J.MENCIS, A.SIKA

Matemātikas rokasgrāmata skolēniem

ZVAIGZNE ABC

① **Aritmētika**

② **Algebra**

③ **Ģeometrija**

J. MENCIS, A. SIKA

Matemātikas rokasgrāmata skolēniem

J.MENCIS, A.SIKA

Matemātikas rokasgrāmata skolēniem

Mācību līdzeklis

Apstiprinājusi Latvijas Republikas
Izglītības un zinātnes ministrija

ZVAIGZNE ABC

Rokasgrāmatā koncentrētā veidā apkopots pamatskolas matemātikas kurss. Sniegti matemātikas jēdzieni, apgalvojumi, aprēķinu izpildes kārtulas, tipiskāko uzdevumu risināšanas paraugi.

Rokasgrāmata paredzēta vispārizglītojošo skolu un citu mācību iestāžu audzēkņiem mācību vielas atkārtošanai mācību procesā un gatavojoties dažādiem eksāmeniem. Grāmatā ikviens var atrast nepieciešamās uzziņas par pamatskolas matemātikas kursa jautājumiem.

Jānis Mencis (seniors), *Arturs Sika*
Matemātikas rokasgrāmata skolēniem

Otrais izdevums, 1996
Red. nr. E-397

Recenzenti *D. Kriķis, L. Raģis*
Redaktors *U. Grinfelds*
Mākslinieciskā redaktore *A. Lubgāne*
Tehniskā redaktore *A. Svilpe*

Apgāds "Zvaigzne ABC", SIA
K. Valdemāra ielā 105, Rīgā, LV-1013
Reģistrācijas nr. 2-1060

Rīgas Paraugtipogrāfija,
Vienības gatvē 11, Rīgā, LV-1004.
Pasūt. Nr. 102770.

ISBN 9984-04-432-7

PRIEKŠVĀRDS

Rokasgrāmatā koncentrētā veidā apkopots deviņgadīgās skolas matemātikas kurss: matemātiskie jēdzieni (šo jēdzienu skaidrojumi un definīcijas, apzīmējumi, piemēri, kontrpiemēri), matemātiskie apgalvojumi (aksiomas, teorēmas, īpašības, pazīmes, formulas), matemātisko zināšanu lietojumi (darbību un aprēķinu izpildes kārtulas, tipiskāko uzdevumu risināšanas un atrisinājumu pierakstu paraugi).

Jēdzienu definīcijas, matemātiskie apgalvojumi rokasgrāmatā nav sakārtoti tā kā mācību grāmatā, bet visi radniecīgie jautājumi, kas saistīti ar kādu vienu kopēju jēdzienu, ir koncentrēti vienuviet. Turklāt autori centušies attiecīgo vielu saistīt iekšējā loģiskā secībā, vietām pat pievienojot skolēniem pieejamus matemātisko apgalvojumu pamatojumus. Lai atvieglotu materiāla izpratni, grūtāk uztveramie jēdzieni un apgalvojumi rokasgrāmatā ir papildināti ar komentāriem, aprēķinu paņēmienos demonstrēti paraugi ar brīdinājumiem par iespējamām tipiskām skolēnu kļūdām, darbību izpildes algoritmiem dots arī to loģiskais pamatojums.

Rokasgrāmata adresēta vispirms skolēniem,— jau mācoties skolā, viņi rokasgrāmatā var izlasīt tikko stundā mācīto un izpētīt grāmatā dotos risinājumu paraugus. Vecāko klašu skolēni pēc rokasgrāmatas var atkārtot nepieciešamo mācību vielu no iepriekšējo klašu kursa. Rokasgrāmata noderēs arī skolu beigušajiem — gan reflektantiem, gatavojoties iestājeksāmeniem vidējās speciālās mācību iestādēs vai augstskolās, gan arī pārējiem ikdienas dzīvē.

Rokasgrāmata netieši var atvieglot mācību darbu arī skolotājam, ja viņš pratīs rosināt skolēnu patstāvīgi meklēt rokasgrāmatā aizmirsto vai neizprasto. Bez tam, iespējams, ka arī pats skolotājs atradīs rokasgrāmatā citādu pieeju jēdzienu, apgalvojumu un aprēķinu paņēmienu motivēšanai, nekā tas dots mācību grāmatās.

Rokasgrāmata iedalīta trīs lielās daļās: Aritmētika, Algebra un Ģeometrija. Viss teksts sadalīts tekoši numurētās nodaļās, nodaļas savukārt sadalītas paragrāfos, bet paragrāfi — punktos. Grāmatas beigās dots sīks alfabētiskais rādītājs.

Attiecīgā punkta saturu rokasgrāmatā pietiekami skaidri izsaka punkta virsraksts, tāpēc īpaši nav izcelti vārdi «definīcija», «aksioma», «teorēma», «secinājumi no teorēmas» u. tml. (izņemot dažas īpašas aksiomas vai teorēmas).

① Aritmētika

1. NATURĀLIE SKAITĻI

1.1. NATURĀLO SKAITĻU JĒDZIENS UN NUMERĀCIJA

NATURĀLO SKAITĻU JĒDZIENS

Skaitot dažādus priekšmetus vai parādības, iegūstam skaitļus, piemēram, trīs, septiņi, piecpadsmit u. c. Skaitīšanas rezultātā iegūtos skaitļus sauc par naturālajiem jeb dabiskajiem skaitļiem.

Par naturālo skaitļu virkni sauc tādu naturālo skaitļu sakārtojumu, kurš sākas ar mazāko skaitli 1 un kurā katrs nākamais skaitlis ir par vienu lielāks nekā iepriekšējais:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, . . .

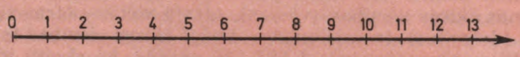
Naturālo skaitļu virknē gan ir pirmais skaitlis, bet nav pēdējā skaitļa — šī virkne ir bezgalīga.

SKAITLIS 0

Ja priekšmetu kopā nav neviena priekšmeta, tad priekšmetu skaitu apzīmē ar skaitli nulle. Skaitli 0 neuzskata par naturālu skaitli.

KOORDINĀTU STARS

Naturāliem skaitļiem un skaitlim 0 var piekārtot punktus uz t. s. koordinātu stara (1 zīm.).



1. zīm.

Koordinātu stara sākumpunktam piekārto skaitli 0. Uz stara citu pēc cita atliek vienāda garuma nogriežņus (vienības nogriežņus). Šo nogriežņu galapunktiem attiecīgi atbilst skaitļi 1, 2, 3, 4, 5, 6 utt.

DECIMĀLĀ (DESMITU) SKAITĪŠANAS SISTĒMA

Nedaudz priekšmetu iespējams izskaitīt, skaitot pa vienam. Daudzu priekšmetu izskaitīšana ir vieglāka, ja tos skaita ne pa vienam, bet apvieno lielākās skaitīšanas vienībās, t. i., skaita pa divi, pa pieci, pa desmit, pa dučiem u. tml.

Ja no ik desmit zemākajām skaitīšanas vienībām izveido vienu nākamo — augstāku skaitīšanas vienību, tad šādu skaitīšanas sistēmu sauc par decimālo (desmitu) skaitīšanas sistēmu.

Šajā skaitīšanas sistēmā
10 vieni veido 1 desmitu,
10 desmiti veido 1 simtu,
10 simti veido 1 tūkstoti,
10 tūkstoši veido 1 desmittūkstoti,
10 desmittūkstoši veido 1 simttūkstoti,
10 simttūkstoši veido 1 miljonu utt.

Tātad vieni ir pirmās šķiras skaitīšanas vienības jeb, īsāk, pirmās šķiras vienības, desmiti — otrās šķiras vienības, simti — trešās šķiras vienības utt.

CIPARI

Pirmos desmit skaitļus (ieskaitot arī skaitli nulle) apzīmē ar desmit īpašām rakstu zīmēm — cipariem: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Ciparus no 1 līdz 9 sauc par vērtīgajiem cipariem, bet 0 rāda, ka attiecīgajā šķirā nav nevienas vienības.

Šo ciparu pirmsākumi meklējami senajā Indijā, no kurienes tie ar arābu starpniecību nonākuši Eiropā. Tāpēc šos ciparus sauc par indiešu vai arābu cipariem.

SKAITĻU RAKSTĪBAS POZICIONĀLAIS PRINCIPS

Ar iepriekš minētajiem desmit cipariem var uzrakstīt jebkuru skaitli, ievērojot t. s. vietu jeb pozīciju principu: cipara vieta skaitļa pierakstā norāda skaitīšanas vienības lielumu, bet pats cipars — šo vienību skaitu. No labās puses pirmajā vietā pieņemts rakstīt pirmās šķiras vienības (vienus), otrajā vietā — otrās šķiras vienības (desmitus), trešajā vietā — trešās šķiras vienības (simtus) utt.

Piemērām, pieraksts 4 007 285 norāda, ka skaitlī ir 4 miljoni, 7 tūkstoši, 2 simti, 8 desmiti un 5 vieni; nulles norāda, ka skaitlī nav simttūkstošu un desmittūkstošu.

SKAITĻU NOSAUKŠANA UN PIERAKSTĪŠANA

Skaitļu ērtākai nosaukšanai skaitīšanas vienības, sākot ar vieniem, ik pa trim šķirām apvieno klasēs: vienus, desmitus un simtus apvieno vienu klasē; tūkstošus, desmittūkstošus un simttūkstošus — tūkstošu klasē utt. Klasei nosaukumu dod pēc šīs klases zemākās šķiras.

Pārskats par skaitļu šķirām un klasēm dots tabulā.

Klases	Kvadriljoni		Triljoni			Miljardi			Miljoni			Tūkstoši			Vieni		
Šķiras	utt.	Kvadriljoni	Simttriljoni	Desmittriljoni	Triljoni	Simtmiljardi	Desmitmiljardi	Miljardi	Simtmiljoni	Desmitmiljoni	Miljoni	Simttūkstoši	Desmittūkstoši	Tūkstoši	Simti	Desmiti	Vieni

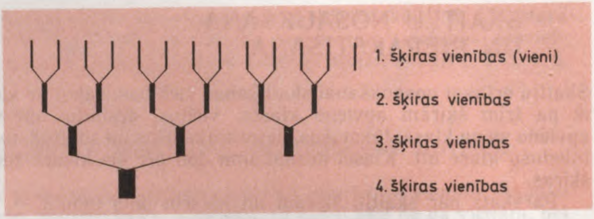
Lielāku skaitļu ērtākai lasīšanai skaitļu klases mēdz atdalīt ar apostrofu vai nelielu atstarpi, piemēram, 45'073'000'209 vai 45 073 000 209. Skaitļus rakstot, jāievēro, lai katrā klasē būtu trīs cipari, pie tam trūkstošo šķiru vietā raksta nulles (augstākajā klasē var būt arī tikai viens vai divi cipari). Piemēri:
4 007 285 — 4 miljoni 7 tūkstoši 285;
634 027 200 — 634 miljoni 27 tūkstoši 200;
45 000 305 007 — 45 miljardi 305 tūkstoši 7.

Pēdējā piemērā skaitlī miljonu klasi nenosauc, jo tajā nav nevienas vienības. Arī vienu klases nosaukumu parasti nenosauc.

CITAS SKAITĪŠANAS SISTĒMAS

Tagad visā pasaulē pieņemta decimālā skaitīšanas sistēma, bet agrāk dažām tautām bijušas citas skaitīšanas sistēmas. Tā, piemēram, senie babilonieši no 60 zemākām skaitīšanas vienībām veidoja 1 nākamo skaitīšanas vienību (tātad lietoja sešdesmitu skaitīšanas sistēmu). Šī skaitīšanas sistēma dažos gadījumos saglabājusies līdz pat mūsdienām, piemēram, 60 sekundes veido 1 minūti, 60 minūtes veido 1 stundu.

Mūsdienu tehniskajās ierīcēs (piemēram, elektroniskajos skaitļotājos u. c.) dažādu iemeslu dēļ lietderīgāk lietot nevis decimālo, bet gan divnieku (bināro) skaitīšanas sistēmu, kurā no katrām 2 skaitīšanas vienībām veidojas 1 nākamā, augstākā skaitīšanas vienība.



Zīmējumā uzskatāmi parādīts 13 vienību sakārtojums divnieku skaitīšanas sistēmā.

Apvienojot ik 2 pirmās šķiras vienības (vienus), iegūtas 6 otrās šķiras vienības, bet atliek 1 pirmās šķiras vienība. Apvienojot ik 2 otrās šķiras vienības, iegūtas 3 trešās šķiras vienības (otrās šķiras vienības neatliek). Apvienojot ik 2 trešās šķiras vienības, iegūta 1 ceturtās šķiras vienība un atliek 1 trešās šķiras vienība.

Tātad decimālajā sistēmā uzrakstītais skaitlis 13 divnieku sistēmā jāraksta kā 1101 (1 ceturtās šķiras vienība, 1 trešās šķiras vienība, 0 otrās šķiras vienību un 1 pirmās šķiras vienība). Īsāk to var uzrakstīt šādi: $13_{10} = 1101_2$.

Nākamajos divos piemēros parādīta skaitļa pieraksta pārveidošana no decimālās sistēmas citā sistēmā un otrādi.

1. Pārveidot divnieku skaitīšanas sistēmā decimālās skaitīšanas sistēmas skaitli 75 (romiešu cipari iekavās norāda skaitļa šķiras numuru).

$75:2 = 37$ (II); $37:2 = 18$ (III); $18:2 = 9$ (IV);

$\overline{1}$ (I) $\overline{1}$ (II) $\overline{0}$ (III)

$9:2 = 4$ (V); $4:2 = 2$ (VI); $2:2 = 1$ (VII);

$\overline{1}$ (IV) $\overline{0}$ (V) $\overline{0}$ (VI)

A t b i l d e. $75_{10} = 1001011_2$.

2. Pārveidot decimālajā skaitīšanas sistēmā divnieku skaitīšanas sistēmas skaitli 101101.

$2 \cdot 1 = 2,$ $2 \cdot 2 = 4,$ $2 \cdot 5 = 10,$

$2 + 0 = 2$ (V); $4 + 1 = 5$ (IV); $10 + 1 = 11$ (III);

$2 \cdot 11 = 22,$ $2 \cdot 22 = 44,$

$22 + 0 = 22$ (II); $44 + 1 = 45$ (I).

A t b i l d e . $101101_2 = 45_{10}$.

Cits risināšanas variants. $101101_2 = 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 = 45_{10}$.

Līdztekus divnieku skaitīšanas sistēmai skaitļošanas tehnikā izmanto arī astoņnieku (oktālo) skaitīšanas sistēmu, kurā no katrām 8 zemākām skaitīšanas vienībām veidojas 1 nākamā — augstākā skaitīšanas vienība.

ROMIEŠU CIPARI

Decimālās numerācijas un skaitļu pozicionālā pieraksta pirmsākumi meklējami senajā Indijā. Bet vēl tagad skaitļus mēdz rakstīt arī nepozicionāli ar t. s. romiešu cipariem. Te skaitļu rakstībā izmanto tikai septiņus ciparus:
I — viens, X — desmit, C — simts, M — tūkstotis,
V — pieci, L — piecdesmit, D — pieci simti.

Lai noteiktu skaitļa lielumu, atsevišķo ciparu vērtības jāsaskaita (romiešu rakstībā katram ciparam ir tikai viena vērtība neatkarīgi no tā vietas skaitlī):
III = 1 + 1 + 1 = 3;
XXVII = 10 + 10 + 5 + 1 + 1 = 27;
DCCCXXXVI = 500 + 100 + 100 + 100 + 10 + 10 + 10 + 5 + + 1 = 836;
MDCCLII = 1000 + 500 + 100 + 100 + 50 + 1 + 1 = 1752.

Pieņemts blakus rakstīt ne vairāk kā trīs vienādus ciparus, tāpēc dažu skaitļu pierakstā ciparu ar mazāku vērtību raksta pirms cipara ar lielāku vērtību un tad aprēķina nevis ciparu vērtību summu, bet starpību. Tādējādi iegūst iespēju uzrakstīt šādus skaitļus:
IV = 5 — 1 = 4; XL = 50 — 10 = 40; CD = 500 — 100 = 400;
IX = 10—1 = 9; XC = 100—10 = 90; CM = 1000 — 100 = 900.

Vēl dažu skaitļu pieraksti ar romiešu cipariem:
39 = XXXIX; 469 = CDLXIX;
97 = XCVII; 1984 = MCMLXXXIV.

1.2. NATURĀLO SKAITĻU DALĀMĪBA

DALĀMĪBAS JĒDZIENS

Saka, ka viens skaitlis dalās ar otru (bez atlikuma), ja pirmo skaitli var izteikt kā otrā skaitļa reizinājumu ar kādu skaitli. Ja, piemēram, $20 = 5 \cdot 4$, tad 20 dalās ar 5 (un arī ar 4) bez atlikuma. Tiešām, $20:5 = 4$ (un $20:4 = 5$).

Tāpat 30 dalās bez atlikuma ar 6 un ar 5, jo $30 = 6 \cdot 5$; 7— ar 7 un ar 1, jo $7 = 1 \cdot 7$, utt.

Turpretī, piemēram, 20 nedalās ar 3, jo nav tāda skaitļa, kura reizinājums ar 3 būtu vienāds ar 20.

SKAITĻA DALĀMIE UN DALĪTĀJI

Skaitļus, kas dalās ar doto skaitli, sauc par dotā skaitļa dalāmiem jeb daudzkārtņiem.

Skaitļa 15 dalāmie jeb daudzkārtņi ir 15, 30, 45, 60 utt., jo visi šie skaitļi dalās ar 15. Viegli saprast, ka jebkuram skaitlim ir bezgalīgi daudz dalāmo. Jāievēro arī, ka skaitlis 0 dalās ar jebkuru naturālu skaitli, piemēram, 0:17 = 0, 0:293 = 0 utt., taču nulle nav naturāls dalāmais.

Skaitļus, ar ko dalās dotais skaitlis, sauc par šī skaitļa dalītājiem.

Skaitļa 15 dalītāji ir 1, 3, 5 un 15. Kā redzams, skaitļa dalītāju skaits ir ierobežots. Jāiegaumē, ka skaitlis 1 ir jebkura skaitļa dalītājs.

Skaitļa dalāmie	Dotais skaitlis	Skaitļa dalītāji
15, 30, 45, 60,...	15	1, 3, 5, 15

PIRMSKAITĻI UN SALIKTI SKAITĻI

Jebkurš skaitlis dalās vismaz ar diviem skaitļiem — ar skaitli 1 un pats ar sevi, bet ir skaitļi, kas dalās arī vēl ar citiem skaitļiem. Piemēram, skaitlis 5 dalās tikai ar 1 un ar 5, bet skaitlis 6 dalās ne tikvien ar 1 un 6, bet arī vēl ar 2 un 3. Skaitli, kuram ir tikai divi dalītāji, sauc par pirmskaitli. 29 dalās tikai ar 1 un pats ar sevi, tāpēc 29 ir pirmskaitlis. Vēlams iegaumēt mazākos pirmskaitļus: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ...

Skaitli, kuram ir vairāk nekā divi dalītāji, sauc par saliktu skaitli.

10 dalās ar 1 un pats ar sevi un vēl dalās ar 2 un 5, tāpēc 10 ir salikts skaitlis.

No iepriekšējā izriet, ka skaitlis 1 nav ne pirmskaitlis, ne salikts skaitlis.

SAVSTARPĒJIE PIRMSKAITĻI

Divus skaitļus, kuriem nav neviena kopīga dalītāja, izņemot dalītāju 1, sauc par savstarpējiem pirmskaitļiem. Skaitļiem 10 un 13 kopīgais dalītājs ir tikai skaitlis 1, tāpēc skaitļi 10 un 13 ir savstarpēji pirmskaitļi. Turpretī skaitļi 10 un 12 nav savstarpēji pirmskaitļi, jo tiem bez skaitļa 1 kopīgais dalītājs ir vēl arī skaitlis 2.

Viens vai pat abi no savstarpējiem pirmskaitļiem paši par sevi var būt arī salikti skaitļi, piemēram, 10 un 13, 10 un 27.

DALĀMĪBAS PAZĪME AR 10, 100, 1000 UTT.

Atsevišķos gadījumos skaitļa dalāmību ar kādu citu skaitli var noteikt arī bez tiešas dalīšanas, izmantojot t. s. dalāmības pazīmes.

Ar 10, 100, 1000 utt. dalās tie skaitļi, kuriem attiecīgi pēdējie 1, 2, 3 utt. cipari ir nulles.

87 900 dalās ar 10 (pēdējais cipars ir nulle), dalās arī ar 100 (divi pēdējie cipari ir nulles), bet nedalās ar 1000 (trīs pēdējie cipari nav nulles).

DALĀMĪBAS PAZĪME AR 2 UN AR 5

Ar 2 un 5 dalās tie skaitļi, kuriem pēdējā cipara apzīmētais skaitlis dalās ar 2 vai 5.

34 270 dalās ar 2 un 5, jo pēdējā cipara apzīmētais skaitlis 0 dalās ar 2 un 5.

34 274 dalās ar 2, bet nedalās ar 5, jo 4 dalās ar 2, bet nedalās ar 5.

34 277 nedalās ne ar 2, ne ar 5, jo 7 nedalās ne ar 2, ne ar 5.

Skaitļus, kas dalās ar 2, sauc par pāra skaitļiem, bet skaitļus, kas nedalās ar 2,— par nepāra skaitļiem.

DALĀMĪBAS PAZĪME AR 3 UN AR 9

Ar 3 vai 9 dalās tie skaitļi, kuru ciparu summa dalās ar 3 vai 9.

865 242 dalās ar 3 un 9, jo ciparu summa $8+6+5+2+$ $+4+2=27$ dalās ar 3 un 9.

396 912 dalās tikai ar 3, bet nedalās ar 9, jo ciparu summa 30 dalās tikai ar 3, bet nedalās ar 9.

2639 nedalās ne ar 3, ne ar 9, jo ciparu summa 20 nedalās ne ar 3, ne ar 9.

DALĀMĪBAS PAZĪME AR 4 UN AR 25

Ar 4 vai 25 dalās tie skaitļi, kuriem divu pēdējo ciparu apzīmētais skaitlis dalās ar 4 vai 25.

75 236 dalās ar 4, bet nedalās ar 25, jo pēdējo divu ciparu veidotais skaitlis 36 dalās ar 4, bet nedalās ar 25.

21 375 dalās ar 25, bet nedalās ar 4, jo 75 dalās ar 25, bet nedalās ar 4.

35 600 dalās ar 4 un 25, jo 0 dalās gan ar 4, gan ar 25 (skaitlis 00 ir tas pats 0).

7438 nedalās ne ar 4, ne ar 25, jo 38 nedalās ne ar 4, ne ar 25.

CITAS DALĀMĪBAS PAZĪMES

Ja dotais skaitlis dalās ar katru no diviem savstarpējiem pirmskaitļiem, tad tas dalās arī ar šo skaitļu reizinājumu, piemēram,

ja skaitlis dalās ar 2 un 3, tad tas dalās arī ar 6 (jo $2\cdot3=6$);
ja skaitlis dalās ar 3 un 4, tad tas dalās arī ar 12;
ja skaitlis dalās ar 3 un 5, tad tas dalās arī ar 15.

P i e m ē r s. Vai skaitlis 375 480 dalās ar 15?

375 480 dalās ar 5, jo tā pēdējais cipars ir 0;

375 480 dalās ar 3, jo tā ciparu summa 27 dalās ar 3; tātad skaitlis 375 480 dalās ar 15.

Līdzīgi var noteikt dalāmību ar 14 ($14 = 2 \cdot 7$), ar 18 ($18 = 2 \cdot 9$), ar 36 ($36 = 4 \cdot 9$) u. tml.

P i e z ī m e. Stingri jāievēro nosacījums, ka abiem dalītājiem jābūt savstarpējiem pirmskaitļiem, jo pretējā gadījumā dotais skaitlis ar reizinājumu var arī nedalīties. Piemēram, 54 dalās gan ar 2, gan ar 6, bet nedalās ar reizinājumu $2 \cdot 6 = 12$, jo 2 un 6 nav savstarpēji pirmskaitļi.

SKAITĻA PIRMREIZINĀTĀJI

Jebkuru skaitli var sadalīt divos vai vairākos reizinātājos, pie tam bieži vien dažādos veidos, piemēram, $15 = 3 \cdot 5$, $60 = 6 \cdot 10 = 3 \cdot 5 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$; $7 = 7 \cdot 1$ u. tml.

Pirmskaitļus, kuru reizinājums ir dotais skaitlis, sauc par skaitļa pirmreizinātājiem.

Sadalīt skaitli pirmreizinātājos nozīmē izteikt doto skaitli kā pirmskaitļu reizinājumu.

Skaitļa 60 dalījums pirmreizinātājos ir $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$, jo $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$, pie tam visi reizinātāji ir pirmskaitļi. Līdzīgi $10 = 2 \cdot 5$, $21 = 3 \cdot 7$, $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$.

SKAITĻA SADALĪŠANA PIRMREIZINĀTĀJOS

Skaitli var sadalīt pirmreizinātājos ar dažādiem paņēmieniem.

P i r m a i s p a ņ ē m i e n s. Doto skaitli vispirms sadala divos jebkādos reizinātājos. Pēc tam tos reizinātājus, kas nav pirmskaitļi, savukārt sadala divos reizinātājos utt., līdz visi reizinātāji ir pirmskaitļi. Pēc tam iegūtos pirmreizinātājus parasti sakārto pēc lieluma augošā secībā un uzraksta kā pakāpju reizinājumu. Tā, piemēram, $60 = 6 \cdot 10 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$;

$540 = 10 \cdot 54 = 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 9 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$.

O t r a i s p a ņ ē m i e n s. Vispirms doto skaitli dala ar iespējami mazāko pirmskaitli, dabūto dalījumu dala atkal ar iespējami mazāko pirmskaitli utt., līdz dalījums ir skaitlis 1. Tā iegūtie dalītāji ir dotā skaitļa pirmreizinātāji.

Piemērā parādīts, kā dažādi var iekārtot skaitļa sadalīšanu pirmreizinātājos.

$$\begin{array}{l} 280 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7 \\ 140 \\ 70 \\ 35 \\ 7 \\ 1 \end{array} \qquad \text{vai arī} \qquad \begin{array}{r|l} 280 & 2 \\ 140 & 2 \\ 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$280 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7.$$

280 vispirms dala ar mazāko pirmskaitli 2. Iegūto dalījumu 140 dala vēlreiz ar 2. Dalījumu 70 vēlreiz dala ar 2. Dalījums 35 ar 2 vairs nedalās un arī ar 3 nedalās, tāpēc 35 dala ar nākamo

pirmskaitli 5. Pēdējais dalījums 7 ir pirmskaitlis. Dalot to pašu ar sevi, dabū dalījumu 1.

$1421 = 7\cdot7\cdot29 = 7^2\cdot29$	No dalāmības pazīmēm izriet, ka
203	1421 ar 2, ar 3 un ar 5 nedalās.
29	Tāpēc 1421 dala ar nākamo pirm-
1	skaitli 7 utt.

LIELĀKAIS KOPĪGAIS DALĪTĀJS

Tabulā pārskatāmi uzrakstīti skaitļu 12 un 18 dalītāji un kopīgie dalītāji (pasvītrotie).

Dotie skaitļi	Dalītāji	Kopīgie dalītāji
12	$\underline{1}, \underline{2}, \underline{3}, 4, \underline{6}, 12$	1, 2, 3, 6
18	$\underline{1}, \underline{2}, \underline{3}, \underline{6}, 9, 18$	

Kā redzams, abiem skaitļiem ir četri kopīgie dalītāji, bet lielākais no tiem ir 6.

Par divu vai vairāku skaitļu lielāko kopīgo dalītāju sauc lielāko skaitli, ar kuru dalās visi dotie skaitļi.

Skaitļu a un b lielāko kopīgo dalītāju apzīmē šādi: $L(a; b)$. Piemēram, $L(12; 18) = 6$ (lasa: skaitļu 12 un 18 lielākais kopīgais dalītājs ir 6); $L(45; 30; 60) = 15$.

LIELĀKĀ KOPĪGĀ DALĪTĀJA APRĒĶINĀŠANA

Lai aprēķinātu doto skaitļu lielāko kopīgo dalītāju, šie skaitļi jāsadala pirmreizinātājos un jāsareizina to kopīgie pirmreizinātāji.

Aprēķināt $L(90; 270; 225)$.

$90 = 2\cdot\underline{3\cdot3\cdot5}$	$270 = 2\cdot\underline{3}\cdot\underline{3}\cdot3\cdot\underline{5}$	$225 = \underline{3\cdot3\cdot5}\cdot5$
45	135	75
15	45	25
5	15	5
1	5	1
	1	

$L(90; 270; 225) = 3\cdot3\cdot5 = 45.$

P i e z ī m e . Visu triju skaitļu kopīgie pirmreizinātāji pasvītroti.

Lielākā kopīgā dalītāja atrašanā jāiegaumē divi īpaši gadījumi:

a) ja dotie skaitļi dalās ar mazāko no tiem, tad tas ir doto skaitļu lielākais kopīgais dalītājs, piemēram,
$L(12; 36) = 12$, $L(24; 6; 36) = 6$;

b) ja dotie skaitļi ir savstarpēji pirmskaitļi, tad to lielākais kopīgais dalītājs ir skaitlis 1, piemēram,
$L(17; 20) = 1$, $L(18; 25) = 1$.

MAZĀKAIS KOPĪGAIS DALĀMAIS

Tabulā pārskatāmi uzrakstīti skaitļu 12 un 8 dalāmie un kopīgie dalāmie (tie ir pasvītroti).

Dotie skaitļi	Dalāmie	Kopīgie dalāmie
12	12, $\underline{24}$, 36, $\underline{48}$, 60, $\underline{72}$, 84, ...	24, 48, 72, ...
8	8, 16, $\underline{24}$, 32, 40, $\underline{48}$, 56, 64, $\underline{72}$, ...	

Kā redzams, abiem skaitļiem ir bezgalīgi daudz kopīgo dalāmo, bet mazākais no tiem ir 24.

Par divu vai vairāku skaitļu mazāko kopīgo dalāmo sauc mazāko skaitli, kas dalās ar dotajiem skaitļiem.

Skaitļu a un b mazāko kopīgo dalāmo apzīmē ar $M(a;\ b)$.

Piemēram, $M(8;\ 12) = 24$ (lasa: skaitļu 8 un 12 mazākais kopīgais dalāmais ir 24); $M(10;\ 15;\ 40) = 120$.

MAZĀKĀ KOPĪGĀ DALĀMĀ APRĒĶINĀŠANA

Lai aprēķinātu doto skaitļu mazāko kopīgo dalāmo, dotie skaitļi jāsadala pirmreizinātājos, no viena skaitļa jāizraksta visi pirmreizinātāji, bet no pārējiem jāpieraksta tikai trūkstošie pirmreizinātāji, un visi uzrakstītie pirmreizinātāji jāsareizina.

Aprēķināt $M(18;\ 8;\ 90)$.

$18 = 2\cdot3\cdot3$,	$8 = 2\cdot2\cdot2$,	$90 = 2\cdot3\cdot3\cdot5$,
9	4	45
3	2	15
1	1	3
		1

$M(18;\ 8;\ 90) = 2\cdot3\cdot3\cdot2\cdot2\cdot5 = 360.$

No pirmā skaitļa izrakstīti visi pirmreizinātāji $2\cdot3\cdot3$; no otrā skaitļa pierakstīti trūkstošie pirmreizinātāji $2\cdot2$; no trešā skaitļa pierakstīts trūkstošais pirmreizinātājs 5.

Mazākā kopīgā dalāmā aprēķināšanā jāiegaumē divi gadījumi:

a) ja lielākais skaitlis dalās ar pārējiem skaitļiem, tad tas ir šo skaitļu mazākais kopīgais dalāmais, piemēram,

$M(60;\ 15;\ 30) = 60$;

b) ja dotie skaitļi ir pa pāriem savstarpēji pirmskaitļi, tad to mazākais kopīgais dalāmais ir doto skaitļu reizinājums, piemēram,

$M(10;\ 27) = 10\cdot27 = 270$, $M(3;\ 4;\ 5) = 3\cdot4\cdot5 = 60$.

1.3. NATURĀLO SKAITĻU SASKAITĪŠANA

SASKAITĪŠANAS DARBĪBAS JĒDZIENS

Saskaitīšanas jēdziens izveidojies, risinot dažādus reālās dzīves uzdevumus, kuros jāapvieno divi daudzumi. Tā, piemēram, ja groziņā, kurā 8 āboli, ieliek vēl 5 ābolus, tad ābolu skaitu groziņā var aprēķināt, abus šos skaitļus saskaitot.

SASKAITĪŠANAS PIERAKSTS UN LASĪŠANA

Saskaitīšanas darbības zīme ir «+» (plusa zīme). Saskaitot skaitļus raksta rindiņā vai vienu zem otra:

$45+27=72;$

$$\begin{array}{r} 47356 \\ +8904 \\ \hline 56260. \end{array}$$

Skaitļus, ko saskaita, sauc par saskaitāmiem. Saskaitīšanas rezultātu sauc par summu.

45	+	27	=	72.
Saskaitāmais		Saskaitāmais		Summa

Lasa: 45 plus 27 ir vienāds ar 72; pie 45 pieskaitīt 27 ir 72; skaitļu 45 un 27 summa ir 72.

Izteiksmi $45+27$ arī sauc par summu.

VAIRĀKU SKAITĻU SUMMA

Trīs vai vairākus skaitļus saskaita, vispirms saskaitot pirmo un otro skaitli, pēc tam pie iegūtās summas pieskaitot trešo skaitli utt.:

$a+b+c+d=((a+b)+c)+d.$

$47+8+5+13=(47+8)+5+13=(55+5)+13=$
$=60+13=73.$

SKAITLIS 0 SASKAITĪŠANĀ

Ja kaut viens no diviem saskaitāmiem ir skaitlis 0, tad summa ir vienāda ar otru saskaitāmo:

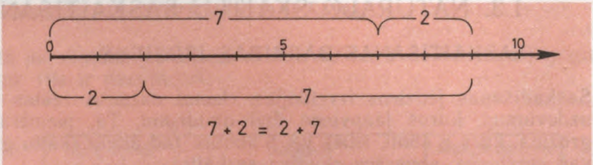
$a+0=0+a=a.$

$13+0=13;\ 0+47=47;\ 0+0=0.$

SASKAITĪŠANAS KOMUTATĪVĀ (PĀRVIETOJAMĪBAS) ĪPAŠĪBA

Ja saskaitāmos maina vietām (pārvieto), tad summa nemainās:

$a+b=b+a$ (2. zīm.).



2. zīm.

SASKAITĪŠANAS ASOCIATĪVĀ (SAVIENOJAMĪBAS) ĪPAŠĪBA

Ja saskaitāmos savieno grupās, tad summa nemainās:
$(a+b)+c=a+(b+c)$.

Tālāk piemēros parādīts, kā divējādi var savienot grupās trīs saskaitāmos 24, 15 un 36:

$$24+15+36= \begin{cases} (24+15)+36=39+36=75 \\ 24+(15+36)=24+51=75. \end{cases}$$

Komutatīvā un asociatīvā īpašība piemīt arī vairāku skaitļu summai, tāpēc jebkurā summā saskaitāmos drīkst pēc patikas gan pārvietot, gan savienot (ieslēgt iekavās vai atmest iekavas):

$8+15+12+9=8+(15+12)+9=15+(8+12)+$
$+9=\ldots$

SASKAITĪŠANA GALVĀ

Divu viencipara skaitļu summas (t. s. saskaitīšanas tabula) jāiegaumē no galvas:

$1+1$; $5+3$; $8+7$; $9+9$; $0+4$; $7+0$ u. tml.

Saskaitot lielākus skaitļus, tos sadala izdevīgos saskaitāmos un izmanto saskaitīšanas īpašības, pie tam aprēķinu gaitu pieraksta rindiņā vai arī aprēķinu veic tikai domās:

$46+7=46+4+3=50+3=53$ vai
$46+7=40+(6+7)=40+13=53$;
$37+28=37+20+8=57+8=65$;
$560+340=560+300+40=860+40=900$ vai
$560+340=(500+300)+(60+40)=800+100=900$.

Atsevišķos gadījumos izdevīgi saskaitāmos pārvietot un savienot grupās:

$63+29+37=63+37+29=100+29=129$;

$48 + 36 + 12 + 54 = (48 + 12) + (36 + 54) = 60 + 90 =$
$= 150.$

Dažkārt vienu vai abus saskaitāmos var noapaļot:

$245 + 497 = 245 + 500 - 3 = 745 - 3 = 742;$
$695 + 198 = 700 + 200 - 5 - 2 = 900 - 7 = 893.$

SASKAITĪŠANA RAKSTOS

Aprēķinot summas rakstos, saskaitāmos paraksta vienu zem otra tā, lai vieni atrastos zem vieniem, desmiti zem desmitiem, simti zem simtiem utt. Vispirms saskaita vienus, tad desmitus utt. Piemēros parādīti raksturīgākie saskaitīšanas gadījumi.

$$\begin{array}{r} 5736 \\ +42309 \\ \hline 48045 \end{array}$$

Saskaitīšanas gaita:

1) 6 vieni plus 9 vieni ir 15 vieni, t. i., 1 desmits un 5 vieni; zem vieniem raksta 5, 1 desmits atmiņā;

2) 1 desmits plus 3 desmiti plus 0 desmiti ir 4 desmiti; zem desmitiem raksta 4;

3) 7 simti plus 3 simti ir 10 simti, t. i., 1 tūkstotis; zem simtiem raksta 0, 1 tūkstotis atmiņā;

4) 1 tūkstotis plus 5 tūkstoši plus 2 tūkstoši ir 8 tūkstoši; zem tūkstošiem raksta 8;

5) zem desmittūkstošiem raksta 4; tātad summa ir 48045.

Parasti saskaitīšanas gaitu paskaidro īsāk:

1) 6 plus 9 ir 15; (5 raksta, 1 atmiņā);
2) $1 + 3 + 0 = 4$; (4 raksta);
3) $7 + 3 = 10$; (0 raksta, 1 atmiņā);
4) $1 + 5 + 2 = 8$ (8 raksta);
5) 4 (raksta); tātad summa ir 48045.

Saskaitīšanas gaitu pavisam īsi paskaidro tā:

647	1) 7, 12, 14, 17 (7 raksta, 1 atmiņā);
38285	2) 1, 5, 13, 19, 28 (8 raksta, 2 atmiņā);
7362	3) 2, 8, 10, 13, 19 (9 raksta, 1 atmiņā);
693	4) 1, 9, 16 (6 raksta, 1 atmiņā);
46987	5) 1, 4 (4 raksta); tātad summa ir 46987.

P i e z ī m e. Ja saskaita trīs vai vairākus skaitļus, tad plusa zīmi parasti neraksta.

SUMMAS PĀRBAUDE

Ja ir tikai divi saskaitāmie, tad summas pareizību pārbauda, no summas atņemot vienu saskaitāmo. Ja rezultātā iegūst otru saskaitāmo, tad saskaitīšana izdarīta pareizi.

Saskaita: $\begin{array}{r} 500528 \\ +\ 89736 \\ \hline 590264. \end{array}$ Pārbauda: $\begin{array}{r} 590264 \\ -500528 \\ \hline 89736. \end{array}$

Ja saskaitāmo ir vairāk nekā divi, tad summas pareizību pārbauda, saskaitot saskaitāmos pretējā secībā (pārbaudot saskaitāmie nav jāpārraksta). Ja iegūst to pašu summu, tad saskaitīšana izdarīta pareizi.

Saskaita $\begin{array}{r} 647 \\ 38285 \\ 7362 \\ 693 \\ \hline 46987 \end{array}$ Pārbauda

1.4. NATURĀLO SKAITĻU ATŅEMŠANA

ATŅEMŠANAS DARBĪBAS JĒDZIENS

No viena skaitļa atņemt otru skaitli nozīmē atrast tādu trešo skaitli, kas, saskaitīts ar otru skaitli, dod pirmo skaitli:

$a - b = c$, ja $c + b = a$.

Tā, piemēram, no 13 atņemt 5 nozīmē atrast tādu skaitli, kas, saskaitīts ar 5, dod summā 13:

$13 - 5 = 8$, jo $8 + 5 = 13$.

Tāpat arī $24 - 0 = 24$, jo $24 + 0 = 24$. Tātad nulles atņemšana doto skaitli nemaina:

$a - 0 = a$.

Naturālo skaitļu kopā no mazāka skaitļa lielāku skaitli atņemt nav iespējams, piemēram, nevar aprēķināt starpības $8 - 15$, $0 - 9$.

ATŅEMŠANAS PIERAKSTS UN LASĪŠANA

Atņemšanas darbības zīme ir «—» (mīnusa zīme).

Atņemšanā, tāpat kā saskaitīšanā, skaitļus raksta rindiņā vai arī vienu zem otra:

$23 - 15 = 8$; $\begin{array}{r} 8967 \\ -725 \\ \hline 8242. \end{array}$

Skaitli, no kura atņem, sauc par mazināmo. Skaitli, ko atņem, sauc par mazinātāju. Atņemšanas rezultātu sauc par starpību.

$\underset{\text{Mazināmais}}{23} - \underset{\text{Mazinātājs}}{15} = \underset{\text{Starpība}}{8}.$

Lasa: 23 mīnus 15 ir vienāds ar 8; no 23 atņemt 15 ir 8; skaitļu 23 un 15 starpība ir vienāda ar 8.

Izteiksmi $23 - 15$ arī sauc par starpību.

ATŅEMŠANA KĀ SASKAITĪŠANAS APGRIEZTA DARBĪBA

Saskaņā ar atņemšanas definīciju, pie starpības pieskaitot mazinātāju, iegūst mazināmo. Tāpēc arī pieņemts teikt, ka saskaitīšana un atņemšana ir savstarpēji apgrieztas darbības. No tā izriet, ka viena un tā paša skaitļa pieskaitīšana un sekojoša atņemšana (vai otrādi) sākotnējo skaitli nemaina:

$a + b - b = a$ vai $a - b + b = a$.

$47 + 5 - 5 = 47$ vai $47 - 5 + 5 = 47$.

SUMMAS ATŅEMŠANA NO SKAITĻA

Summu no skaitļa var atņemt arī tā, ka no skaitļa atņem saskaitāmos citu pēc cita:

$a - (b + c) = a - b - c$.

$34 - (7 + 9) =$
- $34 - 16 = 18$ (atrisinot dotajā darbību secībā)
- $34 - 7 - 9 = 18$ (atņemot summas saskaitāmos vienu pēc otra).

ATŅEMŠANA GALVĀ

No galvas jāiegaumē t. s. atņemšanas tabula (saskaitīšanas tabulas sakarībām apgrieztās sakarības): $2 - 1$; $8 - 3$; $15 - 7$; $18 - 9$; $4 - 0$; $7 - 0$ u. tml.

Atņemot lielākus skaitļus, tos sadala izdevīgos saskaitāmos un izmanto atņemšanas īpašības. Piemēros parādīti raksturīgākie aprēķinu paņēmieni.

$53 - 7 = 53 - 3 - 4 = 50 - 4 = 46$ vai

$53 - 7 = 40 + (13 - 7) = 40 + 6 = 46$;

$380 - 230 = 380 - 200 - 30 = 180 - 30 = 150$.

Atsevišķos gadījumos ir izdevīgi noapaļot mazinātāju:

$543 - 98 = 543 - 100 + 2 = 443 + 2 = 445$.

Starpību var aprēķināt arī ar t. s. papildināšanas paņēmienu. Piemēram, lai atrastu starpību $100 - 64$, meklē, cik jāpieskaita (pasvītrotie skaitļi) pie 64, lai iegūtu 100:

$64 + \underline{6} = 70$; $70 + \underline{30} = 100$, tātad starpība ir $6 + 30 = 36$.

Lai atrastu starpību 600 — 387, domā šādi: 387 + 3 = 390; 390 + 10 = 400; 400 + 200 = 600. Tātad starpība ir 3 + 10 + + 200 = 213.

ATŅEMŠANA RAKSTOS

Atņemot rakstos, skaitļi viens zem otra jāpieraksta tā, lai attiecīgās šķiras būtu viena zem otras. Vispirms atņem vienus no vieniem, tad desmitus no desmitiem utt.

Piemēros parādīti raksturīgākie atņemšanas gadījumi.

$$\begin{array}{r} 4\dot{6}\dot{0}3 \\ -1275 \\ \hline \end{array}$$

No 3 vieniem 5 vienus nevar atņemt, tāpēc paņem 1 vienību no tuvākās netukšās augstākās šķiras (liek punktu virs cipara 0, pēc tam virs cipara 6); 1 simtu sasmalcina 10 desmitos, no tiem 9 desmitus atstāj desmitu šķirā, bet 1 desmitu sasmalcina 10 vienos; kopā ar jau esošajiem 3 vieniem vienu šķirā ir 13 vieni. Tagad mazināmā vienu šķirā ir 13 vieni, desmitu šķirā ir 9 desmiti, simtu šķirā ir 5 simti un tūkstošu šķirā tāpat kā sākumā ir 4 tūkstoši (mazie cipari virs mazināmā) un var izpildīt atņemšanu.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 45913} \\ 4\dot{6}\dot{0}3 \\ -1275 \\ \hline 3328 \end{array}$$

Jāatceras, ka vērtīgais cipars ar punktu virs tā tiek pamazināts par 1, bet nulles ar punktu virs tās kļūst par 9.

Atņemšanas gaitu īsi var paskaidrot šādi:

$$\begin{array}{r} 1001102 \\ -90205 \\ \hline 910897 \end{array}$$

1) no 2 atņemt 5 nevar (liek punktu virs 0, punktu virs 1), 12 mīnus 5 ir 7 (7 raksta);
2) 9 mīnus 0 ir 9 (9 raksta);
3) no 0 atņemt 2 nevar (liek punktu virs 1), 10 mīnus 2 ir 8 (8 raksta);
4) 0 mīnus 0 ir 0 (0 raksta);
5) no 0 atņemt 9 nevar (liek punktu virs 0, punktu virs 1), 10 mīnus 9 ir 1 (1 raksta);
6) 9 (raksta); tātad starpība ir 910897.

STARPĪBAS PĀRBAUDE

Starpības pareizību pārbauda, saskaitot starpību ar mazinātāju. Ja iegūtā summa ir vienāda ar mazināmo, tad atņemšana izdarīta pareizi.

$$\begin{array}{r} 43028 \\ -27045 \\ \hline 15983. \end{array} \qquad \text{Pārbaude:} \quad \begin{array}{r} 15983 \\ +27045 \\ \hline 43028. \end{array}$$

Pārbaudot starpības pareizību, var saskaitīt starpību un mazinātāju, tos nepārrakstot.

Pārbaudes gaita:

1) $6 + 9 = 15$, saskan;
2) $1 + 0 + 3 = 4$, saskan;
3) $5 + 7 = 12$, saskan;
4) $1 + 5 + 2 = 8$, saskan; tātad starpība ir pareiza.

1.5. NATURĀLO SKAITĻU REIZINĀŠANA

REIZINĀŠANAS DARBĪBAS JĒDZIENS

Reizināt kādu skaitli ar 2, 3, 4, ... nozīmē ņemt šo skaitli par saskaitāmo tik reižu, cik vienu otrā skaitlī:

$$a \cdot b = \underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{b \text{ reizes}}.$$

Piemēram, 27 reizināt ar 4 nozīmē 27 ņemt par saskaitāmo 4 reizes, t. i., $27 \cdot 4 = 27 + 27 + 27 + 27 = 108$.

REIZINĀŠANAS PIERAKSTS UN LASĪŠANA

Reizināšanas darbības zīme ir «·» jeb «×». Reizinot skaitļus raksta rindiņā vai arī vienu zem otra:

$18 \cdot 3 = 54$; $\begin{array}{r} 457 \\ \cdot\ 4 \\ \hline 1828. \end{array}$

Skaitļus, ko reizina, sauc par reizinātājiem. Reizināšanas rezultātu sauc par reizinājumu.

$$\underset{\text{Reizinātājs}}{18} \cdot \underset{\text{Reizinātājs}}{3} = \underset{\text{Reizinājums}}{54}$$

Lasa: 18 reizināt ar 3 ir vienāds ar 54; skaitļu 18 un 3 reizinājums ir 54. Pieļaujama arī šāda lasīšanas forma: 18 reiz 3 ir 54.

Izteiksmi $18 \cdot 3$ arī sauc par reizinājumu.

SKAITLIS 1 UN SKAITLIS 0 REIZINĀŠANĀ

Tā kā, piemēram, $1 \cdot 4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$, tad pieņem, ka arī $4 \cdot 1 = 4$.

Ja viens no diviem reizinātājiem ir skaitlis 1, tad reizinājums ir vienāds ar otru no reizinātājiem:

$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$. $1 \cdot 417 = 417$; $29 \cdot 1 = 29$; $1 \cdot 1 = 1$.

Tā kā, piemēram, $0 \cdot 3 = 0 + 0 + 0 = 0$, tad pieņem, ka arī $3 \cdot 0 = 0$:

Ja kaut viens no reizinātājiem ir skaitlis 0, tad reizinājums vienmēr ir 0:

$0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$. $0 \cdot 4853 = 0$; $302 \cdot 0 = 0$; $84 \cdot 0 \cdot 37 \cdot 6 = 0$; $0 \cdot 0 = 0$; $1 \cdot 0 = 0$.

VAIRĀKU SKAITĻU REIZINĀJUMS

Trīs vai vairāku skaitļu reizinājumu aprēķina, vispirms sareizinot pirmos divus skaitļus, pēc tam iegūto reizinājumu reizinot tālāk ar trešo skaitli utt.:

$a \cdot b \cdot c \cdot d = ((a \cdot b) \cdot c) \cdot d$.

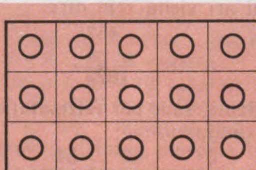
$8 \cdot 15 \cdot 4 \cdot 3 = (8 \cdot 15) \cdot 4 \cdot 3 = (120 \cdot 4) \cdot 3 = 480 \cdot 3 = 1440$.

REIZINĀŠANAS KOMUTATĪVĀ (PĀRVIETOJAMĪBAS) ĪPAŠĪBA

Ja reizinātājus maina vietām (pārvieto), tad reizinājums nemainās:

$a \cdot b = b \cdot a$.

$5 \cdot 3 = 3 \cdot 5$.



5 · 3 = 3 · 5

REIZINĀŠANAS ASOCIATĪVĀ (SAVIENOJAMĪBAS) ĪPAŠĪBA

Ja reizinātājus savieno grupās, tad reizinājums nemainās:

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Piemēros parādīts, kā var savienot grupās reizinātājus reizinājumā $8 \cdot 3 \cdot 4$:

$$8 \cdot 3 \cdot 4 = \begin{cases} (8 \cdot 3) \cdot 4 = 24 \cdot 4 = 96 \\ 8 \cdot (3 \cdot 4) = 8 \cdot 12 = 96. \end{cases}$$

Komutatīvā un asociatīvā īpašība piemīt arī vairāku skaitļu reizināšanai, tāpēc jebkurā reizinājumā drīkst pēc patikas pārvietot un savienot reizinātājus (pēc patikas salikt vai atmest iekavas):

$4 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 6 = (4 \cdot 3) \cdot (8 \cdot 6) = 8 \cdot (3 \cdot 4) \cdot 6 = \ldots$

REIZINĀŠANAS DISTRIBUTĪVĀ (SADALĀMĪBAS) ĪPAŠĪBA

Summu ar skaitli var sareizināt arī tā, ka sareizina katru summas saskaitāmo ar šo skaitli un iegūtos reizinājumus saskaita:

$(a + b) \cdot k = a \cdot k + b \cdot k.$

$(3 + 5) \cdot 4 =$

- $8 \cdot 4 = 32$ (atrisinot dotajā darbību secībā),
- $3 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = 12 + 20 = 32$ (atrisinot pēc distributīvās īpašības).

Līdzīgi var arī reizināt skaitli ar summu:

$6 \cdot (10 + 3) = 6 \cdot 10 + 6 \cdot 3 = 60 + 18 = 78.$

Distributīvā īpašība piemīt arī vairāku skaitļu summas un arī divu skaitļu starpības reizināšanai ar skaitli:

$(2 + 6 + 1) \cdot 3 = 2 \cdot 3 + 6 \cdot 3 + 1 \cdot 3 = 6 + 18 + 3 = 27;$

$(20 - 3) \cdot 8 = 20 \cdot 8 - 3 \cdot 8 = 160 - 24 = 136.$

REIZINĀŠANA GALVĀ

Jebkuru divu viencipara skaitļu reizinājumi (t. s. reizināšanas tabula) jāiegaumē no galvas: $1 \cdot 1$; $3 \cdot 5$; $8 \cdot 7$; $0 \cdot 9$; $0 \cdot 5$; $6 \cdot 0$; $0 \cdot 0$ u. tml.

Lai naturālu skaitli pareizinātu ar 10, 100 utt., tad šim skaitlim labajā pusē jāpieraksta 1, 2, 3 utt. nulles:

$29 \cdot 100 = 2900$; $10 \cdot 307 = 3070$; $4070 \cdot 1000 = 4\,070\,000$.

Reizinot lielākus skaitļus, tos sadala izdevīgos saskaitāmos vai reizinātājos un izmanto reizināšanas īpašības:

$4 \cdot 300 = 4 \cdot (3 \cdot 100) = 4 \cdot 3 \cdot 100 = 12 \cdot 100 = 1200;$

$38 \cdot 20 = 38 \cdot (2 \cdot 10) = 38 \cdot 2 \cdot 10 = 76 \cdot 10 = 760;$

$46 \cdot 3 = (40 + 6) \cdot 3 = 40 \cdot 3 + 6 \cdot 3 = 120 + 18 = 138;$

$17 \cdot 12 = 17 \cdot (3 \cdot 4) = (17 \cdot 3) \cdot 4 = 51 \cdot 4 = 204.$

Reizēm reizinātājus var pārvietot un savienot izdevīgās grupās:

$4 \cdot 37 \cdot 25 = (4 \cdot 25) \cdot 37 = 100 \cdot 37 = 3700;$

$125 \cdot 15 \cdot 8 \cdot 4 = (125 \cdot 8) \cdot (15 \cdot 4) = 1000 \cdot 60 = 60\,000.$

Reizinot 25 ar kādu skaitli, der ievērot, ka katri 4 divdesmitpiecnieki veido 1 simtu, pimēram, $25 \cdot 4 = 100$, $25 \cdot 8 = 200$, $25 \cdot 12 =$

$= 300$, t. i., cik četrinieku ir otrā reizinātājā, tik pilnu simtu ir reizinājumā:

$25 \cdot 12 = 100 \cdot (12:4) = 100 \cdot 3 = 300;$
$25 \cdot 13 = 300 + 25 \cdot 1 = 325;$
$25 \cdot 14 = 300 + 25 \cdot 2 = 350;$
$25 \cdot 27 = 100 \cdot 6 + 25 \cdot 3 = 675;$
$34 \cdot 25 = 100 \cdot 8 + 25 \cdot 2 = 850.$

REIZINĀŠANA RAKSTOS

Reizinot rakstos, skaitļus vienu zem otra paraksta tā, lai to pēdējie vērtīgie cipari būtu viens zem otra.

Piemēros parādīti raksturīgākie reizināšanas gadījumi.

Reizināšanu ar viencipara skaitli sāk, reizinot vienus, tad reizina desmitus, simtus utt.

Reizināšanas gaita:

$$\begin{array}{r} 4508 \\ \cdot \quad 6 \\ \hline 27048 \end{array}$$

1) 8 vienus reizināt ar 6 ir 48 vieni, t. i., 4 desmiti un 8 vieni; 8 raksta zem vieniem, 4 desmiti atmiņā;
2) 0 desmitu reizināt ar 6 ir 0 desmiti, plus 4 desmiti ir 4 desmiti; zem desmitiem raksta 4;
3) 5 simtus reizināt ar 6 ir 30 simti, t. i., 3 tūkstoši un 0 simtu; zem simtiem raksta 0, 3 tūkstoši atmiņā;
4) 4 tūkstoši reizināt ar 6 ir 24 tūkstoši, plus 3 tūkstoši ir 27 tūkstoši; tos pieraksta zem tūkstošiem; tātad reizinājums ir 27 048.

Īsāk reizināšanas gaitu paskaidro tā:

1) $8 \cdot 6 = 48$ (8 raksta, 4 atmiņā);
2) $0 \cdot 6 = 0$, $0 + 4 = 4$ (4 raksta);
3) $5 \cdot 6 = 30$ (0 raksta, 3 atmiņā);
4) $4 \cdot 6 = 24$, $24 + 3 = 27$ (27 raksta); tātad reizinājums ir 27 048.

Jāievēro, ka jāreizina visu šķiru cipari, kaut arī tie ir nulles, piemēram:

$$\begin{array}{r} 6007 \\ \cdot \quad 4 \\ \hline 24028 \end{array}$$

1) $7 \cdot 4 = 28$ (8 raksta, 2 atmiņā);
2) $0 \cdot 4 = 0$, nulle plus 2 ir 2 (2 raksta);
3) $0 \cdot 4 = 0$ (0 raksta) utt.

Reizinot ar viencipara skaitli, aprēķinu var pierakstīt arī rindiņā, saglabājot to pašu rakstiskās reizināšanas gaitu (reizinājuma pierakstu sāk ar ciparu, kas apzīmē vienus):

$9 \cdot 80\,027 = \dots 3.$

Reizinot vairākciparu skaitļus, vienu no skaitļiem reizina pēc kārtas ar otrā skaitļa vienu šķiras ciparu, ar desmitu šķiras ciparu utt., pie tam katru starpreizinājumu sāk rakstīt zem tā cipara, ar kuru reizina. Pēc tam starpreizinājumus saskaita, piemēram:

$$\begin{array}{r} 245\\ \cdot\ 374\\ \hline 980\\ 1715\\ 735\\ \hline 91630 \end{array}$$

1) $5\cdot4=20$ (zem cipara 4 raksta 0, 2 atmiņā);
2) $4\cdot4=16$, plus 2 ir 18 (8 raksta, 1 atmiņā);
3) $2\cdot4=8$, plus 1 ir 9 (9 raksta);
4) $5\cdot7=35$ (zem cipara 7 raksta 5, 3 atmiņā);
5) $4\cdot7=28$, plus 3 ir 31 (1 raksta, 3 atmiņā) utt.

Ja otrā reizinātāja vidējie cipari ir nulles, tad ar tām nereizina, piemēram:

$$\begin{array}{r} 849\\ \cdot3006\\ \hline 5094\\ 2547\\ \hline 2552094 \end{array}$$

Šajā gadījumā 849 reizina tikai ar vērtīgajiem cipariem 6 un ar 3, ievērojot, ka starpreizinājumu ar 3 jāsāk rakstīt zem cipara 3.

Ja reizinātāju pēdējie cipari ir nulles, tad pietiek sareizināt šos skaitļus, neievērojot nulles skaitļu beigās, un pēc tam šīs nulles pierakstīt dabūtā reizinājuma beigās:

$$473\,000\cdot690=(473\cdot1000)\cdot(69\cdot10)=(473\cdot69)\cdot(100\cdot10).$$

Reizināšanu iekārto šādi:

$$\begin{array}{r} 473\,000\\ \cdot\ \ 6900\\ \hline 4257\\ 2838\\ \hline 3263700000 \end{array} \quad \text{vai} \quad 473\,000\cdot6900=3\,263\,700\,000 \quad \begin{array}{r} 473\\ \cdot\ \ 69\\ \hline 4257\\ 2838\\ \hline 32637 \end{array}$$

REIZINĀJUMA PĀRBAUDE

Ja viens no reizinātājiem ir viencipara skaitlis, tad reizinājuma pareizību pārbauda, dalot reizinājumu ar vienu no reizinātājiem. Ja dalījumā dabū otru reizinātāju, tad reizinājums ir pareizs.

Reizina: $80\,027\cdot9=720\,243$.
Pārbauda:. $720\,243:9=80\,027$.

Ja abi reizinātāji ir divciparu vai vairākciparu skaitļi, tad reizinājuma pareizību izdevīgi pārbaudīt, sareizinot tos pašus skaitļus apgrieztā secībā.

Reizina:	$\begin{array}{r} 8354 \\ \cdot\ 49 \\ \hline 75186 \\ 33416 \\ \hline 409346. \end{array}$	Pārbauda:	$\begin{array}{r} 49 \\ \cdot\ 8354 \\ \hline 196 \\ 245 \\ 147 \\ 392 \\ \hline 409346. \end{array}$

Reizinājumu aptuveni pārbaudot, noapaļo reizinātājus, paturot tikai vienu vērtīgo ciparu.

$8354 \cdot 49 \approx 8000 \cdot 50 = 400\,000;$

$720 \cdot 20\,980 \approx 700 \cdot 20\,000 = 14\,000\,000.$

1.6. NATURĀLO SKAITĻU DALĪŠANA

DALĪŠANAS DARBĪBAS JĒDZIENS

Dalīt vienu skaitli ar otru nozīmē atrast tādu trešo skaitli, kura reizinājums ar otro skaitli ir vienāds ar pirmo skaitli:

$a{:}b = c$, ja $c \cdot b = a$.

Tā, piemēram, 28 dalīt ar 7 nozīmē atrast tādu skaitli, kura reizinājums ar 7 ir 28. Tāpēc $28{:}7 = 4$, jo $4 \cdot 7 = 28$.

DALĪŠANAS PIERAKSTS UN LASĪŠANA

Dalīšanas darbības zīme ir «:» vai «—». Dalīšanas darbību pieraksta šādi:

$28{:}7 = 4$ vai $\frac{28}{7} = 4$. Dažkārt dalīšanas darbību apzīmē ar slīpu svītru, piemēram, $28/7 = 4$.

Skaitli, ko dala, sauc par dalāmo. Skaitli, ar ko dala, sauc par dalītāju. Dalīšanas rezultātu sauc par dalījumu.

28	:	7	=	4.
Dalāmais		Dalītājs		Dalījums

Lasa: 28 dalīt ar 7 ir vienāds ar 4; skaitļu 28 un 7 dalījums ir 4. Izteiksmi 28:7 arī sauc par dalījumu.

SKAITLIS 0 DALĪŠANĀ

Ja dalāmais ir skaitlis 0, bet dalītājs nav 0, tad dalījums ir nulle, piemēram, $0{:}47 = 0$, jo $0 \cdot 47 = 0$.

Ja dalītājs ir nulle, bet dalāmais nav nulle, piemēram, 36:0, tad dalīšana nav iespējama, jo nav tāda skaitļa, kura reizinājums ar dalītāju 0 būtu 36.

Ja dalītājs un arī dalāmais ir nulle, t. i., 0:0, tad dalījums nav viens vienīgs skaitlis, jo jebkura skaitļa reizinājums ar dalītāju 0 ir vienāds ar dalāmo 0, piemēram, $0:0 = 15$, jo $15 \cdot 0 = 0$; $0:0 = 309$, jo $309 \cdot 0 = 0$ u. tml. Tāpēc arī matemātikas kursā dalīšanu ar skaitli 0 neaplūko un saka: «ar nulli dalīt nevar».

DALĪŠANA KĀ REIZINĀŠANAI APGRIEZTA DARBĪBA

No dalīšanas definīcijas izriet, ka, reizinot dalījumu ar dalītāju, iegūst dalāmo. Tāpēc arī pieņemts teikt, ka dalīšana ir reizināšanai apgriezta darbība. No tā izriet, ka reizināšana un tai sekojoša dalīšana ar vienu un to pašu skaitli (vai otrādi) sākotnējo skaitli nemaina:

$a \cdot b:b = a$ vai $a:b \cdot b = a$.

$12 \cdot 4:4 = 12$ vai $12:4 \cdot 4 = 12$.

DALĪŠANĀ RODAS ATLIKUMS

Ne vienmēr divi naturāli skaitļi dalās viens ar otru. Piemēram, dalot 27 ar 4, var izdalīt ne vairāk kā 24, bet 3 paliek neizdalīts. Skaitli 3 sauc par dalīšanas atlikumu.

Dalīšanu tad pieraksta šādi:

$27:4 = 6$, atlikumā 3.

Dalīšana, kurā rodas atlikums, ir izdarīta pareizi tad, ja a) dalījuma un dalītāja reizinājuma un atlikuma summa ir vienāda ar dalāmo un b) atlikums ir mazāks nekā dalītājs. Iepriekšējā piemērā izdalīts pareizi, jo 1) $6 \cdot 4 + 3 = 27$ un 2) $3 < 4$.

Dalīšanā atlikums rodas arī tad, ja dalāmais ir mazāks nekā dalītājs.

$3:8 = 0$, atl. 3, jo $0 \cdot 8 + 3 = 3$, pie tam $3 < 8$; $27:29 = 0$, atl. 27.

DALĪŠANAS DISTRIBUTĪVĀ (SADALĀMĪBAS) ĪPAŠĪBA

Summu ar skaitli var izdalīt arī tā, ka izdala katru summas saskaitāmo ar šo skaitli un iegūtos dalījumus saskaita:

$(a + b):k = a:k + b:k$.

$$(15+6):3 = \begin{cases} 21:3 = 7 \text{ (parastajā darbību secībā)}, \\ 15:3 + 6:3 = 5 + 2 = 7 \text{ (pēc distributīvās īpašības)}. \end{cases}$$

Distributīvā īpašība piemīt arī vairāku skaitļu summas un arī divu skaitļu starpības dalīšanai ar skaitli.

$(35 + 10 + 25):5 = 35:5 + 10:5 + 25:5 = 7 + 2 + 5 = 14;$
$(30 - 24):6 = 30:6 - 24:6 = 5 - 4 = 1.$

SKAITĻA DALĪŠANA AR REIZINĀJUMU

Skaitli ar reizinājumu var dalīt arī tā, ka skaitli vispirms dala ar vienu reizinātāju un dabūto dalījumu dala ar otru reizinātāju.

$a:(b \cdot c) = (a:b):c.$

$$24:(2 \cdot 3) = \begin{cases} 24:6 = 4 \text{ (atrisinot parastajā darbību secībā)}, \\ (24:2):3 = 12:3 = 4 \text{ (atrisinot pēc tikko minētās dalīšanas īpašības)}. \end{cases}$$

VĒL VIENA DALĪŠANAS ĪPAŠĪBA

Ja dalāmo un dalītāju pareizina vai izdala ar vienu un to pašu skaitli, tad dalījums nemainās.

Ja $a:b = c$, tad arī $(a \cdot m):(b \cdot m) = c$ un arī $(a:m):(b:m) = c$.

$$48:12 = \begin{cases} (48 \cdot 10):(12 \cdot 10) = 480:120 = 4, \\ (48:3):(12:3) = 16:4 = 4. \end{cases}$$

DALĪŠANA GALVĀ

No galvas jāiegaumē t. s. dalīšanas tabula (reizināšanas tabulas apgrieztās sakarības):

4:2; 18:9; 30:5; 81:9; 0:7; 0:9 u. tml.

Lai skaitli izdalītu ar 10, 100, 1000 utt., skaitlim no labās puses jāatmet 1, 2, 3 utt. cipari. Atmestie cipari veido atlikumu.

420:10 = 42; 87000:100 = 870;
426:10 = 42, atl. 6; 36050:1000 = 36, atl. 50.

Dalot lielākus skaitļus, tos parasti sadala izdevīgos saskaitāmos un izmanto dalīšanas distributīvo īpašību.

$68:4 = (40 + 28):4 = 40:4 + 28:4 = 10 + 7 = 17;$
$450:3 = 300:3 + 150:3 = 100 + 50 = 150;$
$306:9 = 270:9 + 36:9 = 30 + 4 = 34.$

Ja dalītāju var sadalīt reizinātājos, tad t. s. pakāpeniskā dalīšanā doto skaitli dala vispirms ar vienu reizinātāju un iegūto dalījumu dala ar otru reizinātāju.

$240:15 = 240:(3 \cdot 5) = 240:3:5 = 80:5 = 16;$
$750:30 = 750:10:3 = 75:3 = 25.$

Ja dalāmais un dalītājs beidzas ar nullēm, ir izdevīgi tos samazināt 10, 100 utt. reizes.

$4800:800 = 48:8 = 6;$
$156000:300 = 1560:3 = 520.$

Dalot kādu skaitli ar 25, der atcerēties, ka vienā simtā skaitlis 25 ietilpst 4 reizes, tāpēc, piemēram, $100:25 = 4$; $200:25 = 8$; $300:25 = 12$, t. i., dalījums ir 4 reizes lielāks nekā dalāmo pilnu simtu skaits.

$700:25 = 7 \cdot 4 = 28;$
$725:25 = 7 \cdot 4 + 1 = 29;$
$1275:25 = 12 \cdot 4 + 3 = 51.$

DALĪŠANA RAKSTOS

Aprēķinot dalījumu rakstos, dalīšanu sāk ar augstākajām šķirām. Dalīšanas gaitu rakstos iekārto šādi:

1) 7 simtus dalīt ar 5 ir 1 simts (dalījumā raksta 1); atlikumā 2 simti;

$$\begin{array}{l} 785:5 = 157 \\ \underline{5} \\ 28 \\ \underline{25} \\ \;\;35 \\ \;\;\underline{35} \\ \;\;\;\;0 \end{array}$$

2) 2 simtus sasmalcina desmitos un pievieno vēl 8 desmitus, dabū 28 desmitus; 28 desmitus dalīt ar 5 ir 5 desmiti (dalījumā raksta 5); atlikumā 3 desmiti;
3) 3 desmitus sasmalcina vienos un pievieno vēl 5 vienus, dabū 35 vienus; 35 vienus dalīt ar 5 ir 7 vieni (dalījumā raksta 7); tātad dalījums ir 157.

Dalīšanas gaitu parasti paskaidro īsi:

1) 7 dalīt ar 5 ir 1, 1 reiz 5 ir 5, 7 mīnus 5 ir 2;
2) nones 8, $28:5 = 5$, $5 \cdot 5 = 25$, $28 - 25 = 3$;
3) nones 5, $35:5 = 7$; tātad dalījums ir 157.

Dalīšanu var pierakstīt arī īsāk (t. s. saīsinātajā pierakstā), rakstot tikai atlikumus vai pat rakstot tikai dalījumu:

785:8 = 157 vai 875:5 = 157;   384:12 = 32;
28   24
 35   0
  0

2417:3 = 805, atl. 2.

Līdzīgi dala ar divciparu skaitli:

2652:78 = 34
234
312
312
0

1) dalāmajā tūkstošu skaits (2) un simtu skaits (26) ir mazāks nekā dalītājs 78, tāpēc vispirms dala 265 desmitus ar 78; dalījumā iegūst 3 desmitus, bet atlikumā 31 desmitu;
2) dalot 312 vienus ar 78, dalījumā iegūst 4 vienus; tātad dalījums ir 34.

It īpaši jāraugās, lai dalījumā neizlaistu nulles, piemēram:

720968:24 = 30 040, atl. 8
72
096
96
8

1) 72 dalīt ar 24 ir 3, dalījumā raksta 3;
2) nones 0, 0 dalīt ar 24 ir 0, dalījumā raksta 0;
3) nones 9, 9 dalīt ar 24 ir 0 un atlikumā 9, dalījumā raksta 0;
4) nones 6, 96 dalīt ar 24 ir 4, dalījumā raksta 4;
5) nones 8, 8 dalīt ar 24 ir 0, atlikumā 8, dalījumā raksta 0;

tātad dalījums ir 30 040 un atlikums 8.

DALĪJUMA «MĒĢINĀJUMA CIPARA» NOTEIKŠANA

Lai, dalot ar divciparu vai vairākciparu skaitli, vieglāk atrastu dalījuma atsevišķos ciparus, domās jāatmet dalītāja pēdējie cipari, paturot tikai tā pirmo ciparu, un tikpat ciparu jāatmet no beigām tam skaitlim, ko attiecīgajā reizē dala. Izdalot abus šādi iegūtos skaitļus, iegūst dalījuma t. s. «mēģinājuma ciparu», kurš ir vai nu pareizais dalījuma cipars, vai arī nedaudz par lielu, un tāpēc tā pareizība ir jāpārbauda ar reizināšanu.

Piemēram, aprēķinot 374859:985, vispirms dala 3748 ar 985. Mēģinājuma ciparu iegūst, dalot 37 ar 9 (abiem skaitļiem atmet 2 pēdējos ciparus): 37:9 = 4.

Pareizinot 4 ar 985, dabū 3940, kas ir lielāks nekā dalāmais 3748, tāpēc mēģinājuma cipara 4 vietā jāņem 3, kas izrādās derīgs. Līdzīgi meklē dalījuma pārējos ciparus.

DALĪJUMA CIPARU SKAITA NOTEIKŠANA

Lai dalījumā neizlaistu kādu ciparu vai arī neierakstītu kādu lieku ciparu, tad ieteicams noteikt dalījuma ciparu skaitu (vai nu pirms vai pēc dalīšanas).

Piemēram, 676 045:49 — dalījuma pirmo ciparu iegūst, 67 dalot ar 49. Tālāk vēl jādala 4 šķiras (cipari 6, 0, 4, 5), tāpēc dalījumā ir $1 + 4 = 5$ cipari.

676 045:68 — dalījuma pirmo ciparu iegūst, 676 dalot ar 68, bet dalījumā vēl ir 3 cipari, tātad pavisam ir $1 + 3 = 4$ cipari.

DALĪŠANAS RAKSTURĪGĀKO KĻŪDU NOVĒRŠANA

Lai izvairītos no kļūdām dalīšanā, jāievēro šādi norādījumi:

a) dalījumā jāraksta katras šķiras dalījums, arī nulle (nulli neraksta vienīgi dalījuma sākumā), tātad pēc katra cipara nonešanas dalījumā jāieraksta viens cipars (kaut vai 0);

b) katram atlikumam jābūt mazākam nekā dalītājam, pretējā gadījumā dalījuma cipars jāpalielina.

DALĪJUMA PĀRBAUDE

Dalījuma pareizību pārbauda, sareizinot dalījumu ar dalītāju. Ja reizinājumā iegūst dalāmo, tad dalījums ir pareizs.

Ja dalīšanā ir atlikums, tad atlikums jāpieskaita pie reizinājuma un summā jāiegūst dalāmais.

```
28576:47 = 608.          Pārbaude:  608
282                                 ·47
———                                ————
  376                               4256
  376                              2432
  ———                              —————
    0                              28576.

1531:42 = 36, atl. 19.   Pārbaude:   36
126                                 ·42
———                                 ———
 271                                 72
 252                                144
 ———                                ————
  19                                1512
                        1512 + 19 = 1531.
```

Dalījumu aptuveni pārbauda, noapaļojot dalījumu un dalītāju līdz vienam vērtīgam ciparam un sareizinot iegūtos skaitļus. Reizinājumam jābūt aptuveni vienādam ar dalāmo.

$28\,576:47 = 608$. Aptuvena pārbaude: $600 \cdot 50 = 30\,000$. Tā kā $30\,000 \approx 28\,576$, tad dalījums ir aptuveni pareizs.

1.7. NATURĀLO SKAITĻU KĀPINĀŠANA

KĀPINĀŠANAS DARBĪBAS JĒDZIENS, PIERAKSTS UN LASĪŠANA

Divu vai vairāku vienādu skaitļu reizināšanu, piemēram, $3 \cdot 3 \times \times 3 \cdot 3 = 81$, aizstāj ar jaunu darbību — kāpināšanu, ko pieraksta šādi:

$3^4 = 81$. Tātad $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$, $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ u. tml.

Kāpināt kādu skaitli otrajā, trešajā, ceturtajā utt. pakāpē nozīmē ņemt šo skaitli par reizinātāju 2, 3, 4 utt. reizes:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ reizes}}.$$

Skaitli, kuru kāpina, sauc par kāpināmo jeb bāzi. Skaitli, ar kuru kāpina, sauc par kāpinātāju. Kāpināšanas rezultātu sauc par pakāpi.

$$\underset{\text{Bāze}}{5}^{4\ \text{Kāpinātājs}} = \underset{\text{Pakāpe}}{625}$$

Lasa: 5 ceturtajā pakāpē ir 625; 5 kāpināts ar 4 ir 625.
Izteiksmi 5^4 arī sauc par pakāpi.
Skaitļa otro pakāpi parasti sauc par skaitļa kvadrātu, bet trešo pakāpi — par skaitļa kubu. Piemēram, 3^2 lasa: 3 kvadrātā; 10^3 lasa: 10 kubā.

KĀPINĀTĀJS IR SKAITLIS 1 VAI SKAITLIS 0

Pieņem, ka skaitļa pirmā pakāpe ir vienāda ar doto skaitli.

$a^1 = a$.

$7^1 = 7$; $84^1 = 84$; $0^1 = 0$.

Pieņem, ka skaitļa nultā pakāpe ir vienāda ar skaitli 1.

$a^0 = 1$.

$7^0 = 1$; $84^0 = 1$.

P i e z ī m e . Pakāpei 0^0 nepiešķir nekādu vērtību.

PAKĀPES APRĒĶINĀŠANA

Saskaņā ar kāpināšanas darbības jēgu pakāpi aprēķina ar atkārtotu bāzes reizināšanu.

$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64;$

$10^6 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000\,000;$

$1^7 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1;$

$0^5 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0;$

$14^3 = 2744$, jo
$$\begin{array}{r} 14 \\ \cdot\ 14 \\ \hline 56 \\ 14 \\ \hline 196, \end{array} \qquad \begin{array}{r} 196 \\ \cdot 14 \\ \hline 784 \\ 196 \\ \hline 2744. \end{array}$$

Skaitļa 10 n-tā pakāpe ir skaitlis, kura pirmais cipars ir 1, kam pierakstītas n nulles.

$10^5 = 100\,000$; $10^{12} = 1\,000\,000\,000\,000$.

Ja skaitlis beidzas ar ciparu 5, tad šī skaitļa kvadrātu iegūst, sareizinot skaitļa pilno desmitu skaitu ar tam naturālo skaitļu virknē sekojošo skaitli un reizinājuma beigās pierakstot 25. Tātad 65^2 atrod tā: $6 \cdot (6 + 1) = 42$ un, pierakstot beigās 25, iegūst $65^2 = 4225$.

$105^2 = 11\,025$, jo $10 \cdot (10 + 1) = 110$.

1.8. DARBĪBU LOCEKĻU APRĒĶINĀŠANA

Ja zināms viens no darbības locekļiem un darbības rezultāts, tad var aprēķināt otru darbības locekli. Šādos uzdevumos aprēķināmo darbības locekli apzīmē ar burtiem *x*, *y*, *z* vai citiem.

SASKAITĪŠANAS LOCEKĻU APRĒĶINĀŠANA

Lai aprēķinātu vienu saskaitāmo, tad no summas jāatņem otrs saskaitāmais.

1) $27 + x = 45$
$x = 45 - 27$
$x = 18;$

2) $80 = x + 35$
$x = 80 - 35$
$x = 45;$

3) $a + 649 = 801$
$a = 801 - 649$
$a = 152.$
$$\begin{array}{r} 801 \\ -649 \\ \hline 152. \end{array}$$

ATŅEMŠANAS LOCEKĻU APRĒĶINĀŠANA

Lai aprēķinātu mazināmo, tad starpība jāsaskaita ar mazinātāju.

1) $x - 36 = 25$
$x = 25 + 36$
$x = 61;$

2) $18 = c - 19$
$c = 18 + 19$
$c = 37;$

3) $x - 634 = 847$
$x = 847 + 634$
$x = 1481.$
$$\begin{array}{r} 847 \\ +634 \\ \hline 1481. \end{array}$$

Lai aprēķinātu mazinātāju, tad no mazināmā jāatņem starpība.

1) $40 - m = 28$ 2) $50 = 74 - x$ 3) $1000 - x = 398$

$m = 40 - 28$ $x = 74 - 50$ $x = 100 - 398$

$m = 12;$ $x = 24;$ $x = 602.$

$$\begin{array}{r} 1000 \\ -398 \\ \hline 602 \end{array}$$

REIZINĀŠANAS LOCEKĻU APRĒĶINĀŠANA

Lai aprēķinātu vienu reizinātāju, tad reizinājums jādala ar otru reizinātāju.

1) $x \cdot 18 = 72$ 2) $975 = 39 \cdot m$

$x = 72:18$ $m = 975:39$

$x = 4;$ $m = 25.$

$$\begin{array}{l} 975:39 = 25. \\ \underline{78} \\ 195 \\ \underline{195} \\ 0 \end{array}$$

DALĪŠANAS LOCEKĻU APRĒĶINĀŠANA

Lai aprēķinātu dalāmo, tad dalījums jāreizina ar dalītāju.

1) $k:7 = 12$ 2) $38 = x:207$

$k = 12 \cdot 7$ $x = 38 \cdot 207$

$k = 84;$ $x = 7866.$

$$\begin{array}{r} 38 \\ \cdot 207 \\ \hline 266 \\ 76 \\ \hline 7866. \end{array}$$

Lai aprēķinātu dalītāju, tad dalāmais jādala ar dalījumu.

1) $100:b = 4$ 2) $56 = 3584:x$

$b = 100:4$ $x = 3584:56$

$b = 25;$ $x = 64.$

$$\begin{array}{l} 3584:56 = 64. \\ \underline{336} \\ 224 \\ \underline{224} \\ 0 \end{array}$$

KĀ SECINĀT DARBĪBAS LOCEKĻU APRĒĶINĀŠANAS KĀRTULU

Nezināmā darbības locekļa aprēķināšanas kārtulu var viegli secināt no atbilstošās vienādības, ko veido nelieli skaitļi, vērojot, ar kādu darbību aprēķināms darbības «nezināmais» loceklis. Ja, piemēram, jāaprēķina dalāmais, tad no vienādības $8:4 = 2$ var saskatīt, ka «nezināmais» dalāmais $8 = 2 \cdot 4$. Tātad dalāmo var aprēķināt, dalījumu reizinot ar dalītāju. Līdzīgi no tās pašas vienādības $8:4 = 2$ tikpat viegli saskatīt, ka «nezināmais» dalītājs $4 = 8:2$ utt.

VIENĀDOJUMU «ARITMĒTISKĀ» ATRISINĀŠANA

Vienkāršākus vienādojumus var atrisināt, izmantojot darbību locekļu aprēķināšanas kārtulas.

Piemēros parādīti daži raksturīgākie vienādojumu atrisināšanas gadījumi.

1) $48 + 3 \cdot x = 69$.

Vienādojuma kreisajā pusē saskaņā ar darbību secību kā pēdējā jāizpilda saskaitīšana; tātad 48 un $3 \cdot x$ ir saskaitāmie, bet 69 ir to summa. Lai aprēķinātu nezināmo saskaitāmo $3 \cdot x$, tad no summas 69 jāatņem zināmais saskaitāmais 48:

$3 \cdot x = 69 - 48$,
$3 \cdot x = 21$.

Tagad nezināmais x ir reizinātājs, ko aprēķina, dalot reizinājumu 21 ar zināmo reizinātāju 3:

$x = 21:3$,
$x = 7$.

2) $y:6 - 4 = 16$
$y:6 = 16 + 4$
$y:6 = 20$
$y = 20 \cdot 6$
$y = 120$.

Vienādojuma kreisajā pusē pēdējā darbība ir atņemšana, kurā $y:6$ ir mazināmais. To aprēķina, saskaitot starpību 16 ar mazinātāju 4. Pēc tam y aprēķina kā nezināmo dalāmo.

3) $(75 - y):5 = 12$
$75 - y = 12 \cdot 5$
$75 - y = 60$
$y = 75 - 60$
$y = 15$

Vienādojuma kreisajā pusē pēdējā darbība ir dalīšana. Dalāmo $70 - y$ aprēķina, reizinot dalījumu 12 ar dalītāju 5 utt.

1.9. MATEMĀTISKĀS IZTEIKSMES

MATEMĀTISKĀ IZTEIKSME UN TĀS VĒRTĪBA

Skaitļu savienojumus ar darbības zīmēm sauc par matemātisku izteiksmi.

Matemātiskas izteiksmes ir, piemēram, $30 - 4 \cdot 7$; $18 + 6 \cdot 2^3 - 5^2$, arī $(x + 3) \cdot 4$ u. tml. Arī atsevišķu skaitli pieņemts uzskatīt par matemātisku izteiksmi, piemēram, 17; p; c.

Pieņemtajā secībā izdarot izteiksmē norādītās darbības, iegūst skaitli, ko sauc par matemātiskās izteiksmes vērtību. Piemēram, izteiksmes $80 - 7 \cdot 2$ vērtība ir skaitlis 66.

Izteiksmes vērtības aprēķināšanas gaitu pārskatāmi mēdz iekārtot t. s. saistītajā pierakstā. Tad vispirms pirmajā «gājienā» izdara visas tās darbības, kuras saskaņā ar pieņemto darbību secību nav atkarīgas no citām darbībām; pēc tam izteiksmi pārraksta, ievietojot izdarīto darbību vietā to rezultātus.

Tālāk līdzīgi rīkojas ar iegūto, jau vienkāršāko izteiksmi utt., līdz iegūst izteiksmes vērtību. Darbības, kuras nevar izdarīt galvā, aprēķina rakstos. (Sk. piemērus nākamajos punktos.)

IZTEIKSMES VĒRTĪBAS APRĒĶINĀŠANA

Izteiksmes vērtības aprēķināšanā pieņemta šāda darbību secība: vispirms izdara kāpināšanu; tad reizināšanu un dalīšanu tādā secībā, kā tās rakstītas; beidzot — saskaitīšanu un atņemšanu tādā secībā, kā tās rakstītas; turklāt, ja izteiksmē ir iekavas, darbības iekavās jāizdara vispirms.

Piemēros parādīti raksturīgākie izteiksmes vērtības aprēķināšanas gadījumi. (Lasītājam ieteicams aizsegt atrisinājumu un vispirms patstāvīgi noteikt darbību secību.)

1) $2\cdot 3^2 - 6 + 4 =$
$= 2\cdot 9 - 6 + 4 =$
$= 18 - 6 + 4 =$
$= 12 + 4 = 16.$

Pirmajā gājienā var izdarīt tikai kāpināšanu $3^2 = 9$ (būtu kļūda izdarīt arī saskaitīšanu, iekams nav izpildīta atņemšana); iegūto vienkāršo izteiksmi pārraksta. Otrā gājienā var izdarīt tikai reizināšanu $2\cdot 9 = 18$ utt.

2) $90 - (6 + 14):2\cdot 5 =$
$= 90 - 20:2\cdot 5 =$
$= 90 - 10\cdot 5 =$
$= 90 - 50 = 40.$

Būtu kļūda, ja izdarītu reizināšanu pirms dalīšanas.

3) $2\cdot 28 - 36:(6 + 4\cdot 3) =$
$= 56 - 36:(6 + 12) =$
$= 56 - 36:18 =$
$= 56 - 2 = 54.$

Pirmajā gājienā var aprēķināt divus reizinājumus. Otrā gājienā būtu kļūda izdarīt atņemšanu, jo vispirms jāizdara dalīšana.

4) $(31 + 6\cdot 3 - 7):(42 - 4\cdot 7) =$
$= (31 + 18 - 7):(42 - 28) =$
$= 42:14 = 3.$

Katrā gājienā var izdarīt darbības abās iekavās.

5) $85 - 5\cdot((8 - 5)\cdot 4 + 2) =$
$= 85 - 5\cdot(3\cdot 4 + 2) =$
$= 85 - 5\cdot 14 =$
$= 85 - 70 = 15.$

Iekšējās iekavās ieslēgtās darbības izdarāmas vispirms.

6) $127 + 236\cdot 3 + (1156:17 - 65)\cdot 29 =$
$= 127 + 708 + (68 - 65)\cdot 29 =$
$= 835 + 3\cdot 29 =$
$= 835 + 87 =$
$= 922.$

Darbības, kuras nevar izdarīt galvā, izpilda rakstos.

$$\begin{array}{r} 236 \\ \cdot\ \ 3 \\ \hline 708; \end{array} \qquad \begin{array}{l} 1156:17 = 68; \\ \underline{102} \\ \ \ 136 \\ \ \ \underline{136} \\ \ \ \ \ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 127 \\ +\,708 \\ \hline 835; \end{array} \qquad \begin{array}{r} 835 \\ +\,87 \\ \hline 922. \end{array}$$

7) $\dfrac{46 - 6\cdot(24 - 19)}{(25 + 7):4} = \dfrac{46 - 6\cdot 5}{32:4} = \dfrac{46 - 30}{8} = \dfrac{16}{8} = 2.$

Ar daļsvītru apzīmētā dalīšanas darbība izpildāma kā pēdējā.

DARBĪBU ĪPAŠĪBU IZMANTOŠANA IZTEIKSMES VĒRTĪBAS APRĒĶINĀŠANĀ

Dažos gadījumos izteiksmju vērtības izdevīgi aprēķināt, neievērojot pieņemto darbību secību, bet izmantojot darbību īpašības.

1) $42 \cdot 875 + 58 \cdot 875 = (42 + 58) \cdot 875 = 100 \cdot 875 = 87500$.

Aprēķinu gaitā izmantotā īpašība par summas reizināšanu ar skaitli atvieglo skaitļošanu.

2) $69 \cdot 378 - 69 \cdot 328 = 69 \cdot (378 - 328) = 69 \cdot 50 = 3450$.

Risinājumā izmantota īpašība par starpības reizināšanu ar skaitli.

3) $478 + 956 + 322 + 544 = (478 + 322) + (956 + 554) = 800 + 1500 = 2300$.

4) $27 \cdot 64 : 32 = 27 \cdot 2 = 54$.

Reizinājumu ar kādu skaitli var dalīt tā, ka ar šo skaitli izdala tikai vienu no reizinātājiem.

Rupja kļūda būtu «līdzīgi» risināt arī šādu izteiksmi: $300 : 4 \cdot 25 = 300 : 100 = 3$ (pareizā izteiksmes vērtība ir 1875).

5) $159 + 86 - 84 = 159 + 2 = 161$.

No summas kādu skaitli var atņemt arī tā, ka šo skaitli atņem tikai no viena saskaitāmā.

Rupja kļūda būtu «līdzīgi» risināt arī šādu izteiksmi: $146 - 95 + 5 = 146 - 100 = 46$ (pareizā izteiksmes vērtība ir 56).

IZTEIKSMES NOSAUKUMS

Izteiksmei piešķir nosaukumu pēc tās darbības, kura pieņemtajā darbību secībā jāizdara kā pēdējā.

$37 - 10 : 5 + 4$	summa,
$37 - (10 : 5 + 4)$	starpība,
$(37 - 10) : (5 + 4)$	dalījums,
$8 \cdot (3 + 5)^2$	reizinājums,
$(8 \cdot 3 + 5)^2$	pakāpe.

1.10. MĒRI UN DARBĪBAS AR TIEM

LIELUMI UN TO MĒRĪŠANA

Ikdienā matemātikā un citās zinātnēs sastopamies ar dažādiem lielumiem, piemēram, garums, laukums, tilpums, masa, temperatūra, ātrums, laiks (stundās, minūtēs, ...), vērtība (latos, santīmos) u. c.

Lielumu var izmērīt, salīdzinot to ar šī lieluma kādu vienību jeb mērvienību. Piemēram, nogriežņa garumu var izmērīt, pieņemot par garuma vienību centimetru. Ja 1 cm garš nogrieznis ietilpst mērāmajā nogrieznī, piemēram, 8 reizes, tad saka, ka nogriežņa garuma mērs ir 8 cm.

Līdzīgi kāda priekšmeta masas mērs var būt 24 kg, kāda laika mērs var būt 2 h 15 min, kāda laukuma mērs — 5,3 ha, preces vērtības mērs — 4 lati 15 sant. u. tml.

GARUMA VIENĪBAS

Garuma (attāluma) mērīšanai pieņemtas šādas biežāk lietotas garuma vienības: milimetrs (mm), centimetrs (cm), decimetrs (dm), metrs (m), kilometrs (km). To savstarpējās sakarības ir šādas:

1 cm = 10 mm,
1 dm = 10 cm = 100 mm,
1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm,
1 km = 1000 m.

MASAS VIENĪBAS

Masas mērīšanai lieto šādas vienības: miligrams (mg), grams (g), kilograms (kg), centners (c) un tonna (t). To savstarpējās sakarības ir šādas:

1 g = 1000 mg,
1 kg = 1000 g = 1 000 000 mg,
1 c = 100 kg,
1 t = 10 c = 1000 kg.

LAUKUMA VIENĪBAS

Laukumu mēra kvadrātmilimetros (mm^2), kvadrātcentimetros (cm^2), kvadrātdecimetros (dm^2), kvadrātmetros (m^2) un kvadrātkilometros (km^2). Sakarības starp laukuma vienībām nav nepieciešams iegaumēt, jo tās viegli var secināt no atbilstošo garuma vienību sakarībām. Tā, piemēram,

1 m = 100 cm, bet 1 m^2 = 100·100 cm^2 = 10 000 cm^2.
Līdzīgi 1 dm = 10 cm, bet 1 dm^2 = 10·10 cm^2 = 100 cm^2;
1 km = 1000 m, bet 1 km^2 = 1000·1000 m^2 = 1 000 000 m^2;
1 m = 1000 mm, bet 1 m^2 = 1000·1000 mm^2 = 1 000 000 mm^2.
Laukuma vienības ir arī ārs (a) un hektārs (ha);
1 a = 100 m^2,
1 ha = 100 a = 10 000 m^2.

TILPUMA VIENĪBAS

Tilpumu mēra kubikmilimetros (mm^3), kubikcentimetros (cm^3), kubikdecimetros (dm^3), kubikmetros (m^3) un kubikkilometros (km^3). Sakarības starp tilpuma vienībām izriet no atbilstošo garuma vienību sakarībām:

1 cm = 10 mm, bet 1 $cm^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10$ $mm^3 = 1000$ mm^3;
1 dm = 10 cm, bet 1 $dm^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10$ $cm^3 = 1000$ cm^3;
1 m = 100 cm, bet 1 $m^3 = 100 \cdot 100 \cdot 100$ $cm^3 = 1\,000\,000$ cm^3.

Tilpuma vienības ir arī litrs (*l*) un hektolitrs (hl):
1 *l* = 1 dm^3 = 1000 cm^3,
1 hl = 100 *l*.

LAIKA VIENĪBAS

Laika vienības ir sekunde (s), minūte (min), stunda (h), diennakts jeb diena (d), mēnesis (mēn.) un gads (g.):

1 min = 60 s,
1 h = 60 min = 3600 s,
1 d. = 24 h,
1 mēn. ≈ 30 d.,
1 g. = 12 mēn. = 365 (366) d.

NAUDAS VIENĪBAS

Mūsu valstī pieņemtās naudas vienības ir lats (Ls) un santīms (sant.):

1 lats = 100 sant.

VIENKĀRŠI UN SALIKTI MĒRI

Tādus mērus, kas izteikti tikai ar viena veida vienībām, sauc par vienkāršiem mēriem, piemēram, 18 cm, 5 kg, 75 sant. u. tml. Tādus mērus, kas izteikti ar dažādām vienībām, sauc par saliktiem mēriem, piemēram: 4 cm 8 mm, 7 c 28 kg, 3 lati 05 sant. u. tml.

MĒRU PĀRVEIDOJUMI

Ja savstarpējās attiecības starp vienībām izsakās ar skaitļiem 10, 100, 1000 utt., tad šādus t. s. decimālo mēru pārveidojumus lielākoties var veikt galvā.

Laika vienību savstarpējās sakarības nav decimālas, tāpēc to pārveidošanā attiecīgās darbības reizēm jāizdara rakstos.

Tālāk dažos raksturīgos piemēros parādīts, kā lielākas vienības aizstāt ar mazākām vai otrādi.

1) 5 dm = ? cm;
1 dm = 10 cm, $10 \cdot 5 = 50$, tātad 5 dm = 50 cm.

2) 40 000 kg = ? c;
1 c = 100 kg, 40 000:100 = 400, tātad 40 000 kg = 400 c.

3) 5 hl 6 *l* = ? *l*;
1 hl = 100 *l*, 5 hl = 500 *l*, 500 + 6 = 506, tātad 5 hl 6 *l* = 506 *l*.

4) 5 dm^3 80 cm^3 = ? cm^3;
1 dm^3 = 1000 cm^3, tātad 5 dm^3 80 cm^3 = 5080 cm^3.

5) 17 h 8 min = ? min;
1 h = 60 min, $60 \cdot 17 = 1020$ (min); 1020 + 8 = 1028 (min), tātad 17 h 8 min = 1028 min.

6) Pārveidot lielākās vienībās 40 307 cm:
100 cm = 1 m, 40 307:100 = 403, atl. 7, tātad 40 307 cm = 403 m 7 cm.

7) Pārveidot lielākās vienībās 756 mm:
10 mm = 1 cm, tātad 576 mm = 57 cm 6 mm = 5 dm 7 cm 6 mm.

8) Pārveidot lielākās vienībās 43 700 m^2:
100 m^2 = 1 a, tātad 43 700 m^2 = 437 a = 4 ha 37 a.

9) Pārveidot lielākās vienībās 84 h:
24 h = 1 d., 84:24 = 3, atl. 12, tātad 84 h = 3 d. 12 h.

DARBĪBAS AR MĒRIEM

Darbības izpilda tikai ar mērskaitļiem (bez nosaukuma).

Pie darbības locekļiem un rezultāta var rakstīt arī atbilstošus vienību nosaukumus; ja darbības locekļus raksta bez vienību nosaukumiem, tad attiecīgo nosaukumu pie rezultāta liek iekavās. 4 cm$\cdot$2 = 8 cm vai $4 \cdot 2 = 8$ (cm).

Taču jāievēro, lai pierakstos neparādītos nepareizas vienādības, piemēram, $4 \cdot 2 = 8$ cm vai 4 cm$\cdot$2 = 8, vai 4 cm$\cdot$ 2 = 8 (cm). Jāatšķir divi dalīšanas paveidi, piemēram, 28 g:4 = 7 g vai 28 g: :4g = 7.

Piemēros parādīti raksturīgākie darbību izpildīšanas paņēmieni.

1) 2 cm + 5 cm = 7 cm;

2) 17 sant. · 8 = 136 sant. = 1 lats 36 sant.;

3) 1 a – 7 m^2 = 100 m^2 – 7 m^2 = 93 m^2;

4) 5 m : 2 = 500 cm : 2 = 250 cm = 2 m 50 cm;

5) 1 kg : 25 g = 1000 g : 25 g = 40;

6) 4 t 345 kg — 1 t 560 kg = 2 t 785 kg;

$$\begin{array}{r} 4345 \\ -\ 1560 \\ \hline 2785 \end{array} \text{ (kg);}$$

7) 2 min 35 s·7 = 18 min 5 s;

2 min 35 s = 155 s; 1085:60 = 18 (min);
155·7 = 1085 (s);

$$\begin{array}{r} 1085:60 = 18 \text{ (min)}; \\ \underline{485} \\ 5 \text{ (s)} \end{array}$$

Cits atrisināšanas variants:

$$\begin{array}{r} 2 \text{ min } 35 \text{ s} \\ \cdot\ 7 \\ \hline 14 \text{ min } 245 \text{ s} \\ \hline 18 \text{ min } 5 \text{ s} \end{array}$$

8) 2 ha 5 a:125 m^2 = 164;
2 ha 5 a = 205 a = 20 500 m^2;
20500:125 = 164.

$$\begin{array}{r} 20500:125 = 164 \\ \underline{125} \\ 800 \\ \underline{750} \\ 500 \\ \underline{500} \\ 0 \end{array}$$

1.11. TEKSTA UZDEVUMI

VISPĀRĒJI NORĀDĪJUMI TEKSTA UZDEVUMU RISINĀŠANĀ

Teksta uzdevumu risināšanā ieteicams ievērot šādus norādījumus. Iedziļinies uzdevuma saturā! Par ko uzdevumā ir runa? Iztēlojies uzdevumā aprakstīto notikumu! Kas uzdevumā ir zināms, un kas ir prasīts? Pieraksti uzdevuma saturu pārskatāmā shēmā vai attēlo to zīmējumā!

Pārdomā atrisinājuma plānu! Ko no dotajiem skaitļiem var aprēķināt? Ko varētu aprēķināt pēc tam? Kas vēl būtu jāuzzina, lai aprēķinātu uzdevumā prasīto? Tātad vispirms ir jāaprēķina . . ., pēc tam . . . utt. Bet vai nav vēl īsāks risināšanas plāns?

Izdari darbības saskaņā ar sastādīto plānu! Pēc katras darbības vēlreiz pārliecinies, vai tā veikta pareizi! Padomā, ko izsaka katras darbības rezultāts, un pieraksti pie tā attiecīgo nosaukumu!

Pasaki (pieraksti) uzdevuma atbildi!

ATRISINĀJUMA PIERAKSTA VEIDI

Piemēros parādīti teksta uzdevumu risinājumu parastākie pieraksta veidi.

A. Risina uzdevumu pa atsevišķām darbībām (ar vai bez rakstveida paskaidrojumiem).

1. Parkā ir 28 ozoli, bet liepu ir 4 reizes vairāk. Par cik liepu vairāk nekā ozolu?

A t r i s i n ā j u m s.

1) Cik liepu parkā?

$28 \cdot 4 = 112$ (liepas)

2) Par cik liepu vairāk nekā ozolu?

$$\begin{array}{r} 112 \\ -28 \\ \hline 84 \end{array}$$ (koki).

A t b i l d e. Liepu ir par 84 vairāk nekā ozolu.

2. Viena lauka platība ir 28 ha, otra —19 ha. Cik pavisam centneru kviešu ievāca no abiem laukiem, ja no pirmā lauka ievāca par 306 c vairāk nekā no otrā un ja abos laukos ražība ir vienāda?

A t r i s i n ā j u m s.

1) $28 - 19 = 9$ (ha) — no šādas platības ievāca 306 c;

2) $306:9 = 34$ (c) — no 1 ha;

3) $28 + 19 = 47$ (ha) — kopējā platība;

4) $$\begin{array}{r} 34 \\ \cdot 47 \\ \hline 238 \\ 136 \\ \hline 1598 \end{array}$$ (c) — ievāca no abiem laukiem.

B. Sastāda atrisinājuma izteiksmi (ar rakstveida paskaidrojumiem vai bez tiem) un pēc tam aprēķina tās vērtību.

1. No divām pilsētām viens otram pretim vienlaikus izbrauca divi velosipēdisti: pirmais — ar ātrumu 18 km/h, otrais — ar ātrumu 14 km/h. Cik kilometru līdz sastapšanās vietai nobrauca pirmais velosipēdists, ja attālums starp pilsētām ir 160 km?

A t r i s i n ā j u m s.

$18 + 14$ ... par tik kilometriem stundā samazinājās attālums starp abiem velosipēdistiem;

$160:(18 + 14)$ ... pēc tik stundām velosipēdisti sastapās;

$160:(18 + 14) \cdot 18$ ... tik kilometru līdz sastapšanās vietai nobrauca pirmais velosipēdists.

$$160:(18 + 14) \cdot 18 = 160:32 \cdot 18 = 5 \cdot 18 = 90 \text{ (km)}.$$

A t b i l d e. Pirmais velosipēdists līdz sastapšanās vietai nobrauca 90 km.

2. Taisnstūra paralēlskaldņa pamats ir kvadrāts, kura malas garums ir 8 cm. Par cik centimetriem paralēlskaldņa augstums ir lielāks nekā pamata malas garums, ja paralēlskaldņa tilpums ir 640 cm^3?

Atrisinājums.

$640:(8\cdot8)-8=640:64-8=2$ (cm).

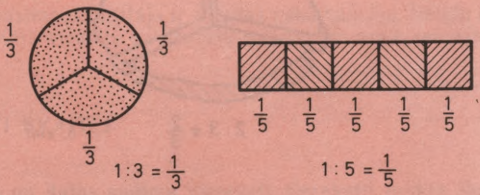
Piezīme: izteiksmi sāk veidot ar to darbību, kura atrisinājumā būs pirmā darbība, piemēram, $8\cdot8$ utt.

2. PARASTĀS DAĻAS

1. DAĻAS JĒDZIENS

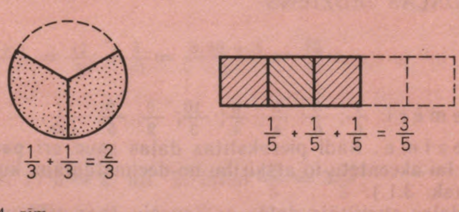
DAĻAS RAŠANĀS

Dalot vienu veselu vienību divās, trijās, četrās utt. vienādās daļās, katrā daļā rodas viena puse ($\frac{1}{2}$), viena trešdaļa ($\frac{1}{3}$), viena ceturtdaļa ($\frac{1}{4}$) utt. (3. zīm.). Šādas daļas sauc par pamatdaļām.



3. zīm.

Apvienojot divas vai vairākas pamatdaļas, iegūst jebkuru daļu: divas trešdaļas ($\frac{2}{3}$), trīs piektdaļas ($\frac{3}{5}$) utt. (4. zīm.).



4. zīm.

DAĻAS LOCEKĻI

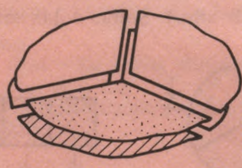
$\dfrac{3}{5}$ skaitītājs / saucējs

Daļas saucējs rāda, cik vienādās daļās vienība sadalīta, bet skaitītājs rāda, cik pamatdaļu daļā apvienots.

Skaitītāju un saucēju sauc arī par daļas locekļiem.

DAĻA KĀ DALĪŠANAS REZULTĀTS

Jebkuru daļu var iegūt arī dalīšanas rezultātā. Piemēram, uzklājot 2 pankūkas vienu uz otras un sadalot tās vienādi 3 daļās, katrā daļā dabū $\frac{2}{3}$ pankūkas (5. zīm.).



5. zīm.

Līdzīgi, $3:5 = \frac{3}{5}$; $7:10 = \frac{7}{10}$; $1:6 = \frac{1}{6}$.

Tāpēc daļas pierakstā skaitītāju var uzskatīt arī par dalāmo, saucēju — par dalītāju un horizontālo svītriņu — par dalīšanas zīmi.

DAĻAS JĒDZIENS

Skaitli, kas pierakstīts formā $\frac{a}{b}$, kur

$a = 0, 1, 2, 3, \ldots$, bet $b = 1, 2, 3, \ldots$ sauc par daļu.

Piemēri: $\frac{1}{6}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{8}{4}$; $\frac{10}{3}$; $\frac{9}{9}$; $\frac{0}{5}$; $\frac{17}{100}$.

Piezīme. Šādi pierakstītas daļas sauc arī par parastajām daļām, lai akcentētu to atšķirību no decimāldaļām, kuras pieraksta citādi (sk. 3.1.).

Ja daļas skaitītājs dalās ar saucēju (bez atlikuma), tad daļa apzīmē veselu skaitli, ja nedalās, tad — daļskaitli.

Daļas — veseli skaitļi: $\frac{8}{4} = 2$; $\frac{9}{9} = 1$; $\frac{0}{5} = 0$.

Daļas — daļskaitļi: $\frac{1}{6}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{10}{3}$; $\frac{17}{100}$.

2.2. ĪSTAS UN NEĪSTAS DAĻAS. JAUKTI SKAITĻI

ĪSTAS UN NEĪSTAS DAĻAS

Daļas, kas mazākas nekā skaitlis 1, sauc par īstām daļām. Daļas, kas vienādas ar skaitli 1 vai lielākas nekā skaitlis 1, sauc par neīstām daļām.

Īstas daļas: $\frac{1}{6}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{75}{100}$; $\frac{1}{10}$.

Neīstas daļas: $\frac{6}{6}$; $\frac{7}{6}$; $\frac{12}{6}$; $\frac{14}{2}$; $\frac{17}{5}$.

Īstu daļu pazīme: skaitītājs ir mazāks nekā saucējs. Neīstu daļu pazīme: skaitītājs vienāds ar saucēju vai lielāks nekā saucējs.

JAUKTI SKAITĻI

Vesela skaitļa un daļas summu pieņemts pierakstīt jaukta skaitļa veidā:

$$2 + \frac{1}{5} = 2\frac{1}{5};\quad 1 + \frac{5}{6} = 1\frac{5}{6};\quad 7 + \frac{3}{2} = 7\frac{3}{2}.$$

Jauktu skaitli var izteikt neīstā daļā un otrādi — no neīstas daļas var izslēgt veselos.

Lai jauktu skaitli izteiktu daļā, daļas saucējs jāreizina ar veselo skaitli un pie reizinājuma jāpieskaita daļas skaitītājs. Tā iegūst jaunās daļas skaitītāju, bet saucējs paliek iepriekšējais:

$$2\frac{1}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 1}{5} = \frac{11}{5};\quad 8\frac{3}{10} = \frac{8 \cdot 10 + 3}{10} = \frac{83}{10}.$$

Lai no neīstas daļas izslēgtu veselo skaitli, skaitītājs jādala ar saucēju. Dalījums rāda veselo skaitli, atlikums — daļas skaitītāju, bet saucējs paliek iepriekšējais.

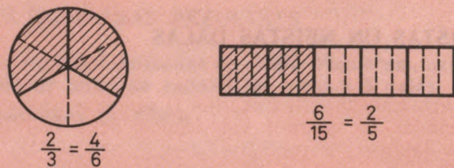
1) $\frac{17}{5} = ?$; $17:5 = 3$, atl. 2, tātad $\frac{17}{5} = 3\frac{2}{5}$;

2) $\frac{32}{8} = ?$; $32:8 = 4$, tātad $\frac{32}{8} = 4$.

2.3. DAĻAS PAMATĪPAŠĪBA UN TĀS IZMANTOŠANA

DAĻAS PAMATĪPAŠĪBA

Ja daļas skaitītāju un saucēju reizina vai dala ar vienu un to pašu skaitli, kas nav nulle, tad daļas vērtība nemainās (6. zīm.).



6. zīm.

DAĻAS PAMATĪPAŠĪBAS IZMANTOŠANA

Skaitītāja un saucēja reizināšanu ar vienu un to pašu skaitli sauc par daļas paplašināšanu, bet skaitītāja un saucēja dalīšanu ar vienu un to pašu skaitli (kas nav nulle) sauc par daļas saīsināšanu.

$$\frac{3}{4} \underset{\text{saīsināšana}}{\overset{\text{paplašināšana}}{\rightleftarrows}} \frac{15}{20}, \qquad \frac{3}{4} = \frac{15}{20}$$

Iepriekšējā punktā (sk. 6. zīm.) daļa $\frac{2}{3}$ ir paplašināta ar 2, bet daļa $\frac{6}{15}$ ir saīsināta ar 3.

Skaitli, ar kuru daļu paplašina, sauc par papildreizinātāju, un to mēdz arī pierakstīt pie daļas ar lociņu, piemēram, $\frac{2^{(2}}{3} = \frac{4}{6}$.

DAŽĀDAS DAĻAS — VIENS SKAITLIS

Dažādās daļas, kuras var iegūt vienu no otras ar paplašināšanu vai saīsināšanu, izsaka vienu un to pašu skaitli. Piemēram, daļas

$\frac{6}{15}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{10}{25}$, $\frac{14}{35}$, $\frac{20}{50}$ u. tml. apzīmē vienu un to pašu skaitli, kam uz koordinātu taisnes atbilst viens vienīgs noteikts punkts (7. zīm.).

Parasti šo skaitli cenšas apzīmēt ar daļu, kas iespējami saīsināta (minētajā piemērā $\frac{2}{5}$).

7. zīm.

2.4. DAĻAS SAĪSINĀŠANA

DAĻU SAĪSINA PAKĀPENISKI

Parasti daļu saīsina pakāpeniski — skaitītāju un saucēju dala ar kādu to kopīgo dalītāju, pēc tam iegūto daļu, ja iespējams, saīsina atkal utt.

$$\frac{54}{72}=\frac{27}{36}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}.$$

Dotā daļa saīsināta ar 2, iegūtā daļa saīsināta ar 3, pēc tam vēl ar 3.

Daļu saīsināšanā izmanto dalāmības pazīmes.

DAĻU SAĪSINA UZREIZ

Lai uzreiz iegūtu nesaīsināmu daļu, tad dotās daļas skaitītājs un saucējs jādala ar to lielāko kopīgo dalītāju.

Saīsināt $\frac{54}{72}$.

$$\begin{array}{l|l} 54=\underline{2}\cdot 3\cdot \underline{3}\cdot \underline{3}, & 72=\underline{2}\cdot 2\cdot 2\cdot \underline{3}\cdot \underline{3}, \\ 27 & 36 \\ 9 & 18 \\ 3 & 9 \\ 1 & 3 \\ & 1 \end{array}$$

$L\ (54;\ 72)=2\cdot 3\cdot 3=18.$

$$\frac{54}{72}=\frac{3}{4}.$$

DAĻVEIDA IZTEIKSMES SAĪSINĀŠANA

Ja daļveida izteiksmes skaitītājā vai saucējā ir reizinājums, tad šādu izteiksmi var saīsināt, dalot ar vienu un to pašu skaitli kādu no reizinātājiem skaitītājā un saucējā (dalot vienu reizinātāju ar kādu skaitli, ar šo skaitli tiek izdalīts viss reizinājums).

1) $\frac{26\cdot 12}{18}=\frac{26\cdot 2}{3}=\frac{52}{3}=17\frac{1}{3}$; 2) $\frac{3\cdot 25}{5\cdot 6\cdot 7}=\frac{1\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 7}=\frac{5}{14}$.

Teiktais neattiecas uz saskaitāmiem un summu. Tāpēc būtu rupja kļūda «saīsināt» šādu daļveida izteiksmi:

$$\frac{7+5}{15+9}\neq\frac{7+1}{3+9}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}.\quad \text{Pareizi: } \frac{7+5}{15+9}=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}.$$

APTUVENA SAĪSINĀŠANA

Lai vieglāk varētu novērtēt daļas lielumu, daļu var domās aptuveni «saīsināt», aizstājot to ar daļu, kuras locekļi ir nelieli skaitļi. It īpaši viegli ir novērtēt pamatdaļas lielumu, tāpēc, lai dabūtu skaitītājā skaitli 1, daļu var aptuveni «saīsināt» ar doto skaitītāju.

Piemēri (iekavās norādīts skaitlis, ar ko daļa saīsināta).

1) $\frac{3}{10}\approx\frac{1}{3}(3)$; 3) $\frac{12}{29}\approx\frac{2}{5}(6)$; 5) $\frac{18}{19}\approx 1$;

2) $\frac{19}{41}\approx\frac{1}{2}(19)$; 4) $\frac{78}{100}\approx\frac{4}{5}(20)$; 6) $\frac{7}{68}\approx\frac{1}{10}(7)$.

2.5. DAĻU SAUCĒJU VIENĀDOŠANA

DAĻU KOPSAUCĒJS

Daļas attiecīgi paplašinot vai saīsinot, iespējams tām vienādot saucējus.

Daļām $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{8}$ un $\frac{1}{4}$ par kopīgo saucēju jeb kopsaucēju var izvēlēties skaitļus 24, 48, 120 u. c., t. i., doto saucēju kopīgos dalāmos, pie tam visizdevīgāk ņemt no tiem mazāko, proti, 24:

$$\frac{5^{(4}}{6}=\frac{20}{24};\ \frac{3^{(3}}{8}=\frac{9}{24};\ \frac{1^{(6}}{4}=\frac{6}{24}.$$

Daļas papildreizinātāju atrod, dalot daļu kopsaucēju ar attiecīgās daļas saucēju.

KOPSAUCĒJU NOSAKA GALVĀ

Vispirms pārbauda, vai par kopsaucēju der lielākais no saucējiem; ja tas ar pārējiem saucējiem nedalās, tad pārbauda, vai par kopsaucēju der lielākā saucēja divkārtnis, trīskārtnis utt.

Daļām $\frac{1}{12}$, $\frac{5}{18}$ un $\frac{3}{8}$ lielākais saucējs 18 par kopsaucēju neder, jo tas nedalās ne ar 12, ne ar 8; skaitļa 18 divkārtnis 36 dalās ar 12, bet nedalās ar 8; skaitļa 18 trīskārtnis 54 arī neder par kopsaucēju; beidzot, $18\cdot 4=72$ dalās gan ar 12, gan ar 8;

$$\frac{1^{(6}}{12}=\frac{6}{72};\ \frac{5^{(4}}{18}=\frac{20}{72};\ \frac{3^{(9}}{8}=\frac{27}{72}.$$

Ja daļu saucēji ir pa pāriem savstarpēji pirmskaitļi, tad to mazākais kopīgais saucējs ir doto saucēju reizinājums.

Daļu $\frac{4}{5}$ un $\frac{3}{8}$ kopīgais saucējs ir $5 \cdot 8 = 40$; daļu $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ un $\frac{1}{5}$ kopīgais saucējs ir $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.

KOPSAUCĒJU APRĒĶINA RAKSTOS

Ja kopsaucēju grūti atrast galvā, tad jāaprēķina visu saucēju mazākais kopīgais dalāmais.

Vienādot saucējus daļām $\frac{1}{36}$, $\frac{5}{42}$ un $\frac{4}{27}$.

$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3,$	$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7,$	$27 = 3 \cdot 3 \cdot 3,$
18	21	9
9	7	3
3	1	1
1		

$M(36;\ 42;\ 27) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3 = 756,$

$$\frac{1^{(21}}{36} = \frac{21}{756},\quad \frac{5^{(18}}{42} = \frac{90}{756},\quad \frac{4^{(28}}{27} = \frac{112}{756}.$$

P i e z ī m e. Daļu papildreizinātāju viegli noteikt, sareizinot kopsaucēja tos «liekos» pirmreizinātājus, kuru trūkst attiecīgās daļas saucējā.

DAĻU LIELUMU SALĪDZINĀŠANA

Ja daļām saucēji ir vienādi, tad lielāka ir tā daļa, kurai lielāks skaitītājs:

$$\frac{7}{8} > \frac{1}{8};\quad \frac{5}{24} < \frac{7}{24}.$$

Ja saucēji nav vienādi, tad tie vispirms jāvienādo.

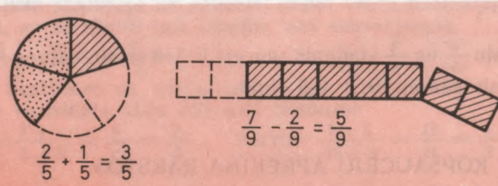
P i e m ē r s. Salīdzināt pēc lieluma daļas $\frac{1}{12}$, $\frac{5}{18}$, $\frac{3}{8}$.

$$\frac{1^{(6}}{12} = \frac{6}{72},\quad \frac{5^{(4}}{18} = \frac{20}{72},\quad \frac{3^{(9}}{8} = \frac{27}{72}.\ \text{Tātad}\ \frac{1}{12} < \frac{5}{18} < \frac{3}{8}.$$

2.6. DAĻU SASKAITĪŠANA UN ATŅEMŠANA

DAĻU SAUCĒJI IR VIENĀDI

Daļu saskaitīšanas un atņemšanas kārtula izriet no uzskatāmas priekšmetiskas daļu «apvienošanas» vai «atņemšanas» (8. zīm.).



8. zīm.

Saskaitot vai atņemot daļas, kurām vienādi saucēji, saskaita vai atņem tikai skaitītājus, paturot kopīgo saucēju:

$$\frac{a}{m} \pm \frac{b}{m} = \frac{a \pm b}{m}.$$

1) $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2+1}{5} = \frac{3}{5}$; 2) $\frac{7}{9} - \frac{2}{9} = \frac{7-2}{9} = \frac{5}{9}$.

DAĻU SAUCĒJI IR DAŽĀDI

Ja daļām saucēji dažādi, tad pirms saskaitīšanas vai atņemšanas tos vienādo.

1) $\frac{3^{(3}}{4} + \frac{1^{(2}}{6} = \frac{9}{12} + \frac{2}{12} = \frac{11}{12}$;

2) $\frac{13}{25} - \frac{2^{(5}}{5} = \frac{13}{25} - \frac{10}{25} = \frac{3}{25}$.

JAUKTU SKAITĻU SASKAITĪŠANA

Daļu saskaitīšanai un atņemšanai saglabājas visas tās pašas īpašības, kas piemīt naturālu skaitļu saskaitīšanai un atņemšanai (sk. 1.3. un 1.4.). Tāpēc šīs īpašības var izmantot arī jauktu skaitļu saskaitīšanā un atņemšanā.

Jauktus skaitļus saskaita tā: saskaita veselos, saskaita daļas un rezultātu raksta kā jauktu skaitli.

1) $2\frac{3}{8} + 1\frac{7}{8} = 3\frac{10}{8} = 4\frac{2}{8} = 4\frac{1}{4}$;

2) $5\frac{2^{(6}}{3} + \frac{4^{(2}}{9} + 2\frac{7}{18} = 7\frac{12+8+7}{18} = 7\frac{27}{18} = 8\frac{9}{18} = 8\frac{1}{2}$.

JAUKTU SKAITĻU ATŅEMŠANA

Jauktus skaitļus atņem tā: vispirms atņem veselos, pēc tam daļas.

$$5\frac{7}{13} - 2\frac{3}{13} = 3\frac{7-3}{13} = 3\frac{4}{13}.$$

Ja mazināmā daļa ir mazāka nekā mazinātāja daļa, tad vispirms mazināmā vienu vienību sasmalcina attiecīgajās daļās.

1) $9-\frac{7}{15}=8\frac{15}{15}-\frac{7}{15}=8\frac{8}{15}$;

2) $12-3\frac{5}{7}=11\frac{7}{7}-3\frac{5}{7}=8\frac{2}{7}$;

3) $8\frac{2}{9}-\frac{5}{9}=7\frac{11}{9}-\frac{5}{9}=7\frac{6}{9}=7\frac{2}{3}$;

4) $7\frac{1^{(2}}{6}-2\frac{5}{12}=7\frac{2}{12}-2\frac{5}{12}=6\frac{14}{12}-2\frac{5}{12}=4\frac{9}{12}=4\frac{3}{4}$.

2.7. DAĻAS REIZINĀŠANA UN DALĪŠANA AR NATURĀLU SKAITLI

DAĻAS REIZINĀŠANA

Reizināt kādu skaitli ar 2, 3, 5 utt. nozīmē ņemt šo skaitli par saskaitāmo 2, 3, 4 utt. reizes.

$$\frac{2}{7}\cdot 3=\frac{2}{7}+\frac{2}{7}+\frac{2}{7}=\frac{2+2+2}{7}=\frac{2\cdot 3}{7}.$$

Lai daļu sareizinātu ar naturālu skaitli, pietiek tikai sareizināt skaitītāju ar naturālo skaitli, atstājot iepriekšējo saucēju:

$$\frac{a}{b}\cdot m=\frac{a\cdot m}{b}.$$

1) $\frac{2}{7}\cdot 3=\frac{2\cdot 3}{7}=\frac{6}{7}$; 2) $\frac{4}{15}\cdot 5=\frac{4\cdot 5}{15}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$;

3) $\frac{7}{8}\cdot 16=\frac{7\cdot 16}{8}=\frac{7\cdot 2}{1}=14$.

Reizinājumu ar skaitli 1 vai 0 var rakstīt uzreiz:

$\frac{3}{5}\cdot 1=\frac{3}{5}$; $\frac{2}{7}\cdot 0=0$.

JAUKTA SKAITĻA REIZINĀŠANA

Jauktu skaitli ar veselu skaitli var reizināt divējādi.

Pirmais paņēmiens. Vispirms jauktu skaitli pārveido daļā un tad reizina kā daļu ar naturālu skaitli:

$5\frac{3}{8}\cdot 6=\frac{43}{8}\cdot 6=\ldots$ Īsāk: $5\frac{3}{8}\cdot 6=\frac{43\cdot 6}{8}=\frac{129}{4}=32\frac{1}{4}$.

Otrais paņēmiens. Atsevišķi reizina veselo skaitli un daļu ar naturālo skaitli:

$5\frac{3}{8}\cdot 6=5\cdot 6+\frac{3}{8}\cdot 6=\ldots$

Īsāk: $5\frac{3}{8}\cdot 6=30\frac{3\cdot 6}{8}=30\frac{9}{4}=32\frac{1}{4}$.

DAĻAS DALĪŠANA

Dalīt vienu skaitli ar otru nozīmē atrast tādu trešo skaitli, kas, reizināts ar otro skaitli, dod pirmo skaitli.

$$\frac{2}{5}:3=\frac{2}{5\cdot3},\ \text{jo}\ \frac{2}{5\cdot3}\cdot3=\frac{2\cdot3}{5\cdot3}=\frac{2}{5}.$$

Lai daļu izdalītu ar naturālu skaitli, pietiek sareizināt saucēju ar naturālu skaitli, atstājot skaitītāju iepriekšējo:

$$\frac{a}{b}:m=\frac{a}{b\cdot m}.$$

1) $\frac{2}{5}:3=\frac{2}{5\cdot3}=\frac{2}{15}$ 3) $\frac{7}{15}:7=\frac{7}{15\cdot7}=\frac{1}{15}$;

2) $\frac{6}{11}:4=\frac{6}{11\cdot4}=\frac{3\cdot2}{11\cdot2\cdot2}=\frac{3}{22}$; 4) $\frac{7}{9}:1=\frac{7}{9}$.

JAUKTA SKAITĻA DALĪŠANA

Jauktu skaitli ar naturālu skaitli var dalīt divējādi.

P i r m a i s p a ņ ē m i e n s. Vispirms jauktu skaitli pārveido daļā un tad dala kā daļu ar naturālu skaitli:

$$8\frac{1}{3}:4=\frac{25}{3\cdot4}=\frac{25}{12}=2\frac{1}{12};\quad 17\frac{1}{7}:3=\frac{120}{7\cdot3}=\frac{40}{7}=5\frac{5}{7}.$$

O t r a i s p a ņ ē m i e n s. Atsevišķi dala veselo un daļu ar naturālo skaitli:

$$8\frac{1}{3}:4=8:4+\frac{1}{3}:4=2+\frac{1}{12}=2\frac{1}{12};$$

$$17\frac{1}{7}:3=15:3+2\frac{1}{7}:3=\ldots\ \text{Īsāk:}\ 17\frac{1}{7}:3=5\frac{15}{7\cdot3}=5\frac{5}{7}.$$

2.8. TREJĀDI UZDEVUMI PAR SKAITĻA DAĻĀM

SKAITLIS, TĀ DAĻA UN DAĻAS VĒRTĪBA

Pieņemsim, ka parkā ir pavisam 48 koki un ka no tiem 36 koki ir ozoli, kas ir $\frac{3}{4}$ visu koku skaita.

Ja jebkuri divi no šiem lielumiem ir zināmi, tad trešo iespējams aprēķināt. Tādējādi izveidojas trejādi uzdevumi par daļām jeb t. s. daļu uzdevumi, kuros prasīts

1) aprēķināt skaitļa daļas vērtību (36 koki);
2) aprēķināt visu skaitli (48 koki);
3) izteikt vienu skaitli kā otra skaitļa daļu ($\frac{3}{4}$).

Risinot šāda veida uzdevumus, vispirms aprēķina visa skaitļa vienu pamatdaļu un pēc tam — prasīto, kā tas redzams tālākajos piemēros.

SKAITĻA DAĻAS VĒRTĪBAS APRĒĶINĀŠANA

1. Parkā ir 48 koki, pie tam $\frac{3}{4}$ visu koku ir ozoli. Cik ozolu parkā?

$48:4 = 12$ (tik ir $\frac{1}{4}$ no 48);

$12 \cdot 3 = 36$ (tik ir $\frac{3}{4}$ no 48 jeb tik ir ozolu).

Risinot rakstos, abas darbības var arī apvienot vienā izteiksmē:

$48:4 \cdot 3 = \frac{48 \cdot 3}{4} = 36$ (ozoli).

2. Aprēķināt $\frac{3}{7}$ no $2\frac{4}{5}$.

$2\frac{4}{5}:7 \cdot 3 = \frac{14 \cdot 3}{5 \cdot 7} = 1\frac{1}{5}$.

VISA SKAITĻA APRĒĶINĀŠANA

1. Parkā ir 36 ozoli, kas ir $\frac{3}{4}$ visu koku skaita. Cik pavisam koku parkā?

$36:3 = 12$ (tik ir $\frac{1}{4}$ visu koku skaita);

$12 \cdot 4 = 48$ (tik pavisam koku ir parkā).

Risinot rakstos, abas darbības var apvienot vienā izteiksmē:

$36:3 \cdot 4 = \frac{36 \cdot 4}{3} = 48$ (koki).

2. Aprēķināt skaitli x, ja tā $\frac{5}{6}$ ir vienādas ar $4\frac{2}{7}$.

$x = 4\frac{2}{7}:5 \cdot 6 = \frac{30 \cdot 6}{7 \cdot 5} = 5\frac{1}{7}$.

Pārbaude: $\frac{5}{6}$ no $5\frac{1}{7} = 5\frac{1}{7}:6 \cdot 5 = \frac{36 \cdot 5}{7 \cdot 6} = 4\frac{2}{7}$.

VIENS SKAITLIS KĀ OTRA SKAITĻA DAĻA

1. Parkā ir 48 koki, no tiem 36 ir ozoli. Kāda daļa visu koku ir ozoli?

1 koks pret 48 kokiem ir $\frac{1}{48}$ (visu koku);

36 koki pret 48 kokiem ir $\frac{1}{48} \cdot 36 = \frac{36}{48} = \frac{3}{4}$ (visu koku).

2. Kāda daļa ir $7\frac{1}{2}$ pret 12?

$\frac{1}{12} \cdot 7\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 15}{12 \cdot 2} = \frac{5}{8}$.

P i e z ī m e. Kā uzdevumus par skaitļa daļām var atrisināt arī ar vienu darbību, sk. 2.10.

2.9. DAĻU REIZINĀŠANA

KO NOZĪMĒ REIZINĀT AR DAĻU

Reizināt kādu skaitli, piemēram, ar 3, nozīmē ņemt doto skaitli par saskaitāmo 3 reizes (sk. 1.5.). Bet, reizinot skaitli ar daļu, nevar ņemt šo skaitli par saskaitāmo, piemēram, $\frac{1}{2}$ reizes, $\frac{2}{3}$ reizes, $4\frac{2}{5}$ reizes u. tml. Tāpēc reizināšanas darbības jēga ir jāsaprot plašāk, lai tā būtu attiecināma arī uz reizināšanu ar daļu.

Reizinot kādu skaitli, piemēram, ar 5, reizinājumā iegūst skaitli, kas ir piecu doto skaitļu summa jeb, citādi sakot, pieckāršots dotais skaitlis; reizinot kādu skaitli ar 3, reizinājumā iegūst trīskāršotu doto skaitli; reizinot kādu skaitli ar 1, reizinājumā iegūst tādu pašu skaitli. Attiecinot šādu reizināšanas jēgu arī uz reizināšanu ar daļu, jāsecina, ka, piemēram, reizinot kādu skaitli ar $\frac{1}{2}$, reizinājumā jāiegūst skaitlis, kas ir puse dotā skaitļa; ka, reizinot ar $\frac{2}{3}$, ir jāiegūst reizinājumā $\frac{2}{3}$ dotā skaitļa utt.

Tātad reizināt kādu skaitli ar daļu nozīmē aprēķināt šīs daļas vērtību no dotā skaitļa. Tādējādi jebkura skaitļa reizinājumu ar daļu varam aprēķināt kā šī skaitļa attiecīgās daļas vērtību, piemēram,

1) $12 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ no $12 = 4$;

2) $12 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ no $12 = \frac{12 \cdot 3}{4} = 9$;

3) $7 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$ no $7 = \frac{7 \cdot 2}{5} = \frac{14}{5} = 2\frac{4}{5}$;

4) $\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ no $\frac{5}{7} = \frac{5 \cdot 2}{7 \cdot 3} = \frac{10}{21}$.

REIZINĀŠANAS VISPĀRĪGĀ KĀRTULA

Kā redzams iepriekšējā punkta pēdējā piemērā, daļu reizināšanas gaitu var izteikt šādā vispārīgā reizināšanas kārtulā.

Lai sareizinātu daļu ar daļu, sareizina skaitītājus un sareizina saucējus, pie tam pirmais reizinājums ir rezultāta skaitītājs, otrais — saucējs:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}.$$

Vispārīgā reizināšanas kārtula izmantojama jebkuru skaitļu reizināšanai: ja kāds no reizinātājiem ir vesels skaitlis vai jaukts skaitlis, tad to pirms reizināšanas var izteikt neīstā daļā.

1) $8 \cdot 2\frac{1}{3} = \frac{8}{1} \cdot \frac{7}{3} = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 3} = \frac{56}{3} = 18\frac{2}{3}$.

Īsāk: $8 \cdot 2\frac{1}{3} = \frac{8 \cdot 7}{3} = \frac{56}{3} = 18\frac{2}{3}$.

P i e z ī m e. Saucēju 1 kā reizinātāju var arī nerakstīt.

2) $1\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 6} = \ldots$

Īsāk: $1\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 6} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$;

3) $\frac{3}{5} \cdot 10 = \frac{3 \cdot 10}{5} = 6$.

Daļu reizināšanai saglabājas visas tās pašas īpašības, kas piemīt naturālu skaitļu reizināšanai (sk. 1.5.).

REIZINĀJUMA APTUVENA NOVĒRTĒŠANA

Reizinājumu ar daļu var aptuveni novērtēt, ievērojot, ka reizinājumā iegūst šī skaitļa attiecīgās daļas vērtību. Pie tam daļu domās var aptuveni «saīsināt», aizstājot to ar kādu no tuvākajām pamatdaļām. Ja daļa ir «nedaudz» mazāka nekā skaitlis 1, tad reizinājumam jābūt attiecīgi nedaudz mazākam nekā skaitlim, kuru ar šo daļu reizina.

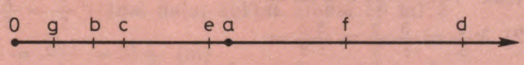
1) $7\frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2} \approx \frac{1}{2}$ no $8 = 4$;

2) $32\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{10} \approx \frac{1}{3}$ no $30 = 10$;

3) $14\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{9} \approx 14\frac{1}{2} \cdot 1 \approx 14$;

4) $13\frac{2}{5} \cdot 2\frac{5}{9} \approx 13 \cdot 3 = 39$.

9. zīmējumā uz koordinātu stara parādīta reizinājuma aptuvena novērtēšana (salīdzinot reizinājumu ar doto skaitli a):



9. zīm.

$a \cdot \frac{1}{3} = b$; $a \cdot 2\frac{1}{4} = d$; $a \cdot 1\frac{9}{15} = f$;

$a \cdot \frac{7}{15} = c$; $a \cdot \frac{11}{12} = e$; $a \cdot \frac{1}{6} = g$.

2.10. DAĻU DALĪŠANA

SAVSTARPĒJI APGRIEZTI SKAITĻI

Divus tādus skaitļus, kuru reizinājums ir skaitlis 1, sauc par savstarpēji apgrieztiem skaitļiem.

Savstarpēji apgriezti skaitļi ir, piemēram,

$\frac{2}{3}$ un $\frac{3}{2}$, jo $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$;

4 un $\frac{1}{4}$, jo $4 \cdot \frac{1}{4} = 1$;

$5\frac{1}{3}$ un $\frac{3}{16}$, jo $5\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{16} = \frac{16 \cdot 3}{3 \cdot 16} = 1$.

Viegli saskatīt, ka dotā skaitļa apgriezto skaitli var dabūt, apmainot skaitītāju un saucēju vietām. Skaitļa 1 apgrieztais skaitlis ir 1. Skaitlim 0 nav apgrieztā skaitļa.

DALĪŠANAS VISPĀRĪGĀ KĀRTULA

Kā zināms, divu skaitļu dalījums ir tāds skaitlis, kura reizinājums ar dalītāju ir vienāds ar dalāmo. Tādu skaitli viegli aprēķināt, reizinot dalāmo ar apgrieztu dalītāju, piemēram,

$\frac{3}{11} : \frac{2}{5} = \frac{3}{11} \cdot \frac{5}{2} = \frac{3 \cdot 5}{11 \cdot 2}$, jo $\frac{3 \cdot 5}{11 \cdot 2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 2}{11 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{3}{11}$.

Lai izdalītu daļu ar daļu, tad dalāmo reizina ar apgrieztu dalītāju:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

$$\frac{2}{7} : \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 5}{7 \cdot 3} = \frac{10}{21}.$$

Ja dalāmais vai dalītājs ir vesels skaitlis vai jaukts skaitlis, tad tos pirms dalīšanas var izteikt neīstā daļā.

1) $1\frac{2}{5} : 1\frac{1}{2} = \frac{7}{5} : \frac{3}{2} = \frac{7}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{14}{15}$.

Īsāk: $1\frac{2}{5} : 1\frac{1}{2} = \frac{7 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{14}{15}$;

2) $3 : \frac{2}{5} = \frac{3}{1} : \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5}{1 \cdot 2} = \ldots$

Īsāk: $3 : \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5}{2} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$;

3) $6\frac{2}{3} : 4 = \frac{20}{3 \cdot 4} = \frac{5 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$;

4) $1 : 2\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3}{7} = \frac{3}{7}$;

5) $2\frac{1}{3} : 1 = 2\frac{1}{3}$.

REIZINĀŠANA UN DALĪŠANA VIENKOPUS

Ja izteiksmē ir tikai reizināšana un dalīšana, tad šādas izteiksmes vērtību var aprēķināt, visas darbības apvienojot daļveida izteiksmē (ar kopēju dalsvītru):

1) $\frac{5}{6}\cdot 12:\frac{3}{5}=\frac{5\cdot 12\cdot 5}{6\cdot 3}=\frac{5\cdot 6\cdot 2\cdot 5}{6\cdot 3}=\frac{50}{3}=16\frac{2}{3}$;

2) $1\frac{2}{7}:4\frac{1}{2}:5\cdot 8\frac{1}{3}:\frac{1}{6}=\frac{9\cdot 2\cdot 25\cdot 6}{7\cdot 9\cdot 5\cdot 3\cdot 1}=\frac{20}{7}=2\frac{6}{7}$.

DAĻU UZDEVUMU RISINĀJUMS AR VIENU DARBĪBU

Ievērojot, kāda jēga ir reizināšanai vai dalīšanai ar daļu, ar šīm darbībām var risināt arī triju veidu t. s. daļu uzdevumus (sk. 2.8.). Tā parasti risina rakstos tādus uzdevumus, kurus galvā grūti atrisināt.

Lai aprēķinātu skaitļa daļas vērtību, šis skaitlis jāreizina ar doto daļu.

1) Aprēķināt $\frac{5}{9}$ no skaitļa $4\frac{1}{5}$.

$4\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{9}=\frac{21\cdot 5}{5\cdot 9}=2\frac{1}{3}$.

2) Veikalā bija 36 kg apelsīnu. Pārdeva $\frac{3}{8}$ visa apelsīnu daudzuma.

Cik kilogramu apelsīnu vēl atlika?

$36\cdot\frac{3}{8}=\frac{36\cdot 3}{8}=13\frac{1}{2}$ (kg);

$36-13\frac{1}{2}=22\frac{1}{2}$ (kg).

Lai aprēķinātu visu skaitli, tā daļas vērtība jādala ar doto daļu.

3) Aprēķināt skaitli, kura $\frac{2}{3}$ ir vienādas ar $5\frac{1}{3}$.

$5\frac{1}{3}:\frac{2}{3}=\frac{16\cdot 3}{3\cdot 2}=8$.

4) Kad no auklas nogrieza $\frac{3}{7}$ tās garuma, tad vēl atlika 18 m gara aukla. Cik gara bija aukla sākumā?

$1-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$ (tādai daļai auklas atbilst 18 m);

$18:\frac{4}{7}=\frac{18\cdot 7}{4}=31\frac{1}{2}$ (m).

Lai izteiktu vienu skaitli kā otra skaitļa daļu, tad pirmais skaitlis jādala ar otro.

5) Klasē no 36 skolēniem 8 ir teicamnieki. Kāda daļa skolēnu ir teicamnieki?

$8:36=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$.

6) Kāda daļa ir skaitlis $3\frac{1}{2}$ pret skaitli 14?

$3\frac{1}{2}:14 = \frac{7}{2 \cdot 14} = \frac{1}{4}$.

UZDEVUMI AR PARASTAJĀM DAĻĀM

1. uzdevums. Aprēķināt izteiksmes vērtību.

$$\frac{8\frac{1}{2} - 2\frac{5}{8}}{4\frac{1}{8} \cdot 2\frac{6}{11} - 14\frac{2}{3}:5\frac{1}{2}} = \frac{5\frac{7}{8}}{10\frac{1}{2} - 2\frac{2}{3}} = \frac{5\frac{7}{8}}{7\frac{5}{6}} = \frac{47 \cdot 6}{8 \cdot 47} = \frac{3}{4}.$$

1) $8\frac{1}{2}^{(4} - 2\frac{5}{8} = 8\frac{4}{8} - 2\frac{5}{8} = 7\frac{12}{8} - 2\frac{5}{8} = 5\frac{7}{8}$;

2) $\frac{33 \cdot 28}{8 \cdot 11} = \frac{11 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 4}{4 \cdot 2 \cdot 11} = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}$;

3) $\frac{44 \cdot 2}{3 \cdot 11} = \frac{11 \cdot 4 \cdot 2}{3 \cdot 11} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$;

4) $10\frac{1}{2}^{(3} - 2\frac{2}{3}^{(2} = 10\frac{3}{6} - 2\frac{4}{6} = 9\frac{9}{6} - 2\frac{4}{6} = 7\frac{5}{6}$.

2. uzdevums. No visiem jaunceltnei pievestajiem ķieģeļiem $\frac{2}{7}$ ir sarkanie ķieģeļi, bet pārējie — baltie ķieģeļi. Cik pavisam ķieģeļu pievests, ja balto ķieģeļu ir par 2100 gabaliem vairāk nekā sarkano ķieģeļu?

Atrisinājums. 1) Kāda daļa visu ķieģeļu ir baltie ķieģeļi?

$1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$ (visu ķieģeļu).

2) Kādai daļai visu ķieģeļu atbilst 2100 ķieģeļi?

$\frac{5}{7} - \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$ (visu ķieģeļu).

3) Cik pavisam ķieģeļu pieveda?

$2100:3 \cdot 7 = 700 \cdot 7 = 4900$ (ķieģeļu).

Atbilde. Jaunceltnei pieveda 4900 ķieģeļu.

Pārbaude:

$\frac{2}{7}$ no $4900 = 4900:7 \cdot 2 = 1400$ (sarkano ķieģeļu);

$4900 - 1400 = 3500$ (balto ķieģeļu);

$3500 - 1400 = 2100$ (ķieģeļu).

3. uzdevums. Viena mašīnrakstītāja varētu manuskriptu pārrakstīt 9 stundās, otra — 6 stundās. Cik stundās šo manuskriptu pārrakstīs abas mašīnrakstītājas, strādājot reizē?

Atrisinājums.

1) $1:9 = \frac{1}{9}$ (manuskripta) — 1 stundā pārraksta pirmā rakstītāja.

2) $1:6=\frac{1}{6}$ (manuskripta) — 1 stundā pārraksta otrā rakstītāja.

3) $\frac{1^{(2}}{9}+\frac{1^{(3}}{6}=\frac{2+3}{18}=\frac{5}{18}$ (manuskripta) — 1 stundā pārraksta abas rakstītājas.

4) $1:\frac{5}{18}=3\frac{3}{5}$ (h) — tik stundās pārrakstīs manuskriptu, ja strādās abas rakstītājas.

Atbilde. Abas mašīnrakstītājas, strādājot reizē, manuskriptu pārrakstīs $3\frac{3}{5}$ stundās.

2.11. ATTIECĪBA UN PROPORCIJA

DIVU SKAITĻU SALĪDZINĀŠANA

Divus skaitļus, piemēram, 21 un 7, var salīdzināt divējādi. No lielākā skaitļa atņemot mazāko, uzzina šo skaitļu starpību, kas rāda, par cik pirmais skaitlis lielāks nekā otrais: $21-7=14$.

Dalot vienu skaitli ar otru, atrod šo skaitļu dalījumu:

$21:7=3$ vai $7:21=\frac{1}{3}$.

Pirmajā gadījumā dalījums 3 izsaka, ka skaitlis 21 ir 3 reizes lielāks nekā 7. Otrajā gadījumā dalījums $\frac{1}{3}$ izsaka, ka skaitlis 7 ir skaitļa 21 trešā daļa.

ATTIECĪBA

Par divu skaitļu attiecību sauc šo skaitļu dalījumu (salīdzināšanas nolūkā):

$a:b=q$ jeb $\frac{a}{b}=q$.

Lasa: skaitļa a un b attiecība ir q; a attiecas pret b kā q. Ar vārdu «attiecība» saprot gan dalījumu q, gan arī izteiksmi $a:b$ (neizrēķināto dalījumu).

Ja lielāko skaitli dala ar mazāko, tad attiecība q ir lielāka nekā skaitlis 1 un tā izsaka, cik reižu pirmais skaitlis lielāks nekā otrais.

Ja mazāko skaitli dala ar lielāko, tad attiecība q ir mazāka nekā 1 un tā izsaka, kāda daļa ir pirmais skaitlis pret otro skaitli.

ATTIECĪBA VESELOS SKAITĻOS

Divu skaitļu lielumu samērs ir uzskatāmāks, ja to attiecība ir izteikta nelielos veselos skaitļos. Šajā nolūkā jācenšas attiecību «saīsināt», dalot dalāmo un dalītāju ar vienu un to pašu skaitli:

$A:B = 18:24 = 3:4;$
$m:n = 35:28 = 5:4.$

Daļskaitļu attiecību var izteikt veselu skaitļu attiecībā, izdalot pirmo skaitli ar otro un dabūto daļu iespējami saīsinot:

$$a:b = 3\frac{3}{5}:2\frac{2}{5} = \frac{18\cdot5}{5\cdot12} = \frac{3}{2} = 3:2;$$
$$x:y = 1\frac{5}{6}:7\frac{1}{3} = \frac{11\cdot3}{6\cdot22} = \frac{1}{4} = 1:4;$$
$$A:B = 1{,}25:2{,}5 = 0{,}5 = \frac{1}{2} = 1:2.$$

ATTIECĪBAS IZMANTOŠANA

Dažos piemēros parādīsim attiecības jēdziena lietojumus uzdevumu risināšanā.

1. uzdevums. Vienā ievārījumā jāņogu un cukura masas ņemtas attiecībā 9:5, bet otrā ievārījumā — attiecībā 7:4. Kurš no abiem ievārījumiem ir saldāks?

Atrisinājums. $9:5 = 1{,}8$; $7:4 = 1{,}75$.

Tā kā pirmajā ievārījumā ogu masas pārsvars pār cukura masu ir lielāks nekā otrajā ievārījumā, tad otrais ievārījums ir saldāks.

2. uzdevums. Skaitli 16,8 sadalīt divos saskaitāmos attiecībā 3:4.

Atrisinājums.

x ... viena vienība
$3x$ ... 1. skaitlis
$4x$ ... 2. skaitlis

$3x + 4x = 16{,}8$
$7x = 16{,}8$
$x = 16{,}8:7 = 2{,}4.$ Pārbaude:
$3x = 3\cdot2{,}4 = 7{,}2.$ $7{,}2 + 9{,}6 = 16{,}8;$
$4x = 4\cdot2{,}4 = 9{,}6.$ $7{,}2:9{,}6 = 72:96 = 3:4.$

Atbilde. Pirmais skaitlis ir 7,2, otrais — 9,6.

PROPORCIJA

Divu attiecību vienādību sauc par proporciju.

$$a:b = c:d \text{ jeb } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Lasa: skaitļu a un b attiecība ir vienāda ar skaitļu c un d attiecību; a attiecas pret b tāpat kā c pret d.

Proporcijā $a:b = c:d$ skaitļus a un d sauc par proporcijas malējiem locekļiem, bet c un d — par vidējiem locekļiem.

Attiecības 15 : 5 un 12 : 4 ir vienādas, jo 15 : 5 = 3 un arī 12 : 4 = 3. Tāpēc no tām var izveidot pareizu proporciju 15 : 5 = 12 : 4.
Šī proporcija izsaka: cik reižu skaitlis 15 ir lielāks nekā skaitlis 5, tik reižu 12 ir lielāks nekā 4.
Proporcija 2 kg : 5 kg = 40 sant. : 1 Ls izsaka: kāda daļa ir 2 kg pret 5 kg, tāda daļa ir arī 40 santīmi pret 1 latu.
Ja ar vienādības zīmi savieno divas nevienādas attiecības, tad rodas nepareiza (nepatiesa) proporcija, piemēram, 8 : 2 = 12 : 4.

PROPORCIJAS PAMATĪPAŠĪBA

Pareizai jeb patiesai proporcijai piemīt šāda pamatīpašība.
Proporcijas malējo locekļu reizinājums ir vienāds ar proporcijas vidējo locekļu reizinājumu.
Ja $a:b = c:d$, tad $a \cdot d = b \cdot c$.
Ja $3:2 = 6:4$, tad $3 \cdot 4 = 12$ un arī $2 \cdot 6 = 12$.

PROPORCIJAS PATIESUMA PĀRBAUDE

Ja rodas šaubas, vai uzrakstītā divu attiecību vienādība ir patiesa proporcija, tad to var pārbaudīt divējādi, noskaidrojot, 1) vai abas attiecības (abi dalījumi) tiešām ir vienādas, 2) vai malējo un vidējo locekļu reizinājumi ir vienādi.
Vai $26:8 = 16:5$?
1) $26:8 = 3\frac{1}{4}$, bet $16:5 = 3\frac{1}{5}$, tātad proporcija nav patiesa;
2) $26 \cdot 5 = 130$, bet $8 \cdot 16 = 128$ un redzams, ka proporcija nav patiesa.

PROPORCIJAS IZVEIDOŠANA

Ja $a \cdot d = b \cdot c$, tad no šiem skaitļiem var izveidot patiesas proporcijas (izslēdzot dalīšanu ar nulli).
Piemērs. Tā kā $3 \cdot 4 = 2 \cdot 6$, tad no šiem skaitļiem var izveidot 4 dažādas proporcijas, ievērojot, lai viena reizinājuma abi reizinātāji būtu malējie, bet otra reizinājuma abi reizinātāji — vidējie locekļi:

$3:2 = 6:4$; $4:2 = 6:3$;
$2:3 = 4:6$; $2:4 = 3:6$.

Kā viegli saskatīt, šādas 4 dažādas proporcijas var izveidot vienu no otras arī tā, ka savstarpēji samaina vietām proporcijas vidējos vai malējos locekļus. (Par dažādām neuzskatīsim tādas proporcijas, kurām tikai abu pušu attiecības ir apmainītas vietām).

PROPORCIJAS NEZINĀMĀ LOCEKĻA APRĒĶINĀŠANA

No proporcijas pamatīpašības izriet kārtulas par proporcijas nezināmā locekļa aprēķināšanu.

Lai aprēķinātu proporcijas vienu malējo locekli, vidējo locekļu reizinājums jādala ar otru malējo locekli.

Lai aprēķinātu proporcijas vienu vidējo locekli, malējo locekļu reizinājums jādala ar otru vidējo locekli.

1) $3:x = 4{,}5:15$ 2) $\frac{5}{2} = \frac{1}{z}$

$x = \frac{3 \cdot 15}{4{,}5} = \frac{45}{4{,}5} = 10$; $z = \frac{1 \cdot 2}{5} = 0{,}4$.

PROPORCIJAS IZMANTOŠANA UZDEVUMU ATRISINĀŠANĀ

1. uzdevums. 6 kg konfekšu maksā Ls 25,50. Cik latu maksā 4 kg šo konfekšu?

Atrisinājums. x ... tik latu maksā 4 kg konfekšu,

$\frac{25{,}5}{6}$ jeb $\frac{x}{4}$ ... tik latu maksā 1 kg konfekšu.

$$x = \frac{25{,}5 \cdot 4}{6} = \frac{51}{3} = 17 \text{ (Ls)}.$$

Atbilde. 4 kg konfekšu maksā 17 latus.

2. uzdevums. Skābēšanai gurķus pārlej ar sālsūdeni, kurā sāls un ūdens masu attiecībai jābūt 3:50. Cik daudz sāls jāpievieno pie 30 kg ūdens?

Atrisinājums. x ... tik kilogramu jāņem sāls.

$$x:30 = 3:50;$$

$$x = \frac{3 \cdot 30}{50} = 1{,}8 \text{ (kg)}$$

Atbilde. Jāpievieno 1,8 kg sāls.

3. DECIMĀLDAĻAS

3.1. DECIMĀLDAĻU JĒDZIENS UN ĪPAŠĪBAS

DECIMĀLDAĻU JĒDZIENS UN PIERAKSTS

Daļas, kuru saucējs ir 10, 100, 1000 utt., var uzrakstīt īpašā veidā, piemēram,

$\frac{1}{10} = 0{,}1;\quad \frac{1}{100} = 0{,}01;\quad \frac{1}{1000} = 0{,}001;$

$\frac{3}{10} = 0{,}3;\quad \frac{7}{100} = 0{,}07;\quad \frac{9}{1000} = 0{,}009$ u tml.

$5\frac{7}{10} = 5{,}7;\ 1\frac{2}{100} = 1{,}02;\ 14\frac{3}{100} = 14{,}003$ u. tml.

Kā redzams piemēros, aiz veselā skaitļa raksta komatu, bet desmitdaļu skaitu raksta no komata pa labi pirmajā vietā, simtdaļu skaitu — otrajā vietā, tūkstošdaļu skaitu — trešajā vietā utt.

Skaitlī 24,513 ir 2 desmiti 4 vieni 5 desmitdaļas 1 simtdaļa 3 tūkstošdaļas:

$$24{,}513 = 20 + 4 + \frac{5}{10} + \frac{1}{100} + \frac{3}{1000}.$$

Ciparus pa labi no komata sauc par skaitļa decimālcipariem jeb decimālzīmēm. Skaitļa 24,513 decimālcipari ir 5, 1, 3. Atsevišķo decimālciparu apzīmētās daļas summējot, iegūst daļu, kuras skaitītājs ir decimālciparu veidotais skaitlis, bet saucējs ir skaitlis 1 ar tik nullēm, cik skaitlī decimālciparu:

$$24{,}513 = 20 + 4 + \frac{5}{10} + \frac{1}{100} + \frac{3}{1000} = 24\frac{513}{1000};$$

$$0{,}0302 = \frac{3}{100} + \frac{2}{10000} = \frac{302}{10000}.$$

Tāpat arī: $0{,}017 = \frac{17}{1000}$; $30{,}40056 = 30\frac{40056}{100000}$ utt.

Daļas, kuru saucējs ir 10, 100, 1000, 10 000 utt. un kuras pieraksta īpašā veidā bez saucēja, sauc par decimāldaļām.

DECIMĀLDAĻU LASĪŠANA

Decimāldaļas mēdz lasīt divējādi. 24,513 lasa: 24 veseli 513 tūkstošdaļas; 24 komats 513. Decimāldaļu 0,0302 lasa: 0 veselu 302 desmittūkstošdaļas; 0 komats 0302. Nav vēlams lasīt tā: 24 komats 513 tūkstošdaļas.

Arī veselu skaitli reizēm mēdz pierakstīt kā decimāldaļu, liekot aiz veseliem komatu un aiz tā pierakstot vienu vai vairākas nulles, piemēram,

42,00 rbļ. (lasa: 42 komats 00), 32,000 kg u. tml.

DECIMĀLĀS NUMERĀCIJAS SISTĒMAS PAPLAŠINĀŠANA

Ar decimāldaļu ieviešanu tiek paplašināta mums jau pazīstamā naturālo skaitļu decimālā numerācijas sistēma un skaitļu pozicionālā rakstība:

a) jebkurā nākamā lielākā skaitīšanas vienība ir 10 reizes lielāka nekā iepriekšējā, jebkura nākamā mazākā skaitīšanas vienība ir 10 reizes mazāka nekā iepriekšējā;

b) cipara vieta skaitlī, skaitot no komata pa kreisi vai pa labi, nosaka cipara apzīmētās vienības lielumu (10. zīm.).

10. zīm.

DECIMĀLDAĻU PAPLAŠINĀŠANA UN SAĪSINĀŠANA

Tā kā decimāldaļā ciparam atbilstošās vienības lielumu nosaka cipara vieta skaitlī, skaitot no komata (nevis no labās puses, kā naturālo skaitļu pierakstā), tad no tā izriet praktiski svarīga decimāldaļu īpašība.

Decimāldaļas lielums nemainās, ja tai labajā pusē pieraksta vai no labās puses atmet vienu vai vairākas nulles.

$4{,}510 = 4{,}51 = 4{,}51000 = 4{,}5100 = \ldots$

Patiešām, jebkuras šīs daļas lielumu izsaka viena un tā pati summa $4 + \frac{5}{10} + \frac{1}{100}$.

Tāpat $74{,}0 = 74{,}000 = 74 = 74{,}00 = \ldots$

Pierakstot decimāldaļai labajā pusē vienu vai vairākas nulles, daļa tiek paplašināta (ar 10, 100, 1000, ...):

$0{,}3 = 0{,}300$ jeb $\frac{3}{10} = \frac{300}{1000}$; $6{,}04 = 6{,}040$; $45 = 45{,}000$.

Atmetot decimāldaļai no labās puses vienu vai vairākas nulles, daļa tiek saīsināta (ar 10, 100, 1000, ...):

$2{,}70 = 2{,}7$ jeb $2\frac{70}{100} = 2\frac{7}{10}$; $700{,}0 = 700$;
$40{,}0300 = 40{,}03$.

Mēru apzīmējumos decimāldaļas reizēm tīši atstāj nesaīsinātas, ja attiecīgās daļas ir kādas mazākas vienības:
Ls 3,40, Ls 12,00 (jo lata simtdaļas ir santīmi);
0,800 kg (jo kilograma tūkstošdaļas ir grami);
1,30 c (jo centnera simtdaļa ir kilograms) u. tml.

SAUCĒJU VIENĀDOŠANA UN DECIMĀLDAĻU SALĪDZINĀŠANA

Decimāldaļas saīsinot vai paplašinot, ir iespējams tām vienādot saucējus un tādējādi arī salīdzināt tās pēc lieluma.

1. Salīdzināt 0,36 un 0,4:

$0{,}4 = 0{,}40$, $0{,}36 < 0{,}40$, tātad $0{,}36 < 0{,}4$.

2. Salīdzināt 5,700 kg un 5,83 kg:

$5{,}700 = 5{,}70$, $5{,}70 < 5{,}83$, tātad $5{,}700$ kg $< 5{,}83$ kg.

Protams, decimāldaļas var salīdzināt arī, nevienādojot to saucējus: lielāka ir tā decimāldaļa, kurā vairāk veselo; ja veselo skaits vienāds, tad lielāks tas skaitlis, kurā vairāk desmitdaļu; ja arī desmitdaļu skaits vienāds, tad tāpat salīdzina simtdaļas, tūkstošdaļas utt.

$52{,}3 > 7{,}4568$, jo $52 > 7$ (veselie);
$4{,}3861 > 4{,}38579$, jo $6 > 5$ (trešie decimālcipari);
$0{,}0087 < 0{,}012$, jo $0 < 1$ (otrie decimālcipari).

3.2. DECIMĀLDAĻSKAITĻU SASKAITĪŠANA UN ATŅEMŠANA

SASKAITĪŠANA UN ATŅEMŠANA GALVĀ

Vienkāršākos gadījumos decimāldaļu summu vai starpību var aprēķināt galvā, domās lasot decimāldaļas kā parastās daļas (ar saucējiem).

1) $0{,}7 + 0{,}2 = 0{,}9$ (7 desmitdaļas + 2 desmitdaļas = ...);
2) $0{,}83 - 0{,}05 = 0{,}78$ (83 simtdaļas − 5 simtdaļas = ...);
3) $4{,}7 + 0{,}3 = 5$ (7 desmitdaļas + 3 desmitdaļas = 1 vesels utt.);
4) $6 - 0{,}02 = 5{,}98$ (1 vesels − 2 simtdaļas = 98 simtdaļas utt.);
5) $0{,}4 - 0{,}12 = 0{,}40 - 0{,}12 = 0{,}28$;
6) $1{,}6 + 0{,}16 = 1{,}60 + 0{,}16 = 1{,}76$;
7) $4{,}8 + 0{,}5 = 4{,}8 + 0{,}2 + 0{,}3 = 5 + 0{,}3 = 5{,}3$;
8) $26{,}1 - 0{,}3 = 26{,}1 - 0{,}1 - 0{,}2 = 26 - 0{,}2 = 25{,}8$.

SASKAITĪŠANA UN ATŅEMŠANA RAKSTOS

Decimāldaļas rakstos saskaita vai atņem līdzīgi kā naturālos skaitļus, dotos skaitļus parakstot citu zem cita tā, lai veselie būtu zem veselajiem, desmitdaļas zem desmitdaļām, simtdaļas zem simtdaļām utt. Citādi sakot, komatu zem komata. (Veselam skaitlim komatu var iedomāties beigās.) Saskaitīšanu vai atņemšanu iesāk ar zemākajām šķirām.

1) $\begin{array}{r} 25{,}12 \\ +\ 0{,}07 \\ \hline 26{,}19; \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 43{,}45 \\ 2{,}13 \\ 0{,}016 \\ \hline 45{,}596; \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} 52{,}78 \\ -14{,}23 \\ \hline 38{,}55; \end{array}$ 4) $\begin{array}{r} 0{,}784 \\ -0{,}72 \\ \hline 0{,}064; \end{array}$

5) $45 + 8{,}32 = ?$ 6) $74{,}8 - 29 = ?$

$$\begin{array}{r} 45 \\ +\ 8{,}32 \\ \hline 53{,}32 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 74{,}8 \\ -29 \\ \hline 45{,}8 \end{array}$$

GRŪTĀKIE SASKAITĪŠANAS UN ATŅEMŠANAS GADĪJUMI

Saskaitīšanas gaitā jaievēro tas, ka 10 zemākās šķiras vienības veido vienu nākamās — augstākās šķiras vienību (līdzīgi kā naturālo skaitļu saskaitīšanā): 10 desmitdaļas veido vienu veselu, 10 simtdaļas veido vienu desmitdaļu utt.

Ja summas vai starpības pēdējie decimālcipari ir nulles, tad rezultātu saīsina, nosvītrojot nulles.

1) $\begin{array}{r} 0{,}283 \\ +4{,}32 \\ \hline 4{,}603; \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 5{,}38 \\ +23{,}62 \\ \hline 29{,}00; \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} 34{,}795 \\ +\ 5{,}205 \\ \hline 40{,}000. \end{array}$

Atņemšanas gaitā reizēm nepieciešams kādas šķiras vienu vienību sasmalcināt 10 nākamās — zemākās šķiras vienībās (līdzīgi kā naturālo skaitļu atņemšanā): vienu veselo sasmalcina 10 desmitdaļās, vienu desmitdaļu sasmalcina 10 simtdaļās utt.

1) $\begin{array}{r} 53{,}24 \\ -7{,}16 \\ \hline 46{,}08; \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 2{,}813 \\ -0{,}84 \\ \hline 1{,}973; \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} 1{,}003 \\ -\ 0{,}245 \\ \hline 0{,}758; \end{array}$ 4) $\begin{array}{r} 43{,}27 \\ -26{,}47 \\ \hline 16{,}80. \end{array}$

Ja mazināmā ir mazāk decimālciparu nekā mazinātājā, tad ieteicams mazināmam un mazinātājam vienādot saucējus.

1) $15{,}6 - 8{,}723 = ?$ 2) $100 - 2{,}89 = ?$

$$\begin{array}{r} 15{,}600 \\ -\ \ 8{,}723 \\ \hline 6{,}877 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 100{,}00 \\ -\ \ 2{,}89 \\ \hline 97{,}11 \end{array}$$

3.3. DECIMĀLDAĻU REIZINĀŠANA UN DALĪŠANA

REIZINĀŠANA UN DALĪŠANA GALVĀ

Vienkāršākos gadījumos reizinājumus un dalījumus var aprēķināt galvā, atceroties reizināšanas un dalīšanas darbību jēgu un izmantojot šo darbību īpašības:

1) $0,2 \cdot 3 = 0,2 + 0,2 + 0,2 = 0,6;$
2) $0,7 \cdot 4 = 7$ desmitdaļas $\cdot 4 = 28$ desmitdaļas $= 2,8;$
3) $3,2 \cdot 4 = 3 \cdot 4 + 0,2 \cdot 4 = 12 + 0,8 = 12,8;$
4) $0,24:3 = 0,08;$
5) $10,45:5 = 10:5 + 0,45:5 = 2 + 0,09 = 2,09;$
6) $0,3:6 = 0,30:6 = 0,05;$
7) $0,18:0,02 = 9$ (jo $0,02 \cdot 9 = 0,18$).

Dažreiz ir izdevīgi domās aizstāt decimāldaļu ar parasto daļu

1) $0,5 \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1;$ 3) $0,25 \cdot 4 = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1;$
2) $1:5 = \frac{1}{5} = 0,2;$ 4) $3:6 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5.$

Der arī atcerēties, ka reizināt skaitli ar daļu nozīmē aprēķināt šī skaitļa attiecīgās daļas vērtību:

1) $30 \cdot 0,1 = \frac{1}{10}$ no $30 = 3;$
2) $68 \cdot 0,5 = \frac{1}{2}$ no $68 = 34;$
3) $12 \cdot 0,75 = \frac{3}{4}$ no $12 = 9.$

Lai izdalītu ar daļu, tad dalāmo var reizināt ar apgrieztu dalītāju:

1) $4:0,1 = 4:\frac{1}{10} = 4 \cdot 10 = 40;$
2) $3,2:0,5 = 3,2:\frac{1}{2} = 3,2 \cdot 2 = 6,4;$
3) $1,2:0,25 = 1,2:\frac{1}{4} = 1,2 \cdot 4 = 4,8;$
4) $2,4:0,75 = 2,4:\frac{3}{4} = 2,4:3 \cdot 4 = 0,8 \cdot 4 = 3,2.$

REIZINĀŠANA UN DALĪŠANA AR 10, 100, 1000, ...

Ja, piemēram, skaitlī 3,51 pārceļ komatu par vienu vietu uz labo pusi, iegūst skaitli 35,1. Pēdējā skaitlī katrs cipars, pārvietodamies par vienu vietu uz kreiso pusi (skaitot no komata), apzīmē 10 reižu lielākas vienības nekā sākotnējā skaitlī. Līdz ar to viss skaitlis 35,1 ir 10 reižu lielāks nekā sākotnējais skaitlis 3,51.

Tāpat, pārceļot skaitlī komatu par divām vietām uz labo pusi, skaitlis palielinās 100 reižu; pārceļot komatu par trim vietām pa labi, skaitlis palielinās 1000 reižu utt.

Līdzīgi, pārceļot skaitlī komatu uz kreiso pusi, skaitlis attiecīgi pamazinās 10, 100, 1000 utt. reižu.

Lai decimāldaļu pareizinātu ar 10, 100, 1000, ..., tad tajā komats jāpārceļ par 1, 2, 3, ... vietām uz labo pusi.

1) $2,43 \cdot 10 = 24,3;$ 2) $0,5124 \cdot 100 = 51,24;$ 3) $1000 \cdot 7,003 = 7003.$

Lai decimāldaļu izdalītu ar 10, 100, 1000, . . ., tad tajā komats jāpārceļ par 1, 2, 3, . . . vietām uz kreiso pusi.

1) 82,7:10 = 8,27; 2) 5432,1:1000 = 5,4321.

Ja, pārceļot komatu pa labi vai pa kreisi, dotajā skaitlī ciparu «pietrūkst», tad to vietā pieraksta nulles:

1) 24,3·100 = 2430; 3) 52,6:100 = 0,526;
2) 1000·0,7 = 700; 4) 0,3:1000 = 0,0003;
5) 0,015:10 = 0,0015.

Jāatceras, ka arī veselu skaitli var uzrakstīt kā decimāldaļu ar komatu skaitļa beigās: 38 = 38,0 = 38,000 u. tml. Tāpēc, piemēram,

1) 38·100=3800; 3) 570:100 = 5,70 = 5,7; 5) 1:100 = 0,01;
2) 38:10=3,8; 4) 48:1000 = 0,048; 6) 3000:100 = 30.

REIZINĀŠANA RAKSTOS

Noskaidrosim, kā rakstos aprēķināt, piemēram, reizinājumu 2,43·0,7.

Atmetot reizinātājā 2,43 komatu, iegūst veselu skaitli 243, kas ir 100 reižu lielāks nekā sākotnējais skaitlis. Atmetot komatu reizinātājā 0,7, iegūst 10 reižu lielāku skaitli, proti, 7. Iegūto veselo skaitļu reizinājums ir 243·7 = 1701, bet tas ir 100·10 = 1000 reižu lielāks nekā meklējamais reizinājums 2,43·0,7. Tāpēc šis reizinājums iegūstams, skaitli 1701 pamazinot 1000 reižu (pārceļot tajā komatu par 3 vietām uz kreiso pusi): 2,43·0,7 = 1,701.

Decimāldaļas reizina kā veselus skaitļus, komatu neievērojot, bet pēc tam reizinājumā ar komatu no labās puses atdala tik decimālciparu, cik to ir abos reizinātājos kopā.

1) $\begin{array}{r} 2{,}8 \\ \cdot 1{,}3 \\ \hline 84 \\ 28 \\ \hline 3{,}64; \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 3{,}15 \\ \cdot 1{,}4 \\ \hline 1260 \\ 315 \\ \hline 441{,}0; \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} 0{,}75 \\ \cdot 24 \\ \hline 300 \\ 150 \\ \hline 18{,}00; \end{array}$

4) $\begin{array}{r} 0{,}038 \\ \cdot 0{,}15 \\ \hline 190 \\ 38 \\ \hline 0{,}00570; \end{array}$ 5) $\begin{array}{r} 28{,}5 \\ \cdot\ 600 \\ \hline 17100{,}0; \end{array}$ 6) $\begin{array}{r} 470 \\ \cdot\ 0{,}35 \\ \hline 235 \\ 141 \\ \hline 1645{,}00. \end{array}$

DALĪŠANA AR VESELU SKAITLI

Decimāldaļu dala ar veselu skaitli līdzīgi kā veselus skaitļus: vispirms izdala veselos (un dalījumā liek komatu), pēc tam desmitdaļas, simtdaļas utt.

Ja kādā šķirā paliek atlikums, tad to sasmalcina nākamās — zemākas šķiras vienībās.

1) 84,06:2 = 42,03; 2) 43,68:6 = 7,28.

$$\begin{array}{l} 43{,}68:6 = 7{,}28 \\ \underline{\ 16\ } \\ \underline{\ \ 48} \\ \ \ \ \ 0 \end{array}$$

3) $\begin{array}{l} 72{,}42:12 = 6{,}035 \\ \underline{42} \\ \underline{\ 60} \\ \ \ 0 \end{array}$

1) 72 vienus dalīt ar 12 ir 6 vieni, dalījumā raksta 6 un aiz tā liek komatu;
2) 4 desmitdaļas dalīt ar 12 ir 0 desmitdaļu, dalījumā raksta 0, atlikumā 4 desmitdaļas;
3) pie četrām desmitdaļām pievieno (nones) 2 simtdaļas; 42 simtdaļas dalīt ar 12 ir 3 simtdaļas, dalījumā raksta 3, atlikumā 6 simtdaļas;
4) 6 simtdaļas izsaka tūkstošdaļās (pieraksta 0), 60 tūkstošdaļas, dalīt ar 12 ir 5 tūkstošdaļas, dalījumā raksta 5; tātad dalījums ir 6 035.

4) 2:25 = ? $\begin{array}{l} 2:25 = 0; \\ \underline{2} \end{array}$ $\begin{array}{l} 2:25 = 0{,}0; \\ \underline{20} \end{array}$ $\begin{array}{l} 2:25 = 0{,}08. \\ 200 \\ \underline{200} \\ \ \ \ 0 \end{array}$

Šajā piemērā parādīta pakāpeniska dalīšanas gaita.

5) Meklējot dalījumu decimāldaļā, dalīšanas process reizēm var nebeigties (ja dalīšanā viens un tas pats atlikums atkārtojas neierobežoti daudz reižu). Tādā gadījumā dalījumu var noapaļot ar nepieciešamo precizitāti, piemēram,

$$\begin{array}{l} 25:6 = 4{,}166\ldots \approx 4{,}2. \\ \underline{\ 10\ } \\ \underline{\ 40\ } \\ \underline{\ 40\ } \\ \ \ \ 4 \end{array}$$

DALĪŠANA AR DECIMĀLDAĻU

Lai izdalītu kādu skaitli ar decimāldaļu, izdevīgi izmantot šādu dalīšanas īpašību: ja dalāmo un dalītāju pareizina ar vienu un to pašu skaitli, tad dalījums nemainās. Tāpēc, piemēram, pareizinot darbības abus locekļus ar 10, dalījumu 2,76:1,12 var aizstāt ar dalījumu 27,6:12, kurā dalītājs 12 ir vesels skaitlis (jo ar veselu skaitli dalīt jau protam):

2,76:1,2 = 27,6:12 = 2,3

Skaitli ar decimāldaļu dala tā: dalītājā atmetot komatu, bet dalāmajā pārceļ komatu par tik cipariem uz labo pusi, cik decimālciparu dalītājā. Pēc tam dala kā ar veselu skaitli.

Dalīšanas pierakstu izdevīgi iekārtot tā, ka iegūto palīgdarbību (ar veselo dalītāju) paraksta zem dotās darbības, bet dalījumu raksta aiz dotās darbības:

1) $2{,}76:1{,}2 = 2{,}3$;

$$\begin{array}{l} \underline{27{,}6:12} \\ \underline{24} \\ 36 \\ \underline{36} \\ 0 \end{array}$$

2) $4{,}928:0{,}16 = 30{,}8$;

$$\begin{array}{l} \underline{492{,}8:16} \\ \underline{48} \\ 128 \\ \underline{128} \\ 0 \end{array}$$

3) $5{,}2:0{,}04 = 130$

$$\begin{array}{l} \underline{520:4} \\ \underline{12} \\ 0 \end{array}$$

4) $2:0{,}025 = 80$;

$$\begin{array}{l} \underline{2000:25} \\ \underline{200} \\ 0 \end{array}$$

5) Dažkārt dalījumā pietiek aprēķināt tikai dažus pirmos decimālciparus atkarībā no tā, cik tas nepieciešami dalījuma noteikšanai ar attiecīgu precizitāti.

$4{,}5:0{,}7 = 6{,}428\ldots \approx 6{,}43.$

$$\begin{array}{l} \underline{45:7} \\ 30 \\ \underline{20} \\ 60 \end{array}$$

REIZINĀJUMA UN DALĪJUMA APTUVENA NOVĒRTĒŠANA

Lai decimāldaļu reizināšanā vai dalīšanā neieviestos rupjas kļūdas, ieteicams rezultāta pareizību novērtēt aptuveni galvā. Šajā nolūkā jānoapaļo viens vai abi darbības locekļi (dalīšanā lietderīgi noapaļot dalītāju, reizināšanā — kaut vienu no reizinātājiem):

1) $2{,}87\cdot 4 \approx 3\cdot 4 = 12$;

2) $54{,}6:7{,}89 \approx 55:8 \approx 7$;

3) $13{,}5\cdot 0{,}94 \approx 13{,}5\cdot 1 = 13{,}5$ (precīzais reizinājums sagaidāms nedaudz mazāks nekā 13,5);

4) $7{,}29:0{,}893 \approx 7{,}29:1 = 7{,}29$ (precīzais dalījums sagaidāms nedaudz lielāks nekā 7,29);

5) $9{,}76\cdot 24{,}3 \approx 10\cdot 24{,}3 = 243$ (precīzais rezultāts sagaidāms nedaudz mazāks nekā 243);

6) $10{,}83:0{,}678 \approx 10{,}83:\frac{1}{2} \approx 20$ (precīzais dalījums sagaidāms nedaudz mazāks, jo $0{,}678 > \frac{1}{2}$);

7) $586{,}4:18{,}76 \approx 600:20 = 30.$

3.4. GALĪGAS UN BEZGALĪGAS DECIMĀLDAĻAS

JĒDZIENS PAR GALĪGĀM UN BEZGALĪGĀM DECIMĀLDAĻĀM

Tādas decimāldaļas, kurās decimālciparu skaits ir ierobežots jeb galīgs, sauc par galīgām decimāldaļām.

0,34; 52,00376; 0,412850067.

Decimāldaļas, kurās decimālciparu skaits ir neierobežots jeb bezgalīgs, sauc par bezgalīgām decimāldaļām. Tādas decimāldaļas var rasties, piemēram, divu skaitļu dalījumā:

$$
\begin{array}{l}
1 : 6 = 0{,}166\ldots \\
\underline{\ 1\ 0\ } \\
\quad 40 \\
\quad \underline{40} \\
\quad\ \ 4
\end{array}
$$

Lai norādītu, ka skaitlī decimālciparu skaits ir bezgalīgs, mēdz uzrakstīt dažus pirmos no tiem, bet aiz tiem raksta daudzpunkti.

Nav jādomā, ka bezgalīgas decimāldaļas ir «bezgalīgi» lielas. Tā, piemēram, iepriekšējais dalījums ir mazāks nekā 0,2 (un, protams, vienāds ar parasto daļu $\frac{1}{6}$). Atzīmēsim, ka bezgalīgas decimāldaļas var rasties ne tikai dalīšanas rezultātā, pie tam aiz komata var sekot jebkuri cipari jebkurā noteiktā vai patvaļīgā secībā.

PERIODISKAS DECIMĀLDAĻAS

Reizēm dalīšanas procesā dalīšanas atlikumi un līdz ar to dalījuma cipari sāk atkārtoties bezgalīgi daudzas reizes, piemēram,

$$
\begin{array}{l}
5 : 12 = 0{,}4166\ldots \\
\underline{50} \\
\ \ 20 \\
\ \ \underline{80} \\
\quad 80 \\
\quad \underline{80} \\
\quad \ldots \\
\quad \ldots
\end{array}
$$

Tādu decimāldaļu, kurā kāds decimālcipars vai ciparu grupa noteiktā secībā bezgalīgi daudzas reizes atkārtojas, sauc par periodisku decimāldaļu.

0,4444 . . . ;   5,2363636 . . . .

Ciparu vai ciparu grupu, kas atkārtojas, sauc par periodu, bet ciparu vai ciparu grupu starp komatu un periodu — par priekšperiodu. Pirmajā no iepriekš dotajām decimāldaļām periods ir cipars

4. Otrajā skaitlī periods ir ciparu grupa 36, bet priekšperiods ir cipars 2.

Periodiskās decimāldaļas pieņemts pierakstīt divējādi: a) raksta periodu vismaz divas reizes un tālāk liek daudzpunkti; b) raksta periodu tikai vienreiz, bet ieslēdz to apaļajās iekavās.

0,4444 ... raksta: 0,44 ... jeb 0,(4); lasa: nulle komats 4 periodā.

5,2363636 ... raksta: 5,23636 ... jeb 5,2(36); lasa: pieci komats 2 priekšperiodā 36 periodā.

Ja decimāldaļā periods sākas tūliņ aiz komata, tad tādu decimāldaļu sauc par tīru periodisku decimāldaļu, pretējā gadījumā — par jauktu periodisku decimāldaļu.

0,(4), tāpat arī 26,(70) ir tīras periodiskas decimāldaļas; 0,2(36), arī 5,41(5) ir jauktas periodiskas decimāldaļas.

3.5. PARASTĀS DAĻAS UN DECIMĀLDAĻAS VIENKOPUS

DECIMĀLDAĻAS IZTEIKŠANA PARASTAJĀ DAĻĀ

Lai galīgu decimāldaļu izteiktu parastajā daļā, decimāldaļa jāuzraksta ar saucēju un pēc tam, ja iespējams, jāsaīsina.

1) $0{,}3 = \frac{3}{10}$; 3) $2{,}5 = 2\frac{5}{10} = 2\frac{1}{2}$;

2) $0{,}75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$; 4) $14{,}375 = 14\frac{375}{1000} = 14\frac{3}{8}$.

Lai tīru periodisku decimāldaļu izteiktu parastajā daļā, skaitītājā jāraksta periods, bet saucējā — skaitlis, kas sastāv no tik cipariem 9, cik ciparu periodā.

1) $0{,}22\ldots = \frac{2}{9}$; 2) $5,(27) = 5\frac{27}{99} = 5\frac{3}{11}$.

Lai jauktu periodisku decimāldaļu izteiktu parastajā daļā, skaitītājā jāraksta starpība, ko dabū, no priekšperioda un perioda apzīmētā skaitļa atņemot priekšperiodu, bet saucējā jāraksta skaitlis ar tik cipariem 9, cik ciparu ir periodā, pierakstot tam labajā pusē tik nuļļu, cik ciparu ir priekšperiodā.

1) $0{,}23636\ldots = \frac{236-2}{990} = \frac{234}{990} = \frac{13}{55}$;

2) $5{,}00(3) = 5\frac{3-0}{900} = 5\frac{3}{900} = 5\frac{1}{300}$.

PARASTĀS DAĻAS IZTEIKŠANA DECIMĀLDAĻĀ

Lai izteiktu parasto daļu decimāldaļā, tad parastā daļa jāpaplašina (vai jāsaīsina), cenšoties dabūt saucējā skaitļus 10, 100, 1000 utt. Pēc tam parastā daļa jāpieraksta decimāldaļas veidā — ar komatu.

1) $\frac{4^{(2}}{5}=\frac{8}{10}=0{,}8$; 3) $\frac{7^{(8}}{125}=\frac{56}{1000}=0{,}056$;

2) $5\frac{3^{(25}}{4}=5\frac{75}{100}=5{,}75$; 4) $18\frac{14}{20}=18\frac{7}{10}=18{,}7$.

Ja nav viegli saskatīt, kā parastās daļas saucējā iegūt skaitļus 10, 100, 1000 utt., tad jāatceras, ka daļsvītra ir dalīšanas zīme: $\frac{3}{16}=3{:}16$, $\frac{7}{8}=7{:}8$ u. tml.

Lai izteiktu parasto daļu decimāldaļā, skaitītājs jādala ar saucēju, rakstot dalījumu decimāldaļas veidā.

1) $\frac{5}{8}=5:8=0{,}625$; 2) $5\frac{3}{16}=5{,}1875$.

$$\begin{array}{l}5:8=0{,}625\\ \underline{48}\\ \quad 20\\ \quad \underline{16}\\ \qquad 40\\ \qquad \underline{40}\\ \qquad\ 0\end{array}\qquad\begin{array}{l}3:16=0{,}1875\\ \underline{0}\\ 30\\ \underline{16}\\ 140\\ \underline{128}\\ \ \ 120\\ \ \ \underline{112}\\ \quad 80\\ \quad \underline{80}\\ \quad\ 0\end{array}$$

Vēlams iegaumēt sakarības starp biežāk sastopamajām parastajām daļām un decimāldaļām:

$\frac{1}{2}=0{,}5$; $\frac{1}{5}=0{,}2$; $\frac{1}{8}=0{,}125$;

$\frac{1}{4}=0{,}25$; $\frac{2}{5}=0{,}4$; $\frac{3}{8}=0{,}375$;

$\frac{3}{4}=0{,}75$; $\frac{3}{5}=0{,}6$; $\frac{5}{8}=0{,}625$;

$\frac{4}{5}=0{,}8$; $\frac{7}{8}=0{,}875$.

VAI KATRU PARASTO DAĻU VAR IZTEIKT GALĪGĀ DECIMĀLDAĻĀ

Decimāldaļu saucējos 10, 100, 1000 utt. ir tikai pirmreizinātāji 2 un 5, pie tam abi vienādā skaitā: $10=2\cdot5$; $100=2\cdot2\cdot5\cdot5$; $1000=2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot5$ utt. Tāpēc, ja saīsinātas parastās daļas saucējā bez 2 un 5 nav citu pirmreizinātāju, tad, daļu paplašinot, tās saucējā var iegūt skaitļus 10, 100, 1000 utt. un līdz ar to iespējams uzrakstīt šo daļu galīgas decimāldaļas veidā:

1) $\frac{13}{20}=\frac{13}{2\cdot2\cdot5}=\frac{13\cdot5}{2\cdot2\cdot5\cdot5}=\frac{65}{100}=0{,}65$;

2) $\frac{7}{125}=\frac{7}{5\cdot5\cdot5}=\frac{7\cdot2\cdot2\cdot2}{5\cdot5\cdot5\cdot2\cdot2\cdot2}=\frac{56}{1000}=0{,}056$.

Ja saīsinātas parastās daļas saucējā ir kaut viens no 2 un 5 atšķirīgs pirmreizinātājs, tad tādu daļu nevar pārveidot daļā ar saucēju 10, 100, 1000 utt. jeb galīgā decimāldaļā:

1) $\frac{4}{33}=\frac{4}{3\cdot11}=?$ 2) $\frac{5}{12}=\frac{5}{2\cdot2\cdot3}=?$

Tādos gadījumos parastā daļa, dalot skaitītāju ar saucēju, ir pārveidojama periodiskā decimāldaļā:

1) $\frac{4}{33} = 4:33 = 0{,}1212\ldots = 0{,}(12);$

$$\begin{array}{l} 40 \\ \underline{}70 \\ 40 \end{array}$$

2) $\frac{5}{12} = 5:12 = 0{,}4166\ldots = 0{,}41(6).$

$$\begin{array}{l} 50 \\ 20 \\ 80 \\ 80 \end{array}$$

PARASTO DAĻU IZTEIKŠANA TUVINĀTĀ DECIMĀLDAĻĀ

Ja, izsakot parasto daļu decimāldaļā (dalot skaitītāju ar saucēju), paredzama bezgalīga decimāldaļa, tad šādu decimāldaļu parasti noapaļo galīgā decimāldaļā ar jebkuru precizitāti.

$\frac{2}{11} = 2:11 = 0{,}18\ldots \approx 0{,}2;$

$\frac{2}{11} = 2:11 = 0{,}181\ldots \approx 0{,}18;$

$\frac{2}{11} = 2:11 = 0{,}1818\ldots \approx 0{,}182.$

Arī tādu parasto daļu, kas izsakāma galīgā decimāldaļā, reizēm mēdz aizstāt ar tuvinātu decimāldaļu (ja nav nepieciešama pilnīga precizitāte).

$\frac{7}{80} = 7:80 = 0{,}087\ldots \approx 0{,}09.$

$$\begin{array}{l} 700 \\ 600 \end{array}$$

Der iegaumēt dažas tuvinātas sakarības starp parastajām daļām un decimāldaļām:

$\frac{1}{3} \approx 0{,}33;\quad \frac{1}{6} \approx 0{,}17;\quad \frac{1}{7} \approx 0{,}14;\quad \frac{1}{9} \approx 0{,}11.$

DARBĪBAS AR PARASTĀM DAĻĀM UN DECIMĀLDAĻĀM VIENKOPUS

Ja izteiksmēs vienkopus ir parastās daļas un decimāldaļas, tad, darbību izdarot, parastās daļas jāaizstāj ar decimāldaļām vai otrādi — kā katrreiz izdevīgāk.

1) $\frac{1}{4} + 0{,}15 = 0{,}25 + 0{,}15 = 0{,}4$ vai

$$\frac{1}{4} + 0{,}15 = \frac{1}{4} + \frac{15}{100} = \frac{1^{(5}}{4} + \frac{3}{20} = \frac{5+3}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$$

Kā redzams, šajā gadījumā vieglāk aprēķināt summu, ja risina ar decimāldaļām.

2) $25\frac{3}{4} + 18{,}45 = 25{,}75 + 18{,}45 = 44{,}2.$

$$\begin{array}{r} 25{,}75 \\ +\ \underline{18{,}45} \\ 44{,}20 \end{array}$$

3) $2\frac{1}{3} + 0{,}2 = 2\frac{1^{(5}}{3} + \frac{1^{(3}}{5} = 2\frac{8}{15}.$

Šajā gadījumā darbība jāizdara ar parastajām daļām tāpēc, ka parastā daļa $\frac{1}{3}$ nav izsakāma galīgā decimāldaļā.

4) $1{,}875 : \frac{3}{4} = \underline{1{,}875 : 0{,}75} = 2{,}5$ vai

$$\begin{array}{l} 187{,}5 : 75 \\ \underline{150} \\ \ \ 375 \\ \ \ \underline{375} \\ \ \ \ \ 0 \end{array}$$

$$1{,}875 : \frac{3}{4} = 1\frac{7}{8} : \frac{3}{4} = \frac{15 \cdot 4}{8 \cdot 3} = \frac{5 \cdot 3 \cdot 4}{4 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}.$$

5) $\underline{0{,}5 : 0{,}12} = 4{,}166\ldots = 4\frac{16-1}{90} = 4\frac{15}{90} = 4\frac{1}{6}.$

$$\begin{array}{l} 50 : 12 \\ \underline{48} \\ \ \ 20 \\ \ \ \underline{12} \\ \ \ \ 80 \\ \ \ \ \underline{72} \\ \ \ \ \ 80 \end{array}$$

Te, kā redzams, dalījumā rodas bezgalīga decimāldaļa. Tāpēc, ja nepieciešams atrast precīzu dalījumu, darbību izdevīgāk veikt ar parastajām daļām.

$$0{,}5 : 0{,}12 = \frac{5}{10} : \frac{12}{100} = \frac{1}{2} : \frac{3}{25} = \frac{1 \cdot 25}{2 \cdot 3} = \frac{25}{6} = 4\frac{1}{6}.$$

6) Reizinājumus un dalījumus dažos gadījumos var aprēķināt bez darbības locekļu iepriekšējas pārveidošanas viena veida daļās:

$5{,}2 : \frac{1}{3} = 5{,}2 \cdot 3 = 15{,}6;$

$18{,}6 \cdot \frac{1}{2} = 18{,}6 : 2 = 9{,}3;$

$4{,}8 \cdot \frac{3}{4} = (4{,}8 : 4) \cdot 3 = 1{,}2 \cdot 3 = 3{,}6.$

7) Izteiksmes, kurās ir tikai reizināšanas un dalīšanas darbības, var vispirms uzrakstīt kā daļveida izteiksmes un saīsināt (decimāldaļas raksta parasto daļu veidā — ar saucējiem):

$$1{,}25\cdot 3\frac{1}{5}:0{,}8=\frac{125\cdot 16\cdot 10}{100\cdot 5\cdot 8}=\frac{25\cdot 5\cdot 8\cdot 2\cdot 5\cdot 2}{25\cdot 4\cdot 5\cdot 8}=5.$$

UZDEVUMI AR PARASTAJĀM DAĻĀM UN DECIMĀLDAĻĀM

1. uzdevums. $(1:12{,}5+0{,}168:0{,}15)\cdot(2{,}1-0{,}6):0{,}09=$
$=(0{,}08+1{,}12)\cdot 1{,}5:0{,}09=1{,}2\cdot 1{,}5:0{,}09=1{,}8:0{,}09=20.$

1) $1:12{,}5=0{,}08;$

$$\begin{array}{r} 10:125 \\ \underline{1000} \\ 0 \end{array}$$

2) $0{,}168:0{,}15=1{,}12.$

$$\begin{array}{r} 16{,}8:15 \\ \underline{18} \\ \underline{30} \\ 0 \end{array}$$

2. uzdevums. $\dfrac{6{,}6:\frac{2}{3}+28{,}8:13\frac{5}{7}}{1\frac{11}{16}:2{,}25}=\dfrac{9{,}9+2{,}1}{\frac{3}{4}}=\dfrac{12}{\frac{3}{4}}=16.$

1) $\dfrac{6{,}6\cdot 3}{2}=3{,}3\cdot 3=9{,}9;$

2) $\dfrac{28{,}8\cdot 7}{96}=\dfrac{288\cdot 7}{96\cdot 10}=\dfrac{96\cdot 3\cdot 7}{96\cdot 10}=2{,}1;$

3) $\dfrac{27\cdot 4}{16\cdot 9}=\dfrac{9\cdot 3\cdot 4}{4\cdot 4\cdot 9}=\dfrac{3}{4}.$

3. uzdevums. 3,5 l benzīna masa ir 2,73 kg. Cik litru benzīna ir kannā, ja tajā ir 24 kg benzīna?

Atrisinājums.

1) Kāda ir 1 litra benzīna masa?

$2{,}73:3{,}5=0{,}78$ (kg)

$$\begin{array}{r} 27{,}3:35 \\ \underline{245} \\ \underline{280} \\ 0 \end{array}$$

2) Cik litru benzīna ir kannā?

$$\begin{array}{l} 24{:}0{,}78 = 30{,}76\ldots \approx 30{,}8\ (l) \\ \underline{2400{:}78} \\ \underline{234} \\ \ \ 600 \\ \ \ \underline{546} \\ \ \ \ 540 \end{array}$$

Atbilde. Kannā ir 30,8 l benzīna.

4. uzdevums. Motorlaivas ātrums stāvošā ūdenī ir 12 km/h. Cik ilgā laikā tā nobrauks 38 km lielu attālumu upē pret straumi, ja straumes ātrums ir 2,5 km/h?

Atrisinājums.

1) $12 - 2{,}5 = 9{,}5$ (km/h) — ātrums pret straumi;

2) $\underline{38{:}9{,}5} = 4$ (h) — braukšanas laiks.
$380{:}95$

5. uzdevums. No bāzes izgāja grupa tūristu ar ātrumu 4,5 km/h. Pēc 4 h 20 min viņiem pakaļ izbrauca velosipēdists ar ātrumu 14 km/h. Pēc cik ilga laika viņš panāca tūristus?

Atrisinājums.

1) 4 h 20 min $= 4\frac{1}{3}$ h.

$4{,}5 \cdot 4\frac{1}{3} = \frac{9 \cdot 13}{2 \cdot 3} = 19{,}5$ (km) — tūristi bija priekšā velosipēdistam;

2) $14 - 4{,}5 = 9{,}5$ (km/h) — par tik kilometriem stundā velosipēdists tuvojās tūristiem;

3) $\underline{19{,}5{:}9{,}5} = 2{,}052\ldots \approx 2{,}05$ (h),

$$\begin{array}{l} \underline{195{:}95} \\ \underline{190} \\ \ \ 500 \\ \ \ \underline{475} \\ \ \ \ 250 \end{array}$$

1 h = 60 min,
0,05 h $= 60 \cdot 0{,}05$ min = 3 min,
2,05 h = 2 h 3 min — pēc tik ilga laika panāca tūristus.

6. uzdevums. Firma pārskaitīja skolai Ls 520 ar norādījumu, ka par $\frac{5}{8}$ šīs summas jāiegādājas mikrokalkulatori.

Cik mikrokalkulatoru skola var nopirkt, ja mikrokalkulatora cena ir Ls 4,25?

Atrisinājums.

$\frac{520 \cdot 5}{8}$ ... tik latu var izdot par mikrokalkulatoriem;

$\frac{520 \cdot 5}{8 \cdot 4{,}25}$ ... tik mikrokalkulatoru var nopirkt.

$$\frac{520 \cdot 5}{8 \cdot 4{,}25} = \frac{520 \cdot 5 \cdot 100}{8 \cdot 425} = \frac{1300}{17} = 76 \text{ (mikrokalk.)}.$$

Atbilde. Var nopirkt 76 mikrokalkulatorus.

3.6. PROCENTI

PROCENTA JĒDZIENS

Skaitļa simto daļu sauc par šī skaitļa procentu.

Saskaņā ar procenta jēdzienu izteiciens «uzarti 75 % lauka» nozīmē, ka uzartas $\frac{75}{100}$ lauka; izteiciens «skolā ieradušies 100 % skolēnu»— skolā ieradušies $\frac{100}{100}$ skolēnu jeb visi skolēni; izteiciens «izpildīti 150 % darba plāna» jāsaprot, ka izpildīts ne tikai viss plāns (100 %), bet vēl arī 50 % jeb $\frac{50}{100}$ plāna; izteiciens «izpildīti 200 % paredzētās normas» rāda, ka veiktas 2 tādas normas.

Ja teikts, ka piena izslaukums jūnijā ir par 25 % lielāks nekā maijā, tad tas nozīmē, ka jūnijā izslaukts tikpat, cik maijā un vēl 25 % jeb $0{,}25 = \frac{1}{4}$ maija izslaukuma. Ja magnetofona cena pazemināta par 35 %, tad tagad tas maksā tikai 65 % jeb 0,65 agrākās cenas.

PROCENTU IZTEIKŠANA DAĻĀS UN OTRĀDI

Cik procentu, tik simtdaļu!	Cik simtdaļu, tik procentu!
$1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01;$	$0{,}01 = \frac{1}{100} = 1\%;$
$40\% = \frac{40}{100} = 0{,}40;$	$0{,}6 = 0{,}60 = \frac{60}{100} = 60\%;$
$100\% = \frac{100}{100} = 1;$	$2 = \frac{200}{100} = 200\%;$
$135\% = \frac{135}{100} = 1{,}35;$	$1{,}5 = \frac{150}{100} = 150\%;$
$2{,}5\% = \frac{2{,}5}{100} = 0{,}025.$	$0{,}06 = \frac{0{,}6}{100} = 0{,}6\%.$

Dažas parastās daļas viegli paplašināt simtdaļās un tad izteikt procentos:

$$\frac{1^{(50}}{2} = \frac{50}{100} = 50\%;$$

$$\frac{3^{(5}}{20} = \frac{15}{100} = 15\%; \quad \frac{5^{(125}}{8} = \frac{625}{1000} = 62{,}5\%.$$

Vēlams iegaumēt dažas procentu un daļu sakarības:

$\frac{1}{2} = 0,5 = 50\,\%$; $\frac{1}{4} = 0,25 = 25\,\%$; $\frac{1}{10} = 0,1 = 10\,\%$;

$\frac{1}{3} \approx 0,33 = 33\,\%$; $\frac{1}{5} = 0,2 = 20\,\%$; $\frac{1}{6} \approx 0,17 = 17\,\%$.

No šīm sakarībām viegli aprēķināt arī dažas citas sakarības, piemēram, $\frac{3}{4} = 25\,\% \cdot 3 = 75\,\%$; $\frac{4}{5} = 20\,\% \cdot 4 = 80\,\%$; $67\,\% \approx \frac{2}{3}$ u. tml.

SKAITLIS, TĀ PROCENTI UN PROCENTU VĒRTĪBA

Pieņemsim, ka klasē pavisam ir 35 skolēni, no kuriem teicamnieki ir 7 skolēni jeb 20 % visa skolēnu skaita.

Ja jebkuri divi no šiem trim lielumiem ir zināmi, tad iespējams aprēķināt trešo. Tāpēc rodas trejādi procentu uzdevumu veidi:

1) aprēķināt skaitļa procentu vērtību (7 skolēni);

2) aprēķināt visu skaitli (35 skolēni);

3) izteikt vienu skaitli otra skaitļa procentos jeb aprēķināt divu skaitļu procentuālo attiecību (20 %).

Katru no minētajiem procentu uzdevumu veidiem var atrisināt ar dažādiem paņēmieniem:

a) vispirms atrodot visa skaitļa 1 % vērtību un pēc tam — prasīto;

b) aizstājot procentus ar atbilstošu daļu un tālāk risinot kā atbilstošos daļu uzdevumus (sk. 2.8. un 2.10.);

c) sastādot proporciju.

Piemēros parādīti minētie atrisināšanas paņēmieni visos procentu uzdevumu veidos.

PROCENTU UZDEVUMU RISINĀŠANA, ATRODOT VISPIRMS 1 % VĒRTĪBU

Skolā parasti ar šo paņēmienu iepazīstas vispirms.

1) Kartupeļu lauka platība 80 ha. Skolēni novāca 45 % no šīs platības. Cik hektāru lauka novāca skolēni?

$80:100 = 0,8$ (ha) — 1 % lauka platības;

$0,8 \cdot 45 = 36$ (ha) — novāca skolēni.

2) $5\frac{1}{3}\,\%$ no $18,75 = 18\frac{3}{4}:100 \cdot 5\frac{1}{3} = \frac{75 \cdot 16}{4 \cdot 100 \cdot 3} = 1$.

3) Virpotājs stundā apstrādā 45 detaļas, tā izpildot 15 % dienas normas. Cik detaļu ir dienas norma?

$45:15 = 3$ (tik detaļu ir 1 % normas);

$3 \cdot 100 = 300$ (tik detaļu ir dienas norma).

4) Cik liels viss skaitlis, ja 2,5 % tā ir $6\frac{2}{3}$?

$$6\frac{2}{3}:2,5\cdot 100 = \frac{20\cdot 10\cdot 100}{3\cdot 25} = 266\frac{2}{3}.$$

5) Skolā no 300 skolēniem 24 ir teicamnieki. Cik procentu no visiem skolēniem ir teicamnieki?

300:100 = 3 (tik skolēnu atbilst 1 %);

24:3 = 8 (%).

PROCENTU UZDEVUMU RISINĀŠANA, AIZSTĀJOT PROCENTUS AR DAĻU

Ja procentiem atbilstošās daļas skaitītājs un saucējs ir nelieli skaitļi, tad jo bieži attiecīgos uzdevumus var risināt galvā.

1) 75 % no 480 = 360, jo 75 % $= \frac{3}{4}$; $\frac{3}{4}$ no

480 = 480:4·3 = 120·3 = 360.

2) Videomagnetofona cena ir pazemināta par 25 %, un tāpēc tā jaunā cena ir 120 lati. Aprēķināt iepriekšējo cenu.

100 % – 25 % = 75 % (jaunajai cenai atbilstošie procenti);

75 % $= \frac{3}{4}$; 120:3 · 4 = 40 · 4 = 160 (Ls).

3) No 25 kg vīnogu sūtījuma 1 kg vīnogu izrādījās bojātas. Cik procentu vīnogu bija bojātas?

1 pret 25 $= 1:25 = \frac{1}{25} = \frac{4}{100} = 4$ %.

Grūtākos gadījumos risina rakstos, atceroties, ka skaitļa daļas vērtību var aprēķināt ar reizināšanu, bet visu skaitli — ar dalīšanu (sk. 2.10.).

A. Lai aprēķinātu skaitļa procentu vērtību, tad šis skaitlis jāreizina ar procentiem atbilstošo daļu.

1) Aprēķināt 18 % no 15.

18 % = 0,18; 15·0,18 = 2,7.

2) Aprēķināt 1,5 % no 68 kg.

1,5 % = 0,015; 68·0,015 = 1,02 (kg).

B. Lai aprēķinātu visu skaitli, ja doti tā procenti un procentu vērtība, tad procentu vērtība jādala ar procentiem atbilstošo daļu.

1) Ūdenī izšķīdināja 1,2 kg sāls un tādējādi ieguva 7,5 % sāls šķīdumu. Aprēķināt visa šķīduma masu.

7,5 % = 0,075;

1,2:0,075 = 16 (kg).

```
1200:75
 75
 450
 450
   0
```

2) Aprēķināt visu skaitli, ja tā 135 % ir vienādi ar 270.

135 % = 1,35; 270:1,35 = 200.

C. Lai izteiktu vienu skaitli kā otra skaitļa procentus, tad pirmais skaitlis jādala ar otro un dabūtā daļa jāizsaka procentos (dalījumu izdevīgi aprēķināt decimāldaļā, jo to vieglāk izteikt procentos).

1) Cik procentu ir skaitlis 2,3 pret skaitli 36,4?

2,3 pret 36,4 = 2,3:36,4 = 0,0631 . . . ≈ 6,3 %.

2) Audēja plānoto 30 m vietā noauda 32 m auduma. Cik procentu plāna viņa izpildīja?

32:30 = 1,066 . . . ≈ 107 %.

PROCENTU UZDEVUMU RISINĀŠANA, SASTĀDOT PROPORCIJU

Vispirms, apzīmējot meklējamo lielumu ar x, pārskatāmi pieraksta uzdevuma nosacījumus (ievērojot, ka visam skaitlim atbilst 100 %). Pēc tam, dalot procentu vērtību ar procentu skaitu, divējādi izsaka 1 % vērtību, no dabūtajiem dalījumiem (attiecībām) izveido proporciju un aprēķina proporcijas nezināmo locekli.

1) Aprēķināt 35 % no 240 kg.

100 % atbilst 240 kg,
35 % atbilst x kg.

1 % vērtība ir $\frac{240}{100}$ jeb $\frac{x}{35}$;

$$\frac{240}{100} = \frac{x}{35};\quad x = \frac{240\cdot 35}{100} = 84 \text{ (kg)}.$$

2) Cik liepu iestādīja, ja uzauga 57 liepas jeb 95 % iestādīto liepu?

95 % . . . 57 liepas,
100 % . . . x liepas.

1 % vērtība ir $\frac{57}{95}$ jeb $\frac{x}{100}$;

$$\frac{57}{95} = \frac{x}{100};\quad x = \frac{57\cdot 100}{95} = 60 \text{ (liepas)}.$$

3) 300 gramos sāls šķīduma ir 18 g sāls. Cik procentu liela ir sāls koncentrācija šķīdumā?

300 g . . . 100 %,
18 g . . . x%.

$$\frac{300}{100} = \frac{18}{x};\quad x = \frac{100\cdot 18}{300} = 6 \text{ (\%)}.$$

DIVU SKAITĻU PROCENTUĀLĀ SALĪDZINĀŠANA

Salīdzinot, par cik procentiem viens skaitlis lielāks vai mazāks nekā otrs, abu skaitļu starpība jāizsaka procentos pret to skaitli, ar kuru salīdzina.

Uzdevums. Viens skaitlis ir 25, otrs —20. Par cik procentiem pirmais skaitlis lielāks nekā otrs? Par cik procentiem otrais skaitlis mazāks nekā pirmais?

Atrisinājums.

1) Par cik pirmais skaitlis lielāks nekā otrs vai par cik otrais skaitlis mazāks nekā pirmais?

$25-20=5.$

2) Par cik procentiem pirmais skaitlis lielāks nekā otrais?

5 pret $20=5:20=0{,}25=25\ \%$.

3) Par cik procentiem otrais skaitlis mazāks nekā pirmais?

5 pret $25=5:25=0{,}2=20\ \%$.

Atbilde. Pirmais skaitlis ir par 25 % lielāks nekā otrais, bet otrais — par 20 % mazāks nekā pirmais.

4. RACIONĀLIE SKAITĻI

4.1. RACIONĀLA SKAITĻA JĒDZIENS

POZITĪVI SKAITĻI, NEGATĪVI SKAITĻI UN NULLE

Ar skaitli 0 un ar jebkuriem veseliem skaitļiem un daļskaitļiem, kas lielāki nekā nulle, bez ierobežojuma var izdarīt saskaitīšanu, reizināšanu un dalīšanu (izņemot dalīšanu ar nulli), piemēram:

$$5{,}6+\frac{1}{4}=5{,}85;\ 0{,}3\cdot 4=1{,}2;\ 2:3=\frac{2}{3};\ 0:1\frac{1}{2}+0;\ 0+1=1$$

u. tml. Taču atņemšanas darbība ar šiem skaitļiem ne vienmēr iespējama, piemēram, $3-5$; $0-1$.

Lai arī atņemšana būtu vienmēr iespējama, ievieš jaunus skaitļus, kas mazāki nekā nulle. Tā, piemēram, skaitli, kas par 1 mazāks nekā nulle, nosauc «mīnus viens» un raksta -1. Tāpat skaitli, kas par 7 mazāks nekā nulle, nosauc «mīnus septiņi» un raksta -7. Līdzīgi ievieš skaitļus -24; $-\frac{5}{6}$; $-8{,}3$ u. c.

Skaitļus, kas mazāki nekā nulle, sauc par negatīviem skaitļiem. Negatīvu skaitļu piemēri: -1; -7; $-35{,}6$; $-4\frac{1}{2}$.

Lai skaitļus, kas lielāki nekā nulle, atšķirtu no negatīvajiem skaitļiem, tad tos sauc par pozitīviem skaitļiem un to priekšā mēdz rakstīt plusa zīmi, piemēram, 4 jeb $+4$; lasa: «četri» jeb «plus četri». Līdzīgi raksta un lasa $5\frac{1}{3}$ jeb $+5\frac{1}{3}$, 0,8 jeb $+0{,}8$ u. tml.

Skaitlis nulle nav ne pozitīvs, ne negatīvs. Tāpēc tā priekšā neraksta ne plusa, ne mīnusa zīmi.

Zīmes «+» un «—» skaitļa priekšā sauc par skaitļa zīmēm. Lai tās atšķirtu no saskaitīšanas un atņemšanas darbību zīmēm, tad skaitli ar savu zīmi mēdz ieslēgt iekavās, piemēram,

$-9 = (-9); \; 2\frac{1}{2} = +2\frac{1}{2} = (+2\frac{1}{2}).$

VAI SKAITLIS a IR POZITĪVS SKAITLIS?

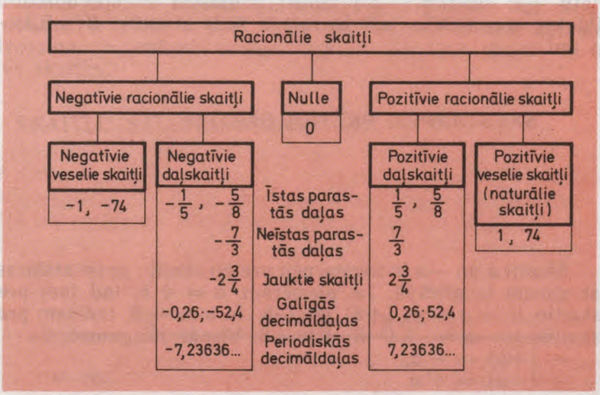
Ja skaitlis rakstīts ar cipariem, tad skaitļa zīme norāda, ka skaitlis ir pozitīvs vai negatīvs. Ja, turpretim, skaitlis apzīmēts ar burtu, tad tas var būt gan pozitīvs, gan negatīvs, gan nulle. Piemēram, var būt, ka $a = +3$; $a = -2$; $a = 0$.

Ja grib norādīt, ka ar burtu a apzīmēts pozitīvs skaitlis, tad jāraksta $a > 0$; ja ar burtu a apzīmēts negatīvs skaitlis, tad jāraksta $a < 0$. Pieraksts $a \geqslant 0$ izsaka, ka ar burtu a ir apzīmēts pozitīvs skaitlis vai nulle, saka arī, ka a ir nenegatīvs skaitlis. Pieraksts $a \leqslant 0$ izsaka, ka a ir negatīvs skaitlis vai nulle, saka arī, ka a ir nepozitīvs skaitlis.

RACIONĀLIE SKAITĻI

Pozitīvos un negatīvos veselos skaitļus, pozitīvos un negatīvos daļskaitļus, kā arī skaitli nulle sauc vienā vārdā par racionāliem skaitļiem. Racionālu skaitļu piemēri: 5; -6; 0; $7{,}25$; $-4\frac{1}{3}$; $\frac{5}{6}$; $-0{,}4$.

Racionālu skaitļu iedalījums redzams shēmā:



Racionālos skaitļus var definēt arī citādi.

Par racionāliem skaitļiem sauc skaitļus, kurus var izteikt kā daļu $\frac{m}{n}$, kur skaitītājs m ir vesels skaitlis, bet saucējs n ir naturāls skaitlis.

Tā, piemēram, shēmā minētos skaitļus var izteikt šādi:

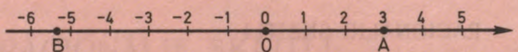
$$-\frac{5}{8} = \frac{-5}{8};\ 74 = \frac{74}{1};\ 0 = \frac{0}{1};$$

$$-0{,}26 = \frac{-26}{100};\ 0{,}44\ldots = \frac{4}{9};\ -2\frac{3}{4} = \frac{-11}{4} \text{ u. tml.}$$

Bezgalīgas neperiodiskas decimāldaļas nav racionāli skaitļi, piemēram, 0,21734267812....

RACIONĀLI SKAITĻI UN KOORDINĀTU TAISNE

Visus racionālos skaitļus uzskatāmības labad var saistīt ar punktiem uz koordinātu taisnes (11. zīm.). Uz tās ir norādīts punkts, kuram atbilst skaitlis 0 (koordinātu sākumpunkts), norādīts arī



11. zīm.

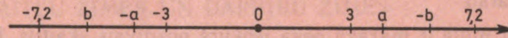
virziens (ar bultiņu, parasti — pa labi) un noteikts vienības nogrieznis (attālums starp punktiem, kuri atbilst skaitļiem 0 un 1). Katram racionālam skaitlim uz koordinātu taisnes atbilst viens noteikts punkts. Punktam atbilstošo skaitli sauc arī par punkta koordinātu. Tā, piemēram, skaitlim $+3$ atbilst punkts A ar koordinātu $+3$; skaitlim $-5{,}3$ atbilst punkts B ar koordinātu $-5{,}3$. Punktu koordinātas īsāk pieraksta šādi: $A(+3)$; $B(-5{,}3)$, $O(0)$ u. tml.

SAVSTARPĒJI PRETĒJI SKAITĻI

Divus tādus skaitļus, kas viens no otra atšķiras tikai ar zīmēm, sauc par savstarpēji pretējiem skaitļiem. Tādi skaitļi ir, piemēram, $+4$ un -4; $+1\frac{2}{3}$ un $-1\frac{2}{3}$; 0,75 un $-0{,}75$. Skaitļa 0 pretējais skaitlis ir pats skaitlis 0.

Skaitļi a un $-a$ ir savstarpēji pretēji skaitļi, jo tie atšķiras tikai ar zīmēm to priekšā. Ja, piemēram, $a = +8$, tad tam pretējais skaitlis ir $-a = -(+8)$ jeb -8. Ja $a = -8$, tad tam pretējais skaitlis ir $-a = -(-8)$ jeb $+8$. Vispār jāiegaumē, ka

$$-(+a) = -a,$$
$$-(-a) = +a.$$



12. zīm.

Savstarpēji pretējiem skaitļiem uz taisnes atbilst punkti, kas ir vienādā attālumā no koordinātu sākumpunkta, bet katrs tam savā pusē (12. zīm.).

SKAITĻA MODULIS

Skaitlim atbilstošā punkta attālumu no koordinātu sākumpunkta sauc par šī skaitļa moduli.

Skaitļa $+4$ modulis ir $+4$ jeb 4; to pieraksta šādi: $|+4| = 4$. Arī skaitļa -4 modulis ir 4, t. i., $|-4| = 4$.

Vēl daži piemēri: $|-5{,}84| = 5{,}84$; $|7{,}1| = 7{,}1$.

Kā redzams, pozitīva skaitļa modulis ir pats pozitīvais skaitlis, negatīva skaitļa modulis ir tam pretējais pozitīvais skaitlis. To īsāk var pierakstīt tā:

ja $a > 0$, tad $|a| = a$;
ja $a < 0$, tad $|a| = -a$.

Acīmredzot skaitļa nulle modulis ir nulle, t.i., $|0| = 0$. Divu savstarpēji pretēju skaitļu moduļi ir vienādi: $\left|-4\frac{1}{3}\right| = \left|+4\frac{1}{3}\right| = 4\frac{1}{3}$.

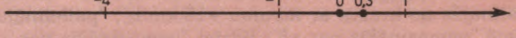
Vispārīgajā gadījumā

$|a| = |-a|$.

Pieraksts $|a| > 0$ norāda, ka skaitlis a ir pozitīvs vai negatīvs skaitlis, t. i., ka $a \neq 0$. Pieraksts $|a| < 0$ izsaka aplamu apgalvojumu, jo jebkura skaitļa modulis (izņemot skaitli 0) ir pozitīvs skaitlis.

SKAITĻU SALĪDZINĀŠANA

No diviem skaitļiem lielāks ir tas skaitlis, kuram atbilstošais punkts uz koordinātu taisnes atrodas vairāk pa labi, bet mazāks tas, kuram atbilstošais punkts atrodas vairāk pa kreisi (13. zīm.).



13. zīm.

$0{,}3 < 1$; $-4 < -1$; $0{,}3 > -4$; $1 > 0$; $-1 < 0$.

Tātad

a) nulle ir mazāka nekā jebkurš pozitīvais skaitlis, bet lielāka nekā jebkurš negatīvais skaitlis, piemēram,

$-7{,}3 < 0 < +5$;

b) jebkurš negatīvais skaitlis ir mazāks nekā jebkurš pozitīvais skaitlis, piemēram,

$-96 < +7$;

c) no diviem negatīviem skaitļiem lielāks ir tas, kuram mazāks modulis, piemēram,

$|-2| < |-13|$, bet $-2 > -13$.

NEGATĪVU SKAITĻU REĀLĀ JĒGA

Dažos piemēros parādīsim, kāda jēga un nozīme ir skaitļiem, kas mazāki nekā nulle,— t. i., negatīvajiem skaitļiem.

Ieviešot negatīvos skaitļus, iespējams no mazāka skaitļa atņemt lielāku skaitli (pozitīvu skaitļu kopā šāda darbība nebija iespējama), piemēram, $0-1=-1$; $0-7=-7$; $3-5=3-3-2=$ $=0-2=-2$ u. tml.

Ar negatīviem skaitļiem var izteikt temperatūru, kas mazāka (zemāka) nekā 0°C, nepievienojot piezīmi «zem nulles», «aukstums» u. tml., piemēram, −1°C, −8°C, −20°C.

Vistu skaita pieaugums fermā var būt +75 (jeb, kā to parasti saka, 75). Taču vistu skaita pieaugums var būt arī tikai +14, +1 un 0 (pēdējā gadījumā vistu skaits nav mainījies). Bet pieaugums var būt vēl mazāks nekā 0, piemēram, vistu skaita pieaugums fermā var būt −18 (tas nozīmē, ka vistu skaits ir samazinājies par 18).

Vispār stāvokļos vai procesos, kam piemīt divi savstarpēji pretēji virzieni, negatīvs skaitlis attiecībā pret izraudzīto virzienu izsaka pretējo stāvokli vai izmaiņu pretējā virzienā: staigājot pa parku, "atradu – 5 santīmus", tas nozīmē "pazaudēju 5 santīmus"; skolēns ieradās skolā "–10 minūtes pēc zvana"nozīmē "10 minūtes pirms zvana"; kuģis "tuvojās krastam ar ātrumu "–18 km/h nozīmē "attālinājās no krasta ar ātrumu +18 km/h"; "palielinājās par – 5" nozīmē "pamazinājās par +5"; līdzīgi "pamazinājās par – 2" nozīmē "palielinājās par 2"u. tml.

4.2. SASKAITĪŠANA UN ATŅEMŠANA

SKAITĻU ZĪMES UN DARBĪBU ZĪMES

Saskaitot vai atņemot racionālos skaitļus, ieteicams darbību locekļus kopā ar to zīmēm ieslēgt iekavās, lai atšķirtu darbību zīmes no skaitļu zīmēm. Turklāt šīs zīmes atšķirīgi arī jālasa.

$(+8)+(-3)$ lasa: pie plus 8 pieskaita mīnus 3;
$(-4)-(+2)$ lasa: no mīnus 4 atņem plus 2.

SASKAITĪŠANAS JĒDZIENS

Lai izprastu, kā aprēķināt divu racionālu skaitļu summu, aplūkosim pozitīvos un negatīvos skaitļus reālā uzdevumā.

Ostā kuģi dažudien iebrauc — tad kuģu skaita pieaugums izsakāms ar pozitīvu skaitli; dažudien kuģi no ostas izbrauc — tad kuģu skaita pieaugums izsakāms ar negatīvu skaitli; dažudien kuģi ne iebrauc, ne izbrauc — tad kuģu skaita pieaugums ir nulle. Ja kuģu skaita pieaugums ostā trešdien ir t, bet ceturtdien c, tad kuģu skaita kopējo pieaugumu var aprēķināt, abu dienu pieaugumus saskaitot: šajās divās dienās kuģu skaita kopējais pieaugums ir $t+c$.

Aplūkosim dažādus gadījumus, liekot burtu c un t vietā gan pozitīvus, gan negatīvus skaitļus, gan arī nulli, un noteiksim kuģu skaita kopējo pieaugumu divās dienās.

t	+7	−7	+7	−7	0	−3
c	+2	−2	−2	+2	+2	0
t+c	+9	−9	+5	−5	+2	−3

Pirmie divi saskaitīšanas gadījumi norāda, kāda ir summa, ja abi saskaitāmie ir ar vienādām zīmēm, bet nākamie divi,— ja saskaitāmie ir ar dažādām zīmēm. Pēdējos divos gadījumos var vērot, kāda ir summa, ja viens no abiem saskaitāmajiem ir nulle.

VIENĀDZĪMJU SKAITĻU SASKAITĪŠANA

Lai saskaitītu divus vienādzīmju skaitļus, jāsaskaita to moduļi, pie tam summai paliek saskaitāmo zīme.

Piemēros uzskatāmi parādīts, kā aprēķina summas moduli (ar cipariem zem piemēra) un kuru saskaitāmo zīmes nosaka summas zīmi (bultiņas virs piemēra).

Vēl daži piemēri:

$(+7) + (+2) = +9$ $\qquad$ $(-3) + (-5) = -8$

$7 + 2 = 9$ $\qquad$ $3 + 5 = 8$

1) $(-8{,}2) + (-5{,}1) = -13{,}3$; $\qquad$ 2) $(+\frac{1}{5}) + (+1\frac{4}{5}) = +2$.

$(-8) + (+2) = -6$ $\qquad$ $(+9) + (-1) = +8$

$8 - 2 = 6$ $\qquad$ $9 - 1 = 8$

$(+4) + (-7) = -3$ $\qquad$ $(-2) + (+9) = +7$

$7 - 4 = 3$ $\qquad$ $9 - 2 = 7$

DAŽĀDZĪMJU SKAITĻU SASKAITĪŠANA

Lai saskaitītu divus dažādzīmju skaitļus, no lielākā moduļa jāatņem mazākais, pie tam summai ir tāda zīme, kāda ir saskaitāmajam ar lielāko moduli.

Vēl daži piemēri:

1) $(-5{,}3) + (+1{,}2) = -4{,}1$; $\qquad$ 3) $(+1\frac{1}{3}) + (-2) = -\frac{2}{3}$;

2) $(+8) + (-0{,}1) = +7{,}9$ $\qquad$ 4) $(-\frac{1}{8}) + (+\frac{1}{2}) = +\frac{3}{8}$.

P i e z ī m e. Saskaitot divus skaitļus, vispirms ieteicams noteikt un jau pierakstīt summas zīmi un tikai pēc tam saskaitīt vai atņemt skaitļu moduļus.

1) $(+7{,}6) + (-8{,}3) = -\ldots$; $\qquad$ 3) $(+9) + (-5{,}45) = +\ldots$;

2) $(-2{,}3) + (-2{,}4) = -\ldots$; $\qquad$ 4) $0 + (-3{,}6) = -\ldots$

NULLE SASKAITĪŠANĀ

Ja viens no abiem saskaitāmajiem ir nulle, tad summa ir vienāda ar otru saskaitāmo, piemēram

$(-3) + 0 = -3; \quad 0 + (+2) = +2.$

Divu pretēju skaitļu summa ir nulle, piemēram,

$(+4) + (-4) = 0; \quad (-3{,}6) + (+3{,}6) = 0.$

SASKAITĪŠANAS UN ATŅEMŠANAS ĪPAŠĪBU IZMANTOŠANA

Tā kā arī racionālu skaitļu saskaitīšanai piemīt komutatīvā (pārvietojamības) un asociatīvā (savienojamības) īpašība, tad vairāku skaitļu summās saskaitāmos drīkst izdevīgi pārvietot un savienot: vispirms saskaita visus pozitīvos, tad negatīvos skaitļus un beidzot — abas dabūtās summas.

$(+1) + (-4) + (+2) + (+7) + (-8) =$
$= ((+1) + (+2) + (+7)) + ((-4) + (-8)) =$
$= (+10) + (-12) = -2.$

Šādu saskaitāmo pārvietošanu un savienošanu grupās, protams, var izdarīt arī tikai domās:

$(-4) + (-1) + (+2) + (-0{,}5) + (+1{,}5) = (-5{,}5) +$
$+ (+3{,}5) = -2.$

ATŅEMŠANAS JĒDZIENS UN KĀRTULA

Kā zināms, no viena skaitļa atņemt otru nozīmē atrast tādu skaitli, kuru, saskaitot ar otro skaitli, iegūst pirmo skaitli. Tādu skaitli jeb abu skaitļu starpību viegli var aprēķināt, pie mazināmā pieskaitot mazinātājam pretējo skaitli, piemēram,

$(+8) - (-3) = (+8) + (+3) = +11.$

Pārbaude. $(+11) + (-3) = +8.$

Vēl piemēri:

1) $(-8) - (+3) = (-8) + (-3) = -11;$
2) $(+8) - (+3) = (+8) + (-3) = +5;$
3) $(-8) - (-3) = (-8) + (+3) = -5.$

Skaitļa atņemšanu var aizstāt ar tam pretējā skaitļa pieskaitīšanu:

$a - b = a + (-b).$

$(+3) + (-2) - (-7) + (+9) - (+1) = (+3) + (-2) +$
$(+7) + (+9) + (-1) = (+19 + (-3) = +16.$

Šajā izteiksmē vispirms atņemšanas darbība aizstāta ar saskaitīšanu. Pēc tam aprēķināta pozitīvo saskaitāmo summa un negatīvo saskaitāmo summa, un beidzot saskaitītas abas šīs summas $(+19)$ un (-3).

ALGEBRISKĀ SUMMA

Aizstājot atņemšanu ar pretējā skaitļa pieskaitīšanu, jebkuru izteiksmi, kurā ir tikai saskaitīšana un atņemšana, var pārveidot summā, kurā saskaitāmie var būt gan pozitīvi, gan negatīvi skaitļi.

Pārveidosim algebriskā summā, piemēram, šādu izteiksmi:

$$(-5{,}6)+(-2)-(+3{,}4)-(-0{,}6)+(+1)=(-5{,}6)+(-2)+$$
$$+(-3{,}4)+(+0{,}6)+(+1)$$

Algebriskās summas mēdz pierakstīt arī vienkāršāk: neraksta saskaitīšanas darbības zīmes, bet raksta tikai saskaitāmos citu aiz cita ar to zīmēm, neieslēdzot tos iekavās. Iepriekšējo summu tad var pierakstīt algebriskās summas veidā šādi:

$$-5{,}6-2-3{,}4+0{,}6+1.$$

Tas nozīmē pie $-5{,}6$ pieskaitīt -2, pieskaitīt $-3{,}4$, pieskaitīt $+0{,}6$, pieskaitīt $+1$.

ALGEBRISKĀS SUMMAS APRĒĶINĀŠANA

Aprēķinot summas un starpības, darba gaita mēdz būt šāda: 1) aizstāj atņemšanu ar pretējā skaitļa pieskaitīšanu un raksta saskaitāmos citu aiz cita bez saskaitīšanas zīmēm; 2) aprēķina radušos algebrisko summu (vispirms saskaitot atsevišķi pozitīvos un atsevišķi negatīvos saskaitāmos).

$$(-2)+(+3)-(-8)+(-4)+(-1{,}2)=$$
$$=-2+3+8-4-1{,}2=+11-7{,}2=+3{,}8.$$

P i e z ī m e s. **1.** Piemēram, pierakstu $7-2$ var uzskatīt par pozitīvo skaitļu 7 un 2 starpību («no 7 atņem 2»), bet to pašu pierakstu var saprast arī kā skaitļu 7 un -2 summu («pie 7 pieskaitīt -2»). Taču izteiksmes vērtība abos gadījumos ir viena un tā pati, proti, 5.

2. Algebriskā summā zīme pirms katra skaitļa nav darbības zīme, bet skaitļa zīme. Tāpēc, pārvietojot (komutējot) šādā summā saskaitāmos, tie jāpārvieto kopā ar savu zīmi:

$$+1-4+6-5=+1+6-4-5=-4+6-5+1=\ldots$$

4.3. IEKAVU ATVĒRŠANA UN IESLĒGŠANA IEKAVĀS

Saskaitīšanas asociatīvā īpašība dod iespēju saskaitāmos savienot grupās jeb ieslēgt iekavās, kā arī atmest jeb atvērt iekavas. Teiktais attiecas arī uz algebriskām summām, ievērojot tālāk minētās kārtulas.

IEKAVU ATVĒRŠANA

Ja atmet iekavas un plusa zīmi to priekšā, tad saskaitāmajiem, kas atradās iekavās, zīmes nav jāmaina; ja atmet iekavas un mīnusa zīmi to priekšā, tad saskaitāmajiem, kas atradās iekavās, jāmaina zīmes uz pretējām.

1) $5+(-7+2+1)-4=5-7+2+1-4$;

2) $24+2-(3-2+5)+1=24+2-3+2-5+1$.

Iekavās skaitlis 3 ir pozitīvs, un tāpēc, atmetot iekavas, tā priekšā jāraksta mīnusa zīme.

$5{,}2-(-0{,}3+4)-0{,}5=5{,}2+0{,}3-4-0{,}5$.

IESLĒGŠANA IEKAVĀS

Ja saskaitāmos ieslēdz iekavās, liekot plusa zīmi to priekšā, tad iekavās ieslēgtajiem saskaitāmajiem zīmes nav jāmaina; ja saskaitāmos ieslēdz iekavās, liekot mīnusa zīmi to priekšā, tad iekavās ieslēgtajiem saskaitāmajiem jāmaina zīmes uz pretējām.

1) $6+5-1+3-2=6+(5-1+3)-2$;

2) $6+5-1+3-2=6+5-(1-3+2)$;

3) $8-4+2-6=8-4-(-2+6)$.

IEKAVU IZMANTOŠANA APRĒĶINOS

Iekavu atvēršana vai ieslēgšana iekavās reizēm atvieglo summu aprēķināšanu.

1) $5\frac{1}{6}-(2\frac{1}{6}-0{,}7)=5\frac{1}{6}-2\frac{1}{6}+0{,}7=3+0{,}7=3{,}7$.

(Kā būtu jāskaitļo, ja iekavas neatvērtu?)

2) $254+179-178=254+(179-178)=254+1=255$.

(Kā būtu jāskaitļo, ja pēdējos divus saskaitāmos iekavās neieslēgtu?)

3) $4{,}6-1{,}83-0{,}17=4{,}6-(1{,}83+0{,}17)=4{,}6-2=2{,}6$.

Kārtulas par iekavu atvēršanu vai ieslēgšanu iekavās attiecināmas kā uz visu summu, tā arī uz atsevišķu skaitli (uz «summu» ar vienu saskaitāmo).

$-(a+b)=-a-b$; $\quad -(+k)=-k$;

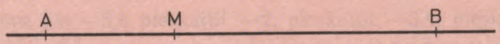
$-c+d-e=-(c-d+e)$; $\quad -(-p)=+p$;

$x-y=-(-x+y)=-(y-x)$; $\quad +(-t)=-t$.

4.4. REIZINĀŠANA UN DALĪŠANA

REIZINĀŠANAS JĒDZIENS

Lai izprastu, kā aprēķināms divu racionālu skaitļu reizinājums, aplūkosim pozitīvus un negatīvus skaitļus reālā uzdevumā. Pie tam atcerēsimies, ka, piemēram, izteiciens «pēc —3 stundām» nozīmē: «pirms 3 stundām»; izteiciens «brauc virzienā *AB* ar ātrumu —8 km/h» nozīmē «brauc virzienā *BA* ar ātrumu 8 km/h»; izteiciens «atrodas —24 km pa labi no punkta *A*» nozīmē: «atrodas 24 km pa kreisi no punkta *A*» u. tml.



14. zīm.

Velosipēdists brauc pa šoseju virzienā *AB* (14. zīm.) ar ātrumu v km/h un pašlaik atrodas punktā *M*. Tādā gadījumā pēc t stundām viņš atradīsies vt km pa labi no punkta *M*.

Aplūkosim dažādus gadījumus, liekot burtu v un t vietā gan pozitīvus, gan negatīvus skaitļus, gan skaitli 0, un noteiksim velosipēdista atrašanās vietu uz šosejas (skaitot no punkta *M*). Vērojot, kā veidojas reizinājuma $v \cdot t$ modulis un reizinājuma zīme, var secināt divu racionālu skaitļu reizināšanas kārtulu:

v	+8	−8	+8	−8	−8	0
t	+3	+3	−3	−3	0	−3
v·t	+24	−24	−24	+24	0	0

REIZINĀŠANAS KĀRTULA

Lai sareizinātu divus skaitļus, jāsareizina to moduļi, pie tam reizinājums ir pozitīvs, ja reizinātājiem ir vienādas zīmes, bet negatīvs, ja tiem ir dažādas zīmes. Piemēros uzskatāmi parādīts, kā aprēķina reizinājuma moduli (ar cipariem zem piemēra) un kā reizinājuma zīme ir atkarīga no abu komponentu zīmju vienādības vai atšķirības (bultiņas virs piemēra).

$(+8)\cdot(+3) = +24$ $\quad$ $(-8)\cdot(+3) = -24$

$8 \cdot 3 = 24$ $\quad$ $8 \cdot 3 = 24$

$(-8)\cdot(-3) = +24$ $\quad$ $(+8)\cdot(-3) = -24$

$8 \cdot 3 = 24$ $\quad$ $8 \cdot 3 = 24$

Vēl daži piemēri.

$(-3)\cdot(+4) = -12;$ $\quad$ $0\cdot(-2{,}79) = 0;$

$(-1)\cdot(-7{,}6) = +7{,}6;$ $\quad$ $(+1{,}5)\cdot(-2) = -3.$

VAIRĀKU SKAITĻU REIZINĀŠANA

Aprēķinot vairāku skaitļu reizinājumu, reizina pirmo skaitli ar otro, dabūto reizinājumu reizina ar trešo skaitli utt. Turklāt, izmantojot reizināšanas komutatīvo un asociatīvo īpašību, reizinātājus drīkst pēc patikas izdevīgi pārvietot (komutēt) un savienot (asociēt), piemēram,

$(-3)\cdot(+2)\cdot(-1)\cdot(-7) = (-6)\cdot(-1)\cdot(-7) =$
$= (+6)\cdot(-7) = -42;$

$(-25)\cdot(+2{,}7)\cdot(-4) = (+100)\cdot(+2{,}7) = +270.$

Lai noteiktu reizinājuma zīmi, tā nav jānosaka pēc kārtas ik divu skaitļu reizinājumam — pietiek tikai ievērot negatīvo reizinātāju skaitu.

Reizinājums ir pozitīvs, ja negatīvie reizinātāji ir pāra skaitā (2, 4, 6, . . .), bet negatīvs, ja negatīvie reizinātāji ir nepāra skaitā (1, 3, 5, . . .).

1) $(+1)\cdot(+3)\cdot(-1)\cdot(-4)\cdot(+1)\cdot(-5)\cdot(-2) = +120.$

(Šajā reizinājumā ir 4 negatīvi reizinātāji.).

2) $(-1)\cdot(+2)\cdot(+1)\cdot(-1)\cdot(-3) = -6.$

(Šajā reizinājumā ir 3 negatīvi reizinātāji.)

Ja kaut viens no reizinātājiem ir nulle, tad arī reizinājums ir nulle.

1) $(-4{,}7)\cdot 0 = 0;$

2) $(+2)\cdot(-7{,}6)\cdot 0\cdot(+2{,}3) = 0.$

DALĪŠANAS JĒDZIENS UN KĀRTULA

Kā zināms, dalīt vienu skaitli ar otru nozīmē atrast tādu trešo skaitli, kuru reizinot ar otro skaitli, reizinājumā dabū pirmo skaitli, piemēram,

$$(-8):(+2) = -4, \text{ jo } (-4)\cdot(+2) = -8;$$
$$(-3{,}6):(-10) = +0{,}36, \text{ jo } (+0{,}36)\cdot(-10) = -3{,}6.$$

Viegli saprast, ka līdzīgi tam, kā nosaka divu skaitļu reizinājuma zīmi, nosaka arī dalījuma zīmi.

Lai izdalītu divus skaitļus, jādala to moduļi, pie tam dalījums ir pozitīvs, ja abiem skaitļiem ir vienādas zīmes, bet negatīvs, ja — dažādas zīmes.

1) $(+12):(+3) = +4$; 3) $(-12):(+3) = -4$;
2) $(-12):(-3) = +4$; 4) $(+12):(-3) = -4$.

Piezīme. Kā reizinot, tā arī dalot ieteicams **vispirms noteikt un jau pierakstīt rezultāta zīmi** un tikai pēc tam sareizināt vai izdalīt moduļus.

KĀ SAPRAST PLUSA UN MĪNUSA ZĪMES IZTEIKSMĒS

Aprēķinot tādu matemātisko izteiksmju vērtības, kurās ir racionāli skaitļi, jāizvairās no pārpratumiem ar skaitļu un darbību zīmēm: nedrīkst vienu un to pašu «+» vai «—» zīmi uzskatīt reizē par skaitļa zīmi un darbības zīmi.

Piemēram, izteiksmē 7—2 mīnusa zīmi drīkst pieņemt par atņemšanas zīmi («no 7 atņemt 2») vai par skaitļa zīmi («pie 7 pieskaitīt —2»). Abos gadījumos izteiksmes vērtība ir viena un tā pati, proti, 5.

Taču būtu rupja kļūda uzskatīt šo mīnusa zīmi vienlaikus par darbības zīmi un skaitļa zīmi («no 7 atņemt —2»).

Līdzīgi izteiksmē $35 - 12:(-3)$ mīnusa zīmi skaitļa 12 priekšā drīkst saprast abējādi:

a) no 35 atņemt skaitļu 12 un (—3) dalījumu, t. i.,
$35-12:(-3) = 35 - (-4) = 35 + 4 = 39$;

b) pie 35 pieskaitīt skaitļu (—12) un (—3) dalījumu, t. i.,
$35 - 12:(-3) = 35 + (+4) = 39$.

4.5. KĀPINĀŠANA

Šajā paragrāfā aplūkosim pakāpes ar racionālu bāzi un veselu kāpinātāju (sk. arī 1.7.).

KĀPINĀTĀJS IR NATURĀLS SKAITLIS 2, 3, 4, ...

Šādā gadījumā ar jebkuru racionālu bāzi a

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ reizes}}.$$

1) $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$;

2) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$.

Kā redzams, pozitīva skaitļa pakāpe vienmēr ir pozitīva. Negatīva skaitļa pakāpe ir pozitīva, ja kāpinātājs ir pāra skaitlis, bet negatīva, ja kāpinātājs ir nepāra skaitlis.

1) $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$;

2) $(-0{,}2)^5 = (-0{,}2) \cdot (-0{,}2) \cdot (-0{,}2) \cdot (-0{,}2) \cdot (-0{,}2) =$
$= -0{,}00032$.

Jāatšķir daži it kā līdzīgi pieraksti, piemēram, $(-2)^4$ un -2^4. Pirmajā gadījumā mīnusa zīme ir bāzes zīme, bet otrajā gadījumā — pakāpes zīme (bāze ir $+2$):

1) $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +16$, bet
$-2^4 = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -16$;

2) $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$, bet
$-5^3 = -(5 \cdot 5 \cdot 5) = -125$.

Tāpat jāatšķir arī šādi it kā līdzīgi pieraksti:

1) $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$, bet

2) $\frac{3^2}{5} = \frac{3 \cdot 3}{5} = \frac{9}{5} = 1\frac{4}{5}$.

Vēl daži kāpināšanas piemēri:

1) $\left(-2\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-2\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-2\frac{1}{2}\right) = \frac{5 \cdot 5}{2 \cdot 2} = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$;

2) $(-1)^3 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$;

3) $(-1)^4 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$;

4) $0^5 = 0$.

KĀPINĀTĀJS IR SKAITLIS 1 VAI SKAITLIS 0

Neatkarīgi no bāzes vērtības par pakāpi ar kāpinātāju 1 pieņem skaitli, kas vienāds ar doto bāzi (sk. 1.7.):

$a^1 = a$.

Piemēri: $\left(\frac{7}{9}\right)^1 = \frac{7}{9}$; $(-17)^1 = -17$; $\left(4\frac{2}{5}\right)^1 = 4\frac{2}{5}$;
$1^1 = 1$; $(-1)^1 = -1$; $0^1 = 0$.

Par skaitļa pakāpi ar kāpinātāju 0 pieņem skaitli 1: $a^0 = 1$.

Izņēmums ir pakāpe 0^0, kurai nepiešķir nekādu jēgu.

Piemēri: $3^0 = 1$; $(-4{,}9)^0 = 1$; $\left(5\frac{2}{7}\right)^0 = 1$; $1^0 = 1$; $(-1)^0 = 1$.

KĀPINĀTĀJS IR NEGATĪVS VESELS SKAITLIS

Tādu pakāpi, kā, piemēram, 5^{-2} nevar aizstāt ar reizinājumu, kurā bāze 5 jāņem par reizinātāju —2 reizes. Tāpēc pakāpei ar veselu negatīvu kāpinātāju tiek piešķirta cita jēga.

Par pakāpi ar veselu negatīvu kāpinātāju pieņem daļu, kuras skaitītājā ir skaitlis 1, bet saucējs ir tā pati bāze ar pretēju pozitīvu kāpinātāju:

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (n — naturāls skaitlis).

Izņēmums ir skaitļa 0 pakāpe ar negatīvu kāpinātāju, piemēram, 0^{-3}, 0^{-1} u. tml., kurai nepiešķir nekādu jēgu.

1) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$;

2) $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$;

3) $(-4)^{-3} = \frac{1}{(-4)^3} = \frac{1}{-64} = -\frac{1}{64}$;

4) $1^{-6} = \frac{1}{1^6} = \frac{1}{1} = 1$;

5) $(-1)^{-3} = \frac{1}{(-1)^3} = \frac{1}{-1} = -1$;

6) $-(-1)^{-6} = -\frac{1}{(-1)^6} = -\frac{1}{1} = -1$;

7) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{1}{\frac{8}{27}} = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}$;

8) $(-0{,}4)^{-1} = \frac{1}{-0{,}4} = -2{,}5$.

UZDEVUMI AR RACIONĀLIEM SKAITĻIEM

Kā redzams tālākajos atrisinājumu paraugos, aprēķinot izteiksmju vērtības, palīgdarbības izdara tikai ar attiecīgo skaitļu moduļiem, bet atbilstošā rezultāta zīmi ieraksta tikai izteiksmes risinājumā.

1. u z d e v u m s.

$$(2{,}727:(-0{,}9)+1{,}9\cdot(-5{,}3)+1{,}58):4{,}8=(-3{,}03-10{,}07+1{,}58):4{,}8=(-13{,}1+1{,}58):4{,}8=-11{,}52:4{,}8=-2{,}4.$$

1) $2{,}727:0{,}9=3{,}03;$

$$\begin{array}{r} \overline{27{,}27:9} \end{array}$$

2) $$\begin{array}{r} 1{,}9 \\ \cdot\ 5{,}3 \\ \hline 57 \\ 95\ \ \\ \hline 10{,}07; \end{array}$$

3) $$\begin{array}{r} 13{,}10 \\ -\ 1{,}58 \\ \hline 11{,}52; \end{array}$$

4) $11{,}52:4{,}8=2{,}4.$

$$\begin{array}{l} \overline{115{,}2:48} \\ \underline{96} \\ 192 \\ \underline{192} \\ 0 \end{array}$$

2. u z d e v u m s.

$$\frac{-0{,}2\cdot\left(\frac{5}{6}\cdot0{,}9-6{,}2:0{,}31\right)}{1\frac{4}{11}\cdot0{,}22:(-0{,}1)-2}=\frac{-0{,}2\cdot\left(\frac{3}{4}-20\right)}{-3-2}=$$

$$=\frac{0{,}2\cdot\left(-19\frac{1}{4}\right)}{-5}=\frac{\frac{77}{20}}{-5}=-\frac{77}{100}=-0{,}77$$

1) $\frac{5\cdot9}{6\cdot10}=\frac{3}{4}$; 2) $\frac{6{,}2:0{,}31}{620:31}=20$; 3) $\frac{15\cdot22\cdot10}{11\cdot100\cdot1}=3$;

4) $\frac{1\cdot77}{5\cdot4}=\frac{77}{20}$.

3. u z d e v u m s.

$$\frac{(1-3{,}5+0{,}1)^2}{1{,}2:(-0{,}25)}=\frac{(-2{,}4)^2}{-4{,}8}=\frac{5{,}76}{-4{,}8}=-1{,}2.$$

1) $1{,}2:0{,}25=1{,}2\cdot4=4{,}8;$ 2) $5{,}76:4{,}8=1{,}2.$

$$\begin{array}{l} \overline{57{,}6:48} \\ \underline{48} \\ 96 \\ \underline{96} \\ 0 \end{array}$$

5. SKAITĻU TUVINĀJUMI UN DARBĪBAS AR TIEM

5.1. SKAITĻU TUVINĀJUMI UN TO PRECIZITĀTE

TUVINĀJUMA JĒDZIENS

Dažkārt aprēķini jāveic ne tikai ar precīziem skaitļiem* , bet arī ar to tuvinājumiem jeb ar aptuveniem skaitļiem. Tā, piemēram, nogriežņa garumu, priekšmeta masu, gaisa temperatūru var izmērīt tikai aptuveni — visi mērījumu rezultāti ir šo lielumu precīzo vērtību tuvinājumi. Arī koku skaitu lielā mežā var izskaitīt («izmērīt») tikai aptuveni.

Aptuveni skaitļi jeb precīzu skaitļu tuvinājumi rodas arī precīzu skaitļu noapaļošanā. Tā, piemēram, skolas skolēnu precīzo skaitu 1543 var noapaļot, aizstājot to ar tuvinājumu 1500. Raksta $1543 \approx 1500$; lasa: 1543 ir aptuveni vienāds ar 1500.

TUVINĀJUMA ABSOLŪTĀ KĻŪDA

Mērīšanā vai noapaļošanā iegūtais aptuvenais skaitlis atšķiras no precīzā skaitļa. Tā, piemēram, noapaļošanā $276 \approx 270$ tuvinājums 270 ir mazāks nekā precīzais skaitlis, bet noapaļošanā $276 \approx 280$ tuvinājums ir lielāks nekā precīzais skaitlis. Pirmajā gadījumā saka, ka skaitlis noapaļots ar iztrūkumu, otrajā gadījumā — ar uzviju.

Parasti mūs neinteresē, vai skaitļa tuvinājums ņemts ar iztrūkumu vai uzviju, bet gan tikai tas, par cik precīzais skaitlis atšķiras no tuvinājuma. Citādi sakot, mūs interesē tikai precīzā skaitļa x un tā tuvinājuma a starpības modulis.

Par tuvinājuma absolūto kļūdu $|k|$ sauc precīzā skaitļa x un tā tuvinājuma a starpības moduli:

$$|k| = |x - a|.$$

P i e m ē r s. Tuvinājuma $276 \approx 270$ absolūtā kļūda ir

$$|k| = |276 - 270| = 6,$$

bet tuvinājuma $276 \approx 280$ absolūtā kļūda ir

$$|k| = |276 - 280| = 4.$$

---

* Te un turpmāk šajā nodaļā, runādami par skaitļiem, ar tiem sapratīsim tikai pozitīvus skaitļus. Tomēr viss šajā nodaļā teiktais ir attiecināms arī uz negatīvu skaitļu moduļiem.

ABSOLŪTĀS KĻŪDAS ROBEŽA

Ja nav zināms precīzais skaitlis, tad, protams, nevar aprēķināt tuvinājuma absolūto kļūdu. Tādā gadījumā cenšas noteikt tikai absolūtās kļūdas robežu, t. i., kādu skaitli h, ko absolūtā kļūda nepārsniedz.

Ja var apgalvot, ka tuvinājuma absolūtā kļūda $|k|$ nav lielāka nekā h, t. i., ja

$$|k| = |x - a| \leqslant h,$$

tad skaitli h sauc par tuvinājuma absolūtās kļūdas robežu. Tādā gadījumā saka arī, ka skaitlis a ir skaitļa x tuvinājums ar precizitāti līdz h, un raksta: $x = a \pm h$ vai $x = a(\pm h)$. Pieņemsim, ka, mērot grāmatas garumu ar lineālu, uz kura ir tikai centimetru iedaļas, grāmatas garums ir lielāks nekā 23 cm, bet mazāks nekā 24 cm. Ja šajā gadījumā pieņem, ka grāmatas garums ir aptuveni 23 cm (vai 24 cm), tad šis tuvinājums no precīzā garuma neatšķiras vairāk kā par 1 cm, t. i., tuvinājuma absolūtā kļūda $|k| \leqslant 1$ cm jeb tuvinājuma absolūtās kļūdas robeža $h = 1$ cm. Tātad var teikt, ka grāmatas garums ir 23 cm (vai arī 24 cm) ar precizitāti līdz 1 cm.

Ja šajā gadījumā teiktu, ka grāmatas garums ir 23,5 cm, tad varētu apgalvot, ka absolūtā kļūda $|k| \leqslant 0{,}5$ cm un tādējādi mērījums 23,5 cm ir uzzināts ar precizitāti līdz 0,5 cm.

Taču būtu nepamatoti apgalvot, ka šīs grāmatas garums ir, piemēram, 23,7 cm ar precizitāti līdz 1 mm, jo tādu mērījuma precizitāti nevar iegūt ar lineālu, uz kura ir tikai veselu centimetru iedaļas.

TUVINĀJUMA RELATĪVĀ KĻŪDA

Mērīšanas rezultāta vai cita tuvinājuma precizitāti raksturo ne tikai absolūtās kļūdas lielums, bet arī absolūtās kļūdas samērs ar pašu skaitli. Šo samēru raksturo tuvinājuma relatīvā kļūda.

Par tuvinājuma relatīvo kļūdu r sauc absolūtās kļūdas $|k|$ attiecību pret tuvinājumu a:

$$r = \frac{|k|}{a}.$$

Tuvinājuma relatīvo kļūdu mēdz izteikt arī procentos. Piemēram, precīza skaitļa noapaļošanā $7483 \approx 7500$ tuvinājuma absolūtā kļūda $|k| = |7500 - 7483| = 17$, bet tuvinājuma relatīvā kļūda

$$r = \frac{17}{7500} = 0{,}0022\ldots \approx 0{,}2\ \%.$$

Noapaļošanā $3{,}7 \approx 4$ tuvinājuma absolūtā kļūda $|k| = 0{,}3$, bet tuvinājuma relatīvā kļūda $r = \frac{0{,}3}{4} = 0{,}075 = 7{,}5\ \%$. Kā redzams, otrajā gadījumā skaitlis noapaļots ar mazāku absolūto kļūdu, bet ar lielāku relatīvo kļūdu nekā pirmajā gadījumā.

RELATĪVĀS KĻŪDAS ROBEŽA

Ja tuvinājuma absolūtā kļūda $|k|$ nav zināma, tad tās vietā ņem absolūtās kļūdas robežu h un attiecīgi iegūst relatīvās kļūdas robežu $r = \frac{h}{a}$.

Piemēram, ja tuvināti ir noteikta priekšmeta masa (gramos) $a = 115 \pm 1$, tad tuvinājuma relatīvās kļūdas robeža $r = \frac{1}{115} \approx 0{,}01 = 1\,\%$.

P i e z ī m e. Ja nevar rasties pārpratumi, tad apzīmējumus «absolūtās kļūdas robeža» un tāpat arī «relatīvās kļūdas robeža» praksē aizstāj ar apzīmējumiem «absolūtā kļūda» un «relatīvā kļūda».

P i e m ē r i. 1) Noteikt tuvinājuma $\pi = 3{,}14159\ldots \approx 3$ absolūto un relatīvo kļūdu.
Absolūtā kļūda $|k| = |3{,}14159\ldots - 3| = 0{,}14159\ldots \approx 0{,}14$.

Relatīvā kļūda $r = \frac{|k|}{a} = \frac{0{,}14}{3} \approx 0{,}047 = 4{,}7\,\%$.

P i e z ī m e. Tā kā skaitļa π precīzā vērtība nav zināma, tad arī tuvinājuma absolūtā un relatīvā kļūda ir atrastas ar zināmu tuvinājumu.

2) Noteikt mērījuma $a = 7{,}26$ kg absolūtās un relatīvās kļūdas robežas.

Absolūtās kļūdas robeža $h = 0{,}01$ (ja pieņem, ka dotā mērījuma pēdējais cipars atšķiras no pareizā ne vairāk kā par 1 vienību). Relatīvās kļūdas robeža $r = \frac{h}{a} = \frac{0{,}01}{7{,}26} \approx$ $\approx 0{,}0014 = 0{,}14\,\%$.

5.2. SKAITĻU NOAPAĻOŠANA

NATURĀLU SKAITĻU NOAPAĻOŠANA

Noapaļojot naturālu skaitli, tā vienu vai vairākus pēdējos ciparus aizstāj ar nullēm. Ja ar nulli aizstāj tikai pēdējo ciparu, tad noapaļošanas kļūda nepārsniedz 10 jeb skaitlis ir noapaļots ar precizitāti līdz 1 desmitam (saka arī: skaitlis noapaļots pilnos desmitos).

Ja ar nullēm aizstāj divus pēdējos ciparus, tad noapaļošanas kļūda nepārsniedz 100 jeb skaitlis ir noapaļots ar precizitāti līdz 1 simtam (pilnos simtos).

Līdzīgi skaitli var noapaļot ar precizitāti līdz 1 tūkstotim utt. Vienu un to pašu skaitli var noapaļot gan ar iztrūkumu, gan ar uzviju, bet vēlams noapaļot tā, lai tuvinājuma kļūda būtu pēc iespējas mazāka. Tā, piemēram, tuvinājuma $457 \approx 450$ kļūda ir 7, bet tuvinājuma $457 \approx 460$ kļūda ir tikai 3.

Noapaļojot naturālu skaitli līdz kādai šķirai, jāatmet dotā skaitļa visi tie cipari, kas atrodas pa labi no šīs šķiras, un tie jāaizstāj ar nullēm. Turklāt, lai noapaļošanas kļūda būtu pēc iespējas mazāka, jāievēro šādi nosacījumi.

Ja pirmais atmetamais cipars (skaitot no kreisās puses) ir mazāks nekā 5, tad skaitlis jānoapaļo ar iztrūkumu (paturamie cipari ir jāpārraksta bez izmaiņām); ja pirmais atmetamais cipars ir 5 vai lielāks nekā 5, tad jānoapaļo ar uzviju (pēdējais paturamais cipars jāpalielina par 1).

1) Noapaļot skaitli 35 489 līdz tūkstošiem:

$35\,\underline{4}89 \approx 35\,000.$

Piezīme. Uzskatāmības labad šajā un turpmākajos piemēros pirmais atmetamais cipars pasvītrots.

2) Noapaļot skaitli līdz simtiem:

$83\,6\underline{5}8 \approx 83\,700.$

Ja, noapaļojot ar uzviju, pēdējais paturamais cipars ir 9, tad, palielinot to par 1, jāpalielina arī viens vai pat vairāki iepriekšējie cipari.

1) Noapaļot ar precizitāti līdz $10: 479\underline{6} \approx 4800.$

2) Noapaļot ar precizitāti līdz $100: 39\,9\underline{5}1 \approx 40\,000.$

DECIMĀLDAĻU NOAPAĻOŠANA

Noapaļojot decimāldaļu, pēc vajadzības atmet tās pēdējos decimālciparus. Turklāt, ja pirmais (no kreisās puses) atmetamais cipars ir mazāks nekā 5, tad paturamos ciparus nemaina; ja pirmais atmetamais cipars ir 5 vai lielāks nekā 5, tad pēdējo paturamo ciparu palielina par 1.

1) Noapaļot ar precizitāti līdz 0,1:

$5{,}2\underline{4}7 \approx 5{,}2;$ $5{,}2\underline{5} \approx 5{,}3;$

$5{,}2\underline{8}1 \approx 5{,}3;$ $5{,}9\underline{7} \approx 6{,}0.$

2) Noapaļot ar precizitāti līdz 0,01:

$0{,}78\underline{6}01 \approx 0{,}79;$ $4{,}79\underline{6}3 \approx 4{,}80;$

$1{,}24\underline{1}99 \approx 1{,}24;$ $0{,}99\underline{1}7 \approx 0{,}99;$

$0{,}35\underline{5}1 \approx 0{,}36;$ $5{,}99\underline{5}8 \approx 6{,}00.$

NOAPAĻOŠANAS PRECIZITĀTE

Ievērojot noapaļošanas kārtulas, iegūtā tuvinājuma absolūtā kļūda nav lielāka kā pēdējās paturamās šķiras vienības puse. Tā, piemēram, noapaļojot skaitli līdz desmitiem, kļūda nav lielāka kā 5; noapaļojot līdz desmitdaļām, kļūdas robeža nav 0,1, bet tikai 0,05 u. tml.

P i e m ē r i. 1) Izteikt parasto daļu $\frac{6}{7}$ decimāldaļā ar precizitāti līdz 0,01 un noteikt tuvinājuma relatīvo kļūdu.

$\frac{6}{7} = 6{:}7 = 0{,}857\ldots \approx 0{,}86.$

Absolūtā kļūda $|k| = |0{,}86 - \frac{6}{7}| = |\frac{86}{100} - \frac{6}{7}| =$

$= |\frac{86 \cdot 7 - 6 \cdot 100}{700}| = \frac{2}{700}.$

Relatīvā kļūda $r = \frac{|k|}{a} = \frac{2}{700} : \frac{6}{7} = \frac{1}{300} \approx 0{,}33\,\%.$

2) No iesētajiem 28 graudiem uzdīga 23 graudi. Noteikt sēklas dīgtspēju ar precizitāti līdz 0,1 %.

$23{:}28 = 0{,}8214\ldots \approx 82{,}1\,\%.$

5.3. TUVINĀJUMA TICAMIE UN ZĪMĪGIE CIPARI

TICAMIE CIPARI

Ja, vairākkārt pārskaitot parka kokus, ir iegūti skaitļi 642, 648 un 643, tad var domāt, ka simtu un desmitu cipari 6 un 4 ir visumā ticami, bet vienu cipars ir apšaubāms, jo tas manāmi «svārstās».

Skaitļa pierakstā jebkuru ciparu sauc par ticamu ciparu, ja absolūtā kļūda nepārsniedz šim ciparam atbilstošās šķiras 1 vienību.

Tuvinājumā $24{,}3841 \pm 0{,}002$ ticams ir vēl simtdaļu cipars 8 (un, protams, līdz ar to arī visi augstāko šķiru cipari), jo kļūda 0,002 ir mazāka nekā 0,01. Aiz simtdaļām zemāko šķiru cipari 4 un 1 vairs nav ticami, jo kļūda 0,002 pārsniedz 0,001 (un, protams, arī 0,0001).

Tuvinājumā $0{,}36 \pm 0{,}004$ ticami ir visi cipari, arī pat vēl simtdaļu cipars 6, jo kļūda $0{,}004 < 0{,}01$.

Tuvinājumā 746 ± 3 ticami ir tikai simtu un desmitu cipari 7 un 4, bet vienu cipars 6 nav ticams, jo kļūda $3 > 1$.

Tuvinājumā 0,384 ± 0,001 ticami ir visi cipari, arī pat vēl tūkstošdaļu cipars 4, jo kļūda 0,001 nav lielāka kā 0,001.

ZĪMĪGIE CIPARI

Par skaitļa zīmīgiem cipariem sauc tā visus ticamos ciparus, izņemot nulles skaitļu sākumā.

Skaitļa tuvinājums:	2030	0,07	0,00430	0,106
Zīmīgo ciparu skaits:	4	1	3	3

Ja skaitlis ir precīzs, tad zīmīgo ciparu skaits tajā ir bezgalīgi liels. Tā, piemēram, 1 stundā ir precīzi 60 minūtes, un tāpēc drīkst rakstīt arī tā: 1 h = 60,0000 . . . min.

Tātad te skaitlim 60 ir bezgalīgi daudz zīmīgo ciparu.

Runājot par skaitļa ticamajiem cipariem, mūs var interesēt tikai tas, kurā šķirā ir pēdējais ticamais cipars, jo no tā atkarīga tuvinājuma absolūtā kļūda. Runājot par zīmīgajiem cipariem, var interesēt tikai zīmīgo ciparu skaits, jo no tā ir atkarīga tuvinājuma relatīvā kļūda (tā ir jo mazāka, jo vairāk zīmīgo ciparu skaitlī).

Piemēri. 1) Cik zīmīgu ciparu katrā no skaitļiem 0,47; 4,7; 0,0047; 470; 4,70; 832±1; 576 000 (pilnos simtos); trijstūra iekšējo leņķu summa ir 180°.

Skaitlim 0,47 ir divi zīmīgi cipari; skaitlim 4,7— divi zīmīgi cipari; 0,0047— divi zīmīgi cipari; 4700— četri zīmīgi cipari; 4,700— trīs zīmīgi cipari; 832 ± 1— trīs zīmīgi cipari; 576 000 (pilnos simtos)— četri zīmīgi cipari; 180°— neierobežots skaits zīmīgo ciparu, jo skaitlis 180 ir precīzs, var pat rakstīt, ka trijstūra leņķu summa ir 180°, 0000 . . . .

2) Kurš no mērījumiem $a = 43{,}7$, $b = 0{,}0437$, $c = 85{,}6$, $d = 0{,}856$ ir dots ar mazāku relatīvo kļūdu?

Mērījumu a un b relatīvās kļūdas (pareizāk — relatīvo kļūdu robežas) ir vienādas, proti: $\frac{0{,}1}{43{,}7} = \frac{0{,}0001}{0{,}0437} = \frac{1}{43}$. Tāpat mērījumu c un d relatīvās kļūdas ir vienādas: $\frac{0{,}1}{85{,}6} = \frac{0{,}001}{0{,}856} = \frac{1}{856}$. Kā redzams, mērījumu c un d relatīvās kļūdas ir nedaudz mazākas nekā mērījumu a un b kļūdas.

Piezīme. Tā kā visi mērījumi ir doti ar vienādu zīmīgo ciparu skaitu (trīs), tad skaidrs, ka to relatīvās kļūdas visumā ir gandrīz vienādas (vai pilnīgi vienādas, ja vienādi ir atbilstošie cipari).

5.4. TUVINĀJUMA PIERAKSTS

NORĀDA TUVINĀJUMA ABSOLŪTĀS KĻŪDAS ROBEŽU VAI TUVINĀJUMU IESLĒDZ ROBEŽĀS

Norādītā tuvinājuma kļūdas robeža	Tuvinājums ieslēgts robežās
$a \pm h$	$a - h \leqslant a \leqslant a + h$
$b = 37 \pm 1$	$36 \leqslant b \leqslant 38$
$c = 5{,}3 \pm 0{,}2$	$5{,}1 \leqslant c \leqslant 5{,}5$
$d = 2470 \pm 20$	$2450 \leqslant d \leqslant 2490.$

Viegli saprotams, kā tuvinājuma pirmo pieraksta veidu aizstāt ar līdzvērtīgu otro pieraksta veidu. Piemērā parādīsim arī, kā otro pieraksta veidu aizstāt ar pirmo.

$7{,}3 \leqslant a \leqslant 7{,}7.$

Atrod tuvinājumu: $a = \frac{7{,}3 + 7{,}7}{2} = 7{,}5$; atrod kļūdas robežu: $h = \frac{7{,}7 - 7{,}3}{2} = 0{,}2$; tātad $a = 7{,}5 \pm 0{,}2$.

VIENKĀRŠOTAIS PIERAKSTS

Tuvinājumus mēdz rakstīt arī ar t. s. vienkāršoto paņēmienu, rakstot tikai tuvinājuma ticamos ciparus. Līdz ar to tuvinājuma absolūtās kļūdas robežu izsaka pēdējā rakstītās šķiras 1 vienība. Piemēros parādīts, kā vienkāršotais pieraksts būtu aizstājams ar citādu pierakstu.

Vienkāršotais pieraksts	Norādīta tuvinājuma kļūdas robeža	Tuvinājums ieslēgts robežās
$a = 4{,}53$	$a = 4{,}53 \pm 0{,}01$	$4{,}52 \leqslant a \leqslant 4{,}54$
$b = 4{,}530$	$b = 4{,}530 \pm 0{,}001$	$4{,}529 \leqslant b \leqslant 4{,}531$
$c = 28$	$c = 28 \pm 1$	$27 \leqslant c \leqslant 29$
$d = 28{,}0$	$d = 28{,}0 \pm 0{,}1$	$27{,}9 \leqslant d \leqslant 28{,}1$
$e = 7400$	$e = 7400 \pm 1$	$7399 \leqslant e \leqslant 7401$

Piezīme. Tuvinātus skaitļus mēdz rakstīt arī t. s. normālformā (sk. 5.7.).

P i e m ē r i. 1) Ir zināms, ka detaļas masa p nav mazāka kā 4,8 kg un nav lielāka kā 5,4 kg. Kā dažādi var pierakstīt detaļas masu p (kilogramos)?

a) $4{,}8 \leqslant p \leqslant 5{,}4$;

b) $p \approx \frac{4{,}8 + 5{,}4}{2} = 5{,}1$ (tuvinājums),

$h = \frac{5{,}4 - 4{,}8}{2} = 0{,}3$ (absolūtās kļūdas robežas),

$p = 5{,}1 \pm 0{,}3$;

c) $p \approx 5$ (vienkāršotais pieraksts pats par sevi norāda, ka absolūtās kļūdas robeža nav lielāka kā 1).

2) Tuvinājumiem, kas doti vienkāršotajā pierakstā, norādīt absolūtās kļūdas robežu un ieslēgt šos tuvinājumus robežās.

$a = 32{,}7$; $b = 430$; $c = 0{,}700$;

$a = 32{,}7 \pm 0{,}1$ jeb $32{,}6 \leqslant a \leqslant 32{,}8$;

$b = 430 \pm 1$ jeb $429 \leqslant b \leqslant 431$;

$c = 0{,}700 \pm 0{,}001$ jeb $0{,}699 \leqslant c \leqslant 0{,}701$.

5.5. ROBEŽMETODE DARBĪBĀS AR TUVINĀJUMIEM

Robežmetodi rezultātu precizitātes noteikšanai izmanto tad, ja dotie tuvinājumi ir ieslēgti robežās vai ja ir norādītas skaitļu absolūto kļūdu robežas.

SASKAITĪŠANA

Pieņemsim, ka traukā ir x riekstu, bet zēnam rokā ir y riekstu, pie tam $45 \leqslant x \leqslant 60$, bet $3 \leqslant y \leqslant 5$. Lai aprēķinātu, cik riekstu būs traukā, kad zēns tur piebērs arī savus riekstus, ir jāaprēķina summa $x + y$. Acīmredzot, ka traukā būs vismaz $45 + 3 = 48$ rieksti, bet ne vairāk kā $60 + 5 = 65$ rieksti. Aprēķinu var iekārtot šādi:

$$\begin{array}{l} 45 \leqslant x \leqslant 60 \\ \underline{3 \leqslant y \leqslant 5} \\ 48 \leqslant x + y \leqslant 65. \end{array}$$

Vispār, apzīmējot aptuveno komponentu x un y apakšējās robežas attiecīgi ar $\underline{x}$ un $\underline{y}$, bet augšējās robežas ar $\overline{x}$ un $\overline{y}$, aptuvenu skaitļu x un y summas aprēķināšanu uzskatāmi var parādīt šādā shēmā:

$$\begin{array}{l} \underline{x} \leqslant x \leqslant \overline{x} \\ \underline{y} \leqslant y \leqslant \overline{y} \\ \hline \underline{x} + \underline{y} \leqslant x + y \leqslant \overline{x} + \overline{y}. \end{array}$$

Aprēķināt summu $x + y$, ja $x = 5{,}2 \pm 0{,}1$ un $y = 37 \pm 1$.

$$\begin{array}{l} 5{,}1 \leqslant x \leqslant 5{,}3 \\ 36 \leqslant y \leqslant 38 \\ \hline 41{,}1 \leqslant x + y \leqslant 43{,}3 \end{array}$$

jeb $x + y = 42{,}2 \pm 1{,}1$.

ATŅEMŠANA

Traukā ir x riekstu, bet y rieksti no tiem ir tārpaini, pie tam $45 \leqslant x \leqslant 60$, bet $3 \leqslant y \leqslant 5$. Lai uzzinātu veselo riekstu skaitu, jāaprēķina starpība $x - y$. Acīmredzot veselo riekstu skaits būs vismaz $45 - 5 = 40$, bet ne vairāk kā $60 - 3 = 57$.

Aptuvenu skaitļu starpības aprēķināšanas paņēmiens redzams šādā shēmā:

$$\begin{array}{l} \underline{x} \leqslant x \leqslant \overline{x} \\ \underline{y} \leqslant y \leqslant \overline{y} \\ \hline \underline{x} - \overline{y} \leqslant x - y \leqslant \overline{x} - \underline{y}. \end{array}$$

Aprēķināt starpību $a = x - y$, ja $26 \leqslant x \leqslant 29$, $14 \leqslant y \leqslant 15$.

$$\begin{array}{l} 26 \leqslant x \leqslant 29 \\ 14 \leqslant y \leqslant 15 \\ \hline 26 - 15 \leqslant x - y \leqslant 29 - 14, \\ 11 \leqslant x - y \leqslant 15, \\ 11 \leqslant a \leqslant 15. \end{array}$$

Atbildi var pierakstīt arī citādi — norādot kļūdas robežu:

$$a \approx \frac{11 + 15}{2} = 13,\ h = \frac{15 - 11}{2} = 2,\ a = 13 \pm 2.$$

REIZINĀŠANA

Traukā ir x riekstu, katra rieksta masa ir y gramu, pie tam $45 \leqslant x \leqslant 60$, bet $3 \leqslant y \leqslant 5$. Visu riekstu masu izsaka reizinājums $x \cdot y$. Acīmredzot visu riekstu masa ir vismaz $45 \cdot 3 = 135$ grami, bet ne vairāk kā $60 \cdot 5 = 300$ gramu.

Tuvinātu skaitļu reizinājuma aprēķināšanas gaita redzama šādā shēmā:

$$\begin{array}{l} \underline{x} \leqslant x \leqslant \overline{x} \\ \underline{y} \leqslant y \leqslant \overline{y} \\ \hline \underline{x} \cdot \underline{y} \leqslant x \cdot y \leqslant \overline{x} \cdot \overline{y}. \end{array}$$

Aprēķināt taisnstūra laukumu S, ja taisnstūra malu garumi $a = 8{,}3$ m un $b = 6{,}4$ m.

Tā kā tuvinājumi doti vienkāršotajā pierakstā, tad to absolūtās kļūdas robeža ir pēdējās rakstītās šķiras 1 vienība, t. i., 0,1.

$$\begin{array}{l} 8{,}2 \leqslant a \leqslant 8{,}4 \\ 6{,}3 \leqslant b \leqslant 6{,}5 \\ \hline 8{,}2 \cdot 6{,}3 \leqslant a \cdot b \leqslant 8{,}4 \cdot 6{,}5, \\ 51{,}66 \leqslant a \cdot b \leqslant 54{,}60. \end{array}$$

Rezultāta robežas noapaļojot, tās nedrīkst sašaurināt, tāpēc apakšējā robeža jānoapaļo ar iztrūkumu, bet augšējā — ar uzviju:

$$51 \leqslant a \cdot b \leqslant 55,$$

$$51 \leqslant S \leqslant 55 \text{ jeb } S = 53 \pm 2 \ (\text{m}^2).$$

DALĪŠANA

Traukā ir x riekstu, kas jāsadala vienādi y zēniem, pie tam $45 \leqslant x \leqslant 60$, bet $3 \leqslant y \leqslant 5$. Katrs zēns dabūs $x : y$ riekstu, t. i., vismaz $45:5 = 9$, bet ne vairāk kā $60:3 = 20$ riekstu. Dalījuma aprēķināšanas gaita redzama šādā shēmā:

$$\begin{array}{l} \underline{x} \leqslant x \leqslant \overline{x} \\ \underline{y} \leqslant y \leqslant \overline{y} \\ \hline \underline{x}:\overline{y} \leqslant x:y \leqslant \overline{x}:\underline{y}. \end{array}$$

Aprēķināt $\frac{m-n}{k}$, ja $9{,}4 \leqslant m \leqslant 9{,}6$; $2{,}1 \leqslant n \leqslant 2{,}2$; $4 \leqslant k \leqslant 5$.

$$\begin{array}{l} 9{,}4 \leqslant m \leqslant 9{,}6 \\ 2{,}1 \leqslant n \leqslant 2{,}2 \\ \hline 9{,}4 - 2{,}2 \leqslant m - n \leqslant 9{,}6 - 2{,}1 \\ 7{,}2 \leqslant m - n \leqslant 7{,}5; \end{array} \qquad \begin{array}{c} 7{,}2 \leqslant m - n \leqslant 7{,}5 \\ 4 \leqslant k \leqslant 5 \\ \hline \frac{7{,}2}{5} \leqslant \frac{m-n}{k} \leqslant \frac{7{,}5}{4} \\ 1{,}44 \leqslant \frac{m-n}{k} \leqslant 1{,}875. \end{array}$$

Rezultātā, robežas noapaļojot (tās paplašinot), iegūst

$$1{,}4 \leqslant \frac{m-n}{k} \leqslant 1{,}9.$$

P i e m ē r s. Ja metāla detaļas masa ir m gramu un tilpums ir V kubikcentimetru, tad metāla blīvumu ρ izsaka formula $\rho = \frac{m}{V}$. Noteikt, kādās robežās ir aprēķinātais metāla blīvums, ja $10 \leqslant m \leqslant 12$ un $2{,}4 \leqslant V \leqslant 2{,}5$.

$$\frac{10}{2{,}5} \leqslant \frac{m}{V} \leqslant \frac{12}{2{,}4};$$

$$4 \leqslant \rho \leqslant 5.$$

5.6. VIENKĀRŠOTAIS PAŅĒMIENS DARBĪBĀS AR TUVINĀJUMIEM

Šo paņēmienu darbību rezultātu precizitātes noteikšanai izmanto tad, ja skaitļi doti vienkāršotajā pierakstā, t. i., uzrādot tikai to ticamos ciparus.

SASKAITĪŠANA UN ATŅEMŠANA

Summā un starpībā atstājami tikai to šķiru cipari, kas ticami dotajos skaitļos.

Lai atvieglotu aprēķinu, jau pirms darbības izdarīšanas dotos skaitļus var noapaļot, ņemot vērā precizitāti, kāda paredzama rezultātā, bet saglabājot vienu t. s. rezerves ciparu.

Summā $53{,}074 + 128{,}2 + 0{,}5861$ kā ticamus drīkst uzskatīt tikai desmitdaļu un augstāko šķiru ciparus, jo otrā saskaitāmā pēdējā ticamā šķira ir desmitdaļas. Tāpēc jau iepriekš var noapaļot arī pirmo un trešo saskaitāmo, paturot kā rezerves ciparu arī simtdaļu ciparu:

$$\begin{array}{r} 53{,}07 \\ 128{,}2 \\ 0{,}59 \\ \hline 181{,}86 \approx 181{,}9. \end{array}$$

Starpībā $74{,}32 - 5{,}07583$ ticami ir simtdaļu un augstāko šķiru cipari. Tāpēc iepriekš var noapaļot mazinātāju, paturot rezerves ciparu:

$$\begin{array}{r} 74{,}32 \\ -5{,}076 \\ \hline 69{,}244 \approx 69{,}24. \end{array}$$

REIZINĀŠANA UN DALĪŠANA

Reizinājumā un dalījumā jāatstāj tik zīmīgo ciparu, cik to ir dotajā skaitlī ar vismazāko zīmīgo ciparu skaitu.

Arī te aprēķinu atvieglošanai drīkst skaitļus iepriekš noapaļot, paturot vienu rezerves ciparu.

1) $36{,}42 \cdot 2{,}3 \approx 84;$

$$\begin{array}{r} 36{,}4 \\ \cdot 2{,}3 \\ \hline 1092 \\ 728 \\ \hline 83{,}72 \approx 84 \end{array}$$

2) $3{,}642 : 0{,}023 \approx 160.$

$$3{,}64 : 0{,}023 = 158 \approx 160$$

$$\begin{array}{l} 3640:23 \\ \underline{23} \\ 134 \\ \underline{115} \\ 190 \end{array}$$

Pēdējā piemērā dalītājā ir 2 zīmīgi cipari, tāpēc arī dalījumā jāpatur tikai 2 zīmīgi cipari. Līdz ar to dalāmo drīkst jau iepriekš noapaļot līdz 3 zīmīgiem cipariem, bet dalījumā par ticamiem var uzskatīt tikai desmitu un simtu ciparus.

3) Aprēķināt 9 detaļu kopējo masu, ja katras detaļas masa ir 8,4 kg.

$8{,}4 \cdot 9 = 75{,}6 \approx 76$ (kg).

Detaļu skaits 9 ir precīzs skaitlis, tāpēc tā zīmīgo ciparu skaits ir neierobežots ($9 = 9{,}000\ldots$). Līdz ar to reizinājuma zīmīgo ciparu skaitu nosaka reizinātājs 8,4, kurā ir 2 zīmīgie cipari.

IZTEIKSMES AR VAIRĀKĀM DARBĪBĀM

Ja izteiksmē ir vairāk nekā divas darbības, tad aprēķinu starprezultātos jāpatur viens rezerves cipars.

$58{,}21 - 4{,}5:0{,}22 \approx 38$, jo

$4{,}5:0{,}22 = 20{,}45\ldots \approx 20{,}5$ un

$$\begin{array}{l} 450:22 \\ \overline{\ 100} \\ \overline{\ 120} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 58{,}2 \\ -20{,}5 \\ \hline 37{,}7 \approx 38. \end{array}$$

Ja dalījums būtu aprēķina galarezultāts, tad tajā būtu atstājami tikai 2 zīmīgie cipari, proti, 20. Bet, tā kā šis dalījums tālāk iesaistāms nākamajā darbībā, tad tajā atstāj 3 zīmīgos ciparus (ar vienu rezerves ciparu). Nākamajā darbībā mazināmo 58,21 drīkst jau iepriekš noapaļot līdz desmitdaļām, jo mazinātājā pēdējā ticamā šķira ir vieni (desmitdaļu cipars 5 ir tikai rezerves cipars).

P i e m ē r s. Regulāra sešstūra malas garums ir 7,8 cm. Aprēķināt sešstūra perimetru.

$7{,}8 \cdot 6 = 46{,}8 \approx 47$ (cm).

Tā kā sešstūra malu skaits ir precīzs skaitlis, tad tā zīmīgo ciparu skaits ir neierobežots ($6 = 6{,}0000\ldots$), līdz ar to skaitlis 7,8 ir reizinātājs ar mazāko zīmīgo ciparu skaitu (divi), tāpēc arī reizinājumā jāpatur ne vairāk kā divi zīmīgie cipari.

5.7. NORMĀLFORMĀ RAKSTĪTI SKAITĻI UN DARBĪBAS AR TIEM

SKAITĻU PIERAKSTS NORMĀLFORMĀ

Lai saīsinātu un unificētu skaitļu pierakstus, ir ieviesta pierakstu normālforma $a \cdot 10^n$, kur $1 \leqslant a < 10$. Tad, piemēram, 5362 vietā raksta $5{,}362 \cdot 10^3$; 0,084 vietā raksta $8{,}4 \cdot 10^{-2}$. Tuvinājuma $5{,}362 \cdot 10^3$ absolūtā kļūda (pareizāk — tās robeža) tad ir $0{,}001 \cdot 10^3 = 1$ jeb skaitlis ir dots ar precizitāti līdz vienam veselam; skaitļa $8{,}4 \cdot 10^{-2}$

absolūtā kļūda (tās robeža) ir $0{,}1\cdot10^{-2}=0{,}001$ jeb skaitlis dots ar precizitāti līdz 0,001 u. tml.

P i e m ē r i. 1)

Vienkāršotais pieraksts	Pieraksts normālformā
38	$3{,}8\cdot10$
0,00064	$6{,}4\cdot10^{-4}$
58,2	$5{,}82\cdot10$
0,7	$7\cdot10^{-1}$

2) Pierakstīt normālformā šādus skaitļus:

$a=800$ (pilnos simtos); $b=900$; $c=74{,}3$; $d=5{,}6\pm0{,}3$; $e=4{,}26$; $f=0{,}0085$; $g=4300\pm10$.

$a=8\cdot10^2$; $b=9{,}00\cdot10^2$; $c=7{,}43\cdot10$; $d=6\cdot10^0$ jeb $d=6$; $e=4{,}26\cdot10^0$ jeb $e=4{,}26$; $f=8{,}5\cdot10^{-3}$; $g=4{,}30\cdot10^3$.

DARBĪBAS AR TUVINĀJUMIEM NORMĀLFORMĀ

Saskaitot un atņemot tuvinājumus, tie vispirms jāpārraksta tā, lai komponentēs reizinātāji 10 būtu ar vienādiem kāpinātājiem. Tad, uzskatot šīs skaitļa 10 pakāpes it kā par komponentu nosaukumiem, darbību izdara tikai ar attiecīgajiem skaitļiem pēc vienkāršotā paņēmiena (sk. 5.6.).

1) $8{,}73\cdot10^3+5{,}86\cdot10^2=8{,}73\cdot10^3+0{,}586\cdot10^3=$
$=(8{,}73+0{,}586)\cdot10^3=9{,}316\cdot10^3\approx9{,}32\cdot10^3$.

Tā kā summā (iekavās) $8{,}73+0{,}586$ simtdaļu cipars ir ticams tikai otrajā saskaitāmā, tad summa 9,316 jānoapaļo ar precizitāti līdz desmitdaļām.

Cits atrisinājuma variants:

$8{,}73\cdot10^3+5{,}86\cdot10^2=87{,}3\cdot10^2+5{,}86\cdot10^2=$
$=93{,}16\cdot10^2\approx93{,}2\cdot10^2=9{,}32\cdot10^3$.

Kā redzams, iegūtā summa 93,16 ir jānoapaļo ar precizitāti līdz desmitdaļām, proti, uz 93,2, bet pēc tam rezultāts $93{,}2\cdot10^2$ vēl jāpārraksta normālformā.

2) $7{,}2\cdot10^{-1}-2{,}36\cdot10^{-2}=$
$=(7{,}2-0{,}236)\cdot10^{-1}=$
$=7{,}0\cdot10^{-1}$.

$$\begin{array}{r} 7{,}2 \\ -0{,}24 \\ \hline 6{,}96 \approx 7{,}0. \end{array}$$

Reizinot vai dalot tuvinājumus, attiecīgi reizina vai dala arī skaitļa 10 pakāpes, bet ar dotajiem skaitļiem izdara darbības pēc vienkāršotā paņēmiena (sk. 5.6.).

1) $(7\cdot10^{-3}):(2{,}38\cdot10^{-1})=$
$=(7:2{,}38)\cdot10^{-2}=$
$=3\cdot10^{-2}$.

$$\begin{array}{l} 7:2{,}4=2{,}9\ldots\approx3. \\ \underline{70:24} \\ \underline{48} \\ 220 \end{array}$$

Tā kā dalījumā (iekavās) 7:2,38 drīkst paturēt tikai vienu zīmīgo ciparu, tad jau pirms dalīšanas šo dalījumu var aizstāt ar dalījumu 7:2,4 (paturot dalītājā tikai vienu t. s. rezerves ciparu) un dalījumā pirms tā noapaļošanas pietiek aprēķināt tikai divus zīmīgus ciparus.

2) Aprēķināt izteiksmju vērtības:

a) $3{,}4\cdot10^{-1}+8{,}6\cdot10^{-3}=3{,}4\cdot10^{-1}+0{,}086\cdot10^{-1}=$
$=(3{,}4+0{,}086)\cdot10^{-1}\approx3{,}5\cdot10^{-1}$;

b) $(7{,}4\cdot10^{-3})\cdot(5{,}3\cdot10^{5})=(7{,}4\cdot5{,}3)\cdot10^{2}\approx39\cdot10^{2}=$
$=3{,}9\cdot10^{3}$.

Te reizinājums $7{,}4\cdot5{,}3=39{,}22$ saskaņā ar reizināšanas vienkāršotā paņēmiena kārtulu jānoapaļo līdz 2 zīmīgiem cipariem, t. i., līdz 39.

6. REĀLIE SKAITĻI

6.1. RACIONĀLO SKAITĻU NEPIETIEKAMĪBA

RACIONĀLIE SKAITĻI

Par racionāliem skaitļiem sauc skaitļus, kuri izsakāmi daļas $\frac{m}{n}$ veidā, kur m ir vesels skaitlis, bet n ir naturāls skaitlis, piemēram, $\frac{3}{4}$, $\frac{-2}{7}$, $\frac{0}{13}$ u. tml.

Pie racionāliem skaitļiem pieder

a) veselie skaitļi (tos var izteikt kā daļu $\frac{m}{n}$):

$$5=\frac{10}{2}=\frac{35}{7}\text{ u. tml.};\quad -13=\frac{-13}{1}=\frac{-52}{4}\text{ u. tml.};$$

$$0=\frac{0}{7}=\frac{0}{2}\text{ u. tml.};$$

b) parastās daļas (tās jau ir izteiktas veidā $\frac{m}{n}$) un jauktie skaitļi:

$$\frac{3}{8};\ -\frac{1}{3}=\frac{-1}{3};\ -2\frac{4}{5}=-\frac{14}{5}=\frac{-14}{5};$$

c) galīgās decimāldaļas:

$$0{,}8=\frac{8}{10};\ -5{,}06=\frac{-506}{100};$$

d) periodiskās decimāldaļas:

$$-0{,}3636\ldots=-\frac{36}{99}=-\frac{4}{11}=\frac{-4}{11};$$

$$1{,}58(3)=1\frac{583-58}{900}=1\frac{525}{900}=1\frac{7}{12}=\frac{19}{12}.$$

KĀDAS MATEMĀTISKĀS DARBĪBAS IZPILDĀMAS, PAZĪSTOT TIKAI RACIONĀLOS SKAITĻUS

Jebkurus divus racionālus skaitļus var saskaitīt, atņemt, reizināt, dalīt (izņemot dalīšanu ar nulli), iegūstot racionālu skaitli arī rezultātā:

1) $4{,}3 + \frac{1}{2} = 4{,}3 + 0{,}5 = 4{,}8$;

2) $2:0{,}6 = 2:\frac{3}{5} = 3\frac{1}{3}$;

3) $0{,}1818\ldots - \frac{5}{6} = \frac{18}{99} - \frac{5}{6} = \frac{2}{11} - \frac{5}{6} = \frac{12}{66} - \frac{55}{66} = -\frac{43}{66}$.

VAI EKSISTĒ TĀDS RACIONĀLS SKAITLIS, KURA KVADRĀTS IR 5?

Mēģinājumu ceļā meklējot tādu skaitli x, lai $x^2 = 5$, redzams, ka

$2^2 = 4$, $3^2 = 9$, tātad $2 < x < 3$;
$2{,}2^2 = 4{,}48$, $2{,}3^2 = 5{,}29$, tātad $2{,}2 < x < 2{,}3$;
$2{,}23^2 = 4{,}9729$, $2{,}24^2 = 5{,}0176$, tātad $2{,}23 < x < 2{,}24$.

Tā turpinot, iespējams atrast skaitli x ar pēc patikas lielu precizitāti, piemēram, ar precizitāti līdz 0,0000001:

$2{,}2360679 < x < 2{,}2360680$.

Rodas šāds jautājums: vai, tā turpinot, beidzot iegūsim tādu galīgu vai periodisku decimāldaļu, kuras kvadrāts ir precīzi vienāds ar skaitli 5. Atbilde uz šo jautājumu dota nākamajā punktā.

NEEKSISTĒ TĀDS RACIONĀLS SKAITLIS, KURA KVADRĀTS IR VIENĀDS AR 5

Pamatosim šo apgalvojumu.

Nav tāda vesela skaitļa x, ka $x^2 = 5$ jeb $x \cdot x = 5$, jo $2 \cdot 2 < 5$, bet $3 \cdot 3 > 5$.

Ja x būtu kāds racionāls skaitlis, kas nav vesels skaitlis (tātad, ja x būtu kāds parastais daļskaitlis vai galīgs vai periodisks decimāldaļskaitlis), tad tas būtu izsakāms kā nesaīsināma daļa $x = \frac{m}{n}$ un jābūt pareizai vienādībai

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} = 5 \text{ jeb } \frac{m \cdot m}{n \cdot n} = 5.$$

Taču pēdējā vienādība ir neiespējama, jo tās labajā pusē ir vesels skaitlis, bet kreisajā pusē — nesaīsināms daļskaitlis (daļa $\frac{m \cdot m}{n \cdot n}$ nav saīsināma, jo m un n ir savstarpēji pirmskaitļi). Tātad tiešām nav tāda racionāla skaitļa, kura kvadrāts ir vienāds ar skaitli 5.

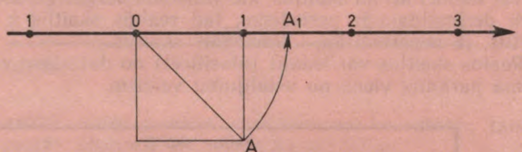
KUR MATEMĀTIKĀ VĒL PARĀDĀS RACIONĀLO SKAITĻU NEPIETIEKAMĪBA?

Ja, piemēram, jākonstruē kvadrāts, kura laukums ir 16 cm^2, tad tā malas garumam jābūt 4 cm, jo $4 \cdot 4 = 16$; ja kvadrāta laukums ir 2,89 m^2, tad tā malas garums ir 1,7 m, jo $1{,}7^2 = 2{,}89$; ja kvadrāta laukums ir $5\frac{4}{9}$ m^2, tad tā malas garums ir $2\frac{1}{3}$ m, jo $(2\frac{1}{3})^2 = \frac{7 \cdot 7}{3 \cdot 3} = 5\frac{4}{9}$ utt. Bet, ja, piemēram, jākonstruē kvadrāts, kura laukums ir 5 cm^2, tad tā malas garumu precīzi nevar izteikt ne ar kādu racionālu skaitli (tas pierādīts iepriekšējā punktā).

Ar racionālu skaitli nevar izteikt arī tāda kuba šķautnes garumu, kura tilpums ir 7 cm^3, tādas riņķa līnijas garumu, kuras rādiuss ir 1 cm (jo skaitlis π nav racionāls skaitlis). Nav arī tāda racionāla skaitļa x, ka $x^2 = 2$, $x^2 = 3$, $x^3 = 4$ u. c.

RACIONĀLIE SKAITĻI UN KOORDINĀTU TAISNES PUNKTI

Ar racionālu skaitli, starp citu, nevar izteikt arī tāda kvadrāta diagonāles garumu, kura malas garums ir, piemēram, 1 garuma vienība. Līdz ar to saprotams, ka nav tāda racionāla skaitļa, kas uz koordinātu taisnes atbilstu punktam A_1 (15. zīm.), ja $OA_1 = OA$ ir tāda kvadrāta diagonāles garums, kura malas garums ir koordinātu taisnes vienības nogrieznis.



15. zīm.

Tātad katram racionālam skaitlim uz koordinātu taisnes gan atbilst kāds viens punkts, bet ne katram punktam uz koordinātu taisnes atbilst kāds racionāls skaitlis. Vispār uz koordinātu taisnes eksistē bezgalīgi daudz tādu punktu, kuriem atbilst kāds racionāls skaitlis, gan arī bezgalīgi daudz tādu punktu, kuriem neatbilst nekāds racionāls skaitlis.

6.2. REĀLO SKAITĻU JĒDZIENS

IRACIONĀLIE SKAITĻI

Par iracionāliem skaitļiem sauc skaitļus, kas izsakāmi kā bezgalīgas neperiodiskas decimāldaļas.

Tā, piemēram, ja $x^2 = 5$, tad skaitlis $x = 2{,}2360679\ldots$ ir iracionāls skaitlis. Arī riņķa līnijas un tās diametra garumu attiecība $\pi = 3{,}141592653589793\ldots$ ir iracionāls skaitlis. Vispār jebkura decimāldaļa, kurā aiz komata ir bezgalīgi daudz decimālciparu, ir iracionāls skaitlis, ja vien šī decimāldaļa nav periodiska.

Ir ne tikai pozitīvi, bet arī negatīvi iracionāli skaitļi, piemēram, $-\sqrt{5} = -2{,}2360679\ldots$; $-0{,}13133133313333\ldots$. Der ievērot, ka nulle nav iracionāls, bet racionāls skaitlis, jo to var izteikt kā daļu $\frac{m}{n}$, piemēram, $0 = \frac{0}{7}$; $0 = \frac{0}{13}$ u. tml.

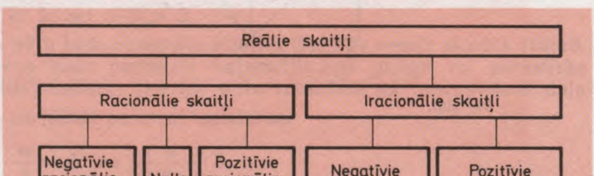
Praktiskos aprēķinos iracionālus skaitļus parasti aizstāj ar tuvinātiem racionāliem skaitļiem. Tā, piemēram, par skaitli x, kura kvadrāts ir vienāds ar 5, aptuveni var pieņemt racionālu skaitli $x = 2{,}23$ vai $x = 2{,}24$, jo $2{,}23^2 = 4{,}9729$ un $2{,}24^2 = 5{,}0176$.

REĀLIE SKAITĻI

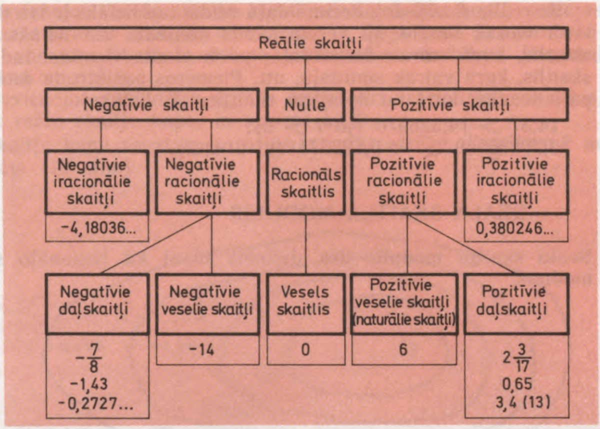
Racionālos un iracionālos skaitļus kopējā vārdā sauc par reāliem skaitļiem.

Galīgās decimāldaļas un veselus skaitļus var uzrakstīt arī kā bezgalīgas periodiskas decimāldaļas, kuru periods ir cipars 0, piemēram: $0{,}47 = 0{,}4700\ldots$; $52 = 52{,}00\ldots$. Tāpēc reālos skaitļus var definēt arī kā skaitļus, kas izsakāmi bezgalīgā decimāldaļā. Ja šī decimāldaļa ir periodiska, tad reālais skaitlis ir racionāls skaitlis, ja neperiodiska,— iracionāls skaitlis.

Reālos skaitļus var iedalīt (klasificēt) no dažādiem viedokļiem. Shēmā parādīts viens no iedalījumu veidiem.

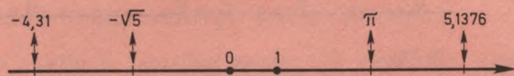


Pēdējos (apakšējos) skaitļu veidus var savukārt iedalīt tālāk. Nākamajā shēmā parādīts reālo skaitļu citāds — detalizētāks iedalījums.



REĀLIE SKAITĻI UN KOORDINĀTU TAISNES PUNKTI

Katram reālam skaitlim atbilst viens vienīgs koordinātu taisnes punkts, un arī katram koordinātu taisnes punktam atbilst viens vienīgs reālais skaitlis — vai nu racionāls, vai iracionāls skaitlis (16. zīm.).

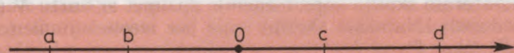


16. zīm.

Citādi sakot, starp reāliem skaitļiem un koordinātu taisnes punktiem pastāv abpusēji viennozīmīga atbilstība.

REĀLO SKAITĻU SALĪDZINĀŠANA PĒC LIELUMA

No diviem reāliem skaitļiem lielāks (mazāks) ir tas, kuram atbilstošais koordinātu taisnes punkts atrodas vairāk pa labi (pa kreisi) (17. zīm.).



17. zīm.

$a < b$; $a < 0$; $c > a$; $0 < c$.

Ja reālie skaitļi doti decimāldaļu veidā, tad lielāks ir tas skaitlis, kurā vairāk veselo; ja veselo skaits vienāds, tad lielāks ir tas skaitlis, kurā vairāk desmitdaļu; ja to skaits vienāds, tad — tas skaitlis, kurā vairāk simtdaļu, utt. Piemēros pasvītrotie decimālcipari nosaka, kurš no dotajiem skaitļiem ir lielāks:

$14{,}3\underline{7} > 14{,}3\underline{2}8976$ (jo $7 > 2$);
$0{,}7983\underline{6}549\ldots < 0{,}7983\underline{7}1$ (jo $6 < 7$).

REĀLA SKAITĻA MODULIS

Reālo skaitļu modulis tiek definēts tāpat kā racionālo skaitļu modulis.

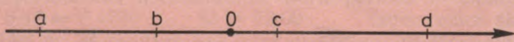
Par reāla skaitļa a moduli sauc šim skaitlim atbilstošā koordinātu taisnes punkta attālumu līdz koordinātu sākumpunktam.

Reāla skaitļa moduļa jēdzienu var definēt arī tā: par nenegatīva skaitļa moduli sauc pašu skaitli, bet par negatīva skaitļa moduli — pretējo skaitli. To pieraksta šādi:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ ja } a \geqslant 0 \\ -a, \text{ ja } a < 0. \end{cases}$$

$|2{,}41327\ldots| = 2{,}41327\ldots$; $|0| = 0$; $|-0{,}58| = -(-0{,}58) = 0{,}58$.

Tālāk parādītas dažas sakarības starp 18. zīmējumā attēlotajiem skaitļiem un to moduļiem.



18. zīm.

$a < b$;	$b < c$;	$c < d$;
$\|a\| > \|b\|$;	$\|b\| > \|c\|$;	$\|c\| < \|d\|$;
$c > b$;	$a < d$;	$\|c\| = c$;
$\|c\| < \|b\|$;	$\|a\| = \|d\|$;	$\|a\| > a$.

REĀLO SKAITĻU KOPA

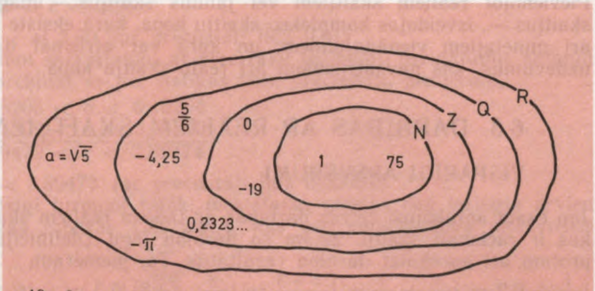
Cilvēce savā attīstības gaitā vispirms iepazinās ar šķietami «vienkāršākajiem» skaitļiem 1, 2, 3, 4 utt. jeb ar naturālajiem skaitļiem. Visu naturālo skaitļu kopu pieņemts apzīmēt ar burtu **N** (pustreknā iespiedumā). Naturālo skaitļu kopā bez ierobežojumiem iespējams izpildīt tikai divas darbības — saskaitīšanu un reizināšanu.

Pievienojot naturālo skaitļu kopai arī skaitli 0 un negatīvos veselos skaitļus, rodas veselo skaitļu kopa, ko apzīmē ar **Z**. Veselo skaitļu kopā bez ierobežojuma var izpildīt arī atņemšanas darbību.

Pievienojot veselu skaitļu kopai arī daļskaitļu kopu, veidojas racionālu skaitļu kopa, ko apzīmē ar Q. Šajā kopā bez ierobežojuma var izpildīt visas četras aritmētiskās darbības (izņemot dalīšanu ar nulli).

Pievienojot racionālu skaitļu kopai arī iracionālus skaitļus, rodas reālu skaitļu kopa, to apzīmē ar R.

Skaitļu kopu savstarpējo attieksmi var attēlot diagrammā ar figūrām (19 zīm.).



19. zīm.

Reālo skaitļu kopa daudzējādā ziņā ir vēl «pilnīgāka» nekā racionālo skaitļu kopa (sk. nākamo punktu!).

DAŽAS REĀLO SKAITĻU KOPAS ĪPAŠĪBAS

Racionālo skaitļu ir bezgalīgi daudz, arī iracionālo skaitļu ir bezgalīgi daudz, bet reālo skaitļu ir «vēl vairāk», jo pie tiem pieder gan racionālie, gan iracionālie skaitļi. Līdz ar to reālo skaitļu kopa ir ne tikai «bagātāka», bet arī «pilnīgāka» nekā racionālo skaitļu kopa.

Racionālo skaitļu kopā starp jebkuriem diviem skaitļiem atrodas pēc patikas daudz racionālo skaitļu. Piemēram, starp diviem it kā «tuviem» skaitļiem 0,001 un 0,002 atrodas skaitlis $(0{,}001 + 0{,}002):2 = 0{,}0015$ un vēl bezgalīgi daudz skaitļu. Taču, neraugoties uz šo racionālo skaitļu kopas blīvumu, ar racionāliem skaitļiem nevar «aizņemt» koordinātu taisnes visus punktus — paliek «brīvi» bezgalīgi daudz punktu, kuriem piekārto iracionālos skaitļus. Turpretim reālo skaitļu kopa ir «vēl blīvāka» nekā racionālo (vai iracionālo) skaitļu kopa: ne tikai katram reālam skaitlim atbilst kāds koordinātu taisnes punkts, bet arī otrādi — katram koordinātu taisnes punktam atbilst kāds reāls skaitlis. Tāpēc saka, ka reālo skaitļu kopa ir ne tikai blīva, bet arī nepārtraukta (bez «tukšumiem»).

Reālo skaitļu kopā, tāpat kā racionālo skaitļu kopā, ir iespējams izdarīt saskaitīšanu, atņemšanu, reizināšanu un dalīšanu (izņemot dalīšanu ar nulli), bez tam vēl arī atrisināt tādus uzdevumus, kas racionālo skaitļu kopā nebija atrisināmi, piemēram, aprēķināt pakāpi $4^{1,5}$; aprēķināt kāpinātāju vienādojumā $3^x = 10$; atrast skaitli, kura kvadrāts ir vienāds ar 7, u. c.

Taču arī reālo skaitļu kopā nav atrisināmi visi uzdevumi. Tā, piemēram, nevar atrisināt vienādojumus $x^2 = -1$, $x^4 = -16$ u. c. Pievienojot reāliem skaitļiem vēl jaunus skaitļus — imagināros skaitļus —, izveidojas komplekso skaitļu kopa, kurā eksistē saknes arī minētajiem vienādojumiem, un kurā var atrisināt daudzus uzdevumus, kas nav atrisināmi arī reālo skaitļu kopā.

6.3. DARBĪBAS AR REĀLIEM SKAITĻIEM

VISPĀRĪGI APSVĒRUMI

Jau esam aplūkojuši četras darbības ar tādiem reāliem skaitļiem, kas ir racionāli skaitļi, zinām šo darbību jēgu (definīcijas) un protam arī aprēķināt darbību rezultātus. Tā, piemēram,
$1\frac{1}{3} + 0{,}2 = 1\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = 1\frac{5+3}{15} = 1\frac{8}{15}$; $(-8):0{,}5 = -16$ u. tml.
Ja turpretim kaut viena no darbības abām komponentēm ir iracionāls skaitlis, piemēram, $8{,}357824 - 2{,}41307896\ldots$ vai $0{,}28701609\ldots \cdot 5{,}03976504\ldots$, tad rodas jautājums gan par šo darbību jēgu, gan arī par to, kā praktiski aprēķināt rezultātus. Atbildi uz šiem jautājumiem rod, aizstājot darbību iracionālās komponentes ar to racionāliem tuvinājumiem, tā iegūstot rezultātus ar pēc patikas lielu precizitāti. Līdz ar to darbības saglabā visas tās pašas īpašības, kas piemīt darbībām ar racionāliem skaitļiem.

Šī paragrāfa turpmākajos punktos aplūkosim darbības tikai ar pozitīviem reāliem skaitļiem. Ja kāda no komponentēm ir negatīva, tad darbības reducējas uz darbībām ar pozitīviem moduļiem, bet, ja kāda komponente ir vienāda ar nulli, tad darbības rezultāts nosakāms bez grūtībām.

SASKAITĪŠANA

Par divu reālu skaitļu summu sauc tādu reālu skaitli, kas ieslēgts robežās starp saskaitāmo jebkuru apakšējo racionālo tuvinājumu summu un jebkuru augšējo racionālo tuvinājumu summu. Tātad, ja $\underline{a} \leqslant a \leqslant \overline{a}$ un $\underline{b} \leqslant b \leqslant \overline{b}$, kur $\underline{a}$, $\overline{a}$, $\underline{b}$, $\overline{b}$ ir reālo skaitļu a un b racionālie tuvinājumi, kas ņemti attiecīgi ar iztrūkumu vai uzviju, tad par skaitļu a un b summu $a + b = c$ sauc tādu reālu skaitli c, ka jebkuriem $\underline{a}$, $\overline{a}$, $\underline{b}$, $\overline{b}$ ir pareiza sakarība $\underline{a} + \underline{b} \leqslant c \leqslant \overline{a} + \overline{b}$ (sk. 5.5.).

P i e z ī m e. Ja darbības viena komponente ir racionāls skaitlis, tad, protams, tā «tuvinājuma» vietā jāsaprot pats skaitlis.

Aprēķināt skaitļu $a = 0{,}152637\ldots$ un $b = 3{,}742096\ldots$ summu $a + b = c$.

Varam ieslēgt saskaitāmos robežās ar precizitāti, piemēram, līdz 0,01 un aprēķināt summu c ar atbilstošo precizitāti:

$$\begin{array}{l} 0{,}15 < a < 0{,}16 \\ \underline{3{,}74 < b < 3{,}75} \\ 3{,}89 < c < 3{,}91 \end{array}$$

jeb $c \approx 3{,}90$ (ar precizitāti līdz 0,01).

Ņemot saskaitāmos ar precīzāku racionālu tuvinājumu, summu var aprēķināt ar pēc patikas lielu precizitāti, piemēram,

$$\begin{array}{l} 0{,}15263 < a < 0{,}15264 \\ \underline{3{,}74209 < b < 3{,}74210} \\ 3{,}89472 < c < 3{,}89474 \end{array}$$

jeb $c \approx 3{,}89473$ (ar precizitāti līdz 0,00001).

Līdzīgi turpinot tālāk, meklējamā summa tiek ieslēgta arvien šaurākās robežās (20. zīm.), kas pēc patikas tuvu pietuvosies

20. zīm.

kādam reālam skaitlim. Tas tad arī tiek pieņemts par reālo skaitļu a un b summu $a + b = c$.

REIZINĀŠANA

Divu reālu pozitīvu skaitļu a un b reizinājumu definē un aprēķina līdzīgi kā šo skaitļu summu: par reālu skaitļu a un b reizinājumu $a \cdot b = c$ sauc tādu reālu skaitli c, ka jebkuriem $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\overline{a}$, $\overline{b}$ ir pareiza sakarība

$$\underline{a} \cdot \underline{b} \leqslant c \leqslant \overline{a} \cdot \overline{b} \quad \text{(sk. 5.5.)}.$$

P i e m ē r s. Ja riņķa līnijas diametra garums $D = 1{,}63$ m (ar precizitāti līdz 0,01 m), tad, zinot, ka $\pi = 3{,}14159\ldots$, varam aprēķināt riņķa līnijas garumu $C = \pi D$, izvēloties iracionālā reizinātāja π vērtību ar piemērotu racionālu tuvinājumu (ar 4 zīmīgiem cipariem):

$$\begin{array}{l} 1{,}62 < D < 1{,}64 \\ \underline{3{,}141 < \pi < 3{,}142} \\ 5{,}08842 < C < 5{,}15288 \end{array}$$

jeb $C \approx (5{,}09 + 5{,}15):2 = 5{,}12$ (m).

P i e z ī m e. Šajā piemērā π vērtībai nav vērts ņemt vairāk kā 4 zīmīgus ciparus, jo otrs reizinātājs (diametra garums) ir dots tikai ar trim zīmīgiem cipariem. Līdz ar to reizinājumu (riņķa līnijas garumu) nevar noteikt precīzāk kā ar trim zīmīgiem cipariem.

ATŅEMŠANA

Divu reālu skaitļu atņemšanu definē tāpat kā racionālo skaitļu atņemšanu, t. i., kā saskaitīšanai apgrieztu darbību: no reāla skaitļa a atņemt reālu skaitli b nozīmē atrast tādu trešo skaitli c, ka $b + c = a$.

Lai tādu skaitli atrastu, t. i., lai aprēķinātu reālo skaitļu a un b starpību c, tad, līdzīgi kā summas un reizinājuma aprēķināšanā, reālos skaitļus var ieslēgt racionālu tuvinājumu robežās un tad noteikt starpības robežas (sk. 5.5.).

DALĪŠANA

Reālu skaitļu dalīšanu definē līdzīgi kā racionālu skaitļu dalīšanu, t. i., kā reizināšanai apgrieztu darbību: dalīt skaitli a ar b nozīmē atrast tādu skaitli c, ka $b \cdot c = a$. Protams, ka dalīšana nav iespējama, ja $b = 0$.

Dalījumu aprēķina, ieslēdzot dotos skaitļus un līdz ar to dalījumu pēc patikas šaurās robežās (sk. 5.5.).

DARBĪBU REZULTĀTU VIENKĀRŠOTA APRĒĶINĀŠANA

Praksē, meklējot darbībām ar reāliem skaitļiem tuvinātus rezultātus, ne vienmēr šos skaitļus ieslēdz robežās, bet to vietā ņem racionālus tuvinājumus ar nepieciešamo precizitāti. Tā, piemēram, lai aprēķinātu pakāpi π^2 ar trim zīmīgiem cipariem, iracionālo skaitli π aizstāj ar tā tuvināto vērtību arī ar trim vai četriem zīmīgiem cipariem: $\pi \approx 3{,}142$, tāpēc $\pi^2 \approx 3{,}142^2 \approx 9{,}87$.

② Algebra

7. IZTEIKSMES UN IDENTITĀTES

7.1. ALGEBRISKĀS IZTEIKSMES

BURTI SKAITĻU VIETĀ

Skaitļus apzīmē ne tikai ar cipariem, bet arī ar burtiem *a, b, c, x, y* u. c.

Ja nav īpašu ierobežojumu, tad burta vietā var domāt jebkuru skaitli. Piemēram, vienādība $u \cdot 0 = 0$ izsaka vispārīgu apgalvojumu, ka jebkura skaitļa reizinājums ar nulli ir vienāds ar nulli; vienādība $a + b = b + a$ izsaka vispārīgu apgalvojumu, ka jebkuru divu skaitļu summa nemainās, ja saskaitāmos pārvieto.

Arī izteiksmē $3c - 1$ burtam *c* var piešķirt jebkuras skaitliskās vērtības, pie tam, mainoties burta *c* vērtībām, mainīsies arī izteiksmes vērtība.

Tāpēc ar burtiem apzīmētos skaitļus sauc par vispārīgiem skaitļiem jeb mainīgajiem.

(Atšķirībā no vispārīgiem skaitļiem, tādus skaitļus, kas apzīmēti ar cipariem, piemēram, 37, $\frac{4}{5}$ u. tml., var saukt par noteiktiem skaitļiem.)

ALGEBRISKĀS IZTEIKSMES JĒDZIENS

Matemātisko izteiksmi, kurā ir tikai ar cipariem apzīmēti skaitļi, sauc par skaitlisku izteiksmi jeb par aritmētisku izteiksmi, piemēram, $38 - 2{,}5$; $12 - (8 + (6 - 9) \cdot 4)$ (sk. 1.9.). Matemātisko izteiksmi, kurā ir arī mainīgie, sauc par izteiksmi ar mainīgajiem jeb par algebrisku izteiksmi, piemēram,

$37 - m$; $-0{,}3a^2b$.

ALGEBRISKĀS IZTEIKSMES VĒRTĪBA

Ievietojot katra mainīgā vietā kādu skaitli, algebriskā izteiksme pārveidojas par skaitlisko izteiksmi, kuras vērtību var aprēķināt saskaņā ar darbību secības kārtulām.

1. uzdevums. Aprēķināt izteiksmes $3m^2 - n - m$ vērtību, ja $m = 2$ un $n = -3$.

Atrisinājums. Ja $m = 2$ un $n = -3$, tad $3m^2 - n - m = 3 \cdot 2^2 - (-3) - (+2) = 3 \cdot 4 + 3 - 2 = 13$.

Ievērot, ka, ievietojot izteiksmē mainīgo vērtības, $-n$ vietā jāraksta $-(-3)$ un $-m$ vietā jāraksta $-(+2)$.

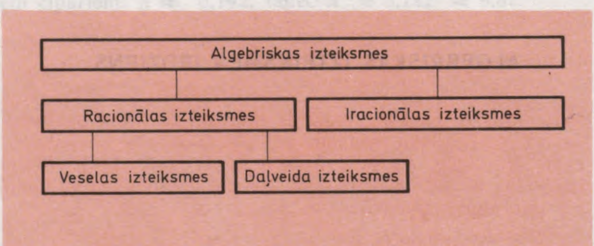
RACIONĀLA UN IRACIONĀLA ALGEBRISKĀ IZTEIKSME

Algebriskās izteiksmes mēdz iedalīt racionālās un iracionālās izteiksmēs.

Ja izteiksmē ir tikai saskaitīšana, atņemšana, reizināšana, dalīšana un kāpināšana (ar naturālu kāpinātāju), tad šādu izteiksmi sauc par racionālu algebrisku izteiksmi (tātad racionālā algebriskā izteiksmē nav saknes un pakāpes ar daļveida kāpinātāju), piemēram, $13 - 2y^3$; $\frac{5m^3 + 7}{3m}$.

Racionālās algebriskās izteiksmes savukārt iedala veselās racionālās izteiksmēs (dalītājs nesatur mainīgo) un daļveida racionālās izteiksmēs (dalītājs satur mainīgo). Piemēram, $2xy$ un $3x^2 + y - \frac{2z}{5}$ ir veselas, bet $\frac{2xy}{z}$, $\frac{a - b}{a + 3}$ un $9 - \frac{5}{c}$ — daļveida racionālas izteiksmes.

Ja mainīgo satur zemsaknes izteiksme vai tādas pakāpes bāze, kuras kāpinātājs ir daļa, tad tādu izteiksmi sauc par iracionālu algebrisku izteiksmi, piemēram, $a^2 + \sqrt{a - 3}$, $(m - 0{,}2)^{0{,}5}$.



ALGEBRISKĀS IZTEIKSMES DEFINĪCIJAS APGABALS

Ja ar dotajām burtu vērtībām visas algebriskā izteiksmē ietilpstošās darbības ir izpildāmas, tad saka, ka šai izteiksmei ar dotajām burtu vērtībām ir jēga jeb ka izteiksme ar šīm burta vērtībām ir definēta. Turpretī, ja kādu no darbībām nevar izdarīt, tad ar attiecīgajām burtu vērtībām izteiksmei nav jēgas (izteiksme nav definēta).

Šajā sakarā jāatceras, ka saskaitīšanu, atņemšanu, reizināšanu un kāpināšanu (ar naturālu kāpinātāju) var izdarīt ar jebkuriem skaitļiem, bet dalīšana nav iespējama ar nulli. Tāpēc, ja izteiksmē nav dalīšanas ar nulli, izteiksmei ir jēga ar visām burtu skaitliskajām vērtībām. Piemēram, izteiksmei $\frac{5-x}{x+8}$ ir jēga ar jebkurām mainīgā x vērtībām, izņemot vērtību $x=-8$, jo dalījums $\frac{5-(-8)}{-8+8}=\frac{13}{0}$ nav iespējams.

Visu to mainīgā vērtību kopu, ar kurām algebriskai izteiksmei ir jēga, sauc par izteiksmes definīcijas apgabalu.

Tātad izteiksmes $\frac{5-x}{x+8}$ definīcijas apgabals ir visu reālo skaitļu kopa bez skaitļa -8. Šo definīcijas apgabalu var pierakstīt šādi: $(-\infty;+\infty)$ un $x \neq 8$; arī: $x<-8$ vai $x>-8$; arī vēl vienkāršāk: $x \neq -8$. Pieņemts arī teikt, ka visi reālie skaitļi, izņemot skaitli -8, ir mainīgā x pieļaujamās vērtības.

Ja saka, ka klasē ir t skolēni, tad burta t pieļaujamā vērtība arī ir ierobežota — ar burtu t ir apzīmēts tikai kāds naturāls skaitlis, turklāt ne pārāk liels.

1. uzdevums. Noteikt izteiksmes $2m^3-5(7{,}3-m^2)$ definīcijas apgabalu.

Atrisinājums. Dotā izteiksme ir vesela racionāla izteiksme, un tāpēc tai ir jēga ar visām mainīgā vērtībām, jeb izteiksmes definīcijas apgabals ir visu reālo skaitļu kopa $(-\infty;+\infty)$.

2. uzdevums. Noteikt izteiksmes $\frac{3a+5}{7-0{,}5a}$ definīcijas apgabalu.

Atrisinājums. Tā kā mainīgais ir saucējā (dalītājā), tad jāizslēdz tās mainīgā vērtības, ar kurām saucējs ir vienāds ar nulli:

$7-0{,}5a=0,\ -0{,}5a=-7,\ a=14.$

Dotās izteiksmes definīcijas apgabals ir visu reālo skaitļu kopa bez skaitļa 14 ($a \neq 14$).

3. uzdevums. Ar kādām mainīgā z vērtībām izteiksmei $\frac{z-1}{4}$ ir jēga?

Atrisinājums. Tā kā dotā izteiksme ir vesela racionāla izteiksme (saucējā nav mainīgā), tad tai ir jēga ar visām mainīgā z vērtībām.

7.2. IDENTITĀTES

IDENTISKAS IZTEIKSMES

Divas izteiksmes sauc par identiski vienādām, ja ar jebkurām pieļaujamām mainīgo vērtībām šo izteiksmju vērtības ir vienādas. Identiski vienādas izteiksmes ir, piemēram, $a+b$ un $b+a$, $(a+b)\cdot c$ un $ac+bc$, $2+7$ un $12-3$.

IZTEIKSMJU IDENTISKA PĀRVEIDOŠANA

Dotās izteiksmes aizstāšanu ar identisku izteiksmi sauc par izteiksmes identisku pārveidošanu. Tā pamatojas uz darbību jēdzienu un darbību īpašību izmantošanu. Tā, piemēram, $a+a+a+a=4a$ (saskaņā ar reizināšanas definīciju); $5(x+2)=5x+10$ (saskaņā ar reizināšanas distributīvo īpašību).

IDENTITĀTES JĒDZIENS

Par identitāti sauc vienādību, kas ir pareiza ar jebkurām mainīgo pieļaujamām vērtībām. Identitātes ir, piemēram, $a+b=b+a$; $(-x)\cdot(-y)=xy$; $(a+b)\cdot c=ac+bc$.

Arī pareizas skaitliskās vienādības sauc par identitātēm, piemēram, $2+7=12-3$.

Atgādināsim svarīgākās identitātes, kurās ietvertas saskaitīšanas un reizināšanas darbību īpašības:

$$a+b=b+a, \qquad a\cdot b=b\cdot a,$$
$$(a+b)+c=a+(b+c), \qquad (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c),$$
$$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c.$$

8. MONOMI UN POLINOMI

8.1. PAKĀPE AR VESELU KĀPINĀTĀJU

KĀPINĀTĀJS IR NATURĀLS SKAITLIS

Atgādināsim kāpināšanas jēdzienu (sk. 1.7.): kāpināt skaitli ar 2, 3, 4, . . . jeb kāpināt skaitli otrajā, trešajā, ceturtajā utt. pakāpē nozīmē ņemt šo skaitli par reizinātāju 2, 3, 4, . . . reizes:

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n \text{ reizes}} \quad (n=2,3,4,\ldots).$$

$$2^3=2\cdot2\cdot2=8;\ c^4=c\cdot c\cdot c\cdot c;\ y\cdot y\cdot y\cdot y\cdot y=y^5.$$

Jebkura skaitļa pirmā pakāpe ir vienāda ar pašu skaitli, piemēram,

$a^1 = a$.

KĀPINĀTĀJS IR NULLE

Ja bāze nav nulle, tad pieņem, ka tās nulltā pakāpe ir vienāda ar skaitli 1:

$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$.

$7^0 = 1;\ (-5)^0 = 1;\ (b^2 + 3)^0 = 1$.

Pakāpi 0^0 nedefinē.

PAKĀPJU REIZINĀŠANA

Reizinot pakāpes, kam vienādas bāzes, bāze jāpatur tā pati, bet kāpinātāji jāsaskaita:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Šo īpašību sauc par pakāpes pamatīpašību. Iegaumēšanai to izsaka arī īsāk: reizinot pakāpes, kāpinātājus saskaita:

1) $3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5 = 243$;

2) $(-1)^4 \cdot (-1) = (-1)^{4+1} = (-1)^5 = -1$;

3) $c \cdot c^3 \cdot c^4 = c^{1+3+4} = c^8$;

4) $3^5 \cdot 3^m = 3^{5+m}$;

5) $z^n z = z^{n+1}$;

6) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2+1+3} = \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{64}{729}$;

7) $u^3 \cdot u^0 \cdot u = u^3 \cdot 1 \cdot u = u^4$.

Identitāti par pakāpju reizināšanu var izmantot arī pakāpes izteikšanai reizinājumā, piemēram, $c^7 = c^5 \cdot c^2$ vai $c^7 = c^4 \cdot c^3$ u. tml.; $2^6 = 2^3 \cdot 2^3 = 8 \cdot 8 = 64$.

PAKĀPJU DALĪŠANA

Dalot pakāpes, kurām vienādas bāzes, bāze paliek tā pati, bet no dalāmā kāpinātāja jāatņem dalītāja kāpinātājs:

$a^m : a^n = a^{m-n}$.

Vieglākai iegaumēšanai var sacīt arī tā: dalot pakāpes, kāpinātāji jāatņem:

1) $4^5 : 4^3 = 4^{5-3} = 4^2 = 16$;

2) $\left(-\frac{3}{5}\right)^3 : \left(-\frac{3}{5}\right) = \left(-\frac{3}{5}\right)^{3-1} = \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$;

3) $z^7 : z^6 = z^{7-6} = z$;

4) $x^n : x = x^{n-1}$;

5) $a^4 : a^4 = a^{4-4} = a^0 = 1$ jeb $a^4 : a^4 = 1$;

6) $x^n : x^n = x^{n-n} = x^0 = 1$ jeb $x^n : x^n = 1$.

Reizēm ir izdevīgi izteikt pakāpi kā dalījumu, piemēram, $x^3 = x^7 : x^4$ vai $x^3 = x^6 : x^3$ u. tml.

PAKĀPES KĀPINĀŠANA

Kāpinot pakāpi, bāze paliek tā pati, bet kāpinātāji ir jāsareizina: $(a^m)^n = a^{mn}$.

Īsāk: kāpinot pakāpes, kāpinātāji jāsareizina:

1) $(2^3)^2 = 2^{3\cdot 2} = 2^6 = 64$;

2) $((-0{,}1)^2)^4 = (-0{,}1)^8 = 0{,}00000001$;

3) $(c^4)^5 = c^{4\cdot 5} = c^{20}$;

4) $(x^9)^m = x^{9m}$.

Izmantojot «apgrieztā virzienā» identitāti par pakāpes kāpināšanu, reizēm doto pakāpi var pārveidot par pakāpi ar citu bāzi, piemēram,

$5^6 = (5^2)^3 = 25^3$; $a^{20} = (a^4)^5$.

REIZINĀJUMA KĀPINĀŠANA

Kāpinot reizinājumu, jākāpina katrs reizinātājs atsevišķi un iegūtās pakāpes jāsareizina: $(ab)^n = a^n b^n$

1) $(xy)^3 = x^3 y^3$;

2) $(-5m)^2 = (-5)^2 \cdot m^2 = 25m^2$;

3) $(3abc)^4 = 3^4 a^4 b^4 c^4 = 81a^4 b^4 c^4$;

4) $(-\frac{1}{2}xy)^3 = (-\frac{1}{2})^3 x^3 y^3 = -\frac{1}{8}x^3 y^3$.

Īpašību par reizinājuma kāpināšanu var izmantot arī «apgrieztā» veidā: $a^n b^n = (ab)^n$.

1) $x^2 y^2 = (xy)^2$;

2) $0{,}0081c^4 = 0{,}3^4 c^4 = (0{,}3c)^4$;

3) $\left(\frac{2}{7}\right)^6 \cdot 3{,}5^6 = \left(\frac{2}{7} \cdot 3{,}5\right)^6 = 1^6 = 1$;

4) $0{,}25^7 \cdot 40^8 = 0{,}25^7 \cdot 40^7 \cdot 40 = (0{,}25 \cdot 40)^7 \cdot 40 = 10^7 \cdot 40 =$
$= 400\,000\,000$.

DAĻAS KĀPINĀŠANA

Kāpinot daļu, jākāpina skaitītājs un saucējs atsevišķi un pirmā pakāpe jāizdala ar otro:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$;

2) $\left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$ (pakāpe pozitīva, jo kāpinātājs ir pāra skaitlis);

3) $\left(-\frac{1}{4}\right)^3 = -\frac{1^3}{4^3} = -\frac{1}{64}$ (pakāpe ir negatīva, jo kāpinātājs ir nepāra skaitlis);

4) $\left(-2\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{5}{2}\right)^3 = -\frac{5^3}{2^3} = -\frac{125}{8} = -15\frac{5}{8}$;

5) $\left(\frac{7}{m}\right)^2 = \frac{7^2}{m^2} = \frac{49}{m^2}$.

KĀPINĀTĀJS IR NEGATĪVS VESELS SKAITLIS

Ja bāze nav nulle, tad pieņem, ka pakāpe ar negatīvu kāpinātāju ir vienāda ar daļu, kuras skaitītājs ir skaitlis 1, bet saucējs ir pakāpe ar dotajai pakāpei pretēju kāpinātāju:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0,\ n = 1, 2, \ldots).$$

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8};$$

$$(0{,}1)^{-1} = \frac{1}{0{,}1} = 10;$$

$$a^{-5} = \frac{1}{a^5}.$$

Pakāpei ar negatīvu kāpinātāju piemīt visas tās pašas iepriekš aplūkotās pakāpes īpašības, piemēram,

1) $a^{-3} \cdot a^4 = a^{-3+4} = a^1 = a$;

2) $(2^{-3})^{-1} = 2^{(-3)\cdot(-1)} = 2^3 = 8$;

3) $(x^2y^{-1})^{-3} = (x^2)^{-3} \cdot (y^{-1})^{-3} = x^{-6}y^3$.

PAKĀPJU IDENTISKI PĀRVEIDOJUMI

Pakāpju reizinājumus un dalījumus dažkārt vieglāk aprēķināt, ja darbību locekļus izsaka kā pakāpes ar vienādām bāzēm. Der ievērot, ka, piemēram, $27 = 3^3$; $81 = 3^4$; $16 = 2^4$; $125 = 5^3$ u. c. (sk. tabulu pielikumā).

1) $27 \cdot 3^{-4} = 3^3 \cdot 3^{-4} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$;

2) $16^{-2} : 8^{-3} = (2^4)^{-2} : (2^3)^{-3} = 2^{-8} : 2^{-9} = 2$;

3) $21^3 \cdot 35^{-2} = (3 \cdot 7)^3 \cdot (5 \cdot 7)^{-2} = 3^3 \cdot 7^3 \cdot 5^{-2} \cdot 7^{-2} =$

$= \frac{3^3 \cdot 7}{5^2} = \frac{189}{25} = 7\frac{14}{25};$

4) $\frac{6^4}{15^3 \cdot 2^3} = \frac{(2 \cdot 3)^4}{(3 \cdot 5)^3 \cdot 2^3} = \frac{2^4 \cdot 3^4}{3^3 \cdot 5^3 \cdot 2^3} = \frac{6}{125}.$

No kāpināšanas definīcijas izriet, ka jebkuru pakāpi var aizstāt ar tādu pakāpi, kuras bāze ir dotajai bāzei apgriezts skaitlis, bet kāpinātājs — dotajam kāpinātājam pretējs skaitlis:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}.$$

Šo īpašību izdevīgi izmantot daļas kāpināšanai ar negatīvu skaitli:

1) $(\frac{3}{5})^{-2} = (\frac{5}{3})^2 = \frac{25}{9} = 2\frac{7}{9};$

2) $(3\frac{1}{3})^{-3} = (\frac{10}{3})^{-3} = (\frac{3}{10})^3 = \frac{27}{1000} = 0{,}027;$

3) $10^{-5} = (\frac{1}{10})^5 = 0{,}1^5 = 0{,}00001;$

4) $(-2{,}5)^{-4} = (-\frac{5}{2})^{-4} = (-\frac{2}{5})^4 = \frac{16}{625};$

5) $-2{,}5^{-4} = -(\frac{5}{2})^{-4} = -(\frac{2}{5})^4 = -\frac{16}{625}$ (mīnusa zīme ir pakāpes zīme, nevis skaitļa 2,5 zīme).

Daļveida izteiksmēs jebkuru reizinātāju var pārnest no skaitītāja saucējā vai otrādi, mainot tā kāpinātāju uz pretējo skaitli :

1) $\frac{2^{-1} \cdot 7}{5} = \frac{7}{5 \cdot 2} = \frac{7}{10} = 0{,}7;$

2) $\frac{3^5}{5 \cdot 3^2} = \frac{3^5 \cdot 3^{-2}}{5} = \frac{3^3}{5} = \frac{27}{5} = 5{,}4;$

3) $\frac{5}{2^{-1} \cdot 7^{-2}} = 5 \cdot 2 \cdot 7^2 = 490;$

4) $\frac{3^{-1}}{0{,}6^{-2}} = \frac{0{,}6^2}{3} = \frac{0{,}36}{3} = 0{,}12.$

8.2. MONOMI

MONOMA JĒDZIENS

Par monomu sauc skaitļa reizinājumu ar mainīgajiem vai to pakāpēm ar naturālu kāpinātāju.

Monomi ir, piemēram, $4ab^2$; $-0{,}5x^3yz$, arī mn jeb $1mn$, $\frac{3a}{4}$ jeb $\frac{3}{4}a$.

Par monomu pieņem arī atsevišķus skaitļus vai mainīgos, piemēram, 8; $-\frac{4}{9}$; c; m^3.

Tādas izteiksmes kā, piemēram, $\frac{3a}{b}$ vai $7(a+4)^2$, nav monomi.

MONOMA NORMĀLFORMA

Ja monomā skaitliskais reizinātājs ir pirmais un mainīgie (burtu reizinātāji) ir sakārtoti alfabēta kārtībā, pie tam skaitliskie reizinātāji un arī vienādu bāzu pakāpes ir sareizinātas, tad saka, ka monoms ir pārveidots normālformā.

Piemēros parādīta monomu pārveidošana normālformā.

1) $b^2aa5a^3 = 5a^5b^2$; 2) $2x\cdot(-4)cx^2 = -8cx^3$;

3) $6k^2m\cdot 3m^4 = 18k^2m^5$; 4) $zzz^4n^3mm\cdot(-1) = -m^2n^3z^6$.

MONOMA KOEFICIENTS

Monoma skaitlisko reizinātāju sauc par monoma koeficientu; koeficientu, kā jau norādīts, raksta pirmo. Monoma $2{,}7c^3d$ koeficients ir $2{,}7$; monoma $-\frac{4}{9}u^5$ koeficients ir $-\frac{4}{9}$. Koeficientu 1 pieņemts nerakstīt, piemēram, monoma a^5c koeficients ir $+1$, bet monoma $-c$ koeficients ir -1.

MONOMA PAKĀPE

Monoma visu mainīgo kāpinātāju summa nosaka monoma pakāpi. Piemēram, monoms $7c^3dy^4$ ir astotās pakāpes monoms, jo mainīgo kāpinātāju summa ir $3+1+4=8$; monoms $-5{,}7mm$ ir otrās pakāpes monoms (jo $1+1=2$), monoms $-x$ ir pirmās pakāpes monoms, bet monoms $3{,}7$ (tas nesatur mainīgos) ir nulltās pakāpes monoms.

MONOMU REIZINĀŠANA

Lai sareizinātu monomus, jāsareizina to koeficienti un mainīgo pakāpes, kurām vienādas bāzes, bet pārējie reizinātāji jāpieraksta bez izmaiņas:

1) $3m^2n^3x\cdot(-0{,}8m^4x^2) = -2{,}4m^6n^3x^3$

(jo $3\cdot(-0{,}8) = -2{,}4$; $m^2\cdot m^4 = m^6$; $x\cdot x^2 = x^3$; bet n^3 pieraksta bez izmaiņas);

2) $-3\frac{5}{9}b^7\cdot\left(-\frac{9}{32}a^5b\right) = a^5b^8$

(jo $\left(-3\frac{5}{9}\right)\cdot\left(-\frac{9}{32}\right) = \frac{32\cdot 9}{9\cdot 32} = 1$, bet koeficientu 1 reizinājumā neraksta);

3) $4{,}5x^3y\cdot(-x^2z)\cdot(-xz^4) = 4{,}5x^6yz^5$

(jo $4{,}5\cdot(-1)\cdot(-1) = 4{,}5$; $x^3\cdot x^2\cdot x = x^6$; $z\cdot z^4 = z^5$, bet y — pieraksta bez izmaiņas).

Monomu reizināšanas kārtulu mēdz izteikt īsi tā: koeficientus sareizina, bet vienādo burtu kāpinātājus saskaita.

MONOMU KĀPINĀŠANA

Lai kāpinātu monomu, kāpina katru monoma reizinātāju atsevišķi un iegūtās pakāpes sareizina.

1) $(2a^5b^3)^2 = 2^2 \cdot (a^5)^2 \cdot (b^3)^2 = 4a^{10}b^6$;

2) $(-\frac{1}{2}mn^4q^2)^3 = (-\frac{1}{2})^3 \cdot m^3 \cdot (n^4)^3 \cdot (q^2)^3 = -\frac{1}{8}m^3n^{12}q^6$;

3) $(-x^2yz^3)^4 = +(x^2)^4 \cdot y^4 \cdot (z^3)^4 = x^8y^4z^{12}$.

MONOMU DALĪŠANA

Lai izdalītu monomu ar monomu, jāizdala koeficienti un mainīgo pakāpes, kurām vienādas bāzes, bet dalāmā pārējie reizinātāji jāpieraksta dalījumā bez izmaiņām.

1) $-24c^5d^2e : (-0{,}2cd^2) = 120c^4e$, jo $-24 : (-0{,}2) = 120$; $c^5 : c = c^4$; $d^2 : d^2 = 1$, dalāmā mainīgo e dalījumā pieraksta bez izmaiņas;

2) $-m^4n^5x : 3m^4n^5 = -\frac{1}{3}x$ (koeficientu dalījums ir $-1 : 3 = -\frac{1}{3}$);

3) $a^4 : 7a^4 = \frac{1}{7}$.

Monomu dalīšanas kārtulu izsaka īsi tā: koeficientus izdala, bet vienādo burtu kāpinātājus atņem.

Divu monomu dalījumu var pārbaudīt un jo viegli arī noteikt ar reizināšanu, piemēram,

$$10a^3b^2 : 5ab = 2a^2b, \text{ jo } 2a^2b \cdot 5ab = 10a^3b^2.$$

Ja dalītājā ir tāds mainīgais, kāda nav dalāmajā (piemēram, $8k^4 : 2km^2$) vai arī dalītājā kāda mainīgā kāpinātājs ir lielāks nekā dalāmajā (piemēram, $-12c^3d^2 : (-4cd^3)$), tad saka, ka monomu ar monomu nevar izdalīt. Tādos gadījumos monomu dalīšanu var aizstāt ar daļveida izteiksmi, ko pēc iespējas saīsina:

1) $8k^4 : 2km^2 = \frac{8k^4}{2km^2} = \frac{4k^3}{m^2}$;

2) $-12c^3d^2 : (-4cd^3) = \frac{12c^3d^2}{4cd^3} = \frac{3c^2}{d}$.

Līdzīgos gadījumos dalījumu var uzrakstīt arī kā pakāpi ar negatīvu kāpinātāju, piemēram,

1) $2x^2 : x^3 = 2x^{-1}$;

2) $-3a^3bc : 5abc^5 = -0{,}6a^2c^{-4}$.

LĪDZĪGI MONOMI

Monomus, kuri ir pilnīgi vienādi vai atšķiras tikai ar koeficientiem, sauc par līdzīgiem monomiem. Līdzīgi monomi ir, piemēram, $4ac$ un $4ac$ (abi pilnīgi vienādi), $5b$ un $-2b$; $-7a^3b^2$ un $0{,}3a^3b^2$ (atšķiras tikai ar koeficientiem).

Līdzīgus monomus, kuriem koeficienti ir pretēji skaitļi, sauc par pretējiem monomiem, piemēram, $3{,}2xy^2$ un $-3{,}2xy^2$.

MONOMU SASKAITĪŠANA UN ATŅEMŠANA

Lai saskaitītu vai atņemtu monomus, jāuzraksta šo monomu summa vai starpība un, ja monomi ir līdzīgi, tie jāaizstāj ar vienu monomu, kura koeficients ir doto monomu koeficientu algebriskā summa.

1) Saskaitīt monomus $+3mn^2$, $-5mn$ un $+0{,}7n^3$
$3mn^2 + (-5mn) + (+0{,}7n^3) = 3mn^2 - 5mn + 0{,}7m^3$;

2) $(-5a^3b) + (6a^3b) = -5a^3b + 6a^3b = a^3b$;

3) $(+4{,}5xy) + (-xy) = +4{,}5xy - xy = 3{,}5xy$;

4) $(+12x^2z^3) - (-7x^2z^3) = +12x^2z^3 + 7x^2z^3 = 19x^2z^3$;

5) $(-3n) + (+5n) - (-n) - (+4n) = -3n + {}$
${} + 5n + n - 4n = -n$.

8.3. POLINOMS UN TĀ IDENTISKI PĀRVEIDOJUMI

POLINOMA JĒDZIENS

Par polinomu sauc monomu algebrisko summu. Piemēram, izteiksme $4a^3b - 2a^2 + 7$ ir polinoms.

Monomus, kas ietilpst polinomā kā saskaitāmie, sauc par polinoma locekļiem. Iepriekšējam polinomam ir 3 locekļi: $4a^3b$, $-2a^2$ un $+7$.

Par polinomu pieņemts uzskatīt arī atsevišķu monomu, piemēram, $-7{,}2x$; y^3; $-9{,}5$ u. tml. Polinomu ar diviem locekļiem sauc arī par binomu, piemēram, $a - b$; $-4{,}3xy + 7z^3$. Polinomu ar trim locekļiem sauc arī par trinomu, piemēram, $-5m + 3n - 4$; $9k^2 - b + 5$.

POLINOMA PAKĀPE

Polinoma pakāpi nosaka polinoma loceklis (monoms) ar augstāko pakāpi. Tā, piemēram, polinoma $9m^3n - 14 + 7m^4n^2p$ locekļiem ir attiecīgi ceturtā, nulltā un septītā pakāpe. Tātad šis polinoms ir septītās pakāpes polinoms.

LĪDZĪGIE LOCEKĻI UN TO SAVILKŠANA

Polinoma locekļus, kuri ir pilnīgi vienādi vai arī atšķiras tikai ar koeficientiem, sauc par līdzīgiem locekļiem. (Tātad līdzīgiem locekļiem burtu reizinātāji ir pilnīgi vienādi.) Polinomā $4a^3 - 3ab + a^3 - 7 + 5ab$ līdzīgie locekļi ir $4a^3$ un a^3, kā arī $-3ab + 5ab$.

Līdzīgos locekļus, kuru koeficienti ir pretēji skaitļi, sauc par pretējiem locekļiem (monomiem). Polinomā $3x^2y - 4a - 3x^2y + 1$ tādi ir, piemēram, locekļi $3x^2y$ un $-3x^2y$.

Līdzīgos locekļus polinomā var aizstāt ar vienu tiem līdzīgu locekli. Šādu līdzīgu locekļu aizstāšanu sauc par līdzīgo locekļu savilkšanu.

Lai savilktu līdzīgos locekļus, tad jāsaskaita tikai to koeficienti, bet burtu reizinātāji jāpieraksta bez izmaiņas:

1) $8a - 6a + a - 10a = -7a$.

(Rezultāta koeficients ir $8 - 6 + 1 - 10 = -7$.)

2) Dažādās līdzīgo locekļu grupas polinomā vēlams pasvītrot:

$\underline{-0{,}7m} + \underline{\underline{n}} + \underline{10m} - \underline{\underline{8{,}5n}} - 13 = 9{,}3m - 7{,}5n - 13$

$(-0{,}7 + 10 = 9{,}3; +1 - 8{,}5 = -7{,}5)$;

3) polinoma pretējos locekļus mēdz izsvītrot, jo to summa ir 0:

$5a^3 + \cancel{2a^2b} - ab^2 \cancel{- a^3} \cancel{- 2a^2b} + a^3 = 5a^3 - ab^2$;

4) $\underline{x^2y} - \underline{\underline{0{,}85x}} + 1{,}2 + \underline{0{,}65x^2y} - \underline{\underline{1{,}7x}} - \underline{3{,}12x^2y} =$

$= -1{,}47x^2y + 2{,}55x + 1{,}2$.

POLINOMA NORMĀLFORMA

Ja katrs polinoma loceklis (monoms) ir normālformā un ja ir savilkti polinoma līdzīgie locekļi, tad saka, ka polinoms ir uzrakstīts normālformā.

Piemēram, ja polinomā $4a^3a - 3ab^2 \cdot 2a + 7a^2 \cdot 0{,}4b^2 - 5ab$ pārveido normālformā visus locekļus, tad iegūst polinomu $4a^4 - \underline{6a^2b^2} + \underline{2{,}8a^2b^2} - 5ab$. Pēc tam, savelkot līdzīgos locekļus (tie pasvītroti), iegūst polinomu normālformā $4a^4 - 3{,}2a^2b^2 - 5ab$.

IEKAVU ATVĒRŠANA

Tā kā polinoms ir locekļu algebriska summa, tad, atverot iekavas, jārīkojas tāpat, kā atverot iekavas algebriskās summās (sk. 4.3.), proti, ja atmet iekavas un plusa zīmi to priekšā, tad locekļiem šajās iekavās zīmes nav jāmaina; ja atmet iekavas un mīnusa zīmi to priekšā, tad locekļiem iekavās jāmaina zīmes uz pretējām:

1) $(a-3)+(-b+c-d)=a-3-b+c-d$;

2) $(-m+n-4)+(m-n)=-m+n-$
$-4+m-n=-4$.

Pēc iekavu atvēršanas savelk arī līdzīgos locekļus.

3) $y-(x-y)-(-x+y)=y-x+y+x-y=y$;

4) $-(-p+9{,}3+11pq)-(0{,}5p-12pq-8)=$

$=\underline{p}-\underline{\underline{9{,}3}}-11pq-\underline{0{,}5p}+12pq+\underline{\underline{8}}=0{,}5p-1{,}3+pq$.

IESLĒGŠANA IEKAVĀS

Ja polinoma locekļus ieslēdz iekavās un pirms tām raksta plusa zīmi, tad iekavās ieslēgtajiem locekļiem zīmes nav jāmaina; ja locekļus ieslēdz iekavās un pirms tām raksta mīnusa zīmi, tad iekavās ieslēgtajiem locekļiem jāmaina zīmes uz pretējām.

1. u z d e v u m s. Ieslēgt iekavās polinoma $3m-5n+3$ otro un trešo locekli, liekot iekavu priekšā a) plusa zīmi, b) mīnusa zīmi.

A t r i s i n ā j u m s. a) $3m-5n+3=3m+(-5n+3)$;
b) $3m-5n+3=3m-(5n-3)$.

2. u z d e v u m s. Ieslēgt iekavās polinoma $4a+4b-a^2-ab$ pirmos divus locekļus ar plusa zīmi, bet otros divus — ar mīnusa zīmi.

A t r i s i n ā j u m s. $4a+4b-a^2-ab=(4a+$
$+4b)-(a^2+ab)$.

3. u z d e v u m s. Ieslēgt iekavās polinomu $5u^2t-0{,}3u-9$ ar mīnusa zīmi pirms iekavām.

A t r i s i n ā j u m s. $5u^2t-0{,}3u-9=-(-5u^2t+$
$+0{,}3u+9)$.

8.4. DARBĪBAS AR POLINOMIEM

POLINOMU SASKAITĪŠANA UN ATŅEMŠANA

Lai saskaitītu vai atņemtu polinomus, vispirms jāuzraksta to summa vai starpība un pēc tam jāizdara iespējamie identiskie pārveidojumi.

1) Saskaitīt polinomus $4b^2 - 5b$ un $-b^2 + 5b - 12$.

$(4b^2 - 5b) + (-b^2 + 5b - 12) = 4b^2 - 5b - b^2 + 5b - 12 = 3b^2 - 12.$

2) Atrast polinomu $x^3 - 4x^2y - 5y$ un $x^2y - 0{,}3y$ starpību.

$(x^3 - 4x^2y - 5y) - (x^2y - 0{,}3y) =$
$= x^3 - 4x^2y - 5y - x^2y + 0{,}3y = x^3 - 5x^2y - 4{,}7y.$

POLINOMA REIZINĀŠANA AR MONOMU

Lai polinomu sareizinātu ar monomu, katrs polinoma loceklis jāreizina ar monomu un iegūtie reizinājumi jāsaskaita:

1) $(2m - 3n + 5p) \cdot 5x = 2m \cdot 5x - 3n \cdot 5x + 5p \cdot 5x = 10mx - 15nx + 25px;$

2) $-xy \cdot (3a - 5b + 2) = -3axy + 5bxy - 2xy;$

3) $(8bc^3 - \frac{1}{6}bc^2 - \frac{2}{3}c) \cdot (-\frac{3}{5}b^2c) =$
$= -4\frac{4}{5}b^3c^4 + \frac{1}{10}b^3c^3 + \frac{2}{5}b^2c^2.$

Palīgdarbības: $\frac{8 \cdot 3}{5} = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$; $\frac{1 \cdot 3}{6 \cdot 5} = \frac{1}{10}$; $\frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{2}{5}$.

P i e z ī m e. Burtus reizinājumā ieteicams rakstīt alfabēta kārtībā.

POLINOMA DALĪŠANA AR MONOMU

Lai izdalītu polinomu ar monomu, katrs polinoma loceklis jādala ar monomu un dalījumi jāsaskaita:

1) $(24m^3 - 18m^2 + 6m) : 6m = 24m^3 : 6m - 18m^2 : 6m + 6m : 6m = 4m^2 - 3m + 1;$

2) $(2{,}4x^5y - 12x^3y^5 + 20x^2) : (-4x^2) =$
$= -0{,}6x^3y + 3xy^5 - 5.$

Ja kāds no polinoma locekļiem nedalās ar monomu, tad polinoms ar monomu nedalās. Tādā gadījumā dalījumu var pierakstīt daļas veidā, piemēram,

$(12xy^2 - 5x) : 4xy = \frac{12xy^2 - 5x}{4xy}$ (loceklis $-5x$ nedalās ar monomu $4xy$.)

POLINOMA REIZINĀŠANA AR POLINOMU

Lai sareizinātu polinomu ar polinomu, tad katrs pirmā polinoma loceklis jāreizina ar katru otrā polinoma locekli un dabūtie reizinājumi jāsaskaita:

1) $(a+b)(c-d) = ac - ad + bc - bd$;

2) $(4x^2 - 6xy + 9y^2)(2x + 3y) = 4x^2 \cdot 2x + 4x^2 \cdot 3y -$
$- 6xy \cdot 2x - 6xy \cdot 3y + 9y^2 \cdot 2x + 9y^2 \cdot 3y = 8x^3 + 12x^2y -$
$- 12x^2y - 18xy^2 + 18xy^2 + 27y^3 = 8x^3 + 27y^3$;

3) $(0{,}5 - a)(3a^2 + a - 4) = 1{,}5a^2 + 0{,}5a - 2 - 3a^3 - a^2 +$
$+ 4a = 0{,}5a^2 + 4{,}5a - 3a^3 - 2$.

Ja jāsareizina trīs vai vairāki polinomi, tad vispirms sareizina divus jebkurus polinomus, pēc tam iegūto reizinājumu reizina ar trešo polinomu utt.:

4) $(c^2 - 2c + 4)(c + 2)(c^3 - 8) = (c^3 + 2c^2 - 2c^2 -$
$- 4c + 4c + 8)(c^3 - 8) = (c^3 + 8)(c^3 - 8) = c^6 - 8c^3 +$
$+ 8c^3 - 64 = c^6 - 64$.

P i e z ī m e. Iegūto pirmo starpreizinājumu vēlams vienkāršot, cik vien iespējams, lai tālākā reizināšana būtu īsāka.

POLINOMA DALĪŠANA AR POLINOMU

Vienkāršākajos gadījumos dalījumu var noteikt mēģinājuma ceļā, cenšoties atrast tādu polinomu, kura reizinājums ar dalītāju būtu vienāds ar dalāmo (sk. arī tālāk 8.5.):

$(10x^3 - 5xy) : (2x^2 - y) = 5x$, jo $5x(2x^2 - y) =$
$= 10x^3 - 5xy$.

Sarežģītākos gadījumos polinoma dalīšanu ar polinomu izdara pēc īpaša dalīšanas algoritma, ko šajā rokasgrāmatā neaplūkosim, vai arī dalījumu uzraksta daļas veidā un izdara iespējamos identiskos pārveidojumus.

8.5. SAĪSINĀTĀS REIZINĀŠANAS FORMULAS

SUMMAS UN REIZINĀJUMA ZĪMJU MAIŅA

Dažu īpaša veida polinomu reizinājumus var vienkāršot, izmantojot saīsinātās reizināšanas formulas. Šajā nolūkā reizēm ir nepieciešams tos vispirms pārveidot izvēlētajai formulai atbilstošā veidā. Lai reizinājums būtu identiski vienāds ar doto reizinājumu, ir jāievēro nosacījumi par summas (polinoma) un reizinājuma zīmju maiņu.

1°. Mainot zīmes uz pretējām polinoma visiem locekļiem, iegūst dotajam polinomam pretēju polinomu. Tā, piemēram, savstarpēji pretēji ir polinomi

$-m^2 + 3n$ un $m^2 - 3n$;
$x^2 - 2x + 1$ un $-x^2 + 2x - 1$;
$a - 7$ un $-a + 7$ jeb $7 - a$;
$3t - v - 2$ un $-3t + v + 2$ jeb $v - 3t + 2$.

2°. Mainot zīmes uz pretējām 2, 4, 6, ... reizinātājiem, reizinājums nemainās. Tā, piemēram,

$$(-3)\cdot(-2)\cdot(+1)\cdot 4=(-3)\cdot(+2)\cdot(+1)\cdot(-4);$$
$$-a(4+b)=a\cdot(-4-b);$$
$$-5(a-b)(b-a)=5(a-b)\cdot(a-b).$$

Tā kā pāra pakāpe ir 2, 4, 6, ... reizinātāju reizinājums, tad, mainot pāra pakāpes bāzi uz pretējo, pakāpes vērtība nemainās, piemēram:

$$a^4=(-a)^4;$$
$$(x-y)^2=(y-x)^2;$$
$$(a-b+4)^2=(b-a-4)^2.$$

3°. Mainot zīmes uz pretējām 1, 3, 5, ... reizinātājiem, arī reizinājuma zīme mainās uz pretējo. Tāpēc, lai reizinājums paliktu identiski vienāds ar sākotnējo, mainot zīmes 1, 3, 5, ... reizinātājiem, jāmaina zīme arī reizinājuma priekšā, piemēram,

$$(-5)\cdot(+2)\cdot(-1)=-(-5)\cdot(+2)\cdot(+1);$$
$$-(a-b)\cdot(a-b)(x+y)=(b-a)(b-a)(-x-y).$$

Tā kā nepāra pakāpe ir 3, 5, 7, ... reizinātāju reizinājums, tad, mainot nepāra pakāpes bāzi uz pretējo, jāmaina zīme arī pakāpes priekšā, piemēram,

$$a^5=-(-a)^5;$$
$$(x-y)^3=-(y-x)^3.$$

DIVU SKAITĻU KVADRĀTU STARPĪBA

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2. \qquad (1)$$

Divu skaitļu summas un starpības reizinājums ir vienāds ar šo skaitļu kvadrātu starpību.

Piemēram, reizinājumu $(10+3)(10-3)$ aprēķināsim 1) norādītajā darbību secībā un 2) pēc formulas:

1) $(10+3)(10-3)=13\cdot 7=91;$

2) $(10+3)(10-3)=10^2-3^2=100-9=91.$

Taču formulā ar burtiem a un b vai kārtulā ar vārdiem «skaitļi» ir apzīmēti ne tikai atsevišķi noteikti skaitļi vai mainīgie, bet arī monomi (un reizēm pat sarežģītākas izteiksmes). Tā, piemēram, reizinājumā $(5m+n^3)(5m-n^3)$ «pirmais skaitlis» ir monoms $5m$, bet «otrais skaitlis» ir monoms n^3. Turklāt jāievēro: tā kā izteiksmi $5m-n^3$ saucam nevis par algebrisku summu ar saskaitāmiem $5mn$ un $-n^3$, bet par starpību, tad «otrais skaitlis» ir nevis $-n^3$, bet gan n^3. Tātad $(5m+n^3)\cdot(5m-n^3)=(5m)^2-(n^3)^2=25m^2-n^6$.

1) $(\frac{3}{5}c^3-0{,}2d^5)\cdot(\frac{3}{5}c^3+0{,}2d^5)=(\frac{3}{5}c^3)^2-(0{,}2d^5)^2=$
$=\frac{9}{25}c^6-0{,}04d^{10};$

2) $(1{,}5x + 3y^2) \cdot (3y^2 - 1{,}5x) = (3y^2 + 1{,}5x)(3y^2 - 1{,}5x) = 9y^4 - 2{,}25x^2$.

Lai dotais reizinājums tieši atbilstu formulai, pirmajās iekavās summas locekļi mainīti vietām:

3) $(-7a^3 + 0{,}8b)(7a^3 + 0{,}8b) = (0{,}8b - 7a^3)(0{,}8b + 7a^3) = 0{,}64b^2 - 49a^6$.

4) Aprēķināt reizinājumu $(\frac{1}{3}p^4 - 2q^5)(-\frac{1}{3}p^4 - 2q^5)$.

Mainot abiem reizinātājiem zīmes uz pretējām un pārvietojot iekavās abus locekļus, iegūstam reizināšanas formulai atbilstošu reizinājumu:

$$\left(\frac{1}{3}p^4 - 2q^5\right)\left(-\frac{1}{3}p^4 - 2q^5\right) = \left(2q^5 - \frac{1}{3}p^4\right)\left(2q^5 + \frac{1}{3}p^4\right) = 4q^{10} - \frac{1}{9}p^8.$$

Cits risinājuma variants — uzlūkojam locekli $-2q^5$ par «pirmo skaitli»:

$$\left(\frac{1}{3}p^4 - 2q^5\right)\left(-\frac{1}{3}p^4 - 2q^5\right) = \left(-2q^5 + \frac{1}{3}p^4\right)\left(-2q^5 - \frac{1}{3}q^4\right) = (-2q^5)^2 - \frac{1}{9}p^8 = 4q^{10} - \frac{1}{9}p^8.$$

DIVU SKAITĻU SUMMAS KVADRĀTS

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. (2)

Divu skaitļu summas kvadrāts ir vienāds ar pirmā skaitļa kvadrātu plus divkāršots abu skaitļu reizinājums, plus otrā skaitļa kvadrāts.

1) Aprēķināt summas kvadrātu $(7 + 10)^2$ a) dotajā darbību secībā un b) pēc formulas:

a) $(7 + 10)^2 = 17^2 = 17 \cdot 17 = 289$;

b) $(7 + 10)^2 = 7^2 + 2 \cdot 7 \cdot 10 + 10^2 = 49 + 140 + 100 = 289$;

2) $(c + 5)^2 = c^2 + 2 \cdot c \cdot 5 + 5^2 = c^2 + 10c + 25$;

3) $(0{,}5x^2 + y^3)^2 = (0{,}5x^2)^2 + 2 \cdot 0{,}5x^2 \cdot y^3 + (y^3)^2 = 0{,}25x^4 + x^2y^3 + y^6$;

4) $(\frac{1}{2}b + 10c^3)(\frac{1}{2}b + 10c^3) = (\frac{1}{2}b + 10c^3)^2 = \frac{1}{4}b^2 + 10bc^3 + 100c^6$;

5) Kāpināt $(-a^3 - 4b)^2$.

1. v a r i a n t s — mainām pāra pakāpes bāzi uz pretējo:
$(-a^3 - 4b)^2 = (a^3 + 4b)^2 = a^6 + 8a^3b + 16b^2$,

2. v a r i a n t s — uzlūkojam pakāpes bāzi kā divu «skaitļu» $-a^3$ un $-4b$ summu:

$$(-a^3 - 4b)^2 = (-a^3)^2 + 2\cdot(-a^3)\cdot(-4b) + \\ + (-4b)^2 = a^6 + 8a^3b + 16b^2.$$

DIVU SKAITĻU STARPĪBAS KVADRĀTS

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2. \quad (3)$$

Divu skaitļu starpības kvadrāts vienāds ar pirmā skaitļa kvadrātu, mīnus divkāršots abu skaitļu reizinājums, plus otrā skaitļa kvadrāts:

1) $(4p - 3q)^2 = (4p)^2 - 2\cdot 4p\cdot 3q + (3q)^2 = 16p^2 - 24pq + 9q^2$;

2) $\left(-\frac{3}{5}y^2 + 5z\right)^2 = \left(5z - \frac{3}{5}y^2\right)^2 = 25z^2 - 6y^2z + \frac{9}{25}y^4$;

3) $(0{,}2m^3 - 10n^5)(0{,}2m^3 - 10n^5) = (0{,}2m^3 - 10n^5)^2 = 0{,}04m^6 - 4m^3n^5 + 100n^{10}$

KUBU SUMMA

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3. \quad (4)$$

Divu skaitļu summas reizinājums ar šo pašu skaitļu starpības nepilno kvadrātu ir vienāds ar šo skaitļu kubu summu.

P i e z ī m e. Polinomu $a^2 - ab + b^2$ pieņemts saukt par starpības nepilno kvadrātu (atšķirībā no starpības pilnā kvadrāta $a^2 - 2ab + b^2$).

1) $(x + 3)(x^2 - 3x + 9) = x^3 + 3^3 = x^3 + 27$;

2) $(3c + 2d)(9c^2 - 6cd + 4d^2) = (3c)^3 + (2d)^3 = 27c^3 + 8d^3$.

KUBU STARPĪBA

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3. \quad (5)$$

Divu skaitļu starpības reizinājums ar to pašu skaitļu summas nepilno kvadrātu ir vienāds ar šo skaitļu kubu starpību:

1) $(5 - u)(25 + 5u + u^2) = 5^3 - u^3 = 125 - u^3$;

2) $(0{,}2x - 10y)(0{,}04x^2 + 2xy + 100y^2) = 0{,}008x^3 - 1000y^3$.

FORMULU IZMANTOŠANA

Ar saīsinātās reizināšanas formulām reizēm var noteikt arī polinomu dalījumus, piemēram,

1) $(x^2 - 36) : (x - 6) = x + 6$;
2) $(27 + x^3) : (3 + x) = 9 - 3x + x^2$;
3) $(a^2 - 2ab + b^2) : (a - b) = a - b$;
4) $(m^3 - 1) : (m - 1) = m^2 + m + 1$.

Reizināšanas formulas izmanto arī polinomu sadalīšanai reizinātājos, piemēram (sk. arī tālāk),

$$x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)(x + y)(x - y).$$

Ar saīsināto reizināšanas formulu palīdzību dažkārt var viegli aprēķināt atbilstošu skaitļu reizinājumus:

1) $79 \cdot 81 = (80 - 1)(80 + 1) = 80^2 - 1 = 6400 - 1 = 6399$;
2) $53^2 = (50 + 3)^2 = 50^2 + 2 \cdot 50 \cdot 3 + 3^2 =$
$= 200 + 300 + 9 = 2809$.

8.6. POLINOMA SADALĪŠANA REIZINĀTĀJOS

IEVADJĒDZIENI

Dažus polinomus var aizstāt ar reizinājumu, piemēram, $5a^2 - 10ab = 5a(a - 2b)$. Šādu polinoma identisku pārveidojumu sauc par polinoma sadalīšanu reizinātājos.

Polinomus sadala reizinātājos ar dažādiem paņēmieniem: 1) iznes pirms iekavām kopīgo reizinātāju; 2) izmanto saīsinātās reizināšanas formulas; 3) polinoma locekļus apvieno grupās; 4) sadala polinomu reizinātājos kā kvadrāttrinomu.

KOPĪGĀ REIZINĀTĀJA IZNEŠANA PIRMS IEKAVĀM

Pirms iekavām var iznest polinoma visu locekļu kopīgos reizinātājus, t. i., koeficientu lielāko kopīgo dalītāju un kopīgos burtu reizinātājus. Iekavās paliek polinoms, kura locekļi ir dotā polinoma locekļu dalījumi ar iznesto kopīgo reizinātāju.

1. piemērs. Sadalīt reizinātājos polinomu $12a^3 - 24a^5 + 6a^2b$.

Visu locekļu kopīgais reizinātājs ir $6a^2$, to var iznest pirms iekavām. Iekavās paliek polinoma locekļu dalījumi ar $6a^2$, proti,

$$12a^3 - 24a^5 + 6a^2b = 6a^2(2a - 4a^3 + b).$$

Tātad dotais polinoms ir sadalīts reizinātājos:

$$6 \cdot a^2 \cdot (2a - 4a^3 + b).$$

Vai polinoms pareizi sadalīts reizinātājos, to var pārbaudīt ar pretēju pārveidojumu — sareizināt iegūtos reizinātājus un noskaidrot, vai reizinājumā dabū sākotnējo polinomu:

$$6a^2(2a - 4a^3 + b) = 12a^3 - 24a^5 + 6a^2b.$$

2\. piemērs. $2x^5y^2 - x^3y = x^3y(2x^2y - 1)$.

Kā redzams, iekavās palikušā polinoma pēdējais loceklis ir $-x^3y : x^3y = -1$. Der ievērot, ka iekavās paliek polinoms ar tādu pašu locekļu skaitu, kāds tas ir dotajam polinomam.

3\. piemērs. Kopīgo reizinātāju pirms iekavām, protams, var ņemt ar plusa vai mīnusa zīmi — kā tas katrā gadījumā šķiet izdevīgāk, piemēram,

$-4u^2 + u^3 = u^2(-4 + u)$ vai
$-4u^2 + u^3 = -u^2(4 - u)$.

Piezīmes. 1. No vienas iegūtās atbildes var viegli pāriet uz otru, mainot abiem reizinātājiem zīmes uz pretējām (sk. 1. punktu).

2\. Der ievērot, ka, ņemot pirms iekavām reizinātāju ar mīnusa zīmi, iekavās palikušo locekļu zīmes mainās uz pretējām.

4\. piemērs. $-2m - 8m^3 = -2m(1 + 4m^2)$ vai
$-2m - 8m^3 = 2m(-1 - 4m^2)$.

KOPĪGAIS REIZINĀTĀJS — POLINOMS

Ja saskaitāmo kopīgais reizinātājs ir polinoms, tad to var iznest pirms iekavām.

1) $4(a - 3) - a(a - 3) = (a - 3)(4 - a)$.

Te abu saskaitāmo $4(a - 3)$ un $-a(a - 3)$ kopīgais reizinātājs $a - 3$ iznests pirms iekavām; iekavās no pirmā saskaitāmā paliek 4, no otrā $-a$.

2) $(5x + y) - y(y + 5x) = (5x + y)(1 - y)$.

Te abu saskaitāmo kopīgais reizinātājs $5x + y$ ir iznests pirms iekavām. Iekavās no pirmā saskaitāmā $5x + y$ paliek skaitlis 1, no otrā saskaitāmā paliek $-y$.

3) $2(m - 5)^2 - m(m - 5) = (m - 5)(2(m - 5) - m) =$
$= (m - 5)(2m - 10 - m) = (m - 5)(m - 10)$.

Abu saskaitāmo kopīgais reizinātājs ir iznests pirms iekavām, iekavās no pirmā saskaitāmā paliek $2(m - 5)$, no otrā saskaitāmā paliek $-m$.

4) $c(c - 7) - 4(7 - c) = c(c - 7) + 4(c - 7) =$
$= (c - 7)(c + 4)$.

Vispirms, mainot otrā saskaitāmā $-4(7 - c)$ abiem reizinātājiem zīmes uz pretējām, abiem saskaitāmiem dabū kopīgu reizinātāju $c - 7$, kuru pēc tam ņem pirms iekavām.

5) $a^2(a - 3b) + (3b - a) - b(3b - a) = a^2(a - 3b) -$
$- (a - 3b) + b(a - 3b) = (a - 3b)(a^2 - 1 + b)$.

SAĪSINĀTĀS REIZINĀŠANAS FORMULU IZMANTOŠANA

Polinomu var sadalīt reizinātājos pēc saīsinātās reizināšanas formulām tikai tad, ja tā veids atbilst kādas formulas labajai pusei (sk. 8.5.).

Vienkāršākajos gadījumos pietiek uzrakstīt atbilstošo reizināšanas formulu «pretējā virzienā», piemēram,

1) $c^2 + 2cd + d^2 = (c + d)^2$;

2) $m^3 - n^3 = (m - n)(m^2 + mn + n^2)$;

3) $u^2 - 2u + 1 = (u - 1)^2$;

4) $16 - z^2 = (4 - z)(4 + z)$.

Sarežģītākajos gadījumos vispirms uzmanīgi jāizpēta polinoma atbilstība formulai.

1) $25a^2 - 9 = (5a)^2 - 3^2 = (5a + 3)(5a - 3)$.

Kā redzams, polinoms ir kvadrātu starpība, tātad sadalāms reizinātājos.

2) $0{,}64a^6 - \frac{16}{49}b^{10}c^2 = (0{,}8a^3)^2 - \left(\frac{4}{7}b^5c\right)^2 =$
$= \left(0{,}8a^3 - \frac{4}{7}b^5c\right) \cdot \left(0{,}8a^3 + \frac{4}{7}b^5c\right)$;

3) $25b^6 - 20b^3c + 4c^2 = (5b^3)^2 - 2 \cdot 5b^3 \cdot 2c + (2c)^2 =$
$= (5b^3 - 2c)^2$.

P i e z ī m e. Pēdējā piemērā polinoms ir starpības pilnais kvadrāts formā $a^2 - 2ab + b^2$, tātad tas ir sadalāms reizinātājos formā $(a - b)^2$.

4) $27x^6 - 8y^3 = (3x^2)^3 - (2y)^3 = (3x^2 - 2y)(9x^4 + 6x^2y + 4y^2)$.

Kā jau teikts, ne katrs polinoms pēc savas formas atbilst kādas saīsinātās reizināšanas formulas labajai pusei. «Gandrīz tuvi» tam, bet reizinātājos nesadalāmi ir, piemēram, polinomi formā

$a^2 + b^2$, $a^2 + ab + b^2$, $a^2 - ab + b^2$.

5) $9p^2 + 2{,}1pq^2 + 0{,}49q^4 = (3p)^2 + 3p \cdot 0{,}7q^2 + (0{,}7q^2)^2 = ?$

Kā redzams, polinoms ir summas nepilnais kvadrāts formā $a^2 + ab + b^2$ (bet ne $a^2 + 2ab + b^2$), tātad tas nav sadalāms reizinātājos.

GRUPĒŠANAS PAŅĒMIENS

Šī paņēmiena būtību parādīsim piemēros.

1. p i e m ē r s. $5a - 5b + a^2 - ab = (5a - 5b) +$
$+ (a^2 - ab) = 5(a - b) + a(a - b) = (a - b)(5 + a)$.

Polinoma locekļi vispirms savienoti divās grupās un pēc tam katra no tām sadalīta divos reizinātājos. Beidzot abu grupu kopīgais reizinātājs $a - b$ ir ņemts aiz iekavām.

Rezultatīvs izrādās arī cits grupēšanas variants:

$5a - 5b + a^2 - ab = (5a + a^2) - (5b + ab) =$
$= a(5 + a) - b(5 + a) = (5 + a)(a - b).$

Taču vēl cits grupēšanas variants ir neizdevīgs, jo abām grupām neveidojas kopīgi reizinātāji:

$5a - 5b + a^2 - ab = (5a - ab) - (5b - a^2) =$
$= a(5 - b) - (5b - a^2) = ?$

2. piemērs. $c^6 - 3c^4 - 6 + 2c^2 = (c^6 - 3c^4) -$
$- (6 - 2c^2) = c^4(c^2 - 3) - 2(3 - c^2) =$
$= c^4(c^2 - 3) + 2(c^2 - 3) = (c^2 - 3)(c^4 + 2).$

Kā redzams, pēc abu grupu sadalīšanas reizinātājos tām neveidojas vis vienādi, bet gan pretēji reizinātāji $c^2 - 3$ un $3 - c^2$. Mainot otrās grupas abiem reizinātājiem zīmes uz pretējām, abām grupām rodas kopīgs reizinātājs $c^2 - 3$, kuru ņem pirms iekavām.

3. piemērs. $a^2 - ax - x^2 - ax = (a^2 - ax) - (x^2 + ax) =$
$= a(a - x) - x(x + a) = ?$

Abām grupām nav radušies kopīgi reizinātāji, jo $a - x \neq x + a$. Tā kā šie reizinātāji nav arī savstarpēji pretēji, tad pēc reizinātāju zīmju maiņas tie arī paliks atšķirīgi. Arī ar citādu grupēšanas variantu doto polinomu nav iespējams sadalīt reizinātājos.

4. piemērs. $ax^2 + ay^2 + bx^2 - 3b + by^2 - 3a = (ax^2 +$
$+ bx^2) + (ay^2 + by^2) - (3a + 3b) = x^2(a + b) +$
$+ y^2(a + b) - 3(a + b) = (a + b)(x^2 + y^2 - 3).$

Kā redzams, vispirms polinoma locekļi ir pārvietoti tā, lai grupās varētu apvienot locekļus ar kopīgiem reizinātājiem. Šajā pašā polinomā mērķtiecīgi varētu katrā grupā apvienot arī trīs tādus loceļus, kuriem ir kādi kopīgi reizinātāji:

$ax^2 + ay^2 + bx^2 - 3b + by^2 - 3a = (ax^2 + ay^2 - 3a) +$
$+ (bx^2 - 3b + by^2) = a(x^2 + y^2 - 3) + b(x^2 - 3 + y^2) =$
$= (x^2 + y^2 - 3)(a + b).$

5. piemērs. $a^3 - 8b^3 - a^2 + 4ab - 4b^2 = (a^3 - 8b^3) -$
$- (a^2 - 4ab + 4b^2) = (a - 2b)(a^2 + 2ab + 4b^2) -$
$- (a - 2b)^2 = (a - 2b)(a^2 + 2ab + 4b^2 - a + 2b).$

6. piemērs. Ar grupēšanu var sadalīt reizinātājos arī dažus otrās pakāpes trinomus, vispirms trinoma pirmās pakāpes locekli «saskaldot» divos izdevīgos saskaitāmajos:

$a^2 - 4a - 12 = a^2 - 6a + 2a - 12 =$
$= (a^2 - 6a) + (2a - 12) = a(a - 6) +$
$+ 2(a - 6) = (a - 6)(a + 2).$

POLINOMA SAKNE

Aplūkosim polinomu ar vienu mainīgo, piemēram, $3x - 6$. Mainīgajam x šajā polinomā var piešķirt vispār jebkuru skaitlisko vērtību, un līdz ar to arī polinoma vērtības var būt dažādas.

Tās mainīgā vērtības, ar kurām polinoma vērtība ir nulle, sauc par šī polinoma saknēm.

Polinoma $3x - 6$ sakne ir 2, jo ar $x = 2$ polinoma $3x - 6$ vērtība ir nulle.

Ir arī polinomi, kuriem nav reālu sakņu. Tā, piemēram, polinoma $3m^2 + 1$ vērtība ne ar kādām mainīgā vērtībām nav vienāda ar nulli. (Ar jebkurām m vērtībām $3m^2 + 1 > 0$.)

Viegli saprast, ka polinoma saknes ir tāda vienādojuma saknes, kas rodas, polinomu pielīdzinot nullei.

1. piemērs. Atrast polinoma $7 - 2y$ sakni.

Atrisinājums.

$7 - 2y = 0$, $-2y = 7$, $y = 3{,}5$.

Atbilde. Polinoma $7 - 2y$ sakne ir 3,5.

2. piemērs. Atrast trinoma $m^2 - 7m - 30$ saknes.

Atrisinājums. Vienādojuma $m^2 - 7m - 30 = 0$ saknes pēc Vjeta teorēmas ir $m_1 = -3$, $m_2 = 10$.

Atbilde. Trinoma saknes ir -3 un 10.

KVADRĀTTRINOMA SADALĪŠANA REIZINĀTĀJOS

Otrās pakāpes polinomu $ax^2 + bx + c$ ar vienu mainīgo x sauc arī par kvadrāttrinomu. Ja kvadrāttrinomam ir saknes, tad to var sadalīt reizinātājos pēc formulas

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, kur x_1 un x_2 ir kvadrāttrinoma saknes.

1. piemērs. Sadalīt reizinātājos kvadrāttrinomu $5m^2 + 2m - 3$.

Atrisinājums. Aprēķinām kvadrāttrinoma saknes (sk. 12.1.):

$$5m^2 + 2m - 3 = 0; \quad D = 2^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-3) = 4 + 60 = 64;$$

$$m_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 5} = \frac{-2 \pm 8}{10};$$

$$m_1 = \frac{-2 - 8}{10} = -1; \quad m_2 = \frac{-2 + 8}{10} = \frac{3}{5}.$$

Saskaņā ar formulu

$$5m^2 + 2m - 3 = 5(m + 1)\left(m - \frac{3}{5}\right).$$

Lai daļu $-\frac{3}{5}$ pārveidotu par veselu skaitli, trešo reizinātāju $m - \frac{3}{5}$ var pareizināt ar kvadrātlocekļa koeficientu 5 (pirmo reizinātāju). Tad

$$5m^2 + 2m - 3 = 5(m + 1)\left(m - \frac{3}{5}\right) = (m + 1)(5m - 3)$$

un kvadrāttrinoms ir sadalīts reizinātājos.

P ā r b a u d e. $(m+1)(5m-3)=5m^2-3m+5m-3=$ $=5m^2+2m-3$.

P i e z ī m e. Ja kvadrāttrinoma koeficienti ir veseli skaitļi, tad tā reizinātāju koeficienti arī izsakāmi veselos skaitļos.

2. p i e m ē r s. Sadalīt reizinātājos kvadrāttrinomu $-a^2+$ $+a+20$.

A t r i s i n ā j u m s. $-a^2+a+20=0$;

$a^2-a-20=0$;

$a_1=-4$; $a_2=5$ (pēc Vjeta teorēmas);

$-a^2+a+20=-(a+4)(a-5)=(a+4)(5-a)$.

Šajā piemērā kvadrātlocekļa koeficients ir -1. Mainot zīmes uz pretējām diviem reizinātājiem, atbrīvojamies no mīnusa zīmes pirms reizinājuma.

3. p i e m ē r s. Sadalīt reizinātājos kvadrāttrinomu $12-$ $-7b-10b^2$.

A t r i s i n ā j u m s. Vispirms kvadrāttrinomu pārveido normālformā un tad sadala reizinātājos:

$$12-7b-10b^2=-10b^2-7b+12=-10\left(b+\frac{3}{2}\right)\left(b-\frac{4}{5}\right)=(2b+3)(4-5b);$$

$-10b^2-7b+12=0$; $10b^2+7b-12=0$;

$b_1=-\frac{3}{2}$; $b_2=\frac{4}{5}$.

Šajā piemērā kvadrātlocekļa koeficients -10 tika sadalīts divos reizinātājos: 2 (ar to reizinājām pirmo binomu) un -5 (ar to reizinājām otro binomu).

4. p i e m ē r s. Sadalīt reizinātājos $5x^2-3x+7$.

A t r i s i n ā j u m s. $5x^2-3x+7=0$;

$D=(-3)^2-4\cdot5\cdot7=-131$.

Tā kā diskriminants ir negatīvs, tad kvadrātvienādojumam un tātad arī kvadrāttrinomam nav sakņu, un tāpēc to nevar sadalīt reizinātājos.

POLINOMA SADALĪŠANA REIZINĀTĀJOS AR DAŽĀDIEM PAŅĒMIENIEM

Polinoma sadalīšanai reizinātājos ieteicams lietot dažādus paņēmienus (kuri no tiem iespējami) šādā secībā:

1) iznest kopīgos reizinātājus;
2) izmantot saīsinātās reizināšanas formulas;
3) mērķtiecīgi grupēt polinoma locekļus;
4) izmantot formulu kvadrāttrinoma sadalīšanai reizinātājos.

Kad polinoms jau sadalīts divos vai vairākos reizinātājos, katru no tiem jāmēģina vēl tālāk sadalīt reizinātājos.

1. piemērs. $2ax^2 - 18a^3 = 2a(x^2 - 9a^2) =$
$= 2a(x + 3a)(x - 3a)$.

2. piemērs. $81m^4 - 1 = (9m^2 + 1)(9m^2 - 1) =$
$= (9m^2 + 1)(3m + 1)(3m - 1)$.

3. piemērs. Sadalīt reizinātājos $9 - a^2 + 2ab - b^2$.

Atrisinājums. Visiem locekļiem kopīga reizinātāja nav. Saīsinātās reizināšanas formulu izmantot nevar. Grupēšana pa 2 locekļiem panākumus nedod. Pamanām, ka no polinoma pēdējiem trim locekļiem veidojas starpības kvadrāts:

$$9 - a^2 + 2ab - b^2 = 9 - (a^2 - 2ab + b^2) = 9 - (a - b)^2.$$

Iegūto izteiksmi var sadalīt reizinātājos kā kvadrātu starpību:

$$9 - (a - b)^2 = (3 + (a - b))(3 - (a - b)) =$$
$$= (3 + a - b)(3 - a + b).$$

Tātad

$$9 - a^2 + 2ab + b^2 = 9 - (a^2 - 2ab + b^2) = 9 - (a - b)^2 =$$
$$= (3 + (a - b))(3 - (a - b)) = (3 + a - b)(3 - a + b).$$

4. piemērs. Sadalīt reizinātājos polinomu $c^6 - d^6$.

1. variants. $c^6 - d^6 = (c^3)^2 - (d^3)^2 = (c^3 + d^3)(c^3 -$
$- d^3) = (c + d)(c^2 - cd + d^2)(c - d)(c^2 + cd + d^2)$.

2. variants. $c^6 - d^6 = (c^2)^3 - (d^2)^3 =$
$= (c^2 - d^2)(c^4 + c^2d^2 + d^2) =$
$= (c + d)(c - d)(c^4 + c^2d^2 + d^4)$.

Pēdējo trinomu var sadalīt vēl tālāk, «saskaldot» tā locekli c^2d^2 divos (uzrakstot c^2d^2 kā starpību $2c^2d^2 - c^2d^2$):

$$c^4 + c^2d^2 + d^4 = c^4 + 2c^2d^2 + d^4 - c^2d^2 =$$
$$= (c^4 + 2c^2d^2 + d^4) - c^2d^2 = (c^2 + d^2)^2 - (cd)^2 =$$
$$= (c^2 + d^2 + cd)(c^2 + d^2 - cd).$$

Tādējādi, sadalot doto polinomu reizinātājos pēc viena vai otra varianta, galīgā atbilde, protams, ir viena un tā pati. Taču vienkāršāks šoreiz šķiet pirmais variants.

9. ALGEBRISKAS DAĻAS

9.1. ALGEBRISKAS DAĻAS UN TO ĪPAŠĪBAS

ALGEBRISKAS DAĻAS JĒDZIENS

Par algebrisku daļu sauc daļu, kuras skaitītājs un saucējs ir polinomi, piemēram,

$$\frac{3x^2 + x - 2}{4x + 7}, \quad \frac{5y}{y - 3}, \quad \frac{1}{a - b}, \quad \frac{2a}{7m}$$

Ja algebriskas daļas saucējā nav mainīgo, tad šo daļu var uzrakstīt kā veselu algebrisku izteiksmi, piemēram, $\frac{4z-10}{5} = 0{,}8z - 2$. Aritmētiskas daļas, kurās mainīgie nav ne skaitītājā, ne saucējā, piemēram, $\frac{3}{7}$, $-\frac{8}{5}$, var uzlūkot par algebrisko daļu visvienkāršāko paveidu.

Algebriskai daļai ir jēga tikai ar tādām mainīgā vērtībām, ar kurām daļas saucējs (dalītājs) nav vienāds ar nulli. Tā, piemēram, daļa $\frac{4y^2+x-1}{5-x}$ ir definēta tikai ar $x \neq 5$;

daļa $\frac{a}{a^2-9}$ nav definēta ar $a = -3$ un ar $a = +3$;

daļa $\frac{m-5}{m^2+3}$ ir definēta ar mainīgā m jebkurām vērtībām (jo ar jebkurām m vērtībām $m^2 + 3 > 0$).

Jebkuru daļveida racionālu izteiksmi var identiski pārveidot algebriskā daļā.

ALGEBRISKĀS DAĻAS PAMATĪPAŠĪBA

Algebriskām daļām piemīt tāda pati pamatīpašība kā parastajām (aritmētiskajām) daļām: ja algebriskās daļas skaitītāju un saucēju reizina vai dala ar vienu un to pašu izteiksmi, kuras vērtība nav nulle, tad algebriskās daļas vērtība nemainās, piemēram,

$$\frac{3}{a} = \frac{3(a^2+1)}{a(a^2+1)} = \frac{3a^2+3}{a^3+a};$$

$$\frac{15x}{6x-9} = \frac{15x:3}{(6x-9):3} = \frac{5x}{2x-3}.$$

SKAITĪTĀJA UN SAUCĒJA ZĪMJU MAIŅA

No daļas pamatīpašības izriet praktiski svarīgi secinājumi par daļas skaitītāja un saucēja zīmju maiņu (par skaitītāja un saucēja reizināšanu ar skaitli -1).

Daļas vērtība nemainās, ja maina zīmes uz pretējām
a) daļas skaitītājam un saucējam,
b) daļas skaitītājam un visai daļai (daļas priekšā),
c) daļas saucējam un visai daļai (daļas priekšā).

1) $\frac{8}{4} = \frac{-8}{-4} = -\frac{-8}{4} = -\frac{8}{-4}$;

2) $\frac{a-b}{3k} = \frac{b-a}{-3k} = -\frac{b-a}{3k} = -\frac{a-b}{-3k}$;

3) $\frac{(1-a)(d-c)}{-5+a^2} = \frac{(a-1)(c-d)}{a^2-5}$ (skaitītājā mainītas zīmes diviem reizinātājiem, tātad skaitītāja vērtība nav mainījusies; arī saucēja vērtība nav mainījusies, jo saskaitāmie tikai pārvietoti);

4) $\frac{(x-y)^2}{a-b} = -\frac{(y-x)^2}{b-a}$ (zīme mainīta saucējā un daļas priekšā, bet skaitītājs nav mainīts, jo $(x-y)^2 = (y-x)^2$);

5) $-\frac{7}{(5-u)^3} = \frac{7}{(u-5)^3}$ (zīme mainīta daļas priekšā un saucējā, jo $(5-u^3) = -(u-5)^3$).

ALGEBRISKO DAĻU PAPLAŠINĀŠANA

Algebrisko daļu paplašina, ja tās skaitītāju un saucēju reizina ar vienu un to pašu skaitli vai izteiksmi, kas nav vienāda ar nulli. Izteiksmi, ar kuru paplašina daļu, sauc par papildreizinātāju (to mēdz pierakstīt virs lociņa pie skaitītāja tāpat kā parastajās daļās).

1. piemērs. Paplašināt algebrisko daļu $\frac{7a}{3-a}$ ar papildreizinātāju $3+a$:

$$\frac{7a}{3-a} = \frac{7a(3+a)}{(3-a)(3+a)} = \frac{21a+7a^2}{9-a^2}.$$

2. piemērs. Paplašināt algebrisko daļu $\frac{4c-1}{7c}$ tā, lai tās saucējs būtu $28cd$:

$$\frac{4c-1}{7c} = \frac{(4c-1)\cdot 4d}{7c\cdot 4d} = \frac{16cd-4d}{28cd}.$$

ALGEBRISKO DAĻU SAĪSINĀŠANA

Algebrisko daļu saīsina, ja tās skaitītāju un saucēju dala ar vienu un to pašu skaitli vai izteiksmi, kas nav vienāda ar nulli.

1) $\frac{8}{12x^2} = \frac{8:4}{12x^2:4} = \frac{2}{3x^2}$;

2) $\frac{c^4}{c^{12}} = \frac{1}{c^8}$ (daļa saīsināta ar c^4; saīsinot jāatceras, ka kāpinātāji jāatņem: $12-4=8$);

3) $\frac{-12x^3y^6}{18x^6y^5z} = \frac{-2y}{3x^3z} = -\frac{2y}{3x^3z}$ (daļa saīsināta ar skaitītāja un saucēja kopīgajiem reizinātājiem 6, x^3 un y^5 jeb ar to reizinājumu $6x^3y^5$);

4) $\frac{a-2b}{a(a-2b)} = \frac{1}{a}$;

5) ja daļas skaitītājs un saucējs ir polinomi, tad, lai noskaidrotu iespēju daļu saīsināt, tie vispirms jāsadala reizinātājos:

$$\frac{4-x^2}{8+4x} = \frac{(2-x)(2+x)}{4(2+x)} = \frac{2-x}{4}.$$

Aizrādījums. Būtu rupja kļūda «saīsināt» daļu, dalot polinoma (summas) atsevišķos locekļus, piemēram, $\frac{7b^2x+5x}{9abx+10x} \neq \frac{7b+1}{9a+2}$ skaitītāja un saucēja pirmais saskaitāmais ir «saīsināts» ar bx, otrais — ar $5x$).

Pareizi: $\frac{7b^2x+5x}{9abx+10x} = \frac{x(7b^2+5)}{x(9ab+10)} = \frac{7b^2+5}{9ab+10}$ (tālāka saīsināšana vairs nav iespējama);

6) $\frac{2x-bx-2y+by}{16-2b^3} = \frac{x(2-b)-y(2-b)}{2(8-b^3)} =$

$= \frac{(2-b)(x-y)}{2(2-b)(4+2b+b^2)} = \frac{x-y}{2(4+2b+b^2)}$;

7) $\frac{12-7b-10b^2}{16-25b^2} = \frac{(2b+3)(4-5b)}{(4-5b)(4+5b)} = \frac{2b+3}{4+5b} = \frac{2b+3}{5b+4}$.

Piezīme. Skaitītāju sadala reizinātājos kā kvadrāttrinomu: $12-7b-10b^2 = -10b^2-7b+12 =$

$= -10(b+\frac{3}{2})(b-\frac{4}{5}) = (2b+3)(4-5b)$;

$-10b^2-7b+12=0,\ 10b^2+7b-12=0,$

$b_1 = -\frac{3}{2};\ b_2 = \frac{4}{5}$;

8) $\frac{c-d}{d-c} = -\frac{c-d}{c-d} = -1$ (mainīta zīme daļas saucējā un daļas priekšā);

9) saīsināt daļu $\frac{x-y}{(y-2)(y-x)}$.

1. variants: $\frac{x-y}{(y-2)(y-x)} = \frac{x-y}{(2-y)(x-y)} = \frac{1}{2-y}$ (pirms saīsināšanas saucējā diviem reizinātājiem mainītas zīmes uz pretējām).

2. variants: $\frac{x-y}{(y-2)(y-x)} = \frac{y-x}{(2-y)(y-x)} = \frac{1}{2-y}$ (mainītas zīmes skaitītājam un vienam reizinātājam saucējā).

3. variants: $\frac{x-y}{(y-2)(y-x)} = -\frac{x-y}{(y-2)(x-y)} =$

$= -\frac{1}{y-2} = \frac{1}{2-y}$ (pirms saīsināšanas mainīta zīme vienam reizinātājam saucējā un daļas priekšā).

4. variants: $\frac{x-y}{(y-2)(y-x)} = -\frac{y-x}{(y-2)(y-x)} =$

$= -\frac{1}{y-2} = \frac{1}{2-y}$ (pirms saīsināšanas mainīta zīme skaitītājā un daļas priekšā);

10) $\frac{20n^2-5m^2}{m^2-4mn+4n^2} = \frac{5(4n^2-m^2)}{(m-2n)^2} = \frac{5(2n-m)(2n+m)}{(m-2n)^2} =$

$= \frac{5(2n-m)(2n+m)}{(2n-m)^2} = \frac{5(2n+m)}{2n-m}$ (pirms saīsināšanas saucējs $(m-2n)^2$ aizstāts ar identisku izteiksmi $(2n-m)^2$;

11) $\frac{(x-y)^2}{(y-x)^3} = \frac{(y-x)^2}{(y-x)^3} = \frac{1}{y-x}$.

9.2. ALGEBRISKO DAĻU SASKAITĪŠANA UN ATŅEMŠANA

SAUCĒJI IR VIENĀDI

Algebriskās daļas saskaita un atņem līdzīgi tam, kā saskaita un atņem parastās (aritmētiskās) daļas: lai saskaitītu vai atņemtu algebriskās daļas, kuru saucēji ir vienādi, jāsaskaita vai jāatņem šo daļu skaitītāji, paturot to pašu saucēju.

Iegūtā summa vai starpība pēc iespējas jāsaīsina.

1) $\frac{4a}{9}+\frac{3a}{9}=\frac{4a+3a}{9}=\frac{7a}{9}$;

2) $\frac{7y}{4xy^2}-\frac{5y}{4xy^2}=\frac{7y-5y}{4xy^2}=\frac{2y}{4xy^2}=\frac{1}{2xy}$;

3) $\frac{7k}{5m}-\frac{13-6k}{5m}+\frac{3-8k}{5m}=\frac{7k-(13-6k)+(3-8k)}{5m}=$
$=\frac{7k-13+6k+3-8k}{5m}=\frac{5k-10}{5m}=\frac{5(k-2)}{5m}=\frac{k-2}{m}$;

4) $\frac{y+7}{y^2-25}-\frac{3y+2}{y^2-25}-\frac{-y}{y^2-25}=$
$=\frac{y+7-(3y+2)-(-y)}{y^2-25}=\frac{y+7-3y-2+y}{y^2-25}=$
$=\frac{-y+5}{(y-5)(y+5)}=-\frac{y-5}{(y-5)(y+5)}=-\frac{1}{y+5}$.

SAUCĒJI IR DAŽĀDI MONOMI

Ja saucēji ir skaitļi, tad par visu daļu kopīgo saucēju izdevīgi ņemt šo skaitļu mazāko kopīgo dalāmo. Kā zināms (sk. 1.2.), to aprēķina, sareizinot vienu skaitli ar trūkstošajiem pārējo skaitļu pirmreizinātājiem. Līdzīgi atrod arī algebrisko daļu vienkāršāko kopīgo saucēju: vienam (jebkuram) no saucējiem pievieno trūkstošos reizinātājus no pārējiem saucējiem. Tādējādi kopīgajā saucējā ir saucēju visi reizinātāji ar attiecīgi lielāko kāpinātāju.

Ja monomu koeficienti ir nelieli skaitļi, tad tos parasti pirmreizinātājos nesadala, bet koeficentu mazāko kopīgo dalāmo nosaka galvā.

1. piemērs. Aprēķināt summu $\frac{x}{18a^3b}+\frac{5}{12ab^5c}$.

Kopīgais saucējs ir $36a^3b^5c$, jo 36 ir koeficientu 18 un 12 mazākais kopīgais dalāmais, un kopīgajā saucējā ir doto saucēju visi burtu reizinātāji ar attiecīgi lielāko kāpinātāju:

$$\frac{x^{(2b^4c}}{18a^3b}+\frac{5^{(3a^2}}{12ab^5c}=\frac{2b^4cx}{36a^3b^5c}+\frac{15a^2}{36a^3b^5c}=\frac{2b^4cx+15a^2}{36a^3b^5c}.$$

Daļas papildreizinātājā jāraksta kopīgā saucēja dalījums ar doto saucēju jeb visi tie reizinātāji, kuri kopīgajā saucējā ir «liekie» «vairāk» nekā dotajā saucējā.

2) $\frac{3^{(c}}{a} - \frac{b^{(a}}{c} = \frac{3c}{ac} - \frac{ab}{ac} = \frac{3c - ab}{ac}$;

3) $\frac{2x - 7y^{(5y}}{2x^2y} - \frac{7y - 10x^{(2x}}{5xy} - \frac{10xy - 20x^2}{10x^2y^2} =$

$$= \frac{10xy - 35y^2 - (10xy - 20x^2)}{10x^2y^2} = \frac{10xy - 35y^2 - 10xy + 20x^2}{10x^2y^2} =$$

$$= \frac{-35y^2 + 20x^2}{10x^2y^2} = \frac{20x^2 - 35y^2}{10x^2y^2} = \frac{5(4x^2 - 7y^2)}{10x^2y^2} = \frac{4x^2 - 7y^2}{2x^2y^2}.$$

P i e z ī m e. Būtu rupja kļūda, ja vēl tālāk «saīsinātu» $4x^2$ un $2x^2$ *vai* y^2 un y^2.

SAUCĒJI IR DAŽĀDI POLINOMI

Vispirms saucēju polinomus sadala reizinātājos un tālāk kopīgo saucēju atrod līdzīgi kā citos gadījumos: vienam (jebkuram) saucējam pievieno trūkstošos reizinātājus no pārējiem saucējiem.

$$\frac{1}{b^2 - ab} - \frac{1}{ab - a^2} = \frac{1^{(a}}{b(b-a)} - \frac{1^{(b}}{a(b-a)} = \frac{a}{ab(b-a)} -$$

$$- \frac{b}{ab(b-a)} = \frac{a-b}{ab(b-a)} = -\frac{b-a}{ab(b-a)} = -\frac{1}{ab};$$

2) $\frac{1^{(2a}}{2a - b} - \frac{1^{(2a-b}}{2a} = \frac{2a - (2a - b)}{2a(2a - b)} = \frac{2a - 2a + b}{2a(2a - b)} =$

$$= \frac{b}{2a(2a-b)}.$$

P i e z ī m e. Otrajā piemērā doto daļu saucējiem nav kopīgu reizinātāju, tāpēc kopīgais saucējs ir abu saucēju reizinājums;

3) $\frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2} - \frac{m - n}{2m + 2n} = \frac{m^2 + n^{2(2}}{(m+n)(m-n)} - \frac{m - n^{(m-n}}{2(m+n)} =$

$$= \frac{2(m^2 + n^2) - (m-n)^2}{2(m+n)(m-n)} = \frac{2m^2 + 2n^2 - (m^2 - 2mn + n^2)}{2(m+n)(m-n)} =$$

$$= \frac{2m^2 + 2n^2 - m^2 + 2mn - n^2}{2(m+n)(m-n)} = \frac{m^2 + n^2 + mn}{2(m+n)(m-n)}$$

$$= \frac{(m+n)^2}{2(m+n)(m-n)} = \frac{m+n}{2(m-n)};$$

4) $\frac{k-3}{k-1} - \frac{2}{1-k} = \frac{k-3}{k-1} + \frac{2}{k-1} = \frac{k-3+2}{k-1} = \frac{k-1}{k-1} = 1.$

Mainot zīmi otrās daļas saucējam un daļas priekšā, abām daļām rodas vienādi saucēji. Ja to nedarītu, kopīgajā saucējā būtu jāņem abu doto saucēju reizinājums un atrisinājums kļūtu sarežģītāks;

5) $\frac{m^2}{(m-6)^2} - \frac{36}{(6-m)^2} = \frac{m^2}{(m-6)^2} - \frac{36}{(m-6)^2} = \frac{m^2 - 36}{(m-6)^2} =$

$$= \frac{(m-6)(m+6)}{(m-6)^2} = \frac{m+6}{m-6}.$$

Otrās daļas saucējā mainot pakāpes bāzi $6-m$ uz pretējo $m-6$, tās kvadrāts nemainās;

$$6)\quad \frac{3c}{3-x} - 3c = \frac{3c}{1-x} - \frac{3c^{(1-x}}{1} = \frac{3c - 3c(1-x)}{1-x} =$$

$$= \frac{3c - 3c + 3cx}{1-x} = \frac{3cx}{1-x};$$

$$7)\quad \frac{1}{x-1} - x - 1 = \frac{1}{x-1} - \frac{x^{(x-1}}{1} - \frac{1^{(x-1}}{1} = \frac{1}{x-1} -$$

$$- \frac{x^2-x}{1} - \frac{x-1}{x-1} = = \frac{1-(x^2-x)-(x-1)}{x-1} =$$

$$= \frac{1-x^2+x-x+1}{x-1} = \frac{2-x^2}{x-1}.$$

9.3. ALGEBRISKO DAĻU REIZINĀŠANA UN DALĪŠANA

DAĻU REIZINĀŠANA

Algebriskās daļas reizina tāpat kā parastās (aritmētiskās) daļas:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Lai sareizinātu algebriskās daļas, jāsareizina to skaitītāji, jāsareizina saucēji un pirmais reizinājums jāizdala ar otro. Jau reizināšanas gaitā, cik iespējams (it īpaši skaitliskos reizinātājus) saīsina:

$$1)\quad \frac{18}{5a^2} \cdot \frac{a^7b}{24c} = \frac{18 \cdot a^7b}{5a^2 \cdot 24c} = \frac{3a^5b}{20c};$$

$$2)\quad \frac{12x^3}{7m^2n} \cdot \left(-\frac{25m^8n}{4x^3}\right) = -\frac{12x^3 \cdot 25m^8n}{5m^2n \cdot 4x^3} = -15m^6;$$

$$3)\quad \frac{4d^2}{3x^2} \cdot \left(-\frac{5x^4}{12c}\right) \cdot \left(-\frac{7x}{10d^5}\right) = \frac{4d^2 \cdot 5x^4 \cdot 7x}{3x^2 \cdot 12c \cdot 10d^5} = \frac{7x^3}{18cd^3};$$

4) $\frac{a^3}{20b^2} \cdot 5a^2b = \frac{a^3}{20b^2} \cdot \frac{5a^2b}{1} = \frac{a^3 \cdot 5a^2b}{20b^2} = \frac{a^5}{4b}$ (veselā izteiksme $5a^2b$ izteikta kā daļa ar saucēju 1);

$$5)\quad \frac{x^2-1}{2c-2d} \cdot \frac{c^2-cd}{x^3-1} = \frac{(x^2-1)(c^2-cd)}{(2c-2d)(x^3-1)} =$$

$$= \frac{(x-1)(x+1)c(c-d)}{2(c-d)(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{c(x+1)}{2(x^2+x+1)}.$$

Lai pierakstus saīsinātu, polinomus var sadalīt reizinātājos jau reizē ar reizinājuma pierakstu uz kopējas daļsvītras;

$$6)\quad (x^2-y^2) \cdot \left(-\frac{x}{xy+x^2}\right) = -\frac{(x^2-y^2) \cdot x}{x^2+xy} =$$

$$= -\frac{(x-y)(x+y) \cdot x}{x(x+y)} = -(x-y) = y - x.$$

DAĻU KĀPINĀŠANA

Par šo jautājumu sk. 8.7.

1) $\left(\frac{2a^2}{3b^4c}\right)^3 = \frac{(2a^2)^3}{(3b^4c)^3} = \frac{8a^6}{27b^{12}c^3}$;

2) $\left(-\frac{2m^3}{y^2z}\right)^5 = -\frac{(2m^3)^5}{(y^2z)^5} = -\frac{32m^{15}}{y^{10}z^5}$;

3) $\left(\frac{c^{(c}}{d} - \frac{d^{(d}}{c}\right)^2 = \left(\frac{c^2-d^2}{cd}\right)^2 = \frac{(c^2-d^2)^2}{(cd)^2} = \frac{c^4-2c^2d^2+d^4}{c^2d^2c}$.

DAĻU DALĪŠANA

Algebriskās daļas dala tāpat kā parastās (aritmētiskās) daļas: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$.

Lai vieņu algebrisku daļu izdalītu ar otru, pirmā daļa jāreizina ar apgrieztu otro daļu:

1) $\frac{6c^2}{d^3x^2} : \frac{2c}{3dx^6} = \frac{6c^2 \cdot 3dx^6}{d^3x^2 \cdot 2c} = \frac{9cx^4}{d^2}$;

2) $b^2 : \left(-\frac{b^3}{7a}\right) = -\frac{b^2 \cdot 7a}{b^3} = -\frac{7a}{b}$;

3) $\frac{25y^2-4x^2}{x^3+8} : \frac{2x+5y}{x^2-2x+4} = \frac{(25y^2-4x^2)\cdot(x^2-2x+4)}{(x^3+8)(2x+5y)} =$
$= \frac{(5y-2x)(5y+2x)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x^2-2x+4)(2x+5y)} = \frac{5y-2x}{x+2}$;

4) $\frac{x^3+8}{x-2} : (x^2-2x+4) = \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x-2)(x^2-2x+4)} = \frac{x+2}{x-2}$;

5) ja izteiksmē ir tikai reizināšana un dalīšana, tad tās var izdarīt vienlaicīgi, atrisinājumu rakstot uz kopējas daļsvītras:

$$\frac{2a^2}{y^2} \cdot \frac{9b^3}{8a^2y^4} : \frac{3b}{4y^3} = \frac{2a^2 \cdot 9b^3 \cdot 4y^3}{y^2 \cdot 8a^2y^4 \cdot 3b} = \frac{3b^2}{y^3}.$$

9.4. RACIONĀLU IZTEIKSMJU IDENTISKI PĀRVEIDOJUMI

Jebkuru racionālu algebrisku izteiksmi var pārveidot par daļu, kuras skaitītājs un saucējs ir polinomi.

1. piemērs. $\left(\frac{a-b^{(a-b}}{b} + \frac{2a^{(b}}{a-b}\right)\left(a^{(a+b} - \frac{a^2+b^2}{a+b}\right) -$
$- \frac{3a^2+b^2}{2a+2b} = \frac{a^2-2ab+b^2+2ab}{b(a-b)} \cdot \frac{a^2+ab-a^2-b^2}{a+b} - \frac{3a^2+b^2}{2a+2b} =$
$= \frac{a^2+b^2}{b(a-b)} \cdot \frac{ab-b^2}{a+b} - \frac{3a^2+b^2}{2a+2b} = \frac{(a^2+b^2)\cdot b(a-b)}{b(a-b)(a+b)} -$
$- \frac{3a^2+b^2}{2a+2b} = \frac{a^2+b^2}{a+b} - \frac{3a^2+b^2}{2(a+b)} = \frac{2a^2+2b^2-3a^2-b^2}{2(a+b)} =$
$= \frac{b^2-a^2}{2(a+b)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(a+b)} = \frac{b-a}{2}$.

2. piemērs. Vienkāršot izteiksmi $\frac{1}{y+1}+\frac{y-1}{y+1}\left(\frac{y^2+1}{y^2-y}-\right.$ $\left.-\frac{y}{y-1}\right)$.

1. variants. Ievērojot darbību secību, vienkāršojam izteiksmi «pa atsevišķām darbībām»;

1) $\frac{y^2+1}{y^2-y}-\frac{y}{y-1}=\frac{y^2+1}{y(y-1)}-\frac{y^{(y}}{y-1}=\frac{y^2+1-y^2}{y(y-1)}=$ $=\frac{1}{y(y-1)}$;

2) $\frac{y-1}{y+1}\cdot\frac{1}{y(y-1)}=\frac{y-1}{(y+1)y(y-1)}=\frac{1}{y(y+1)}$;

3) $\frac{1^{(y}}{y+1}+\frac{1}{y(y+1)}=\frac{y+1}{y(y+1)}=\frac{1}{y}$.

2. variants. Vienkāršojam izteiksmi «saistītajā pierakstā»:

$$\frac{1}{y+1}+\frac{y-1}{y+1}\left(\frac{y^2+1}{y^2-y}-\frac{y}{y-1}\right)=\frac{1}{y+1}+\frac{y-1}{y+1}\left(\frac{y^2+1}{y(y-1)}-\right.$$
$$\left.-\frac{y^{(y}}{y-1}\right)=\frac{1}{y+1}+\frac{y+1}{y+1}\cdot\frac{y^2+1-y^2}{y(y-1)}=$$
$$=\frac{1}{y+1}+\frac{y+1}{y+1}\cdot\frac{1}{y(y-1)}=\frac{1}{y+1}+\frac{y-1}{(y+1)y(y-1)}=$$
$$=\frac{1^{(y}}{y+1}+\frac{1}{y(y+1)}=\frac{y+1}{y(y+1)}=\frac{1}{y}.$$

10. SAKNES UN PAKĀPES

10.1. SAKNES

SAKNES JĒDZIENS

Par n-tās pakāpes sakni no skaitļa a sauc tādu skaitli b, kas, kāpināts n-tajā pakāpē, ir vienāds ar skaitli a.

Piemēram, trešās pakāpes sakne no skaitļa 8 ir 2, jo $2^3=8$; otrās pakāpes sakne no skaitļa 9 ir gan 3, gan arī —3, jo $3^2=9$ un arī $(-3)^2=9$.

Darbību, kurā aprēķina n-tās pakāpes sakni no skaitļa a, sauc par saknes vilkšanu jeb radicēšanu un pieraksta tā:

$\sqrt[n]{a}=b$.

Lasa: n-tās pakāpes sakne no skaitļa a ir b.

1) $\sqrt[3]{-125}=-5$, jo $(-5)^3=-125$;

2) $\sqrt[5]{0{,}00032}=0{,}2$, jo $0{,}2^5=0{,}00032$.

Skaitli a sauc par zemsaknes skaitli, skaitli n — par saknes rādītāju, darbības rezultātu (un arī izteiksmi $\sqrt[n]{a}$)— par sakni jeb radikāli. Darbības zīmi $\sqrt{\ }$ sauc par saknes zīmi jeb radikāla zīmi. Par saknes rādītāju izvēlas tikai naturālus skaitļus $n=1, 2, 3, 4, \ldots$.

Pirmās pakāpes sakne no skaitļa ir pats skaitlis, t. i., $\sqrt[1]{a}=a$, jo $a^1=a$. Otrās pakāpes sakni $\sqrt[2]{a}$ sauc arī par skaitļa kvadrātsakni un parasti raksta bez saknes rādītāja, piemēram, $\sqrt{0,49}=0,7$. Trešās pakāpes sakni $\sqrt[3]{a}$ sauc arī par skaitļa kubsakni.

SAKNES EKSISTENCE

Nepāra pakāpes sakne eksistē jebkuram skaitlim, pie tam tā ir viena vienīga.

1) $\sqrt[3]{-0,001}=-0,1$, jo $(-0,1)^3=-0,001$;

2) $\sqrt[5]{34}\approx 2,0243975... \approx 2,024$, jo $2,024^5\approx 34$.

Pāra pakāpes sakne eksistē tikai no nenegatīviem skaitļiem, pie tam pozitīva skaitļa pāra pakāpes saknei ir divas pretējas vērtības. Piemēram, neeksistē $\sqrt[4]{-81}$, jo nav tāda skaitļa, kura ceturtā pakāpe būtu negatīvs skaitlis -81. Toties ceturtās pakāpes saknei no 81 ir divas vērtības: 3 un -3, jo $3^4=81$ un arī $(-3)^4=81$.

Jebkuras pakāpes sakne no skaitļa 0 ir viena vienīga, proti, skaitlis 0, piemēram $\sqrt{0}=0$, $\sqrt[7]{0}=0$.

ARITMĒTISKĀ SAKNE

Lai novērstu nenoteiktību sakarā ar pāra pakāpju sakņu divējādām vērtībām, tad matemātikā tiek ieviests aritmētiskās saknes jēdziens.

Nenegatīva skaitļa nenegatīvo sakni sauc par šī skaitļa aritmētisko sakni. Tā, piemēram, skaitļa 25 aritmētiskā kvadrātsakne ir $\sqrt{25}=5$, bet skaitļa 25 otra (negatīvā) kvadrātsakne ir $-\sqrt{25}=-5$. Tādējādi vienādojuma $x^2=25$ abus atrisinājumus (vienādojuma saknes) var pierakstīt tā: $x=\sqrt{25}=5$, $x=-\sqrt{25}=-5$. Raksta arī $x=\pm\sqrt{25}=\pm 5$ (lasa: x ir vienāds ar plus vai mīnus kvadrātsakni no 25 jeb plus vai mīnus 5).

Pozitīvā skaitļa nepāra pakāpes vienīgā sakne, piemēram, skaitļa 8 kubsakne $\sqrt[3]{8}=2$, ir reizē arī tā aritmētiskā sakne.

Negatīvam skaitlim nav aritmētiskās saknes, bet tā nepāra pakāpes negatīvo sakni var aizstāt ar pretējā pozitīvā skaitļa aritmētisko sakni, kuras priekšā ir mīnusa zīme (mīnusa zīmi var «iznest» pirms saknes zīmes), piemēram, $\sqrt[3]{-8}=-\sqrt[3]{8}=-2$.

Nulles vienīgā sakne $\sqrt[n]{0}=0$ ir reizē arī tās aritmētiskā sakne.

SAKNES APRĒĶINĀŠANA

Vienkāršākos gadījumos precīzu sakni var atrast mēģinājumu ceļā, cenšoties uzminēt skaitli, kura attiecīgā pakāpe ir vienāda ar zemsaknes skaitli.

1) $\sqrt[3]{64} = 4$, jo $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$;

2) $\sqrt{289} = 17$, jo $17^2 = 289$;

3) $\sqrt[5]{-243} = -3$, jo $(-3)^5 = -243$;

4) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{2}$, jo $(\frac{1}{2})^6 = \frac{1}{64}$;

5) $\sqrt[3]{-0{,}125} = -0{,}5$, jo $(-0{,}5)^3 = -0{,}125$;

6) $\sqrt[7]{0} = 0$, jo $0^7 = 0$;

7) $\sqrt[4]{-16}$ neeksistē;

8) $\sqrt{4\frac{25}{36}} = \sqrt{\frac{169}{36}} = \frac{13}{6} = 2\frac{1}{6}$.

Piezīme. Aprēķinot sakni no jaukta skaitļa, tas vispirms izsakāms neīstā daļā — kā pēdējā piemērā. Būtu rupja kļūda atrast sakni atsevišķi no veselā skaitļa 4 un no daļas $\frac{25}{36}$, rakstot rezultātā $2\frac{5}{6}$.

Atceroties, kā galvā viegli aprēķināt tādu skaitļu kvadrātus, kas beidzas ar ciparu 5 (sk. 1.5.), viegli atrast, piemēram, šādas kvadrātsaknes:

1) $\sqrt{1225} = 35$, jo $35^2 = 1225$;

2) $\sqrt{5625} = 75$, jo $75^2 = 5625$;

3) $\sqrt{30{,}25} = 5{,}5$, jo $5{,}5^2 = 30{,}25$.

SAKNES TUVINĀTA APRĒĶINĀŠANA

Mēģinājumu ceļā iespējams atrast sakni no jebkura skaitļa ar pēc patikas lielu precizitāti (ja sakne vispār eksistē).

Aprēķināt $x = \sqrt{31}$. Vispirms secinām, ka $5 < x < 6$. Lai noteiktu sakni precīzāk, pārbaudām kādu vērtību starp 5 un 6, piemēram, $x = 5{,}4$. Tā kā $5{,}4^2 = 29{,}16 < 31$, tad pārbaudām lielāku vērtību $x = 5{,}5$. Tā kā $5{,}5^2 = 30{,}25 < 31$, tad izmēģinām nākamo lielāko vērtību $x = 5{,}6$. Tā kā $5{,}6^2 = 31{,}36 > 31$, tad ar precizitāti līdz 0,1 esam atraduši, ka $x = \sqrt{31} \approx 5{,}5$ (ar iztrūkumu) vai $x = \sqrt{31} \approx 5{,}6$ (ar uzviju).

Ja nepieciešama vēl lielāka precizitāte, tad līdzīgi sākam pārbaudīt skaitļus starp 5,5 un 5,6, piemēram, 5,53, 5,54 u. tml. Tā varētu atrast skaitļa 31 aptuvenu kvadrātsakni ar precizitāti līdz 0,01: $\sqrt{31} \approx 5{,}56$ (ar iztrūkumu) vai $\sqrt{31} \approx 5{,}57$ (ar uzviju) utt.

Kvadrātsakņu un kubsakņu precīzas vai tuvinātas vērtības var atrast arī īpašās tabulās vai ar logaritma lineālu. Ar kabatas skaitļotāju dažās sekundēs var atrast jebkuras pakāpes sakni ar visai lielu precizitāti. Tā, piemēram,

1) $\sqrt{31} \approx 5{,}5677643$;

2) $\sqrt[5]{12} \approx 1{,}6437518$;

3) $\sqrt[100]{7} \approx 1{,}0196497$.

SAKARS STARP SAKNI UN PAKĀPI

Saskaņā ar saknes definīciju, izvelkot no skaitļa sakni un pēc tam kāpinot dabūto sakni attiecīgajā pakāpē, atkal iegūst sākotnējo skaitli:

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

Šī vienādība ir patiesa kā pāra, tā arī nepāra pakāpes saknēm ar jebkurām skaitļa a vērtībām (ja tikai izteiksmei $\sqrt[n]{a}$ ir jēga).

1) $\sqrt[3]{125} = 5$; $5^3 = 125$;

2) $(\sqrt{36})^2 = 36$;

3) $(\sqrt[5]{-4{,}29})^5 = -4{,}29$;

4) $(\sqrt[4]{-16})^4 \neq -16$, jo $\sqrt[4]{-16}$ nav jēgas.

Ja n ir nepāra skaitlis, tad spēkā ir arī pretējais apgalvojums: kāpinot skaitli kādā pakāpē un pēc tam no dabūtās pakāpes izvelkot attiecīgās pakāpes sakni, atkal iegūst sākotnējo skaitli:

$$\sqrt[n]{a^n} = a \quad (n\text{—nepāra skaitlis, } a\text{—jebkurš skaitlis}).$$

1) $5^3 = 125$; $\sqrt[3]{125} = 5$;

2) $\sqrt[5]{(-2)^5} = -2$.

Minētais apgalvojums negatīvu skaitļu pāra pakāpju aritmētiskajām saknēm nav spēkā. Tā, piemēram, $\sqrt[4]{(-3)^4} \neq -3$. Pareizi: $\sqrt[4]{(-3)^4} = \sqrt[4]{81} = 3$ jeb $\sqrt[4]{(-3)^4} = |-3| = 3$.

Ja n ir pāra skaitlis, tad ar jebkurām skaitļa a vērtībām ir patiesa vienādība

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \quad (n\text{ — pāra skaitlis, } a\text{ — jebkurš skaitlis}).$$

1) $\sqrt[4]{3^4} = |3| = 3$;

2) $\sqrt[4]{(-3)^4} = |-3| = 3$;

3) $\sqrt[6]{x^6} = |x| = \begin{cases} x, & \text{ja } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{ja } x < 0. \end{cases}$

It īpaši der ievērot aritmētiskās kvadrātsaknes vērtību no skaitļa kvadrāta, jo to bieži izmanto identiskos pārveidojumos:

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

1) $\sqrt{0{,}37^2} = |0{,}37| = 0{,}37$;

2) $\sqrt{(-5{,}9)^2} = |-5{,}9| = 5{,}9$;

3) ja $z \geqslant 0$, tad $\sqrt{z^2} = |z| = z$;

4) ja $z < 0$, tad $\sqrt{z^2} = |z| = -z$;

5) $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, \text{ ja } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ ja } x < 0; \end{cases}$

6) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x-3)^2} = |x - 3|$, ja $x \geqslant 3$, tad $x - 3 \geqslant 0$ un $|x - 3| = x - 3$, bet ja $x < 3$, tad $x - 3 < 0$ un $|x - 3| = 3 - x$;

7) ja $a \geqslant 0$, tad $\sqrt{a^6} = \sqrt{(a^3)^2} = |a^3| = a^3$;

8) ja $y \leqslant 0$, tad $\sqrt{y^{10}} = \sqrt{(y^5)^2} = |y^5| = -y^5$;

9) $\sqrt{b^8} = \sqrt{(b^4)^2} = |b^4| = b^4$ (tā kā $b^4 \geqslant 0$ ar jebkurām b vērtībām, tad $|b^4| = b^4$).

10.2. ARITMĒTISKO SAKŅU ĪPAŠĪBAS

Tālāk aplūkotās sakņu īpašības vispār piemīt tikai aritmētiskām saknēm, t. i., nenegatīvām saknēm no nenegatīviem skaitļiem. Tā kā sakņu pārveidojumos sakne no nulles neizraisa īpašu interesi, tad pieņemsim, ka šajā paragrāfā jebkurās zemsaknes izteiksmēs burtu vērtības ir pozitīvas (ja tas nav īpaši atrunāts). Līdz ar to ir pareiza identitāte $\sqrt[n]{a^n} = a$.

SAKNES PAMATĪPAŠĪBA

Ja saknes rādītāju un zemsaknes skaitļa kāpinātāju reizina vai dala ar vienu un to pašu skaitli, tad saknes vērtība nemainās (pieņemot, ka saknes rādītājs ir naturāls skaitlis):

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}.$$

Šos pārveidojumus sauc attiecīgi par saknes paplašināšanu vai saīsināšanu.

1) Aprēķināt $\sqrt[6]{9^3}$.

Risinot darbību secībā: $\sqrt[6]{9^3} = \sqrt[6]{729} = 3$.

Sakni ar 3 saīsinot: $\sqrt[6]{9^3} = \sqrt{9} = 3$;

2) $\sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^2}$ (sakne paplašināta ar 2);

3) $\sqrt[6]{(x^2+1)^3} = \sqrt{x^2+1}$ (sakne saīsināta ar 3);

4) $\sqrt[4]{25} = \sqrt[4]{5^2} = \sqrt{5} \approx 2{,}23$.

SAKNE NO REIZINĀJUMA

Sakni no reizinājuma var atrast arī tā, ka atrod sakni no katra reizinātāja atsevišķi un dabūtās saknes sareizina:

$$\sqrt[n]{a \cdot b \cdot c} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}.$$

1) Aprēķināt $\sqrt[3]{8 \cdot 125}$.

Risinot darbību secībā: $\sqrt[3]{8 \cdot 125} = \sqrt[3]{1000} = 10$.

Izmantojot īpašību: $\sqrt[3]{8\cdot125}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{125}=2\cdot5=10$;

2) $\sqrt{9\cdot64}=\sqrt{576}=24$ (risināts neizdevīgi);

3) $\sqrt{9\cdot64}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{64}=3\cdot8=24$ (risināts izdevīgi);

4) $\sqrt{0{,}2\cdot0{,}8}=\sqrt{0{,}2}\cdot\sqrt{0{,}8}\approx0{,}44\cdot0{,}89\approx0{,}39$ (neizdevīgi),
$\sqrt{0{,}2\cdot0{,}8}=\sqrt{0{,}16}=0{,}4$ (izdevīgi);

5) $\sqrt{9a^3b^6}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b^6}=3ab^3$;

6) $\sqrt[3]{0{,}125x^{12}}=0{,}5x^4$;

7) $\sqrt{25u^4(v+3)^2}=5u^2(v+3)$;

8) $\sqrt[3]{-0{,}008n^6}=-\sqrt[3]{0{,}008n^6}=-0{,}2n^2$.

SAKNE NO DALĪJUMA

Sakni no dalījuma var atrast arī tā, ka atrod sakni atsevišķi no dalāmā un dalītāja un pēc tam dabūtās saknes izdala:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

1) Aprēķināt $\sqrt[3]{\frac{1000}{125}}$.

Risinot darbību secībā: $\sqrt[3]{\frac{1000}{125}}=\sqrt[3]{8}=2.$

Izmantojot īpašību: $\sqrt[3]{\frac{1000}{125}}=\sqrt[3]{1000}:\sqrt[3]{125}=10:5=2$;

2) $\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$ (izdevīgi),
$\sqrt{\frac{9}{4}}=\sqrt{2\frac{1}{4}}=\sqrt{2{,}25}=1{,}5$ (neizdevīgi);

3) $\sqrt{\frac{18}{0{,}5}}=\sqrt{18}:\sqrt{0{,}5}=\ ...$ (neizdevīgi),
$\sqrt{\frac{18}{0{,}5}}=\sqrt{36}=6$ (izdevīgi);

4) $\sqrt{\frac{a^2}{25}}=\frac{a}{5}$;

5) $\sqrt[3]{-\frac{x^6y^3}{27}}=-\sqrt[3]{\frac{x^6y^3}{27}}=-\frac{x^2y}{3}$.

I e v ē r o t! Sakni no reizinājuma un dalījuma var atrast, aprēķinot to vispirms atsevišķi no katra darbības locekļa. Taču šādi rīkoties nedrīkst, aprēķinot sakni no summas vai starpības:

1) $\sqrt{16+9}\neq\sqrt{16}+\sqrt{9}=4+3=7$,
$\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$;

2) $\sqrt[3]{27-8}\neq\sqrt[3]{27}-\sqrt[3]{8}=3-2=1$,
$\sqrt[3]{27-8}=\sqrt[3]{19}\approx2{,}7$.

SAKNES PAKĀPE

Sakni var kāpināt arī tā, ka kāpina zemsaknes skaitli un velk sakni no dabūtās pakāpes:

$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

1) Aprēķināt $(\sqrt{4})^3$.

Risinot darbību secībā: $(\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8$.

Izmantojot īpašību: $(\sqrt{4})^3 = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$;

2) $(\sqrt{2})^4 \approx (1{,}41)^4 \approx 4$ (risināt darbību secībā ir neizdevīgi);

$(\sqrt{2})^4 = \sqrt{2^4} = \sqrt{16} = 4$ (izdevīgi);

3) $(\sqrt{a^3})^4 = \sqrt{a^{12}} = a^6$;

$\left(\sqrt[5]{3xy^2(u-v)}\right)^2 = \sqrt[5]{9x^2y^4(u-v)^2}$.

SAKNE NO SAKNES

Sakni no saknes var atrast arī tā, ka no zemsaknes skaitļa atrod sakni, kuras rādītājs ir abu sakņu radītāju reizinājums:

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$.

1) Aprēķināt $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$.

Risinot darbību secībā: $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[3]{8} = 2$.

Izmantojot īpašību: $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[3\cdot 2]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$;

2) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}} = \sqrt[15]{7}$;

3) $\sqrt{\sqrt{2x}} = \sqrt[4]{2x}$.

SAKŅU ĪPAŠĪBU IZMANTOŠANA

Kā jau minēts šī paragrāfa ievadā, aplūkotās sakņu īpašības vispār piemīt tikai aritmētiskām saknēm. Dažas no tām gan var tieši attiecināt uz nepāra pakāpes saknēm no negatīviem skaitļiem (piemēram, 2. un 3. īpašību). Taču, lai izvairītos no rupjām kļūdām sakņu identiskos pārveidojumos, vienmēr ieteicams vispirms atbrīvot zemsaknes izteiksmes no negatīviem reizinātājiem un negatīvām bāzēm, lai tikai pēc tam bez atrunām varētu izmantot visas aritmētisko sakņu īpašības.

Ilustrēsim to ar dažiem piemēriem.

1) $\sqrt{(-4)\cdot(-25)} = \sqrt{-4}\cdot\sqrt{-25} =$? (Dotā izteiksme, kurai ir jēga, pārveidojumā to zaudē.)

Pareizi: $\sqrt{(-4)\cdot(-25)} = \sqrt{4\cdot 25} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{25} =$ utt.

2) Saīsinot sakni, kurā zemsaknes izteiksmes bāze ir negatīva, iegūst nepareizu rezultātu:

$\sqrt[4]{(-9)^2} = \sqrt{-9} = ??$ (Dotā izteiksme, kurai ir jēga, pārveidojumā to zaudē.)

Pareizi: $\sqrt[4]{(-9)^2} = \sqrt[4]{9^2} = \sqrt{9} = 3$.

3) $\sqrt[3]{-0{,}008n^6} = -\sqrt[3]{0{,}008n^6} = -0{,}2n^2$.

10.3. SAKŅU IDENTISKI PĀRVEIDOJUMI

Sakņu identiskie pārveidojumi izriet no aritmētisko sakņu īpašībām, tāpēc bez jebkādām atrunām tos var piemērot tādām izteiksmēm, kas satur pozitīvus skaitļus vai burtus ar pozitīvām vērtībām. Pretējā gadījumā izteiksmju pārveidojumos jāievēro iepriekšējā paragrāfa pēdējā punktā minētie norādījumi un atbilstošās atrunas.

Turpmākajos piemēros, kur tas īpaši nav atrunāts, ar burtiem ir apzīmēti pozitīvi skaitļi.

RACIONĀLA REIZINĀTĀJA IZNEŠANA PIRMS SAKNES ZĪMES

Iznest reizinātāju pirms saknes zīmes var tad, ja no zemsaknes izteiksmes izdodas atdalīt tādu reizinātāju, kura racionālu sakni viegli noteikt.

1) $\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{125 \cdot 2} = \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{2}$;

2) $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$.

Tādējādi, atceroties, ka $\sqrt{3} \approx 1{,}73$, var, piemēram, aprēķināt, ka

$\sqrt{12} = 2\sqrt{3} \approx 2 \cdot 1{,}73 = 3{,}46$;

3) $\sqrt[5]{-160} = -\sqrt[5]{32 \cdot 5} = -2\sqrt[5]{5}$.

Ja uzreiz grūti saskatīt lielāko iespējamo reizinātāju, kuru var iznest pirms saknes zīmes, var pakāpeniski iznest jebkuru no iespējamiem reizinātājiem:

4) $\sqrt[3]{432} = \sqrt[3]{8 \cdot 54} = 2\sqrt[3]{54} = 2\sqrt[3]{27 \cdot 2} = 2 \cdot 3\sqrt[3]{2} = 6\sqrt[3]{2}$;

5) $0{,}5\sqrt{180} = 0{,}5 \cdot \sqrt{9 \cdot 20} = 0{,}5 \cdot 3\sqrt{20} = 1{,}5 \cdot \sqrt{4 \cdot 5} =$
$= 1{,}5 \cdot 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$;

6) ja $a \geqslant 0$, tad $\sqrt{5a^2} = |a|\sqrt{5} = a\sqrt{5}$;

7) ja $z < 0$, tad $\sqrt[4]{80z^4} = \sqrt[4]{16 \cdot 5 \cdot z^4} = 2|z|\sqrt[4]{5} =$
$= -2z\sqrt[4]{5}$;

8) $\sqrt[3]{-40x^3y^7} = -\sqrt[3]{5 \cdot 8 \cdot x^3 \cdot y^6 \cdot y} = -2xy^2\sqrt[3]{5y}$;

9) $\sqrt{zm^2} = |m|\sqrt{z} = \begin{cases} m\sqrt{z}, & \text{ja } m \geqslant 0 \\ -m\sqrt{z}, & \text{ja } m < 0; \end{cases}$

10) $\sqrt{162a^5b^2} = \sqrt{81\cdot 2\cdot a^4\cdot a\cdot b^2} = 9a^2b\sqrt{2a}$ (ja $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$);

11) $\sqrt{5u^4} = |u^2|\sqrt{5} = u^2\sqrt{5}$ (neatkarīgi no u vērtības $u^2 \geqslant 0$ un tāpēc $|u^2| = u^2$).

RACIONĀLA REIZINĀTĀJA IENEŠANA ZEM SAKNES ZĪMES

Ienesot pozitīvu reizinātāju zem saknes zīmes, tas jākāpina attiecīgajā pakāpē.

1) $5\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{5^3\cdot 2} = \sqrt[3]{125\cdot 2} = \sqrt[3]{250}$;

2) $\frac{1}{2}\sqrt{20} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 20} = \sqrt{5}$.

Ja pirms saknes ir negatīvs reizinātājs, tad, lai dotā izteiksme nemainītu savu zīmi, zem saknes jāienes tikai tā modulis (attiecīgajā pakāpē), bet pirms saknes jāatstāj mīnusa zīme.

3) $-3\sqrt{7} = -\sqrt{3^2\cdot 7} = -\sqrt{63}$;

4) ja $x < 0$, tad $x\sqrt[4]{3} = -\sqrt[4]{3x^4}$;

5) $u\sqrt{7} = \begin{cases} \sqrt{7u^2}, & \text{ja } u \geqslant 0 \\ -\sqrt{7u^2}, & \text{ja } u < 0. \end{cases}$

Ienest reizinātāju zem saknes zīmes dažreiz ir izdevīgi tad, ja jānosaka dotās izteiksmes skaitliskā vērtībā. Tā, piemērām, ja jāaprēķina izteiksme $7\sqrt{5}$ vērtība ar precizitāti līdz 0,01, tad tabulās būtu jāatrod $\sqrt{5}$ vērtība ar lielāku precizitāti, proti, līdz 0,001 (starprezultāts!), pēc tam tā jāreizina ar 7 un rezultāts jānoapaļo līdz 0,01:

$7\sqrt{5} \approx 7\cdot 2{,}236 = 15{,}652 \approx 15{,}65$.

Taču izdevīgāk ir vispirms ienest reizinātāju 7 zem saknes zīmes un pēc tam tabulās atrast sakni:

$7\sqrt{5} = \sqrt{49\cdot 5} = \sqrt{245} \approx 15{,}65$.

ZEMSAKNES IZTEIKSMES ATBRĪVOŠANA NO SAUCĒJA

Sakni no daļas var aizstāt ar sakni no veselas izteiksmes, paplašinot daļu tā, lai no tās saucēja varētu izvilkt racionālu sakni.

1) $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2\cdot 3}{3\cdot 3}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$;

2) $\sqrt[3]{-0{,}75}=-\sqrt[3]{\frac{3}{4}}=-\sqrt[3]{\frac{3\cdot 2}{4\cdot 2}}=-\sqrt[3]{\frac{6}{8}}=$
$=-\frac{1}{2}\sqrt[3]{6}=-0{,}5\sqrt[3]{6}$;

3) $\sqrt{2{,}5}=\sqrt{\frac{5\cdot 2}{2\cdot 2}}=\frac{1}{2}\sqrt{10}=0{,}5\sqrt{10}$;

4) $\sqrt{1\frac{1}{8}}=\sqrt{\frac{9\cdot 2}{8\cdot 2}}=\frac{3}{4}\sqrt{2}=0{,}75\sqrt{2}$;

5) $\sqrt[3]{\frac{1}{a}}=\sqrt[3]{\frac{a^2}{a^3}}=\frac{1}{a}\sqrt[3]{a^2}$;

6) $\sqrt{\frac{3}{x}}=\sqrt{\frac{3x}{x^2}}=\frac{1}{x}\sqrt{3x}$.

DAĻAS SAUCĒJA ATBRĪVOŠANA NO SAKNES

Daļas saucējā var iegūt racionālu izteiksmi, paplašinot daļu ar atbilstošu izteiksmi.

1) $\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{2\cdot\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{2}{3}\sqrt{3}$;

2) $\frac{10}{\sqrt{5}}=\frac{10\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{10\sqrt{5}}{5}=2\sqrt{5}$;

3) $\frac{a}{\sqrt[3]{a}}=\frac{a\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}}=\frac{a\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^3}}=\frac{a\sqrt[3]{a^2}}{a}=\sqrt[3]{a^2}$;

4) $\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3})^2-1^2}=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{3-1}=$
$=\sqrt{3}-1$;

5) $\frac{3}{\sqrt{x-y}}=\frac{3\sqrt{x-y}}{(\sqrt{x-y})^2}=\frac{3\sqrt{x-y}}{x-y}$.

Atbrīvojot daļu no saknes saucējā, vieglāk izskaitļot tās vērtību, jo atkrīt dalīšana ar aptuvenu skaitli, piemēram, aprēķināt $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ar precizitāti līdz 0,001.

Risinot tieši: $x=1:\sqrt{2}\approx 1:1{,}141421=\ ?$

Kā redzams, izdalīt ir ne visai viegli.

Izdevīgāk: $x=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\approx\frac{1{,}41421}{2}\approx 0{,}7071$.

SAKNES NORMĀLFORMA

Ja zemsaknes izteiksme ir atbrīvota no saucēja, no zemsaknes izteiksmes ir iznesti racionālie reizinātāji un sakne ir iespējami saīsināta, tad tādu sakni sauc par sakni normālformā. Piemēros parādīts, kā doto sakni pakāpeniski pārveido normālformā.

1) $\sqrt{2\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{8}{3}}=\sqrt{\frac{8\cdot 3}{3\cdot 3}}=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{4\cdot 2\cdot 3}=\frac{2}{3}\sqrt{6}$;

2) $\sqrt[4]{2^6}=\sqrt{2^3}=2\sqrt{2}$;

3) $\sqrt[3]{6{,}75}=\sqrt[3]{6\frac{3}{4}}=\sqrt[3]{\frac{27}{4}}=\sqrt[3]{\frac{27\cdot 2}{4\cdot 2}}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}=1{,}5\sqrt[3]{2}$;

4) $\sqrt{\frac{8a^3}{3b}}=\sqrt{\frac{4\cdot 2\cdot a^2\cdot a\cdot 3\cdot b}{3\cdot b\cdot 3\cdot b}}=\frac{2a}{3b}\sqrt{6ab}$;

5) $\sqrt[4]{x^2y^8z^6}=\sqrt{xy^4z^3}=y^2z\sqrt{xz}$.

LĪDZĪGAS SAKNES

Divas saknes sauc par līdzīgām, ja tās atšķiras viena no otras tikai ar racionāliem reizinātājiem pirms saknes zīmes. Tā, piemēram, līdzīgas ir saknes $0{,}5\sqrt{3}$ un $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{7}$, $4\sqrt[3]{7}$ un $-\frac{1}{3}\sqrt[3]{7}$. Saknes, kas dotajā veidā nav līdzīgas, var izrādīties līdzīgas pēc to pārveidošanas normālformā. Tā, piemēram, $-\sqrt{18}$ un $3\sqrt{0{,}5}$ pēc to pārveidošanas normālformā izrādās līdzīgas, jo

$$-\sqrt{18}=-\sqrt{9\cdot 2}=-3\sqrt{2}\ ;\ 3\sqrt{0{,}5}=3\sqrt{\frac{1\cdot 2}{2\cdot 2}}=$$
$$=\frac{3}{2}\sqrt{2}=1{,}5\sqrt{2}.$$

SAKŅU SASKAITĪŠANA UN ATŅEMŠANA

Saskaitīt un atņemt (jeb «savilkt») var tikai līdzīgas saknes, operējot ar tām tāpat kā ar līdzīgiem monomiem.

1) $\sqrt{3}+\sqrt{3}+5\sqrt{3}=7\sqrt{3}$;

2) $\sqrt{2}+\sqrt{50}=\sqrt{2}+\sqrt{25\cdot 2}=\sqrt{2}+5\sqrt{2}=6\sqrt{2}$;

3) $\sqrt{0{,}5}-\sqrt{8}=\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{4\cdot 2}=\sqrt{\frac{2}{4}}-2\sqrt{2}=$
$=\frac{1}{2}\sqrt{2}-2\sqrt{2}=-1{,}5\sqrt{2}$;

4) $-\sqrt[3]{270}+\sqrt{2{,}5}-\sqrt[3]{-0{,}64}=-\sqrt[3]{27\cdot 10}+\sqrt{\frac{5}{2}}+$
$+\sqrt[3]{\frac{16}{25}}=-3\sqrt[3]{10}+\sqrt{\frac{5\cdot 2}{2\cdot 2}}+\sqrt[3]{\frac{8\cdot 2\cdot 5}{25\cdot 5}}=-3\sqrt[3]{10}+$
$+\frac{1}{2}\sqrt{10}+\frac{2}{5}\sqrt[3]{10}=(-3\sqrt[3]{10}+\frac{2}{5}\sqrt[3]{10})+0{,}5\sqrt{10}=$
$=-2{,}6\sqrt[3]{10}+0{,}5\sqrt{10}$;

5) $\sqrt{2x}-2\sqrt{18x}-\sqrt{50x}=\sqrt{2x}-6\sqrt{2x}-5\sqrt{2x}=$
$=-10\sqrt{2x}$;

6) $\sqrt[3]{8x}+\sqrt[3]{-x}=2\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x}$;

7) $\sqrt{5a^5}-\sqrt{\frac{9}{5a}}=\sqrt{5\cdot a^4\cdot a}-\sqrt{\frac{9\cdot 5a}{(5a)^2}}=a^2\sqrt{5a}-$
$-\frac{3}{5a}\sqrt{5a}=(a^2-\frac{3}{5a})\sqrt{5a}=\frac{5a^3-3}{5a}\sqrt{5a}$.

SAKŅU REIZINĀŠANA UN DALĪŠANA

Lai reizinātu vai dalītu saknes, kurām vienādi sakņu rādītāji, pietiek sareizināt vai izdalīt zemsaknes skaitļus un vilkt attiecīgās pakāpes sakni no dabūtā rezultāta. Šīs kārtulas izriet tieši no aritmētisko sakņu īpašībām par saknes atrašanu no reizinājuma vai dalījuma (sk. 10.2.), mainot attiecīgo vienādību kreisās un labās puses vietām:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}\,;\quad \sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\,.$$

1) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{3\cdot 2}=\sqrt{6}$;

2) $\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[3]{18}=\sqrt[3]{12\cdot 18}=\sqrt[3]{216}=6$;

3) $\sqrt{50}:\sqrt{2}=\sqrt{50:2}=\sqrt{25}=5$;

4) $\sqrt[3]{4}:\sqrt[3]{0{,}5}=\sqrt[3]{4:0{,}5}=\sqrt[3]{8}=2$;

5) $\sqrt{2a}\cdot\sqrt{18a}=\sqrt{36a^2}=6a$;

6) $\sqrt{5x^4y}:\sqrt{0{,}2y}=\sqrt{x^4}=x^2$.

Ja sakņu rādītāji nav vienādi, tad pirms reizināšanas vai dalīšanas tie jāvienādo (izmantojot saknes pamatīpašību);

7) $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{2^2}=\sqrt[4]{3\cdot 4}=\sqrt[4]{12}$;

8) $\sqrt{2}:3\sqrt[3]{0{,}5}=\sqrt[6]{2^3}:3\sqrt[6]{0{,}25}=\frac{1}{3}\sqrt[6]{8:0{,}25}=\frac{1}{3}\sqrt[6]{32}$.

SAKNES KĀPINĀŠANA UN SAKNES ATRAŠANA NO SAKNES

Šajos izteiksmju identiskajos pārveidojumos tieši izmantojamas tās aritmētisko sakņu attiecīgās īpašības, kas aplūkotas jau iepriekš (sk. 10.2.).

1) $(\sqrt[3]{5})^2=\sqrt[3]{5^2}=\sqrt[3]{25}$;

2) $(\sqrt[6]{4})^3=\sqrt[6]{4^3}=\sqrt[6]{64}=2$;

3) $(-\sqrt{3})^5=-\sqrt{3^5}=-\sqrt{3^4\cdot 3}=-3^2\sqrt{3}=-9\sqrt{3}$;

4) $(0{,}2\sqrt[3]{25})^2=0{,}04\sqrt[3]{(5^2)^2}=0{,}04\sqrt[3]{5^4}=0{,}04\cdot 5\cdot\sqrt[3]{5}=$
$=0{,}2\sqrt[3]{5}$;

5) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[12]{2}$;

6) $\sqrt{5\sqrt[3]{0,4}} = \sqrt{\sqrt[3]{25 \cdot 0,4}} = \sqrt[6]{10}$;

7) $\sqrt{5\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\sqrt{5^3 \cdot 5}} = \sqrt[6]{5^4} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$;

8) $\sqrt[5]{a\sqrt[4]{a}} = \sqrt[5]{\sqrt[4]{a^4 \cdot a}} = \sqrt[20]{a^5} = \sqrt[4]{a}$.

DAŽĀDI IZTEIKSMJU IDENTISKI PĀRVEIDOJUMI

1) $(\sqrt{5} - x)^2 = (\sqrt{5})^2 - 2x\sqrt{5} + x^2 = 5 - 2x\sqrt{5} + x^2$;

2) $(\sqrt{2} + \sqrt{8})^2 = (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} + (\sqrt{8})^2 = 2 + 2\sqrt{16} +$
$+ 8 = 2 + 2 \cdot 4 + 8 = 18.$

Cits variants: $(\sqrt{2} + \sqrt{8})^2 = (\sqrt{2} + 2\sqrt{2})^2 = (3\sqrt{2})^2 =$
$= 9 \cdot 2 = 18$;

3) $(1 - \sqrt{x}) \cdot (1 + \sqrt{x}) = 1^2 - (\sqrt{x})^2 = 1 - x$;

4) $(y - 4) : (\sqrt{y} - 2) = ((\sqrt{y})^2 - 2^2) : (\sqrt{y} - 2) =$
$= \sqrt{y} + 2$;

5) $\dfrac{9a - 25b}{3\sqrt{a} + 5\sqrt{b}} = \dfrac{(3\sqrt{a} + 5\sqrt{b})(3\sqrt{a} - 5\sqrt{b})}{3\sqrt{a} + 5\sqrt{b}} = 3\sqrt{a} - 5\sqrt{b}$;

6) salīdzināt pēc lieluma $\sqrt[3]{5}$ un $\sqrt{2\sqrt[3]{3}}$:
$\sqrt{2\sqrt[3]{3}} = \sqrt{\sqrt[3]{8 \cdot 3}} = \sqrt[6]{24}$; $\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}$.

Tātad $\sqrt[3]{5} > \sqrt{2\sqrt[3]{3}}$;

7) $(4\sqrt{u} - \sqrt{2u})(\sqrt{u} - \sqrt{2u}) = 4(\sqrt{u})^2 - 4\sqrt{2u^2} - \sqrt{2u^2} +$
$+ (\sqrt{2u})^2 = 4u - 4u\sqrt{2} - u\sqrt{2} + 2u = 6u - 5u\sqrt{2}$;

8) $\dfrac{a(3 - 2\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} + \dfrac{a(3 + 2\sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}} = \dfrac{3a - 2a\sqrt{2} + 3a + 2a\sqrt{2}}{(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})} = \dfrac{6a}{3^2 - (2\sqrt{2})^2} =$
$= \dfrac{6a}{9 - 8} = 6a$;

9) $(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1) = x - 1$ (izmantota saīsinātās reizināšanas formula)
$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$, kur $a = \sqrt[3]{x}$ un $b = 1)$;

10) $\sqrt{(\sqrt{7} - 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{7} - 3)^2} = |\sqrt{7} - 1| +$
$+ |\sqrt{7} - 3| = (\sqrt{7} - 1) + (3 - \sqrt{7}) = 2$;

11) aprēķināt izteiksmes $A = \sqrt{m^2 - 4m + 4} -$
$- \sqrt{m^2 + 2m + 1}$ vērtību, ja $m = 0,19$;
$A = \sqrt{(m - 2)^2} - \sqrt{(m + 1)^2} = |m - 1| - |m + 1| =$
$= (2 - m) - (m + 1) = 1 - 2m$;
$A = 1 - 2 \cdot 0,19 = 1 - 0,38 = 0,62$.

10.4. PAKĀPE AR RACIONĀLU KĀPINĀTĀJU

PAKĀPE AR DAĻVEIDA KĀPINĀTĀJU

Par pozitīvas bāzes pakāpi ar daļveida kāpinātāju pieņem sakni, kuras rādītājs ir daļas saucējs, bet zemsaknes skaitlis ir bāze, kuras kāpinātājs ir daļas skaitītājs:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \ (a > 0;\ m \text{ — vesels skaitlis; } n \text{ — naturāls skaitlis}).$$

1) $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$;

2) $125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5$;

3) $4^{1,5} = 4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$;

4) $0{,}2^{1\frac{1}{3}} = 0{,}2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{0{,}2^4} = \sqrt[3]{0{,}0016}$;

5) $8^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4}$.

Pozitīvas bāzes a pakāpes ar jebkuriem savstarpēji pretējiem racionāliem kāpinātājiem r un $-r$ saista vienādība

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}.$$

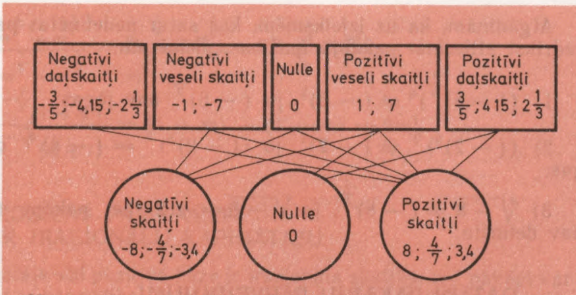
Tāpēc, piemēram, iepriekšējā (5.) piemērā doto pakāpi var aprēķināt arī tā:

$$8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{4}.$$

Negatīvas bāzes pakāpei ar daļveida kāpinātāju, piemēram, $(-125)^{\frac{1}{3}}$ vai $(-0{,}8)^{-2,4}$, nepiešķir nekādu jēgu (šāda pakāpe netiek definēta).

Nulles pakāpe ar jebkuru pozitīvu kāpinātāju ir vienāda ar nulli, piemēram, $0^{\frac{3}{5}} = 0$, bet nulles pakāpei ar nepozitīvu kāpinātāju, piemēram, 0^{-3}, $0^{-\frac{2}{5}}$ vai 0^0, nepiešķir nekādu jēgu.

Dažādu skaitļu pakāpju eksistenci var uzskatāmi parādīt shēmā, kuras apakšējā rindā norādīts, kāda veida skaitlis ir bāze, bet augšējā rindā —, kāds ir kāpinātājs. Pakāpes eksistenci parāda savienotājs nogrieznis.



20. zīm.

PAKĀPES ĪPAŠĪBAS

Pakāpēm ar jebkuru racionālu kāpinātāju (ja tās ir definētas), piemīt visas tās pašas īpašības, kas piemīt pakāpēm ar naturālu vai veselu kāpinātāju (sk. 8.1.). Šīs īpašības izsakāmas ar vienādībām (p un q — jebkuri racionāli skaitļi):

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q};$$
$$a^p : a^q = a^{p-q};$$
$$(a^p)^q = a^{pq};$$
$$(ab)^p = a^p \cdot b^q;$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}.$$

1) $5^{-0,25} \cdot 5^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{-0,5} = 5^{-0,25+\frac{3}{4}-0,5} = 5^0 = 1;$

2) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-1\frac{1}{3}} : \left(\frac{2}{7}\right)^{-2\frac{1}{3}} = \left(\frac{2}{7}\right)^{-1\frac{1}{3}-(-2\frac{1}{3})} = \left(\frac{2}{7}\right)^1 = \frac{2}{7};$

3) $3^{-0,5} : 3^{1,5} = 3^{-0,5-1,5} = 3^{-2} = \frac{1}{9};$

4) $(0,5^3)^{-\frac{2}{3}} = 0,5^{3\cdot(-\frac{2}{3})} = 0,5^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4;$

5) $(10^{-2} \cdot 3^4)^{-\frac{1}{2}} = (10^{-2})^{-\frac{1}{2}} \cdot (3^4)^{-\frac{1}{2}} = 10 \cdot 3^{-2} = \frac{10}{9} =$
$= 1\frac{1}{9};$

6) $\left(\frac{3^{\frac{1}{2}}}{2^{-1,5}}\right)^4 = \frac{\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^4}{(2^{-1,5})^4} = \frac{3^2}{2^{-6}} = 9 \cdot 2^6 = 9 \cdot 64 = 576.$

Atgādinām, ka uz izteiksmēm, kas satur nedefinētas pakāpes, nedrīkst attiecināt pakāpju īpašības, piemēram,

1) $((-5)^{\frac{1}{3}})^6 \neq (-5)^2$, jo $(-5)^{\frac{1}{3}}$ nav jēgas;

2) $((-2)^3)^{\frac{1}{3}} \neq (-2)^1$, jo $((-2)^3)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{1}{3}}$ nav jēgas;

3) $\sqrt[3]{-8} \neq (-8)^{\frac{1}{3}}$, jo $\sqrt[3]{-8} = -2$, bet pakāpe $(-8)^{\frac{1}{3}}$ nav definēta.

DAŽĀDI PAKĀPJU PĀRVEIDOJUMI

Pieņemsim turpmāk, ka visās izteiksmēs, ja tas nav īpaši atrunāts, ar burtiem ir apzīmēti pozitīvi skaitļi.

1) $\left(a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}}c^{\frac{5}{6}}\right)^6 = \left(a^{\frac{2}{3}}\right)^6 \cdot \left(b^{-\frac{1}{3}}\right)^6 \cdot \left(c^{\frac{5}{6}}\right)^6 = a^4b^{-2}c^5$;

2) $(u^{-1,5} + u^{0,5}) \cdot u^{0,25} = u + u^3$;

3) $\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right) = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a - b$;

4) $\left(x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}}\right) : \left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right) = \left(\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^3 - \left(y^{\frac{1}{2}}\right)^3\right) : (x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}) = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + \left(y^{\frac{1}{2}}\right)^2 = x + \sqrt{xy} + y$ (risinājumā izmantota formula $(a^3 - b^3) : (a - b) = a^2 + ab + b^2$);

5) $\left(\frac{1}{27} \cdot 125^{-1}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot (5^3)^{-1}\right)^{-\frac{1}{3}} = (3^{-3} \cdot 5^{-3})^{-\frac{1}{3}} = (3^{-3})^{-\frac{1}{3}} \cdot (5^{-3})^{-\frac{1}{3}} = 3 \cdot 5 = 15$;

6) $\dfrac{7 - x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{7} + x^{\frac{1}{6}}} = \dfrac{(\sqrt{7})^2 - \left(x^{\frac{1}{6}}\right)^2}{\sqrt{7} + x^{\frac{1}{6}}} = \sqrt{7} - x^{\frac{1}{6}}$;

7) $\dfrac{a + 2a^{0,5}}{2a} = \dfrac{a}{2a} + \dfrac{2a^{0,5}}{2a} = 0,5 + a^{-0,5}$;

8) $\dfrac{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{x^{\frac{1}{6}}\left(x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}}\right)}{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{1}{6}}$;

9) $\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt[3]{a^2}\right)a^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} + a^{\frac{2}{3}}\right) \cdot a^{\frac{1}{3}} = (a^{-\frac{1}{2}} + a^{\frac{2}{3}}) \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{-\frac{1}{6}} + a$;

$$10)\ \frac{m^{\frac{1}{3}}-m^{\frac{7}{3}}}{m^{\frac{1}{3}}-m^{\frac{4}{3}}}-\frac{m^{-\frac{1}{3}}-m^{\frac{5}{3}}}{m^{\frac{2}{3}}+m^{-\frac{1}{3}}}=\frac{m^{\frac{1}{3}}(1-m^2)}{m^{-\frac{1}{3}}(1-m)}-$$

$$-\frac{m^{-\frac{1}{3}}(1-m^2)}{m^{-\frac{1}{3}}(m+1)}=(1+m)-(1-m)=2m\,.$$

JĒDZIENS PAR PAKĀPI AR IRACIONĀLU KĀPINĀTĀJU

Ja kāpinātājs vai pozitīvā bāze ir iracionāls skaitlis, tad pākāpi var aprēķināt ar pēc patikas lielu precizitāti, aizstājot darbības iracionālās komponentes ar atbilstošu racionālu tuvinājumu. Tā, piemēram, zinot, ka $\sqrt{2}=1{,}4142135\ldots$, var ar pēc patikas lielu precizitāti aprēķināt $x=3^{\sqrt{2}}$:

$3^1<x<3^2$ jeb $3<x<9$;

$3^{1,4}<x<3^{1,5}$ jeb $4{,}7<x<5{,}2$ tātad $x\approx 5$;

$3^{1,41}<x<3^{1,42}$ jeb $4{,}71<x<4{,}76$, tātad $x\approx 4{,}7$ utt.

Šādi rīkojoties, varam atrast pakāpes $3^{\sqrt{2}}$ vērtību ar pietiekami lielu precizitāti, piemēram, $x=3^{\sqrt{2}}\approx 4{,}728804$ (ar precizitāti līdz 0,000001).

11. FUNKCIJAS

11.1. FUNKCIJAS JĒDZIENS UN ĪPAŠĪBAS

FUNKCIJAS JĒDZIENS

Daudzi lielumi ir savā starpā saistīti tā, ka, mainoties viena lieluma vērtībai, mainās arī otra lieluma atbilstošā vērtība. Tā, piemēram, ja gājējs iet ar ātrumu 4 km/h, tad, mainoties gājiena laikam, mainās arī noietais ceļš: laikam 2 h atbilst noietais ceļš 8 km, laikam 2,5 h atbilst noietais ceļš 10 km utt.

Vienādībā $y=12:(x-3)$ katrai pieļaujamai x vērtībai atbilst viena vienīga y vērtība, piemēram, ja $x=4$, tad $y=12$; ja $x=5$, tad $y=6$; ja $x=1$, tad $y=-6$ utt. Vienīgi ar $x=3$ mainīgajam y neatbilst nekāda vērtība, tāpēc skaitlis 3 nav mainīgā x pieļaujamā vērtība. Līdzīgu sakaru starp diviem mainīgajiem lielumiem (starp laiku un noieto ceļu, starp x un y vērtībām) sauc par funkcionālu atbilstību jeb par funkciju.

Par funkciju sauc tādu atbilstību starp mainīgajiem x un y, kurā katrai pieļaujamai x vērtībai atbilst viena noteikta y vērtība.

Mainīgo x sauc par neatkarīgo mainīgo jeb par argumentu. Mainīgo y sauc par atkarīgo mainīgo, to mēdz saukt arī par argumenta x funkciju.

FUNKCIJAS VISPĀRĪGS PIERAKSTS

Ja mainīgais y ir atkarīgs no mainīgā x jeb mainīgais y ir mainīgā x funkcija, tad raksta $y = f(x)$ (lasa: y ir f no x). Ar burtu f te ir apzīmēta funkcionālā atbilstība starp mainīgajiem x un y. Ja, piemēram, ar $y = f(x)$ apzīmē funkciju $y = 3x - 1$, tad ar burtu f ir izteikta šāda funkcionāla atbilstība: jebkurai x vērtībai atbilst tāda y vērtība, ko iegūst, reizinot x vērtību ar 3 un no reizinājuma atņemot skaitli 1, piemēram, $f(2) = 3 \cdot 2 - 1 = 5$ (lasa: f no 2 ir vienāds ar 5).

Funkcijas mēdz apzīmēt arī ar citiem burtiem, piemēram, $y = g(x)$, $y = \varphi(x)$ u. c. Raksta arī $y = y(x)$, ar to akcentējot, ka y vērtība ir atkarīga no x vērtības.

FUNKCIONĀLĀS ATBILSTĪBAS IZTEIKŠANA

1°. Ja funkcijas vispārīgajā pierakstā $y = f(x)$ apzīmējumu $f(x)$ aizstāj ar matemātisku izteiksmi, kas satur mainīgo x, tad funkcija ir izteikta ar formulu jeb analītiski. Tā, piemēram, formula $y = x^2 - 3x$ katrai argumenta x vērtībai piekārto vienu noteiktu funkcijas y vērtību, proti, $y(5) = 5^2 - 3 \cdot 5 = 10$; $y(-1) = (-1)^2 - 3 \cdot (-1) = 4$; $y(0) = 0^2 - 3 \cdot 0 = 0$.

2°. Funkcionālo sakaru starp mainīgajiem var izteikt arī tabulā. Tā, piemēram, sakaru starp mainīgajiem x un y funkcijā $y = x^2 - 3x$ izsaka šāda tabula:

x	-2	-1	0	1	1,5	2	3	4	4,5	5
y	10	4	0	-2	$-2{,}25$	-2	0	4	6,75	10

Tabulā argumenta vērtībām atbilstošās funkcijas vērtības jau ir dotas vai izrēķinātas pēc formulas.

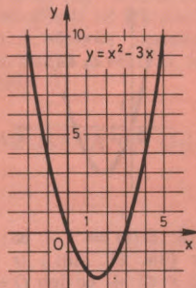
Īpašās jau iespiestās tabulās līdzīgi var atrast atbilstību starp skaitļiem un to kvadrātiem, starp diametra un riņķa līnijas garumu utt.

3°. Funkcionālo atbilstību starp mainīgajiem var izteikt arī grafiski. Šajā nolūkā koordinātu plaknē jāatzīmē punkti, kuru abscisas ir argumenta x vērtības, bet ordinātas — funkcijas $f(x)$ jeb y atbilstošās vērtības.

Visu to punktu kopu, kuru koordinātas ir $(x; f(x))$ jeb $(x; y)$, sauc par funkcijas $y = f(x)$ grafiku.

Praktiski reti kad iespejams atzīmēt itin visus šādus punktus. Tas arī nav nepieciešami — pietiek fiksēt tikai nedaudzus punktus un vilkt caur tiem plūstošu līniju, tā iegūstot pietiekami precīzu funkcijas grafiku.

Atzīmējot koordinātu plaknē punktus, kuru koordinātas ir iepriekšējās tabulas skaitļi, un velkot caur tiem plūstošu līniju,



21. zīm.

dabūjam diezgan precīzu funkcijas $y = x^2 - 3x$ grafiku intervālā $-2 \leqslant x \leqslant 5$ (21. zīm.).

Viegli saskatīt, kādas priekšrocības un trūkumi ir katram no trim aplūkotajiem funkcionālās atbilstības izteiksmes veidiem. Visuzskatāmākais no tiem ir funkcijas grafiks. No tā viegli var nolasīt funkcijas vērtības, kas atbilst izraudzītajām argumenta vērtībām. Tā, piemēram, diezgan precīzi var noteikt funkcijas vērtību, kas atbilst argumenta vērtībai $x = 3{,}5$, proti: $y(3{,}5) \approx 1{,}5$; tāpat $y(-1{,}5) \approx 6{,}5$ u. tml.

Arī otrādi — no funkcijas grafika var atrast argumenta vērtības, kurām atbilst dotā funkcijas vērtība. Tā, piemēram, var atrast to argumenta vērtību, kurai atbilst funkcijas vērtība 8, proti, $y = 8$ tad, ja $x \approx 4{,}7$ vai $x \approx -1{,}7$.

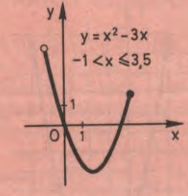
Grafiks vispār uzskatāmi parāda, kā un cik strauji mainās funkcijas vērtība atkarībā no argumenta maiņas.

FUNKCIJAS DEFINĪCIJAS APGABALS

Visas tās vērtības, kuras var piešķirt argumentam, veido funkcijas definīcijas apgabalu. To mēdz saukt arī par argumenta pieļaujamo vērtību kopu. Funkcijas $f(x)$ definīcijas apgabalu apzīmē ar simbolu $D(f)$ vai vienkārši ar burtu D.

Ja funkcija dota ar formulu bez īpašām papildu atrunām, tad pieņem, ka argumentam var piešķirt jebkuru vērtību, ar kuru funkcijas izteiksmei ir jēga. Šādā sakarībā der atcerēties, ka summa, starpība un reizinājums ir definēti ar jebkuriem skaitļiem; dalījums nav definēts, ja dalītājs ir nulle; pakāpe ir definēta ar jebkuru veselu kāpinātāju, izņemot nulles pakāpi ar nulles vai negatīvu kāpinātāju; pāra pakāpes sakne nav definēta ar negatīvu zemsaknes skaitli.

Tā, piemēram, funkcijas $f(x) = 12 : (x - 3)$ definīcijas apgabals ir visi reālie skaitļi, izņemot skaitli 3. To var pierakstīt tā:



22. zīm.

$x < 3$ vai $x > 3$; arī tā: $D(f) = (-\infty; +\infty)$, $x \neq 3$.

Funkcija $y = x^2 - 3x$ (sk. 21. zīm.) ir definēta ar jebkurām x vērtībām, t. i., $-\infty \leqslant x \leqslant +\infty$ jeb $D = (-\infty; +\infty)$.

Reizēm kādas funkcijas definīcijas apgabalu ierobežo ar atrunu, rakstot, piemēram, $y = x^2 - 3x$, kur $-1 < x \leqslant 3{,}5$. Tādā gadījumā $D = (-1; 3{,}5]$ (22. zīm.).

Formula $S = 180(n-2)$ izsaka daudzstūra iekšējo leņķu summas atkarību no daudzstūra malu skaita n. Skaidrs, ka šajā gadījumā ir jēga piešķirt argumentam n tikai naturālas vērtības, ne mazākas kā 3. Tātad šīs funkcijas definīcijas apgabals ir naturālie skaitļi 3, 4, 5, ...

Ja funkcija nav definēta kādā atsevišķā punktā, tad skaidrības labad atbilstošos grafika punktus atzīmē ar tukšu riņķīti. Tā, piemēram, 22. zīmējumā funkcijas $y = x^2 - 3x$, kur $-1 < x \leqslant \leqslant 3{,}5$, grafika kreisais galapunkts apzīmēts ar tukšu, bet labais galapunkts — ar pilnu riņķīti.

FUNKCIJAS VĒRTĪBU APGABALS

Visas tās vērtības, kuras var iegūt no argumenta atkarīgais mainīgais, veido funkcijas vērtību apgabalu. To var saukt arī par funkcijas $f(x)$ jeb y vērtību kopu (dotajā definīcijas apgabalā). Funkcijas $f(x)$ vērtību apgabalu apzīmē ar $E(f)$ vai tikai ar E.

Piemēram, viegli saprast, ka funkcijas $f(x) = x^2$ vērtības var būt tikai jebkurš nenegatīvs skaitlis, tātad tās vērtību apgabals ir visu nenegatīvo skaitļu kopa jeb $E(f) = [0; \infty)$.

Turpretim funkcijas $g(x) = x^2$, ja $-1 \leqslant x \leqslant 3$, vērtību apgabals ir skaitļu intervāls $[0; 9]$ jeb $E(g) = [0; 9]$.

FUNKCIJAS MAZĀKĀ UN LIELĀKĀ VĒRTĪBA

Ja ir zināms funkcijas vērtību apgabals, tad tajā var saskatīt arī šīs funkcijas mazāko un lielāko vērtību (ja tādas ir). Tā, piemēram, funkcijai $y = x^2$, kuras vērtību apgabals ir intervāls $[0; \infty)$, mazākā vērtība ir $y = 0$ (ja $x = 0$), bet lielākās vērtības nav (funkcijas vērtība var pārsniegt jebkuru skaitli; ja argumentam x piešķir, piemēram, vērtības $x = 1000$, $x = 1\,000\,000$ utt.).

Funkcijas $y = 2x + 5$, kur $0 < x \leqslant 4$, vērtību apgabals ir $(5;\ 13]$. Tajā lielākā vērtība ir 13 (ja $x = 4$), bet mazākās vērtības nav (ja argumentam x piešķir, piemēram, vērtības $x = 0{,}001$, $x = 0{,}000001$ utt., var dabūt y vērtību, kas mazāka nekā jebkurš skaitlis, kas lielāks nekā 5).

FUNKCIJAS AUGŠANA UN DILŠANA

Ja, argumentam palielinoties, palielinās arī funkcijas vērtība, tad tādu funkciju sauc par augošu funkciju; ja, argumentam palielinoties, funkcijas vērtība samazinās, tad funkciju sauc par dilstošu funkciju.

Precīzāk to var izteikt tā:
funkciju $f(x)$ sauc par augošu kādā intervālā, ja tajā jebkuriem $x_2 > x_1$ ir spēkā nevienādība $f(x_2) > f(x_1)$;
funkciju sauc par dilstošu kādā intervālā, ja tajā jebkuriem $x_2 > x_1$ ir spēkā nevienādība $f(x_2) < f(x_1)$.

Funkcijas augšana vai dilšana viegli saskatāma funkcijas grafikā.

Tā, piemēram, 23. zīmējumā redzams, ka $f(x)$ ir augoša, bet $g(x)$ ir dilstoša funkcija visā to definīcijas apgabalā. Savukārt funkcija $h(x)$ ir augoša intervālos $[-6;\ -2]$ un $[3;\ 7]$, bet dilstoša intervālā $[-2;\ 3]$.

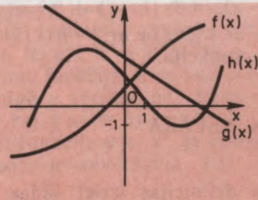
Ja funkcija kādā intervālā ir tikai augoša vai tikai dilstoša, tad funkciju sauc arī par monotonu šajā intervālā.

Neredzot funkcijas grafiku, tās augšanu (dilšanu) nosaka saskaņā ar iepriekš minēto augšanas (dilšanas) definīciju.

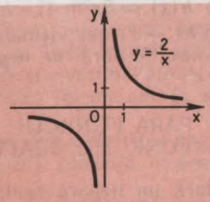
Piemēram, noteiksim funkcijas $y = \frac{2}{x}$ augšanu un dilšanu intervālos $(-\infty;\ 0)$ un $(0;\ +\infty)$. (Punktā $x = 0$ šī funkcija nav definēta.)

Izvēlamies $x_2 > x_1$ un noskaidrojam, vai $f(x_2)$ ir lielāks vai mazāks nekā $f(x_1)$ jeb vai starpība $f(x_2) - f(x_1)$ ir pozitīva vai negatīva:

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{2}{x_2} - \frac{2}{x_1} = \frac{2x_1 - 2x_2}{x_1 x_2} = \frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 x_2};$$



23. zīm.



24. zīm.

tā kā daļas skaitītājs $2(x_1 - x_2)$ ir negatīvs (jo $x_1 - x_2 < 0$), bet saucējs x_1x_2 ir pozitīvs (katrā intervālā $(-\infty; 0)$ un $(0; +\infty)$ x_1 un x_2 ir vienādzīmju reizinātāji), tad $\frac{2(x_1 - x_2)}{x_1x_2} < 0$ jeb $f(x_2) - f(x_1) < 0$.

Tātad funkcija $f(x) = \frac{2}{x}$ ir dilstoša kā vienā, tā otrā sava definīcijas apgabala daļā. Tas saskatāms arī grafikā (24. zīm.).

PĀRA FUNKCIJAS UN NEPĀRA FUNKCIJAS

Ir funkcijas, kurām piemīt šāda īpašība: pretējām argumenta vērtībām atbilst vienādas funkcijas vērtības. Tāda ir, piemēram, funkcija $f(x) = x^4 - 5$. Tiešām: $f(1) = 1^4 - 5 = -4$ un arī $f(-1) = (-1)^4 - 5 = -4$ jeb $f(1) = f(-1)$; tāpat $f(2) = f(-2) = 11$; $f(5) = f(-5) = 620$ utt. Šādas funkcijas sauc par pāra funkcijām.

Ir arī funkcijas ar šādu īpašību: pretējām argumenta vērtībām atbilst arī pretējas funkcijas vērtības. Tāda ir, piemēram, funkcija $f(x) = 6x$. Tiešām: $f(1) = 6$, bet $f(-1) = -6$; līdzīgi $f(-4) = -24$, bet $f(4) = 24$ utt. Šādas funkcijas sauc par nepāra funkcijām.

Funkciju sauc par pāra funkciju, ja visiem x no definīcijas apgabala $f(-x) = f(x)$.

Funkciju sauc par nepāra funkciju, ja visiem x no definīcijas apgabala $f(-x) = -f(x)$.

Lai noteiktu, vai dotā funkcija ir pāra vai nepāra, tās izteiksmē arguments x jāapmaina ar $-x$ un funkcijas iegūtā vērtība jāsalīdzina ar tās sākotnējo vērtību.

1) $g(x) = \frac{x^2 - 4}{3}$; $g(-x) = \frac{(-x)^2 - 4}{3} = \frac{x^2 - 4}{3} = g(x)$.

Tātad $g(x)$ ir pāra funkcija.

2) $f(x) = x^3 - 2x$; $f(-x) = (-x)^3 - 2(-x) = -x^3 + 2x = -(x^3 - 2x) = -f(x)$.

Tātad $f(x)$ ir nepāra funkcija.

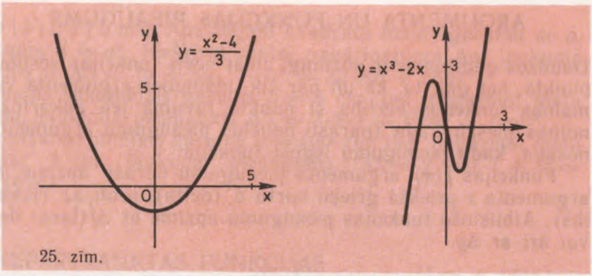
3) $h(x) = 3x + 4$; $h(-x) = 3 \cdot (-x) + 4 = -3x + 4$.

Tā kā $h(-x)$ nav vienāds ne ar $h(x)$, ne ar $-h(x)$, tad funkcija $h(x)$ nav ne pāra, ne nepāra funkcija.

PĀRA FUNKCIJU UN NEPĀRA FUNKCIJU GRAFIKI

No pāra un nepāra funkciju definīcijas izriet šādas to grafiku īpašības:

pāra funkcijas grafiks ir simetrisks attiecībā pret y asi;



25. zīm.

nepāra funkcijas grafiks ir simetrisks attiecībā pret koordinātu sākumpunktu.

Piemēram, pāra funkcijas $y(x) = \frac{x^2 - 4}{3}$ grafiks ir simetrisks pret y asi, bet nepāra funkcijas $f(x) = x^3 - 2x$ grafiks ir simetrisks pret koordinātu sākumpunktu (25. zīm.).

SAVSTARPĒJI APVĒRSTAS FUNKCIJAS

Kuru no abiem mainīgajiem to savstarpējā atbilstībā pieņemt par neatkarīgo, kuru — par atkarīgo mainīgo, to parasti var brīvi izvēlēties. Tā, piemēram, var jautāt gan to, kā mainās vienmērīgā kustībā noietais ceļš atkarībā no kustības laika, gan arī otrādi — kā mainās kustības laiks atkarībā no veiktā ceļa. Ja dotās funkcijas neatkarīgo un atkarīgo lielumu (x un y) maina vietām un pie tam šāda veida atbilstība arī izrādās funkcija, tad doto un iegūto funkciju sauc par savstarpēji apvērstām funkcijām. Piemēram, kā vienmēr, ar x apzīmējot neatkarīgo, bet ar y — atkarīgo lielumu, dotajā funkcijā $y = 2x - 6$ maina vietām y un x un dabūjam jaunu funkciju $x = 2y - 6$ jeb, pārveidojot to parastajā formā (izsakot y atkarību no x atklāti), dabūjam $y = 0{,}5x + 3$. Dotā funkcija $f(x) = 2x - 6$ un iegūtā funkcija $g(x) = 0{,}5x + 3$ ir savstarpēji apvērstas funkcijas. Ja, piemēram, $f(5) = 4$, tad $g(4) = 5$; ja $f(1) = -4$, tad $g(-4) = 1$, utt.

Ja līdzīgi meklētu apvērstu atbilstību, piemēram, funkcijai $y = x^2$, tad iegūtu $x = y^2$ jeb $y = \pm\sqrt{x}$. Taču iegūtā atbilstība $y = \pm\sqrt{x}$ nav funkcija, jo te katrai pozitīvai x vērtībai atbilst nevis viena mainīgā y vērtība, bet divas vērtības (piemēram, ja $x = 9$, tad $y = 3$ vai $y = -3$).

Turpretī funkcija $y = x^2$, ja to aplūko tikai definīcijas apgabalā $D = [0; \infty)$, ir apvēršama. Tās apvērstā funkcija ir $y = \sqrt{x}$. No divu savstarpēji apvērstu funkciju jēgas izriet, ka vienas funkcijas definīcijas apgabals D ir vienāds ar otras funkcijas vērtību apgabalu E,— un otrādi.

12—102770

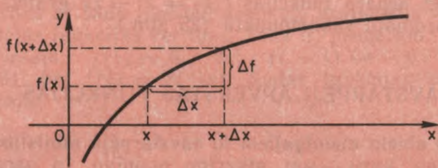
ARGUMENTA UN FUNKCIJAS PIEAUGUMS

Daudzos gadījumos ir nozīmīgi zināt nevis funkcijas vērtību kādā punktā, bet gan to, kā un par cik, mainoties argumenta vērtībai, mainās funkcijas vērtība šī punkta tuvumā jeb apkārtnē. Šajā nolūkā piešķir kādu (parasti nelielu) pieaugumu argumentam un nosaka, kādu pieaugumu iegūst funkcija.

Funkcijas $f(x)$ argumenta pieaugumu parasti apzīmē, rakstot argumenta x priekšā grieķu burtu Δ (delta), proti, Δx (lasa: delta iks). Atbilstošo funkcijas pieaugumu apzīmē ar Δf (lasa: delta ef) vai arī ar Δy.

Tātad $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Funkcijas grafikā Δx un Δy sakars parādīts 26. zīmējumā. Šajā gadījumā pozitīvam argumenta pieaugumam Δx atbilst arī pozitīvs funkcijas pieaugums Δf. Taču vispār agrumenta pieaugumu var



26. zīm.

izvēlēties gan pozitīvu, gan negatīvu, un arī funkcijas pieaugums var izrādīties gan pozitīvs, gan negatīvs.

1. p i e m ē r s. Noteikt funkcijas $f(x) = 5x - 1$ pieaugumu Δf punktā $x = 3$, ja argumenta pieaugums ir $\Delta x = 0{,}1$:

$$\Delta f = (5\cdot 3{,}1 - 1) - (5\cdot 3 - 1) = 0{,}5\,.$$

2. p i e m ē r s. Noteiksim funkcijas $y = 4 - x^2$ pieaugumu Δy punktā $x = 1$, piešķirot argumentam pieaugumu $\Delta x = 0{,}1$:

$$\Delta y = (4 - 1{,}1^2) - (4 - 1^2) = -0{,}21\,.$$

Kā redzams, punktā $x = 1$, argumentam palielinoties par 0,1, funkcijas vērtība pamazinās par 0,21. Taču citā punktā, piemēram, $x = 3$, ar tādu pašu argumenta pieaugumu $\Delta x = 0{,}1$, šai pašai funkcijai var būt citāds pieaugums Δy:

$$\Delta y = (4 - 3{,}1^2) - (4 - 3^2) = -0{,}61\,.$$

Salīdzinot funkcijas pieaugumus $-0{,}21$ un $-0{,}61$, var teikt, ka punktā $x = 3$ funkcija $y = 4 - x^2$ dilst straujāk nekā punktā $x = 1$.

3. p i e m ē r s. Noteikt, par cik palielinās kvadrāta laukums, ja tā malu pagarina par 1 cm.

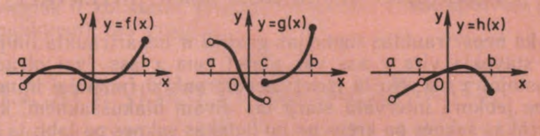
A t r i s i n ā j u m s. Apzīmējam kvadrāta malas garumu ar a, tā laukums $S = a^2$. Piešķirot malai pagarinājumu Δa, laukuma pieaugums ir $\Delta S = (a + \Delta a)^2 - a^2 = 2a \cdot \Delta a + (\Delta a)^2$.

Ja malas sākotnējais garums $a = 8$ cm, tad, pagarinot malu par 1 cm, laukuma pieaugums $\Delta S = 2 \cdot 8 \cdot 1 + 1^2 = 17$ (cm^2).

Ja malas sākotnējais garums $a = 100$ cm, tad pagarinot malu tāpat par 1 cm, laukuma pieaugums $\Delta S = 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1^2 = 201$ (cm^2).

NEPĀRTRAUKTAS FUNKCIJAS

Ja funkcijai piemīt tāda īpašība, ka tās definīcijas apgabalā funkcijas grafiks ir nepārtraukta līnija (ko var uzzīmēt, neatraujot zīmuli no papīra), tad šādu funkciju sauc par nepārtrauktu funkciju.



27. zīm.

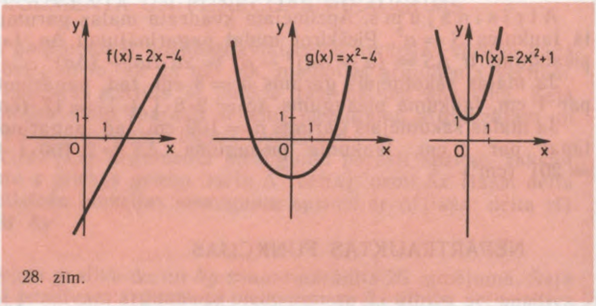
27. zīmējumā parādīti trīs funkciju $f(x)$, $g(x)$ un $h(x)$ grafiki. Funkcija $f(x)$ ir definēta un nepārtraukta intervālā $(a; b]$; funkcija $g(x)$ arī ir definēta intervālā $(a; b]$, bet nav nepārtraukta visā šajā intervālā (punktā $x = c$ ir pārtraukums); funkcija $h(x)$ ir definēta un nepārtraukta intervālos $(a; c)$ un $(c; b]$, bet nevar teikt, ka tā ir nepārtraukta visā intervālā $(a; b]$, jo punktā $x = c$ tā nav definēta.

Skolas kursā aplūkojamās funkcijas ir nepārtrauktas visos intervālos, kuros tās definētas, tāpēc to grafiki «pārtrūkst» tikai tajos punktos, kuros tās nav definētas.

FUNKCIJAS SAKNES

Argumenta tās vērtības, ar kurām funkcijas vērtība ir nulle, sauc par funkcijas saknēm jeb par funkcijas nullēm. Sakņu punktos funkcijas grafiks krusto x asi.

Funkcijas $f(x) = 2x - 4$ sakne ir 2, jo $f(2) = 2 \cdot 2 - 4 = 0$ (28. zīm.).



28. zīm.

Funkcijai $g(x) = x^2 - 4$ ir divas saknes — skaitļi 2 un -2, jo $g(2) = 0$ un arī $g(-2) = 0$ (28. zīm.).

Funkcijai $h(x) = 2x^2 + 1$ sakņu nav (28. zīm.).

FUNKCIJAS NEMAINĪGU ZĪMJU INTERVĀLI

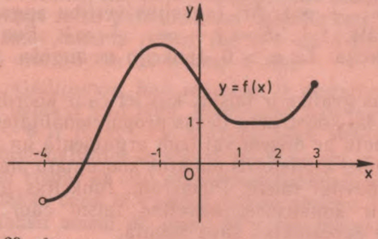
Tā kā nepārtrauktas funkcijas grafiks ir nepārtraukta līnija, tad tā no stāvokļa virs x ass var pāriet zem x ass (vai otrādi), tikai krustojot x asi. No tā izriet: nepārtrauktai funkcijai ir nemainīga zīme jebkurā intervālā starp tās divām blakussaknēm, kā arī no mazākās saknes pa kreisi un no lielākās saknes pa labi; ja funkcijai sakņu nav, tad funkcijai visā definīcijas apgabalā ir nemainīga zīme. Piemēram, funkcijām, kuru grafiki redzami 28. zīmējumā, ir spēkā šādas nevienādības: $f(x) < 0$, ja $x < 2$, bet $f(x) > 0$, ja $x > 2$; $g(x) > 0$, ja $x < -2$ vai $x > 2$, bet $g(x) < 0$, ja $-2 < x < +2$; $h(x) > 0$ visā definīcijas apgabalā.

Mēdz rakstīt arī, piemēram, tā: $f(x) < 0$, ja $x \in (-\infty; 2)$; lasa: $f(x) < 0$, ja x pieder pie intervāla no mīnus bezgalības līdz 2, skaitli 2 neieskaitot. Līdzīgi raksta, piemēram, $g(x) < 0$, ja $x \in (-3; +3)$ u. tml.

FUNKCIJAS ĪPAŠĪBAS GRAFIKĀ

Ja funkcija dota ar grafiku, no tā viegli var nolasīt šīs funkcijas definīcijas un vērtību apgabalus, noteikt augšanu un dilšanu, mazāko un lielāko vērtību, funkcijas nulles, funkcijas zīmi (vai funkcijas vērtības pozitīvas vai negatīvas) u. c.

No 29. zīmējumā attēlotā funkcijas grafika redzams, ka funkcija $y = f(x)$ ir definēta intervālā $(-4; 3]$. Tās vērtību apgabals ir intervāls $(-1; 3]$. Funkcijas lielākā vērtība ir $f(-1) = 3$, bet mazāko vērtību nevar nosaukt. Intervālā $(-4; -1]$ funkcija ir augoša (aug no -1 līdz $+3$), arī intervālā $[2; 3]$ funkcija ir



29. zīm.

augoša (aug no 1 līdz 2); intervālā [1; 2] funkcija ir nemainīga jeb konstanta (tās vērtība visā šajā intervālā ir 1).

Funkcijas sakne ir $x = -3$. Ja $-4 < x < -3$, tad $f(x) < 0$, bet, ja $-3 < x \leqslant 3$, tad $f(x) > 0$. Funkcija nav ne pāra, ne nepāra funkcija.

Arī tādas funkcijas īpašības, kas dotas ar formulu (vai tabulā), jo bieži vieglāk ir konstatēt, ja vispirms uzzīmē (kaut aptuveni pēc dažiem punktiem) tās grafiku.

11.2. ATSEVIŠĶU FUNKCIJU APSKATS

FUNKCIJU VEIDI

Tādas funkcijas kā, piemēram, $y = 2x + 5$, $y = -x + 1$, $y = 0{,}7x - 4$ u. tml., ir izsakāmas ar vienu kopēju formulu $y = ax + b$. Līdz ar to šīm funkcijām, neraugoties uz parametru (skaitļu a un b) dažādām iespējamām vērtībām, ir daudz kopīgu būtisku īpašību. Tāpēc saka, ka minētās funkcijas ir viena un tā paša veida funkcijas.

Ir vēl daudz citu veidu funkcijas, piemēram, $y = ax^2$, $y = x^n$, $y = \frac{a}{x}$ u. c.

Šajā paragrāfā aplūkosim skolas kursa atsevišķu funkciju veidus: to definīcijas un vērtību apgabalus, monotonitāti, noskaidrosim, vai funkcija ir pāra vai nepāra, kā arī aplūkosim grafikus, funkcijas veida piemērus dabā un dzīvē.

TIEŠĀ PROPORCIONALITĀTE $y = ax$

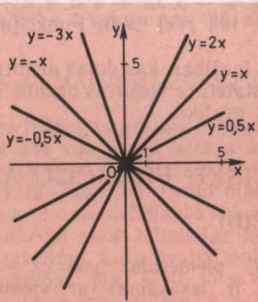
Par tiešo proporcionalitāti sauc tādu funkcionālo atbilstību starp mainīgajiem x un y, kas izsakāma ar formulu $y = ax$, kur $a \neq 0$. Skaitli a sauc par tiešās proporcionalitātes koeficientu.

P i e m ē r i: $y = 2x$; $y = -x$; $y = 0{,}5x$.

Funkcija $y = ax$ ir definēta ar jebkurām x vērtībām, t. i., $D = (-\infty; +\infty)$. Arī funkcijas vērtību apgabals ir neierobežots intervāls, t. i., $E = (-\infty; +\infty)$. Funkcija $y = ax$ ir nepāra funkcija. Ja $a > 0$, funkcija ir augoša, ja $a < 0$, — dilstoša.

Funkcijas grafiks ir taisne, kas iet caur koordinātu sākumpunktu. Tāpēc, lai konstruētu tiešās proporcionalitātes grafiku, pietiek sastādīt tabulu ar diviem vai trim argumenta un funkcijas vērtību pāriem, atzīmēt atbilstošos punktus koordinātu plaknē un caur tiem ar lineālu novilkt taisni. Piemēram, funkcijas $y = -3x$ grafiks (30. zīm.) ir konstruēts, novelkot taisni caur punktiem, kuru koordinātas aprēķinātas šādā tabulā:

x	0	1	−2
y	0	−3	6



30. zīm.

Ja proporcionalitātes koeficients $a > 0$, tad grafiks atrodas I un III kvadrantā, bet, ja $a < 0$, tad — II un IV kvadrantā. Ja koeficienta modulis $|a| = 1$, t. i., ja $y = x$ vai $y = -x$, tad grafiks ir koordinātu asu veidoto taisno leņķu bisektrise. Palielinoties koeficienta a modulim $|a|$, taisne kļūst stāvāka, pamazinoties,— lēzenāka.

Ja mainīgo lielumu vērtības ir pozitīvas (kā tas mēdz būt ikdienas praksē), tiešās proporcionalitātes sakaru starp mainīgajiem vai izteikt arī tā: ja, viena lieluma vērtību vairākkārt palielinot, tikpat reižu palielinās arī otra lieluma vērtība, tad šie lielumi ir tieši proporcionāli.

Ilustrēsim teikto ar tiešās proporcionalitātes sakarību $s = 4t$, kur t ir kustības laiks, bet s ir veiktais ceļš vienmērīgā kustībā ar ātrumu 4 km/h.

Laiks t (h)	1	2	3	4	5	6
Ceļš s (km)	4	8	12	16	20	24

No tabulas redzams, ka, palielinot kustības laiku 3 reizes (no 2 h uz 6 h), tikpat reižu palielinās arī noietais ceļš (no 8 km uz 24 km); pamazinot laiku 2 reizes (no 6 h uz 3 h), tikpat reižu pamazinās ceļš (no 16 km uz 8 km) u. tml.

Piezīme. Gadījumos, kad mainīgie ir negatīvi skaitļi, vārdiem «tik reižu lielāks» zūd jēga. Piemēram, nav jēgas jautāt, cik reižu skaitlis -6 ir lielāks vai mazāks nekā skaitlis -2.

Tiešās proporcionalitātes apvērstā funkcija arī ir tiešā proporcionalitāte (tikai vispār ar citu proporcionalitātes koeficientu). Piemēram, ja konfekšu cena ir 4 Ls/kg, tad to vērtība V ir tieši proporcionāla konfekšu masai M, proti, $V = 4M$. Tikpat labi var arī teikt, ka konfekšu masa M ir tieši proporcionāla to vērtībai V, proti, $M = 0{,}25V$.

Tiešās proporcionalitātes atkarība saista arī riņķa līnijas garumu C un diametra garumu D, sakarības formula šajā gadījumā ir $C = \pi D$ jeb $C \approx 3{,}14D$; kvadrāta perimetru P ar malas garumu a (formula $P = 4a$) u. c.

APGRIEZTĀ PROPORCIONALITĀTE $y = \frac{a}{x}$

Par apgriezto proporcionalitāti sauc tādu funkcionālu atbilstību starp mainīgajiem x un y, kas izsakāma ar formulu $y = \frac{a}{x}$, kur $a \neq 0$. Skaitli a sauc par apgrieztās proporcionalitātes koeficientu.

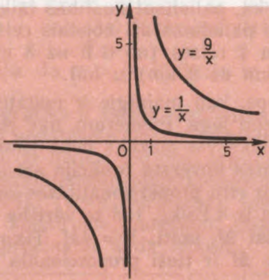
Piemēri: $y = \frac{9}{x}$; $y = \frac{1}{x}$; $y = \frac{-4}{x}$.

Funkcija $y = \frac{a}{x}$ ir definēta visām x vērtībām, izņemot vērtību $x = 0$. Tās vērtību apgabals ir neierobežots, proti, intervāls $(-\infty; +\infty)$. Nepāra funkcija. Abos definīcijas intervālos $(-\infty; 0)$ un $(0; +\infty)$ funkcija ir dilstoša, ja $a > 0$, un augoša, ja $a < 0$.

Funkcijas grafiks ir līkne (31. zīm.). Tāpēc, lai konstruētu apgrieztās proporcionalitātes grafiku, jāsastāda tabula ar vairākiem argumenta un funkcijas vērtību pāriem, koordinātu plaknē jāatzīmē atbilstošie punkti un caur tiem jāvelk plūstoša līnija.

Piemēram, funkcijas $y = \frac{9}{x}$ (31. zīm.) grafiks ir konstruēts pēc šādas tabulas:

x	−9	−6	−3	−1	1	3	6	9
y	−1	−1,5	−3	−9	9	3	1,5	1



31. zīm.

Apgrieztās proporcionalitātes grafiku sauc par hiperbolu, tā sastāv no diviem zariem. Ja $a > 0$, hiperbolas zari atrodas I un III kvadrantā, ja $a < 0$, — II un IV kvadrantā. Jo lielāks koeficienta modulis $|a|$, jo hiperbolas zari vairāk «iztaisnojas». Grafiks nekrusto ne x asi, ne y asi.

Ja mainīgo vērtības ir pozitīvas, tad apgrieztās proporcionalitātes sakaru starp mainīgajiem var izteikt arī tā: ja, viena lieluma vērtību vairākkārt palielinot, otra lieluma vērtība tikpat reižu samazinās, tad šie lielumi ir apgriezti proporcionāli.

Piemēram, ja veicamā ceļa garums ir 60 km, tad kustības laiks t ir apgriezti proporcionāls kustības ātrumam v, jo sakars starp tiem $t = \frac{60}{v}$ atbilst apgrieztās proporcionalitātes formulai.

v (km/h)	3	4	5	6	30
t (h)	20	15	12	10	2

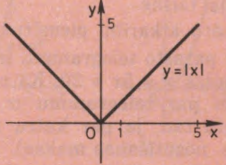
No ātruma un laika vērtību tabulas redzams, ka, piemēram, palielinot kustības ātrumu 6 reizes (no 5 km/h uz 30 km/h), kustības laiks 6 reizes samazinās (no 12 h uz 2 h) u. tml.

Apgrieztās proporcionalitātes apvērstā funkcija arī ir apgrieztā proporcionalitāte, pie tam ar tādu pašu proporcionalitātes koeficientu. Tāpēc, piemēram, var arī teikt, ka kustības ātrums ir apgriezti proporcionāls kustības laikam, proti, $v = \frac{60}{t}$.

Apgrieztā proporcionalitāte pastāv, piemēram, starp preces cenu un preces daudzumu, ja preces kopējā vērtība ir nemainīga, starp taisnstūra garumu un platumu, ja taisnstūra laukums ir nemainīgs, u. tml.

FUNKCIJA $y = |x|$

Šī funkcija definēta visām x vērtībām: $D = (-\infty; +\infty)$. Ar jebkurām x vērtībām $y \geqslant 0$, t. i., $E = [0; \infty)$. Pāra funkcija, jo $|-x| = |x|$ un līdz ar to $f(-x) = f(x)$. Tātad funkcijas grafiks ir simetrisks pret y asi. Ja $x \geqslant 0$, tad $y = x$, tātad grafiks ir taisne — I kvadranta leņķa bisektrise; ja $x < 0$, grafiks ir II kvadranta leņķa bisektrise (32. zīm.).



32. zīm.

LINEĀRA FUNKCIJA $y = ax + b$

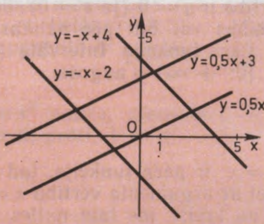
Par lineāru funkciju sauc funkciju, kas izsakāma ar formulu $y = ax + b$, kur a un b — jebkuri skaitļi.

P i e m ē r i: $y = 0{,}5x + 3$; $y = -x - 2$.

Ja $a \neq 0$ un $b = 0$, tad lineārā funkcija ir tiešā proporcionalitāte $y = ax$, piemēram, $y = 0{,}5x$.

Lineārās funkcijas $y = ax + b$ īpašības, ja $a \neq 0$ un $b \neq 0$, ir šādas:
tā definēta visām x vērtībām no $-\infty$ līdz $+\infty$; funkcijas vērtība var būt jebkurš skaitlis no $-\infty$ līdz $+\infty$; funkcija nav ne pāra, ne nepāra funkcija; ja $a > 0$, tad funkcija ir augoša, ja $a < 0$, tad — dilstoša.

Funkcijas $y = ax + b$ grafiks ir taisne, kas paralēla taisnei $y = ax$. Tādas taisnes ir, piemēram, $y = 0{,}5x + 3$ un $y = 0{,}5x$



33. zīm.

(33. zīm.). Koeficients a nosaka taisnes virzienu — leņķi, ko taisne veido ar x asi. Tāpēc lineāru funkciju grafiki ar vienādām koeficienta a vērtībām ir savstarpēji paralēlas taisnes, kā, piemēram, $y = -x - 2$ un $y = -x + 4$ (te $a = -1$).

Funkcijas $y = ax + b$ grafiks krusto y asi punktā $(0, b)$, piemēram, taisnes $y = 0{,}5x + 3$ un y ass krustpunkts ir $(0, 3)$.

Ja $a = 0$, tad lineārās funkcijas paveids $y = b$ ir nemainīga jeb konstanta funkcija: ar jebkurām argumenta x vērtībām funkcijas vērtība vienāda ar skaitli b, piemēram, $y = -4$. Tādas funkcijas grafiks ir x asij paralēla taisne.

Aplūkosim dažu lineāro atkarību piemērus.

Maksa y (santīmos) par parasto telegrammu ir lineāri atkarīga no vārdu skaita x pēc formulas $y = 5x + 20$. Kā redzams, nav patiess apgalvojums, ka maksa par telegrammu ir tieši proporcionāla vārdu skaitam (tas būtu tad, ja par katru telegrammu nebūtu jāpiemaksā 20 sant., t. s. nosūtīšanas maksa).

Lineārā funkcija $y = 20x + 20$ izsaka maksu y par braukšanu taksometrā atkarībā no nobrauktā kilometru skaita x.

Funkcionālo sakaru starp mazinātāju un starpību vārdos var izteikt tā: par cik mazinātāju palielina, par tik starpība pamazinās. Lai noskaidrotu funkcijas veidu, šis sakars jāizsaka ar formulu $y = M - x$, kur x ir mazinātājs, M — nemainīgais mazināmais, y — starpība. Kā redzams, sakars $y = M - x$ jeb $y = -x + M$ ir izteikts formā $y = ax + b$, kur $a = -1$, $b = M$. Tātad starp mazinātāju un starpību pastāv lineārs sakars.

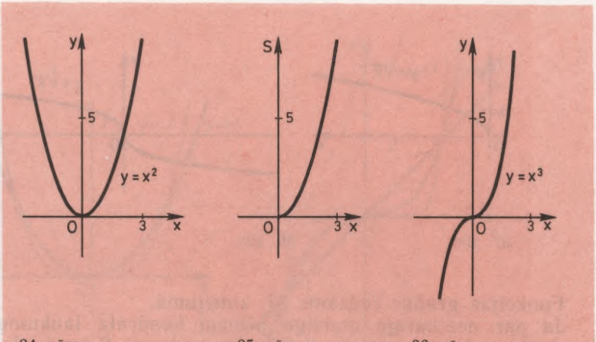
FUNKCIJA $y = x^2$

Šī funkcija definēta visām x vērtībām: $D = (-\infty; +\infty)$. Ar jebkurām argumenta vērtībām funkcija $y \geqslant 0$, t. i., $E = [0; \infty)$. Funkcijas mazākā vērtība ir $y = 0$ (ja $x = 0$), bet lielākās vērtības funkcijai nav (y vērtības var būt pēc patikas lielas, ja izvēlas atbilstošu x vērtību). Pāra funkcija. Intervālā $(-\infty; 0]$ funkcija ir dilstoša, intervālā $[0; +\infty)$ — augoša.

Funkcijas grafiks ir pret y asi simetriska līkne, ko sauc par parabolu. Tās virsotne ir koordinātu sākumpunktā un zari ir vērsti uz augšu (34. zīm.).

Tā kā funkcija $y = x^2$ ir pāra funkcija, tad tās vērtību tabulu izdevīgi sastādīt, sākot ar argumenta vērtību $x = 0$ un virzoties no tās reizē pa labi un pa kreisi, pie tam nulles tuvākajā apkārtnē aprēķinot vairāku punktu koordinātas (tur parabola straujāk izliecas), piemēram,

x	-3	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	0,5	1	1,5	2	3
y	9	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	9



34. zīm. 35. zīm. 36. zīm.

Starp kvadrāta laukumu S un tā malas garumu a arī pastāv sakarība formā $y = x^2$, proti, $S = a^2$. Šajā konkrētajā gadījumā argumenta a vērtības var būt tikai pozitīvas, tāpēc sakarību starp kvadrāta malu un laukumu izsaka parabolas zars, kas atrodas koordinātu plaknes I kvadrantā (35. zīm.).

FUNKCIJA $y = x^3$

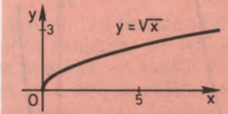
Šī funkcija definēta visām x vērtībām: $D = (-\infty; +\infty)$. Funkcijas vērtību apgabals ir intervāls $(-\infty; +\infty)$, tāpēc funkcijai nav ne mazākās, ne lielākās vērtības. Nepāra funkcija. Funkcija visā definīcijas apgabalā ir augoša.

Funkcijas grafiks ir pret koordinātu sākumpunktu simetriska līkne, ko sauc par kubisko parabolu (36. zīm.).

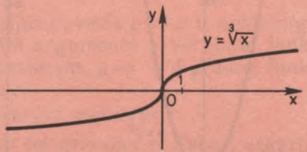
Sakarība $y = x^3$ saista, piemēram, kuba tilpumu V un tā šķautnes garumu a, proti, $V = a^3$.

FUNKCIJA $y = \sqrt{x}$

Funkcija definēta tikai nenegatīvām argumenta vērtībām $x \geqslant 0$. Funkcijas y vērtība var būt jebkurš nenegatīvs skaitlis. Funkcijas mazākā vērtība ir $y = 0$ (ja $x = 0$), lielākās vērtības nav. Funkcija visā definīcijas apgabalā ir augoša. Funkcija nav ne pāra, ne nepāra funkcija (kaut vai tāpēc vien, ka ar $x < 0$ tā pat nav definēta).



37. zīm.



38. zīm.

Funkcijas grafiks redzams 37. zīmējumā.

Ja par neatkarīgo mainīgo pieņem kvadrāta laukumu, tad kvadrāta malas garuma a atkarību no laukuma S izsaka formula $y = \sqrt{x}$, proti, $a = \sqrt{S}$.

Funkcija $y = x^2$, ja $x \geqslant 0$, un funkcija $y = \sqrt{x}$ ir savstarpēji apvērstas funkcijas.

FUNKCIJA $y = \sqrt[3]{x}$

Funkcijas definīcijas apgabals un arī vērtību apgabals ir visu reālo skaitļu kopa. Visā definīcijas apgabalā funkcija ir augoša. Nepāra funkcija, jo $f(-x) = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x} = -f(x)$.

Funkcijas grafiks ir līkne, kas simetriska pret koordinātu sākumpunktu (38. zīm.).

Aplūkotā veida funkcija ir kuba šķautnes garuma a atkarība no kuba tilpuma V, proti, $a = \sqrt[3]{V}$.

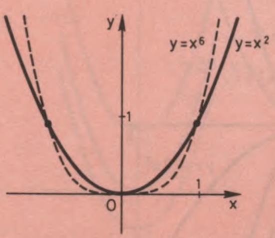
Funkcijas $y = x^3$ un $y = \sqrt[3]{x}$ ir savstarpēji apvērstas funkcijas.

PAKĀPES FUNKCIJA $y = x^n$

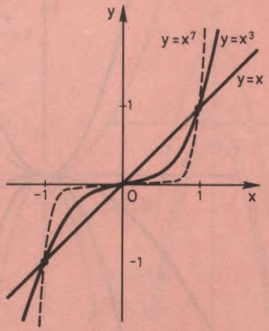
Vispār var aplūkot pakāpes funkciju $y = x^a$ ar jebkuru kāpinātāju a, taču šeit aplūkosim pakāpes funkciju tikai ar naturālu kāpinātāju $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$.

Ja pakāpes funkcijā kāpinātājs ir pāra skaitlis $n = 2, 4, 6, \ldots$, tad tās īpašības ir analogas funkcijas $y = x^2$ īpašībām: funkcija definēta visām x vērtībām; funkcijas vērtības ir visi nenegatīvie skaitļi; funkcijas mazākā vērtība ir $y = 0$ (ja $x = 0$); intervālā $x \leqslant 0$ funkcija ir dilstoša, intervālā $x \geqslant 0$ — augoša; pāra funkcija.

Funkcijas grafiks, ja n ir pāra skaitlis, atgādina parabolu $y = x^2$ un neatkarīgi no kāpinātāja n vērtības iet caur punktiem $(-1; 1)$, $(0; 0)$ un $(1; 1)$. Palielinoties n vērtībai, grafiks koordinātu sākumpunkta apkārtnē vairāk piekļaujas x asij (39. zīm.).



39. zīm.



40. zīm.

Ja kāpinātājs ir nepāra skaitlis $n = 1, 3, 5, \ldots$, tad pakāpes funkcijas īpašības analogas funkcijas $y = x^3$ īpašībām: funkcija definēta visām x vērtībām; funkcijas vērtību apgabals — visu reālo skaitļu kopa; nepāra funkcija; funkcija visā definīcijas apgabalā ir augoša.

Funkcijas grafiks analogs $y = x^3$ grafikam un neatkarīgi no kāpinātāja n vērtības iet caur punktiem $(-1; -1)$, $(0; 0)$ un $(1; 1)$. Palielinoties n vērtībai, grafiks koordinātu sākumpunkta apkārtnē vairāk piekļaujas x asij (40. zīm.).

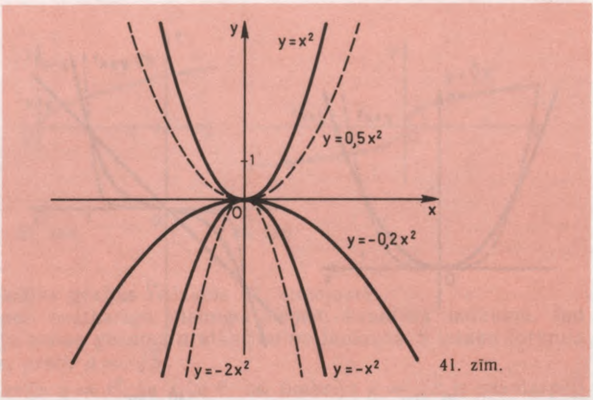
Ja kāpinātājs $n = 1$, tad pakāpes funkcija $y = x^n$ iegūst veidu $y = x$, kas ir arī tiešās proporcionalitātes funkcija $y = ax$ ar proporcionalitātes koeficientu $a = 1$. Kā zināms, funkcijas $y = x$ grafiks ir taisne (I un III kvadrantu leņķu bisektrise).

NEPILNĀ KVADRĀTFUNKCIJA $y = ax^2$

Ja $a = 1$, iegūstam jau aplūkoto funkciju $y = x^2$, kuras grafiks ir parabola. Arī ar citām koeficienta a vērtībām ($a \neq 0$) funkcijas $y = ax^2$ grafiks ir parabola, taču tās forma un novietojums ir citāds.

Neatkarīgi no a vērtības, ja $x = 0$, tad arī $ax^2 = 0$, tātad parabolas $y = ax^2$ virsotne arvien ir koordinātu sākumpunkts un tā ir simetriska pret y asi (41. zīm.).

Ja $a > 0$, tad jebkurām x vērtībām arī $y \geqslant 0$ un tāpēc parabolas zari vērsti uz augšu; ja $a < 0$, tad $y \leqslant 0$ un tāpēc parabolas zari vērsti uz leju. Parabolas $y = ax^2$ un $y = -ax^2$ ir



41. zīm.

savstarpēji simetriskas pret x asi. Tādas ir, piemēram, 41. zīmējumā redzamās parabolas $y = x^2$ un $y = -x^2$. Ar vienām un tām pašām argumenta vērtībām šo funkciju vērtības ir savstarpēji pretējas, kā tas redzams tabulā.

x	-3	-2	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0,25	0	0,25	1	4	9
$y = -x^2$	-9	-4	-1	$-0{,}25$	0	$-0{,}4$	-1	-4	-9

Jo lielāks koeficienta a modulis $|a|$, jo grafiks (tajā pašā definīcijas apgabalā) straujāk atvirzās no x ass; jo $|a|$ mazāks, jo grafiks vairāk piespiests pie x ass.

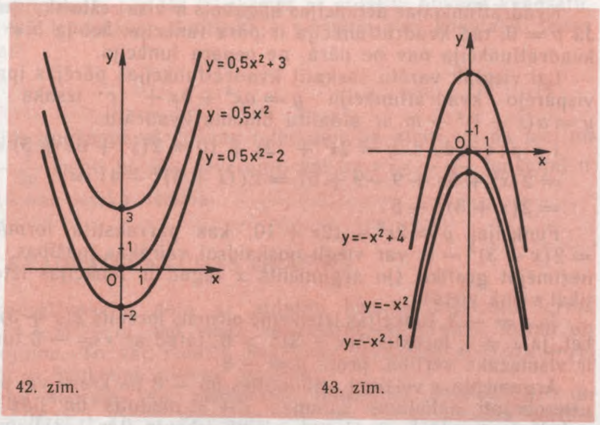
No aplūkotajām funkcijas grafika īpašībām viegli saskatīt arī funkcijas augšanas un dilšanas intervālus.

Kā funkcijas $y = ax^2$ piemēru var minēt riņķa laukuma S atkarību no tā rādiusa R garuma: $S = \pi R^2$ jeb $S \approx 3{,}14R^2$; kuba virsmas laukuma S atkarību no kuba šķautnes a garuma: $S = 6a^2$ u. c.

NEPILNĀ KVADRĀTFUNKCIJA $y = ax^2 + c$

Vispirms noskaidrosim šīs funkcijas grafika formu un novietojumu koordinātu plaknē, salīdzinot funkcijas $y = ax^2 + c$ grafiku ar jau pazīstamo funkcijas $y = ax^2$ grafiku (ar vienām un tām pašām koeficienta $a \neq 0$ vērtībām).

Viegli saprast, ka ar vienām un tām pašām argumenta x vērtībām, piemēram, funkcijas $y = 0{,}5x^2 + 3$ vērtības ir par 3



42. zīm.   43. zīm.

lielākas nekā funkcijas $y = 0{,}5x^2$ vērtības; līdz ar to funkcijas $y = 0{,}5x^2 + 3$ grafiku var iegūt, pārvietojot funkcijas $y = 0{,}5x^2$ grafiku koordinātu plaknē par 3 vienībām uz augšu. Analogi funkcijas $y = 0{,}5x^2 - 2$ grafiku var iegūt no $y = 0{,}5x^2$ grafika, pārvietojot to par 2 vienībām uz leju (42. zīm.).

Līdzīgi funkciju $y = -x^2 + 4$ un $y = -x^2 - 1$ grafikus var iegūt no funkcijas $y = -x^2$ grafika, pārvietojot to attiecīgi par 4 vienībām uz augšu vai par 1 vienību uz leju (43. zīm.).

Vispārinot piemēros vēroto, var secināt, ka nepilnās kvadrātfunkcijas $y = ax^2 + c$ grafiks ir parabola ar virsotni punktā $(0; c)$; šī parabola ir vērsta ar zariem uz augšu, ja $a > 0$, un ar zariem uz leju, ja $a < 0$.

Izmatojot funkcijas $y = ax^2 + c$ grafiku, var viegli noteikt tās vērtību apgabalu, augšanas un dilšanas intervālus, mazāko un lielāko vērtību, kā arī funkcijas vērtību zīmi ($y > 0$ vai $y < 0$) utt. Lai noteiktu, piemēram, funkcijas $y = -x^2 + 4$ zīmi, pietiek aprēķināt funkcijas saknes:

$$-x^2 + 4 = 0\,;\ x_1 = -2,\ x_2 = +2.$$

Vērojot funkcijas $y = -x^2 + 4$ grafiku (43. zīm.), secinām, ka $y < 0$, ja $x < -2$ vai $x > 2$; $y > 0$, ja $-2 < x < 2$.

KVADRĀTFUNKCIJA $y = ax^2 + bx + c$

Par kvadrātfunkciju sauc funkciju $y = ax^2 + bx + c$, kur $a \neq 0$. Šīs funkcijas divus paveidus $y = ax^2$ un $y = ax^2 + c$ (t. s. nepilnās kvadrātfunkcijas) jau aplūkojām iepriekšējos punktos.

Kvadrātfunkcijas definīcijas apgabals ir visu reālo skaitļu kopa. Ja $b = 0$, tad kvadrātfunkcija ir pāra funkcija, bet ja $b \neq 0$, tad kvadrātfunkcija nav ne pāra, ne nepāra funkcija.

Lai vieglāk varētu saskatīt kvadrātfunkcijas pārējās īpašības, vispārējo kvadrātfunkciju $y = ax^2 + bx + c$ izsaka formā $y = a(x + l)^2 + m$ ar atdalītu binoma kvadrātu.

1. piemērs. $y = 2x^2 + 12x + 10 = 2(x^2 + 6x + 5) =$
$= 2(x^2 + 6x + 9 - 9 + 5) = 2((x + 3)^2 - 4) =$
$= 2(x + 3)^2 - 8$.

Funkcijai $y = 2x^2 + 12x + 10$, kas pārrakstīta formā $y = 2(x + 3)^2 - 8$, var viegli noskaidrot vairākas īpašības, nemaz nezīmējot grafiku (jo arguments x tagad ir funkcijas izteiksmē tikai vienā vietā).

Ja $x = -3$, funkcijas izteiksmē pirmais loceklis $2(x + 3)^2 = 0$, bet, ja $x \neq 3$, loceklis $2(x + 3)^2 > 0$; tātad ar $x = -3$ funkcijai ir vismazākā vērtība, proti, $y = -8$.

Argumenta x vērtībai attālinoties no -3 pa kreisi vai pa labi, neierobežoti palielinās summas $x + 3$ modulis un līdz ar to palielinās kvadrāta $(x + 3)^2$, pirmā locekļa $2(x + 3)^2$ un visas funkcijas vērtība; tātad pa kreisi no -3 jeb intervālā $(-\infty; -3)$ funkcija ir dilstoša, bet pa labi no -3 jeb intervālā $(-3; +\infty)$ — augoša.

2. piemērs. $y = -0{,}5x^2 + x + 2{,}5 = -0{,}5(x^2 - 2x -$
$- 5) = -0{,}5(x^2 - 2x + 1 - 1 - 5) =$
$= -0{,}5((x - 1)^2 - 6) = -0{,}5(x - 1)^2 + 3$.

No funkcijas pēdējās izteiksmes viegli saskatīt šādas funkcijas īpašības.

Ja $x = 1$, tad $x - 1 = 0$ un $y = 3$. Ja x vērtība attālinās no 1, tad palielinās starpības $x - 1$ modulis, līdz ar to palielinās arī kvadrāts $(x - 1)^2$, bet locekļa $-0{,}5(x - 1)^2$ un līdz ar to visas funkcijas vērtība samazinās. Tātad ja $x = 1$, tad $y = 3$ ir funkcijas lielākā vērtība. Pa kreisi no 1 jeb intervālā $(-\infty; 1]$ funkcija ir augoša; bet pa labi no 1 jeb intervālā $[1; \infty)$ funkcija ir dilstoša.

Atdalīsim binoma pilno kvadrātu funkcijas izteiksmē, kas dota vispārīgajā veidā:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x +$$
$$+ \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) =$$
$$= a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Izteiksmes pēdējā locekļa skaitītāju $b^2 - 4ac$ sauc par kvadrātfunkcijas diskriminantu (sk. 12.1.). Ja to apzīmē ar D, tad ar atdalītu binoma kvadrātu kvadrātfunkcijas izteiksme ir šāda:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}.$$

Pētot funkciju pēc tās izteiksmes ar atdalītu binoma kvadrātu, līdzīgi kā iepriekšējā skaitliskajā piemērā, var konstatēt šādas īpašības:

ja $x = -\frac{b}{2a}$, tad funkcijas vērtība ir $y = -\frac{D}{4a}$. Tā ir mazākā vērtība, ja $a > 0$, bet lielākā vērtība, ja $a < 0$;

funkcijas augšanu vai dilšanu intervālos pa kreisi un pa labi no $x = -\frac{b}{2a}$ viegli noteikt, ievērojot, vai ar $x = -\frac{b}{2a}$ funkcijai ir mazākā vai lielākā vērtība.

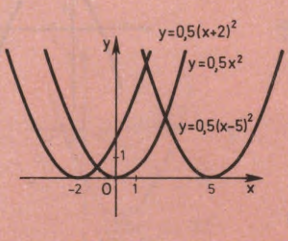
KVADRĀTFUNKCIJAS GRAFIKS

Ja kvadrātfunkcija dota ar atdalīto binoma kvadrātu formā $y = a(x + l)^2 + m$, tad viegli noskaidrot tās grafika formu un novietojumu. To var izdarīt, salīdzinot funkcijas $y = a(x + l)^2$ grafiku ar funkcijas $y = ax^2$ grafiku.

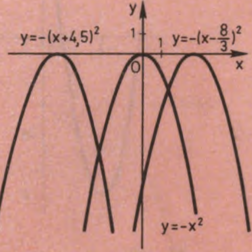
Viegli saprast, ka, piemēram, funkcijām $f(x) = 0{,}5x^2$ un $g(x) = 0{,}5(x + 2)^2$ ir vienādas vērtības, ja argumenta vērtība funkcijā $g(x)$ ir par 2 mazāka nekā funkcijā $f(x)$. Tāpēc funkcijas $g(x) = 0{,}5(x + 2)^2$ grafiku var iegūt no funkcijas $f(x) = 0{,}5x^2$ grafika, pārvietojot tā visus punktus un līdz ar to visu grafiku par 2 vienībām pa kreisi (44. zīm.).

Līdzīgi spriežot, var secināt, ka funkcijas $h(x) = 0{,}5(x - 5)^2$ grafiks iegūstams no funkcijas $f(x) = 0{,}5x^2$ grafika, pārvietojot to par 5 vienībām pa labi.

Tāpat salīdzinājumā ar funkcijas $y = -x^2$ grafiku, $y = -(x + 4{,}5)^2$ grafiks ir nobīdīts par 4,5 vienībām pa kreisi, bet $y = -\left(x - \frac{8}{3}\right)$ grafiks — par $\frac{8}{3}$ vienībām pa labi (45. zīm.).



44. zīm.



45. zīm.

Vispārinot iztirzātajos piemēros vēroto, var secināt, ka kvadrātfunkcijas $y = a(x + l)^2$ grafiks ir parabola ar virsotni punktā $(-l; 0)$, pie tam parabolas zari ir vērsti uz augšu, ja $a > 0$, un uz leju, ja $a < 0$.

Funkcijas $y = a(x + l)^2 + m$ grafika visu punktu ordinātas var iegūt, grafika $y = a(x + l)^2$ attiecīgajām ordinātām pieskaitot m, t. i., pārvietojot grafiku uz augšu (ja $m > 0$) vai uz leju (ja $m < 0$).

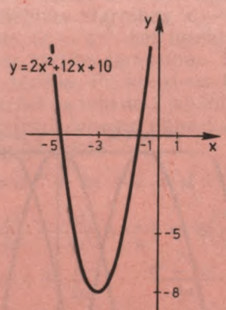
Tādējādi kvadrātfunkcijas $y = a(x + l)^2 + m$ grafiks ir parabola, kas vienāda ar parabolu $y = ax^2$, bet ar virsotni punktā $(-l; m)$, pie tam parabolas zari ir vērsti uz augšu, ja $a > 0$, un uz leju, ja $a < 0$.

Ja kvadrātfunkcija dota vispārīgajā formā $y = ax^2 + bx + c$, tad parabolas virsotnes koordinātas ir $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$.

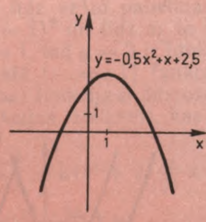
Piemēram, parabolas $y = 2x^2 + 12x + 10$ virsotnes abscisa $x = -\frac{12}{2 \cdot 2} = -3$, ordināta $y = -\frac{12^2 - 4 \cdot 2 \cdot 10}{4 \cdot 2} = -\frac{144 - 80}{8} = -8$; parabolas zari vērsti uz augšu (46. zīm.).

Parabolas $y = -0{,}5x^2 + x + 2{,}5$ virsotnes abscisa $x = -\frac{1}{2 \cdot (-0{,}5)} = 1$, ordināta $y = -\frac{1^2 - 4 \cdot (-0{,}5) \cdot 2{,}5}{4 \cdot (-0{,}5)} = 3$; parabolas zari vērsti uz leju (47. zīm.).

Lai bez virsotnes atrastu arī vēl citus grafika punktus, tad kā parasti, jāsastāda funkciju vērtību tabula. It īpaši viegli noteikt koordinātas punktam, kurā parabola krusto y asi. Piemēram, parabola $y=2x^2+12x+10$ krusto y asi punktā $(0; 10)$, jo $y(0)=10$.



46. zīm.



47. zīm.

Lai noteiktu parabolas krustpunktus ar x asi, jāaprēķina funkcijas saknes:

$2x^2 + 12x + 10 = 0$, $x^2 + 6x + 5 = 0$, $x_1 = -5$; $x_2 = -1$.

Tātad parabola krusto x asi punktos $(-5; 0)$ un $(-1; 0)$.

Var darīt arī tā, ka vispirms uzzīmē nepilnās kvadrātfunkcijas $y = ax^2$ grafiku un pārvieto to pa kreisi vai pa labi un uz augšu vai uz leju, lai parabolas virsotne nonāktu punktā $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$. To praktiski var realizēt tā, ka pārvieto nevis uzzīmēto grafiku, bet gan koordinātu asis pretējos virzienos.

KVADRĀTFUNKCIJAS APTUVENS GRAFIKS

Dotās kvadrātfunkcijas dažādu īpašību noteikšanai gandrīz vienmēr pietiek uzskicēt tās aptuvenu grafiku tikai ar nedaudziem precīzi noteiktiem punktiem.

Lai uzskicētu, piemēram, kvadrātfunkcijas $y = 0{,}5x^2 - 2x - 2{,}5$ grafiku, vispirms atrodam funkcijas saknes:

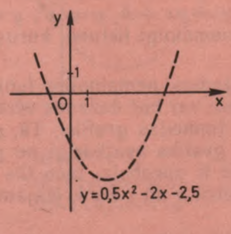
$0{,}5x^2 - 2x - 2{,}5 = 0$, $x^2 - 4x - 5 = 0$, $x_1 = -1$; $x_2 = 5$.

Tātad parabola, kuras zari ir vērsti uz augšu (jo $a = 0{,}5 > 0$), krusto x asi punktos $(-1; 0)$ un $(5; 0)$.

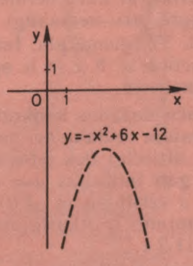
Parabolas virsotnes abscisa ir abu sakņu vidējais aritmētiskais $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1 + 5}{2} = 2$, bet virsotnes ordināta ir dotās funkcijas vērtība, ja $x = 2$:

$0{,}5 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 - 2{,}5 = -4{,}5$.

Pēc trim atrastajiem grafika punktiem var uzskicēt aptuvenu grafiku (to ieteicams zīmēt ar raustītu līniju, ar to akcentējot grafika aptuvenību; sk. 48. zīm.).



48. zīm.



49. zīm.

Ja kvadrātfunkcijai sakņu nav, kā, piemēram, funkcijai $y = -x^2 + 6x - 12$, tad, atmetot brīvo locekli -12, iegūst palīgfunkciju $y = -x^2 + 6x$. Tās saknes ir 0 un 6, bet grafika (parabolas) virsotnes abscisa $\frac{0+6}{2} = 3$ ir reizē arī dotās funkcijas $y = -x^2 + 6x - 12$ grafika (parabolas) virsotnes abscisa. Pēc tam, tāpat kā iepriekš, aprēķina parabolas virsotnes ordinātu:

$$3^2 + 6 \cdot 3 - 12 = -9 + 18 - 12 = -3.$$

Atzīmējot parabolas virsotni punktā $(3; -3)$, var uzskicēt funkcijas $y = -x^2 + 6x - 12$ aptuvenu grafiku. Tas ir parabola, kuras zari vērsti uz leju, jo $a = -1 < 0$ (49. zīm.).

No funkcijas grafika var precīzi nolasīt vērtību apgabalu, lielāko un mazāko vērtību, noteikt augšanu un dilšanu, funkcijas vērtību zīmi u. c.

Tā, piemēram, par funkciju $y = 0{,}5x^2 - 2x - 2{,}5$ pēc tās grafika var secināt: funkcijas vērtību apgabals ir $E = [-4{,}5; \infty)$; ja $x = 2$, tad $y = -4{,}5$ ir funkcijas mazākā vērtība; intervālā $(-\infty; 2]$ funkcija ir dilstoša, bet intervālā $[2; \infty)$ — augoša; ja $x < -1$ vai $x > 5$, tad funkcija ir pozitīva, bet, ja $-1 < x < 5$, tad — negatīva.

Ja nepieciešams noteikt tikai kvadrātfunkcijas zīmi, pietiek uzskicēt aptuvenu grafiku, izmantojot precīzas sakņu vērtības (parabolas virsotnes koordinātas nemaz nav jānosaka).

11.3. FUNKCIJAS PARAMETRU IETEKME UZ TĀS GRAFIKU

JĒDZIENS PAR FUNKCIJAS PARAMETRIEM

Izteiksmē, ar kuru definēta kāda funkcija, bez mainīgā argumenta x figurē arī nemainīgi lielumi — koeficienti, locekļi, kāpinātāji u. tml. Tā, piemēram, funkcijās $y = ax + b$, $y = x^n$, $y = ax^2 + c$ ar burtiem a, b, c, n ir apzīmēti nemainīgi lielumi, kurus sauc par parametriem.

Taču dažādos konkrētos gadījumos, nemainoties funkcijas vispārīgajam veidam, arī parametriem var būt dažādas vērtības. Līdz ar to attiecīgi tiek ietekmēts arī funkcijas grafiks. Tā, piemēram, kaut gan funkcijas $y = ax^2 + c$ grafiks neatkarīgi no parametru a un c vērtībām ($a \neq 0$) vienmēr ir parabola, taču tās forma un novietojums ir atkarīgi no parametru a un c konkrētajām vērtībām (sk. 11.2.).

Tālāk aplūkosim, kā daži raksturīgākie parametri ietekmē jeb deformē funkcijas $y = f(x)$ grafiku.

FUNKCIJA $y = f(x) + m$

Šīs funkcijas grafika visu punktu ordinātas var iegūt, funkcijas $y = f(x)$ grafika atbilstošo punktu ordinātām pieskaitot skaitli m. Tādējādi $y = f(x) + m$ grafiks iegūstams no $y = f(x)$ grafika, pārvietojot to par m vienībām

1) uz augšu, ja $m > 0$,
2) uz leju, ja $m < 0$.

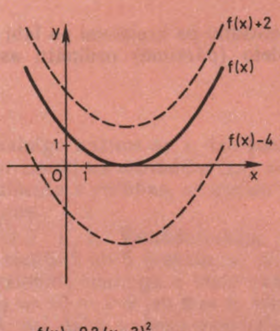
Turpmāk zīmējumos ar nepārtrauktu līniju zīmēts funkcijas $f(x)$ grafiks, bet ar pārtrauktām līnijām — deformētie grafiki (50. zīm.).

Piezīme. Jau uzzīmētu $y = f(x)$ grafiku praktiski viegli pārvietot šādi: ja grafiks jāpārvieto uz augšu, abscisu asi pārzīmē par tikpat vienībām uz leju; ja grafiks jāpārvieto uz leju, abscisu asi pārzīmē par tikpat vienībām uz augšu.

FUNKCIJA $y = a \cdot f(x)$

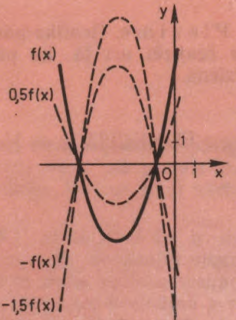
Šīs funkcijas grafika visu punktu ordinātas var iegūt, funkcijas $y = f(x)$ grafika atbilstošo punktu ordinātas reizinot ar skaitli a. Tādējādi $y = a \cdot f(x)$ grafiks iegūstams no $y = f(x)$ grafika ar šādām darbībām:

1) izstiepjot vertikālā virzienā, ja $a > 1$ (pie tam grafika punkti uz x ass paliek nemainīgi);
2) saspiežot vertikālā virzienā, ja $0 < a < 1$ (pie tam punkti uz x ass paliek nemainīgi);
3) atspoguļojot attiecībā pret x asi, ja $a < 0$, pie tam arī izstiepjot, ja $|a| > 1$, vai saspiežot, ja $0 < |a| < 1$ (51. zīm.).



$f(x) = 0{,}2\,(x-3)^2$
$f(x)+2 = 0{,}2(x-3)^2+2$
$f(x)-4 = 0{,}2(x-3)^2-4$

50. zīm.



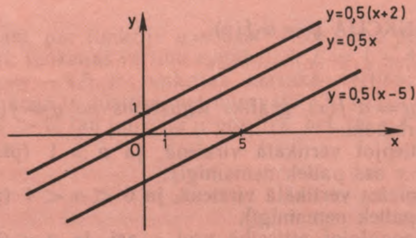
$f(x) = x^2+6x+5$
$0{,}5f(x) = 0{,}5(x^2+6x+5)$
$-f(x) = -(x^2+6x+5)$
$-1{,}5f(x) = -1{,}5(x^2+6x+5)$

51. zīm.

FUNKCIJA $y = f(x + l)$

Ja funkcijā $y = f(x)$ argumenta x vērtība ir $x = a$, bet funkcijā $y = f(x + l)$ argumenta x vērtība ir $x = a - l$, tad abām funkcijām $y = f(x)$ un $y = f(x + l)$ ir vienādas vērtības, proti, $y = f(a)$. Tāpēc funkcijas $y = f(x + l)$ grafika punkta abscisas var iegūt, no funkcijas $y = f(x)$ grafika tāda paša «augstuma» punktu abscisām atņemot skaitli l. Tādējādi $y = f(x + l)$ grafiks iegūstams no $f(x)$ grafika, pārvietojot to par l vienībām

1) pa kreisi, ja $l > 0$;
2) pa labi, ja $l < 0$ (52. zīm.).



52. zīm.

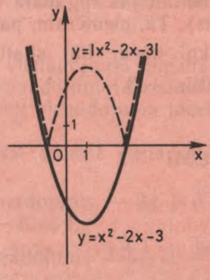
P i e z ī m e. Grafika pārvietošanu pa kreisi vai pa labi praktiski var realizēt arī tā, ka pārvieto (pārzīmē) ordinātu asi pretējā virzienā.

FUNKCIJA $y = |f(x)|$

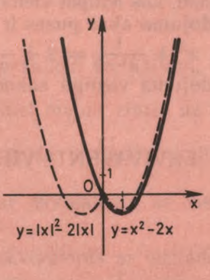
Tā kā moduļa zīme nenegatīva skaitļa vērtību neietekmē, bet negatīvu skaitli maina uz pretējo, tad, pārejot no funkcijas $y = f(x)$ uz funkciju $y = |f(x)|$, grafika daļa virs x ass nemainās, bet tā grafika daļa, kas atradās zem x ass, atspoguļojas simetriski attiecībā pret x asi (53. zīm.).

FUNKCIJA $y = f(|x|)$

Pārejot no funkcijas $y = f(x)$ uz funkciju $y = f(|x|)$, grafika «labā» puse (no koordinātu sākumpunkta pa labi) nemainās, bet «kreisās» puses vietā stājas labās puses atspoguļojums attiecībā pret y asi (54. zīm.).



53. zīm.



54. zīm.

12. VIENĀDOJUMI

12.1. VIENĀDOJUMI AR VIENU NEZINĀMO

VIENĀDOJUMA JĒDZIENS

Par vienādojumu sauc vienādību, kas satur mainīgo, ja tiek prasīts atrast mainīgā tās vērtības, ar kurām vienādība ir patiesa. Tāpēc šo mainīgo mēdz saukt arī par nezināmo. Nezināmā mainīgā tās vērtības, ar kurām dotā vienādība ir patiesa, sauc par vienādojuma atrisinājumiem jeb saknēm. Mēdz arī teikt, ka vienādojuma saknes ir tie skaitļi, kas apmierina vienādojumu. Vienādojumu atrisināt nozīmē atrast tā saknes (vai arī pierādīt, ka dotajam vienādojumam sakņu nav).

Ja mainīgo apzīmē ar x, tad jebkuru vienādojumu vispārīgajā veidā var izteikt kā vienādību $f(x) = g(x)$, kurā tiek prasīts atrast tās argumenta x vērtības, ar kurām funkciju $f(x)$ un $g(x)$ vērtības ir vienādas.

P i e m ē r i. **1.** Vienādojumam $x(5-x) = 10-2x$ ir divas saknes: skaitļi 2 un 5 (raksta: $x_1 = 2$, $x_2 = 5$). Ievietojot vienādojumā nezināmā mainīgā x vietā skaitli 2, dabū patiesu vienādību $2(5-2) = 10-2\cdot 2$ jeb $6 = 6$; tāpat, ievietojot nezināmā x vietā skaitli 5, arī dabū patiesu vienādību $0 = 0$.

2. Vienādojumam $x-4 = 5x$ ir tikai viena sakne, proti, $x = -1$.

3. Vienādojumam $x^2+2=0$ nav sakņu, jo ar jebkurām x vērtībām $x^2 \geqslant 0$ un summa $x^2+2 \neq 0$.

Par vienādojuma saknēm, protams, var būt tikai kāds no tiem skaitļiem, kas ietilpst vienādojuma definīcijas apgabalā (ar kuriem vienādojuma abas puses ir definētas). Tā, piemēram, par vienādojuma $x^2 + \frac{1}{x-3} = 9 + \frac{1}{x-3}$ sakni nevar būt skaitlis 3. (Šī vienādojuma vienīgā sakne ir skaitlis -3.)

EKVIVALENTI VIENĀDOJUMI

Divus vienādojumus sauc par ekvivalentiem, ja tiem ir vienas un tās pašas saknes, t. i., ja viena vienādojuma katra sakne apmierina otru vienādojumu un otra vienādojuma katra sakne apmierina pirmo vienādojumu.

P i e m ē r i. **1.** Vienādojumi $x^2 = 16$ un $3x + 12 = 0$ nav ekvivalenti, jo pirmajam vienādojumam saknes ir 4 un -4, bet otrajam — tikai skaitlis -4; pirmā vienādojuma sakne 4 neapmierina otro vienādojumu.

2. Vienādojumi $5z = 10$ un $8 = z + 6$ ir ekvivalenti, jo tiem abiem ir tikai viena un tā pati sakne, proti, $z = 2$.

3. Vienādojumi $y^2 + 2 = 0$ un $y + 3 = y + 5$ arī tiek uzlūkoti par ekvivalentiem, jo kā vienam, tā otram no tiem sakņu vispār nav.

VIENĀDOJUMA EKVIVALENTI PĀRVEIDOJUMI

No dotā vienādojuma var iegūt jaunu tam ekvivalentu vienādojumu, izdarot kādu no tālāk minētajiem t. s. ekvivalentajiem pārveidojumiem.

1°. Ja vienādojumā kādu tā pusi aizstāj ar identisku izteiksmi, tad dabūtais vienādojums ir ekvivalents ar sākotnējo vienādojumu, piemēram, vienādojums

$$(3x + 1)\cdot 2 - 3 = 20 + 4x - 5$$

ir ekvivalents ar vienādojumu $6x - 1 = 15 + 4x$.

2°. Ja vienādojuma abām pusēm pieskaita vienu un to pašu skaitli (vai izteiksmi, kas nemaina vienādojuma definīcijas apgabalu), tad iegūtais vienādojums ir ekvivalents ar sākotnējo vienādojumu.

No šīs vienādojuma īpašības izriet praktiski secinājumi, kurus izmanto vienādojumu atrisināšanā:

a) vienādojuma locekļus drīkst pārnest no vienas puses uz otru, mainot zīmes uz pretējām;

b) vienādojuma abās pusēs drīkst atmest vienādos locekļus.

1) Vienādojumā $6x - 1 = 15 + 4x$ pārnesot saskaitāmo -1 uz labo pusi un saskaitāmo $4x$ uz kreiso pusi, iegūst ekvivalentu vienādojumu $6x - 4x = 15 + 1$ (jeb pēc identiskiem pārveidojumiem $2x = 16$).

2) Vienādojuma $3x + 5x^2 = 6 + 5x^2$ abās pusēs atmetot vienādos locekļus $5x^2$, iegūst ekvivalentu vienādojumu $3x = 6$.

3°. Ja vienādojuma abas puses reizina vai dala ar vienu un to pašu no nulles atšķirīgu skaitli, tad iegūst ekvivalentu vienādojumu.

No šīs vienādojumu īpašības izriet praktiski secinājumi, kurus izmanto vienādojumu atrisināšanā:

a) visiem vienādojuma locekļiem drīkst mainīt zīmes uz pretējām;

b) drīkst atmest vienādojuma abu pušu vienādos skaitliskos saucējus.

1) Vienādojums $-3x+8=-7$ ir ekvivalents ar vienādojumu $3x-8=7$.

2) Vienādojums $\frac{x+1}{5}=\frac{2x-8}{5}$ ir ekvivalents ar vienādojumu $x+1=2x-8$.

3) Dalot vienādojuma $2x=16$ abas puses ar 2, iegūst ekvivalentu vienādojumu $x=8$ (tā sakne ir jau atklāti izteikta).

Piezīme. Īsuma labad mēdz runāt nevis par vienādojuma abu pušu reizināšanu vai dalīšanu, bet par vienādojuma reizināšanu vai dalīšanu.

VIENĀDOJUMU NEEKVIVALENTI PĀRVEIDOJUMI

Parastākie neekvivalentie vienādojumu pārveidojumi, kurus aiz neuzmanības dažkārt pieļauj, ir četrējādi.

1°. Vienādojuma abās pusēs atmet locekli, kas nav definēts ar nezināmā mainīgā visām vērtībām (tā patvarīgi paplašinot vienādojuma definīcijas apgabalu).

Piemērs. $x^2+\frac{1}{x-3}=9+\frac{1}{x-3}$.

Atmetot no abām pusēm locekli $\frac{1}{x-3}$, dabū vienādojumu $x^2=9$, kura saknes ir -3 un 3. Taču dotajam vienādojumam sakne 3 neder, jo daļai $\frac{1}{x-3}$ nav jēgas ar $x=3$. Tātad dotā vienādojuma sakne ir tikai $x=-3$.

2°. Vienādojuma abas puses dala ar «apslēptu nulli».

Piemēram, risinot vienādojuma $(x+2)(x-5)=6(x-5)$, dala abas puses ar izteiksmi $x-5$ un dabū vienādojumu $x+2=6$, no kura izriet, ka $x=4$. Šī sakne gan der arī sākotnējam vienādojumam, bet ir zaudēta sākotnējā vienādojuma otra sakne $x=5$. (Pārbaudīt!)

Kļūdas cēlonis ir tas, ka sākotnējais vienādojums tika dalīts ar izteiksmi $x-5$, kuras vērtība var būt arī nulle (ja $x=5$). Doto vienādojumu varētu pareizi risināt tā:

$(x+2)(x-5)=6(x-5)$; $(x+2)(x-5)-$
$-6(x-5)=0$;
$(x-5)(x-4)=0$.

Tā kā reizinājums ir vienāds ar nulli tad un tikai tad, ja kāds no reizinātājiem ir vienāds ar nulli, tad

$x - 5 = 0$ vai $x - 4 = 0$ un $x_1 = 5$, $x_2 = 4$.

Ja tās izteiksmes vērtība, ar kuru dala vienādojumu, ne ar kādu nezināmā vērtību nevar būt nulle, tad, protams, iegūtais vienādojums ir ekvivalents ar sākotnējo. Tā, piemēram, vienādojuma $6(z+3)(z^2+1) = 3z(z^2+1)$ abas puses drīkst dalīt ar 3 un arī ar $z^2 + 1 \neq 0$:

$2(z+3) = z$; $2z + 6 = z$; $z = -6$.

3°. Vienādojuma abas puses reizina ar «apslēptu nulli».

Piemēram, reizinot vienādojuma $\frac{x^2-4}{x+2} = 3$ abas puses ar izteiksmi $x + 2$, iegūst vienādojumu $x^2 - 4 = 3(x+2)$ jeb pēc vienkāršošanas $x^2 - 3x - 10 = 0$. Pēdējam vienādojumam ir saknes 5 un 2, taču sākotnējam vienādojumam der tikai sakne $x = 5$, jo ar $x = -2$ tā kreisā puse nav definēta. Tādējādi, ja vienādojumā atmet abu pušu kopīgo saucēju, kas satur nezināmo, no iegūtajām saknēm jāatmet tās, ar kurām saucējs kļūst nulle (šajā gadījumā $x + 2 = 0$, ja $x = -2$).

4°. Vienādojuma abas puses kāpina kvadrātā.

Piemēram, lai vienādojumā $\sqrt{x-1} = x - 3$ atbrīvotos no saknes zīmes, izdevīgi kāpināt vienādojuma abas puses kvadrātā:

$x - 1 = x^2 - 6x + 9$; $x^2 - 7x + 10 = 0$.

No pēdējā vienādojuma abām saknēm 2 un 5 dotajam vienādojumam der tikai sakne 5.

Saknes, kas iegūtas, kāpinot vienādojuma abas puses kvadrātā, jāpārbauda, ievietojot tās dotajā vienādojumā, un «liekās» saknes jāatmet.

VIENĀDOJUMU ATRISINĀŠANA

Lai atrisinātu doto vienādojumu, to vispirms vienkāršo: aizstāj to ar vienkāršāku ekvivalentu vienādojumu, pēdējo ar vēl vienkāršāku ekvivalentu vienādojumu utt., kamēr iegūst kādu jau pazīstamu vienādojumu pamatveidu, kuru atrisināt protam. Vienādojuma vienkāršošanai parasti veic šādus pārveidojumus: atver iekavas, savelk līdzīgos locekļus, vienādo abās pusēs saucējus un tos atmet, pārnes visus locekļus kreisajā pusē, labajā pusē atstājot nulli, vai arī pārnes nezināmos locekļus vienā pusē, zināmos — otrā pusē (kā katrreiz izdevīgāk) u. tml.

Ilustrēsim teikto ar vienādojumu, kura ekvivalentus pārveidojumus daļēji jau aplūkojām punktā «Vienādojuma ekvivalenti pārveidojumi»:

$(3x+1)\cdot 2 - 3 = 20 + 4x - 5$;

$6x + 2 - 3 = 15 + 4x$; $6x - 1 = 15 + 4x$;

$6x - 4x = 15 + 1$; $2x = 16$; $x = 8$.

Pēdējā vienādojuma sakne 8 ir arī visu iepriekšējo vienādojumu un tātad arī sākotnējā vienādojuma sakne. Saknes pārbaude ir vēlama, lai atklātu iespējamās neuzmanības kļūdas:

$$(3\cdot 8+1)\cdot 2-3\overset{?}{=}20+4\cdot 8-5\,;$$

$$25\cdot 2-3\overset{?}{=}20+32-5\,;\ 50-3\overset{?}{=}52-5\,;$$

$$47\overset{!}{=}47\,.$$

Tātad $x=8$ tiešām ir dotā vienādojuma sakne.

Tālāk aplūkosim vienādojumu raksturīgākos pamatveidus un to atrisināšanas paņēmienus.

LINEĀRI VIENĀDOJUMI

Par lineāru vienādojumu sauc vienādojumu $ax+b=0$, kur a un b ir kādi reāli skaitļi. Lineāri vienādojumi ir, piemēram, vienādojumi $3x+6=0$, $5x=0$, $0x+3=0$, $0x=0$.

P i e z ī m e. Lineāru vienādojumu $ax+b=0$, ja $a\neq 0$, sauc arī par pirmās pakāpes vienādojumu. Tādi vienādojumi ir, piemēram, pirmie divi no iepriekšējā rindkopā minētajiem vienādojumiem.

Pakāpeniski risinot lineāru vienādojumu $ax+b=0$, dabū $ax=-b$ un tālāk atkarībā no skaitļu a un b vērtībām var būt šādi trīs gadījumi.

1) Ja $a\neq 0$, tad vienādojuma sakne ir $x=-\frac{b}{a}$, piemēram, $5x-8=0$; $5x=8$; $x=\frac{8}{5}$; $x=1{,}6$.

2) Ja $a=0$, bet $b\neq 0$, tad vienādojumam atrisinājuma nav, piemēram, $0\cdot x+7=0$ jeb $0\cdot x=-7$. Nav tāda skaitļa, kura reizinājums ar nulli būtu vienāds ar -7.

3) Ja $a=b=0$, tad vienādojums ir nenoteikts — tam par sakni der jebkurš skaitlis. Par vienādojuma $0\cdot x=0$ sakni der, piemēram, skaitlis 4, jo $0\cdot 4=0$; tāpat par sakni der jebkurš cits skaitlis.

Atrisināsim divus lineārus vienādojumus, kuri nav doti pamatformā:

1) $\frac{5-x}{3}-\frac{2x-1}{4}=3-\frac{x}{2}$.

Tā kā vienādojuma abu pušu mazākais kopīgais saucējs ir 12, tad pierakstām papildu reizinātājus un vienādojam saucējus:

$$\frac{5-x^{(4}}{3}-\frac{2x-1^{(2}}{4}=3^{(12}-\frac{x^{(6}}{2}\,;\quad \frac{20-4x-6x+3}{12}=\frac{36-6x}{12}\,.$$

Atmetam kopīgo saucēju 12 (reizinām abas puses ar 12):

$20-4x-6x+3=36-6x$.

Atmetam abās pusēs vienādo locekli $-6x$ un pārnesam zināmos locekļus labajā pusē:

$20 - 4x + 3 = 36, \quad -4x = 36 - 20 - 3.$

Savelkam līdzīgos locekļus un pēc tam dalām abas puses ar koeficientu -4 pie nezināmā:

$-4x = 13; \ x = -\frac{13}{4}$ jeb $x = 3\frac{1}{4}$.

Parasti vienādojuma atrisinājumu pieraksta īsāk, izdarot daudzus pārveidojumus galvā.

2) $7x = 2x; \ 7x - 2x = 0; \ 5x = 0; \ x = 0.$

KVADRĀTVIENĀDOJUMI

Par kvadrātvienādojumu sauc vienādojumu $ax^2 + bx + c = 0$, kur $a \neq 0$, piemēram, $2x^2 + x - 3 = 0$. (Ja $a = 0$, tad kvadrātvienādojums pārvēršas par lineāru vienādojumu $bx + c = 0$.)

Locekli ax^2 sauc par kvadrātlocekli, bx — par lineāro locekli, c — par brīvo locekli. Koeficientus a un b sauc attiecīgi par kvadrātlocekļa un lineārā locekļa koeficientiem.

Atkarībā no skaitļu a, b un c vērtībām izšķir dažādus kvadrātvienādojumu paveidus un izmanto tiem atbilstošus dažādus risināšanas paņēmienus.

1°. Nepilnais kvadrātvienādojums $ax^2 = 0$ $(b = c = 0)$. Dalot vienādojuma abas puses ar a, dabū vienādojumu $x^2 = 0$, no kura izriet, ka $x = 0$. Tātad šāda veida kvadrātvienādojumam ir viena reāla sakne, kas vienāda ar nulli. Ja uzskata, ka katram kvadrātvienādojumam ir divas saknes, tad var teikt, ka šāda veida kvadrātvienādojumam ir divas savā starpā vienādas saknes.

P i e m ē r s. $-3x^2 = 0; \ x^2 = 0 : (-3); \ x^2 = 0; \ x = 0.$

2°. Nepilnais kvadrātvienādojums $ax^2 + c = 0$ $(b = 0)$. Pārnesot brīvo locekli c uz labo pusi un dalot vienādojuma abas puses ar a, atrodam, ka $x^2 = -\frac{c}{a}$. No šīs vienādības izriet, ka $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$. Tātad šāda veida vienādojumam ir vai nu divas savstarpēji vienādas saknes (ja $-\frac{c}{a} > 0$), vai nav nevienas saknes (ja $-\frac{c}{a} < 0$).

1) $2x^2 - 50 = 0; \ 2x^2 = 50; \ x^2 = 25; \ x = \pm\sqrt{25};$
$x_1 = -5; \ x_2 = 5.$

2) $0{,}5x^2 + 18 = 0; \ 0{,}5x^2 = -18; \ x^2 = -36;$
vienādojumam nav atrisinājuma.

3°. Nepilnais kvadrātvienādojums $ax^2 + bx = 0$ $(c = 0)$. Sadalot vienādojuma kreiso pusi reizinātājos, iegūst vienādojumu $x(ax + b) = 0$.

Reizinājums ir vienāds ar nulli tad un tikai tad, ja kāds no reizinātājiem vienāds ar nulli, tāpēc

$ax + b = 0$;

$x_1 = 0$ vai $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Tātad šāda veida vienādojumam vienmēr ir divas atšķirīgas saknes, no kurām viena ir vienāda ar nulli.

$5x^2 + 1{,}2x = 0$;

$x(5x + 1{,}2) = 0$;

$x_1 = 0$; $\quad 5x + 1{,}2 = 0$;

$5x = -1{,}2$;

$x_2 = -0{,}24$.

4°. Vispārīgais kvadrātvienādojums $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b un c — jebkuri skaitļi, $a \neq 0$).

Saknes atrod pēc formulas

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (1)$$

1) $2x^2 + 7x + 6 = 0$.

Šajā piemērā $a = 2$, $b = 7$, $c = 6$. Pēc sakņu formulas (1)

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6}}{2 \cdot 2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{4} = \frac{-7 \pm 1}{4};$$

$$x_1 = \frac{-7 - 1}{4} = -2 \text{ ; } x_2 = \frac{-7 + 1}{4} = -1{,}5 .$$

2) $3x^2 - 5x - 2 = 0$.

Šajā gadījumā $a = 3$, $b = -5$, $c = -2$. Pēc sakņu formulas (1)

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 3 \cdot 2}}{6} =$$

$$= \frac{5 \pm 7}{6};$$

$$x = -\frac{1}{3}; \; x_2 = 2$$

Kvadrātvienādojuma sakņu formulā (1) zemsaknes izteiksmi sauc par kvadrātvienādojuma diskriminantu un apzīmē ar D. Tātad kvadrātvienādojuma sakņu vispārīgajā forumulā $D = b^2 - 4ac$. Ieviešot diskriminanta saīsināto apzīmējumu, kvadrātvienādojuma sakņu formulu (7.1) var pārrakstīt šādi:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}. \quad (2)$$

Ja $D > 0$ (kā iepriekšējos abos piemēros), tad kvadrātvienādojumam ir divas reālas atšķirīgas saknes.

Ja $D = 0$, tad vienādojumam ir tikai viena reāla sakne $x = -\frac{b}{2a}$.

Mēdz arī teikt, ka tad kvadrātvienādojumam ir divas saknes, bet tās abas ir vienādas.

$9x^2 - 6x + 1 = 0$;

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 9 \cdot 1}}{18} = \frac{6 \pm 0}{18};$$

$$x_1 = \frac{1}{3}; \; x_2 = \frac{1}{3}.$$

Ja $D < 0$, tad kvadrātvienādojumam reālu sakņu nav. Tā, piemēram, vienādojumam $2x^2 + 3x + 7 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot 7}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{-47}}{4} = \; ??$$

Pēc vispārīgās formulas var atrast jebkura kvadrātvienādojuma, arī nepilnā kvadrātvienādojuma saknes.

1) $2x^2 - 50 = 0$. Šajā gadījumā $a = 2$, $b = 0$, $c = -50$ un

$$x = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4 \cdot 2 \cdot (-50)}}{4} = \frac{0 \pm 20}{4};$$

$$x_1 = -5; \; x_2 = 5.$$

2) $5x^2 + 1{,}2x = 0$. Šim vienādojumam $a = 5$, $b = 1{,}2$, $c = 0$ un

$$x = \frac{-1{,}2 \pm \sqrt{1{,}2^2 - 4 \cdot 5 \cdot 0}}{10} = \frac{-1{,}2 \pm 1{,}2}{10};$$

$$x_1 = \frac{-1{,}2 - 1{,}2}{10} = \frac{-2{,}4}{10} = -0{,}24;$$

$$x_2 = \frac{-1{,}2 + 1{,}2}{10} = 0.$$

Kā redzams, nepilnos kvadrātvienādojumus tomēr ir vienkāršāk atrisināt, nelietojot vispārīgo formulu (sk. 1°., 2°. un 3°.). Dažos gadījumos arī pilno kvadrātvienādojumu var atrisināt ar vienkāršākām formulām (sk. tālāk 5°., 6°.).

5°. Reducētais kvadrātvienādojums ir vienādojums

$$x^2 + px + q = 0$$

(kvadrātlocekļa koeficients ir skaitlis 1, p un q — jebkuri skaitļi).

Šāda vienādojuma saknes var atrast pēc t. s. «reducētās» formulas

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \qquad (3)$$

1) $x^2 + 6x - 7 = 0$. Šim vienādojumam $p = 6$, $q = -7$. Pēc sakņu formulas (3)

$$x = -3 \pm \sqrt{9 + 7} = -3 \pm 4;$$

$$x_1 = -3 - 4; \; x_1 = -7; \; x_2 = -3 + 4; \; x_2 = 1.$$

2) $x^2 - 3x - 4 = 0$. Šeit $p = -3$, $q = -4$. Pēc sakņu formulas (3)

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2};$$

$$x_1 = -1; \; x_2 = 4.$$

Vai reducētajam kvadrātvienādojumam ir divas dažādas saknes, viena sakne vai nav nevienas saknes, tas atkarīgs no tā, vai «reducētais» diskriminants $D = (\frac{p}{2})^2 - q$ ir lielāks nekā nulle, vienāds ar nulli vai mazāks nekā nulle.

6°. Kvadrātvienādojums $ax^2 + 2kx + c = 0$ (a un c — jebkuri skaitļi, bet lineārā locekļa koeficients $b = 2k$ ir pāra skaitlis). Šāda vienādojuma saknes izdevīgi aprēķināt pēc formulas

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}. \qquad (4)$$

Tā, piemēram, $3x^2 + 8x - 3 = 0$. Šim vienādojumam $a = 3$, $c = -3$, $k = 8 : 2 = 4$ un

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 3 \cdot (-3)}}{3} = \frac{-4 \pm 5}{3};$$

$$x_1 = -3; \; x_2 = \frac{1}{3}.$$

Risinot šo pašu vienādojumu pēc vispārīgās formulas, vajadzētu operēt ar lielākiem skaitļiem:

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 3 \cdot (-3)}}{6} = \frac{-8 \pm 10}{6} \text{ utt.}$$

Cik sakņu ir kvadrātvienādojumam, var noteikt pēc diskriminanta $D = k^2 - ac$ zīmes.

Ar kādu paņēmienu (pēc kādas sakņu formulas) risināt doto vienādojumu, to var izlemt tikai pēc tā iespējamās vienkāršošanas, piemēram,

$$\frac{3(x - \frac{1}{3})^2}{2} = \frac{2}{3}.$$

Vienādojam abās pusēs saucējus un kopīgo saucēju 6 tūlīt arī atmetam (reizinām vienādojuma abas puses ar 6):

$$9(x - \frac{1}{3})^2 = 4.$$

Kāpinām binomu kvadrātā:

$$9(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}) = 4.$$

Izpildām reizināšanu un pārnesam visus locekļus kreisajā pusē:

$$9x^2 - 6x + 1 = 4; \; 9x^2 - 6x - 3 = 0.$$

Dalām abas puses ar 3 (lai iegūtu vienādojumu ar mazākiem skaitļiem):

$$3x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Kā redzams, saknes izdevīgi aprēķināt pēc formulas (4):

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 3 \cdot 1}}{3} = \frac{1 \pm 2}{3}; \; x_1 = -\frac{1}{3}; \; x_2 = 1.$$

Piezīme. Šo pašu vienādojumu varēja atrisināt arī attapīgāk ar «nestandarta» paņēmienu:

$$(x-\frac{1}{3})^2=\frac{4}{9};\ x-\frac{1}{3}=\pm\sqrt{\frac{4}{9}};\ x-\frac{1}{3}=\pm\frac{2}{3};$$

$$x_1=-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{3};\ x_2=+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1.$$

VJETA TEORĒMA

Reducētā kvadrātvienādojuma sakņu summa ir vienāda ar lineārā locekļa koeficientam pretēju skaitli, bet sakņu reizinājums ir vienāds ar brīvo locekli.

Tātad, ja vienādojuma $x^2+px+q=0$ saknes ir x_1 un x_2, tad $x_1+x_2=-p$, $x_1\cdot x_2=q$.

1) Vienādojuma $x^2+5x-14=0$ saknes ir $x_1=-7$, $x_2=2$. Kā redzams, $x_1+x_2=-7+2=-5=-p$, bet $x_1\cdot x_2= =(-7)\cdot 2=-14=q$.

2) Vienādojuma $x^2-6x=0$ saknes ir $x_1=0$, $x_2=6$. Kā redzams, $x_1+x_2=0+6=6=-p$, bet $x_1\cdot x_2=0\cdot 6=0=q$.

Pareiza ir arī Vjeta teorēmai apgrieztā teorēma.

Jebkuri divi skaitļi ir saknes tādam reducētam kvadrātvienādojumam, kurā lineārā locekļa koeficients ir šo skaitļu summai pretējs skaitlis, bet brīvais loceklis ir šo skaitļu reizinājums.

Tātad, ja $x_1+x_2=-p$ un $x_1\cdot x_2=q$, tad skaitļi x_1 un x_2 ir kvadrātvienādojuma $x^2+px+q=0$ saknes.

Izmantojot tiešo un apgriezto Vjeta teorēmu, var pārbaudīt aprēķināto sakņu pareizību, var reizēm uzminēt reducētā kvadrātvienādojuma saknes, kā arī sastādīt vienādojumu ar dotajām saknēm.

1) Vai vienādojuma $x^2-5x-24=0$ saknes var būt skaitļi a) 6 un 4; b) -8 un 3; c) 6 un -1; d) -3 un 8?

a) Nē, nevar būt, jo šo skaitļu reizinājums 24 nav vienāds ar $q=-24$;

b) nē, nevar būt, jo šo skaitļu summa -5 nav vienāda ar $-p=5$;

c) nē, nevar būt, jo šo skaitļu summa 5 gan ir vienāda ar $-p=5$, bet sakņu reizinājums nav vienāds ar $q=-24$;

d) jā, var būt, jo $8\cdot(-3)=-24=q$ un $8+(-3)= =5=-p$.

2) Noteikt vienādojuma $x^2+5x-6=0$ saknes.

Sakņu reizinājums ir $q=-6$; šo vienādību apmierina skaitļi -3 un 2 vai 3 un -2; taču šo skaitļu summa nav vienāda ar $-p=-5$. Pārbaudām skaitļa -6 reizinātājus 6 un -1, kā arī -6 un 1; no tiem par saknēm der -6 un 1, jo $(-6)+1=-5=-p$.

3) Sastādīt vienādojumu, kura saknes ir $-0{,}5$ un 3. $q=-0{,}5\cdot 3=-1{,}5$; $p=-(-0{,}5+3)=-2{,}5$.

Meklētais vienādojums ir $x^2 - 2{,}5x - 1{,}5 = 0$ jeb (ar veseliem koeficientiem) $2x^2 - 5x - 3 = 0$.

4) Lai pēc Vjeta teorēmas noteiktu saknes vispārīgajam kvadrātvienādojumam $ax^2 + bx + c = 0$, būtu jāuzmin skaitļi, kuru summa ir daļa $-\frac{b}{a}$, bet reizinājums ir daļa $\frac{c}{a}$. Uzminēt šādus skaitļus nav visai viegli. Tāpēc der izmantot šādu apsvērumu: vispārējā vienādojuma $ax^2 + bx + c = 0$ saknes ir vienādas ar reducētā kvadrātvienādojuma $x^2 + bx + ac = 0$ saknēm, kas dalītas ar koeficientu a.

Noteiksim, piemēram, saknes vienādojumam $3x^2 + 13x - 10 = 0$. Reducētā kvadrātvienādojuma $x^2 + 13x - 30 = 0$ saknes ir viegli uzminēt — tās ir -10 un $+3$. Tātad dotā vienādojuma saknes ir $-\frac{10}{3}$ un $\frac{3}{3}$ jeb $-3\frac{1}{3}$ un 1.

Vispārīgā kvadrātvienādojuma $ax^2 + bx + c = 0$ abas puses dalot ar a, iegūst ekvivalentu reducēto vienādojumu $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Tā saknes un tātad arī dotā vienādojuma saknes x_1 un x_2 ar vienādojuma koeficientiem saista sakarības

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

P i e m ē r s. Vienādojuma $3x^2 - 16x - 12 = 0$ saknes ir $x_1 = -\frac{2}{3}$; $x_2 = 6$. Kā redzams,

$$x_1 + x_2 = -\frac{2}{3} + 6 = 5\frac{2}{3} = \frac{16}{3} = -\frac{b}{a};$$

$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{2}{3} \cdot 6 = -4 = \frac{-12}{3} = \frac{c}{a}.$$

BIKVADRĀTVIENĀDOJUMI

Par bikvadrātvienādojumu sauc vienādojumu $ax^4 + bx^2 + c = 0$, kur $a \neq 0$. Ieviešot palīgnezināmo $y = x^2$, iegūst kvadrātvienādojumu $ay^2 + by + c = 0$. No tā saknēm savukārt atrod dotā kvadrātvienādojuma saknes.

1) Atrisināt vienādojumu $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$. Apzīmē $x^2 = y$, tad $x^4 = y^2$ un iegūst kvadrātvienādojumu

$$y^2 - 10y + 9 = 0.$$

Pēc Vjeta teorēmas $y_1 = 1$; $y_2 = 9$.
Ja $x^2 = 1$, tad $x_1 = 1$; $x_2 = -1$. Ja $x^2 = 9$, tad $x_3 = 3$; $x_4 = -3$. Tātad dotajam vienādojumam ir 4 saknes.

2) $2x^4 - 3x^2 - 2 = 0$.
Ja $x^2 = z$, tad $2z^2 - 3z - 2 = 0$ un $z_1 = 2$; $z_2 = -0{,}5$.

Ja $x^2 = 2$, tad $x_1 = \sqrt{2}$; $x_2 = -\sqrt{2}$.
Ja $x^2 = -0{,}5$, tad x nav reāls skaitlis.
Tātad dotajam bikvadrātvienādojumam ir tikai divas saknes.

DAĻVEIDA VIENĀDOJUMI

Lineārie vienādojumi, kvadrātvienādojumi un bikvadrātvienādojumi pieder pie t. s. veselajiem vienādojumiem. Ja vienādojumā nezināmais atrodas daļas saucējā, tad tādu vienādojumu sauc par daļveida vienādojumu. Daļveida vienādojumu risināšanas gaita vispār ir šāda:

a) visiem vienādojuma locekļiem vienādo saucējus;

b) kopīgos saucējus atmet (reizina abas puses ar kopīgo saucēju);

c) atrisina dabūto veselo vienādojumu;

d) no atrastajām saknēm patur tikai tās, ar kurām kopīgais saucējs ir atšķirīgs no nulles.

1) Atrisināt vienādojumu $\frac{6}{(x-1)(x-3)} + 7 = \frac{3}{x-3}$.

Visu daļu kopīgais saucējs ir $(x-1)(x-3)$. Pareizinām daļas ar papildu reizinātājiem un atbrīvojam vienādojumu no saucējiem:

$$\frac{6}{(x-1)(x-3)} + \frac{7(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-3)} = \frac{3(x-1)}{(x-1)(x-3)};$$

$$6 + 7(x^2 - 4x + 3) = 3x - 3;$$

$$6 + 7x^2 - 28x + 21 - 3x + 3 = 0;$$

$$7x^2 - 31x + 30 = 0;$$

$$x = \frac{31 \pm \sqrt{31^2 - 4\cdot 7\cdot 30}}{14} = \frac{31 \pm 11}{14}; \quad x_1 = 1\frac{3}{7}; \quad x_2 = 3.$$

Tā kā ar $x = 3$ kopīgais saucējs $(x-1)(x-3)$ ir vienāds ar 0, tad otrā sakne jāatmet. Tāpēc dotā vienādojuma vienīgā sakne ir $x = 1\frac{3}{7}$.

2) Atrisināt vienādojumu $\frac{6}{x(x-3)} = \frac{3}{x} + \frac{2}{x-3}$.

Vienādojot saucējus un tos atmetot, iegūst vienādojumu $6 = 3x - 9 + 2x$, kura sakne ir $x = 3$. Tā kā ar $x = 3$ kopīgais saucējs $x(x-3)$ ir vienāds ar 0, tad dotajam vienādojumam sakņu nav.

IRACIONĀLIE VIENĀDOJUMI

Vienādojumu sauc par iracionālu vienādojumu, ja nezināmais tajā atrodas zem saknes zīmes. Šādus vienādojumus risinot, abas puses kāpina attiecīgajā pakāpē, lai atbrīvotos no saknēm. Taču jāatceras, ka, kāpinot kvadrātā, var rasties liekas saknes, kas pēc pārbaudes jāatmet.

1) Atrisināt vienādojumu $\sqrt{x-1} = x-3$.

Kāpinot vienādojuma abas puses kvadrātā, iegūst vienādojumu $x-1 = x^2-6x+9$ jeb $x^2-7x+10=0$. Tā saknes ir $x_1 = 2$; $x_2 = 5$.

Atrastās saknes ievietojot sākotnējā vienādojumā, redzams, ka sakne $x = 2$ ir jāatmet, jo $\sqrt{2-1} \neq 2-3$, t. i., $1 \neq -1$. Tātad dotā vienādojuma vienīgā sakne ir $x = 5$.

2) Atrisināt vienādojumu $\sqrt{2x-1} - \sqrt{x-1} = 1$.

Lai, kāpinot kvadrātā, rastos vienkāršākas izteiksmes, abus radikāļus noškiram no vienādojuma dažādās pusēs un tikai pēc tam kāpinām:

$$\sqrt{2x-1} = \sqrt{x-1} + 1\,;\; 2x-1 = x-1+2\sqrt{x-1}+1.$$

Noškiram radikāli vienā pusē un atkal kāpinām abas puses kvadrātā:

$$x-1 = 2\sqrt{x-1}\,;\; x^2-2x+1 = 4(x-1)\,.$$

Vienkāršojam un atrisinām dabūto kvadrātvienādojumu:

$x^2-6x+5=0\,;\; x_1 = 1\,;\; x_2 = 5\,.$

Pārbaudot atrodam, ka dotajam vienādojumam der abas saknes.

ĪPAŠI PAŅĒMIENI VIENĀDOJUMU RISINĀŠANĀ

Reizēm vienādojumu var atrisināt ar dažiem īpašiem paņēmieniem.

1°. Reizinājuma vienādība ar nulli. Ja, pārnesot vienādojuma visus locekļus vienā pusē, iegūto izteiksmi izdodas sadalīt reizinātājos, tad dotais vienādojums ir sadalāms vienkāršākos vienādojumos. Tas izriet no apsvēruma, ka reizinājums ir vienāds ar nulli tad un tikai tad, ja kāds no reizinātājiem ir vienāds ar nulli.

1) Atrisināt vienādojumu $(2x-1)(x+0{,}7) = 0$. Būtu neatta-pīgi binomus sareizināt un tad risināt dabūto kvadrātvienādojumu. Pietiek aprēķināt visas tās x vērtības, ar kurām kāds no reizinātājiem kļūst vienāds ar nulli:

$$2x-1=0\,;\quad x+0{,}7=0\,;$$
$$x_1 = 0{,}5\,;\quad x_2 = -0{,}7\,.$$

2) Atrisināt vienādojumu $x^3+4x = 4-x^2$.

Pārnesam visus locekļus kreisajā pusē un ar grupēšanas paņēmienu sadalām tos reizinātājos:

$$x^3+x^2-4x-4=0;\; x^2(x+1)-4(x+1)=0;$$
$$(x^2-4)(x+1)=0;$$
$$x^2-4=0;\quad x+1=0;$$
$$x_1 = 2;\quad x_3 = -1.$$
$$x_2 = 2;$$

2°. Palīgnezināmā ieviešana. Aizstājot vienādojumā izteiksmes atsevišķas sastāvdaļas ar jaunu nezināmo, dažkārt var iegūt vienkāršāku vienādojumu.

1) Vienādojumā $(2x+1)^2-9=0$ apzīmējot $2x+1=y$, dabū vienkāršāku vienādojumu $y^2-9=0$, no kura atrod, ka $y_1=3$; $y_2=-3$. Atrisinot vienkāršus vienādojumus $2x+1=3$ un $2x+1=-3$, iegūst dotā vienādojuma saknes: $x_1=1$; $x_2=-2$.

2) Vienādojumā $\frac{2x-1,4}{1,7}+\frac{1,7}{x-0,7}=3$ ir izdevīgi apzīmēt $\frac{1,7}{x-0,7}=y$, tad $\frac{2x-1,4}{1,7}=\frac{2(x-0,7)}{1,7}=\frac{2}{y}$. Jaunā visai vienkāršā vienādojuma $\frac{2}{y}+y=3$ jeb $y^2-3y+2=0$ saknes ir $y_1=1$; $y_2=2$. Ja $\frac{1,7}{x-0,7}=1$, tad $x_1=2,4$; ja $\frac{1,7}{x-0,7}=2$, tad $x_2=1,55$.

Palīgnezināmā ieviešanu izmantojām arī bikvadrātvienādojumu atrisināšanā.

3°. Vienādojuma «aritmētiskā» risināšana. Ja nezināmais vienādojumā ir tikai vienā vietā un vienādojums satur samērā vienkāršas izteiksmes (ar vienu vai divām darbībām), tad nezināmo izdevīgi aprēķināt, izmantojot sakarus starp darbību locekļiem un rezultātu.

1) Aprēķināt nezināmo mainīgo t no formulas $s=v\cdot t$. Nezināmais t kā reizinātājs ir vienāds ar reizinājumu, kas dalīts ar otru reizinātāju: $t=\frac{s}{v}$.

2) Atrisināt vienādojumu $\frac{48}{3+x}=4$.

Dalītājs $3+x$ ir vienāds ar dalāmo, kas dalīts ar dalījumu: $3+x=48:4$; $3+x=12$.

Saskaitāmais x ir vienāds ar summu, no kuras atņemts otrs saskaitāmais:

$x=12-3$; $x=9$.

VIENĀDOJUMI, KURI SATUR MODUĻUS

Šādos vienādojumos jācenšas atbrīvoties no moduļa zīmes, atceroties moduļa jēgu: nenegatīva skaitļa modulis ir vienāds ar pašu skaitli, negatīva skaitļa modulis ir vienāds ar šī skaitļa pretējo skaitli.

1) Atrisināt vienādojumu $|7-3x|=5$.

Ja skaitļa modulis ir 5, tad pats skaitlis ir 5 vai -5. Tāpēc $7-3x=5$ vai $7-3x=-5$. No pirmā vienādojuma izriet, ka $x_1=\frac{2}{3}$; no otrā vienādojuma — ka $x_2=4$.

2) Atrisināt vienādojumu $|x^2 - 2x| + 9x + 12 = 0$.

Atceramies, ka pozitīva skaitļa moduli var aizstāt ar pašu skaitli, bet negatīva skaitļa moduli — ar pretējo skaitli. Taču binoma $x^2 - 2x$ jeb kvadrātfunkcijas $y = x^2 - 2x$ vērtība var būt gan pozitīva, gan negatīva atkarībā no mainīgā x vērtības. No tā, ka kvadrātfunkcijas saknes ir 0 un 2 un kvadrātlocekļa x^2 koeficients ir pozitīvs, izriet šāds secinājums (sk. 5.2.):

ja $x < 0$ vai $x \geqslant 2$, tad $x^2 - 2x \geqslant 0$ un $|x^2 - 2x| = x^2 - 2x$;

ja $0 \leqslant x < 2$, tad $x^2 - 2x \leqslant 0$ un $|x^2 - 2x| = -x^2 + 2x$.

Tādējādi doto vienādojumu var aizstāt ar divu sistēmu apvienojumu:

$$\begin{cases} x < 0 \text{ vai } x \geqslant 2, \\ (x^2 - 2x) + 9x + 12 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \leqslant x < 2, \\ (-x^2 + 2x) + 9x + 12 = 0. \end{cases}$$

Atrisinām pirmo sistēmu:

$$\begin{cases} x < 0 \text{ vai } x \geqslant 2, \\ x^2 + 7x + 12 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 0 \text{ vai } x \geqslant 2, \\ x_1 = -3, \ x_2 = -4. \end{cases}$$

Sistēmas atrisinājums ir $x_1 = -3$; $x_2 = -4$.

Atrisinām otru sistēmu:

$$\begin{cases} 0 \leqslant x < 2, \\ x^2 - 11x - 12 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \leqslant x < 2, \\ x_1 = -1, \ x_2 = 12. \end{cases}$$

Šai sistēmai atrisinājuma nav. Tātad dotā vienādojuma saknes ir $x_1 = -3$; $x_2 = -4$.

VIENĀDOJUMI AR PARAMETRIEM

Vienādojumu, kurš satur ar burtiem apzīmētus zināmos skaitļus jeb parametrus, risina kā parastos vienādojumus, pievēršot uzmanību burtu pieļaujamām vērtībām un izpētot vienādojuma atrisinājumu atkarībā no burtu vērtībām (sk. vispārīgā veidā lineāro vienādojumu un kvadrātvienādojumu atrisināšanu).

1) Atrisināt vienādojumu $ax - 4 = 2x + 6$ (a — parametrs).

Atrisinājums. $ax - 4 = 2x + 6$; $ax - 2x = 4 + 6$;

$(a-2)x = 10$; $x = \frac{10}{a-2}$.

Izpētām atbildi:

ja $a \neq 2$, tad vienādojumam ir viens vienīgs atrisinājums $x = \frac{10}{a-2}$;

ja $a = 2$, tad vienādojumam atrisinājuma nav.

2) Atrisināt vienādojumu $x^2 - 2mx + 2m = 1$.

Atrisinājums. Doto vienādojumu pārveidojam formā $x^2 - 2mx + (2m - 1) = 0$ un risinām to kā reducēto kvadrātvienādojumu

$x^2 + px + q = 0$, kur $p = 2m$, $q = 2m - 1$;

$x = m \pm \sqrt{m^2 - 2m + 1} = m \pm |m - 1|$;

$x_1 = 2m - 1$; $x_2 = 1$.

Tātad dotā vienādojuma vienas saknes $x = 2m - 1$ vērtība ir atkarīga no parametra m vērtības, bet otra sakne $x = 1$ nav atkarīga no m vērtības.

3) Ar kādām burta k vērtībām vienādojumam $kx - k = 3x + 1$ ir pozitīva sakne?

Atrisinājums. $kx - 3x = k + 1$; $(k - 3)x = k + 1$;

$x = \frac{k+1}{k-3}$.

$$\frac{k+1}{k-3} > 0, \text{ ja } \begin{cases} k + 1 > 0, \\ k - 3 > 0, \end{cases} \text{ vai } \begin{cases} k + 1 < 0 \\ k - 3 < 0. \end{cases}$$

Atrisinām abas sistēmas:

$$\begin{cases} k > -1, \\ k > 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} k < -1, \\ k < 3 \end{cases}$$

$$k > 3; \qquad k < -1.$$

Tātad dotā vienādojuma sakne ir pozitīva, ja $k < -1$ vai $k > 3$.

TEKSTA UZDEVUMU ATRISINĀŠANA, SASTĀDOT VIENĀDOJUMU

Vispārīgā pieeja teksta uzdevumu risināšanā, sastādot vienādojumu, ir šāda:

1) apzīmē ar x prasīto nezināmo lielumu (vai citu nezināmo lielumu, no kura pēc tam var viegli aprēķināt prasīto);

2) izsaka dažus citus uzdevumā figurējošus lielumus ar dotajiem skaitļiem un x;

3) ievērojot sakaru starp dažādiem lielumiem, sastāda vienādojumu;

4) atrisina vienādojumu;

5) iegūtās atbildes pārbauda pēc to reālās jēgas un saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem;

6) formulē uzdevuma galīgo atbildi.

Piemēri. 1) Par 72 latiem var nopirkt tikpat daudz pusvilnas auduma, cik par 96 latiem vilnas auduma. Cik maksā metrs katra auduma, ja metrs vilnas auduma ir par 3 latiem dārgāks nekā metrs pusvilnas auduma?

A t r i s i n ā j u m s. Pieņemam:

x ... tik latu maksā metrs pusvilnas auduma.

Tad saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem:

$x + 3$ ... tik latu maksā metrs vilnas auduma,

$\frac{72}{x}$ ... tik metru pusvilnas auduma var nopirkt,

$\frac{96}{x+3}$ ... tik metru vilnas auduma var nopirkt,

$\frac{72}{x} = \frac{96}{x+3}$.

Te izdevīgi izmantot proporcijas pamatīpašību:

$72(x + 3) = 96x$; $24x = 216$;

$x = 9$ (Ls/m) — pusvilnas auduma;

$x + 3 = 9 + 3 = 12$ (Ls/m) — vilnas auduma.

P ā r b a u d e.

1. Vai metrs vilnas auduma ir par 3 latiem dārgāks nekā metrs pusvilnas auduma?

$12 - 9 = 3$ (Ls).

2. Vai vilnas un pusvilnas audumi ir vienādā daudzumā?

$72 : 9 = 8$ (m); $96 : 12 = 8$ (m).

A t b i l d e. Metrs pusvilnas auduma maksā 9 latus, bet metrs vilnas auduma — 12 latus.

2) Divu skaitļu summa ir 100. Ja vienu skaitli palielina par 15 %, bet otru samazina par 10 %, tad šo skaitļu summa nemainās. Atrast šos skaitļus.

A t r i s i n ā j u m s (saīsināts pieraksts).

x . . . 1. skaitlis,

$100 - x$ . . . 2. skaitlis,

$1{,}15x$ . . . palielināts 1. skaitlis,

$0{,}9(100 - x)$ . . . pamazināts 2. skaitlis.

$1{,}15x + 0{,}9(100 - x) = 100$; $1{,}15x + 90 - 0{,}9x = 100$;

$0{,}25x = 10$; $x = 40$ (1. sk.); $100 - 40 = 60$ (2. sk.).

P ā r b a u d e.

1) $60 + 40 = 100$;

2) $40 \cdot 1{,}15 = 46$; $60 \cdot 0{,}9 = 54$; $46 + 54 = 100$.

A t b i l d e. Pirmais skaitlis ir 40, otrais skaitlis ir 60.

3) Vienmērīgi braucot, ceļu no A līdz B (vai otrādi) velosipēdists var veikt par 8 stundām ilgākā laikā nekā motociklists. Ja velosipēdists un motociklists vienlaikus izbrauc viens otram pretim no A un B, tad viņi satiekas pēc 3 stundām. Cik stundās katrs no viņiem var nobraukt visu šo ceļu?

A t r i s i n ā j u m s.

x . . . tik stundās ceļu var veikt motociklists,

$x + 8$ . . . tik stundās ceļu var veikt velosipēdists,

$\frac{1}{x}$ ... tādu ceļa daļu stundā veic motociklists,

$\frac{1}{x+8}$ ... tādu ceļa daļu stundā veic velosipēdists,

$\frac{1}{3}$ ... tādu ceļa daļu stundā veic abi kopā,

$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+8} = \frac{1}{3}$;

$3x + 24 + 3x = x^2 + 8x$; $x^2 + 2x - 24 = 0$;

$x_1 = -6$ (neatbilst uzdevuma jēgai); $x_2 = 4$ (h) — motoc.; $x + 8 = 12$ (h) — velosip.

A t b i l d e. Velosipēdists var veikt visu ceļu 12 stundās, motociklists — 4 stundās.

12.2. VIENĀDOJUMI AR DIVIEM NEZINĀMIEM

JĒDZIENS PAR VIENĀDOJUMU AR DIVIEM NEZINĀMAJIEM

Ir vienādojumi, kuros ir divi nezināmie mainīgie. Tāds ir, piemēram, vienādojums $3x - 2y = 8$.

Par vienādojuma ar diviem nezināmajiem atrisinājumu sauc nezināmo mainīgo to vērtību pāri, ar kuru vienādojums kļūst par patiesu vienādību.

Tā, piemēram, par vienādojuma $3x - 2y = 8$ atrisinājumu der skaitļu pāris (6; 5), kurā pirmais skaitlis ir x vērtība, bet otrais ir y vērtība: $x = 6$ un $y = 5$. Tiešām, ievietojot vienādojumā šīs vērtības, dabūjam patiesu vienādību $18 - 10 = 8$ jeb $8 = 8$. Taču šim pašam vienādojumam ir vēl arī citi atrisinājumi, piemēram, (4; 2), (10; 11), (1; $-2{,}5$), ($-3\frac{1}{3}$; -9) un vēl bezgalīgi daudz citu. Taču tas nenozīmē, ka par atrisinājumu der jebkurš skaitļu pāris. Tā, piemēram, skaitļu pāris $x = 5$, $y = 3$ nav šī vienādojuma atrisinājums.

Lai vienādojumam ar diviem nezināmajiem atrastu kādu atrisinājumu, vienam no nezināmajiem var piešķirt jebkuru vērtību un atkarībā no tās izrēķināt otrā nezināmā vērtību.

Tā, piemēram, vienādojumā $x^2 - 3y = 0$ varam pieņemt $y = 12$. Tad $x^2 - 3 \cdot 12 = 0$ jeb $x^2 = 36$, no kurienes $x = 6$ vai $x = -6$. Tādējādi esam atraduši divus dotā vienādojuma atrisinājumus: $x = 6$ un $y = 12$ vai $x = -6$ un $y = 12$.

Vienādojumam ar diviem mainīgajiem vispār ir bezgalīgi daudz atrisinājumu. Taču ir arī tādi vienādojumi, kuriem ir tikai viens atrisinājums vai pat nav neviena atrisinājuma.

Piemēram, vienādojumam $3x^2 + y^2 + 2 = 0$ nav atrisinājuma, jo ar jebkurām x un y vērtībām vienādojuma kreisās puses vērtība ir pozitīva (lielāka nekā 2 vai vienāda ar 2).

Vienādojumam $x^2 + y^2 = 0$ ir viens vienīgs atrisinājums $x = 0$, $y = 0$.

VIENĀDOJUMU EKVIVALENCE

Vienādojumus ar diviem nezināmajiem sauc par savstarpēji ekvivalentiem, ja tiem ir vieni un tie paši atrisinājumi.

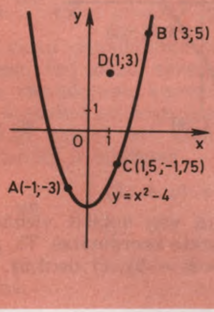
Vienādojums ar diviem nezināmajiem pārveidojas ekvivalentā vienādojumā, ja ar to izdara tādus pašus pārveidojumus kā ar vienādojumu ar vienu nezināmo: pārnes locekļus no vienas puses uz otru ar pretēju zīmi, atmet abu pušu kopīgos skaitliskos saucējus u. tml. (sk. 12.1.).

Tā, piemēram, vienādojumu $3x - 2y = 8$ drīkst aizstāt ar ekvivalentu vienādojumu $3x = 8 + 2y$. Dalot pēdējā vienādojuma abas puses ar 3, atkal iegūst ekvivalentu vienādojumu $x = \frac{8 + 2y}{3}$ u. tml.

VIENĀDOJUMA AR DIVIEM NEZINĀMAJIEM GRAFIKS

Atliekot koordinātu plaknē punktus, kuru koordinātas ir dotā vienādojuma ar diviem nezināmajiem atrisinājumi, izveidojas līnija, kuru sauc par dotā vienādojuma grafiku.

Tā, piemēram, vienādojuma $x^2 - y - 4 = 0$ jeb tam ekvivalentā vienādojuma $y = x^2 - 4$ grafiks (parabola) ir attēlots 55. zīmējumā. Šī grafika jebkura punkta koordinātas (un tikai tās) ir dotā vienādojuma atrisinājums. (Pārbaudīt, ka punktu A, B, C un D koordinātas ir vienādojuma atrisinājumi!)



55. zīm.

Tātad, ja ir uzzīmēts grafiks vienādojumam ar diviem nezināmiem mainīgajiem, tad no grafika var viegli nolasīt pēc patikas daudz šī vienādojuma atrisinājumu.

LINEĀRS VIENĀDOJUMS AR DIVIEM NEZINĀMAJIEM

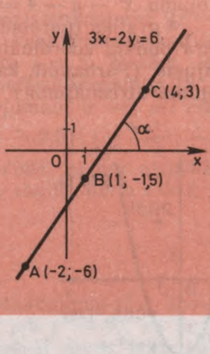
Vienādojumu formā $ax + by = c$ sauc par lineāru vienādojumu ar diviem nezināmajiem. Tādi ir, piemēram, vienādojumi $3x - 2y = 6$ un $x + 5y = 0$.

Lineāru vienādojumu ar diviem nezināmajiem var aizstāt ar ekvivalentu vienādojumu $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, no kura redzams, ka mainīgais y ir mainīgā x lineāra funkcija. Tātad lineāra vienādojuma $ax + by = c$ grafiks ir taisne $y = kx + m$, kur taisnes virzienu nosaka tās virziena koeficients $k = -\frac{a}{b}$.

Ja $b = 0$, tad lineārā vienādojuma $ax = c$ grafiks arī ir taisne, proti, ordinātu asij paralēla taisne $x = \frac{c}{a}$.

P i e m ē r s. Konstruēt vienādojuma $3x - 2y = 6$ grafiku.

A t r i s i n ā j u m s. Pietiekami atrast konstruējamās taisnes divus punktus. Visvieglāk atrast tos punktus, kuru viena koordināta vienāda ar nulli: (0; -3) un (2; 0) (56. zīm.).



56. zīm.

Pēc konstruētā grafika var nolasīt vienādojuma atrisinājumus — taisnes jebkura punkta koordinātas. Tā, piemēram, šī vienādojuma atrisinājumi ir (-2; -6), (1; $-1{,}5$), (4; 3) — punktu A, B un C koordinātas — u. c.

VIENĀDOJUMU SISTĒMAS AR DIVIEM NEZINĀMAJIEM

Ja ir doti divi vienādojumi ar diviem nezināmajiem un jāatrod tie atrisinājumi, kas apmierina abus vienādojumus, tad saka, ka šie abi vienādojumi veido vienādojumu sistēmu.

Vienādojumus sistēmā parasti apvieno ar figūriekavām, piemēram,

$$\begin{cases} x^2 - y - 4 = 0 \\ x + y + 2 = 0. \end{cases}$$

Kā pirmajam, tā otrajam sistēmas vienādojumam ir bezgalīgi daudz atrisinājumu, bet kopīgi tiem ir tikai divi atrisinājumi $(-2; 0)$ un $(1; -3)$. Tie tātad ir sistēmas atrisinājumi. Tos mēdz pierakstīt arī tā:

$$\begin{cases} x_1 = -2 \\ y_1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = -3. \end{cases}$$

VIENĀDOJUMU SISTĒMU EKVIVALENCE

Divas vienādojumu sistēmas sauc par ekvivalentām, ja tām ir vieni un tie paši atrisinājumi.

Sistēma ir ekvivalenta ar sākotnējo, ja tās pārveidošanā ievēro šādus nosacījumus.

1°. Ja sistēmas vienu vai abus vienādojumus aizstāj ar ekvivalentiem vienādojumiem, tad dabū sākotnējai sistēmai ekvivalentu sistēmu. Tā, piemēram, savstarpēji ekvivalentas ir sistēmas

$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x - 2y = 14 \end{cases} \text{ un } \begin{cases} y = 5 - 3x \\ x - y = 7. \end{cases}$$

2°. Ja sistēmas vienu vienādojumu aizstāj ar abu vienādojumu summu vai starpību, tad dabū sākotnējai sistēmai ekvivalentu sistēmu. (Par divu vienādojumu summu pieņemts saukt vienādojumu, kuru dabū, saskaitot attiecīgi doto vienādojumu kreisās un labās puses. Līdzīgi saprot arī divu vienādojumu starpību.) Savstarpēji ekvivalentas ir sistēmas

$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x - y = 7 \end{cases} \quad \text{un} \quad \begin{cases} (3x + y) + (x - y) = 5 + 7 \\ x - y = 7. \end{cases}$$

Otrās sistēmas pirmais vienādojums ir pirmās sistēmas abu vienādojumu summa.

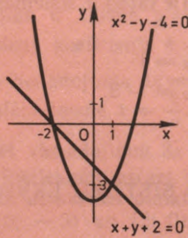
VIENĀDOJUMU SISTĒMAS GRAFISKA ATRISINĀŠANA

Lai atrisinātu vienādojumu sistēmu grafiski, jākonstruē sistēmas abu vienādojumu grafiki un jānolasa to kopējo punktu (krustpunktu) koordinātas — tās ir sistēmas atrisinājumi. Tā, piemēram, sistēmas

$$\begin{cases} x^2 - y - 4 = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}$$

vienādojumu grafikus (57. zīm.) viegli iegūt, ekvivalenti pārveidojot šo sistēmu formā

$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = -x - 2. \end{cases}$$



57. zīm.

Sistēmas atrisinājumi ir grafiku krustpunktu koordinātas $(-2; 0)$ un $(1; -3)$.

VIENĀDOJUMU SISTĒMU ATRISINĀŠANA AR IEVIETOŠANU

Šo paņēmienu ilustrēsim ar konkrētiem piemēriem.

1. piemērs. Atrisināt sistēmu

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x - y = 7 \end{cases}$$

Atrisinājums. 1) No viena vienādojuma izsakām vienu nezināmo atkarībā no otra (vieglāk ir izteikt to nezināmo, kura koeficients ir skaitlis 1; šoreiz no pirmā vienādojuma viegli izteikt y atkarībā no x): $y = 8 - 2x$.

2) Dabūto izteiksmi ievietojam otrajā vienādojumā y vietā, tādējādi iegūstot vienādojumu ar vienu nezināmo: $x - (8 - 2x) = 7$ jeb $3x - 8 = 7$.

3) Atrisinām dabūto vienādojumu: $3x = 7 + 8$, $x = 5$.

4) Ievietojot atrasto x vērtību izteiksmē, ar kuru izteikts y (sk. 1. soli), iegūstam y vērtību: $y = 8 - 2x = 8 - 2 \cdot 5 = -2$.

Tātad sistēmas atrisinājums ir $\begin{cases} x = 5 \\ y = -2. \end{cases}$

Atrisinājumu pārbaudot, tas jāievieto sākotnējās sistēmas abos vienādojumos:

$$\begin{cases} 2 \cdot 5 + (-2) = 8 \\ 5 - (-2) = 7 \end{cases} \text{jeb} \begin{cases} 10 - 2 = 8 \\ 5 + 2 = 7, \end{cases} \text{jeb} \begin{cases} 8 = 8 \\ 7 = 7. \end{cases}$$

2. piemērs. Atrisināt sistēmu

$$\begin{cases} x^2 - y - 4 = 0 \\ x + y + 2 = 0. \end{cases}$$

Atrisinājums. Te vienkāršāk ir izteikt nezināmo y no otrā vienādojuma: $y = -x - 2$. Ievietojot izteiksmi $-x - 2$ pirmajā vienādojumā y vietā, iegūst vienādojumu $x^2 - (-x - 2) - 4 = 0$ jeb $x^2 + x - 2 = 0$. No pēdējā vienādojuma atrodam, ka $x_1 = -2$; $x_2 = 1$. No vienādības $y = -x - 2$ savukārt atrodam atbilstošās y vērtības: $y_1 = -(-2) - 2 = 0$; $y_2 = -1 - 2 = -3$. Tātad sistēmas atrisinājumi ir $(-2;\ 0)$ un $(1;\ -3)$.

3. piemērs. Atrisināt sistēmu $\begin{cases} 3x + 4y = 10 \\ 5x - 2y = -5. \end{cases}$

Atrisinājums. No otrā vienādojuma $y = \dfrac{5x + 5}{2}$.

Ievietojam y izteiksmi pirmajā vienādojumā:

$3x + \dfrac{4(5x + 5)}{2} = 10$ jeb $13x = 0$, jeb $x = 0$.

No y izteiksmes atrodam, ka $y = \dfrac{5 \cdot 0 + 5}{2} = 2{,}5$.

Sistēmas atrisinājums ir $(0;\ 2{,}5)$.

VIENĀDOJUMU SISTĒMU ATRISINĀŠANA AR SASKAITĪŠANAS PAŅĒMIENU

Rīkojoties pēc šī paņēmiena, sistēmas vienu vienādojumu pareizina ar attiecīgi izraudzītu skaitli un pēc tam saskaita ar otru vienādojumu. Minēto skaitli izvēlas tā, lai pēc saskaitīšanas iegūtu vienādojumu, kurā ir tikai viens nezināmais.

1. piemērs. Atrisināt sistēmu

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x - y = 7. \end{cases}$$

Šajā gadījumā vienādojumus var saskaitīt uzreiz, jo to summa ir vienādojums, kas satur tikai x (nezināmais y «pazūd»):

$(2x + y) + (x - y) = 8 + 7$; $3x = 15$; $x = 5$.

Ievietojot x vērtību vienā no sistēmas vienādojumiem (izdevīgāk ievietot otrajā vienādojumā, jo tas ir vienkāršāks), atrodam, ka $5 - y = 7$ jeb $y = -2$.

Sistēmas atrisinājums ir $(5; -2)$.

2. piemērs. Atrisināt sistēmu

$$\begin{cases} 3x + 4y = 10 \\ 5x - 2y = -5. \end{cases}$$

Vispirms otro vienādojumu reizinot ar 2, dabū sistēmu, kuras vienādojumos nezināmais y ir ar savstarpēji pretējiem koeficientiem 4 un -4:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ 10x - 4y = -10. \end{cases}$$

Saskaitot vienādojumus, atrodam, ka

$$13x = 0 \text{ jeb } x = 0.$$

Ievietojot $x = 0$, piemēram, sistēmas pirmajā vienādojumā, iegūstam vienādojumu $3 \cdot 0 + 4y = 10$, kura atrisinājums ir $y = 2{,}5$.

Tātad sistēmas atrisinājums ir $(0; 2{,}5)$.

SAREŽĢĪTĀKAS VIENĀDOJUMU SISTĒMAS

Ja sistēmā viens no vienādojumiem ir lineārs, tad šādu sistēmu viegli atrisināt, no lineārā vienādojuma izsakot vienu nezināmo atkarībā no otra un dabūto izteiksmi ievietojot otrajā vienādojumā. Taču ir arī tādas sitēmas, kurās neviens no vienādojumiem nav lineārs (sk. 1. piemēru). Daži šādu sistēmu atrisināšanas paņēmieni parādīti piemēros.

1. piemērs. $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 7 \\ x - y = 2. \end{cases}$

No otrā vienādojuma atrodam, ka $x = y + 2$. Ievietojot pirmajā vienādojumā nezināmā x vietā izteiksmi $y + 2$, dabū

$$(y + 2)^2 - 2y^2 = 7;\ y^2 + 4y + 4 - 2y^2 = 7;\ y^2 - 4y + 3 = 0;$$

$$y_1 = 1;\ y_2 = 3.$$

Tā kā $x = y + 2$, tad

$$x_1 = 1 + 2 = 3;\ x_2 = 3 + 2 = 5.$$

Sistēmas atrisinājumi ir $(3; 1)$ un $(5; 3)$.

2. piemērs. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - y^2 = 8. \end{cases}$

Saskaitot vienādojumus, dabū

$$2x^2 = 18;\ x^2 = 9;\ x_1 = 3,\ x_2 = -3.$$

Ievietojot pirmajā vienādojumā $x_1 = 3$, atrodam y:

$3^2 + y^2 = 10$; $y^2 = 1$; $y_1 = 1$; $y_2 = -1$.

Tātad atrasti jau divi sistēmas atrisinājumi: (3; 1) un (3; — 1).
Ievietojot pirmajā vienādojumā $x_2 = -3$, dabū

$(-3)^2 + y^2 = 10$; $y^2 = 1$; $y_1 = 1$; $y_2 = -1$.

Tātad vēl divi sistēmas atrisinājumi: (— 3; 1) un (— 3; — 1).

Atbilde: sistēmai ir četri atrisinājumi, proti (3, 1), (3; —1), (— 3; 1), (— 3; — 1).

3. piemērs. $\begin{cases} x^2 + 3x - 4y = 20 \\ x^2 - 2x + y = -5 . \end{cases}$

Pareizinot otro vienādojumu ar 4 un saskaitot ar pirmo vienādojumu, iegūstam vienādojumu, kas satur tikai x:

$5x^2 - 5x = 0$; $x^2 - x = 0$; $x(x-1) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 1$.

Ievietojot atrastās x vērtības otrajā vienādojumā, atrodam, ka

$y_1 = -5$; $y_2 = -4$.

Tātad sistēmas atrisinājums ir (0; — 5) un (1; — 4).

4. piemērs. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ (x - 7y)(x + 7y) = 0 . \end{cases}$

Ievērojot nosacījumu par reizinājuma vienādību ar nulli, no otrā vienādojuma izriet, ka

$x - 7y = 0$ vai $x + 7y = 0$, t. i., $x = 7y$ vai $x = -7y$.

Ievietojot pirmajā vienādojumā x vietā izteiksmi $7y$ vai $-7y$, dabū vienādojumu $49y^2 + y^2 = 100$ jeb $y^2 = 2$, kura saknes ir

$y = \pm\sqrt{2}$.

Ja $y = \pm\sqrt{2}$, tad $x = 7\sqrt{2}$ vai $-7\sqrt{2}$.

Ja $y = -\sqrt{2}$, tad $x = -7\sqrt{2}$ vai $+7\sqrt{2}$.

Tātad sistēmai ir četri atrisinājumi: $(7\sqrt{2}; \sqrt{2})$, $(-7\sqrt{2}; \sqrt{2})$, $(-7\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $(7\sqrt{2}; -\sqrt{2})$.

LINEĀRU VIENĀDOJUMU SISTĒMAS IZPĒTĪŠANA

Tā kā lineāra vienādojuma $ax + by = c$ grafiks ir taisne $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, kuras virzienu nosaka tās virziena koeficients $-\frac{b}{a}$, vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

atrisināšanā var rasties šādi trīs gadījumi.

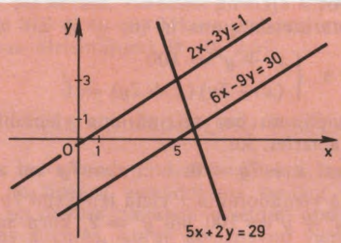
1°. Ja $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, tad taišņu virzienu koeficienti ir atšķirīgi, tāpēc taisnes krustojas kādā vienā punktā, kura koordinātas ir sistēmas vienīgais atrisinājums.

2°. Ja $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, tad abi vienādojumi ir ekvivalenti, tiem atbilstošās taisnes sakrīt jeb sistēmai ir bezgalīgi daudz atrisinājumu.

3°. Ja $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, tad taišņu virziena koeficienti ir vienādi un taisnes ir paralēlas (nesakrītošas), tātad tām nav kopīgu punktu un sistēmai nav atrisinājuma.

1) Sistēmā $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 5x + 2y = 29 \end{cases}$

$\frac{2}{5} \neq \frac{-3}{2}$, tātad sistēmai ir viens vienīgs atrisinājums; tiešām kā tas redzams pēc grafikiem (58. zīm.), abas taisnes krustojas, sistēmas atrisinājums ir (5; 3).



58. zīm.

2) Sistēma $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 6x - 9y = 3 \end{cases}$

$\frac{2}{6} = \frac{-3}{-9} = \frac{1}{3}$, tātad sistēmai ir bezgalīgi daudz atrisinājumu (abas taisnes sakrīt).

3) Sistēmā $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 6x - y = 30 \end{cases}$

$\frac{2}{6} = \frac{-3}{-9} \neq \frac{1}{5}$, tātad sistēmai nav atrisinājuma (abas taisnes ir paralēlas).

TEKSTA UZDEVUMU ATRISINĀŠANA, SASTĀDOT VIENĀDOJUMA SISTĒMU

Vispārīgā pieeja vienādojumu sistēmu sastādīšanā ir analoģiska vienādojumu ar vienu nezināmo sastādīšanai (sk. 12.1.). Atšķirība ir tikai tā, ka, ieviešot divus nezināmos x un y, nepieciešams sastādīt divus vienādojumus.

Salīdzinājumam kā pirmo atrisināsim jau iepriekš (sk. 12.1.) risināto uzdevumu.

1) Par 72 latiem var nopirkt tikpat daudz pusvilnas auduma, cik par 96 latiem vilnas auduma. Cik maksā metrs katra auduma, ja metrs vilnas auduma ir par 3 latiem dārgāks nekā metrs pusvilnas auduma?

Atrisinājums. Pieņemsim, ka

x ... tik latu maksā metrs pusvilnas auduma,

y ... " " " " " vilnas auduma.

Tad saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem

$\frac{72}{x}$ ... tik metru pusvilnas auduma var nopirkt,

$\frac{96}{y}$ ... tik metru vilnas auduma var nopirkt,

$$\begin{cases} \frac{72}{x} = \frac{96}{y} \\ y - x = 3. \end{cases}$$

Sistēmas atrisinājums ir $x = 9$, $y = 12$.

Atbilde. Metrs pusvilnas auduma maksā 9 latus, metrs vilnas auduma — 12 latus.

2) Ja divciparu skaitļa desmitu ciparu palielina par 2, bet vienu ciparu pamazina par 2, tad skaitlis palielinās 2 reizes. Atrast šo skaitli, ja tā ciparu summa ir 9.

Atrisinājums.

x... meklējamā skaitļa desmitu skaits,

y... meklējamā skaitļa vienu skaits,

$x + y$... skaitļa ciparu summa,

$10x + y$... meklējamais skaitlis,

$x + 2$ ... palielinātā skaitļa desmitu skaits,

$y - 2$ ... palielinātā skaitļa vienu skaits,

$10(x + 2) + (y - 2)$... palielinātais skaitlis,

$$\begin{cases} 10(x + 2) + (y - 2) = 2(10x + y) \\ x + y = 9. \end{cases}$$

Sistēmu vienkāršojot, dabūjam

$$\begin{cases} 10x + y = 18 \\ x + y = 9. \end{cases}$$

Atņemot no pirmā vienādojuma otro, atodam, ka $9x = 9$, $x = 1$, $y = 8$. Tātad meklējamais skaitlis ir 18.

13. NEVIENĀDĪBAS

13.1. SKAITLISKAS VIENĀDĪBAS UN NEVIENĀDĪBAS

SKAITĻU SALĪDZINĀŠANA

Ja divu skaitļu pieraksti ar cipariem ne ar ko neatšķiras, tad viegli secināt, ka arī paši skaitļi ir vienādi. Piemēram, ja $a = -2{,}36$ un $b = -2{,}36$, tad sakām, ka skaitļi a un b ir vienādi un rakstām $a = b$. Ja skaitļi doti dažādos pierakstos, tad jau uzmanīgāk jāizpēta šo skaitļu vienādība. Piemēram, ja $m = \frac{5}{33}$ un $n = 0,(15)$, tad vispirms pārveidojam skaitli n parastajā daļā: $n = 0,(15) = \frac{15}{99} = \frac{5}{33}$; tagad var droši secināt skaitļu m un n vienādību $m = n$.

Tāpat pēc skaitļu pieraksta reizēm viegli novērtēt, kurš no abiem skaitļiem ir lielāks, kurš — mazāks. Piemēram, 4,373737... ir mazāks nekā 4,374 (sk. 6.2); skaitlis $\frac{2}{3}$ ir lielāks nekā $\frac{2}{5}$ u. tml.

Skaitļu salīdzināšanai matemātikā lieto šādu kritēriju:

ja skaitļu a un b starpība $a - b$ ir vienāda ar nulli, tad skaitļi a un b ir vienādi un raksta $a = b$;

ja skaitļu a un b starpība $a - b$ ir pozitīva, tad skaitlis a ir lielāks nekā b un raksta $a > b$;

ja skaitļu a un b starpība ir negatīva, tad skaitlis a ir mazāks nekā b un raksta $a < b$.

1) Salīdzināt skaitļus $\frac{2}{5}$ un $\frac{3}{7}$.

Tā kā abu skaitļu starpība $\frac{2}{5} - \frac{3}{7} = \frac{14-15}{35} = -\frac{1}{35}$ ir negatīva, tad $\frac{2}{5} < \frac{3}{7}$.

2) Salīdzināt $2a^2$ un $a^2 - 1$.

Tā kā $2a^2 - (a^2 - 1) = a^2 + 1$ un starpība $a^2 + 1$ ir pozitīva ar jebkurām burta a vērtībām, tad $2a^2 > a^2 - 1$.

3) Salīdzināt $2a$ un $a - 1$.

Atrodam starpību $2a - (a - 1) = a + 1$. Novērtējot šo starpību $a + 1$, varam izdarīt šādus secinājumus:

ja $a = -1$, tad $a + 1 = 0$ un tāpēc $2a = a - 1$;
ja $a > -1$, tad $a + 1 > 0$ un tāpēc $2a > a - 1$;
ja $a < -1$, tad $a + 1 < 0$ un tāpēc $2a < a - 1$.

VIENĀDĪBAS UN NEVIENĀDĪBAS

Ja divas izteiksmes savieno ar vienādības zīmi, rodas vienādība; ja divas izteiksmes savieno ar nevienādības zīmi, rodas nevienādība.

Vienādības un nevienādības var būt patiesas vai nepatiesas (pareizas vai nepareizas), piemēram, $7 + 3 < 8$ ir nepatiesa (nepareiza) nevienādība; $9 > 2$ ir patiesa (pareiza) nevienādība; $0{,}3^2 = 0{,}9$ ir nepatiesa (nepareiza) vienādība.

Nevienādības $a > b$ un $m > n$ (nevienādības zīmes ir «vienā virzienā») sauc par vienāda veida nevienādībām, bet nevienādības $c > d$ un $u < v$ sauc par pretēja veida nevienādībām.

Ja skaitlis a ir lielāks nekā b vai vienāds ar b, tad raksta $a \geqslant b$. Tā, piemēram, ir pareizi apgalvojumi $5 \geqslant 4$; $3 \geqslant 3$; $a^2 \geqslant 0$ (ar jebkurām burta a vērtībām).

Ja skaitlis a ir mazāks nekā b vai vienāds ar b, tad raksta $a \leqslant b$. Piemēram, $3 \leqslant 3$; $-5{,}2 \leqslant -5{,}1$; $7 \leqslant 7 + x^2$ (ar jebkurām x vērtībām).

Nevienādības $a > b$ vai $c < d$ sauc par stingrām nevienādībām, bet nevienādības $a \geqslant b$ vai $c \leqslant d$ — par nestingrām nevienādībām. Ja par divām skaitliskām izteiksmēm raksta, ka, piemēram, $5 = 7 - 2$; $8 > 3$; $3 + 1 \leqslant 5$ u. tml., tad šādas vienādības vai nevienādības sauc par skaitliskām vienādībām vai nevienādībām. Ja turpretim ir jānosaka, ar kādām mainīgā vērtībām ir patiesa dotā vienādība vai nevienādība, tad runā par nosacītām vienādībām vai nevienādībām jeb par vienādībām un nevienādībām, kas satur nezināmos. Tā, piemēram, var gadīties, ka uzdevumā jānosaka tās mainīgā a vērtības, ar kurām ir patiesa vienādība $a + 4 = 10$ vai nevienādība $3a > 6$. Nosacītās vienādības, kā zināms, sauc arī par vienādojumiem.

Ir arī tādas vienādības un nevienādības, kas ir patiesas ar visām pieļaujamām mainīgā vērtībām, piemēram, $a + a = 2a$, $u^2 + 1 > 0$. Tās sauc par identiskām vienādībām (identitātēm) vai par identiskām nevienādībām. Patiesas skaitliskās vienādības un nevienādības arī var uzskatīt par identiskām vienādībām vai nevienādībām.

SKAITLISKO VIENĀDĪBU UN NEVIENĀDĪBU ĪPAŠĪBAS

Vienādību īpašības ir viegli saprotamas. Nevienādību īpašības ir tām analogas, taču vietām ar svarīgām atrunām attiecībā uz skaitļu zīmēm. Tāpēc pārskatāmības labad minēsim paralēli analogās vienādību un nevienādību īpašības.

Ar burtiem apzīmēti jebkuri reāli skaitļi (ja par tiem nav pievienota īpaša atruna). Apzīmējumi $a > 0$ vai $a < 0$ izsaka, ka a ir attiecīgi pozitīvs vai negatīvs skaitlis.

1°. Ja $a = b$, tad $b = a$. 1°. Ja $a > b$, tad $b < a$.

2°. Ja $a = b$ un $b = c$, tad $a = c$.	2°. Ja $a > b$ un $b > c$, tad $a > c$.
3°. Ja $a = b$, tad $a + c = b + c$.	3°. Ja $a > b$, tad $a + c > b + c$.
4°. Ja $a = b$, tad $ac = bc$.	4°. a) Ja $a > b$ un $c > 0$, tad $ac > bc$. b) Ja $a > b$ un $c < 0$, tad $ac < bc$. c) Ja $a > b$ un $c = 0$, tad $ac = bc$.
5°. Ja $a = b$ un $c = d$, tad $a + c = b + d$.	5°. Ja $a > b$ un $c > d$, tad $a + c > b + d$.
6°. Ja $a = b$ un $c = d$, tad $ac = bd$.	6°. Ja $a > b$ un $c > d$, pie tam a, b, c, d ir pozitīvi skaitļi, tad $ac > bd$.
7°. Ja $a = b$, tad $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$.	7°. Ja $a > b$, pie tam a, b ir pozitīvi skaitļi, tad $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.
8°. Ja $a = b$, tad $a^n = b^n$.	8°. Ja $a > b$, pie tam a, b, n ir pozitīvi skaitļi, tad $a^n > b^n$.

Piemēros ilustrēsim tās nevienādību īpašības, kuras tikai ar svarīgām atrunām ir analogas ar atbilstošajām vienādību īpašībām.

Tā, piemēram, $7 > 2$, bet, pareizinot nevienādības abas puses ar vienu un to pašu skaitli -5, iegūst pretēja veida nevienādību $-35 < -10$ (sk. 4°.b).

Ja neievēro nosacījumu, ka a, b, c, d ir pozitīvi skaitļi, tad 6°. īpašība var nebūt spēkā, piemēram, $3 > -2$; $1 > -5$, bet $3 \cdot 1 < (-2) \cdot (-5)$!

Ja 7°. īpašībā neievēro atrunu, ka skaitļi a un b ir pozitīvi, tad īpašība nav spēkā, piemēram, $3 > -5$ un arī $\frac{1}{3} > -\frac{1}{5}$.

NEVIENĀDĪBU PIERĀDĪŠANA

Lai pierādītu, ka nevienādība, kas satur mainīgo, ir patiesa mainīgā visām reālām vērtībām (vai tikai norādītajām vērtībām), parasti uzraksta nevienādības abu pušu starpību un noskaidro, vai tā ir pozitīva vai negatīva, un atkarībā no rezultāta izdara secinājumu par nevienādības patiesumu vai nepatiesumu.

1. piemērs. Pierādīt, ka ar visām m vērtībām ir patiesa nevienādība $m^2 + m - 1 \leqslant 10m^2 - 5m$.

Nevienādības labās un kreisās puses starpība ir $(10m^2 - 5m) - (m^2 + m - 1) = 9m^2 - 6m + 1 = (3m + 1)^2$. Tā kā jebkura skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs, tad $(3m + 1)^2 \geqslant 0$ un saskaņā ar kritēriju par skaitļu salīdzināšanu (sk. šī paragrāfa sākumu) dotās nevienādības labā puse tiešām ir lielāka nekā kreisā puse vai ir vienāda ar to.

2. piemērs. Pierādīt, ka divu savstarpēji apgrieztu pozitīvu skaitļu summa nav mazāka kā 2.

Šajā gadījumā ir jāpierāda, ka $m + \frac{1}{m} \geqslant 2$, ja zināms, ka $m > 0$. Sastādām un pārveidojam pierādāmās nevienādības kreisās un labās puses starpību:

$$m + \frac{1}{m} - 2 = \frac{m^2 + 1 - 2m}{m} = \frac{(m-1)^2}{m}.$$

Tā kā skaitītājs $(m-1)^2 \geqslant 0$ un saucējs $m > 0$, tad daļa $\frac{(m-1)^2}{m} \geqslant 0$ un nevienādība ir pierādīta.

Nevienādības patiesumu var pārbaudīt arī tā, ka, uzlūkojot mainīgo par nezināmo, doto nevienādību atrisina un konstatē, vai nevienādības atrisinājums saskan ar pierādīšanai doto skaitļu intervālu.

3. piemērs. Pierādīt, ka ar mainīgā u visām pozitīvām vērtībām ir patiesa nevienādība $7(u-2) - 4(u+3) > 1$.

Atrisinām nevienādību, uzlūkojot mainīgo u par nezināmo:

$7u - 14 - 4u - 12 > 1$; $3u > 27$; $u > 9$.

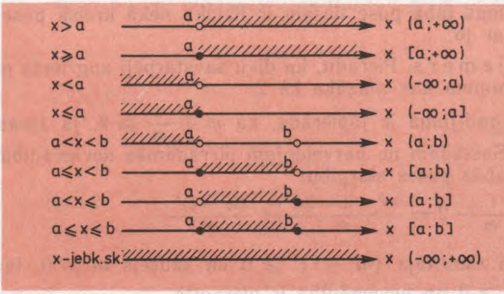
Kā redzams, dotā nevienādība nav patiesa visām pozitīvām u vērtībām, bet tikai tādām vērtībām, kas lielākas nekā 9.

SKAITĻU INTERVĀLI

Ar vienādības zīmi var norādīt ar burtu apzīmētā skaitļa vienu vienīgu noteiktu vērtību, piemēram, $x = 7$. Ar nevienādības zīmi turpretim var norādīt ar burtu apzīmētā skaitļa visas iespējamās vērtības kādā plašākā reālo skaitļu kopā. Tā, piemēram, pieraksts $x \geqslant 5$ izsaka, ka skaitlis x var būt jebkurš skaitlis, kas lielāks nekā 5 vai vienāds ar 5 jeb, citiem vārdiem, ka x pieder pie skaitļu intervāla no 5 līdz bezgalībai, skaitli 5 ieskaitot. Šo skaitļu intervālu mēdz pierakstīt arī tā: $[5; +\infty)$. Lai akcentētu, ka pie šī intervāla pieder skaitlis x, raksta $x \in [5; +\infty)$ (lasa: x pieder pie intervāla no 5 līdz bezgalībai, skaitli 5 ieskaitot). Šāds pieraksts par x vērtībām izsaka to pašu, ko pieraksts $x \geqslant 5$.

Attēlosim dažāda veida skaitļu intervālus arī uz koordinātu taisnes un apzīmēsim tos divējādos pierakstos (59. zīm.).

Norādot skaitļu intervālu, vienmēr jāpiemin, vai galapunkti ieskaitīti vai ne. Ieskaitītu galapunktu pierakstā norāda ar kvadrātiekavu, zīmējumā — ar pilnu riņķīti; neieskaitītu galapunktu — ar apaļo iekavu vai tukšu riņķīti.



59. zīm.

Der ievērot, ka, piemēram, intervālā $x \geqslant 5$ mazākais skaitlis ir 5, bet nav tāda skaitļa, kas būtu pats lielākais. Turpretim intervālā $x > 5$ nav ne lielākā, ne mazākā skaitļa. Līdzīgi intervālā $(-3; 8]$ nav mazākā skaitļa, bet lielākais skaitlis tajā ir 8.

13.2. NOSACĪTĀS NEVIENĀDĪBAS

NOSACĪTĀS NEVIENĀDĪBAS JĒDZIENS

Par nosacītu nevienādību sauc nevienādību, kas satur nezināmo mainīgo. Ja nezināmo mainīgo apzīmē ar x, tad nosacīto nevienādību var uzrakstīt kā nevienādību $f(x) > g(x)$, kurā tiek prasīts atrast mainīgā x tās vērtības, ar kurām izteiksmes (funkcijas) $f(x)$ vērtība ir lielāka nekā izteiksmes $g(x)$ vērtība. Nezināmā mainīgā tās vērtības, ar kurām dotā nevienādība ir patiesa (pareiza), sauc par nevienādības atrisinājumiem. Saka arī, ka nevienādības atrisinājumi ir tie skaitļi, kas apmierina nevienādību.

1) Par nevienādības $4 + x \leqslant 7$ atrisinājumu der, piemēram, skaitlis 2, jo $4 + 2 < 7$ ir patiesa skaitliska nevienādība. Tāpat par šīs nevienādības atrisinājumiem der skaitļi $-5, 0, 1, 2\frac{1}{3}, 3$ u. c. vai vispār skaitļu intervāla $x \leqslant 3$ jeb $(-\infty; 3]$ jebkurš skaitlis.

2) Nevienādībai $x^2 + 3 < 0$ nav atrisinājuma.

NEVIENĀDĪBU EKVIVALENCE

Divas nevienādības sauc par savstarpēji ekvivalentām, ja tām ir visi vieni un tie paši atrisinājumi jeb ja atrisinājumi sakrīt. No dotās nevienādības var iegūt ekvivalentu nevienādību, ja ar doto nevienādību izdara kādu no tālāk minētajiem t. s. ekvivalentajiem pārveidojumiem.

1°. Ja nevienādībā kādu tās pusi aizstāj ar identisku izteiksmi, tad iegūtā nevienādība ir ekvivalenta ar sākotnējo nevienādību. Tā, piemēram, nevienādības $2x + 3x < 4 \cdot 5$ un $5x < 20$ ir ekvivalentas.

2°. Ja nevienādības abām pusēm pieskaita vienu un to pašu skaitli, tad iegūtā nevienādība ir ekvivalenta ar sākotnējo nevienādību.

No šīs nevienādību īpašības izriet praktiski secinājumi, kurus izmanto nevienādību atrisināšanā:

a) nevienādības locekļus drīkst pārnest no vienas puses uz otru, mainot zīmi uz pretējo;

b) nevienādības abās pusēs drīkst atmest vienādus locekļus.

1) No nevienādības $3x + 4 \geqslant 2x - 1$, pārnesot dažus locekļus no vienas puses uz otru ar mainītām zīmēm, iegūst ekvivalentu nevienādību $3x - 2x \geqslant -1 - 4$.

2) Nevienādība $2x - 0{,}7x + 1 < 5 - 0{,}7x$ un nevienādība $2x + 1 < 5$ ir ekvivalentas (atmesti locekļi $-0{,}7x$).

Pirmās divas nevienādību īpašības ir pilnīgi līdzīgas atbilstošajām vienādojumu ekvivalences īpašībām, bet nākamajā, trešajā īpašībā ir jāievēro divi dažādi gadījumi.

3°. a) Ja nevienādības abas puses reizina vai dala ar vienu un to pašu pozitīvu skaitli, tad iegūst sākotnējai nevienādībai ekvivalentu nevienādību.

3°. b) Ja nevienādības abas puses reizina vai dala ar negatīvu skaitli un vienlaikus nevienādības veidu maina uz pretējo, tad iegūst sākotnējai nevienādībai ekvivalentu nevienādību.

Nevienādību risināšanas praksē uzmanīgi jāizmanto šādi secinājumi no trešās īpašības:

a) ja nevienādības abām pusēm maina zīmes uz pretējām, tad jāmaina arī nevienādības veids;

b) nevienādības abas puses nedrīkst reizināt vai dalīt ar izteiksmi, kas satur mainīgo, ja šīs izteiksmes zīme nav noteikta.

1) Nevienādības $\frac{x-4}{2} < \frac{3x}{2}$ abas puses reizinot ar skaitli 2, iegūst ekvivalentu nevienādību $x - 4 < 3x$.

2) Nevienādības $-y > 5$ abas puses reizinot ar negatīvu skaitli -1 (mainot abām pusēm zīmes uz pretējām) un mainot nevienādības veidu, iegūst ekvivalentu nevienādību $y < -5$.

3) No nevienādības $-2x < 8$, tās abas puses dalot ar skaitli -2, izriet, ka $x > -4$.

4) Nevienādības $(x^2 + 1)(x - 3) > 5(x^2 + 1)$ un $x - 3 > 5$ ir ekvivalentas (abas puses ir dalītas ar izteiksmi $x^2 + 1$, kas ir pozitīva ar visām x vērtībām).

5) Nevienādības $3x(2x + 1) < 6(2x + 1)$ un $3x < 6$ nav ekvivalentas, jo abas puses dalītas ar izteiksmi $2x + 1$, kuras zīme nav noteikta. Tā, piemēram, otrajai nevienādībai der atrisinājums $x = -1$, bet pirmajai tas neder.

6) Nevienādības $\frac{3x}{x-2} < 4$ un $3x < 4(x-2)$ nav ekvivalentas, jo pirmās nevienādības abas puses ir reizinātas ar izteiksmi $x-2$, kuras zīme nav noteikta. Piemēram, pirmajai nevienādībai der atrisinājums $x = 0$, bet otrai — ne.

LINEĀRĀS NEVIENĀDĪBAS

Lineārās nevienādības normālā forma ir $ax > b$ (vai $ax < b$). Dalot nevienādības abas puses ar a, iegūstam nevienādības atrisinājumu: $x > \frac{b}{a}$, ja $a > 0$, vai $x < \frac{b}{a}$, ja $a < 0$.

Ja $a = 0$, t. i., nevienādība ir $0 \cdot x > b$, tad tai nav atrisinājuma (ja $b > 0$) vai arī par atrisinājumu der jebkurš skaitlis (ja $b < 0$).

Atrisināsim dažas lineāras nevienādības.

1) $3x > 12$. Dalot abas puses ar 3, iegūstam atrisinājumu $x > 4$. Nevienādības atrisinājumu kopa ir skaitļu intervāls $(4; \infty)$.

2) $-3x > 12$. Dalot abas puses ar negatīvu skaitli -3 un mainot nevienādības veidu uz pretējo, iegūstam, ka $x < -4$. Atrisinājums ir intervāls $(-\infty; -4)$.

3) $-0{,}5x \leqslant -9$. Dalot abas puses ar negatīvu skaitli $-0{,}5$ un mainot nevienādības veidu, dabū, ka $x \geqslant 18$ jeb $x \in [18; \infty)$.

4) $0 \cdot x < -2$. Ar jebkuru x vērtību kreisās puses vērtība ir vienāda ar nulli, bet nevienādība $0 < -2$ nav patiesa. Tātad dotajai nevienādībai nav atrisinājuma.

5) $0 \cdot x \geqslant -1$. Tā kā $0 \cdot x = 0$ un $0 \geqslant -1$, tad dotā nevienādība ir apmierināta ar jebkuru x vērtību. Atrisinājums ir $(-\infty; +\infty)$.

Sarežģītākas nevienādības vispirms vienkāršo, t. i., aizstāj ar vienkāršākām ekvivalentām nevienādībām, kamēr iegūst lineāru nevienādību pamatformā $ax > b$, pēc tam to atrisina, kā norādīts iepriekš. (Ja pēc vienkāršošanas iegūst nevienādību, kas nav lineāra, jārīkojas, kā teikts tālākajos paragrāfos.)

1) $-(x-1{,}9) \geqslant 1{,}7 - 3(1-x)$.

$-x + 1{,}9 \geqslant 1{,}7 - 3 + 3x$;

$-x - 3x \geqslant -1{,}3 - 1{,}9$;

$-4x \geqslant -3{,}2$; $x \leqslant 0{,}8$.

Nevienādības atrisinājumu kopa ir skaitļu intervāls $(-\infty; 0{,}8]$.

2) $\frac{13x-1}{2} > 4x$.

$13x - 1 > 8x$; $13x - 8x > 1$; $5x > 1$; $x > 0{,}2$.

3) $\frac{3z+1}{4} - \frac{z-1}{6} \geqslant z$.

$9z + 3 - 2z + 2 \geqslant 12z$;

$7z - 12z \geqslant -3 - 2$; $-5z \geqslant -5$; $z \leqslant 1$.

4) $2x < ax + 6$.

$2x - ax < 6$; $x(2-a) < 6$.

Tālāk, dalot nevienādības abas puses ar izteiksmi $2 - a$, jāievēro, ka šīs izteiksmes zīme ir atkarīga no mainīgā a vērtības:

$2 - a > 0$, ja $a < 2$; $2 - a < 0$, ja $a > 2$; $2 - a = 0$, ja $a = 2$.

Tādējādi

$x < \frac{6}{2-a}$, ja $a < 2$;

$x > \frac{6}{2-a}$, ja $a > 2$;

x ir jebkurš skaitlis, ja $a = 2$.

Nevienādību atrisinājumu pareizību visu pilnībā pārbaudīt nav iespējams, jo atrisinājumu ir bezgala daudz. Dažkārt kļūdu var atklāt, ievietojot mainīgā vietā atbildē norādītā intervāla galapunktam atbilstošo skaitli un tam tuvu skaitli pa kreisi un pa labi no tā. Tā, piemēram, lai noskaidrotu, vai nevienādības $5 - \frac{x}{2} < \frac{x}{3}$ atrisinājums $(-\infty; 6)$ ir pareizi atrasts, var rīkoties šādi.

Ievietojot nevienādībā x vietā skaitli 6, dabū patiesu vienādību $5 - \frac{6}{2} = \frac{6}{3}$. No tā secinām, ka atrisinājuma intervālu galapunkts ir tiešām skaitlis 6.

Ievietojot $x = 5$, redzams, ka šis skaitlis neapmierina doto nevienādību, tātad nevienādības atrisinājums $(-\infty; 6)$ nav pareizs.

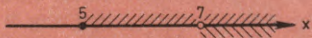
Izrādās, ka pareizā atrisinājumu kopa ir intervāls no 6 pa labi, proti, intervāls $(6; \infty)$.

LINEĀRU NEVIENĀDĪBU SISTĒMAS

Divas vai vairākas nevienādības, kurām jāatrod visi kopējie atrisinājumi, veido nevienādību sistēmu. Vispirms piemēros ilustrēsim četras raksturīgas pamatsistēmas ar divām nevienādībām.

1) $\begin{cases} x \geqslant 5 \\ x > 7. \end{cases}$

Abu nevienādību atrisinājumus uzskatāmi var attēlot uz koordinātu taisnes (60. zīm.).



60. zīm.

Kā redzams, kopējais atrisinājums ir $x > 7$, tātad tas ir sistēmas atrisinājums; to var pierakstīt arī tā: $(7; \infty)$.

2) $\begin{cases} x \leqslant 5 \\ x \leqslant 7. \end{cases}$


61. zīm.

Sistēmas atrisinājums ir $x \leqslant 5$ jeb $(-\infty;\ 5]$ (61. zīm.).

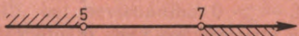
3) $\begin{cases} x > 5 \\ x \leqslant 7. \end{cases}$


62. zīm.

Sistēmas atrisinājums ir $5 < x \leqslant 7$ jeb $(5;\ 7]$ (62. zīm.).

4) $\begin{cases} x < 5 \\ x > 7. \end{cases}$

Nevienādībām nav kopējo atrisinājumu, tātad sistēmai nav atrisinājuma (63. zīm.).


63. zīm.

Lai atrisinātu sarežģītāku nevienādību sistēmu, vispirms atrod katras atsevišķās nevienādības atrisinājumus un no tiem izraksta visām nevienādībām kopējos atrisinājumus (kā iepriekšējos piemēros).

5) $\begin{cases} 7x + 3 \geqslant 5(x-4) + 1 \\ 43 - 3(7+x) < 4x + 1. \end{cases}$

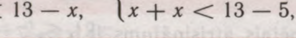
$\begin{cases} 7x + 3 \geqslant 5x - 20 + 1 \\ 43 - 21 - 3x < 4x + 1. \end{cases}$

$\begin{cases} 2x \geqslant -22 \\ -7x < -21, \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant -11 \\ x > 3. \end{cases}$

A t b i l d e: $x > 3$ jeb atrisinājumu kopa ir $(3;\ +\infty)$.

$2x - 4 < 8 + 8$ $\quad 2x - x < 8 + 4$ $\quad x < 12$

6) $\begin{cases} 3 - x \leqslant 1 \\ x + 5 < 13 - x, \end{cases}$ $\begin{cases} -x \leqslant 1 - 3 \\ x + x < 13 - 5, \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant 2 \\ x < 4. \end{cases}$


64. zīm.

Sistēmas visas trīs nevienādības apmierina skaitļi intervālā $[2; 4)$ jeb $2 \leqslant x < 4$ (64. zīm.).

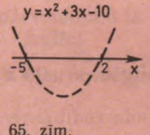
KVADRĀTNEVIENĀDĪBAS

Par kvadrātnevienādību sauc nevienādību $ax^2 + bx + c > 0$ $(a \neq 0)$, pie tam nevienādība var būt arī pretēja veida vai nestingra ar nevienādības zīmēm $\geqslant$ vai $\leqslant$.

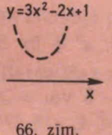
Kā redzams, atrisināt kvadrātnevienādību nozīmē noteikt kvadrātfunkcijas $y = ax^2 + bx + c$ zīmi, t. i., noteikt, ar kādām argumenta x vērtībām šī funkcija ir pozitīva vai negatīva. To praktiski viegli izdarīt, uzskicējot funkcijas grafiku pēc tā krustpunktiem ar x asi (sk. 11.2.). Ilustrēsim to dažos konkrētos piemēros.

1) $x^2 + 3x - 10 < 0$.

Funkcijas $y = x^2 + 3x - 10$ jeb vienādojuma $x^2 + 3x - 10 = 0$ saknes ir -5 un 2 (šoreiz tās uzminam pēc Vjeta teorēmas). Tā kā kvadrātlocekļa koeficients $1 > 0$, tad funkcijas grafiks ir parabola ar zariem uz augšu, tās skice parādīta 65. zīmējumā. No grafika redzams, ka nevienādības atrisinājums ir $-5 < x < 2$ jeb skaitļu intervāls $(-5; 2)$.



65. zīm.



66. zīm.

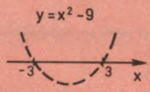
2) $x^2 + 3x - 10 \geqslant 0$.

Risinot līdzīgi kā iepriekš, no tā paša grafika redzams, ka nevienādības atrisinājums ir $x \leqslant -5$ vai $x \geqslant 2$ jeb skaitļu intervāli $(-\infty; -5]$ vai $[2; \infty)$.

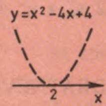
3) $-3x^2 + 2x - 1 < 0$.

Tā kā pierastāk ir atrast saknes kvadrātfunkcijai, kurā koeficients pie kvadrātlocekļa ir pozitīvs, aizstājam doto nevienādību ar ekvivalentu nevienādību $3x^2 - 2x + 1 > 0$. Funkcijai $y = 3x^2 - 2x + 1$ sakņu nav, jo $D = 1 - 1 \cdot 3 < 0$. Funkcijas grafika novietojums attiecībā pret x asi redzams 66. zīmējumā. Funkcija ir pozitīva, un nevienādība ir apmierināta ar jebkurām x vērtībām.

4) $-3x^2 + 2x - 1 > 0$.



67. zīm.



68. zīm.

Risinot līdzīgi kā iepriekšējo piemēru, redzams, ka nevienādībai atrisinājuma nav.

5) $9 - x^2 \geqslant 0$.

Doto nevienādību aizstājam ar ekvivalentu «pierastāku» nevienādību $x^2 - 9 \leqslant 0$. Funkcijas $y = x^2 - 9$ saknes ir -3 un $+3$, tās grafika skice redzama 67. zīmējumā.

Nevienādības atrisinājums ir $-3 \leqslant x \leqslant 3$ jeb $[-3; 3]$, jeb $|x| \leqslant 3$.

6) $x^2 - 9 > 0$.

Atbilde. $x < -3$ vai $x > 3$ jeb $|x| > 3$.

7) $x^2 < 16$.

Šo nevienādību var aizstāt ar ekvivalentu nevienādību $x^2 - 16 < 0$ un risināt pēc vispārīgā paņēmiena (kā 5. piemērā), taču arī galvā viegli aprēķināt, ka atbilde ir $-4 < x < +4$ jeb $|x| < 4$.

8) $-x^2 \leqslant 5x$.

$-x^2 - 5x \leqslant 0$; $x^2 + 5x \geqslant 0$.

Parabola, kuras zari vērsti uz augšu, krusto x asi punktos -5 un 0, tātad $x \leqslant -5$ vai $x \geqslant 0$.

9) $-x^2 + 4x < 4$.

Šī nevienādība ekvivalenta ar nevienādību $x^2 - 4x + 4 > 0$. Funkcijai $y = x^2 - 4x + 4$ ir tikai viena sakne $x = 2$; tās grafiks redzams 68. zīmējumā. Atrisinājums ir $x < 2$ vai $x > 2$.

REIZINĀJUMA UN DALĪJUMA ZĪMES NOTEIKŠANA

Kā zināms, divu skaitļu reizinājums vai dalījums ir pozitīvs tad un tikai tad, ja darbības abi locekļi ir vienādzīmju skaitļi, bet negatīvs, ja — dažādzīmju skaitļi. Šo apsvērumu var izmantot atbilstošu nevienādību atrisināšanā.

1. piemērs. $(x-4)(2x-7) > 0$.

Šo nevienādību var aizstāt ar divām sistēmām, kuru atrisinājumi (un tikai tie) ir dotās nevienādības atrisinājumi:

$$\begin{cases} x - 4 > 0 \\ 2x - 7 > 0 \end{cases} \text{vai} \quad \begin{cases} x - 4 < 0 \\ 2x - 7 < 0. \end{cases}$$

Atrisinot sistēmas, iegūstam

$$\begin{cases} x > 4 \\ x > 3{,}5 \end{cases} \text{ vai } \begin{cases} x < 4 \\ x < 3{,}5 \end{cases}$$

$$x > 4 \qquad\qquad x < 3{,}5.$$

Tātad dotās nevienādības atrisinājumi ir tādi skaitļi x, kuri apmierina nevienādības $x < 3{,}5$ vai $x > 4$ jeb skaitļi intervālā $(-\infty; 3{,}5)$ vai $(4; \infty)$.

2. piemērs. $\frac{2x-1}{x+3} < 0$.

Šo nevienādību var aizstāt ar divām sistēmām, kuru atrisinājumi (un tikai tie) ir arī dotās nevienādības atrisinājumi:

$$\begin{cases} 2x-1 > 0 \\ x < -3 \end{cases} \text{ vai } \begin{cases} 2x-1 < 0 \\ x+3 > 0 \end{cases}$$

Atrisinot sistēmas iegūstam

$$\begin{cases} x > 0{,}5 \\ x < -3 \end{cases} \text{ vai } \begin{cases} x < 0{,}5 \\ x > -3. \end{cases}$$

$$-3 < x < 0{,}5.$$

Sistēmai nav atrisinājuma.

Tātad dotās nevienādības atrisinājumi ir jebkuri skaitļi intervālā $(-3; 0{,}5)$.

3. piemērs. $\frac{x-1}{2x-5} \geqslant 2$.

Nevienādību pārveidojam tā, lai tās kreisajā pusē būtu dalījums, bet labajā pusē — nulle:

$$\frac{x-1}{2x-5} - 2 \geqslant 0; \quad \frac{x-1-2(2x-5)}{2x-5} \geqslant 0; \quad \frac{-3x+9}{2x-5} \geqslant 0.$$

Dalot pēdējās nevienādības abas puses ar -3, iegūstam nevienādību

$$\frac{x-3}{2x-5} \leqslant 0.$$

$$\begin{cases} x-3 \leqslant 0 \\ 2x-5 > 0 \end{cases} \text{ vai } \begin{cases} x-3 \geqslant 0 \\ 2x-5 < 0, \end{cases}$$

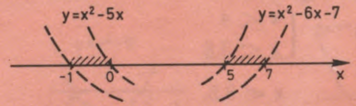
$$\begin{cases} x \leqslant 3 \\ x > 2{,}5 \end{cases} \text{ vai } \begin{cases} x \geqslant 3 \\ x < 2{,}5 \end{cases}$$

$2{,}5 < x \leqslant 3$ Nav atrisinājuma.

Atbilde: $2{,}5 < x \leqslant 3$.

4. piemērs. $-3(x+3{,}2)(x^2-3x+5) > 0$.

Ievērojam, ka kvadrāttrinomam x^2-3x+5 nav sakņu ($D = 3^2 - 4 \cdot 5 < 0$). Tā kā kvadrātlocekļa koeficients $1 > 0$, tad ar visām x vērtībām šis kvadrāttrinoms ir pozitīvs. Tāpēc nevienādības abas puses dalot ar šo trinomu un ar skaitli -3, iegūstam



69. zīm.

ekvivalentu nevienādību $x + 3{,}2 < 0$. Tās atrisinājums ir $x < -3{,}2$.

5. piemērs. $\frac{2x^2 - 11x - 7}{x^2 - 6x - 7} < 1$.

$$\frac{2x^2 - 11x - 7}{x^2 - 6x - 7} - 1 < 0; \quad \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 6x - 7} < 0.$$

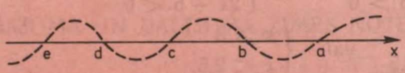
Atrodam funkciju $y = x^2 - 5x$ un $y = x^2 - 6x - 7$ saknes, uzskicējam aptuvenus funkciju grafikus (69. zīm.) un no tiem nolasām intervālus, kuros funkcijām ir atšķirīgas zīmes:

$-1 < x < 0$ vai $5 < x < 7$.

INTERVĀLU METODE

Aplūkosim funkciju (izteiksmi), kas ir pārveidojama (vai jau dota) tādā formā, kā, piemēram, $\frac{(x-a)(x-d)}{(x-b)(x-c)(x-e)}$. Pieņemsim, ka $a > b > c > d > e$ (70. zīm.). Skaidrs, ka ar $x > a$ katrs no reizinātājiem $(x-a)$, $(x-b)$ utt. ir pozitīvs un tāpēc arī funkcija ir pozitīva. Ja x samazinās un pāriet intervālā $b < x < a$, tad reizinātājs $x - a$ kļūt negatīvs un funkcija maina zīmi — kļūst negatīva. Ja x vēl samazinās un pāriet intervālā $c < x < b$, tad negatīvs kļūst arī reizinātājs $x - b$ un funkcija atkal maina zīmi — kļūst pozitīva utt.

Funkcijas zīmes maiņu uzskatāmi var attēlot ar t.s. «zīmju līkni» (70. zīm.): intervālos, kuros funkcija ir pozitīva, līkne zīmējama virs x ass, bet intervālos, kuros funkcija negatīva,— zem



70. zīm.

x ass. (Nebūtu labi teikt, ka zīmju līkne ir funkcijas aptuvens grafiks, jo dažos zīmju maiņas punktos, piemēram, punktā $x = b$, funkcija nemaz nav definēta.)

Piemēros parādīsim, kā minētos apsvērumus var izmantot nevienādību atrisināšanā ar t.s. intervālu metodi.

1. piemērs. $\dfrac{x(2x-3)}{(4-x)(3x+10)} \leqslant 0.$

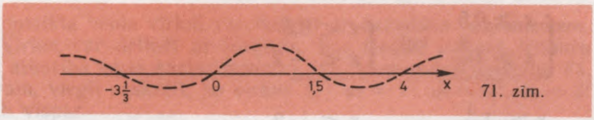
Pārveidojam visus binomus formā $(x-a)$:

$$\frac{x \cdot 2(x-1{,}5)}{-1 \cdot (x-4) \cdot 3(x+3\frac{1}{3})} \leqslant 0.$$

Dalot abas puses ar 2, reizinot ar -3 un mainot nevienādības veidu, iegūstam ekvivalentu nevienādību

$$\frac{x(x-1{,}5)}{(x-4)(x+3\frac{1}{3})} \geqslant 0.$$

Uz koordinātu taisnes atzīmējam binomu saknes 0; 1,5; 4; $-3\frac{1}{3}$ (71. zīm.) un, sākot no labās puses, novelkam «zīmju lokus» (ar



71. zīm.

x vērtībām, kas lielākas nekā lielākā sakne, vienādības kreisā puse vienmēr ir pozitīva).
No zīmējuma var nolasīt, ka nevienādības atrisinājumi ir visi tie x, kuriem

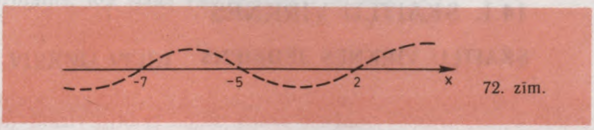
$$x < -3\frac{1}{3}; \quad 0 \leqslant x \leqslant 1{,}5 \text{ vai } x > 4\,.$$

2. piemērs. $\dfrac{(x-2)^2(x+5)(x+4)^2}{(x-1)^2(x+7)} \leqslant 0.$

Kā redzams, $x=1$ nav pieļaujuma vērtība (ar $x=1$ saucēja vērtība ir nulle) un $x=2$, $x=-4$ ir nestingrās nevienādības divi atrisinājumi. Bet ar $x \neq 1$, $x \neq 2$ un $x \neq -4$ izteiksmēm $(x-1)^2$, $(x-2)^2$ un $(x+4)^2$ ir pozitīvas vērtības, tāpēc nevienādības abas puses attiecīgi dalām un reizinām ar šīm izteiksmēm, iegūstot nevienādību, kas satur tikai binomu pirmās pakāpes:

$$\frac{(x-2)(x+5)}{x+7} \leqslant 0.$$

Atrisinām šo nevienādību un pievienojam vēl divus sākotnējās nevienādības atrisinājumus $x=2$ un $x=-4$ (72. zīm.).



72. zīm.

Atbilde: $x \leqslant -7$ vai $x=-4$, vai $-5 \leqslant x \leqslant 2$.

Šādu nevienādību atrisināšanas vispārīgais paņēmiens pamatojas uz atbrīvošanos no moduļiem, ievērojot skaitļa moduļa jēdzienu

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ ja } a \geqslant 0 \\ -a, \text{ ja } a < 0. \end{cases}$$

1. piemērs. $|2x-1|+x>3$.

Ja $2x-1 \geqslant 0$, tad $|2x-1| = 2x-1$ un dotā nevienādība ir uzrakstāma šādi: $(2x-1)+x>3$; ja turpretī $2x-1<0$, tad $|2x-1| = -(2x-1)$ un dotā nevienādība ir uzrakstāma šādi: $-(2x-1)+x>3$. Tādējādi doto nevienādību var aizstāt ar divām nevienādību sistēmām:

$$\begin{cases} 2x-1 \geqslant 0 \\ 2x-1+x>3 \end{cases} \text{vai} \quad \begin{cases} 2x-1<0 \\ -(2x-1)+x>3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant 0{,}5 \\ x > 1\frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{vai} \quad \begin{cases} x < 0{,}5 \\ x < -2 \end{cases}$$

$$x > 1\frac{1}{3} \qquad x < -2.$$

Atbilde: $x < -2$ vai $x > 1\frac{1}{3}$.

2. piemērs. $|5x+2| \leqslant 3$.

Šo nevienādību var risināt līdzīgi kā iepriekšējo piemēru, pārejot uz divām sistēmām. Taču var rīkoties arī citādi, proti, noskaidrot, kurā intervālā uz koordinātu taisnes atrodas skaitļi, kuru modulis mazāks vai vienāds ar 3:

$$-3 \leqslant 5x+2 \leqslant +3.$$

Šo divkāršo nevienādību risinām tāpat kā parasto nevienādību — no vidējās izteiksmes pārnesam skaitli pa kreisi un pa labi ar pretēju zīmi; tad dalām visas trīs izteiksmes ar skaitli 5:

$$-3-2 \leqslant 5x \leqslant +3-2; \quad -5 \leqslant 5x \leqslant 1;$$

$$-1 \leqslant x \leqslant 0{,}2.$$

14. PROGRESIJAS

14.1. SKAITĻU VIRKNES

SKAITĻU VIRKNES JĒDZIENS

Ja katram naturālam skaitlim $n = 1, 2, 3, \ldots$ piekārto kādu reālu skaitli $a_1, a_2, a_3, \ldots$, tad šie skaitļi veido skaitļu virkni (a_n):

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots .$$

Skaitli a_1 sauc par virknes pirmo locekli, a_2 — par virknes otro locekli utt. Vispār skaitli a_n sauc par virknes n-to locekli. Tā, piemēram, virknē (a_n)

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ \ldots \qquad (1)$$

$a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 9$ utt.

Virknē (c_n)

$$3,\ 7,\ 15,\ 31,\ 63,\ 127,\ \ldots \qquad (2)$$

pirmais loceklis $c_1 = 3$, otrais loceklis $c_2 = 7$ utt.

Virknē (a_n)

$$3;\ 3{,}1;\ 3{,}14;\ 3{,}141;\ 3{,}1415;\ 3{,}14159;\ \ldots \qquad (3)$$

$a_1 = 3$, $a_2 = 3{,}1$ utt.

VIRKNES DEFINĒŠANA

Kādu noteikta veida virkni var definēt ar dažādiem paņēmieniem.

1. Virkni var definēt ar formulu, kas izsaka virknes jebkuru locekli atkarībā no tā kārtas numura, t. i., kā numura funkciju. Tā, piemēram, viegli saskatīt, ka virknē (1) $a_1 = 1^2$, $a_2 = 2^2$, $a_3 = 3^2$ utt. jeb vispār

$$a_n = n^2.$$

Pēc šīs t. s. vispārīgā locekļa formulas uzreiz var atrast virknes jebkuru locekli, piemēram, $a_{13} = 13^2 = 169$, $a_{100} = 100^2 = 10\,000$ utt.

2. Virkni var definēt arī rekurenti, t. i., paskaidrojot, kā var noteikt šīs virknes jebkuru locekli, zinot tās iepriekšējos locekļus. Piemēram, virkni (2) var definēt tā: virknes pirmais loceklis $c_1 = 3$, bet katru nākamo locekli var dabūt no iepriekšējā, reizinot to ar 2 un reizinājumam pieskaitot 1, piemēram,

$$c_2 = 2 \cdot c_1 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7;$$
$$c_3 = 2 \cdot c_2 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15.$$

Vispār $c_{n+1} = 2 \cdot c_n + 1$.

P i e z ī m e. Šo pašu virkni var definēt arī ar formulu $c_n = 2^{n-1} - 1$.

3. Virkni var definēt arī ar vārdisku paskaidrojumu. Tā, piemēram, par virkni (3) var teikt, ka tajā ir uzrakstītas skaitļa π tuvinātas vērtības ar precizitāti līdz 1, līdz 0,1, līdz 0,01 utt.

4. Ja ir vajadzība zināt tikai virknes nedaudzus pirmos locekļus, tad, protams, tos visus var tieši dot (uzrakstīt).

VIRKŅU VEIDI

Ja virknes katrs loceklis ir lielāks nekā iepriekšējais, t. i., ja ar jebkuru n ir spēkā nevienādība $a_{n+1} > a_n$, tad virkni sauc par augošu virkni. Tādas ir virknes (1), (2) un (3).

Ja virknes katrs loceklis ir mazāks nekā iepriekšējais, t. i., ja $a_{n+1} < a_n$, tad virkni sauc par dilstošu. Tādas ir, piemēram, virknes

$$a_n = \frac{1}{2n} \text{ jeb } \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}, \ldots;$$

$$b_n = 4 - n \text{ jeb } 3, 2, 1, 0, -1, -2, \ldots .$$

Ir arī virknes, kas nav ne augošas, ne dilstošas, piemēram, $7, 7, 7, 7, 7, 7, \ldots;$

$$\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{7}, \ldots .$$

Ja virknes locekļu skaits ir ierobežots (ja tajā ir, piemēram, 73 locekļi), tad tādu virkni sauc par galīgu virkni. Pretējā gadījumā virkni sauc par bezgalīgu virkni.

14.2. ARITMĒTISKĀ PROGRESIJA

ARITMĒTISKĀS PROGRESIJAS JĒDZIENS

Par aritmētisko progresiju sauc skaitļu virkni, kurā katrs loceklis, sākot ar otro, ir vienāds ar iepriekšējo locekli, kuram pieskaitīts viens un tas pats skaitlis.

Tātad aritmētiskā progresija ir definēta rekurenti ar formulu

$$a_{n+1} = a_n + d,$$

pie tam konstanto skaitli d sauc par aritmētiskās progresijas diferenci. Tā, piemēram, aritmētiskajā progresijā

$4, 7, 10, 13, 16, 19, \ldots$

$a_1 = 4$, $d = 3$, bet progresijā

$2;\ 0{,}5;\ -1;\ -2{,}5;\ -4;\ -5{,}5;\ \ldots$

$a_1 = 2$, $d = -1{,}5$.

Ja $a_1 = 3$ un $d = -0{,}1$, tad aritmētiskā progresija ir

$3;\ 2{,}9;\ 2{,}8;\ 2{,}7;\ 2{,}6;\ \ldots .$

ARITMĒTISKĀS PROGRESIJAS VISPĀRĪGAIS LOCEKLIS

No aritmētiskās progresijas definīcijas izriet, ka

$$a_2 = a_1 + d,$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$

jeb vispār

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Pēc šīs t. s. aritmētiskās progresijas vispārīgā locekļa formulas var aprēķināt progresijas jebkuru locekli, ja ir zināms progresijas pirmais loceklis, diference un locekļa kārtas numurs.

1) Aprēķināt a_8, ja $a_1 = -5$ un $d = 1{,}4$.

$a_8 = -5 + (8-1)\cdot 1{,}4 = -5 + 9{,}8 = 4{,}8.$

Vispārīgā locekļa formula dod iespēju atrisināt arī apvērstus uzdevumus: ja ir zināms a_n un vēl divi no mainīgajiem a_1, n vai d, var aprēķināt ceturto mainīgo.

2) Kurš loceklis pēc kārtas aritmētiskajā progresijā

$4\frac{1}{3}, 3\frac{2}{3}, 3, 2\frac{1}{3}, \ldots$

ir skaitlis $-8\frac{1}{3}$?

Progresijas diference $d = 3\frac{2}{3} - 4\frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$. No vispārīgā locekļa formulas izriet, ka

$$(n-1)d = a_n - a_1; \quad n - 1 = \frac{a_n - a_1}{d};$$

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1;$$

$$n = \frac{-8\frac{1}{3} - 4\frac{1}{3}}{-\frac{2}{3}} + 1 = \frac{-12\frac{2}{3}}{-\frac{2}{3}} + 1 = \frac{38\cdot 3}{3\cdot 2} + 1 =$$

$$= 19 + 1 = 20;$$

$$a_{20} = -8\frac{1}{3}.$$

3) Aprēķināt aritmētiskās progresijas trešo locekli a_3, ja $a_5 + a_{11} = -0{,}2$, bet $a_4 + a_{10} = 2{,}6$.

Izsakot mainīgos a_5, a_{11}, a_4 un a_{10} ar mainīgajiem a_1 un d, dabūjam vienādojumu sistēmu ar diviem nezināmajiem a_1 un d:

$$\begin{cases} (a_1 + 4d) + (a_1 + 10d) = -0{,}2 \\ (a_1 + 3d) + (a_1 + 9d) = 2{,}6, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 14d = -0{,}2 \\ 2a_1 + 12d = 2{,}6. \end{cases}$$

Atrisinot sistēmu (te izdevīgi no pirmā vienādojuma atņemt otro), atrodam, ka $d = -1{,}4$; $a_1 = 9{,}7$. Tādējādi

$$a_3 = a_1 + 2d = 9{,}7 + 2\cdot(-1{,}4) = 6{,}9.$$

ARITMĒTISKĀS PROGRESIJAS LOCEKĻU SUMMA

Runājot par aritmētiskās progresijas locekļu summu, domāsim noteikta skaita tās pirmos locekļus.

Aritmētiskās progresijas n locekļu summa

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \qquad (1)$$

jeb

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n. \qquad (2)$$

1) Aprēķināt summu

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100.$$

Šīs summas saskaitāmie acīmredzot ir tādas aritmētiskās progresijas locekļi, kurā $a_1 = 1$, $d = 1$, $a_{100} = 100$. Summu aprēķinām pēc formulas (1):

$$S_{100} = \frac{1 + 100}{2} \cdot 100 = \frac{101 \cdot 100}{2} = 5050.$$

2) Aprēķināt S_{52}, ja $a_1 = 75$, $d = -3$.

Risinot pēc formulas (2), atrodam, ka

$$S_{52} = \frac{2 \cdot 75 + (52 - 1) \cdot (-3)}{2} \cdot 52 = \frac{150 - 153}{2} \cdot 52 = -78.$$

3) Cik pirmo locekļu jāņem aritmētiskajā progresijā

$17;\ 15;\ 13;\ 11;\ \ldots,$

lai to summa būtu vienāda ar nulli?

Te $a_1 = 17$, $d = 15 - 17 = -2$, $S_n = 0$. Ievietojot šīs vērtības formulā (2), dabūjam vienādojumu, kurā nezināmais n ir meklējamais locekļu skaits:

$$0 = \frac{2 \cdot 17 + (n-1) \cdot (-2)}{2} \cdot n; \quad 0 = \frac{2(17 - n + 1)}{2} \cdot n;$$

$$n^2 - 18n = 0; \quad n(n - 18) = 0;$$

$$n_1 = 0; \quad n_2 = 18.$$

Atrisinājumam $n_1 = 0$ nevar piešķirt reālu jēgu: nevar runāt par progresiju, kurā nav neviena locekļa. Uzdevumam ir viens vienīgs atrisinājums: progresijas pirmo 18 locekļu summa $S_{18} = 0$.

14.3. ĢEOMETRISKĀ PROGRESIJA

ĢEOMETRISKĀS PROGRESIJAS JĒDZIENS

Par ģeometrisko progresiju sauc skaitļu virkni, kurā katrs nākamais loceklis, sākot ar otro, ir vienāds ar iepriekšējā locekļa reizinājumu ar vienu un to pašu skaitli.

Tātad ģeometriskā progresija ir definēta rekurenti ar formulu $b_{n+1} = b_n \cdot q$;

skaitli q sauc par ģeometriskās progresijas kvocientu, pie tam ģeometriskajā progresijā visi locekļi un arī kvocients ir atšķirīgi no nulles.

Piemēram, ģeometriskajā progresijā

3, 6, 12, 24, 48, 96, ...

pirmais loceklis $b_1 = 3$, kvocients $q = 2$.

Ģeometriskajā progresijā

$81, 27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$

$b_1 = 81, \quad q = \frac{1}{3}$.

Ja $b_1 = 16$ un $q = -0{,}5$, tad ģeometriskā progresija ir

16; -8; 4; -2; 1; $-0{,}5$; 0,25; ... .

ĢEOMETRISKĀS PROGRESIJAS VISPĀRĪGAIS LOCEKLIS

No ģeometriskās progresijas definīcijas izriet, ka

$b_2 = b_1 \cdot q$,

$b_3 = b_2 \cdot q = b_1 \cdot q^2$,

$b_4 = b_3 \cdot q = b_1 \cdot q^3$

jeb vispār

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Aprēķināt 13. locekli ģeometriskajā progresijā 1024, 512, 256, ...

Šīs progresijas kvocients $q = 512 : 1024 = \frac{1}{2}$ un

$$b_{13} = 1024 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{13-1} = 1024 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12} = \frac{1}{4}.$$

ĢEOMETRISKĀS PROGRESIJAS LOCEKĻU SUMMA

Pirmo n locekļu summa ir aprēķināma pēc vienas no formulām

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}, \qquad (1)$$

$$S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1}. \qquad (2)$$

1) Aprēķināt summu

$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512.$

Šīs summas saskaitāmie acīmredzot ir tādas ģeometriskās progresijas locekļi, kurā $b_1 = 1$, $q = 2$, $b_{10} = 512$. Tāpēc pēc formulas (1)

$$S_{10} = \frac{512 \cdot 2 - 1}{2 - 1} = \frac{1024 - 1}{1} = 1023.$$

2) Aprēķināt sešu pirmo locekļu summu ģeometriskā progresijā, kurā $b_1 = 27$ un $q = -\frac{1}{3}$.

Pēc formulas (2)

$$S_6 = \frac{27\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^6 - 1\right)}{-\frac{1}{3} - 1} = \frac{27\left(\frac{1}{729} - 1\right)}{-\frac{4}{3}} = \frac{\frac{1}{27} - 27}{-\frac{4}{3}} =$$

$$= \frac{\frac{1 - 729}{27}}{-\frac{4}{3}} = \frac{728 \cdot 3}{27 \cdot 4} = 20\frac{2}{9}.$$

P i e z ī m e. Ja ģeometriskās progresijas kvocients $q = 1$, tad summas formulas (1) un (2) nav lietojamas (saucējs $q - 1 = 0$). Tā kā progresijā ar $q = 1$ visi locekļi ir vienādi, tad to summa $S_n = b_1 \cdot n$.

DALĪJUMS $(x^n - 1) : (x - 1)$

Summu

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^{n-2} + x^{n-1}$$

var aprēķināt kā locekļu summu ģeometriskajā progresijā, kurā $b_1 = 1$, $q = x$ (kur $x \neq 1$) un locekļu skaits ir n:

$$S_n = \frac{x^{n-1} \cdot x - 1}{x - 1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}.$$

Tātad

$$(x^n - 1) : (x - 1) = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x^2 + x + 1.$$

1) $(x^5 - 1) : (x - 1) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$;

2) $(a^3 - 1) : (a - 1) = a^2 + a + 1$;

3) $(n^3 + n^2 + n + 1) \cdot (n - 1) = n^4 - 1$.

BEZGALĪGI DILSTOŠA ĢEOMETRISKĀ PROGRESIJA

Bezgalīgu ģeometrisko progresiju, kuras kvocienta modulis ir mazāks nekā 1, t. i., $|q| < 1$, sauc par bezgalīgu dilstošu ģeometrisku progresiju. Tāda ir, piemēram, progresija ar $q = \frac{1}{2}$:

$$8,\ 4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\dots$$

vai progresija ar $q = -\frac{1}{3}$:

$$+9,\ -3,\ +1,\ -\frac{1}{3},\ +\frac{1}{9},\ -\frac{1}{27},\ \dots\ .$$

Bezgalīgi dilstošās ģeometriskās progresijas locekļi, augot to numuriem, arvien mazāk un mazāk atšķiras no nulles. Citādi sakot, ja progresijas locekļu numurs n bezgalīgi palielinās, tad progresijas loceklis b_n tuvojas nullei jeb $b_n \approx 0$ ar pēc patikas lielu precizitāti. Tāpēc ģeometriskas progresijas locekļu summas formulas

$$S_n = \frac{b_nq - b_1}{q-1}$$

skaitītājā arī $b_nq \approx 0$ ar pēc patikas lielu precizitāti. Tādējādi bezgalīgi dilstošas ģeometriskas progresijas locekļu summa

$S = \frac{-b_1}{q-1}$ jeb, mainot zīmes daļas locekļiem,

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

Piemēram, summa

$$8+4+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots = \frac{8}{1-\frac{1}{2}} = 16.$$

Līdzīgi summa

$$9-3+1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\dots = \frac{9}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = 6\frac{3}{4}.$$

P i e m ē r s. Izteikt parastajā daļā periodisko decimāldaļu $0,(21) = 0,212121\dots$.

$$0,(21) = 0,21 + 0,0021 + 0,000021 + \dots$$

Kā redzams, jāaprēķina locekļu summa bezgalīgi dilstošā ģeometriskā progresijā, kurā $b_1 = 0,21$ un $q = 0,01$:

$$S = \frac{0,21}{1-0,01} = \frac{0,21}{0,99} = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}.$$

Tātad $0,(21) = \frac{7}{33}$.

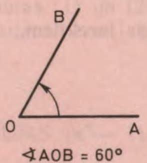
15. TRIGONOMETRIJAS ELEMENTI

15.1. TRIGONOMETRISKO FUNKCIJU JĒDZIENS

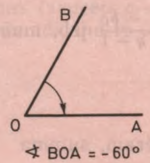
LEŅĶA JĒDZIENA PAPLAŠINĀJUMS

Ģeometrijā par leņķi pieņem plaknes daļu starp diviem stariem, kuriem ir kopējs sākumpunkts (sk. 17.2.). Līdz ar to leņķa atpletums jeb grādumērs var mainīties robežās tikai no 0° līdz 360°.

Turpretim citās matemātikas nozarēs leņķa jēdzienu saprot plašāk, runājot par t. s. pagrieziena jeb rotācijas leņķi. Tad leņķa vienu malu pieņem par nekustīgo sākuma malu, bet otru — par kustīgo beigu malu, kas var rotēt ap leņķa virsotni vienā vai otrā virzienā. Leņķi apzīmējot ar burtiem, parasti kā pirmo raksta sākuma malu (73., 74. zīm.).



73. zīm.

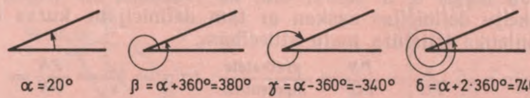


74. zīm.

Ja leņķa beigu mala ir rotējusi pulksteņa rādītāju kustības virzienā, tad leņķi pieņem par negatīvu, ja pretējā virzienā,— par pozitīvu. Turklāt leņķa beigu mala var rotēt ap virsotni vienā vai otrā virzienā ne tikai par 80°, 200° utt. līdz pilnam apgriezienam jeb līdz 360°, bet var turpināt rotāciju arī vēl otrā, trešajā utt. apgriezienā. Tā, piemēram, tehnikā saka, ka ritenis rotē ar ātrumu 900° sekundē u. tml.

Tādējādi tikai pēc leņķa malu stāvokļa, nezinot, kura ir leņķa sākuma mala un nezinot rotācijas lielumu un virzienu, nevar noteikt leņķa grādumēru. Tāpēc zīmējumos leņķa beigu malu un tās rotācijas lielumu un virzienu mēdz norādīt ar loku un bultiņu tā galā. 75. zīmējumā redzams, kā ar vienu un to pašu sākuma malu un beigu malu leņķiem α, β, γ un δ var būt dažādi grādumēri, kas atšķiras par vienu vai vairākiem pilniem apgriezieniem pozitīvā vai negatīvā virzienā:

$$\alpha = 20°;\ \beta = \alpha + 360° = 380°;\ \gamma = \alpha - 360° = -340°;$$
$$\delta = \alpha + 2 \cdot 360° = 740°.$$



75. zīm.

Vispār, ja ar vienu un to pašu sākuma malas un beigu malas stāvokli viens no leņķiem ir vienāds ar α, tad pārējo leņķu lielumi ir $\alpha + k \cdot 360°$, kur k ir jebkurš vesels skaitlis.

LEŅĶA TRIGONOMETRISKĀS FUNKCIJAS

Ja leņķis ir šaurs, tad, iesaistot šo leņķi taisnleņķa trijstūrī, leņķa sinusu, kosinusu, tangensu un kotangensu var definēt kā šī trijstūra attiecīgo malu garumu attiecības.

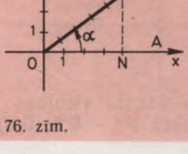
Lai varētu noteikt ne tikai šaura, bet jebkura leņķa sinusu, kosinusu, tangensu un kotangensu, tiek ieviestas plašākas šo jēdzienu definīcijas (pie tam tā, lai tās tomēr nebūtu pretrunā ar iepriekš minētajām definīcijām).

Saistīsim doto leņķi $AOB = \alpha$ ar koordinātu plakni tā, lai šī leņķa virsotne atrastos koordinātu sākumpunktā un leņķa sākuma mala OA sakristu ar abscisu ass pozitīvo virzienu. Ja $P(x; y)$ ir kāds brīvi izraudzīts punkts uz leņķa beigu malas OB (76., 77. zīm.), tad

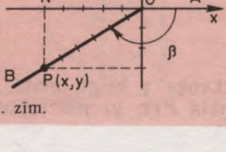
$$\sin\alpha = \frac{y}{PO}; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x};$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{PO}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}.$$

Šo attiecību skaitliskās vērtības nav atkarīgas no punkta P vietas uz leņķa beigu malas, bet ir atkarīgas tikai no leņķa lieluma, tāpēc leņķa sinuss, kosinuss, tangenss un kotangenss ir leņķa funkcijas. Te katrai leņķa α (argumenta) vērtībai atbilst viena noteikta $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ vai $\operatorname{ctg}\alpha$ (funkcijas) vērtība. Lai akcentētu, ka šo funkciju arguments ir leņķis, tās sauc par trigonometriskām funkcijām (trigonometrija — leņķu un trijstūru mērīšana).



76. zīm.



77. zīm.

Ja leņķis α ir šaurs, tad, kā redzams, šīs trigonometrisko funkciju definīcijas saskan ar tām definīcijām, kuras izsaka ar taisnleņķa trijstūra malu attiecībām:

$$\sin\alpha = \frac{y}{PO} = \frac{PN}{PO} = \frac{\text{pretkatete}}{\text{hipotenūza}};\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{PN}{ON} = $$
$$= \frac{\text{pretkatete}}{\text{piekatete}} \text{ utt.}$$

Taču tikko ieviestās trigonometrisko funkciju definīcijas ir attiecināmas ne tikai uz šauru, bet uz jebkuru leņķi, piemēram, uz platu negatīvu leņķi $AOB = \beta$ 77. zīmējumā.

Ievērojot punkta $P(x;\ y)$ koordinātu un attāluma OP skaitliskās vērtības, var izrēķināt leņķu α un β trigonometrisko funkciju vērtības (76. zīmējumā aptuveni $P(4;\ 3)$, $OP = 5$; 77. zīmējumā aptuveni $P(-5;\ -3)$, $OP = 6$):

$$\sin\alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6; \qquad \sin\beta = \frac{-3}{6} = -0{,}5;$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8; \qquad \cos\beta = \frac{-5}{6} = -0{,}83;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4} = 0{,}75; \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{-3}{-5} = 0{,}6;$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3} = 1{,}3; \qquad \operatorname{ctg}\beta = \frac{-5}{-3} = 1{,}7.$$

LEŅĶA TRIGONOMETRISKO FUNKCIJU VIENKĀRŠOTA DEFINĪCIJA

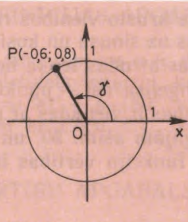
Iepriekšējā punktā ieviestās trigonometrisko funkciju definīcijas var vienkāršot, ja punktu P uz leņķa beigu malas izvēlas attālumā $OP = 1$ (tad sinusa un kosinusa definīcijās «atkrīt» saucējs). Šajā nolūkā ap koordinātu sākumpunktu kā ap centru velk t. s. vienības riņķa līniju ar rādiusu $R = 1$. Tad leņķa trigonometriskās funkcijas var definēt šādi:

ja leņķa α virsotne atrodas koordinātu plaknes sākumpunktā, pie tam leņķa sākuma mala sakrīt ar abscisu ass pozitīvo pusasi, un leņķa kustīgā mala krusto vienības riņķa līniju punktā $P(x;\ y)$, tad par leņķa sinusu sauc šī punkta ordinātu, par kosinusu — šī punkta abscisu, par tangensu — ordinātas un abscisas attiecību, par kotangensu — abscisas un ordinātas attiecību:

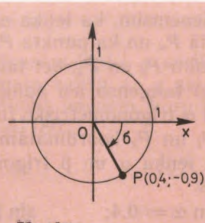
$$\sin\alpha = y; \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x};$$

$$\cos\alpha = x; \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}.$$

Leņķa γ beigu mala (78. zīm.) krusto vienības riņķa līniju punktā $P(x;\ y)$ jeb (aptuveni) punktā $P(-0{,}6;\ 0{,}8)$, bet leņķa



78. zīm.



79. zīm.

δ beigu mala (79. zīm.) — punktā $P(x, y)$ jeb (aptuveni) punktā $P(0{,}4;\ -0{,}9)$. Tātad:

$$\sin\gamma = 0{,}8; \qquad \sin\delta = -0{,}9;$$
$$\cos\gamma = -0{,}6; \qquad \cos\delta = 0{,}4;$$
$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{0{,}8}{-0{,}6} \approx -1{,}3; \qquad \operatorname{tg}\delta = \frac{-0{,}9}{0{,}4} \approx -2{,}3;$$
$$\operatorname{ctg}\gamma = \frac{-0{,}6}{0{,}8} = -0{,}75; \qquad \operatorname{ctg}\delta = \frac{0{,}4}{-0{,}9} \approx -0{,}44.$$

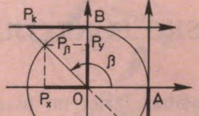
TRIGONOMETRISKO FUNKCIJU UZSKATĀMS MODELIS

Pamatojoties uz trigonometrisko funkciju definīcijām, var izveidot uzskatāmu šo funkciju modeli.

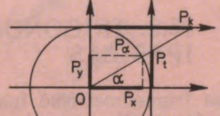
Koordinātu plaknes ordinātu asi nosacīti sauksim par sinusa asi, bet abscisu asi — par kosinusu asi.

Koordinātu plaknē novelkam riņķa līnijai tās labajā pusē caur punktu A vertikālu pieskari, piešķiram tai vērsumu kā redzams 80. zīmējumā un nosaucam šo līniju par tangensu asi; par tās sākumpunktu pieņemam pieskaršanās punktu, bet vienības nogriezni paturam tikpat garu kā uz koordinātu asīm.

Analogi caur punktu B konstruējam horizontālu kotangensa asi. (Der ievērot, ka punktam A uz kosinusa ass atbilst skaitlis 1, bet uz tangensa ass — skaitlis 0. Līdzīgi punktam B uz sinusa ass atbilst skaitlis 1, bet uz kotangensa ass — skaitlis 0.)



80. zīm.



81. zīm.

Pieņemsim, ka leņķa α beigu mala krusto vienības riņķa līniju punktā P_α un ka punkta P_α projekcijas uz sinusa un kosinusa asīm ir punkti P_y un P_x, bet taisne, uz kuras atrodas leņķa beigu mala, krusto tangensa asi punktā P_t, kotangensa asi — punktā P_k. Tad leņķa α trigonometrisko funkciju vērtības ir vienādas ar punktu P_y, P_x, P_t un P_k koordinātām uz attiecīgajām asīm. 80. un 81. zīmējumā leņķu α un β trigonometrisko funkciju vērtības ir aptuveni šādas:

$\sin\alpha = 0{,}4$; $\sin\beta = 0{,}7$;
$\cos\alpha = 0{,}9$; $\cos\beta = -0{,}8$;
$\operatorname{tg}\alpha = 0{,}5$; $\operatorname{tg}\beta = -0{,}8$;
$\operatorname{ctg}\alpha = 2$; $\operatorname{ctg}\beta = -1{,}2$.

TRIGONOMETRISKO FUNKCIJU VĒRTĪBU NOTEIKŠANA

Dotā leņķa α trigonometriskās funkcijas samērā precīzi var noteikt, ja leņķi konstruē trigonometriskajā vienības riņķī uz rūtiņu (milimetru) papīra, pie tam par vienības nogriezni izvēloties kādu lielāku mērvienību, piemēram, 1 dm. Ja tad, piemēram, punkta P_x koordināta ir vienāda ar $-0{,}7$, tad $\cos\alpha = -0{,}7$; ja punkta P_t koordināta ir 1,5, tad $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}5$ u. tml.

Leņķu trigonometrisko funkciju vērtības ir atrodamas arī īpašās tabulās. Dažu leņķu trigonometrisko funkciju vērtības dotas arī tālāk (sk. 351. un 396. lpp.).

LEŅĶA KONSTRUĒŠANA, JA DOTA TĀ KĀDA TRIGONOMETRISKĀ FUNKCIJA

Lai, piemēram, konstruētu leņķi α, ja $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}9$, trigonometriskajā vienības riņķī uz tangensa ass vispirms jāatzīmē punkts P_t ar koordinātu $-0{,}9$. Līdz ar to ir noteikta arī taisne, uz kuras atrodas leņķa beigu mala. (Gan jāievēro, ka uzdevuma nosacījumu apmierina ne tikai viens, bet visi leņķi, kas izsakāmi formā $\alpha + k \cdot 180°$.)

15.2. TRIGONOMETRISKO FUNKCIJU ĪPAŠĪBAS

Leņķa trigonometrisko funkciju īpašības izriet no to definīcijām. Taču šīs īpašības viegli noskaidrojamas arī šo funkciju uzskatāmajā modelī (sk. 15.1.), vērojot, kā, leņķa beigu malai rotējot ap virsotni O, pa attiecīgajām asīm pārvietojas punkti P_y, P_x, P_t un P_k.

DEFINĪCIJAS APGABALS

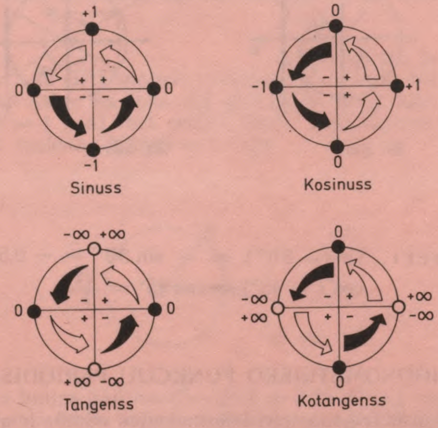
Funkcijas $\sin\alpha$ un $\cos\alpha$ ir definētas jebkurām leņķa α vērtībām; $\mathrm{tg}\,\alpha$ nav definēts leņķiem, kuru beigu mala sakrīt ar y asi, t. i., leņķiem $\alpha = 90° + n \cdot 180°$; $\mathrm{ctg}\,\alpha$ nav definēts leņķiem, kuru beigu mala sakrīt ar x asi, t. i., leņķiem $\alpha = n \cdot 180°$.

VĒRTĪBU APGABALS

Funkciju $\sin\alpha$ un $\cos\alpha$ vērtības var būt jebkurš skaitlis no -1 līdz $+1$ (ieskaitot), bet $\mathrm{tg}\,\alpha$ un $\mathrm{ctg}\,\alpha$ vērtības — jebkurš skaitlis no $-\infty$ līdz $+\infty$.

AUGŠANA UN DILŠANA

Kā leņķa funkcijas vērtība palielinās vai pamazinās, ja leņķis mainās no 0° līdz 360°, shematiski parādīts 82. zīmējumā. Te trigonometriskajā riņķī ar bultiņām, kuras sašaurinās, apzīmēta funkcijas dilšana, ar bultiņām, kuras paplašinās — augšana attiecīgajā kvadrantā. Skaitļi riņķu ārpusē izsaka funkcijas vērtības leņķiem, kas vienādi ar 0° (360°), 90°, 180°, 270°; tukšais riņķītis norāda, ka šiem leņķiem attiecīgā funkcija nav definēta, bet funkcijas vērtība to tuvumā tiecas uz $+\infty$ vai $-\infty$.



82. zīm.

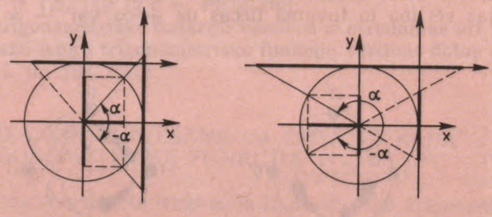
FUNKCIJU ZĪMES

Leņķa trigonometrisko funkciju zīmes ir atkarīgas no kvadranta, kurā atrodas leņķa beigumala. Tā, piemēram, $\sin\alpha > 0$, ja leņķis α beidzas I vai II kvadrantā, bet $\sin\alpha < 0$, ja leņķis α beidzas III vai IV kvadrantā. Shematiskajā 82. zīmējumā ar gaišajām bultiņām apzīmētas funkciju pozitīvās, ar tumšajām — negatīvās vērtības attiecīgajos kvadrantos.

PĀRA UN NEPĀRA TRIGONOMETRISKĀS FUNKCIJAS

Aizstājot leņķi ar pretēju leņķi (t. i., tādu leņķi, kura malu atpletums ir vienāds ar dotā leņķa malu atpletumu, bet rotācijas virziens ir pretējs), tā kosinusa vērtība nemainās, bet sinusa, tangensa un kotangensa vērtības mainās uz pretējām (83., 84. zīm.):

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha;$
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha;$
$\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha;$
$\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha.$



83. zīm. 84. zīm.

Tātad kosinuss ir pāra funkcija, bet sinuss, tangenss un kotangenss — nepāra funkcijas.

Piemēri. $\sin(-30°) = -\sin 30° = -0{,}5;$

$\cos(-45°) = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

TRIGONOMETRISKO FUNKCIJU PERIODISKUMS

Tā kā jebkuras trigonometriskās funkcijas vērtība ir atkarīga tikai no leņķa beigu malas stāvokļa trigonometriskajā vienības riņķī, tad, palielinot vai pamazinot leņķi par vienu vai vairākiem pilniem apgriezieniem, tā trigonometrisko funkciju vērtības nemainās. Piemēram, $\cos 200° = \cos(200° + 2 \cdot 360°) = \cos 920°$; $\sin 100° = \sin(100° - 360°) = \sin(-260°)$.

Tangensa un kotangensa vērtības nemainās arī jau tad, ja leņķi palielina vai pamazina par vienu vai vairākiem pusapgriezieniem. Piemēram, $\operatorname{tg} 50° = \operatorname{tg}(50° + 3 \cdot 180°) = \operatorname{tg} 590°$.

Vispār, ja k ir vesels skaitlis, tad

$$\sin \alpha = \sin(\alpha + k \cdot 360°);$$
$$\cos \alpha = \cos(\alpha + k \cdot 360°);$$
$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha + k \cdot 180°);$$
$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + k \cdot 180°).$$

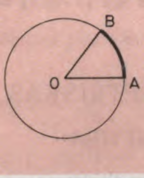
Saskaņā ar šo īpašību jebkura leņķa trigonometrisko funkciju var aizstāt ar tāda leņķa trigonometrisko funkciju, kas ir intervālā no 0° līdz 180°. Piemēram, $\operatorname{tg} 660° = \operatorname{tg}(120° + 3 \cdot 180°) = \operatorname{tg} 120°$, $\sin 980° = \sin(-100° + 3 \cdot 360°) = \sin(-100°) = -\sin 100°$.

Ja funkcijai piemīt īpašība, ka ar jebkuru argumenta x vērtību $f(x + T) = f(x)$, tad funkciju sauc par periodisku funkciju ar periodu T. No visām T vērtībām par periodu parasti sauc mazāko pozitīvo T vērtību. Tātad sinusa un kosinusa funkcijas ir periodiskas funkcijas ar periodu 360°, bet tangensa un kotangensa funkcijas — ar periodu 180°.

LOKA UN LEŅĶA MĒRĪŠANA RADIĀNOS

Riņķa līnijas lokus un leņķus mēra ne tikai grādos, bet arī radiānos.

Riņķa līnijas tādu loku, kura garums vienāds ar rādiusu, pieņem par loka radiānu, bet centra leņķi, kas balstās uz vienu radiānu lielu loku, pieņem par leņķa radiānu. Piemēram, ja loka AB garums (ja šo loku «iztaisnotu») ir vienāds ar rādiusa OA garumu (85. zīm.), tad saka, ka loka AB lielums ir viens loka radiāns (raksta $\smile AB = 1$ rad), bet centra leņķa AOB lielums ir viens leņķa radiāns (raksta $\sphericalangle AOB = 1$ rad).



85 zīm.

Tā kā riņķa līnijas garums $C = 2\pi R \approx 6{,}28\ R$, tad visas riņķa līnijas un arī pilna leņķa lielums radiānos ir aptuveni 6,28 rad jeb precīzi 2π rad. Tātad $1 \text{ rad} = \frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi} \approx \frac{180°}{3{,}14} \approx 57°$.

Lai izteiktu radiānus grādos vai otrādi, pietiek izmantot sakarības

$1 \text{ rad} = \frac{180°}{\pi}; \quad 1° = \frac{\pi}{180} \text{ rad}.$

1) Izteikt grādos leņķi $\alpha = 2{,}5$ rad.

$\alpha = 2{,}5 \text{ rad} = \frac{180°}{\pi} \cdot 2{,}5 \approx \frac{450°}{3{,}14} \approx 143°.$

2) Izteikt radiānos leņķi $\beta = 78°$.

$\beta = \frac{\pi}{180} \cdot 78 \text{ rad} \approx 1{,}36 \text{ rad}.$

Parasti pie leņķa mērskaitļa radiānos nosaukumu rad nemaz neraksta. Tā, piemēram, pieraksts $\alpha = 2{,}5$ jāsaprot, ka leņķa lielums ir 2,5 rad; tāpēc arī raksta $57° \approx 1$; $2{,}5 \approx 143°$; $2\pi = 360°$, $\pi = 180°$ u. tml.

Der iegaumēt biežāk sastopamās sakarības starp grādiem un radiāniem:

$$360° = 2\pi; \qquad 60° = \frac{\pi}{3};$$

$$180° = \pi; \qquad 45° = \frac{\pi}{4};$$

$$90° = \frac{\pi}{2}; \qquad 30° = \frac{\pi}{6}.$$

SKAITĻA TRIGONOMETRISKĀS FUNKCIJAS

Matemātikā runā ne tikai par leņķa (kā ģeometriskas figūras vai kā rotācijas mēra) trigonometriskajām funkcijām, bet arī par skaitļa trigonometriskajām funkcijām.

Par skaitļa x trigonometrisko funkciju pieņem tāda leņķa trigonometrisko funkciju, kura lielums ir x radiānu. Tātad, piemēram, ar pierakstu $\sin x$ saprot $\sin (x \text{ rad})$.

1) $\sin 1 = \sin (1 \text{ rad}) \approx \sin 57° = 0{,}84$;

2) $\cos 3{,}14 \approx \cos \pi = \cos (\pi \text{ rad}) = -1$;

3) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$;

4) $\sin 7 = \sin (7 \text{ rad}) \approx \sin (7 \cdot 57°) = \sin 399° =$
$= \sin 39° = 0{,}62$.

15.3. TRIGONOMETRISKĀS IDENTITĀTES

IDENTITĀŠU DEFINĒTĪBA

Visās tālāk aplūkotajās identitātēs (formulās) trigonometrisko funkciju arguments var būt gan leņķis (kas izteikts grādos vai radiānos), gan arī skaitlis. Identitātes ir patiesas visām tām argumenta vērtībām, ar kurām funkcija un attiecīgās izteiksmes ir definētas. Piemēram, izteiksme $2 + \operatorname{tg} \alpha$ ir definēta visām leņķa α vērtībām, kur $\alpha \neq 90° + n \cdot 180°$. Turpretim izteiksme $\frac{2}{\operatorname{tg} \alpha}$ ir definēta ar visām α vērtībām, ar kurām definēts $\operatorname{tg} \alpha$ ($\alpha \neq 90° + n \cdot 180°$) un definēts dalījums ($\operatorname{tg} \alpha \neq 0$ jeb $\alpha \neq n \cdot 180°$); tātad dotā izteiksme definēta ar visām α vērtībām, kur $\alpha \neq n \cdot 90°$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

SAKARĪBU FORMULAS

Trigonometriskās funkcijas savā starpā saista t. s. sakarību formulas, pēc kurām, zinot vienas funkcijas vērtību, var noteikt pārējo funkciju vērtības:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \quad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}; \quad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

1. piemērs. Zināms, ka $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$ un $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Aprēķināt $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$; $\sin\alpha = -\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$;

$$\sin\alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = -\frac{12}{13}.$$

(Kvadrātsaknes negatīvā vērtība jāņem tāpēc, ka ar nosacījumu $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ leņķis α ir III kvadranta leņķis un līdz ar to $\sin\alpha$ vērtība ir negatīva.)

2) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{12 \cdot 13}{13 \cdot 5} = 2\frac{2}{5}$;

3) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{5 \cdot 13}{13 \cdot 12} = \frac{5}{12}$.

2. piemērs. Aprēķināt pārējās trigonometriskās funkcijas, ja $\operatorname{tg} x = 0{,}75$.

1) $\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{tg} x = 1$; $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{0{,}75} = \frac{1 \cdot 4}{3} = 1\frac{1}{3}$;

2) $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$; $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$;

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + 0{,}75^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{16}{25};$$

$$\cos x = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5} = \pm 0{,}8.$$

(Uzdevumā argumenta x piederība noteiktam kvadrantam nav norādīta, taču no tā, ka $\operatorname{tg} x = 0{,}75 > 0$, izriet, ka x pieder vai nu pie I, vai pie III kvadranta. Tāpēc $\cos x = +0{,}8$, ja x pieder pie I kvadranta, bet $\cos x = -0{,}8$, ja x pieder pie III kvadranta.)

3) $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$; $\sin x = \operatorname{tg} x \cdot \cos x$.

Ievērojot, ka $\cos x = \pm 0{,}8$, iegūstam:

$\sin x = \pm 0{,}75 \cdot 0{,}8 = \pm 0{,}6$;

$\sin x = +0{,}6$, ja x pieder pie I kvadranta un

$\sin x = -0{,}6$, ja x pieder pie III kvadranta.

3. piemērs. Vienkāršot izteiksmi $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$.

Lai rastos iespēja daļu saīsināt, jāpāriet uz viena nosaukuma trigonometriskām funkcijām. Šajā nolūkā no formulas

$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$ izsakām $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ un ievietojam izteiksmē:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}} = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta.$$

4. piemērs. Noteikt izteiksmes $\cos^2\alpha \operatorname{tg}^2\alpha + 4\cos^2\alpha - 2$ lielāko un mazāko vērtību.

$$\cos^2\alpha \operatorname{tg}^2\alpha + 4\cos^2\alpha - 2 = \frac{\cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 4\cos^2\alpha - 2 =$$
$$= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 3\cos^2\alpha - 2 = 1 + 3\cos^2\alpha - 2 =$$
$$= 3\cos^2\alpha - 1.$$

Funkcijas $\cos^2\alpha$ lielākā vērtība ir 1 (ja intervālā no 0° līdz 360° ir $\alpha = 0°$ vai $\alpha = 180°$); $3\cos^2\alpha$ lielākā vērtība ir 3; tātad izteiksmes $3\cos^2\alpha - 1$ un līdz ar to dotās izteiksmes lielākā vērtība ir 2.

Funkcijas $\cos^2\alpha$ mazākā vērtība ir 0 (ja $\alpha = 90°$ vai $\alpha = 270°$); tātad izteiksmes $3\cos^2\alpha - 1$ un līdz ar to dotās izteiksmes mazākā vērtība ir -1.

REDUKCIJAS FORMULAS

Tādu leņķu trigonometriskās funkcijas, kas izteikti formā $90° \cdot k \pm \alpha$ jeb $\frac{\pi}{2} \cdot k \pm \alpha$, kur k ir jebkurš vesels skaitlis, var aizstāt ar leņķa α trigonometriskajām funkcijām. Šajā nolūkā izmanto t. s. redukcijas formulas, piemēram,

$\sin(90° \cdot 2 - \alpha) = \sin\alpha$;

$\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha$;

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\cdot 3-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha;$$
$$\operatorname{ctg}(90°\cdot 4-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha;$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2+\alpha\right)=-\cos\alpha \text{ u. c.}$$

Visas redukcijas formulas var apvienot vienā kopējā kārtulā, nosacīti apzīmējot sinusu un kosinusu, tāpat tangensu un kotangensu par savstarpējām «kofunkcijām» (tas nozīmē, ka to nosaukumi atšķiras tikai ar priekšzilbi «ko»):

leņķa $(90°\cdot k\pm\alpha)$ trigonometrisko funkciju var aizstāt ar leņķa α tā paša nosaukuma trigonometrisko funkciju, ja k ir pāra skaitlis, vai ar kofunkciju, ja k ir nepāra skaitlis; turklāt rezultāta priekšā jāliek plusa vai mīnusa zīme atkarībā no tā, vai dotā funkcija ir pozitīva vai negatīva.

Tā kā redukcijas formulas ir pareizas jebkurām leņķa α vērtībām, tad dotās funkcijas zīmes noteikšanai izdevīgi domāt, ka leņķis α ir šaurs.

1) $\sin(180°+\alpha)=\sin(90°\cdot 2+\alpha)=-\sin\alpha$.

Tā kā šajā piemērā $k=2$ ir pāra skaitlis, tad funkcijas nosaukums saglabājas. Rezultāta priekšā jāraksta mīnusa zīme tāpēc, ka leņķi $180°+\alpha$ domājam kā trešā kvadranta leņķi, kura sinuss, kā zināms, ir negatīvs.

2) $\operatorname{tg}(270°-\beta)=\operatorname{tg}(90°\cdot 3-\beta)=\operatorname{ctg}\beta$.

Tā kā te $k=3$ ir nepāra skaitlis, tad funkcijas nosaukums «tg» jāaizstāj ar kofunkcijas nosaukumu «ctg». Dotā funkcija ir trešā kvadranta leņķa tangenss, kas, kā zināms, ir pozitīvs, tāpēc arī gala rezultāta priekšā jāpatur plusa zīme.

3) Reducēt $\cos 160°$.

1. variants. $\cos 160°=\cos(180°-20°)=\cos(90°\cdot 2-20°)=-\cos 20°$.

2. variants. $\cos 160°=\cos(90°\cdot 1+70°)=-\sin 70°$. (Abas atbildes, protams, ir identiskas, jo $-\cos 20°=-\cos(90°-70°)=-\sin 20°$.)

4) Reducēt $\sin(-500°)$.

Te vispirms var negatīvo leņķi aizstāt ar pozitīvu leņķi (ievērot, ka sinusa funkcija ir nepāra funkcija!) un pēc tam samazināt leņķi par vienu periodu, t. i., par 360°: $\sin(-500°)=-\sin 500°=-\sin 140°=-\sin(180°-40°)=-\sin(90°\cdot 2-40°)=-\sin 40°$.

Cits variants:

$\sin(-500°)=-\sin 500°=-\sin 140°=-\sin(90°+50°)=-\cos 50°$.

5) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\cdot 3+x\right)=-\operatorname{ctg}x$.

6) Reducēt $\cos\left(\alpha - \frac{11\pi}{2}\right)$.

Te vispirms mainām leņķim zīmi uz pretējo (ievērot, ka kosinuss ir pāra funkcija!) un pēc tam no leņķa atmetam divus periodus $2\pi\cdot 2 = 4\pi$:

$$\cos\left(\alpha - \frac{11\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{11\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) =$$
$$= -\sin\alpha.$$

SUMMAS UN STARPĪBAS TRIGONOMETRISKĀS FUNKCIJAS

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta;$$
$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta};$$
$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}.$$

1. piemērs. Aprēķināt $\operatorname{tg} 15°$.

Zinot, ka $\operatorname{tg} 45° = 1$ un $\operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, varam rakstīt:

$$\operatorname{tg} 15° = \operatorname{tg}(45° - 30°) = \frac{\operatorname{tg} 45° - \operatorname{tg} 30°}{1 + \operatorname{tg} 45°\cdot\operatorname{tg} 30°} =$$
$$= \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{3 - \sqrt{3}}{3}}{\frac{3 + \sqrt{3}}{3}} = \frac{(3 - \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})} = \frac{9 - 6\sqrt{3} + 3}{9 - 3} =$$
$$= \frac{12 - 6\sqrt{3}}{6} = 2 - \sqrt{3} \approx 2 - 1{,}73 = 0{,}27.$$

2. piemērs. Vienkāršot izteiksmi $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\alpha$.

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\alpha = \sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{4}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\sin\alpha\right) - \cos\alpha = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right) - \cos\alpha =$$
$$= \cos\alpha + \sin\alpha - \cos\alpha = \sin\alpha.$$

DUBULTLEŅĶU TRIGONOMETRISKĀS FUNKCIJAS

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha; \quad (1)$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha; \quad (2)$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}. \quad (3)$$

1. piemērs. Aprēķināt $\sin 2\alpha$, zinot, ka $\sin\alpha = 0{,}6$ un α ir II kvadranta leņķis.

No formulas (1) redzams, ka vispirms nepieciešami aprēķināt $\cos\alpha$. Šajā nolūkā izmantojam identitāti $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$:

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}36} = -0{,}8.$$

Tagad pēc formulas (1) atrodam, ka

$\sin 2\alpha = 2\cdot(-0{,}6)\cdot 0{,}8 = -0{,}96.$

Pārbaude. Aprēķina rezultātu intereses dēļ pārbaudām, izmantojot trigonometrisko funkciju vērtību tabulas (vai mikrokalkulatoru).

Ja $\sin\alpha = 0{,}6$, tad $\alpha \approx 37°$; tā kā α ir II kvadranta leņķis, tad jāņem $\alpha = 180° - 37° = 143°$.

Tad $2\alpha = 2\cdot 143° = 286°$; no tabulām atrodam, ka $\sin 286° =$
$= \sin(270° + 16°) = \sin(90°\cdot 3 + 16°) = -\cos 16° =$
$= -0{,}96$, kas tiešām saskan ar iepriekš aprēķināto rezultātu.

2. piemērs. Aprēķināt $\sin^2 15° - \cos^2 15°$.

Iznesot mīnusa zīmi pirms iekavām, iekavās paliek tāda veida izteiksme kā formulas (2) labā puse:

$$\sin^2 15° - \cos^2 15° = -(\cos^2 15° - \sin^2 15°) =$$
$$= -\cos(2\cdot 15°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. piemērs. Vienkāršot izteiksmi $1 - \cos 2x$.

$1 - \cos 2x = (\sin^2 x + \cos^2 x) - (\cos^2 x - \sin^2 x) = 2\sin^2 x.$

4. piemērs. Vienkāršot izteiksmi $\dfrac{\sin 8\varphi}{8\cos\varphi\cdot\cos 2\varphi\cdot\cos 4\varphi}$.

Izmantojot vairākkārt formulu (1), pārveido skaitītāju:

$\sin 8\varphi = 2\sin 4\varphi\cdot\cos 4\varphi = 4\sin 2\varphi\cdot\cos 2\varphi\cdot\cos 4\varphi =$
$= 8\sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\cos 2\varphi\cdot\cos 4\varphi.$

Ievietojot dabūto izteiksmi dotās daļas skaitītājā un daļu saīsinot, iegūst atbildi $\sin\varphi$.

5. piemērs. Vienkāršot izteiksmi $\sin 15°\cdot\cos 15°$.

Pareizinot un izdalot doto izteiksmi ar 2, iegūst daļu, kuras skaitītājā ir izteiksme, kas atbilst formulas (1) labajai pusei:

$$\sin 15°\cdot\cos 15° = \frac{2\sin 15°\cdot\cos 15°}{2} = \frac{\sin(2\cdot 15°)}{2} = \frac{\sin 30°}{2} =$$
$$= \frac{0{,}5}{2} = 0{,}25.$$

TRIGONOMETRISKO FUNKCIJU SUMMAS IZTEIKŠANA REIZINĀJUMĀ

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \quad (1)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}; \quad (2)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad (3)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad (4)$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}; \qquad (5)$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}. \qquad (6)$$

1. piemērs. Pārveidot reizinājumā starpību $\sin 72° - \sin 12°$.

Pēc formulas (2)

$$\sin 72° - \sin 12° = 2\sin\frac{72° - 12°}{2}\cdot\cos\frac{72° + 12°}{2} =$$
$$= 2\sin 30°\cdot\cos 42° = 2\cdot 0{,}5\cdot\cos 42° = \cos 42°.$$

2. piemērs. Pārveidot reizinājumā $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$.

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\sin\frac{5\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{5\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}\cdot 0{,}5} = \frac{2\sin\frac{5\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}}.$$

3. piemērs. Pārveidot reizinājumā $\cos 3x - \cos x$.

$$\cos 3x - \cos x = -2\sin\frac{3x+x}{2}\cdot\sin\frac{3x-x}{2} =$$
$$= -2\sin 2x\cdot\sin x.$$

4. piemērs. Pārveidot reizinājumā $\sin\beta + 1$.

Vispirms aizstājam skaitli 1 ar $\sin\frac{\pi}{2}$ un pēc tam izmantojam formulu (1):

$$\sin\beta + 1 = \sin\beta + \sin\frac{\pi}{2} =$$
$$= 2\sin\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right). \quad (*)$$

Pēdējo rezultātu vēl var vienkāršot. Tā kā kosinuss ir pāra funkcija, tad $\cos\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)$. Tā kā leņķi $\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{4}$ un $\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}$ ir papildleņķi (to summa ir $\frac{\pi}{2}$ jeb 90°), tad $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$. Ievietojot pēdējo izteiksmi iepriekšējā atbildē (*) reizinātāja $\cos\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$ vietā, dabūjam, ka

$$\sin\beta + 1 = 2\sin^2\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$$

5. p i e m ē r s. Pārveidot reizinājumā summu $2\sin\alpha + 1$.

$$2\sin\alpha + 1 = 2(\sin\alpha + 0{,}5) = 2(\sin\alpha + \sin 30°) =$$
$$= 2\cdot 2\sin\frac{\alpha + 30°}{2}\cdot\cos\frac{\alpha - 30°}{2} = 4\sin\frac{\alpha + 30°}{2}\cdot\cos\frac{\alpha - 30°}{2}.$$

6. p i e m ē r s. Pārveidot reizinājumā starpību $1 - \cos\alpha$ un summu $1 + \cos\alpha$.

Te varētu sākt pārveidojumu tā: $1 + \cos\alpha = \cos 90° - \cos\alpha =$ utt. pēc formulas (4). Taču izdevīgāk ir uzlūkot leņķi α kā leņķa $\frac{\alpha}{2}$ dubultleņķi un skaitli 1 aizstāt ar «trigonometrisko vienību» pēc formulas $1 = \sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}$:

$$1 - \cos\alpha = 1 - \cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = \left(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}\right) -$$
$$- \left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Līdzīgi $1 + \cos\alpha = \left(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}\right) + \left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

Pēdējo divu izteiksmju pārveidojumus der iegaumēt kā formulas:

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}; \tag{7}$$

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}. \tag{8}$$

7. p i e m ē r s. Vienkāršot izteiksmi $\frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}$.

$$\frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} = \frac{2\cos^2\frac{2x}{2}}{2\sin^2\frac{2x}{2}} = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \mathrm{ctg}^2 x.$$

8. p i e m ē r s. Pārveidot reizinājumā $\sin\alpha + \cos\alpha$.

Vispirms aizstājam $\cos\alpha$ ar papildleņķa $90° - \alpha$ sinusu $\sin(90° - \alpha)$, lai tālāk varētu izmantot formulu (1):

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\alpha + \sin(90° - \alpha) =$$
$$= 2\sin\frac{\alpha + (90° - \alpha)}{2}\cdot\cos\frac{\alpha - (90° - \alpha)}{2} =$$
$$= 2\sin 45°\cdot\cos(\alpha - 45°) =$$
$$= \frac{2\sqrt{2}}{2}\cos(\alpha - 45°) = \sqrt{2}\cos(\alpha - 45°).$$

③ Ģeometrija

16. ĢEOMETRIJA UN TĀS LOĢISKĀ STRUKTŪRA

16.1. ĢEOMETRIJAS KURSA SATURS

ĢEOMETRISKAS FIGŪRAS

Kā ģeometrisku figūru piemērus var minēt nogriezni, riņķa līniju, kvadrātu, trijstūri, kubu, lodi (bumbu). Runājot par ģeometriskām figūrām, nedomājam, ka tās gatavotas no kāda materiāla, ka tām ir masa vai krāsa, bet domājam tikai par šo figūru formu, lielumu un savstarpējiem stāvokļiem telpā.

Vienkāršākās ģeometriskās figūras ir punkts, taisne un plakne.

Punktu iztēlojamies kā bezgalīgi mazu puteklīti, bez izmēriem. Punkts no punkta var atšķirties tikai ar atrašanās vietu telpā.

Taisni atgādina stingri nostiepts diegs, ko iztēlojamies bezgalīgi tievu un neierobežoti garu uz abām pusēm. Taisne ir viens no līniju veidiem — ir arī līnijas, kas nav taisnes (riņķa līnija, spirāle u. c.).

Plakni domājam kā izklātu gludu, ļoti plānu papīra lapu, uz visām pusēm neierobežoti lielu. Par plaknes daļu priekšstatu sniedz gluda galda vai tāfeles virsma. Plakne ir viens no virsmas veidiem — ir arī dažāda veida liektas virsmas (lodei, cilindram u. c.).

Jebkuru ģeometrisku figūru var iedomāties kā punktu kopu. Tā, piemēram, nogrieznis it kā sastāv no visiem bezgalīgi daudziem punktiem starp nogriežņa abiem galapunktiem, riņķis ar rādiusu 3 cm sastāv no visiem plaknes punktiem, kas nav no centra tālāk kā 3 cm, u. tml.

Ģeometriskās figūras, kas atrodas vienā plaknē, sauc par plaknes figūrām. Tādas figūras ir, piemēram, punkts, taisne, riņķa līnija, trijstūris, leņķis u. c. Figūras, kas nav novietojamas vienā plaknē, sauc par telpiskām figūrām, piemēram, telpiskas figūras ir lode, kubs, arī telpiska spirāle (kā lodīšu pildspalvas atspere) u. c.

FIGŪRU VIENĀDĪBA

Divas ģeometriskās figūras sauc par vienādām, ja tās var pārvietot tā, ka tās pilnīgi sakrīt.

Tā kā ģeometrisko figūru faktiski nevar tieši pārvietot kā fizisku ķermeni, tad figūru sakrišanas iespēju nosaka ar dažādiem netiešiem paņēmieniem, ar loģiskiem spriedumiem. Piemēram, ja par diviem riņķiem ir zināms, ka to rādiusi ir vienādi, tad var spriest, ka, pārvietojot plaknē vienu no riņķiem tā, lai abu riņķu centri sakristu, pilnīgi sakritīs arī paši riņķi — tātad šādi riņķi ir vienādas figūras.

ĢEOMETRIJA

Ģeometrijā tiek aplūkotas dažādas figūras, to īpašības un savstarpējās attieksmes, piemēram, taisne, divu taišņu savstarpējie stāvokļi; trijstūris, tā leņķu summa, tā laukums; riņķa līnija, tās garums, iespēja novilkt riņķa līniju caur trim punktiem utt. Turklāt jaunas atziņas par figūrām tiek iegūtas, ne tikai tieši vērojot un mērot, bet arī netiešā ceļā — tikai ar loģiskiem prātojumiem. Tā, piemēram, nemaz nemērot trijstūra leņķus, var neapšaubāmi izprātot (pierādīt), ka visu trīs leņķu summa ir 180°; zinot, ka taisnleņķa trijstūra īsāko malu garumi ir 6 cm un 8 cm, var bez mērīšanas pierādīt, ka trešās malas garums ir 10 cm utt.

Nākamajā paragrāfā aplūkosim ģeometrijas kursa struktūru vēl tuvāk.

16.2. ĢEOMETRIJAS KURSA LOĢISKĀ STRUKTŪRA

JĒDZIENI UN TO DEFINĒŠANA

Katra jēdziena (figūras, īpašības, attieksmes) saturu izsaka šī jēdziena definīcija. Tajā jēdziens tiek paskaidrots ar jau agrāk pazīstamu jēdzienu palīdzību. Tā, piemēram, definīcijā «par taisnstūri sauc paralelogramu, kuram visi leņķi taisni» taisnstūra jēdziens tiek paskaidrots, pieņemot, ka lasītājam jau iepriekš ir skaidri jēdzieni «paralelograms», «taisns leņķis» un, protams, parastie valodas vārdi «kuram», «visi». Ja tālāk jautātu, ko sauc par paralelogramu, tad šis jēdziens savukārt būtu jādefinē ar vēl vienkāršākiem jēdzieniem, piemēram, tā: «par paralelogramu sauc četrstūri, kura pretējās malas ir paralēlas». Taču varētu jautāt vēl tālāk: ko sauc par četrstūri, kas ir pretējās malas, kādas malas sauc par paralēlām utt. Tāpēc agri vai vēlu jāapstājas pie dažiem tik vienkāršiem jēdzieniem, kurus vairs tālāk nedefinē, bet pieņem kā pašus par sevi saprotamus, parāda tos uzskatāmi vai noskaidro kaut kā netiešā ceļā. Šādi t. s. pamatjēdzieni ģeometrijā ir, piemēram, punkts, taisne, plakne u. c. Veidojot ģeometrijas kursu, to autori cenšas iztikt ar pēc iespējas mazu pamatjēdzienu skaitu, taču šajā grāmatā pēc tā īpaši necentīsimies: pieņemsim bez definēšanas arī vairākus tādus jēdzienus, kuru jēga mums visiem šķiet viennozīmīgi skaidra.

AKSIOMAS UN TEORĒMAS

Apgalvojumus par ģeometrisko figūru īpašībām vai to attieksmēm sauc par aksiomām un teorēmām. Aksiomas izsaka apgalvojumus, kuru patiesumu pieņemam bez īpaša pierādījuma, bet teorēmās izteiktie apgalvojumi tiek pierādīti ar loģiskiem prāta slēdzieniem, pamatojoties uz aksiomām un jau agrāk pierādītām teorēmām, kā arī uz tām jēdzienu īpašībām, kas tiem piemīt saskaņā ar to definīcijām.

TEORĒMU STRUKTŪRA

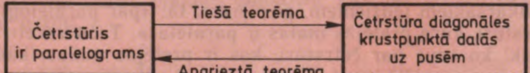
Teorēmas parasti izsaka ar nosacījuma teikumu «ja ..., tad ...», piemēram, «ja četrstūris ir paralelograms, tad tā diagonāles krustpunktā dalās uz pusēm». Teorēmas formulējuma pirmā puse tādā gadījumā ietver tās nosacījumu jeb to, kas teorēmā dots, bet otrā puse — teorēmas secinājumu jeb to, kas jāpierāda.

Reizēm teorēmas īsuma labad izsaka arī citā formā. Tā, piemēram, iepriekšējo teorēmu var formulēt arī tā: «lai četrstūra diagonāles dalītos uz pusēm, ir pietiekami, ka tas ir paralelograms». Taču tad teorēmas nosacījums (dotais) ārēji tik skaidri nav atdalīts no secinājuma (pierādāmā).

Dažas teorēmas mēdz saukt arī par figūru īpašībām, pazīmēm, dažām svarīgākām teorēmām piešķir pat īpašus nosaukumus (Pitagora teorēma, Talesa teorēma u. c.).

TIEŠĀ UN APGRIEZTĀ TEORĒMA

Ja dotās teorēmas secinājumu pieņem par nosacījumu, bet nosacījumu — par secinājumu, tad rodas pirmās jeb tiešās teorēmas apgrieztā teorēma. Iepriekšējā punktā minētās teorēmas apgrieztā

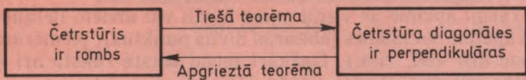


86. zīm.

teorēma formulējama šādi: ja četrstūra diagonāles krustpunktā dalās uz pusēm, tad četrstūris ir paralelograms. Saprotams, ja otro teorēmu nosauktu par tiešo teorēmu, tad pirmā no tām būtu otrās apgrieztā teorēma (86. zīm.).

TIEŠĀS UN APGRIEZTĀS TEORĒMAS PATIESUMS

Dažu patiesu tiešo teorēmu apgrieztās teorēmas arī ir patiesas, bet dažu — ne. Tā, piemēram, iepriekšējos divos punktos minētās teorēmas (gan tiešā, gan apgrieztā) abas ir patiesas. Taču, piemē-



87. zīm.

ram, šādas teorēmas: «ja četrstūris ir rombs, tad tā diagonāles ir perpendikulāras» apgrieztā teorēma ir aplama. Tiešām, četrstūris, kura diagonāles ir perpendikulāras, var arī nebūt rombs (87. zīm.).

* * *

To ģeometrijas daļu, kura aplūko tādas figūras, kas atrodas vienā plaknē, sauc par planimetriju, bet to daļu, kura aplūko telpiskās figūras, sauc par stereometriju. Šī rokasgrāmata ir veltīta planimetrijai.

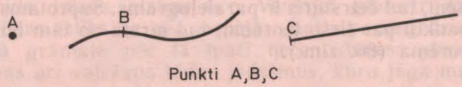
17. PUNKTI. LĪNIJAS. LEŅĶI

17.1. PUNKTS. TAISNE. STARS. NOGRIEZNIS. LAUZTĀ LĪNIJA

PUNKTS

Punkta jēdzienu nedefinē, to pieņem kā visiem saprotamu pamatjēdzienu.

Punktu plaknē atzīmē ar mazu krustiņu, bet uz līnijas — ar šķērssvītriņu. Punktus apzīmē ar latīņu alfabēta lielajiem burtiem (88. zīm.).

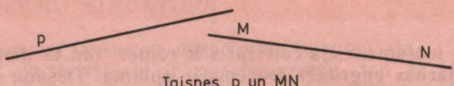


88. zīm.

TAISNE

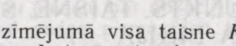
Taisni pieņem par visiem viennozīmīgi saprotamu pamatjēdzienu. Jāatceras, ka, runājot par taisni, domājam to bezgalīgi garu, uz abām pusēm neierobežotu, bet zīmējumā varam attēlot tikai taisnes nelielu daļu.

Taisni apzīmē ar vienu mazo burtu vai diviem lielajiem burtiem (tie apzīmē šīs taisnes jebkurus divus punktus), piemēram, taisne *p*; taisne *MN* (89. zīm.). Dažkārt taisni tekstā raksta arī (*MN*), kur apaļās iekavas aizstāj vārdu «taisne».



89. zīm.

No cita veida līnijām taisni atšķir tās pamatipašība (aksioma). Caur jebkuriem diviem punktiem var novilkt taisni, pie tam tikai vienu (90. zīm.).

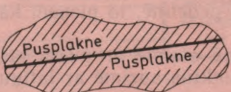


90. zīm.

Taisnes un plaknes savstarpējo attieksmi izsaka šāda aksioma. Ja taisnes kaut divi punkti ir kādā plaknē, tad visa taisne ir šajā plaknē.

Piemēram, iepriekšējā zīmējumā visa taisne *KL* ir tajā pašā plaknē, kurā ir punkti *K* un *L* (grāmatas lapas plaknē).

Taisne sadala plakni divās pusplaknēs (91. zīm.).

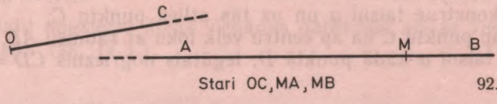


91. zīm.

STARS

Par staru sauc taisnes daļu uz vienu pusi no taisnes kāda punkta. Šo punktu sauc par stara sākumpunktu.

Staru apzīmē ar tā sākumpunktu (to raksta kā pirmo) un vēl kādu punktu uz stara, piemēram, stars OC (92. zīm.). Raksta arī $[OC)$, kur iekavas aizstāj vārdu «stars» (kvadrātiekavas norāda, ka stara sākumpunkts ir O, bet apaļās iekavas — ka stars virzienā uz C turpinās bezgalīgi).



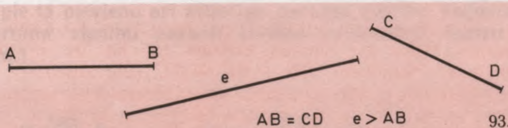
92. zīm.

Taisnes jebkurš punkts sadala taisni divos staros, piemēram, MA un MB (92. zīm.). Šādus starus sauc par savstarpējiem papildstariem.

Piezīme. Staru dažkārt sauc arī par pustaisni.

NOGRIEZNIS

Par nogriezni sauc taisnes daļu starp tās diviem punktiem. Šos punktus sauc par nogriežņa galapunktiem.



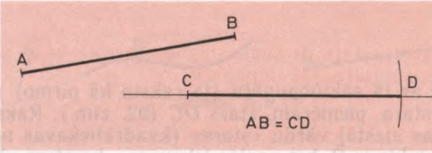
93. zīm.

Nogriezni apzīmē ar tā galapunktiem vai arī ar vienu mazo burtu, piemēram, nogrieznis AB, nogrieznis e (93. zīm.). Raksta arī $[AB]$, kur kvadrātiekavas aizstāj vārdu «nogrieznis».

NOGRIEŽŅU VIENĀDĪBA

Divus nogriežņus sauc par vienādiem, ja tos var pārvietot tā, ka tie pilnīgi sakrīt. Nogriežņu AB un CD vienādību pieraksta šādi: $AB = CD$ (sk. 93. zīm.).

Ja viens nogrieznis ir vienāds ar otra nogriežņa daļu, tad saka, ka otrais nogrieznis ir lielāks nekā pirmais, un raksta $e > CD$ vai $CD < e$ (sk. 93. zīm.).



94. zīm.

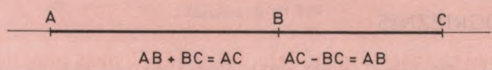
Kā konstruēt nogriezni, kas vienāds ar nogriezni AB, parādīts 94. zīmējumā:

1) konstruē taisni a un uz tās atliek punktu C;

2) ap punktu C kā ap centru velk loku ar rādiusu AB, līdz loks krusto taisni a kādā punktā D; iegūtais nogrieznis $CD = AB$.

DARBĪBAS AR NOGRIEŽŅIEM

Ar nogriežņiem var izdarīt darbības, kuru jēga un īpašības analogas aritmētiskajām darbībām ar skaitļiem. Turklāt šīs darbības var arī faktiski izdarīt, izmantojot cirkuli un lineālu.

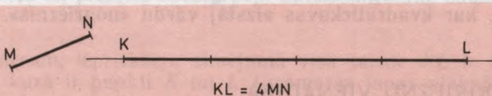


95. zīm.

Par divu nogriežņu summu sauc nogriezni, ko dabū, ja dotos nogriežņus atliek uz vienas taisnes tā, ka tie ir viens otra turpinājums. Piemēram, $AB + BC = AC$ (95. zīm.).

Par divu nogriežņu starpību sauc tādu trešo nogriezni, kas, saskaitīts ar otro nogriezni, summā dod pirmo nogriezni. Piemēram, $AC - BC = AB$ (sk. 95. zīm.).

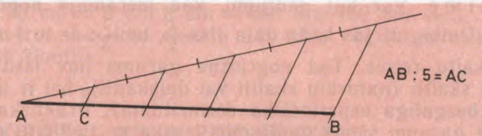
Nogriežņa reizinājumu ar naturālu skaitli n atrod, ņemot doto nogriezni par saskaitāmo n reizes (96. zīm.).



96. zīm.

Lai konstruētu nogriežņa reizinājumu ar pozitīvu racionālu skaitli, piemēram, ar $2\frac{2}{3}$ jeb ar $\frac{8}{3}$, nogriezni sadala 3 vienādās daļās (kā parādīts tālāk) un vienu no šīm daļām ņem par saskaitāmo 8 reizes.

Par nogriežņa dalījumu ar skaitli sauc nogriezni, kura reizinājums ar šo skaitli ir vienāds ar doto nogriezni.



97. zīm.

Lai faktiski sadalītu doto nogriezni n vienādās daļās, var izmantot Talesa teorēmu (sk. 17.2.). Parādīsim nogriežņa AB dalīšanu, piemēram, 5 vienādās daļās (97. zīm.):

$AB{:}5 = AC.$

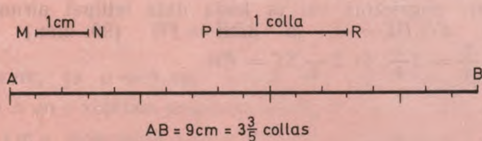
Sadalīt nogriezni divās vienādās daļās var arī ar vienkāršāku paņēmienu (sk. 17.3.).

NOGRIEŽŅA GARUMS

Lai noteiktu dotā nogriežņa garumu, vispirms jāizvēlas garuma vienība, t. i., kāds nogrieznis, kura garumu izsakām ar skaitli 1. Pēc tam mērāmais nogrieznis jāsalīdzina ar izraudzīto garuma vienību un jāuzzina, cik reižu garuma vienība vai tās kāda daļa ietilpst mērāmā nogriezni.

Par nogriežņa garumu sauc skaitli, kas rāda, cik reižu izraudzītā garuma vienība (vai tās kāda daļa) ietilpst dotajā nogriezni.

Nogriežņa garums (attiecīgais skaitlis), protams, ir atkarīgs no izraudzītās garuma vienības. Tāpēc, izsakot nogriežņa garumu ar skaitli, pie tā pievieno arī attiecīgo garuma vienību. Ikdienas dzīvē par garuma vienību parasti izvēlas centimetru, metru u. tml. (98. zīm.).



98. zīm.

Zīmējumā redzams, ka nogriezni AB garuma vienība $MN = 1$ cm ietilpst 9 reizes, un tāpēc var teikt, ka nogriežņa AB garums ir 9 cm (raksta $AB = 9$ cm). Lai atšķirtu nogriezni (kā figūru) no tā garuma (kā skaitļa), nogriežņa garumu mēdz rakstīt arī tā: $|AB| = 9$ cm.

Tajā pašā nogriezni AB garuma vienības $PR = 1$ colla (sena garuma vienība) piektā daļa ietilpst 18 reizes, un tāpēc var teikt, ka nogriežņa AB garums ir $\frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}$ collas (raksta $AB = 3\frac{3}{5}$ collas).

P i e z ī m e. Var būt gadījumi, kad mērāmajā nogriezni ne garuma vienība, ne tās kāda daļa (ne $\frac{1}{2}$, ne $\frac{1}{3}$, ne ...) neietilpst veselu skaitu reizes. Tad nogriežņa garums nav izsakāms ar racionālu skaitli (naturālu skaitli vai daļskaitli), bet ir iracionāls skaitlis (bezgalīga neperiodiska decimāldaļa). Praktiskajā dzīvē nogriežņa garumu šādos gadījumos izsaka ar tuvinātu racionālu skaitli.

NOGRIEŽŅA GARUMA ĪPAŠĪBAS

1) Vienādiem nogriežņiem ir arī vienādi garumi.

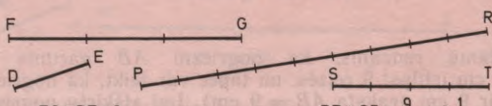
2) Ja nogriezni sadala daļās, tad daļu garumu summa ir vienāda ar nogriežņa garumu.

No šīm divām īpašībām izriet cieša atbilstība starp darbībām ar nogriežņiem (kā figūrām!) un darbībām ar to garumiem (kā skaitļiem!). Tā, piemēram, nogriežņu summas garums ir vienāds ar nogriežņu garumu summu. Šī atbilstība līdzīgi izsakāma arī pārējās darbībās. Tāpēc zināmā mērā var attaisnot to, ka ar pierakstu AB saprot gan pašu nogriezni (kā ģeometrisku figūru), gan tā garumu (kā skaitli). Tāpat arī runājot stingri nešķiro jēdzienus «nogrieznis» un «nogriežņa garums»: saka, ka nogrieznis MN ir vienāds ar 4 cm, kaut gan būtu jāsaka, ka nogriežņa garums ir 4 cm.

DIVU NOGRIEŽŅU ATTIECĪBA

Par divu nogriežņu attiecību sauc skaitli, kas rāda, ar cik jāreizina otrais nogrieznis, lai reizinājumā iegūtu pirmo nogriezni.

Lai noteiktu divu nogriežņu (kā figūru!) attiecību, jāatrod, cik reižu otrais nogrieznis vai tā kāda daļa ietilpst pirmajā. Tā, piemēram, $FG:DE = 3$, jo $3DE = FG$ (99. zīm.). Līdzīgi $PR:ST = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$, jo $2\frac{1}{4}ST = PR$.



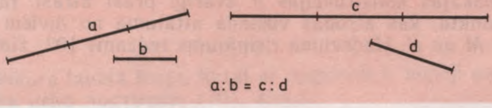
99. zīm.

Viegli saprast, ka divu nogriežņu attiecība ir vienāda ar šo nogriežņu garumu attiecību. Turklāt šī attiecība nav atkarīga no tā, ar kādu kopēju mērvienību nogriežņi mērīti, piemēram, 60 cm:20 cm = 6 dm:2 dm = 600 mm:200 mm = 3.

Der ievērot, ka divu skaitļu vai divu nogriežņu attiecība ir nenosaukts skaitlis.

NOGRIEŽŅU PROPORCIONALITĀTE

Divu attiecību vienādību sauc par proporciju (sk. 2.11). Pie tam proporcijas locekļi var būt ne tikai skaitļi, bet arī nogriežņi.
Divus nogriežņu pārus sauc par savstarpēji proporcionāliem, ja viena pāra abu nogriežņu attiecība ir vienāda ar otra pāra abu nogriežņu attiecību.



100. zīm.

Piemēram, $\frac{a}{b} = 3$ un arī $\frac{c}{d} = 3$ (100. zīm.), tāpēc $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ jeb nogriežņu pāri *a, b* un *c, d* ir savstarpēji proporcionāli. Tā kā $\frac{c}{a} = 2$ un arī $\frac{d}{b} = 2$, tad var teikt, ka savstarpēji proporcionāli ir arī nogriežņu pāri *a, c* un *b, d*.

DIVU NOGRIEŽŅU VIDĒJAIS PROPORCIONĀLAIS

Ja starp nogriežņiem *a, b* un *c* pastāv proporcija $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ vai $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$, tad nogriezni *b* sauc par nogriežņu *a* un *c* vidējo proporcionālo nogriezni.

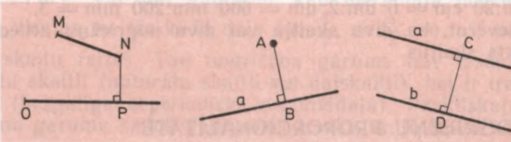
Piemēram, ja $a = 9$ cm, $b = 6$ cm, $c = 4$ cm, tad *b* ir nogriežņu *a* un *c* vidējais proporcionālais, jo $\frac{9}{6} = \frac{6}{4}$ vai $\frac{6}{9} = \frac{4}{6}$.

Piezīme. Nogriežņu *a* un *c* vidējais aritmētiskais ir nogrieznis, kura garums ir $\frac{9+4}{2} = 6{,}5$ cm.

ATTĀLUMS

Par attālumu starp diviem punktiem sauc tā nogriežņa garumu, kas savieno šos punktus (nogriežņa galapunkti ir dotie punkti).

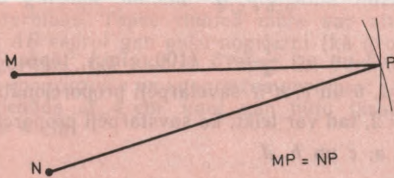
Par attālumu starp divām figūrām sauc attālumu starp šo figūru tuvākajiem punktiem. Tā, piemēram, attālums no nogriežņa



101. zīm.

MN līdz staram OK ir nogriežņa NP garums ($NP \perp OK$, 101. zīm.). Attālums no punkta A līdz taisnei a ir taisnei a perpendikulāra nogriežņa AB garums. Attālums starp divām savstarpēji paralēlām taisnēm a un b ir tā nogriežņa CD garums, kas savieno šo taišņu divus punktus un ir perpendikulārs pret šīm taisnēm.

Turpmākajās konstrukcijās ir svarīgi prast atrast (atzīmēt) plaknē punktu, kas atrodas vienādā attālumā no diviem dotiem punktiem M un N. Uzdevuma risinājums redzams 102. zīmējumā:



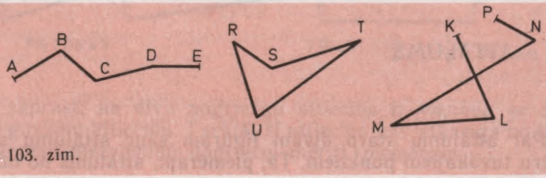
102. zīm.

ap punktiem M un N kā ap centriem ar vienādiem rādiusiem velk lokus, kas krustojas kādā punktā P; punkts P ir meklējamais punkts, $MP = NP$.

LAUZTA LĪNIJA

Līniju $ABCDE$, kas sastāv no nogriežņiem AB, BC, CD un DE un kuras divi viens otram sekojoši nogriežņi nav uz vienas taisnes, sauc par lauztu līniju (103. zīm.).

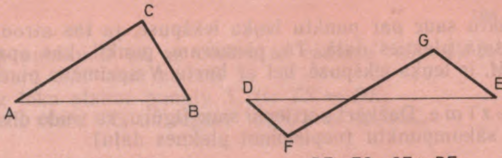
Lauztā līnija var sastāvēt no diviem vai vairākiem nogriežņiem. Šos nogriežņus sauc par lauztās līnijas posmiem.



103. zīm.

Ja lauztās līnijas abi galapunkti sakrīt, tad lauzto līniju sauc par slēgtu lauztu līniju, piemēram, $RSTUR$ (103. zīm.).

Skolas kursā parasti aplūko tikai vienkāršas lauztas līnijas, t. i., lauztas līnijas, kas pašas sevi nekrusto. Tāda nav, piemēram, lauztā līnija $KLMNP$ (sk. 103. zīm.).



104 zīm.

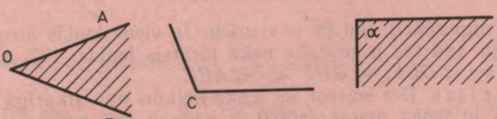
Par lauztās līnijas garumu sauc tās posmu garumu summu.

Jebkura lauztā līnija, kurai ar nogriezni ir kopēji galapunkti, ir garāka nekā nogrieznis (104. zīm.):
$AC + CB > AB$; $DF + FG + GE > DE$.

17.2. LEŅĶIS

LEŅĶA JĒDZIENS

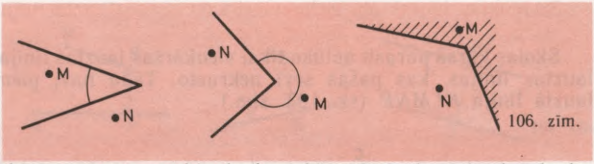
Par leņķi sauc plaknes daļu, ko ierobežo divi stari ar kopēju sākumpunktu. Šos starus sauc par leņķa malām, bet staru kopējo sākumpunktu — par leņķa virsotni.



105. zīm.

Leņķi, kuru ierobežo stari OA un OB (105. zīm.), apzīmē $\sphericalangle AOB$ vai $\sphericalangle BOA$ (virsotnei atbilstošo burtu raksta vidū). Leņķus mēdz apzīmēt arī tikai ar burtu pie virsotnes, piemēram, $\sphericalangle C$, vai ar grieķu alfabēta vienu mazo burtu α, β, γ, δ utt., reizēm arī ar ciparu, piemēram, $\sphericalangle 1$, $\sphericalangle 2$ u. tml.

Par leņķi parasti pieņem tā malu ierobežoto plaknes mazāko daļu. Pretējā gadījumā (un vispār skaidrības labad) starp malām leņķa iekšpusē ievelk lociņu vai attiecīgo plaknes daļu iesvītro (106. zīm.).



106. zīm.

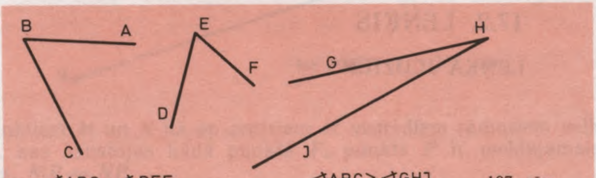
Punktu sauc par punktu leņķa iekšpusē, ja tas atrodas leņķa aizņemtajā plaknes daļā. Tā, piemēram, punkti, kas apzīmēti ar burtu *M,* ir leņķa iekšpusē, bet ar burtu *N* apzīmētie punkti — ārpusē.

P i e z ī m e. Dažkārt par leņķi sauc figūru, ko veido divi stari ar kopēju sākumpunktu (nepieminot plaknes daļu).

LEŅĶU VIENĀDĪBA

Divus leņķus sauc par savstarpēji vienādiem, ja tos var pārvietot tā, ka tie pilnīgi sakrīt.

Leņķus salīdzinot, vispirms viena leņķa virsotni un vienu malu pārvieto uz otrā leņķa virsotni un malu tā, ka abu leņķu otrās malas atrodas uz vienu pusi no sakrītošajām malām. Ja tad abi



107. zīm.

leņķi pilnīgi sakrīt, tad tie ir vienādi. Ja viens leņķis aizņem tikai otra daļu, tad tas ir mazāks nekā pirmais leņķis. 107. zīmējumā $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEF$, $\sphericalangle GHJ < \sphericalangle ABC$.

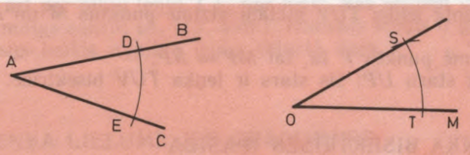
P i e z ī m e. Der ievērot, ka leņķa lielums nav atkarīgs no malu garuma, jo leņķa malas (stari) ir neierobežoti garas.

AR DOTO LEŅĶI VIENĀDA LEŅĶA KONSTRUĒŠANA

Kā, izmantojot tikai lineālu un cirkuli, konstruēt leņķi, kas vienāds ar doto leņķi *BAC,* parādīts 108. zīmējumā. Konstrukcijas gaita ir šāda:

1) konstruē staru *OM*;

2) uz dotā leņķa malām atzīmē punktus *D* un *E* tā, lai $AD = AE$;



108. zīm.

3) ap punktu O kā ap centru ar rādiusu AE velk loku, kas krusto staru OM kādā punktā T;

4) uz loka atzīmē punktu S, lai $TS = DE$;

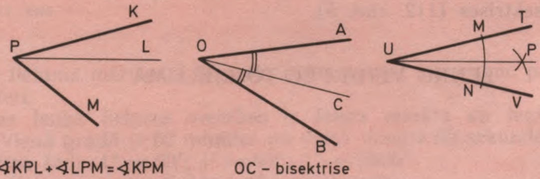
5) velk staru OS un iegūst $\sphericalangle SOT = \sphericalangle BAC$.

DARBĪBAS AR LEŅĶIEM

Arī ar leņķiem var izdarīt dažādas darbības, kuru jēga un īpašības līdzīgas aritmētiskajām darbībām ar skaitļiem.

Ja viena leņķa virsotni un vienu malu pārvieto tā, ka tās sakrīt ar otra leņķa virsotni un vienu malu, bet leņķu otrās malas atrodas kopējās malas dažādās pusēs, tad izveidojas leņķis, kuru sauc par doto leņķu summu, piemēram, $\sphericalangle KPL + \sphericalangle LPM = \sphericalangle KPM$ (109. zīm.).

Divu leņķu starpību, reizinājumu un dalījumu ar skaitli definē tāpat kā analogās darbības ar skaitļiem vai nogriežņiem.



109. zīm. 110. zīm. 111. zīm.

LEŅĶA BISEKTRISE

Par leņķa bisektrisi sauc staru, kas dala doto leņķi divās vienādās daļās.

Stars OC ir leņķa AOB bisektrise, ja $\sphericalangle AOC = \sphericalangle BOC$ (110. zīm.).

Leņķa TUV bisektrises konstruēšana redzama 111. zīmējumā:

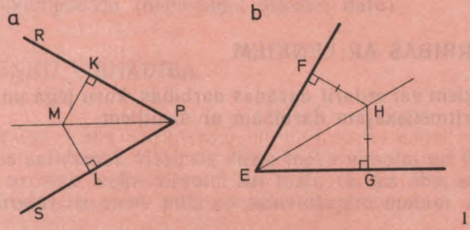
1) uz dotā leņķa TUV malām atzīmē punktus M un N tā, lai $UM = UN$;

2) atzīmē punktu P tā, lai $MP = NP$;

3) velk staru UP; šis stars ir leņķa TUV bisektrise.

LEŅĶA BISEKTRISES ĪPAŠĪBA

Leņķa bisektrises jebkurš punkts ir vienādā attālumā no leņķa abām malām. Ja, piemēram, PM ir leņķa RPS bisektrise, tad $MK = ML$ (112. zīm. *a*).



112. zīm.

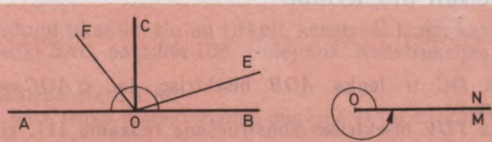
Patiess arī apgrieztais apgalvojums: jebkurš punkts, kas atrodas vienādā attālumā no leņķa abām malām, atrodas uz leņķa bisektrises. Ja, piemēram, $FH = HG$, tad punkts H ir uz leņķa FEG bisektrises (112. zīm. *b*).

LEŅĶU VEIDI PĒC TO LIELUMA

Leņķi, kura malas ir savstarpēji papildstari, sauc par izstieptu leņķi. Tāds ir, piemēram, leņķis AOB (113. zīm.).

Leņķi, kas vienāds ar izstiepta leņķa pusi, sauc par taisnu leņķi. Taisni leņķi ir, piemēram, leņķi AOC un BOC.

Leņķi, kas mazāks nekā taisns leņķis, sauc par šauru leņķi, piemēram, $\measuredangle EOB$. Leņķi, kas lielāks nekā taisns leņķis, bet mazāks nekā izstiepts leņķis, sauc par platu leņķi, piemēram, $\measuredangle FOB$.

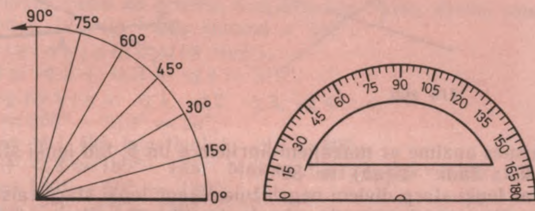


113. zīm.

Runā arī par pilnu leņķi, t. i., par leņķi, kas aizņem visu plakni (tā abas malas sakrīt; sk. 113. zīm.). Izstiepts leņķis ir pilna leņķa puse, taisns leņķis ir pilna leņķa ceturtā daļa.

LEŅĶA LIELUMS JEB GRĀDUMĒRS

Leņķa lielumu nenosaka tā malu garums (malas ir neierobežoti gari stari), bet malu atpletums. Leņķa lieluma izteikšanai ar skaitli jeb tā mērīšanai par vienību pieņem leņķa grādu, t. i., tādu leņķi, kas vienāds ar taisna leņķa deviņdesmito daļu. Vienu grādu apzīmē šādi: 1°. Tātad taisna leņķa lielums ir 90°, izstiepta leņķa lielums ir 180°, pilna leņķa lielums ir 360°. 114. zīmējumā ir redzami dažāda lieluma leņķi no 0° līdz 90°.



114. zīm.

Leņķa lieluma mērīšanai izmanto instrumentu, kuru sauc par transportieri.

Sīkākas leņķa lieluma vienības ir leņķa minūte un leņķa sekunde. Vienā grādā ir 60 minūtes un vienā minūtē 60 sekundes. To pieraksta šādi: $1° = 60'$; $1' = 60''$; $1° = 3600''$.

Leņķa lielumu sauc arī par leņķa grādumēru.

LEŅĶA GRĀDUMĒRA ĪPAŠĪBAS

Leņķa grādumēram līdzīgi kā nogriežņa garumam piemīt šādas īpašības:

1) vienādiem leņķiem ir vienādi grādumēri;

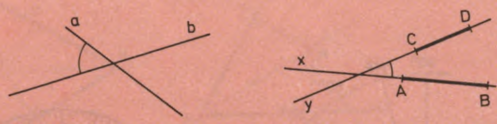
2) ja leņķi sadala daļās, tad leņķa atsevišķo daļu grādumēru summa ir vienāda ar visa leņķa grādumēru.

Šo īpašību dēļ runā un rakstos ne vienmēr stingri šķiro jēdzienus «leņķis» un «leņķa grādumērs». Ar pierakstu $\sphericalangle AOB$ saprot ne tikai pašu leņķi (kā ģeometrisku figūru), bet arī leņķa grādumēru (skaitli). Piemēram, raksta un saka, ka $\sphericalangle AOB = 30°$, kaut gan precīzāk būtu teikt, ka leņķa lielums jeb grādumērs ir 30°.

P i e z ī m e. Dažkārt leņķa lielumu jeb grādumēru pieraksta arī tā: $AOB = 30°$.

LEŅĶIS STARP DIVĀM TAISNĒM

Divām taisnēm krustojoties, izveidojas četri leņķi, kuri ir ik pa pāriem vienādi. Ja visi četri leņķi ir vienādi (katrs tātad ir 90°), tad saka, ka leņķis starp taisnēm ir 90°. Ja visi leņķi nav vienādi, tad par leņķi starp taisnēm pieņem jebkuru no šaurajiem leņķiem. Tā, piemēram, leņķis starp taisnēm 115. zīmējumā ir apmēram 50° liels.



115. zīm.

Ja taisnes apzīmē ar mazajiem burtiem *a* un *b*, tad leņķi starp tām pieraksta šādi: $\sphericalangle(ab) \approx 50°$.

Par leņķi starp diviem nogriežņiem sauc leņķi starp taisnēm, uz kurām šie nogriežņi atrodas. Analogi runā arī par leņķi starp taisni un nogriezni. Piemēram, leņķis starp nogriežņiem AB un CD ir $\sphericalangle(xy) \approx 30°$ starp atbilstošajām taisnēm x un y (sk. 115. zīm.).

BLAKUSLEŅĶI

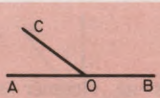
Divus leņķus sauc par blakusleņķiem, ja tiem viena mala kopēja, bet pārējās divas malas ir savstarpēji papildstari. Piemēram, leņķi AOC un COB ir blakusleņķi (116. zīm.).

Blakusleņķu summa ir vienāda ar izstieptu leņķi jeb 180°.

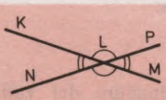
1) Viens no blakusleņķiem $\alpha = 65°$. Aprēķināt otra blakusleņķa β lielumu.

$\alpha + \beta = 180°$ (blakusleņķu summa);

$\beta = 180° - \alpha$; $\beta = 180° - 65° = 115°$.



116. zīm.



117. zīm.

2) Viens no blakusleņķiem ir 4 reizes lielāks nekā otrs. Cik liels ir katrs no šiem leņķiem?

Viens leņķis ... $x°$;
otrs leņķis ... $4x°$.
$x + 4x = 180$;
$5x = 180$; $x = 36$; $4x = 36 \cdot 4 = 144$.
Leņķu lielumi ir 144° un 36°.

KRUSTLEŅĶI

Divus leņķus sauc par krustleņķiem, ja viena leņķa malas ir otra leņķa malu papildstari. Krustleņķi ir, piemēram, leņķi *KLN* un *PLM*, kā arī *KLP* un *NLM* (117. zīm.). Krustleņķi ir savā starpā vienādi: $\sphericalangle KLN = \sphericalangle PLM$, $\sphericalangle KLP = \sphericalangle NLM$.

Der ievērot, ka, divām taisnēm krustojoties, rodas divi pāri krustleņķu.

Aprēķināt katru no četriem leņķiem, kas rodas, divām taisnēm krustojoties, ja triju leņķu summa ir 310°.

Atrisinājums (118. zīm.).
Dots. $\sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 + \sphericalangle 4 = 310°$.
Jāaprēķina: $\sphericalangle 1$, $\sphericalangle 2$, $\sphericalangle 3$, $\sphericalangle 4$.
$\sphericalangle 1 = 360° - 310° = 50°$;
$\sphericalangle 3 = \sphericalangle 1$ (kā krustleņķi); $\sphericalangle 3 = 50°$;
$\sphericalangle 3 + \sphericalangle 2 = 180°$ (kā blakusleņķi); $\sphericalangle 2 = 180° - \sphericalangle 3$;
$\sphericalangle 2 = 180° - 50° = 130°$;
$\sphericalangle 4 = \sphericalangle 2$; $\sphericalangle 2 = 130°$.

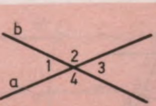
VIENĀDI NOGRIEŽŅI UZ LEŅĶA MALĀM (STARP PARALĒLĀM TAISNĒM)

Ja savstarpēji paralēlas taisnes, krustojot leņķa malas, uz vienas no tām atdala vienādus nogriežņus, tad arī uz leņķa otras malas tās atdala vienādus nogriežņus (Talesa teorēma).

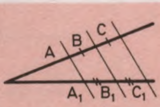
Ja $AB = BC$, tad arī $A_1B_1 = B_1C_1$ (119. zīm.).

Piezīme. Ievērot, ka vispār nepastāv vienādība starp nogriežņiem uz leņķa vienas malas ar nogriežņiem uz otras malas, proti, vispār $AB \neq A_1B_1$.

Talesa teorēmu izmanto nogriežņa dalīšanai vairākās vienādās daļās (sk. 17.1.).



118. zīm.

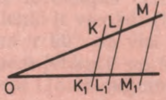


119. zīm.

PROPORCIONĀLI NOGRIEŽŅI UZ LEŅĶA MALĀM

Ja savstarpēji paralēlas taisnes krusto leņķa malas, tad uz tām atdalītie nogriežņi ir proporcionāli (120. zīm.):

$$\frac{KL}{K_1L_1}=\frac{LM}{L_1M_1}.$$



120. zīm.

Protams, pareizas ir arī šādas proporcijas:

$$\frac{OK}{OK_1}=\frac{KL}{K_1L_1},\quad \frac{KL}{K_1L_1}=\frac{KM}{K_1M_1}$$

u. tml.

P i e z ī m e. Proporcijās var iesaistīt arī paralēlo taišņu nogriežņus, ja nogriežņus uz leņķa malām ņem no leņķa virsotnes:

$$\frac{KK_1}{LL_1}=\frac{OK}{OK_1},\quad \frac{MM_1}{KK_1}=\frac{OM}{OM_1}$$

u. tml.

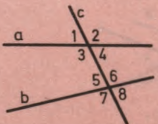
LEŅĶI STARP DIVĀM TAISNĒM, KURAS KRUSTO TREŠĀ TAISNE

Ja divas taisnes krusto trešā taisne, tad izveidojas pavisam 8 leņķi. Dažiem šo leņķu pāriem piešķir īpašus nosaukumus (121. zīm.):

3 un 6, 4 un 5 — šķērsleņķi;
3 un 5, 4 un 6 — vienpusleņķi;
1 un 5, 2 un 6 — kāpšļu leņķi.

Starp leņķu pāru savstarpējiem lielumiem pastāv ciešs sakars. Ja patiess kaut viens no tālāk minētajiem trim apgalvojumiem, tad patiesi arī pārējie divi:

šķērsleņķi ir vienādi;
vienpusleņķu summa ir 180°;
kāpšļu leņķi ir vienādi.

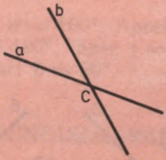


121. zīm.

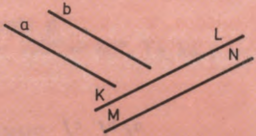
17.3. PARALĒLAS UN PERPENDIKULĀRAS TAISNES

KRUSTISKAS TAISNES

Divas taisnes sauc par krustiskām taisnēm, ja tām ir tikai viens kopējs punkts. Saka, ka taisnes *a* un *b* šajā punktā krustojas, un kopējo punktu *C* sauc par krustpunktu (122. zīm.).



122. zīm.



123. zīm.

PARALĒLAS TAISNES

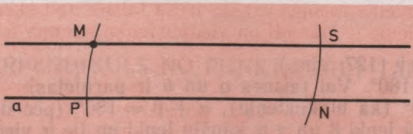
Divas taisnes plaknē sauc par savstarpēji paralēlām taisnēm, ja tās nekrustojas. Taišņu paralelitāti pierakstos apzīmē ar simbolu $\|$, piemēram, $a\|b$, $KL\|MN$ (123. zīm.).

Paralēlu taišņu definīcijā ir svarīgi piebilst, ka abas taisnes atrodas vienā plaknē, jo telpā var būt taisnes, kas nekrustojas un tomēr nav paralēlas (t. s. šķērsās taisnes).

PARALELITĀTES AKSIOMA

Caur punktu ārpus taisnes var novilkt tikai vienu dotajai taisnei paralēlu taisni.

124. zīmējumā parādīts, kā ar cirkuli un lineālu konstruē dotajai taisnei *a* paralēlu taisni, kura iet caur doto punktu *M* ārpus taisnes *a*:



124. zīm.

1) ap punktu M kā ap centru velk loku, kas krusto taisni a kādā punktā N;

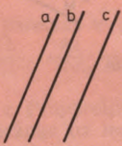
2) ap punktu N kā ap centru ar nemainītu rādiusu velk loku, līdz tas krusto taisni a kādā punktā P;

3) uz pirmā loka atzīmē punktu S, lai $NS = PM$;

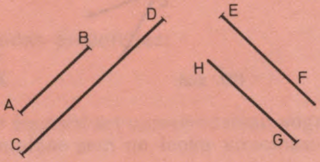
4) velk taisni MS; šī taisne ir paralēla a, t. i., $MS \parallel a$.

TRĪS PARALĒLAS TAISNES

Divas taisnes, kas paralēlas trešajai taisnei, paralēlas arī savā starpā. Piemēram, ja $a \parallel c$ un $b \parallel c$, tad arī $a \parallel b$ (125. zīm.).



125. zīm.



126. zīm.

PARALĒLI NOGRIEŽŅI UN STARI

Runā arī par nogriežņu un staru paralelitāti. Šajā gadījumā tiek domāta to taišņu paralelitāte, uz kurām atrodas dotie nogriežņi vai stari (126. zīm.):

$AB \parallel CD$; $EF \parallel GH$.

DIVU TAIŠŅU PARALELITĀTES PAZĪME

Ja, divām taisnēm krustojoties ar trešo taisni, šķērsleņķi ir vienādi (vai kāpšļu leņķi ir vienādi, vai vienpusleņķu summa ir 180°), tad šīs divas taisnes ir paralēlas.

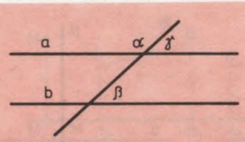
Pareiza ir arī apgrieztā teorēma, kas izsaka paralēlo taišņu īpašību.

Ja divas paralēlas taisnes krusto trešā taisne, tad šķērsleņķi ir vienādi, kāpšļu leņķi ir vienādi un vienpusleņķu summa ir 180°.

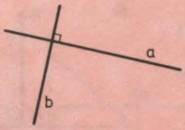
U z d e v u m i (127. zīm.).

1) $\alpha + \beta = 180°$. Vai taisnes a un b ir paralēlas?

$\alpha + \gamma = 180°$ (kā blakusleņķi), $\alpha + \beta = 180°$ (pēc dotā), tātad $\beta = \gamma$. Tā kā leņķi β un γ ir kāpšļu leņķi un tie ir vienādi, tad $a \parallel b$.



127. zīm.



128. zīm.

2) $a \parallel b$, $\alpha = 100°$. Aprēķināt leņķi β.
$\alpha + \gamma = 180°$, tāpēc $\gamma = 180° - 100° = 80°$. Tā kā $\beta = \gamma$ (jo $a \parallel b$), tad arī $\beta = 80°$.

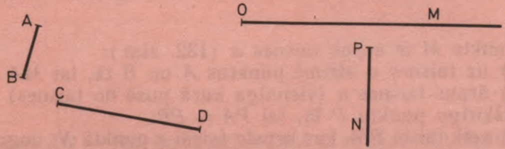
PERPENDIKULĀRAS TAISNES

Divas taisnes, kas krustojoties veido taisnus leņķus, sauc par savstarpēji perpendikulārām taisnēm. Ja taisnes a un b ir savstarpēji perpendikulāras, tad raksta $a \perp b$ (128. zīm.) vai $MN \perp PR$ u. tml.

Zīmējumos savstarpēji perpendikulāras taisnes (taišņu leņķi) pieņemts norādīt ar simbolu □ (kvadrātiņu).

PERPENDIKULĀRI NOGRIEŽŅI UN STARI

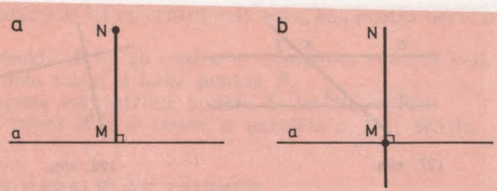
Nogriežņus vai starus arī mēdz saukt par perpendikulāriem, ja perpendikulāras ir taisnes, uz kurām atrodas šie nogriežņi vai stari, piemēram (129. zīm.),
$AB \perp CD$; $OM \perp PN$.



129. zīm.

PERPENDIKULS NO PUNKTA PRET TAISNI

Ja punkts M ir ārpus taisnes a, tad par perpendikulu no šī punkta M pret taisni a sauc nogriezni $MN \perp a$, kur N ir taisnes a punkts. Punktu N sauc par perpendikula pamatu (130. zīm. a).



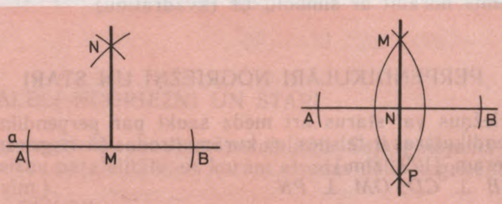
130. zīm.

Ja punkts M ir uz taisnes, tad par perpendikulu no punkta pret taisni sauc staru (vai taisni) $MN \perp a$ (130. zīm. b).

No 131. zīmējuma var saprast, kā konstruē perpendikulu no dotā punkta M pret doto taisni a, ja dotais punkts ir uz taisnes vai ārpus tās.

Punkts M ir uz taisnes a:

1) uz taisnes a atzīmē punktus A un B tā, lai $MA = MB$;
2) ārpus taisnes atzīmē punktu N tā, lai $AN = BN$;
3) velk staru MN; šis stars ir konstruējamais perpendikuls: $MN \perp a$.



131. zīm. 132. zīm.

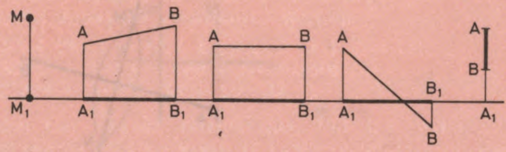
Punkts M ir ārpus taisnes a (132. zīm.):

1) uz taisnes a atzīmē punktus A un B tā, lai $MA = MB$;
2) ārpus taisnes a (vienalga kurā pusē no taisnes) atzīmē no M atšķirīgu punktu P tā, lai $PA = PB$;
3) velk taisni PM, kas krusto taisni a punktā N; nogrieznis MN ir konstruējamais perpendikuls: $MN \perp a$.

Caur jebkuru plaknes punktu var novilkt dotajai taisnei perpendikulāru taisni, pie tam tikai vienu.

PUNKTA UN NOGRIEŽŅA PROJEKCIJA UZ TAISNES

Par punkta M projekciju uz taisnes sauc no šī punkta pret taisni vilktā perpendikula pamatu M_1 uz šīs taisnes (133. zīm.).



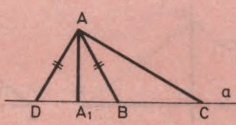
133. zīm.

Par kāda nogriežņa AB projekciju uz taisnes a sauc nogriezni A_1B_1 starp dotā nogriežņa galapunktu projekcijām A_1 un B_1 uz taisnes a.

Kā redzams 133. zīmējumā, nogriežņa projekcija uz taisnes var būt tikpat gara kā nogrieznis, arī īsāka vai pat tikai punkts.

PERPENDIKULS UN SLĪPNES PRET TAISNI

Nogriezni no punkta ārpus taisnes līdz kādam punktam uz taisnes, ja šis nogrieznis nav perpendikuls pret taisni, sauc par slīpni pret taisni. 134. zīmējumā nogriežņi AD, AB un AC ir slīpnes pret taisni a.



134. zīm.

Ja no kāda punkta ārpus taisnes pret taisni vilkts perpendikuls un slīpnes, tad

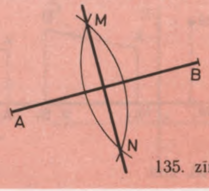
1) perpendikuls ir īsāks nekā jebkura slīpne;
2) vienādām slīpnēm ir vienādas projekcijas (un otrādi);
3) garākai slīpnei ir garāka projekcija (un otrādi).

Zīmējumā $AD = AB$, no tā izriet, ka $A_1D = A_1B$ (un otrādi);
$AC > AB$, no tā izriet, ka $A_1C > A_1B$ (un otrādi).

NOGRIEŽŅA VIDUSPERPENDIKULS

Par nogriežņa vidusperpendikulu sauc nogrieznim perpendikulāru taisni, kas krusto nogriezni tā viduspunktā.

Nogriežņa AB vidusperpendikula konstruēšana redzama 135. zīmējumā:



135. zīm.

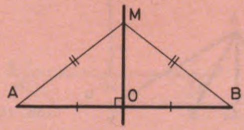
1) ārpus nogriežņa AB atzīmē divus punktus M un N tā, lai $AM = BM$ un $AN = BN$;

2) velk taisni MN; šī taisne ir nogriežņa AB vidusperpendikuls: $MN \perp AB$ un $AO = OB$ (kur O ir perpendikula MN krustpunkts ar nogriezni AB).

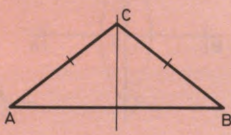
Ar šo konstrukciju nogrieznis AB ir arī sadalīts divās vienādās daļās.

NOGRIEŽŅA VIDUSPERPENDIKULA ĪPAŠĪBA

Nogriežņa vidusperpendikula jebkurš punkts ir vienādā attālumā no nogriežņa galapunktiem. Ja punkts M ir uz nogriežņa AB vidusperpendikula, tad $AM = MB$ (136. zīm.).



136. zīm.



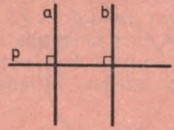
137. zīm.

Pareizs arī apgrieztais apgalvojums: jebkurš punkts, kas atrodas vienādā attālumā no nogriežņa galapunktiem, ir uz nogriežņa vidusperpendikula. Ja $AC = CB$, tad punkts C ir uz nogriežņa AB vidusperpendikula (137. zīm.).

SAKARS STARP TAIŠŅU PARALELITĀTI UN PERPENDIKULARITĀTI

Divas taisnes, kas perpendikulāras pret trešo taisni, ir savā starpā paralēlas. Piemēram, ja $a \perp p$ un $b \perp p$, tad $a \parallel b$ (138. zīm.).

Taisne, kas perpendikulāra pret vienu no divām paralēlām taisnēm, ir perpendikulāra arī pret otru no tām, proti, ja $a \parallel b$ un $p \perp a$, tad arī $p \perp b$.



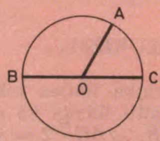
138. zīm.

17.4. RIŅĶA LĪNIJA. NOGRIEŽŅI UN LEŅĶI RIŅĶA LĪNIJĀ

RIŅĶA LĪNIJAS JĒDZIENS

Par riņķa līniju sauc noslēgtu plaknes līniju, kuras visi punkti ir vienādā attālumā no kāda viena punkta. Šo punktu sauc par riņķa līnijas centru.

Nogriezni, kas savieno riņķa līnijas kādu punktu ar centru, sauc par riņķa līnijas rādiusu. Nogriezni, kas savieno riņķa līnijas divus punktus un iet caur centru, sauc par diametru (139. zīm.):



139. zīm.

O — riņķa līnijas centrs;
OA — rādiuss;
BC — diametrs.

Riņķa līnijas rādiusu un arī tā garumu parasti apzīmē ar burtu r, bet diametru vai tā garumu ar d. Skaidrs, ka $d = 2r$. Riņķa līniju, kuras centrs ir punkts O un rādiuss r, apzīmē ar $(O;\ r)$.

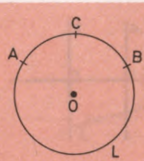
Raksta arī *r.l.* $(O;\ r)$ vai, ja rādiuss nav dots, *r.l.* (O).

RIŅĶA LĪNIJU VIENĀDĪBA

Divas riņķa līnijas sauc par vienādām, ja tās var pārvietot tā, ka tās sakrīt. Riņķa līniju vienādība ir saistīta ar to rādiusu un diametru vienādību.

LOKS

Riņķa līnijas daļu starp riņķa līnijas diviem punktiem sauc par riņķa līnijas loku. Loku apzīmē ar īpašu simbolu $\smile$, piemēram, $\smile MN$. Ja loks lielāks nekā riņķa līnijas puse, tad skaidrības labad



140. zīm.

starp galapunktiem norāda vēl kādu punktu uz loka. 140. zīmējumā riņķa līnija ir sadalīta 3 lokos: $\smile AC$, $\smile CB$ un $\smile ALB$.

LOKU VIENĀDĪBA

Divus riņķa līnijas lokus sauc par vienādiem, ja tos var pārvietot tā, ka tie sakrīt.

Ja viens loks vienāds ar otra loka daļu, tad saka, ka otrais loks ir lielāks nekā pirmais. 140. zīmējumā $\smile AC = \smile CB$; $\smile AC < \smile ALB$.

DARBĪBAS AR LOKIEM

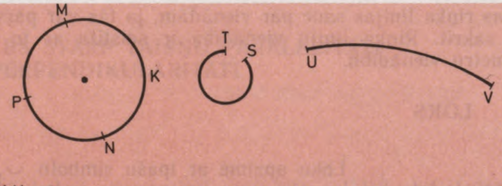
Vienas un tās pašas riņķa līnijas lokus var saskaitīt, atņemt, reizināt un dalīt ar skaitli līdzīgi kā nogriežņus. Tā, piemēram, $\smile AC + \smile CB = \smile ACB$, $\smile AC \cdot 2 = \smile ACB$ (sk. 140. zīm.).

LOKA GRĀDUMĒRS

Par loka vienību pieņem loka grādu, kas ir $\frac{1}{360}$ no riņķa līnijas.

Loka grādu apzīmē ar 1°. Tātad visas riņķa līnijas lielums jeb grādumērs ir 360°, riņķa līnijas ceturtdaļas lielums ir 90° u. tml. 141. zīmējumā redzamo loku aptuvenie lielumi grādos ir šādi:

$$\smile MKN = 180°, \quad \smile PN = 90°, \quad \smile TS = 320°, \quad \smile UV = 60°.$$

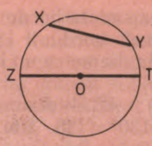


141. zīm.

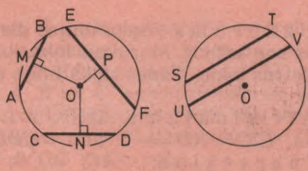
Līdzīgi kā gadījumos ar nogriežņu garumu un leņķa grādumēru (sk. 1.§ 7. p. un 2.§ 12. p.), arī loka grādumēra jēdzienu runā un rakstos ne vienmēr stingri šķir no loka jēdziena. Tā, piemēram, ar pierakstu $\smile AB$ saprot gan loku pašu (kā ģeometrisku figūru), gan tā grādumēru (skaitli), rakstot, piemēram, $\smile AB = 40°$.

HORDA

Nogriezni, kas savieno riņķa līnijas divus punktus, sauc par hordu. Tātad diametrs arī ir horda, kas iet caur centru. 142. zīmējumā nogrieznis XY ir horda, nogrieznis ZT ir horda un reizē arī diametrs.



142. zīm.



143. zīm.

LOKI, HORDA UN TO ATTĀLUMI LĪDZ CENTRAM

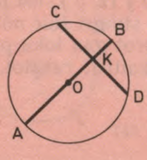
Saka, ka hordai AB atbilst loks AB vai horda AB savelk loku AB, pie tam ar to saprot mazāko no abiem lokiem AB (ja nav citāda atruna). Starp hordu un to savilkto loku garumiem un hordu attālumiem līdz centram vienā un tajā pašā riņķa līnijā pastāv šādas sakarības (tās var saskatīt 143. zīmējumā):

1) vienādām hordām atbilst vienādi loki (un otrādi);
2) lielākai hordai atbilst lielāks loks (un otrādi);
3) vienādas hordas atrodas vienādā attālumā no centra;
4) lielākā horda ir tuvāk centram;
5) loki starp paralēlām hordām ir vienādi.

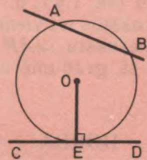
PRET HORDU PERPENDIKULĀRS DIAMETRS

Starp hordu, kas neiet caur riņķa līnijas centru, starp tās savilktajiem lokiem un starp riņķa līnijas diametru pastāv noteikts sakars (144. zīm.). Ja ir patiess kaut viens no tālāk minētajiem trim apgalvojumiem, tad patiesi ir arī pārējie divi:

144. zīm.



145. zīm.



146. zīm.

1) diametrs ir perpendikulārs pret hordu;
2) diametrs dala hordu uz pusēm;
3) diametrs dala hordas savilktos lokus uz pusēm.

Uzdevums. Riņķa līnijas diametrs sadala hordu divos 7 cm garos nogriežņos. Mazākais loks, kas savelk hordu, ir 130°. Aprēķināt četrus lokus, kādos riņķa līniju sadala diametra un hordas gala punkti.

Atrisinājums. Dots: *r. l.* (O); AB — diametrs; CD — horda; $CK = KD =$ 7 cm; $\smile CBD = 130°$ (145. zīm.).

Jāaprēķina: $\smile AC$; $\smile CB$; $\smile BD$; $\smile DA$.

1) Ja diametrs dala hordu uz pusēm, tad tas dala uz pusēm arī hordas savilktos lokus:

$\smile CB = \smile BD$; $\smile CB = \smile BD = 130° : 2 = 65°$.

2) $\smile CAD = 360° - \smile CBD$;

$\smile CAD = 360° - 130° = 230°$;

$\smile CA = \smile AD = 230° : 2 = 115°$.

Atbilde. $\smile CB = \smile BD = 65°$; $\smile CA = \smile AD = 115°$.

RIŅĶA LĪNIJA UN TAISNE

Par sekanti sauc taisni, kurai ar riņķa līniju ir divi kopēji punkti (146. zīm. taisne AB).

Par pieskari sauc taisni, kurai ar riņķa līniju tikai viens kopējs punkts (146. zīm. taisne AD). Šo kopējo punktu sauc par pieskaršanās punktu (punkts E).

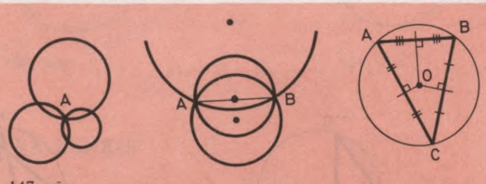
PIESKARES ĪPAŠĪBA

Riņķa līnijas pieskare ir perpendikulāra pret rādiusu, kas vilkts no pieskaršanās punkta: $CD \perp OE$.

Patiess arī apgrieztais apgalvojums: taisne, kas perpendikulāra pret rādiusu tā galapunktā uz riņķa līnijas, ir riņķa līnijas pieskare.

RIŅĶA LĪNIJA CAUR 1, 2 UN 3 PUNKTIEM

Caur vienu doto punktu A var novilkt neierobežotu skaitu riņķa līniju, pie tam rādiusus vai centrus var izvēlēties pēc patikas (147. zīm.).



147. zīm.

Caur diviem dotiem punktiem A un B var novilkt neierobežotu skaitu riņķa līniju, pie tam to rādiusus var izvēlēties pēc patikas, bet centri jāņem uz nogriežņa AB vidusperpendikula (147. zīm.).

Caur trim dotiem punktiem A, B un C, kas neatrodas uz vienas taisnes, var novilkt tieši vienu riņķa līniju, pie tam tās centrs ir nogriežņa AB, BC un CA vidusperpendikulu krustpunkts O, bet rādiuss — attālums $OA = OB = OC$ (147. zīm.).

DIVU RIŅĶA LĪNIJU SAVSTARPĒJIE STĀVOKĻI

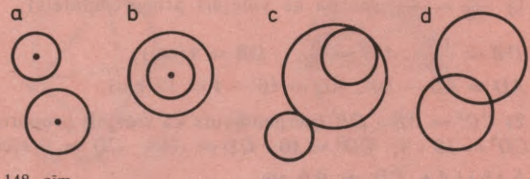
Atkarībā no riņķa līniju rādiusa garuma un attāluma starp centriem divas riņķa līnijas var atrasties dažādos savstarpējos stāvokļos. Raksturīgākie no tiem ir šādi:

1) riņķa līnijām nav neviena kopēja punkta un nav arī kopēja centra (148. zīm. *a*);

2) riņķa līnijas ir koncentriskas, ja tām kopējs centrs (148. zīm. *b*);

3) riņķa līnijas pieskaras viena otrai iekšēji vai ārēji, ja tām ir tikai viens kopējs punkts (148. zīm. *c*);

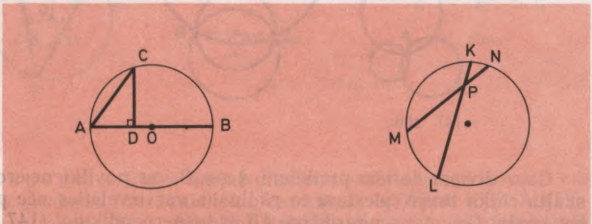
4) riņķa līnijas krustojas, ja tām ir divi kopēji punkti (148. zīm. *d*).



148. zīm.

METRISKĀS SAKARĪBAS STARP NOGRIEŽŅIEM RIŅĶA LĪNIJĀ

1. Perpendikuls, kas vilkts no riņķa līnijas kāda punkta pret diametru, ir vidējais proporcionālais starp diametra nogriežņiem, kuros to sadala perpendikula pamats: $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}$ (149. zīm.).



149. zīm.

2. Horda, kas vilkta no diametra galapunkta, ir vidējais proporcionālais starp diametru un savu projekciju uz diametra: $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$.

3. Ja krustojas divas hordas, tad vienas hordas abu nogriežņu reizinājums ir vienāds ar otras hordas abu nogriežņu reizinājumu: $MP \cdot PN = LP \cdot PK$.

U z d e v u m s. Riņķa līnijas diametra garums ir 16 cm, bet tās hordas garums, kas novilkta no diametra gala punkta — 8 cm. Aprēķināt perpendikula garumu, kas vilkts no hordas galapunkta pret diametru.

A t r i s i n ā j u m s. Dots: *r. l.* (O); AB — diametrs; CB — horda; $CD \perp AB$; $AB = 16$ cm; $BC = 8$ cm (150. zīm.).

J ā a p r ē ķ i n a: CD.

1) $\frac{AB}{CB} = \frac{CB}{DB}$ (horda kā vidējais proporcionālais);

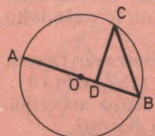
$DB = \frac{CB^2}{AB}$; $DB = \frac{8^2}{16}$; $DB = 4$(cm);

$AD = AB - DB$; $AD = 16 - 4 = 12$(cm).

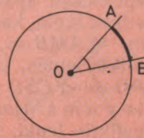
2) $CD^2 = AD \cdot DB$ (perpendikuls kā vidējais proporcionālais);

$CD^2 = 12 \cdot 4$; $CD^2 = 48$; $CD = \sqrt{48}$; $CD \approx 6{,}9$(cm).

A t b i l d e. $CD \approx 6{,}9$ cm.



150. zīm.



151. zīm.

CENTRA LEŅĶIS

Leņķi, kura virsotne ir riņķa centrā, sauc par centra leņķi. Ja tā malas krusto riņķa līniju punktos A un B (15. zīm.), tad saka, ka leņķis ietver loku AB jeb balstās uz loka AB (ar to domā loku, kas atrodas leņķa iekšpusē).

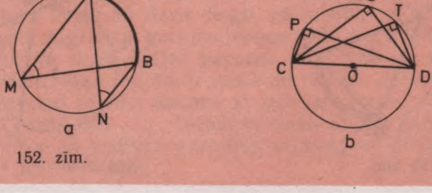
Kā zināms, leņķa grādumērs ir izteikts leņķa grādos, bet loka grādumērs — loka grādos, taču starp šiem abiem mēriem pastāv cieša atbilstība: cik leņķa grādu centra leņķī, tik loka grādu leņķa ietvertajā lokā. Tā, piemēram, ja $\sphericalangle AOB = 40°$, tad no tā secināms, ka arī $\smile AB = 40°$ (un otrādi).

Taču jāievēro, ka vienādība nepastāv starp centra leņķi un loku (kā divām figūrām), bet tikai starp to grādumēriem (kā skaitļiem), tāpēc vienādības zīmi aizstāj ar atbilstības zīmi: $\sphericalangle AOB \triangleq \smile AB$. Šo sakaru starp leņķi un loku īsāk izsaka tā: centra leņķi mēra ar tā ietverto loku.

IEVILKTS LEŅĶIS

Leņķi, kura virsotne ir uz riņķa līnijas un malas krusto riņķa līniju, sauc par ievilktu leņķi. Piemēram, $\sphericalangle AMB$ un $\sphericalangle ANB$ ir ievilkti leņķi (152. zīm. *a*).

Ievilktu leņķi mēra ar tā loka pusi, uz kura tas balstās; raksta $\sphericalangle AMB = \frac{1}{2} \smile AB$. Piemēram, ja $\smile AOB = 82°$, tad $\sphericalangle AMB = $ $= 82° : 2 = 41°$.



152. zīm.

No iepriekšējā apgalvojuma izriet šādi secinājumi:

1) ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku, ir vienādi, piemēram, $\sphericalangle AMB = \sphericalangle ANB$;

2) ievilkts leņķis, kas balstās uz diametra, ir taisns, piemēram, $\sphericalangle CPD = \sphericalangle CSD = \sphericalangle CTD = 90^\circ$ (152. zīm. *b*).

U z d e v u m s. Horda sadala riņķa līniju attiecībā 5 : 13. Cik lieli ir ievilktie leņķi, kas balstās uz šo hordu?

A t r i s i n ā j u m s. Dots: *r. l.* (*O*); $\smile AMB : \smile ANB = 5 : 13$; $\sphericalangle AMB$ un $\sphericalangle ANB$ — ievilkti leņķi (153. zīm.).

J ā a p r ē ķ i n a: $\sphericalangle AMB$ un $\sphericalangle ANB$.

1) $\smile AMB : \smile ANB = 5 : 13$;

$5x \ldots \smile AMB$;

$13x \ldots \smile ANB$;

$5x + 13x = 360^\circ$; $x = 20^\circ$;

$\smile AMB = 5x = 5 \cdot 20^\circ = 100^\circ$; $\smile ANB = 13x = 13 \cdot 20^\circ = 260^\circ$.

2) Ievilktu leņķi mēra ar pusi tā loka, uz kura tas balstās:

$\sphericalangle AMB \triangleq \frac{1}{2} \smile ANB$; $\sphericalangle ANB \triangleq \frac{1}{2} \smile AMB$;

$\sphericalangle AMB = \frac{1}{2} \cdot 260^\circ = 130^\circ$; $\sphericalangle ANB = \frac{1}{2} \cdot 100^\circ = 50^\circ$.

A t b i l d e. $\sphericalangle AMB = 130^\circ$; $\sphericalangle ANB = 50^\circ$.

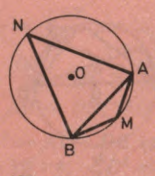
HORDAS-PIESKARES LEŅĶIS

Leņķi, kura virsotne atrodas uz riņķa līnijas, bet malas ir horda un pieskare, sauc par hordas-pieskares leņķi. Hordas-pieskares leņķi mēra ar tā loka pusi, ko tas ietver (154. zīm.):

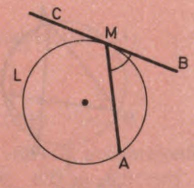
$\sphericalangle AMB \triangleq \frac{1}{2} \smile AM$; $\sphericalangle AMC \triangleq \frac{1}{2} \smile ALM$; piemēram, ja $\sphericalangle 4\, AMB = 48^\circ$, tad $\smile AM = 48^\circ \cdot 2 = 96^\circ$.

U z d e v u m s. Riņķa līnijā novilktas hordas *KP, PL* un *LK*; hordas-pieskares leņķis $KLM = 74^\circ$. Aprēķināt $\sphericalangle KLP$.

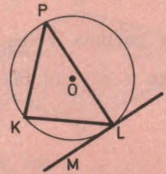
A t r i s i n ā j u m s. Dots: *r. l.* (*O*); *LM* — pieskare; $\sphericalangle KLM = 74^\circ$ (155. zīm.).



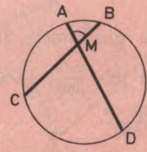
153. zīm.



154. zīm.



155. zīm.



156. zīm.

J ā a p r ē ķ i n a: $\sphericalangle KPL$.

1) Hordas-pieskares leņķi KLM mēra ar tā ietvertā loka KL pusi, tāpēc $\smile KL = 74° \cdot 2 = 148°$.

2) Ievilktu leņķi KPL mēra ar pusi loka KL, uz kā tas balstās, tāpēc $\sphericalangle KPL = \frac{1}{2} \cdot 148° = 74°$.

A t b i l d e. $\sphericalangle KPL = 74°$.

LEŅĶIS STARP HORDĀM

Leņķi, ko veido divas krustojošās hordas, mēra ar tā malu ietvertā loka un malu papildstaru ietvertā loka summas pusi (156. zīm.):

$$\sphericalangle AMB \triangleq \frac{1}{2} (\smile AB + \smile CD),$$

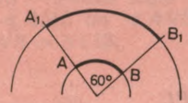
piemēram, ja $\smile AB = 30°$, $\smile CD = 80°$, tad $\sphericalangle AMB = = \frac{30° + 80°}{2} = 55°$.

RIŅĶA LĪNIJAS GARUMS

Lai cik sīku izvēlētos garuma mēra vienību (nogriezni), to nevar tieši uzklāt uz riņķa līnijas. Tāpēc nav iespējams tieši izmērīt riņķa līnijas garumu līdzīgi kā mēra taisnes nogriežņa garumu. Var gan iztēloties riņķa līniju kā tievu diegu, pārgrieztu un iztaisnotu par nogriezni un šī nogriežņa garumu pieņemt par riņķa līnijas garumu. Var pierādīt, ka riņķa līnijas garuma attiecība pret riņķa līnijas diametru visām riņķa līnijām ir viena un tā pati, aptuveni 3,14. Šīs attiecības precīzo vērtību apzīmē ar grieķu burtu π (tā precīzāka vērtība ir 3,141592653 . . .). Tātad, ja riņķa līnijas garumu apzīmē ar C, diametra un rādiusa garumus attiecīgi ar D un R, tad $C = \pi D$ jeb $C = 2\pi R$.

LOKA GARUMS

Ja loka grādumērs ir 1°, tad loka garums ir $\frac{1}{360}$ riņķa līnijas garuma jeb $\frac{\pi D}{360}$. Ja loka grādumērs ir $n°$, tad tā garums ir $l_{n°} = \frac{\pi D \cdot n}{360}$.



157. zīm.

Jāatšķir jēdzieni «loka garums» un «loka grādumērs». Loka garums ir atkarīgs ne tikai no loka grādumēra, bet arī no loka rādiusa. Piemēram, $\smile AB = 60°$ un arī $\smile A_1B_1 = 60°$, bet $l_{AB} < l_{A_1B_1}$ (157. zīm.).

18. DAUDZSTŪRI. RIŅĶIS

18.1. DAUDZSTŪRIS UN TĀ LAUKUMS

PRIEKŠSTATS PAR PLAKNES APGABALU

Punktam nav nekādu izmēru, līnijai ir tikai garums (bet nav nekāda «platuma» vai «biezuma»), tāpēc nesaka, ka punkts vai līnija aizņem kādu plaknes apgabalu. Taču ir ģeometriskas figūras, kuras aizņem no visām pusēm ar līniju ierobežotu kādu plaknes daļu jeb apgabalu. Tā, piemēram, trijstūris ir plaknes apgabals, ko ierobežo slēgta lauzta līnija; riņķis ir plaknes apgabals, ko ierobežo riņķa līnija.

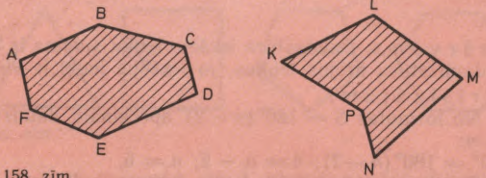
Arī leņķis aizņem zināmu plaknes apgabalu, taču tas nav norobežots ar līniju no visām pusēm.

Līniju, kas ierobežo plaknes apgabalu, sauc par šī apgabala kontūru, bet šīs kontūras garumu sauc par apgabala perimetru.

DAUDZSTŪRA JĒDZIENS

Par daudzstūri sauc plaknes daļu jeb apgabalu, ko ierobežo vienkārša slēgta lauzta līnija.

Ja taisnes, uz kurām atrodas daudzstūra malas, nekrusto daudzstūra pārējās malas, tad daudzstūri sauc par izliektu daudz-



158. zīm.

stūri, piemēram, daudzstūris $ABCDEF$ ir izliekts (158. zīm.). Pretējā gadījumā daudzstūri sauc par ieliektu, piemēram, $KLMNP$ ir ieliekts daudzstūris. Turpmāk aplūkosim galvenokārt tikai izliektus daudzstūrus.

DAUDZSTŪRA ELEMENTI

Lauztā līnija, kas ierobežo daudzstūri, ir tā kontūra, bet lauztās līnijas garums — daudzstūra perimetrs.

Lauztās līnijas posmus AB, BC, CD, ... sauc par daudzstūra malām, bet to galapunktus A, B, C, ... — par daudzstūra virsotnēm (158. zīm.).

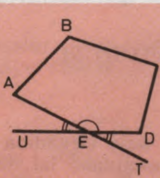
Atkarībā no malu (virsotņu vai leņķu) skaita daudzstūrus sauc par trijstūriem, četrstūriem, piecstūriem utt.

Nogriežņus, kas savieno daudzstūra divas virsotnes, kuras neatrodas blakus, sauc par daudzstūra diagonālēm, piemēram, diagonāle ir nogrieznis BD (sk. 158. zīm.).

DAUDZSTŪRA LEŅĶI

Leņķus starp daudzstūra malām sauc par daudzstūra iekšējiem leņķiem (piemēram, $\sphericalangle AED$), bet to blakusleņķus — par ārējiem leņķiem (159. zīm.). Katram iekšējam leņķim ir divi savā starpā vienādi ārējie leņķi (piemēram, $\sphericalangle DET$ un $\sphericalangle UEA$).

Daudzstūra iekšējo leņķu summa $S = 180°(n - 2)$, kur n — daudzstūra malu skaits. Tā, piemēram, piecstūra iekšējo leņķu summa ir $180°(5 - 2) = 540°$.



159. zīm.

Jebkura daudzstūra ārējo leņķu summa ir 360°. (Šajā summā ieskaita tikai vienu no abiem ārējiem leņķiem pie katras virsotnes.)

U z d e v u m s. Daudzstūra iekšējo leņķu summa ir 720°. Aprēķināt daudzstūra ārējos leņķus, ja iekšējie leņķi ir vienādi.

A t r i s i n ā j u m s.

1) No formulas $S = 180°(n - 2)$ aprēķinām daudzstūra malu skaitu n:

$720° = 180°(n - 2)$; $4 = n - 2$; $n = 6$.

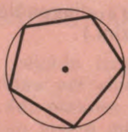
2) Daudzstūra visu ārējo leņķu summa ir 360°; tā kā iekšējie leņķi ir vienādi, tad vienādi ir arī ārējie leņķi:
$360° : 6 = 60°$.

A t b i l d e. Daudzstūra katrs ārējais leņķis ir 60°.

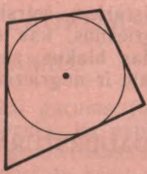
DAUDZSTŪRIS UN RIŅĶA LĪNIJA

Daudzstūri, kura visas virsotnes ir uz riņķa līnijas, sauc par riņķa līnijā ievilktu daudzstūri. Par riņķa līniju tad saka, ka tā ir apvilkta ap daudzstūri (160. zīm.).

Daudzstūri, kura visas malas pieskaras riņķa līnijai, sauc par riņķa līnijai apvilktu daudzstūri. Riņķa līnija tad ir ievilkta daudzstūrī (161. zīm.).



160. zīm.



161. zīm.

Ne ap katru daudzstūri var apvilkt riņķa līniju un arī ne katrā daudzstūrī var ievilkt riņķa līniju. Katrā riņķa līnijā gan var ievilkt vai ap to apvilkt daudzstūri ar jebkuru malu skaitu.

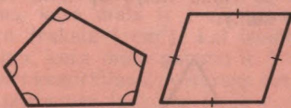
REGULĀRI DAUDZSTŪRI

Daudzstūrus, kuriem visas malas un leņķi ir vienādi, sauc par regulāriem daudzstūriem (162. zīm.).

Der ievērot, ka tikai malu vienādība vai tikai leņķu vienādība vien nav pietiekams nosacījums, lai daudzstūris būtu regulārs: eksistē vienādmalu daudzstūri un eksistē arī vienādleņķu daudz-

162. zīm.

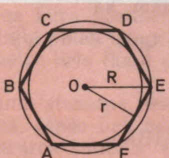
stūri, kuri nav regulāri (163. zīm.). Vienīgi par trijstūri var teikt, ka vienādmalu trijstūris, vienādleņķu trijstūris un regulārs trijstūris ir viena un tā paša jēdziena trejādi nosaukumi.



163. zīm.

REGULĀRS DAUDZSTŪRIS UN RIŅĶA LĪNIJA

Jebkurā regulārā daudzstūrī var ievilkt riņķa līniju un ap to apvilkt riņķa līniju. Abu riņķa līniju kopējo centru *O* sauc par regulāra daudzstūra *ABCDEF* centru (164. zīm.). Ievilktās riņķa līnijas rādiusu parasti apzīmē ar *r*, apvilktās — ar *R*.



164. zīm.

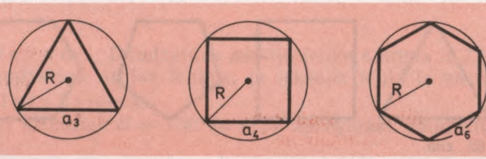
METRISKĀS SAKARĪBAS REGULĀRĀ DAUDZSTŪRĪ

Apzīmējot regulāra daudzstūra malu skaitu ar n, malas garumu ar a_n un apvilktās riņķa līnijas rādiusu ar R, pastāv šāda vispārīga sakarība:

$$a_n = 2R\sin\frac{180°}{n}.$$

No tās izriet (165. zīm.), ka

$$a_3 = R\sqrt{3}\,; \quad a_4 = R\sqrt{2}\,; \quad a_6 = R.$$

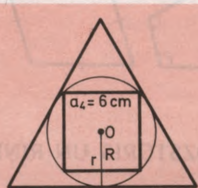


165. zīm.

Vispārīgo sakarību starp regulāra daudzstūra malas garumu un ievilktās riņķa līnijas rādiusu izsaka formula

$$a_n = 2r\text{tg}\frac{180°}{n}.$$

P i e m ē r s. Riņķa līnijā ievilkta kvadrāta malas garums ir 6 cm. Aprēķināt ap šo riņķa līniju apvilkta regulāra trijstūra malas garumu (166. zīm.).



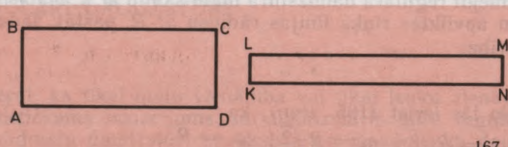
166. zīm.

No formulas $a_4 = R\sqrt{2}$ izriet, ka apvilktas riņķa līnijas rādiuss $R = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$ (cm). Savukārt no formulas par apvilktā regulārā daudzstūra malas garumu atrodam, ka

$$a_3 = 3r\text{tg}\frac{180°}{3} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{tg}60° = 6 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} =$$
$$= 6\sqrt{6} \text{ (cm)}.$$

LAUKUMS UN TĀ ĪPAŠĪBAS

Laukuma jēdzienu grūti definēt, taču priekšstatu par plaknes apgabala laukumu gūstam jau ikdienas pieredzē. Piemēram, taisnstūra *ABCD* garums un perimetrs ir mazāki nekā taisnstūra *KLMN* garums un perimetrs, taču pirmā laukuma izkrāsošanai vajadzētu vairāk krāsas nekā otrā taisnstūra izkrāsošanai (167. zīm.). Tādē-



167. zīm.

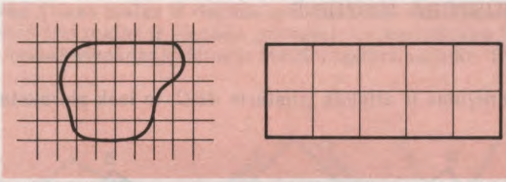
jādi krāsas daudzums atkarīgs nevis no šo taisnstūru garuma vai perimetra, bet gan no to laukuma: pirmajam taisnstūrim laukums ir lielāks nekā otrajam. No ikdienas pieredzes zinām šādas laukuma īpašības, kas zināmā mērā aizstāj laukuma tiešu definīciju:

1) vienādiem plaknes apgabaliem ir vienādi laukumi;

2) ja plaknes apgabalu sadala daļās un tās sakārto citādi (tomēr tā, ka tās savstarpēji nesedzas), tad apgabala laukums nemainās.

LAUKUMA MĒRĪŠANA

Par laukuma mērvienību pieņem tāda kvadrāta laukumu, kura malas garums ir viena garuma vienība. Tā, piemēram, tāda kvadrāta laukums, kura mala ir 1 cm gara, tiek nosaukts par kvadrātcentimetru (raksta 1 cm^2). Lai izmērītu, piemēram, tāda taisnstūra laukumu, kura malu garumi ir 5 cm un 2 cm, varam sadalīt šo taisnstūri kvadrātiņos, no kuriem katra laukums ir 1 cm^2. Acīmredzami šī taisnstūra laukums ir 10 cm^2 (168. zīm.).



168. zīm.

Nelielu laukumu mērīšanai var izmantot arī t. s. paleti — caurspīdīgu papīru, uz kura uzzīmēts vienu kvadrātcentimetru lielu rūtiņu tīkls. Uzklājot paleti uz mērāmās figūras, var tieši izskaitīt, cik kvadrātcentimetru liels (kaut aptuveni) ir figūras laukums (sk. 168. zīm.).

Figūras laukuma atrašana tiešas mērīšanas ceļā ir ne vienmēr ērta vai iespējama, tāpēc tiek meklētas formulas, kā, zinot tikai figūras dažus lineāros izmērus (centimetros, metros u. tml.) un dažu leņķu lielumus (grādos), var aprēķināt figūras laukumu. Tā, piemēram, taisnstūra laukumu var aprēķināt, reizinot tā garumu ar platumu (sk. 168. zīm.). Kā aprēķināt dažādu citu figūru laukumus, par to doti norādījumi reizē ar šo figūru apskatu.

VIENĀDAS UN VIENLIELAS FIGŪRAS

Figūras, kurām ir vienādi laukumi, sauc par vienlielām figūrām. Saskaņā ar laukuma 1. īpašību figūras, kuras ir vienādas, ir arī vienlielas, taču ne otrādi: vienlielas figūras var arī nebūt vienādas. 169. zīmējumā redzamas 4 vienlielas figūras, no kurām vienādas ir tikai 1. un 4. figūra.

169. zīm.

DAUDZSTŪRA LAUKUMS

Lai aprēķinātu jebkura daudzstūra laukumu, var izmantot laukuma 2. īpašību: daudzstūri var sadalīt trijstūros, aprēķināt un saskaitīt to laukumus.

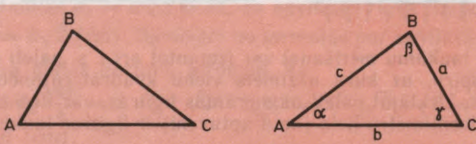
Ap riņķa līniju apvilkta daudzstūra laukumu S var aprēķināt pēc formulas $S = pr$, kur p — pusperimetrs, r — ievilktās riņķa līnijas rādiuss. Šī formula tātad ir derīga arī jebkuram regulāram daudzstūrim.

18.2. TRIJSTŪRIS

TRIJSTŪRA JĒDZIENS

Par trijstūri sauc daudzstūri, kuram ir trīs malas. Trijstūri var definēt arī kā plaknes apgabalu, ko ierobežo trīs nogriežņi

170. zīmējumā ir attēlots trijstūris ABC; to īsāk pieraksta šādi: $\triangle ABC$.



170. zīm.

TRIJSTŪRA ELEMENTI

Trijstūrim ABC ir trīs malas AB, BC un CA, trīs virsotnes A, B un C, un trīs leņķi; trijstūra virsotnes reizē ir arī trijstūra leņķu virsotnes.

Attiecībā pret virsotni vai leņķi A malu BC sauc par pretējo malu jeb pretmalu, bet malas AB un AC — par pieguļošām malām jeb piemalām. Līdzīgi runā arī par pretleņķiem un pieleņķiem: tā, piemēram, malas BC pretleņķis ir leņķis A, bet pieleņķi ir leņķi B un C.

Virsotņu vai leņķu A, B, C pretmalas mēdz apzīmēt ar atbilstošiem maziem burtiem a, b un c. Leņķus A, B un C apzīmē arī ar grieķu alfabēta attiecīgajiem pirmajiem burtiem α, β un γ (170. zīm.).

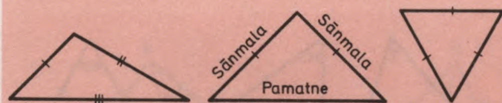
TRIJSTŪRU VEIDI

Atkarībā no leņķiem trijstūrus iedala šādi (171. zīm.): a) šaurleņķu trijstūros (visi leņķi ir šauri), b) taisnleņķa trijstūros (viens leņķis ir taisns) un c) platleņķa trijstūros (viens leņķis ir plats). Šaurleņķu un platleņķa trijstūrus sauc arī par slīpleņķu trijstūriem.

Taisnleņķa trijstūrī taisnā leņķa pretmalu sauc par hipotenūzu, bet malas, kas veido taisno leņķi — par katetēm (171. zīm.).

171. zīm.

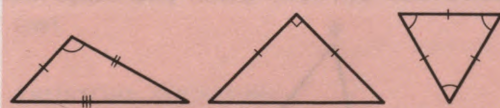
Atkarībā no malu savstarpējā garuma izšķir a) dažādmalu trijstūrus (visas malas ir dažāda garuma); b) vienādmalu trijstūrus (visas trīs malas ir vienāda garuma); c) vienādsānu trijstūrus (divas malas vienādas). Minēto veidu trijstūri parādīti 172. zīmējumā.



172. zīm.

Vienādsānu trijstūrī vienādās malas sauc par sānu malām, bet trešo malu — par pamatni. Tātad arī vienādmalu trijstūri var uzlūkot par vienādsānu trijstūri, jebkuras divas tā malas pieņemot par sānu malām.

Dažkārt trijstūru veidu norāda reizē pēc to malām un leņķiem (173. zīm.).



173. zīm.

SAKARĪBAS STARP TRIJSTŪRA LEŅĶIEM UN MALĀM

Trijstūrī pret vienādām malām atrodas vienādi leņķi (un otrādi); pret lielāko malu atrodas lielākais leņķis (un otrādi).

No šī apgalvojuma izriet šādi secinājumi:

1) vienādmalu trijstūris ir arī vienādleņķu trijstūris;

2) vienādsānu trijstūrī leņķi pie pamatnes ir vienādi.

Trijstūrī jebkuru divu malu summa ir lielāka nekā trešā mala.

Izmantojot šo īpašību, var noteikt, vai eksistē, piemēram, trijstūris, kura malu garumi ir a) 8, 6, 5; b) 2, 7, 4:

a) $8+6>5$, $8+5>6$ un $6+5>8$, tātad tāds trijstūris eksistē;

b) $2+7>4$, $7+4>2$, bet $2+4<7$, tātad tāds trijstūris neeksistē.

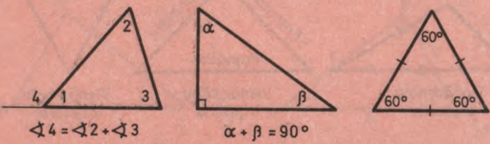
TRIJSTŪRU LEŅĶU SUMMA

Trijstūra iekšējo leņķu summa ir 180°.

No tā izriet:

1) trijstūra ārējais leņķis ir vienāds ar to divu iekšējo leņķu summu, kas nav tā blakusleņķi;

2) taisnleņķa trijstūra šauro leņķu summa ir 90°; 3) vienādmalu trijstūra katra leņķa lielums ir 60° (174. zīm.).



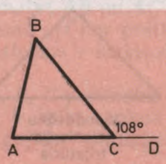
174. zīm.

U z d e v u m s. Viens no trijstūra ārējiem leņķiem ir 108°, bet to divu iekšējo leņķu attiecība, kas nav šī ārējā leņķa blakusleņķi, ir 4:5. Aprēķināt trijstūra iekšējos leņķus.

A t r i s i n ā j u m s.

Dots: ΔABC; $\sphericalangle BCD = 108°$; $\sphericalangle A : \sphericalangle B = 5:4$.

J ā a p r ē ķ i n a: $\sphericalangle A$; $\sphericalangle B$; $\sphericalangle ACB$ (175. zīm.).



175. zīm.

1) $\sphericalangle ACB = 180° - \sphericalangle BCD$;
$\sphericalangle ACB = 180° - 108° = 72°$.

2) $\sphericalangle BCD = \sphericalangle A + \sphericalangle B$ (trijstūra ārējais leņķis ir vienāds ar to divu iekšējo leņķu summu, kas nav tā blakusleņķi);
$5x \ldots \sphericalangle A$;
$4x \ldots \sphericalangle B$.
$5x + 4x = 108°$; $x = 12°$.
$\sphericalangle A = 5x = 5 \cdot 12° = 60°$; $\sphericalangle B = 4x = 4 \cdot 12° = 48°$.

Atbilde. $\sphericalangle A = 60°$; $\sphericalangle B = 48°$; $\sphericalangle BCA = 72°$.

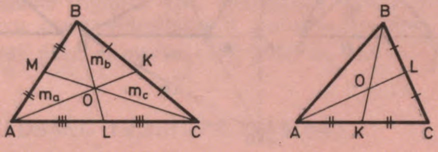
TRIJSTŪRA MEDIĀNA

Nogriezni, kas savieno trijstūra virsotni ar pretējās malas viduspunktu, sauc par trijstūra mediānu.

Trijstūra ABC mediānas un to garumus apzīmē ar m_a, m_b, m_c. Indeksi norāda mediānai atbilstošo trijstūra malu un virsotni: $AK = m_a$, $BL = m_b$, $CM = m_c$ (176. zīm.).

Trijstūra visas trīs mediānas krustojas vienā punktā un dalās tajā attiecībā 2:1, skaitot no virsotnes. Piemēram, $AO:OK = 2:1$. Trijstūra mediānu krustpunkts ir trijstūra masas centrs: ja, piemēram, no vienāda biezuma kartona izgrieztu trijstūri tā mediānu krustpunktā uzliek uz vertikāli turēta zīmuļa smailes, tad trijstūris paliek līdzsvara stāvoklī.

Mediānas garums $m_a = 0{,}5\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.



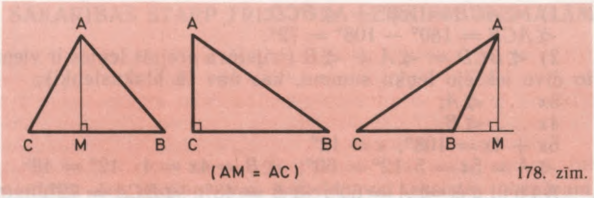
176. zīm. 177. zīm.

Uzdevums. 177. zīmējumā $BL = LC$ un $AK = KC$. Aprēķināt AL, ja $AO = 8$ cm.

Atrisinājums. No dotā izriet, ka AL un BK ir trijstūra mediānas, tāpēc $AO:AL = 2:3$ jeb $8:AL = 2:3$. Tātad $AL = \frac{3 \cdot 8}{2} = 12$ (cm).

TRIJSTŪRA AUGSTUMS

Par trijstūra augstumu sauc perpendikulu no trijstūra virsotnes pret virsotnei pretējo malu vai tās pagarinājumu.



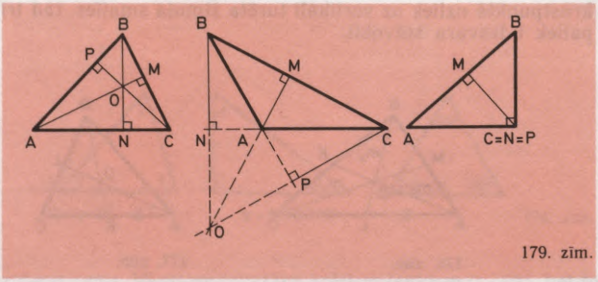
178. zīm.

178. zīmējumā dažāda veida trijstūros ABC vilkts augstums AM no virsotnes A pret malu BC. Kā redzams, taisnleņķa trijstūrī katete ir reizē arī augstums pret otru kateti.

Malu, pret kuru augstums vilkts, sauc par pamatni attiecībā pret šo augstumu.

Trijstūra ABC augstumus apzīmē ar h_a, h_b, h_c. Indeksi norāda malu, pret kuru augstums vilkts (virsotni, no kuras augstums vilkts).

Trijstūra augstumi (vai to pagarinājumi) krustojas vienā punktā, pie tam šis krustpunkts O atrodas šaurleņķu trijstūra iekšpusē, platleņķa trijstūra ārpusē, bet taisnleņķa trijstūrī sakrīt ar taisnā leņķa virsotni (179. zīm.).



179. zīm.

Trijstūra augstuma garums

$$h_a = \frac{2S}{a} \text{ jeb } h_a = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a},$$

kur S — trijstūra laukums, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ (trijstūra pusperimetrs).

TRIJSTŪRA BISEKTRISE

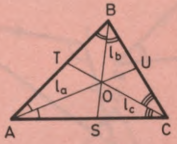
Trijstūra leņķa bisektrises nogriezni no virsotnes līdz pretējai malai sauc par trijstūra bisektrisi.

Trijstūra ABC visas trīs bisektrises AU, BS un CT krustojas vienā punktā trijstūra iekšpusē, šis punkts O atrodas vienādā attālumā no trijstūra visām malām un ir ievilktās riņķa līnijas centrs (180. zīm.).

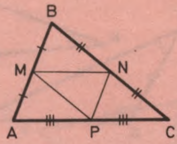
Trijstūra bisektrise sadala trijstūra pretējo malu nogriežņos, kas ir proporcionāli atbilstošajām malām. Tā, piemēram, $BU:UC = AB:AC$.

Trijstūra bisektrises garumu l_a var aprēķināt pēc formulas (p — trijstūra pusperimetrs)

$$l_a = \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}.$$



180. zīm.



181. zīm.

TRIJSTŪRA VIDUSLĪNIJA

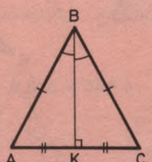
Par trijstūra viduslīniju sauc nogriezni, kas savieno divu malu viduspunktus.

181. zīmējumā trijstūra ABC viduslīnijas ir MN, NP un MP. Trijstūra divu malu viduslīnija ir paralēla trešajai malai un vienāda ar tās pusi, piemēram, $MN \parallel AC$ un $MN = \frac{AC}{2}$.

VIENĀDSĀNU TRIJSTŪRA ĪPAŠĪBAS

Vienādsānu trijstūrī leņķi pie pamatnes ir vienādi.

Bisektrise, augstums un mediāna, kas vilkti pret vienādsānu trijstūra pamatni, sakrīt. Nogrieznis BK ir reizē trijstūra ABC bisektrise, augstums un mediāna (182. zīm.).

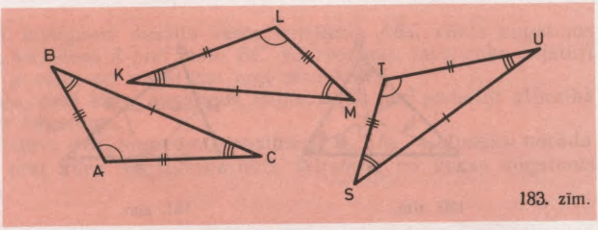


182. zīm.

TRIJSTŪRU VIENĀDĪBA

Divus trijstūrus sauc par savstarpēji vienādiem, ja tos var pārvietot tā, ka tie pilnīgi sakrīt.

183. zīmējumā redzami trijstūri, šķiet, ir savstarpēji vienādi: $\triangle KLM$ var pārvietot (pārbīdīt, pagriezt) tā, ka tas pilnīgi sakrīt ar $\triangle ABC$. Tāpat arī trijstūri STU, ja to vispirms pavērš ar tā plaknes apakšējo pusi uz augšu, var pārvietot tā, ka tas sakrīt ar $\triangle ABC$ vai $\triangle KLM$.



183. zīm.

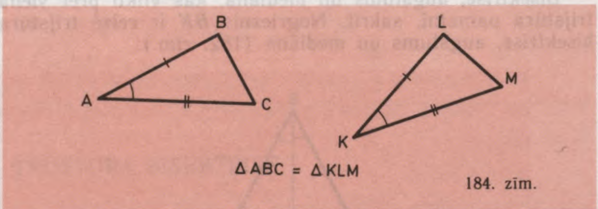
Pierakstot trijstūru vienādību, tā virsotņu burti jāraksta atbilstošā secībā. Tā, piemēram, $\triangle ABC = \triangle LKM$, $\triangle KLM = \triangle UTS$ u. tml. (bet ne, piemēram, $\triangle ABC = \triangle KLM$).

Ja trijstūri ir vienādi, tad, protams, vienādi ir arī to visi atbilstošie elementi: leņķi, malas, arī augstumi, mediānas, vienādas ir arī apvilktās un ievilktās riņķa līnijas, to rādiusi utt.

TRIJSTŪRU VIENĀDĪBAS PAZĪMES

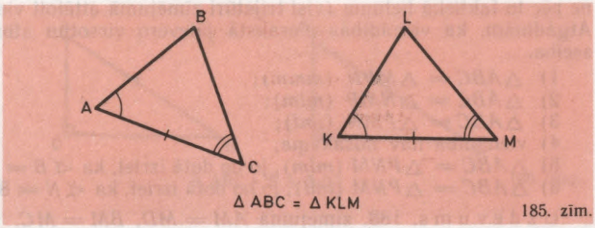
Trijstūru vienādību var noteikt jau pēc dažu tā atbilstošo malu un leņķu vienādības (tālāk malu un leņķu vienādība simboliski apzīmēta ar burtiem *m* un *l*).

1. pazīme (*mlm*). Ja viena trijstūra divas malas un leņķis starp tām attiecīgi vienādi ar otra trijstūra divām malām un leņķi starp tām, tad trijstūri ir vienādi (184. zīm.).



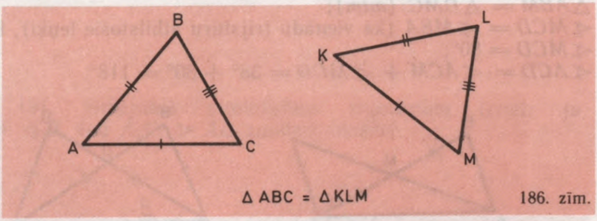
184. zīm.

2. pazīme (*lml*). Ja viena trijstūra divi leņķi un mala starp tiem ir attiecīgi vienādi ar otra trijstūra diviem leņķiem un malu starp tiem, tad trijstūri ir vienādi (185. zīm.).



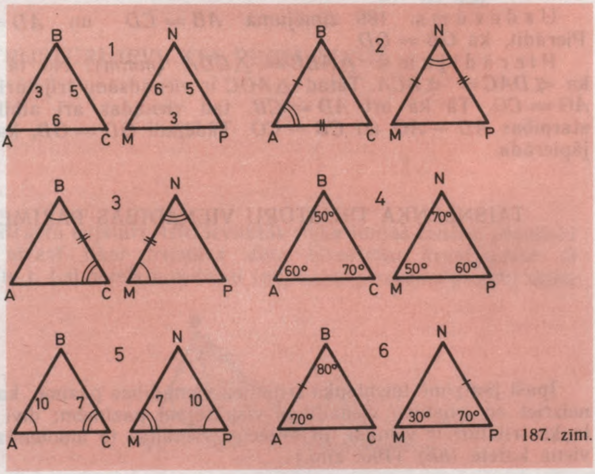
185. zīm.

3. pazīme (*mmm*). Ja viena trijstūra visas malas ir attiecīgi vienādas ar otra trijstūra malām, tad trijstūri ir vienādi (186. zīm.).



186. zīm.

187. zīmējumā attēloti dažādi gadījumi divu trijstūru vienādības noteikšanā. Malu un leņķu vienādība saskatāma pēc to dotajiem izmēriem skaitļos vai pēc atbilstošiem apzīmējumiem, bet



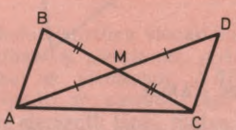
187. zīm.

ne pēc to faktiskā lieluma (visi trijstūri zīmējumā attēloti vienādi). Atgādinām, ka vienādības pierakstā jāievēro virsotņu atbilstošā secība.

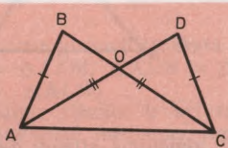
1) $\triangle ABC = \triangle MPN$ (*mmm*);
2) $\triangle ABC = \triangle NMP$ (*mlm*);
3) $\triangle ABC = \triangle PMN$ (*lml*);
4) vienādība nav nosakāma;
5) $\triangle ABC = \triangle PNM$ (*mlm*), jo no dotā izriet, ka $\sphericalangle B = \sphericalangle N$;
6) $\triangle ABC = \triangle PNM$ (*lml*), jo no dotā izriet, ka $\sphericalangle N = 80°$.

Uzdevums. 188. zīmējumā $AM = MD$, $BM = MC$, $\sphericalangle ABC = 80°$, $\sphericalangle ACM = 38°$. Aprēķināt $\sphericalangle ACD$.

Atrisinājums.
$\sphericalangle AMB = \sphericalangle DMC$ (kā krustleņķi);
$\triangle ABM = \triangle DMC$ (*mlm*);
$\sphericalangle MCD = \sphericalangle MBA$ (kā vienādu trijstūru atbilstošie leņķi), t.i., $\sphericalangle MCD = 80°$;
$\sphericalangle ACD = \sphericalangle ACM + \sphericalangle MCD = 38° + 80° = 118°$.



188. zīm.



189. zīm.

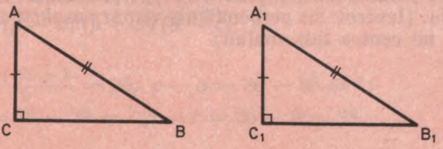
Uzdevums. 189. zīmējumā $AB = CD$ un $AD = CB$. Pierādīt, ka $OB = OD$.

Pierādījums. $\triangle ABC = \triangle CDA$ (*mmm*). No tā izriet, ka $\sphericalangle DAC = \sphericalangle BCA$. Tātad $\triangle AOC$ ir vienādsānu trijstūris, t. i., $AO = CO$. Tā kā arī $AD = CB$, tad vienādas arī atbilstošās starpības $AD - AO$ un $CB - CO$. Tādējādi $OD = OB$, kas bija jāpierāda.

TAISNLEŅĶA TRIJSTŪRU VIENĀDĪBAS PAZĪMES

Taisnleņķa trijstūriem piemērojamas trīs vispārīgās vienādības pazīmes, taču tās var izteikt arī īsāk. Divi taisnleņķa trijstūri ir vienādi, ja attiecīgi vienādi ir šādi elementi:
1) abas katetes (*kk*);
2) hipotenūza un viens šaurleņķis (*hš*);
3) katete un šaurleņķis (*kš*).

Īpaši jāatzīmē taisnleņķa trijstūru vienādības pazīme, kas tieši neizriet no trijstūru vienādības vispārējām pazīmēm: divi taisnleņķa trijstūri ir vienādi, ja attiecīgi vienādas to hipotenūzas un viena katete (*hk*) (190. zīm.).



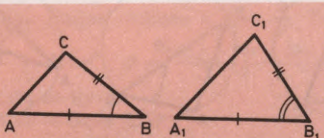
$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

190. zīm.

DIVI TRIJSTŪRI AR DIVĀM ATTIECĪGI VIENĀDĀM MALĀM

Ja viena trijstūra divas malas ir attiecīgi vienādas ar otra trijstūra divām malām, bet leņķi starp šīm malām nav vienādi, tad pret lielāko leņķi atrodas garākā mala. Pareizs arī apgrieztais apgalvojums: šādos trijstūros pret garāko trešo malu atrodas lielākais leņķis.

No 191. zīmējumā attēlotajiem trijstūriem izriet: ja $\sphericalangle B_1 > \sphericalangle B$, tad $A_1C_1 > AC$ (un arī otrādi).

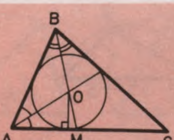


191. zīm.

TRIJSTŪRĪ IEVILKTA RIŅĶA LĪNIJA

Riņķa līniju, kura pieskaras trijstūra visām malām, sauc par trijstūrī ievilktu riņķa līniju. (Trijstūri attiecīgi sauc par riņķa līnijai apvilktu trijstūri.) Ievilktās riņķa līnijas centram ir jāatrodas vienādā attālumā no visām malām, un tāda īpašība piemīt trijstūra bisektrišu krustpunktam. Riņķa līnijas rādiuss ir šī punkta attālums līdz trijstūra malām.

Lai atrastu trijstūrī ABC ievilktās riņķa līnijas centru, praktiski pietiek atrast tikai trijstūra divu bisektrišu krustpunktu O (192. zīm.). Lai noteiktu rādiusu (un malas pieskares punktu riņķa



192. zīm.

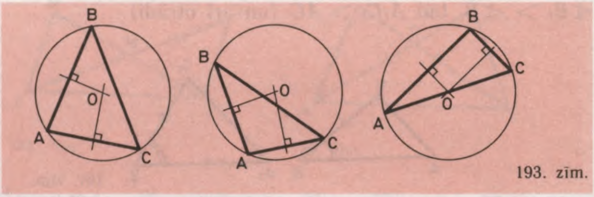
līnijai), no atrastā centra jākonstruē perpendikuls OM pret trijstūra malu. (Ievērot: šis perpendikuls vispār nesakrīt ar bisektrises nogriezni no centra līdz malai!)

Trijstūrī ievilktās riņķa līnijas rādiusu r var aprēķināt pēc formulām

$$r=\frac{S}{p} \text{ jeb } r=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}.$$

TRIJSTŪRIM APVILKTA RIŅĶA LĪNIJA

Riņķa līniju, kura iet caur trijstūra visām virsotnēm, sauc par trijstūrim apvilktu riņķa līniju. (Trijstūri attiecīgi sauc par riņķa līnijā ievilktu trijstūri.) Apvilktās riņķa līnijas centram jāatrodas vienādā attālumā no trijstūra visām virsotnēm. Tāda īpašība piemīt trijstūra malu vidusperpendikulu krustpunktam O (193. zīm.). Šis punkts atrodas šaurleņķa trijstūra iekšpusē, platleņķa trijstūra ārpusē, taisnleņķa trijstūrī — hipotenūzas viduspunktā.



193. zīm.

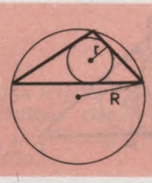
Lai atrastu ap doto trijstūri apvilktās riņķa līnijas centru, praktiski pietiek atrast tikai divu malu vidusperpendikulu krustpunktu, jo visu malu vidusperpendikuli krustojas vienā punktā.

Trijstūrim apvilktās riņķa līnijas rādiusu R var aprēķināt pēc formulām

$$R=\frac{abc}{4S} \text{ jeb } R=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}};\ R=\frac{a}{2\sin A},$$

kur a ir trijstūra mala, bet A — šīs malas pretleņķis.

U z d e v u m s. Aprēķināt ap trijstūri apvilktās riņķa līnijas rādiusu R un ievilktās riņķa līnijas rādiusu r, ja trijstūra malu garumi $a=35$ cm, $b=29$ cm, $c=8$ cm (194. zīm.).



194. zīm.

A t r i s i n ā j u m s. Trijstūra laukuma formula ir $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.
Tā kā

$$p = \frac{35+29+8}{2} = 36;\ p-a = 36-35 = 1;$$
$$p-b = 36-29 = 7; p-c = 36-8 = 28\ ,$$

tad

$$S = \sqrt{36\cdot1\cdot7\cdot28} = \sqrt{36\cdot7\cdot7\cdot4} = 6\cdot7\cdot2 = 84\ (\mathrm{cm}^2).$$
$$R = \frac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot S}\ ;\ R = \frac{35\cdot29\cdot8}{4\cdot84} = 24\frac{1}{6}\ (\mathrm{cm});$$
$$r = \frac{S}{p}\ ;\ r = \frac{84}{36} = 2\frac{1}{3}\ (\mathrm{cm}).$$

U z d e v u m s. Aprēķināt taisnleņķa trijstūra katetes, ja to garumu attiecība ir 21:20, bet starpība starp apvilktās un ievilktās riņķa līnijas rādiusiem $R - r = 17$ cm.

A t r i s i n ā j u m s. Apzīmējam katešu garumus attiecīgi ar $21x$ un $20x$. Tad pēc Pitagora teorēmas hipotenūzas garums ir $\sqrt{(21x)^2 + (20x)^2} = \sqrt{841x^2} = 29x$.

Apvilktās riņķa līnijas rādiuss ir vienāds ar hipotenūzas pusi, t. i., $R = 29x:2 = 14{,}5x$.

Ievilktās riņķa līnijas rādiuss ir $r = \frac{S}{p}$. Tā kā

$$S = \frac{20x\cdot21x}{2} = 210x^2\ ;\ p = \frac{21x+20x+29x}{2} = 35x,$$

tad $r = 210x^2:35x = 6x$ un

$R - r = 14{,}5x - 6x = 8{,}5x$.

Saskaņā ar uzdevuma nosacījumu $R - r = 17$, tātad

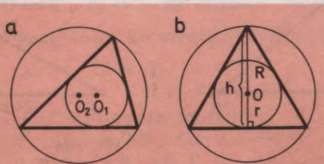
$8{,}5x = 17;\ x = 2$.

Ķatešu garumi ir

$21x = 21\cdot2 = 42$ (cm); $20x = 20\cdot2 = 40$ (cm).

VIENĀDMALU TRIJSTŪRIS UN RIŅĶA LĪNIJA

Der ievērot, ka ap trijstūri apvilktās un trijstūrī ievilktās riņķa līnijas centri vispār ir atšķirīgi punkti (195. zīm. *a*). Vienīgi vienādmalu trijstūrim apvilktās un tajā ievilktās riņķa līnijas centri sakrīt (195. zīm. *b*).



195. zīm.

Ja ap vienādmalu trijstūri apvilktās riņķa līnijas rādiusu apzīmē ar R, ievilktās riņķa līnijas rādiusu — ar r, trijstūra malu — ar a un augstumu — ar h, tad starp to garumiem pastāv šādas sakarības:

$$R=\frac{a}{\sqrt{3}};\ a=R\sqrt{3};\ r=\frac{1}{3}h;\ R=2r;\ r=\frac{a}{2\sqrt{3}};\ a=2r\sqrt{3};$$

$$R=\frac{2}{3}h.$$

U z d e v u m s. Dots vienādmalu trijstūris, kura malas garums ir 8 cm. 1) Vai šo trijstūri var ievietot tādas riņķa līnijas iekšpusē, kuras diametrs ir 10 cm? 2) Vai šajā trijstūrī var pilnīgi novietot riņķa līniju, kuras rādiuss ir 2,5 cm?

A t r i s i n ā j u m s.

1) $R=10:2=5$ (cm); $a=R\sqrt{3}$; $a=5\sqrt{3}\approx 5\cdot 1{,}73\approx$ $\approx 8{,}7$ (cm).

Tā kā 8 cm < 8,7 cm, tad atbilde ir pozitīva.

2) $r=\frac{a}{2\sqrt{3}}$; $r=\frac{8}{2\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}\approx\frac{4\cdot 1{,}73}{3}\approx\frac{6{,}9}{3}=2{,}3$ (cm).

Tā kā 2,5 cm > 2,3 cm, tad atbilde ir negatīva.

METRISKĀS SAKARĪBAS TAISNLEŅĶA TRIJSTŪRĪ

Novelkot taisnleņķa trijstūrī ABC no taisnā leņķa virsotnes pret hipotenūzu augstumu CD, izveidojas pavisam 6 nogriežņi: hipotenūza $AB=c$, katetes $AC=b$ un $BC=a$, augstums $CD=h$ un katešu projekcijas uz hipotenūzu $BD=a_c$ un $AD=b_c$ (196. zīm.). Starp šiem nogriežņiem pastāv dažādas sakarības.

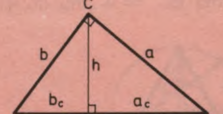
1. Pitagora teorēma. Katešu kvadrātu summa ir vienāda ar hipotenūzas kvadrātu:

$a^2+b^2=c^2$.

Tā, piemēram, 197. zīmējumā dotajam taisnleņķa trijstūrim malu garumi ir 5 cm, 12 cm, 13 cm un

$5^2+12^2=13^2$; $25+144=169$; $169=169$.

U z d e v u m s. Taisnleņķa trijstūra garākā mala ir 25 cm, bet īsākā mala ir 7 cm. Aprēķināt šī trijstūra trešo malu.



196. zīm.

197. zīm.

A t r i s i n ā j u m s. Garākā mala acīmredzot ir hipotenūza. Apzīmējot trešās malas garumu ar x, pēc Pitagora teorēmas $x^2 + 7^2 = 25^2$; $x^2 = 625 - 49$; $x^2 = 576$; $x = \sqrt{576} = 24$ (cm).

2. Augstums pret hipotenūzu ir vidējais proporcionālais starp katešu projekcijām uz hipotenūzu:

$$\frac{a_c}{h} = \frac{h}{b_c} \text{ jeb } h^2 = a_c \cdot b_c.$$

3. Katete ir vidējais proporcionālais starp hipotenūzu un savu projekciju uz hipotenūzu:

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{a_c} \text{ jeb } a^2 = c \cdot a_c\ ;\ \frac{c}{b} = \frac{b}{b_c} \text{ jeb } b^2 = c \cdot b_c.$$

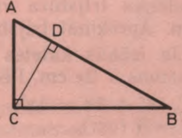
4. Katešu projekcijas uz hipotenūzu ir proporcionālas katešu kvadrātiem:

$$\frac{a_c}{b_c} = \frac{a^2}{b^2}.$$

U z d e v u m s. Taisnleņķa trijstūrī ABC leņķis C ir taisns. Aprēķināt trijstūra malas AC, AB, augstumu CD pret hipotenūzu un hipotenūzas nogriezni BD, ja $AD = 9$ cm un $BC = 20$ cm.

A t r i s i n ā j u m s.

Dots: $\triangle ABC$; $\sphericalangle C = 90°$; $CD \perp AB$; $AD = 9$ cm; $BC = 20$ cm (198. zīm.).



198. zīm.

J ā a p r ē ķ i n a: AC, AB, CD, BD.

1) Apzīmēsim $BD = x$. Tad

$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD}$ (katete kā vidējais proporcionālais);

$$\frac{AD + DB}{BC} = \frac{BC}{BD}\ ;\ \frac{9 + x}{20} = \frac{20}{x};$$

$x^2 + 9x - 400 = 0$; $x_1 = -25$ (neder); $x_2 = 16$; $BD = 16$ (cm).

2) $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$ (augstums kā vidējais proporcionālais); $\frac{9}{CD} = \frac{CD}{16}$;

$CD^2 = 9 \cdot 16$; $CD = 12$ (cm).

3) $\triangle ADC$:

$AC^2 = AD^2 + CD^2$ (Pitagora teorēma);

$AC^2 = 9^2 + 12^2$; $AC^2 = 225$; $AC = 15$ (cm).

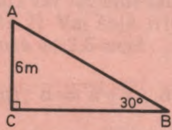
4) $AB = AD + DB$; $AB = 9 + 16$; $AB = 25$ cm.

KATETE PRET 30°, 45° VAI 60° LEŅĶI

Apzīmējot hipotenūzu ar *c*, bet kateti pret 30°, 45°, 60° leņķi attiecīgi ar a_{30}, a_{45}, a_{60} starp to garumiem pastāv šādas sakarības:

$$a_{30} = \frac{c}{2}\ ;\ a_{45} = \frac{c\sqrt{2}}{2};\ a_{60} = \frac{c\sqrt{3}}{2}.$$

U z d e v u m s. Taisnleņķa trijstūrī katete pret 30° leņķi ir 6 cm. Aprēķināt trijstūra pārējās malas (199. zīm.).



199. zīm.

A t r i s i n ā j u m s.

1) $AB = 2 \cdot AC$ (katete pret 30° leņķi); $AB = 2 \cdot 6 = 12$ (cm).

2) $BC^2 = AB^2 - AC^2$ (Pitagora teorēma);
$BC = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{144-36} = \sqrt{108} = \sqrt{36 \cdot 3} = 6\sqrt{3}$ (cm).
Cits atrisinājuma variants: katete BC ir katete pret 60° leņķi. Tātad $BC = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ (cm).

U z d e v u m s. Taisnleņķa trijstūra viens leņķis ir 30°, bet garākā katete ir $4\sqrt{3}$ cm. Aprēķināt trijstūra perimetru.

A t r i s i n ā j u m s. Ja īsākās katetes (pret 30°) garums ir x cm, tad hipotenūzas garums ir $2x$ cm. Pēc Pitagora teorēmas

$$x^2 + (4\sqrt{3})^2 = (2x)^2;\ x^2 + 48 = 4x^2;$$
$$3x^2 = 48;\ x^2 = 16;\ x = 4\ \text{(cm)}.$$

Trijstūra perimetrs ir
$x + 2x + 4\sqrt{3} = 3x + 4\sqrt{3} = 3 \cdot 4 + 4\sqrt{3} = 12 + 4\sqrt{3}$ (cm).

Cits atrisinājuma variants: tā kā dotā garākā katete ir katete pret 60° leņķi, tad $4\sqrt{3} = \frac{c\sqrt{3}}{2}$. No šīs vienādības atrodam, ka hipotenūza $c = 8$ (cm); īsākā katete $a_{30} = \frac{c}{2} = \frac{8}{2} = 4$ (cm); perimetrs $8 + 4 + 4\sqrt{3} = 12 + 4\sqrt{3}$ (cm).

TRIJSTŪRA LAUKUMS

Ieviešot apzīmējumus *a, b, c* — trijstūra malas, *A, B, C* — leņķi, *h* — augstums, *p* — pusperimetrs, *R* un *r* — apvilktas un ievilktas riņķa līnijas rādiusi, trijstūra laukums *S* atrodams pēc šādām formulām.

Trijstūra laukums ir vienāds ar pamatnes un augstuma reizinājuma pusi:

$$S = \frac{ah}{2}.$$

Ja trijstūris ir taisnleņķa trijstūris ar katetēm a un b, tad iepriekšējā formula ir uzrakstāma šādi:

$$S = \frac{ab}{2}.$$

Ja dotas trijstūra divas malas un leņķis starp tām, tad trijstūra laukumu var izteikt kā šo malu un to ietvertā leņķa sinusa reizinājuma pusi:

$$S = 0{,}5ab\sin C.$$

Ja zināmas trijstūra visas malas, tad laukumu var aprēķināt pēc t. s. Herona formulas:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Vienādmalu trijstūra laukums

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Ap riņķa līniju apvilkta trijstūra laukums

$$S = pr.$$

Riņķa līnijā ievilkta trijstūra laukums

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

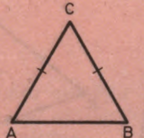
Ja dota trijstūra viena mala un divi leņķi, tad trijstūra laukumu var aprēķināt pēc formulas

$$S = \frac{a^2 \cdot \sin B \cdot \sin C}{2\sin(B+C)}.$$

U z d e v u m s. Vienādsānu trijstūra sānu malu garums ir 8 cm, bet leņķi pie pamatnes ir 75° lieli. Aprēķināt trijstūra laukumu.

A t r i s i n ā j u m s.

Dots: $\triangle ABC$; $AC = BC = 8$ cm; $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 75°$. Jāaprēķina: trijstūra ABC laukums S (200. zīm.).



200. zīm.

$S = 0{,}5ab\sin C$; $a = b = 8$ cm; $\sphericalangle C = 180° - 75° \cdot 2 = 30°$.

$S = 0{,}5 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \sin 30° = 32 \cdot 0{,}5 = 16$ (cm^2).

A t b i l d e. Trijstūra laukums ir 16 cm^2.

U z d e v u m s. Aprēķināt trijstūra laukumu, ja trijstūra malu garumi ir 13 cm, 14 cm un 15 cm.

A t r i s i n ā j u m s.

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;

$p = \frac{13+14+15}{2} = 21; p - a = 21 - 13 = 8;$

$p - b = 21 - 14 = 7; \ p - c = 21 - 15 = 6.$

$S = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{3 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3} = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 84 \quad (\text{cm}^2).$

U z d e v u m s. Trijstūra viena mala ir 16 cm, bet otra 12 cm, pie tam augstums pret pirmo malu ir 10 cm. Aprēķināt augstumu, kas novilkts pret otru doto malu.

A t r i s i n ā j u m s. Apzīmējot meklējamo augstumu ar x, dotā trijstūra laukumu var izteikt divējādi:

$S = \frac{16 \cdot 10}{2}$ vai $S = \frac{12 \cdot x}{2}$.

Iegūst vienādojumu, no kura aprēķina nezināmo x:

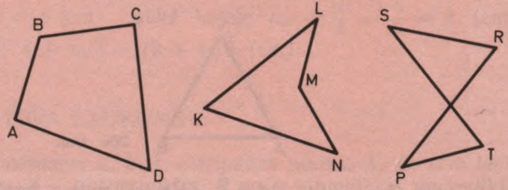
$\frac{16 \cdot 10}{2} = \frac{12 \cdot x}{2}; \ 160 = 12x$;

$x = \frac{160}{12} = 13\frac{1}{3}$ (cm).

18.3. ČETRSTŪRI

ČETRSTŪRA JĒDZIENS

Par četrstūri sauc daudzstūri, kuram ir četras malas. Daudzstūri *ABCD* un *KLMN* (201. zīm.) ir četrstūri, bet figūru *PRST* par četrstūri nesauksim, jo plaknes daļu ierobežotāja līnija *PRST* nav vienkārša lauzta līnija (tā sevi krusto). Četrstūri sauc par izliektu, ja to ierobežo izliekta lauzta līnija. Tāds ir četrstūris *ABCD,* bet četrstūris *KLMN* ir ieliekts četrstūris.



201. zīm.

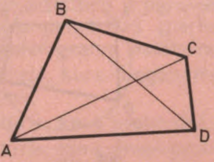
ČETRSTŪRA ELEMENTI

Četrstūrim ir četras malas. Malas, kurām nav kopēju punktu, sauc par pretmalām (*AB* un *CD* vai *AD* un *BC*), bet malas, kurām ir kopējs galapunkts,— par blakusmalām.

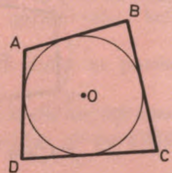
Līdzīgi saprot arī pretējās virsotnes vai virsotnes pie kopējās malas, pretleņķus vai leņķus pie kopējās malas.

Četrstūrim *ABCD* ir divas diagonāles *AC* un *BD* (202. zīm.).

Četrstūra visu četru iekšējo leņķu summa ir 360°.



202. zīm.



203. zīm.

ČETRSTŪRA LAUKUMS

Jebkuram četrstūrim laukumu var aprēķināt, sadalot šo četrstūri divos trijstūros, aprēķinot katra trijstūra laukumu un tos saskaitot. Var izmantot arī laukuma formulu $S = 0{,}5d_1d_2\sin\alpha$, kur d_1 un d_2 — četrstūra diagonāles, α — leņķis starp diagonālēm. Dažu veidu četrstūriem laukumu var aprēķināt arī ar vienkāršākiem paņēmieniem (sk. tālāk).

AP RIŅĶA LĪNIJU APVILKTS ČETRSTŪRIS

Ap riņķa līniju apvilktā četrstūra visas malas pieskaras riņķa līnijai (203. zīm.).

Apvilktā četrstūra pretējo malu summas ir vienādas:

$$AB + DC = AD + BC.$$

Patiess ir arī apgrieztais apgalvojums: ja četrstūra pretmalu summas ir vienādas, tad četrstūrī var ievilkt riņķa līniju.

P i e m ē r s. Ap riņķa līniju apvilktā četrstūra divu pretējo malu garumi ir 7 cm un 8 cm, bet pārējo divu malu garumu attiecība ir 2:3. Aprēķināt šo malu garumu.

A t r i s i n ā j u m s. Vienas meklējamās malas garumu apzīmēsim ar $2x$, tad otras meklējamās malas garums ir $3x$.

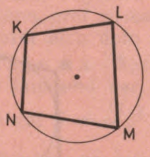
Pēc četrstūra malu garumu īpašības $2x + 3x = 7 + 8$. Tādējādi $5x = 15$; $x = 3$; $2x = 6$ (cm); $3x = 9$ (cm).

RIŅĶA LĪNIJĀ IEVILKTS ČETRSTŪRIS

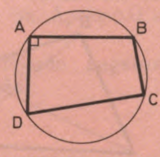
Riņķa līnijā ievilktā četrstūra visas virsotnes atrodas uz riņķa līnijas (204. zīm.).

Ievilktā četrstūra pretleņķu summas ir vienādas, pie tam katra no tām ir 180°: $\angle K + \angle M = 180°$, $\angle N + \angle L = 180°$.

Patiess ir arī šāds apgalvojums: ja četrstūra pretleņķu summas ir vienādas, tad ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju.



204. zīm.



205. zīm.

P i e m ē r s. Riņķa līnijā ievilktā četrstūra $ABCD$ leņķis A ir taisns, bet divu citu leņķu B un D starpība ir 40°. Aprēķināt četrstūra leņķus B, C un D (205. zīm.).

A t r i s i n ā j u m s.

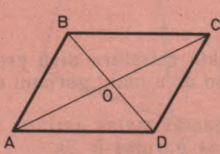
1) $\angle A + \angle C = 180°$ (ievilkta četrstūra leņķu īpašība); $\angle C = 180° - \angle A$; $\angle C = 180° - 90°$; $\angle C = 90°$.

2) $\angle B - \angle D = 40°$; $\angle B + \angle D = 180°$.

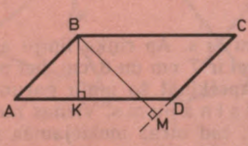
Saskaitot abu vienādību kreisās un labās puses, atrodam, ka $2\angle B = 220°$; $\angle D = 180° - 110°$; $\angle B = 110°$; $\angle D = 70°$.

PARALELOGRAMS

Četrstūri, kura pretējās malas ir savstarpēji paralēlas, sauc par paralelogramu (206. zīm.).



206. zīm.



207. zīm.

Paralelograma īpašības.

1. Paralelograma pretmalas ir vienāda garuma ($AB = CD$, $BC = DA$).

2. Paralelograma diagonāles krustpunktā dalās uz pusēm ($AO = OC$, $BO = OD$).

3. Paralelograma pretleņķi ir vienādi (piemēram, $\sphericalangle A = \sphericalangle C$); vienai malai piegulošo leņķu summa ir 180° (piemēram, $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180°$).

4. Paralelograma diagonāļu krustpunkts ir paralelograma simetrijas centrs.

Vai dotais četrstūris ir paralelograms, to var noteikt ne tikai pēc paralelograma definīcijas (pārbaudot malu paralelitāti), bet arī pēc t. s. paralelograma pazīmēm:

1) četrstūris, kura diagonāles krustpunktā dalās uz pusēm, ir paralelograms;

2) četrstūris, kura pretmalas ir vienādas, ir paralelograms;

3) četrstūris, kura divas pretmalas ir vienādas un paralēlas, ir paralelograms;

4) četrstūris, kura pretleņķi ir vienādi, ir paralelograms.

Šīs pazīmes var izmantot arī paralelograma konstruēšanai (vai praktiskai izgatavošanai). Tā, piemēram, novelkot divas krustiskas taisnes un no krustpunkta uz abām pusēm atliekot attiecīgi vienādus nogriežņus, to galapunkti ir paralelograma virsotnes (1. pazīme). Izraugoties divus pārus attiecīgi vienāda garuma līstītes un no tām izveidojot četrstūri, tas ir paralelograms (2. pazīme).

Paralelograma abu diagonāļu kvadrātu summa ir vienāda ar visu malu kvadrātu summu:

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 \text{ jeb } AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2CD^2.$$

Ja paralelograma vienu malu pieņem par paralelograma pamatni (to parasti apzīmē ar burtu a), tad perpendikulu no pamatnes līdz pretējai malai sauc par paralelograma augstumu (apzīmē ar h). Tā, piemēram, ja par pamatni pieņem malu AD, tad paralelograma augstums pret šo pamatni ir BK (207. zīm.); ja par pamatni pieņem malu DC, tad augstums ir BM.

Paralelograma laukums ir vienāds ar tā pamatnes un augstuma reizinājumu:

$$S = ah.$$

Tā, piemēram, $S = AD \cdot KB$ vai $S = DC \cdot BM$ (207. zīm.).

Ja dotas paralelograma malas un viens no tā leņķiem, tad paralelograma laukumu var aprēķināt pēc formulas

$$S = ab\sin\alpha.$$

Ja zināmas paralelograma diagonāles d_1 un d_2 un leņķis β starp tām, tad paralelograma laukums ir aprēķināms pēc formulas

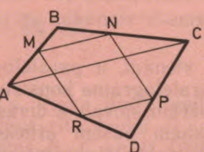
$$S = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\beta}{2}.$$

Uzdevums. Pierādīt, ka, četrstūra malu viduspunktus pēc kārtas savienojot ar nogriežņiem, izveidojas paralelograms.

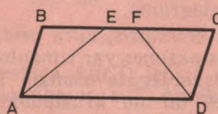
Pierādījums. Nogrieznis MN (208. zīm.) starp divu malu viduspunktiem ir trijstūra ABC viduslīnija, tātad $MN \| AC$ un $MN = \frac{1}{2}AC$ kā trijstūra ABC viduslīnija. Tāpat nogrieznis $PR \| AC$ un $PR = \frac{1}{2}AC$ kā trijstūra ADC viduslīnija.

Tādējādi $MN \| PR$ un $MN = PR$. No tā izriet, ka četrstūris $MNPR$ ir paralelograms, kas arī bija jāpierāda.

Uzdevums. Paralelograma malas ir 8 cm un 3 cm. Noteikt, kādās daļās paralelograma garāko malu sadala to leņķu bisektrises, kas nepieguļ šai malai.



208. zīm.



209. zīm.

Atrisinājums.

Dots: $ABCD$ — paralelograms; $AB = DC = 3$ cm; $AD = BC = 8$ cm; AE un DF — bisektrises (209. zīm.). Jāaprēķina: BE, EF, FC.

Tā kā pēc dotā $\sphericalangle BAE = \sphericalangle EAD$, bet $\sphericalangle EAD = \sphericalangle AEB$ kā šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm, tad $\sphericalangle BAE = \sphericalangle AED$. Tādējādi $\triangle ABE$ ir vienādsānu trijstūris un $BE = BA = 3$ cm.

Līdzīgi var pierādīt, ka $\triangle DFC$ arī ir vienādsānu trijstūris un $FC = DC$ jeb $FC = 3$ cm.

Tā kā $BE + EF + FC = BC$, tad $EF = BC - (BE + FC)$ jeb $EF = 8 - (3 + 3) = 2$ (cm).

Piezīme. Ja paralelograma malas garums būtu ne 8 cm, bet 6 cm, tad garākā mala sadalītos tikai divos vienādos nogriežņos (3 cm un 3 cm); ja šīs paralelograma malas garums būtu 5 cm, tad garākā mala sadalītos trijos 2 cm, 1 cm un 2 cm garos nogriežņos, pie tam bisektrises krustotos paralelograma iekšpusē.

Uzdevums. Paralelogramā $ABCD$ punkti E un F ir attiecīgo malu viduspunkti (210. zīm.). Pierādīt, ka punktos M un N diagonāle AC sadalās trīs vienādos nogriežņos.

P i e r ā d ī j u m s.

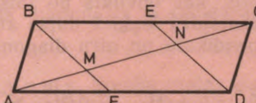
Tā kā $BC = AD$ (kā paralelograma pretmalas), $BE = \frac{1}{2}BC$ un $FD = \frac{1}{2}AD$, tad $BE = FD$.

Četrstūris $BFDE$ ir paralelograms, jo $BE = FD$ un $BE \parallel FD$. Tātad $BF \parallel ED$.

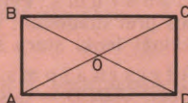
Leņķa CAD malas krusto paralēlas taisnes FM un DN, pie tam $AF = FD$. Saskaņā ar Talesa teorēmu arī $AM = MN$.

Leņķa BCA malas arī krusto paralēlas taisnes, tāpēc, līdzīgi iepriekšējam, $MN = NC$.

Tā kā $AM = MN$ un $MN = NC$, tad $AM = MN = NC$, kas arī bija jāpierāda.



210. zīm.



211. zīm.

TAISNSTŪRIS

Par taisnstūri sauc paralelogramu, kuram visi leņķi ir taisni.

Taisnstūri var definēt arī tā: par taisnstūri sauc četrstūri, kuram visi leņķi ir taisni (211. zīm.).

Tā kā taisnstūris ir paralelograms, tad tam piemīt visas tās īpašības, kas piemīt paralelogramam (sk. iepriekšējo punktu), un vēl dažas īpašības, kas nepiemīt katram paralelogramam:

1) taisnstūra diagonāles ir vienādas;

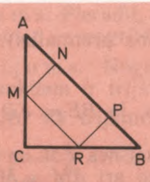
2) taisnstūra diagonāļu krustpunkts ir taisnstūrim apvilktās riņķa līnijas centrs;

3) taisnstūrim ir divas simetrijas asis — taisnes, kas iet caur pretējo malu viduspunktiem.

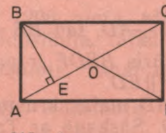
Taisnstūra laukums ir vienāds ar tā divu malu reizinājumu: $S = a \cdot b$.

U z d e v u m s. Vienādsānu taisnleņķa trijstūrī ievilkts taisnstūris tā, kā redzams 212. zīmējumā. Aprēķināt taisnstūra malas, ja tās attiecas kā 5:2 un ja taisnstūra hipotenūzas garums ir 45 cm.

A t r i s i n ā j u m s. Taisnstūra malu garumus apzīmēsim ar $5x$ un $2x$. Tā kā dotais trijstūris ir vienādsānu, tad



212. zīm.



213. zīm.

$\sphericalangle A = \sphericalangle B = 45°$. No tā izriet, ka arī $\triangle AMN$ un $\triangle BRP$ ir vienādkatešu trijstūri, tāpēc $AN = 2x$ un $PB = 2x$.

Hipotenūza $AB = AN + NP + PB = 2x + 5x + 2x = 9x$; tādējādi $9x = 45$; $x = 5$ (cm). Taisnstūra malas ir $2x = 10$ (cm); $5x = 25$ (cm).

Uzdevums. Perpendikuls, kas novilkts no taisnstūra virsotnes pret diagonāli, dala taisnstūra leņķi 2 daļās attiecībā 3:1. Aprēķināt leņķi starp šo perpendikulu un otru diagonāli.

Atrisinājums.

Dots: $ABCD$ — taisnstūris; $BE \perp AC$; $\sphericalangle ABC : \sphericalangle EBC = 1:3$ (213. zīm.). Jāaprēķina $\sphericalangle EBD$.

1) $\triangle ADO = \triangle BCO$ (*mmm*); ja apzīmē $\sphericalangle OAD = x$, tad arī $\sphericalangle OBC = x$.

2) Aplūkojam $\triangle AEB$ leņķus: $\sphericalangle A = 90° - x$; $\sphericalangle B = 90° - \sphericalangle A = 90° - (90° - x) = x$.

3) No dotā izriet: ja $\sphericalangle ABE = x$, tad $\sphericalangle EBC = 3x$ un $x + 3x = 90°$ jeb $x = 22°30'$.

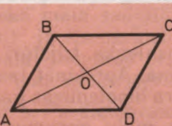
4) $\sphericalangle EBD = \sphericalangle EBC - \sphericalangle OBC = 3x - x = 2x = 45°$ jeb $\sphericalangle EBD = 45°$.

ROMBS

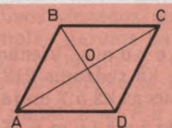
Par rombu sauc paralelogramu, kuram visas malas ir vienādas. Rombam piemīt visas paralelograma īpašības un vēl dažas īpašības (214. zīm.):

1) romba diagonāles krustpunktā dalās uz pusēm un ir savstarpēji perpendikulāras ($AC \perp BD$);

2) romba diagonāles dala romba leņķus uz pusēm (piemēram, $\sphericalangle BAO = \sphericalangle DAO$);



214. zīm.



215. zīm.

3) romba diagonāļu krustpunkts ir rombā ievilktās riņķa līnijas centrs;

4) romba diagonāļu krustpunkts ir romba simetrijas centrs, bet diagonāles ir romba simetrijas asis.

Dažas romba pazīmes:

1) paralelograms, kura diagonāles ir perpendikulāras, ir rombs;

2) četrstūris, kura diagonāles ir perpendikulāras un dalās krustpunktā uz pusēm, ir rombs.

Pēdējo pazīmi izdevīgi izmantot romba konstruēšanai: pietiek konstruēt divus nogriežņus, kas ir viens otra vidusperpendikuls — to galapunkti ir romba virsotnes.

Romba laukumu var aprēķināt pēc paralelograma laukuma formulas vai arī pēc formulas (d_1 un d_2— romba diagonāles)

$$S = \frac{d_1 d_2}{2}.$$

P i e z ī m e. Šī formula der jebkura četrstūra laukuma aprēķināšanai, ja tā diagonāles ir savstarpēji perpendikulāras.

Romba laukumu var aprēķināt arī pēc formulas $S = a^2 \sin\alpha$, kur a ir romba mala un α — jebkurš no romba leņķiem.

U z d e v u m s. Romba malas garums ir a, viens leņķis ir 60°. Aprēķināt romba diagonāles un laukumu.

A t r i s i n ā j u m s.

Dots: $ABCD$ — rombs; $AB = BC = CD = AD = a$; $\sphericalangle BAD = 60°$ (215. zīm.). Jāaprēķina laukums S; AC un BD.

1) $\sphericalangle ABC = 180° - 60° = 120°$;
$\sphericalangle ABD = 120°:2 = 60°$ (romba diagonāles īpašība).

2) $\triangle ABD$ ir vienādleņķu, tātad arī vienādsānu trijstūris, tāpēc $BD = AB = AD$ jeb $BD = a$.

3) $\triangle ABD$ ir taisnleņķa trijstūris (romba diagonāļu īpašība);
$AO = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$ (kā katete pret 60° leņķi);
$AO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $AC = 2AO = a\sqrt{3}$.

4) $S = a^2\sin\alpha = a^2\sin 60° = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ (lauk. vien.).

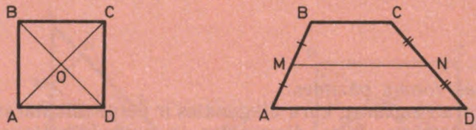
KVADRĀTS

Par kvadrātu sauc taisnstūri, kuram visas malas vienādas (216. zīm.).

Kvadrāts reizē ir taisnstūris, paralelograms un rombs, tāpēc tam piemīt visas minēto četrstūru īpašības. Atkārtosim galvenās no tām:

1) kvadrāta diagonāles ir vienādas, savstarpēji perpendikulāras, dalās krustpunktā uz pusēm un dala uz pusēm kvadrāta leņķus;

2) kvadrāta diagonāļu krustpunkts ir tā simetrijas centrs;



216. zīm. 217. zīm.

3) kvadrātam ir 4 simetrijas asis;

4) kvadrātā var ievilkt riņķa līniju; ap kvadrātu var apvilkt riņķa līniju;

5) ja kvadrāta malas garums ir a, tad tā laukums $S = a^2$.

TRAPECE

Par trapeci sauc četrstūri, kuram tikai divas malas savstarpēji paralēlas.

Četrstūrī $ABCD$ ir $AD \| BC$, tāpēc šis četrstūris ir trapece (217. zīm.).

Trapeces paralēlās malas sauc par trapeces pamatnēm, bet neparalēlās — par sānu malām. Trapeci, kurai sānu malas vienādas, sauc par vienādsānu trapeci (218. zīm.). Vienādsānu trapecē leņķi pie pamatnēm ir vienādi. Trapeci, kurai divi leņķi taisni, sauc par taisnleņķa trapeci (218. zīm.).

218. zīm. 219. zīm.

Nogriezni, kas savieno trapeces sānu malu viduspunktus, sauc par trapeces viduslīniju. Trapeces $ABCD$ viduslīnija ir MN (217. zīm.).

Trapeces viduslīnija ir paralēla pamatnēm un vienāda ar to pussummu:

$AD \| MN \| BC$; $MN = \frac{AD + BC}{2}$ jeb $MN = \frac{a+b}{2}$ (a un b — trapeces pamatnes).

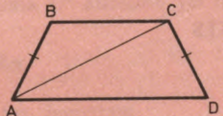
Perpendikulu no vienas pamatnes līdz otrai sauc par trapeces augstumu. To parasti apzīmē ar burtu h (219. zīmējumā $LP = h$).

Trapeces laukums ir vienāds ar pamatņu pussummas un augstuma reizinājumu:

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Tā kā $\frac{a+b}{2}$ ir viduslīnijas garums, tad trapeces laukumu var izteikt arī kā viduslīnijas un augstuma reizinājumu.

Uzdevums. $ABCD$ ir vienādsānu trapece (220. zīm.). Starpība starp trijstūra ACD un BAC perimetriem ir 6 dm, bet trapeces viduslīnijas garums ir 12 dm. Aprēķināt trapeces pamatnes.



220. zīm.

Atrisinājums. Apzīmēsim trijstūru ACD un BAC perimetrus attiecīgi ar P_1 un P_2:

$$P_1 = AC + CD + DA; \; P_2 = CA + AB + BC.$$

Ievērojot, ka pirmajā summā un otrajā summā pirmie saskaitāmie (AC un CA) un otrie saskaitāmie (CD un AB) ir attiecīgi vienādi, secinām, ka

$$P_1 - P_2 = DA - BC \text{ jeb } DA - BC = 6 \text{ (dm)}.$$

Ja viduslīnijas garums ir 12 dm, tad abu pamatņu summa $AD + BC = 24$ (dm).

Saskaitot attiecīgi pēdējo divu vienādību kreisās un labās puses, iegūstam, ka $2AD = 30$, $AD = 15$ (dm) un $BC = 9$ dm.

18.4. RIŅĶIS

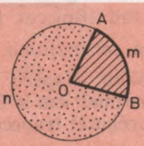
RIŅĶA JĒDZIENS

Par riņķi sauc plaknes daļu, ko ierobežo riņķa līnija. Riņķa līnijas centru, rādiusu, diametru sauc arī par riņķa centru, rādiusu, diametru. Tāpēc reizēm arī vārdus riņķa līnija un riņķis var lietot vienu otra vietā, taču ne vienmēr: jāatceras, ka riņķa līnija ir līnija, bet riņķis ir plaknes daļa.

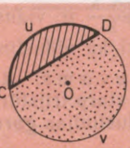
Riņķi apzīmē līdzīgi kā riņķa līniju: norāda tā centru un iekavās atzīmē rādiusu, piemēram, riņķis O (3 cm), riņķis $M(a)$.

RIŅĶA SEKTORS

Par riņķa sektoru sauc riņķa daļu starp tā diviem rādiusiem. 221. zīmējumā rādiusi OA un OB ierobežo divus sektorus: sektoru $AmBO$ un sektoru $AnBO$.



221. zīm.



222. zīm.

RIŅĶA SEGMENTS

Par riņķa segmentu sauc riņķa daļu starp hordu un loku. Horda CD sadala riņķi divos segmentos: CuD un CvD (222. zīm.).

RIŅĶA LAUKUMS

Nosakot laukumu kādai figūrai, parasti sadala to tādās figūrās, kuru laukumi jau zināmi un pēc tam šo daļu laukumus saskaita. Taču riņķi nav iespējams sadalīt jau kādās pazīstamās figūrās (trijstūros, taisnstūros u. tml.), tāpēc par riņķa laukumu pieņem robežu, uz kuru tiecas riņķī ievilkta (vai ap to apvilkta) regulāra daudzstūra laukums, ja šī daudzstūra malu skaits neierobežoti palielinās (un līdz ar to katras malas garums tiecas uz nulli). Tādējādi no jau zināmās regulārā daudzstūra aprēķināšanas formulas $S = p \cdot r$ (p — pusperimetrs, r — ievilktā riņķa rādiuss) izriet riņķa laukuma aprēķināšanas formula $S_0 = \frac{C}{2} \cdot r$ jeb

$$S_0 = \pi R^2 \text{ vai } S_0 = \frac{\pi D^2}{4}.$$

U z d e v u m s. Aprēķināt laukumu figūrai, ko ierobežo divas koncentriskas riņķa līnijas, kuru rādiusi ir 6,0 cm un 5,0 cm.

A t r i s i n ā j u m s. Kā redzams 223. zīmējumā, prasīto lau-

223. zīm.

kumu vispār var aprēķināt kā divu tādu riņķu laukumu starpību, kuru rādiusi ir R un r:

$$S = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi (R^2 - r^2).$$

Tā kā rādiusu vērtības dotas ar diviem zīmīgiem cipariem, tad reizinātāja π vērtību izvēlamies ar trim zīmīgiem cipariem (t. i., ar vienu «rezerves» ciparu):

$$S = 3{,}14 \cdot (6^2 - 5^2) = 3{,}14 \cdot (6 + 5)(6 - 5) = 3{,}14 \cdot 11 = \\ = 34{,}5 \approx 35 \ (\text{cm}^2).$$

Uzdevums. No kvadrātveida skārda loksnes izgrieza iespējami lielāko riņķi. Cik procentu skārda loksnes sastāda atgriezumi?

Atrisinājums. Uzdevumā jāatrod riņķa laukuma $\frac{\pi D^2}{4}$ un kvadrāta laukuma D^2 attiecība (D ir riņķa diametrs un reizē kvadrāta mala):

$$\frac{\pi D^2}{4} : D^2 = 0{,}25\pi.$$

Izsakot procentos, iegūstam

$$0{,}25\pi \cdot 100 \approx 25 \cdot 3{,}14 \approx 78{,}5 \ (\%).$$

Atgriezumi sastāda 100 % − 78,5 % = 21,5 % skārda loksnes.

SEKTORA LAUKUMS

Ja sektora centra leņķis ir $n°$ un riņķa rādiuss ir R, tad sektora laukums ir

$$S_{sekt.} = \frac{\pi R^2 \cdot n}{360}.$$

18.5. KONSTRUKCIJAS UZDEVUMI

KONSTRUKCIJAS PAMATUZDEVUMI

Ģeometriskās konstruēšanas pamatinstrumenti ir tikai lineāls un cirkulis, ar kuriem var izpildīt divas pamatoperācijas — konstruēt taisnes (nogriežņus, starus) un riņķa līnijas (lokus). Atvieglotai konstruēšanai dažkārt izmanto arī dažādus palīginstrumentus — mērlineālu, uzstūri, transportieri u. c.

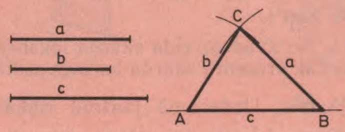
Riņķa līniju vai loku ar centru punktā M un rādiusu a īsi norāda ar pierakstu $r.l.\ M(a)$ vai tikai $M(a)$.

Svarīgākie pamatuzdevumi ir šādi:

a) konstruēt nogriezni, kas vienāds ar doto nogriezni (sk. 17.1.);
b) konstruēt leņķi, kas vienāds ar doto leņķi (sk. 17.2.);
c) sadalīt nogriezni vienādās daļās (sk. 17.1.);
d) sadalīt leņķi uz pusēm (sk. 17.2.);

e) konstruēt nogriežņa vidusperpendikulu (sk. 17.3.);
f) novilkt perpendikulu pret taisni no dotā punkta (sk. 17.3.);
g) caur doto punktu novilkt dotajai taisnei paralēlu taisni (sk. 17.3.);
h) konstruēt trijstūri, ja dotas tā 3 malas.

Pēdējā pamatuzdevuma izpilde redzama 224. zīmējumā, kurā parādīts, kā konstruēt trijstūri ar dotajām malām *a, b* un *c*:



224. zīm.

1) konstruē $AB = c$; 2) velk lokus $A(a)$ un $B(b)$, tie krustojas punktā C; 3) konstruē nogriežņus AC un BC.

SALIKTIE UZDEVUMI

Konstrukcijas uzdevumi var būt ļoti daudzveidīgi, bet tie visi izpildāmi, veicot secīgi pēc pārdomāta plāna pamatoperācijas un pamatuzdevumus.

Konstrukcijas uzdevumu risināšanas gaitā var saskatīt četras daļas.

U z m e t u m s. Ar brīvu roku aptuveni uzskicē konstruējamo figūru, tajā ar treknu līniju vai citādi atzīmē un norāda dotos elementus. Vērojot zīmējumu, pārdomā, ar kuru doto elementu varētu sākt konstrukciju, kā pēc tam turpināt, kuru pazīstamu figūru īpašības varētu izmantot šajā uzdevumā, kādas palīglīnijas būtu izdevīgi novilkt caur doto punktu utt., kamēr kļūst skaidrs konstruēšanas plāns.

K o n s t r u k c i j a. Vispirms uzzīmē dotos elementus — nogriežņus, leņķus, punktus u. tml. Pēc tam ar lineālu un cirkuli (vai arī ar palīginstrumentiem) konstruē prasīto figūru pēc uzmetumā pārdomātā plāna. Ja tiek prasīts, tad skaidri, bet pēc iespējas īsi apraksta arī konstrukcijas gaitu. (Konstrukcijas gaitā izpildītos pamatuzdevumus tikai norāda, bet sīkāk tos neapraksta.)

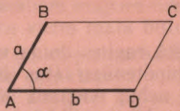
P i e r ā d ī j u m s. Saskaņā ar konstrukcijas gaitu pierāda, ka konstruētā figūra apmierina visus uzdevuma nosacījumus. Pierādījumu var sniegt vārdos vai arī uzrakstīt.

I z p ē t ī j u m s. Noskaidro, cik atrisinājumu var būt šādam uzdevumam atkarībā no dotajiem lielumiem: neviens (uzdevums nav iespējams), viens vienīgs, divi, vairāki vai pat bezgalīgi daudz atrisinājumu (uzdevums nenoteikts).

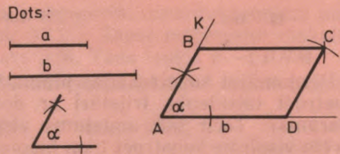
KONSTRUKCIJAS UZDEVUMU PIEMĒRI

1. uzdevums. Konstruēt paralelogramu, kam dotas divas malas un leņķis starp tām.

Uzmetums redzams 225. zīmējumā. Pieņemam, ka $ABCD$ ir konstruējamais paralelograms: $AB = a$, $AD = b$ un $\sphericalangle BAD = \alpha$ — dotās malas un dotais leņķis.



225. zīm.



226. zīm.

Konstrukcija parādīta 226. zīmējumā:

1) konstruē $AD = b$;

2) konstruē $\sphericalangle BAK = \alpha$;

3) uz stara AK atliek $AB = a$;

4) velk lokus $B(b)$ un $D(a)$, kas krustojas punktā C;

5) velk nogriežņus BC un DC, iegūstot konstruējamo paralelogramu $ABCD$.

Pierādījums. 1) $ABCD$ ir paralelograms kā četrstūris ar vienādām pretējām malām.

2) $AD = BC = b$, $AB = DC = a$ un $\sphericalangle BAD = \alpha$ pēc konstrukcijas.

Izpētījums. 1) Ja $\alpha \geqslant 180°$, tad uzdevumam nav atrisinājuma;

2) ja $\alpha \leqslant 180°$, uzdevumam ir viens vienīgs atrisinājums.

Piezīme. Konstrukcijas gaitu pēc 3. soļa varētu turpināt arī citādi, piemēram,

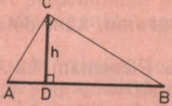
4) velk taisnes $BL \| AD$ un $DM \| AK$ līdz tās krustojas punktā C, iegūstot konstruējamo paralelogramu $ABCD$.

Tad, protams, citāds būtu arī pierādījuma pirmais punkts, proti,

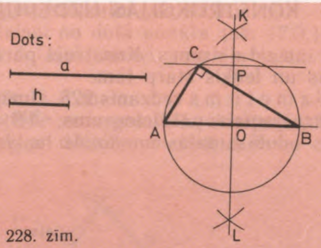
1) $ABCD$ ir paralelograms kā četrstūris ar paralēlām pretējām malām.

2. uzdevums. Konstruēt taisnleņķa trijstūri, ja dota tā hipotenūza un augstums, kas novilkts pret hipotenūzu.

Uzmetums redzams 227. zīmējumā. Pieņemam, ka ABC — konstruējamais trijstūris, kurā $\sphericalangle C = 90°$, $AB = a$ un augstums $CD = h$.



227. zīm.



228. zīm.

Pārdomājot konstrukcijas plānu, varētu rasties doma vispirms konstruēt taisnleņķa trijstūri ar doto hipotenūzu (tas ir viegli izdarāms). Taču tad augstums vispār nebūs vienāds ar doto. Varētu vispirms konstruēt tikai hipotenūzu AB un vilkt tai paralēlu taisni MN attālumā h no AB. Tad trijstūra trešā virsotne C būtu meklējama uz taisnes MN. Bet kā atrast uz MN punktu C tā, lai būtu $\sphericalangle ACD = 90°$?

K o n s t r u k c i j a parādīta 228. zīmējumā:

1) konstruē $AB = a$;

2) konstruē AB vidusperpendikulu OK, kur O ir AB viduspunkts;

3) velk $O\left(\frac{a}{2}\right)$;

4) uz OK atliek $OP = h$;

5) velk taisni $CP \| AB$, kur C ir uz $O\left(\frac{a}{2}\right)$;

6) velk nogriežņus AC un BC, iegūst meklējamo trijstūri ABC.

P i e r ā d ī j u m s. 1) Mala $AB = a$ pēc konstrukcijas;

2) trijstūrī $\sphericalangle C = 90°$ kā ievilkts leņķis, kas balstās uz riņķa līnijas diametra;

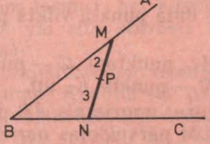
3) augstums no C pret hipotenūzu ir vienāds ar h pēc konstrukcijas.

I z p ē t ī j u m s. 1) Uzdevumam nav atrisinājuma, ja $h > \frac{a}{2}$ (jo tad taisne CP nekrusto riņķa līniju);

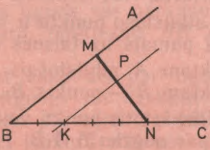
2) ja $h < \frac{a}{2}$, tad uzdevumam ir atrisinājums. Pie tam, ja $h = \frac{a}{2}$, tad konstrukcijas rezultāts ir vienādsānu taisnleņķa trijstūris.

3. u z d e v u m s. Caur doto punktu leņķa iekšpusē novilkt nogriezni tā, lai tā galapunkti atrastos uz leņķa malām un dotais punkts sadalītu nogriezni attiecībā 2:3.

U z m e t u m s redzams 229. zīmējumā. Pieņemam, ka MN ir meklējamais nogrieznis, kuru dotais punkts P leņķa ABC iekšpusē dala attiecībā $MP{:}NP = 2{:}3$.



229. zīm.



230. zīm.

Meklējot konstrukcijas plānu, mēģināsim izmantot teorēmu par proporcionāliem nogriežņiem (sk. 17.2.). Tāpēc mēģināsim saskatīt leņķi, kura viena mala būtu stars NM. Tāds leņķis ir $\sphericalangle BNM$.

K o n s t r u k c i j a parādīta 230. zīmējumā (ABC — dotais leņķis, P — dotais punkts):

1) velk $PK \| AB$ (K — punkts uz malas BC);

2) uz BC atliek $KN = \frac{3}{2} BK$;

3) velk caur P nogriezni NM, kas ir meklējamais nogrieznis.

P i e r ā d ī j u m s. $MP:PN = BK:KN$ kā proporcionāli nogriežņi uz leņķa MNB malām; $MP:PN = BK:KN = 2:3$ pēc konstrukcijas.

I z p ē t ī j u m s. Uzdevumam ir viens vienīgs atrisinājums.

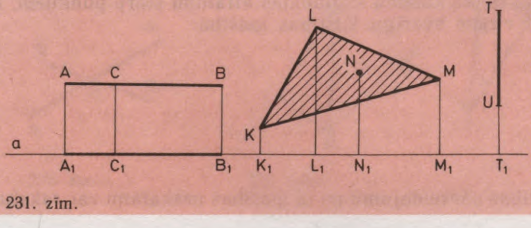
19. ĢEOMETRISKO FIGŪRU PĀRVEIDOJUMI

19.1. KUSTĪBA

PĀRVEIDOJUMA JĒDZIENS

Ja dotās figūras katram punktam pēc kāda pieņemta likuma piekārto vienu kādu noteiktu (vispār — citu) atbilstošu punktu, tad šie piekārtotie punkti veido kādu jaunu figūru. Saka, ka jaunā figūra ir iegūta no dotās figūras attiecīgā pārveidojuma rezultātā.

Ilustrēsim pārveidojuma jēdzienu ar piemēriem (231. zīm.).



231. zīm.

Nogriežņa AB, trijstūra KLM un nogriežņa TU katram punktam par atbilstošo punktu ir piekārtots no dotā punkta vilktā perpendikula pamats uz taisnes a:
punktam A atbilstošais punkts ir A_1, punktam C — punkts C_1, punktam B — punkts B_1, punktam K — punkts K_1 utt.

Piekārtotie punkti veido jaunu figūru: nogrieznis AB pārveidojas par nogriezni A_1B_1 : trijstūris KLM pārveidojas par nogriezni K_1M_1; nogrieznis TU pārveidojas par punktu T_1.

APVĒRSTAIS PĀRVEIDOJUMS

Pieņemsim, ka figūras F pārveidojumā par figūru F_1 katram figūras F punktam X tiek piekārtots figūras F_1 atbilstošais punkts X_1. Figūras F_1 pārveidojumu, kas katram punktam X_1 piekārto figūras F punktu X, sauc par pirmā pārveidojuma apvērsto jeb inverso pārveidojumu.

Viegli saprast, ka apvērstais pārveidojums eksistē tikai tādam pārveidojumam, kurā dotās figūras F atšķirīgiem punktiem atbilst atšķirīgi punkti arī pārveidotajā figūrā F_1.

Kā redzams 231. zīmējumā, nogriežņa AB pārveidojums par nogriezni A_1B_1, ir apvēršams. Turpretim trijstūra KLM un nogriežņa TU pārveidojumi nav apvēršami, jo, piemēram, trijstūra punktam L atbilst viens vienīgs punkts L_1, bet punktam L_1 atbilst ne tikai punkts L, bet arī vēl daudzi citi trijstūra punkti.

KUSTĪBA

Kā redzams iepriekšējos piemēros (sk. 231. zīm.), attālumi starp diviem punktiem dotajā figūrā un tiem atbilstošajiem punktiem jaunajā, pārveidotajā figūrā vispār var atšķirties. Tā, piemēram, $AB = A_1B_1$, bet $KM \neq K_1M_1$.

Figūras F pārveidojumu par figūru F_1 sauc par kustību, ja tajā saglabājas attālumi starp punktiem, t. i., ja figūras F jebkuri divi punkti X un Y pārveidojas par figūras F_1 punktiem X_1 un Y_1 tā, ka $XY = X_1Y_1$.

No tā, ka kustībā saglabājas attālumi starp punktiem, kā sekas izriet virkne svarīgu kustības īpašību:

1) taisne pārveidojas par taisni, stars — par staru, nogrieznis — par nogriezni, pie tam saglabājas punktu savstarpējā secība;
2) saglabājas leņķu lielums;
3) kustībā atšķirīgiem punktiem atbilst atšķirīgi punkti, tāpēc kustības pārveidojums ir apvēršams;
4) pārveidojot kustībā figūru F_1 par F_2 un pēc tam figūru F_2 par F_3, figūras F_1 pārveidojums par figūru F_3 arī ir kustība.

Kustības pārveidojumu un tā īpašības uzskatāmi var raksturot šādi:

kustībā figūra paliek vienāda ar sākotnējo figūru (tā saglabā savu lielumu un formu), bet kustības rezultātā figūra var pārvietoties citā vietā vai citā stāvoklī (kā, piemēram, nogrieznis AB 231. zīmējumā).

Tāpēc kustības pārveidojumu dažkārt sauc arī par figūras pārvietojumu. Kustībā jeb pārvietojumā figūras var uzskatīt par «cietiem» fizikāliem ķermeņiem, kuri tiek pārbīdīti pa plakni, pagriezti citā stāvoklī utt. Kustībā un arī jebkurā citā pārveidojumā figūras daži punkti var arī palikt sākotnējā stāvoklī. Kustības vienkāršākie veidi ir centrālā simetrija, aksiālā simetrija, pagrieziens un paralēlpārnese. Izdarot šos kustības veidus mērķtiecīgi citu pēc cita, doto figūru var pārvietot jebkurā vietā vai stāvoklī.

CENTRĀLĀ SIMETRIJA

Pieņemsim, ka plaknē ir fiksēts kāds punkts O — simetrijas centrs (232. zīm.). Lai atrastu kādam dotajam punktam A atbilstošo punktu A_1, velkam staru AO un uz tā otrpus punkta O atliekam punktu A_1 tā, lai būtu spēkā vienādība $OA_1 = OA$. Punktu A_1 sauc par punkta A simetrisko punktu attiecībā pret simetrijas centru O jeb īsāk — par simetrisko punktu attiecībā pret punktu O.

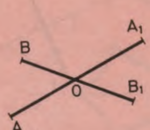
Protams, līdz ar to punktu A var uzlūkot par punkta A_1 simetrisko punktu, tāpēc var runāt par divu punktu savstarpējo simetriju.

Divus punktus A un A_1 sauc par savstarpēji simetriskiem attiecībā pret kādu punktu O, ja punkts O ir nogriežņa AA_1 viduspunkts (232. zīm.).

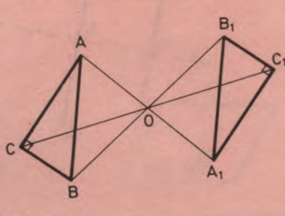
Punkta B simetriskais punkts attiecībā pret simetrijas centru O ir punkts B_1. Punkta O simetriskais punkts ir pats punkts O (232. zīm.).

Divas figūras sauc par savstarpēji simetriskām attiecībā pret kādu punktu, ja vienas figūras katrs punkts ir simetrisks kādam otras figūras punktam, — un otrādi.

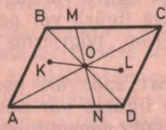
$\triangle ABC$ un $\triangle A_1B_1C_1$ ir savstarpēji simetriski attiecībā pret punktu O kā simetrijas centru (233. zīm.).



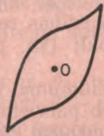
232. zīm.



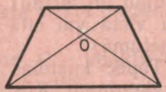
233. zīm.



234. zīm.



235. zīm.



236. zīm.

Ja centrālajā simetrijā attiecībā pret kādu punktu figūra pārveidojas par to pašu figūru, tad šo punktu sauc par figūras simetrijas centru, bet figūru — par centrāli simetrisku figūru.

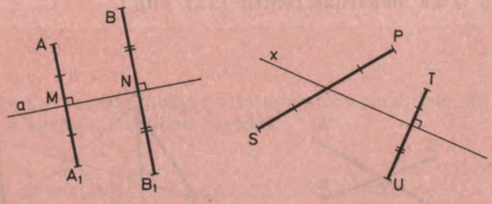
Paralelograma $ABCD$ (234. zīm.) simetrijas centrs ir tā diagonāļu krustpunkts O, jo paralelograma jebkura punkta simetriskais punkts attiecībā pret punktu O arī ir šī paša paralelograma punkts: punkta A simetriskais punkts ir C, punkta M simetriskais punkts ir N, punkta K simetriskais punkts ir L utt.

235. zīmējumā parādītajai figūrai ir simetrijas centrs, bet 236. zīmējumā redzamajai figūrai simetrijas centra nav.

Viegli saskatīt, ka, pagriežot figūru ap tās simetrijas centru par 180°, figūra aizņem plaknē sākotnējo vietu.

AKSIĀLĀ SIMETRIJA

Pieņemsim, ka plaknē ir fiksēta kāda taisne a — simetrijas ass (237. zīm.). Lai atrastu kādam dotajam punktam A atbilstošo punktu A_1, velkam no punkta A pret taisni a perpendikulu AM un uz tā pagarinājuma otrpus taisnes a atliekam punktu A_1 tā, lai būtu spēkā vienādība $MA_1 = MA$. Punktu A_1 sauc par punkta A aksiāli* simetrisko punktu attiecībā pret simetrijas asi a vai īsāk — attiecībā pret taisni a. Reizē ar to arī punkts A ir punkta A_1 simetriskais punkts.



237. zīm.

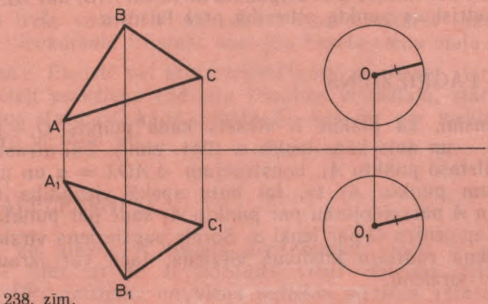
---

* Latīņu valodas vārds *axis* (izrunā: aksis) nozīmē *ass*.

Divus punktus A un A_1 sauc par savstarpēji simetriskiem pret kādu taisni a, ja nogrieznis AA_1 ir perpendikulārs pret taisni a un krustpunktā ar to dalās uz pusēm.

Savstarpēji simetriski pret taisni a ir arī punkti B un B_1 (237. zīm.). Punkts M (un arī punkts N) ir savstarpēji simetrisks pats ar sevi. Der ievērot, ka punkti P un S, tāpat arī T un U (237. zīm.) nav simetriski pret taisni x. (Kāpēc?)

Divas figūras sauc par savstarpēji simetriskām pret kādu taisni, ja vienas figūras katram punktam ir simetrisks kāds otras figūras punkts, un arī otrādi (238. zīm.).



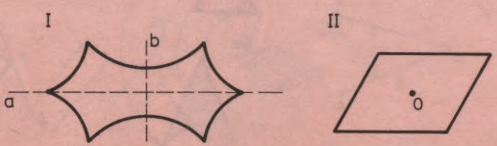
238. zīm.

Ja aksiālsimetrijā pret kādu taisni figūra pārveidojas par to pašu figūru, tad šo taisni sauc par figūras simetrijas asi, bet figūru — par aksiāli simetrisku figūru.

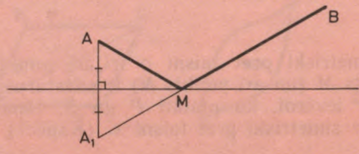
Figūrai I (239. zīm.) ir divas simetrijas asis — taisnes a un b (un arī simetrijas centrs). Figūrai II (paralelogramam) nav simetrijas ass, bet ir gan simetrijas centrs (punkts O).

Viegli saskatīt, ka, pārliecot figūru pa tās simetrijas asi, figūras abas puses savstarpēji pilnīgi sedzas.

Uzdevums. Taisnes a vienā pusē doti punkti A un B. Konstruēt visīsāko lauzto līniju AMB tā, lai punkts M būtu uz taisnes a.



239. zīm.



240. zīm.

K o n s t r u k c i j a. Kā redzams 240. zīmējumā, lauztās līnijas punkts M ir taisnes a krustpunkts ar taisni A_1B, kur A_1 ir punktam A simetriskais punkts attiecībā pret taisni a.

PAGRIEZIENS

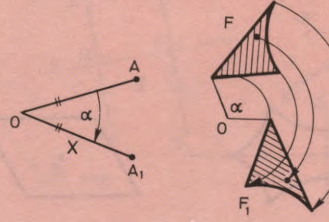
Pieņemsim, ka plaknē ir fiksēts kāds punkts O — pagrieziena centrs — un dots kāds leņķis α (241. zīm.). Lai atrastu punktam A atbilstošo punktu A_1, konstruējam $\sphericalangle AOX = \alpha$ un uz stara OX atliekam punktu A_1 tā, lai būtu spēkā vienādība $OA_1 = AO$. Punkta A pārveidojumu par punktu A_1 sauc par punkta A pagriezienu ap centru O par leņķi α. Šoreiz pagrieziena virziens izvēlēts pulksteņa rādītāju kustības virzienā, taču var izraudzīties arī pretējo virzienu.

Ja figūra F_1 iegūta no figūras F, tās visus punktus pagriežot ap centru O par leņķi α, tad figūras F pārveidojumu figūrā F_1 arī sauc par figūras pagriezienu (241. zīm.).

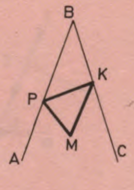
Pagrieziena apvērstais pārveidojums arī ir pagrieziens ap to pašu centru un par tikpat lielu leņķi, tikai pretējā virzienā.

Viegli saprast, ka pagrieziens ap punktu O par 180° un centrālā simetrija attiecībā pret punktu O ir viens un tas pats pārveidojums.

U z d e v u m s. Konstruēt vienādmalu trijstūri, lai tā viena virsotne būtu punktā M leņķa ABC iekšpusē, bet pārējās virsotnes būtu uz leņķa malām BA un BC.



241. zīm.



242. zīm.

U z m e t u m s (242. zīm.). Pieņemam, ka konstruēts vienādmalu trijstūris MKP, kas apmierina uzdevuma nosacījumus.

Pagriežot plakni ap punktu M kā centru par 60° pulksteņa rādītāju kustības virzienā, virsotnes P attēls nonāktu punktā K un līdz ar to šajā punktā stara AB attēls krustotu staru BC. No tā izriet konstrukcijas gaita.

K o n s t r u k c i j a (nav izpildīta, lai nesarežģītu zīmējumu): 1) pagriežam staru BA (praktiski — jebkurus divus tā punktus) ap punktu M kā ap centru par 60° pulksteņa rādītāju kustības virzienā; stara BA attēla un stara BC krustpunkts K ir meklējamā trijstūra otrā virsotne;

2) trijstūra trešo virsotni P var atrast visai vienkārši (kaut vai konstruējot vienādmalu trijstūri, kam jau fiksēta viena mala MK).

P i e z ī m e. Eksistē vēl otrs atrisinājums: pagriežot staru BA par 60° pretēji pulksteņa rādītāju kustības virzienam, stara BA attēls krustos staru BC kādā punktā K_1, kas der par meklējamā trijstūra otro virsotni utt.

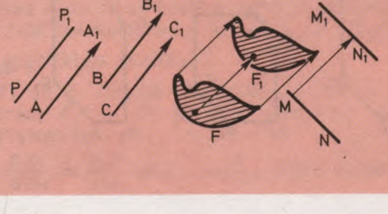
PARALĒLPĀRNESE

Pieņemsim, ka plaknē ir fiksēts divu punktu pāris P un P_1 (243. zīm.). Līdz ar to ir norādīts viens noteikts attālums (nogriežņa PP_1 garums) un viens noteikts virziens (stara PP_1 virziens).

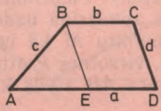
Lai atrastu kādam dotajam punktam A atbilstošo punktu, konstruējam stara PP_1 virzienā staru AX un atliekam uz tā punktu A_1 tā, lai būtu spēkā vienādība $AA_1=PP_1$. Punktu A_1 sauc par punkta A pārveidojumu paralēlpārnesē, ko nosaka punktu pāris P un P_1. Saka arī, ka punkts A šajā paralēlpārnesē ir pārnests punktā A_1. Punkti B un C šajā paralēlpārnesē ir pārnesti punktos B_1 un C_1.

Ja figūra F_1 iegūta no figūras F tās visu punktu paralēlpārnesē, ko nosaka punktu pāris P un P_1, tad figūras F pārveidojumu par figūru F_1 arī sauc par figūras paralēlpārnesi (243. zīm.).

Der ievērot, ka paralēlpārnesē taisnes paliek paralēlas savam sākotnējam stāvoklim.



243. zīm.



244. zīm.

U z d e v u m s. Konstruēt trapeci, kurai dotas pamatnes a un b un sānu malas c un d.

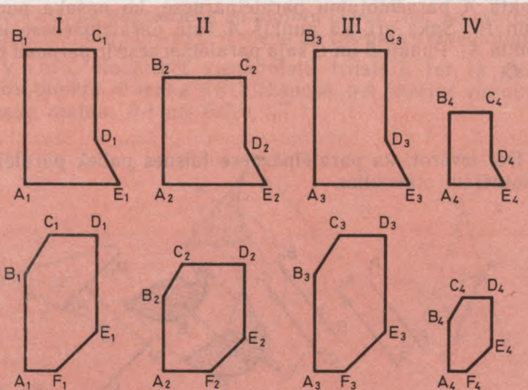
Pieņemam, ka $ABCD$ ir konstruējamā trapece, kurai $AD = a$, $BC = b$, $AB = c$, $CD = d$ (244. zīm.).

Trapeces sānu malu CD paralēlpārnesē pārnesam stāvoklī BE. Kā redzams, trapeces konstrukciju var sākt ar trijstūra ABE konstrukciju — šim trijstūrim zināmas visas trīs malas $AB = c$, $BE = d$, $AE = a - b$. Pēc tam viegli konstruēt arī trapeci.

19.2. FIGŪRU LĪDZĪBA

PRIEKŠSTATS PAR FIGŪRU LĪDZĪBU

Kā zināms, divas figūras sauc par vienādām, ja tās var pārvietot tā, ka tās pilnīgi sakrīt (sedzas). Tādas ir, piemēram, 245. zīmējumā redzamās figūras I un III. Vienādām figūrām vienāda ir ne tikai forma, bet vienādi ir arī visi izmēri — attālumi starp jebkuriem atbilstošajiem punktiem vienā un otrā figūrā. Piemēram, $A_1B_1 = A_3B_3$, $A_1C_1 = A_3C_3$, $B_1E_1 = B_3E_3$ utt.



245. zīm.

Figūras, kurām ir vienāda forma, sauc par līdzīgām figūrām. Tādas figūras pēc izmēriem var būt ne tikai vienādas, bet arī atšķirīgas — tās ir it kā dažāda palielinājuma vienas un tās pašas figūras fotogrāfijas. Līdzīgas ir I, III un IV figūra.

Var ievērot, ka salīdzinājumā ar I figūru IV figūrā itin visi atbilstošie izmēri ir 2 reizes samazināti: $A_1B_1:A_4B_4 = 2$, $B_1C_1:B_4C_4 = 2$, $A_1D_1:A_4D_4 = 2$ utt. Turpretim I un III figūrā visi attiecīgie izmēri ir pilnīgi vienādi — I un III figūra ir ne tikai līdzīgas, bet arī vienādas.

Figūras I un II nav ne vienādas, ne līdzīgas. Figūras II platums, piemēram, ir lielāks, bet augstums — mazāks nekā figūrai I.

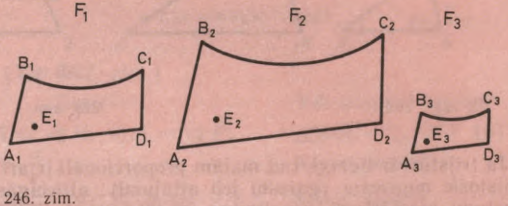
Kā līdzīgu figūru piemērus var minēt arī dažāda mēroga mūsu republikas kartes, dažāda lieluma PSRS ģerboņus, rūpīgi izgatavotus dažāda lieluma automašīnas «Žiguļi» rotaļu modeļus utt.

FIGŪRU LĪDZĪBAS DEFINĪCIJA

Divas figūras F_1 un F_2 sauc par līdzīgām, ja attālumu attiecības starp vienas figūras jebkuriem diviem punktiem un atbilstošajiem otrās figūras punktiem ir vienādas.

246. zīmējumā parādīto figūru F_2 un F_1 jebkuru divu atbilstošo punktu attālumu attiecības ir vienādas, piemēram,

$$\frac{A_2D_2}{A_1D_1} = \frac{A_2C_2}{A_1C_1} = \frac{B_2E_2}{B_1E_1} = \frac{D_2B_2}{D_1B_1} = \ldots = 2.$$



246. zīm.

Atbilstošo attālumu attiecību sauc par figūras līdzības koeficientu. Figūras F_2 līdzības koeficients attiecībā pret figūru F_1 ir 2. Figūras F_1 līdzības koeficients attiecībā pret figūru F_2 ir pirmā koeficienta apgrieztais skaitlis $\frac{1}{2}$.

Figūru F_1 un F_2 līdzību pieraksta tā: $F_1 \sim F_2$.

Arī figūrām F_3 un F_1 jebkuru atbilstošu punktu attālumu attiecības ir vienādas:

$$\frac{A_3D_3}{A_1D_1} = \frac{B_3D_3}{B_1D_1} = \frac{D_3E_3}{D_1E_1} = \ldots = \frac{2}{3}, \text{ tāpēc } F_3 \sim F_1.$$

Figūras F_3 un F_2 visu atbilstošo punktu attālumu attiecības arī ir vienādas (šo attiecību vērtība ir $\frac{1}{3}$, tāpēc $F_2 \sim F_3$).

Der ievērot, ka līdzīgās figūras atbilstošie attālumi var būt vienmērīgi samazināti vai palielināti, bet atbilstošie leņķi paliek vienādi.

TRIJSTŪRU LĪDZĪBA

Definējot trijstūru līdzību, nav nepieciešams minēt itin visu atbilstošo attālumu attiecību vienādību, jo šī vienādība kā secinājums izriet no trijstūru līdzības vienkāršākas definīcijas.

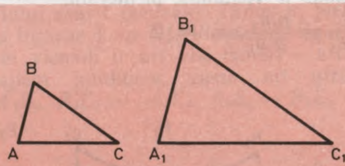
Divus trijstūrus sauc par līdzīgiem, ja to malas ir proporcionālas un leņķi ir attiecīgi vienādi.

247. zīmējumā parādītajiem trijstūriem $\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$, $\sphericalangle B = \sphericalangle B_1$, $\sphericalangle C = \sphericalangle C_1$;

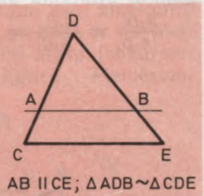
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1},$$

tātad $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Pierakstot trijstūru līdzību, trijstūru virsotņu burti jāsakārto atbilstošā secībā.



247. zīm.



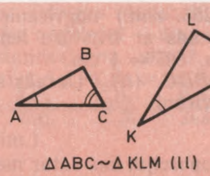
248. zīm.

Ja trijstūri ir līdzīgi, tad malām proporcionāli ir arī visi pārējie atbilstošie nogriežņi (garumi jeb attālumi): attiecīgās mediānas, augstumi, bisektrises, viduslīnijas, ievilktu un apvilktu riņķa līniju rādiusi utt.

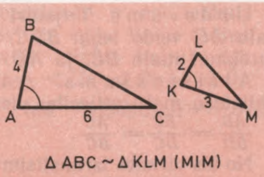
Dotajam trijstūrim līdzīgu trijstūri var viegli iegūt, novelkot vienai malai paralēlu taisni, kas krusto trijstūra abas pārējās malas: atšķeltais trijstūris ir līdzīgs ar doto (248. zīm.).

TRIJSTŪRU LĪDZĪBAS PAZĪMES

Trijstūru līdzības konstatēšanai nav nepieciešams pārbaudīt, vai izpildās visi līdzības definīcijā minētie nosacījumi: līdzību var noteikt jau pēc dažām pazīmēm. Iegaumēšanas labad tajās leņķu



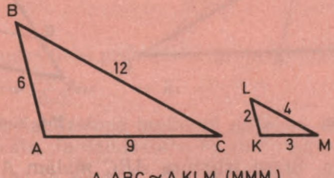
249. zīm.



250. zīm.

vienādību apzīmēsim ar burtu *l*, bet malu proporcionalitāti ar burtu *M*.

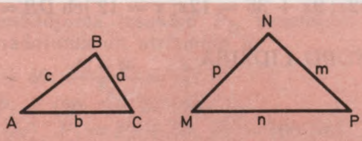
Divi trijstūri ir līdzīgi, ja
1) viena trijstūra divi leņķi ir attiecīgi vienādi ar otra trijstūra diviem leņķiem (*ll*, sk. 249. zīm.);
2) viena trijstūra divas malas ir proporcionālas otra trijstūra divām malām un leņķi starp tām vienādi (*MlM*, sk. 250. zīm.);
3) viena trijstūra visas malas ir proporcionālas otra trijstūra visām malām (*MMM*, sk. 251. zīm.).



251. zīm.

P i e m ē r i (252. zīm.)

Dots:	Vai trijstūri līdzīgi?
1) $\sphericalangle B = \sphericalangle M,\ \sphericalangle A = \sphericalangle P$;	$\triangle ABC \sim \triangle PMN$ (*ll*).
2) $\frac{c}{n} = \frac{a}{p}$;	Nevar noteikt.
3) $\frac{b}{m} = \frac{a}{n},\ \sphericalangle C = \sphericalangle M$;	Nevar noteikt.
4) $\frac{b}{m} = \frac{a}{n},\ \sphericalangle C = \sphericalangle P$;	$\triangle ABC \sim \triangle MNP$ (*MlM*).
5) $\frac{a}{p} = \frac{b}{n} = \frac{c}{m}$;	$\triangle ABC \sim \triangle PNM$ (*MMM*).



252. zīm.

U z d e v u m s. Trijstūrī ABC (253. zīm.) nogrieznis BD ar malu AC veido leņķi BDC, kas vienāds ar trijstūra leņķi ABC. Aprēķināt malu BC, ja $AD = 5$ cm, $DC = 4$ cm.

A t r i s i n ā j u m s. $\triangle ABC \sim \triangle BDC$ (ll). Uzrakstām visu atbilstošo malu attiecību vienādību virkni

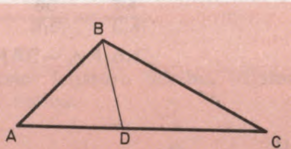
$$\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{DC} = \frac{AC}{BC}.$$

No šīs virknes izrakstīsim tādu proporciju, kas satur meklējamo nogriezni BC un kurā pārējie locekļi ir zināmi. Vadoties no šāda apsvēruma, derīga var būt vienīgi proporcija

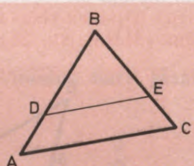
$$\frac{BC}{DC} = \frac{AC}{BC}.$$

Šajā proporcijā nezināmais ir vienīgi nogrieznis BC, bet nogrieznis $DC = 4$ cm un no dotā var aprēķināt, ka $AC =$ $= 5$ cm $+ 4$ cm $= 9$ cm.

Tātad $\frac{BC}{4} = \frac{9}{BC}$, no kurienes $BC^2 = 9 \cdot 4$, $BC = 6$ (cm).



253. zīm.



254. zīm.

U z d e v u m s. Starp trijstūra ABC malām AB un BC vilkts nogrieznis DE paralēli AC (254. zīm.). Aprēķināt nogriezni DB, ja $AD = 4$ cm, $DE = 9$ cm un $AC = 12$ cm.

A t r i s i n ā j u m s. Tā kā $\sphericalangle CAB = \sphericalangle EDB$ (kā kāpšļu leņķi pie paralēlām taisnēm), tad $\triangle ABC \sim \triangle DBE$ (ll). No šo trijstūru līdzības izriet, ka

$$\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{DE}.$$

Apzīmēsim $DB = x$, tad $AB = x + 4$ un, ievietojot proporcijā skaitliskās vērtības, iegūstam vienādojumu

$$\frac{x+4}{x} = \frac{12}{9}.$$

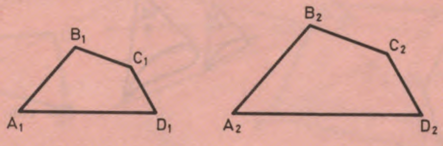
Aprēķinām x:

$9(x + 4) = 12x$; $9x + 36 = 12x$; $x = 12$ jeb $DB = 12$ (cm).

DAUDZSTŪRU LĪDZĪBA

No divu figūru līdzības vispārīgās definīcijas izriet vienkāršota daudzstūru līdzības definīcija: divus daudzstūrus sauc par līdzīgiem, ja to malas ir proporcionālas un leņķi attiecīgi vienādi.

Protams, līdzīgos daudzstūros proporcionāli ir arī jebkuri citi atbilstošie nogriežņi — diagonāles, ievilkto riņķa līniju rādiusi (ja šajos daudzstūros vispār var ievilkt riņķa līniju) utt. Ja $\sphericalangle A_2 = \sphericalangle A_1$, $\sphericalangle B_2 = \sphericalangle B_1$, $\sphericalangle C_2 = \sphericalangle C_1$, $\sphericalangle D_2 = \sphericalangle D_1$ un $\frac{A_2B_2}{A_1B_1} = \frac{B_2C_2}{B_1C_1} = \frac{C_2D_2}{C_1D_1} = \frac{D_2A_2}{D_1A_1} = k$, tad $A_2B_2C_2D_2 \sim A_1B_1C_1D_1$ (255. zīm.).



255. zīm.

Visi vienāda nosaukuma regulārie daudzstūri ir savā starpā līdzīgi. Piemēram, līdzīgi ir visi vienādmalu trijstūri, līdzīgi ir visi kvadrāti, regulāri piecstūri utt.

Līdzīgos daudzstūros perimetri ir proporcionāli malu garumiem:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{A_2B_2}{A_1B_1} = \frac{B_2C_2}{B_1C_1} = \ldots = k.$$

Divu līdzīgu daudzstūru laukumu attiecība ir vienāda ar malu attiecības kvadrātu. Ja daudzstūru F_2 un F_1 malu attiecība ir k, tad laukumu attiecība ir $\frac{S_2}{S_1} = k^2$. Tā, piemēram, palielinot kvadrāta visas malas trīs reizes, kvadrāta laukums palielinās 9 reizes.

Uzdevums. Divu līdzīgu daudzstūru lielākās malas ir 35 m un 14 m, bet daudzstūru perimetru starpība ir 60 m. Aprēķināt daudzstūru perimetrus.

Atrisinājums. Apzīmējot daudzstūru perimetrus ar P_1 un P_2, rodas divi vienādojumi ar nezināmajiem P_1 un P_2:

$P_1 : P_2 = 35:14$ (jo daudzstūru perimetru attiecība ir vienāda ar malu attiecību);

$P_1 - P_2 = 60$.

Vienkāršojam pirmo vienādojumu:

$P_1 : P_2 = 5:2$.

No otrā vienādojuma izsakām P_1, ievietojam dabūto izteiksmi pirmajā vienādojumā un atrisinām to:

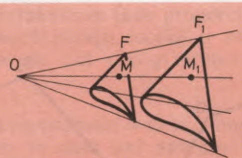
$P_1 = P_2 + 60$; $\frac{P_2 + 60}{P_2} = \frac{5}{2}$;

$5P_2 = 2P_2 + 120$; $3P_2 = 120$;

$P_2 = 40$ (m); $P_1 = P_2 + 60$; $P_1 = 100$ (m).

CENTRĀLĀ LĪDZĪBA (HOMOTĒTIJA)

Pieņemsim, ka plaknē ir fiksēts punkts O — līdzības centrs un dots pozitīvs skaitlis k — līdzības koeficients. Caur dotās figūras F brīvi izraudzītu punktu M velkam staru OM un atliekam uz tā punktu M_1 tā, lai būtu spēkā vienādība $OM_1 = k \cdot OM$ (256. zīm.).



256. zīm.

Ja figūras F visiem punktiem M šādi piekārto punktus M_1, tad figūra F pārveidojas jaunā figūrā F_1. Šādu figūras F pārveidojumu par figūru F_1 sauc par centrālās līdzības pārveidojumu jeb homotētiju ar centru O un koeficientu k.

256. zīmējumā centrālās līdzības koeficients $\frac{OM_1}{OM} = k = 2$.

CENTRĀLĀS LĪDZĪBAS ĪPAŠĪBAS

Centrālās līdzības pārveidojumam ar koeficientu k piemīt šādas īpašības:

1) līdzības centrs paliek uz vietas;

2) taisne, kas iet caur līdzības centru, pārveidojas pati sevī, bet taisne, kas neiet caur līdzības centru, pārveidojas sev paralēlā taisnē;

3) nogrieznis AB pārveidojas nogrieznī A_1B_1, pie tam $AB \parallel A_1B_1$ un $A_1B_1 = k \cdot AB$;

4) leņķi saglabā savu lielumu;

5) pārveidotā figūra F_1 ir līdzīga dotajai figūrai F, pie tam figūras F_1 līdzības koeficients attiecībā pret figūru F ir k.

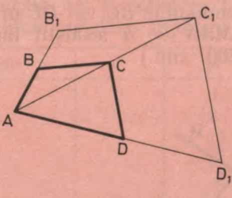
No centrālās līdzības īpašībām izriet paņēmiens, kā viegli konstruēt dotajam daudzstūrim vai riņķim līdzīgas figūras ar jebkuru līdzības koeficientu.

LĪDZĪGU DAUDZSTŪRU KONSTRUĒŠANA

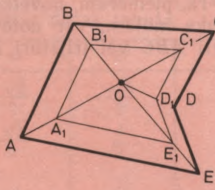
U z d e v u m s. Konstruēt dotajam daudzstūrim $ABCD$ līdzīgu daudzstūri $A_1B_1C_1D_1$ ar līdzības koeficientu $k = 2$.

Par līdzības centru izdevīgi izvēlēties vienu no daudzstūra virsotnēm, piemēram, A (257. zīm.). Velkam staru AB, AC, AD un uz tiem atliekam $AB_1 = 2AB$, $AC_1 = 2AC$, $AD_1 = 2AD$. Punkti B_1, C_1 un D_1 ir konstruējamā daudzstūra virsotnes (virsotne A_1 sakrīt ar virsotni A).

U z d e v u m s. Konstruēt dotajam daudzstūrim $ABCDE$ līdzīgu daudzstūri $A_1B_1C_1D_1E_1$ ar līdzības koeficientu $k = \frac{2}{3}$.



257. zīm.



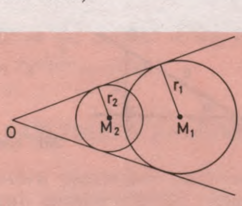
258. zīm.

Par līdzības centru izvēlamies punktu O daudzstūra iekšpusē (258. zīm.). Uz stariem OA, OB, OC, OD, OE atliekot $OA_1 = \frac{2}{3}OA$, $OB_1 = \frac{2}{3}OB$ utt., dabūjam konstruējamā daudzstūra virsotnes A_1, B_1 utt.

P i e z ī m e. Ja konstruēta kaut viena virsotne, piemēram, A_1, tad pārējās virsotnes var atrast arī tā, ka pēc kārtas konstruē $A_1B_1 \| AB$, $B_1C_1 \| BC$ utt.

LĪDZĪGA RIŅĶA KONSTRUĒŠANA

U z d e v u m s. Centrālās līdzības pārveidojumā ar centru O un koeficientu $k = 1{,}5$ konstruēt dotajam riņķim $M(r)$ līdzīgu riņķi $M_1(r_1)$. Izmantojam to faktu, ka jebkuri riņķi ir savā starpā līdzīgas figūras. Riņķa centru M pārvietojam punktā M_1 uz stara OM, kur $OM_1 = 1{,}5\ OM$. Tālāk pietiek konstruēt riņķi $M_1(r_1)$, ņemot $r_1 = 1{,}5r$ (259. zīm.).



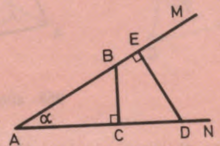
259. zīm.

20. TRIJSTŪRU APRĒĶINĀŠANA

20.1. TAISNLEŅĶA TRIJSTŪRI

ŠAURLEŅĶA TRIGONOMETRISKĀS FUNKCIJAS

Jebkuru šauro leņķi var pieņemt par taisnleņķa trijstūra šauro leņķi. Tā, piemēram, novelkot perpendikulus BC vai DE pret vienu no leņķa malām, var doto leņķi $MAN = \alpha$ iesaistīt taisnleņķa trijstūrī ABC vai trijstūrī ADE (260. zīm.).



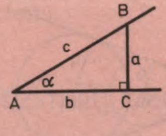
260. zīm.

Tā kā šie trijstūri ir līdzīgi, tad atbilstošo malu attiecības jebkurā trijstūrī ir vienādas — tās nav atkarīgas no tā, kādā taisnleņķa trijstūrī iesaista doto leņķi. Attiecību skaitliskās vērtības ir atkarīgas tikai no dotā leņķa lieluma, tāpēc tās ir šī leņķa funkcijas. Lai pasvītrotu šo funkciju sakaru ar leņķiem, tās sauc par trigonometriskajām funkcijām.

Par leņķa sinusu sauc pretkatetes attiecību pret hipotenūzu.
Par leņķa kosinusu sauc piekatetes attiecību pret hipotenūzu.
Par leņķa tangensu sauc pretkatetes attiecību pret piekateti.
Par leņķa kotangensu sauc piekatetes attiecību pret pretkateti.

Leņķa α sinusu apzīmē $\sin\alpha$, līdzīgi leņķa A sinusu apzīmē $\sin A$ utt. Leņķa α kosinusu apzīmē $\cos\alpha$, leņķa γ tangensu — $\operatorname{tg}\gamma$, leņķa B kotangensu — $\operatorname{ctg} B$.

Iesaistot leņķi A taisnleņķa trijstūrī ABC, leņķa A trigonometriskās funkcijas ir izsakāmas šādi (261. zīm.):



261. zīm.

$$\sin A = \frac{a}{c};\ \cos A = \frac{b}{c};\ \operatorname{tg} A = \frac{a}{b};\ \operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}.$$

LEŅĶA TRIGONOMETRISKO FUNKCIJU VĒRTĪBA

Ja leņķa lielums ir 0° vai 90°, tad, protams, to nevar iesaistīt taisnleņķa trijstūrī kā šī trijstūra šauro leņķi. Taču arī šajos gadījumos nosaka attiecīgo funkciju vērtību, proti, kā skaitli, kuram šīs vērtības tuvojas pēc patikas tuvu, ja leņķis tuvojas 0° vai 90°. Vērtība tg 90° neeksistē, jo, tuvojoties leņķim 90°, tā tangensa vērtība var pārsniegt jebkuru skaitli (tā tuvojas bezgalībai). Šī paša iemesla dēļ neeksistē arī vērtība ctg 0°. Dažu t. s. «apaļo» leņķu trigonometrisko funkciju vērtības ir dotas tabulā.

Funkcija	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\operatorname{ctg}\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Pārējo leņķu trigonometrisko funkciju vērtības ar nepieciešamo precizitāti var atrast īpašās tabulās vai aprēķināt ar mikrokalkulatoru. Tā, piemēram: $\sin 57° = 0{,}84$; $\cos 57° = 0{,}54$; $\operatorname{tg} 57° = 1{,}54$; $\operatorname{ctg} 57° = 0{,}65$ (ar precizitāti līdz 0,01).

PAPILDLEŅĶI

Divus leņķus, kuru summa ir 90°, mēdz saukt par papildleņķiem (tie viens otru «papildina» līdz 90°). Savstarpēji papildleņķi ir, piemēram, leņķi 70° un 20°, 30° un 60°, 35°10′ un 54°50′. Vispār leņķa α papildleņķis ir leņķis $90° - \alpha$ — un otrādi — leņķa $90° - \alpha$ papildleņķis ir leņķis α. Der ievērot, ka dotā leņķa sinuss ir vienāds ar sava papildleņķa kosinusu un otrādi:

$$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha; \quad \sin(90° - \alpha) = \cos\alpha.$$

Tā, piemēram,

$$\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}; \quad \cos 45° = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\sin 17°20' = \cos 72°40' = 0{,}30.$$

JĒDZIENS PAR TRIJSTŪRA APRĒĶINĀŠANU

Kā zināms no trijstūru vienādības pazīmēm (sk. 18.2), jau tikai daži trijstūra elementi nosaka trijstūri viennozīmīgi. Tā, piemēram, ja dotas trijstūra divas malas un leņķis starp tām, tad līdz ar to viennozīmīgi ir noteikta arī trešā mala un pārējie divi leņķi, protams, arī trijstūra laukums, ievilktās un apvilktās riņķa līnijas rādiuss, augstumi, mediānas utt.

Lai pēc dažiem dotajiem elementiem noteiktu trijstūra pārējos elementus jeb lai trijstūri aprēķinātu, ir nepieciešams izmantot leņķu trigonometriskās funkcijas un reizēm arī vēl dažas teorēmas par sakarībām starp trijstūra malām un leņķiem.

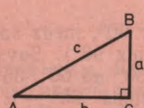
Ar uzdevumu aprēķināt trijstūri parasti saprot uzdevumu atrast tikai trijstūra malu un leņķu lielumus. Taču īpašos gadījumos ir jāaprēķina arī trijstūra laukums, augstums, mediāna, ievilktas vai apvilktas riņķa līnijas rādiuss u. c.

TAISNLEŅĶA TRIJSTŪRU APRĒĶINĀŠANA

Vispirms ieteicams uzskicēt taisnleņķa trijstūri un apzīmēt tā virsotnes un malas ar burtiem. Pēc tam, ievērojot uzdevumā doto, ir jāuzraksta tāda vienādība (pēc Pitagora teorēmas vai pēc šaurleņķu trigonometrisko funkciju definīcijām), kas satur tikai vienu nezināmo, un tad šo nezināmo jāaprēķina. Pie tam tālākajos aprēķinos nav ieteicams iesaistīt (kaut arī tas praktiski šķiet vienkāršāk) jau atrastos starprezultātus, jo tad iepriekšējās iespējamās neuzmanības kļūdas var radīt jaunus nepareizus rezultātus.

Turpmākajos piemēros trijstūra leņķi apzīmēti ar vienu attiecīgās virsotnes burtu, pie tam taisnā leņķa virsotne apzīmēta ar burtu *C*.

1. piemērs. $a = 5$ cm; $c = 13$ cm. Aprēķināt b un B (262. zīm.).



262. zīm.

1) $a^2 + b^2 = c^2$; 2) $\cos B = \frac{a}{c}$;

$b = \sqrt{c^2 - a^2}$; $\cos B = \frac{5}{13} \approx 0,38$;

$b = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (cm); $B \approx 68°$.

2. piemērs. $c = 7,2$; $A = 32°$. Aprēķināt a, b un B.

1) $B = 90° - A$; 2) $\sin A = \frac{a}{c}$;

$B = 90° - 32° = 58°$; $a = c \cdot \sin A$;

$$a = 7{,}2 \cdot \sin 32° = 7{,}2 \cdot 0{,}53 = 38;$$

3) $\cos A = \frac{b}{c}$;

$b = c \cdot \cos A = 7{,}2 \cdot 0{,}85 = 6{,}1.$

Pārbaude: $a^2 + b^2 = c^2$.
$3{,}8^2 + 6{,}1^2 = 7{,}2^2$; $14{,}44 + 37{,}21 = 51{,}84$; $51{,}65 \approx 51{,}84$.

Piezīme. Atrasto atbilžu precizitāte atbilst doto lielumu precizitātei (ar diviem zīmīgajiem cipariem).

3. piemērs. $b = 6{,}8$ m; $B = 49°$. Aprēķināt laukumu S.

1) $\operatorname{tg} B = \frac{b}{a}$; $a = \frac{b}{\operatorname{tg} B}$;

$a = \frac{6{,}8}{\operatorname{tg} 49°} = \frac{6{,}8}{1{,}15} = 5{,}91$;

2) $S = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{6{,}8 \cdot 5{,}91}{2} = 20{,}1$ (m^2).

Piezīme. Otrajā darbībā izmantojām iepriekš atrasto starprezultātu $a = 5{,}91$. Drošāk būtu aprēķināt laukumu, izmantojot tikai dotos skaitļus, pēc formulas

$$S = \frac{b^2 \cdot \sin A \cdot \sin C}{2\sin B} \ (sk. 18.2):$$

$$S = \frac{6{,}8^2 \cdot \sin 41° \cdot \sin 90°}{2\sin 49°} = \frac{46{,}24 \cdot 0{,}65 \cdot 1}{2 \cdot 0{,}75} = 20{,}1 \ (m^2).$$

20.2. SLĪPLEŅĶU TRIJSTŪRIS

PLATLEŅĶA TRIGONOMETRISKĀS FUNKCIJAS

Divus leņķus, kuru summa ir 180°, pieņemts saukt par savstarpējiem papildinātājleņķiem. (Nejaukt ar papildleņķiem, kuru summa ir 90°!) Tādi ir, piemēram, leņķi 50° un 130°, 160° un 20°. Vispār leņķa α papildinātājleņķis ir leņķis $180° - \alpha$ un otrādi.

Ja leņķis ir plats, tad to, protams, nevar iesaistīt taisnleņķa trijstūrī un tāpēc tā trigonometriskās funkcijas definē citādi. Taču platā leņķa $180° - \alpha$ trigonometriskās funkcijas var aizstāt ar šaurā leņķa α trigonometriskām funkcijām pēc šādām formulām:

$\sin(180° - \alpha) = \sin \alpha$;

$\cos(180° - \alpha) = -\cos \alpha$.

Piemēri. $\sin 150° = \sin(180° - 30°) = \sin 30° = 0{,}5$;
$\cos 141° = \cos(180° - 39°) = -\cos 39° \approx -0{,}7$.

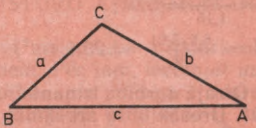
Piezīme. Der ievērot, ka 1) papildinātājleņķiem trigonometrisko funkciju nosaukumi ir vienādi, bet papildleņķiem — atšķirīgi; 2) papildinātājleņķu kosinusi ir ar atšķirīgām zīmēm.

SINUSU TEORĒMA

Trijstūra malas ir proporcionālas to pretleņķu sinusiem:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

P i e m ē r s. Trijstūrī ABC, kura malu garumi ir $a = 3$ cm, $b = 4$ cm un $c = 6$ cm, leņķi (pilnos grādos) ir $A = 27°$, $B = 36°$, $C = 117°$ (263. zīm.). Šo leņķu sinusi ir $\sin A = 0{,}45$, $\sin B = 0{,}59$, $\sin C = 0{,}89$. Malu un to pretleņķu sinusu attiecības tiešām izrādās vienādas:



263. zīm.

$$\frac{3}{0{,}45}=\frac{4}{0{,}59}=\frac{6}{0{,}89}\approx 6{,}7.$$

P i e z ī m e. Der ievērot, ka $\frac{a}{\sin A} = 2R$, kur R ir trijstūrim apvilktās riņķa līnijas rādiuss. Tāpēc pēdējā piemērā $R \approx 6{,}7$.

KOSINUSU TEORĒMA

Trijstūra malas kvadrāts ir vienāds ar pārējo divu malu kvadrātu summu, no kuras atņemts divkāršots šo malu un to ietvertā leņķa kosinusa reizinājums:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$

TRIJSTŪRU APRĒĶINĀŠANA

Slīpleņķu trijstūru aprēķināšanā var izšķirt četrus raksturīgus gadījumus (kas atbilst trijstūru vienādības pazīmēm). Aprēķinos jāizmanto sinusu vai kosinusu teorēma.

1. g a d ī j u m s. Dota mala un tās pieleņķis (*lml*):

$a = 8$ cm; $B = 43°$; $C = 35°$.

1) $A = 180° - (B + C) = 102°$;

2) $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$; $b=\frac{a\cdot\sin B}{\sin A}$;

$$b=\frac{8\cdot\sin 43°}{\sin 102°}=\frac{8\cdot\sin 43°}{\sin 78°}=\frac{8\cdot 0{,}68}{0{,}98}=5{,}6\ \text{(cm)};$$

3) $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$; $c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A}$;

$c = \frac{8 \cdot \sin 35°}{\sin 102} = \frac{8 \cdot \sin 35°}{\sin 78°} = \frac{8 \cdot 0{,}57}{0{,}98} = 4{,}7$ (cm);

$S = \frac{a^2 \cdot \sin B \cdot \sin C}{2 \sin A}$;

$S = \frac{8^2 \cdot \sin 43° \cdot \sin 35°}{2 \sin 102°} = \frac{64 \cdot 0{,}68 \cdot 0{,}57}{2 \cdot 0{,}98} = 12{,}7$ (cm^2).

2. g a d ī j u m s. Dotas divas malas un leņķis starp tām (*mlm*):

$b = 9{,}4$; $c = 11{,}2$; $A = 103°$.

1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$;

$a^2 = 9{,}4^2 + 11{,}2^2 - 2 \cdot 9{,}4 \cdot 11{,}2 \cdot \cos 103° = 88{,}36 + 125{,}44 - 210{,}56 \cdot 0{,}224 = 260{,}9$;

$a = \sqrt{260{,}9} = 16{,}2$ (cm);

2) $\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$; $\sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a}$;

$\sin B = \frac{9{,}4 \cdot \sin 103°}{16{,}2} = \frac{9{,}4 \cdot 0{,}97}{16{,}2} = 0{,}565$; $B = 35°$.

P i e z ī m e. Nosakot trijstūra leņķi pēc tā sinusa, jānoskaidro, vai atbilstošais leņķis ir šaurs vai plats. No vienādības $\sin B = 0{,}565$ vispār izriet, ka $B = 35°$ vai $B = 180° - 35° = 145°$, taču šajā gadījumā B nevar būt plats leņķis, jo pretējā mala $b = 9{,}4$ nav garākā mala (turklāt trijstūrī viens leņķis $A = 103°$ jau ir plats).

3) $\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$; $\sin C = \frac{c \cdot \sin A}{a}$;

$\sin C = \frac{11{,}2 \cdot \sin 103°}{16{,}2} = \frac{11{,}2 \cdot 0{,}97}{16{,}2} = 0{,}671$; $C = 42°$;

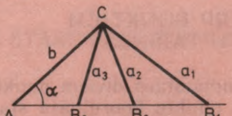
4) $S = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2}$;

$S = \frac{9{,}4 \cdot 11{,}2 \cdot \sin 103°}{2} = 5{,}13$ (cm^2).

P ā r b a u d e: $103° + 35° + 42° = 180°$.

3. g a d ī j u m s. Dotas trīs malas (*mmm*). Pēc kosinusu teorēmas aprēķina vienu leņķi un pēc tam rīkojas kā 2. gadījumā.

4. g a d ī j u m s. Dotas divas malas un leņķis pret vienu no tām (*mml*) (264. zīm.).



264. zīm.

Pieņemsim, ka dotas malas *a, b* un leņķis *A*. Vispirms pēc sinusu teorēmas var aprēķināt sin *B*. Lai noteiktu, vai leņķis *B* ir šaurs vai plats, uzmanīgi jāievēro sakars starp leņķu un malu lielumiem.

21. KOORDINĀTU METODE

21.1. KOORDINĀTU TAISNE UN PLAKNE

KOORDINĀTU TAISNE

Ja uz taisnes fiksē kādu punktu *O*, kam piekārto skaitli nulle, un kādu punktu A, kam piekārto skaitli 1, tad līdz ar to, ievērojot vienības nogriežņa *OA* garumu, jebkuram šīs taisnes punktam var piekārtot kādu vienu vienīgu skaitli un arī otrādi — katram skaitlim var atrast kādu vienu vienīgu šīs taisnes atbilstošo punktu (265. zīm.).

265. zīm.

Tādu taisni, uz kuras ir fiksēti skaitļiem 0 un 1 atbilstoši punkti (un līdz ar to arī pozitīvais virziens), sauc par koordinātu taisni vai koordinātu asi. Skaitlim 0 atbilstošo punktu sauc par koordinātu sākumpunktu.

Ja koordinātu taisne zīmēta horizontāli, tad par pozitīvo virzienu parasti pieņem virzienu uz labo pusi, ja koordinātu taisne zīmēta vertikāli,— uz augšu. Pozitīvo virzienu mēdz apzīmēt ar bultiņu.

PUNKTA KOORDINĀTAS UZ TAISNES

Skaitļus, kas atbilst koordinātu taisnes punktiem, sauc par šo punktu koordinātām. Ja, piemēram, punktam *M* atbilst skaitlis $-3\frac{2}{5}$, tad raksta $M(-3\frac{2}{5})$ (lasa: punkts *M* ar koordinātu $-3\frac{2}{5}$). Līdzīgi raksta $N(2{,}7)$, $A(1)$, $O(0)$.

ATTĀLUMS STARP PUNKTIEM UZ KOORDINĀTU TAISNES

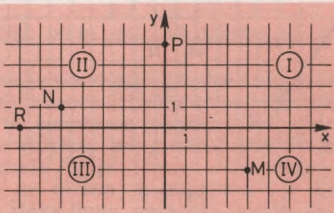
Viegli saskatīt, ka attālums starp diviem punktiem uz koordinātu taisnes ir vienāds ar šo punktu koordinātu starpības moduli. Tā, piemēram, attālums starp punktiem $A(1)$ un $N(2{,}7)$ ir

$d = |2{,}7 - 1| = 1{,}7$; attālums starp punktiem $M(-3\frac{2}{5})$ un $N(2{,}7)$ ir $d = |-3\frac{2}{5} - 2{,}7| = |-6{,}1| = 6{,}1$.

Vispār attālums starp punktiem $T(t)$ un $V(v)$ ir $d = |t - v|$.

KOORDINĀTU PLAKNE

Plakni, kurā dotas divas savstarpēji perpendikulāras koordinātu asis, kurām ir kopējs sākumpunkts, sauc par koordinātu plakni (266. zīm.).



266. zīm.

Vienu no asīm (parasti horizontālo) sauc par x asi jeb abscisu asi, otru (vertikālo) — par y asi jeb ordinātu asi. Koordinātu plakne ar asīm tiek sadalīta četros kvadrantos, kurus numurē, kā redzams zīmējumā.

PUNKTA KOORDINĀTAS PLAKNĒ

No plaknes punkta M (sk. 266. zīm.) pret koordinātu asīm novelk perpendikulus un nolasa to pamatu koordinātas uz abscisu un uz ordinātu ass. Iegūto skaitļu pāri (4; — 2), kas viennozīmīgi nosaka punkta M vietu plaknē, sauc par punkta M koordinātām: pirmo skaitli (perpendikula pamats uz x ass) sauc par abscisu, otro (perpendikula pamats uz y ass) — par ordinātu. Raksta $M(4; -2)$, lasa: punkts M ar koordinātām N un — 2.

Līdzīgi raksta $N(-5; 1)$, $P(0; 4)$, $R(-7; 0)$, $O(0; 0)$.

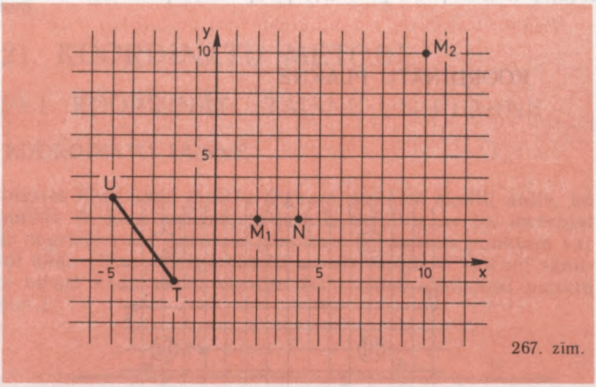
Atbilstība starp plaknes punktiem un to koordinātām ir abpusēji viennozīmīga: katram punktam atbilst viens vienīgs skaitļu pāris un katram skaitļu pārim atbilst viens vienīgs punkts.

ATTĀLUMS STARP PUNKTIEM KOORDINĀTU PLAKNĒ

Attāluma d kvadrātu starp punktiem $A_1(x_1;y_1)$ un $A_2(x_2;y_2)$ izsaka vienādība

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

P i e m ē r i. 1. Aprēķināt attālumu starp punktiem $T(-2;\ -1)$ un $U(-5;\ 3)$ (267. zīm.).



267. zīm.

$d^2 = (-2+5)^2 + (-1-3)^2 = 9 + 16 = 25;\ d = \sqrt{25} = 5.$

2. Noteikt punktu $M(x;\ y)$, kas atrodas vienādā attālumā no punkta $N(4;\ 2)$ un no koordinātu asīm (sk. 267. zīm.). Ja minētie trīs attālumi ir vienādi, tad vienādi arī to kvadrāti:

$(x-4)^2 + (y-2)^2 = x^2 = y^2.$

Atrisinām dabūto vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-2)^2 = x^2 \\ x^2 = y^2. \end{cases}$$

No otrā vienādojuma izsakām $y = \pm x$ un ievietojam pirmajā vienādojumā y vietā $+x$:

$(x-4)^2 + (x-2)^2 = x^2;\ x^2 - 12x + 20 = 0;$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 10; \\ y_2 = 10. \end{cases}$$

P i e z ī m e. Ievietojot pirmajā vienādojumā y vietā $-x$, iegūst vienādojumu, kuram nav reālu sakņu.

Tātad meklējamais punkts ir $M_1(2;\ 2)$ vai $M_2(10;\ 10)$.

NOGRIEŽŅA VIDUSPUNKTS

Ja nogriežņa galapunkti ir $A_1(x_1;\ y_1)$ un $A_2(x_2;\ y_2)$, tad nogriežņa viduspunkta $C(x;\ y)$ koordinātas ir

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

P i e m ē r s. Nogriežņa AB galapunkts ir $A(5;\ -2)$, bet viduspunkts ir $C(6;\ 2)$. Noteikt punktu $B(x;\ y)$.

$6 = \frac{5+x}{2}$, no šī vienādojuma atrodam, ka $x = 7$;

$2 = \frac{-2+y}{2}$, no šī vienādojuma atrodam, ka $y = 6$;

tātad nogriežņa galapunkts ir $B(7;\ 6)$.

21.2. TAISNES UN RIŅĶA LĪNIJAS VIENĀDOJUMS

JĒDZIENS PAR LĪNIJAS VIENĀDOJUMU

Vienādojumam ar diviem mainīgajiem x un y, kā zināms (sk. 6.2), vispār ir bezgalīgi daudz atrisinājumu. Tā, piemēram, vienādojumu $x^2 - y + 1 = 0$ apmierina skaitļu pāri (0; 1), (0,1; 1,01), (0,2; 1,04) utt. Atliekot šos punktus koordinātu plaknē, veidojas kāda nepārtraukta līnija (šoreiz — parabola). Tāpat jebkuram vienādojumam ar diviem mainīgajiem var konstruēt atbilstošu līniju — taisni, riņķa līniju, parabolu, spirāli, elipsi u. c.— un tāpēc saka, ka tas ir kādas noteiktas līnijas vienādojums.

Tā, piemēram, jau no algebras kursa zinām, ka funkcijas $y = 2x$ grafiks ir taisne, un tāpēc vienādojumu $y = 2x$ jeb $2x - y = 0$ sauc par taisnes vienādojumu. Līdzīgi funkcijas $y = x^2 + 1$ grafiks ir parabola, un tāpēc vienādojumu $y = x^2 + 1$ jeb $x^2 - y + 1 = 0$ sauc par parabolas vienādojumu.

Lai uzrakstītu kādas noteiktas līnijas vienādojumu, ir jāievēro šīs līnijas raksturīgās īpašības. Tā, piemēram, riņķa līniju raksturo tas, ka tās visi punkti ir vienādā attālumā no kāda viena punkta (centra).

TAISNES VIENĀDOJUMS AR VIRZIENA KOEFICIENTU

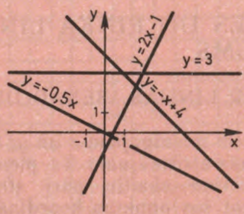
Jau no algebras zināms, ka lineārās funkcijas $y = kx + m$ grafiks ir taisne. Tiešām, vienādojums

$$y = kx + m$$

ar jebkurām koeficientu k un m vērtībām ir taisnes vienādojums. Arī otrādi: ar šāda veida vienādojumu, izvēloties piemērotus koeficientus k un m, var izteikt jebkuru taisni, izņemot taisni, kas paralēla y asij. Taisni, kas paralēla y asij, var izteikt ar visai vienkāršu vienādojumu $x = t$, piemēram, $x = 3$, $x = -1{,}7$.

Vienādojumā $y = kx + m$ koeficients $k = \operatorname{tg}\alpha$, kur α ir leņķis, ko taisne veido ar x ass pozitīvo virzienu. Līdz ar to, ja $k > 0$, taisne ir nosvērta slīpi pa labi, ja $k < 0$ — slīpi pa kreisi; ja $k = 0$, tad vienādojums ir $y = m$ un taisne ir paralēla x asij. Tāpēc koeficientu k sauc par taisnes virziena koeficientu. Koeficients m ir tā punkta ordināta, kurā taisne krusto y asi, proti, šis punkts ir $(m; 0)$. Ja $m = 0$, taisne iet caur koordinātu sākumpunktu.

Piemēri. 1. Taisne $y = 2x - 1$ veido ar x ass pozitīvo virzienu leņķi α, kuram $\operatorname{tg} \alpha = 2$ jeb $\alpha \approx 63°$, taisne krusto y asi punktā $(0; -1)$ (268. zīm.).



268. zīm.

2. Taisne $y = -x + 4$ veido ar x asi leņķi β, kuram $\operatorname{tg} \beta = -1$ jeb $\beta = 135°$; taisne krusto y asi punktā $(0; 4)$.

3. Taisne $y = 3$ ir paralēla x asij.

4. Taisne $y = -0{,}5x$ iet caur koordinātu sākumpunktu.

TAISNES VISPĀRĪGAIS VIENĀDOJUMS

Vienādojums

$$ax + by + c = 0$$

ar jebkurām koeficientu vērtībām ir taisnes vienādojums; pie tam, izvēloties piemērotas a, b un c vērtības, jebkuru taisni var izteikt ar šādu vienādojumu. Tāpēc šādu vienādojumu mēdz saukt par taisnes vispārīgo vienādojumu.

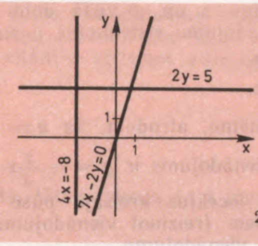
Atkarībā no parametru a, b un c vērtības vienādojumā $ax + by + c = 0$ atbilstošā taisne var ieņemt dažādus stāvokļus koordinātu plaknē. Aplūkosim taisnes $ax + by + c = 0$ raksturīgākos stāvokļus, ja viens vai divi parametri ir vienādi ar nulli (bet pārējie nav nulle).

1. Ja $a = 0$, tad $by + c = 0$ jeb $y = -\frac{c}{b}$; šis vienādojums nosaka taisni, kas ir paralēla abscisu asij.

Piemērs. $2y = 5$ jeb $y = 2{,}5$ (269. zīm.).

2. Ja $b = 0$, tad $ax = c$ jeb $x = -\frac{c}{a}$; šis vienādojums nosaka taisni, kas ir paralēla ordinātu asij.

Piemērs. $4x = -8$ jeb $x = -2$.



269. zīm.

3. Ja $c = 0$, tad $ax + by = 0$ jeb $y = -\frac{a}{b}x$; šis vienādojums nosaka taisni, kas iet caur koordinātu sākumpunktu. Kā zināms no algebras, tā ir tiešās proporcionalitātes funkcijas $y = kx$ grafiks.

Piemērs. $7x - 2y = 0$ jeb $y = 3{,}5x$.

4. Ja $a = c = 0$, tad $by = 0$ un taisne sakrīt ar abscisu asi.

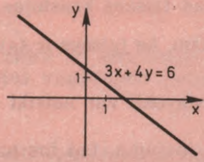
5. Ja $b = c = 0$, tad $ax = 0$ un taisne sakrīt ar ordinātu asi.

TAISNES KONSTRUĒŠANA PĒC DOTĀ VIENĀDOJUMA

Tā kā taisni nosaka jebkuri divi tās punkti, tad jāatrod divi dotā vienādojuma patvaļīgi atrisinājumi — tie ir meklējamās taisnes divu punktu koordinātas. Atliekot šos punktus koordinātu plaknē, velkam caur tiem ar lineālu meklējamo taisni.

Piemērs. Konstruēt taisni $3x + 4y = 6$.

Praktiski diezgan viegli ir izrēķināt tos vienādojuma atrisinājumus, kuros viena mainīgā vērtība ir 0. Tā dabūjam meklējamās taisnes divus punktus (0; 1,5) un (2; 0) (270. zīm.).



270. zīm.

VIENĀDOJUMS TAISNEI CAUR DIVIEM DOTIEM PUNKTIEM

Uzrakstīsim vienādojumu taisnei, kas iet caur punktiem (6; —2) un (—9; 8). Vienādojumu rakstīsim formā $y = kx + m$.

Ievietojot mainīgo x un y vietā doto punktu koordinātas, dabūjam divu vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} -2 = 6k + m \\ 8 = -9k + m. \end{cases}$$

Atrisinot šo sistēmu, atrodam, ka $k = -\frac{2}{3}$, $m = 2$. Tātad meklētās taisnes vienādojums ir $y = -\frac{2}{3}x + 2$.

Pārnesot visus locekļus kreisajā pusē un atbrīvojoties no daļveida koeficientiem (reizinot vienādojuma abas puses ar 3), iegūstam vispārīgo vienādojumu

$$2x + 3y - 6 = 0.$$

DIVU TAIŠŅU SAVSTARPĒJAIS STĀVOKLIS

Izpētīsim taišņu savstarpējo stāvokli, pieņemot, ka taisnes dotas ar vienādojumiem

$y = k_1x + m_1$ un $y = k_2x + m_2$.

1. Ja $k_1 = k_2$ un $m_1 = m_2$, tad, protams, taisnes sakrīt.

2. Ja $k_1 = k_2$, bet $m_1 \neq m_2$, tad taisnes ir savstarpēji paralēlas, jo tās veido ar x asi vienādus leņķus α, kur $\operatorname{tg} \alpha = k_1 = k_2$.

3. Ja $k_1 \neq k_2$, tad taisnes krustojas. Ja turklāt $k_1 \cdot k_2 = -1$, tad taisnes ir savstarpēji perpendikulāras.

P i e m ē r s. Noteikt taišņu $2x - 5y = 1$ un $5x + 2y = 3$ savstarpējo stāvokli.

Pārveidojam abus vienādojumus formā ar virziena koeficientu:

$$y = \frac{2}{5}x - \frac{1}{5} \text{ un } y = -\frac{5}{2}x - \frac{3}{2}.$$

Tā kā $\frac{2}{5} \neq -\frac{5}{2}$, tad taisnes krustojas. Ievērojot, ka turklāt $\frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = -1$, secinām, ka taisnes ir savstarpēji perpendikulāras.

Taišņu savstarpējo stāvokli var noteikt arī, atrisinot attiecīgo vienādojumu sistēmu.

Ja sistēmai nav atrisinājuma, tad tas nozīmē, ka taisnēm nav kopīgu punktu, t. i., taisnes ir paralēlas;

ja sistēmai ir bezgalīgi daudz atrisinājumu, tad taisnēm ir bezgalīgi daudz kopēju punktu, t. i., taisnes sakrīt;

ja sistēmai ir viens vienīgs atrisinājums, tad taisnēm ir viens kopīgs punkts, t. i., taisnes šajā punktā krustojas.

P i e m ē r s. Noteikt taišņu $3x - 2y = 1$ un $x + 2y = 11$ savstarpējo stāvokli.

Varētu pārveidot dotos vienādojumus formā ar virziena koeficientu un noteikt taišņu stāvokli pēc šiem vienādojumiem, taču šoreiz noteiksim to citādi — atrisinot attiecīgo vienādojumu sistēmu.

Sistēmas

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ x + 2y = 11 \end{cases}$$

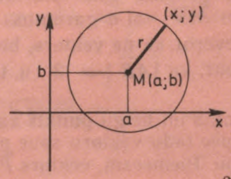
atrisinājums ir (3; 4), tātad taisnes šajā punktā krustojas.

RIŅĶA LĪNIJAS VIENĀDOJUMS

Pieņemsim, ka riņķa līnijas centrs ir punkts $M(a;\ b)$ un rādiuss ir r. Tā kā r ir attālums starp riņķa līnijas jebkuru punktu $(x;\ y)$ un centru $(a;\ b)$, tad no divu punktu attāluma formulas (sk. 21.1) izriet, ka

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Šis vienādojums ir riņķa līnijas vispārīgais vienādojums (271. zīm.).



271. zīm.

Ja riņķa līnija centrs ir koordinātu sākumpunkts ($a = 0$, $b = 0$), tad riņķa līnijas vispārīgais vienādojums ir vienkāršāks, proti,

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Piemērs. Uzrakstīt vienādojumu riņķa līnijai, kuras centrs ir punktā $K(3;\ -4)$ un kura iet caur koordinātu sākumpunktu O.

Vispirms aprēķinām rādiusa kvadrātu kā attāluma kvadrātu starp punktiem K un O:

$$r^2 = (3-0)^2 + (-4-0)^2 = 25.$$

Ievietojot riņķa līnijas vispārīgajā vienādojumā a, b un r^2 vērtības, iegūstam prasīto vienādojumu

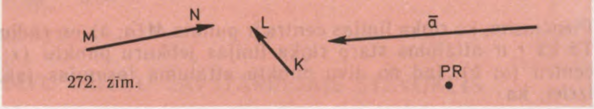
$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25.$$

22. VEKTORI

22.1. VEKTORI PLAKNĒ

VEKTORA JĒDZIENS

Ja nogrieznim vienu galapunktu, piemēram, punktu M, pieņemam par sākumpunktu, bet otru galapunktu N — par beigu punktu, tad nogrieznis MN iegūst noteiktu orientāciju jeb vērsumu virzienā no M uz N. Tādu vērstu nogriezni sauc par vektoru (272. zīm.).



272. zīm.

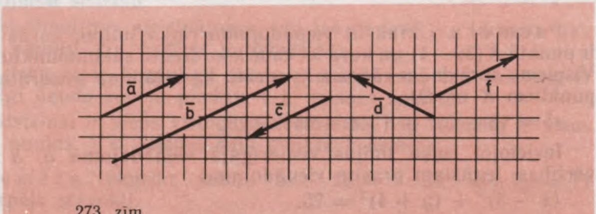
Vektora vērsumu zīmējumā apzīmē ar bultiņu vektora beigu punktā, bet pierakstā pirmajā vietā raksta vektora sākumpunktu, pēc tam — beigu punktu. Virs burtiem velk svītriņu, piemēram, $\overline{MN}, \overline{KL}$ (lasa: vektors MN, vektors KL). Vektoru apzīmē arī ar vienu mazo burtu, piemēram, $\bar{a}$.

Atbilstošā nogriežņa garumu sauc par vektora garumu jeb vektora moduli. Vektoru $\overline{MN}$ vai $\bar{a}$ garumus apzīmē attiecīgi ar $|\overline{MN}|$ vai $|\bar{a}|$. Der ievērot, ka ne vektors, bet tikai tā garums ir skaitļi, piemēram, var būt, ka $|\overline{AB}| = 3$ u. tml., bet nav jēgas pierakstam $\overline{AB} = 3$.

Ja vektora sākumpunkts un beigu punkts sakrīt, tad tā garums ir vienāds ar nulli un tāpēc tādu vektoru sauc par nullvektoru; tam nepiešķir nekādu vērsumu. Piemēram, vektors $\overline{PR}$ ir nullvektors.

KOLINEĀRI VEKTORI

Vektorus, kuri ir savā starpā paralēli, sauc par kolineāriem vektoriem. No 273. zīmējumā attēlotajiem vektoriem savstarpēji kolineāri ir vektori $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ un $\bar{f}$.



273. zīm.

Kolineāri vektori var būt vienādi vērsti, piemēram, vektori $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{f}$, vai pretēji vērsti, piemēram, vektori $\bar{a}$ un $\bar{c}$, $\bar{b}$ un $\bar{c}$. (Vektorus, kas nav kolineāri, nesauc ne par vienādi, ne pretēji vērstiem, par tiem var teikt to, ka tie ir dažādi vērsti, piemēram, vektori $\bar{c}$ un $\bar{d}$, $\bar{b}$ un $\bar{d}$ ir dažādi vērsti.)

VIENĀDI VEKTORI

Kolineārus vektorus, kuriem ir vienādi garumi un vienādi vērsumi, sauc par vienādiem vektoriem.

No 273. zīmējumā attēlotajiem vektoriem vienādi ir tikai vektori $\bar{a}$ un $\bar{f}$ (raksta $\bar{a} = \bar{f}$). Der ievērot, ka $\bar{a} \neq \bar{b}$, jo šiem vektoriem vērsumi gan ir vienādi, bet garumi — atšķirīgi. Tāpat arī $\bar{a} \neq \bar{d}$, $\bar{a} \neq \bar{c}$, jo tiem garumi gan ir vienādi, bet vērsumi atšķirīgi.

Visus savstarpēji vienādos vektorus dažkārt mēdz uzlūkot par vienu un to pašu vektoru, ar to akcentējot, ka vektora jēdzienā ir nozīme tikai tā vērsumam un garumam, bet ne novietojumam. Tā, piemēram, saka, ka $\bar{a}$ un $\bar{f}$ ir viens un tas pats vektors. Līdz ar to doto vektoru var pārnest ar sākumpunktu jebkurā punktā, saglabājot vektora garumu un vērsumu.

Par diviem vektoriem var jautāt, vai tie ir vai nav vienādi, bet nav jēgas jautāt, kurš no tiem lielāks, kurš mazāks, jo vektoru nosaka ne tikai tā garums, bet arī vērsums.

PRETĒJI VEKTORI

Divus kolineārus vektorus, kuru garumi vienādi, bet vērsumi pretēji, sauc par pretējiem vektoriem. Dotajam vektoram pretēju vektoru apzīmē, mainot dotā vektora zīmi vai mainot vietām burtus.

Tā, piemēram, savstarpēji pretēji ir vektori $\bar{u}$ un $-\bar{u}$, $\overline{AB}$ un $-\overline{AB}$, $\overline{MN}$ un $\overline{NM}$.

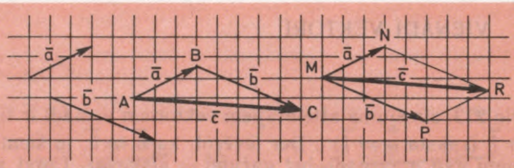
273. zīmējumā savstarpēji pretēji ir, piemēram, vektori $\bar{a}$ un $\bar{c}$, to pieraksta šādi: $\bar{a} = -\bar{c}$ vai $-\bar{a} = \bar{c}$.

JĒDZIENS PAR OPERĀCIJĀM AR VEKTORIEM

Ar vektoriem var izdarīt dažādas operācijas, kurām piemīt visumā tādas pašas īpašības kā matemātiskajām darbībām ar skaitļiem. Tāpēc šīs operācijas ar vektoriem sauc arī par darbībām ar vektoriem: vektoru saskaitīšanu, atņemšanu, reizināšanu u. tml. Šo darbību rezultāts ir atkarīgs gan no vektoru garuma (skaitļa), gan arī no vektoru savstarpējā stāvokļa (vērsuma).

VEKTORU SASKAITĪŠANA

Pieņemsim, ka doti divi vektori $\overline{a}$ un $\overline{b}$ (274. zīm.). Lai konstruētu to summu, no kāda patvaļīga punkta A atliekam vektoru $\overline{AB} = \overline{a}$ un no punkta B vektoru $\overline{BC} = \overline{b}$. Vektoru $\overline{AC} = \overline{c}$ sauc par vektoru $\overline{a}$ un $\overline{b}$ summu (raksta $\overline{a} + \overline{b} = \overline{c}$).



274. zīm.

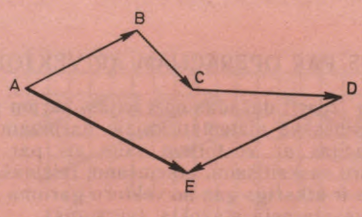
Aplūkoto divu vektoru summas atrašanas paņēmienu mēdz saukt par trijstūra paņēmienu. To citādi var izteikt arī ar t. s. trīs punktu likumu: neatkarīgi no punktu A, B un C stāvokļa $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

Vektoru summu var atrast arī ar t. s. paralelograma paņēmienu: no viena un tā paša patvaļīga punkta M atliek dotos vektorus $\overline{MN} = \overline{a}$, $\overline{MP} = \overline{b}$ un konstruē paralelogramu $MNRP$ (274. zīm.). Paralelograma diagonāles vektors $\overline{MR} = \overline{a} + \overline{b} = \overline{c}$.

VAIRĀKU VEKTORU SUMMA

Par trīs vai vairāku vektoru summu sauc vektoru, ko dabū, pie pirmā vektora pieskaitot otro, pie dabūtās summas pieskaitot trešo vektoru utt. Iepriekš minēto trīs punktu likumu var paplašināt un attiecināt arī uz vairāku vektoru summu, piemēram,

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CB} + \overline{DE} = \overline{AE} \quad (275.\ \text{zīm.}).$$



275. zīm.

VEKTORU SUMMAS ĪPAŠĪBAS

Vektoru summai piemīt tādas pašas īpašības kā skaitļu summai.

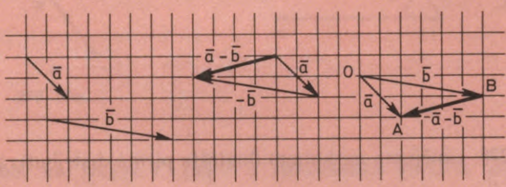
1. Komutatīvā īpašība: $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$.
2. Asociatīvā īpašība: $(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$.

Abas īpašības, tās apvienojot un attiecinot uz jebkuru saskaitāmo skaitu, var izteikt tā: vektoru summa nav atkarīga no tā, kā saskaitāmos pārvieto vai savā starpā savieno. Tā, piemēram,

$$(\bar{a}+\bar{b})+(\bar{c}+\bar{d})=\bar{b}+(\bar{d}+\bar{c})+\bar{a}=$$
$$=(\bar{b}+\bar{d})+\bar{c}+\bar{a}=\ldots.$$

VEKTORU ATŅEMŠANA

Divu vektoru starpību definē līdzīgi kā divu skaitļu starpību: par vektoru $\bar{a}$ un $\bar{b}$ starpību sauc tādu vektoru $\bar{c}$, ka $\bar{b}+\bar{c}=\bar{a}$. Tā kā $\bar{a}-\bar{b}=\bar{a}+(-\bar{b})$, tad vektoru a un $\bar{b}$ starpību var konstruēt kā vektora $\bar{a}$ un vektora $\bar{b}$ pretējā vektora $-\bar{b}$ summu, piemēram, pēc trijstūra paņēmiena (276. zīm.).



276. zīm.

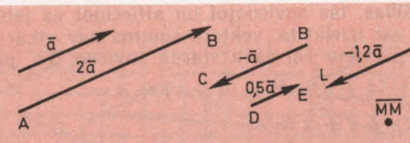
Vektoru $\bar{a}$ un $\bar{b}$ starpību var konstruēt arī citādi: no kāda punkta O atliek vektorus $\overline{OA}=a$ un $\overline{OB}=b$, tad meklējamā starpība ir $\bar{a}-\bar{b}=\overline{BA}$ (276. zīm.). Šo vektoru starpības konstruēšanas paņēmienu var izteikt ar trīs punktu likumu: neatkarīgi no punktu O, A un B stāvokļa $\overline{OA}-\overline{OB}=\overline{BA}$.

VEKTORA REIZINĀŠANA AR SKAITLI

Par vektora $\bar{a}$ reizinājumu ar skaitli k sauc vektoru, kura garums vienāds ar vektora $\bar{a}$ garuma reizinājumu ar skaitļa k moduli, bet vērsums vienāds ar dotā vektora vērsumu, ja $k>0$, un pretējs, ja $k<0$.

Der ievērot (tas svarīgi dažādu uzdevumu risināšanā), ka vektori $\bar{a}$ un $k \cdot \bar{a}$ ir kolineāri. Arī otrādi: ja divi vektori ir kolineāri, tad katru no tiem var izteikt kā otra vektora reizinājumu ar skaitli. Vektora reizinājums ar nulli ir nullvektors: $0 \cdot \bar{a} = \bar{0}$.

Piemēri (277. zīm.):



277. zīm.

$2 \cdot \bar{a} = \overline{AB}$; $0{,}5 \cdot \bar{a} = \overline{DE}$; $0 \cdot \bar{a} = \overline{MM}$;

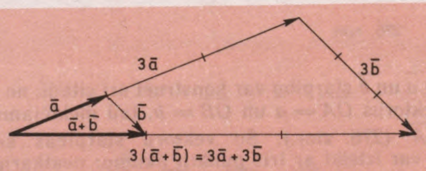
$-1 \cdot \bar{a} = \overline{BC}$; $-1{,}2 \cdot \bar{a} = \overline{KL}$.

VEKTORA REIZINĀJUMA ĪPAŠĪBAS

Vektora reizinājuma īpašības līdzīgas skaitļu reizinājuma īpašībām.

1. Asociatīvā īpašība: $(kl)\bar{a} = k(l\bar{a})$.
2. Distributīvās īpašības: $k(\bar{a} + \bar{b}) = k\bar{a} + k\bar{b}$;
   $(k + l)\bar{a} = k\bar{a} + l\bar{a}$.
3. Nulles īpašības: $0 \cdot \bar{a} = \bar{0}$; $k \cdot \bar{0} = \bar{0}$.

278. zīmējumā uzskatāmi ilustrēta pirmā distributīvā īpašība, ja $k = 3$.



278. zīm.

VEKTORA SKALĀRAIS REIZINĀJUMS

Par divu vektoru $\bar{a}$ un $\bar{b}$ skalāro reizinājumu sauc šo vektoru garumu reizinājumu ar kosinusu no leņķa α starp vektoriem:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\alpha.$$

Der ievērot, ka vektora reizinājums ar skaitli ir vektors, bet divu vektoru skalārais reizinājums ir skaitlis.

No skalārā reizinājuma definīcijas izriet, ka divu vienādi vērstu vektoru skalārais reizinājums ir vienāds ar to garumu reizinājumu (jo $\cos\alpha = \cos 0° = 1$).

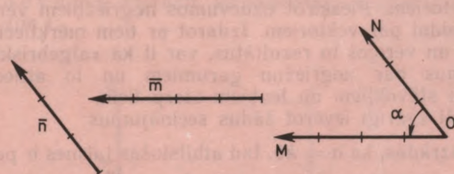
Divu vienādu vektoru skalāro reizinājumu sauc par vektora skalāro kvadrātu, un tas ir vienāds ar vektora garuma kvadrātu:

$$\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2.$$

No skalārā reizinājuma definīcijas $\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\alpha$ izriet, ka vektoru veidotā leņķa α kosinusu (no kura pēc tabulām var noteikt arī pašu leņķi α) var aprēķināt pēc formulas

$$\cos\alpha = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}.$$

P i e m ē r i. 1. Aprēķināt $\bar{m}\cdot\bar{n}$ (279. zīm.).



279. zīm.

Pieņemsim, ka $|\bar{m}| = 4$, $|\bar{n}| = 3$ (izvēlētajās garuma vienībās).

Lai noteiktu leņķi starp vektoriem, atliekam vektorus $\overline{OM} = \bar{m}$ un $\overline{ON} = \bar{n}$ no kopēja sākumpunkta O. Pieņemsim, ka šoreiz $\alpha = 60°$. Tad vektoru skalārais reizinājums ir $\bar{m}\cdot\bar{n} = 4\cdot 3 \times \cos 60° = 4\cdot 3\cdot 0{,}5 = 6$.

2. Aprēķināt $\bar{a}\cdot\bar{b}$, ja $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 5, \alpha = 135°$.

$\overline{ab} = 2\cdot 5\cdot\cos 135° = 2\cdot 5(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -5\sqrt{2} \approx 7{,}2.$

3. Aprēķināt $\bar{x}\cdot\bar{y}$, ja $|\bar{x}| = 6$, $|\bar{y}| = 7$ un vektori ir savstarpēji perpendikulāri.

$|\bar{x}|\cdot|\bar{y}|\cdot\cos\alpha = 6\cdot 7\cdot\cos 90° = 6\cdot 7\cdot 0 = 0.$

4. Aprēķināt vektora skalāro kvadrātu $\bar{v}^2$, ja $|\bar{v}| = 10$.

$\bar{v}^2 = |\bar{v}|^2 = 10^2 = 100.$

VEKTORU SKALĀRĀ REIZINĀJUMA ĪPAŠĪBAS

1. Komutatīvā īpašība: $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a}$.

2. Distributīvā īpašība: $(\overline{a}+\overline{b})\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot\overline{c}+\overline{b}\cdot\overline{c}$.

3. Divu no nulles atšķirīgu vektoru skalārais reizinājums ir vienāds ar nulli tad un tikai tad, ja šie vektori ir savstarpēji perpendikulāri.

P i e z ī m e. Vektoru skalārais reizinājums var būt vienāds ar nulli arī tad, ja kaut viens no abiem vektoriem ir nullvektors.

VEKTORU IZMANTOŠANA ĢEOMETRIJAS UZDEVUMOS

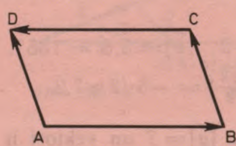
Darbībās ar vektoriem rezultāts ir atkarīgs no vektoru garumiem, garumu attiecībām, vektoru savstarpējiem stāvokļiem, leņķiem starp vektoriem. Piešķirot uzdevumos nogriežņiem vērsumus, tos var pārveidot par vektoriem. Izdarot ar tiem mērķtiecīgi dažādas darbības un vērojot to rezultātus, var it kā «algebriski izrēķināt» secinājumus par nogriežņu garumiem un to attiecībām, par nogriežņu stāvokļiem un leņķiem starp tiem.

It īpaši svarīgi ievērot šādus secinājumus:

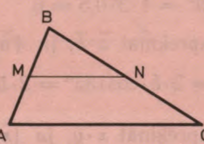
1) ja izrādās, ka $\overline{a}=k\overline{b}$, tad atbilstošās taisnes ir paralēlas vai sakrīt un nogriežņu garumu attiecība $\dfrac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|}=k$;

2) ja $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$, tad atbilstošās taisnes ir savstarpēji perpendikulāras ($\overline{a}\neq 0$, $\overline{b}\neq 0$).

1. u z d e v u m s. Pierādīt šādu apgalvojumu: ja četrstūra pretmalas AB un CD ir vienādas un paralēlas, tad četrstūris ir paralelograms (280. zīm.).



280. zīm.



281. zīm.

A t r i s i n ā j u m s. Uz četrstūra malām atliekam vektorus $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$. Tad $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}=\overline{AD}$. Tā kā vienādības kreisajā pusē vektori $\overline{AB}$ un $\overline{CD}$ ir pretēji vērsti, tad to summa

$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{0}$, tādējādi $\overline{BC} = \overline{AD}$. No šīs vektoru vienādības izriet, ka nogriežņi BC un AD ir paralēli (un arī vienādi), tāpēc $ABCD$ ir paralelograms.

2. uzdevums. Noskaidrot trijstūra ABC viduslīnijas MN īpašības (281. zīm.).

Atrisinājums.

$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$;

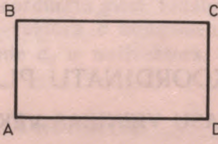
$\overline{MB} + \overline{BN} = \overline{MN}$ jeb

$0{,}5\overline{AB} + 0{,}5\overline{BC} = \overline{MN}$, jeb

$0{,}5(\overline{AB} + \overline{BC}) = \overline{MN}$, jeb $0{,}5\ \overline{AC} = \overline{MN}$.

No tā izriet, ka $MN \| AC$ un $MN = \frac{1}{2}AC$. Tātad trijstūra viduslīnija ir paralēla trijstūra pamatnei un vienāda ar tās pusi.

3. uzdevums. Pierādīt, ka taisnstūra diagonāles ir vienādas (282. zīm.).



282. zīm.

Atrisinājums. Tā kā uz diagonālēm atliktie vektori nav kolineāri, tad skaidrs, ka nav iespējams salīdzināt diagonāļu vektorus $\overline{AC}$ un $\overline{BD}$ formā $\overline{AC} = k\overline{BD}$ (kā tas bija iespējams iepriekšējos uzdevumos). Tāpēc salīdzināsim šo vektoru kvadrātus.

$\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{AB}$;

$\overline{AC}^2 = (\overline{AD} + \overline{AB})^2 = \overline{AD}^2 + 2\overline{AD}\cdot\overline{AB} + \overline{AB}^2$ jeb

$AC^2 = AD^2 + AB^2 \qquad (*)$

(reizinājums $2\ \overline{AD}\cdot\overline{AB} = 0$, jo $\overline{AD} \perp \overline{AB}$).

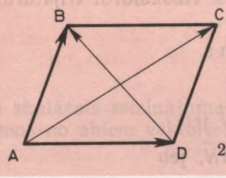
Līdzīgi $\overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB}$ un

$\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 - 2\overline{AD}\cdot\overline{AB} + \overline{AB}^2$ jeb

$BD^2 = AD^2 + AB^2 \qquad (**)$

Salīdzinot vienādības (*) un (**), redzams, ka $AC^2 = BD^2$ jeb $AC = BD$.

4. u z d e v u m s. Pierādīt, ka romba diagonāles ir savstarpēji perpendikulāras (283. zīm.).



283. zīm.

A t r i s i n ā j u m s.

$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD}$; $\overline{DB} = \overline{AB} - \overline{AD}$.

Sareizinot attiecīgi abu vienādību abas puses, iegūstam, ka

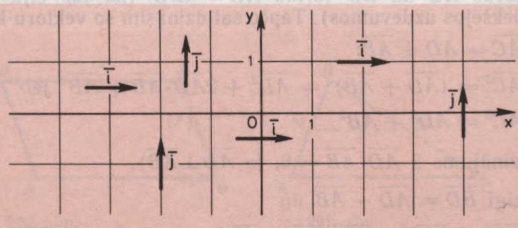
$\overline{AC} \cdot \overline{DB} = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2$.

Tā kā $AB = AD$, tad $\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2 = 0$ jeb $\overline{AC} \cdot \overline{DB} = 0$; no tā izriet, ka $AC \perp DB$

22.2. VEKTORI KOORDINĀTU PLAKNĒ

KOORDINĀTU ASU VIENĪBAS VEKTORI

Divus vektorus, kuru garums ir viena vienība un kuru vērsums sakrīt attiecīgi ar x ass un y ass vērsumu, sauc par koordinātu asu vienības vektoriem. Tos parasti apzīmē ar $\bar{i}$ (x ass vērsums) un $\bar{j}$ (y ass vērsums, sk. 284. zīm.).

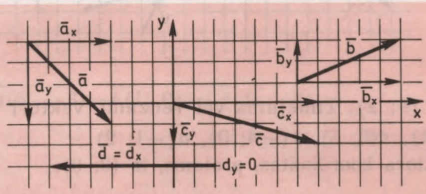


284. zīm.

Kā zināms, vektoru nosaka tikai tā garums un vērsums, tāpēc nav svarīgi, kurā koordinātu plaknes vietā asu vienības vektoru attēlojam ar vērstu nogriezni.

VEKTORA KOMPONENTES UZ KOORDINĀTU ASĪM

Koordinātu plaknē jebkuru vektoru var izteikt kā divu tādu vektoru summu, kas paralēli koordinātu asīm. Tā, piemēram, $\bar{a} = \bar{a}_x + \bar{a}_y$ (285. zīm.).



285. zīm.

Atbilstošos saskaitāmos vektorus $\bar{a}_x$ un $\bar{a}_y$ sauc par dotā vektora $\bar{a}$ komponentēm pa koordinātu asīm. Līdzīgi vektora $\bar{b}$ komponentes ir vektori $\bar{b}_x$ un $\bar{b}_y$, vektora $\bar{c}$ komponentes ir vektori $\bar{c}_x$ un $\bar{c}_y$. Vektora $\bar{d}$ komponente $\bar{d}_y$ ir nullvektors, tāpēc $\bar{d} = \bar{d}_x$.

VEKTORU KOORDINĀTAS

Tā kā vektora $\bar{a}$ komponentes $\bar{a}_x$ un $\bar{a}_y$ ir vektori, kas kolineāri koordinātu asu atbilstošajiem vienības vektoriem $\bar{i}$ un $\bar{j}$, tad šīs komponentes var izteikt kā vienības vektoru reizinājumu ar piemērotiem skaitļiem a_x un a_y :

$\bar{a}_x = a_x\bar{i}$; $\bar{a}_y = a_y\bar{j}$.

Līdz ar to arī vektors $\bar{a}$ ir izsakāms ar vienības vektoriem $\bar{i}$ un $\bar{j}$:

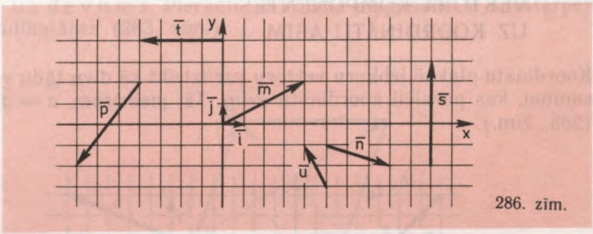
$\bar{a} = \bar{a}_x + \bar{a}_y = a_x\bar{i} + a_y\bar{j}$ jeb

$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j}$. (*)

Koeficientus a_x un a_y vienādībā (*) sauc par dotā vektora $\bar{a}$ koordinātām.

Vektoru $\bar{a}$, kura koordinātas ir a_x, un a_y, apzīmē $\bar{a}(a_x;\ a_y)$, piemēram, $\bar{a}(3;\ 1)$; $\bar{a}(0;\ -5)$ u. tml.

Viegli saskatīt, ka 286. zīmējumā vektors $\bar{m} = 4\bar{i} + 2\bar{j}$, tātad vektora $\bar{m}$ abscisa ir 4, ordināta ir 2 un šo vektoru ar koordinātām



286. zīm.

apzīmē $\bar{m}$ (4; 2). Zīmējumā vēl redzami vektori $\bar{n}(3; -1)$, $\bar{p}(-3; -4)$, $\bar{s}(0; 5)$, $\bar{t}(-4; 0)$, $\bar{u}(-1; 2)$.

Nullvektora koordinātas, protams, ir (0; 0).

SAKARS STARP VEKTORA UN TĀ GALAPUNKTU KOORDINĀTĀM

Ja vektora $\bar{a} = \overline{A_1A_2}$ galapunkti doti ar koordinātām $A_1(x_1; y_1)$ un $A_2(x_2; y_2)$, tad vektora $\bar{a}$ koordinātas $a_x = x_2 - x_1$, $a_y = y_2 - y_1$. Piemēram, ja vektora $\bar{a} = \overline{A_1A_2}$ galapunkti ir $A_1(3; 4)$ un $A_2(8; 7)$, tad vektora koordinātas ir $a_x = 8 - 3 = 5$, $a_y = 7 - 4 = 3$ un vektoru $\bar{a}$ var pierakstīt šādi: $\bar{a}(8 - 3; 7 - 4)$ jeb $\bar{a}(5; 3)$.

286. zīmējumā var saskatīt, ka vektora $\bar{u}$ sākumpunkts ir (5; -3), beigu punkts ir (4; -1), tātad vektora $\bar{u}$ izteiksme ar koordinātām ir $\bar{u}(4 - 5; -1 + 3)$ jeb $\bar{u}(-1; 2)$. Līdzīgi $\bar{p}(-5 + 2; -3 - 1) = \bar{p}(-3; -4)$, $\bar{t}(-4 - 0; 4 - 4) = \bar{t}(-4; 0)$.

RĀDIUSVEKTORS

Ja vektora sākumpunkts ir koordinātu sākumpunkts, tad tādu vektoru sauc par rādiusvektoru. Rādiusvektora $\overline{OM}$ koordinātas ir vienādas ar tā beigu punkta M koordinātām: ja rādiusvektora beigu punkts ir M $(x; y)$, tad rādiusvektors ir $\overline{OM}$ $(x; y)$. Tā, piemēram (286. zīm.), vektors $\bar{m}$ ir rādiusvektors ar beigu punkta koordinātām (4; 2), kas ir vienādas ar vektora koordinātām.

OPERĀCIJAS AR VEKTORIEM KOORDINĀTĀS

Ja vektori doti ar to koordinātām, tad, veicot tikai algebriskus aprēķinus (nekā nezīmējot), var noteikt arī to summas, starpības un reizinājuma koordinātas, kā arī izskaitļot vektora garumu, divu vektoru skalāro reizinājumu, leņķi starp vektoriem u. c.

1. Vektoru summas koordinātas ir vienādas ar doto vektoru attiecīgo koordinātu summu:

$$\bar{a}(a_x;\ a_y) + \bar{b}(b_x;\ b_y) = \bar{c}(a_x + b_x;\ a_y + b_y),$$

piemēram, $\bar{a}$ (2; —5) + $\bar{b}$ (4; 0) = $\bar{c}$ (6; —5).

2. Vektoru starpības koordinātas ir vienādas ar doto vektoru attiecīgo koordinātu starpību:

$$\bar{a}(a_x;\ a_y) - \bar{b}(b_x;\ b_y) = \bar{c}(a_x - b_x;\ a_y - b_y),$$

piemēram, $\bar{a}(5;\ -3) - \bar{b}(1;\ 0) = \bar{c}(4;\ -3)$.

3. Koordinātas vektora reizinājumam ar skaitli ir vienādas ar attiecīgo koordinātu reizinājumu ar šo skaitli:

$$k\bar{a}(a_x;\ a_y) = \bar{b}(ka_x;\ kb_y),$$

piemēram, $-1{,}5\cdot \bar{a}(2;\ -6) = \bar{b}(-3;\ 9)$.

4. Vektoru skalārais reizinājums ir skaitlis, kas vienāds ar abu vektoru atbilstošo koordinātu reizinājumu summu:

$$\bar{a}(a_x;\ a_y)\cdot\bar{b}(b_x;\ b_y) = a_x b_x + a_y b_y,$$

piemēram, $\bar{a}(2;\ 5)\cdot\bar{b}(3;\ -1) = 2\cdot 3 - 5\cdot 1 = 1$.

5. Vektora skalārais kvadrāts

$$\bar{a}(a_x;\ a_y)^2 = a_x^2 + a_y^2.$$

VEKTORA GARUMS

Vektora $\bar{a}(a_x;\ a_y)$ garums ir aprēķināms pēc formulas

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

VEKTORU PARALELITĀTE

UN PERPENDIKULARITĀTE

1. Ja vektori ir kolineāri, tad to koordinātas ir proporcionālas. Pareizs arī apgrieztais apgalvojums.

P i e m ē r i. 1) Vektori $\bar{a}$ (3; —5) un $\bar{b}$ (6; —10) ir kolineāri, jo $\frac{3}{6} = \frac{-5}{-10}$.

2) Ja vektori $\bar{m}$ (1; 4) un $\bar{n}$ (x; —6) ir kolineāri, tad $\frac{1}{x} = \frac{4}{-6}$; no tā izriet, ka $x = -1{,}5$.

2. Ja vektoru atbilstošo koordinātu reizinājumu summa ir vienāda ar nulli, tad vektori ir perpendikulāri. Pareizs arī apgrieztais apgalvojums.

P i e m ē r i. 1) Vektori $\overline{a}$ (3; —5) un $\overline{b}$ (—10; —6) ir perpendikulāri, jo $3\cdot(-10)+(-5)\cdot(-6)=0$.

2) Ja vektori $\overline{u}$ (3; —2) un $\overline{v}$ (5; y) ir perpendikulāri, tad $3\cdot 5-2y=0$; no tā izriet, ka $y=7{,}5$.

P i e z ī m e. Ja kaut viens no vektoriem ir nullvektors, tad par abu vektoru kolinearitāti vai perpendikularitāti nav jēgas runāt.

LEŅĶIS STARP VEKTORIEM

Jau zinām, ka $\cos\alpha = \dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}$ (sk. 22.1); izsakot šo sakarību ar vektoru $\overline{a}(a_x;\ a_y)$ un $\overline{b}(b_x;\ b_y)$ koordinātām, iegūstam formulu

$$\cos\alpha = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2}}.$$

P i e m ē r s. Noteikt leņķi α starp vektoriem $\overline{m}$ (4; —3) un $\overline{n}$ (0; 2).

$$\cos\alpha = \frac{4\cdot 0+(-3)\cdot 2}{\sqrt{4^2+3^2}\cdot\sqrt{0^2+2^2}} = \frac{-6}{5\cdot 2} = \frac{-6}{10} = -0{,}6.$$

Pēc tabulām atrodam, ka leņķis, kura kosinuss ir —0,6, aptuveni vienāds ar 127°, t. i., $\alpha \approx 127°$.

VEKTORI AR KOORDINĀTĀM UZDEVUMOS

1 . u z d e v u m s. Doti vektori $\overline{a}(4;\ 5)$ un $\overline{b}$ (—3; 1). Noteikt vektoru

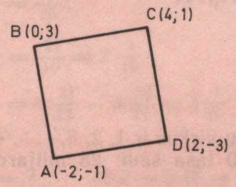
$\overline{c}=2\overline{a}-\overline{b}$.

$c_x = 2\cdot 4-(-3)=11;$

$c_y = 2\cdot 5-1=9.$

2 . u z d e v u m s. Vai četrstūris ar virsotnēm A(—2; —1), B(0; 3), C(4; 1), D(2; —3) ir kvadrāts?

1) Četrstūra *ABCD* malas iedomāsimies kā atbilstošos vektorus un noteiksim to koordinātas (287. zīm.):



287. zīm.

$\overline{AB}(0-(-2);\ 3-(-1))=\overline{AB}(2;\ 4);$

$\overline{BC}\ (4-0;\ 1-3)=\overline{BC}\ (4;\ -2);$

$\overline{CD}(2-4;\ -3-1)=\overline{CD}(-2;\ -4);$

$\overline{DA}\ (-2-2;\ -1-(-3))=\overline{DA}\ (-4;\ 2).$

2) Pārbaudām vektoru $\overline{AB}$ un $\overline{CD}$ un vektoru $\overline{BC}$ un $\overline{DA}$ kolinearitāti:

$$\frac{2}{-2}=\frac{4}{-4};\ \frac{4}{-4}=\frac{-2}{2}.$$

Tātad $ABCD$ ir paralelograms.

3) Pārbaudām vektoru $\overline{AB}$ un $\overline{BD}$ perpendikularitāti, aprēķinot šo vektoru skalāro reizinājumu:

$\overline{AB}\cdot\overline{BC}=2\cdot4+4\cdot(-2)=0.$

Tātad leņķis $ABC=90°$, līdz ar to taisni ir arī pārējie paralelograma leņķi un četrstūris $ABCD$ ir taisnstūris.

4) Pārbaudām malu AB un BC garumu vienādību:

$AB=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20};\ \overline{BC}=\sqrt{4^2+(-2)^2}=\sqrt{20}.$

Tātad $ABCD$ ir kvadrāts.

ĀTRAI UZZIŅAI

1. Naturālie skaitļi un to pieraksts

1. Naturālo skaitļu virkne ir 1, 2, 3, . . . , 47, . . . , 629, ... Skaitli 25 703 016 280 lasa šādi: 25 miljardi 703 miljoni 16 tūkstoši 280.

XXVII = 27, XLIX = 49, CCCXCIV = 394.

2. Skaitļa modulis

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{ja } a \geqslant \\ -a, & \text{ja } a < 0. \end{cases}$$

$|+3{,}7| = 3{,}7$; $|-3{,}7| = 3{,}7$; $|0| = 0$.

3. Darbību jēdzieni

Saskaitīšana	Reizināšana	Kāpināšana
Saskaitīšana ir tāda darbība, kurā uzzina, cik kopā, cik pavisam u. tml.	$a \cdot 3 = a + a + a$,	$a^3 = a \cdot a \cdot a$,
	$a \cdot 1 = a$,	$a^1 = a$,
	$a \cdot 0 = 0$,	$a^0 = 1\ (a \neq 0)$,
	$a \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ no a.	$a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}\ (a \geqslant 0)$,
		$a^{-3} = \frac{1}{a^3}\ (a \neq 0)$.

Atņemšana	Dalīšana	Saknes vilkšana
$a - b = c$, ja $b + c = a$.	$a : b = c$, ja $b \cdot c = a$.	$\sqrt[n]{a} = c$, ja $c^n = a$.

P i e z ī m e s par saknes vilkšanu. Ja n ir nepāra skaitlis, tad jebkuram skaitlim ir tikai viena sakne.

Ja n ir pāra skaitlis un $a > 0$, tad skaitlim a ir divas pretējas saknes, pie tam ar simbolu $\sqrt[n]{a}$ apzīmē tikai pozitīvo jeb aritmētisko sakni, šajā gadījumā $\sqrt[n]{x^n} = |x|$, piemēram, $\sqrt{x^2} = |x|$. Jebkuras pakāpes sakne no skaitļa nulle ir nulle: $\sqrt[n]{0} = 0$.

Gadījumi, kad darbības netiek definētas:

$$7 : 0;\ 0^0;\ (-8)^{\frac{1}{3}}; \qquad 0 : 0;\ 0^{-3};\ \sqrt{-9}.$$

4. Darbības ar parastajām daļām

$$\frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4+2}{7} = \frac{6}{7};$$

$$\frac{8}{9} - \frac{5}{9} = \frac{8-5}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3};$$

$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}=\frac{2\cdot 3}{5\cdot 7}=\frac{6}{35};$

$\frac{3}{5}:\frac{2}{7}=\frac{3\cdot 7}{5\cdot 2}=\frac{21}{10}=2\frac{1}{10};$

$6\frac{7^{(3}}{8}-3\frac{5^{(4}}{6}=6\frac{21}{24}-3\frac{20}{24}=3\frac{1}{24};$

5. Darbības ar decimāldaļām

$3{,}42+647=?$

$$\begin{array}{r} 3{,}42 \\ +\,647 \\ \hline 650{,}42; \end{array}$$

$48{,}2-0{,}48=?$

$$\begin{array}{r} 48{,}20 \\ -\,0{,}48 \\ \hline 47{,}72; \end{array}$$

$43{,}2\cdot 100=4320;$

$43{,}2:1000=0{,}0432;$

$$\begin{array}{r} 2{,}83 \\ \cdot\,0{,}4 \\ \hline 11{,}32; \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \underline{2{,}4:16}=0{,}15; \\ \underline{\ 80\ } \\ \ \ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \underline{2{,}4:0{,}16}=15. \\ \underline{240}:16 \\ \underline{\ 80\ } \\ \ \ 0 \end{array}$$

6. Daļu pārveidojumi

$\frac{3}{4}{}^{(25}=\frac{75}{100}=0{,}75;$

$\frac{7}{16}=7:16=0{,}4375;$

$\frac{5}{6}=5:6=0{,}833...=0{,}8(3);$

$0{,}65=\frac{65}{100}=\frac{13}{20}=$

$0,(36)=\frac{36}{99}=\frac{4}{11};$

$2{,}15(3)=2\frac{153-15}{900}=$

$=2\frac{138}{900}=2\frac{23}{150}.$

7. Daļu un procentu aprēķini

$\frac{3}{7}$ no $14=\frac{14}{7}\cdot 3=\frac{14\cdot 3}{7}=6$; $8\ \%$ no $75=\frac{75}{100}\cdot 8=\frac{75\cdot 8}{100}=6;$

$\frac{3}{7}\,x=6;\ x=\frac{6}{3}\cdot 7=14;\ 8\ \%\ x=6;\ x=\frac{6}{8}\cdot 100=\frac{6\cdot 100}{8}=75;$

6 pret $14=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$; 6 pret $75=\frac{6}{75}=\frac{6\cdot 100}{75}\ \%=8\ \%.$

8. Proporcija

$8:x=6:9;$ $\quad\frac{z}{3}=\frac{8}{6};$ $\quad 4:c=c:9;$

$x=\frac{8\cdot 9}{6}=12.$ $\quad z=\frac{3\cdot 8}{6}=4.$ $\quad c^2=4\cdot 9;$

$c=\pm\sqrt{36}=\pm 6.$

9. Darbības ar pozitīviem un negatīviem skaitļiem

Saskaitīšana	Reizināšana	Dalīšana
$(+6)+(+2)=+8;$	$(+6)\cdot(+2)=+12;$	$(+6):(+2)=+3;$
$(-6)+(-2)=-8;$	$(-6)\cdot(-2)=+12;$	$(-6):(-2)=+3;$
$(+6)+(-2)=+4;$	$(+6)\cdot(-2)=-12;$	$(+6):(-2)=-3;$
$(-6)+(+2)=-4;$	$(-6)\cdot(+2)=-12;$	$(-6):(+2)=-3;$
$(+6)+(-6)=0;$	$(-6)\cdot 0=0;$	$0:(-2)=0.$

Atņemšanu aizstāj ar pretējā skaitļa pieskaitīšanu:
$6-(+2)=6+(-2)$; $6-(-2)=6+(+2)$.

10. Iekavu atvēršana un ieslēgšana iekavās

$a+(b-c+d)=a+b-c+d$;
$-(x-y)-(-z+t)=-x+y+z-t$;
$k-l+m-n=k+(-l+m-n)$;
$c-d-e+f=-(-c+d)-(e-f)$.

Ievērot: ja pirms iekavām ir mīnusa zīme, tad, atverot iekavas, skaitļu zīmes jāmaina uz pretējām.

11. Summas un reizinājuma īpašības

Komutatīvā īpašība: $a+b=b+a$; $a\cdot b=b\cdot a$.

Asociatīvā īpašība: $(a+b)+c=a+(b+c)$; $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$.

Distributīvā īpašība: $(a+b)k=a\cdot k+b\cdot k$; $(a+b):k=a:k+b:k$.

12. Pakāpes īpašības

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$; $(ab)^n=a^n\cdot b^n$;
$a^m:a^n=a^{m-n}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$; $(a^m)^n=a^{mn}$.

13. Aritmētiskās saknes īpašības

Ja $a\geqslant 0$, tad $\sqrt[n]{a}=x$ sauc par n-tās pakāpes aritmētisko sakni no skaitļa a $(x\geqslant 0)$.

$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}}$; $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$; $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$;

$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{n}{m}}$; $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[nm]{a}$.

Nepāra pakāpes sakni no negatīva skaitļa var aizstāt ar aritmētisku sakni, iznesot mīnusa zīmi pirms saknes zīmes, piemēram,
$\sqrt[3]{-125}=-\sqrt[3]{125}$.

14. Skaitļu tuvinājumi

Ja $x\approx a$ (precīzā skaitļa x tuvinājums ir a), tad tuvinājuma absolūtā kļūda ir $|k|=|x-a|$,
tuvinājuma relatīvā kļūda ir $r=\frac{|k|}{a}$ jeb $r=\frac{|k|}{a}\cdot 100\,\%$.

Ja $|k|\leqslant h$, tad saka, ka a ir skaitļa x tuvinājums ar precizitāti līdz h.

Tuvinājumu pieraksts normālformā:
$a = a_1 \cdot 10^n$, kur $1 \leqslant a < 10$, n—vesels skaitlis, piemēram,
$24{,}37 = 2{,}437 \cdot 10$; $0{,}02437 = 2{,}437 \cdot 10^{-2}$.

15. Tuvināti aprēķini (pēc robežmetodes)

$$\begin{array}{l} 12 \leqslant x \leqslant 15 \\ 3 \leqslant y \leqslant 4 \\ \hline 12 + 3 \leqslant x + y \leqslant 15 + 4 \\ 12 - 4 \leqslant x - y \leqslant 15 - 3 \\ 12 \cdot 3 \leqslant x \cdot y \leqslant 15 \cdot 4 \\ \frac{12}{4} \leqslant \frac{x}{y} \leqslant \frac{15}{3}. \end{array}$$

16. Nevienādību īpašības

Ja $a > b$ un $b > c$, tad $a > c$.
Ja $a > b$, tad $a + c > b + c$.
Ja $a > b$ un $c > 0$, tad $ac > bc$; ja $c < 0$, tad $ac < bc$.
Ja $a > b$ un $c > d$, tad $a + c > b + d$,
Ja $a > b$, turklāt $a > 0$, $b > 0$, tad $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

17. Saīsinātās reizināšanas formulas

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2;$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$
$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3;$$
$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3;$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

18. Kvadrāttrinoma sadalīšana reizinātājos

Ja x_1 un x_2 ir kvadrāttrinoma saknes, tad
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$;
$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$.

19. Kvadrātvienādojums

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

$$x^2 + px + q = 0, \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q};$$

$$ax^2 + 2kx + c = 0, \quad x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a};$$

$$ax^2 + c = 0, \quad ax^2 = -c, \quad x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}};$$

$$ax^2 + bx = 0, \quad x(ax + b) = 0, \quad x_1 = 0, \quad ax + b = 0,$$

$$x_2 = -\frac{b}{a}; \qquad ax^2 = 0, \quad x_{1,2} = 0.$$

20. Kvadrātvienādojuma sakņu īpašības (Vjeta teorēma)

$$x^2 + px + q = 0, \quad x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q;$$

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

21. Progresijas

Aritmētiskā progresijā $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

$$a_n = a_1 + (n-1)d; \quad a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2};$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n; \quad S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Ģeometriskā progresijā $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}; \quad b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}};$$

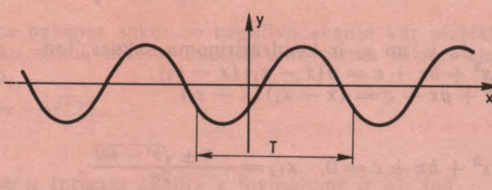
$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}; \quad S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Bezgalīgi dilstošai ģeometriskai progresijai ($|q| < 1$) locekļu summas formula ir $S = \frac{b_1}{1 - q}$.

22. Funkciju īpašības

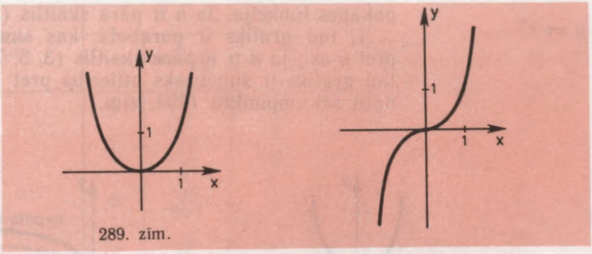
Ja ar visiem $x_2 > x_1$ ir spēkā nevienādība $f(x_2) > f(x_1)$, tad funkciju sauc par augošu; ja ar visiem $x_2 > x_1$ ir spēkā nevienādība $f(x_2) < f(x_1)$, tad funkciju sauc par dilstošu.

Ja ar visiem x ir spēkā vienādība $f(x + T) = f(x)$, tad funkciju sauc par periodisku ar periodu T (288. zīm.).



288. zīm.

Ja ar visiem x ir spēkā vienādība $f(-x) = f(x)$, tad funkciju sauc par pāra funkciju, ja $f(-x) = -f(x)$, tad — par nepāra funkciju (289. zīm.).



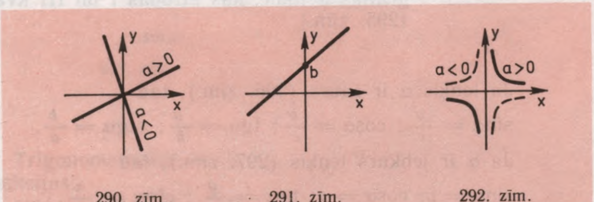
289. zīm.

23. Funkciju klases

$y = ax$ — tiešā proporcionalitāte; grafiks ir taisne, kas iet caur punktu (0; 0); ja $a > 0$, tad grafiks atrodas I un III kvadrantā, ja $a < 0$, tad — II un IV kvadrantā (290. zīm.);

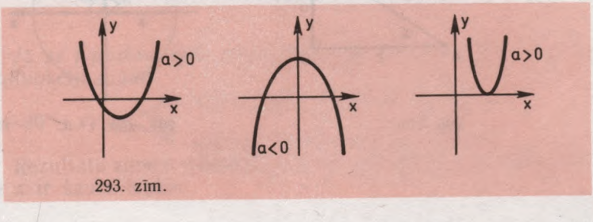
$y = ax + b$ — lineāra funkcija; grafiks ir taisne, kas iet caur punktu (0; b) (291. zīm.);

$y = \frac{a}{x}$ — apgrieztā proporcionalitāte; grafiks ir hiperbola, kuras zari atrodas I un III kvadrantā, ja $a > 0$, un II un IV kvadrantā, ja $a < 0$ (292. zīm.);



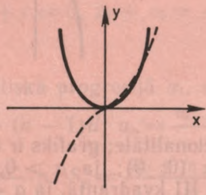
290. zīm. 291. zīm. 292. zīm.

$y = ax^2 + bx + c$ — kvadrātfunkcija; grafiks ir parabola, kuras zari ir vērsti uz augšu, ja $a > 0$, un uz leju, ja $a < 0$; parabolas virsotne atrodas punktā $\left(-\frac{b}{2a};\ -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ (293. zīm.);

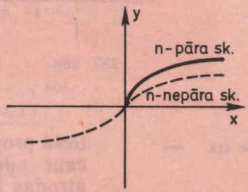


293. zīm.

$y = x^n$ — pakāpes funkcija. Ja n ir pāra skaitlis (2, 4, 6, ...), tad grafiks ir parabola, kas simetriska pret y asi; ja n ir nepāra skaitlis (3, 5, 7, ...), tad grafiks ir simetrisks attiecībā pret koordinātu sākumpunktu (294. zīm.);



294. zīm.



295. zīm.

$y = \sqrt[n]{x}$ — ja n ir pāra skaitlis (2, 4, 6, ...), tad funkcija ir definēta tikai ar $x \geqslant 0$; tās grafiks ir līkne, kas atrodas I kvadrantā; ja n ir nepāra skaitlis (3, 5,7, ...), tad funkcija ir definēta ar visiem x; tās grafiks ir līkne, kas atrodas I un III kvadrantā (295. zīm.).

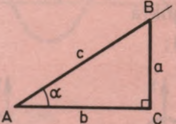
24. Trigonometrisko funkciju jēdziens

Ja leņķis α ir šaurs (296. zīm.), tad

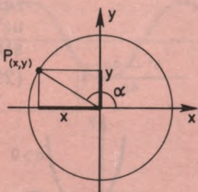
$$\sin\alpha = \frac{a}{c}; \ \cos\alpha = \frac{b}{c}; \ \mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}; \ \mathrm{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

Ja α ir jebkurš leņķis (297. zīm.), tad

$$\sin\alpha = y; \ \cos\alpha = x; \ \mathrm{tg}\alpha = \frac{y}{x}; \ \mathrm{ctg}\alpha = \frac{x}{y}.$$



296. zīm.



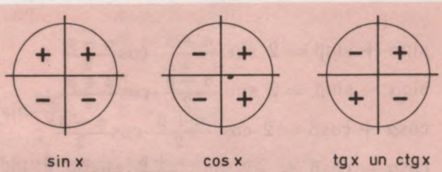
297. zīm.

25. Dažu leņķu trigonometrisko funkciju vērtības

Funkcija	Leņķis						
	$0^\circ = 0$	$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	$90^\circ = \frac{\pi}{2}$	$180^\circ = \pi$	$270^\circ = \frac{3\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—
ctg	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0

26. Trigonometrisko funkciju zīmes

Trigonometrisko funkciju $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ zīmes parādītas 298. zīmējumā.



298. zīm.

27. Pāra un nepāra trigonometriskās funkcijas

Trigonometriskās funkcijas $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ un $\operatorname{ctg} x$ ir nepāra funkcijas:

$\sin(-x) = -\sin x$, $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$.

Trigonometriskā funkcija $\cos x$ ir pāra funkcija:

$\cos(-x) = \cos x$.

28. Trigonometrisko funkciju periodi

$\sin x = \sin(x + 2\pi \cdot k)$, $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi \cdot k)$,

$\cos x = \cos(x + 2\pi \cdot k)$, $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(x + \pi \cdot k)$.

29. Redukcijas kārtulas

Ja ar f apzīmē doto trigonometrisko funkciju, bet ar k tās «kofunkciju», tad

$$f(n \cdot 90^\circ \pm x) = \begin{cases} \pm f(x), & \text{ja } n \text{ ir pāra skaitlis} \\ \pm k(x), & \text{ja } n \text{ ir nepāra skaitlis.} \end{cases}$$

Rezultāta zīme ir vienāda ar dotās funkcijas zīmi, pieņemot, ka x ir šaurs leņķis.

30. Sakarības starp trigonometriskajām funkcijām

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$ $\quad \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1;$

$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};$ $\quad 1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha};$

$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$ $\quad 1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$

31. Leņķu summas vai starpības trigonometriskās funkcijas

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta;$

$\cos(\alpha \pm \alpha) = \cos\alpha \cos\beta \pm \sin\alpha \sin\beta;$

$\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta}{1 \pm \mathrm{tg}\alpha \mathrm{tg}\beta}.$

32. Divkārša leņķa trigonometriskās funkcijas

$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha\cos\alpha;$ $\mathrm{tg}\, 2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha};$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$

33. Trigonometrisko funkciju summa vai starpība

$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2};$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha + \beta}{2};$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2};$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha - \beta}{2};$

$\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$

$1 + \cos\alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2};$

$1 - \cos\alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$

34. Daudzstūra elementi

A, B, C, ...— daudzstūra virsotnes, *AB, BC, CD,* ... vai *a, b, c,* ...— daudzstūra malas (299. zīm.).

$\sphericalangle BAE$ vai α — daudzstūra iekšējais leņķis; $\sphericalangle KAE$ — daudzstūra ārējais leņķis, d — daudzstūra diagonāle.

$P = a + b + c + \ldots$— daudzstūra perimetrs;

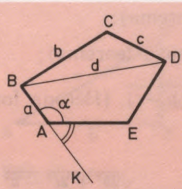
$p = 0{,}5(a + b + c + \ldots)$ — daudzstūra pusperimetrs; S — daudzstūra laukums;

R — ap daudzstūri apvilktās riņķa līnijas rādiuss; r — daudzstūrī ievilktās riņķa līnijas rādiuss; a_n — regulāra daudzstūra mala (n — malu skaits).

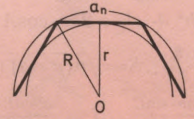
35. Daudzstūra leņķu summa

Iekšējo leņķu summa ir $180° \ (n - 2)$.

Ārējo leņķu summa ir $360°$.



299. zīm.



300. zīm.

36. Regulārs daudzstūris

Regulāra daudzstūra fragments parādīts 300. zīmējumā.

$$R = \frac{a_n}{2\sin\frac{180°}{n}}; \qquad r = \frac{a_n}{2\operatorname{tg}\frac{180°}{n}};$$

$$a_n = 2R\cdot\sin\frac{180°}{n}; \qquad a_n = 2r\cdot\operatorname{tg}\frac{180°}{n};$$

$$a_3 = R\sqrt{3}; \qquad a_3 = 2r\sqrt{3};$$

$$a_4 = R\sqrt{2}; \qquad a_4 = 2r;$$

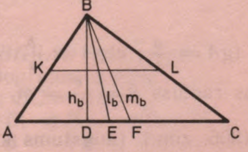
$$a_6 = R; \qquad a_6 = \frac{2r\sqrt{3}}{3};$$

$$S = 0{,}5nR^2\sin\frac{360°}{n}; \qquad S = \frac{na^2}{4\operatorname{tg}\frac{180°}{n}};$$

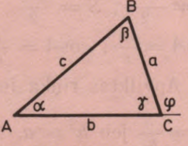
$S = pr$ (jebkura apvilkta daudzstūra laukums).

37. Trijstūris

h_a, h_b, h_c — augstumi pret malām a, b, c (301. zīm.);
l_a, l_b, l_c — bisektrises (leņķu A, B, C bisektrišu nogriežņi);
m_a, m_b, m_c — mediānas;
KL — trijstūra viduslīnija; $KL \parallel AC$; $KL = \frac{1}{2} AC$;
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$ (302. zīm.) jeb $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$; $\varphi = \alpha + \beta$;
$a + b > c$; $a + c > b$; $b + c > a$;



301. zīm.



302. zīm.

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\text{ (sinusu teorēma)};$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A\text{ (kosinusu teorēma)};$$

$$S=\frac{a\cdot h_a}{2};\ S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\text{ (Hērona formula)};$$

$$S=\frac{ab\cdot\sin C}{2};\ S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A};$$

$$h_a=\frac{2S}{a};\ l_a=\frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c};\ m_a=\frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2};$$

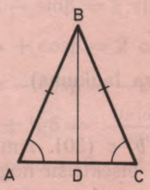
$$R=\frac{abc}{4S};\ r=\frac{S}{p};\ a=2R\sin A.$$

38. Vienādsānu trijstūris

$AB=BC$, $\sphericalangle A=\sphericalangle C$, $BD=l_a=h_a=m_a$ (303. zīm.).

39. Vienādmalu trijstūris

$a=b=c$; $\sphericalangle A=\sphericalangle B=\sphericalangle C=60°$ (304. zīm.);
$h=l=m=3r=1{,}5R$;
$R=2r$; $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$; $R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$; $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.



303. zīm.

304. zīm.

40. Taisnleņķa trijstūris

a un b — katetes, c — hipotenūza, $\sphericalangle C=90°$, $\sphericalangle A+$ $+\sphericalangle B=90°$ (305. zīm.).

Ja $\sphericalangle A=30°$, tad $BC=\frac{1}{2}AB$ (katete pret 30° leņķi);

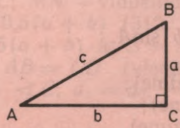
$a^2+b^2=c^2$ (Pitagora teorēma);

$S=\frac{c\cdot h_c}{2}$; $S=\frac{a\cdot b}{2}$;

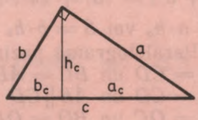
$\sin A=\frac{a}{c}$; $\cos A=\frac{b}{c}$; $\operatorname{tg}A=\frac{a}{b}$; $\operatorname{ctg}A=\frac{b}{a}$.

Apvilktās riņķa līnijas rādiuss $R=\frac{c}{2}=m_c$.

$\frac{a_c}{h}=\frac{h}{b_c}$ jeb $h^2=a_c\cdot b_c$ (306. zīm.) (augstums kā vidējais proporcionālais);



305. zīm.



306. zīm.

$\frac{c}{a} = \frac{a}{a_c}$ jeb $a^2 = c \cdot a_c$ (katete kā vidējais proporcionālais).

41. Trijstūru vienādība un līdzība

m — atbilstošo malu vienādība;
M — atbilstošo malu proporcionalitāte;
l — leņķu vienādība.

Vienādības pazīmes: 1) *mlm*; 2) *lml*; 3) *mmm*.

Līdzības pazīmes: 1) *ll*; 2) *MlM*; 3) *MMM*.

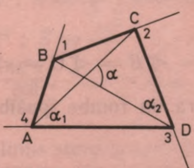
Taisnleņķa trijstūru īpašā vienādības pazīme: *hk* (hipotenūza, katete).

42. Četrstūris

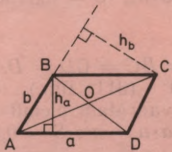
Iekšējo leņķu summa ir 360°; ārējo leņķu summa ir 360° (307. zīm.).

$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD}$ u. tml.

$S_{ABCD} = 0{,}5 d_1 d_2 \cdot \sin\alpha$ (α—leņķis starp diagonālēm).



307. zīm.



308. zīm.

43. Paralelograms

$AB \parallel CD$; $BC \parallel AD$ (308. zīm.).

Paralelograma īpašības:

$AB = CD$; $BC = AD$;

$\sphericalangle A = \sphericalangle C$; $\sphericalangle B = \sphericalangle D$;

$\sphericalangle A + \sphericalangle B = \sphericalangle B + \sphericalangle C = \sphericalangle C + \sphericalangle D =$
$= \sphericalangle D + \sphericalangle A = 180°$;

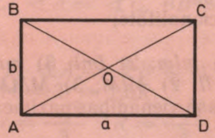
$AO = OC$; $BO = OD$;
$d^2_1 + d^2_2 = 2a^2 + 2b^2$;
$S = a \cdot h_a$ vai $S = b \cdot h_b$; $S = ab \cdot \sin A$.

Paralelograma pazīmes:
$AB = CD$ un $BC = AD$ (1. pazīme);
$AB = CD$ un $AB \parallel CD$ (2. pazīme);
$AO = OC$ un $BO = OD$ (3. pazīme).

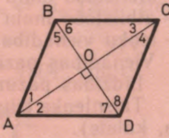
44. Taisnstūris

$\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = 90°$ (309. zīm.).

Taisnstūrim piemīt visas paralelograma īpašības un vēl šādas īpašības:
$d_1 = d_2$ $(AC = BD)$; $AO = OC = BO = OD$; $S = a \cdot b$.



309. zīm.



310. zīm.

45. Rombs

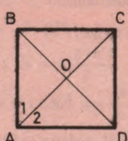
$AB = BC = CD = DB$ (310. zīm.).

Rombam piemīt visas paralelograma īpašības un vēl šādas īpašības:
d_1 un d_2 — leņķu bisektrises; $d_1 \perp d_2$; $d^2_1 + d^2_2 = 4a^2$;
$S = a \cdot h_a$; $S = 0{,}5 d_1 d_2$; $S = a^2 \sin A$.

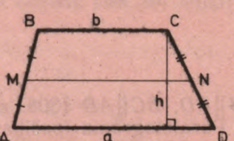
46. Kvadrāts

$AB = BC = CD = DA$; $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = 90°$ (311. zīm.).

Kvadrātam piemīt taisnstūra un romba īpašības.
$S = a \cdot a = a^2$; $S = 0{,}5 d^2$.



311. zīm.



312. zīm.

47. Trapece

$AD \parallel BC$; MN — viduslīnija; $MN \parallel AD \parallel BC$;
$MN = 0{,}5(a + b)$ (312. zīm.).
$S = 0{,}5(a + b) \cdot h$; $S = MN \cdot h$.

Ja $AB = CD$ (vienādsānu trapece), tad $\sphericalangle A = \sphericalangle D$; $\sphericalangle B = \sphericalangle C$; $d_1 = d_2$.

48. Riņķa līnija un četrstūris

Apvilktā četrstūrī $a + c = b + d$.
Ievilktā četrstūrī $\sphericalangle A + \sphericalangle C = \sphericalangle B + \sphericalangle D = 180°$.

49. Riņķa līnija un riņķis

O — riņķa līnijas un riņķa centrs (313. zīm.);
$R = OM$ — riņķa līnijas un riņķa rādiuss;

313. zīm.

$D = PN$ — riņķa līnijas un riņķa diametrs;
C — riņķa līnijas garums;
α — loka vai sektora lielums grādos;
l — loka garums.

$$D = 2R \ ; \ R = \frac{D}{2} \ ; \ C = 2\pi R \ ; \ C = \pi D \ ;$$

$$S = \pi R^2 \ ; \ S = \frac{\pi D^2}{4} \ ; \ l_\alpha = \frac{\pi R \alpha}{180} \ ;$$

$$S_{sekt} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}; \ S_{segm} = S_{sekt} \pm S_{\triangle}.$$

50. Koordinātu metode

Attālums starp koordinātu taisnes punktiem $A(x_1)$ un $B(x_2)$ ir aprēķināms pēc formulas $d = |x_1 - x_2|$.

Nogriežņa AB viduspunkts ir $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$.

Attālums starp koordinātu plaknes punktiem $A(x_1; y_1)$ un $B(x_2; y_2)$ ir aprēķināms pēc formulas $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Nogriežņa AB viduspunkts ir $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

Taisnes vispārīgais vienādojums ir $ax + by + c = 0$.

Taisnes vienādojums ar virziena koeficientu ir šāds:

$y = kx + m$, kur $k = \mathrm{tg}\alpha$ (α — taisnes leņķis ar abscisu ass pozitīvo virzienu).

Divu taišņu $y = k_1x + m_1$ un $y = k_2x + m_2$ savstarpējie stāvokļi:

$k_1 = k_2$, $m_1 = m_2$ —taisnes sakrīt;
$k_1 = k_2$, $m_1 \neq m_2$ —taisnes ir paralēlas;
$k_1 \neq k_2$ —taisnes krustojas;
$k_1 \cdot k_2 = -1$ —taisnes ir savstarpēji perpendikulāras.

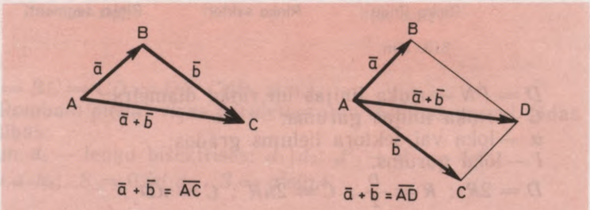
Vienādojums riņķa līnijai ar centru (a; b) un rādiusu R:
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

Vienādojums riņķa līnijai ar centru koordinātu sākumpunktā:
$x^2 + y^2 = R^2$.

51. Vektoru summa

Pēc trijstūra likuma $\bar{a} + \bar{b} = \overline{AC}$; pēc paralelograma likuma $\bar{a} + \bar{b} = \overline{AC}$ (314. zīm.).

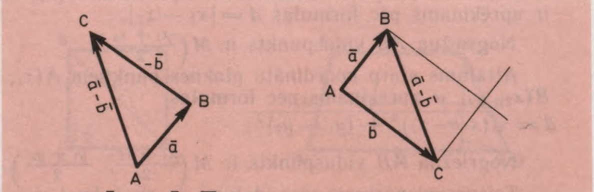
Vektoru summas izteiksme ar koordinātām:
$\bar{a}(a_x;\ a_y) + \bar{b}(b_x;\ b_y) = \bar{c}(a_x + b_x;\ a_y + b_y)$.



314. zīm.

52. Vektoru starpība

Pēc trijstūra likuma $\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b}) = \overline{AC}$; pēc paralelograma likuma $\bar{a} - \bar{b} = \overline{CB}$ (315. zīm.).



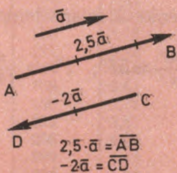
315. zīm.

Vektoru starpības izteiksme ar koordinātām:
$\overline{a}(a_x;\ a_y) - \overline{b}(b_x;\ b_y) = \overline{c}(a_x - b_x;\ a_y - b_y)$.

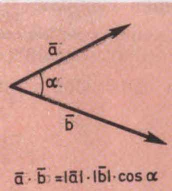
53. Vektora reizinājums ar skaitli

Ar vērstiem nogriežņiem (316. zīm.):
$2{,}5 \cdot \overline{a} = \overline{AB};\quad -2 \cdot \overline{a} = \overline{CD}$.

Ar koordinātām:
$k \cdot \overline{a}(a_x;\ a_y) = \overline{b}(ka_x;\ kb_y)$.



316. zīm.



317. zīm.

54. Vektoru skalārais reizinājums

Ar vērstiem nogriežņiem (317. zīm.):
$\overline{ab} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\alpha$ (α leņķis starp vektoriem).

Ar vektoru koordinātām:
$\overline{a}(a_x;\ a_y) \cdot \overline{b}(b_x;\ b_y) = a_x b_x + a_y b_y$.

Vektora skalārais kvadrāts:
$\overline{a}^2 = |a|^2$ jeb $\overline{a}(a_x;\ a_y)^2 = a_x^2 + a_y^2$.

55. Vektoru savstarpējais stāvoklis

Leņķis starp vektoriem $\overline{a}(a_x;\ a_y)$ un $\overline{b}(b_x;\ b_y)$:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}.$$

Vektori $\overline{a}$ un $\overline{b}$ ir kolineāri, ja $\overline{a} = k \cdot \overline{b}$ vai
$$\frac{a_x}{a_y} = \frac{b_x}{b_y}.$$

Vektori $\overline{a}$ un $\overline{b}$ ir perpendikulāri, ja $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$ vai $a_x b_x + a_y b_y = 0$.

Vektora $\overline{a}(a_x;\ a_y)$ garumu aprēķina pēc formulas
$|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

56. Lielumu vienības

Garuma vienības:
1 km = 1000 m; 1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm;
1 dm = 10 cm = 100 mm; 1 cm = 10 mm.

Masas vienības:
1 t = 10 c = 1000 kg; 1 c = 100 kg; 1 kg = 1000 g.
Laukuma vienības:
1 ha = 100 a = 10 000 m^2; 1 a = 100 m^2.
Tilpuma vienības:
1 *hl* = 100; 1 *l* = 1 dm^3 = 1000 cm^3.
Laika vienības:
1 g. = 365 (366) d.; 1 d. = 24 h = 1440 min;
1 h = 60 min = 3600 s; 1 min = 60 s.

Leņķa vienības:

1 izstiepts leņķis = 2 taisni leņķi; 1 taisns leņķis = 90°;
$1° = 60' = 3600''$; $1' = 60''$.
2π rad = 360°; 1 rad = $\frac{180°}{\pi} \approx 57°$; $1° = \frac{\pi}{180}$ rad.

Skaitļu no 1 līdz 100 pirmreizinātāji, kvadrāti un kvadrātsaknes (ar precizitāti ±0,005)

n	Pirmreizinātāji	n^2	$\sqrt{n}$	n	Pirmreizinātāji	n^2	$\sqrt{n}$
1	1	1	1,00	51	$3\cdot17$	2601	7,14
2	2	4	1,41	52	$2^2\cdot13$	2704	7,21
3	3	9	1,73	53	53	2809	7,28
4	2^2	16	2,00	54	$2\cdot3^3$	2916	7,35
5	5	25	2,24	55	$5\cdot11$	3025	7,42
6	$2\cdot3$	36	2,45	56	$2^3\cdot7$	3136	7,48
7	7	49	2,65	57	$3\cdot19$	3249	7,55
8	2^3	64	2,83	58	$2\cdot29$	3364	7,62
9	3^2	81	3,00	59	59	3481	7,68
10	$2\cdot5$	100	3,16	60	$2^2\cdot3\cdot5$	3600	7,75
11	11	121	3,32	61	61	3721	7,81
12	$2^2\cdot3$	144	3,46	62	$2\cdot31$	3844	7,87
13	13	169	3,61	63	$3^2\cdot7$	3969	7,94
14	$2\cdot7$	196	3,74	64	2^6	4096	8,00
15	$3\cdot5$	225	3,87	65	$5\cdot13$	4225	8,06
16	2^4	256	4,00	66	$2\cdot3\cdot11$	4356	8,12
17	17	289	4,12	67	67	4489	8,19
18	$2\cdot3^2$	324	4,24	68	$2^2\cdot17$	4624	8,25
19	19	361	4,36	69	$3\cdot23$	4761	8,31
20	$2^2\cdot5$	400	4,47	70	$2\cdot5\cdot7$	4900	8,37
21	$3\cdot7$	441	4,58	71	71	5041	8,43
22	$2\cdot11$	484	4,69	72	$2^3\cdot3^2$	5184	8,49
23	23	529	4,80	73	73	5329	8,54
24	$2^3\cdot3$	576	4,90	74	$2\cdot37$	5476	8,60
25	5^2	625	5,00	75	$3\cdot5^2$	5625	8,66
26	$2\cdot13$	676	5,10	76	$2^2\cdot19$	5776	8,72
27	3^3	729	5,20	77	$7\cdot11$	5929	8,77
28	$2^2\cdot7$	784	5,29	78	$2\cdot3\cdot13$	6084	8,83
29	29	841	5,39	79	79	6241	8,89
30	$2\cdot3\cdot5$	900	5,48	80	$2^4\cdot5$	6400	8,94
31	31	961	5,57	81	3^4	6561	9,00
32	2^5	1024	5,66	82	$2\cdot41$	6724	9,06
33	$3\cdot11$	1089	5,74	83	83	6889	9,11
34	$2\cdot17$	1156	5,83	84	$2^2\cdot3\cdot7$	7056	9,17
35	$5\cdot7$	1225	5,92	85	$5\cdot17$	7225	9,22
36	$2^2\cdot3^2$	1296	6,00	86	$2\cdot43$	7396	9,27
37	37	1369	6,08	87	$3\cdot29$	7569	9,33
38	$2\cdot19$	1444	6,16	88	$2^3\cdot11$	7744	9,38
39	$3\cdot13$	1521	6,25	89	89	7921	9,43
40	$2^3\cdot5$	1600	6,32	90	$2\cdot3^2\cdot5$	8100	9,49
41	41	1681	6,40	91	$7\cdot13$	8281	9,54
42	$2\cdot3\cdot7$	1764	6,48	92	$2^2\cdot23$	8464	9,59
43	43	1849	6,56	93	3.31	8649	9,64
44	$2^2\cdot11$	1936	6,63	94	$2\cdot47$	8836	9,70
45	$3^3\cdot5$	2025	6,71	95	$5\cdot19$	9025	9,75
46	$2\cdot23$	2116	6,78	96	$2^5\cdot3$	9216	9,80
47	47	2209	6,86	97	97	9409	9,85
48	$2^4\cdot3$	2304	6,93	98	$2\cdot7^2$	9604	9,90
49	7^2	2401	7,00	99	$3^2\cdot11$	9801	9,95
50	$2\cdot5^2$	2500	7,07	100	$2^2\cdot5^2$	10000	10,00

Skaitļu no 1 līdz 9 pakāpes (līdz 1 000 000)

n	n^2	n^3	n^4	n^5	n^6	n^7	n^8	n^9	n^{10}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3	9	27	81	243	729	2187	6581	19683	59049
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536		
5	25	125	625	3125	15625	78125			
6	36	216	1296	7776	46656				
7	49	343	2401	16807					
8	69	512	4096	32768					
9	81	729	6561	59049					

Trigonometrisko funkciju vērtības

$\alpha°$	x rad	sin	tg	ctg	cos		
0°	0	0,000	0,000	—	1,000	1,571	90°
1°	0,018	0,017	0,017	57,29	1,000	1,553	89°
2°	0,035	0,035	0,035	28,64	0,999	1,536	88°
3°	0,052	0,052	0,052	19,08	0,999	1,518	87°
4°	0,070	0,070	0,070	14,30	0,998	1,501	86°
5°	0,087	0,087	0,087	11,43	0,996	1,484	85°
6°	0,105	0,105	0,105	9,514	0,995	1,466	84°
7°	0,122	0,122	0,123	8,144	0,993	1,449	83°
8°	0,140	0,139	0,141	7,115	0,990	1,431	82°
9°	0,157	0,156	0,158	6,314	0,988	1,414	81°
10°	0,175	0,174	0,176	5,671	0,985	1,396	80°
11°	0,192	0,191	0,194	5,145	0,982	1,379	79°
12°	0,209	0,208	0,213	4,705	0,978	1,361	78°
13°	0,227	0,225	0,231	4,331	0,974	1,344	77°
14°	0,244	0,242	0,249	4,011	0,970	1,327	76°
15°	0,262	0,259	0,268	3,732	0,966	1,309	75°
16°	0,279	0,276	0,287	3,487	0,961	1,291	74°
17	0,297	0,292	0,306	3,271	0,956	1,274	73°
18°	0,314	0,309	0,325	3,078	0,951	1,257	72°
19°	0,332	0,326	0,344	2,904	0,946	1,239	71°
20°	0,349	0,342	0,364	2,747	0,940	1,222	70°
21°	0,367	0,358	0,384	2,605	0,934	1,204	69°
22°	0,384	0,375	0,404	2,475	0,927	1,187	68°
23°	0,401	0,391	0,424	2,356	0,921	1,169	67°
24°	0,419	0,407	0,445	2,246	0,914	1,152	66°
25°	0,436	0,423	0,466	2,145	0,906	1,135	65°
26°	0,454	0,438	0,488	2,050	0,899	1,117	64°
27°	0,471	0,454	0,510	1,963	0,891	1,100	63°
28°	0,489	0,469	0,532	1,881	0,883	1,082	62°
29°	0,506	0,485	0,554	1,804	0,875	1,065	61°
30°	0,524	0,500	0,577	1,732	0,866	1,047	60°

31°	0,541	0,515	0,601	1,664	0,857	1,030	59°
32°	0,559	0,530	0,625	1,600	0,848	1,012	58°
33°	0,576	0,545	0,649	1,540	0,839	0,995	57°
34°	0,593	0,559	0,675	1,483	0,829	0,977	56°
35°	0,611	0,574	0,700	1,428	0,819	0,960	55°
36°	0,628	0,588	0,727	1,376	0,809	0,943	54°
37°	0,646	0,602	0,754	1,327	0,799	0,925	53°
38°	0,663	0,616	0,781	1,280	0,788	0,908	52°
39°	0,681	0,629	0,810	1,235	0,777	0,890	51°
40°	0,698	0,643	0,839	1,192	0,766	0,873	50°
41°	0,716	0,656	0,869	1,150	0,755	0,855	49°
42°	0,733	0,669	0,900	1,111	0,743	0,838	48°
43°	0,751	0,682	0,933	1,072	0,731	0,820	47°
44°	0,768	0,695	0,966	1,036	0,719	0,803	46°
45°	0,785	0,707	1,000	1,000	0,707	0,785	45°
		cos	ctg	tg	sin	*x* rad	α°

ALFABĒTISKAIS RĀDĪTĀJS

SATURS

① Aritmētika

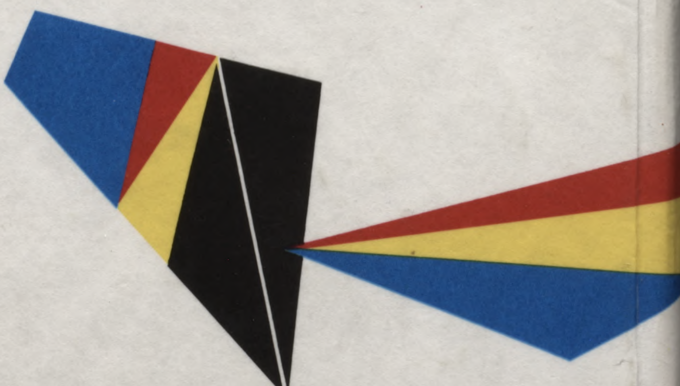
② Algebra

③ Ģeometrija

J.MENCIS, A.SIKA

Matemātikas rokasgrāmata skolēniem

Aritmētika, algebra un ģeometrija pamatskolas kursa apjomā



ZVAIGZNE ABC

ISBN 9984-04-432-7