D. TAIMIŅA

ANTĪKĀ MATEMĀTIKA

Latvijas PSR Augstākās un vidējās speciālās
izglītības ministrija
Ar Darba Sarkanā Karoga ordeni apbalvotā
Pētera Stučkas Latvijas Valsts universitāte
Vispārīgās matemātikas katedra

D.Taimiņa

ANTĪKĀ MATEMĀTIKA

Lekciju konspekts

P.Stučkas Latvijas Valsts universitāte
Rīga 1981

BBK 22.1г

Lekciju konspekts domāts 2013 (matemātikas) specialitātes studentiem kā mācību palīglīdzeklis speckursa apguvē. Tajā aplūkota matemātikas attīstība antīkajā pasaulē līdz m.ē.6.gs. Lekciju konspektu var izmantot arī skolotāji tiešajā mācību darbā un ārpusstundu nodarbībās matemātikā.

Конспект лекций предназначен для студентов специальности 2013 (математика) как дополнительное пособие при изучении спецкурса. В нём рассмотрена история развития математических наук до 6 века нашей эры. Конспект лекций также могут использовать учителя средних школ как непосредственно на уроках математики, так и на факультативных занятиях.

T $\frac{20201-124u}{M\ 812(11)-81}$ Rez.81.1702010000

Ievads

Speckurss "Matemātikas vēsture" tiek lasīts 2013 (matemātikas) specialitātes studentiem, no kuriem pēc augstskolas beigšanas vairums strādās skolā. Speckursa uzdevums ir dot pārskatu par matemātikas attīstību. Šajā lekciju konspektā aplūkota matemātisko jēdzienu veidošanās, matemātisko zināšanu uzkrāšana Senajā Ēģiptē un Babilonijā, matemātikas kā zinātnes veidošanās Senajā Grieķijā un tās tālākā attīstība hellēņu zemēs, kā arī matemātika Romas impērijas valstīs. Tātad tiek aplūkots laika posms no apmēram 3000 gadu pirms mūsu ēras līdz antīkās matemātikas pagrimumam mūsu ēras 6.gadsimtā. Izklāsts veidots pēc hronoloģiskā principa, aplūkojot arī atsevišķus jautājumus no vispārīgās vēstures.

Pēc autora domām šis lekciju konspekts varētu noderēt arī skolas darbā kā neliela rokasgrāmata ne tikai, izmantojot dažus faktus mācību stundās, bet arī, organizējot fakultatīvas nodarbības matemātikā.

Par palīdzību šī konspekta sagatavošanā pateicos v.p. U.Grīnfeldam un doc.v.i. K.Šteineram.

1. Matemātikas vēstures priekšmets. Matemātikas attīstības galvenie posmi

Tāpat kā katra zinātne, matemātika sastāv no

a) faktiem , kas uzkrāti tās attīstības gaitā (teorēmām u.c. apgalvojumiem, kuru patiesums konstatējams loģisku spriedumu rezultātā),

b) faktu materiāla vispārinājumiem (matemātikas likumiem un teorijām),

c) metodoloģijas (spriedumos un aprēķinos lietoto matemātisko metožu kopuma).

Visi šie elementi ir savstarpēji saistīti un mainās līdz ar matemātikas attīstību. Matemātikas vēstures uzdevums ir noskaidrot šo izmaiņu raksturu un tendences katrā konkrētā vēsturiskā periodā, analizēt matemātisko metožu, jēdzienu, ideju un teoriju rašanos un attīstību, noskaidrot matemātikas attīstības īpatnības atsevišķām tautām noteiktos vēsturiskos periodos, atklāt matemātikas daudzveidīgās saites ar citām zinātnēm un praksi, kā arī noskaidrot ievērojamāko matemātiķu ieguldījumu matemātikas attīstībā, analizējot viņu svarīgākos darbus.

Visām matemātikas nozarēm, lai cik dažādas tās arī būtu, ir kopīgs pētījumu objekts -- "reālās pasaules kvantitatīvās attiecības un telpiskās formas"([1], 37.lpp.). Šis pētījumu objekts laika gaitā mainās, tāpēc matemātikas vēsture nodarbojas arī ar šodienas matemātikas pētījumiem. Tā analizē matemātikas loģiskās struktūras īpatnības atsevišķos laika posmos, matemātikas attīstības dialektiku, dažādu matemātikas nozaru savstarpējās mijiedarbības procesu, palīdz prognozēt matemātikas attīstības tālākās perspektīvas.

Akadēmiķis Kolmogorovs (А.Н.Колмогоров, dz. 1903.g.) rakstā "Matemātika" ([4]) visu matemātikas vēsturi iedala četros posmos:

1) matemātikas jēdzienu rašanās,
2) elementārā matemātika,
3) mainīgo lielumu matemātika,
4) mūsdienu matemātika.

Pirmajā posmā sākotnējie priekšstati par skaitļiem un figūrām pakāpeniski veidojās par abstraktiem jēdzieniem. Šie priekšstati radās ilgā vēsturiskā laika posmā, apkopojot praktiskās darbības pieredzi, kas saistīta ar priekšmetu skaitīšanu un dažādas formas objektu salīdzināšanu. Protams, kā tieši notika šī salīdzināšana un kā cilvēku apziņā izveidojās vieni no visabstraktākajiem jēdzieniem "skaitlis" un "figūra", kas paši par sevi dabā neeksistē, šodien mēs varam vienīgi minēt un izteikt dažādas hipotēzes, jo precīzu ziņu par to mums nav. Pakāpeniski uzkrājoties zināšanām par skaitļiem un figūrām, veidojoties šiem jēdzieniem to abstraktākajā formā, aizvien biežāk tika izmantoti vienkāršoti shematiski attēli un simboli. Attīstījās rakstība un līdz ar to arī skaitīšanas sistēmas. Pēc tam cilvēki pamazām iemācījās risināt vispārīgākus uzdevumus: nerisināja vairs katru konkrētu līdzīga tipa uzdevumu grupas piemēru atsevišķi, bet tā vietā meklēja metodi, kā risināt vispārīgā veidā šāda tipa uzdevumus. Par matemātikas kā zinātnes eksistēšanas sākumu varam runāt tikai tad, kad cilvēki iemācījās lietot simbolus, operēt ar tiem un izmantot konkrētu uzdevumu atrisināšanā, kā arī līdzīga tipa uzdevumus apvienot grupās un meklēt vispārīgas metodes to atrisināšanai.

Elementārās matemātikas posms (no VI - V gs. pirms m.ē. līdz XVI gs. ieskaitot) sākās ar uzkrāto zināšanu sistematizēšanu, parādījās teorētiskā matemātika, dažādas pierādījumu matemātiskās metodes, t.i., matemātika kļuva patstāvīga zinātne ar savu priekšmetu un metodiku. Šis posms raksturojās galvenokārt ar panākumiem konstantu lielumu izpētē un beidzās, kad par matemātikas galveno objektu kļuva kustības procesa izpēte.

Trešais matemātikas posms (XVII gs. līdz XIX gs. vidum) sākās ar mainīgo lielumu pētīšanu R.Dekarta (Rene Descartes, 1596.-1650.g.) analītiskajā ģeometrijā un diferenciālrēķinu un integrālrēķinu radīšanu I.Ņūtona (Isaac Newton, 1643.-1727.g.) un G.V.Leibnica (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646.-1716.g.) darbos. Šajā posmā veidojās mūsdienu matemātikas klasiskais pamats. Matemātikā nostiprinājās jau seno grieķu izteiktā nepārtrauktības ideja, tika precīzi formulēts funkcionālās atkarības jēdziens, attīstījās kustības analīzes matemātiskās metodes.

Mūsdienu matemātikas posms sākās ar XIX gs. vidu un tam raksturīga ievērojama matemātikas satura bagātināšanās, kuras rezultātā matemātika kā zinātne plaši sazarojās. Ļoti strauji paplašinājās matemātikas pielietojumi. Svarīgu lomu guva matemātikas pamatojumu problēmas (nepretrunība, pamatpieņēmumu pilnība).

2. Pirmo matemātisko jēdzienu un metožu rašanās

Lai skaitītu, jābūt ne tikai priekšmetiem, ko skaitīt, bet arī spējai abstrahēties no šo priekšmetu konkrētajām īpašībām. Taču šī spēja uzreiz nerodas.

Pirmatnējo cilvēku domāšana bija ļoti konkrēta, tā ietvēra tikai tos priekšmetus un notikumus, kuri tieši skāra un ietekmēja viņu dzīves norisi. Pat tad, kad pirmatnējais cilvēks jau bija uzkrājis zināšanas, kas radās, novērojot apkārtējos priekšmetus un likumsakarības dabā notiekošajos procesos, viņa matemātiskās zināšanas tomēr bija ļoti niecīgas. Sākotnēji šīs zināšanas aprobežojās ar prasmi novērtēt priekšmetu skaitu — viens priekšmets, divi priekšmeti, trīs priekšmeti, daudz priekšmetu. Skaitlim 2 zināmā mērā ir arī kvalitatīva izcelsme, jo tas apzīmēja priekšmetu pāri -- divas rokas, divas kāja , acis, ausis, divi spārni utt. Par to liecina arī daudzās valodās saglabājies divējādais skaitļa 2 izteikšanas veids -- divi un pāris.

Kamēr cilvēku kopienu dzīve bija primitīva un to darbība aprobežojās tikai ar pārtikas iegūšanu, medniecību un zvejniecību, skaitlisko lielumu un telpisko formu izpratne attīstījās lēni. Stāvoklis mainījās, kad cilvēku pasīvo attieksmi pret dabu nomainīja aktīva attieksme, ar kuru sākās jauns akmens laikmeta periods — neolīts. Pamazām attīstoties zemkopībai, cilvēki arvien ilgāk mēdza apmesties vienā vietā un sāka būvēt mitekļus, lai aizsargātos no plēsīgajiem zvēriem un nelabvēlīgiem laika apstākļiem. Sāka veidoties kolektīvas apmetnes, iesākās arī darba dalīšana. Šajā laikā attīstījās maiņas tirdzniecība -- vispirms starp atsevišķiem ciemiem, vēlāk arī starp novadiem, kurus šķīra simtiem kilometru liels attālums. Šādi kontakti starp dažādām kopienām un ciltīm paātrināja valodas tālāku attīstību. Ja sākotnēji valodā bija vārdi tikai konkrētu lietu un parādību apzīmēšanai, tad vēlāk jau sāka uzkrāties vārdi abstraktu jēdzienu apzīmēšanai.

Arodu un tirdzniecības attīstība sekmēja arī skaitļa jēdziena attīstību. Cilvēki iemācījās skaitļus grupēt un apvienot lielākās vienībās -- pa pieci (tik, cik ir rokai pirkstu), pa desmit (tik, cik ir pirkstu divām rokām). Šādas skaitīšanas vienības bija sevišķi izplatītas maiņas tirdzniecībā. Šajā laikā sāka attīstīties arī skaitļu simboliskie "pieraksti", jo radās nepieciešamība skaitļus "atcerēties", "fiksēt"(cik priekšmetu iemainīts, cik priekšmetu pircējs palicis parādā u.tml.). Sākumā skaitļu pierakstam tika izmantotas vienāda izmēra nūjiņas, ko sasēja kūlīšos. Faktiski tas bija piekārtojums -- katram priekšmetam tika piekārtota viena nūjiņa. Nākošais solis "pieraksta" vienkāršošanā bija jau tuvāks skaitļu simboliskajam pierakstam -- nūjā iegriezti robi, plāksnītē ievilktas svītras, virvē iesieti mezgli, vienādas formas akmentiņu vai gliemežvāku kaudzītes utt. Pamazām materiālais skaitļu pieraksts izveidojās par simbolisko.

Līdz ar maiņas tirdzniecības attīstību radās arī nepieciešamība salīdzināt priekšmetu garumus, tilpumus. Pirmās mērvienības nebija pilnīgi precīzi un viennozīmīgi noteiktas -- garuma vienības bija saistītas ar pašu cilvēku (attālumu mērīja soļos, lielākus attālumus mērīja dienās-- cik dienās cilvēks šo ceļu var veikt, priekšmetu garumu izteica ar sprīžiem, olektīm utt.).

Neolīta cilvēkam bija laba ģeometriskās formas izjūta. Māla trauku apdedzināšana un izkrāsošana, grozu un audumu izgatavošana, vēlāk -- metāla apstrāde izveidoja priekšstatu par plakanu un telpisku priekšmetu attiecībām. Neolītiskie ornamenti arī vēl šodien priecē acis, tajos atspoguļota vienādība, simetrija un figūru līdzība.

Akmens laikmeta reliģijā atrodami pirmie mēģinājumi stāties pretī dabas spēkiem. Reliģiskas parašas bija saistītas ar maģiju, maģiskais elements ietilpa arī tā laika ģeometriskajos priekšstatos un izpaudās skulptūrā un zīmējumos. Dažiem skaitļiem tika piedēvētas mistiskas īpašības, tādi bija t.s. maģiskie skaitļi 3, 4, 7. Līdz ar reliģijas rašanos radās arī jauni abstrakti jēdzieni (piemēram, dievība, augstākās varas sods, pirmās morāles kategorijas -- labs, ļauns). Jāatzīst, ka tas sekmēja domāšanas attīstību.

Pat pašās atpalikušākajās ciltīs atrodam kaut kādu laika atskaiti un dažas ziņas par Saules, Mēness un zvaigžņu kustību. Astronomiskie novērojumi deva atsevišķas ziņas par sfēras un riņķa īpašībām, par leņķiem.

3. Matemātika Senajos Austrumos

3.1. MATEMĀTIKAS ATTĪSTĪBAS PRIEKŠNOSACĪJUMI SENAJĀ ĒĢIPTĒ. Uz jaunā akmens laikmeta kopienu pamata, sākot ar 6. gadu tūkstoti pirms m.ē., veidojās jaunas, pilnīgākas sabiedrības formas lielo Āfrikas un Āzijas upju -- Nīlas, Tigras, Eifratas, Indas, vēlāk Gangas, Huanhe, vēl vēlāk Janczi tuvumā. Radās privātīpašums uz ražošanas līdzekļiem, notika sabiedrības sadalīšanās šķirās. Ar 4.gadu tūkstoti pirms m.ē. Ēģiptē un Mezopotāmijā, Ķīnā un Indijā, bet vēlāk Aizkaukāzā un Vidusāzijā radās un attīstījās despotiskās vergturu valstis. Līdzīgs process, kaut arī ievērojami vēlāk, norisa rietumu puslodē maiju, inku un acteku ciltīs.

Piekrastes zemes lielo upju rajonos varēja dot bagātīgas ražas, ja vien pareizi organizēja apūdeņošanu un nosusināja purvus. Gadsimtu gaitā tika uzcelti vaļņi un dambji, radot kanālu un ūdenskrātuvju tīklu. Ūdens apgādes regulēšana prasīja iedzīvotāju kopīgus pūliņus plašos rajonos. Radās centralizēta vadība. Cēlās iedzīvotāju dzīves līmenis, izveidojās arī pilsētu aristokrātija ar visvarenajiem vadoņiem priekšgalā. Radās ne mazums profesiju un specialitāšu — amatnieki, zaldāti, rakstveži, priesteri. Ierēdniecība bija stipri pakļauta priesteriem, jo daudzās (bet ne visās) austrumu zemēs priesteri bija apgabalu pārvaldītāji, bez tam priesteri ieņēma izdevīgu stāvokli arī kā zinātnisko gudrību glabātāji.

Ēģiptē apūdeņošanas un lauksaimniecības darbu valstiskā organizācija, nodokļu savākšana, uzskaite noritēja plānveidīgi un to vadīja speciāli apmācīti kadri. Viņu darbs būtu pilnīgi neiedomājams bez aritmētisko un ģeometrisko pamatfaktu sistematizācijas, bez to teorētiskas apdomāšanas. Kur tad vēl varenie arhitektoniskie veidojumi! Heopsa piramīda tika uzcelta apmēram 3,5 tūkstošus gadu pirms m.ē., tādējādi jau tajā laikā ēģiptiešu matemātikai vajadzēja būt ievērojami augstā līmenī. Diemžēl par šo laiku ir gaužām maz ziņu.

3.2. VĒSTURISKIE AVOTI. Senajos Austrumos grūti datēt atklājumus. Sabiedriskās iekārtas statiskā rakstura dēļ zinātnes atziņas saglabājās bez pārmaiņām gadsimtiem un pat gadu tūkstošiem ilgi. Atklājumus, kurus izdarīja vienā pilsētā, varēja nezināt citās vietās. Zinātniskās un tehniskās informācijas glabātuves bieži tika iznīcinātas karos, mainoties dinastijām, plūdos. Teika vēstī, ka 221.gadā pirms m.ē. kāds absolūtais despots Ciņ Šihuandi, pārņemot varu visā Ķīnā, pavēlēja iznīcināt visas zinātniskās grāmatas. Vēlāk daudz ko pēc atmiņas pierakstīja no jauna, bet līdzīgi notikumi stipri apgrūtina atklājumu datēšanu.

Citas grūtības austrumu zinātnes atklājumu datēšanā saistītas ar materiālu, kuru izmantoja pierakstiem. Divupes tautas rakstīja uz māla plāksnītēm, kuras pēc tam apdedzināja, tādējādi padarot tās praktiski nesagraujamas. Diemžēl daļa šo plāksnīšu pēc to atrašanas netika rūpīgi uzglabātas un tāpēc gāja bojā. Ēģiptieši lietoja papirusu, un tāpēc to rakstu pieminekļu liela daļa ir saglabājusies sausā klimata apstākļos. Ķīnieši un indieši lietoja ievērojami neizturīgāku materiālu — koka mizu vai bambuku.

Par vēlāko laiku vēstī Rainda un Maskavas papirusi. (Rainda papiruss — 5,5m garš un 0,32m plats, satur 84 uzdevumus; Maskavas papiruss — 5,5m garš un 8cm plats, tajā ir 25 uzdevumi). Tie, protams, nav nekādi zinātniskie traktāti, bet gan praktiskas "rokasgrāmatas". Lielākā daļa uzdevumu sākas ar vārdiem "dari, kas jādara". Uzdevumi ir praktiski: kā sadalīt īpašumu, kā aprēķināt klēts ietilpību, lauka lielumu, groza tilpumu u.tml. Matemātiskajos papirusos var atrast arī ģeometriskus jautājumus, tomēr vienmēr šie uzdevumi tika reducēti uz aprēķina uzdevumiem.

Kādai lasītāju kategorijai bija domātas šīs "rokasgrāmatas"?

Senajā Ēģiptē zinātne nebija pieejama ne amatniekam, ne zemkopim, bet faraonu valstī eksistēja diezgan liela profesionāla grupa, kurai matemātiskās zināšanas (jeb, pareizāk, prasmes) bija tiešām nepieciešamas. Tie bija rakstveži. Rakstveža lomu Senajā Ēģiptē var salīdzināt ar grāmatveža lomu lielā šodienas uzņēmumā. Rakstvedis bija gan likumdevējs, gan statistiķis, gan aprēķinātājs un ieņēma diezgan privilīģētu sabiedrisko stāvokli.

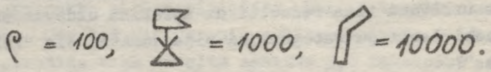
Rakstvedim vajadzēja būt matemātiski labi izglītotam. Par to liecina kaut vai šāda raksturīga pamācība, kuru pieredzējis rakstvedis dod savam kolēģim:

"... Prasa karavadonim, cik priekš nostiprinājumiem vajag ķieģeļu, un sanāca visi rakstveži, un neviens no viņiem neko nezin, un visi viņi paļaujas uz Tevi un saka: "Mans draugs, Tu esi pieredzējis rakstvedis, tad atrisini ātrāk par mums"... Nepieļauj, lai Tev pateiktu — "Ir arī tādas lietas, kuras Tu nezini."."

Tātad rakstvedim bija jāprot ātri atrisināt jebkuru praktisku uzdevumu.

Starp šiem uzdevumiem papirusos atrodam arī "izklaidējošus uzdevumus", kas bija domāti skolnieku prāta trenēšanai.

3.3. ĒĢIPTIEŠU NUMERĀCIJA. Seno ēģiptiešu numerācijas sistēma palika nemainīga trīs tūkstošus gadu, mainījās tikai skaitļu apzīmējumu forma. Tāpat kā daudzās citās numerācijās, arī ēģiptieši vieniniekam lietoja simbolu $|$. Tas, droši vien, radies no tā, ka sākotnēji skaitu atzīmēja ar iegriezumiem vai svītriņām. Hieroglifiskajai desmitnieka zīmei $\cap$ varbūt bija arī kāda īpaša nozīme, bet tas nav zināms. Simta apzīmējums nozīmēja "mērāmā virve", tūkstoša apzīmējums -- "lotosa zieds", desmittūkstoša -- "uz augšu pacelts pirksts". Savas zīmes eksistēja arī 100 000 -- "sēdoša varde", 1 000 000 -- "pārsteigts cilvēks", 10 000 000 -- "Saule".

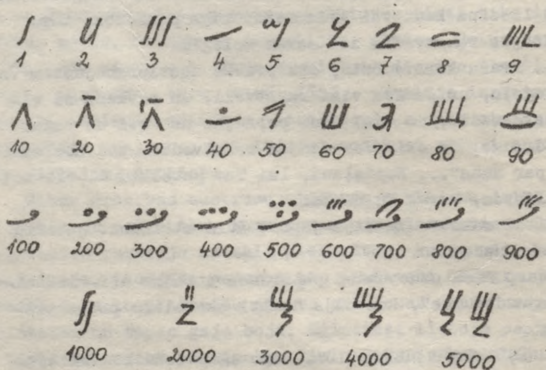


Veselo skaitļu rakstībā stingri tika ievērots pozicionālais princips, piemēram

$$\varrho\varrho\cap\cap\cap||| = 233.$$

Laika gaitā zīmju forma izmainījās, un Rainda papirusā atrodam jau šīs izmainītās formas zīmes (1.tabula).

1.tabula.



Ēģiptiešu skaitļu apzīmējumi.

3.4. DARBĪBAS AR VESELIEM SKAITĻIEM UN DAĻĀM. Ja skaitļu apzīmējumi senajā Ēģiptē bija līdzīgi mūsdienu apzīmējumiem, tad darbību izpildīšanas algoritmi bija daudz savdabīgāki. Visas darbības ēģiptieši iespēju robežās centās reducēt uz saskaitīšanu. Piemēram, reizināšanā tika izmantots viena reizinātāja dubultošanas princips un pēc tam piemērotu starprezultātu saskaitīšana:

(12·12)			(17·19)		
	1	12		* 1	19
	2	24		2	38
	* 4	48		4	76
	* 8	96		8	152
		144		* 16	304
					323

Pirmajā solī tiek uzrakstīts reizinātājs (otrajā stabiņā), pirmajā stabiņā atzīmē, ka šis reizinātājs ņemts vienu reizi. Otrajā solī notiek dubultošana (t.i. gan pirmajā, gan otrajā stabiņā pierakstītie skaitļi tiek saskaitīti paši ar sevi). Tāda dubultošana tiek izdarīta, kamēr pirmajā stabiņā ir iegūti skaitļi, kurus summējot, dabū reizināmo. Tie atzīmēti ar zvaigznītēm. Saskaitot šiem skaitļiem atbilstošos skaitļus otrajā stabiņā, iegūst reizinājumu.

Liekas, ka dalīšana ēģiptiešiem bijusi pati grūtākā darbība. Tās izpildīšanai tika lietoti visdažādākie paņēmieni, līdzīgi kā reizināšanā skaitļus rakstīja divos stabiņos. Otrajā stabiņā rakstīja dalītāju, kuru pēc vajadzības gan dubultoja, gan meklēja tā pusi, ceturtdaļu utt., atzīmējot pirmajā stabiņā attiecīgi 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ utt. Tā turpināja, līdz otrajā stabiņā ieguva skaitļus, kurus saskaitot, dabū dalāmo (piemēros atzīmēti ar zvaigznīti). Saskaitot šiem skaitļiem atbilstošos skaitļus pirmajā stabiņā, iegūst dalījumu. Dažreiz kā starprezultāts tika meklētas skaitļa divas trešdaļas vai viena desmitdaļa. Rezultāti atstāti ēģiptiešu pierakstam atbilstošā formā:

$$
\begin{array}{rr}
(19:8)\ 1 & 8 \\
2 & 16* \\
\frac{1}{2} & 4 \\
\frac{1}{4} & 2* \\
\frac{1}{8} & 1* \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
(16:3)\ 1 & 3* \\
2 & 6 \\
4 & 12* \\
\frac{2}{3} & 2 \\
\frac{1}{3} & 1* \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
(4:15)\ 1 & 15 \\
\frac{1}{10} & 1\frac{1}{2} \\
\frac{1}{5} & 3* \\
\frac{1}{15} & 1* \\
\hline
\end{array}
$$

$$19:8 = 2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} \qquad 16:3 = 5\,\frac{1}{3} \qquad 4:15 = \frac{1}{15}+\frac{1}{5}$$

Lai izpildītu darbības ar daļām, ēģiptieši visas daļas reducēja uz t.s. pamatdaļu summu, t.i., uz tādu daļu summu, kuru skaitītājs ir 1. Vienīgais izņēmums bija daļa $\frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}$, kuru apzīmēja ar īpašu simbolu. Rainda papirusā ir tabula, kurā doti izvirzījumi pamatdaļās visiem nepāra n no 5 līdz 331, piemēram:

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$$

$$\frac{2}{97} = \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}.$$

Kāpēc pamatdaļās izvirzīja tieši tā, nav skaidrs (piemēram, kāpēc $\frac{2}{19}$ aizvietoja ar $\frac{1}{2} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114}$, bet ne ar $\frac{1}{12} + \frac{1}{55} + \frac{1}{220}$?). Šādi darbību algoritmi padarīja aprēķinus ēģiptiešu matemātikā garus un smagnējus, tomēr izvirzīšanu pamatdaļu summā lietoja gadu tūkstošus, arī viduslaikos.

Daudzi ēģiptiešu risinātie uzdevumi bija ļoti vienkārši un reducējās uz lineāru vienādojumu ar vienu nezināmo, piemēram, kādu daudzumu, saskaitot ar tā divām trešdaļām, vienu pusi un trīs septītdaļām, iegūst 33. Atbilde $14\,\frac{28}{97}$ pierakstīta pamatdaļās

$$14\,\frac{1}{4}+\frac{1}{56}+\frac{1}{79}+\frac{1}{97}+\frac{1}{176}+\frac{1}{194}+\frac{1}{388}\,.$$

Nezināmo apzīmēja ar hieroglifu "kaudze" (lasīja "hau" vai "aha"). Tāpēc ēģiptiešu algebru dažreiz sauc par "hau-rēķiniem". Uzdevumos runa ir par maizes daudzumu un dažādām alus šķirnēm, par dzīvnieku barošanu un graudu glabāšanu. Atsevišķos uzdevumos ir jāizmanto aritmētiskā vai ģeometriskā progresija, piemēram, sadalīt simts klaipus pieciem cilvēkiem tā, lai skaitļa 100 daļas veidotu aritmētisku progresiju un lai viena septītdaļa no trīs lielāko daļu summas būtu vienāda ar divu mazāko summu. Dažiem uzdevumiem ir ģeometrisks saturs un tie attiecas, galvenokārt, uz mērījumiem. Trijstūra laukums tiek atrasts kā pamata un augstuma reizinājuma puse; riņķa laukumu, ja šī riņķa diametrs ir d, atrod kā $(d - \frac{d}{2})^2$, kas dod π vērtību $\frac{256}{81} = 3{,}1605$. Tika lietotas arī atsevišķas formulas ķermeņu tilpumu aprēķināšanai — kubam, paralēlskaldnim un riņķa cilindram, pie tam visi šie ķermeņi tiek uzskatīti par traukiem. Ievērojamākais rezultāts ēģiptiešu mērījumos bija nošķeltas piramīdas tilpuma aprēķināšanas formula $V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$, ja piramīdas augstums ir h, bet tās pamati ir kvadrāti, kuru malu garumi ir a un b. Ēģiptieši ir zinājuši arī formulas $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

3.5. ĒĢIPTIEŠU MATEMĀTISKO ZINĀŠANU NOVĒRTĒJUMS. Būtu nepareizi uzskatīt, ka ēģiptiešu zināšanas it kā aprobežotos vienīgi ar to, kas ir lasāms atrastajos papirusos. Šie papirusi ir elementārs skolas mācību līdzeklis. Bet tā kā apmācība reducējās uz iemācīšanos no galvas, tad dabiski, ka šajos papirusos izklāstītas gatavas receptes, bet ne veids, kā šīs receptes iegūtas. Protams, daudzus likumus ēģiptieši ieguva empīriskā ceļā, bet viņu matemātikā parādās jau arī teorētiskie spriedumi. Piemēram, lai iegūtu nošķeltas piramīdas tilpuma formulu, nepietika vairs vienīgi ar mērījumiem, bija vajadzīgi arī teorētiski spriedumi. Kaut gan senajiem ēģiptiešiem nebija algebrisku formulu, tomēr viņi izmantoja dažus vispārīgus paņēmienus, lai risinātu viena un tā paša tipa uzdevumus. Šos paņēmienus droši var saukt par algebriskās metodes sākumu. Ēģiptiešu astronomiskajos mērījumos varam atrast aizsākumu arī trigonometriskajām tabulām.

Ēģiptiešu matemātika visā savā daudzus tūkstošus gadu ilgajā attīstības laikā, tāpat kā visa ēģiptiešu kultūra, atstāja spēcīgu ietekmi uz to valstu zinātnes attīstību, ar kurām senajai Ēģiptei bija sakari, īpaši uz grieķu matemātiku.

4. Senās Babilonijas matemātika

4.1. DAŽAS ZIŅAS NO VISPĀRĪGĀS VĒSTURES. Ar terminu "babiloniešu matemātika" apzīmē matemātisko kultūru, ko radījušas Dienvidu Divupes tautas, kuras ietilpa Babilonijas valsts sastāvā. Par to, kā attīstījās šī kultūra, mēs zinām ļoti maz, bet neapšaubāmi, ka tā sasniedza augstu līmeni jau pirms Divupes tautu apvienošanās. Babiloniešu matemātiku, tāpat kā visu babiloniešu kultūru pārņēma Babilonijas valsts iekarotāji un tā turpināja attīstīties līdz pat hellēnisma laikmetam. Ar asīriešu un persiešu palīdzību tālāk izplatījusies pasaulē babiloniešu kultūra visur atstāja paliekošas pēdas. Tā, piemēram, ķīļraksts izplatījās līdz Vidusāzijai, sasniedzot Indijas robežas. Acīmredzot, arī matemātiskajai kultūrai bija tikpat liela izplatība. Katrā ziņā tās ietekme nonāca līdz Armēnijai. Babiloniešu matemātiskās kultūras daudznacionālā rakstura dēļ sākumā pieminēsim dažus faktus no vispārīgās vēstures.

Dienvidu Divupe bija teritorija starp Tigru un Eifratu apmēram no tagadējās Bagdādes līdz Persijas līcim (tai laikā tas iesniedzās sauszemē par 200 km tālāk nekā tagad). 4.gadu tūkstotī pirms m.ē. Dienvidu Divupi apdzīvoja daudzu cilšu iedzīvotāji. Šīs teritorijas ziemeļos dzīvoja tautas, kas runāja semītiskajās izloksnēs, tos sauca par akadjakiem pēc pilsētas Akadas, kurai ilgu laiku bija valdošais stāvoklis. Vairāk uz dienvidiem valdošie bija šumēri. Viņu valodai nebija nekāda sakara ne ar semītiskajām, ne arī ar indoeiropiešu valodām.

4.gadu tūkstoša vidū Šumērā jau eksistēja rakstība, tās pieminekļi ir visvecākie patlaban zināmie. Sākumā šumēri rakstīja uz akmens plāksnītēm, vēlāk uz māla plāksnītēm. Paši senākie faktiski bija piktogrammas. Šādi uzraksti nedod iespēju spriest par valodu, kādā runājuši cilvēki. Ar laiku apzīmējumi vienkāršojās un notika pakāpeniska pāreja uz simboliem, kuri katrs apzīmēja kādu skaņu.

Senākajos tekstos zīmes, kas apzīmēja skaitļus, rakstīja ar apaļām nūjiņām, vēlāk sāka lietot prizmveidīgas nūjiņas. Rakstības virziens bija no augšas uz leju. Kad ķīļraksts kļuva par zilbju rakstu, dēlīšus ērtības labad pagrieza un raksta virziens izrādījās horizontāls un gāja no kreisās puses uz labo.

Līdz mums nonākuši simtiem tūkstoši babiloniešu ķīļrakstu tekstu; visagrākie attiecas uz apmēram XXXV gs.pirms m.ē., vēlākie — uz mūsu ēras I gs. Šī milzīgā laika posma gaitā Divupes politiskie likteņi vairākkārt mainījās.

Līdz 3.gadu tūkstotim pirms m.ē. katra pilsēta ar savu apkārtni bija patstāvīga politiska vienība; mierīgie sakari starp šīm pilsētām mijās ar bruņotām sadursmēm. Ap XXIV gs. vidu cars Arkadas Sargons pakļāva sev visu Divupi. Viņa dinastija valdīja Divupē vairāk nekā 100 gadus. Citzemju iekarotāji šo apvienošanu sagrāva (ap 2200.g. pirms m.ē.). Savu augstāko uzplaukumu ekonomikā, politikā un kultūrā Divupe sasniedza Babilonas vadībā (1994.-1595.g. pirms m.ē.). Babilonas dinastijas sestais cars Hammurapi (1792.-1750.g. pirms m.ē.) pabeidza visas valsts apvienošanu. Notika pāreja uz vienotu valsts valodu — akaādiešu valodu. Terminoloģija šumēru valodā saglabājās tikai kuģu būvniecībā, medicīnā un matemātikā.

Babilonijas kultūras uzplaukums turpinājās arī vēl hellēnistiskās Selevkīdu dinastijas laikā (331.-140.g. pirms m.ē.), kad babiloniešu kultūras sasniegumi atstāja lielu ietekmi uz grieķu zinātni, īpaši astronomiju.

42. VĒSTURISKIE AVOTI. Ķīļrakstu tekstu atšifrēšana sākās pagājušā gadsimta piecdesmitajos gados, kad angļu zinātnieks Hinks atšifrēja vienu plāksnīti, kas atradās Britu muzejā. Šajā tekstā (tas attiecas uz asīriešu laikmetu) bija dota tabula, kā katru dienu pieaug mēness redzamā daļa no jauna mēness līdz pilnam mēnesim. Hinks norādīja, ka tabulas pareiza saprašana iespējama tikai tad, ja skaitļus, kas tajā uzrakstīti, lasa sešdesmitnieku sistēmā. Tā pirmo reizi tika atklāta šī ievērojamā numerācijas sistēma, par kuru dīvainā kārtā nav saglabājušies nekādi norādījumi mums pieejamos grieķu un romiešu pirmavotos. Drīzumā Ļoftuss, kas izdarīja izrakumus Senekerā un atklāja tur senu šumēru pilsētu Larsu, starp daudziem citiem rakstiem atrada divas matemātiskas tabulas, kas sastādītas Babilonijā; vienā no tām pret katru no skaitļiem 1,2,3,...,59,60 dots tā kvadrāts. Otrā tabulā bija doti šie paši skaitļi, tikai pretējā kārtībā: pirmajā vietā kvadrāts, bet tam pretī — atbilstoša pirmā pakāpe.

1894.-1895.g. franču ekspedīcija atklāja milzīgu senās šumēru pilsētas Lahašas saimniecības dokumentu arhīvu. Starp šiem dokumentiem bija daudz dažādu rēķinu, zemes gabalu plānu ar dotiem izmēriem un laukumu aprēķiniem.

Vēl lielāka nozīme matemātikas vēsturē bija izrakumiem, ko izdarīja Pensilvānijas (ASV) universitātes ekspedīcija 1898.-1900.g. Nipurā. Enlila templī tika atrasta milzīga bibliotēka, kas aizņēma vairāk nekā 80 istabas. Tika atrastas arī skolas telpas, kurās saglabājušies mācību līdzekļi un skolnieku vingrinājumi rakstos, gramatikā, matemātikā un astronomijā. Vēlāk tika atrastas vairāk nekā 150 matemātiskas tabulas. Kaut cik precīzi datēt šīs tabulas nav iespējams. Katrā ziņā senākās tabulas attiecas uz apmēram XX gs., bet vēlākās uz II gs. pirms m.ē. Uz šo matemātisko tabulu pamata varēja izdarīt dažus slēdzienus par babiloniešu aprēķinu tehniku. Pētnieku interesi saistīja jautājums par sešdesmitnieku sistēmas rašanos. Dabiski, ka tikai pēc tabulām vien nevarēja gūt pilnīgu priekšstatu par babiloniešu matemātisko kultūru. Bet līdz 1916.g. matemātiskie teksti, kas bija iejaukti lielajā ķīļrakstu tāfelīšu kaudzē, īpašu uzmanību neizraisīja. 1916.g. grupa vācu zinātnieku, kuru uzmanību piesaistīja dažās Britu un Berlīnes muzejos esošajās plāksnītēs atrodamās ģeometriskās figūras, pareizi novērtēja šo tekstu nozīmi, bet atšifrēt tās bija grūti. Pirmkārt, plāksnītes bija stipri bojātas. Otrkārt, daudzi tekstos sastopamie termini bija pavisam nezināmi. Un, treškārt, šie speciālisti paši nebija matemātiķi. Tomēr viņiem izdevās atšifrēt diezgan daudzus tekstus.

1922.gadā tika atšifrēts un publicēts vēl viens teksts no Britu muzeja kolekcijas: šajā tekstā bija doti ģeometrisku figūru (domājams ornamentu) laukumu aprēķināšanas uzdevumi bez atrisinājumiem (un pat bez atbildēm). Jau tāpēc vien radās šaubas par šo tulkojumu. 1928.g. Franks publicēja vairākus Strasburgas muzeja matemātisko ķīļraksta tekstu tulkojumus.Dažus uzdevumus viņam izdevās pārtulkot tikai daļēji,bet dažus viņš nevarēja ne tikai pārtulkot, bet pat izlasīt. Tieši šie pēdējie uzdevumi izrādījās visinteresantākie. Tai laikā jaunajam vācu zinātniekam O.Neigebaueram, kura darbi par Babilonijas matemātikas vēsturi sāka parādīties 1927.g., izdevās pārtulkot pilnīgi agrāk publicētos tekstus, kas izraisīja īstu sensāciju. Izrādījās, ka senās babiloniešu skolas skolnieki jau vismaz 1000 gadu pirms Pitagora prata risināt uzdevumus, kuros bija jāpielieto Pitagora teorēma tās vispārīgākajā veidā un ka pilna kvadrātvienādojuma atrisināšana viņiem nesagādāja nekādas grūtības. Pēc tam, kad matemātisko tekstu terminoloģija bija atšifrēta, tālākā tekstu lasīšana veicās jau daudz ātrāk.

1935.g. ir publicēts Neigebauera fundamentāls pētījums, kurā analizēti 250 dokumenti, no kuriem apmēram 200 bija matemātiskas tabulas, bet pārējie 50 — uzdevumu un piemēru teksti, dažkārt ar atrisinājumiem, bet dažkārt arī bez tiem. Kopējais atrisināto uzdevumu skaits šajās plāksnītēs ir apmēram 500. Tik daudz teksta mazajās plāksnītēs varēja ierakstīt,tikai pateicoties rakstītāja ļoti ekonomiskajai rīcībai. Par to liecina šāds piemērs: lai vienu no tekstiem, kurš ir uzrakstīts uz 5x5 cm lielas plāksnītes, uzrakstītu transkripcijā ar latīņu burtiem, vajadzētu vismaz 70 rindas; šī paša teksta tulkojums krievu valodā aizņemtu 2,5 lappuses! Jāpiebilst gan, ka 5x5 cm izmēri ir tikai pašām mazākajām plāksnītēm, lielāko formāts ir 20x20 cm.

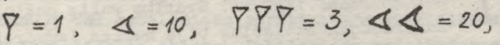
Šis plašais dokumentālais materiāls būtiski papildināja mūsu zināšanas par Babilonijas matemātiku. Starp citu, atklājās, ka babilonieši prasmīgi risināja vienādojumu sistēmas ar diviem nezināmajiem, kurās viens vienādojums bija otrās pakāpes, bet otrs — lineārs. Tā kā šādus vienādojumus risinot vajadzēja aprēķināt kvadrātsakni, tad jādomā, ka babiloniešiem bija zināms algoritms šīs darbības veikšanai, kaut arī tekstos tas nav aprakstīts. Dažos tekstos aplūkoti pat kubiskie vienādojumi $x^3 + ax^2 = b$.

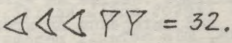
Pēc tam, kad 1945.g. Neigebauers kopā ar Saksu publicēja jaunu tulkojumu, kopīgais publicēto uzdevumu skaits bija apmēram 1000, tabulu skaits -- 300. Pēc 1945.g. publicēti vairs tikai nedaudzi dokumenti, vienu no tiem publicēja padomju zinātnieks Vaimans 1955.gadā.

Šīs publikācijas apstiprināja ne tikai babiloniešu matemātikas augsto līmeni, bet arī parādīja, ka šis līmenis ir daudz augstāks nekā līdz tam domāja. No pārtulkoto tekstu satura varēja secināt, ka babiloniešu matemātiskajai kultūrai bija stingra teorētiskā bāze un ka jau apmēram 2000 gadu pirms m.ē. tā bija izgājusi no empīriskā zināšanu uzkrāšanas perioda.

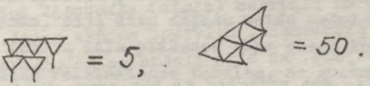
Līdz 1945.g. uzskatīja, ka seno grieķu matemātiskā kultūra principiāli atšķiras no seno austrumu matemātiskās kultūras ar to, ka pirmā bija deduktīva, bet otrā -- induktīva. Šis uzskats izrādījās nepareizs. Kļuva iespējams pat parādīt babiloniešu matemātikas ietekmi uz grieķu matemātikas metodēm. Šādu uzdevumu veica izcilais holandiešu matemātiķis Van-der-Vardens. Savā grāmatā "Zinātne, kas mostas" (1950.g.) viņš pirmo reizi izmantoja materiālu par babiloniešu un ēģiptiešu matemātiku, lai izskaidrotu grieķu matemātikas attīstību tās pirmajos posmos (VI-IV gs.pirms m.ē.).

4.3. SEŠDESMITNIEKU NUMERĀCIJA BABILONIEŠU MATEMĀTISKAJOS TEKSTOS. Babiloniešu matemātiskajos tekstos skaitļi no 1 līdz 59 pierakstīti decimālajā sistēmā, tieši tāpat, kā to darīja ēģiptieši. Tikai zīmju forma ir savādāka, proti,

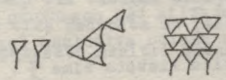




Kad desmitu vai vienu skaits skaitlī pārsniedza trīs, babilonieši lietoja saīsinātu pierakstu, zīmes apvienojot grupās (kaut arī pamatzīmes joprojām ir viegli atšķiramas), piemēram,



Sākot ar 60, skaitļa pieraksts mainās. Skaitlis 60 tiek attēlots ar to pašu vertikālo ķīli kā vieninieks. Piemēram, skaitļa $169 = 2\cdot 60 + 49$ pieraksts ir šāds:



Tādējādi babilonieši lietojuši "jauktu" numerāciju — tajā apvienotas decimālā un sešdesmitnieku sistēmas. Šajā sistēmā desmitniekam ir īpašs apzīmējums, kāmēr sešdesmitnieku sistēmā tiek ievērots vienīgi pozicionālais princips.

Tomēr jāatzīmē, ka jebkura skaitļa K pieraksts tikpat labi izlasāms kā $K\cdot 60$, $K\cdot 60^2$, $K\cdot 60^3$ utt., jo nav noteikta K pozīcija. Konkrētā gadījumā pareizu skaitļa izlasīšanu nosaka uzdevuma teksts.

Runājot par babiloniešu daļām, jāatzīmē, ka babilonieši nepazina nekādas citas daļas kā tikai daļas ar saucēju 60^k. Izņēmums ir divas trešdaļas un viena puse, kurām bija speciāli apzīmējumi.

Seščesmitnieku daļu sistēma bija ne tikai babiloniešu kultūras nacionāls sasniegums, to aizguva arī grieķu astronomi, lai mērītu leņķus, un no tās mēs vēl šodien neatsakāmies, domājams, ka arī nākotnē stundu dalīsim 60 minūtēs.

4.4. NULLES PRIEKŠVĒSTURE. Svarīgs solis pozicionālās numerācijas attīstībā bija nulles izgudrošana. Jau no bērnības pieraduši lietot nulli kā līdzvērtīgu ar pārējiem deviņiem cipariem, mēs parasti nenovērtējam šo izcilo cilvēces kultūras sasniegumu. Šodien lietojamās numerācijas sistēmās (decimālajā, binārā u.c.) kādas šķiras vienības iztrūkumu skaitļu pierakstā parādām ar ciparu "nulle" šajā šķirā. Senatnē ar cipariem (zīmēm) sākotnēji apzīmēja noteiktu skaitu priekšmetu, cilvēku, naudas u.tml., tātad to, "kas ir". Iespējams, ka bija zināma psiholoģiska barjera, lai radītu zīmi, kas apzīmētu to, "kā nav". Nulles lietošana pirmoreiz atrasta indiešu avotos, tajos nulli apzīmēja līdzīgi kā tagad ar aplīti. Vēl agrāk aplīti lietoja grieķu astronomi, lai apzīmētu "izlaidumu" seščesmitnieku daļā, kaut arī īpašas nepieciešamības pēc tāda apzīmējuma nebija, par cik katrai šķirai pierakstīja tās nosaukumu (minūtes, sekundes utt.) ar attiecīgu skaitu svītriņām (prim). Nulles vietā babiloniešu tekstos tika lietota zīme $\overset{\triangleleft}{\triangleleft}$.

Diezgan ilgu laiku Divupes tautu matemātiskajos tekstos bija nenoteiktība cipara (zīmes) vērtības noteikšanā. Vēlāk nulles apzīmējums nostabilizējās, un tā lietošana nodrošina tabulu lasīšanas viennozīmīgumu.

4.5. ARITMĒTISKĀS DARBĪBAS. Jebkuru skaitļu saskaitīšana un atņemšana babiloniešiem nevarēja radīt nekādas grūtības. Saskaitīšanas darbībai speciālas zīmes nebija, divi blakus uzrakstīti simboli nozīmēja to summu. Kas attiecas uz atņemšanu, tad to tekstos apzīmēja ar vārdiem: "2 atņemts no 37, dabūts 35". Tabulās var sastapt savdabīgu skaitļu izteikšanu ar atņemšanas palīdzību. Piemēram, 19 attēlots nevis kā 10+9, bet kā 20 - 1, pie tam mīnusa zīmes vietā lietots vārds "lal", ko apzīmēja ar 𒇲:

𒌋𒌋 𒇲 𒁹 (20-1).

Pavisam citādi ir ar reizināšanu un dalīšanu. Ja ēģiptieši šīs darbības reducēja uz pakāpenisku dubultošanu (vai puses atrašanu), tad babiloniešu aprēķinātājs reizināšanu un dalīšanu izpildīja pa šķirām. Babiloniešu reizināšanas princips ir tāds pats kā mūsējais. Bet, ja mums ir jāatceras reizināšanas tabula, kura satur 36 rezultātus, tad babiloniešiem būtu jāatceras 1711 rezultāti. Dabiski, ka viņiem vajadzēja lietot reizināšanas tabulas.

Cik varam spriest pēc materiāliem, kas saglabājušies līdz mūsu dienām, bija divu dažādu veidu tabulas: 1) uz vienas lielu izmēru māla plāksnes abām pusēm kompakti sakārtotas daudzas reizināšanas tabulas, no kurām katra deva kāda skaitļa reizinājumu ar virkni reizinātāju, turpat bija dotas arī apgriezto lielumu tabulas, kvadrātu tabulas utt., 2) katra atsevišķa plāksnīte saturēja tikai vienu galveno skaitli un tā dažādos reizinājumus. Nekādas principiālas atšķirības starp šīm tabulām nebija.

Dalīšana tika reducēta uz reizināšanu ar apgriezto skaitli. Ja apgriezto skaitli nevarēja iegūt precīzi, tad to noapaļoja.

4.6. ARITMETISKIE UZDEVUMI UN TO RISINĀŠANA. Dažās plāksnītēs ir formulēti uzdevumi un doti to pilnīgi atrisinājumi, citās uzdevumu atrisinājumi nav doti. Skaitļi uzdevumos izraudzīti tā, lai atvieglotu risināšanu ar tabulu palīdzību. Viena un tā paša veida uzdevumi grupēti pēc grūtuma pakāpes, sākot ar vieglākajiem un pakāpeniski pārejot uz grūtākiem uzdevumiem. Piemēram, dota virkne uzdevumu, kuros jāatrod divi skaitļi x un y, lai $xy = 600$ un lai tie apmierinātu arī citu nosacījumu, kurš tiek dots ar aizvien sarežģītākām un sarežģītākām izteiksmēm, sākot ar $x + y = 50$ līdz pat

$$(3x+2y)^2+\frac{2}{3}\left\{4\left[\frac{1}{2}(x+y)-\left(\frac{1}{2}+1\right)(x-y)\right]^2+(x+y)^2\right\}=17100,$$

pie tam visu šo uzdevumu atrisinājums ir $x = 30$, $y = 20$. Acīmredzami uzdevumu sastādītājam bija mazsvarīgi, ka skolēns zina rezultātu,galvenā vērība tika veltīta risinājuma metodes apgūšanai.

Starp aritmētiskajiem uzdevumiem ir daudz uzdevumu par procentu rēķiniem. Šajos uzdevumos pēc dotā naudas daudzuma, kas jāmaksā procentos, jānosaka sākotnējā kapitāla lielums, jāatrod,pēc cik gadiem kapitāls izaugs līdz dotajai summai u.tml. Šādus uzdevumus risināja aritmētiski, soli pa solim aprēķinot attiecīgo aritmētisko vai ģeometrisko progresiju locekļus.

4.7. ĢEOMETRISKIE UZDEVUMI. Daudzus vienkāršākos ģeometrijas uzdevumus(zemes gabalu dalīšanai nepieciešamo garumu un laukumu noteikšanu vai dažādu tilpumu aprēķināšanu) babilonieši risināja ar aritmētiskiem paņēmieniem. Tie bija tādi ģeometrijas uzdevumi, kurus šodien risinām, izmantojot lineārus vienādojumus ar vienu nezināmo vai lineāru vienādojumu sistēmas ar vairākiem nezināmajiem. Bet babilonieši pat tad, kad nezināmo skaits bija pieci, rīkojās vienīgi ar dotajiem zināmajiem lielumiem, bet ne ar nezināmajiem, kā tas pieņemts algebrā.

Jau vairāk nekā 1000 gadu pirms Pitagora babiloniešiem bija pazīstama teorēma par taisnleņķa trijstūra katetēm un hipotenūzu (Pitagora teorēma). Babilonieši plaši lietoja ģeometrisko figūru līdzību, tāpēc nav izslēgts, ka Pitagora teorēma bija iegūta tieši ar līdzības palīdzību. Atsevišķus šīs teorēmas gadījumus varēja atrast vai nu aritmētiski, aplūkojot kvadrātu tabulas, vai arī uzskatāmi ģeometriski. Piemēram, grīdu klājumos babilonieši izmantoja ornamentus, kurus ieguva, kvadrātu ar tā diagonālēm sadalot taisnleņķa trijstūros.

Liela interese babiloniešiem bija par t.s. Pitagora trijstūriem, t.i., taisnleņķa trijstūriem, kuru malu garumi ir veseli skaitļi. Ir atrasta tabula, kurā doti 15 šādu trijstūru malu garumi (tajā doti c^2: a^2, b, c, kur $a^2 + b^2 = c^2$). Acīmredzot, šos trijstūrus izmantoja praktiskiem mērķiem.

šādas tabulas liecina arī par to, ka babiloniešiem bija samērā dziļa izpratne skaitļu teorijas jautājumos.

4.8. BABILONIEŠU "VIENĀDOJUMI". Risinot "kvadrātvienādojumus"(kā mēs tos tagad saucam), babilonieši abstrahējās no uzdevumu konkrētā, praktiskā satura. Izsakot uzdevumu mūsdienu apzīmējumos, runa bija par vienādojumu $x + \frac{1}{x} = a$, tā atrisinājumi tika noteikti pēc formulām

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1}\ ; \quad \frac{1}{x} = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1}\,.$$

Citu uzdevumu veidu mums pierastajos apzīmējumos var formulēt šādi: noteikt x un y, ja zināms, ka $x + y = a$, $xy = b$; uz šo "normālveidu" tika reducēti daudzi babiloniešu risinātie uzdevumi, tajā skaitā arī tādi, kādus šodien risinām ar kvadrātvienādojumiem. Atrisinājumu ieguva, izmantojot palīgnezināmo. No $x + y = a$ seko, ka par cik vienībām viens nezināmais ir lielāks nekā $\frac{a}{2}$, par tik vienībām otrs ir mazāks. Tāpēc, ievietojot otrajā vienādojumā $x = \frac{a}{2} + z$, $y = \frac{a}{2} - z$, iegūst $(\frac{a}{2} + z)(\frac{a}{2} - z) = b$, no kurienes

$$z = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\,.$$

Kaut gan babilonieši nelietoja algebras simboliku, tomēr uzdevumus viņi risināja vai nu algebriski, vai arī ar dažādiem paņēmieniem reducējot doto uzdevumu uz tādu, kura atrisināšanai bija zināmi vispārīgi likumi, kurus tagad mēs sauktu par formulām.

Nevienā no līdz šim atklātajiem babiloniešu matemātiskajiem tekstiem nav atrasts skaitļa kvadrātsaknes aprēķināšanas metodes apraksts un pamatojums, ir tikai norādījumi ("receptes") "dari tā un tā". Spriežot pēc šiem norādījumiem, var izdarīt pieņēmumu, ka babilonieši skaitļa kvadrātsakni rēķināja aptuveni pēc algoritma

$$\sqrt{c} = \sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}\,, \qquad (1)$$

kur a^2 ir vislielākais pilnais kvadrāts (naturāla skaitļa kvadrāts), kuru satur skaitlis c. Vērtējot no šodienas matemātikas viedokļa, šī tuvinātā formula (1) ir iegūstama, atstājot $\sqrt{1+x}$ izvirzījumā pakāpju rindā tikai pirmos divus locekļus:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \ldots \approx 1 + \frac{1}{2}x \quad \text{un}$$

$$\sqrt{a^2+b} = a\sqrt{1+\frac{b}{a^2}} \approx a(1+\frac{b}{2a^2}) = a + \frac{b}{2a}.$$

Piebildīsim, ka babiloniešu aprakstīto kvadrātsaknes aprēķināšanas paņēmienu pēc 2000 gadiem lietoja Ptolemajs, sastādot savas slavenās tabulas.

4.9. BABILONIEŠU UN ĒĢIPTIEŠU MATEMĀTIKAS SALĪDZINĀJUMS. Apmēram pirms 4000 gadiem babilonieši zināja jau daudzas aprēķinu metodes un viņiem bija arī samērā liels ģeometrisko zināšanu krājums; viņi radīja pozicionālo numerācijas sistēmu; prata atrisināt otrās pakāpes vienādojumus un vienādojumu sistēmas, bija izstrādājuši diezgan vispārīgas zināmu un nezināmu lielumu identisko pārveidojumu metodes. Plaši lietojot palīgmainīgo metodi, babilonieši risināja arī trešās pakāpes vienādojumus. Visi aprēķini tika reducēti uz tabulu lietošanu, tādējādi atvieglojot aprēķinātāja darbu.

Kā redzējām, aprēķinus divās lielajās senatnes valstīs veica pavisam atšķirīgi. Tas ir pilnīgi saprotami, jo babiloniešu rēķināšanas tehnika radās specifiskos vēsturiskos apstākļos, kādu nebija Ēģiptē, bet tās praktiskās vajadzības, kuras risināja ar matemātikas palīdzību, bija vairāk vai mazāk līdzīgas abās zemēs. Kā Ēģiptē, tā arī Babilonijā bija vajadzīga prasme aprēķināt figūru laukumus, noteikt ķermeņu tilpumus. Ēģiptieši šajā jomā sasniedza tādus pašus, ja ne augstākus rezultātus kā babilonieši: riņķa laukums ēģiptiešu tekstos tiek aprēķināts daudz precīzāk, nošķeltas piramīdas tilpuma aprēķināšanai ēģiptieši lietoja precīzāku formulu; vai tāda eksistēja arī babiloniešu matemātikā, nav zināms.

Saimnieciskās un juridiskās attiecības starp cilvēkiem kā Ēģiptē, tā Babilonijā radīja virkni tipisku aritmētisku uzdevumu: tādi, piemēram, ir uzdevumi par aritmētisko un ģeometrisko progresiju.

Arī pēc izklāsta formas babiloniešu un ēģiptiešu matemātiskie teksti ir pārsteidzoši līdzīgi viens otram: kā vienos, tā otros risinājums izklāstīts dogmatiskā formā; nav ne pierādījuma par atrisinājuma pareizību, ne atsevišķu soļu jēgas skaidrojuma, ne nosacījumu analīzes.

Šī izklāsta dogmātiskā forma nebūt nenozīmē, ka netika veikti teorētiski pētījumi un tāpēc tā nevar būt par argumentu, lai secinātu, ka seno ēģiptiešu matemātika bija primitīva. Šo formu noteica apmācības metodes un viss sabiedriskās dzīves veids Senajos Austrumos. Tur, kur visi amati tika pārmantoti, eksistēja ne tikai caru dinastijas, bet arī priesteru un ierēdņu dinastijas, tāpēc apmācībai bija jābūt ar autoritāru raksturu.

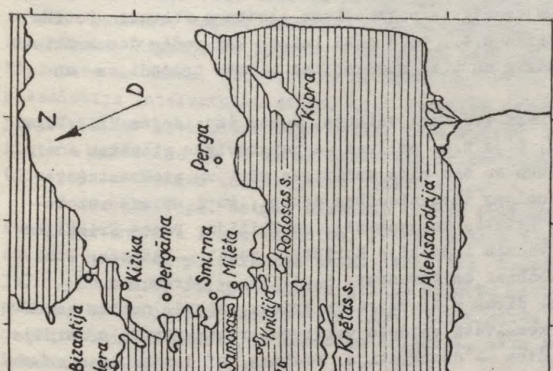
Vairāk nekā pusotra gadu tūkstoša laikā izklāsta forma babiloniešu matemātiskajos tekstos maz mainījās.

Pierādījumam īpaša vērība tika veltīta tikai seno grieķu matemātikā. Grieķu valsts dzīvē ilgāku laiku bija raksturīga sabiedrisko formu laušana. Vētrainās sadursmēs starp šķiru un partiju grupām īpaša nozīme bija pārliecībai un tās pierādījumam. Tas izpaudās ne tikai politisko oratoru runās, bet arī tiesu procesos un filozofiskajos strīdos, kā arī zinātniskajos darbos. Raksturīgi, ka hellēnisma laikmetā ievērojama daļa grieķu matemātisko sacerējumu, kas uzrakstīti Ēģiptes teritorijā, pēc izklāsta formas gandrīz neatšķiras no seno ēģiptiešu tekstiem. Tas attiecas gandrīz uz visiem sacerējumiem, kas veltīti matemātikas praktiskajiem pielietojumiem. Tātad dogmatiskā izklāsta forma nebūt nenozīmē, ka tajā laikā neeksistēja teorētiska zinātne.

4.10. VISPĀRĪGI SECINĀJUMI PAR MATEMĀTIKAS ATTĪSTĪBU AGRĪNAJĀ VERGTURU SABIEDRĪBĀ. Arheoloģiskie izrakumi ir devuši materiālu arī par citu seno Tuvo Austrumu tautu kultūru un matemātisko zināšanu līmeni. Tā kā pamatvilcienos Austrumu tautu matemātika ir līdzīga ēģiptiešu un babiloniešu matemātikai, tad sīkāk šo tautu matemātiku neaplūkosim.

Rietumu puslodē pilnīgi patstāvīgi attīstījās maiju, inku un acteku numerācija un matemātika.

Salīdzinot matemātikas attīstību dažādās despotiskajās vergturu valstīs, var ievērot, ka, neskatoties uz atsevišķām īpatnībām, galvenās tās līnijas bija līdzīgas. No skaitīšanas aizsākumiem pirmsšķiru sabiedrībā valsts vajadzību ietekmē radās elementārā matemātika, kas izmantoja algebrisko metodi (tiesa gan, ne atklātā veidā) un prasmīgi veica darbības ar lieliem skaitļiem. Šajā posmā matemātikai bija galvenokārt empīrisks raksturs. Lielāko daļu matemātisko paņēmienu atklāja mēģinājumu gaitā un mācīja bez pierādījumiem, pat ja tādi eksistēja. Kaut arī jau bija manāmi pirmie abstraktās matemātiskās domāšanas elementi, tomēr matemātiskā teorija vēl nepastāvēja kā atsevišķa vispārināta sistēma. Despotiskajās vergturu valstīs matemātika bija vajadzīga tikai dažādiem nodokļu aprēķiniem, zemes gabalu sadalīšanai u.tml., uzdevumiem,ar ko nodarbojās sīkie ierēdņi, kuriem nebija nekādas teorētiskas intereses par matemātiku. Par teorētisku zinātni matemātika kļuva vienīgi tad, kad vergturu sabiedrība iegāja jaunā fāzē — pāraugа vergturu demokrātijā. Tas notika Senajā Grieķijā.



Vidusjūras baseina valstis antīkajā laikmetā.

5. Matemātika Senajā Grieķijā

5.1. SENĀS GRIEĶIJAS SOCIĀLAIS RAKSTUROJUMS. Senajā Grieķijā radās zinātne, kuras pamatā bija stingri pierādījumi. Šis svarīgais pagrieziens zinātnes vēsturē notika VI-V gs. pirms m.ē., tajā pašā laikā, kad radās demokrātiskā valsts iekārta un tika sarakstītas pirmās traģēdijas un komēdijas.

Sengrieķu vergturu valstis, kuras izveidojās VIII-VIgs. pirms m.ē., bija t.s. polises -- patstāvīgas pilsētas - valstis. Galvenās no tām bija Mazāzijas rietumu piekrastes vidusdaļas Jonijas tirdzniecības centri, kuri atradās uz ceļiem starp Ēģipti, Mezopotāmiju un Skitiju. Pašas Grieķijas piekrastē vadošā loma bija Korintai, vēlāk — Atēnām; Itālijā — Krotonai un Tarentai, Sicīlijā — Sirakūzām.

VI gs. pirms m.ē. vairākās grieķu valstīs notika sacelšanās. To rezultātā valdošo vergturu aristokrātiju nomainīja tautas valdība — demokrātija. Protams, šī demokrātija nebūt nebija pilnīga, tā tāpat saglabāja pastāvošās verdzības iekārtas raksturu. Valdībā varēja piedalīties tikai brīvie pilsoņi, pie tam vienīgi vīrieši; no sabiedriskās dzīves tika izslēgtas sievietes, citos apgabalos dzimušie pilsoņi un vergi. Bet tomēr pat šādai ierobežotai demokrātijai bija pārsteidzoši panākumi.

V gs. pirms m.ē. sākumā Grieķijai uzbruka persieši. Viņu pirmais iekarojums bija Jonijas piekraste. Pēc Jonijas zaudējuma pirmajā vietā izvirzījās Atika, kas atradās Grieķijas kontinentālajā daļā, un tās galvaspilsēta Atēnas. Atika saliedēja ap sevi grieķu valstis un kļuva par galveno pretspēku persiešiem. Pēc apvienošanās grieķi uzsāka cīņu pret persiešiem un divreiz guva uzvaru — 490.g.pirms m.ē. pie Maratonas un pēc desmit gadiem pie Salamīnas. Šī pēdējā kauja tad arī noteica kara iznākumu.

Pēc uzvaras pār persiešiem Atēnas kļuva par Grieķijas politisko un kultūras centru. Tā kā kara laikā pilsēta bija gandrīz pilnīgi nodedzināta, sākās intensīva tās rekonstrukcija. Tika celti daudzi tempļi, no jauna uzcēla Pireju—kara un tirdzniecības ostu.

V gs. beigas un IV gs. sākums pirms m.ē. bija Atēnu uzplaukuma laiks. Šeit ieradās ievērojami ļaudis no visām antīkās pasaules malām: Anaksagors no Klazomenas, Demokrīts no Abderas, Hippijs no Elīdas, Teodors no Kirēnas, ārsts Hipokrāts no Kosas, Aristotelis no Stagiras. Viņus Atēnās piesaistīja intelektuālā dzīve. Šeit darbojās Sokrāts, kurš prata rosināt savu klausītāju domas, tika radīta slavenā Platona Akadēmija un ne mazāk slavenais Aristoteļa Likejs (Licejs) — vēlāko universitāšu priekštecis.

Tomēr jau V gs. beigās aizsākās ilgais Peleponesas karš, kas sagrāva Atēnu varenību. IV gs. pēdējā trešdaļā antīkās pasaules politiskajā arēnā parādījās Maķedonija. 337.g.pirms m.ē. Filips sagrāva grieķu pilsētu apvienotos spēkus, bet viņa dēls Aleksandrs (356.-323.g.pirms m.ē.), nostiprinājis Maķedonijas kundzību Grieķijā, sāka Austrumu iekarojumus.

5.2. SENGRIEĶU MATEMĀTIKAS RAKSTURĪGĀKĀS IEZĪMES.

Senās Grieķijas pilsētās attīstījās celtniecība un amatniecība, progresēja lauksaimniecība un kuģniecība. Tas viss radīja priekšnosacījumus arī zinātnes progresam. Lai radītu mašīnas kara vajadzībām, būvētu tirdzniecības un kara kuģus, īstenotu grieķu arhitektu monumentālās ieceres, vairs nevarēja iztikt bez tehniskiem izgudrojumiem. Sākot ar VII gs. pirms m.ē. Jonijā — ēģiptiešu un babiloniešu kultūras saskarsmes vietā — radās zinātne, kurā astronomija, metereoloģija, matemātika, mehānika un medicīna attīstījās vienkopus ar priekšstatiem par filozofiju, politiku, ekonomiku un ģeogrāfiju.

Sākotnēji sengrieķu matemātika principiāli neatšķīrās no ēģiptiešu un babiloniešu matemātikas, bet jau, sākot ar VI gs.pirms m.ē., grieķu matemātiskā domāšana kļūst aizvien teorētiskāka. "Melno" garīgo darbu — grāmatu pārrakstīšanu, aprēķinu veikšanu — sāka uzdot vergiem, ar laiku teorētiskā matemātika atdalījās no praktiskās matemātikas. No praktiskās aritmētikas, ko sauca par "loģistiku", un praktiskās ģeometrijas, kuru Arhimeds nosauca par "ģeodēziju", atdalījās teorētiskā aritmētika un teorētiskā ģeometrija, kaut arī tās, līdzīgi citām zinātnēm, tajā laikā vēl nebija patstāvīgas nozares, bet filozofijas sastāvdaļas. Atšķirībā no praktiskajām zinātnēm teorētiskā aritmētika un ģeometrija deva ne tikai priekšrakstu, kā risināt uzdevumus, bet arī pamatojumu, kāpēc atrisinājums ir pareizs. Matemātikā, tāpat kā politiskos un juridiskos strīdos, kļuva nepieciešams precīzi definēt jēdzienus, attīstīt stingrus pierādījumus. Ne velti pitagorieši, kas ieviesa pierādījumu, bija ne tikai filozofiska skola, bet arī vergturu demokrātijas reakcionāra partija.

Galīgā matemātikas kā patstāvīgas teorētiskas zinātnes atdalīšanās notika Grieķijā V gs.pirms m.ē., savu nobeigumu rodot jau hellēnisma laikmetā Eiklīda "Elementos" apmēram 300 gadus pirms m.ē.

Kā visai grieķu klasiskajai literatūrai, tā arī matemātiskajai literatūrai ir grūti atrast oriģinālus pirmavotus. No VI gs.pirms m.ē. ir saglabājušās tikai pāris seno autoru idejas, kuras kopā ar dažādām leģendām ir atrastas vēlākos sacerējumos. No V gs.pirms m.ē. palikuši tikai nedaudzi fragmenti, un tikai ar IV gs.pirms m.ē. ir atrodami sākumā nepilnīgi, bet pēc tam arvien pilnīgāki teksti. Tie ir daudzu autoru pārstāstīti, tāpēc ir grūti rekonstruēt pilnīgi patiesu vēsturisko ainu.

5.3. MUTISKĀ SKAITĪŠANA UN SKAITĪŠANA UZ PIRKSTIEM.

Iepazīšanos ar ēģiptiešu un babiloniešu aritmētiku iesākām ar rakstisko numerāciju. To varējām darīt tāpēc, ka numerācijas sistēma Ēģiptē un Babilonijā bija tādā pašā mērā neatkarīga no mutiskās skaitīšanas kā mūsu numerācija. Grieķu aritmētikā bija citādi. Viņu rakstiskā skaitīšana lielā mērā bija atkarīga no valodas. Tāpēc sāksim ar īsu skaitļu nosaukumu apskatu un analizēsim, kā veidojās atvasinātu skaitļu nosaukumi. Kā redzēsim, grieķu aritmētikas pamatā ir decimālā sistēma.

Sengrieķu valodā skaitļiem no 1 līdz 10 bija īpaši nosaukumi. Lielākajā daļā Eiropas tautu, indusu un persiešu valodās skaitļu nosaukumu saknes ir līdzīgas. Salīdzinājumam doti daži piemēri:

2.tabula.

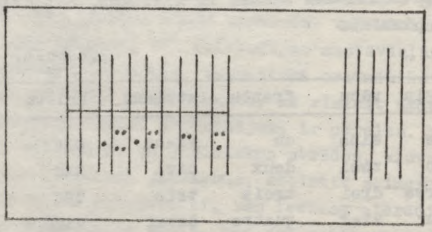
	grieķu	angļu	vācu	franču	latviešu	krievu
1	eis	one	eins	un	viens	один
2	dyo	two	zwei	deux	divi	два
3	treis	three	drei	trois	trīs	три
4	tessera	four	vier	quatre	četri	четыре
5	pente	five	fünf	cinq	pieci	пять
6	hex	six	sechs	six	seši	шесть
7	hepta	seven	sieben	sept	septiņi	семь
8	okto	eight	acht	huit	astoņi	восемь
9	ennea	nine	neun	neuf	deviņi	девять
10	deka	ten	zehn	dix	desmit	десять

Skaitļus no 11 līdz 19 veidoja pēc aditīvā principa tāpat, kā to darām tagad. Veselo desmitu nosaukumi bija 20 -- eikosi, 30 -- triakonta, 40 -- tesserakonta utt. Tas, ka skaitlim 20 ir īpašs nosaukums, norāda, ka senatnē decimālā sistēma kombinējās ar divdesmitnieku sistēmu.

Zināms interesants dokuments, kas vēsta par skaitīšanu uz pirkstiem. Tā ir Smirnas mūka Rabdas vēstule, ko pagājušā gadsimta 80.gados atrada ievērojamais zinātnes vēsturnieks P.Tanerī. Rabda dzīvoja XIV gs. un ir aprakstījis dažādus grieķu paņēmienus skaitīšanai uz pirkstiem. Izrādās, ka uz pirkstiem (ņemot talkā arī dažādus plaukstu un roku stāvokļus) ir iespējams skaitīt līdz miljonam.

5.4. ABAKS. Tā kā auga tirdzniecisko operāciju skaits, tad rēķināšana uz pirkstiem, protams, ilgi n varēja apmierināt augošās prasības pēc aprēķiniem. Tika izveidota pirmā skaitļojamā ierīce -- abaks. Abaks ir ierīce, kas atgādina mūsu skaitāmos kauliņus. Jādomā, ka abakı

Grieķijā ieveda feniķieši. Vai feniķieši paši bija abaka izgudrotāji, vai arī viņi vienkārši nodeva grieķiem citas tautas, piemēram, ēģiptiešu izgudrojumu — diezin vai tas tagad ir noskaidrojams.



1.zīm.

Vienkāršākais abaka veids bija ar smiltīm nokaisīts dēlis, kurā ievilka svītras,kas dēli sadalīja kolonnās.Dažādās kolonnās esošajiem akmentiņiem pierakstīja vērtības, kas bija saskaņotas ar naudas vienībām. Tas liecina, ka abaks bija grieķu tirgoņa instruments.

Līdz ar šādiem rēķiniem attīstījās arī skaitļu pieraksti. Dabiski, ka sākotnēji skaitļus apzīmēja vienīgi ar svītriņām. Šādu pierakstu redzējām ēģiptiešu un babiloniešu numerācijas sistēmās. IV gs.pirms m.ē. sākumā tāds pieraksts vēl bija arī grieķiem. Tas nevarēja apmierināt pat pašas pieticīgākās praktiskās vajadzības. Tāpēc grieķi sāka lietot pilnīgāku numerāciju.

5.5. ATISKĀ NUMERĀCIJA. Kādu laiku grieķiem vienlaicīgi eksistēja divas numerācijas sistēmas. Pirmo no šīm sistēmām bieži sauc par Herodiāna sistēmu (tā gramatiķa vārdā, no kura ziņojumiem vēsturnieki pirmoreiz uzzināja par šādas sistēmas eksistenci). Atiskā numerācijas sistēma (3.tabula) atgādina romiešu sistēmu.

Interesanti atzīmēt, ka sengrieķu uzrakstos daudzu mērvienību nosaukumus apzīmēja ar šī nosaukuma pirmo burtu, pie tam pierakstos varēja kombinēt skaitļu un mērvienību apzīmējumus. Tāds pieraksta veids parāda, ka sākotnēji atiešu skaitliskie apzīmējumi bija domāti nevis abstraktu skaitļu pierakstam, bet gan konkrētu lielumu apzīmēšanai.

3.tabula.

$$|=1,\ ||=2,\ |||=3,\ ||||=4,\ \Gamma=5,\ \Gamma|=6,\ \Gamma||=7,\ \Gamma|||=8,$$
$$\Gamma||||=9,\ \Delta=10,\ \Delta\Delta=20,\ \Gamma^{\Delta}=50,\ \Gamma^{\Delta}\Delta\Delta=70,$$
$$H=100,\ \Gamma^{H}=500,\ \Gamma^{H}HH=700,\ X=1000,\ \Gamma^{X}=5000,$$
$$M=10000,\ \Delta\Delta\Delta\Gamma=35,\ \Gamma^{\Delta}\Delta\Delta\Gamma|||=78,$$
$$\Gamma^{X}XX\Gamma^{H}HHH\Delta||||=7814.$$

Skaitļu apzīmējumi atiskajā numerācijā.

5.6. JONISKĀ NUMERĀCIJA. Atisko numerācijas sistēmu Atēnās lietoja līdz m.ē. I gs. sākumam. Citās grieķu zemēs to bija aizstājusi jauna numerācijas sistēma. Šo sistēmu var nosaukt par alfabētisku, jo tajā skaitļu apzīmēšanai izmantoti burti tādā secībā, kādā tie sakārtoti alfabētā (4.tabula). Tā, piemēram,

4.tabula.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
vieni	$\bar{\alpha}$	$\bar{\beta}$	$\bar{\gamma}$	$\bar{\delta}$	$\bar{\varepsilon}$	$\bar{\varsigma}$	$\bar{\xi}$	$\bar{\eta}$	$\bar{\vartheta}$
desmiti	$\bar{\iota}$	$\bar{\varkappa}$	$\bar{\lambda}$	$\bar{\mu}$	$\bar{\nu}$	$\bar{\xi}$	$\bar{o}$	$\bar{\pi}$	$\overline{\text{ϙ}}$
simti	$\bar{\rho}$	$\bar{\sigma}$	$\bar{\tau}$	$\bar{\upsilon}$	$\bar{\varphi}$	$\bar{\chi}$	$\bar{\psi}$	$\bar{\omega}$	$\bar{\lambda}$

Skaitļu apzīmējumi joniešu numerācijā.

Senākais dokuments, kurā atrodam jonisko numerāciju, atrasts Mazāzijā senās Halikarnasas izrakumos un tas attiecas uz V gs.pirms m.ē.vidu. Šajā akmenī iekaltajā uzrakstā attēlota vergu pirkšana un pārdošana.

5.7. MILĒTAS SKOLA.

Grieķu matemātikas rašanās saistīta ar leģendārā Talesa vārdu, kuru uzskata par visagrākās stihiskā materiālisma filozofiskās skolas dibinātāju. Dažkārt šī skola tiek saukta arī par joniešu skolu.

T a l e s s (Θαλῆς, ap 624.-547.g.pirms m.ē.) dzimis Milētā. Jaunībā tirdznieciskie darījumi aizveda viņu uz Ēģipti, kur viņš iepazinās ar ēģiptiešu zinātni. Atgriezies dzimtenē, viņš Milētā organizēja savu skolu. Taless bija izcils astronoms. Viņš pirmais zinātnes vēsturē paredzēja Saules aptumsumu 585.g.pirms m.ē. 23.maijā. Daudz uzmanības Taless veltīja ģeometrijai. Pēc sengrieķu zinātnieka P r o k l a (Πρόκλος, 410.-485.g.) domām, Taless ir šādu teorēmu pierādījumu autors:

1. Divu taišņu krustleņķi ir vienādi.
2. Vienādsānu trijstūra leņķi pie pamata ir vienādi.
3. Trijstūri pilnīgi nosaka mala un divi tās pieleņķi.

   Izmantojot šo teorēmu, Taless noteica attālumu no krasta līdz kuģim jūrā.
4. Diametrs dala riņķi uz pusēm.
5. Ievilkts leņķis, kas balstās uz diametru, ir taisns.
6. Taless atklāja paņēmienus, kā noteikt piramīdas un vispār dažādu priekšmetu augstumu pēc to ēnas.

Taless bija ateists. Viņš noliedza Visuma dievišķo izcelsmi. Par visu lietu būtību Taless uzskatīja ūdeni (matērijas šķidro stāvokli). Taless uzstājās pret tai laikā izplatīto debesu spīdekļu (Saules, Mēness, zvaigžņu) dievināšanu, uzskatīja tos par materiāliem ķermeņiem, kas pildīti ar uguni. Šos Talesa uzskatus apliecina viņa izteicieni: "Ūdens ir visa sākums; viss no tā rodas un viss tajā pārvēršas", "Tukšuma nav", "Viss mainās un katrs lietu savienojums ir tikai acumirklīgs", "Viela vienmēr ir dalāma, bet tam ir sava robeža", "Mēnesi apspīd Saule".

Taless esot nomiris pēkšņi, skatoties Olimpiskās spēles. Viņu apglabāja klajā laukā, bet kapa akmenī iekala uzrakstu: "Cik mazs ir šis kaps, tik liela ir astronomu cara slava zvaigžņu vidū".

Milētas skolā bija vesela virkne filozofu -- matemātiķu, tomēr par viņu zinātnisko darbību saglabājies gaužām maz ziņu. Ievērojams Talesa ideju turpinātājs bija viņa radinieks un skolnieks A n a k s i m a n d r s (Ἀναξίμανδρος, ap 610.-543.g.pirms m.ē.) -- sacerējuma "Par dabu" autors. Anaksimandrs par esamības pamatu uzskatīja ne laikā, ne telpā neierobežoto matēriju, kas atrodas mūžīgā kustībā, izmaiņā, izvirza pretrunas un tās atkal atrisina. Pirmoreiz izvirzīdams hipotēzi par pasauļu bezgalību bezgalīgā Visumā un par cilvēka dabisko izcelšanos, viņš līdz ar to izvirzīja objektīvās likumsakarības ideju. Uzskata, ka Anaksimandrs ir izteicis ideju par Zemi kā riņķa cilindru, kura diametrs attiecas pret augstumu kā 3:1; izgatavojis pirmo Grieķijas un zemes ģeogrāfisko karšu zīmējumus, pie kam tajos pirmoreiz tika izmantota ortogonālā projekcija;izgatavoja saules pulksteni un citas astronomiskas ierīces. Uzskata arī, ka Anaksimandrs bija autors sacerējumam elementārajā ģeometrijā.

Milētas skolai pieskaitāms arī L a s s (Λᾶς,VI-Vgs. pirms m.ē.) no Hermionas. Ap 500.gadu pirms m.ē. Lass uzrakstīja sacerējumu mūzikā, pirmo tādu grieķu darbu. Lass veica eksperimentus arī akustikā ar vairākiem vienādiem traukiem, kas pagatavoti no viena un tā paša materiāla. Ielejot šajos traukos dažādu ūdens daudzumu un pēc tam piesitot katram traukam ar kādu metālisku priekšmetu, Lass ieguva dažāda augstuma skaņas (t.i., skaņas ar dažādām frekvencēm). Lass noskaidroja, ka katrai oktāvai atbilst nepieņildīto daļu attiecība 2:1, kvintai šī attiecība ir 4:3. Pitagoriešu skolas filozofi šī eksperimenta rezultātus izmantoja savā mistiskajā mācībā par skaitļiem.

5.8. PITAGORIEŠU SKOLA. VI gs.pirms m.ē. beigās grieķu - persiešu karu rezultātā Grieķijas kultūras centri pārvietojās no austrumiem uz rietumiem, uz tās Dienviditālijas kolonijām. Šajā zemkopības valstī, kas salīdzinājumā ar Joniju bija stipri atpalikusi, radās ideālistiskās pitagoriešu un eleātu skolas.

Leģendārais P i t a g o r s (Πυθαγορας, ap 570.-500.g. pirms m.ē.) piedzima bagātajā Samosas salā. Apmēram ap 530.g. pirms m.ē. viņš pārcēlās uz Krotonu (Dienviditālija), kur nodibināja slaveno pitagoriešu savienību.

Tagad Pitagoru pieminam galvenokārt kā matemātiķi, bet senatnē bija citādi. Grieķu vēsturnieks Herodots nosauca Pitagoru par "izcilu sofistu"(jeb "gudrības mācītāju"). Par Pitagoru zināmas tik ļoti daudzas un dažādas leģendas, ka vietā būtu jautājums — kas tad īsti bija Pitagors: matemātiķis, filozofs, pravietis, svētais vai šarlatāns? Pitagora sekotāji uzskatīja viņu par augstākās dievišķās gudrības iemiesojumu, bet Heraklīts(ap 530.-470.g.pirms m.ē.) viņā saskatīja vienīgi "daudz zināšanu bez saprāta". Pitagors savā savienībā ieviesa stingrus likumus. Šajā brālībā iesvētītie pēc pārbaudes laika izturēšanas un stingra atlases aiz aizkara varēja klausīties Skolotāja balsī, bet viņu pašu redzēt varēja vienīgi pēc vairākiem gadiem, kad viņu dvēseles saskaņā ar parašām tika uzskatītas par " attīrītām". Šajā laikā eksistēja daudzas reliģijas, kuras saviem ticīgajiem solīja mūžīgu dzīvi. Raksturīga iezīme daudzām sektām bija cenšanās aiziet no pasaules, noslēgta klostera dzīve, veģetārisms un īpašuma kopība. Bet pitagorieši no tām visām atšķīrās ar veidu, kādā,pēc viņu domām, bija iespējams panākt "dvēseles attīrīšanu" un "tuvošanos dievišķajam". Šis līdzeklis bija matemātika — viņu reliģijas sastāvdaļa. Dievs, viņi mācīja, visa pamatā ir licis skaitli. Dievs ir vienība, bet pasaule — pretstatu kopa. Visas pasaules pretrunas kosmosā atrisina un apvieno harmonija, kas ir dievišķa un kuru izsaka skaitliskas attiecības. Tas, kurš līdz galam izpēta šo dievišķo skaitlisko harmoniju, pats kļūst svēts un nemirstīgs. Pitagoriešu mācībā bija nesaraujami saistīti trīs jēdzieni -- mūzika, harmonija un skaitļi.

Visa esošā izskaidrošana tikai ar vesel̇o skaitļu likumu palīdzību atrodas loģiskā pretrunā ar pašu pitagoriešu atklāto nogriežņu nesamērojamības eksistenci. Iespējams, ka sākumā viņi paši pat nepamanīja, cik šis atklājums revolucionārs viņu pašu natūrfilozofijai. Vēlāk pitagorieši šo atklājumu rūpīgi slēpa.

Viena iespēja, kā pitagorieši nonāca līdz iracionalitātes atklāšanai, ir viņu mūzikas matemātiskās teorijas pētījumi. Intervāls starp pilnajiem toņiem nav konstants, bet gan apgriezti proporcionāls toņu augstumam. Tāpēc pilna intervāla dalīšanai jānotiek pēc "harmoniskā principa",t.i.,tā, lai oktāva (stīgas garums attiecas kā 1:2) dalītos divos nevienādos intervālos -- kvartā (3:4) un kvintā (2:3) -- pēc likuma $\frac{1}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$. Ja oktāvu dalītu divos vienādos intervālos $\frac{x}{y}$, tad pēc šī likuma iegūtu $\frac{1}{2} = \frac{x}{y} \times \frac{x}{y}$ un tātad būtu $\frac{y}{x} = \sqrt{2}$, bet ar šādu stīgu garumu attiecību iegūst nevis saskaņu, bet disonansi. Šeit arī varēja rasties doma, ka $\sqrt{2}$ nevar izteikt ar divu veselu skaitļu attiecību.

5.9. PITAGORIEŠU MATEMĀTIKA UN NUMEROLOĢIJA.

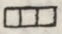
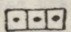
Tā kā nav saglabājušies nekādi dokumentāli materiāli, tad pitagoriešu matemātikas gandrīz 200 gadus ilgo attīstības gaitu restaurēt nav iespējams. Zināmi tikai atsevišķi šīs matemātikas elementi.

Pitagorieši skaitļus attēloja punktu veidā, grupējot tos ģeometriskās figūrās. Piemēram, "kvadrātiskos" skaitļus 1, 4, 9 attēloja šādi:

```
                    • • •
          • •       • • •
    • ,   • • ,     • • • .
```

bet trijstūra skaitļus 1, 3, 6 attēloja šādi:

```
                      •
            •        • •
    • ,    • • ,    • • • .
```

Pitagoriešiem punkts, kas attēloja vieninieku, bija tālāk nedalāms -- tas bija "matemātiskais" atoms; pašu punktu definēja kā vienību ar noteiktu stāvokli. Lai varētu atšķirt vienu no otra, vienības -- punktus vajadzēja atdalīt ar telpu, katram punktam bija vajadzīgs tukšs "laukums" ap to. Tāpēc katru skaitli varēja attēlot ne tikai kā punktu, bet arī kā kvadrātisku laukumu. Tādējādi skaitli 3 pitagorieši varēja attēlot gan kā • • • , gan  , gan . Visa p matā bija skaitlis -- ģeometrija pakļauta aritmētikai.

Figūru skaitļi attēloja veidu, kādā tie aritmētiski iegūti, t.i., vai tie iegūti ar saskaitīšanu vai reizināšanu. Pitagorieši un viņu tradīciju turpinātāji aplūkoja galvenokārt skaitļus -- summas, bet Eiklīds un viņa skola pieļāva ģeometrisku attēlojumu vienīgi skaitļiem -- reizinājumiem.

Skaitļus -- reizinājumus pitagorieši iedalīja šādi:

a) "taisnlīniju", t.i., pirmskaitļi, kurus nevarēja sadalīt reizinātājos un tāpēc attēloja ar punktiem, kuri atradās uz viena nogriežņa;

b) "plaknes skaitļi" -- skaitļi, kurus varēja sadalīt divos reizinātājos un tāpēc tos attēloja ar punktiem, kuri veidoja kvadrātu vai taisnstūri;

c) "telpiskie skaitļi" -- tos attēloja ar punktiem, kuri veidoja paralēlskaldni vai kubu.

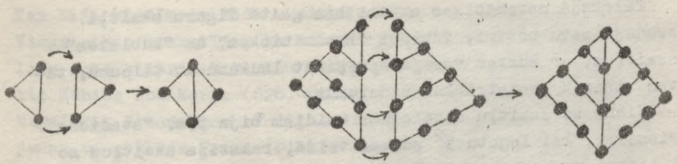
Starp skaitļiem -- summām pitagorieši lielu vērību veltīja t.s. "daudzstūra" skaitļiem. Visvienkāršākie no tiem bija "trijstūra" skaitļi:

$1 + 2 = 3$ $\qquad$ $1 + 2 + 3 = 6$ $\qquad$ $1 + 2 + 3 + 4 = 10$

2. zīm.

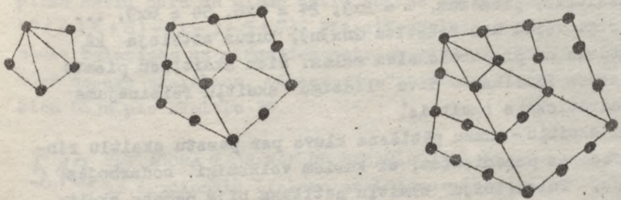
Kā redzam (2. zīm.), katru nākamo "trijstūra" skaitli var iegūt ar vienkāršu ģeometrisku konstrukciju (nākamie skaitļi ir 15, 21, 28, ...).

No "trijstūra" skaitļiem pitagorieši ieguva visus "kvadrātiskos" skaitļus ar šādu "apvienošanas" paņēmienu (3. zīm.):



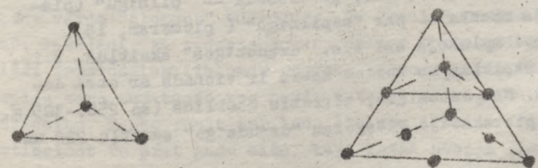
3. zīm.

Tādā pašā veidā, pievienojot vienu otram trīs vienādus "trijstūra" skaitļus, ieguva piecstūra skaitļus (5, 12,22,...) utt.(4. zīm.).



4. zīm.

Tālāk analogi definēja "piramidālos" skaitļus,kurus ieguva, apvienojot "daudzstūra" skaitļus. Vienkāršākie no tiem ir četršķautņu skaitļi, kurus iegūst no "trijstūra" skaitļiem un attēlo kā trijstūra piramīdas: 1 = 1; 1+3 = 4; 1+3 + 6 = 10; 1+3+6+10 = 20, ... (5. zīm.).



5. zīm.

Tālākajā matemātikas attīstības gaitā figūru skaitļi zaudēja savu nozīmi, izņemot "kvadrātiskos" un "kubiskos" skaitļus, ar kuriem varēja aprēķināt laukumu un tilpumu, tātad risināt ģeometriskus uzdevumus.

Viens no skaitļu attēlojuma veidiem bija t.s. "stadions". Piemēram, lai iegūtu 5^2 summas veidā, rakstīja skaitļus no 1 līdz 5 un pēc tam atpakaļ līdz 1:

1— 2 — 3 — 4 — 5 $(5^2 = 1+2+3+4+5+4+3+2+1)$
1— 2 — 3 — 4 ↗

Līdz ar "kvadrātiskajiem" skaitļiem pitagoriešiem nozīmīgi bija arī "turpinātie" skaitļi n(n 1). Skaidrs, ka skaitļi, kas piederēja vienai kategorijai, tai pašā laikā varēja piederēt arī citai. Pitagorieši pazina arī "līdzīgos" skaitļus, piemēram, 6 = 2x3, 24 = 4x6, 54 = 6x9, ... (vispārīgā veidā mēs rakstītu 2nx3n), kurus attēloja kā taisnstūrus ar proporcionālām malām. Šiem skaitļiem piemīt interesanta īpašība — divu "līdzīgo" skaitļu reizinājums ir "kvadrātiskais skaitlis".

Šādu skaitļu - summu pētīšana kļuva par pamatu skaitlu rindu summēšanas paņēmieniem, ar kuriem veiksmīgi nodarbojās Arhimeds. "Taisnlīniju" skaitļu pētīšana bija pamats skaitļu teorijai, kurā svarīgus rezultātus ieguva Eiklīds, "Elementos" izmantodams daudzus pitagoriešu ieviestos jēdzienus.

Pitagorieši pētīja arī jautājumu par skaitļa un tā dalītāju summas attiecību. Ar skaitļa dalītājiem saprata visus tā dalītājus, gan pirmskaitļus, gan saliktus skaitļus, ieskaitot 1, bet izslēdzot pašu skaitli. Ja dalītāju summa izrādījās lielāka par pašu doto skaitli, tad skaitli nosauca par "virspilnīgu" (piemēram, 12), ja vienāda — "pilnīgu" (piemēram, 6), ja mazāka — par "nepilnīgu" (piemēram, 15).

Pitagorieši aplūkoja arī t.s. "draudzīgos" skaitļus, t.i., tādus divus skaitļus, no kuriem katrs ir vienāds ar otra dalītāju summu. Neoplatoniķis, sīrietis Jamblihs (ap 250.-325.g. pirms m.ē.) pierakstīja Pitagoram "draudzīgo" skaitļu 220 un 284 atklāšanu:

220 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142,

284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110.

Tas bija vienīgais šādu skaitļu pāris, ko pazina senatnē. Viduslaikos uzskatīja, ka talismani ar draudzīgajiem skaitļiem spēj stiprināt tuvību starp cilvēkiem. Arābu matemātiķis Sabits ibn Korra (826.-901.g.) atrada likumu, pēc kura var iegūt draudzīgos skaitļus. Šis likums tika aizmirsts, no jauna to atklāja Fermā (Pierre Fermat, 1601.-1665.g.) un 1638.gadā bez pierādījuma publicēja Dekarts.

Vēl daži piemēri no pitagoriešu skaitļu mistikas. Pāra skaitļus viņi sauca par sieviešu skaitļiem, bet nepāra -- par vīriešu skaitļiem, skaitlis 5 -- pirmā sieviešu un pirmā vīriešu skaitļa summa -- bija laulības simbols. Visievērojamākais bija skaitlis 36. No vienas puses, 36 ir pirmo trīs naturālo skaitļu kubu summa $1^3 + 2^3 + 3^3$, bet, no otras puses -- pirmo četru pāra un pirmo četru nepāra skaitļu summa $(2+4+6+8)+(1+3+5+7)$. Pēc pitagoriešu domām visa pasaule balstījās uz pirmajiem četriem pāra un pirmajiem četriem nepāra skaitļiem, tāpēc pats "stiprākais" zvērests viņiem bija pie skaitļa 36.

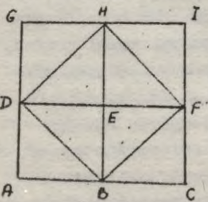
5.10. "PITAGORA TEORĒMA" UN NESAMĒROJAMI LIELUMI.

Līdz ar iracionālu lielumu atklāšanu pitagoriešu mācība, ka veselie skaitļi ir visu lietu mērs, sadūrās ar nepārvaramu pretrunu. Bet tieši iracionalitātes atklājums ir vislielākais pitagoriešu ieguldījums matemātikā. Grieķiski vārdu "iracionāls" izsaka ar trīs terminiem: "asimetrons", kas nozīmē: nav kopēja mēra, "arretons" -- t.i., nevar izteikt ar veseliem skaitļiem (šo vārdu pirmoreiz min Platons), un "alogons", kas nozīmē -- nevar izteikt ar divu veselu skaitļu attiecību. Latīņu nosaukums "iracionalitāte" ir burtisks vārda "alogons" tulkojums, jo "racio" nozīmē "attiecība". Tādējādi, kā redzams jau no pašiem nosaukumiem, pitagorieši iracionālus lielumus saprata kā nogriežņus, kuriem nav kopēja mēra, un tāpēc tos nevar izteikt ar veselu skaitļu attiecību. Tāpēc runāt par kāda lieluma iracionalitāti, neattiecinot to pret kādu citu, tajā laikā nebija jēgas.

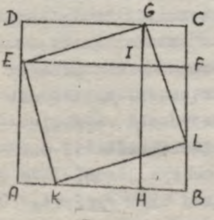
Iespējams, ka iracionalitātes atklāšana bija saistīta ar t.s. Pitagora teorēmu. Kā zināms, šī teorēma jau ilgi pirms Pitagora bija zināma babiloniešiem un varbūt arī ēģiptiešiem. Tomēr senatnes vēsturnieki Plutarhs, Diogens Laercijs un Prokls piedēvē šo atklājumu Pitagoram, atkārtojot leģendu, it kā Pitagors, par to pateicoties, ziedojis dieviem simts aunu ("hekatombu"). Iespējams, ka Pitagors vai viņa skolnieki, zinot atsevišķus ēģiptiešu vai babiloniešu "svētos trijstūrus" (t.i., taisnleņķa trijstūrus, kuru malas izsakāmas ar veseliem skaitļiem), vispārināja šo teorēmu visiem taisnleņķa trijstūriem. "Svētos trijstūrus" varēja atrast, analizējot kvadrātu tabulas, kuras lietoja babilonieši. Veselos skaitļus x, y, z, kuri izsaka taisnleņķa trijstūru malas, sauc par Pitagora skaitļiem. Pitagoriešiem bija zināms likums, kā noteikt Pitagora skaitļus, ja tie ir savstarpēji pirmskaitļi:

$$x = 2p + 1,\ y = 2p^2 + 2p,\ z = 2p^2 + 2p + 1.$$

Par to, kā sākotnēji tika pierādīta Pitagora teorēma, var izteikt vienīgi hipotēzes. Iespējams, ka vispirms tā tika pierādīta vienādsānu taisnleņķa trijstūrim, kurš jau no seniem laikiem bija sastopams ornamentos.



6. zīm.



7. zīm.

6. zīmējumā uzskatāmi redzams, ka uz trijstūra DEH katetēm konstruēto kvadrātu ABED un EFIH laukumu summa ir vienāda ar kvadrāta DBFH laukumu, kas konstruēts uz hipotenūzas.

No šī atsevišķā gadījuma uz vispārīgo varēja pāriet, aplūkojot kvadrātu ABCD, kas sadalīts divos dažādos kvadrātos AHIE un IFCG un divos kongruentos taisnstūros EIGD un HBFI (7. zīm.). Kvadrāta EKLG laukums ir vienāds ar kvadrāta ABCD laukumu, no kura atņemti trijstūru AKE, KBL, LCG un GED laukumi, kuru summa ir vienāda ar abu taisnstūru laukumu summu. Bet kvadrātu AHIE un IFCG laukumu summa ir vienāda ar kvadrāta ABCD laukumu, no kura atņemti šo divu taisnstūru laukumi. No tā var secināt, ka kvadrāts KLGE ir vienliels ar kvadrātu AHIE un IFCG summu. Šajā pierādījumā un arī Eiklīda pierādījumā nav izmantots līdzības jēdziens, kaut gan to izmantojot, teorēmu varētu pierādīt daudz vienkāršāk.

Pēc Pitagora teorēmas varēja aprēķināt hipotenūzu, ja zināmas abas trijstūra katetes. Bet šis uzdevums jau pašā vienkāršākajā gadījumā $a = b = 1$ nebija atrisināms, neizdevās atrast divu veselu skaitļu attiecību $\frac{m}{n}$ tā, lai tā būtu vienāda ar $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, proti, neizdevās atrast kopēju mēru kvadrāta malai un diagonālei. Nesamērojamus lielumus uzskatīja par "prātam neaptveramiem". Nav izslēgts, ka iracionalitāti $\sqrt{2}$ ieguva no mūzikas teorijas, meklējot pusoktāvu. Tas ir ekvivalenti uzdevumam — noteikt skaitļu 1 un 2 ģeometrisko vidējo.

Neiespējamība izteikt $\sqrt{2}$ kā divu veselu skaitļu attiecību noveda ne tikai pie tuvinātu aprēķinu meklējumiem, bet arī sekmēja šīs neiespējamības pierādīšanu. Viens no pierādījumiem, kas dots Eiklīda "Elementos", ir veikts, pieņemot pretējo, un tas reducējas uz šādu spriedumu. Pieņemsim, ka kvadrāta malas garums ir a, bet tā diagonāles garums ir b, pie tam skaitļiem a un b nav kopīgu dalītāju (izņemot 1). Tad pēc Pitagora teorēmas $b^2 = 2a^2$. Tā kā vienādības labā puse dalās ar 2, tad arī kreisajai pusei jādalās ar 2, tātad skaitlim b jābūt pāra skaitlim, bet tā kā a un b nav kopīgu dalītāju, tad a jābūt nepāra skaitlim. Bet ja b ir pāra skaitlis, tad tā kvadrāts dalās ar 4, tātad arī vienādības labajai pusei jādalās ar 4, kas iespējams tikai tad, ja a ir pāra skaitlis. Esam ieguvuši pretrunu, ka a vienlaikus jābūt gan pāra, gan nepāra skaitlim. No šīs pretrunas seko, ka nav tādu skaitļu a un b, kas apmierinātu sākotnējo vienādību $b^2 = 2a^2$.

Cits $\sqrt{2}$ iracionalitātes pierādījums saistīts ar šīs saknes tuvinātu aprēķinu metodi. Lai atrastu kvadrātsakni no skaitļa, kas nav pilns kvadrāts, A r h i t s (Ἀρχύτας, ap 428.-365.g.pirms m.ē.) sadala šo skaitli divos nevienādos reizinātājos (piemēram, 2 = 1 2), atrod abu skaitļu vidējo aritmētisko un vidējo harmonisko (šajā gadījumā $\frac{3}{2}$ un $\frac{4}{3}$) un veido no šiem skaitļiem "muzikālo proporciju"($2 : \frac{3}{2} = \frac{4}{3} : 1$).

Vidējo locekļu reizinājums ir vienāds ar doto skaitli 2, bet starpība $\frac{3}{2} - \frac{4}{3} = \frac{1}{6}$ mazāka nekā starpība 2 - 1 = 1. Tātad $\frac{3}{2}$ un $\frac{4}{3}$ var uzskatīt par $\sqrt{2}$ aptuvenām vērtībām, kur pirmā ir ar uzviju, bet otrā ar iztrūkumu. Šo procesu var turpināt: kā otros tuvinājumus iegūstam skaitļus $\frac{17}{12}$ un $\frac{24}{17}$, kas atšķiras viens no otra tikai par $\frac{1}{204}$ utt.

Nesamērojamības atklāšana radīja grieķu matemātikā dziļu pamatu krīzi. Pitagoriešu mācību par veseliem skaitļiem kā visa esošā (tai skaitā arī ģeometrisko lielumu) pamatu vairs nevarēja uzskatīt par patiesu, sākās jauni meklējumi.

Pirms šķiramies no Pitagora, vēl daži izteicieni no viņam piedēvētajiem filozofiskajiem sacerējumiem "Zelta vārsmas" un "Simboli":

— Dari tikai to, kas vēlāk tevi nesarūgtinās un neliks izsamist.
— Nedari nekad to, ko nezini; bet iemācies visu, kas jāzina, un tad tev būs mierīga dzīve.
— Nenoniecini sava ķermeņa veselību — sagādā tam laikā ēdienu un dzērienu, un vingrinājumus, kas tam vajadzīgi.
— Pierodi dzīvot vienkārši un bez greznības.
— Neaizver acis, kad gribas gulēt, nepārdomājis visu savu rīcību pagājušajā dienā.
— Nepaej garām svariem (t.i., esi taisnīgs).
— Nesēdi uz spilvena (t.i., neapmierinies ar sasniegto).
— Nemoki savu sirdi (t.i., nenododies melanholijai).
— Nebaksti uguni ar šķēpu (t.i., nesatrauc tos, kas jau tāpat ir naidā).
— Neņem zem sava jumta bezdelīgas (t.i., nedraudzējies ar pļāpām un vieglprāšiem).

5.11. ZENONA APORIJAS. Z e n o n s (Ζήνων, ap 450.g.pirms m.ē.) bija filozofa Parmenīda draugs. Zināšanas viņš bija apguvis pašmācības ceļā. Zenons tā laika filozofus pārsteidza ar to, ka formulēja četrus šķietami vienkāršus paradoksus — aporijas (ἀπορία — grūtība), kurus tie nespēja izskaidrot. Ļeņins norādīja, ka Zenons atklāja kustības reālo pretrunu, pie tam "ne jau jautājumu par to, vai kustība eksistē vai nē, bet gan, kā to izteikt ar loģikas jēdzienu palīdzību" (3 , 240.lpp.). Lūk, Zenona "kustības aporijas":

1. Dihotomija. "Kustības nav, jo tam, kas kustas, ir jānoiet līdz pusei agrāk nekā tas nonāk līdz galam."

2. Ahilless. "Lēnāko nekad nepanāks ātrākais, jo tam, kurš dzenas pakaļ, vispirms ir jāsasniedz tas punkts, no kura sāk kustību tas, kurš bēg, tāpēc lēnākais vienmēr būs kādu attālumu priekšā."

3. Bulta. "Ja viss ir vai nu mierā, vai kustas, aizņemot telpu, kas vienāda ar viņu pašu, tad, tā kā kustošs priekšmets vienmēr eksistē momentā, lidojoša bulta ir nekustīga."

4. Stadions. "Ja dotas divas ķermeņu rindas, kas katra sastāv no vienāda skaita vienāda tilpuma ķermeņiem, kuri iet viens otram garām pa skrejceļu, kustoties ar vienādiem ātrumiem pretējos virzienos (viena rinda sāk no stadiona gala, bet otra no vidus), tad tas noved pie secinājuma, ka puse dotā laika ir vienāda ar divkāršotu šo laiku."

Aristotelis šīs aporijas uzskatīja par loģiskām kļūdām.

Lai izprastu Zenona aporiju matemātisko nozīmi, aplūkosim pirmo no tām. Ja pieņemam, ka ķermenim (punktam) jānoiet 1 vienību liels attālums, tad saskaņā ar dihotomiju ķermenim vispirms jānoiet puse ceļa, pēc tam puse no atlikušā ceļa, t.i., $\frac{1}{4}$, pēc tam puse no atlikušā, t.i., $\frac{1}{8}$, utt. Tādējādi pēc n "soļiem" punkts būs nogājis:

mma _r $1 - \frac{1}{2^n} = 1$, tad iegūstam

2 4 2

pretrunu, ka ne ar kādu galīgu soļu skaitu n nevaram sasniegt 1. Tātad paradoksu būtība slēpjas nepārtrauktības izpratnē: matēriju (laiku) var dalīt tikai līd zināmai robežai — respektīvi, pastāv "nedalāmas" daļiņas (atomi), kurām ir noteikti, ļoti mazi, bet no nulles atšķirīgi izmēri.

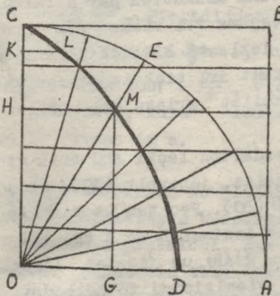
§.12. DĒMOKRITS. Grieķu materiālistu - atomistu skolu vadīj D e m o k r ī t s (Δημόκριτος , ap 460.-370.g.pirms m.ē.). K.Markss un F.Engelss Demokrītu raksturoja kā "pirmo enciklopēdisko domātāju starp grieķiem" ([3], 126.lpp.).

Diogens Laercijs (m.ē. III gs.) ir uzskaitījis 70 Dēmokrita sacerējumus par dažādiem dabaszinātņu, matemātikas un filozofijas jautājumiem, no kuriem saglabājušies gan tikai fragmenti. Dēmokrits uzskatīja, ka matērija sastāv no nemaināmiem, nedalāmiem, cietiem atomiem, kas atšķiras pēc formas un kas,pateicoties dažādām kombinācijām, veido atšķirīgas pēc sakārtojuma bezgalīgi daudzveidīgas matērijas formas. Dēmokritam pieder pirmais sacerējums loģikā "Kanoni", kas bija vērsts tiklab pret sofistu skepticismu un relatīvismu, kā pret pitagoriešu un eleātu ideālismu.

Dēmokrits daudz ceļoja, bija Ēģiptē, Persijā, Babilonijā un,iespējams,arī Indijā un Etiopijā, kur iepazinās ar zinātnes sasniegumiem. Kaut gan viņa daudzpusīgās un dziļās zināšanas nodrošināja viņam slavu jau senatnē, viņa materiālisms izraisīja dedzīgu naidu. Platons ignorēja Dēmokritu un dedzināja viņa sacerējumus. Šāda attieksme bija arī pret Dēmokrita matemātisko mantojumu, šī iemesla dēļ no tā ir saglabājušās vienīgi skopas ziņas.

Diogens Laercijs nosauca sešus Dēmokrita matemātiskos sacerējumus. Kā liecina Aristotelis, Arhimeds un citi senatnes zinātnieki, savos ģeometriskajos sacerējumos Dēmokrīts uzskatīja, ka punkti ir telpas atomi ar galīgu tilpumu un ka katrā nogriežnī ir galīgs, kaut arī ļoti liels punktu skaits. Šis priekšstats bija cieši saistīts ar pitagoriešu un Zenona uzskatiem. Dēmokrits atrada daudzu figūru laukumus un ķermeņu tilpumus, starp citu arī piramīdas tilpumu. Dēmokrits uzskatīja, ka ģeometriskie ķermeņi sastāv no paralēlām plāksnītēm, kuru biezums ir viens atoms, ar to aizsteidzoties priekšā vēlākajai nedalāmo metodei un Kavaljeri principam. Dēmokrits zināja, ka trijstūra prizmu var sadalīt trīs piramīdās ar vienādiem pamatiem un augstumiem, no šejienes viņš secināja, ka piramīdas tilpums ir viena trešdaļa no tādas prizmas tilpuma, kurai ar piramīdu ir vienāds pamats un augstums.Stingri šo faktu pēc pusgadsimta pierādīja Eudokss. Tā kā riņķi Dēmokrīts aplūkoja kā daudzstūri, kura katra mala sastāv no diviem atomiem, tad riņķa cilindrus un konusus viņš uzskatīja par prizmām un piramīdām ar ļoti lielu pamata malu skaitu, un tāpēc teorēmu par tilpumiem varēja vispārināt arī konusiem un cilindriem.

5.13. HIPPIJS NO ELĪDAS. H i p p i j s no Elīdas (Ἱππίας) ir dzimis ap 460.g. pirms m.ē. Viņam piedēvē kvadratrises atklāšanu.



8.zīm.

Pappa kvadratrises konstrukciju aprakstīja šādi: "Kvadrātā OABC ievelk loku AEC ar centru O. Taisne OC vienmērīgi griežas ap O tā, ka punkts C apraksta loku CEA. Taisne AB pārvietojas paralēli pati sev, līdz sakrīt ar taisni OA. Kustība notiek tā, ka taisnes OC un CB sakrīt ar taisni OA vienlaicīgi. Taisnes OC un CB pārvietojoties krustosies kādā punktā M, kurš apraksta trajektoriju CMD, kas ir kvadratrise" (8. zīm.).

Kvadratrises punktiem ir spēkā sakarība

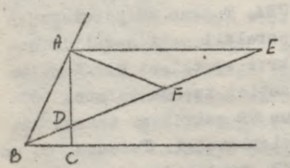
$$\frac{|CO|}{|MG|} = \frac{|\smile CA|}{|\smile EA|}.$$

Izmantojot kvadratrisi, leņķi varēja sadalīt jebkura skaita vienādās daļās. Piemēram, lai sadalītu leņķi MOC trīs vienādās daļās, novelk $(MH) \perp (OC)$, pēc tam konstruē $|CK| = \frac{1}{3}|CH|$. Tad velk $(KL) \parallel (MH)$ līdz krustpunktam L ar kvadratrisi: $\widehat{KOL} = \frac{1}{3}\widehat{COM}$.

Līdz ar "riņķa kvadratūras" un "kuba dubultošanas" uzdevumiem leņķa trisekcijas uzdevums bija viena no trim slavenajām ģeometrijas problēmām. Šos uzdevumus atrisināt bija atļauts vienīgi ar t.s. "dievišķajiem instrumentiem" -- cirkuli un lineālu. Uzdevumu atrisinājumu meklēšana turpinājās divus gadu tūkstošus.

Tā kā Hippijs uzdevuma risināšanai bija izmantojis kvadratrisi, tad šis atrisinājums netika uzskatīts par pareizu.

Apmēram ar to pašu laiku datējams vēl viens šīs problēmas risinājums, kas vēlāk tika iekļauts Eiklīda "Elementos". Tā ir t.s. "ielikšanas metode". Kaut arī tiek izmantots tikai lineāls, tomēr šis paņēmiens neatbilst grieķu atļautajiem paņēmieniem (9.zīm.).



9.zīm.

Lai sadalītu leņķi ABC trīs vienādās daļās, jānovelk $(AC) \perp (BC)$ un $(AE) \parallel (BC)$. Pēc tam uz lineāla jāatliek iezīmes D un E tā, lai $|DE| = 2|AB|$, un jāgriež lineāls ap B, vienlaicīgi to pārbīdot, tik ilgi, kamēr $E \in (AE)$ un $D \in (AC)$. Apzīmēsim ar F nogriežņa DE viduspunktu. Tad taisnleņķa trijstūrī ADE: $|DF| = |AF| = |FE|$, tātad $|AB| = |AF|$. Tāpēc trijstūris ABF ir vienādsānu trijstūris un $\widehat{ABF} = \widehat{AFB}$. Bet, tā kā trijstūris AEF arī ir vienādsānu, tad $\widehat{AEF} = \widehat{FAE}$, un tāpēc $\widehat{AFB} = 2\widehat{AEF} = 2\widehat{CBF}$. Tātad $\widehat{CBF} = \frac{1}{3}\widehat{CBA}$.

To, ka nav iespējams sadalīt leņķi trijās vienādās daļās, izmantojot tikai cirkuli un lineālu, vispārīgā veidā varēja pierādīt pēc tam, kad L e o n a r d o no Pizas (Fibonači, ap 1170.-1230.g.) parādīja, ka vispārīgajam kubiskajam vienādojumam ar veseliem koeficientiem atrisinājumus nevar izteikt ar racionāliem skaitļiem vai kvadrātiskām iracionalitātēm.

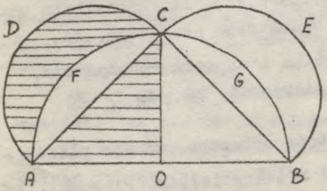
Leņķa trisekcijas uzdevums reducējas uz vienādojuma $\cos\varphi = 4\cos^3\frac{\varphi}{3} - 3\cos\frac{\varphi}{3}$ jeb $a = 4x^3 - 3x$ atrisināšanu.

Hippija kvadratrisi, ar kuras palīdzību leņķi varēja sadalīt jebkura skaita vienādās daļās, izmantoja D i n o s t r a t s (ap 350.g.pirms m.ē.), lai atrisinātu uzdevumu par "riņķa kvadratūru". Dinostrats pierādīja, ka $|OD| = \frac{2a}{\pi}$. Šajā pierādījumā netika izmantota robežpāreja, bet gan novesti līdz aplamībām pieņēmumi, ka $|OD| < \frac{2a}{\pi}$ un $|OD| > \frac{2a}{\pi}$. Pierādījumā izmantota sakarība, ko mēs pierakstītu kā $\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$, kur α - šaurs leņķis. Pieņemot, ka $|OD|$ = a un $|OD| = \frac{2a}{\pi}$, viegli varēja konstruēt πa un tātad arī kvadrātu, kura laukums ir vienāds ar laukumu riņķim, kura rādiuss ir a.

5.14. HIPOKRĀTS NO HIOSAS. Matemātisko zināšanu fragmenti, atsevišķas teorēmas, to pierādījumi, dažādi uzdevumu risināšanas paņēmieni, kas bija iegūti dažādās matemātikas skolās pirmoreiz tika apkopoti un sistemātiski izklāstīti pazaudētajā darbā "Elementi", kura autors bija H i p o k r ā t s no Hiosas (Ἱπποκράτης, ap 450.g.pirms m.ē.). Pēc seno vēsturnieku liecībām šajā sacerējumā bija izklāstīta viela, ko Eiklīds vēlāk iekļāva savu "Elementu" pirmajās četrās grāmatās. Pašam Hipokrātam pieder trīs atklājumi.

Pirmkārt, viņš pierādīja, ka riņķa laukumi ir proporcionāli kvadrātiem, kas konstruēti uz to diametriem.

Otrkārt, nodarbojoties ar "riņķa kvadratūras" uzdevumu, Hipokrāts konstruēja līklīniju figūras — "mēnestiņus"(10.zīm.), kuriem ar cirkuli un lineālu viegli varēja konstruēt vienlielas taisnlīniju figūras. Tas nostiprināja cerību, tiesa gan — nepamatotu, ka izdosies atrisināt "riņķa kvadratūras" uzdevumu. Vienkāršākais kvadrējamais "mēnestiņš" tiek konstruēts šādi: Pusriņķī ACB ievelk vienādsānu taisnleņķa trijstūri ACB un uz tā katetēm konstruē vienādus pusriņķus ADC un CEB. Pēc Hipokrāta atklātās riņķu laukumu proporcionalitātes to diametru kvadrātiem pusriņķa ACB laukums ir divas reizes lielākas nekā katra pusriņķa AFC un GEB laukums, tātad $S_{ADC} + S_{CEB} = S_{ACB}$. No vienādības abām pusēm atņemot laukumus $S_{AFC} + S_{CGB}$, kas ir kopēji abām figūrām, iegūstam $S_{ADCF} + S_{CEBG} = S_{\Delta ACB}$ vai $S_{ADCF} = S_{\Delta ACO}$.



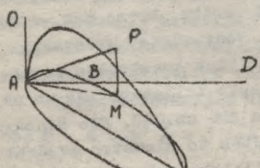
10.zīm.

Trešais Hipokrāta atklājums bija t.s. "Delosas problēmas", t.i., kuba dubultošanas uzdevuma reducēšana uz divkāršu ģeometrisko proporciju. Leģenda saista šo problēmu ar dievu prasību dubultot kubisko altāri Delfos. Hipokrāts atrada, ka, ja $a : x = x : y = y : 2a$, tad $a^3 : x^3 = a : 2a$.

Iespējams, ka pie šīs domas viņš nonāca pēc analoģijas ar kvadrāta dubultošanu, kur spēkā ir vienkārša ģeometriska proporcija $a : x = x : 2a$, no kurienes $a^2 : x^2 = a : 2a$. Taču iespējams arī, ka viņam bija zināms fakts, ka starp diviem kvadrātiskiem skaitļiem atrodas viens vidējais proporcionālais, bet starp diviem kubiskiem -- divi vidējie proporcionālie.

5.15. ARHITS NO TARENTAS.

Pēc tam, kad kuba dubultošanas problēma tika reducēta uz divu vidējo proporcionālo atrašanu, pie tās ķērās daudzi antīkie matemātiķi, no kuriem pirmais bija A r h i t s no Tarentas (Ἀρχύτας, ap 428.-365.g. pirms m.ē.). Viņš bija valstsvīrs, karavadonis un filozofs — pitagorietis, Platona draugs un Eudoksa skolotājs. Viņš nodarbojās ar matemātiku un tās pielietojumiem astronomijā, mehānikā un mūzikā.



11.zīm.

No Arhita matemātiskajiem darbiem zināmi vienīgi fragmenti. Vislielākais Arhita sasniegums ir viņa atjautīgais kuba dubultošanas problēmas risinājums ar trīs rotācijas virsmu šķēlumu. Tas parāda, ka grieķu matemātikai priekšstati par trīsdimensiju telpu bija pierasta lieta.

Pieņemsim, ka AB un AC ir nogriežņi, starp kuriem jākonstruē divi vidējie proporcionālie (11. zīm.). Konstruēsim riņķa līniju, kuras diametrs ir AC, bet AB ir šīs riņķa līnijas horda. Tālāk konstruējam taisnu cilindru, kura pamats ir šī riņķa līnija. Tā ir pirmā virsma. Tālāk uz diametra AC konstruējam pusriņķi plaknē, kas ir perpendikulāra cilindra pamatam, un šo pusriņķi griežam ap asi AO, kas ir perpendikulāra cilindra pamatam. Tā mēs iegūsim pustoru (ar iekšējo diametru nulle). Šī otrā virsma šķeļas ar cilindru pa telpisku līkni. Beidzot novelkam pieskari CD riņķa līnijai ABC punktā C un turpinām to līdz krustpunktam D ar hordas AB turpinājumu; pēc tam griežam trijstūri ACD ap AC. Iegūsim taisnu riņķa konusu -- trešo virsmu, kas krusto iepriekš iegūto telpisko līkni punktā P. Nav grūti pierādīt, ka tad ir spēkā sakarība $|AC| : |AP| = |AP| : |AM| = |AM| : |AB|$, kur punkts M ir punkta P projekcija. Gadījumā $|AC| = 2|AB|$ iegūstam $|AM|^3 = 2|AB|^3$, t.i. Delosas problēmas atrisinājumu.

5.16. TEODORS NO KIRENAS UN ZELTA ŠĶĒLUMS. T e o d o r s no Kirēnas (Θεοδώρος , ap 410.g.pirms m.ē.) bija Protagora skolnieks un Teeteta skolotājs. Teodors pierādīja, ka visas kvadrātsaknes skaitļiem no 3 līdz 17, kuri nav pilni kvadrāti, ir iracionālas. Ar kādu metodi viņš to paveica, nav zināms. Iespējams, ka tas bija saistīts ar uzdevumu par zelta šķēlumu. Šis uzdevums interesēja jau pitagoriešus, kuri ar tā palīdzību konstruēja regulāro zvaigžņu piecstūri (pentagrammu). Vairākkārtīgi šis uzdevums minēts arī Eiklīda "Elementos". Pēc Eiklīda ar šo uzdevumu nodarbojās Hipsikls (II gs.pirms m.ē.), Pappa (III gs.m.ē.), viduslaiku matemātiķi un Renesanses matemātiķi, īpaši sakarā ar zelta šķēluma pielietojumu arhitektūrā. No jauna interese par to radās pagājušā gadsimta beigās.

Ja kāds lielums a ir sadalīts divās daļās x un a-x tā, ka $a : x = x : (a-x)$, tad saka, ka ir izdarīts zelta šķēlums. Šo nosaukumu deva Leonardo da Vinči (Leonardo da Vinci, 1452.-1519.g.) Parasti zelta šķēluma noteikšanai izrēķina $\frac{a}{x}$. Ja apzīmē $\frac{a}{x} = q$, $x = \frac{a}{q}$, tad $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$. No šejienes $a^2 - ax = x^2$ vai

$\left(\frac{a}{x}\right)^2 - \frac{a}{x} - 1 = 0$ un q noteikšanai dabū vienādojumu

$$q^2 - q - 1 = 0,\ q_{1;2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},\ \text{t.i.},\ \frac{a}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

jo pēc nosacījuma otra sakne neder. Tātad izdarīt "zelta griezumu" nozīmē no visa veselā a "nogriezt" daļu x tā, lai būtu $\frac{a}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

5.17. PLATONS. Filozofiskās skolas -- Atēnu akadēmijas vadītājam P l a t o n a m (Πλάτων, 427.-347.g.pirms m.ē.) bija īpaša interese par matemātiku. Kaut arī Platons nebija matemātiķis, viņš un viņa skola uzskatīja matemātiku par ļoti nozīmīgu ne jau tās praktisko pielietojumu dēļ, kas tika uzskatīti par "zemāku" nodarbošanos, bet tādēļ, ka matemātika norāda ceļu uz "tīro ideju" pasauli, uz filozofijas gala mērķa -- dieva idejas izziņu. Par to liecina uzraksts virs Atēnu akadēmijas ieejas: "Lai neienāk tas, kas nezina ģeometriju."

Platona un dabaszinātņu skolas cīņas rezultātā zinātnieki vairāk sāka domāt par matemātisko objektu definīcijām. Pāra, nepāra u.tml. skaitļu definīcijas platoniķi gandrīz bez izmaiņām pārņēma no pitagoriešiem. Savādāk bija ar ģeometrisko objektu definīcijām. Šīs definīcijas radās dabaszinātņu skolā.

Kaut arī pats Platons neveica nekādus matemātiskus atklājumus, viņa filozofiskajos un politiskajos dialogos ir pieminēti daudzi matemātiski jautājumi. Dialogā "Republika" Platons uzskaita priekšmetus, kurus vajadzētu apgūt topošajiem valstsvīriem, pirmo reizi bez četrām pitagoriešu disciplīnām -- aritmētikas, ģeometrijas, astronomijas un mūzikas -- kā atsevišķu disciplīnu nosaukdams stereometriju. Tas, protams, nenozīmē, ka līdz Platonam grieķi nenodarbojās ar stereometriju. No tā, ka piecus regulāros daudzskaldņus sauc par "Platona ķermeņiem", neizriet, ka viņš šos daudzskaldņus atklāja. Šādu nosaukumu tie ieguva tāpēc, ka "Tīmejā" Platons piedēvē četru elementu atomiem pirmo četru regulāro daudzskaldņu formas: tetraedra formu -- uguni, ikosaedra formu -- ūdenim, oktaedra formu -- gaisam un kuba formu -- zemei. Dodekaedra formu pēc Platona domām dievs ir devis Visumam kopumā. Viduslaiku Austrumos šos daudzskaldņus tā arī sauca — uguns ķermenis, zemes ķermenis utt.

Vispazīstamākie matemātiskie fragmenti no Platona darbiem ir divas vietas no "Menona" [5] .

Pirmajā Sokrāts, vēlēdamies pierādīt, ka izziņa it kā reducējas uz dvēseles atcerēšanos par dzīvi, kas nodzīvota jau pirms dzimšanas, uzstāda zēnam vergam Menonam virkni uzvedinošu jautājumu, uz kuriem jāatbild ar "jā" vai "nē" un kuri vedina uz $\sqrt{2}$ ģeometrisku konstruēšanu (38.lpp.).

Otrajā fragmentā runa ir par to, ka trijstūri ar doto laukumu pie vieniem nosacījumiem var ievilkt dotajā riņķī, bet pie citiem — nē (42.lpp.).

Platonam piedēvē arī likumu, kā iegūt Pitagora skaitļus, kas būtu savstarpēji pirmskaitļi

$$x = 4p^2 - 1, \; y = 4p, \; z = 4p^2 + 1.$$

5.18. EUDOKSS NO KNĪDIJAS. E u d o k s s (Εὔδοξος, ap 408.-355.g. pirms m.ē.) jaunībā bija ļoti nabadzīgs. Atēnās viņš ieradās no Tarentas, kur mācījās kopā ar Arhitu, un nokļuva pie Platona. Būdams pārāk nabadzīgs, lai dzīvotu akadēmijas tuvumā, viņš gāja turp katru dienu no Pirejas, kur zivis un olīvu eļļa bija lētas un arī pajumti varēja vieglāk dabūt. Platons un Eudokss it kā esot veikuši kopīgu ceļojumu uz Ēģipti.

Bez matemātikas Eudokss nodarbojās arī ar astronomiju un medicīnu. Eudoksa svarīgākais ieguldījums matemātikā ir viņa attiecību teorija. Pēc nesamērojamības atklāšanas ģeometri centās izvairīties no attiecībām. Arī Eiklīda "Elementu" pirmajās četrās grāmatās neatradīsim attiecības, to vietā ir lietoti bieži vien diezgan asprātīgi paņēmieni. Tā kā "Elementu" V grāmatā ir izklāstīta Eudoksa attiecību teorija, tad VI grāmatā tie paši uzdevumi (jau daudz vispārīgākā veidā) ir atrisināti ar attiecību palīdzību.

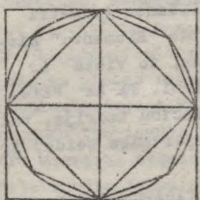
Grieķi uzskatīja, ka nesamērojamus nogriežņus nevar salīdzināt vienu ar otru ar skaitļu palīdzību (jo nebija iracionāla skaitļa jēdziena), tāpēc vajadzēja radīt jaunu no skaitļa atšķirīgu jēdzienu. Par tādu kļuva "attiecība". Bez tās vispārīgā gadījumā nevarēja aplūkot nogriežņu proporcionalitāti, tātad arī trijstūru līdzību utt.

Jēdziens "attiecība" tiek noskaidrots trīs nosacījumos. Pirmkārt, nepieciešams nosacījums, lai divi lielumi atrastos attiecībā, ir to viendabība, bet attiecības pamats ir daudzums. Otrkārt, lai varētu runāt par divu lielumu attiecību, ja $A > B$, nepieciešams, lai eksistētu tāds skaitlis n, ka $A < nB$. Beidzot, treškārt, dota attiecību vienādības definīcija, kas ir vissvarīgākā, jo tikai,pateicoties tai,attiecības var izmantot matemātikā. Lielumu A un B attiecība ir vienāda ar lielumu C un D attiecību, ja jebkuriem diviem veseliem skaitļiem m un n, no tā, ka $mA \geqslant nB$ seko, ka $mC \geqslant nD$, un no $mA \leqslant nB$ seko, ka $mC \leqslant nD$.

Eudoksa attiecību teorija ļāva uzskatīt, ka divu nogriežņu attiecība eksistē arī tad, ja tie ir nesamērojami. Šī teorija zināmā mērā aizstāja reālo skaitļu teoriju un deva iespēju radīt līdzīgu ģeometrisko figūru teoriju.

Eudoksa attiecību teorija ir cieši saistīta ar vēl vienu Eudoksa ieguldījumu matemātikā, ar metodi, kas XVIII gs. ieguva nosaukumu "izsmelšanas metode". Arhimeds sacerējuma "Par lodi un cilindru" pirmās grāmatas priekšvārdā atzīmēja, ka Eudokss pierādīja Demokrīta atklāto, bet nepierādīto teorēmu, ka piramīdas tilpums vienāds ar trešdaļu no tādas prizmas tilpuma, kurai ar piramīdu ir vienāds pamats un augstums, un analoģiska satura teorēmu par konusu un cilindru.

Izsmelšanas metode, kuru Eiklīds izmanto "Elementu" XII grāmatā, ir sekojoša.



12.zīm.

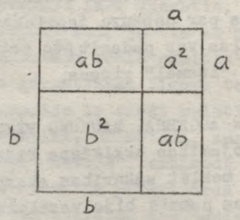
Lai pierādītu, ka riņķu laukumi attiecas viens pret otru kā uz to diametriem konstruētu kvadrātu laukumi, ievelk riņķos ar diametriem d un D kvadrātus, kuru laukumi ir a un A (12.zīm.). Tad $\frac{a}{A} = \frac{d}{D}$. Pēc tam katrā riņķī ievelk astoņstūri, 16-stūri, 32-stūri utt. Atbilstošo daudzstūru laukumu attiecība paliek nemainīga. Ap riņķi apvilktā kvadrāta laukums ir lielāks nekā riņķa laukums, bet riņķī ievilktā kvadrāta laukums ir puse apvilktā kvadrāta laukuma, tāpēc ievilktā kvadrāta laukums ir lielāks nekā puse no riņķa laukuma. Ievilktā astoņstūra laukums ir lielāks nekā trīs ceturtdaļas riņķa laukuma. Pēc Eudoksa lemmas -- ja no kāda lieluma M vispirms atņem lielumu, kas lielāks par pusi no M, pēc tam no atlikuma -- lielumu, kas lielāks par šī atlikuma pusi utt., tad pēc pietiekami liela soļu skaita atlikumā vienmēr var iegūt lielumu, kas mazāks par jebkuru iepriekš uzdotu lielumu m. Atlikušās riņķu daļas var padarīt pēc patikas mazas. Tātad ievilktie daudzstūri "izsmeļ" riņķus.

5.19. ĢEOMETRISKĀ ALGEBRA. LAUKUMU PIELIKŠANA. Divu nogriežņu nesamērojamības atklāšana bija iemesls, kāpēc grieķu matemātiķi sāka meklēt sakarības starp aritmētiku un ģeometriju. Aritmētikas pamatā bija veselais skaitlis, racionālos skaitļus uzskatīja par veselo skaitļu pāri. Pēc tam, kad izrādījās, ka ne katru divu nogriežņu attiecību var izteikt ar veselu skaitļu attiecību, iepriekšējā matemātiskā sistēma tika izjaukta. Sākās meklējumi, kā izkļūt no šīs krīzes. Mēs varētu teikt, ka pastāvēja vairākas iespējas:

1) varēja paplašināt skaitļa jēdzienu tā, lai ar jauno skaitļu palīdzību varētu izteikt jebkuru divu nogriežņu attiecību;
2) būvēt matemātiku uz racionālo skaitļu aritmētikas pamata, definējot visas algebriskās operācijas ģeometriskiem lielumiem;
3) atteikties no mēģinājumiem izveidot stingri loģisku mācību par nesamērojamību un pāriet uz brīvu operēšanu ar iracionalitātēm (tā vēlāk tika darīts Indijā un viduslaiku Eiropā).

Šis trešais ceļš grieķiem nebija pieņemams, jo tas nozīmēja atkāpšanos no matemātikas deduktīvās uzbūves pamatidejas. Pirmais ceļš tik agrīnā matemātikas stadijā, kādā bija pitagoriešu matemātika, bija pārāk grūts. Bija daži mēģinājumi paplašināt skaitļa jēdzienu, bet tie izrādījās neveiksmīgi. Tādēļ grieķu matemātika izvēlējās otro iespēju. Kaut arī stratēģiski tā izrādījās kļūda, tomēr sākotnēji antīkā matemātika ieguva taktiskas priekšrocības. Tā radās ģeometriskā algebra.

Ar nogriežņiem definēja visas aritmētiskās darbības: saskaitīšanu — kā viena nogriežņa pielikšanu otram, atņemšanu — kā nogriežņa daļas "nogriešanu" (noņemšanu). Par divu nogriežņu reizinājumu uzskatīja taisnstūri ar malām a un b, kā arī šī taisnstūra laukumu. Triju nogriežņu reizināšanas rezultāts ir paralēlskaldnis, bet vairāk par trīs nogriežņu reizinājumu neaplūkoja. Dalīšana izrādījās iespējama tikai tad, ja dalāmā izmēri bija lielāki nekā dalītāja izmēri.



13.zīm.

Ģeometriskajā algebrā ietilpa arī algebrisku identitāšu ģeometriska interpretācija, piemēram (13.zīm.):

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Vispārīgā veidā laukumu pielikšanas metodi lietoja, lai risinātu uzdevumus, kas reducējās uz kvadrātvienādojumu ar vienu nezināmo atrisināšanu.

6. Matemātika hellēņu zemēs

6.1. HELLĒNISMS. IV gs. pirms m.ē. beigās pēc Maķedonijas Aleksandra karagājieniem tika radīta milzīga, bet neilgi pastāvoša impērija, kas apvienoja Grieķiju, Ēģipti, Mezopotāmiju, Persiju, Priekšāziju, Vidusjūras piekrasti un vairākas citas Vidusjūras un Tuvo un Vidējo Austrumu zemes. Pēc Aleksandra nāves viņa impērija sadalījās, veidojot Ptolemeju valsti Afrikā, Selevkīdu valsti Āzijā un virkni sīkāku valstiņu. Dažādo Aleksandra impērijas tautu saskarsme un savstarpējie kontakti veicināja kultūras un zinātnes attīstību šajās valstīs. Šīs valstis sauc par h e l l ē ņ u valstīm, jo tajās attīstījās un nostiprinājās seno grieķu kultūra un tradīcijas, par valsts valodu kļuva grieķu valoda. Hellēņu valstu lielākie kultūras centri bija Aleksandrija, Antiohija, Pergāma un Rodosas sala. Hellēņu valstu pastāvēšanas vēsturisko periodu sauc par h e l l ē n i s m u, un tas turpinājās līdz mūsu ēras I gadsimtam, kad šīs valstis iekaroja Romas impērija.

6.2. ALEKSANDRIJAS SKOLA. Hellēnisma perioda ievērojamākais kultūras centrs bija Aleksandrija, kuru 332.-331.g. pirms m.ē. Ēģiptē nodibināja Aleksandrs un kura vēlāk kļuva par Ptolemeju valsts galvaspilsētu. Šeit tika uzkrātas karagājienos salaupītās bagātības. Šeit — Austrumu un Rietumu tirdzniecisko ceļu krustpunktā — attīstījās jūras tirdzniecība. Nežēlīgi ekspluatējot vergu darbu, attīstījās amatniecība. Atšķirībā no klasiskās grieķu kultūras Aleksandrijas kultūrai raksturīga lielāka specializācija. Zinātnes centrs bija Muzejs, kur glabājās vairāki simti tūkstošu rakstu ruļļu. Aleksandrijā sāka izdalīties atsevišķas patstāvīgas zinātnes. Tās bija astronomija, matemātika un mehānika kā precīzu un sistemātisku dabaszinātņu aizsākums.

Matemātikas, tāpat kā dabas un tehnisko zinātņu, uzplaukumu tieši vai netieši veicināja Aleksandrijas perioda sabiedrības praktiskās vajadzības. Ptolemeji, cenzdamies līdzināties klasiskajai grieķu un senajai ēģiptiešu kultūrai, cēla pilis, hidrotehniskas ierīces. Bez tam pastāvēja profesionāla armija, kurai arī bija savas vajadzības pēc tehnikas un līdz ar to arī matemātikas attīstības.

Antīkās pasaules matemātika Aleksandrijā sasniedza savu visaugstāko attīstības pakāpi, īpaši trešajā gadsimtā pirms m.ē., kad uz Aleksandriju tika uzaicināti daudzi izcili zinātnieki, no kuriem paši slavenākie bija Eiklīds, Eratostens un Apollonijs no Pergījas. Šī perioda izcilāko zinātnieku pulkā ir arī Arhimeds; viņš gan nekad nepameta savas dzimtās Sirakūzas. Ar savu zinātnisko līmeni, priekšmeta vispusīgo apskatu un tā traktējuma pamatojumu šī perioda matemātika tālu aiz sevis atstāja pat pašus augstākos babiloniešu, ēģiptiešu un grieķu sasniegumus.

6.3. EIKLĪDS.

Kaut arī jau agrāk bija mēģinājumi izklāstīt svarīgākās matemātiskās zināšanas kā vienu veselu teoriju noteiktā secībā, tomēr E i k l ī d s (Εὐκλείδης, IV-III gs. pirms m.ē.) bija pirmais, kurš vispilnīgāk šo darbu veica. Tāpat kā par daudzu senatnes izcilo matemātiķu dzīvi, arī par Eiklīdu saglabājušās ļoti trūcīgas ziņas. Zināms, ka viņš ir dzīvojis Aleksandrijā Ptolemeja I galmā (Ptolemejs valdīja no 306.-283.g. pirms m.ē.). Eiklīds Aleksandrijā nodibināja savu skolu. Eiklīds ir sarakstījis vairākus sacerējumus, tomēr matemātikas vēsturē viņš ir iegājis kā "Elementu" (grieķiski Στοιχεῖα) autors.

Eiklīda "Elementi" sastāv no 13 grāmatām. Tajās pētītas plaknes ģeometriskās figūras un aplūkota mācība par veseliem (pozitīviem) skaitļiem un to daļām. Tā kā telpisku figūru attiecības ne vienmēr var izteikt ar racionāliem skaitļiem, tad tiek aplūkoti arī nesamērojami ģeometriski lielumi. Eiklīds aplūko virsmu savstarpējo novietojumu un ķermeņu tilpumu aprēķināšanu. Tādējādi "Elementos" tika izklāstīti planimetrijas, stereometrijas un aritmētikas pamati.

"Elementu" galvenā zinātniskā vērtība ir tā, ka tie veidoti pēc vienotas loģiskas shēmas; visas tajos esošās teorijas ir stingri loģiski pamatotas. Eiklīda darbā ģeometrijas teorēmas ir formulētas un pierādītas pēc šādas shēmas:

1) vispārīgais formulējums;

2) dotie lielumi, kas vienmēr attēloti zīmējumā;

3) definīcija vai norādījums (diorismus), kurā ar atsauci uz konkrētiem dotajiem lielumiem tiek norādīts, kas jādara vai jāpierāda;

4) konstrukcija, kurā ietilpst arī papildinājumi, kādi jāizdara, lai varētu veikt pierādījumu;

5) pierādījums;

6) vispārīgā veidā dots secinājums.

Eiklīda "Elementi" sākas ar definīcijām, postulātiem un vispārīgiem jēdzieniem.

Definīcijas.

Gandrīz katrā "Elementu" grāmatā (izņemot VIII, IX, XII un XIII) ir dotas definīcijas. Eiklīda definīcijas galvenokārt ir aprakstošas, piemēram:

"Punkts ir tas, kam nav daļu",

"Līnija ir tas, kam ir garums, bet nav platuma".

Līdz ar aprakstošām definīcijām ir arī tādas, kurās norādīts, kā ķermenis vai figūra iegūti, piemēram:

"Taisnas figūras ir tās, kuras atrodas starp taisnēm",

"Ja ap nekustīgu pusriņķa diametru rotējošs pusriņķis atkal nonāks tai pašā stāvoklī, no kura viņš sāka kustēties, tad ietvertais ķermenis ir sfēra".

Ir arī aksiomātiskas definīcijas:

"Vienādi riņķi ir tie, kuriem diametri ir vienādi".

Eiklīda postulāti.

Eiklīda "Elementu" pirmajā grāmatā ir formulēti pieci postulāti *):

---

*) Latīņu vārds "postulatum" nozīmē "pieprasījums" — kādas teorijas princips vai atzinums, kas tajā tiek pieņemts par pareizu un nav pierādāms šīs teorijas ietvaros. Mūsdienu zinātnes metodoloģijā jēdzienus "postulāts" un "aksioma" lieto kā līdzvērtīgus.

1. No jebkura punkta līdz jebkuram punktam var novilkt taisnu līniju.
2. Ierobežotu taisni var nepārtraukti turpināt pa taisni.
3. No jebkura centra ar jebkuru atvērumu var novilkt riņķi.
4. Visi taisnie leņķi ir vienādi.
5. Ja taisne, kas krīt uz divām taisnēm un veido iekšējus (vai ārējus) vienpusleņķus, summā mazākus par diviem taisniem, tad neierobežoti turpinātas šīs divas taisnes satiksies tajā pusē, kur šī leņķu summa ir mazāka par diviem taisniem leņķiem.

Pirmajos trīs postulātos pieņemts, ka lineāls un cirkulis ir ideāli -- ar jebkuru garumu un jebkuru atvērumu; tas ļauj konstruēt ideālas taisnes un riņķa līnijas.

Piekto postulātu sauc par paralelitātes postulātu un mūsdienu ģeometrijā to parasti aizstāj ar ekvivalentu apgalvojumu -- paralēlo taišņu aksiomu: "Caur punktu ārpus dotās taisnes var novilkt tikai vienu taisni, kura nekrusto doto taisni".

Eiklīda postulātiem bija liela nozīme ģeometrijas attīstībā. Kā zināms, katras aksiomātiskas teorijas pamatā ir aksiomu sistēma, kurai jābūt pilnai, nepretrunīgai un neatkarīgai. Aksiomu sistēmas pilnīgums nozīmē, ka no aksiomām loģisku spriedumu ceļā var pierādīt visus apgalvojumus, kas attiecīgajā teorijā ir patiesi. Aksiomu nepretrunīgums ir prasība, saskaņā ar kuru dotās teorijas ietvaros nevar pierādīt kādu apgalvojumu un šī apgalvojuma noliegumu. Aksiomu sistēmas neatkarība nozīmē, ka nevienu no šīs sistēmas aksiomām nevar pierādīt, izmantojot pārējās aksiomas. Šiem noteikumiem atbilstoša aksiomu sistēma ir Eiklīda pieci postulāti, un tādējādi "Elementos" iztirzātā Eiklīda ģeometrija ir pirmā aksiomātiskā teorija, kas savu nozīmi nav zaudējusi vēl mūsu dienās un ir vērtējama kā viens no visizcilākajiem antīkās zinātnes sasniegumiem.

Vairāk nekā divi tūkstoši gadu ilgajā ģeometrijas attīstības vēsturē īpaša loma bija Eiklīda 5.postulātam -- paralēlo taišņu aksiomai. Jau Eiklīda laikabiedru uzmanību saistīja apstāklis, ka 5.postulātu nav iespējams tieši pārbaudīt praksē;

tātad, prakse neapstiprina, bet arī nenoliedz šī apgalvojuma patiesumu. Līdz ar to 5.postulātu uzskatīja par teorēmu, ko nesekmīgi centās pierādīt ar pārējo postulātu palīdzību. Taču katru reizi spriedumos bija loģiska kļūda, jo tika izmantoti apgalvojumi, kas ekvivalenti pierādāmajam. Tādējādi līdz pat XIX gs. sākumam Eiklīda 5.postulātu uzskatīja par nepierādītu ģeometrijas teorēmu. Tikai 1826.gadā N.Lobačevskis (Николай Лобачевский, 1794.-1856.g.) parādīja, ka paralelitātes aksiomu nav iespējams loģiski iegūt no citām Eiklīda aksiomām (Eiklīda aksiomu sistēma ir neatkarīga). Pievienojot pirmajiem četriem Eiklīda postulātiem piektā postulāta pretējo apgalvojumu ("caur punktu ārpus dotas taisnes var novilkt vismaz divas taisnes, kas nekrusto doto taisni"), Lobačevskis ieguva aksiomu sistēmu, no kuras izveidoja jaunu aksiomātisku teoriju — neeiklīda ģeometriju.

Aksiomas.

Par aksiomām Eiklīda "Elementos" ir nosaukti deviņi apgalvojumi, no kuriem pirmos sešus, izmantojot algebrisko pierakstu, var izteikt šādi:

1. Ja $A = C$ un $B = C$, tad $A = B$.
2. Ja $A = B$, tad $A + C = B + C$.
3. Ja $A = B$, tad $A - C = B - C$.
4. Ja $A \neq B$, tad $A + C \neq B + C$.
5. Ja $A = B$, tad $2A = 2B$.
6. Ja $A = B$, tad $\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}B$.

Protams, Eiklīds šīs aksiomas izteica ar vārdiem, bez tam tās aplūkoja kā sakarības starp ģeometriskiem lielumiem — līnijām, virsmām, ķermeņiem, bet ne skaitļiem.

7. Viens ar otru savietotie ir savā starpā vienādi.

Eiklīds to saprata tā, ka, ja figūras, vienu uz otru "uzliekot", sakrīt, tad tās ir vienlielas, t.i., tām ir vienādi laukumi. Pieņemot šo aksiomu, Eiklīds , kā redzams, sekoja tradīcijai, jo "uzlikšanu" lietoja jau T lless. Bet Platons un Aristotelis uzskatīja, ka "matemātiskajām zinātnēm kustība ir sveša". Kaut arī Eiklīds pats izmantoja kustību (piemēram, lodes definīcijā), viņš tomēr centās no šī

jēdziena izmantošanas izvairīties.
8. Veselais ir lielāks nekā daļa.
9. Divas taisnes nesatur telpu.

Uzskata, ka šīs pēdējās divas aksiomas ir vēlākas izcelsmes nekā iepriekšējās.

Planimetrija Eiklīda "Elementos".

Pirmajās četrās Eiklīda grāmatās ir izklāstīta pirmā "Elementu" daļa -- mācība par plaknes figūru vienādību.

I grāmata sākas ar 23 definīcijām, pēc tam aplūkotas 48 teorēmas, kuras var sadalīt trīs grupās. No 1. līdz 26. teorēmai galvenokārt runa ir par trijstūriem un perpendikuliem. Otrajā grupā (27.-32.teorēma) dota paralēlo taišņu teorija, kura tiek izmantota pēdējā šīs grupas teorēmā, lai pierādītu, ka trijstūra iekšējo leņķu summa ir vienāda ar diviem taisniem leņķiem. Trešajā grupā (33.-48.teorēma) aplūkoti paralelogrami, kvadrāti un trijstūri, kā arī salīdzinātas figūras, kurām ir vienādi laukumi. I grāmatas pēdējās divas teorēmas ir Pitagora teorēma un tai apgriezta teorēma.

II grāmatā (tā ir visīsākā) ir 14 teorēmas un 2 definīcijas. Šajā grāmatā izklāstīta grieķu ģeometriskā algebra.

III grāmatā ir 37 teorēmas par riņķi un riņķa līniju. Grāmatas sākumā dotas 11 definīcijas, ar kurām tiek definēts pieskares jēdziens (kā taisne, kas "tiekas ar riņķa līniju, bet nekrusto to"), divu riņķa līniju pieskaršanās u.c. No III grāmatas teorēmām interesantākā ir 16.teorēma, kurā runa ir par leņķi starp pieskari un riņķa līniju, t.i., "ragveida" leņķi, un tiek pierādīts, ka šis leņķis ir mazāks par jebkuru taisnlīniju šauro leņķi.

IV grāmatā, kas sastāv no 16 teorēmām, Eiklīds aplūko riņķī ievilktas un ap to apvilktas figūras, pirms tam definējot šos jēdzienus.

Aritmētika un proporciju teorija Eiklīda "Elementos".

Ja pirmajās četrās grāmatās tiek aplūkota nogriežņu un laukumu vienādība, tad V un VI grāmatā tiek pētīta to nevienādība. Šo nevienādību pamatā ir proporciju teorija, ko sīki izstrādāja Eudokss, bet sistemātiski izklāstīja Eiklīds

V grāmatas 25 teorēmās. Pirms tam dotas 18 definīcijas, kas lielākoties attiecas uz dažāda veida attiecībām un proporcijām.

Eiklīds lielumus attēloja ar nogriežņiem, kuru attiecības vispārīgā gadījumā nevarēja izteikt ar skaitļiem, jo neeksistēja iracionāla skaitļa jēdziens.

VI grāmatā proporciju mācība pielietota planimetrijā. Nākošajās "Elementu" grāmatās -- VII, VIII un IX -- izstrādāta teorētiskā aritmētika, savāktas tās zināšanas par veseliem skaitļiem, kas bija uzkrātas līdz Eiklīda laikam. VII grāmatā ir dots t.s. Eiklīda algoritms, kuru izmantojam vēl tagad, lai atrastu divu skaitļu lielāko kopīgo dalītāju.

VIII grāmatā aplūkota ģeometriskā progresija, bet IX grāmatā -- pirmskaitļu teorija.

"Elementu" X grāmata.

Trešā daļa no visa Eiklīda darba ietverta vislielākajā pēc apjoma un diezgan grūtajā X grāmatā. Šajā grāmatā, kurā ir 115 teorēmas, dota iracionalitāšu klasifikācija, kuras iegūst, risinot kvadrātiskus un uz tiem reducējamos bikvadrātiskos vienādojumus ar veseliem koeficientiem. Sākumā dotas samērojamu un nesamērojamu lielumu definīcijas. Pēc tam tiek iegūti 13 iracionalitāšu veidi. Tie visi ir vienādojumu

$$(x^2 \pm 2ax)(c \pm bc^2) = 0 \text{ vai } (x^4 \pm 2ax^2)(c^2 \pm bc^4) = 0$$

pozitīvās saknes, kur c -- racionāls nogrieznis, a un b -- koeficienti.

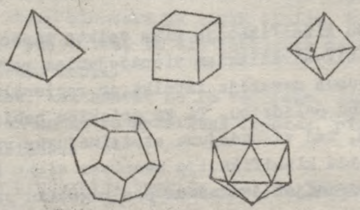
Iracionalitāšu klasifikācija tika veikta tāpēc, ka uz kvadrātiskiem vai bikvadrātiskiem vienādojumiem reducējamu uzdevumu atrisinājumus nevarēja izteikt ar racionālu skaitļu un doto nogriežņu palīdzību. Tā kā grieķiem nebija algebriska pieraksta, tad vienādojumu atrisinājumus vajadzēja dot vārdiski. Eiklīda klasifikācija neaptver visas iespējamās iracionalitātes, nerunājot jau nemaz par augstāku pakāpju iracionalitātēm.

Stereometrija Eiklīda "Elementos".

"Elementu" XI, XII un XIII grāmatas ir veltītas stereometrijai. Sākumā dotas 28 definīcijas. Pirmā ir ķermeņa definīcija:

"Ķermenis ir tas, kam ir garums, platums un dziļums".
Pēc tam dotas pret plakni perpendikulāras taisnes un divu perpendikulāru plakņu definīcijas. Eiklīds gan nepierāda, ka šādi perpendikuli vispār eksistē. Pēc tam tiek dotas slīpnes, paralēlu plakņu, telpisku ķermeņu līdzības un vienādības definīcijas. Tālāk tiek definēti piramīda, prizma, sfēra, konuss, cilindrs, kubs, oktaedrs, ikosaedrs un dodakaedrs. Sfēru, konusu un cilindru definē kā rotācijas ķermeņus.

XI grāmata, kurā ir 39 teorēmas, veidota līdzīgi kā I grāmata. XII grāmatā dotas 18 teorēmas, kurās izmantota izsmelšanas metode , lai pierādītu piramīdas, konusa, cilindra un sfēras tilpumu aprēķināšanas formulas. Jāatzīmē, ka Eiklīds nekur neveic riņķa laukuma vai lodes tilpuma aprēķinus. Ne jau tāpēc, ka nebūtu zināmi tuvinātie aprēķini, bet gan tāpēc, ka šie aprēķini attiecās uz praktisko ģeodēziju nevis uz teorētisko ģeometriju. XIII grāmatā aplūkoti sfērā ievilkti regulāri daudzskaldņi. Grāmata noslēdzas ar piebildi, ka bez šiem pieciem regulārajiem daudzskaldņiem — tetraedra, kuba, oktaedra, ikosaedra un dodakaedra — citus regulārus daudzskaldņus konstruēt nav iespējams (14. zīm.).



14.zīm.

Kaut arī nav tiešu norādījumu, kuras teorēmas ir Eiklīda paša dotas un kuras ir aizgūtas no citiem autoriem, tomēr skaidrs, ka tik grandiozu sistematizācijas darbu varēja veikt vienīgi izcils ģeometrs.

6.4. SAMOSAS ARISTARHS. Samosas A r i s t a r h s (Ἀρίσταρχος, ap 310.-230.g. pirms m.ē.) galvenokārt ir pazīstams kā izcils astronoms, bet viņš ir bijis arī matemātiķis. Aristarhs mācīja, ka Zeme griežas ap savu asi un griežas ap Sauli; ka nekustīgo zvaigžņu sfēras rādiuss tik reizes pārsniedz riņķa izmērus, pa kuru kustas Zeme, cik reizes šī riņķa perimetrs pārsniedz Saules diametru. Šo uzskatu dēļ Aristarhs tika apvainots bezdievībā un bija spiests atstāt Atēnas. Aristarha idejas vēlāk attīstīja indiešu matemātiķis Ariabhata (ap 476.g.), Horezmas matemātiķis al-Biruni(973.-1048.g.) un poļu astronoms Koperniks (Nicolaus Copernicus, 1473.-1543.g.) — heliocentriskās sistēmas radītājs.

No Aristarha darbiem ir saglabājies sacerējums "Par Saules un Mēness izmēriem un attālumiem". Šajā darbā aplūkoti arī jautājumi, kas attiecas uz trigonometriskām funkcijām. Aristarhs šīs funkcijas neizskaitļo, bet vienīgi norāda, kādās robežās atrodas to vērtības. Viņš izmanto divus pieņēmumus:

1. Ja α ir leņķis, ko mēra radiānos, pie kam $\alpha < \frac{\pi}{2}$, tad attiecība $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ samazinās, bet attiecība $\frac{tg\alpha}{\alpha}$ pieaug, kad α pieaug no 0 līdz $\frac{\pi}{2}$.
2. Ja β ir cits leņķis, ko mēra radiānos, pie kam $\beta < \frac{\pi}{2}$, tad $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{tg\alpha}{tg\beta}$.

Protams, Aristarhs neizmanto šos apzīmējumus, bet gan dod vārdisku aprakstu, izmantojot taisna leņķa daļas, riņķa lokus, to hordas un pieskares.

6.5. ARHIMEDS. Hellēnisma laikmetā dzīvoja arī izcilais matemātiķis un mehāniķis A r h i m e d s (Ἀρχιμήδης, ap 287.-212.g.pirms m.ē.). Viņš piedzima Sicīlijas salā Sirakūzās. Izglītību Arhimeds guva no sava tēva —

astronoma un matemātiķa Fīdija, bet vēlāk mācījās Aleksandrijā, kur sadraudzējās ar Eiklīda skolniekiem. Pēc atgriešanās dzimtenē Arhimeds rakstīja viņiem vēstules par zinātniskiem jautājumiem (dažas no šīm vēstulēm ir saglabājušās). Arhimeds savas zināšanas plaši lietoja praksē -- jo sevišķi savas dzimtās pilsētas aizsardzībā. Arhimedu nogalināja romiešu iebrukuma laikā Sirakūzās 212.g. pirms m.ē.

Atšķirībā no lielā sistematizētāja Eiklīda Arhimeds matemātikā ieviesa savus paša atklājumus, galvenokārt aprēķinādams plaknes līklīniju figūru laukumus un liektu virsmu ierobežotu ķermeņu virsmu laukumus un tilpumus. Šie aprēķini bija integrālrēķinu pirmsākumi.

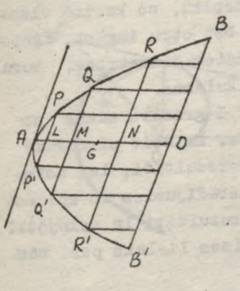
Tāpat kā gandrīz visos seno autoru darbos, arī Arhimeda sacerējumos netiek atklātas analītiskās metodes, ar kurām rezultāti iegūti.

Arhimeda darbi ir sarakstīti aptuveni šādā secībā:

1) "Par plakņu līdzsvaru" -- I grāmata,
2) "Parabolas kvadratūra",
3) "Par plakņu līdzsvaru" -- II grāmata,
4) "Sūtījums Eratosfēnam par ģeometrisku uzdevumu mehānisko atrisināšanas metodi",
5) "Par lodi un cilindru" -- I un II grāmata,
6) "Par spirālēm",
7) "Par konoīdiem un sferoīdiem",
8) "Par peldošiem ķermeņiem" -- I un II grāmata,
9) "Riņķa mērīšana",
10) "Smilšu graudiņu aprēķini" ("Psammīts").

Darbā "Par plakņu līdzsvaru" stingri ģeometriski tiek izklāstīti teorētiskās mehānikas principi. Šeit galvenais uzdevums ir paralelograma, trijstūra un trapeces smaguma centra noteikšana. Otrajā grāmatā Arhimeds nosaka arī paraboliska segmenta smaguma centru.

Lai to atrastu, segmentā tiek ievilkts trijstūris BAB', kur A ir parabolas punkts, kurā pieskare ir paralēla hordai BB'. Divos jaunajos segmentos ievelk trijstūrus BQA un AQ'B', pēc tam no jauna izveidotajos četros segmentos ievelk trijstūri BRQ utt. (15. zīm.).



15.zīm.

Aplūkojot ievilkto figūru, Arhimeds pierāda, ka caur punktiem R, Q, P, Q', P', R' novilktie diametri (paralēli AO) dala /BB'/ vienādās daļās, bet taisnes PP', QQ', RR', kas paralēlas (BB'), dala /AO/ nepāra skaitļu proporcijā, t.i., /AL/ : /LM/ : /MN/ = 1 : 3 : 5 : 7. Ievilktās figūras smaguma centrs (un arī paraboliskā segmenta smaguma centrs) atrodas uz taisnes AO. To pierāda, pieņemot pretējo. Paraboliskā segmenta smaguma centrs atrodas tuvāk virsotnei A nekā ievilktās figūras smaguma centrs, tomēr attālumu starp šiem diviem centriem var padarīt mazāku par jebkuru iepriekš uzdotu lielumu, ja vien palielina ievilktās figūras malu skaitu. Beigās Arhimeds secina, ka smaguma centram ir spēkā attiecība /AG/ : /GO/ = 3 : 2, kā arī atrod smaguma centru figūrai, ko ierobežo parabola un hordas PP' un BB'.

Darba "Parabolas kvadratūra" nosaukums ir radies vēlāk, jo Arhimeds nelietoja Apollonija terminu "parabola", bet gan "taisna konusa šķēlums". Grāmatas priekšvārdā Arhimeds uzsver savu prioritāti jautājumā par laukuma aprēķināšanu parabolas segmentam, ko atšķeļ brīvi izraudzīta horda. Sākotnēji viņš šo laukumu atradis ar mehānikas palīdzību, bet pēc tam pierādījis ar ģeometrijas metodēm (ar izsmelšanas metodi).

Arhimeds pilnveidoja Eudoksa metodi. Uzdevumu atrisināšanai viņš faktiski lietoja augšējo un apakšējo integrālo summu un izdarīja robežpāreju.

Darbā "Par metodi" ir 16 teorēmas. Arhimeds pierāda, ka tilpums ap lodi apvilktam taisnam riņķa cilindram, kura augstums ir vienāds ar lodes diametru (vai elipsoīda rotācijas asi), ir $\frac{3}{2}$ lodes (vai elipsoīda) tilpuma. Tālāk tiek atrasti tilpumi segmentiem, ko no rotācijas ķermeņiem (paraboloīda, lodes, elipsoīda un divdobumu hiperboloīda) atšķeļ plakne, kas perpendikulāra rotācijas asij. Beigās

Arhimeds aprēķina tilpumus diviem ķermeņiem, no kuriem viens ir iegūts, cilindru šķeļot ar plakni, bet otru iegūst, šķeļot divus taisnus riņķa cilindrus ar vienādiem diametriem, kuru rotācijas asis ir savstarpēji perpendikulāras.

Sacerējuma "Par lodi un cilindru" I grāmata sākas ar vēstuli Dosifejam, kurā Arhimeds norāda, ka šeit pirmoreiz tiek publicēti viņa iegūtie oriģinālie rezultāti, lai matemātiķiem būtu iespēja iepazīties ar pierādījumiem un spriest par to vērtību. Šie I grāmatas jaunie rezultāti ir sekojoši:

1) sfēras virsmas laukums ir četras reizes lielāks par tās lielā riņķa laukumu;

2) lodes virsmas segmenta laukums ir vienāds ar tādu riņķa laukumu, kura rādiuss ir vienāds ar attālumu no segmenta virsotnes līdz segmenta riņķa perifērijai,

3) ap lodi apvilkta cilindra, kura augstums ir vienāds ar tās diametru, tilpums ir trīs puses sfēras tilpuma,

4) šī cilindra pilnas virsmas laukums ir trīs puses sfēras virsmas laukuma. (Pēdējie divi atklājumi tika iemūžināti Arhimeda kapakmenī). Darba II grāmatā aplūkoti seši uzdevumi un trīs teorēmas.

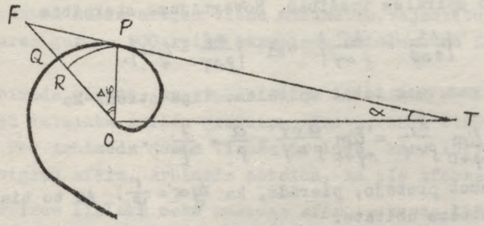
Darbā "Par spirālēm" Arhimeds izstrādāja pieskares noteikšanas metodes. Šīs metodes gan tika pielietotas tikai spirālei, taču to vispārīgums ļauj tās izmantot, lai atrastu pieskari jebkurai gludai, nepārtrauktai līknei.

Spirāli $\rho = a\varphi$ (mūsu apzīmējumos) Arhimeds apraksta kinemātiski: taisne OA vienmērīgi rotē ap punktu O (noteiktības labad pieņemsim, ka pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam) un vienlaikus pa šo taisni no O uz A kustas punkts M. Šī punkta M aprakstītā trajektorija ir spirāle.

Visus Arhimeda spriedumus var pierakstīt, izmantojot polārās koordinātes. Tā, piemēram, Arhimeds pierāda, ka spirāles rādiusvektori attiecas kā atbilstošie spirāles loki

$$\rho_1 : \rho_2 = \varphi_1 : \varphi_2 \text{, t.i., } \rho = a\varphi .$$

Pieņemsim, ka jāatrod pieskare spirāles punktā P. Lai to veiktu, Arhimeds nosaka polāro subtangenti OT, kas perpendikulāra (OP) (16.zīm.). Vispirms Arhimeds novelk rādiusvektoru OQ ($\widehat{POQ} = \Delta\varphi \to 0$) un salīdzina Δ OPT un bezgalīgi mazo Δ PRF,



16. zīm.

ko veido rādiusvektora RF nogrieznis, pieskares FP nogrieznis un loks PR. Arhimeds abus šos trijstūrus uzskata par taisnleņķa trijstūriem (pieņem, ka leņķis PRF — taisns). Pieņemot, ka abi šie trijstūri ir līdzīgi, var rakstīt, ka

$$\frac{|FR|}{|\smile RP|} \approx \frac{|QR|}{|\smile RP|} \approx \frac{|OP|}{|OT|}, \quad (1)$$

vai, izmantojot mūsdienu apzīmējumus:

$$\frac{\Delta r}{r\Delta\varphi} \approx \frac{\Delta\rho}{\rho\Delta\varphi} \approx \frac{|OP|}{|OT|} = tg\alpha,$$

kur r — pieskares rādiusvektors. No šīm "vienādībām" iegūstam

$$|OT| \approx |OP|\frac{\rho\Delta\varphi}{\Delta\rho} = \rho^2\frac{\Delta\varphi}{\Delta\rho} \quad \text{vai} \quad |OT| = \rho^2\frac{d\varphi}{d\rho}.$$

Tā kā spirālei $\rho = a\varphi$, tad $\Delta\rho = a\Delta\varphi$ un

$$|OT| = \rho^2\frac{\Delta\varphi}{a\Delta\varphi} = \rho\varphi.$$

Ja $\varphi = 2\pi$, $|OT| = 2\pi\rho$. Tātad spirāl.. var izmantot riņķa kvadratūras uzdevuma risināšanā.

Lai pamatotu "vienādības" (1), Arhimeds īpašās lemmās pēta attiecību $\frac{\Delta r}{r\Delta\varphi}$ un pierāda, ka pie pietiekami maza $\Delta\varphi$ starpību $\left|\frac{\Delta r}{r\Delta\varphi} - tg\alpha\right|$ var padarīt pēc patikas mazu vai

$$\lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\Delta r}{r\Delta\varphi} = tg\alpha.$$

šiem pierādījumiem ir vispārīgs raksturs, un tie nav atkarīgi no spirāles īpašībām. Novērtējumu starpībām

$$\left|\frac{\Delta r}{r\Delta\varphi}-\frac{\Delta\rho}{\rho\Delta\varphi}\right| \text{ vai } \left|\frac{\Delta\rho}{\rho\Delta\varphi}-tg\alpha\right|.$$

Arhimeds gan veic tikai spirālēm. Viņš atrod, ka

$$\lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\Delta\rho}{\rho\Delta\varphi}=\lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{a\Delta\varphi}{\rho\Delta\varphi}=\frac{a}{\rho}=\frac{1}{\varphi},$$

un, pieņemot pretējo, pierāda, ka $tg\alpha=\frac{1}{\varphi}$. Ar to tiek pierādīta robežas unitāte.

Traktāta "Riņķa mērīšana" fragmentā, kurš ir saglabājies, tiek pierādītas šādas trīs teorēmas:

1) riņķa laukums ir vienāds ar tādu taisnleņķa trijstūra laukumu, kura augstums ir riņķa rādiuss, bet pamats vienāds ar riņķa līnijas garumu,

2) uz riņķa diametra konstruētā kvadrāta laukums attiecas pret riņķa laukumu kā 14:11,

3) jebkuras riņķa līnijas garuma attiecība pret tās diametru ir mazāka par $3\frac{1}{7}$, bet lielāka par $3\frac{10}{71}$.

Pirmo teorēmu Arhimeds pierāda ar izsmelšanas metodi, ievelkot un apvelkot ap riņķi regulārus daudzstūrus, sākot ar regulāru sešstūri, un katru reizi dubultojot malu skaitu.

Trešajā teorēmā aptuveni nosaka skaitļa π lielumu. Aprēķins balstās uz Arhimeda nevienādību

$$\frac{265}{153}<\sqrt{3}<\frac{1351}{780}.$$

Darbs "Smilšu graudiņu aprēķini" ir aritmētisks traktāts. Tajā tiek izklāstīts veids, kā izteikt brīvi izraudzītu lielu skaitli. Savas sistēmas pamatā Arhimeds liek oktādi, kas vienāda ar miriādes miriādi, t.i., 10^8. Skaitļus līdz 10^8 sauca par "pirmajiem skaitļiem". Skaitlis 10^8 tika uzskatīts par vienību "otrajiem skaitļiem", skaitlis $10^{8\cdot 2}$ ir vienība "trešajiem skaitļiem" un tā līdz $10^{8\cdot 10^8}$. Visi šie skaitļi ir pirmais periods, pēc kura seko turpmākie periodi līdz 10^8 periodam. Vislielākais skaitlis, ko varēja izteikt ar šādu oktādu palīdzību, ir $10^{8\cdot 10^8\cdot 10^8}$. Šo skaitli varētu pierakstīt kā 1 ar 80 miljoniem miljonu nuļļu. Lai to uzrakstītu, pieņemot, ka katra nulle aizņem vienu milimetru, vajadzētu papīra lapu, kuras garums 500 reižu pārsniedz attālumu no Zemes līdz Saulei.

Arhimeds parāda, ka viņa sistēma ir vairāk nekā pietiekama, lai izteiktu smilšu graudiņu skaitu, kuri aizpildītu Visumu. Pēc Arhimeda domām Visums ir lode, kuru ietver nekustīgu zvaigžņu sfēra. Arhimeds noteica, ka šīs sfēras rādiuss ir 10^{12} reizes lielāks nekā rādiuss sfērai, kuras lielais riņķis ir Zemes orbīta. Pieņemot, ka viens smilšu graudiņš ir 10^{-14} daļa no magones sēkliņas, kuras diametrs ir $\frac{1}{40}$ pirksta platuma, Arhimeds atrada, ka smilšu graudiņu skaits Visumā ir mazāks par 10^{63}.

Šis aprēķins nebija vajadzīgs praksei. Drīzāk tas radās teorētiskas intereses dēļ kā noliegums pieņēmumam, ka pastāv "pēdējais skaitlis", ka nav iespējams saskaitīt jūras smiltis. Tas pārliecinoši parādīja cilvēka prāta abstrakcijas spēju.

Ir saglabājušās ziņas par Arhimeda atklātajiem pusregulārajiem daudzskaldņiem, t.i., tādiem izliektiem daudzskaldņiem, kuru skaldnes ir dažādu veidu regulāri daudzstūri, bet visi daudzplakņu kaktu leņķi kongruenti viens otram vai simetriski. Arhimeds atrada 13 tādus pilnīgi noteiktus ķermeņus, kuriem ir 8, 14, 26, 32, 38, 62 vai 92 skaldnes ar trijstūra, kvadrāta, piecstūra, sešstūra, astoņstūra, desmitstūra vai divpadsmitstūra formu. Desmit no šiem ķermeņiem ierobežo divu, pārējos trīs — trīs veidu daudzskaldņi. Arhimeds pusregulāros daudzskaldņus ieguva no pieciem regulārajiem daudzskaldņiem.

Novērtējot Arhimeda ieguldījumu matemātikā, vispirms jāatzīmē, ka Arhimeda matemātika ievērojami vairāk operē ar mainīgajiem lielumiem un nepārtrauktības jēdzienu nekā Eiklīda matemātika, bez tam ģeometrijā tiek izmantots kustības jēdziens. Arhimeds savos darbos ievērojami attīstīja gan laukumu un tilpumu noteikšanas metodi, gan līkņu pieskares konstruēšanas paņēmienu un algoritmu ekstrēmu noteikšanai. Arhimeds bija viens no pirmajiem matemātiķiem, kas, nosakot kādu lielumu (laukumu vai tilpumu), izteica to kā šī lieluma daļiņu summu. Novērtējot šīs daļiņas, Arhimeds ieguva t.s. augšējo un apakšējo summu, starpību starp kurām varēja padarīt pēc patikas mazu. Taisnei, riņķa līnijai, koniskajiem šķēlumiem un spirālei viņš pierādīja svarīgāko nepārtraukto lielumu īpašību — nepārtraukts lielums pieņem visas starpvērtības, kas atrodas starp divām tā vērtībām. Viņš atrada arī metodi, kā reducēt plašu ekstrēma uzdevumu klasi uz uzdevumiem par pieskares konstruēšanu. Tādējādi Arhimeds sistemātiski izstrādāja jēdzienus, kuri pēc diviem tūkstošiem gadu bija pamatā integrālrēķiniem un diferenciālrēķiniem.

Otra raksturīga Arhimeda matemātikas iezīme bija sakarības izpratšana starp atsevišķiem uzdevumiem. Tā, piemēram, viņš konstatēja, ka paraboloīda segmenta tilpumu var aprēķināt ar to pašu paņēmienu kā trijstūra laukumu, konusa tilpumu — kā spirāles sektora laukumu. Arhimeds izprata iekšējo funkcionālo saiti starp lielumiem, jo viņš galveno uzmanību vērsa nevis uz pašiem lielumiem, bet gan to izmaiņām.

Trešā, visraksturīgākā Arhimeda matemātiskās jaunrades iezīme ir tās saite ar mehāniku, hidrostatiku un astronomiju, teorijas un prakses tuvināšana, skaitļošanas matemātikas paņēmienu attīstīšana.

Arhimeda, tāpat kā viņa izcilā pēcteča Apollonija no Pergijas, darbi atstāja milzīgu ietekmi uz visu tālāko matemātikas attīstību.

Neskatoties uz to, ka ēģiptiešu vergturu valsts, kas atradās zem Ptolemeja varas, sākot ar III gs. pirms m.ē. nepārtraukto karu un sacelšanos dēļ aizvien vairāk zaudēja savu vadošo stāvokli starp hellēņu valstīm ekonomikā un kultūrā, Aleksandrijas matemātika turpināja plaukt un deva izcilus augļus laikā, kad filozofija, poēzija un māksla pārdzīvoja dziļa pagrimuma periodu. Pēc Arhimeda četrus gadsimtus nebija neviena, kas varētu līdzināties šim izcilajam prātam.

6.6. ERATOSTENS. Ir saglabājušās ziņas par vēl dažiem matemātiķiem, kuri senatnē devuši savu ieguldījumu matemātikas attīstībā. Tie bija Eratostens, Nikomeds, Diokls, Zenodors un Hipsikls -- Eiklīda "Elementu" XIV grāmatas autors.

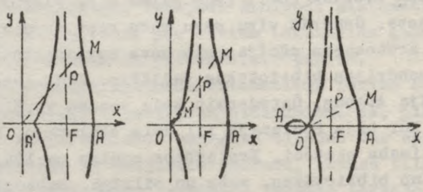
Samērā daudz biogrāfisko datu ir saglabājies par Eratostenu (Ἐρατοσθένης), kurš ir dzimis 276. vai 275. (pēc dažiem avotiem 284.) gadā pirms m.ē. Kirēnā, Afrikas ziemeļu piekrastē. Gandrīz visu savu mūžu viņš nodzīvoja Aleksandrijā. Eratostens mācījās pie sava novadnieka Kallimaha, slavenās Aleksandrijas bibliotēkas vadītāja. Kādu laiku Eratostens pavadīja Atēnās. Četrdesmit gadu vecumā viņš atgriezās Aleksandrijā, kur bija Ptolemeja III dēla skolotājs, bet vēlāk kļuva par Kallimaha pēcteci. Eratostens nomira ap 194.g. pirms m.ē., padzīts no bibliotēkas, akls un pilnīgā nabadzībā. Eratostena spējas bija vispusīgas, bet izcilus darbus Eratostens nav radījis.

Līdz mums nonākuši tikai divi Eratostena matemātiskie atklājumi: tas ir viņa slavenais "siets" ("koskinoks") un viņa Delosas problēmas risinājums. Eratostena siets ir pazīstamais paņēmiens, kā atrast visus pirmskaitļus (izņemot 2), kas mazāki par dotu naturālu skaitli n. Starp citu, daži grieķi skaitli 2 neuzskatīja par pirmskaitli.

Bez darbiem matemātikā Eratostenam bija arī darbi astronomijā, starp kuriem jāmin viņa darbs par Zemes izmēru noteikšanu. Eratostens atrada, ka zemeslodes lielā riņķa garums ir 250 000 ēģiptiešu stadijas, t.i., atkarībā no dažādiem šīs mērvienības novērtējumiem atrodas robežās no 30 līdz 46 tūkstošiem kilometru. Šis novērtējums ir precīzāks nekā Arhimeda novērtējums.

Eratostens nodarbojās arī ar hronoloģiju: uzskata, ka viņš ir izstrādājis reformu ēģiptiešu kalendāram, kurā katrs gads bija 365 dienas, pieliekot katram ceturtajam gadam vienu dienu. Šo kalendāru, kas bija atbilstošs gadalaikiem, ar pavēli ieviesa 238.g. pirms m.ē. 7.martā priesteru sanāksmē Kanopā.

6.7. NIKOMEDS. Par N i k o m e d u (Νικομήδης, II gs. pirms m.ē.), kurš dzīvoja periodā starp Eratostenu un Apolloniju, saglabājies ļoti maz ziņu. Zināms tikai tas, ka leņķa trisekcijas un kuba dubultošanas uzdevumu atrisināšanai viņš izmantoja t.s. taisnes konhoīdu ("gliemežnīcai līdzīgo"). Nikomeds konstruēja šo līkni ar paša izgudrotas ierīces palīdzību.



17.zīm.

Nikomeda konhoīda ir to punktu M ģeometriskā vieta, kuriem $|OM| = |OP| \pm b$ (17. zīm.). Atkarībā no tā, vai $b > a$, $b = a$ vai $b < a$ (kur $a = |OF|$, $b = |FA|$), iegūst trīs līknes veidus. Tās vienādojums taisnleņķa koordinātēs ir

$$(x-a)^2(x^4+y^4) - b^2x^2 = 0,$$

bet polārās koordinātēs: $\rho = \frac{a}{\cos\varphi} \pm b$.

Vēlāk konhoīdas jēdziens tika vispārināts; tā sāka saukt līkni, ko iegūst, samazinot vai palielinot dotās līknes (ne tikai taisnes) katra punkta rādiusvektoru par konstantu nogriezni b. Starp citu, E.Paskals (Etienne Pascal, 1588.-1651.g.), slavenā matemātiķa Bleza Paskala (Blaise Pascal, 1623.-1662.g.) tēvs, aplūkoja riņķa līnijas konhoīdu, kuras pols atrodas uz pašas riņķa līnijas. To tagad sauc par Paskala līkni ($\rho = a\cos\varphi + b$). Tās speciālgadījums, kad b ir vienāds ar riņķa līnijas diametru, ir kardioīda ($\rho = a\cos\varphi + a$). Nikomeds pierādīja, ka taisnes konhoīdai ir asimptota. Konhoīda ir pirmā līkne pēc taisnes un riņķa līnijas, par kuru zināms, ka tās nepārtrauktai uzzīmēšanai tika konstruēta īpaša ierīce.

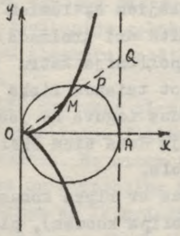
6.8. DIOKLS. Ap 200.g. pirms m.ē. (iespējams, ka arī vēlāk) dzīvoja D i o k l s (Διοκλῆς), kurš tāpat kā Nikomeds nodarbojās ar dubulto vidējo proporcionālo un atklāja līniju, kuru sauc par cisoīdu. Riņķa līnijas cisoīda (18. zīm.) ir to punktu M ģeometriskā vieta, kuriem $|OM|=|PQ|$. Tās vienādojums taisnleņķa koordinātēs ir

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x},$$

kur $2a = |OA|$, bet polārās koordinātēs

$$r = a(\frac{1}{\cos\varphi} - \cos\varphi).$$

Vēlāk sāka konstruēt cisoīdas ne tikai riņķa līnijai, bet arī citām līknēm.



18.zīm.

6.9. ZENODORS. Ir saglabājušies fragmenti no Z e n o d o r a (Ζηνόδωρος , ap 200.g. pirms m.ē.) darba "Par izoperimetriskām figūrām". Grieķu matemātiķiem interese par ģeometriskām figūrām ar vienādiem perimetriem, iespējams, radās tāpēc, ka senatnē nematemātiķiem likās paradoksāli, ka, piemēram, diviem paralelogramiem ar vienādu perimetru var būt dažādi laukumi. Zenodors pierādīja, ka no visiem regulāriem daudzstūriem ar vienādu perimetru vislielākais laukums ir tam, kuram ir visvairāk virsotņu; ka riņķa laukums ir lielāks par jebkura regulāra daudzstūra laukumu, kura perimetrs vienāds ar riņķa līnijas garumu; ka no visiem daudzstūriem, kuriem vienāds malu skaits un vienādi perimetri, vislielākais laukums ir regulāram daudzstūrim. Zenodors risināja arī stereometrijas uzdevumus.

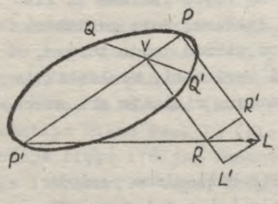
6.10. APOLLONIJS. Trešais un pēdējais hellēnisma perioda izcilais matemātiķis bija A p o l l o n i j s no Pergijas (Ἀπολλώνιος , apm. 262.-200.g. pirms m.ē.). Viņš galvenokārt dzīvoja Aleksandrijā, kur mācījās pie Eiklīda pēctečiem. Apollonijs apmeklēja tā laika lielo kultūras centru

Pergāmu — pilsētu Mazāzijas ziemeļrietumos, kur, iepazinies ar Pergāmas Eudēmu, veltīja tam sava izcilā darba "Koniskie šķēlumi" ("Konikas") otrā izdevuma pirmās divas grāmatas.

Pirmās četras "Konisko šķēlumu" grāmatas ir saglabājušās grieķu valodā, nākamās trīs — arābu tulkojumā, bet pēdējā ir pazudusi. Apollonija pieeja koniskajiem šķēlumiem atšķiras no visu viņa priekšteču (tajā skaitā arī Arhimeda) metodēm ar savu lielo vispārīgumu. Pirms Apollonija katru no trim konusa šķēlumu veidiem ieguva, šķeļot taisnus riņķa konusus. Apollonijs visus trīs šķēlumu veidus ieguva no jebkura riņķa konusa, taisna vai slīpa. Apollonijs deva šiem šķēlumiem nosaukumus elipse, hiperbola, parabola.

Pirmā "Konisko šķēlumu" grāmata sākas ar riņķa konusa definīciju (vispārīgajā gadījumā — arī slīpa konusa), pie kam konusu definē uz abām pusēm no virsotnes. Turpat tiek doti konisko šķēlumu teorijas pamatjēdzieni — koniskā šķēluma virsotne, šķēluma diametri, saistītie diametri un asis.

Apollonijs ieguva elipsi, parabolu un hiperbolu atkarībā no tā, vai plakne šķeļ tikai vienas konusa daļas visas veidotājas, vai tā ir paralēla vienai veidotājai vai šķeļ abas konusa daļas. Katrai no šīm līknēm Apollonijs noteica tās pamatīpašību, lietojot slīpleņķa koordinātes (koordinātu asis ir brīvi izraudzītā diametrs PP' un tam saistītā horda QQ'; koordinātu sākumpunkts P atrodas uz taisnes PP' (19. zīm.)).



19. zīm.

Lietojot mūsdienu algebrisko pierakstu, šīs īpašības var izteikt ar vienādojumu

$$y = 2px \pm \frac{p}{a} x^2,$$

kur mīnusa zīme atbilst elipsei, plusa zīme — hiperbolai; parabolai koeficients pie x^2 ir nulle (ar p apzīmēts līknes parametrs, $y = |QV|$, $x = |PV|$, $2a = |PP'|$, $2p = |PL|$). Protams, Apollonijs šīs īpašības izteica ar ģeometriskās algebras palīdzību.

Ievērojama pirmās grāmatas daļa veltīta pierādījumam, ka konisko šķēlumu pamatīpašība nav atkarīga no diametra izvēles, vai, mūsdienu valodā runājot, tiek pierādīta šīs īpašības invariance, pārejot no vienas koordinātu sistēmas uz otru.

II grāmata sākas ar nodaļu par hiperbolas asimptotām. Tālāk Apollonijs aplūko saistītās hiperbolas, kā arī konisko šķēlumu pieskaru īpašības un uzdevumus par pieskares konstruēšanu.

III grāmatas pirmajā daļā ir teorēmas par laukumu vienādību taisnlīniju figūrām, ko veido konisko šķēlumu pieskares un sekantes. No citām teorēmām īpaši jāatzīmē teorēmas par elipses un hiperbolas fokusu īpašībām.

Sākot ar IV grāmatu, Apollonijs "Koniskos šķēlumus" ir veltījis caram Attalam I. IV grāmatas saturā interesantākais ir pētījums par riņķa līnijas un konisko šķēlumu kopējo punktu skaitu, kā arī par divu konisko šķēlumu pieskaršanos. Šis jautājums grieķiem bija svarīgs, jo koniskajos šķēlumos iegūtās līknes izmantoja tāda uzdevuma risināšanā kā kuba dubultošana.

Ar IV grāmatu it kā noslēdzas mācības par koniskajiem šķēlumiem elementārākā daļa. V grāmata atšķiras no pārējā: gan pēc satura, gan pēc izklāsta veida tā ievērojami apsteidza savu laiku. Tajā Apollonijs aplūkoja normāles, kas vilktas no dažādiem punktiem pret koniskiem šķēlumiem,kā taišņu nogriežņus ar maksimāliem vai minimāliem garumiem. Apollonijs norāda, ka arī pirms viņa šādas taisnes ir pētītas, bet ļoti nepilnīgi, bez tam viņš piezīmē, ka šis jautājums "pieder lietām, kuras ir cienīgas, lai ar tām nodarbotos viņu pašu dēļ".

VI grāmatā aplūkoti divu taisnu līdzīgu konusu kogruentie un līdzīgie šķēlumi.

VII grāmata, kā norādīja Apollonijs, ir ievads VIII grāmatai, kura tagad pazudusi. Tajā aplūkotas hordas, kas paralēlas saistītajiem diametriem,un pierādītas pazīstamās "Apollonija teorēmas" -- par saistīto diametru garumu kvadrātu summu un uz saistītiem diametriem konstruēto paralelogramu laukumu konstantumu.

Apollonija metode bija analītiskās ģeometrijas pirmsākums. Apollonijs nelietoja koordinātes, bet viņam bija koordinātu līnijas un koordinātu leņķis; viņa koordinātu līnijas noteikti bija vērstas pa diviem saistītiem konisko šķēlumu virzieniem.

6.11. HELLĒŅU VALSTU MATEMĀTIKAS RAKSTUROJUMS. Hellēņu valstīs teorētiskās matemātikas visaugstākā uzplaukuma periodā matemātikas pielietojumu praksē bija maz. To var izskaidrot tā, ka dabaszinātnes bija vāji attīstītas un tāpēc nebija vajadzības un arī iespēju matemātikas plašai lietošanai. Dabaszinātnes sastāvēja tikai no astronomijas un mehānikas pašiem pamatiem. Fizika — zinātne, kas vēlāk kļuva par galveno matemātikas lietotāju un līdz ar to deva svarīgus tās attīstības stimulus, tad vēl būtībā nebija radusies. Konisko šķēlumu teorija tika lietota galvenokārt matemātikā, bet ārpus tās tikai vienīgi hidrostatikā (Arhimeda peldošie ķermeņi). Tikai pēc Johanna Keplera (Johann Kepler, 1571.-1630.g.) atklājumiem astronomijā koniskos šķēlumus sāka plaši lietot dabaszinātnēs.

Otrs iemesls, kāpēc matemātiku maz lietoja praksē, bija tas, ka ģeometriskā algebra aplūkoja vienīgi nogriežņu laukumus un tilpumus un tās rezultātus nevarēja vispārināt brīvi izraudzītiem lielumiem.

7. Matemātika Romas impērijas valstīs

7.1. ROMIEŠU SKAITĪŠANA UN SKAITĻU PIERAKSTI. Matemātiskās zināšanas Senajā Romā radās un attīstījās gan uz pašu romiešu, gan citu Apenīnu pussalu apdzīvojošo tautu, galvenokārt, etrusku, tehnikas un dabaszinātņu attīstības bāzes. Protams, bija jūtama arī grieķu matemātikas ietekme. Tā, piemēram, līdzīgi ir etrusku un seno romiešu skaitļu pieraksti un salikto skaitļu veidošanas princips. Romieši lietoja šādus ciparus:

I (1), V (5), X (10), L (50), C (100), D (500), M (1000), no kuriem veidoja saliktus skaitļus. Kaut arī romiešu salikto skaitļu pieraksti nav veidoti, izmantojot noteiktas bāzes dažādas pakāpes, t.i., pēc pozicionālā principa, tomēr arī šeit var saskatīt dažas pozicionālā principa pazīmes, jo cipara vērtība ir atkarīga no tā atrašanās vietas. Vispārīgi runājot, romiešu skaitļu pieraksts ir jāuztver kā summa, taču, ja mazāks cipars atrodas pa kreisi no lielāka cipara, tad mazākais cipars jāuztver nevis kā saskaitāmais, bet kā mazinātājs. Daži skaitļu pierakstu piemēri, kas uztverami kā ciparu summa:

III = I + I + I, VII = V + I + I, XXV = X + X + V.

Kā starpība jāuztver šādi pieraksti:

IV = V - I, IX = X - I, XC = C - X, CD = D - C.

Daļas romieši pierakstīja divpadsmitnieku sistēmai, katrai daļai no $\frac{1}{12}$ līdz $\frac{11}{12}$ bija savs apzīmējums un savs nosaukums. Tādējādi romieši rakstīja un lasīja, piemēram, nevis $\frac{1}{8}$, bet "pusotras divpadsmitās". Šīs sistēmas izcelsme nav zināma.

Skaitīšanu romieši veica trīs dažādos veidos. Vissenākā bija skaitīšana uz pirkstiem, sākot no kreisās rokas un pārejot uz labo, pie kam katrs pirksts nozīmēja ko citu atkarībā no tā stāvokļa. Plīnijs stāstījis, ka leģendārais cars Numa Pompīlijs (VIII gs.beigas-VII gs.sākums pirms m.ē.) licis izveidot divsejainā Janusa statuju, kura pirksti veidotu skaitli 355, ko tolaik uzskatīja par dienu skaitu gadā.

Otrs skaitīšanas veids, kuru lietoja romieši, bija skaitīšana uz abaka. Abaks bija ar smiltīm noklāts dēlis. Smiltīs ievilka svītras, kas sadalīja dēli stabiņos. Tajos lika akmentiņus "kalkulus", no kā arī cēlies vārds "kalkulācija". Bija arī citi, daudz pilnīgāki abaka veidi. Trešais skaitīšanas veids bija mutiskā skaitīšana.

Sākot ar V gs.pirms m.ē., Romas impērija ilgstošos karos paplašināja savu teritoriju. III gs.pirms m.ē. tā asiņainās un neatlaidīgās cīņās bija jau pakļāvusi visas Apenīnu pussalas tautas (arī grieķu kolonijas Dienviditālijā), turklāt vēl Sicīliju, Sardīniju, Korsiku un daļu Spānijas. Romiešu ietekmes sfērā nonāca Grieķija un Mazāzija. 30.gadā pirms m.ē. romieši beidza Ēģiptes iekarošanu. Tādējādi mūsu ēras I gs. Roma bija varena impērija, kurai piederēja zemes arī Britānijas dienvidos.

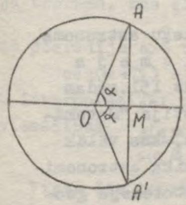
Neapšaubāmi, ka romiešu kara.tehnikai, hidrotehnikai, celtniecībai un zemes mērīšanai, kā arī ģeogrāfijai bija vajadzīgas matemātiskās zināšanas. Taču līdz mums nav nonākuši materiāli, kas ļautu izsekot romiešu matemātikas attīstībai. Literatūrā nav atzīmēts neviens izcils romiešu matemātisks atklājums vai matemātiķis. Iemesls tam, ka Roma nekļuva par sava laika zinātnes galvaspilsētu, bija tas, ka tāda zinātnes galvaspilsēta Romas impērijā bija no hellēnisma perioda mantotā Aleksandrija. Līdz ar to romiešu laikmetā grieķu valoda saglabājās kā starptautiska zinātnes valoda (latīņu valoda par starptautisku zinātnes valodu nostiprinājās ievērojami vēlāk — pēc tam, kad tā kļuva par katoļu reliģijas valodu).

Romas impērijas laikā matemātika Aleksandrijā krasi atšķīrās no hellēnisma perioda matemātikas. Šo pārmaiņu galvenais iemesls bija Babilonijas astronomu un matemātiķu tradīciju plaša apgūšana Aleksandrijā, kas bija sākusies jau pirms romiešu iekarojumiem. To paātrināja sakaru nostiprināšanās starp Ēģipti un Mezopotāmiju. Aleksandrijā vislielākā interese radās par trigonometriju.

7.2. MENELAJS. Mūsu ēras I gs. beigās dzīvoja M e n e l a j s (Μενέλαος) no Aleksandrijas.

Menelaja ievērojamākais sacerējums ir trīs sējumu darbs "Sfērika", kurā vēsturiski pirmoreiz tika aplūkots sfērisks trijstūris un sfēriskās trigonometrijas pamati.

"Sfērikas" I grāmatā aplūkotas pamatteorēmas par sfēriskiem trijstūriem, kas analogas Eiklīda "Elementu" teorēmām par plaknes trijstūriem. Ja Eiklīdam ir kāda teorēma, kurai nav pilnīgi analoga sfēriskajā ģeometrijā, Menelajs to nomaina ar citu, atbilstoša satura teorēmu. Tā, piemēram, viņš pierāda, ka sfēriska trijstūra iekšējo leņķu summa ir lielāka par diviem taisniem leņķiem.

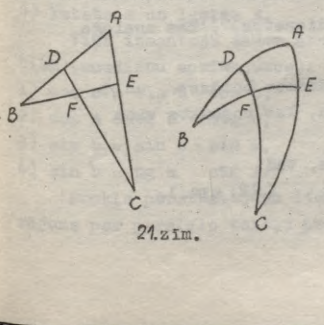


20. zīm.

III grāmatā aplūkota trigonometrija. Protams, tajā netiek lietoti sinusa u.c. trigonometrisko funkciju jēdzieni; to vietā aplūko hordas. Tā leņķa α sinusa līniju var aplūkot kā pusi no hordas, kas savelk leņķi α (20. zīm.), t.i.,

$$\sin\alpha = \frac{|AM|}{|AO|} = \frac{|AA'|}{2|AO|}.$$

III grāmatā ir pierādīta slavenā Menelaja teorēma, kas vēlāk ieguva nosaukumu "teorēma par sekantēm" vai "sešu lielumu" likums. Šajā teorēmā aplūko figūru, ko veido plaknē četri taisnes nogriežņi vai uz sfēras — attiecīgi lielo riņķu loki, no kuriem katrs krusto pārējos trīs. Šo figūru, kuru viduslaikos sauca par "sekanšu figūru", tagad sauc par pilnu četrstūri (21. zīm.).



21. zīm.

Plaknes gadījumā Menelaja teorēmu var pierakstīt šādi:

$$\frac{|CE|}{|AE|} = \frac{|CF|}{|FD|} \cdot \frac{|BD|}{|AB|},$$

sfēras gadījumā šī vienādība:

$$\frac{\sin CE}{\sin AE} = \frac{\sin CF}{\sin FD} \cdot \frac{\sin BD}{\sin AB}.$$

Par diviem citiem Menelaja sacerējumiem -- "Ģeometrijas elementi" un "Grāmata par trijstūriem" -- zināms vienīgi no arābu avotiem.

Pirmajā no tiem, starp citu, tika risināts kuba dubultošanas uzdevums ar līkni, kuru Menelajs nosauca par "paradoksālu" un par kuru P.Tanerī izteicis pieņēmumu, ka tā ir bijusi līkne ar divkāršu liekumu, ko iegūst, šķeļot lodi ar taisnu riņķa konusu, kura diametrs ir vienāds ar lodes rādiusu un kura veidotāja iet caur lodes centru. Šī līkne, kas ir Eudoksa hipopēdas speciālgadījums, pazīstama kā Viviani (Vincenzo Viviani, 1622.-1703.g.) līkne; tās projekcija pieskarplaknē ir Bernuli (Jacob Bernoulli, 1654.-1705.g.) lemniskāta.

7.3.

KLAUDIJS PTOLEMEJS. Ievērojamais grieķu astronoms, ģeogrāfs un optiķis Klaudijs P t o l e m e j s (Κλαύδιος Πτολεμαῖος), kas no 127. līdz 151.gadam veica savus novērojumus Aleksandrijā, uzrakstīja "Matemātiskos sacerējumus XIII grāmatās". Šis darbs, kas vēlāk ieguva arābu nosaukumu "Almagests", ir tā laika astronomijas izcilākais sasniegums. Tajā izklāstīta Ptolemeja ģeocentriskā sistēma, kā arī sistemātiski aplūkota hordu trigonometrija.

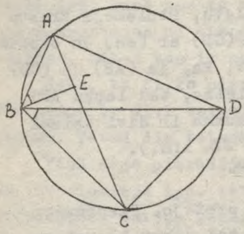
"Almagesta" I grāmata sākas ar īsu plaknes un sfēriskās trigonometrijas apskatu, kas nepieciešams, lai sastādītu un lietotu hordu(sinusu) tabulu. Ptolemejs dalīja riņķa līniju 360 vienādās daļās, bet tās diametru -- 120 vienādās daļās un izteica šīs daļas sešdesmitnieku sistēmā. Ptolemejs ieguva sakarību:

$(\text{horda}\,\alpha)^2 + (\text{horda}\,(180^\circ-\alpha))^2 = (\text{diametrs})^2$, kas analoga identitātei $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Lai iegūtu hordu $\alpha-\beta$, ja zināmas hordas α un β, Ptolemejs vispirms pierādīja teorēmu, kas nosaukta viņa vārdā:

ja ABCD -- riņķī ievilkts četrstūris, tad

$|AC|\cdot|BD| = |AB|\cdot|DC| + |AD|\cdot|BC|$ (22. zīm.).



22.zīm.

Ptolemeja teorēmu pierāda, novelkot (BE) līdz krustpunktam ar (AC) tā, lai leņķi ABE un DBC būtu vienādi. No trijstūru ABE un DBC un trijstūru ABD un BCE līdzības seko pierādāmā vienādība. Speciālgadījumā, ja AD ir riņķa diametrs, iegūst sakarību, kas ekvivalenta trigonometriskajai formulai:
$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \sin\beta\cdot\cos\alpha$.

Lai aprēķinātu nelielu loku hordas, Ptolemejs pierādīja teorēmu, kas ekvivalenta formulai: $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$.

Viņš pierādīja arī teorēmu, kas ekvivalenta formulai

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta,$$

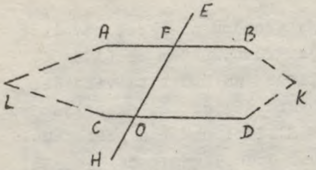
bet interpolācijai pierādīja teorēmu, kas ekvivalenta nevienādībai $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} < \frac{\alpha}{\beta}$ $(\beta < \alpha < \frac{\pi}{2})$.

Visas šīs teorēmas tika izmantotas tabulu sastādīšanai. Ptolemeja tabulās skaitļi ir precīzi, līdz piektajai decimālzīmei ieskaitot.

Ar Menelaja teorēmas palīdzību Ptolemejs "Almagestā" atrisināja četrus sfēriska taisnleņķa trijstūra gadījumus (taisnā leņķa virsotne C), ja dotas
1) katetes a un b,
2) katete b un hipotenūza c,
3) hipotenūza c un leņķis B,
4) katete a un leņķis A.

Viņš izmantoja šādas sakarības starp trijstūra elementiem (mūsdienu apzīmējumos):
1) $\cos c = \cos a\cdot\cos b$,
2) $\cos A = \mathrm{tg}\, b\cdot\mathrm{ctg}\, c$,
3) $\sin b = \sin c\cdot\sin B$,
4) $\sin b = \mathrm{tg}\, a\cdot\mathrm{ctg}\, A$.

Prokla pārstāstījumā līdz mums nonācis Ptolemeja sacerējums par paralēlo taišņu postulātu.



23.zīm.

Gribēdams pierādīt Eiklīda 5.postulātu, Ptolemejs krusto (AB) un (CD) ar (EH) un cenšas pierādīt, ka, ja (AB) un (CD) ir paralēlas, tad leņķu AFG un CGF summa ir divi taisni leņķi (23. zīm.).

Pierādījums tiek veikts, pieņemot pretējo. Pieņemsim, ka šī summa nav divi taisni leņķi. Tad tai jābūt 1) vai nu lielākai par diviem taisniem, 2) vai mazākai par diviem taisniem leņķiem. Aplūkosim 1.gadījumu. Ja summa ir lielāka par 2d, tad leņķu BFG un FGD summai (iekšējie vienpusleņķi) jābūt mazākai par diviem taisniem leņķiem. Bet, ja (AF) un (CG) ir paralēlas, tad arī (FB) un (GD) ir paralēlas. Tātad, ja (FG) veido vienu leņķu pāri AFG un FGC, kuru summa ir lielāka par diviem taisniem leņķiem, tad tai jāveido arī otrs leņķu pāris BFG un FGD, kuru summai tāpat ir jābūt lielākai par diviem taisniem leņķiem. Bet agrāk tika pierādīts, ka šī otrā pāra leņķu summa ir mazāka par diviem taisniem leņķiem, tātad esam nonākuši pie pretrunas. Leņķu AFG un FGC summa nevar būt lielāka par diviem taisniem leņķiem. Otrajā gadījumā tieši tāpat var parādīt, ka leņķu AFG un FGC summa nevar būt mazāka par diviem taisniem leņķiem. Tādējādi tiek pierādīts, ka šī summa nevar būt ne lielāka, ne mazāka, tātad tai jābūt vienādai ar diviem taisniem leņķiem.

Pēc tam Ptolemejs mēģina pierādīt arī 5.postulātu, pieņemot pretējo. Pieņemsim, ka taisnes (AB) un (CD), kas veido ar (EH) leņķus, kuru summa ir mazāka par diviem taisniem leņķiem, nekrustojas tai pusē, kurā atrodas šie leņķi. Tad, jo vairāk tās nevar krustoties tai pusē, kurā atrodas leņķi, kuru summa ir lielāka nekā divi taisni leņķi, jo tā būtu pretruna ar "Elementu" II grāmatas 16.teorēmu, kura apgalvo, ka trijstūra ārējais leņķis ir lielāks nekā jebkurš no iekšējiem, kurš nav tā blakusleņķis. Tas nozīmē, ka šīs taisnes nekrustojas ne vienā, ne otrā pusē no to krustojošās taisnes, tātad tās ir paralēlas.

Taču, kā tikko pierādījām, šai gadījumā leņķu BFG un FGD summa ir divi taisni leņķi, bet tas ir pretrunā ar pieņēmumu. Tātad šīm taisnēm ir jākrustojas.

Visā šajā pierādījumā Ptolemejs ir pieļāvis loģisku kļūdu (iepriekšējā lpp. retinātais teksts). Apgalvojums, ka nekrustojošos taišņu gadījumā iekšējo vienpusleņķu summa vienā un otrā pusē no trešās taisnes ir vienāda, ir ekvivalents pierādāmajam 5.postulātam. Aplūkotie Ptolemeja spriedumi ir vēsturiski pirmais mēģinājums pierādīt 5.postulātu, kas šaglabājies visos sīkumos līdz mūsu dienām.

7.4. MATEMĀTIKA ROMĀ JŪLIJA CĒZARA UN AUGUSTA LAIKĀ.

I gs. pirms m.ē. Romas matemātika, arhitektūra, hidrotehnika, ģeogrāfija un kara tehnika piedzīvoja uzplaukuma periodu. Aleksandrijas zinātnieku atziņas Romā kļuva pazīstamas galvenokārt imperatora Jūlija Cēzara (Cajus Julius Caesar, 104.-44.g.pirms m.ē.) laikā. Pats Jūlijs Cēzars bija sacerējuma "Par zvaigznēm" ("De astris") autors. Šī darba mērķis bija kalendāra reforma. 450.gadā pirms m.ē. iepriekšējais gada garums (355 dienas) tika labots tādējādi, ka pēc katriem diviem gadiem"iesprauda" lieku mēnesi, kurā dienu skaits pēc kārtas bija 22 vai 23 dienas. Bet tā gads kļuva pārāk garš, tāpēc sāka vienu no šiem"iespraustajiem" mēnešiem izlaist, sākumā to darot patvaļīgi, vēlāk pēc katriem 24 gadiem. Tā rezultātā hronoloģija bija tiktāl sajaukta, ka radās 85 dienu starpība starp faktisko un nominālo gadalaiku maiņu. Pēc Ēģiptes apciemojuma 48.-47.gadā Cēzars (pēc Aleksandrijas zinātnieka Sosigera ieteikuma) nolēma pārņemt aleksandriešu kalendāru, kurā bija 365 dienas gadā un katrā ceturtajā gadā lieka diena starp 23.un 24.februāri. Jauno kalendāru ieviesa 45.gadā pirms m.ē.

I gs.pirms m.ē. otrajā pusē dzīvoja V i t r u v i j s (Marcus Vitruvius Pollio). Viņš bija kara inženieris, ievērojams celtnieks un arhitekts — autors "Desmit grāmatām par arhitektūru". Šajā arhitektūras enciklopēdijā ir vairākas vietas, kas attiecas uz matemātiku. Vitruvijs sprieda par cilvēka ķermeņa proporcijām, aplūkoja Aristoksena mācību par harmoniskām attiecībām; bez tam viņš rakstīja par trim, pēc viņa domām, vissvarīgākajiem matemātiskajiem atklājumiem: kvadrāta malas un diagonāles nesamērojamību, pitagoriešu trijstūri ar malām 3,4,5 un kroņa svara noteikšanu. Tika doti arī zemes mērīšanas instrumentu apraksti un norādījumi, kā ar šiem instrumentiem rīkoties. Vitruvijs lietoja plānu un ēku fasāžu rasējumus, tādējādi kļūdams par vienu no tēlotājas ģeometrijas pirmsācējiem. Izdarot aprēķinus, viņš pieņēma, ka $\pi = 3$.

Ģeometrijas elementus var atrast vairāku romiešu zinātnieku darbos par citām nozarēm. Interese par ģeometriju bija saistīta ar nepieciešamību veikt zemes mērīšanu, kas savukārt pieauga tāpēc, ka radās privātīpašums uz zemi.

Pusotra gadsimta laikā, no Cēzara līdz Trajānam, romieši apguva Aleksandrijas matemātiku tiktāl, ka viņiem nebija sveši arī teorētiskās aritmētikas pētījumi. Par romiešu praktiskajām zināšanām matemātikā var spriest arī pēc viņu juridiskajiem un ekonomiskajiem sacerējumiem, kuros lietoja procentu rēķinus (pret procentu iekasēšanu jau 342.gadā pirms m.ē. tika izdots likums, kas tomēr netika ievērots).

Diezgan sarežģīti aprēķini bija saistīti ar mantojuma tiesībām. Lielu popularitāti guva gadījums, kas iekļauts daudzās tieslietu un matemātikas mācību grāmatās: kāds romietis mirdams atstāja šādu novēlējumu -- ja viņa sievai piedzims dēls, tas mantos divas trešdaļas, bet sieva vienu trešdaļu īpašuma; ja piedzims meita, viņa mantos vienu trešdaļu, bet sieva divas trešdaļas. Piedzima dvīnīši -- zēns un meitene. Kā sadalīt īpašumu? Mūsu ēras II gs. dzīvojušais Salviens Juliens piedāvāja šādu risinājumu: visu mantojumu jāsadala septiņās vienādās daļās, no kurām dēls saņems četras, māte -- divas un meita -- vienu daļu. Tādējādi dēls saskaņā ar novēlējumu saņems divreiz vairāk nekā māte, bet māte -- divreiz vairāk nekā meita.

Salviana Juliana laikabiedrs bija A p u l e j s no Madavras (Lucius Apuleius, ap 135.-180.g.), kurš mācījās Atēnās. Apulejs ir pazīstams kā satīriskā romāna "Zelta ēzelis" autors, bet viņš ir sarakstījis arī vairākus matemātiskus darbus. Apulejs pārtulkoja latīniski Nikomaha "Aritmētiku", viņam piedēvē arī praktiskās aritmētikas mācību grāmatu tirgoņiem.

7.5. HĒRONS. Viens no ievērojamākajiem senatnes matemātiķiem -- enciklopēdistiem, kurš rakstīja gandrīz par visiem matemātikas, mehānikas, astronomijas un fizikas jautājumiem, bija H ē r o n s (Ἥρων) no Aleksandrijas, kuru sauca arī par Hēronu- mehāniķi. Viņa dzīves dati ir ļoti neprecīzi. Kādu laiku uzskatīja, ka viņš ir dzīvojis it kā I gs.pirms m.ē. sākumā vai pat agrak. Pēdējā laikā uzskata, ka viņš ir dzīvojis un strādajis laikā starp Ptolemeju un Pappu, t.i., m.ē. III gs. Hērons rakstīja gan inženieriem, gan arhitektiem un amatniekiem, viņa sacerējumi ir domāti lielākoties kā mācību grāmatas. Hērons tālāk attīstīja skaitļošanas matemātiku, ar ģeometriskās algebras palīdzību novezdams uzdevumu risinājumus līdz konkrētiem, praksē izmantojamiem rezultātiem.

Teorētiska nozīme ir Hērona Eiklīda "Elementu" komentāriem. Citā sacerējumā "Definīcijas" Hērons izklāsta "tehniskos terminus, ko lieto ģeometrijā, pamatojoties uz Eiklīda, teorētiskās ģeometrijas pamatu autora, mācību". Šī sacerējuma vērtība ir tā, ka tajā dotas dažādas atsevišķu ģeometrisko jēdzienu definīcijas to vēsturiskajā attīstībā.

Hērona vissvarīgākais ģeometriskais sacerējums ir "Metrika" (mācība par mērījumiem) trijās grāmatās.

Pirmajā grāmatā aplūkoti laukumu un virsmu mērīšanas likumi. Te dota nevienādu malu trijstūra laukuma aprēķināšanas formula, t.s. "Hērona formula", kura bija zināma jau Arhimedam un kuru Hērons pierāda ar ievilkta riņķa palīdzību.

Hērons aplūkoja skaitliskus piemērus, kuros jāaprēķina arī kvadrātsaknes un kuros iegūst iracionālus rezultātus. Hērons lietoja babiloniešu tuvināto kvadrātsaknes aprēķināšanas metodi, ēģiptiešu daļu pierakstu un likumu izklāsta veidu. Par π vērtību viņš lietoja skaitli $\frac{22}{7}$. Hērona pirmā grāmata beidzas ar norādījumiem, kā noteikt neregulāru plaknes figūru un neregulāru virsmu laukumus.

Otrajā grāmatā aplūkota tilpumu mērīšana. Tā beidzas ar norādījumu, ka Arhimeds neregulāru ķermeņu tilpumus noteica, iegremdējot tos ūdenī un pēc tam izmērot izspiestā ūdens tilpumu.

Trešajā grāmatā tiek aplūkots jautājums, kā sadalīt dažādas figūras un ķermeņus dotajā attiecībā. Hērons šeit izmantoja Eiklīda darbu "Par (figūru) dalīšanu", Apollonija traktātu "Par laukumu atšķelšanu" un Arhimeda traktātu "Par lodi un cilindru". Viņš atrisināja arī vairākus oriģinālus uzdevumus. Tā kā, tilpumu dalot, jāaprēķina kubsakne, tad Hērons izklāstīja arī kubsaknes tuvinātas aprēķināšanas paņēmienu.

Hērona "Ģeometrija" pēc satura ir līdzīga "Metrikai". Taču šajā darbā likumi nav pierādīti un pat nav formulēti o vispārīgā veidā, bet gan tiek tieši izmantoti piemēru risināšanā, pie tam pēc ēģiptiešu parauga katrs piemērs ilustrēts ar virkni skaitlisku aprēķinu, no kuriem lasītājs pats var izsecināt vispārīgo likumu. "Ģeometrijā" tiek risināti arī kvadrātvienādojumi, kā arī 13 vienādojumi, kas reducējas uz nenoteiktajiem vienādojumiem. Fragments no "Ģeometrijas" ir darbs "Ģeodēzija", kas attiecas uz trijstūriem.

Darbā "Stereometrija" bez ģeometrisku ķermeņu tilpumu mērīšanas Hērons ietvēra arī ēku, teātru un amfiteātru, peldbaseinu, aku, kuģu, mucu u.c. tilpumu aprēķinus. Svarīgs Hērona darbs ir "Dioptra", kurā aprakstīta ierīce, kas ir mūsdienu teodolīta priekštece. Šajā darbā aplūkota attāluma mērīšana, ja viens no punktiem nav pieejams u.tml. uzdevumi. Darbā "Mehānika" tiek aplūkots zobrata mehānisms.

7.6. PAPPA. P a p p a no Aleksandrijas (Πάππος) dzīvoja mūsu ēras III gs. beigās un nodarbojās ar aizmirstu klasisko matemātisko zināšanu atjaunošanu. Viņa galvenais darbs ir "Krājums" astoņās grāmatās — izsmeļoša mācību grāmata ģeometrijā, kas uzrakstīta īsi un skaidri, labi pārzinot priekšmetu. Tajā daudz vēsturisku ziņu, norādīti 30 dažādi autori, tāpēc šis darbs ir svarīgs izziņas avots antīkās matemātikas vēsturē.

Jāatzīmē viena Pappa darbu īpatnība. Viņš lietoja lielos burtus, lai apzīmētu nezināmos skaitļus, bet mazos burtus, lai apzīmētu zināmos skaitļus. Lielumus ar burtiem sāka apzīmēt Aristotelis, vēlāk to darīja arī Eiklīds u.c. matemātiķi, kas ar burtiem apzīmēja skaitļus - nogriežņus. Pappa no šī uzskatāmā attēlojuma atteicās. Tas bija svarīgs solis, kas sagatavoja "ceļu" algebrai. Tomēr pirmais antīkajā matemātikā sistemātiski algebriskos apzīmējumus vienādojumu risināšanā lietoja Diofants.

7.7. DIOFANTS. D i o f a n t s no Aleksandrijas (Διόφαντος) dzīvoja ap m.ē. 250.gadu. VI gs. Metrodora izdotajā "Grieķu antoloģijā" ir uzdevums, kas attiecas uz Diofanta dzīvi: "Šeit apglabāts ir Diofants; un kapakmens, ja skaitīt proti, pastāstīt var mums, cik garš ir bijis viņa mūžs. Sesto daļu dzīves viņš bija zēns, bārda viņam sāka augt pēc vienas divpadsmitās daļas, pēc vienas septītās daļas mūža viņš apprecējās, pagāja pieci gadi un piedzima dēls, kurš nodzīvoja tikai pusi no tā, ko tēvs; četrus gadus Diofants sēroja par smago zaudējumu līdz nomira, mūžu atdevis zinātnei". No šejienes, ja vien šie dati nav izdomāti, Diofanta vecuma noteikšanai iegūstam vienādojumu

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x, \text{ kur } x = 84.$$

Diofanta galvenais darbs ir "Aritmētika", kas sastāvēja no vairākām grāmatām, no kurām ir saglabājušās tikai sešas. Šajā darbā Diofants ieviesa algebriskos apzīmējumus. Nezināmo lielumu (mūsu x) Diofants definēja kā lielumu, kas "satur nenoteikta skaita vienības" un nosauca par "aritmos", t.i., "skaitlis". Skaitliskos koeficientus Diofants rakstīja tūlīt pēc nezināmā. Nezināmā pakāpes viņš apzīmēja ar attiecīgo grieķu nosaukumu sākuma burtiem, apzīmējumi bija arī apgrieztajiem lielumiem un to pakāpēm. Augstākas pakāpes par sesto Diofants neaplūkoja. Saskaitīšanu apzīmēja tā, ka visus saskaitāmos vienkārši rakstīja blakus; atņemšanai Diofants lietoja zīmi Λ.

Tā kā Diofantam bija tikai viena zīme, kā apzīmēt nezināmo, tad visus uzdevumus vajadzēja formulēt tā, lai tajos būtu tikai viens nezināmais. Nenoteikto vienādojumu gadījumā viņš pieņēma dažu nezināmo vietā brīvi izraudzītus skaitļus, norādot, ka to vietā var izvēlēties arī jebkurus citus. Līdz ar to Diofanta risinājumi nezaudēja savu vispārīgumu.

Diofanta nozīmīgākais ieguldījums matemātikā ir viņa nenoteikto vienādojumu risināšanas metodes. Ar lineāriem nenoteiktiem vienādojumiem Diofants nenodarbojās, bet apskatīja kvadrātvienādojumus, kubiskos un bikvadrātvienādojumus. Šo vienādojumu saknes viņš meklēja tā, kā to dara tagad, kad risina tā sauktos "Diofanta vienādojumus".

Darbā "Aritmētika" Diofants aplūkoja nenoteiktos kvadrātvienādojumus $Ax^2 + Bx + C = y^2$. Atkarībā no koeficientiem A, B, C izšķirami vairāki gadījumi. Interesants ir gadījums $B = 0$. Diofants parādīja metodi, kā vienādojumam $Ax^2 + C = y^2$ atrast brīvi izraudzīta skaita saknes, ja zināma viena no tām. Diofants pierādīja, ka vienādojumu $Ax^2 + C = y^2$ var atrisināt racionālos skaitļos vienīgi tad, ja $A + C$ ir pilns kvadrāts. Risinot pilnu kvadrātvienādojumu $Ax^2 + Bx + C = y^2$, Diofants aplūkoja vienīgi gadījumu, kad vai nu A, vai C ir pilni kvadrāti, vai arī tāda ir izteiksme $\frac{1}{4}B^2 - AC$.

Bez šiem vienādojumiem Diofants risināja arī "dubultos" vienādojumus, t.i., sistēmas:

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 = y^2 \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 = z^2. \end{cases}$$

Vienkāršāko gadījumu, kad $a_1 = a_2 = 0$, Diofants risināja ar divām dažādām metodēm. Pirmajā viņš apskata divas iespējas: vai nu $b_1 = b_2$, vai c_1c_2 ir pilns kvadrāts. Otro metodi Diofants lietoja tikai tad, ja $c_1 = c_2$ ir kvadrāts. Gadījumā, ja neviens koeficients nav nulle, Diofants aprobežojās tikai ar trim iespējām: vai nu $a_1 = a_2$, $c_1 = c_2$; vai $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $c_1 = c_2$; vai arī $b_1 = b_2 = 0$.

No augstākas pakāpes nenoteiktiem vienādojumiem Diofants aplūkoja šādus vienādojumus:

$$Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + Kx - M = y^2, \text{ ja } n \leq 6 \text{ un}$$

$$Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + Kx - M = y^3, \text{ ja } n \leq 3.$$

Aplūkosim metodi, ar kuru Diofants risināja nenoteikto vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} \alpha x + a = y^2 \\ \beta x + b = z^2. \end{cases} \quad (1)$$

Atņemot no pirmā vienādojuma otro, iegūst vienādojumu

$$(\alpha - \beta)x + (a - b) = y^2 - z^2,$$

kura abas puses sadala reizinātājos:

$$p \cdot \frac{(\alpha - \beta)x + (a - b)}{p} = (y - z)(y + z).$$

($p = 0$ -- brīvi izraudzīts skaitlis).

Pielīdzinot labās un kreisās puses reizinātājus, iegūst sistēmu

$$\begin{cases} y \pm z = \dfrac{(\alpha - \beta)x + (a - b)}{p} \\ y \mp z = p, \end{cases}$$

no kurienes

$$2y = \frac{(\alpha - \beta)x + (a - b)}{p} + p.$$

Kāpinot kvadrātā šo vienādību un izmantojot sistēmas (1) pirmo vienādojumu, iegūst

$$4(\alpha x + a) = \left[\frac{(\alpha - \beta)x + (a - b)}{p} + p\right]^2$$

jeb

$$(\alpha+\beta)^2 x^2 + 2x\left[(\alpha-\beta)(a-b) - p^2(\alpha+\beta)\right] + (a-b)^2 - 2p^2(a+b) + p^4 = 0 \quad (2).$$

Lai vienādojums (1) kļūtu lineārs, tad vai nu koeficientam pie x^2, vai arī brīvajam loceklim jābūt vienādam ar nulli. Diofants aplūkoja abus šos gadījumus (protams, nevis vispārīgajā veidā, bet ar skaitliskiem piemēriem). Abi gadījumi dod sistēmas (1) partikulāros atrisinājumus. Šo sistēmu, kas reducējama uz vienādojumu $Ay^2 - Bz^2 = C$, pilnīgi atrisināt varēja, tikai izmantojot Gausa kvadrātisko formu teoriju (1801.g.).

"Aritmētikā" bez uzdevumiem ir arī vispārīgas teorēmas skaitļu teorijā. Piemēram:
1) ja a-dotais skaitlis un x un y tādi skaitļi, ka izteiksmes $x + a$, $y + a$ un $xy + a$ ir kvadrāti, tad kvadrātu $x + a$ un $y + a$ malas atšķiras par 1;
2) trīs skaitļiem n^2, $(n + 1)^2$ un $4(n^2 + n + 1)$ piemīt īpašība, ka jebkuru divu skaitļu reizinājums, palielināts vai nu par šo pa[illegible] skaitļu summu vai arī par trešo skaitli, ir kvadrāts;
3) jebkura skaitļa kvadrātu var izteikt bezgalīgi daudz veidos kā divu skaitļu kvadrātu summu.

Patiešām $a^2 = x^2 + y^2$, kur $x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} a$ un $y = \frac{2t}{1 + t^2} a$,

bet t — jebkurš pozitīvs īsts daļskaitlis.

"Aritmētikā" ir arī virkne uzdevumu par taisnleņķa trijstūra konstruēšanu, kura malas ir izsakāmas ar racionāliem skaitļiem un apmierina doto nosacījumu.

"Aritmētika" noderēja par avotu jauno laiku matemātiķu pētījumiem skaitļu teorijā.

7.8. TEONS NO ALEKSANDRIJAS. IV gs. beigās dzīvoja matemātiķis T e o n s (Θέων) no Aleksandrijas. Viņš bija Ptolemeja "Almagesta" komentāru autors. Kaut arī šis darbs neparāda Teonu kā izcilu matemātiķi, tomēr tajā ir daudz svarīgu vēsturisku ziņu un tas dod ieskatu, kā tā laika Aleksandrijas matemātiķi lietoja sešdesmitnieku daļas, kā reizināja, dalīja, aprēķināja kvadrātsakni.

Teons izdeva arī Eiklīda "Elementu" tekstu, daļēji piemērojot to saviem skolniekiem un izdarot tajā savus labojumus un papildinājumus. Šis teksts bija ļoti izplatīts viduslaikos.

7.9. HIPATIJA. Teona meita H i p a t i j a (Ὑπατία, 370.-415.g.) bija filozofe, matemātiķe, astronome un ārste, neoplatonisma sekotāja. Kā norāda pats Teons, Hipatija piedalījās "Almagesta" komentāru sastādīšanā. Hipatija ir uzrakstījusi komentārus arī Diofanta "Aritmētikai" un Apollonija "Koniskajiem šķēlumiem". Hipatiju nogalināja Aleksandrijas bīskapa Kirilla mudināts kristiešu fanātiķu pūlis. Tāds pats fanātiķu pūlis iznīcināja arī slaveno Aleksandrijas bibliotēku. Tā tika sagrauts Romas impērijas galvenais zinātnes centrs.

Līdz ar vispārīgu verdzības iekārtas pagrimumu Romas impērijas zemēs sākās arī matemātikas pagrimums. Zinātne kļuva bezspēcīga pret barbaru un reliģiozo fanātiķu triecieniem, kuri izplatīja galēji reakcionāras, mistiskas filozofiskas mācības un reliģiozos kultus.

7.10. PROKLS. Pēc Aleksandrijas zinātniskās skolas bojāejas kādu laiku šī kultūra un valoda vēl saglabājās Atēnās. Turp no Aleksandrijas pārcēlās P r o k l s (Πρόκλος ὁ Διάδοχος, 410.-485.g.), kurš vadīja filozofisko skolu. Viņš ir uzrakstījis daudzus filozofiskus darbus, to skaitā Platona dialogu komentārus. Matemātiķiem visvērtīgākie ir viņa Eiklīda "Elementu" I grāmatas komentāri, kas ir viens no svarīgākajiem ģeometrijas vēstures avotiem.

"Komentāri" sākas ar diviem ievadiem. Pirmajā Prokls raksta par matemātikas un filozofijas attiecībām, otrajā — par ģeometriju un tās priekšmetu. Pēc tam seko matemātikas vēstures izklāsts līdz Eiklīdam. Pēc atšķirības starp teorēmu un "problēmu" izskaidrojuma seko visas "Elementu" I grāmatas satura apskats.

"Komentāros" Prokls pēc kārtas vēsturiski un kritiski izskata katru definīciju, postulātu un aksiomu, pēc tam pāriet pie teorēmām. Vispirms viņš izskaidro Eiklīda dotos pierādījumus, pēc tam norāda dažus konkrētus piemērus vingrinājumiem un beigās apgāž iebildumus, kādi varētu rasties pret pierādījumiem.

7.11. MATEMĀTIKA PĒC ROMAS IMPĒRIJAS SABRUKUMA. Pēc Romas krišanas un ostgotu karalistes izveidošanās parādījās vēl daži matemātiska satura darbi, taču tiem nebija paliekošas nozīmes.

No šī laika perioda minēsim vienīgi valstsvīra un filozofa Anīcija Manlija Severīna B o e c i j a (dzimis ap 480.g., sodīts ar nāvi 524.g.) vārdu. Viņš bija mācījies Atēnās. Boecijs pazīstams kā Aristoteļa un Porfīrija loģikas sacerējumu komentaru, traktāta "Par mūziku" un teoloģiski ētiskā darba "Par filozofijas mierinājumu" autors. Viņš rakstīja arī matemātiskus darbus. Nebūdams apdāvināts matemātiķis, Boecijs matemātikas vēsturē ir pazīstams kā tulkotājs. Viņš tulkoja Nikomaha "Aritmētiku", kā arī Eiklīda "Elementu" pirmās trīs grāmatas. Tie nebija burtiski tulkojumi -- Nikomaha grāmata bija papildināta ar skaitliskiem piemēriem, bet Eiklīda grāmatās tika izlaisti pierādījumi. Boecijam piedēvē arī "Ievadu aritmētikā" un "Ievadu ģeometrijā", kā arī darbus astronomijā.

Boecijs kļuva par upuri politiskajā cīņā starp romiešu aristokrātiju un ostgotu valdību, taču katoļu baznīca pasludināja viņu par svēto it kā viņa izciesto mocību dēļ. Tādēļ arī viduslaikos pret Boecija vārdu izturējās ar lielu cieņu.

Pateicoties Boecija tulkojumiem, Eiropas tautas viduslaikos ieguva pirmās ziņas par grieķu matemātisko mantojumu, kuras līdz ar milzīgo darbu, ko veica Austrumu tautas, sagatavoja ceļu Renesanses laikmeta matemātikai.

Literatūra

I. Энгельс Ф. Анти-Дюринг. - Маркс К., Энгельс Ф. Соч., т.20.
2. Маркс К., Энгельс Ф. Немецкая идеология. - Маркс К., Энгельс Ф. Соч, 2-е изд., т.3.
3. Ленин В.И. Философские тетради. - М., Госполитиздат, I947.
4. Колмогоров А.Н. Математика. - БСЭ, I954, 2-е изд., т.26.
5. Platons, Menons. Dzīres. - R., 1980.
6. Башмакова И.Г., Юшкевич А.П. Происхождение систем счисления /Энциклопедия элементарной математики. - М.;Л., I95I, т.I.
7. Бэлл Э.Т. Творцы математики. - М., I980.
8. Бурбаки Н. Очерки по истории математики. - М., I963.
9. Ван дер Варден Б.Л. Пробуждающаяся наука. - М., I959.
I0. Выгодский М.Я. Арифметика и алгебра в древнем мире. - М., I967, 2-е изд.
II. Депман И.Я. История арифметики. - М., I965, 2-е изд.
I2. История математики. - М., I970, т.I.
I3. Кольман Э. История математики в древности. - М.,I96I.
I4. Нейгебауер О. Точные науки в древности. - М., I968.
I5. Рыбников К.А. История математики. - М., I960, т.I.
I6. Стройк Д.Я. Краткий очерк по истории математики. - М., I969, 2-е изд.
I7. Цейтен Г.Г. История математики в древности и в Средние века. - М.;Л., I938.
I8. Cajori F. A history of mathematics. - N.-Y., 1929.
I9. Tropfke J. Geschichte der Elementarmathematik in Systematischer Darstellung. - Berlin;Leipzig, 1921-1934, Bd. 1-7,2. Aufl.

Saturs

Дайна Яновна Тайминя

МАТЕМАТИКА АНТИЧНОСТИ
Конспект лекций

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
Рига 1981

На латышском языке

Daina Jāņa m. Taimiņa

ANTĪKĀ MATEMĀTIKA
Lekciju konspekts

Redaktori K.Šteiners, I.Audriņa
Tehniskā redaktore I.Neimane
Korektore I.Neimane

Parakstīts iespiešanai 1981.g. 2.novembrī. Papīra formāts 60x84/16. Papīrs Nr.1. 6,5 fiz.iespiedl. 6,0 uzsk.iespiedl. 4,7 uzsk.izdevn.l. Metiens 400 eks. Pasūt.Nr.2025.Maksā 17 k.

P.Stučkas Latvijas Valsts universitāte
Rīga 226098, Raiņa bulv.19
Iespiests ar rotaprintu P.Stučkas LVU
Rīga 226050,Veidenbauma ielā 5

17 k.