0<a_n \leqslant b_n$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = C \neq \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$.

Jāpierāda: abas rindas (1) un (2) konverģē vai arī diverģē.

Tā kā virknei $\frac{a_n}{b_n}$ eksistē galīga robeža, tad tā ir ierobežota. Tātad $\exists$ $m>0$ un $M>0$, ka visiem $n \in \mathbf{N}$ ir spēkā nevienādības

$$m \leqslant \frac{a_n}{b_n} \leqslant M$$

jeb

$$m b_n \leqslant a_n \leqslant M b_n \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Šīs nevienādības ir spēkā visiem doto rindu atbilstošajiem locekļiem un tātad arī šo rindu parciālsummām, t. i.,

$$\sum_{k=1}^{n} m b_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} M b_k, \qquad m \sum_{k=1}^{n} b_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant M \sum_{k=1}^{n} b_k$$

jeb

$$m B_n \leqslant A_n \leqslant M B_n.$$

Izmantojot pēdējo nevienādību, līdzīgi kā teorēmas 1. un 2. daļā, var pierādīt, ka gadījumā, *ja viena no dotajām rindām konverģē, tad otrās rindas parciālsummas ir monotoni augošas un ierobežotas no augšas, tātad arī šī rinda konverģē. Ja turpretī viena no rindām diverģē, tad arī otrās rindas parciālsummu robeža ir bezgalība.* □

Piemēri

1. Noskaidrot, vai konverģē rinda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot 2^n} + \ldots. \tag{3}$$

Salīdzināsim šo rindu ar rindu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots. \tag{4}$$

Rinda (4) ir bezgalīgas dilstošas ģeometriskās progresijas rinda un tātad konverģē. Tā kā ar visiem naturāliem skaitļiem n ir spēkā nevienādība

$$n 2^n \geqslant 2^n > 0,$$

tad

$$0 < \frac{1}{n 2^n} \leqslant \frac{1}{2^n} \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Tātad no salīdzināšanas kritērija 1. daļas izriet, ka rinda (3) konverģē, jo visi tās locekļi ir mazāki (vai vienādi) par konverģentas rindas (4) locekļiem.

2. Noskaidrot, vai konverģē rinda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \ldots. \tag{5}$$

Salīdzināsim rindu (5) ar harmonisko rindu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots, \tag{6}$$

atrodot šo rindu vispārīgo locekļu attiecības robežu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \neq \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}.$$

Pēc salīdzināšanas kritērija 3. daļas secinām, ka abas rindas konverģē vai arī diverģē. Tā kā harmoniskā rinda (6) diverģē, tad diverģē arī dotā rinda (5).

Salīdzināšanas kritēriju izmanto, lai pierādītu citas rindu konverģences pietiekamo nosacījumu teorēmas, kuras aplūkosim turpmākajā apskatā.

2. DALAMBĒRA KRITĒRIJS

Teorēma

Ja skaitļu rindai ar pozitīviem locekļiem

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+a_{n+1}+\ldots \tag{1}$$

eksistē robeža

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=p,$$

tad 1) ***rinda konverģē, ja*** $p<1$,
2) ***rinda diverģē, ja*** $p>1$,
3) ***ar šo kritēriju konverģenci nevar noteikt, ja*** $p=1$.

Pierādījums

1) Dots: $a_n>0$, $(n=1, 2, 3, \ldots)$

$$\exists \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=p<1.$$

Jāpierāda: rinda konverģē.

Starp skaitļiem p un 1 brīvi izvēlas skaitli q, t. i., tādu skaitli, lai būtu spēkā nevienādības

$$p<q<1.$$

Tā kā skaitlis p ir virknes $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ robeža, tad, sākot ar pietiekami lielu šīs virknes locekļu kārtas numuru N, ir pareiza nevienādība

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<q \quad \text{jeb} \quad a_{n+1}<a_nq. \quad (n\geqslant N)$$

Tātad, ja $n=N$, tad $a_{N+1}<a_Nq$;
ja $n=N+1$, tad $a_{N+2}<a_{N+1}q<a_Nq\cdot q=a_Nq^2$; (7)
ja $n=N+2$, tad $a_{N+3}<a_{N+2}q<a_Nq^2\cdot q=a_Nq^3$
utt.

Aplūkosim skaitļu rindu

$$a_N+a_Nq+a_Nq^2+a_Nq^3+\ldots, \tag{8}$$

kura konverģē, jo ir sastādīta no bezgalīgas dilstošas ģeometriskās progresijas locekļiem $(0<q<1)$.

Salīdzināsim ar rindu (8) doto skaitļu rindu

$$a_1+a_2+\ldots+a_N+a_{N+1}+a_{N+2}+\ldots. \tag{1}$$

Tā kā ir spēkā nevienādības (7) un rinda (8) konverģē, tad pēc salīdzināšanas kritērija konverģē rindas (1) atlikums, t. i., rinda

$$a_{N+1}+a_{N+2}+a_{N+3}+\ldots.$$

Tātad konverģē arī dotā rinda (1).

2) Dots: $a_n>0$, $(n=1, 2, 3, \ldots)$

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p > 1.$$

Jāpierāda: rinda diverģē.

Tā kā virknes $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ robeža ir skaitlis $p>1$, tad, sākot ar pietiekami lielu šīs virknes locekļu kārtas numuru N, ir spēkā nevienādība

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \text{jeb} \quad a_{n+1} > a_n \quad (n \geqslant N).$$

Tātad rindas locekļi ir monotoni augoši un

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0,$$

t. i., *nav spēkā konverģences nepieciešamais nosacījums*. Līdz ar to secinām, ka šajā gadījumā rinda (1) diverģē. □

Piemērs. **Noskaidrot, vai konverģē rinda** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3}{2^n}$.

Šajā gadījumā

$$a_n = \frac{n^3}{2^n} \quad \text{un} \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}.$$

Atrodam robežu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 2^n}{2^{n+1} n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 = \frac{1}{2}.$$

Tā kā robeža $p = \dfrac{1}{2} < 1$, tad pēc Dalambēra kritērija 1. daļas dotā rinda konverģē.

3. KOŠĪ KRITĒRIJS

Teorēma

Ja skaitļu rindai ar pozitīviem locekļiem

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

eksistē robeža

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = p,$$

tad 1) ***rinda konverģē, ja*** $p<1$,

2) ***rinda diverģē, ja*** $p>1$,

3) ***ar šo kritēriju konverģenci nevar noteikt, ja*** $p=1$.

Pierādījums

1) Dots: $a_n>0$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$,

$$\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = p < 1.$$

Jāpierāda: rinda konverģē.

Izraudzīsimies skaitli q tā, lai būtu spēkā nevienādības

$$p < q < 1.$$

Tā kā skaitlis $p<q<1$ ir virknes $\sqrt[n]{a_n}$ robeža, tad, sākot ar pietiekami lielu virknes $\sqrt[n]{a_n}$ locekļu kārtas numura n vērtību N,

$$\sqrt[n]{a_n} < q \quad \text{jeb} \quad a_n < q^n.$$

Tātad, ja $n=N$, tad $a_N<q^N$;
ja $n=N+1$, tad $a_{N+1}<q^{N+1}=q^N\cdot q$;
ja $n=N+2$, tad $a_{N+2}<q^{N+2}=q^N\cdot q^2$; (9)
ja $n=N+3$, tad $a_{N+3}<q^{N+3}=q^N\cdot q^3$
utt.

Aplūkosim skaitļu rindu

$$q^N+q^Nq+q^Nq^2+q^Nq^3+\ldots, \tag{10}$$

kura ir bezgalīgas dilstošas ģeometriskās progresijas rinda un tātad – konverģē. Salīdzināsim ar rindu (10) doto skaitļu rindu

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_N+a_{N+1}+a_{N+2}+a_{N+3}+\ldots. \tag{1}$$

Tā kā rinda (10) konverģē un ir spēkā nevienādības (9), tad pēc salīdzināšanas kritērija konverģē rindas (1) atlikums, proti, rinda

$$a_N+a_{N+1}+a_{N+2}+a_{N+3}+\ldots$$

un tātad konverģē arī dotā rinda (1).

2) Dots: $a_n>0 \quad (n=1, 2, 3, \ldots)$,

$\exists \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=p>1.$

Jāpierāda: rinda diverģē.

Tā kā virknes $\sqrt[n]{a_n}$ robeža ir skaitlis $p>1$, tad, sākot ar pietiekami lielu šīs virknes locekļu kārtas numuru N, ir spēkā nevienādība

$$\sqrt[n]{a_n}>1 \quad \text{jeb} \quad a_n>1 \quad (n\geqslant N).$$

Bet šādā gadījumā nav iespējama vienādība

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0,$$

t. i., *nav izpildīts konverģences nepieciešamais nosacījums* un tātad rinda diverģē. □

Piemērs. **Noskaidrot, vai konverģē rinda** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n+1}{2n}\right)^n$.

Tā kā $a_n=\left(\dfrac{3n+1}{2n}\right)^n$, tad $\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\left(\dfrac{3n+1}{2n}\right)^n}=\dfrac{3n+1}{2n}$ un

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2n}\right)=\frac{3}{2}.$$

Tā kā robeža $p=\dfrac{3}{2}>1$, tad pēc Košī kritērija 2. daļas dotā rinda diverģē.

Piemērs. **Izmantojot rindas konverģences nepieciešamo nosacījumu, pierādīt, ka**

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}=0.$$

Aplūkosim skaitļu rindu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{2n}$. Noskaidrosim, vai šī rinda konverģē, izmantojot Košī konverģences kritēriju.

Tā kā $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{\frac{2n}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3-\dfrac{1}{n}}\right)^2=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{9}=p<1,$

tad rinda konverģē, un saskaņā ar konverģences nepieciešamo nosacījumu

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}=0.$$

4. INTEGRĀLAIS KONVERĢENCES KRITĒRIJS

Ja skaitļu rindas

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$$

locekļi ir pozitīvi un nav augoši, t. i.,

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant \ldots > 0$$

un eksistē tāda nepārtraukta un neaugoša funkcija $f(x)$***, ka***

$$f(1)=a_1,\ f(2)=a_2,\ f(3)=a_3,\ \ldots, f(n)=a_n,\ \ldots,$$

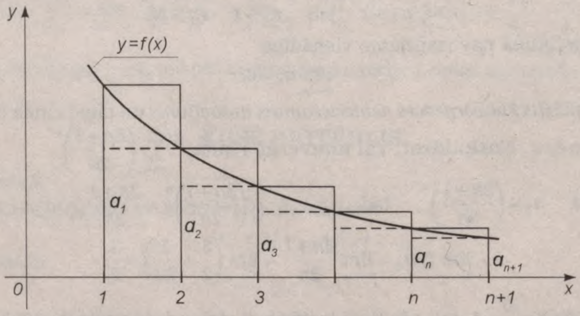
tad rinda konverģē, ja konverģē neīstais integrālis $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$, ***t. i., ja eksistē galīga robeža***

$$\lim_{b\to+\infty}\int_1^b f(x)\,dx,$$

bet rinda diverģē, ja šis neīstais integrālis diverģē.

Pierādījums

Atzīmēsim koordinātu plaknē punktus, kuru abscisas ir naturāli skaitļi 1, 2, 3, ..., n, $n+1$, ..., bet ordinātas – atbilstošie rindas locekļi a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1}, ... Saskaņā ar teorēmas nosacījumiem caur šiem punktiem iet funkcijas $f(x)$ grafiks (sk. 1. zīm.).



1. zīm.

Uz Ox ass nogriežņiem konstruē taisnstūrus tā, kā parādīts 1. zīmējumā. Katra taisnstūra pamata garums ir vienāds ar 1, tāpēc tā laukums ir vienāds ar taisnstūra augstumu. Ja par katra taisnstūra augstumu izvēlas perpendikulu, kas novilkts no attiecīgā Ox ass nogriežņa kreisās puses galapunkta, tad iegūst lielākos taisnstūrus. Šo taisnstūru laukumu summa ir vienāda ar rindas parciālsummu S_n:

$$1\cdot a_1+1\cdot a_2+1\cdot a_3+\ldots+1\cdot a_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=S_n.$$

Ja par taisnstūra augstumu ņem perpendikulu, kas novilkts no attiecīgā Ox ass nogriežņa labās puses galapunkta līdz krustpunktam ar grafiku, tad iegūst mazākos taisnstūrus (1. zīmējumā šo taisnstūru augšējās malas novilktas ar pārtrauktām taisnēm). Tad taisnstūru laukumu summa ir vienāda ar rindas pirmo $n+1$ locekļu parciālsummu S_{n+1}, no kuras atņemts rindas pirmais loceklis a_1, jo

$$1\cdot a_2+1\cdot a_3+\ldots+1\cdot a_n+1\cdot a_{n+1}=a_2+a_3+\ldots+a_n+a_{n+1}=$$
$$=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n+1}-a_1=S_{n+1}-a_1.$$

Intervālā $[1; n+1]$ konstruētās **līklīnijas trapeces laukums**, kas vienāds ar **integrāli**

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx,$$

ir mazāks par visu lielāko taisnstūru laukumu summu S_n, bet ir lielāks par visu mazāko taisnstūru laukumu summu $S_{n+1}-a_1$, t. i.,

$$S_{n+1}-a_1 < \int_1^{n+1} f(x)\,dx < S_n. \tag{11}$$

Pieņemsim, ka konverģē neīstais integrālis $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$, t. i., eksistē galīga robeža

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{n+1} f(x)\,dx = I.$$

Tad no nevienādībām (11) izriet, ka

$$S_{n+1}-a_1 < I \quad \text{jeb} \quad S_{n+1} < I + a_1.$$

Tātad *rindas parciālsummas ir ierobežotas no augšas.* Tā kā visi rindas locekļi ir pozitīvi, tad *parciālsummas ir monotoni augošas*:

$$S_n < S_{n+1}.$$

Bet augošām un no augšas ierobežotām parciālsummām eksistē galīga robeža. Tas nozīmē, ka *rinda konverģē.*

Gadījumā, ja diverģē neīstais integrālis $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$, t. i.,

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{n+1} f(x)\,dx = \infty,$$

tad no nevienādībām (11) iegūstam, ka arī

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty,$$

tātad *dotā rinda diverģē.* □

Piemērs. **Noskaidrot, kādām kāpinātāja α vērtībām konverģē rinda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ un kādām α vērtībām šī rinda diverģē.**

Šīs rindas locekļi ir vienādi ar funkcijas

$$f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$$

vērtībām, ja $x = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$. Tāpēc jānoskaidro, kādām α vērtībām konverģē un kādām α vērtībām diverģē neīstais integrālis

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}.$$

Ja $\alpha>1$, tad

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{b\to+\infty}\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}-\frac{1}{-\alpha+1}\right)=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{(1-\alpha)b^{\alpha-1}}+\frac{1}{\alpha-1}=0+\frac{1}{\alpha-1}=\frac{1}{\alpha-1}.$$

Ja $\alpha<1$, tad

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{b\to+\infty}\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}\right)=+\infty.$$

Ja $\alpha=1$, tad

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\ln x\Bigg|_1^b=\lim_{b\to+\infty}(\ln b-\ln 1)=+\infty.$$

Tātad neīstais integrālis

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}-\begin{cases}\text{konverģē, ja} & \alpha>1,\\ \text{diverģē, ja} & \alpha\leqslant 1.\end{cases}$$

Līdz ar to pēc integrālā konverģences kritērija arī rinda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}-\begin{cases}\text{konverģē, ja} & \alpha>1,\\ \text{diverģē, ja} & \alpha\leqslant 1.\end{cases}$$

Atzīmēsim, ka gadījumā, kad $\alpha=1$, iegūst **harmonisko rindu** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, kura, kā zināms, **diverģē**.

Rindu vispārīgā locekļa pierakstā bieži izmanto šādus apzīmējumus:

$1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n=n!$ (n – faktoriāls),

$1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)=(2n-1)!!$ ($2n-1$ – divkāršais faktoriāls),

$2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot 2n=(2n)!!$ ($2n$ – divkāršais faktoriāls)

un sakarības:

$(n+1)!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n(n+1)=n!(n+1)$,

$(2n+1)!!=1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n+1)=(2n-1)!!\cdot(2n+1)$,

$(2n+2)!!=2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot 2n(2n+2)=(2n)!!\cdot(2n+2)$.

Piemērs. **Noskaidrot, vai konverģē rinda**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(2n)!!}=\frac{1^3}{2!!}+\frac{2^3}{4!!}+\frac{3^3}{6!!}+\ldots+\frac{n^3}{(2n)!!}+\ldots=\frac{1}{2}+\frac{8}{2\cdot4}+\frac{27}{2\cdot4\cdot6}+\ldots+\frac{n^3}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}+\ldots.$$

Izmantosim Dalambēra kritēriju.

Tā kā $a_n=\frac{n^3}{(2n)!!}$, tad $a_{n+1}=\frac{(n+1)^3}{(2n+2)!!}$.

Atrodam robežu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3\cdot(2n)!!}{(2n+2)!!\cdot n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3\cdot(2n)!!}{(2n)!!(2n+2)n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3=0\cdot1=0=p<1.$$

Tātad *dotā rinda konverģē.*

26.4. §. ALTERNĒJOŠAS RINDAS

Definīcija

Par alternējošu rindu sauc skaitļu rindu

$$a_1-a_2+a_3-\ldots+(-1)^{n+1}a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n,$$

kur $a_n>0$, ***bet rindas locekļu zīme mainās no «+» uz «−» un no «−» uz «+».***

Piemērs. **Skaitļu rinda**

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots$$

ir alternējoša rinda.

Aplūkosim teorēmu par alternējošu rindu konverģences *pietiekamiem nosacījumiem.*

Leibnica kritērijs

Ja alternējošai rindai

$$a_1-a_2+a_3-\ldots+(-1)^{n+1}a_n+\ldots \qquad (a_n>0)$$

ir spēkā šādas īpašības:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0,$

2) $a_1>a_2>a_3>\ldots>a_n>a_{n+1}>\ldots,$

tad rinda konverģē; tās summa S ir pozitīvs skaitlis, kas mazāks par rindas pirmo locekli, t. i.,

$$0<S<a_1.$$

Pierādījums

Vispirms aplūkosim gadījumu, kad rindas parciālsummā S_n locekļu skaits ir pāra skaitlis, t. i., $n=2m$. Pierādīsim, ka šādas parciālsummas

$$S_{2m}=a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+a_{2m-1}-a_{2m} \tag{1}$$

ir monotoni augošas un ierobežotas no augšas.

Tā kā

$$S_{2m}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\ldots+(a_{2m-1}-a_{2m})$$

un $a_1>a_2$, $a_3>a_4$, $\ldots$, $a_{2m-1}>a_{2m}$, tad starpība katrās iekavās ir pozitīva. Tātad $S_{2m}>0$.

Palielinot parciālsummā locekļu skaitu, iegūstam

$$S_{2m+2}=S_{2m}+(a_{2m+1}-a_{2m+2}).$$

Tā kā $a_{2m+1}-a_{2m+2}>0$, tad $S_{2m+2}-S_{2m}>0$ jeb $S_{2m+2}>S_{2m}$, t. i., *parciālsummas ir monotoni augošas.*

Lai pierādītu, ka parciālsummas ir ierobežotas no augšas, pārveidosim izteiksmi (1) šādi:

$$S_{2m}=a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)-\ldots-(a_{2m-2}-a_{2m-1})-a_{2m}.$$

Starpība katrās iekavās ir pozitīva un arī $a_{2m}>0$, tāpēc, atņemot no a_1 iekavu izteiksmes un a_{2m}, *iegūstam skaitli, kas ir mazāks nekā* a_1. Tātad

$$0<S_{2m}<a_1. \tag{2}$$

Līdz ar to ir pierādīts, ka *parciālsummas* S_{2m} *ir monotoni augošas un ierobežotas no augšas un tātad tām eksistē robeža*

$$\lim_{2m\to\infty} S_{2m}=S.$$

Ievērojot nevienādības (2), iegūstam

$$\lim 0 < \lim_{2m \to \infty} S_{2m} < \lim a_1,$$

no kurienes $0 < S < a_1$.

Ja parciālsummā locekļu skaits ir nepāra skaitlis $n = 2m+1$, tad parciālsummu

$$S_{2m+1} = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots - a_{2m} + a_{2m+1}$$

var izteikt šādi:

$$S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}.$$

Tā kā pēc teorēmas nosacījumiem $\lim\limits_{m \to \infty} a_{2m+1} = 0$, tad

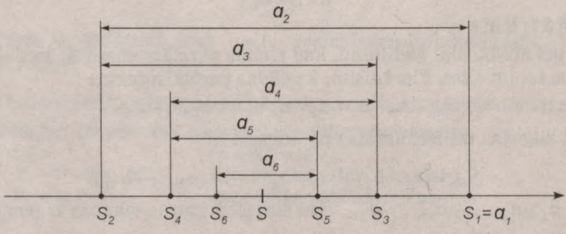
$$\lim_{m \to \infty} S_{2m+1} = \lim_{m \to \infty} (S_{2m} + a_{2m+1}) = \lim_{m \to \infty} S_{2m} + \lim_{m \to \infty} a_{2m+1} = S + 0 = S.$$

Tātad parciālsummām S_{2m+1} eksistē tāda pati robeža S kā parciālsummām S_{2m}. Līdz ar to teorēma ir pierādīta. □

Secinājumi

1. Atzīmēsim uz skaitļu taisnes punktus, kas atbilst alternējošas rindas parciālsummām.

$$S_1 = a_1,$$
$$S_2 = a_1 - a_2 = S_1 - a_2,$$
$$S_3 = a_1 - a_2 + a_3 = S_2 + a_3,$$
$$S_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = S_3 - a_4,$$
$$S_5 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 = S_4 + a_5,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$



2. zīm.

Kā redzams, parciālsummām ir spēkā nevienādības

$$S_{2m} < S < S_{2m+1}.$$

Tātad, **izmantojot parciālsummu S_{2m}, var aprēķināt alternējošas rindas summas S tuvinātu vērtību ar iztrūkumu, bet, izmantojot parciālsummu S_{2m+1}, – ar uzviju.**

2. Ja alternējoša rinda konverģē un tās summa ir S, tad

$$S = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n+1} a_n + a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \ldots \tag{3}$$

(šeit pieņemam, ka n ir pāra skaitlis);
rindas atlikums

$$a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \ldots$$

arī ir **konverģenta alternējoša rinda**, kuras summa S' saskaņā ar Leibnica kritēriju ir mazāka nekā a_{n+1}.

Tātad

$$S=S_n+S' \quad \text{jeb} \quad S-S_n=S'.$$

Bet, tā kā $S'<a_{n+1}$, tad $S-S_n<a_{n+1}$.

Vispārīgajā gadījumā (neatkarīgi no tā, vai n ir pāra vai nepāra skaitlis):

$$|S-S_n|<|a_{n+1}|. \tag{4}$$

Tātad, **ja tuvinātos aprēķinos alternējošas rindas summu S aizstāj ar parciālsummu S_n, tad kļūda ir mazāka par nākamā rindas locekļa a_{n+1} moduli.**

Piemērs. **Pierādīt, ka konverģē rinda**

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}+\ldots,$$

un atrast tās summu ar precizitāti līdz 0,01.

Pārliecināsimies, ka rinda apmierina Leibnica kritērija nosacījumus.

Patiešām,

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$$

un rindas locekļi ir monotoni dilstoši, jo

$$1>\frac{1}{4}>\frac{1}{9}>\frac{1}{16}>\ldots$$

vai vispārīgajā gadījumā

$$\frac{1}{n^2}>\frac{1}{(n+1)^2} \qquad \forall n\in \boldsymbol{N}.$$

Tātad *rinda konverģē un tās summa* $S<a_1=1$.

Noskaidrosim, cik locekļu jāņem parciālsummā S_n, lai tās vērtība no rindas summas S atšķirtos mazāk nekā par 0,01. Tātad saskaņā ar nevienādību (4) ir jāizpildās nosacījumam

$$|S-S_n|<|a_{n+1}|<0{,}01.$$

Tā kā

$$a_{n+1}=(-1)^{n+2}\frac{1}{(n+1)^2},$$

tad jāatrisina nevienādība

$$\left|(-1)^{n+2}\frac{1}{(n+1)^2}\right|<0{,}01,$$

no kurienes

$$\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{100} \quad \text{jeb} \quad (n+1)^2>100, \quad n+1>10, \quad n>9.$$

Tātad rindas parciālsummā jābūt vismaz 10 locekļiem un

$$S\approx 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}-\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9^2}-\frac{1}{10^2}=$$

$$=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}-\frac{1}{36}+\frac{1}{49}-\frac{1}{64}+\frac{1}{81}-\frac{1}{100}\approx$$

$$\approx 1-0{,}25+0{,}111-0{,}0625+0{,}04-0{,}0277+0{,}0204-0{,}0156+0{,}0123-0{,}01=0{,}8179\approx$$

$$\approx \underline{\underline{0{,}82}}.$$

26.5 §. RINDAS ABSOLŪTĀ UN NOSACĪTĀ KONVERĢENCE

Pieņemsim, ka skaitļu rindas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

locekļi ir gan pozitīvi, gan negatīvi skaitļi (šādas rindas sauc par **mainzīmju rindām**; viens no mainzīmju rindu veidiem ir alternējošā rinda).

Kopā ar mainzīmju rindu (1) aplūkosim arī tās locekļu absolūto vērtību (moduļu) rindu

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots + |a_n| + \ldots . \qquad (2)$$

Definīcija

Ja konverģē mainzīmju rinda (1) ***un konverģē arī tās locekļu absolūto vērtību rinda*** (2), ***tad saka, ka rinda*** (1) ***konverģē absolūti.***

Ja konverģē mainzīmju rinda (1), ***bet tās locekļu absolūto vērtību rinda*** (2) ***diverģē, tad saka, ka rinda*** (1) ***konverģē nosacīti jeb neabsolūti.***

Teorēma

Ja konverģē rinda $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (2), ***tad konverģē arī rinda*** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1).

Pierādījums

Aplūkosim abu rindu parciālsummas:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n;$$

$$\sigma_n = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots + |a_n|.$$

Parciālsummā S_n ir gan pozitīvi, gan arī negatīvi skaitļi, bet parciālsummā σ_n – tikai pozitīvi skaitļi. Apzīmēsim ar S_n^+ parciālsummas S_n visu pozitīvo locekļu summu un ar S_n^- – parciālsummas S_n visu negatīvo locekļu moduļu summu. Tad $S_n^+ > 0$, $S_n^- > 0$, bet parciālsummas S_n un σ_n var izteikt šādi:

$$S_n = S_n^+ - S_n^- ; \qquad \sigma_n = S_n^+ + S_n^- .$$

Tā kā absolūto vērtību rinda (2) konverģē, tad tās parciālsummām eksistē galīga robeža

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} (S_n^+ + S_n^-) = \sigma.$$

Parciālsummas S_n^+ un S_n^- ir *monotoni augošas un ierobežotas no augšas*, jo to locekļi ir pozitīvi, turklāt $S_n^+ < \sigma$, $S_n^- < \sigma$. Tātad eksistē robežas

$$\lim_{n\to\infty} S_n^+ = S^+ \quad \text{un} \quad \lim_{n\to\infty} S_n^- = S^-.$$

Līdz ar to eksistē arī robeža rindas (1) parciālsummām:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (S_n^+ - S_n^-) = \lim_{n\to\infty} S_n^+ - \lim_{n\to\infty} S_n^- = S^+ - S^- = S,$$

t. i., *rinda* (1) *konverģē*. □

Piezīme. Aplūkotās teorēmas **apgrieztā teorēma nav spēkā**, t. i., *ja konverģē mainzīmju rinda, tad tās locekļu absolūto vērtību rinda var diverģēt.*

Piemērs. **Noskaidrot, vai konverģē absolūti rinda**

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \ldots . \qquad (3)$$

Dotā alternējošā rinda apmierina Leibnica kritērija nosacījumus:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{un} \quad a_n > a_{n+1}, \quad \text{jo} \quad \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \quad \forall\ n \in \boldsymbol{N}.$$

Tātad *rinda* (3) *konverģē.*

Lai noskaidrotu, vai rinda (3) konverģē absolūti, aplūkosim tās locekļu absolūto vērtību rindu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots . \tag{4}$$

Rinda (4) ir *harmoniskā rinda* un tātad tā *diverģē* (sk. 26.2.§.). Tādējādi *dotā alternējošā rinda* (3) *konverģē nosacīti* (*neabsolūti*).

26.6. §. KONVERĢENTU RINDU ĪPAŠĪBAS

Kā zināms, ja saskaitāmo skaits ir galīgs, tad, saskaitot skaitļus, ir spēkā šādas īpašības:

komutatīvā īpašība –

$$a + b = b + a,$$

asociatīvā īpašība –

$$(a + b) + c = a + (b + c),$$

distributīvā īpašība attiecībā pret summas reizināšanu ar skaitli –

$$(a + b)c = ac + bc \quad \text{jeb} \quad c(a + b) = ca + cb.$$

Noskaidrosim, vai analogas īpašības piemīt arī izteiksmēm ar bezgalīgi daudz saskaitāmajiem (skaitļu rindām).

1. RINDU ASOCIATĪVĀ ĪPAŠĪBA

Ja rinda

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

konverģē un tās summa ir skaitlis S, tad rinda, kas iegūta, brīvi izraudzītā veidā grupējot dotās rindas locekļus, bet nemainot to kārtību, arī konverģē un tās summa ir skaitlis S.

Piemēram, ja

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + \ldots = S, \tag{2}$$

tad arī

$$(a_1 + a_2) + a_3 + a_4 + (a_5 + a_6 + a_7) + \ldots = S. \tag{3}$$

Pierādot šī piemēra apgalvojumu, izmantosim šādu virkņu īpašību: *jebkura apakšvirkne, kas sastādīta no konverģentas virknes locekļiem, konverģē uz dotās virknes robežu.* Tātad, tā kā dotās rindas (2) parciālsummu virknes

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, \ldots$$

robeža ir skaitlis S, tad arī rindas (3) parciālsummu virknes

$$S_2, S_3, S_4, S_7, \ldots$$

robeža ir skaitlis S, t. i., rindas (3) summa ir S. □

2. RINDU DISTRIBUTĪVĀ ĪPAŠĪBA

Ja rinda

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots \qquad (1)$$

konverģē un tās summa ir skaitlis S, tad rinda

$$ka_1+ka_2+ka_3+\ldots+ka_n+\ldots \qquad (4)$$

arī konverģē un tās summa ir skaitlis kS.

Pierādījums

Aplūkosim abu rindu parciālsummas S_n un σ_n.

Ja $S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$,

tad $\sigma_n=ka_1+ka_2+ka_3+\ldots+ka_n=k(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)=kS_n$.

Tā kā rindas (1) summa ir skaitlis S, tad

$$\lim_{n\to\infty} S_n=S.$$

Atrodam rindas (4) parciālsummas σ_n robežu:

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}(kS_n)=k\lim_{n\to\infty}S_n=kS.$$

Tātad *rindas* (4) *summa ir kS.* □

Rindu distributīvo īpašību parasti pieraksta šādi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ka_n=k\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{jeb} \quad k\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty} ka_n.$$

3. RINDU KOMUTATĪVĀ ĪPAŠĪBA

Ja skaitļu rinda konverģē absolūti, tad jebkura cita rinda, kas iegūta, mainot vietām dotās rindas locekļus, arī konverģē absolūti un tai ir tāda pati summa kā dotajai rindai.

Ja skaitļu rinda konverģē nosacīti (neabsolūti), tad, mainot vietām tās locekļus, var iegūt rindu, kas konverģē uz citu summu vai pat diverģē.

Šo īpašību nepierādīsim, bet paskaidrosim pēdējo apgalvojumu ar piemēru.

Piemērs

Aplūkosim alternējošu skaitļu rindu

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots=S. \qquad (5)$$

Iepriekšējā paragrāfā noskaidrojām, ka *šī rinda konverģē nosacīti* (var pierādīt, ka tās summa $S=\ln 2$).

Pārvietosim rindas (5) locekļus tā, lai aiz katra pozitīvā skaitļa atrastos divi pēc kārtas ņemti negatīvie locekļi:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots. \qquad (6)$$

Komutatīvā īpašība ir spēkā absolūti konverģentām skaitļu rindām, bet asociatīvā un distributīvā īpašība – arī nosacīti (neabsolūti) konverģentām rindām.

Saskaņā ar asociatīvo un distributīvo īpašību rindu (6) var pārveidot šādi:

$$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)+\ldots=$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)+\ldots=$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\ldots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)+\ldots=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)+\ldots\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots\right)=\frac{1}{2}S.$$

Kā redzams, ja rindas (5) summa ir skaitlis S, tad rindas (6) summa ir skaitlis $\frac{1}{2}S$. Tātad pēc aplūkotās locekļu pārvietošanas dotajā rindā tās summa ir samazinājusies divas reizes.

26.7. §. DARBĪBAS AR RINDĀM

Ar skaitļu rindām definē aritmētiskās darbības: *saskaitīšanu, atņemšanu, reizināšanu, dalīšanu.* Sīkāk aplūkosim rindu saskaitīšanu (atņemšanu) un reizināšanu.

1. RINDU SASKAITĪŠANA (ATŅEMŠANA)

Pieņemsim, ka ir dotas divas rindas

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots \tag{1}$$

un

$$b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n+\ldots . \tag{2}$$

Sastādīsim trešo rindu, saskaitot doto rindu atbilstošos locekļus:

$$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3)+\ldots+(a_n+b_n)+\ldots . \tag{3}$$

Ar rindu (3) definē rindu (1) un (2) summu. Analogi definē arī šo rindu starpību.

Definīcija

Par rindu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***un*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ***summu (starpību) sauc rindu*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$, ***kas iegūta, saskaitot (atņemot) doto rindu atbilstošos locekļus.***

Raksta

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n).$$

Teorēma

Ja rindas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***un*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ***konverģē un to summas attiecīgi ir skaitļi*** A ***un*** B, ***tad konverģē arī rinda*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ ***un tās summa ir*** $A \pm B$.

Pierādījums
Aplūkosim visu triju rindu parciālsummas:

$$A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n,$$
$$B_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n,$$
$$S_n = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + (a_3 \pm b_3) + \ldots + (a_n \pm b_n).$$

Parciālsummu S_n var pārveidot šādi:

$$S_n = (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) \pm (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n) = A_n \pm B_n.$$

Tā kā $\lim\limits_{n \to \infty} A_n = A$ un $\lim\limits_{n \to \infty} B_n = B$, tad

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} (A_n \pm B_n) = \lim_{n \to \infty} A_n \pm \lim_{n \to \infty} B_n = A \pm B.$$

Līdz ar to teorēma ir pierādīta. □

2. RINDU REIZINĀŠANA

Lai sareizinātu divas skaitļu rindas

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

un

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_m + \ldots, \tag{2}$$

līdzīgi, kā reizina divus polinomus, sastādīsim visus iespējamos doto rindu locekļu reizinājumus $a_i b_j$ ($i, j = 1, 2, 3, \ldots$). Šos reizinājumus var pierakstīt bezgalīgas matricas veidā:

$$\begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_2 b_1 & a_3 b_1 & \ldots & a_n b_1 & \ldots \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 & a_3 b_2 & \ldots & a_n b_2 & \ldots \\ a_1 b_3 & a_2 b_3 & a_3 b_3 & \ldots & a_n b_3 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1 b_m & a_2 b_m & a_3 b_m & \ldots & a_n b_m & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \tag{4}$$

Saskaitot visus matricas (4) elementus, iegūstam izteiksmi, ko sauc par divkāršu rindu un pieraksta šādi:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_m \quad \text{jeb} \quad \sum_{\substack{n=1 \\ m=1}}^{\infty} a_n b_m. \tag{5}$$

Arī divkāršām rindām definē konverģences un rindas summas jēdzienus. Doto rindu (1) un (2) reizinājumu definē ar divkāršās rindas palīdzību.

Definīcija

Par rindu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***un*** $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m$ ***reizinājumu sauc*** *divkāršo rindu* $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_m$.

Raksta

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_m. \tag{6}$$

Par reizinājumā iegūtās divkāršās rindas konverģenci ir šāda Košī teorēma (aplūkosim to bez pierādījuma).

Teorēma

Ja rindas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ un $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ konverģē absolūti un to summas ir attiecīgi skaitļi A un B, tad divkāršā rinda $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_m$ arī konverģē absolūti un tās summa ir skaitlis AB.

Piezīme

Ja rindas (1) un (2) konverģē nosacīti, tad ir iespējams, ka divkāršā rinda (5) diverģē vai arī konverģē, bet tās summa nav skaitlis AB. Šādā gadījumā saka, ka rindas (1) un (2) nevar reizināt.

Saskaņā ar Košī teorēmu, sareizinot absolūti konverģentas rindas (1) un (2), iegūst absolūti konverģentu divkāršo rindu; tāpēc tai ir spēkā komutatīvā īpašība, t. i., rindā $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_m$ var mainīt vietām locekļus. Tāpēc divkāršo rindu parasti uzraksta kā vienkāršu rindu, kuru iegūst, noteiktā secībā pārgrupējot divkāršās rindas locekļus. Viens no locekļu grupēšanas paņēmieniem ir sakārtot reizinājumus $a_n b_m$ tā, lai katrā locekļu grupā indeksu summa $n+m$ būtu konstanta, t. i., $(n+m)=2, 3, 4, \ldots$. Tādējādi iegūstam šādu rindu reizinājuma pierakstu:

$$(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots)(b_1+b_2+b_3+\ldots+b_m+\ldots)=$$
$$=a_1b_1+(a_1b_2+a_2b_1)+(a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1)+\ldots+$$
$$+(a_1b_m+a_2b_{m-1}+a_3b_{m-2}+\ldots+a_{m-1}b_2+a_mb_1)+\ldots.$$

Šādu locekļu sakārtojumu iegūst, ja vienā grupā apvieno visus tos matricas (4) elementus, kas atrodas uz vienas diagonāles (sk. (7)).

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \ldots & a_nb_1 & \ldots \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & \ldots & a_nb_2 & \ldots \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \ldots & a_nb_3 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1b_m & a_2b_m & a_3b_m & \ldots & a_nb_m & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \qquad (7)$$

Pirmais šādu shēmu izmantoja Košī, taču ir arī citas matricas (4) elementu grupēšanas shēmas, kuras šeit neaplūkosim.

Piemērs. **Atrast rindu $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ (*) un $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ (**) reizinājumu.**

Dotās rindas ir bezgalīgu dilstošu ģeometrisko progresiju rindas, un tātad tās konverģē absolūti; šo rindu summas aprēķina pēc formulas

$$S=\frac{a}{1-q}.$$

Rindas (*) pirmais loceklis $a=1$, kvocients $q=\frac{1}{2}$ un summa

$$S=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

Rindas (**) pirmais loceklis $a=1$, kvocients $q=-\frac{1}{4}$ un summa

$$S=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{4}{5}.$$

Tātad *doto rindu reizinājums ir divkāršā rinda, kura arī konverģē absolūti, un tās summa ir reizinājums*

$$2\cdot\frac{4}{5}=\frac{8}{5}.$$

Sastādīsim reizinājuma rindu, izmantojot iepriekš aplūkoto Košī shēmu. Tā kā

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots$$

un

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{64}+\frac{1}{256}-\frac{1}{1024}+\ldots,$$

tad šo rindu locekļu reizinājuma matrica ir šāda:

$$\begin{pmatrix}
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} & \ldots \\
-\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{32} & -\frac{1}{64} & -\frac{1}{128} & \ldots \\
\frac{1}{16} & \frac{1}{32} & \frac{1}{64} & \frac{1}{128} & \frac{1}{256} & \frac{1}{512} & \ldots \\
-\frac{1}{64} & -\frac{1}{128} & -\frac{1}{256} & -\frac{1}{512} & -\frac{1}{1024} & -\frac{1}{2048} & \ldots \\
\frac{1}{256} & \frac{1}{512} & \frac{1}{1024} & \frac{1}{2048} & \frac{1}{4096} & \frac{1}{8192} & \ldots \\
-\frac{1}{1024} & -\frac{1}{2048} & -\frac{1}{4096} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{pmatrix}$$

Saskaitot uz vienas diagonāles esošos matricas elementus, atrodam

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}=1+\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{5}{64}+\frac{11}{256}+\frac{21}{1024}+\ldots=\frac{8}{5}.$$

FUNKCIJU RINDAS

27.1. §. PAMATJĒDZIENI

Aplūkosim virkni

$$u_1(x),\ u_2(x),\ u_3(x),\ \dots,\ u_n(x),\ \dots,$$

kuras locekļi ir argumenta x funkcijas, turklāt *šīm funkcijām ir kopīgs definīcijas apgabals.*

Definīcija

Par funkciju rindu sauc izteiksmi

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x) + \dots;$$

$u_n(x)$ ***sauc par funkciju rindas vispārīgo locekli.***

Ievietosim funkciju rindā x vietā skaitli x_0, kas ņemts no šīs rindas locekļu definīcijas apgabala. Tad iegūstam skaitļu rindu

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + u_3(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots,$$

kura vai nu konverģē, vai diverģē.

Definīcija

Visu to x vērtību kopu, kurām funkciju rinda konverģē, sauc par šīs rindas konverģences apgabalu.

Pakāpeniski saskaitot funkciju rindas locekļus, iegūst šādas izteiksmes:

$$S_1(x) = u_1(x),$$
$$S_2(x) = u_1(x) + u_2(x),$$
$$S_3(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x).$$

Šīs izteiksmes sauc par funkciju rindas **parciālsummām**. Analogi kā skaitļu rindām meklē parciālsummu robežu $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$.

Definīcija

Ja funkciju rindas parciālsummām $S_n(x)$ eksistē galīga robeža – funkcija $S(x)$, kad $n \to \infty$, t. i.,

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x),$$

tad saka, ka rinda konverģē un funkciju $S(x)$ sauc par rindas summu; raksta

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x).$$

Ja neeksistē galīga robeža $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$, ***tad saka, ka funkciju rinda diverģē.***

Ja funkciju rindā

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + u_{n+3}(x) + \dots \tag{1}$$

svītro pirmos n locekļus, tad iegūst citu rindu

$$u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + u_{n+3}(x) + \dots,$$

ko sauc par dotās **rindas atlikumu** un apzīmē ar $R_n(x)$.

Tātad

$$R_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+u_{n+3}(x)+\dots. \qquad (2)$$

Ja funkciju rinda (1) konverģē un tās summa ir $S(x)$, tad

$$S(x)=S_n(x)+R_n(x) \quad \text{jeb} \quad R_n(x)=S(x)-S_n(x).$$

No pēdējās vienādības izriet, ka

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=\lim_{n\to\infty}(S(x)-S_n(x))=\lim_{n\to\infty} S(x)-\lim_{n\to\infty} S_n(x)=S(x)-S(x)=0.$$

Var pierādīt arī apgriezto apgalvojumu: ja $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$, tad $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)=S(x)$, t. i., funkciju rinda (1) konverģē.

Tādējādi iegūstam šādu **funkciju rindas konverģences nepieciešamo un pietiekamo nosacījumu**.

Funkciju rinda konverģē tad un tikai tad, ja tās atlikums $R_n(x)$ tiecas uz nulli, kad $n\to\infty$.

Piemērs

Aplūkosim funkciju rindu

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n=1+x+x^2+x^3+\dots+x^n+\dots,$$

kuras locekļi ir ģeometriskās progresijas locekļi. Šīs progresijas pirmais loceklis $a=1$ un kvocients $q=x$.

Ja $|q|=|x|<1$, tad šāda rinda konverģē un tās summu aprēķina pēc formulas

$$S=\frac{a}{1-q} \qquad \text{(sk. 26.1. §)}.$$

Tātad dotā rinda konverģē, un tās summa ir funkcija

$$S(x)=\frac{1}{1-x},$$

ja $|x|<1$, t. i., šīs *rindas konverģences apgabals ir intervāls* $(-1;\,1)$.

Tādējādi

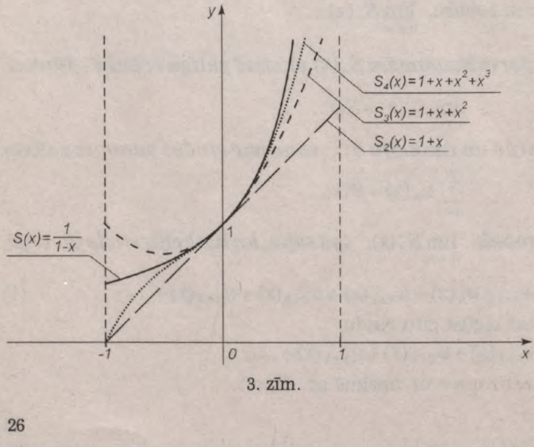
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n=\frac{1}{1-x}, \qquad x\in(-1;\,1).$$

3. zīmējumā attēloti rindas parciālsummu

$$S_2(x)=1+x,$$
$$S_3(x)=1+x+x^2,$$
$$S_4(x)=1+x+x^2+x^3$$

grafiki un arī rindas summas $S(x)=\dfrac{1}{1-x}$ grafiks konverģences intervālā $(-1;\,1)$.

Kā redzams, palielinot locekļu skaitu n parciālsummās $S_n(x)$, to grafiki konverģences intervālā «tuvojas» summas $S(x)$ grafikam (t. i., samazinās parciālsummu novirze no $S(x)$).



3. zīm.

27.2. §. FUNKCIJU RINDAS VIENMĒRĪGAS KONVERĢENCES JĒDZIENS

Pieņemsim, ka funkciju rinda konverģē intervālā $[a; b]$ un tās summa ir $S(x)$. Kā redzējām iepriekšējā paragrāfā aplūkotajā piemērā, tādā gadījumā parciālsummu $S_n(x)$ grafiki arvien mazāk novirzās no summas $S(x)$ grafika (ja parciālsummās palielina locekļu skaitu n). Rindu praktiskos lietojumos ļoti svarīga ir īpašība, kad funkciju rinda konverģē vienmērīgi uz summu $S(x)$ konverģences intervālā $[a; b]$. Tas nozīmē, ka *visos intervāla punktos parciālsummu $S_n(x)$ grafiku novirze no summas $S(x)$ grafika ir mazāka par jebkuru brīvi izraudzītu mazu pozitīvu skaitli ε, ja vien parciālsummu locekļu skaits ir pietiekami liels.*

Definīcija

Saka, ka funkciju rinda konverģē vienmērīgi intervālā $[a; b]$ uz summu $S(x)$, ja katram mazam pozitīvam skaitlim ε var atrast tādu skaitli N, ka visām rindas parciālsummām, kuru locekļu skaits $n \geqslant N$, visos intervāla $[a; b]$ punktos x ir spēkā nevienādība

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon.$$

Definīcijas nosacījumus saīsināti pieraksta šādi:

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N$, ka $\forall\, n \geqslant N$ un $\forall\, x \in [a; b]$ ir

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon. \tag{1}$$

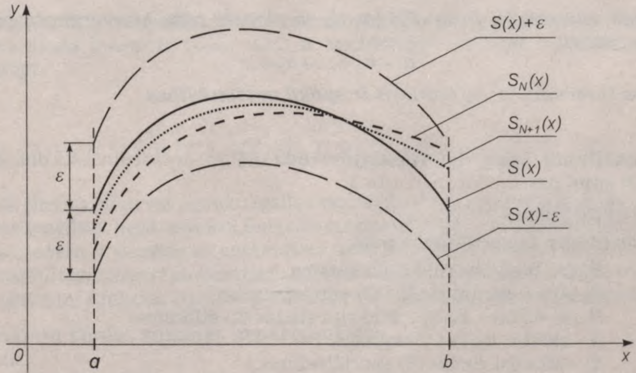
Tā kā no nevienādības (1) seko, ka

$$-\varepsilon < S_n(x) - S(x) < \varepsilon$$

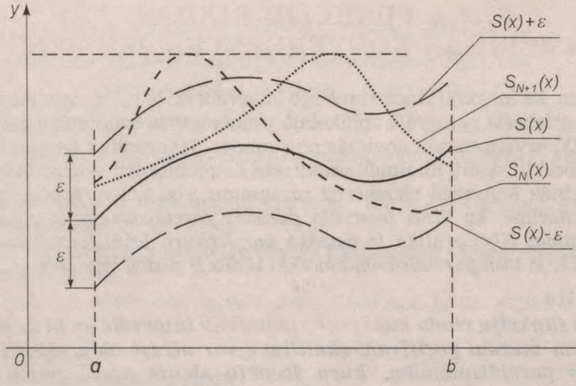
jeb

$$S(x) - \varepsilon < S_n(x) < S(x) + \varepsilon \qquad \forall\, x \in [a; b],$$

tad *vienmērīgās konverģences definīciju var uzskatāmi ilustrēt ģeometriski*: ja intervālā $[a; b]$ ap funkcijas $S(x)$ grafiku konstruē joslu, kuras platums ir 2ε, tad šajā joslā atrodas visu to parciālsummu $S_n(x)$ grafiki, kurām locekļu skaits $n \geqslant N$, t. i., $S_N(x)$, $S_{N+1}(x)$, ... grafiki (sk. 4. zīm.).



4. zīm.



5. zīm.

Eksistē arī tādas funkciju rindas, kuras konverģē uz summu $S(x)$ intervālā $[a; b]$, taču tām nav tādu parciālsummu $S_n(x)$, kurām ir spēkā nevienādība

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$$

vienlaicīgi visos intervāla $[a; b]$ punktos. Šādā gadījumā saka, ka funkciju rinda **konverģē nevienmērīgi**.

Nevienmērīgas konverģences piemērs ilustrēts 5. zīmējumā. Šeit parciālsummām $S_n(x)$ ir maksimuma punkti. Turklāt maksimuma punktos visu parciālsummu vērtība ir viena un tā pati. Ja skaitli $\varepsilon>0$ izvēlas mazāku nekā parciālsummu vērtība maksimuma punktos, tad parciālsummu grafikus nav iespējams ietvert joslā

$$(S(x)-\varepsilon;\ S(x)+\varepsilon).$$

Teorēma (vienmērīgās konverģences pazīme)

Funkciju rinda

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \tag{2}$$

konverģē vienmērīgi intervālā $[a; b]$, ***ja eksistē tāda konverģenta pozitīvu skaitļu rinda***

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots, \tag{3}$$

ka visos intervāla $[a; b]$ ***punktos ir spēkā nevienādības***

$$|u_1(x)|\leqslant a_1,\ |u_2(x)|\leqslant a_2,\ \ldots,\ |u_n(x)|\leqslant a_n,\ \ldots. \tag{4}$$

(Šādā gadījumā saka, ka funkciju rinda (2) ir mažorējama, bet skaitļu rindu (3) sauc par mažorantrindu.)

Pierādījums

Izmantosim šādus apzīmējumus:

$S(x)$ – funkciju rindas (2) summa,
$S_n(x)$ – funkciju rindas (2) parciālsumma,
$R_n(x)=S(x)-S_n(x)$ – funkciju rindas (2) atlikums,
S – skaitļu rindas (3) summa,
S_n – skaitļu rindas (3) parciālsumma,
$R_n=S-S_n$ – skaitļu rindas (3) atlikums.

Tā kā ir spēkā nevienādības (4) un rindas (3) locekļi ir pozitīvi skaitļi, tad visiem $x \in [a; b]$ ir pareiza nevienādība

$$|R_n(x)| \leqslant |R_n|. \qquad (5)$$

Patiešām,

$$|R_n(x)| = |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots| \leqslant |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \dots \leqslant$$
$$\leqslant a_{n+1} + a_{n+2} + \dots = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots| = |R_n|.$$

Tā kā skaitļu rinda (3) konverģē, tad

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Saskaņā ar robežas definīciju tas nozīmē, ka katram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds skaitlis $N = N(\varepsilon)$, ka visiem $n \geqslant N$ ir pareiza nevienādība

$$|S - S_n| < \varepsilon \quad \text{jeb} \quad |R_n| < \varepsilon. \qquad (6)$$

No nevienādībām (5) un (6) izriet, ka arī

$$|R_n(x)| < \varepsilon \quad \text{jeb} \quad |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon.$$

Tādējādi ir pierādīts, ka katram pozitīvam skaitlim ε var atrast tādu skaitli N, ka visām rindas (2) parciālsummām, kuru locekļu skaits $n \geqslant N$, visos intervāla $[a; b]$ punktos x ir spēkā nevienādība

$$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon \quad \text{jeb} \quad |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon.$$

Tātad funkciju rinda (2) konverģē vienmērīgi intervālā $[a; b]$. □

Piemērs. **Pierādīt, ka funkciju rinda**

$$\frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{2^3} + \dots + \frac{\sin nx}{2^n} + \dots$$

konverģē vienmērīgi intervālā $(-\infty; +\infty)$.

Tā kā visiem reāliem skaitļiem x ir spēkā nevienādība $|\sin nx| \leqslant 1$, tad

$$\left|\frac{\sin x}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}, \quad \left|\frac{\sin 2x}{2^2}\right| \leqslant \frac{1}{2^2}, \quad \dots, \quad \left|\frac{\sin nx}{2^n}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}, \quad \dots .$$

Savukārt skaitļu rinda

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

konverģē, jo tā ir bezgalīgas dilstošas ģeometriskās progresijas rinda. Tātad *dotā funkciju rinda intervālā* $(-\infty; +\infty)$ *ir mažorējama un šajā intervālā konverģē vienmērīgi.*

27.3§. VIENMĒRĪGI KONVERĢENTU RINDU ĪPAŠĪBAS

Kā zināms, divu vai vairāku (galīga skaita) funkciju summām ir spēkā vairākas svarīgas īpašības: *nepārtrauktu funkciju summa ir nepārtraukta funkcija, funkciju summas robeža ir vienāda ar saskaitāmo funkciju robežu summu, funkciju summu var atvasināt un integrēt pa locekļiem.* Lai noskaidrotu, vai analogas īpašības ir spēkā arī bezgalīgām funkciju rindām, aplūkosim (bez pierādījuma) šādas **teorēmas**.

1. Funkciju rindas summas nepārtrauktība

Ja

1) $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$
ir nepārtrauktas funkcijas intervālā $[a; b]$,

2) ***funkciju rinda***

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$$

konverģē vienmērīgi uz summu $S(x)$ ***intervālā*** $[a;\ b]$,
tad rindas summa $S(x)$ ir nepārtraukta funkcija intervālā $[a;\ b]$.

2. Funkciju rindas robeža

Ja

1) ***funkciju rinda***

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$$

konverģē vienmērīgi uz summu $S(x)$ ***kādā punkta*** x_0 ***apkārtnē,***

2) ***eksistē galīgas robežas***

$$\lim_{x\to x_0} u_1(x)=a_1,\ \lim_{x\to x_0} u_2(x)=a_2,\ \ldots,\ \lim_{x\to x_0} u_n(x)=a_n,\ \ldots,$$

tad skaitļu rinda

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$$

konverģē un tās summa $S=\lim\limits_{x\to x_0} S(x)$ ***jeb***

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0} u_n(x),$$

t. i., robežpāreju var izdarīt aiz summas zīmes.

3. Funkciju rindas atvasināšana pa locekļiem

Ja

1) ***funkcijām*** $u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots,\ u_n(x),\ \ldots$
intervālā $[a;\ b]$ ***eksistē nepārtraukti atvasinājumi***

$$u'_1(x),\ u'_2(x),\ \ldots,\ u'_n(x),\ \ldots,$$

2) ***funkciju rinda***

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$$

konverģē uz summu $S(x)$ ***intervālā*** $[a;\ b]$,

3) ***funkciju rinda***

$$u'_1(x)+u'_2(x)+\ldots+u'_n(x)+\ldots$$

konverģē vienmērīgi uz summu $\sigma(x)$ ***intervālā*** $[a;\ b]$,
tad $S'(x)=\sigma(x)$ ***jeb***

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x),$$

t. i., funkciju rindu var atvasināt pa locekļiem.

4. Funkciju rindas integrēšana pa locekļiem

Ja

1) ***funkcijas*** $u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots,\ u_n(x),\ \ldots$
ir integrējamas intervālā $[a;\ b]$,

2) ***funkciju rinda***

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$$

konverģē vienmērīgi uz summu $S(x)$ ***intervālā*** $[a;\ b]$,
tad

$$\int_{\alpha}^{x} S(x)\,dx=\int_{\alpha}^{x} u_1(x)\,dx+\int_{\alpha}^{x} u_2(x)\,dx+\ldots+\int_{\alpha}^{x} u_n(x)\,dx+\ldots$$

jeb

$$\int_{\alpha}^{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{\alpha}^{x} u_n(x)\,dx\right),\qquad (\text{kur } a\leqslant\alpha<x\leqslant b)$$

t. i., ***funkciju rindu var integrēt pa locekļiem.***

Tādējādi aplūkoto īpašību svarīgs nosacījums ir funkciju rindas vienmērīgā konverģence. Piebildīsim, ka šajās teorēmās visi nosacījumi ir attiecīgo apgalvojumu pietiekamie, bet nav nepieciešamie nosacījumi. Tātad, ja šie nosacījumi nav izpildīti, tad tomēr ne vienmēr atbilstošie apgalvojumi ir nepareizi.

27.4. §. PAKĀPJU RINDAS. ĀBELA TEORĒMA

Definīcija

Par pakāpju rindu sauc funkciju rindu, kuras locekļi ir pakāpes funkcijas ar naturāliem kāpinātājiem, t. i.,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots,$$

kur $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ ***– koeficienti.***

Piemēram, 27.1§. aplūkojām pakāpju rindu

$$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots$$

un noskaidrojām, ka šīs rindas *konverģences apgabals* ir intervāls $(-1; 1)$.

Izrādās, ka jebkuras pakāpju rindas konverģences apgabals ir attiecībā pret koordinātu sākumpunktu simetrisks intervāls (parasti – neietverot intervāla galapunktus; dažkārt pakāpju rinda konverģē tikai punktā $x=0$). Šī apgalvojuma pamatā ir norvēģu matemātiķa Ābela teorēma.

Ābela teorēma

Ja pakāpju rinda

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \tag{1}$$

konverģē punktā $x_1\neq 0$, ***tad tā konverģē absolūti arī visos punktos*** x, ***kuriem*** $|x|<|x_1|$, **t. i., – *intervālā*** $(-|x_1|; |x_1|)$.

Ja pakāpju rinda diverģē punktā x_2, ***tad tā diverģē arī visos punktos*** x, ***kuriem*** $|x|\geqslant|x_2|$, ***t. i., – ārpus intervāla*** $(-|x_2|; |x_2|)$.

Pierādījums

1. Dots: rinda (1) konverģē, ja $x=x_1$.

Jāpierāda: rinda (1) konverģē absolūti visiem x, kuriem

$$|x|<|x_1| \quad \text{jeb} \quad \frac{|x|}{|x_1|}<1, \qquad \left|\frac{x}{x_1}\right|<1.$$

Nils Henriks Ābels (1802–1829) – norvēģu matemātiķis. Jau skolas gados, nodarbodamies ar augstāku pakāpju algebrisko vienādojumu atrisināšanu, uzrādījis izcilas spējas matemātikā. Savas īsās dzīves laikā veicis nozīmīgus pētījumus algebrisko vienādojumu teorijā un eliptisko integrāļu teorijā. Ābela pētījumi būtiski ietekmēja matemātikas attīstību: radās jaunas matemātikas nozares (algebrisko funkciju teorija, Galuā grupu teorija, eliptisko funkciju teorija). Vairākās matemātikas disciplīnās ir pazīstamas Ābela teorēmas, Ābela integrāļi, Ābela vienādojumi, Ābela grupas.

Ievietojot pakāpju rindā (1) $x=x_1$, iegūstam konverģentu skaitļu rindu

$$a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\ldots+a_nx_1^n+\ldots. \tag{2}$$

Tā kā skaitļu rinda (2) konverģē, tad tās vispārīgais loceklis tiecas uz nulli, kad $n \to \infty$, t. i.,

$$\lim_{n\to\infty}(a_nx_1^n)=0.$$

Ja virknei $(a_nx_1^n)$ eksistē robeža, tad tā ir ierobežota, t. i., eksistē tāds skaitlis $M>0$, ka visiem n ir spēkā nevienādība

$$|a_nx_1^n|<M. \tag{3}$$

Pārveidosim doto pakāpju rindu (1) šādi:

$$a_0+a_1x_1\cdot\frac{x}{x_1}+a_2x_1^2\cdot\frac{x^2}{x_1^2}+\ldots+a_nx_1^n\cdot\frac{x^n}{x_1^n}+\ldots$$

jeb

$$a_0+a_1x_1\cdot\left(\frac{x}{x_1}\right)+a_2x_1^2\cdot\left(\frac{x}{x_1}\right)^2+\ldots+a_nx_1^n\cdot\left(\frac{x}{x_1}\right)^n+\ldots. \tag{4}$$

No rindas (4) locekļu absolūtajām vērtībām sastādām rindu (5):

$$|a_0|+|a_1x_1|\cdot\left|\frac{x}{x_1}\right|+|a_2x_1^2|\cdot\left|\frac{x}{x_1}\right|^2+\ldots+|a_nx_1^n|\cdot\left|\frac{x}{x_1}\right|^n+\ldots. \tag{5}$$

Aizvietojot rindā (5) katra locekļa pirmo reizinātāju ar skaitli M, iegūstam bezgalīgas ģeometriskās progresijas rindu

$$M+M\cdot\left|\frac{x}{x_1}\right|+M\cdot\left|\frac{x}{x_1}\right|^2+\ldots+M\cdot\left|\frac{x}{x_1}\right|^n+\ldots. \tag{6}$$

Tā kā $\left|\frac{x}{x_1}\right|<1$, tad rinda (6) konverģē, jo tā ir bezgalīgas dilstošas ģeometriskās progresijas rinda. Saskaņā ar nevienādību (3) rindas (5) locekļi ir pozitīvi un mazāki par atbilstošajiem konverģentās rindas (6) locekļiem. Tātad pēc salīdzināšanas kritērija (sk. 26.3.§.) rinda (5) konverģē. Tas nozīmē, ka absolūti konverģē rinda (4) un tātad arī dotā rinda (1).

2. Dots: rinda (1) diverģē, ja $x=x_2$.

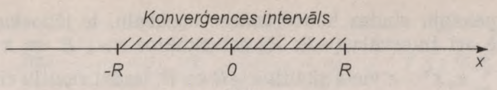
Jāpierāda: rinda (1) diverģē visiem x, kuriem $|x|>|x_2|$.

Pieņemsim *pretējo*: eksistē tāds skaitlis x', kuram $|x'|>|x_2|$, bet punktā x' rinda konverģē. Tad pēc Ābela teorēmas pirmās daļas rinda konverģē absolūti visos punktos x, kuriem $|x|<|x'|$, tātad konverģē arī punktā x_2. Taču tas ir pretrunā ar doto nosacījumu, ka punktā x_2 rinda diverģē. Tātad pieņēmums ir nepareizs, un rinda diverģē visos punktos x, kuriem $|x|>|x_2|$. □

27.5. §. PAKĀPJU RINDAS KONVERĢENCES INTERVĀLS UN KONVERĢENCES RĀDIUSS

Secinājums no Ābela teorēmas

Ja pakāpju rinda konverģē punktā x_1, tad tā konverģē absolūti intervālā $(-|x_1|;\ |x_1|)$. Ja pakāpju rinda diverģē punktā x_2, tad tā diverģē intervālos $(-\infty;\ -|x_2|)$ un $(|x_2|;\ +\infty)$. Tātad ***eksistē tāds nenegatīvs skaitlis*** R, ***ka visiem*** x, ***kuriem*** $|x|<R$, ***rinda konverģē, bet visiem*** x, ***kuriem*** $|x|>R$, ***rinda diverģē. Tas nozīmē, ka pakāpju rinda konverģē absolūti intervālā*** $(-R;\ R)$, ***bet diverģē intervālos*** $(-\infty;\ -R)$ ***un*** $(R;\ +\infty)$.



6. zīm.

Intervālu $(-R; R)$ ***sauc par pakāpju rindas konverģences intervālu, bet skaitli*** R ***– par pakāpju rindas konverģences rādiusu*** (6. zīm.).

Lai atrastu pakāpju rindas konverģences intervālu, vispirms ir jāatrod šīs rindas konverģences rādiuss R. Tā kā pakāpju rinda

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \tag{1}$$

konverģences intervālā $(-R;\ R)$ konverģē absolūti, tad aplūkojam šīs rindas locekļu absolūto vērtību rindu

$$|a_0|+|a_1x|+|a_2x^2|+\ldots+|a_nx^n|+\ldots. \tag{2}$$

Tā kā rindas (2) locekļi ir pozitīvi, tad tās konverģences pētīšanai var lietot Dalambēra vai Košī konverģences kritēriju.

Pieņemsim, ka kādai x vērtībai eksistē robeža

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|}.$$

Tad *saskaņā ar Dalambēra kritēriju* rinda (2) konverģē, ja

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|}<1, \tag{3}$$

un diverģē, ja

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|}>1. \tag{4}$$

No nevienādības (3) iegūstam, ka **rinda konverģē** visām x vērtībām, kurām

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^n\cdot x|}{|a_nx^n|}<1 \quad \text{jeb} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\cdot|x|<1,$$

$$|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1, \quad |x|<\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}, \quad |x|<\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Analogi no nevienādības (4) atrodam, ka **rinda diverģē** visām x vērtībām, kurām

$$|x|>\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Tātad **pakāpju rindas konverģences rādiusu var aprēķināt pēc formulas**

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \tag{5}$$

ja vien šī robeža eksistē.

Lietojot *Košī konverģences kritēriju*, iegūstam formulu

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{6}$$

Nosakot pakāpju rindas konverģences apgabalu, ir jānoskaidro, vai dotā rinda konverģē arī intervāla $(-R;\ R)$ galapunktos $x=-R$ un $x=R$. Ievietojot pakāpju rindā $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ x vietā skaitļus $-R$ un R, iegūst skaitļu rindas

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-R)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n R^n \quad \text{un} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n,$$

kas parasti ir vai nu alternējošas rindas, vai arī pozitīvu locekļu rindas. Šo rindu konverģenci noskaidro, izmantojot kādu no skaitļu rindu konverģences kritērijiem (sk. 26.3. §., 26.4. §.). Rezultātā iegūst, ka aplūkotās rindas konverģences apgabals ir intervāls

$$(-R;\ R) \quad \text{vai} \quad [-R;\ R], \quad \text{vai} \quad (-R;\ R], \quad \text{vai arī} \quad [-R;\ R).$$

Ja $R=\infty$, tad rindas konverģences apgabals ir intervāls $(-\infty;\ +\infty)$.

Ja $R=0$, tad rinda konverģē tikai punktā $x=0$.

Piemērs. **Atrast pakāpju rindas**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n\sqrt{n+2}}$$

konverģences apgabalu.

Atrodam konverģences rādiusu, izmantojot formulu (5). Tā kā šeit

$$a_n=\frac{1}{3^n\sqrt{n+2}} \quad \text{un} \quad a_{n+1}=\frac{1}{3^{n+1}\sqrt{n+3}},$$

tad

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}\sqrt{n+3}}{3^n\sqrt{n+2}}\right|=\lim_{n\to\infty}3\cdot\sqrt{\frac{n+3}{n+2}}=3\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{2}{n}}}=3\cdot 1=3.$$

Noskaidrojam, vai pakāpju rinda konverģē punktā $x=-3$. Ievietojot dotajā rindā x vietā -3, iegūstam **alternējošu rindu**

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{3^n\sqrt{n+2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3^n}{3^n\sqrt{n+2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}. \tag{7}$$

Šīs rindas konverģenci noskaidrojam, izmantojot Leibnica kritēriju (sk. 26.4. §.).

Lai atrastu pakāpju rindas $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverģences apgabalu, ir jāveic šāds pētījums.

1. Jāatrod konverģences rādiuss, izmantojot formulu

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{vai} \quad R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

2. Jānoskaidro, vai rinda konverģē punktā $x=-R$, t. i., vai konverģē rinda

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n R^n.$$

3. Jānoskaidro, vai rinda konverģē punktā $x=R$, t. i., vai konverģē rinda

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Tā kā

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}}=0 \quad \text{un} \quad \frac{1}{\sqrt{n+2}}>\frac{1}{\sqrt{n+3}} \qquad \forall\, n\in \boldsymbol{N},$$

tad *rinda* (7) *konverģē.*

Ievietojot dotajā rindā x vietā skaitli 3, iegūstam **pozitīvu locekļu skaitļu rindu**

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{3^n\sqrt{n+2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}}, \tag{8}$$

kuras konverģenci noskaidrojam, izmantojot salīdzināšanas kritēriju (sk. 26.3. §.).

Salīdzināsim rindu (8) ar diverģentu rindu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{9}$$

Atrodot rindu (8) un (9) vispārīgo locekļu attiecības robežu, iegūstam

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n+2}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+2}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{n}}=1\neq\begin{cases}0\\ \infty\end{cases}.$$

Tātad arī *rinda* (8) *diverģē.*

Tā kā dotā pakāpju rinda konverģē punktā -3, *bet diverģē punktā* 3, *tad tās konverģences apgabals ir intervāls* $[-3;\,3)$.

Piezīme. Dažkārt ir jāatrod konverģences apgabals tādai pakāpju rindai, kura satur pakāpes tikai ar pāra skaitļu vai nepāra skaitļu kāpinātājiem. Šādos gadījumos nevar aprēķināt konverģences rādiusu pēc formulām (5) vai (6), jo pakāpju rindā viens no koeficientiem a_n vai a_{n+1} ir vienāds ar nulli un tāpēc attiecīgās robežas neeksistē. Tad **konverģences apgabalu atrod, izmantojot Dalambēra (vai Košī) kritēriju.**

Piemērs. **Atrast konverģences apgabalu rindai**

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{2n}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2^2}x^4+\frac{1}{2^3}x^6+\ldots+\frac{1}{2^n}x^{2n}+\frac{1}{2^{n+1}}x^{2(n+1)}+\ldots.$$

Izmantosim Dalambēra kritēriju (uzskatot, ka rindā x vietā ievietots fiksēts skaitlis). Atrodot šīs rindas $(n+1)$-ā un n-tā locekļa attiecības robežu, iegūstam

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot x^{2(n+1)}}{2^{n+1}\cdot x^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot x^{2n}\cdot x^2}{2^n\cdot 2\cdot x^{2n}}=\frac{1}{2}x^2.$$

Saskaņā ar Dalambēra kritēriju *rinda konverģē* visām tām x vērtībām, ar kurām ir spēkā nevienādība

$$\frac{1}{2}x^2<1 \quad \text{jeb} \quad x^2<2,$$

no kurienes

$$|x|<\sqrt{2} \quad \text{jeb} \quad -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}.$$

Tātad *rinda konverģē, ja* $x\in(-\sqrt{2};\,\sqrt{2})$. Noskaidrosim, vai rinda konverģē arī šī intervāla galos.

Ja $x=-\sqrt{2}$, tad iegūstam šādu **skaitļu rindu:**

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}(-\sqrt{2})^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^{2n}}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2}^2)^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}1=1+1+1+\ldots+1+\ldots.$$

Šī rinda *diverģē, jo nav izpildīts skaitļu rindu konverģences nepieciešamais nosacījums* (rindas vispārīgais loceklis netiecas uz nulli, kad $n \to \infty$).

Ja $x = \sqrt{2}$, tad iegūst to pašu **diverģento skaitļu rindu:**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} (\sqrt{2})^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1.$$

Tātad *dotās pakāpju rindas konverģences apgabals ir intervāls* $(-\sqrt{2};\ \sqrt{2})$.

27.6. §. FUNKCIJU RINDA AR $x - x_0$ PAKĀPĒM

Pakāpju rindu lietojumos bieži izmanto funkciju rindas, kuru locekļi ir starpības $x - x_0$ pakāpes:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \ldots + a_n (x - x_0)^n + \ldots . \quad (1)$$

Šādas rindas sauc par ***vispārinātajām pakāpju rindām***.

Lai atrastu rindas (1) konverģences apgabalu, izmantosim substitūciju

$$x - x_0 = y.$$

Tad iegūstam pakāpju rindu ar mainīgā lieluma y pakāpēm:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots + a_n y^n + \ldots , \quad (2)$$

kuras konverģences apgabalu nosaka, izmantojot iepriekšējā paragrāfā aplūkoto metodi.

Pieņemsim, ka rindas (2) konverģences apgabals ir intervāls $(-R;\ R)$. Tad no nevienādībām

$$-R < y < R$$

iegūstam, ka

$$-R < x - x_0 < R \quad \text{jeb} \quad x_0 - R < x < x_0 + R.$$

Tātad *rindas* (1) *konverģences apgabals ir intervāls* $(x_0 - R;\ x_0 + R)$, t. i., ***vispārinātās pakāpju rindas konverģences apgabals ir* simetrisks intervāls *attiecībā pret punktu*** x_0 (izņemot, iespējams, intervāla galapunktus).

Piemērs. **Atrast konverģences apgabalu rindai**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{(n+1)^2} = 1 + \frac{1}{4}(x-5) + \frac{1}{9}(x-5)^2 + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2}(x-5)^n + \ldots . \quad (3)$$

Izmantojot substitūciju

$$x - 5 = y,$$

iegūstam pakāpju rindu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} y^n, \quad (4)$$

kurai atrodam konverģences rādiusu:

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{(n+2)^2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+2)^2}{(n+1)^2} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^2 = 1;$$

tātad rinda (4) konverģē intervālā $|y| < 1$.

Noskaidrosim, vai šī rinda konverģē intervāla $(-1;\ 1)$ abos galos.

Ja $y=-1$, iegūstam **alternējošu skaitļu rindu**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}.$$

Šī *rinda konverģē*, jo ir izpildīti Leibnica kritērija nosacījumi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2}=0 \quad \text{un} \quad \frac{1}{(n+1)^2} > \frac{1}{(n+2)^2} \quad \forall n\in \boldsymbol{N}.$$

Ja $y=1$, iegūstam **pozitīvu locekļu skaitļu rindu**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}. \tag{5}$$

Lietojot salīdzināšanas kritēriju, proti, salīdzinot rindu (5) ar konverģentu rindu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} \tag{6}$$

(sk. 26.3. §.), var pierādīt, ka arī rinda (5) konverģē. Patiešām, tā kā visām naturālu skaitļu n vērtībām

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2},$$

tad visi rindas (5) locekļi ir mazāki par atbilstošajiem konverģentās rindas (6) locekļiem.

Tātad *rinda* (4) *konverģē visām y vērtībām, kurām* $-1\leqslant y\leqslant 1$.

Tā kā $y=x-5$, tad rinda (3) konverģē, ja

$$-1\leqslant x-5\leqslant 1$$

jeb

$$-1+5\leqslant x\leqslant 1+5, \qquad 4\leqslant x\leqslant 6.$$

Līdz ar to *dotās rindas konverģences apgabals ir intervāls* [4; 6].

27.7. §. PAKĀPJU RINDAS VIENMĒRĪGĀ KONVERĢENCE

Funkciju rindas vienmērīgās konverģences jautājumus aplūkojām 27.2. un 27.3. §, kur noskaidrojām arī vienmērīgi konverģentu rindu galvenās īpašības (atvasināšanu, integrēšanu pa locekļiem u. c.). Lai noskaidrotu jautājumu, vai arī pakāpju rindām piemīt šīs īpašības, aplūkosim teorēmu par šo rindu vienmērīgu konverģenci.

Teorēma

Pakāpju rinda

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \tag{1}$$

konverģē vienmērīgi jebkurā intervālā $[-r;\ r]$, ***kurš ietilpst šīs rindas konverģences apgabalā*** $(-R;\ R)$.

Pierādījums

Saskaņā ar Ābela teorēmu (sk. 27.4. §.) pakāpju rinda konverģē absolūti visos konverģences apgabala $(-R;\ R)$ punktos, tātad arī punktā $r\in(-R;\ R)$. Ievietojot rindā (1) $x=r>0$, iegūstam absolūti konverģentu skaitļu rindu. Tātad konverģē pozitīvu skaitļu rinda

$$|a_0|+|a_1|r+|a_2|r^2+\ldots+|a_n|r^n+\ldots. \tag{2}$$

Tā kā visiem x, kuriem $|x| < r$, ir spēkā nevienādība

$$|a_n x^n| < |a_n| r^n,$$

tad intervālā $[-r; r]$ rinda (1) ir mažorējama ar konverģentu skaitļu rindu (2). Tas nozīmē, ka *pakāpju rinda* (1) *konverģē vienmērīgi intervālā* $[-r; r] \subset (-R; R)$. □

Secinājumi (pakāpju rindas īpašības)

Tā kā pakāpju rindas (1) locekļi - pakāpes funkcijas $a_n x^n$ - ir nepārtrauktas un diferencējamas funkcijas un konverģences intervālā šī rinda konverģē vienmērīgi, tad no 27.3.§. aplūkotajām īpašībām izriet šādi secinājumi.

1. ***Pakāpju rindas summa ir nepārtraukta funkcija.***

2. Ja $x_0 \in (-R; R)$, tad

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \to x_0} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n,$$

t. i., ***pakāpju rindā robežpāreju var izdarīt aiz summas zīmes.***

3. ***Konverģences intervālā pakāpju rindu var atvasināt pa locekļiem***, t. i.,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

4. ***Konverģences intervālā pakāpju rindu var integrēt pa locekļiem***, t. i., ja $x \in (-R; R)$, tad

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x a_n x^n dx\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Piezīme. Atvasinot vai integrējot pakāpju rindu, iegūst citu pakāpju rindu; taču var pierādīt, ka iegūtajai rindai ir tāds pats konverģences rādiuss kā dotajai rindai.

27.8. §. FUNKCIJAS IZVIRZĪŠANA PAKĀPJU RINDĀ

1. TEILORA RINDA

Kā zināms, konverģentas funkciju rindas summa ir funkcija $S(x)$. Taču rindu teorijas praktiskos lietojumos ļoti svarīgs ir apgriezts spriedums: **atrast tādu konverģentu funkciju rindu, kuras summa ir dotā funkcija** $f(x)$. Aplūkosim šo jautājumu pakāpju rindu gadījumam.

Definīcija

Saka, ka funkcijai $f(x)$ ***eksistē izvirzījums pakāpju rindā*** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ***intervālā*** $(-R; R)$, ***ja var atrast tādus koeficientus*** a_n, ***ar kuriem rinda konverģē un tās summa ir funkcija*** $f(x)$; ***turklāt rindas konverģences rādiuss*** $R \neq 0$.

Ja funkcijai eksistē izvirzījums pakāpju rindā, tad to sauc par analītisku funkciju.

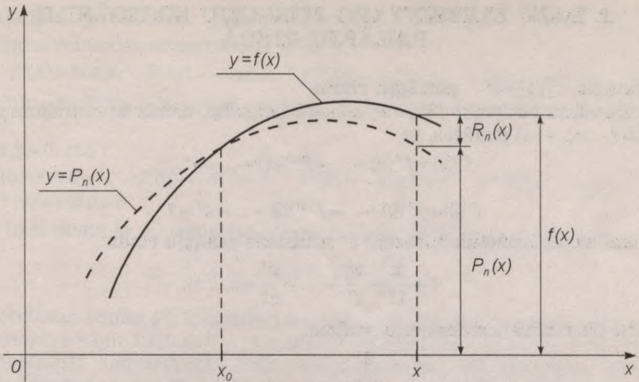
Jautājums par funkcijas izvirzīšanu pakāpju rindā ir saistīts ar funkcijas Teilora formulas jēdzienu (Teilora formula aplūkota 9.4.§.).

Izmantojot Teilora formulu, n reizes diferencējamu funkciju $f(x)$ var izteikt kā šīs funkcijas **Teilora polinoma** $P_n(x)$ un atlikuma locekļa $R_n(x)$ summu:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) =$$

$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) \quad (1)$$

(7. zīm.).



7. zīm.

Pieņemsim, ka funkcijai $f(x)$ punktā x_0 eksistē bezgalīgi daudz atvasinājumu. Tad ir iespējams neierobežoti palielināt locekļu skaitu Teilora polinomā $P_n(x)$. Ja turklāt

$$R_n(x) \to 0, \quad \text{kad} \quad n \to \infty,$$

tad no Teilora formulas (1) iegūstam funkcijas $f(x)$ **vispārināto pakāpju rindu jeb Teilora rindu**

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots . \tag{2}$$

Šīs rindas parciālsumma $S_n(x)$ ir Teilora polinoms $P_n(x)$.

Ja rindas (2) konverģences rādiuss ir R un x pieder konverģences apgabalam $(x_0-R;\ x_0+R)$, tad $f(x)$ ir rindas (2) summa, t. i.,

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots . \tag{3}$$

Ja $x_0=0$, tad iegūstam Teilora rindas speciālu gadījumu - pakāpju rindu ar x pakāpēm jeb **Maklorena rindu**

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots . \tag{4}$$

Formulēsim aplūkotos spriedumus kā teorēmas.

1. teorēma

Ja pakāpju rinda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ***konverģē intervālā*** $(-R;\ R)$ ***un tās summa ir funkcija*** $f(x)$, ***tad šīs rindas koeficienti ir funkcijas*** $f(x)$ ***Teilora koeficienti, t. i.,***

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \qquad n=0, 1, 2, \ldots .$$

Tātad, ja funkcijai $f(x)$ ***eksistē izvirzījums pakāpju rindā, tad šī rinda ir funkcijas Teilora rinda.***

2. teorēma

Funkciju $f(x)$ ***var izvirzīt Teilora rindā intervālā*** $(-R;R)$ ***tad un tikai tad, ja***

1) ***funkcija ir bezgalīgi daudz reižu atvasināma šajā intervālā,***
2) ***funkcijas Teilora formulas atlikuma loceklis*** $R_n(x)$ ***tiecas uz nulli, kad*** $n \to \infty$, ***visiem*** $x \in (-R;\ R)$.

2. DAŽU ELEMENTĀRO FUNKCIJU IZVIRZĪJUMI PAKĀPJU RINDĀ

a) Funkcijas $f(x)=e^x$ pakāpju rinda

Acīmredzot funkcijai $f(x)=e^x$ eksistē bezgalīgi daudz atvasinājumu visos intervāla $(-\infty;\ +\infty)$ punktos, jo

$$f'(x)=f''(x)=\ldots=f^{(n)}(x)=\ldots=e^x.$$

Tātad

$$f'(0)=f''(0)=\ldots=f^{(n)}(0)=\ldots=e^0=1$$

un saskaņā ar (4) iegūstam funkcijai e^x atbilstošo pakāpju rindu

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots . \tag{5}$$

Noteiksim šīs rindas konverģences rādiusu.

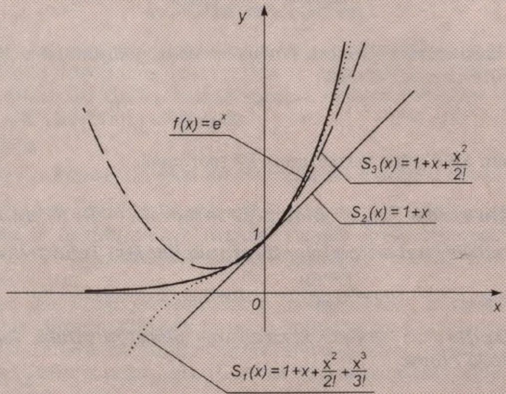
$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

Tātad rindas (5) konverģences apgabals ir intervāls $(-\infty;\ +\infty)$. Var pierādīt, ka visos intervāla $(-\infty;\ +\infty)$ punktos funkcijas $f(x)=e^x$ Teilora formulas atlikuma loceklis $R_n(x)\to 0$, kad $n\to\infty$.

Līdz ar to iegūstam *funkcijas $f(x)=e^x$ izvirzījumu pakāpju rindā:*

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \qquad x\in(-\infty;\ +\infty). \tag{6}$$

Šīs rindas dažu parciālsummu grafiki un rindas summas – funkcijas e^x grafiks attēloti A–1. zīm.



A-1. zīm.

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\quad x\in(-\infty;\ +\infty)$$

b) Funkcijas $f(x)=\sin x$ pakāpju rinda

Sinusa funkcijas atvasinājumi ir šādi:

$$f'(x)=\cos x,\quad f''(x)=-\sin x,\quad f^{(3)}(x)=-\cos x,\quad f^{(4)}(x)=\sin x,\ \dots .$$

Tātad sinusa funkcija ir bezgalīgi daudz reižu atvasināma visos intervāla $(-\infty;\ +\infty)$ punktos.

Ja $x=0$, tad

$f(0)=\sin 0=0,\quad f'(0)=\cos 0=1,\quad f''(0)=-\sin 0=0,\quad f^{(3)}(0)=-\cos 0=-1,$
$f^{(4)}(0)=\sin 0=0\ \dots .$

Līdz ar to saskaņā ar (4) iegūstam sinusa funkcijai atbilstošo pakāpju rindu

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\dots . \qquad (7)$$

Noteiksim rindas (7) konverģences apgabalu. Tā kā šī rinda satur x pakāpes tikai ar nepāra kāpinātājiem (t. i., viens no koeficientiem – a_n vai a_{n+1} ir nulle), tad nevar aprēķināt konverģences rādiusu pēc formulas, bet jāizmanto Dalambēra kritērijs. Atrodam rindas (7) $(n+1)$-mā un n-tā locekļa attiecības robežu, kad $n\to\infty$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2(n+1)+1}(2n+1)!}{(2(n+1)+1)!\,x^{2n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+3}(2n+1)!}{(2n+3)!\,x^{2n+1}}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^2\cdot x^{2n+1}(2n+1)!}{(2n+1)!\,(2n+2)(2n+3)\,x^{2n+1}}\right|=x^2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}=x^2\cdot 0=0<1.$$

Tā kā nevienādība

$$x^2\cdot 0<1$$

ir pareiza jebkurai x vērtībai, tad saskaņā ar Dalambēra kritēriju **rinda** (7) **konverģē visiem** $x\in(-\infty;\ +\infty)$.

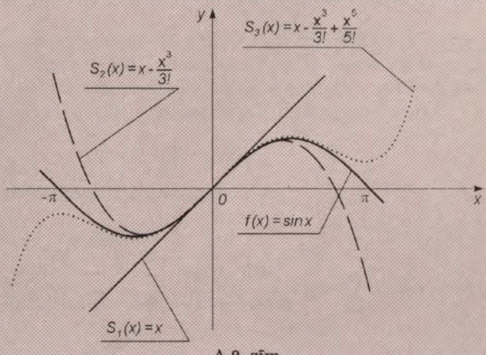
Var pierādīt, ka visos intervāla $(-\infty;\ +\infty)$ punktos funkcijai $\sin x$ Teilora formulas atlikuma loceklis $R_n(x)\to 0$, kad $n\to\infty$.

Tātad *rinda* (7) *konverģē uz funkciju* $\sin x$ *visos intervāla* $(-\infty;\ +\infty)$ *punktos*, t. i.,

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\dots\quad x\in(-\infty;\ +\infty). \qquad (8)$$

Rindas (8) dažu parciālsummu grafiki un šīs rindas summas – funkcijas $\sin x$ grafiks attēloti A-2. zīm.

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$x\in(-\infty;\ +\infty)$$



A-2. zīm.

c) Funkcijas $f(x)=\cos x$ pakāpju rinda

Analogi kā iepriekšējos piemēros arī kosinusa funkcijai atrod izvirzījumu pakāpju rindā. Taču šo izvirzījumu var iegūt arī ar citu paņēmienu – atvasinot rindu (8). Patiešām, tā kā

$$\cos x=(\sin x)'$$

un pakāpju rindu var atvasināt pa locekļiem, tad

$$\cos x=(\sin x)'=\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots\right)'=$$

$$=1-\frac{3x^2}{3!}+\frac{5x^4}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{(2n+1)x^{2n}}{(2n+1)!}+\ldots=$$

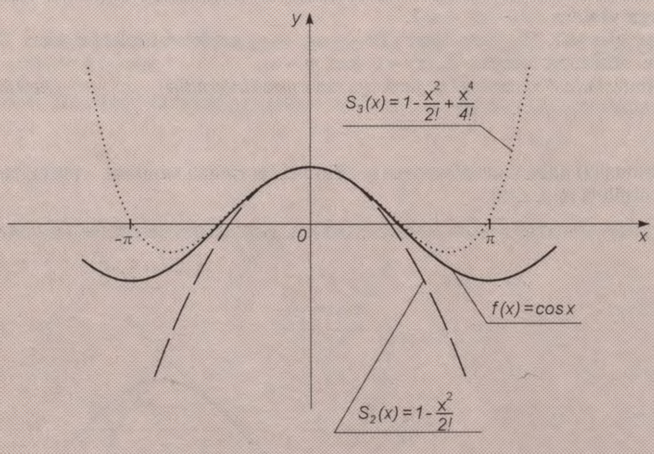
$$=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots.$$

Tā kā, atvasinot pakāpju rindu, konverģences rādiuss nemainās, tad arī iegūtā rinda konverģē uz funkciju $\cos x$ intervālā $(-\infty;+\infty)$.

Līdz ar to

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\quad x\in(-\infty;+\infty).\quad(9)$$

Rindas (9) dažu parciālsummu grafiki un šīs rindas summas – funkcijas $\cos x$ grafiks attēloti A–3. zīm.



A-3. zīm.

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\quad x\in(-\infty;+\infty)$$

d) Funkcijas $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ pakāpju rinda (binomiālā rinda)

Aprēķināsim funkcijas $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ Teilora koeficientus. Atrodam šīs funkcijas atvasinājumus un atvasinājumu vērtību, ja $x=0$.

$$\begin{aligned}
&f(x)=(1+x)^{\alpha}, && f(0)=1,\\
&f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}, && f'(0)=\alpha,\\
&f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, && f''(0)=\alpha(\alpha-1),\\
&f^{(3)}(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}, && f^{(3)}(0)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, && f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1).\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{10}$$

Ievietojot atvasinājumu vērtības (10) izteiksmē (4), iegūstam šādu pakāpju rindu:

$$1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\dots. \tag{11}$$

Atradīsim rindas (11) konverģences rādiusu R, pieņemot, ka $\alpha\neq n$.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)\cdot(n+1)!}{n!\,\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+\dfrac{1}{n}}{\dfrac{\alpha}{n}-1}\right|=|-1|=1.$$

Tātad rindas (11) konverģences apgabals ir intervāls $(-1;\ 1)$. Konverģence intervāla galapunktos ir atkarīga no kāpinātāja α vērtības. Var pierādīt, ka punktā $x=-1$ rinda konverģē, ja $\alpha>0$, bet punktā $x=1$ rinda konverģē, ja $\alpha>-1$.

Visos intervāla $(-1;\ 1)$ punktos funkcijai $(1+x)^{\alpha}$ atbilstošais Teilora formulas atlikuma loceklis $R_n(x)\to 0$, kad $n\to\infty$. Tātad šajā intervālā rinda (11) konverģē uz funkciju $(1+x)^{\alpha}$. Līdz ar to iegūstam šīs funkcijas izvirzījumu pakāpju rindā, ko sauc par **binomiālo rindu**:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\dots \tag{12}$$

jeb

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n,\quad \text{kur } x\in(-1;\ 1).$$

Piezīme. Ja kāpinātājs α ir naturāls skaitlis n, tad funkcijas $f(x)=(1+x)^n$ atvasinājumi, kuru kārta ir lielāka nekā n, ir vienādi ar nulli. Tātad šīs funkcijas izvirzījums pakāpju rindā faktiski ir galīga skaita locekļu summa - n-tās pakāpes Teilora polinoms. Viegli pārliecināties, ka šajā gadījumā *Teilora koeficienti*

$$\frac{f^{(m)}(0)}{m!}\qquad (m=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n)$$

ir Ņūtona binoma izvirzījuma binomiālie koeficienti C_n^m.

Patiešām,

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}=C_n^m.$$

Tātad pakāpes $(1+x)^n$ **Ņūtona binoma izvirzījums**

$$(1+x)^n=1+C_n^1x+C_n^2x^2+\dots+C_n^mx^m+\dots+C_n^nx^n$$

ir binomiālās rindas (12) speciāls gadījums, kad $\alpha=n$.

e) Funkciju $f(x)=\frac{1}{1+x}$ un $f(x)=\ln(1+x)$ pakāpju rindas

Binomiālo rindu (12) izmanto, lai iegūtu vairāku citu elementāro funkciju izvirzījumus pakāpju rindā. Piemēram, ja $\alpha=-1$, tad no (12) iegūstam

$$(1+x)^{-1}=1+\frac{-1}{1!}x+\frac{(-1)(-2)}{2!}x^2+\ldots+\frac{(-1)(-2)(-3)\ldots(-n)}{n!}x^n+\ldots=$$
$$=1-\frac{1!}{1!}x+\frac{2!}{2!}x^2-\ldots+(-1)^n\frac{n!}{n!}x^n+\ldots=$$
$$=1-x+x^2-\ldots+(-1)^n x^n+\ldots .$$

Tā kā

$$(1+x)^{-1}=\frac{1}{1+x},$$

tad

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots \qquad x\in(-1;\,1). \tag{13}$$

Ievērojot to, ka

$$\int\frac{1}{1+x}\,dx=\ln|1+x|+C$$

un konverģences intervālā $(-1;\,1)$ pakāpju rindu (13) var integrēt pa locekļiem, iegūstam

$$\int_0^x\frac{1}{1+x}\,dx=\int_0^x(1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots)\,dx=$$
$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots, \qquad -1<x<1.$$

Tātad

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots . \tag{14}$$

Viegli pārliecināties, ka rinda (14) konverģē, ja $x=1$, bet diverģē, ja $x=-1$. Tātad *šīs rindas konverģences apgabals ir intervāls* $(-1;\,1]$.

Ja $x=1$, tad iegūstam, ka

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n}+\ldots .$$

f) Funkciju $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ un $f(x)=\operatorname{arctg}x$ pakāpju rindas

Ja izteiksmē (13) x aizstāj ar x^2, tad iegūstam pāra pakāpju rindu

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots . \tag{15}$$

Integrēsim šo rindu pa locekļiem intervālā $[0;\,x]$, kur $|x|<1$:

$$\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\,dx=\int_0^x(1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots)\,dx=$$
$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots .$$

Tā kā

$$\int_0^x \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x,$$

tad iegūstam funkcijas $\operatorname{arctg} x$ izvirzījumu pakāpju rindā:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots . \qquad (16)$$

Var pierādīt, ka rinda (16) konverģē arī punktā $x=1$, bet punktā $x=-1$ - diverģē; tātad tās *konverģences apgabals ir intervāls* $(-1;\, 1]$.

g) Funkcijas $f(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$ pakāpju rinda

Dažkārt, lai atrastu funkcijas $f(x)$ pakāpju rindu, ir izdevīgi vispirms izvirzīt pakāpju rindā šīs funkcijas atvasinājumu $f'(x)$, kuru pēc tam integrējot iegūst pašas dotās funkcijas rindu. Tā, piemēram, atrod funkcijas $f(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$ pakāpju rindu.

Vispirms atvasinām doto funkciju.

Tā kā

$$f'(x) = (\ln(x+\sqrt{1+x^2}))' = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot (x+\sqrt{1+x^2})' =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{(x+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

tad atrodam funkcijas

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

izvirzījumu pakāpju rindā, izmantojot binomiālo rindu:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n,$$

kur $\alpha = -\frac{1}{2}$, bet mainīgais lielums x jāaizstāj ar x^2.

Dažu elementāro funkciju pakāpju rindas

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty;\, +\infty)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in (-\infty;\, +\infty)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in (-\infty;\, +\infty)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad x \in (-1;\, 1),\ \alpha \neq n$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad x \in (-1;\, 1)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in (-1;\, 1)$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in (-1;\, 1]$$

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1;\, 1]$$

Tātad

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^{2n}=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n}.$$

Tā kā

$$1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)=(2n-1)!!$$

un

$$2^n\cdot n!=2\cdot 2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n=2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n=(2n)!!,$$

tad

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}.$$

Doto funkciju $f(x)$ var izteikt ar integrāli no atvasinājuma $f'(x)$. Tātad

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2})=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int_0^x\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}\right)dx=$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}dx=$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)}x^{2n+1},\qquad \text{kur } x\in(-1;\,1].$$

27.9. §. PAKĀPJU RINDU LIETOJUMI

Pakāpju rindas galvenokārt izmanto tuvinātos aprēķinos. Aplūkosim šādus pakāpju rindu lietojumus:

1) funkcijas vērtību tuvinātu aprēķināšanu,
2) integrāļu atrašanu,
3) diferenciālvienādojumu tuvinātu atrisināšanu.

1. FUNKCIJAS VĒRTĪBU TUVINĀTA APRĒĶINĀŠANA

Pieņemsim, ka pakāpju rinda $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ konverģences intervālā $(-R;\,R)$ konverģē uz funkciju $f(x)$. Ievietojot x vietā jebkuru skaitli x_1 no konverģences apgabala, iegūstam konverģentu skaitļu rindu, kura konverģē uz funkcijas vērtību $f(x_1)$, t. i.,

$$f(x_1)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_1^n.$$

Tātad funkcijas vērtību $f(x_1)$ tuvināti var aprēķināt ar šīs rindas parciālsummu:

$$f(x_1)\approx a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+a_3x_1^3+\ldots+a_nx_1^n.$$

Ja skaitļu rinda ir alternējoša, tad saskaņā ar Leibnica kritēriju tuvinātā aprēķina kļūda nepārsniedz $|a_{n+1}x_1^{n+1}|$ (sk. 26.5. §.).

Piemēri

1. Ja $x=1$, tad no eksponentfunkcijas e^x pakāpju rindas

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\qquad x\in(-\infty;\ +\infty)$$

iegūstam skaitļu rindu, kuras summa ir skaitlis e, t. i.,

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots.$$

Aprēķinot šīs rindas parciālsummu ar 10 locekļiem, var atrast skaitļa e tuvinātu vērtību ar precizitāti līdz 10^{-6}:

$$e\approx S_{10}=2{,}718281\ldots.$$

2. Aplūkosim funkcijas $\operatorname{arctg}x$ izvirzījumu pakāpju rindā, kura konverģē intervālā $(-1;\ 1]$:

$$\operatorname{arctg}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots.$$

Ja $x=1$, tad iegūstam skaitļu rindu, kuras summa ir $\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$. Tātad

$$\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\ldots,$$

t. i.,

$$\pi=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\ldots\right).$$

Šo rindu skaitļa π vērtības tuvinātai aprēķināšanai jau 17. gadsimtā izmantoja Leibnics. Taču *rinda konverģē ļoti lēni*, t. i., lai iegūtu pietiekami precīzu π vērtību, rindas parciālsummā jāņem ļoti daudz locekļu.

Tādējādi jau matemātiskās analīzes metožu attīstības sākuma posmā pakāpju rindas izmantoja funkciju vērtību tuvinātai aprēķināšanai. Tomēr jāpiebilst, ka ar pakāpju rindu praktiski nav iespējams aprēķināt tuvinātu funkcijas vērtību ar jebkuru precizitāti. Ja jāaprēķina ļoti precīzi funkcijas vērtība tādā punktā, kas atrodas tālu no punkta x_0, kurā sastādīta pakāpju rinda $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$, tad rindas parciālsummā jāņem ļoti daudz locekļu un katra locekļa vērtība jāaprēķina ļoti precīzi. Tā kā elektroniskais skaitļotājs aritmētiskās darbības var izpildīt tikai ar noteiktu precizitātes pakāpi, tad, saskaitot ļoti daudz rindas locekļu aptuvenas vērtības, parciālsummas vērtība var izrādīties nepietiekami precīza. Tāpēc šodien praksē izmanto citas funkciju aproksimācijas metodes, kas dod iespēju samazināt šādu kļūdu ietekmi uz rezultāta precizitāti.

2. INTEGRĀĻA TUVINĀTA APRĒĶINĀŠANA

Kā zināms, katrai kādā intervālā nepārtrauktai funkcijai eksistē primitīvo funkciju kopa, t. i., eksistē nenoteiktais integrālis. Taču ne vienmēr nenoteiktais integrālis ir elementāra funkcija. Piemēram, nav tādu elementāru funkciju, ar kurām var izteikt integrāļus

$$\int e^{-x^2}dx,\qquad \int \sin x^2\,dx,\qquad \int\cos x^2\,dx,\qquad \int\frac{\sin x}{x}\,dx\qquad \text{u. c.}$$

Tomēr šādus integrāļus bieži izmanto dažādos zinātnes un prakses uzdevumos. Piemēram, varbūtību teorijā lieto Puasona integrāli jeb tā saukto **Laplasa funkciju**:

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

optikā - **Frenela integrāļus**:

$$S(x)=\int_0^x \sin\frac{\pi t^2}{2}dt,\qquad C(x)=\int_0^x \cos\frac{\pi t^2}{2}dt.$$

Lai iegūtu šādu integrāļu analītiskas izteiksmes, zemintegrāļa funkciju izvirza pakāpju rindā un iegūto rindu integrē pa locekļiem.

Piemēri

1. Izvirzīt pakāpju rindā Laplasa funkciju (Puasona integrāli)

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Izmantojam eksponentfunkcijas pakāpju rindu

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Ja $x=-\frac{t^2}{2}$, tad iegūstam rindu

$$e^{-\frac{t^2}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{t^2}{2}\right)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{2^n n!}.$$

Šī rinda konverģē vienmērīgi katrā reālo skaitļu intervālā, un tāpēc to var integrēt pa locekļiem jebkurā intervālā $[0;\,x]\subset(-\infty;\,+\infty)$.
Tādējādi iegūstam

$$\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{2^n n!}\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{(-1)^n}{2^n n!}t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\Bigg|_0^x=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n!(2n+1)}x^{2n+1}.$$

Līdz ar to

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n!(2n+1)}x^{2n+1}. \qquad (1)$$

Rindu (1) var izmantot, lai sastādītu Laplasa funkcijas $\Phi(x)$ vērtību tabulu, kuru bieži lieto dažādos aprēķinos varbūtību teorijā.

Piemēram, ja $x=2$, tad

$$\Phi(2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{n+1}}{n!(2n+1)}\approx$$

$$\approx 0{,}3989\left(2-\frac{2^2}{1!\,3}+\frac{2^3}{2!\,5}-\frac{2^4}{3!\,7}+\ldots+\frac{(-1)^n 2^{n+1}}{n!(2n+1)}+\ldots\right)\approx 0{,}4772.$$

Analogi atrod, ka

$$\Phi(0{,}5)\approx 0{,}1915, \qquad \Phi(1)\approx 0{,}3413 \quad \text{utt.}$$

2. Aprēķināt integrāli $\int_0^{0,5} x\cos\sqrt{x}\,dx$ ar precizitāti līdz 0,00001, izmantojot kosinusa funkcijas pakāpju rindu.

Kosinusa funkcijas pakāpju rindā

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

aizvietojot x ar $\sqrt{x}$, iegūstam funkcijas $\cos\sqrt{x}$ izvirzījumu:

$$\cos\sqrt{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{(2n)!}.$$

Izmantojot konverģentas rindas distributīvo īpašību, atrodam

$$x\cos\sqrt{x}=x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n\cdot x}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(2n)!}.$$

Šī rinda konverģē vienmērīgi jebkurā reālo skaitļu intervālā, tātad intervālā [0; 0,5] to var integrēt pa locekļiem.

Tādējādi iegūstam skaitļu rindu:

$$\int_0^{0,5}x\cos\sqrt{x}\,dx=\int_0^{0,5}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(2n)!}\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{0,5}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(2n)!}\,dx=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+2}}{(2n)!(n+2)}\bigg|_0^{0,5}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}}{(2n)!(n+2)}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^{n+2}(2n)!(n+2)}. \tag{2}$$

Noskaidrosim, cik locekļu jāņem alternējošās rindas (2) parciālsummā, lai parciālsumma no rindas summas atšķirtos mazāk nekā par 0,00001. Tad saskaņā ar secinājumu no Leibnica kritērija (sk. 26.4. §.) jābūt spēkā nevienādībai

$$|S-S_n|<|a_{n+1}|<0{,}00001.$$

Tā kā šajā rindā

$$a_{n+1}=(-1)^{n+1}\frac{1}{2^{n+3}(2n+2)!(n+3)},$$

tad nepieciešamo locekļu skaitu n atrodam no nevienādības

$$\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{2^{n+3}(2n+2)!(n+3)}\right|<\frac{1}{100\,000} \quad \text{jeb} \quad 2^{n+3}(2n+2)!(n+3)>100\,000.$$

Ievietojot šajā nevienādībā n vietā naturālo skaitļu vērtības 1, 2, 3, … , atrodam, ka nevienādība ir pareiza, ja $n\geqslant 2$. Tātad dotā integrāļa tuvinātu vērtību ar precizitāti līdz 0,00001 aprēķinām šādi:

$$\int_0^{0,5}x\cos\sqrt{x}\,dx\approx\sum_{n=0}^{3}(-1)^n\frac{1}{2^{n+2}(2n)!(n+2)}=\frac{1}{2^2\cdot 0!\cdot 2}-\frac{1}{2^3\cdot 2!\cdot 3}+\frac{1}{2^4\cdot 4!\cdot 4}-\frac{1}{2^5\cdot 6!\cdot 5}\approx$$

$$\approx 0{,}062500-0{,}010417+0{,}000326-0{,}000004\approx 0{,}052405\approx 0{,}05241.$$

Piemērs. **Pierādīt, ka funkcija**

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

ir diferenciālvienādojuma

$$xy''+y'+xy=0$$

atrisinājums.

Funkciju, kas definēta ar doto rindu, sauc par **nultās kārtas Beseļa funkciju**, to apzīmē ar simbolu $J_0(x)$; aplūkotais diferenciālvienādojums ir tā sauktā Beseļa vienādojuma atsevišķs gadījums.

(Frīdrihs Vilhelms Beselis (1784–1846) – vācu matemātiķis un astronoms.)

Atrodam funkcijas $y=J_0(x)$ atvasinājumus y' un y''.

$$y'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n}{(n!)^2 2^{2n}}x^{2n-1},$$

$$y''=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n}{(n!)^2 2^{2n}}x^{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n 2n}{(n!)^2 2^{2n}}x^{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n(2n-1)}{(n!)2^{2n}}x^{2n-2}.$$

Pārliecināsimies, ka, ievietojot diferenciālvienādojumā y, y' un y'' rindas, iegūst identitāti, t. i., ka

$$x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n(2n-1)}{(n!)^2 2^{2n}}x^{2n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n}{(n!)^2 2^{2n}}x^{2n-1}+x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2 2^{2n}}x^{2n}=0,$$

jeb

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n(2n-1)}{(n!)^2 2^{2n}}x^{2n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n}{(n!)^2 2^{2n}}x^{2n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2 2^{2n}}x^{2n+1}=0.$$

Pārveidosim iegūto izteiksmi tā, lai visās rindās vispārīgajā loceklī būtu viena un tā pati x pakāpe x^{2n-1}. Šajā nolūkā pēdējās rindas vispārīgā locekļa izteiksmē aizvietojam n ar $n-1$ un attiecīgi izmainām rindas summēšanas indeksa sākuma vērtību:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n(2n-1)}{(n!)^2 2^{2n}}x^{2n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n}{(n!)^2 2^{2n}}x^{2n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{((n-1)!)^2 2^{2n-2}}x^{2n-1}\overset{?}{=}0.$$

Saskaitot šo rindu līdzīgos locekļus, redzam, ka koeficienti pie visām x pakāpēm ir vienādi ar nulli. Patiešām, vispārīgajā gadījumā *koeficienta izteiksme pie* x^{2n-1} $(n=1, 2, 3, \ldots)$ ir šāda:

$$\frac{(-1)^n 2n(2n-1)}{(n!)^2 2^{2n}}+\frac{(-1)^n 2n}{(n!)^2 2^{2n}}+\frac{(-1)^{n-1}}{((n-1)!)^2 2^{2n-2}}=\frac{(-1)^n 2n(2n-1)+(-1)^n 2n}{(n!)^2 2^{2n}}-\frac{(-1)^n\cdot n^2\cdot 2^2}{(n!)^2 2^{2n}}=$$

$$=\frac{(-1)^n 2n(2n-1)+(-1)^n 2n-(-1)^n\cdot(2n)^2}{(n!)^2 2^{2n}}=\frac{(-1)^n 2n(2n-1+1-2n)}{(n!)^2 2^{2n}}=0.$$

Līdz ar to ir pierādīts, ka Beseļa funkcija $y=J_0(x)$ ir dotā diferenciālvienādojuma atrisinājums.

3. DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMU TUVINĀTA ATRISINĀŠANA

Ne vienmēr diferenciālvienādojumu ir iespējams atrisināt, izmantojot integ-rēšanu jeb, kā mēdz teikt, – atrisināt kvadratūrās. Tāpēc bieži lieto dažādas tuvinātās atrisināšanas metodes. Vienas šādas metodes pamatā ir pakāpju rindu izmantošana, t. i., *tiek meklēta tāda pakāpju rinda, kas konverģē uz diferenciālvienādojuma atrisinājumu un apmierina dotos sākuma nosacījumus*. Tādējādi *diferenciālvienādojumu atrisinājums ir pakāpju rinda* un ar šīs rindas parciālsummu var noteikt atrisinājuma tuvinātas vērtības. Aplūkosim divus tuvinātās atrisināšanas paņēmienus: **nenoteikto koeficientu metodi un Teilora koeficientu metodi.**

a) **Nenoteikto koeficientu metode**

Pieņemsim, ka **diferenciālvienādojums ir lineārs vienādojums** attiecībā pret nezināmo funkciju un tās atvasinājumiem. Aplūkosim 2. kārtas diferenciālvienādojumu

$$y''=F(x;y;y') \tag{3}$$

ar sākuma nosacījumiem

$$y(x_0)=y_0, \qquad y'(x_0)=y'_0. \tag{4}$$

Diferenciālvienādojuma atrisinājumu y meklēsim kā binoma $x-x_0$ pakāpju rindu ar nezināmiem koeficientiem, t. i.,

$$y=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n. \tag{5}$$

No sākuma nosacījuma

$$y(x_0)=y_0 \quad \text{jeb} \quad y\big|_{x=x_0}=y_0$$

izriet, ka

$$a_0=y_0.$$

Lai atrastu pārējos rindas (5) koeficientus, atrodam atvasinājumus y' un y'', atvasinot pa locekļiem attiecīgās pakāpju rindas:

$$y'=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}, \tag{6}$$

$$y''=2a_2+2\cdot 3a_3(x-x_0)+\ldots=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}. \tag{7}$$

Izmantojot rindu (6) un sākuma nosacījumu $y'\big|_{x=x_0}=y'_0$, atrodam, ka

$$a_1=y'_0.$$

Koeficientus $a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$ aprēķina ar tā saukto **nenoteikto koeficientu metodi**. Tās būtība ir šāda. Tā kā rinda (5) ir diferenciālvienādojuma atrisinājums, tad šī rinda un tās atvasinājumi (6) un (7) pārvērš vienādojumu (3) identitātē. Tātad, ievietojot rindas (5), (6), (7) vienādojumā (3) un savelkot līdzīgos locekļus, *koeficientiem pie vienādām x pakāpēm vienādības kreisajā un labajā pusē jābūt vienādiem.* Tādējādi iegūst sakarības, no kurām nosaka rindas (3) nezināmos koeficientus.

Paskaidrosim šo metodi ar piemēru.

Piemērs. **Atrisināt diferenciālvienādojumu**

$$y''=2xy'+4y, \tag{8}$$

ja ir doti sākuma nosacījumi

$$y\big|_{x=0}=0, \qquad y'\big|_{x=0}=1. \tag{9}$$

Tā kā sākuma nosacījumi ir doti argumenta vērtībai $x_0=0$, tad diferenciālvienādojuma atrisinājumu meklēsim ar pakāpju rindu

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n. \tag{10}$$

Atrodam rindas (10) atvasinājumus:

$$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}, \tag{11}$$

$$y''=1\cdot 2a_2+2\cdot 3a_3x+\ldots=\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)na_nx^{n-2}. \tag{12}$$

Ievietojot rindas (10), (11) un (12) vienādojumā (8), iegūstam vienādību

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)n\cdot a_n x^{n-2}=2x\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}+4\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n,$$

kuru pārveidojam, izmantojot rindu distributīvo īpašību:

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)n\cdot a_n x^{n-2}=\sum_{n=1}^{\infty}2na_n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}4\cdot a_n x^n.$$

Pārveidosim šo vienādību tā, lai visās rindās vispārīgajā loceklī būtu viena un tā pati x pakāpe x^{n-2}. Šajā nolūkā vienādības labajā pusē aizvietojam n ar $n-2$ un attiecīgi izmainām rindu summēšanas indeksa sākuma vērtību:

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)n\cdot a_n x^{n-2}=\sum_{n=3}^{\infty}2(n-2)a_{n-2}x^{n-2}+\sum_{n=2}^{\infty}4a_{n-2}x^{n-2}.$$

Tā kā koeficienti pie vienādām x pakāpēm vienādības kreisajā un labajā pusē ir vienādi, tad, pielīdzinot koeficientus pie x^{n-2}, iegūstam šādu vienādību:

$$(n-1)na_n=2(n-2)a_{n-2}+4a_{n-2},$$

no kurienes atrodam koeficientu a_n $(n\geqslant 2)$.

$$(n-1)na_n=(2n-4+4)a_{n-2},$$

$$a_n=\frac{2na_{n-2}}{(n-1)n}\quad \text{jeb}\quad a_n=\frac{2a_{n-2}}{n-1}. \tag{13}$$

Pēc formulas (13) var aprēķināt rindas koeficientus, ja ir zināmi divi iepriekšējie koeficienti. Piemēram, var aprēķināt a_5, ja ir zināms koeficients $a_{5-2}=a_3$; analogi koeficientu a_6 aprēķina, ja ir zināms a_4, u. tml. Tāpēc **vienādību** (13) sauc **par koeficientu aprēķināšanas rekurences formulu**.

Rindas (10) pirmos divus koeficientus atrodam, izmantojot sākuma nosacījumus (9) un rindas (10) un (11).

Tā kā

$$y|_{x=0}=0,$$

tad, ievietojot $x=0$ rindā (10), iegūstam

$$a_0=0.$$

Analogi no nosacījuma

$$y'|_{x=0}=1$$

un rindas (11) atrodam

$$a_1=1.$$

Pārējos koeficientus aprēķinām pēc rekurences formulas (13):

$$a_2=\frac{2a_{2-2}}{2-1}=\frac{2a_0}{1}=0,\qquad a_3=\frac{2a_{3-2}}{3-1}=\frac{2a_1}{2}=\frac{1}{1}=\frac{1}{1!},$$

$$a_4=\frac{2a_{4-2}}{4-1}=\frac{2a_2}{3}=0,\qquad a_5=\frac{2a_{5-2}}{5-1}=\frac{2a_3}{4}=\frac{1}{1!2}=\frac{1}{2!},$$

$$a_6=\frac{2a_{6-2}}{6-1}=\frac{2a_4}{5}=0,\qquad a_7=\frac{2a_{7-2}}{7-1}=\frac{2a_5}{6}=\frac{1}{2!3}=\frac{1}{3!}.$$

Analogi atrodam, ka

$$a_8=0,\qquad a_9=\frac{1}{4!}$$

un vispārīgajā gadījumā:

$$a_{2k}=0,\qquad a_{2k+1}=\frac{1}{k!}.$$

Tādējādi dotā diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums ir rinda

$$y=x+\frac{x^3}{1!}+\frac{x^5}{2!}+\frac{x^7}{3!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}$$

jeb

$$y=x\left(1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots\right)=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}. \tag{14}$$

Tā kā

$$e^{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!},$$

tad *rindas* (14) *summa un diferenciālvienādojuma* (8) *partikulārais atrisinājums ir funkcija*

$$y=xe^{x^2}.$$

b) Teilora koeficientu metode

Aplūkosim citu paņēmienu, kā atrod diferenciālvienādojuma atrisinājuma rindas koeficientus. Šo paņēmienu var izmantot gadījumā, ja **diferenciālvienādojums nav lineārs**.

Pieņemsim, ka ir dots 2. kārtas diferenciālvienādojums

$$y''=F(x;\, y;\, y') \tag{15}$$

ar sākuma nosacījumiem

$$y(x_0)=y_0, \qquad y'(x_0)=y'_0 \tag{16}$$

un diferenciālvienādojuma atrisinājumu $y=f(x)$ var izvirzīt Teilora rindā

$$y=f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{17}$$

Lai atrastu rindas koeficientus, jāaprēķina

$$f(x_0),\quad f'(x_0),\quad f''(x_0),\quad \ldots,\quad f^{(n)}(x_0),\quad \ldots,$$

t. i., jāatrod diferenciālvienādojuma atrisinājuma un tā atvasinājumu vērtības punktā x_0.

Pirmos divus koeficientus iegūstam no sākuma nosacījumiem:

$$f(x_0)=y\big|_{x=x_0}=y_0, \qquad f'(x_0)=y'\big|_{x=x_0}=y'_0.$$

Atvasinājumu $f''(x_0)$ atrodam, ievietojot dotajā diferenciālvienādojumā x vietā skaitli x_0 un izmantojot sākuma nosacījumus.

Tā kā

$$y''=F(x;\, y;\, y'),$$

tad

$$f''(x_0)=y''\big|_{x=x_0}=F(x_0;\, y\big|_{x=x_0};\, y'\big|_{x=x_0})=F(x_0;\, y_0;\, y'_0).$$

Lai atrastu atvasinājumu $f^{(3)}(x_0)$, vispirms ir jāatrod diferenciālvienādojuma atrisinājuma y trešās kārtas atvasinājums $y^{(3)}$. To iegūstam, atvasinot diferenciālvienādojuma (15) labās puses izteiksmi kā saliktu vairākargumentu funkciju, t. i.,

$$y^{(3)}=F'_x(x;\, y;\, y')+F'_y(x;\, y;\, y')\cdot y'+F'_{y'}(x;\, y;\, y')\cdot y''. \tag{18}$$

Ievietojot izteiksmē (18) $x=x_0$ un izmantojot iepriekš atrastās vērtības $y\big|_{x=x_0}$, $y'\big|_{x=x_0}$, $y''\big|_{x=x_0}$, aprēķinām $f^{(3)}(x_0)=y^{(3)}\big|_{x=x_0}$.

Analogi, atvasinot izteiksmi (18), atrodam $y^{(4)}$ un $f^{(4)}(x_0)=y^{(4)}\big|_{x=x_0}$ utt. Atrastās atvasinājumu vērtības ievietojot Teilora rindā (17), iegūstam diferenciālvienādojuma (15) partikulāro atrisinājumu pakāpju rindas veidā.

Piemērs. **Atrast diferenciālvienādojuma**

$$y''=xy' \tag{19}$$

partikulāro atrisinājumu ar Teilora rindu, ja

$$y\big|_{x=0}=0, \qquad y'\big|_{x=0}=1.$$

Tā kā sākuma nosacījumi ir doti argumenta vērtībai $x_0=0$, tad atrisinājumu y meklēsim ar šīs funkcijas izvirzījumu Maklorena rindā, pieņemot, ka šāds izvirzījums eksistē.

Tātad

$$y=f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \tag{20}$$

No sākuma nosacījumiem izriet, ka

$$f(0)=y\big|_{x=0}=0 \quad \text{un} \quad f'(0)=y'\big|_{x=0}=1.$$

Savukārt, ievietojot diferenciālvienādojuma (19) izteiksmē $x=0$, iegūstam

$$f''(0)=y''\big|_{x=0}=0\cdot y'\big|_{x=0}=0\cdot 1=0.$$

No diferenciālvienādojuma (19) atrodam atrisinājuma y augstāku kārtu atvasinājumus:

$$y^{(3)}=(xy')'=x'y'+x(y')'=y'+xy'',$$
$$y^{(4)}=(y'+xy'')'=y''+x'y''+x(y'')'=y''+y''+xy^{(3)}=2y''+xy^{(3)},$$
$$y^{(5)}=(2y''+xy^{(3)})'=2y^{(3)}+x'y^{(3)}+xy^{(4)}=2y^{(3)}+y^{(3)}+xy^{(4)}=3y^{(3)}+xy^{(4)}.$$

Analogi iegūstam

$$y^{(6)}=4y^{(4)}+xy^{(5)}, \qquad y^{(7)}=5y^{(5)}+xy^{(6)}$$

un vispārīgajā gadījumā:

$$y^{(n)}=(n-2)y^{(n-2)}+xy^{(n-1)}.$$

No atvasinājumu izteiksmēm atrodam

$$f^{(3)}(0)=y^{(3)}\big|_{x=0}=y'\big|_{x=0}+0=1,$$
$$f^{(4)}(0)=y^{(4)}\big|_{x=0}=2y''\big|_{x=0}+0=0,$$
$$f^{(5)}(0)=y^{(5)}\big|_{x=0}=3y^{(3)}\big|_{x=0}+0=3\cdot 1,$$
$$f^{(6)}(0)=4y^{(4)}\big|_{x=0}+0=0,$$
$$f^{(7)}(0)=5y^{(5)}\big|_{x=0}+0=5\cdot 3\cdot 1,$$

. . . .

Vispārīgajā gadījumā

$$f^{(2k)}=0 \quad \text{un} \quad f^{(2k+1)}=1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)=(2k-1)!!.$$

Ievietojot atrastās atvasinājumu vērtības rindā (20), iegūstam

$$y=f(x)=\frac{1}{1!}x+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1\cdot 3}{5!}x^5+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{7!}x^7+\ldots.$$

Piezīmes

1. Aplūkotajā diferenciālvienādojumu tuvinātās atrisināšanas izklāstā nav aplūkoti rindu konverģences jautājumi, t. i., pie kādiem nosacījumiem vienādojuma atrisinājumam eksistē izvirzījums konverģentā pakāpju rindā.

2. Pakāpju rindu metodi lieto tad, ja jāatrod atrisinājums nelielā punkta x_0 apkārtnē.

XXVIII NODAĻA

FURJĒ RINDAS. FURJĒ INTEGRĀLIS

28.1 §. PROBLĒMAS NOSTĀDNE. JĒDZIENS PAR HARMONISKO ANALĪZI

Šajā nodaļā aplūkosim funkciju rindas, kuru locekļi ir trigonometriskās funkcijas. Trigonometrisko funkciju rindas matemātikā ieviesa 18. gs. Šveices matemātiķis un fiziķis Daniels Bernulli sakarā ar periodisku procesu pētījumiem. **Periodiskas parādības** bieži ir novērojamas dabā un tehnikā, piemēram, mehāniskās svārstības, maiņstrāva, elektromagnētiskie viļņi u. tml. Visvienkāršākā periodiskā kustība ir matemātiskā svārsta svārstības jeb harmoniskās svārstības, t. i., saitei piestiprinātas lodītes kustība, ja lodīti novirza no līdzsvara stāvokļa. Šādas svārstības apraksta ar funkciju

$$y=A\sin(\omega t+\varphi_0), \tag{1}$$

kur y – svārsta novirze no līdzsvara stāvokļa pēc laika t no kustības sākuma,
A – svārstību amplitūda,
ω – svārstību frekvence,
φ_0 – svārstību sākuma fāze.

Ar izteiksmēm, kas analogas funkcijai (1), apraksta ne tikai mehāniskās svārstības, bet arī maiņstrāvas stiprumu I un spriegumu U atkarībā no laika t, kā arī citas periodiskas parādības (svārstības, viļņus), kuras aplūko elektrotehnikā, radiotehnikā, optikā.

Pārveidosim funkciju (1), izmantojot leņķu summas sinusa formulu:

$$\begin{aligned} y&=A\sin(\omega t+\varphi_0)=\\ &=A(\sin\omega t\cos\varphi_0+\cos\omega t\sin\varphi_0)=\\ &=A\cos\varphi_0\sin\omega t+A\sin\varphi_0\cos\omega t. \end{aligned}$$

Izmantojot apzīmējumus

$$A\sin\varphi_0=a,\qquad A\cos\varphi_0=b,\qquad \omega t=x,$$

iegūstam izteiksmi

$$y=a\cos x+b\sin x.$$

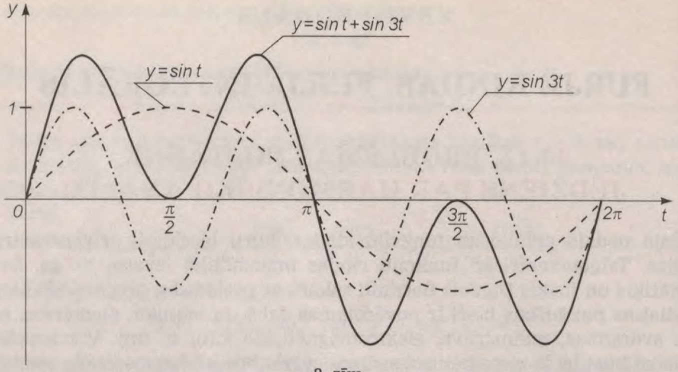
Ne katra periodiska kustība ir vienkāršās harmoniskās svārstības. Taču *bieži periodiska kustība ir vairāku vienkāršu harmonisko svārstību saliksanas jeb superpozīcijas rezultāts.* Piemēram, pieņemsim, ka funkcijas

$$y=\sin t \quad \text{un} \quad y=\sin 3t$$

apraksta divas harmoniskas svārstības, kuru sākuma fāze ir 0, amplitūdas – vienādas ar 1, bet frekvences – dažādas (attiecīgi vienādas ar 1 un 3). Šo funkciju summa

$$y=\sin t+\sin 3t$$

apraksta saliktu periodisku kustību, kas nav sinusoidālas svārstības. Par to pārliecināmies, aplūkojot 8. zīmējumā attēlotos grafikus.



8. zīm.

Vispārīgā gadījumā, saliekot n harmoniskās svārstības ar dažādām amplitūdām, frekvencēm un sākuma fāzēm (jeb izdarot šo svārstību superpozīciju), iegūstam **periodisku kustību**, kuru **apraksta funkcija**

$$y=(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+\ldots+(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

Svarīgs ir jautājums, vai katru periodisku kustību var iegūt, saliekot vairākas vienkāršās harmoniskās svārstības. Atbilde uz šo jautājumu saistīta ar trigonometrisko funkciju rindu jēdzienu.

Definīcija

Par trigonometrisko rindu sauc funkciju rindu

$$\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+\ldots+(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+\ldots=$$
$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

Ja trigonometriskā rinda konverģē uz funkciju $f(x)$, tad šī funkcija ir periodiska ar periodu 2π.

Pieņemsim, ka dotā periodiskā funkcija apraksta kādu periodisku procesu. Aplūkojot jautājumu par šī procesa sadalīšanu vienkāršās harmoniskās svārstībās, jāatrod funkcijas $f(x)$ izvirzījums trigonometriskajā rindā, t. i., *jāatrod šīs rindas koeficienti un jānoskaidro, vai šī rinda konverģē uz funkciju $f(x)$.*

Procesu pētīšanu, aplūkojot tos kā harmonisko svārstību superpozīciju, sauc par **harmonisko analīzi**.

Aplūkosim dažus jēdzienus, kas saistīti ar šo problēmu.

28.2. §. JĒDZIENS PAR FUNKCIJU ORTOGONALITĀTI. VISPĀRINĀTĀ FURJĒ RINDA

Definīcija

Nepārtrauktas funkcijas $\varphi_1(x)$ un $\varphi_2(x)$ sauc par ortogonālām funkcijām intervālā $[a;\, b]$, ja

$$\int_a^b \varphi_1(x)\cdot\varphi_2(x)\,dx=0.$$

Piemēram, funkcijas $y=\frac{1}{2}x$ un $y=6x-4$ ir ortogonālas intervālā [0; 1], jo

$$\int_0^1 \frac{1}{2}x(6x-4)\,dx=\int_0^1 (3x^2-2x)\,dx=(x^3-x^2)\Big|_0^1=1-1=0.$$

Definīcija

Nepārtrauktu funkciju virkni

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots \qquad (1)$$

sauc par ortogonālu funkciju sistēmu intervālā $[a; b]$, ***ja***

$$\int_a^b \varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\,dx=\begin{cases}0, & \text{ja } n\neq m,\\ \lambda_m^2>0, & \text{ja } n=m.\end{cases}$$

Skaitli

$$\lambda_m=\sqrt{\int_a^b \varphi_m^2(x)\,dx}$$

sauc par funkcijas $\varphi_m(x)$ **normu**.

Ja funkciju sistēma* (1) *ir ortogonāla un visu funkciju normas ir vienādas ar* 1, *tad šo funkciju sistēmu sauc par ortonormētu sistēmu.

Tātad ortonormētai funkciju sistēmai

$$\lambda_m=\sqrt{\int_a^b \varphi_m^2(x)\,dx}=1, \quad \text{t. i.,} \quad \int_a^b \varphi_m^2(x)\,dx=1 \qquad (m=1, 2, 3, \ldots).$$

Pieņemsim, ka no intervālā $[a; b]$ ortogonālu funkciju sistēmas sastādīta funkciju rinda un šīs rindas summa ir funkcija $f(x)$, t. i.,

$$f(x)=c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\ldots+c_m\varphi_m(x)+\ldots+c_n\varphi_n(x)+\ldots . \qquad (2)$$

Aplūkosim metodi, kā nosaka ortogonālu funkciju rindas koeficientus.

Lai atrastu rindas (2) koeficientu c_m ($m=1, 2, 3, \ldots$), vienādības (2) abas puses reizina ar funkciju $\varphi_m(x)$ (ar to funkciju, kuras koeficients ir c_m). Tad iegūstam rindu

$$f(x)\varphi_m(x)=c_1\varphi_1(x)\varphi_m(x)+c_2\varphi_2(x)\varphi_m(x)+\ldots+c_m\varphi_m(x)\varphi_m(x)+\ldots+$$
$$+c_n\varphi_n(x)\varphi_m(x)+\ldots . \qquad (3)$$

Pieņemot, ka rinda (3) konverģē vienmērīgi intervālā $[a; b]$, integrējam to pa locekļiem:

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)\,dx=c_1\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_m(x)\,dx+c_2\int_a^b \varphi_2(x)\varphi_m(x)\,dx+\ldots+$$
$$+c_m\int_a^b \varphi_m^2(x)\,dx+\ldots+c_n\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx+\ldots . \qquad (4)$$

Saskaņā ar funkciju sistēmas ortogonalitātes definīciju vienādības (4) labajā pusē visi integrāļi ir vienādi ar 0, izņemot integrāli, kas reizināts ar c_m; šī integrāļa vērtība ir vienāda ar $\varphi_m(x)$ normas kvadrātu λ_m^2. Tādējādi iegūstam, ka

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)\,dx=c_m\lambda_m^2,$$

no kurienes

$$c_m = \frac{\int_a^b f(x)\,\varphi_m(x)\,dx}{\lambda_m^2}$$

jeb

$$c_m = \frac{\int_a^b f(x)\,\varphi_m(x)\,dx}{\int_a^b \varphi_m^2(x)\,dx} \quad (m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{5}$$

Rindu (2) **sauc par funkcijas** $f(x)$ **vispārināto Furjē rindu**, pēc formulas (5) aprēķinātos koeficientus c_m – par **Furjē koeficientiem**, bet aplūkoto koeficientu iegūšanas metodi – par **Furjē metodi**.

Piezīme. Tā kā katra nepārtraukta funkcija ir integrējama, tad katrai intervālā $[a;\ b]$ nepārtrauktai funkcijai dotajā ortogonālo funkciju sistēmā var atrast Furjē koeficientus un tātad iegūt šīs funkcijas izvirzījumu Furjē rindā. Taču iegūtā rinda var nekonverģēt vai arī var konverģēt uz kādu citu funkciju, kas nav vienāda ar doto funkciju $f(x)$.

Praktiska nozīme ir gadījumam, kad Furjē rinda konverģē tieši uz doto funkciju $f(x)$.

Furjē rindas konverģence ir atkarīga gan no dotās funkcijas, gan arī no izraudzītās ortogonālās sistēmas funkciju īpašībām.

28.3. §. TRIGONOMETRISKO FUNKCIJU SISTĒMAS ORTOGONALITĀTE

Matemātikā izmanto dažādas ortogonālu funkciju sistēmas. *Plašāk lietotā ortogonālo funkciju sistēma ir trigonometrisko funkciju sistēma.* Pierādīsim šādu apgalvojumu.

Trigonometrisko funkciju virkne

$$1;\ \cos x;\ \sin x;\ \cos 2x;\ \sin 2x;\ \ldots;\ \cos nx;\ \sin nx;\ \ldots \tag{1}$$

ir ortogonālu funkciju sistēma intervālā $[-\pi;\ \pi]$.

Lai šo apgalvojumu pierādītu, ir jāpārliecinās, ka jebkuru divu dažādu dotās virknes funkciju reizinājuma integrālis intervālā $[-\pi;\ \pi]$ ir vienāds ar nulli, un jāatrod funkcijas kvadrāta integrālis (funkcijas normas kvadrāts).

Žozefs Furjē (1768–1830) – franču matemātiķis. Nozīmīgākie darbi matemātiskajā fizikā (siltumvadītspējas vienādojums, Furjē mainīgo atdalīšanas metode). Izveidojis harmonisko analīzi, kas ir Furjē optikas matemātiskā bāze. Matemātikā pazīstamas arī Furjē integrālās transformācijas un citi darbi.

Terminu *«ortogonālas funkcijas»* ieviesa vācu matemātiķis **Erhards Šmits** (1876–1959), bet atsevišķas ortogonālu funkciju sistēmas lietotas jau 18. gs.

Atrodot šos integrāļus, izmantosim trigonometrijas formulas

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)),$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)),$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)),$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2},\qquad \sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2},\qquad \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha.$$

1) $$\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\cos nx\,dx=\frac{1}{n}\sin nx\,\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{n}(\sin n\pi-\sin(-n\pi))=\frac{1}{n}(\sin n\pi+\sin n\pi)=$$
$$=\frac{1}{n}2\sin n\pi=0,$$

2) $$\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\sin nx\,dx=-\frac{1}{n}\cos nx\,\Big|_{-\pi}^{\pi}=-\frac{1}{n}(\cos n\pi-\cos(-n\pi))=$$
$$=-\frac{1}{n}(\cos n\pi-\cos n\pi)=0.$$

3) Ja $n\neq m$, tad

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cdot\sin mx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(n-m)x-\cos(n+m)x)\,dx=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-m}\sin(n-m)x-\frac{1}{n+m}\sin(n+m)x\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-m}(\sin(n-m)\pi-\sin(-(n-m)\pi))-\frac{1}{n+m}(\sin(n+m)\pi-\sin(-(n+m)\pi))\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-m}(\sin(n-m)\pi+\sin(n-m)\pi)-\frac{1}{n+m}(\sin(n+m)\pi+\sin(n+m)\pi)\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{n-m}\sin(n-m)\pi-\frac{2}{n+m}\sin(n+m)\pi\right)=0.$$

Analogi

4) $$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cdot\cos mx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(n-m)x+\cos(n+m)x)\,dx=0.$$

5) Ja $n\neq m$, tad

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cdot\cos mx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin(n-m)x+\sin(n+m)x)\,dx=$$
$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-m}\cos(n-m)x+\frac{1}{n+m}\cos(n+m)x\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}=$$
$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-m}(\cos(n-m)\pi-\cos(-(n-m)\pi))+\frac{1}{n+m}(\cos(n+m)\pi-\cos(-(n+m)\pi))\right)=$$
$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-m}(\cos(n-m)\pi-\cos(n-m)\pi)+\frac{1}{n+m}(\cos(n+m)\pi-\cos(n+m)\pi)\right)=$$
$$=0.$$

6) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin 2nx\, dx = -\frac{1}{4n}\cos 2nx \Big|_{-\pi}^{\pi} =$

$$= -\frac{1}{4n}(\cos 2n\pi - \cos(-2n\pi)) = -\frac{1}{4n}(\cos 2n\pi - \cos 2n\pi) = 0,$$

7) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2nx}{2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2n}\sin 2nx\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} =$

$$= \frac{1}{2}\left(\pi + \pi - \frac{1}{2n}(\sin 2n\pi - \sin(-2n\pi))\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\pi - \frac{1}{2n}(\sin 2n\pi + \sin 2n\pi)\right) = \frac{1}{2}\left(2\pi - \frac{1}{2n}\, 2\sin 2n\pi\right) =$$

$$= \pi + 0 = \pi.$$

Analogi

8) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2nx}{2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2n}\sin 2nx\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi,$

9) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1^2\, dx = x\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi - (-\pi) = \pi + \pi = 2\pi.$

Līdz ar to ir pierādīts, ka trigonometrisko funkciju virkne (1) intervālā $[-\pi; \pi]$ veido ortogonālu funkciju sistēmu; turklāt funkciju $\sin nx$ un $\cos nx$ normas kvadrāts ir vienāds ar skaitli π ($n = 1, 2, 3, \ldots$), bet funkcijas $f(x) = 1$ normas kvadrāts ir 2π. □

28.4. §. PERIODISKAS FUNKCIJAS IZVIRZĪJUMS FURJĒ RINDĀ, JA FUNKCIJAS PERIODS IR 2π

Pieņemsim, ka *funkcija* $f(x)$, kuras periods ir 2π, *intervālā* $[-\pi; \pi]$ *ir integrējama un šai funkcijai eksistē izvirzījums trigonometriskajā rindā*, t. i.,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \ldots =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (1)$$

Tā kā šīs rindas locekļi ir intervālā $[-\pi; \pi]$ ortogonālas funkcijas, tad rindas koeficientus var atrast, izmantojot 28.2. § aplūkoto Furjē metodi.

Lai aprēķinātu a_0, integrējam pa locekļiem rindu (1) intervālā $[-\pi; \pi]$, pieņemot, ka šajā intervālā rinda konverģē vienmērīgi uz funkciju $f(x)$. Tad iegūstam

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\, dx + \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right) dx =$$

$$= \frac{a_0}{2}\, 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx + b_n \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx\right) = \pi a_0 .$$

Tātad

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx. \tag{2}$$

Noteiksim koeficientus a_m ($m=1, 2, 3, \ldots$). Šajā nolūkā saskaņā ar Furjē metodi vispirms vienādība (1) ir jāreizina ar to funkciju, kuras koeficients rindā (1) ir a_m, t. i., jāreizina ar $\cos mx$. Pēc tam iegūtā rinda jāintegrē pa locekļiem intervālā $[-\pi; \pi]$, pieņemot, ka šī rinda konverģē vienmērīgi. Tādējādi:

$$f(x)\cos mx = \frac{a_0}{2}\cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cdot \cos mx + b_n \sin nx \cdot \cos mx).$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\, dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos mx\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cdot \cos mx + b_n \sin nx \cdot \cos mx)\, dx =$$

$$= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx\, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos mx\, dx\right). \tag{3}$$

Vienādības (3) labajā pusē visi integrāļi ir vienādi ar nulli, izņemot integrāli

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos mx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx\, dx = \pi;$$

šī integrāļa koeficients rindā (3) ir a_m. Tādējādi

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\, dx = a_m \pi,$$

no kurienes

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\, dx. \tag{4}$$

Analogi aprēķinām koeficientus b_m ($m=1, 2, 3, \ldots$), t. i., reizinot vienādību (1) ar $\sin mx$ un integrējot intervālā $[-\pi; \pi]$:

$$f(x)\sin mx = \frac{a_0}{2}\sin mx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cdot \sin mx + b_n \sin nx \cdot \sin mx).$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx\, dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \sin mx\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cdot \sin mx + b_n \sin nx \cdot \sin mx)\, dx =$$

$$= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \sin mx\, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx\, dx\right). \tag{5}$$

Vienādības (5) labajā pusē visi integrāļi ir vienādi ar nulli, izņemot integrāli

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin mx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx\, dx = \pi;$$

šī integrāļa koeficients rindā (5) ir b_m. Tādējādi

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx\, dx = b_m \pi,$$

no kurienes

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx\, dx. \tag{6}$$

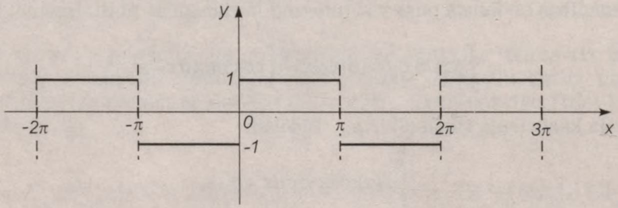
Tātad rindas (1) koeficientus aprēķina pēc formulām (2), (4), (6).

Piemērs. **Sastādīt Furjē rindu funkcijai**

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{ja } x \in [-\pi;\ 0), \\ 1, & \text{ja } x \in [0;\ \pi], \end{cases}$$

pieņemot, ka $f(x)$ ir periodiska funkcija ar periodu 2π, t. i.,

$$f(x+2\pi) = f(x) \quad \forall\ x \in (-\infty;\ +\infty) \qquad \text{(sk. 9. zīm.).}$$



9. zīm.

Atrodam Furjē rindas koeficientus:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} (-1)\, dx + \int_{0}^{\pi} 1\, dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(-x \Big|_{-\pi}^{0} + x \Big|_{0}^{\pi} \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}(-\pi + \pi) = 0.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} (-1) \cdot \cos nx\, dx + \int_{0}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{0}^{\pi} \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} (-\sin 0 + \sin(-n\pi) + \sin n\pi - \sin 0) = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} (-1) \cdot \sin nx\, dx + \int_{0}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\cos nx \Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n}\cos nx \Big|_{0}^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{n\pi}(\cos 0 - \cos(-n\pi) - \cos n\pi + \cos 0) =$$

$$= \frac{1}{n\pi}(1 - \cos n\pi - \cos n\pi + 1) = \frac{2}{n\pi}(1 - \cos n\pi) =$$

$$= \frac{2}{n\pi}(1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0, & \text{ja } n \text{ ir pāra skaitlis,} \\ \dfrac{4}{n\pi}, & \text{ja } n \text{ ir nepāra skaitlis.} \end{cases}$$

Tātad dotās funkcijas Furjē rindā ir tikai sinusa funkcijas, kuru argumenti ir x, $3x$, $5x$, $7x$, ..., $(2k-1)x$, ..., t. i.,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx =$$

$$= \frac{4}{\pi}\sin x + \frac{4}{3\pi}\sin 3x + \frac{4}{5\pi}\sin 5x + \ldots + \frac{4}{(2k-1)\pi}\sin(2k-1)x + \ldots =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots + \frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x + \ldots\right).$$

Šīs rindas dažu parciālsummu grafiki un dotās funkcijas grafiks attēloti 10. zīmējumā. Kā redzams, palielinot locekļu skaitu parciālsummās, ar tām arvien precīzāk var aproksimēt funkciju $f(x)$ intervālos, kuros šī funkcija ir nepārtraukta; funkcijas pārtraukuma punktos πk ($k = 0, 1, 2, \ldots$) parciālsummu vērtība ir 0. Tādējādi, ja dotā funkcija $f(x)$ apraksta kādu periodisku procesu, piemēram, periodiski mainīgu spriegumu uz kondensatora platēm, tad ar šīs funkcijas izvirzījumu Furjē rindā to var aplūkot kā bezgalīgi daudzu sinusoidālu spriegumu superpozīciju (salikšanu).

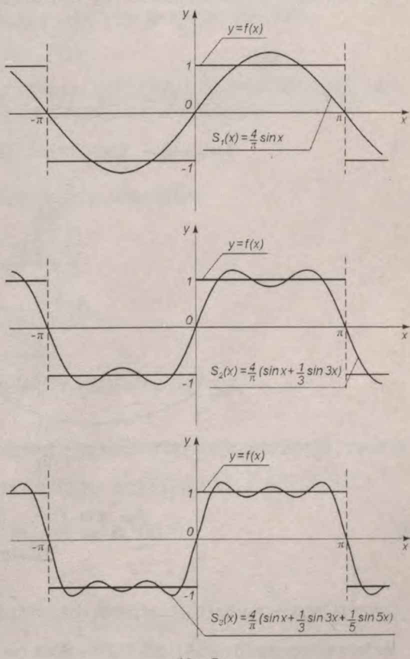
Ja integrējamas funkcijas $f(x)$ periods ir 2π, tad tās Furjē rinda ir

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

kur $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$



10. zīm.

28.5. §. JĒDZIENS PAR FURJĒ RINDAS KONVERĢENCI. DIRIHLĒ TEORĒMA

Iepriekšējā paragrāfā atradām funkcijas $f(x)$ Furjē rindas koeficientu a_0, a_n, b_n aprēķināšanas formulas, balstoties uz pieņēmumu, ka eksistē trigonometriskā rinda, kas intervālā $[-\pi; \pi]$ vienmērīgi konverģē uz funkciju $f(x)$. Pēc šīm formulām aprēķinot koeficientu vērtības, iegūstam funkcijai $f(x)$ atbilstošo Furjē rindu. Taču ir jānoskaidro, kādi nosacījumi jāapmierina funkcijai $f(x)$, lai šādi iegūtā rinda konverģētu un rindas summa būtu dotā funkcija $f(x)$.

Aplūkosim (bez pierādījuma) vienu no Furjē rindas konverģences pietiekamo nosacījumu teorēmām.

Dirihlē teorēma

Ja 1) **$f(x)$ ir periodiska funkcija un tās periods ir 2π;**

2) **intervālā $[-\pi; \pi]$ $f(x)$ ir nepārtraukta funkcija vai arī šajā intervālā tai ir galīgs skaits pirmā veida pārtraukuma punktu;**

3) **intervālā $[-\pi; \pi]$ $f(x)$ ir monotona funkcija vai arī tai ir galīgs skaits ekstrēma punktu,**

tad 1) **funkcijas $f(x)$ Furjē rinda konverģē un tās summa ir funkcija $S(x)$;**

2) **$S(x)=f(x)$ visos punktos, kuros $f(x)$ ir nepārtraukta funkcija;**

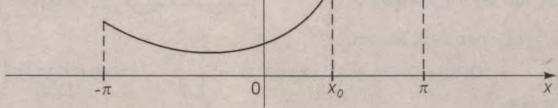
3) **ja punkts x_0 ir funkcijas $f(x)$ pirmā veida pārtraukuma punkts, tad šajā punktā Furjē rindas summas $S(x)$ vērtība ir**

$$S(x_0)=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2},$$

kur

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0} f(x) \quad \text{(funkcijas robeža no labās puses)},$$

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x) \quad \text{(funkcijas robeža no kreisās puses)}.$$



$$A=\lim_{x\to x_0-0} f(x),\quad B=\lim_{x\to x_0+0} f(x)$$

11. zīm.

Pēters Gustavs Dirihlē (1805–1859) – vācu matemātiķis.

Dirihlē teorēmas nosacījumi ir spēkā ļoti plašai funkciju klasei. Patiešām, ar katru elementāru funkciju, kurai intervālā $[-\pi; \pi]$ nav otrā veida pārtraukuma punktu, var definēt periodisku funkciju, kuras periods ir 2π; tātad, aprēķinot atbilstošos Furjē koeficientus, šo funkciju var izvirzīt Furjē rindā.

Dirihlē teorēmas nosacījumus apmierina arī iepriekšējā paragrāfa piemērā aplūkotā funkcija $f(x)$ (sk. 9. zīm.). Intervālā $[-\pi; \pi]$ šai funkcijai ir viens pirmā veida pārtraukums punktā $x_0=0$. Tā kā

$$\lim_{x\to -0} f(x)=-1 \quad \text{un} \quad \lim_{x\to +0} f(x)=1,$$

tad punktā $x=0$ rindas summa ir

$$\frac{-1+1}{2}=0.$$

Kā redzams 10. zīmējumā, arī šīs funkcijas Furjē rindas visu parciālsummu grafiki Ox asi krusto punktos 0; $\pm\pi$; $\pm 2\pi$; ... .

28.6 §. PERIODISKAS FUNKCIJAS IZVIRZĪJUMS FURJĒ RINDĀ, JA FUNKCIJAS PERIODS IR $2l$

Pieņemsim, ka funkcijas $f(x)$ periods nav 2π, bet ir kāds cits skaitlis, kuru apzīmēsim ar $2l$, t. i., ar visām argumenta x vērtībām ir spēkā vienādība

$$f(x+2l)=f(x).$$

Lai varētu izmantot izvirzījumu Furjē rindā un koeficientu aprēķināšanas formulas, kuras ieguvām funkcijai ar periodu 2π, **lietosim substitūciju**

$$x=\frac{l}{\pi}t \tag{1}$$

un pārliecināsimies, ka attiecībā pret argumentu t funkcijas

$$f(x)=f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$$

periods ir 2π.

Patiešām, tā kā

$$f(x+2l)=f(x),$$

tad

$$f\left(\frac{l}{\pi}(t+2\pi)\right)=f\left(\frac{l}{\pi}t+2l\right)=f(x+2l)=f(x)=f\left(\frac{l}{\pi}t\right).$$

Tādējādi funkcijai $f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$ var izmantot 28.4. § aplūkoto izvirzījumu Furjē rindā (1) un šīs rindas koeficientu aprēķināšanas formulas (2), (4) un (6), t. i.,

$$f\left(\frac{l}{\pi}t\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt), \tag{2}$$

kur

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right)dt, \quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\cos nt\,dt, \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\sin nt\,dt. \tag{3}$$

Lai pārietu uz mainīgo lielumu x, ievietojam rindā (2) $t=\frac{\pi}{l}x$ (sk. substitūciju (1)). Līdz ar to

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\frac{\pi}{l}x+b_n\sin n\frac{\pi}{l}x\right), \tag{4}$$

kur koeficientus a_0, a_n, b_n aprēķinām, izdarot mainīgo substitūciju integrāļos (3):

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{l}{\pi}t\right)dt=\left[\begin{array}{l}x=\frac{l}{\pi}t,\quad t=\frac{\pi}{l}x,\quad dt=\frac{\pi}{l}dx;\\ \text{ja } t=-\pi, \text{ tad } x=-l;\\ \text{ja } t=\pi, \text{ tad } x=l.\end{array}\right]=\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}f(x)\frac{\pi}{l}dx=$$

$$=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\,dx.$$

Tātad

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\,dx. \tag{5}$$

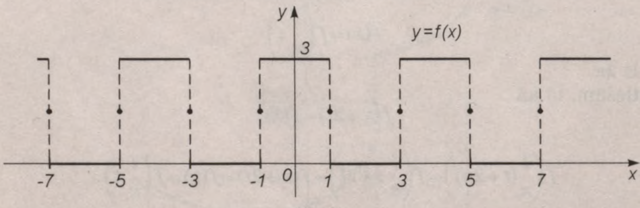
Analogi iegūstam

$$\left.\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos n\frac{\pi}{l}x\,dx,\\ b_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin n\frac{\pi}{l}x\,dx.\end{aligned}\right. \tag{6}$$

Piemērs. **Atrast Furjē rindu funkcijai**

$$f(x)=\begin{cases}3, & \text{ja } -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{ja } \quad 1<x\leqslant 3,\end{cases}$$

un $f(x+4)=f(x)\quad \forall\, x\in(-\infty;+\infty)$ (sk. 12. zīm.).



12. zīm.

Dotās funkcijas periods $2l=4$, tātad $l=2$ un, ievērojot vienādību (4), šīs funkcijas Furjē rinda ir šāda:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\frac{\pi}{2}x+b_n\sin n\frac{\pi}{2}x\right).$$

Atrodam rindas koeficientus, izmantojot formulas (5) un (6).

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{3}f(x)\,dx=\frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1}3\,dx+\int_{1}^{3}0\,dx\right)=\frac{1}{2}\cdot 3x\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{2}\cdot 3(1+1)=3,$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{3}f(x)\cos n\frac{\pi}{2}x\,dx=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{-1}^{1}3\cos n\frac{\pi}{2}x\,dx+\int\limits_{1}^{3}0\cos n\frac{\pi}{2}x\,dx\right)=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{n\pi}\sin n\frac{\pi}{2}x\,\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{3}{n\pi}\left(\sin n\frac{\pi}{2}-\sin\left(-n\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{3}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{2}+\sin\frac{n\pi}{2}\right)=$$

$$=\frac{6}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, \text{ ja } n=2k,\\ \dfrac{6}{n\pi}, \text{ ja } n=4k+1,\\ -\dfrac{6}{n\pi}, \text{ ja } n=4k+3 \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),\end{cases}$$

jo

n	1	2	3	4	5	6	7	...
$\sin\frac{n\pi}{2}$	1	0	-1	0	1	0	-1	...

$$b_n=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{3}f(x)\sin n\frac{\pi}{2}x\,dx=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{-1}^{1}3\sin n\frac{\pi}{2}x\,dx+\int\limits_{1}^{3}0\sin n\frac{\pi}{2}x\,dx\right)=$$

$$=-\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{n\pi}\cos n\frac{\pi}{2}x\,\Bigg|_{-1}^{1}=-\frac{3}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-\cos\left(-\frac{n\pi}{2}\right)\right)=$$

$$=-\frac{3}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-\cos\frac{n\pi}{2}\right)=0.$$

Tātad dotās funkcijas Furjē rindā ir tikai kosinusa funkcijas. Ievērojot koeficientu a_n vērtības dažādām n vērtībām, atrodam

$$f(x)=\frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{2}x=$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{6}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x-\frac{6}{3\pi}\cos\frac{3\pi}{2}x+\frac{6}{5\pi}\cos\frac{5\pi}{2}x-\frac{6}{7\pi}\cos\frac{7\pi}{2}x+\ldots=$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{6}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2}x-\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}x+\frac{1}{5}\cos\frac{5\pi}{2}x-\frac{1}{7}\cos\frac{7\pi}{2}x+\ldots\right).$$

Intervālā $(-1;\ 3)$ funkcijai $f(x)$ ir viens pirmā veida pārtraukuma punkts $x_0=1$. Tā kā

$$\lim_{x\to1-0}f(x)=3 \quad \text{un} \quad \lim_{x\to1+0}f(x)=0,$$

tad saskaņā ar Dirihlē teorēmu Furjē rindas summas vērtība šajā punktā ir

$$\frac{3+0}{2}=\frac{3}{2} \qquad \text{(sk. 12. zīm.).}$$

Acīmredzot arī šī intervāla galos rindas summa ir $\frac{3}{2}$. Pārējos intervāla punktos Furjē rinda konverģē uz doto funkciju $f(x)$.

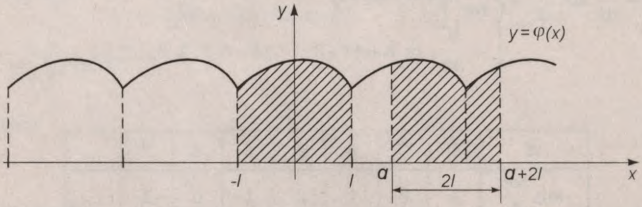
Piezīme. Aprēķinot Furjē rindas koeficientus, bieži ir izdevīgi izmantot šādu periodiskas funkcijas noteiktā integrāļa īpašību.

Ja funkcijas $\varphi(x)$ periods ir $2l$, tad jebkurā intervālā, kura garums ir $2l$, funkcijas $\varphi(x)$ noteiktajam integrālim ir viena un tā pati vērtība, t. i.,

$$\int_{-l}^{l} \varphi(x)\,dx = \int_{a}^{a+2l} \varphi(x)\,dx, \tag{7}$$

kur a ir brīvi izraudzīts skaitlis.

Īpašība ilustrēta 13. zīmējumā. Patiešām, var pierādīt, ka iesvītroto līklīnijas trapeču laukumi ir vienādi, un tātad ir spēkā vienādība (7).



13. zīm.

Ja $a=0$, tad no vienādības (7) iegūstam

$$\int_{-l}^{l} \varphi(x)\,dx = \int_{0}^{2l} \varphi(x)\,dx.$$

Ja funkcijas $f(x)$ periods ir $2l$, tad arī funkciju $f(x)\cos n\frac{\pi}{l}x$ un $f(x)\sin n\frac{\pi}{l}x$ periods ir $2l$. Tādējādi no vienādībām (5) un (6) izriet, ka, aprēķinot Furjē koeficientus, var lietot arī šādas formulas:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\cos n\frac{\pi}{l}x\,dx, \tag{8}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\sin n\frac{\pi}{l}x\,dx.$$

Ja integrējamas funkcijas $f(x)$ periods ir $2l$, tad tās Furjē rinda ir

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\frac{\pi}{l}x + b_n\sin n\frac{\pi}{l}x\right),$$

kur $a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx,$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos n\frac{\pi}{l}x\,dx, \quad n=1, 2, 3, \ldots \qquad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin n\frac{\pi}{l}x\,dx, \quad n=1, 2, 3, \ldots$$

28.7. §. PĀRA UN NEPĀRA FUNKCIJU FURJĒ RINDAS

Aprēķinot noteikto integrāli ap koordinātu sākumpunktu simetriskā intervālā, parasti noskaidro, vai integrējamā funkcija ir pāra funkcija vai - nepāra funkcija, un izmanto šādu īpašību.

Ja $\varphi(x)$ ***ir pāra funkcija un integrējama intervālā*** $[-l; l]$, ***tad***

$$\int_{-l}^{l} \varphi(x)\,dx = 2\int_{0}^{l} \varphi(x)\,dx.$$

Ja $\varphi(x)$ ***ir nepāra funkcija un integrējama intervālā*** $[-l; l]$, ***tad***

$$\int_{-l}^{l} \varphi(x)\,dx = 0.$$

Pieņemsim, ka **funkcija** $f(x)$, kuru izvirza Furjē rindā, ir **pāra funkcija**, t. i.,

$$f(-x) = f(x) \qquad \forall\ x \in D(f).$$

Tad $f(x)\cdot\cos n\frac{\pi}{l}x$ arī ir pāra funkcija, bet $f(x)\cdot\sin n\frac{\pi}{l}x$ ir nepāra funkcija.

Patiešām,

$$f(-x)\cdot\cos n\frac{\pi}{l}(-x) = f(-x)\cdot\cos\left(-n\frac{\pi}{l}x\right) = f(x)\cdot\cos n\frac{\pi}{l}x$$

un

$$f(-x)\cdot\sin n\frac{\pi}{l}(-x) = f(-x)\cdot\sin\left(-n\frac{\pi}{l}x\right) = -f(x)\cdot\sin n\frac{\pi}{l}x.$$

Līdz ar to, aprēķinot Furjē koeficientus, iegūstam

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos n\frac{\pi}{l}x\,dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos n\frac{\pi}{l}x\,dx, \tag{1}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin n\frac{\pi}{l}x\,dx = 0.$$

Tātad ***pāra funkcijas Furjē rinda satur tikai kosinusa funkcijas.***

Ja $f(x)$ ir **nepāra funkcija**, t. i.,

$$f(-x) = -f(x) \qquad \forall\ x \in D(f),$$

tad $f(x)\cdot\cos n\frac{\pi}{l}x$ ir nepāra funkcija, bet $f(x)\cdot\sin n\frac{\pi}{l}x$ ir pāra funkcija.

Patiešām,

$$f(-x)\cdot\cos n\frac{\pi}{l}(-x) = -f(x)\cos\left(-n\frac{\pi}{l}x\right) = -f(x)\cdot\cos n\frac{\pi}{l}x$$

un

$$f(-x)\cdot\sin n\frac{\pi}{l}(-x) = -f(x)\sin\left(-n\frac{\pi}{l}x\right) = -\left(-f(x)\sin n\frac{\pi}{l}x\right) = f(x)\sin n\frac{\pi}{l}x.$$

Līdz ar to, aprēķinot Furjē koeficientus nepāra funkcijas gadījumā, iegūstam

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx=0,$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos n\frac{\pi}{l}x\,dx=0, \tag{2}$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin n\frac{\pi}{l}x\,dx=\frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin n\frac{\pi}{l}x\,dx.$$

Tātad ***nepāra funkcijas Furjē rinda satur tikai sinusa funkcijas***.

Ja $f(x)$ ir pāra funkcija, tad tās *Furjē rinda satur tikai kosinusa funkcijas:*

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos n\frac{\pi}{l}x,$$

kur $a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx,\qquad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos n\frac{\pi}{l}x\,dx,\qquad n=1,2,3,\ldots$

Ja $f(x)$ ir nepāra funkcija, tad tās *Furjē rinda satur tikai sinusa funkcijas:*

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin n\frac{\pi}{l}x,$$

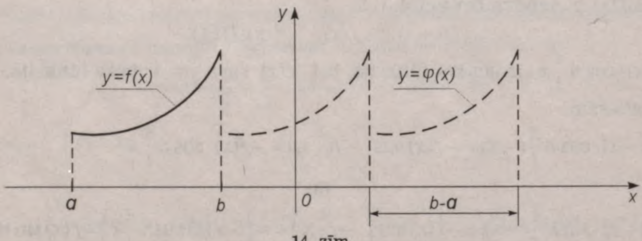
kur $b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin n\frac{\pi}{l}x\,dx,\qquad n=1,2,3,\ldots$

28.8. §. NEPERIODISKAS FUNKCIJAS IZVIRZĪJUMS FURJĒ RINDĀ

Bieži ir nepieciešams atrast izvirzījumu Furjē rindā arī neperiodiskai funkcijai $f(x)$, kas definēta intervālā $[a;\,b]$ un apmierina Dirihlē teorēmas nosacījumus. Šajā nolūkā definē periodisku palīgfunkciju $\varphi(x)$ ar periodu $2l=b-a$, kura visos intervāla $[a;\,b]$ punktos ir vienāda ar funkciju $f(x)$, t. i.,

$$\varphi(x)=f(x)\quad \forall\, x\in[a;\,b],$$

$$\varphi(x+2l)=\varphi(x+(b-a))=\varphi(x)\qquad \text{(sk. 14. zīm.).}$$



14. zīm.

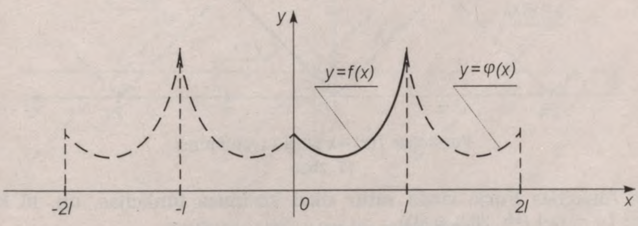
Palīgfunkcija $\varphi(x)$ ir periodiska un apmierina Dirihlē teorēmas nosacījumus. Tātad eksistē Furjē rinda, kas konverģē uz funkciju $\varphi(x)=f(x)$ visos intervāla $[a;\ b]$ punktos, kuros $f(x)$ ir nepārtraukta funkcija. Intervāla galos rindas summa ir $\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.

Īpaši aplūko gadījumu, kad funkcija $f(x)$ ir definēta intervālā $[0;\ l]$. Tad parasti definē periodisku palīgfunkciju $\varphi(x)$ ar periodu $2l$ tā, lai $\varphi(x)$ būtu vai nu pāra funkcija, vai nepāra funkcija.

Ja $\varphi(x)$ ir **pāra funkcija**, tad to sauc par funkcijas $f(x)$ **pāra turpinājumu** (15. zīm.). Tātad pāra turpinājuma gadījumā funkciju $\varphi(x)$ definē šādi:

$$\varphi(x)=\begin{cases} f(x), & \text{ja } x\in[0;\ l], \\ f(-x), & \text{ja } x\in[-l;\ 0], \end{cases}$$

$$\varphi(x+2l)=\varphi(x).$$



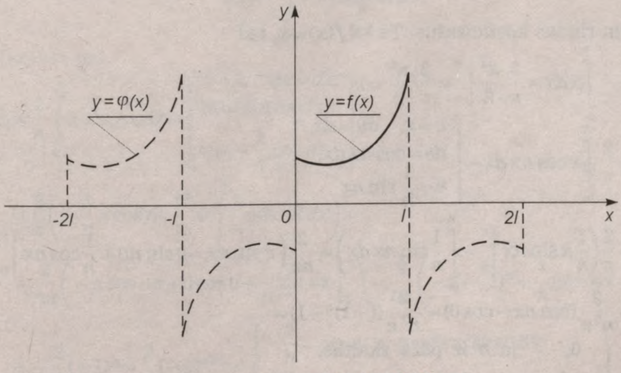
Funkcijas $f(x)$ pāra turpinājums

15. zīm.

Ja $\varphi(x)$ ir **nepāra funkcija**, tad to sauc par funkcijas $f(x)$ **nepāra turpinājumu** (16. zīm.). Nepāra turpinājuma gadījumā funkciju $\varphi(x)$ definē šādi:

$$\varphi(x)=\begin{cases} f(x), & \text{ja } x\in[0;\ l], \\ -f(-x), & \text{ja } x\in[-l;\ 0], \end{cases}$$

$$\varphi(x+2l)=\varphi(x).$$



Funkcijas $f(x)$ nepāra turpinājums

16. zīm.

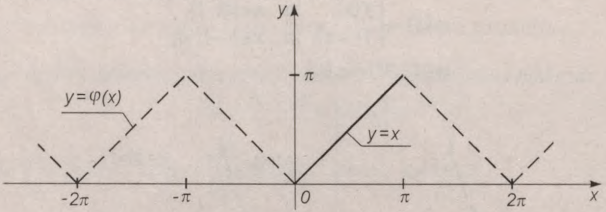
Ja neperiodisku funkciju izvirza Furjē rindā, *izmantojot šīs funkcijas pāra turpinājumu, tad Furjē rinda satur tikai kosinusa funkcijas* un rindas koeficientus aprēķina pēc iepriekšējā paragrāfā iegūtajām formulām (1). Ja *izmanto dotās funkcijas nepāra turpinājumu, tad Furjē rinda satur tikai sinusa funkcijas* un rindas koeficientus aprēķina pēc iepriekšējā paragrāfā iegūtajām formulām (2).

Piemērs. **Izvirzīt Furjē rindā neperiodisku funkciju $f(x)=x$, kas definēta intervālā** $[0;\pi]$,

1) **izmantojot funkcijas $f(x)$ pāra turpinājumu,**

2) **izmantojot funkcijas $f(x)$ nepāra turpinājumu.**

1. Aplūkosim tādu periodisku pāra funkciju $\varphi(x)$ ar periodu 2π, kura intervālā $[0;\pi]$ ir vienāda ar funkciju $f(x)=x$ (17. zīm.).



Funkcijas $f(x)=x$ pāra turpinājums

17. zīm.

Šīs funkcijas Furjē rinda satur tikai kosinusa funkcijas, un, tā kā šajā gadījumā $l=\pi$, tad (sk. 28.8. §. (1))

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx, \qquad (*)$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx.$$

Aprēķinām rindas koeficientus. Tā kā $f(x)=x$, tad

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2}=\pi,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=\begin{bmatrix} u=x, & du=dx, \\ dv=\cos nx\,dx, & \\ v=\dfrac{1}{n}\sin nx & \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}x\sin nx\Bigg|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{1}{n}\sin nx\,dx\right)=\frac{2}{n\pi}\left(\pi\sin n\pi-0\sin n0+\frac{1}{n}\cos nx\Bigg|_0^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-\cos 0)=\frac{2}{n^2\pi}((-1)^n-1)=$$

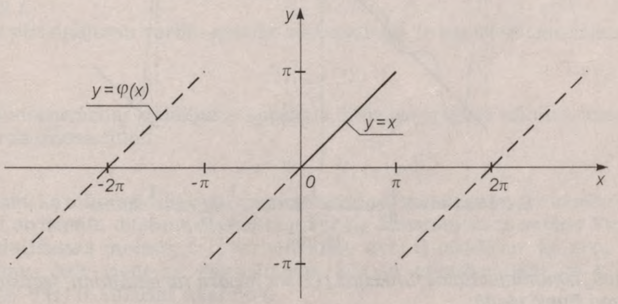
$$=\begin{cases} 0, & \text{ja } n \text{ ir pāra skaitlis,} \\ -\dfrac{4}{n^2\pi}, & \text{ja } n \text{ ir nepāra skaitlis.}\end{cases}$$

Tātad Furjē rindā (*) ir tikai kosinusa funkcijas, kuru argumenti ir x, $3x$, $5x$, … . Līdz ar to, *izmantojot funkcijas $f(x)=x$ pāra turpinājumu, iegūstam šādu izvirzījumu Furjē rindā*:

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\dots\right).$$

Tā kā pāra turpinājumā ir iegūta nepārtraukta funkcija, tad *šī rinda konverģē uz $f(x)=x$ visos intervāla* $[0;\pi]$ *punktos.*

2. Aplūkosim tādu periodisku nepāra funkciju $\varphi(x)$ ar periodu 2π, kura intervālā $[0;\pi]$ ir vienāda ar funkciju $f(x)=x$ (18. zīm.).



Funkcijas $f(x)=x$ nepāra turpinājums

18. zīm.

Nepāra funkcijas Furjē rinda satur tikai sinusa funkcijas; tā kā šajā gadījumā $l=\pi$, tad (sk. 28.8. §. (2))

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

kur

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

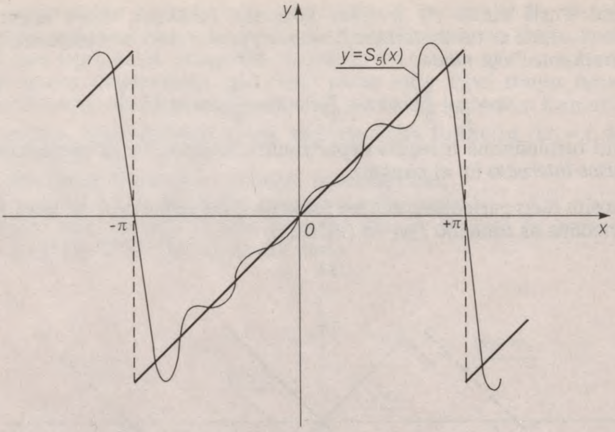
Tā kā $f(x)=x$, tad

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx=\left[\begin{array}{l} u=x, \quad du=dx, \\ dv=\sin nx\,dx, \\ v=-\dfrac{1}{n}\cos nx \end{array}\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}x\cos nx\,\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{1}{n}\cos nx\,dx\right)=$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left(-\pi\cos n\pi+0\cos 0+\frac{1}{n}\sin nx\,\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{2}{n\pi}\left(-\pi(-1)^n+\frac{1}{n}(\sin n\pi-\sin 0)\right)=$$

$$=-\frac{2}{n}(-1)^n=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}=\begin{cases} \dfrac{2}{n}, & \text{ja } n \text{ ir nepāra skaitlis} \\ -\dfrac{2}{n}, & \text{ja } n \text{ ir pāra skaitlis} \end{cases}$$



$$S_5(x)=2(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{5}\sin 5x)$$

19. zīm.

Tātad, *izmantojot dotās funkcijas $f(x)=x$ nepāra turpinājumu, iegūstam šādu izvirzījumu Furjē rindā*:

$$x=2\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{4}\sin 4x+\ldots\right).$$

Nepāra turpinājumā iegūtajai funkcijai punktos $\pi+2\pi k$ ir 1. veida pārtraukumi (sk. 18. zīm.). Tātad saskaņā ar Dirihlē teorēmu šajos punktos Furjē rindas summa ir $\frac{\pi+(-\pi)}{2}=0$. Ja $x\in[0;\pi)$, tad rinda konverģē uz funkciju $f(x)=x$. 19. zīmējumā attēlots šīs rindas parciālsummas S_5 grafiks (t. i., pirmo piecu locekļu summa).

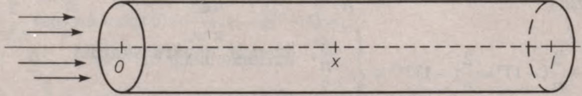
28.9. §. FURJĒ RINDAS LIETOJUMU PIEMĒRS

Furjē rindas plaši izmanto dažādās augstākās matemātikas, fizikas un inženierzinātņu nozarēs. Kā vienu no lietojumu piemēriem aplūkosim Furjē metodi, atrisinot difūzijas vienādojumu.

Dabā ir plaši izplatīti tā sauktie masas pārneses jeb **difūzijas procesi**, kuros molekulu kustības dēļ sajaucas divas vielas (gāzes vai šķidrumi). Šādu procesu var raksturot ar difundējošās vielas koncentrācijas izmaiņu.

Aplūkosim vielas difūzijas procesu cilindra veida apgabalā cilindra simetrijas ass virzienā, pieņemot, ka cilindra garums ir l.

Izraudzīsimies koordinātu asi tā, kā parādīts 20. zīmējumā.



20. zīm.

Difundējošās vielas koncentrācija apgabala punktā, kura abscisa ir x, laika momentā t ir atkarīga no koordinātas x un no laika t. Tātad koncentrācija ir divu argumentu x un t funkcija, kuru apzīmēsim ar

$$u=u(x;\ t).$$

Aplūkotajā gadījumā **difūzijas procesu var aprakstīt ar parciālo diferenciālvienādojumu**

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

kura izvedumu šeit neaplūkosim. Zinot šī vienādojuma atrisinājumu – funkciju $u=u(x;\ t)$, var noteikt vielas koncentrāciju u apgabala punktā x dotajā laika momentā t.

Lai atrisinājumu varētu noteikt viennozīmīgi, ir nepieciešams sākuma nosacījums

$$u\big|_{t=0}=f(x) \tag{2}$$

(vielas koncentrācijas sadalījums apgabalā difūzijas procesa sākuma momentā) un divi robežnosacījumi:

$$u\big|_{x=0}=0, \qquad u\big|_{x=l}=0 \tag{3}$$

(pieņemam, ka difundējošās vielas koncentrācija apgabala galos ir vienāda ar nulli).

Lai atrisinātu diferenciālvienādojumu (1), izmantojam tā saukto **Furjē mainīgo atdalīšanas metodi**, t. i., atrisinājumu $u(x;\ t)$ meklējam kā divu funkciju reizinājumu, kur viens no reizinātājiem $X(x)$ ir atkarīgs tikai no x, bet otrs reizinātājs $T(t)$ ir atkarīgs tikai no t.
Tātad

$$u(x;\ t)=X(x)\cdot T(t). \tag{4}$$

Atrodam funkcijas u atvasinājumus

$$\frac{\partial u}{\partial t}=X\cdot T', \qquad \frac{\partial u}{\partial x}=X'\cdot T, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=X''\cdot T,$$

kurus ievietojam vienādojumā (1). Tad iegūstam vienādību

$$X\cdot T'=a^2X''\cdot T.$$

Atdalām mainīgos lielumus X un T, dalot šīs vienādības abas puses ar a^2XT:

$$\frac{T'}{a^2T}=\frac{X''}{X}. \tag{5}$$

Vienādības (5) kreisās puses izteiksme nav atkarīga no x, bet labās puses izteiksme nav atkarīga no t. Tātad vienādība ir iespējama tad un tikai tad, ja abās vienādības pusēs izteiksmes nav atkarīgas ne no x, ne arī no t, t. i., ja šīs izteiksmes ir konstantas. Apzīmēsim katru no šīm izteiksmēm ar $-\lambda^2$. (Attiecībai $\frac{T'}{a^2T}$ jābūt negatīvai; pretējā gadījumā iegūst, ka $T\to\infty$, ja $t\to\infty$, kas neatbilst atrisinājuma fizikālai jēgai.)

No vienādībām

$$\frac{T'}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda^2$$

iegūstam divus parastos diferenciālvienādojumus

$$X''+\lambda^2X=0 \tag{6}$$

un

$$T'+a^2\lambda^2T=0. \tag{7}$$

Vienādojums (6) ir lineārs homogēns 2. kārtas diferenciālvienādojums ar konstantiem koeficientiem (šādu vienādojumu atrisināšana aplūkota 17.4. §). Diferenciālvienādojuma (6) raksturīgajam vienādojumam

$$k^2+\lambda^2=0$$

ir kompleksas saknes

$$k_1=\lambda i \quad \text{un} \quad k_2=-\lambda i \qquad (\lambda>0).$$

Tātad vienādojuma (6) vispārīgais atrisinājums

$$X=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x, \tag{8}$$

kur A un B ir konstantes.

No vienādojuma (1) robežnosacījumiem

$$u\big|_{x=0}=0, \qquad u\big|_{x=l}=0$$

un izteiksmes

$$u=X\cdot T$$

izriet, ka arī

$$X\big|_{x=0}=0 \quad \text{un} \quad X\big|_{x=l}=0.$$

Tādējādi no (8) iegūstam vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} A\cos\lambda 0+B\sin\lambda 0=0 \\ A\cos\lambda l+B\sin\lambda l=0. \end{cases}$$

No sistēmas pirmā vienādojuma seko, ka $A=0$, un līdz ar to no otrā vienādojuma iegūstam, ka

$$B\sin\lambda l=0, \tag{9}$$

kur $B\neq 0$, jo pretējā gadījumā iegūstam triviālo atrisinājumu $X=0$ un tātad arī $u=0$, kas neatbilst procesa fizikālai jēgai.

Tādējādi no vienādības (9) iegūstam, ka

$$\sin\lambda l=0,$$

no kurienes

$$\lambda l=\pi n \quad \text{jeb} \quad \lambda_n=\frac{\pi n}{l}, \qquad n\in\mathbf{N}. \tag{10}$$

Tātad koeficients λ un arī vienādojuma (6) atrisinājums (8) ir atkarīgs no n vērtībām, t. i.,

$$X_n=B_n\sin\frac{\pi n}{l}x. \tag{11}$$

Atrastās λ_n vērtības (10), kas ir atkarīgas no n, **sauc par dotās problēmas īpašvērtībām un tām atbilstošās funkcijas X_n – par īpašfunkcijām**.

Atrisināsim vienādojumu (7).

Tā kā

$$T'+a^2\lambda^2 T=0,$$

tad

$$\frac{dT}{dt}=-a^2\lambda^2 T,$$

no kurienes

$$\frac{dT}{T}=-a^2\lambda^2\,dt,$$

$$\int\frac{dT}{T}=-a^2\lambda^2\int dt,$$

$$\ln|T| = -a^2\lambda^2 t + \ln|C|, \qquad \ln|T| = \ln|Ce^{-a^2\lambda^2 t}|$$

jeb

$$T = Ce^{-a^2\lambda^2 t}.$$

Ievietojot šai izteiksmē λ vietā īpašvērtības (10), iegūstam šādu vienādojuma (7) atrisinājuma izteiksmi:

$$T_n = C_n e^{-a^2\frac{\pi^2 n^2}{l^2}t}. \tag{12}$$

Tādējādi katrai n vērtībai atbilst noteiktas funkcijas X_n un T_n un līdz ar to – arī dotā vienādojuma (1) atrisinājums

$$u_n = X_n \cdot T_n,$$

kuru pierakstām šādi:

$$u_n(x;\, t) = D_n e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t} \cdot \sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{13}$$

kur ar D_n apzīmēts koeficientu B_n un C_n reizinājums.

Tā kā vienādojums (1) ir lineārs homogēns diferenciālvienādojums, tad šo vienādojumu apmierina arī tā atrisinājumu (13) summa. Vispārinot šo īpašību, iegūstam diferenciālvienādojuma atrisinājumu rindas veidā

$$u(x;\, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x;\, t)$$

jeb

$$u(x;\, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t} \cdot \sin\frac{\pi n}{l}x. \tag{14}$$

Lai atrastu koeficientus D_n, izmantojam sākuma nosacījumu (2):

$$u\big|_{t=0} = f(x).$$

Ievietojot izteiksmē (14) $t=0$ un $u(x;\, t)$ vietā $f(x)$, iegūstam

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Difūzijas vienādojumam

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ar sākuma nosacījumu

$$u\Big|_{t=0} = f(x)$$

un robežnosacījumiem

$$u\Big|_{x=0} = 0, \qquad u\Big|_{x=l} = 0$$

atrisinājums ir funkcija

$$u(x;\, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Ja funkcijai $f(x)$ intervālā $[0;\, l]$ eksistē izvirzījums Furjē rindā, tad koeficientus D_n aprēķina pēc Furjē rindas koeficientu formulas:

$$D_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx.$$

Kā redzams, šī izteiksme ir intervālā [0; l] definētas funkcijas $f(x)$ izvirzījums Furjē rindā, izmantojot šīs funkcijas nepāra turpinājumu. Tātad rindas (14) koeficientus D_n var aprēķināt, izmantojot Furjē koeficientu b_n formulu, t. i.,

$$D_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin n\frac{\pi}{l}x\,dx.$$

Ar **diferenciālvienādojumu (1)** var aprakstīt ne tikai difūzijas procesu, bet arī siltuma vadīšanas parādību, piemēram, stienī – tā simetrijas ass virzienā. Tāpēc šo vienādojumu **sauc arī par siltuma vadīšanas vienādojumu**, kur ar $u(x;\,t)$ apzīmē temperatūru laika momentā t stieņa punktā, kura abscisa ir x.

Parciālos diferenciālvienādojumus, kas apraksta dažādus fizikālus procesus, sauc par **matemātiskās fizikas vienādojumiem**. Atrisinot šos vienādojumus, bieži izmanto Furjē metodi un Furjē rindas koeficientu izteiksmes.

28.10. §. FURJĒ INTEGRĀLIS

Pieņemsim, ka

1) $f(x)$ ir absolūti integrējama funkcija intervālā $(-\infty;\,+\infty)$, t. i., **konverģē neīstais integrālis**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx,$$

2) funkcijai $f(x)$ jebkurā intervālā $[-l;\,l]$ **eksistē izvirzījums Furjē rindā**, t. i.,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x + b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right), \tag{1}$$

kur

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi}{l}t\,dt, \tag{2}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{n\pi}{l}t\,dt.$$

Pārveidosim rindu (1), ievietojot tajā koeficientu izteiksmes (2). Turklāt, izpildot pārveidojumus, ievērosim, ka koeficientu izteiksmēs integrēšanas mainīgais lielums ir t un tātad tās sinusa un kosinusa funkcijas, kuru arguments ir x, var ienest aiz integrāļu zīmes (jo šīs funkcijas nav atkarīgas no mainīgā t).

Tādējādi iegūstam

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x + b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right) =$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi}{l}t\,dt\right)\cos\frac{n\pi}{l}x + \left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{n\pi}{l}t\,dt\right)\sin\frac{n\pi}{l}x\right) =$$

$$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi}{l}x\cos\frac{n\pi}{l}t\,dt+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}t\,dt\right)=$$

$$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\left(\cos\frac{n\pi}{l}x\cos\frac{n\pi}{l}t+\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}t\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x-\frac{n\pi}{l}t\right)dt.$$

Tātad

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi}{l}(x-t)\,dt. \tag{3}$$

Izmantosim apzīmējumu

$$\frac{n\pi}{l}=\omega_n,\quad \text{kur } n=1,2,3,\ldots. \tag{4}$$

Tātad

$$\omega_1=\frac{1\cdot\pi}{l},\quad \omega_2=\frac{2\pi}{l},\quad \ldots,\quad \omega_n=\frac{n\pi}{l},\quad \ldots.$$

Acīmredzot starpība starp katrām divām pēc kārtas aplūkotām ω_n vērtībām ir $\frac{\pi}{l}$. Apzīmēsim šo starpību ar $\Delta\omega$.

Vispārīgajā gadījumā

$$\Delta\omega=\omega_{n+1}-\omega_n=\frac{(n+1)\pi}{l}-\frac{n\pi}{l}=\frac{n\pi+\pi-n\pi}{l}=\frac{\pi}{l}.$$

No vienādības

$$\Delta\omega=\frac{\pi}{l}$$

izsakām

$$\frac{1}{l}=\frac{1}{\pi}\Delta\omega. \tag{5}$$

Ievietojot rindā (3) izteiksmes (4) un (5), atrodam

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\Delta\omega\int_{-l}^{l} f(t)\cos\omega_n(x-t)\,dt;$$

jeb

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cos\omega_n(x-t)\,dt\right)\Delta\omega. \tag{6}$$

Funkcijas $f(x)$ izvirzījums Furjē rindā (6) ir spēkā katram galīgam intervālam $[-l;\ l]$. Pieņemot, ka analoga sakarība ir pareiza arī bezgalīga intervāla $(-\infty;\ +\infty)$ gadījumā, noskaidrosim, kā izmainās šī izteiksme, ja neierobežoti paplašina intervālu $[-l;\ l]$, t. i., ja $l\to\infty$.

Vispirms pierādīsim, ka

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt=0.$$

Patiešām, saskaņā ar nosacījumu par funkciju $f(x)$ neīstais integrālis

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$$

konverģē.

Tas nozīmē, ka eksistē galīga robeža

$$\lim_{l\to\infty}\int_{-l}^{l} |f(t)|\,dt=I.$$

Saskaņā ar noteiktā integrāļa īpašībām ir spēkā nevienādība

$$\left|\int_{-l}^{l} f(t)\,dt\right| \leqslant \int_{-l}^{l} |f(t)|\,dt;$$

tāpēc

$$\lim_{l\to\infty}\left|\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt\right| \leqslant \lim_{l\to\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} |f(t)|\,dt=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{2l}\cdot\lim_{l\to\infty}\int_{-l}^{l} |f(t)|\,dt=0\cdot I=0.$$

Līdz ar to arī

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt=0.$$

Tātad, aplūkojot izteiksmes (6) robežu, kad $l\to\infty$, iegūstam

$$f(x)=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cos\omega_n(x-t)\,dt\right)\Delta\omega. \tag{7}$$

Noskaidrosim, ar ko ir vienāda šī robeža.

Katrai fiksētai x vērtībai rindas locekļi ir funkcijas

$$\varphi(x;\,\omega)=\int_{-l}^{l} f(t)\cos\omega(x-t)\,dt$$

vērtības punktos $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$, kas reizinātas ar intervāla $\omega_{n+1}-\omega_n$ garumu $\Delta\omega$. Tādējādi šī rinda ir analoga funkcijas $\varphi(x;\,\omega)$ integrālsummai, kas sastādīta bezgalīgā intervālā $(0;\,+\infty)$.

No vienādības $\Delta\omega=\frac{\pi}{l}$ izriet, ka

$$\Delta\omega\to 0, \quad \text{ja} \quad l\to\infty.$$

Līdz ar to intuitīvi ir saprotams, ka robeža (7) ir funkcijas $\varphi(x;\,\omega)$ neīstais integrālis intervālā $[0;\,+\infty)$.

Var arī matemātiski korekti pierādīt, ka

$$\lim_{l\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cos\omega(x-t)\,dt\right)\Delta\omega=\int_{0}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega(x-t)\,dt\right)d\omega.$$

Līdz ar to no izteiksmes (7) izriet, ka **punktos, kuros funkcija** $f(x)$ **ir nepārtraukta, ir spēkā vienādība**

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega(x-t)\,dt\right)d\omega. \tag{8}$$

Pārveidosim formulu (8), izmantojot argumentu starpības kosinusa formulu. Tā kā

$$\cos\omega(x-t)=\cos(\omega x-\omega t)=\cos\omega x\cos\omega t+\sin\omega x\sin\omega t,$$

tad

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega x\cos\omega t\,dt+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega x\sin\omega t\,dt\right)d\omega.$$

Funkcijas $\cos\omega x$ un $\sin\omega x$ nav atkarīgas no integrēšanas mainīgā lieluma t, un tās var iznest pirms integrāļu zīmes kā konstantus reizinātājus:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\left(\cos\omega x\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega t\,dt+\sin\omega x\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega t\,dt\right)d\omega. \tag{9}$$

Izmantojot apzīmējumus

$$\begin{aligned} a(\omega)&=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega t\,dt,\\ b(\omega)&=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega t\,dt, \end{aligned} \tag{10}$$

integrāli (9) var pārrakstīt šādi:

$$f(x)=\int\limits_{0}^{+\infty}(a(\omega)\cos\omega x+b(\omega)\sin\omega x)\,d\omega. \tag{11}$$

Integrāli (11) ***sauc par funkcijas*** $f(x)$ ***Furjē integrāli.*** Par Furjē integrāļa konverģenci ir spēkā šāda **teorēma**.

Ja funkcija $f(x)$ ***ir***

1) ***gabaliem diferencējama katrā slēgtā intervālā,***
2) ***absolūti integrējama intervālā*** $(-\infty;+\infty)$,

tad

1) ***Furjē integrālis*** (11) ***konverģē uz funkciju*** $f(x)$ ***visos punktos, kuros*** $f(x)$ ***ir nepārtraukta,***
2) ***ja*** x_0 ***ir funkcijas*** $f(x)$ ***pirmā veida pārtraukuma punkts, tad šajā punktā Furjē integrāļa vērtība ir***

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2},$$

kur $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$, $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$.

Ievērosim, ka Furjē integrālis (11) un tā **koeficientu izteiksmes** (10) ir analogas Furjē rindas un tās koeficientu izteiksmēm. Tādējādi Furjē integrāli fizikāli var interpretēt šādi: *tas ir funkcijas* $f(x)$ *izvirzījums pēc vienkāršākajām harmoniskām svārstībām (harmonikām), kuru frekvence* ω *nepārtraukti mainās no* 0 *līdz* $+\infty$.

Līdzīgi kā Furjē rindai, arī Furjē integrālim aplūko gadījumus, kad $f(x)$ ir pāra funkcija un kad $f(x)$ ir nepāra funkcija.

1. Pāra funkcijas Furjē integrālis

Ja *$f(x)$ ir pāra funkcija*, tad

$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,dt=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,dt, \tag{12}$$

$$b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t\,dt=0.$$

Tādējādi pāra funkcijas gadījumā Furjē integrāļa izteiksme ir šāda:

$$f(x)=\int\limits_{0}^{+\infty} a(\omega)\cos\omega x\,d\omega. \tag{13}$$

2. Nepāra funkcijas Furjē integrālis

Ja *$f(x)$ ir nepāra funkcija*, tad

$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,dt=0,$$

$$b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t\,dt=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\sin\omega t\,dt. \tag{14}$$

Tātad nepāra funkcijai Furjē integrāļa izteiksme ir šāda:

$$f(x)=\int\limits_{0}^{+\infty} b(\omega)\sin\omega x\,d\omega. \tag{15}$$

Ja funkcija $f(x)$ ir definēta intervālā $[0;\,+\infty)$, tad, sastādot šīs funkcijas Furjē integrāli, var izmantot funkcijas pāra turpinājumu vai arī nepāra turpinājumu.

Piemērs. **Atrast Furjē integrāli funkcijai $f(x)=e^{-kx}$, ja $k>0$ un $x\in[0;\,+\infty)$, izmantojot šīs funkcijas**

1) pāra turpinājumu; 2) nepāra turpinājumu.

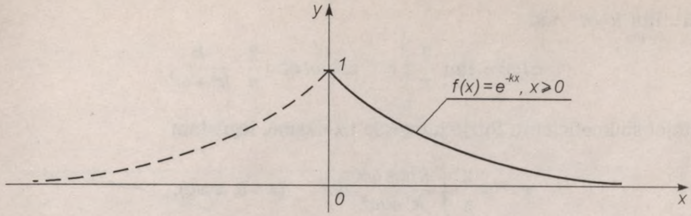
Vispirms pārliecināsimies, ka *dotā funkcija ir absolūti integrējama intervālā* $[0;\,+\infty)$. Patiešām, tā kā

$$|e^{-kx}|=e^{-kx},$$

tad

$$\int\limits_{0}^{+\infty}|f(x)|\,dx=\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-kx}dx=\lim_{l\to+\infty}\int\limits_{0}^{l}e^{-kx}dx=\lim_{l\to+\infty}\left(-\frac{1}{k}e^{-kx}\right)\Bigg|_{0}^{l}=$$

$$=-\frac{1}{k}\lim_{l\to+\infty}(e^{-kl}-1)=\frac{1}{k}.$$



21. zīm.

1. Aplūkosim funkcijas **pāra turpinājuma** gadījumu (21. zīm.).
Saskaņā ar formulām (13) un (12)

$$e^{-kx}=\int_0^{+\infty} a(\omega)\cos\omega x\,d\omega,$$

kur

$$a(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-kt}\cos\omega t\,dt=\frac{2}{\pi}\lim_{l\to+\infty}\int_0^{l} e^{-kt}\cos\omega t\,dt \qquad (l>0).$$

Integrējot parciāli, atrodam integrāli

$$I=\int e^{-kt}\cos\omega t\,dt=\left[\begin{array}{ll} u=e^{-kt}, & du=-ke^{-kt}dt, \\ dv=\cos\omega t\,dt, & v=\frac{1}{\omega}\sin\omega t \end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{\omega}e^{-kt}\sin\omega t+\frac{k}{\omega}\int e^{-kt}\sin\omega t\,dt=\left[\begin{array}{ll} u=e^{-kt}, & du=-ke^{-kt}, \\ dv=\sin\omega t\,dt, & v=-\frac{1}{\omega}\cos\omega t \end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{\omega}e^{-kt}\sin\omega t+\frac{k}{\omega}\left(-\frac{1}{\omega}e^{-kt}\cos\omega t-\frac{k}{\omega}\int e^{-kt}\cos\omega t\,dt\right).$$

Tātad

$$I=\frac{1}{\omega}e^{-kt}\sin\omega t-\frac{k}{\omega^2}e^{-kt}\cos\omega t-\frac{k^2}{\omega^2}I,$$

no kurienes

$$I=\frac{e^{-kt}(\omega\sin\omega t-k\cos\omega t)}{k^2+\omega^2}.$$

Tādējādi

$$\int_0^l e^{-kt}\cos\omega t\,dt=\frac{1}{k^2+\omega^2}e^{-kt}(\omega\sin\omega t-k\cos\omega t)\Big|_0^l=$$

$$=\frac{1}{k^2+\omega^2}(e^{-kl}(\omega\sin\omega l-k\cos\omega l)-e^0(\omega\sin 0-k\cos 0))=$$

$$=\frac{1}{k^2+\omega^2}(e^{-kl}(\omega\sin\omega l-k\cos\omega l)+k).$$

Ja $l\to+\infty$, tad

$$e^{-kl}\to 0 \quad \text{un arī} \quad e^{-kl}(\omega\sin\omega l-k\cos\omega l)\to 0$$

kā bezgalīgi mazas funkcijas reizinājums ar ierobežotu funkciju.

Tā kā $\lim\limits_{l\to+\infty} k=k$, tad

$$a(\omega)=\lim_{l\to+\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^l e^{-kt}\cos\omega t\,dt=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{k}{k^2+\omega^2}.$$

Ievietojot šo koeficientu Furjē integrāļa izteiksmē, iegūstam

$$e^{-kx}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{k\cos\omega x}{k^2+\omega^2}\,d\omega \qquad (k>0,\ x\geqslant 0).$$

Tā kā pāra turpinājumā ir iegūta nepārtraukta funkcija, tad *šis integrālis konverģē uz funkciju e^{-kx} visā intervālā* $[0; +\infty)$.

Tādu pašu Furjē integrāļa izteiksmi var iegūt funkcijai $f(x)=e^{kx}$ intervālā $(-\infty; 0]$.

Tātad

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{k\cos\omega x}{k^2+\omega^2}\,d\omega=\begin{cases}e^{-kx}, & \text{ja } x\geqslant 0,\\ e^{kx}, & \text{ja } x<0.\end{cases} \tag{16}$$

Funkcijas $f(x)$ **Furjē integrālis**

$$f(x)=\int_0^{+\infty}(a(\omega)\cos\omega x+b(\omega)\sin\omega x)\,d\omega,$$

kur

$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega t\,dt,$$

$$b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega t\,dt.$$

Pāra funkcijas Furjē integrālis

$$f(x)=\int_0^{+\infty}a(\omega)\cos\omega x\,d\omega,$$

kur

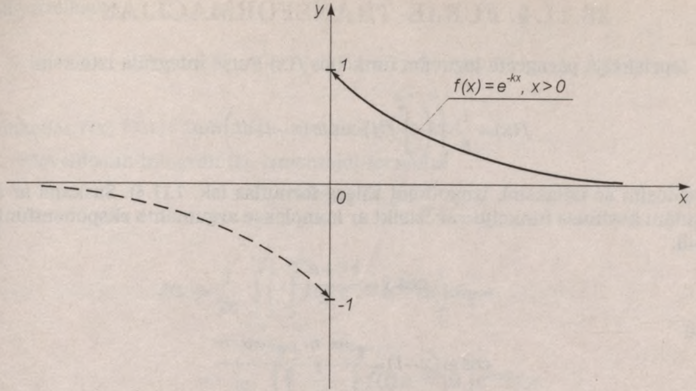
$$a(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(t)\cos\omega t\,dt.$$

Nepāra funkcijas Furjē integrālis

$$f(x)=\int_0^{+\infty}b(\omega)\sin\omega x\,d\omega,$$

kur

$$b(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(t)\sin\omega t\,dt.$$



22. zīm.

2. Aplūkosim funkcijas **nepāra turpinājumu** (22. zīm.).

Izmantojam formulas (15) un (14), saskaņā ar kurām

$$e^{-kx}=\int_{0}^{+\infty} b(\omega)\sin\omega x\,d\omega,$$

kur

$$b(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} e^{-kt}\sin\omega t\,dt.$$

Analogi kā iepriekš aplūkotajā pāra turpinājuma gadījumā, integrējot parciāli, iegūstam

$$b(\omega)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\omega}{k^2+\omega^2}.$$

Tātad

$$e^{-kx}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\omega\sin\omega x}{k^2+\omega^2}\,d\omega.$$

Nepāra turpinājumā iegūtajai funkcijai ir *pārtraukums punktā* $x_0=0$. Šajā punktā Furjē integrāļa vērtība ir nulle.

Tādu pašu Furjē integrāļa izteiksmi var iegūt arī funkcijai $-e^{kx}$ intervālā $(-\infty;\,0)$.

Tādējādi

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\omega\sin\omega x}{k^2+\omega^2}\,d\omega=\begin{cases} e^{-kx}, & \text{ja } x>0,\\ -e^{kx}, & \text{ja } x<0,\\ 0, & \text{ja } x=0.\end{cases} \tag{17}$$

28.11. §. FURJĒ TRANSFORMĀCIJAS

Iepriekšējā paragrāfā ieguvām funkcijas $f(x)$ Furjē integrāļa izteiksmi

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega(x-t)\,dt\right)d\omega.$$

Pārveidosim šo izteiksmi, izmantojot Eilera formulas (sk. 7.11. §). Saskaņā ar šīm formulām kosinusa funkciju var izteikt ar kompleksa argumenta eksponentfunkciju šādi:

$$\cos y=\frac{e^{yi}+e^{-yi}}{2}.$$

Tātad

$$\cos\omega(x-t)=\frac{e^{\omega(x-t)i}+e^{-\omega(x-t)i}}{2}$$

un

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\left(e^{\omega(x-t)i}+e^{-\omega(x-t)i}\right)dt\right)d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{\omega(x-t)i}dt\right)d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-\omega(x-t)i}dt\right)d\omega.$$

Otrajā integrālī izdarīsim šādu mainīgo substitūciju:

$$\omega=-u,\quad d\omega=-du;\quad \text{ja } \omega\to+\infty,\ \text{tad}\quad u\to-\infty.$$

Līdz ar to šo integrāli var pārveidot

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-\omega(x-t)i}dt\right)d\omega=-\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{-\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{u(x-t)i}dt\right)du=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{u(x-t)i}dt\right)du.$$

Tā kā integrāļa vērtība nav atkarīga no tā, kā apzīmē integrēšanas mainīgo lielumu, tad u vietā atkal var ievietot ω. Tad iegūstam šādu izteiksmi:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{\omega(x-t)i}dt\right)d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{\omega(x-t)i}dt\right)d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{0}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{\omega(x-t)i}dt\right)d\omega+\int_{0}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{\omega(x-t)i}dt\right)d\omega\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{\omega(x-t)i}dt\right)d\omega.$$

Iegūtā izteiksme

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{\omega(x-t)i}\,dt\right)d\omega \tag{1}$$

ir funkcijas $f(x)$ **Furjē integrāļa kompleksā forma**.

Pārveidosim integrāli (1), izmantojot formulu

$$e^{\omega(x-t)i}=e^{\omega xi}\cdot e^{-\omega ti}.$$

Tad

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{-\omega ti}e^{\omega xi}\,dt\right)d\omega=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{-\omega ti}\,dt\right)e^{\omega xi}\,d\omega. \tag{2}$$

Apzīmējot

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{-\omega ti}\,dt, \tag{3}$$

integrāli (2) var pārrakstīt šādi:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\,e^{\omega xi}\,d\omega. \tag{4}$$

Izmantojot formulu **(3)**, no funkcijas f pāriet uz funkciju F; šo pāreju ***sauc par funkcijas** f **Furjē transformāciju***, funkciju f ***sauc par oriģinālu, bet funkciju** F – **par attēlu***. Savukārt, izmantojot formulu **(4)**, no attēla – funkcijas F var pāriet uz oriģinālu – funkciju f; šo pāreju ***sauc par apgriezto jeb inverso Furjē transformāciju***, formulu (4) sauc par **inversijas formulu**.

Funkcijas $f(x)$ **Furjē integrāļa kompleksā forma**

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{\omega(x-t)i}\,dt\right)d\omega.$$

Funkcijas $f(x)$ Furjē transformācija

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{-\omega ti}\,dt,$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\ }}2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\,e^{\omega xi}\,d\omega.$$

Pieņemsim, ka $f(x)$ **ir pāra funkcija**. Tā kā šajā gadījumā Furjē integrāļa izteiksme ir šāda (sk. 28.10. § (13), (12)):

$$f(x)=\int_0^{+\infty} a(\omega)\cos\omega x\,d\omega,$$

kur

$$a(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,dt,$$

tad

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,dt\right)\cos\omega x\,d\omega=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,dt\right)\cos\omega x\,d\omega.$$

Apzīmēsim

$$F_C(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,dt, \tag{5}$$

tad

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} F_C(\omega)\cos\omega x\,d\omega. \tag{6}$$

Vienādību **(5)** ***sauc par funkcijas f Furjē kosinustransformāciju***, bet vienādību **(6)** – ***par šīs transformācijas inverso transformāciju***.

Analogi, ja $f(x)$ **ir nepāra funkcija**, tad (sk. 28.10. § (15), (14))

$$f(x)=\int_0^{+\infty} b(\omega)\sin\omega x\,d\omega,$$

kur

$$b(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\sin\omega t\,dt.$$

Ievietojot iegūstam

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\sin\omega t\,dt\right)\sin\omega x\,d\omega=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(t)\sin\omega t\,dt\right)\sin\omega x\,d\omega.$$

Apzīmēsim

$$F_S(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(t)\sin\omega t\,dt, \tag{7}$$

tad

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} F_S(\omega)\sin\omega x\,d\omega. \tag{8}$$

Vienādību **(7)** ***sauc par funkcijas f Furjē sinustransformāciju***, bet vienādību **(8)** – ***par šīs transformācijas inverso transformāciju***.

Ievērosim, ka ar integrāli (5), t. i., ar Furjē kosinustransformāciju atrod funkciju F_C pēc funkcijas f. Savukārt ar tādu pašu kosinustransformāciju (6) atrod funkciju f pēc funkcijas F_C. Tātad katra no funkcijām f un F_C ir otras funkcijas Furjē kosinustransformācija. Funkcijas f un F_C Košī sauca par **1. veida savstarpēji saistītām funkcijām**.

Analogi saskaņā ar formulām (7) un (8) katra no funkcijām f un F_S ir otras funkcijas Furjē sinustransformācija. Košī šādas funkcijas sauca par **2. veida savstarpēji saistītām funkcijām.**

Piemērs. **Atrast funkcijas** $f(x)=e^{-kx}$

1) **Furjē kosinustransformāciju,**

2) **Furjē sinustransformāciju,**

ja $x>0$.

1. Furjē kosinustransformāciju atrodam, izmantojot formulu (5):

$$F_C(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,dt.$$

Šajā gadījumā

$$F_C(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-kt}\cos\omega t\,dt.$$

Iepriekšējā paragrāfa piemērā atradām, ka

$$\int_0^{+\infty} e^{-kt}\cos\omega t\,dt=\frac{k}{k^2+\omega^2}.$$

Tātad

$$F_C(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{k}{k^2+\omega^2}.$$

Līdz ar to saskaņā ar inversās Furjē transformācijas formulu (6)

$$e^{-kx}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{k}{k^2+\omega^2}\cos\omega x\,d\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{k\cos\omega x}{k^2+\omega^2}\,d\omega.$$

Pāra funkcijas $f(x)$ Furjē kosinustransformācija

$$F_C(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,dt$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} F_C(\omega)\cos\omega x\,d\omega$$

Nepāra funkcijas $f(x)$ Furjē sinustransformācija

$$F_S(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(t)\sin\omega t\,dt$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} F_S(\omega)\sin\omega x\,d\omega$$

2. Funkcijas $f(x)=e^{-kx}$ Furjē sinustransformāciju atrodam pēc formulas (7):

$$F_S(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(t)\sin\omega t\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-kt}\sin\omega t\,dt.$$

Integrējot parciāli, iegūstam

$$\int_0^{+\infty} e^{-kt}\sin\omega t\,dt=\frac{\omega}{k^2+\omega^2}.$$

Tātad

$$F_S(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega}{k^2+\omega^2},$$

bet saskaņā ar inversās Furjē sinustransformācijas formulu (8)

$$e^{-kx}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega}{k^2+\omega^2}\sin\omega x\,d\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\omega\sin\omega x}{k^2+\omega^2}d\omega.$$

APLŪKOTO JĒDZIENU FIZIKĀLĀ INTERPRETĀCIJA

Kā norādīts iepriekš, ar Furjē rindu matemātiski apraksta periodisku procesu kā harmonisko svārstību superpozīciju, ja frekvencēm ir diskrētas vērtības. So svārstību frekvenču kopu sauc par diskrētu frekvenču spektru, bet Furjē koeficientu kopu – par svārstību amplitūdu spektru. Analogi *ar Furjē integrāli matemātiski apraksta neperiodisku procesu kā bezgalīgi daudzu harmonisko svārstību superpozīciju ar nepārtrauktu frekvenču spektru.* No Furjē integrāļa kompleksās formas izriet, ka šo **svārstību amplitūdu sadalījumu pa frekvencēm raksturo funkcijas f Furjē transformācijas attēls, t. i., funkcija**

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-\omega t i}dt,$$

ko ***sauc par funkcijas f spektrālo funkciju***. $|F(\omega)|$ ***sauc par amplitūdu spektru***.

Šādu dotās funkcijas f spektrālu attēlu izmanto, pētot dažādus fizikālus lielumus (strāvas stiprumu, spriegumu, spēku, spiedienu u. c.). Furjē transformācijas aplūko arī kā dažādu elektronisko ierīču (pastiprinātāju, pārveidotāju) darbības matemātisko modeli. Tāpēc tās plaši izmanto radiofizikā, radiotehnikā, pētot dažādas automātiskās regulēšanas sistēmas u. c. praktiskos lietojumos.

Tāpat kā Furjē rindu lietojumos, ***procesu pētīšanu ar Furjē integrāļa un Furjē transformāciju palīdzību sauc par harmonisko analīzi***.

Piemērs. **Atrast funkcijas**

$$f(x)=\begin{cases} e^{-kx}, & \text{ja } x\geqslant 0,\ k>0\\ 0, & \text{ja } x<0\end{cases}$$

spektrālo funkciju

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-\omega t i}dt$$

un amplitūdu spektru $|F(\omega)|$.

Tā kā $f(x)=0$ intervālā $(-\infty;\ 0)$ un $f(x)=e^{-kx}$ intervālā $[0;\ +\infty)$, tad

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\omega ti}dt=\int_{0}^{+\infty} e^{-kx}e^{-\omega ti}dt=\int_{0}^{+\infty} e^{-(k+\omega i)t}dt=\lim_{l\to+\infty}\left(-\frac{e^{-(k+\omega i)t}}{k+\omega i}\Bigg|_{0}^{l}\right)=$$

$$=-\lim_{l\to+\infty}\left(\frac{e^{-(k+\omega i)l}}{k+\omega i}-\frac{e^{-(k+\omega i)0}}{k+\omega i}\right)=-\left(0-\frac{1}{k+\omega i}\right)=\frac{1}{k+\omega i}.$$

Lai atrastu amplitūdu spektru $|F(\omega)|$, pārveidojam $F(\omega)$ kompleksā skaitļa normālformā, izmantojot komplekso skaitļu dalīšanas algoritmu:

$$F(\omega)=\frac{1}{k+\omega i}=\frac{k-\omega i}{(k+\omega i)(k-\omega i)}=\frac{k-\omega i}{k^2+\omega^2}=\frac{k}{k^2+\omega^2}-\frac{\omega}{k^2+\omega^2}\,i.$$

Tad pēc kompleksā skaitļa moduļa formulas iegūstam

$$|F(\omega)|=\sqrt{\left(\frac{k}{k^2+\omega^2}\right)^2+\left(\frac{-\omega}{k^2+\omega^2}\right)^2}=\sqrt{\frac{k^2+\omega^2}{(k^2+\omega^2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{k^2+\omega^2}}.$$

Šo pašu rezultātu var iegūt arī vienkāršāk; tā kā

$$|F(\omega)|=\left|\frac{1}{k+\omega i}\right|=\frac{|1|}{|k+\omega i|},$$

tad

$$|F(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{k^2+\omega^2}}.$$

Svarīgs Furjē transformāciju lietojums ir šo transformāciju izmantošana, atrisinot dažādus matemātiskās fizikas vienādojumus. Šo lietojumu pamatā ir īpašība, ka Furjē transformācijas attēls – funkcija F bieži apmierina vienkāršāku vienādojumu nekā šīs transformācijas oriģināls – funkcija f (sk. 28.11 §. izteiksmes (3) un (4)). Tāpēc vienādojumu var atrisināt pēc šādas shēmas. Vispirms ar Furjē transformācijas palīdzību to pārveido (transformē) par vienkāršāku vienādojumu, kuru apmierina transformācijas attēla funkcija. P i e m ē r a m, parciālo diferenciālvienādojumu var pārveidot par parasto diferenciālvienādojumu. Iegūto vienādojumu atrisina, t. i., atrod Furjē transformācijas attēlu un pēc tam ar inversās transformācijas palīdzību atrod Furjē transformācijas oriģinālu – dotā vienādojuma atrisinājumu.

Bez Furjē transformācijām matemātiskajā fizikā, funkciju teorijā, matemātiskajā analīzē izmanto arī citas integrāltransformācijas (Laplasa, Mellina, Kantoroviča–Ļebedeva transformācijas).

XXIX NODAĻA

KOMPLEKSĀ MAINĪGĀ FUNKCIJU TEORIJAS ELEMENTI

29.1. §. PAMATJAUTĀJUMI

Jau iepriekš aplūkojām vairākus jautājumus, kas saistīti ar kompleksu skaitļu kopas C jēdzienu (sk. 1.2. §.). Neatkārtojot šos jautājumus sīkāk, atgādināsim, ka kompleksu skaitli z var izteikt trīs veidos:

1) **algebriskā formā** - $z=x+yi$,
2) **trigonometriskā formā** - $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$,
3) **eksponentformā** - $z=re^{i\varphi}$.

Reālo skaitli x sauc par kompleksā skaitļa z **reālo daļu** un apzīmē ar simbolu

$$x=\operatorname{Re} z;$$

y sauc par **imagināro daļu** un apzīmē ar simbolu

$$y=\operatorname{Im} z.$$

Komplekso skaitli $z=x+yi$ *attēlo ar punktu $M(x; y)$ koordinātu plaknē vai arī ar rādiusvektoru $\overrightarrow{OM}$*. Šī ***vektora moduli sauc par kompleksā skaitļa z moduli*** un apzīmē ar simbolu $|z|$ vai arī ar r.

Leņķi φ, ko veido vektors $\overrightarrow{OM}$ ar Ox ass pozitīvo virzienu, sauc par kompleksā skaitļa argumentu. Tā kā viena un tā paša rādiusvektora virzienu koordinātu plaknē nosaka ne tikai leņķis φ, bet arī $\varphi+2\pi\cdot k$ ($k\in Z$), tad *kompleksam skaitlim z atbilst bezgalīgi daudz argumentu*. Pieņemot, ka ***argumenta galvenā vērtība***, ko apzīmē ar simbolu $\arg z$, apmierina nevienādības

$$-\pi<\arg z\leqslant\pi,$$

šo argumentu kopu izsaka kā summu $\arg z+2\pi\cdot k$ un apzīmē ar simbolu $\operatorname{Arg} z$. Tātad

$$\operatorname{Arg} z=\arg z+2\pi\cdot k \qquad (k\in Z).$$

Lielumus x, y, r un φ saista sakarības:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}, \qquad x=r\cos\varphi, \qquad y=r\sin\varphi, \qquad \operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}.$$

Katram kompleksam skaitlim atbilst noteikts punkts Dekarta koordinātu plaknē un arī otrādi - katram punktam koordinātu plaknē atbilst noteikts kompleksais skaitlis. Tātad *starp komplekso skaitļu kopu C un koordinātu plaknes punktu kopu pastāv savstarpēji viennozīmīga atbilstība*. Saka arī, ka koordinātu plakne ir komplekso skaitļu plakne jeb **kompleksā plakne** (analogi kā koordinātu taisni sauc par reālo skaitļu taisni).

Aplūkojot dažādus matemātiskās analīzes jautājumus viena argumenta funkcijai $y=f(x)$, izmanto tādas reālo skaitļu kopas R apakškopas kā vaļējs intervāls, slēgts intervāls, pusslēgts intervāls, bezgalīgs intervāls, punkta apkārtne. Arī kompleksā mainīgā funkciju teorijā aplūko dažādas komplekso skaitļu kopas C apakškopas. Svarīgākās no tām ir dažādas līnijas un apgabali kompleksajā plaknē.

1. LĪNIJAS JĒDZIENS KOMPLEKSAJĀ PLAKNĒ

Līniju kompleksajā plaknē parasti uzdod ar parametriskajiem vienādojumiem

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t), \quad t\in[\alpha;\ \beta], \end{cases}$$

kur $x=x(t)$, $y=y(t)$ ir nepārtraukti diferencējamas funkcijas un divām dažādām parametra t vērtībām atbilst dažādi līnijas punkti.

Ievērojot to, ka $z=x+yi$, dažkārt **līniju uzdod arī ar reāla argumenta** t kompleksu funkciju

$$z(t)=x(t)+iy(t).$$

Vienkāršākajos gadījumos līnijas vienādojumu kompleksajā plaknē iegūst, izmantojot kompleksā skaitļa ģeometrisko interpretāciju.

Ja ir zināms aplūkotās līnijas vienādojums Dekarta koordinātās $F(x;\ y)=0$, tad to pārveido, ievērojot, ka brīvi izraudzīts līnijas punkts $M(x;\ y)$ attēlo kompleksu skaitli $z=x+yi$. Šī kompleksā skaitļa reālo daļu x (punkta M abscisu) un imagināro daļu y (punkta M ordinātu) atrod no sistēmas

$$\begin{cases} z=x+yi \\ \bar{z}=x-yi. \end{cases}$$

Iegūtās izteiksmes

$$x=\frac{z+\bar{z}}{2} \quad \text{un} \quad y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$$

ievietojot vienādojumā $F(x;\ y)=0$, iegūst šīs līnijas vienādojumu kompleksajā plaknē

$$F\left(\frac{z+\bar{z}}{2};\ \frac{z-\bar{z}}{2i}\right)=0.$$

Aplūkosim piemērus.

1. **Riņķa līnijas vienādojums, ja tās rādiuss ir R un centrs atrodas koordinātu sākumpunktā.**

Dekarta koordinātās šīs riņķa līnijas vienādojums ir

$$x^2+y^2=R^2 \quad \text{jeb} \quad \sqrt{x^2+y^2}=R.$$

Uzskatot, ka riņķa līnijas punkts $M(x;\ y)$ attēlo kompleksu skaitli

$$z=x+yi,$$

kura modulis $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, iegūstam aplūkotās *riņķa līnijas vienādojumu kompleksajā plaknē*:

$$|z|=R. \tag{1}$$

Riņķa līniju, kuras rādiuss ir R un centrs atrodas koordinātu sākumpunktā, izsaka arī *ar parametriskiem vienādojumiem*

$$\begin{cases} x=R\cos t \\ y=R\sin t, \quad 0\leqslant t<2\pi. \end{cases}$$

Tā kā riņķa līnijas punkts $M(x;\ y)$ attēlo kompleksu skaitli $z=x+yi$, tad iegūstam vienādojumu

$$z(t)=R\cos t+iR\sin t \quad \text{jeb}$$

$$z(t)=R(\cos t+i\sin t). \tag{2}$$

Izmantojot **Eilera formulu**

$$e^{it}=\cos t+i\sin t,$$

riņķa līnijas vienādojumu (2) var pārveidot eksponentformā

$$z(t)=Re^{it}, \qquad 0\leqslant t<2\pi. \tag{3}$$

2. Riņķa līnijas vienādojums, ja tās rādiuss ir R un centrs atrodas punktā $M_0(x_0; y_0)$.

Punkts $M_0(x_0; y_0)$ attēlo kompleksu skaitli $z_0=x_0+y_0 i$. Ja riņķa līnijas punkts $M(x; y)$ attēlo kompleksu skaitli $z=x+yi$, tad šo skaitļu starpības

$$z-z_0=(x-x_0)+(y-y_0)i$$

modulis

$$|z-z_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

ir vienāds ar riņķa līnijas rādiusu R.

Patiešām, no riņķa līnija vienādojuma Dekarta koordinātās

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \quad \text{jeb} \quad \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=R$$

izriet, ka $R=|z-z_0|$. Tātad aplūkotās riņķa līnijas vienādojums kompleksajā plaknē ir

$$|z-z_0|=R. \tag{4}$$

Vienādojumu (4) var uzrakstīt arī šādi:

$$z-z_0=R(\cos t+i\sin t), \qquad 0\leqslant t<2\pi \tag{5}$$

jeb

$$z-z_0=Re^{it}, \qquad 0\leqslant t<2\pi. \tag{6}$$

3. Imaginārai asij paralēlas taisnes vienādojums.

Dekarta koordinātās šādas taisnes vienādojums ir $x=a$. Tā kā x ir kompleksā skaitļa $z=x+yi$ reālā daļa $\operatorname{Re} z$, tad aplūkotās taisnes vienādojums kompleksajā plaknē ir

$$\operatorname{Re} z=a.$$

4. Reālai asij paralēlas taisnes vienādojums.

Ja taisne ir paralēla Ox asij, tad Dekarta koordinātās tās vienādojums ir $y=b$. Tā kā y ir kompleksā skaitļa $z=x+yi$ imaginārā daļa $\operatorname{Im} z$, tad kompleksajā plaknē šīs taisnes vienādojums ir

$$\operatorname{Im} z=b.$$

5. Taisnes stara vienādojums.

Pieņemsim, ka taisnes stars, kas iziet no koordinātu sākumpunkta, ar reālo pozitīvo pusasi veido leņķi

$$\alpha\in(-\pi; \pi].$$

Šāda taisnes stara punkti attēlo kompleksus skaitļus, kuru moduļi ir brīvi izraudzīti, bet arguments ir konstants lielums α. Tātad taisnes stara vienādojums ir

$$\arg z=\alpha.$$

2. APGABALA JĒDZIENS KOMPLEKSAJĀ PLAKNĒ

Par **koordinātu taisnes punkta x_0 ε – apkārtni** $U_\varepsilon(x_0)$ sauc intervālu, kura garums ir 2ε un x_0 ir šī intervāla viduspunkts. Šīs apkārtnes – intervāla $(x_0-\varepsilon;\ x_0+\varepsilon)$ punktiem x ir spēkā nevienādība

$$|x-x_0|<\varepsilon.$$

Par **koordinātu plaknes punkta** $M_0(x_0;y_0)$ ε **– apkārtni** $U_\varepsilon(M_0)$ sauc riņķi ar centru punktā M_0 un rādiusu ε.

Analogi apkārtnes jēdzienu definē arī kompleksajā plaknē.

Par kompleksās plaknes punkta z_0 ε ***– apkārtni*** $U_\varepsilon(z_0)$ ***sauc tāda riņķa iekšējos punktus, kura centrs ir punktā*** z_0 ***un rādiuss*** ε. Tātad šī apkārtne ir visu to punktu z kopa, kuriem ir pareiza nevienādība

$$|z-z_0|<\varepsilon.$$

Aplūkosim kādu kompleksās plaknes punktu kopu D. Ja pie kopas pieder punkts z_0 un arī kāda šī punkta apkārtne, tad saka, ka z_0 ir kopas D **iekšējs punkts**.

Definīcija

Kompleksās plaknes punktu kopu D ***sauc par apgabalu, ja***

1) ***kopa satur tikai iekšējus punktus*** (šādu kopu sauc par **vaļēju kopu**),
2) ***jebkurus divus šīs kopas punktus var savienot ar nepārtrauktu līniju, kuras visi punkti pieder kopai*** (šādu kopu sauc par **sakarīgu kopu**).

Tātad apgabals ir vaļēja un sakarīga kopa kompleksajā plaknē. Apgabalu parasti uzdod ar vienu vai vairākām nevienādībām. Aplūkosim dažus apgabalu piemērus.

1. Ar nevienādību
$$|z-z_0|<R$$
uzdots apgabals ir **riņķa iekšējā daļa**, kura centrs ir z_0 un rādiuss R.
2. Ar nevienādību
$$|z-z_0|>R$$
uzdod **riņķa ārpusi**, kura centrs ir z_0 un rādiuss R.
3. Nevienādības
$$r<|z-z_0|<R$$
nosaka **riņķa gredzenu** ar centru punktā z_0, kuru ierobežo riņķa līnijas ar rādiusiem r un R.
4. Kompleksās plaknes daļu, kas atrodas virs taisnes $y=b$ (**augšējo pusplakni**), uzdod ar nevienādību
$$\operatorname{Im} z>b \qquad (b\in \boldsymbol{R}).$$
Analogi nevienādība
$$\operatorname{Im} z<b$$
nosaka **apakšējo pusplakni** (plaknes daļu zem taisnes $y=b$).
5. Kompleksās plaknes daļu, kas atrodas labajā pusē no taisnes $x=a$ (**labo pusplakni**), uzdod ar nevienādību
$$\operatorname{Re} z>a \qquad (a\in \boldsymbol{R}).$$
Savukārt nevienādība
$$\operatorname{Re} z<a$$
nosaka **kreiso pusplakni**.
6. Ar nevienādību sistēmu
$$\begin{cases}|z|<R\\ \operatorname{Im} z>0\\ \operatorname{Re} z>0\end{cases}$$
nosaka **riņķa daļu 1. kvadrantā**, ja riņķa centrs ir koordinātu sākumpunktā un rādiuss ir R.

Definīcija

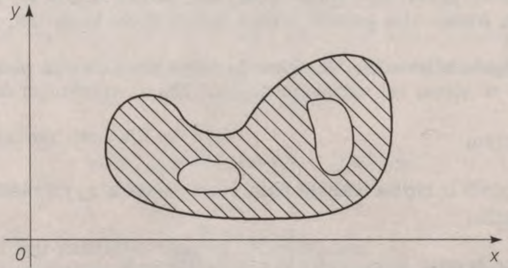
Par apgabala robežpunktu sauc punktu, kurš nepieder apgabalam, bet jebkurā šī punkta apkārtnē atrodas apgabala punkti.

Visu robežpunktu kopu sauc par apgabala robežu.

Apgabala robežu veido līnijas; dažkārt robeža var būt arī *izolēti punkti*. Ja vaļējam **apgabalam** D pievieno tā robežu, tad iegūst slēgtu apgabalu; **slēgtu apgabalu** apzīmē ar simbolu $\bar{D}$.

Ja eksistē tāda riņķa līnija, ar kuru var aptvert apgabalu, tad saka, ka apgabals ir **ierobežots**.

Ierobežotu apgabalu sauc par vienkārtsakarīgu apgabalu, ja tā robeža sastāv tikai no vienas līnijas. Ja *apgabala robeža sastāv no divām savā starpā nesaistītām līnijām*, tad saka, ka apgabals ir **divkārtsakarīgs**. Piemēram, riņķa gredzens ir divkārtsakarīgs apgabals. Analogi definē trīskārtsakarīgu un vispārīgi - **vairākkārtsakarīgu** apgabalu. 23. zīmējumā attēlots trīskārtsakarīgs apgabals.



23. zīm.

3. BEZGALĪGI TĀLĀ PUNKTA JĒDZIENS

Priekšstatu par bezgalības jēdzienu reālo skaitļu kopā iegūst, aplūkojot tā sauktos bezgalīgos intervālus. Piemēram, visu to reālo skaitļu x kopu, kuriem ir spēkā nevienādība $x>a$, sauc par bezgalīgu intervālu $(a; +\infty)$. Analogi visu to reālo skaitļu kopu, kuriem ir spēkā nevienādība $x<b$, pieraksta kā bezgalīgu intervālu $(-\infty; b)$. Bieži arī visu reālo skaitļu kopu $\boldsymbol{R}$ raksta kā bezgalīgu intervālu $(-\infty; +\infty)$. Tādējādi reālo skaitļu kopā un reāla argumenta funkciju robežteorijā izmanto jēdzienus $+\infty$ («plus bezgalība») un $-\infty$ («mīnus bezgalība»); t. i., *reālo skaitļu kopā aplūko divus «bezgalīgi tālos punktus»*: $+\infty$ un $-\infty$.

Bezgalīgi tālā punkta jēdzienu ievieš arī kompleksajā plaknē. Viens no veidiem, kā definē šo jēdzienu, ir šāds.

Aplūkosim riņķa līniju virkni, kurām centrs ir koordinātu sākumpunktā, bet rādiusi R_n neierobežoti palielinās. Tad katram kompleksās plaknes punktam M (kompleksam skaitlim z) eksistē tāds riņķis, ka punkts M atrodas šajā riņķī. Iedomāsimies, ka ir tāds plaknes punkts, kas atrodas ārpus visiem šādiem riņķiem, lai cik liels arī būtu riņķa rādiuss. Šādu ***iedomātu punktu sauc par kompleksās plaknes bezgalīgi tālo punktu un apzīmē ar simbolu*** ∞. Tā kā katram punktam kompleksajā plaknē atbilst noteikts kompleksais skaitlis, tad arī bezgalīgi tālajam punktam piekārto jēdzienu - neīsts kompleksais skaitlis ∞. Pieņem, ka *šī skaitļa modulis* $|\infty| = \infty$, *bet jēdziens* $\arg\infty$ *netiek definēts*. Tādējādi *kompleksajā plaknē definē tikai vienu bezgalīgi tālo punktu* (neaplūko jēdzienus $-\infty$ un $+\infty$).

Komplekso plakni, kas papildināta ar bezgalīgi tālo punktu, sauc par paplašināto komplekso plakni un apzīmē ar simbolu $\overline{C}$.

Komplekso plakni, kas nav papildināta ar bezgalīgi tālo punktu, sauc par **vaļējo komplekso plakni** un apzīmē ar C.

4. KOMPLEKSĀ MAINĪGĀ FUNKCIJAS JĒDZIENS

Pieņemsim, ka kompleksā skaitļa $z=x+y\,i$ reālā daļa x un imaginārā daļa y ir mainīgi lielumi. Tad $z=x+y\,i$ ir mainīgs komplekss skaitlis jeb **kompleksais mainīgais**. Ja pēc noteikta likuma katram kompleksam skaitlim z no kopas D atbilst cits komplekss skaitlis w, tad saka, ka ir dota kompleksā mainīgā funkcija.

Definīcija

Par kompleksā mainīgā funkciju sauc attēlojumu f, kas katram kompleksam skaitlim z no kopas $D \subset \overline{C}$ piekārto noteiktu kompleksu skaitli $w \subset \overline{C}$; raksta

$$f: D \to \overline{C} \quad \textbf{\textit{vai arī}} \quad w=f(z), \quad \textbf{\textit{kur}} \quad z \in D.$$

Kopu D sauc par funkcijas f **definīcijas kopu**. Ja ir dota funkcija $w=f(z)$, tad ir noteikta arī funkcijas **vērtību kopa** $E \subset \overline{C}$.

Ja nav norādīta funkcijas definīcijas kopa, tad pieņem, ka funkcija f ir definēta tās **dabiskajā definīcijas apgabalā**, t. i., visām z vērtībām, ar kurām ir matemātiska jēga izteiksmei $f(z)$.

Piemēram, funkcijas

$$w=z^2$$

dabiskā definīcijas kopa ir visa kompleksā plakne, bet funkcijas

$$w=\frac{1}{z}$$

dabiskā definīcijas kopa ir visa kompleksā plakne, izņemot punktu $0=0+0\,i$.

Ja funkcijas $w=f(z)$ mainīgo z izsaka kā kompleksu skaitli algebriskā formā $z=x+y\,i$ un funkcijas vērtību w kā

$$w=u+v\,i,$$

tad iegūst vienādību

$$u+v\,i=f(x+y\,i),$$

no kuras izriet, ka

$$u=u(x;\,y) \quad \text{un} \quad v=v(x;\,y),$$

t. i., *kompleksā mainīgā w reālo daļu un imagināro daļu var izteikt kā divu reālu argumentu x un y funkcijas.*

Piemēri

1. Funkciju $w=z^2$ var izteikt šādi:

$$w=z^2=(x+y\,i)^2=x^2+2xy\,i+(y\,i)^2=(x^2-y^2)+2xy\,i.$$

Tātad $u=x^2-y^2$, $v=2xy$ un ar funkciju $w=z^2$ kompleksu skaitli $z=x+y\,i$ attēlo par kompleksu skaitli

$$w=(x^2-y^2)+2xy\,i.$$

2. Pārveidosim funkciju $w=\frac{1}{z}$, izmantojot komplekso skaitļu dalīšanas algoritmu.

$$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+yi}=\frac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)}=\frac{x-yi}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}\,i$$

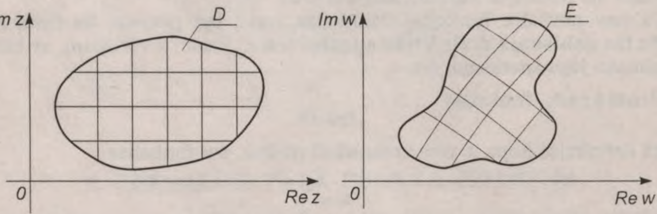
Tātad ar funkciju $w=\frac{1}{z}$ kompleksu skaitli $z=x+yi$ $(x\neq 0,\ y\neq 0)$ attēlo par kompleksu skaitli

$$w=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}\,i.$$

No piemēriem redzams, ka ar kompleksu funkciju $w=f(z)$ *z plaknes* (jeb *xy* koordinātu plaknes) *punktus* $M(x;\ y)$ *attēlo par w plaknes* (jeb *uv* koordinātu plaknes) *punktiem* $N(u;\ v)$.

Līdz ar to iegūstam šādu kompleksā mainīgā funkcijas ģeometrisko interpretāciju. Ja funkcijas definīcijas kopa D un vērtību kopa E ir vienkārtsakarīgi apgabali, tad ar funkciju $w=f(z)$ apgabalu D attēlo par apgabalu E, turklāt vispārīgajā gadījumā taisnes, kas novilktas z plaknē, tiek attēlotas par liektām līnijām w plaknē.

Piemēram, ja apgabalā D novelk vairākas koordinātu asīm paralēlas taisnes, kuru vienādojumi ir $\operatorname{Re} z=\text{const.}$ un $\operatorname{Im} z=\text{const.}$, tad vispārīgajā gadījumā šo *apgabala D* koordinātu režģi *funkcija* $w=f(z)$ *attēlo par liektu līniju režģi apgabalā E*, t. i., koordinātu režģis tiek deformēts (24. zīm.).



24. zīm.

Piezīme. Kompleksā argumenta funkcijas definīcijā norādīts, ka katram kompleksam skaitlim $z\in D$ atbilst tikai viens kompleksais skaitlis $w=f(z)$. Šādā gadījumā saka, ka f ir **vienvērtīga funkcija**. Taču ir iespējams piekārtojums, kad katram $z\in D$ ir piekārtotas vairākas (vai pat bezgalīgi daudz) w vērtības. Tad funkciju $w=f(z)$ sauc par **vairākvērtīgu funkciju**.

Piemēram, kompleksā skaitļa z n-tās pakāpes saknei ir n dažādas vērtības (sk. 1.2.§). Tātad $w=\sqrt[n]{z}$ ir n-vērtīga funkcija (ja vien nav izraudzīta kāda viena noteikta šīs saknes vērtība).

Vairākvērtīgām funkcijām nav spēkā vairākas darbību īpašības, tām nedefinē tādus matemātiskās analīzes jēdzienus kā inversā funkcija, robeža, atvasinājums u. c.

Definīcija

Pieņemsim, ka vienvērtīgas funkcijas f definīcijas kopa ir D un vērtību kopa ir E. Par funkcijas f inverso funkciju sauc attēlojumu φ, pēc kura katram kompleksam skaitlim $w\in E$ piekārto to komplekso skaitli $z\in D$, kuram

$$f(z)=w, \quad \textit{t. i.,} \quad z=\varphi(w).$$

Funkcijas f inverso funkciju parasti apzīmē ar f^{-1}.

29.2. §. KOMPLEKSĀ MAINĪGĀ FUNKCIJAS ROBEŽAS UN NEPĀRTRAUKTĪBAS JĒDZIENS

Vairākus matemātiskās analīzes jēdzienus kompleksajā plaknē definē analogi kā reāla argumenta funkcijām.

Aplūkosim punktu $z_0=x_0+y_0 i$, kura jebkurā apkārtnē atrodas bezgalīgi daudz funkcijas $w=f(z)$ definīcijas kopas punktu (pats punkts z_0 var arī nepiederēt pie šīs kopas), un pieņemsim, ka $z=x+yi$ reālā daļa x un imaginārā daļa y ir mainīgi lielumi, turklāt brīvi izraudzītu virkņu

$$x_1;\, x_2;\, x_3;\, \dots;\, x_n;\, \dots \quad \text{un} \quad y_1;\, y_2;\, y_3;\, \dots;\, y_n;\, \dots$$

robežas attiecīgi ir x_0 un y_0. Šādā gadījumā saka, ka kompleksais mainīgais z tiecas uz z_0; raksta $z \to z_0$.

Definīcija

Kompleksu skaitli w_0 sauc par kompleksā mainīgā funkcijas $w=f(z)$ robežu, kad z tiecas uz z_0, un raksta

$$\lim_{z \to z_0} f(z)=w_0,$$

ja katram reālam skaitlim $\varepsilon>0$ var atrast tādu reālu skaitli $\delta>0$, ka visiem z, kuriem

$$0<|z-z_0|<\delta$$

ir spēkā nevienādība

$$|f(z)-w_0|<\varepsilon.$$

Definīciju var pierakstīt **saīsināti:**

$$\lim_{z \to z_0} f(z)=w_0 \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \text{tāds}\ \ \delta>0, \ \ \text{ka}\ \forall\ z, \text{kuriem}\ \ 0<|z-z_0|<\delta, \ \ \text{ir}$$
$$|f(z)-w_0|<\varepsilon.$$

Tā kā ar nevienādību $|z-z_0|<\delta$ kompleksajā plaknē uzdod riņķi, kura centrs ir punktā z_0 un rādiuss δ, t. i., punkta z_0 δ–apkārtni $U_\delta(z_0)$, bet ar nevienādību $|w-w_0|<\varepsilon$ – punkta w_0 ε–apkārtni $U_\varepsilon(w_0)$, tad robežas definīcijā var izmantot kompleksās plaknes punkta apkārtnes jēdzienu un apzīmējumu:

$$\lim_{z \to z_0} f(z)=w_0 \Leftrightarrow \forall\ U_\delta(z_0)\ \exists\ U_\varepsilon(w_0), \quad \text{ka} \quad \forall\ z\in U_\delta(z_0), \quad z\neq z_0$$
$$w=f(z)\in U_\varepsilon(w_0).$$

Robežas jēdzienu aplūko arī gadījumiem, kad $z_0=\infty$ vai kad $w_0=\infty$. Arī šīs definīcijas ir analogas atbilstošajām reāla argumenta funkciju robežu definīcijām.

Kompleksā mainīgā funkciju teorijā *ir spēkā* analogas teorēmas par robežām kā reāla argumenta funkcijām, piemēram, *teorēmas par funkciju summas, starpības, reizinājuma un dalījuma robežu.* Taču **komplekso skaitļu kopā nav definēta attieksme «nevienādība»**. Tāpēc *robežteorijā nav teorēmu, kas saistītas ar nevienādības jēdzienu.* Piemēram, nav teorēmu par robežpāreju nevienādībās (ievērosim, ka robežas definīcijā izmantotajā nevienādībā $|z-z_0|<\delta$ $|z-z_0|$ ir divu kompleksu skaitļu starpības modulis un tātad – reāls skaitlis).

Arī nepārtrauktības jēdzienu kompleksā mainīgā funkcijām definē analogi kā reāla argumenta funkcijām.

Definīcija

Funkciju $w=f(z)$ sauc par nepārtrauktu punktā z_0, ja

1) ***punkts z_0 un arī kāda šī punkta apkārtne pieder funkcijas definīcijas kopai;***

2) ***funkcijas*** $f(z)$ ***robeža, kad*** $z \to z_0$***, ir vienāda ar funkcijas vērtību punktā*** z_0***, t. i.,***

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0). \tag{1}$$

Secinājumi

1. Pārveidosim vienādību (1) šādi:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) - f(z_0) = 0 \quad \text{jeb} \quad \lim_{z \to z_0} (f(z) - f(z_0)) = 0. \tag{2}$$

Starpība $f(z) - f(z_0)$ ir funkcijas $w = f(z)$ pieaugums, ko apzīmē ar Δw. Savukārt starpība $z - z_0$ ir argumenta pieaugums Δz. Tā kā $z - z_0 = \Delta z$, tad $\Delta z \to 0$, ja $z \to z_0$. Tāpēc vienādībai (2) ir ekvivalenta vienādība

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta w = 0$$

un nepārtrauktu funkciju var definēt arī šādi.

Funkciju $w = f(z)$ ***sauc par nepārtrauktu punktā*** z_0***, ja šajā punktā bezgalīgi mazam argumenta pieaugumam*** Δz ***atbilst bezgalīgi mazs funkcijas pieaugums*** Δw.

2. Pārveidosim vienādību (1), izmantojot komplekso skaitļu algebrisko formu $z = x + yi$ un $z_0 = x_0 + y_0 i$.

Tā kā

$$f(z) = f(x + yi) = u(x; y) + v(x; y)\, i,$$

tad

$$f(z_0) = f(x_0 + y_0 i) = u(x_0; y_0) + v(x_0; y_0)\, i.$$

Tādējādi no vienādības (1) izriet, ka

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} (u(x; y) + v(x; y)\, i) = u(x_0; y_0) + v(x_0; y_0)\, i$$

jeb

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x; y) = u(x_0; y_0) \quad \text{un} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x; y) = v(x_0; y_0),$$

t. i., reālu argumentu funkcijas $u(x; y)$ un $v(x; y)$ ir nepārtrauktas punktā $M_0(x_0; y_0)$. Pareizs ir arī apgrieztais spriedums. Līdz ar to iegūstam šādu secinājumu.

Kompleksā mainīgā funkcija $w = f(z) = u(x; y) + v(x; y)\, i$ ***ir nepārtraukta tad un tikai tad, ja ir nepārtrauktas divu reālo argumentu funkcijas*** $u(x; y)$ ***un*** $v(x; y)$.

Piebildīsim, ka ***funkciju*** $w = f(z)$ ***sauc par nepārtrauktu apgabalā*** D***, ja tā ir nepārtraukta visos šī apgabala punktos.***

Nepārtrauktām kompleksā mainīgā funkcijām *ir spēkā īpašības par funkciju summas, starpības, reizinājuma, dalījuma un saliktas funkcijas nepārtrauktību* (šīs īpašības ir analogas reāla argumenta funkciju īpašībām). Taču *nav spēkā teorēmas par nepārtrauktām reāla argumenta funkcijām slēgtā apgabalā, kas saistītas ar nevienādību izmantošanu.*

29.3. §. KOMPLEKSĀ MAINĪGĀ FUNKCIJAS ATVASINĀJUMA JĒDZIENS

1. ATVASINĀJUMA DEFINĪCIJA

Kompleksā mainīgā funkcijai $w=f(z)$ atvasinājumu definē, izmantojot tādu pašu algoritmu kā reāla argumenta funkcijai $y=f(x)$.

1. Atrod funkcijas $w=f(z)$ vērtību kompleksās plaknes punktā z_0.
2. Izmainot lielumu z_0 par pieaugumu Δz, iegūst citu definīcijas kopas punktu $z_0+\Delta z$.
3. Atrod funkcijas vērtību $f(z_0+\Delta z)$.
4. Atrod funkcijas pieaugumu
$$\Delta w=f(z_0+\Delta z)-f(z_0).$$
5. Atrod mainīgo lielumu w un z pieaugumu Δw un Δz attiecību
$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}.$$
6. Atrod robežu (ja tāda eksistē)
$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}.$$

Definīcija

***Par funkcijas** $w=f(z)$ **atvasinājumu punktā** z_0 **sauc mainīgo lielumu** w **un** z **pieaugumu** Δw **un** Δz **attiecības robežu, kad** $\Delta z\to 0$.*

Kompleksā mainīgā funkcijas atvasinājums punktā z_0 ir komplekss skaitlis. Kompleksā mainīgā $w=f(z)$ atvasinājums mainīgam lielumam z ir kompleksā mainīgā funkcija, ko apzīmē ar vienu no simboliem $w', f'(z), \dfrac{dw}{dz}, \dfrac{df(z)}{dz}$.

Tātad
$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} \quad \text{jeb} \quad w'=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

Var pierādīt, ka kompleksā mainīgā funkcijām ir spēkā tādas pašas atvasināšanas kārtulas un formulas kā reāla argumenta funkcijām.

2. ATVASINĀJUMA EKSISTENCES JAUTĀJUMI

Kā zināms, reāla argumenta funkcijai $y=f(x)$ punktā x eksistē atvasinājums, ja
$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x},$$
t. i., ja šī robeža ir galīga un nav atkarīga no tā, vai argumenta pieaugums ir pozitīvs vai negatīvs.

Kompleksā mainīgā funkcijai $w=f(z)$ atvasinājuma eksistence punktā z nozīmē, ka eksistē galīga robeža
$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}$$
un tā nav atkarīga no Δz izvēles. Tātad $z+\Delta z$ **var būt jebkurš kompleksās plaknes punkts no kādas punkta** z apkārtnes.

Aplūkosim šo jautājumu sīkāk.

Tā kā

$$z=x+yi, \quad z+\Delta z=(x+\Delta x)+(y+\Delta y)i, \quad \Delta z=\Delta x+\Delta y i,$$

tad

$$f(z)=f(x+yi)=u(x;y)+v(x;y)i,$$

$$f(z+\Delta z)=f((x+\Delta x)+(y+\Delta y i))=u(x+\Delta x; y+\Delta y)+v(x+\Delta x; y+\Delta y)i.$$

Tātad

$$\Delta w=f(z+\Delta z)-f(z)=$$
$$=(u(x+\Delta x; y+\Delta y)-u(x;y))+(v(x+\Delta x; y+\Delta y)-v(x;y))i=\Delta u+\Delta v i$$

un

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta u+\Delta v i}{\Delta x+\Delta y i}. \tag{1}$$

Atradīsim atvasinājuma eksistences nepieciešamos nosacījumus. Ja eksistē $f'(z)$, tad robeža (1) nav atkarīga no Δz izvēles.

Pieņemsim, ka $\Delta z=\Delta x+0i$, t. i., $\Delta y=0$. Tad no vienādības (1) iegūstam

$$f'(z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u+\Delta v i}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}i=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}i.$$

Analogi, ja $\Delta z=0+\Delta y i$, t. i., $\Delta x=0$, tad

$$f'(z)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta u+\Delta v i}{\Delta y i}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta y i}+\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta u i}{-\Delta y}+\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta y}=$$
$$=-\frac{\partial u}{\partial y}i+\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}i.$$

No vienādībām

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}i$$

un

$$f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}i$$

izriet, ka

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}i=\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}i.$$

Tā kā divi kompleksie skaitļi ir vienādi tad un tikai tad, ja ir vienādas to reālās daļas un imaginārās daļas, tad iegūstam vienādības

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2}$$

Vienādības (2) ir kompleksā mainīgā funkcijas atvasinājuma eksistences nepieciešamie nosacījumi; šīs vienādības sauc par Eilera–Dalambēra vai arī Košī–Rīmaņa nosacījumiem.

Ja funkcijām $u(x;y)$ un $v(x;y)$ eksistē pilnais diferenciālis, tad šīs vienādības ir arī atvasinājuma eksistences pietiekamie nosacījumi.

Tātad ir pareizs šāds apgalvojums.

Funkcijai $w=f(z)=u(x;y)+v(x;y)i$ ***punktā*** $z_0=x_0+y_0 i$ ***eksistē atvasinājums tad un tikai tad, ja***

1) ***funkcijām*** $u(x;y)$, $v(x;y)$ ***punktā*** $(x_0;y_0)$ ***eksistē pilnais diferenciālis;***

2) *punktā* $(x_0; y_0)$ ***ir spēkā Eilera–Dalambēra nosacījumi***

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Funkcijas $w=f(z)=u(x;y)+v(x;y)i$ **atvasinājumu atrod pēc formulas**

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}i$$

vai arī

$$f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}i.$$

Ja funkcijai $w=f(z)$ ***eksistē atvasinājums punktā*** z_0 ***un arī kādā šī punkta apkārtnē, tad*** $f(z)$ ***sauc par analītisku funkciju šajā punktā.***

Ja funkcijai eksistē atvasinājums kāda apgabala visos punktos, tad to sauc par analītisku funkciju šajā apgabalā.

Punktus, kuros funkcija ir analītiska, sauc par **regulāriem punktiem**. Punktus, kuros funkcija nav analītiska vai arī tā nav definēta, sauc par **singulāriem punktiem**.

Piemēri

1. Noskaidrot, vai $w=z^2$ **ir analītiska funkcija.**

Tā kā

$$f(z)=z^2=(x+yi)^2=x^2+2xyi+(yi)^2=(x^2-y^2)+2xyi,$$

tad

$$u(x;y)=x^2-y^2, \qquad v(x;y)=2xy,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=2y.$$

Acīmredzot funkcijai $w=z^2$ visā kompleksajā plaknē ir spēkā Eilera–Dalambēra nosacījumi

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Tātad $w=z^2$ ir analītiska funkcija.

2. **Pierādīt, ka funkcijai** $w=\bar{z}$ **neeksistē atvasinājums nevienā kompleksās plaknes punktā.**

Ja $z=x+yi$, tad $\bar{z}=x-yi$.

Tātad $w=x-yi$ un $u=x$, $v=-y$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=-1, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

Kompleksā mainīgā funkciju $w=f(z)=u(x;y)+v(x;y)i$ sauc par **analītisku funkciju** kādā apgabalā, ja visos apgabala punktos funkcijai eksistē atvasinājums $f'(z)$.

Atvasinājuma eksistences nepieciešamais nosacījums ir vienādības

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Šīs vienādības sauc par **Eilera–Dalambēra** jeb **Košī–Rīmaņa** nosacījumiem.

Ja funkcijām $u(x;y)$ un $v(x;y)$ eksistē pilnais diferenciālis, tad Eilera–Dalambēra nosacījumi ir arī atvasinājuma eksistences pietiekamie nosacījumi.

Tā kā

$$\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y},$$

tad nav izpildīti Eilera–Dalambēra nosacījumi un funkcijai neeksistē atvasinājums, t. i., tā nav analītiska.

3. Noskaidrot, vai $w=\frac{1}{z}$ **ir analītiska funkcija.**

Šajā gadījumā

$$f(z)=\frac{1}{z}=\frac{1\cdot\bar{z}}{z\cdot\bar{z}}=\frac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}\,i.$$

Tātad

$$u(x;y)=\frac{x}{x^2+y^2},\quad v(x;y)=-\frac{y}{x^2+y^2}\quad (x\neq 0,\ y\neq 0).$$

Atrodam funkciju u un v parciālos atvasinājumus:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{x^2+y^2-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-x\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{-y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Tā kā

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

tad dotā funkcija ir analītiska visā kompleksajā plaknē, izņemot singulāro punktu $z=0$.

29.4. §. KOMPLEKSĀ MAINĪGĀ FUNKCIJAS ATVASINĀJUMA ĢEOMETRISKĀ INTERPRETĀCIJA

Kompleksā mainīgā funkcijas $w=f(z)$ atvasinājums punktā z_0 ir komplekss skaitlis

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z},$$

ko raksturo šī skaitļa arguments $\arg f'(z_0)$ un modulis $|f'(z_0)|$. Noskaidrosim šo lielumu ģeometriskās interpretācijas.

1. ATVASINĀJUMA ARGUMENTA ĢEOMETRISKĀ INTERPRETĀCIJA

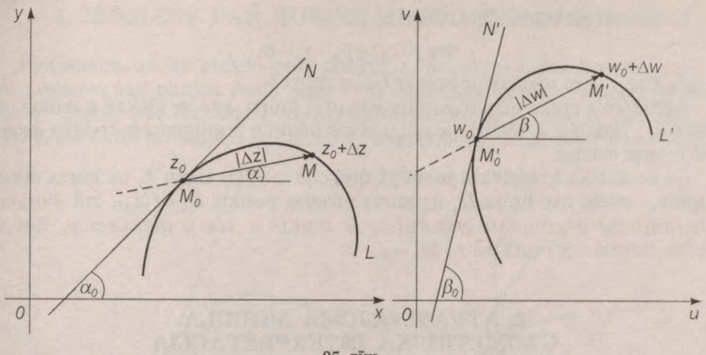
Kā zināms, ar kompleksā mainīgā funkciju

$$w=f(z)\quad \text{jeb}\quad f(x+yi)=u(x;y)+v(x;y)\,i$$

xy plaknes punktu $z_0=x_0+y_0 i$ attēlo par uv plaknes punktu

$$w_0=u(x_0;y_0)+v(x_0;y_0)\,i.$$

Pieņemsim, ka xy plaknē caur punktu M_0, kam atbilst kompleksais skaitlis z_0, ir novilkta brīvi izraudzīta gluda līnija L un ar analītisku funkciju $w=f(z)$



25. zīm.

šo līniju attēlo par līniju L' uv plaknē, kura iet caur punktu M_0', kam atbilst kompleksais skaitlis $w_0=f(z_0)$; turklāt $f'(z_0)\neq 0$ (25. zīm.).

Aplūkosim citu līnijas L punktu M, kam atbilst kompleksais skaitlis $z_0+\Delta z$, un šī punkta attēlu uv plaknē - līnijas L' punktu M', kam atbilst kompleksais skaitlis $w_0+\Delta w$.

No kompleksā skaitļa ģeometriskās interpretācijas ar rādiusvektora palīdzību izriet, ka Δz kā divu komplekso skaitļu $z_0+\Delta z$ un z_0 starpību ilustrē vektors $\overrightarrow{M_0M}$, bet $|\Delta z| = |\overrightarrow{M_0M}|$. Analogi uv plaknē $|\Delta w| = |\overrightarrow{M_0'M'}|$.

Noskaidrojot atvasinājuma

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}$$

argumenta ģeometrisko interpretāciju, spriežam tā.

Tā kā attiecība $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ ir divu komplekso skaitļu dalījums, tad

$$\arg\frac{\Delta w}{\Delta z}=\arg\Delta w-\arg\Delta z+2\pi\cdot k, \qquad k\in \boldsymbol{Z},$$

bet

$$\arg f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}(\arg\Delta w-\arg\Delta z)+2\pi\cdot k=\lim_{\Delta z\to 0}\arg\Delta w-\lim_{\Delta z\to 0}\arg\Delta z+2\pi\cdot k \qquad (1)$$

(turpmāk saskaitāmo $2\pi\cdot k$ neievērosim, jo tas neietekmē ģeometrisko interpretāciju).

Lielums $\arg\Delta z$ ir leņķis α, ko vektors $\overrightarrow{M_0M}$ veido ar Ox asi. Ja $\Delta z\to 0$, tad punkts M, pārvietojoties pa līniju L, tiecas uz punktu M_0. Līdz ar to taisne M_0M pagriežas ap punktu M_0 un tiecas uz taisni M_0N, kas ir līnijas L pieskare punktā M_0. Tātad $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\arg\Delta z$ ir leņķis α_0, ko punktā M_0 novilktā līnijas L pieskare veido ar Ox asi (pieskares virziena leņķis).

Analogi $\arg\Delta w$ ir leņķis β, ko uv plaknē vektors $\overrightarrow{M_0'M'}$ veido ar Ou asi.

Ja $\Delta z\to 0$, tad arī $\Delta w\to 0$ un punkts M', pārvietojoties pa līniju L', tiecas uz punktu M_0', taisne $M_0'M'$ tiecas uz taisni $M_0'N'$ - līnijas L' pieskari punktā M_0'. Tādējādi $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\arg\Delta w$ ir leņķis β_0, ko punktā M_0' novilktā līnijas L' pieskare veido ar Ou asi (pieskares virziena leņķis).

Līdz ar to no vienādības (1) izriet, ka

$$\arg f'(z_0)=\beta_0-\alpha_0=\varphi,$$

t. i., $\arg f'(z_0)$ *ir šo pieskaru virziena leņķu starpība.*

Aplūkotais spriedums ir pareizs jebkurai līnijai, kas xy plaknē novilkta caur punktu z_0. Tādējādi funkcijas $w=f(z)$ atvasinājuma argumentam ir šāda ģeometriskā interpretācija.

Ja analītiska kompleksā mainīgā funkcija $w=f(z)$ līniju L, uz kuras atrodas punkts z_0, attēlo par līniju L', uz kuras atrodas punkts $w_0=f(z_0)$, tad ***funkcijas atvasinājuma arguments punktā z_0 ir leņķis φ starp pieskarēm, kas šīm līnijām novilktas punktos z_0 un w_0.***

2. ATVASINĀJUMA MODUĻA ĢEOMETRISKĀ INTERPRETĀCIJA

Tā kā

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z},$$

tad

$$|f'(z_0)|=\left|\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}\right|=\lim_{\Delta z\to 0}\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right|=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}.$$

Iepriekš noskaidrojām, ka $|\Delta z|=|\overrightarrow{M_0M}|$ un $|\Delta w|=|\overrightarrow{M_0'M'}|$ (25. zīm.). Ja Δz un Δw ir pietiekami mazi lielumi, tad $|\Delta z|$ ir aptuveni vienāds ar līnijas L loka M_0M garumu un $|\Delta w|$ – ar līnijas L' loka $M_0'M'$ garumu. Tātad attiecība

$$\frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$$

ir aptuveni vienāda ar šo loku garumu attiecību un to var interpretēt kā *loka vidējo deformāciju* (izstiepumu vai saspiedumu), attēlojot ar funkciju $w=f(z)$ līniju L par līniju L'. Ar šīs attiecības robežu, kad $\Delta z\to 0$, definē jēdzienu «līnijas deformācijas koeficients punktā z_0».

Tātad ***atvasinājuma modulis $|f'(z_0)|$ ir līnijas L deformācijas koeficients punktā z_0, izpildot attēlojumu ar analītisku kompleksā mainīgā funkciju $w=f(z)$.***

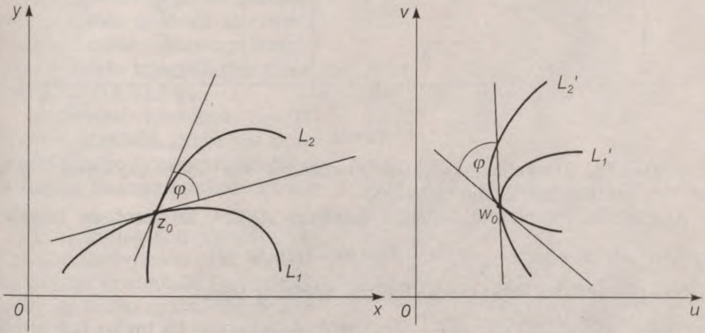
Atvasinājuma ģeometriskās interpretācijas labākai izpratnei iedomāsimies, ka 25. zīmējumā attēlotā uv plakne ir uzlikta uz xy plaknes tā, ka punkts w_0 sakrīt ar punktu z_0 un atbilstošās koordinātu asis ir paralēlas. Tad vispārīgā gadījumā līnija L' nesakrīt ar līniju L, jo ar attēlojumu $w=f(z)$ līnija L tiek pagriezta ap punktu z_0 un deformēta, mainot tās liekumu. Kā noskaidrojām, $\arg f'(z_0)$ ir leņķis, par kādu līnija L tiek pagriezta, lai tās pieskare sakristu ar līnijas L' pieskari punktā z_0, bet $|f'(z_0)|$ raksturo līnijas deformāciju punktā z_0.

Funkcijas $w=f(z)$ atvasinājuma $f'(z_0)$ **ģeometriskā interpretācija**:

1) ja funkcija $f(z)$ līniju L, uz kuras atrodas punkts z_0, attēlo par līniju L', uz kuras atrodas punkts $w_0=f(z_0)$, tad **atvasinājuma $f'(z_0)$ arguments ir leņķis starp pieskarēm**, kas novilktas šo līniju punktos z_0 un w_0;
2) **atvasinājuma modulis** $|f'(z_0)|$ ir līnijas L **deformācijas koeficients** punktā z_0.

3. JĒDZIENS PAR KONFORMIEM ATTĒLOJUMIEM

Pieņemsim, ka xy plaknē caur punktu z_0 novilktas divas līnijas L_1 un L_2, kuru pieskares šajā punktā veido leņķi φ. Ar analītisku funkciju $w=f(z)$ šīs līnijas attēlo uv plaknē par līnijām L_1' un L_2', kuras krustojas punktā w_0 (26. zīm.). Ja $f'(z_0)\neq 0$, tad katra no līnijām L_1 un L_2 tiek pagriezta par leņķi $\arg f'(z_0)$. Tātad arī



26. zīm.

līniju L_1' un L_2' pieskares punktā w_0 veido leņķi φ. Abas līnijas ir arī vienādi deformētas, jo $|f'(z_0)|$ vērtība nav atkarīga no līnijas, kas novilkta caur punktu z_0.

Tādējādi attēliem, kuri iegūti ar kompleksā mainīgā z analītiskām funkcijām $w=f(z)$, ir šāda **īpašība**:

punktos, kur $f'(z)\neq 0$, leņķis starp divu krustisku līniju attēliem ir tāds pats, kā starp pašām līnijām; turklāt saglabājas arī šo leņķu atskaites virziens un pārvietošanās virziens pa līniju.

Definīcija

Tādu z plaknes attēlojumu w plaknē, kurā nemainās leņķis starp jebkurām divām krustiskām līnijām un deformācijas koeficients visos virzienos no krustpunkta ir vienāds, sauc par konformu attēlojumu.

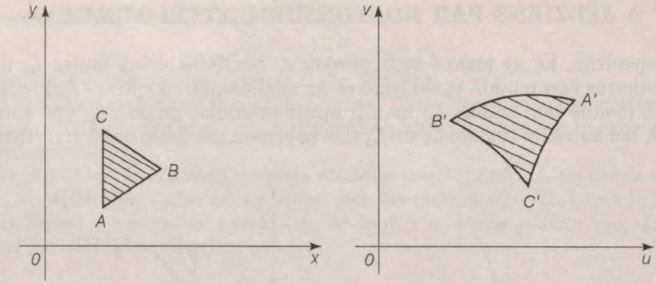
Tātad konformā attēlojumā xy plaknes figūru, ko ierobežo vairākas līnijas, transformē par deformētu figūru uv plaknē, taču abām figūrām ir vienādi atbilstošie leņķi. Piemēram, ja kādā punkta z_0 apkārtnē $f'(z_0)\neq 0$, tad bezgalīgi mazu trijstūri ABC no šīs apkārtnes ar funkciju $w=f(z)$ transformē par līklīniju trijstūri $A'B'C'$. Šī trijstūra leņķi ir vienādi ar atbilstošajiem trijstūra ABC leņķiem un sānu malas ir vienādi deformētas, t. i., trijstūris $A'B'C'$ ir «līdzīgs» trijstūrim ABC. Šādā nozīmē arī ir saprotams termins *«konforms»*, kas nozīmē «līdzīgs», «ar vienādu formu» (27. zīm.).

Ja konformajā attēlojumā saglabājas leņķu atskaites virziens un pārvietošanās virziens pa līniju, tad attēlojumu sauc par **1. veida konformo attēlojumu**.

Ja konformajā attēlojumā mainās leņķu atskaites virziens un pārvietošanās virziens pa līniju, tad attēlojumu sauc par **2. veida konformo attēlojumu**.

Ja katrā apgabala punktā $f'(z)\neq 0$, tad attēlojums ar funkciju $w=f(z)$ ir 1. veida konforms attēlojums.

Ja $f'(z_0)=0$, tad attēlojums nav konforms, jo atvasinājuma argumentam (līnijas pagrieziena leņķim) šajā punktā nav noteiktas vērtības.



27. zīm.

Piemērs. Funkcijas $w=z^2$ jeb $w=(x+y\,i)^2=(x^2-y^2)+2xy\,i$ reālā daļa ir $u=x^2-y^2$, bet imaginārā daļa ir $v=2xy$.

Aplūkosim xy plaknē līklīniju četrstūri $ABCD$, ko ierobežo hiperbolas

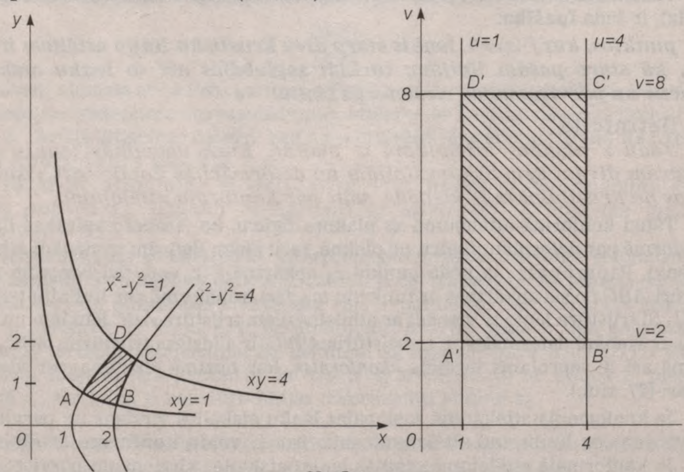
$$x^2-y^2=1,\quad x^2-y^2=4,\quad y=\frac{1}{x},\quad y=\frac{4}{x}\quad (\text{jeb } xy=1 \text{ un } xy=4).$$

Var pierādīt, ka leņķi pie šīs figūras malām ir taisni.

Tā kā $x^2-y^2=u$ un $xy=\frac{v}{2}$, tad ar funkciju $w=z^2$ šīs līnijas tiek attēlotas uv plaknē par taisnēm

$$u=1,\quad u=4,\quad v=2,\quad v=8.$$

Tādējādi kompleksā mainīgā funkcija $w=z^2$ līklīniju četrstūri $ABCD$ konformi attēlo par taisnstūri $A'B'C'D'$ (28. zīm.).



28. zīm.

Par **konformu attēlojumu** sauc tādu z plaknes attēlojumu w plaknē, kurā nemainās leņķis starp jebkurām divām krustiskām līnijām un deformācijas koeficients ir vienāds visos virzienos no līniju krustpunkta.

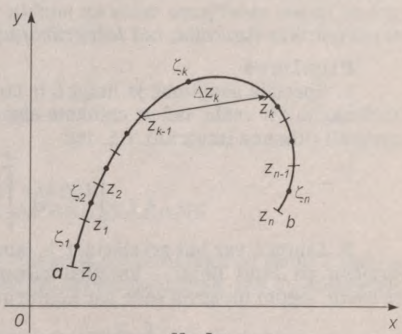
29.5. §. KOMPLEKSĀ MAINĪGĀ FUNKCIJAS INTEGRĀĻA JĒDZIENS

1. INTEGRĀĻA DEFINĪCIJA

Definējot integrāli kompleksajā plaknē, izmanto analogu algoritmu, kā definējot reāla argumenta funkcijas $f(x)$ noteikto integrāli (jeb Rīmaņa integrāli) (sk. 13.2. §).

Aplūkosim funkcijas $w=f(z)$ definīcijas apgabalā gludu vai gabaliem gludu līniju L, kas savieno divus kompleksās plaknes punktus a un b (29. zīm.).

Ja uz līnijas L ir noteikts virziens (orientācija) no a uz b, tad līniju apzīmēsim ar simbolu L_{ab}. Pretējo virzienu uz līnijas apzīmēsim ar simbolu L_{ba}.



29. zīm.

Sastādīsim funkcijas $w=f(z)$ integrālsummu līnijai L pēc šāda algoritma.

1. Brīvi izraudzītā veidā līniju L sadala n daļās ar punktiem, kuriem atbilst kompleksie skaitļi

$$a=z_0;\ z_1;\ z_2;\ \dots;\ z_n=b.$$

2. Katrā līnijas daļā brīvi izvēlas punktu; šos punktus apzīmēsim ar

$$\zeta_1;\ \zeta_2;\ \dots;\ \zeta_n$$

(ζ - grieķu alfabēta burts «dzeta»).

3. Atrod funkcijas $w=f(z)$ vērtības izraudzītajos punktos $f(\zeta_k)$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

4. Atrastās funkcijas vērtības reizina ar z vērtību starpību $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, t. i., atrod reizinājumus

$$f(\zeta_k)\cdot\Delta z_k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n$$

(Δz_k kā divu kompleksu skaitļu starpība ir komplekss skaitlis; šo skaitli attēlo vektors, kas novilkts no līnijas punkta z_{k-1} uz punktu z_k).

5. Atrod reizinājumu summu (funkcijas $w=f(z)$ integrālsummu)

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\,\Delta z_k$$

(dotai līnijai L integrālsumma ir atkarīga no līnijas dalījuma punktu skaita, sadalījuma veida un punktu ζ_k izvēles).

6. Atrod integrālsummas robežu (ja tāda eksistē), kad

$$|\Delta z| = \max|\Delta z_k| \to 0$$

(kompleksā skaitļa Δz_k modulis $|\Delta z_k|$ ir hordas garums, kas savieno līnijas punktus z_{k-1} un z_k); iegūst

$$\lim_{|\Delta z|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\,\Delta z_k.$$

Pēc šāda algoritma sastādītās integrālsummas robežu sauc par funkcijas $f(z)$ integrāli pa līniju L un apzīmē ar simbolu

$$\int_L f(z)\,dz.$$

Tātad

$$\int_L f(z)\,dz = \lim_{|\Delta z| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\,\Delta z_k .$$

Integrāļa eksistence nozīmē, ka eksistē integrālsummai robeža un tā nav atkarīga no līnijas sadalījuma veida un punktu ζ_k izvēles. ***Ja $f(z)$ ir līnijas L punktos nepārtraukta funkcija, tad integrālsummai eksistē robeža.***

Piezīmes

1. Speciālā gadījumā, ja līnija L ir Ox ass nogrieznis starp punktiem a un b un funkcija f ir reāla, tad ar aplūkoto algoritmu iegūstam funkcijas $f(x)$ noteikto integrāli (Rīmaņa integrāli), t. i., tad

$$\int_L f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(x)\,dx.$$

2. Līnija L var būt arī slēgta, t. i., punkts a var sakrist ar b. Tad *par pozitīvo virzienu* pa šādu līniju - kontūru *pieņem pulksteņa rādītāju kustībai pretējo virzienu.* Iegūto integrāli sauc par kontūrintegrāli un apzīmē ar simbolu

$$\oint_L f(z)\,dz \quad \text{vai arī} \quad \oint_{+L} f(z)\,dz.$$

Ja izraudzītais virziens pa kontūru ir pretējs pozitīvajam virzienam, tad raksta

$$\oint_L f(z)\,dz \quad \text{vai arī} \quad \oint_{-L} f(z)\,dz.$$

2. INTEGRĀĻA ĪPAŠĪBAS

Kompleksā mainīgā funkcijas $f(z)$ integrāļa galvenās īpašības ir analogas matemātiskajā analīzē pazīstamajām reāla argumenta funkcijas integrāļa īpašībām. Izņēmums ir ar nevienādībām saistītās integrāļu īpašības, jo kompleksiem skaitļiem nav definēta attieksme «nevienādība». Taču ir spēkā dažas īpašības, kas saistītas ar integrāļa un funkcijas moduļu nevienādībām.

Aplūkosim bez pierādījumiem šādas integrāļu īpašības, pieņemot, ka attiecīgie integrāļi eksistē.

1. $\int_L (f_1(z) \pm f_2(z))\,dz = \int_L f_1(z)\,dz \pm \int_L f_2(z)\,dz.$

2. $\int_L k \cdot f(z)\,dz = k \cdot \int_L f(z)\,dz,$ kur k ir konstants, vispārīgajā gadījumā komplekss reizinātājs.

3. Mainot virzienu uz līnijas L vai virzienu pa kontūru, jāmaina zīme integrāļa priekšā:

$$\int_{L_{ab}} f(z)\,dz = -\int_{L_{ba}} f(z)\,dz, \qquad \oint_{+L} f(z)\,dz = -\oint_{-L} f(z)\,dz.$$

4. Integrāļa aditivitātes īpašība: ja c ir brīvi izraudzīts līnijas L_{ab} punkts, tad

$$\int_{L_{ab}} f(z)\,dz = \int_{L_{ac}} f(z)\,dz + \int_{L_{cb}} f(z)\,dz.$$

5. Ja $|f(z)| \leqslant M$ un līnijas L garums ir s, tad

$$\left|\int_L f(z)\,dz\right| \leqslant M \cdot s.$$

6. $\left|\int_L f(z)\,dz\right| \leqslant \int_L |f(z)|\,|dz|.$

7. $\int_{L_{ab}} dz = b-a.$

3. INTEGRĀĻA APRĒĶINĀŠANA

Kompleksā mainīgā funkcijas $f(z)$ integrāļa aprēķināšanu pa līniju L reducē uz reāla argumenta funkciju līnijas integrāļu aprēķināšanu (sk. 22.6. §). Aplūkosim divas aprēķināšanas metodes.

1. **Ja zemintegrāļa funkcija $f(z)$ ir izteikta kompleksas funkcijas formā $u(x;y)+v(x;y)\,i$, tad**

$$\int_L f(z)\,dz = \int_L u(x;y)\,dx - v(x;y)\,dy + i\int_L v(x;y)\,dx + u(x;y)\,dy. \tag{1}$$

Neaplūkojot šīs metodes matemātiski korektu pierādījumu, atzīmēsim, ka izteiksmi (1) var izveidot, ja formāli izpilda substitūciju pēc šādas shēmas:

$$\int_L f(z)\,dz = \left[\begin{array}{l} z=x+y\,i,\quad dz=dx+dy\,i,\quad f(z)=u+v\,i, \\ f(z)\,dz=(u+v\,i)(dx+dy\,i)=(u\,dx-v\,dy)+(v\,dx+u\,dy)\,i \end{array}\right] =$$

$$= \int_L u\,dx - v\,dy + i\int_L v\,dx + u\,dy.$$

2. **Ja līnija L ir dota parametriskajā formā ar vienādojumiem**

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t), \qquad t\in[\alpha;\ \beta] \end{cases}$$

jeb

$$z=z(t)=x(t)+i\,y(t),$$

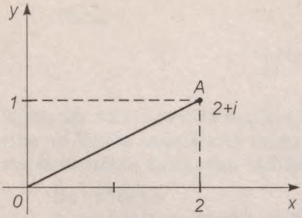
tad

$$\int_L f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))\cdot z'(t)\,dt. \tag{2}$$

Aprēķināšanas formulu (2) iegūst, izmantojot formulu (1) un līnijas integrāļu aprēķināšanas metodi, ja līnija ir dota parametriskā veidā.

Piemēri

1. **Aprēķināt integrāli $\int_L z^2\,dz$, ja līnija L ir taisnes nogrieznis OA, kas savieno koordinātu sākumpunktu ar kompleksās plaknes punktu $2+i$ (30. zīm.).**



30. zīm.

Izmantosim aprēķināšanas formulu (1).

Tā kā

$$z^2=(x+yi)^2=(x^2-y^2)+2xy\,i,$$

tad

$$u=x^2-y^2 \quad \text{un} \quad v=2xy.$$

Tātad saskaņā ar formulu (1)

$$\int_L z^2\,dz=\int_L (x^2-y^2)\,dx-2xy\,dy+i\int_L 2xy\,dx+(x^2-y^2)\,dy.$$

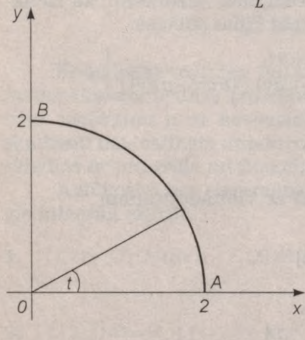
Lai aprēķinātu šos līnijas integrāļus, izmantosim taisnes OA vienādojumu $y=\frac{1}{2}x$, kur $x\in[0;2]$ un $dy=\frac{1}{2}dx$.

Līdz ar to

$$\int_L z^2\,dz=\int_0^2\left(x^2-\frac{1}{4}x^2\right)dx-\int_0^2 2x\cdot\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{2}\,dx+i\left(\int_0^2 2x\cdot\frac{1}{2}x\,dx+\int_0^2\left(x^2-\frac{1}{4}x^2\right)\cdot\frac{1}{2}dx\right)=$$

$$=\int_0^2\frac{1}{4}x^2\,dx+i\int_0^2\frac{11}{8}x^2\,dx=\frac{1}{12}x^3\Big|_0^2+i\,\frac{11}{24}x^3\Big|_0^2=\frac{2}{3}+\frac{11}{3}i.$$

2. Aprēķināt integrāli $\int_L |z|\,dz$, ja L ir riņķa līnijas loks no punkta $A(2;0)$ līdz punktam $B(0;2)$, kuras centrs atrodas koordinātu sākumpunktā (31. zīm.).



31. zīm.

Izmantosim aprēķināšanas formulu (2) un dotās riņķa līnijas parametriskos vienādojumus

$$\begin{cases} x=2\cos t \\ y=2\sin t, \end{cases} \quad \text{kur} \quad t\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$$

jeb

$$z(t)=2\cos t+i\,2\sin t,$$

no kurienes

$$z'(t)=-2\sin t+i\,2\cos t.$$

Tā kā $z=x+yi$, tad zemintegrāļa funkcija

$$f(z)=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

un dotās riņķa līnijas L punktos

$$f(z)=|z|=2.$$

Tad saskaņā ar formulu (2) iegūstam

$$\int_L |z|\,dz=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cdot(-2\sin t+i\,2\cos t)\,dt=-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt+4i\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt=$$

$$=4\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+4i\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-4+4i.$$

29.6. §. KOŠĪ TEORĒMA VIENKĀRTSAKARĪGĀ APGABALĀ. ANALĪTISKAS FUNKCIJAS INTEGRĀĻA ĪPAŠĪBAS

Aplūkojot kompleksā mainīgā funkcijas atvasinājumu eksistences jautājumus, noskaidrojām, ka funkcijai $w=f(z)$ kādā apgabalā eksistē atvasinājums, ja šajā apgabalā funkcija ir analītiska, t. i., funkcijai ir spēkā Eilera–Dalambēra jeb Košī–Rīmaņa nosacījumi (sk. 29.3. §). Turpretī integrāļa eksistencei ir pietiekami, ja funkcija dotajā apgabalā ir nepārtraukta. Tātad integrējamības nosacījumi ir «mazāk stingri» nekā atvasinājuma eksistences nosacījumi, jo ne katra nepārtraukta funkcija ir analītiska.

Ja funkcija $w=f(z)$ kādā apgabalā ir ne tikai nepārtraukta, bet arī analītiska, tad integrālim ir spēkā vairākas svarīgas īpašības. Viena no šīm īpašībām ir formulēta Košī teorēmā.

Košī teorēma

Ja funkcija $f(z)$ ir analītiska vienkārtsakarīgā apgabalā D, tad kontūrintegrālis pa jebkuru slēgtu līniju L, kas atrodas šajā apgabalā, ir vienāds ar nulli, t. i.,

$$\oint_L f(z)\,dz=0 \qquad \forall\ L\subset D.$$

Pierādījums

Tā kā $f(z)=u(x;\ y)+v(x;\ y)i$ ir analītiska funkcija, tad ir spēkā Eilera–Dalambēra nosacījumi:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

Izmantosim integrāļa aprēķināšanas formulu

$$\oint_L f(z)\,dz=\oint_L u(x;\ y)\,dx-v(x;\ y)\,dy+i\oint_L v(x;\ y)\,dx+u(x;\ y)\,dy=I_1+iI_2.$$

Pierādīsim, ka analītiskai funkcijai $f(z)$ katrs no integrāļiem I_1 un I_2 ir vienāds ar nulli. Šajā nolūkā izmantosim vairākargumentu funkciju integrālrēķinos aplūkoto teorēmu par kontūrintegrāļa vienādību ar nulli (sk. 22.9. §).

Katram kontūram L, kas atrodas apgabalā D, vienādība

$$\oint_L P(x;\ y)\,dx+Q(x;\ y)\,dy=0$$

ir spēkā tad un tikai tad, ja $\frac{\partial Q}{\partial x}$ un $\frac{\partial P}{\partial y}$ ir nepārtrauktas funkcijas šajā apgabalā un visos apgabala punktos $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$.

Aplūkosim integrāli

$$I_1=\oint_L u\,dx-v\,dy.$$

Šeit

$$P=u \quad \text{un} \quad Q=-v.$$

Tātad

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{un} \quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Tā kā saskaņā ar Eilera–Dalambēra nosacījumiem (1) ir spēkā vienādība

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial y}{\partial x}, \quad \text{tad} \quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

un tātad kontūrintegrālis $I_1=0$.

Savukārt kontūrintegrālim

$$I_2=\oint_L v\,dx+u\,dy$$

$$P=v, \qquad Q=u, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Tā kā pēc Eilera–Dalambēra nosacījumiem $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, tad arī šajā gadījumā $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ un tātad $I_2=0$.

Līdz ar to ir pierādīts, ka katram kontūram L

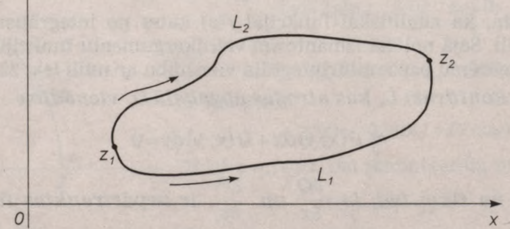
$$\oint_L f(z)\,dz=0. \quad \square$$

Secinājumi

1. ***Ja ir spēkā vienādība $\oint_L f(z)\,dz=0$ katram kontūram L, kas atrodas apgabalā D, tad integrālis pa jebkuru līniju, kas savieno divus apgabala D punktus z_1 un z_2, nav atkarīgs no līnijas formas, bet tikai no punktiem z_1 un z_2.***

Pierādījums

Savienosim punktus z_1 un z_2 ar divām brīvi izraudzītām līnijām L_1 un L_2, kuras veido slēgtu līniju (kontūru) L (32. zīm.).



32. zīm.

Integrējot pa kontūru L pozitīvā virzienā, no vienādības

$$\oint_{+L} f(z)\,dz=0$$

izriet, ka

$$\int_{+L_1} f(z)\,dz+\int_{-L_2} f(z)\,dz=0,$$

no kurienes

$$\int_{+L_1} f(z)\,dz = -\int_{-L_2} f(z)\,dz \quad \text{jeb} \quad \int_{+L_1} f(z)\,dz = \int_{+L_2} f(z)\,dz. \quad \square$$

Tā kā integrāļa vērtība nav atkarīga no līnijas, kas savieno punktus z_1 un z_2, bet tikai no punktiem z_1 un z_2, tad integrāli bieži pieraksta arī šādi:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz.$$

2. Aplūkosim apgabalā D fiksētu punktu z_0 un «mainīgu punktu» z. Tad integrālis ar mainīgu augšējo robežu

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$$

ir atkarīgs no z un ar šo integrāli definē funkciju

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta.$$

Var pierādīt šādu īpašību.

Ja $f(z)$ ir analītiska funkcija, tad arī $F(z)$ ir analītiska funkcija un

$$F'(z) = f(z).$$

Funkciju $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$ sauc par funkcijas $f(z)$ **primitīvo funkciju**.

3. ***Ja $f(z)$ ir analītiska funkcija vienkārtsakarīgā apgabalā, kurā atrodas punkti z_1 un z_2, un $F(z)$ ir funkcijas $f(z)$ primitīvā funkcija, tad***

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1),$$

t. i., ***analītiskas funkcijas integrāli var aprēķināt pēc Ņūtona–Leibnica formulas.***

Tādējādi aplūkotās īpašības ir tādas pašas kā reāla argumenta funkcijas integrālim. Atšķirīgi ir šo īpašību nosacījumi: ja reāla argumenta funkcijai minēto īpašību nosacījums ir funkcijas nepārtrauktība, tad kompleksajā plaknē šīs īpašības ir spēkā analītiskai funkcijai.

Piemērs. **Aprēķināt integrāli** $\int_0^{2+i} z^2\,dz.$

Tā kā $f(z) = z^2$ ir analītiska funkcija (sk. piemēru 103. lpp.), tad integrāli var aprēķināt, izmantojot Ņūtona–Leibnica formulu:

$$\int_0^{2+i} z^2\,dz = \frac{1}{3} z^3 \Big|_0^{2+i} = \frac{1}{3}(2+i)^3 = \frac{1}{3}(2^3 + 3\cdot 2^2 i + 3\cdot 2 i^2 + i^3) = \frac{1}{3}(8 + 12i - 6 - i) =$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{11}{3} i.$$

Tādu pašu rezultātu ieguvām, aprēķinot šo integrāli ar līnijintegrāļu palīdzību (sk. 29.5. § 1. piemēru).

29.7. §. KOŠĪ TEORĒMA VAIRĀKKĀRTSAKARĪGAM APGABALAM

Aplūkosim analītisku funkciju $w=f(z)$ vairākkārtsakarīgā slēgtā apgabalā $\bar{D}$, ko ierobežo ārējais kontūrs L un vairāki iekšējie kontūri $L_1, L_2, \ldots, L_n$.

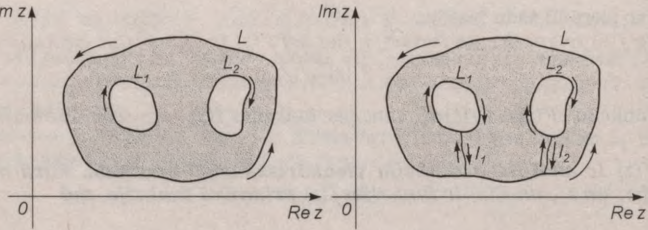
Košī teorēmu vairākkārtsakarīgam apgabalam var formulēt šādi.

Ja $f(z)$ ir analītiska funkcija vairākkārtsakarīgā slēgtā apgabalā, tad šīs funkcijas integrālis pa apgabala ārējo kontūru ir vienāds ar integrāļu summu pa visiem iekšējiem kontūriem (tiek pieņemts, ka pārvietošanās virziens pa visiem kontūriem ir viens un tas pats).

Tātad

$$\oint_L f(z)\,dz=\oint_{L_1} f(z)\,dz+\oint_{L_2} f(z)\,dz+\ldots+\oint_{L_n} f(z)\,dz.$$

Pierādīsim teorēmu trīskārtsakarīga apgabala gadījumam, kur L ir apgabala ārējais kontūrs, bet L_1 un L_2 - divi iekšējie kontūri (33. zīm.). Novelkot līnijas l_1 un l_2, apgabalu $\bar{D}$ pārveido par vienkārtsakarīgu apgabalu. Šo apgabalu robežo kontūrs K, kas sastāv no pozitīvā virzienā orientēta kontūra L, negatīvā virzienā orientētiem kontūriem L_1 un L_2 un līnijām l_1 un l_2.



33. zīm.

No 33. zīmējuma redzams, ka kontūrintegrāli $\oint_{+K} f(z)\,dz$ var izteikt ar 7 integrāļu summu. Tā kā pa katru no līnijām l_1 un l_2 integrē divas reizes savstarpēji pretējos virzienos, tad šīm līnijām atbilstošo integrāļu summa ir vienāda ar nulli.

Tāpēc

$$\oint_{+K} f(z)\,dz=\oint_{+L} f(z)\,dz+\oint_{-L_1} f(z)\,dz+\oint_{-L_2} f(z)\,dz.$$

Vienkārtsakarīgā apgabalā analītiskas funkcijas kontūrintegrālis pa jebkuru kontūru ir vienāds ar nulli.

Tātad

$$\oint_{+L} f(z)\,dz+\oint_{-L_1} f(z)\,dz+\oint_{-L_2} f(z)\,dz=0,$$

no kurienes

$$\oint_{+L} f(z)\,dz=-\oint_{-L_1} f(z)\,dz-\oint_{-L_2} f(z)\,dz$$

jeb

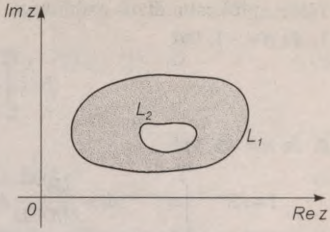
$$\oint_{+L} f(z)\,dz=\oint_{+L_1} f(z)\,dz+\oint_{+L_2} f(z)\,dz. \quad \square$$

Analogi teorēmu pierāda jebkuram daudzkārtsakarīgam apgabalam.

Secinājums

Divkārtsakarīgam apgabalam analītiskas funkcijas integrālis pa ārējo kontūru L_1 ir vienāds ar integrāli pa iekšējo kontūru L_2 (34. zīm.), t. i.,

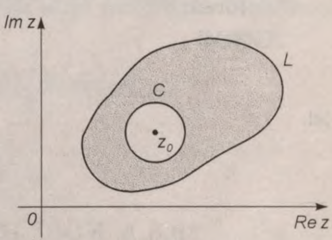
$$\oint_{+L_1} f(z)\,dz = \oint_{+L_2} f(z)\,dz.$$



34. zīm.

Piemērs. **Aprēķināt integrāli** $I=\oint_L (z-z_0)^n$, $n\in \boldsymbol{Z}$, **ja $\bar{D}$ ir ierobežots vienkārtsakarīgs apgabals, kurā atrodas punkts z_0.**

Ja n ir vesels nenegatīvs skaitlis, tad $f(z)=(z-z_0)^n$ ir analītiska funkcija visā kompleksajā plaknē. Ja n ir vesels negatīvs skaitlis, tad šī funkcija ir analītiska visā kompleksajā plaknē, izņemot punktu z_0. Tāpēc vispārīgajā gadījumā izslēgsim šo punktu no apgabala, novelkot riņķa līniju ar centru punktā z_0 un tādu rādiusu R, lai visi riņķa punkti piederētu apgabalam D. Iegūstam divkārtsakarīgu apgabalu ar ārējo kontūru L un iekšējo kontūru C – riņķa līniju (35. zīm.).



35. zīm.

Tā kā saskaņā ar Košī teorēmas secinājumu integrālis pa ārējo kontūru ir vienāds ar integrāli pa iekšējo kontūru, tad

$$I=\oint_{+L} (z-z_0)^n\,dz=\oint_{+C} (z-z_0)^n\,dz.$$

Aprēķinot integrāli pa kontūru C, izmantosim riņķa līnijas vienādojumu eksponentformā (sk. 29.1.§):

$$z-z_0=R\,e^{it},\qquad 0\leqslant t<2\pi.$$

No šejienes

$$dz=i\,R\,e^{it}\,dt.$$

Līdz ar to

$$I=\oint_{+C}(z-z_0)^n\,dz=\int_0^{2\pi}(R\,e^{it})^n\,i\,R\,e^{it}\,dt=i\int_0^{2\pi}R^n e^{int}\cdot R\,e^{it}\,dt=i\,R^{n+1}\int_0^{2\pi}e^{i(n+1)t}\,dt.$$

Košī teorēma

1. Ja $f(z)$ ir analītiska funkcija vienkārtsakarīgā apgabalā, tad

$$\oint_L f(z)\,dz=0$$

pa jebkuru kontūru L, kas atrodas apgabalā D.

2. Ja $f(z)$ ir analītiska funkcija vairākkārtsakarīgā slēgtā apgabalā, tad šīs funkcijas integrālis pa apgabala ārējo kontūru ir vienāds ar integrāļu summu pa visiem iekšējiem kontūriem:

$$\oint_L f(z)\,dz=\sum_{k=1}^{n}\oint_{L_k} f(z)\,dz.$$

Tālāk aplūkosim divus gadījumus.

1. Ja $n=-1$, tad

$$I=i\int_0^{2\pi} e^0\,dt=i\int_0^{2\pi} dt=2\pi i.$$

2. Ja $n\neq -1$, tad

$$I=iR^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}dt=\frac{iR^{n+1}}{i(n+1)}e^{i(n+1)t}\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{iR^{n+1}}{i(n+1)}(\cos(n+1)t+i\sin(n+1)t)\Bigg|_0^{2\pi}=0.$$

Tādējādi

$$I=\oint_{+L}(z-z_0)^n dz=\begin{cases}0, & \text{ja } n\neq -1\\ 2\pi i, & \text{ja } n=-1\end{cases}$$

jeb

$$\oint_{+L}\frac{1}{z-z_0}dz=2\pi i.$$

29.8. §. KOŠĪ INTEGRĀLĀ FORMULA

Pieņemsim, ka $w=f(z)$ **ir analītiska funkcija slēgtā vienkārtsakarīgā apgabalā** $\overline{D}$, ko ierobežo kontūrs L. Pierādīsim, ka ***funkcijas*** $f(z)$ ***vērtību jebkurā apgabala iekšējā punktā*** z_0 ***var aprēķināt pēc formulas***

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{+L}\frac{f(z)}{z-z_0}dz. \tag{1}$$

Šo izteiksmi sauc par **Košī integrālo formulu** jeb par **Košī integrāli**.

Pierādījums

Tā kā $f(z)$ ir analītiska funkcija apgabalā $\overline{D}$, tad arī

$$\frac{f(z)}{z-z_0}$$

ir analītiska funkcija šajā apgabalā, izņemot punktu z_0.

Izslēgsim šo punktu no apgabala, novelkot riņķa līniju C ar centru punktā z_0 un tik mazu rādiusu R, ka līnija C atrodas vaļējā apgabalā D (35. zīm.). Tādējādi iegūstam divkārtsakarīgu apgabalu ar ārējo kontūru L un iekšējo kontūru C. Šajā apgabalā $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ ir analītiska funkcija, un tāpēc integrālis pa ārējo kontūru L ir vienāds ar integrāli pa iekšējo kontūru C, t. i.,

$$\oint_{+L}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\oint_{+C}\frac{f(z)}{z-z_0}dz. \tag{2}$$

Aprēķinot šo integrāli, izmantosim riņķa līnijas C vienādojumu eksponentformā

$$z-z_0=Re^{it} \quad \text{jeb} \quad z=z_0+Re^{it}, \qquad 0\leqslant t<2\pi.$$

Tā kā

$$dz=iRe^{it}dt,$$

tad

$$\oint\limits_{+C} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(z_0+Re^{it})}{Re^{it}}\, iRe^{it}\, dt = i\int\limits_0^{2\pi} f(z_0+Re^{it})\, dt. \tag{3}$$

No vienādībām (2) un (3) izriet, ka arī

$$\oint\limits_{+L} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = i\int\limits_0^{2\pi} f(z_0+Re^{it})\, dt. \tag{4}$$

Vienādība (4) ir spēkā arī tad, ja neierobežoti samazina rādiusu R, t. i., ja $R \to 0$.

Ja robežpāreju formāli izpilda aiz integrāļa zīmes zemintegrāļa funkcijas f izteiksmē, tad iegūstam vienādību

$$\oint\limits_{+L} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = i\int\limits_0^{2\pi} f(z_0)\, dt = if(z_0)\int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi i\, f(z_0),$$

no kurienes

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{+L} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz.$$

Var arī matemātiski korekti pierādīt vienādību

$$\lim_{R\to 0} i\int\limits_0^{2\pi} f(z_0+Re^{it})\, dt = i\int\limits_0^{2\pi} f(z_0)\, dt. \quad \square$$

Tātad Koši integrālis (1) ir formula, pēc kuras *var atrast analītiskas funkcijas vērtības slēgta apgabala iekšējos punktos, ja ir zināmas šīs funkcijas vērtības uz apgabala kontūra.*

Iedomāsimies, ka z_0 ir «mainīgs punkts» apgabalā D. Tad Koši integrāļa vērtība ir atkarīga no z_0 un integrāli var uzskatīt kā mainīgā lieluma z_0 funkciju.

Atvasināsim šo integrāli pēc z_0, pieņemot, ka drīkst atvasināt aiz integrāļa zīmes zemintegrāļa funkciju, kurā $f(z)$ uzskatām par konstantu lielumu.

Tādējādi

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{+L} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\, dz. \tag{5}$$

Analogi atrodam augstāku kārtu atvasinājumus:

$$f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i} \oint\limits_{+L} \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}\, dz \tag{6}$$

$$f^{(3)}(z_0) = \frac{3!}{2\pi i} \oint\limits_{+L} \frac{f(z)}{(z-z_0)^4}\, dz \tag{7}$$

Koši integrālā formula

Ja $f(z)$ ir analītiska funkcija slēgtā vienkārtsakarīgā apgabalā, ko ierobežo kontūrs L, tad

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{+L} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz,$$

kur z_0 ir apgabala iekšējais punkts, bet z – kontūra L punkts.

vai vispārīgi

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_{+L}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz. \tag{8}$$

No vienādībām (1), (5), (6), (7), (8) iegūstam formulas, kuras var izmantot, aprēķinot dažus kontūrintegrāļus:

$$\begin{aligned}
&\oint\limits_{+L}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz=2\pi i\,f(z_0),\\
&\oint\limits_{+L}\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz=\frac{2\pi i}{1!}f'(z_0),\\
&\oint\limits_{+L}\frac{f(z)}{(z-z_0)^3}\,dz=\frac{2\pi i}{2!}f''(z_0),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\oint\limits_{+L}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0).
\end{aligned} \tag{9}$$

Piemērs. **Aprēķināt integrāli**

$$\oint\limits_{+L}\frac{z^4+1}{(z-2)^3}\,dz,$$

ja kontūrs L ietver kompleksās plaknes punktu $z_0=2+0\,i$ (36. zīm.).

Izmantosim formulu

$$\oint\limits_{+L}\frac{f(z)}{(z-z_0)^3}\,dz=\frac{2\pi i}{2!}f''(z_0),$$

kur

$$z_0=2,\quad f(z)=z^4+1,$$

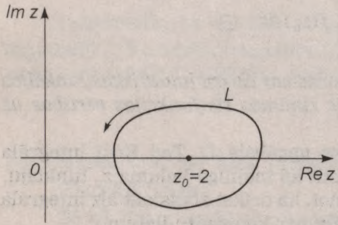
$$f''(z)=((z^4+1)')'=(4z^3)'=12z^2$$

un

$$f''(z_0)=f''(2)=12\cdot 2^2=48.$$

Tad

$$\oint\limits_{+L}\frac{z^4+1}{(z-2)^3}\,dz=\frac{2\pi i}{2!}\,48=48\pi i.$$



36. zīm.

29.9. §. KOMPLEKSO SKAITĻU RINDAS JĒDZIENS

Aplūkosim komplekso skaitļu virkni

$$z_1,\ z_2,\ \dots,\ z_n,\ \dots\,.$$

Savienojot virknes locekļus ar «+» zīmi, formāli iegūst izteiksmi

$$z_1+z_2+\ldots+z_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}z_n, \tag{1}$$

ko sauc par **komplekso skaitļu rindu**; z_n sauc par **rindas vispārīgo locekli**.

Izteiksmes

$$\begin{aligned}
&S_1=z_1,\\
&S_2=z_1+z_2,\\
&\dots\dots\dots\\
&S_n=z_1+z_2+\ldots+z_n
\end{aligned}$$

sauc par rindas **parciālsummām**.

Parciālsummas veido komplekso skaitļu virkni

$$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots .$$

Ja parciālsummu virknei eksistē robeža

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \quad \textbf{\textit{kur}} \quad S \neq \infty, \tag{2}$$

tad saka, ka rinda* (1) *konverģē, un raksta

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S.$$

Ja robeža* (2) *neeksistē vai arī ja* $S=\infty$, *tad saka, ka rinda diverģē.

Komplekso skaitļu virknēm robežas jēdzienu definē analogi kā reālo skaitļu virknēm. Piemēram, šajā gadījumā

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

nozīmē, ka

$$\forall\, \varepsilon>0 \quad \exists\, N, \quad \text{ka } \forall\, n>N \quad \text{ir spēkā nevienādība} \quad |S_n - S| < \varepsilon.$$

Starpību

$$S - S_n = r_n$$

sauc par **rindas atlikumu**.

Ir pareizs šāds apgalvojums:

rinda* (1) *konverģē tad un tikai tad, ja $\lim_{n\to\infty} r_n = 0.$

Katru komplekso skaitļu rindas (1) locekli var izteikt kompleksā skaitļa algebriskajā formā: $z_n = x_n + y_n i$. Tad aplūko rindas (1) locekļu reālo daļu rindu

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \tag{3}$$

un imagināro daļu rindu

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} y_n, \tag{4}$$

bet rindu (1) formāli pieraksta šādi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

Ir spēkā **teorēma**:

***komplekso skaitļu rinda* (1) *konverģē tad un tikai tad, ja konverģē šīs rindas locekļu reālo daļu rinda* (3) *un imagināro daļu rinda* (4).**

Kā secinājumu no šīs teorēmas iegūst **konverģences nepieciešamo nosacījumu**:

ja rinda konverģē, tad tās vispārīgais loceklis tiecas uz nulli, kad $n\to\infty$, ***t. i.,***

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0.$$

Tātad komplekso skaitļu rindas konverģences pētīšanu var reducēt uz divu reālo skaitļu rindu (3) un (4) pētīšanu.

Aplūkosim reālo skaitļu rindu, kas sastādīta no komplekso skaitļu rindas (1) locekļu moduļiem

$$|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|. \tag{5}$$

Ja konverģē rinda (1) un arī šīs rindas locekļu moduļu rinda (5), tad saka, ka **rinda** (1) **konverģē absolūti**.

Ir spēkā **teorēma**:

ja konverģē moduļu rinda (5), ***tad konverģē arī komplekso skaitļu rinda*** (1).

Tādējādi galvenās komplekso skaitļu rindu teorēmas un īpašības ir analogas atbilstošajām reālo skaitļu rindu īpašībām. Analogi ir arī konverģences kritēriji (Dalambēra, Košī u. c. kritēriji).

29.10. §. KOMPLEKSĀ MAINĪGĀ FUNKCIJU RINDAS JĒDZIENS

Līdzīgi kā definējot reāla argumenta funkciju rindu, aplūkojam kompleksā mainīgā z funkciju virkni

$$u_1(z),\ u_2(z),\ \ldots,\ u_n(z),\ \ldots,$$

kuru definīcijas kopas sakrīt vai arī to šķēlums nav tukša kopa.

Savienojot virknes locekļus ar «+» zīmi, formāli iegūst izteiksmi

$$u_1(z)+u_2(z)+\ldots+u_n(z)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z), \tag{1}$$

ko sauc par **kompleksā mainīgā funkciju rindu**; $u_n(z)$ sauc par rindas **vispārīgo locekli**.

Ja rindā (1) z vietā ievieto noteiktu komplekso skaitli z_0, tad iegūst komplekso skaitļu rindu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z_0)$, kura vai nu konverģē, vai arī diverģē.

Visu to z vērtību kopu, kurām rinda (1) ***konverģē, sauc par šīs rindas konverģences apgabalu.***

Izteiksmes

$$\begin{aligned} &S_1(z)=u_1(z),\\ &S_2(z)=u_1(z)+u_2(z),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &S_n(z)=u_1(z)+u_2(z)+\ldots+u_n(z) \end{aligned}$$

sauc par rindas (1) **parciālsummām**. Parciālsummas veido kompleksā mainīgā funkciju virkni

$$S_1(z),\ S_2(z),\ \ldots,\ S_n(z),\ \ldots .$$

Ja eksistē robeža

$$\lim_{n\to\infty} S_n(z)=S(z),$$

tad saka, ka rinda (1) ***konverģē, un funkciju*** $S(z)$ ***sauc par šīs rindas summu***

Starpību

$$S(z)-S_n(z)=r_n(z)$$

sauc par **rindas atlikumu**.

Ja rinda konverģē, tad konverģences apgabala punktos

$$\lim_{n\to\infty} r_n(z)=0.$$

Saskaņā ar robežas definīciju $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(z)=S(z)$ nozīmē, ka

$\forall\, \varepsilon<0$ $\exists\, N$, ka $\forall\, n>N$ ir pareiza nevienādība $|\,S_n(z)-S(z)\,|<\varepsilon$ jeb $|\,r_n(z)\,|<\varepsilon$.

Šajā definīcijā skaitlis N ir atkarīgs ne vien no izraudzītās ε vērtības, bet vispārīgā gadījumā - arī no konverģences apgabala punkta z. Tāpēc skaitli N parasti apzīmē ar simbolu $N(\varepsilon; z)$.

Ja nevienādība $|S_n(z)-S(z)|<\varepsilon$, kad $n>N$, ir pareiza visiem konverģences apgabala D punktiem neatkarīgi no z, tad saka, ka šajā apgabalā **funkciju rinda konverģē vienmērīgi**.

Līdzīgi kā reāla argumenta funkciju rindām, arī kompleksā mainīgā funkciju rindu **vienmērīgo konverģenci noskaidro, izmantojot Veierštrāsa teorēmu**. Aplūkosim šo teorēmu bez pierādījuma.

Ja eksistē tāda konverģenta pozitīvu reālu skaitļu rinda

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{2}$$

ka kompleksā mainīgā funkciju rindas* (1) *konverģences apgabalā ir spēkā nevienādības

$$|u_1(z)|\leqslant a_1,\quad |u_2(z)|\leqslant a_2,\quad \ldots,\quad |u_n(z)|\leqslant a_n,\quad \ldots,$$

tad funkciju rinda konverģē vienmērīgi.

Šādā gadījumā saka, ka funkciju rinda ir mažorējama, bet **skaitļu rindu** (2) **sauc par mažorantrindu**.

Svarīgākās vienmērīgi konverģentu rindu īpašības ir teorēmas par rindas summas nepārtrauktību, rindas integrēšanu un atvasināšanu pa locekļiem. Šīs īpašības aplūkosim bez pierādījumiem.

1. **Rindas summas nepārtrauktība**

Ja 1) $u_1(z), u_2(z), \ldots, u_n(z), \ldots$ ***ir nepārtrauktas funkcijas kādā apgabalā*** D,

2) ***rinda*** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ ***konverģē vienmērīgi šajā apgabalā un tās summa ir funkcija*** $S(z)$,

tad summa $S(z)$ ***ir nepārtraukta funkcija apgabalā*** D.

2. **Rindas integrēšana pa locekļiem**

Ja 1) $u_1(z), u_2(z), \ldots, u_n(z), \ldots$ ***ir nepārtrauktas (tātad - integrējamas) funkcijas apgabalā*** D,

2) ***rinda*** $u_1(z)+u_2(z)+\ldots+u_n(z)+\ldots$ ***konverģē vienmērīgi šajā apgabalā un tās summa ir*** $S(z)$, ***t. i.,***

$$S(z)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z),$$

tad pa jebkuru līniju L, ***kas atrodas šajā apgabalā, ir spēkā vienādība:***

$$\int_L S(z)\,dz=\int_L u_1(z)\,dz+\int_L u_2(z)\,dz+\ldots+\int_L u_n(z)\,dz+\ldots$$

jeb

$$\int_L\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)\right)dz=\sum_{n=1}^{\infty}\int_L u_n(z)\,dz,$$

t. i., rindu var integrēt pa locekļiem.

3. **Rindas atvasināšana pa locekļiem**

Ja 1) $u_1(z), u_2(z), \ldots, u_n(z), \ldots$ ***ir analītiskas funkcijas apgabalā*** D,

2) ***rinda*** $u_1(z)+u_2(z)+\ldots+u_n(z)+\ldots$ ***konverģē vienmērīgi apgabalā*** D ***un tās summa ir*** $S(z)$,

tad $S(z)$ ***arī ir analītiska funkcija šajā apgabalā un***

$$S'(z)=u'_1(z)+u'_2(z)+\ldots+u'_n(z)+\ldots$$

jeb

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(z),$$

t. i., rindu var atvasināt pa locekļiem; turklāt atvasinājumu rinda arī konverģē vienmērīgi apgabalā D ***un tās summa*** $S'(z)$ ***ir analītiska funkcija.***

Tātad, atvasinot atkārtoti, var atrast rindas augstāku kārtu atvasinājumus

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)\right)^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z).$$

29.11. §. KOMPLEKSĀ MAINĪGĀ PAKĀPJU RINDAS JĒDZIENS

Kompleksā mainīgā funkciju rindu, kuras locekļi ir pakāpes funkcijas ar naturāliem kāpinātājiem, sauc par **pakāpju rindu**; pakāpju rindu pieraksta šādi:

$$c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty} c_nz^n, \tag{1}$$

kur koeficienti $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ vispārīgā gadījumā ir kompleksi skaitļi.

Pakāpju rindas konverģences apgabalu atrod, izmantojot **Ābela teorēmu** (aplūkosim to bez pierādījuma).

Ja pakāpju rinda (1) ***konverģē punktā*** $z_0 \neq 0$, ***tad tā konverģē absolūti visām*** z ***vērtībām, kurām ir spēkā nevienādība*** $|z|<|z_0|$.

Ja pakāpju rinda (1) ***diverģē kādā punktā*** z_1, ***tad tā diverģē visiem*** z, ***kuriem ir spēkā nevienādība*** $|z|>|z_1|$.

Ar vienādību $|z|=|z_0|$ kompleksajā plaknē nosaka riņķa līniju, kuras centrs atrodas koordinātu sākumpunktā un kura iet caur punktu z_0, bet ar nevienādību $|z|<|z_0|$ – plaknes daļu, ko ietver šī riņķa līnija. Tādējādi Ābela teorēmai ir šāda ģeometriskā interpretācija:

ja pakāpju rinda konverģē punktā z_0, *tad tā absolūti konverģē visos punktos, kas atrodas tāda riņķa iekšpusē, kura rādiuss ir* $|z_0|$ *un centrs atrodas koordinātu sākumpunktā; ja pakāpju rinda diverģē punktā* z_1, *tad tā diverģē arī ārpus riņķa, kura rādiuss ir* $|z_1|$ *un centrs ir koordinātu sākumpunktā.*

Secinājums

Kompleksā mainīgā pakāpju rindai (1) eksistē tāds riņķis ar centru koordinātu sākumpunktā, ka visos šī riņķa iekšējos punktos rinda konverģē, bet ārpus riņķa – diverģē. Tātad **pakāpju rindas konverģences apgabals ir riņķis, ko sauc par konverģences riņķi; šī riņķa rādiusu** R **sauc par konverģences rādiusu.**

Ir iespējams, ka $R=\infty$; tad rinda konverģē visā kompleksajā plaknē.

Ja $R=0$, tad rinda konverģē tikai koordinātu sākumpunktā.

Analogi kā reāla mainīgā pakāpju rindām, arī kompleksā mainīgā pakāpju rindām konverģences apgabala noteikšanai izmanto Dalambēra vai Košī konverģences kritēriju. No šiem kritērijiem izriet ***konverģences rādiusa aprēķināšanas formulas:***

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|,\qquad R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}},$$

ja vien šīs robežas eksistē vai arī ja $R=\infty$.

Piebildīsim, ka konverģences rādiusu pēc šīm formulām var aprēķināt tikai tad, ja rindā (1) neviens no koeficientiem c_n nav vienāds ar nulli vai arī ja visi koeficienti $c_k\neq 0$, sākot ar kādu indeksa k vērtību.

Pakāpju rindas (1) locekļi ir analītiskas funkcijas visā kompleksajā plaknē. Var pierādīt, ka

pakāpju rinda konverģē vienmērīgi visos konverģences riņķa iekšējos punktos.

Tātad pakāpju rindām ir spēkā vienmērīgi konverģentu rindu svarīgākās īpašības, t. i., ***pakāpju rindas summa ir analītiska funkcija, pakāpju rindu var integrēt un atvasināt pa locekļiem; turklāt integrējot vai atvasinot rindas konverģences rādiuss*** R ***nemainās.***

Vispārīgāks gadījums ir pakāpju rinda ar binoma $z-z_0$ pakāpēm, t. i., rinda

$$c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots+c_n(z-z_0)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n. \tag{2}$$

Rindu (2) sauc par **vispārināto pakāpju rindu**.

Izmantojot substitūciju $z-z_0=\zeta$, rindu (2) pārveido par pakāpju rindu ar ζ pakāpēm:

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n\zeta^n \tag{3}$$

un atrod šīs rindas konverģences rādiusu R.

Tā kā rinda (3) konverģē punktos ζ, kuriem $|\zeta|<R$, tad rinda (2) konverģē punktos z, kuriem ir spēkā nevienādība $|z-z_0|<R$. Šī nevienādība kompleksajā plaknē nosaka riņķi ar centru punktā z_0 un rādiusu R.

Tātad *vispārinātās pakāpju rindas (2) konverģences apgabals ir riņķis ar centru punktā* z_0 (atsevišķos gadījumos – visa kompleksā plakne vai arī tikai punkts z_0).

29.12. §. KOMPLEKSĀ MAINĪGĀ TEILORA RINDA

Aplūkosim vispārināto pakāpju rindu, kuras konverģences rādiuss ir R. Šī rinda konverģē vienmērīgi jebkurā slēgtā riņķī $|z-z_0|\leqslant r$, kur $r<R$.

Pieņemsim, ka rindas summa ir funkcija $f(z)$.

Tātad

$$f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+c_3(z-z_0)^3+\ldots+c_n(z-z_0)^n+\ldots \tag{1}$$

Rindu (1) var atvasināt pa locekļiem neierobežoti daudz reižu:

$$\begin{aligned}
&f'(z)=c_1+2c_2(z-z_0)+3c_3(z-z_0)^2+\ldots+nc_n(z-z_0)^{n-1}+\ldots,\\
&f''(z)=2c_2+2\cdot 3c_3(z-z_0)+\ldots+(n-1)nc_n(z-z_0)^{n-2}+\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f^{(n)}(z)=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots(n-1)nc_n+1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots n(n+1)c_{n+1}(z-z_0)+\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{2}$$

Ievietojot rindā (1) un tās atvasinājumos (2) z vietā z_0, atrodam rindas koeficientus:

$$c_0=f(z_0),\quad c_1=\frac{f'(z_0)}{1!},\quad c_2=\frac{f''(z_0)}{2!},\quad\ldots,\quad c_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},\quad\ldots.$$

Līdz ar to iegūstam šādu funkcijas $f(z)$ izvirzījumu vispārinātajā pakāpju rindā:

$$f(z)=f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\ldots . \quad (3)$$

Rindu (3) sauc par funkcijas $f(z)$ **Teilora rindu**

Var pierādīt, ka

katru analītisku funkciju $f(z)$ ***vienā vienīgā veidā var izvirzīt Teilora rindā, kas vienmērīgi konverģē uz šo funkciju kādā riņķī*** $|z-z_0|<R$.

Ja funkcijai eksistē izvirzījums Teilora rindā kādā punkta z_0 apkārtnē, tad saka, ka funkcija punktā z_0 ir **holomorfa**. **Jēdzieni «holomorfa funkcija» un «analītiska funkcija» ir sinonīmi**, jo katra holomorfa funkcija ir analītiska, un otrādi: katra analītiska funkcija ir holomorfa.

Ja $z_0=0$, tad no izteiksmes (3) iegūst speciālu Teilora rindas gadījumu – **Maklorēna rindu**, t. i., pakāpju rindu ar z pakāpēm:

$$f(z)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}z+\frac{f''(0)}{2!}z^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n+\ldots . \quad (4)$$

29.13. §. KOMPLEKSĀ MAINĪGĀ ELEMENTĀRĀS PAMATFUNKCIJAS

Elementārās funkcijas, kuras aplūko kompleksajā plaknē, līdzīgi kā reāla argumenta funkcijas, iedala algebrisko funkciju grupā un transcendento funkciju grupā.

Ja, aprēķinot funkcijas vērtību, ar kompleksiem skaitļiem jāizpilda galīga skaita algebriskās darbības (saskaitīšana, atņemšana, reizināšana, dalīšana, kāpināšana ar naturālu kāpinātāju un saknes atrašana), tad funkciju sauc par **algebrisku kompleksā mainīgā funkciju**.

Piemēram, $w=z^2$, $w=\frac{1}{z}$, $w=(z+2)^3$, $w=\frac{1+z}{3+z^2}$ u. tml. ir algebriskas funkcijas.

Kompleksā mainīgā funkciju teorijā sīkāk aplūko attēlojumus, kurus izpilda ar šādām algebriskajām funkcijām:

1) lineāro funkciju $w=az+b$, kur $a, b\in \boldsymbol{C}$ un $a\neq 0$;

2) daļveida lineāro funkciju $w=\frac{az+b}{cz+d}$, kur $a, b, c, d\in \boldsymbol{C}$ un

$$D=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0;$$

3) pakāpes funkciju $w=z^m$, kur $m\in \boldsymbol{Z}$.

Pie **transcendetām funkcijām** pieder eksponentfunkcijas, trigonometriskās funkcijas un šo funkciju inversās funkcijas – logaritmiskā funkcija un ciklometriskās funkcijas, kā arī hiperboliskās funkcijas, kuras definē ar eksponentfunkcijas palīdzību. Kompleksajā plaknē šīs pamatfunkcijas var definēt, izmantojot pakāpju rindas.

1. KOMPLEKSĀ MAINĪGĀ EKSPONENTFUNKCIJA UN TRIGONOMETRISKĀS FUNKCIJAS

Eksponentfunkciju $w=e^z$ kompleksajā plaknē var definēt dažādi. Viens no veidiem, kā definēt šo funkciju, ir pakāpju rinda, kas analoga reāla argumenta eksponentfunkcijas e^x izvirzījumam Teilora rindā, t. i., definē

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}. \tag{1}$$

Rindas (1) konverģences rādiuss $R=\infty$; tātad tā konverģē visā kompleksajā plaknē. Atvasinot šo rindu pa locekļiem, viegli pārliecināties, ka $(e^z)'=e^z$.

Arī kompleksā mainīgā funkcijas $\sin z$ un $\cos z$ var definēt ar pakāpju rindām, kas analogas reāla argumenta funkciju $\sin x$ un $\cos x$ izvirzījumiem Teilora rindā, t. i.,

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots, \tag{2}$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots. \tag{3}$$

Arī šīs rindas vienmērīgi konverģē visā kompleksajā plaknē. Atvasinot pa locekļiem rindas (2) un (3), iegūstam atvasināšanas formulas:

$$(\sin z)'=\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots\right)'=$$
$$=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\cos z.$$

Analogi iegūstam, ka

$$(\cos z)'=-\sin z.$$

Izmantojot rindas (1), (2) un (3), atrodam sakarību starp kompleksā argumenta eksponentfunkciju un trigonometriskajām funkcijām. Ievietojot rindā (1) z vietā iz, iegūstam

$$e^{iz}=1+\frac{iz}{1!}+\frac{(iz)^2}{2!}+\frac{(iz)^3}{3!}+\frac{(iz)^4}{4!}+\frac{(iz)^5}{5!}+\frac{(iz)^6}{6!}+\ldots=$$
$$=1+i\frac{z}{1!}-\frac{z^2}{2!}-i\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+i\frac{z^5}{5!}-\frac{z^6}{6!}-\ldots=$$
$$=\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots\right)+i\left(\frac{z}{1!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots\right)=$$
$$=\cos z+i\sin z.$$

Funkciju $f(z)$ sauc par **holomorfu (analītisku)**, ja tai eksistē izvirzījums Teilora rindā

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},$$

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Analogi iegūst, ka

$$e^{-iz}=\cos z-i\sin z.$$

Vienādības

$$\begin{aligned} e^{iz}&=\cos z+i\sin z,\\ e^{-iz}&=\cos z-i\sin z \end{aligned} \tag{4}$$

sauc par **Eilera formulām**.

No Eilera formulām izriet šādas sakarības:

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}; \qquad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}. \tag{5}$$

Izmantojot pirmo Eilera formulu (4), no kompleksā skaitļa z trigonometriskās formas iegūst šī skaitļa eksponentformu:

$$z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)=|z|e^{i\varphi}. \tag{6}$$

Pārveidosim eksponentfunkcijas e^z izteiksmi, izmantojot kompleksā skaitļa algebrisko formu $z=x+yi$ un reālu skaitļu pakāpju reizināšanas kārtulu:

$$e^z=e^{x+yi}=e^x\cdot e^{yi}=e^x(\cos y+i\sin y). \tag{7}$$

Salīdzinot izteiksmi (7) ar kompleksā skaitļa trigonometrisko formu, redzams, ka

$$|e^z|=e^x \quad \text{un} \quad \operatorname{Arg} e^z=y+2\pi k.$$

No vienādības (7) izriet arī, ka kompleksā mainīgā eksponentfunkcija ir periodiska funkcija ar periodu $2\pi i$.

Patiešām,

$$e^{z+2\pi i}=e^z\cdot e^{2\pi i}=e^z(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=e^z(1+0)=e^z.$$

Savukārt, izmantojot formulas (5), var pierādīt, ka funkcijas $\sin z$ un $\cos z$ ir periodiskas ar periodu 2π un šīm funkcijām ir spēkā galvenās trigonometriskās identitātes: $\sin^2 z+\cos^2 z=1$ u. c.

Tomēr kompleksā mainīgā trigonometriskajām funkcijām ne visas īpašības sakrīt ar reāla argumenta trigonometrisko funkciju īpašībām.

P i e m ē r a m, ir tādi kompleksie skaitļi z, kuriem $|\sin z|>1$ un arī $|\cos z|>1$.

Funkcijas $\operatorname{tg} z$ un $\operatorname{ctg} z$ definē analogi kā atbilstošās reāla argumenta trigonometriskās funkcijas:

$$\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \operatorname{ctg} z=\frac{\cos z}{\sin z}.$$

Izmantojot formulas (5), $\operatorname{tg} z$ un $\operatorname{ctg} z$ var izteikt šādi:

$$\operatorname{tg} z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{i(e^{iz}+e^{-iz})}, \qquad \operatorname{ctg} z=\frac{i(e^{iz}+e^{-iz})}{e^{iz}-e^{-iz}}.$$

Lietojot eksponentfunkcijas e^z un e^{-z}, definē **kompleksā mainīgā hiperboliskās funkcijas**:

$$\operatorname{sh} z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{th} z=\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z=\frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}. \tag{8}$$

Eilera formulas

$$\left.\begin{aligned} e^{iz}&=\cos z+i\sin z\\ e^{-iz}&=\cos z-i\sin z \end{aligned}\right. \Rightarrow \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

Ievietojot formulās (5) z vietā iz, iegūstam

$$\sin iz=\frac{e^{-z}-e^{z}}{2i}=-\frac{e^{z}-e^{-z}}{2i}=-\frac{\operatorname{sh} z}{i};\qquad \cos iz=\frac{e^{-z}+e^{z}}{2}=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}=\operatorname{ch} z.$$

Tādējādi iegūstam sakarības starp kompleksā mainīgā trigonometriskajām un hiperboliskajām funkcijām:

$$\operatorname{sh} z=-i\sin iz,\qquad \operatorname{ch} z=\cos iz,$$

no kurienes

$$\operatorname{th} z=-i\operatorname{tg} iz,\qquad \operatorname{cth} z=i\operatorname{ctg} iz.$$

2. KOMPLEKSĀ MAINĪGĀ LOGARITMISKĀ FUNKCIJA

Par kompleksā skaitļa z logaritmu sauc kāpinātāju w pakāpes izteiksmē $e^{w}=z$ un raksta: $w=\operatorname{Ln} z$.

Logaritmisko funkciju definē kā eksponentfunkcijas inverso funkciju un apzīmē ar simbolu $\operatorname{Ln} z$,

$$\text{t. i., ja}\quad z=e^{w},\quad \text{tad}\quad w=\operatorname{Ln} z.$$

Tā kā kompleksā mainīgā eksponentfunkcija ir periodiska funkcija ar periodu $2\pi i$, tad tās inversā funkcija – *logaritmiskā funkcija ir vairākvērtīga funkcija*.

Aplūkosim logaritmiskās funkcijas izteiksmi.

Ja $w=u+vi$, tad $\operatorname{Ln} z=u+vi$.

Savukārt

$$z=e^{u+vi}=e^{u}\cdot e^{vi}=e^{u}(\cos v+i\sin v). \tag{9}$$

Tātad $|z|=e^{u}$, no kurienes $u=\ln|z|$ (ievērosim, ka šeit $|z|$ un $\ln|z|$ ir reāli lielumi).

No izteiksmes (9) izriet, ka $v=\operatorname{Arg} z$. Līdz ar to

$$\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i\operatorname{Arg} z=\ln|z|+i(\arg z+2\pi k)\qquad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots). \tag{10}$$

Tā kā izteiksmē (10) k var būt jebkurš vesels skaitlis, tad $\operatorname{Ln} z$ ir vairākvērtīga funkcija; tās reālā daļa $\ln|z|$ ir vienvērtīgs lielums, bet imaginārā daļa $\arg z+2\pi k$ atkarībā no k var pieņemt bezgalīgi daudz vērtību.

Ja izvēlas $k=0$, tad iegūst vienvērtīgu funkciju, kuru apzīmē ar $\ln z$ un ***sauc par logaritmiskās funkcijas*** $\operatorname{Ln} z$ ***galveno vērtību***.

Tātad

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z. \tag{11}$$

No vienādības (10) izriet, ka kompleksajā plaknē logaritmiem ir spēkā īpašības, kas analogas reālu skaitļu reizinājuma, dalījuma logaritmiem un pakāpes logaritmiem, t. i.,

$$\operatorname{Ln}(z_1\cdot z_2)=\operatorname{Ln} z_1+\operatorname{Ln} z_2,\qquad \operatorname{Ln}\frac{z_1}{z_2}=\operatorname{Ln} z_1-\operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln} z^{n}=n\operatorname{Ln} z.$$

$$\operatorname{sh} z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2},\qquad \operatorname{ch} z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2},\qquad \operatorname{th} z=\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z},\qquad \operatorname{cth} z=\frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$$

$$\operatorname{sh} z=-i\sin iz,\qquad \operatorname{ch} z=\cos iz,$$

$$\operatorname{th} z=-i\operatorname{tg} iz,\qquad \operatorname{cth} z=i\operatorname{ctg} iz.$$

3. KOMPLEKSĀ MAINĪGĀ CIKLOMETRISKĀS FUNKCIJAS

Tāpat kā reāla argumenta trigonometriskajām funkcijām, arī kompleksajā plaknē trigonometriskajām funkcijām definē inversās funkcijas, ko sauc par ciklometriskajām funkcijām. Trigonometriskās funkcijas ir periodiskas, tāpēc to inversās funkcijas ir vairākvērtīgas funkcijas.

Ja $z=\sin w$, tad w sauc par kompleksā skaitļa z arksinusu un raksta $w=\operatorname{Arcsin} z$.

Analogi, izmantojot funkcijas $z=\cos w$, $z=\operatorname{tg} w$, $z=\operatorname{ctg} w$, definē šo funkciju inversās funkcijas – arkkosinusu, arktangensu un arkkotangensu: $w=\operatorname{Arccos} z$, $w=\operatorname{Arctg} z$, $w=\operatorname{Arcctg} z$.

Tāpat kā ir spēkā sakarības starp kompleksā mainīgā trigonometriskajām funkcijām un eksponentfunkciju, pastāv sakarības arī starp ciklometriskajām funkcijām un logaritmisko funkciju.

Var pierādīt, ka

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arcsin} z &= -i\operatorname{Ln}(iz+\sqrt{1-z^2}),\\
\operatorname{Arccos} z &= -i\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1}),\\
\operatorname{Arctg} z &= -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz},\\
\operatorname{Arcctg} z &= \frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{iz+1}{iz-1}.
\end{aligned} \tag{12}$$

29.14. §. JĒDZIENS PAR LORĀNA RINDU

Kā atzīmējām 29.12. §, katru analītisku funkciju $f(z)$ vienā vienīgā veidā var izvirzīt Teilora rindā, kas vienmērīgi konverģē uz šo funkciju kādā riņķī $|z-z_0|<R$, jeb izvirzījums Teilora rindā eksistē funkcijām, kas ir analītiskas riņķveida apgabalos (vai arī visā kompleksajā plaknē). Tomēr dažkārt ir jāizveido izvirzījums rindā funkcijām, kuras ir analītiskas kādā punkta z_0 apkārtnē (riņķī), izņemot pašu punktu z_0. Izrādās, ka tādu funkciju var izvirzīt rindā, kas satur binoma $z-z_0$ pakāpes gan ar veseliem pozitīviem kāpinātājiem, gan arī ar veseliem negatīviem kāpinātājiem.

Šādu rindu sauc par **Lorāna rindu**, raksta

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n \tag{1}$$

un definē kā divu rindu summu:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}.$$

Tādējādi Lorāna rinda ir divpusēja rinda:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}. \tag{2}$$

Vienādības (2) labajā pusē pirmā rinda ir vispārinātā pakāpju rinda $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$, kas konverģē kādā riņķī $|z-z_0|<R$ (sk. 29.11. §); šo rindu sauc par **Lorāna rindas regulāro daļu**.

Otro rindu $\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ sauc par **Lorāna rindas galveno daļu.**

Lorāna rinda konverģē tad un tikai tad, ja atsevišķi konverģē tās regulārā daļa un galvenā daļa.

Pārveidosim Lorāna rindas galveno daļu

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}\frac{1}{(z-z_0)^n},$$

izmantojot substitūciju $\frac{1}{z-z_0}=\zeta.$

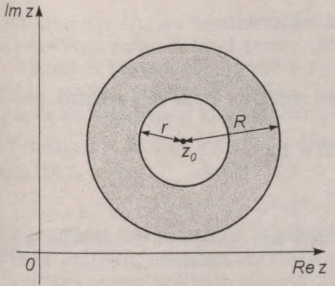
Tad iegūstam pakāpju rindu ar ζ pakāpēm $\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}\zeta^n$, kas konverģē kādā riņķī, ko nosaka nevienādība $|\zeta| < R_1$ jeb $\frac{1}{|z-z_0|} < R_1$, no kurienes $|z-z_0| > \frac{1}{R_1}$.

Apzīmēsim $\frac{1}{R_1}=r$, tad $|z-z_0|>r$.

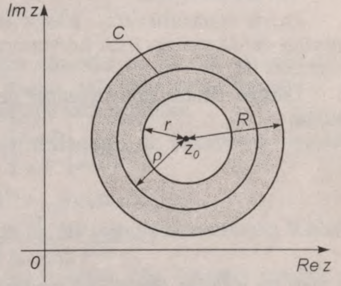
Tā kā Lorāna rindas regulārā daļa konverģē riņķī $|z-z_0|<R$, bet šīs rindas galvenā daļa konverģē ārpus riņķa, ko nosaka nevienādība $|z-z_0|>r$, tad **abu rindu konverģences apgabalu kopīgā daļa ir gredzens, ko nosaka nevienādības** $r<|z-z_0|<R$ (pieņemam, ka $r<R$).

Tātad Lorāna rinda konverģē gredzenā

$$r<|z-z_0|<R \quad \text{(37. zīm.).}$$



37. zīm.



38. zīm.

Tā kā Lorāna rinda ir pakāpju rindas un par pakāpju rindu pārveidojamas rindas summa, tad tā konverģē vienmērīgi un absolūti jebkurā apgabalā, kas atrodas gredzenā $r<|z-z_0|<R$, un šīs rindas summa ir kāda analītiska funkcija $f(z)$, t. i.,

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n. \tag{3}$$

Aplūkosim metodi, kā iegūst Lorāna rindas koeficientus c_n. Vispirms izraudzīsimies riņķa līniju C ar centru punktā z_0 un rādiusu ρ, kur $r<\rho<R$ (38. zīm.). Reizināsim vienādības (3) labo un kreiso pusi ar $\frac{1}{(z-z_0)^{k+1}}$, kur $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$.

Iegūstam

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\frac{(z-z_0)^n}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^{n-k-1}. \tag{4}$$

Var pierādīt, ka iegūtā rinda (4) konverģē vienmērīgi riņķa līnijas C punktos, un tātad šo rindu var integrēt pa locekļiem, t. i.,

$$\oint_{+C} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{k+1}} = \oint_{+C} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^{n-k-1} \right) dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \oint_{+C} (z-z_0)^{n-k-1}\,dz. \quad (5)$$

Aplūkojot Košī teorēmu vairākkārtsakarīgam apgabalam, 29.7. § ieguvām šādu rezultātu:

$$\oint_{+L} (z-z_0)^n\,dz = \begin{cases} 0, & \text{ja } n \neq -1 \\ 2\pi i, & \text{ja } n = -1. \end{cases}$$

Tātad rindā (5) visi locekļi ir vienādi ar nulli, izņemot to locekli, kuram $n-k-1=-1$ jeb $n=k$; šis loceklis ir $c_k \cdot 2\pi i$.

Tādējādi

$$\oint_{+C} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{k+1}} = c_k\, 2\pi i,$$

no kurienes

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{+C} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{k+1}}$$

jeb, mainot indeksa apzīmējumu,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{+C} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}. \quad (6)$$

Var pierādīt, ka

***katru funkciju** $f(z)$, **kas ir analītiska gredzenā** $r < |z-z_0| < R$, **vienā vienīgā veidā var izvirzīt Lorāna rindā** (1), **kuras koeficientus aprēķina pēc formulas** (6).*

Lorāna rindas konverģences gredzena rādiusus r un R aprēķina pēc formulām

$$r = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{c_{-n-1}}{c_{-n}} \right|, \qquad R = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

vai arī

$$r = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_{-n}|}}, \qquad R = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}},$$

ja vien šīs robežas eksistē un neviens no rindas koeficientiem c_n nav vienāds ar nulli vai arī ja visi koeficienti $c_n \neq 0$, sākot ar kādu indeksa n vērtību.

Ievērosim, ka gadījumā, ja Lorāna rindas galvenajā daļā visi koeficienti $c_{-n}=0$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$, tad Lorāna rinda ir vienāda ar tās regulāro daļu $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$, kas ir funkcijas $f(z)$ Teilora rinda. Tādējādi var uzskatīt, ka *Teilora rinda ir Lorāna rindas speciāls gadījums.*

29.15. §. KOMPLEKSĀ MAINĪGĀ FUNKCIJAS SINGULĀRO PUNKTU JĒDZIENS

Definīcija

***Par funkcijas** $f(z)$ **nulli sauc skaitli** z_0, **ja** $f(z_0)=0$.*

Ja funkcija ir analītiska, tad ir iespējams, ka punktā z_0 ne tikai funkcija $f(z)$ ir vienāda ar nulli, bet arī šīs funkcijas atvasinājumi ir vienādi ar nulli.

Pieņemsim, ka

$$f(z_0)=f'(z_0)=f''(z_0)=\ldots=f^{(m-1)}(z_0)=0, \quad \text{bet} \quad f^{(m)}(z_0)\neq 0.$$

Šādā gadījumā saka, ka **skaitlis z_0 ir funkcijas $f(z)$ m-tās kārtas nulle.**

Ja z_0 ir analītiskas funkcijas $f(z)$ m-tās kārtas nulle, tad šīs funkcijas Teilora rindā

$$f(z)=f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\ldots$$

pirmie m locekļi ir vienādi ar nulli, t. i.,

$$f(z)=\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}(z-z_0)^m+\frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z-z_0)^{m+1}+\ldots.$$

Definīcija

Kompleksās plaknes punktus, kuros funkcija $f(z)$ ir analītiska (t. i., eksistē atvasinājums), sauc par funkcijas regulāriem punktiem. Punktus, kuros funkcija nav analītiska, sauc par singulāriem punktiem.

Definīcija

Ja eksistē tāda apkārtne $U(z_0)$, kurā z_0 ir vienīgais funkcijas $f(z)$ singulārais punkts, tad z_0 sauc par izolētu singulāro punktu.

Ja z_0 ir funkcijas $f(z)$ izolēts singulārais punkts, tad ap šo punktu var konstruēt tādu gredzenu $r<|z-z_0|<R$ (37. zīm.), kurā $f(z)$ ir analītiska funkcija, un to var izvirzīt Lorāna rindā:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n.$$

Izolētos singulāros punktus z_0 *klasificē atkarībā no tā, cik saskaitāmo ir Lorāna rindas galvenajā daļā*, t. i., tajā rindas daļā, kas satur binoma $z-z_0$ pakāpes ar negatīviem kāpinātājiem. Ir iespējami šādi gadījumi.

1. **Lorāna rindā nav galvenās daļas** – nav nevienas $z-z_0$ pakāpes ar negatīvu kāpinātāju, t. i.,

$$f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots+c_n(z-z_0)^n+\ldots.$$

Šajā gadījumā Lorāna rinda ir pakāpju rinda un tās summa ir analītiska funkcija riņķī $|z-z_0|<R$, ieskaitot arī riņķa centru z_0.

Visos riņķa punktos rinda konverģē uz funkciju $f(z)$, izņemot punktu z_0, kurā rinda konverģē uz skaitli c_0, kas vispārīgā gadījumā var nebūt vienāds ar $f(z_0)$. Taču, definējot funkciju $f(z)$, var papildus norādīt, ka $f(z_0)=c_0$, t. i., var novērst singularitāti punktā z_0. Tāpēc saka, ka z_0 ir novēršams singulārs punkts.

Definīcija

Punktu z_0 sauc par funkcijas $f(z)$ novēršamu singulāro punktu, ja

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n \quad \textit{un} \quad \lim_{z\to z_0} f(z)=a, \quad a\neq\infty.$$

2. **Lorāna rindā** ir regulārā daļa, bet **galvenā daļa satur tikai pirmos m locekļus:**

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n+c_{-1}(z-z_0)^{-1}+c_{-2}(z-z_0)^{-2}+\ldots+c_{-m}(z-z_0)^{-m}.$$

Šajā gadījumā saka, ka singulārais punkts z_0 ir funkcijas $f(z)$ m-tās kārtas pols. Acīmredzot polā z_0 $f(z)$ ir bezgalīgi liela funkcija.

Apgrieztā funkcija $\frac{1}{f(z)}$ ir analītiska funkcija punktā z_0, un z_0 ir šīs funkcijas m-tās kārtas nulle.

Definīcija

Funkcijas $f(z)$ singulāro punktu z_0 sauc par m-tās kārtas polu, ja

$$f(z)=\sum_{n=-m}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n, \quad c_{-m}\neq 0, \quad (\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty).$$

3. **Lorāna rindas galvenajā daļā ir bezgalīgi daudz locekļu ar $z-z_0$ pakāpēm, kuru kāpinātāji ir negatīvi skaitļi,** un neeksistē robeža $\lim_{z\to z_0} f(z)$. Šādā gadījumā saka, ka z_0 ir būtiski singulārs punkts.

Definīcija

Punktu z_0 sauc par būtiski singulāru punktu, ja neeksistē $\lim_{z\to z_0} f(z)$ ***un*** $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$.

Piezīme

Plašākos kompleksā mainīgā funkciju teorijas kursos aplūko pilnīgāku singulāro punktu klasifikācijas shēmu, ietverot tajā sazarojuma punktu jēdzienu un šo punktu sīkāku iedalījumu.

29.16. §. JĒDZIENS PAR FUNKCIJAS REZIDIJIEM

1. REZIDIJA DEFINĪCIJA

Pieņemsim, ka $f(z)$ ir analītiska funkcija vienkārtsakarīgā apgabalā, kurā atrodas punkts z_0, vai arī z_0 ir šīs funkcijas izolēts singulārais punkts. Tad funkcijai eksistē izvirzījums Lorāna rindā

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots+c_n(z-z_0)^n+\ldots+$$
$$+c_{-1}(z-z_0)^{-1}+c_{-2}(z-z_0)^{-2}+\ldots+c_{-n}(z-z_0)^{-n}+\ldots. \tag{1}$$

Koeficientu pie $(z-z_0)^{-1}$ Lorāna rindā, t. i., skaitli c_{-1} sauc par funkcijas $f(z)$ rezidiju punktā z_0 un apzīmē ar simbolu $\operatorname{Res} f(z_0)$; ***tātad***

$$\operatorname{Res} f(z_0)=c_{-1}.$$

Tā kā Lorāna rindas koeficientus atrod ar kontūrintegrāli

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{+C}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \quad \text{(sk. 29.14. §)}, \tag{2}$$

tad, ievietojot izteiksmē (2) $n=-1$, iegūstam

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{+C} f(z)\,dz. \tag{3}$$

Tātad rezidiju punktā z_0 var definēt arī ar integrāli (3) pa kontūru C, kas aptver punktu z_0, t. i.,

$$\operatorname{Res} f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{+C} f(z)\,dz. \tag{4}$$

2. REZIDIJA APRĒĶINĀŠANA

Ja z_0 ir izolēts singulārais punkts un funkcijai $f(z)$ var viegli atrast integrāli apgabalā D, tad rezidiju var aprēķināt, izmantojot definīciju (4).

Ja $f(z)$ ir analītiska funkcija vienkārtsakarīgā apgabalā un z_0 ir šī apgabala iekšējais punkts, tad saskaņā ar Koši teorēmu katrs kontūrintegrālis šajā apgabalā ir vienāds ar nulli, un tātad

$$\operatorname{Res} f(z_0)=0.$$

Aplūkosim rezidija aprēķināšanas metodi gadījumā, kad **izolēts singulārais punkts z_0 ir funkcijas $f(z)$ m-tās kārtas pols**. Tad šīs funkcijas Lorāna rinda satur regulāro daļu, bet galvenajā daļā ir tikai pirmie m locekļi, t. i.,

$$f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots+c_n(z-z_0)^n+\ldots+ \\ +c_{-1}(z-z_0)^{-1}+c_{-2}(z-z_0)^{-2}+\ldots+c_{-m}(z-z_0)^{-m}. \tag{5}$$

Rīkosimies pēc šāda algoritma.

1. Reizina vienādības (5) abas puses ar $(z-z_0)^m$:

$$f(z)(z-z_0)^m=c_0(z-z_0)^m+c_1(z-z_0)^{m+1}+c_2(z-z_0)^{m+2}+\ldots+ \\ +c_{-1}(z-z_0)^{m-1}+c_{-2}(z-z_0)^{m-2}+\ldots+c_{-m}. \tag{6}$$

2. Iegūto vienādību (6) atvasina $m-1$ reizi:

$$(f(z)(z-z_0)^m)'=c_0m(z-z_0)^{m-1}+c_1(m+1)(z-z_0)^m+c_2(m+2)(z-z_0)^{m+1}+\ldots+ \\ +c_{-1}(m-1)(z-z_0)^{m-2}+c_{-2}(m-2)(z-z_0)^{m-3}+\ldots,$$

$$(f(z)(z-z_0)^m)''=c_0m(m-1)(z-z_0)^{m-2}+c_1(m+1)m(z-z_0)^{m-1}+ \\ +c_2(m+2)(m+1)(z-z_0)^m+\ldots+c_{-1}(m-1)(m-2)(z-z_0)^{m-3}+ \\ +c_{-2}(m-2)(m-3)(z-z_0)^{m-4}+\ldots,$$

. . . .

$$(f(z)(z-z_0)^m)^{(m-1)}=c_0m!(z-z_0)+c_1(m+1)m\ldots4\cdot3(z-z_0)^2+\ldots+c_{-1}(m-1)!. \tag{7}$$

3. Meklē robežu $\lim\limits_{z\to z_0}(f(z)(z-z_0)^m)^{(m-1)}$.

Ievietojot vienādības (7) labajā pusē $z=z_0$, redzams, ka visi šīs rindas locekļi kļūst vienādi ar nulli, izņemot pēdējo locekli, kas vienāds ar $c_{-1}(m-1)!$.
Tātad

$$\lim_{z\to z_0}(f(z)(z-z_0)^m)^{(m-1)}=c_{-1}(m-1)!,$$

no kurienes

$$c_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\cdot\lim_{z\to z_0}(f(z)(z-z_0)^m)^{(m-1)}$$

jeb

$$\operatorname{Res} f(z_0)=\frac{1}{(m-1)!}\cdot\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(f(z)(z-z_0)^m). \tag{8}$$

Piemērs. **Aprēķināt funkcijas $f(z)=\dfrac{z^3+1}{z^2-6z+9}$ rezidiju šīs funkcijas singulārajā punktā.**

Tā kā

$$f(z)=\frac{z^3+1}{z^2-6z+9}=\frac{z^3+1}{(z-3)^2},$$

tad $z=3$ ir funkcijas singulārais punkts; šis punkts ir 2. kārtas pols.

Ievietojot formulā (8) $f(z)=\dfrac{z^3+1}{(z-3)^2}$, $z_0=3$, $m=2$, atrodam

$$\operatorname{Res} f(3)=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 3}\left(\frac{z^3+1}{(z-3)^2}(z-3)^2\right)'=\lim_{z\to 3}(z^3+1)'=\lim_{z\to 3}3z^2=27.$$

Aplūkosim speciālu gadījumu, kad

$$f(z)=\frac{g(z)}{h(z)},$$

kur

$$g(z_0)\neq 0,\quad h(z_0)=0,\quad \text{bet}\quad h'(z_0)\neq 0,$$

t. i., z_0 **ir funkcijas** $f(z)$ **1. kārtas pols un funkcijas** $h(z)$ **1. kārtas nulle**. Tā kā šajā gadījumā $m=1$, tad saskaņā ar formulu (8) iegūstam

$$\operatorname{Res} f(z_0)=\lim_{z\to z_0}\left(\frac{g(z)}{h(z)}\cdot(z-z_0)\right)=\lim_{z\to z_0} g(z)\cdot\lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{h(z)}=g(z_0)\cdot\lim_{z\to z_0}\frac{1}{\dfrac{h(z)}{z-z_0}}=$$

$$=g(z_0)\cdot\frac{1}{\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0}}=g(z_0)\cdot\frac{1}{h'(z_0)}=\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Tātad divu funkciju $g(z)$ un $h(z)$ attiecības $\dfrac{g(z)}{h(z)}$ rezidiju punktā z_0 var aprēķināt pēc formulas

$$\operatorname{Res}\left(\frac{g(z_0)}{h(z_0)}\right)=\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}, \tag{9}$$

kur $g(z_0)\neq 0$, $h(z_0)=0$, $h'(z_0)\neq 0$.

Funkcijas $f(z)$ **Lorāna rinda**:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n,$$

kur

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{+C}\frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}.$$

Pjērs Lorāns (1813–1854) – franču matemātiķis.

Par funkcijas $f(z)$ **rezidiju** punktā z_0 sauc pakāpes $(z-z_0)^{-1}$ koeficientu šīs funkcijas Lorāna rindā, kur z_0 ir funkcijas $f(z)$ izolēts singulārais punkts, vai arī funkcija šajā punktā ir analītiska.

Ja z_0 ir funkcijas $f(z)$ vienīgais singulārais punkts apgabalā, ko ietver kontūrs C, tad rezidiju šajā punktā atrod ar integrāli

$$\operatorname{Res} f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{+C} f(z)\,dz.$$

Ja izolēts singulārais punkts z_0 **ir funkcijas** $f(z)$ m**-kārtas pols**, tad

$$\operatorname{Res} f(z_0)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left(f(z)(z-z_0)^m\right).$$

Ja $f(z)=\dfrac{g(z)}{h(z)}$, kur $g(z_0)\neq 0$, $h(z_0)=0$, $h'(z_0)\neq 0$, tad

$$\operatorname{Res} f(z_0)=\operatorname{Res}\left(\frac{g(z_0)}{h(z_0)}\right)=\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Piemērs. **Aprēķināt funkcijas $f(z)=\dfrac{z+3}{z^2-6z+5}$ rezidijus šīs funkcijas singulārajos punktos.**

Tā kā

$$z^2-6z+5=(z-5)(z-1)=0, \quad \text{ja} \quad z=5 \quad \text{vai} \quad z=1,$$

tad funkcijai $f(z)$ ir divi singulārie punkti - 1. kārtas poli $z_1=5$ un $z_2=1$.

Atrodam $\operatorname{Res} f(z_1)$.

Saskaņā ar formulu (9)

$$\operatorname{Res} f(z_1)=\operatorname{Res}\left(\frac{g(z_1)}{h(z_1)}\right)=\frac{g(z_1)}{h'(z_1)}.$$

Tā kā

$$g(z)=z+3, \quad h(z)=z^2-6z+5, \quad h'(z)=2z-6 \quad \text{un} \quad z_1=5,$$

tad

$$g(z_1)=g(5)=5+3=8, \quad h'(z_1)=h'(5)=2\cdot 5-6=4.$$

Tātad

$$\operatorname{Res} f(5)=\frac{8}{4}=2.$$

Analogi atrodam

$$\operatorname{Res} f(1)=\frac{1+3}{2\cdot 1-6}=-1.$$

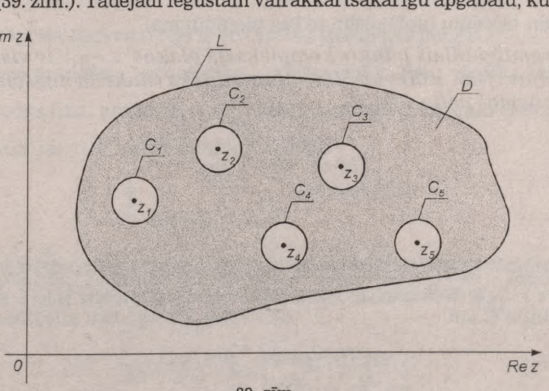
3. KOŠĪ TEORĒMA PAR REZIDIJIEM

Ja $f(z)$ ir analītiska funkcija slēgtā apgabalā $\overline{D}$, ko ierobežo līnija L, izņemot izolētos singulāros punktus $z_1, z_2, \ldots, z_n$, kas ir šī apgabala iekšējie punkti, tad

$$\oint_{+L} f(z)\,dz=2\pi i(\operatorname{Res} f(z_1)+\operatorname{Res} f(z_2)+\ldots+\operatorname{Res} f(z_n))=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res} f(z_k).$$

Pierādījums

Konstruējam riņķa līnijas $C_1, C_2, \ldots, C_n$, kuru centri ir singulārajos punktos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ un rādiusi - tik mazi, ka visas riņķa līnijas atrodas apgabalā D un savstarpēji nekrustojas (39. zīm.). Tādējādi iegūstam vairākkārtsakarīgu apgabalu, kuru ierobežo



39. zīm.

ārējais kontūrs L un n iekšējie kontūri – riņķa līnijas $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Šajā apgabalā $f(z)$ ir analītiska funkcija. Tā kā saskaņā ar Koši teorēmu vairākkārtsakarīgam apgabalam (sk. 29.7. §) *kontūrintegrālis pa ārējo kontūru pozitīvā virzienā ir vienāds ar integrāļu summu pa visiem iekšējiem kontūriem pozitīvā virzienā*, tad

$$\oint_{+L} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{+C_k} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \oint_{+C_k} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res} f(z_k). \quad \square \tag{10}$$

4. REZIDIJU LIETOJUMU PIEMĒRI INTEGRĀĻU APRĒĶINĀŠANĀ

Matemātikā rezidiju teoriju izmanto dažādos uzdevumos. Viens no svarīgākajiem lietojumiem ir saistīts ar integrāļu aprēķināšanu. Kā zināms, integrēšanas pamatā ir zemintegrāļa funkcijas primitīvās funkcijas atrašana, kas bieži ir sarežģīts uzdevums. Atsevišķos gadījumos ar rezidiju palīdzību integrāli var aprēķināt, nemeklējot primitīvo funkciju.

Tā, piemēram, dažkārt, **lai atrastu noteikto integrāli**

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

izmantojot piemērotu substitūciju, intervālu $[a;\ b]$ *var transformēt kompleksajā plaknē par slēgtu līniju un doto integrāli pārveidot par kontūrintegrāli kompleksajā plaknē. Pēc tam atrod zemintegrāļa funkcijas singulāros punktus, kas atrodas ar kontūru ierobežotajā apgabalā, un aprēķina zemintegrāļa funkcijas rezidijus šajos punktos. Beidzot aprēķina kontūrintegrāli, izmantojot formulu* (10).

Lai aprēķinātu neīsto integrāli

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

izmanto šādu teorēmu (aplūkosim to bez pierādījuma).

Ja bezgalīgi tālais punkts kompleksajā plaknē $z=\infty$ ***ir vismaz divkārtīga funkcijas*** $f(z)$ ***nulle un*** $f(z)$ ***ir analītiska funkcija augšējā pusplaknē*** $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, ***izņemot polus*** $z_1, z_2, \ldots, z_n$, ***tad***

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res} f(z_k). \tag{11}$$

Ja $z_1, z_2, \ldots, z_n$ **ir funkcijas** $f(z)$ **izolēti singulārie punkti slēgtā apgabalā, ko ierobežo līnija** L, **tad**

$$\oint_{+L} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res} f(z_k).$$

Aplūkosim piemērus.

1. **Aprēķināt integrāli** $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5+3\cos x}$.

Kā substitūciju izmantosim kompleksā mainīgā eksponentfunkciju $z=e^{ix}$. 29.1.§ noskaidrojām, ka ar vienādojumu

$$z(t)=R e^{it} \qquad (0 \leqslant t < 2\pi)$$

kompleksajā plaknē uzdod riņķa līniju, kuras rādiuss ir R un centrs atrodas koordinātu sākumpunktā. Tātad funkcija $z=e^{ix}$ Ox ass intervālu $[0;\,2\pi]$ attēlo par vienības riņķa līniju C, turklāt virzienam no 0 uz 2π atbilst pozitīvais virziens pa riņķa līniju.

Ja $z=e^{ix}$, tad saskaņā ar Eilera formulām

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{z+z^{-1}}{2} = \frac{z+\frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}.$$

Atrodam funkcijas $z=e^{ix}$ diferenciāli:

$dz=(e^{ix})'\,dx = i\,e^{ix}dx = iz\,dx$, no kurienes $dx=\frac{1}{iz}dz$.

Tādējādi doto integrāli pārveido par kontūrintegrāli kompleksajā plaknē šādi:

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{5+3\cos x} = \left[\begin{array}{c}\text{Substitūcija:}\\ z=e^{ix},\\ \cos x=\dfrac{z^2+1}{2z},\\ dx=\dfrac{1}{iz}\,dz\end{array}\right] = \oint_{+C}\frac{dz}{iz\left(5+3\,\dfrac{z^2+1}{2z}\right)} =$$

$$= \frac{1}{i}\oint_{+C}\frac{dz}{5z+\frac{3}{2}z^2+\frac{3}{2}} = \frac{2}{i}\oint_{+C}\frac{dz}{3z^2+10z+3} = \frac{2}{i}\oint_{+C}\frac{dz}{3(z+3)\left(z+\frac{1}{3}\right)}.$$

Zemintegrāļa funkcijai $f(z)$ ir divi izolēti singulārie punkti $z_1=-\frac{1}{3}$ un $z_2=-3$ (katrs no šiem punktiem ir funkcijas 1. kārtas pols). Taču vienības riņķa $|z|=1$ iekšpusē atrodas tikai punkts $z_1=-\frac{1}{3}$. Tātad saskaņā ar formulu (10) integrāli var izteikt ar funkcijas $f(z)$ rezidiju punktā z_1 šādi:

$$\oint_{+C}\frac{dz}{3(z+3)\left(z+\frac{1}{3}\right)} = 2\pi i \operatorname{Res} f(z_1).$$

Lai aprēķinātu zemintegrāļa funkcijas $f(z)=\frac{1}{3z^2+10z+3}$ rezidiju punktā $z_1=-\frac{1}{3}$, izmantosim formulu (9), pēc kuras

$$\operatorname{Res} f(z_1) = \operatorname{Res}\left(\frac{g(z_1)}{h(z_1)}\right) = \frac{g(z_1)}{h'(z_1)}.$$

Šajā gadījumā

$$g(z)=1, \quad h(z)=3z^2+10z+3, \quad h'(z)=6z+10,$$

$$h'\left(-\frac{1}{3}\right)=6\left(-\frac{1}{3}\right)+10=8, \; g\left(-\frac{1}{3}\right)=1.$$

Līdz ar to

$$\operatorname{Res} f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{8} \quad \text{un} \quad I=\frac{2}{i}\cdot 2\pi i\cdot\frac{1}{8}=\frac{\pi}{2}.$$

2. Aprēķināt neīsto integrāli $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

Izmantosim teorēmu par neīstā integrāļa $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ aprēķināšanu ar rezidiju palīdzību un formulu (11).

Zemintegrāļa funkcijai $\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$ kompleksajā plaknē atbilst funkcija

$$f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^2}=\frac{1}{((z+i)(z-i))^2}=\frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2}.$$

Šai funkcijai ir divi singulārie punkti: $z_1=i$ (otrās kārtas pols) un $z_2=-i$ (otrās kārtas pols). No šiem punktiem *augšējā pusplaknē* $\operatorname{Im} z\geqslant 0$ *atrodas tikai punkts* $z_1=i$.

Lai aprēķinātu $\operatorname{Res} f(z_1)=\operatorname{Res} f(i)$, izmantojam formulu (8):

$$\operatorname{Res} f(z_1)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_1}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(f(z)(z-z_1)^m),$$

kur $z_1=i$ un pola kārta $m=2$.

Tātad

$$\operatorname{Res} f(i)=\frac{1}{1!}\lim_{z\to i}\left(\frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2}(z-i)^2\right)'=\lim_{z\to i}\left(\frac{1}{(z+i)^2}\right)'=$$

$$=\lim_{z\to i}((z+i)^{-2})'=-2\lim_{z\to i}(z+i)^{-3}=-2\lim_{z\to i}\frac{1}{(z+i)^3}=\frac{-2}{(2i)^3}=$$

$$=\frac{2}{8i}=\frac{1}{4i}.$$

Līdz ar to saskaņā ar formulu (11) iegūstam

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}=2\pi i\cdot\frac{1}{4i}=\frac{\pi}{2}.$$

29.17. §. UZDEVUMI

1. KOMPLEKSIE SKAITĻI UN DARBĪBAS AR TIEM ALGEBRISKĀ, TRIGONOMETRISKĀ UN EKSPONENTFORMĀ

1. Attēlot koordinātu plaknē punktus, kas atbilst kompleksajam skaitlim $3+bi$, ja dod parametram b vērtības $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$. Uz kādas līnijas atrodas šie punkti?

2. Kādu līniju veido visu to punktu kopa, kuri atbilst kompleksiem skaitļiem $z=-2+iy$, ja y pieņem jebkuru reālu vērtību?

3. Kādu līniju veido visu to punktu kopa, kuri atbilst kompleksiem skaitļiem $z=x-i$, ja x pieņem jebkuru reālu vērtību?

4. Dotajiem skaitļiem $z_1=5+2i$, $z_2=-2-3i$, $z_3=4i$, $z_4=-3$ uzrakstīt saistītos kompleksos skaitļus. Attēlot skaitļus ar vektoriem.

5. Noteikt, ar kādām reālām x un y vērtībām ir spēkā dotā vienādība.

1) $(3x-2y)+(4x+3y-2)i=8-(4x+5y-6)i$;
2) $5x+3xi-2y-2yi-6-8i=0$;
3) $(x+3y)(1+2i)+(x+2y)(3+5i)=1+i$;
4) $\dfrac{x+1+(y-3)i}{5+3i}=1+i$.

6. Ar kādām reālām x vērtībām komplekso skaitļu $x-6i-8$ un $2x^2+6i-2$ summa ir vienāda ar 0?

7. Ar kādām reālām x vērtībām $9x^2-4-10xi$ un $8x^2i^8+20i^7$ ir saistīti kompleksi skaitļi?

8. Atrast x, ar kuru izteiksme $(1+2xi)^3+47$ ir tīri imaginārs skaitlis.

9. Ar kādām reālām x vērtībām izteiksme $\dfrac{-9}{(9x+7i)-(6+xi)+(x+3i)^2\cdot i}$ ir reāls skaitlis?

10. Dots polinoms $f(x)=4x^{21}-3x^{20}+2x^7-2x^5+x^4+2$. Aprēķināt $f(i)$.

11. Aprēķināt z_1+z_2, z_1-z_2, $z_1\cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, z_1^2, z_2^2 un z_2^3, ja 1) $z_1=\sqrt{3}-i$, $z_2=1+i\sqrt{3}$, 2) $z_1=2+i$, $z_2=1-2i$.
Dotos un aprēķinātos kompleksos skaitļus attēlot ar vektoriem.

12. Atrisināt lineāru vienādojumu sistēmu $\begin{cases}(3-i)z_1+(4+2i)z_2=1+3i\\(4+2i)z_1-(2+3i)z_2=7.\end{cases}$

13. Atrast kompleksā skaitļa moduli un argumenta galveno vērtību.

1) $4+3i$;
2) $4-3i$;
3) $-2i$;
4) $-2+2i\sqrt{3}$;
5) $-7-i$;
6) $-\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}$;
7) $\cos\alpha-i\sin\alpha \quad \left(\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi\right)$;
8) $1+\cos\alpha+i\sin\alpha \quad (\pi<\alpha\leqslant 2\pi)$.

14. Pierādīt identitātes.

1) $z+\bar{z}=2\operatorname{Re}z$;
2) $z-\bar{z}=2i\operatorname{Im}z$;
3) $\overline{(\bar{z})}=z$;
4) $\overline{(z_1\pm z_2)}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$;
5) $z\cdot\bar{z}=|z|^2$;
6) $\overline{(z_1\cdot z_2)}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$;
7) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$;
8) $\overline{(z^n)}=(\bar{z})^n, \quad n\in\boldsymbol{N}$.

15. Dots polinoms ar reāliem koeficientiem $P(z)$. Pierādīt, ka

1) $\overline{P(z)}=P(\bar{z})$;
2) $P(z)=0 \Leftrightarrow P(\bar{z})=0$.

16. Pārveidot dotos kompleksos skaitļus trigonometriskā formā un eksponentformā (izmantojot argumenta galveno vērtību).

1) $1+i\sqrt{3}$;
2) $3i$;
3) -6;
4) $\sqrt{3}-i$;
5) $-2-2i$;
6) $-5i$;
7) 1;
8) $-\sqrt{2}+i\sqrt{6}$;
9) $3(\cos 15°-i\sin 15°)$;
10) $-6(\cos 12°+i\sin 12°)$;
11) $\sin\alpha-i\cos\alpha \quad \left(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$.

17. Pārveidot algebriskā formā skaitļus

1) $0{,}5e^{i\pi}$; 4) $4e^{-i\frac{\pi}{4}}$;

2) $e^{-1+i\frac{\pi}{2}}$; 5) $2e^{1+i\frac{2\pi}{3}}$.

3) $6e^{i\frac{\pi}{6}}$;

18. Sareizināt dotos skaitļus.

1) $\sqrt{6}(\cos 92^\circ + i\sin 92^\circ)\cdot\sqrt{3}(\cos 88^\circ + i\sin 88^\circ)$;

2) $4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$;

3) $(-4 + i4\sqrt{3})\cdot(\sqrt{3} - i)$;

4) $0{,}02i(3 + 4i)\cdot(-1 + i)\cdot(8 + 6i)$.

19. Izdalīt dotos skaitļus.

1) $2\sqrt{6}(\cos 160^\circ + i\sin 160^\circ) : \sqrt{3}(\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ)$;

2) $10\cdot(\cos 105^\circ + i\sin 105^\circ) : 5\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$;

3) $4(\cos 75^\circ + i\sin 75^\circ) : \frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$;

4) $8i : (1 + i\sqrt{3})$;

5) $(6 - 6i) : 3(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)$;

6) $(2\sqrt{3} + 6i) : (\sqrt{3} - i)$;

7) $(-4 + i4\sqrt{3}) : (2\sqrt{3} - 2i)$.

20. Aprēķināt.

1) $(\cos 57^\circ + i\sin 57^\circ)^{10}$;

2) $(3(\cos 36^\circ + i\sin 36^\circ))^5$;

3) $(1 + i)^8$;

4) $(-2 + 2i)^6$;

5) $(\sqrt{3} - i)^7$;

6) $\dfrac{(-1 + i\sqrt{3})^{15}}{(1 - i)^{20}} + \dfrac{(-1 - i\sqrt{3})^{15}}{(1 + i)^{20}}$;

7) $\left(\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^9$.

21. Aprēķināt.

1) $(6 - 6i)^2\cdot\left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)^3$;

2) $\dfrac{2(\cos 42^\circ + i\sin 42^\circ)}{(\cos 51^\circ + i\sin 51^\circ)^2}$;

3) $\dfrac{2(\cos 38^\circ + i\sin 38^\circ)^3}{(\cos 24^\circ - i\sin 24^\circ)^4}$;

4) $\dfrac{(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})^5\cdot(\cos 75^\circ - i\sin 75^\circ)}{\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^4}$;

5) $\dfrac{(3 - i\sqrt{3})^4\cdot(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)^5}{(1 - i)^3}$.

22. Aprēķināt moduli.

1) $\left|\dfrac{-8 + 6i}{1 - i\sqrt{3}}\right|$;

2) $\left|\dfrac{5 - 12i}{11 + 3i}\right|$;

3) $\left|\dfrac{(8 - 6i)(-1 + i\sqrt{3})}{-3 + 4i}\right|$;

4) $\left|\dfrac{(\sqrt{3} - i)(4 - 3i)}{-6 + 8i}\right|$;

5) $\left|\dfrac{-4 + 4i}{(-\sqrt{3} + i)(1 - i)^2}\right|$;

6) $\left|\dfrac{(-7 + 24i)(\cos\alpha - i\sin\alpha)^6}{(2 - i)^4}\right|$;

7) $\left|\dfrac{x^2 - y^2 + ixy}{xy\sqrt{2} + i\sqrt{x^4 + y^4}}\right|$ $(x, y \in \mathbf{R})$.

23. Atrast moduli un argumenta galveno vērtību skaitlim

$$z=\frac{125}{(2+i)^3}+(1+i)^8-7i.$$

24. Aprēķināt visas saknes vērtības un attēlot tās kompleksā plaknē.

1) $\sqrt{2-i\sqrt{12}}$; 2) $\sqrt[3]{8i}$; 3) $\sqrt[4]{-8+8i\sqrt{3}}$; 4) $\sqrt[6]{-8}$.

25. Aprēķināt visas saknes vērtības.

1) $\sqrt[3]{\frac{i}{2+2i}}$; 3) $\sqrt[5]{\frac{1+i}{1-i}}$; 5) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}$;

2) $\sqrt[4]{\frac{-4}{1-i}}$; 4) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$; 6) $\sqrt[8]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$.

26. Doti skaitļi $z_1=-2+i\sqrt{12}$ un $z_2=1-i$. Aprēķināt

1) $\bar{z}_1\cdot z_2$, 3) $\frac{z_1^3}{z_2}$, 5) $(\bar{z}_2)^6$,

2) $\overline{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)}$, 4) z_2^6, 6) $\sqrt[3]{z_2}$.

27. Doti skaitļi $z_1=2-2i$ un $z_2=-\sqrt{3}+i$. Aprēķināt

1) $z_1\cdot\bar{z}_2$, 4) $z_1^2\cdot z_2^{-6}$, 6) $\sqrt[3]{z_1}$,

2) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$, 5) $\overline{\left(\frac{z_1^2}{z_2^6}\right)}$, 7) $\sqrt[4]{z_2}$.

3) z_1^3,

28. Doti skaitļi $z_1=-1-i$, $z_2=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$, $z_3=1+i\sqrt{3}$. Aprēķināt

1) $\frac{z_1\cdot z_3}{z_2}$, 2) $\overline{\left(\frac{z_1^5}{z_2^3}\right)}$, 3) $\sqrt[5]{z_2^4}$, 4) $\sqrt{z3^3}$.

29. Doti skaitļi $z_1=1-i\sqrt{3}$, $z_2=\sqrt{12}-2i$, $z_3=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$. Aprēķināt

1) $\frac{z_2\cdot z_2^3}{z_1}$, 2) $\overline{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)}^3$, 3) $\sqrt{z_2^3}$, 4) $\sqrt[3]{z_3^2}$.

2. KOMPLEKSO SKAITĻU ĢEOMETRISKĀ INTERPRETĀCIJA

30. Izpildīt darbības, izmantojot komplekso skaitļu interpretāciju ar vektoriem.

1) $(2+3i)+(4+2i)$;
2) $(4-5i)+(4+5i)$;
3) $(-3-2i)+(4-5i)+(-4+2i)$;
4) $(-3+4i)-(2-i)$;
5) $(8-3i)-(-2+5i)+(-10+4i)$.

31. Vektoru $-\sqrt{3}+3i$ pagriež par 90°. Noteikt iegūto vektoru.

32. Vektoru $-\sqrt{3}-i$ pagriež par 120°. Noteikt iegūto vektoru.

33. Par kādu leņķi jāpagriež vektors $3\sqrt{2}+i2\sqrt{2}$, lai iegūtu vektoru $-5+i$?

34. Noteikt vektoru, kuru iegūst, vektoru $3+4i$ pagarinot divas reizes un pagriežot par 45°.

35. Pierādīt, ka

1) lielums $|z_1 - z_2|$ ir vienāds ar attālumu starp punktiem M_1 un M_2 kompleksā plaknē, kas attēlo skaitļus z_1 un z_2;

2) $|z_1+z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ un $|z_1-z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||$ (kāda ir šo nevienādību ģeometriskā jēga?);

3) $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ (kāda ir šīs identitātes ģeometriskā jēga?)

36. Noskaidrot, kādas līnijas z-plaknē definē dotie vienādojumi.

1) $|z-3i| = 2$;
2) $|z+1-i| = 4$;
3) $\arg z = -\dfrac{\pi}{4}$;
4) $\operatorname{Im} z^2 = 2$;
5) $\operatorname{Re} \bar{z}^2 = 1$;
6) $\operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{1}{2}$;
7) $z^2 + \bar{z}^2 = 1$;
8) $2z\cdot\bar{z} + (2+i)z + (2-i)\bar{z} = 2$;
9) $|z-i| = |z+2|$;
10) $|z-i| + |z+i| = 4$.

37. Noteikt to z-plaknes punktu kopu, kuriem spēkā dotie nosacījumi. Izpildīt atbilstošos zīmējumus.

1) $|z| > 3$;
2) $\dfrac{1}{|z|} \geqslant 1,\ z \neq 0$;
3) $\left|\dfrac{1}{z}\right| \leqslant 2,\ z \neq 0$;
4) $|z-2| \leqslant 2$;
5) $|z+2i| \geqslant 4$;
6) $1 < |z-3i| < 3$;
7) $0 < |z+1-i| \leqslant 2$;
8) $1 \leqslant |z+2+i| \leqslant 2$;
9) $|z-1| < |z-i|$;
10) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| \leqslant 1$;
11) $1 < \operatorname{Re} z < 2$;
12) $0 \leqslant \operatorname{Im} z < 1$;
13) $0 < \arg z \leqslant \dfrac{\pi}{4}$.
14) $1 < |z+i| < 2,\ |\operatorname{Im}(z+i)| < 1$;
15) $|z+2| > 1,\ |\operatorname{Im} z| < 1$;
16) $\pi < |z-i-\pi| < 2\pi,\ \left|\dfrac{\pi}{2} - \arg z\right| < \dfrac{\pi}{4}$.

38. Noskaidrot, kādas līnijas z-plaknē nosaka dotais vienādojums pie atbilstošās parametra t izmaiņas. Koeficienti a un b – reāli un pozitīvi.

1) $z = 1 - it,\quad 0 \leqslant t \leqslant 2$;
2) $z = e^{ibt},\quad -\infty < t < \infty$;
3) $z = t + it^2,\quad -\infty < t < \infty$,
4) $z = a(\cos t + i \sin t),\quad \dfrac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \dfrac{3\pi}{2}$.

3. KOMPLEKSĀ MAINĪGĀ FUNKCIJAS

39. Atrast doto funkciju reālās un imaginārās daļas, ja $z = x + iy$, $w = u + iv$.

1) $w = z^2$;
2) $w = \dfrac{1}{z}$;
3) $w = z^3 - z$;
4) $w = \sin z$;
5) $w = \operatorname{sh} z$;
6) $w = z \cdot e^z$;
7) $w = \cos(z - i)$;
8) $w = \dfrac{iz+1}{1+\bar{z}}$;
9) $w = e^{z^2}$.

40. Aprēķināt doto eksponentfunkciju vērtības.

1) $e^{-2+\frac{\pi}{3}i}$;

2) $e^{1+\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)i}$, k – vesels skaitlis;

3) e^{e^i}.

41. Atrast dotos logaritmus ($\mathrm{Ln}\,z$) jeb to galvenās vērtības ($\ln z$).

1) $\ln(\sqrt{3}+i)$;
2) $\ln(-1-i)$;
3) $\ln(-1)$;
4) $\ln i$;
5) $\mathrm{Ln}(-i)$;
6) $\mathrm{Ln}\,\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$;
7) $\mathrm{Ln}\,\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$.

4. KOMPLEKSĀ MAINĪGĀ FUNKCIJAS DIFERENCĒŠANA

42. Noskaidrot jautājumu par funkcijas $f(z)$ analītiskumu; analītiskas funkcijas gadījumā iegūt tās diferencēšanas likumu (izmantojot Koši–Rīmaņa nosacījumus).

1) e^z;
2) $\bar{z}$;
3) $\operatorname{ch} z$;
4) z^3;
5) $\ln z$;
6) $\dfrac{\operatorname{Re} z}{z}$;
7) $\bar{z}\operatorname{Im} z$;
8) $\sin 3z-i$;
9) $|z|\operatorname{Im} z$.

43. Noskaidrot jautājumu par dotās funkcijas $f(z)$ analītiskumu tās definīcijas apgabalā un atrast $f'(z)$.

1) z^3-iz^2;
2) $\dfrac{2}{z}+z^2$;
3) $e^{-z}+\cos z$;
4) $\ln(iz)$;
5) ie^{iz};
6) $\sin z+\operatorname{ch} z$.

44. Atrast analītisku funkciju $f(z)=u+iv$, ja dota viena no harmoniskajām funkcijām u vai v, turklāt $f(z_0)=w_0$.

1) $u=x^2-y^2+3x+y$, $f(0)=i$;
2) $u=x^3-3y^2x+2$, $f(0)=2+i$;
3) $v=2e^x\cos y$, $f(0)=2(1+i)$;
4) $v=\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $f(2)=0$;
5) $v=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ $(x>0)$, $f(1)=0$;
6) $u=x^2-y^2+2x$, $f(i)=2i-1$;
7) $u=2\sin x\cdot\operatorname{ch} y-x$, $f(0)=0$.

5. KOMPLEKSAIS POTENCIĀLS

45. Kompleksais potenciāls dots ar funkciju $w=f(z)$. (z) plaknē atrast līniju $u=\mathrm{const}$ un $v=\mathrm{const}$ saimes; uzrādīt (z) plaknes apgabalu, kurš atbilst (w) plaknes kvadrātam ar malām $u=1$, $u=2$, $v=1$ un $v=2$.

1) $w=1-\dfrac{1}{z}$;
2) $w=1+\dfrac{1}{z}$;
3) $w=\dfrac{4}{z-i}$;
4) $w=\dfrac{z}{z+i}$;
5) $w=\dfrac{z}{z+1}$;
6) $w=\dfrac{1}{z-1}$;
7) $w=2z^2$;
8) $w=\ln 2z$.

6. RINDAS KOMPLEKSĀ PLAKNĒ

46. Atrast dotās rindas konverģences riņķi un rādiusu.

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$;

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (1+i)^n z^n$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n} z^n$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z+1)^n}{n^2}$;

5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{z}{5}\right)^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{z}\right)^n$;

6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z-2i)^n}{2^n(n+1)} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+5}{(z-2i)^n}$.

47. Izvirzīt dotās funkcijas Maklorēna rindā un noteikt iegūto rindu konverģences rādiusus.

1) $\exp(-z^2)$;

2) $\dfrac{z\cdot\cos z-\sin z}{z^2}$;

3) $\dfrac{1}{4-z^2}$;

4) $\dfrac{1}{(1+z)^2}$.

48. Izvirzīt $f(z)=\dfrac{1}{2-z}$ Teilora rindā dotā punkta z_0 apkārtnē un noteikt rindas konverģences apgabalu.

1) $z_0=0$; 2) $z_0=-1$; 3) $z_0=i$.

49. Izvirzīt funkciju Teilora rindā dotā punkta z_0 apkārtnē un noteikt rindas konverģences apgabalu.

1) $\dfrac{1}{z^2-6z+5}$, $z_0=3$;

2) $\ln(5z+3)$, $z_0=1$;

3) $\dfrac{1}{z^2}$, $z_0=2$;

4) $\dfrac{1}{z^2+3z+2}$, $z_0=-4$.

50. Izvirzīt funkciju Lorāna rindā punkta $z_0=0$ apkārtnē un noteikt rindas konverģences apgabalu.

1) $\dfrac{e^z}{z^3}$; 2) $z^3 e^{\frac{1}{z}}$; 3) $\dfrac{1-e^{-z}}{z^3}$; 4) $\dfrac{\sin^2 z}{z}$.

51. Izvirzīt funkciju Lorāna rindā punkta z_0 apkārtnē un noteikt rindas konverģences apgabalu.

1) $\dfrac{z}{(z+1)^2}$, $z_0=-1$;

2) $\dfrac{1}{z(z-1)}$, $z_0=\infty$;

3) $(z-2i)^2 e^{\frac{3}{z-2i}}$, $z_0=2i$;

4) $\sin\dfrac{1}{(z-1)^2}$, $z_0=1$;

5) $\dfrac{\sin z}{z-2}$, $z_0=2$;

6) $\dfrac{1}{z(z-1)}$, $z_0=1$;

7) $\dfrac{1}{(1+z^2)^2}$, $z_0=\infty$;

8) $z\cdot e^{\frac{1}{z+i}}$, $z_0=-i$;

9) $(z-i)\cos\dfrac{1}{z-i}$, $z_0=i$.

52. Izvirzīt doto funkciju Lorāna rindā norādītajā gredzenā.

1) $\dfrac{2z+3}{z^2+3z+2}$, $1<|z|<2$;

2) $\dfrac{1}{z^2+1}$, $0<|z-i|<2$;

3) $\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$, $1<|z|<2$;

4) $\dfrac{1}{(z^2-4)^2}$, $4<|z+2|<+\infty$.

53. Izvirzīt doto funkciju Teilora vai Lorāna rindā punkta z_0 apkārtnē un noteikt rindas konverģences apgabalu.

1) $\dfrac{1}{z^2-3i-2}$, a) $z_0=2i$, b) $z_0=\infty$;

2) $\dfrac{z}{(z-1)^2}$, a) $z_0=0$, b) $z_0=1$, c) $z_0=\infty$;

3) $\dfrac{1}{z(z+1)^2}$, a) $z_0=0$, b) $z_0=-1$, c) $z_0=\infty$;

4) $\dfrac{z}{(z+1)(z-2)^2}$, a) $z_0=-1$, b) $z_0=2$.

7. IZOLĒTIE SINGULĀRIE PUNKTI

54. Noteikt norādīto singulāro punktu veidu.

1) $\dfrac{1+\cos z}{z-\pi}$, $z_0=\pi$;

2) $\dfrac{z^2-3z+2}{z^2-2z+1}$, $z_0=1$;

3) $\cos\dfrac{1}{z+\pi}$, $z_0=-\pi$;

4) $\dfrac{z^2-1}{z^6+2z^5+z^4}$, $z_1=0$, $z_2=-1$;

5) $\dfrac{e^{z+e}}{z+e}$, $z_0=-e$;

6) $\dfrac{z^2+z-2}{(z^2-4)(z-1)^3}$, $z_1=2$, $z_2=1$.

55. Dotajām funkcijām atrast singulāros punktus un noteikt to veidu.

1) $\dfrac{1-\cos z}{z^2}$; 3) $\cos\dfrac{\pi}{z+i}$;

2) $\exp\dfrac{1}{z+2}$; 4) $\dfrac{1-e^z}{1+e^z}$.

8. KOMPLEKSĀ MAIŅĪGĀ FUNKCIJU INTEGRĒŠANA

Aprēķināt doto integrāli pēc Ņūtona–Leibnica formulas, izmantojot līnijintegrāļus vai izmantojot Koši formulu.

56. $\displaystyle\int_L (z+2\bar{z})\,dz$, $L: |z|=2,\ -\dfrac{\pi}{2}\leqslant \arg z\leqslant\dfrac{\pi}{2}$.

57. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}i} ze^z\,dz$.

58. $\int\limits_L (z^2+z\cdot\bar{z})\,dz$, L: $|z|=1$, $0\leqslant \arg z\leqslant\pi$.

59. $\int\limits_L e^{|z|^2}\operatorname{Re} z\,dz$, L: taisnes nogrieznis, kas savieno punktus $z_1=0$, $z_2=1+i$.

60. $\int\limits_1^i \frac{\ln^3 z}{z}\,dz$, L: loks $|z|=1$ ($\ln z$ - logaritma galvenā vērtība, $\ln 1=0$).

61. $\int\limits_C e^z\,dz$, C: parabolas $y=x^2$ loks, kas savieno punktus $z_1=0$, $z_2=1+i$.

62. $\int\limits_C \cos z\,dz$, C: taisnes nogrieznis, kas savieno punktus $z_1=\frac{\pi}{2}$ un $z_2=\pi+i$.

63. $\int\limits_C z\operatorname{Im}(z^2)\,dz$, C: $|\operatorname{Im} z|\leqslant 1$, $\operatorname{Re} z=1$.

64. $\oint\limits_C \frac{\operatorname{ch} iz}{z^2+4z+3}\,dz$, C: $|z|=2$.

65. $\oint\limits_C \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\,dz$, C: $|z-2|=3$.

66. $\oint\limits_C \frac{\sin\pi(z-1)}{z^2-2z+2}\,dz$, C: $|z-1-i|=1$.

67. $\oint\limits_C \frac{\cos(z+\pi i)}{z(e^z+2)}\,dz$, C: $|z|=3$.

68. $\oint\limits_C \frac{dz}{(z^2+9)(z+9)}$, C: $|z|=4$.

69. $\oint\limits_C \frac{\cos z}{z^3}\,dz$, C: $|z|=1$.

70. $\oint\limits_C \frac{1}{z^3}\cos\frac{\pi}{z+1}\,dz$, C: $|z|=\frac{1}{2}$.

71. $\oint\limits_C \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z^2-4)^2}\,dz$, C: $|z-2|=1$.

72. $\oint\limits_C \frac{1-\sin z}{z^2}\,dz$, C: $|z|=\frac{1}{2}$.

9. REZIDIJI UN TO PIELIETOJUMI

Aprēķināt rezidijus dotās funkcijas $f(z)$ galīgos singulāros punktos.

73. $\frac{\operatorname{ch} z}{(z^2+1)(z-3)}$.

74. $\frac{z}{(z+1)^3(z-2)^2}$.

75. $\frac{1-\cos z}{z^3(z-3)}$.

76. $\frac{\sin z}{z^2}$.

77. $z\cdot e^{\frac{1}{z-1}}$.

78. $\frac{1}{z^6(z-2)}$.

79. $\cos\frac{1}{z-2}$.

80. $\sin\frac{z}{z+1}$.

Atrast kompleksā mainīgā funkcijas integrāli pa slēgtu kontūru, pieņemot, ka kontūrs tiek apiets pozitīvā virzienā.

81. $\oint\limits_C \frac{1}{z}e^{\frac{z-1}{z}}\,dz$, C: $|z|=1$.

82. $\oint\limits_C \dfrac{z\,dz}{(z-1)(z-2)^2}$, $C: |z-2| = \dfrac{1}{2}$.

83. $\oint\limits_C \dfrac{z^3\,dz}{2z^4+1}$, $C: |z| = 1$.

84. $\oint\limits_C \dfrac{1-\cos z}{z^5}\,dz$, $C: |z| = 1$.

85. $\oint\limits_C \dfrac{\operatorname{tg} z}{z\left(z-\dfrac{\pi}{4}\right)}\,dz$, $C: |z-i| = 2$.

86. $\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \sin\dfrac{3}{z-i}\,dz$, $C: |z-2i| = 4$.

87. $\oint\limits_C \dfrac{z}{(z-i)(z-3)}\,dz$, $C: |z| = 2$.

88. $\oint\limits_C \dfrac{z^2}{(z^2+1)(z-2)}\,dz$, $C: |z| = 3$.

89. $\oint\limits_C \dfrac{dz}{(z^2-1)(z^3-1)}$, $C: |z| = 2$.

90. $\oint\limits_C \dfrac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2}\,dz$, C – elipse $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

91. $\oint\limits_C \dfrac{z\cdot\sin z}{(z-1)^5}\,dz$, C – elipse $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

92. $\oint\limits_C \dfrac{\cos\dfrac{\pi}{2}z}{(z-1)(z+3)^2}\,dz$, $c: |z-1| = 5$.

93. $\oint\limits_C z^5\cdot e^{\frac{2}{z^2}}\,dz$, $C: |z+1| = 1{,}5$.

94. $\oint\limits_C z^2\cdot\sin\dfrac{2}{z}\,dz$, $C: |z-i| = 1{,}5$.

95. $\oint\limits_C (z+i)^3\, e^{\frac{2}{z+i}}\,dz$, $C: |z| = 2$.

Aprēķināt neīstos integrāļus.

96. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^4+4)}$.

97. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^4}$.

98. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$.

99. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2}$.

100. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\,dx$.

101. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^3}$ $(a>0)$.

102. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2-6x+13)^2}$.

Aprēķināt noteiktos integrāļus.

103. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{4+\sin x}$.

104. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{5-4\cos x}$.

105. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2 2x}{5-4\cos x}\,dx$.

106. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{3+2\sin x}\,dx$.

107. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos^2 x)^2}$.

108. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos 2x\,dx}{1-2p\cos x+p^2}$ $(p>1)$.

ATBILDES

1. Punkti atrodas uz taisnes $x=3$. **2.** Taisni $x=-2$. **3.** Taisni $y=-1$. **4.** $\bar{z}_1=5-2i$, $\bar{z}_2=-2+3i$, $\bar{z}_3=-4i$, $\bar{z}_4=-3$. **5.** 1) $(2;\ -1)$; 2) $(-1;\ -5{,}5)$; 3) $(7;\ -3)$; 4) $(1;\ 11)$. **6.** 2 un $-2{,}5$. **7.** -2. **8.** ± 2. **9.** -1. **10.** 0. **11.** 1) $\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)$, $\sqrt{3}-1-i(\sqrt{3}+1)$, $2\sqrt{3}+2i$, $-i$, $2-i2\sqrt{3}$, $-2+i2\sqrt{3}$, -8; 2) $3-i$, $1+3i$, $4-3i$, i, $3+4i$, $-3-4i$, $-11+2i$. **12.** $(1;\ i)$. **13.** 1) 5, $\operatorname{arctg} 0{,}75$; 2) 5, $-\operatorname{arctg} 0{,}75$; 3) 2, $-\frac{\pi}{2}$; 4) 4, $\frac{2\pi}{3}$; 5) $5\sqrt{2}$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}-\pi$; 6) 1, $0{,}8\pi$; 7) 1, $2\pi-\alpha$; 8) $-2\cos\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\alpha}{2}-\pi$. **16.** 1) $2e^{i\frac{\pi}{3}}$; 2) $3e^{i\frac{\pi}{2}}$; 3) $6e^{i\pi}$; 4) $2e^{-i\frac{\pi}{6}}$; 5) $2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$; 6) $5e^{-i\frac{\pi}{2}}$; 7) e^{i0}; 8) $2\sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}$; 9) $3e^{-i\frac{\pi}{12}}$; 10) $6e^{-i\frac{14\pi}{15}}$; 11) $e^{i\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}$. **17.** 1) $-0{,}5$; 2) $\frac{i}{e}$; 3) $3\sqrt{3}+3i$; 4) $2\sqrt{2}-i2\sqrt{2}$; 5) $-e+ie\sqrt{3}$. **18.** 1) $-3\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{3}+i$; 3) $16i$; 4) $1-i$. **19.** 1) $-\sqrt{2}+i\sqrt{6}$; 2) $\sqrt{3}-i$; 3) $8i$; 4) $2\sqrt{3}+2i$; 5) $\sqrt{2}-i\sqrt{6}$; 6) $i\sqrt{3}$; 7) $-\sqrt{3}+i$. **20.** 1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$; 2) -243; 3) 16; 4) $512i$; 5) $-64\sqrt{3}+64i$; 6) -64; 7) $-16-16i$. **21.** 1) $9i$; 2) $1-i\sqrt{3}$; 3) $-\sqrt{3}-i$; 4) 32; 5) $i36\sqrt{2}$. **22.** 1) 5; 2) $\sqrt{1{,}3}$; 3) 4; 4) 1; 5) $\sqrt{2}$; 6) 1; 7) 1. **23.** $|z|=18\sqrt{2}$, $\arg z=-\frac{\pi}{4}$. **24.** 1) $\sqrt{3}-i$, $-\sqrt{3}+i$; 2) $\pm\sqrt{3}+i$, $-i$; 3) $\pm(\sqrt{3}+i)$, $\pm(1-i\sqrt{3})$;

4) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{2k+1}{6}\pi+i\sin\frac{2k+1}{12}\pi\right)$ $(k=0, 1, 2, 3, 4, 5)$.

25. 1) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\cos\frac{8k+1}{12}\pi+i\sin\frac{8k+1}{12}\pi\right)$ $(k=0, 1, 2)$; 2) $\sqrt[8]{8}\left(\cos\frac{8k-3}{16}\pi+i\sin\frac{8k-3}{16}\pi\right)$ $(k=0, 1, 2, 3)$; 3) $\cos\frac{4k+1}{10}\pi+i\sin\frac{4k+1}{10}\pi$ $(k=0, 1, 2, 3, 4)$;

4) $\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{24k+19}{72}\pi+i\sin\frac{24k+19}{72}\pi\right)$ $(k=0, 1, 2, 3, 4, 5)$;

5) $\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{24k+17}{72}\pi+i\sin\frac{24k+17}{72}\pi\right)$ $(k=0, 1, 2, 3, 4, 5)$;

6) $\frac{1}{\sqrt[16]{2}}\left(\cos\frac{24k+5}{96}\pi+i\sin\frac{24k+5}{96}\pi\right)$ $(k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$.

26. 1) $4\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}-i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$; 3) $32+32i$; 4) $8i$; 5) $-8i$;

6) $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{8k-1}{12}\pi+i\sin\frac{8k-1}{12}\pi\right)$ $(k=0,\ 1,\ 2)$. **27.** 1) $4\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{2}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$;

2) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}-i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$; 3) $-16(1+i)$; 4) $\frac{i}{8}$; 5) $-\frac{i}{8}$;

6) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{8k+1}{12}\pi-i\sin\frac{8k+1}{12}\pi\right)$ $(k=0,\ 1,\ 2)$; 7) $\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5+12k}{24}\pi+i\sin\frac{5+12k}{24}\pi\right)$

$(k=0,\ 1,\ 2,\ 3)$. **28.** 1) $\frac{\sqrt{6}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; 3) $\sqrt[5]{16}\left(\cos\frac{2k-1}{5}\pi+i\sin\frac{2k-1}{5}\pi\right)$

$(k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$; 4) $\pm i2\sqrt{2}$. **29.** 1) $4(-1+i\sqrt{3})$; 2) $-8i$; 3) $\pm4\sqrt{2}(1-i)$;

4) $\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{4k+1}{6}\pi+i\sin\frac{4k+1}{6}\pi\right)$ $(k=0,\ 1,\ 2)$. **31.** $-3-i\sqrt{3}$. **32.** $\sqrt{3}-i$.

33. $\frac{3\pi}{4}$. **34.** $-\sqrt{2}+i7\sqrt{2}$. **36.** 1) Riņķa līnija $x^2+(y-3)^2=2$; 2) riņķa līnija $(x+1)^2+(y-1)^2=4$; 3) stars – taisne $y=-x$ ceturtajā kvadrantā; 4) hiperbola $xy=1$; 5) hiperbola $x^2-y^2=1$; 6) riņķa līnija $x^2+(y+1)^2=1$; 7) hiperbola $x^2-y^2=0{,}5$; 8) riņķa līnija $(x+1)^2+(y-0{,}5)^2=2{,}25$; 9) taisne $2x+y+1{,}5=0$; 10) elipse $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$.

37. 1) Riņķa ar centru nullpunktā un rādiusu 3 ārpuse; 2) vienības riņķis, kam «izgriezts» centrs $z=0$; 3) kompleksā plakne, kam «izgriezts» riņķis ar centru nullpunktā un rādiusu 0,5; 4) riņķis ar centru punktā $z=2$ un rādiusu 2; 5) riņķa ar centru punktā $z=-2i$ un rādiusu 4 ārpuse, robeža pieder kopai; 6) gredzens starp koncentriskām riņķa līnijām ar centru punktā $z=3i$ un rādiusiem 1 un 3; 7) riņķis ar rādiusu 2, kam «izgriezts» centrs – punkts $z=-1+i$; 8) gredzens, ko ierobežo riņķa līnijas ar centru $z=-2-i$ un rādiusiem 1 un 2; robežas pieder kopai; 9) plaknes daļa zem taisnes $y=x$; 10) labā pusplakne, ieskaitot arī Oy asi; 11) josla starp taisnēm $x=1$ un $x=2$; 12) josla $0\leqslant y<1$; 13) sektors, ko ierobežo stari $\varphi=0$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$; robeža $\varphi=\frac{\pi}{4}$ pieder kopai; 14) gredzena, ko ierobežo riņķa līnijas ar centru punktā $-i$ un rādiusiem 1 un 2, daļa zem Ox ass; 15) josla $-1<y<1$ ar «izgrieztu» vienības riņķi, riņķa centrs $z=-2$; 16) gredzena, ko ierobežo riņķa līnijas ar centru $z=\pi+i$ un rādiusiem π un 2π, daļa starp stariem $\varphi=\frac{\pi}{4}$ un $\varphi=\frac{3\pi}{4}$.

38. 1) Taisnes nogrieznis: $x=1$, $-2\leqslant y\leqslant 0$; 2) riņķa līnija ar rādiusu 1 un centru punktā $z=0$; 3) parabola $y=x^2$; 4) kreisā puse riņķa līnijai ar centru punktā $z=0$ un rādiusu a. **39.** 1) $u=x^2-y^2$, $v=2xy$; 2) $u=\frac{x}{x^2+y^2}$, $v=-\frac{y}{x^2+y^2}$;

3) $u=x^3-3xy^2-x$, $v=3x^2y-y^3-y$; 4) $u=\sin x\cdot\operatorname{ch}y$, $v=\cos x\cdot\operatorname{sh}y$;

5) $u=-\operatorname{sh}x\cdot\cos y$, $v=\operatorname{ch}x\cdot\sin y$; 6) $u=e^x(x\cos y-y\sin y)$, $v=e^x(x\sin y+y\cos y)$;

7) $u=\cos x\cdot\operatorname{ch}(y-1)$, $v=-\sin x\cdot\operatorname{sh}(y-1)$; 8) $u=\frac{x-2xy-y+1}{(x+1)^2+y^2}$, $v=\frac{x^2+y-y^2}{(x+1)^2+y^2}$;

9) $u=e^{x^2-y^2}\cdot\cos 2xy$, $v=-e^{x^2-y^2}\cdot\sin 2xy$. **40.** 1) $\frac{1}{2e^2}(1+i\sqrt{3})$; 2) ie;

3) $e^{\cos 1}(\cos(\sin 1)+i\sin(\sin 1))$. **41.** 1) $\ln 2+\frac{\pi}{6}i$; 2) $\frac{1}{2}\ln 2-\frac{3}{4}\pi i$; 3) $i\pi$; 4) $i\frac{\pi}{2}$; 5) $\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi i$; 6) $\left(2k+\frac{1}{4}\right)\pi i$; 7) $\left(2k-\frac{1}{4}\right)\pi i$. **44.** 1) $z^2+(3-i)z+i$; 2) z^3+2+i; 3) $2ie^z+2$; 4) $\frac{1}{2}-\frac{1}{z}$; 5) $\ln z$; 6) z^2+2z; 7) $2\sin z-z$. **45.** (z) plaknes apgabalu ierobežo šādas līnijas: 1) $x=0$, $x^2+y^2+x=0$, $x^2+y^2-y=0$, $x^2+y^2-0{,}5y=0$; 2) $x=0$, $x^2+y^2-x=0$, $x^2+y^2+y=0$, $x^2+y^2+0{,}5y=0$; 3) $(x-2)^2+(y-1)^2=4$, $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, $x^2+(y+1)^2=4$, $x^2+y^2=1$; 4) $y+1=0$, $x^2+(y+1{,}5)^2=0{,}25$, $(x+0{,}5)^2+(y+1)^2=0{,}5^2$, $(x+0{,}25)^2+(y+1)^2=0{,}25^2$; 5) $x-1=0$, $(x+1{,}5)^2+y^2=0{,}25$, $(x+1)^2+(y-0{,}5)^2=0{,}25$, $(x+1)^2+(y-0{,}25)^2=0{,}25^2$; 6) $(x-1{,}5)^2+y^2=0{,}25$, $(x-1{,}25)^2+y^2=0{,}25^2$, $(x-1)^2+(y+0{,}5)^2=0{,}25$, $(x-1)^2+(y+0{,}25)^2=0{,}25^2$; 7) hiperbolas $x^2-y^2=0{,}5C_1$ un $xy=0{,}25C_2$; 8) riņķa līnijas $r=0{,}5\exp C_1$ un stari $\varphi=C_2$.

46. 1) $R=\infty$; 2) $|z|<\frac{1}{\sqrt{2}}$; 3) $|z|<e$; 4) $|z+1|<1$; 5) $1<|z|<5$; 6) $1<|z-2i|<2$.

47. 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{n!}$, $R=\infty$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n\cdot z^{2n-1}}{(2n+1)!}$, $R=\infty$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{4^{n+1}}$, $R=2$; 4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^n$, $R=1$. **48.** 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$, $|z|<2$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{3^{n+1}}$, $|z+1|<3$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}$, $|z-i|<\sqrt{5}$. **49.** 1) $-\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(z-3)^{2k}}{4^{k+1}}$, $|z-3|<2$;

2) $3\ln 2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{5^n(z-1)^n}{n\cdot 8^n}$, $|z-1|<1{,}6$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n(z-2)^{n-1}}{2^{n+1}}$, $|z-2|<2$; 4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2^{-n-1}-3^{-n-1})(z+4)^n$, $|z+4|<2$. **50.** 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-3}}{n!}$, $0<|z|<\infty$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{3-n}}{n!}$, $0<|z|<\infty$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{n-3}}{n!}$, $0<|z|<\infty$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2z)^{2n-1}}{(2n)!}$, $0<|z|<+\infty$.

51. 1) $\frac{1}{z+1}-\frac{1}{(z+1)^2}$, $0<|z+1|<+\infty$; 2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{z^n}$, $|z|>1$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n(z-2i)^{2-n}}{n!}$, $|z-2i|>0$; 4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{-4n-2}}{(2n+1)!}$, $|z-1|>0$;

5) $\cos 2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-2)^{2n}}{(2n+1)!}+\sin 2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-2)^{2n-1}}{(2n+1)!}$, $|z-2|>0$;

6) $\sum\limits_{n=-1}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-1)^n$, $0<|z-1|<1$; 7) $-\frac{i}{4(z-i)^2}-\frac{1}{8}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{ni^n(z-i)^{n-1}}{2^n}$, $0<|z-i|<2$;

8) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1-in}{n!}(z+i)^{1-n}$, $|z+i|>0$; 9) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^{1-2n}}{(2n)!}$, $|z-i|>0$.

52. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\cdot z^n$; 2) $-\frac{1}{2(z-i)}+\frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2i)^n}(z-i)^n$; 3) $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n}}-\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n4^{n-1}}{(z+2)^{n+3}}$. **53.** 1) a) $\frac{-i}{z-2}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2i}{i}\right)^n$, $0<|z-2i|<1$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-2^{n-1})\cdot\left(\frac{i}{z}\right)^n$, $|z|>2$; 2) a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nz^n$, $|z|<1$; b) $(z-1)^{-1}+(z-1)^{-2}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nz^{-n}$, $|z|>1$; 3) a) $\sum\limits_{n=-1}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+2)z^n$, $0<|z|<1$; b) $-\sum\limits_{n=-2}^{\infty}(z+1)^n$; c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}z^{-2}$, $|z|>1$; 4) a) $-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{z+1}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)}{3^{n+3}}(z+1)^n$,

$0<|z+1|<3$; b) $\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{z-2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(z-2)^2}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z-2)^n}{3^{n+3}}$, $0<|z-2|<3$.

54. 1) Novēršams singulārs punkts; 2) vienkāršs pols; 3) būtiski singulārs punkts; 4) $z_1=0$ pols, $k=4$; $z_2=-1$ pols, $k=1$; 5) pols, $k=1$; 6) $z_1=2$ vienkāršs pols, $z_2=1$ divkāršs pols. **55.** 1) $z=0$ novēršams singulārs punkts; 2) $z=-2$ būtiski singulārs punkts; 3) $z=-i$ būtiski singulārs punkts; 4) $z_n=i(2n+1)\pi$ ($n=0$; ±1; ...) - poli, $k=1$. **56.** $8\pi i$. **57.** $-\frac{\pi}{2}+1-i$. **58.** $-\frac{8}{3}$. **59.** $\frac{1}{4}(e^2-1)(1+i)$. **60.** $\frac{\pi^4}{64}$.

61. $e(\cos 1+i\sin 1)-1$. **62.** $-(1+i\,\mathrm{sh}\,1)$. **63.** $-\frac{4}{3}$. **64.** $i\pi\cos 1$. **65.** $-\frac{\pi i}{3}$.

66. $i\pi\,\mathrm{sh}\,\pi$. **67.** $\frac{2\pi}{3}\,\mathrm{ch}\,\pi i$. **68.** $-\frac{\pi i}{45}$. **69.** $-\pi i$. **70.** $i\pi^3$. **71.** $-\frac{3\pi\sqrt{e}}{32}\,i$. **72.** $-2\pi i$.

73. $\operatorname{Res} f(-i)=-\frac{1+3i}{20}\cos 1$, $\operatorname{Res} f(i)=-\frac{1-3i}{20}\cos 1$, $\operatorname{Res} f(3)=\frac{\mathrm{ch}\,3}{20}$.

74. $\operatorname{Res} f(-1)=\frac{2}{27}$, $\operatorname{Res} f(2)=-\frac{1}{27}$. **75.** $\operatorname{Res} f(0)=-\frac{1}{6}$, $\operatorname{Res} f(3)=\frac{2}{27}\sin^2\left(\frac{3}{2}\right)$.

76. $\operatorname{Res} f(0)=1$. **77.** $\operatorname{Res} f(1)=\frac{3}{2}$. **78.** $\operatorname{Res} f(0)=-\frac{1}{64}$, $\operatorname{Res} f(2)=\frac{1}{64}$. **79.** $\operatorname{Res} f(2)=0$.

80. $\operatorname{Res} f(-1)=-\cos 1$. **81.** $2\pi e i$. **82.** $-2\pi i$. **83.** πi. **84.** $-\frac{\pi}{12}\,i$. **85.** $8\left(1-\frac{2}{\pi}\right)i$.

86. 3. **87.** $\frac{\pi}{5}(3+i)$. **88.** $2\pi i$. **89.** 0. **90.** $-\pi^2 i$. **91.** $\frac{\sin 1+4\cos 1}{12}\,\pi i$. **92.** $\frac{\pi^2}{4}\,i$.

93. $\frac{8}{3}\pi i$. **94.** $-\frac{8}{3}\pi i$. **95.** $\frac{4\pi}{3}i$. **96.** $\frac{\pi}{3}$. **97.** $\frac{5\pi}{16}$. **98.** $\frac{\pi}{2}$. **99.** $\frac{\pi(a+2b)}{2ab^3(a+b)^2}$.

100. $\frac{5\pi}{12}$. **101.** $\frac{\pi}{16a^3}$. **102.** $\frac{3\pi}{16}$. **103.** $\frac{2\pi}{\sqrt{15}}$. **104.** $\frac{2\pi}{3}$. **105.** $\frac{13}{54}\pi$. **106.** $\frac{\pi}{2}(3-\sqrt{5})$.

107. $\frac{5\pi}{6\sqrt{6}}$. **108.** $\frac{2\pi}{p^2(p^2-1)}$.

XXX NODAĻA

OPERATORU RĒĶINU ELEMENTI

30.1. §. PROBLĒMAS NOSTĀDNE

Vairākos augstākās matemātikas kursa jautājumos lieto jēdzienu «operators». Piemēram, vairākargumentu funkcijas pilnā diferenciāļa operators, Hamiltona operators «nabla» lauka teorijā, Laplasa operators. Vispārīgā gadījumā *ar jēdzienu «operators» saprot atbilstību starp divu kopu elementiem, ja katram vienas kopas elementam atbilst tikai viens noteikts otras kopas elements* (analogi definē arī viena vai vairāku reālu argumentu funkciju, vektorfunkciju, kompleksā mainīgā funkciju, funkcionāli, transformāciju u. c. jēdzienus).

Šajā nodaļā aplūkosim matemātikas teorijas – operatoru rēķinu pamatjautājumus. Operatoru rēķinu pamatā ir metode, kurā funkcijas atvasināšanas operatoru $\frac{d}{dt}$ uzskata par algebrisku lielumu p, bet n-tās kārtas atvasināšanas operatoru $\frac{d^n}{dt^n}$ – par pakāpi p^n. Tad izteiksmes, kas satur atvasinājumus, var aizstāt ar operatora p algebriskām izteiksmēm. Tas dod iespēju diferencilvienādojumus vai diferenciālvienādojumu sistēmas aizstāt ar algebriskiem vienādojumiem vai algebrisku vienādojumu sistēmām. Līdz ar to diferenciālvienādojumu (diferenciālvienādojumu sistēmu) atrisināšana reducējas uz ievērojami vienkāršāku uzdevumu, proti, uz algebrisku vienādojumu (algebrisku vienādojumu sistēmu) atrisināšanu. Tāpēc operatoru rēķinus plaši izmanto dažādās inženierzinātņu nozarēs – elektrotehnikā, radiotehnikā, siltumtehnikā, mehānikā, kā arī matemātiskajā fizikā un speciālo funkciju teorijā.

Operatoru rēķinu pamatā ir Laplasa transformācijas jēdziens un ar to saistīti jautājumi, kurus aplūkosim nākamajos paragrāfos.

30.2. §. LAPLASA TRANSFORMĀCIJAS JĒDZIENS

Par Laplasa integrāli sauc neīsto integrāli

$$\int_0^{\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt, \tag{1}$$

kur $f(t)$ – ***funkcija, kas definēta intervālā*** $[0; +\infty)$,
p – ***parametrs.***

Operatoru rēķinu pirmsākumi meklējami **G. Leibnica, D. Bernulli, L. Eilera, O. Koši, Ž. Lagranža, S. Puasona, P. Laplasa** darbos. Pirmais operatoru rēķinu matemātiskais pamatojums, kurā izmantota Laplasa transformācija, dots 20. gs. sākumā angļu matemātiķa **T. Bromviča** un amerikāņu inženiera **D. Kārsona** darbos. 20. gs. 50. gados poļu matemātiķis **I. Mikusinskis** izstrādāja modernu operatoru rēķinu algebrisko metodi.

Bez šajā nodaļā aplūkotās Laplasa transformācijas operatoru rēķinos izmanto arī citas integrāltransformācijas (Kārsona–Laplasa, Furjē u. c. transformācijas).

Ja dota funkcija $f(t)$ un neīstais integrālis (1) konverģē, tad, aprēķinot šo integrāli, iegūst no parametra p atkarīgu funkciju $F(p)$, t. i.,

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt.$$

Tātad Laplasa integrālis ir funkcijas $f(t)$ transformācija (pārveidojums), kuras rezultātā iegūst funkciju $F(p)$. Šo transformāciju apzīmē ar $L(f)$ un sauc par ***Laplasa transformāciju***.

Tādējādi

$$L(f(t))=F(p)$$

jeb

$$L(f(t))=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt. \tag{2}$$

Funkciju $f(t)$ sauc par Laplasa transformācijas oriģinālu, bet funkciju $F(p)$ – par attēlu.

Ja oriģinālam $f(t)$ atbilst attēls $F(p)$, tad raksta

$$f(t)\risingdotseq F(p).$$

Atbilstību starp oriģinālu un attēlu apzīmē arī ar citiem simboliem, piemēram,

$$f(t)\div F(p), \qquad f(t)\multimap F(p).$$

Vispārīgā gadījumā oriģināls $f(t)$ var būt reāla argumenta t kompleksa funkcija

$$f(t)=u(t)+iv(t)$$

un parametrs p – komplekss skaitlis

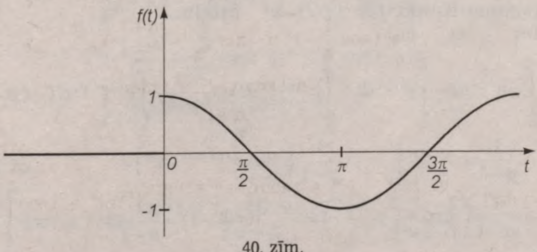
$$p=s+i\sigma.$$

Izmantojot Laplasa transformāciju dažādu fizikālu problēmu risināšanā, pieņem, ka funkcijas $f(t)$ arguments t ir laiks un šī funkcija ir vienāda ar nulli, ja $t<0$.

Piemēram, ja oriģināls ir kosinusa funkcija, tad raksta

$$f(t)=\begin{cases}\cos t, & \text{ja } t\geqslant 0\\ 0, & \text{ja } t<0.\end{cases} \tag{3}$$

(40. zīm.)

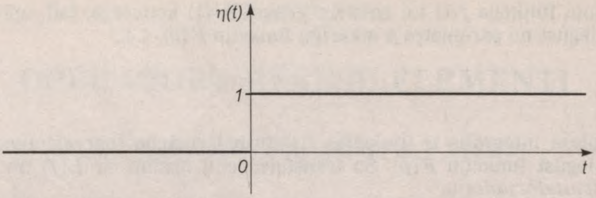


40. zīm.

Funkcijas $f(t)$ **Laplasa transformācija**:

$$L(f(t))=F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt \qquad f(t)\text{ – oriģināls}, \qquad F(p)\text{ – attēls}.$$

Transformācijas **apzīmējums**: $f(t)\risingdotseq F(p)$.



41. zīm.

Oriģināla funkcijas pierakstā dažkārt izmanto īpašu **vienības funkciju**, ko definē šādi:

$$\eta(t)=\begin{cases}1, & \text{ja} \quad t\geqslant 0\\ 0, & \text{ja} \quad t<0.\end{cases} \tag{4}$$

Funkciju $\eta(t)$ ***sauc par Hevisaida funkciju*** (41. zīm.).

Vienības funkciju izmanto, uzdodot Laplasa transformācijas oriģinālu $f(t)$. Piemēram, funkciju (3) var pierakstīt šādi:

$$f(t)=\cos t\cdot\eta(t).$$

Piemēri

1. Atrast attēlu Hevisaida funkcijai $\eta(t)=\begin{cases}1, & \text{ja } t\geqslant 0\\ 0, & \text{ja } t<0.\end{cases}$

$$F(p)=\int_0^\infty \eta(t)e^{-pt}dt=\int_0^\infty 1\cdot e^{-pt}dt=-\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_0^\infty=-\frac{1}{p}(\lim_{t\to\infty}e^{-pt}-e^0)=$$

$$=-\frac{1}{p}(0-1)=\frac{1}{p}, \quad \text{ja} \quad p\in \boldsymbol{R} \quad \text{un} \quad p>0.$$

Iegūto rezultātu pieraksta šādi:

$$1 \risingdotseq \frac{1}{p} \quad \text{jeb} \quad L(1)=\frac{1}{p}.$$

2. Atrast eksponentfunkcijas $f(t)=e^t$ **attēlu.**

Ja $p\in \boldsymbol{R}$ un $p>1$, tad

$$F(p)=\int_0^\infty e^t e^{-pt}dt=\int_0^\infty e^{t-pt}dt=\int_0^\infty e^{-(p-1)t}dt=-\frac{1}{p-1}\int_0^\infty e^{-(p-1)t}d(-(p-1)t)=$$

$$=-\frac{1}{p-1}e^{-(p-1)t}\Big|_0^\infty=-\frac{1}{p-1}\left(\lim_{t\to\infty}e^{-(p-1)t}-e^0\right)=$$

$$=-\frac{1}{p-1}\left(\lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^{(p-1)t}}-1\right)=-\frac{1}{p-1}(0-1)=\frac{1}{p-1}.$$

Tātad

$$e^t \risingdotseq \frac{1}{p-1} \quad \text{jeb} \quad L(e^t)=\frac{1}{p-1}.$$

Olivers Hevisaids (1850–1925) – angļu inženieris un fiziķis.

3. **Atrast funkcijas** $f(t)=t \quad (t \geqslant 0)$ **attēlu.**
Integrējot parciāli un izmantojot Lopitāla likumu, iegūstam

$$F(p)=\int_0^{\infty} t e^{-pt} dt = \begin{bmatrix} u=t, & du=dt, \\ dv=e^{-pt}dt, & v=-\frac{1}{p}e^{-pt} \end{bmatrix} = -\frac{1}{p} t e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{p}\int_0^{\infty} e^{-pt} dt =$$

$$= -\frac{1}{p} t e^{-pt} \Big|_0^{\infty} - \frac{1}{p^2} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{p}(\lim_{t\to\infty} t e^{-pt} - 0) - \frac{1}{p^2}(\lim_{t\to\infty} e^{-pt} - e^0) =$$

$$= -\frac{1}{p}\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{pt}} - \frac{1}{p^2}(0-1) = -\frac{1}{p}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{pe^{pt}} + \frac{1}{p^2} = 0 + \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2}.$$

Tātad

$$t \risingdotseq \frac{1}{p^2} \quad \text{jeb} \quad L(t)=\frac{1}{p^2} \qquad (p>0).$$

4. **Atrast funkcijas** $f(t)=\begin{cases} \cos t, & \text{ja } t \geqslant 0 \\ 0, & \text{ja } t<0 \end{cases}$ **attēlu.**

Vispirms, integrējot parciāli, atrodam integrāli

$$I=\int \cos t \cdot e^{-pt} dt = \begin{bmatrix} u=\cos t, & du=-\sin t\, dt, \\ dv=e^{-pt}dt, & v=-\frac{1}{p}e^{-pt} \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{p}\cos t \cdot e^{-pt} - \frac{1}{p}\int \sin t \cdot e^{-pt} dt = \begin{bmatrix} u=\sin t, & du=\cos t\, dt, \\ dv=e^{-pt}dt, & v=-\frac{1}{p}e^{-pt} \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{p}\cos t \cdot e^{-pt} - \frac{1}{p}\left(-\frac{1}{p}\sin t \cdot e^{-pt} + \frac{1}{p}\int \cos t \cdot e^{-pt} dt\right).$$

Tātad

$$I = -\frac{1}{p}\cos t \cdot e^{-pt} + \frac{1}{p^2}\sin t \cdot e^{-pt} - \frac{1}{p^2}\cdot I,$$

no kurienes

$$\frac{1}{p^2}\cdot I + I = -\frac{1}{p}\cos t \cdot e^{-pt} + \frac{1}{p^2}\sin t \cdot e^{-pt},$$

$$I \cdot \frac{1+p^2}{p^2} = \frac{1}{p^2}\sin t \cdot e^{-pt} - \frac{1}{p}\cos t \cdot e^{-pt},$$

$$I = \frac{\sin t \cdot e^{-pt} - p\cos t \cdot e^{-pt}}{1+p^2}.$$

Līdz ar to

$$F(p)=\int_0^{\infty}\cos t \cdot e^{-pt} dt = \frac{\sin t \cdot e^{-pt} - p\cos t \cdot e^{-pt}}{1+p^2}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{1+p^2} e^{-pt}(\sin t - p\cos t)\Big|_0^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{1+p^2}(\lim_{t\to\infty} e^{-pt}(\sin t - p\cos t) - e^0(\sin 0 - p\cos 0)) = \frac{p}{1+p^2},$$

jo bezgalīgi mazas funkcijas e^{-pt} reizinājums ar ierobežotu funkciju $\sin t - p\cos t$ ir bezgalīgi maza funkcija, kad $t \to \infty$.

Tātad

$$\cos t \risingdotseq \frac{p}{1+p^2} \quad \text{jeb} \quad L(\cos t)=\frac{p}{1+p^2} \qquad (p>0).$$

5. Analogi atrod integrāli

$$\int_0^\infty \sin t \cdot e^{-pt} dt = \frac{1}{1+p^2}.$$

Tātad

$$\sin t \risingdotseq \frac{1}{1+p^2} \quad \text{jeb} \quad L(\sin t) = \frac{1}{1+p^2} \qquad (p>0).$$

30.3. §. LAPLASA TRANSFORMĀCIJAS ATTĒLA EKSISTENCE

Laplasa transformācijas lietojumos svarīgs ir jautājums, vai dotai funkcijai $f(t)$ eksistē attēls $F(p)$ šajā transformācijā, t. i., ar kādām parametra p vērtībām konverģē neīstais integrālis

$$\int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt. \tag{1}$$

(1. veida neīsto integrāļu konverģences jautājumus sk. IV d. 15.1. §.)

Pieņemsim, ka parametrs p ir reāls skaitlis, un aplūkosim šādu **teorēmu.**

***Ja Laplasa integrālis** (1) **absolūti konverģē kādai parametra** p **vērtībai** p_0**, tad tas konverģē visām parametra vērtībām** $p>p_0$.*

Pierādījums

Pozitīvām parametra p vērtībām eksponentfunkcija e^{-pt} ir monotoni dilstoša, tāpēc

$$|f(t)e^{-pt}| < |f(t)e^{-p_0 t}|, \quad \text{ja} \quad p>p_0.$$

Tā kā konverģē integrālis $\int_0^\infty |f(t)e^{-p_0 t}| dt$, tad pēc neīsto integrāļu salīdzināšanas teorēmas konverģē arī integrālis

$$\int_0^\infty |f(t)e^{-pt}| dt \qquad (p>p_0).$$

Savukārt, izmantojot teorēmu par neīsto integrāļu absolūto konverģenci, iegūstam, ka konverģē integrālis (1). □

Attēla eksistences teorēma

Ja 1) ***oriģināls** $f(t)$ **ir nepārtraukta funkcija vai arī tai ir galīgs skaits tikai** 1. **veida pārtraukuma punktu jebkurā galīgā intervālā,***

2) ***eksistē tādi reāli skaitļi** $M>0$ **un** p_0**, ka***

$$|f(t)| \leqslant M e^{p_0 t}, \tag{2}$$

***tad eksistē attēls** $F(p)$ **visiem** $p>p_0$**, t. i., konverģē Laplasa integrālis** (1).*

$$1 \risingdotseq \frac{1}{p}, \qquad t \risingdotseq \frac{1}{p^2}, \qquad \sin t \risingdotseq \frac{1}{1+p^2}, \qquad \cos t \risingdotseq \frac{p}{1+p^2}, \qquad e^t \risingdotseq \frac{1}{p-1}$$

Pierādījums

Pierādīsim, ka integrālis (1) konverģē absolūti.

Patiešām, tā kā $p>p_0$, tad

$$\int_0^\infty |f(t)e^{-pt}|\,dt=\int_0^\infty |f(t)|\,e^{-pt}dt\leqslant\int_0^\infty Me^{p_0t}\cdot e^{-pt}dt=M\int_0^\infty e^{-(p-p_0)t}dt=$$

$$=-\frac{M}{p-p_0}\int_0^\infty e^{-(p-p_0)t}d(-(p-p_0)t)=-\frac{M}{p-p_0}e^{-(p-p_0)t}\Big|_0^\infty=$$

$$=-\frac{M}{p-p_0}(\lim_{t\to\infty}e^{-(p-p_0)t}-e^0)=-\frac{M}{p-p_0}(0-1)=\frac{M}{p-p_0}.$$

Tātad aplūkotais integrālis konverģē, jo zemintegrāļa funkcija ir pozitīva un integrālis ir ierobežots no augšas. Līdz ar to konverģē arī integrālis (1). □

Piezīme

Ja parametrs p ir komplekss skaitlis $p=s+\sigma i$, tad nosacījuma $p>p_0$ vietā aplūko nevienādību

$$s>s_0,\quad \text{t. i., } \operatorname{Re}p>\operatorname{Re}p_0,\quad \text{kur}\quad p_0=s_0+\sigma_0 i.$$

Šajā gadījumā **attēla eksistences teorēmu** formulē šādi (aplūkosim to bez pierādījuma).

Ja oriģināls $f(t)$ ir gabaliem nepārtraukta funkcija un eksistē tādi reāli skaitļi s_0 un M, ka visiem $t\in[0;+\infty)$ ir spēkā nevienādība

$$|f(t)|<Me^{s_0t},$$

tad

1) **Laplasa integrālis**

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$$

konverģē, ja $\operatorname{Re}p=s>s_0$,

2) $F(p)\to 0$, kad $\operatorname{Re}p\to\infty$,

3) $F(p)$ ir analītiska kompleksā mainīgā funkcija kompleksajā pusplaknē $\operatorname{Re}p>s_0$, un

$$F'(p)=-\int_0^\infty tf(t)e^{-pt}dt.$$

Piezīmes

1. Tā kā attēls $F(p)$ ir analītiska funkcija pusplaknē $\operatorname{Re}p>s_0$, tad visi šīs funkcijas singulārie punkti atrodas vai nu kreisajā pusē no taisnes $s=s_0$, vai arī uz šīs taisnes.
2. Īpašība $F(p)\to 0$, kad $\operatorname{Re}p\to\infty$, ir attēla eksistences nepieciešams nosacījums, bet nav pietiekams nosacījums. Piemēram, $e^{-p}\to 0$, kad $\operatorname{Re}p\to\infty$, bet nav tādas funkcijas, kuras attēls ir e^{-p}.

Operatoru rēķinu lietojumos ir jāaplūko arī Laplasa transformācijai apgriezts uzdevums: *pēc dotā attēla $F(p)$ jāatrod oriģināls $f(t)$.* Šīs darbības pamatā ir **oriģināla unitātes teorēma**, kuru aplūkosim bez pierādījuma.

Ja $f(t)$ un $\varphi(t)$ ir nepārtrauktas funkcijas, kuru Laplasa integrāļi konverģē un

$$\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt=\int_0^\infty \varphi(t)e^{-pt}dt,$$

tad

$$f(t)=\varphi(t),$$

t. i., ja nepārtrauktu funkciju attēli ir vienādi, tad ir vienādi arī oriģināli.

Ja funkcijām $f(t)$ un $\varphi(t)$ ir 1. veida pārtraukuma punkti un šo funkciju attēli ir vienādi, tad *pārtraukuma punktos oriģinālu $f(t)$ un $\varphi(t)$ vērtības var nebūt vienādas.*

30.4. §. LAPLASA TRANSFORMĀCIJAS ĪPAŠĪBAS

1. LINEARITĀTES ĪPAŠĪBA

Ja $f(t) \risingdotseq F(p)$, tad

$$Cf(t) \risingdotseq CF(p)$$

jeb

$$L(Cf(t))=CL(f(t)),$$

t. i., ja oriģinālu reizina ar konstanti C, tad arī attēls jāreizina ar šo konstanti.

Pierādījums

Šis apgalvojums izriet no integrāļa īpašības, jo

$$L(Cf(t))=\int_0^\infty Cf(t)e^{-pt}dt=C\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt=CL(f(t)). \quad \square$$

Ja $f(t) \risingdotseq F(p)$ un $\varphi(t) \risingdotseq \Phi(p)$, tad

$$f(t)+\varphi(t) \risingdotseq F(p)+\Phi(p)$$

jeb

$$L(f(t)+\varphi(t))=L(f(t))+L(\varphi(t)),$$

t. i., ja oriģināls ir divu funkciju summa, tad attēls ir šo funkciju attēlu summa.

Pierādījums

$$L(f(t)+\varphi(t))=\int_0^\infty (f(t)+\varphi(t))e^{-pt}dt=\int_0^\infty (f(t)e^{-pt}+\varphi(t)e^{-pt})dt=$$

$$=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt+\int_0^\infty \varphi(t)e^{-pt}dt=L(f(t))+L(\varphi(t)). \quad \square$$

Secinājums

Ar jebkurām konstantēm C_1 un C_2 ir spēkā vienādība

$$L(C_1 f(t)+C_2\varphi(t))=C_1 L(f(t))+C_2 L(\varphi(t))$$

vai vispārīgā gadījumā

$$L(C_1 f_1(t)+C_2 f_2(t)+\ldots+C_n f_n(t))=$$
$$=C_1 L(f_1(t))+C_2 L(f_2(t))+\ldots+C_n L(f_n(t)), \tag{1}$$

t. i., Laplasa transformācijai piemīt **linearitātes īpašība**.

Piemērs. **Atrast funkcijas** $f(t)=2\sin t+3\cos t-2t+1$ **attēlu.**

Izmantojot linearitātes īpašību un funkciju $\sin t$, $\cos t$, t un vienības funkcijas $\eta(t)$ attēlus (sk. 30.2. § piemērus), iegūstam

$$L(2\sin t+3\cos t-2t+1)=2L(\sin t)+3L(\cos t)-2\,\mathrm{L}(t)+L(1)=$$
$$=2\frac{1}{1+p^2}+3\frac{p}{1+p^2}-2\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}=$$
$$=\frac{2p^2+3p^3-2(1+p^2)+p(1+p^2)}{p^2(1+p^2)}=\frac{4p^3+p-2}{p^4+p^2}.$$

2. LĪDZĪBAS ĪPAŠĪBA

Ja $f(t)\fallingdotseq F(p)$, ***tad ar jebkuru pozitīvu reālu skaitli*** λ

$$f(\lambda t)\fallingdotseq\frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right), \tag{2}$$

t. i., ***ja oriģināla argumentu reizina ar pozitīvu skaitli*** λ, ***tad attēla arguments un arī pats attēls jādala ar šo skaitli.***
(Šo īpašību sauc par **līdzības teorēmu.**)

Pierādījums

$$\int_0^\infty f(\lambda t)e^{-pt}dt=\left[\begin{array}{l}\text{Substitūcija}\\ \lambda t=u,\quad t=\dfrac{u}{\lambda},\quad dt=\dfrac{du}{\lambda};\\ \text{ja}\quad t=0,\quad \text{tad}\quad u=0\\ \text{ja}\quad t\to\infty,\quad \text{tad}\quad u\to\infty\end{array}\right]=\int_0^\infty f(u)e^{-p\frac{u}{\lambda}}\frac{du}{\lambda}=$$
$$=\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty f(u)e^{-\frac{p}{\lambda}u}du=\frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right).\quad\square$$

Piemēri

Izmantojot formulu (2) **un funkciju** e^t, $\sin t$, $\cos t$ **attēlus, atrast attēlus funkcijām** $e^{\alpha t}$, $\sin\omega t$, $\cos\omega t$.

1. Tā kā

$$e^t\fallingdotseq\frac{1}{p-1},$$

tad

$$e^{\alpha t}\fallingdotseq\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\frac{p}{\alpha}-1}=\frac{1}{p-\alpha}.$$

▷▷

Linearitātes īpašība:

$$L(C_1 f_1(t)+C_2 f_2(t)+\ldots+C_n f_n(t))=C_1 L(f_1(t))+C_2 L(f_2(t))+\ldots+C_n L(f_n(t)).$$

Tātad

$$e^{\alpha t} \risingdotseq \frac{1}{p-\alpha}.$$

2. Tā kā

$$\sin t \risingdotseq \frac{1}{1+p^2},$$

tad

$$\sin \omega t \risingdotseq \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{p}{\omega}\right)^2} = \frac{\omega}{\omega^2+p^2}.$$

Tātad

$$\sin \omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

3. Tā kā

$$\cos t \risingdotseq \frac{p}{1+p^2},$$

tad

$$\cos \omega t \risingdotseq \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\frac{p}{\omega}}{1+\left(\frac{p}{\omega}\right)^2} = \frac{p}{\omega^2+p^2}.$$

Tātad

$$\cos \omega t \risingdotseq \frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

3. ATTĒLA PĀRBĪDES ĪPAŠĪBA

Ja** $f(t) \risingdotseq F(p)$, **tad

$$e^{\alpha t} \cdot f(t) \risingdotseq F(p-\alpha), \tag{3}$$

t. i., ja oriģinālu reizina ar eksponentfunkciju $e^{\alpha t}$, tad attēla arguments jāsamazina par lielumu α.

(Šo īpašību sauc par attēla **pārbīdes teorēmu**.)

Pierādījums

$$L(e^{\alpha t} \cdot f(t)) = \int_0^\infty e^{\alpha t} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(p-\alpha)t} dt = F(p-\alpha)$$

Analogi iegūst, ka

$$e^{-\alpha t} f(t) \risingdotseq F(p+\alpha). \quad \square$$

$$f(\lambda t) \risingdotseq \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right),$$

$$\sin \omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2+\omega^2}, \qquad \cos \omega t \risingdotseq \frac{p}{p^2+\omega^2}, \qquad e^{\alpha t} \risingdotseq \frac{1}{p-\alpha},$$

Piemēri

1. Tā kā
$$t \risingdotseq \frac{1}{p^2},$$
tad
$$t e^{\alpha t} \risingdotseq \frac{1}{(p-\alpha)^2}.$$

2. Tā kā
$$\sin\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2+\omega^2},$$
tad
$$e^{\alpha t}\sin\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}.$$

3. Tā kā
$$\cos\omega t \risingdotseq \frac{p}{p^2+\omega^2},$$
tad
$$e^{\alpha t}\cos\omega t \risingdotseq \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}.$$

4. ORIĢINĀLA PĀRBĪDES ĪPAŠĪBA

Ja $f(t) \risingdotseq F(p)$, ***tad***
$$f(t-t_0) \risingdotseq e^{-t_0 p}F(p), \tag{4}$$
*t. i., **ja oriģināla argumentu samazina par lielumu*** $t_0>0$, ***tad attēls jāreizina ar*** $e^{-t_0 p}$.

(Šo īpašību sauc par **oriģināla pārbīdes jeb novēlojuma teorēmu.**)

Pierādījums

Tā kā negatīvām argumenta vērtībām oriģināls $f(t)$ ir vienāds ar nulli, t. i., $f(t-t_0)=0$, ja $t<t_0$, tad funkcija $f(t-t_0)$ jāaplūko intervālā $[t_0;\ \infty)$. Tāpēc Laplasa transformācijas integrāli var pārveidot šādi:

$$f(t-t_0) \risingdotseq \int_0^\infty f(t-t_0)e^{-pt}dt = \int_0^{t_0} 0\cdot e^{-pt}dt + \int_{t_0}^\infty f(t-t_0)e^{-pt}dt =$$
$$= \begin{bmatrix} \text{Substitūcija} & & \\ t-t_0=u, & t=u+t_0, & dt=du \\ \text{ja } t=t_0, & \text{tad } u=0; & \\ \text{ja } t\to\infty, & \text{tad } u\to\infty & \end{bmatrix} = \int_0^\infty f(u)e^{-p(u+t_0)}du =$$
$$= \int_0^\infty e^{-t_0 p}f(u)e^{-pu}du = e^{-t_0 p}\int_0^\infty f(u)e^{-pu}du = e^{-t_0 p}F(p). \quad \square$$

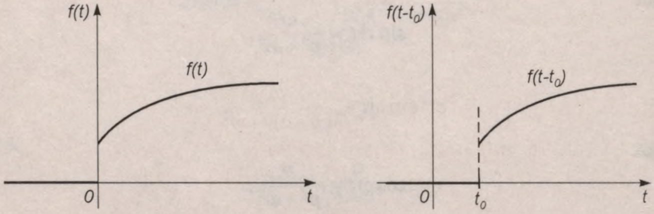
$$e^{\alpha t}f(t) \risingdotseq F(p-\alpha)$$
$$te^{\alpha t} \risingdotseq \frac{1}{(p-\alpha)^2}, \qquad e^{\alpha t}\sin\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}, \qquad e^{\alpha t}\cos\omega t \risingdotseq \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$$

Piezīme

Nosacījumam

$$f(t-t_0)=0, \quad \text{ja} \quad t<t_0$$

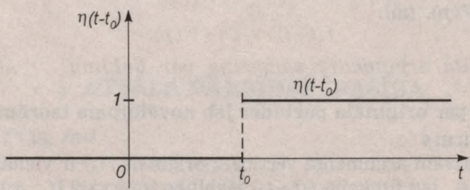
un novēlojuma teorēmai ir noteikta fizikāla nozīme: ja t ir laiks, tad process, kuru apraksta funkcija $f(t-t_0)$, sākas nevis laika momentā $t=0$, bet gan momentā $t=t_0$, t. i., process aizkavējas (novēlojas) par t_0 laika vienībām (42. zīm.). Šādā gadījumā funkcijas $f(t-t_0)$ attēls Laplasa transformācijā jāreizina ar $e^{-t_0 p}$.



42. zīm.

Lai uzdotu oriģināla funkciju ar novēlojumu, izmanto pārveidotu Hevisaida vienības funkciju

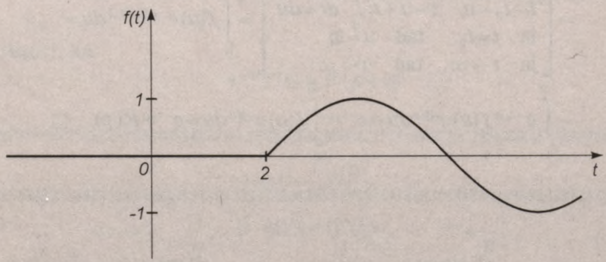
$$\eta(t-t_0)=\begin{cases}1, & \text{ja } t\geqslant t_0\\ 0, & \text{ja } t<t_0\end{cases} \quad (43.\ \text{zīm.}).$$



43. zīm.

Piemēram, funkciju $f(t)=\begin{cases}\sin(t-2), & \text{ja } t\geqslant 2\\ 0, & \text{ja } t<2\end{cases}$ (44. zīm.) var pierakstīt kā reizinājumu

$$f(t)=\sin(t-2)\cdot\eta(t-2).$$



44. zīm.

Piemēri

1. Tā kā

$$L(\eta(t))=\frac{1}{p},$$

tad saskaņā ar formulu (4)

$$L(\eta(t-t_0))=e^{-t_0 p}\,\frac{1}{p} \quad \text{jeb} \quad \eta(t-t_0)\fallingdotseq e^{-t_0 p}\,\frac{1}{p}.$$

2. Tā kā

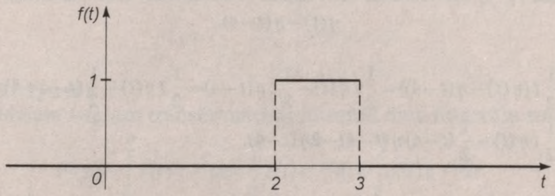
$$\sin t \fallingdotseq \frac{1}{p^2+1},$$

tad

$$\sin(t-2)\,\eta(t-2) \fallingdotseq e^{-2p}\,\frac{1}{p^2+1}.$$

3. **Atrast attēlu impulsam, kuru nosaka funkcija**

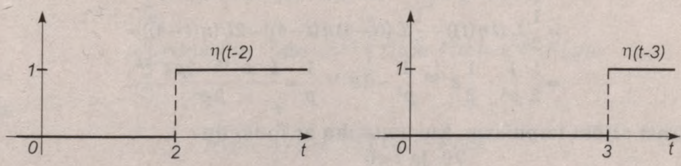
$$f(t)=\begin{cases}0, \text{ ja } t<2\\ 1, \text{ ja } 2\leqslant t\leqslant 3\\ 0, \text{ ja } t>3\end{cases} \quad \text{(45. zīm.).}$$



45. zīm.

Šajā gadījumā oriģinālu $f(t)$ var izteikt kā divu Hevisaida vienības funkciju ar novēlojumu starpību:

$$f(t)=\eta(t-2)-\eta(t-3) \quad \text{(46. zīm.).}$$



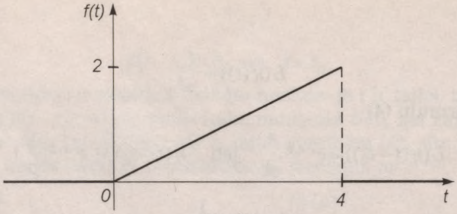
46. zīm.

Līdz ar to

$$\eta(t-2)-\eta(t-3)\fallingdotseq e^{-2p}\,\frac{1}{p}-e^{-3p}\,\frac{1}{p}=\frac{e^{-2p}-e^{-3p}}{p}.$$

$$f(t-t_0)\fallingdotseq e^{-t_0 p}F(p)$$

$$\eta(t-t_0)=\begin{cases}1, & \text{ja} \quad t\geqslant t_0\\ 0, & \text{ja} \quad t<t_0\end{cases}$$



47. zīm.

4. **Atrast attēlu funkcijai**

$$f(t)=\begin{cases}0, \text{ ja } t<0\\ \dfrac{1}{2}t, \text{ ja } 0\leqslant t\leqslant 4\\ 0, \text{ ja } t>4\end{cases} \quad (47. \text{ zīm.}).$$

Oriģinālu $f(t)$ var izteikt kā funkcijas $\frac{1}{2}t$ reizinājumu ar funkciju, kas vienāda ar 1 intervālā [0; 4] un vienāda ar 0 ārpus šī intervāla. Šāda funkcija ir starpība

$$\eta(t)-\eta(t-4).$$

Tātad

$$f(t)=\frac{1}{2}t(\eta(t)-\eta(t-4))=\frac{1}{2}t\eta(t)-\frac{1}{2}t\eta(t-4)=\frac{1}{2}t\eta(t)-\frac{1}{2}(t-4+4)\eta(t-4)=$$

$$=\frac{1}{2}t\eta(t)-\frac{1}{2}(t-4)\eta(t-4)-2\eta(t-4).$$

Tā kā

$$t\risingdotseq\frac{1}{p^2},\qquad (t-4)\eta(t-4)\risingdotseq e^{-4p}\frac{1}{p^2},\qquad \eta(t-4)\risingdotseq e^{-4p}\frac{1}{p},$$

tad, izmantojot Laplasa transformācijas linearitātes īpašību, iegūstam

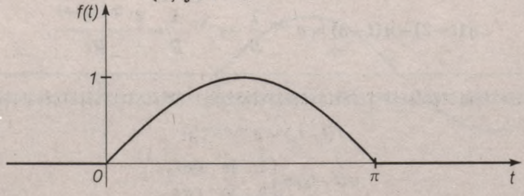
$$L\left(\frac{1}{2}t\eta(t)-\frac{1}{2}(t-4)\eta(t-4)-2\eta(t-4)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}L(t\eta(t))-\frac{1}{2}L((t-4)\eta(t-4))-2L(\eta(t-4))=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{p^2}-\frac{1}{2}e^{-4p}\frac{1}{p^2}-2e^{-4p}\frac{1}{p}=\frac{1-e^{-4p}-4pe^{-4p}}{2p^2}.$$

5. **Atrast attēlu impulsam, kuru nosaka ar funkciju**

$$f(t)=\begin{cases}0, \text{ ja } t<0\\ \sin t, \text{ ja } 0\leqslant t\leqslant\pi\\ 0, \text{ ja } t>\pi\end{cases} \quad (48. \text{ zīm.}).$$



48. zīm.

Analogi kā iepriekšējā piemērā oriģinālu $f(t)$ izsakām kā funkcijas $\sin t$ reizinājumu ar funkciju, kas vienāda ar 1 intervālā $[0; \pi]$ un vienāda ar 0 ārpus šī intervāla. Šāda funkcija ir

$$\eta(t)-\eta(t-\pi).$$

Tādējādi

$$f(t)=(\eta(t)-\eta(t-\pi))\sin t=\eta(t)\sin t-\eta(t-\pi)\sin t.$$

Lai varētu izmantot oriģināla pārbīdes teorēmu, otrajā saskaitāmā $\sin t$ pārveidojam šādi:

$$\sin t=\sin(\pi-t)=-\sin(t-\pi).$$

Tad iegūstam

$$f(t)=\eta(t)\sin t+\eta(t-\pi)\sin(t-\pi)$$

un

$$L(f(t))=\frac{1}{p^2+1}+e^{-\pi p}\frac{1}{p^2+1}=\frac{1+e^{-\pi p}}{p^2+1}.$$

5. PERIODISKA ORIĢINĀLA ATTĒLS

Ja oriģināls ir periodiska funkcija ar periodu T, ***t. i., visiem*** $t\geqslant 0$ $f(t+T)=f(t)$, ***tad***

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T f(t)e^{-pt}dt. \tag{5}$$

Pierādījums

Pārveidojam Laplasa transformācijas integrāli divu integrāļu summā:

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt=\int_0^T f(t)e^{-pt}dt+\int_T^\infty f(t)e^{-pt}dt.$$

Aprēķinot otro integrāli, izdarām mainīgo substitūciju:

$$\int_T^\infty f(t)e^{-pt}dt=\left[\begin{array}{lll} t=u+T, & u=t-T, & dt=du; \\ \text{ja} & t=T, & \text{tad} \quad u=0, \\ \text{ja} & t\to\infty, & \text{tad} \quad u\to\infty. \end{array}\right]=\int_0^\infty f(u+T)e^{-p(u+T)}du=$$

$$=\int_0^\infty f(u)e^{-pu}e^{-pT}du=e^{-pT}\int_0^\infty f(u)e^{-pu}du=e^{-pT}F(p).$$

Tātad

$$F(p)=\int_0^T f(t)e^{-pt}dt+e^{-pT}F(p),$$

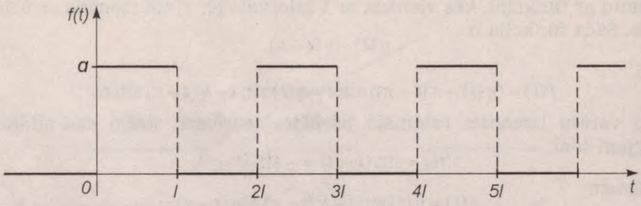
no kurienes

$$F(p)-e^{-pT}F(p)=\int_0^T f(t)e^{-pt}dt,$$

$$F(p)(1-e^{-pT})=\int_0^T f(t)e^{-pt}dt,$$

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T f(t)e^{-pt}dt.$$

Piemērs. **Atrast attēlu periodiskam impulsam, kas ilustrēts** 49. zīmējumā.



49. zīm.

Funkcijas $f(t)$ periods $T=2l$ un

$$f(t)=\begin{cases}0, \text{ ja } t<0\\ a, \text{ ja } 0\leqslant t\leqslant l\\ 0, \text{ ja } l<t<2l.\end{cases}$$

Tātad

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T f(t)e^{-pt}dt=\frac{1}{1-e^{-2pl}}\int_0^{2l} f(t)e^{-pt}dt=$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2pl}}\left(\int_0^l a e^{-pt}dt+\int_l^{2l}0\cdot e^{-pt}dt\right)=\frac{1}{1-e^{-2pl}}\left(-\frac{a}{p}\right)e^{-pt}\Big|_0^l=$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2pl}}\left(-\frac{a}{p}\right)(e^{-pl}-1)=\frac{a(1-e^{-pl})}{p(1-e^{-2pl})}=\frac{a(1-e^{-pl})}{p(1-e^{-pl})(1+e^{-pl})}=$$

$$=\frac{a}{p(1+e^{-pl})}.$$

6. ATTĒLA ATVASINĀJUMA ĪPAŠĪBA

Ja $f(t)\risingdotseq F(p)$, ***tad***

$$-t\cdot f(t)\risingdotseq F'(p),$$

t. i., oriģināla reizinājumam ar $-t$ ***attēls ir atvasinājums*** $F'(p)$.

Pierādījums

Vispirms atzīmēsim, ka funkcija $-t\cdot f(t)$ apmierina attēla eksistences teorēmas nosacījumus (sk. 30.3.§), ja attēls eksistē funkcijai $f(t)$. Var pierādīt arī, ka, atvasinot Laplasa transformācijas integrāli pēc mainīgā lieluma p, atvasina zemintegrāļa funkciju.

Tādējādi, ja

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt,$$

tad

Ja $f(t+T)=f(t)$,

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T f(t)e^{-pt}dt$$

tad

$$F'(p)=\int_0^\infty (f(t)e^{-pt})'_p dt=\int_0^\infty f(t)(e^{-pt})'_p dt=\int_0^\infty f(t)(-t)e^{-pt}dt.$$

Tātad

$$F'(p)=\int_0^\infty (-t\cdot f(t))e^{-pt}dt \quad \text{jeb} \quad -t\cdot f(t) \risingdotseq F'(p). \ \square \tag{6}$$

Atvasinot atkārtoti, iegūstam

$$F''(p)=\int_0^\infty t^2 f(t)e^{-pt}dt,$$

$$F^{(3)}(p)=\int_0^\infty (-t^3 f(t))e^{-pt}dt,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$F^{(n)}(p)=\int_0^\infty (-1)^n t^n f(t)\,dt.$$

Izmantojot formulu (6), pēc zināmiem funkciju attēliem var iegūt citu funkciju attēlus.

Piemēri

1. Tā kā

$$t \risingdotseq \frac{1}{p^2} \quad \text{un} \quad \left(\frac{1}{p^2}\right)'=-\frac{2}{p^3},$$

tad

$$-t\cdot t \risingdotseq -\frac{2}{p^3} \quad \text{jeb} \quad t^2 \risingdotseq \frac{2}{p^3}.$$

Analogi iegūstam, ka

$$t^3 \risingdotseq \frac{2\cdot 3}{p^4}=\frac{3!}{p^4}, \qquad t^4 \risingdotseq \frac{4!}{p^5}$$

un vispārīgā gadījumā

$$t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

2. Tā kā

$$e^t \risingdotseq \frac{1}{p-1} \quad \text{un} \quad \left(\frac{1}{p-1}\right)'=-\frac{1}{(p-1)^2},$$

tad

$$-te^t \risingdotseq -\frac{1}{(p-1)^2}$$

jeb

$$te^t \risingdotseq \frac{1}{(p-1)^2}.$$

$$F'(p) \fallingdotseq -t f(t)$$

$$F^{(n)}(p) \fallingdotseq (-1)^n t^n f(t)$$

$$t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}$$

7. ATTĒLA INTEGRĀĻA ĪPAŠĪBA

Aplūkosim (bez pierādījuma) šādu attēla $F(p)$ integrāļa īpašību.

Ja $f(t) \risingdotseq F(p)$ ***un konverģē integrālis*** $\int_p^\infty F(p)\,dt$, ***tad***

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_p^\infty F(p)\,dp, \tag{7}$$

t. i., ***oriģināla dalījumam ar*** t ***attēls ir integrālis*** $\int_p^\infty F(p)\,dp$, ***ja vien šis integrālis konverģē.***

Piemērs

Tā kā

$$\sin t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1} \quad \text{un} \quad \int_p^\infty \frac{1}{p^2+1}\,dp = \operatorname{arctg} p \Big|_p^\infty = \lim_{p\to\infty}(\operatorname{arctg} p) - \operatorname{arctg} p =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arcctg} p,$$

tad saskaņā ar formulu (7)

$$\frac{\sin t}{t} \risingdotseq \operatorname{arcctg} p.$$

8. ORIĢINĀLA ATVASINĀJUMA ATTĒLS

Ja $f(t) \risingdotseq F(p)$ ***un eksistē atvasinājums*** $f'(t)$, ***tad***

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0). \tag{8}$$

Pierādījums

Integrējot parciāli atvasinājumam $f'(t)$ atbilstošo Laplasa transformācijas integrāli, iegūstam

$$L(f'(t)) = \int_0^\infty f'(t)e^{-pt}\,dt = \begin{bmatrix} u = e^{-pt}, & du = -pe^{-pt}, \\ dv = f'(t)\,dt, & v = f(t) \end{bmatrix} =$$

$$= e^{-pt}f(t)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty -pf(t)e^{-pt}\,dt = \lim_{t\to\infty}(e^{-pt}f(t)) - e^0 f(0) + p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt =$$

$$= \lim_{t\to\infty}(e^{-pt}f(t)) - f(0) + pF(p).$$

Izmantojot attēla eksistences teorēmas nosacījumu – nevienādību

$$|f(t)| \leqslant Me^{p_0 t} \quad \text{(sk. 30.3. §)},$$

atrodam

$$|e^{-pt}f(t)| \leqslant Me^{-pt}e^{p_0 t} = Me^{-(p-p_0)t}.$$

$$\int_p^\infty F(p)\,dp \risingdotseq \frac{f(t)}{t}$$

Tā kā $p-p_0>0$, tad

$$Me^{-(p-p_0)t}\to 0, \quad \text{ja} \quad t\to\infty.$$

Tātad arī

$$\lim_{t\to\infty} e^{-pt} f(t)=0.$$

Līdz ar to

$$L(f'(t))=0-f(0)+pF(p) \quad \text{jeb} \quad f'(t) \risingdotseq pF(p)-f(0).$$

Ja $f(0)=0$, tad $f'(t) \risingdotseq pF(p)$. □

Piezīme

Analogi var iegūt oriģināla 2. kārtas atvasinājumam $f''(t)$ atbilstošo attēlu:

$$f''(t) \risingdotseq p(F(p)-f(0))-f'(0)=p^2F(p)-pf(0)-f'(0).$$

Vispārīgi, ***ja oriģināls*** $f(t)$ ***ir n reizes nepārtraukti diferencējama funkcija, tad***

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0). \tag{9}$$

Ja $f(0)=f'(0)=f''(0)=\ldots=f^{(n-1)}(0)=0$, tad

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^nF(p). \tag{10}$$

9. ORIĢINĀLA INTEGRĀĻA ATTĒLS

Ja $f(t) \risingdotseq F(p)$, ***tad eksistē attēls arī funkcijai*** $\int_0^t f(t)\,dt$ ***un***

$$\int_0^t f(t)\,dt \risingdotseq \frac{1}{p}F(p). \tag{11}$$

Pierādījums

Izmantosim bez pierādījuma apgalvojumu, ka funkcijai $\int_0^t f(t)\,dt$ eksistē attēls, t. i.,

$$\int_0^t f(t)\,dt \risingdotseq \int_0^\infty\left(\int_0^t f(t)\,dt\right)e^{-pt}\,dt.$$

Integrējot parciāli, atrodam

$$I=\int_0^\infty\left(\int_0^t f(t)\,dt\right)e^{-pt}\,dt=\begin{bmatrix} u=\int_0^t f(t)\,dt, & du=f(t)\,dt \\ dv=e^{-pt}dt, & v=-\frac{1}{p}e^{-pt}\end{bmatrix}=$$

$$f'(t)\,dt \risingdotseq pF(p)-f(0)$$

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0).$$

Ja

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\ldots=f^{(n-1)}(0)=0,$$

tad

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^nF(p)$$

$$= -\frac{1}{p} e^{-pt} \int_0^t f(t)\,dt \Big|_0^\infty + \frac{1}{p} \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt =$$

$$= -\frac{1}{p} \left(\lim_{t\to\infty} e^{-pt} \int_0^t f(t)\,dt - e^0 \int_0^0 f(t)\,dt \right) + \frac{1}{p} F(p).$$

Tā kā

$$\lim_{t\to\infty} e^{-pt} \int_0^t f(t)\,dt = 0$$

(sk. analogu pamatojumu iepriekšējā punktā) un

$$\int_0^0 f(t)\,dt = 0,$$

tad

$$I = \frac{1}{p} F(p) \quad \text{jeb} \quad \int_0^t f(t)\,dt \risingdotseq \frac{1}{p} F(p). \ \square$$

Piezīme

No formulām (8) un (11) izriet svarīgs secinājums, ko izmanto praktiskos lietojumos: *sarežģītām matemātiskām operācijām ar Laplasa transformācijas oriģinālu $f(t)$ (atvasināšanai un integrēšanai) atbilst vienkāršas aritmētiskās darbības ar attēlu $F(p)$ (attiecīgi attēla reizināšana vai dalīšana ar lielumu p).*

10. ORIĢINĀLA UN ATTĒLA ATVASINĀJUMS PĒC PARAMETRA

Aplūkosim gadījumu, kad oriģināls ir funkcija, kas satur parametru x. Tad arī attēls Laplasa transformācijā satur šo parametru, t. i.,

$$F(p; x) = \int_0^\infty f(t; x) e^{-pt} dt \quad \text{jeb} \quad f(t; x) \risingdotseq F(p; x).$$

Ja ir spēkā zināmi nosacījumi (kurus šeit neaplūkosim), no parametra atkarīgu neīsto integrāli var atvasināt pēc parametra, izpildot zemintegrāļa funkcijas atvasināšanu aiz integrāļa simbola, t. i.,

$$\left(\int_0^\infty f(t; x) e^{-pt} dt \right)'_x = \int_0^\infty (f(t; x))'_x e^{-pt} dt.$$

$$\int_0^t f(t)\,dt \risingdotseq \frac{1}{p} F(p)$$

Tad var pierādīt šādu Laplasa transformācijas īpašību:

$$\textit{ja} \quad f(t;\,x) \risingdotseq F(p;\,x),$$

$$\textit{tad} \quad \frac{\partial f(t;\,x)}{\partial x} \risingdotseq \frac{\partial F(p;\,x)}{\partial x}, \tag{12}$$

t. i., ***oriģināla atvasinājumam pēc parametra atbilst attēla atvasinājums pēc šī parametra.***

Formulu (12) var izmantot, lai iegūtu citu funkciju attēlus pēc zināmiem funkciju attēliem.

Piemēri

1. Šī paragrāfa 2. punktā ieguvām sakarību

$$\sin \omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2+\omega^2},$$

kurā ω var uzskatīt par parametru.

Atvasinot oriģinālu un attēlu pēc parametra ω, saskaņā ar formulu (12) iegūstam

$$(\sin \omega t)'_{\omega} \risingdotseq \left(\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right)'_{\omega},$$

no kurienes

$$\cos \omega t \cdot (\omega t)'_{\omega} \risingdotseq \frac{p^2+\omega^2-2\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$$

jeb

$$t \cos \omega t \risingdotseq \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}.$$

2. Tā kā

$$\cos \omega t \risingdotseq \frac{p}{p^2+\omega^2},$$

tad

$$(\cos \omega t)'_{\omega} \risingdotseq \left(\frac{p}{p^2+\omega^2}\right)'_{\omega},$$

no kurienes

$$-t \sin \omega t \risingdotseq \frac{-2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$$

jeb

$$t \sin \omega t \risingdotseq \frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}.$$

3. Sakarībā

$$e^{\alpha t} \risingdotseq \frac{1}{p-\alpha}$$

parametrs ir α. Atvasinot pēc α oriģinālu un attēlu, iegūstam

$$(e^{\alpha t})'_{\alpha} \risingdotseq \left(\frac{1}{p-\alpha}\right)'_{\alpha},$$

$$t e^{\alpha t} \risingdotseq \frac{1}{(p-\alpha)^2}.$$

Lietojot atkārtoti formulu (12), atrodam

$$(t e^{\alpha t})'_{\alpha} \risingdotseq \left(\frac{1}{(p-\alpha)^2}\right)'_{\alpha},$$

$$t^2 e^{\alpha t} \risingdotseq \frac{2}{(p-\alpha)^3} = \frac{2!}{(p-\alpha)^3}.$$

Analogi

$$(t^2 e^{\alpha t})'_{\alpha} \risingdotseq \left(\frac{2}{(p-\alpha)^3}\right)'_{\alpha},$$

$$t^3 e^{\alpha t} \risingdotseq \frac{2\cdot 3}{(p-\alpha)^4} = \frac{3!}{(p-\alpha)^4}.$$

Vispārīgā gadījumā

$$t^n e^{\alpha t} \risingdotseq \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}.$$

11. ORIĢINĀLU KONVOLŪCIJAS ĪPAŠĪBA

Definīcija

Par divu nepārtrauktu funkciju $f(t)$ un $g(t)$ konvolūciju sauc integrāli

$$\int_0^t f(x)\, g(t-x)\, dx.$$

Šis integrālis ir no t atkarīga funkcija, jo t ir augšējā integrācijas robeža un ir arī parametrs zemintegrāļa izteiksmē.

Funkciju $f(t)$ un $g(t)$ konvolūciju apzīmē ar simbolu

$$f(t) * g(t).$$

Tātad

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(x)\, g(t-x)\, dx. \tag{13}$$

Funkciju konvolūcijai piemīt šādas īpašības (aplūkosim tās bez pierādījuma).

1. Komutatīvā īpašība

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$$

jeb

$$\int_0^t f(x)\, g(t-x)\, dx = \int_0^t g(x)\, f(t-x)\, dx.$$

$$t^n e^{\alpha t} \risingdotseq \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}, \qquad t \sin \omega t \risingdotseq \frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2},$$

$$t \cos \omega t \risingdotseq \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$$

2. **Asociatīvā īpašība**

$$(f(t)*g(t))*h(t)=f(t)*(g(t)*h(t)).$$

3. **Distributīvā īpašība**

$$(f(t)+g(t))*h(t)=f(t)*h(t)+g(t)*h(t).$$

Piemēri

1. **Atrast funkciju $f(t)=e^t$ un $g(t)=t$ konvolūciju.**

Saskaņā ar formulu (13) šo funkciju konvolūcija e^t*t ir integrālis, kuru atrodam, integrējot parciāli:

$$e^t*t=\int_0^t e^x(t-x)\,dx=\begin{bmatrix} u=t-x, & du=-dx, \\ dv=e^x dx, & v=e^x \end{bmatrix}=(t-x)e^x\Big|_0^t+\int_0^t e^x dx=$$

$$=0\cdot e^t-t\cdot e^0+e^x\Big|_0^t=-t+e^t-e^0=e^t-t-1.$$

Pārliecināsimies, ka arī $t*e^t=e^t-t-1$.
Patiešām,

$$t*e^t=\int_0^t xe^{t-x}dx=\begin{bmatrix} u=x, & du=dx, \\ dv=e^{t-x}dx, & v=-e^{t-x}. \end{bmatrix}=-xe^{t-x}\Big|_0^t+\int_0^t e^{t-x}dx=$$

$$=-xe^{t-x}\Big|_0^t-e^{t-x}\Big|_0^t=-te^0+0e^t-e^0+e^t=e^t-t-1.$$

2. **Atrast funkciju $f(t)=\sin t$ un $g(t)=\cos t$ konvolūciju.**

$$\sin t*\cos t=\int_0^t \sin x\cos(t-x)\,dx=\left[\sin\alpha\cos\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2}\right]=$$

$$=\int_0^t \frac{1}{2}(\sin(x-t+x)+\sin(x+t-x))\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_0^t \sin(2x-t)\,dx+\int_0^t \sin t\,dx\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos(2x-t)\Big|_0^t+x\sin t\Big|_0^t\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos(2t-t)+\frac{1}{2}\cos(-t)+t\sin t-0\right)=$$

$$=-\frac{1}{4}\cos t+\frac{1}{4}\cos t+\frac{1}{2}t\sin t=\frac{1}{2}t\sin t.$$

Tātad

$$\sin t*\cos t=\frac{1}{2}t\sin t.$$

Funkciju $f(t)$ un $g(t)$ **konvolūcija**:

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(x)\,g(t-x)\,dx,$$

$$f(t)*g(t)=g(t)*f(t)$$

Convolutum (lat.) – saritināt, satīt, sapīt.

Borela teorēma

Ja $f(t)$ ***un*** $g(t)$ ***ir nepārtrauktas funkcijas un*** $f(t) \fallingdotseq F(p), g(t) \fallingdotseq G(p)$, ***tad***

$$f(t) * g(t) \fallingdotseq F(p) \cdot G(p)$$

jeb

$$\int_0^t f(x) g(t-x)\, dx \fallingdotseq F(p) \cdot G(p),$$

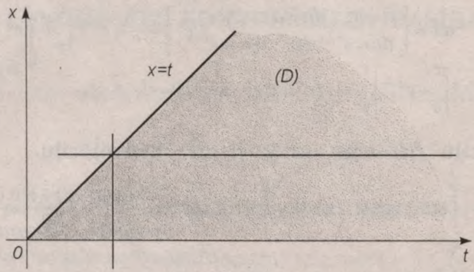
t. i., divu oriģinālu konvolūcijas attēls ir šo oriģinālu attēlu reizinājums.

Pierādījums

Izmantosim bez pierādījuma īpašību, ka *funkciju konvolūcijai* $f(t) * g(t)$ *eksistē attēls* (*ja vien eksistē attēli funkcijām* $f(t)$ *un* $g(t)$), *t. i., konverģē integrālis*

$$\int_0^\infty \left(\int_0^t f(x) g(t-x)\, dx \right) e^{-pt} dt = \int_0^\infty \left(\int_0^t f(x) g(t-x) e^{-pt} dx \right) dt. \tag{14}$$

Izteiksme (14) ir atkārtotais integrālis, kas sastādīts divu argumentu funkcijai $f(x)\, g(t-x) e^{-pt}$ tOx plaknes apgabalā (D) (50. zīm.).



50. zīm.

Integrēšanas apgabals (D) ir pareizs apgabals kā Ox, tā arī Ot ass virzienā (sk. jēdzienus V d. 20.3. §). Tāpēc, mainot integrēšanas secību atkārtotajā integrālī, iegūstam

$$\int_0^\infty \left(\int_0^t f(x)\, g(t-x) e^{-pt} dx \right) dt = \int_0^\infty dt \int_0^t f(x)\, g(t-x) e^{-pt} dx =$$

$$= \int_0^\infty dx \int_x^\infty f(x)\, g(t-x) e^{-pt} dt = \int_0^\infty f(x)\, dx \int_x^\infty g(t-x) e^{-pt} dt.$$

Fēlikss Borels (1871–1956) – franču matemātiķis, veicis pētījumus dažādās matemātikas nozarēs – rindu teorijā, analītisko funkciju teorijā, kopas mēra teorijā. Borēla vārdā nosaukti vairāki matemātikas jēdzieni algebrā, skaitļu teorijā, funkcionālanalīzē, varbūtību teorijā, topoloģijā.

$$f(t) * g(t) \fallingdotseq F(p) \cdot G(p)$$

jeb

$$\int_0^t f(x)\, g(t-x)\, dx \fallingdotseq F(p) \cdot G(p).$$

Pārveidosim iekšējo integrāli ar mainīgo substitūciju:

$$\int_x^{\infty} g(t-x)\,e^{-pt}dt = \begin{bmatrix} u=t-x, & t=u+x, & dt=du; \\ \text{ja} \quad t=x, & \text{tad} & u=0; \\ \text{ja} \quad t\to\infty, & \text{tad} & u\to\infty \end{bmatrix} = \int_0^{\infty} g(u)\,e^{-p(u+x)}du =$$

$$= \int_0^{\infty} g(u)\,e^{-pu}e^{-px}du.$$

Tādējādi

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx \int_x^{\infty} g(t-x)\,e^{-pt}dt = \int_0^{\infty} f(x)\,dx \int_0^{\infty} g(u)\,e^{-pu}e^{-px}du =$$

$$= \int_0^{\infty} f(x)\,e^{-px}dx \int_0^{\infty} g(u)\,e^{-pu}du = F(p)\cdot G(p).$$

Tātad

$$L(f(t)*g(t)) = F(p)\cdot G(p)$$

jeb

$$f(t)*g(t) \risingdotseq F(p)\cdot G(p). \qquad \square$$

Piemēri

1. Tā kā

$$t*e^t = e^t - t - 1 \quad \text{un} \quad t \risingdotseq \frac{1}{p^2}, \quad e^t \risingdotseq \frac{1}{p-1},$$

tad

$$e^t - t - 1 \risingdotseq \frac{1}{p^2}\cdot\frac{1}{p-1} = \frac{1}{p^2(p-1)}.$$

2. Tā kā

$$\sin t*\cos t = \frac{1}{2}\,t\sin t \quad \text{un} \quad \sin t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}, \quad \cos t \risingdotseq \frac{p}{p^2+1},$$

tad

$$\sin t*\cos t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{p}{p^2+1} = \frac{p}{(p^2+1)^2}$$

jeb

$$\frac{1}{2}\,t\sin t \risingdotseq \frac{p}{(p^2+1)^2}, \qquad t\sin t \risingdotseq \frac{2p}{(p^2+1)^2}.$$

12. ATTĒLU REIZINĀJUMA ĪPAŠĪBA

1. Diamela formula nepārtrauktiem oriģināliem

Ja

1) ***oriģināli*** $f(t)$ ***un*** $g(t)$ ***ir nepārtrauktas funkcijas,***
2) $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\quad g(t) \risingdotseq G(p)$,
3) ***eksistē attēli atvasinājumiem*** $f'(t)$ ***un*** $g'(t)$,

tad

$$pF(p)\cdot G(p) \risingdotseq f(0)\,g(t) + \int_0^t f'(x)\,g(t-x)\,dx \tag{15}$$

vai

$$pF(p)\cdot G(p) \risingdotseq g(0)f(t)+\int_0^t g'(x)f(t-x)\,dx. \tag{16}$$

Formulas (15), (16) sauc par **Diamela formulām**.

Pierādījums

Pārveidosim reizinājumu $pF(p)\cdot G(p)$ šādi:

$$pF(p)\cdot G(p)=(pF(p)-f(0)+f(0))\,G(p)=(pF(p)-f(0))\,G(p)+f(0)\,G(p). \tag{17}$$

Saskaņā ar formulu (8) izteiksme $pF(p)-f(0)$ ir oriģināla atvasinājuma $f'(t)$ attēls, t. i.,

$$f'(t) \risingdotseq pF(p)-f(0).$$

Savukārt pēc Borela teorēmas attēlu reizinājums

$$(pF(p)-f(0))\,G(p)$$

ir oriģinālu konvolūcijas attēls.

Tātad

$$(pF(p)-f(0))\,G(p) \risingdotseq f'(t)*g(t)=\int_0^t f'(x)\,g(t-x)\,dx.$$

Tā kā $f(0)$ ir konstants reizinātājs, tad

$$f(0)\,G(p) \risingdotseq f(0)\,g(t).$$

Tādējādi no vienādības (17) izriet

$$pF(p)\cdot G(p) \risingdotseq f'(t)*g(t)+f(0)\,g(t)$$

jeb

$$pF(p)\cdot G(p) \risingdotseq f(0)\,g(t)+\int_0^t f'(x)\,g(t-x)\,dx. \qquad \square$$

Analogi pierāda arī otro Diamela formulu (16).

2. Diamela formula, ja oriģināls ir pārtraukta funkcija

Laplasa transformācijas lietojumos praksē ir iespējams, ka oriģināls, kas apraksta kādu procesu, ir pārtraukta funkcija ar 1. veida pārtraukumiem.

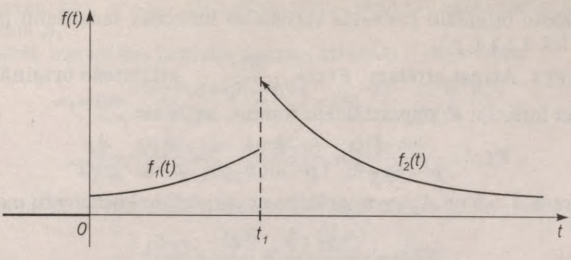
Aplūkosim attēlam $pF(p)\cdot G(p)$ atbilstošo oriģinālu gadījumā, kad oriģināls $g(t)$ ir nepārtraukta funkcija intervālā $[0; \infty)$, bet oriģinālam $f(t)$ ir 1. veida

Žans Diamels (1797–1872) – franču matemātiķis, veicis pētījumus matemātiskajā fizikā.

$$pF(p)\,G(p) \risingdotseq f(0)\,g(t)+\int_0^t f'(x)\,g(t-x)\,dx$$

vai

$$pF(p)\,G(p) \risingdotseq g(0)f(t)+\int_0^t g'(x)f(t-x)\,dx$$



51. zīm.

pārtraukuma punkts t_1 (vai arī šī funkcija ir uzdota ar dažādām analītiskām izteiksmēm) (51. zīm.).

$$f(t)=\begin{cases} 0, & \text{ja } t<0, \\ f_1(t), & \text{ja } 0\leqslant t\leqslant t_1, \\ f_2(t), & \text{ja } t>t_1. \end{cases}$$

Intervālā $[0;\ t_1]$ $f_1(t)$ un $g(t)$ ir nepārtrauktas funkcijas; tāpēc saskaņā ar formulu (15) šajā intervālā

$$pF(p)\cdot G(p) \risingdotseq f_1(0)\, g(t)+\int_0^t f_1'(x)\, g(t-x)\, dx.$$

Apzīmēsim reizinājumam $pF(p)\cdot G(p)$ atbilstošo oriģinālu ar $\varphi_1(t)$, t. i.,

$$pF(p)\cdot G(p) \risingdotseq f_1(0)\, g(t)+\int_0^t f_1'(x)\, g(t-x)\, dx=\varphi_1(t). \tag{18}$$

Savukārt funkcijas $f_2(t)$ un $g(t)$ ir nepārtrauktas intervālā $(t_1;\infty)$, bet funkciju $f(t)$ šajā intervālā var izteikt, izmantojot Hevisaida vienības funkciju, šādi:

$$f(t)=f_1(t)\,(\eta(t)-\eta(t-t_1))+f_2(t)\,\eta(t-t_1).$$

Var pierādīt, ka intervālā $(t_1;\ \infty)$ attēlam $pF(p)\cdot G(p)$ atbilst oriģināls $\varphi_2(t)$, ko aprēķina ar šādu izteiksmi:

$$\varphi_2(t)=f_1(0)\,g(t)+(f_2(t_1)-f_1(t_1))\,g(t-t_1)+\int_0^{t_1} g(t-x)\,f_1'(x)\,dx+\int_{t_1}^{t} g(t-x)\,f_2'(x)\,dx. \tag{19}$$

Tādējādi

$$pF(p)\cdot G(p)=\begin{cases} 0, & \text{ja } t<0, \\ \varphi_1(t), & \text{ja } 0\leqslant t\leqslant t_1, \quad \text{(sk. (18))} \\ \varphi_2(t), & \text{ja } t>t_1. \quad \text{(sk. (19))} \end{cases}$$

30.5. §. ORIĢINĀLA ATRAŠANA PĒC DOTĀ ATTĒLA

Lietojot Laplasa transformāciju, ir jāatrod ne tikai attēls pēc dotā oriģināla, bet arī jāaplūko apgriezts uzdevums: pēc dotā attēla jāatrod šim attēlam atbilstošais oriģināls. Vienkāršākajos gadījumos attēls ir daļveida racionāla funkcija, kuru var sadalīt parciāldaļu summā, un, izmantojot tabulas, katrai parciāldaļai atrast atbilstošo oriģinālu (daļveida racionālas funkcijas sadalīšanu parciāldaļu summā sk. I d. 1.3. § 4. p.).

Piemērs. **Atrast attēlam** $F(p)=\dfrac{3p-1}{p^2-5p+6}$ **atbilstošo oriģinālu.**

Sadalot funkciju $F(p)$ parciāldaļu summā, iegūstam

$$F(p)=\frac{3p-1}{p^2-5p+6}=\frac{3p-1}{(p-3)(p-2)}=\frac{A_1}{p-3}+\frac{A_2}{p-2},$$

kur konstantes $A_1=8$ un $A_2=-5$ aprēķina ar nenoteikto koeficientu metodi.

Tātad

$$F(p)=\frac{3p-1}{p^2-5p+6}=\frac{8}{p-3}+\frac{-5}{p-2}.$$

Tā kā $e^{\alpha t} \risingdotseq \dfrac{1}{p-\alpha}$, tad

$$\frac{1}{p-3} \risingdotseq e^{3t} \quad \text{un} \quad \frac{1}{p-2} \risingdotseq e^{2t}.$$

Līdz ar to, izmantojot Laplasa transformācijas linearitātes īpašību, atrodam

$$\frac{8}{p-3}+\frac{-5}{p-2} \risingdotseq 8e^{3t}-5e^{2t}$$

jeb

$$\frac{3p-1}{p^2-5p+6} \risingdotseq 8e^{3t}-5e^{2t}.$$

Šajā piemērā redzams, ka gadījumā, kad saucēja polinomam ir reālas dažādas saknes ($p_1=3$, $p_2=2$), tad oriģināls ir eksponentfunkciju $e^{p_1 t}$ un $e^{p_2 t}$ lineāra kombinācija.

Vispārīgā gadījumā oriģinālu atrod, izmantojot īpašas teorēmas, ko sauc par **izvērses teorēmām**.

Pieņemsim, ka attēls $F(p)$ ir īsta daļveida racionāla funkcija

$$F(p)=\frac{Q(p)}{P(p)}=\frac{b_0p^m+b_1p^{m-1}+\ldots+b_m}{a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n}, \quad \text{kur } m<n. \tag{1}$$

Pirmā izvērses teorēma

Ja polinomam $P(p)$ ***ir tikai vienkāršas saknes*** p_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ ***(jeb racionālai funkcijai*** $\dfrac{Q(p)}{P(p)}$ ***ir tikai 1. kārtas poli), tad attēlam*** $F(p)$ ***atbilstošo oriģinālu atrod pēc formulas***

$$F(p)=\frac{Q(p)}{P(p)} \risingdotseq \sum_{i=1}^{n}\frac{Q(p_i)}{P'(p_i)}e^{p_i t}. \tag{2}$$

Pierādījums

Tā kā saucēja polinomam ir vienkāršas saknes, tad racionālo funkciju (1) var izteikt ar šādu parciāldaļu summu:

$$\frac{Q(p)}{P(p)}=\frac{A_1}{p-p_1}+\frac{A_2}{p-p_2}+\ldots+\frac{A_i}{p-p_i}+\ldots+\frac{A_n}{p-p_n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{p-p_i}. \tag{3}$$

Lai aprēķinātu konstanti A_i, vienādības (3) labo un kreiso pusi reizina ar $p-p_i$ un pēc tam atrod robežu, kad $p \to p_i$:

$$\frac{(p-p_i)Q(p)}{P(p)}=\frac{A_1(p-p_i)}{p-p_1}+\frac{A_2(p-p_i)}{p-p_2}+\ldots+A_i+\ldots+\frac{A_n(p-p_i)}{p-p_n}.$$

Atrodot robežu, kad $p \to p_i$, vienādības labajā pusē visi saskaitāmie ir vienādi ar nulli, izņemot A_i.

Tādējādi, izmantojot Lopitāla likumu, atrodam A_i kā robežu

$$A_i = \lim_{p \to p_i} \frac{(p-p_i)\,Q(p)}{P(p)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{p \to p_i} \frac{((p-p_i)\,Q(p))'_p}{P'(p)} =$$

$$= \lim_{p \to p_i} \frac{Q(p)+(p-p_i)\,Q'(p)}{P'(p)} = \frac{Q(p_i)}{P'(p_i)}.$$

Ievietojot šo A_i izteiksmi vienādībā (3), iegūstam

$$F(p) = \frac{Q(p)}{P(p)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q(p_i)}{P'(p_i)} \cdot \frac{1}{p-p_i}.$$

Tā kā

$$\frac{1}{p-p_i} \risingdotseq e^{p_i t},$$

tad saskaņā ar Laplasa transformācijas linearitātes īpašību

$$F(p) = \frac{Q(p)}{P(p)} \risingdotseq \sum_{i=1}^{n} \frac{Q(p_i)}{P'(p_i)}\, e^{p_i t}.$$

Piemērs. **Atrast attēlam** $F(p) = \dfrac{2p^2-3p+1}{p^3+2p^2-9p-18}$ **atbilstošo oriģinālu.**

Saucēja polinomu var sadalīt reizinātājos šādi:

$$p^3+2p^2-9p-18 = p^2(p+2)-9(p+2) = (p+2)(p^2-9) = (p+2)(p-3)(p+3).$$

Tātad polinoma saknes ir

$$p_1 = -2, \quad p_2 = 3, \quad p_3 = -3.$$

Tā kā

$$Q(p) = 2p^2-3p+1 \quad \text{un} \quad P'(p) = (p^3+2p^2-9p-18)' = 3p^2+4p-9,$$

tad

$$Q(-2) = 15, \quad P'(-2) = -5, \quad Q(3) = 10, \quad P'(3) = 30, \quad Q(-3) = 28, \quad P'(-3) = 6.$$

Līdz ar to saskaņā ar formulu (2) atrodam

$$\frac{2p^2-3p+1}{p^3+2p^2-9p-18} \risingdotseq \frac{15}{-5}e^{-2t} + \frac{10}{30}e^{3t} + \frac{28}{6}e^{-3t} = -3e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{3t} + \frac{14}{3}e^{-3t}.$$

Otrā izvērses teorēma

29. nodaļas 16. §, aplūkojot funkcijas rezidija jēdzienu, noskaidrojām, ka daļveida funkcijas $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ rezidiju punktā z_0 var aprēķināt pēc formulas

$$\operatorname{Res}\left(\frac{g(z_0)}{h(z_0)}\right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)},$$

kur $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$, t. i., z_0 ir funkcijas $f(z)$ 1. kārtas pols jeb funkcijas $h(z)$ 1. kārtas nulle.

$$F(p) = \frac{Q(p)}{P(p)} \risingdotseq \sum_{i=1}^{n} \frac{Q(p_i)}{P'(p_i)}\, e^{p_i t}$$

Salīdzinot šo izteiksmi ar formulu (2), redzams, ka

$$\frac{Q(p_i)}{P'(p_i)}e^{p_it}=\operatorname{Res}\left(\frac{Q(p_i)e^{p_it}}{P(p_i)}\right)=\operatorname{Res}(F(p_i)e^{p_it}),$$

un tātad

$$F(p)=\frac{Q(p)}{P(p)} \risingdotseq \sum_{i=1}^{n}\operatorname{Res}(F(p_i)e^{p_it}). \tag{4}$$

Var pierādīt, ka ar formulu (4) var atrast attēlam $F(p)=\dfrac{Q(p)}{P(p)}$ atbilstošo oriģinālu arī tādā gadījumā, ja p_i ($i=1, 2, \dots, n$) ir polinoma $P(p)$ vairākkārtīgas saknes (jeb funkcijas $F(p)$ vairākkārtīgi poli). Taču, izmantojot formulu (4), jāievēro, ka funkcijas $f(z)$ rezidiju m-tās kārtas polā z_0 aprēķina pēc formulas

$$\operatorname{Res} f(z_0)=\frac{1}{(m-1)!}\cdot\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(f(z)(z-z_0)^m)$$

(sk. 29.16. §).

Tātad rezidiju funkcijas $F(p)e^{pt}$ m_i-tās kārtas polā p_i aprēķina šādi:

$$\operatorname{Res}(F(p_i)e^{p_it})=\frac{1}{(m_i-1)!}\lim_{p\to p_i}\frac{d^{m_i-1}}{dp^{m_i-1}}(F(p)e^{pt}(p-p_i)^{m_i}). \tag{5}$$

No izteiksmēm (4) un (5) izriet secinājums, ko sauksim par **otro izvērses teorēmu**.

Ja p_i ***ir attēla***

$$F(p)=\frac{Q(p)}{P(p)}$$

m_i***-tās kārtas pols*** ($i=1, 2, \dots, n$), ***tad šim attēlam atbilstošo oriģinālu atrod pēc formulas***

$$F(p)\risingdotseq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(m_i-1)!}\lim_{p\to p_i}\frac{d^{m_i-1}}{dp^{m_i-1}}(F(p)e^{pt}(p-p_i)^{m_i}). \tag{6}$$

Piemērs. **Atrast attēlam** $F(p)=\dfrac{5p^2-4p+2}{p^3+3p^2-4}$ **atbilstošo oriģinālu.**

Vispirms atrodam saucēja polinoma p^3+3p^2-4 saknes, t. i., funkcijas $F(p)$ polus. Acīmredzami viena sakne ir $p_1=1$. Dalot šo polinomu ar binomu $p-1$, dalījumā iegūst p^2+4p+4.

Tādējādi

$$p^3+3p^2-4=(p-1)(p^2+4p+4)=(p-1)(p+2)^2.$$

Tātad $p_1=1$ ir funkcijas $F(p)$ 1. kārtas pols, bet $p_2=p_3=-2$ ir 2. kārtas pols.

Atrodam funkcijas $F(p)e^{pt}$ rezidijus šajos punktos.

Ja $p_i=1$ un $m_i=1$, tad saskaņā ar formulu (5)

$$\operatorname{Res}(F(1)e^{1t})=\frac{1}{(1-1)!}\lim_{p\to1}\frac{(5p^2-4p+2)(p-1)}{p^3+3p^2-4}e^{pt}=\lim_{p\to1}\frac{(5p^2-4p+2)(p-1)}{(p-1)(p^2+4p+4)}e^{pt}=$$

$$=\lim_{p\to1}\frac{5p^2-4p+2}{p^2+4p+4}e^{pt}=\frac{1}{3}e^t.$$

$$F(p)=\frac{Q(p)}{P(p)}\risingdotseq\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Res}(F(p_i)e^{p_it})$$

jeb

$$F(p)\risingdotseq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(m_i-1)!}\lim_{p\to p_i}\frac{d^{m_i-1}}{dp^{m_i-1}}F(p)e^{pt}(p-p_i)^{m_i}$$

p_i – attēla $F(p)$ m_i-tās kārtas pols

Ja $p_2=p_3=-2$ un $m_i=2$, tad

$$\mathrm{Res}(F(-2)e^{-2t})=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{p\to-2}\left(\frac{(5p^2-4p+2)(p+2)^2}{p^3+3p^2-4}e^{pt}\right)'_p=$$

$$=\lim_{p\to-2}\left(\frac{(5p^2-4p+2)(p+2)^2}{(p-1)(p+2)^2}e^{pt}\right)'_p=\lim_{p\to-2}\left(\frac{5p^2-4p+2}{p-1}e^{pt}\right)'_p=$$

$$=\lim_{p\to-2}\left(\frac{(10p-4)(p-1)-(5p^2-4p+2)}{(p-1)^2}e^{pt}+\frac{5p^2-4p+2}{p-1}te^{pt}\right)=$$

$$=\frac{14}{3}e^{-2t}-10te^{-2t}.$$

Tā kā saskaņā ar formulu (4) attēlam $F(p)$ atbilstošais oriģināls ir $F(p)e^{pt}$ rezidiju summa, tad

$$\frac{5p^2-4p+2}{p^3+3p^2-4}\risingdotseq\frac{1}{3}e^t+\frac{14}{3}e^{-2t}-10te^{-2t}.$$

Piezīme

Ar izvērses teorēmu palīdzību oriģinālu var atrast arī tad, ja funkcijas $F(p)=\dfrac{Q(p)}{P(p)}$ saucēja polinoma $P(p)$ saknes ir kompleksi skaitļi. Šādā gadījumā iegūtajā oriģināla izteiksmē kompleksā mainīgā eksponentfunkciju pārveido, izmantojot Eilera formulu

$$e^{x\pm yi}=e^x(\cos y\pm i\sin y).$$

Piebildīsim tomēr, ka vairākkārtīgu sakņu gadījumā ir jāatrod augstāku kārtu atvasinājumi funkciju reizinājumiem un jāaprēķina šo atvasinājumu robežas, un tas parasti ir darbietilpīgs uzdevums.

Dažkārt ir izdevīgāk sadalīt izteiksmi $\dfrac{Q(p)}{P(p)}$ parciāldaļu summā un atrast katrai parciāldaļai atbilstošo oriģinālu, izmantojot speciālas tabulas.

Aplūkosim šo jautājumu sīkāk.

1. veida parciāldaļai atbilstošais oriģināls

Ja izteiksmes $\dfrac{Q(p)}{P(p)}$ *sadalījums satur* 1. *veida parciāldaļu* $\dfrac{A}{p-p_0}$, tad šai parciāldaļai atbilst oriģināls Ae^{p_0t}, t. i.,

$$\frac{A}{p-p_0}\risingdotseq Ae^{p_0t}. \tag{7}$$

2. veida parciāldaļai atbilstošais oriģināls

Ja $\dfrac{Q(p)}{P(p)}$ *sadalījums satur* 2. *veida parciāldaļu* $\dfrac{A}{(p-p_0)^k}$, kur $k\in\boldsymbol{N}$, tad šai parciāldaļai atbilst oriģināls $\dfrac{At^{k-1}}{(k-1)!}e^{p_0t}$, t. i.,

$$\frac{A}{(p-p_0)^k}\risingdotseq\frac{At^{k-1}}{(k-1)!}e^{p_0t}. \tag{8}$$

Šī formula izriet no 30.4. § 10. p. iegūtās formulas

$$t^ne^{\alpha t}\risingdotseq\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}},$$

ja $\alpha=p_0$ un $n=k-1$.

3. veida parciāldaļai atbilstošais oriģināls

Pieņemsim, ka $\dfrac{Q(p)}{P(p)}$ *sadalījums satur* 3. *veida parciāldaļu*

$$\frac{Mp+N}{p^2+ap+b},$$

kur $D=\dfrac{a^2}{4}-b<0$ jeb $b-\dfrac{a^2}{4}>0$.

Atdalot pilno kvadrātu, saucēja trinomu pārveidojam šādi:

$$p^2+ap+b=p^2+2\cdot\frac{a}{2}\cdot p+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}+b=\left(p+\frac{a}{2}\right)^2+\left(b-\frac{a^2}{4}\right).$$

Savukārt skaitītāja binoms

$$Mp+N=M\left(p+\frac{a}{2}-\frac{a}{2}\right)+N=M\left(p+\frac{a}{2}\right)+\left(N-\frac{Ma}{2}\right).$$

Tātad

$$\frac{Mp+N}{p^2+ap+b}=\frac{M\left(p+\frac{a}{2}\right)+\left(N-\frac{Ma}{2}\right)}{\left(p+\frac{a}{2}\right)^2+\left(b-\frac{a^2}{4}\right)}=\frac{M\left(p+\frac{a}{2}\right)}{\left(p+\frac{a}{2}\right)^2+\left(b-\frac{a^2}{4}\right)}+\frac{N-\frac{Ma}{2}}{\left(p+\frac{a}{2}\right)^2+\left(b-\frac{a^2}{4}\right)}.$$

Atrodam katram saskaitāmajam atbilstošo oriģinālu, izmantojot formulas, kas izriet no attēla pārbīdes īpašības (sk. 30.4. § 3. p.):

$$e^{\alpha t}\sin\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}, \qquad e^{\alpha t}\cos\omega t \risingdotseq \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}.$$

Ja $\alpha=-\dfrac{a}{2}$, $\omega=\sqrt{b-\dfrac{a^2}{4}}$, tad

$$\frac{M\left(p+\frac{a}{2}\right)}{\left(p+\frac{a}{2}\right)^2+\left(b-\frac{a^2}{4}\right)}\risingdotseq Me^{-\frac{a}{2}t}\cdot\cos\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}\,t$$

un

$$\frac{N-\frac{Ma}{2}}{\left(p+\frac{a}{2}\right)^2+\left(b-\frac{a^2}{4}\right)}\risingdotseq\frac{N-\frac{Ma}{2}}{\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}}\,e^{-\frac{a}{2}t}\cdot\sin\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}\,t.$$

Tātad

$$\frac{Mp+N}{p^2+ap+b}\risingdotseq Me^{-\frac{a}{2}t}\cos\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}\cdot t+\frac{N-\frac{Ma}{2}}{\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}}\,e^{-\frac{a}{2}t}\sin\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}\cdot t. \tag{9}$$

4. veida parciāldaļai atbilstošais oriģināls

Vispārīgā gadījumā 4. *veida parciāldaļa ir izteiksme*

$$\frac{Mp+N}{(p^2+ap+b)^k}, \quad \text{kur } k\in \boldsymbol{N} \ \textbf{un}\ D=\frac{a^2}{4}-b<0 \ \text{jeb}\ b-\frac{a^2}{4}>0.$$

Aplūkosim atsevišķu gadījumu, kad $k=2$.

Pārveidojam izteiksmi analogi kā iepriekš aplūkoto 3. veida parciāldaļu:

$$\frac{Mp+N}{(p^2+ap+b)^2}=\frac{M\left(p+\frac{a}{2}\right)}{\left(\left(p+\frac{a}{2}\right)^2+\left(b-\frac{a^2}{4}\right)\right)^2}+\frac{N-\frac{Ma}{2}}{\left(\left(p+\frac{a}{2}\right)^2+\left(b-\frac{a^2}{4}\right)\right)^2}.$$

Izmantosim formulas

$$\frac{t}{2\omega}\sin\omega t \risingdotseq \frac{p}{(p^2+\omega^2)^2}$$

un

$$\frac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t)\risingdotseq \frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}.$$

Saskaņā ar attēla pārbīdes teorēmu

$$\frac{te^{\alpha t}}{2\omega}\sin\omega t \risingdotseq \frac{p-\alpha}{((p-\alpha)^2+\omega^2)^2}$$

un

$$\frac{e^{\alpha t}}{2\omega^3}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t)\risingdotseq \frac{1}{((p-\alpha)^2+\omega^2)^2}.$$

Tā kā $\omega=\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}$ un $\alpha=-\frac{a}{2}$, tad

$$\frac{Mp+N}{(p^2+ap+b)^2}\risingdotseq \frac{Mte^{-\frac{a}{2}t}}{2\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}}\sin\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}\,t+$$

$$+\frac{\left(N-\frac{Ma}{2}\right)e^{-\frac{a}{2}t}}{2\left(\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}\right)^3}\left(\sin\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}\,t-\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}\,t\cos\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}\,t\right). \quad (10)$$

Piemērs. **Atrast attēlam $F(p)=\frac{2p-1}{p^5+p^2}$ atbilstošo oriģinālu.**

Sadalām $F(p)$ izteiksmi parciāldaļu summā:

$$\frac{2p-1}{p^5+p^2}=\frac{2p-1}{p^2(p^3+1)}=\frac{2p-1}{p^2(p+1)(p^2-p+1)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}+\frac{C}{p+1}+\frac{Mp+N}{p^2-p+1}.$$

Izmantojot *nenoteikto koeficientu metodi* (sk. I d. 1.3.§ 4. p.), atrodam

$$A=2,\quad B=-1,\quad C=-1,\quad M=-1,\quad N=1.$$

Tātad

$$\frac{2p-1}{p^5+p^2}=\frac{2}{p}-\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p+1}+\frac{-p+1}{p^2-p+1}.$$

Saskaņā ar formulām (7), (8) un (9) atrodam šo parciāldaļu oriģinālus:

$$\frac{2}{p}=\frac{2}{p-0}\risingdotseq 2e^{0t}=2,$$

$$\frac{1}{p^2}=\frac{1}{(p-0)^2}\risingdotseq \frac{t^{2-1}}{(2-1)!}e^{0t}=t,$$

$$\frac{1}{p+1}=\frac{1}{p-(-1)} \risingdotseq e^{-1t}=e^{-t},$$

$$\frac{-p+1}{p^2-p+1} \risingdotseq \left[\begin{array}{l} M=-1, \quad N=1, \quad a=-1, \quad b=1 \\ \sqrt{b-\frac{a^2}{4}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad N-\frac{Ma}{2}=\frac{1}{2} \end{array}\right] \risingdotseq$$

$$\risingdotseq -e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

Līdz ar to

$$\frac{2p-1}{p^5+p^2} \risingdotseq 2-t-e^{-t}+e^{\frac{t}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

30.6. §. LAPLASA TRANSFORMĀCIJAS LIETOJUMI

Kā norādīts iepriekš, ar Laplasa transformācijas palīdzību komplicētas matemātiskas operācijas (piemēram, *atvasināšanu, integrēšanu*), kas jāveic ar oriģināliem, iespējams reducēt uz vienkāršām algebriskām darbībām (atbilstoši – *reizināšanu, dalīšanu*) ar šo oriģinālu attēliem. Tādējādi no vienādojumiem, kas satur atvasinājumus un integrāļus, var pāriet uz algebriskiem vienādojumiem, kurus atrisinot iegūst meklējamo funkciju attēlus. Pēc tam, izmantojot iepriekš aplūkotās metodes, pēc šiem attēliem atrod tiem atbilstošos oriģinālus, kas ir meklējamās funkcijas dotajos vienādojumos. Ar šādu metodi var atrisināt dažādus diferenciālvienādojumus un to sistēmas, integrālvienādojumus u. c. uzdevumus.

Aplūkosim vienkāršākos gadījumus.

1. LINEĀRA HOMOGĒNA DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMA ATRISINĀŠANA

Atrisināsim lineāru 2. kārtas diferenciālvienādojumu ar konstantiem koeficientiem

$$y''+a_1y'+a_2y=0, \tag{1}$$

ja doti sākuma nosacījumi

$$y(0)=y_0, \quad y'(0)=y_0'.$$

Pieņemsim, ka **meklējamā funkcija $y=y(t)$ ir oriģināls, kuram Laplasa transformācijā atbilst attēls $Y(p)$.**

Saskaņā ar oriģināla atvasinājuma īpašību, ja

$$y(t) \risingdotseq Y(p),$$

tad

$$y'(t) \risingdotseq pY(p)-y(0),$$

$$y''(t) \risingdotseq p^2Y(p)-py(0)-y'(0)$$

(sk. 30.4. § 8. p.)

jeb, ievērojot sākuma nosacījumus,

$$y \risingdotseq Y,$$

$$y' \risingdotseq pY-y_0,$$

$$y'' \risingdotseq p^2Y-py_0-y_0'.$$

Ievietojot y, y' un y'' attēlus diferenciālvienādojumā (1), iegūstam algebrisku vienādojumu attiecībā pret funkcijas y attēlu Y jeb **operatoru vienādojumu**

$$p^2 Y - p y_0 - y_0' + a_1 (p Y - y_0) + a_2 Y = 0,$$

no kurienes

$$Y = \frac{y_0 p + a_1 y_0 + y_0'}{p^2 + a_1 p + a_2}. \tag{2}$$

Sadalot daļveida racionālo funkciju (2) parciāldaļu summā vai arī izmantojot rezidiju metodi, iegūstam attēlam Y atbilstošo oriģinālu, t. i., *diferenciālvienādojuma* (1) *partikulāro atrisinājumu* $y(t)$.

Piemērs. **Atrast diferenciālvienādojuma**

$$y'' - 6y' + 13y = 0$$

partikulāro atrisinājumu, ja $y(0) = 0$ **un** $y'(0) = 1$.

Tā kā

$$y \risingdotseq Y,$$
$$y' \risingdotseq pY - y(0) = pY,$$
$$y'' \risingdotseq p^2 Y - p y(0) - y'(0) = p^2 Y - 1,$$

tad iegūstam vienādojumu attiecībā pret attēlu Y:

$$p^2 Y - 1 - 6pY + 13Y = 0,$$

no kurienes

$$Y = \frac{1}{p^2 - 6p + 13}.$$

Attēls Y ir 3. veida parciāldaļa, jo saucēja kvadrāttrinoma diskriminants $D = -4 < 0$. Atdalot saucēja izteiksmē pilno kvadrātu, atrodam

$$Y = \frac{1}{p^2 - 6p + 13} = \frac{1}{(p-3)^2 + 4} = \frac{1}{(p-3)^2 + 2^2}.$$

Izmantojam formulu

$$e^{\alpha t} \sin \omega t \risingdotseq \frac{\omega}{(p-\alpha)^2 + \omega^2},$$

no kurienes

$$\frac{1}{(p-\alpha)^2 + \omega^2} \fallingdotseq \frac{1}{\omega} e^{\alpha t} \sin \omega t.$$

Tā kā attēla Y izteiksmē $\alpha = 3$ un $\omega = 2$, tad

$$Y = \frac{1}{(p-3)^2 + 2^2} \fallingdotseq \frac{1}{2} e^{3t} \sin 2t.$$

Tātad attēlam Y atbilstošais oriģināls jeb *diferenciālvienādojuma partikulārais atrisinājums* ir funkcija

$$y = \frac{1}{2} e^{3t} \sin 2t.$$

2. LINEĀRA NEHOMOGĒNA DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMA ATRISINĀŠANA

Aplūkosim 2. kārtas diferenciālvienādojumu ar konstantiem koeficientiem

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(t) \tag{3}$$

un sākuma nosacījumiem

$$y(0)=y_0, \quad y'(0)=y_0'.$$

Pieņemsim, ka **funkcijai** $f(t)$ **eksistē attēls** $F(p)$**, kas ir daļveida racionāla funkcija**, t. i.,

$$f(t) \risingdotseq F(p).$$

Tā kā

$$y \risingdotseq Y, \quad y' \risingdotseq pY-y_0 \quad \text{un} \quad y'' \risingdotseq p^2Y-py_0-y_0',$$

tad diferenciālvienādojumam (3) atbilst algebrisks vienādojums

$$p^2Y-py_0-y_0'+a_1(pY-y_0)+a_2Y=F(p),$$

no kura izsakām

$$Y=\frac{F(p)+y_0p+a_1y_0+y_0'}{p^2+a_1p+a_2}. \tag{4}$$

Pēc tam nosakām attēlam Y atbilstošo oriģinālu y analogi kā iepriekš vai arī to atrodam tabulā.

Piezīme

Ja jāatrisina *augstākas kārtas diferenciālvienādojums*, tad vispārīgā gadījumā izmanto oriģināla n-tās kārtas atvasinājuma attēla formulu

$$y^{(n)} \risingdotseq p^nY-p^{n-1}y(0)-p^{n-2}y'(0)-\ldots-y^{(n-1)}(0) \tag{5}$$

(sk. 30.4. § 8. p.).

Piemērs. **Atrast diferenciālvienādojuma**

$$y'''-4y''+4y'=e^t$$

partikulāro atrisinājumu, ja

$$y(0)=0, \quad y'(0)=1, \quad y''(0)=0.$$

Izmantosim formulu (5) un sākuma nosacījumus.

Ja

$$y \risingdotseq Y,$$

tad

$$y' \risingdotseq pY-y(0)=pY,$$
$$y'' \risingdotseq p^2Y-py(0)-y'(0)=p^2Y-1,$$
$$y''' \risingdotseq p^3Y-p^2y(0)-py'(0)-y''(0)=p^3Y-p.$$

Tā kā

$$e^t \risingdotseq \frac{1}{p-1},$$

tad *iegūstam šādu operatoru vienādojumu*:

$$p^3Y-p-4(p^2Y-1)+4pY=\frac{1}{p-1}$$

jeb

$$(p^3-4p^2+4p)Y=\frac{1}{p-1}+p-4,$$

no kurienes

$$Y=\frac{p^2-5p+5}{(p-1)(p^3-4p^2+4p)}.$$

Sadalām attēla Y izteiksmi parciāldaļu summā:

$$\frac{p^2-5p+5}{(p-1)(p^3-4p^2+4p)}=\frac{p^2-5p+5}{(p-1)p(p-2)^2}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-1}+\frac{C}{p-2}+\frac{D}{(p-2)^2}.$$

Aprēķinām konstantes A, B, C, D ar nenoteikto koeficientu metodi. Tā kā

$$A(p-1)(p-2)^2+Bp(p-2)^2+Cp(p-1)(p-2)+Dp(p-1)\equiv p^2-5p+5$$

jeb

$$(A+B+C)p^3+(-5A-4B-3C+D)p^2+(8A+4B+2C-D)p-4A\equiv p^2-5p+5,$$

tad

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -5A-4B-3C+D=1 \\ 8A+4B+2C-D=-5 \\ -4A=5, \end{cases}$$

no kurienes

$$A=-\frac{5}{4},\quad B=1,\quad C=\frac{1}{4},\quad D=-\frac{1}{2}.$$

Tātad

$$Y=\frac{p^2-5p+5}{(p-1)(p^3-4p^2+4p)}=-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{p}+\frac{1}{p-1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(p-2)^2}.$$

Parciāldaļām atbilst šādi oriģināli (sk. 1. tabulu):

$$\frac{1}{p}\risingdotseq 1,\qquad \frac{1}{p-1}\risingdotseq e^t,\qquad \frac{1}{p-2}\risingdotseq e^{2t},\qquad \frac{1}{(p-2)^2}\risingdotseq te^{2t}.$$

Tātad saskaņā ar Laplasa transformācijas linearitātes īpašību attēlam Y atbilstošais oriģināls jeb dotā diferenciālvienādojuma partikulārais atrisinājums ir funkcija

$$y=-\frac{5}{4}+e^t+\frac{1}{4}e^{2t}-\frac{1}{2}te^{2t}.$$

3. DIAMELA FORMULAS LIETOJUMI, ATRISINOT LINEĀRU NEHOMOGĒNU DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMU

Pieņemsim, ka lineāra nehomogēna diferenciālvienādojuma

$$y''+a_1y'+a_2y=f(t)$$

sākuma nosacījumi ir

$$y(0)=0 \quad \text{un} \quad y'(0)=0.$$

Tad no formulas (4) izriet, ka partikulārā atrisinājuma $y(t)$ attēls $Y(p)$ ir funkcija

$$Y=\frac{F(p)}{p^2+a_1p+a_2}.$$

Izteiksim šo funkciju kā reizinājumu:

$$Y=p\cdot F(p)\cdot\frac{1}{p(p^2+a_1p+a_2)}.$$

Tā kā

$$1\risingdotseq\frac{1}{p},$$

tad saskaņā ar formulu (4) reizinātājs

$$\frac{1}{p(p^2+a_1p+a_2)}$$

ir diferenciālvienādojuma

$$\bar{y}''+a_1\bar{y}'+a_2\bar{y}=1$$
$$\bar{y}(0)=0,\quad \bar{y}'(0)=0$$

partikulārā atrisinājuma $\bar{y}$ attēls $\bar{Y}(p)$.

Tādējādi

$$Y=p\cdot F(p)\cdot \bar{Y}(p)$$

un *attēlam Y atbilstošo oriģinālu y var atrast, izmantojot Diamela formulas* (sk. 30.4. § 12. p.), no kurām izriet, ka

$$Y=p\cdot F(p)\cdot \bar{Y}(p) \doteq f(0)\,\bar{y}(t)+\int_0^t f'(x)\cdot \bar{y}(t-x)\,dx$$

vai arī

$$Y=p\cdot F(p)\cdot \bar{Y}(p) \doteq \bar{y}(0)\,f(t)+\int_0^t \bar{y}'(x)\,f(t-x)\,dx=\int_0^t \bar{y}'(x)\,f(t-x)\,dx.$$

Tātad, lai atrastu lineāra nehomogēna diferenciālvienādojuma

$$y''+a_1y'+a_2y=f(t)$$
$$y(0)=0,\quad y'(0)=0$$

partikulāro atrisinājumu, **izmantojot Diamela formulu**, rīkojas pēc šāda algoritma.

1. Uzraksta dotajam diferenciālvienādojumam atbilstošo «vienības» diferenciālvienādojumu

$$\bar{y}''+a_1\bar{y}'+a_2\bar{y}=1$$

ar sākuma nosacījumiem

$$\bar{y}(0)=0,\qquad \bar{y}'(0)=0.$$

2. Sastāda šim diferenciālvienādojumam atbilstošo operatoru vienādojumu

$$p^2\bar{Y}+a_1p\bar{Y}+a_2\bar{Y}=\frac{1}{p},$$

no kura izsaka

$$\bar{Y}=\frac{1}{p(p^2+a_1p+a_2)}.$$

3. Atrod attēlam $\bar{Y}$ atbilstošo oriģinālu $\bar{y}(t)$ un tā atvasinājumu $\bar{y}'(t)$.
4. Atrod dotā diferenciālvienādojuma partikulāro atrisinājumu, lietojot Diamela formulu

$$y(t)=\int_0^t \bar{y}'(x)\,f(t-x)\,dx. \tag{6}$$

Piemērs. **Atrast diferenciālvienādojuma**

$$y''-5y'+6y=e^{2t},$$
$$y(0)=0,\quad y'(0)=0$$

partikulāro atrisinājumu, lietojot Diamela formulu.

Dotajam diferenciālvienādojumam atbilst «vienības diferenciālvienādojums»

$$\bar{y}''-5\bar{y}'+6\bar{y}=1$$
$$\bar{y}(0)=0,\quad \bar{y}'(0)=0,$$

kura operatoru vienādojums ir

$$p^2\overline{Y}-5p\overline{Y}+6\overline{Y}=\frac{1}{p},$$

no kurienes

$$\overline{Y}=\frac{1}{p(p^2-5p+6)}=\frac{1}{p(p-2)(p-3)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-2}+\frac{C}{p-3}$$

Ar nenoteikto koeficientu metodi atrodam, ka

$$A=\frac{1}{6},\quad B=-\frac{1}{2},\quad C=\frac{1}{3}.$$

Tātad

$$\overline{Y}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p-3}$$

un

$$\overline{y}(t)=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{3t},$$

no kurienes

$$\overline{y}'(t)=-e^{2t}+e^{3t}.$$

Tā kā dotā diferenciālvienādojuma labā puse $f(t)=e^{2t}$, tad $f(t-x)=e^{2(t-x)}$ un, izmantojot formulu (6), atrodam

$$y(t)=\int_0^t (e^{3x}-e^{2x})\cdot e^{2(t-x)}\,dx=\int_0^t (e^{2t+x}-e^{2t})\,dx=e^{2t+x}\Big|_0^t-x\cdot e^{2t}\Big|_0^t=e^{3t}-e^{2t}-t\,e^{2t}.$$

Tātad dotā diferenciālvienādojuma partikulārais atrisinājums ir

$$y=e^{3t}-e^{2t}-t\,e^{2t}.$$

4. BORELA TEORĒMAS LIETOJUMI, ATRISINOT LINEĀRU NEHOMOGĒNU DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMU

Atrisinot diferenciālvienādojumus, dažkārt ir izdevīgi izmantot Borela teorēmu – īpašību, ka *divu attēlu reizinājumam atbilst šiem attēliem atbilstošo oriģinālu konvolūcija* (sk. 30.4. § 11. p.).

Tā, piemēram, ja diferenciālvienādojuma

$$y''+a_1y'+a_2y=f(t),$$
$$y(0)=0,\quad y'(0)=0$$

partikulārā atrisinājuma $y(t)$ attēlu $Y(p)$ sadala reizinātājos šādi:

$$Y(p)=\frac{F(p)}{p^2+a_1p+a_2}=\frac{1}{p^2+a_1p+a_2}\cdot F(p)=G(p)\cdot F(p),$$

kur $F(p)\risingdotseq f(t)$, un reizinātājam

$$G(p)=\frac{1}{p^2+a_1p+a_2}$$

ir atrasts oriģināls $g(t)$, tad saskaņā ar Borela teorēmu attēlu reizinājumam $G(p)\cdot F(p)$ atbilst oriģinālu $g(t)$ un $f(t)$ konvolūcija:

$$G(p)\cdot F(p)\risingdotseq\int_0^t g(x)f(t-x)\,dx$$

vai saskaņā ar konvolūcijas komutatīvo īpašību

$$G(p)\cdot F(p) \risingdotseq \int_0^t f(x)\, g(t-x)\, dx.$$

Tātad diferenciālvienādojuma partikulāro atrisinājumu $y(t)$ var atrast ar integrāli

$$y(t)=\int_0^t f(x)\, g(t-x)\, dx$$

vai arī (7)

$$y(t)=\int_0^t g(x)\, f(t-x)\, dx.$$

P i e m ē r s. **Atrast diferenciālvienādojuma**

$$y''-y'=\frac{1}{1+e^t}$$

$$y(0)=0, \quad y'(0)=0$$

partikulāro atrisinājumu, izmantojot Borela teorēmu.

Ja $y(t) \risingdotseq Y(p)$, tad $y'(t) \risingdotseq pY(p)$ un $y''(t) \risingdotseq p^2 Y(p)$, jo $y(0)=0$ un $y'(0)=0$.

Tātad diferenciālvienādojumam atbilst operatoru vienādojums

$$p^2 Y - pY = F(p),$$

kur

$$F(p) \risingdotseq \frac{1}{1+e^t}.$$

No operatoru vienādojuma izsakām Y kā divu attēlu reizinājumu:

$$Y=\frac{1}{p^2-p}\cdot F(p).$$

Sadalām parciāldaļu summā reizinātāju $G(p)=\dfrac{1}{p^2-p}$:

$$G(p)=\frac{1}{p^2-p}=\frac{1}{p(p-1)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-1}.$$

Ar nenoteikto koeficientu metodi atrodam, ka

$$A=-1 \quad \text{un} \quad B=1.$$

Tātad

$$G(p)=-\frac{1}{p}+\frac{1}{p-1}.$$

Attēlam $G(p)$ atbilst oriģināls

$$g(t)=-1+e^t.$$

Tā kā

$$f(t)=\frac{1}{1+e^t}, \quad \text{tad} \quad f(t-x)=\frac{1}{1+e^{t-x}}=\frac{1}{1+\dfrac{e^t}{e^x}}=\frac{e^x}{e^x+e^t}.$$

Savukārt

$$g(x)=e^x-1.$$

Līdz ar to, izmantojot formulu (7), atrodam

$$y(t)=\int_0^t g(x)f(t-x)\,dx=\int_0^t \frac{(e^x-1)e^x}{e^x+e^t}\,dx=\int_0^t \frac{e^x-1}{e^x+e^t}\,d(e^x)=\int_0^t \frac{e^x+e^t-e^t-1}{e^x+e^t}\,d(e^x)=$$

$$=\int_0^t \left(1-\frac{e^t+1}{e^x+e^t}\right)d(e^x)=\int_0^t d(e^x)-(e^t+1)\int_0^t \frac{d(e^x+e^t)}{e^x+e^t}=$$

$$=e^x\Big|_0^t-(e^t+1)\ln(e^x+e^t)\Big|_0^t=e^t-e^0-(e^t+1)(\ln(e^t+e^t)-\ln(e^0+e^t))=$$

$$=e^t-1-(e^t+1)(\ln 2e^t-\ln(1+e^t))=e^t-1-(e^t+1)(\ln 2+t-\ln(1+e^t))=$$

$$=e^t-1-(e^t+1)\left(t+\ln\frac{2}{1+e^t}\right).$$

Tātad dotā diferenciālvienādojuma partikulārais atrisinājums ir funkcija

$$y=e^t-1-(e^t+1)\left(t+\ln\frac{2}{1+e^t}\right).$$

Piezīme

Kā redzams, izmantojot Borela teorēmu, nav jāmeklē nehomogēnā diferenciālvienādojuma labās puses – funkcijas $f(t)$ attēls $F(p)$. Tomēr vairumā gadījumu funkciju $f(t)$ un $g(t)$ konvolūcijas, t. i., integrāļa (7) atrašana ir ļoti darbietilpīga.

5. DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMU SISTĒMU ATRISINĀŠANA

Risinot iepriekš aplūkotos diferenciālvienādojumus ar Laplasa transformācijas palīdzību, šķiet, ka vienkāršāk atrisinājumus var iegūt, izmantojot diferenciālvienādojumu teorijā aplūkotās metodes (sk. IV d. XVII nod.). Tomēr operatoru metodes priekšrocības redzamas, atrisinot diferenciālvienādojumu sistēmas.

Aplūkosim lineāru nehomogēnu diferenciālvienādojumu sistēmu ar konstantiem koeficientiem (pieņemsim, ka sistēmā ir 2 vienādojumi un 2 nezināmas funkcijas $y=y(t)$ un $z=z(t)$). Šādas sistēmas normālforma ir

$$\begin{cases} y'+a_{11}y+a_{12}z=f_1(t) \\ z'+a_{21}y+a_{22}z=f_2(t), \end{cases} \tag{8}$$

$$y(0)=y_0, \qquad z(0)=z_0.$$

Izpildot Laplasa transformāciju, izmantosim šādus apzīmējumus:

$$y(t)\risingdotseq Y(p), \quad z(t)\risingdotseq Z(p), \quad f_1(t)\risingdotseq F_1(p), \quad f_2(t)\risingdotseq F_2(p).$$

Tad

$$y'(t)\risingdotseq pY(p)-y(0)=pY(p)-y_0$$

un

$$z'(t)\risingdotseq pZ(p)-z(0)=pZ(p)-z_0.$$

Diferenciālvienādojumu sistēmai (8) atbilst šāda lineāru algebrisku vienādojumu sistēma attiecībā pret attēliem Y un Z:

$$\begin{cases} pY-y_0+a_{11}Y+a_{12}Z=F_1 \\ pZ-z_0+a_{21}Y+a_{22}Z=F_2 \end{cases}$$

jeb

$$\begin{cases}(p+a_{11})Y+ \quad a_{12}\ Z=F_1+y_0\\ a_{21}\ \ Y+(p+a_{22})Z=F_2+z_0.\end{cases} \tag{9}$$

Sistēmu (9) var atrisināt, izmantojot Krāmera formulas:

$$Y=\frac{\begin{vmatrix}F_1+y_0 & a_{12}\\ F_2+z_0 & p+a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}p+a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & p+a_{22}\end{vmatrix}},\qquad Z=\frac{\begin{vmatrix}p+a_{11} & F_1+y_0\\ a_{21} & F_2+z_0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}p+a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & p+a_{22}\end{vmatrix}}.$$

Ja F_1 un F_2 ir daļveida racionālas funkcijas, tad pēc Krāmera formulām aprēķinātās attēlu Y un Z izteiksmes arī ir daļveida racionālas funkcijas, kurām, izmantojot iepriekš aplūkotās metodes, atrod atbilstošos oriģinālus – diferenciālvienādojumu sistēmas (8) partikulāros atrisinājumus $y(t)$ un $z(t)$.

Analogi rīkojas, ja diferenciālvienādojumu sistēmā ir vairāk nekā divi vienādojumi un nezināmās funkcijas.

Piemērs. **Atrisināt diferenciālvienādojumu sistēmu**

$$\begin{cases}y'+2y-3z=1\\ z'+\ y-2z=e^{3t},\end{cases}$$

ja

$$y(0)=0 \quad \text{un} \quad z(0)=0.$$

Ja $\quad y(t) \risingdotseq Y(p), \quad$ tad $\quad y'(t) \risingdotseq pY(p)-y(0)=pY(p);$

ja $\quad z(t) \risingdotseq Z(p), \quad$ tad $\quad z'(t) \risingdotseq pZ(p)-z(0)=pZ(p);$

$$1 \risingdotseq \frac{1}{p}, \qquad e^{3t} \risingdotseq \frac{1}{p-3}.$$

Sastādām dotajai diferenciālvienādojumu sistēmai atbilstošo operatoru algebrisko vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases}pY+2Y-3Z=\dfrac{1}{p}\\ pZ+\ Y-2Z=\dfrac{1}{p-3}\end{cases} \quad \text{jeb} \quad \begin{cases}(p+2)\,Y- \quad 3\,Z=\dfrac{1}{p}\\ Y+(p-2)\,Z=\dfrac{1}{p-3}.\end{cases}$$

Atrisinot šo sistēmu ar Krāmera formulām, atrodam

$$Y=\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{1}{p} & -3\\ \dfrac{1}{p-3} & p-2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}p+2 & -3\\ 1 & p-2\end{vmatrix}}=\frac{\dfrac{p-2}{p}+\dfrac{3}{p-3}}{(p+2)(p-2)+3}=\frac{(p-2)(p-3)+3p}{p(p-3)(p^2-1)}=$$

$$=\frac{p^2-2p+6}{p(p-1)(p+1)(p-3)};$$

$$Z=\frac{\begin{vmatrix}p+2 & \dfrac{1}{p}\\ 1 & \dfrac{1}{p-3}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}p+2 & -3\\ 1 & p-2\end{vmatrix}}=\frac{\dfrac{p+2}{p-3}-\dfrac{1}{p}}{p^2-4+3}=\frac{p^2+2p-p+3}{p(p-3)(p^2-1)}=\frac{p^2+p+3}{p(p-1)(p+1)(p-3)}.$$

Sadalām Y un Z izteiksmes parciāldaļu summā:

$$Y=\frac{p^2-2p+6}{p(p-1)(p+1)(p-3)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-1}+\frac{C}{p+1}+\frac{D}{p-3}=$$
$$=\left[A=2,\quad B=-\frac{5}{4},\quad C=-\frac{9}{8},\quad D=\frac{3}{8}\right]=$$
$$=\frac{2}{p}-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{p-1}-\frac{9}{8}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{p-3};$$

$$Z=\frac{p^2+p+3}{p(p-1)(p+1)(p-3)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-1}+\frac{C}{p+1}+\frac{D}{p-3}=$$
$$=\left[A=1,\quad B=-\frac{5}{4},\quad C=-\frac{3}{8},\quad D=\frac{5}{8}\right]=$$
$$=\frac{1}{p}-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{p-1}-\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{p-3}.$$

Pēc iegūtajām parciāldaļām atrodam attēliem Y un Z atbilstošos oriģinālus – diferenciālvienādojumu sistēmas partikulāros atrisinājumus:

$$y=2-\frac{5}{4}e^{t}-\frac{9}{8}e^{-t}+\frac{3}{8}e^{3t},$$
$$z=1-\frac{5}{4}e^{t}-\frac{3}{8}e^{-t}+\frac{5}{8}e^{3t}.$$

Kā redzams, Laplasa transformācijas lietojumu pamatā ir divi uzdevumi:

1) jāatrod dotajam oriģinālam $f(t)$ attēls $F(p)$,

2) jāatrod dotajam attēlam $F(p)$ atbilstošais oriģināls $f(t)$.

Risinot šos pamatuzdevumus, izmanto Laplasa transformācijas galvenās īpašības un speciālas tabulas, kurās norādīti biežāk lietoto oriģinālu attēli vai arī attēliem atbilstošie oriģināli (sk. 1. un 2. tabulu).

Šajā nodaļā aplūkoti tikai vienkāršākie operatoru rēķinu lietojumi. Jāatzīmē, ka operatoru metodi efektīvi izmanto, lai atrisinātu dažādus matemātiskajā fizikā sastopamos parciālos diferenciālvienādojumus, integrālvienādojumus, kā arī to lieto dažādās inženierzinātņu nozarēs.

1. tabula

ATTĒLA ATRAŠANA PĒC ORIĢINĀLA

Nr. p. k.	Oriģināls $f(t)$	Attēls $F(p)$
1.	1	$\frac{1}{p}$
2.	t	$\frac{1}{p^2}$
3.	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
4.	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$
5.	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
6.	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
7.	$te^{\alpha t}$	$\frac{1}{(p-\alpha)^2}$
8.	$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$
9.	$t\sin\omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
10.	$t\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
11.	$e^{\alpha t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p-\omega)^2+\omega^2}$
12.	$e^{\alpha t}\cos\omega t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$
13.	$\mathrm{sh}\,\omega t=\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
14.	$\mathrm{ch}\,\omega t=\frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
15.	$t\,\mathrm{sh}\,\omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2-\omega^2)^2}$
16.	$t\,\mathrm{ch}\,\omega t$	$\frac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}$
17.	$e^{\alpha t}\mathrm{sh}\,\omega t$	$\frac{\omega}{(p-\alpha)^2-\omega^2}$
18.	$e^{\alpha t}\mathrm{ch}\,\omega t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2-\omega^2}$
19.	$(1+\alpha t)e^{\alpha t}$	$\frac{p}{(p-\alpha)^2}$

2. tabula

LAPLASA TRANSFORMĀCIJAS ĪPAŠĪBAS UN FORMULAS

Nr.p.k.	Nosaukums	Analītiskā izteiksme
1.	Definīcija; apzīmējums	$F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt;\qquad f(t)\risingdotseq F(p)$
2.	Linearitāte	$\sum_{i=1}^n C_i f_i(t)\risingdotseq\sum_{i=1}^n C_i F_i(p)$
3.	Līdzība	$f(\lambda t)\risingdotseq\frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$
4.	Attēla pārbīde	$e^{\alpha t}f(t)\risingdotseq F(p-\alpha)$
5.	Oriģināla pārbīde	$f(t-t_0)\risingdotseq e^{-t_0 p}F(p)$
6.	Periodiska oriģināla attēls	$F(p)=\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T f(t)e^{-pt}dt$
7.	Attēla atvasinājums	$F^{(n)}(p)\fallingdotseq(-1)^n t^n f(t)$
8.	Attēla integrālis	$\int_p^\infty F(p)\,dp\fallingdotseq\frac{f(t)}{t}$
9.	Oriģināla atvasinājums	$f'(t)\risingdotseq pF(p)-f(0)$ $f^{(n)}(t)\risingdotseq p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$
10.	Oriģināla integrālis	$\int_0^t f(t)\,dt\risingdotseq\frac{1}{p}F(p)$
11.	Atvasināšana pēc parametra	$\frac{\partial f(t;\,x)}{\partial x}\risingdotseq\frac{\partial F(p;\,x)}{\partial x}$
12.	Oriģinālu konvolūcija (Borela teorēma)	$\int_0^t f(x)g(t-x)\,dx\risingdotseq F(p)G(p)$
13.	Diamela formula	$pF(p)G(p)\fallingdotseq f(0)g(t)+\int_0^t f'(x)g(t-x)\,dx$ $p\mathrm{F}(p)G(p)\fallingdotseq g(0)f(t)+\int_0^t g'(x)f(t-x)\,dx$
14.	Pirmā izvērses teorēma	$F(p)=\frac{Q(p)}{P(p)}\fallingdotseq\sum_{i=1}^n\frac{Q(p_i)}{P'(p_i)}e^{p_i t}$ p_i – funkcijas $F(p)$ 1. kārtas pols
15.	Otrā izvērses teorēma	$F(p)=\frac{Q(p)}{P(p)}\fallingdotseq\sum_{i=1}^n\mathrm{Res}(F(p_i)e^{p_i t}),$ kur $\mathrm{Res}(F(p_i)e^{p_i t})=$ $=\frac{1}{(m_i-1)!}\lim_{p\to p_i}\frac{d^{m_i-1}}{dp^{m_i-1}}(F(p)e^{pt}(p-p_i)^{m_i})$ p_i – funkcijas $F(p)$ m_i-tās kārtas pols.

30.7 §. UZDEVUMI

1. LAPLASA TRANSFORMĀCIJA UN TĀS ĪPAŠĪBAS

1. Izmantojot Laplasa integrāli, atrast funkcijas attēlu.

1) e^t;

2) $\operatorname{sh} t$;

3) $(t-1)^2 e^{t-1}$;

4) $\int\limits_0^t \cos \omega t \, dt$;

5) $t \cdot \sin t$.

2. Atrast funkcijas attēlu, izmantojot Laplasa transformācijas īpašības un pamatformulas.

1) $\sin 3(t-2)$;

2) $\int\limits_0^t \sin t \, dt$;

3) $\dfrac{e^t-1}{t}$;

4) $e^{3t} \cdot \sin 5t$;

5) $t \cdot \operatorname{sh} 3t$;

6) $\sin 3t \cdot \cos 2t$;

7) $\int\limits_0^t \dfrac{1-\cos t}{t} dt$;

8) $t^2 \cdot \sin 2t$;

9) $te^{-2t} \sin 3t$;

10) $\dfrac{e^{\alpha t}-e^{\beta t}}{t}$;

11) $\dfrac{\sin 7t \cdot \sin 3t}{t}$;

12) $4 \operatorname{sh} 3t \cdot \cos^2 2t$;

13) $\dfrac{2e^{-t}(1-\cos t)}{t}$;

14) $e^{1-t} \sin(t-1) \eta(t-1)$;

15) $te^{-\frac{t}{3}} \cos 2t$;

16) $te^{-4t} \sin 2t$;

17) $\int\limits_0^t \dfrac{1-e^{2t}}{te^t} dt$;

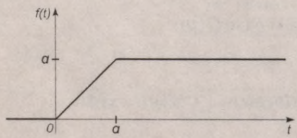
18) $e^t \cos(3t-1) \eta\left(t-\dfrac{1}{3}\right)$;

19) $\int\limits_0^t \dfrac{e^t-1-t}{t} dt$.

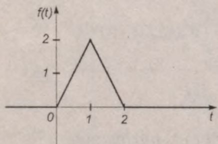
3. Atrast doto oriģinālu attēlus.

1) $f(t)=\begin{cases} 0, & t \leqslant 1 \\ e^{-2(t-1)}, & t>1; \end{cases}$

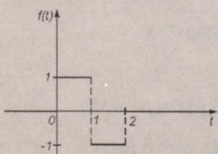
2)



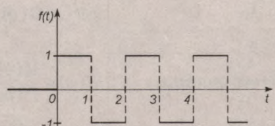
3)



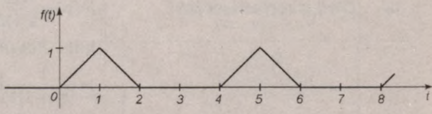
4)



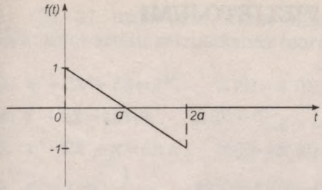
5)



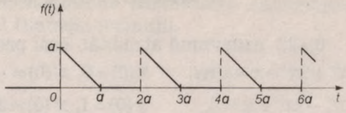
6)



7)



8)



4. Izmantojot pamatformulas, atrast dotā attēla oriģinālu.

1) $\dfrac{1}{p^2+4p+5}$;

2) $\dfrac{e^{-p}}{p^2-2p+5}+\dfrac{pe^{-2p}}{p^2+9}$;

3) $\dfrac{e^{-p}}{p^2-1}+\dfrac{pe^{-2p}}{p^2-4}$.

5. Izmantojot attēlu reizināšanas teorēmu, atrast dotā attēla oriģinālu.

1) $\dfrac{1}{p^2(p-1)}$;

2) $\dfrac{p^2}{(p^2+1)^2}$;

3) $\dfrac{4}{p(p^2+16)}$.

6. Atrast dotā attēla oriģinālu, izmantojot izvērses teorēmu vai racionālas daļas sadalīšanu parciāldaļās.

1) $\dfrac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$;

2) $\dfrac{p}{(p^2+1)(p^2+2p+2)}$;

3) $\dfrac{1}{(p-1)^3(p^2+1)(p-2)}$;

4) $\dfrac{8}{(p+3)^3(p+1)}$.

7. Pieņemot, ka $g(t) \risingdotseq G(p)$, $u(t) \risingdotseq U(p)$, un lietojot Diamela formulu, atrast attēla $p\cdot G(p)\cdot U(p)$ oriģinālu $f(t)$. Konstruēt funkciju $g(t)$, $u(t)$ un $f(t)$ grafikus.

1) $g(t)=e^{-t}$, $\quad u(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ 3-t^2, & 0<t<1 \\ 1, & t>1; \end{cases}$

2) $g(t)=e^{-t}\sin t$, $\quad u(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ 2t-1, & 0<t<1 \\ 3, & t>1; \end{cases}$

3) $g(t)=1+e^{-t}$, $\quad u(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ t^2+1, & 0<t<1 \\ 1, & t>1; \end{cases}$

4) $g(t)=te^{-t}$, $\quad u(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ 2(t-1), & 0<t<1 \\ 3, & t>1. \end{cases}$

2. OPERATORU RĒĶINU PIELIETOJUMI

8.–22. uzdevumā atrisināt Košī problēmu.

8. $x''+2x'+x=\sin t,\quad x(0)=0,\ x'(0)=-1.$

9. $x'''-2x''+x'=4,\quad x(0)=1,\ x'(0)=2,\ x''(0)=-2.$

10. $x''+6x'+9x=9e^{3t},\quad x(0)=0,\ x'(0)=0.$

11. $x''+2x'+x=t^2,\quad x(0)=1,\ x'(0)=0.$

12. $x'''+2x''+5x'=0,\quad x(0)=-1,\ x'(0)=2,\ x''(0)=0.$

13. $x''-x'=te^t,\quad x(0)=x'(0)=0.$

14. $x^{IV}+x'''=e^t,\quad x(0)=-1,\ x'(0)=x''(0)=x'''(0)=0.$

15. $x''+x'=t^2+2t,\quad x(0)=4,\ x'(0)=-2.$

16. $x''+9x'=\cos t,\quad x(0)=x'(0)=0.$

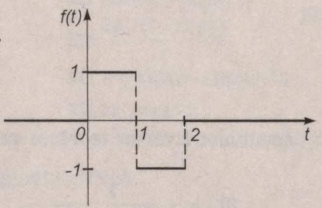
17. $x''+4x=2\cos t\cdot\cos 3t,\quad x(0)=x'(0)=0.$

18. $x''-x=f(t),$

$x(0)=x'(0)=0,\quad f(t)=\begin{cases}1-t, & 0<t<1\\ 0, & t>1.\end{cases}$

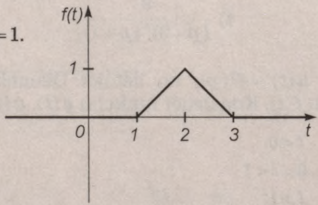
19. $x''+x=f(t),$

$x(0)=x'(0)=0.$



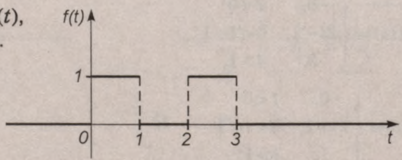
20. $x''+9x=f(t),$

$x(0)=0,\ x'(0)=1.$



21. $x''-2x'+x=f(t),$

$x(0)=x'(0)=0.$



22. $x''+4x=f(t),$

$x(0)=1,\ x'(0)=2,\quad f(t)=\begin{cases}0, & 0<t<a\\ 5e^{-(t-a)}, & t>a.\end{cases}$

23.–27. uzdevumā atrast diferenciālvienādojuma partikulāro atrisinājumu, izmantojot attēlu reizināšanas teorēmu vai Diamela formulu.

23. $x''-3x'+2x=e^{2t}, \quad x(0)=x'(0)=0.$

24. $x'+2x=\sin 3t, \quad x(0)=0.$

25. $x''-2x'+x=\operatorname{ch} t, \quad x(0)=x'(0)=0.$

26. $x''-x'=\dfrac{1}{1+e^t}, \quad x(0)=x'(0)=0.$

27. $x''+x=\dfrac{1}{2+\cos t}, \quad x(0)=x'(0)=0.$

28.–37. uzdevumā atrisināt diferenciālvienādojumu sistēmas.

28. $\begin{cases} x'=-y \\ y'=2x+2y, \quad x(0)=y(0)=1. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x'=-y-z & x(0)=-1 \\ y'=-x-z & y(0)=0 \\ z'=-x-y & z(0)=1 \end{cases}$

30. $\begin{cases} x'-2x-4y=\cos t \\ y'+x+2y=\sin t, \quad x(0)=y(0)=0. \end{cases}$

31. $\begin{cases} x'-x+y=\dfrac{3}{2}t^2 \\ y'+4x+2y=4t+1, \quad x(0)=y(0)=0. \end{cases}$

32. $\begin{cases} x'=2y-x+1 \\ y'=3y-2x, \quad x(0)=y(0)=1. \end{cases}$

33. $\begin{cases} 4y'-x'+3y=\sin t \\ y'+x'=\cos t, \quad x(0)=-1,\ y(0)=2. \end{cases}$

34. $\begin{cases} x'=3y-x \\ y'=y+x+e^t, \quad x(0)=y(0)=1. \end{cases}$

35. $\begin{cases} x'=2x-y+z \\ y'=x+z \\ z'=-3x+y-2z, \quad x(0)=y(0)=1,\ z(0)=0. \end{cases}$

36. $\begin{cases} x''+y'=\operatorname{sh} t-\sin t-t & x(0)=0,\ x'(0)=2, \\ y''+x'=\operatorname{ch} t-\cos t, & y(0)=1,\ y'(0)=0. \end{cases}$

37. $\begin{cases} x''+y'+y=e^t-t & x(0)=1,\ x'(0)=2, \\ x'-x+2y''-y=-e^{-t}, & y(0)=y'(0)=0. \end{cases}$

ATBILDES

1. 1) $\dfrac{1}{p-1}$; 2) $\dfrac{1}{p^2-1}$; 3) $\dfrac{2e^{-p}}{(p-1)^3}$; 4) $\dfrac{1}{p^2+\omega^2}$; 5) $\dfrac{2p}{(p^2+1)^2}$. **2.** 1) $\dfrac{3e^{-2p}}{p^2+9}$; 2) $\dfrac{1}{p(p^2+1)}$;

3) $\ln\dfrac{p}{p-1}$; 4) $\dfrac{5}{(p-3)^2+25}$; 5) $\dfrac{6p}{(p^2-9)^2}$; 6) $\dfrac{3(p^2+5)}{(p^2+1)(p^2+25)}$; 7) $\dfrac{1}{2p}\ln\dfrac{\sqrt{p^2+16}}{p}$;

8) $\dfrac{4(3p^2-4)}{(p^2+4)^3}$; 9) $\dfrac{6(p+2)}{((p+2)^2+9)^2}$; 10) $\ln\dfrac{p-\beta}{p-\alpha}$; 11) $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{p^2+100}{p^2+9}$;

12) $\dfrac{6}{p^2-9}+\dfrac{p-3}{(p-3)^2+16}-\dfrac{p+3}{(p+3)^2+16}$; 13) $\ln\dfrac{(p+1)^2+1}{(p+1)^2}$; 14) $\dfrac{e^{-p}}{p^2+2p+2}$;

15) $\dfrac{\left(p+\frac{1}{3}\right)^2-4}{\left(\left(p+\frac{1}{3}\right)^2+4\right)^2}$; 16) $\dfrac{4(p+4)}{((p+4)^2+4)^2}$; 17) $\dfrac{1}{p}\ln\dfrac{p-1}{p+1}$; 18) $e^{-\frac{1}{3}(p-1)}\dfrac{p-1}{(p-1)^2+9}$;

19) $\dfrac{1}{p}\ln\dfrac{p}{p-1}-\dfrac{1}{p^2}$. **3.** 1) $\dfrac{e^{-p}}{p+2}$; 2) $\dfrac{1}{p^2}(1-e^{-ap})$; 3) $\dfrac{2}{p^2}(1-e^{-p})^2$; 4) $\dfrac{1}{p}(1-e^{-p})^2$;

5) $\dfrac{1-e^{-p}}{p(1+e^{-p})}$; 6) $\dfrac{1}{p^2}\left(\dfrac{1}{1-e^{-2p}}-\dfrac{2e^{-p}}{1-e^{-4p}}\right)$; 7) $\dfrac{1}{ap^2}(e^{-2ap}-1)+\dfrac{1}{p}(1+e^{-2ap})$;

8) $-\dfrac{1}{p^2(1+e^{-ap})}+\dfrac{a}{p(1-e^{-2ap})}$. **4.** 1) $e^{-2t}\sin t$;

2) $\dfrac{1}{2}e^{t-1}\sin 2(t-1)\,\eta(t-1)+\cos 3(t-2)\,\eta(t-2)$; 3) $\operatorname{sh}(t-1)\,\eta(t-1)+\operatorname{ch}2(t-2)\,\eta(t-2)$.

5. 1) $\dfrac{1}{a^2}(e^{at}-at-1)$; 2) $\dfrac{1}{2}(t\cos t+\sin t)$; 3) $\dfrac{1}{4}(1-\cos 4t)$.

6. 1) $\dfrac{1}{6}e^{2t}-\dfrac{1}{15}e^{-t}-\dfrac{1}{10}\cos 2t-\dfrac{1}{5}\sin 2t$; 2) $\dfrac{1}{5}(\cos t+2\sin t)-\dfrac{1}{5}e^{-t}(\cos t+3\sin t)$;

3) $\dfrac{1}{5}e^{2t}+\dfrac{1}{20}(\cos t-3\sin t)-\dfrac{1}{4}e^{t}(t^2+1)$; 4) $e^{-t}-e^{-3t}(2t^2+2t+1)$.

7. 1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ e^{-t}-2(t-1), & 0<t<1\\ e^{-t}(1-e), & t>1;\end{cases}$

2) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1-e^{-t}(2\sin t+\cos t), & 0<t<1\\ e^{-(t-1)}(3\sin(t-1)+\cos(t-1))-e^{-t}(2\sin t+\cos t), & t>1;\end{cases}$

3) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 3e^{-t}+t^2+2t-1, & 0<t<1\\ e^{-t}(3-e)+1, & t>1;\end{cases}$ 4) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ -4te^{-t}+2(1-e^{-t}), & 0<t<1\\ e^{-t}(t(5e-4)-2-3e), & t>1.\end{cases}$

8. $\dfrac{1}{2}(e^{-t}-te^{-t}-\cos t)$. **9.** $4t+3-2e^{t}$. **10.** $\dfrac{1}{4}(e^{3t}-e^{-3t}(1+6t))$. **11.** $t^2-4t+6-e^{-t}(5+t)$.

12. $-\dfrac{1}{5}(1+e^{-t}(4\cos 2t-3\sin 2t))$. **13.** $-1+e^{t}\left(\dfrac{t^2}{2}-t+1\right)$. **14.** $\operatorname{ch}t-2-\dfrac{t^2}{2}$.

15. $\dfrac{t^3}{3}+2(1+e^{-t})$. **16.** $\dfrac{1}{82}(e^{-9t}+9\sin t-\cos t)$. **17.** $\dfrac{t}{4}\sin 2t+\dfrac{1}{12}(\cos 2t-\cos 4t)$.

18. $t+e^{-t}-1+(\operatorname{sh}(t-1)-t+1)\,\eta(t-1)$.

19. $2\sin^2\frac{t}{2}-4\sin^2\frac{t-1}{2}\,\eta(t-1)+2\sin^2\frac{t-2}{2}\,\eta(t-2).$

20. $\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{1}{9}\left(t-1-\frac{1}{3}\sin 3(t-1)\right)\eta(t-1)-\frac{2}{9}\left(t-2-\frac{1}{3}\sin 3(t-2)\right)\eta(t-2)+$
$+\frac{1}{9}\left(t-3-\frac{1}{3}\sin 3(t-3)\right)\eta(t-3).$ **21.** $\sum_{k=0}^{3}(-1)^k(1+e^{t-k}(t-k-1))\,\eta(t-k).$

22. $\cos 2t+\sin 2t+(e^{-(t-a)}-\cos 2(t-a)+\frac{1}{2}\sin 2(t-a))\,\eta(t-a).$ **23.** $e^t+e^{2t}(t-1).$

24. $\frac{1}{13}(2\sin 3t-3\cos 3t+3e^{-2t}).$ **25.** $\frac{1}{4}(t^2e^t+te^{-t}+(2t-1)\operatorname{sh}t).$

26. $(e^t+1)\ln\frac{e^t+1}{2}+e^t(1-t)-t-1.$ **27.** $\left(t-\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{\sqrt{3}}\right)\sin t+\cos t\cdot\ln\frac{2+\cos t}{3}.$

28. $x(t)=e^t(\cos t-2\sin t),\ \ y(t)=e^t(\cos t+3\sin t).$ **29.** $x(t)=-e^t,\ \ y=0,\ \ z(t)=e^t.$

30. $x(t)=4t+2-2\cos t-3\sin t,\ \ y(t)=-2t+2\sin t.$ **31.** $x(t)=-\frac{1}{2}t^2,\ \ y(t)=t^2+t.$

32. $x(t)=2e^t(2-t)-3,\ y(t)=e^t(3-2t)-2.$ **33.** $x(t)=\frac{1}{17}(17-35e^{-\frac{3}{5}t}+\cos t+13\sin t),$
$y(t)=\frac{1}{17}(35e^{-\frac{3}{5}t}+4\sin t-\cos t).$ **34.** $x(t)=-e^t+\frac{7}{4}e^{2t}+\frac{1}{4}e^{-2t},$
$y(t)=-\frac{2}{3}e^t+\frac{7}{4}e^{2t}-\frac{1}{12}e^{-2t}.$ **35.** $x(t)=y(t)=2-e^{-t},\ z(t)=2(e^{-t}-1).$

36. $x(t)=\operatorname{sh}t+t,\ y(t)=\cos t-\frac{t^2}{2}.$ **37.** $x(t)=t+e^t,\ y(t)=1-t-e^{-t}.$

SATURS

PIEZĪMĒM

Kārlis Šteiners
AUGSTĀKĀ MATEMĀTIKA – VI
Lekciju konspekts
inženierzinātņu un dabaszinātņu studentiem

Redaktore Biruta Siliņa

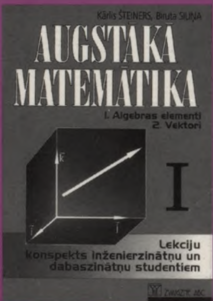
Apgāds Zvaigzne ABC, SIA, K. Valdemāra ielā 6, Rīgā, LV–1010.
Red. nr. E–797.
A/s «Poligrāfists», K. Valdemāra ielā 6, Rīgā, LV–1010.

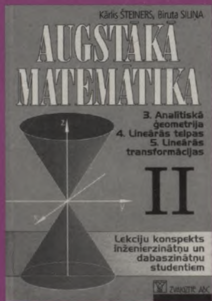
2.70

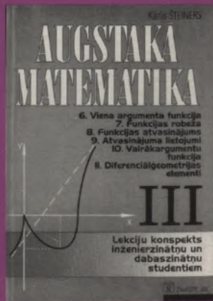
Kārlis ŠTEINERS

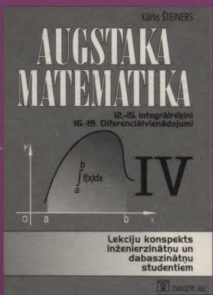
AUGSTĀKĀ MATEMĀTIKA

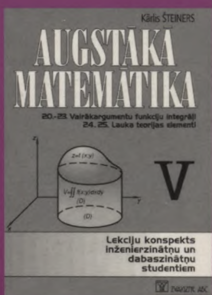
26., 27. Skaitļu un funkciju rindas
28. Furjē rindas un integrālis
29., 30. Kompleksā mainīgā funkciju teorijas un operatoru rēķinu elementi

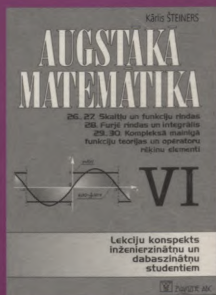












Lekciju konspekts inženierzinātņu un dabaszinātņu studentiem

ISBN 9984-22-350-7
9 789984 223506

ZVAIGZNE ABC