m/f

Š/m. kollēgam S. Slaucītājam
autors.

Eižēns Leimanis
Latvijas Ūniversitātes privātdocents

Kauzālas sistēmas un mūžīgā atgriešanās

Rīgā, 1937

Atsevišķs novilkums no Izglītības Ministrijas Mēnešraksta Nr. 7./8. 1937. g.

Privātdoc. Eižēns Leimanis

Kauzālas sistēmas un mūžīgā atgriešanās

Kvalitātīvo ideju vērtība eksaktās zinātnēs, kā zināms, nekad nevar tikt novērtēta par augstu. Tādēļ, no matēmatikas viedokļa raugoties, tā teōrētiskās dinamikas nozare, kas pētī dinamisko sistēmu kvalitātīvās īpašības, saista vislielāko uzmanību. Šīs pēdējās teōrētiskās dinamikas attīstības fazes sākums meklējams Hilla (G. W. Hill, 1838—1914) un Puankarē (H. Poincaré, 1854—1912) darbos, un no šā laika sākot matēmatiķi ir centušies raksturot dinamisko sistēmu kustības tās lielos kvalitātīvos vilcienos. Bet reizē ar to kvalitātīvās dinamiskās teōrijas ir devušas iemeslu arī daudzām lielākā vai mazākā mērā pamatotām filozofiskām spekulācijām.

Šā darba nolūks ir apskatīt no matēmatikas viedokļa kādu ideju, kas jo cieši saistīta ar kauzālām dinamiskām sistēmām un kas pazīstama kā tā saucamā „mūžīgās atgriešanās" ideja[1]). Savu poētiskāko formulējumu šī ideja ir guvusi Nīcšes (Fr. Nietzsche, 1844—1900) pazīstamā doktrīnā par mūžīgo atgriešanos — „die ewige Wiederkunft". — Nīcšem gan, pirmkārt, šī ideja ir dzimusi viņa karstā dzīves mīlestībā, t. i. pēc viņa uzskata vajadzētu tik skaisti dzīvot, ka mums būtu neizsakāma vēlēšanās, lai dzīve nekad nebeigtos, bet lai tā atkārtotos neskaitāmas reizes tādi pati, kāda tā reiz dzīvota. Pie šādas atklāsmes Nīcše ir nonācis 1881. g. augusta mēnesī, atrazdamies Engadinā „6000 Fuss jenseits von Mensch und Zeit", kā to Nīcše pats izteicies, bet, šķiet, nav izslēgta arī varbūtība, ka šī ideja viņam radusies dažu Helmholca (H. v. Helmholtz, 1821—1894) un Rīmaņa (B. Riemann, 1826—1866) matēmatisko darbu ietekmē, ņemot vērā, ka Nīcše kādu laiku nodevies arī matēmatikas un dabas zinātņu studijām. Šo mūžīgās atgriešanās domu Nīcše ir izteicis savos darbos vairākās variācijās, un viens šīs idejas formulējums ir šāds:[2])

[1]) No fizikas un filozofijas viedokļa šī ideja apskatīta grāmatā: Rey, A., Le retour éternel et la philosophie de la physique. Bibl. de philos. scient., Paris, 1927.

[2]) Nietzsche, Fr. Also sprach Zarathustra, A. Kröner, Leipzig, 1930, lp. 244.

„Siehe, wir wissen, was du lehrst: daß alle Dinge ewig wiederkehren und wir selber mit, und daß wir schon ewige Male dagewesen sind, und alle Dinge mit uns."

Nīcšes ideja bija, ka pēc kāda ļoti liela laika perioda visam vajadzētu atgriezties atkal atpakaļ pašreizējā stāvoklī un līdz ar to šāda atgriešanās atkārtotos arī vēl bezgala daudz reizes. Gan jāpiezīmē, ka mūžīgās atgriešanās ideju ir izteicis jau apmēram 10 gadus pirms Nīcšes kāds franču autors Blankì[3]) (A. Blanqui) un līdzīgas domas ir izteicis jau senais grieķu autors Prokls[4]) — Eukleida kommentātors.

Jaunākos laikos daudzi filozofijai nodevušies fiziķi bija iedomājušies atrast pierādījumu mūžīgās atgriešanās idejas pareizībai dažās Puankarè analitiskās mēchanikas teorēmās, kas saistās ar dinamisko sistēmu stabilitātes jautājumiem. Bet šie filozofētāji, kā to aizrāda ģeniālais franču matēmatiķis Pikārs[5]) (E. Picard), vēlēdamies no Puankarè teorijām gūt kādus vispārīgus slēdzienus par ūniversu, bija parasti piemirsuši ierobežojumus, kādos ir pareizas Puankarè teorijas , un par kuŗu, t. i. šo priekšnoteikumu, izpildāmību vai neizpildāmību katrā atsevišķā gadījumā ir jāpārliecinās, bet kas parasti tika atstāts novārtā. Pie negātīvas atziņas par Nīcšes idejas iespējamību nāk arī Lekornì[6]) (L. Lecornu), pamatodamies savos slēdzienos uz fizikas likumiem, piezīmēdams, ka šādas atgriešanās varbūtībai vajadzētu būt ļoti mazai, un norādīdams, ka šeit jau saskatāmi Nīcšes vēlākās slimības dīgļi . Tomēr jāsaka, ka pēdējais Lekornì apgalvojums, kā to vēlāk redzēsim, ir pārspīlēts. Savos spriedumos Lekornì, šķiet, nemaz nav ņēmis vērā topoloģiskās dinamikas pēdējo 20 gadu sasniegumus, par ko galvenā kārtā jāpateicas ģeniālajam amerikāņu matēmatiķim Birkhofam (G. D. Birkhoff) un tā līdzstrādniekiem[7]). Ja pirms apmēram 20 gadiem Pikāra izteiktā kritiskā piezīme ir spēkā arī vēl tagad, tad tomēr šodien jau Birkhofa teorija rāda mums Nīcšes domu tai daudz labvēlīgākā gaismā, un proti, lai gan modernā matēmatika nepierāda tās pareizību, tad tomēr tā rāda, ka no matēmatikas viedokļa raugoties, Nīcšes ideja nav absurda, bet ar attiecīgu korriģējumu, kā to vēlāk re-

---

[3]) Blanqui, A. L'éternité par les astres, 1872.

[4]) Proclus, Prologue du commentaire sur Euclide.

[5]) Picard, E. Quelques réflexions sur certains résultats de Henri Poincaré concernant la mécanique analytique, Bulletin des Sciences mathématiques, 1914. lp. 320—326 vai Traité d'Analyse, t. III (3-e édit.) 1928, Paris, lp. 618—624.

[6]) Lecornu, L., Sur le retour éternel, Comptes rendus Acad. Sciences, t. 200, 1935, lp. 272 un 597.

[7]) Šinī sakarībā skat. manu darbu: Triju ķermeņu problēma no Ņūtona līdz mūsu dienām, IMM. 1935. g. Nr. 7/8 un 9.

dzēsim, tai varētu varbūt piešķirt pat zināmu reālitāti. Mūsu nolūks tādēļ būs vispirms iepazīties ar Birkhofa teōrijas galveniem rezultātiem, illustrējot tos pēc iespējas ar raksturīgiem piemēriem, kādus Birkhofs devis dažādos savos darbos, kas izkaisīti daudzos matēmatikas žurnālos, un pēc tam atgriezīsimies pie jautājuma, cik tālu šīs teōrijas ir attiecināmas uz reālo ūniversu.

1. Kauzālas sistēmas. Kauzālo sistēmu koncepciju varam formulēt šādi: Dotā dinamiskā sistēma raksturojama ar vairākiem mērojamiem lielumiem kā tās dimensijām, temperātūru u. t. t. Ar kauzālu sistēmu mēs saprotam tādu, kuŗas turpmākie attīstības stāvokļi ir vienīgi atkarīgi no sistēmas sākuma stāvokļa; citiem vārdiem sakot, pēc kāda noteikta laika intervalla sistēmas mainīgo lielumu vērtības ir vienīgi atkarīgas no šo lielumu vērtībām kādā iepriekš dotā momentā — kustības sākuma stāvoklī — un no pagājušā laika. Tālāk ir saprotams, ka, ja sistēmas kustības likumi ir zināmi, mainīgo lielumu maiņas laikā ir atkarīgas vienīgi no šo lielumu vērtībām kustības sākumā. Šī formulējuma matēmatiskā izteiksme izteicas zināma tipa diferenciālvienādojumu sistēmā ar tik daudz vienādojumiem kā mainīgiem lielumiem. Likumi, kādiem apskatītā sistēma ir padota, parasti var tikt noteikti eksperimentālā ceļā, un ja tie reiz ir zināmi, tad fizikālās sistēmas teōrija matēmatiski ir pilnīgi noteikta. Piemēram, ja mēs apskatām ķermeņa krišanu vakuumā zemes virspusē, tad attiecīgie likumi šai gadījumā ir šādi: 1) krišanas distances maiņa ar laiku ir ātrums, 2) ātruma maiņa laikā ir 9,81 m./sek.^{2} Šinī piemērā 2 mainīgie lielumi, kas raksturo kustības stāvokli dotā momentā, ir krītošā ķermeņa attālums (augstums) virs jūŗas līmeņa un tā ātrums. — Vispārīgi jāsaka, ka eksaktās zinātnēs vienmēr bijusi noteikta tendence likumus ietvert diferenciālvienādojumos, un sistēmās, ar kuŗām mēs parasti sastopamies, mainīgo lielumu skaits ir galīgs, un laiks tiek uztverts kā nepārtraukti mainīgs lielums. Par šādas sistēmas koncepcijas iespējamiem vispārinājumiem runāsim vēlāk (8. nod.). Vēl jāpiezīmē, ka teōrijā mēs vienmēr sastopamies ar sistēmām, kas ir faktisko dabā sastopamo sistēmu ideālizējumi, jo visi likumi ir aktuālo likumu ideālizējumi. Dažos gadījumos tomēr, kā, piem., saules sistēmā, aktuālā sistēma var tikt aproksimēta ar ideālo sistēmu ar tik lielu pareizību, ka lielā laika intervallā diferences starp aktuāliem novērojumiem un teōrētiskām kalkulācijām ir pilnīgi neievērojamas. Turpmāk apskatīsim tikai šādas ideālas sistēmas.

2. Fažu telpa. Svarīga loma dinamisko sistēmu pētīšanā ir jēdzienam par sistēmas fažu telpu. Tādējādi, ja sistē-

mas mainīgo mērojamo lielumu skaits ir n, mēs iedomājamies visus notikumus interpretētus n-dimensionālā telpā. Jebkuŗš šīs telpas punkts tad ģeometriski attēlo kādu atsevišķu sistēmas stāvokli, noteiktu ar n lielumiem — koordinātām analogi kā parastā 3-dimensionālā telpā punkts ir noteikts ar 3 koordinātām. Analogi kā 3-dimensionālā telpā definējam arī n-dimensionālā telpā attālumu starp 2 šīs telpas punktiem $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ un $(y_1, y_2, \ldots y_n)$ ar radikālu ar pozitīvo zīmi no attiecīgo koordinātu diferenču kvadrātu summas. Ar n-dimensionālas telpas līkni mēs saprotam punktu secību, kas apmierina vienādojumu sistēmu ar formu $x_1 = f_1(t)$, $x_2 = f_2(t)$, $\ldots$ $x_n = f_n(t)$ pie kam $f_1, f_2, \ldots f_n$ ir vienvērtīgas nepārtrauktas funkcijas no parametra t, definētas kādā noteiktā intervallā. Ja šīs funkcijas ir diferencējamas, tad iespējams definēt apskatītās līknes jebkuŗā punktā arī tās virzienu, noteiktu ar n lielumiem, kas ir proporcionāli atvasinājumiem $dx_1/dt, \ldots dx_n/dt$, aplēstiem pie parametra vērtības $t = \tau$ atbilstošai apskatītam punktam. No šīm dažām definīcijām redzams, ka parastie jēdzieni, kas definēti 3-dimensionālā telpā, var tikt pārnesti arī n-dimensionālā telpā, lietojot parasto valodu; šim faktam ir ļoti liela heuristiska nozīme, kas modernos pētījumos spēlē ievērojamu lomu.

Iedomāsimies tagad fažu telpā punktu, kas atbilst sistēmas kustības sākuma stāvoklim. Saskaņā ar attiecīgo diferenciālvienādojumu sistēmu šis punkts kustēsies noteiktā virzienā un ar noteiktu ātrumu, aprakstot kādu līkni fažu telpā. Gluži tāpat jebkuŗš cits punkts apraksta kādu citu līkni šinī telpā. Šādā kārtā mēs varam iedomāties fažu telpā kāda hipotetiska šķidruma plūsmu, kuŗā visi punkti kustas vienlaicīgi un saskaņā ar attiecīgo diferenciālvienādojumu sistēmu, kas izteic sistēmas kustības matēmatisko ietērpu. Un tā kā kustošos punktu virzieni un ātrumi katrā fažu telpas punktā ir pilnīgi noteikti un vienos un tanīs pašos punktos tie ir vienmēr vieni un tie paši, tad nav grūti saprast, ka hipotetiskā šķidruma plūsma ir inkompresibla. Pētījot šā inkompresiblā šķidruma plūsmu kā kaut ko veselu, mēs nonākam pie apskatītās kauzālās dinamiskās sistēmas kustību iespējamo tipu pilnīgas izpratnes. Šāda kauzālo sistēmu ģeometriskas interpretācijas ideja pieder ģeniālajam franču matēmatiķim Puankarè. Tālāk kauzālās dinamiskās sistēmas iedala „slēgtās“ un „vaļējās“. Kauzālu sistēmu sauc par „slēgtu“, ja hipotetiskā šķidruma plūsma norisinās galīgā fažu telpas daļā, bet pretējā gadījumā sistēmu sauc par „vaļēju“.

3. N e r e k u r r e n t a s s i s t ē m a s. No kauzālo sistēmu definīcijas seko, ka, ja sistēma vienreiz atgriežas atpakaļ

savā kustības sākuma stāvoklī, tās kustība līdzīgā veidā atkārtosies arī turpmāk. Šinī gadījumā sistēmas stāvokli dotā momentā raksturojošais punkts fažu telpā apraksta kādu slēgtu līkni, un atbilstošā sistēmas kustība ir periodiska. Vēl vienkāršāks gadījums ir, ja sistēma vienmēr paliek miera stāvoklī — līdzsvarā. Tādā gadījumā sistēmas raksturotāji mainīgie lielumi pieņem konstantas vērtības, bet šo lielumu maiņas laikā reducējas uz nulli. Kauzālu sistēmu sauc par nerekurrentu, ja sistēmai vispārīgi nav tendences kādreiz atgriezties pēc patikas tuvu jebkuŗam savam iepriekš ieņemtam stāvoklim. Lietojot hipotetiskā šķidruma plūsmas koncepciju, tas nozīmē, ka jebkuŗa šī šķidruma molekula vispārīgi savā kustībā nekad neatgriezīsies atpakaļ kādā savā iepriekšējā stāvoklī. Vai, citiem vārdiem sakot, molekulas aprakstītā trajektorija, kustībai bezgalīgi turpinoties, pati sevi nekad nekrustos, tāpat iedomājoties šo trajektoriju bezgalīgi turpinātu pagātnē, izejot no kāda dotā tās punkta, tā arī sevi nekad nekrustos. Apstākļu labākai izpratnei apskatīsim dažus piemērus no parastās mēchanikas. Tā aplūkosim vispirms oscillējošu svārstu. Pateicoties berzei, oscillējošā svārsta amplitūda ar laiku samazināsies, un svārsts centīsies ieņemt vertikālu līdzsvara stāvokli. Kā redzams, svārstam ir neiespējami kādreiz atkal ieņemt kādu savas kustības iepriekšējo stāvokli, t. i. reizē to pašu poziciju un to pašu ātrumu, kāds svārstam kādreiz agrāk bija, jo svārsta totālā enerģija (potenciālā + kinētiskā) pastāvīgi samazinās. Kā otro piemēru apskatīsim pulksteņa svārsta kustību, pieņemot, ka svārsts saņem neaprobežotu enerģiju no atsperes, un tā tad tas kustētos mūžīgi. Ja šinī gadījumā ļausim svārstam iesākt kustību, izejot no pozicijas, kas pārsniedz svārsta normālo kustības amplitūdu, svārsta oscillācijas pastāvīgi samazināsies, tuvojoties kā robežai tā normālai amplitūdai, un svārsta kustība ir nerekurrenta. Ja svārsts iesāks savu kustību no pozicijas, kuŗas amplitūda ir mazāka par tā kustības normālo amplitūdu, pulksteņa svārsta oscillācijas samazināsies, tuvojoties kā robežamplitūdai nullei, un pulkstenis apstāsies. Ja, turpretīm, svārsts iesāks savu kustību no pozicijas, kuŗas amplitūda ir vienāda ar tā normālo kustības amplitūdu, svārsta kustība turpināsies neaprobežoti, un šinī gadījumā būs ne tikai rekurrence, bet tieša periodicitāte.

Jau mazliet sarežģītāks nerekurrentas sistēmas piemērs ir masas punkta kustība pa taisni spēka ietekmē, kas dotam punktam pielaiž tikai vienu līdzsvara stāvokli. Tā var pierādīt[8]), ka masas punkta kustība ir vai nu periodiska, vai

[8]) Birkhoff, G. D. Dynamical Systems, American Math. Soc. Coll. Publ., vol. 9, 1927, lp. 124.

oscillācija ar dilstošu amplitūdu ap līdzsvara stāvokli, tiecoties asimptotiski tuvoties periodiskai kustībai kā robežai jeb līdzsvara stāvoklim kā robežstāvoklim, vai oscillācija ar augošu amplitūdu ap līdzsvara stāvokli, kas tuvojas asimptotiski periodiskai kustībai, vai arī oscillācija ap līdzsvara stāvokli ar arvien pieaugošu amplitūdu vai ātrumu, vai arī ar pieaugošu amplitūdu un ātrumu reizē. Pēdējā iespēja var notikt tikai „vaļējās" sistēmas gadījumā, kā tas viegli saprotams no šā tipa sistēmu definīcijas. Kā no šī piemēra ir redzams, tikai periodiskas kustības gadījumā, kas ir uzskatāms par izņēmumu, ir rekurerence, bet vispārīgi iespējamās kustības nav rekurrentas, un tā tad apskatītā sistēma ir nerekurrenta.

Kustības periodicitātes jēdzienu lietderīgi vispārinot, mēs nonākam pie 2 kustību tipiem, kas pazīstami ar nosaukumiem „centrālas kustības" un „rekurrentas kustības". Centrālo kustību galvenā īpašība ir tā, ka tās ir vai nu periodiska, vai arī rekurrenta tipa. Tālāk izrādās, ka slēgtas nerekurrentas sistēmas raksturojas ar to apstākli, ka tām vienmēr ir zināms daudzums centrālu kustību, kuŗām vispārīgi citas sistēmas iespējamās kustības cenšas tuvoties asimptotiski. Tā mūsu apskatītos piemēros centrālās kustības reducējas uz periodiskām kustībām un kustību līdzsvara stāvokļiem. Tālāk nav gŗūti saprast, ka visas disipātīvās sistēmas, t. i. sistēmas ar pastāvīgi dilstošu totālo enerģiju, ir nerekurrenta tipa sistēmas ar kustību līdzsvaru stāvokļiem kā vienīgi iespējamām centrālām kustībām.

4. R e k u r r e n t a s s i s t ē m a s. Apskatījuši nerekurrentas sistēmas, nav gŗūti tagad iedomāties, ko mēs sapratīsim ar rekurrentu sistēmu. Sistēmu sauc par rekurrentu, ja hipotetiskā šķidruma kaut kādas molekulas aprakstītā trajektorija, kustībai bezgalīgi turpinoties, krusto pati sevi. Tas nozīmē, ka, lai gan sistēmas kustība, kas reprezentēta ar kādu molekulas punktu, pilnīgi neatkārtosies, tad tomēr tā vispārīgi nonāks pēc patikas tuvu kādam savam iepriekšējam stāvoklim, un kādā pietiekoši gaŗā laika intervallā sistēmas kustība norisināsies iepriekš aprakstītās trajektorijas tuvumā. Pēc Puankarè terminoloģijas, šāda tipa sistēmām piemīt „stabilité à la Poisson". Pietiekošais noteikums, lai slēgta sistēma būtu rekurrenta, ir, lai molekulu tilpumi fažu telpā nemainītos. Šī pēdējā īpašība ir spēkā pie inkompresibliem šķidrumiem. Tā mūsu hipotezes gadījumā, molekulai iesākot kustību momentā t, momentos $t + \tau$, $t + 2\tau$, $t + 3\tau$ . . ., tās ieņemtās pozicijas visas dažādas nevar būt, jo slēgtai sistēmai hipotetiskā šķidruma totālais tilpums ir galīgs un tādēļ molekulas trajektorijai jākrusto pašai sevi, ar ko ir pierādīta rekurrence. Precīzējot

tuvāk rekurrences koncepciju, Puankarè pierādīja tagad viņa vārdā pazīstamo rekurrences teorēmu, kuŗa mūsdienu modernā terminoloģijā var tikt formulēta šādi: ja slēgtā dinamiskā sistēmā molekulu tilpumi fažu telpā paliek invarianti, tad visas kustības, atbilstošas kādas molekulas punktu aprakstītām trajektorijām, atgriežas savā kustībā kā nākotnē, tā pagātnē bezgaldaudz reizes atpakaļ pirmatnējā molekulā, izņemot punktu trajektorijas, kuŗu, t. i. punktu, daudzuma mērs vārda Lebega (H. Lebesgue) nozīmē ir nulle, t. i. kuŗu koptilpums ir pēc patikas mazs.

Šinī sakarībā mināma pirms dažiem gadiem Birkhofa pierādītā „ergodiskā teorēma[9])", kuŗai statistiskā mēchanikā jo ievērojama loma, un kas apgalvo, ka gandrīz visas rekurrentās sistēmas kustības izrāda vienādas tendences attiecībā pret kādu specifisku caurmēru — kustības relātīvo „uzturēšanās laiku" kādā noteiktā fažu telpas daļā. Kā zināms, jo ievērojama loma statistiskā mēchanikā līdz šim bija tā saucamai „ergodiskai" hipotezei, kuŗa pieņēma, ka varbūtība, lai kustošais punkts atrastos fažu telpas Ω ar tilpumu V kādā noteiktā daļā G, kuŗas tilpums ir v, ir dota ar attiecību v/V. Ar kādiem noteikumiem tas tiešām tā ir, bija līdz šim atklāts jautājums. Birkhofa pierādītā teorēma tagad dod atbildi uz šo jautājumu. Tā apzīmējot laika intervallā (o, T) ar T_1 visu to laika sprīžu summu, kuŗos kustošais punkts atrodas fažu telpas tilpumā v, ergodiskā teorēma apgalvo, ka gandrīz visām sistēmas kustībām, izņemot kādu ļoti mazu to skaitu, eksistē $\lim T_1/T$, ja $T \to \infty$, kas raksturo kustošā punkta relātīvo uzturēšanās laiku kādā iepriekš dotā fažu telpas daļā. Tālāk, ja sistēmai piemīt īpašība, kas saucas „metriskā transitīvitāte", tad augšējais robežlielums visām sistēmas kustībām ir viens un tas pats, un tā vērtība ir v/V; un tā tad šinī gadījumā ergodiskās hipotezes vietā stājas ergodiskā teorēma. Ergodiskās teorēmas speciāls gadījums ir šāds. Iedomāsimies slēgtā n-dimensionālā telpā, kuŗā presūmēta kāda plūsma, kādu (n—1)-dimensionālu virsu, kuŗu visas plūsmas līknes krusto vienā virzienā un bezgaldaudz reizes, tad ergodiskā teorēma saka, ka katrai plūsmas līknei, izņemot kādu ļoti mazu to skaitu, eksistē noteikts vidējs šīs virsas krustošanas laiks. Šī teorēma tā tad apgalvo, ka katrai kustībai (plūsmas līknei), izņemot kustības, kuŗu daudzuma mērs vārda Lebega nozīmē ir nulle, eksistē $\lim t_n/n = \tau(P)$, ja $n \to \pm \infty$, kur t_n apzīmē laiku, kas pagājis no punkta P (kas apraksta apskatīto līkni) pirmā un

[9]) Birkhoff, G. D. Proof of the ergodic theorem, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., vol. 17, 1931, lp. 656—660.

n-tā dotās virsas krustošanas momentiem, un $\tau(P)$ apzīmē kustošā punkta P vidējo virsas krustošanas laiku. Nav grūti redzēt, ka šī tā sauktā „vidējā krustošanas laika“ teōrēma ir agrāk minētās Puankarè rekurrences teōrēmas stingrāka forma. Kā vienkāršu piemēru šai teōrēmai varētu minēt ideālu biljarda bumbu uz konveksa galda, kuŗa, saņēmusi reiz kādu spēcīgu grūdienu, varētu kustēties neaprobežoti ilgi. Ja mēs tagad uzzīmējam uz šī galda kādu līkni, tad ideālā biljarda bumba krustos šo līkni ar kādu pilnīgi noteiktu vidējo krustošanas laiku ,kā to paredz mūsu teōrēma. Ja ir izpildīts vēl kāds cits agrāk minēts noteikums — metriskā transitīvitāte, tad vidējais krustošanas laiks visām kustībām ir viens un tas pats, un tas ir viegli aplēšams.

5. Variāciju sistēmas. Trešais kauzālo sistēmu tips, kas saista vislielāko interesi dinamikā, ir variāciju sistēmas. Šo sistēmu nosaukuma izcelšanās izskaidrojama vēsturiski. Mopertì (Maupertuis) kā pirmais aiz tīri teleoloģiskiem iemesliem norādīja, ka visu dinamsko sistēmu kustībām būtu jānorit ar vislielāko enerģijas ekonomiju. Ja šo, tā saucamo, „minimuma principu“ formulējam matēmatiski ar variāciju rēķinu palīdzību, tad tas izteicas zināma tipa diferenciālvienādojumos. Klasiskās šo diferenciālvienādojumu formas ir Lagranža (J. Lagrange, 1736—1813) un Hemiltona (W. R. Hamilton, 1805—1865) vienādojumi. Un aiz šā iemesla šādas sistēmas sauc par variāciju sistēmām. Piemērs. Iedomāsimies inkompresiblu šķidrumu elīpsoīda veida traukā miera stāvoklī. Tālāk iedomāsimies, ka elīpsoīds, saņemdams kādu piepešu impulsu, sāk kustēties. Jautājums ir, kāda būs šķidruma kustība? Atbilde ir, ka šķidrums kustēsies tā, lai tā kustība būtu saderīga ar trauka kustību, kuŗā tas atrodas, un lai šī kustība prasītu vismazāko kinētisko enerģiju. Jāpiezīmē, ka, pateicoties variāciju principu spējai ietvert vienkāršā formā viskomplicētākās problēmas, ap tām saistās pat zināms misticisms. Vēl jāatzīmē, ka vispārīga tendence ir visus dabas likumus izteikt variāciju principu formā. Tāpat var teikt, ka visas dinamiskās sistēmas, kas nav disipātīvas, ir ietilpināmas variāciju tipa klasē. Kā svarīgs un interesants piemērs variāciju sistēmām ir jāmin saules sistēma Ņūtona gravitācijas spēka ietekmē.

Variāciju sistēmās molekulu tilpumi fažu telpā ir nemainīgi, un tādēļ variāciju sistēmas, ja tās ir slēgtas, ir rekurrenta tipa, un ergodiskā teōrēma ir spēkā arī šinīs sistēmās tāpat kā rekurrentās. Vispārīgi raksturojot variāciju sistēmas, jāsaka, ka šo sistēmu kustības ir vai nu periodiskas vai vienmērīgi rekurrentas, vai arī tās tuvojas un attālinas vienmērīgi rekurrento kustību saimei arvien lielākos laika intervallos. Jāpiezīmē, ka kustību sauc par vienmērīgi rekurrentu, kas, līdzīgi periodiskai, ieņem visus sistēmas stāvokļus ar pēc patikas lielu precīzitāti visos pietiekoši lielos laika intervallos.

Beidzot vēl jāpiezīmē, ka galvenā atšķirība starp variāciju un rekurrentām sistēmām ir tā, ka variāciju sistēmām eksistē tā sauktais trigōnometriskais periodisko orbitu stabilitātes tips, par kuŗu runāsim vēlāk.

6. S t a b i l i t ā t e. Stabilitātes koncepcija nav definējama pati par sevi, bet tikai attiecībā uz apskatīto problēmu. Uzskatot noteiktas fažu telpas daļas par stabilām un citas par nestabilām, kustību sauksim par stabilu, ja pēc kāda noteikta laika momenta kustība norisināsies tikai stabilā fažu telpas daļā. Tā ideālizētā zemes, mēness un saules kustības problēmā plaknē Ņūtona gravitācijas spēka ietekmē par stabiliem apvidiem sauksim tās fažu telpas daļas, kuŗās zemes un mēness un zemes un saules distances atrodas noteiktās galīgās robežās. Šo 3 ķermeņu kustību mēs sauksim par stabilu, ja šīs robežas nekad netiks pārsniegtas, t. i. ja šo ķermeņu sadursmes un bezgalīgas attālināšanās iespējas ir izslēgtas. Šī ir vispārīgā stabilitātes definīcija.

Apskatīsim tagad dažus citus stabilitātes tipus. Tā, ja kāda no stabilām fažu telpas daļām satur kādu sistēmas līdzsvara punktu, tad šo punktu sauksim par stabilu, ja, lai arī cik mazs būtu stabilitātes apvidus, kāda kustība, kas atrodas līdzsvara punkta tuvumā, paliktu šī punkta apkārtnē uz visiem laikiem.

Stabils līdzsvara stāvoklis var eksistēt kā rekurrentām tā arī nerekurrentām sistēmām. Kā vienkāršu piemēru variāciju sistēmām ņemsim svārstu ar cietu balstu, bez berzes. Šai sistēmai eksistē 2 līdzsvara stāvokļi, kas atbilst 2 iespējamiem svārsta līdzsvara stāvokļiem. Ja svārsta balsts ir vērsts vertikāli uz leju, svārsts atrodas stabilā līdzsvara stāvoklī. Atvēžot to pa mazu leņķi no tā vertikālā līdzsvara stāvokļa un ļaujot tam oscillēt, svārsts oscillēs neaprobežoti ilgi ap līdzsvara stāvoki. Kā viegli redzams, stabilais līdzsvara stāvoklis atbilst potenciālās enerģijas minimumam. Ja turpretim svārsta balsts līdzsvara stāvoklī ir virzīts vertikāli uz augšu, līdzsvara stāvoklis ir nestabils, jo mazākais atvēziens no līdzsvara stāvokļa izsauc oscillācijas, kas svārstu attālina no tā līdzsvara stāvokļa. Nestabilais līdzsvara stāvoklis atbilst potenciālās enerģijas maksimumam.

Nerekurrentas sistēmas piemēram ar stabilu un nestabilu līdzsvara stāvokli noder iepriekš apskatītais piemērs, pieņēmot tikai berzes eksistenci.

Variāciju sistēmām eksistē vēl cits stabilitātes tips — trigōnometriskā stabilitāte. Tā ir iespējams, ka kāda punkta trajektorija paliek kādas periodiskas trajektorijas tuvumā ļoti lielos laika intervallos, vai, pareizāk sakot, periodiskai trajektorijai tuvās trajektorijas oscillē periodiskās trajektorijas tuvumā pietiekoši lielos laika intervallos, tā, ka šinīs laika intervallos varam aproksimēt ar zināmu pareizību apskatītā punkta trajektoriju ar periodisku izteiksmju palīdzību, t. i. ar trigōnometriskām rindām. Kā piemērs šim stabilitātes tipam mināma zemes, mēness un saules sistēma, kuŗa, lai gan nav gluži periodiska, tomēr atrodas tik tuvu kādai stabilai periodiskai kustībai, ka ar pēdējās palīdzību sistēmas kustība var tikt aproksimēta ar ļoti lielu pareizību. Gala rezultātā šis process dod tā saucamās mēness tabulas, ar kuŗu palīdzību iespējams noteikt aptumšošanās simtiem gadu uz priekšu; apstāklis, kas vienmēr izsaucis laiju vislielāko izbrīnu.

Neatrisināta problēma ir vēl slavenā „stabilitātes problēma", t. i. vai stabila tipa periodiska orbita ir stabila arī vārda stingrā nozīmē; citiem vārdiem sakot, vai periodiskai kustībai tuvās kustības paliek šīs periodiskās kustības tuvumā neaprobežoti ilgi un ne tikai kādā pietiekoši lielā laika intervallā? Kā vienkāršs un raksturīgs piemērs, kuŗā mēs sastopamies ar dažādiem periodisko orbitu stabilitātes tipiem, ir mināma ideāla biljarda bumba uz elīptiska galda[10]), kur šie kustību tipi var tikt noskaidroti samērā vienkārši. Tā izrādās, ka periodiskās kustības, kas atbilst elīpses mazajai asij un tās periferijai, ir stabilas, bet periodiskā kustība, kas atbilst elīpses lielajai asij, ir nestabila tipa. Tālāk izrādās, ka šīs stabilā tipa periodiskās kustības ir stabilas arī vārda stingrā nozīmē, t. i. šīm kustībām tuvās kustības paliek šo periodisko kustību tuvumā uz visiem laikiem.

7. Varbūtība, transitīvitāte un dinamiskās sistēmas. Kā jau ievadā aizrādīju, partikulāro sistēmas kustību pētīšanai nav piešķiŗama tik liela nozīme, kā sistēmas kustību vispārīgai raksturošanai, t. i. to īpašību pētīšanai, kuŗas ir neatkarīgas no kustības sākuma noteikumiem un problēmas fizikālām dotībām. Nav gŗūti saprast, un vēlāk to arī redzēsim, kā šāda tipa rezultāti ir jo cieši saistīti ar varbūtības koncepciju. Tādēļ noskaidrosim īsumā varbūtības jēdzienu modernākā Mīzes (R. v. Mises) uztvērumā[11]). Vispirms jāsaka, ka par varbūtību var runāt tikai kādā no-

[10]) Loc. cit. 8) lp. 169.

[11]) Plašāk par varbūtības jēdzienu un varbūtības teōrijas pamatiem skat. Mises, R. von, Wahrscheinlichkeit, Statistikund Wahrheit (Schriften zur wissensch. Weltauffassung, Bd. 3) Wien, Springer, 1936.

teiktā kollektīvā, saprotot ar pēdējo kādu notikumu vai parādību kopību, kuŗā katrs atsevišķais notikums resp. parādība raksturojas ar kādu iezīmi, piem., skaitli ,krāsu u. t. t. Tā, piem., kollektīvs ir kādas gāzes molekulu kopība, kuŗā katrai molekulai ir savs noteikts ātrums; tāpat kollektīvs ir kādas urnas kauliņu metienu seka ar kauliņu kopējo punktu skaitu kā iezīmi u. t. t. Otrs svarīgs palīgjēdziens varbūtības jēdziena definīcijai ir kādas iezīmes „relātīvā biežuma" robežlielums. Par kādas iezīmes relātīvo biežumu sauc attiecību starp šīs iezīmes parādīšanās skaitu pret visu novērojumu kopskaitu. Tā, metot uz galda viena lata gabalu pietiekoši daudz reizes un pēc kāda noteikta sviedienu skaita saskaitot gadījumus, kad tā virspusē bija redzams ģerbonis, mēs varam aprēķināt šim sviedienu skaitam atbilstošo ģerboņa parādīšanās relātīvo biežumu. Turpinot sviešanu, t. i. arvien palielinot sviedienu skaitu, un atkārtojot laiku pa laikam noteiktiem sviedienu skaitiem atbilstošo ģerboņa parādīšanās relātīvā biežuma skaitļu aplēsumus ar kādu iepriekš dotu pareizību, mēs konstatēsim, ka no kāda momenta sākot šis skaitlis vairs nemainīsies. Tā aprobežojoties šī skaitļa aplēšanā ar vienu decimālo zīmi, mēs konstatēsim, varbūt, ka pēc apmēram 500 sviedieniem šis skaitlis būs konstants un aptuvēni vienāds ar 0,5. Ja mēs vēlētos turpretim šo ģerboņa parādīšanās relātīvā biežuma skaitli aplēst ar vairāku decimālo zīmju pareizību, tad sviedienu skaits būs vēl daudzreiz jāpalielina. Turpinot sviešanu, mēs konstatēsim, varbūt, ka pēc apmēram 10000 sviedieniem šī skaitļa otrā decimālā zīme būs kļuvusi nemainīga un ka tā ir „0", t. i. ģerboņa parādīšanās relātīvais biežuma skaitlis, aplēsts 10000 sviedieniem, ir 0,50. Turpinot sviešanas procesu tālāk un aplēšot atkal laiku pa laikam ģerboņa parādīšanās relātīvā biežuma skaitļus, mēs pārliecināsimies, ka no kāda momenta sākot, trešā decimālzīme šinīs skaitļos vairs nemainīsies un tā būs atkal „0", t. i. ar triju decimālzīmju pareizību šis skaitlis būs 0,500. Pēc kāda tālāka laika momenta mēs konstatēsim, ka šinī skaitlī nemainīga ir kļuvusi ceturtā decimālzīme, pēc tam piektā u. t. t. Rezultātā šo apstākli mēs izsakām tā, ka ģerboņa parādīšanās relātīvais biežums tiecas uz kādu noteiktu robežlielumu, mūsu piemērā uz 0,5. Šis rezultāts arī viegli saprotams, jo apskatītā piemērā kollektīvam ir tikai 2 iezīmes — „ģerbonis" un „uzraksts". Sviežot pareizu naudas gabalu ,ikkuŗas iezīmes parādīšanās ir vienlīdz sagaidāma, un tādēļ ģerboņa parādīšanās relātīvā biežuma robežvērtība (varbūtība) ir $\frac{1}{2}$. Matēmatikā to saka tā, ka, ja lata gabals ir sviests n reizes uz galda, un ja ar p(n) ir apzīmēts gadījumu skaits, kad tā virspusē redzams ģerbonis, ka lim p(n) / n = ½, ja n → ∞, t. i. ka attiecības p(n)/n vērtības, sviedienu skaitam neaprobežoti pieaugot, tuvojas ½ kā savai robežai. Tālāk, papildinot kollektīva definīciju, mēs pieprasām, lai pēdējais izpildītu vēl šādas 2 prasības: lai jebkuŗas tā iezīmes relātīvam biežumam eksistētu noteikts robežlielums, un lai šis robežlielums nemainītos, ja no novērojumu kopsekas izvēlamies pēc kāda noteikta priekšraksta kādu daļas seku un apskatām tikai pēdējo. Pēc šīm dažām palīgdefinīcijām, mēs tagad varam definēt varbūtības jēdzienu šādi. Par kādas iezīmes (notikuma) varbūtību noteiktā kollektīvā sauc robežvērtību, kuŗai novērojumu sekā tuvojas šīs iezīmes relātīvais biežums pie neaprobežotas novērojumu turpināšanas. Šis skaitlis ir vienmēr īsta daļa, t. i. robežās starp 0 un 1.

Starpība starp kādu determinējošu (kauzālu) teōriju, piem., klasisko mēchaniku, un teōriju, kuŗa savos apgalvojumos lieto varbūtības koncepciju, ir tā, ka, kamēr pirmā izsaka kāda notikuma iestāšanos zināmos apstākļos ar pilnīgāko drošību, otra izsaka kāda skaitliski aprakstīta notikuma iestāšanos kā ar lielu varbūtību sagaidāmu, kamēr tai pretimstāvošā nevarbūtība ir ārkārtīgi niecīga. Pirmo piemēru dabas notikumu determinējošam izskaidrojumam deva Ņūtona mēchanika, tāda, kāda tā formulēta 1687. g. viņa darbā „Philosophiae naturalis principia mathematica", un gandrīz divi gadu simti ilgi nevarēja iedomāties citu dabas notikumu izskaidrojumu veidu kā Ņūtona principu rāmjos formulēto. Tā, lai minam tikai dažus piemērus. Visi ķermeņi krīt ar vienādu paātrinājumu," teica Galilejs (G. Galilei, 1564—1642). „Divi elektriski vienādi lādētas bumbiņas savstarpēji atgrūžas," ir daļa no Kulona (Coulomb, 1736—1806) likuma, u. t. t. Abos šinīs piemēros ir izteikti determinātoriski apgalvojumi, par kuŗu iestāšanos nav ne mazāko šaubu.

Pirmo piemēru dabas likumu statistiskai uztverei deva ievērojamais fiziķis Bolcmanis (L. Boltzmann, 1844—1906) ap 1866. g., formulējot otro termodinamikas postulātu varbūtības izteikuma veidā. Tā bija zināms no Maiera (R. Mayer, 1814—1878), Džaula (Joule, 1818—1889) un Karnō (S. Carnot, 1796—1832) darbiem, ka visos termiskos procesos bez enerģijas vēl ievērojamu lomu spēlē tā saucamā entropija, par kuŗu runā otrais termodinamikas postulāts.

Un kamēr pirmais termodinamikas postulāts neizteic neko citu kā enerģijas nezūdības likuma attiecināšanu arī uz termiski-mēchaniskiem procesiem, otrais postulāts runā par virzienu, kādā norit visi dabas procesi. Kas zīmējas uz kāda dabas notikuma virziena matēmatisko raksturošanu, tad to var izteikt nevienādībā, kuŗa izsaka, ka kāda apskatīto sistēmu dotā momentā raksturojošā lieluma vērtība procesa beigās ir lielāka nekā procesa sākumā. Un otrais termodinamikas postulāts apgalvo, ka katrai ķermeņu sistēmai dabā eksistē noteikts šo sistēmu raksturojošs lielums ar to īpašību, ka pie visām sistēmas pārmaiņām šī lieluma vērtība ir vai nu konstanta (pie reversibliem jeb apgriezeniskiem procesiem), vai arī tā pieaug (pie irreversibliem jeb neapgriezeniskiem procesiem). Šo lielumu Klauzijs (R. Clausius, 1822—1888) ir nosaucis par sistēmas entropiju. Un tā tad otrā termodinamikas postulāta apgaismojumā visi dabas procesi norit virzienā, kas raksturojas ar sistēmas entropijas pieaugšanu.

Bolcmanis šo postulātu formulēja šādi: Visos termiskos procesos ar ļoti lielu varbūtību ir sagaidāma entropijas pieaugšana, turpretim manāma entropijas pamazināšanās ir ļoti nevarbūtīga. Izslēdzot no šī postulāta formulējuma varbūtības koncepciju, aizstājot to ar tās definīciju, mēs dabūjam šādu izteikumu: pie tā paša fizikālā notikuma neaprobežotas atkārtošanās ar nesalīdzināmi daudz reizes lielāku relātīvo biežumu iestāsies gadījums, kad entropija pieaug, un tikai pavisam niecīgā skaitā pretējais gadījums. — Šai Bolcmaņa ģeniālai idejai bija ļoti liela ietekme visā turpmākā fizikas attīstībā, un mūsdienu modernajā fizikā varbūtības koncepcija spēlē ievērojamu lomu.

Vēl kā interesantu piemēru minēšu Puankarè rekurrences teōrēmu, kas varbūtības izteikuma formulējumā skan šādi. Ja slēgtā n-dimensionālā telpā n-dimensionālo molekulu tilpumi ar laiku nemainās, tad rekurrences īpašībai, kas gan nepiemīt itin visām iespējamām trajektorijām, kuŗas krusto kādu fažu telpas molekulu, ir tomēr varbūtība viens reālizēties pie jebkuŗas brīvi izvēlētas trajektorijas.

No šiem dažiem piemēriem jau ir noprotama tā lielā loma, kāda varbūtības koncepcijai piešķiŗama nekauzālo dinamiskō sistēmu teōrijā, mēģinot tās matēmatiski pētīt ar statistisku metožu palīdzību.

Kā interesants un vēsturisks piemērs šeit vēl jāmin kinētiskā gāzu teōrija, kas termodinamiskos fainomenus izskaidro kā kādas slēgtas variāciju sistēmas ar neaprobežotu darbojošos molekulu skaitu statistiskus rezultātus. Tā, apzīmējot ar P_0 variāciju sistēmas stāvokli laikā t_0 raksturojošo fažu telpas punktu un ar V un v kādas slēgtas izoenerģetiskas hipervirsas tilpumu un kāda šī tilpuma daļu fažu telpā, bet ar T(t) punkta P_0 uzturēšanās laiku tilpumā v laika intervallā

(0, t), varbūtība, lai punkts P_0 atrastos tilpumā v, ir dota ar attiecības T/t robežvērtību $t \to \infty$, t. i. ja šī robeža eksistē. Un mēs zinām, ka kinētiskās gāzu teōrijas vēsturē bija viens moments, uzstādot tagad pazīstamo Meksvela-Bolcmaņa (Maxwell-Boltzmann) molekulu ātrumu distribūcijas likumu, kur šie autori bija spiesti pieņemt augšējās robežvērtības eksistenci un tās vērtību vienādu ar v/V, t. i. tie pieņēma, ka $\lim T/t = v/V$, ja $t \to \infty$.

Pēdējos gados, turpretim, pateicoties Birkhofa pierādītai ergodiskai teōrēmai, ir bijis iespējams nekauzālo kinētisko gāzu teōriju darīt atkarīgu no kauzālo variāciju sistēmu teōrijas. Tā gandrīz visām slēgto variāciju sistēmu kustībām ergodiskā teōrēma tieši pierāda augšējā robežlieluma eksistenci, kas turpretim nekauzālā kinētiskā gāzu teōrijā bija tikai hipotetiska. Tālāk, ja sistēmai piemīt īpašība — metriska transitīvitāte, tad šis robežlielums ir viegli aprēķināms, un tas ir visām sistēmas kustībām vienāds ar v/V. Vai sistēmas vispārīgi ir metriski transitīvas, ir problēma pati par sevi, kuŗa vēl nav atrisināta un pie kuŗas es arī, ņemot vērā, ka tā ir stipri sarežģīta, tuvāk neapstāšos.

Interesanti ir tagad atzīmēt secību, kādā mums parādās dažādās dinamikas teōrijas līdz šim apskatīto teōriju apgaismojumā. Ir zināms, ka klasiskās termodinamikas aizmugurē, kas ir kauzāla teōrija, stāv nekauzālā kinētiskā gāzu teōrija, bet pēdējās priekštece, kā mēs to nupat redzējām, ir klasiskā dinamika, kas ir atkal kauzāla teōrija. Bet, kā tas ir zināms, klasiskā dinamika ir tikai daudzaptveŗošākās kvantu mēchanikas, kas ar savu nenoteiktības principu nav kauzāla teōrija, statistisks caurmērs, citiem vārdiem sakot, klasiskā dinamika ir pareiza tikai statistiskā nozīmē. Tā mēs nonākam, pēc Birkhofa, pie šādas schēmas:

klasiskā termodinamika (kauzāla teōrija)
↓
kinētiskā gāzu teōrija (nekauzāla teōrija)
↓
klasiskā dinamika (kauzāla teōrija)
↓
kvantu mēchanika (nekauzāla teōrija)
↓
?

kuŗā katra nākošā teōrija ir pilnīgāka par tai iepriekšējo.

Dabiski, ka rodas tagad jautājums, vai kvantu mēchanikai nav kā priekštece kāda cita kauzāla teōrija? Un tālāk, ja tas tā būtu, vai šī teōrija būtu visa ūniversa fundamentālā teōrija, jeb vai pirms šīs teōrijas stāv vēl kāda cita fundamentālāka nekauzāla teōrija? Vai varbūt kauzālās un nekauzālās teōrijas mainās cita pēc citas bezgala daudz reizes un katra no šīm teōrijām ir fundamentālāka par tai iepriekšējo? — Uz šiem iautājumiem zinātne pašlaik vēl nevar atbildēt.

8. Ūniverss un Nīcšes doktrīna. Vai ūniverss ir kauzāla sistēma, t. i. vai ir teōrētiski iespējams visus notikumus ūniversā ietvert kādā noteiktā un katrā ziņā ļoti komplicētā diferenciālvienādojumu sistēmā, ar kuŗas palīdzību, izejot no kāda zināma ūniversa stāvokļa kādā dotā laika momentā, varētu noteikt visas ūniversa turpmākās norises? Šis jautājums ir pašreiz vēl atklāts, bet ja mēs varētu uz to atbildēt ar apstiprinājumu, tad loģiski būtu jāsecina mēchaniskā pasaules uzskata pareizība, bet viena no mēchanisma galvenām filozofiskām konsekvencēm ir mūžīgās atgriešanās iespējas postulēšana[12]). Bet kā mēs to iepriekšējos nodalījumos redzējām, modernās fizikālās teōrijās bez kauzālitātes principa jo ievērojamu lomu spēlē arī nenoteiktības princips un varbūtības princips, kuŗi mums rāda arī citu pasaules uzskatu iespējamību.

Nav grūti arī saprast, kādos apstākļos Nīcšes apgalvojums būtu pilnīgi pareizs. Tas būtu tad, ja laiku mēs uztvertu kā kvantu veidā mainīgu lielumu un sistēmas ieņemamo stāvokļu skaits būtu ļoti liels, bet tomēr galīgs, tā ka viens sistēmas stāvoklis sekotu otram pilnīgi noteiktā kauzālā secībā. Gan jāsaka, ka šādas pasaules iespējamība ir mazāk ticāma, jo tā būtu ierobežota un tās vēsture būtu galīga, ar kādu noteiktu, bet ļoti lielu periodu. Šāda veida pasaules matēmatiskais apraksts izteiktos kāda noteikta tipa diferenču vienādojumos. Daudz varbūtīgāka jau šķiet pasaules iespējamība, kuŗā valdītu Nīcšes periodicitātes vietā rekurrence, kā tas bija pie rekurrentām sistēmām.

Tā pieņemot, pēc Lekornì, ka visi ūniversa likumi var tikt izteikti ar diferenciālvienādojumu sistēmu, kuŗā ieiet galīgs mainīgo lielumu skaits, un pieņemot, ka šī sistēma definē rekurrenta tipa slēgtu dinamisku sistēmu, pēc visa iepriekš teiktā, kā mēs to tagad zinām, ja šinī sistēmā nebūs periodicitātes, tās kustības būs mazākais rekurrentas, t. i. sistēma savā kustībā varēs nākt pēc patikas tuvu jebkuŗam savam iepriekš ieņemtam stāvoklim.

Tādēļ gala slēdzienā no visa iepriekšējā mēs varam secināt, ka no matēmatikas viedokļa raugoties, Nīcšes ideja par

[12]) Loc. cit. 1) lp. 14.

mūžīgo atgriešanos nav absurda, bet tā būtu, varbūt, papildināma tādā veidā, ka šī atgriešanās saprotama kā rekurrenta tipa, kā jau augšā minēts.

Galvenās grūtības, ar kuŗām sastopamies pārejot uz ūniversu un mēģinot augšminētās teōrijas lietot ūniversa notikumu norišu izpratnē, ir, ka attiecīgie diferenciāl-(diferenču-) vienādojumi nekad nevar tikt pilnīgi uzrakstīti. Tādēļ, lai arī cik saistošas būtu no matēmatikas viedokļa kauzālo sistēmu studijas, šie rezultāti tomēr pašreiz vēl nevar tikt uzņemti kā tādi, kuŗi pilnā mērā varētu tikt attiecināti uz reālo pasauli tās norišu noteikšanai.

A. Gulbja grāmatu spiestuve Rīgā, Ausekļa ielā 9

-10