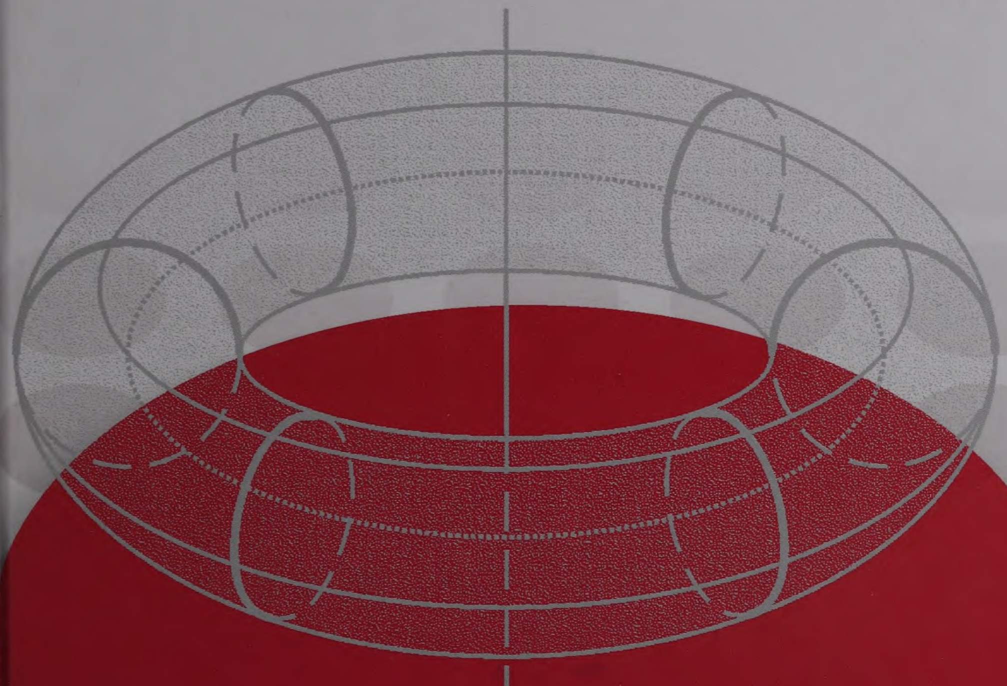
Rokasgrāmata MATEMĀTIKĀ

definīcijas • formulas • aprēķinu algoritmi



• elementārā matemātika
• augstākā matemātika

vecāko klašu skolēniem un studentiem

ZVAIGZNE ABC

Biruta Siliņa, Kārlis Šteiners

Rokasgrāmata MATEMĀTIKĀ

elementārā matemātika
augstākā matemātika

ZVAIGZNE ABC

Biruta Siliņa, Kārlis Šteiners
ROKASGRĀMATA MATEMĀTIKĀ

Autoru redakcijā
Māksl. red. *Eduards Groševs*
Dmitrija Šešukova tehniskie zīmējumi
Maketētāja *Ilze Šmite*
Tehniskā red. *Iveta Kļaviņa*

Apgāds Zvaigzne ABC, SIA, K. Valdemāra ielā 6, Rīgā, LV-1010
Red. nr. E-870
A/s “Poligrāfists”, K. Valdemāra ielā 6, Rīgā, LV-1010

ISBN 9984-37-141-7

Saturs

Priekšvārds

Kas šajā grāmatā atrodams.
Grāmatā ietverti svarīgākie vidusskolas matemātikas kursa jautājumi un augstākās matemātikas materiāls, kas atbilst inženierzinātņu un dabaszinātņu bakalaura studiju programmām. Aplūkotas jēdzienu definīcijas, interpretācijas, formulas, kārtulas, metodes, algoritmi, tabulas u. c. jautājumi. Teorijas jautājumi apskatīti bez pierādījumiem un izvedumiem, bet ar paskaidrojumiem un norādījumiem.

Par skolas matemātikas kursa jautājumiem aplūkoti arī piemēri un uzdevumu risināšanas paraugi. Ierobežotā grāmatas apjoma dēļ šāds materiāls nav ietverts augstākās matemātikas jautājumu apskatā.

Kam šī grāmata ieteicama.
Neviena rokasgrāmata nevar aizstāt mācību grāmatu. Arī šī grāmata lietojama galvenokārt kā mācību palīglīdzeklis un informācijas avots īsu, bet izsmeļošu uzziņu iegūšanai par daudziem matemātikas jautājumiem. Grāmatu var izmantot

- skolēni un studenti, gatavojoties eksāmeniem;
- skolotāji un skolēnu vecāki;
- matemātikas lietotāji (inženieri, praktiķi).

Materiāla sakārtojums un iedalījums.
Grāmatas saturs sadalīts nodaļās, paragrāfos un apakšpunktos. Liela materiāla daļa sakārtota pārskatāmu tabulu veidā, kur norādīts attiecīgā jēdziena nosaukums, apzīmējumi, paskaidrojumi, ilustrācijas un piemēri.

Vidusskolas kursa materiāls aplūkots grāmatas pirmajās nodaļās, atsevišķos gadījumos tas apvienots ar analogu augstākās matemātikas jautājumu apskatu. Interesējošo jautājumu lasītājs atradīs, izmantojot grāmatas satura rādītāju un jēdzienu alfabētisko rādītāju.

Gatavojot šo grāmatu, autori izmantoja skolas un augstskolas mācību grāmatas, mācīblīdzekļus, rokasgrāmatas u. c. agrāk izdotus materiālus.

Autori

Grieķu alfabēta burti

Lielais burts	Mazais burts	Burta nosaukums	Lielais burts	Mazais burts	Burta nosaukums
A	α	alfa	N	ν	nī
B	β	bēta	Ξ	ξ	ksī
Γ	γ	gamma	O	o	omikrons
Δ	δ	delta	Π	π	pī
E	ε	epsilons	P	ρ	ro
Z	ζ	zēta	Σ	σ	sigma
H	η	ēta	T	τ	tau
Θ	θ	tēta	Y	υ	ipsilons
I	ι	jota	Φ	φ	fī
K	κ	kapa	X	χ	hī
Λ	λ	lambda	Ψ	ψ	psī
M	μ	mī	Ω	ω	omega

Matemātiskas konstantes

$\pi = 3{,}14159\ldots$ $\qquad e = 2{,}71828\ldots$

$2\pi = 6{,}28318\ldots$ $\qquad \frac{1}{e} = 0,36787\ldots$

$\frac{\pi}{2} = 1,57079\ldots$ $\qquad e^2 = 7{,}38905\ldots$

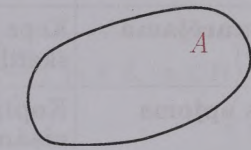
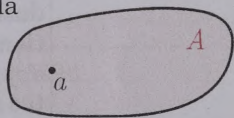
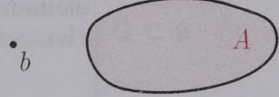
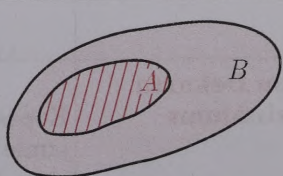
$\frac{\pi}{4} = 0,78539\ldots$ $\qquad \sqrt{e} = 1,64872\ldots$

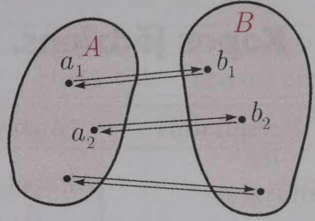
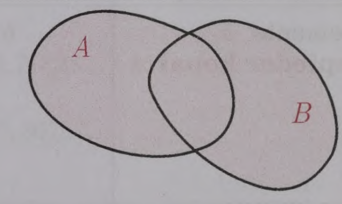
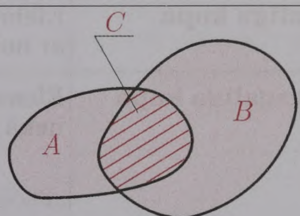
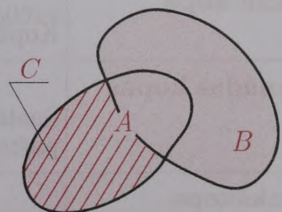
$\frac{1}{\pi} = 0,31830\ldots$ $\qquad \frac{1}{e^2} = 0,13533\ldots$

$\pi^2 = 9{,}86960\ldots$ $\qquad \ln 2 = 0{,}69314\ldots$

1. JĒDZIENS "KOPA" UN AR TO SAISTĪTIE JAUTĀJUMI

1.1. Kopas jēdziens. Darbības ar kopām

Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi	Ilustrācija, piemēri
Kopa	Alfabēta lielie burti $A, B, C, X, Y, R, \ldots$ **Kopa – nedefinēts matemātikas pamatjēdziens** (dažādu objektu apvienojums, kuriem piemīt kāda noteikta pazīme, pēc kuras var noteikt, vai objekts pieder vai nepieder kopai).	Plaknes apgabals, ko ierobežo brīvi izraudzīta slēgta līnija 
Kopas **elementi**	Alfabēta mazie burti $a, b, c, x, y, \ldots$	Plaknes apgabala punkti
Elements a **pieder kopai A**	$a \in A$	Punkts atrodas plaknes apgabalā 
Elements b **nepieder kopai A**	$b \notin A$ jeb $b \bar{\in} A$	Punkts neatrodas plaknes apgabalā 
Galīga kopa	Elementu skaitu var izteikt ar noteiktu naturālu skaitli.	Alfabēta burtu kopa Grāmatas lapu kopa
Bezgalīga kopa	Elementu skaits ir lielāks nekā jebkurš naturāls skaitlis.	Taisnes nogriežņa punktu kopa 
Tukša kopa	$\varnothing$ Kopā nav neviena elementa.	Vienādojumam $x^2 + 1 = 0$ nav reālu sakņu, t. i., $x \in \varnothing$.
Vienādas kopas	$A = B$ Sastāv no vieniem un tiem pašiem elementiem.	
Apakškopa	$A \subset B$ Visi kopas A elementi pieder arī kopai B.	

Ekvivalentas kopas	$A \sim B$ Katram kopas A elementam atbilst tikai viens kopas B elements un katrs kopas B elements atbilst tikai vienam kopas A elementam.	Eilera–Venna diagramma 
Sanumurējama kopa	Kopa ir ekvivalenta naturālo skaitļu kopai $\mathbb{N}$	
Kopas apjoms	**Kopīga īpašība, kas piemīt visām savstarpēji ekvivalentām kopām.** Galīgas kopas apjoms ir tās elementu skaits. Tukšas kopas apjoms ir skaitlis 0. Bezgalīgām kopām var būt dažādi apjomi; mazākais no tiem ir sanumurējamas kopas apjoms. Kopas apjomu raksturo tās **kardinālskaitlis**.	Vienāds apjoms ir naturālo skaitļu, veselo skaitļu, racionālo skaitļu kopai; šo kopu kardinālskaitli apzīmē ar burtu $\aleph_0$ "**alef**". Lielāks apjoms nekā $\aleph_0$ ir kopai $\mathbb{R}$, intervālam [0; 1] u. c. Šīm kopām ir **kontinuuma apjoms** $\aleph_1$ (lat. *continuum* – nepārtraukts).
Kopu apvienojums	$C = A \cup B$ Kopa C sastāv no visiem tiem elementiem, kuri pieder vismaz vienai no kopām A **vai** B.	
Kopu šķēlums	$C = A \cap B$ Kopa C sastāv no visiem tiem elementiem, kuri pieder kopai A **un** kopai B.	
Kopu starpība	$C = A \setminus B$ Kopa C sastāv no visiem tiem kopas A elementiem, kuri nepieder kopai B.	
Kopu Dekarta reizinājums	$C = A \times B$ Kopas C elementi ir visi iespējamie kopu A un B elementu a un b sakārtoti pāri $(\boldsymbol{a; b})$.	

1.2. Skaitļu kopas

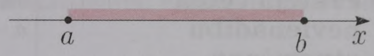
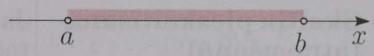
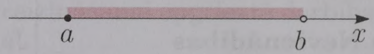
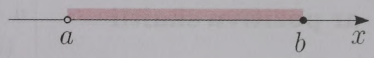
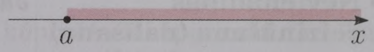
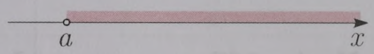
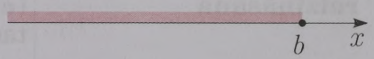
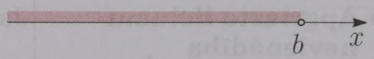
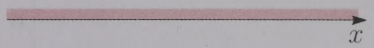
Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi	Ilustrācija, piemēri
Naturālo skaitļu kopa	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N} = \{1;\ 2;\ 3;\ \ldots;\ n;\ \ldots\}$
Veselo skaitļu kopa	$\mathbb{Z}$ Naturālie skaitļi, naturāliem skaitļiem pretējie skaitļi, nulle.	$\mathbb{Z} = \{\ldots;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots\}$ $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
Racionālo skaitļu kopa	$\mathbb{Q}$ Kopas elementus var izteikt ar attiecību $\frac{m}{n}$ (veselie skaitļi, parastie daļskaitļi, galīgie decimāldaļskaitļi, bezgalīgi periodiski decimāldaļskaitļi).	$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n}:\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ $n \neq 0$ $\frac{3}{4};\ \frac{-2}{1};\ \frac{0}{1};\ 1,8;\ 3,1515\ldots$ $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
Iracionālie skaitļi	Bezgalīgi neperiodiski decimāldaļskaitļi. $\sqrt{2} = 1,4142135\ldots$ $\lg 7 = 0,84509801\ldots$	$\pi = 3,1415926\ldots$ $e = 2,7182818\ldots$
Reālo skaitļu kopa	$\mathbb{R}$ Racionālo skaitļu kopas un iracionālo skaitļu kopas apvienojums.	$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
Komplekso skaitļu kopa	$\mathbb{C}$ Kopa, kuras elementi ir kompleksie skaitļi $z = a + bi$, kur $a \in \mathbb{R},\ \ b \in \mathbb{R},\ \ i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$. Ja $b = 0$, tad $a + bi = a \in \mathbb{R}$.	$3 + 2i$ $4 - 5i$ $0 + 2i = 2i$ $2 + 0i = 2$ $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

1.3. Ar reālo skaitļu kopu saistītie jēdzieni

Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi, piemēri	
Darbības reālo skaitļu kopā • **Saskaitīšana**	$a + b$	
• **Atņemšana**	$a - b = c$, ja $a = b + c$ (saskaitīšanai apgrieztā darbība)	
• **Reizināšana**	$a \cdot b$	
• **Dalīšana**	$a : b = c$ jeb $\frac{a}{b} = c$, ja $a = b \cdot c$ $(b \neq 0)$ (reizināšanai apgrieztā darbība)	
• **Kāpināšana**	$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a$ (n reizinātāji, $n \in \mathbb{N}$)	
• **Saknes atrašana**	$\sqrt[n]{a} = b$, ja $b^n = a$ $(n \in \mathbb{N})$ $a \geqslant 0$, ja n ir pāra skaitlis (kāpināšanai apgrieztā darbība)	
Darbību pamatīpašības • **Saskaitīšanas komutatīvā īpašība**	$a + b = b + a$	
• **Saskaitīšanas asociatīvā īpašība**	$(a + b) + c = a + (b + c)$	
• **Reizināšanas komutatīvā īpašība**	$a \cdot b = b \cdot a$	
• **Reizināšanas asociatīvā īpašība**	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	
• **Distributīvā īpašība**	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	
Nevienādības • **Stingra nevienādība**	$a > b$, ja $a - b > 0$ Skaitlis a lielāks nekā skaitlis b.	$7 > 2$; $0 > -3$; $-4 > -10$
• **Stingra nevienādība**	$a < b$, ja $a - b < 0$ Skaitlis a mazāks nekā skaitlis b.	$8 < 11$; $0 < 2$; $-6 < -5$
• **Nestingra nevienādība**	$a \geqslant b$, ja $a - b \geqslant 0$ Skaitlis a lielāks vai vienāds ar skaitli b.	
• **Nestingra nevienādība**	$a \leqslant b$, ja $a - b \leqslant 0$ Skaitlis a mazāks vai vienāds ar skaitli b.	

Nevienādību īpašības		
• **Simetrija**	Ja $a > b$, tad $b < a$	$5 > 2 \Rightarrow 2 < 5$
• **Transitivitāte**	Ja $a > b$ un $b > c$, tad $a > c$	$7 > 4;\ 4 > 1 \Rightarrow 7 > 1$
• **Vienāda veida nevienādību saskaitīšana**	Ja $a > b$ un $c > d$, tad $a + c > b + d$	$+\begin{array}{l}10 > 3\\ 8 > 4\end{array}$ $10 + 8 > 3 + 4;\ 18 > 7$
• **Pretēja veida nevienādību atņemšana**	Ja $a > b$ un $c < d$, tad $a - c > b - d$	$-\begin{array}{l}12 > 8\\ 3 < 5\end{array}$ $12 - 3 > 8 - 5;\ 9 > 3$
• **Skaitļa pieskaitīšana (atņemšana) nevienādībai**	Ja $a > b$, tad $a \pm c > b \pm c$	$5 > 2 \Rightarrow 5 + 3 > 2 + 3;$ $8 > 5$
• **Nevienādības reizināšana (dalīšana) ar pozitīvu skaitli**	Ja $a > b$ un $c > 0$, tad $a \cdot c > b \cdot c,\quad \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$	$7 > 5;\ 2 > 0 \Rightarrow$ $7 \cdot 2 > 5 \cdot 2;\ 14 > 10$
• **Nevienādības reizināšana (dalīšana) ar negatīvu skaitli**	Ja $a > b$ un $c < 0$, tad $a \cdot c < b \cdot c,\quad \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$	$12 > 9;\ -3 < 0 \Rightarrow$ $12 \cdot (-3) < 9 \cdot (-3);$ $-36 < -27$
• **Nevienādību reizināšana**	Ja $a > b$ un $c > d$ $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d > 0)$, tad $a \cdot c > b \cdot d$	$8 > 5;\ 10 > 7 \Rightarrow$ $8 \cdot 10 > 5 \cdot 7;\ 80 > 35$
• **Apgriezto lielumu nevienādība**	Ja $a > b$ un skaitļiem a, b ir vienāda zīme, tad $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$	$5 > 2 \Rightarrow \frac{1}{5} < \frac{1}{2}$ $-2 > -3 \Rightarrow -\frac{1}{2} < -\frac{1}{3}$
• **Nenegatīvu skaitļu vidējās aritmētiskās un vidējās ģeometriskās vērtības nevienādība**	$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot b}$ (vienādība ir tikai tad, ja $a = b$) $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$	$\frac{2+8}{2} > \sqrt{2 \cdot 8} \Rightarrow 5 > 4$
• **Vidējās aritmētiskās un vidējās kvadrātiskās vērtības nevienādība**	$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \leqslant$ $\leqslant \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}$ (vienādība ir tikai tad, ja $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$)	$\frac{2+4}{2} < \sqrt{\frac{2^2 + 4^2}{2}} \Rightarrow$ $3 < \sqrt{10}$

• **Vidējās ģeometriskās un vidējās kvadrātiskās vērtības nevienādība**	$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leqslant \sqrt{\dfrac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}$	
• **Košī–Buņakovska nevienādība**	$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)\cdot(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$	
Reālo skaitļu intervāli	$[a;\ b]$ – slēgts intervāls $a \leqslant x \leqslant b$	
	$(a;\ b)$ – vaļējs intervāls $a < x < b$	
	$[a;\ b)$ – pusslēgts intervāls $a \leqslant x < b$	
	$(a;\ b]$ – pusslēgts intervāls $a < x \leqslant b$	
	$[a;\ +\infty)$ – bezgalīgs intervāls $x \geqslant a$	
	$(a;\ +\infty)$ – bezgalīgs intervāls $> a$	
	$(-\infty;\ b]$ – bezgalīgs intervāls $x \leqslant b$	
	$(-\infty;\ b)$ – bezgalīgs intervāls $x < b$	
	$(-\infty;\ +\infty)$ – bezgalīgs intervāls $x \in \mathbb{R}$	
Reāla skaitļa modulis (absolūtā vērtība)	$\lvert a \rvert = \begin{cases} a, & \text{ja } a \geqslant 0 \\ -a, & \text{ja } a < 0 \end{cases}$	$\lvert 3\rvert = 3,\ \lvert 0\rvert = 0,$ $\lvert -4\rvert = -(-4) = 4$
Moduļa īpašības	• $\lvert a\rvert \geqslant 0;\ \lvert a\rvert = \lvert -a\rvert;\ \lvert a\rvert \geqslant a$	• $\lvert a \cdot b\rvert = \lvert a\rvert \cdot \lvert b\rvert;\ \lvert a^n\rvert = \lvert a\rvert^n$
	• $\lvert a + b\rvert \leqslant \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$ • $\lvert a - b\rvert \geqslant \lvert a\rvert - \lvert b\rvert$	• $\left\lvert \dfrac{a}{b} \right\rvert = \dfrac{\lvert a \rvert}{\lvert b \rvert};\ (b \neq 0)$
	• $\lvert a_1 + a_2 + \ldots + a_n\rvert \leqslant \lvert a_1\rvert + \lvert a_2\rvert + \ldots + \lvert a_n\rvert$	
	• $\lvert x\rvert = a \Leftrightarrow x = \pm a$	
	• $\lvert x\rvert \leqslant a \Leftrightarrow x \in [-a;\ a]$	
	• $\lvert x\rvert < a \Leftrightarrow x \in (-a;\ a)$	

	• $\lvert x\rvert > a \Leftrightarrow x \in (-\infty; -a) \cup (a; +\infty)$
	• $\lvert x\rvert \geqslant a \Leftrightarrow x \in (-\infty; -a] \cup [a; +\infty)$
Reāla skaitļa zīme (signum) (no latīņu v. *signum* – zīme)	$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{ja } x > 0 \\ 0, & \text{ja } x = 0 \\ -1, & \text{ja } x > 0 \end{cases}$ (apzīmē arī sign x)

Ar reālo skaitļu dalīšanas darbību saistītie jēdzieni

Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi	Piemēri
Daļa	$\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ (divu skaitļu attiecība)	$\frac{2}{3}$; $\frac{7}{6}$
Īsta daļa	$\frac{a}{b}$, ja $a < b$ $(b \neq 0)$	$\frac{3}{5}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{1}{2}$
Neīsta daļa	$\frac{a}{b}$, ja $a > b$ $(b \neq 0)$	$\frac{9}{4}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{3}$
Daļas pamatīpašības • **Daļas paplašināšana**	$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$ $(b \neq 0,\ c \neq 0)$	$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2}$
• **Daļas saīsināšana**	$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$ $(b \neq 0,\ c \neq 0)$	$\frac{20}{25} = \frac{20 : 5}{25 : 5}$
Zīmes maiņa	$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$ $(b \neq 0)$	$-\frac{4}{9} = \frac{-4}{9} = \frac{4}{-9}$
Darbības ar daļām • **Saskaitīšana, atņemšana**	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d}$ $(b \neq 0,\ d \neq 0)$ $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$ $(b \neq 0)$	
• **Reizināšana**	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ $(b \neq 0,\ d \neq 0)$	
• **Dalīšana**	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ $(b \neq 0,\ d \neq 0,\ c \neq 0)$	

Proporcija	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ jeb $a:b=c:d$ $(b\neq 0,\ d\neq 0)$ (divu attiecību vienādība)	
Proporcijas ārējie locekļi	$a;\ d$	
Proporcijas iekšējie locekļi	$b;\ c$	
Proporcijas pamatīpašība	$\boldsymbol{a\cdot d=b\cdot c}$ Ārējo locekļu reizinājums ir vienāds ar iekšējo locekļu reizinājumu.	$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}\Rightarrow 3\cdot 8=4\cdot 6$
Secinājumi • **Proporcijas locekļu izteikšana**	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow a=\frac{b\cdot c}{d};\ b=\frac{a\cdot d}{c};\ c=\frac{a\cdot d}{b};\ d=\frac{b\cdot c}{a}$	
• **Proporcijas pārveidojumi**	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d};\ \frac{a\pm b}{a}=\frac{c\pm d}{c};\ \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$	
Procenti **Viens procents**	**1 %** **1 % no** $\boldsymbol{a}$ **ir** $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{100}}\cdot\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{100}}$ **Viens procents no skaitļa** $\boldsymbol{a}$ **ir šī skaitļa viena simtā daļa.**	$1\ \%$ no $34=\frac{1}{100}\cdot 34=$ $=\frac{34}{100}=0,34$
p **procenti**	$p\ \%$ $p\ \%$ **no** a **ir** $\frac{p}{100}\cdot a=\frac{a\cdot p}{100}$ p procenti no skaitļa a ir šī skaitļa p simtdaļas.	
Pamatsakarības	No $\frac{p}{100}\cdot a=b$ iegūst: $a=\frac{100\cdot b}{p};\ \frac{b}{a}=\frac{p}{100};\ p=\frac{100\cdot b}{a}$	
Procentu rēķinu pamatuzdevumi • **Procentu aprēķināšana**	$p\ \%$ no a ir $\frac{p}{100}\cdot a=\frac{a\cdot p}{100}$	$7\ \%$ no $200=$ $=\frac{7}{100}\cdot 200=14$

• **Skaitļa a aprēķināšana, ja doti šī skaitļa p procenti**	Ja p % no a ir b, tad $a = \dfrac{b \cdot 100}{p}$	Ja 15 % no $a = 45$, tad $a = \dfrac{45 \cdot 100}{15} = 300$
• **Skaitļa b izteikšana kā skaitļa a procentus**	Ja $\dfrac{b}{a} = \dfrac{p}{100}$, tad $\dfrac{b}{a} = p\%$ jeb b ir p % no a	$\dfrac{30}{40} = 0,75 = \dfrac{75}{100} = 75\ \%$ jeb 30 ir 75 % no 40
Promiles		
Viena promile	$1\ ‰$ **1 ‰ no a ir** $\dfrac{1}{1000} \cdot a = \dfrac{a}{1000}$ **Viena promile no skaitļa a ir šī skaitļa viena tūkstošdaļa.**	
p **promiles**	$p\ ‰$ p ‰ **no a ir** $\dfrac{p}{1000} \cdot a = \dfrac{a \cdot p}{1000}$ p promiles no skaitļa a ir šī skaitļa p tūkstošdaļas. Piezīme. Aprēķinus ar promilēm izpilda analogi procentu rēķinu uzdevumiem.	

Ar reālo skaitļu kāpināšanas un saknes atrašanas darbību saistītie jēdzieni

Pakāpe ar naturālu kāpinātāju	$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$, $n \in \mathbb{N}$ (n reizinātāji)	$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
Kāpinātājs	n	
Bāze	a	
Sakne	$\sqrt[n]{a}$ $\sqrt[n]{a} = b$, ja $b^n = a$, $n \in \mathbb{N}$, $a \geqslant 0$, ja n – pāra skaitlis	$\sqrt[3]{8} = 2$, jo $2^3 = 8$ $\sqrt[5]{-32} = -2$, jo $(-2)^5 = -32$
Saknes rādītājs	n	
Zemsaknes skaitlis	a	
Aritmētiskā sakne	**Saknes $\sqrt[n]{a}$ nenegatīvā vērtība, ja $a \geqslant 0$.** **Ja $a < 0$, aritmētiskā sakne neeksistē.**	$\sqrt{25} = 5$ $\sqrt[3]{27} = 3$

Aritmētiskās saknes īpašības	① $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$	$\sqrt{x^2 - 6x + 9} =$ $= \sqrt{(x-3)^2} = \lvert x-3 \rvert$
	② $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}}$ $a > 0,\ \ m,\ n,\ k \in \mathbb{N}$ ③ $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[\frac{n}{k}]{a^{\frac{m}{k}}}$ $a > 0$, k – naturālo skaitļu m un n kopīgs dalītājs.	$\sqrt[4]{25} = \sqrt[4]{5^2} = \sqrt{5}$
Līdzīgas saknes	Saknes, kurām ir vienādi zemsaknes skaitļi un saknes rādītāji, bet atšķirīgi racionāli reizinātāji (koeficienti) pirms saknes simbola, piemēram, $b\sqrt[n]{a}$, $c\sqrt[n]{a}$ $(b, c \in \mathbb{Q})$	$\sqrt[3]{5};\ -2\sqrt[3]{5};\ \frac{1}{2}\sqrt[3]{5}$
Darbības ar saknēm • **Saskaitīšana, atņemšana**	$b\sqrt[n]{a} \pm c\sqrt[n]{a} = (b \pm c)\sqrt[n]{a}$ **Šīs darbības izpilda tikai ar līdzīgām saknēm**	$5\sqrt{7} + 3\sqrt{7} = 8\sqrt{7}$; $9\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{2}$
• **Reizināšana**	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ $a \geqslant 0,\ \ b \geqslant 0$	$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{4 \cdot 16} =$ $= \sqrt[3]{64} = 4$
• **Dalīšana**	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ $a \geqslant 0,\ \ b > 0$	$\frac{\sqrt[5]{8}}{\sqrt[5]{4}} = \sqrt[5]{\frac{8}{4}} = \sqrt[5]{2}$
• **Kāpināšana**	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ $\ \ a \geqslant 0$	$(\sqrt{2})^3 = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$
• **Saknes atrašana**	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$ $\ \ a \geqslant 0$	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{10}} = \sqrt[12]{10}$
Kāpinātāja jēdziena paplašinājums • **Kāpinātājs – nulle**	$a^0 = 1,\ \ a \neq 0$	$3^0 = 1,\ \ 3{,}14^0 = 1$
• **Kāpinātājs – vesels negatīvs skaitlis**	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $n \in \mathbb{N},\ \ a \neq 0$	$a^{-3} = \frac{1}{a^3};\ \ 2^{-1} = \frac{1}{2};$ $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$
• **Kāpinātājs – pozitīvs daļskaitlis**	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $a \geqslant 0;\ \ m,\ n \in \mathbb{N}$	$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$; $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$

Pakāpes īpašības ($a > 0,\ b > 0,$ $x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}$)	① $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ ② $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ ③ $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$ ④ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$ ⑤ $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$	
Logaritms	**Skaitļa b logaritms ir kāpinātājs, ar kuru kāpinot bāzi a iegūst skaitli b.** $\log_a b$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ Ja $a^x = b$, tad $x = \log_a b$. Ja $x = \log_a b$, tad $a^x = b$.	$\log_4 16 = 2$, jo $4^2 = 16$; $\log_2 0{,}25 = -2$, jo $2^{-2} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$
Decimāllogaritms	$\lg b$ Skaitļa b logaritms, ja **bāze ir skaitlis 10.** $(\lg b = \log_{10} b)$	$\lg 1000 = 3$, jo $10^3 = 1000$
Naturāllogaritms	$\ln b$ Skaitļa b logaritms, ja **bāze ir iracionālais skaitlis e = 2,71828...** $(\ln b = \log_e b)$	
Logaritmu īpašības • **Skaitļa 1 logaritms**	$\log_a 1 = 0$, jo $a^0 = 1$	$\lg 1 = 0$, jo $10^0 = 1$ $\ln 1 = 0$, jo $e^0 = 1$
• **Bāzes logaritms**	$\log_a a = 1$, jo $a^1 = a$	$\lg 10 = 1$, jo $10^1 = 10$ $\ln e = 1$, jo $e^1 = e$
• **Logaritmiskās identitātes**	$a^{\log_a b} = b;\ \log_a a^x = x$	$10^{\lg 3} = 3;\ e^{\ln 5} = 5$
• **Reizinājuma logaritms**	$\log_a(b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$	$(b_1 > 0,\ b_2 > 0)$
• **Dalījuma logaritms**	$\log_a \dfrac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$	$(b_1 > 0,\ b_2 > 0)$
• **Pakāpes logaritms**	$\log_a b^c = c \cdot \log_a b$ $\log_a b^{2n} = 2n \cdot \log_a \lvert b \rvert$	$(b > 0)$ $(n \in \mathbb{N})$
• **Saknes logaritms**	$\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n} \cdot \log_a b$	
• **Logaritma bāzes maiņa**	$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a} \Rightarrow$ $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a};\ \ln b = \dfrac{\lg b}{\lg e}$	$\log_2 5 = \dfrac{\log_3 5}{\log_3 2}$ $\log_2 10 = \dfrac{1}{\lg 2}$

2. ALGEBRISKAS IZTEIKSMES, VIENĀDOJUMI, NEVIENĀDĪBAS

2.1. Racionālas algebriskas izteiksmes

Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi	Piemēri
Racionāla algebriska izteiksme	**Skaitļi un ar burtiem apzīmēti mainīgi lielumi, kas savienoti ar matemātisku darbību zīmēm, bet nesatur mainīgo lielumu saknes.**	$2a + 3b^2 - x + 7$; $(m - n)^2 + 3m - n$; $\frac{x}{y} - xy + x^2 - y^3$; $\frac{3x - ab - c}{a + b}$
Vesela racionāla algebriska izteiksme	Racionāla algebriska izteiksme, kurā ar mainīgajiem lielumiem vai to izteiksmēm **netiek izpildīta dalīšana**.	$a^2 + b^2 + ab - 1$; $3x^2y - 5xy^2 - x$
Daļveida racionāla algebriska izteiksme	Racionāla algebriska izteiksme, kurā ar mainīgajiem lielumiem vai to izteiksmēm **tiek izpildīta arī dalīšana**.	$\frac{2x + 3y}{xy - 1}$
Daļveida racionālas algebriskas izteiksmes definīcijas apgabals	Visu mainīgo lielumu vērtību kopa, ar kurām **izteiksmes saucēja vērtība nav vienāda ar nulli**.	$\frac{3x^2 - 5x + 3}{2x + 8}$ $2x + 8 \neq 0$, $x \neq -4$, definīcijas apgabals: $x \in (-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$
Monoms	Algebriska izteiksme, kurā skaitļi, mainīgie lielumi un to pakāpes ar naturālu kāpinātāju savienoti tikai ar reizināšanas zīmi; arī atsevišķi mainīgie lielumi un skaitļi.	$2ab$; a^5b^2; $7x$; y; 4; $0{,}5xy$; $3x^4$
Polinoms	**Monomu algebriska summa**	$3mn + 2x^2y - 5$; $3a^2 - 2ab + b^2$
Polinoms ar vienu mainīgo lielumu	$P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0$ (No mainīgā lieluma pakāpēm ar naturālu kāpinātāju sastādīts polinoms.)	$ax^2 + bx + c$ (**kvadrāttrinoms**); $ax + b$ (**lineārs binoms**)
Polinoma pakāpe	n	$2x^3 - 5x^2 + 6x + 2$ (3. pakāpes polinoms)

Polinoma koeficienti	$a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2},\ \ldots,\ a_1,\ a_0$	2; –5; 6; 2
Reducēts polinoms	Polinoms, kura koeficients $a_n = 1$	$x^2 + 5x + 6$; $x^3 - 4x^2 + 6x - 5$
Darbības ar polinomiem • **Saskaitīšana** • **Atņemšana**	$P_n(x) \pm Q_m(x) = S_k(x)$ Polinomu $S_k(x)$ iegūst, saskaitot (atņemot) polinomu $P_n(x)$ un $Q_m(x)$ koeficientus pie vienādām x pakāpēm.	$(3x^2 + 7x - 1) +$ $+ (x^3 - 2x^2 + 4x - 2) =$ $= x^3 + x^2 + 11x - 3$
• **Reizināšana**	$P_n(x) \cdot Q_m(x)$ Reizinot polinomus, izmanto distributīvo īpašību attiecībā pret summas reizināšanu ar skaitli (monomu).	$(2x^3 + 3x^2 - x + 4) \times$ $\times (x^2 + 6x - 2) =$ $= (2x^3 + 3x^2 - x + 4)x^2 +$ $+ (2x^3 + 3x^2 - x + 4)6x +$ $+ (2x^3 + 3x^2 - x + 4)(-2) =$ $= 2x^5 + 15x^4 + 13x^3 -$ $- 8x^2 + 26x - 8$
• **Dalīšana (apgrieztā darbība reizināšanai)**	$Q_m(x) : P_n(x)$ jeb $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ $(m \geqslant n)$ $Q_m(x) : P_n(x) = S_{m-n}(x)$, ja $P_n(x) \cdot S_{m-n}(x) = Q_m(x)$	$-\,6x^3 + x^2 + 7x + 6 \;\big\vert\; 2x^2 - x + 3$ $\underline{6x^3 - 3x^2 + 9x} \qquad 3x + 2$ $-\,4x^2 - 2x + 6$ $\underline{4x^2 - 2x + 6}$ 0 $(2x^2 - x + 3) \cdot (3x + 2) =$ $= 6x^3 + x^2 + 7x + 6$
Dalīšanas atlikums	Polinoms $R_k(x)$, $(k < n)$ ja $Q_m(x) = P_n(x) \cdot S_{m-n}(x) + R_k(x)$ $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)} = S_{m-n}(x) + \dfrac{R_k(x)}{P_n(x)}$	$-\,2x^4 + 3x - 1 \;\big\vert\; x^2 - 2x$ $\underline{2x^4 - 4x^3} \qquad 2x^2 + 4x + 8$ $-\,4x^3 + 3x - 1$ $\underline{4x^3 - 8x^2}$ $-\,8x^2 + 3x - 1$ $\underline{8x^2 - 16x}$ $19x - 1$ $\dfrac{2x^4 + 3x - 1}{x^2 - 2x} =$ $= 2x^2 + 4x + 8 + \dfrac{19x - 1}{x^2 - 2x}$
Polinoma $P_n(x)$ sakne	Reāls vai komplekss skaitlis x_0, ja $P_n(x_0) = 0$	$P_2(x) = x^2 - 5x + 6$ $x_1 = 2,\ x_2 = 3$, jo $P_2(2) = 0,\ P_2(3) = 0$
Algebras pamatteorēma	**Katram polinomam eksistē sakne (reāla vai kompleksa).**	$P_2(x) = x^2 - 6x + 13$ $x_1 = 3 + 2i,\ x_2 = 3 - 2i$

Algebras pamat-teorēmas secinājums	**n-tās pakāpes polinomam $P_n(x)$ ir n saknes: $x_1, x_2, \ldots, x_n$**	$P_3(x) = x^3 - 4x$, $x_1 = 0,\ x_2 = -2,\ x_3 = 2$
Bezū teorēma	**Ja, dalot polinomu $P_n(x)$ ar binomu $x - x_0$, iegūst atlikumu r, tad $r = P_n(x_0)$.**	$P_3(x) = x^3 - 3x + 6,\ x_0 = 1$ $\begin{array}{r\|l} x^3 - 3x + 6 & x - 1 \\ -\ x^3 - x^2 & x^2 + x - 2 \\ \hline x^2 - 3x + 6 & \\ -\ x^2 - x & \\ \hline -2x + 6 & \\ -\ -2x + 2 & \\ \hline 4 & \end{array}$ Tātad $r = 4$ un arī $P_3(1) = 4$
Bezū teorēmas secinājums	**Skaitlis x_0 ir polinoma $P_n(x)$ sakne tad un tikai tad, ja šo polinomu var izdalīt ar binomu $x - x_0$ bez atlikuma.**	
Polinoma sadalījums lineāros reizinātājos	$P_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$ $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$	$P_2(x) = 2x^2 + 7x - 4$ $x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = -4$ $2x^2 + 7x - 4 =$ $= 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 4)$
Vjeta formulas	Reducētam kvadrāttrinomam $P_2(x) = x^2 + px + q$ $p = -(x_1 + x_2)$ $q = x_1 \cdot x_2$ Reducētam n-tās pakāpes polinomam $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots$ $\ldots + a_0$ $a_{n-1} = -(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ $a_{n-2} = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n +$ $+ x_2x_3 + x_2x_4 + \ldots +$ $+ x_2x_n + \ldots + x_{n-1}x_n$ .... $a_0 = (-1)^n x_1x_2x_3\ldots x_n$	$P_2(x) = x^2 - 5x + 6$ $x_1 = 2,\ x_2 = 3$ $-5 = -(2 + 3)$ $6 = 2 \cdot 3$ $x^2 - 5x + 6 =$ $= (x - 2)(x + 3)$
Hornera shēma	**Metode polinoma** $P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0$ **dalīšanai ar binomu $x - x_0$.** n-tās pakāpes polinoma $P_n(x)$ un binoma $x - x_0$ dalījums ir $n - 1$ pakāpes polinoms $Q_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1x + b_0$, tātad $P_n(x) = (x - x_0)Q_{n-1}$.	

Hornera shēma
(*turpinājums*)

Ja dalot iegūst atlikumu r, tad ir spēkā vienādība

$$P_n(x) = Q_{n-1}(x) \cdot (x - x_0) + r.$$

No šīs vienādības izriet **rekurences formulas**:

$$b_{n-1} = a_n$$
$$b_{n-2} = x_0 \cdot b_{n-1} + a_{n-1}$$
$$b_{n-3} = x_0 \cdot b_{n-2} + a_{n-2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$b_1 = x_0 \cdot b_2 + a_2$$
$$b_0 = x_0 \cdot b_1 + a_1$$
$$r = x_0 \cdot b_0 + a_0$$

Izmantojot šīs formulas, **aprēķinus sakārto tabulā**, kuras **pirmajā rindā** raksta **dalāmā polinoma koeficientus** (ja kādas pakāpes polinomā nav, tad tās koeficients ir 0), **otrajā rindā** – aprēķinu **starprezultātus** $x_0 \cdot b_k$, bet **trešajā rindā** – **meklējamos koeficientus un atlikumu** r (ja tāds eksistē), turklāt pēdējais skaitlis šajā rindā ir dalījuma atlikums
$r = P_n(x_0)$.

a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_2	a_1	a_0
	$x_0 \cdot b_{n-1}$	$x_0 \cdot b_{n-2}$	...	$x_0 \cdot b_2$	$x_0 \cdot b_1$	$x_0 \cdot b_0$
$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} =$ $= a_{n-1} +$ $+ x_0 \cdot b_{n-1}$	$b_{n-3} =$ $= a_{n-2} +$ $+ x_0 \cdot b_{n-2}$	...	$b_1 =$ $= a_2 +$ $+ x_0 \cdot b_2$	$b_0 =$ $= a_1 +$ $+ x_0 \cdot b_1$	$r =$ $= a_0 +$ $+ x_0 \cdot b_0$

P i e m ē r s $(x^4 + 2x^3 - 4x + 6) : (x - 2)$

a_i	**1**	**2**	**0**	**–4**	**6**
2 $\cdot b_{i-1}$		+ 2	+ 8	+ 16	+ 24
b_{i-1}	1	4	8	12	30

$Q_3(x) = \mathbf{1} \cdot x^3 + \mathbf{4}x^2 + \mathbf{8}x + \mathbf{12}$, $r = \mathbf{30}$.

Tātad $\boldsymbol{x^4 + 2x^3 - 4x + 6 = (x^3 + 4x^2 + 8x + 12)(x - 2) + 30}$
jeb

$$(x^4 + 2x^3 - 4x + 6) : (x - 2) = x^3 + 4x^2 + 8x + 12 + \frac{30}{x-2}$$

2.2. Saīsinātās reizināšanas formulas

Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi	Piemēri
Summas kvadrāts	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$	
Starpības kvadrāts	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	
Summas kubs	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	
Starpības kubs	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	
Kvadrātu starpība	$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$	
Kubu starpība	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$	
Kubu summa	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$	
Ņūtona binoms	$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots$ $\ldots + C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots + b^n$	$(a+b)^5 = a^5 +$ $+ C_5^1 a^4 b + C_5^2 a^3 b^2 +$ $+ C_5^3 a^2 b^3 + C_5^4 ab^4 + b^5$
Binomiālais koeficients	$C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ jeb $C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m}$	$C_5^1 = \frac{5}{1} = 5$ $C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$
Paskāla trijstūris **binomiālo koeficientu noteikšanai**	$\begin{array}{l\|c} n & \\ \hline 0 & 1 \\ 1 & 1 \quad 1 \\ 2 & 1 \quad 2 \quad 1 \\ 3 & 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 4 & 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 5 & 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\ 6 & 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$	$C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$ $C_5^4 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5$ $(a+b)^5 = a^5 +$ $+ 5a^4 b + 10a^3 b^2 +$ $+ 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5$

2.3. Racionāli algebriski vienādojumi

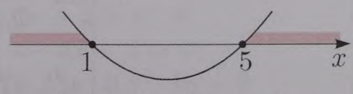
Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi	Piemēri
Vienādība	Divas algebriskas izteiksmes, kas savienotas ar vienādības zīmi.	$3a + 4b = m \cdot n$
Identitāte	**Vienādība, kas pareiza jebkurai mainīgā lieluma vērtībai no definīcijas apgabala.**	$\frac{(x+3)^2}{x^2 - 4} = \frac{x^2 + 6x + 9}{(x-2)(x+2)}$ $x \in \mathbb{R},\ x \neq 2,\ x \neq -2$

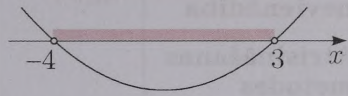
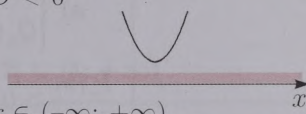
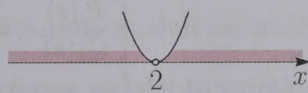
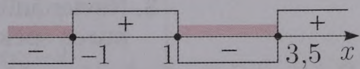
Vienādojums	**Vienādība, kas pareiza tikai ar noteiktām mainīgā lieluma (nezināmā) vērtībām.**	$x^2 = 5x - 6$ $x_1 = 2, \quad x_2 = 3$
Vienādojuma sakne	Skaitlis, kuru ievietojot vienādojumā nezināmā lieluma vietā iegūst pareizu skaitlisku vienādību.	$2x - 6 = 0$ $x = 3$
Ekvivalenti vienādojumi	**Divi vienādojumi, kuriem ir vienas un tās pašas saknes** (katra pirmā vienādojuma sakne apmierina otro vienādojumu, un katra otrā vienādojuma sakne apmierina pirmo vienādojumu).	$x^2 + 5 = 6x$ $x_1 = 1, \quad x_2 = 5$ un $x^2 - 6x + 5 = 0$ $x_1 = 1, \quad x_2 = 5$
Vienādojuma **ekvivalenti pārveidojumi**	Vienādojuma **pārveidojumi, kuru rezultātā iegūst dotajam vienādojumam ekvivalentu vienādojumu.** • Vienādojuma **abām pusēm pieskaita vienu un to pašu skaitli vai algebrisku izteiksmi**, kas nemaina vienādojuma definīcijas apgabalu. • Vienādojuma **abas puses reizina vai dala ar vienu un to pašu skaitli, kas nav nulle, vai arī ar algebrisku izteiksmi, kuras vērtība nav nulle** un kura nemaina vienādojuma definīcijas apgabalu.	
Vesels racionāls n-tās pakāpes algebrisks vienādojums ar vienu nezināmo	$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ $P_n(x) = 0$	
• **Lineārs vienādojums**	$ax + b = 0, \quad a \neq 0$ sakne $x = -\dfrac{b}{a}$	$3x + 12 = 0$ $x = -\dfrac{12}{3} = -4$
• **Kvadrātvienādojums**	$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \qquad (*)$ saknes $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ Ja $b = 2k$ (pāra skaitlis), tad $x_{1,2} = \dfrac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$.	$2x^2 + 7x - 4 = 0$ $x_{1,2} = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49 + 32}}{4}$ $x_1 = \dfrac{1}{2}, \quad x_2 = -4$
Kvadrātvienādojuma **diskriminants**	$D = b^2 - 4ac$ Ja $D > 0$, vienādojumam $(*)$ ir **divas dažādas reālas saknes**. Ja $D = 0$, vienādojumam $(*)$ ir **divas vienādas reālas saknes**. Ja $D < 0$, vienādojumam $(*)$ ir **divas kompleksi saistītas saknes**.	$2x^2 + 7x - 4 = 0$ $D = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) =$ $= 81$

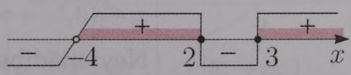
• **Reducēts kvadrātvienādojums**	$x^2 + px + q = 0$, saknes $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ $x_1 + x_2 = -p$; $x_1 \cdot x_2 = q$ (**Vjeta formulas**)	$x^2 - 6x + 5 = 0$ $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-5}$ $x_1 = 5$, $x_2 = 1$
• **Bikvadrātvienādojums**	$ax^4 + bx^2 + c = 0$, $a \neq 0$ Substitūcija: $t = x^2$, $t^2 = x^4$ $at^2 + bt + c = 0$ Saknes: t_1, t_2 $x_1 = \sqrt{t_1}$, $x_2 = -\sqrt{t_1}$, $x_3 = \sqrt{t_2}$, $x_4 = -\sqrt{t_2}$	$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ $t = x^2$ $t^2 - 13t + 36 = 0$ $t_1 = 9$, $t_2 = 4$ $x_1 = \sqrt{9} = 3$, $x_2 = -\sqrt{9} = -3$, $x_3 = \sqrt{4} = 2$, $x_4 = -\sqrt{4} = -2$
Dažu augstāku pakāpju vienādojumu atrisināšanas metodes		
① **Sadalīšana reizinātājos**	$P_n(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow P_n(x) = P_k(x) \cdot P_{n-k}(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow P_k(x) = 0$ vai $P_{n-k}(x) = 0$	$3x^3 - 5x^2 - 3x + 5 = 0$ $(3x^3 - 3x) - (5x^2 - 5) = 0$ $3x(x^2 - 1) - 5(x^2 - 1) = 0$ $(x^2 - 1)(3x - 5) = 0$ $\Rightarrow x^2 - 1 = 0$ vai $3x - 5 = 0$ $x^2 - 1 = 0$, $x^2 = 1 \Rightarrow$ $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ $3x - 5 = 0$, $3x = 5 \Rightarrow x_3 = \frac{5}{3}$
② Vienādojuma **pakāpes pazemināšana**, izmantojot Bezū teorēmu, ja ir zināma viena sakne	$P_n(x) = 0$, ja x_1 ir sakne $\Rightarrow$ $P_n(x) : (x - x_1) = P_{n-1}(x)$, $P_n(x) = (x - x_1) \cdot P_{n-1}(x) = 0 \Rightarrow$ $x - x_1 = 0$ vai $P_{n-1}(x) = 0$	$x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4 = 0$ viena sakne: $x_1 = 2$ $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4 \;\vert\; x - 2$ $-$ $x^4 - 2x^3$ $\quad$ $x^3 - 3x + 2$ $-3x^2 + 8x - 4$ $-$ $-3x^2 + 6x$ $2x - 4$ $-$ $2x - 4$ 0 $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4 = 0 \Leftrightarrow$ $(x - 2)(x^3 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow$ $x - 2 = 0$ vai $x^3 - 3x + 2 = 0$ $x^3 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow$ $x^3 - x - 2x + 2 = 0$ $x(x^2 - 1) - 2(x - 1) = 0$ $x(x - 1)(x + 1) - 2(x - 1) = 0$

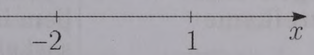
		$(x-1)(x(x+1)-2)=0 \Rightarrow$ $x-1=0$ vai $x(x+1)-2=0$ $x-1=0 \Rightarrow x_2=1$ $x^2+x-2=0 \Rightarrow x_3=-2,\ x_4=1$ Dotā vienādojuma saknes: $x_1=2,\ x_2=1,\ x_3=-2,\ x_4=1$
③ **Substitūcijas metode**	Ja $P_n(x)=0 \Leftrightarrow P_m(Q_k(x))=0$, tad **substitūcija**: $\boldsymbol{t=Q_k(x)}$; $P_m(t)=0 \Rightarrow t_1, t_2, \dots, t_m$ $Q_k(x)=t_i\ \ (i=1, 2, \dots, m)$, un $P_n(x)=0$ saknes: $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_k^{(i)}$	$(x^2+6x)^2+8x^2+48x-9=0 \Leftrightarrow$ $(x^2+6x)^2+8(x^2+6x)-9=0$ $\boldsymbol{t=x^2+6x}$ $t^2+8t-9=0,\ t_1=-9,\ t_2=1$ $x^2+6x=-9 \Rightarrow x_1=x_2=-3$ $x^2+6x=1 \Rightarrow x_3=-3+\sqrt{10}$, $x_4=-3-\sqrt{10}$
Daļveida racionāls vienādojums	Racionāls vienādojums, kas satur daļveida izteiksmes. Izpildot ekvivalentus pārveidojumus, iegūst: $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=0$	$\dfrac{x^2-2x+1}{x-3}+\dfrac{x+1}{3-x}-4=0$ $\dfrac{x^2-2x+1-(x+1)-4(x-3)}{x-3}=0$ $\dfrac{x^2-7x+12}{x-3}=0$
Dažas atrisināšanas metodes ① **Pārveidošana par veselu racionālu vienādojumu**	$\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=0 \Rightarrow \begin{cases} P_n(x)=0 \\ Q_m(x)\neq 0 \end{cases}$	$\dfrac{x^2-7x+12}{x-3}=0 \Rightarrow$ $\begin{cases} x^2-7x+12=0 \\ x-3\neq 0 \end{cases}$ $x^2-7x+12=0 \Rightarrow x_1=4$, $x_2=3$ (neatrodas vienādojuma definīcijas apgabalā) Atrisinājums: $x=4$
② **Substitūcijas metode**	Ja $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=0 \Leftrightarrow \dfrac{P(R_k(x))}{Q(R_k(x))}=0$, tad **substitūcija** $\boldsymbol{t=R_k(x)}$; tātad $\dfrac{P(t)}{Q(t)}=0 \Rightarrow t_1, t_2, \dots, t_s$ $R_k(x)=t_i\ \ (i=1, 2, 3, \dots, s)$, un $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=0$ saknes: $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_k^{(i)}$	$\dfrac{(x^2+x-3)^2+3x^2}{x\cdot(x^2+x-3)}-4=0$ $\dfrac{x^2+x-3}{x}+\dfrac{3x}{x^2+x-3}-4=0$ Substitūcija: $\dfrac{x^2+x-3}{x}=t$ $t+\dfrac{3}{t}=4,\ t^2-4t+3=0$, $t_1=1,\ t_2=3$ $\dfrac{x^2+x-3}{x}=1 \Rightarrow x_1=\sqrt{3}$, $x_2=-\sqrt{3};\ \dfrac{x^2+x-3}{x}=3 \Rightarrow$ $\Rightarrow x_3=3,\ x_4=-1$

2.4. Racionālas algebriskas nevienādības

Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi	Ilustrācija, piemēri
Algebriska nevienādība	Divas algebriskas izteiksmes, kas savienotas ar nevienādības zīmi.	$5x^2 + 4x < 5x - 2$ $\frac{2x+6}{3x-1} \geqslant \frac{1}{x+2}$
Nevienādības atrisinājumu kopa	Visas mainīgā lieluma vērtības, kuras ievietojot nevienādībā iegūst pareizu skaitlisku nevienādību.	$4x + 7 > 2x - 1$ Atrisinājumu kopa: $x \in (-4; +\infty)$
Ekvivalentas nevienādības	**Nevienādības, kuru atrisinājumu kopas ir vienādas (sakrīt).**	
Nevienādības ekvivalenti pārveidojumi	• Nevienādības **abām pusēm pieskaita vienu un to pašu skaitli vai algebrisku izteiksmi**, kas nemaina nevienādības definīcijas apgabalu.	$3x - 5 < 16 \Leftrightarrow$ $(3x - 5) + 5 < 16 + 5$ $3x < 21$
	• Nevienādības **abas puses reizina vai dala ar vienu un to pašu pozitīvu skaitli vai algebrisku izteiksmi, kura nemaina definīcijas apgabalu un kuras vērtības ir pozitīvas visā definīcijas apgabalā.**	$3x < 21 \mid :3 \Leftrightarrow x < 7$ $\frac{x+3}{x^2+1} > 2 \mid \cdot\ x^2+1>0 \Leftrightarrow$ $x + 3 > 2(x^2 + 1)$
	• Nevienādības abas puses reizina vai dala ar vienu un to pašu negatīvu skaitli vai tādu algebrisku izteiksmi, kura nemaina definīcijas apgabalu un kuras vērtības ir negatīvas visā definīcijas apgabalā, un maina nevienādības zīmi uz pretējo (no $<$ uz $>$ vai no $>$ uz $<$).	$-2x < 8 \mid :(-2) \Leftrightarrow x > -4$
Vesela racionāla nevienādība	$P_n(x) > 0$, $P_n(x) \geqslant 0$, $P_n(x) < 0$, $P_n(x) \leqslant 0$, kur $P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$	$2x^3 - 7x^2 - 2x + 7 \leqslant 0$
Lineāra nevienādība	$ax + b > 0$, $ax + b \geqslant 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \leqslant 0$	$2x + 6 > 0 \Leftrightarrow 2x > -6$, $x > -3$, $x \in (-3; +\infty)$
Kvadrātnevienādība	$ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ Reizinot ar -1 un mainot nevienādības zīmi, katru kvadrātnevienādību var pārveidot tā, lai $a > 0$.	$x^2 - 6x + 5 \geqslant 0$ $x_1 = 1$, $x_2 = 5$  $x \in (-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$

Kvadrātnevienādība (*turpinājums*)	**Atrisinājumu kopa atkarīga no diskriminanta $D = b^2 - 4ac$ zīmes.** Atrisinājumu nosaka, izmantojot kvadrāttrinoma $ax^2 + bx + c$ grafika (parabolas $y = ax^2 + bx + c$) novietojumu attiecībā pret Ox asi.	$x^2 + x - 12 < 0$ $x_1 = -4, \quad x_2 = 3$  $x \in (-4; 3)$
		$2x^2 - 10x + 15 > 0$ $D < 0$  $x \in (-\infty; +\infty)$
		$x^2 - 4x + 4 > 0 \Leftrightarrow$ $(x - 2)^2 > 0$  $\boldsymbol{x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)}$
Intervālu metode augstākas pakāpes nevienādību $\boldsymbol{P_n(x) > 0}$, $\boldsymbol{P_n(x) \geqslant 0}$, $\boldsymbol{P_n(x) < 0}$, $\boldsymbol{P_n(x) \leqslant 0}$ atrisināšanai	**Metodi izmanto, ja var atrast polinoma $P_n(x)$ visas reālās saknes un sadalīt polinomu reālos reizinātājos.** Polinoma sadalījums reālos reizinātājos satur tikai binomus $x - a$ un (vai) kvadrāttrinomus $x^2 + px + q$ ar negatīvu diskriminantu. **1.** Atrod polinoma reālās saknes; tās sadala koordinātu taisni vairākos intervālos. **2.** Nosakot polinoma reizinātāju zīmes katrā intervālā, atrod visa polinoma $P_n(x)$ zīmi attiecīgajā intervālā. **3.** Nevienādības atrisinājums ir visu to intervālu apvienojums, kuros spēkā aplūkotā nevienādība.	
P i e m ē r s	$\boldsymbol{2x^3 - 7x^2 - 2x + 7 \leqslant 0}$ $P_3(x) = 2x^3 - 7x^2 - 2x + 7 = (2x^3 - 2x) - (7x^2 - 7) =$ $= 2x(x^2 - 1) - 7(x^2 - 1) = (x^2 - 1)(2x - 7) = \boldsymbol{2(x - 1)(x + 1)(x - 3{,}5)}$ Polinoma saknes $x_1 = -1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 3{,}5$ atzīmē uz koordinātu taisnes un iegūst 4 intervālus: $(-\infty; -1]$, $[-1; 1]$, $[1; 3{,}5]$, $[3{,}5; +\infty)$  $x \in (-\infty; -1) \Rightarrow P_3(x)...[- \cdot - \cdot -] < 0$ $x \in (-1; 1) \Rightarrow P_3(x)...[- \cdot + \cdot -] > 0$ $x \in (1; 3{,}5) \Rightarrow P_3(x)...[+ \cdot + \cdot -] < 0$ $x \in (3{,}5; +\infty) \Rightarrow P_3(x)...[+ \cdot + \cdot +] > 0$ Nevienādības atrisinājums: $\boldsymbol{(-\infty; -1] \cup [1; 3{,}5]}$	

Daļveida racionāla nevienādība	$\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0,\ \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} \geqslant 0,\ \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} < 0,\ \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} \leqslant 0$	
Atrisināšanas metodes ① **Nevienādību sistēmu metode**	$\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0 \Leftrightarrow$ a) $\begin{cases} P_n(x) > 0 \\ Q_m(x) > 0 \end{cases}$ vai b) $\begin{cases} P_n(x) < 0 \\ Q_m(x) < 0 \end{cases}$ $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} \geqslant 0 \Leftrightarrow$ a) $\begin{cases} P_n(x) \geqslant 0 \\ Q_m(x) > 0 \end{cases}$ vai b) $\begin{cases} P_n(x) \leqslant 0 \\ Q_m(x) < 0 \end{cases}$ $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} < 0 \Leftrightarrow$ a) $\begin{cases} P_n(x) > 0 \\ Q_m(x) < 0 \end{cases}$ vai b) $\begin{cases} P_n(x) < 0 \\ Q_m(x) > 0 \end{cases}$ $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} \leqslant 0 \Leftrightarrow$ a) $\begin{cases} P_n(x) \geqslant 0 \\ Q_m(x) < 0 \end{cases}$ vai b) $\begin{cases} P_n(x) \leqslant 0 \\ Q_m(x) > 0 \end{cases}$ Katras sistēmas atrisinājums ir abu nevienādību atrisinājumu kopu šķēlums. **Daļveida nevienādības atrisinājums ir sistēmu atrisinājumu kopu apvienojums.**	$\mathbf{\dfrac{x^2 - 5x + 6}{2x + 8} < 0}$ (1) a) $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0 \\ 2x + 8 < 0 \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} x < 2 \text{ vai } x > 3 \\ x < -4 \end{cases} \Rightarrow$ $x \in (-\infty; -4)$ b) $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 < 0 \\ 2x + 8 > 0 \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} 2 < x < 3 \\ x > -4 \end{cases} \Rightarrow$ $x \in (2; 3)$ Nevienādības (1) atrisinājums: $\mathbf{(-\infty; -4) \cup (2; 3)}$
② **Intervālu metode**	**1.** Atrod polinomu $P_n(x)$ un $Q_m(x)$ reālās saknes, atzīmē tās uz koordinātu taisnes un sadala polinomus reizinātājos. **2.** Nosaka polinomu reizinātāju zīmes katrā intervālā un atrod $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ zīmi attiecīgajā intervālā. **3.** Nevienādības atrisinājums ir visu to intervālu apvienojums, kuros spēkā aplūkotā nevienādība.	
Piemērs	$\mathbf{\dfrac{x^2 - 5x + 6}{2x + 8} \geqslant 0}$ (2) $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 3$ $2x + 8 = 0 \Rightarrow x_3 = -4$ $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{2x + 8} \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-2)(x-3)}{2(x+4)} \geqslant 0$	

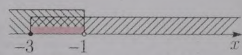
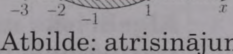
P i e m ē r s (*turpinājums*)	$x \in (-\infty; -4) \Rightarrow \dfrac{P(x)}{Q(x)} ... \left[\dfrac{-\cdot-}{-}\right] < 0$ $x \in (-4; 2] \Rightarrow \dfrac{P(x)}{Q(x)} ... \left[\dfrac{-\cdot-}{+}\right] > 0$ $x \in [2; 3] \Rightarrow \dfrac{P(x)}{Q(x)} ... \left[\dfrac{+\cdot-}{+}\right] < 0$ $x \in [3; +\infty) \Rightarrow \dfrac{P(x)}{Q(x)} ... \left[\dfrac{+\cdot+}{+}\right] > 0$ Nevienādības (2) atrisinājums: $(-4; 2] \cup [3; +\infty)$
Vienādojumi un nevienādības, kas satur moduļus	Atrisinot parasti izmanto intervālu metodi un reālā skaitļa moduļa definīciju. Vienādojumu (nevienādību) pārveido par vairākām nevienādību sistēmām, kuru izteiksmēs nav moduļa zīmes. **Atrisina pēc šāda algoritma.** **1.** Atrod nezināmā lieluma vērtības, ar kurām moduli saturošās izteiksmes ir vienādas ar nulli. **2.** Šos skaitļus atzīmē uz koordinātu taisnes, sadalot to vairākos intervālos. **3.** Katrā intervālā nosaka katras moduli saturošās izteiksmes zīmi. Ja kādas izteiksmes vērtība ir nenegatīva, tad, atmetot moduļa zīmi, pirms šīs izteiksmes nemaina zīmi; ja izteiksmes vērtība ir negatīva, – maina zīmi. **4.** Sastāda un atrisina sistēmas, kurās ietvertas attiecīgo intervālu noteicošās nevienādības un no moduļa zīmes atbrīvotais vienādojums (nevienādība). **5.** Dotā vienādojuma (nevienādības) **atrisinājums ir visu sistēmu atrisinājumu kopu apvienojums**.
1. p i e m ē r s	$\mathbf{\lvert x-1\rvert + \lvert x+2\rvert - 2x = 1}$ $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$  $\mathbf{x \in (-\infty; -2)}$ $x - 1 < 0 \Rightarrow \lvert x-1\rvert = -(x-1)$ $x + 2 < 0 \Rightarrow \lvert x+2\rvert = -(x+2)$ $\begin{cases} x < -2 \\ -(x-1)-(x+2)-2x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x = -0,5 \end{cases}$ $-0,5 \notin (-\infty; -2)$ $\mathbf{x \in [-2; 1)}$ $x - 1 < 0 \Rightarrow \lvert x-1\rvert = -(x-1)$ $x + 2 \geqslant 0 \Rightarrow \lvert x+2\rvert = x+2$ $\begin{cases} -2 \leqslant x < 1 \\ -(x-1)+(x+2)-2x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leqslant x < 1 \\ x = 1 \end{cases}$

1. piemērs (*turpinājums*)	$x \in [1; +\infty)$ $x - 1 \geqslant 0 \Rightarrow \lvert x - 1\rvert = x - 1$ $x + 2 > 0 \Rightarrow \lvert x + 2\rvert = x + 2$ $\begin{cases} 1 \leqslant x < +\infty \\ x - 1 + x + 2 - 2x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leqslant x < +\infty \\ 1 = 1 \end{cases}$ Atbilde: $x \in [1; +\infty)$
2. piemērs	$\lvert 2x - 4\rvert - x < 10$ $2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ 1) $x \in (-\infty; 2)$, $2x - 4 < 0 \Rightarrow \lvert 2x - 4\rvert = -(2x - 4)$ $\begin{cases} x < 2 \\ -(2x - 4) - x < 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > -2 \end{cases} \Rightarrow x \in (-2; 2)$ 2) $x \in [2; +\infty)$, $2x - 4 \geqslant 0 \Rightarrow \lvert 2x - 4\rvert = 2x - 4$ $\begin{cases} x \geqslant 2 \\ 2x - 4 - x < 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant 2 \\ x < 14 \end{cases} \Rightarrow x \in [2;14)$ Atbilde: $x \in (-2; 2) \cup [2; 14) = \mathbf{(-2; 14)}$

2.5. Iracionālas algebriskas izteiksmes, vienādojumi, nevienādības

Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi	Ilustrācija, piemēri
Iracionāla algebriska izteiksme	Algebriska izteiksme, kurā ar mainīgajiem lielumiem un skaitļiem ir izpildītas šādas darbības: saskaitīšana, atņemšana, reizināšana, dalīšana, kāpināšana un saknes atrašana (kāpināšana ar daļveida kāpinātāju).	$\sqrt{x-2} + \sqrt[3]{x} + 4x^2$, $\dfrac{a + \sqrt{b}}{\sqrt[3]{a+b}}$, $\dfrac{x^2y + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$, $(5 + 2x)^{\frac{1}{2}}$
Iracionālas algebriskas izteiksmes **definīcijas apgabals**	Visu mainīgā lieluma vērtību kopa, ar kurām **pāra pakāpes saknes zemsaknes izteiksme ir nenegatīva un daļas saucējs nav vienāds ar nulli**.	$\dfrac{\sqrt{x-2} + \sqrt[3]{x}}{x^2 - 5x + 6}$, $\begin{cases} x - 2 \geqslant 0 \\ x^2 - 5x + 6 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant 2 \\ x \neq 2;\ x \neq 3 \end{cases}$ Definīcijas apgabals: $\mathbf{(2; 3) \cup (3; +\infty)}$
Iracionāls vienādojums	**Vienādojums, kurā nezināmais lieluma atrodas zem saknes zīmes.**	$\sqrt{x-9} = \sqrt{5-x} - 2$ $\sqrt[3]{2x+6} - 2x = 0$

Iracionāla vienādojuma neekvivalents pārveidojums	**Kvadrātsaknes saturoša iracionāla vienādojuma labās un kreisās puses kāpināšana kvadrātā**. Atbrīvojoties no kvadrātsaknēm, šāda pārveidojuma rezultātā var iegūt racionālu vienādojumu, kura visas saknes var nebūt dotā iracionālā vienādojuma atrisinājumi.	$\sqrt{2x+3}=x$, $x \geqslant -1{,}5$ $\left(\sqrt{2x+3}\right)^2 = x^2$, $x^2-2x-3=0$ $x_1 = 3 \in [-1{,}5;\ +\infty)$, $x_2 = -1 \in [-1{,}5,\ +\infty)$ Pārbaude: $\sqrt{2\cdot 3+3} \stackrel{?}{=} 3;\ 3=3$
Liekās saknes	Kāpināšanas rezultātā iegūtā racionālā vienādojuma **saknes, kuras neapmierina iracionālo vienādojumu**.	$\sqrt{2\cdot(-1)+3} \stackrel{?}{=} -1,\ 1 \neq -1$ $x_2 = -1$ – liekā sakne Atbilde: $x = 3$
Iracionāla vienādojuma atrisināšanas metode (ja vienādojums satur tikai kvadrātsaknes)	**1.** Atrod vienādojuma definīcijas apgabalu. **2.** Kāpinot pārveido par racionālu vienādojumu. **3.** Atrisina racionālo vienādojumu. **4.** Nosaka un atmet liekās saknes (racionālā vienādojuma saknes, kuras nepieder definīcijas apgabalam vai neapmierina iracionālo vienādojumu).	$\sqrt{2x+4}+\sqrt{7-x}=3$ $\begin{cases} 2x+4 \geqslant 0 \\ 7-x \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant -2 \\ x \leqslant 7 \end{cases}$ $x \in [-2;\ 7]$ $\left(\sqrt{2x+4}\right)^2 = \left(3-\sqrt{7-x}\right)^2$ $2x+4 = 9-6\sqrt{7-x}+7-x$ $x-4 = -2\sqrt{7-x}$ $(x-4)^2 = \left(-2\sqrt{7-x}\right)^2$ $x^2-4x-12=0$ $x_1 = 6 \in [-2;\ 7]$ $x_2 = -2 \in [-2;\ 7]$ Pārbaude: $x_1 = 6$ $\sqrt{2\cdot 6+4}+\sqrt{7-6} \stackrel{?}{=} 3$ $4+1 \neq 3$ $x_1 = 6$ – liekā sakne $x_2 = -2$ $\sqrt{2\cdot(-2)+4}+\sqrt{7-(-2)} \stackrel{?}{=} 3$ $0+3=3$ Atbilde: $x = -2$
	P i e z ī m e Jāievēro, ka **iracionālā vienādojumā kvadrātsaknes vērtības ir nenegatīvas** (saskaņā ar aritmētiskās saknes definīciju).	Vienādojumam $\sqrt{3x+6}+2=0$ jeb $\sqrt{3x+6}=-2$ **nav atrisinājuma**, jo saskaņā ar aritmētiskās saknes definīciju $\sqrt{3x+6} \geqslant 0$
Iracionāla algebriska nevienādība	**Algebriska nevienādība, kurā nezināmais lielums atrodas zem saknes zīmes.**	$\sqrt{2x-3} < 2-x$ $\sqrt{x^2-4} \geqslant \sqrt{4x-6}$

Iracionālas nevienādības atrisināšanas metode	**1.** Nosaka definīcijas apgabalu, ievērojot, ka pāra pakāpes saknes zemsaknes izteiksme un aritmētiskās saknes vērtība ir nenegatīva. **2.** Pārveido par racionālu nevienādību, ievērojot īpašību: ja $0 < A < B$, tad $A^2 < B^2$. **3.** Atrisina nevienādību sistēmu, kurā ietverta iegūtā racionālā nevienādība un definīcijas apgabalu noteicošās nevienādības.	$\boldsymbol{\sqrt{3x-1} < 2} \Rightarrow \begin{cases} 3x-1 \geqslant 0 \\ \left(\sqrt{3x-1}\right)^2 < 2^2 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x-1 \geqslant 0 \\ 3x-1 < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant \frac{1}{3} \\ x < \frac{5}{3} \end{cases}$ Atbilde: atrisinājumu kopa $\boldsymbol{\left[\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)}$
	4. Ja no nevienādības izriet, ka pāra pakāpes sakne ir mazāka par negatīvu skaitli, tad nevienādībai nav atrisinājuma.	$\boldsymbol{\sqrt{2x^2+3}+1 < 0} \Rightarrow \sqrt{2x^2+3} < -1$ **Nav atrisinājuma**, jo $\sqrt{2x^2+3} > 0$
	5. Ja no nevienādības izriet, ka pāra pakāpes sakne ir lielāka par negatīvu skaitli, tad nevienādība ir pareiza ar visām nezināmā vērtībām no definīcijas apgabala un atrisinājumu kopa ir nevienādības definīcijas apgabals.	$\boldsymbol{\sqrt{x^2-4x} \geqslant -3}$ Tā kā $\sqrt{x^2-4x} \geqslant 0$, tad nevienādība ir pareiza visām x vērtībām no definīcijas apgabala, ko atrod, atrisinot nevienādību $x^2-4x \geqslant 0$. Atbilde: atrisinājumu kopa $\boldsymbol{(-\infty; 0] \cup [4; +\infty)}$
	6. Ja nevienādībā pāra pakāpes sakne ir lielāka (mazāka) par izteiksmi, kas satur nezināmo lielumu, tad jāaplūko divi gadījumi – kad šī izteiksme ir pozitīva un kad – negatīva. Nevienādības atrisinājumu kopa ir abu gadījumu atrisinājumu apvienojums.	$\boldsymbol{\sqrt{x+3} > 1+x}$ Jāaplūko divi gadījumi. 1) Ja $\mathbf{1+x<0}$, tad nevienādība ir pareiza visiem x no definīcijas apgabala; tātad $\begin{cases} 1+x<0 \\ x+3 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x \geqslant -3 \end{cases}$ $x \in [-3; -1)$  2) Ja $\mathbf{1+x \geqslant 0}$, tad nevienādības abas puses var kāpināt kvadrātā; tātad $\begin{cases} 1+x \geqslant 0 \\ \left(\sqrt{x+3}\right)^2 > (1+x)^2 \\ x+3 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} x \geqslant -1 \\ x^2+x-2<0, \quad x_1=-2;\ x_2=1 \\ x \geqslant -3 \end{cases}$  $x \in [-1; 1)$ Atbilde: atrisinājumu kopa $[-3; -1) \cup [-1; 1) = \boldsymbol{[-3; 1)}$

3. LINEĀRU VIENĀDOJUMU SISTĒMAS, DETERMINANTI, MATRICAS

3.1. Lineāru vienādojumu sistēma

Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi	Piemēri
Lineāru vienādojumu sistēma	$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – **nezināmie** $b_1, b_2, \ldots, b_m$ – **brīvie locekļi** a_{ij} – **koeficienti** $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$	$\begin{cases} x - 2y + z = -4 \\ 2x + 3y + 4z = 8 \\ 4x + 5y - 2z = 4 \end{cases}$ x, y, z – nezināmie
Nehomogēna sistēma	Vismaz viens brīvais loceklis nav nulle.	
Homogēna sistēma	Visi brīvie locekļi vienādi ar nulli: $b_i = 0\ (1 \leqslant i \leqslant m)$	$\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \end{cases}$
Homogēnas sistēmas **triviālais atrisinājums**	Atrisinājums $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ Atrisinājumu kopas pieraksts: **(0; 0; ...; 0)**	
Saderīga sistēma	Sistēmai eksistē atrisinājums.	
Nesaderīga sistēma	Sistēmai neeksistē atrisinājums.	
Sistēmas pamatīpašība	Ja sistēmas kādam vienādojumam (V_i) pieskaita citu šīs sistēmas vienādojumu, kas reizināts ar jebkuru no nulles atšķirīgu skaitli, tad iegūst dotajai sistēmai **ekvivalentu sistēmu**.	$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - 7y = -3 \end{cases}$ $\Updownarrow\ -2 \cdot V_1 + V_2$ $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ -13y = -13 \end{cases}$
Atrisināšanas metodes ① **Ievietošanas metode**	No kāda sistēmas vienādojuma **izsaka vienu nezināmo lielumu un iegūto izteiksmi ievieto pārējos vienādojumos**. Ja sistēmai ir vairāk nekā divi vienādojumi, tad šo pārveidojumu atkārto, kamēr iegūst vienādojumu ar vienu nezināmo.	$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - 7y = -3 \end{cases}$ $x = 5 - 3y$ $2(5 - 3y) - 7y = -3 \Rightarrow$ $y = 1$ $x = 5 - 3 \cdot 1 = 2$ Atbilde: (2; 1)

② **Gausa metode** (vienādojumu saskaitīšanas metode)	Izmantojot sistēmas pamatīpašību, **doto sistēmu pārveido par "trijstūrveida" sistēmu**, t. i., par tādu sistēmu, kuras pēdējā vienādojumā ir tikai viens nezināmais, priekšpēdējā vienādojumā – divi nezināmie lielumi utt.	$\begin{cases} x+3y=5 \\ 2x-7y=-3 \end{cases}$ $\Updownarrow \; -2\cdot V_1+V_2$ $\begin{cases} x+3y=5 \\ -13y=-13 \end{cases}$ $\begin{cases} x+3y=5 \\ y=1 \end{cases}$ $x=5-3y=5-3=2$
	Gausa metodi var izmantot arī tad, ja sistēmas vienādojumu skaits nav vienāds ar nezināmo skaitu.	$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 3x+y-13z=0 \end{cases}$ $\Updownarrow \; -3V_1+V_2$ $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ -5y-10z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ y-2z=0 \end{cases}$ $y=2z,\ x+2\cdot 2z-z=0$ $x=-3z$ Apzīmē: $z=C$ Atbilde: $(-3C;\ 2C;\ C)$, kur $C\in\mathbb{Z}$
③ Atrisināšana **ar Krāmera formulām**	**Ja sistēmas vienādojumu skaits ir vienāds ar nezināmo lielumu skaitu**, tad atrisinājumu var atrast, izmantojot determinantus, pēc formulām $x_i=\dfrac{D_i}{D}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, kur D – sistēmas koeficientu determinants, D_i – palīgterminanti (sīkākus paskaidrojumus sk. 37. lpp.).	
④ Atrisināšana, **izmantojot inverso matricu**	Sistēmu uzraksta matricu reizinājumu formā. **Ja** $n=m$ **un sistēmas determinants nav nulle**, tad atrisinājumu atrod kā sistēmas koeficientu inversās matricas reizinājumu ar brīvo locekļu matricu (sk. 42. lpp.).	

3.2. Determinanti

Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi	Piemēri
2. kārtas determinants	$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$	$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - (-2) \cdot 5 = 22$
3. kārtas determinants	$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$ $= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$ $- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$	$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$ $= 1 \cdot 4 \cdot 5 + (-2) \cdot 1 \cdot 3 + 5 \cdot 0 \cdot 0 -$ $- 0 \cdot 4 \cdot 3 - 0 \cdot 1 \cdot 1 - 5 \cdot (-2) \cdot 5 =$ $= 64$
Determinanta īpašības	• **Determinanta vērtība nemainās, ja maina vietām rindas ar kolonnām (transponē).**	$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix}$
	• **Determinanta vērtība nemainās, ja kādas rindas (kolonnas) elementiem pieskaita citas rindas (kolonnas) elementus, kas reizināti ar brīvi izraudzītu skaitli.**	$\begin{vmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \end{vmatrix} \underset{R_1 + 3 \cdot R_2}{=}$ $= \begin{vmatrix} -3+3\cdot1 & 3+3\cdot0 & 1+3\cdot2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \end{vmatrix}$
	• **Apmainot vietām divas rindas (kolonnas), mainās determinanta zīme, bet nemainās tā absolūtā vērtība.**	$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}$
	• **Ja visiem kādas rindas (kolonnas) elementiem ir kopīgs reizinātājs, tad to var iznest pirms determinanta zīmes.**	$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 7 \\ 8 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 7 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$
	• **Ja kādas rindas (kolonnas) visi elementi ir nulles, tad determinants vienāds ar nulli.**	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0$
	• **Ja divas rindas (kolonnas) ir vienādas, tad determinants vienāds ar nulli.**	$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

Determinanta īpašības *(turpinājums)*	• **Ja kādas rindas (kolonnas) visi elementi ir proporcionāli citas rindas (kolonnas) elementiem, tad determinants vienāds ar nulli.** • Ja kādas rindas (kolonnas) katrs elements ir izteikts kā divu saskaitāmo summa, tad **determinants vienāds ar divu determinantu summu**. Pirmajā determinantā attiecīgās rindas (kolonnas) elementi ir pirmie saskaitāmie, bet otrajā determinantā – otrie saskaitāmie. Pārējās abu determinantu rindas (kolonnas) vienādas ar dotā determinanta rindām (kolonnām).	$\begin{vmatrix}2&5&-1\\6&15&-3\\7&2&4\end{vmatrix}=0$ $\begin{vmatrix}1&8&7\\2+3&1+5&6+4\\5&3&2\end{vmatrix}=$ $=\begin{vmatrix}1&8&7\\2&1&6\\5&3&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&8&7\\3&5&4\\5&3&2\end{vmatrix}$
Determinanta minors	M_{ij} Determinants, ko iegūst, ja **dotajā determinantā svītro i-to rindu un j-to kolonnu**. 3. kārtas determinantam $1\leqslant i\leqslant 3,\ 1\leqslant j\leqslant 3.$	$\begin{vmatrix}3&2&1\\4&5&6\\-1&0&2\end{vmatrix}$ $M_{23}=\begin{vmatrix}3&2\\-1&0\end{vmatrix}$
Elementa a_{ij} **adjunkts (algebriskais papildinājums)**	$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$	$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}$ $A_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=M_{31}$
3. kārtas determinanta izvirzījums pēc i-tās rindas elementiem	$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}$ $1\leqslant i\leqslant 3$	$\begin{vmatrix}0&3&1\\4&5&2\\1&5&2\end{vmatrix}=$
3. kārtas determinanta izvirzījums pēc j-tās kolonnas elementiem	$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}$ $1\leqslant j\leqslant 3$	$=0\cdot A_{11}+3\cdot A_{12}+1\cdot A_{13}=$ $=3\cdot(-1)^{1+2}M_{12}+$ $+(-1)^{1+3}M_{13}=$ $=-3\cdot\begin{vmatrix}4&2\\1&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}4&5\\1&5\end{vmatrix}=$ $=-3\cdot 6+15=-3$
4. kārtas determinants	$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}$ Var definēt: $D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14}$	$\begin{vmatrix}3&0&1&5\\2&5&0&1\\0&1&2&3\\2&4&1&0\end{vmatrix}=3\cdot A_{11}+$ $+0\cdot A_{12}+1\cdot A_{13}+5\cdot A_{14}=$ $=3\cdot M_{11}-0\cdot M_{12}+$ $+1\cdot M_{13}-5\cdot M_{14}=$

4. kārtas determinants (*turpinājums*)	Var pierādīt, ka $D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + a_{i4}A_{i4}$ $1 \leqslant i \leqslant 4$ $D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} + a_{4j}A_{4j}$ $1 \leqslant j \leqslant 4$ $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ – 3. kārtas determinants	$= 3\cdot\begin{vmatrix}5&0&1\\1&2&3\\4&1&0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}2&5&1\\0&1&3\\2&4&0\end{vmatrix} -$ $-5\cdot\begin{vmatrix}2&5&0\\0&1&2\\2&4&1\end{vmatrix} =$ $= 3\cdot(-22) + 4 - 5\cdot 6 =$ $= -92$
***n*-tās kārtas determinants**	$D = \begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{vmatrix}$ $\boldsymbol{D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}}$, kur $\boldsymbol{A_{1j} = (-1)^{1+j}M_{1j}}$ – $(n-1)$-kārtas determinants $(1 \leqslant j \leqslant n)$ (Analogi izvirza pēc jebkuras citas rindas vai kolonnas elementiem.)	
Lineāru vienādojumu sistēmas atrisināšana, izmantojot determinantus (Krāmera formulas)	$\begin{cases}a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1\\a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2\\a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3\end{cases}$ $\boldsymbol{x = \frac{D_1}{D},\ y = \frac{D_2}{D},\ z = \frac{D_3}{D}}$, kur $D = \begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$ $D_1 = \begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$ $D_2 = \begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix}$ $D_3 = \begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix}$ Analogi atrisina sistēmu, ja nezināmo un vienādojumu skaits ir lielāks nekā 3.	$\begin{cases}2x - y + 3z = -6\\3x + 4y + 2z = 7\\x + 2y + z = 3\end{cases}$ $D = \begin{vmatrix}2&-1&3\\3&4&2\\1&2&1\end{vmatrix} = 7$ $D_1 = \begin{vmatrix}-6&-1&3\\7&4&2\\3&2&1\end{vmatrix} = 7$ $D_2 = \begin{vmatrix}2&-6&3\\3&7&2\\1&3&1\end{vmatrix} = 14$ $D_3 = \begin{vmatrix}2&-1&-6\\3&4&7\\1&2&3\end{vmatrix} = -14$ $x = \frac{7}{7} = \mathbf{1},\ y = \frac{14}{7} = \mathbf{2},$ $z = \frac{-14}{7} = \mathbf{-2}$

3.3. Matricas

Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi	Piemēri
Matrica	$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ Taisnstūrveida **tabula**, kurā skaitļi (matricas elementi) sakārtoti m rindās un n kolonnās. Apzīmē ar alfabēta lielajiem burtiem A, B, C, X, Y. **a_{ij} – matricas A elements, kas atrodas i-ā rindā un j-ā kolonnā** $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$.	$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
Kolonnas matrica	Matrica sastāv no vienas kolonnas: $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$
Rindas matrica	Matrica sastāv no vienas rindas: $(a_{11}\ \ a_{12} \ \dots \ \ a_{1n})$	$B = (5\ 4\ 0\ {-2})$
Kvadrātiska matrica	**Rindu skaits vienāds ar kolonnu skaitu** $(m = n)$.	$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
Kvadrātiskai matricai A **atbilstošais determinants**	$\det A = D$ (sk. 3.2.)	$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 7$
Nulles matrica	$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, $\det O = 0$	
Vienības matrica	$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, $\det E = 1$	

Trijstūrveida matrica	$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ vai $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ $\det A = a_{11} \cdot a_{12} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$	
Diagonālmatrica	$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ $\det A = a_{11} \cdot a_{12} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$	
Darbības ar matricām • **Matricu saskaitīšana (atņemšana)**	$\boldsymbol{A \pm B = C}$ Matricām A, B, C ir vienāds rindu skaits un vienāds kolonnu skaits. **Matricas C elementi ir matricu A un B atbilstošo elementu summa (starpība):** $\boldsymbol{c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}}$ $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$ Īpašības. $A + B = B + A,$ $(A + B) + C = A + (B + C),$ $A + O = A$	$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 3 & 9 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$
• **Matricas reizināšana ar skaitli**	$\boldsymbol{\lambda \cdot A = B}$ **Matricas B elementi ir matricas A atbilstošo elementu reizinājums ar skaitli λ:** $\boldsymbol{b_{ij} = \lambda a_{ij}}$ $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$ Īpašības. $1 \cdot A = A$ $\lambda_1(\lambda_2 \cdot A) = (\lambda_1\lambda_2)A,$ $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B,$ $(\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A$	$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 10 \\ 8 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$
• **Matricu reizināšana**	$\boldsymbol{A \cdot B = C}$ **Reizināšana ir definēta, ja matricas A kolonnu skaits ir vienāds ar matricas B rindu skaitu. Matricas C rindu skaits ir vienāds ar matricas A rindu skaitu, bet kolonnu skaits ir vienāds ar matricas B kolonnu skaitu.**	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 4 & 3 \\ 7 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 24 & 13 & 14 & 13 \\ 39 & 32 & 10 & 8 \end{pmatrix}$

Matricu reizināšana (*turpinājums*)	Matricas C elementus atrod pēc formulas: $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$ Īpašības. $A \cdot E = E \cdot A = A,$ $A \cdot O = O \cdot A = O,$ $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C),$ $\lambda(A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B),$ $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C,$ $D \cdot (A + B) = D \cdot A + D \cdot B$ Piezīme. Vispārīgā gadījumā $A \cdot B \neq B \cdot A$. Taču, **ja $A \cdot B = B \cdot A$, tad matricas A un B sauc par komutatīvām matricām**.	Piemēram, $c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} =$ $= 4 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 5 \cdot 2 = \mathbf{10}$
Matricas transponēšana	Pārveidojums, kuru izpildot **matricas rindas aizvieto ar šīs matricas kolonnām**. Matricas A transponētās matricas apzīmējums: A^T. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ Īpašības. $(A^T)^T = A,$ $(\lambda A)^T = \lambda A^T,$ $(A + B)^T = A^T + B^T,$ $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$	$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \\ 1 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $A^T = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 & 1 \\ 7 & 1 & 6 & 8 \\ 3 & 4 & 0 & 9 \end{pmatrix}$
Simetriska matrica	**Matrica, kura ir vienāda ar savu transponēto matricu.** $A = A^T \Rightarrow a_{ij} = a_{ji}$	
Ortogonāla matrica	**Matrica, kuras reizinājums ar savu transponēto matricu ir vienības matrica.** $A \cdot A^T = E$	
Singulāra matrica	**Kvadrātiska matrica, kuras determinants ir vienāds ar nulli:** $\det A = 0$	

Nesingulāra matrica	**Kvadrātiska matrica, kuras determinants nav vienāds ar nulli:** $\det A \neq 0$	
Inversā matrica	Nesingulāras matricas A inversā matrica ir **matrica A^{-1}, kuras reizinājums ar A ir vienības matrica**: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ Īpašības. $(A^{-1})^{-1} = A,$ $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1},$ $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (1) $\det A = 2$ $A_{11} = 6, \quad A_{12} = -2, \quad A_{13} = 3,$ $A_{21} = -4, \quad A_{22} = 2, \quad A_{23} = -2,$ $A_{31} = 4, \quad A_{32} = -2, \quad A_{33} = 3$
Inversās matricas atrašana	$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$ kur A_{ij} – elementa a_{ij} adjunkts (sk. 36. lpp.).	$A^{-1} = \dfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -4 & 4 \\ -2 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1{,}5 & -1 & 1{,}5 \end{pmatrix}$ (2)
Matricas A rangs	$r = \text{rang } A$ jeb $r(A)$ **Augstākā no nulles atšķirīgā matricas A minora kārta** (sk. 36. lpp.).	$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \overrightarrow{R_1 - 4R_2}$ $\to \begin{pmatrix} 0 & -10 & -20 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \overrightarrow{K_2 - 3K_1} \; K_3 - 5K_1$ $\to \begin{pmatrix} 0 & -10 & -20 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overrightarrow{K_2 : (-10)} \; K_3 : (-20)$ $\to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overrightarrow{K_3 - K_2}$ $\to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2,$ jo 2. kārtas determinants – minors $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$
Matricas elementārie pārveidojumi	**Pārveidojumi, kas nemaina matricas rangu.** • Matricas divu rindu (kolonnu) mainīšana vietām. • Matricas rindas (kolonnas) reizināšana ar skaitli, kas nav vienāds ar nulli. • Matricas rindas (kolonnas) reizināšana ar skaitli, kas nav nulle, un pieskaitīšana citai rindai (kolonnai).	

Lineāru vienādojumu sistēmas pieraksts matricu formā	$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow \boldsymbol{A \cdot X = B},$ kur $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – sistēmas koeficientu matrica $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ – nezināmo lielumu matrica $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ – brīvo locekļu matrica	$\begin{cases} x + 2y \quad = 1 \\ \quad 3y + 2z = 0 \\ -x \quad + 2z = 1 \end{cases}$ $\Downarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Tā kā (sk. 41. lpp. (1) un (2)) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1{,}5 & -1 & 1{,}5 \end{pmatrix}$ tad $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1{,}5 & -1 & 1{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \quad - 1 \cdot 1 \\ 1{,}5 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \quad + 1{,}5 \cdot 1 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\boldsymbol{x = 5,\quad y = -2,\quad z = 3}$
Lineāru vienādojumu sistēmas atrisināšana, izmantojot inverso matricu	$AX = B \;\Rightarrow\; \boldsymbol{X = A^{-1} \cdot B}$ $(m = n,\;\; \det A \neq 0)$	
Sistēmas **paplašinātā matrica**	$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$	
Kronekera–Kapelli teorēma	**Lineāru vienādojumu sistēma ir saderīga (sk. 33. lpp.) tad un tikai tad, ja sistēmas matricas rangs ir vienāds ar sistēmas paplašinātās matricas rangu, t. i.,** **rang A = rang A*.**	

4. ELEMENTĀRĀ ĢEOMETRIJA

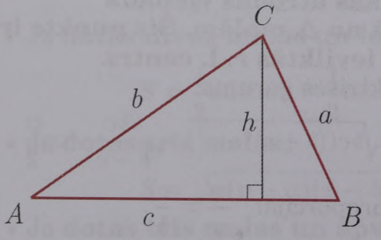
4.1. Planimetrija

Saīsinājumi un apzīmējumi

$\triangle$	trijstūris
AB	nogrieznis (A, B – galapunkti)
r. l.	riņķa līnija
S	laukums
P	perimetrs
p	pusperimetrs
R	apvilktās r. l. rādiuss
r	ievilktās r. l. rādiuss
π	3,1415926...
$\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle B$	leņķis ar virsotni punktā B
$\sphericalangle (a, b)$	leņķis, kura malas ir stari a un b

1°	viens grāds ($\frac{1}{90}$ no taisna leņķa)
$1'$	viena minūte $1' = \frac{1}{60}$ no $1^\circ \Rightarrow 1^\circ = 60'$
$1''$	viena sekunde $1'' = \frac{1}{60}$ no $1' \Rightarrow 1' = 60''$
1 rad	viens radiāns (centra leņķis, kas balstās uz loku, kura garums ir vienāds ar riņķa līnijas rādiusu) $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57^\circ$ $x \text{ rad} = x \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$
α° (sakarība starp leņķa lielumu grādos un radiānos)	$1^\circ = \frac{\pi}{180}$ rad $\alpha^\circ = \left(\alpha \cdot \frac{\pi}{180}\right)$ rad

Trijstūri ($\triangle$)



$AB = c$ – pamats
h – augstums

Trijstūra divu malu summa ir lielāka nekā trešā mala:

$$a + b > c, \quad b + c > a, \quad a + c > b$$

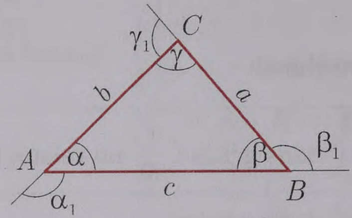
Trijstūra divu malu starpība ir mazāka nekā trešā mala:

$$|a - b| < c, \quad |b - c| < a, \quad |a - c| < b$$

$$P = a + b + c, \quad p = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

$$S = \frac{c \cdot h}{2}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ **(Hērona formula)**



α, β, γ – iekšējie leņķi
$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ – ārējie leņķi

$\alpha + \beta + \gamma = 180°; \; \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 360°$

$\alpha_1 = \beta + \gamma; \; \beta_1 = \alpha + \gamma; \; \gamma_1 = \alpha + \beta$

Sinusu teorēma:

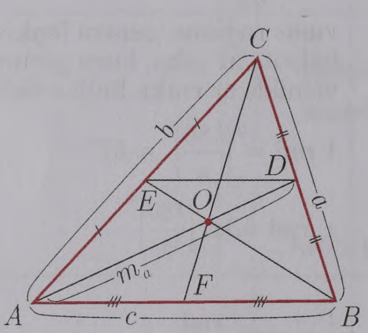
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

(R – ap Δ apvilktās r. l. rādiuss)

Kosinusu teorēma:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$\sin\alpha = \frac{2S}{b \cdot c}; \quad \sin\beta = \frac{2S}{a \cdot c}; \quad \sin\gamma = \frac{2S}{a \cdot b}$$



AD, BE, CF – **mediānas**
O – mediānu krustpunkts
ED – viduslīnija

Δ **mediāna** ir taisnes nogrieznis, kas savieno Δ virsotni ar pretējās malas viduspunktu.

Δ mediānas krustojas vienā punktā – Δ masas centrā O. Šajā punktā katra mediāna sadalās attiecībā 2 : 1 (skaitot no virsotnes):

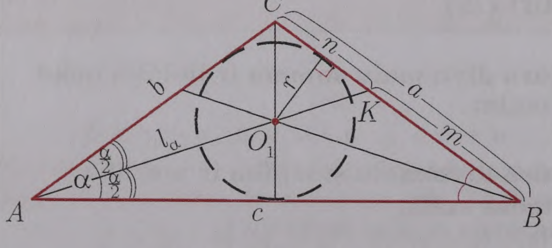
$$OA : OD = OB : OE = OC : OF = 2 : 1$$

Mediānas $AD = m_a$ garums:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

Δ **viduslīnija** ir taisnes nogrieznis, kas savieno Δ divu malu viduspunktus, turklāt tā ir

- paralēla pamatam: $ED \parallel AB$,
- vienāda ar pamata pusi: $ED = \frac{1}{2}AB$.



$l_\alpha = AK$ – leņķa α bisektrise
O_1 – bisektrišu krustpunkts
m, n – nogriežņi, kuros malu a sadala bisektrise l_α
r – **ievilktās r. l. rādiuss**

Δ **bisektrise** ir taisne, kas sadala Δ iekšējo leņķi uz pusēm.

Δ bisektrises krustojas vienā punktā, kas atrodas vienādā attālumā no Δ malām. Šis punkts ir trijstūrī ievilktās r. l. centrs.

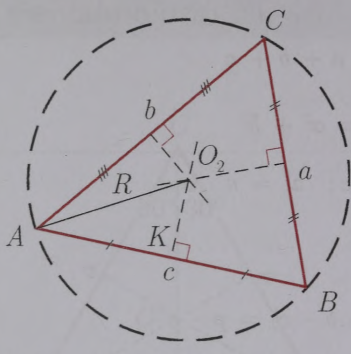
$\sphericalangle \alpha$ bisektrises garums:

$$l_\alpha = \frac{1}{b+c}\sqrt{bc((b+c)^2 - a^2)} = \frac{2bc}{b+c} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Ir spēkā proporcija: $\frac{m}{n} = \frac{c}{b}$.

$$r = \frac{S}{p} \Leftrightarrow S = p \cdot r$$

$$r = (p-a)\mathrm{tg}\sphericalangle\frac{A}{2} = (p-b)\mathrm{tg}\sphericalangle\frac{B}{2} = (p-c)\mathrm{tg}\sphericalangle\frac{C}{2}$$



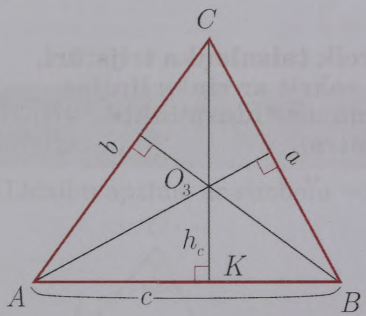
KO_2 – malas AB **vidusperpendikuls**
R – **apvilktās r. l. rādiuss**
O_2 – vidusperpendikulu krustpunkts

Δ malas vidusperpendikuls ir taisne, kas perpendikulāra Δ malai un iet caur tās viduspunktu.

Δ malu vidusperpendikuli krustojas vienā punktā, kas atrodas vienādā attālumā no Δ virsotnēm. Šis punkts ir ap trijstūri apvilktās r. l. centrs.

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S} \Leftrightarrow S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

$$R = \frac{a}{2\sin\sphericalangle A} = \frac{b}{2\sin\sphericalangle B} = \frac{c}{2\sin\sphericalangle C}$$



$h_c = CK$ – augstums pret malu c
O_3 – augstumu krustpunkts

Δ augstums ir perpendikuls, kas novilkts no Δ virsotnes pret pretējo malu vai tās pagarinājumu.

Δ augstumi krustojas vienā punktā – ortocentrā.
Augstuma $CK = h_c$ garums:

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Augstumu īpašība:

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$

$$\frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

Trijstūra laukuma S aprēķināšana (atkarībā no dotiem lielumiem)

- Ja **dota viena mala un pret šo malu novilktais augstums**,

$$S = \frac{1}{2}ch_c = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ah_a$$

- Ja **dotas divas malas un leņķis starp tām**,

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

- Ja **dotas trīs malas**,

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{(Hērona formula)}$$

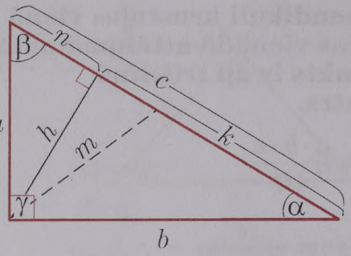
- Ja **dotas trīs malas un apvilktās r.l. rādiuss**,

$$S = \frac{abc}{4R}$$

- Ja **dots pusperimetrs un ievilktās r. l. rādiuss**,

$$S = p \cdot r$$

Taisnleņķa △



Ja $\gamma = 90°$, tad
a, b – **katetes**
c – **hipotenūza**
h – augstums pret hipotenūzu
m – hipotenūzas mediāna

$$\gamma = 90°, \quad \alpha + \beta = 90°$$

$$P = a + b + c$$

Pitagora teorēma:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$h^2 = n \cdot k; \quad b^2 = k \cdot c; \quad a^2 = n \cdot c$$

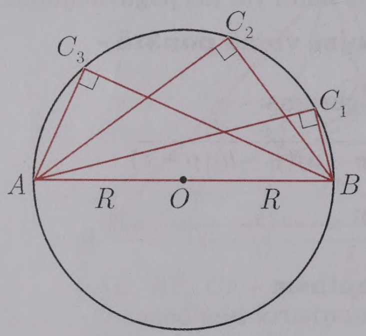
Mediāna $m = \dfrac{c}{2}$

$$R = \frac{c}{2}, \quad r = \frac{1}{2} \cdot (a + b - c) = p - c$$

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b = \frac{1}{2} c \cdot h$$

$$a = c \sin\alpha = c \cos\beta; \quad a = b \operatorname{tg}\alpha = b \operatorname{ctg}\beta$$

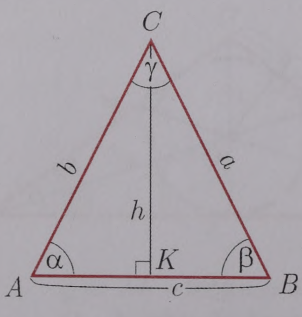
$$b = c \sin\beta = c \cos\alpha; \quad b = a \operatorname{tg}\beta = a \operatorname{ctg}\alpha$$



O – ap taisnleņķa △ apvilktās r. l. centrs
R – rādiuss

Ja riņķa līnijā ievelk taisnleņķa trijstūri, tad tā hipotenūza sakrīt ar riņķa līnijas diametru (hipotenūzas viduspunkts ir riņķa līnijas centrs).

Vienādsānu △



$a = b$ – sānu malas
c – pamats, h – augstums

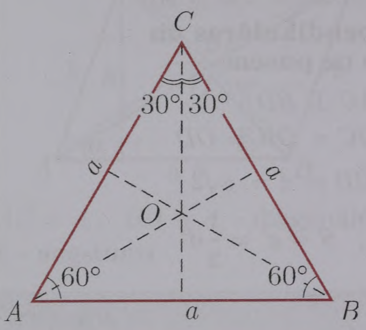
$$a = b; \quad P = 2a + c; \quad \alpha = \beta = 90° - \frac{\gamma}{2}$$

Virsotnes leņķa γ **bisektrise** l, pret pamatu c novilktais **augstums** h un **mediāna** m sakrīt:

$$l = h = m = \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}}$$

$$S = \frac{1}{2} c \cdot h = \frac{1}{2} a^2 \sin\gamma$$

Vienādmalu △



$AB = BC = CA = a$

$$P = 3a$$

$$\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = 60°$$

Katras malas mediāna, pret šo malu novilktais augstums un malas pretējā leņķa bisektrise sakrīt:

$$m = h = l = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$$

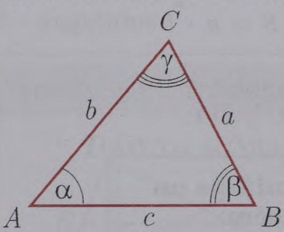
Vienādmalu trijstūrī ievilktās un ap to apvilktās r. l. centrs, masas centrs un ortocentrs sakrīt (zīmējumā – punkts O). Šis punkts sadala mediānu (bisektrisi, augstumu) attiecībā 1 : 2, skaitot no pamata malas.

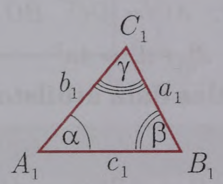
$$R = a\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad r = a\frac{\sqrt{3}}{6}, \quad R = 2r = \frac{2}{3}h$$

$$S = a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Trijstūru (daudzstūru) līdzība

(Līdzību apzīmē ar simbolu ~)





a un a_1, b un b_1, ... – līdzīgo figūru atbilstošie elementi
P, P' – līdzīgo figūru perimetri
S, S' – līdzīgo figūru laukumi

Trijstūrus sauc par līdzīgiem, ja to atbilstošie leņķi ir vienādi un atbilstošās malas – proporcionālas.
(Analogi definē vienādu malu skaita daudzstūru līdzību.)

Divi △ ir līdzīgi, ja

- **viena △ divi leņķi ir attiecīgi vienādi ar otra △ diviem leņķiem**;
- **viena △ divas malas ir proporcionālas otra △ divām malām un leņķi, kas atrodas starp šīm malām, ir vienādi**;
- **viena △ trīs malas ir proporcionālas otra △ trim malām**.

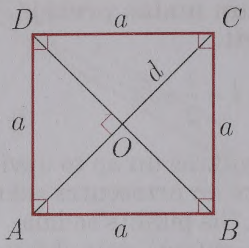
Jebkuru līdzīgu figūru laukumi S un S' attiecas tāpat kā atbilstošo lineāro elementu (malu, augstumu, diagonāļu, ...) kvadrāti:

$$\frac{S}{S'} = \frac{a^2}{a_1^2} = \frac{b^2}{b_1^2} = ... = k^2 \text{ jeb } S = k^2S',$$

$$\text{kur } k = \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = ... \text{ un } P = kP'$$

Četrstūri

Kvadrāts



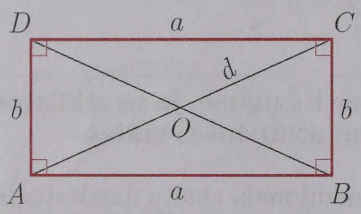
AB, BC, CD, DA – malas
AC, BD – diagonāles

$$AB = BC = CD = DA = a$$
$$\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = 90^\circ$$

Diagonāles ir perpendikulāras un krustpunktā dalās uz pusēm:

$$AC \perp BD$$
$$AO = OC = OB = OD$$
$$AC = BD = d = a\sqrt{2}$$
$$\boldsymbol{P = 4a;\quad S = a^2 = \frac{1}{2}d^2}$$

Taisnstūris

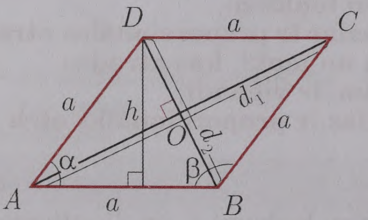


$$AB = DC = a;\quad AD = BC = b$$
$$AB \parallel CD \text{ un } BC \parallel DA$$
$$\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = 90^\circ$$

Diagonāles ir vienādas un krustpunktā dalās uz pusēm:

$$AC = BD = \boldsymbol{d = \sqrt{a^2 + b^2}}$$
$$AO = OC = DO = BO = \frac{d}{2}$$
$$\boldsymbol{P = 2(a + b);\quad S = a \cdot b}$$

Rombs



$AC = d_1$, $BD = d_2$ – diagonāles
h – augstums

$$AB = BC = CD = DA = a$$
$$AB \parallel CD,\quad BC \parallel DA$$
$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle BCD,\quad \sphericalangle ABC = \sphericalangle CDA$$

Diagonāles ir perpendikulāras un krustpunktā dalās uz pusēm:

$$AC \perp BD;\quad AO = OC;\quad BO = OD$$
$$\boldsymbol{d_1^2 + d_2^2 = 4a^2}$$

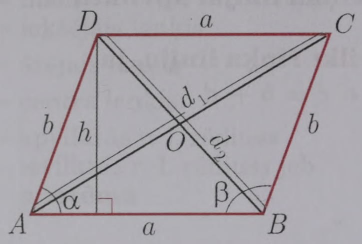
Romba diagonāles dala atbilstošos leņķus uz pusēm:

$$\sphericalangle DAO = \sphericalangle OAB = \sphericalangle BCO = \sphericalangle OCD = \frac{\alpha}{2}$$
$$\sphericalangle ABO = \sphericalangle OBC = \sphericalangle CDO = \sphericalangle ODA = \frac{\beta}{2}$$
$$d_1 = 2a\cos\frac{\alpha}{2};\quad d_2 = 2a\sin\frac{\alpha}{2}$$

Rombā var ievilkt riņķa līniju:

$$r = \frac{1}{2}h = \frac{1}{2}a\sin\alpha$$
$$\boldsymbol{P = 4a}$$
$$\boldsymbol{S = a \cdot h = a^2\sin\alpha = a^2\sin\beta = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2}$$

Paralelograms



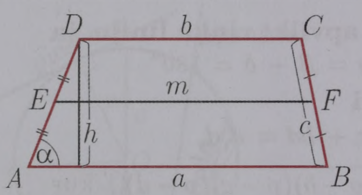
$AC = d_1$, $BD = d_2$ – diagonāles
h – augstums

$$AB \parallel CD \text{ un } AB = CD$$
$$AD \parallel BC \text{ un } AD = BC$$
$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle BCD, \quad \sphericalangle ABC = \sphericalangle CDA$$
$$\alpha + \beta = 180°$$

Diagonāles krustpunktā dalās uz pusēm:

$$AO = OC; \quad BO = OD$$
$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$$
$$P = 2(a + b)$$
$$S = a \cdot h = ab\sin\alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\sphericalangle(AOD)$$

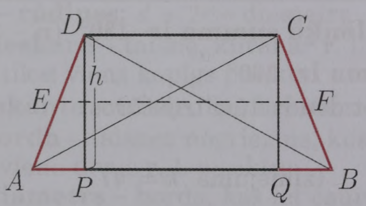
Trapece



EF – viduslīnija, t.i.,
$AE = ED$, $BF = FC$
h – augstums

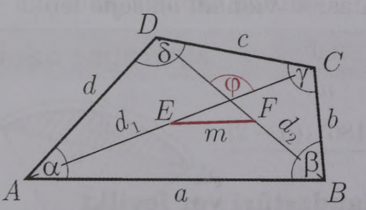
$$AB \parallel CD, \quad AD \nparallel CB$$
$$EF \parallel AB, \quad EF \parallel DC$$
$$m = \frac{1}{2}(a + b)$$
$$S = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h = m \cdot h$$

Vienādsānu trapece



$$AD = CB = c; \quad AC = DB$$
$$\sphericalangle A = \sphericalangle B, \quad \sphericalangle D = \sphericalangle C$$
$$AP = QB; \quad EF = \frac{1}{2}(AB + DC) = AQ$$
$$S = AQ \cdot h = PB \cdot h$$
$$S = (a - c \cdot \cos\alpha) \cdot c\sin\alpha =$$
$$= (b + c \cdot \cos\alpha) \cdot c\sin\alpha$$

Izliekts četrstūris



$AC = d_1$, $BD = d_2$ – diagonāles
$EF = m$ – nogrieznis, kas savieno diagonāļu viduspunktus
φ – leņķis, ko veido diagonāles

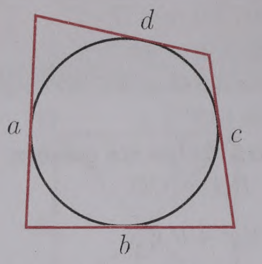
Jebkurā izliektā četrstūrī

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$$

Malas un diagonāles saista formula

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = d_1^2 + d_2^2 + 4m^2$$

Laukums $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$

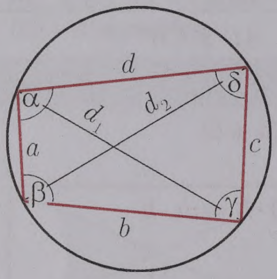


Riņķa līnijai apvilkts četrstūris (četrstūrī ievilkta riņķa līnija)

Četrstūri, kura visas malas pieskaras riņķa līnijai, sauc par riņķa līnijai apvilktu četrstūri.

Četrstūrī var ievilkt riņķa līniju, ja

$$a + c = b + d$$



Riņķa līnijā ievilkts četrstūris (četrstūrim apvilkta riņķa līnija)

Četrstūri, kura visas virsotnes atrodas uz riņķa līnijas, sauc par riņķa līnijā ievilktu četrstūri.

Ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju, ja

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$$

Ievilktā četrstūrī

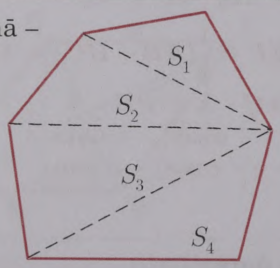
$$ac + bd = d_1 d_2$$

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}\text{, kur}$$

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$$

Daudzstūris

(zīmējumā – 6-stūris)



n**-stūrī: iekšējo leņķu summa ir** $180^\circ \cdot (n-2)$

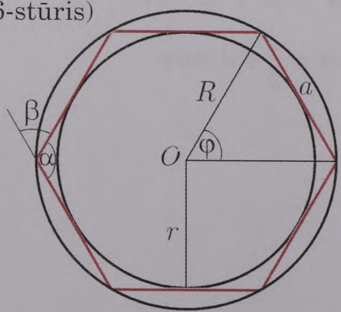
ārējo leņķu summa ir 360°

S aprēķina, sadalot daudzstūri trijstūros:

$$S = \sum_{i=1}^{k} S_i \qquad \text{(zīmējumā } k = 4\text{)}$$

Regulārs daudzstūris

(zīmējumā – 6-stūris)



Regulārā n**-stūrī:**

n vienādas malas; n vienādi iekšējie leņķi

$$\varphi = \frac{360^\circ}{n}; \quad \beta = \frac{360^\circ}{n}$$

$$\alpha = 180^\circ - \beta = \frac{180^\circ \cdot (n-2)}{n}$$

Katrā regulārā daudzstūrī var ievilkt un ap to var apvilkt riņķa līniju: ievilktās un apvilktās r. l. centri sakrīt.

Regulārs 4-stūris ir kvadrāts.

Regulāra 6-stūra mala $a = R$

Apzīmējumi:
a – mala
α – iekšējais leņķis
β – ārējais leņķis
φ – centra leņķis
R – apvilktās r. l. rādiuss
r – ievilktās r. l. rādiuss jeb **apotēma**

Regulārā n-stūrī mala $a = 2R\sin\frac{\pi}{n} =$

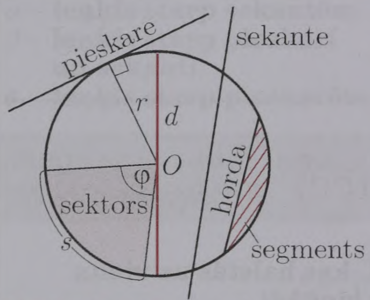
$$= 2r\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{n} = 2\sqrt{R^2 - r^2} = 2R\sin\frac{\varphi}{2} = 2r\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}$$

laukums $S = \frac{1}{2}n \cdot a \cdot r = nr^2\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2} =$

$$= \frac{1}{2}nR^2 \cdot \sin\varphi = \frac{1}{4}na^2\,\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2}$$

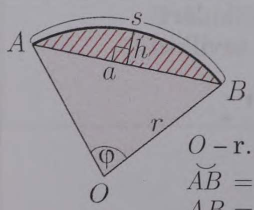
Riņķa līnija, riņķis un to elementi

Riņķa līnija, riņķis, riņķa sektors



Riņķa līnija – punktu kopa plaknē, kuri atrodas vienādā dotā attālumā no dota punkta ***O*** (r. l. centra).
r – **rādiuss**; $d = 2r$ – diametrs
Pieskare – taisne, kurai ar r. l. ir tikai viens kopīgs punkts.
Sekante – taisne, kas krusto r. l.
Horda – taisnes nogrieznis, kas savieno divus r. l. punktus (**diametrs** – horda, kas iet caur r. l. centru).
Riņķis – plaknes daļa, ko ierobežo riņķa līnija.
φ – centra leņķis
s – r. l. loks, arī loka garums

Riņķa segments



O – r. l. centrs
$\breve{AB} = s$ – r. l. loks
$AB = a$ – horda
h – **segmenta augstums**

R. l. pieskare un rādiuss, kas novilkts pieskaršanās punktā, ir savstarpēji perpendikulāri.

Rādiuss, kas novilkts perpendikulāri hordai, dala hordu uz pusēm.

R. l. garums $C = 2\pi r = \pi d$

Riņķa laukums $S = \pi r^2 = \frac{1}{4}\pi d^2$

$(\pi = 3{,}1415926...)$

Riņķa līnijas **loka leņķiskais mērs ir šim lokam atbilstošā centra leņķa lielums**. **Loka** leņķiskā mēra vienība – **viens grāds** (1°) ir centra leņķa lielums, kas atbilst $\frac{1}{360}$ no riņķa līnijas.

Ja centra leņķis ir φ grādi, tad

$$s = \frac{\pi r\varphi}{180}$$

$$S_{\text{sekt}} = \frac{\pi r^2\varphi}{360}$$

$$S_{\text{segm}} = \frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi\varphi}{180} - \sin\varphi\right)$$

Ja centra leņķis ir φ radiāni, tad

$$s = r\varphi$$

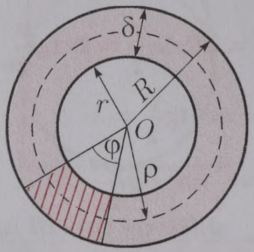
$$S_{\text{sekt}} = \frac{s \cdot r}{2} = \frac{1}{2}r^2\varphi$$

$$S_{\text{segm}} = \frac{1}{2}\big(sr - a(r-h)\big) = \frac{1}{2}r^2(\varphi - \sin\varphi)$$

$$a = 2r\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$h = \frac{a}{2}\mathrm{tg}\frac{\varphi}{4} \quad (h < r)$$

Riņķa gredzens



$2R = D$ – ārējais diametrs
$2r = d$ – iekšējais diametrs
$\delta = R - r$ – gredzena platums

$\rho = \frac{1}{2}(R + r)$ – vidējais rādiuss

φ – centra leņķis

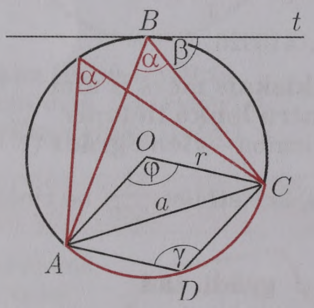
Riņķa gredzena laukums

$$S = \pi\left(R^2 - r^2\right) = \frac{\pi}{4}\left(D^2 - d^2\right) = 2\pi\rho\delta$$

Ja centra leņķis ir φ grādi, tad atbilstošā **gredzena sektora laukums**

$$S_{\text{sekt}} = \frac{\pi\varphi}{360}(R^2 - r^2) = \frac{\pi\varphi}{180}\rho \cdot \delta$$

Ar riņķa līniju saistītie leņķi



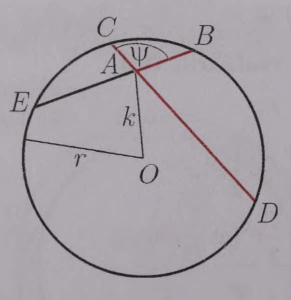
a – horda
t – pieskare
φ – **centra leņķis**
α, γ – **ievilktie leņķi**
β – **leņķis starp hordu** BC **un pieskari** t

$$\alpha = \frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2}\overset{\frown}{ADC}\,; \qquad \gamma = \pi - \frac{1}{2}\varphi$$

Visi ievilktie leņķi, kas balstās uz viena un tā paša loka, ir vienādi.
Ievilktie leņķi, kas balstās uz vienas un tās pašas hordas vai nu ir vienādi, vai arī to summa ir 180°.
Jebkurš ievilkts leņķis, kas balstās uz diametra, ir taisns.

$$\beta = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$$

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{a}{2r} \Leftrightarrow a = 2r\sin\frac{\varphi}{2}$$



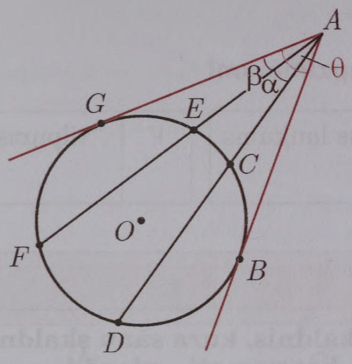
EB, CD – hordas
A – hordu krustpunkts
$AO = k$
ψ – **leņķis starp hordām**

$$\psi = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{CB} + \overset{\frown}{ED})$$

Hordu īpašība:

$$AC \cdot AD = AB \cdot AE = r^2 - k^2$$

Diametrs, kas novilkts perpendikulāri hordai, sadala šo hordu un tās savilkto loku uz pusēm.



AG, AB – pieskares
AF, AD – sekantes
α – **leņķis starp sekantēm**
β – **leņķis starp pieskari un sekanti**
θ – **leņķis starp pieskarēm**

$$\alpha = \frac{1}{2}(\breve{DF} - \breve{EC})$$

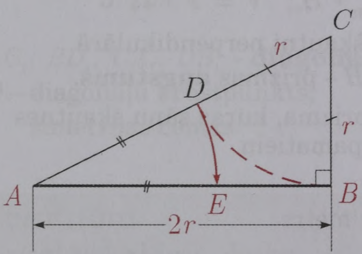
$$\beta = \frac{1}{2}(\breve{GF} - \breve{GE})$$

$$\theta = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{GDB} - \overset{\frown}{GCB})$$

Pieskaru īpašība:
$AB = AG$

Sekanšu īpašība:
$AC \cdot AD = AE \cdot AF = AG^2 = AB^2$

Nogriežņa sadalīšana zelta griezumā

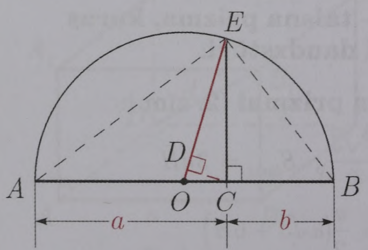


Zelta griezuma proporcija:

$$AB : AE = AE : EB$$

$$AE = r\left(\sqrt{5} - 1\right)$$

Vidējie lielumi



Vidējais aritmētiskais:

$$EO = \frac{a + b}{2}$$

Vidējais ģeometriskais:

$$EC = \sqrt{a \cdot b}$$

$$EB = \sqrt{(a + b) \cdot b}\,; \quad EA = \sqrt{(a + b) \cdot a}$$

Vidējais harmoniskais:

$$ED = \frac{2a \cdot b}{a + b}$$

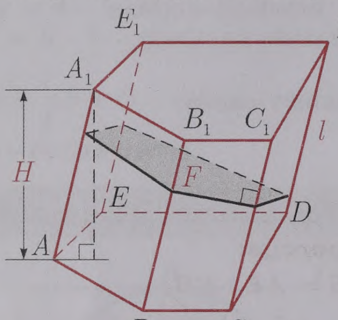
4.2. Stereometrija

Biežāk lietotie saīsinājumi un apzīmējumi

S_{pam} $S_{sānu}$	pamata laukums sānu virsmas laukums	S_{pilna} H	pilnas virsmas laukums augstums	V	tilpums

Prizma

(zīmējumā – slīpa 5-stūru prizma)



1. zīm.

$AA_1 = BB_1 = CC_1 = \ldots$
– **sānu šķautnes**

$(AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel \ldots)$
ABB_1A_1, $BCC_1B_1 \ldots$
– **sānu skaldnes**

$ABCDE = A_1B_1C_1D_1$ – **pamati**

Prizma – daudzskaldnis, kura sānu skaldnes ir paralelogrami, bet pamati – vienādi daudzstūri, kas atrodas paralēlās plaknēs.

Slīpa prizma – prizma, kuras sānu šķautnes nav perpendikulāras pamatiem (1. zīm.).

$$S_{sānu} = P \cdot l,$$

kur P – pret sānu šķautni perpendikulārā šķēluma (normālšķēluma) perimetrs,
l – sānu šķautnes garums.

$$S_{pilna} = 2 \cdot S_{pam} + S_{sānu}$$

$$V = S_{pam} \cdot H; \quad V = F \cdot l,$$

kur F – pret sānu šķautni perpendikulārā šķēluma laukums, H – prizmas **augstums**.

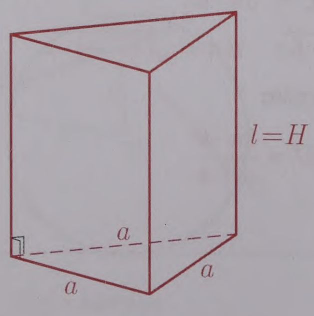
Taisna prizma – prizma, kuras sānu šķautnes ir perpendikulāras pamatiem.

Taisnai prizmai:

P – pamata perimetrs
$l = H$
$S_{pam} = F$

Regulāra prizma

(zīmējumā – regulāra trijstūra prizma)



2. zīm.

Regulāra prizma – taisna prizma, kuras pamati ir regulāri daudzstūri.

Regulārai trijstūra prizmai (2. zīm.):

$$S_{pam} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \quad S_{sānu} = 3aH$$

$$S_{pilna} = \frac{a}{2}\left(a\sqrt{3} + 6H\right)$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}H$$

Regulārai 4-stūra prizmai:

$$S_{pam} = a^2; \quad S_{sānu} = 4aH$$

$$S_{pilna} = 2a(a + 2H)$$

$$V = a^2H$$

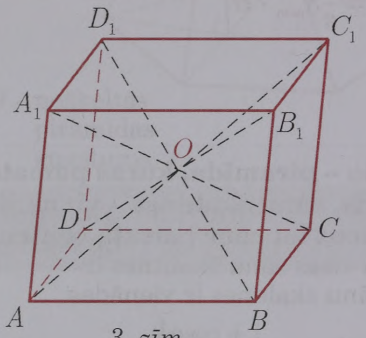
Regulārai 6-stūra prizmai:

$$S_{pam} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}; \quad S_{sānu} = 6a \cdot H$$

$$S_{pilna} = 3a(a\sqrt{3} + 2H)$$

$$V = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot H$$

Paralēlskaldnis



3. zīm.

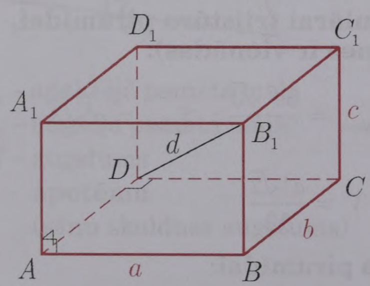
AC_1, BD_1, CA_1, DB_1 – **diagonāles**
O – diagonāļu krustpunkts, simetrijas centrs

Paralēlskaldnis – prizma, kuras pamati ir paralelogrami.
Visas četras diagonāles krustojas vienā punktā, daloties tajā uz pusēm.

Slīpam paralēlskaldnim – visas skaldnes ir paralelogrami (3. zīm.).

Taisnam paralēlskaldnim – visas sānu skaldnes ir taisnstūri (sānu šķautnes ir perpendikulāras pamatiem).

Taisnstūra paralēlskaldnis; kubs



4. zīm.

Sānu šķautnes AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 **– perpendikulāras pamatiem**
d – diagonāle
a, b, c – **taisnstūra paralēlskaldņa dimensijas**

Taisnstūra paralēlskaldnis – taisns paralēlskaldnis, kura pamati ir taisnstūri (4. zīm.).
Taisnstūra paralēlskaldnim:
visas četras diagonāles ir vienādas, un

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$S_{pam} = a \cdot b; \quad S_{pilna} = 2(ab + bc + ca)$$

$$V = a \cdot b \cdot c$$

Kubs – taisnstūra paralēlskaldnis, kura visas dimensijas ir vienādas:

$$a = b = c$$

Kubam: $S_{pam} = a^2$; $d = a\sqrt{3}$; $S_{pilna} = 6a^2$

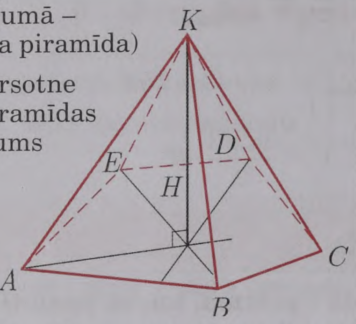
$$V = a^3$$

Piramīda

(zīmējumā – 5-stūra piramīda)

K – virsotne

H – piramīdas augstums



$KA, KB, KC, \ldots$ – **sānu šķautnes**

$\triangle KAB, \triangle KBC, \triangle KCD\ldots$ – **sānu skaldnes;** $ABCDE$ – **pamats**

Piramīda – daudzskaldnis, kura pamats ir n-stūris, bet sānu skaldnes – trijstūri ar kopīgu virsotni.

n-stūru piramīdai ir n skaldnes.

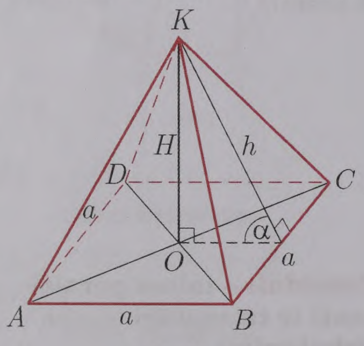
Piramīdas augstums – perpendikuls, kas novilkts no virsotnes pret pamata plakni.

$$S_{\text{pilna}} = S_{\text{pam}} + S_{\text{sānu}}$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{pam}} \cdot H$$

Regulāra piramīda

(5. zīm. – regulāra 4-stūra piramīda; 6. zīm. – tetraedrs)



5. *zīm.*

$KA = KB = KC = KD$

$\triangle KAB = \triangle KBC = \triangle KCD = \triangle KDA$

$ABCD$ – pamats (kvadrāts)

a – pamata mala

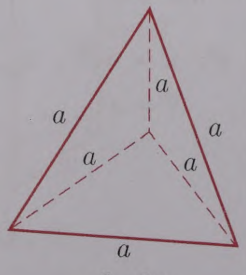
O – pamata centrs

H – augstums

h – **apotēma (sānu skaldnes augstums)**

a – šķautne

visas skaldnes – vienādmalu trijstūri



6. *zīm.*

Regulāra piramīda – piramīda, kuras pamats ir regulārs n-stūris, sānu skaldnes – vienādi trijstūri, un augstums iet caur pamata centru.

Regulārā piramīdā visas sānu šķautnes ir vienādas un visas sānu skaldnes ir vienādas.

$$S_{\text{sānu}} = \frac{S_{\text{pam}}}{\cos\alpha}; \quad S_{\text{pilna}} = \frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha} \cdot S_{\text{pam}},$$

kur α – divplakņu kakta leņķis pie regulārās piramīdas pamata.

Regulārai trijstūra piramīdai:

$$S_{\text{pam}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \quad S_{\text{sānu}} = \frac{3ah}{2}; \quad S_{\text{pilna}} = \frac{a}{4}\left(a\sqrt{3} + 6h\right)$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{12} \cdot H$$

Tetraedram (regulārai trijstūra piramīdai, kurā visas šķautnes ir vienādas):

$$S_{\text{pam}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \quad S_{\text{sānu}} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}; \quad S_{\text{pilna}} = a^2\sqrt{3}$$

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Regulārai 4-stūra piramīdai:

$$S_{\text{pam}} = a^2; \quad S_{\text{sānu}} = 2ah; \quad S_{\text{pilna}} = a(a + 2h)$$

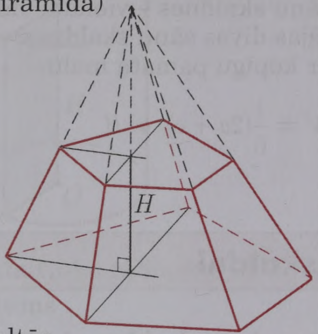
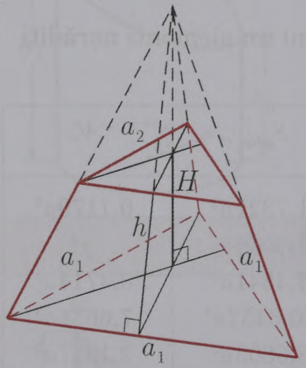
$$V = \frac{1}{3} a^2 \cdot H$$

Regulārai 6-stūra piramīdai:

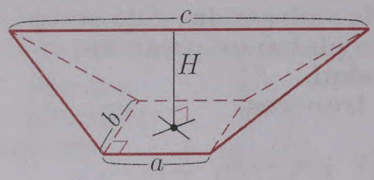
$$S_{\text{pam}} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}; \quad S_{\text{sānu}} = 3ah; \quad S_{\text{pilna}} = \frac{3}{2} a\left(a\sqrt{3} + 2h\right)$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot H$$

Nošķelta piramīda

(zīmējumā – nošķelta 5-stūra piramīda)  H – nošķeltās piramīdas augstums	**Nošķelta piramīda – piramīdas daļa starp piramīdas pamata plakni un pamatam paralēlu šķēlējplakni. Sānu skaldnes – trapeces.** $V = \frac{H}{3}\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}\right)$, kur S_1 – apakšējā pamata laukums, S_2 – augšējā pamata laukums.
Regulāra nošķelta piramīda  a_1 – apakšējā pamata mala a_2 – augšējā pamata mala H – augstums h – **apotēma** (sānu skaldnes augstums)	**Pamati – regulāri n-stūri; sānu skaldnes – vienādas vienādsānu trapeces.** $S_{\text{sānu}} = (P_1 + P_2)\cdot\frac{h}{2}$, kur P_1 – apakšējā pamata perimetrs, P_2 – augšējā pamata perimetrs $S_{\text{pilna}} = S_{\text{sānu}} + S_1 + S_2$, kur S_1 – apakšējā pamata laukums, S_2 – augšējā pamata laukums. **Regulārai nošķeltai trijstūra piramīdai:** $S_{\text{sānu}} = \frac{3}{2}(a_1 + a_2)\cdot h$ $S_{\text{pilna}} = \frac{\sqrt{3}}{4}(a_1^2 + a_2^2) + \frac{3}{2}(a_1 + a_2)\cdot h$ $V = \frac{\sqrt{3}}{12}\left(a_1^2 + a_2^2 + a_1\cdot a_2\right)\cdot H$ **Regulārai nošķeltai 4-stūra piramīdai:** $S_{\text{sānu}} = 2(a_1 + a_2)\cdot h$ $S_{\text{pilna}} = a_1^2 + a_2^2 + 2(a_1 + a_2)\cdot h$ $V = \frac{1}{3}\left(a_1^2 + a_2^2 + a_1\cdot a_2\right)\cdot H$ **Regulārai nošķeltai 6-stūra piramīdai:** $S_{\text{sānu}} = 3(a_1 + a_2)\cdot h$ $S_{\text{pilna}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(a_1^2 + a_2^2\right) + 3(a_1 + a_2)\cdot h$ $V = \frac{\sqrt{3}}{12}\left(a_1^2 + a_2^2 + a_1\cdot a_2\right)\cdot H$

Ķīlis



a, b, c – šķautnes
H – augstums

Ķīlis – daudzskaldnis, kura pamats ir taisnstūris, divas pretējās sānu skaldnes – vienādi vienādsānu trijstūri un pārējās divas sānu skaldnes – vienādsānu trapeces ar kopīgu pamata malu.

$$V = \frac{1}{6}(2a + c) \cdot b \cdot H$$

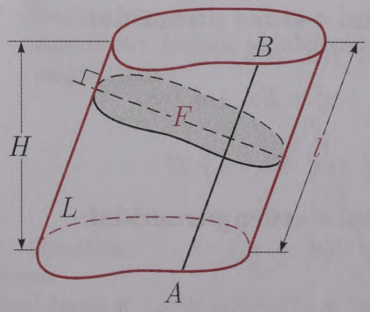
Regulāri daudzskaldņi

Regulārs daudzskaldnis – daudzskaldnis, kura visas skaldnes ir regulāri vienādi daudzstūri.

Ir iespējami pieci regulāru daudzskaldņu veidi; to nosaukumi un elementi norādīti tabulā (a – šķautne).

Nosaukums	Skaldņu skaits un veids	Šķautņu skaits	Virsotņu skaits	S_{pilna}	V
Tetraedrs	4 trijstūri	6	4	$1{,}7321a^2$	$0{,}1179a^3$
Kubs	6 kvadrāti	12	8	$6a^2$	a^3
Oktaedrs	8 trijstūri	12	6	$3{,}4641a^2$	$0{,}4714a^3$
Dodekaedrs	12 piecstūri	30	20	$20{,}6457a^2$	$7{,}6631a^3$
Ikosaedrs	20 trijstūri	30	12	$8{,}6603a^2$	$2{,}1817a^3$

Cilindriska virsma; taisns riņķa cilindrs



AB – **veidotāja (veidule)**
L – **vadītāja**
H – augstums

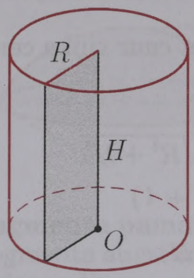
Cilindriska virsma – virsma, ko izveido taisne (veidotāja), pārvietojoties paralēli pati sev gar kādu dotu līniju (vadītāju).
Cilindrs – ķermenis, ko ierobežo cilindriska virsma un divas paralēlas plaknes.

$$S_{sānu} = p \cdot l$$
$$V = S_{pam} \cdot H = F \cdot l,$$

kur

l – veidules garums,
F – veidulei perpendikulāra šķērsgriezuma laukums,
p – veidulei perpendikulārā šķērsgriezuma perimetrs.

Taisns riņķa cilindrs



R – pamata riņķa rādiuss
H – augstums

Taisns riņķa cilindrs – rotācijas ķermenis, kas rodas, taisnstūrim rotējot ap vienu no tā malām.

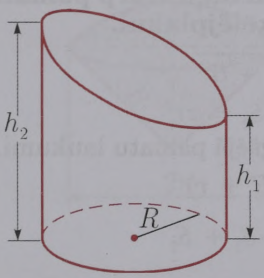
$$S_{pam} = \pi R^2$$

$$S_{sānu} = 2\pi RH$$

$$S_{pilna} = 2S_{pam} + S_{sānu} = 2\pi R(R + H)$$

$$V = \pi R^2 H$$

Nošķelts riņķa cilindrs



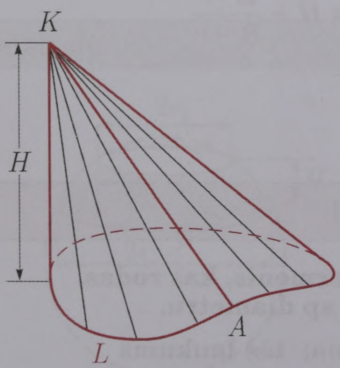
Nošķelts riņķa cilindrs – riņķa cilindra daļa starp pamatu un šķēlējplakni, kas nav paralēla pamatam.

$$S_{sānu} = \pi R(h_1 + h_2)$$

$$S_{pilna} = \pi R\left(h_1 + h_2 + R + \sqrt{R^2 + \frac{1}{4}(h_2 - h_1)^2}\right)$$

$$V = \frac{h_1 + h_2}{2} \cdot \pi R^2$$

Koniska virsma; taisns riņķa konuss



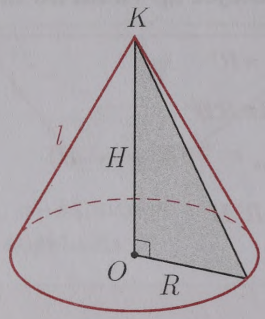
KA – **veidotāja (veidule)**
L – **vadītāja**
K – **virsotne**
H – augstums (perpendikuls, kas novilkts no virsotnes pret pamata plakni)

Koniska virsma – virsma, ko izveido caur kādu punktu novilkta taisne (veidotāja), pārvietojoties gar dotu līniju (vadītāju).

Konuss – ķermenis, ko ierobežo koniska virsma un pamats, kas atrodas plaknē.

$$V = \frac{1}{3} S_{pam} \cdot H$$

Taisns riņķa konuss



R – pamata riņķa rādiuss
O – pamata centrs
l – veidule
H – augstums

Taisns riņķa konuss – rotācijas ķermenis, kas rodas, taisnleņķa trijstūrim rotējot ap kateti.
Pamats – riņķis; augstums iet caur riņķa centru.

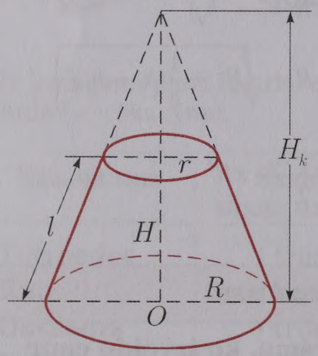
$$S_{pam} = \pi R^2$$

$$S_{sānu} = \pi R l = \pi R\sqrt{R^2 + H^2}$$

$$S_{pilna} = \pi R(R + l)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot H$$

Nošķelts riņķa konuss



R un r – **pamatu riņķu rādiusi**
l – nošķeltā konusa veidule
H – nošķeltā konusa augstums
H_k – "pilnā" konusa augstums

Nošķelts konuss – konusa daļa starp pamata plakni un tai paralēlu šķēlējplakni.

$$l = \sqrt{(R - r)^2 + H^2}$$

$$S_1 = \pi R^2 \text{ un } S_2 = \pi r^2$$

– atbilstoši apakšējā un augšējā pamatu laukumi.

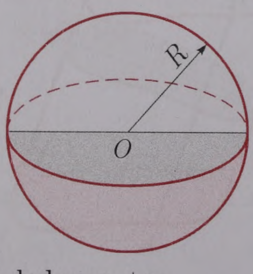
$$S_{sānu} = \pi\, l\,(R + r)$$

$$S_{pilna} = S_{sānu} + S_1 + S_2$$

$$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + r^2 + R \cdot r)$$

$$H_k = H + \frac{H \cdot r}{R - r}$$

Lode un tās elementi



O – lodes centrs
R – lodes (sfēras) rādiuss
$2R = d$ – diametrs

Lode – rotācijas ķermenis, kas rodas, pusriņķim rotējot ap diametru.

Sfēra – lodes virsma; tās laukums

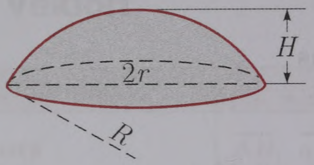
$$S = 4\pi R^2 = \pi d^2; \quad S = \sqrt[3]{36\pi V^2}$$

Lodes tilpums

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi\, d^3}{6}; \quad V = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{S^3}{\pi}}$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}; \quad R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

Lodes segments



r – **segmenta pamata rādiuss**
H – segmenta augstums
R – lodes radiuss

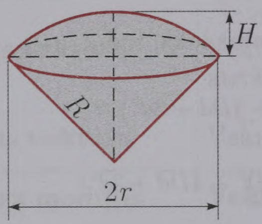
Lodes segments – lodes daļa, ko no lodes atšķeļ kāda plakne.

$$r^2 = H(2R - H)$$

Segmenta

- **sfēriskās virsmas laukums**
$$S_{sf} = 2\pi RH = \pi(H^2 + r^2)$$
- **pilnās virsmas laukums**
$$S = \pi(2RH + r^2) = \pi(H^2 + 2r^2)$$
- **tilpums**
$$V = \frac{1}{6}\pi H(H^2 + 3r^2) = \frac{1}{3}\pi H^2(3R - H)$$

Lodes sektors



Lodes sektors – rotācijas ķermenis, kas rodas, riņķa sektoram rotējot ap vienu no šo sektoru ierobežojošiem rādiusiem.

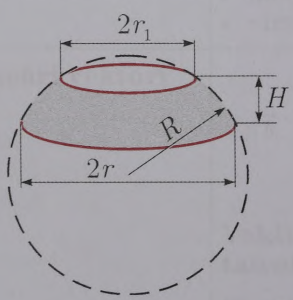
Lodes sektors sastāv no lodes segmenta un konusa; šiem ķermeņiem ir kopīgs pamats un konusa virsotne atrodas lodes centrā.

$$r = \sqrt{H(2R - H)}$$

Lodes sektoram

- **atbilstošā konusa sānu virsmas laukums**
$$S_{sānu} = \pi Rr$$
- **pilnas virsmas laukums**
$$S_{pilna} = \pi R(2H + r)$$
- **tilpums**
$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$$

Lodes slānis



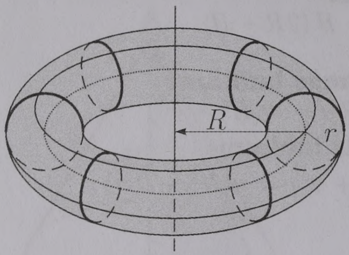
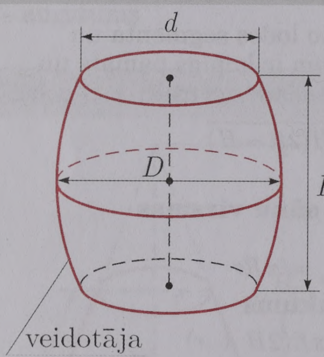
r – apakšējā pamata riņķa rādiuss
r_1 – augšējā pamata riņķa rādiuss
H – slāņa augstums
R – lodes rādiuss

Lodes slānis – lodes daļa, kas atrodas starp divām paralēlām šķēlējplaknēm.

$$R^2 = r^2 + \frac{1}{4H^2}(r^2 - r_1^2 - H^2)^2$$

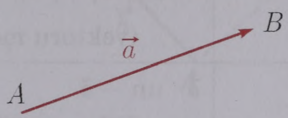
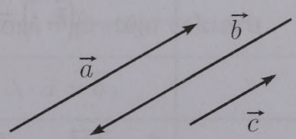
Lodes slānim

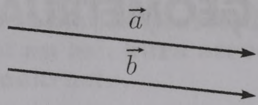
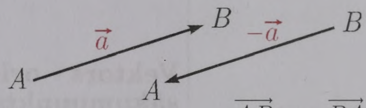
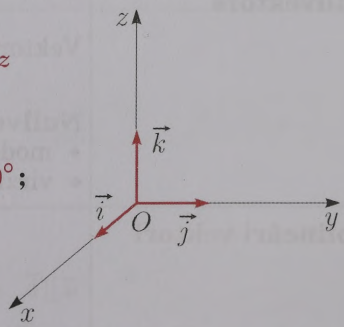
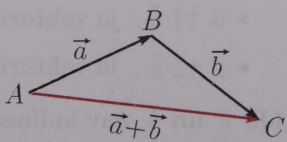
- **sfēriskās virsmas laukums**
$$S_{sf} = 2\pi RH$$
- **pilnas virsmas laukums**
$$S_{pilna} = \pi(2RH + r^2 + r_1^2)$$
- **tilpums**
$$V = \frac{1}{6}\pi H\left(H^2 + 3r^2 + 3r_1^2\right)$$

Tors  r – rotējošā riņķa rādiuss R – rotējošā riņķa centra attālums līdz rotācijas asij	**Tors – rotācijas ķermenis, kas rodas, riņķim rotējot ap asi, kura atrodas riņķa plaknē un riņķi nekrusto.** Toram • **virsmas laukums** $S = 4\pi^2 Rr$ • **tilpums** $V = 2\pi^2 Rr^2$
Muca 	Mucas tilpums V: • ja veidotāja ir riņķa līnijas loks, tad $V = \frac{1}{12}\pi H(2D^2 + d^2) \approx 0{,}262\,H(2D^2 + d^2)$ • ja veidotāja ir parabolas loks, tad $V = \frac{1}{60}\pi H(8D^2 + 4Dd + 3d^2) \approx$ $\approx 0{,}05236\,H(8D^2 + 4Dd + 3d^2)$

5. ANALĪTISKĀ ĢEOMETRIJA

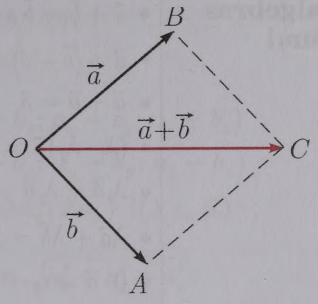
5.1. Vektori

Nosaukums	Apzīmējumi, ilustrācija, paskaidrojumi
Vektors	$\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$  **Vektors – orientēts taisnes nogrieznis, kuram norādīts sākumpunkts un galapunkts** (atbilstoši – A un B). **Vektoru nosaka** • **garums,** • **virziens.**
Brīvs vektors	Vektors, kuru var paralēli pārnest uz jebkuru vietu telpā.
Slīdošs vektors	Vektors, kuru var pārvietot tikai pa taisni, uz kuras tas atrodas.
Saistīts vektors	Vektors, kuram ir noteikts pielikšanas punkts.
Vektora modulis	**Vektora modulis ir vektora garums.** $\mid\overrightarrow{AB}\mid = AB, \ \mid\vec{a}\mid = a$
Nullvektors	$\vec{o}; \ \mid\vec{o}\mid = 0$ Vektors, kura sākumpunkts sakrīt ar galapunktu: $\vec{o} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \ldots$ **Nullvektoram** • modulis ir skaitlis 0, • virziens nav noteikts.
Kolineāri vektori	$\vec{a} \parallel \vec{b}, \ \vec{b} \parallel \vec{a}, \ \vec{c} \parallel \vec{b}, \ \vec{c} \parallel \vec{a}$  **Vektori, kas atrodas uz vienas taisnes vai uz paralēlām taisnēm.** Pieraksta: $\vec{a} \parallel \vec{b}$, vai • $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, ja vektori ir **vienādi vērsti**, • $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, ja vektori ir **pretēji vērsti**. (Ja $\vec{a}$ un $\vec{b}$ nav kolineāri vektori, tad raksta $\vec{a} \nparallel \vec{b}$.)

Vienādi vektori	$\vec{a} = \vec{b}$,  ja 1) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ (vektori ir kolineāri un vienādi vērsti) 2) $\lvert \vec{a} \rvert = \lvert \vec{b} \rvert$ (vektoru moduļi ir vienādi)
Pretēji vektori	$\vec{a}$ un $-\vec{a}$ jeb $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{BA}$  Pretējiem vektoriem 1) $\vec{a} \uparrow\downarrow -\vec{a}$ 2) $\lvert \vec{a} \rvert = \lvert -\vec{a} \rvert$ $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$
Komplanāri vektori	**Vektori, kas paralēli vienai un tai pašai plaknei vai atrodas vienā plaknē.**
Vektora $\vec{a}$ **vienības vektors** $\vec{a}^0$ vai $\vec{e}$	Vektors $\vec{a}^{\,0}$, kura modulis ir 1 un virziens sakrīt ar vektora $\vec{a}$ virzienu, t. i., 1) $\left\lvert \vec{a}^0 \right\rvert = 1$ 2) $\vec{a}^0 \uparrow\uparrow \vec{a}$ $\vec{a}^{\,0} = \dfrac{\vec{a}}{\lvert \vec{a} \rvert}$; $\vec{a} = \lvert \vec{a} \rvert \cdot \vec{a}^{\,0}$
Dekarta taisnleņķa koordinātu sistēmas Ox, Oy, Oz asu **orti**	Vektori $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, kur 1) $\vec{i} \uparrow\uparrow Ox$, $\vec{j} \uparrow\uparrow Oy$, $\vec{k} \uparrow\uparrow Oz$ 2) $\lvert \vec{i} \rvert = \lvert \vec{j} \rvert = \lvert \vec{k} \rvert = 1$ 3) $\sphericalangle(\vec{i}, \vec{j}) = 90°$; $\sphericalangle(\vec{j}, \vec{k}) = 90°$; $\sphericalangle(\vec{k}, \vec{i}) = 90°$ 
Punkta M **rādiusvektors**	$\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ – vektors, kura sākumpunkts sakrīt ar koordinātu sistēmas sākumpunktu O, bet galapunkts ir $M(x;\ y;\ z)$
Vektoru saskaitīšana	$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ **Ja $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, tad vektorus saskaita pēc trijstūra likuma:** 

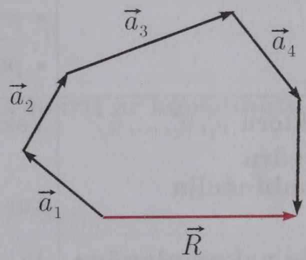
<table>
<tr>
<td></td>
<td>

vai pēc paralelograma likuma:



Ja $\vec{a} \parallel \vec{b}$ un vektora $\vec{a}$ galapunkts sakrīt ar vektora $\vec{b}$ sākumpunktu, tad $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ ir vektors, kas novilkts no vektora $\vec{a}$ sākumpunkta uz vektora $\vec{b}$ galapunktu.

Vairāku vektoru saskaitīšanu veic pakāpeniski: katru nākamo vektoru (sākot ar otro) pievieno iepriekšējam vektoram, lai tā sākumpunkts sakrīt ar iepriekšējā vektora galapunktu.



(sk. zīm. $\vec{a_1}+\vec{a_2}+\vec{a_3}+\vec{a_4}+\vec{a_5}=\vec{R}$)

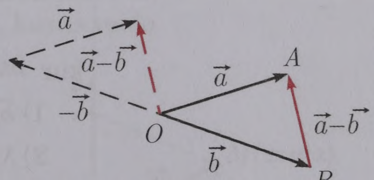
</td>
</tr>
<tr>
<td>

Vektoru atņemšana

</td>
<td>

$\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$ **, ja** $\vec{c}+\vec{b}=\vec{a}$

Ja vektoriem $\vec{a}$ un $\vec{b}$ ir kopīgs sākumpunkts, tad $\vec{a}-\vec{b}$ **ir vektors, kas novilkts no vektora $\vec{b}$ galapunkta uz vektora $\vec{a}$ sākumpunktu**.



$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$

Tā kā $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$, tad starpību $\vec{a}-\vec{b}$ var atrast, pie vektora $\vec{a}$ pieskaitot vektora $\vec{b}$ pretējo vektoru.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Vektora $\vec{a}$ reizinājums ar skaitli λ

</td>
<td>

$\lambda \cdot \vec{a} = \vec{b}$,

kur

1) $\vec{b} \parallel \vec{a}$ ($\vec{b}$ kolineārs ar $\vec{a}$)

2) $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$

3) ja $\lambda > 0$: $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$ ($\vec{b}$ un $\vec{a}$ virzieni sakrīt),

ja $\lambda < 0$: $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$ ($\vec{b}$ virziens ir pretējs $\vec{a}$ virzienam)

</td>
</tr>
<tr>
<td>

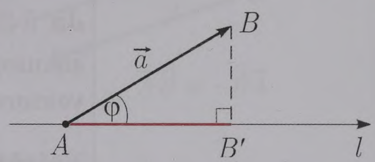
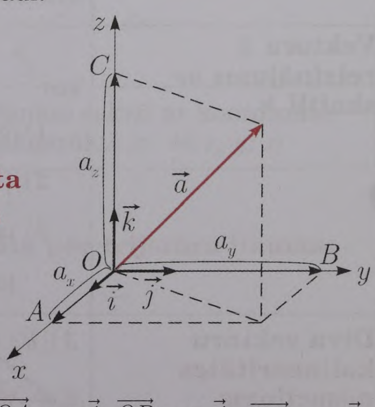
Divu vektoru kolinearitātes nosacījums

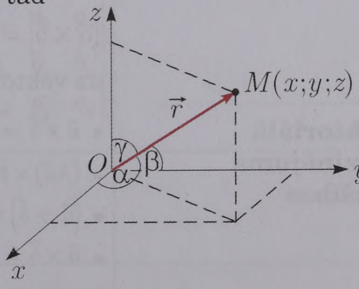
</td>
<td>

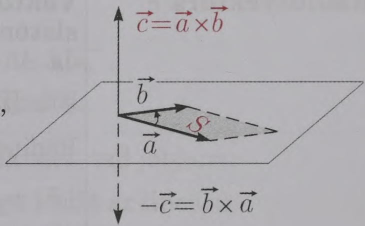
$\vec{a} \parallel \vec{b}$ tad un tikai tad, ja eksistē tāds skaitlis λ, ka

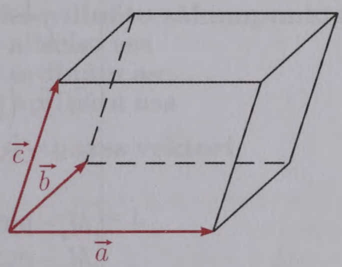
$\vec{a} = \lambda\vec{b}$

</td>
</tr>
</table>

Vektoru algebras pamatlikumi	• $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (komutatīvais likums) • $\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$ (saskaitīšanas asociatīvais likums) • $\vec{a}+\vec{o}=\vec{a}$ • $(\lambda_1\cdot\lambda_2)\vec{a}=\lambda_1\cdot(\lambda_2\cdot\vec{a})$ (reizināšanas asociatīvais likums) • $\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{a}=(\lambda_1+\lambda_2)\vec{a}$ • $\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}=\lambda(\vec{a}+\vec{b})$ (distributīvais likums) • $0\cdot\vec{a}=\alpha\cdot\vec{o}=\vec{o}$
Vektora $\vec{a}$ projekcija uz ass l	$\mathrm{pr}_l\,\vec{a}$ $AB'=\mathrm{pr}_l\,\vec{a}=\lvert\,\vec{a}\,\rvert\cdot\cos\varphi$ *Projekcijas īpašības* • $\mathrm{pr}_l\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\mathrm{pr}_l\,\vec{a}+\mathrm{pr}_l\,\vec{b}$ • $\mathrm{pr}_l\left(\lambda\vec{a}\right)=\lambda\mathrm{pr}_l\,\vec{a}$ 
Vektoru $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ **lineāra kombinācija**	Vektors $\lambda_1\overrightarrow{a_1}+\lambda_2\overrightarrow{a_2}+\ldots+\lambda_n\overrightarrow{a_n}$, kur $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – patvaļīgi reāli skaitļi.
Trīs nekomplanāru vektoru lineāra kombinācija	Ja $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$ – **nekomplanāri vektori**, tad jebkuru vektoru $\vec{a}$ var izteikt vienā vienīgā veidā ar lineāru kombināciju: $\vec{a}=\lambda_1\overrightarrow{b_1}+\lambda_2\overrightarrow{b_2}+\lambda_3\overrightarrow{b_3}$, kur 1) $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$ – **bāzes vektori** 2) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – **vektora $\vec{a}$ koordinātas** 3) $\lambda_1\overrightarrow{b_1}, \lambda_2\overrightarrow{b_2}, \lambda_3\overrightarrow{b_3}$ – **vektora $\vec{a}$ komponentes**
Vektora koordinātas Dekarta taisnleņķu koordinātu sistēmā, t.i., bāzē $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$	Tā kā $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – **nekomplanāri vektori**, tad katru vektoru $\vec{a}$ var izteikt šādi: $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, kur • $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – **Dekarta bāzes vektori (orti)** • a_x, a_y, a_z – **vektora $\vec{a}$ Dekarta koordinātas jeb projekcijas** • $a_x\vec{i}, a_y\vec{j}, a_z\vec{k}$ – **vektora $\vec{a}$ komponentes** Vektora $\vec{a}$ koordinātu pieraksts: $\vec{a}=(a_x;\, a_y;\, a_z)$.  $\overline{OA}=a_x\vec{i}$; $\overline{OB}=a_y\vec{j}$; $\overline{OC}=a_z\vec{k}$

Darbības ar vektoriem koordinātu formā	Ja $\vec{a}=(a_x; a_y; a_z)$, $\vec{b}=(b_x; b_y; b_z)$, tad $$\vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x;\ a_y+b_y;\ a_z+b_z)$$ $$\vec{a}-\vec{b}=(a_x-b_x;\ a_y-b_y;\ a_z-b_z)$$ $$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x;\ \lambda a_y;\ \lambda a_z)\quad(\lambda\in\mathbb{R})$$
Vektora modulis	$$a=\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$ Ja $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ – vektora sākumpunkts, $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ – vektora galapunkts, tad $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1)$, un $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$
Rādiusvektors $\vec{r}$	**Vektors $\overrightarrow{OM}$, kura sākumpunkts sakrīt ar koordinātu sistēmas sākumpunktu.** Ja $M(x;\ y;\ z)$, tad $\vec{r}=\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, t. i., $\vec{r}=(x;\ y;\ z)$ Rādiusvektora **modulis** $\lvert\vec{r}\rvert=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
Vektora virziena kosinusi	Ja $\vec{r}=(x;\ y;\ z)$ un α, β, γ – leņķi, kurus veido vektors $\vec{r}$ ar Ox, Oy, Oz asīm, tad  $$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$ $$\cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$ $$\cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$ Ja $\vec{e}$ **vienības vektors**, t. i., $\lvert\vec{e}\rvert=1$, tad $$\vec{e}=(\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma)$$
Skalārais reizinājums	Vektoru $\vec{a}$ un $\vec{b}$ **skalārais reizinājums ir skaitlis** $$\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cdot\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$$
Vektora $\vec{a}$ **skalārais kvadrāts**	$\vec{a}^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=\lvert\vec{a}\rvert^2 \Rightarrow \lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{\vec{a}^2}$ Piemērs $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$

Skalārā reizinājuma īpašības	• $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ • $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, ja $\vec{a}=\vec{o}$ vai $\vec{b}=\vec{o}$ vai $\vec{a}\perp\vec{b}$ Piemērs $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$ • $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$ • $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$
Skalārais reizinājums koordinātu formā	Ja $\vec{a}=(a_x;a_y;a_z)$, $\vec{b}=(b_x;b_y;b_z)$, tad $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z$
Leņķis starp vektoriem	$\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$
Vektoriālais reizinājums	Vektoru $\vec{a}$ un $\vec{b}$ **vektoriālais reizinājums ir vektors** $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, kuram • $\lvert\vec{c}\rvert=\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert=\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cdot\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$ • $\vec{c}\perp\vec{a}$ un $\vec{c}\perp\vec{b}$ • $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ veido labo trijnieku (t. i., skatoties no $\vec{c}$ galapunkta, īsākais pagrieziens no $\vec{a}$ uz $\vec{b}$ tiek veikts pretēji pulksteņa rādītāju kustības virzienam).  Piemērs $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$; $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$; $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$ Ja $\vec{a}$ un $\vec{b}$ nav kolineāri $(\vec{a}\nparallel\vec{b})$, tad $\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert=S$, kur S – laukums paralelogramam, kurš konstruēts uz vektoriem $\vec{a}$ un $\vec{b}$.
Vektoriālā reizinājuma īpašības	• $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$ • $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times\lambda\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$ • $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$ • $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}$, ja $\vec{a}=\vec{o}$ vai $\vec{b}=\vec{o}$ vai $\vec{a}\parallel\vec{b}$ Piemērs $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{o}$
Vektoriālā reizinājuma koordinātu forma	Ja $\vec{a}=(a_x;a_y;a_z)$ un $\vec{b}=(b_x;b_y;b_z)$, tad $\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}; -\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right)=$ $=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}$ $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$

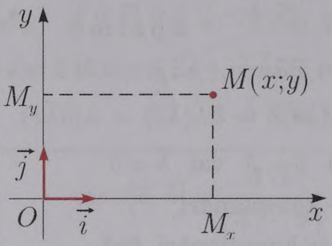
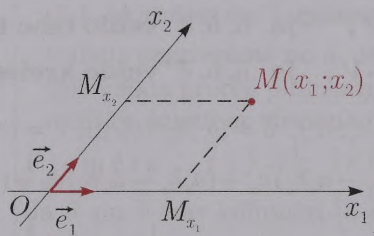
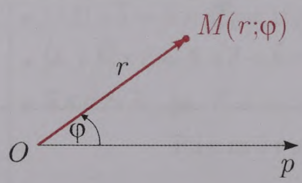
Vektoru jauktais reizinājums	Triju vektoru $\vec{a}$, $\vec{b}$ un $\vec{c}$ **jauktais reizinājums ir skaitlis** $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$
Jauktā reizinājuma īpašības	• $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$ $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-(\vec{b}\times\vec{a})\cdot\vec{c}$ • $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ $\Rightarrow$ apzīmē: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ • $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c}=-\vec{c}\vec{b}\vec{a}=-\vec{a}\vec{c}\vec{b}$ • $(\lambda\vec{a})\vec{b}\vec{c}=\vec{a}(\lambda\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\vec{b}(\lambda\vec{c})=\lambda(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$ • $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$, ja $\vec{a}=\vec{o}$ vai $\vec{b}=\vec{o}$ vai $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – komplanāri • Ja $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ nav komplanāri, tad $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\pm V$ jeb $V=\lvert\vec{a}\vec{b}\vec{c}\rvert$, kur V – tilpums paralēlskaldnim, kurš konstruēts uz vektoriem $\vec{a},\vec{b}$ un $\vec{c}$.  $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=V$, **ja $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ veido labo trijnieku;** $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=-V$, **ja $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ veido kreiso trijnieku.**
Jauktais reizinājums koordinātu formā	Ja $\vec{a}=(a_x;a_y;a_z)$, $\vec{b}=(b_x;b_y;b_z)$ un $\vec{c}=(c_x;c_y;c_z)$, tad $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=(a_yb_z-a_zb_y)c_x+(a_zb_x-a_xb_z)c_y+(a_xb_y-a_yb_x)c_z$ vai $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$
Divkāršais vektoriālais reizinājums	$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\,\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\,\vec{b})$

5.2. Koordinātu sistēmas plaknē un telpā

Punkta stāvokli plaknē un telpā var noteikt, izmantojot dažādas koordinātu sistēmas.

Skaitļus, kuri nosaka punkta atrašanās vietu dotajā koordinātu sistēmā, sauc par punkta koordinātām šajā sistēmā.

Plaknē visbiežāk tiek izmantota Dekarta koordinātu sistēma un polārā koordinātu sistēma, bet **telpā** – Dekarta koordinātu sistēma, cilindriskā koordinātu sistēma un sfēriskā koordinātu sistēma.

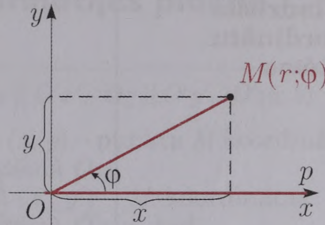
Nosaukums	Apzīmējumi, ilustrācija, paskaidrojumi
Dekarta taisnleņķa koordinātu sistēma plaknē	**Sistēmu veido koordinātu sākumpunkts O un divas savstarpēji perpendikulāras taisnes – koordinātu asis, uz kurām ir izraudzīts pozitīvais virziens un izvēlēta garuma vienība.**  O – **koordinātu sākumpunkts** Ox – **abscisu ass** Oy – **ordinātu ass** $\vec{i}$, $\vec{j}$ $\left(\lvert\vec{i}\rvert = \lvert\vec{j}\rvert = 1,\ \vec{i} \perp \vec{j}\right)$ – **bāzes vektori** $x = OM_x$, $y = OM_y$ – **punkta M koordinātas** x – **abscisa**, y – **ordināta** M_x – punkta M projekcija uz Ox ass paralēli Oy asij, M_y – punkta M projekcija uz Oy ass paralēli Ox asij.
Dekarta slīpleņķa (afīnā) koordinātu sistēma plaknē	 O – **koordinātu sākumpunkts** Ox_1, Ox_2 – **koordinātu asis** $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ – **bāzes vektori** $(\vec{e_1} \nparallel \vec{e_2})$ $x_1 = OM_{x_1}$, $x_2 = OM_{x_2}$ – **punkta M koordinātas** M_{x_1} – punkta M projekcija uz Ox_1 ass paralēli Ox_2 asij, M_{x_2} – punkta M projekcija uz Ox_2 ass paralēli Ox_1 asij.
Polārā koordinātu sistēma	 O – **pols** Op – **polārā ass** $r = \lvert\overrightarrow{OM}\rvert$ – **polārais rādiuss** φ – **polārais leņķis** (leņķis, kuru veido rādiusvektors $\overrightarrow{OM}$ un polārā ass Op); polārā leņķa pozitīvais atskaites virziens ir no polārās ass pretēji pulksteņa rādītāju kustības virzienam. **Par punkta M polārajām koordinātām sauc šī punkta rādiusvektora garumu r un polāro leņķi φ.** **Polārā rādiusa r un polārā leņķa φ galvenās vērtības** $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ **vai** $-\pi < \varphi \leqslant \pi$

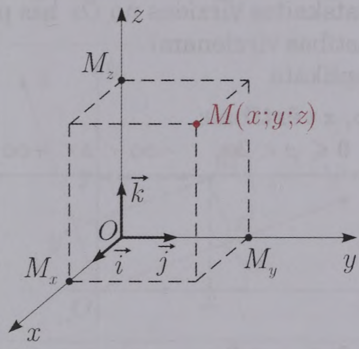
<table>
<tr>
<td>Sakarības starp punkta M Dekarta taisnleņķa koordinātām un polārajām koordinātām</td>
<td>
Ja polārā ass Op sakrīt ar Ox asi, tad

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\varphi \end{cases}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$



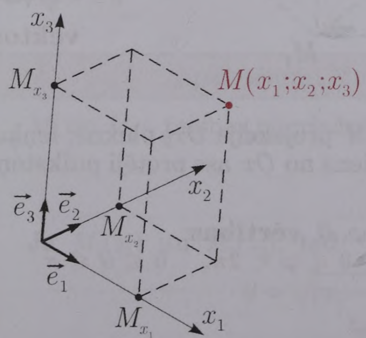
</td>
</tr>
<tr>
<td>Dekarta taisnleņķa koordinātu sistēma telpā</td>
<td>


O – koordinātu sākumpunkts
Ox – abscisu ass
Oy – ordinātu ass
Oz – aplikātu ass
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – bāzes vektori

$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1,$

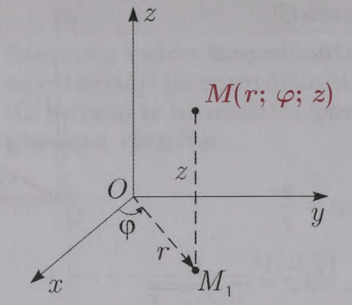
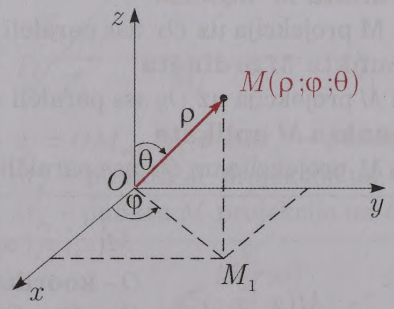
$\vec{i} \perp \vec{j},\ \vec{i} \perp \vec{k},\ \vec{j} \perp \vec{k}$

Oxy, Oxz, Oyz – koordinātu plaknes

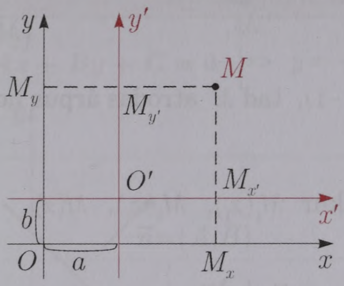
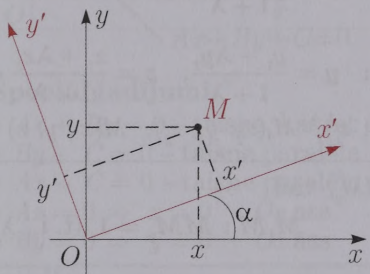
$x = OM_x$ – punkta M abscisa
(M_x – punkta M projekcija uz Ox ass paralēli Oyz plaknei),
$y = OM_y$ – punkta M ordināta
(M_y – punkta M projekcija uz Oy ass paralēli Oxz plaknei),
$z = OM_z$ – punkta M aplikāta
(M_z – punkta M projekcija uz Oz ass paralēli Oxy plaknei)
</td>
</tr>
<tr>
<td>Dekarta slīpleņķa koordinātu sistēma telpā</td>
<td>


$M(x_1;\ x_2;\ x_3)$
O – koordinātu sākumpunkts
Ox_1, Ox_2, Ox_3 – koordinātu asis
$\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ – bāzes vektori (nekomplanāri)
Ox_1x_2, Ox_1x_3, Ox_2x_3 – koordinātu plaknes

$x_i = OM_{x_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ – punkta M koordinātas
(M_{x_1} – punkta M projekcija uz Ox_1 ass paralēli Ox_2x_3 plaknei;
M_{x_2} – punkta M projekcija uz Ox_2 ass paralēli Ox_1x_3 plaknei;
M_{x_3} – punkta M projekcija uz Ox_3 ass paralēli Ox_1x_2 plaknei)
</td>
</tr>
</table>

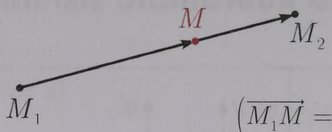
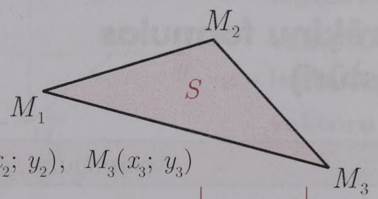
Cilindriskā koordinātu sistēma	 $M(r;\ \varphi;\ z)$ O – koordinātu sākumpunkts $r = \lvert\overrightarrow{OM_1}\rvert$ (M_1 – punkta M projekcija Oxy plaknē) **φ – leņķis starp Ox asi un vektoru OM_1** (pozitīvais atskaites virziens no Ox ass pretēji pulksteņa rādītāju kustības virzienam) z – punkta M aplikāta **Galvenās r, φ, z vērtības:** $0 \leqslant r < \infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty$
Sakarības starp punkta M Dekarta koordinātām x, y, z un cilindriskajām koordinātām r, φ, z	$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$ $0 \leqslant r < \infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty$
Sfēriskā koordinātu sistēma	 $M\,(\rho,\ \varphi,\ \theta\,)$ $\rho = \lvert\overrightarrow{OM}\rvert$ – punkta M attālums līdz punktam O **θ – leņķis starp Oz asi un vektoru $\overrightarrow{OM}$** **φ – leņķis starp Ox asi un vektoru $\overrightarrow{OM_1}$** (M_1 – punkta M projekcija Oxy plaknē; leņķa φ pozitīvais atskaites virziens no Ox ass pretēji pulksteņa rādītāju kustības virzienam). **Galvenās ρ, φ, θ vērtības:** $0 \leqslant \rho < \infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$
Sakarības starp punkta M Dekarta koordinātām x; y; z un sfēriskajām koordinātām ρ, φ, θ	$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$ $0 \leqslant \rho < +\infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

Dekarta koordinātu sistēmas transformācijas plaknē

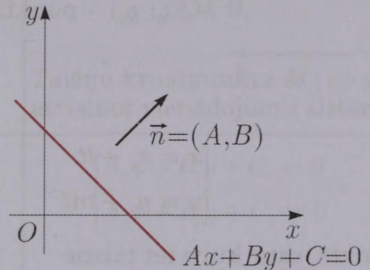
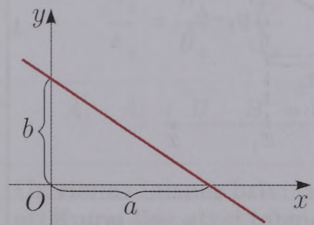
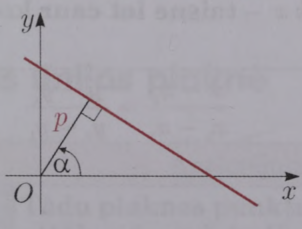
Paralēlā pārnese		$Ox \parallel O'x'$, $Oy \parallel O'y'$, $O'(a; b)$ Ja (x, y) – punkta M koordinātas sistēmā Oxy, bet (x', y') – M koordinātas sistēmā $O'x'y'$, tad $\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases}$ $\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases}$
Koordinātu asu pagrieziens		$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$ $\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$
Koordinātu sistēmas paralēlā pārnese un pagrieziens	$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + a \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + b \end{cases}$	$\begin{cases} x' = (x - a)\cos\alpha + (y - b)\sin\alpha \\ y' = -(x - a)\sin\alpha + (y - b)\cos\alpha \end{cases}$

5.3. Dažas aprēķinu formulas (nogriežņi, trijstūri)

Nosaukums	Apzīmējumi, ilustrācija, paskaidrojumi
Attālums d starp diviem punktiem M_1 un M_2	M_1 un M_2 – taisnes nogriežņa galapunkti
• **uz taisnes**	Ja $M_1(x_1)$ un $M_2(x_2)$, tad $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = \lvert x_2 - x_1 \rvert$
• **plaknē**	Ja $M_1(x_1; y_1)$ un $M_2(x_2; y_2)$, tad $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
• **telpā**	Ja $M_1(x_1; y_1; z_1)$ un $M_2(x_2; y_2; z_2)$, tad $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

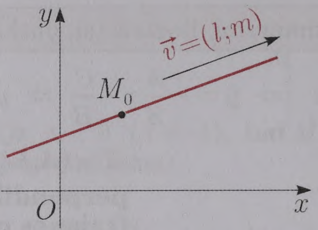
Nogriežņa M_1M_2 dalīšana dotajā attiecībā λ; punkta M koordinātas	$M_1M : MM_2 = \lambda$  $\left(\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}\right)$ (ja $\lambda < 0$ $(\lambda \neq -1)$, tad M atrodas ārpus nogriežņa – uz tā pagarinājuma)
• **uz taisnes**	$x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, kur $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$, $M(x)$
• **plaknē**	$x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$; $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$, kur $M_1(x_1;\, y_1)$, $M_2(x_2;\, y_2)$, $M(x;\, y)$
• **telpā**	$x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$; $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$; $z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$, kur $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$, $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$, $M(x;\, y;\, z)$
Nogriežņa viduspunkta M koordinātas	Ja $M_1M = MM_2$, tad $M_1M : MM_2 = 1$ (t. i., $\lambda = 1$)
• **uz taisnes**	$x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$
• **plaknē**	$x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$
• **telpā**	$x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$; $z = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$
Trijstūra laukums S, ja dotas virsotņu koordinātas • **plaknē**	 $M_1(x_1;\, y_1)$, $M_2(x_2;\, y_2)$, $M_3(x_3;\, y_3)$ $S = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$
• **telpā**	$M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$, $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$, $M_3(x_3;\, y_3;\, z_3)$ $S = \dfrac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2}$ (Determinantu aprēķināšanu sk. 35. lpp.)
Trijstūra masas centrs $M_c(x_c;\, y_c)$	$x_c = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$; $y_c = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$

5.4. Taisne plaknē

Nosaukums	Apzīmējumi, ilustrācija, paskaidrojumi
Taisnes vispārīgais vienādojums	$\boldsymbol{Ax+By+C=0}$ $\left(\Rightarrow\ y=-\dfrac{A}{B}x-\dfrac{C}{B}\ \Rightarrow\ y=kx+b\right)$  $\vec{n}=(A;B)$ **– vektors, kas perpendikulārs taisnei (taisnes normālvektors)** **Speciālgadījumi**: • $Ax+By=0$ – taisne, kas iet caur koordinātu sākumpunktu • $By+C=0$ – taisne paralēla Ox asij • $Ax+C=0$ – taisne paralēla Oy asij • $Ax=0 \Rightarrow x=0$ – Oy ass • $By=0 \Rightarrow y=0$ – Ox ass
Taisnes vienādojums asu nogriežņos	 $\boldsymbol{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1}$ Taisne, kas krusto Ox asi punktā $(a;\ 0)$ un Oy asi punktā $(0;\ b)$
Taisnes normāl-vienādojums	$\boldsymbol{x\cdot\cos\alpha+y\cdot\sin\alpha-p=0}$  $\alpha=\sphericalangle(\vec{n};\ Ox)$ – leņķis starp normāli un Ox ass pozitīvo virzienu p **– attālums no koordinātu sākumpunkta līdz taisnei**
Sakarība starp taisnes vispārīgo vienādojumu un normāl-vienādojumu	Vienādojumu normālformā iegūst, pareizinot vispārīgo taisnes vienādojumu $Ax+By+C=0$ ar **normējošo reizinātāju** $\mu=\dfrac{\pm1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ Reizinātāja zīme tiek ņemta pretēja C zīmei, t. i., $\cos\alpha=\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}};\ \sin\alpha=\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}};\ p=\dfrac{-C}{\sqrt{A^2+B^2}}$

<table>
<tr>
<td>Taisnes kanoniskais vienādojums</td>
<td>

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}$$

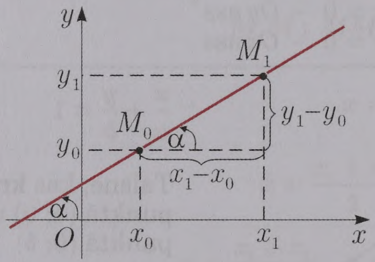


$\vec{v}=(l;m)$ – **taisnei paralēls vektors (taisnes virziena vektors)**
$M_0(x_0;\ y_0)$ – punkts, caur kuru iet taisne
</td>
</tr>
<tr>
<td>Taisnes parametriskie vienādojumi</td>
<td>

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \end{cases}$$

$M_0(x_0;\ y_0)$ – punkts, caur kuru iet taisne
$\vec{v}=(l;m)$ – **taisnes virziena vektors**
t – parametrs $(-\infty < t < +\infty)$
</td>
</tr>
<tr>
<td>Taisnes vienādojums ar virziena koeficientu</td>
<td>

$$y-y_0=k\,(x-x_0)$$



Taisnes virziena koeficients

$$k=tg\,\alpha=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$$
</td>
</tr>
<tr>
<td>Taisnes atklātais vienādojums</td>
<td>

$$y=kx+b,$$

kur $k=\text{tg}\,\alpha$ – taisnes virziena koeficients
b – taisnes un Oy ass krustpunkta ordināta
Ja $b=0 \Rightarrow y=kx$ – **taisne iet caur koordinātu sākumpunktu**.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Taisnes vienādojums caur diviem punktiem
$M_1(x_1;\ y_1)$ un $M_2(x_2;\ y_2)$</td>
<td>

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$
</td>
</tr>
<tr>
<td>Attālums d no punkta $M^*(x^*;\ y^*)$ līdz taisnei</td>
<td>

- Ja taisnes vienādojums

$Ax+By+C=0$, tad

$$d=\frac{|Ax^*+By^*+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

- Ja taisnes vienādojums

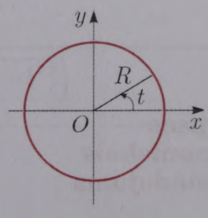
$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$, tad

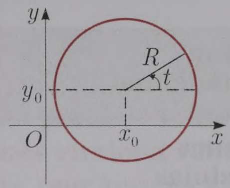
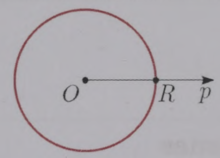
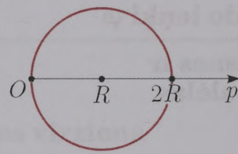
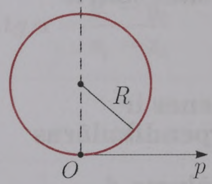
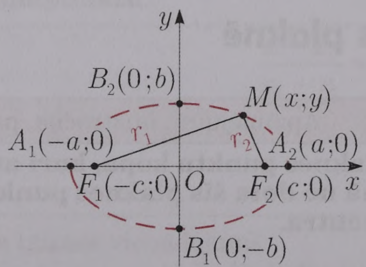
$$d=|x^*\cos\alpha+y^*\sin\alpha-p|$$
</td>
</tr>
</table>

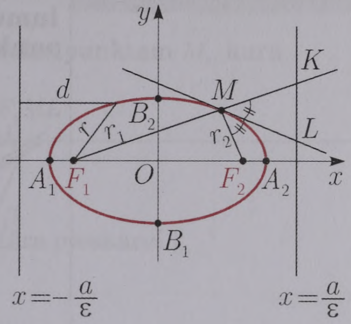
Divu taišņu savstarpējais novietojums

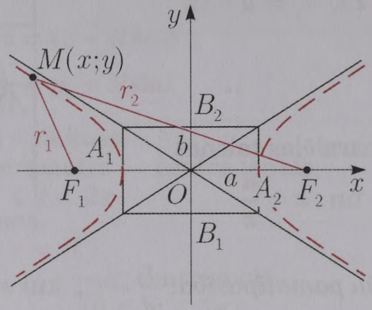
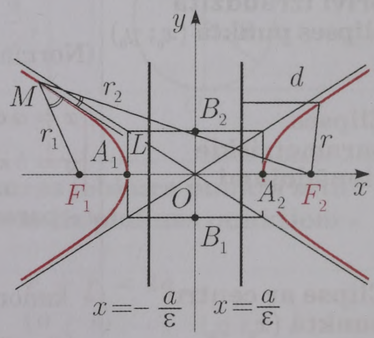
Taišņu vienādojumi	$A_1x + B_1y + C_1 = 0$ $A_2x + B_2y + C_2 = 0$	$y = k_1x + b_1$ $y = k_2x + b_2$
Taisnes krustojas	$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$	$k_1 \neq k_2$
	Taišņu krustpunkta $M_0(x_0; y_0)$ koordinātas x_0, y_0 iegūst, atrisinot vienādojumu sistēmu	
	$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases}$
Taisnes krustojoties veido leņķi φ	$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$	$\mathrm{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$
Taisnes ir paralēlas	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$	$k_1 = k_2$
Taisnes sakrīt	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$	$k_1 = k_2,\ b_1 = b_2$
Taisnes ir perpendikulāras	$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$	$k_1 \cdot k_2 = -1$
Attālums d starp divām paralēlām taisnēm	Uz vienas taisnes brīvi izraugās punktu $M^*(x^*; y^*)$ un atrod tā attālumu līdz otrai taisnei (sk. 76. lpp.).	

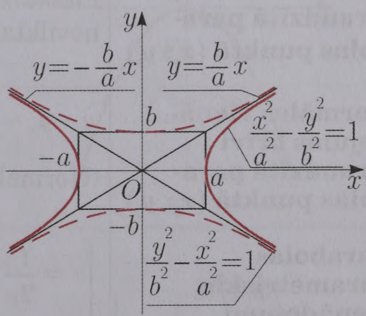
5.5. Otrās kārtas līnijas plaknē

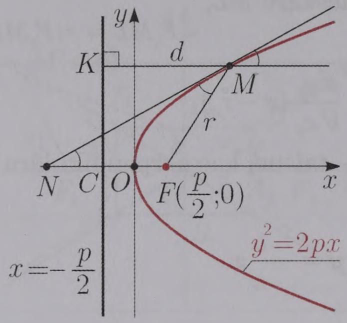
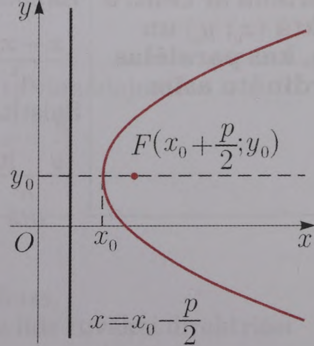
Nosaukums	Apzīmējumi, ilustrācija, paskaidrojumi
Riņķa līnija (r. l.)	**Tādu plaknes punktu kopa, kuri atrodas vienādā dotā attālumā no dota šīs plaknes punkta – riņķa līnijas centra.**
Kanoniskais vienādojums r. l. ar centru punktā $O(0; 0)$	$x^2 + y^2 = R^2$, R – rādiuss
Parametriskie vienādojumi r. l. ar centru punktā $O(0; 0)$	$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$ R – rādiuss; parametrs t – centra leņķis; t galvenās vērtības: $0 \leqslant t < 2\pi$ 

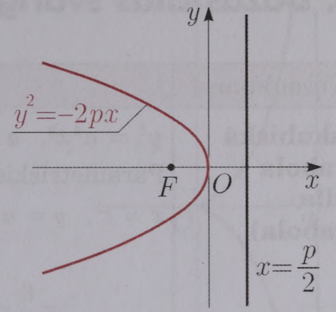
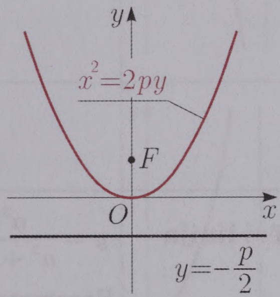
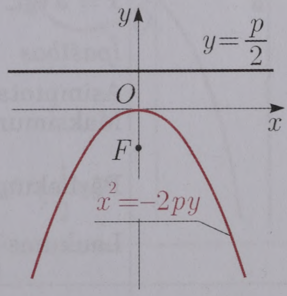
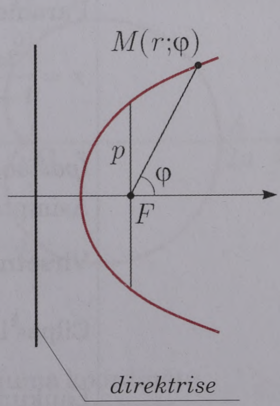
Kanoniskais vienādojums r. l. ar centru punktā $(x_0; y_0)$	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ R – rādiuss	
Parametriskie vienādojumi r. l. ar centru punktā $(x_0; y_0)$	$\begin{cases} x = x_0 + R\cos t \\ y = y_0 + R\sin t \end{cases}$ R – rādiuss; parametrs t – centra leņķis; $0 \leqslant t < 2\pi$	
Polārie vienādojumi (R – r. l. rādiuss)	• $r = R$ – ar centru polā $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$	
	• $r = 2R\cos\varphi$ – ar centru uz polārās ass; r. l. iet caur polu $\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$	
	• $r = 2R\sin\varphi$ – ar centru uz stara $\varphi = \frac{\pi}{2}$; r. l. iet caur polu $(0 \leqslant \varphi < \pi)$	
Elipse	**Tādu plaknes punktu kopa, kuras jebkura punkta attālumu summa līdz diviem dotiem šīs plaknes punktiem – fokusiem ir konstanta.**  $a^2 - c^2 = b^2$ $r_1 + r_2 = 2a$ $(a > c)$ $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$ – **fokusi** $A_1A_2 = 2a$ – **lielā ass**, $B_1B_2 = 2b$ – **mazā ass** O – **elipses centrs** A_1, A_2, B_1, B_2 – **virsotnes** $r_1 = F_1M$ un $r_2 = F_2M$ – **fokālie radiusi**	
Elipses kanoniskais vienādojums	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ a – lielā pusass b – mazā pusass	

Ekscentricitāte	$\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1$ 
Fokālie rādiusi	$r_1 = a + \varepsilon x,\ r_2 = a - \varepsilon x$
Fokālais parametrs	$p = \dfrac{b^2}{a}$
Direktrises	Oy asij paralēlas taisnes $x = -\dfrac{a}{\varepsilon}$ un $x = \dfrac{a}{\varepsilon}$ *Direktrišu pamatīpašība*: $\dfrac{r}{d} = \varepsilon$, kur ε – ekscentricitāte, r – elipses punkta fokālais rādiuss, d – attālums no punkta līdz tuvākajai direktrisei.
Pieskares vienādojums brīvi izraudzītā elipses punktā $(x_0; y_0)$	$\dfrac{x \cdot x_0}{a^2} + \dfrac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$ *Pieskares īpašība*: jebkuram elipses punktam M, kurā novilkta pieskare, $\sphericalangle F_2ML = \sphericalangle LMK$
Normāles vienādojums brīvi izraudzītā elipses punktā $(x_0; y_0)$	$y - y_0 = \dfrac{a^2 y_0}{b^2 x_0}(x - x_0)$ (Normāle – taisne, kas perpendikulāra pieskarei.)
Elipses parametriskie vienādojumi	$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ t – parametrs; $0 \leqslant t < 2\pi$
Elipse ar centru punktā $(x_0; y_0)$ un asīm, kas paralēlas koordinātu asīm	• kanoniskais vienādojums: $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ • parametriskie vienādojumi: $\begin{cases} x = x_0 + a\cos t \\ y = y_0 + b\sin t \end{cases}$ $0 \leqslant t < 2\pi$
Elipses garums	$s \approx \pi\left(1,5(a + b) - \sqrt{ab}\right)$; $s \approx \dfrac{\pi}{2}\left(a + b + \sqrt{2(a^2 + b^2)}\right)$
Elipses ierobežotais laukums	$S = \pi ab$

Hiperbola	**Tādu plaknes punktu kopa, kuras jebkura punkta attālumu starpības modulis līdz diviem dotiem šīs plaknes punktiem – fokusiem ir konstants.**  $\lvert r_1 - r_2 \rvert = 2a$ $(0 < a < c)$ $F_1(-c;\,0)$, $F_2(c;\,0)$ – **fokusi** $A_1A_2 = 2a$ – **reālā ass** $B_1B_2 = 2b$ – **imaginārā ass** O – hiperbolas **centrs** A_1 un A_2 – **virsotnes** $r_1 = F_1M$ un $r_2 = F_2M$ – **fokālie rādiusi** $c^2 - a^2 = b^2$
Hiperbolas kanoniskais vienādojums	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ a – reālā pusass b – imaginārā pusass Ja $a = b$, **vienādsānu hiperbola**: $x^2 - y^2 = a^2$
Ekscentricitāte	$\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1$ 
Fokālie rādiusi	$r_1 = \varepsilon x + a$, $r_2 = \varepsilon x - a$ – labajam zaram $r_1 = -(\varepsilon x + a)$, $r_2 = -(\varepsilon x - a)$ – kreisajam zaram
Fokālais parametrs	$p = \dfrac{b^2}{a}$
Direktrises	Imaginārai asij paralēlas taisnes; to vienādojumi $x = -\dfrac{a}{\varepsilon}$, $x = \dfrac{a}{\varepsilon}$ *Direktrišu pamatīpašība:* $\dfrac{r}{d} = \varepsilon$, kur ε – ekscentricitāte, r – hiperbolas punkta fokālais rādiuss, d – attālums no hiperbolas punkta līdz tuvākai direktrisei.

Pieskares vienādojums brīvi izraudzītā hiperbolas punktā $(x_0;\ y_0)$	$\dfrac{x \cdot x_0}{a^2} - \dfrac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$ *Pieskares īpašība*: jebkuram hiperbolas punktam M, kurā novilkta pieskare ML, $\sphericalangle F_1ML = \sphericalangle F_2ML$
Normāles vienādojums brīvi izraudzītā hiperbolas punktā $(x_0;\ y_0)$	$y - y_0 = -\dfrac{a^2 y_0}{b^2 x_0}(x - x_0)$ (Normāle – taisne, kas perpendikulāra pieskarei.)
Hiperbolas asimptotu vienādojumi	$y = \dfrac{b}{a}x, \quad y = -\dfrac{b}{a}x$
Hiperbolas $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ parametriskie vienādojumi	$\begin{cases} x = \pm a \operatorname{ch} t \\ y = b \operatorname{sh} t \end{cases}$ Vienādsānu hiperbolai: $\begin{cases} x = \pm a \operatorname{ch} t \\ y = a \operatorname{sh} t \end{cases}$
Savstarpēji saistītas hiperbolas	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ un $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ jeb $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$ **Savstarpēji saistītām hiperbolām ir** • kopīgas asimptotas • kopīgas simetrijas asis • kopīgs simetrijas centrs 
Hiperbola ar centru punktā $(x_0;\ y_0)$ un asīm, kas paralēlas koordinātu asīm	Kanoniskais vienādojums $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ Saistītās hiperbolas kanoniskais vienādojums $\dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} - \dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} = 1$

Parabola	**Tādu plaknes punktu kopa, kuras jebkurš punkts atrodas vienādā attālumā no dotā šīs plaknes punkta – fokusa un dotās taisnes – direktrises.**  $r = d$ $CF = p$ – parabolas parametrs $F(\frac{p}{2}; 0)$ – **fokuss** taisne KC – **direktrise** OF – parabolas ass O – virsotne $r = FM$ – fokālais rādiuss
Parabolas kanoniskais vienādojums	$y^2 = 2px$
Ekscentricitāte	$\varepsilon = \frac{r}{d} = 1$
Fokālais rādiuss	$r = x + \frac{p}{2}$
Direktrises vienādojums	$x = -\frac{p}{2}$
Pieskares vienādojums brīvi izraudzītā parabolas punktā $(x_0; y_0)$	$y \cdot y_0 = p \cdot (x + x_0)$ *Pieskares īpašība*: jebkuram parabolas punktam M, kurā novilkta pieskare MN, $\sphericalangle FMN = \sphericalangle FNM$
Normāles vienādojums brīvi izraudzītā parabolas punktā $(x_0; y_0)$	$y - y_0 = -\frac{y_0}{p}(x - x_0)$ (Normāle – taisne, kas perpendikulāra pieskarei.)
Parabolas parametriskie vienādojumi	$\begin{cases} x = \frac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases}$
Parabolas kanoniskais vienādojums, ja tās virsotne atrodas punktā $(x_0; y_0)$ un simetrijas ass ir paralēla Ox asij	$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$ fokuss $F\left(x_0 + \frac{p}{2}; y_0\right)$ direktrise $x = x_0 - \frac{p}{2}$ 

Parabolas kanoniskā vienādojuma citi veidi	• $y^2 = -2px$ fokuss $F\left(-\frac{p}{2};0\right)$ direktrise $x = \frac{p}{2}$  • $x^2 = 2py$ fokuss $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$ direktrise $y = -\frac{p}{2}$  • $x^2 = -2py$ fokuss $F\left(0;-\frac{p}{2}\right)$ direktrise $y = \frac{p}{2}$ 
Elipses, hiperbolas, parabolas polārais vienādojums	$r = \dfrac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$, ε – ekscentricitāte p – fokālais parametrs (caur fokusu perpendikulāri polārai asij novilktas hordas puse). Polārās ass pols atrodas līnijas fokusā, polārā ass vērsta uz pretējo pusi no fokusam tuvākās direktrises (virsotnes). Vienādojums apraksta parabolu vai elipses loku (II un III kvadrantā), vai hiperbolas zaru (I un IV kvadrantā). 

5.6. Dažas citas svarīgākās līnijas plaknē

<table>
<tr><th>Nosaukums</th><th>Vienādojums, ilustrācija, paskaidrojumi</th></tr>
<tr><td>

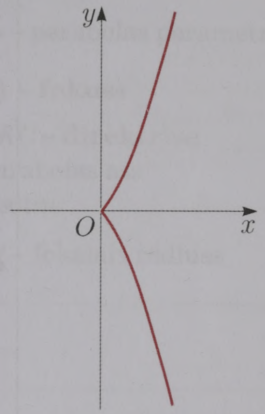
Puskubiskā parabola (Neila parabola)

</td><td>

$y^2 = a^2x^3, \quad a > 0$

Parametriskie vienādojumi

$x = t^2, \quad y = at^3$



</td></tr>
<tr><td>

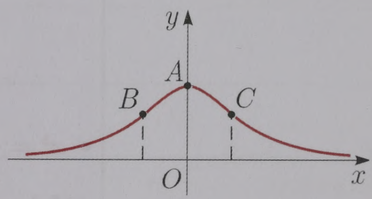
Anjēzi līnija

</td><td>

$y = \dfrac{a^3}{a^2 + x^2}, \quad a > 0$

Parametriskie vienādojumi

$x = a\,\mathrm{tg}\,t, \quad y = a\cos^2 t$



Īpašības

Asimptota $y = 0$
Maksimums $A(0;\ a)$

Pārliekuma punkti $B\left(\dfrac{-a}{\sqrt{3}};\dfrac{3a}{4}\right)$ un $C\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}};\dfrac{3a}{4}\right)$

Laukums starp līkni un Ox asi $S = \pi a^2$

</td></tr>
<tr><td>

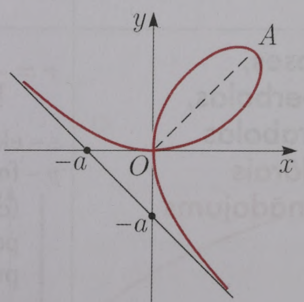
Dekarta lapa

</td><td>

$x^3 + y^3 = 3a\,x\,y, \quad a > 0$

Parametriskie vienādojumi

$x = \dfrac{3at}{1+t^3}, \quad y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$



Īpašības

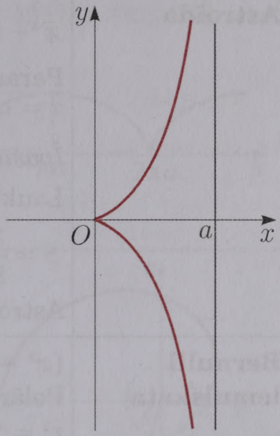
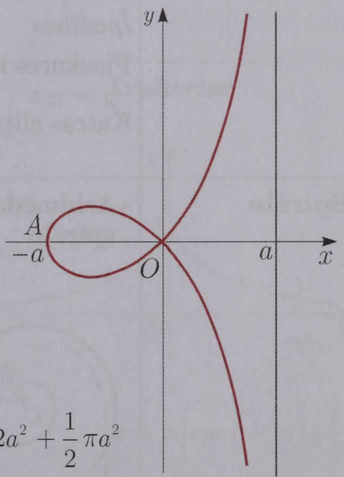
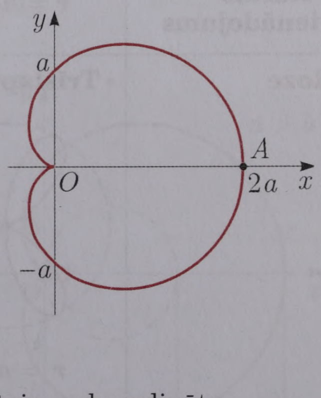
Asimptota $x + y + a = 0$

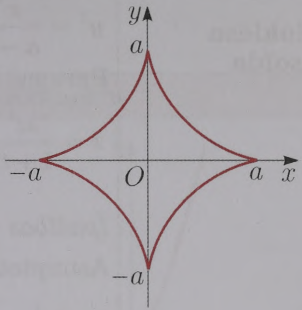
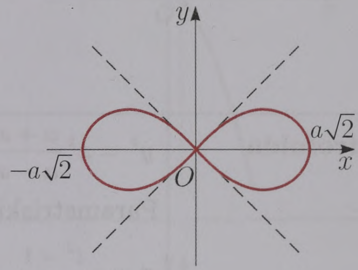
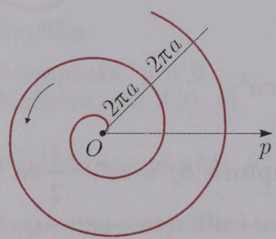
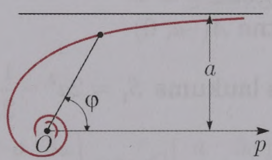
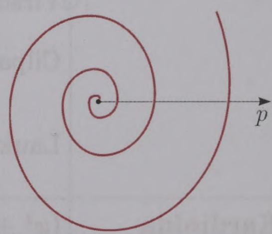
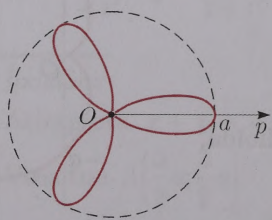
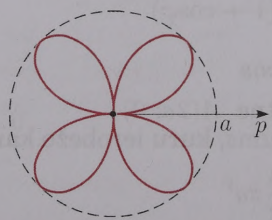
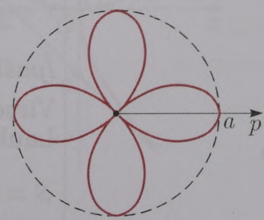
Virsotne $A\left(\dfrac{3}{2}a;\dfrac{3}{2}a\right)$

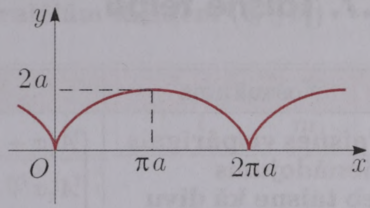
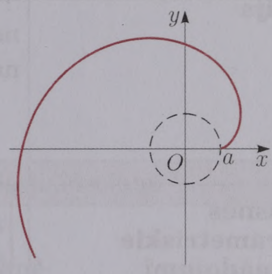
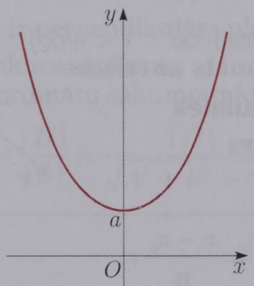
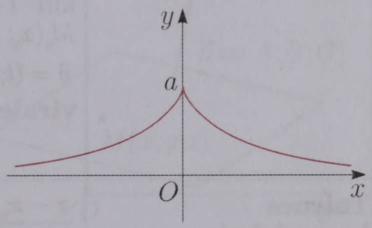
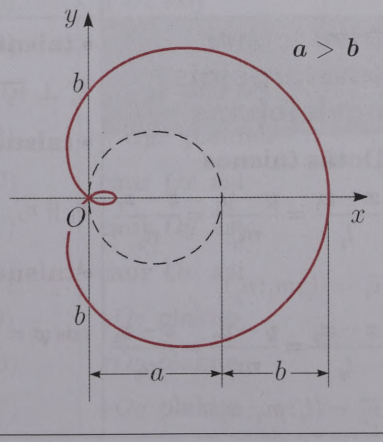
Cilpas laukums $S_1 = \dfrac{3}{2}a^2$

Laukums starp līkni un asimptotu $S_2 = \dfrac{3}{2}a^2$

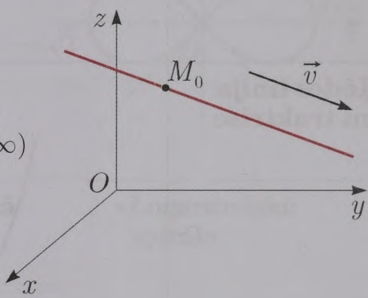
</td></tr>
</table>

Dioklēsa cisoīda	$y^2 = \dfrac{x^3}{a-x}$, $a > 0$ Parametriskie vienādojumi $x = \dfrac{at^2}{1+t^2}$, $y = \dfrac{at^3}{1+t^2}$ *Īpašības* Asimptota $x = a$ Laukums starp līkni un asimptotu $S = \dfrac{3}{4}\pi a^2$	
Strofoīda	$y^2 = x^2\,\dfrac{a+x}{a-x}$, $a > 0$ Parametriskie vienādojumi $x = a\,\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$, $y = at\,\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$ *Īpašības* Asimptota $x = a$ Virsotne $A(-a;\,0)$ Cilpas laukums $S_1 = 2a^2 - \dfrac{1}{2}\pi a^2$ Laukums starp līkni un asimptotu $S_2 = 2a^2 + \dfrac{1}{2}\pi a^2$	
Kardioīda	$(x^2 + y^2)^2 - 2ax\,(x^2 + y^2) = a^2y^2$, $a > 0$ Parametriskie vienādojumi $x = a\cos t\,(1 + \cos t)$, $y = a\sin t\,(1 + \cos t)$, $0 \leqslant t < 2\pi$ Polārais vienādojums $r = a(1 + \cos\varphi)$ *Īpašības* Virsotne $A(2a;\,0)$ Laukums, kuru ierobežo kardioīda, $S = \dfrac{3}{2}\pi a^2$ Kardioīdas līknes garums $s = 8a$ P i e z ī m e. Atkarībā no kardioīdas novietojuma koordinātu plaknē iespējami arī citi šīs līnijas vienādojumi, piemēram, polārais vienādojums $r = a(1 + \sin\varphi)$, parametriskie vienādojumi $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$.	

Astroīda	$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, $a>0$ Parametriskie vienādojumi $x=a\cos^3 t,\quad y=a\sin^3 t$ *Īpašības* Laukums, ko ierobežo astroīda, $S=\frac{3}{8}\pi a^2$ Astroīdas līknes garums $s=6a$		
Bernulli lemniskata	$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0$, $a>0$ Polārais vienādojums $r^2=2a^2\cos 2\varphi$ *Īpašības* Pieskares koordinātu sākumpunktā $y=\pm x$ Katras cilpas laukums $S=a^2$		
Spirāle	• **Arhimēda spirāle** 	• **Hiperboliskā spirāle** 	• **Logaritmiskā spirāle** 
Polārais vienādojums	$r=a\varphi\quad(a>0)$	$r=\frac{a}{\varphi}\quad(a>0)$	$r=a^{\varphi}\quad(a>0)$
Roze	• **Trīslapu roze**  $r=a\sin 3\varphi$	• **Četrlapu roze**  $r=a\sin 2\varphi$	• **Četrlapu roze**  $r=a\cos 2\varphi$
Polārais vienādojums	Ja vienādojumā $r=a\sin k\varphi$ • $k=2n+1\ (n\in\mathbb{N})$ – rozei ir $2n+1$ lapas; • $k=2n$ – rozei ir $4n$ lapas.		

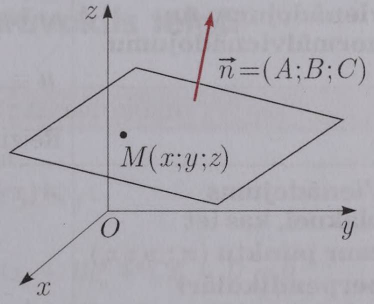
Cikloīda	Parametriskie vienādojumi $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \quad a > 0$ *Īpašības* Vienas arkas loka garums $s = 8a$ Laukums zem vienas arkas $S = 3\pi a^2$ 
Riņķa evolvente	Parametriskie vienādojumi $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}$ 
Ķēdes līnija un traktrise	**Ķēdes līnija**  $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ **Traktrise**  $\begin{cases} x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}\right) \\ y = a \sin t \end{cases}$ Piezīme. Traktrise – ķēdes līnijas evolvente.
Paskāla līkne	$(x^2 + y^2 - ax)^2 = b^2(x^2 + y^2), \quad a > 0, \; b > 0$ Parametriskie vienādojumi $\begin{cases} x = a \cos^2 t + b \cos t \\ y = a \cos t \sin t + b \sin t \end{cases}$ Polārais vienādojums $r = a \cos\varphi + b$ (a – riņķa līnijas diametrs) *Īpašības* Iespējamas dažādas sakarības starp a un b, piemēram, $a \leqslant \frac{b}{2}$, $a < b < 2a$, $\boldsymbol{a > b}$ (sk. zīm.). Katrā gadījumā līknes forma ir atšķirīga. Ja $a = b$ – kardioīda. 

5.7. Taisne telpā

Nosaukums	Vienādojums, ilustrācija, paskaidrojumi
Taisnes vispārīgais vienādojums jeb taisne kā divu plakņu šķēluma līnija	$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ Abas plaknes šķeļas (t.i., definē taisni) tikai tad, ja to normālvektori $\vec{n_1}=(A_1;B_1;C_1)$ un $\vec{n_2}=(A_2;B_2;C_2)$ nav kolineāri, t. i., ja $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$
Taisnes parametriskie vienādojumi	$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt\,, \end{cases}$  kur t – parametrs $(-\infty<t<+\infty)$ $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ – punkts uz taisnes $\vec{v}=(l;m;n)$ **– taisnes virziena vektors**
Taisnes kanoniskais vienādojums	$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$, kur $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ – punkts uz taisnes $\vec{v}=(l;m;n)$ – taisnes virziena vektors
Taisne caur diviem dotiem punktiem $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ un $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ taisnes virziena vektors $\vec{v}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1)$
Divu taišņu savstarpējais novietojums **Dotās taisnes** $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ $\vec{v_1}=(l_1;m_1;n_1)$ $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$ $\vec{v_2}=(l_2;m_2;n_2)$	• **taisnes ir perpendikulāras**, ja $\vec{v_1}\perp\vec{v_2}$ jeb $l_1\cdot l_2+m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2=0$ • **taisnes ir paralēlas**, ja $\vec{v_1}\parallel\vec{v_2}$ jeb $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$ • **taisnes veido leņķi** φ, ja $\cos\varphi=\frac{l_1\cdot l_2+m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$

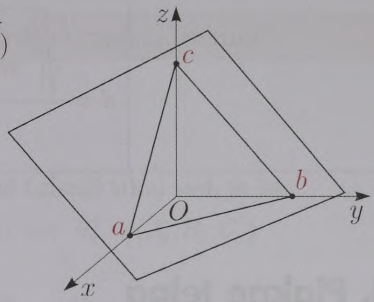
	• **attālums d starp divām paralēlām taisnēm** $(\vec{v_1} \parallel \vec{v_2})$ $d = \dfrac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ n_1 & l_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ l_1 & m_1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}}$

5.8. Plakne telpā

Nosaukums	Vienādojums, ilustrācija, paskaidrojumi
Plaknes vispārīgais vienādojums	$Ax + By + Cz + D = 0$ $M(x;\ y;\ z)$ – brīvi izraudzīts punkts plaknē $\vec{n} = (A; B; C)$ – **plaknes normālvektors** ($\vec{n}$ ir perpendikulārs plaknei) Plaknes attālums d no koordinātu sākumpunkta $d = \dfrac{\lvert D \rvert}{\lvert \vec{n} \rvert} = \dfrac{\lvert D \rvert}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ 

Speciālgadījumi – plaknes nepilnie vienādojumi

vienādojums	$\vec{n}$	plakne
$Ax + By + Cz = 0$	$\vec{n} = (A; B; C)$	caur punktu $O(0;\ 0;\ 0)$
$By + Cz + D = 0$	$\vec{n} = (0; B; C)$	$\parallel$ Ox asij
$Ax + Cz + D = 0$	$\vec{n} = (A; 0; C)$	$\parallel$ Oy asij
$Ax + By + D = 0$	$\vec{n} = (A; B; 0)$	$\parallel$ Oz asij
$Cz + D = 0$	$\vec{n} = (0; 0; C)$	$\parallel$ Oxy plaknei
$By + D = 0$	$\vec{n} = (0; B; 0)$	$\parallel$ Oxz plaknei
$Ax + D = 0$	$\vec{n} = (A; 0; 0)$	$\parallel$ Oyz plaknei
$By + Cz = 0$	$\vec{n} = (0; B; C)$	caur Ox asi
$Ax + Cz = 0$	$\vec{n} = (A; 0; C)$	caur Oy asi
$Ax + By = 0$	$\vec{n} = (A; B; 0)$	caur Oz asi
$Ax = 0 \Rightarrow x = 0$	$\vec{n} = (A; 0; 0)$	yOz plakne
$By = 0 \Rightarrow y = 0$	$\vec{n} = (0; B; 0)$	xOz plakne
$Cz = 0 \Rightarrow z = 0$	$\vec{n} = (0; 0; C)$	xOy plakne

Plaknes vienādojums koordinātu asu nogriežņos	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ – plakne iet caur punktiem $(a;\ 0;\ 0)$, $(0;\ b;\ 0)$, $(0;\ 0;\ c)$ 
Plaknes normālvienādojums	$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$, kur α, β, γ – plaknes normālvektora un koordinātu asu veidotie leņķi p – attālums no koordinātu sākumpunkta līdz plaknei
Sakarība starp plaknes vispārīgo vienādojumu un normālvienādojumu	Plaknes normālvienādojumu iegūst, reizinot plaknes vispārīgo vienādojumu $Ax + By + Cz + D = 0$ ar **normējošo reizinātāju** $\mu = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ Reizinātāja μ zīme ir pretēja D zīmei.
Vienādojums plaknei, kas iet caur punktu $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ perpendikulāri vektoram $(A;\ B;\ C)$	$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$
Vienādojums plaknei, kas iet caur punktu $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ un ir paralēla diviem nekolineāriem vektoriem $(l_1;\ m_1;\ n_1)$ un $(l_2;\ m_2;\ n_2)$	$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$ (Punkts $M(x;\ y;\ z)$ – brīvi izraudzīts plaknes punkts.) Determinantu aprēķina, izvirzot pēc pirmās rindas.
Vienādojums plaknei, kas iet caur trim punktiem $(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $(x_3;\ y_3;\ z_3)$	$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$ (Punkts $M(x;\ y;\ z)$ – brīvi izraudzīts plaknes punkts.) Determinantu aprēķina, izvirzot pēc pirmās rindas.
Attālums no punkta $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ līdz plaknei $Ax + By + Cz + D = 0$	$d = \frac{\lvert Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

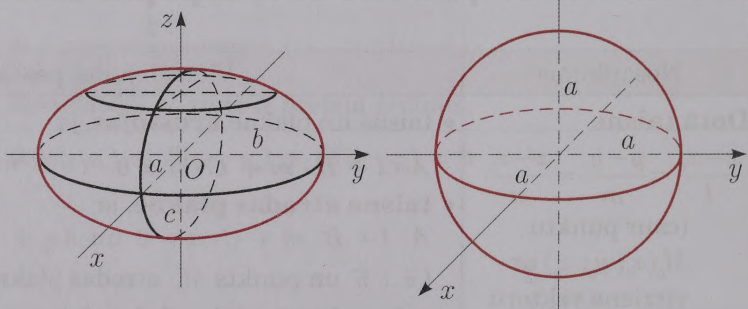
Divu plakņu savstarpējais novietojums Dotās plaknes $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ (normālvektors $\vec{n_1}=(A_1;B_1;C_1)$) $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ (normālvektors $\vec{n_2}=(A_2;B_2;C_2)$)	• **plaknes ir perpendikulāras**, ja $A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2=0 \quad (\vec{n_1}\perp\vec{n_2})$ • **plaknes ir paralēlas**, ja $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2} \quad (\vec{n_1}\parallel\vec{n_2})$ • **plaknes ir sakrītošas**, ja $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2} \quad (\vec{n_1}\parallel\vec{n_2})$ • **plaknes veido leņķi** φ, ja $\cos\varphi=\frac{A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$ • attālums d starp divām paralēlām plaknēm $Ax+By+Cz+D_1=0$ un $Ax+By+Cz+D_2=0$ $d=\frac{\lvert D_2-D_1\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

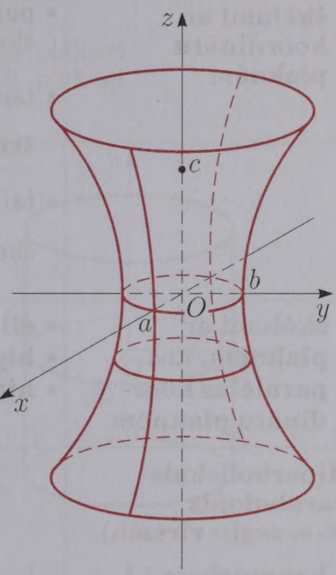
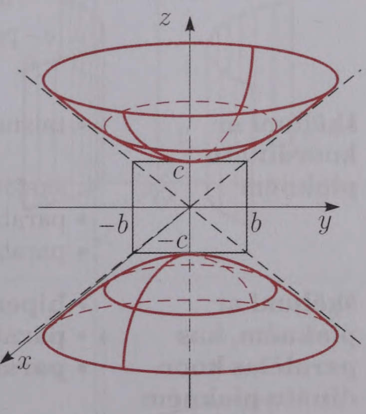
5.9. Taisnes un plaknes savstarpējais stāvoklis telpā

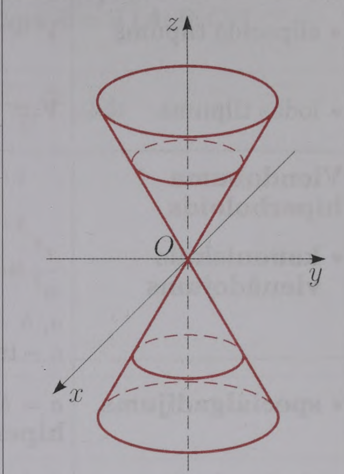
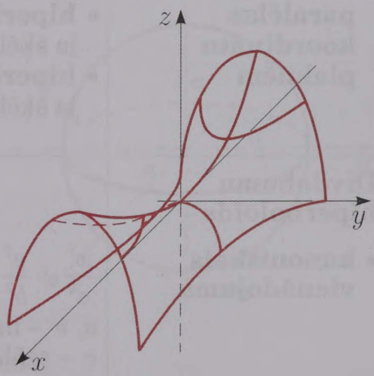
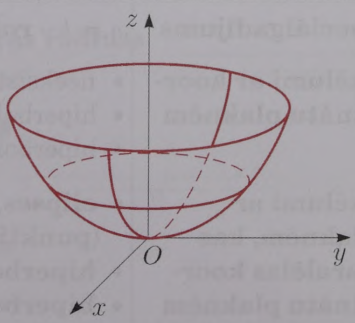
Nosaukums	Vienādojums, paskaidrojumi
Dotā taisne $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ (caur punktu $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ ar virziena vektoru $\vec{v}=(l;m;n)$) **un dotā plakne** $Ax+By+Cz+D=0$ (normālvektors $\vec{n}=(A;B;C)$)	• taisne un plakne **krustojas**, ja $A\cdot l+B\cdot m+C\cdot n\neq 0 \quad (\vec{v}\not\perp\vec{n})$ • **taisne atrodas plaknē**, ja $A\cdot l+B\cdot m+C\cdot n=0$ un $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$ ($\vec{v}\perp\vec{n}$ un punkts M_0 atrodas plaknē) • **taisne ir paralēla plaknei**, ja $A\cdot l+B\cdot m+C\cdot n=0$ un $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$ ($\vec{v}\perp\vec{n}$ un punkts M_0 nepieder plaknei) • **taisne un plakne ir perpendikulāras**, ja $\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n} \quad (\vec{v}\parallel\vec{n})$ • **taisne un plakne veido leņķi** φ, ja $\sin\varphi=\frac{\lvert Al+Bm+Cn\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$ Par leņķi starp taisni un plakni sauc leņķi, ko veido taisne ar savu projekciju dotajā plaknē. • **taisnes un plaknes krustpunkta koordinātas** ($\bar{x};\ \bar{y};\ \bar{z}$) **aprēķina šādi:** 1) atrod $t_0=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{A\cdot l+B\cdot m+C\cdot n}$ 2) atrod $\bar{x}=x_0-lt_0;\quad \bar{y}=y_0-mt_0;\quad \bar{z}=z_0-nt_0$

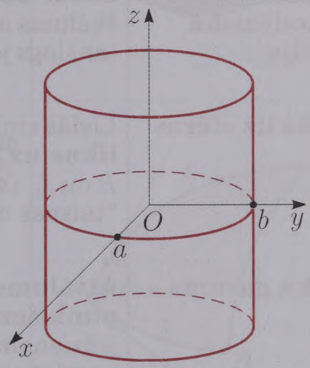
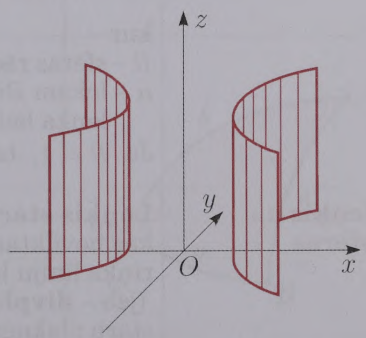
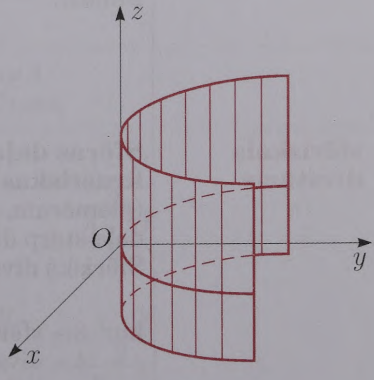
Vienādojums taisnei caur punktu $(x_0; y_0; z_0)$ **perpendikulāri plaknei** $Ax + By + Cz + D = 0$ ($\vec{n} = (A; B; C)$ – plaknes normālvektors)	Šajā gadījumā taisnes virziena vektors $\vec{v} = \vec{n}\,(A; B; C)$; tātad $$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}$$ jeb $$\begin{cases} x = x_0 + A \cdot t \\ y = y_0 + B \cdot t \\ z = z_0 + C \cdot t \end{cases}$$ (t – parametrs; $-\infty < t < \infty$)

5.10. Otrās kārtas virsmas

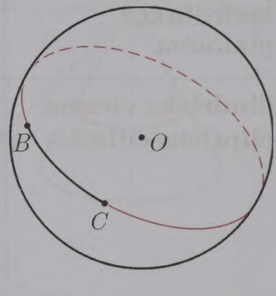
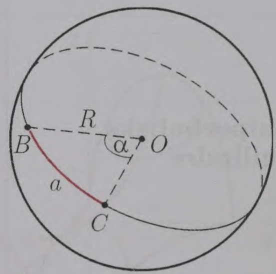
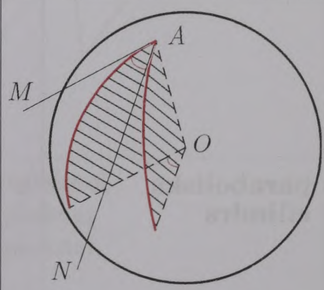
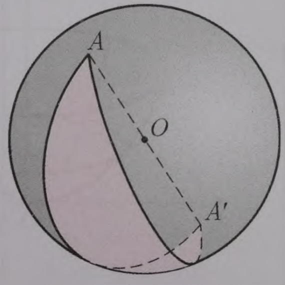
Nosaukums	Ilustrācija, vienādojums, apzīmējumi, paskaidrojumi
Elipsoīds un sfēra	
• **kanoniskais vienādojums**	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ a, b, c – pusasis
• **speciālgadījumi**	• $a \neq b \neq c$ – trīsasu elipsoīds • $a = b \neq c$ – rotācijas elipsoīds ap Oz asi • $a = c \neq b$ – rotācijas elipsoīds ap Oy asi • $b = c \neq a$ – rotācijas elipsoīds ap Ox asi • $a = b = c = R$ – sfēra (lodes virsma) **Sfēras kanoniskais vienādojums** $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ $O(0; 0; 0)$ – centrs; R – **sfēras rādiuss**
• **šķēlumi ar koordinātu plaknēm**	• šķeļot elipsoīdu – **elipses** • šķeļot sfēru – **riņķa līnijas**
• **šķēlumi ar plaknēm, kas paralēlas koordinātu plaknēm**	• šķeļot elipsoīdu – **elipses** • šķeļot sfēru – **riņķa līnijas**

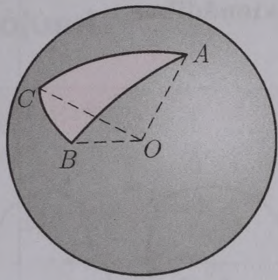
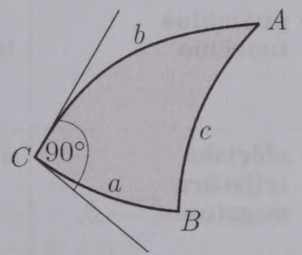
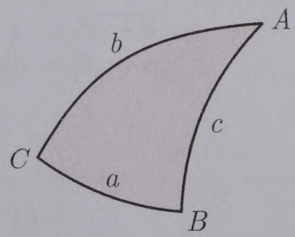
• elipsoīda tilpums	$V = \frac{4}{3}\pi abc$
• lodes tilpums	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$
Viendobuma hiperboloīds	
• **kanoniskais vienādojums**	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ a, b – reālās pusasis c – imaginārā pusass
• **speciālgadījums**	$a = b$ – **rotācijas viendobuma hiperboloīds** ap Oz asi
• **šķēlumi ar koordinātu plaknēm**	• elipse, šķeļot ar plakni $z = 0$ • hiperbola, šķeļot ar plakni $x = 0$ • hiperbola, šķeļot ar plakni $y = 0$
• **šķēlumi ar plaknēm, kas paralēlas koordinātu plaknēm**	• **elipses**, ja šķēlējplaknes || xOy plaknei • **hiperbolas**, ja šķēlējplaknes || yOz plaknei • **hiperbolas**, ja šķēlējplaknes || zOx plaknei
Divdobumu hiperboloīds	
• **kanoniskais vienādojums**	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ a, b – imaginārās pusasis c – reālā pusass
• **speciālgadījums**	$a = b$ – **rotācijas divdobumu hiperboloīds** ap Oz asi
• **šķēlumi ar koordinātu plaknēm**	• neeksistē šķēlums ar plakni $z = 0$ • hiperbola, šķeļot ar plakni $x = 0$ • hiperbola, šķeļot ar plakni $y = 0$
• **šķēlumi ar plaknēm, kas paralēlas koordinātu plaknēm**	• **elipses**, ja šķēlējplaknes ir $z = h$, kur $\|h\| > c$ (**punkti** $(0; 0; \pm c)$, ja $\|h\| = c$; šķēlumi neeksistē, ja $\|h\| < c$) • **hiperbolas**, ja šķēlējplaknes || yOz plaknei • **hiperbolas**, ja šķēlējplaknes || zOx plaknei

Konuss		
• **kanoniskais vienādojums**	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$	
• **speciālgadījums**	$a=b$ – rotācijas konuss ap Oz asi	
• **šķēlumi ar koordinātu plaknēm**	• punkts $(0;\ 0;\ 0)$, šķeļot ar plakni $z=0$ • taisnes $z=\pm\dfrac{c}{b}y$, šķeļot ar plakni $x=0$ • taisnes $z=\pm\dfrac{c}{a}x$, šķeļot ar plakni $y=0$	
• **šķēlumi ar plaknēm, kas paralēlas koordinātu plaknēm**	• **elipses**, ja šķēlējplaknes $\parallel xOy$ plaknei • **hiperbolas**, ja šķēlējplaknes $\parallel yOz$ plaknei • **hiperbolas**, ja šķēlējplaknes $\parallel zOx$ plaknei	
Hiperboliskais paraboloīds (t. s. seglu virsma)		
• **kanoniskais vienādojums**	$\dfrac{x^2}{p}-\dfrac{y^2}{q}=2z$ $p,\ q$ – parametri $p>0,\quad q>0$	
• **šķēlumi ar koordinātu plaknēm**	• taisnes $y=\pm\sqrt{\dfrac{q}{p}}\,x$, šķeļot ar plakni $z=0$ • parabola, šķeļot ar plakni $x=0$ • parabola, šķeļot ar plakni $y=0$	
• **šķēlumi ar plaknēm, kas paralēlas koordinātu plaknēm**	• **hiperbolas**, ja šķēlējplaknes $\parallel xOy$ plaknei • **parabolas**, ja šķēlējplaknes $\parallel yOz$ plaknei • **parabolas**, ja šķēlējplaknes $\parallel zOx$ plaknei	
Eliptiskais paraboloīds		
• **kanoniskais vienādojums**	$\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z$ $p,\ q$ – parametri $p>0,\quad q>0$	

• **speciālgadījums**	$p = q$ – rotācijas paraboloīds ap Oz asi
• **šķēlumi ar koordinātu plaknēm**	• punkts $(0;\ 0;\ 0)$, šķeļot ar plakni $z = 0$ • parabola, šķeļot ar plakni $x = 0$ • parabola, šķeļot ar plakni $y = 0$
• **šķēlumi ar plaknēm, kas paralēlas koordinātu plaknēm**	• **elipses**, ja šķēlējplaknes ir $z = h$, kur $h > 0$ (šķēlums neeksistē, ja h < 0) • **parabolas**, ja šķēlējplaknes $\parallel$ yOz plaknei • **parabolas**, ja šķēlējplaknes $\parallel$ zOx plaknei
Cilindriska virsma • **eliptisks cilindrs**	Virsma, kuru izveido Oz asij paralēla taisne – **veidotāja**, pārvietojoties pa xOy plaknes līniju – **vadītāju**: $\begin{cases} F(x;y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ Ja $a = b = R$, **taisns riņķa cilindrs** $x^2 + y^2 = R^2$ 
• **hiperbolisks cilindrs**	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 
• **parabolisks cilindrs**	$x^2 = 2py$  P i e z ī m e. Analogi definē cilindrisku virsmu, kuras vadītāja atrodas yOz plaknē, veidotāja paralēla Ox asij (virsmas vienādojums nesatur mainīgo x) un cilindrisku virsmu, kuras vadītāja atrodas zOx plaknē, veidotāja paralēla Oy asij (virsmas vienādojums nesatur mainīgo y).

6. SFĒRISKĀS ĢEOMETRIJAS UN SFĒRISKĀS TRIGONOMETRIJAS JĒDZIENI

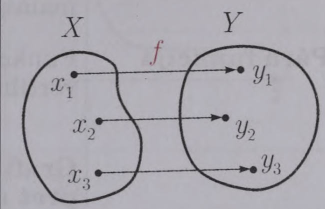
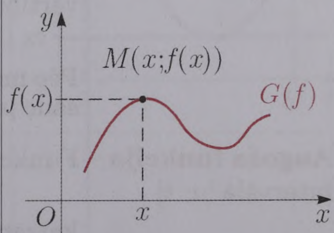
Nosaukums	Paskaidrojumi	Ilustrācija
Sfēriskā ģeometrija	Matemātikas nozare, kas pētī uz lodes virsmas (sfēras) esošu ģeometrijas objektu īpašības.	
Pamatelementi: • **sfēras ģeodēziskā līnija**	Sfēras **lielā riņķa līnija** – sfēras šķēlums ar plakni, kas iet caur centru (analogs jēdzienam "taisne plaknē").	
• **loks uz sfēras**	Lielās riņķa līnijas loks BC – **visīsākā līkne uz sfēras**, kas savieno punktus B un C (analogs jēdzienam plaknē "taisnes nogrieznis").	
• **loka garums** a	**Attālums uz sfēras starp punktiem B un C** (analogs jēdzienam plaknē "taisnes nogriežņa garums"). $a = R \cdot \alpha$, kur R – sfēras rādiuss, α – lokam BC atbilstošā centra leņķa lielums radiānos. Ja $R = 1$, tad $a = \alpha$.	
• **leņķis uz sfēras**	**Leņķis starp pieskarēm MA un NA**, kas novilktas divu krustisku lielo riņķa līniju lokiem to krustpunktā A (jeb – **divplakņu kakta leņķis** starp plaknēm, kuru šķēlumi ar sfēru ir attiecīgās lielās riņķa līnijas).	
• **sfēriskais divstūris**	**Sfēras daļa, ko ierobežo divas krustiskas lielās riņķa līnijas** (piemēram, globusa virsmas daļa starp diviem meridiāniem). Sfēriskā divstūra laukums: $S = 2R^2 \cdot A$, kur R – sfēras rādiuss, A – divstūra virsotnes leņķa lielums radiānos.	

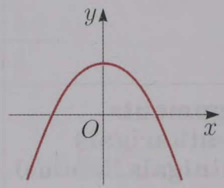
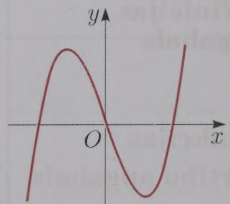
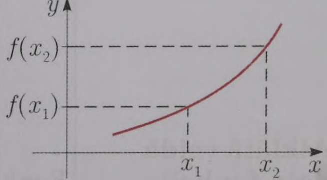
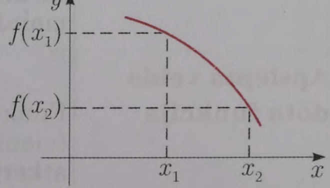
• **sfēriskais trijstūris**	**Sfēras daļa** ABC, ko ierobežo trīs lielo riņķa līniju loki un kuras visi loki un leņķi ir mazāki nekā π.	
Sfēriskā trijstūra īpašības: • pamatīpašība • sfēriskā trijstūra **ekscess** ε • sfēriskā trijstūra laukums	Sfēriskā trijstūra leņķu summa ir lielāka nekā π: $A + B + C > \pi$ Skaitlis $\varepsilon = (A + B + C) - \pi$ $S = R^2 \cdot \varepsilon$, kur R – sfēras rādiuss	
Trigonometriskās sakarības taisnleņķa sfēriskajā trijstūrī	$C = 90°$, c – leņķim C pretējā mala (hipotenūza), a, b – leņķiem A un B pretējās malas (katetes). $\sin A = \dfrac{\sin a}{\sin c}$, $\cos A = \dfrac{\mathrm{tg}\, b}{\mathrm{tg}\, c}$ $\mathrm{tg} A = \dfrac{\mathrm{tg}\, a}{\sin b}$, $\mathrm{ctg} A = \dfrac{\sin b}{\mathrm{tg}\, a}$ $\cos c = \cos a \cos b = \mathrm{ctg} A\, \mathrm{ctg} B$	
Trigonometriskās sakarības slīpleņķu sfēriskajā trijstūrī: • **sinusu teorēma** • **malu kosinusu teorēma**	A, B, C – sfēriskā trijstūra virsotņu leņķi a, b, c – virsotnēm pretējo malu loku lielumi $\dfrac{\sin a}{\sin A} = \dfrac{\sin b}{\sin B} = \dfrac{\sin c}{\sin C}$ $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$	
• **leņķu kosinusu teorēma**	$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$	
• **sinusu–kosinusu teorēmas**	$\sin A \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$ $\sin a \cos b = \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a$	
• **tangensu teorēmas**	$\dfrac{\mathrm{tg}\dfrac{a+b}{2}}{\mathrm{tg}\dfrac{c}{2}} = \dfrac{\cos\dfrac{A-B}{2}}{\cos\dfrac{A+B}{2}}$ $\quad$ $\dfrac{\mathrm{tg}\dfrac{a-b}{2}}{\mathrm{tg}\dfrac{c}{2}} = \dfrac{\sin\dfrac{A-B}{2}}{\sin\dfrac{A+B}{2}}$ $\dfrac{\mathrm{tg}\dfrac{A+B}{2}}{\mathrm{ctg}\dfrac{C}{2}} = \dfrac{\cos\dfrac{a-b}{2}}{\cos\dfrac{a+b}{2}}$ $\quad$ $\dfrac{\mathrm{tg}\dfrac{A-B}{2}}{\mathrm{ctg}\dfrac{C}{2}} = \dfrac{\sin\dfrac{a-b}{2}}{\sin\dfrac{a+b}{2}}$	

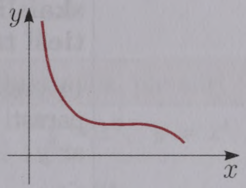
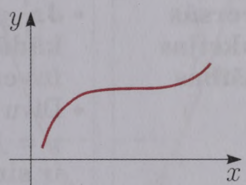
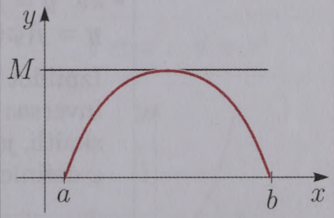
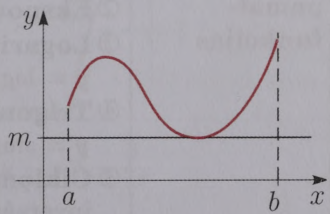
• **Dalambēra (Gausa) vienādības**	$\dfrac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}=\dfrac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$ $\dfrac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}=\dfrac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$ $\dfrac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}=\dfrac{\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$ $\dfrac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}=\dfrac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$
• **pusleņķa teorēma**	$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{\sin(p-b)\cdot\sin(p-c)}{\sin p\cdot\sin(p-a)}}$, kur $p=\dfrac{a+b+c}{2}$
• **pusmalas teorēma**	$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\sqrt{-\dfrac{\cos P\cdot\cos(P-A)}{\cos(P-B)\cdot\cos(P-C)}}$, kur $P=\dfrac{A+B+C}{2}$
• **sfēriskā trijstūra augstums**	$\sin h_a=\sin c\sin B=\sin b\sin C$

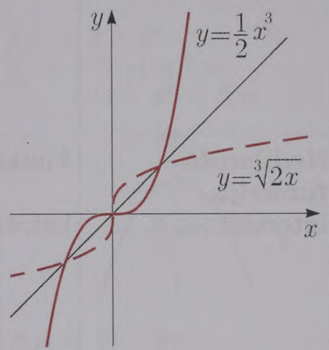
7. ELEMENTĀRĀS FUNKCIJAS

7.1. Funkcijas jēdziens un ar to saistītie jautājumi

Nosaukums	Apzīmējums, paskaidrojumi	Ilustrācija, piemēri
Funkcija	$y = f(x)$ Atbilstība starp divu kopu X un Y elementiem, ja katram kopas X elementam x pēc noteikta likuma f atbilst **tikai viens** kopas Y elements y jeb **kopas X attēlojums kopā Y**	
Arguments (neatkarīgais mainīgais lielums)	x Kopas X elements ($x \in X$)	
Funkcijas vērtība (atkarīgais mainīgais lielums)	$f(x)$ Kopas Y elements y, kurš atbilst kopas X elementam x	
Funkcijas definīcijas apgabals	$D(f)$ Kopa X, kuras elementi ir funkcijas f argumenta vērtības: $D(f) = X$	$f(x) = \sqrt{2x-6}$ $2x - 6 \geqslant 0$, $x \geqslant 3 \Rightarrow$ $D(f) = [3; +\infty)$
Funkcijas vērtību apgabals	$E(f)$ Kopa, kuras elementi ir visas funkcijas f vērtības $f(x)$, ja $x \in D(f)$: $E(f) \subset Y$	$f(x) = \sqrt{2x-6}$ $E(f) = [0; +\infty)$
Funkcijas grafiks	$G(f)$ Visu to punktu kopa koordinātu plaknē, kuru koordinātas ir $(x; f(x))$, ja $x \in D(f)$	
Atklātā veidā dota funkcija	$y = f(x)$ Funkcijas analītiskā izteiksme, no kuras izteikts atkarīgais mainīgais lielums y	$y = x^2 - 5x + 6$
Apslēptā veidā dota funkcija	$F(x; y) = 0$ Funkcijas analītiskā izteiksme (vienādība), no kuras nav izteikts atkarīgais mainīgais lielums y	$2x + 5y - 4 = 0$, $\sin(x + y) - 2y = 0$

Parametriskā veidā dota funkcija	$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ Atbilstība starp kopu X un Y elementiem izteikta ar divām vienādībām, izmantojot trešo mainīgo lielumu (parametru) t	$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$
Pāra funkcija	Funkcija, kurai ar katru argumenta vērtību x ir spēkā vienādība $f(-x) = f(x)$ **Grafiks simetrisks attiecībā pret Oy asi**	$f(x) = 2 - x^2$ $f(-x) = 2 - (-x)^2 =$ $= 2 - x^2 = f(x)$ 
Nepāra funkcija	Funkcija, kurai ar katru argumenta vērtību x ir spēkā vienādība $f(-x) = -f(x)$ **Grafiks simetrisks attiecībā pret koordinātu sākumpunktu**	$f(x) = x^3 - 3x$ $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) =$ $= -x^3 + 3x =$ $= -(x^3 - 3x) = -f(x)$ 
Periodiska funkcija	Funkcija, kurai eksistē tāds skaitlis $T \neq 0$, ka ar katru argumenta vērtību x ir spēkā vienādība $f(x + T) = f(x)$ Pēc moduļa mazāko šādu skaitli sauc par funkcijas **periodu T**	$\sin(x + 2\pi) = \sin x$ $(T = 2\pi)$ sk. 112. lpp.
Augoša funkcija intervālā $[a;\ b]$	Funkcija, kurai ir spēkā nevienādība $f(x_1) < f(x_2)$ katrām divām argumenta vērtībām $x_1 < x_2$ no intervāla $[a;\ b]$	
Dilstoša funkcija intervālā $[a;\ b]$	Funkcija, kurai ir spēkā nevienādība $f(x_1) > f(x_2)$ katrām divām argumenta vērtībām $x_1 < x_2$ no intervāla $[a;\ b]$	

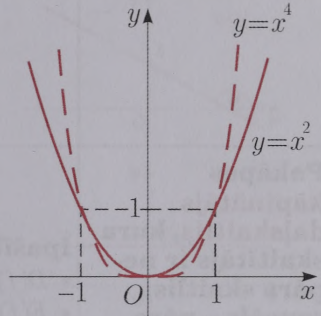
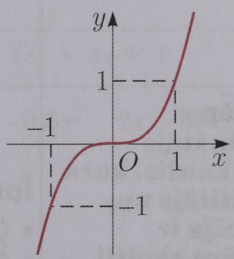
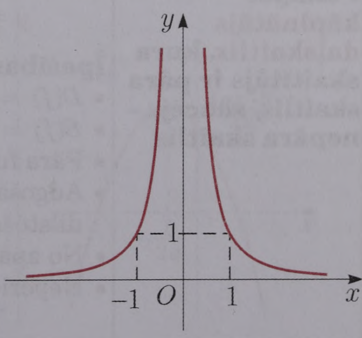
Monotona funkcija intervālā $[a;\ b]$	Funkcija, kas intervālā $[a;\ b]$ **ir augoša vai dilstoša.**	
Neaugoša funkcija intervālā $[a;\ b]$	Funkcija, kurai ir spēkā nevienādība $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ katrām divām argumenta vērtībām $x_1 < x_2$ no intervāla $[a;\ b]$	
Nedilstoša funkcija intervālā $[a;\ b]$	Funkcija, kurai ir spēkā nevienādība $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ katrām divām argumenta vērtībām $x_1 < x_2$ no intervāla $[a;\ b]$	
No augšas ierobežota funkcija intervālā $[a;\ b]$	Funkcija, kurai eksistē tāds skaitlis M, ka $f(x) \leqslant M$ visām x vērtībām no intervāla $[a;\ b]$	
No apakšas ierobežota funkcija intervālā $[a;\ b]$	Funkcija, kurai eksistē tāds skaitlis m, ka $f(x) \geqslant m$ visām x vērtībām no intervāla $[a;\ b]$	
Ierobežota funkcija intervālā $[a;\ b]$	Funkcija, kurai eksistē tādi skaitļi m un M, ka visām x vērtībām no intervāla $[a;\ b]$ $m \leqslant f(x) \leqslant M$	
Salikta funkcija	$y = f(g(x))$ Funkcija $y = f(u)$, kuras arguments u ir kāda cita mainīgā lieluma x funkcija $u = g(x)$. **f – ārējā funkcija, g – iekšējā funkcija**	$y = \sqrt{u},\ u = 1 - x^2$ $\Rightarrow y = \sqrt{1 - x^2}$

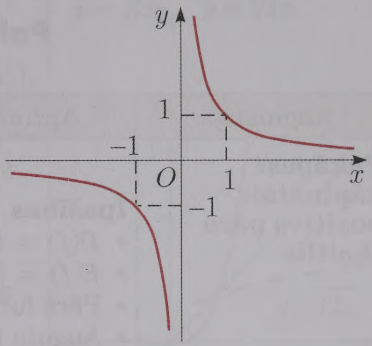
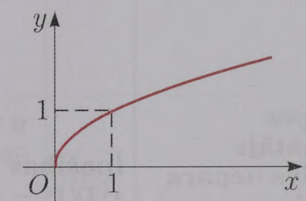
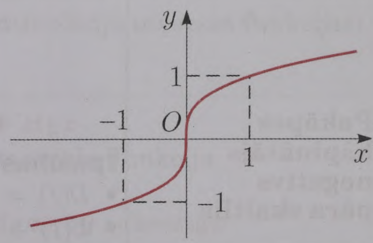
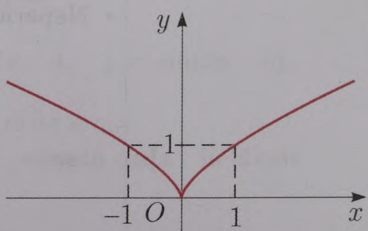
<table>
<tr><td>Inversā funkcija</td><td>Ja $y = f(x)$, tad šīs funkcijas inversā funkcija $x = \varphi(y)$ ir atbilstība starp kopām Y un X, ja katram skaitlim $y_0 \in E(f) \subset Y$ atbilst tikai viens skaitlis $x_0 \in X = D(f)$, kas ir tieši tā x vērtība, ar kuru $y_0 = f(x_0)$.
Inversās funkcijas $x = \varphi(y)$ argumentu parasti apzīmē ar x un funkcijas vērtību – ar y; iegūst $y = \varphi(x)$.
Lieto arī apzīmējumu $y = f^{-1}(x)$</td><td rowspan="2">$y = \frac{1}{2}x^3 \quad \Leftrightarrow$
$x = \sqrt[3]{2y}, \quad y = \sqrt[3]{2x}$


$(\sqrt[3]{x})^3 = x$
$\lg 10^x = x$</td></tr>
<tr><td>Inversās funkcijas īpašības</td><td>• Ja $y = f(x)$ ir monotona funkcija kādā intervālā, tad tai eksistē inversā funkcija.
• Divu savstarpēji inversu funkciju $y = f(x)$ un $y = \varphi(x)$ grafiki ir simetriski attiecībā pret taisni $y = x$
• $D(\varphi) = E(f)$, $E(\varphi) = D(f)$
• Ja $y = f(x)$, kur $x = \varphi(y)$, tad $y = f(\varphi(y))$ un $x = \varphi(f(x))$.
Izpildot ar doto skaitli divas savstarpēji inversas operācijas, iegūst pašu doto skaitli, ja vien tas pieder funkciju f un φ definīcijas apgabaliem.</td></tr>
<tr><td>Elementārās pamatfunkcijas</td><td colspan="2">① Pakāpes funkcijas $y = x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$
② Eksponentfunkcijas $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$
③ Logaritmiskās funkcijas (eksponentfunkciju inversās funkcijas)
$y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$
④ Trigonometriskās funkcijas
$y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$
⑤ Ciklometriskās funkcijas (trigonometrisko funkciju inversās funkcijas)
$y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$</td></tr>
<tr><td>Elementārās funkcijas</td><td colspan="2">Funkcijas, kuras iegūst no elementārajām pamatfunkcijām un konstantēm, ja ar tām izpilda galīgā skaitā aritmētiskās darbības (saskaitīšanu, atņemšanu, reizināšanu, dalīšanu) un saliktas funkcijas veidošanas operācijas.
Piemēri: $y = \frac{\sqrt{3x^2 - 1}}{\log_2(x-2)}$; $y = 5x^2 + 7x - 4$; $y = \sin(2x - 5)$
Neelementāras funkcijas piemērs:
$[x]$ jeb $y = E(x)$ (antjē no x) – skaitļa x veselā daļa: lielākais veselais skaitlis, kurš nepārsniedz x;
$x - [x] = \{x\}$ – skaitļa x daļveida daļa.</td></tr>
</table>

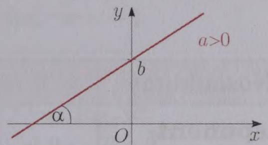
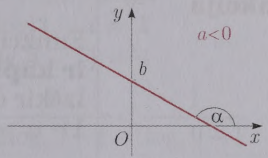
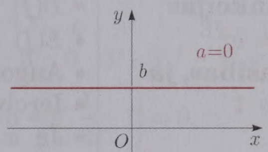
7.2. Pakāpes funkcijas. Lineāra funkcija. Kvadrātiska funkcija

Pakāpes funkcija $y = x^{\alpha}$

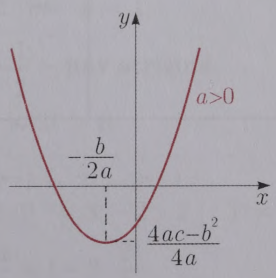
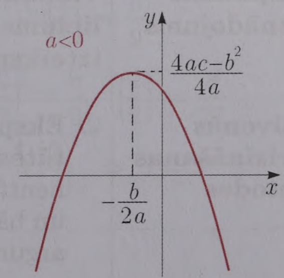
Kāpinātājs	Apzīmējums, paskaidrojumi	Ilustrācija, piemēri
Pakāpes kāpinātājs pozitīvs pāra skaitlis	$y = x^{2n}$ $(n \in \mathbb{N})$ **Īpašības** • $D(f) = (-\infty; +\infty)$ • $E(f) = [0; +\infty)$ • Pāra funkcija • Augoša intervālā $(0; +\infty)$; dilstoša intervālā $(-\infty; 0)$ • No apakšas ierobežota funkcija • Neperiodiska funkcija	$y = x^2, \quad y = x^4$ 
Pakāpes kāpinātājs pozitīvs nepāra skaitlis	$y = x^{2n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$ **Īpašības** • $D(f) = (-\infty; +\infty)$ • $E(f) = (-\infty; +\infty)$ • Nepāra funkcija • Augoša intervālā $(-\infty; +\infty)$ • Neperiodiska funkcija	$y = x^3, \quad y = x^5$ 
Pakāpes kāpinātājs negatīvs pāra skaitlis	$y = x^{-2n}$ $(n \in \mathbb{N})$ **Īpašības** • $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ • $E(f) = (0; +\infty)$ • Pāra funkcija • Augoša intervālā $(-\infty; 0)$; dilstoša intervālā $(0; +\infty)$ • No apakšas ierobežota funkcija • Neperiodiska funkcija	$y = x^{-2} = \dfrac{1}{x^2},$ $y = x^{-4} = \dfrac{1}{x^4}$ 

Pakāpes **kāpinātājs negatīvs nepāra skaitlis**	$y = x^{-(2n-1)}$ $(n \in \mathbb{N})$ **Īpašības** • $D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$ • $E(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$ • Nepāra funkcija • Dilstoša abos definīcijas apgabala intervālos • Neperiodiska funkcija	$y = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$, $y = x^{-3} = \dfrac{1}{x^3}$ 
Pakāpes **kāpinātājs daļskaitlis**, **kura skaitītājs ir nepāra skaitlis, saucējs – pāra skaitlis**	$y = x^{\frac{2n-1}{2m}}$ $(n,\ m \in \mathbb{N})$ **Īpašības** • $D(f) = [0;\ +\infty)$ • $E(f) = [0;\ +\infty)$ • Augoša intervālā $[0;\ +\infty)$ • No apakšas ierobežota funkcija • Neperiodiska funkcija	$y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$, $y = x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$ 
Pakāpes **kāpinātājs daļskaitlis**, **kura skaitītājs un saucējs ir nepāra skaitļi**	$y = x^{\frac{2n-1}{2m-1}}$ $(n,\ m \in \mathbb{N})$ **Īpašības** • $D(f) = (-\infty;\ +\infty)$ • $E(f) = (-\infty;\ +\infty)$ • Nepāra funkcija • Augoša intervālā $(-\infty;\ +\infty)$ • Neperiodiska funkcija	$y = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$, $y = x^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{x^3}$ 
Pakāpes **kāpinātājs daļskaitlis**, **kura skaitītājs ir pāra skaitlis, saucējs – nepāra skaitlis**	$y = x^{\frac{2n}{2m-1}}$ $(n,\ m \in \mathbb{N})$ **Īpašības** • $D(f) = (-\infty;\ +\infty)$ • $E(f) = [0;\ +\infty)$ • Pāra funkcija • Augoša intervālā $(0;\ +\infty)$; dilstoša intervālā $(-\infty;\ 0)$ • No apakšas ierobežota funkcija • Neperiodiska funkcija	$y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$, $y = x^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{x^4}$ 

Lineāra funkcija

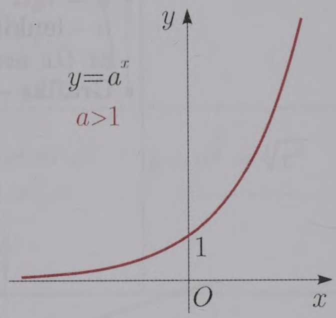
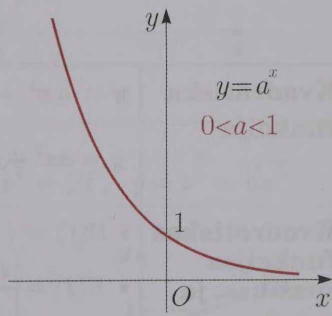
Lineāra funkcija	$y = ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$	$y = 2x + 3$, $y = -3x + 1$ $y = 3x - 2$, $y = -x - 4$
Lineāras funkcijas īpašības	• $D(f) = (-\infty; +\infty)$ • $E(f) = (-\infty; +\infty)$, ja $a \neq 0$ • Augoša intervālā $(-\infty; +\infty)$, ja $a > 0$; dilstoša intervālā $(-\infty; +\infty)$, ja $a < 0$; konstanta funkcija $y = b$, ja $a = 0$ • Neperiodiska funkcija • $a = \operatorname{tg}\alpha$ α – leņķis, ko taisne $y = ax + b$ veido ar Ox ass pozitīvo virzienu • Grafiks – taisne	  

Kvadrātiska funkcija

Kvadrātiska funkcija	$y = ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R};\ a \neq 0)$ $y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{4ac - b^2}{4a}$	$y = 2x^2 + 3x + 1$ $y = -0{,}5x^2 - 2x + 2{,}5$
Kvadrātiskas funkcijas īpašības, ja $a > 0$	• $D(f) = (-\infty; +\infty)$ • $E(f) = \left[\dfrac{4ac - b^2}{4a}; +\infty\right)$ • Augoša intervālā $\left[-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right)$; dilstoša intervālā $\left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right]$ • No apakšas ierobežota funkcija • Grafiks – parabola	
Kvadrātiskās funkcijas īpašības, ja $a < 0$	• $D(f) = (-\infty; +\infty)$ • $E(f) = \left(-\infty; \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right]$ • Augoša intervālā $\left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right]$; dilstoša intervālā $\left[-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right)$ • No augšas ierobežota funkcija • Grafiks – parabola	

7.3. Eksponentfunkcijas. Eksponentvienādojumi. Eksponentnevienādības

Eksponentfunkcija

Nosaukums	Apzīmējums, paskaidrojumi	Ilustrācija, piemēri
Eksponent-funkcija	$y = a^x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$ $y = e^x \quad (e = 2{,}71828...)$ Funkcija, kuras **arguments ir kāpinātājs**. Izšķir divus gadījumus: 1) $a > 1$, 2) $0 < a < 1$	$y = 2^x,\ y = 3^x,\ y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
Funkcijas $y = a^x$ **īpašības, ja** $a > 1$	• $D(f) = (-\infty; +\infty)$ • $E(f) = (0; +\infty)$ • Augoša intervālā $(-\infty; +\infty)$ • Ierobežota no apakšas • Ja $x \to -\infty$, tad $a^x \to 0$ • Neperiodiska funkcija	
Funkcijas $y = a^x$ **īpašības, ja** $0 < a < 1$	• $D(f) = (-\infty; +\infty)$ • $E(f) = (0; +\infty)$ • Dilstoša intervālā $(-\infty; +\infty)$ • Ierobežota no apakšas • Ja $x \to +\infty$, tad $a^x \to 0$ • Neperiodiska funkcija	

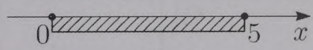
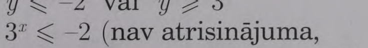
Eksponentvienādojumi

Eksponent-vienādojums	**Vienādojums, kurā nezināmais lielums vai šo lielumu saturoša izteiksme ir pakāpes kāpinātājs.**	$2^x - 32 = 0$, $27^{5-x^2} = 3^{x^2-1}$, $2^x - 2^{x-1} = 3$
Galvenās atrisināšanas metodes	① **Eksponentfunkcijas monotonitātes izmantošana**: ja eksponentfunkcijas vērtības ir vienādas un bāzes ir vienādas, tad arī argumenta vērtības ir vienādas. $a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$	$5^x = 125$ $5^x = 5^3 \Rightarrow x = 3$ $2^{6x} = 2^{x^2+5} \Rightarrow 6x = x^2 + 5$ $x^2 - 6x + 5 = 0$ $x_1 = 1,\ x_2 = 5$

	② **Pārveidošana par vienādojumu, kurā pakāpēm ir viena un tā pati bāze**, izmantojot pakāpes īpašības un darbības ar pakāpēm.	$5^x \cdot 0{,}2^{x-3} = 125^{-x}$ $5^x \cdot (5^{-1})^{x-3} = (5^3)^{-x}$ $5^x \cdot 5^{3-x} = 5^{-3x}$ $5^{x+3-x} = 5^{-3x} \Rightarrow$ $3 = -3x,\ x = -1$
	③ **Vienādojuma kreisās un labās puses logaritmēšana.** $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ $\log_a(a^{f(x)}) = \log_a(b^{g(x)}),$ $f(x) \cdot \log_a a = g(x) \cdot \log_a b,$ $\boldsymbol{f(x) = g(x) \cdot \log_a b}$	$2^{x+1} = 3^{2x}$ $\log_2 2^{x+1} = \log_2 3^{2x}$ $x + 1 = 2x \cdot \log_2 3$ $2x \cdot \log_2 3 - x = 1$ $x(2\log_2 3 - 1) = 1$ $x = \dfrac{1}{2\log_2 3 - 1} = \dfrac{1}{\log_2 9 - 1}$
	④ **Sadalīšana reizinātājos.**	$2 \cdot 3^{x+1} - 6 \cdot 3^{x-1} - 3^x = 9$ $2 \cdot 3^x \cdot 3 - 6 \cdot 3^x \cdot 3^{-1} - 3^x = 9$ $3^x\left(2 \cdot 3 - 6 \cdot \dfrac{1}{3} - 1\right) = 9$ $3^x(6 - 2 - 1) = 9$ $3^x \cdot 3 = 9,\ 3^x = 3 \Rightarrow x = 1$
	⑤ **Eksponentvienādojuma pārveidošana par kvadrātvienādojumu** attiecībā pret pakāpi kā nezināmo lielumu.	$2 \cdot 4^x - 3 \cdot 2^x = 2$ $2 \cdot (2^2)^x - 3 \cdot 2^x - 2 = 0$ $2(2^x)^2 - 3 \cdot 2^x - 2 = 0$ $y = 2^x,\ 2y^2 - 3y - 2 = 0$ $y_1 = 2,\ y_2 = -\dfrac{1}{2}$ $2^x = 2 \Rightarrow x = 1$ $2^x = -\dfrac{1}{2}$ – nav atrisinājuma, jo $2^x > 0$
	⑥ **Pārveidošana par vienādojumu, kurā pakāpēm ir viena un tā pati bāze**, dalot vienādojuma abas puses ar vienu no šī vienādojuma pakāpēm: a) **homogēni 1. pakāpes vienādojumi** (iegūst 1. pakāpes vienādojumu attiecībā pret pakāpi kā nezināmo lielumu);	$2^x + 3^{x-2} = 3^x - 2^{x+1}$ $2^x + 3^x \cdot 3^{-2} = 3^x - 2^x \cdot 2 \mid : 3^x \neq 0$ $\dfrac{2^x}{3^x} + \dfrac{1}{9} = 1 - 2 \cdot \dfrac{2^x}{3^x}$ $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x + 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \dfrac{8}{9}$ $3 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \dfrac{8}{9},\ \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \dfrac{8}{27}$ $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 \Rightarrow x = 3$

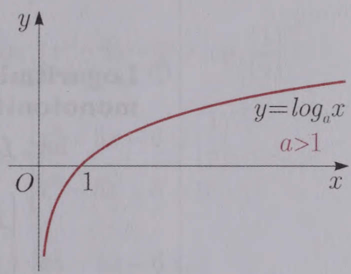
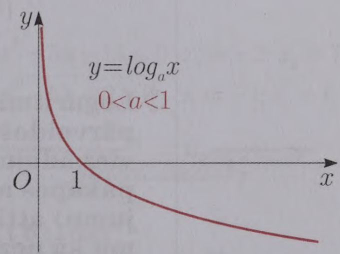
	b) **homogēni 2. pakāpes vienādojumi** (iegūst kvadrātvienādojumu attiecībā pret pakāpi kā nezināmo lielumu). Vienādojuma vispārīgs veids: $A \cdot a^{2x} + B \cdot a^x \cdot b^x + C \cdot b^{2x} = 0$ Dalot ar $b^{2x} \neq 0$, iegūst: $A \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{2x} + B \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{x} + C = 0$	$5 \cdot 4^x - 7 \cdot 10^x + 2 \cdot 25^x = 0$ $5 \cdot (2^2)^x - 7 \cdot (2 \cdot 5)^x + 2 \cdot (5^2)^x = 0$ $5 \cdot 2^{2x} - 7 \cdot 2^x \cdot 5^x + 2 \cdot 5^{2x} = 0$ $\mid : 5^{2x} \neq 0$ $5 \cdot \frac{2^{2x}}{5^{2x}} - 7 \cdot \frac{2^x \cdot 5^x}{5^{2x}} + 2 \cdot \frac{5^{2x}}{5^{2x}} = 0$ $5\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - 7\left(\frac{2}{5}\right)^{x} + 2 = 0$ $y = \left(\frac{2}{5}\right)^{x}$, $5y^2 - 7y + 2 = 0$ $y_1 = 1;\ y_2 = \frac{2}{5}$ $\left(\frac{2}{5}\right)^{x} = 1 \Rightarrow x_1 = 0$ $\left(\frac{2}{5}\right)^{x} = \frac{2}{5} \Rightarrow x_2 = 1$

Eksponentnevienādības

Eksponentnevienādība	**Nevienādība, kurā nezināmais lielums vai šo lielumu saturoša izteiksme ir pakāpes kāpinātājs.**	$4^{1-x} < (0,5)^{3x+2}$ $2^{2(1-x)} < 2^{-(3x+2)} \Rightarrow$ $2 - 2x < -3x - 2,\ x < -4$ $x \in (-\infty; -4)$
Atrisināšanas pamatmetodes	① **Eksponentnevienādības pārveidošana par algebrisku nevienādību starp kāpinātāju izteiksmēm**, izmantojot eksponentfunkcijas monotonitātes īpašību: • ja $a > 1$, tad $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$ • ja $0 < a < 1$, tad $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$	$(0,2)^{x^2-5x} \geqslant 1$ $(0,2)^{x^2-5x} \geqslant (0,2)^0 \Rightarrow$ $x^2 - 5x \leqslant 0,\ x_1 = 0;\ x_2 = 5$  $x \in [0; 5]$
	② Pārveidojumi, kādus izmanto, risinot eksponentvienādojumus (sk. 106. lpp.)	$2^{3x} + 2^{3x+2} > 40$ $2^{3x}(1 + 2^2) > 40$ $2^{3x} \cdot 5 > 40,\ 2^{3x} > 8$ $2^{3x} > 2^3 \Rightarrow 3x > 3$ $x > 1,\ x \in (1; +\infty)$
	③ **Lietojot substitūciju** $y = a^x$, iegūto algebrisko nevienādību atrisina attiecībā pret nezināmo lielumu y. No atrastās y vērtību nevienādības, piemēram, $\alpha < y < \beta$, iegūst eksponentnevienādību $\alpha < a^x < \beta$, kuru atrisina, ievērojot to, ka visā reālo skaitļu kopā $a^x > 0$	$9^x - 3^x \geqslant 6$ $3^{2x} - 3^x - 6 \geqslant 0,\ y = 3^x$ $y^2 - y - 6 \geqslant 0,\ y_1 = -2;\ y_2 = 3$  $y \leqslant -2$ vai $y \geqslant 3$ $3^x \leqslant -2$ (nav atrisinājuma, jo $3^x > 0$) $3^x \geqslant 3,\ 3^x \geqslant 3^1 \Rightarrow x \geqslant 1$ $x \in [1; +\infty)$

7.4. Logaritmiskās funkcijas. Logaritmiskie vienādojumi. Logaritmiskās nevienādības

Logaritmiskā funkcija

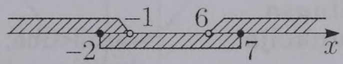
Nosaukums	Apzīmējums, paskaidrojumi	Ilustrācija, piemēri
Logaritmiskā funkcija	$y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ $y = \ln x = \log_e x$ $(e = 2{,}71828...)$ $y = \lg x = \log_{10} x$ Atbilstība, pēc kuras katram pozitīvam skaitlim x ir piekārtots šī skaitļa logaritms pie dotās bāzes a. $y = \log_a x$ – eksponentfunkcijas $y = a^x$ inversā funkcija. Izšķir divus gadījumus: 1) $a > 1$, 2) $0 < a < 1$	$y = \log_2 x$, $y = \log_{0,5} x$
Funkcijas $y = \log_a x$ **īpašības, ja** $a > 1$	• $D(\log) = E(\text{eksp}) = (0;\ +\infty)$ • $E(\log) = D(\text{eksp}) = (-\infty;\ +\infty)$ • Augoša intervālā $(0;\ +\infty)$ • Ja $x \to 0$, tad $\log_a x \to -\infty$ • Neperiodiska funkcija	
Funkcijas $y = \log_a x$ **īpašības, ja** $0 < a < 1$	• $D(\log) = E(\text{eksp}) = (0;\ +\infty)$ • $E(\log) = D(\text{eksp}) = (-\infty;\ +\infty)$ • Dilstoša intervālā $(0;\ +\infty)$ • Ja $x \to 0$, tad $\log_a x \to +\infty$ • Neperiodiska funkcija	

Logaritmiskie vienādojumi

Logaritmiskais vienādojums	**Vienādojums, kurā nezināmo lielumu satur logaritmējamā izteiksme vai (un) logaritma bāze.**	$\log_2 x = 5 \Leftrightarrow$ $x = 2^5 = 32$
Galvenās atrisināšanas metodes	① **Logaritma definīcijas izmantošana.** • $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ • $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$	$\log_3(1 - 2x) = -2 \Leftrightarrow$ $1 - 2x = 3^{-2}$ $2x = \frac{8}{9},\ x = \frac{4}{9}$
		$\log_x 27 = 3 \Leftrightarrow$ $\begin{cases} 27 = x^3 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{27} = 3 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$ Atbilde: $x = 3$

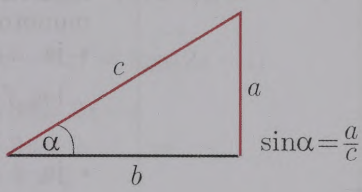
Galvenās atrisināšanas metodes *(turpinājums)*	• $\log_{g(x)} b = c \Leftrightarrow \begin{cases} b = (g(x))^c \\ g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \end{cases}$ • $\log_{g(x)} f(x) = c \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = (g(x))^c \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \end{cases}$	$\log_x(3x-2) = 2 \Leftrightarrow$ $\begin{cases} 3x-2 = x^2 \\ 3x-2 > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-3x+2=0 \\ x > \frac{2}{3} \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 2,\ x_2 = 1 \\ x > \frac{2}{3} \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$ Atbilde: $x = 2$
	② **Logaritmiskās funkcijas monotonitātes izmantošana:** $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$\log_2(x^2 - 3x) = \log_2(2x - 4)$ $\begin{cases} x^2 - 3x = 2x - 4 \\ x^2 - 3x > 0 \\ 2x - 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0 \\ x < 0 \text{ vai } x > 3 \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1,\ x_2 = 4 \\ x > 3 \end{cases}$ Atbilde: $x = 4$
	③ **Logaritmiskā vienādojuma pārveidošana par kvadrātvienādojumu (vai augstākas pakāpes algebrisku vienādojumu) attiecībā pret logaritmu kā nezināmo lielumu,** izmantojot logaritmu īpašības un pamatsakarības (logaritmēšanas likumus, bāzes maiņas formulu u.c. pārveidojumus).	$\lg^2(10x) + \lg x = 5$ $(\lg(10x))^2 + \lg x = 5$ $(\lg 10 + \lg x)^2 + \lg x = 5$ $(1 + \lg x)^2 + \lg x = 5$ $1 + 2\lg x + \lg^2 x + \lg x = 5$ $\lg^2 x + 3\lg x - 4 = 0;\quad y = \lg x$ $y^2 + 3y - 4 = 0$ $y_1 = -4,\quad y_2 = 1$ $\lg x = -4,\quad \boldsymbol{x = 10^{-4}}$ $\lg x = 1,\quad \boldsymbol{x = 10}$
	④ **Vienādojuma kreisās un labās puses logaritmēšana** $(f(x))^{\log_a x} = b \Leftrightarrow$ $\begin{cases} \log_a\left(f(x)^{\log_a x}\right) = \log_a b \\ f(x) > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} \log_a x \cdot \log_a f(x) = \log_a b \\ f(x) > 0 \\ x > 0 \end{cases}$	$x^{\log_3 x + 1} = 9x^2$ $\log_3\left(x^{\log_3 x + 1}\right) = \log_3(9x^2)$ $(\log_3 x + 1) \cdot \log_3 x = \log_3 9 + \log_3 x^2$ $\log_3^2 x + \log_3 x = 2 + 2\log_3 x$ $\log_3^2 x - \log_3 x - 2 = 0$ $y = \log_3 x$ $y^2 - y - 2 = 0$ $y_1 = -1;\ y_2 = 2$ $\log_3 x = -1,\quad \boldsymbol{x = 3^{-1} = \frac{1}{3}}$ $\log_3 x = 2,\quad \boldsymbol{x = 3^2 = 9}$

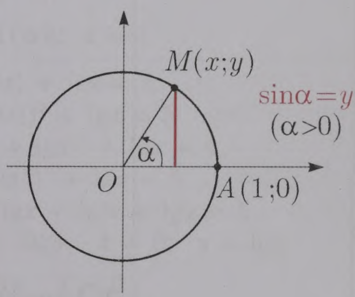
Logaritmiskās nevienādības

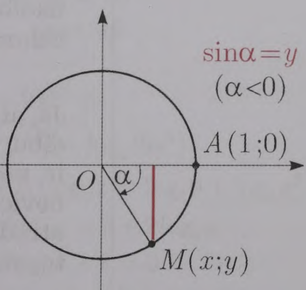
Logaritmiskā nevienādība	**Nevienādība, kurā nezināmo lielumu satur logaritmējamā izteiksme vai (un) logaritma bāze.**	$\log_2(x+1) < \log_2(5-x)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x+1<5-x \\ x+1>0 \\ 5-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ x>-1 \\ x<5 \end{cases}$ Atbilde: $x \in (-1; 2)$
Atrisināšanas pamatmetodes	① **Logaritmiskās nevienādības pārveidošana par algebrisku nevienādību starp logaritmējamām izteiksmēm**, izmantojot logaritmiskās funkcijas monotonitātes īpašību: • ja $a>1$, tad $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow$ $f(x) > g(x) > 0$ • ja $0<a<1$, tad $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow$ $0 < f(x) < g(x)$	$\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x-6) \geqslant -3$ $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x-6) \geqslant \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x-6 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \\ x^2-5x-6>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-5x-6 \leqslant 8 \\ x-5x-6>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-5x-14 \leqslant 0 & x_1=-2;\ x_2=7 \\ x^2-5x-6>0 & x_1=-1;\ x_2=6 \end{cases}$  Atbilde: $x \in [-2; -1) \cup (6; 7]$
	② Logaritmiskās nevienādības pārveidošana par algebrisku nevienādību attiecībā pret nezināmo lielumu y, **lietojot substitūciju** $y = \log_a x$ Ja, atrisinot algebrisko nevienādību, iegūtais y vērtību intervāls ir, piemēram, $\alpha < y < \beta$, tad no nevienādības $\alpha < \log_a x < \beta$ atrod x vērtību kopu, ievērojot to, vai $a>1$ vai $0<a<1$	$\log_{0,5}\sqrt{x} - 2\log^2_{0,25} x < -1$ $\left(\log_{0,25} x = \frac{\log_{0,5} x}{\log_{0,5} 0,25} = \frac{\log_{0,5} x}{2}\right)$ $\begin{cases} \frac{1}{2}\log_{0,5} x - \frac{2\cdot\log^2_{0,5} x}{4} + 1 < 0 \\ x>0 \end{cases}$ $y=\log_{0,5} x$; $y^2-y-2>0$ $y_1=-1,\ y_2=2$ $y<-1$ vai $y>2$ $\log_{0,5} x < -1 \Rightarrow x>2$ $\log_{0,5} x > 2 \Rightarrow 0<x<0,25$ Atbilde: $x \in (-0; 0,25) \cup (2; +\infty)$

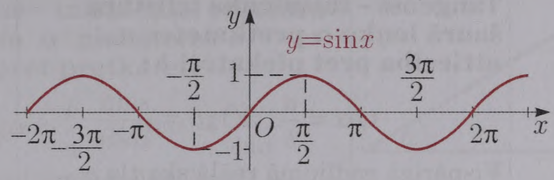
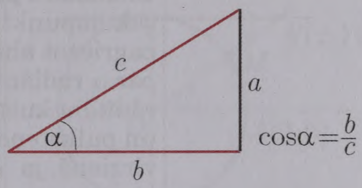
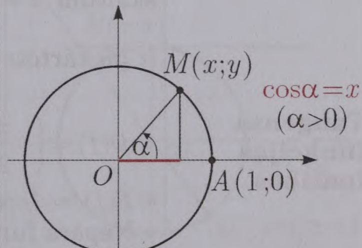
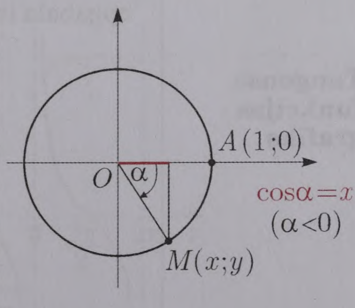
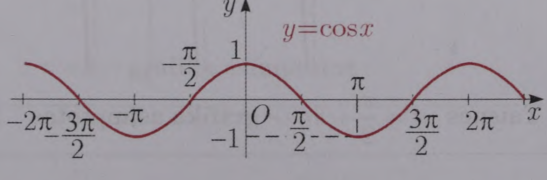
7.5. Trigonometriskās funkcijas. Trigonometrijas formulas. Trigonometriskie vienādojumi un nevienādības

Trigonometriskās funkcijas

<table>
<tr><th>Nosaukums</th><th>Apzīmējums, paskaidrojumi</th><th>Ilustrācija, piemēri</th></tr>
<tr><td>Trigonometriskā riņķa līnija (TRL)</td><td>Riņķa līnija, kuras centrs atrodas koordinātu sistēmas sākumpunktā un rādiuss ir viena vienība ($R = 1$).
TRL vienādojums ir $x^2 + y^2 = 1$</td><td></td></tr>
<tr><td>Sinuss</td><td>Sinuss – taisnleņķa trijstūra šaurā leņķa α pretkatetes a attiecība pret hipotenūzu c:
$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$
Vispārīgā gadījumā reālā skaitļa α sinuss – tāda TRL punkta $M(x;\ y)$ ordināta koordinātu plaknē, kas iegūts, pagriežot abscisu ass punktu $A(1;\ 0)$ par α radiāniem ap koordinātu sākumpunktu pretēji pulksteņa rādītāju kustības virzienam, ja $\alpha > 0$, un pulksteņa rādītāju kustības virzienā, ja $\alpha < 0$</td><td>


</td></tr>
<tr><td>Sinusa funkcija</td><td>$$y = \sin x$$
– atbilstība, pēc kuras katram reālam skaitlim x ir piekārtots šī skaitļa sinuss.</td><td></td></tr>
<tr><td>Sinusa funkcijas īpašības</td><td>

$D(f) = (-\infty;\ +\infty)$
$E(f) = [-1;\ 1]$
Nepāra funkcija: $\sin(-x) = -\sin x$
Periodiska funkcija, periods $T = 2\pi$:
$\sin(x + 2\pi k) = \sin x \quad (k \in \mathbb{Z})$
Augoša funkcija intervālos
$\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$
dilstoša funkcija intervālos
$\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$
Ierobežota funkcija visā definīcijas apgabalā: $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$
Funkcijas maksimālā vērtība 1 ir punktos $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, minimālā vērtība -1 ir punktos $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$
</td><td>
</td></tr>
</table>

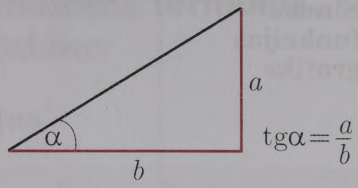
Sinusa funkcijas grafiks	
Kosinuss	**Kosinuss – taisnleņķa trijstūra šaurā leņķa α piekatetes b attiecība pret hipotenūzu c:** $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ Vispārīgā gadījumā reālā skaitļa α kosinuss – tāda TRL **punkta** $M(x;\ y)$ **abscisa** koordinātu plaknē, kas iegūts, pagriežot abscisu ass punktu $A(1;\ 0)$ par α radiāniem ap koordinātu sākumpunktu pretēji pulksteņa rādītāju kustības virzienam, ja $\alpha > 0$, un pulksteņa rādītāja kustības virzienā, ja $\alpha < 0$  
Kosinusa funkcija	$y = \cos x$ – atbilstība, pēc kuras katram reālam skaitlim x ir piekārtots šī skaitļa kosinuss.
Kosinusa funkcijas īpašības	• $D(f) = (-\infty;\ +\infty)$ • $E(f) = [-1;\ 1]$ • Pāra funkcija: $\cos(-x) = \cos x$ • Periodiska funkcija, periods $T = 2\pi$: $\cos(x + 2\pi k) = \cos x$, $(k \in \mathbb{Z})$ • Augoša funkcija intervālos $(-\pi + 2\pi k;\ 0 + 2\pi k)$ dilstoša funkcija intervālos $(0 + 2\pi k;\ \pi + 2\pi k)$ • Ierobežota funkcija visā definīcijas apgabalā: $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ • Funkcijas maksimālā vērtība 1 ir punktos $x = 0 + 2\pi k$, minimālā vērtība -1 ir punktos $x = \pi + 2\pi k$ 
Kosinusa funkcijas grafiks	

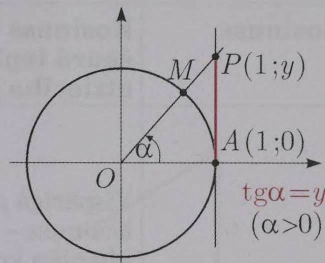
Tangenss

Tangenss – taisnleņķa trijstūra šaurā leņķa α pretkatetes a attiecība pret piekateti b:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow \mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Vispārīgā gadījumā reālā skaitļa α tangenss – taišņu OM un $x = 1$ **krustpunkta $P(1;\, y)$ ordināta** koordinātu plaknē, kur O – koordinātu sākumpunkts un punkts M iegūts, pagriežot abscisu ass punktu $A(1;\, 0)$ par α radiāniem pretēji pulksteņa rādītāju kustības virzienam, ja $\alpha > 0$, un pulksteņa rādītāju kustības virzienā, ja $\alpha < 0$

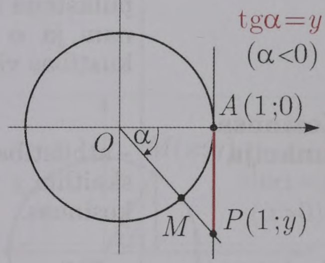




Tangensa funkcija

$$y = \mathrm{tg}x$$

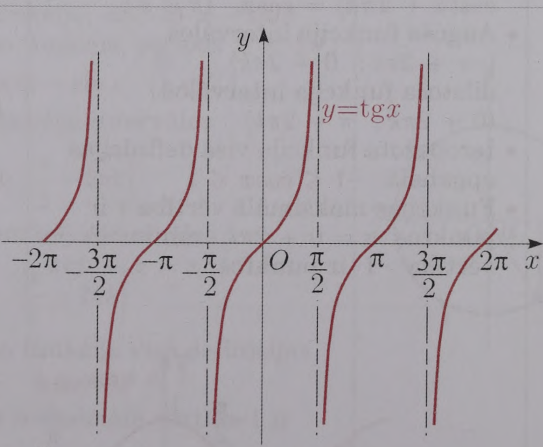
– atbilstība, pēc kuras katram reālam skaitlim $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$ ir piekārtots šī skaitļa tangenss.



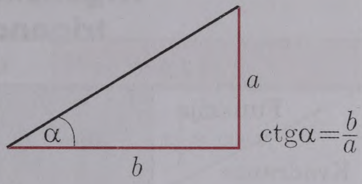
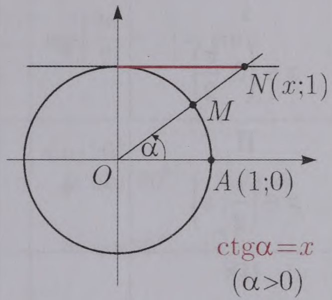
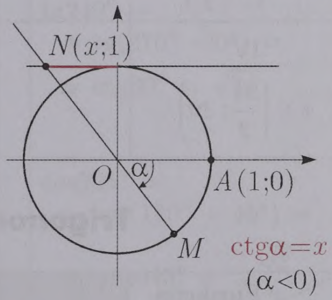
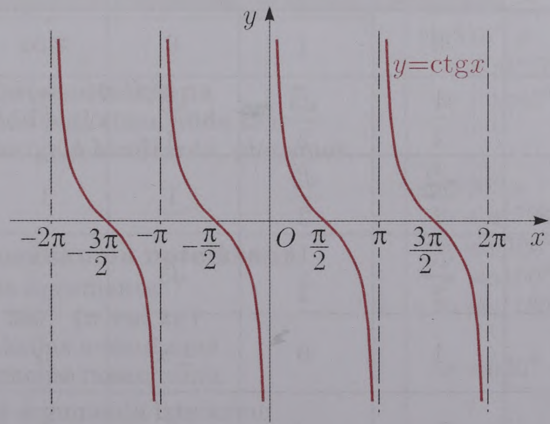
Tangensa funkcijas īpašības

- $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right),\ (k \in \mathbb{Z})$
- $E(f) = (-\infty;\, +\infty)$
- Nepāra funkcija: $\mathrm{tg}(-x) = -\,\mathrm{tg}x$
- Periodiska funkcija, periods $T = \pi$: $\mathrm{tg}(x + \pi k) = \mathrm{tg}x \quad (k \in \mathbb{Z})$
- Augoša funkcija katrā definīcijas apgabala intervālā

Tangensa funkcijas grafiks

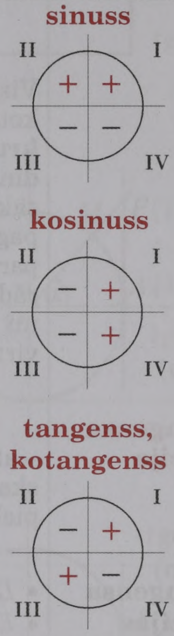


Taisnes $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ – grafika asimptotas

Kotangenss	**Kotangenss – taisnleņķa trijstūra šaurā leņķa α piekatetes b attiecība pret pretkateti a:** $$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow \mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$ Vispārīgā gadījumā reālā skaitļa α kotangenss – taišņu OM un $y = 1$ **krustpunkta** $N(x;\ 1)$ **abscisa** koordinātu plaknē, kur O – koordinātu sākumpunkts un punkts M iegūts, pagriežot abscisu ass punktu $A(1;\ 0)$ par α radiāniem pretēji pulksteņa rādītāju kustības virzienam, ja $\alpha > 0$, un pulksteņa rādītāju kustības virzienā, ja $\alpha < 0$	 
Kotangensa funkcija	$y = \mathrm{ctg}x$ – atbilstība, pēc kuras katram reālam skaitlim $x \neq \pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$ ir piekārtots šī skaitļa kotangenss.	
Kotangensa funkcijas īpašības	• $D(f) = (0 + \pi k;\ \pi + \pi k)$ $(k \in \mathbb{Z})$ • $E(f) = (-\infty;\ +\infty)$ • Nepāra funkcija: $\mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}x$ • Periodiska funkcija, periods $T = \pi$: $\mathrm{ctg}(x + \pi k) = \mathrm{ctg}x$ $(k \in \mathbb{Z})$ • Dilstoša funkcija katrā definīcijas apgabala intervālā	
Kotangensa funkcijas grafiks	 Taisnes $x = \pi k$ – grafika asimptotas	

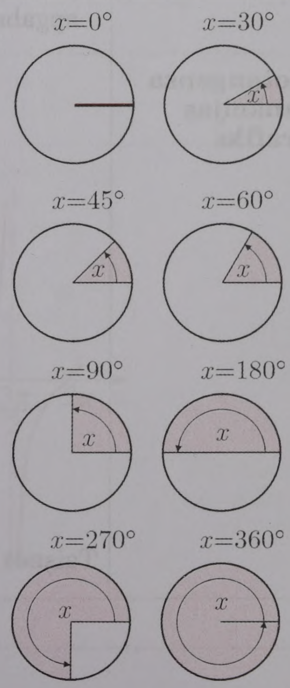
Trigonometrisko funkciju vērtību zīmes trigonometriskā riņķa kvadrantos

Funkcija / Kvadrants	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
I $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$	+	+	+	+
II $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$	+	–	–	–
III $x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$	–	–	+	+
IV $x \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$	–	+	–	–



Trigonometrisko funkciju vērtību tabula

Funkcija / Arguments	sin	cos	tg	ctg
$0°$ (0)	0	1	0	$\mp\infty$
$30°$ $\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$45°$ $\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$60°$ $\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$90°$ $\left(\frac{\pi}{2}\right)$	1	0	$\pm\infty$	0
$180°$ (π)	0	-1	0	$\mp\infty$
$270°$ $\left(\frac{3\pi}{2}\right)$	-1	0	$\pm\infty$	0
$360°$ (2π)	0	1	0	$\mp\infty$



Redukcijas formulas

Redukcijas formulas – formulas, pēc kurām argumentu

$$\frac{\pi}{2} \pm x,\ \pi \pm x,\ \frac{3\pi}{2} \pm x,\ 2\pi - x$$

trigonometriskās funkcijas (**reducējamās funkcijas**) pārveido par argumenta x funkcijām (**reducētajām funkcijām**).

Arguments \ Reducējamā f-ja		sin	cos	tg	ctg
		Reducētā funkcija			
$90° - x$	$\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$	$\cos x$	$\sin x$	$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{tg} x$
$90° + x$	$\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{tg} x$
$180° - x$	$(\pi - x)$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$
$180° + x$	$(\pi + x)$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
$270° - x$	$\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{tg} x$
$270° + x$	$\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{tg} x$
$360° - x$	$(2\pi - x)$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$

N o r ā d ī j u m i

① **Reducētās funkcijas zīmes noteikšana**
Reducētajai funkcijai ir tāda pati zīme, kāda tā ir reducējamai funkcijai attiecīgajā kvadrantā, pieņemot,

ka $0 < x < \frac{\pi}{2}$

② **Reducētās funkcijas nosaukuma noteikšana**

- Ja reducējamās funkcijas argumenta izteiksme satur **180° vai 360°** (**π vai 2π**) leņķi, tad reducētās funkcijas nosaukums sakrīt ar reducējamās funkcijas nosaukumu.
- Ja reducējamās funkcijas argumenta izteiksme satur **90° vai 270°** $\left(\frac{\pi}{2}\right.$ **vai** $\left.\frac{3\pi}{2}\right)$ leņķi, tad funkcijas nosaukums jāmaina uz "pretējo nosaukumu" (sin → cos, cos → sin, tg → ctg, ctg → tg).

P i e m ē r i

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x,$

$\operatorname{tg}(2\pi - x) = -\operatorname{tg} x,$

$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin x$

$\sin 120° =$
$= \sin(90° + 30°) =$
$= \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\operatorname{tg} 240° =$
$= \operatorname{tg}(270° - 30°) =$
$= \operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3}$

$\cos 225° =$
$= \cos(180° + 45°) =$
$= -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\operatorname{ctg} 315° =$
$= \operatorname{ctg}(270° + 45°) =$
$= -\operatorname{tg} 45° = -1$

$\sin 870° =$
$= \sin(720° + 150°) =$
$= \sin(150° + 360° \cdot 2) =$
$= \sin 150° =$
$= \sin(180° - 30°) =$
$= \sin 30° = \frac{1}{2}$

Trigonometrijas formulas

Nosaukums	Formulas, paskaidrojumi	Piemēri
Trigonometrijas pamatidentitātes	$\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1$ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, $1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$, $\mathrm{cosec}\,\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$	$\dfrac{1}{\mathrm{tg}\alpha} + \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} =$ $= \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} =$ $= \dfrac{\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)} =$ $= \dfrac{\cos\alpha + 1}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)} = \dfrac{1}{\sin\alpha}$

Trigonometriskās funkcijas izteikšana ar tā paša argumenta citu trigonometrisko funkciju

Funkcija	Funkcija izteikta ar: $\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$
$\sin\alpha =$		$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\dfrac{\mathrm{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}}$
$\cos\alpha =$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$		$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$	$\dfrac{\mathrm{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}}$
$\mathrm{tg}\alpha =$	$\dfrac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$		$\dfrac{1}{\mathrm{ctg}\alpha}$
$\mathrm{ctg}\alpha =$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\dfrac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\mathrm{tg}\alpha}$	

N o r ā d ī j u m s
Izmantojot šīs formulas aprēķinos, pirms kvadrātsaknes jāņem "+" vai "–" zīme atkarībā no tā, kurā kvadrantā atrodas leņķis α un kāda zīme šajā kvadrantā ir izsakāmajai funkcijai.

Ja $\mathrm{tg}\alpha = -\dfrac{3}{4}$, $90° < \alpha < 180°$,

tad

$$\sin\alpha = \frac{-\frac{3}{4}}{-\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = \frac{3}{5}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{-\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = -\frac{4}{5}$$

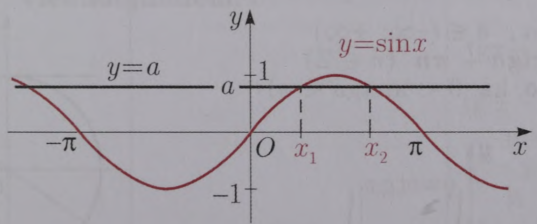
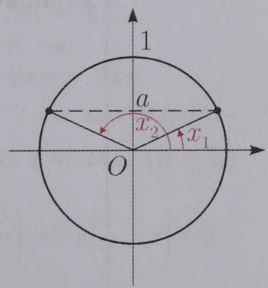
$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{1}{-\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}$$

Argumentu summas, starpības **trigonometriskās funkcijas**	$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}$ $\mathrm{ctg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\mathrm{ctg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\beta-1}{\mathrm{ctg}\beta+\mathrm{ctg}\alpha}$ $\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}$ $\mathrm{ctg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\mathrm{ctg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\beta+1}{\mathrm{ctg}\beta-\mathrm{ctg}\alpha}$	$\sin25^\circ\cos5^\circ+$ $+\sin5^\circ\cos25^\circ=$ $=\sin(25^\circ+5^\circ)=$ $=\sin30^\circ=\dfrac{1}{2}$ $\mathrm{tg}75^\circ=\mathrm{tg}(45^\circ+30^\circ)=$ $=\dfrac{\mathrm{tg}45^\circ+\mathrm{tg}30^\circ}{1-\mathrm{tg}45^\circ\cdot\mathrm{tg}30^\circ}=$ $=\dfrac{1+\frac{\sqrt3}{3}}{1-\frac{\sqrt3}{3}}=\dfrac{3+\sqrt3}{3-\sqrt3}=$ $=\dfrac{(3+\sqrt3)^2}{9-3}=2+\sqrt3$
Funkciju summas, starpības pārveidojumi	$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\mathrm{tg}\alpha\pm\mathrm{tg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$ $\mathrm{ctg}\alpha\pm\mathrm{ctg}\beta=\pm\dfrac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$	$1+\mathrm{tg}\alpha=$ $=\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{tg}\alpha=$ $=\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\alpha}=$ $=\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\frac{\sqrt2}{2}\cos\alpha}=$ $=\dfrac{\sqrt2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\cos\alpha}$
Funkciju reizinājuma **pārveidojumi**	$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$ $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$ $\sin\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$	

Divkārša un trīskārša argumenta **funkciju pārveidojumi**	$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ $\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$, $\operatorname{ctg}2\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$ $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ $\operatorname{tg}3\alpha = \dfrac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$, $\operatorname{ctg}3\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}$	$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 =$ $= \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha +$ $+\cos^2\alpha = 1+\sin 2\alpha$ $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha =$ $= (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)\times$ $\times(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) =$ $= 1\cdot\cos 2\alpha = \cos 2\alpha$
Argumenta puses **funkciju pārveidojumi**	$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$, $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$ $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$	$\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ =$ $= \dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\sin 15^\circ\cdot\cos 15^\circ =$ $= \dfrac{1}{2}\sin(2\cdot 15^\circ) =$ $= \dfrac{1}{2}\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$ $\operatorname{tg}15^\circ = \dfrac{1-\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} =$ $= \dfrac{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{1}{2}} = 2-\sqrt{3}$
Funkciju pakāpes pazemināšana	$\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$, $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$ $\sin^3\alpha = \dfrac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}$, $\cos^3\alpha = \dfrac{\cos 3\alpha + 3\cos\alpha}{4}$ $\sin^4\alpha = \dfrac{\cos 4\alpha - 4\cos 2\alpha + 3}{8}$ $\cos^4\alpha = \dfrac{\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3}{8}$	$\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\left(2\cdot\dfrac{\alpha}{2}\right)} =$ $= \dfrac{2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}} =$ $= \dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$

Trigonometriskie vienādojumi

Nosaukums	Apzīmējums, paskaidrojumi	Ilustrācija, piemēri
Skaitļa *a* arksinuss	arcsin*a* **Intervāla $\left[-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ leņķis, kura sinusa funkcijas vērtība ir skaitlis a ($\lvert a \rvert \leqslant 1$).**	$\arcsin\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{6}$, jo $\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$ un $\dfrac{\pi}{6} \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$

Skaitļa a arkkosinuss	$\arccos a$ **Intervāla $[0;\,\pi]$ leņķis, kura kosinusa funkcijas vērtība ir skaitlis a $(\mid a \mid \leqslant 1)$**	$\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$, jo $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ un $\frac{\pi}{4}\in[0;\,\pi]$
Skaitļa a arktangenss	$\operatorname{arctg} a$ **Intervāla $\left(-\frac{\pi}{2};\,\frac{\pi}{2}\right)$ leņķis, kura tangensa funkcijas vērtība ir skaitlis a**	$\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$, jo $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ un $\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$
Skaitļa a arkkotangenss	$\operatorname{arcctg} a$ **Intervāla $(0;\,\pi)$ leņķis, kura kotangensa funkcijas vērtība ir skaitlis a**	$\operatorname{arcctg}1=\frac{\pi}{4}$, jo $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=1$ un $\frac{\pi}{4}\in(0;\,\pi)$
Trigonometriskais vienādojums	**Vienādojums, kura nezināmais lielums ir trigonometrisko funkciju arguments.**	$\sin^2 x-2\sin x-3=0$, $\cos 2x\cos 3x=\cos 6x$, $\operatorname{tg}x+3\operatorname{ctg}x-4=0$
Trigonometriskie pamatvienādojumi un to atrisinājumi	① $\sin x=a,\quad a\in[-1;\,1]$ $x=\left[\begin{array}{l}\arcsin a+2\pi n\\ \pi-\arcsin a+2\pi n\end{array}\right.\quad(n\in\mathbb{Z})$ jeb $x=(-1)^k\arcsin a\ +\pi k,\ (k\in\mathbb{Z})$ Ja $-1\leqslant a<0$, tad izmanto īpašību $\arcsin(-a)=-\arcsin a$. (Jāievēro, ka $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin a\leqslant\frac{\pi}{2}$) 	 $x_1=\arcsin a$, $x_2=\pi-x_1=\pi-\arcsin a$ $\sin x=\frac{1}{2}\ \Rightarrow$ $x=\left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{6}+2\pi n\\ \pi-\frac{\pi}{6}+2\pi n\end{array}\right.$ jeb $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

Trigonometriskie pamatvienādojumi un to atrisinājumi (*turpinājums*)

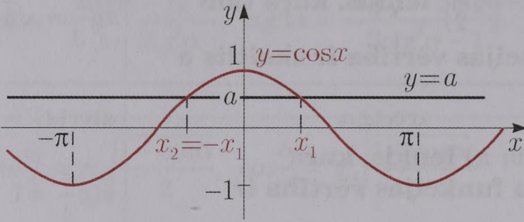
② $\cos x = a, \quad a \in [-1;\, 1]$

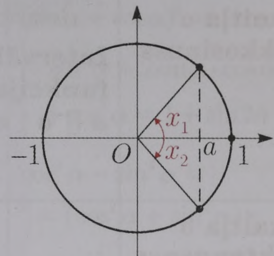
$$x = \left[\begin{array}{l} \arccos a + 2\pi n \\ -\arccos a + 2\pi n \end{array}\right.$$

jeb

$$x = \pm\arccos a + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z})$$

(Jāievēro, ka $0 \leqslant \arccos a \leqslant \pi$)





$x_1 = \arccos a$

$x_2 = -x_1 = -\arccos a$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

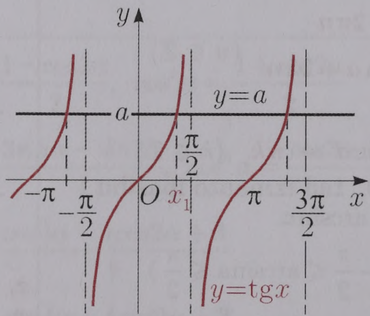
③ $\operatorname{tg} x = a, \quad a \in (-\infty;\, +\infty)$

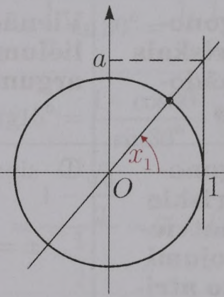
$x = \operatorname{arctg} a + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z})$

Ja $a < 0$, tad izmanto īpašību

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$$

(Jāievēro, ka $-\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} a < \dfrac{\pi}{2}$)





$x_1 = \operatorname{arctg} a$

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Rightarrow$$

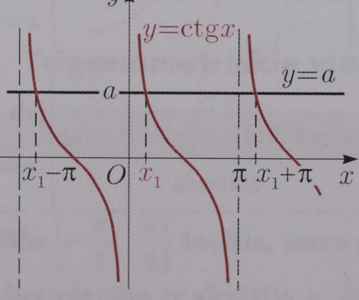
$$x = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi n = $$

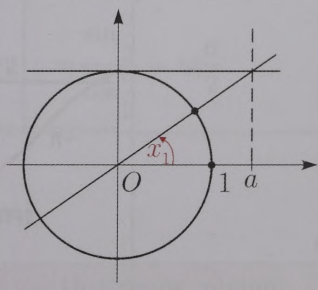
$$= \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

④ $\operatorname{ctg} x = a, \quad a \in (-\infty;\, +\infty)$

$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z})$

(Jāievēro, ka $0 < \operatorname{arctg} a < \pi$)





$x_1 = \operatorname{arcctg} a$

$$\operatorname{ctg} x = 1 \Rightarrow$$

$$x = \operatorname{arcctg} 1 + \pi n = $$

$$= \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Galvenie trigonometrisko vienādojumu veidi; to atrisināšanas metodes	① **Vienādojumi, kuru izteiksmes sadalot reizinātājos** iegūst trigonometriskos pamatvienādojumus.	$\sin 2x \cdot \cos x - \frac{1}{2}\cos x = 0$ $\cos x\left(\sin 2x - \frac{1}{2}\right) = 0$ 1) $\cos x = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ jeb $x = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z})$ 2) $\sin 2x - \frac{1}{2} = 0,$ $\sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k,$ $x = (-1)^k\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k$ Atbilde: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,$ $x = (-1)^k\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k \quad (k,n \in \mathbb{Z})$
	② **Vienādojumi, kurus, izmantojot substitūciju, pārveido par kvadrātvienādojumiem** (vai citiem algebriskiem vienādojumiem).	$\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0$ $y = \cos x$ $y^2 - 3y + 2 = 0 \Rightarrow$ $y_1 = 1,\ y_2 = 2$ 1) $\cos x = 1 \Rightarrow$ $x = 0 + 2\pi n = 2\pi n$ 2) $\cos x = 2 \Rightarrow$ nav atrisin. Atbilde: $x = 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z})$
	③ **Vienādojumi, kurus, izmantojot redukcijas formulas, pārveido par viena un tā paša argumenta trigono metriskās funkcijas vienādojumiem.**	$\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 2\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 1$ $\mathrm{tg}x - 2\mathrm{ctg}x - 1 = 0 \Rightarrow$ $x \neq \pi n,\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ $\mathrm{tg}x - \frac{2}{\mathrm{tg}x} - 1 = 0 \mid \cdot\, \mathrm{tg}x \neq 0$ $\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}x - 2 = 0$ $y = \mathrm{tg}x$ $y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow$ $y_1 = -1,\ y_2 = 2$ 1) $\mathrm{tg}x = -1 \Rightarrow$ $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$ 2) $\mathrm{tg}x = 2 \Rightarrow$ $x = \mathrm{arctg}\ 2 + \pi k$ Atbilde: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,$ $x = \mathrm{arctg}2 + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$

Galvenie trigonometrisko vienādojumu veidi; to atrisināšanas metodes *(turpinājums)*	④ **Homogēni trigonometriskie vienādojumi:** $a_0\sin^n x + a_1\sin^{n-1}x\cdot\cos x +$ $+ a_2\sin^{n-2}x\cdot\cos^2 x + \ldots +$ $+ a_{n-1}\sin x\cdot\cos^{n-1}x + a_n\cos^n x = 0$ **Atrisināšanas metode** Vienādojuma abas puses dala ar $\cos^n x \neq 0$ (vai $\sin^n x \neq 0$), jo nav tādu x vērtību, ar kurām $\cos x = 0$ un arī $\sin x = 0$. Iegūst: $a_0\mathrm{tg}^n x + a_1\mathrm{tg}^{n-1}x + a_2\mathrm{tg}^{n-2}x + \ldots + a_n = 0$ vai $a_n\mathrm{ctg}^n x + a_{n-1}\mathrm{ctg}^{n-1}x + \ldots + a_1\mathrm{ctg}x + a_0 = 0$ Piemēram, ja $n = 1$, iegūst trigonometrisko pamatvienādojumu $\mathrm{tg}x = a$; ja $n = 2$ – kvadrātvienādojumu attiecībā pret $\mathrm{tg}x$: $a_0\mathrm{tg}^2 x + a_1\mathrm{tg}x + a_2 = 0$	$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0 \mid : \cos x$ $\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sqrt{3}\cos x}{\cos x} = 0$ $\mathrm{tg}x - \sqrt{3} = 0$ $\mathrm{tg}x = \sqrt{3} \Rightarrow$ $x = \frac{\pi}{3} + \pi n \ (n \in \mathbb{Z})$
		$4\sin^2 x - 3\sin x\cdot\cos x -$ $- \cos^2 x = 0 \mid : \cos^2 x$ $\frac{4\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{3\sin x\cdot\cos x}{\cos^2 x} -$ $- \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$ $4\mathrm{tg}^2 x - 3\mathrm{tg}x - 1 = 0$ $y = \mathrm{tg}x$ $4y^2 - 3y - 1 = 0$ $y_1 = 1,\ y_2 = -\frac{1}{4}$ 1) $\mathrm{tg}x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ 2) $\mathrm{tg}x = -\frac{1}{4} \Rightarrow$ $x = \mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{4}\right) + \pi n =$ $= -\mathrm{arctg}\frac{1}{4} + \pi n \ (n \in \mathbb{Z})$
	⑤ **Vienādojumi, kurus atrisina, izmantojot trigonometrisku izteiksmju identisko pārveidojumu formulas** (trigonometriskās pamatidentitātes, argumentu saskaitīšanas formulas, divkārša argumenta formulas, trigonometrisko funkciju reizinājuma pārveidošanu summā u.c.).	$\cos 3x + \cos 2x + \cos x = 0$ $(\cos 3x + \cos x) + \cos 2x = 0$ $2\cos\frac{3x + x}{2}\cdot\cos\frac{3x - x}{2} +$ $+ \cos 2x = 0$ $2\cos 2x\cdot\cos x + \cos 2x = 0$ $\cos 2x(2\cos x + 1) = 0$ 1) $\cos 2x = 0 \Rightarrow$ $2x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$ 2) $2\cos x + 1 = 0$, $\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \ (n \in \mathbb{Z})$

Galvenie trigonometrisko vienādojumu veidi; to atrisināšanas metodes (*turpinājums*)

⑥ **Vienādojumi, kurus atrisina, izmantojot palīgargumetu.**

Šo vienādojumu vispārīgais veids:

$$a \sin x + b \cos x = c$$

Atrisināšanas algoritms

1. Atrod $\sqrt{a^2+b^2}$

2. Vienādojuma abas puses dala ar $\sqrt{a^2+b^2} \neq 0$:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

3. Izmantojot ģeometrisko ilustrāciju (sk. zīm.)

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi,$$

iegūst:

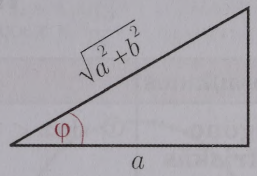
$$\cos\varphi \cdot \sin x + \sin\varphi \cdot \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

jeb

$$\sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (*)$$

4. Atrisina iegūto pamatvienādojumu $(*)$

5. No $\sin\varphi$ (vai $\cos\varphi$) izteiksmes atrod φ un ievieto pamatvienādojuma atrisinājuma izteiksmē.



$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$3\sin x + 4\cos x = 2{,}5$$

$$a = 3;\ b = 4$$

$$\sqrt{3^2+4^2} = 5$$

$$3\sin x + 4\cos x = 2{,}5 \quad | : 5$$

$$\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{3}{5} = \cos\varphi, \quad \frac{4}{5} = \sin\varphi$$

$$\cos\varphi \cdot \sin x + \sin\varphi \cdot \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\sin(x+\varphi) = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$x + \varphi = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k$$

$$x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k - \varphi$$

$$\sin\varphi = \frac{4}{5} \Rightarrow \varphi = \arcsin\frac{4}{5}$$

Atbilde:

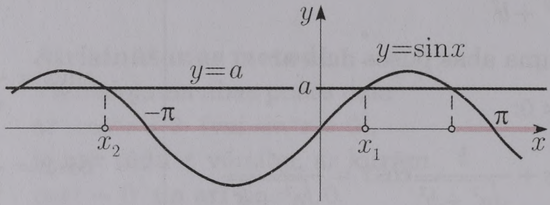
$$x = (-1)^k\frac{\pi}{6} - \arcsin\frac{4}{5} + \pi k$$

$(k \in \mathbb{Z})$

Trigonometriskās nevienādības

<table>
<tr><th>Nosaukums</th><th>Apzīmējums, paskaidrojumi</th><th>Ilustrācija, piemēri</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Trigono-metriskās pamatne-vienādības</td><td>

① $\sin x < a$ $(|\, a \,| \leqslant 1)$



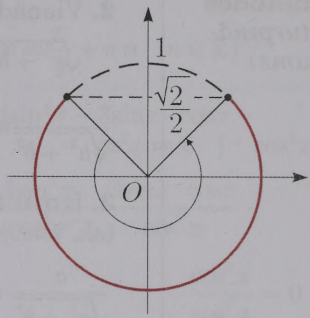
$\sin x < a \;\Rightarrow\; x \in (x_2 + 2\pi n;\; x_1 + 2\pi n)$,
kur

$x_1 = \arcsin a$
$x_2 = -\pi - x_1 = -\pi - \arcsin a$

$x \in (-\pi - \arcsin a + 2\pi n;\; \arcsin a + 2\pi n)$
$(n \in \mathbb{Z})$

</td><td>

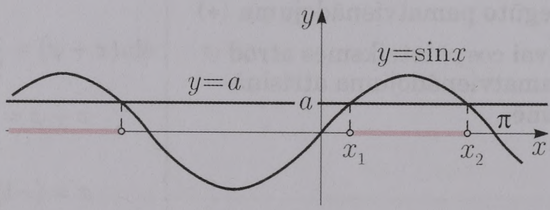
$\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$



$x \in \left(-\frac{5\pi}{4} + 2\pi n;\; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$
$(n \in \mathbb{Z})$

</td></tr>
<tr><td>

② $\sin x > a$ $(|\, a \,| < 1)$



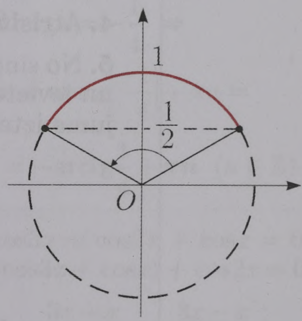
$\sin x > a \;\Rightarrow\; x \in (x_1 + 2\pi n;\; x_2 + 2\pi n)$,
kur

$x_1 = \arcsin a$
$x_2 = \pi - x_1 = \pi - \arcsin a$

$x \in (\arcsin a + 2\pi n;\; \pi - \arcsin a + 2\pi n)$
$(n \in \mathbb{Z})$

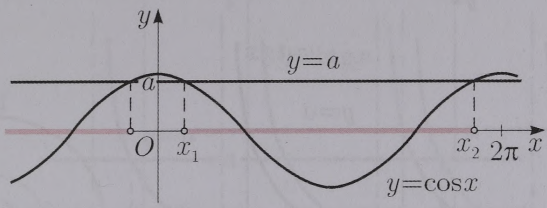
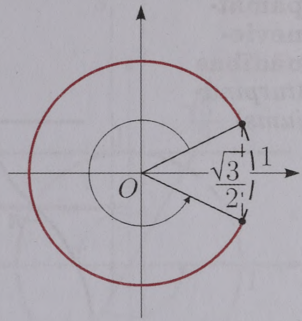
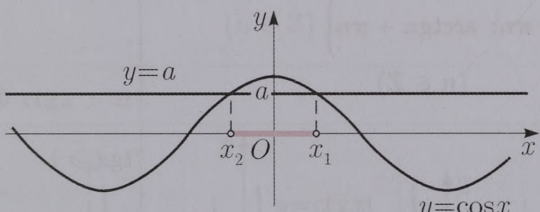
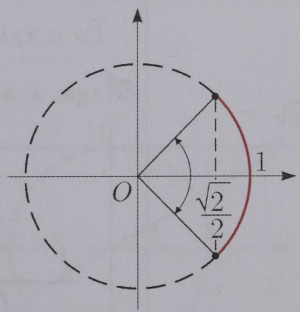
</td><td>

$\sin x > \frac{1}{2}$



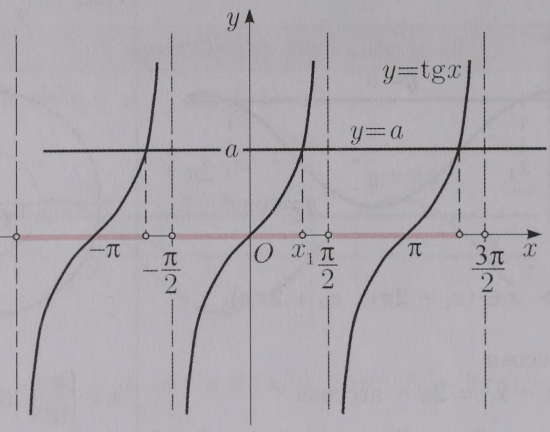
$x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$
$(n \in \mathbb{Z})$

</td></tr>
</table>

Trigono-metriskās pamat-nevie-nādības (*turpinā-jums*)	③ $\cos x < a$ $\quad (\mid a \mid < 1)$  $\cos x < a \Rightarrow x \in (x_1 + 2\pi n;\ x_2 + 2\pi n)$, kur $x_1 = \arccos a$ $x_2 = 2\pi - x_1 = 2\pi - \arccos a$ $x \in (\arccos a + 2\pi n;\ 2\pi - \arccos a + 2\pi n)$ $(n \in \mathbb{Z})$	$\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$  $x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{11\pi}{6} + 2\pi n\right)$ $(n \in \mathbb{Z})$
	④ $\cos x > a$ $\quad (\mid a \mid < 1)$  $\cos x > a \Rightarrow x \in (x_2 + 2\pi n;\ x_1 + 2\pi n)$, kur $x_1 = \arccos a$ $x_2 = -x_1 = -\arccos a$ $x \in (-\arccos a + 2\pi n;\ \arccos a + 2\pi n)$ $(n \in \mathbb{Z})$	$\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$  $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$ $(n \in \mathbb{Z})$

Trigonometriskās pamatnevienādības *(turpinājums)*

⑤ **tg$x < a$**



$$\operatorname{tg}x < a \quad \Rightarrow \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ x_1 + \pi n\right),$$

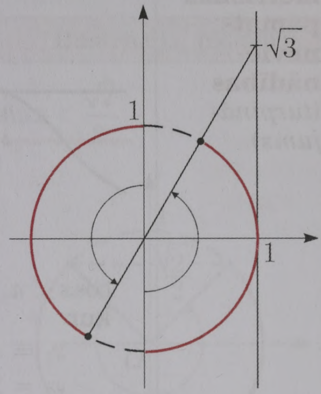
kur

$$x_1 = \operatorname{arctg}a$$

$$\boldsymbol{x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \operatorname{arctg}a + \pi n\right)}$$

$$(n \in \mathbb{Z})$$

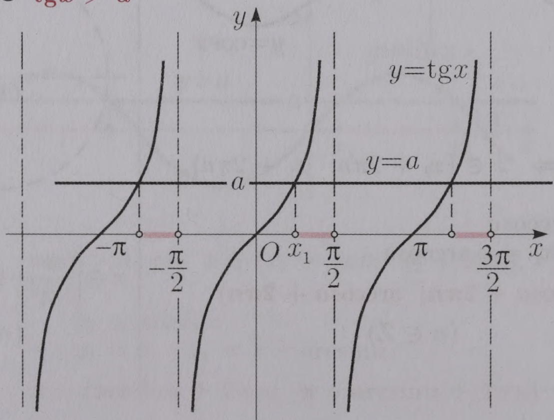
tg$x < \sqrt{3}$



$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{3} + \pi n\right)$$

$$(n \in \mathbb{Z})$$

⑥ **tg$x > a$**



$$\operatorname{tg}x > a \quad \Rightarrow \quad x \in \left(x_1 + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right),$$

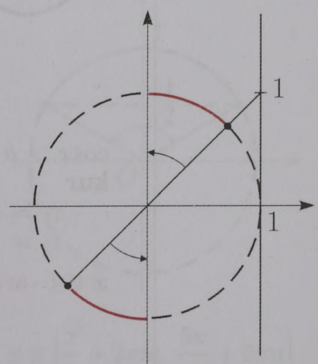
kur

$$x_1 = \operatorname{arctg}a$$

$$\boldsymbol{x \in \left(\operatorname{arctg}a + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)}$$

$$(n \in \mathbb{Z})$$

tg$x \geqslant 1$

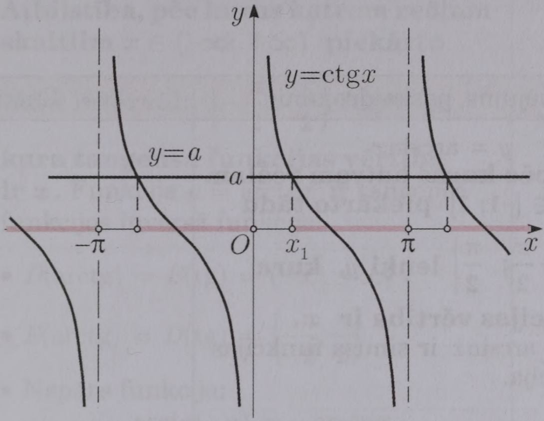


$$x \in \left[\frac{\pi}{4} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$$

$$(n \in \mathbb{Z})$$

Trigono-metriskās pamat-nevie-nādības (*turpinā-jums*)

⑦ $\mathrm{ctg}x < a$



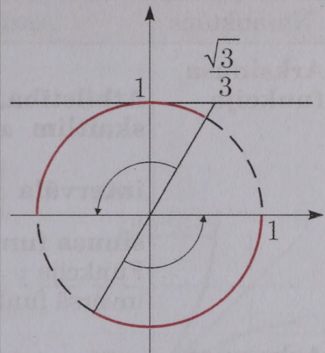
$\mathrm{ctg}x < a \Rightarrow x \in (x_1 + \pi n;\ \pi + \pi n)$,
kur

$x_1 = \mathrm{arcctg}\,a$

$x \in (\mathrm{arcctg}\,a + \pi n;\ \pi + \pi n)$

$(n \in \mathbb{Z})$

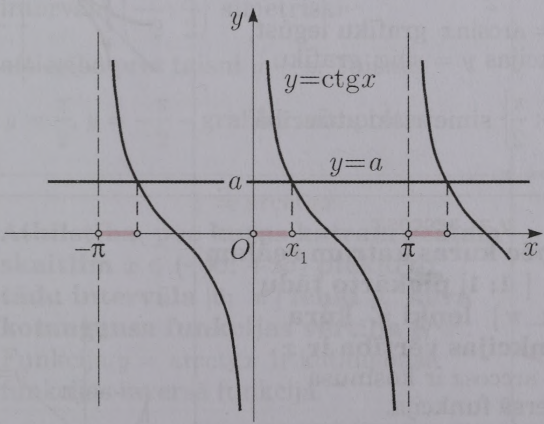
$\mathrm{ctg}x < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$



$x \in \left(\dfrac{\pi}{3} + \pi n;\ \pi + \pi n\right)$

$(n \in \mathbb{Z})$

⑧ $\mathrm{ctg}x > a$



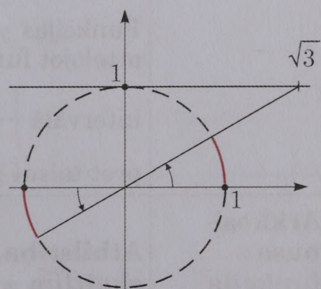
$\mathrm{ctg}x > a \Rightarrow x \in (0 + \pi n;\ x_1 + \pi n)$,
kur

$x_1 = \mathrm{arcctg}\,a$

$x \in (\pi n;\ \mathrm{arcctg}\,a + \pi n)$

$(n \in \mathbb{Z})$

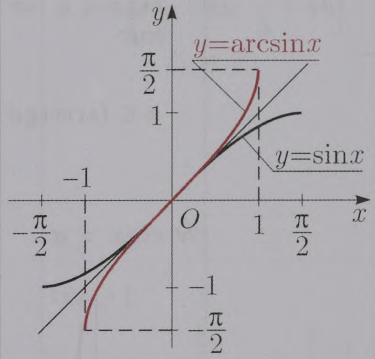
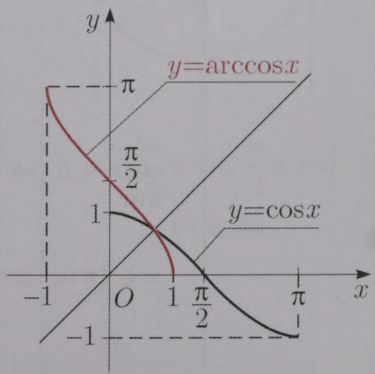
$\mathrm{ctg}x > \sqrt{3}$

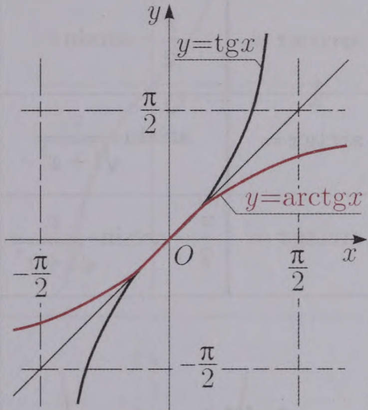
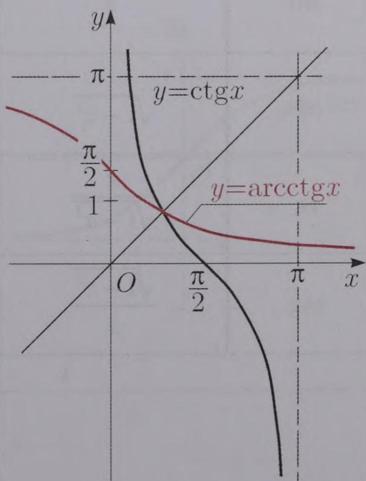


$x \in \left(\pi n;\ \dfrac{\pi}{6} + \pi n\right)$

$(n \in \mathbb{Z})$

7.6. Ciklometriskās funkcijas (trigonometrisko funkciju inversās funkcijas)

Nosaukums	Apzīmējums, paskaidrojumi	Ilustrācija
Arksinusa funkcija	$y = \arcsin x$ **Atbilstība, pēc kuras katram reālam skaitlim $x \in [-1;\ 1]$ piekārto tādu intervāla $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ leņķi y, kura sinusa funkcijas vērtība ir x.** Funkcija $y = \arcsin x$ ir sinusa funkcijas inversā funkcija.	
Arksinusa funkcijas īpašības	• $D(\arcsin) = E(\sin) = [-1;\ 1]$ • $E(\arcsin) = D_{\text{monot.}}(\sin) = \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ • Nepāra funkcija: **$\arcsin(-x) = -\arcsin x$** • Augoša funkcija visā definīcijas apgabalā $[-1;\ 1]$ • $\arcsin 0 = 0$, $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ Funkcijas $y = \arcsin x$ grafiku iegūst, attēlojot funkcijas $y = \sin x$ grafiku intervālā $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ simetriski attiecībā pret taisni $y = x$.	
Arkkosinusa funkcija	$y = \arccos x$ **Atbilstība, pēc kuras katram reālam skaitlim $x \in [-1;\ 1]$ piekārto tādu intervāla $[0;\ \pi]$ leņķi y, kura kosinusa funkcijas vērtība ir x.** Funkcija $y = \arccos x$ ir kosinusa funkcijas inversā funkcija.	
Arkkosinusa funkcijas īpašības	• $D(\arccos) = E(\cos) = [-1;\ 1]$ • $E(\arccos) = D_{\text{monot.}}(\cos) = [0;\ \pi]$ • Dilstoša funkcija visā definīcijas apgabalā $[-1;\ 1]$ • $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, $\arccos 1 = 0$ Funkcijas $y = \arccos x$ grafiku iegūst, attēlojot funkcijas $y = \cos x$ grafiku intervālā $[0;\ \pi]$ simetriski attiecībā pret taisni $y = x$.	

Arktangensa funkcija	$y = \operatorname{arctg} x$ **Atbilstība, pēc kuras katram reālam skaitlim $x \in (-\infty; +\infty)$ piekārto tādu intervāla $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ leņķi y, kura tangensa funkcijas vērtība ir x.** Funkcija $y = \operatorname{arctg} x$ ir tangensa funkcijas inversā funkcija.	
Arktangensa funkcijas īpašības	• $D(\operatorname{arctg}) = E(\operatorname{tg}) = (-\infty; +\infty)$ • $E(\operatorname{arctg}) = D(\operatorname{tg}) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ • Nepāra funkcija: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$ • Augoša funkcija visā definīcijas apgabalā. • Ja $x \to +\infty$, tad $\operatorname{arctg} \to \frac{\pi}{2}$; ja $x \to -\infty$, tad $\operatorname{arctg} \to -\frac{\pi}{2}$ Funkcijas $y = \operatorname{arctg} x$ grafiku iegūst, attēlojot funkcijas $y = \operatorname{tg} x$ grafiku intervālā $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ simetriski attiecībā pret taisni $y = x$. Taisnes $y = \frac{\pi}{2}$, $y = -\frac{\pi}{2}$ – grafika asimptotas.	
Arkkotangensa funkcija	$y = \operatorname{arcctg} x$ **Atbilstība, pēc kuras katram reālam skaitlim $x \in (-\infty; +\infty)$ piekārto tādu intervāla $[0; \pi]$ leņķi y, kura kotangensa funkcijas vērtība ir x.** Funkcija $y = \operatorname{arcctg} x$ ir kotangensa funkcijas inversā funkcija.	
Arkkotangensa funkcijas īpašības	• $D(\operatorname{arcctg}) = E(\operatorname{ctg}) = (-\infty; +\infty)$ • $E(\operatorname{arcctg}) = D(\operatorname{ctg}) = (0; \pi)$ • Dilstoša funkcija visā definīcijas apgabalā. • Ja $x \to +\infty$, tad $\operatorname{arcctg} x \to 0$; ja $x \to -\infty$, tad $\operatorname{arcctg} x \to \pi$ Funkcijas $y = \operatorname{arcctg} x$ grafiku iegūst, attēlojot funkcijas $y = \operatorname{ctg} x$ grafiku intervālā $(0; \pi)$ simetriski attiecībā pret taisni $y = x$. Taisne $y = \pi$ un Ox ass ir grafika asimptotas.	

Ciklometriskās funkcijas izteikšana ar citām ciklometriskām funkcijām

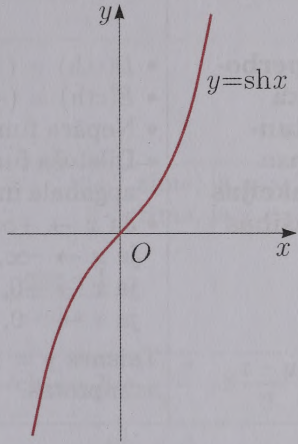
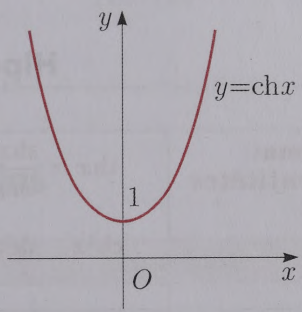
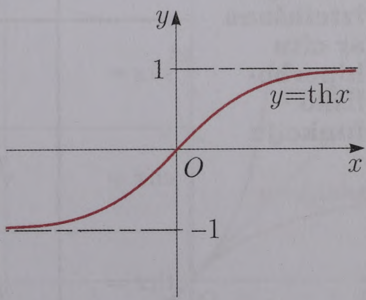
Funkcija	Funkcija izteikta ar:			
	arcsin	arccos	arctg	arcctg
$\arcsin x =$		$\frac{\pi}{2} - \arccos x$	$\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\pi}{2} - \mathrm{arcctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x =$	$\frac{\pi}{2} - \arcsin x$		$\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{arcctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathrm{arctg}\, x =$	$\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{\pi}{2} - \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$		$\frac{\pi}{2} - \mathrm{arcctg}\, x$
$\mathrm{arcctg}\, x =$	$\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\, x$	

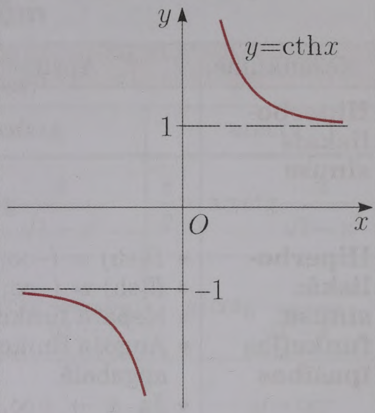
Salikta trigonometriskā funkcija, kuras iekšējā funkcija ir ciklometriskā funkcija

(piemēram, $\sin(\arcsin x) = x, \quad \mathrm{tg}(\mathrm{arcctg}\, x) = \frac{1}{x}$)

Iekšējā f. / Ārējā f.	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\mathrm{arctg}\, x$	$\mathrm{arcctg}\, x$
sin	x	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
cos	$\sqrt{1-x^2}$	x	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
tg	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	x	$\frac{1}{x}$
ctg	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	x

7.7. Hiperboliskās funkcijas

Nosaukums	Apzīmējums, paskaidrojumi	Ilustrācija
Hiperboliskais sinuss	$\mathbf{sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{\mathbf{2}}$	
Hiperboliskā sinusa funkcijas īpašības	• $D(\mathrm{sh}) = (-\infty; +\infty)$ • $E(\mathrm{sh}) = (-\infty; +\infty)$ • Nepāra funkcija: $\mathbf{sh}(-x) = -\mathbf{sh}x$ • Augoša funkcija visā definīcijas apgabalā. • Ja $x \to +\infty$, tad $\mathrm{sh}x \to +\infty$; ja $x \to -\infty$, tad $\mathrm{sh}x \to -\infty$	
Hiperboliskais kosinuss	$\mathbf{ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{\mathbf{2}}$	
Hiperboliskā kosinusa funkcijas īpašības	• $D(\mathrm{ch}) = (-\infty; +\infty)$ • $E(\mathrm{ch}) = [1; +\infty)$ • Pāra funkcija: $\mathbf{ch}(-x) = \mathbf{ch}x$ • Dilstoša funkcija intervālā $(-\infty; 0)$; augoša funkcija intervālā $(0; +\infty)$ • Ja $x \to \pm\infty$, tad $\mathrm{ch}x \to +\infty$	
Hiperboliskais tangenss	$\mathbf{th}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; $\mathbf{th}x = \dfrac{\mathbf{sh}x}{\mathbf{ch}x}$	
Hiperboliskā tangensa funkcijas īpašības	• $D(\mathrm{th}) = (-\infty; +\infty)$ • $E(\mathrm{th}) = (-1; 1)$ • Nepāra funkcija: $\mathbf{th}(-x) = -\mathbf{th}x$ • Augoša funkcija visā definīcijas apgabalā. • Ja $x \to +\infty$, tad $\mathrm{th}x \to 1$; ja $x \to -\infty$, tad $\mathrm{th}x \to -1$ Taisnes $y = 1$, $y = -1$ – grafika asimptotas.	

Hiperboliskais kotangenss	$\operatorname{cth}x = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$ $\operatorname{cth}x = \dfrac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}$	
Hiperboliskā kotangensa funkcijas īpašības	• $D(\operatorname{cth}) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$ • $E(\operatorname{cth}) = (-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty)$ • Nepāra funkcija: $\operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth}x$ • Dilstoša funkcija abos definīcijas apgabala intervālos. • Ja $x \to +\infty$, tad $\operatorname{cth}x \to 1$; ja $x \to -\infty$, tad $\operatorname{cth}x \to -1$; ja $x \to +0$, tad $\operatorname{cth}x \to +\infty$; ja $x \to -0$, tad $\operatorname{cth}x \to -\infty$ Taisnes $y = 1$, $y = -1$ – grafika asimptotas.	

Hiperbolisko funkciju formulas

Pamatidentitātes	$\operatorname{th}x = \dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}$, $\operatorname{cth}x = \dfrac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}$, $\operatorname{th}x \cdot \operatorname{cth}x = 1$, $\operatorname{ch}^2x - \operatorname{sh}^2x = 1$, $1-\operatorname{th}^2x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2x}$, $\operatorname{cth}^2x - 1 = \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2x}$

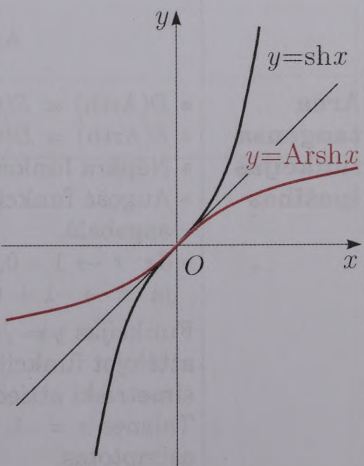
Hiperboliskās funkcijas izteikšana ar citu hiperbolisko funkciju

Funkcija	Funkcija izteikta ar: shx	chx	thx	cthx
$\operatorname{sh}x =$		$\pm\sqrt{\operatorname{ch}^2x-1}$	$\dfrac{\operatorname{th}x}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2x}}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{\operatorname{cth}^2x-1}}$
$\operatorname{ch}x =$	$\sqrt{\operatorname{sh}^2x+1}$		$\dfrac{1}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2x}}$	$\dfrac{\operatorname{cth}x}{\pm\sqrt{\operatorname{cth}^2x-1}}$
$\operatorname{th}x =$	$\dfrac{\operatorname{sh}x}{\sqrt{\operatorname{sh}^2x+1}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{\operatorname{ch}^2x-1}}{\operatorname{ch}x}$		$\dfrac{1}{\operatorname{cth}x}$
$\operatorname{cth}x =$	$\dfrac{\sqrt{\operatorname{sh}^2x+1}}{\operatorname{sh}x}$	$\dfrac{\operatorname{ch}x}{\pm\sqrt{\operatorname{ch}^2x-1}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{th}x}$	

("+" zīme, ja $x > 0$; "–" zīme, ja $x < 0$)

Argumentu summas (starpības) un divkārša argumenta hiperboliskās funkcijas	$\mathrm{sh}(x \pm y) = \mathrm{sh}x \cdot \mathrm{ch}y \pm \mathrm{ch}x \cdot \mathrm{sh}y$ $\mathrm{ch}(x \pm y) = \mathrm{ch}x \cdot \mathrm{ch}y \pm \mathrm{sh}x \cdot \mathrm{sh}y$ $\mathrm{th}(x \pm y) = \dfrac{\mathrm{th}x \pm \mathrm{th}y}{1 \pm \mathrm{th}x \cdot \mathrm{th}y}$, $\mathrm{cth}(x \pm y) = \dfrac{1 \pm \mathrm{cth}x \cdot \mathrm{cth}y}{\mathrm{cth}x \pm \mathrm{cth}y}$ $\mathrm{sh}2x = 2\mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}x$, $\mathrm{ch}2x = \mathrm{ch}^2x + \mathrm{sh}^2x$ $\mathrm{th}2x = \dfrac{2\mathrm{th}x}{1+\mathrm{th}^2x}$, $\mathrm{cth}2x = \dfrac{1+\mathrm{cth}^2x}{2\mathrm{cth}x}$
Argumenta puses hiperbolisko funkciju pārveidojumi	$\mathrm{sh}\dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{\mathrm{ch}x - 1}{2}}$, $\mathrm{ch}\dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{\mathrm{ch}x + 1}{2}}$ ("+" zīme, ja $x > 0$, "–" zīme, ja $x < 0$) $\mathrm{th}\dfrac{x}{2} = \dfrac{\mathrm{ch}x - 1}{\mathrm{sh}x} = \dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x + 1}$, $\mathrm{cth}\dfrac{x}{2} = \dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x - 1} = \dfrac{\mathrm{ch}x + 1}{\mathrm{sh}x}$
Hiperbolisko funkciju summas, starpības pārveidojumi	$\mathrm{sh}x \pm \mathrm{sh}y = 2\mathrm{sh}\dfrac{x \pm y}{2} \cdot \mathrm{ch}\dfrac{x \mp y}{2}$, $\mathrm{ch}x - \mathrm{ch}y = 2\mathrm{sh}\dfrac{x+y}{2} \cdot \mathrm{sh}\dfrac{x-y}{2}$ $\mathrm{ch}x + \mathrm{ch}y = 2\mathrm{ch}\dfrac{x+y}{2} \cdot \mathrm{ch}\dfrac{x-y}{2}$, $\mathrm{th}x \pm \mathrm{th}y = \dfrac{\mathrm{sh}(x \pm y)}{\mathrm{ch}x \cdot \mathrm{ch}y}$

7.8. Hiperbolisko funkciju inversās funkcijas

Nosaukums	Apzīmējums, paskaidrojumi	Ilustrācija
Area sinuss	$y = \mathbf{Arsh}x$ Funkcija $y = \mathrm{Arsh}x$ ir funkcijas $y = \mathrm{sh}x$ inversā funkcija: $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) \Rightarrow$ $\Rightarrow y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ $\mathbf{Arsh}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$	
Area sinusa funkcijas īpašības	• $D(\mathrm{Arsh}) = E(\mathrm{sh}) = (-\infty; +\infty)$ • $E(\mathrm{Arsh}) = D(\mathrm{sh}) = (-\infty; +\infty)$ • Nepāra funkcija: $\mathbf{Arsh}(-x) = -\mathbf{Arsh}x$ • Augoša funkcija visā definīcijas apgabalā. • Ja $x \to +\infty$, tad $\mathrm{Arsh}x \to +\infty$; ja $x \to -\infty$, tad $\mathrm{Arsh}x \to -\infty$ Funkcijas $y = \mathrm{Arsh}x$ grafiku iegūst, attēlojot funkcijas $y = \mathrm{sh}x$ grafiku simetriski attiecībā pret taisni $y = x$.	

<table>
<tr>
<td>Area kosinuss</td>
<td>

$$y = \mathrm{Arch}x$$

Funkcija $y = \mathrm{Arch}x$ ir funkcijas $y = \mathrm{ch}x$ inversā funkcija:

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow x = \ln\left(y \pm \sqrt{y^2 - 1}\right) \Rightarrow$$

- ja $x \geqslant 0$, tad

$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right) \Rightarrow$$

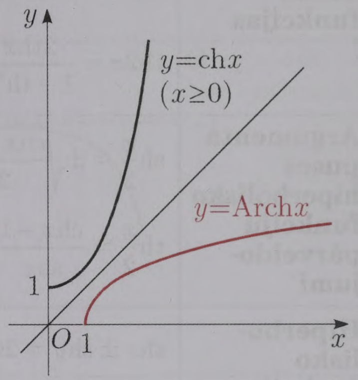
$$y = \mathrm{Arch}x = \mathbf{ln}\left(\boldsymbol{x} + \sqrt{\boldsymbol{x}^2 - \mathbf{1}}\right)$$

- ja $x \leqslant 0$, tad

$$x = \ln\left(y - \sqrt{y^2 - 1}\right) \Rightarrow$$

$$y = \mathrm{Arch}x = -\,\mathbf{ln}\left(\boldsymbol{x} + \sqrt{\boldsymbol{x}^2 - \mathbf{1}}\right)$$

</td>
<td rowspan="2">



</td>
</tr>
<tr>
<td>Area kosinusa funkcijas īpašības</td>
<td>

- $D(\mathrm{Arch}) = E(\mathrm{ch}) = [1; +\infty)$
- $E(\mathrm{Arch}) = D_{\mathrm{monot.}}(\mathrm{ch}) = [0; +\infty)$
- Augoša funkcija visā definīcijas apgabalā.
- Ja $x \to +\infty$, tad $\mathrm{Arch}x \to +\infty$ (aplūkots gadījums, kad $y \geqslant 0$).

Funkcijas $y = \mathrm{Arch}x$ grafiku iegūst, attēlojot funkcijas $y = \mathrm{ch}x$ grafiku intervālā $[0; +\infty)$ simetriski attiecībā pret taisni $y = x$.

</td>
</tr>
<tr>
<td>Area tangenss</td>
<td>

$$y = \mathrm{Arth}x$$

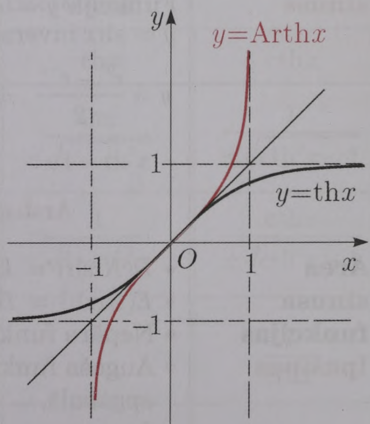
Funkcija $y = \mathrm{Arth}x$ ir funkcijas $y = \mathrm{th}x$ inversā funkcija:

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \Rightarrow x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

$$\mathbf{Arth}\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,\mathbf{ln}\,\frac{\mathbf{1} + \boldsymbol{x}}{\mathbf{1} - \boldsymbol{x}}$$

</td>
<td rowspan="2">

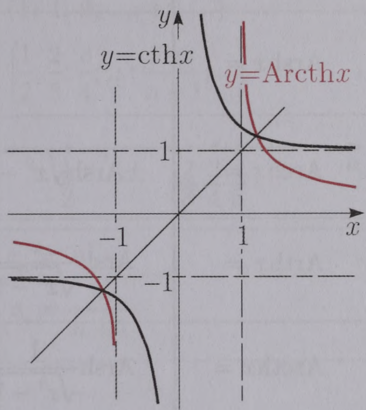


</td>
</tr>
<tr>
<td>Area tangensa funkcijas īpašības</td>
<td>

- $D(\mathrm{Arth}) = E(\mathrm{th}) = (-1; 1)$
- $E(\mathrm{Arth}) = D(\mathrm{th}) = (-\infty; +\infty)$
- Nepāra funkcija: $\mathbf{Arth}(-\boldsymbol{x}) = -\mathbf{Arth}\boldsymbol{x}$
- Augoša funkcija visā definīcijas apgabalā.
- Ja $x \to 1 - 0$, tad $\mathrm{Arth}x \to +\infty$; ja $x \to -1 + 0$, tad $\mathrm{Arth}x \to -\infty$

Funkcijas $y = \mathrm{Arth}x$ grafiku iegūst, attēlojot funkcijas $y = \mathrm{th}x$ grafiku simetriski attiecībā pret taisni $y = x$. Taisnes $x = -1$, $x = 1$ – grafika asimptotas.

</td>
</tr>
</table>

Area kotangenss	$y = \mathrm{Arcth}x$ Funkcija $y = \mathrm{Arcth}x$ ir funkcijas $y = \mathrm{cth}x$ inversā funkcija: $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{y+1}{y-1} \Rightarrow$ $\Rightarrow y = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1}$ $\mathbf{Arcth}x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1}$	
Area kotangensa funkcijas īpašības	• $D(\mathrm{Arcth}) = E(\mathrm{cth}) = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ • $E(\mathrm{Arcth}) = D(\mathrm{cth}) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ • Nepāra funkcija: $\mathrm{Arcth}(-x) = -\mathrm{Arcth}x$ • Dilstoša funkcija abos definīcijas apgabala intervālos. • Ja $x \to \pm\infty$, tad $\mathrm{Arcth}x \to 0$; ja $x \to 1 + 0$, tad $\mathrm{Arcth}x \to +\infty$; ja $x \to -1 - 0$, tad $\mathrm{Arcth}x \to -\infty$ Funkcijas $y = \mathrm{Arcth}x$ grafiku iegūst, attēlojot funkcijas $y = \mathrm{cth}x$ grafiku simetriski attiecībā pret taisni $y = x$. Taisnes $x = 1$, $x = -1$ un Ox ass ir grafika asimptotas.	
Inverso hiperbolisko funkciju summas (starpības) pārveidojumi	$\mathrm{Arsh}x \pm \mathrm{Arsh}y = \mathrm{Arsh}\left(x\sqrt{1+y^2} \pm y\sqrt{1+x^2}\right)$ $\mathrm{Arch}x \pm \mathrm{Arch}y = \mathrm{Arch}\left(xy \pm \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}\right)$ $\mathrm{Arth}x \pm \mathrm{Arth}y = \mathrm{Arth}\dfrac{x \pm y}{1 \pm xy}$ $\mathrm{Arcth}x \pm \mathrm{Arcth}y = \mathrm{Arcth}\dfrac{1 \pm xy}{x \pm y}$	

Inversās hiperboliskās funkcijas izteikšana ar citām Area funkcijām

Funkcija	Funkcija izteikta ar: Arsh	Arch	Arth	Arcth
$\operatorname{Arsh}x =$		$\pm\operatorname{Arch}\sqrt{x^2+1}$	$\operatorname{Arth}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{Arcth}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$
$\operatorname{Arch}x =$	$\pm\operatorname{Arsh}\sqrt{x^2-1}$		$\pm\operatorname{Arth}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\pm\operatorname{Arcth}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{Arth}x =$	$\operatorname{Arsh}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	$\pm\operatorname{Arch}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$\operatorname{Arcth}\dfrac{1}{x}$
$\operatorname{Arcth}x =$	$\operatorname{Arsh}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\pm\operatorname{Arch}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{Arth}\dfrac{1}{x}$	
"+" zīme, ja $x>0$, "–" zīme, ja $x<0$				

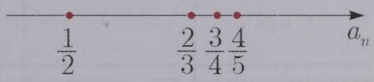
Salikta hiperboliskā funkcija, kuras iekšējā funkcija ir Area funkcija

(piemēram, $\operatorname{sh}(\operatorname{Arsh}x) = x$, $\operatorname{th}(\operatorname{Arcth}x) = \dfrac{1}{x}$)

Iekšējā f. / Ārējā f.	$\operatorname{Arsh}x$	$\operatorname{Arch}x$	$\operatorname{Arth}x$	$\operatorname{Arcth}x$
sh	x	$\pm\sqrt{x^2-1}$	$\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{x^2-1}}$
ch	$\sqrt{x^2+1}$	x	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{x}{\pm\sqrt{x^2-1}}$
th	$\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{x^2-1}}{x}$	x	$\dfrac{1}{x}$
cth	$\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$	$\dfrac{x}{\pm\sqrt{x^2-1}}$	$\dfrac{1}{x}$	x
"+" zīme, ja $x>0$; "–" zīme, ja $x<0$				

8. SKAITĻU VIRKNES. SKAITĻU RINDAS

8.1. Skaitļu virknes

Nosaukums	Apzīmējums, paskaidrojumi	Piemēri
Skaitļu virkne	$(x_n) = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$ $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ x_n, a_n – virknes locekļi **Skaitļu virkne – funkcija, kuras argumenta vērtības ir tikai naturāli skaitļi.**	$(1; 4; 9; \ldots; n^2; \ldots)$ $\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \ldots; \frac{n}{n+1}; \ldots\right)$ 
Virknes **vispārīgais loceklis**	Analītiska izteiksme, pēc kuras katrai argumenta vērtībai $n \in \mathbb{N}$ atrod atbilstošo virknes locekli.	$x_n = n^2$ $a_n = \frac{n}{n+1}$
Monotonas virknes	**Augošas, dilstošas, neaugošas, nedilstošas virknes.**	
• **Augoša virkne**	Virkne, kuras katrs loceklis (sākot ar otro) ir lielāks nekā iepriekšējais loceklis: $x_n < x_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$	$(2; 4; 6; \ldots; 2n; \ldots)$
• **Dilstoša virkne**	Virkne, kuras katrs loceklis (sākot ar otro) ir mazāks nekā iepriekšējais loceklis: $x_n > x_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$	$\left(2; \frac{3}{2}; \frac{4}{3}; \ldots; \frac{n+1}{n}; \ldots\right)$
• **Neaugoša virkne**	Virkne, kurai $x_n \geqslant x_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$	$\left(1; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{5}; \ldots\right)$
• **Nedilstoša virkne**	Virkne, kurai $x_n \leqslant x_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$	$(2; 2; 4; 6; 6; 8; 10; 10; \ldots)$
Konstanta virkne	Virkne, kurai $x_n = C \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ (C – konstants lielums)	$(5; 5; 5; \ldots; 5; \ldots)$
Oscilējoša virkne	Virkne, kurai $x_n < x_{n+1}$, $x_{n+1} > x_{n+2}$ vai $x_n > x_{n+1}$, $x_{n+1} < x_{n+2} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$	$\left(1; -\frac{1}{3}; \frac{1}{5}; \ldots; (-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}; \ldots\right)$
No augšas ierobežota virkne	Virkne, kurai eksistē tāds skaitlis M, ka $x_n \leqslant M \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$	$\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \ldots; \frac{n}{n+1}; \ldots\right)$, $\frac{n}{n+1} < 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

No apakšas ierobežota virkne	Virkne, kurai eksistē tāds skaitlis m, ka $x_n \geqslant m \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$	$\left(1; \frac{2}{3}; \frac{3}{5}; \ldots; \frac{n}{2n-1}; \ldots\right)$, $\frac{n}{2n-1} > \frac{1}{2} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$
Ierobežota virkne	No augšas un no apakšas ierobežota virkne; virkne, kurai eksistē tāds pozitīvs skaitlis μ, ka $\lvert x_n \rvert \leqslant \mu \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$	$\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}; \frac{1}{6}; \ldots; (-1)^{n+1}\frac{1}{2n}; \ldots\right)$, $\left\lvert (-1)^{n+1}\frac{1}{2n} \right\rvert < 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$
Virknes robeža	$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ **Skaitlis A, ja katram pozitīvam skaitlim ε var atrast tādu skaitli N, ka visiem virknes locekļiem, kuru kārtas numuri $n > N$, ir spēkā nevienādība** $\lvert x_n - A \rvert < \varepsilon$	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$, jo $\left\lvert \frac{n}{n+1} - 1 \right\rvert < \varepsilon$, ja $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \Rightarrow N = \frac{1}{\varepsilon} - 1$
Konverģenta virkne	Virkne, kurai eksistē galīga robeža.	
Diverģenta virkne	Virkne, kurai neeksistē galīga robeža.	$(2;\ 4;\ 6;\ \ldots;\ 2n;\ \ldots)$ $\lim\limits_{n\to\infty} 2n = \infty$
Konverģences nepieciešamais nosacījums	Ja virkne konverģē, tad tā ir ierobežota virkne.	
Konverģences pietiekamais nosacījums	Veierštrāsa teorēma: **ja virkne ir monotona un ierobežota, tad tai eksistē galīga robeža.**	
Konverģences nepieciešamais un pietiekamais nosacījums	Bolcāno–Košī teorēma: **virknei eksistē galīga robeža tad un tikai tad, ja katram pozitīvam skaitlim ε var atrast tādu skaitli N, ka visiem virknes locekļiem x_n un x_m, kuriem $n > N$ un $m > N$, ir spēkā nevienādība** $\lvert x_n - x_m \rvert < \varepsilon$	

8.2. Aritmētiskā progresija

Nosaukums	Apzīmējums, paskaidrojumi	Piemēri
Aritmētiskā progresija	**Skaitļu virkne, kuras katru locekli (sākot ar otro) iegūst, pieskaitot iepriekšējam loceklim vienu un to pašu skaitli d.** $a_n = a_{n-1} + d \quad (n \geqslant 2,\ n \in \mathbb{N})$	(3; 7; 11; 15; ...) $a_1 = 3; \quad d = 4$ $a_2 = 3 + 4 = 7$ $a_3 = 7 + 4 = 11$ ....
Progresijas diference	Skaitlis d, kuru pieskaitot progresijas iepriekšējam loceklim iegūst nākamo locekli.	
Augoša progresija	Progresija, kurā $a_n < a_{n+1} \ (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow d > 0$	(2; 2,5; 3; 3,5; ...), $d = 0{,}5 > 0$
Dilstoša progresija	Progresija, kurā $a_n > a_{n+1} \ (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow d < 0$	(10; 8; 6; 4; ...), $d = -2 < 0$
Progresijas vispārīgā locekļa formula	$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$	$a_n = 3 + (n-1)4$
Aritmētiskās progresijas pamatīpašība	$a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ $(n \geqslant 2)$	(3; 5; 7; 9; ...) $5 = \dfrac{3+7}{2}; \ 7 = \dfrac{5+9}{2}; \ ...$
Aritmētiskās progresijas pirmo n locekļu summas formula	$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ jeb $S_n = \dfrac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n$	(2; 5; 8; ...; 2 + $(n-1)3$; ...) $S_{10} = \dfrac{2 \cdot 2 + (10-1) \cdot 3}{2} \cdot 10 =$ $= 155$

8.3. Ģeometriskā progresija

Nosaukums	Apzīmējums, paskaidrojumi	Piemēri
Ģeometriskā progresija	**Skaitļu virkne, kuras katru locekli (sākot ar otro) iegūst, reizinot iepriekšējo locekli ar vienu un to pašu no nulles atšķirīgu skaitli *q*.** $b_n = b_{n-1} \cdot q \quad (n \geqslant 2,\ n \in \mathbb{N})$	$(3;\ 6;\ 12;\ 24;\ ...)$ $b_1 = 3;\ q = 2$ $b_2 = 3 \cdot 2 = 6$ $b_3 = 6 \cdot 2 = 12$ ....
Progresijas kvocients	Skaitlis q, ar kuru reizinot progresijas iepriekšējo locekli iegūst nākamo locekli.	
Augoša progresija	Progresija, kurā $b_n < b_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow$ $q > 1$, ja $b_1 > 0$; $0 < q < 1$, ja $b_1 < 0$	$(2;\ 6;\ 18;\ ...),\ q = 3$ $(-12;\ -6;\ -3;\ ...),\ q = \frac{1}{2}$
Dilstoša progresija	Progresija, kurā $b_n > b_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow$ $0 < q < 1$, ja $b_1 > 0$; $q > 1$, ja $b_1 < 0$	$(20;\ 10;\ 5;\ ...),\ q = \frac{1}{2}$ $(-2;\ -6;\ -18;\ ...),\ q = 3$
Progresijas vispārīgā locekļa formula	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$	$b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$
Ģeometriskās progresijas pamatīpašība	$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ $(n \geqslant 2)$	$(2;\ 6;\ 18;\ 54;\ ...)$ $6^2 = 2 \cdot 18;\ 18^2 = 6 \cdot 54;\ ...$
Ģeometriskās progresijas pirmo n locekļu summas formula	$S_n = \dfrac{b_n q - b_1}{q - 1}$ jeb $S_n = \dfrac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$, ja $q \neq 1$ $S_n = b_1 \cdot n$, ja $q = 1$	$(3;\ 6;\ 12;\ ...;\ 3 \cdot 2^{n-1};\ ...)$ $S_5 = \dfrac{3(2^5 - 1)}{2 - 1} = 93$
Bezgalīgas dilstošas ģeometriskās progresijas locekļu summa	$S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n \Rightarrow$ $S = \dfrac{b_1}{1 - q},\quad \lvert q \rvert < 1$	$\left(1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ ...\right),\ q = \frac{1}{2}$ $S = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$

8.4. Skaitļu rindas

Nosaukums	Apzīmējums, paskaidrojumi	Piemēri
Skaitļu rinda	**Izteiksme, ko iegūst, bezgalīgas skaitļu virknes locekļus savienojot ar saskaitīšanas zīmi.** $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$
Rindas parciālsummas	$S_1=a_1$ $S_2=a_1+a_2$ $S_3=a_1+a_2+a_3$ .... $S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$	$S_1=\frac{1}{2}$ $S_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ .... $S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}$
Rindas summa	Parciālsummu robeža, kad $n\to\infty$: $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n=S$	
Konverģenta rinda	**Rinda, kuras parciālsummām eksistē galīga robeža.**	Bezgalīgas dilstošas ģeometriskās progresijas rinda, piemēram, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}S_n=2$ (sk. 142. lpp.)
Diverģenta rinda	**Rinda, kuras parciālsummām neeksistē galīga robeža.**	**Harmoniskā rinda**: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$
Rindas atlikums	$R_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots$ Rinda, ko iegūst, ja dotajā rindā "svītro" pirmos n locekļus. Ja rinda $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konverģē un tās summa ir S, tad $R_n=S-S_n$	
Konverģences nepieciešamais nosacījums	**Ja rinda konverģē, tad tās vispārīgā locekļa robeža ir nulle, kad $n\to\infty$:** $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$	

Pozitīvu skaitļu rindu konverģences pietiekamie nosacījumi (konverģences kritēriji)

Nosaukums	Apzīmējums, paskaidrojumi	Piemēri
Salīdzināšanas kritērijs	Ja rindām $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1), $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (2) $0 < a_n \leqslant b_n$, tad • rinda (1) **konverģē, ja konverģē** rinda (2); • rinda (2) **diverģē, ja diverģē** rinda (1); • abas rindas konverģē vai diverģē, ja $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \neq \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$ (1), $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ (2) **Rinda (2) konverģē** (bezgalīgas dilstošas ģeometriskās progresijas rinda, kurai $b_1 = \frac{1}{2}$; $q = \frac{1}{2}$). Tā kā $\frac{1}{n \cdot 2^n} < \frac{1}{2^n}$, tad **konverģē arī rinda (1).**
Dalambēra kritērijs	Ja skaitļu rindai $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n > 0)$ eksistē robeža $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p$, tad • rinda **konverģē**, ja $p < 1$; • rinda **diverģē**, ja $p > 1$; • ar šo kritēriju nevar noteikt konverģenci, ja $p = 1$	Rinda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ **konverģē**, jo $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot 2^n}{2^{n+1} n} =$ $= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) =$ $= \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2} < 1$
Koši kritērijs	Ja skaitļu rindai $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n > 0)$ eksistē robeža $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = p$, tad • rinda **konverģē**, ja $p < 1$; • rinda **diverģē**, ja $p > 1$; • ar šo kritēriju nevar noteikt konverģenci, ja $p = 1$	Rinda $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{n}\right)^n$ **diverģē**, jo $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n} =$ $= \lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2 - 0 = 2 > 1$
Integrālais konverģences kritērijs	Ja skaitļu rindai $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ir spēkā nevienādības $a_n \geqslant a_{n+1} > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ un $a_n = f(n)$, kur $f(x)$ ir nepārtraukta un neaugoša funkcija, tad **rinda konverģē (diverģē), ja konverģē (diverģē) neīstais integrālis** $\int_1^{\infty} f(x)dx$ vai $\int_a^{\infty} f(x)dx$ $(a > 0)$	Rinda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ **konverģē**, jo konverģē neīstais integrālis $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx$: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}dx =$ $= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\bigg\vert_1^b = -\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b} - 1\right) =$ $= -(0-1) = 1$

Maiņzīmju rindas

Nosaukums	Apzīmējums, paskaidrojumi	Piemēri
Maiņzīmju rinda	Rinda, kuras locekļi ir dažādu zīmju skaitļi.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}$
Rindas absolūtā un nosacītā konverģence	Maiņzīmju rindu $$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \quad (1)$$ sauc par **absolūti konverģentu** rindu, ja konverģē rinda $$\sum_{n=1}^{\infty}\lvert a_n\rvert \quad (2)$$ Rindu (1) sauc par **nosacīti konverģentu** rindu, ja šī rinda konverģē, bet diverģē rinda (2).	Rinda $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$ **konverģē absolūti**, jo konverģē rinda $\sum_{n=1}^{\infty}\left\lvert(-1)^n\frac{1}{n^2}\right\rvert=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$
Alternējoša rinda	$a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n+1}a_n + \ldots$ Rinda, kuras locekļu zīme mainās no "+" uz "–" un no "–" uz "+", bet $a_n > 0$	$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+$ $+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots$
Leibnica kritērijs (alternējošas rindas konverģences pietiekamais nosacījums)	**Ja alternējošai rindai** 1) $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, 2) $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > a_{n+1} > \ldots$, **tad rinda konverģē; tās summa S ir pozitīvs skaitlis, kas mazāks par rindas pirmo locekli, t.i.,** $$0 < S < a_1$$	Rinda $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ konverģē, jo 1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$; 2) $\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}\quad\forall\, n\in\mathbb{N}$ Var pierādīt, ka $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=\ln 2$
Alternējošas rindas atlikuma novērtējums	Ja alternējošas rindas summu S aizstāj ar parciālsummu S_n, tad kļūda ir mazāka par rindas nākamā locekļa a_{n+1} moduli: $$\lvert R_n\rvert=\lvert S-S_n\rvert<\lvert a_{n+1}\rvert$$	Aprēķinot ln2 ar precizitāti, piemēram, līdz 10^{-2}, jānosaka locekļu skaits n parciālsummā S_n, t.i., jāatrisina nevienādība $\lvert a_{n+1}\rvert=\left\lvert(-1)^{n+2}\frac{1}{n+1}\right\rvert<10^{-2}$ $\Rightarrow n>99$. Tātad parciālsummā S_n jāņem 100 locekļi.

Konverģentu rindu īpašības

• **Komutatīvā īpašība**	Ja skaitļu rinda konverģē absolūti, tad, mainot vietām šīs rindas locekļus, iegūst rindu, kas arī konverģē absolūti, un tai ir tāda pati summa kā dotajai rindai. Ja skaitļu rinda konverģē nosacīti (neabsolūti), tad, mainot vietām tās locekļus, var iegūt rindu, kas konverģē uz citu summu vai arī diverģē.
• **Asociatīvā īpašība**	Ja rinda konverģē, tad rinda, ko iegūst, brīvi izraudzītā veidā grupējot tās locekļus, bet nemainot locekļu kārtību, arī konverģē un tai ir tāda pati summa kā dotajai rindai.
• **Distributīvā īpašība**	Ja rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverģē un tās summa ir S, tad konverģē arī rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n$ un tās summa ir skaitlis kS, t.i., $k\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n$

Dažu konverģentu skaitļu rindu summas

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots = \mathbf{e}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!} + \ldots = \frac{1}{\mathbf{e}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \ldots = \ln 2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{2^n} + \ldots = \frac{2}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1} + \ldots = \frac{\pi}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{12}$$

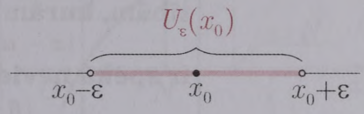
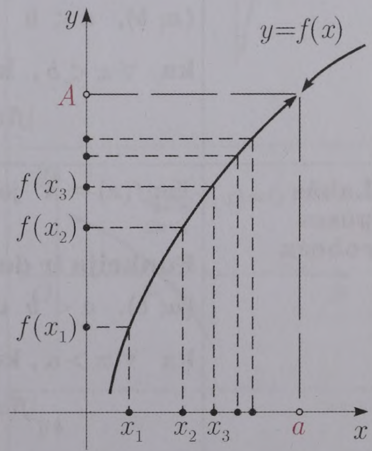
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots = 1$$

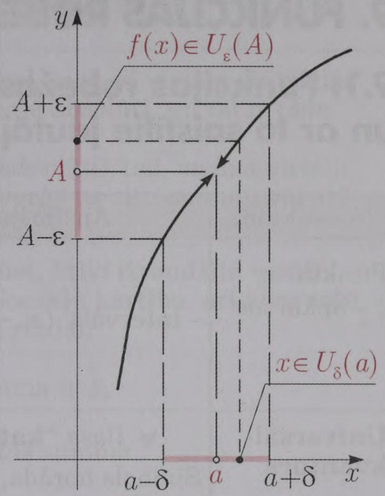
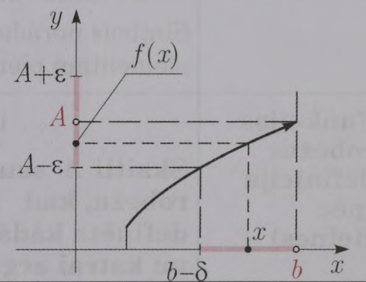
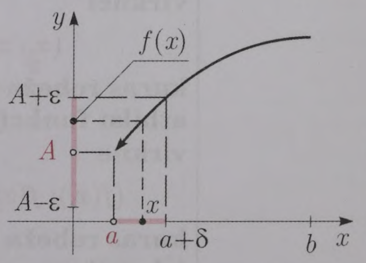
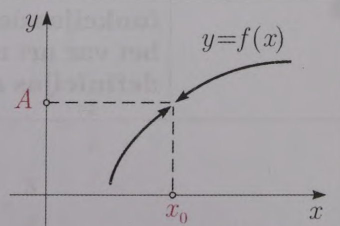
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \ldots = \frac{1}{2}$$

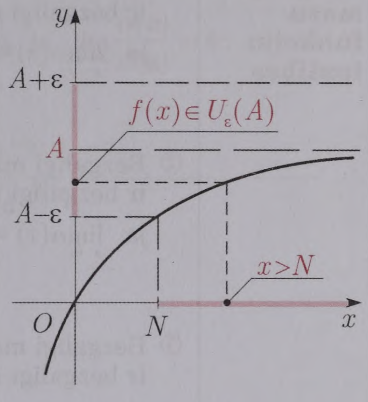
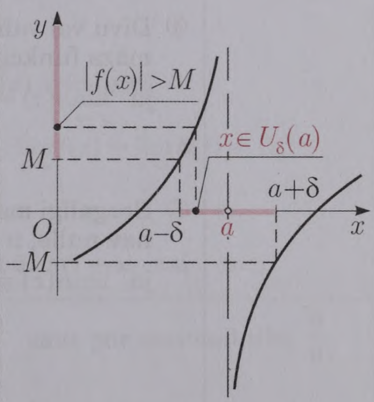
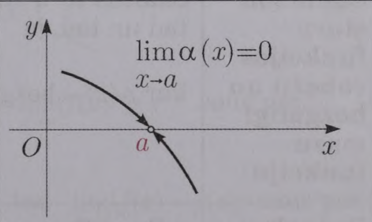
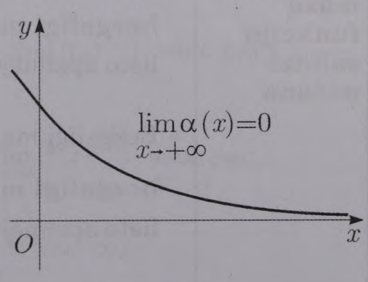
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(n-1)(n+1)} + \ldots = \frac{3}{4}$$

9. FUNKCIJAS ROBEŽA UN NEPĀRTRAUKTĪBA

9.1. Funkcijas robežas jēdziens un ar to saistītie jautājumi

Nosaukums	Apzīmējums, paskaidrojumi	Ilustrācija, piemēri
Punkta x_0 ε – apkārtne	$U_\varepsilon(x_0)$ – intervāls $(x_0 - \varepsilon;\ x_0 + \varepsilon)$	
Universāl-kvantors	$\forall$ (lasa "**katram**", "**visiem**") Simbols norāda, ka visiem kopas elementiem piemīt norādītā īpašība.	$\forall\ x \in \mathbb{R}$ ir $x^2 + 1 > 0$
Eksistences kvantors	$\exists$ (lasa "**eksistē**") Simbols norāda, ka kopā eksistē elements, kuram piemīt norādītā īpašība. $\exists!$ (lasa "**eksistē tikai viens**") Simbols norāda, ka tikai vienam kopas elementam piemīt norādītā īpašība.	$\exists\ x \in \mathbb{Z}$, kuram $x^2 = 169$ $\exists!\ x \in \mathbb{R}$, kuram $(x-2)^2 = 0$
Funkcijas robežas definīcija (pēc Heines)	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ **Skaitli A sauc par funkcijas $f(x)$ robežu, kad $x \to a$, ja funkcija ir definēta kādā punkta a apkārtnē un katrai argumentu vērtību virknei** $(x_1;\ x_2;\ x_3;\ \ldots;\ x_n;\ \ldots)$, **kuras robeža ir skaitlis a, atbilst funkcijas $f(x)$ vērtību virkne** $(f(x_1);\ f(x_2);\ f(x_3);\ \ldots;\ f(x_n);\ \ldots)$, **kuras robeža ir skaitlis A (skaitlis a var piederēt pie funkcijas definīcijas apgabala, bet var arī nepiederēt definīcijas apgabalam).**	

Funkcijas robežas definīcija (pēc Košī)	**Skaitli A sauc par funkcijas $f(x)$ robežu, kad $x \to a$, ja funkcija ir definēta kādā punkta a apkārtnē (a var piederēt pie funkcijas definīcijas apgabala, bet var arī nepiederēt) un katram pozitīvam skaitlim ε var atrast tādu pozitīvu skaitli δ, ka visām x vērtībām, kurām** $\lvert x - a\rvert < \delta$, $(x \neq a)$, **ir spēkā nevienādība** $\lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$ Definīcijas saīsināts pieraksts: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, ja $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$, **ka** $\forall\ x$, **kuriem** $\lvert x - a\rvert < \delta\ \ (x \neq a)$ **ir** $\lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$ jeb, izmantojot apkārtnes jēdzienu, $\forall\ U_\varepsilon(A)\ \exists\ U_\delta(a)$, ka $\forall\ x \in U_\delta(a),\ (x \neq a) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$	
Kreisās puses robeža	$\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = A$ jeb $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = A$ **Funkcija ir definēta intervālā** $(a;\ b)$, $a < b$ **un** $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$, **ka** $\forall\ x < b$, **kuriem** $b - x < \delta$, **ir** $\lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$	
Labās puses robeža	$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = A$ jeb $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A$ **Funkcija ir definēta intervālā** $(a;\ b)$, $a < b$ **un** $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$, **ka** $\forall\ x > a$, **kuriem** $x - a < \delta$, **ir** $\lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$	
Robežas eksistences nosacījums punktā x_0	$\exists\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, **ja** $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$	

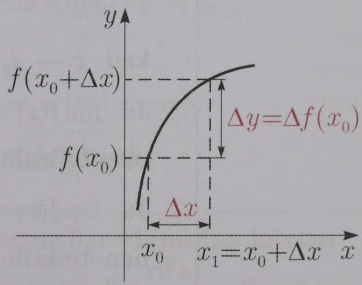
Funkcijas robeža, kad $x \to +\infty$ vai $x \to -\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ **Skaitli A sauc par funkcijas robežu, kad $x \to +\infty$, ja funkcija ir definēta kādā intervālā $(a; +\infty)$ un katram pozitīvam skaitlim ε var atrast tādu skaitli N, ka ar visām x vērtībām, kas lielākas nekā N, ir spēkā nevienādība** $\lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$ **jeb** $\forall\ U_\varepsilon(A)\ \exists\ N$, **ka** $\forall\ x > N \Rightarrow$ $f(x) \in U_\varepsilon(A)$ Analogi definē $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.	
Bezgalīgi liela funkcija, kad $x \to a$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ **Funkciju sauc par bezgalīgi lielu funkciju, kad $x \to a$ (jeb – funkcijas robeža ir bezgalība), ja katram pozitīvam skaitlim M var atrast tādu pozitīvu skaitli δ, ka ar visām x vērtībām, kurām** $\lvert x - a\rvert < \delta$ $(x \neq a)$, **ir spēkā nevienādība** $\lvert f(x)\rvert > M$ **jeb** $\forall\ M > 0\ \exists\ U_\delta(a)$, **ka** $\forall\ x \in U_\delta(a) \Rightarrow$ $\lvert f(x)\rvert > M$	
Bezgalīgi maza funkcija, kad $x \to a$ vai $x \to \infty$	**Funkciju sauc par bezgalīgi mazu funkciju, ja tās robeža ir 0, kad $x \to a$ vai $x \to \infty$.** **Bezgalīgi mazas funkcijas parasti apzīmē ar $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$.** $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$	
Sakarība starp bezgalīgi mazu funkciju un bezgalīgi lielu funkciju	• Ja $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$, tad $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{\alpha(x)} = \infty$ • Ja $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, tad $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ (Šajās izteiksmēs a vietā var būt arī $+\infty$ vai $-\infty$.)	

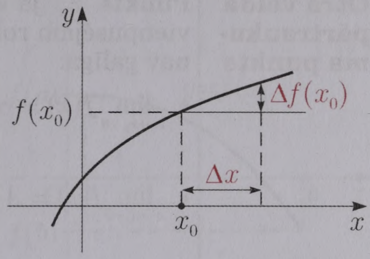
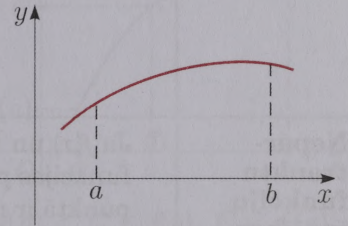
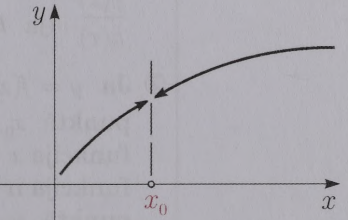
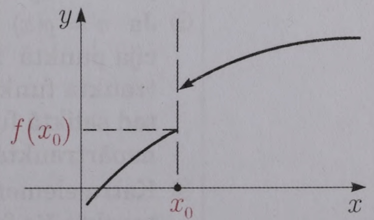
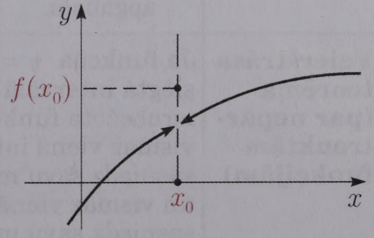
Bezgalīgi mazu funkciju īpašības	① Divu vai vairāku (galīga skaita) bezgalīgi mazu funkciju summa ir bezgalīgi maza funkcija: ja $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ un $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=0$, tad $$\lim_{x\to a}\big(\alpha(x)\pm\beta(x)\big)=0$$ ② Bezgalīgi mazas funkcijas reizinājums ar ierobežotu funkciju ir bezgalīgi maza funkcija: ja $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ un $\lvert f(x)\rvert\leqslant M \quad \forall x\in U(a)$, tad $$\lim_{x\to a}\big(\alpha(x)\cdot f(x)\big)=0$$ ③ Bezgalīgi mazas funkcijas reizinājums ar konstantu lielumu ir bezgalīgi maza funkcija: ja $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ un C – const, tad $$\lim_{x\to a}\big(C\cdot\alpha(x)\big)=0$$ ④ Divu vai vairāku bezgalīgi mazu funkciju reizinājums ir bezgalīgi maza funkcija: ja $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ un $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=0$, tad $$\lim_{x\to a}\big(\alpha(x)\cdot\beta(x)\big)=0$$ ⑤ Bezgalīgi mazas funkcijas dalījums ar funkciju, kuras robeža nav nulle, ir bezgalīgi maza funkcija: ja $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ un $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A\neq 0$, tad $$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{f(x)}=0$$ P i e z ī m e. Šajās izteiksmēs a vietā var būt arī $+\infty$ vai $-\infty$
Sakarība starp funkcijas robežu un bezgalīgi mazu funkciju	Skaitlis A ir funkcijas $f(x)$ robeža, kad $x\to a$ (vai $x\to\infty$), tad un tad, ja $$f(x)-A=\alpha(x),$$ kur $\alpha(x)$ – bezgalīgi maza funkcija, kad $x\to a$ (vai $x\to\infty$). $$\lim_{x\to a}f(x)=A \quad\Leftrightarrow\quad f(x)=A+\alpha(x)$$
Bezgalīgi mazu funkciju salīdzināšana	• Bezgalīgi mazas funkcijas $\alpha(x)$ un $\beta(x)$ sauc par **vienādas kārtas bezgalīgi mazām funkcijām**, kad $x\to a$, ja $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C\neq 0$; lieto apzīmējumu: $$\alpha(x)=O\big(\beta(x)\big),\quad x\to a$$ • Bezgalīgi mazas funkcijas $\alpha(x)$ un $\beta(x)$ sauc par **ekvivalentām bezgalīgi mazām funkcijām**, kad $x\to a$, ja $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$; lieto apzīmējumu: $$\alpha(x)\sim\beta(x),\quad x\to a$$

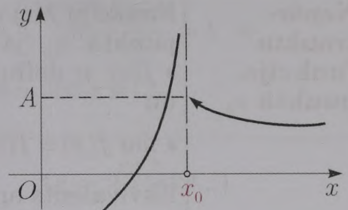
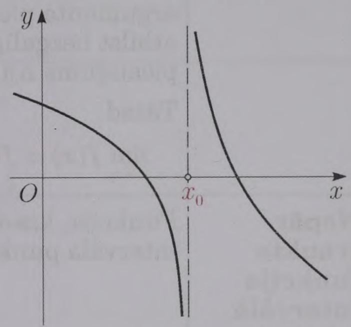
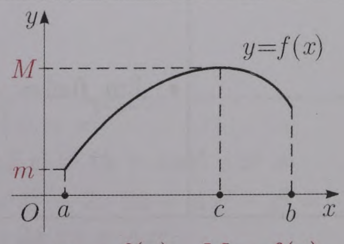
	• Bezgalīgi mazu funkciju $\alpha(x)$ sauc par **augstākas kārtas bezgalīgi mazu funkciju** nekā $\beta(x)$, kad $x \to a$, ja $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$; lieto apzīmējumu: $\alpha(x) = o\left(\beta(x)\right),\ x \to a$
Funkciju robežu īpašības	Ja eksistē robežas $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ un $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, tad ① $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x) \pm g(x)\right) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$ ② $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$ ③ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}, \quad \left(\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0\right)$ ④ $\lim\limits_{x\to a}\left(C \cdot f(x)\right) = C \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$ (C – const) ⑤ Ja $f(x) \leqslant g(x)$ $\forall\, x \in U(a)$, tad $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to a} g(x)$ ⑥ Ja $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ $\forall\, x \in U(a)$ un $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A$, tad $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$ Piezīme. Šajās izteiksmēs a vietā var būt arī $+\infty$ vai $-\infty$
Nenoteiktības	① Ja $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, tad $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ sauc par nenoteiktību $\dfrac{0}{0}$, kad $x \to a$ ② Ja $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, tad $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ sauc par nenoteiktību $\dfrac{\infty}{\infty}$, kad $x \to a$ ③ Ja $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ un $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, tad $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x) \cdot g(x)\right)$ sauc par nenoteiktību $0 \cdot \infty$, kad $x \to a$ ④ Ja $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ un $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, tad $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x) - g(x)\right)$ sauc par nenoteiktību $\infty - \infty$, kad $x \to a$ ⑤ Ja $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ un $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, tad $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)^{g(x)}\right)$ sauc par nenoteiktību 1^{∞}, kad $x \to a$ ⑥ Ja $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ un $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, tad $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)^{g(x)}\right)$ sauc par nenoteiktību 0^0, kad $x \to a$ (Šajās izteiksmēs a vietā var būt arī $+\infty$ vai $-\infty$)

Pirmā ievērojamā robeža	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}=1 \Rightarrow$ ja $x\to 0$, tad $x\sim\sin x\sim\operatorname{tg}x\sim\arcsin x\sim\operatorname{arctg}x$
Otrā ievērojamā robeža; skaitlis *e*	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ $\qquad (e=2{,}71828...)$
Dažu funkciju robežas, kuras iegūst no otrās ievērojamās robežas	$\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{m}{x}}=e^{km}$ $\qquad \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{mx}=e^{km}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1}{x}=a$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^x}=0$

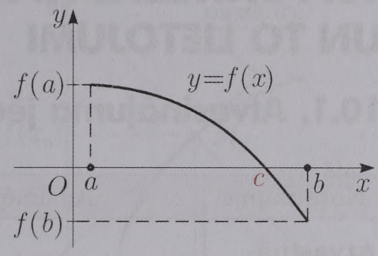
9.2. Funkcijas nepārtrauktība

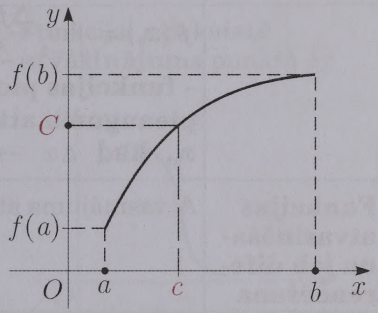
Nosaukums	Apzīmējums, paskaidrojumi	Ilustrācija, piemēri
Argumenta pieaugums	Δx Starpība starp divām argumenta vērtībām x_1 un x_0: $\Delta x=x_1-x_0 \Leftrightarrow x_1=x_0+\Delta x$	
Funkcijas pieaugums punktā x_0	$\Delta f(x_0)$, Δy Starpība starp divām funkcijas vērtībām $f(x_1)$ un $f(x_0)$: $\Delta f(x_0)=f(x_1)-f(x_0) \Leftrightarrow$ $\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$	
Funkcijas pieauguma formula	$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$ jeb $\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)$	$f(x)=x^2$ $\Delta f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=$ $=x^2+2x\,\Delta x+\Delta x^2-x^2=$ $=2x\,\Delta x+\Delta x^2$

Nepārtraukta funkcija punktā x_0	Funkciju $f(x)$ sauc par nepārtrauktu punktā x_0, ja • $f(x)$ ir definēta punktā x_0 un • $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ Ekvivalents apgalvojums: $f(x)$ ir nepārtraukta punktā x_0, ja bezgalīgi mazam argumenta pieaugumam Δx punktā x_0 atbilst bezgalīgi mazs funkcijas pieaugums $\Delta f(x_0)$. Tātad $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta f(x_0) = 0$	
Nepārtraukta funkcija intervālā $(a;\ b)$	Funkcija, kas ir nepārtraukta visos intervāla punktos.	
Pirmā veida pārtraukuma punkts	Punkts x_0, ja vienpusējās robežas, kad $x \to x_0$ ir galīgas, bet • punktā x_0 funkcija nav definēta vai • $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ vai • $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$	  

Otrā veida pārtraukuma punkts	Punkts x_0, ja vismaz viena no vienpusējām robežām, kad $x \to x_0$ nav galīga: • $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \infty$ un $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A$ vai • $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A$ un $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \infty$ vai • $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \infty$ un $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \infty$ P i e z ī m e. Šajā definīcijā simbola "∞" vietā var būt gan "+ ∞", gan "– ∞"	
Nepārtrauktu funkciju īpašības	① Ja $f(x)$ un $h(x)$ ir nepārtrauktas funkcijas punktā x_0, tad šajā punktā ir nepārtrauktas funkcijas $f(x) \pm h(x)$; $f(x) \cdot h(x)$; $\dfrac{f(x)}{h(x)}$ (ja $h(x_0) \neq 0$). ② Ja $y = f(x)$ ir nepārtraukta funkcija punktā x_0 un tai eksistē inversā funkcija $x = \varphi(y)$, tad inversā funkcija ir nepārtraukta punktā $y_0 = f(x_0)$. ③ Ja $u = g(x)$ ir nepārtraukta funkcija punktā x_0 un $y = f(u)$ ir nepārtraukta funkcija punktā $u_0 = g(x_0)$, tad saliktā funkcija $y = f(g(x))$ ir nepārtraukta punktā x_0. ④ Katra elementārā funkcija ir nepārtraukta šīs funkcijas definīcijas apgabalā.	$y = ax^2$ – nepārtr. f. $y = bx + c$ – nepārtr. f. $\Rightarrow$ $y = ax^2 + bx + c$ – nepārtr. f. $y = e^x$ – nepārtr. f. $\Rightarrow$ $x = \ln y$ – nepārtr. f. $y = \sqrt{u}$ – nepārtr. f. $u = 1 + x^2$ – nepārtr. f. $\Rightarrow$ $y = \sqrt{1 + x^2}$ – nepārtr. f.
Veierštrāsa teorēma (par nepārtrauktām funkcijām)	Ja funkcija $y = f(x)$ ir nepārtraukta slēgtā intervālā $[a; b]$, tad tā ir ierobežota funkcija šajā intervālā un vismaz vienā intervāla punktā sasniedz savu minimālo vērtību m, un vismaz vienā intervāla punktā sasniedz savu maksimālo vērtību M.	$m = f(a)$, $M = f(c)$

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Koši teorēmas (par nepārtrauktām funkcijām)</td>
<td>1. Ja funkcija ir nepārtraukta slēgtā intervālā $[a;\ b]$ un vienā no intervāla galapunktiem funkcijas vērtība ir pozitīva, bet otrā galapunktā – negatīva, tad vismaz vienā intervāla iekšējā punktā funkcijas vērtība ir nulle.

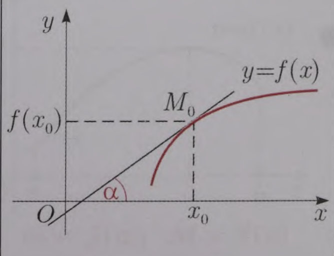
P i e z ī m e. Šo teorēmu izmanto, tuvināti atrisinot vienādojumu $f(x) = 0$, lai atdalītu šī vienādojuma reālās saknes.</td>
<td>

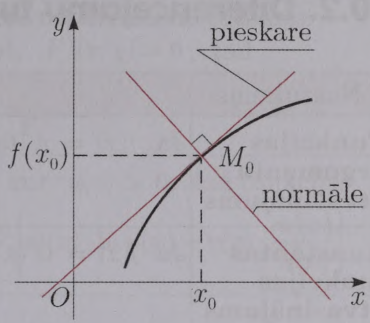
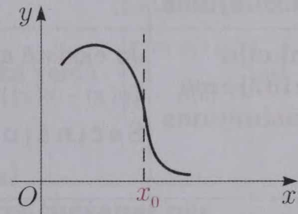
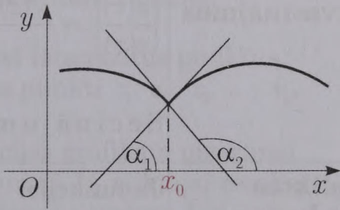
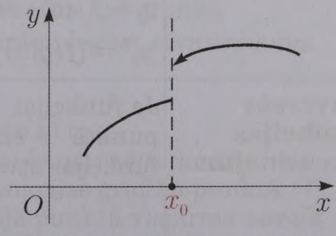
$f(a) > 0,\ f(b) < 0,\ f(c) = 0$</td>
</tr>
<tr>
<td>2. Ja funkcija ir nepārtraukta slēgtā intervālā $[a;\ b]$ un intervāla galapunktos funkcijas vērtības nav vienādas, tad šajā intervālā funkcija pieņem jebkuru starpvērtību starp vērtībām intervāla galos.</td>
<td>

$f(a) < C < f(b),\ C = f(c)$</td>
</tr>
</table>

10. FUNKCIJAS ATVASINĀJUMS, DIFERENCIĀLIS UN TO LIETOJUMI

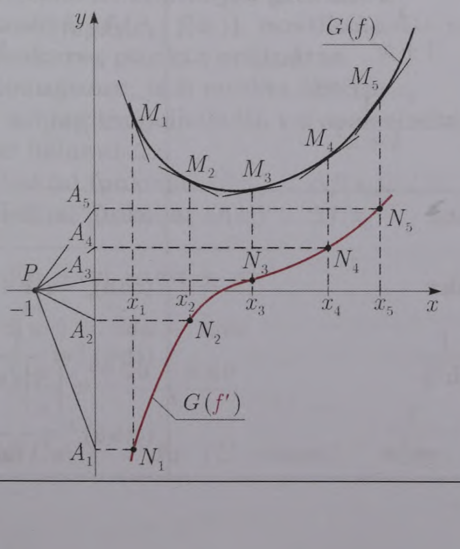
10.1. Atvasinājuma jēdziens un ar to saistītie jautājumi

Nosaukums	Apzīmējums, paskaidrojumi	Ilustrācija, piemēri
Atvasinājums punktā x_0	$f'(x_0)$, $y'(x_0)$, $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=x_0}$ $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ – **funkcijas pieauguma un argumenta pieauguma attiecības robeža punktā x_0, kad $\Delta x \to 0$**	$f(x)=x^2$ $\Delta f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=$ $=2x\cdot\Delta x+\Delta x^2$ $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=$ $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$
Funkcijas atvasināšana jeb diferencēšana	Atvasinājuma atrašana.	
Atvasinājuma fizikālā nozīme	• Ja $x=x(t)$ ir materiāla punkta koordināta x atkarībā no laika taisnvirziena kustībā, tad šīs funkcijas **atvasinājums ir punkta momentānais ātrums** (precīzāk – ātruma vektora projekcija uz Ox ass), t.i., $v=x'(t)$ jeb $v=\frac{dx}{dt}$ (Lieto arī apzīmējumu $v=\dot{x}(t)$) • Ja $v=v(t)$ ir taisnvirziena kustības ātrums atkarībā no laika, tad šīs funkcijas **atvasinājums ir kustības paātrinājums**, t.i., $a=v'(t)$ jeb $a=\frac{dv}{dt}$ • **Vispārīgā nozīmē**: ja funkcija, kuras arguments ir laiks, apraksta kādu procesu, tad funkcijas atvasinājums ir procesa norises ātrums.	Vienmērīgi paātrinātā kustībā noietais ceļš $s=\frac{at^2}{2}$ Kustības momentānais ātrums $v=\left(\frac{at^2}{2}\right)'=\frac{a}{2}(t^2)'=at$
Atvasinājuma ģeometriskā nozīme	$f'(x_0)=k=tg\alpha$ **Funkcijas atvasinājums punktā x_0 ir vienāds ar pieskares, kas novilkta funkcijas grafikam punktā $(x_0;\ f(x_0))$ virziena koeficientu.**	

Grafika pieskares vienādojums	$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$	
Grafika normāles vienādojums	$y = f(x_0) - \dfrac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$ **Līnijas normāle** punktā M_0 ir taisne, kas iet caur punktu M_0 un **ir perpendikulāra** šai punktā novilktai **līnijas pieskarei**.	
Atvasinājuma eksistence (diferencējamība)	**Funkcijai eksistē galīgs atvasinājums punktā x_0, ja** 1) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \neq \infty$, 2) $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ jeb $f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0)$	Funkcijai **neeksistē atvasinājums** punktā x_0:  $f'(x_0) = \infty$
Atvasinājuma eksistences nepieciešamais nosacījums	**Ja funkcijai punktā x_0 eksistē atvasinājums, tad funkcija šajā punktā ir nepārtraukta.** **Nepārtrauktība ir atvasinājuma eksistences nepieciešams nosacījums, bet nav pietiekams nosacījums**, t.i., funkcijas pārtraukuma punktā atvasinājums neeksistē, bet nepārtrauktība kādā punktā negarantē atvasinājuma eksistenci.	 $f'(x_0 + 0) \neq f'(x_0 - 0)$  x_0 – **pārtraukuma punkts**
Augstāku kārtu atvasinājumi	**2. kārtas atvasinājums:** $f''(x) = (f'(x))'$ jeb y'', $y^{(2)}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ **3. kārtas atvasinājums:** $f'''(x) = (f''(x))'$ jeb y''', $y^{(3)}$, $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ . . . . ***n*-tās kārtas atvasinājums:** $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$ jeb $y^{(n)}$, $\dfrac{d^ny}{dx^n}$	

10.2. Diferencējamu funkciju atvasināšanas likumi

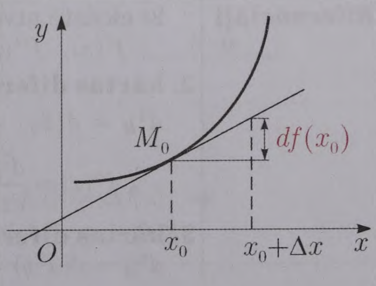
Nosaukums	Apzīmējums, paskaidrojumi, kārtula
Funkcijas argumenta atvasinājums	Ja $f(x) = x$, tad $f'(x) = 1$ jeb $x' = 1$
Konstantas funkcijas atvasinājums	Ja $f(x) = C$ (C – const), tad $f'(x) = 0$ jeb $C' = 0$
Funkciju summas, starpības atvasinājums	Ja eksistē atvasinājumi $u'(x)$ un $v'(x)$, tad $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$ jeb $(u \pm v)' = u' \pm v'$
Funkciju reizinājuma atvasinājums	Ja eksistē atvasinājumi $u'(x)$ un $v'(x)$, tad $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$ jeb $(uv)' = u'v + uv'$ Secinājumi: $(C \cdot u)' = C \cdot u'$ $(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$
Funkciju dalījuma atvasinājums	Ja eksistē atvasinājumi $u'(x)$ un $v'(x)$, tad $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$ jeb $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $(v(x) \neq 0)$ Secinājums: $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \Rightarrow \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
Saliktas funkcijas atvasinājums	Ja funkcijai $u = g(x)$ eksistē atvasinājums $u_x' = g'(x)$ un funkcijai $y = f(u)$ eksistē atvasinājums $y_u' = f'(u)$, tad saliktās funkcijas $y = f(g(x))$ atvasinājums: $y_x' = (f(g(x)))_x' = f_u'(g(x)) \cdot g_x'(x)$ jeb $y_x' = y_u' \cdot u_x'$
Inversās funkcijas atvasinājums	Ja funkcijai $y = f(x)$ eksistē inversā funkcija $x = \varphi(y)$ un punktā x eksistē atvasinājums $y' = f'(x) \neq 0$, tad inversās funkcijas atvasinājums $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ jeb $x_y' = \frac{1}{y_x'}$
Parametriskā veidā dotas funkcijas atvasinājums	Ja funkcija $y = f(x)$ ir uzdota parametriskā veidā $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, kur $x = x(t)$ ir monotona funkcija un eksistē atvasinājumi $x_t' = x'(t) \neq 0$, $y_t' = y'(t)$, tad funkcijas $y = f(x)$ atvasinājums $y_x' = \frac{y_t'}{x_t'}$

Apslēptā veidā dotas funkcijas atvasinājums	Ja ar vienādojumu $F(x;\ y) = 0$ ir definēta nepārtraukta funkcija $y = f(x)$ un eksistē atvasinājumi $F_x'(x;\ y)$, $F_y'(x;\ y) \neq 0$, tad funkcijas $y = f(x)$ atvasinājums $y_x' = -\dfrac{F_x'}{F_y'}$
Funkcijas $(u(x))^{v(x)}$ atvasinājums	Ja eksistē atvasinājumi $u'(x)$ un $v'(x)$, kur $u(x) > 0$, tad funkcijas $y = (u(x))^{v(x)}$ atvasinājums $y' = \left(u(x)\right)^{v(x)}\left(v'(x)\cdot \ln u(x) + v(x)\cdot \dfrac{u'(x)}{u(x)}\right)$
Augstāku kārtu atvasināšanas kārtulas	• $(C\ u)^{(n)} = C \cdot u^{(n)}$ • $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$ • $(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)} \cdot v + C_n^1 u^{(n-1)} v' + C_n^2 u^{(n-2)} v^{(2)} + C_n^3 u^{(n-3)} v^{(3)} + ... + u \cdot v^{(n)}$, kur $C_n^m = \dfrac{n(n-1)...(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot m}$ (Leibnica formula) • Ja funkcija $y = f(x)$ ir uzdota parametriskā veidā $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, tad $y''_{xx} = \dfrac{y''_{tt}\cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}}{\left(x'_t\right)^3}$
Grafiskā atvasināšana	**– metode atvasinājuma $f'(x)$ grafika konstruēšanai pēc funkcijas $f(x)$ grafika.** Metodes pamatā ir atvasinājuma ģeometriskā interpretācija. **Konstrukcijas plāns** **1.** Uz funkcijas $f(x)$ grafika $G(f)$ atzīmē brīvi izraudzītus punktus M_1, M_2, M_3, ..., M_n, kuriem atbilst Ox ass punkti x_1, x_2, x_3, ..., x_n. **2.** Uz Ox ass atzīmē punktu $P(-1;\ 0)$. **3.** Punktos M_1, M_2, M_3, ..., M_n novelk funkcijas grafikam pieskares. **4.** Novelk taisnes nogriezni PA_1 paralēli punktā M_1 vilktajai pieskarei. **5.** No punkta A_1 paralēli Ox asij novelk taisnes nogriezi A_1N_1. Punkts N_1 pieder funkcijas atvasinājuma $f'(x)$ grafikam $G(f')$. **6.** Šo konstrukciju atkārtojot ar pārējos funkcijas $f(x)$ grafika punktos M_2, M_3, ..., M_n vilktajām pieskarēm, iegūst atvasinājuma grafika punktus N_2, N_3, ..., N_n.  Piezīme. Lai konstruētu pieskari funkcijas grafika punktā M_i, šajā punktā vispirms novelk grafika normāli. To iegūst ar taisnstūrveida spoguļa palīdzību, ko pieliek punktā M_i perpendikulāri zīmējuma plaknei un pagriež tā, lai grafiks atspoguļotos bez lauzuma; tad spogulis ir vērsts pa grafika normāli punktā M_i. Pieskare šajā punktā ir normālei perpendikulāra taisne.

10.3. Atvasināšanas formulas

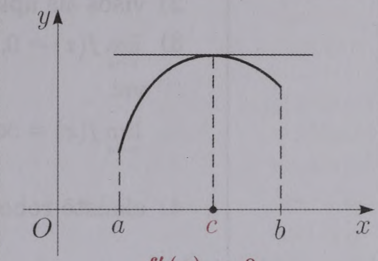
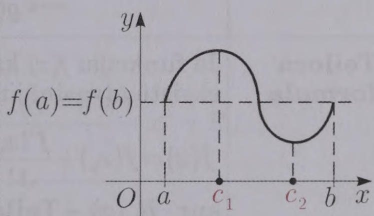
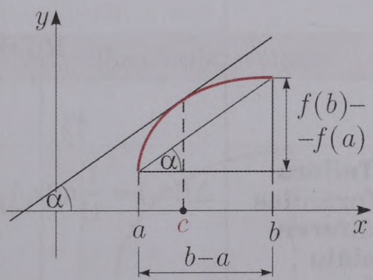
Nosaukums	Vienkārša funkcija $\left[\ y=f(x),\ \ y'=f'(x)\ \right]$	Salikta funkcija $\left[\begin{matrix} y=f(u),\ \text{kur}\ \ u=u(x) \\ y_x{}'=f_u{}'(u)\cdot u_x{}'(x)\end{matrix}\right]$
Pakāpes funkcijas atvasinājums	$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$	$(u^\alpha)_x{}'=\alpha u^{\alpha-1}\cdot u_x{}'$
Eksponentfunkcijas atvasinājums	$(a^x)'=a^x\ln a$ $(e^x)'=e^x$	$(a^u)_x{}'=a^u\ln a\cdot u_x{}'$ $(e^u)_x{}'=e^u\cdot u_x{}'$
Logaritmiskās funkcijas atvasinājums	$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$	$(\ln u)_x{}'=\dfrac{1}{u}\cdot u_x{}'$ $(\log_a u)_x{}'=\dfrac{1}{u\ln a}\cdot u_x{}'$
Trigonometrisko funkciju atvasinājumi	$(\sin x)'=\cos x$ $(\cos x)'=-\sin x$ $(\mathrm{tg}x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ $(\mathrm{ctg}x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\sin u)_x{}'=\cos u\cdot u_x{}'$ $(\cos u)_x{}'=-\sin u\cdot u_x{}'$ $(\mathrm{tg}u)_x{}'=\dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u_x{}'$ $(\mathrm{ctg}u)_x{}'=-\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u_x{}'$
Ciklometrisko funkciju atvasinājumi	$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\mathrm{arctg}x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$ $(\mathrm{arcctg}x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$	$(\arcsin u)_x{}'=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u_x{}'$ $(\arccos u)_x{}'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u_x{}'$ $(\mathrm{arctg}u)_x{}'=\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u_x{}'$ $(\mathrm{arcctg}u)_x{}'=-\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u_x{}'$
Hiperbolisko funkciju atvasinājumi	$(\mathrm{sh}x)'=\mathrm{ch}x$ $(\mathrm{ch}x)'=\mathrm{sh}x$ $(\mathrm{th}x)'=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2x}$ $(\mathrm{cth}x)'=-\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2x}$	$(\mathrm{sh}u)_x{}'=\mathrm{ch}u\cdot u_x{}'$ $(\mathrm{ch}u)_x{}'=\mathrm{sh}u\cdot u_x{}'$ $(\mathrm{th}u)_x{}'=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2u}\cdot u_x{}'$ $(\mathrm{cth}u)_x{}'=-\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2u}\cdot u_x$

10.4. Funkcijas diferenciālis

Nosaukums	Apzīmējums, paskaidrojumi	Ilustrācija, piemēri
Funkcijas $y = f(x)$ **diferenciālis**	$dy = y' \cdot dx = f'(x)dx$ Ja funkcijai $y = f(x)$ eksistē atvasinājums $f'(x_0)$, tad funkcijas pieaugumu $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ var izteikt šādi: $\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, kur α – bezgalīgi mazs lielums, kad $\Delta x \to 0$. Izteiksme $f'(x_0) \cdot \Delta x$ ir funkcijas pieauguma galvenā daļa, bet $\alpha \cdot \Delta x$ ir augstākas kārtas bezgalīgi mazs lielums nekā galvenā daļa, kad $\Delta x \to 0$. **Par funkcijas diferenciāli sauc funkcijas pieauguma galveno daļu, kas ir lineāra attiecībā pret argumenta pieaugumu Δx; apzīmē: $df(x)$, dy** Tātad $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x, \quad dy = y'\Delta x$ Diferenciāļa pierakstā Δx vietā parasti lieto apzīmējumu dx, ko sauc par argumenta diferenciāli. Tātad $df(x_0) = f'(x_0)dx, \quad dy = y'dx \Rightarrow$ $f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}, \quad y' = \frac{dy}{dx}$ Piezīme: $\Delta x = dx$, bet $\Delta y \approx dy$	Ja $f(x) = x^2$, tad $\Delta f(x) = 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2$, kur $\Delta x^2 = o(2x \cdot \Delta x)$, kad $\Delta x \to 0$, bet $2x = f'(x)$ Tātad $df(x) = 2x \cdot \Delta x$ jeb $df(x) = 2x \cdot dx$ $y = \cos x \Rightarrow dy = d(\cos x)$, $dy = (\cos x)'dx =$ $= -\sin x \cdot dx$ $y = 2^x \Rightarrow dy = d(2^x)$, $dy = (2^x)'dx =$ $= 2^x \cdot \ln 2 \cdot dx$ $y = \sqrt{1+x} \Rightarrow$ $dy = \left(\sqrt{1+x}\right)'dx =$ $= \frac{dx}{2\sqrt{1+x}}$
Diferenciāļa ģeometriskā nozīme	**Funkcijas diferenciālis $df(x_0)$ ir vienāds ar funkcijas grafikam punktā $M_0(x_0; f(x_0))$ novilktās pieskares punkta ordinātas pieaugumu**, ja šī punkta abscisa x_0 ir izmainīta (palielināta vai samazināta) par lielumu Δx. Ieliektai funkcijai $df(x_0) < \Delta f(x_0)$, izliektai funkcijai $df(x_0) > \Delta f(x_0)$	
Diferenciāļa īpašības	• $d(u \pm v) = du \pm dv$ • $d(uv) = vdu + udv$ • $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$ • $d(Cu) = C\,du$ (C – const)	$d(\sin x + \cos x) =$ $= (\sin x + \cos x)'dx =$ $= (\cos x - \sin x)dx =$ $= \cos x\,dx - \sin x\,dx =$ $= d(\sin x) + d(\cos x)$

Diferenciāļa formas invariance	**Diferenciāļa forma (izteiksme) ir invarianta, t.i., nav atkarīga no tā, vai funkcijas arguments ir neatkarīgs mainīgs lielums vai arī tas ir kāda cita mainīga lieluma funkcija.**	$y = \sin x$, $dy = (\sin x)'dx = \cos x \cdot dx$
	Vienkāršai funkcijai $y = f(x)$ diferenciāļa izteiksme: $dy = f'_x(x)dx$ Arī saliktai funkcijai $y = f(u)$, kur $u = u(x)$, ir analoga diferenciāļa izteiksme: $dy = f'_u(u)du$	Ja $y = \sin u$, kur $u = \sqrt{x}$, tad $dy = (\sin\sqrt{x})' \cdot dx = \cos\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x})' \cdot dx = \cos u \cdot du$
Diferenciāļa lietojumi	• **Funkcijas pieauguma tuvināta aprēķināšana** $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$, ja Δx modulis ir pietiekami mazs skaitlis.	Ja $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$, $\Delta x = 0{,}2$, tad $\Delta f(x_0) \approx df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \Delta x = \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot 0{,}2 = 0{,}05$
	• **Funkcijas vērtības tuvināta aprēķināšana** $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f(x_0) \approx f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$, ja Δx modulis ir pietiekami mazs skaitlis.	$\sqrt{17} \approx ?$ $\sqrt{17} = \sqrt{16+1}$, $f(x) = \sqrt{x}$ $x_0 = 16$, $\Delta x = 1$, $f(x_0) = 4$ $df(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{16}} \cdot 1 = 0{,}125$ $\sqrt{17} \approx 4 + 0{,}125 = 4{,}125$
Augstāku kārtu diferenciāļi	Nosacījumi: $y = f(x)$ 1) nav salikta funkcija, 2) eksistē atvasinājumi $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$ **2. kārtas diferenciālis:** $d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = f''(x)dx^2 \Rightarrow f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$	$y = \sin x$ $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$, $d^2y = -\sin x \cdot dx^2$
	3. kārtas diferenciālis: $d^3y = d(d^2y) = d(f''(x)dx^2) = f^{(3)}(x)dx^3 \Rightarrow f^{(3)}(x) = \frac{d^3y}{dx^3}$ **n-tās kārtas diferenciālis:** $d^ny = d(d^{n-1}y) = d(f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}) = f^{(n)}(x)dx^n \Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$	$y = \ln x$, $y' = \frac{1}{x}$ $y'' = -\frac{1}{x^2}$, $y^{(3)} = \frac{2}{x^3}$ $d^3y = \frac{2}{x^3}dx^3$

10.5. Teorēmas par diferencējamām funkcijām

Nosaukums	Apzīmējums, paskaidrojumi	Ilustrācija, piemēri
Fermā teorēma	Ja 1) punkts c ir intervāla $[a;\ b]$ iekšējais punkts, 2) funkcijai $f(x)$ punktā c ir vislielākā vērtība vai arī vismazākā vērtība šajā intervālā, 3) eksistē atvasinājums $f'(c)$, tad $f'(c) = 0$	 $f'(c) = 0$
Rolla teorēma	Ja 1) $f(x)$ ir nepārtraukta funkcija slēgtā intervālā $[a;\ b]$, 2) eksistē atvasinājums $f'(x)$ visos intervāla $(a;\ b)$ punktos, 3) $f(a) = f(b)$, tad intervālā $(a;\ b)$ eksistē vismaz viens punkts c, kurā $f'(c) = 0$	 $f'(c_1) = 0,\ f'(c_2) = 0$
Lagranža teorēma	Ja 1) $f(x)$ ir nepārtraukta funkcija slēgtā intervālā $[a;\ b]$, 2) eksistē atvasinājums $f'(x)$ visos intervāla $(a;\ b)$ punktos, tad intervālā $(a;\ b)$ eksistē vismaz viens punkts c, kurā $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$	
Lagranža galīgo pieaugumu formula	$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ Ja $a = x,\ b = x + \Delta x$, tad $b - a = \Delta x,\ f(b) - f(a) = f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta f(x) \Rightarrow$ $\Delta f(x) = f'(c) \cdot \Delta x$, kur $c \in (x;\ x + \Delta x)$	
Košī teorēma	Ja 1) $f(x)$ un $g(x)$ ir nepārtrauktas funkcijas slēgtā intervālā $[a;\ b]$, 2) eksistē atvasinājumi $f'(x)$ un $g'(x)$ intervālā $(a;\ b)$, 3) visos intervāla punktos $g'(x) \neq 0$, tad intervālā $(a;\ b)$ eksistē vismaz viens punkts c, kurā $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$	

Lopitāla teorēma (kārtula)	Ja 1) funkcijām $f(x)$ un $g(x)$ eksistē atvasinājums kādā punkta a apkārtnē (izņemot varbūt pašu punktu a), 2) visos šīs apkārtnes punktos $g'(x) \neq 0$, 3) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ vai $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty,\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, 4) eksistē robeža $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, tad $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)} = \left(\dfrac{0}{0}\right) =$ $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x - e^{-x})'}{(\ln(1+x))'} =$ $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x}}{\dfrac{1}{1+x}} = \dfrac{1+1}{1} = 2$
Teilora formula	Ja funkcijai $f(x)$ kādā punkta x_0 apkārtnē (ieskaitot pašu šo punktu) eksistē atvasinājumi $f'(x), f'', ..., f^{(n)}(x)$, tad visiem x no šīs apkārtnes $f(x) = f(x_0) + \dfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$, kur $R_n(x)$ – **Teilora formulas atlikuma loceklis**; $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\quad c \in (x_0;\ x)$ (atlikuma loceklis Lagranža formā); $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$, kad $x \to x_0$ (atlikuma loceklis Peano formā).	
Teilora formulas diferenciāļu forma	$\Delta f(x_0) = \dfrac{1}{1!}df(x_0) + \dfrac{1}{2!}d^2 f(x_0) + \dfrac{1}{3!}d^3 f(x_0) + ... + \dfrac{1}{n!}d^n f(x_0) + \dfrac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(c)$ $(c \in (x_0;\ x_0 + \Delta x))$	
Funkcijas $f(x)$ Teilora polinoms	$P_n(x) = f(x_0) + \dfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$	
Maklorena formula (Teilora formula, ja $x_0 = 0$)	$f(x) = f(0) + \dfrac{f'(0)}{1!}x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$, $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1},\quad c \in (0;\ x)$	

Dažu elementāro funkciju izvirzījumi pēc Maklorena formulas

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_n(x)$$

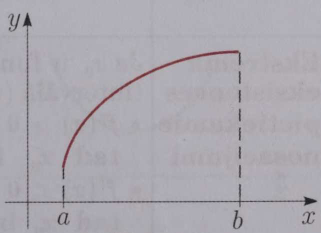
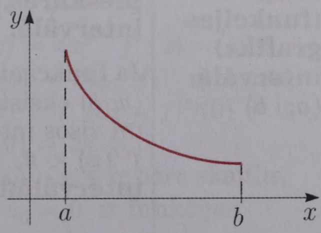
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_n(x)$$

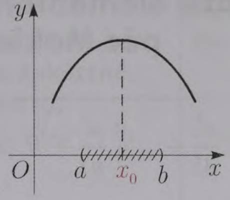
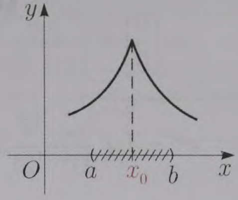
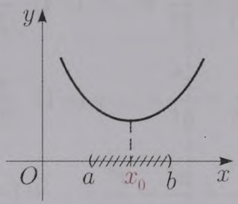
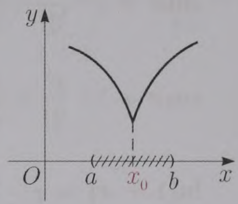
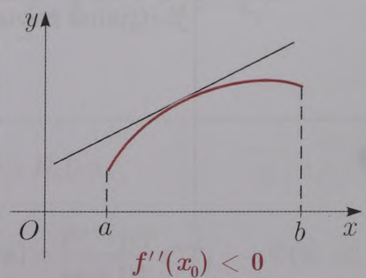
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x)$$

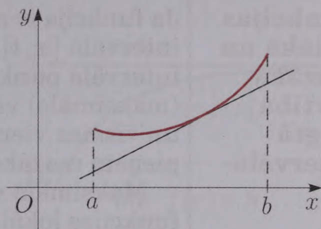
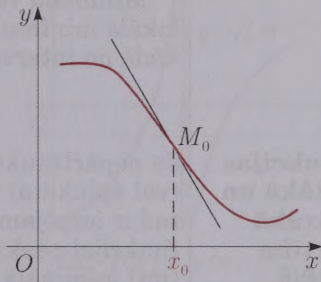
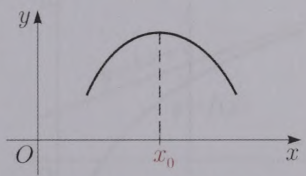
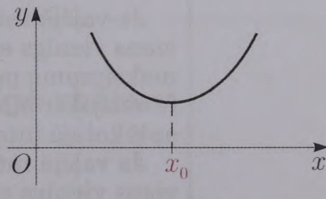
$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_n(x)$$

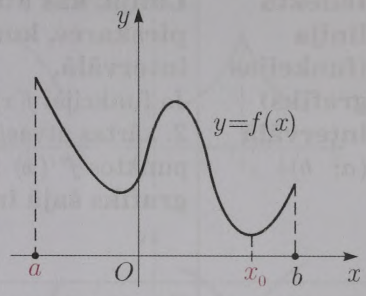
$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n(x)$$

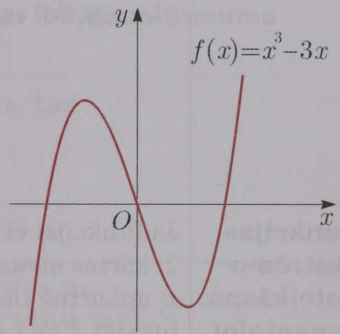
10.6. Atvasinājumu lietojumi funkcijas pētīšanā

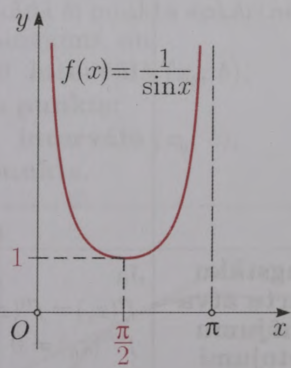
Nosaukums	Apzīmējums, paskaidrojumi	Ilustrācija, piemēri
Funkcijas monotonitātes pētīšana	Ja funkcijai $f(x)$ intervālā $(a;\ b)$ eksistē atvasinājums un visos intervāla punktos $f'(x) > 0$, tad funkcija šajā intervālā ir **augoša**, bet, ja $f'(x) < 0$, tad – **dilstoša**. Lai noteiktu funkcijas augšanas intervālus, jāatrisina nevienādība $f'(x) > 0$. Lai noteiktu funkcijas dilšanas intervālus, jāatrisina nevienādība $f'(x) < 0$.	$f'(x) > 0$ $f'(x) < 0$

Funkcijas lokālā maksimuma punkts; lokālais maksimums	Punkts x_0, ja šim punktam eksistē tāda apkārtne, ka visiem šīs apkārtnes punktiem $x \neq x_0$ ir $f(x) < f(x_0)$ $f_{max}(x_0)$	 
Funkcijas lokālā minimuma punkts; lokālais minimums	Punkts x_0, ja šim punktam eksistē tāda apkārtne, ka visiem šīs apkārtnes punktiem $x \neq x_0$ ir $f(x) > f(x_0)$ $f_{min}(x_0)$	 
Ekstrēmu punkti	**Funkcijas lokālā maksimuma punkti un lokālā minimuma punkti**	
Ekstrēma eksistences nepieciešamie nosacījumi	**Ja x_0 ir funkcijas $f(x)$ ekstrēma punkts, tad** • $f'(x_0) = 0$ (x_0 – stacionārs punkts) vai • $f'(x_0)$ **neeksistē.**	
Kritiskie punkti	**Punkti, kuros atvasinājums vienāds ar nulli vai neeksistē.** Kritiskajā punktā funkcijai ir iespējams ekstrēms.	$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0,$ $x^2 - 4x + 3 = 0,$ $x_1 = 1,\ x_2 = 3$ – funkcijas kritiskie (stacionārie) punkti
Ekstrēma eksistences pietiekamie nosacījumi	Ja x_0 ir funkcijas vienīgais kritiskais punkts kādā šī punkta apkārtnē (intervālā $(a;\ b)$), kurā funkcijai eksistē atvasinājums, un • $f'(x) > 0$ **intervālā** $(a;\ x_0)$, **bet** $f'(x) < 0$ **intervālā** $(x_0;\ b)$, **tad** x_0 **ir funkcijas lokālā maksimuma punkts;** • $f'(x) < 0$ **intervālā** $(a;\ x_0)$, **bet** $f'(x) > 0$ **intervālā** $(x_0;\ b)$, **tad** x_0 **ir funkcijas lokālā minimuma punkts.**	
Izliekta līnija (funkcijas grafiks) intervālā $(a;\ b)$	**Līnija, kas atrodas zem jebkuras pieskares, kura novilkta šajā intervālā.** Ja funkcijai $f(x)$ intervālā $(a;\ b)$ eksistē 2. kārtas atvasinājums un visos intervāla punktos $f''(x) < 0$, tad funkcijas **grafiks šajā intervālā ir izliekts.**	

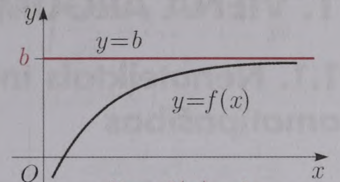
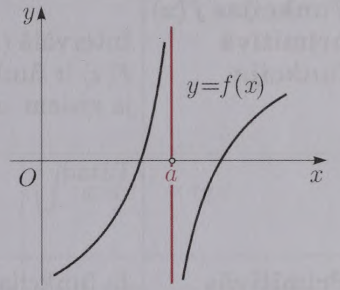
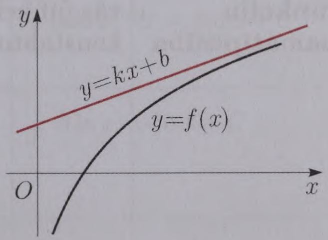
Ieliekta līnija (funkcijas grafiks) intervālā $(a;\ b)$	**Līnija, kas atrodas virs jebkuras pieskares, kura novilkta šajā intervālā.** Ja funkcijai $f(x)$ intervālā $(a;\ b)$ eksistē 2. kārtas atvasinājums un visos intervāla punktos $f''(x) > 0$, tad funkcijas **grafiks šajā intervālā ir ieliekts.**	 $f''(x_0) > 0$
Grafika pārliekuma punkts	**Punkts, kurš atdala līnijas izliekto daļu no ieliektās daļas.** Pārliekuma punktā 2. kārtas atvasinājums ir vienāds ar nulli vai neeksistē, un šajā punktā $f''(x)$ maina zīmi no "+" uz "–" vai arī no "–" uz "+".	 $f''(x_0) = 0$
Funkcijas ekstrēmu noteikšana, izmantojot 2. kārtas atvasinājumu	Ja funkcijai eksistē nepārtraukts 2. kārtas atvasinājums kādā punkta x_0 apkārtnē (ieskaitot pašu šo punktu), turklāt $f'(x_0) = 0$, tad • x_0 **ir funkcijas maksimuma punkts, ja** $f''(x_0) < 0$, • x_0 **ir funkcijas minimuma punkts, ja** $f''(x_0) > 0$	 $f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) < 0$  $f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) > 0$
Augstāku kārtu atvasinājumu lietojumi ekstrēmu un pārliekuma punktu noteikšanai	Ja $f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ un • n – nepāra skaitlis, tad x_0 **ir pārliekuma punkta abscisa;** • n – pāra skaitlis un $f^{(n)}(x_0) < 0$, tad x_0 **ir maksimuma punkts;** • n – pāra skaitlis un $f^{(n)}(x_0) > 0$, tad x_0 **ir minimuma punkts.**	$f(x) = x^4$ $f'(x) = 4x^3,\ f''(x) = 12x^2,$ $f^{(3)}(x) = 24x,\ f^{(4)}(x) = 24,$ $f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = 0,$ $f^{(4)}(0) = 24 > 0$ Tā kā $n = 4$ ir pāra skaitlis, tad $x_0 = 0$ ir funkcijas $f(x) = x^4$ minimuma punkts un $f_{\min}(0) = 0$

<table>
<tr>
<td>Funkcijas lielākā un mazākā vērtība slēgtā intervālā</td>
<td>Ja funkcija ir nepārtraukta slēgtā intervālā $[a;\ b]$, tad vismaz vienā šī intervāla punktā tā pieņem savu lielāko (maksimālo) vērtību no šī intervāla un vismaz vienā intervāla punktā pieņem mazāko (minimālo) vērtību.
Maksimālā vērtība var būt kādā no funkcijas lokālā maksimuma punktiem vai arī kādā no slēgtā intervāla galapunktiem.
Minimālā vērtība var būt kādā no lokālā minimuma punktiem vai arī kādā no intervāla galapunktiem.</td>
<td>

$x \in [a;\ b]$
$\max f(x) = f(a)$,
$\min f(x) = f(x_0)$</td>
</tr>
<tr>
<td>Funkcijas lielākā un mazākā vērtība vaļējā intervālā</td>
<td>Ja nepārtraukta funkcija ir definēta (vai aplūkota) vaļējā intervālā $(a;\ b)$, tad ir iespējams, ka šajā intervālā funkcijai neeksistē maksimālā vai (un) minimālā vērtība.</td>
<td>

$x \in (-\infty;\ +\infty)$
max $f(x)$, min $f(x)$ – neeksistē</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Ja vaļējā intervālā funkcijai ir tikai viens vienīgs ekstrēma punkts – lokālā maksimuma punkts, tad šajā punktā funkcijai ir maksimālā vērtība aplūkotajā intervālā.
Ja vaļējā intervālā funkcijai ir tikai viens vienīgs ekstrēma punkts – lokālā minimuma punkts, tad šajā punktā funkcijai ir minimālā vērtība aplūkotajā intervālā.</td>
<td>

$x \in (0;\ \pi)$
$\min f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$,
max $f(x)$ – neeksistē</td>
</tr>
</table>

Funkcijas grafika **horizontālā asimptota**	Ox asij paralēla taisne $y = b$, ja $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ Funkcijas grafikam var būt ne vairāk kā divas horizontālās asimptotas (kad $x \to +\infty$ un kad $x \to -\infty$)	 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$
Funkcijas grafika **vertikālā asimptota**	Oy asij paralēla taisne $x = a$, ja $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ Funkcijas grafikam var būt bezgalīgi daudz vertikālās asimptotas (piemēram, funkcijām $y = \text{tg}x$, $y = \text{ctg}x$)	 $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = -\infty$
Funkcijas grafika **slīpā asimptota**	Taisne $y = kx + b$, kur $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ un $b = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx)$ Funkcijas grafikam var būt ne vairāk kā divas slīpās asimptotas (kad $x \to +\infty$ un kad $x \to -\infty$)	

Funkcijas $f(x)$ pētīšanas vispārīgā shēma

1. Atrod funkcijas definīcijas apgabalu $D(f)$.
2. Noskaidro, vai $f(x)$ ir pāra (nepāra) funkcija.
3. Noskaidro, vai $f(x)$ ir periodiska funkcija; ja ir, – atrod tās periodu.
4. Atrod grafika krustpunktus ar Ox asi, atrisinot vienādojumu $f(x) = 0$, un nosaka, kādos intervālos funkcija ir pozitīva un kādos – negatīva.
   Atrod grafika krustpunktu ar Oy asi $(0; f(0))$.
5. **Atrod** $f'(x)$.
   Atrisinot nevienādības $f'(x) > 0$ un $f'(x) < 0$, nosaka funkcijas monotonitātes intervālus.
   Atrisinot vienādojumu $f'(x) = 0$ un nosakot $D(f')$, atrod kritiskos punktus un aprēķina lokālo ekstrēmu koordinātas.
6. **Atrod** $f''(x)$.
   Atrisinot nevienādības $f''(x) < 0$ un $f''(x) > 0$, nosaka grafika izliekuma (ieliekuma) intervālus un aprēķina grafika pārliekuma punktu koordinātas.
7. Atrod grafika asimptotu vienādojumus un konstruē asimptotas.
8. Izmantojot pētījuma rezultātus, konstruē funkcijas grafiku.

11. VIENA ARGUMENTA FUNKCIJU INTEGRĀLRĒĶINI

11.1. Nenoteiktais integrālis. Nenoteiktā integrāļa pamatīpašības

Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi	Piemēri
Funkcijas $f(x)$ primitīvā funkcija	$F(x)$ Intervālā $(a;\ b)$ diferencējama funkcija $F(x)$ ir funkcijas $f(x)$ primitīvā funkcija, ja visiem $x \in (a;\ b)$ $F'(x) = f(x)$ Tātad $d\,(F(x)) = f(x)\,dx$	Ja $f(x) = x^2$, tad $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, jo $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = \frac{1}{3}\cdot 3x^2 = x^2$ $\forall\ x \in (-\infty; +\infty)$
Primitīvās funkcijas $F(x)$ eksistence	Ja funkcija $f(x)$ ir **nepārtraukta** kādā intervālā, tad šajā intervālā tai eksistē primitīvā funkcija	
Primitīvo funkciju pamatīpašība	Ja $F(x)$ un $G(x)$ ir funkcijas $f(x)$ primitīvās funkcijas, tad tās atšķiras tikai par konstantu saskaitāmo, t. i., $F(x) = G(x) + C$	Ja, piemēram, $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 7$ un $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2$, tad $F'(x) = G'(x) = x^2 = f(x)$ [Šeit $F(x) = G(x) + 5$, t. i., $C = 5$]
Primitīvo funkciju kopa	$F(x) + C$, kur C – patvaļīga konstante	$\frac{1}{3}x^3 + C$ ir funkcijas $f(x) = x^2$ primitīvo funkciju kopa
Funkcijas $f(x)$ nenoteiktais integrālis	$\int f(x)dx = F(x) + C$, kur $F'(x) = f(x)$ **Par funkcijas $f(x)$ nenoteikto integrāli sauc šīs funkcijas primitīvo funkciju kopu $F(x) + C$** **$f(x)$ – zemintegrāļa funkcija** **$f(x)\,dx$ – zemintegrāļa izteiksme** **C – integrācijas konstante**	$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$ $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$

Funkcijas integrēšana	**Primitīvo funkciju kopas atrašana, izmantojot nenoteiktā integrāļa īpašības un integrēšanas formulas.** Integrēšana un atvasināšana ir divas savstarpēji apgrieztas darbības, tāpēc integrēšanas rezultāta pareizību var pārbaudīt atvasinot.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$, jo $(2\sqrt{x}+C)' =$ $= 2 \cdot \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Nenoteiktā integrāļa galvenās īpašības

Nenoteiktā integrāļa atvasinājums	$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$, kur $f(x)$ – zemintegrāļa funkcija	$\left(\int \mathrm{tg}x dx\right)' = \mathrm{tg}x$
Nenoteiktā integrāļa diferenciālis	$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$, kur $f(x)dx$ – zemintegrāļa izteiksme	$d\left(\int \sin x dx\right) = \sin x dx$
Atvasinājuma integrālis	$\int F'(x)dx = F(x) + C$	$\int (\sin x)' dx = \sin x + C$
Integrālis no funkcijas diferenciāļa	$\int dF(x) = F(x) + C$	$\int d(\ln x) = \ln x + C$
Integrālis no $Af(x)$, kur A – const	$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$	$\int 10x dx = 10\int x dx =$ $= 10 \cdot \frac{x^2}{2} + C = 5x^2 + C$
Funkciju summas, starpības integrālis	$\int \left(f(x) \pm g(x)\right) dx =$ $= \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$	$\int (2x+4)dx =$ $= \int 2x dx + \int 4 dx =$ $= x^2 + 4x + C$
Linearitātes īpašība	$\int (Af(x) \pm Bg(x))\, dx =$ $= A\int f(x)dx \pm B\int g(x)dx$, kur A, B – const. P i e z ī m e. Īpašība spēkā jebkuram galīgam saskaitāmo skaitam.	

11.2. Pamatintegrāļu tabula

Pakāpes funkcijas	Eksponentfunkcijas
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$ $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$ $\int \frac{dx}{x} = \ln\mid x\mid + C$	$\int e^x dx = e^x + C$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
Trigonometriskās funkcijas	**Hiperboliskās funkcijas**
$\int \sin x dx = -\cos x + C$ $\int \cos x dx = \sin x + C$ $\int \mathrm{tg} x dx = -\ln\mid\cos x\mid + C$ $\int \mathrm{ctg} x dx = \ln\mid\sin x\mid + C$ $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$ $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$	$\int \mathrm{sh} x dx = \mathrm{ch} x + C$ $\int \mathrm{ch} x dx = \mathrm{sh} x + C$ $\int \mathrm{th} x dx = \ln \mathrm{ch} x + C$ $\int \mathrm{cth} x dx = \ln\mid\mathrm{sh} x\mid + C$ $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th} x + C$ $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth} x + C$
Daļveida racionālās funkcijas	**Iracionālās funkcijas**
$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{x}{a} + C$ $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 + a}\right\rvert + C$

11.3. Integrēšanas pamatmetodes

Substitūcijas metode (pāreja uz jaunu mainīgo)	① $\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \left[\begin{array}{l} \text{substitūcija} \\ t = g(x) \\ dt = g'(x)dx \end{array}\right] = \int f(t)dt = F(t) + C =$ $= F(g(x)) + C$ jeb $\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int f(\,g(x)\,)\, d(g(x)) = F(\,g(x)\,) + C$ (t. i., reizinātāja "panešana" aiz diferenciāļa zīmes)

	② $\int f(x)dx = \begin{bmatrix} \text{substitūcija} \\ x=\varphi(t), \text{ kur } \varphi'(t)\neq 0 \\ dx=\varphi'(t)dt \end{bmatrix} =$ $= \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(t)+C$, kur F – funkcijas $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ primitīvā funkcija, bet **t jāizsaka ar x no funkcijas $x=\varphi(t)$ inversās funkcijas**.
Dažas biežāk izmantojamas sakarības	• Ja $\int f(x)dx = F(x)+C$, tad $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$, $a\neq 0$ • $\int f(x)\cdot f'(x)dx = \frac{1}{2}(f(x))^2 + C$ • $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$ • $\int \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx = -\frac{1}{f(x)} + C$ • $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + C$
Parciālā integrēšana	$\int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot u'(x)dx$ jeb $\int u(x)dv(x) = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)du(x)$ ($u(x)$, $v(x)$ – diferencējamas funkcijas)
Parciālās integrēšanas lietojumi	Parciālās integrēšanas formulu $\int u\cdot v'dx = u\cdot v - \int v\cdot u'dx$ jeb $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ izmanto (vienu vai vairākas reizes), integrējot funkcijas, kurās ietilpst logaritmi, inversās trigonometriskās, inversās hiperboliskās, eksponentfunkcijas, trigonometriskās funkcijas saistībā ar pakāpes funkcijām vai polinomiem $P(x)$. Būtiski svarīga ir pareizu reizinātāju u un dv izvēle; **integrālim $\int v\,du$ (jeb $\int v\,u'dx$) jābūt vienkāršākam nekā dotajam integrālim**; par dv (jeb $v'\,dx$) izvēlas to zemintegrāļa izteiksmes daļu, no kuras ar integrēšanu var atrast funkciju v. (sk. 174. lpp.)

Parciāli integrē, piemēram, šādas funkcijas.

Zemintegrāļa funkcija	Apzīmējumi	Piemēri
$e^{\alpha x}x^m$, $x^m \sin bx$ $(\alpha > 0,\ m > 0,\ m \in \mathbb{N})$ u. tml.	$x^m = u$	$\int xe^{2x}dx = \left[\begin{matrix} x = u; & du = dx \\ dv = e^{2x}dx; & v = \frac{1}{2}e^{2x}\end{matrix}\right] = $ $= \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx =$ $= \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$
$P(x)e^{\alpha x}$, $P(x)\cdot \sin bx$ $(\alpha > 0)$ u. tml.	$P(x) = u$	$\int x^2 \sin x dx = \left[\begin{matrix} x^2 = u; & du = 2xdx \\ dv = \sin xdx; & v = -\cos x\end{matrix}\right] =$ $= -x^2\cos x + 2\int x\cdot \cos xdx =$ $= \left[\begin{matrix} u = x; & du = dx \\ dv = \cos xdx; & v = \sin x\end{matrix}\right] =$ $= -x^2\cdot \cos x + 2\left(x\cdot \sin x - \int \sin xdx\right) =$ $= -x^2\cdot\cos x + 2(x\sin x + \cos x) + C$
$P(x)\cdot \ln \alpha x$, $P(x)\cdot \mathrm{arctg}x$ u. tml.	$P(x)\,dx = dv$	$\int x^2 \ln xdx =$ $= \left[\begin{matrix} u = \ln x; & du = \frac{1}{x}dx \\ x^2dx = dv; & v = \int x^2dx = \frac{x^3}{3}\end{matrix}\right] =$ $= \frac{x^3}{3}\cdot \ln x - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{x^3}{3}dx =$ $= \frac{x^3}{3}\cdot\ln x - \frac{1}{3}\int x^2dx =$ $= \frac{x^3}{3}\cdot \ln x - \frac{x^3}{9} + C$
$e^{ax}\sin bx$, $e^{ax}\cos bx$	Dažkārt, integrējot parciāli atkārtoti, iegūst vienādību, kurā nezināmais lielums ir meklējamais integrālis. **Parciāli integrējot divas reizes, abas reizes par u izvēlas viena un tā paša veida funkciju** – vai nu eksponentfunkciju, vai arī trigonometrisko funkciju.	

11.4. Dažas īpašas integrēšanas metodes (atkarībā no zemintegrāļa funkcijas)

Racionālu funkciju integrēšana

Zemintegrāļa funkcija	Integrēšanas metode
Vesela racionāla funkcija (polinoms) $P_n(x) =$ $= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$	$\int P_n(x)dx$ – integrē pa locekļiem, izmantojot formulu $$\int ax^n dx = a\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$
Daļveida racionāla funkcija (divu polinomu dalījums) $R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, kur $Q_m(x)$ ir m-tās, $P_n(x)$ – n-tās pakāpes polinoms	$$\int R(x)dx = \int \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}dx$$ Zemintegrāļa funkcija $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ pirms integrēšanas jāpārveido atkarībā no m un n vērtībām (iespējami gadījumi $m < n$ vai $m \geqslant n$). • $m < n$ Ja saucēja polinoma sadalījums reizinātājos ir $P_n(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\dots(x-\alpha_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}$ ($k_1 + k_2 + \dots + k_r + 2l_1 + \dots + 2l_s = n$; kvadrātiskajiem reizinātājiem reālu sakņu nav, t. i., $\frac{p_\mu^2}{4} - q_\mu < 0$, $\mu = 1, 2, \dots, s$), tad **$R(x)$ sadala elementārdaļās** šādi: $$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{(x-\alpha_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} +$$ $$+ \frac{B_1}{x-\alpha_2} + \frac{B_2}{(x-\alpha_2)^2} + \dots + \frac{B_{k_2}}{(x-\alpha_2)^{k_2}} + \dots +$$ $$+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \dots + \frac{M_{l_1}x+N_{l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + \dots +$$ $$+ \frac{E_1x+F_1}{x^2+p_sx+q_s} + \frac{E_2x+F_2}{(x^2+p_sx+q_s)^2} + \dots + \frac{E_{l_s}x+F_{l_s}}{(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}},$$ kur A, B, M, N, E, F – nezināmas konstantes. Vienādojot saucējus un izmantojot divu polinomu identitātes nosacījumu (divi polinomi identiski sakrīt tad un tikai tad, ja koeficienti pie vienādām x pakāpēm ir vienādi), iegūst tik vienādojumu, cik koeficientu A, B, ... jānosaka (**nenoteikto koeficientu metode**).

	Ja $P_n(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)...(x - \alpha_n)$, t. i., visas saucēja saknes ir reālas un dažādas, tad $$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + ... + \frac{A_n}{x-\alpha_n},$$ kur $A_i = \left(\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}(x-\alpha_i)\right)\Big\vert_{x=\alpha_i}$ Pēc konstanšu A, B, ... aprēķināšanas $\int R(x)dx$ ir izteikts kā summa, kuras saskaitāmie ir elementārdaļas (sk. tālāk – *elementārdaļu* integrēšanu). • $m \geqslant n$ Izdalot $Q_m(x)$ ar $P_n(x)$, iegūst $$R(x) = S(x) + \frac{Q(x)}{P(x)},$$ kur $S(x)$, $Q(x)$, $P(x)$ – polinomi, bet $Q(x)$ pakāpe ir zemāka nekā $P(x)$ pakāpe. Tad $$\int R(x)dx = \int S(x)dx + \int \frac{Q(x)}{P(x)}dx,$$ kur $\int S(x)dx$ integrē pa locekļiem, bet $\int \frac{Q(x)}{P(x)}dx$ – sk. iepriekšējo gadījumu $(m < n)$.
Elementārdaļas	
1. veida: $\frac{A}{x-a}$	$\int \frac{A\,dx}{x-a} = A\ln\vert x-a\vert + C$
2. veida: $\frac{A}{(x-a)^k}$ $(k \in \mathbb{N},\ k \neq 1)$	$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^k} = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C \quad (k \neq 1)$
3. veida: $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$ $\left(\frac{p^2}{4} - q < 0\right)$	$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$ – lietojot substitūciju $x + \frac{p}{2} = t$, izsaka kā lineāru kombināciju no integrāļiem $\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln(t^2+a^2) + C$ un $\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C$

4. veida: $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$ $(n \in \mathbb{N};\ n \neq 1;$ $\frac{p^2}{4} - q < 0)$	$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} dx$ – lietojot substitūciju $x + \frac{p}{2} = t$, izsaka ar integrāļiem $\int \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}} + C$ un $\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{t}{2(n-1)a^2(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2} \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}}$ (**rekurences formula**)
Īsta racionāla daļa $\frac{Q(x)}{P(x)}$, kur $Q(x)$ – m-tās, $P(x)$ – n-tās pakāpes polinomi un $m \leqslant n-1$	**Ostrogradska metode** $\int \frac{Q(x)}{P(x)} dx = \frac{Q_1(x)}{P_1(x)} + \int \frac{Q_2(x)}{P_2(x)} dx$, (*) kur $P_1(x)$ ir polinomu $P(x)$ un $P'(x)$ lielākais kopīgais dalītājs, $P_2(x) = \frac{P(x)}{P_1(x)}$; $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ – polinomi ar nenoteiktiem koeficientiem, turklāt $Q_1(x)$ pakāpe ir par vienu zemāka nekā $P_1(x)$ pakāpe, bet $Q_2(x)$ pakāpe – par vienu zemāka nekā $P_2(x)$ pakāpe. Atvasinot (*), iegūst vienādību polinomu $Q_1(x)$ un $Q_2(x)$ koeficientu noteikšanai: $\frac{Q(x)}{P(x)} = \left(\frac{Q_1(x)}{P_1(x)}\right)' + \frac{Q_2(x)}{P_2(x)}$

Iracionālu funkciju integrēšana (R – racionāla funkcija)

Integrālis	Substitūcija vai metode
$\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}\right) dx$	$x = t^k$, kur k – daļu $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$ kopsaucējs; iegūst integrāli no racionālas funkcijas
$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$, $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, $ad - bc \neq 0$	$\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$; iegūst integrāli no racionālas funkcijas

$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ Integrāli no racionālas funkcijas iegūst ar Eilera substitūciju vai arī ar trigonometrisku vai hiperbolisku substitūciju. $ax^2 + bx + c$ izsakot kā kvadrātu summu vai starpību (t. i., atdalot pilno kvadrātu), iegūst šāda veida integrāļus:	• **Eilera substitūcija** • ja $a > 0$ $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{a}x$ • ja $c \geqslant 0$ $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c}$ • ja $b^2 - 4ac > 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x - x_i)$, kur $i = 1$ vai $i = 2$
$\int R\left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right)dx$ $\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ $\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx$	• **Trigonometriska vai hiperboliska substitūcija** $x = a\,tg\,t$ vai $x = a\,\mathrm{sh}t$ $x = \dfrac{a}{\cos t}$ vai $x = a\,\mathrm{ch}t$ $x = a\sin t$ vai $x = a\cos t$
$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$, kur $x^m(a + bx^n)^p$ – **diferenciālais binoms**; $a, b \in \mathbb{R}$; $m, n, p \in \mathbb{Q}$	Integrālis ar racionālām funkcijām izsakāms tikai trīs gadījumos: • ja $p \in \mathbb{Z}$ $x = t^q$, kur q – daļu m un n kopsaucējs • ja $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ $a + bx^n = t^r$, kur r – daļas p saucējs • ja $\dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$ $ax^{1-n} + b = t^r$, kur r – daļas p saucējs
$\int \dfrac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, kur $P_n(x)$ – n-tās pakāpes polinoms	$\int \dfrac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = P_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int \dfrac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, (*) kur $P_{n-1}(x)$ – $n-1$ pakāpes polinoms ar nenoteiktiem koeficientiem. $P_{n-1}(x)$ koeficientus un λ nosaka, atvasinot vienādības abas puses, vienādojot saucējus un pielīdzinot koeficientus pie vienādām x pakāpēm vienādojuma abās pusēs. Atrastos koeficientus ievieto izteiksmē (*). $\int \dfrac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ aprēķināšanu sk. iepriekš.

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^3+bx^2+cx+d}\right)dx\,,\ \int R\left(x, \sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+ex+f}\right)dx$$

Eliptiskie integrāļi

Šos integrāļus parasti nav iespējams izteikt ar elementārām funkcijām; katru šādu integrāli var pārveidot par atbilstoši **1., 2. vai 3. veida eliptisko integrāli** $\left(t = \sin\varphi,\ 0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}\right)$:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad (0<k<1) \qquad (\mathbf{1.}\ \text{veida})$$

$$\int \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}dt = \int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}d\varphi \quad (0<k<1) \qquad (\mathbf{2.}\ \text{veida})$$

$$\int \frac{dt}{(1+h^2t^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int \frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad (0<k<1) \qquad (\mathbf{3.}\ \text{veida})$$

Atbilstošos noteiktos integrāļus

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = \int_0^{\sin\varphi} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} = F(k;\varphi)$$

$$\int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}d\psi = \int_0^{\sin\varphi} \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}dt = E(k,\varphi)$$

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\left(1+h\sin^2\psi\right)\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = \Pi(h,k,\varphi)$$

sauc par **1.**, **2.** un **3.** veida **nepilniem eliptiskiem integrāļiem**.

Ja $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, no **1.** un **2.** veida nepilniem eliptiskiem integrāļiem iegūst **pilnos eliptiskos integrāļus**:

$$\mathrm{K} = F\left(k,\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}$$

$$\mathrm{E} = E\left(k,\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}d\psi = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}dt$$

1. un **2.** veida nepilno un pilno eliptisko integrāļu vērtības dotas tabulās (grāmatas beigās).

Trigonometrisku izteiksmju integrēšana (R – racionāla funkcija)

Integrālis	Substitūcija vai metode
$\int R(\sin x, \cos x)dx$	Vienmēr **var pārveidot par integrāli no racionālas funkcijas ar universālo substitūciju** $$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$$ $\left(\text{tad: } \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}\right)$ Tomēr, lietojot šo substitūciju, bieži iegūst sarežģītu zemintegrāļa funkciju. Tāpēc atkarībā no integrējamās trigonometriskās izteiksmes der izraudzīties kādu citu substitūciju (sk. tālāk ①–⑨).
① Ja $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$	$\operatorname{tg} x = t$ $\left(\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},\ dx = \frac{dt}{1+t^2}\right)$
② Ja $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$	$\cos x = t$ $\left(\sin x = \sqrt{1-t^2},\ dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right)$
③ Ja $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$	$\sin x = t$ $\left(\cos x = \sqrt{1-t^2},\ dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right)$
④ $\int \sin^n x dx$, $n \in \mathbb{N}$	• ja $n = 2k+1$, $\cos x = t$ • ja $n = 2k$, **pakāpi n pakāpeniski pazemina**, izmantojot formulu $$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$
⑤ $\int \cos^n x dx$, $n \in \mathbb{N}$	• ja $n = 2k+1$, $\sin x = t$ • ja $n = 2k$, **pakāpi n pakāpeniski pazemina**, izmantojot formulu $$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$
⑥ $\int \cos mx \cdot \cos nx dx$ $\int \sin mx \cdot \sin nx dx$ $\int \sin mx \cdot \cos nx dx$ ($m, n \in \mathbb{R}$; $m \neq n$)	Integrē, izmantojot trigonometrijas formulas: $$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x)$$ $$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)$$ $$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m-n)x + \sin(m+n)x)$$

⑦ $\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx$, $n, m \in \mathbb{N}$	• ja n vai m ir nepāra skaitlis, – integrē kā ② vai ③ gadījumā • ja n un m ir nepāra (vai pāra) skaitļi – $\mathrm{tg}x = t$ (sk. ① gadījumu) vai arī – gadījumā, ja n un m ir pāra skaitļi, izmanto formulas $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$, $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$
⑧ $\int \mathrm{tg}^n x dx$, $n \in \mathbb{N}$	$\mathrm{tg}x = t$ $\left(dx = \frac{dt}{1+t^2};\ x = \mathrm{arctg}t\right)$
⑨ $\int \mathrm{ctg}^n x dx$, $n \in \mathbb{N}$	$\mathrm{ctg}x = t$ $\left(dx = -\frac{dt}{1+t^2};\ x = \mathrm{arcctg}t\right)$

P i e z ī m e. Lielām n un m vērtībām (4., 5., 6., 7., 8., 9.) lietderīgi izmantot atbilstošas rekurences formulas (sk. *nenoteikto integrāļu tabulu*).

Dažu citu transcendentu izteiksmju integrēšana (R – racionāla funkcija)

Integrālis	Substitūcija vai metode
$\int R(e^{mx}; e^{nx}; ...; e^{px})dx$ $m, n, ..., p \in \mathbb{Q}$	Ar substitūciju $e^x = t$ $\left(dx = \frac{1}{t}dt\right)$ iegūst $$\int R(t^m; t^n; ...; t^p) \cdot \frac{1}{t}dt,$$ kuru savukārt ar substitūciju $t = z^r$ (r – daļu $m, n, ..., p$ – kopsaucējs) pārveido par integrāli no racionālas funkcijas.
$\int R(\mathrm{sh}x; \mathrm{ch}x)dx$	Aprēķina, aizvietojot hiperboliskās funkcijas ar eksponentfunkcijām, vai arī analogi kā atbilstošās trigonometriskās funkcijas. Universālā substitūcija $\mathrm{th}\frac{x}{2} = t$ $\left(\mathrm{sh}x = \frac{2t}{1-t^2},\ \mathrm{ch}x = \frac{1+t^2}{1-t^2},\ dx = \frac{2dt}{1-t^2}\right)$

Elementāri neintegrējamas funkcijas

Katrai nepārtrauktai funkcijai $f(x)$ eksistē primitīvā funkcija $F(x)$, taču **ne vienmēr $\int f(x)dx$ ir izsakāms ar elementārām funkcijām.**

Elementāri neintegrējamu funkciju piemēri ($n \in \mathbb{N}$):

$$e^{-x^2},\ e^{x^2},\ \frac{e^x}{x^n},\ e^x \cdot \ln x,\ \sin x^2,\ \cos x^2,\ \frac{\sin x}{x^n},\ \frac{\cos x}{x^n},\ \frac{x}{\sin x},\ \frac{x}{\cos x},\ \frac{x^2}{\sin x},\ \frac{x^2}{\cos x},$$

$$\frac{x}{\sin^3 x},\ \frac{x}{\cos^3 x},\ x \cdot \mathrm{tg}x,\ x \cdot \mathrm{ctg}x,\ \frac{\mathrm{tg}x}{x},\ \frac{\mathrm{ctg}x}{x},\ \frac{\arcsin x}{x},\ \frac{\arccos x}{x},\ \frac{\mathrm{arctg}x}{x},\ \frac{\mathrm{arcctg}x}{x},$$

$$\frac{x}{\ln x},\ \frac{1}{x^2 \ln x},\ \ln(\sin x),\ \ln(\cos x),\ \ln(\mathrm{tg}x),\ \frac{x}{\mathrm{sh}x},\ \frac{x}{\mathrm{ch}x},$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\ \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\ \sqrt{1-k^2\sin^2 x},\ \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} \quad (\text{visur } 0 < k < 1)$$

Šādas funkcijas integrē, izmantojot rindu palīdzību.

11.5. Nenoteikto integrāļu tabula

Norādījumi
- Visiem integrāļiem jāpievieno integrācijas konstante C
- Integrāļos izmantotās konstantes $a,\ b,\ \ldots \neq 0$
- Gadījumā, kad primitīvā funkcija dota pakāpju rindas veidā, tā nav izsakāma ar elementārām funkcijām.

Racionālo funkciju integrāļi

1. $\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}, \quad n \neq -1$

2. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln |ax+b|$

3. $\int \frac{xdx}{ax+b} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln |ax+b|$

4. $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{x+b}{x+a} \right|, \quad a \neq b$

5. $\int \frac{dx}{(ax+b)^2} = -\frac{1}{a(ax+b)}$

6. $\int \frac{xdx}{(ax+b)^2} = \frac{b}{a^2(ax+b)} + \frac{1}{a^2} \ln |ax+b|$

7. $$\int \frac{x^n dx}{(ax+b)^2} = -\frac{x^n}{a(ax+b)} + \frac{n}{a}\int \frac{x^{n-1}}{ax+b}dx$$

8. $$\int \frac{x dx}{(ax+b)^n} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{b}{(n-1)(ax+b)^{n-1}} - \frac{1}{(n-2)(ax+b)^{n-2}}\right) \quad (n \neq 1; 2)$$

9. $$\int \frac{x^2 dx}{ax+b} = \frac{x^2}{2a} - \frac{bx}{a^2} + \frac{b^2}{a^3}\ln|ax+b|$$

10. $$\int \frac{x^2 dx}{(ax+b)^2} = \frac{x}{a^2} - \frac{b^2}{a^3(ax+b)} - \frac{2b}{a^3}\ln|ax+b|$$

11. $$\int \frac{x^2 dx}{(ax+b)^3} = \frac{1}{a^3}\left(\ln|ax+b| + \frac{2b}{ax+b} - \frac{b^2}{2(ax+b)^2}\right)$$

12. $$\int \frac{x^2 dx}{(ax+b)^n} = \frac{1}{a^3}\left(-\frac{1}{(n-3)(ax+b)^{n-3}} + \frac{2b}{(n-2)(ax+b)^{n-2}} - \frac{b^2}{(n-1)(ax+b)^{n-1}}\right)$$
$$(n \neq 1, 2, 3)$$

13. $$\int \frac{x^n dx}{(ax+b)^m} = -\frac{x^n}{(m-1)\,a\,(ax+b)^{m-1}} + \frac{n}{a(m-1)}\int \frac{x^{n-1}dx}{(ax+b)^{m-1}} \quad (m > 1)$$

14. $$\int \frac{dx}{x(ax+b)} = \frac{1}{b}\ln\left|\frac{x}{ax+b}\right|$$

15. $$\int \frac{dx}{x(ax+b)^2} = \frac{1}{b(ax+b)} + \frac{1}{b^2}\ln\left|\frac{x}{ax+b}\right|$$

16. $$\int \frac{dx}{x^2(ax+b)} = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right|$$

17. $$\int \frac{dx}{x^2(ax+b)^2} = -\frac{a}{b^2(ax+b)} - \frac{1}{b^2 x} + \frac{2a}{b^3}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right|$$

18. $$\int \frac{dx}{x^n(ax+b)^m} = -\frac{1}{(n-1)\,b\,x^{n-1}(ax+b)^{m-1}} - \frac{a(m+n-2)}{b(n-1)}\int \frac{dx}{x^{n-1}(ax+b)^m} \quad (n > 1)$$

19. $$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$$

20. $$\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)$$

21. $$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)\,a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} \quad (n > 1)$$

22. $$\int \frac{x dx}{(x^2+a^2)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} \quad (n > 1)$$

23. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$

24. $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(a^2 - x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} \int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{n-1}} \quad (n > 1)$

25. $\displaystyle\int \frac{xdx}{(a^2 - x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)(a^2 - x^2)^{n-1}} \quad (n > 1)$

26. $$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \begin{cases} -\dfrac{2}{2ax + b}, & \text{ja } 4ac - b^2 = 0 \\ \dfrac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \operatorname{arctg} \dfrac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}}, & \text{ja } 4ac - b^2 > 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln\left|\dfrac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}}\right|, & \text{ja } b^2 - 4ac > 0 \end{cases}$$

27. $\displaystyle\int \frac{xdx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{2a} \ln|ax^2 + bx + c| - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$

28. $$\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n} = \frac{2ax + b}{(n-1)(4ac - b^2)(ax^2 + bx + c)^{n-1}} + \\ + \frac{(2n-3)2a}{(n-1)(4ac - b^2)} \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}}, \quad n > 1,\ 4ac - b^2 \neq 0$$

29. $$\int \frac{xdx}{(ax^2 + bx + c)^n} = -\frac{bx + 2c}{(n-1)(4ac - b^2)(ax^2 + bx + c)^{n-1}} - \\ - \frac{b(2n-3)}{(n-1)(4ac - b^2)} \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}}, \quad n > 1,\ 4ac - b^2 \neq 0$$

30. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 + a^3} = \frac{1}{6a^2} \ln \frac{(x+a)^2}{|x^2 - ax + a^2|} + \frac{1}{a^2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - a}{a\sqrt{3}}$

31. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^3 + a^3)^2} = \frac{x}{3a^3(x^3 + a^3)} + \frac{2}{3a^3} \int \frac{dx}{x^3 + a^3}$

32. $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^3 + a^3} = -\frac{1}{6a} \ln \frac{(x+a)^2}{|x^2 - ax + a^2|} + \frac{1}{a\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - a}{a\sqrt{3}}$

33. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^3 + a^3)} = \frac{1}{3a} \ln\left|\frac{x^3}{x^3 + a^3}\right|$

34. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^3 + a^3)^2} = \frac{1}{3a^3(x^3 + a^3)} + \frac{1}{3a^6} \ln\left|\frac{x^3}{x^3 + a^3}\right|$

35. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4 + a^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}\,a^3}\ln\left|\frac{x^3 + a\sqrt{2}\,x + a^2}{x^2 - a\sqrt{2}\,x + a^2}\right| + \frac{1}{2\sqrt{2}\,a^3}\operatorname{arctg}\frac{ax\sqrt{2}}{a^2 - x^2}$

36. $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^4 + a^4} = \frac{1}{2a^2}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{a^2}$

37. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{x^4 + a^4} = -\frac{1}{4\sqrt{2}\,a}\ln\left|\frac{x^2 + ax\sqrt{2} + a^2}{x^2 - ax\sqrt{2} + a^2}\right| + \frac{1}{2\sqrt{2}\,a}\operatorname{arctg}\frac{ax\sqrt{2}}{a^2 - x^2}$

38. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4 - a^4} = -\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{1}{4a^3}\ln\left|\frac{x + a}{x - a}\right|$

39. $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^4 - a^4} = -\frac{1}{4a^2}\ln\left|\frac{x^2 + a^2}{x^2 - a^2}\right|$

40. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{x^4 - a^4} = \frac{1}{4a}\ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + \frac{1}{2a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$

Iracionālo funkciju integrāļi

1. $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$

2. $\displaystyle\int x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = -\frac{1}{3}\sqrt{(a^2 - x^2)^3}$

3. $\displaystyle\int x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = -\frac{x}{4}\sqrt{(a^2 - x^2)^3} + \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)$

4. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2 - x^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right|$

5. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \arcsin\frac{x}{a}$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}$

7. $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2}$

8. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right|$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}$

11. $\displaystyle\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right|$

12. $\displaystyle\int x\sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3}$

13. $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{2x^3 \pm a^2x}{8}\sqrt{x^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right|$

14. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2+a^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right|$

15. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2-a^2} - a\arccos\frac{a}{x}$

16. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x} + \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right|$

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right|$

18. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2}$

19. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \mp \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right|$

20. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right|$

21. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x}$

22. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \mp\frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{a^2x}$

23. $\displaystyle\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{2ax+b}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{4ac-b^2}{8a}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

24. $\displaystyle\int x\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{1}{3a}\sqrt{(ax^2+bx+c)^3} -$

$$-\frac{b(2ax+b)}{8a^2}\sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b(4ac-b^2)}{16a^2}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

25. $\int x^2\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{6ax-5b}{24a^2}\sqrt{(ax^2+bx+c)^3} + \frac{5b^2-4ac}{16a^2}\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$

26. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}+2ax+b\right|, & \text{ja } a>0 \\ \frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{Arsh}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}, & \text{ja } a>0,\ 4ac-b^2>0 \\ \frac{1}{\sqrt{a}}\ln|2ax+b|, & \text{ja } a>0,\ 4ac-b^2=0 \\ -\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}, & \text{ja } a<0,\ 4ac-b^2<0 \end{cases}$

27. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b}{2a}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

28. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{2ax-3b}{4a^2}\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{3b^2-4ac}{8a^2}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Trigonometrisko funkciju integrāļi

1. $\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax$

2. $\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$

3. $\int \sin^2 ax\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax$

4. $\int \sin^n ax\,dx = -\frac{\sin^{n-1}ax\cdot\cos ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}ax\,dx \quad (n-\text{ vesels sk.},\ n>0)$

5. $\int x\cdot\sin ax\,dx = \frac{1}{a^2}\sin ax - \frac{x}{a}\cos ax$

6. $\int x^n\sin ax\,dx = -\frac{1}{a}x^n\cos ax + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax\,dx \quad (n>0)$

7. $\int \frac{\sin ax}{x}dx = ax - \frac{(ax)^3}{3\cdot3!} + \frac{(ax)^5}{5\cdot5!} - \frac{(ax)^7}{7\cdot7!} + \ldots$

8. $\int \frac{\sin ax}{x^n}dx = -\frac{1}{n-1}\frac{\sin ax}{x^{n-1}} + \frac{a}{n-1}\int\frac{\cos ax}{x^{n-1}}dx \quad (n\neq1)$

9. $\int \frac{dx}{\sin ax} = \frac{1}{a}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right|$

10. $\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{ctg} ax$

11. $\int \frac{dx}{\sin^n ax} = -\frac{1}{a(n-1)}\frac{\cos ax}{\sin^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax} \quad (n>1)$

12. $\int \frac{dx}{1\pm\sin ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{ax}{2}\mp\frac{\pi}{4}\right)$

13. $\int \frac{xdx}{1+\sin ax} = \frac{x}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{ax}{2}-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{2}{a^2}\ln\left|\cos\left(\frac{ax}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right|$

14. $\int \frac{xdx}{1-\sin ax} = \frac{x}{a}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right) + \frac{2}{a^2}\ln\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right)\right|$

15. $\int \frac{\sin ax\, dx}{1\pm\sin ax} = \pm x + \frac{1}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\mp\frac{ax}{2}\right)$

16. $\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\sin ax$

17. $\int \cos(ax+b)\, dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)$

18. $\int \cos^2 ax\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin 2ax$

19. $\int \cos^n ax\, dx = \frac{\cos^{n-1} ax\cdot\sin ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} ax dx \quad (n>0 - \text{vesels sk.})$

20. $\int x\cdot\cos ax\, dx = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{x}{a}\sin ax$

21. $\int x^n \cos ax\, dx = \frac{1}{a}x^n\sin ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin ax\, dx \quad (n>0)$

22. $\int \frac{\cos ax}{x}dx = \ln|ax| - \frac{(ax)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(ax)^4}{4\cdot 4!} - \frac{(ax)^6}{6\cdot 6!} + \ldots$

23. $\int \frac{\cos ax}{x^n}dx = -\frac{\cos ax}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{a}{n-1}\int \frac{\sin ax}{x^{n-1}}dx \quad (n\neq 1)$

24. $\int \frac{dx}{\cos ax} = \frac{1}{a}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{ax}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$

25. $\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tg} ax$

26. $\int \frac{dx}{\cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1)}\frac{\sin ax}{\cos^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} ax} \quad (n>1)$

27. $\int \frac{dx}{1+\cos ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2}$

28. $\int \frac{dx}{1-\cos ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2}$

29. $\int \frac{x\,dx}{1+\cos ax} = \frac{x}{a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2}\ln\left|\cos\frac{ax}{2}\right|$

30. $\int \frac{x\,dx}{1-\cos ax} = -\frac{x}{a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2}\ln\left|\sin\frac{ax}{2}\right|$

31. $\int \frac{\cos ax\,dx}{1+\cos ax} = x - \frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2}$

32. $\int \frac{\cos ax\,dx}{1-\cos ax} = -x - \frac{1}{a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2}$

33. $\int \sin ax \cdot \sin bx\,dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} \qquad (|\,a\,| \neq |\,b\,|)$

34. $\int \cos ax \cdot \cos bx\,dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} \qquad (|\,a\,| \neq |\,b\,|)$

35. $\int \sin ax \cdot \cos ax\,dx = \frac{1}{2a}\sin^2 ax$

36. $\int \sin ax \cdot \cos bx\,dx = -\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} \qquad (|\,a\,| \neq |\,b\,|)$

37. $\int \sin^2 ax \cdot \cos^2 ax\,dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4ax}{32a}$

38. $\int \sin^n ax \cdot \cos ax\,dx = \frac{1}{a(n+1)}\sin^{n+1} ax \qquad (n \neq -1)$

39. $\int \sin ax \cdot \cos^n ax\,dx = -\frac{1}{a(n+1)}\cos^{n+1} ax \qquad (n \neq -1)$

40. $\int \sin^n ax \cdot \cos^m ax\,dx = -\frac{\sin^{n-1} ax \cdot \cos^{m+1} ax}{a(n+m)} + \frac{n-1}{n+m}\int \sin^{n-2} ax \cdot \cos^m ax\,dx =$

$= \frac{\sin^{n+1} ax \cdot \cos^{m-1} ax}{a(n+m)} + \frac{m-1}{n+m}\int \sin^n ax \cdot \cos^{m-2} ax\,dx \qquad (n, m > 0)$

41. $\int \frac{dx}{\sin ax \cdot \cos ax} = \frac{1}{a}\ln|\operatorname{tg} ax|$

42. $\int \frac{dx}{\sin ax \cdot \cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1)\cos^{n-1} ax} + \int \frac{dx}{\sin ax \cdot \cos^{n-2} ax} \qquad (n \neq 1)$

43. $\int \frac{dx}{\sin^n ax \cdot \cos ax} = \frac{1}{a(n-1)\sin^{n-1} ax} + \int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax \cdot \cos ax} \qquad (n \neq 1)$

44. $$\int \frac{dx}{\sin^n ax \cdot \cos^m ax} = \frac{-1}{a(n-1)\sin^{n-1} ax \cdot \cos^{m-1} ax} + \frac{n+m-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax \cdot \cos^m ax} \quad (m>0,\ n>1) =$$
$$= \frac{1}{a(m-1)\sin^{n-1} ax \cdot \cos^{m-1} ax} + \frac{n+m-2}{m-1}\int \frac{dx}{\sin^n ax \cdot \cos^{m-2} ax} \quad (m>1,\ n>0)$$

45. $$\int \frac{\sin ax}{\cos^n ax}\,dx = \frac{1}{a(n-1)\cos^{n-1} ax} \quad (n \neq 1)$$

46. $$\int \frac{\sin^2 ax\,dx}{\cos ax} = -\frac{1}{a}\sin ax + \frac{1}{a}\ln \operatorname{tg}\left|\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)\right|$$

47. $$\int \frac{\sin^2 ax\,dx}{\cos^n ax} = \frac{\sin ax}{a(n-1)\cos^{n-1} ax} - \frac{1}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} ax} \quad (n \neq 1)$$

48. $$\int \frac{\sin^n ax}{\cos ax}\,dx = -\frac{\sin^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int \frac{\sin^{n-2} ax\,dx}{\cos ax} \quad (n \neq 1)$$

49. $$\int \frac{\sin^n ax\,dx}{\cos^m ax} = \frac{\sin^{n+1} ax}{a(m-1)\cos^{m-1} ax} - \frac{n-m+2}{m-1}\int \frac{\sin^n ax\,dx}{\cos^{m-2} ax} \quad (m \neq 1) =$$
$$= -\frac{\sin^{n-1} ax}{a(n-m)\cos^{m-1} ax} + \frac{n-1}{n-m}\int \frac{\sin^{n-2} ax\,dx}{\cos^m ax} \quad (m \neq n) =$$
$$= \frac{\sin^{n-1} ax}{a(m-1)\cos^{m-1} ax} - \frac{n-1}{m-1}\int \frac{\sin^{n-1} ax\,dx}{\cos^{m-2} ax} \quad (m \neq 1)$$

50. $$\int \frac{\cos ax\,dx}{\sin^n ax} = -\frac{1}{a(n-1)\sin^{n-1} ax} \quad (n \neq 1)$$

51. $$\int \frac{\cos^2 ax\,dx}{\sin ax} = \frac{1}{a}\left(\cos ax + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right|\right)$$

52. $$\int \frac{\cos^2 ax dx}{\sin^n ax} = -\frac{1}{n-1}\left(\frac{\cos ax}{a\sin^{n-1} ax} + \int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax}\right) \quad (n \neq 1)$$

53. $$\int \frac{\cos^n ax\,dx}{\sin ax} = \int \frac{\cos^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int \frac{\cos^{n-2} ax\,dx}{\sin ax} \quad (n \neq 1)$$

54. $$\int \frac{\cos^n ax\,dx}{\sin^m ax} = -\frac{\cos^{n+1} ax}{a(m-1)\sin^{m-1} ax} - \frac{n-m+2}{m-1}\int \frac{\cos^n ax\,dx}{\sin^{m-2} ax} \quad (m \neq 1) =$$
$$= \frac{\cos^{n-1} ax}{a(n-m)\sin^{m-1} ax} + \frac{n-1}{n-m}\int \frac{\cos^{n-2} ax\,dx}{\sin^m ax} \quad (m \neq n) =$$
$$= -\frac{\cos^{n-1} ax}{a(m-1)\sin^{m-1} ax} - \frac{n-1}{m-1}\int \frac{\cos^{n-2} ax\,dx}{\sin^{m-2} ax} \quad (m \neq 1)$$

55. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos ax \pm \sin ax} = \pm \frac{1}{a\sqrt{2}} \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{ax}{2} \pm \frac{\pi}{8}\right)\right|$

56. $\displaystyle\int \frac{dx}{(\cos ax \pm \sin ax)^2} = \frac{1}{2a} \operatorname{tg}\left(ax \mp \frac{\pi}{4}\right)$

57. $\displaystyle\int \frac{\cos ax\, dx}{\cos ax \pm \sin ax} = \frac{x}{2} \pm \frac{1}{2a} \ln |\sin ax \pm \cos ax|$

58. $\displaystyle\int \frac{\sin ax\, dx}{\cos ax \pm \sin ax} = \pm\frac{x}{2} - \frac{1}{2a} \ln |\sin ax \pm \cos ax|$

59. $\displaystyle\int \frac{\cos ax\, dx}{\sin ax(1 \pm \cos ax)} = -\frac{1}{2a(1 \pm \cos ax)} \pm \frac{1}{2a} \ln\left|\operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right|$

60. $\displaystyle\int \frac{\sin ax\, dx}{\cos ax(1 \pm \sin ax)} = \frac{1}{2a(1 \pm \sin ax)} \pm \frac{1}{2a} \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$

61. $\displaystyle\int \operatorname{tg} ax\, dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos ax|$

62. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^n ax\, dx = \frac{1}{a(n-1)} \operatorname{tg}^{n-1} ax - \int \operatorname{tg}^{n-2} ax\, dx \quad (n \neq 1)$

63. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}^n ax\, dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a(n+1)} \operatorname{tg}^{n+1} ax \quad (n \neq -1)$

64. $\displaystyle\int \operatorname{ctg} ax\, dx = \frac{1}{a} \ln |\sin ax|$

65. $\displaystyle\int \operatorname{ctg}^n ax\, dx = -\frac{1}{a(n-1)} \operatorname{ctg}^{n-1} ax - \int \operatorname{ctg}^{n-2} ax\, dx \quad (n \neq 1)$

66. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{ctg}^n ax\, dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a(n+1)} \operatorname{ctg}^{n+1} ax \quad (n \neq -1)$

Eksponentfunkciju integrāļi

1. $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad (a \neq 1)$

2. $\displaystyle\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$

3. $\displaystyle\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1)$

4. $\displaystyle\int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx$

5. $\int \frac{e^{ax}}{x}\,dx = \ln|x| + \frac{ax}{1\cdot 1!} + \frac{(ax)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(ax)^3}{3\cdot 3!} + \ldots$

6. $\int \frac{e^{ax}}{x^n}\,dx = \frac{1}{n-1}\left(-\frac{e^{ax}}{x^{n-1}} + a\int \frac{e^{ax}}{x^{n-1}}\,dx\right) \quad (n \neq 1)$

7. $\int \frac{dx}{\alpha + \beta e^{ax}} = \frac{x}{\alpha} - \frac{1}{a\cdot\alpha}\ln|\alpha + \beta e^{ax}| \quad (\alpha \neq 0)$

8. $\int \frac{dx}{(\alpha + \beta e^{ax})^2} = \frac{1}{a\cdot\alpha^2}\ln\left|\frac{e^{ax}}{\alpha + \beta e^{ax}}\right| + \frac{1}{a\cdot\alpha(\alpha + \beta e^{ax})} \quad (\alpha \neq 0)$

9. $\int \frac{e^{ax}\,dx}{\alpha + \beta e^{ax}} = \frac{1}{a\cdot\beta}\ln|\alpha + \beta e^{ax}| \quad (\beta \neq 0)$

10. $\int e^{ax}\cdot\ln x\,dx = \frac{1}{a}\left(e^{ax}\cdot\ln|x| - \int \frac{e^{ax}}{x}\,dx\right)$

11. $\int e^{ax}\cdot\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a\sin bx - b\cos bx)$

12. $\int e^{ax}\cdot\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a\cos bx + b\sin bx)$

13. $\int e^{ax}\cdot\sin^n x\,dx = \frac{e^{ax}\cdot\sin^{n-1}x}{a^2 + n^2}(a\sin x - n\cos x) + \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2}\int e^{ax}\sin^{n-2}x\,dx$

14. $\int e^{ax}\cdot\cos^n x\,dx = \frac{e^{ax}\cdot\cos^{n-1}x}{a^2 + n^2}(a\cos x + n\sin x) + \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2}\int e^{ax}\cdot\cos^{n-2}x\,dx$

Hiperbolisko funkciju integrāļi

1. $\int \mathrm{sh}\,ax\,dx = \frac{1}{a}\mathrm{ch}\,ax$

2. $\int \mathrm{ch}\,ax\,dx = \frac{1}{a}\mathrm{sh}\,ax$

3. $\int \mathrm{sh}^n ax\,dx = \frac{1}{an}\mathrm{sh}^{n-1}ax\cdot\mathrm{ch}\,ax - \frac{n-1}{n}\int \mathrm{sh}^{n-2}ax\,dx \quad (n > 0) =$

$= \frac{1}{a(n+1)}\mathrm{sh}^{n+1}ax\cdot\mathrm{ch}\,ax - \frac{n+2}{n+1}\int \mathrm{sh}^{n+2}ax\,dx \quad (n < 0,\ n \neq -1)$

4. $\int \mathrm{ch}^n ax\,dx = \frac{1}{an}\mathrm{sh}\,ax\cdot\mathrm{ch}^{n-1}ax + \frac{n-1}{n}\int \mathrm{ch}^{n-2}ax\,dx \quad (n > 0) =$

$= -\frac{1}{a(n+1)}\mathrm{sh}\,ax\cdot\mathrm{ch}^{n+1}ax + \frac{n+2}{n+1}\int \mathrm{ch}^{n+2}ax\,dx \quad (n < 0,\ n \neq -1)$

5. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} ax} = \frac{1}{a} \ln \left| \operatorname{th} \frac{ax}{2} \right|$

6. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} ax} = \frac{2}{a} \operatorname{arctg} e^{ax}$

7. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 ax} = -\frac{1}{a} \operatorname{cth} ax$

8. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 ax} = \frac{1}{a} \operatorname{th} ax$

9. $\int x \cdot \operatorname{sh} ax dx = \frac{1}{a} x \cdot \operatorname{ch} ax - \frac{1}{a^2} \operatorname{sh} ax$

10. $\int x \cdot \operatorname{ch} ax \, dx = \frac{1}{a} x \cdot \operatorname{sh} ax - \frac{1}{a^2} \operatorname{ch} ax$

11. $\int \operatorname{th} ax \, dx = \frac{1}{a} \ln(\operatorname{ch} ax)$

12. $\int \operatorname{cth} ax \, dx = \frac{1}{a} \ln | \operatorname{sh} ax |$

13. $\int \operatorname{th}^2 ax \, dx = x - \frac{\operatorname{th} ax}{a}$

14. $\int \operatorname{cth}^2 ax \, dx = x - \frac{\operatorname{cth} ax}{a}$

15. $\int \operatorname{th}^n ax \, dx = -\frac{1}{a(n-1)} \operatorname{th}^{n-1} ax + \int \operatorname{th}^{n-2} ax \, dx \qquad (n \neq 1)$

16. $\int \operatorname{cth}^n ax \, dx = -\frac{1}{a(n-1)} \operatorname{cth}^{n-1} ax + \int \operatorname{cth}^{n-2} ax \, dx \qquad (n \neq 1)$

17. $$\int \frac{\operatorname{ch}^n ax}{\operatorname{sh}^m ax} dx = \frac{1}{a(n-m)} \frac{\operatorname{ch}^{n-1} ax}{\operatorname{sh}^{m-1} ax} + \frac{n-1}{n-m} \int \frac{\operatorname{ch}^{n-2} ax}{\operatorname{sh}^m ax} dx \quad (n \neq m) =$$
$$= -\frac{1}{a(m-1)} \frac{\operatorname{ch}^{n+1} ax}{\operatorname{sh}^{m-1} ax} + \frac{n-m+2}{m-1} \int \frac{\operatorname{ch}^n ax}{\operatorname{sh}^{m-2} ax} dx \quad (m \neq 1) =$$
$$= -\frac{1}{a(m-1)} \frac{\operatorname{ch}^{n-1} ax}{\operatorname{sh}^{m-1} ax} + \frac{n-1}{m-1} \int \frac{\operatorname{ch}^{n-2} ax}{\operatorname{sh}^{m-2} ax} dx \quad (m \neq 1)$$

18. $$\int \frac{\operatorname{sh}^m ax}{\operatorname{ch}^n ax} dx = \frac{1}{a(m-n)} \frac{\operatorname{sh}^{m-1} ax}{\operatorname{ch}^{n-1} ax} - \frac{m-1}{m-n} \int \frac{\operatorname{sh}^{m-2} ax}{\operatorname{ch}^n ax} dx \quad (m \neq n) =$$
$$= \frac{1}{a(n-1)} \frac{\operatorname{sh}^{m+1} ax}{\operatorname{ch}^{n-1} ax} - \frac{m-n+2}{n-1} \int \frac{\operatorname{sh}^m ax}{\operatorname{ch}^{n-2} ax} dx \quad (n \neq 1) =$$
$$= -\frac{1}{a(n-1)} \frac{\operatorname{sh}^{m-1} ax}{\operatorname{ch}^{n-1} ax} + \frac{m-1}{n-1} \int \frac{\operatorname{sh}^{m-2} ax}{\operatorname{ch}^{n-2} ax} dx \quad (n \neq 1)$$

19. $\int \operatorname{sh} ax \cdot \operatorname{sh} bx \, dx = \frac{1}{a^2 - b^2}(a \operatorname{sh} bx \cdot \operatorname{ch} ax - b \operatorname{ch} bx \cdot \operatorname{sh} ax) \qquad (a^2 \neq b^2)$

20. $\int \operatorname{ch} ax \cdot \operatorname{ch} bx \, dx = \frac{1}{a^2 - b^2}(a \operatorname{sh} ax \cdot \operatorname{ch} bx - b \operatorname{sh} bx \cdot \operatorname{ch} ax) \qquad (a^2 \neq b^2)$

21. $\int \operatorname{ch} ax \cdot \operatorname{sh} bx \, dx = \frac{1}{a^2 - b^2}(a \operatorname{sh} bx \cdot \operatorname{sh} ax - b \operatorname{ch} bx \cdot \operatorname{ch} ax) \qquad (a^2 \neq b^2)$

22. $\int \operatorname{sh}(ax+b) \cdot \sin(cx+d) dx = \frac{1}{a^2 + c^2}(a \operatorname{ch}(ax+b) \cdot \sin(cx+d) - $
$- c \operatorname{sh}(ax+b) \cdot \cos(cx+d))$

23. $\int \operatorname{sh}(ax+b) \cdot \cos(cx+d) dx = \frac{1}{a^2 + c^2}(a \operatorname{ch}(ax+b) \cdot \cos(cx+d) + $
$+ c \operatorname{sh}(ax+b) \cdot \sin(cx+d))$

24. $\int \operatorname{ch}(ax+b) \cdot \cos(cx+d) dx = \frac{1}{a^2 + c^2}(a \operatorname{sh}(ax+b) \cdot \cos(cx+d) + $
$+ c \operatorname{ch}(ax+b) \cdot \sin(cx+d))$

Logaritmisko funkciju integrāļi

1. $\int \ln x \, dx = x \cdot \ln x - x$

2. $\int (\ln x)^n dx = x \cdot (\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} dx \qquad (n \neq -1)$

3. $\int \frac{dx}{\ln x} = \ln|\ln x| + \ln x + \frac{(\ln x)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(\ln x)^3}{3 \cdot 3!} + \ldots$

4. $\int \frac{dx}{(\ln x)^n} = -\frac{x}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{dx}{(\ln x)^{n-1}} \qquad (n \neq 1)$

5. $\int x^n \ln x \, dx = x^{n+1}\left(\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \qquad (n \neq -1)$

6. $\int x^m (\ln x)^n dx = \frac{x^{m+1}(\ln x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int x^m (\ln x)^{n-1} dx \qquad (m, n \neq -1)$

7. $\int \frac{(\ln x)^n}{x} dx = \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1} \qquad (n \neq -1)$

8. $\int \frac{dx}{x^n \ln x} = \ln|\ln x| - (n-1)\ln x + \frac{(n-1)^2(\ln x)^2}{2 \cdot 2!} - \frac{(n-1)^3(\ln x)^3}{3 \cdot 3!} + \ldots$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\cdot(\ln x)^n} = -\frac{1}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} \quad (n \neq 1)$

10. $\displaystyle\int \sin(\ln x)\,dx = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x))$

11. $\displaystyle\int \cos(\ln x)\,dx = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) + \cos(\ln x))$

12. $\displaystyle\int e^{ax}\ln x\,dx = \frac{1}{a}\left(e^{ax}\ln x - \int \frac{e^{ax}}{x}\,dx\right)$

Inverso trigonometrisko un inverso hiperbolisko funkciju integrāļi

1. $\displaystyle\int \arcsin\frac{x}{a}\,dx = x\cdot\arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2}$

2. $\displaystyle\int x\cdot\arcsin\frac{x}{a}\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right)\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{4}\sqrt{a^2 - x^2}$

3. $\displaystyle\int x^2\cdot\arcsin\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{9}(x^2 + 2a^2)\sqrt{a^2 - x^2}$

4. $\displaystyle\int \arccos\frac{x}{a}\,dx = x\cdot\arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}$

5. $\displaystyle\int x\cdot\arccos\frac{x}{a}\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right)\arccos\frac{x}{a} - \frac{x}{4}\sqrt{a^2 - x^2}$

6. $\displaystyle\int x^2\cdot\arccos\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3}\arccos\frac{x}{a} - \frac{x^2 + 2a^2}{9}\sqrt{a^2 - x^2}$

7. $\displaystyle\int \operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\ln(a^2 + x^2)$

8. $\displaystyle\int x\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx = \frac{a^2 + x^2}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{ax}{2}$

9. $\displaystyle\int x^2\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{ax^2}{6} + \frac{a^3}{6}\ln(a^2 + x^2)$

10. $\displaystyle\int x^n\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}}{a^2 + x^2}\,dx \quad (n \neq -1)$

11. $\displaystyle\int \operatorname{arcctg}\frac{x}{a}\,dx = x\cdot\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln(a^2 + x^2)$

12. $\displaystyle\int x\cdot\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}\,dx = \frac{a^2 + x^2}{2}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + \frac{ax}{2}$

13. $\int x^2 \operatorname{arcctg}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + \frac{ax^2}{6} - \frac{a^2}{6}\ln(a^2 + x^2)$

14. $\int x^n \operatorname{arcctg}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + \frac{a}{n+1}\int\frac{x^{n+1}dx}{a^2 + x^2} \quad (n \neq -1)$

15. $\int \operatorname{Arsh}\frac{x}{a}\,dx = x\cdot\operatorname{Arsh}\frac{x}{a} - \sqrt{x^2 + a^2}$

16. $\int \operatorname{Arch}\frac{x}{a}\,dx = x\cdot\operatorname{Arch}\frac{x}{a} - \sqrt{x^2 - a^2}$

17. $\int \operatorname{Arth}\frac{x}{a}\,dx = x\cdot\operatorname{Arth}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln|a^2 - x^2| \quad (|x| < |a|)$

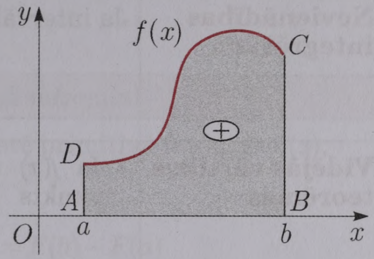
18. $\int \operatorname{Arcth}\frac{x}{a}\,dx = x\cdot\operatorname{Arcth}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln|x^2 - a^2| \quad (|x| > |a|)$

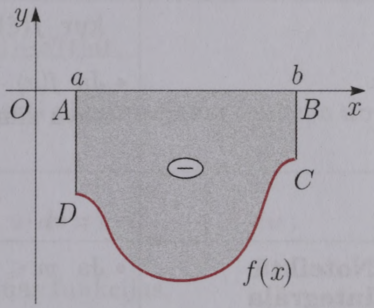
11.6. Noteiktā integrāļa definīcija un pamatīpašības

Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi
Funkcijas $f(x)$ integrālsumma	$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i\,,$$ kur • $f(x)$ – intervālā $[a,\ b]$ definēta un ierobežota funkcija • intervāla $[a,\ b]$ sadalījums: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ • $\xi_i \in [x_{i-1};\ x_i]$ • $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$
Funkcijas $f(x)$ noteiktais integrālis; tā eksistence	$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i\,, \qquad (*)$$ kur • a – integrēšanas apakšējā robeža, b – integrēšanas augšējā robeža • $f(x)$ – zemintegrāļa funkcija, $f(x)\cdot dx$ – zemintegrāļa izteiksme • $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i$ **Skaitli I sauc par intervālā $[a;\ b]$ definētas un ierobežotas funkcijas $f(x)$ noteikto integrāli, ja robeža $(*)$ eksistē neatkarīgi no x_i un ξ_i izvēles elementārdaļā $[x_{i-1};\ x_i]$, kur $1 \leqslant i \leqslant n$.** Šādā gadījumā $f(x)$ sauc par **integrējamu funkciju** intervālā $[a;\ b]$.

<table>
<tr><td>Noteiktā integrāļa ģeometriskā nozīme

• $f(x) \geqslant 0$
$a \leqslant x \leqslant b$</td><td>Ja S – līklīniju trapeces $ABCD$ laukums, tad

$S = \int\limits_a^b f(x)dx$</td><td></td></tr>
<tr><td>• $f(x) \leqslant 0$
$a \leqslant x \leqslant b$</td><td>$S = -\int\limits_a^b f(x)dx$

Par līklīniju trapeci sauc figūru, kuru ierobežo $f(x)$ grafiks, Ox ass nogrieznis $[a;\ b]$ un taisnes $x = a$ un $x = b$.</td><td></td></tr>
</table>

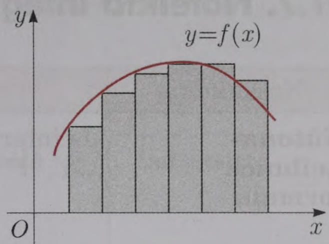
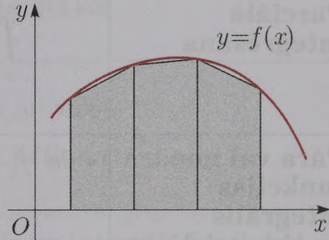
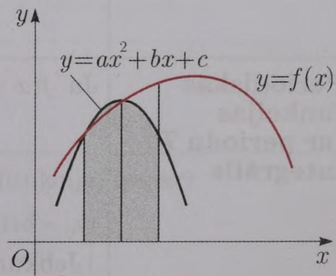
Noteiktā integrāļa īpašības

Pamatīpašības	• $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$
	• $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$
	• Jebkuriem trim skaitļiem $a,\ b,\ c$ $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$
	• $\int\limits_a^b Af(x)dx = A\int\limits_a^b f(x)dx$, A – const
	• $\int\limits_a^b (Af(x)+Bg(x))dx = A\int\limits_a^b f(x)dx + B\int\limits_a^b g(x)dx$, $A,\ B$ – const

Nevienādības integrēšana	Ja intervālā $[a;\ b]$ $f(x) \leqslant g(x)$, tad $$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$$
Vidējās vērtības teorēmas	• Ja $f(x)$ nepārtraukta funkcija intervālā $[a;\ b]$, tad eksistē punkts $\xi \in [a,\ b]$, ka $$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a),$$ kur $f(\xi) = \mu$ – funkcijas $f(x)$ **vidējā vērtība**.
	• Ja $f(x)$, $g(x)$ ir nepārtrauktas intervālā $[a;\ b]$ un $g(x)$ saglabā savu zīmi, tad eksistē vismaz viens tāds punkts $\xi \in (a,\ b)$, ka $$\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$
Noteiktā integrāļa novērtēšana	• Ja $m \leqslant f(x) \leqslant M$, tad $$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$$
	• Ja $f(x)$ – monotona un $g(x)$ – integrējama intervālā $[a;\ b]$, tad $$\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx = f(a)\int_a^c g(x)dx + f(b)\int_c^b g(x)dx$$
	• $\left\lvert \int_a^b f(x)dx \right\rvert \leqslant \int_a^b \lvert f(x)\rvert dx$
Integrāļa atvasināšana pēc mainīgas augšējās robežas	• Ja f ir intervālā $[a;\ b]$ nepārtraukta funkcija, tad arī $$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$ ir nepārtraukta funkcija un $$F'(x) = f(x)$$
	• Ja f un φ ir intervālā $[a;\ b]$ nepārtrauktas funkcijas, tad arī $$F(x) = \int_a^{\varphi(x)} f(t)dt$$ ir nepārtraukta funkcija un $$F'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

11.7. Noteiktā integrāļa aprēķināšana

Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi
Ņūtona–Leibnica formula	Ja intervālā $[a;\ b]$ funkcijai $f(x)$ eksistē primitīvā funkcija $F(x)$, t. i., $F'(x) = f(x)$, tad $$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big\vert_a^b = F(b) - F(a)$$
Substitūcijas metode	$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt,$$ kur $x = \varphi(t)$ – monotona, nepārtraukti diferencējama funkcija un $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$
Parciālā integrēšana	$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u(x)\cdot v'(x)dx = \int_a^b u\cdot dv = u\cdot v\Big\vert_a^b - \int_a^b v\cdot du,$$ kur $u,\ v$ – nepārtraukti diferencējamas funkcijas.
Pāra vai nepāra funkcijas integrālis pa simetrisku intervālu $[-a;\ a]$	• Ja $f(-x) = f(x)$ (**pāra funkcija**), tad $$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$ • Ja $f(-x) = -f(x)$ (**nepāra funkcija**), tad $$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$
Periodiskas funkcijas (ar periodu T) integrālis	Ja $f(x+T) = f(x)$ (funkcijas $f(x)$ periods ir T), tad $$\int_0^T f(x)dx = \int_{x_0}^{x_0+T} f(x)dx$$ (x_0 – brīvi izraudzīts punkts uz Ox ass) Jebkurā intervālā, kura garums ir T, funkcijas $f(x)$ noteiktajam integrālim ir viena un tā pati vērtība.
Tuvinātās metodes	Ja $y = f(x)$, tad $\int_a^b ydx \approx I_n$ jeb $\int_a^b ydx = I_n + R_n$ (R_n – kļūda), kur I_n ir galīga summa, ko iegūst šādi: 1) $[a,\ b]$ sadala n vienādās daļās $a = x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n = b;\ x_i = a + ih$, kur $h = \dfrac{b-a}{n}$ – dalījuma intervāla garums jeb solis $(0 \leqslant i \leqslant n)$ 2) aprēķina $y_i = f(x_i)$ $(i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ 3) izmanto vienu no līklīniju trapeces laukuma tuvinātās aprēķināšanas formulām ①, ② vai ③ (sk. tālāk)

① **Taisnstūru formula** ar kļūdu R_n	$\int_a^b y\,dx \approx I_n = h(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1})$ vai $\int_a^b y\,dx \approx I_n = h(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)$ $\mid R_n \mid \leqslant \frac{(b-a)^2}{2n} \cdot K$, kur $K = \max\limits_{[a,\,b]} \mid f'(x) \mid$	
② **Trapeču formula** ar kļūdu R_n	$\int_a^b y\,dx \approx I_n = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right)$ $\mid R_n \mid \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot K$, kur $K = \max\limits_{[a,\,b]} \mid f''(x) \mid$	
③ **Parabolu jeb Simpsona formula** (n – pāra skaitlis) ar kļūdu R_n	$\int_a^b y\,dx \approx I_n = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$ $\mid R_n \mid \leqslant \frac{(b-a)^5}{180n^4} \cdot K$, kur $K = \max\limits_{[a,\,b]} \mid f^{(4)}(x) \mid$	

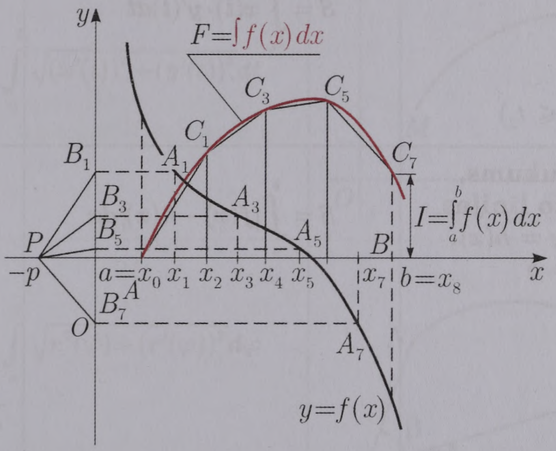
Norādījums. Ja n ir viens un tas pats, tad trapeču formula ir precīzāka nekā taisnstūru formula, bet Simpsona formula – precīzāka nekā trapeču formula. Palielinot dalījuma punktu skaitu n, visas formulas kļūst precīzākas. Izmantojot tuvinātās formulas, parasti aprēķina integrāļa aptuvenās vērtības I_n un I_{2n} (dalījuma punktu skaitam n un $2n$); salīdzinot tās, atstāj visus sakrītošos ciparus.

Grafiskā integrēšana	Lai konstruētu dotās līknes $y = f(x)$ integrāllīkni $F(x)$, rīkojas šādi: 1) uz Ox negatīvās pusass izvēlas t. s. *polu* – punktu $P(-p,\ 0)$ 2) nogriezni AB sadala $2n$ vienādās daļās – zīmējumā $a = x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_7,\ x_8 = b$ 3) uz $f(x)$ grafika atliek abscisām $x_1,\ x_3,\ \ldots$ atbilstošās ordinātas $A_1,\ A_3,\ \ldots,$ tās pārnesot uz Oy asi (punkti $B_1,\ B_3,\ \ldots$)

4) caur A novelk taisni paralēli PB_1 līdz krustpunktam C_1 ar vertikāli $x = x_2$, caur C_1 novelk taisni paralēli PB_3 līdz krustpunktam C_3 ar vertikāli $x = x_4$, ...

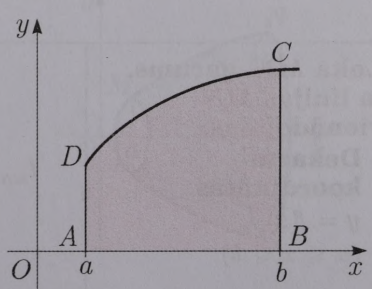
5) caur C_i novelk līniju $F(x) = \int f(x)dx$

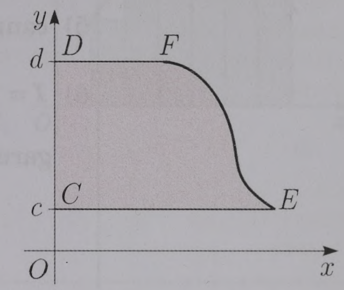
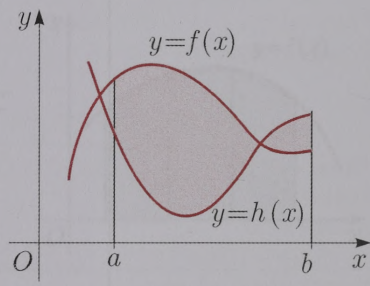
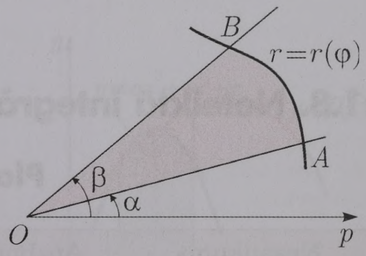
6) $I = \int_a^b f(x)dx$ skaitliski vienāds ar nogriežņu OP un BC_7 garumu reizinājumu; ja $p = 1$, tad $I = BC_7$



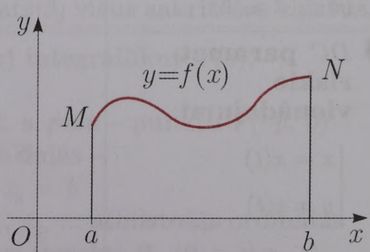
11.8. Noteiktā integrāļa lietojumi

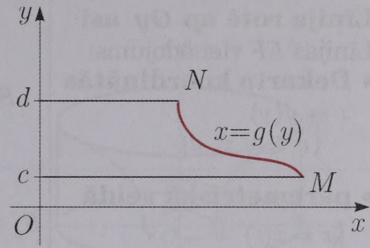
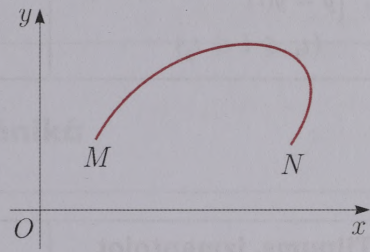
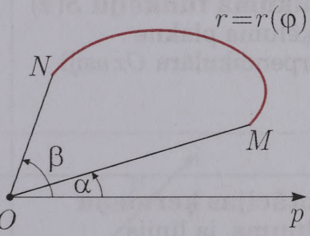
Plaknes figūras laukums

Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi	Ilustrācija
Līklīniju trapeces ***ABCD*** **laukums** • DC vienādojums **Dekarta koordinātās**: $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$	$S = \int_a^b f(x)dx$	
• DC **parametriskie vienādojumi**: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$	$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t)dt$	

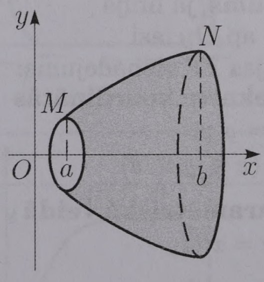
Līklīniju trapeces $CEFD$ laukums • EF vienādojums **Dekarta koordinātās**: $x = g(y)$ $(c \leqslant y \leqslant d)$	$S = \int\limits_c^d g(y)dy$	
• EF **parametriskie vienādojumi**: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$	$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} x(t)\cdot y'(t)dt$	
Figūras laukums, ko ierobežo līnijas $y = f(x)$, $y = h(x)$, $x = a$, $x = b$	$S = \int\limits_a^b \lvert f(x) - h(x) \rvert dx$	
Līklīniju sektora OAB laukums AB vienādojums **polārās koordinātās**: $r = r(\varphi)$ $(\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta)$	$S = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$	

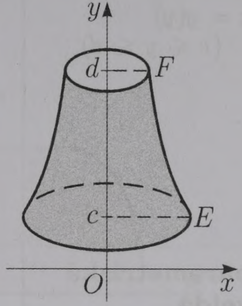
Plaknes līnijas loka garums

Loka MN garums, ja līnijas MN vienādojums: • **Dekarta koordinātās** $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$	$l_{MN} = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$	

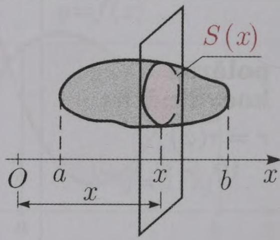
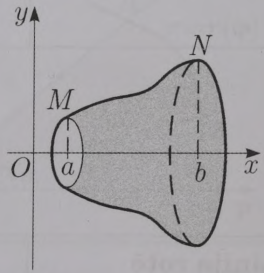
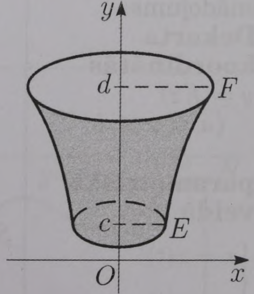
$x = g(y)$ $(c \leqslant y \leqslant d)$	$l_{MN} = \int\limits_c^d \sqrt{1+(g'(y))^2}\,dy$	
• **parametriskā veidā** $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$	$l_{MN} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$	
• **polārās koordinātās** $r = r(\varphi)$ $(\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta)$	$l_{MN} = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi)+(r'(\varphi))^2}\,d\varphi$	

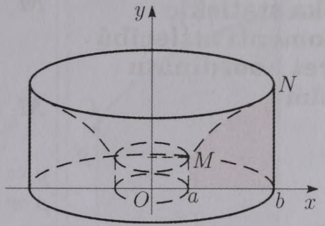
Rotācijas virsmas laukums

Līnija rotē ap Ox asi Līnijas MN vienādojums: • **Dekarta koordinātās** $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$	$S_x = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$	
• **parametriskā veidā** $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$	$S_x = 2\pi \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$	

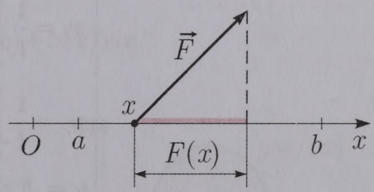
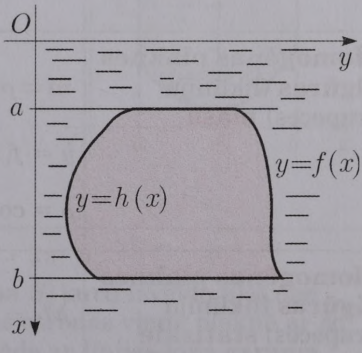
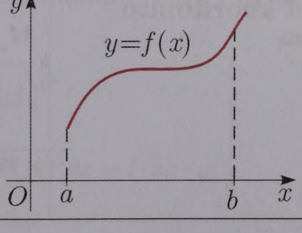
Līnija rotē ap Oy asi Līnijas EF vienādojums: • **Dekarta koordinātās** $x = g(y)$ $(c \leqslant y \leqslant d)$	$$S_y = 2\pi \int_c^d g(y)\sqrt{1+(g'(y))^2}\,dy$$	
• **parametriskā veidā** $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$	$$S_y = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} x(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$$	

Ķermeņa tilpums

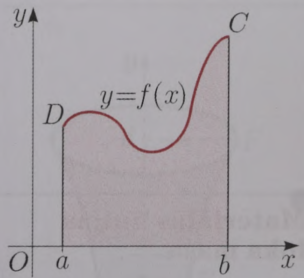
Tilpums, izmantojot ķermeņa šķēluma laukuma funkciju $S(x)$ (šķēluma plakne perpendikulāra Ox asij)	$$V = \int_a^b S(x)dx$$	
Rotācijas ķermeņa tilpums, ja līnija rotē ap Ox asi Līnijas MN vienādojums: • **Dekarta koordinātās** $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$	$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$	
• **parametriskā veidā** $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$	$$V_x = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t)\cdot x'(t)dt$$	
Rotācijas ķermeņa tilpums, ja līnija rotē ap Oy asi Līnijas EF vienādojums: • **Dekarta koordinātās** $x = g(y)$ $(c \leqslant y \leqslant d)$	$$V_y = \pi \int_c^d g^2(y)dy$$	
• **parametriskā veidā** $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$	$$V_y = \pi \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)y'(t)dt$$	

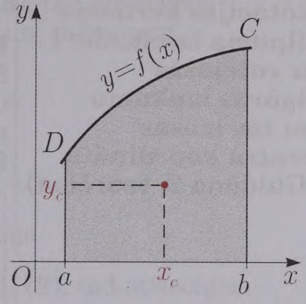
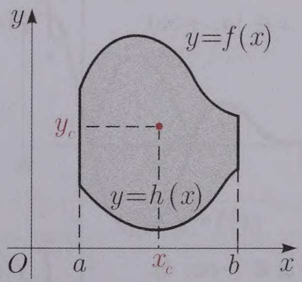
• Līnijas MN vienādojums $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$	$V_y = 2\pi \int\limits_a^b x \cdot f(x)dx$ – rotācijas ķermeņa tilpums, kas rodas līklīniju trapecei $MabN$ rotējot ap Oy asi.	

Lietojumi fizikā un mehānikā

Ceļš, ko noiet materiāls punkts (ķermenis) taisnvirziena kustībā	$s = \int\limits_{t_0}^{T} \lvert v(t) \rvert dt$ $v = v(t)$ – kustības ātrums t – laiks $[t_0;\ T]$ – laika intervāls	
Darbs, ko veic spēks $\vec{F}$, pārvietojot materiālu punktu Ox ass intervālā $[a;\ b]$	$A = \int\limits_a^b \lvert F(x) \rvert dx$ $F(x)$ – spēka vektora $\vec{F}$ projekcija uz Ox ass	
Hidrostatiskā spiediena spēks uz šķidrumā vertikāli iegremdētas plāksnītes vienu pusi	$F = \rho g \int\limits_a^b x(f(x) - h(x))dx$ plāksnīti ierobežo līnijas: $y = f(x)$, $y = h(x)$, $x = a$, $x = b$ ρ – šķidruma blīvums g – brīvās krišanas paātrinājums	
Materiālas līnijas loka masa	$m = \int\limits_a^b \rho(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$ $y = f(x)$ – līnijas vienādojums $(a \leqslant x \leqslant b)$ $\rho = \rho(x)$ – līnijas lineārais blīvums	

Materiālas līnijas loka statiskie momenti attiecībā pret koordinātu asīm	$M_x = \int\limits_a^b \rho(x) f(x) \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$ $M_y = \int\limits_a^b \rho(x) \cdot x \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$ $y = f(x)$ – līnijas vienādojums ($a \leqslant x \leqslant b$) $\rho = \rho(x)$ – līnijas lineārais blīvums
Materiālas līnijas loka inerces momenti attiecībā pret koordinātu asīm	$I_x = \int\limits_a^b \rho(x) \cdot f^2(x) \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$ $I_y = \int\limits_a^b \rho(x) \cdot x^2 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$ $y = f(x)$ – līnijas vienādojums ($a \leqslant x \leqslant b$) $\rho = \rho(x)$ – līnijas lineārais blīvums
Materiālas līnijas loka masas centra koordinātas	$x_c = \frac{1}{m} M_y,\ \ y_c = \frac{1}{m} M_x$ Homogēnai līnijai ($\rho = \text{const}$): $x_c = \frac{1}{l} \int\limits_a^b x \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$ $y_c = \frac{1}{l} \int\limits_a^b f(x) \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$ $y = f(x)$ – līnijas vienādojums ($a \leqslant x \leqslant b$) l – loka garums
Homogēnas plaknes figūras (līklīniju trapeces) **masa**	$m = \rho \int\limits_a^b f(x)\,dx$ $y = f(x)$ – līnijas DC vienādojums ($a \leqslant x \leqslant b$) $\rho = \text{const}$ – figūras blīvums
Homogēnas plaknes figūras (līklīniju trapeces) **statiskie momenti attiecībā pret koordinātu asīm**	$M_x = \frac{1}{2} \rho \int\limits_a^b f^2(x)\,dx$ $M_y = \rho \int\limits_a^b x \cdot f(x)\,dx$ $y = f(x)$ – līnijas DC vienādojums ($a \leqslant x \leqslant b$) $\rho = \text{const}$ – figūras blīvums

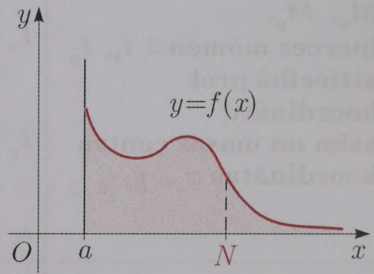
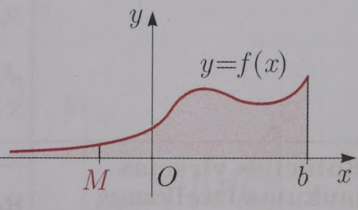
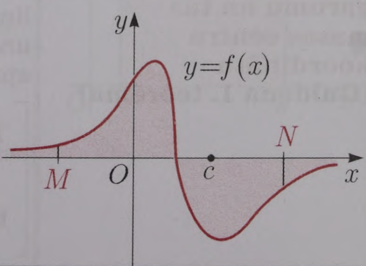


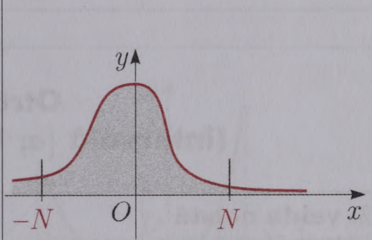
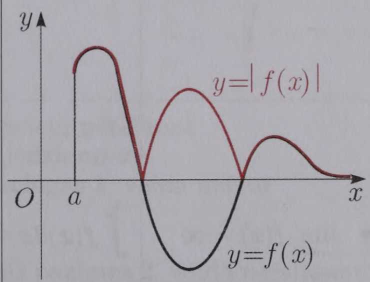
Homogēnas plaknes figūras (līklīniju trapeces) **masas centra koordinātas**	$x_c = \frac{1}{m}M_y = \frac{1}{S}\int_a^b x\cdot f(x)dx$ $y_c = \frac{1}{m}M_x = \frac{1}{2S}\int_a^b f^2(x)dx$ $y = f(x)$ – līnijas DC vienādojums ($a \leqslant x \leqslant b$) S – līklīniju trapeces laukums 
Homogēnas plaknes figūras (līklīniju trapeces) **inerces momenti attiecībā pret koordinātu asīm**	$I_x = \frac{1}{4}\rho\int_a^b f^3(x)dx$; $I_y = \rho\int_a^b x^2 f(x)dx$ $y = f(x)$ – līnijas DC vienādojums ($a \leqslant x \leqslant b$) $\rho = \text{const}$ – figūras blīvums
Homogēnas plaknes figūras, ko ierobežo līnijas $y = f(x)$, $y = h(x)$, $x = a$, $x = b$, **statiskie momenti** M_x, M_y, **inerces momenti** I_x, I_y **attiecībā pret koordinātu asīm un masas centra koordinātas** x_c, y_c	$M_x = \frac{1}{2}\rho\int_a^b (f^2(x) - h^2(x))dx$ $M_y = \rho\int_a^b x(f(x) - h(x))dx$ $I_x = \frac{1}{4}\rho\int_a^b (f^2(x) - h^2(x))(f(x) + h(x))dx$ $I_y = \rho\int_a^b x^2(f(x) - h(x))dx$ $x_c = \frac{1}{S}\int_a^b x(f(x) - h(x))dx$ $y_c = \frac{1}{2S}\int_a^b (f^2(x) - h^2(x))dx$ $\rho = \text{const}$ – figūras blīvums S – figūras laukums 
Rotācijas virsmas laukuma izteiksme ar rotējošās līnijas garumu un tās masas centra koordinātu (Guldena 1. teorēma)	$S_x = l \cdot 2\pi \cdot y_c$ **Rotācijas virsmas laukums** S, kuru izveido plaknes līnijas loks, rotējot ap asi, kas atrodas vienā plaknē ar šo līniju un to nekrusto, ir vienāds ar līnijas loka garuma l un tādas riņķa līnijas garuma reizinājumu, kuru rotējot apraksta loka masas centrs. Tā kā $S_x = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$, tad $S_x = l\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{l}\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = l\cdot 2\pi\cdot y_c$

Rotācijas ķermeņa tilpuma izteiksme ar rotējošās figūras laukumu un tās masas centra koordinātu **(Guldena 2. teorēma)**	$$V_x = S \cdot 2\pi \cdot y_c$$ **Rotācijas ķermeņa tilpums** *V*, kuru izveido plaknes figūra, rotējot ap asi, kas atrodas vienā plaknē ar šo figūru un to nekrusto, ir vienāds ar figūras laukuma S un tādas riņķa līnijas garuma reizinājumu, kuru rotējot apraksta figūras masas centrs. Tā kā $V_x = \pi \cdot \int\limits_a^b f^2(x)dx$, tad $V_x = S \cdot 2\pi \cdot \dfrac{1}{2S}\int\limits_a^b f^2(x)dx = S \cdot 2\pi \cdot y_c$

11.9. Neīstie integrāļi

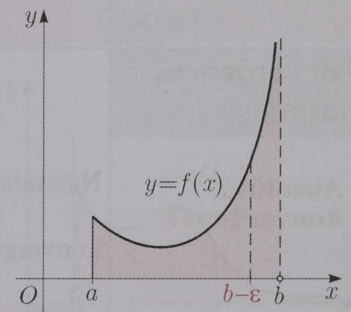
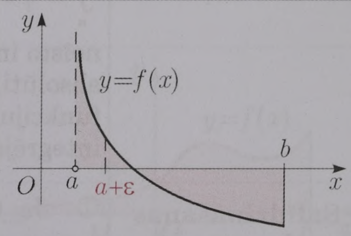
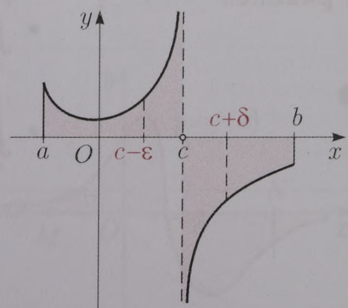
Pirmā veida neīstie integrāļi (integrāļi ar bezgalīgām integrēšanas robežām)

Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi	Ilustrācija
1. veida neīstā integrāļa jēdziens • $x \in [a; +\infty)$	$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{N\to+\infty} \int\limits_a^N f(x)dx \quad (1)$	
• $x \in (-\infty; b]$	$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{M\to-\infty} \int\limits_M^b f(x)dx \quad (2)$	
• $x \in (-\infty; +\infty)$	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx =$ $= \lim\limits_{M\to-\infty} \int\limits_M^c f(x)dx + \lim\limits_{N\to+\infty} \int\limits_c^N f(x)dx \quad (3)$ (c – jebkurš skaitlis; $M < c < N$)	

1. veida neīstā integrāļa **konverģence**	**Ja eksistē galīgas robežas (1), (2), (3)**, tad attiecīgais neīstais integrālis **konverģē (eksistē)** un, piemēram, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{N\to+\infty} \int\limits_a^N f(x)dx = \lim\limits_{N\to+\infty} F(x)\Big\|_a^N =$ $= \lim\limits_{N\to+\infty} \big(F(N) - F(a)\big) = F(+\infty) - F(a)$, kur $F(x)$ – funkcijas $f(x)$ primitīvā funkcija	
1. veida neīstā integrāļa **diverģence**	**Ja neeksistē galīgas robežas (1), (2), (3)**, tad attiecīgais neīstais integrālis **diverģē (neeksistē)**.	
1. veida neīstā integrāļa **galvenā vērtība (v. p.)**	**v. p.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{N\to\infty} \int\limits_{-N}^{N} f(x)dx$ (4) Ir iespējams, ka neīstais integrālis (3) diverģē, bet tā galvenā vērtība (4) eksistē.	
Konverģences pazīmes		
• **Absolūtā konverģence**	Neīstais integrālis $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ (1) konverģē, ja konverģē integrālis $\int\limits_a^{+\infty} \|f(x)\|\,dx$. Šādā gadījumā neīsto integrāli (1) sauc par absolūti konverģējošu, bet funkciju $f(x)$ – par absolūti integrējamu intervālā $[a; +\infty)$	
• **Salīdzināšanas pazīmes**	① Ja $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ intervālā $[0; +\infty)$ un • $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ **konverģē**, tad arī $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ **konverģē** • $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ **diverģē**, tad arī $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ **diverģē**.	

	② Ja $f(x) \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 0$ intervālā $[a; +\infty)$ un $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = C$, kur $C \in (0; +\infty)$, tad $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ un $\int\limits_o^{+\infty} g(x)dx$ **konverģē** vai **diverģē**. (Ja $C = 0$ un $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ konverģē, tad arī $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ konverģē.) P i e z ī m e. Salīdzināšanai bieži izmanto integrāli: $\int\limits_a^{+\infty}\dfrac{dx}{x^\alpha} - \begin{cases}\text{konverģē, ja } \alpha>1\\ \text{diverģē, ja } \alpha\leqslant 1\end{cases}$ $(a > 0)$

Otrā veida neīstie integrāļi (intervālā $[a; b]$ neierobežotu funkciju integrāļi)

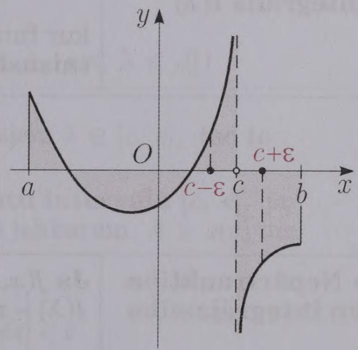
2. veida neīstā integrāļa jēdziens • $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \infty$	$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \qquad (5)$	
• $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$	$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx \qquad (6)$	
• $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$ $(a < c < b)$	$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx =$ $= \lim\limits_{\varepsilon\to0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim\limits_{\delta\to0}\int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)dx \qquad (7)$	

<table>
<tr><td>2. veida neīstā integrāļa konverģence</td><td colspan="2">Ja eksistē galīgas robežas (5), (6), (7), tad attiecīgais neīstais integrālis konverģē (eksistē) un, piemēram,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} F(x)\Big|_a^{b-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\big(F(b-\varepsilon)-F(a)\big) = \lim_{\varepsilon\to 0} F(b-\varepsilon) - F(a),$$

kur $F(x)$ – funkcijas $f(x)$ primitīvā funkcija</td></tr>
<tr><td>2. veida neīstā integrāļa diverģence</td><td colspan="2">Ja neeksistē galīgas robežas (5), (6), (7), tad attiecīgais neīstais integrālis diverģē (neeksistē).</td></tr>
<tr><td>2. veida neīstā integrāļa galvenā vērtība (v. p.)</td><td>v. p. $\int_a^b f(x)dx =$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right) \quad (8)$$

Ir iespējams, ka neīstais integrālis (7) diverģē, bet tā galvenā vērtība (8) eksistē.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Konverģences pazīmes</td><td colspan="2">2. veida neīsto integrāļu konverģences pētīšanai izmanto absolūtās konverģences jēdzienu un salīdzināšanas pazīmes, kas ir analogas 1. veida neīsto integrāļu pazīmēm.

P i e z ī m e. Lietojot salīdzināšanas pazīmes 2. veida neīstajam integrālim, bieži izmanto šādu integrāli:

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \; - \begin{cases}\text{konverģē, ja } \alpha < 1\\ \text{diverģē, ja } \alpha \geqslant 1\end{cases}$$

vai

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \; - \begin{cases}\text{konverģē, ja } \alpha < 1\\ \text{diverģē, ja } \alpha \geqslant 1\end{cases}$$</td></tr>
</table>

Bezgalīgā intervālā neierobežotu funkciju integrāļi

Ja aplūkotajam integrālim integrācijas intervāls ir bezgalīgs un zemintegrāļa funkcija ir neierobežota vairākos šī intervāla punktos, tad šādu neīsto integrāli definē, pēta tā konverģenci un, ja iespējams, aprēķina skaitlisko vērtību, sadalot doto integrāli vairāku integrāļu summā tā, lai katrs no tiem būtu tikai 1. veida vai 2. veida neīstais integrālis.

11.10. Integrāļi, kas atkarīgi no parametra

Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi
No parametra λ atkarīgs integrālis $I(\lambda)$	$$I(\lambda)=\int_a^b f(x,\lambda)dx,$$ kur funkcija $f(x, \lambda)$ **integrējama pēc x un definēta taisnstūrī** $D = \{a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant \lambda \leqslant d\}$

$I(\lambda)$ pamatīpašības

• **Nepārtrauktība un integrējamība**	**Ja $f(x, \lambda)$ ir nepārtraukta funkcija taisnstūrī D, tad $I(\lambda)$ – nepārtraukta un integrējama intervālā $[c, d]$ un** $$\int_c^d I(\lambda)d\lambda=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,\lambda)dx\right)d\lambda=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,\lambda)d\lambda\right)dx$$
• **Diferencējamība**	• **Ja $f(x, \lambda)$ un $\dfrac{\partial f(x,\lambda)}{\partial\lambda}$ ir nepārtrauktas funkcijas apgabalā D, tad $I(\lambda)$ – diferencējama intervālā $[c, d]$ un** $$I'(\lambda)=\int_a^b\frac{\partial f(x,\lambda)}{\partial\lambda}dx$$ • Ja $a = a(\lambda)$ un $b = b(\lambda)$ ir nepārtrauktas un diferencējamas funkcijas intervālā $[c, d]$ un $f(x, \lambda)$, $\dfrac{\partial f(x,\lambda)}{\partial\lambda}$ nepārtrauktas apgabalā D, tad $I(\lambda)=\int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(x,\lambda)dx$ ir diferencējama intervālā $[c, d]$ un $$I'(\lambda)=\int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)}\frac{\partial f(x,\lambda)}{\partial\lambda}dx+b'(\lambda)\cdot f(b(\lambda),\lambda)-a'(\lambda)\cdot f(a(\lambda),\lambda)$$

No parametra atkarīgi neīstie integrāļi

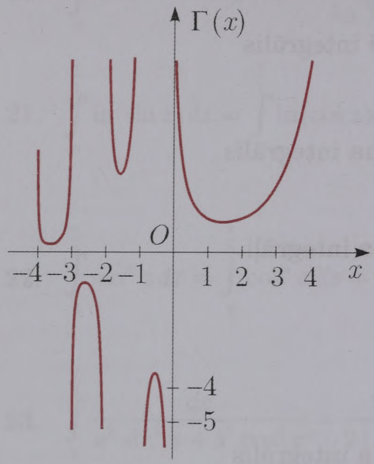
• **Integrālis ar bezgalīgām integrēšanas robežām**	Ja $f(x, \lambda)$ ir definēta apgabalā $D_\infty = \{a \leqslant x < \infty,\ c \leqslant \lambda \leqslant d\}$ un katram $\lambda \in [c, d]$ ir integrējama (kā neīstais integrālis) pēc x intervālā $[a; +\infty)$, tad $I(\lambda) = \int\limits_a^{+\infty} f(x, \lambda)dx$ sauc par intervālā $[c, d]$ konverģentu **neīsto integrāli**. (Analoga definīcija apgabalā $D_\infty = \{-\infty < x \leqslant b,\ c \leqslant \lambda \leqslant d\}$)
• **Integrālis no neierobežotas funkcijas**	Ja $f(x, \lambda)$ ir definēta kopā $\{a \leqslant x < b,\ \ c \leqslant \lambda \leqslant d\}$ un jebkuram $\lambda \in [c, d]$ integrālis $\int\limits_a^b f(x, \lambda)dx$ konverģē, tad $I(\lambda) = \int\limits_a^b f(x, \lambda)dx$ sauc par **neīsto integrāli** (no neierobežotas funkcijas, kad $x = b$). (Analoga definīcija kopā $\{a < x \leqslant b,\ \ c \leqslant \lambda \leqslant d\}$)
Neīsto integrāļu vienmērīgā konverģence (Tā kā abiem neīstajiem integrāļiem piemīt analogas īpašības, tad turpmāk aplūkoti tikai viena veida neīstie integrāļi – pa apgabalu D_∞)	Ja $I(\lambda) = \int\limits_a^{+\infty} f(x, \lambda)dx$ konverģē visiem $\lambda \in [c, d]$, tad to sauc par **vienmērīgi konverģentu intervālā** $[c, d]$, ja katram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $x(\varepsilon)$, ka jebkuram $A > x(\varepsilon)$ un visiem $\lambda \in [c, d]$ $$\left\lvert \int\limits_A^{+\infty} f(x, \lambda)dx \right\rvert < \varepsilon$$
Vienmērīgās konverģences pazīmes	① Ja eksistē tāda funkcija $g(x)$, ka visiem $x \geqslant x_0 > a$ un visiem $\lambda \in [c, d]$ $\lvert f(x, \lambda)\rvert \leqslant g(x)$ un $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ konverģē, tad $\int\limits_a^{+\infty} f(x, \lambda)dx$ konverģē vienmērīgi intervālā $[c, d]$. ② Ja $f(x, \lambda) \geqslant 0$ ir nepārtraukta apgabalā $D_\infty = \{a \leqslant x < \infty,\ \ c \leqslant \lambda \leqslant d\}$, turklāt $I(\lambda) = \int\limits_a^{+\infty} f(x, \lambda)dx$ konverģē visiem $\lambda \in [c, d]$ un ir nepārtraukta funkcija, tad $I(\lambda)$ konverģē vienmērīgi. ③ Ja $f(x, \lambda)$ ir ierobežota apgabalā D_∞ un integrējama pēc $x \in [a, R]$, tad no $\int\limits_a^{+\infty} \lvert h(x)\rvert dx$ konverģences izriet $\int\limits_a^{+\infty} f(x, \lambda)h(x)dx$ vienmērīgā konverģence.

No parametra atkarīga neīstā integrāļa nepārtrauktība un integrējamība	Ja $f(x, \lambda)$ ir nepārtraukta apgabalā D_∞ un $I(\lambda)$ konverģē vienmērīgi intervālā $[c, d]$, tad arī $I(\lambda)$ ir nepārtraukta intervālā $[c, d]$, t. i., jebkuram $\lambda_0 \in [c, d]$ $$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \int_a^{+\infty} f(x,\lambda)dx = \int_a^{+\infty} f(x,\lambda_0)dx,$$ turklāt $I(\lambda)$ var integrēt: $$\int_c^d I(\lambda)d\lambda = \int_c^d d\lambda \int_a^{+\infty} f(x,\lambda)dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x,\lambda)d\lambda$$ (d vietā var būt jebkurš $\lambda \in [c, d]$).
No parametra atkarīga neīstā integrāļa diferencējamība	Ja $f(x, \lambda)$ un $\dfrac{\partial f(x,\lambda)}{\partial \lambda}$ ir nepārtrauktas apgabalā D_∞, $I(\lambda)$ konverģē intervālā $[c, d]$, bet $\int_a^{+\infty} \dfrac{\partial f(x,\lambda)}{\partial\lambda}$ konverģē vienmērīgi, tad $I(\lambda)$ ir diferencējama intervālā $[c, d]$ un $$I'(\lambda) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,\lambda)}{\partial\lambda}dx$$

Eilera integrāļi

Beta funkcija $\mathrm{B}(p, q)$ jeb I veida Eilera integrālis	$$\mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \quad p>0,\ q>0$$ $$\mathrm{B}(p,q) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx, \quad p>0,\ q>0$$
B funkcijas īpašības	① $\mathrm{B}(p, q) = \mathrm{B}(q, p)$ ② $\mathrm{B}(p,q) = \dfrac{p-1}{p+q-1}\mathrm{B}(p-1,q), \quad p>1,\ q>0$ $\mathrm{B}(p,q) = \dfrac{q-1}{p+q-1}\mathrm{B}(p,q-1), \quad p>0,\ q>1$ ③ $\mathrm{B}(p,n) = \dfrac{(n-1)!}{p(p+1)(p+2)...(p+n-1)}, \quad n\in\mathbb{N}$ $\mathrm{B}(m,n) = \dfrac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}, \quad m,n\in\mathbb{N}$ ④ $\mathrm{B}(p,1-p) = \dfrac{\pi}{\sin p\pi}, \quad 0<p<1$

Gamma funkcija $\Gamma(x)$ jeb II veida Eilera integrālis



$\Gamma(x)$ **(faktoriāla vispārinājumu)** definē divējādi:

$$\Gamma(x)=\begin{cases}\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt & \text{(Eilera integrālis; } x>0)\\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!\,n^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)} & \text{(jebkuram } x)\end{cases}$$

$\Gamma(x)$ vērtības atrodamas tabulā (sk. lpp.)
Dažas biežāk lietojamās vērtības:

$$\Gamma(n)=(n-1)!,\quad n\in\mathbb{N}$$

$$\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$$

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\sqrt{\pi};\quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi};\quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi},\ \text{kur}$$

$$(2n-1)!!=1\cdot3\cdot5\ldots(2n-3)(2n-1)$$

Γ funkcijas īpašības

① $\Gamma(x)=(x-1)\Gamma(x-1)$ (lieliem x)

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+1)}{x}\quad (\text{ja } x<1 \text{ un } x\neq 0, -1, -2, \ldots)$$

② $\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x)=\dfrac{\pi}{\sin\pi x}$

③ $\Gamma(x)\cdot\Gamma(-x)=\dfrac{-\pi}{x\cdot\sin\pi x}$

④ $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+x\right)\cdot\Gamma\left(\dfrac{1}{2}-x\right)=\dfrac{\pi}{\cos\pi x}$

⑤ $\Gamma(x)\cdot\Gamma\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\cdot\Gamma(2x)$

(**Ležandra formula**)

Piezīme. x var būt arī komplekss lielums z. Funkcijai $\Gamma(z)$ ir pirmās kārtas poli, ja $z=-n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$;

$$\operatorname{res}\Gamma(-n)=\frac{(-1)^n}{n!},\ \text{bet}\ \frac{1}{\Gamma(z)}\ \text{ir}$$

analītiska.

Sakarība starp I veida un II veida Eilera integrāļiem

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

11.11. Biežāk lietojamie neīstie integrāļi, īpaša nosaukuma integrāļi (1.–6.) un integrāļi, kas reducējami uz I veida vai II veida Eilera integrāļiem (26.–31.)

1. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha$ — **Dirihlē** integrālis

2. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ — **Puasona** integrālis

3. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{\beta^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2|\beta|} e^{-|\alpha\beta|}, \quad \beta \neq 0$ — **Laplasa** integrāļi

4. $\int_0^{+\infty} \frac{x \cdot \sin \alpha x}{\beta^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha \cdot e^{-|\alpha\beta|}$

5. $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ — **Freneļa** integrālis

6. $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}, \quad 0 < \alpha < 1$ — **Eilera** integrālis

7. $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}}, \quad \alpha > 1,\ a > 0$

8. $\int_0^{a} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \quad \alpha < 1,\ a > 0$

9. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$

10. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

11. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

12. $\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$

13. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(\alpha^2+x^2)(\beta^2+x^2)} = \frac{\pi}{2\alpha\beta(\alpha+\beta)}, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0$

14. $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha > 0$

15. $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

16. $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-a^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^3}, \quad a > 0$

17. $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cdot \cos \beta x\, dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}, \quad \alpha > 0$

18. $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cdot \sin \beta x\, dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}, \quad \alpha > 0$

19. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\cdot\cos\beta x\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\exp\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right),\qquad \alpha>0$

20. $\int\limits_0^{+\infty} x\cdot e^{-\alpha x^2}\cdot\sin\beta x\,dx=\frac{\beta}{4\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\exp\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right),\qquad \alpha>0$

21. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2$

22. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=\begin{cases}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}, & \text{ja } n=2k,\ k=1,2,\ldots\\ \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, & \text{ja } n=2k+1,\ k=0,1,2,\ldots\end{cases}$

23. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}=\frac{\pi}{2\,|\,ab\,|},\qquad ab\neq 0$

24. $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{1+a\cos x}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}},\qquad 0\leqslant a<1$

25. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1-a^2\cos^2 x}=\frac{\pi}{2\sqrt{1-a^2}},\qquad |\,a\,|<1$

26. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^p x\cos^q x\,dx=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{p+1}{2},\frac{q+1}{2}\right),\qquad p>-1,\ q>-1$

27. $\int\limits_0^1 x^m\cdot(1-x^n)^p\,dx=\frac{1}{n}\mathrm{B}\left(\frac{m+1}{n},p+1\right),\qquad n>0,\ m>-1,\ p>-1$

28. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^m\,dx}{(1+x^n)^p}=\frac{1}{n}\mathrm{B}\left(\frac{m+1}{n},p-\frac{m+1}{n}\right),\qquad 0<\frac{m+1}{n}<p$

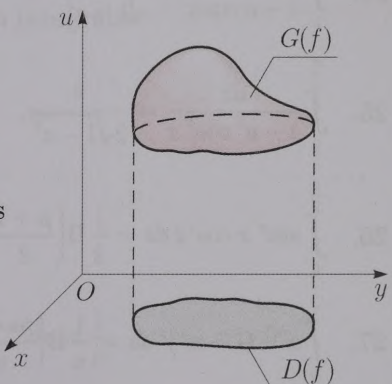
29. $\int\limits_0^{+\infty}x^n e^{-ax}\,dx=\begin{cases}\frac{1}{a^{n+1}}\Gamma(n+1), & a>0,\ n>-1\\ \frac{n!}{a^{n+1}}, & a>0,\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$

30. $\int\limits_0^{+\infty}x^m e^{-x^n}\,dx=\frac{1}{|\,n\,|}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right),\qquad \frac{m+1}{n}>0$

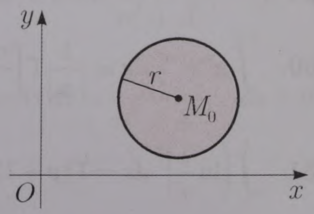
31. $\int\limits_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx=\Gamma(p+1),\qquad p>-1$

12. VAIRĀKARGUMENTU FUNKCIJAS

12.1. Pamatjautājumi

Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi, ilustrācija
Divu argumentu funkcija	Atbilstība starp divu kopu elementiem, ja katram sakārtotam reālu skaitļu pārim $(x;\ y) \in D$ pēc noteikta likuma f atbilst tikai viens kopas E elements u. $u = f(x;\ y)$ – **atklātā veidā** dota 2 argumentu funkcija; $F(x;\ y;\ u) = 0$ – **apslēptā veidā** dota 2 argumentu funkcija.
Trīs argumentu funkcija	Atbilstība starp divu kopu elementiem, ja katram sakārtotam reālu skaitļu trijniekam $(x;\ y;\ z) \in D$ pēc noteikta likuma f atbilst tikai viens kopas E elements u. $u = f(x;\ y;\ z)$ – **atklātā veidā** dota 3 argumentu funkcija; $F(x;\ y;\ z;\ u) = 0$ – **apslēptā veidā** dota 3 argumentu funkcija.
n argumentu funkcija	Atbilstība starp divu kopu elementiem, ja katram sakārtotam n reālu skaitļu kortežam $(x_1;\ x_2;\ ...;\ x_n) \in D$ pēc noteikta likuma f atbilst tikai viens kopas E elements u. $u = f(x_1;\ x_2;\ ...;\ x_n)$ – **atklātā veidā** dota n argumentu funkcija.
Divu argumentu funkcijas definīcijas apgabals un grafiks	Funkcijas $u = f(x;\ y)$ definīcijas apgabals $D(f)$ ir **apgabals xOy koordinātu plaknē (vai arī visa šī plakne.)** Funkcijas $u = f(x;\ y)$ **grafiks $G(f)$** ir visu to **punktu kopa koordinātu telpā**, kuru koordinātas ir $(x;\ y;\ f(x;\ y))$, ja $(x;\ y) \in D(f)$ 

12.2. Robežas un nepārtrauktības jēdziens

Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi, ilustrācija
Punkta $M_0(x_0;\ y_0)$ apkārtne koordinātu plaknē	$U_r(M_0)$ **Riņķis**, kura centrs ir punktā M_0 un rādiuss ir r. 

Divu argumentu funkcijas robeža, kad $x \to x_0$, $y \to y_0$	$\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x;y)=A$ **Skaitlis A, ja katram pozitīvam skaitlim ε var atrast tādu punkta $M_0(x_0;\ y_0)$ apkārtni $U_\delta(M_0)$, ka visiem punktiem $M(x;\ y) \neq M_0$ no šīs apkārtnes** $\lvert f(x;\ y) - A\rvert < \varepsilon$ jeb $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$, ka $\forall\ (x;y)$, kuriem $0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$ ir $\lvert f(x;y) - A\rvert < \varepsilon$
Funkcijas $u = f(x;\ y)$ parciālie pieaugumi un pilnais pieaugums	$\Delta_x u = f(x_0 + \Delta x;\ y_0) - f(x_0;\ y_0)$ (**parciālais pieaugums pēc** x) $\Delta_y u = f(x_0;\ y_0 + \Delta y) - f(x_0;\ y_0)$ (**parciālais pieaugums pēc** y) $\Delta u = f(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y) - f(x_0;\ y_0)$ (**pilnais pieaugums**) Analogi definē funkcijas $u = f(x_1;\ x_2;\ ...;\ x_n)$ pieaugumus.
Nepārtraukta funkcija punktā $M_0(x_0;\ y_0)$	Funkciju $u = f(x;\ y)$ sauc par nepārtrauktu punktā $M_0(x_0;\ y_0)$, ja • $u = f(x;\ y)$ ir definēta punktā M_0 un kādā šī punkta apkārtnē un • funkcijas robeža, kad $x \to x_0$ un $y \to y_0$ ir vienāda ar funkcijas vērtību punktā $M_0(x_0;\ y_0)$, t. i., $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x;y)=f(x_0;y_0)$ Ekvivalents apgalvojums: bezgalīgi maziem argumentu pieaugumiem Δx un Δy atbilst bezgalīgi mazs funkcijas pilnais pieaugums: $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0 \\ \Delta y\to 0}} \Delta u = 0$

12.3. Parciālie atvasinājumi. Pilnais diferenciālis. Teilora formula

Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi
Funkcijas $u = f(x;\ y)$ parciālais atvasinājums pēc x	Apzīmējumi: u'_x, $f'_x(x;y)$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f(x;y)}{\partial x}$ Definīcija: $u'_x = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta_x u}{\Delta x}$

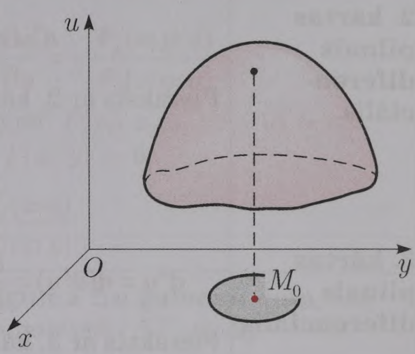
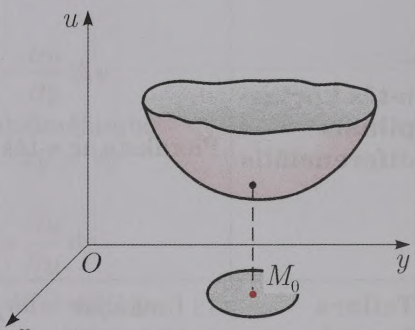
Funkcijas $u = f(x;\ y)$ **parciālais atvasinājums pēc** y	Apzīmējumi: u'_y, $f'_y(x;y)$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f(x;y)}{\partial y}$ Definīcija: $u'_y = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y u}{\Delta y}$
Parciālā atvasināšana	**Atrodot funkcijas parciālo atvasinājumu pēc** x**, argumentu** y **uzskata par konstantu lielumu** un izmanto viena argumenta funkcijas atvasināšanas kārtulas un formulas. **Atrodot parciālo atvasinājumu pēc** y**, argumentu** x **uzskata par konstantu lielumu** un atvasina pēc viena argumenta funkcijas atvasināšanas formulām un kārtulām. Analogi rīkojas, atvasinot vairāku argumentu funkcijas.
Otrās kārtas parciālie atvasinājumi	① $(u'_x)'_x$ – pirmās kārtas atvasinājumu u'_x atvasina pēc argumenta x Apzīmējumi: u''_{xx}, $f''_{xx}(x;y)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f(x;y)}{\partial x^2}$ ② $(u'_x)'_y$ – pirmās kārtas atvasinājumu u'_x atvasina pēc argumenta y Apzīmējumi: u''_{xy}, $f''_{xy}(x;y)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f(x;y)}{\partial x \partial y}$ ③ $(u'_y)'_x$ – pirmās kārtas atvasinājumu u'_y atvasina pēc argumenta x Apzīmējumi: u''_{yx}, $f''_{yx}(x;y)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, $\dfrac{\partial^2 f(x;y)}{\partial y \partial x}$ ④ $(u'_y)'_y$ – pirmās kārtas atvasinājumu u'_y atvasina pēc argumenta y Apzīmējumi: u''_{yy}, $f''_{yy}(x;y)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 f(x;y)}{\partial y^2}$
Trešās kārtas parciālie atvasinājumi	① $(u''_{xx})'_x$ – otrās kārtas atvasinājumu u''_{xx} atvasina pēc argumenta x Apzīmējumi: u'''_{xxx}, $f'''_{xxx}(x;y)$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, $\dfrac{\partial^3 f(x;y)}{\partial x^3}$ ② $(u''_{xx})'_y$ – otrās kārtas atvasinājumu u''_{xx} atvasina pēc argumenta y Apzīmējumi: u'''_{xxy}, $f'''_{xxy}(x;y)$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, $\dfrac{\partial^3 f(x;y)}{\partial x^2 \partial y}$ ③ $(u''_{xy})'_x$ – otrās kārtas atvasinājumu u''_{xy} atvasina pēc argumenta x Apzīmējumi: u'''_{xyx}, $f'''_{xyx}(x;y)$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial x}$, $\dfrac{\partial^3 f(x;y)}{\partial x \partial y \partial x}$ ④ $(u''_{xy})'_y$ – otrās kārtas atvasinājumu u''_{xy} atvasina pēc argumenta y Apzīmējumi: u'''_{xyy}, $f'''_{xyy}(x;y)$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$, $\dfrac{\partial^3 f(x;y)}{\partial x \partial y^2}$

	⑤ $(u''_{yx})'_x$ – otrās kārtas atvasinājumu u''_{yx} atvasina pēc argumenta x Apzīmējumi: u'''_{yxx}, $f'''_{yxx}(x;y)$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2}$, $\dfrac{\partial^3 f(x;y)}{\partial y \partial x^2}$ ⑥ $(u''_{yx})'_y$ – otrās kārtas atvasinājumu u''_{yx} atvasina pēc argumenta y Apzīmējumi: u'''_{yxy}, $f'''_{yxy}(x;y)$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial y \partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^3 f(x;y)}{\partial y \partial x \partial y}$ ⑦ $(u''_{yy})'_x$ – otrās kārtas atvasinājumu u''_{yy} atvasina pēc argumenta x Apzīmējumi: u'''_{yyx}, $f'''_{yyx}(x;y)$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x}$, $\dfrac{\partial^3 f(x;y)}{\partial y^2 \partial x}$ ⑧ $(u''_{yy})'_y$ – otrās kārtas atvasinājumu u''_{yy} atvasina pēc argumenta y Apzīmējumi: u'''_{yyy}, $f'''_{yyy}(x;y)$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3}$, $\dfrac{\partial^3 f(x;y)}{\partial y^3}$
Augstāku kārtu jaukto parciālo atvasinājumu vienādība	Ja funkcijai $u = f(x;\ y)$ eksistē otrās kārtas parciālie atvasinājumi un jauktie atvasinājumi $f''_{xy}(x;y)$, $f''_{yx}(x;y)$ **ir nepārtraukti** punktā $M(x;\ y)$, tad šajā punktā $f''_{xy}(x;y) = f''_{yx}(x;y)$ jeb $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ Analogi arī trešās kārtas un augstāku kārtu jauktie parciālie atvasinājumi ir vienādi, ja šie atvasinājumi ir nepārtraukti, t. i., $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial x} = \dfrac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2}$ un $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = \dfrac{\partial^3 u}{\partial y \partial x \partial y} = \dfrac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x}$ Tātad **funkcijas augstākas kārtas jauktais parciālais atvasinājums nav atkarīgs no atvasināšanas secības pēc kāda argumenta**, bet gan tikai no tā, cik reizes atvasina pēc šī argumenta.
Saliktas vairākargumentu funkcijas parciālie atvasinājumi	Ja funkcijām $z = f(u;\ v)$, $u = g(x;\ y)$, $v = h(x;\ y)$ **eksistē nepārtraukti parciālie atvasinājumi**, tad saliktās funkcijas $z = f(g(x;\ y);\ h(x;\ y))$ parciālos atvasinājumus atrod pēc formulām $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}$ Analogi, ja argumentu skaits ir lielāks nekā divi.
Funkcijas pilnais atvasinājums	Ja funkcijām $z = f(u;\ v)$, $u = g(x)$, $v = h(x)$ **eksistē nepārtraukti atvasinājumi**, tad saliktās funkcijas $z = f(g(x);\ h(x))$ atvasinājumu atrod pēc formulas $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{du}{dx} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{dv}{dx}$

Apslēptas vairākargumentu funkcijas parciālie atvasinājumi	Ja funkciju $u = f(x;\ y)$ definē ar vienādojumu $F(x;\ y;\ u) = 0$, kur $F(x;\ y;\ u)$ un atvasinājumi $F'_x(x;y;u)$, $F'_y(x;y;u)$, $F'_u(x;y;u) \neq 0$ ir nepārtrauktas funkcijas, tad $$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{F'_x(x;y;u)}{F'_u(x;y;u)},\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{F'_y(x;y;u)}{F'_u(x;y;u)}$$ Analogi n argumentu apslēptai funkcijai $F(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n;\ u) = 0$ Apslēptai viena argumenta funkcijai $F(x;\ y) = 0$ $$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x;y)}{F'_y(x;y)}$$
Pilnais diferenciālis	**Funkcijas $u = f(x;\ y)$ pilnā pieauguma Δu galvenā daļa**, kas ir lineāri atkarīga no argumentu pieaugumiem Δx un Δy: $$df(x;y) = f'_x(x;y)\cdot\Delta x + f'_y(x;y)\cdot\Delta y$$ jeb $$du = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y$$ Pilnā diferenciāļa pierakstā izmanto apzīmējumus $$\Delta x = dx \text{ un } \Delta y = dy$$ Tad $$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$ Funkcijas $u = f(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$ pilnais diferenciālis $$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n$$ Ja $\lvert\Delta x_i\rvert = \lvert dx_i\rvert$ mazi, tad $du \approx \Delta u$
Parciālie diferenciāļi	$$\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1,\ \frac{\partial u}{dx_2}dx_2,\ \ldots,\ \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n$$
Pilnā diferenciāļa lietojumi	• **Ja Δx un Δy moduļi ir mazi**, tad funkcijas pilnais pieaugums aptuveni ir vienāds ar pilno diferenciāli: $$\Delta f(x_0;y_0) \approx df(x_0;y_0) = f'_x(x_0;y_0)\Delta x + f'_y(x_0;y_0)\Delta y$$ Izmanto kļūdu teorijā pēc formulas $u = f(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$ aprēķinātā lieluma u_0 kļūdas Δu novērtēšanai, ja aprēķinos izmantoti skaitļi x_{i0}, kas ir noteikti ar kļūdu Δx_i, t. i., ja $x_i = x_{i0} \pm \Delta x_i$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$, tad $$\Delta u \approx \left\lvert\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\rvert\cdot\Delta x_1 + \left\lvert\frac{\partial u}{\partial x_2}\right\rvert\cdot\Delta x_2 + \ldots + \left\lvert\frac{\partial u}{\partial x_n}\right\rvert\cdot\Delta x_n$$ • **Ja Δx un Δy moduļi ir mazi**, tad funkcijas aptuvenu vērtību $f(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y)$ var aprēķināt pēc formulas $$f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y) \approx f(x_0;y_0) + df(x_0;y_0) =$$ $$= f(x_0;y_0) + f'_x(x_0;y_0)\cdot\Delta x + f'_y(x_0;y_0)\cdot\Delta y$$

Augstāku kārtu pilnie diferenciāļi	Nosacījumi: $u = f(x;\ y)$ 1) nav salikta funkcija, 2) eksistē nepārtraukti augstāku kārtu parciālie atvasinājumi.
2. kārtas pilnais diferenciālis	$$d^2u = d(du) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2$$ Pieraksts ar 2. kārtas pilnā difrenciāļa operatoru: $$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 \cdot u$$
3. kārtas pilnais diferenciālis	$$d^3u = d(d^2u) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}dy^3$$ Pieraksts ar 3. kārtas pilnā diferenciāļa operatoru: $$d^3u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 \cdot u$$
n-tās kārtas pilnais diferenciālis	$$d^n u = d\left(d^{n-1}u\right)$$ Pieraksts ar n-tās kārtas pilnā diferenciāļa operatoru: $$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n \cdot u$$
Teilora formula divu argumentu funkcijai	Ja funkcijai $u = f(x;\ y)$ kādā punkta $M_0(x_0;\ y_0)$ apkārtnē eksistē nepārtraukti augstāku kārtu parciālie atvasinājumi, tad $$f(x;y) = f(x_0;y_0) + \frac{1}{1!}df(x_0;y_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0;y_0) + \ldots +$$ $$+ \frac{1}{n!}d^n f(x_0;y_0) + R_n(x;y),$$ (**Teilora formula**) kur atlikuma loceklis $$R_n(x;y) = \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_0 + \theta_1 \Delta x; y_0 + \theta_2 y);\quad 0 < \theta_1 < 1,\quad 0 < \theta_2 < 1$$ Tā kā $f(x;\ y) - f(x_0;\ y_0) = \Delta(x_0;\ y_0)$, tad $$\Delta f(x_0;y_0) = \frac{1}{1!}df(x_0;y_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0;y_0) + \ldots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0;y_0) + R_n(x;y)$$ Tātad funkcijas pilno pieaugumu punktā $M_0(x_0;y_0)$ var izteikt, izmantojot augstāku kārtu pilnos diferenciāļus.

12.4. Vairākargumentu funkciju ekstrēmi

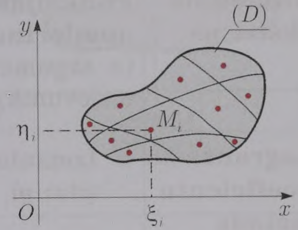
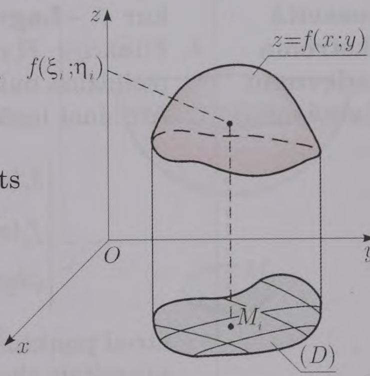
Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi, ilustrācija
Funkcijas $u = f(x;\ y)$ **lokālā maksimuma punkts; lokālais maksimums**	Punkts $M_0(x_0;\ y_0)$, ja šim punktam eksistē tāda apkārtne, ka visiem apkārtnes punktiem $M(x;\ y)$ (izņemot punktu $M_0(x_0;\ y_0)$) ir spēkā nevienādība $f(x;y) < f(x_0;y_0)$ $f_{\max}(M_0)$ 
Funkcijas $u = f(x;\ y)$ **lokālā minimuma punkts lokālais minimums**	Punkts $M_0(x_0;\ y_0)$, ja šim punktam eksistē tāda apkārtne, ka visiem apkārtnes punktiem $M(x;\ y)$ (izņemot punktu $M_0(x_0;\ y_0)$) ir spēkā nevienādība $f(x;y) > f(x_0;y_0)$ $f_{\min}(M_0)$ 
Ekstrēmu punkti	**Funkcijas lokālā maksimuma punkti un lokālā minimuma punkti.**
Ekstrēmi	Funkcijas vērtības lokālo ekstrēmu punktos.
Ekstrēma eksistences nepieciešamais nosacījums	**Ja** $M_0(x_0;\ y_0)$ **ir funkcijas** $u = f(x;\ y)$ **ekstrēma punkts, tad** $f'_x(x_0;y_0)=0$ **un** $f'_y(x_0;y_0)=0$ **vai arī šajā punktā parciālie atvasinājumi neeksistē.** (Analogi nosacījumi n argumentu funkcijai.)
Stacionārie punkti	**Punkti, kuros 1. kārtas parciālie atvasinājumi ir vienādi ar nulli.** Stacionāros punktus atrod, atrisinot vienādojumu sistēmu $\begin{cases} f'_x(x;y)=0 \\ f'_y(x;y)=0 \end{cases}$
Funkcijas $u = f(x;\ y)$ **ekstrēmu eksistences pietiekamie nosacījumi**	$M_0(x_0;\ y_0)$ – stacionārais punkts Apzīmējumi: $a_{11} = f''_{xx}(x_0;y_0)$, $a_{12} = f''_{xy}(x_0;y_0)$, $a_{22} = f''_{yy}(x_0;y_0)$ $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$

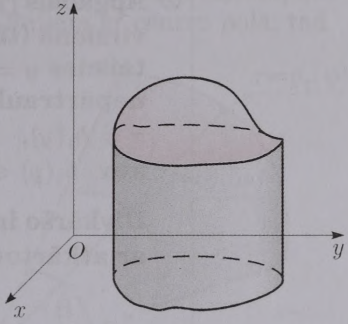
	Ja $M_0(x_0; y_0)$ **ir funkcijas** $u = f(x; y)$ **stacionārais punkts**, kura apkārtnē eksistē nepārtraukti 2. kārtas parciālie atvasinājumi un • $D > 0$, $a_{11} < 0$, tad $M_0(x_0; y_0)$ ir **lokālā maksimuma punkts**; • $D > 0$, $a_{11} > 0$, tad $M_0(x_0; y_0)$ ir **lokālā minimuma punkts**; • $D < 0$, tad $M_0(x_0; y_0)$ nav ekstrēma punkts; • $D = 0$, tad ar šo metodi nevar noteikt ekstrēmu (izmanto augstāku kārtu parciālos atvasinājumus).
Nosacītais ekstrēms	**Funkcijas $u = f(x; y)$ ekstrēms, ja argumenti x un y apmierina vienādojumu $\varphi(x; y) = 0$ (saites vienādojumu).** (n argumentu funkcijas $u = f(x_1; x_2; ...; x_n)$ nosacītā ekstrēma uzdevumā doti $m < n$ saites vienādojumi.)
Lagranža koeficientu metode nosacītā ekstrēma uzdevumu risināšanai	**1.** Izmantojot funkciju $u = f(x; y)$ un saites vienādojuma izteiksmi $\varphi(x; y)$, sastāda Lagranža funkciju $F(x; y; \lambda) = f(x; y) + \lambda \cdot \varphi(x; y),$ kur λ – **Lagranža koeficients.** **2.** Funkciju $F(x; y; \lambda)$ parciāli atvasina pēc x, y, λ un atvasinājumus pielīdzina nullei. **3.** Atrisinot iegūto vienādojumu sistēmu $\begin{cases} f'_x(x;y) + \lambda \cdot \varphi'_x(x;y) = 0 \\ f'_y(x;y) + \lambda \cdot \varphi'_y(x;y) = 0 \\ \varphi(x;y) = 0 \end{cases}$ atrod punktus, kuros funkcijai $u = f(x; y)$ ir iespējams nosacītais ekstrēms. **4.** Lai noteiktu, kāds ekstrēms ir iegūtajā stacionārajā punktā $M_0(x_0; y_0)$, izmanto Lagranža funkcijas 2. kārtas pilno diferenciāli šajā punktā un saites vienādojuma izteiksmes $\varphi(x; y)$ 1. kārtas diferenciāli. Iespējami 3 gadījumi. • Ja $d^2F(x_0; y_0) < 0$ un $d\varphi(x_0; y_0) = 0$, tad $M_0(x_0; y_0)$ ir **nosacītā maksimuma** punkts. • Ja $d^2F(x_0; y_0) > 0$ un $d\varphi(x_0; y_0) = 0$, tad $M_0(x_0; y_0)$ ir **nosacītā minimuma** punkts. • Ja $d^2F(x_0; y_0) = 0$, tad ar 2. kārtas pilno diferenciāli nevar noteikt ekstrēmu un jālieto augstāku kārtu diferenciāļi. Analogi šo metodi izmanto n argumentu funkcijai $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ar $m < n$ saites vienādojumiem $\varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \ \varphi_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \ ..., \ \varphi_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0.$ Tad Lagranža funkcija ir šāda: $F(x_1, x_2, ..., x_n; \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \lambda_1\varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n) +$ $+ \lambda_2\varphi_2(x_1, x_2, ..., x_n) + ... + \lambda_m\varphi_m(x_1, x_2, ..., x_n)$

13. VAIRĀKARGUMENTU FUNKCIJU INTEGRĀLRĒĶINI

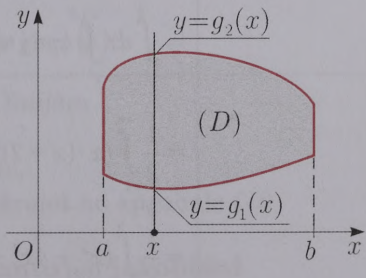
13.1. Divkāršais integrālis

Definīcija un ar to saistītie jautājumi

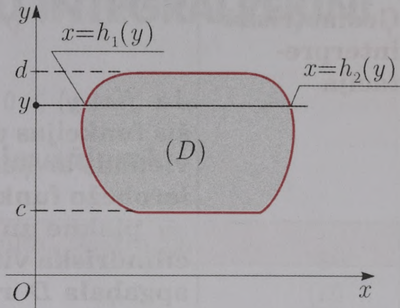
Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi, ilustrācija
Funkcijas $z = f(x;\ y)$ integrālsumma apgabalā D	$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$ jeb $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i)\Delta S_i$  **Integrālsummas sastādīšanas plāns** **1.** Apgabalu (D) sadala n daļās ar brīvi izraudzītām līnijām; i-tās daļas laukums ΔS_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ **2.** Katrā apgabala daļā brīvi izraugās punktu $M_i(\xi_i;\ \eta_i) \in (D_i)$ **3.** Atrod funkcijas vērtības $f(\xi_i;\ \eta_i)$ **4.** Funkcijas vērtību $f(\xi_i;\ \eta_i)$ reizina ar apgabala daļas (D_i) laukumu ΔS_i; reizinājums $f(\xi_i;\ \eta_i)\Delta S_i$ ir vienāds ar tāda cilindra tilpumu, kura pamats ir apgabala daļa (D_i) un augstums – $f(\xi_i;\ \eta_i)$ **5.** Atrod visu reizinājumu summu $$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i)\Delta S_i$$ 
Divkāršā integrāļa definīcija	$$\iint_{(D)} f(x;y)dS = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i)\Delta S_i$$ **Divkāršais integrālis ir funkcijas $f(x;\ y)$ integrālsummas robeža, kad lielākais no visu apgabala daļu diametriem d tiecas uz nulli,** t. i., $$d = \max d_i \to 0,$$ kur d_i – i-tās daļas diametrs (lielākais attālums starp apgabala daļas (D_i) robežlīnijas punktiem); dS – bezgalīgi mazs laukuma elements apgabalā (D) (“**laukuma diferenciālis**”).
Divkāršā integrāļa eksistence	**Ja funkcija $f(x;\ y)$ apgabalā (D) ir nepārtraukta vai arī gabaliem nepārtraukta, tad šajā apgabalā tai eksistē divkāršais integrālis.**
Divkāršā integrāļa īpašības	**Analogas viena argumenta funkcijas noteiktā integrāļa $\int_a^b f(x)dx$ īpašībām.** Pārveidojot attiecīgās izteiksmes, intervāla $[a;\ b]$ garuma $b - a$ **vietā** jāraksta apgabala (D) mērs – šī apgabala laukums S.

Ģeometriskā interpretācija	$V = \iint\limits_{(D)} f(x;y)dS$  **Ja $f(x;\ y) \geqslant 0$ apgabalā (D), tad šīs funkcijas divkāršais integrālis vienāds ar ķermeņa tilpumu, ko ierobežo funkcijas $f(x;\ y)$ grafiks, xy plakne un Oz asij paralēla cilindriska virsma, kas iet caur apgabala D robežu (kontūru).** Ja apgabalā (D) $f(x;y) \equiv 1$, tad $\iint\limits_{(D)} dS = S,$ kur S ir apgabala (D) laukums.

Divkāršā integrāļa aprēķināšana

Aprēķināšana Dekarta koordinātās	Sastādot integrālsummu, apgabalu (D) sadala daļās ar taisnēm, kas paralēlas koordinātu asīm; tad **laukuma elements** $dS = dxdy$ un integrāli pieraksta šādi: $\iint\limits_{(D)} f(x;y)dx\,dy$ **Aplūko divus gadījumus.**  ① **Apgabals (D) ir pareizs Oy ass virzienā (tā kontūru veido taisnes $x = a$, $x = b$ un nepārtrauktu funkciju $y = g_1(x)$, $y = g_2(x)$ grafiki, kur $g_1(x) \leqslant g_2(x)$ $\forall\ x \in [a;b]$).** **Divkāršo integrāli aprēķina ar atkārtoto integrāli:** $\iint\limits_{(D)} f(x;y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x;y)dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x;y)dy \right) dx =$ $= \int\limits_a^b \left(F(x;y) \Big\|_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} \right) dx = \int\limits_a^b \left(F(x;g_2(x)) - F(x;g_1(x)) \right) dx =$ $= \int\limits_a^b u(x)dx = U(x)\Big\|_a^b = U(b) - U(a),$ kur $F'_y(x;y) = f(x;y)$, $U'_x(x) = u(x)$

② **Apgabals (D) ir pareizs Ox ass virzienā (tā kontūru veido taisnes $y = c$, $y = d$ un nepārtrauktu funkciju $x = h_1(y)$, $x = h_2(y)$ grafiki, kur $h_1(y) \leqslant h_2(y)$ $\forall\, y \in [c; d]$).**



Divkāršo integrāli aprēķina ar atkārtoto integrāli:

$$\iint\limits_{(D)} f(x;y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x;y)dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x;y)dx \right) dy =$$

$$= \int\limits_c^d \left(F(x;y) \Bigg|_{x = h_1(y)}^{x = h_2(y)} \right) dy = \int\limits_c^d (F(h_2(y);y) - F(h_1(y);y))dy =$$

$$= \int\limits_c^d v(y)dy = V(y)\Big|_c^d = V(d) - V(c),$$

kur $F'_y(x;y) = f(x;y)$, $V'_y(y) = v(y)$

Piemērs

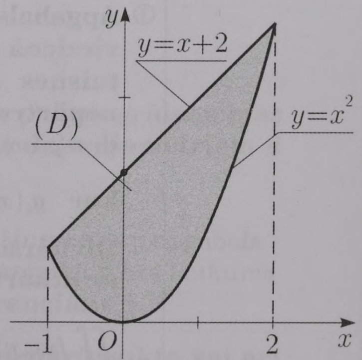
$$\iint\limits_{(D)} xydxdy = \left[\begin{array}{l} \text{Apgabala } (D) \text{ kontūru veido līnijas} \\ y = x^2, y = x + 2, x \in [-1; 2] \end{array} \right] =$$

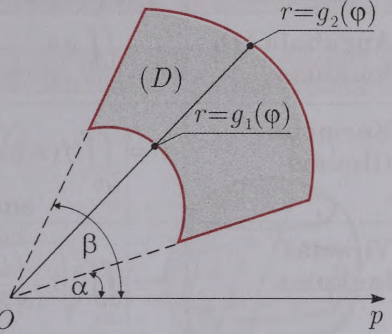
$$= \int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{x+2} xydy = \int\limits_{-1}^{2} \left(x \cdot \frac{1}{2} y^2 \Bigg|_{y = x^2}^{y = x + 2} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{2} (x \cdot (x+2)^2 - x \cdot (x^2)^2) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{2} (x^3 + 4x^2 + 4x - x^5) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} x^4 + \frac{4}{3} x^3 + 2x^2 - \frac{1}{6} x^6 \right) \Bigg|_{-1}^{2} = \ldots = \frac{45}{8}$$



<table>
<tr>
<td>Aprēķināšana polārajās koordinātās</td>
<td>
Sastādot integrālsummu, apgabalu (D) sadala ar taisnes stariem, kas novilkti no pola, un koncentriskām riņķa līnijām ar centru polā; tad laukuma elements $dS = r\,dr\,d\varphi$
Aplūko gadījumu, kad apgabala kontūru veido taisnes polārajā koordinātu sistēmā $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ un nepārtrauktu funkciju $r = g_1(\varphi)$, $r = g_2(\varphi)$ grafiki, kur $g_1(\varphi) \leqslant g_2(\varphi)$.
Aprēķinot divkāršo integrāli, izmanto sakarības starp punkta Dekarta koordinātām un polārajām kooordinātām:
$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.


Pēc tam sastāda atkārtoto integrāli pēc mainīgajiem lielumiem φ un r:
$$\iint\limits_{(D)} f(x;y)dS = \iint\limits_{(D)} f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)r\,dr\,d\varphi =$$
$$= \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)r\,dr = \int_\alpha^\beta \left(\int_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)r\,dr \right) d\varphi =$$
$$= \int_\alpha^\beta \left(F(r;\varphi) \Big|_{r=g_1(\varphi)}^{r=g_2(\varphi)} \right) dr = \int_\alpha^\beta (F(g_2(\varphi);\varphi) - F(g_1(\varphi);\varphi))d\varphi =$$
$$= \int_\alpha^\beta h(\varphi)d\varphi = H(\varphi)\Big|_\alpha^\beta = H(\beta) - H(\alpha),$$
kur $F'_r(r;\varphi) = f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)\cdot r$, $H'_\varphi(\varphi) = h(\varphi)$
</td>
</tr>
<tr>
<td>Aprēķināšana vispārinātā līklīniju koordinātu sistēmā
$$\begin{cases} x = x(u;v) \\ y = y(u;v) \end{cases}$$
</td>
<td>
Apgabalu (D) sadala daļās ar koordinātu līnijām
$u = \text{const}$ un $v = \text{const}$
Tad laukuma elements $dS = |J|\,du\,dv$,
kur $|J|$ – deformācijas koeficients, pārejot no apgabala (D) xy plaknē uz apgabalu (D') uv plaknē;
$|J|$ atrod, aprēķinot Jakobi determinantu jeb jakobiāni
$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$
Tad
$$\iint\limits_{(D)} f(x;y)dS = \iint\limits_{(D')} f(x(u;v);\ y(u;v)) \cdot |J|\,du\,dv$$

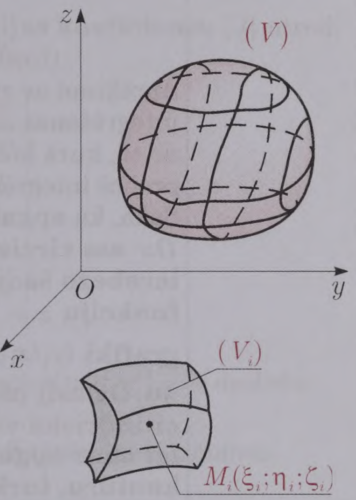
P i e m ē r a m,
ja $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$,
tad
$x'_r = \cos\varphi$,
$x'_\varphi = -r\sin\varphi$,
$y'_r = \sin\varphi$,
$y'_\varphi = r\cos\varphi$ un
$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$
</td>
</tr>
</table>

Daži divkāršā integrāļa lietojumi

Nosaukums	Aprēķināšanas formulas, paskaidrojumi	
Apgabala (D) laukums	$S=\iint\limits_{(D)} dS$	
Ķermeņa tilpums	$V=\iint\limits_{(D)} f(x;y)dS$	$f(x;y)\geqslant 0\ \ \forall(x;y)\in(D)$ (sk. zīm. 227. lpp.)
Virsmas laukums	$\sigma=\iint\limits_{(D)}\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$	σ – virsmas $z=f(x;\ y)$ laukums, kur $(x;\ y)\in(D)$
Plaknes figūras masa	$m=\iint\limits_{(D)}\rho(x;y)dxdy$	$\rho(x;\ y)$ – **blīvuma sadalījuma funkcija** plaknes figūrā (apgabalā (D))
Plaknes figūras statiskie momenti	$M_x=\iint\limits_{(D)} y\cdot\rho(x;y)dxdy$	– **statiskais moments attiecībā pret Ox asi**
	$M_y=\iint\limits_{(D)} x\cdot\rho(x;y)dxdy$	– **statiskais moments attiecībā pret Oy asi**
	$M_0=\iint\limits_{(D)}\rho(x;y)\cdot\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$	– **statiskais moments attiecībā pret koordinātu sākumpunktu**
Plaknes figūras inerces momenti	$I_x=\iint\limits_{(D)} y^2\cdot\rho(x;y)dxdy$	– **inerces moments attiecībā pret Ox asi**
	$I_y=\iint\limits_{(D)} x^2\cdot\rho(x;y)dxdy$	– **inerces moments attiecībā pret Oy asi**
	$I_0=\iint\limits_{(D)}(x^2+y^2)\cdot\rho(x;y)dxdy$ $I_0=I_x+I_y$	– **inerces moments attiecībā pret koordinātu sākumpunktu**
Plaknes figūras masas centra koordinātas	$x_C=\frac{M_y}{m};\quad y_C=\frac{M_x}{m}$	

13.2. Trīskāršais integrālis

Definīcija un ar to saistītie jautājumi

Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi, ilustrācija
Funkcijas $u = f(x;\, y;\, z)$ **integrāl-summa apgabalā** (V)	$\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta V_i$ jeb $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\Delta V_i$ **Integrālsummas sastādīšanas plāns** **1.** Apgabalu (V) sadala n daļās ar brīvi izraudzītām virsmām; i-tās daļas tilpums ΔV_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ **2.** Katrā apgabala daļā brīvi izraugās punktu $M_i\ (\xi_i;\, \eta_i;\, \zeta_i) \in (V_i)$ **3.** Atrod funkcijas vērtības $f(\xi_i;\, \eta_i;\, \zeta_i)$ **4.** Funkcijas vērtību $f(\xi_i;\, \eta_i;\, \zeta_i)$ reizina ar apgabala daļas (V_i) tilpumu ΔV_i **5.** Atrod visu reizinājumu summu $$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\Delta V_i$$ 
Trīskāršā integrāļa definīcija	$$\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)dV = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\Delta V_i$$ **Trīskāršais integrālis ir funkcijas $f(x;\, y;\, z)$ integrālsummas robeža, kad lielākais no visu apgabala daļu diametriem d tiecas uz nulli,** t. i., $$d = \max d_i \to 0,$$ kur d_i – i-tās daļas diametrs (lielākais attālums starp apgabala daļas (V_i) robežvirsmas punktiem); dV – bezgalīgi mazs tilpuma elements apgabalā (V) (“**tilpuma diferenciālis**”).
Trīskāršā integrāļa eksistence	**Ja funkcija $f(x;\, y;\, z)$ ir nepārtraukta apgabalā (V), tad šajā apgabalā tai eksistē trīskāršais integrālis.**
Ģeometriskā interpretā-cija	Ja $f(x;y;z) \equiv 1$ apgabalā (V), tad $$\iiint\limits_{(V)} dV = V,$$ kur V ir apgabala (V) tilpums.
Trīskāršā integrāļa īpašības	**Analogas viena argumenta funkcijas noteiktā integrāļa** $$\int_a^b f(x)dx$$ **īpašībām.** Pārveidojot attiecīgās izteiksmes, intervāla $[a;\, b]$ garuma $b-a$ **vietā** jāraksta apgabala (V) mērs – šī apgabala **tilpums** V.

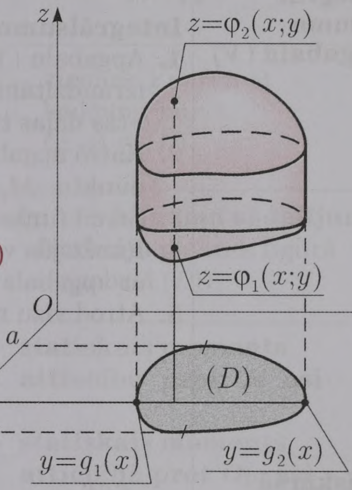
Trīskāršā integrāļa aprēķināšana

Aprēķināšana Dekarta koordinātās

Sastādot integrālsummu, apgabalu (V) sadala daļās ar koordinātu virsmām $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, $z = \text{const}$, t. i., ar plaknēm, kas paralēlas koordinātu plaknēm; tad **tilpuma elements** $dV = dx\,dy\,dz$ un integrāli pieraksta šādi:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$$

Aprēķinot ar atkārtoto integrāli, integrēšanas secība ir atkarīga no tā, kurā koordinātu plaknē projicē integrēšanas apgabalu (V).
Saka, ka **apgabals ir pareizs Oz ass virzienā, ja to ierobežo šādas virsmas: funkciju $z = \varphi_1(x;y)$ un $z = \varphi_2(x;y)$ grafiki** $(\varphi_1(x;y) \leqslant \varphi_2(x;y) \;\; \forall\,(x;y) \in (D))$ **un Oz asij paralēla cilindriska virsma, kas iet caur apgabala (D) kontūru, turklāt (D) ir pareizs apgabals xy plaknē.**



Tad trīskāršo integrāli aprēķina **ar šādu atkārtoto integrāli**:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \int\limits_{\varphi_1(x;y)}^{\varphi_2(x;y)} f(x;y;z)\,dz =$$

$$= \int\limits_a^b dx \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left(F(x;y;z)\Bigg|_{\varphi_1(x;y)}^{\varphi_2(x;y)} \right) dy =$$

$$= \int\limits_a^b dx \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} (F(x;y;\varphi_2(x;y)) - F(x;y;\varphi_1(x;y)))\,dy =$$

$$= \int\limits_a^b dx \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} h(x;y)\,dy = \int\limits_a^b H(x;y)\Bigg|_{g_1(x)}^{g_2(x)} dx =$$

$$= \int\limits_a^b (H(x;g_2(x)) - H(x;g_1(x)))\,dx =$$

$$= \int\limits_a^b u(x)\,dx = U(x)\Bigg|_a^b = U(b) - U(a),$$

kur $F_z'(x;y;z) = f(x;y;z)$, $H_y'(x;y) = h(x;y)$, $U_x'(x) = u(x)$

Analogi aprēķina trīskāršo integrāli, ja integrēšanas apgabals ir pareizs Oy vai Ox ass virzienā.

Aprēķināšana vispārinātā līklīniju koordinātu sistēmā

$$\begin{cases} x = x(u;v;w) \\ y = y(u;v;w) \\ z = z(u;v;w) \end{cases}$$

Pieņem, ka funkcijas $x = x(u;\ v;\ w)$, $y = y(u;\ v;\ w)$, $z = z(u;\ v;\ w)$ xyz telpas apgabalu (V) savstarpēji viennozīmīgi attēlo par telpas uvw apgabalu (V'). Ja apgabalu (V') sadala daļās ar koordinātu virsmām $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, $w = \text{const}$, tad apgabala (V) tilpuma elements ir

$$dV = |J|\,du\,dv\,dw\,,$$

kur apgabala tilpuma elementa **deformācijas koeficientu** $|J|$ atrod, aprēķinot **Jakobi determinantu (jakobiāni)**

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Tad

$$\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)dV = \iiint\limits_{(V')} f(x(u;v;w);\, y(u;v;w);\, z(u;v;w)) \cdot |J|\,du\,dv\,dw$$

Aprēķinot trīskāršo integrāli līklīniju koordinātās, bieži izmanto cilindriskās un sfēriskās koordinātas.

Cilindrisko koordinātu sistēma

Telpas punktu M var noteikt ne tikai ar Dekarta koordinātām $(x;\ y;\ z)$, bet arī ar šī punkta **cilindriskajām koordinātām** $(r;\ \varphi;\ z)$, kur

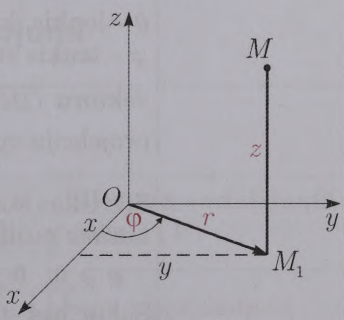
r ir rādiusvektora modulis, kas novilkts no koordinātu sākumpunkta uz punkta M projekciju xy plaknē;

φ – leņķis, ko šis rādiusvektors veido ar Ox asi;

z – punkta M aplikāta Dekarta sistēmā.

Ar cilindriskajām koordinātām var noteikt katru punktu telpā, ja pieņem, ka

$$r \geqslant 0,\quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi,\quad -\infty < z < +\infty$$



$M(x;\ y;\ z)$
$M(r;\ \varphi;\ z)$
$M_1(r;\ \varphi;\ O)$

Sakarības starp punkta Dekarta koordinātām un cilindriskajām koordinātām:

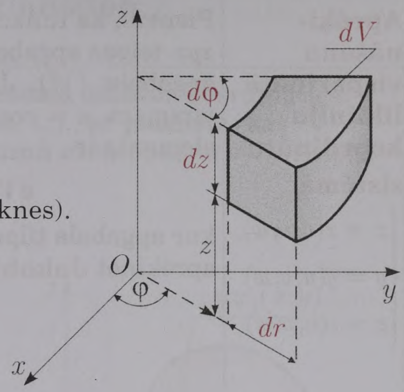
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

Jakobiāns cilindrisko koordinātu sistēmā:

$$J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi & x'_z \\ y'_r & y'_\varphi & y'_z \\ z'_r & z'_\varphi & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Trīskāršā integrāļa aprēķināšana cilindriskajās koordinātās

Sastādot integrālsummu, apgabalu sadala daļās ar koordinātu virsmām:
$r = \text{const}$ (riņķa cilindriskas virsmas, kuru simetrijas ass ir Oz ass);
$\varphi = \text{const}$(pusplaknes, kas vilktas no Oz ass);
$z = \text{const}$ (Oz asij perpendikulāras plaknes).
Tā kā cilindrisko koordinātu sistēmā jakobiāns $J = r$, tad **tilpuma elementu** dV var izteikt šādi:



$$dV = r\,dr\,d\varphi\,dz$$

Līdz ar to

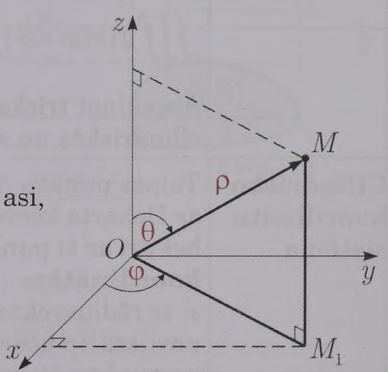
$$\iiint\limits_{(V)} f(x; y; z)dV = \iiint\limits_{(V')} f(r\cos\varphi; r\sin\varphi; z)r\,dr\,d\varphi dz$$

Sfērisko koordinātu sistēma

Telpas punktu M var noteikt ne tikai ar Dekarta koordinātām x ; y; z, bet arī ar šī punkta **sfēriskajām koordinātām** $(\rho; \varphi; \theta)$, kur

ρ ir rādiusvektora $\overrightarrow{OM}$ modulis,

θ – leņķis, ko vektors $\overrightarrow{OM}$ veido ar Oz asi,
φ – leņķis starp Ox asi un vektoru $\overrightarrow{OM_1}$, kur M_1 ir punkta M projekcija xy plaknē.



$M(x;\ y;\ z)$
$M(\rho;\ \varphi;\ \theta)$

Sfēriskās koordinātas viennozīmīgi nosaka punktu telpā, ja pieņem, ka

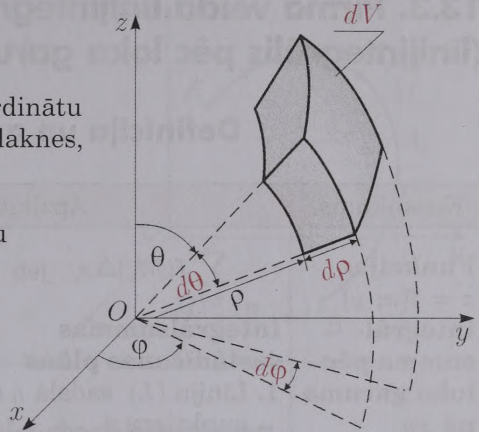
$$\rho \geqslant 0,\quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi,\quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$$

Sakarības starp punkta Dekarta koordinātām un sfēriskajām koordinātām:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \cdot \sin\theta \\ y = \rho\sin\varphi \cdot \sin\theta \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$$

Jakobiāns sfērisko koordinātu sistēmā:

$$J = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi & x'_\theta \\ y'_\rho & y'_\varphi & y'_\theta \\ z'_\rho & z'_\varphi & z'_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\rho\sin\theta \end{vmatrix} = -\rho^2\sin\theta$$

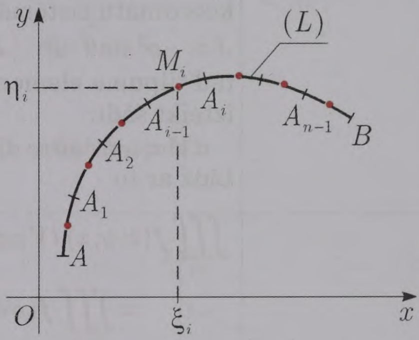
Trīskāršā integrāļa aprēķināšana sfēriskajās koordinātās	Sastādot integrālsummu, apgabalu sadala ar koordinātu virsmām: $\rho = \text{const}$ (sfēras ar centru koordinātu sākumpunktā), $\varphi = \text{const}$ (pusplaknes, kas vilktas no Oz ass), $\theta = \text{const}$ (konusa virsmas, kuru virsotne atrodas koordinātu sākumpunktā un simetrijas ass ir Oz ass). Tā kā sfērisko koordinātu sistēmā jakobiāns $J = -\rho^2 \sin\theta$ un $\|J\| = \rho^2 \sin\theta$, tad tilpuma elementu dV var izteikt šādi: $dV = \rho^2 \sin\theta \cdot d\rho\, d\varphi\, d\theta$ Līdz ar to $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)dV =$ $= \iiint\limits_{(V')} f(\rho\cos\varphi\sin\theta; \rho\sin\varphi\sin\theta; \rho\cos\theta)\cdot\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta$ 

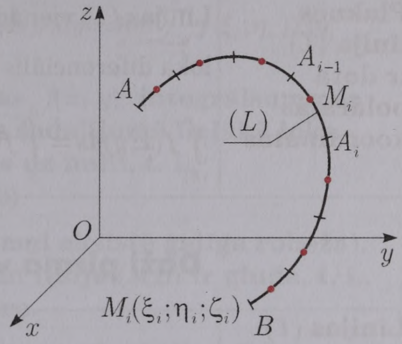
Daži trīskāršā integrāļa lietojumi

Apgabala (V) tilpums	$V = \iiint\limits_{(V)} dV$
Ķermeņa masa	$m = \iiint\limits_{(V)} \rho(x;y;z)dxdydz$ — $\rho(x;\ y;\ z)$ – **blīvuma sadalījuma funkcija** apgabalā (V)
Ķermeņa masas centra koordinātas	$x_C = \frac{1}{m}\iiint\limits_{(V)} x\rho(x;y;z)dxdydz;\ y_C = \frac{1}{m}\iiint\limits_{(V)} y\rho(x;y;z)dxdydz;$ $z_C = \frac{1}{m}\iiint\limits_{(V)} z\rho(x;y;z)dxdydz$
Ķermeņa inerces momenti attiecībā pret koordinātu plaknēm, koordinātu asīm un koordinātu sākumpunktu	$I_{xy} = \iiint\limits_{(V)} z^2\cdot\rho(x;y;z)dxdydz;\ I_{yz} = \iiint\limits_{(V)} x^2\cdot\rho(x;y;z)dxdydz$ $I_{zx} = \iiint\limits_{(V)} y^2\cdot\rho(x;y;z)dxdydz$ $I_x = \iiint\limits_{(V)} (y^2+z^2)\cdot\rho(x;y;z)dxdydz;\ I_y = \iiint\limits_{(V)} (x^2+z^2)\cdot\rho(x;y;z)dxdydz$ $I_z = \iiint\limits_{(V)} (x^2+y^2)\cdot\rho(x;y;z)dxdydz$ $I_0 = \iiint\limits_{(V)} (x^2+y^2+z^2)\cdot\rho(x;y;z)dxdydz$

13.3. Pirmā veida līnijintegrālis (līnijintegrālis pēc loka garuma)

Definīcija un ar to saistītie jautājumi

Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi, ilustrācija
Funkcijas $z = f(x;\ y)$ **integrālsumma pēc loka garuma pa** xy **plaknes līniju** (L)	$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i$ jeb $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i)\Delta s_i$ **Integrālsummas sastādīšanas plāns** **1.** Līniju (L) sadala n daļās ar punktiem $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$; i-tā loka $(A_{i-1}A_i)$ garums Δs_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ **2.** Katrā līnijas daļā (lokā) brīvi izraugās punktu $M_i(\xi_i;\ \eta_i) \in (A_{i-1}A_i)$ **3.** Atrod funkcijas vērtības $f(\xi_i;\ \eta_i)$ **4.** Funkcijas vērtību $f(\xi_i;\ \eta_i)$ reizina ar loka $(A_{i-1}A_i)$ garumu Δs_i **5.** Atrod visu reizinājumu summu $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i)\Delta s_i$ 
Līnijintegrāļa definīcija	$\int_{(L)} f(x;y)ds = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i)\Delta s_i$ **Pirmā veida līnijintegrālis ir funkcijas** $f(x;\ y)$ **integrālsummas pēc loka garuma robeža, kad lielākais loka garums dotajā līnijas sadalījumā tiecas uz nulli, t. i.,** $d = \max\Delta s_i \to 0$; ds – **loka diferenciālis** (bezgalīgi mazs loka garuma elements).
Līnijintegrāļa eksistence	**Līnijintegrālis eksistē (integrālsummai eksistē galīga robeža), ja funkcija** $f(x;\ y)$ **ir nepārtraukta un līnija** (L) **ir gluda, t. i., visos līnijas punktos eksistē pieskare.**
Īpašības	**Analogas noteiktā integrāļa** $\int_a^b f(x)dx$ **īpašībām.** **Jāievēro, ka pirmā veida līnijintegrāļa vērtība nav atkarīga no līnijas** (AB) **orientācijas,** t. i., $\int_{(AB)} f(x;y)ds = \int_{(BA)} f(x;y)ds$

Funkcijas $u = f(x;\ y;\ z)$ pirmā veida līnijintegrālis pa telpas līniju (L)	$\displaystyle\int_{(L)} f(x;y;z)ds = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\Delta s_i$ 

Pirmā veida līnijintegrāļa aprēķināšana

Līnija (L) ir dota parametriskā veidā	**Aprēķina, pārejot uz noteikto integrāli.** ① (L) ir xy plaknes līnija $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [\alpha;\ \beta]$, loka diferenciālis $ds = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt$ $\displaystyle\int_{(L)} f(x;y)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t);y(t))\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt$ ② (L) ir telpas līnija $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, $t \in [\alpha;\ \beta]$, loka diferenciālis $ds = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\,dt$ $\displaystyle\int_{(L)} f(x;y;z)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t);y(t);z(t))\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\,dt$
Plaknes līnija (L) ir nepārtraukti diferencējamas funkcijas grafiks	① (L) ir funkcijas $y = g(x)$ grafiks, $x \in [a;\ b]$, loka diferenciālis $ds = \sqrt{1 + (g'(x))^2}\,dx$ $\displaystyle\int_{(L)} f(x;y)ds = \int_{a}^{b} f(x;g(x))\sqrt{1 + (g'(x))^2}\,dx$ ② (L) ir funkcijas $x = h(y)$ grafiks, $y \in [c;\ d]$, loka diferenciālis $ds = \sqrt{1 + (h'(y))^2}\,dy$ $\displaystyle\int_{(L)} f(x;y)ds = \int_{c}^{d} f(h(y);y)\sqrt{1 + (h'(y))^2}\,dy$

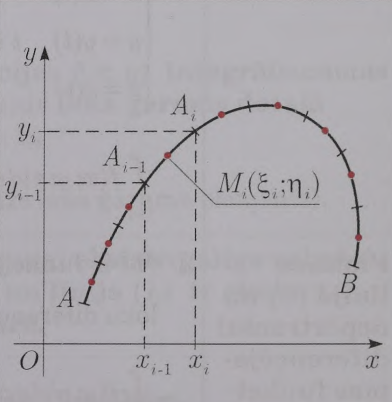
Plaknes līnija (L) ir dota polārajās koordinātās	Līnijas (L) vienādojums: $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$, loka diferenciālis $ds = \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\,d\varphi$ $$\int_{(L)} f(x;y)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)\sqrt{r^2(\varphi)+(r'(\varphi))^2}\,d\varphi$$

Daži pirmā veida līnijintegrāļa lietojumi

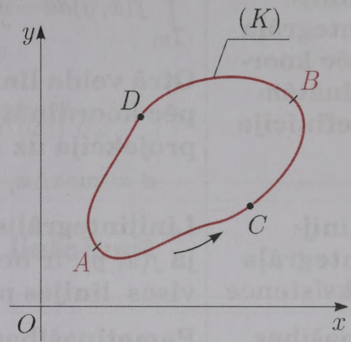
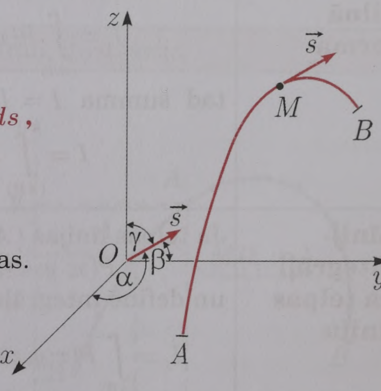
Līnijas (L) loka garums	$$s = \int_{(L)} ds$$
Līnijas (L) loka masa	$$m = \int_{(L)} \rho(x;y;z)ds$$ $\rho(x;\ y;\ z)$ – līnijas (L) **blīvuma sadalījuma funkcija**
Līnijas (L) loka masas centra koordinātas	$$x_C = \frac{1}{m}\cdot\int_{(L)} x\rho(x;y;z)ds;\quad y_C = \frac{1}{m}\cdot\int_{(L)} y\rho(x;y;z)ds$$ $$z_C = \frac{1}{m}\cdot\int_{(L)} z\rho(x;y;z)ds$$

13.4. Otrā veida līnijintegrālis (līnijintegrālis pēc koordinātām)

Definīcija un ar to saistītie jautājumi

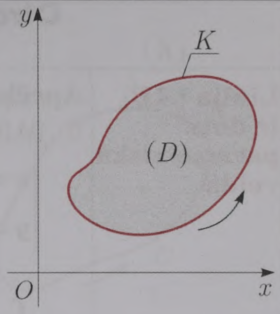
Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi, ilustrācija	
Funkcijas $z = f(x;\ y)$ integrālsummas pēc koordinātām pa xy plaknes līniju (AB)	$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i)\Delta x_i$ **un** $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i)\Delta y_i$ **Integrālsummu sastādīšanas plāns** **1.** Dota līnijas orientācija – no punkta A uz B. Sadala līniju n daļās ar punktiem A_1, A_2, ..., A_{n-1} **2.** Katrā līnijas daļā brīvi izraugās punktu $M_i(\xi_i;\eta_i) \in (A_{i-1};A_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ **3.** Atrod funkcijas vērtības $f(\xi_i;\ \eta_i)$ **4.** Funkcijas vērtību $f(\xi_i;\ \eta_i)$ reizina ar loka $(A_{i-1}A_i)$ projekciju uz Ox ass Δx_i (vai ar šī loka projekciju uz Oy ass Δy_i), kur $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ un $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ **5.** Atrod reizinājumu summas $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i)\Delta x_i$ un $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i)\Delta y_i$	 $\mathrm{proj}_{Ox}(A_{i-1}A_i) = x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ $\mathrm{proj}_{Oy}(A_{i-1}A_i) = y_i - y_{i-1} = \Delta y_i$

Līnij-integrāļa pēc koor-dinātām definīcija	$\int\limits_{(AB)} f(x;y)dx = \lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i)\Delta x_i, \quad \int\limits_{(AB)} f(x;y)dy = \lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i)\Delta y_i$ **Otrā veida līnijintegrālis ir funkcijas $f(x;\ y)$ integrālsummas pēc koordinātām robeža, kad līnijas sadalījumā lielākā loka projekcija uz Ox ass (Oy ass) tiecas uz nulli, t. i.,** $d = \max\Delta x_i \to 0 \quad (d = \max\Delta y_i \to 0)$
Līnij-integrāļa eksistence	**Līnijintegrālis eksistē (integrālsummai eksistē galīga robeža), ja $f(x;\ y)$ ir nepārtraukta funkcija un līnija (AB) ir gluda, t. i., visos līnijas punktos eksistē pieskare.**
Īpašības	**Pamatīpašības analogas viena argumenta funkcijas $f(x)$ noteiktā integrāļa $\int\limits_a^b f(x)dx$ īpašībām.** Jāievēro: • ja maina līnijas orientāciju, tad jāmaina zīme integrāļa priekšā, t. i., $\int\limits_{(AB)} f(x;y)dx = -\int\limits_{(BA)} f(x;y)dx$, analogi $\int\limits_{(AB)} f(x;y)dy = -\int\limits_{(BA)} f(x;y)dy$ • ja līnija (AB) ir Ox asij perpendikulārs taisnes nogrieznis, tad $\int\limits_{(AB)} f(x;y)dx = 0$. Analogi $\int\limits_{(AB)} f(x;y)dy = 0$, ja (AB) ir Oy asij perpendikulārs taisnes nogrieznis.
Līnij-integrāļa pilnā forma	Ja plaknes līnijas (AB) punktos definētas funkcijas $P(x;\ y)$ un $Q(x;\ y)$ un aplūko integrāļus $I_1 = \int\limits_{(AB)} P(x;y)dx, \quad I_2 = \int\limits_{(AB)} Q(x;y)dy,$ tad summa $I = I_1 + I_2$ ir līnijintegrāļa pilnā forma, ko pieraksta šādi: $\boldsymbol{I = \int\limits_{(AB)} P(x;y)dx + Q(x;y)dy}$
Līnij-integrāļi pa telpas līniju	Ja telpas līnijas (AB) punktos definētas funkcijas $P(x;\ y;\ z),\quad Q(x;\ y;\ z),\quad R(x;\ y;\ z)$ un definē integrāļus $I_1 = \int\limits_{(AB)} P(x;y;z)dx = \lim\limits_{\max\Delta x_i\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} P(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\Delta x_i$ $I_2 = \int\limits_{(AB)} Q(x;y;z)dy = \lim\limits_{\max\Delta y_i\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} Q(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\Delta y_i$ $I_3 = \int\limits_{(AB)} R(x;y;z)dz = \lim\limits_{\max\Delta z_i\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} R(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\Delta z_i,$ tad summa $I = I_1 + I_2 + I_3$ ir **līnijintegrāļa pilnā forma**, ko pieraksta šādi: $\boldsymbol{I = \int\limits_{(AB)} P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz}$

Kontūr-integrālis	$\oint\limits_{(K)} P(x;y)dx + Q(x;y)dy$ – **integrālis pa slēgtu līniju (kontūru) (K);** to iegūst šādi: • uz kontūra brīvi izraugās sākumpunktu A un noteiktu orientāciju (piemēram, virzienu pretēji pulksteņa rādītāju kustības virzienam; to pieņem par **pozitīvu orientāciju**); • brīvi izraugās uz kontūra citu punktu B.  Tad $\oint\limits_{(K)} P\,dx+Q\,dy = \int\limits_{(ACB)} P\,dx+Q\,dy + \int\limits_{(BDA)} P\,dx+Q\,dy$ Mainot kontūra orientāciju, jāmaina zīme integrāļa priekšā: $\oint\limits_{(K)} P\,dx+Q\,dy = -\oint\limits_{(K)} P\,dx+Q\,dy$ Analogi definē kontūrintegrāli pa telpas kontūru: $\oint\limits_{(K)} P(x;y;z)\,dx + Q(x;y;z)\,dy + R(x;y;z)\,dx$
Sakarība starp 1. un 2. veida līnijintegrāļiem	$\int\limits_{(AB)} P dx + Q dy + R dz =$ $= \int\limits_{(AB)} (P\cdot\cos\alpha + Q\cdot\cos\beta + R\cdot\cos\gamma)ds$, kur $(\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma)$ ir līnijas (AB) punktā $M(x;\ y;\ z)$ novilktās pieskares virziena vienības vektora $\vec{s}$ koordinātas. 

Otrā veida līnijintegrāļu aprēķināšana

Līnija (AB) ir dota parametriskā veidā	**Aprēķina, pārejot uz noteikto integrāli.** ① (AB) ir xy plaknes līnija $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases},\quad t\in[\alpha;\ \beta]$ un $A(x(\alpha);\ y(\alpha)),\ \ B(x(\beta);\ y(\beta))$ $\displaystyle\int\limits_{(AB)} P(x;y)dx=\int\limits_{\alpha}^{\beta} P(x(t);y(t))\cdot x'(t)dt$ $\displaystyle\int\limits_{(AB)} Q(x;y)dy=\int\limits_{\alpha}^{\beta} Q(x(t);y(t))\cdot y'(t)dt$ ② (AB) ir telpas līnija $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases},\quad t\in[\alpha,\ \beta]$ un $A(x(\alpha);\ y(\alpha);\ z(\alpha)),\ \ B(x(\alpha);\ y(\beta);\ z(\beta))$ $\displaystyle\int\limits_{(AB)} P(x;y;z)dx=\int\limits_{\alpha}^{\beta} P(x(t);y(t);z(t))\cdot x'(t)dt$ $\displaystyle\int\limits_{(AB)} Q(x;y;z)dy=\int\limits_{\alpha}^{\beta} Q(x(t);y(t);z(t))\cdot y'(t)dt$ $\displaystyle\int\limits_{(AB)} R(x;y;z)dz=\int\limits_{\alpha}^{\beta} R(x(t);y(t);z(t))\cdot z'(t)dt$
Plaknes līnija (AB) ir nepārtraukti diferencējamas funkcijas grafiks	① (AB) ir funkcijas $y=g(x)$ grafiks, $x\in[a;\ b]$ un $A(a;\ g(a)),\ \ B(b;\ g(b))$, $\displaystyle\int\limits_{(AB)} P(x;y)dx=\int\limits_{a}^{b} P(x;g(x))dx\,;\quad \int\limits_{(AB)} Q(x;y)dy=\int\limits_{a}^{b} Q(x;g(x))\cdot g'(x)dx$ ② (AB) ir funkcijas $x=h(y)$ grafiks, $y\in[c;\ d]$ un $A(h(c);\ c),\ \ B(h(d);\ d)$, $\displaystyle\int\limits_{(AB)} P(x;y)dx=\int\limits_{c}^{d} P(h(y);y)\cdot h'(y)dy\,;\quad \int\limits_{(AB)} Q(x;y)dy=\int\limits_{c}^{d} Q(h(y);y)dy$

Kontūrintegrāļa aprēķināšana ar divkāršo integrāli (Grīna formula)	$\oint\limits_{(K)} P(x;y)dx+Q(x;y)dy=\iint\limits_{(D)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$, kur $P(x;\ y)$ un $Q(x;\ y)$ ir nepārtraukti diferencējamas funkcijas apgabalā (D); kontūrs (K) ir šī apgabala robežlīnija; virziens pa kontūru – pozitīvs (pretējs pulksteņa rādītāju kustības virzienam).	

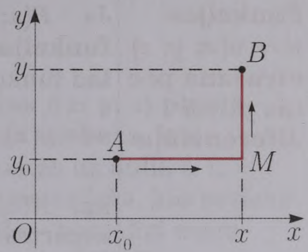
13.5. Līnijintegrāļa neatkarība no integrēšanas līnijas formas un šai īpašībai ekvivalentās īpašības

Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi, ilustrācija
Līnijintegrāļa neatkarība no integrēšanas līnijas formas	$\int\limits_{(ACB)} Pdx+Qdy=\int\limits_{(ADB)} Pdx+Qdy \Leftrightarrow \oint\limits_{(K)} Pdx+Qdy=0$ (sk. zīm. 240. lpp.) **Līnijintegrālis nav atkarīgs no integrēšanas līnijas formas, kas savieno punktus A un B, tad un tikai tad, ja kontūrintegrālis ir vienāds ar nulli pa katru kontūru, kas iet caur šiem punktiem un atrodas apgabalā, kurā eksistē aplūkotie integrāļi.**
Kontūrintegrāļa vienādība ar nulli	$\oint\limits_{(K)} Pdx+Qdy=0$ **tad un tikai tad, ja** $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$, kur (K) ir brīvi izraudzīts kontūrs apgabalā, kurā $P(x;\ y)$ **un** $Q(x;\ y)$ **ir nepārtraukti diferencējamas funkcijas.**
Izteiksme $Pdx + Q\,dy$ **kā funkcijas** $u(x;\ y)$ **pilnais diferenciālis**	Eksistē funkcija $u=u(x;\ y)$, kuras pilnais diferenciālis $du = Pdx + Qdy$ **tad un tikai tad, ja** $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$, kur $P(x;\ y)$ **un** $Q(x;\ y)$ **ir nepārtraukti diferencējamas funkcijas.**

Funkcijas $u = u(x;\ y)$ atrašana pēc tās pilnā diferenciāļa

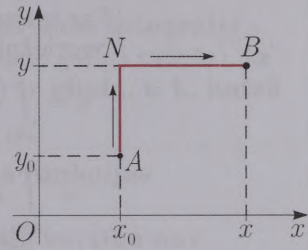
Ja $P(x;\ y)\,dx + Q(x;\ y)\,dy$ **ir funkcijas** $u(x;\ y)$ **pilnais diferenciālis**, tad funkciju u atrod ar līnijintegrāli

$$u(x;y)=\int\limits_{(AB)} P(x;y)dx+Q(x;y)dy\ ,$$



kur

- $A(x_0;\ y_0)$ ir brīvi izraudzīts punkts apgabalā, kurā P un Q ir nepārtraukti diferencējamas funkcijas;
- $B(x;\ y)$ – šī apgabala punkts ar mainīgām koordinātām;
- (AB) – brīvi izraudzīta līnija apgabalā.



Aprēķinot integrāli, ir izdevīgi punktus A un B savienot ar lauztu līniju, kuras nogriežņi ir paralēli koordinātu asīm, t. i., novilkt līniju (AMB) vai (ANB), kur $AM \parallel Ox,\ MB \parallel Oy,\ AN \parallel Oy,\ NB \parallel Ox$

Tad saskaņā ar līnijintegrāļu īpašībām

$$\int\limits_{(AM)} Qdy = 0,\quad \int\limits_{(MB)} Pdx = 0,\quad \int\limits_{(AN)} Pdx = 0,\quad \int\limits_{(NB)} Qdy = 0$$

Līdz ar to

$$u(x;y)=\int\limits_{(AM)} P\,dx+\int\limits_{(MB)} Q\,dy=\int\limits_{x_0}^{x} P(x;y_0)\,dx+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x;y)\,dy+C$$

vai

$$u(x;y)=\int\limits_{(AN)} Q\,dy+\int\limits_{(NB)} P\,dx=\int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0;y)dy+\int\limits_{x_0}^{x} P(x;y)dx+C$$

Savstarpēji ekvivalentās īpašības, kas saistītas ar 3 argumentu funkciju līnijintegrāļiem

Ja $P(x;\ y;\ z),\ \ Q(x;\ y;\ z),\ \ R(x;\ y;\ z)$ ir nepārtraukti diferencējamas funkcijas kādā telpas apgabalā, kurā atrodas integrēšanas līnijas, tad **savstarpēji ekvivalentas ir šādas īpašības.**

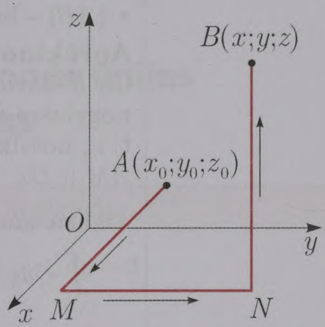
① Integrālis $\int\limits_{(AB)} P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ **nav atkarīgs no integrēšanas līnijas (AB) formas.**

② Kontūrintegrālis $\oint\limits_{(K)} P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0$, kur (K) ir brīvi izraudzīts kontūrs, kas novilkts caur punktiem A un B.

③ Visos apgabala punktos ir spēkā vienādības

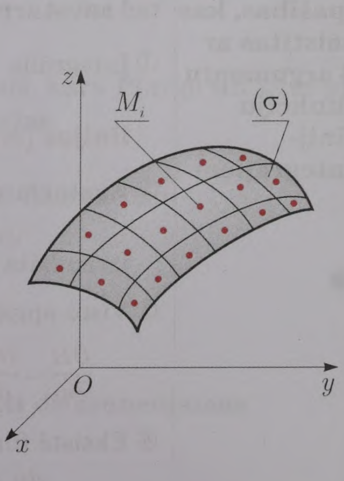
$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

④ Eksistē funkcija $u = u(x;\ y;\ z)$, kuras pilnais diferenciālis ir
$du = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$

Funkcijas $u = u(x;\ y;\ z)$ **atrašana pēc tās pilnā diferenciāļa**	Ja $P(x;\ y;\ z)dx + Q(x;\ y;\ z)dy + R(x;\ y;\ z)dz$ ir **funkcijas** $u = u(x;\ y;\ z)$ **pilnais diferenciālis**, tad funkciju u atrod ar līnijintegrāli $$u(x;y;z)=\int_{(AB)} P(x;y;z)dx+Q(x;y;z)dy+R(x;y;z)dz,$$ kur $A(x_0;\ y_0;\ z_0)$ ir brīvi izraudzīts punkts apgabalā, kurā P; Q; R ir nepārtraukti diferencējamas funkcijas, $B(x;\ y;\ z)$ – šī apgabala punkts ar mainīgām koordinātām un (AB) – brīvi izraudzīta līnija apgabalā. Par integrēšanas līniju (AB) var izraudzīties lauztu līniju, kuras nogriežņi ir paralēli koordinātu asīm Ox, Oy, Oz. Tad $$u=\int_{(AB)} P\,dx+Q\,dy+R\,dz=$$ $$=\int_{(AM)} P\,dx+\int_{(MN)} Q\,dy+\int_{(NB)} R\,dz=$$ $$=\int_{x_0}^{x} P(x;y_0;z_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x;y;z_0)dy+$$ $$+\int_{z_0}^{z} R(x;y;z)dz+C$$ 

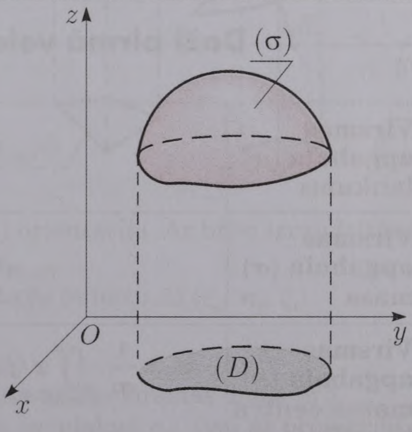
13.6. Pirmā veida virsmas integrālis (integrālis pēc virsmas laukuma)

Definīcija un ar to saistītie jautājumi

Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi, ilustrācija
Funkcijas $u = f(x;\ y;\ z)$ **pirmā veida virsmas integrālsumma virsmas apgabalā** (σ)	$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\Delta\sigma_i$ **Integrālsummas sastādīšanas plāns** **1.** Virsmas apgabalu (σ) sadala n daļās ar brīvi izraudzītām līnijām; i-tās daļas (σ_i) laukums $\Delta\sigma_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ **2.** Katrā apgabala daļā brīvi izraugās punktu $M_i(\xi_i;\ \eta_i;\ \zeta_i) \in (\sigma_i)$ **3.** Atrod funkcijas vērtības $f(\xi_i;\ \eta_i;\ \zeta_i)$ **4.** Funkcijas vērtību $f(\xi_i;\ \eta_i;\ \zeta_i)$ reizina ar apgabala daļas (σ_i) laukumu $\Delta\sigma_i$ **5.** Atrod visu reizinājumu summu $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\Delta\sigma_i$ 

Pirmā veida virsmas integrāļa definīcija	$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x;y;z)\,d\sigma = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\Delta\sigma_i$$ **Pirmā veida virsmas integrālis ir funkcijas** $f(x;\ y;\ z)$ **pirmā veida integrālsummas virsmas apgabalā** (σ) **robeža**, kad lielākais no visu apgabala daļu diametriem d tiecas uz nulli, t. i., $d = \max d_i \to 0$, d_i – i-tās daļas diametrs (virsmas loks, kas savieno divus vistālākos (σ_i) robežlīnijas punktus); $d\sigma$ – bezgalīgi mazs virsmas (σ) laukuma elements (“**virsmas diferenciālis**”).
Eksistence	**Funkcijai** $u = f(x;\ y;\ z)$ **eksistē 1. veida virsmas integrālis virsmas apgabalā** (σ) (integrālsummai eksistē galīga robeža), **ja šī funkcija ir nepārtraukta un virsma** (σ) **ir gluda, t. i., katrā virsmas punktā eksistē pieskarplakne.**
Īpašības	**Pamatīpašības analogas viena argumenta funkcijas noteiktā integrāļa īpašībām.** **Jāievēro, ka pirmā veida virsmas integrāļa vērtība nav atkarīga no virsmas puses izvēles**, uz kuras ir sastādīta integrālsumma.

Pirmā veida virsmas integrāļa aprēķināšana

Virsmas apgabals (σ) **ir nepārtraukti diferencējamas funkcijas** $z = h(x;\ y)$ **grafiks**	**Aprēķina, pārejot uz divkāršo integrāli.** $(\sigma):\quad z = h(x;y),\quad (x;y)\in(D)$ (apgabals (D) – virsmas apgabala (σ) projekcija xy plaknē)  $$\iint\limits_{(\sigma)} f(x;y;z)d\sigma = \iint\limits_{(D)} f(x;y;h(x;y))\cdot\sqrt{1+\left(h'_x(x;y)\right)^2+\left(h'_y(x;y)\right)^2}\,dxdy$$ Ja virsmas apgabals (σ) ir funkcijas $y = g(z;\ x)$ vai $x = \varphi(y;\ z)$ grafiks, tad virsmas integrāli aprēķina analogi (apgabals (D) ir virsmas apgabala (σ) projekcija zx vai yz plaknē).

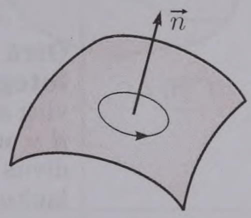
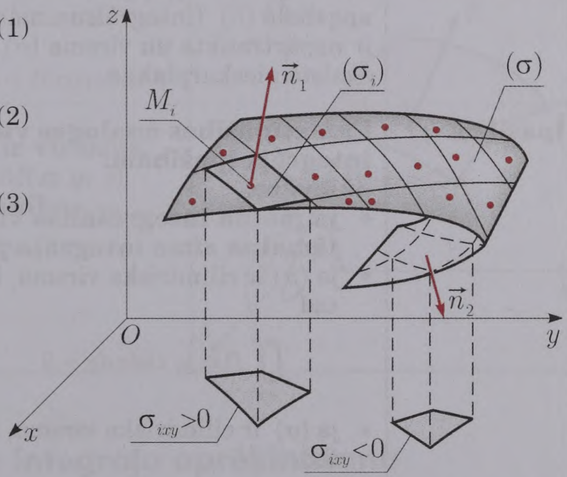
Virsma dota parametriskā veidā ar vienādojumiem $x = x(u;\ v)$, $y = y(u;\ v)$, $z = z(u;\ v)$	$(\sigma): \begin{cases} x = x(u;v) \\ y = y(u;v) \\ z = z(u;v), \qquad (u;v) \in (D) \end{cases}$ $\iint\limits_{(\sigma)} f(x;y;z)d\sigma = \iint\limits_{(D)} f(x(u;v);y(u;v);z(u;v)) \cdot \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$, kur $E = (x_u')^2 + (y_u')^2 + (z_u')^2$ $G = (x_v')^2 + (y_v')^2 + (z_v')^2$ $F = x_u' \cdot x_v' + y_u' \cdot y_v' + z_u' \cdot z_v'$ vai arī $\iint\limits_{(\sigma)} f(x;y;z)d\sigma = \iint\limits_{(D)} f(x(u;v);y(u;v);z(u;v)) \cdot \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv$, kur $A = \begin{vmatrix} y_u' & z_u' \\ y_v' & z_v' \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z_u' & x_u' \\ z_v' & x_v' \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x_u' & y_u' \\ x_v' & y_v' \end{vmatrix}$

Daži pirmā veida virsmas integrāļa lietojumi

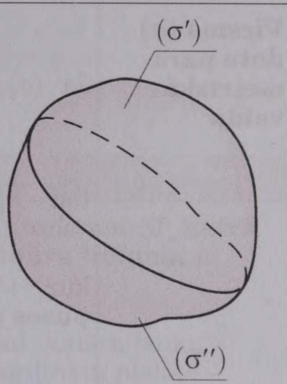
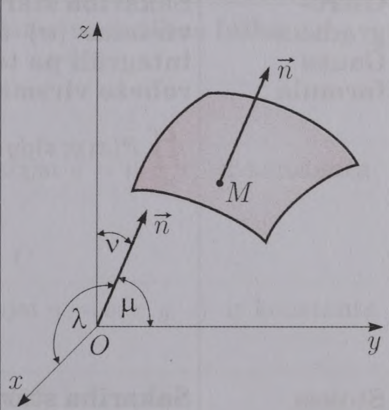
Virsmas apgabala (σ) laukums	$\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} d\sigma$
Virsmas apgabala (σ) masa	$m = \iint\limits_{(\sigma)} \rho(x;y;z)d\sigma$ $\rho(x;\ y;\ z)$ – virsmas blīvuma sadalījuma funkcija
Virsmas apgabala (σ) masas centra koordinātas	$x_c = \frac{1}{m} \cdot \iint\limits_{(\sigma)} x \cdot \rho(x;y;z)d\sigma, \quad y_c = \frac{1}{m} \cdot \iint\limits_{(\sigma)} y \cdot \rho(x;y;z)d\sigma$ $z_c = \frac{1}{m} \cdot \iint\limits_{(\sigma)} z \cdot \rho(x;y;z)d\sigma$

13.7. Otrā veida virsmas integrālis (integrālis pēc virsmas projekcijas koordinātu plaknē)

Definīcija un ar to saistītie jautājumi

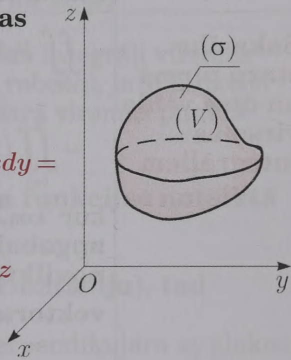
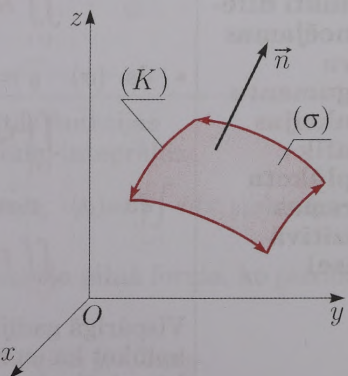
Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi, ilustrācija
Orientēta virsma	Virsmas pusi (orientāciju) nosaka virsmas normāles vektora vērsums un pozitīvais pārvietošanās virziens pa kontūru, kas atrodas uz virsmas un ietver šī vektora sākumpunktu. **Ja, skatoties uz virsmu no vektora galapunkta, pārvietošanās virziens pa kontūru ir pretējs pulksteņa rādītāju kustības virzienam, tad virsmas pusei ir pozitīva orientācija.** 
Funkcijas $u = f(x;\ y;\ z)$ **otrā veida virsmas integrālsummas virsmas apgabalā** (σ)	$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\sigma_{ixy}$ (1) $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\sigma_{iyz}$ (2) $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\sigma_{izx}$ (3)  **Integrālsummu sastādīšanas plāns** **1.** Dota noteikta virsmas apgabala (σ) orientācija. Ar brīvi izraudzītām līnijām apgabalu (σ) sadala n daļās. **2.** Katrā apgabala daļā (σ_i) brīvi izraugās punktu $M_i(\xi_i;\ \eta_i;\ \zeta_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ **3.** Atrod funkcijas vērtības $f(\xi_i;\ \eta_i;\ \zeta_i)$ **4.** Funkcijas vērtību $f(\xi_i;\ \eta_i;\ \zeta_i)$ reizina ar tās virsmas daļas (σ_i), kurā atrodas punkts M_i, projekciju xy plaknē σ_{ixy} (vai ar projekciju yz plaknē σ_{iyz}, vai ar projekciju zx plaknē σ_{izx}). Orientētas virsmas apgabala daļas (σ_i) **projekciju** xy **plaknē definē šādi.** Ortogonāli projicējot xy plaknē apgabala daļu (σ_i), iegūst figūru, kuras laukums ir $\triangle S_i$. Par σ_{ixy} sauc skaitli $\triangle S_i$, kas ņemts ar "+" zīmi, ja virsmas punktā M_i vilktais normāles vektors ar Oz asi veido šauru leņķi, bet ar "–" zīmi, ja šis vektors ar Oz asi veido platu leņķi. Analogi definē (σ_i) projekciju yz un zx plaknē. **5.** Atrod reizinājumu summu (1) vai (2), vai (3).

Otrā veida virsmas integrāļa definīcija	$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x;y;z)dxdy=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\sigma_{ixy}$$ $$\iint\limits_{(\sigma)} f(x;y;z)dydz=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\sigma_{iyz}$$ $$\iint\limits_{(\sigma)} f(x;y;z)dzdx=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\sigma_{izx}$$ **Otrā veida virsmas integrālis ir funkcijas $f(x;\ y;\ z)$ otrā veida integrālsummas virsmas apgabalā (σ) robeža**, kad lielākais no visu apgabala daļu diametriem d tiecas uz nulli, t. i., $d = \max d_i \to 0$; d_i – i-tās daļas diametrs (virsmas loks, kas savieno divus vistālākos (σ_i) robežlīnijas punktus); $dx\,dy$ – bezgalīgi mazs laukuma elements xy plaknē (analogi – $dy\,dz$ un $dz\,dx$).
Eksistence	Funkcijai $u = f(x;\ y;\ z)$ eksistē 2. veida virsmas integrāļi virsmas apgabalā (σ) (integrālsummām eksistē galīga robeža), ja šī funkcija ir nepārtraukta un virsma (σ) ir gluda, t. i., katrā virsmas punktā eksistē pieskarplakne.
Īpašības	**Pamatīpašības analogas viena argumenta funkcijas noteiktā integrāļa īpašībām.** **Jāievēro:** • **ja maina integrēšanas virsmas pusi (orientāciju), tad jāmaina zīme integrāļa priekšā;** • ja (σ) ir cilindriska virsma, kuras veidule perpendikulāra xy plaknei, tad $$\iint\limits_{(\sigma)} f(x;y;z)dxdy=0$$ • ja (σ) ir cilindriska virsma, kuras veidule perpendikulāra yx plaknei, tad $$\iint\limits_{(\sigma)} f(x;y;z)dydz=0$$ • ja (σ) ir cilindriska virsma, kuras veidule perpendikulāra zx plaknei, tad $$\iint\limits_{(\sigma)} f(x;y;z)dzdx=0$$
Virsmas integrāļa pilnā forma	Ja virsmas apgabala (σ) punktos definētas funkcijas $P(x;\ y;\ z)$, $Q(x;\ y;\ z)$, $R(x;\ y;\ z)$ un aplūko integrāļus $I_1=\iint\limits_{(\sigma)} P(x;y;z)dydz$, $I_2=\iint\limits_{(\sigma)} Q(x;y;z)dzdx$, $I_3=\iint\limits_{(\sigma)} R(x;y;z)dxdy$, tad summa $I = I_1 + I_2 + I_3$ ir virsmas integrāļa pilnā forma, ko pieraksta šādi: $$I=\iint\limits_{(\sigma)} P(x;y;z)dydz+Q(x;y;z)dzdx+R(x;y;z)dxdy$$

Integrālis pa slēgtu virsmu	Funkcijas $u = f(x; y; z)$ integrālsummu var sastādīt arī gadījumā, kad (σ) ir slēgta virsma un ir norādīta šīs virsmas puse (ārējā vai iekšējā puse). Tad virsmas integrāļa pierakstā parasti lieto simbolu $\displaystyle\oiint_{(\sigma)}$ Ja slēgto virsmu (σ) sadala divās daļās (σ') un (σ'') ar brīvi izraudzītu līniju, tad $\displaystyle\oiint_{(\sigma)} = \iint_{(\sigma')} + \iint_{(\sigma'')}$ Šī summa nav atkarīga no tā, kādā veidā sadala virsmu (σ).	
Sakarība starp pirmā un otrā veida virsmas integrāļiem	$\displaystyle\iint_{(\sigma)} P dydz + Q dzdx + R dxdy =$ $\displaystyle= \iint_{(\sigma)} (P\cos\lambda + Q\cos\mu + R\cos\nu)d\sigma$, **kur $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ ir virsmas apgabala (σ) punktā $M(x; y; z)$ novilktā normāles vienības vektora $\vec{n}$ koordinātas.**	

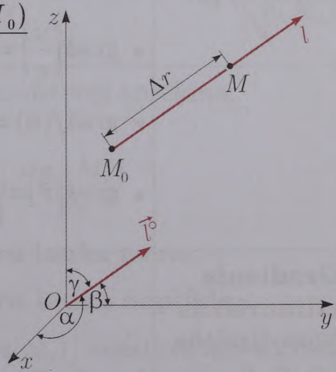
Otrā veida virsmas integrāļu aprēķināšana

Virsmas apgabals (σ) ir nepārtraukti diferencējamas divu argumentu funkcijas grafiks (aplūkota virsmas pozitīvā puse)	**Aprēķina, pārejot uz divkāršo integrāli.** • Ja (σ): $z = h(x; y)$, kur $(x; y) \in (D)$, tad $\displaystyle\iint_{(\sigma)} R(x; y; z)dxdy = \iint_{(D)} R(x; y; h(x; y))dxdy$ • Ja (σ): $y = g(z; x)$, kur $(z; x) \in (D)$, tad $\displaystyle\iint_{(\sigma)} Q(x; y; z)dxdy = \iint_{(D)} Q(x; g(z; x); z)dzdx$ • Ja (σ): $x = \varphi(y; z)$, kur $(y; z) \in (D)$, tad $\displaystyle\iint_{(\sigma)} P(x; y; z)dydz = \iint_{(D)} P(\varphi(y; z); y; z)dydz$ Vispārīgā gadījumā apgabalu (σ) sadala tādās daļās, kuras var aplūkot kā iepriekš apskatīto funkciju grafikus, un integrāli izsaka kā vairāku integrāļu summu pa atsevišķajām apgabala daļām.

Virsma (σ) dota parametriskā veidā	Ja $(\sigma): \begin{cases} x = x(u;v) \\ y = y(u;v), \\ z = z(u;v) \end{cases}$ kur $(u;\ v) \in (D)$, tad $\iint\limits_{(\sigma)} P dy\, dz + Q\, dz dx + R dx dy = \pm \iint\limits_{(D)} (P \cdot A + Q \cdot B + R \cdot C) du dv$, **kur "+" vai "–" zīmi nosaka atkarībā no izraudzītās virsmas puses** un $A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}$, $C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}$.
Ostrogradska–Gausa formula	**Sakarība starp virsmas integrāli pa slēgtas virsmas (σ) ārējo pusi un trīskāršo integrāli pa telpas apgabalu (V), ko robežo virsma (σ):**  $\oiint\limits_{(\sigma)} P(x;y;z)dy dz + Q(x;y;z)dz dx + R(x;y;z)dx dy =$ $= \iiint\limits_{(V)} \left(\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$
Stoksa formula	**Sakarība starp virsmas integrāli pa virsmas apgabala (σ) pozitīvo pusi un kontūrintegrāli pa kontūru (K) pozitīvā virzienā, kas robežo apgabalu (σ):** $\oint\limits_{(K)} P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz =$ $= \iint\limits_{(\sigma)} \left(\dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$ Piezīme Ja (σ) ir xy plaknes $(z = 0)$ apgabals (D), tad no Stoksa formulas iegūst Grīna formulu (sk. 242. lpp.). 

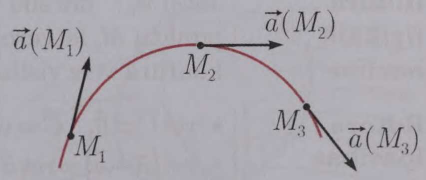
14. LAUKA TEORIJAS ELEMENTI

14.1. Skalārs lauks

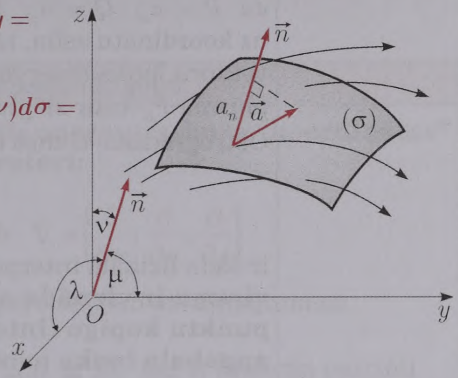
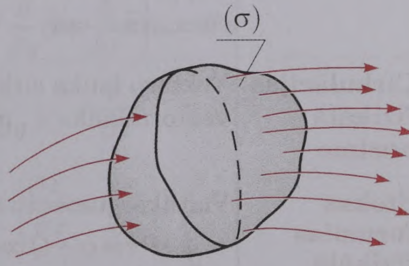
Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi, ilustrācija
Skalārs lauks	**Telpas vai plaknes apgabals, kurā katram punktam M katrā laika momentā t ir piekārtota noteikta skalāra lieluma u vērtība** $$u = u(M;\ t).$$ Ja apgabalu aplūko Dekarta koordinātu telpā, tad skalāru lauku definē ar funkciju $u = u(x;\ y;\ z;\ t)$; Dekarta koordinātu plaknē – ar funkciju $u = u(x;\ y;\ t)$ vai ar funkciju $u = u(\vec{r}; t)$, kur $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ – punkta M rādiusvektors.
Stacionārs skalārs lauks	Skalārs lauks, kura punktos skalārā lieluma u **vērtības laikā nemainās**; telpā uzdod ar funkciju $u = u(x;\ y;\ z)$, plaknē – ar funkciju $u = u(x;\ y)$.
Plaknes skalārā lauka līmeņlīnija	Visu to punktu kopa plaknē, kuros funkcijai $u = u(x;\ y)$ ir konstanta vērtība C **Līmeņlīnijas vienādojums** $$u(x;\ y) = C$$
Telpas skalārā lauka līmeņvirsma	Visu to punktu kopa telpā, kuros funkcijai $u = u(x;\ y;\ z)$ ir konstanta vērtība C **Līmeņvirsmas vienādojums** $$u(x;\ y;\ z) = C$$
Atvasinājums dotā virzienā	$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta u(M_0)}{\Delta r} = \lim_{M \to M_0} \frac{u(M) - u(M_0)}{MM_0}$$  F i z i k ā l ā n o z ī m e: **skalārā lieluma u izmaiņas ātrums apgabala punktā M_0 ass l virzienā.** Aprēķina pēc formulas $$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$ kur $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – ass l virziena vienības vektora $\vec{l}^0$ koordinātas.
Skalāra lauka gradients (sk. arī 257. lpp.)	**Vektors, kura koordinātas ir funkcijas $u = u(x;\ y;\ z)$ parciālie atvasinājumi punktā $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$,** t. i., $$\operatorname{grad} u(M_0) = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\vec{k}$$ jeb $$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x};\ \frac{\partial u}{\partial y};\ \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

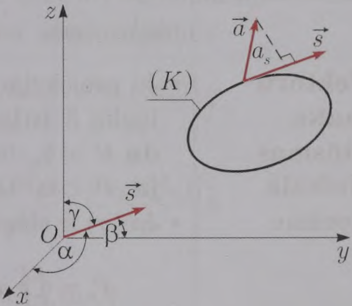
Gradienta fizikālā nozīme	Apgabala punktā M_0 piekārtotais gradients norāda virzienu, kādā skalārais lielums u palielinās visātrāk. Gradienta modulis $$\|\mathrm{grad}\, u\| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$ **punktā M_0 ir ātrums, ar kādu palielinās skalārais lielums šajā punktā gradienta virzienā.**
Gradienta ģeometriskās īpašības	• Plaknes apgabala skalāra lauka **gradients** katrā apgabala punktā $M_0(x_0;\ y_0)$ **ir perpendikulārs līmeņlīnijas pieskarei**, kas novilkta caur šo punktu. • Telpas apgabala skalāra lauka **gradients** katrā apgabala punktā $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ **ir perpendikulārs līmeņvirsmas pieskarplaknei**, kas iet caur šo punktu. • $\mathrm{grad}\, u(M_0)$ **ir vērsts pa līmeņvirsmas (līmeņlīnijas) normāli** punktā M_0 un norāda virzienu, kādā skalārais lielums palielinās visātrāk. Tādējādi $$\vec{n} = \pm \frac{\mathrm{grad}\, u}{\|\mathrm{grad}\, u\|},$$ kur $\vec{n}$ – normāles vienības vektors.
Gradienta analītiskās īpašības	• $\mathrm{grad}\, C = \vec{0}$ $(C - \mathrm{const})$ • $\mathrm{grad}(u \pm v) = \mathrm{grad}\ u \pm \mathrm{grad}\ v$ • $\mathrm{grad}(u \cdot v) = v \cdot \mathrm{grad} u + u \cdot \mathrm{grad} v \quad \Rightarrow \quad \mathrm{grad}(C \cdot u) = C \cdot \mathrm{grad} u$ • $\mathrm{grad}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot \mathrm{grad} u - u \cdot \mathrm{grad} v}{v^2}$ • $\mathrm{grad} f(u) = f_u'(u) \cdot \mathrm{grad} u$ • $\mathrm{grad}\|\vec{r}\| = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$, kur $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
Gradients cilindriskās koordinātās $(r;\ \varphi;\ z)$	$$\mathrm{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{e}_z,$$ kur $\vec{e}_r;\ \vec{e}_\varphi;\ \vec{e}_z$ – cilindrisko koordinātu sistēmas vienības vektori.
Gradients sfēriskās koordinātās $(\rho;\ \varphi;\ \theta)$	$$\mathrm{grad} u = \frac{\partial u}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho \cdot \sin\theta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}\vec{e}_\theta,$$ kur $\vec{e}_\rho;\ \vec{e}_\varphi;\ \vec{e}_\theta$ – sfērisko koordinātu sistēmas vienības vektori.

14.2. Vektoru lauks

Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi, ilustrācija
Vektoru lauks	**Telpas vai plaknes apgabals, kurā katram punktam M katrā laika momentā t ir piekārtots noteikts vektoriāla lieluma vektors** $\vec{a}=\vec{a}(M;t)$ Dekarta koordinātu sistēmā vektoru lauku uzdod ar vektorfunkciju $\vec{a}(x;y;z;t)=(a_x(x;y;z;t);\ a_y(x;y;z;t);\ a_z(x;y;z;t))$, kur a_x, a_y, a_z – punktam $M(x;\ y;\ z)$ laika momentā t piekārtotā vektora koordinātas (projekcijas uz koordinātu asīm).
Stacionārs vektoru lauks	Vektoru lauks, kura visiem punktiem piekārtotie vektori $\vec{a}$ **nemainās laikā**; definē ar vektorfunkciju $\vec{a}(x;y;z)=(a_x(x;y;z);\ a_y(x;y;z);\ a_z(x;y;z))$
Homogēns vektoru lauks	**Vektoru lauks, kura visiem punktiem piekārtoti vienādi vektori.** Homogēna lauka vektora $\vec{a}$ projekcijas uz koordinātu asīm a_x, a_y, a_z ir konstanti lielumi.
Plaknes vektoru lauks	Vektoru lauks, kura visiem punktiem piekārtotie **vektori ir paralēli kādai plaknei**.
Vektorlīnija	Līnija, kuras katrā punktā piekārtotais vektors atrodas uz šajā punktā novilktās pieskares. 
Vektoru lauka diverģence	**Skalārs lielums**, kuru Dekarta koordinātu sistēmā aprēķina, izmantojot formulu $\operatorname{div}\vec{a}(M_0)=\frac{\partial a_x(M_0)}{\partial x}+\frac{\partial a_y(M_0)}{\partial y}+\frac{\partial a_z(M_0)}{\partial z}$ Ja $\operatorname{div}\vec{a}(M_0)>0$, tad punktā M_0 ir **vektoru lauka avots**; ja $\operatorname{div}\vec{a}(M_0)<0$, tad punktā M_0 ir **vektoru lauka noplūde**. Diverģences absolūtā vērtība (modulis) $\lvert\operatorname{div}\vec{a}(M_0)\rvert$ raksturo lauka avota vai noplūdes intensitāti punktā $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$
Diverģences īpašības	• **Ja $\vec{a}$ ir homogēns vektoru lauks (a_x; a_y; a_z – const), tad $\operatorname{div}\vec{a}=0$ jeb $\operatorname{div}\vec{C}=0$** ($\vec{C}$ – const) • $\operatorname{div}(\vec{a}+\vec{b})=\operatorname{div}\vec{a}+\operatorname{div}\vec{b}$ • $\operatorname{div}(u\vec{a})=u\cdot\operatorname{div}\vec{a}+\vec{a}\cdot\operatorname{grad}u \Rightarrow \operatorname{div}(C\vec{a})=C\operatorname{div}\vec{a}$ (C – const) • $\operatorname{div}(u\vec{C})=\vec{C}\cdot\operatorname{grad}u$ ($\vec{C}$ – const) • $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a}-\vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$

Diverģence cilindriskās koordinātās $(r;\ \varphi;\ z)$	$\operatorname{div}\vec{a}=\frac{1}{r}\frac{\partial(r\cdot a_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial a_z}{\partial z}$, kur a_r, a_φ, a_z – vektora $\vec{a}$ projekcijas uz cilindriskās koordinātu sistēmas koordinātu līniju pieskaru vienības vektoriem $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$
Diverģence sfēriskās koordinātās $(\rho;\ \varphi;\ \theta)$	$\operatorname{div}\vec{a}=\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial(\rho^2\cdot a_\rho)}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho\sin\theta}\cdot\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{1}{\rho\sin\theta}\cdot\frac{\partial(a_\theta\cdot\sin\theta)}{\partial\theta}$, kur a_ρ, a_φ, a_θ – vektora $\vec{a}$ projekcijas uz sfēriskās koordinātu sistēmas koordinātu līniju pieskaru vienības vektoriem $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta$
Vektoru lauka rotors (sk. arī 257. lpp.)	Punktā $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ piekārtots **vektors**, kuru atrod, izmantojot lauka vektora $\vec{a}=(a_x;a_y;a_z)$ koordinātu parciālos atvasinājumus: $\operatorname{rot}\vec{a}(M_0)=\left(\frac{\partial a_z(M_0)}{\partial y}-\frac{\partial a_y(M_0)}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial a_x(M_0)}{\partial z}-\frac{\partial a_z(M_0)}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial a_y(M_0)}{\partial x}-\frac{\partial a_x(M_0)}{\partial y}\right)\vec{k}$ jeb $\operatorname{rot}\vec{a}=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z};\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x};\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)$
Rotora fizikālā nozīme	$\operatorname{rot}\vec{a}(M_0)$ norāda virzienu, pret kuru perpendikulāri pagriežot punktu M_0 ietverošа elementārkontūra plakni, vektoru lauks šai kontūrā veic vislielāko darbu.
Rotora īpašības	• $\operatorname{rot}\vec{C}=\vec{0}$, $\vec{C}=\text{const}$ • $\operatorname{rot}(\vec{a}+\vec{b})=\operatorname{rot}\vec{a}+\operatorname{rot}\vec{b}$ • $\operatorname{rot}(u\cdot\vec{a})=u\cdot\operatorname{rot}\vec{a}+\operatorname{grad}u\times\vec{a}$ • $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a}-\vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$
Rotors cilindriskās koordinātās $(r;\ \varphi;\ z)$	$\operatorname{rot}\vec{a}=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e_r}+\left(\frac{\partial a_r}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\vec{e_\varphi}+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(ra_\varphi)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}\right)\vec{e_z}$, kur $\vec{e_r}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_z}$ – cilindriskās koordinātu sistēmas koordinātu līnijām novilkto pieskaru vienības vektori, bet a_r, a_φ, a_z – vektora $\vec{a}$ projekcijas uz šiem vienības vektoriem.
Rotors sfēriskās koordinātās $(\rho,\ \varphi,\ \theta)$	$\operatorname{rot}\vec{a}=\left(\frac{1}{\rho\sin\theta}\left(\frac{\partial(a_\varphi\sin\theta)}{\partial\theta}-\frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi}\right)\right)\vec{e_\rho}+\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho\cdot a_\theta)}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\rho}{\partial\theta}\right)\vec{e_\varphi}+\left(\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial a_\rho}{\partial\varphi}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho\cdot a_\varphi)}{\partial\rho}\right)\vec{e_\theta}$, kur $\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_\theta}$ – sfēriskās koordinātu sistēmas koordinātu līnijām novilkto pieskaru vienības vektori, bet a_ρ, a_φ, a_θ – vektora $\vec{a}$ projekcijas uz šiem vienības vektoriem.

Vektoru lauka $\vec{a}=(a_x;a_y;a_z)$ **plūsma P caur virsmas apgabalu (σ)**	$P=\iint\limits_{(\sigma)} a_x dy\,dz+a_y dz\,dx+a_z dx\,dy=$ $=\iint\limits_{(\sigma)} (a_x\cos\lambda+a_y\cos\mu+a_z\cos\nu)d\sigma=$ $=\iint\limits_{(\sigma)} \vec{a}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iint\limits_{(\sigma)} a_n d\sigma\ ,$  kur a_n ir vektora $\vec{a}$ projekcija uz virsmas (σ) normāles vienības vektoru $\vec{n}$; $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ – vektora $\vec{n}$ koordinātas.
Vektoru lauka plūsmas fizikālā nozīme	• Ja projekcija a_n uz virsmas (σ) nemaina zīmi, tad P raksturo vektoru lauka $\vec{a}$ **intensitāti** apgabalā (σ). **Ja** $P>0$, tad saka, ka **vektoru lauks izplūst caur virsmu** (σ); **ja** $P<0$, tad – **ieplūst** caur šo virsmu. • Ja (σ) ir slēgta virsma, tad integrālis $P_0=\oiint\limits_{(\sigma)} a_n d\sigma$ neraksturo vektoru lauka intensitāti, bet izsaka starpību starp ieplūstošo un izplūstošo vektorlīniju daudzumu caur virsmu (σ).  $P_0=\oiint\limits_{(\sigma)} a_n d\sigma>0$ **Ja** $P_0>0$, tad caur virsmu **izplūstošo vektorlīniju daudzums ir lielāks nekā ieplūstošo līniju daudzums**; tas nozīmē, ka **telpas apgabalā**, kuru ierobežo slēgtā virsma (σ), **atrodas vektoru lauka avoti**. **Ja** $P_0<0$, tad šajā apgabalā ir **vektoru lauka noplūde**. **Ja** $P_0=0$, tad caur slēgto virsmu **izplūstošo vektorlīniju daudzums ir vienāds ar ieplūstošo līniju daudzumu**; šādu vektoru lauku sauc par **solenoidālu lauku**.
Ostrogradska–Gausa formulas fizikālā interpretācija	Vairākargumentu funkciju integrālrēķinos **Ostrogradska–Gausa formula** $\oiint\limits_{(\sigma)} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint\limits_{(V)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV$ ir sakarība starp virsmas integrāli pa slēgtu virsmu un trīskāršo integrāli pa telpas apgabalu, ko ierobežo šī virsma (sk. arī 250. lpp.).

	Ja $P = a_x$, $Q = a_y$, $R = a_z$ ir vektoru lauka $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ projekcijas uz koordinātu asīm, tad zemintegrāļa izteiksme trīskāršajā integrālī ir vektoru lauka diverģence $\operatorname{div}\vec{a}$, bet virsmas integrālis ir vektoru lauka plūsma P_0 caur slēgtu virsmu (σ). Līdz ar to vektoru lauka teorijā Ostrogradska–Gausa formulai $$\oiint\limits_{(\sigma)} a_n d\sigma = \iiint\limits_{(V)} \operatorname{div}\vec{a}\, dV$$ ir šāda fizikālā interpretācija: **vektoru lauka plūsma caur slēgtu virsmu ir vienāda ar virsmas ierobežotā telpas apgabala punktu kopīgo (integrālo) diverģenci, kas raksturo visa apgabala lauka avotu vai noplūdes intensitāti.**
Vektoru lauka $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ cirkulācija C pa kontūru (K)	$$C = \oint\limits_{(K)} a_x dx + a_y dy + a_z dz =$$ $$= \oint\limits_{(K)} (a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma) ds =$$ $$= \oint\limits_{(K)} \vec{a}\cdot\vec{s}\, ds = \oint\limits_{(K)} a_s ds\,,$$  kur a_s ir vektora $\vec{a}$ projekcija uz (K) pieskares vienības vektoru $\vec{s}$; $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – vienības vektora $\vec{s}$ koordinātas.
Cirkulācijas fizikālā nozīme	Vektoru lauka cirkulācija (integrālis C) raksturo **darbu**, kādu veic vektoru lauks $\vec{a}$, pārvietojot vienības elementu pa slēgto līniju (K).
Stoksa formulas fizikālā interpretācija	Vairākargumentu funkciju integrālrēķinos **Stoksa formula** $$\oint\limits_{(K)} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) ds =$$ $$= \iint\limits_{(\sigma)} \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\lambda + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\mu + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\nu \right) d\sigma$$ ir sakarība starp kontūrintegrāli un virsmas integrāli pa virsmas apgabalu, ko ierobežo šis kontūrs (sk. arī 250. lpp.). Ja $P = a_x$, $Q = a_y$, $R = a_z$ ir vektoru lauka $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ projekcijas uz koordinātu asīm, tad kontūrintegrālis Stoksa formulā ir vektoru lauka $\vec{a}$ cirkulācija pa kontūru (K), bet zemintegrāļa izteiksme virsmas integrālī ir vektoru lauka rotora un virsmas normāles vienības vektora $\vec{n}$ skalārais reizinājums koordinātu formā. Tātad Stoksa formulas izteiksme vektoru lauka teorijā ir šāda: $$\oint\limits_{(K)} \vec{a}\cdot\vec{s}\, ds = \iint\limits_{(\sigma)} \operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n}\, d\sigma \quad \text{jeb} \quad \oint\limits_{(K)} a_s ds = \iint\limits_{(\sigma)} \operatorname{rot} a_n d\sigma\,,$$ t. i., **vektoru lauka cirkulācija pa kontūru (K) ir vienāda ar šī lauka rotoru plūsmu caur virsmas apgabalu (σ), ko ietver šis kontūrs.**

14.3. Hamiltona operators nabla

Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi
Operators nabla ∇	**Simbolisks vektors jeb vektoriāls operators, kura "koordinātas" ir parciālās atvasināšanas operatori:** $\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ jeb $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x};\frac{\partial}{\partial y};\frac{\partial}{\partial z}\right)$ Operatoru ∇ izmanto ar funkciju parciālajiem atvasinājumiem saistītos pierakstos. • Ja **aiz simbola ∇ ir funkcija** $u(x;\,y;\,z)$, tad šī funkcija parciāli jāatvasina pēc argumentiem $x,\ y,\ z$ un jāraksta vektors, kura koordinātas ir iegūtie atvasinājumi. • Ja **aiz simbola ∇ ir vektors** $\vec{a}$, kas savienots ar skalārās vai vektoriālās reizināšanas zīmi, tad atbilstošās darbības jāizpilda koordinātu formā; turklāt ar koordinātu "reizinājumu" apzīmē attiecīgās vektora $\vec{a}$ koordinātas parciālo atvasinājumu. P i e m ē r a m, ar "reizinājumu" $\frac{\partial}{\partial x}\cdot a_x$ apzīmē atvasinājumu $\frac{\partial a_x}{\partial x}$.
Gradienta, diverģences un rotora pieraksts ar operatoru nabla	$\operatorname{grad}u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)u=\nabla u$ $\operatorname{div}\vec{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\cdot a_x+\frac{\partial}{\partial y}\cdot a_y+\frac{\partial}{\partial z}\cdot a_z=\nabla\cdot\vec{a}$ $\operatorname{rot}\vec{a}=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}=$ $=\left(\frac{\partial}{\partial y}\cdot a_z-\frac{\partial}{\partial z}\cdot a_y\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial}{\partial z}\cdot a_x-\frac{\partial}{\partial x}\cdot a_z\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot a_y-\frac{\partial}{\partial y}\cdot a_x\right)\vec{k}=$ $=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}=\nabla\times\vec{a}$ Tātad $\operatorname{grad}u=\nabla u$, $\quad\operatorname{div}\vec{a}=\nabla\cdot\vec{a}$, $\quad\operatorname{rot}\vec{a}=\nabla\times\vec{a}$
Operatora nabla īpašības	• Distributīvā īpašība $\nabla(C_1X+C_2Y+C_3Z)=\nabla(C_1X)+\nabla(C_2Y)+\nabla(C_3Z)=$ $=C_1\nabla X+C_2\nabla Y+C_3\nabla Z$, kur $C_1,\ C_2,\ C_3$ – const, $X,\ Y,\ Z$ – skalāri vai vektoriāli lielumi. • $\nabla(X\cdot Y\cdot Z)=Y\cdot Z\cdot\nabla X+X\cdot Z\cdot\nabla Y+X\cdot Y\cdot\nabla Z$

14.4. Speciāli vektoru lauki

Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi
Potenciāls vektoru lauks	**Vektoru lauks $\vec{a}$, ja katram punktam piekārtotais vektors $\vec{a}$ ir kāda skalāra lauka $u = u(x;\ y;\ z)$ gradients, t. i., ja** $\vec{a} = \operatorname{grad} u$ **Funkciju u sauc par vektoru lauka $\vec{a}$ potenciālu,** to atrod ar līnijintegrāli $u(x;y;z) = \int\limits_{M_0M} a_x dx + a_y dy + a_z dz$, kur M_0M – brīvi izraudzīta līnija, kas savieno punktus $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ un $M(x;\ y;\ z)$. Parasti M_0M ir lauzta līnija, kuras nogriežņi paralēli koordinātu asīm; a_x, a_y, a_z – nepārtraukti diferencējamas funkcijas apgabalā, kurā atrodas līnija M_0M.
Potenciāla vektoru lauka nosacījumi	Vektoru lauks $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ **ir potenciāls lauks** tad un tikai tad, ja visos apgabala punktos ir spēkā vienādības $\frac{\partial a_z}{\partial y} = \frac{\partial a_y}{\partial z}$, $\frac{\partial a_x}{\partial z} = \frac{\partial a_z}{\partial x}$, $\frac{\partial a_y}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial y}$
Potenciāla vektoru lauka fizikālās īpašības (sk. arī 254. lpp.)	• Potenciālā laukā cirkulācija pa jebkuru kontūru ir vienāda ar nulli **(potenciāls lauks kontūrā neveic darbu)**. • Potenciāla lauka veiktais **darbs nav atkarīgs no pārvietošanas līnijas formas**, kas savieno divus dotus punktus. • Potenciāla lauka rotors visos apgabala punktos ir nulles vektors: $\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{0}$ Šādu vektoru lauku sauc par **bezvirpuļu lauku**, jo neatkarīgi no tā, kā pagriež kontūra plakni, vektoru lauks kontūrā neveic darbu (nevar pārvietot pa kontūru vienības elementu).
Solenoidāls vektoru lauks	**Vektoru lauks $\vec{a}$, ja visos apgabala punktos šī lauka diverģence ir vienāda ar nulli, t. i., ja** $\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 0$
Solenoidāla vektoru lauka īpašības	• **Solenoidālā laukā** vektoru lauka plūsma P_0 **caur jebkuru slēgtu** virsmu ir vienāda ar nulli un nevienā apgabala punktā, ko ierobežo šī virsma, **nav vektoru lauka avotu un nav noplūdes.** • **Solenoidālā laukā vektoru lauka plūsma P caur jebkuru vektoru caurules šķērsgriezumu ir konstants lielums.**

Harmonisks vektoru lauks	**Vektoru lauks $\vec{a}$, kas ir vienlaikus gan potenciāls, gan solenoidāls lauks, t. i.,** $$\vec{a} = \operatorname{grad} u \quad \textbf{un} \quad \operatorname{div}\vec{a} = 0 \quad \textbf{un} \quad \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = 0$$ Tātad harmoniskā laukā funkcija $u(x;\ y;\ z)$ **apmierina Laplasa vienādojumu** $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{jeb} \quad \Delta u = 0$$
Laplasa operators Δ (delta)	**Simbols, ko lieto funkcijas $u(x;\ y;\ z)$ 2. kārtas parciālo atvasinājumu summas pierakstam:** $$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ Ja aiz operatora Δ ir funkcija u, tad šai funkcijai jāatrod 2. kārtas parciālie atvasinājumi un tie jāsaskaita: $$\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$ **Laplasa vienādojuma pieraksts:** $$\Delta u = 0$$
Laplasa vienādojums cilindriskās koordinātās $(r;\ \varphi;\ z)$	$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$
Laplasa vienādojums sfēriskās koordinātās $(\rho;\ \varphi;\ \theta)$	$$\Delta u = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho^2 \sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\, \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) = 0$$
Salikti operatori	• $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{a}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = 0$ • $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = \nabla \times (\nabla u) = \vec{0}$ • $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \nabla \cdot (\nabla u) = (\nabla \cdot \nabla) u = \nabla^2 u = \Delta u$ Laplasa operators ir Hamiltona operatora “skalārais kvadrāts”: $$\Delta = \nabla^2$$ • $\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{a}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{a})$ • $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{a}) = \nabla \times (\nabla \times \vec{a})$

15. DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMI

15.1. Pirmās kārtas diferenciālvienādojumi

Pamatjēdzieni

Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi
1. kārtas diferenciāl-vienādojums	**Vienādojums, kas satur nezināmu funkciju, šīs funkcijas 1. kārtas atvasinājumu un argumentu.** **Vispārīgais veids:** $F(x;\ y;\ y')=0$ **Normālforma:** $y'=f(x;\ y)$
Atrisinājums	Jebkura funkcija, kuru ievietojot diferenciālvienādojumā iegūst identitāti.
Sākuma nosacījums	Kopā ar diferenciālvienādojumu dota nezināmās funkcijas vērtība y_0, kas atbilst kādai noteiktai argumenta vērtībai x_0: $y\Big\vert_{x=x_0}=y_0$ jeb $y(x_0)=y_0$
Vispārīgais atrisinājums	Funkcija $y=\varphi(x;\ C)$, kas satur vienu brīvi izraudzītu konstanti un apmierina diferenciālvienādojumu, turklāt jebkuram sākuma nosacījumam $y(x_0)=y_0$ eksistē noteikta konstantes vērtība.
Vispārīgais integrālis	**Diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums** apslēptas funkcijas veidā: $\Phi(x;y;C)=0$
Partikulārais atrisinājums	Funkcija, ko iegūst, ja vispārīgajā atrisinājumā ievieto konstantes vietā noteiktu skaitli C_0: $y=\varphi(x;C_0)$ jeb $\Phi(x;y;C_0)=0$
Singulārais atrisinājums	Diferenciālvienādojuma atrisinājums, kuru nevar iegūt no vispārīgā atrisinājuma ne ar kādu konstantes C vērtību.
Košī uzdevums	Partikulārā atrisinājuma atrašana pēc vispārīgā atrisinājuma un sākuma nosacījuma. **Košī uzdevuma risināšanas shēma:** $\begin{cases} y=\varphi(x;C) \\ y\Big\vert_{x=x_0}=y_0 \end{cases} \rightarrow\ y_0=\varphi(x_0;C)\ \rightarrow\ C=C_0\ \rightarrow\ y=\varphi(x;C_0)$
Integrāl-līnijas	Partikulāro atrisinājumu grafiki.

Izoklīna	Visu to punktu kopa, kuros integrāllīniju pieskarēm ir vienāds virziens.
Atrisinājuma eksistences un unitātes nosacījumi	Ja diferenciālvienādojumā $y' = f(x;\ y)$ funkcija $f(x;\ y)$ un tās parciālais atvasinājums $f_y'(x;y)$ ir nepārtrauktas funkcijas kādā xOy plaknes apgabalā, tad caur jebkuru šī apgabala punktu $M_0(x_0;\ y_0)$ iet tikai viena integrāllīnija, t. i., eksistē tikai viens diferenciālvienādojuma atrisinājums $y = \varphi(x)$, kas apmierina sākuma nosacījumu $y(x_0) = y_0$.

Pirmās kārtas diferenciālvienādojuma atrisināšanas pamatmetodes

Vienādojums ar atdalāmiem mainīgiem	Diferenciālvienādojums, kuru **no normālformas** $y' = f(x;\ y)$ **var pārveidot šādi:** $$y' = f_1(x)\cdot f_2(y)$$ **Atrisināšanas metode** $$\frac{dy}{dx} = f_1(x)\cdot f_2(y),\quad \frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx,\quad \int\frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C \Rightarrow$$ $$y = \varphi(x;C)$$
Homogēns 1. kārtas diferenciālvienādojums	Diferenciālvienādojums, kuru **no normālformas** $y' = f(x;\ y)$ **var pārveidot šādi:** $$y' = h\left(\frac{y}{x}\right)$$ **Atrisināšanas metode** Substitūcija: $z = \frac{y}{x},\quad y = z\cdot x.$ Tā kā $y' = z'x + z$, tad $z'x + z = h(z)$, $\frac{dz}{dx}x = h(z) - z$, $$\int\frac{dz}{h(z)-z} = \int\frac{dx}{x} \Rightarrow z = \varphi(x;C),\quad \frac{y}{x} = \varphi(x;C),\quad y = x\cdot\varphi(x;C)$$
Vienādojums, kuru var pārveidot par homogēnu 1. kārtas diferenciālvienādojumu	$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1},\quad \text{kur}\quad ab_1 - a_1b \neq 0$$ **Atrisināšanas metode** Substitūcija: $x = \bar{x} + p,\quad y = \bar{y} + q,\quad \frac{dy}{dx} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}.$ $$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{a\bar{x}+b\bar{y}+(ap+bq+c)}{a_1\bar{x}+b_1\bar{y}+(a_1p+b_1q+c_1)} \Rightarrow \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{a\bar{x}+b\bar{y}}{a_1\bar{x}+b_1\bar{y}} \Rightarrow,$$ $\Rightarrow \bar{y}' = h\left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right)$ ja skaitļus p un q izvēlai tā, lai $\begin{cases} ap+bq+c=0 \\ a_1p+b_1q+c_1=0 \end{cases}$

<table>
<tr><td>

Lineārs 1. kārtas diferenciālvienādojums

</td><td>

Vienādojums, kuru var pārveidot formā

$$y' + g(x) \cdot y = h(x),$$

kur $g(x)$ un $h(x)$ ir nepārtrauktas funkcijas vai skaitļi.

Atrisināšanas metodes

① S u b s t i t ū c i j a: $y = u(x) \cdot v(x)$, kur $u(x)$ un $v(x)$ – nezināmas funkcijas.
Tā kā $y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$, tad $u'v + uv' + g \cdot uv = h$ jeb

$$u'v + u(v' + gv) = h$$

Funkciju $v = v(x)$ izvēlas tā, lai $v'(x) + g(x) \cdot v(x) = 0$, no kurienes

$$\frac{dv}{dx} = -gv, \quad \frac{dv}{v} = -g\,dx, \quad \int \frac{dv}{v} = -\int g dx \Rightarrow \quad v = \varphi_1(x)$$

Tad $u'(x)\varphi_1(x) = h(x)$, no kurienes $\frac{du}{dx}\varphi_1(x) = h(x)$, $du = \frac{h(x)}{\varphi_1(x)} \cdot dx$,

$$u = \int \frac{h(x)}{\varphi_1(x)} dx \Rightarrow \quad u = \varphi_2(x; C)$$

Tā kā $y = u \cdot v$, tad vispārīgais atrisinājums:

$$y = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x;\, C) \text{ jeb } y = \varphi(x;\, C)$$

② K o n s t a n t e s v a r i ā c i j a s m e t o d e. Aplūko dotajam diferenciālvienādojumam $y' + g \cdot y = h$ atbilstošu homogēnu vienādojumu $\bar{y}' + g \cdot \bar{y} = 0$, kuru var atrisināt ar mainīgo atdalīšanas metodi; iegūst $\bar{y} = \varphi_1(x; C)$. Integrēšanas konstanti C uzskata par mainīgu lielumu $C(x)$ ("*konstanti variē*") un $C(x)$ nosaka tā, lai šādi iegūta funkcija $y = \varphi_1(x;\, C(x))$ būtu dotā nehomogēnā diferenciālvienādojuma atrisinājums: ievietojot nehomogēnā vienādojumā funkciju $y = \varphi_1(x;\, C(x))$ un tās atvasinājumu, atrod $C'(x)$ izteiksmi, no kurienes pēc integrēšanas iegūst $C(x) = \varphi_2(x;\, C)$. Tādējādi

$$y = \varphi_1(x;\, \varphi_2(x;\, C)) \text{ jeb } y = \varphi(x;\, C)$$

</td></tr>
<tr><td>

Bernulli diferenciālvienādojums

</td><td>

Diferenciālvienādojums, kuram ir šāda normālforma:

$$y' + g(x) \cdot y = h(x) \cdot y^{\alpha},$$

kur $g(x)$ un $h(x)$ ir nepārtrauktas funkcijas, α – jebkurš reāls skaitlis, izņemot 1.

Atrisināšanas metode

Dalot vienādojuma abas puses ar y^{α}, iegūst

$$y^{-\alpha}y' + g \cdot y^{1-\alpha} = h$$

S u b s t i t ū c i j a: $z = y^{1-\alpha}$, no kurienes

$$z' = (1-\alpha)y^{-\alpha} \cdot y' \quad \text{jeb} \quad y^{-\alpha} \cdot y' = \frac{1}{1-\alpha} z'.$$

Tādējādi Bernulli diferenciālvienādojumu reducē par lineāru diferenciālvienādojumu attiecībā pret z, kuru atrisinot iegūst

$$z = \varphi(x;\, C) \text{ jeb } y^{1-\alpha} = \varphi(x;\, C),$$

kas ir dotā diferenciālvienādojuma vispārīgais integrālis

$$\Phi(x; y; C) = 0$$

</td></tr>
</table>

Eksaktais (totālais) diferenciālvienādojums (diferenciālvienādojums pilnos diferenciāļos)	Diferenciālvienādojums, kuram ir **šāda normālforma**: $$P(x;\ y)\,dx + Q(x;\ y)\,dy = 0$$ un $$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$ Ja ir spēkā šis nosacījums, tad diferenciālvienādojuma kreisā puse ir divu argumentu funkcijas $u = u(x;\ y)$ pilnais diferenciālis (sk. 242. lpp.), t. i., $$du = Pdx + Qdy$$ un doto diferenciālvienādojumu var uzrakstīt kā pilnā diferenciāļa vienādību ar nulli: $$du = 0,$$ no kurienes $$u(x;\ y) = C \quad \text{jeb} \quad \Phi(x;y;C) = 0,$$ kas ir šī diferenciālvienādojuma vispārīgais integrālis. **Atrisināšanas metodes** ① Funkcijas $u = u(x;\ y)$ atrašana pēc pilnā diferenciāļa ar līnijintegrāli (sk. 243. lpp.). $$u = \int_{x_0}^{x} P(x;y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x;y)dy + C$$ vai $$u = \int_{y_0}^{y} Q(x_0;y)dy + \int_{x_0}^{x} P(x;y)dx + C,$$ kur $(x_0;\ y_0)$ – brīvi izraudzīts punkts apgabalā, kurā P un Q ir nepārtraukti diferencējamas funkcijas. ② Funkcijas $u = u(x;\ y)$ atrašana, izmantojot pilnā diferenciāļa du definīciju. Tā kā $$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \quad \text{un arī} \quad du = Pdx + Qdy, \ \text{tad}$$ $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x;y)$ un $u(x;y) = \int P(x;y)dx + C(y)$ (integrējot funkciju $P(x;\ y)$ pēc x, lielumu y uzskata par konstantu; tāpēc arī integrēšanas konstante C ir atkarīga no y). Tādējādi iegūst $$u = \varphi(x;\ y;\ C(y)).$$ Funkciju $C(y)$ atrod, izmantojot vienādību $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x;y)$, t. i., $$\varphi'_y(x;y;C(y)) = Q(x;y).$$ Pēc atvasināšanas no šīs vienādības izsaka $C'(y)$. Iegūtā izteiksme nav atkarīga no mainīgā lieluma x. To integrējot, atrod $C(y) = \varphi_1(y;\ C)$, ko ievieto funkcijas u izteiksmē $u = \varphi(x;\ y;\ C(y))$. Iegūst: $$u = \varphi(x;\ y;\ \varphi_1(y;\ C)) \quad \text{jeb} \quad u(x;\ y) = C$$

Integrējošais reizinātājs	Ja $\dfrac{\partial Q}{\partial x} \neq \dfrac{\partial P}{\partial y}$, tad $P(x;\ y)dx + Q(x;\ y)dy = 0$ (1) nav eksakts diferenciālvienādojums. Šādā gadījumā meklē tādu funkciju $\mu = \mu(x;\ y)$ (**integrējošo reizinātāju**), ar kuru reizinot vienādojumu (1) iegūst eksaktu diferenciālvienādojumu $(\mu P)dx + (\mu Q)dy = 0,$ (2) t. i., vienādojumu, kuram spēkā vienādība $\dfrac{\partial(\mu Q)}{\partial x} = \dfrac{\partial(\mu P)}{\partial y}.$ (3) Parasti apskata vienādojumus, kad $\mu = \mu(x)$ vai $\mu = \mu(y)$ • Ja $\mu = \mu(x)$, tad izteiksme $\dfrac{1}{Q}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)$ nesatur y un no vienādības (3) seko, ka integrējošo reizinātāju $\mu(x)$ var atrast no vienādojuma $\dfrac{d(\ln\mu)}{dx} = \dfrac{1}{Q}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)$ • Ja $\mu = \mu(y)$, tad izteiksme $\dfrac{1}{P}\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)$ nesatur x un integrējošo reizinātāju $\mu(y)$ var atrast no vienādojuma $\dfrac{d(\ln\mu)}{dy} = \dfrac{1}{P}\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)$

15.2. Augstāku kārtu diferenciālvienādojumi

Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi
Otrās kārtas diferenciālvienādojums	**Vispārīgais veids:** $F(x;\ y;\ y';\ y'') = 0$ **Normālforma:** $y'' = f(x;\ y;\ y')$
Vispārīgais atrisinājums	No divām konstantēm C_1 un C_2 atkarīgs atrisinājums: $y = \varphi(x;\ C_1;\ C_2)$
Sākuma nosacījumi	$y\Big\vert_{x=x_0} = y_0,\ y'\Big\vert_{x=x_0} = y_0'$ jeb $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0'$
Robežnosacījumi	$y\Big\vert_{x=x_1} = y_1,\ y\Big\vert_{x=x_2} = y_2$ jeb $y(x_1) = y_1,\ y(x_2) = y_2$

Atrisinājuma eksistences un unitātes nosacījumi	Ja diferenciālvienādojumā $y'' = f(x;\ y;\ y')$ funkcija $f(x;\ y;\ y')$ un tās parciālie atvasinājumi $f'_y(x;y;y')$, $f'_{y'}(x;y;y')$ ir nepārtrauktas funkcijas kādā apgabalā, kurā atrodas punkts $(x_0;\ y_0;\ y_0')$, tad diferenciālvienādojumam eksistē viens vienīgs atrisinājums, kas apmierina sākuma nosacījumus $y(x_0) = y_0$ un $y'(x_0) = y_0'$.
Koši uzdevuma risināšanas shēma	Partikulārā atrisinājuma atrašana pēc vispārīgā atrisinājuma un sākuma nosacījumiem: $$\begin{cases} y = \varphi(x;C_1;C_2) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases} \to \begin{cases} \varphi(x_0;C_1;C_2) = y_0 \\ \varphi'(x_0;C_1;C_2) = y_0' \end{cases} \to \begin{matrix} C_1 = C_{10} \\ C_2 = C_{20} \end{matrix} \to y = \varphi(x;C_{10};C_{20})$$
n-tās kārtas diferenciālvienādojums	**Vispārīgais veids:** $F(x;\ y;\ y';\ y'';\ ...;\ y^{(n)}) = 0$ **Normālforma:** $y^{(n)} = f(x;\ y;\ y';\ y'';\ ...;\ y^{(n-1)})$ **Vispārīgais atrisinājums:** $y = \varphi(x;\ C_1;\ C_2;\ ...;\ C_n)$ **Sākuma nosacījumi:** $$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ y''(x_0) = y_0'',\ ...,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$
2. kārtas diferenciālvienādojumi, kuriem var pazemināt kārtu	① $y'' = f(x)$ – vienādojums nesatur y un y'. **Atrisināšanas metode** $$y' = \int f(x)dx + C_1,\quad y = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2$$ ② $y'' = f(x;\ y')$ – vienādojums nesatur y **Atrisināšanas metode** Substitūcija: $y' = z(x)$ Tā kā $$y'' = z'(x),$$ tad $$z' = f(x;\ z) \Rightarrow z = \varphi(x;\ C_1)$$ jeb $$y' = \varphi(x;\ C_1) \Rightarrow y = \int \varphi(x;C_1)dx + C_2$$ ③ $y'' = f(y;\ y')$ – vienādojums nesatur x **Atrisināšanas metode** Substitūcija: $y' = z(y)$ Tā kā $$y'' = z'_x = z'_y \cdot y'_x = z'_y \cdot z,$$ tad $$z' \cdot z = f(y;\ z) \Rightarrow z = \varphi(y;\ C_1)$$ jeb $$y' = \varphi_1(y;\ C_1) \Rightarrow y = \varphi(x;\ C_1;\ C_2)$$

2. kārtas lineārs homogēns diferenciālvienādojums ar konstantiem koeficientiem	**Normālforma:** $$y'' + py' + qy = 0 \quad (1)$$ (p, q – reāli skaitļi) **Atrisināšanas metode** Izmantojot koeficientus p un q, uzraksta diferenciālvienādojumam atbilstošo **raksturīgo vienādojumu** $$k^2 + pk + q = 0 \quad (2)$$ Atkarībā no šī kvadrātvienādojuma diskriminanta D zīmes iespējami 3 gadījumi. • $D > 0$ – kvadrātvienādojumam (2) ir **divas dažādas reālas saknes** $k_1 \neq k_2$; diferenciālvienādojuma (1) **vispārīgais atrisinājums**: $$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$ • $D = 0$ – kvadrātvienādojumam (2) ir **divas vienādas reālas saknes** $k_1 = k_2$; diferenciālvienādojuma (1) **vispārīgais atrisinājums**: $$y = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x)$$ • $D < 0$ – kvadrātvienādojumam (2) ir **kompleksas saistītas saknes** $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$; diferenciālvienādojuma (1) **vispārīgais atrisinājums**: $$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$
2. kārtas Eilera diferenciālvienādojums	**Normālforma:** $x^2 y'' + pxy' + qy = f(x)$, ($p$ un q – reāli skaitļi) **Atrisināšanas metode** Substitūcija: $$x = e^t \;\Rightarrow\; t = \ln x$$ Atrod atvasinājumus y' un y'': $$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dt}, \quad y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$ Ievietojot y' un y'' izteiksmes Eilera vienādojumā, iegūst lineāru diferenciālvienādojumu ar konstantiem koeficientiem: $$\frac{d^2y}{dt^2} + (p-1)\frac{dy}{dt} + qy = f(e^t),$$ no kurienes $y = \varphi(t;\, C_1;\, C_2) \Rightarrow y = \varphi(\ln x;\, C_1;\, C_2)$
n-tās kārtas lineārs homogēns diferenciālvienādojums ar konstantiem koeficientiem	**Normālforma**: $$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,$$ kur $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ – reāli skaitļi **Atrisināšanas metode** Izmantojot diferenciālvienādojuma koeficientus, sastāda atbilstošo **raksturīgo vienādojumu** $$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_n k + a_n = 0$$ un atrod tā saknes $k_1, k_2, \ldots, k_n$

Iespējami šādi gadījumi.

① k_m – **raksturīgā vienādojuma reāla sakne, kuras kārta ir** 1; tad atbilstošais diferenciālvienādojuma **partikulārais atrisinājums** ir

$$y_m = e^{k_m x}$$

② k_m – **raksturīgā vienādojuma reāla sakne, kuras kārta ir** r; šai saknei atbilst r lineāri neatkarīgi diferenciālvienādojuma **atrisinājumi**:

$$y_1 = e^{k_m x},\ y_2 = x \cdot e^{k_m x},\ y_3 = x^2 \cdot e^{k_m x},\ \ldots,\ y_r = x^{r-1} \cdot e^{k_m x}$$

③ $\alpha \pm \beta i$ – **raksturīgā vienādojuma kompleksas saistītas saknes ar kārtu** 1; šīm saknēm atbilst **divi** diferenciālvienādojuma atrisinājumi:

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

④ $\alpha \pm \beta i$ – **raksturīgā vienādojuma kompleksas saistītas saknes, kuru kārta ir** m; šīm saknēm atbilst $2m$ lineāri neatkarīgi diferenciālvienādojuma **atrisinājumi**:

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\alpha x} \cos \beta x, & y_2 &= e^{\alpha x} \sin \beta x, \\ y_3 &= x \cdot e^{\alpha x} \cos \beta x, & y_4 &= x \cdot e^{\alpha x} \sin \beta x, \\ y_5 &= x^2 \cdot e^{\alpha x} \cos \beta x, & y_6 &= x^2 \cdot e^{\alpha x} \sin \beta x, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_{2m-1} &= x^{m-1} \cdot e^{\alpha x} \cos \beta x, & y_{2m} &= x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x \end{aligned}$$

No iegūtajiem n lineāri neatkarīgajiem partikulārajiem atrisinājumiem – funkcijām $y_1, y_2, \ldots, y_n$ atrod **diferenciālvienādojuma vispārīgo atrisinājumu kā lineāru kombināciju**

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$$

n-tās kārtas lineārs nehomogēns diferenciālvienādojums

Normālforma:

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + a_2(x) y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = f(x), \quad (1)$$

kur $a_1(x),\ a_2(x),\ \ldots,\ a_n(x),\ f(x)$ – nepārtrauktas funkcijas vai reāli skaitļi.

Atrisināšanas metode

① Atrod atbilstošā homogēnā diferenciālvienādojuma

$$\bar{y}^{(n)} + a_1(x)\bar{y}^{(n-1)} + a_2(x)\bar{y}^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)\bar{y}' + a_n(x)\bar{y} = 0 \quad (2)$$

vispārīgo atrisinājumu

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$$

② Atrod vienādojuma (1) partikulāro atrisinājumu – jebkuru funkciju y^*, kura apmierina šo vienādojumu (sk. 268. lpp.).

③ Nehomogēnā diferenciālvienādojuma (1) vispārīgais atrisinājums ir funkciju $\bar{y}$ un y^* summa, t. i.,

$$y = \bar{y} + y^*$$

jeb

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n + y^* \quad (3)$$

Partikulārā atrisinājuma y^* atrašana

① Konstanšu variāciju metode

Ja $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ir n lineāri neatkarīgas funkcijas, kas apmierina homogēno diferenciālvienādojumu (2), tad šī vienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$\overline{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n \tag{4}$$

Nehomogēnā vienādojuma (1) partikulāro atrisinājumu y^* atrod, pieņemot, ka izteiksmē (4) konstantes ir atkarīgas no mainīgā lieluma x, t. i., konstantes ir "variētas". Tātad funkciju y^* meklē kā izteiksmi

$$y^* = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \ldots + C_n(x)y_n \tag{5}$$

Funkcija (5) apmierina diferenciālvienādojumu (1), ja ir spēkā vienādības

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \ldots + C_n'(x)y_n = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \ldots + C_n'(x)y_n' = 0 \\ C_1'(x)y_1'' + C_2'(x)y_2'' + \ldots + C_n'(x)y_n'' = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases} \tag{6}$$

No vienādojumu sistēmas (6) atrod atvasinājumus

$$C_1'(x),\ C_2'(x),\ \ldots,\ C_n'(x)$$

(var pierādīt, ka sistēma (6) ir saderīga).
Ja

$$C_i'(x) = \varphi_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

tad $C_i(x)$ atrod ar integrāli

$$C_i(x) = \int \varphi_i(x)dx$$

(par integrēšanas konstanti var izraudzīties 0).
Līdz ar to

$$y^* = \left(\int \varphi_1(x)dx\right)\cdot y_1 + \left(\int \varphi_2(x)dx\right)\cdot y_2 + \ldots + \left(\int \varphi_n(x)dx\right)\cdot y_n$$

② Nenoteikto koeficientu metode

Šo metodi lieto tad, ja **lineāra nehomogēna diferenciālvienādojuma** (1) **koeficienti** $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ **ir konstanti un labā puse $f(x)$ ir noteikta veida izteiksme.**

Aplūko šādus gadījumus.

① $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$, kur $P_n(x)$ ir kāds n-tās pakāpes polinoms.
Ja α **nav raksturīgā vienādojuma sakne**, tad funkcija y^* ir tāda paša veida izteiksme kā $f(x)$, tikai n-tās pakāpes polinomam $Q_n(x)$ ir citādi koeficienti nekā polinomam $P_n(x)$, t. i.,

$$y^* = e^{\alpha x}\cdot Q_n(x)$$

	Polinoma $Q_n(x)$ nezināmos koeficientus apzīmē ar burtiem. Ievietojot funkciju y^* un tās atvasinājumus diferenciālvienādojumā un pielīdzinot koeficientus pie vienādām x pakāpēm vienādības kreisajā un labajā pusē, iegūst vienādojumu sistēmu, no kuras atrod polinoma $Q_n(x)$ koeficientus. Ja α **ir raksturīgā vienādojuma sakne ar kārtu** r, tad $$y^* = x^r \cdot e^{\alpha x} \cdot Q_n(x)$$ ② $f(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$, kur A un B – dotas konstantes. Ja kompleksais skaitlis $\alpha \pm \beta i$ **nav raksturīgā vienādojuma sakne**, tad $$y^* = e^{\alpha x}(M\cos\beta x + N\sin\beta x)$$ Koeficientus M un N atrod, ievietojot diferenciālvienādojumā funkciju y^* un tās atvasinājumus un pielīdzinot vienādības abās pusēs koeficientus pie $\cos\beta x$ un $\sin\beta x$. Ja $\alpha \pm \beta i$ **ir raksturīgā vienādojuma sakne ar kārtu** m, tad $$y^* = x^m e^{\alpha x}(M\cos\beta x + N\sin\beta x)$$ ③ $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$, kur $P_n(x)$ un $Q_m(x)$ – atbilstoši n-tās un m-tās pakāpes polinomi. Lielāko no skaitļiem n un m apzīmē ar k. Ja $\alpha \pm \beta i$ **nav raksturīgā vienādojuma sakne**, tad $$y^* = e^{\alpha x}(U_k(x)\cos\beta x + V_k(x)\sin\beta x),$$ kur $U_k(x)$ un $V_k(x)$ – k-tās pakāpes polinomi ar nezināmiem koeficientiem. Ja $\alpha \pm \beta i$ **ir raksturīgā vienādojuma sakne ar kārtu** m, tad $$y^* = x^m e^{\alpha x}(U_k(x)\cos\beta x + V_k(x)\sin\beta x)$$

15.3. Diferenciālvienādojumu sistēmas

Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi
Vispārīgais veids	$$\begin{cases} F_1(x; y_1; y_2; \ldots; y_n; y_1'; y_2'; \ldots; y_n') = 0 \\ F_2(x; y_1; y_2; \ldots; y_n; y_1'; y_2'; \ldots; y_n') = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x; y_1; y_2; \ldots; y_n; y_1'; y_2'; \ldots; y_n') = 0 \end{cases}$$ kur $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, ..., $y_n = y_n(x)$ – nezināmas funkcijas.
Normālforma	$$\begin{cases} y_1' = f_1(x; y_1; y_2; \ldots; y_n) \\ y_2' = f_2(x; y_1; y_2; \ldots; y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x; y_1; y_2; \ldots; y_n) \end{cases}$$

Sākuma nosacījumi	$$y_1(x_0) = y_{10},\quad y_2(x_0) = y_{20},\quad \dots,\quad y_n(x_0) = y_{n0}$$
Vispārīgais atrisinājums	$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x;\ C_1;\ C_2;\ \dots;\ C_n) \\ y_2 &= \varphi_2(x;\ C_1;\ C_2;\ \dots;\ C_n) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n &= \varphi_n(x;\ C_1;\ C_2;\ \dots;\ C_n) \end{aligned}$$
Lineāra nehomogēna diferenciāl-vienādojumu sistēma	$$\begin{cases} y_1' + a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n = f_1(x) \\ y_2' + a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n = f_2(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' + a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_n + \dots + a_{nn}(x)y_n = f_n(x) \end{cases},\qquad (1)$$ kur $a_{ij}(x)$ un $f_i(x)$ ir nepārtrauktas funkcijas vai reāli skaitļi. **Sistēmas pieraksts matricu formā**: $$Y' + A(x)\cdot Y = F(x),$$ kur $$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix},\ Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \dots \\ y_n' \end{pmatrix},\ F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$
Lineāra homogēna diferenciāl-vienādojumu sistēma	$$\begin{cases} y_1' + a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n = 0 \\ y_2' + a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' + a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n = 0 \end{cases}\qquad (2)$$ jeb $$Y' + A(x)\cdot Y = 0$$
Lineāras homogēnas diferenciāl-vienādojumu sistēmas vispārīgais atrisinājums	Ja $y_i^{(1)},\ y_i^{(2)},\ \dots,\ y_i^{(n)}$ $(i = 1, 2, 3, \dots, n)$ ir lineāri neatkarīgi homogēnās diferenciālvienādojumu sistēmas (2) partikulārie atrisinājumi, tad šīs sistēmas **vispārīgais atrisinājums** ir funkcijas $$\begin{aligned} y_1 &= C_1y_1^{(1)} + C_2y_1^{(2)} + \dots + C_ny_1^{(n)} \\ y_2 &= C_1y_2^{(1)} + C_2y_2^{(2)} + \dots + C_ny_2^{(n)} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n &= C_1y_n^{(1)} + C_2y_n^{(2)} + \dots + C_ny_n^{(n)} \end{aligned}$$

Lineāras nehomogēnas diferenciālvienādojumu sistēmas vispārīgais atrisinājums	Ja y_i^* ir jebkurš lineārās nehomogēnās diferenciālvienādojumu sistēmas (1) partikulārais atrisinājums un $\bar{y}_i$ ir atbilstošās homogēnās diferenciālvienādojumu sistēmas (2) vispārīgais atrisinājums, tad nehomogēnās sistēmas (1) **vispārīgais atrisinājums** ir funkcijas $$y_i = \bar{y}_i + y_i^* \quad (i = 1, 2, 3, .., n)$$
Lineāra homogēna diferenciālvienādojumu sistēma ar konstantiem koeficientiem	$$\begin{cases} y_1' + a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n = 0 \\ y_2' + a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n = 0 \\ .... \\ y_n' + a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_n = 0 \end{cases} \quad (a_{ij} - \text{const}) \qquad (3)$$ **Atrisināšanas metode** Sistēmas (3) lineāri neatkarīgus partikulāros atrisinājumus meklē kā eksponentfunkcijas $$y_i = \lambda_i e^{kx} \quad (i = 1, 2, 3, ..., n),$$ kur k un λ_i ir tādi skaitļi, ar kuriem funkcijas y_i apmierina sistēmu (3). Funkcijas y_i un $y_i' = \lambda_i k e^{kx}$ ievieto sistēmā (3) un izdala vienādojumu abas puses ar $e^{kx} \neq 0$; iegūst lineāru homogēnu algebrisku vienādojumu sistēmu, kurā nezināmie lielumi ir koeficienti λ_i: $$\begin{cases} (a_{11}+k)\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + ... + a_{1n}\lambda_n = 0 \\ a_{21}\lambda_1 + (a_{22}+k)\lambda_2 + ... + a_{2n}\lambda_n = 0 \\ .... \\ a_{n1}\lambda_1 + a_{n2}\lambda_2 + ... + (a_{nn}+k)\lambda_n = 0 \end{cases} \qquad (4)$$ Homogēnai lineāru algebrisku vienādojumu sistēmai (4) eksistē netriviāls atrisinājums, ja šīs sistēmas determinants ir vienāds ar nulli. No šī nosacījuma **iegūst diferenciālvienādojumu sistēmas** (3) **raksturīgo vienādojumu**: $$\begin{vmatrix} a_{11}+k & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+k & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}+k \end{vmatrix} = 0 \qquad (5)$$ Raksturīgais vienādojums (5) ir n-tās pakāpes algebrisks vienādojums, kurā nezināmais lielums ir koeficients k un kura saknes ir $k_1, k_2, ..., k_n$

Iespējami šādi gadījumi

- k_j ir raksturīgā vienādojuma (5) **vienkārša (reāla) sakne**, kuru ievieto sistēmā (4), un, atrisinot šo sistēmu, atrod koeficientu λ_i vērtības: $\lambda_1^{(j)}$; $\lambda_2^{(j)}$; ...; $\lambda_n^{(j)}$. Izmantojot atrastos koeficientus, iegūst diferenciālvienādojumu sistēmas (3) partikulāro atrisinājumu

$$y_1^{(j)} = \lambda_1^{(j)} e^{k_j x}, \quad y_2^{(j)} = \lambda_2^{(j)} e^{k_j x}, \quad ..., \quad y_n^{(j)} = \lambda_n^{(j)} e^{k_j x}$$

- $k_{j(1,\,2)} = \alpha_j \pm \beta_j i$ ir raksturīgā vienādojuma **kompleksas saistītas vienkāršas saknes**, ar kurām no vienādojumu sistēmas (4) atrod koeficientus λ_i, kas arī ir kompleksi skaitļi:

$$\lambda_1^{(j)} = a_1^{(j)} \pm b_1^{(j)} i, \quad \lambda_2^{(j)} = a_2^{(j)} \pm b_2^{(j)} i, \quad ..., \quad \lambda_n^{(j)} = a_n^{(j)} \pm b_n^{(j)} i\,.$$

Šiem koeficientiem atbilst diferenciālvienādojumu sistēmas (3) partikulārais atrisinājums

$$y_{i1}^{(j)} = e^{\alpha_j x}\left(a_i^{(j)} \cos \beta_j x - b_i^{(j)} \sin \beta_j x\right),$$

$$y_{i2}^{(j)} = e^{\alpha_j x}\left(a_i^{(j)} \sin \beta_j x + b_i^{(j)} \cos \beta_j x\right) \quad (i = 1,\, 2,\, 3,\, ...,\, n)$$

- k_j ir raksturīgā vienādojuma m**-tās kārtas (reāla) sakne**. Šajā gadījumā vienādojumu sistēmas (4) matricas rangs $r \geqslant n - m$.

Jāaplūko divi gadījumi.

① $r = n - m$

Sistēmā (4) ir r neatkarīgi vienādojumi un $m = n - r$ vienādojumi ir citu vienādojumu sekas. Tāpēc m nezināmo lielumu λ vērtības var brīvi izvēlēties, bet pārējās atrod no sistēmas, izmantojot iepriekš izvēlētās vērtības. Ar atrastajām koeficientu $\lambda_i^{(j)}$ un k_j vērtībām sastāda partikulārā atrisinājuma funkcijas

$$y_i^{(j)} = \lambda_i^{(j)} e^{k_j x}$$

② $r > n - m$

Šajā gadījumā iegūto partikulārā atrisinājuma funkciju skaits ir mazāks par saknes k_j kārtu. Tāpēc funkcijas $y_i^{(j)}$ sistēmas partikulārajā atrisinājumā meklē kā funkciju

$$e^{k_j x}, \quad x e^{k_j x}, \quad x^2 e^{k_j x}, \quad ..., \quad x^{m-1} e^{k_j x}$$

lineāras kombinācijas, kurās koeficientus nosaka, ievietojot diferenciālvienādojumu sistēmā (3) atrisinājumu $y_i^{(j)}$ izteiksmes.

- $k_{j(1,\,2)} = \alpha_j \pm \beta_j i$ ir raksturīgā vienādojuma m**-tās kārtas kompleksas saistītas saknes**. Partikulāro atrisinājumu atrod analogi iepriekš aplūkotajiem gadījumiem.

<table>
<tr>
<td>Konstanšu variāciju metode lineāru nehomogēnu diferenciālvienādojumu sistēmas partikulārā atrisinājuma y_i^* atrašanai</td>
<td>
Ja

$$\overline{y}_i = C_1 y_i^{(1)} + C_2 y_i^{(2)} + ... + C_n y_i^{(n)}$$

ir lineāru homogēnu diferenciālvienādojumu sistēmas (2) vispārīgais atrisinājums, tad nehomogēnās istēmas (1) partikulāro atrisinājumu y_i^* atrod ar konstanšu variāciju metodi, t. i., homogēnās sistēmas vispārīgajā atrisinājumā konstantes C_i aizvieto ar funkcijām $C_i(x)$, $(i = 1, 2, 3, ..., n)$.
Tātad

$$y_i^* = C_1(x) y_i^{(1)} + C_2(x) y_i^{(2)} + ... + C_n(x) y_i^{(n)} \qquad (6)$$

No nosacījuma, ka funkcijas (6) apmierina nehomogēno diferenciālvienādojumu sistēmu (1), iegūst

$$\begin{cases} y_1^{(1)} C_1'(x) + y_1^{(2)} C_2'(x) + ... + y_1^{(n)} C_n'(x) = f_1(x) \\ y_2^{(1)} C_1'(x) + y_2^{(2)} C_2'(x) + ... + y_2^{(n)} C_n'(x) = f_2(x) \\ .... \\ y_n^{(1)} C_1'(x) + y_n^{(2)} C_2'(x) + ... + y_n^{(n)} C_n'(x) = f_n(x) \end{cases} \qquad (7)$$

Atrisinot sistēmu (7), atrod $C_j'(x) = \varphi_j(x)$ $(j = 1, 2, 3, ..., n)$, no kurienes

$$C_j(x) = \int \varphi_j(x) dx$$

(par integrēšanas konstanti var izraudzīties 0).
Tādējādi

$$y_i^* = \int \varphi_1(x) dx \cdot y_i^{(1)} + \int \varphi_2(x) dx \cdot y_i^{(2)} + ... + \int \varphi_n(x) dx \cdot y_i^{(n)}$$

$(i = 1, 2, 3, ..., n)$
</td>
</tr>
<tr>
<td>Lineāras nehomogēnas diferenciālvienādojuma sistēmas vispārīgā atrisinājuma pieraksts matricu formā</td>
<td>
$Y = \overline{Y} + Y^*$,

kur $$\overline{Y} = \begin{pmatrix} C_1 y_1^{(1)} + C_2 y_1^{(2)} + ... + C_n y_1^{(n)} \\ C_1 y_2^{(1)} + C_2 y_2^{(2)} + ... + C_n y_2^{(n)} \\ .... \\ C_1 y_n^{(1)} + C_2 y_n^{(2)} + ... + C_n y_n^{(n)} \end{pmatrix}, \quad Y^* = \begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ ... \\ y_n^* \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$$

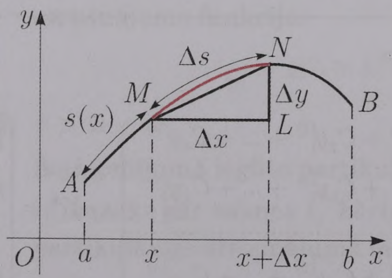
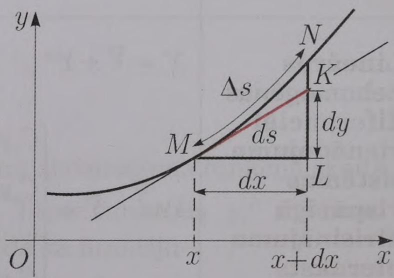
jeb

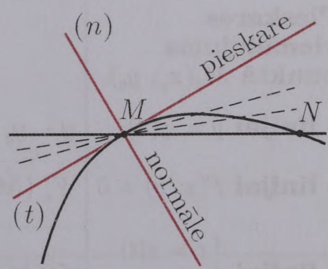
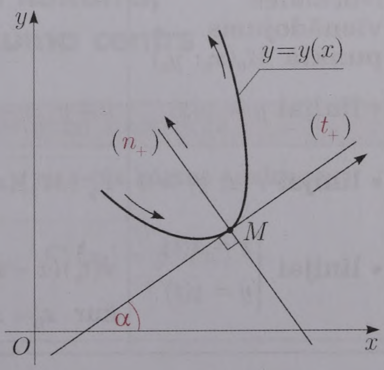
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & ... & C_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \cdots & y_n^{(1)} \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & \cdots & y_n^{(2)} \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ ... \\ y_n^* \end{pmatrix}$$
</td>
</tr>
</table>

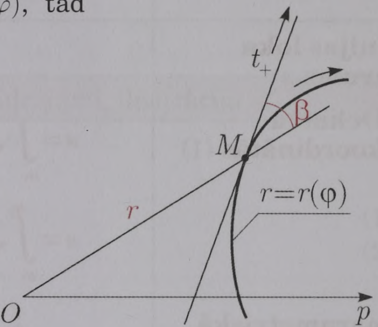
16. DIFERENCIĀLĢEOMETRIJA

Visās izteiksmēs un vienādojumos izmantotās funkcijas ir nepārtraukti diferencējamas (arī vairākkārtīgi).

16.1. Plaknes līnijas uzdošanas veidi, loka diferenciālis, loka garums, pieskare un normāle

Nosaukums	Apzīmējums, paskaidrojumi, ilustrācija
Līnijas uzdošanas veidi • **Dekarta koordinātās**	$y = y(x)$ vai $x = x(y)$ (1) $F(x;\ y) = 0$ (2)
• **parametriskā veidā**	$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ (3)
• **polārās koordinātās**	$r = r(\varphi)$ (4)
Līnijas pozitīvais virziens	Līnijas mainīgā (tekošā) punkta pārvietošanās **virziens, kas atbilst** funkciju (1)–(4) argumenta x, y, t, φ **pozitīvajam pieaugumam**.
Līnijas loka diferenciālis ds	$ds \approx \Delta s$, kur Δs – līnijas loka garuma pieaugums
• **Dekarta koordinātās** (1)	$ds = \sqrt{1+(y')^2}\,dx$, kur $y = y(x)$   $s(x) = \overset{\smile}{AM}$ – līnijas loka garums kā x funkcija $\Delta s = \overset{\smile}{MN}$ – loka garuma pieaugums, kur $M(x;\ y)$, $N(x + \Delta x;\ y + \Delta y)$; $s'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta x}$ – loka garuma atvasinājums; $ds = s'(x)\,dx$ – loka diferenciālis (loka garuma pieauguma Δs galvenā daļa)

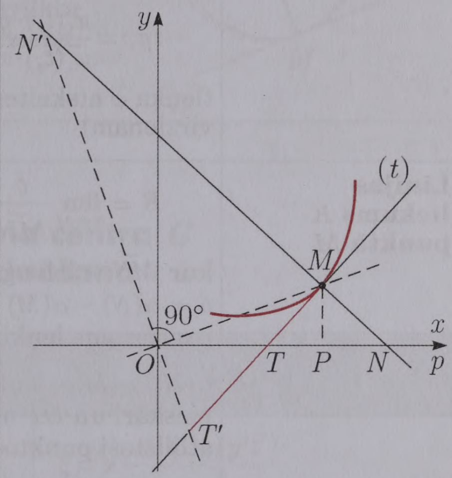
• **parametriskā veidā** (3)	$ds=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$ $\left(\dot{x}=\dfrac{dx(t)}{dt};\quad \dot{y}=\dfrac{dy(t)}{dt}\right)$
• **polārās koordinātās** (4)	$ds=\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi$ $(x=r\cos\varphi;\quad y=r\sin\varphi)$
Līnijas loka garums s • **Dekarta koordinātās** (1)	$s=\int\limits_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(y')^2}\,dx$ $s=\int\limits_{y_1}^{y_2}\sqrt{1+(x')^2}\,dy$
• **parametriskā veidā** (3)	$s=\int\limits_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$
• **polārās koordinātās** (4)	$s=\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi$
Līnijas pieskare (t) **punktā** M; **pieskares pozitīvais virziens** (t_+); **pieskares virziena vienības vektors** $\vec{t}$ $(\lvert\vec{t}\rvert=1)$	**Pieskare – sekantes** MN **robežstāvoklis**, kad $N\to M$, pārvietojoties pa līniju. (t_+) – pieskares virziens, kas atbilst līnijas apiešanas pozitīvajam virzienam. Līnijai $y=y(x)$ $\vec{t}=\dfrac{\vec{i}+y'(x_0)\cdot\vec{j}}{\sqrt{1+(y'(x_0))^2}}$ 
Līnijas normāle (n) **punktā** M; **normāles pozitīvais virziens** (n_+); **normāles virziena vienības vektors** $\vec{n}$ $(\lvert\vec{n}\rvert=1)$	**Taisne, kas perpendikulāra pieskarei.** (n_+) – normāles virziens, ko iegūst, pagriežot pieskari (t_+) par 90° pozitīvajā virzienā (pretēji pulksteņa rādītāju kustības virzienam). Līnijai $y=y(x)$ $\vec{n}=\dfrac{-y'(x_0)\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{1+(y'(x_0))^2}}$ 

Pieskares (t_+) virziena leņķis α	Leņķis, ko (t_+) veido ar Ox ass pozitīvo virzienu. Līnijai $y = y(x)$ $$\mathrm{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}, \quad \sin\alpha = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\alpha = \frac{dx}{ds}$$ (ds – līnijas loka diferenciālis; sk. zīm. 274, 275. lpp.)
Leņķis β starp pieskari (t_+) un līnijas punkta polāro rādiusu r	Ja līnijas vienādojums ir $r = r(\varphi)$, tad $$\mathrm{tg}\beta = \frac{r}{\frac{dr}{d\varphi}}, \quad \sin\beta = r\frac{d\varphi}{ds},$$ $$\cos\beta = \frac{dr}{ds}$$ 

Plaknes līnijas pieskares un normāles vienādojumi

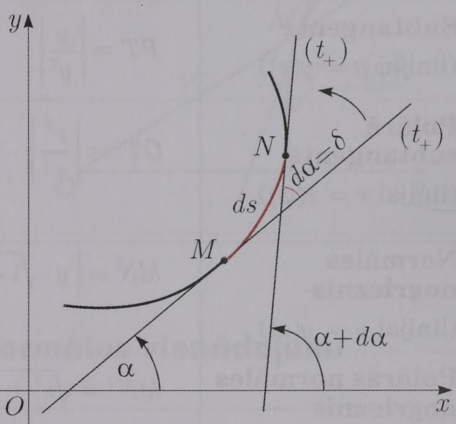
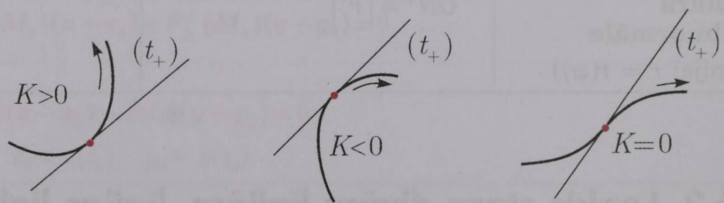
Pieskares vienādojums punktā $M_0(x_0;\, y_0)$	
• **līnijai** $y = y(x)$	$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$
• **līnijai** $F(x;\, y) = 0$	$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)=0$
• **līnijai** $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$	$\dot{y}(t_0)(x-x_0)-\dot{x}(t_0)(y-y_0)=0$, kur $x_0 = x(t_0)$; $y_0 = y(t_0)$
Normāles vienādojums punktā $M_0(x_0;\, y_0)$	
• **līnijai** $y = y(x)$	$y - y_0 = -\dfrac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$
• **līnijai** $F(x;\, y) = 0$	$F'_y(M_0)(x-x_0)-F'_x(M_0)(y-y_0)=0$
• **līnijai** $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$	$\dot{x}(t_0)(x-x_0)+\dot{y}(t_0)(y-y_0)=0$, kur $x_0 = x(t_0)$; $y_0 = y(t_0)$

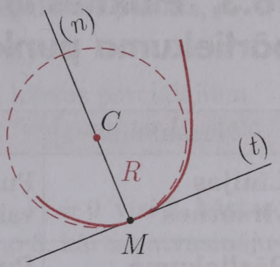
Biežāk lietotie plaknes līnijas elementi

Nosaukums	Formula, ilustrācija	
Pieskares nogrieznis (līnijai $y = y(x)$)	$MT = \left\lvert \dfrac{y \cdot \sqrt{1+(y')^2}}{y'} \right\rvert$	
Polārās pieskares nogrieznis (līnijai $r = r(\varphi)$)	$MT' = \left\lvert \dfrac{r \cdot \sqrt{r^2+(r')^2}}{r'} \right\rvert$	
Subtangente (līnijai $y = y(x)$)	$PT = \left\lvert \dfrac{y}{y'} \right\rvert$	
Polārā subtangente (līnijai $r = r(\varphi)$)	$OT' = \left\lvert \dfrac{r^2}{r'} \right\rvert$	
Normāles nogrieznis (līnijai $y = y(x)$)	$MN = \left\lvert y \cdot \sqrt{1+(y')^2} \right\rvert$	
Polārās normāles nogrieznis (līnijai $r = r(\varphi)$)	$MN' = \sqrt{r^2+(r')^2}$	
Subnormāle (līnijai $y = y(x)$)	$PN = \lvert y \cdot y' \rvert$	
Polārā subnormāle (līnijai $r = r(\varphi)$)	$ON' = \lvert r' \rvert$	

16.2. Leņķis starp divām līnijām, līnijas liekums, liekuma rādiuss, liekuma riņķis un liekuma centrs

Nosaukums	Apzīmējums, paskaidrojumi, ilustrācija
Līniju saskares punkts	$M_0(x_0;\ y_0)$ ir līniju $y = f(x)$ un $y = g(x)$ n-tās kārtas **saskares punkts**, ja $f(x_0) = g(x_0),\quad f'(x_0) = g'(x_0),\quad \dots,\quad f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0),$ bet $f^{(n+1)}(x_0) \neq g^{(n+1)}(x_0)$.

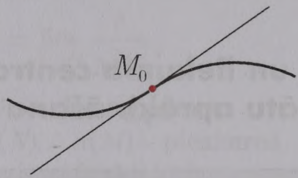
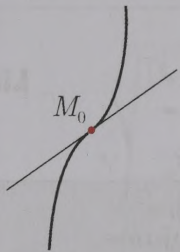
Leņķis φ starp divām līnijām	Leņķis, kuru izveido līniju $y = y_1(x)$ un $y = y_2(x)$ krustpunktā $M_0(x_0;\ y_0)$ novilktās "pozitīvās" pieskares. $$tg\varphi = \frac{y_2'(x_0) - y_1'(x_0)}{1 + y_1'(x_0)\cdot y_2'(x_0)}$$ vai $$tg\varphi = \frac{\dot{x}_1(t_0)\cdot\dot{y}_2(t_0) - \dot{x}_2(t_0)\cdot\dot{y}_1(t_0)}{\dot{x}_1(t_0)\cdot\dot{x}_2(t_0) + \dot{y}_1(t_0)\cdot\dot{y}_2(t_0)}$$ (leņķa φ atskaites virziens – pretēji pulksteņa rādītāju kustības virzienam)
Līnijas liekums K punktā M	$$K = \lim_{N\to M}\frac{\delta}{\overset{\smile}{MN}},$$ kur $\overset{\smile}{MN}$ – loka garums, $\delta = \alpha(N) - \alpha(M)$ – pieskares pagrieziena leņķis; $\alpha(N)$, $\alpha(M)$ – leņķi starp pieskari un Ox asi atbilstoši punktos N un M. Tātad $$K = \frac{d\alpha}{ds},$$ kur $\delta = d\alpha$, $\overset{\smile}{MN} = ds$  Jo lielāks ir $\|K\|$, jo izliektāka ir līnija.  Ja $K > 0$, – līnija ieliekta; ja $K < 0$, – līnija izliekta. Taisnei un arī līnijas pārliekuma punktā $K = 0$.
Liekuma rādiuss R	$$R = \frac{1}{\|K\|},$$ kur K – līnijas liekums Riņķa līnijai, kuras rādiuss ir a, liekuma rādiuss $R = a$; taisnes liekuma rādiuss $R = \infty$

Liekuma riņķis; liekuma centrs	**Riņķis, kura rādiuss** $R=\dfrac{1}{\lvert K\rvert}$; šī riņķa centrs C ir **liekuma centrs**. C atrodas uz normāles, kas novilkta punktā M līknes ieliekuma virzienā.	

Liekuma K un liekuma centra C koordinātu aprēķināšana

Līnijas vienādojums	K	$C(\xi;\ \eta)$
$y=y(x)$	$K=\dfrac{y''}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}$	$\xi=x-\dfrac{y'(1+(y')^2)}{y''}$ $\eta=y+\dfrac{1+(y')^2}{y''}$
$F(x;\ y)=0$	$K=\dfrac{m}{\sqrt{(F'_x)^2+(F'_y)^2}}$ $m=\dfrac{-(F'_y)^2\cdot F''_{xx}+2F'_x\cdot F'_y\cdot F''_{xy}-(F'_x)^2F''_{yy}}{(F'_x)^2+(F'_y)^2}$	$\xi=x+\dfrac{F'_x}{m},\quad \eta=y+\dfrac{F'_y}{m}$
$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$	$K=\dfrac{n}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}$ $n=\dfrac{\dot{x}\cdot\ddot{y}-\ddot{x}\cdot\dot{y}}{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$	$\xi=x-\dfrac{\dot{y}}{n},\quad \eta=y+\dfrac{\dot{x}}{n}$
$r=r(\varphi)$	$K=\dfrac{p}{r^2+(r')^2}$ $p=\dfrac{r^2+2(r')^2-r\cdot r''}{r^2+(r')^2}$	$\xi=r\cos\varphi-\dfrac{1}{p}(r\cos\varphi+r'\sin\varphi)$ $\eta=r\sin\varphi-\dfrac{1}{p}(r\sin\varphi-r'\cos\varphi)$

16.3. Plaknes līnijas virsotnes, pārliekuma punkti un singulārie punkti

Nosaukums	Apzīmējums, paskaidrojumi, ilustrācija
Līnijas virsotnes	Punkti, kuros liekumam K (sk. 16.2.) ir maksimums vai minimums (liekuma ekstrēma punkti).
Pārliekuma punkts; tā noteikšana	**Punkts M_0, kurā līnija krusto pieskari, mainot savu izliekumu (no ieliektas uz izliektu vai otrādi).**  Pārliekuma punktā M_0 • $K = 0$ • K **maina zīmi** (ejot caur punktu M_0) Ja līnijas vienādojums ir $y = y(x)$, iespējamos pārliekuma punktus nosaka, atrisinot vienādojumu $y''(x) = 0.$ Ja x_0 ir šī vienādojuma sakne un $y'''(x_0) = 0;\ \ldots;\ y^{(m-1)}(x_0) = 0;\ y^{(m)}(x_0) \neq 0,$ kur $m \geqslant 3$ – nepāra skaitlis, tad x_0 **ir pārliekuma punkta abscisa**. [Ja m ir pāra skaitlis un $y^{(m)}(x_0) < 0$, tad līnija punktā x_0 ir izliekta, bet, ja $y^{(m)}(x_0) > 0$, tad – ieliekta.] P i e z ī m e s • Pārliekuma punkta eksistenci var konstatēt arī citādi, proti, pārbaudot, vai, ejot caur punktu x_0, $y''(x)$ maina zīmi. • Ja līnija uzdota ar vienādojumu $F(x;\ y) = 0 \quad \text{vai} \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad \text{vai} \quad r = r(\varphi),$ tad iespējamos pārliekuma punktus atrod, atrisinot atbilstošu vienādojumu $F''_{xx} \cdot (F'_y)^2 - 2F'_x \cdot F'_y \cdot F''_{xy} + F''_{yy}(F'_x)^2 = 0 \quad (F'^2_x + F'^2_y \neq 0)$ vai $\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} = 0 \quad (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0)$ vai $r^2 + 2(r')^2 - r \cdot r'' = 0 \quad (r^2 + (r')^2 \neq 0)$

Singulārie punkti; to veidi

Punkts $M_0(x_0;\ y_0)$ ir līnijas $F(x;\ y) = 0$ singulārais punkts, ja

$$F'_x(x_0;y_0)=0, \quad F'_y(x_0;y_0)=0$$

Ja turklāt šajā punktā vismaz viens no 2. kārtas parciālajiem atvasinājumiem F''_{xx}, F''_{yy}, F''_{xy} nav nulle, tad punktu M_0 sauc par **dubultpunktu**.

Ja punktā M_0 kopā ar nosacījumu $F'_x = 0$, $F'_y = 0$ visi 2. kārtas atvasinājumi ir nulles, bet vismaz viens no 3. kārtas atvasinājumiem nav nulle utt., tad singulāro punktu M_0 sauc attiecīgi par **trīskāršu, četrkāršu, ..., n-kāršu singulāru punktu**.

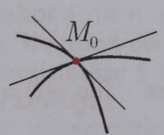
Ja M_0 ir dubultpunkts, tad tā veidu nosaka izteiksme

$$\Delta = F''_{xx}(x_0;y_0)\cdot F''_{yy}(x_0;y_0) - (F''_{xy}(x_0;y_0))^2$$

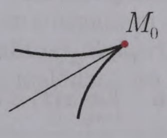
- Ja $\Delta > 0$, – M_0 ir **izolēts singulārs punkts** (šajā punktā reālas pieskares nav).
- Ja $\Delta < 0$, – M_0 ir **mezgla punkts** (šajā punktā ir divas dažādas pieskares).
- Ja $\Delta = 0$, – M_0 ir vai nu **izolēts singulārs punkts**, vai arī līnijas $F(x;\ y)$ zariem šajā punktā ir viena kopīga pieskare, piemēram, M_0 ir 1. veida vai 2. veida **atgriezes punkts** vai arī **pašpieskaršanās punkts**.

Piezīmes

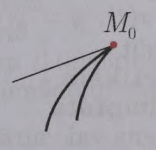
- Iespējams arī, ka vienā punktā ir divas vai vairākas singularitātes.
- Iespējami arī cita veida singulāri punkti (parasti – transcendentām līnijām), piemēram, līnijas **lūzuma punkts, gala punkts, pārtraukuma punkts, asimptotisks punkts** u. c.



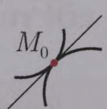
Mezgla punkts



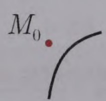
1. veida atgriezes punkts



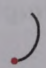
2. veida atgriezes punkts

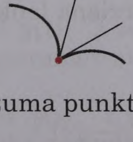


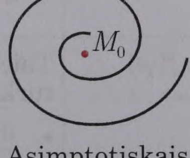
Pašpieskaršanās punkts



Izolēts punkts

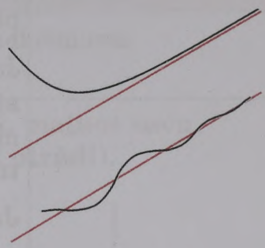

Gala punkts


Lūzuma punkts

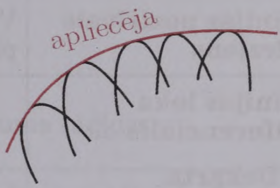
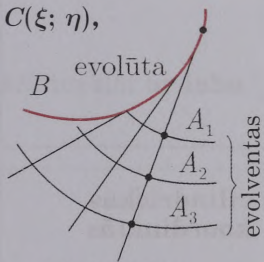


Asimptotiskais punkts

16.4. Asimptotas

Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi, ilustrācija
Asimptota (sk. arī 169. lpp.)	**Taisne, kurai neierobežoti tuvojas līnija, ja tās tekošais punkts neierobežoti attālinās no koordinātu sākumpunkta.** Tātad līnijas tekošā punkta M attālums līdz asimptotai tiecas uz 0, ja M neierobežoti attālinās no koordinātu sākumpunkta. Līnija asimptotai neierobežoti tuvojas (asimptotiski tuvojas) vai nu no vienas puses, vai arī vijoties ap to. 
Līnijai $y = f(x)$ var būt • **vertikāla asimptota** (viena vai vairākas)	$x = a$, ja $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$
• **slīpa asimptota** (ne vairāk kā divas)	$y = kx + b$, kur $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx)$
• **horizontāla asimptota** (ne vairāk kā divas)	$y = b$, ja $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b \neq \infty$
Līnijai $x = x(t)$, $y = y(t)$ var būt • **vertikāla asimptota** (viena vai vairākas)	$x = a$, ja $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = a \neq \infty$, bet $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \infty$
• **horizontāla asimptota**	$y = b$, ja $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \infty$, bet $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = b \neq \infty$
• **slīpa asimptota**	$y = kx + b$, ja $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \infty$ un $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \infty$, bet eksistē galīgas robežas $k = \lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)}$, $b = \lim\limits_{t\to t_0} (y(t) - kx(t))$
Līnijas $r = f(\varphi)$ **asimptota**	Taisne, kuras virziena leņķis ir α un attālums no pola ir p, turklāt • $\lim\limits_{\varphi\to\alpha} r = \infty$ • $p = \lim\limits_{\varphi\to\alpha} (r(\sin(\alpha - \varphi))$

16.5. Līkņu saimes apliecēja, evolūta un evolventa

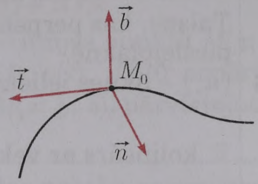
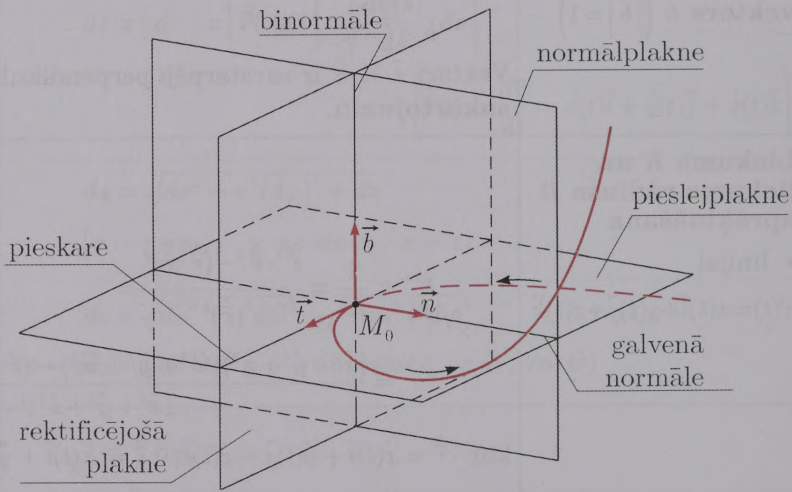
Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi, ilustrācija
Līkņu saime	**Līkņu kopa**, kuru izsaka no parametra α atkarīgs vienādojums $F(x;\ y;\ \alpha) = 0.$
Līkņu saimes apliecēja	Līnija, kurai katrā punktā pieskaras kāda no dotās saimes $F(x;\ y;\ \alpha) = 0$ līknēm. **Apliecēju iegūst**, izslēdzot parametru α no vienādojumiem $F = 0, \quad \dfrac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$ $(F''_{\alpha\alpha} \neq 0$ un $F'_x \cdot F''_{\alpha y} - F'_y \cdot F''_{\alpha x} \neq 0)$ 
Evolūta un evolventa	**Līkni** B**, kuru izveido liekuma centri** $C(\xi;\ \eta)$**, sauc par dotās līnijas** A **evolūtu, bet pašu līniju** A **– par evolventu.** Evolūta ir evolventas normāļu saimes apliecēja. Vienai evolūtai atbilst vesela evolventu saime $A_1, A_2, A_3, \ldots$ **Evolventas vienādojumu** nosaka diferenciālvienādojumu sistēma, kuru iegūst no liekuma centra koordinātu ξ un η izteiksmēm. **Evolventu var iegūt**, "notinot" nostieptu diegu no līknes, kurai ir evolūtas forma. **Evolūtas parametriskos vienādojumus iegūst**, izsakot ξ un η atkarībā no mainīgajiem $x,\ y,\ t$ vai φ (sk. liekuma centra koordinātas). Sakarību starp B (evolūtas) koordinātām ξ un η iegūst, izslēdzot no šiem vienādojumiem parametru. 

16.6. Telpas līnija un tās lokālie elementi

Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi, formulas
Līniju (līkni) telpā var uzdot • **kā divu virsmu šķelšanās līniju**	$\begin{cases} F(x;y;z)=0 \\ G(x;y;z)=0 \end{cases}$
• **ar parametriskiem vienādojumiem**	$x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = z(t)$ (1) (t – jebkurš parametrs) vai $x = x(s),\quad y = y(s),\quad z = z(s)$ (2) (s – līnijas loka garums)

• **vektoriālā veidā – ar vektorfunkciju**	$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ (3) vai $\vec{r}(s)=x(s)\vec{i}+y(s)\vec{j}+z(s)\vec{k}$, (4) kur $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ – līnijas punkta $M(x;\ y;\ z)$ rādiusvektors. Ja $\vec{r}(t)$ koordinātas $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ ir nepārtrauktas funkcijas, tad $\vec{r}(t)$ galapunkts $M(x;\ y;\ z)$, pārvietojoties telpā, apraksta **līniju** – **hodogrāfu**.
Līnijas pozitīvais virziens	Virziens, kuru uz līnijas nosaka parametra t pozitīvs pieaugums vai parametra s atskaites virziens.
Līnijas loka diferenciālis ds • **Dekarta koordinātās**	$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt$ $\left(\dot{x}=\dot{x}(t)=\frac{dx}{dt};\quad \dot{y}=\dot{y}(t)=\frac{dy}{dt};\quad \dot{z}=\dot{z}(t)=\frac{dz}{dt}\right)$ $ds=\left\|d\vec{r}\right\|=\left\|\dot{\vec{r}}(t)dt\right\|=\left\|\frac{d\vec{r}(s)}{ds}\cdot ds\right\|$ $\left(\dot{\vec{r}}(t)=\frac{d\vec{r}}{dt}=\dot{x}(t)\vec{i}+\dot{y}(t)\vec{j}+\dot{z}(t)\vec{k}\right)$
• **cilindriskās koordinātās**	$ds=\sqrt{dr^2+r^2(d\varphi)^2+dz^2}$ $(x=r\cos\varphi;\quad y=r\sin\varphi;\quad z=z)$
• **sfēriskās koordinātās**	$ds=\sqrt{d\rho^2+\rho^2 d\Theta^2+\rho^2\sin^2\Theta d\varphi^2}$ $(x=\rho\cos\varphi\sin\Theta;\quad y=\rho\sin\varphi\sin\Theta;\quad z=\rho\cos\Theta)$
Līnijas M_0M loka garums s	$s=\int_{t_0}^{t} ds$, kur t_0 atbilst punktam M_0 un t – punktam M
Pieskare; pieskares pozitīvais virziens (t_+); pieskares virziena vienības vektors $\vec{t}$ $(\|\vec{t}\|=1)$	**Pieskare punktā M_0 – sekantes M_0M robežstāvoklis,** kad $M_0\to M$; (t_+) atbilst līnijas apiešanas pozitīvajam virzienam. $\vec{t}=\frac{d\vec{r}(s)}{ds}$ (Vektors $\vec{t}$ vērsts pa līnijas pieskari (t_+), kas novilkta punktā M.)
Līnijas pieslejplakne (oskulējošā plakne) punktā M_0	Caur pieskari punktā M_0 un līnijas punktu M novilktas plaknes robežstāvoklis, kad $M\to M_0$
Līnijas normālplakne punktā M_0	Plakne, kas iet caur punktu M_0 **perpendikulāri šajā punktā novilktai līnijas pieskarei.**

Līnijas rektificējošā plakne	Plakne, kas iet caur punktu M_0 **perpendikulāri šajā punktā novilktai pieslejplaknei un normālplaknei.**
Līnijas galvenā normāle; tās pozitīvais virziens (n_+); galvenās normāles virziena vienības vektors $\vec{n}$ $\left(\lvert\vec{n}\rvert=1\right)$	Taisne, kas perpendikulāra pieskarei punktā M_0 un atrodas pieslejplaknē. (n_+) – līknes ieliekuma virzienā. $\vec{n}$ kolineārs ar vektoru $\frac{d^2\vec{r}(s)}{ds^2}$, t. i., $\vec{n}=\frac{1}{K}\cdot\frac{d^2\vec{r}(s)}{ds^2}$, kur K – līnijas liekums; $R=\frac{1}{K}$ – liekuma rādiuss.
Binormāle; binormāles virziena vienības vektors $\vec{b}$ $\left(\lvert\vec{b}\rvert=1\right)$	Taisne, kas iet caur punktu M_0 un atrodas normālplaknē un rektificējošā plaknē. Binormāle perpendikulāra pieskarei (t_+) un normālei (n_+); tātad $\vec{b}=\vec{t}\times\vec{n}$ Vektori $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ ir savstarpēji perpendikulāri, turklāt **ar labo sakārtojumu**.
Liekuma K un liekuma rādiusa R aprēķināšana • līnijai $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$	$K^2=\frac{1}{R^2}=\frac{\dot{\vec{r}}^2\cdot\ddot{\vec{r}}^2-(\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}})^2}{(\dot{\vec{r}})^3}=$ $=\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)(\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2)-(\dot{x}\cdot\ddot{x}+\dot{y}\cdot\ddot{y}+\dot{z}\cdot\ddot{z})^2}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^3}$, kur $\dot{\vec{r}}=\dot{x}(t)\vec{i}+\dot{y}(t)\vec{j}+\dot{z}(t)\vec{k}$, $\ddot{\vec{r}}=\ddot{x}(t)\vec{i}+\ddot{y}(t)\vec{j}+\ddot{z}(t)\vec{k}$
• līnijai $\vec{r}(s)=x(s)\vec{i}+y(s)\vec{j}+z(s)\vec{k}$	$K=\frac{1}{R}=\left\lvert\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right\rvert=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}$
Liekuma centrs $C(\xi;\ \eta;\ \zeta)$; liekuma centra koordinātu aprēķināšana	Liekuma centrs ar koordinātām $C(\xi;\ \eta;\ \zeta)$ atrodas uz galvenās normāles $R=\frac{1}{K}$ vienību attālumā no atbilstošā līnijas punkta. $\xi=x+R^2\frac{d^2x}{ds^2}$; $\eta=y+R^2\frac{d^2y}{ds^2}$; $\zeta=z+R^2\frac{d^2z}{ds^2}$
Liekuma riņķis	Riņķis ar centru $C(\xi;\ \eta;\ \zeta)$ un rādiusu R; $R=\frac{1}{K}$ kur K – līnijas liekums. Liekuma riņķis atrodas līknes pieslejplaknē.

Telpas līnijas kustīgais triedrs (pavadošais triedrs, **Frenē triedrs**)	**Līnijas punktā M_0 novilktās pieskares galvenās normāles un binormāles vienības vektori $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ ar labo sakārtojumu.**  Katrā līnijas punktā M_0 (izņemot singulāros punktus) $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ **nosaka trīs savstarpēji perpendikulāras plaknes:** • $\vec{t}$ un $\vec{n}$ nosaka **pieslejplakni** (jeb **oskulējošo plakni**); • $\vec{n}$ un $\vec{b}$ nosaka **normālplakni**; • $\vec{t}$ un $\vec{b}$ nosaka **rektificējošo plakni**. 
Vērpums T un vērpuma rādiuss τ	$T = \frac{1}{\tau} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta s} = \frac{d\varepsilon}{ds}$, kur ε – **vērpuma leņķis**; Δs – attālums starp diviem tuviem līnijas punktiem M_0 un M; $\Delta\varepsilon$ – **leņķis starp binormālēm šajos punktos**. $T > 0$ vai $T < 0$ atkarībā no pārvietošanās pa līniju: vai, skatoties binormāles (b_+) virzienā no pieslejplaknes, līnija vijas augšup vai lejup (labā vai kreisā skrūve). Ja visos līnijas punktos $T = 0$, – līnija atrodas plaknē.

• līnijai $\vec{r}(s)=$
$=x(s)\vec{i}+y(s)\vec{j}+z(s)\vec{k}$

$$T=\frac{1}{\tau}=R^2\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\cdot\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right)=\frac{1}{(x'')^2+(y'')^2+(z'')^2}\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix},$$

kur $x'=\dfrac{dx}{ds}$; ...; $z'''=\dfrac{d^3z}{ds^3}$, R – liekuma rādiuss

• līnijai $\vec{r}(t)=$
$=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$

$$T=\frac{1}{\tau}=R^2\,\frac{\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}}\cdot\dddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|^3}=\frac{R^2}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^3}\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}, \qquad (5)$$

kur

$$\dot{\vec{r}}(t)=\dot{x}(t)\vec{i}+\dot{y}(t)\vec{j}+\dot{z}(t)\vec{k}, \quad \dot{x}=\frac{dx(t)}{dt}; \ ...; \ \dddot{z}=\frac{d^3z(t)}{dt^3}$$

P i e m ē r s **Skrūves līnijas liekuma K un vērpuma T aprēķināšana**

Skrūves līnijas vienādojumi

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \\ z=bt \end{cases}$$

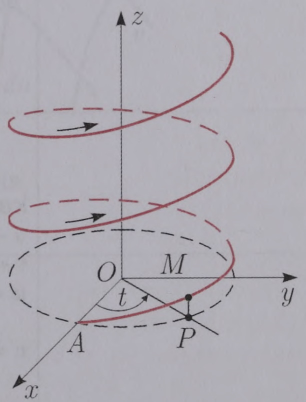
- ja $a>0$; $b>0$, – **labā skrūves līnija** (sk. zīm.)
- ja $a>0$; $b<0$, – **kreisā skrūves līnija**
- ja $b=0$, – **riņķa līnija** xy plaknē

Skrūves līnijas **loka garums**

$$s=\int_0^t\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt=t\sqrt{a^2+b^2}$$

Aizvietojot līnijas vienādojumos t ar s, iegūst

$$\begin{cases} x=a\cos\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ y=a\sin\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ z=\dfrac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$



Tātad liekums

$$K=\frac{1}{R}=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}=\frac{a}{a^2+b^2}=\text{const}$$

(R – liekuma rādiuss)

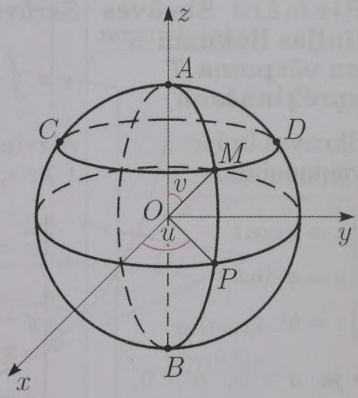
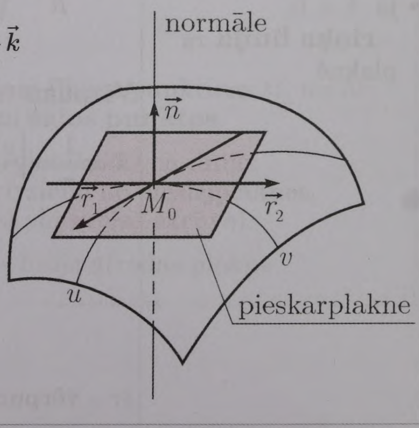
Vērpums (sk. (5))

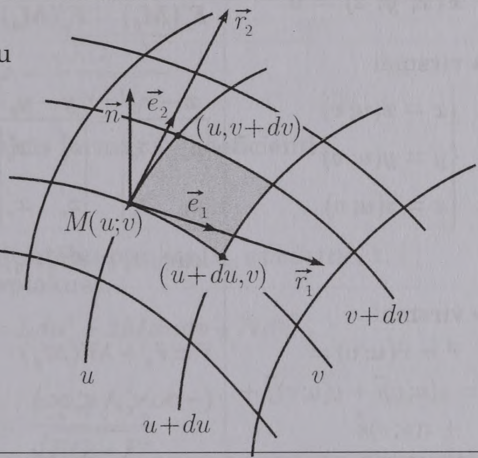
$$T=\frac{1}{\tau}=\left(\frac{a^2+b^2}{a^2}\right)^2\cdot\frac{1}{((-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+b^2)^3}\times$$

$$\times\begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix}=\frac{b}{a^2+b^2}=\text{const}$$

(τ – vērpuma rādiuss)

16.7. Virsma un tās lokālie elementi

Jēdziens, nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi, formulas, ilustrācija
Virsmas uzdošanas veidi • **atklātā veidā** • **apslēptā veidā** • **parametriskā veidā** • **vektoriālā veidā**	$z = z(x;\ y)$ (1) $F(x;\ y;\ z) = 0$ (2) $x = x(u;\ v),\ \ y = y(u;\ v),\ \ z = z(u;\ v)$ (3) $\vec{r} = \vec{r}(u; v) = x(u; v)\vec{i} + y(u; v)\vec{j} + z(u; v)\vec{k}$ (4) ($\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ – virsmas punkta $M(x;\ y;\ z)$ rādiusvektors)
Līklīniju koordinātu līnijas; līknes vienādojums uz virsmas	Fiksējot vienādojumā (3) vai (4) vienu parametru un mainot otru, iegūst t. s. **līklīniju u, v koordinātu līnijas – līkņu saimes** $u = \text{const}$ un $v = \text{const}$ $F(u;\ v) = 0$ – līknes vienādojums uz virsmas P i e m ē r s. *Sfēras ar rādiusu R parametriskie vienādojumi* $\begin{cases} x = R\cos u \cdot \sin v \\ y = R\sin u \cdot \sin v\ , \\ z = R\cos v \end{cases}$ kur u – **garums** v – **polārais leņķis** $u = \text{const}$ – **meridiāni** (piem., AMB) $v = \text{const}$ – **paralēles** (piem., CMD)  $u = \sphericalangle(OP;\ Ox)$ $v = \sphericalangle(OM;\ Oz)$
Koordinātu līniju pieskaru virziena vektori $\vec{r_1}$, $\vec{r_2}$ punktā $M(u;\ v)$	$\vec{r_1} = \vec{r}_u'(u, v) = \dfrac{\partial x}{\partial u}\vec{i} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\vec{j} + \dfrac{\partial z}{\partial u}\vec{k}$ $\vec{r_2} = \vec{r}_v'(u, v) = \dfrac{\partial x}{\partial v}\vec{i} + \dfrac{\partial y}{\partial v}\vec{j} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\vec{k}$ Atbilstošie vienības vektori: $\vec{e_1} = \dfrac{\vec{r_1}}{\lvert\vec{r_1}\rvert},\quad \vec{e_2} = \dfrac{\vec{r_2}}{\lvert\vec{r_2}\rvert}$ $(\vec{r_1} \nparallel \vec{r_2})$ 

Pieskarplakne punktā $M(u;\ v)$	Plakne, kurā atrodas visas koordinātu līniju pieskares, kas novilktas punktā $M(u;\ v)$. Pieskarplakni nosaka $\vec{e}_1$ un $\vec{e}_2$ $(\vec{e}_1 \nparallel \vec{e}_2)$
Normāle punktā M; normāles virziena vienības vektors $\vec{n}$	**Taisne, kas perpendikulāra pieskarplaknei** $$\vec{n} = \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{\lvert \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 \rvert} \qquad (\lvert \vec{n} \rvert = 1)$$
Kustīgais triedrs	Virsmas punktā $M(u;\ v)$ novilkto pieskaru virzienu vienības vektori $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ un normāles vienības vektors $\vec{n}$ **, kuri veido labo sakārtojumu.** 
Virsmas laukuma diferenciāļa vektors $\overrightarrow{dS}$	$\overrightarrow{dS} = (\vec{r}_1(u;v) \times \vec{r}_2(u;v))dudv$ $\overrightarrow{dS}$ vērsts vektora $\vec{n}$ virzienā; tā modulis $\lvert \overrightarrow{dS} \rvert = \lvert \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 \rvert\, dudv \approx S_{\text{paralelogr.}}$
Pieskarplaknes vienādojums punktā $M_0\,(x_0;\ y_0;\ z_0)$ • virsmai $z = z(x;\ y)$	$z - z_0 = z'_x(M_0)(x - x_0) + z'_y(M_0)(y - y_0)$
• virsmai $F(x;\ y;\ z) = 0$	$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0$
• virsmai $\begin{cases} x = x(u;v) \\ y = y(u;v) \\ z = z(u;v) \end{cases}$	$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_u(u_0,v_0) & y'_u(u_0,v_0) & z'_u(u_0,v_0) \\ x'_v(u_0,v_0) & y'_v(u_0,v_0) & z'_v(u_0,v_0) \end{vmatrix} = 0,$$ kur $x_0 = x(u_0;v_0)$; $y_0 = y(u_0;v_0)$; $z_0 = z(u_0;v_0)$
• virsmai $\vec{r} = \vec{r}(u;v) =$ $= x(u;v)\vec{i} + y(u;v)\vec{j} +$ $+ z(u;v)\vec{k}$	$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n}(M_0) = 0$

Normāles vienādojums punktā $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$	
• virsmai $z = z(x;\ y)$	$\dfrac{x-x_0}{z'_x(M_0)} = \dfrac{y-y_0}{z'_y(M_0)} = \dfrac{z-z_0}{-1}$
• virsmai $F(x;\ y;\ z) = 0$	$\dfrac{x-x_0}{F'_x(M_0)} = \dfrac{y-y_0}{F'_y(M_0)} = \dfrac{z-z_0}{F'_z(M_0)}$
• virsmai $\begin{cases} x = x(u;v) \\ y = y(u;v) \\ z = z(u;v) \end{cases}$	$\dfrac{x-x_0}{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}} = \dfrac{y-y_0}{\begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}} = \dfrac{z-z_0}{\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}}$, kur $x_0 = x(u_0;v_0);\ y_0 = y(u_0;v_0);\ z_0 = z(u_0;v_0)$
• virsmai $\vec{r} = \vec{r}(u;v) =$ $= x(u;v)\vec{i} + y(u;v)\vec{j} +$ $+ z(u;v)\vec{k}$	$\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\vec{n}(M_0)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$
Virsmas singulārie punkti	Punkti, kuros $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \vec{0}$ Singulāro punktu nosacījums virsmai $F(x;\ y;\ z) = 0$: $F'_x = F'_y = F'_z = 0$ (konisks punkts)
Virsmas (3) vai (4) **pirmā kvadrātiskā forma Φ_1**	Ja $M_0(u;\ v)$, $M(u+du;\ \ v+dv)$ – virsmas punkti, tad loka $\overset{\frown}{M_0M}$ garums $\Delta s \approx ds,$ un $\Phi_1 = ds^2 = (d\vec{r})^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$ kur $E = (\vec{r}_1)^2 = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2$ $F = \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = x'_u \cdot x'_v + y'_u \cdot y'_v + z'_u \cdot z'_v$ $G = (\vec{r}_2)^2 = (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2$ turklāt nesingulāros punktos $E > 0,\ \ G > 0,\ \ EG - F^2 > 0$
Līnijas $\vec{r} = \vec{r}(u(t); v(t))$ **loka garums uz virsmas**	$s = \displaystyle\int_{t_0}^{t} ds = \int_{t_0}^{t} \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt$
Virsmas apgabala (σ) **laukums** S	$S = \displaystyle\iint_{(\sigma)} dS = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv,$ kur $(u;\ v) \in D$; $E,\ F,\ G$ – pirmās kvadrātiskās formas Φ_1 koeficienti.

Leņķis α starp divām virsmas līnijām $\vec{r}=\vec{r}(u_1(t);v_1(t))$ un $\vec{r}=\vec{r}(u_2(t);v_2(t))$	α – **leņķis starp pieskaru virzienu vektoriem** šo līniju krustpunktā. $$\cos\alpha=\frac{E\,\dot{u}_1\,\dot{u}_2+F(\dot{u}_1\,\dot{v}_2+\dot{v}_1\,\dot{u}_2)+G\,\dot{v}_1\,\dot{v}_2}{\sqrt{E\,\dot{u}_1^2+2F\,\dot{u}_1\,\dot{v}_1+G\,\dot{v}_1^2}\cdot\sqrt{E\,\dot{u}_2^2+2F\,\dot{u}_2\,\dot{v}_2+G\,\dot{v}_2^2}},$$ kur $\dot{u}_1=\dfrac{du_1}{dt};\quad \dot{u}_2=\dfrac{du_2}{dt};\quad \dot{v}_1=\dfrac{dv_1}{dt};\quad \dot{v}_2=\dfrac{dv_2}{dt}$
Leņķis φ starp koordinātu līnijām $u=u_0$ un $v=v_0$, kas iet caur punktu $M_0(u_0;\ v_0)$	$$\cos\varphi=\frac{F}{\sqrt{EG}}\quad\text{vai}\quad\sin\varphi=\frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{EG}}$$ E, F, G – pirmās kvadrātiskās formas Φ_1 koeficienti.
Virsmas (3) vai (4) **otrā kvadrātiskā forma Φ_2** ($\vec{n}$ – virsmas normāles vienības vektors)	**Φ_2 raksturo virsmas izliektību** punkta M_0 apkārtnē, t. i., virsmas novirzi no pieskarplaknes. $$\Phi_2=-d\vec{n}\cdot d\vec{r}=\vec{n}\cdot d^2\vec{r}=Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2,$$ kur $$L=\vec{n}\cdot\vec{r}\,''_{uu}=-\vec{n}\,'_u\cdot\vec{r}\,'_u=\frac{\vec{r}\,''_{uu}\cdot\vec{r}\,'_u\cdot\vec{r}\,'_v}{\sqrt{EG-F^2}}$$ $$M=\vec{n}\cdot\vec{r}\,''_{uv}=-\vec{n}\,'_u\cdot\vec{r}\,'_v=-\vec{n}\,'_v\cdot\vec{r}\,'_u=\frac{\vec{r}\,''_{uv}\cdot\vec{r}\,'_u\cdot\vec{r}\,'_v}{\sqrt{EG-F^2}}$$ $$N=\vec{n}\cdot\vec{r}\,''_{vv}=-\vec{n}\,'_v\cdot\vec{r}\,'_v=\frac{\vec{r}\,''_{vv}\cdot\vec{r}\,'_u\cdot\vec{r}\,'_v}{\sqrt{EG-F^2}}$$
Virsmas normālšķēlums; tā liekums K_n	Virsmas šķēlums punktā M_0 ar plakni, kurā atrodas virsmas normāle. $$K_n=-\frac{d\vec{r}\cdot d\vec{n}}{ds^2}=L\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2M\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+N\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=\frac{\Phi_2}{\Phi_1},$$ kur Φ_1, Φ_2 – pirmā un otrā kvadrātiskā forma; L, M, N – otrās kvadrātiskās formas koeficienti
Galvenie liekumi k_1 un k_2 punktā $M_0(u;\ v)$	Eksistē divi, savstarpēji perpendikulāri virzieni, kuru atbilstošo normālšķēlumu liekumi punktā M_0 ir galvenie liekumi k_1 un k_2; tos iegūst, atrisinot vienādojumu $$(EG-F^2)k^2-(EN+LG-2FM)k+LN-M^2=0,$$ kur E, F, G, L, M, N – pirmās un otrās kvadrātiskās formas koeficienti.
Eilera formula	$$k_n=k_1\cos^2\varphi+k_2\sin^2\varphi,$$ kur φ – leņķis starp virzieniem, kurus nosaka k_1 un k_2

Galveno liekumu rādiusi	$R_1=\frac{1}{k_1},\quad R_2=\frac{1}{k_2}$ Virsmai $z=f(x;\ y)$ R_1 un R_2 iegūst, atrisinot vienādojumu $(rt-s^2)R^2+h(2pqs-(1+p^2)t-(1+q^2)r)R+h^4=0,$ kur $p=\frac{\partial z}{\partial x},\quad q=\frac{\partial z}{\partial y},\quad r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\quad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$ $h=\sqrt{1+p^2+q^2}$
Virsmas vidējais liekums H	$H=\frac{k_1+k_2}{2}=\frac{EN-2FM+GL}{2(EG-F^2)}$
Pilnais (Gausa) liekums	$K=k_1\cdot k_2=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}$
Galveno normālšķēlumu plakņu virziens	Galveno normālšķēlumu plaknes ir savstarpēji perpendikulāras; to virzienus nosaka $\frac{dy}{dx}$ vērtība, ko iegūst, atrisinot vienādojumu $(tpq-s(1+q^2))\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(t(1+p^2)-r(1+q^2))\frac{dy}{dx}+s(1+p^2)-rpq=0$
Virsmas punktu klasifikācija (K – galvenais liekums)	$K>0$ – **eliptisks punkts** $K<0$ – **hiperbolisks punkts** $K=0$ – **parabolisks punkts**
Virsmas ģeodēziskā līnija	**Līnija, kuras katrā punktā galvenā normāle sakrīt ar virsmas normāli.** Īsākais attālums (pa virsmu) starp diviem virsmas punktiem ir ģeodēziskās līnijas loka garums starp tiem. Ģeodēziskās līnijas diferenciālvienādojums virsmai $z=f(x;\ y)$: $(1+p^2+q^2)\frac{d^2y}{dx^2}=pt\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+(2ps-qt)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(pr-2qs)\frac{dy}{dx}-qr$

17. FUNKCIJU RINDAS

17.1. Funkciju rindas jēdziens un ar to saistītie jautājumi

Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi
Funkciju rinda	Izteiksme $u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, kur funkcijām $u_1(x),\ u_2(x),\ ...,\ u_n(x),\ ...$ ir kopīgs definīcijas apgabals (D)
Konverģences apgabals	Visu to argumentu vērtību x_0 kopa, ar kurām konverģē skaitļu rinda $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$.
Rindas parciālsumma	$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$$
Rindas summa	Parciālsummu virknes robeža, kad $n \to \infty$, t. i., $$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$$
Rinda konverģē (diverģē)	Rindas parciālsummām eksistē (neeksistē) galīga robeža, kad $n \to \infty$
Rindas atlikums	$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$$
Funkciju rindas konverģences nepieciešamais un pietiekamais nosacījums	Funkciju rinda konverģē tad un tikai tad, ja tās atlikums $R_n(x)$ tiecas uz nulli, kad $n \to \infty$
Funkciju rindas vienmērīgā konverģence intervālā $[a;\ b] \subset (D)$	Funkciju rindu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ sauc par **vienmērīgi konverģējošu intervālā** $[a;\ b]$ uz summu $S(x)$, ja katram mazam pozitīvam skaitlim ε var atrast tādu skaitli N, ka **visām rindas parciālsummām** $S_n(x)$, kuru locekļu skaits $n > N$, **visos** intervāla $[a;\ b]$ punktos ir spēkā nevienādība $$\lvert S_n(x) - S(x)\rvert < \varepsilon$$
Vienmērīgās konverģences pazīme	Funkciju rinda $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ **konverģē vienmērīgi** intervālā $[a;\ b]$, ja eksistē tāda **konverģējoša pozitīvu skaitļu rinda** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ka visos intervāla $[a;\ b]$ punktos $\lvert u_n(x)\rvert \leqslant a_n$

Vienmērīgi konverģējošu funkciju rindu īpašības	① **Rindas summas nepārtrauktība** Ja $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$, ... ir **nepārtrauktas funkcijas** intervālā $[a; b]$ un **rinda** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ **konverģē vienmērīgi** šajā intervālā, tad **rindas summa** $S(x)$ **ir nepārtraukta funkcija** intervālā $[a; b]$. ② **Robežpāreja aiz summas zīmes** Ja funkciju rinda $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ konverģē vienmērīgi kādā punkta x_0 apkārtnē, eksistē robeža $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = a_n$ un skaitļu rinda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverģē uz summu S, tad $\lim_{x\to x_0} S(x) = S$ jeb $$\lim_{x\to x_0}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0} u_n(x)$$ ③ **Funkciju rindas integrēšana pa locekļiem** Ja $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$, ... ir nepārtrauktas funkcijas intervālā $[a; b]$ un rinda $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ konverģē vienmērīgi šajā intervālā uz summu $S(x)$, tad $\int_{\alpha}^{x} S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{\alpha}^{x} u_n(x)\,dx\right)$ jeb $$\int_{\alpha}^{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{\alpha}^{x} u_n(x)dx\right)$$ $$(a \leqslant \alpha < x \leqslant b)$$ ④ **Funkciju rindas atvasināšana pa locekļiem** Ja $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$, ... ir nepārtraukti diferencējamas funkcijas intervālā $[a; b]$, kurā uz summu $S(x)$ konverģē rinda $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ un vienmērīgi konverģē rinda $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$, tad $$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \text{ jeb } \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

17.2. Pakāpju rindas

Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi
Pakāpju rinda	Funkciju rinda, kuras locekļi ir pakāpju funkcijas ar naturāliem kāpinātājiem: $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

Vispārināta pakāpju rinda	Funkciju rinda ar $x - x_0$ pakāpēm: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + ... + a_n(x-x_0)^n + ...$
Konver-ģences apgabals	**Pakāpju rinda absolūti konverģē konverģences apgabalā – intervālā $(-R; R)$. Vispārinātā pakāpju rinda absolūti konverģē intervālā $(x_0 - R; x_0 + R)$, kur R – konverģences rādiuss, x_0 – rindas centrs.** R aprēķina, izmantojot rindas koeficientus, pēc formulas $$R = \lim_{n\to\infty}\left\lvert \frac{a_n}{a_{n+1}} \right\rvert \quad \text{vai} \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\lvert a_n \rvert}}.$$ Šīs formulas var lietot tikai tad, ja neviens rindas koeficients nav 0. Ja rinda satur pakāpes tikai ar pāra (nepāra) skaitļu kāpinātājiem vai arī kāpinātājus nosaka pēc kāda cita likuma, tad konverģences apgabalu atrod, izmantojot skaitļu rindu Dalambēra (vai Košī) kritēriju. Lai noskaidrotu, vai pakāpju rinda **konverģē intervāla $(-R; R)$ galapunktos**, rindā ievieto $x = R$, $x = -R$ un **pēta iegūto skaitļu rindu konverģenci**.
Pakāpju rindas vienmērīgā konverģence	**Pakāpju rinda konverģē vienmērīgi katrā intervālā $[-r; r] \subset (-R; R)$** Secinājumi • Pakāpju **rindas summa ir nepārtraukta funkcija.** • Pakāpju rindā **robežpāreju var izdarīt aiz summas zīmes.** • Konverģences intervālā **pakāpju rindu var atvasināt pa locekļiem.** • Konverģences intervālā **pakāpju rindu var integrēt pa locekļiem.** Atvasinot vai integrējot pakāpju rindu, iegūst citu pakāpju rindu, kurai ir tāds pats konverģences rādiuss kā dotajai rindai.
Funkcijas $f(x)$ izvirzīšana pakāpju rindā (Teilora rindā)	Ja pakāpju rinda konverģē un tās summa ir funkcija $f(x)$, tad **rindas koeficienti ir funkcijas $f(x)$ Teilora koeficienti**, t. i., $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Funkciju $f(x)$ var izvirzīt pakāpju rindā intervālā $(x_0 - R; x_0 + R)$ tad un tikai tad, ja funkcijai eksistē bezgalīgi daudz atvasinājumu šajā intervālā un Teilora formulas atlikuma loceklis $R_n(x)$ tiecas uz nulli, kad $n \to \infty$ visiem $x \in (x_0 - R; x_0 + R)$. Funkcijas $f(x)$ izvirzījums **Teilora rindā**: $$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + ...$$ Teilora rindas speciāls gadījums ir rinda ar x pakāpēm (**Maklorena rinda**): $$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ...$$

Dažu elementāro funkciju pakāpju rindas un to konverģences intervāli	$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty; +\infty)$ $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$ $x \in (-\infty; +\infty)$ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$ $x \in (-\infty; +\infty)$ $(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n + ...,$ $x \in (-1; 1)$ $\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1},$ $x \in (-1; 1]$ $\mathrm{arctg}\, x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$ $x \in (-1; 1]$

17.3. Furjē rinda. Furjē integrālis

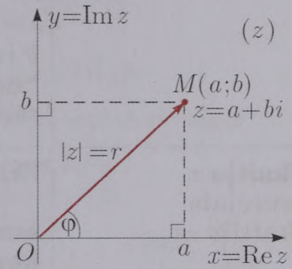
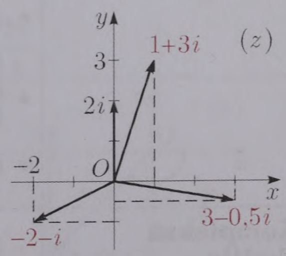
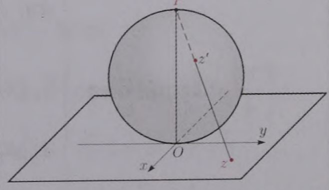
Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi
Ortogonālu funkciju virkne intervālā $[a; b]$	Nepārtrauktu funkciju virkne $\varphi_1(x);\ \varphi_2(x);\ \varphi_3(x);\ ...;\ \varphi_n(x);\ ...$ (1) ar nosacījumu, ka $\int_a^b \varphi_m(x) \cdot \varphi_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{ja } n \neq m, \\ \lambda_n^2 > 0, & \text{ja } n = m \end{cases}$
Ortonormētu funkciju sistēma	Skaitli $\lambda_n = \sqrt{\int_a^b \varphi_n^2(x) dx}$ sauc par funkcijas $\varphi_n(x)$ **normu**. Ja funkciju sistēma (1) ir ortogonāla un visu funkciju normas ir vienādas ar 1, tad šo funkciju sistēmu sauc par **ortonormētu sistēmu**. Tātad **ortonormētai funkciju sistēmai** $\lambda_n = \sqrt{\int_a^b \varphi_n^2(x) dx} = 1$, t. i., $\int_a^b \varphi_n^2(x) dx = 1 \quad (n = 1, 2, 3, ...)$

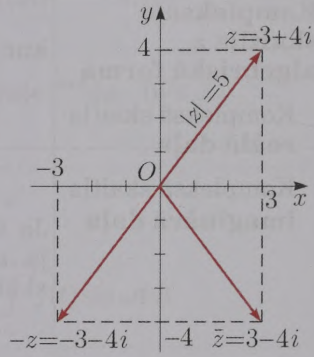
Vispārinātā Furjē rinda	**Funkciju rinda** $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ **, kuras locekļi ir intervālā** $[a;\ b]$ **ortogonālas funkcijas**. Ja šī rinda vienmērīgi konverģē intervālā $[a;\ b]$ un tās summa ir funkcija $f(x)$, tad rindas koeficientus (Furjē koeficientus) aprēķina pēc formulas $$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\cdot\varphi_n(x)dx}{\int_a^b \varphi_n^2(x)dx}$$
Trigonometrisko funkciju virknes ortogonalitāte	Trigonometrisko funkciju virkne $1;\ \cos x;\ \sin x;\ \cos 2x;\ \sin 2x;\ \ldots;\ \cos nx;\ \sin nx;\ \ldots$ ir **ortogonālu funkciju virkne intervālā** $[-\pi;\ \pi]$
Periodiskas funkcijas $f(x)$ **ar periodu** 2π **trigonometriskā Furjē rinda**	Funkciju rinda $$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$ Ja šī rinda vienmērīgi konverģē intervālā $[-\pi;\ \pi]$ un tās summa ir funkcija $f(x)$, tad rindas koeficientus aprēķina pēc formulām $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,$$ $$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \qquad (n = 1;\ 2;\ 3;\ \ldots)$$
Periodiskas funkcijas $f(x)$ **ar periodu** $2l$ **trigonometriskā Furjē rinda**	$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right),$$ kur $a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,\quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx,$ $$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x dx$$
Pāra funkcijas Furjē rinda	$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$ kur $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx,\quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx \qquad (n = 1;\ 2;\ 3;\ \ldots)$ $$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l}x,$$ kur $a_o = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)dx,\quad a_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x dx \qquad (n = 1;2;3;\ldots)$

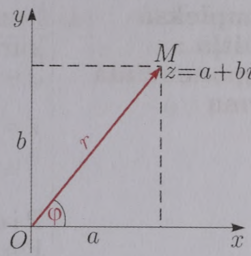
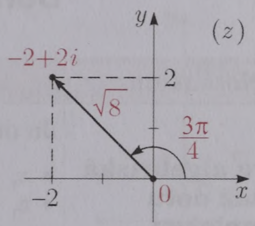
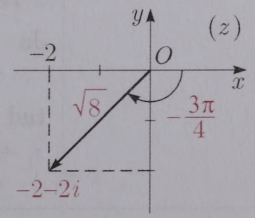
Nepāra funkcijas Furjē rinda	$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, kur $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n = 1;\ 2;\ 3;\ \ldots)$ $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l}x$, kur $b_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \quad (n = 1;2;3;\ldots)$
Furjē rindas konverģence	Ja periodiska funkcija $f(x)$ ar periodu $2l$ ir **nepārtraukta** intervālā $[-l;\ l]$ vai arī šajā intervālā tai ir **galīgs skaits** tikai **1. veida pārtraukuma punktu** un $f(x)$ **intervālā** $[-l;\ l]$ ir **gabaliem monotona**, tad funkcijas Furjē rinda konverģē; rindas summa ir $f(x)$ intervālos, kur funkcija ir nepārtraukta, bet katrā pārtraukuma punktā x_0 rindas summa ir skaitlis $\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_0-0} f(x) + \lim_{x\to x_0+0} f(x)\right)$
Furjē rindas kompleksā forma	$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$, kur $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \quad (n \in \mathbb{Z})$
Funkcijas $f(x)$ Furjē integrālis	$f(x) = \int_0^{+\infty} (a(\omega)\cos\omega x + b(\omega)\sin\omega x)d\omega$, kur $a(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t dt,\quad b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t dt$
Pāra funkcijas Furjē integrālis	$f(x) = \int_0^{+\infty} a(\omega)\cos\omega x d\omega$, kur $a(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\cos\omega t dt$
Nepāra funkcijas Furjē integrālis	$f(x) = \int_0^{+\infty} b(\omega)\sin\omega x d\omega$, kur $b(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\sin\omega t dt$
Funkcijas $f(x)$ Furjē integrāļa kompleksā forma	$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{\omega(x-t)i}dt\right)d\omega$
Funkcijas $f(x)$ Furjē transformācija	$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-\omega ti}dt,\quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\,e^{\omega xi}d\omega$
Pāra funkcijas $f(x)$ Furjē kosinus-transformācija	$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(t)\cos\omega t dt,\quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} F_c(\omega)\cos\omega x d\omega$
Nepāra funkcijas $f(x)$ Furjē sinus-transformācija	$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(t)\sin\omega t dt,\quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} F_s(\omega)\sin\omega x d\omega$

18. KOMPLEKSIE SKAITĻI UN KOMPLEKSĀ MAINĪGĀ FUNKCIJU TEORIJA

18.1. Kompleksie skaitļi

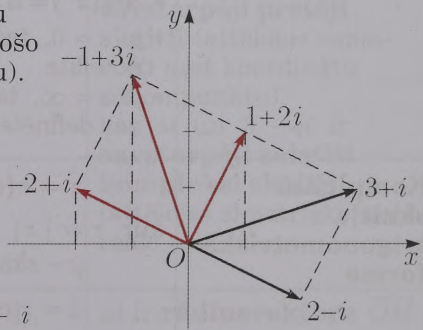
Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi	Ģeometriskā interpretācija, piemēri
Imaginārā vienība	i $\left(i=\sqrt{-1}\right)$ $i^2=-1;\ \ i^3=-i;\ \ i^4=1;\ \ i^5=i;\ \ \ldots$ $(i^{4k}=1)$	
Kompleksais skaitlis z algebriskā formā	$z=a+bi,$ kur $a,\ b\in\mathbb{R}$	
Kompleksā skaitļa **reālā daļa**	$a=\text{Re}\,z$	$z=a+bi$ attēlo **kā punktu** $M(a;\ b)$ koordinātu plaknē xOy; vai arī **kā punkta** M **rādiusvektoru** $\overrightarrow{OM}$. O – pols Ox – reālā ass Oy – imaginārā ass
Kompleksā skaitļa **imaginārā daļa**	$b=\text{Im}\,z$ Ja $b=0$, tad $z=a$ – reāls skaitlis; ja $a=0$, tad $z=bi$ – tīri imaginārs skaitlis.	
Komplekso skaitļu kopa $\mathbb{C}$; kompleksā plakne (z)	Kopa, kuras elementi ir kompleksi skaitļi. Kompleksos skaitļus attēlo ar punktiem Dekarta koordinātu plaknē, kuru šajā gadījumā sauc par komplekso plakni.	$z_1=1+3i;\ \ z_2=2i$ $z_3=-2-i;\ \ z_4=3-0{,}5i$ 
Bezgalīgi tālais punkts $z=\infty$	**Iedomāts punkts kompleksajā plaknē**, kas atrodas ārpus visiem riņķiem ar centru koordinātu sākumpunktā, lai cik liels arī būtu riņķa rādiuss. Ja komplekso skaitļu kopu attēlo ar **Rīmaņa sfēras** punktu kopu kompleksās plaknes stereogrāfiskajā projekcijā uz šīs sfēras, tad sfēras **pols P atbilst bezgalīgi tālajam punktam kompleksajā plaknē**.	z' ir kompleksās plaknes punkta z stereogrāfiskā projekcija uz Rīmaņa sfēras.

Paplašinātā kompleksо skaitļu kopa $\bar{\mathbb{C}}$; paplašinātā kompleksā plakne ($\bar{z}$)	Komplekso skaitļu kopa $\mathbb{C}$, kurai pievienots bezgalīgi tālais punkts $z = \infty$	
Komplekso skaitļu vienādība	$z_1 = a + bi$ un $z_2 = c + di$ ir vienādi, t. i., $z_1 = z_2$, ja $\mathbf{Re}\,z_1 = \mathbf{Re}\,z_2$ un $\mathbf{Im}\,z_1 = \mathbf{Im}\,z_2$ ($a = c$ un $b = d$) Piezīme. **Kompleksiem skaitļiem attieksme “nevienādība” nav definēta.** Divus kompleksus skaitļus salīdzināt nav iespējams (var salīdzināt tikai to moduļus).	
Skaitļa z pretējais skaitlis $-z$	Skaitļus $z = a + bi$ un $-z = -a - bi$ sauc par **savstarpēji pretējiem kompleksiem skaitļiem**.	
Skaitļa z kompleksi saistītais skaitlis $\bar{z}$	Ja $z = a + bi$, tad $\bar{z} = a - bi$ t. i., $\mathbf{Re}\,\bar{z} = \mathbf{Re}\,z$, $\mathbf{Im}\,\bar{z} = -\mathbf{Im}\,z$ Skaitļus z un $\bar{z}$ sauc par **savstarpēji saistītiem kompleksiem skaitļiem**.	
Īpašības	• $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = \|z\|^2$ • $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ • $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$ • $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ • $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ • $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$	$3 + 4i$ un $-3 - 4i$ ir **savstarpēji pretēji skaitļi** (attēlojas simetriski pret koordinātu sākumpunktu). $3 + 4i$ un $3 - 4i$ ir **savstarpēji saistīti kompleksi skaitļi** (attēlojas simetriski pret reālo asi).
Kompleksā skaitļa z modulis r	$r = \|z\| = \sqrt{(\mathbf{Re}\,z)^2 + (\mathbf{Im}\,z)^2}$ Ja $z = a + bi$, tad $\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$	$\|z\|$ ir **rādiusvektora $\overrightarrow{OM}$ garums**, kur $O(0;\,0)$ un $M(a;\,b)$.
Īpašības	• $\|\bar{z}\| = \|z\|$ • $\left\|\frac{z_1}{z_2}\right\| = \frac{\|z_1\|}{\|z_2\|}$ • $\|z_1 \cdot z_2\| = \|z_1\| \cdot \|z_2\|$ • $\|z^n\| = \|z\|^n$ • $\|z_1\| - \|z_2\| \leqslant \|z_1 + z_2\| \leqslant \|z_1\| + \|z_2\|$ • $\|z_1\| - \|z_2\| \leqslant \|z_1 - z_2\| \leqslant \|z_1\| + \|z_2\|$ • **ja $z = \infty$, tad $\|z\| = \infty$**	Piemērs $\|3 + 4i\| = \|-3 - 4i\| =$ $= \|3 - 4i\| = \sqrt{9 + 16} = 5$

Kompleksā skaitļa $z = a + bi$ **arguments** $\operatorname{Arg} z$; **argumenta galvenā vērtība** $\arg z = \varphi$	$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$ $-\infty < \operatorname{Arg} z < \infty$ $\arg z = \varphi; \quad -\pi < \varphi \leqslant \pi$ $\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{b}{a}, \text{ ja } z \text{ atrodas I vai IV kvadrantā} \\ \operatorname{arctg}\frac{b}{a} + \pi, \text{ ja } z - \text{II kvadrantā} \\ \operatorname{arctg}\frac{b}{a} - \pi, \text{ ja } z - \text{III kvadrantā} \end{cases}$ Daži speciālgadījumi: $\varphi = \begin{cases} 0, & \text{ja } b = 0 \text{ un } a > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{ja } a = 0 \text{ un } b > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{ja } a = 0 \text{ un } b < 0 \\ \pi, & \text{ja } b = 0 \text{ un } a < 0 \end{cases}$	 $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\varphi = \sphericalangle(\overrightarrow{OM}, Ox)$ $a = r\cos\varphi;\ b = r\sin\varphi$ Piemērs $z = -2 + 2i$ 
Īpašības	• $\arg \bar{z} = -\arg z$ • $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ • $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$ • $\arg(z^n) = n \arg z$ • ja $z = 0$, tad arguments nav noteikts • ja $z = \infty$, tad arguments nav definēts	$\lvert z \rvert = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$ $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{-2}\right) + \pi =$ $= \operatorname{arctg}(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi =$ $= \frac{3\pi}{4}$
Kompleksā skaitļa z **trigonometriskā forma**	$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, kur $r = \lvert z \rvert$ – skaitļa z modulis, φ – skaitļa z arguments $\bar{z} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$, t. i., kompleksi saistītu skaitļu moduļi ir vienādi, bet argumenti – savstarpēji pretēji skaitļi.	 $-2 - 2i =$ $= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, jo $r = \lvert -2 - 2i \rvert = \sqrt{8}$; $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{-2}{-2}\right) - \pi =$ $= \operatorname{arctg} 1 - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$

Kompleksā skaitļa z eksponenciālā forma	$z = re^{i\varphi}$, kur $r = \lvert z \rvert$ – skaitļa z modulis, φ – skaitļa z arguments; $\bar{z} = re^{-i\varphi} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) =$ $= r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$ Piezīme Pāreju no kompleksā skaitļa eksponenciālās formas uz trigonometrisko (algebrisko) formu veic, izmantojot **Eilera formulu** $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$	$-2 - 2i = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

Darbības ar kompleksiem skaitļiem

Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi, ģeometriskā interpretācija
Divu algebriskā formā dotu kompleksu skaitļu summa, starpība, reizinājums, dalījums	Ja doti divi kompleksi skaitļi $z_1 = a + bi$ un $z_2 = c + di$, tad • $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$ • $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$ • $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$ • $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$ Divu kompleksu skaitļu summu (starpību) var attēlot kā atbilstošo rādiusvektoru summu (starpību).  Piemērs Ja $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -2 + i$, tad $z_1 + z_2 = -1 + 3i$; $z_1 - z_2 = 3 + i$
Trigonometriskā formā dotu kompleksu skaitļu reizinājums, dalījums, kāpināšana, saknes vilkšana	Ja $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, tad • $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$ • $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$ • **Muavra formula:** $(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

- $\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$, $(*)$

  kur $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

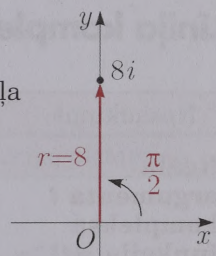
Daži speciālgadījumi:

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

$$\sqrt[n]{i} = \cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

n-tās pakāpes saknei no kompleksā skaitļa z ir n dažādas vērtības $w_1, w_2, \ldots, w_n$. Ja šos skaitļus attēlo kompleksajā plaknē un katrus divus tuvākos punktus savieno ar taisnes nogriezni, tad iegūst regulāru n-stūri, kas ievilkts riņķa līnijā, kuras rādiuss ir $\sqrt[n]{r}$ $(n > 2)$.

Piemērs



Lai aprēķinātu $\sqrt[3]{8i}$ visas 3 vērtības, nosaka skaitļa $8i$ moduli un argumentu: $r = 8$ (jo punkts $(0; 8)$ atrodas 8 vienību attālumā no koordinātu sākumpunkta).

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ (jo rādiusvektors ar Ox asi veido leņķi $\frac{\pi}{2}$). Saskaņā ar formulu $(*)$,

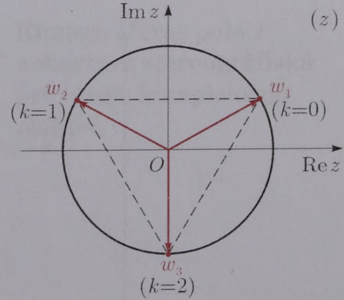
$$\sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}\right), \quad \text{kur } k = 0, 1, 2.$$

Tātad

$$w_1 = 2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}}{3}\right) = \sqrt{3} + i \approx 1{,}73 + i$$

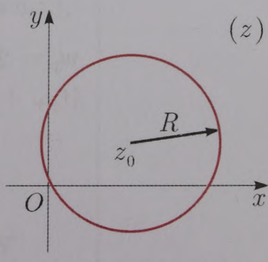
$$w_2 = 2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} + i \approx -1{,}73 + i$$

$$w_3 = 2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}\right) = -2i$$



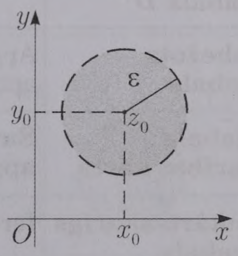
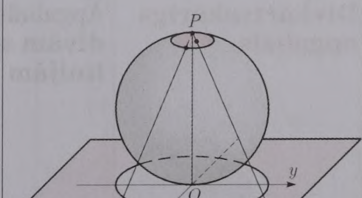
Darbības ar kompleksiem skaitļiem eksponenciālā formā	Ja $z = re^{i\varphi}$, $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$, tad • $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$ • $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$ • $z^n = r^n e^{in\varphi}$ • $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$, $k = 0, 1, 2, ..., n-1$ Piezīme $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ (Eilera formula)

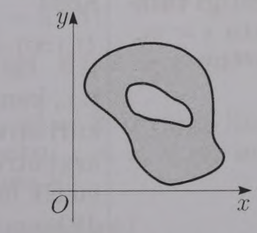
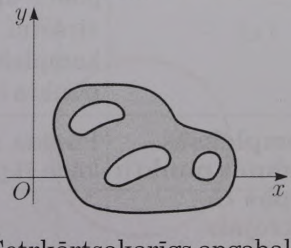
18.2. Reāla argumenta kompleksa funkcija. Līnija kompleksā plaknē

Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi	Piemēri
Reāla argumenta t kompleksa funkcija $z(t)$	$z(t) = f(t) = x(t) + iy(t)$ $(t \in \mathbb{R})$, kur $z(t)$ reālā daļa $$\mathrm{Re}z(t) = x(t);$$ imaginārā daļa $$\mathrm{Im}z(t) = y(t)$$	① $z(t) = Re^{it}$ jeb $\lvert z \rvert = R$ $(0 \leqslant t < 2\pi)$ ir riņķa līnija ar centru punktā $z = 0$ un rādiusu R, jo no Eilera formulas $e^{it} = \cos t + i\sin t$ seko, ka $z(t) = R(\cos t + i\sin t)$, $\begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\sin t \end{cases}$ jeb $x^2 + y^2 = R^2$ Analogi $z(t) = z_0 + Re^{it}$ jeb $\lvert z - z_0 \rvert = R$ ir riņķa līnija ar centru $z_0 = x_0 + iy_0$ un rādiusu R: $\begin{cases} x = x_0 + R\cos t \\ y = y_0 + R\sin t \end{cases}$ $(0 \leqslant t < 2\pi)$ 
Funkcijas $z(t)$ ģeometriskais attēlojums kompleksajā plaknē	Līnija, kuras parametriskie vienādojumi ir $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, un $x(t)$, $y(t)$ – nepārtraukti diferencējamas funkcijas	

Funkcijas $z(t)$ robeža, nepārtrauktība, integrālis	Šos jēdzienus definē analogi reālā mainīgā funkcijām: $\lim\limits_{t\to t_0} z(t)=\lim\limits_{t\to t_0} x(t)+i\lim\limits_{t\to t_0} y(t)=\alpha+i\beta$ $z'(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t}$ $z'(t)=x'(t)+iy'(t)$ $\int_{t_1}^{t_2} z(t)\,dt=\int_{t_1}^{t_2} x(t)\,dt+i\int_{t_1}^{t_2} y(t)\,dt$	② Imaginārai asij paralēlas taisnes vienādojums **Re**$z = a$ $(a = \text{const})$ ③ Reālai asij paralēlas taisnes vienādojums **Im**$z = b$ $(b = \text{const})$ ④ Taisnes stara vienādojums $\arg z = \alpha$, kur stars iziet no punkta $z = 0$ un ar reālo pusasi veido leņķi $\alpha \in (-\pi;\ \pi]$

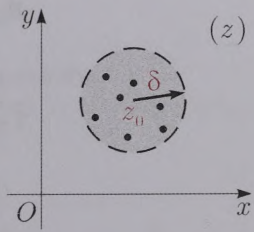
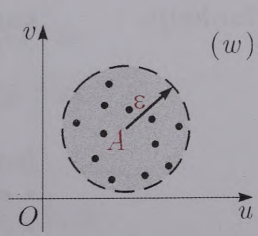
18.3. Apgabals kompleksajā plaknē

Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi	Ilustrācija, piemēri
Punkta z_0 ε-apkārtne kompleksajā plaknē $(\varepsilon > 0)$	Kopa $U(z_0)=\{z\in\mathbb{C},\ \text{kur}\ \lvert z-z_0\rvert<\varepsilon\}$, t. i., tāda riņķa iekšējie punkti, kura centrs ir punktā z_0 un rādiuss ε	
Bezgalīgi tālā punkta $z=\infty$ apkārtne	Kopa $U_\varepsilon(\infty)=\{z\in\overline{\mathbb{C}},\ \text{kur}\ \lvert z\rvert>\frac{1}{\varepsilon}\ \forall\,\varepsilon>0\}$, t. i., kompleksās plaknes punktu kopa, kuri atrodas **ārpus** visiem riņķiem ar centru koordinātu sākumpunktā, lai cik liels arī būtu riņķa rādiuss. Ja komplekso skaitļu kopu attēlo ar Rīmaņa sfēras punktu kopu, tad sfēras pola P apkārtnes (sfēras segmenta ar virsotni P) stereogrāfiskā projekcija ir kompleksās plaknes bezgalīgi tālā punkta apkārtne.	 Rīmaņa sfēras pola P apkārtnes stereogrāfiskā projekcija kompleksajā plaknē.
Kompleksās plaknes punktu kopas G iekšējais punkts	Punkts z_0, ja pie kopas G pieder z_0 un kāda šī punkta apkārtne.	

Apgabals D kompleksajā plaknē	Punktu kopa D ir apgabals, ja • kopa satur tikai iekšējus punktus (**vaļēja kopa**); • jebkurus divus šīs kopas punktus var savienot ar nepārtrauktu līniju, kuras visi punkti pieder šai kopai (**sakarīga kopa**).	① Apgabals $\|z - z_0\| < R$ – riņķa (ar centru z_0 un rādiusu R) iekšējā daļa. ② Apgabals $\|z - z_0\| > R$ – riņķa (ar centru z_0 un rādiusu R) ārpuse. ③ Apgabals $r < \|z - z_0\| < R$ – gredzens (ar centru z_0, iekšējo rādiusu r un ārējo rādiusu R). ④ $\mathrm{Re}z > a$ $(a \in \mathbb{R})$ – labā pusplakne. ⑤ $\mathrm{Im}z < b$ $(b \in \mathbb{R})$ – apakšējā pusplakne.
Apgabala D robežpunkts	Punkts, kurš **nepieder apgabalam, bet jebkurā tā apkārtnē atrodas apgabala punkti.**	
Apgabala D robeža	**Visu robežpunktu kopa.** Apgabala robežu var veidot viena vai vairākas līnijas, kā arī viens vai vairāki izolēti punkti.	
Slēgts apgabals $\overline{D}$	Apgabals D un tā robeža.	
Ierobežots apgabals	Apgabalu sauc par ierobežotu, ja eksistē tāda riņķa līnija, kura aptver šo apgabalu.	
Apgabala sakarības kārta	**Savstarpēji nesaistīto līniju un punktu skaits, kas veido apgabala robežu.**	
Vienkārtsakarīgs apgabals	Ierobežots apgabals, kura robeža ir **tikai viena līnija.**	
Divkārtsakarīgs apgabals	Apgabals, kura **robeža sastāv no divām savā starpā nesaistītām līnijām vai līnijas un punkta.**	 Divkārtsakarīgs apgabals
Vairākkārtsakarīgs apgabals	Apgabals, kura robeža sastāv no vairāk nekā divām savā starpā nesaistītām līnijām vai līnijām un punktiem.	 Četrkārtsakarīgs apgabals

18.4. Kompleksā mainīgā funkcija

Definīcija, robeža, nepārtrauktība

Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi	Ilustrācija, piemēri
Kompleksā mainīgā $z = x + iy$ funkcija	**Attēlojums** f, kas katram kompleksam skaitlim z no kopas $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ piekārto noteiktu kompleksu skaitli $w \in \overline{\mathbb{C}}$, t. i., $w = f(z)$ jeb $w = f(z) =$ $= f(x + iy) = u(x; y) + iv(x; y)$, kur $u(x; y) = \mathrm{Re}f(z)$, $v(z; y) = \mathrm{Im}f(z)$ $f(z)$ var būt vienvērtīga vai daudzvērtīga funkcija.	$w = z^2 = (x + iy)^2 =$ $= x^2 + 2xiy + (yi)^2 =$ $= (x^2 - y^2) + 2xyi$ $\mathrm{Re}w = u(x; y) = x^2 - y^2$ $\mathrm{Im}w = v(x; y) = 2xy$ ($w = z^2$ – vienvērtīga funkcija)
Funkcijas $f(z)$ nulle; nulles kārta	Skaitlis z_0, ja $f(z_0) = 0$ Ja $f(z) = (z - z_0)^k \varphi(z)$, kur $\varphi(z_0) \neq 0$, tad z_0 ir funkcijas $f(z)$ **k-tās kārtas nulle.**	
Ierobežota funkcija apgabalā $D \subset \overline{\mathbb{C}}$	Funkcija $f(z)$, ja eksistē tāds reāls skaitlis $M > 0$, ka $\lvert f(z)\rvert < M$ visiem $z \in D$	
Funkcijas $f(z)$ robeža, kad $z \to z_0$	$A = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ Skaitli $A = \alpha + i\beta$ sauc par $f(z)$ robežu, kad $z \to z_0 = x_0 + iy_0$, ja $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x; y) = \alpha$ un $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x; y) = \beta$ Robežu var definēt arī šādi: $A = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$, ja katram $\varepsilon > 0$ var atrast tādu $\delta > 0$, ka **no nevienādības** $\lvert z - z_0\rvert < \delta$ **seko nevienādība** $\lvert f(z) - A\rvert < \varepsilon$ [(z) – argumentu plakne (w) – funkciju plakne]	 
Funkcijas $w = f(z)$ nepārtrauktība punktā z_0	**$f(z)$ sauc par nepārtrauktu punktā z_0, ja** $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ **jeb** $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \Delta w = 0$, kur $\Delta z = z - z_0$; $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z)$ Ja $f(z) = u(x; y) + iv(x; y)$ ir nepārtraukta funkcija punktā $z_0 = x_0 + iy_0$, tad $u(x; y)$ un $v(x; y)$ **ir nepārtrauktas funkcijas punktā $(x_0; y_0)$**	

Nepārtrauktība apgabalā D	$w = f(z)$ ir nepārtraukta funkcija apgabalā D, ja tā ir nepārtraukta **katrā apgabala punktā**.
Nepārtrauktu funkciju īpašības	Nepārtrauktām kompleksā mainīgā funkcijām ir spēkā īpašības par funkciju summas, starpības, reizinājuma, dalījuma un saliktas funkcijas nepārtrauktību (šīs īpašības ir analogas reālā argumenta funkcijām). Tā, piemēram, polinoms $P_n(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$ ir nepārtraukta funkcija visiem $z \in \mathbb{C}$, bet daļveida racionāla funkcija $R(z) = \dfrac{Q_m(z)}{P_n(z)}$ ir nepārtraukta tās definīcijas apgabalā.

Vienkāršākās kompleksā mainīgā funkcijas

Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi
① **Algebriskās funkcijas**	$w = az + b$ (lineārā funkcija) $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ (daļveida lineārā funkcija) $P_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n$ $R_n(z) = \dfrac{Q_m(z)}{P_n(z)}$ ($Q_m(z)$, $P_n(z)$ – polinomi) $\dfrac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 ...$, kur $\lvert z \rvert < 1$ (funkcijas $\dfrac{1}{1+z}$ izvirzījums pakāpju rindā)
② **Eksponentfunkcija**	$w = e^z = \exp z = e^x(\cos y + i \sin y)$, kur $\mathrm{Re}\, e^z = e^x \cos y$; $\mathrm{Im}\, e^z = e^x \sin y$ (definīcija ar Eilera formulu) e^z izvirzījums pakāpju rindā: $e^z = 1 + \dfrac{z}{1!} + \dfrac{z^2}{2!} + ... + \dfrac{z^n}{n!} + ...$, $\lvert z \rvert < \infty$ *Īpašības* • $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$ • $e^{z + 2\pi i} = e^z$, t. i., $w = e^z$ ir periodiska funkcija ar periodu $2\pi i$ • $\lvert e^z \rvert = e^x$ • $\mathrm{Arg}\, e^z = y + 2\pi k$, kur $k \in \mathbb{Z}$; $\arg e^z = y$ • $e^{2\pi k i} = 1$; $e^{(2k+1)\pi i} = -1$ • $e^{\pm zi} = \cos z \pm i \sin z$ **(Eilera formula)**
③ **Logaritmiskā funkcija**	Eksponentfunkcija un logaritmiskā funkcija ir savstarpēji inversas funkcijas $w = \mathrm{Ln}\, z$, ja $z = e^w$

	Ja $z = \rho e^{i\varphi} = \lvert z \rvert e^{i\arg z}$, tad $$\mathbf{Ln}z = \mathbf{ln}\rho + i(\varphi + 2\pi k),$$ t. i., $\mathbf{Re}(\mathbf{Ln}z) = \mathbf{ln}\rho$, $\mathbf{Im}(\mathbf{Ln}z) = \varphi + 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ Logaritma **galvenā vērtība**: $$\mathbf{ln}z = \mathbf{ln}\rho + i\varphi \quad (-\pi < \varphi \leqslant \pi)$$ *Īpašības* • $\mathrm{Ln}z$ – vairākvērtīga funkcija • $\mathrm{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Ln}z_1 + \mathrm{Ln}z_2$ • $\mathrm{Ln}\frac{z_1}{z_2} = \mathrm{Ln}z_1 - \mathrm{Ln}z_2$ • $\mathrm{Ln}z^n = n\,\mathrm{Ln}z$
④ **Trigonometriskās funkcijas**	$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\mathrm{tg}z = \frac{\sin z}{\cos z}$, $\mathrm{ctg}z = \frac{1}{\mathrm{tg}z}$ $\sin z$ izvirzījums pakāpju rindā: $$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \quad \lvert z \rvert < \infty$$ $\cos z$ izvirzījums pakāpju rindā: $$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad \lvert z \rvert < \infty$$ *Īpašības, formulas, sakarības ar hiperboliskām funkcijām* • $\sin z = -i\,\mathrm{sh}\,iz$, $\cos z = \mathrm{ch}\,iz$, $\mathrm{tg}z = -i\,\mathrm{th}\,iz$, $\mathrm{ctg}z = i\,\mathrm{cth}\,iz$ • ja $z = x + iy$, tad $\mathrm{Re}\sin z = \sin x \cdot \mathrm{ch}y$, $\mathrm{Im}\sin z = \cos x \cdot \mathrm{ch}y$ $\mathrm{Re}\cos z = \cos x \cdot \mathrm{ch}y$, $\mathrm{Im}\cos z = -\sin x \cdot \mathrm{sh}y$ • $\sin(z + 2\pi) = \sin z$; $\cos(z + 2\pi) = \cos z$ ($\sin z$ un $\cos z$ – periodiskas funkcijas ar periodu 2π) • $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$, $\cos^2 z - \sin^2 z = \cos 2z$, $\sin 2z = 2\sin z \cdot \cos z$ $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cdot \cos z_2 + \cos z_1 \cdot \sin z_2$ $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 - \sin z_1 \cdot \sin z_2$
⑤ **Hiperboliskās funkcijas**	$\mathrm{sh}z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$, $\mathrm{ch}z\ \frac{e^z + e^{-z}}{2}$, $\mathrm{th}z = \frac{\mathrm{sh}z}{\mathrm{ch}z}$, $\mathrm{cth}z = \frac{1}{\mathrm{th}z}$ $$\mathrm{sh}z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \quad \lvert z \rvert < \infty$$ ($\mathrm{sh}z$ izvirzījums pakāpju rindā) $$\mathrm{ch}z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad \lvert z \rvert < \infty$$ ($\mathrm{ch}z$ izvirzījums pakāpju rindā) *Īpašības, formulas, sakarības ar trigonometriskām funkcijām* • $\mathrm{sh}z = -i\sin iz$, $\mathrm{ch}z = \cos iz$, $\mathrm{th}z = -i\,\mathrm{tg}\,iz$, $\mathrm{cth}z = i\,\mathrm{ctg}\,iz$ • ja $z = x + iy$, tad $\mathrm{Re}\,\mathrm{sh}z = \mathrm{sh}x \cdot \cos y$, $\mathrm{Im}\,\mathrm{sh}z = \mathrm{ch}x \cdot \sin y$ $\mathrm{Re}\,\mathrm{ch}z = \mathrm{ch}x \cdot \cos y$, $\mathrm{Im}\,\mathrm{ch}z = -\mathrm{sh}x \cdot \sin y$ • $\mathrm{sh}(z + 2\pi i) = \mathrm{sh}z$, $\mathrm{ch}(z + 2\pi i) = \mathrm{ch}z$ ($\mathrm{sh}z$ un $\mathrm{ch}z$ – periodiskas funkcijas ar periodu $2\pi i$) • $\mathrm{ch}^2 z - \mathrm{sh}^2 z = 1$, $\mathrm{ch}^2 z + \mathrm{sh}^2 z = \mathrm{ch}2z$, $\mathrm{sh}2z = 2\mathrm{sh}z \cdot \mathrm{ch}z$

⑥ **Kompleksā mainīgā ciklometriskās funkcijas**	$w = \mathrm{Arcsin}z$, ja $z = \sin w$ $w = \mathrm{Arccos}z$, ja $z = \cos w$ $w = \mathrm{Arctg}z$, ja $z = \mathrm{tg}w$ $w = \mathrm{Arcctg}z$, ja $z = \mathrm{ctg}w$ $w = \mathrm{Arsh}z$, ja $z = \mathrm{sh}w$ $w = \mathrm{Arch}z$, ja $z = \mathrm{ch}w$ $w = \mathrm{Arth}z$, ja $z = \mathrm{th}w$ $w = \mathrm{Arcth}z$, ja $z = \mathrm{cth}w$ *Īpašības, formulas, sakarības ar logaritmiskām funkcijām* $\mathrm{Arc}\sin z = -i\mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$ $\mathrm{Arc}\cos z = -i\mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$ $\mathrm{Arctg}\, z = \frac{1}{2i}\mathrm{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}$, $\mathrm{Arcctg}\, z = -\frac{1}{2i}\mathrm{Ln}\frac{iz+1}{iz-1}$ $\mathrm{Arsh}\, z = \mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2+1}\right)$, $\mathrm{Arch}\, z = \mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$ $\mathrm{Arth}\, z = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+z}{1-z}$, $\mathrm{Arcth}\, z = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{z+1}{z-1}$ P i e z ī m e. Šo funkciju galvenās vērtības ($\mathrm{arcsin}z$, ...) iegūst, Ln vietā rakstot ln, piemēram, $\mathrm{arcsin}\, z = -i\ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$.

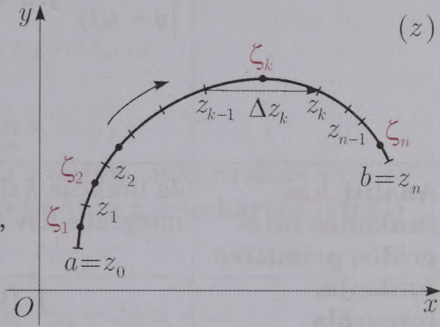
18.5. Kompleksā mainīgā funkcijas atvasinājums. Analītiskas funkcijas. Konformā attēlošana

Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi
Funkcijas $w = f(z) = u(x;\ y) + iv(x;\ y)$ **atvasinājums punktā z**	$w' = f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$, kur $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ $\Delta w = f(z+\Delta z) - f(z) = \Delta u + i\Delta v$
Atvasinājuma eksistences nepieciešamie un pietiekamie nosacījumi	Funkcijai $f(z)$ punktā $z = x + iy$ eksistē atvasinājums, **ja funkcijām $u(x;\ y)$, $v(x;\ y)$ eksistē pilnais diferenciālis un ir spēkā Košī–Rīmaņa (Dalambēra–Eilera) nosacījumi:** $\frac{\partial u(x;y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x;y)}{\partial y}$; $\frac{\partial v(x;y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x;y)}{\partial y}$
$f(z)$ diferencējamība punktā $z = x + iy$	$f(z) = u(x;\ y) + iv(x;\ y)$ ir **diferencējama punktā** z, ja šajā punktā ir izpildīti atvasinājuma eksistences nepieciešamie un pietiekamie nosacījumi.

Atvasinājuma $f'(z)$ atrašana	Ja funkcijai $f(z) = u(x;\ y) + iv(x;\ y)$ eksistē atvasinājums $f'(z)$, tad $$f'(z)=\frac{\partial u(x;y)}{\partial x}+i\frac{\partial v(x;y)}{\partial x}$$ jeb $$f'(z)=\frac{\partial v(x;y)}{\partial y}-i\frac{\partial u(x;y)}{\partial y}$$ Aprēķinot $\frac{\partial u(x;y)}{\partial x}$, $\frac{\partial u(x;y)}{\partial y}$, $\frac{\partial v(x;y)}{\partial x}$, $\frac{\partial v(x;y)}{\partial y}$, izmanto div-argumentu funkcijas parciālo atvasinājumu atrašanas paņēmienus.
$f(z)$ diferencējamība apgabalā D un diferencēšanas kārtulas	$f(z)$ ir diferencējama apgabalā D, ja tā diferencējama visiem $z \in D$ Ja $f(z)$ un $g(z)$ ir diferencējamas apgabalā D, tad diferencējamas ir arī funkcijas $$f(z) \pm g(z),\quad f(z)\cdot g(z),\quad \frac{f(z)}{g(z)}$$
Analītiska (regulāra) funkcija	Vienvērtīgu funkciju $f(z)$ sauc par **analītisku jeb regulāru** funkciju punktā z_0, ja tā ir diferencējama punktā z_0 un arī kādā šī punkta apkārtnē (z_0 – regulārs punkts).
• **analītiska galīgā punktā**	Funkcija $f(z)$ ir **analītiska punktā z_0**, ja to var izvirzīt pakāpju rindā $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n,$$ kas konverģē uz $f(z)$ apgabalā $$\lvert z - z_0\rvert < R$$
• **analītiska bezgalīgi tālajā punktā**	Funkcija $f(z)$ ir **analītiska punktā $z = \infty$**, ja to var izvirzīt pakāpju rindā $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{z^n},$$ kas konverģē uz $f(z)$ apgabalā $$\lvert z\rvert > R$$ P i e z ī m e. Funkcija $f(z)$ ir analītiska punktā $z = \infty$, ja $F(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ ir analītiska punktā $z = 0$; $$f'(\infty)=-\left(z^2\cdot F'(z)\right)\Big|_{z=0}$$
• **analītiska apgabalā D**	Funkcija $f(z)$ ir **analītiska apgabalā D**, ja tā ir analītiska katrā D punktā.
$f(z)$ singulārie punkti	**Punktus, kuros $f(z)$ nav analītiska, sauc par $f(z)$ singulārajiem punktiem.** Elementārās funkcijas (algebriskās, transcendentās) ir analītiskas funkcijas visā z plaknē, izņemot dažus izolētus singulārus punktus.

Izolēts singulārs punkts (Izolētu singulāru punktu klasifikāciju sk. 317. lpp.)	• **Galīgs punkts** $z_0 \in D$, ja ap to var apvilkt tādu riņķi, ka šī riņķa iekšpusē nav citu funkcijas $f(z)$ singulāru punktu. • **Bezgalīgi tālais punkts** $z = \infty$, ja tā apkārtnē $\lvert z \rvert > \frac{1}{\varepsilon}$ nav citu singulāru punktu.
Analītiskas funkcijas $f(z) = u(x; y) + iv(x; y)$ **pamatīpašības**	• Katrā regulārā punktā funkcijai $f(z)$ **eksistē jebkuras kārtas atvasinājums.** • Ja $f(z)$ ir analītiska apgabalā $\overline{D} = D + L$ (L – apgabala D robeža), tad $\lvert f(z)\rvert$ savu vislielāko vērtību sasniedz uz apgabala robežas (*moduļa maksimuma princips*). • Ja $f(z)$ ir analītiska un ierobežota visā z plaknē, tad $f(z) = \text{const}$ (*Liuvilla teorēma*). • Funkcijas $u(x; y) = \text{Re}f(z)$ un $v(x; y) = \text{Im}f(z)$ apmierina **Laplasa vienādojumu**: $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$ Šajā gadījumā $u(x; y)$ **un** $v(x; y)$ **sauc par saistītām harmoniskām funkcijām.** Ja viena no harmoniskajām funkcijām zināma (piemēram, $u(x; y)$), tad otru ar precizitāti līdz kompleksai konstantei atrod ar integrāli: $$v(x;y)=\int \frac{\partial u}{\partial x}\,dy+\varphi(x),$$ kur $$\varphi'(x)=-\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\int \frac{\partial u}{\partial x}\,dy\right)$$
Jēdziens par konformo attēlošanu	**Punkta z_0 apkārtnes attēlojumu ar analītisku funkciju $f(z)$ ($f'(z_0) \neq 0$) sauc par konformu attēlojumu, ja šajā attēlojumā** • **saglabājas leņķi starp līnijām (leņķu konservatīvisms), un** • **ir nemainīgs izmēru deformācijas koeficients $k = \lvert f'(z_0)\rvert$.** Tātad bezgalīgi mazas figūras ar virsotni punktā z_0 attēlojas par līdzīgām figūrām ar virsotni punktā $w_0 = f(z_0)$, bet attēlojuma pagrieziena leņķis ir $\arg f'(z_0)$. Ja attēlojumā ar funkciju $w = f(z)$ saglabājas leņķu atskaites virziens, tad to sauc par **I veida konformo attēlojumu**; ja leņķu atskaites virziens mainās uz pretējo, tad – par **II veida konformo attēlojumu**. Attēlojums ar analītisku funkciju ir konforms visur, kur $f'(z) \neq 0$, un otrādi.

18.6. Kompleksā mainīgā funkcijas integrāļi

Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi
Funkcijas $f(z)$ integrālis pa gludu jeb gabaliem gludu līniju L ar noteiktu virzienu (orientāciju) – no a uz b	Definē ar funkcijas $f(z)$ integrālsummas robežu (analogi kā reāla argumenta funkcijas noteikto integrāli): $\int\limits_L f(z)dz = \lim\limits_{\lvert\Delta z\rvert\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot\Delta z_k$, kur $\lvert\Delta z\rvert = \max\lvert\Delta z_k\rvert$, un $\zeta_k\in[z_{k-1};z_k]$ Piezīme. Ja L ir Ox ass nogrieznis $[a;b]$ un $f(z)=f(x)$, tad $\int\limits_L f(z)dz=\int\limits_a^b f(x)dx$ 
$\int\limits_L f(z)dz$ **eksistence**	$\int\limits_L f(z)dz$ eksistē, ja eksistē integrālsummas $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot\Delta z_k$ robeža, kad $\lvert\Delta z\rvert\to 0$ neatkarīgi no L sadalījuma veida un punktu ζ_k izvēles. **Ja $f(z)$ ir nepārtraukta funkcija līnijas L punktos, tad integrālis $\int\limits_L f(z)dz$ eksistē.**
Kontūrintegrālis; pozitīvais virziens pa kontūru	Funkcijas $f(z)$ **integrālis pa slēgtu līniju (kontūru) L.** Par **pozitīvo virzienu** pa kontūru pieņem pulksteņa rādītāju kustībai pretējo virzienu. Kontūrintegrāli pieraksta šādi: $\oint\limits_L f(z)dz$ vai arī $\oint\limits_{+L} f(z)dz$ Ja virziens pa kontūru ir pretējs pozitīvajam virzienam, t. i., **negatīvs virziens**, tad raksta $\oint\limits_L f(z)dz$ vai arī $\oint\limits_{-L} f(z)dz$
Kompleksā mainīgā funkcijas **integrāļa īpašības**	Īpašības analogas reālā argumenta funkcijas II veida līnijas integrāļa īpašībām, piemēram, • $\int\limits_{L_{ab}} f(z)dz=-\int\limits_{L_{ba}} f(z)dz$; $\oint\limits_{+L} f(z)dz=-\oint\limits_{-L} f(z)dz$ (mainot līnijas L virzienu vai virzienu pa kontūru, jāmaina zīme integrāļa priekšā); • ja visos L punktos $\lvert f(z)\rvert\leqslant M$, tad $\left\lvert\int\limits_L f(z)dz\right\rvert\leqslant M\cdot s$, kur s – līnijas L loka garums.

Funkcijas $f(z) = u(x; y) + iv(x; y)$ **integrāļa aprēķināšana**	Aprēķina, izmantojot funkciju $u(x; y)$ un $v(x; y)$ līniju integrāļus: $$\int_L f(z)dz = \int_L u(x;y)dx - v(x;y)dy + i\int_L v(x;y)dx + u(x;y)dy$$ Ja L ir parametriskā veidā dota līnija: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ jeb $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, kur $t \in [\alpha; \beta]$, tad $$\int_L f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z)\cdot z'(t)dt$$
Analītiskas funkcijas integrālis; primitīvā funkcija; integrāļa neatkarība no integrācijas līnijas	Ja funkcija $f(z)$ ir analītiska apgabalā D un $a, b \in D$, tad integrālis nav atkarīgs no līnijas L, kas savieno šos punktus, un $$\int_{L_{ab}} f(z)dz = \int_a^b f(z)dz = F(b) - F(a) = F(z)\Big\vert_a^b$$ (Ņūtona–Leibnica formula) Tātad integrāli **aprēķina, izmantojot Ņūtona–Leibnica formulu**, kur $F(z)$ – funkcijas $f(z)$ primitīvā funkcija, t. i., $$F'(z) = f(z)$$ Analītiskas funkcijas primitīvo funkciju atrod pēc tādām pašām formulām kā reālā mainīgā gadījumā.
Analītiskas funkcijas integrālis pa slēgtu kontūru	Ja funkcija $f(z)$ ir analītiska vienkārtsakarīgā apgabalā D un nepārtraukta uz tā robežas L, tad ir spēkā šādas teorēmas un formulas. • **Koši teorēma** $$\oint_L f(z)dz = 0$$ • **Koši integrālā formula** $$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta, \quad z \in D$$ • **Jebkuram** $z \in D$, $n \in \mathbb{N}$ $$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta$$ Piezīme. Šeit visos integrāļos kontūram L ir pozitīvais virziens. Ja $f(z)$ ir analītiska funkcija ārpus kontūra L, tad Koši integrālajā formulā un $f^{(n)}(z)$ izteiksmē kontūram L ir negatīvais virziens.

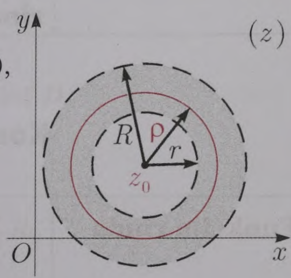
18.7. Rindas ar kompleksiem locekļiem

Komplekso skaitļu rindas

Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi
Komplekso skaitļu virknes robeža	Komplekso skaitļu **virkne**: $$z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n, \ldots$$ Virknes robeža: $$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0,$$ ja katram $\varepsilon > 0$ var atrast tādu n vērtību, ar kuru sākot virknes locekļi $z_n, z_{n+1}, z_{n+2}, \ldots$ **atrodas punkta z_0 ε-apkārtnē (riņķī)** $$\lvert z_n - z_0\rvert < \varepsilon$$
Komplekso skaitļu rinda	$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n + \ldots \quad (1)$$
Rindas summa, konverģence, diverģence	Rindas $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ **summa** ir komplekss skaitlis S, ja $$S = \lim_{n\to\infty} S_n, \quad (2)$$ kur $S_n = z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n$ (S_n – rindas (1) **parciālsumma**) Ja eksistē robeža (2), tad rinda (1) **konverģē**. Ja neeksistē robeža (2), tad rinda (2) **diverģē**.
Rindas absolūtā un nosacītā koverģence	Rinda (1) **konverģē absolūti**, ja konverģē komplekso skaitļu z_n moduļu rinda $$\sum_{n=1}^{\infty} \lvert z_n \rvert \quad (3)$$ Ja rinda (1) konverģē, bet rinda (3) diverģē, tad saka, ka **rinda (1) konverģē nosacīti**.

Kompleksā mainīgā funkciju rindas

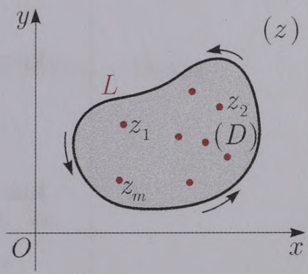
Funkciju rinda	$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = u_1(z) + u_2(z) + u_3(z) + \ldots + u_n(z) + \ldots, \quad (4)$$ kur $u_n(z)$ – kompleksa argumenta funkcijas.
Funkciju rindas summa, konverģence un konverģences apgabals	Funkciju rindas $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ summa ir kompleksā mainīgā funkcija $S(z)$, ja $\lim_{n\to\infty} S_n(z) = S(z)$, (5) kur $S_n(z) = u_1(z) + u_2(z) + \ldots + u_n(z)$ Ja eksistē robeža (5), tad rinda (4) **konverģē**. **Konverģences apgabals D ir visu to z vērtību kopa, kurām rinda konverģē.**

Funkciju rindas vienmērīgā konverģence	Kompleksā mainīgā funkciju rinda **konverģē vienmērīgi konverģences apgabalā** D, ja katram $\varepsilon > 0$ var atrast tādu n vērtību, ar kuru sākot ir pareiza nevienādība $$\lvert S_n(z) - S(z)\rvert < \varepsilon$$ **visiem konverģences apgabala punktiem** z
Pakāpju rinda	$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$ kur a_n – **koeficienti** (vispārīgā gadījumā – kompleksi skaitļi), z_0 – **rindas centrs**.
Pakāpju rindas konverģences apgabals un konverģences rādiuss	**Konverģences apgabals – riņķis** $$\lvert z - z_0\rvert < R,$$ kur R – konverģences rādiuss. $$R = \lim_{n\to\infty}\left\lvert\frac{a_n}{a_{n+1}}\right\rvert \quad \text{vai} \quad R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\lvert a_n\rvert}}$$
Pakāpju rindas vienmērīgā konverģence	**Konverģences apgabalā (riņķī) pakāpju rinda konverģē vienmērīgi un to var diferencēt un integrēt pa locekļiem.**
Funkcijas $f(z)$ Teilora rinda	**Ja $f(z)$ ir analītiska funkcija riņķī** $$\lvert z - z_0\rvert < R,$$ **tad** $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \quad \textbf{(Teilora rinda)}$$ Rindas konverģences rādiuss $$R = \min\lvert z_k - z_0\rvert,$$ kur z_0 – rindas centrs, z_k – punktam z_0 tuvākais funkcijas $f(z)$ singulārais punkts.
Funkcijas $f(z)$ Lorāna rinda	Ja $f(z)$ ir **analītiska funkcija gredzenā** $$r < \lvert z - z_0\rvert < R$$ (iespējami arī gadījumi: $r = 0$, $R = \infty$), tad $$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$ jeb $$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$ **(Lorāna rinda)**,  kur $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$ – Lorāna rindas **galvenā daļa,** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ – Lorāna rindas **regulārā daļa,** $$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\lvert z - z_0\rvert = \rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz, \quad r < \rho < R$$ – rindas koeficienti.

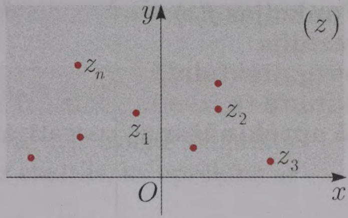
Analītiskas funkcijas nulles īpašības	Ja z_0 ir analītiskas funkcijas $f(z)$ k-tās kārtas nulle, t. i., $$f(z) = (z - z_0)^k \varphi(z)\,, \quad \text{kur} \quad \varphi(z_0) \neq 0,$$ tad • $f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(k-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0$ • $f(z) = a_k(z - z_0)^k + a_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \ldots, \quad a_k \neq 0$ Piezīme Ja $z_0 = \infty$, tad $$f(z) = \frac{1}{z^k}\varphi(z)\,, \text{ kur } \varphi(\infty) \neq 0$$
Izolēto singulāro punktu klasifikācija	Ja $z = z_0 \neq \infty$ ir analītiskas funkcijas $f(z)$ izolēts singulārs punkts, tad to **klasificē atkarībā no tā, cik saskaitāmo ar negatīvām** $z - z_0$ **pakāpēm ir Lorāna rindā** (vai arī – atkarībā no tā, kāda ir funkcijas robeža, kad $z \to z_0$).
• **novēršams singulārs punkts**	z_0 ir **novēršams singulārs punkts**, ja $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \qquad \left(\lim_{z\to z_0} f(z) = \text{const}\right)$$
• **pols**	z_0 ir **k-tās kārtas pols**, ja $$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad a_{-k} \neq 0 \qquad \left(\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty\right)$$ Tātad funkcija $\dfrac{1}{f(z)}$ ir analītiska punktā $z = z_0$ un z_0 ir funkcijas $\dfrac{1}{f(z)}$ k-tās kārtas kārtas nulle.
• **būtisks singulārs punkts**	z_0 ir **būtiski singulārs punkts**, ja $$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \qquad \left(\lim_{z\to z_0} f(z) \ \text{neeksistē}\right)$$
Piezīme.	Funkcijai $f(z)$ punktā $z = \infty$ ir tāda pati singularitāte kā funkcijai $f\left(\dfrac{1}{z}\right)$ punktā $z = 0$.

18.8. Rezīdiji, to aprēķināšana un lietojumi

Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi
Rezīdijs	Ja funkcija $f(z)$ ir analītiska punktā z_0 vai z_0 ir izolēts singulārs punkts, šīs funkcijas rezīdijs $\operatorname{Res} f(z_0)$ ir skaitlis, ko aprēķina ar kontūrintegrāli: $$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\lvert z-z_0\rvert=\rho} f(z)dz,$$ kur $r < \lvert z - z_0\rvert < R$, $r < \rho < R$ un kontūra $\lvert z - z_0\rvert = \rho$ iekšpusē nav citu singulāru punktu, izņemot $z = z_0$ (kontūram – pozitīvais virziens). Tātad rezīdijs ir Lorāna rindas $$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$ koeficients pie $\dfrac{1}{z - z_0}$, t. i., $$\operatorname{Res} f(z_0) = a_{-1}$$
Funkcijas $f(z)$ rezīdija aprēķināšana galīgā punktā z_0	Ja ir zināms (vai iegūts) funkcijas $f(z)$ izvirzījums Lorāna rindā, tad $$\operatorname{Res} f(z_0) = a_{-1}$$
• z_0 ir $f(z)$ **regulārs punkts** vai novēršams singulārs punkts	$$\operatorname{Res} f(z_0) = 0$$
• z_0 ir $f(z)$ **1. kārtas (vienkāršs) pols**	$$\operatorname{Res} f(z_0) = \lim_{z\to z_0} \left(f(z)(z - z_0)\right)$$ vai arī, ja $$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$ kur $\varphi(z)$, $\psi(z)$ – analītiskas funkcijas punktā z_0, $$\varphi(z_0) \neq 0,\ \psi(z_0) = 0,$$ tad $$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$
• z_0 ir $f(z)$ **k-tās kārtas pols**	$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left(f(z)(z - z_0)^k\right)$$

Funkcijas $f(z)$ rezīdijs bezgalīgi tālajā punktā ($z_0 = \infty$); tā aprēķināšana	$$\operatorname{Res} f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\lvert z\rvert=\rho} f(z)dz,$$ kur $f(z)$ – analītiska apgabalā $\rho \leqslant \lvert z\rvert < \infty$, bet kontūram ir negatīvais virziens. $$\operatorname{Res} f(\infty) = \lim_{z\to\infty}(-z\cdot f(z)),$$ ja šī robeža eksistē. Ja ir zināms (vai iegūts) $f(z)$ izvirzījums Lorāna rindā $z_0 = \infty$ apkārtnē, tad $$\operatorname{Res} f(\infty) = -a_{-1},$$ kur a_{-1} – koeficients pie $\dfrac{1}{z}$.
Sakarība starp $f(z)$ rezīdijiem bezgalīgi tālajā punktā un galīgos singulāros punktos	Ja funkcijai $f(z)$ ir m galīgi singulārie punkti z_k $(k = 1, 2, ..., m)$, tad $$\operatorname{Res} f(\infty) = -\sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res} f(z_k)$$
Pamatteorēma par rezīdijiem	**Ja funkcija $f(z)$ ir analītiska slēgtā apgabalā $\overline{D}$ ($\overline{D} = D + L$, kur L ir D robeža), bet kontūra L iekšpusē atrodas galīgs skaits izolētu singulāru punktu z_k $(k = 1, 2, ..., m)$, tad**  $$\oint_L f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res} f(z_k)$$ **(kontūram L ir pozitīvais virziens)**
Pamatteorēmas lietojumu piemēri integrāļu aprēķināšanā	① $$\int_0^{2\pi} R(\cos x; \sin x)dx = \left[\begin{array}{lcl} \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, & & \cos x = \dfrac{z^2+1}{2z}, \\ \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} & \Rightarrow & \sin x = \dfrac{z^2-1}{2iz} \\ e^{ix} = z & & dx = \dfrac{1}{iz}dz \end{array}\right] =$$ $$= \frac{1}{i} \oint_{\lvert z\rvert=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z}; \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{dz}{z} = \frac{1}{i} \oint_{\lvert z\rvert=1} f(z)dz$$ (R – racionāla funkcija) Iegūto kontūrintegrāli aprēķina, izmantojot pamatteorēmu par rezīdijiem.

② Ja $f(z)$ ir analītiska funkcija pusplaknē $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, izņemot galīgu skaitu singulāros punktus $z_1, z_2, \ldots, z_n$ $(\operatorname{Im} z_k > 0)$, un $z = 0$ ir vienādojuma $f\left(\frac{1}{z}\right) = 0$ nulle ar kārtu $m \geqslant 2$, tad



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res} f(z_k)$$

Ja $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ ir funkcijas $f(z)$ singulārie punkti apakšējā pusplaknē $(\operatorname{Im} \zeta_k < 0)$, tad

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = -2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res} f(\zeta_k)$$

③ Ja $R(x) \sim \dfrac{C}{x^k}$ $(x \to \infty,\ C \neq 0,\ k \geqslant 1)$ un $R(x)$ nav vienāda ar nulli uz reālās ass, tad

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{i\alpha x}dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(\mathrm{R(z)} \cdot e^{i\alpha z})\Big|_{z = z_k},$$

kur $\alpha > 0$, z_k – singulārie punkti augšējā pusplaknē $(\operatorname{Im} z_k > 0)$;

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{-i\beta x}dx = -2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(\mathrm{R(z)} \cdot e^{i\beta z})\Big|_{z = \zeta_k},$$

kur $\beta > 0$, ζ_k – singulārie punkti apakšējā pusplaknē;

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cdot \sin \alpha x dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cdot e^{i\alpha x} dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cdot \cos \alpha x dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cdot e^{i\alpha x} dx$$

④ Ja racionālai funkcijai $R(x)$

1) augšējā pusplaknē ir galīgs skaits izolētu singulāru punktu $z_1, z_2, \ldots, z_n$ $(\operatorname{Im} z_k > 0)$, bet pārējos pusplaknes punktos $R(x)$ – analītiska;
2) uz reālās ass ir 1. kārtas (vienkārši) poli $x_1, x_2, \ldots, x_m$;
3) $|R(z)| \to 0$, ja $z \to \infty$ $(\operatorname{Im} z \geqslant 0)$,

tad

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{i\alpha x}dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(R(\mathrm{z}) \cdot e^{i\alpha z})\Big|_{z = z_k} +$$

$$+\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}(R(\mathrm{z}) \cdot e^{i\alpha z})\Big|_{z = x_k}$$

(v. p. – galvenā vērtība).

19. LAPLASA TRANSFORMĀCIJA. OPERATORU RĒĶINI

19.1. Oriģināls, attēls un Laplasa transformācijas pamatīpašības

<table>
<tr><th>Nosaukums</th><th>Apzīmējumi, paskaidrojumi</th></tr>
<tr><td>Laplasa integrālis</td><td>No parametra p atkarīgs neīstais integrālis
$$\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$$</td></tr>
<tr><td>Laplasa integrāltransformācija; transformācijas parametrs</td><td>Funkcijas $f(t)$ pārveidojums, kura rezultātā iegūst funkciju $F(p)$ ar šādu integrāli:
$$F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt,$$
kur $p = s + i\sigma$ – Laplasa transformācijas parametrs. Funkciju $f(t)$ sauc par Laplasa transformācijas oriģinālu, bet $F(p)$ – par attēlu.</td></tr>
<tr><td>Laplasa transformācijas oriģināls – funkcija $f(t)$</td><td>Vispārīgā gadījumā reāla argumenta kompleksa funkcija
$f(t) = u(t) + iv(t)$, $(t \in \mathbb{R})$
ja
① visiem $t \geqslant 0$ $f(t)$ ir gabaliem nepārtraukta, n reizes nepārtraukti diferencējama un
$$f(0)=\lim_{t\to+0} f(t)$$
② $f(t) = 0$ visiem $t < 0$
③ eksistē tādi skaitļi $M > 0$ un $s_0 \geqslant 0$, ka
$$|f(t)| \leqslant Me^{s_0 t}$$
P i e m ē r s. Vienkāršākā funkcija – oriģināls $f(t)$ ir
Hevisaida vienības funkcija $1(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\geqslant 0\end{cases}$
Vienības funkcijas attēls
$$F(p)=\int_0^\infty 1(t)\cdot e^{-pt}dt=\int_0^\infty e^{-pt}dt=\frac{1}{p}\qquad (\mathrm{Re}\,p>0)$$
P i e z ī m e
Ja funkcija $f(t)$ apmierina oriģināla nosacījumus ① un ③, bet neapmierina nosacījumu ②, tad funkcija $F(t)\cdot 1(t)$ noteikti ir oriģināls.
(Ar reizinātāja $1(t)$ palīdzību tiek “dzēsta” funkcija $f(t)$, kad $t < 0$.)
Tāpēc parasti, aplūkojot jebkuru oriģinālu, piemēram,
$t,\ t^n,\ e^{\alpha t},\ \sin\omega t, \ldots,$
uzskata, ka patiesībā tiek aplūkoti oriģināli
$t\cdot 1(t),\ t^n\cdot 1(t),\ e^{\alpha t}\cdot 1(t), \sin\omega t\cdot 1(t), \ldots$
(Īsāka pieraksta dēļ $1(t)$ izlaiž.)</td></tr>
</table>

Parasti lietotie Laplasa transformācijas apzīmējumi pārejai no oriģināla f uz attēlu F (kā arī – no attēla uz oriģinālu)	Integrāltransformāciju $F(p)=\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$ pieraksta dažādi: $$f \risingdotseq F,\ f(t)\risingdotseq F(p),\ F(p)=\mathcal{L}\{f(t)\},$$ $$F(p)=L[f(t)],\ f(t)\doteqdot F(p),\ f(t)\multimap F(p)$$ u. c. veidos. Piemēram, $1(t)\risingdotseq\frac{1}{p}$, $\sin\omega t\risingdotseq\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$, $\frac{1}{(p-\lambda)^2}\risingdotseq te^{\lambda t}$
Attēla $F(p)$ eksistence	**Ja funkcija $f(t)$ ir oriģināls, tad integrālis** $$F(p)=\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$$ **absolūti konverģē pusplaknē** $\operatorname{Re} p = s > s_0$, **turklāt** • $F(p)$ **ir analītiska funkcija pusplaknē** $s>s_0$; • $F(p)\to 0$, **ja** $s\to+\infty$ • $F(p)$ **ir ierobežota pusplaknē** $s>s_0$ Piezīmes • Ja $f(t)$ ir oriģināls, tad attēlu $F(p)$ parasti atrod nevis ar Laplasa integrāli, bet gan izmantojot pamatformulas (330. lpp.), kas savukārt iegūtas, ievērojot Laplasa transformācijas īpašības. • Laplasa transformācijas vietā lieto arī t. s. **Karsona–Hevisaida transformāciju**, kas atšķiras no $F(p)$ izteiksmes ar reizinātāju p integrāļa priekšā: $$F_{\text{K.-H.}}(p)=p\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$$ Ja ar vienu transformāciju attēls ir iegūts, tad otrai transformācijai atbilstošo attēlu var vienkārši iegūt, izmantojot sakarību $$F_{\text{K.-H.}}(p)=pF(p)\ \text{jeb}\ F(p)=\frac{1}{p}F_{\text{K.-H.}}(p)$$ Šī saistība jāievēro arī, lietojot Laplasa transformācijas pamatformulas.

Laplasa transformācijas īpašības

① **Linearitāte**	Ja $f_1(t)\risingdotseq F_1(p)$ un $f_2(t)\risingdotseq F_2(p)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, tad $$\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)\risingdotseq\alpha F_1(p)+\beta F_2(p)$$ (Īpašība spēkā jebkuram galīgam saskaitāmo skaitam.)
② **Līdzības teorēma**	Ja $f(t)\risingdotseq F(p)$, tad $f(\lambda t)\risingdotseq\frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda>0$

③ **Novēlojuma teorēma**	Ja $f(t) \risingdotseq F(p)$, tad $f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau} F(p)$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$
④ **Apsteiguma teorēma**	Ja $f(t) \risingdotseq F(p)$, tad $f(t+t_0) \risingdotseq e^{pt_0} \left(F(p) - \int_0^{t_0} f(t) e^{-pt} dt \right)$, $t_0 > 0$
⑤ **Pārbīdes teorēma**	Ja $f(t) \risingdotseq F(p)$, tad $e^{-\alpha t} \cdot f(t) \risingdotseq F(p+\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{C}$
⑥ **Periodiska oriģināla attēls**	Ja $f(t) = f(t+T)$, kur T – periods, tad $F(p) = \dfrac{1}{1-e^{-pT}} \int_0^T f(t) e^{-pt} dt$
⑦ **Oriģināla diferencēšanas teorēma**	Ja $f(t) \risingdotseq F(p)$, tad $f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0)$ $f''(t) \risingdotseq p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$ .... $f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$, kur $f^{(k)}(0) = \lim\limits_{t \to +0} f^{(k)}(t)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$, $f^{(0)}(0) = f(0)$
⑧ **Oriģināla integrēšanas teorēma**	Ja $f(t) \risingdotseq F(p)$, tad $\int_0^t f(t) dt \risingdotseq \dfrac{1}{p} F(p)$
⑨ **Attēla diferencēšanas teorēma**	Ja $f(t) \risingdotseq F(p)$, tad $F'(p) \risingdotseq -t \cdot f(t)$ $F''(p) \risingdotseq t^2 \cdot f(t)$ .... $F^{(n)}(p) \risingdotseq (-1)^n t^n f(t)$
⑩ **Attēla integrēšanas teorēma**	Ja $f(t) \risingdotseq F(p)$, tad $\dfrac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_p^\infty F(q) dq$
⑪ **Diferencēšana pēc parametra**	Ja $f(t,x) \risingdotseq F(p,x)$ (x – parametrs), tad $\dfrac{\partial f(t,x)}{\partial x} \risingdotseq \dfrac{\partial F(p,x)}{\partial x}$, $x \in [x_1, x_2]$
⑫ **Robežteorēmas**	Ja $f(t) \risingdotseq F(p)$, tad $\lim\limits_{t \to +0} f(t) = \lim\limits_{\|p\| \to \infty} pF(p)$, $\lim\limits_{t \to \infty} f(t) = \lim\limits_{p \to 0} pF(p)$

⑬ **Attēlu reizināšanas (Borēla) teorēma**	Ja $f(t)$, $g(t)$ – nepārtrauktas funkcijas ($t \in \mathbb{R}$) un $$f(t) \risingdotseq F(p), \quad g(t) \risingdotseq G(p), \text{ tad}$$ $$F(p)\cdot G(p) \risingdotseq f(t) * g(t),$$ kur $$f(t)*g(t)=\int_0^t f(\tau)\cdot g(t-\tau)d\tau$$ P i e z ī m e **Operāciju** $f(t) * g(t)$ **sauc par funkciju** f **un** g **konvolūciju.** Konvolūcija ir simetriska, t. i., $$f(t) * g(t) = g(t) * f(t),$$ kur $$g(t)*f(t)=\int_0^t g(\tau)\cdot f(t-\tau)d\tau.$$
⑭ **Diamela formula** **(nepārtrauktiem oriģināliem)**	Ja $f(t)$, $g(t)$ – nepārtrauktas funkcijas ($t \in \mathbb{R}$) un $f(t) \risingdotseq F(p)$, $g(t) \risingdotseq G(p)$, tad $$p\cdot F(p)\cdot G(p) \risingdotseq f(0)\cdot g(t)+\int_0^t f'(\tau)g(t-\tau)d\tau$$ $$p\cdot F(p)\cdot G(p) \risingdotseq g(0)\cdot f(t)+\int_0^t g'(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

19.2. Inversā Laplasa transformācija. Oriģināla atrašana pēc dotā attēla

Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi
Inversā Laplasa transformācija	Ja • $F(p) = L\{f(t)\}$ ir analītiska funkcija apgabalā $\operatorname{Re} p \geqslant s_0$, • $\lim\limits_{\lvert p\rvert\to\infty} F(p) = 0$, • $\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \lvert F(p) \rvert dp < \infty$, tad $$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p)e^{pt}dp$$ ir funkcijas $F(p)$ **inversā Laplasa transformācija**, ko pieraksta šādi: $$f(t) = L^{-1}\{F(p)\}$$

	Ja $t = t_0$ ir funkcijas $f(t)$ pirmā veida pārtraukuma punkts, tad $$\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p)e^{pt}dp = \frac{f(t_0-0)+f(t_0+0)}{2}$$ Piezīme **Pēc dotā attēla $F(p)$ tā oriģinālu $f(t)$ parasti atrod** nevis ar integrāli $\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p)e^{pt}dp$, bet gan **izmantojot Laplasa transformācijas pamatformulas** (330. lpp.) un **galvenās īpašības** (322. lpp.).
Pirmā izvērses teorēma	Ja $F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n}{p^{n+1}}$ – Lorāna rinda, kas konverģē apgabalā $\|p\| > \mathrm{R}$, tad $$f(t)=\begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n}{n!}t^n, & \text{ja } t\geqslant 0\\ 0, & \text{ja } t<0\end{cases}$$
Otrā izvērses teorēma	**Ja $F(p)=\frac{F_1(p)}{F_2(p)}$ – īsta racionāla daļa, kur $F_1(p)$ – m-tās pakāpes, $F_2(p)$ – n-tās pakāpes polinoms ($m < n$) un saucējam $F_2(p)$ ir n dažādas reālas saknes, tad** $$F(p) \risingdotseq f(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{F_1(p_i)}{F_2'(p_i)}e^{p_i t}$$ Turklāt • **ja viena no saucēja $F_2(p)$ saknēm ir $p = 0$, t. i., $F_2(p) = p\Phi(p)$, tad** $$F(p) \risingdotseq f(t)=\frac{F_1(0)}{\Phi(0)}+\sum_i \frac{F_1(p_i)}{p_i\Phi'(p_i)}e^{p_i t}$$ • **ja $F_2(p)=(p-p_1)^{m_1}(p-p_2)^{m_2}...(p-p_k)^{m_k}$, kur** $$m_1+m_2+...+m_k=n,$$ **tad** $$F(p) \risingdotseq f(t)=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(m_i-1)!}\lim_{p\to p_i}\left(F(p)\cdot(p-p_i)^{m_i}e^{pt}\right)^{(m_i-1)}$$ Piezīme Daļas $F(p)=\frac{F_1(p)}{F_2(p)}$ ($m < n$) oriģinālu var iegūt arī šādi: $F(p)$ sadala elementārdaļās (175. lpp.) un atbilstošos oriģinālus atrod, izmantojot pamatformulas (330. lpp.).

19.3. Laplasa transformācijas (operatoru metodes) lietojumi

Nosaukums	Apzīmējumi, paskaidrojumi
Košī problēmas atrisināšana lineāram diferenciālvienādojumam ar konstantiem koeficientiem	Diferenciālvienādojumu $a_0x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}x'+a_nx=f(t)$ (1) ar dotiem sākuma nosacījumiem $x(0)=x_0,\ x'(0)=x_0',\ x^{(n-1)}(0)=x_0^{(n-1)}$ (t. i., Košī problēmu) atrisina šādi. Ja $x(t)\doteqdot X(p),\ f(t)\doteqdot F(p)$ un saskaņā ar oriģināla diferencēšanas teorēmu $x'(t)\doteqdot pX(p)-x_0$ $x''(t)\doteqdot p^2X(p)-px_0-x_0'$ .... $x^{(n)}(t)\doteqdot p^nX(p)-p^{n-1}x_0-p^{n-2}x_0'-\ldots-x_0^{(n-1)}$, tad no diferenciālvienādojuma (1) iegūst atbilstošo **operatoru vienādojumu** $X(p)\cdot L(p)=F(p)+\Psi(p)$, (2) kur $L(p)=a_0p^n+\ldots+a_{n-1}p+a_n$, $\Psi(p)=x_0(a_0p^{n-1}+\ldots+a_{n-1})+\ldots+x_0^{(n-1)}a_0$ Līdz ar to atrisinājuma attēls ir $X(p)=\dfrac{F(p)+\Psi(p)}{L(p)}$ (3) **Attēlam $X(p)$ atbilstošais oriģināls $x(t)$ ir diferenciālvienādojuma (1) atrisinājums** (oriģināla atrašanu sk. 19.2.) Piemērs Atrisināt diferenciālvienādojumu $x''-x'+x=e^{-t}$ ar sākuma nosacījumiem $x(0)=0,\ x'(0)=3.$ Ja $x(t)\doteqdot X(p)$, tad no 7. īpašības seko $x'(t)\doteqdot pX(p)-x(0)=pX(p)$; $x''(t)\doteqdot p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)-3$. Tā kā $e^{-t}\doteqdot\dfrac{1}{p+1}$ (sk. 5. formulu 330. lpp.), tad operatoru vienādojums ir $p^2X(p)-3-pX(p)+X(p)=\dfrac{1}{p+1}$, no kurienes $X(p)=\dfrac{3p+4}{(p+1)(p^2-p+1)}$.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

Šo attēlu sadala elementārdaļās (sk. 175. lpp.)

$$\frac{3p+4}{(p+1)(p^2-p+1)}=\frac{A}{p+1}+\frac{Mp+N}{p^2-p+1}.$$

Tad $3p + 4 = A(p^2 - p + 1) + (Mp + N)(p + 1)$,

kur $A=\frac{1}{3}$, $M=-\frac{1}{3}$, $N=\frac{11}{3}$.

Tātad $X(p)=\frac{1}{3(p+1)}-\frac{1}{3}\cdot\frac{p-11}{p^2-p+1}=\frac{1}{3(p+1)}-\frac{1}{3}\frac{p-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-11}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=$

$$=\frac{1}{3(p+1)}-\frac{1}{3}\frac{p-\frac{1}{2}}{3\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{7}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$

No šejienes, pārejot uz oriģināliem, t. i., izmantojot atbilstoši 5., 22. un 21. formulu (330. lpp.) iegūst atrisinājumu:

$$x(t)=\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{7}{\sqrt{3}}e^{\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Diferenciālvienādojuma atrisināšana, izmantojot Borēla teorēmu

</td>
<td>

Ja dots lineārs diferenciālvienādojums (1) ar konstantiem koeficientiem un

$$x(0) = x'(0) = ... = x^{(n-1)}(0) = 0,$$

tad atrisinājuma attēla $X(p)$ izteiksmē (3) $\Psi(p) = 0$ un

$$\boldsymbol{X(p)=\frac{1}{L(p)}\cdot F(p)}$$

Ja $\frac{1}{L(p)}\risingdotseq k(t)$, tad saskaņā ar Borēla teorēmu $X(p)$ oriģināls, t. i., diferenciālvienādojuma atrisinājums ir

$$x(t)=\int_0^t k(\tau)f(t-\tau)d\tau=\int_0^t k(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

Kā redzams, šajā gadījumā nav jāmeklē nehomogēnā diferenciālvienādojuma (1) labās puses funkcijas $f(t)$ attēls $F(p)$.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Diferenciālvienādojuma atrisināšana, izmantojot Diamela formulu

</td>
<td>

Ja dots lineārs diferenciālvienādojums ar konstantiem koeficientiem

$$a_0x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+...+a_nx=f(t) \tag{1}$$

un

$$x(0) = x'(0) = ... = x^{(n-1)}(0) = 0,$$

tad vispirms pie šiem sākuma nosacījumiem ar operatoru metodi atrisina vienādojumu (1), pieņemot, ka $f(t) = 1$:

$$a_0x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+...+a_nx=1 \tag{4}$$

</td>
</tr>
</table>

	Ja vienādojuma (4) atrisinājuma attēls ir $X_1(p)$, tad vienādojumu (1) un (4) **atbilstošie operatoru vienādojumi** ir $$X(p)\cdot L(p)=F(p),\quad X_1(p)\cdot L(p)=\frac{1}{p}\qquad \left(\text{jo } 1 \risingdotseq \frac{1}{p}\right)$$ Tātad $X(p) = pX_1(p)\cdot F(p)$ jeb saskaņā ar Diamela formulu $$X(p)\risingdotseq x(t)=\int_0^t x_1(\tau)f'(t-\tau)d\tau=\int_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau$$
Koši problēmas atrisināšana lineāru diferenciālvienādojumu sistēmai ar konstantiem koeficientiem	Ja dota vienādojumu sistēma $$\begin{cases} x_1' + a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = f_1(t) \\ x_2' + a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = f_2(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' + a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = f_n(t) \end{cases}$$ $(x_i = x_i(t),\ x_i' = x_i'(t),\ i=1,2,\ldots,n)$ ar sākuma nosacījumiem $$x_1(0) = x_{10},\ x_2(0) = x_{20},\ \ldots,\ x_n(0) = x_{n0},$$ tad, veicot Laplasa transformāciju, t. i., ievērojot, ka $$x_i(t) \risingdotseq X_i(p),\ f_i(t) \risingdotseq F_i(p),\ x_i'(t) \risingdotseq pX_i(p) - x_{i0},$$ iegūst lineāru algebrisku vienādojumu sistēmu attiecībā pret atrisinājumu attēliem $X_i(p)$: $$\begin{cases} (p + a_{11})X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n = F_1 + x_{10} \\ a_{21}X_1 + (p + a_{22})X_2 + \ldots + a_{2n}X_n = F_2 + x_{20} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \ldots + (p + a_{nn})X_n = F_n + x_{n0} \end{cases} \qquad (5)$$ $$(X_i = X_i(p),\ F_i = F_i(p),\ i = 1,2,\ldots,n)$$ Atrisinot algebrisko vienādojumu sistēmu (5), iegūst $X_i(p)$, bet, atrodot to oriģinālus (izdarot inverso transformāciju), iegūst diferenciālvienādojumu sistēmas Koši problēmas atrisinājumu $$x_i(t) \risingdotseq X_i(p)\ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$ Tādējādi diferenciālvienādojumu sistēmas atrisināšanas gaita ir analoga diferenciālvienādojuma risināšanai: • **pāriet no oriģināliem uz attēliem** (ievērojot sākuma nosacījumus), • **atrisina iegūto lineāro algebrisko vienādojumu sistēmu** attiecībā pret attēliem, • **atrod iegūto attēlu oriģinālus** – dotās diferenciālvienādojumu sistēmas atrisinājumus.

Volterra integrālvienādojuma atrisināšana	Volterra integrālvienādojumā $$a\cdot x(t)=f(t)+\lambda\int_0^t k(t-\tau)\cdot x(\tau)d\tau \qquad (6)$$ konvolūcijai $\int_0^t k(t-\tau)\cdot x(\tau)d\tau = k * x$ atbilst attēlu reizinājums, t.i., $$k * x \risingdotseq K(p)\cdot X(p)$$ (saskaņā ar Borēla teorēmu). Līdz ar to vienādojumam (6) atbilst **operatoru vienādojums** $$a\cdot X(p)=F(p)+\lambda\cdot K(p)\cdot X(p),$$ kur $$f(t)\risingdotseq F(p),\ x(t)\risingdotseq X(p),\ k(t)\risingdotseq K(p)$$ No operatoru vienādojuma izsakot $X(p)$ un atrodot tā oriģinālu, ir iegūts integrālvienādojuma (6) atrisinājums $x(t)$. Piezīme Vienādojuma (6) atrisinājumu var iegūt arī šādi: $$x(t)=\frac{1}{a}f(t)+\frac{\lambda}{a}(\varphi(t)*f(t)),$$ kur $\varphi(t)$ ir funkcijas $\Phi(p)=\dfrac{K(p)}{a-\lambda K(p)}$ oriģināls, t. i., $$\Phi(p)\risingdotseq\varphi(t) \text{ un } \varphi(t)*f(t)=\int_0^t\varphi(\tau)\cdot f(t-\tau)d\tau=\int_0^t\varphi(t-\tau)\cdot f(\tau)d\tau$$
Laplasa transformācijas sakars ar Furjē transformāciju	Ja Laplasa transformācijas oriģināls $f(t)$ vēl papildus apmierina nosacījumu $$\int_0^\infty \mid f(t)\mid dt=C,\quad (C-\text{const}),$$ tad $f(t)$ vienpusīgā Furjē transformācija ir $$F(i\omega)=\int_0^\infty f(t)e^{-i\omega t}dt, \qquad (7)$$ Inversā Furjē transformācija ir $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(i\omega)e^{i\omega t}d\omega=\begin{cases}f(t), & \text{ja } t>0\\ 0, & \text{ja } t<0\end{cases}$$ Furjē transformācijas (7) labā puse acīmredzot sakrīt ar Laplasa integrāli, ja $p=i\omega$. Tātad funkcijai $f(t)$ eksistē arī Furjē transformācija un $$F(i\omega)=F(p)\Big\|_{p=i\omega},$$ kur $F(p)\risingdotseq f(t)$. Piemēram. Tā kā $e^{-\alpha t}\risingdotseq\dfrac{1}{p+\alpha}$, tad $F(i\omega)=\dfrac{1}{i\omega+\alpha}$ $(-\infty<\omega<\infty)$. Arī **visas Furjē transformācijas īpašības var iegūt no Laplasa transformācijas īpašībām, aizvietojot tajās** p **ar** $i\omega$**.**

19.4. Laplasa transformācijas pamatformulas

Nr.	$f(t)$ $(t>0)$	$F(p)$
1.	1	$\frac{1}{p}$
2.	t	$\frac{1}{p^2}$
3.	$t^n,\ n\in\mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
4.	$t^\alpha\ (\alpha>-1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$
5.	$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p-\lambda}$
6.	$te^{\lambda t}$	$\frac{1}{(p-\lambda)^2}$
7.	$t^n e^{\lambda t},\ n\in\mathbb{N}$	$\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$
8.	$t^\alpha e^{\lambda t}\ (\alpha>-1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(p-\lambda)^{\alpha+1}}$
9.	$\frac{1}{(a-b)}(e^{at}-e^{bt})$	$\frac{1}{(p-a)(p-b)}$
10.	$\frac{1}{a-b}(ae^{at}-be^{bt})$	$\frac{p}{(p-a)(p-b)}$
11.	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
12.	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
13.	$\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
14.	$\operatorname{ch}\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
15.	$\frac{1}{a^2}(1-\cos at)$	$\frac{1}{p(p^2+a^2)}$
16.	$\frac{1}{a^3}(at-\sin at)$	$\frac{1}{p^2(p^2+a^2)}$
17.	$t\sin\omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
18.	$t\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
19.	$t\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2-\omega^2)^2}$
20.	$t\operatorname{ch}\omega t$	$\frac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}$
21.	$e^{\lambda t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
22.	$e^{\lambda t}\cos\omega t$	$\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
23.	$e^{\lambda t}\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{\omega}{(p-\lambda)^2-\omega^2}$
24.	$e^{\lambda t}\operatorname{ch}\omega t$	$\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2-\omega^2}$
25.	$te^{\lambda t}\sin\omega t$	$\frac{2\omega(p-\lambda)}{((p-\lambda)^2+\omega^2)^2}$
26.	$te^{\lambda t}\cos\omega t$	$\frac{(p-\lambda)^2-\omega^2}{((p-\lambda)^2+\omega^2)^2}$
27.	$\delta(t)$	1
28.	$\delta(t-a),\ a>0$	e^{-ap}

Piezīmes

① $\delta(t)$ ir **Diraka funkcija**; tās definīcija:

$$\delta(t)=\begin{cases}0, & \text{ja } t\neq 0\\ \infty, & \text{ja } t=0\end{cases}\quad \text{un}\quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$$

② Pilnīgākas tabulas sk. Г. Корн и Т. Корн. Справочник по математике, Москва, 1968.

20. KOMBINATORIKA. VARBŪTĪBU TEORIJA. MATEMĀTISKĀ STATISTIKA

20.1. Kombinatorika

Jēdziens	Apzīmējumi, paskaidrojumi
Faktoriāls	$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n \quad (n \in \mathbb{N})$ Lielām n vērtībām $n!$ vērtību var tuvināti aprēķināt pēc **Stirlinga formulas**: $$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$ Faktoriāla vispārinājums ir gamma funkcija $$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \text{ kur } \Gamma(n+1) = n!$$
Kombinatorikas pētījumu objekts	Pamatkopas elementu un apakškopu **sakārtojumi (konfigurācijas)**, kas veidoti pēc noteikta priekšraksta.
Kombinatorika	Pēta **konfigurāciju īpašības** un noskaidro, **cik noteikta veida sakārtojumus** (arī izlases) **var izveidot** no dotās pamatkopas elementiem vai apakškopām.
Kombinatorikas pamatlikumi	① **Saskaitīšanas likums** Ja kopas A kādu elementu var izvēlēties k veidos, bet kopas B kādu elementu – j veidos, tad kopas "**A vai B**" kādu elementu var izvēlēties $k + j$ veidos. Piezīme. A un B nesatur kopīgus elementus. ② **Reizināšanas likums** Ja kopas A kādu elementu var izvēlēties k veidos, bet kopas B kādu elementu – j veidos, tad kopas "**A un B**" elementu sakārtotu pāri var izvēlēties $k \cdot j$ veidos. Piezīmes • Abi pamatlikumi ir spēkā, ja A un B ir kādas pamatkopas galīgas apakškopas. • A un B elementi var būt gan materiāli, gan abstrakti objekti (arī darbības) vai šādu objektu sakārtojumi.
Izlase, izlases apjoms	**Elementu izlase** ir dotās kopas apakškopa, kuru sastāda, izvēloties elementus atbilstoši dotajiem nosacījumiem (priekšrakstam). **Izlases apjoms** ir dažādo elementu skaits. Turpretī, ja pēc dotā priekšraksta iespējama elementu atkārtošanās, tad, nosakot izlases apjomu, jāievēro arī elementu atkārtojumi. **Ja dotajā kopā ir n elementi, tad no šīs kopas elementiem var izveidot 2^n apakškopas, ieskaitot arī tukšu kopu, kas nesatur elementus.**
Nesakārtota izlase	Izlase, kurā **elementu secība** (sakārtojums) **ir brīvi izraudzīta**.
Sakārtota izlase	Izlase, kurā **elementi ir sakārtoti**: pierakstīti, nosaukti vai uzzīmēti noteiktā secībā.

Dažādas izlases	Izlases, kuras • atšķiras ar vismaz vienu elementu vai • sastāv no vieniem un tiem pašiem elementiem, bet atšķiras ar elementu sakārtojumu (secību).
Permutācijas (no n elementiem pa n elementiem)	Sakārtotas n elementu izlases, kuras **cita no citas atšķiras tikai ar elementu secību.**
Permutāciju skaits	• **bez atkārtojumiem** (katrā izlasē visi n elementi ir atšķirīgi) $P_n = n!$ ["n faktoriāls" $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ $0! = 1$; $1! = 1$; $(n+1)! = n!(n+1)$] • **ar atkārtojumiem** $\overline{P}_n = \dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}$, kur atbilstošo atkārtojumu skaits ir $n_1, n_2, \ldots, n_k$ un $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$
Variācijas (no n elementiem pa m elementiem; $m \leqslant n$)	Sakārtotas izlases, kuru m elementi ir izvēlēti no n pamatkopas elementiem un kuras **cita no citas atšķiras vai nu ar elementu izvietojumu, vai ar pašiem elementiem.**
Variāciju skaits	• **bez atkārtojumiem** (katrā izlasē visi m elementi ir atšķirīgi) $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!} = \dbinom{n}{m} \cdot m! = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$ $[A_n^1 = n;\ \ A_n^n = P_n = n!]$ • **ar atkārtojumiem** $\overline{A}_n^m = n^m$
Kombinācijas (no n elementiem pa m elementiem; $m \leqslant n$)	Nesakārtotas izlases, kuru m elementi ir izvēlēti no n pamatkopas elementiem un kuras **cita no citas atšķiras ar vismaz vienu elementu.**
Kombinācijas ar atkārtojumiem (iespējams, ka $m > n$)	Nesakārtotas m elementu izlases, kas **atšķiras** pēc sastāva **kaut ar vienu elementu vai ar elementu atkārtojumu skaitu.**
Kombināciju skaits	• **bez atkārtojumiem** $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!} = \dbinom{n}{m} = \dfrac{A_n^m}{P_m}$

	$\binom{n}{m} = \dfrac{n(n-1)(n-2)...(n-(m-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot m}$ $C_n^0 = 1;\ C_n^1 = n;\ C_n^n = 1;\ C_n^m = C_n^{n-m}$ $C_{n+1}^m = C_n^{m-1} + C_n^m$, *kur* $1 \leqslant m \leqslant n$ sk. arī Paskāla trijstūri 22. lpp. • **ar atkārtojumiem** $\overline{C}_n^m = \dfrac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} = \binom{n+m-1}{m}$

20.2. Gadījuma notikumi

Jēdziens	Apzīmējumi, paskaidrojumi
Mēģinājums jeb eksperiments	Noteiktu apstākļu īstenojums, kuru rezultātā iestājas (realizējas) viens no iespējamiem **iznākumiem** ω_i.
Mēģinājuma **iznākumu kopa**	$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ Iznākumu kopas elementi ir visi iespējamie mēģinājuma iznākumi un tikai šie iznākumi.
Gadījuma notikums	Par gadījuma notikumu jeb notikumu A sauc jebkuru mēģinājuma iznākumu kopu A, kurš īstenojas, ja realizējas kāds no šiem notikumam A labvēlīgiem iznākumiem $\omega_i \in A$.
Pretējais notikums $\overline{A}$	Notikuma A pretējais notikums $\overline{A}$ iestājas, ja īstenojas $\omega_i \notin A$.
Neiespējams notikums	$\varnothing$ Notikums, kas nevar realizētais nevienā mēģinājumā.
Drošs (nenovēr-šams) notikums	Ω Notikums, kurš neizbēgami realizējas katrā mēģinājumā.
Darbības ar notikumiem	• **Notikumu summa (apvienojums)** $A + B$ jeb $A \cup B$ – notikums, kurš realizējas tad un tikai tad, **ja iestājas vismaz viens no notikumiem A vai B** **Īpašības** $A + \overline{A} = \Omega$ $A + A = A$ $A + \varnothing = A$ $A + \Omega = \Omega$ $A + B = B + A$ P i e z ī m e. Analogi definē notikumu $A_1, A_2, ..., A_n$ summu: $A_1 + A_2 + ... + A_n = \sum_{k=1}^{n} A_k$ jeb $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$

	• **Notikumu reizinājums (šķēlums)** $A \cdot B$ jeb $A \cap B$ – notikums, kurš realizējas tad un tikai tad, **ja notikumi A un B iestājas vienlaikus**. **Īpašības** $A \cdot \overline{A} = \varnothing$ $A \cdot A = A$ $A \cdot \varnothing = \varnothing$ $A \cdot \Omega = A$ $A \cdot B = B \cdot A$ $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ $A + (B \cdot C) =$ $= (A + B) \cdot (A + C)$ Piezīme Analogi definē notikumu $A_1, A_2, ..., A_n$ reizinājumu: $A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n = \prod_{k=1}^{n} A_k$ jeb $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$ • **Notikumu starpība** $A \setminus B$ – notikums, kurš realizējas tad, **ja ir iestājies notikums A un nav iestājies notikums B**. • No notikuma B seko notikums A, t. i., $B \subset A$, ja no tā, ka iestājies notikums B, izriet, ka ir iestājies arī notikums A.
Nesavienojami notikumi	Notikumus A un B sauc par nesavienojamiem, ja $A \cdot B = \varnothing$.
Notikuma A varbūtība	$\mathrm{P}(A)$ $(0 \leqslant \mathrm{P}(A) \leqslant 1)$ – **noteikts skaitlis, kas raksturo notikuma A realizēšanās iespēju**.
Klasiskā varbūtības aprēķināšanas formula	Ja gadījuma mēģinājums ir ar n vienādi varbūtīgiem (vienādi iespējamiem) iznākumiem, tad jebkuram ar šo mēģinājumu saistītam notikumam A $\mathrm{P}(A) = \frac{n_A}{n}$, kur n_A ir notikumam A labvēlīgo iznākumu skaits.
Aksiomātiskā varbūtība	**Ja mēģinājuma iznākumu kopa ir $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ un katram iznākumam ω_i ir piekārtots skaitlis $\mathrm{P}(\omega_i)$, turklāt** • $0 \leqslant \mathrm{P}(\omega_i) \leqslant 1$ **visiem** i; • $\mathrm{P}(\omega_1) + \mathrm{P}(\omega_2) + ... + \mathrm{P}(\omega_n) = 1$, **tad skaitļus $\mathrm{P}(\omega_i)$ sauc par iznākumu ω_i varbūtībām.** Ja notikums $A = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k\}$, t. i., $A \subset \Omega$, tad $\mathrm{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} \mathrm{P}(\omega_i)$
Pretējo notikumu teorēma	$\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(\overline{A}) = 1$ (A un $\overline{A}$ – savstarpēji pretēji notikumi)

Varbūtību saskaitīšanas teorēma	$\mathrm{P}(A + B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cdot B)$ Ja A un B ir **nesavienojami** notikumi, tad $\mathrm{P}(A + B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$
Neatkarīgi notikumi	Notikumus A un B sauc par neatkarīgiem, ja $\mathrm{P}(A \cdot B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$
Nosacītā varbūtība	$\mathrm{P}(A / B) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cdot B)}{\mathrm{P}(B)}$ – notikuma A nosacītā varbūtība, t. i., **varbūtība, ka iestājas notikums A, ja B ir jau noticis.**
Varbūtību reizināšanas teorēma	$\mathrm{P}(A \cdot B) = \mathrm{P}(A/B) \cdot \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B/A) \cdot \mathrm{P}(A)$ Ja A un B – **neatkarīgi notikumi**, tad $\mathrm{P}(A/B) = \mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B/A) = \mathrm{P}(B)$, un $\mathrm{P}(A \cdot B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$
Pilnās varbūtības formula	Ja $A = A \cdot H_1 + A \cdot H_2 + \ldots + AH_n$, kur H_i – **hipotēzes**, $H_i \cdot H_j = \varnothing$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ un $H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega$, tad $\mathrm{P}(A) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A / H_k) \cdot \mathrm{P}(H_k)$
Beiesa (hipotēžu pārbaudes) **formula**	$\mathrm{P}(H_i / A) = \dfrac{\mathrm{P}(H_i)\mathrm{P}(A / H_i)}{\mathrm{P}(A)} = \dfrac{\mathrm{P}(H_i) \cdot \mathrm{P}(A / H_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A / H_k) \cdot \mathrm{P}(H_k)}$

Neatkarīgo mēģinājumu shēma

Jēdziens	Apzīmējumi, paskaidrojumi
Statistiskā varbūtība; relatīvais biežums	Ja mēģinājumu var atkārtot vienādos apstākļos un katrā no tiem notikums A var iestāties vai neiestāties, tad **lielam mēģinājumu skaitam n** $\mathrm{P}(A) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{k}{n} \approx \dfrac{k}{n}$ sauc par **statistisko varbūtību**; šeit k – notikuma A iestāšanās biežums, $w = \dfrac{k}{n}$ – **relatīvais biežums.**

$P_n(k)$ – varbūtība notikumam, ka n neatkarīgos mēģinājumos A ir noticis k reizes ($k = 0, 1, 2, ..., n$) (Bernulli shēma)	Ja katrā atsevišķā mēģinājumā $P(A) = p$ un $P(\bar{A}) = 1 - p = q$, tad $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$ **(Bernulli jeb binomiālā formula)** Sekas • Varbūtība, ka notikums A ir noticis n reizes, ir $P_n(n) = p^n$. • Varbūtība, ka notikums A nenotiks ne reizi, ir $P_n(0) = (1 - p)^n = q^n$ • Varbūtība, ka notikums notiks vismaz vienu reizi, ir $P(A \text{ notiks vismaz vienu reizi}) = 1 - (1 - p)^n = 1 - q^n$ • Varbūtība, ka notikums A notiks ne mazāk kā k_1 un ne vairāk kā k_2 reizes, ir vienāda ar $P_n(k_1) + P_n(k_1 + 1) + ... + P_n(k_2)$
Neatkarīgo mēģinājumu shēmas robežteorēmas	• **Puasona teorēma:** $P_n(k) \approx \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$, kur $\lambda = np$ – **matemātiskā cerība** Lieto lielam mēģinājumu skaitam n un mazai varbūtībai p; $0{,}1 \lesssim \lambda \lesssim 10$ • **Lokālā Muavra–Laplasa teorēma:** $P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, kur $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$ un x – ierobežots lielums (ja $n \to \infty$) • **Integrālā Muavra–Laplasa teorēma:** ja μ ir skaits, cik reižu n neatkarīgos mēģinājumos ir noticis notikums A, tad $P(k_1 \leqslant \mu \leqslant k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$, kur $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – **Laplasa funkcija** (sk. 9. tabulu 255.lpp.)
Visvarbūtīgākais notikuma A iestāšanās skaits k_0 n neatkarīgos mēģinājumos	• Ja $(n + 1) \cdot p$ nav vesels skaitlis, tad $k_0 = [(n + 1)p]$ (t. i., veselā daļa no $n + 1$ un $P(A) = p$ reizinājuma). • Ja $(n + 1) \cdot p$ ir vesels skaitlis, tad ir divas visvarbūtīgākās vērtības: $k_0 = (n + 1)p - 1$ un $k_0 = (n + 1)p$

20.3. Gadījuma lielumi

<table>
<tr><th>Jēdziens</th><th>Apzīmējumi, paskaidrojumi</th></tr>
<tr><td>Gadījuma lielums</td><td>Mēģinājuma iznākumiem piekārtotus skaitļus sauc par gadījuma lieluma X vērtībām.
Gadījuma lielums pieņem vienu un tikai vienu vērtību (skaitli) no iespējamo vērtību kopas ($x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$).
Vērtību kopa var būt galīga vai bezgalīga (arī – nepārtraukta).</td></tr>
<tr><td>Diskrēts gadījuma lielums; tā sadalījuma rinda</td><td>Gadījuma lielumu X, kura iespējamo vērtību skaits ir galīgs vai sanumurējams, sauc par diskrētu gadījuma lielumu.
X uzdod ar sadalījuma rindu:
<table><tr><td>Vērtība</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>...</td><td>x_k</td><td>...</td></tr><tr><td>Varbūtība</td><td>p_1</td><td>p_2</td><td>...</td><td>p_k</td><td>...</td></tr></table>
kur $p_i = \mathrm{P}(X = x_i)$, $i = 1, 2, ..,$ $\quad 0 \leqslant p_i \leqslant 1,$ $\quad \sum_i p_i = 1$</td></tr>
<tr><td>Nepārtraukts gadījuma lielums; tā sadalījuma blīvuma funkcija $p(x)$</td><td>Gadījuma lielumu X sauc par nepārtrauktu, ja eksistē tāda funkcija $p(x) \geqslant 0$, ka
$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1$$
un jebkuriem reāliem skaitļiem α un β
$$\mathrm{P}(\alpha \leqslant X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} p(x)\,dx$$
Funkciju $p(x)$ sauc par sadalījuma blīvuma funkciju.</td></tr>
<tr><td>Gadījuma lieluma X varbūtību sadalījuma funkcija $F(x)$</td><td>$F(x) = \mathrm{P}(X < x)$, kur
$$\mathrm{P}(X < x) = \begin{cases} \sum\limits_{x_i < x} p_i, & \text{ja } X \text{ – diskrēts gadījuma lielums} \\ \int\limits_{-\infty}^{x} p(z)\,dz, & \text{ja } X \text{ – nepārtraukts gadījuma lielums} \end{cases}$$
Sadalījuma funkcijas īpašības
• $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$
• ja $x_1 < x_2$, tad $F(x_1) \leqslant F(x_2)$
• $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$
• $F(x)$ ir nepārtraukta no kreisās puses
• $\mathrm{P}(\alpha \leqslant X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$
• $F'(x) = p(x)$</td></tr>
</table>

Gadījuma lielumu skaitliskie raksturotāji

Matemātiskā cerība (vidējā vērtība)	$MX = \begin{cases} \sum\limits_i x_i p_i, & \text{ja } X \text{ –diskrēts gadījuma lielums} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,dx, & \text{ja } X \text{ –nepārtraukts gadījuma lielums} \end{cases}$ **Īpašības** • $MC = C$, C – konstante • $M(CX) = C \cdot MX$ • $M(X_1 + X_2) = MX_1 + MX_2$ • $M(X_1 \cdot X_2) = MX_1 \cdot MX_2$, ja X_1 un X_2 ir neatkarīgi
Dispersija	$DX = M(X - MX)^2 = MX^2 - (MX)^2$ $DX = \begin{cases} \sum\limits_i x_i^2 p_i - (MX)^2, & \text{ja } X \text{ – diskrēts gadījuma lielums} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\,dx - (MX)^2, & \text{ja } X \text{ – nepārtraukts gadījuma lielums} \end{cases}$ **Īpašības** • $D(C) = 0$, C – konstante • $D(CX) = C^2 DX$ • $D(X_1 + X_2) = DX_1 + DX_2$, ja X_1 un X_2 ir neatkarīgi
Standartnovirze (vidējā kvadrātiskā novirze)	$\sigma(X) = \sqrt{DX}$
Gadījuma lieluma X k-tās kārtas sākuma moments	$\alpha_k = M(X^k) = \begin{cases} \sum\limits_i x_i^2 p_i, & \text{ja } X \text{ – diskrēts gadījuma lielums} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k p(x)\,dx, & \text{ja } X \text{ – nepārtraukts gadījuma lielums} \end{cases}$
Gadījuma lieluma X k-tās kārtas centrālais moments	$\mu_k(x) = M(X - MX)^k = \begin{cases} \sum\limits_i (x_i - MX)^k p_i, & \text{ja } X \text{ – diskrēts gadījuma lielums} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^k p(x)\,dx, & \text{ja } X \text{ – nepārtraukts gadījuma lielums} \end{cases}$

Divu gadījuma lielumu X un Y kovariācija (korelācijas moments)	$K_{XY} = M((X - MX)(Y - MY))$, kur MX, MY – gadījuma lielumu X, Y matemātiskās cerības.
Korelācijas koeficients	$r_{XY} = \dfrac{K_{XY}}{\sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY}}$, kur DX, DY – atbilstoši gadījuma lielumu X, Y dispersijas. **Īpašības** • $-1 \leqslant r_{XY} \leqslant 1$ • $Y = kX + b$ tad un tikai tad, ja $\lvert r_{XY} \rvert = 1$

Svarīgākie varbūtību sadalījumi

Binomiālais varbūtību sadalījums	$\mathrm{P}(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$ **Matemātiskā cerība, dispersija, standartnovirze:** $MX = np, \quad DX = np(1-p) = npq, \quad \sigma X = \sqrt{npq}$
Puasona varbūtību sadalījums (binomiālais sadalījums gadījumam, kad n – liels un p – maza)	$\mathrm{P}(X = k) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \lambda > 0$ **Matemātiskā cerība, dispersija, standartnovirze:** $MX = \lambda, \quad DX = \lambda, \quad \sigma X = \sqrt{\lambda}$
Vienmērīgais varbūtību sadalījums intervālā $[a,\ b]$	**Sadalījuma funkcija** $F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 1, & x > b \end{cases}$ **Varbūtību blīvuma funkcija** $p(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x > b \end{cases}$ **Matemātiskā cerība, dispersija, standartnovirze:** $MX = \dfrac{a+b}{2}, \quad DX = \dfrac{(b-a)^2}{12}, \quad \sigma X = \sqrt{DX}$

Eksponenciālais varbūtību sadalījums	**Sadalījuma funkcija** $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0 \quad \lambda>0\end{cases}$ **Varbūtību blīvuma funkcija** $p(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0\end{cases}$ **Matemātiskā cerība, dispersija, standartnovirze:** $MX=\frac{1}{\lambda},\quad DX=\frac{1}{\lambda^2},\quad \sigma X=\frac{1}{\lambda}$
Normālais jeb Gausa varbūtību sadalījums	**Sadalījuma funkcija** $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}\,dt,\quad a\in\mathbb{R},\quad \sigma>0,\quad x\in(-\infty,\infty)$ **Varbūtību blīvuma funkcija** $p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ **Matemātiskā cerība, dispersija, standartnovirze:** $MX=a,\quad DX=\sigma^2,\quad \sigma X=\sigma$ **Ja $a=0$, $\sigma=1$, tad sadalījumu sauc par normēto (standarta) normālo sadalījumu.** $P(\alpha\leqslant X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$ kur $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – Laplasa funkcija; $P(\lvert X-a\rvert<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$
χ^2 ("hī kvadrātā") varbūtību sadalījums	Ja $X_1, X_2, ..., X_n$ savā starpā neatkarīgi standarta normāli gadījuma lielumi, tad $\chi_n^2=X_1^2+X_2^2+...+X_n^2=X$ sauc par χ_n^2 **(hī kvadrātā) gadījuma lielumu** ar n brīvības pakāpēm. **Varbūtību blīvuma funkcija** $p(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, & x\geqslant 0\end{cases}$ $MX=n,\quad DX=2n,\quad \sigma X=\sqrt{2n}$

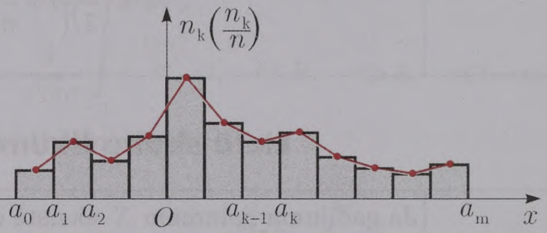
Stjūdenta varbūtību sadalījums	Gadījuma lieluma $t_n = \dfrac{X}{\sqrt{\frac{1}{n}\chi_n^2}}$ varbūtību sadalījumu, kur X – standarta normāls gadījuma lielums un χ_n^2 – no X neatkarīgs χ^2 gadījuma lielums, sauc par **Stjūdenta varbūtību sadalījumu** ar n brīvības pakāpēm. **Varbūtību blīvuma funkcija** $$p(x) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}}},\quad x\in(-\infty,\infty)$$

Lielā skaita likums

Čebiševa nevienādība	Ja gadījuma lielumam X eksistē dispersija DX, tad jebkuram $\varepsilon > 0$ $$\mathrm{P}(\lvert X - MX\rvert > \varepsilon) \leqslant \frac{DX}{\varepsilon^2}$$
Čebiševa teorēma (lielā skaita likums)	Ja X_1, X_2, ... ir pa pāriem nekorelēti gadījuma lielumi ar vienmērīgi ierobežotām dispersijām $DX_n \leqslant c$, $n \geqslant 1$, tad jebkuram $\varepsilon > 0$ $$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\left\lvert \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i \right\rvert > \varepsilon\right) = 0$$
Centrālā robežteorēma	Ja X_1, X_2, ... ir neatkarīgi un vienādi sadalīti gadījuma lielumi ar $MX_n = a$, $DX_n = \sigma^2$, $n \geqslant 1$, tad normēto summu $$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - na}{\sigma\sqrt{n}}$$ sadalījuma likumu virkne konverģē uz standarta normālo sadalījumu.

20.4. Matemātiskā statistika

Jēdziens	Apzīmējumi, paskaidrojumi
Izlase; tās elementi un apjoms	Pamatkopas (ģenerālkopas) elementu – gadījuma lieluma X vērtību izlase $$(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$ x_i – izlases elementi ($i = 1, 2, \ldots, n$) n – izlases apjoms (sk. *izlase* kombinatorikā)

Variācijas rinda	Nedilstošā secībā sakārtota izlase.
Histogramma	Viens no eksperimenta rezultātu grafiskās attēlošanas veidiem. **Lai konstruētu** gadījuma lieluma X fiksēto vērtību $x_1, x_2, ..., x_n$ **histogrammu**, vispirms uz abscisu ass izvēlas tādu intervālu $[a_0, a_m]$, kurā atrodas visas x_i $(i = 1; 2; ...; n)$ vērtības. Pēc tam intervālu $[a_0, a_m]$ ar dalījuma punktiem a_k $(k = 1; 2; ...; m - 1)$ sadala m vienādās daļās (parasti $m = 10$ līdz 20). Katrā intervālā $[a_{k-1}; a_k)$, kur $k = 1; 2; ...; m$, nosaka x_i vērtību skaitu n_k vai aprēķina atbilstošo relatīvo biežumu $\frac{n_k}{n}$. Virs katra nogriežņa $(a_{k-1}; a_k)$ konstruē taisnstūri, kura augstums ir n_k vai $\frac{n_k}{n}$.  Piezīmes ① Bieži vien ir ērti uzskatīt, ka visas n_k gadījuma lieluma vērtības, kas pieder intervālam $(a_{k-1}; a_k)$, koncentrējas tā viduspunktā $\frac{1}{2}(a_{k-1}+a_k)$. ② Ja histogrammā blakusesošo taisnstūru augšējo malu viduspunktus savieno ar nogriežņiem, iegūst lauztu līniju, ko sauc par **poligonu**. ③ Ja eksperimenta rezultātu x_i skaits n ir liels, bet intervālu $(a_{k-1}; a_k)$ garums – mazs, tad X var uzskatīt par nepārtrauktu gadījuma lielumu un tā histogrammas forma ir līdzīga gadījuma lieluma X sadalījuma blīvuma funkcijas $f(x)$ grafikam.
Centrālā vērtība jeb mediāna Me	Mediāna ir variācijas rindas **vidējais elements** vai **divu vidējo elementu summas puse**.
Variācijas amplitūda R	$R = x_{max} - x_{min}$ – starpība starp izlases lielāko un mazāko vērtību.
Empīriskā sadalījuma funkcija	$F_n^*(x) = \frac{n_x}{n}$, kur n_x – to elementu skaits izlasē, kuri mazāki nekā x. Jebkuram $\varepsilon > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} P(\lvert F_n^*(x) - F(x)\rvert < \varepsilon) = 1$.

Empīriskā matemātiskā cerība (vidējā vērtība jeb aritmētiskais vidējais)	$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$
Svērtais aritmētiskais vidējais	$\bar{x}=\frac{x_1\cdot k_1+x_2\cdot k_2+\ldots+x_l k_l}{n}$, $(l\leqslant n)$ kur n – izlases apjoms, $k_1, k_2, \ldots, k_l$ – elementu $x_1, x_2, \ldots, x_l$ parādīšanās biežums izlasē
Vidējā novirze no izlases mediānas Me	$\frac{1}{n}(\lvert x_1-\mathrm{Me}\rvert+\lvert x_2-\mathrm{Me}\rvert+\ldots+\lvert x_n-\mathrm{Me}\rvert)$, kur n – izlases apjoms
Empīriskā dispersija S^2	$S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$
Standartnovirze σ	$\sigma=\sqrt{S^2}$
Izlabotā empīriskā dispersija S^2_{lab}	$S^2_{\text{lab}}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ (nenovirzīts dispersijas novērtējums)
Empīriskie sākuma momenti $\hat{\alpha}_k$	$\hat{\alpha}_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^k$, kur k – momenta kārta.

Gadījuma lielumu X un Y empīriskais korelācijas moments (empīriskā kovariācija)

Korelācijas momenta novērtējums $\widehat{K}_{XY}$	Ja $((x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n))$ – izlase, tad $\widehat{K}_{XY}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$ $\bar{x}, \bar{y}$ – gadījuma lielumu X un Y vidējās vērtības
Korelācijas koeficienta novērtējums r_{XY}	$\hat{r}_{XY}=\frac{\widehat{K}_{XY}}{S_X\cdot S_Y}$, kur $S_X=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$, $S_Y=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}$

Regresijas taisnes vienādojums	$$y-\bar{y}=\frac{\hat{r}_{XY}\cdot S_y}{S_x}(x-\bar{x}),$$ kur $\bar{x}$, $\bar{y}$ – gadījuma lielumu X un Y vidējās vērtības, S_x, S_y – gadījuma lielumu X un Y standartnovirzes
Normālā sadalījuma parametru ticamības intervāli	• **matemātiskai cerībai** $MX=a$ $$\mathrm{P}\left(\bar{x}-\frac{t_\gamma\cdot S}{\sqrt{n-1}}\leqslant a\leqslant\bar{x}+\frac{t_\gamma\cdot S}{\sqrt{n-1}}\right)=\gamma,$$ kur $\bar{x}$ ir empīriskā matemātiskā cerība; S^2 – empīriskā dispersija; n – izlases apjoms; t_γ apmierina nosacījumu $$\mathrm{P}(\mid t_{n-1}\mid<t_\gamma)=\gamma,$$ kur t_{n-1} – Stjūdenta gadījuma lielums ar $(n-1)$ brīvības pakāpi, γ – ticamības varbūtība. • **dispersijai** $DX=\sigma^2$ $$\mathrm{P}\left(\frac{nS^2}{t_1}\leqslant\sigma^2\leqslant\frac{nS^2}{t_2}\right)=\gamma,$$ kur t_1 un t_2 apmierina nosacījumus $$\mathrm{P}(\chi^2_{n-1}<t_1)=\frac{1+\gamma}{2},\quad \mathrm{P}(\chi^2_{n-1}<t_2)=\frac{1-\gamma}{2},$$ χ^2_{n-1} ir χ^2 – gadījuma lielums ar $(n-1)$ brīvības pakāpi.
Dažu sadalījumu parametru maksimālās ticamības novērtējumi izlasei $(x_1, x_2, \ldots x_n)$	• Binomiālā sadalījuma parametra $p=\mathrm{P}(A)$ novērtējums: $$\hat{p}=\frac{n_A}{n},$$ kur n_A – skaits, cik reižu ir iestājies notikums A, n – izlases apjoms.
	• Puasona sadalījuma parametra λ novērtējums: $$\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$
	• Eksponenciālā sadalījuma parametra λ novērtējums: $$\hat{\lambda}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}$$
	• Normālā sadalījuma parametru a un σ^2 novērtējumi: $$\hat{a}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\quad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2,$$ kur $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$.

PIELIKUMS

1. tabula

Gamma funkcija

x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$
1,00	1,00000	1,25	0,90640	1,50	0,88623	1,75	0,91906
01	0,99433	26	0,90440	51	0,88659	76	0,92137
02	0,98884	27	0,90250	52	0,88704	77	0,92376
03	0,98355	28	0,90072	53	0,88757	78	0,92623
04	0,97844	29	0,89904	54	0,88818	79	0,92877
1,05	0,97350	1,30	0,89747	1,55	0,88887	1,80	0,93138
06	0,96874	31	0,89600	56	0,88964	81	0,93408
07	0,96415	32	0,89464	57	0,89049	82	0,93685
08	0,95973	33	0,89338	58	0,89142	83	0,93969
09	0,95546	34	0,89222	59	0,89243	84	0,94261
1,10	0,95135	1,35	0,89115	1,60	0,89352	1,85	0,94561
11	0,94740	36	0,89018	61	0,89468	86	0,94869
12	0,94359	37	0,88931	62	0,89592	87	0,95184
13	0,93993	38	0,88854	63	0,89724	88	0,95507
14	0,93642	39	0,88785	64	0,89864	89	0,95838
1,15	0,93304	1,40	0,88726	1,65	0,90012	1,90	0,96177
16	0,92980	41	0,88676	66	0,90167	91	0,96523
17	0,92670	42	0,88636	67	0,90330	92	0,96877
18	0,92373	43	0,88604	68	0,90500	93	0,97240
19	0,92089	44	0,88581	69	0,90678	94	0,97610
1,20	0,91817	1,45	0,88566	1,70	0,90864	1,95	0,97988
21	0,91558	46	0,88560	71	0,91057	96	0,98374
22	0,91311	47	0,88563	72	0,91258	97	0,98768
23	0,91075	48	0,88575	73	0,91467	98	0,99171
24	0,90852	49	0,88595	74	0,91683	99	0,99581
1,25	0,90640	1,50	0,88623	1,75	0,91906	2,00	1,00000

Ja $x < 1$ $(x \neq 0, -1, -2, \ldots)$ un $x > 2$, $\Gamma(x)$ aprēķina, lietojot formulas

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}, \quad \Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$$

Funkcijas definīciju, grafiku un pamatformulas sk. 215. lpp.

2. tabula

Beseļa funkcijas

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$K_0(x)$	$K_1(x)$
0,0	+1,0000	+0,0000	$-\infty$	$-\infty$	+1,000	0,0000	∞	∞
0,1	0,9975	0,0499	−1,5342	−6,4590	1,003	+0,0501	2,4271	9,8538
0,2	0,9900	0,0995	1,0811	3,3238	1,010	0,1005	1,7527	4,7760
0,3	0,9776	0,1483	0,8073	2,2931	1,023	0,1517	1,3725	3,0560
0,4	0,9604	0,1960	0,6060	1,7809	1,040	0,2040	1,1145	2,1844
0,5	+0,9385	+0,2423	−0,4445	−1,4715	1,063	0,2579	0,9244	1,6564
0,6	0,9120	0,2867	0,3085	1,2604	1,092	0,3137	0,7775	1,3028
0,7	0,8812	0,3290	0,1907	1,1032	1,126	0,3719	0,6605	1,0503
0,8	0,8463	0,3688	−0,0868	0,9781	1,167	0,4329	0,5653	0,8618
0,9	0,8075	0,4059	+0,0056	0,8731	1,213	0,4971	0,4867	0,7165
1,0	+0,7652	+0,4401	+0,0883	−0,7812	1,266	0,5652	0,4210	0,6019
1,1	0,7196	0,4709	0,1622	0,6981	1,326	0,6375	0,3656	0,5098
1,2	0,6711	0,4983	0,2281	0,6211	1,394	0,7147	0,3185	0,4346
1,3	0,6201	0,5220	0,2865	0,5485	1,469	0,7973	0,2782	0,3725
1,4	0,5669	0,5419	0,3379	0,4791	1,553	0,8861	0,2437	0,3208
1,5	+0,5118	+0,5579	+0,3824	−0,4123	1,647	0,9817	0,2138	0,2774
1,6	0,4554	0,5699	0,4204	0,3476	1,750	1,085	0,1880	0,2406
1,7	0,3980	0,5778	0,4520	0,2847	1,864	1,196	0,1655	0,2094
1,8	0,3400	0,5815	0,4774	0,2237	1,990	1,317	0,1459	0,1826
1,9	0,2818	0,5812	0,4968	0,1644	2,128	1,448	0,1288	0,1597
2,0	+0,2239	+0,5767	+0,5104	−0,1070	2,280	1,591	0,1139	0,1399
2,1	0,1666	0,5683	0,5183	−0,0517	2,446	1,745	0,1008	0,1227
2,2	0,1104	0,5560	0,5208	−0,0015	2,629	1,914	0,08927	0,1079
2,3	0,0555	0,5399	0,5181	0,0523	2,830	2,098	0,07914	0,09498
2,4	0,0025	0,5202	0,5104	0,1005	3,049	2,298	0,07022	0,08372
2,5	−0,0484	+0,4971	+0,4981	+0,1459	3,290	2,517	0,06235	0,07389
2,6	0,0968	0,4708	0,4813	0,1884	3,553	2,755	0,05540	0,06528
2,7	0,1424	0,4416	0,4605	0,2276	3,842	3,016	0,04926	0,05774
2,8	0,1850	0,4097	0,4359	0,2635	4,157	3,301	0,04382	0,05111
2,9	0,2243	0,3754	0,4079	0,2959	4,503	3,613	0,03901	0,04529
3,0	−0,2601	+0,3391	+0,3769	+0,3247	4,881	3,953	0,03474	0,04016
3,1	0,2921	0,3009	0,3431	0,3496	5,294	4,326	0,03095	0,03563
3,2	0,3202	0,2613	0,3070	0,3707	5,747	4,734	0,02759	0,03164
3,3	0,3443	0,2207	0,2691	0,3879	6,243	5,181	0,02461	0,02812
3,4	0,3643	0,1792	0,2296	0,4010	6,785	5,670	0,02196	0,02500
3,5	−0,3801	+0,1374	+0,1890	+0,4102	7,378	6,206	0,01960	0,02224
3,6	0,3918	0,0955	0,1477	0,4154	8,028	6,793	0,01750	0,01979
3,7	0,3992	0,0538	0,1061	0,4167	8,739	7,436	0,01563	0,01763
3,8	0,4026	+0,0128	0,0645	0,4141	9,517	8,140	0,01397	0,01571
3,9	0,4018	−0,0272	+0,0234	0,4078	10,37	8,913	0,01248	0,01400

2. tabula (*turpinājums*)

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$K_0(x)$	$K_1(x)$
4,0	−0,3971	−0,0660	−0,0169	+0,3979	11,30	9,759	0,01116	0,01248
4,1	0,3887	0,1033	0,0561	0,3846	12,32	10,69	0,009980	0,01114
4,2	0,3766	0,1386	0,0938	0,3680	13,44	11,71	0,008927	0,009938
4,3	0,3610	0,1719	0,1296	0,3484	14,67	12,82	0,007988	0,008872
4,4	0,3423	0,2028	0,1633	0,3260	16,01	14,05	0,007149	0,007923
4,5	−0,3205	−0,2311	−0,1947	+0,3010	17,48	15,39	0,006400	0,007078
4,6	0,2961	0,2566	0,2235	0,2737	19,09	16,86	0,005730	0,006325
4,7	0,2693	0,2791	0,2494	0,2445	20,86	18,48	0,005132	0,005654
4,8	0,2404	0,2985	0,2723	0,2136	22,79	20,25	0,004597	0,005055
4,9	0,2097	0,3147	0,2921	0,1812	24,91	22,20	0,004119	0,004521
5,0	−0,1776	−0,3276	−0,3085	+0,1479	27,24	24,34	3691	4045
5,1	0,1443	0,3371	0,3216	0,1137	29,79	26,68	3308	3619
5,2	0,1103	0,3432	0,3313	0,0792	32,58	29,25	2966	3239
5,3	0,0758	0,3460	0,3374	0,0445	35,65	32,08	2659	2900
5,4	0,0412	0,3453	0,3402	+0,0101	39,01	35,18	2385	2597
5,5	−0,0068	−0,3414	−0,3395	−0,0238	42,69	38,59	2139	2326
5,6	+0,0270	0,3343	0,3354	0,0568	46,74	42,33	1918	2083
5,7	0,0599	0,3241	0,3282	0,0887	51,17	46,44	1721	1866
5,8	0,0917	0,3110	0,3177	0,1192	56,04	50,95	1544	1673
5,9	0,1220	0,2951	0,3044	0,1481	61,38	55,90	1386	1499
6,0	+0,1506	−0,2767	−0,2882	−0,1750	67,23	61,34	1244	1344
6,1	0,1773	0,2559	0,2694	0,1998	73,66	67,32	1117	1205
6,2	0,2017	0,2329	0,2483	0,2223	80,72	73,89	1003	1081
6,3	0,2238	0,2081	0,2251	0,2422	88,46	81,10	09001	09691
6,4	0,2433	0,1816	0,1999	0,2596	96,96	89,03	08083	08693
6,5	+0,2601	−0,1538	−0,1732	−0,2741	106,3	97,74	07259	07799
6,6	0,2740	0,1250	0,1452	0,2857	116,5	107,3	06520	06998
6,7	0,2851	0,0953	0,1162	0,2945	127,8	117,8	05857	06280
6,8	0,2931	0,0652	0,0864	0,3002	140,1	129,4	05262	05636
6,9	0,2981	0,0349	0,0563	0,3029	153,7	142,1	04728	05059
7,0	+0,3001	−0,0047	−0,0259	−0,3027	168,6	156,0	04248	04542
7,1	0,2991	+0,0252	+0,0042	0,2995	185,0	171,4	03817	04078
7,2	0,2951	0,0543	0,0339	0,2934	202,9	188,3	03431	03662
7,3	0,2882	0,0826	0,0628	0,2846	222,7	206,8	03084	03288
7,4	0,2786	0,1096	0,0907	0,2731	244,3	227,2	02772	02953
7,5	+0,2663	+0,1352	+0,1173	−0,2591	268,2	249,6	02492	02653
7,6	0,2516	0,1592	0,1424	0,2428	294,3	274,2	02240	02383
7,7	0,2346	0,1813	0,1658	0,2243	323,1	301,3	02014	02141
7,8	0,2154	0,2014	0,1872	0,2039	354,7	331,1	01811	01924
7,9	0,1944	0,2192	0,2065	0,1817	389,4	363,9	01629	01729

2. tabula (*turpinājums*)

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$K_0(x)$	$K_1(x)$
8,0	+0,1717	+0,2346	+0,2235	–0,1581	427,6	399,9	01465	01554
8,1	0,1475	0,2476	0,2381	0,1331	469,5	439,5	01317	01396
8,2	0,1222	0,2580	0,2501	0,1072	515,6	483,0	01185	01255
8,3	0,0960	0,2657	0,2595	0,0806	566,3	531,0	01066	01128
8,4	0,0692	0,2708	0,2662	0,0535	621,9	583,7	009588	01014
8,5	+0,0419	+0,2731	+0,2702	–0,0262	683,2	641,6	008626	009120
8,6	+0,0146	0,2728	0,2715	+0,0011	750,5	705,4	007761	008200
8,7	–0,0125	0,2697	0,2700	0,0280	824,4	775,5	006983	007374
8,8	0,0392	0,2641	0,2659	0,0544	905,8	852,7	006283	006631
8,9	0,0653	0,2559	0,2592	0,0799	995,2	937,5	005654	005964
9,0	–0,0903	+0,2453	+0,2499	+0,1043	1094	1031	005088	005364
9,1	0,1142	0,2324	0,2383	0,1275	1202	1134	004579	004825
9,2	0,1367	0,2174	0,2245	0,1491	1321	1247	004121	004340
9,3	0,1577	0,2004	0,2086	0,1691	1451	1371	003710	003904
9,4	0,1768	0,1816	0,1907	0,1871	1595	1508	003339	003512
9,5	–0,1939	+0,1613	+0,1712	+0,2032	1753	1658	003006	003160
9,6	0,2090	0,1395	0,1502	0,2171	1927	1824	002706	002843
9,7	0,2218	0,1166	0,1279	0,2287	2119	2006	002436	002559
9,8	0,2323	0,0928	0,1045	0,2379	2329	2207	002193	002302
9,9	0,2403	0,0684	0,0804	0,2447	2561	2428	001975	002072
10,0	–0,2459	+0,0435	+0,0557	+0,2490	2816	2671	001778	001865

3. tabula

Pirmā veida eliptiskie integrāļi: $F(k,\ \varphi),\ \ k = \sin\alpha$

φ \ α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0°	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	0,1745	0,1746	0,1746	0,1748	0,1749	0,1751	0,1752	0,1753	0,1754	0,1754
20	0,3491	0,3493	0,3499	0,3508	0,3520	0,3533	0,3545	0,3555	0,3561	0,3564
30	0,5236	0,5243	0,5263	0,5294	0,5334	0,5379	0,5422	0,5459	0,5484	0,5493
40	0,6981	0,6997	0,7043	0,7116	0,7213	0,7323	0,7436	0,7535	0,7604	0,7629
50	0,8727	0,8756	0,8842	0,8982	0,9173	0,9401	0,9647	0,9876	1,0044	1,0107
60	1,0472	1,0519	1,0660	1,0896	1,1226	1,1643	1,2126	1,2619	1,3014	1,3170
70	1,2217	1,2286	1,2495	1,2853	1,3372	1,4068	1,4944	1,5959	1,6918	1,7354
80	1,3963	1,4056	1,4344	1,4846	1,5597	1,6660	1,8125	2,0119	2,2653	2,4362
90	1,5708	1,5828	1,6200	1,6858	1,7868	1,9356	2,1565	2,5046	3,1534	∞

$$F(k;\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = \int_0^{\sin\varphi} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}$$

4. tabula

Otrā veida eliptiskie integrāļi: $E(k,\ \varphi),\ \ k = \sin\alpha$

φ \ α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0°	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	0,1745	0,1745	0,1744	0,1743	0,1742	0,1740	0,1739	0,1738	0,1737	0,1736
20	0,3491	0,3489	0,3483	0,3473	0,3462	0,3450	0,3438	0,3429	0,3422	0,3420
30	0,5236	0,5229	0,5209	0,5179	0,5141	0,5100	0,5061	0,5029	0,5007	0,5000
40	0,6981	0,8966	0,6921	0,6851	0,6763	0,6667	0,6575	0,6497	0,6446	0,6428
50	0,8727	0,8698	0,8614	0,8483	0,8317	0,8134	0,7954	0,7801	0,7697	0,7660
60	1,0472	1,0426	1,0290	1,0076	0,9801	0,9493	0,9184	0,8914	0,8728	0,8660
70	1,2217	1,2149	1,1949	1,1632	1,1221	1,0750	1,0266	0,9830	0,9514	0,9397
80	1,3963	1,3870	1,3597	1,3161	1,2590	1,1926	1,1225	1,0565	1,0054	0,9848
90	1,5708	1,5589	1,5238	1,4675	1,3931	1,3055	1,2111	1,1184	1,0401	1,0000

$$E(k;\varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi = \int_0^{\sin\varphi} \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt$$

5. tabula

Pilnie eliptiskie integrāļi: $k = \sin\alpha$

$\alpha°$	K	E	$\alpha°$	K	E	$\alpha°$	K	E
0	1,5708	1,5708	30	1,6858	1,4675	60	2,1565	1,2111
1	1,5709	1,5707	31	1,6941	1,4608	61	2,1842	1,2015
2	1,5713	1,5703	32	1,7028	1,4539	62	2,2132	1,1920
3	1,5719	1,5697	33	1,7119	1,4469	63	2,2435	1,1826
4	1,5727	1,5689	34	1,7214	1,4397	64	2,2754	1,1732
5	1,5738	1,5678	35	1,7312	1,4323	65	2,3088	1,1638
6	1,5751	1,5665	36	1,7415	1,4248	66	2,3439	1,1545
7	1,5767	1,5649	37	1,7522	1,4171	67	2,3809	1,1453
8	1,5785	1,5632	38	1,7633	1,4092	68	2,4198	1,1362
9	1,5805	1,5611	39	1,7748	1,4013	69	2,4610	1,1272
10	1,5828	1,5589	40	1,7868	1,3931	70	2,5046	1,1184
11	1,5854	1,5564	41	1,7992	1,3849	71	2,5507	1,1096
12	1,5882	1,5537	42	1,8122	1,3765	72	2,5998	1,1011
13	1,5913	1,5507	43	1,8256	1,3680	73	2,6521	1,0927
14	1,5946	1,5476	44	1,8396	1,3594	74	2,7081	1,0844
15	1,5981	1,5442	45	1,8541	1,3506	75	2,7681	1,0764
16	1,6020	1,5405	46	1,8691	1,3418	76	2,8327	1,0686
17	1,6061	1,5367	47	1,8848	1,3329	77	2,9026	1,0611
18	1,6105	1,5326	48	1,9011	1,3238	78	2,9786	1,0538
19	1,6151	1,5283	49	1,9180	1,3147	79	3,0617	1,0468
20	1,6200	1,5238	50	1,9356	1,3055	80	3,1534	1,0401
21	1,6252	1,5191	51	1,9539	1,2963	81	3,2553	1,0338
22	1,6307	1,5141	52	1,9729	1,2870	82	3,3699	1,0278
23	1,6365	1,5090	53	1,9927	1,2776	83	3,5004	1,0223
24	1,6426	1,5037	54	2,0133	1,2681	84	3,6519	1,0172
25	1,6490	1,4981	55	2,0347	1,2587	85	3,8317	1,0127
26	1,6557	1,4924	56	2,0571	1,2492	86	4,0528	1,0086
27	1,6627	1,4864	57	2,0804	1,2397	87	4,3387	1,0053
28	1,6701	1,4803	58	2,1047	1,2301	88	4,7427	1,0026
29	1,6777	1,4740	59	2,1300	1,2206	89	5,4349	1,0008
30	1,6858	1,4675	60	2,1565	1,2111	90	∞	1,0000

$$\mathrm{K} = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\,\sqrt{1-k^2t^2}}$$

$$\mathrm{E} = E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt$$

6. tabula

Puasona varbūtību sadalījuma likums

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

k \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812	0,496585	0,449329	0,406570
1	090484	163746	222245	268128	303265	329287	347610	359463	365913
2	004524	016375	033337	053626	075816	098786	121663	143785	164661
3	000151	001092	003334	007150	012636	019757	028388	038343	049398
4	000004	000055	000250	000715	001580	002964	004968	007669	011115
5		000002	000015	000057	000158	000356	000081	001227	002001
6			000001	000004	000013	000036	000008	000164	000300
7					000001	000003	000001	000019	000039
8								000002	000004

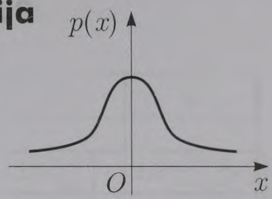
k \ λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,367879	0,135335	0,049787	0,018316	0,006738	0,002479	0,000912	0,000335	0,000123
1	367879	270671	149361	073263	033690	014873	006383	002684	001111
2	183940	270671	224042	141525	084224	044618	022341	010735	004998
3	061313	180447	224042	195367	140374	089235	052129	028626	014994
4	015328	090224	168031	195367	175467	133853	091226	057252	033737
5	003066	036089	100819	156293	175467	160623	127717	091604	060727
6	000511	012030	050409	104194	146223	160623	149003	122138	091090
7	000073	003437	021604	059540	104445	137677	149003	139587	117116
8	000009	000899	008102	029770	064278	103258	130377	139587	131756
9	000001	000191	002701	013231	036266	068838	101405	124077	131756
10		000038	000810	005292	018133	041303	070983	099262	118580
11		000007	000221	001925	008242	022529	045171	072190	097020
12		000001	000055	000642	003434	011262	026350	048127	072765
13			000013	000197	001321	005199	014188	029616	050376
14			000003	000056	000472	002228	007094	016924	032384
15			000001	000015	000157	000891	003311	009026	019431
16				000004	000049	000334	001448	004513	010930
17				000001	000014	000118	000596	002124	005786
18					000004	000039	000232	000944	002893
19					000001	000012	000085	000397	001370
20						000004	000030	000159	000617
21						000001	000010	000061	000264
22							000003	000022	000108
23							000001	000008	000042
24								000003	000016
25								000001	000006
26									000002
27									000001

7. tabula

Normēta normālā sadalījuma blīvuma funkcija

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

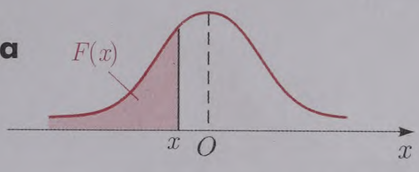
$$p(-x) = p(x)$$



x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	0,3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	0,1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	1734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0,0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0056
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0,0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

8. tabula

Normēta normālā sadalījuma funkcija



$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
–3,9	0,00005	00005	00004	00004	00004	00004	00004	00004	00003	00003
–3,8	00007	00007	00007	00006	00006	00006	00006	00005	00005	00005
–3,7	00011	00010	00010	00010	00009	00009	00008	00008	00008	00008
–3,6	00016	00015	00015	00014	00014	00013	00013	00012	00012	00011
–3,5	00023	00022	00022	00021	00020	00019	00019	00018	00017	00017
–3,4	0,00034	00032	00031	00030	00029	00028	00027	00026	00025	00024
–3,3	00048	00047	00045	00043	00042	00040	00039	00038	00036	00035
–3,2	00069	00066	00064	00062	00060	00058	00056	00054	00052	00050
–3,1	00097	00094	00090	00087	00084	00082	00079	00076	00074	00071
–3,0	00135	00131	00126	00122	00118	00114	00111	00107	00103	00100
–2,9	0,0019	0018	0018	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014
–2,8	0026	0025	0024	0023	0023	0022	0021	0021	0020	0019
–2,7	0035	0034	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026
–2,6	0047	0045	0044	0043	0041	0040	0039	0038	0037	0036
–2,5	0062	0060	0059	0057	0055	0054	0052	0051	0049	0048
–2,4	0,0082	0080	0078	0075	0073	0071	0069	0068	0066	0064
–2,3	0107	0104	0102	0099	0096	0094	0091	0089	0087	0084
–2,2	0139	0136	0132	0129	0125	0122	0119	0116	0113	0110
–2,1	0179	0174	0170	0166	0162	0158	0154	0150	0146	0143
–2,0	0228	0222	0217	0212	0207	0202	0197	0192	0188	0183
–1,9	0,0287	0281	0274	0268	0262	0256	0250	0244	0239	0233
–1,8	0359	0351	0344	0336	0329	0322	0314	0307	0301	0294
–1,7	0446	0436	0427	0418	0409	0401	0392	0384	0375	0367
–1,6	0548	0537	0526	0516	0505	0495	0485	0475	0465	0455
–1,5	0668	0655	0643	0630	0618	0606	0594	0582	0571	0559
–1,4	0,0808	0793	0768	0764	0749	0735	0721	0708	0694	0681
–1,3	0968	0951	0934	0918	0901	0885	0869	0853	0838	0823
–1,2	1151	1131	1112	1093	1075	1056	1038	1020	1003	0985
–1,1	1357	1335	1314	1292	1271	1251	1230	1210	1190	1170
–1,0	1587	1562	1539	1515	1492	1469	1446	1423	1401	1379
–0,9	0,1841	1814	1788	1762	1736	1711	1685	1660	1635	1611
–0,8	2119	2090	2061	2033	2005	1977	1949	1922	1894	1867
–0,7	2420	2388	2358	2327	2296	2266	2236	2006	2177	2148
–0,6	2743	2709	2676	2643	2611	2578	2546	2514	2482	2451
–0,5	3085	3050	3015	2981	2946	2912	2877	2843	2810	2776
–0,4	0,3446	3409	3372	3336	3300	3264	3228	3192	3156	3121
–0,3	3821	3783	3745	3707	3669	3632	3594	3557	3520	3483
–0,2	4207	4168	4129	4090	4052	4013	3974	3936	3897	3859
–0,1	4602	4562	4522	4483	4443	4404	4364	4325	4286	4247
–0,0	5000	4960	4920	4880	4840	4801	4761	4721	4681	4641

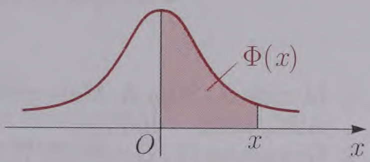
8. tabula (*turpinājums*)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	0,6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7518	7549
0,7	7580	7612	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	0,8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9089	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	0,9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	0,9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	0,9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	0,99865	99869	99874	99878	99882	99886	99889	99893	99897	99900
3,1	99903	99906	99910	99913	99916	99918	99921	99924	99926	99929
3,2	99931	99934	99936	99938	99940	99942	99944	99946	99948	99950
3,3	99952	99953	99955	99957	99958	99960	99961	99962	99964	99965
3,4	99966	99968	99969	99970	99971	99972	99973	99974	99975	99976
3,5	0,99977	99978	99978	99979	99980	99981	99981	99982	99983	99983
3,6	99984	99985	99985	99986	99986	99987	99987	99988	99988	99989
3,7	99989	99990	99990	99990	99991	99991	99992	99992	99992	99992
3,8	99993	99993	99993	99994	99994	99994	99994	99995	99995	99995
3,9	99995	99995	99996	99996	99996	99996	99996	99996	99997	99997

9. tabula

Laplasa funkcija

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$



x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	0,19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	,34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	0,43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	0,47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	0,49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	0,49865	49869	49874	49878	49882	49886	49889	49893	49897	49900
3,1	49903	49906	49910	49913	49916	49918	49921	49924	49926	49929
3,2	49931	49934	49936	49938	49940	49942	49944	49946	49948	49950
3,3	49952	49953	49955	49957	49958	49960	49961	49962	49964	49965
3,4	49966	49968	49969	49970	49971	49972	49973	49974	49975	49976
3,5	0,49977	49978	49978	49979	49980	49981	49981	49982	49983	49983
3,6	49984	49985	49985	49986	49986	49987	49987	49988	49988	49989
3,7	49989	49990	49990	49990	49991	49991	49992	49992	49992	49992
3,8	49993	49993	49993	49994	49994	49994	49994	49995	49995	49995
3,9	49995	49995	49996	49996	49996	49996	49996	49996	49997	49997

Uzziņu literatūra, rokasgrāmatas, tabulas

1. Mencis J., Sika A. Matemātikas rokasgrāmata skolēniem. – Rīga: Apgāds Zvaigzne ABC, 1996. – 406 lpp.
2. Graudone H., Grinfelds U., Malzubre G., Mencis J., Šteiners K. Rokasgrāmata elementārajā matemātikā. – Rīga: Zvaigzne, 1982. – 512 lpp.
3. Buiķis M., Siliņa B. Matemātika. Definīcijas. Formulas. Aprēķinu algoritmi. – Rīga: Apgāds Zvaigzne ABC, 1997. – 288 lpp.
4. Выгодский М. Я. Справочник по элементарной математике. – Москва: Наука, 1978. – 424 с.
5. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. – Москва: Наука, 1977. – 870 с.
6. Vigodskis M. Augstākās matemātikas rokasgrāmata. – Rīga: Liesma, 1968. – 948 lpp.
7. Bartsch H.-J. Mathematische Formeln. – VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1973. – 512 C.
8. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. – Москва: Наука, 1998. – 720 с.
9. Математический энциклопедический словарь. Главный редактор Прохоров Ю. В. – Москва: Советская энциклопедия, 1988. – 848 с.
10. Корн Г. А., Корн Т. М. Справочник по математике для ученых и инженеров. – Москва: Наука, 1977. – 720 с.
11. Jan J. Tuma, Ronald A. Walsh. Engineering Mathematics Handbook. – McGraw-Hill Professional, 1997. – 566 p.
12. Математическая энциклопедия. – Москва: Советская энциклопедия, том 1–5, 1977–1985.
13. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – Москва: Наука, 1971. – 1108 с.
14. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. – Москва: Наука, 1978.
15. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Москва: Наука, 1976.
16. Янке Э., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции, формулы, графики, таблицы. – Москва: Наука, 1977.
17. Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции в трёх томах. СМБ. – Москва: Наука, 1969, 1973, 1974.
18. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. – Москва: Наука, 1965.

Alfabētiskais rādītājs

Rokasgrāmata matemātikā

labi pārskatāms informācijas avots

- **vecāko klašu skolēniem**
- **studentiem**
- **visiem matemātikas lietotājiem**

Šajā grāmatā ir vairāk nekā 1200 matemātikas jēdzienu, definīciju, formulu, uzdevumu risināšanas metožu un algoritmu

ISBN 9984-37-141-7
9 789984 371412
ZVAIGZNE ABC