

*Rīgas Starptautiskā ekonomikas un biznesa  
administrācijas augstskola*

*Leonīds Grīnglāzs  
Jevgeņijs Kopitovs*

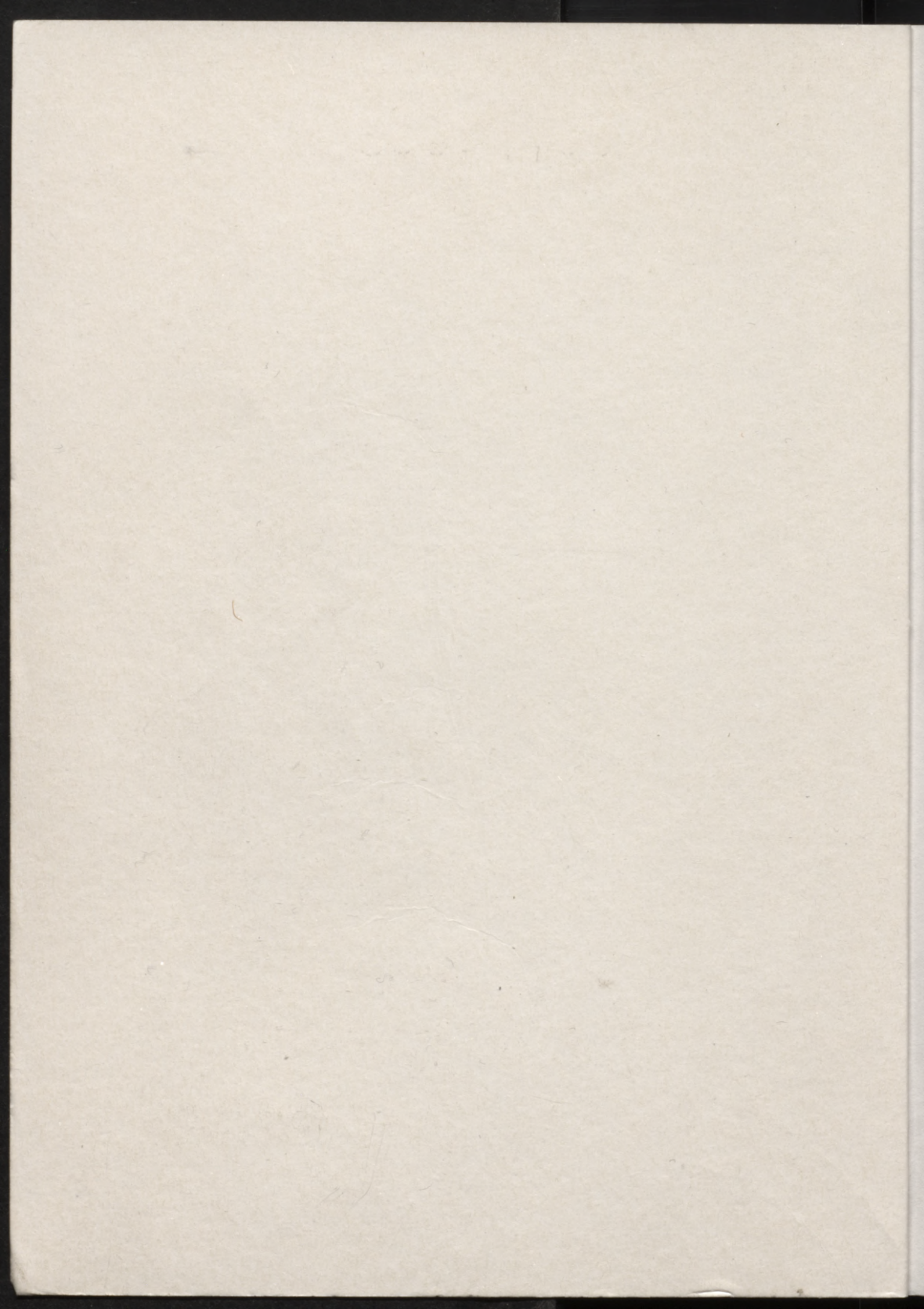
# **Augstākā matemātika ekonomistiem**

**ar datoru lietojuma paraugiem  
uzdevumu risināšanai**



*Biznesa izglītības bibliotēka*

**III**



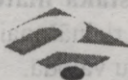
2003-3  
L 689

Biznesa izglītības bibliotēka

L  
5

Leonīds Grīnglāzs,

Rīgas Starptautiskās ekonomikas un biznesa administrācijas augstskolas profesors

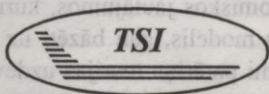


RSEBAA

Rīgas Starptautiskā ekonomikas un **biznesa administrācijas augstskola**

Jevgeņijs Kopitovs,

professors, Transporta un Sakaru Institūta rektors



# Augstākā matemātika ekonomistiem

ar datoru lietojuma paraugiem uzdevumu  
risināšanai

Mācību līdzeklis



RSEBAA

Rīgas Starptautiskā ekonomikas un **biznesa administrācijas augstskola**

Rīga  
2003

© Leonīds Grīnglāzs, 2003  
© Jevgeņijs Kopitovs, 2003

ISBN 9984-705-07-2

UDK 517  
Gr 607

0303044008

**Grīnglāzs L., Kopitovs J. Augstākā matemātika ekonomistiem:** Ar datoru lietojuma paraugiem uzdevumu risināšanai. Mācību līdzeklis. – Rīga: RSEBAA, 2003. – 380 lpp. Teksts latviešu valodā.

Mācību līdzeklis paredzēts augstāko mācību iestāžu ekonomisko specialitāšu studentiem. Tajā līdz ar augstākās matemātikas standartnodaļu izklāstu ir sniegti tādi finansu matemātikas elementi kā kapitāla uzkrāšana, aizņēmumu dzēšana, diskontēšana, investīciju efektivitātes novērtēšana.

Doti pielietojumi ekonomiskos jautājumos, kuri bāzēti uz lineāro algebru, tai skaitā gan starpnozaru bilances modelis, gan bāzēti uz diferenciālrēķiniem. Apskatīti matemātisko metožu pielietojumi patēriņa teorijas uzdevumu risināšanā un citi pielietojumi.

Tiek izklāstīti jautājumi, saistīti ar apgūstamo metožu realizāciju uz personālā datora. Tiek sniegti daudzveidīgu matemātisku uzdevumu risināšanas piemēri, programmu pakešu MS Excel un Mathematica vidē.

Mācību līdzeklis ir praktiski noderīgs uzņēmējiem.

Recenzenti: I. Akuļičs, Baltijas informācijas akadēmijas akadēmiķis, ekonomisko zinātņu doktors, habilitēts LR ekonomikas zinātņu doktors, profesors;  
A. Šostaks, fizikas matemātikas zinātņu doktors, habilitēts LR matemātikas zinātņu doktors, profesors.

Tulkotāji: 6.–205. lpp. Dr. math. Māris Buiķis  
206.–379. lpp. Jānis Smotrovs

Redaktore: Inga Zariņa

Maketētājs: Armands Paegle

RSEBAA adrese: Meža iela 1, k.2, Rīga, LV 1084

<http://www.rsebaa.lv>

# SATURS

lpp.

99	.....	.....
100	.....	.....
103	.....	.....
104	<b>PRIEKŠVārds</b> .....	<b>8</b>
104	.....	.....
107	<b>IEPRIEKŠĒJĀS ZINĀS</b> .....	<b>11</b>
107	.....	.....
1.	<b>FINANSU MATEMĀTIKAS ELEMENTI</b> .....	<b>15</b>
1.1.	Procenti .....	16
1.2.	Vienkāršie un saliktie procenti. Uzkrāšana .....	17
1.3.	Procentu likmju ekvivalence .....	23
1.4.	Naudas summu ekvivalence .....	25
1.5.	Diskontēšana .....	27
1.6.	Uzskaites likme .....	31
1.7.	Aprēķini ņemot vērā inflāciju un nodokļus par saņemtiem procentiem .....	35
1.8.	Iekšējā ienesīguma norma .....	36
1.9.	Finansu matemātikas uzdevumu risināšana ar <i>MS Excel</i> .....	42
128	Jautājumi pašpārbaudei .....	53
128	Vingrinājumi .....	53
131	.....	.....
2.	<b>KOMPLEKSIE SKAITĻI UN POLINOMI</b> .....	<b>62</b>
2.1.	Kompleksie skaitļi .....	62
2.2.	Kompleksā skaitļa trigonometriskā forma .....	64
2.3.	Polinoma sadalīšana reizinātājos .....	68
145	Jautājumi pašpārbaudei .....	70
145	Vingrinājumi .....	70
148	.....	.....
3.	<b>DETERMINANTI UN MATRICAS</b> .....	<b>72</b>
3.1.	Matricas .....	72
3.2.	Otrās un trešās kārtas determinanti .....	73
3.3.	Determinantu īpašības .....	74
3.4.	Determinanta izvirzīšana pēc rindas (kolonnas) elementiem .....	76
3.5.	Augstāku kārtu determinanti .....	78
3.6.	Matricu saskaitīšana un reizināšana .....	80
3.7.	Apvērstā matrica .....	82
3.8.	Piemēri par matricu pielietojumiem ekonomikā .....	85
160	Jautājumi pašpārbaudei .....	87
171	Vingrinājumi .....	88
171	.....	.....
4.	<b>VEKTORU TELPAS</b> .....	<b>92</b>
4.1.	Ģeometriskie vektori un lineārās darbības ar tiem .....	92
4.2.	Vektora projekcija uz ass .....	93
4.3.	Vektoru koordinātas un komponentes .....	95
4.4.	Vektoru skalārais reizinājums .....	96
4.5.	Skalārā reizinājuma izteikšana ar reizinātāju koordinātām .....	97
181	.....	.....

4. 6.	n-dimensiju vektori .....	99
4. 7.	Vektoru lineārā atkarība .....	100
4. 8.	n-dimensiju vektori un Eiklīda telpas .....	103
	Jautājumi pašpārbaudei .....	104
	Vingrinājumi .....	104
<b>5.</b>	<b>LINEĀRU ALGEBRISKU VIENĀDOJUMU SISTĒMAS</b> .....	<b>107</b>
5. 1.	Lineāru algebrisku vienādojumu sistēmu pieraksts matricu formā .....	107
5. 2.	Lineāras vienādojumu sistēmas atrisinājums matricu formā .....	108
5. 3.	Krāmera formulas .....	109
5. 4.	Kronekera-Kapelli teorēma. ....	110
5. 5.	Lineāru algebrisku vienādojumu sistēmas atrisinājums ar Gausa metodi .....	115
5. 6.	Matricas īpašvektori un īpašvērtības .....	119
5. 7.	Piemēri no ekonomikas. ....	121
	Jautājumi pašpārbaudei .....	124
	Vingrinājumi .....	125
<b>6.</b>	<b>ĻEONTJEVA „RESURSI-GALAPRODUKTS” MODELIS</b> <b>(starpnozarū bilances modelis)</b> .....	<b>128</b>
6. 1.	Modeļa izveidošana .....	128
6. 2.	Līdzsvarota galaprodukcijas apjoma aprēķins .....	131
6. 3.	Līdzsvara cenu aprēķins .....	133
6. 4.	Lineārās algebras elementi <i>MS Excel</i> .....	135
	Jautājumi pašpārbaudei .....	142
	Vingrinājumi .....	142
<b>7.</b>	<b>VIENARGUMENTA FUNKCIJAS</b> .....	<b>145</b>
7. 1.	Definīcija .....	145
7. 2.	Funkciju definēšanas veidi .....	146
7. 3.	Apvērstā funkcija .....	151
7. 4.	Galvenās elementārās funkcijas .....	152
7. 5.	Elementārās funkcijas .....	154
7. 6.	Argumenta un funkcijas pieaugums .....	156
7. 7.	Dažas funkciju īpašības .....	157
7. 8.	Funkciju grafiku pārveidojumi .....	158
7. 9.	Piemēri .....	164
7.10.	Jēdziens par funkciju interpolāciju un ekstrapolāciju .....	165
7.11.	Ekonomikā izmantojamu funkciju piemēri .....	166
	Jautājumi pašpārbaudei .....	171
	Vingrinājumi .....	172
<b>8.</b>	<b>ROBEŽAS</b> .....	<b>178</b>
8. 1.	Skaitļu virknes robeža. Galvenās definīcijas .....	178
8. 2.	Robežu īpašības .....	180
8. 3.	Bezgalīgi mazie lielumi .....	182
8. 4.	Bezgalīgi lieli lielumi .....	184
8. 5.	Aritmētiskās darbības ar robežām. ....	185

8. 6.	Funkcijas robeža.....	187
8. 7.	Vienpusējās robežas .....	190
8. 8.	Nenoteiktību novēršana.....	191
8. 9.	Pirmā ievērojamā robeža .....	193
8.10.	Otrā ievērojamā robeža.....	194
8.11.	Viena mainīgā funkcijas nepārtrauktība.....	195
8.12.	Nepārtraukti procenti.....	198
8.13.	Skaitļu rindas.....	199
	Jautājumi pašpārbaudei .....	202
	Vingrinājumi.....	202
<b>9.</b>	<b>VIENA MAINĪGĀ FUNKCIJAS DIFERENCIĀLRĒĶINI.....</b>	<b>206</b>
9. 1.	Atvasinājuma jēdzienu skaidrojošie piemēri.....	206
9. 2.	Atvasinājuma definīcija. Pieskares vienādojums .....	208
9. 3.	Atvasinājuma eksistences nepieciešamie nosacījumi.....	210
9. 4.	Dažu elementāru funkciju atvasinājumi .....	212
9. 5.	Summas, reizinājuma un dalījuma atvasinājums.....	214
9. 6.	Saliktas funkcijas atvasinājums.....	216
9. 7.	Apvērstas funkcijas atvasinājums. Parametriski dotas funkcijas atvasinājums .....	217
9. 8.	Pamatfunkciju atvasinājumu tabula.....	219
9. 9.	Logaritmiskā atvasināšana.....	220
9.10.	Funkcijas diferencējamība.....	220
9.11.	Funkcijas diferenciālis.....	221
9.12.	Diferenciāļu īpašības .....	222
9.13.	Diferenciāļa lietojumi tuvinātos aprēķinos.....	223
9.14.	Funkcijas linearizācija.....	223
9.15.	Augstāku kārtu atvasinājumi .....	224
	Paškontroles jautājumi.....	224
	Vingrinājumi.....	225
<b>10.</b>	<b>DIFERENCIĀLRĒĶINU LIETOJUMI.....</b>	<b>228</b>
10. 1.	Teorēmas par vidējo vērtību .....	228
10. 2.	Lopitāla kārtula.....	231
10. 3.	Teilora formula.....	233
10. 4.	Teilora rinda .....	236
10. 5.	Funkcijas augšanas (dilšanas) saistība ar tās atvasinājuma zīmi.....	237
10. 6.	Ekstrēma punkti.....	238
10. 7.	Funkcijas ekstrēma punkta nepieciešamais nosacījums .....	239
10. 8.	Funkcijas ekstrēma punkta pietiekamais nosacījums .....	239
10. 9.	Funkcijas lielākā un mazākā vērtība nogrieznī .....	242
10.10.	Funkcijas grafika liekums .....	242
10.11.	Funkcijas grafika asimptotas .....	245
10.12.	Funkcijas pētīšanas vispārīgā shēma.....	248
10.13.	Diferenciālrēķinu lietojums ekonomikas uzdevumu risinājumos.....	250
	Paškontroles jautājumi.....	258
	Vingrinājumi.....	258

<b>11.</b>	<b>INTEGRĀLRĒKINU ELEMENTI.....</b>	<b>263</b>
11. 1.	Noteiktā integrāļa jēdzienu skaidrojoši piemēri. Noteiktā integrāļa definīcija .....	263
11. 2.	Noteiktā integrāļa īpašības .....	266
11. 3.	Ņūtona-Leibnica formula .....	268
11. 4.	Substitūcijas metode noteiktajam integrālim.....	268
11. 5.	Primitīvā funkcija .....	269
11. 6.	Nenoteiktais integrālis.....	270
11. 7.	Nenoteikto integrāļu īpašības .....	271
11. 8.	Integrēšana pa daļām.....	273
11. 9.	Integrāļi ar mainīgu augšējo robežu .....	275
11.10.	Neīstie integrāļi .....	276
11.11.	Noteiktā integrāļa lietojuma piemēri ekonomikas uzdevumos .....	278
	Paškontroles jautājumi.....	282
	Vingrinājumi.....	283
<b>12.</b>	<b>VAIRĀKU MAINĪGO FUNKCIJAS .....</b>	<b>287</b>
12. 1.	Pamatjēdzieni .....	287
12. 2.	Līmeņvirsmas .....	290
12. 3.	Funkcijas robeža punktā.....	291
12. 4.	Parciālais un pilnais funkcijas pieaugums.....	292
12. 5.	Funkcijas nepārtrauktība .....	292
12. 6.	Parciālie atvasinājumi.....	293
12. 7.	Piemēri no ekonomikas .....	294
12. 8.	Vairāku mainīgo funkcijas diferencējamība.....	296
12. 9.	Divu mainīgo funkcijas diferenciālis.....	297
12.10.	Augstāku kārtu parciālie atvasinājumi un diferenciāļi .....	299
12.11.	Apslēpto funkciju diferencēšana. Aizvietošanas marginālā norma .....	300
12.12.	Atvasinājums dotajā virzienā.....	302
12.13.	Atvasinājuma dotajā virzienā aprēķināšana .....	303
12.14.	Gradients .....	304
12.15.	Saliktas funkcijas atvasinājums.....	305
12.16.	Vairāku mainīgo funkcijas ekstrēmi.....	307
12.17.	Ekstrēma nepieciešamie nosacījumi.....	308
12.18.	Ekstrēma pietiekamie nosacījumi .....	309
12.19.	Mazāko kvadrātu metode.....	312
12.20.	Nosacītais ekstrēms .....	315
12.21.	Piemēri no ekonomikas .....	317
	Paškontroles jautājumi.....	321
	Vingrinājumi.....	321
<b>13.</b>	<b>DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMI.....</b>	<b>327</b>
13. 1.	Pamatdefinīcijas .....	327
13. 2.	Pirmās kārtas diferenciālvienādojumi .....	328
13. 3.	Diferenciālvienādojumi ar atdalāmiem mainīgajiem.....	329
13. 4.	Pirmās kārtas lineārie diferenciālvienādojumi .....	332
13. 5.	Homogēns pirmās kārtas diferenciālvienādojums .....	334
13. 6.	Augstāku kārtu diferenciālvienādojumi .....	335

13. 7.	Diferenciālvienādojuma kārtas pazemināšana .....	336
13. 8.	Lineāri otrās kārtas diferenciālvienādojumi .....	337
13. 9.	Otrās kārtas lineārs homogēns diferenciālvienādojums ar konstantiem koeficientiem.....	340
13.10.	Otrās kārtas lineāri nehomogēni diferenciālvienādojumi .....	342
13.11.	Diferenciālvienādojumu lietojuma piemēri ekonomikas uzdevumu risinājumos....	345
	Paškontroles jautājumi.....	348
	Vingrinājumi.....	349
<b>14</b>	<b>MATEMĀTISKO UZDEVUMU RISINĀŠANA</b>	
	<b>PAKOTNĒ MATHEMATICA</b> .....	<b>352</b>
14. 1.	Pakotnes Mathematica vispārīgs raksturojums .....	352
14. 2.	Darbības ar matricām .....	356
14. 3.	Lineāru vienādojumu sistēmas atrisināšana .....	358
14. 4.	Atvasinājumu aprēķināšana.....	361
14. 5.	Integrāļu aprēķināšana.....	362
14. 6.	Funkcijas ekstrēmu atrašana.....	364
14. 7.	Diferenciālvienādojumu atrisināšana .....	365
	<b>VINGRINĀJUMU ATBILDES</b> .....	<b>367</b>
	<b>LITERATŪRA</b> .....	<b>374</b>
	<b>ALFABĒTISKAIS RĀDĪTĀJS</b> .....	<b>376</b>

## PRIEKŠVĀRDS

Rakstot šo mācību līdzekli, autoru mērķis bija kompaktā, bet saprotamā formā izklāstīt uzņēmējiem domāta matemātikas kursa pamatus un iepazīstināt ar iespējam realizēt apgūstamās matemātiskās metodes ar personāliem datoriem (PD). Dziļu un saturīgu augstākās matemātikas mācību grāmatu augstskolām ir daudz, tai skaitā labu augstākās matemātikas mācību grāmatu ekonomistiem (sk. [8], [II], [16]). Mācību līdzekļa autori ir centušies ne tikai pēc iespējas pieejamāk izklāstīt ekonomistiem un uzņēmējiem domātās augstākās matemātikas kursa pamatus, bet arī parādīt, ka pastāv ļoti bagātas un efektīvas iespējas ekonomikā pielietot pat samērā vienkāršu matemātisko aparātu. Mācību līdzeklis sākas ar tādiem no vidusskolas kursa pazīstamiem jēdzieniem, kā procenti un funkcijas, to izmantošana ekonomikā. Jau šeit redzams, ka pat ne visai sarežģīti matemātiskie spriedumi var novest pie nopietniem ekonomiskiem secinājumiem.

Ekonomikas apgūšana prasa labu matemātisko sagatavotību: ir vajadzīgs ekonomiskos pielietojumos izmantojams matemātiskais aparāts; matemātikas apgūšana paaugstina vispārējo domāšanas kultūru, izstrādā spēju loģiski domāt. Bez tam, ekonomiskā literatūra, raksti par ekonomiku ir piesātināti ar matemātiskiem paņēmieniem, un, lai lasītu un saprastu šo literatūru, nepieciešams pārvaldīt atbilstošo matemātisko aparātu. Apskatīsim vienkāršus piemērus. Liekas, ka, paaugstinot preces cenu, būtu jāpalielinās ražotāja (pārdevēja) peļņai; tomēr cenas paaugstināšana samazina pieprasījumu no pircēju puses, t. i. samazina pārdoto preces daudzumu un attiecīgi arī ieņēmumu. Ar kādu cenu ieņēmums būs maksimāls? Lai dotu pareizu atbildi, ir jāveic aprēķini, jāpielieto atbilstošs matemātiskais aparāts. Analogiska situācija ir ar nodokļiem. No vienas puses liekas, ka nodokļu paaugstināšana palielinās valsts budžeta ieņēmumus; no otras puses, ierobežo ražošanas attīstību un tādējādi samazina šos ieņēmumus. Kā analogisks piemērs var kalpot firmas optimālā izejvielu (preču) krājuma noteikšana utt.

Matemātisko metožu lietošana ļauj iegūt sakarības starp dažādiem parametriem, ekonomisku sistēmu daļām. Tā dod iespēju atrast optimālos atrisinājumus, prognozēt pieņemto lēmumu rezultātus. Pats efektīvākais ekonomisku objektu izpētīšanas paņēmiens ar matemātikas palīdzību ir

dotā objekta matemātiskā modeļa izveidošana. Modeļu metode – daudzu pētījumu neatņemama daļa. Pirms būvēt jebkuru (fizisku) objektu, izveido tā modeli. Matemātiskais modelis paredz noskaidrot sakarības starp pētāmās sistēmas dažādām daļām, to aprakstīšanu ar matemātisko metožu palīdzību: funkciju, vienādojumu sistēmu utt., iegūtā apraksta analīzi ar jau esošā matemātiskā aparāta palīdzību.

Matemātisko metožu pielietošana ekonomikā ir devusi jūtamu efektu, kas ir ļāvis iegūt daudzus labus ekonomiskās teorijas rezultātus.

Uzņēmēja matemātisko izglītību var sadalīt trijās daļās.

A. Vispārējais matemātikas kurss ekonomistiem.

B. Matemātiskā statistika ekonomistiem.

C. Ekonomikas matemātiskie modeļi (jeb matemātiskā ekonomika).

Piedāvātais mācību līdzeklis atbilst A punktam. Mācību līdzeklī ir apskatīti šādi jautājumi: 1) finansu matemātika; 2) ievads analīzē; 3) algebra, pirmām kārtām lineārā algebra; 4) diferenciālrēķini un integrālrēķini; 5) diferenciālvienādojumi.

ESM izstrādāšana pašos pamatos izmainīja cilvēka iespējas veikt matemātiskos aprēķinus. Piecdesmit gadu laikā ir sakrāta bagāta pieredze par daudzveidīga, matemātiskiem pielietojumiem domāta programmu nodrošinājuma izstrādi un izmantošanu. Izklāstot matemātiskās metodes, autori ir centušies parādīt, kādā veidā tās var tikt realizētas ar PD. Šim mērķim ir izraudzītas divas programmu paketes: universālais tabulu procesors *MS Excel* un matemātiskā pakete *Mathematica*. Paketi *MS Excel* izmanto lielākā daļa PD lietotāju un tā ir labi aprakstīta mācību literatūrā. Šajā mācību līdzeklī pakete *MS Excel* tiek izmantota finansu aprēķinu veikšanai un algebrisku uzdevumu risināšanai. Pakete *Mathematica* ir integrēta daudzfunkcionāla sistēma, paredzēta aprēķinu veikšanai. Šajā paketē ir realizētas daudzveidīgas aprēķinu metodes, dažas no tām ir aprakstītas piedāvātajā mācību līdzeklī; to skaitā: matemātisko funkciju aprēķini un to grafiku izveidošana, operācijas ar matricām, lineāru vienādojumu sistēmu atrisināšana, integrēšana, diferencēšana, diferenciālvienādojumu atrisināšana, funkciju ekstrēmu atrašana un citas.

Viens no dotā mācību līdzekļa uzdevumiem – parādīt studentiem matemātiskā aparāta izmantošanu ekonomiskajā darbībā. Tādēļ katrā nodaļā ir piemēri (un pat atsevišķi punkti) par matemātisku metožu izmantošanu ekonomisko uzdevumu risināšanā. Daudzas no apskatītajām metodēm tiek ilustrētas ar piemēriem, risinātiem ar PD. Bez tam ir dots pietiekams skaits piemēru praktiskiem darbiem un patstāvīgam darbam. Rakstot mācību līdzekli, tika izmantota literatūra, kuras saraksts ir grāmatas beigās. Turpat ir dots literatūras saraksts

papildu lasīšanai par matemātikas kursu un par matemātisko programmu pakotēm.

*L. Grīnglāzs, J. Kopitovs*

Piedāvātais mācību līdzeklis balstās, tai skaitā, uz manu grāmatu [4]. Savukārt, rakstot [4] tika izmantoti grāmatu [5] un [6] materiāli. Izsaku dziļu pateicību kolēģiem V. A. Sankinam, M. P. Sedņevai, L. A. Simonjanam, V. A. Korosteļevai, grāmatu [5], [6] līdzautoriem. Mūžīga piemiņa agri no dzīves aizgājušiem kolēģiem M. F. Nečajevai un J. T. Smorkačovam, grāmatas [5] līdzautoriem. Paldies tulkotājiem: manam kolēģim RSEBAA Dr. math. Mārim Buiķim un Latvijas Universitātes pasniedzējam Jānim Smotrovam!

*L. Grīnglāzs*

## IEPRIEKŠĒJĀS ZIŅAS

### 1. Lielumi

Viens no pamatjēdzieniem, kurš tiek izmantots gan matemātikas kursā, gan arī daudzās citās nākošajam uzņēmējam nepieciešamās disciplīnās, ir jēdziens „lielums”. Šis jēdziens ir tik plašs, ka ir grūti dot tā stingru definīciju. Uzskatīsim par lielumu visu, ko var izteikt ar skaitli. Piemēram, trijstūra laukums – ir lielums, bet trijstūris – nav lielums, jo jēdzienu „trijstūris” nosaka forma, bet ne skaitlis.

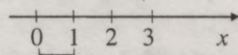
Lielumi mēdz būt mainīgi un konstanti. Savukārt, mainīgi lielumi var būt nepārtraukti un diskrēti. Lielums, kurš tā apskatīšanas laikā nemaina savu vērtību, tiek saukts par *konstantu*. Attiecīgi, lielumu, kurš pieņem dažādas vērtības, sauc par *mainīgu*. Ir arī lielumi, kuri vienā gadījumā (procesā) ir konstanti, citā var būt mainīgi. Piemēram, ja tiek pētīts pieprasījums pēc kādas preces tai iedzīvotāju daļai, kurai ir noteikts fiksēts ieņēmumu līmenis, tad šajā gadījumā ienākums ir konstants lielums. Ja tiek pētīts pieprasījums pēc kādas preces atkarībā no iedzīvotāju ieņēmumu līmeņa, tad šajā situācijā ieņēmums ir mainīgs lielums.

Mainīgu lielumu sauc par *diskrētu*, ja tas pieņem atsevišķas izolētas skaitliskas vērtības, kurām pa vidu nav citu šī lieluma vērtību. Piemēram, klientu skaits ir diskrēts lielums. Tas var pieņemt tikai veselās nenegatīvas vērtības. Mainīgu lielumu sauc par *nepārtrauktu*, ja tā iespējamās vērtības pilnībā aizpilda kādu skaitļu ass intervālu. Piemēram, ja elektriskie vilcieni kursē ar 10 minūšu intervālu, tad vilciena gaidīšanas laiks var pieņemt jebkuru vērtību no 0 līdz 10. Jāatzīmē, ka vērtības, kuras pieņem apskatāmais lielums, ir atkarīgas no izvēlētās mērvienības (dimensijas).

### 2. Reālie skaitļi

Veselus pozitīvus skaitļus sauc par *naturāliem*. Tie ir skaitļi 1, 2, 3, ... Visu naturālo skaitļu kopu apzīmē ar burtu *N*. Naturālie skaitļi kopā ar veseliem negatīvajiem skaitļiem un skaitli nulle veido visu veselo skaitļu kopu *Z*. *Racionāls skaitlis* – tas ir skaitlis, kuru var attēlot kā  $m/n$ , kur  $m$  un  $n$  – veseli skaitļi un  $n \neq 0$ . Racionālo skaitļu kopu apzīmē ar burtu *Q*. Katru racionālu skaitli var pierakstīt kā galīgu decimāldaļskaitli vai kā bezgalīgu periodisku decimāldaļskaitli. Piemēram:  $3/4=0,75$ ;  $1/3=0,333 \dots$  Par *iracionālu skaitli* sauc bezgalīgu neperiodisku decimāldaļskaitli, piemēram, pazīstamais skaitlis  $\pi = 3,1415\dots$  ir iracionāls skaitlis. Var pierādīt, ka skaitļi  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$ , ... arī ir iracionāli skaitļi. Visu racionālo un iracionālo skaitļu kopu veido *reālo skaitļu kopu*. To apzīmē ar burtu *R*.

Taisnu līniju, uz kuras norādīts virziens, atskaites punkts un mēroga vienība, sauc par *skaitļu asi*:



Starp skaitļu ass punktiem un reālo skaitļu kopu pastāv savstarpēji viennozīmīga atbilstība, tas ir, katram reālam skaitlim atbilst tieši viens punkts uz skaitļu ass un katram punktam uz skaitļu ass atbilst tieši viens reāls skaitlis. To sauc par šī punkta *koordinātu* uz dotās ass.

### 3. Skaitļa absolūtā vērtība

Par reāla skaitļa  $x$  absolūto vērtību jeb moduli sauc reālu skaitli, kuru apzīmē ar  $|x|$  un definē ar šādu likumu

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ja, } x \geq 0; \\ -x, & \text{ja, } x < 0. \end{cases}$$

Piemēram,  $|-2| = 2$ ;  $|2| = 2$ . No definīcijas ir skaidrs, ka jebkuram reālam skaitlim  $x$  ir spēkā īpašība  $|x| \geq x$ . Atzīmēsim bez pierādījuma vēl šādas īpašības:

- 1)  $|-x| = |x|$ ;
- 2)  $|x \pm y| \leq |x| + |y|$ ;
- 3)  $|x - y| \geq |x| - |y|$ ;
- 4)  $|xy| = |x| \cdot |y|$ ;  $|x/y| = |x|/|y|$ .

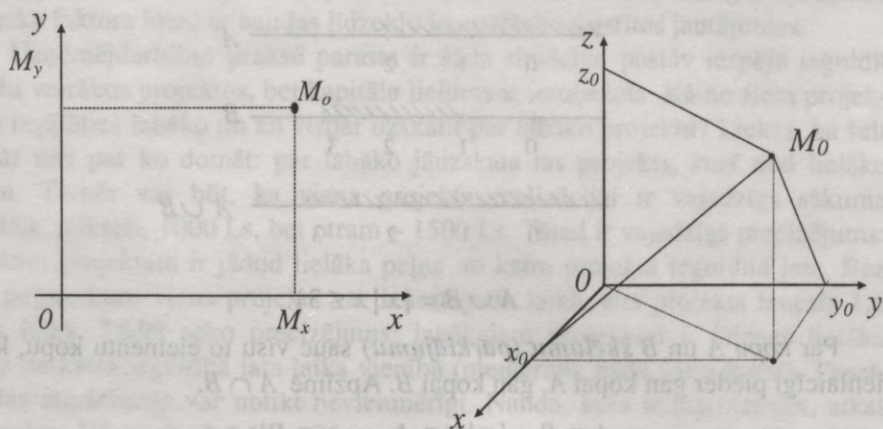
Nemam skaitļu asi. Katram skaitlim  $x$  atbilst punkts uz  $Ox$  ass,  $|x|$  parāda attālumu no punkta  $x$  līdz atskaites punktam. Tādēļ nevienādība  $|x| \leq a$  ir līdzvērtīga šādai divkāršai nevienādībai:

$$-a \leq x \leq a.$$

### 4. Dekarta koordinātu sistēma

Novilksim plāknē divas savstarpēji perpendikulāras taisnes. Apzīmēsim ar  $O$  to krustpunktu. Izvēlēsimies uz katras taisnes virzienu, mēroga (garuma) vienību un par atskaites punktu izvēlēsimies punktu  $O$ . Šādā veidā taisnes ir pārvērtušās par skaitļu asīm. Sakārtosim asis, t. i. izvēlēsimies, kuru no tām uzskatīsim par pirmo, bet kuru par otro. Divas savstarpēji perpendikulāri sakārtotas asis tad arī ir Dekarta (taisnleņķa) koordinātu sistēma plāknē. Apzīmēsim pirmo asi ar  $Ox$ , otro ar  $Oy$ . Izvēlēsimies plāknē kādu punktu  $M_0$ . Novilksim no šī punkta perpendikulus pret asīm. Uz asīm iegūsim divus punktus  $M_x$  un  $M_y$ . Šo punktu koordinātas uz asīm apzīmēsim ar  $x_0$ ,  $y_0$ . Sakārtotais skaitļu pāris  $(x_0, y_0)$  tiek saukts par punkta  $M_0$  koordinātām plāknē. Svarīgs ir šī pāra elementu sakārtojums:  $(2, 4)$  un  $(4, 2)$ , kas ir dažādu punktu koordinātas.

Analoģiski trīs sakārtotas savstarpēji perpendikulāras asis nosaka Dekarta (taisnleņķa) koordinātu sistēmu telpā. Novelkot perpendikulus no punkta  $M_o$



pret šīm asīm un apzīmējot ar  $x_o, y_o, z_o$  šo punktu koordinātas uz atbilstošajām asīm, iegūstam sakārtotu skaitļu trijnieku – šī punkta  $M_o$  koordinātas  $(x_o, y_o, z_o)$  dotajā koordinātu sistēmā.

## 5. Kopa

Kopa ir jebkuru noteiktu un savā starpā atšķiramu objektu kopums, uzskatīts par vienu veselu. Šos objektus, kuri veido kopu, sauc par *kopas elementiem*. Piemēram, studentu grupa – ir kopa, kuras elementi ir konkrēti studenti. Ja apzīmētu kopu, piemēram, ar burtu  $A$ , bet tās elementu ar burtu  $a$ , tad to faktu, ka elements  $a$  pieder kopai  $A$  pieraksta ar simbolu  $\in$  šādi:  $a \in A$ . Pretējā gadījumā raksta  $a \notin A$ . Ja kopa  $B$  ir daļa no kopas  $A$ , tad raksta  $B \subset A$  jeb  $A \supset B$ . Ja kopas  $A$  elementi ir  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , tad to pieraksta šādi:  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . Kopu var definēt, aprakstot tās elementu īpašības. Piemēram,  $A$  – kopa, kuras elementi ir skaitļi, mazāki par 5. Kompakti to var pierakstīt šādi:  $A = \{a \mid a < 5\}$ .

Kopu, kura nesatur nevienu elementu, sauc par *tukšu*. To apzīmē ar simbolu  $\emptyset$ . No jau dotas kopas var veidot jaunas kopas, izmantojot kopu apvienojuma, kopu šķēluma un kopas papildinājuma operācijas.

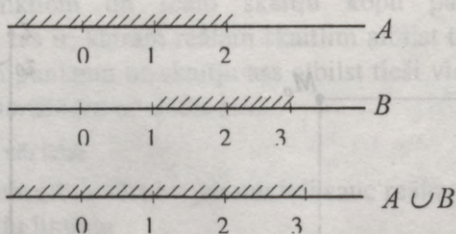
Par *kopu A un B apvienojumu* sauc visu to elementu kopu, kuri pieder vismaz vienai no kopām  $A$  un  $B$ . Apzīmē  $A \cup B$ .

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ jeb } x \in B\}.$$

Piemērs. Ja  $A$  – visu to skaitļu kopa, kuri mazāki par 2, bet  $B$  – kopa, kuras elementi ir skaitļi no 1 līdz 3:

$$A = \{x \mid x < 2\}, \quad B = \{x \mid 1 \leq x \leq 3\},$$

tad  $A \cup B$  ir visu to skaitļu kopa, kuri mazāki vai vienādi ar 3.



$$A \cup B = \{x \mid x \leq 3\}.$$

Par kopu  $A$  un  $B$  *šķēlumumu* (*pārklājumu*) sauc visu to elementu kopu, kuri vienlaicīgi pieder gan kopai  $A$ , gan kopai  $B$ . Apzīmē  $A \cap B$ .

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Piemērs. Ja  $A$  un  $B$  – iepriekšējā piemērā apskatītās kopas, tad

$$A \cap B = \{x \mid 1 \leq x < 2\}.$$

Par kopas  $A$  *papildinājumu* līdz kopai  $B$  (sauc arī par kopu  $B$  un  $A$  starpību) sauc kopu, kuru veido visi tie kopas  $B$  elementi, kuri nepieder kopai  $A$ . Apzīmē  $B \setminus A$ .

$$B \setminus A = \{x \mid x \in B, \text{ bet } x \notin A\}.$$

Piemērs. Ja  $A$  un  $B$  ir tās pašas iepriekšējos piemēros apskatītās kopas, tad

$$B \setminus A = \{x \mid 2 \leq x \leq 3\}.$$

Definēsim dažas skaitļu ass kopas.

Pieņemsim, ka  $a$  un  $b$  – reāli skaitļi,  $a < b$ . Ar  $[a, b]$  tiek apzīmēta to skaitļu  $x$  kopa, kuri apmierina nosacījumu  $a \leq x \leq b$ . To sauc par skaitļu ass *segmentu* (slēgtu intervālu)  $[a, b]$ . Ar  $(a, b)$  apzīmē to skaitļu kopu, kuri apmierina nosacījumu  $a < x < b$ . Šo kopu sauc par *intervālu* (vaļēju intervālu). Atbilstoši  $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$  un  $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$  tiek saukti par *pusintervāliem*. Intervālu, kurš ietver punktu  $a$ , sauc par šī punkta *apkārtni*, bet intervālus ar veidu  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , kuri ietver punktu  $a$ , sauc par punkta  $a$  *ε-apkārtni*.

## 1. FINANSU MATEMĀTIKAS ELEMENTI

Šajā nodaļā tiks apskatīta procentu izmantošana ekonomiskajos aprēķinos un laika faktora loma ar naudas līdzekļu investēšanu saistītos jautājumos.

Uzņēmējdarbības praksē parasta ir šāda situācija: pastāv iespēja ieguldīt naudu vairākos projektos, bet kapitāla lielums ir ierobežots. Kā no šiem projektiem izvēlēties labāko un ko vispār uzskatīt par labāko projektu? Liekas, ka šeit vispār nav par ko domāt: par labāko jāuzskata tas projekts, kurš dod lielāko peļņu. Tomēr var būt, ka viena projekta realizācijai ir vajadzīgs sākuma kapitāls, teiksim, 1000 Ls, bet otram – 1500 Ls. Tātad ir vajadzīgs precizējums: labākam projektam ir jādod lielāka peļņa no katra projektā ieguldītā lata. Bez tam peļņa, kuru viens projekts var ienest gada laikā, cits projekts ienesīs 1,5 gadu laikā. Tādēļ seko precizējums: labākajam projektam ir jāienes lielāka peļņa no katra ieguldītā lata laika vienībā (piemēram, gadā vai mēnesī). Tāpat, naudas atgriešanās var notikt nevienmērīgi. Nauda, kura ir atgriezies, atkal nes peļņu. Kā ņemt vērā šādu faktoru? Atbilde uz šo jautājumu tiks dota vēlāk, bet šeit kā piemēru sniegsim uzdevumu.

Kādam uzņēmējam ir jāpieņem lēmums par kapitāla ieguldīšanu vienā no trim projektiem. Nosauksim tos *A*, *B*, *C*. Saskaņā ar ekspertu novērtējumiem, projektiem *B* un *C* katram nepieciešami 80 000 Ls lieli kapitālieguldījumi, bet projektam *A* – 100 000 Ls. Pēc ieceres objekti tiks ekspluatēti piecus gadus un pēc tam pārdoti par atlikuma vērtību. Paredzamā peļņa (tūkstošos latu) pa gadiem un šo objektu atlikuma vērtības norādītas tab.1.1. Nepieciešams izvēlēties labāko kapitāla ieguldīšanas variantu.

Tabula 1.1

Gads	Projekts		
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
1	0	20	30
2	10	20	50
3	30	15	10
4	40	25	10
5	60	20	00
Atlikuma vērtība	30	30	30

Šādu uzdevumu risināšanas metodes tiks apskatītas šajā nodaļā.

Pēc šī materiāla apgušanas jūs:

- 1) *sapratīsīt procenta jēdziena nozīmīgumu ekonomikā;*
- 2) *sapratīsīt laika lomu jautājumos, kuri saistīti ar līdzekļu investēšanu;*
- 3) *mācēsīt aprēķināt uzkrājuma vērtību, veicot regulāras naudas iemaksas;*
- 4) *zināsīt, kas ir diskontēšana;*

- 5) mācēsit aprēķināt naudas plūsmas diskontēto vērtību (PV);
- 6) mācēsit risināt kreditu dzēšanas uzdevumus;
- 7) sapratisit iekšējās ienesiguma normas (IRR%) nozimi un mācēsit to aprēķināt vienkāršākajos gadijumos;
- 8) spēsit salidizināt dažādu investiciju projektu efektivitāti.

Tagad pāriesim pie galvenajām definicijām.

### 1.1. Procenti

Pēc definicijas viens procents no skaitla  $x$  ir  $\frac{1}{100}$  skaitla viena simtā daļa. Apzimē 1%. Piemēram, ja  $x = 300$ , tad 1% no  $x$  vienāds ar 3. Atbilstoši,  $n\%$  no skaitla ir  $\frac{n}{100}$  skaitla  $n$  simtās daļas. Piemēram, aprēķināsim 5% no 200:  $200 \cdot 5/100 = 10$ . Procenta jēdiziens ir plaši izplatits visās dzives sferās, tai skaitā ekonomikā; ar tiem ir saistits liels skaits uzdevumu. Atzimēsim dažus piemērus, sākot ar vienkāršākajiem.

1. Pieņemsim, ka ienākuma nodoklis ir 25% no ienākuma lidz 200 Ls mēnesi. Kāds ir nodokla lielums, ja ienākums ir 75 Ls?

Atrisinājums.  $(75 \cdot 25)/100 = 18,75$ .

Atbilde. 18,75 Ls.

2. Kafejnicas mēneša ieņemums ir 5000 Ls. Apkalpojošā personāla darba alga kopā ir 700 Ls. Kādu procentu no ieņemuma veido apkalpojošā personāla alga?

Atrisinājums.  $(700/5000) \cdot 100 = 14$ .

Atbilde. 14%.

3. Janvāri realizētās produkcijas apjoms ir 2500 vienibu, bet februāri 2800 produkcijas vienibu. Kāda ir procentuālā realizētās produkcijas apjoma izmaiņa?

Atrisinājums. Apjoma izmaiņa  $2800 - 2500 = 300$ . Procentuālā apjoma izmaiņa  $(300/2500) \cdot 100 = 12$ .

Atbilde. 12%.

4. 1995. gadā Pilsetā  $N$  dzivoja 70 500 cilveku. Nākošajos gados ikgadejais iedzivotāju pieaugums bija 2%. Noteikt iedzivotāju skaitu: a) 1996. gadā; b) 2001. gadā.

Atrisinājums. Atrisināsim  $\dot{s}$ o uzdevumu vispārigā veidā. Apzimēsim iedzivotāju skaitu 1995. gadā ar  $a$ , iedzivotāju skaita procentuālo pieaugumu ar  $p\%$ . Tad pēc gada iedzivotāju skaits pilsetā ir

$$a_1 = a + a \cdot (p/100) = a(1 + p/100),$$

vel pēc gada

$$a_2 = a_1 + a_1 \cdot (p/100) = a_1(1 + p/100) = a(1 + p/100)^2$$

utt. Tādējādi pilsētas iedzīvotāju skaits veido ģeometrisku progresiju, kuras pirmais loceklis ir  $a$ , bet kvocients ir  $(1 + p/100)$ . Tātad pēc  $n$  gadiem pie nemainīga  $p$  pilsētas iedzīvotāju skaits būs

$$a_n = a(1 + p/100)^n.$$

Konkrēti, apskatāmajā piemērā iedzīvotāju skaits 1996. gadā būs

$$70\,500(1 + 0,02) = 71\,910$$

un 2001. gadā.

$$70\,500(1 + 0,02)^6 = 79\,394.$$

Atbilde. Pilsētas iedzīvotāju skaits 1996. gadā – 71 910; 2001. gadā – 79 394.

5. Kādā firmā darbinieku vidējā mēneša alga 1996. gadā bija \$600, bet 2000. gadā – 1200 dolāru mēnesī, pie kam algas izmaiņas procents katru gadu ir viens un tas pats. Atrast šo izmaiņas procentu.

Atrisinājums. Apzīmēsim ar  $p$  meklējamo izmaiņas procentu. Tad, spriežot tāpat kā iepriekšējā uzdevumā, iegūstam:

$$1200 = 600 \cdot (1 + p/100)^4,$$

no šejienes

$$(1 + p/100)^4 = 2;$$

$$1 + p/100 = \sqrt[4]{2} = 1,19;$$

$$p/100 = 0,19; \quad p = 19\%.$$

Atbilde. 19%.

Pievērsiet uzmanību šādam acīm redzamam, bet pietiekoši svarīgam faktam: ja kāda lieluma  $a$  pieaugums ir  $p\%$ , tad šis lielums palielinās  $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$  reizes. Piemēram, ja pārdošanas apjoms ir palielinājies par 20%, tad tas ir palielinājies 1,2 reizes.

## 1.2. Vienkāršie un saliktie procenti.

### Uzkrāšana

Ekonomikā termins „procenti” tiek izmantots divējādi. No vienas puses, tas tiek izmantots iepriekš minētajā nozīmē, t.i. *procents* – tā ir skaitļa viena simtā daļa, bet no otras puses, *procents* – tā ir summa, kuru maksā par aizdoto līdzekļu lietošanu. Piemēram, ja banka dod firmai 10 000 Ls kredītu un par šo

pakalpojumu ir jāmaksā 2000 Ls (papildu vēlāk atdodamajai summai 10 000 Ls), tad šie 2000 Ls arī ir procenti par doto kredītu. No konteksta vienmēr būs skaidrs, par ko ir runa.

Procenta  $a$ , kurš jāmaksā par naudas daudzuma  $K$  lietošanu zināmu laika periodu, attiecību pret šo daudzumu  $K$  sauc par **procentu likmi** vai **ienesīgumu**. Apzīmēsim to ar  $i$ . Tad

$$i = \frac{a}{K}. \quad (1.1)$$

Savukārt,

$$a = Ki.$$

Vārdiem procentu likme parasti pievieno **termiņa nosaukumu**. Piemēram, ja par 1000 Ls lielu kredītu, paņemtu uz vienu gadu, ir jāmaksā 240 Ls, tad gada procentu likme ir

$$i = a/K = 240/1000 = 0,24.$$

Atbilstoši, ja par šīs summas lietošanu vienu mēnesi ir jāmaksā 20 Ls, tad mēneša procentu likme ir

$$i = a/K = 20/1000 = 0,02.$$

Lielums  $p = i \cdot 100$  arī ir procentu likme, tikai izteikta nevis daļās, bet „parastajos” procentos. Apzīmē  $p\%$ . Atbilstoši  $i = p/100$ . Piemēram, ja  $i = 0,35$ , tad  $p = 35\%$ . Noguldītiem (bankā) naudas līdzekļiem banka pieskaita procentus. Notiek **līdzekļu uzkrāšana**. Naudas summu, kura ir vienāda ar sākotnējo kapitālu plus pierēķinātos procentus, sauc par **uzkrāto summu**. Pieņemsim, ka bankā ir noguldīta summa  $K$ , un  $p\%$  ir gada procentu likme. Tad izmaksājamais procentis  $a = Ki$  un noguldījuma summa gada beigās būs

$$K_1 = K + Ki = K(1+i).$$

Ja turpmāk banka aprēķinās procentus no sākuma summas  $K$ , tad tādos procentus sauc par **vienkāršiem**. Šajā gadījumā pēc diviem gadiem uz rēķina būs summa

$$K_2 = K_1 + a = K + Ki + Ki = K + 2Ki = K(1+2i),$$

pēc trim gadiem

$$K_3 = K_2 + a = K + 2Ki + Ki = K + 3Ki = K(1+3i)$$

utt., pēc  $n$  gadiem

$$K_n = K(1+ni). \quad (1.2)$$

Ja  $K$  – kredīts, kuru banka ir izdevusi uz  $n$  gadiem, tad spriedumi paliek tādi paši un  $K_n = K(1+ni)$  ir summa, kura aizņēmējam (personai, kura saņēmusi kredītu) ir jāatdod bankai pēc  $n$  gadiem.

Tajos gadījumos, kad finansu darījuma ilgums  $t$  neveido veselus gadus, tad uzkrāto summu  $K_t$  var aprēķināt pēc tās pašas formulas (1.2)

$$K_t = K(1 + t \cdot i). \quad (1.2')$$

Tomēr biežāk šo summu aprēķina pēc formulas

$$K_t = K \left( 1 + \frac{i}{m} \cdot t \right), \quad (1.3)$$

kur  $t$  – darījuma ilgums dienās, pie kam pirmā un pēdējā diena tiek skaitīta par vienu dienu;

$m$  – dienu skaits gadā;

$i$  – gada procentu likme.

Jāatzīmē, ka dažādās valstīs tiek izmantota dažāda lielumu  $t$  un  $m$  noteikšanas prakse.

Vienā gadījumā pieņem  $m = 365$ , bet  $t$  vienāds ar precīzu darījuma dienu skaitu (šādu aprēķina variantu sauc par *precīziem procentiem ar precīzu dienu skaitu*).

Otrā gadījumā pieņem, ka  $m = 360$ , bet  $t$  vienāds ar precīzu darījuma dienu skaitu (sauc: *parastie, vai komercprocenti, procenti ar precīzu dienu skaitu*).

Trešajā gadījumā pieņem  $m = 360$ , un darījuma dienu skaitu  $t$  aprēķina pēc likuma:

$$t = (\text{pilnu mēnešu skaits}) \times 30 + \text{precīzs dienu skaits nepilnajā mēnesī}.$$

Šīs metodes nosaukums ir *vienkāršie procenti ar aptuvenu dienu skaitu*. Šis paņēmiens ir plaši izplatīts Vācijas, Latvijas, Krievijas banku praksē.

Ja pēc noteikta laika perioda procentus aprēķina no visas par iepriekšējo periodu uzkrātās summas, tad tādus procentus sauc par *saliktiem*. Piemēram, bankā ir noguldīti 1000 dolāri uz 5% gadā. Pēc gada uz rēķina būs summa

$$1000 + 1000 \cdot 0,05 = 1000(1 + 0,05) = 1050.$$

Aprēķinātā procenta pieskaitīšanu sākuma summai sauc par procentu *kapitalizāciju*. Nākošajā gadā procenti tiks aprēķināti jau no uzkrātās summas, t. i. no 1050 dolāriem. Tātad pēc diviem gadiem uz rēķina būs summa

$$1050 + 1050 \cdot 0,05 = 1050(1 + 0,05) = 1000(1 + 0,05)^2 = 1102,5.$$

Atbilstoši, pēc trim gadiem

$$1000 \cdot (1 + 0,05)^3 = 1157,62$$

utt.

Saliktos procentus var rēķināt ne tikai pēc viena gada, bet arī pēc jebkura cita perioda, piemēram, pēc katra ceturkšņa (saliktie ceturkšņa procenti) vai pēc katra mēneša (saliktie mēneša procenti). Tas nozīmē, ka kapitalizācija var notikt katru ceturksni vai katru mēnesi. Vispārējā gadījumā, ja  $K$  ir sākotnēji noguldītā summa, procenti ir saliktie un  $p\%$  ir likme noteiktam periodam, tad pēc pirmā perioda uzkrātā summa būs

$$K_1 = K + Ki = K(1+i), \quad i = 0,01p;$$

pēc otrā perioda

$$K_2 = K_1 + K_1i = K_1(1+i) = K(1+i)^2$$

utt., un pēc  $n$ -tā perioda

$$\begin{aligned} K_n &= K_{n-1} + K_{n-1}i = K_{n-1}(1+i) = K(1+i)^n, \\ K_n &= K(1+i)^n. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Ja periodu skaits nav vesels (apzīmēsim to ar  $t$ ), procenti ir saliktie, tad uzkrātā summa  $K_t$  tiek aprēķināta pēc tās pašas formulas (1.4).

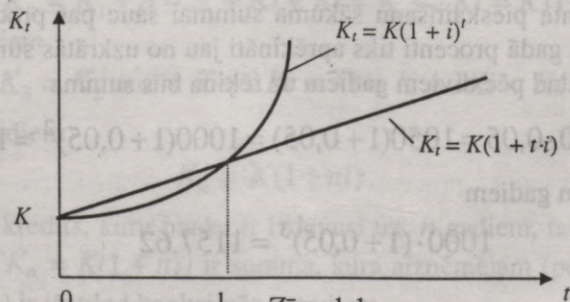
$$K_t = K(1+i)^t. \quad (1.4')$$

No otras puses, eksistē jēdziens **jauktais procents**: pieņemsim ka  $n = a + \alpha$ , kur  $a$  – skaitļa  $n$  veselā daļa, bet  $\alpha$  – daļveida daļa. Jaukto procentu gadījumā  $K_n$  aprēķina pēc formulas

$$K_n = K(1+i)^a \cdot (1+\alpha \cdot i). \quad (1.5)$$

Vēlreiz atzīmēsim, ka visi spriedumi paliek spēkā, ja  $K$  – izsniegtā kredīta lielums, bet  $K_n$  – summa, kura ir jāatdod pēc  $n$  periodiem. Tiešām, klienta noguldījums bankā ir kredīts, kuru tas ir sniedzis bankai.

Skaidrs, ja  $t > 1$ , tad summa, aprēķināta pēc salikto procentu formulas (1.4'), ir lielāka nekā analogiskā summa, aprēķināta pēc vienkāršo procentu formulas (1.2'); ja  $0 < t < 1$ , tad ir otrādi, šī summa ir mazāka.



Zīm. 1.1.

Piemēri.

1. 01.12.2002. gadā bankā tika noguldīti 800 Ls. Kāda summa būs uz rēķina 01.12.2005. gadā, ja

a) banka aprēķina vienkāršos 10% gadā?

b) banka maksā saliktos procentus ar likmi  $p = 1\%$  mēnesī?

Atrisinājums.

a) Izmantojam formulu (1.2)

$$K_n = K(1 + ni) = 800(1 + 3 \cdot 0,10) = 1040.$$

b) Tā kā procenti tiek aprēķināti katru mēnesi, tad šajā gadījumā  $n = 36$ , bet tā kā izmanto saliktos procentus, tad

$$K_n = K(1 + i)^n = 800(1 + 0,01)^{36} = 1144,62.$$

Piebilde. Atzīmēsim, ka ar kalkulatoru ir viegli kāpināt skaitli jebkurā pakāpē. Piemēram, ja nepieciešams aprēķināt  $2,3^{6,9}$ , ir jāspiež kalkulatora taustiņi šādā kārtībā:

$$2,3 \quad \boxed{y^x} \quad 6,9 \quad \boxed{=}$$

2. Ir noguldīta summa  $K=2000$  Ls uz saliktiem 10% gadā. Pēc cik ilga laika procenti būs vienādi ar 662 Ls?

Atrisinājums. Apzīmēsim meklējamo laiku ar  $n$ , tad pēc  $n$  gadiem summai uz rēķina jābūt vienādai ar 2662 Ls.

$$K_n = K(1 + i)^n, \\ 2662 = 2000(1 + 0,1)^n.$$

No šejienes

$$(1,1)^n = 1,331,$$

$$n = \log_{1,1} 1,331 = 3.$$

3. Klients paņēma 5.04.2003. gadā 4000 dolāru lielu kredītu uz vienkāršiem 20% gadā. Cik liela summa viņam būs jāatdod 15.08.2003. gadā?

Atrisinājums. Apskatīsim divus variantus: a) banka izmanto precīzos procentus un precīzu dienu skaitu; b) banka izmanto vienkāršos procentus ar aptuvenu dienu skaitu.

$$a) m = 365; t = 132; K_t = 4000 \left( 1 + \frac{0,2}{365} \cdot 132 \right) = 4289,32 \text{ dolāri.}$$

$$b) m = 360; t = 4 \cdot 30 + 10 = 130; K_t = 4000 \left( 1 + \frac{0,2}{360} \cdot 130 \right) = 4288,89 \text{ dolāri.}$$

4. Kāda summa būs pilsonim N uz rēķina 2009. gada maijā, ja, sākot no 1989. gada maija viņš katru gadu uz sava rēķina nogulda 700 dolārus uz saliktiem 15% gadā?

Atrisinājums. 700 dolāri, noguldīti 1989. gadā, pēc 20 gadiem (2009. gadā) kopā ar procentiem veidos summu

$$700(1 + 0,15)^{20} = 700 \cdot 1,15^{20}.$$

Savukārt, 700 dolāri, noguldīti 1990. gadā, pēc 19 gadiem, t. i. 2009. gadā, kopā ar procentiem veidos summu

$$700(1,15)^{19}, \text{ utt.,}$$

beidzot, 700 dolāri, noguldīti 2007. gadā, 2009. gadā, tas ir pēc diviem gadiem, kopā ar procentiem būs

$$700(1,15)^2,$$

bet 700 dolāri, noguldīti 2008. gadā, 2009. gadā veidos  $700 \cdot 1,15$ . Tādā veidā, kopējā uzkrātā summa būs

$$700 \cdot 1,15 + 700 \cdot (1,15)^2 + \dots + 700 \cdot (1,15)^{19} + 700 \cdot (1,15)^{20}.$$

Šī ir ģeometriskās progresijas locekļu summa. Pirmais loceklis  $b_1 = 700 \cdot 1,15$ , kvocients  $q = 1,15$ , un saskaitāmo skaits  $n = 20$ . Ģeometriskajai progresijai ar  $n$  locekļiem summa tiek aprēķināta pēc formulas

$$S_n = b_1(q^n - 1)/(q - 1). \quad (1.6)$$

Tādējādi, šajā gadījumā uzkrātā summa būs

$$S_n = 700 \cdot 1,15 \left( (1,15)^{20} - 1 \right) / (1,15 - 1) = 82\,467,08.$$

Vispārējā gadījumā, ja pēc vienādiem laika periodiem tiek noguldītas vienādas summas  $K$ , pie kam summas tiek iemaksātas norādīto laika periodu sākumos, tad, spriežot tāpat kā pēdējā piemērā, iegūstam, ka pēc  $n$  periodiem uz rēķina būs summa

$$S_n = \frac{K(1+i)((1+i)^n - 1)}{1+i-1} = K(1+i) \frac{((1+i)^n - 1)}{i}. \quad (1.6')$$

Jāatzīmē, ka eksistē tabulas formulas (1.4) reizinātāja  $(1+i)^n$  vērtību atrašanai un formulas (1.6') reizinātāja  $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$  vērtību atrašanai, kas varētu būt noderīgi, ja šīs formulas ir jālieto bieži. Atzīmēsim, ka fiksētu summu regulāras iemaksas ik pēc noteikta laika perioda tiek sauktas par *anuitāti* vai *renti*. Rentes var būt ar nemainīgiem maksājumiem un mainīgiem maksājumiem.

**Īss šī punkta kopsavilkums.** Ar vienu iemaksu veikta noguldījuma uzkrātā vērtība pēc  $n$  gadiem vienkāršo procentu gadījumā tiek aprēķināta pēc formulas (1.2), bet salikto procentu gadījumā – pēc formulas (1.4). Regulāri investējot vienāda lieluma naudas summas, ir ērti lietot ģeometriskās progresijas summas formulu (1.6).

### 1.3. Procentu likmju ekvivalence.

#### Naudas summu ekvivalence

Procentu likmes mēdz būt gadam, ceturksnim utt. Tās var būt vienkāršās un saliktās. Divas dažāda veida procentu likmes sauc par *ekvivalentām*, ja par vienu un to pašu periodu tās dod vienādu rezultātu.

Piemēram, pieņemsim, ka  $j$  – mēneša saliktā procentu likme,  $i$  – gada procentu likme. Tās būs ekvivalentas, ja kapitālam  $K$  gada laikā tās dos vienādu uzkrāto summu, t. i., ja

$$K(1+j)^{12} = K(1+i).$$

Izejot no šīs sakarības, var noteikt gada procentu likmi  $i$ , kura būs ekvivalenta dotajai mēneša saliktajai likmei  $j$ :

$$i = (1+j)^{12} - 1. \quad (1.7)$$

Vispārīgākā gadījumā, ja aizdevums tiek izdots ar procentu  $j$  par laiku  $t$  (gados), piemēram, uz  $j$  procentiem mēnesī (1/12 no gada) vai uz  $j$  procentiem ceturksnī (1/4 no gada), tad gada procentu likme  $i$ , ekvivalenta dotajam procentam  $j$ , var tikt aprēķināta šādi:

$$K(1+j)^t = K(1+i),$$

no kurienes

$$i = (1+j)^t - 1. \quad (1.8)$$

Formula (1.7) ir formulas (1.8) speciālgadījums. Tiešām, ja laiks  $t$  – viens mēnesis, t. i.  $t = \frac{1}{12}$  no gada, tad  $(1+j)^t = (1+j)^{12}$ , bet  $i = (1+j)^{12} - 1$ .

Pieņemsim tagad, ka  $i$  – bankas paziņotā gada procentu likme; tomēr klientam ir tiesības saņemt uzkrātos procentus  $n$  reizes gadā, pēc katra laika perioda  $t$  (vienādu ar  $\frac{1}{n}$  no gada). Piemēram,  $t = 1$  mēn. ( $1/12$  no gada) jeb  $t = 1$  kv. ( $1/4$  no gada). Tomēr, ja klients nevēlas izņemt procentus un saskaņā ar norunu šie procenti kapitalizējās, t. i. tiek pieskaitīti esošajai summai un turpmāk procenti tiek aprēķināti no uzkrātās summas. Tātad, reāli banka maksā salikto procentu  $j = \frac{i}{n}$  par laiku  $t$ , kurš vienāds ar gada  $\frac{1}{n}$  daļu, un reālo gada procentu likmi, ekvivalentu dotajam saliktajam procentam  $j$  (apzīmēsim to  $i_3$ ), varam aprēķināt pēc formulas (1.8)

$$i_3 = (1 + j)^t - 1.$$

Tā kā  $t = \frac{1}{n}$ , bet  $j = \frac{i}{n}$ , tad

$$i_3 = \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n - 1. \quad (1.8')$$

Šajā gadījumā paziņotais procents  $i$  saucas par **nomiņālo** gada procentu likmi, bet reālais procents  $i_3$  – par **efektīvo** gada procentu likmi.

Piemērs.

Apskatām divus kredītus: pirmais – uz 4 mēnešiem uz 15%, bet otrais – uz 3 mēnešiem uz 20%. Kurai operācijai ienesīgums ir lielāks?

Atrisinājums. Saskaņā ar formulu (1.8) likmei 15% ekvivalentā gada likme pirmajā gadījumā būs

$$i = (1 + 0,15)^4 - 1 = 0,749, \text{ jeb } 74,9\%,$$

attiecīgi gada likme, kura ekvivalenta 20%, otrajā gadījumā būs

$$(8.1) \quad i = (1 + 0,20)^3 - 1 = 0,728, \text{ jeb } 72,8\%.$$

Tātad ienesīgums pirmajā variantā ir augstāks.

Pieņemot, ka nauda strādā, t. i. dod zināmu procentu, var teikt, ka viena un tā pati summa  $K$  šodien un, pieņemsim, pēc gada – ir dažādas naudas, jo šī summa  $K$  noguldīta bankā vai investēta biznesā, kurš nes  $i$  procentus gadā, pēc gada pārvērtīsies par summu  $K(1+i)$ . Tas nozīmē, ka naudas summas vajag salīdzināt, attiecinot tās uz vienu un to pašu laika momentu. Tātad, summa  $K$  laika momentā  $t$  un summa  $K'$  laika momentā  $t' > t$  tiek uzskatītas par ekvivalentām attiecībā pret procentu likmi  $i$ , ja

$$K' = K(1+i)^{t'-t}$$

#### 1.4. Diskontēšana

Sākuma summas noteikšana pēc tās beigu vērtības saucas par **diskontēšanu**. Tēlaini runājot, diskontēšana – tā ir noteikšana, cik jūsu nākošie ienākumi jeb izdevumi ir vērti šodien. Pieņemsim, ka  $K$  – sākuma summa,  $K_n$  – beigu vērtība pēc  $n$  periodiem. Sākuma summu sauc par beigu vērtības **diskontēto** vērtību. To parasti apzīmē  $PV$  no angļu *Present Value* (šodienas vērtība). Atzīmēsim, ka nākotnes vērtību apzīmē  $FV$  (*Future Value*).

Ja lieto vienkāršos procentus, tad  $K_n = K(1+i \cdot n)$ , un

$$K = K_n / (1 + i \cdot n); \tag{1.9}$$

Ja lieto saliktos procentus, tad  $K_n = K(1+i)^n$ , un

$$K = K_n / (1+i)^n. \tag{1.10}$$

Piemēri.

Nākošajos trijos piemēros pieņemsim, ka firmas nauda atrodas bankā, kura maksā saliktos 1,5% mēnesī.

1. Kāda summa ir jānoliek uz rēķina, lai pēc 8 mēnešiem uz rēķina būtu 3000 Ls?

Atrisinājums.

Izmantosim formulu (1.10). Summa pēc 8 mēnešiem ir  $K_8$ ,  $n = 8$ ,  $i = 0,015$ .

Tad sākuma summa

$$K = 3000 / (1 + 0,015)^8 = 2663,13 \text{ Ls.}$$

Šā piemēra aprēķiniem var dot arī šādu interpretāciju: pieņemsim, ka uz firmas rēķina 1.09.2000. gadā nonāca 3000 Ls; ja uz šī rēķina 1.01.2000. gadā nonāktu 2663,13 Ls, tad abas ienākušās summas var uzskatīt par līdzvērtīgām (runājot par naudas izmantošanu pēc 1.09.2000. gada).

2. Pieņemsim, ka uz firmas rēķina 2000. gada laikā ienāca šādi maksājumi:

1.03	1.07	1.11	(1.11)
400 Ls	600 Ls	800 Ls	

Ja uz firmas rēķina 1.01 ienāktu summa

$$K = 400/(1,015)^2 + 600/(1,015)^6 + 800/(1,015)^{10} = 1626,32 \text{ Ls}, \quad (1.12)$$

tad, analogiski kā 1. piemērā, ienākušās summas (1.11) un (1.12) var uzskatīt par līdzvērtīgām. Apskatītie piemēri parāda, ka diskontēšana ļauj salīdzināt naudas maksājumus, izdarītus dažādos laika momentos (pie viena un tā paša bankas procenta).

3. Firmai ir paredzams pirkums. Divi pārdevēji piedāvā tai savus pakalpojumus: pirmajam vajag uzreiz pārskaitīt 4000 Ls, bet otrs prasa tūlīt pārskaitīt 2000 Ls un 2180 Ls pēc gada. Kurš pirkšanas variants ir izdevīgāks?

Atrisinājums. No pirmā acu uzmetiena liekas, ka viss ir skaidrs: pirmajam pārdevējam vajag pārskaitīt 4000 Ls, bet otrajam – 4180 Ls. Tomēr nesteigsimies. Apskatīsim, kādai summai jābūt uz rēķina darījuma veikšanas brīdī, lai pēc gada kopā ar procentiem tā veidotu 2180 Ls, citiem vārdiem, noteiksim sākuma (diskontēto) vērtību  $K$  lielumam  $K_1 = 2180$  Ls;

$$K_1 = 2180 = K(1 + 0,015)^{12},$$

no šejienes

$$K = 2180/1,1956 = 1823,35.$$

Tādā veidā, otrais variants ir līdzvērtīgs tam, ka pirkšanas brīdī ir jāiztērē

$$2000 + 1823,35 = 3823,35 \text{ Ls},$$

t. i. otrais pirkšanas variants ir izdevīgāks.

4. Firmas nauda atrodas bankā, kura maksā saliktos 10% gadā. Firma iegādājās iekārtas. Ir divu tipu iekārtas vienai un tai pašai ražošanai. Vienai ekspluatācijas laiks ir 3 gadi, otrai ir 6 gadi. Izmaksas iekārtu iegādei un ekspluatācijai (latos) ir dotas tab. 1.2.

Tabula 1.2

Gads	1. tipa iekārta	2. tipa iekārta
1	1000	1700
2	200	100
3	400	200
4		300
5		400
6		500

Kas ir izdevīgāk – divas reizes pirkt 1. tipa iekārtu vai vienu reizi 2. tipa iekārtu?

Atrisinājums. Mēs jau redzējām iepriekšējā piemērā, ka izmaksu salīdzināšanai tās ir jāattiecina uz sākuma laika momentu, citiem vārdiem, jānosaka to diskontētās vērtības.

2. varianta diskontētās izmaksas ir

$$1700 + \frac{100}{1,1} + \frac{200}{(1,1)^2} + \frac{300}{(1,1)^3} + \frac{400}{(1,1)^4} + \frac{500}{(1,1)^5} = 2765,26.$$

Atzīmēsim, ka tabulā norādītie izdevumi ir attiecināti uz gada sākumu. Tādēļ, piemēram,  $100/1,1$  (nevis  $100/(1,1)^2$ ) – ekspluatācijas izdevumu par pirmo ekspluatācijas gadu (2. gada sākums) diskontētā vērtība.

1. varianta diskontētie izdevumi:

$$1000 + \frac{200}{1,1} + \frac{400}{(1,1)^2} + \frac{1000}{(1,1)^3} + \frac{200}{(1,1)^4} + \frac{400}{(1,1)^5} = 2648,68.$$

Tādējādi, 1. variants ir izdevīgāks.

Ar diskontēšanu ir arī saistīti uzdevumi par kredītu dzēšanu.

### 1.5. Kredītu dzēšana

Aizņēmējam (jeb debitoram), tas ir cilvēkam, kurš ņem kredītu, ir jāatdod parāds, kā arī līgumā norunātā procentu summu. Ja, piemēram, kredīta līgumā ir noteikti saliktie 20% gadā, tad atdodod pēc gada, teiksim, 120 Ls, aizņēmējs ir no sava parāda dzēsis tikai 100 Ls ( $100 \text{ Ls} = 120/(1 + 0,2) \text{ Ls}$  – atdoto 120 Ls diskontēto vērtību); ja vēl pēc gada viņš maksā 144 Ls, tad dzēš vēl 100 Ls ( $100 = 144/(1 + 0,2)^2$ ) no sava parāda. Rezultātā visu izdarīto maksājumu diskontēto vērtību summai ir jābūt vienādai ar izsniegto kredītu. Apskatīsim šāda tipa uzdevumu.

Piemērs. Banka izsniedza firmai uz 8 gadiem 10 000 Ls lielu kredītu uz saliktiem 25% gadā. Pirmos 7 gadus firma gadā izmaksāja 3000 Ls. Kādai jābūt pēdējai izmaksai?

Atrisinājums. Pieņemsim, ka  $x$  – pēdējās izmaksas lielums. Saskaņā ar pieņēmumu, visu izmaksu diskontēto vērtību summai jābūt vienādai ar izsniegto kredītu, bet saskaņā ar vienādību (1.8) šīs diskontētās vērtības ir:

- 1. izmaksas diskontētā vērtība  $3000/(1,25)^1$ ;
- 2. izmaksas diskontētā vērtība  $3000/(1,25)^2$ ;
- .....

- 7. izmaksas diskontētā vērtība  $3000/(1,25)^7$ ;

- 8. izmaksas diskontētā vērtība  $x/(1,25)^8$ .

Tad

$$10\,000 = \frac{3000}{1,25} + \frac{3000}{(1,25)^2} + \dots + \frac{3000}{(1,25)^7} + \frac{x}{(1,25)^8}.$$

Ievērosim, ka labajā pusē pirmo septiņu saskaitāmo summa ir ģeometriskās progresijas summa. Šīs progresijas pirmais loceklis ir

$$b_1 = 3000/1,25$$

un kvocients ir

$$q = 1/1,25 = 0,8.$$

Tad, izmantojot formulu (1.6), iegūstam:

$$S_7 = b_1 \frac{(q^7 - 1)}{(q - 1)} = 3000 \cdot 0,8 \frac{(0,8^7 - 1)}{(0,8 - 1)} = 9483,42,$$

no kurienes

$$x/(1,25)^8 = 516,58 \text{ un } x = 3079,06.$$

Tātad pēdējai izmaksai jābūt 3079,06 Ls.

Pastāv dažādi kredītu dzēšanas noteikumi. Apskatīsim dažus biežāk izmantojamus variantus.

### ***Kredīta dzēšana ar vienādām izmaksām***

Piemērs. Firma paņēma bankā 10 000 Ls lielu kredītu uz saliktiem 30% gadā un kredīts ir jāatdod ar pieciem vienāda lieluma ikgadējiem maksājumiem. Ir jānosaka šo maksājumu lielums.

Atrisinājums. Apzīmēsim ikgadējā maksājuma lielumu ar  $x$ . Tad 1. maksājuma diskontētā vērtība ir

$$x/1,3,$$

2. maksājuma

$$x/(1,3)^2 \text{ utt.};$$

5. maksājuma

$$x/(1,3)^5.$$

Diskontēto vērtību summai ir jābūt vienāda ar kredīta vērtību

$$10\,000 = x/1,3 + x/(1,3)^2 + \dots + x/(1,3)^5.$$

Labā puse ir summa  $S_5$  ģeometriskai progresijai ar pirmo locekli  $b_1 = x/1,3$  un kvocientu  $q = 1/1,3$ ,

$$S_5 = x/1,3 \left( (1/1,3)^5 - 1 \right) / (1/1,3 - 1) = x \left( (1/1,3)^5 - 1 \right) / (1 - 1,3) = x \cdot 2,43557;$$

$$10\,000 = x \cdot 2,43557; \quad x = 4105,82 \text{ Ls.}$$

Vispārējā gadījumā, ja aizņēmums  $S$  ir ņemts uz  $n$  periodiem ar perioda salikto procentu likmi  $i$ , tad viena perioda maksājums  $x$  (perioda beigās) tiek atrasts no sakarības

$$S = \frac{x}{1+i} + \frac{x}{(1+i)^2} + \dots + \frac{x}{(1+i)^n}.$$

Tā kā labā puse ir summa ģeometriskai progresijai ar pirmo locekli  $\frac{x}{1+i}$  un

kvocientu  $\frac{1}{1+i}$ , tad

$$S = \frac{\frac{x}{1+i} \left( 1 - \left( \frac{1}{1+i} \right)^n \right)}{1 - \frac{1}{1+i}} = \frac{x \left( 1 - \frac{1}{(1+i)^n} \right)}{i},$$

no kurienes

$$x = \frac{S \cdot i}{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}. \quad (1.13)$$

Protams, arī šeit ir iespējamās modifikācijas. Apskatām

Piemēru. Aizdevums  $S$  ņemts uz  $n$  gadiem ar salikto gada procentu likmi  $i$ . Izmaksām joprojām jābūt vienāda lieluma, tikai tās ir jāveic reizi mēnesī.

Pirmais risinājuma variants ir šāds: izejot no formulas (1.13) noteikt, kādam jābūt gada maksājumam, un pēc tam izdalot to ar 12, noteikt, kādam jābūt mēneša maksājumam.

Tomēr, izejot no tā, ka nauda maksāta katru mēnesi ienes zināmu procentu, *taisnīgāk* būtu pieņemt šādu lēmumu: apzīmēsim ar  $j$  salikto mēneša procentu, kurš ekvivalents dotajam gada procentam  $i$ ; noteiksim  $j$ , izejot no sakarības (sk. p. 1.3)

$$(1 + j)^{12} = 1 + i.$$

Uzskatot, ka periodu skaits ir  $12n$ , bet saliktais procents ir  $j$ , ar formulas (1.13) palīdzību noteiksim mēneša maksājuma lielumu.

Beidzot, iespējams šāds variants: par mēneša procentu ņemt lielumu  $j = \frac{i}{12}$ , periodu skaits vienāds ar  $12n$  un pēc formulas (1.13) nosaka mēneša maksājuma lielumu.

Protams, ka katrā risinājuma variantā iznāk citāds mēneša maksājuma lielums. Varianta izvēli nosaka noruna starp kreditoru un debitoru.

### *Pamatparāda dzēšana ar vienādām summām*

Par pamatparādu tiek saprasta paņemtā kredīta summa  $K$ . Šajā variantā ikgadējā parāda izmaksa (gada beigās) ir vienāda ar  $\frac{1}{n}$  daļu no  $K$  plus procenti no uz gada sākumu atlikušās parāda daļas. Šajā metodē vienādas ir tikai pamatparāda izmaksājamās summas, bet procenti katru gadu tiek ņemti no dažādām summām (parāda atlikuma).

Piemērs. Firma paņēma uz 5 gadiem 10 000 Ls uz 12% gadā ar noteikumu, ka pamatparāds tiek dzēsts ar vienāda lieluma summām.

Atrisinājums. Katru gadu firmai ir jāizmaksā  $\frac{1}{5}$  no pamatparāda (2000 Ls) plus 12% no parāda atlikuma gada sākumā. Tātad, izmaksas lielums pirmā gada beigās būs

$$2000 + 0,12 \cdot 10\,000 = 3200.$$

Uz otrā gada sākumu atlikusī parāda daļa ir 8000 Ls. Tādēļ otrā gada beigās maksājums būs

$$2000 + 0,12 \cdot 8000 = 2960.$$

Analogiski, maksājumi trešā, ceturrtā un piektā gada beigās būs

$$2000 + 0,12 \cdot 6000 = 2720,$$

$$2000 + 0,12 \cdot 4000 = 2480,$$

$$2000 + 0,12 \cdot 2000 = 2240.$$

Atzīmēsim, ka tā saucamajā *patērētāju kredītā* procents no visas parāda summas uzreiz tiek pieskaitīts pamatparādam un iegūtā summa tiek dalīta ar maksājumu skaitu. Dalījuma rezultāts arī ir ikmēneša (vai ikceturkšņa) maksājuma lielums.

Tādā veidā, diskontēšana ļauj (pie zināmas procentu likmes) risināt virkni ekonomisku uzdevumu:

- noteikt sākuma summu, ja zināma beigu summa;
- salīdzināt dažādu investīciju projektu efektivitāti;
- risināt uzdevumus, saistītus ar kredītu dzēšanu, utt.

### 1.6. Uzskaites likme

Iepriekšējos punktos sākuma summa  $K$  tika pieņemta par 100% jeb, kā saka ekonomisti, bija pieņemta par aprēķinu bāzi. Izejot no tās, tika veikti visi aprēķini, tai skaitā uzkrātās summas  $K_n$  noteikšana. Daudzos gadījumos, piemēram, strādājot ar vekseliem, par aprēķinu bāzi (t. i. par 100%) tiek ņemta uzkrātā vērtība  $K_n$ . Apzīmēsim to šeit ar  $S$ . Starpību

$$D = S - K \quad (1.14)$$

sauc par *diskontu*. Attiecību

$$d = \frac{D}{S} = \frac{S - K}{S} \quad (1.15)$$

sauc par *uzskaites likmi* (ar norādītu periodu). Tiek izmantots arī termins *diskonta likme*.

Piemērs. Klients aizņemās bankā 1000 dolārus. Banka dod aizņēmumu ar uzskaites likmi 10% gadā. Tad tā summa, kura būs jāatdod (uzkrātā summa  $S$ ) tiek ņemta par 100%, bet aizņemtie 1000 dolāri veido 90% no uzkrātās summas, tad

$$S = \frac{1000}{90} \cdot 100 = 1111,11 \text{ dolāri.}$$

Salīdzinājumam, ja banka izmanto procentu likmi 10% gadā, tad

$$S = 1000 \cdot (1 + 0,1) = 1100 \text{ dolāri.}$$

Šis piemērs parāda, ka šajā gadījumā kredīta devējam uzskaites likme ir izdevīgāka kā procentu likme, proti, gada uzskaites likme 10% ir līdzvērtīga gada procentu likmei  $i = 11,11\%$ .

Pieņemsim, ka  $K$  – sākuma summa,  $S$  – gada laikā uzkrātā summa,  $d$  – gada uzskaites likme, t. i.  $d = (S - K)/S$ . No šejienes  $S \cdot d = S - K$  un

$$S = \frac{K}{1 - d} \quad (1.16)$$

Ja  $t$  – laiks (gados), uz kuru ir aizdota summa  $K$ , tad uzkrātā summa tiek aprēķināta pēc likuma:

$$S = \frac{K}{1 - t \cdot d}. \quad (1.17)$$

Strādājot ar uzskaites likmēm, parasti ir zināms  $S$ , bet ir jānosaka  $K$ . No pēdējās formulas

$$K = S(1 - t \cdot d). \quad (1.18)$$

Ja laiks  $t$  dots dienās, tad (1.18) vietā izmanto vienu no formulām:

$$K = S \left( 1 - \frac{t}{365} \cdot d \right) \quad (1.19)$$

jeb

$$K = S \left( 1 - \frac{t}{360} \cdot d \right). \quad (1.20)$$

Šī punkta sākumā apskatītajā piemērā bija parādīts, ka gada uzskaites likme  $d = 10\%$  ir ekvivalenta procentu likmei  $i = 11,11\%$ . Vispārējā gadījumā var noteikt, **kurai procentu likmei  $i$  ir ekvivalenta gada uzskaites likme  $d$** . Ja izmanto parasto procentu likmi, tad uzkrātā summa pēc gada būs  $K(1 + i)$ . Ja izmanto uzskaites likmi, tad uzkrātā summa pēc gada būs  $\frac{K}{1 - d}$ . Likmju ekvivalence nozīmē uzkrāto summu vienādību:

$$\frac{K}{1 - d} = K(1 + i),$$

no kurienes

$$i = \frac{1}{1 - d} - 1 = \frac{d}{1 - d};$$

un savukārt,

$$d = \frac{i}{1 + i}.$$

**Piemērs.** Firma ņem uz 100 dienām bankā kredītu ar uzskaites likmi 20% gadā. Cik lielu kredītu saņēma firma, ja bankai būs jāatdod 6000 dolāru?

Atrisinājums. Pēc formulas (1.20)

$$K = S \left( 1 - \frac{t}{360} \cdot d \right) = 6000 \left( 1 - \frac{100}{360} \cdot 0,2 \right) = 5666,67 \text{ dolāri.}$$

Atgādināsim, ka aprēķinos, kuros izmanto uzskaites likmi, procents tiek rēķināts no beigu summas, t. i. no summas, kuru nāksies atdot. Tas nozīmē, ka **procenti tiek ieturēti sākumā**, izsniedzot kredītu (procentu ieturēšana). Šādu procentu aprēķināšanas veidu sauc par *antisipatīvu*.

Kā jau tika atzīmēts, uzskaites likmes aktīvi tiek izmantoti, darbojoties ar vekseljiem.

*Vekselis* – tās ir kādas personas parāda saistība samaksāt vekseļa turētājam noteiktā termiņā noteiktu summu. Vekselī norādītā summa – tā ir vekseļa *nominālvērtība*. Vekseli var pārdot trešai personai pirms norādītā termiņa, protams, par cenu, kura zemāka par nominālvērtību. Vekseļus parasti pērk bankas, ieturot noteiktu procentu no vekseļa nominālvērtības. Šis procents arī ir uzskaites likme. Pašu vekseļa pirkšanas procesu sauc par *vekseļa uzskaiti*.

Piemērs. Vekselis ar nominālu 1400 dolāri ir jāapmaksā (jādzēš) pēc 60 dienām no tā brīža, kad banka to nopirka. Kādu summu saņems vekseļa turētājs, ja uzskaites likme ir 20% gadā?

Atrisinājums. Šajā piemērā beigu summa  $S = 1400$  dolāri,  $t = 60$ ,  $d = 0,2$ . Tātad,

$$K = S \left( 1 - \frac{t}{360} \cdot d \right) = 1400 \left( 1 - \frac{60}{360} \cdot 0,2 \right) = 1353,33 \text{ dolāri}$$

Uzskaites likmi sauc par *saliktu*, ja to pielieto par iepriekšējo periodu, piemēram, par gadu uzkrātai summai.

Pieņemsim, ka sākuma kapitāls ir  $K$ , uzskaites likme ir  $d$ . Tad uzkrātā summa par pirmo periodu ir  $S_1 = \frac{K}{1-d}$ . Savukārt, par 2. periodu

$$S_2 = \frac{S_1}{1-d} = \frac{K}{1-d} \cdot \frac{1}{1-d} = \frac{K}{(1-d)^2}$$

utt., pēc  $n$  periodiem

$$S = \frac{K}{(1-d)^n} \quad (1.21)$$

No šejienes

$$K = S(1-d)^n \quad (1.22)$$

Analoģiski formulām (1.21) un (1.22) var iegūt aprēķinu formulas saliktai uzskaites likmei  $d$  patvaļīgam laika intervālam  $t$ :

$$S = \frac{K}{(1-d)^t}; \quad K = S(1-d)^t. \quad (1.22')$$

Piemēri. 1) Klients noguldīja bankā \$2000 uz 1,75 gadiem ar salikto uzskaites likmi 20% gadā. Tad beigu summa būs

$$S = \frac{2000}{(1-0,2)^{1,75}} = 2955,44 \text{ dolāri.}$$

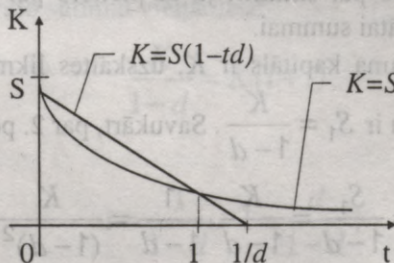
2) Vekselis ar nominālvērtību \$1000 tiek uzskaitīts bankā divus gadus pirms dzēšanas termiņa ar salikto uzskaites likmi 15% gadā. Kādu summu, pār-dodot vekseli, saņēma tā turētājs?

Atrisinājums. Pēc formulas (1.22)

$$K = S \cdot (1-d)^n = 1000(1-0,15)^2 = 722,5.$$

Vekseļa turētājs to pārdodot saņēma 722,5 dolārus.

Formulu (1.18):  $K = S(1 - td)$  un (1.22'):  $K = S(1 - d)^t$  salīdzināšana parāda, ka debitoram, t. i. personai, kura ņem aizdevumu, saliktā uzskaites likme ir izdevīgāka kā vienkāršā, ja  $t > 1$ . Tiešām, funkcija  $K = S(1 - dt)$  ir lineāra, bet funkcija  $K = S(1 - d)^t$  ir eksponentfunkcija, kurai  $a = 1 - d < 1$ . Acīmredzami, ka pie  $t = 1$  šo funkciju vērtības ir vienādas, bet pie  $t > 1$   $S(1 - d)^t > S(1 - td)$  (zīm. 1.2).



Zīm. 1.2.

Acīmredzami arī, ka formula (1.18) vienkāršai uzskaites likmei pie  $t > \frac{1}{d}$  zaudē savu jēgu:  $K$  kļūst negatīvs. Jāatzīmē, ka saliktai uzskaites likmei šāda ierobežojuma attiecībā uz laiku nav.

### 1.7. Aprēķini, ņemot vērā inflāciju un nodokļus par saņemtiem procentiem

**Cenu indekss**  $I_p$  parāda, cik reizes vidēji ir izaugušas cenas apskatāmajā periodā attiecībā pret kādu periodu, kuru sauc par bāzes periodu. Piemēram, ja 2000. gadā cenas vidēji 1,2 reizes ir izaugušas salīdzinot ar vidējām cenām 1996. gadā, tad cenu indekss ir 1,2. Šajā gadījumā saka: inflācija ir 20%. **Inflācija** ir vidējā cenu līmeņa pieaugums izteikts procentos. Piemēram, ja inflācija ir 75%, tad tas nozīmē, cenu līmenis ir paaugstinājies 1,75 reizes. Vispārējā gadījumā, ja inflācijas līmenis ir  $\alpha$ , tad cenu indekss

$$I_p = 1 + 0,01\alpha.$$

Cenu indekss parāda naudas reālās vērtības kritumu.

Pieņemsim, ka banka maksā salikto gada procentu  $i$ , bet inflācijas līmenis gadā ir  $\alpha$ . Tad gada laikā uzkrātai summai reālā vērtība (ņemot vērā inflāciju) būs

$$K_1 = K(1+i) \frac{1}{1+0,01\alpha} = K \frac{1+i}{1+0,01\alpha},$$

bet par laiku  $t$

$$K_t = K \left( \frac{1+i}{1+0,01\alpha} \right)^t, \quad (1.23)$$

šeit  $K$  – sākotnējais kapitāls.

Pieņemsim, ka  $\beta$  – nodokļu likme saņemtajiem procentiem. Tas nozīmē, ja par kapitāla lietošanu saņemtā procenta lielums ir  $a$  naudas vienības, tad tiks ieturēts  $\beta \cdot a$  naudas vienību liels nodoklis. Ja tagad  $i$  – procentu likme,  $K$  – kapitāls,  $a = Ki$  – izmaksājamais procents, tad ieturētais nodoklis būs  $a \cdot \beta = Ki \cdot \beta$ . Tādēļ par vienu periodu uzkrātās summas faktiskā vērtība būs

$$\begin{aligned} K_1 &= K + (a - a \cdot \beta) = K + (Ki - Ki \cdot \beta) = \\ &= K + Ki(1 - \beta) = K(1 + i(1 - \beta)). \end{aligned}$$

Ja lieto vienkāršos procentus, tad pēc  $t$  periodiem

$$K_t = K(1 + ti(1 - \beta)). \quad (1.24)$$

Ja lieto saliktos procentus, tad

$$K_t = K(1 + i(1 - \beta))^t \quad (1.25)$$

Piemērs. Klients 1997. gadā nopirka 100 kādas kompānijas akcijas par nominālvērtību \$10 gabalā. Nākošo trīs gadu laikā tika izmaksātas dividendes 15% apmērā no nominālvērtības. Visas šīs dividendes klients saņēma trešā gada beigās. Inflācijas līmenis šo gadu laikā bija 10% gadā. Nodokļu likme dividendēm bija 24%. Kāda ir reālā vērtība dividendēm, kuras saņēma klients?

Atrisinājums. Dividenžu vērtība, atņemot nodokļus ir

$$1000 \cdot 3 \cdot 0,15 \cdot (1 - 0,24) = 342 \text{ dolāri.}$$

Ņemot vērā inflāciju, šīs summas reālā vērtība būs

$$\frac{342}{(1 + 0,1)^3} = 256,95 \text{ dolāri.}$$

### 1.8. Iekšējā ienesīguma norma

Iepriekšējo punktu spriedumi pamatojās uz to, ka procentu likme bija zināma. Tagad apskatīsim, kā atdevei no investīcijām atrod procentu likmi.

Sāksim ar piemēru.

1.01.1997. gadā firma ieguldīja kādā projektā 10 000 Ls. Atdeve nākošo gadu laikā bija šāda:

1.01.1998. g.	1.01.1999. g.	1.01.2000. g.
4000	6000	4000

Aprēķināsim šo izmaksu diskontēto vērtību summu (apzīmēsim to PV – Present Value), izejot no bankas procenta, vienāda ar saliktiem 10% gadā:

$$PV = \frac{4000}{1,1} + \frac{6000}{1,1^2} + \frac{4000}{1,1^3} = 11\,600,3 \text{ Ls.}$$

Diskontētā vērtība izrādījās lielāka par kapitālu, kurš 1.01.1997. gadā tika ieguldīts šajā projektā. Tas nozīmē, ka firmas reāli iegūtā peļņa ir lielāka par to, kura būtu iegūta, ja šie 10 000 Ls būtu nolikti bankā uz trim gadiem uz saliktiem 10% gadā. Starpība starp ienākumu diskontēto vērtību un ieguldīto kapitālu tiek apzīmēta ar NPV (Net Present Value). Tā tiek saukta par tīro diskontēto vērtību vai **tīro diskontēto peļņu**. Apskatītajā piemērā

$$NPV = 11\,600,3 - 10\,000 = 1600,3 > 0.$$

Pieņemsim, ka pie kāda procenta  $p$  visu izmaksu diskontēto vērtību summa ir vienāda ar ieguldītajiem 10 000 Ls (t. i. NPV = 0). Tas nozīmē, ka firmas reāli iegūtā peļņa ir vienāda ar to peļņu, kuru firma būtu ieguvusi kā procentus, ja šie 10 000 Ls būtu noguldīti bankā uz minēto procentu  $p$ . Tādu procentu  $p$  sauc par *iekšējo ienesīguma normu* (atdeves iekšējā norma). Citiem vārdiem, *iekšējā ienesīguma norma – tāda procenta likme, pie kuras visu izmaksu diskontēto vērtību summa ir vienāda ar investēto kapitālu*. Šai likmei  $p$  atbilstošā NPV vērtība ir vienāda ar nulli.

Skaidrs, jo lielāka šī norma, jo labāks ir projekts. Tālāk iekšējā ienesīguma normu apzīmēsim ar IRR (*Internal Rate of Return*). Apskatīsim piemēru, kā izvēlēties naudas ieguldīšanas variantu.

Pieņemsim, ka ir divi projekti, kuru realizācijai ir nepieciešami vienādi kapitālieguldījumi, pa 1200 Ls katrs. Naudas atdeve no projektiem notiek divu gadu laikā:

	1. gads	2. gads	$\Sigma$
1. projekts	700 Ls	900 Ls	1600 Ls
2. projekts	1050 Ls	500 Ls	1550 Ls

Pieņemsim, ka no šiem projektiem ir jāizvēlas labākais.

Pieejot formāli, redzams, ka vienā un tajā pašā laika periodā (2 gadi) un pie vienādām investētām naudas summām, realizējot otro projektu, būs mazāka naudas atdeve, kā realizējot pirmo projektu. Varētu domāt, ka pirmais projekts ir labāks. Tomēr otrais projekts atdod lielāku naudas daudzumu pirmajā gadā, un šī nauda atkal nesīs peļņu. Lai iegūtu galīgo atbildi, aprēķināsim IRR (iekšējā ienesīguma normu) katram no variantiem.

Apzīmēsim iekšējā ienesīguma normu ar  $r$ . Tad pirmajam projektam

$$\frac{700}{1+r} + \frac{900}{(1+r)^2} = 1200.$$

Pareizināsim abas puses ar  $(1+r)^2$ :

$$1200(1+r)^2 - 700(1+r) - 900 = 0.$$

Apzīmēsim  $1+r = x$ . Atrisinot kvadrātvienādojumu  $1200x^2 - 700x - 900 = 0$  jeb  $12x^2 - 7x - 9 = 0$ , atrodam:

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 432}}{24},$$

$$x_1 = 1,2055;$$

$$x_2 < 0 \text{ (šajā gadījumā neder).}$$

Tā kā  $1 + r = 1,2055$ , tad  $r = 0,2055$  jeb procentos  $r = 20,55\%$ .

Otrajam projektam, risinot vienādojumu

$$\frac{1050}{1+r} + \frac{500}{(1+r)^2} = 1200,$$

iegūstam  $r = 21,73\%$ .

Tādējādi, otrajam projektam iekšējā ienesīguma norma ir augstāka. Tātad šis projekts ir labāks.

Apskatītajā piemērā naudas līdzekļi tika ieguldīti uz diviem gadiem un, atrodot IRR, nācās meklēt otrās kārtas vienādojuma (kvadrātvienādojuma) saknes. Ja nauda tiktu ieguldīta uz trim gadiem, tad būtu jārisina trešās kārtas vienādojums, utt. Augstāku kārtu algebrisku vienādojumu sakņu atrašana sagādā zināmas grūtības. Tādēļ tiek izmantoti tuvināti aprēķini. Viena no IRR tuvinātas aprēķināšanas metodēm būs apskatīta p. 8.8.

Tagad apskatīsim vienu no visvienkāršākajām tuvinātām vienādojuma sakņu atrašanas metodēm.

### *Intervāla dalīšana uz pusēm*

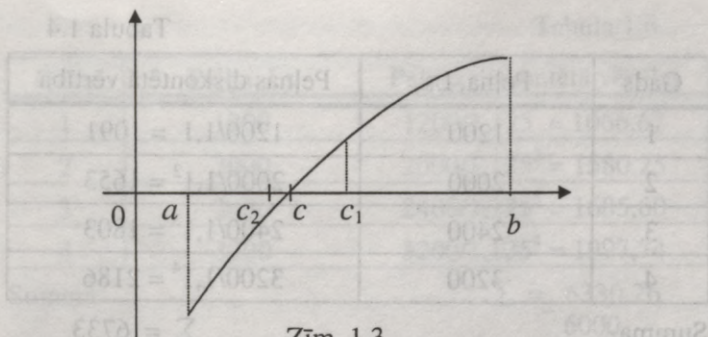
Pieņemsim, ka ir dots vienādojums  $f(x) = 0$ , pie kam zināms, ka funkcija  $f(x)$  kādā no nogriežņiem  $[a, b]$  apmierina šādus nosacījumus:

- 1) funkcija  $f(x)$  – nepārtraukta;
- 2)  $f(x)$  – monotona, t. i. vai nu tikai aug, vai nu tikai dilst;
- 3) nogriežņa  $[a, b]$  galos funkcijai ir dažādas zīmes, t. i. skaitļiem  $f(a)$  un  $f(b)$  ir dažādas zīmes.

Vienas šādas funkcijas grafiks ir attēlots zīm. 1.3.

Var pierādīt, ka funkcijai, kura apmierina nosacījumus 1–3, eksistē punkts  $c$  tāds, ka  $f(c) = 0$ , t. i. vienādojumam  $f(x) = 0$  eksistē sakne.

Intervāla dalīšanas uz pusēm metodes ideja ir šāda: ņemam intervāla  $[a, b]$  viduspunktu, apzīmējam to ar  $c_1$ . Šo vērtību  $c_1$  pieņemam par pirmo vienādojuma  $f(x) = 0$  saknes tuvināto vērtību. Tagad aprēķinam  $f(c_1)$  – funkcijas  $f(x)$  vērtību punktā  $c_1$ . Apskatām to no intervāliem  $[a, c_1]$  un  $[c_1, b]$ , kura galapunktos funkcijai ir dažādas zīmes. Zīm. 1.3 šis nogrieznis ir  $[a, c_1]$ .



Zīm. 1.3.

Šo nogriezni  $[a, c_1]$  dalām uz pusēm. Tā viduspunktu (punktu  $c_2$ ) pieņemsim par otro vienādojuma  $f(x) = 0$  saknes tuvināto vērtību. Punkts  $c_2$  dala nogriezni  $[a, c_1]$  divos nogriežņos:  $[a, c_2]$  un  $[c_2, c_1]$ . Izvēlamies no tiem to, kura galapunktos funkcijai ir dažādas zīmes. Zīm. 1.3 tas ir nogrieznis  $[c_2, c_1]$ . Patiesā saknes vērtība (punkts  $c$ ) atrodas šī intervāla iekšienē. Procesu turpina tik ilgi, līdz iegūtā nogriežņa garums kļūst mazāks par pieļaujamo kļūdu. Tad par saknes tuvināto vērtību var ņemt jebkuru punktu no iegūtā intervāla.

***Iekšējā ienesīguma normas atrašana ar metodi intervāla dalīšanai uz pusēm***

Atkārtosim, ka iekšējā ienesīguma norma – tā ir tāda procentu likme  $r$ , pie kuras atbilstošā NPV vērtība ir vienāda ar nulli. NPV ir funkcija no procentu likmes:  $NPV = f(r)$ . Tas nozīmē, ka ir jāatrod vienādojuma  $f(r) = 0$  sakne. Apskatīsim

Piemēru.

Firma ieguldīja darījumā 6000 Ls. Šīs naudas atdeve (ar precizitāti līdz 1 Ls) pa gadiem bija šāda (tab. 1.3):

Tabula 1.3

Gads	Peļņa, Ls
1	1200
2	2000
3	2400
4	3200

Aprēķināt IRR. Lai pieraksts būtu īsāks,  $NPV(r)$  apzīmēsim ar  $V(r)$ .

Izvēlamies  $r_0 = 10\%$ . Lai aprēķinātu NPV, aizpildām šādu tabulu (tab. 1.4):

Tabula 1.4

Gads	Peļņa, Ls	Peļņas diskontētā vērtība
1	1200	$1200/1,1 = 1091$
2	2000	$2000/1,1^2 = 1653$
3	2400	$2400/1,1^3 = 1803$
4	3200	$3200/1,1^4 = 2186$

Summa

$$\sum = \frac{6733}{6000}$$

$$V_0 = NPV(r_0) = 733 \text{ Ls.}$$

Tā kā  $V_0 = NPV(r_0) > 0$ , tad firmas reāli iegūtais procents ir lielāks kā 10%. Izvēlamies  $r_1 = 15\%$  un atkal aprēķinām NPV:

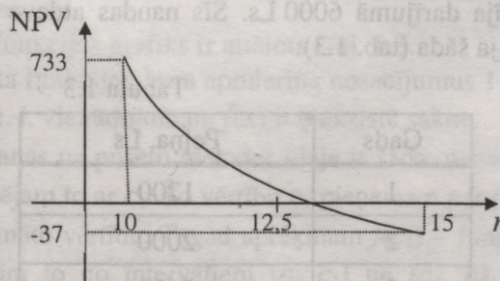
Tabula 1.5

Gads	Peļņa, Ls	Peļņas diskontētā vērtība
1	1200	$1200/1,15 = 1043$
2	2000	$2000/1,15^2 = 1512$
3	2400	$2400/1,15^3 = 1578$
4	3200	$3200/1,15^4 = 1830$

Summa

$$\sum = \frac{5963}{6000}$$

$$V_1 = NPV = -37 \text{ Ls.}$$



Tā kā  $V_1 = NPV(r_1) < 0$ , tad patiesā saknes vērtība atrodas starp  $r_0$  un  $r_1$ .

Izvēlamies  $r_2 = \frac{r_1 + r_0}{2} = 12,5\%$ . Aprēķinām  $V_2 = NPV(r_2)$  (tab. 1.6).

Tabula 1.6

Gads	Peļņa, Ls	Peļņas diskontētā vērtība
1	1200	$1200/1,125 = 1066,67$
2	2000	$2000/1,125^2 = 1580,25$
3	2400	$2400/1,125^3 = 1685,60$
4	3200	$3200/1,125^4 = 1997,74$

Summa

$$\Sigma = \frac{6330,26}{6000}$$

$$V_2 = NPV = 330,26 \text{ Ls.}$$

Tā kā  $V_2 = NPV(r_2) > 0$ , tad patiesā saknes vērtība atrodas intervālā  $(r_2, r_1) = (12,5; 15)$ . Ņemot jebkuru vērtību no šī intervāla par tuvināto saknes vērtību, varam būt pārliecināti, ka kļūda nepārsniedz 2,5%.

Atkārtosim spriedumus vēl vienu reizi. Ņemam pēdējā intervāla viduspunktu:  $r_3 = \frac{12,5 + 15}{2} = 13,75\%$ .

Aprēķinām  $NPV(r_3)$ .

Tabula 1.7

Gads	Peļņa, Ls	Peļņas diskontētā vērtība
1	1200	$1200/1,1375 = 1054,95$
2	2000	$2000/1,1375^2 = 15445,71$
3	2400	$2400/1,1375^3 = 1630,64$
4	3200	$3200/1,1375^4 = 1911,37$

Summa

$$\Sigma = \frac{6142,66}{6000}$$

$$V_3 = NPV = 142,66 \text{ Ls.}$$

Tā kā  $V_3 = NPV(r_3) > 0$ , tad patiesā saknes vērtība atrodas intervālā  $[r_3, r_1] = [13,75; 15]$ . Var izvēlēties jebkuru vērtību no šī intervāla par saknes vērtību. Pie kam kļūda nepārsniedz 1,25%. Turpinot šo procesu, var iegūt saknes vērtību ar jebkuru uzdotu precizitāti.

Piebilde. Punkta 1.8 spriedumos tika pieņemts, ka investēts tika vienu reizi, bet naudas atdeve bija vairākkārtīga. Viss teiktais paliek spēkā arī vairākkārtīgu investīciju gadījumā, un arī vairākkārtīgas naudas atdeves gadījumā. Pie kam IRR joprojām ir procentu likme, pie kuras  $NPV = 0$  (ņemot atdeves ar "+" zīmi, bet investīcijas "-" zīmi).

Nobeigumā jāatzīmē, ka situācijas analīze ar NPV un IRR palīdzību ir pietiekoši dziļa, jo tiek ņemts vērā, kā notiek līdzekļu atdeve laikā.

### *1.9. Finanšu matemātikas uzdevumu risināšana ar MS Excel*

MS Excel pakotne paver plašas iespējas veikt finanšu aprēķinus uz personālā datora. Lietotājs, kurš pārvalda darbu ar MS Excel pamatus, var sastādīt programmu un atrisināt praktiski jebkuru finanšu matemātikas uzdevumu, kuri tika apskatīti apakšpunktos 1.1–1.8, ievadot atbilstošās matemātiskās formulas. Tomēr doto uzdevumu risināšanas process MS Excel būtiski vienkāršojas, ja izmanto iebūvētās funkcijas no Financial kategorijas. Šajā kategorijā ir vairāk kā 50 standarta funkciju. Grupas pamatu veido 16 funkcijas, kuras lietotājam darbu laikā ir vienmēr pieejamas. Lai varētu izmantot pārējās iebūvētās finanšu funkcijas (un tādu ir vairāk kā 30), ir nepieciešams vispirms ielādēt instrumentu Analysis ToolPak, kurš ir MS Excel papildus pakotne-virsbūve. Šajā mācību līdzeklī ir apskatīti piemēri darbam ar 12 iebūvētām finanšu funkcijām, lai iepazītos ar pārējām, rekomendējam griezties pie [4, 6].

Lai uzzinātu, vai instruments Analysis ToolPak ir ielādēts, pietiek aktivizēt pielietojumu loga izvēlnes punktu Tools. Ja atvērto komandu sarakstā ir Data Analysis, tad tas nozīmē, ka instruments Analysis ToolPak ir pieslēgts, pretējā gadījumā tas ir jāielādē. Instrumenta Analysis ToolPak pieslēgšanas kārtība ir šāda:

- 1) Tools izvēlnes punktā izpildīt komandu Add-Ins;
- 2) atvērtā loga instrumentu sarakstā, nospiežot peles kreiso taustiņu, iezīmēt karodziņu pirms elementa Analysis ToolPak;
- 3) nospiegt pogu OK.

Atzīmēsim, ka pieslēgšana ir neiespējama, ja, instalējot paketi MS Excel, ir tikusi veikta nepilna programmu līdzekļu uzstādīšana.

MS Excel ir vairāki veidi, kā ievadīt iebūvētās funkcijas. Izsaucot funkcijas ar tastatūras palīdzību, vispirms ievada funkcijas nosaukumu un pēc tam apaļajās iekavās norāda argumentu vērtības. Ja ievadot ir gadījies kļūda (nepareizs funkcijas nosaukums, trūkst nepieciešamo argumentu, kļūdaini izvietotas iekavas un atdalošie simboli utt.) parādās atbilstošais ziņojums par kļūdu.

Lai atvieglotu funkciju izsaukšanu, tiek rekomendēts izmantot instrumentu paneļa pogu  $f_x$ . Ja formulas ievades laikā tiks nospiesta poga  $f_x$ , atvēršies dialoga logs Paste Function, sastāvošs no diviem paneļiem. Lai ievadītu vajadzīgo iebūvēto finanšu funkciju, nepieciešams uz kreisā paneļa Function category izvēlēties funkciju grupu Financial un pēc tam sarakstā Function category izvēlēties funkciju grupu Financial un pēc tam sarakstā Function Name labās puses panelī atzīmēt vajadzīgo funkciju. Rezultātā loga apakšējā daļā parādīsies

izvēlētās funkcijas apraksts, kurš satur funkcijas sintaksi (funkcijas identifikators un argumentu saraksts) un tas lielums, kuru aprēķina ar šo funkciju. Pēc pogas OK nospiešanas, atvērtajā logā nepieciešams ievadīt funkcijas argumentus. Ievadīšana beidzas ar pogas OK nospiešanu.

Finansu matemātikas uzdevumu risināšanas piemēri MS Excel vidē, izmantojot iebūvētās finansu funkcijas tiks parādīti tālāk punktos 1.9.1–1.9.6.

### 1.9.1. Uzkrājumu aprēķināšana

Lai aprēķinātu uzkrāto noguldījuma summu, var izmantot funkciju FV. Šī funkcija kādam nākotnes momentam aprēķina uzkrāto summu, kura ir izveidojusies pēc vienreizēja kapitāla noguldījuma (izmaksas) un periodisku vienāda lieluma noguldījumu (izmaksu) virknes. Formula, kura izmanto funkciju FV, ir šāda:

$$=FV(\text{rate}; \text{nper}; \text{pmt}; \text{pv}; \text{type}),$$

kur pirmais arguments **rate** nosaka procentu likmi;

otrais arguments **nper** nosaka periodu skaitu (procentu pieskaitīšanas termiņus);

trešais arguments **pmt** nosaka nemainīgā periodiskā noguldījuma (izmaksas) lielumu;

ceturtais arguments **pv** nosaka sākotnējo kapitālu;

piektais arguments **type** – konstante, kura pieņem vērtību vai nu nulle vai viens; norāda, kad jānotiek izmaksai: 1 – perioda sākumā, 0 – perioda beigās. Ja šī argumenta vērtību neieraksta, tad to pieņem vienādu ar nulli.

Svarīgi atzīmēt, ka funkcija FV izveidota tā, ka klienta noguldījumiem **pmt** un **pv** ir jābūt ierakstītiem ar mīnus zīmi.

Piemēri

1. Banka izmaksā ikmēneša salikto procentu  $p = 1\%$ . 01.12.1998. gadā bankā noguldīja 800 Ls. Kāda summa būs uz rēķina 01.12.2001. gadā?

Lai atrisinātu uzdevumu, ievadām formulu

$$=FV(1\%; 36; 0; -800; 1).$$

Šajā formulā 1% – dotais saliktais procents, 36 – termiņu skaits, 0 nozīmē, ka periodiskas iemaksas netiek veiktas, -800 – noguldītās summas lielums. Aprēķinu rezultātā rūtiņā, kurā atradās formula, parādīsies atbilde 1144,62 Ls.

2. Kāda summa būs uz klienta rēķina 2001. gada maijā, ja sākot ar 1981. gada maiju, viņš katru gadu nogulda uz sava rēķina 700 dolārus, bet procentu likme ir saliktie 15% gadā?

Lai atrisinātu uzdevumu, ievadām formulu

$$=FV(15\%; 20; -700; 0; 1),$$

rezultātā iegūsim atbildi, vienādu ar 82 467,08 dolāriem.

3. Klients, kuram gada sākumā uz rēķina ir 1000 Ls, trīs gadus pēc kārtas reizi mēnesī nogulda 80 Ls uz saliktiem procentiem, pirmos divus gadus procentu likme bija 1,5% mēnesī, trešajā gadā – 1% mēnesī. Kāda summa būs uz rēķina pēc trim gadiem, ja klients noguldījumus veic mēneša sākumā?

Šūnu blokos B3:B5 un C3:C5 ievadām izejas datus, kuri raksturo procentu likmi un periodiskās ikmēneša iemaksas lielumu atbilstoši pirmajos divos gados un trešajā gadā (zīm. 1.4). Pirmos divus gadus apzīmējam kā pirmo periodu, bet trešo gadu – kā otro periodu. Šūnā C6 ievadam summu, kura ir uz rēķina pirmā perioda sākumā. Summa, kura ir uzkrājusies uz rēķina pirmā perioda laikā, tiek aprēķināta pēc formulas  $=FV(B3; B4; -B5; -B6; 1)$ , pirmā perioda sākumā esošā summa tiek ņemta ar mīnus zīmi, jo tā ir klienta iemaksa. Summa uz rēķina pirmā perioda beigās vienlaicīgi ir noguldījuma vērtība otrā perioda sākumā, kas tiek norādīts ar formulu  $=B7$ . Konstantes vērtība viens formulā nozīmē, ka periodiskās iemaksas notiek katra mēneša sākumā. Lai noteiktu summu uz rēķina otrā perioda beigās ievadam formulu  $=FV(C3; C4; -C5; -C6; 1)$ . Uzdevuma atrisinājuma rezultāti ar MS Excel parādīti zīm. 1.5.

	A	B	C
1	<b>Rēķinā uzkrātās summas aprēķins</b>		
2		1. Periods	2. Periods
3	Saliktie procenti, % mēnesī	0,015	0,01
4	Perioda garums, mēnešos	24	12
5	Ikmēneša iemaksa, Ls	80	80
6	Summa uz rēķina perioda sākumā, Ls	1000	=B7
7	Summa uz rēķina perioda beigās, Ls	=FV(B3;B4;-B5;-B6;1)	=FV(C3;C4;-C5;-C6;1)

Zīm. 1.4. Izejas dati un formulas uzkrājuma aprēķināšanai par diviem periodiem

	A	B	C
1	<b>Rēķinā uzkrātās summas aprēķins</b>		
2		1. Periods	2. Periods
3	Saliktie procenti, % mēnesī	1,5%	1,0%
4	Perioda garums, mēnešos	24	12
5	Ikmēneša iemaksa, Ls	80,00	80,00
6	Summa uz rēķina perioda sākumā, Ls	1 000,00	3 754,54
7	Summa uz rēķina perioda beigās, Ls	3 754,54	5 255,46

Zīm. 1.5. Aprēķinu rezultāti uzkrājumiem par trim gadiem

### 1.9.2. Gada efektīvās procentu likmes aprēķināšana

Lai aprēķinātu efektīvo gada procentu likmi, ja gada nominālā likme ir  $i$  un procentu aprēķināšanas periodu skaits gadā ir  $m$ , tiek izmantota funkcija **EFFECT**, kurai ir divi argumenti:

$$=EFFECT(nominal\_rate; npery),$$

kur **nominal\_rate** – nominālā procentu likme  $i$ ;

**npery** – procentu aprēķināšanas periodu skaits gadā  $m$ .

Piezīme. Ja dotā funkcija nav pieejama, tad nepieciešams pieslēgt pakotnī-virsbūvi Analysis ToolPak.

Piemēri.

1. Noteikt efektīvo gada likmi, ja gada nominālā likme ir 15% un procentus aprēķina ik pēc mēneša.

Ievadām tabulas šūnā formulu **=EFFECT(15%; 12)** un iegūstam atbildi, vienādu ar 0,1607545, t. i. gada efektīvā likme ir 16,08%.

2. Paredzēti divi kredīti: pirmais – uz 3 mēnešiem ar likmi 4%, otrs – uz 6 mēnešiem ar likmi 8%. Kurā gadījumā ir augstāks ienesīgums?

Pirmajā variantā, kad kredītu izdod uz  $\frac{1}{4}$  no gada, procentu aprēķināšanas periodu skaits gadā ir 4 un nominālā gada likme ir  $4\% \times 4$ ; otram variantam kreditēšanas periods ir  $\frac{1}{2}$  no gada, procentu aprēķināšanas periodu skaits gadā ir 2 un nominālā gada likme ir  $8\% \times 2$ . Efektīvā gada likme apskatāmajiem kreditēšanas variantiem tiek noteikta atbilstoši ar formulām

$$=EFFECT(4\%*4; 4), \quad =EFFECT(8\%*2; 2),$$

kuras dod šādus rezultātus: 16,99% un 16,64%. Tas nozīmē, ka pirmā varianta ienesīgums ir augstāks.

### 1.9.3. Parāda atmaksāšanas aprēķins

Lai noteiktu periodiskās izmaksas lielumu, kura nepieciešama, lai dzēstu aizņēmumu pēc noteikta periodu skaita ar vienāda lieluma maksājumiem pie nemainīgas procentu likmes, tiek izmantota funkcija **PMT**. Funkcija ļauj arī aprēķināt periodiskās izmaksas lielumu, kura nepieciešama, lai daļēji dzēstu parādu noteiktā termiņa laikā. Lai izpildītu funkciju, nepieciešams ievest formulu ar šādu veidu

$$=PMT(rate; nper; pv; fv; type),$$

kur pirmais arguments **rate** norāda procentu likmi;

otrais arguments **nper** norāda periodu skaitu, kuru laikā ir jābūt dzēstam kredītam;

trešais arguments **pv** norāda aizņēmuma lielumu;  
ceturtais arguments **fv** norāda parāda lielumu izmaksu termiņa beigās (ja arguments nav ierakstīts, tad tas tiek pieņemts vienāds ar nulli);

piektais arguments **type** – konstante, kura pieņem vērtību vai nu nulle vai viens; norāda, kad jānotiek izmaksai: 1 – perioda sākumā, 0 – perioda beigās. Ja šī argumenta vērtību neieraksta, tad to pieņem vienādu ar nulli

Ja klientu interesē, kāda daļa no katra maksājuma tiek izlietota procentu dzēšanai un kāda daļa tiek izlietota aizņēmuma dzēšanai, var izmantot funkcijas **IPMT** un **PPMT**. Šīs funkcijas aprēķina procentu maksājumus un pamatmaksājumus par uzdoto periodu pie nemainīgiem periodiskiem maksājumiem un nemainīgas procentu likmes. Funkciju izsaukšanas formulām ir šāda struktūra:

**=IPMT(rate; per; nper; pv; fv; type);**

**=PPMT(rate; per; nper; pv; fv; type).**

Vienlaikus ar iepriekš aprakstītajiem funkcijas **PMT** argumentiem, šajās formulās tiek ievests parametrs **per**, kurš norāda konkrētās periodiskās izmaksas numuru, pie kam **per ≤ nper**.

Piemēri.

1. Firma paņēmusi bankā 50 000 Ls lielu kredītu uz saliktiem 25% gadā. Kredīts jādzēš ar pieciem vienāda lieluma ikgadējiem maksājumiem. Noteikt šo maksājumu lielumu.

Aprēķini tiek veikti pēc formulas **=PMT(25%; 5; 50 000; 0)**. Rezultātā iegūstam –18 592,34 Ls. Atzīmēsim, ka mīnus zīme nozīmē, ka tas ir klienta maksājums (izmaksa).

2. Uzdevumam no 1. piemēra noteikt procentu maksājuma daļu un pamatmaksājuma daļu katram no ikgadējiem maksājumiem.

Ievadām sākuma datus (gada procentu likmi un kredīta summu) un ikgadējā maksājuma aprēķināšanas formulu, kā tas parādīts zīm. 1.6. Kā redzams no zīm. 1.6, iegūtās tabulas kolonas satur līdzīgas formulas. Šādu formulu ievadīšanas kārtība ir sekojoša:

1) ievadīt vajadzīgo formulu formējamās tabulas pirmajā pēc virsraksta rindīņā (mūsu gadījumā tā ir 5. rindīņa) pie kam to šūnu adreses, kuras nemainās līdzīgās formulās, nepieciešams ievadīt kā absolūtas, pievienojot pirms kordinātam dolāra simbolu;

2) iekopēt ievadīto formulu tabulas atbilstošās kolonnas blakusšūnu blokā (mūsu gadījumā tās ir šūnas kolonnai ar rindīņu numuriem 5 – 9); pie kam absolūtās adreses līdzīgajās formulās paliks neizmainītas, pārējās adreses tajās formulās, kuras atrodas kaimiņu šūnās, rindīņas kordināta atšķirsies par vienu.

Atzīmēsim, ka visvienkāršākais formulu kopēšanas veids ir šāds: pārvietot peles kursoru formulu saturošās šūnas labajā stūrī (pareizi novietots kursors būs

redzams kā “melnā plus” zīme); nospiežot peles kreiso taustiņu, novilkt kursoru par to šūnu bloku, kurās jābūt iekopētai formulai.

Pēc sākuma datu un maksājumu aprēķināšanas formulu ievadīšanas, iegūsim rezultātus, kuri attēloti zīm. 1.7.

	A	B	C	D
1	<b>Kredīta dzēšanas aprēķins</b>			
2		Gada procents		0,25
3		Kredīta summa		50000
4	Gada numurs	Procentu makasājumi, Ls	Pamatmaksājumi, Ls	Izmaksas, Ls
5	1	=IPMT(\$D\$2;A5;5;\$D\$3;0)	=PPMT(\$D\$2;A5;5;\$D\$3;0)	=B5+C5
6	2	=IPMT(\$D\$2;A6;5;\$D\$3;0)	=PPMT(\$D\$2;A6;5;\$D\$3;0)	=B6+C6
7	3	=IPMT(\$D\$2;A7;5;\$D\$3;0)	=PPMT(\$D\$2;A7;5;\$D\$3;0)	=B7+C7
8	4	=IPMT(\$D\$2;A8;5;\$D\$3;0)	=PPMT(\$D\$2;A8;5;\$D\$3;0)	=B8+C8
9	5	=IPMT(\$D\$2;A9;5;\$D\$3;0)	=PPMT(\$D\$2;A9;5;\$D\$3;0)	=B9+C9

Zīm.1.6. Sākuma dati, kā arī procentu maksājumu un pamatmaksājumu aprēķināšanas formulas, katram ikgadējam maksājumam

	A	B	C	D
1	<b>Kredīta dzēšanas aprēķins</b>			
2		Gada procents		25%
3		Kredīta summa, Ls		50000
4	Gada numurs	Procentu makasājumi, Ls	Pamatmaksājumi, Ls	Izmaksas, Ls
5	1	-12 500.00p.	-6 092.34p.	-18 592.34p.
6	2	-10 976.92p.	-7 615.42p.	-18 592.34p.
7	3	-9 073.06p.	-9 519.28p.	-18 592.34p.
8	4	-6 693.24p.	-11 899.10p.	-18 592.34p.
9	5	-3 718.47p.	-14 873.87p.	-18 592.34p.

Zīm.1.7. Procentu maksājumu un pamatmaksājumu aprēķinu rezultāti katram ikgadējam maksājumam

Paskaidrosim iegūtos rezultātus. Klients paņēma 50 000 Ls lielu aizdevumu uz 25% gadā. Par šīs summas lietošanu pirmā gada laikā viņam ir jāsamaksā  $50\,000 \times 0,25 = 12\,500$  Ls, reāli pirmā gada beigās viņš samaksāja 18 592,34 Ls. Tātad, tieši kredīta dzēšanai tika samaksāts

$$18\,592,34 - 12\,500 = 6092,34 \text{ Ls.}$$

Pēc tam klienta parāds kļuva  $50\,000 - 6092,34 = 43\,907,66$  Ls. Par šīs summas lietošanu otrā gada laikā klientam nepieciešams samaksāt  $43\,907,66 \times 0,25 = 10\,976,92$  Ls, reāli otrā gada beigās viņš samaksāja to pašu summu, ko pirmā gada beigās: 18 592,34 Ls. Tātad, tieši kredīta dzēšanai tika samaksāts

$$18\,592,34 - 10\,976,92 = 7615,42 \text{ Ls.}$$

Analoģiska nozīme ir nākošo gadu aprēķinu rezultātiem.

#### 1.9.4. Darbs ar vekseliem

Vekseļa pārdošanas cenu (uzskaites vērtību) var aprēķināt ar funkcijas **PRICEDISC** palīdzību, kura veic līdzīgus aprēķinus arī citu veidu vērtspapīriem. Ņemot vērā, ka šī ir mācību grāmata, sniegsim visus paskaidrojumus par šo funkciju attiecībā uz vekseliem, lai pilnīgāk iepazītos ar funkcijas **PRICEDISC** iespējām, rekomendējam griezties pie [4, 6].

Lai aprēķinātu vekseļa uzskaites vērtību, nepieciešams ievadīt formulu

**=PRICEDISC(settlement; maturity; discount; redemption; basis),**

kur **settlement** – vekseļa pārdošanas (uzskaites) datums;

**maturity** – vekseļa dzēšanas datums;

**discount** – uzskaites likme;

**redemption** – vekseļa nominālvērtība (vērtība dzēšot);

**basis** – konstante (vesels skaitlis no 0 līdz 4), kura nosaka, pēc kāda paņēmiena tiek aprēķināts dienu skaits.

Lai paskaidrotu, kā argumentam **basis** izvēlas vērtību, atgādināsim, ka vekseļa uzskaites vērtību aprēķina pēc formulas  $K = S \left( 1 - \frac{t}{m} \right)$ , pie kam tiek iz-

mantota dažāda pieeja  $t$  un  $m$  noteikšanai. Atbilstoši tam, arguments ir vienāds ar: 0, 4 jeb vispār netiek rakstīts, ja  $t = (\text{pilnu mēnešu skaits}) \times 30 + (\text{precīzs dienu skaits nepilnajā mēnesī})$ , bet  $m = 360$ ;

- 1, ja  $t$  – faktiskais dienu skaits no vekseļa uzskaites dienas līdz tā dzēšanas dienai, bet  $m$  – faktiskais dienu skaits gadā;
- 2, ja  $t$  – faktiskais dienu skaits no vekseļa uzskaites dienas līdz tā dzēšanas dienai, bet  $m = 360$ ;
- 3, ja  $t$  – faktiskais dienu skaits no vekseļa uzskaites dienas līdz tā dzēšanas dienai, bet  $m = 365$ .

Piemērs.

Banka 1.01.2000. gadā nopirka vekseli ar nominālvērtību 1000 dolāri un dzēsa to 1.03.2000. gadā. Kādu summu saņēma vekseļa turētājs, to dzēšot, ja uzskaites likme ir 15% gadā.

Šūnu blokā B2:B5 ievadām izejas datus, apgādājot tos ar atbilstošiem paskaidrojumiem (zīm. 1.8), tālāk šūnā B7 ievadām formulu

**=PRICEDISC(B4; B5; B3; B2; 0).**

Kā redzams no šīs formulas, šeit tiek izmantots pirmais no apskatītajiem dienu skaita noteikšanas paņēmieniem. Rezultātā iegūstam, ka dzēšanas momentā vekseļa uzskaites vērtība ir 975 dolāri.

B7      =PRICEDISC(B4;B5;B3;B2)

	A	B
1	<b>Vekseļa uzskaites vērtības aprēķins</b>	
2	Vekseļa nominālvērtība dolāros	1000,00
3	Uzskaites vērtība, % gadā	15%
4	Vekseļa uzskaites datums	1-jan-2000
5	Vekseļa dzēšanas datums	1-mar-2000
6		
7	Vekseļa uzskaites vērtība dolāros	975,00

Zīm. 1.8. Piemērs par vekseļa uzskaites vērtības aprēķināšanu dzēšanas momentā

### 1.9.5. Procentu likmju un uzskaites likmju aprēķins

Vienkāršo procentu likmi var aprēķināt, izmantojot funkciju **INTRATE**; griežoties pie dotās funkcijas, formulas struktūra ir šāda:

**=INTRATE(settlement; maturity; investment; redemption; basis),**

kur **settlement** – naudas ieguldīšanas datums;

**maturity** – kapitāla atgriešanās datums;

**investment** – sākuma kapitāls;

**redemption** – atdotā summa;

**basis** – konstante (vesels skaitlis no 0 līdz 4), kura nosaka, pēc kāda paņēmiena tiek aprēķināts dienu skaits.

Lai aprēķinātu uzskaites likmi, tiek izmantota funkcija **DISC**, pie kam ievadāmajai formulai ir veids

**DISC(settlement; maturity; pr; redemption; basis),**

kur argumentiem **settlement, maturity, redemption, basis** ir tā pati jēga kā iepriekšējā formulā; **pr** – sākuma kapitāls.

Gadījumā, ja tiek strādāts ar vekseļiem **pr** – tā uzskaites vērtība; **redemption** – nominālā vērtība; **settlement, maturity** – atbilstoši vekseļa uzskaites datums un dzēšanas datums.

Piemērs. 10 000 dolāru liels kredīts izdots 1.01.2000. gadā un tika dzēsts 1.05.2000. gadā. Noteikt vienkāršo uzskaites likmi un procentu likmi (vai atlaišanas likmi), ja atdodamā summa ir 11 000 dolāri.

Izejas dati un ievadāmās formulas, kā arī aprēķinu rezultāti, parādīti zīm. 1.9 un 1.10. Atzīmēsim, ka zīm. 1.9 redzamā tabula dota formulu apskates režīmā, tādēļ dati attēloti skaitļu formātā, kurš vienāds ar to dienu skaitu, kuras pagājušas no 1.01.1900. gada līdz norādītajam datumam. Piemēram, 36 647 nozīmē, ka no 1.01.1900. gada līdz 1.05.2000. gadam ir pagājušas 36 647 dienas.

B7	=	=INTRATE(B4;B5;B2;B3)
	A	B
1	<b>Procentu un uzskaites likmju aprēķins</b>	
2	Parāda (ieguldījuma) summa dolāros	10000
3	Summa, kura jāatdod dolāros	11000
4	Darījuma noslēgšanas datums	36526
5	Saistību dzēšanas datums	36647
6		
7	Vienkāršā uzskaites likme, %	=INTRATE(B4;B5;B2;B3)
8	Vienkāršā procentu likme, %	=DISC(B4;B5;B2;B3)

Zīm. 1.9. Procentu un uzskaites likmju aprēķinu izejas dati un formulas

B7	=	=INTRATE(B4;B5;B2;B3)
	A	B
1	<b>Procentu likmes un uzskaites likmes aprēķins</b>	
2	Parāda (ieguldījuma) summa dolāros	10 000,00
3	Summa, kura jāatdod, dolāri	11 000,00
4	Darījuma sākuma datums	1-jan-00
5	Saistību dzēšanas datums	1-maijs-00
6		
7	Vienkāršā uzskaites likme, %	30,00%
8	Vienkāršā procentu likme, %	27,27%

Zīm.1.10. Procentu un uzskaites likmju aprēķinu rezultāti

### 1.9.6. Noguldījumu izdevīguma noteikšana

Lai noteiktu līdzekļu ieguldīšanas izdevīgumu, MS Excel var noteikt tīro diskontēto vērtību un iekšējo ienesīguma normu.

Lai aprēķinātu tīro diskontēto vērtību, tiek izmantota funkcija NPV ar veidu

$$=NPV(\text{rate}; \text{value1}; \text{value2}; \dots),$$

kur **rate** nosaka procentu likmi (bankas procentu); **value1, value2,...** – periodiskas izmaksas (līdzekļu atgriešanās) jeb investējamās summas; pie kam saņemamās summas ievada ar plus zīmi, bet investējamās summas – ar mīnus zīmi.

Funkcija **NPV** uzskata, ka visas izmaksas un investīcijas tiek izdarītas periodu beigās. Ja pirmā investējamā summa tiek iemaksāta pirmā perioda sākumā, tad tā netiek uzskatīta par argumentu, bet ir jāatņem no funkcijas **NPV** vērtības.

Piemēri.

1. Firma ieguldīja projektā 20 000 Ls, līdzekļu atdeve pirmā gada beigās bija 15 000 Ls, otrā gada beigās – 12 000 Ls, bankas procentu likme šajā periodā bija 10% gadā.

NPV aprēķinu veiks ar formulu

$$=NPV(10\%;15\ 000;12\ 000) - 20\ 000.$$

Vērsiet uzmanību uz to, ka funkcija **NPV(10%;15 000;12 000)** dod maksājumu plūsmas diskontēto vērtību sākot ar pirmā gada beigām. Lai iegūtu maksājumu plūsmas diskontēto vērtību NPV par visu apskatāmo laika periodu, no funkcijas **NPV(10%;15 000;12 000)** vērtības mēs atņemam 20 000 – sākotnēji investēto summu.

Aprēķinu rezultātā ar ievadīto formulu iegūstam NPV vērtību, vienādu ar 3553,72 Ls.

2. Kompānija ieguldīja rūpnīcas korpusu celtniecībā 1 000 000 Ls. Celtniecība tika pabeigta gada laikā. Šī gada beigās par iekārtu iepirkšanu un uzstādīšanu tika samaksāts 500 000 Ls. Otrā gada beigās rūpnīca jau deva 200 000 Ls lielu peļņu, pēc tam katru gadu 5 gadu laika tika gūta 500 000 Ls liela peļņa. Septītā gada beigās rūpnīcas modernizācijā tika ieguldīti 700 000 Ls, pēc kam ikgadējā peļņa jau bija 800 000 Ls. Noteikt tīro diskontēto vērtību par pirmajiem 10 gadiem, izejot no 15% likmes gadā.

Sākuma datu tabulu un ar formulu **=NPV(D2; D5:D14)-B4** izdarīto tīrās diskontētās vērtības aprēķinu rezultātus, ievadītus šūnā C16, var redzēt zīm. 1.11. Šajā tabulā ikgadējie maksājumi tiek iegūti kā ieņēmumu un investīciju starpība.

Iekšējās ienesīguma normas IRR aprēķinam izmantojam funkciju

**=IRR(values; guess),**

kur **values** – šūnu bloks, kurš satur ieguldījumu (investīciju) un izmaksu vērtības; atzīmēsim, ka dotajam blokam jāsaturs sevī vismaz viens pozitīvs un vismaz viens negatīvs skaitlis; **guess** – neobligāts arguments (ienesīguma normas prognoze), kurš var tikt ieviests aprēķinu veikšanai kā sākuma tuvinājums. Mēs to neizmantosim.

C16	=	=NPV(D2;D5;D14)-B4		
	A	B	C	D
1	<b>Tīrās diskontētā ieņēmuma aprēķins</b>			
2	Bankas procents			15%
3	Gada kārtas numurs	Investīcijas, Ls	Atdeve, Ls	Ikgadējās izmaksas, Ls
4	0	1000000,00		
5	1	500000,00	0,00	-500 000
6	2		0,00 200 000,00	200 000,00
7	3		0,00 500 000,00	500 000,00
8	4		0,00 500 000,00	500 000,00
9	5		0,00 500 000,00	500 000,00
10	6		0,00 500 000,00	500 000,00
11	7	700 000,00	500 000,00	-200 000
12	8		0,00 800 000,00	800 000
13	9		0,00 800 000,00	800 000,00
14	10		0,00 800 000,00	800 000,00
15				
16		<b>NPV</b>	<b>407 324,74</b>	Ls

Zīm.1.11. Tīrās diskontētās vērtības aprēķina piemērs

Pieņemsim, ka ieguldījumi projektā un maksājumi no projekta ir ievadīti šūnu blokā A1:A6, tad lielums IRR tiek aprēķināts ar formulu

$$=IRR(A1:A6).$$

Piemēri.

1. Firma 01.01.1995. gadā investēja kādā projektā 100 000 Ls. Atdeve no projekta pa gadiem bija šāda:

01.01.96. g.	01.01.97. g.	01.01.98. g.	01.01.99. g.
25 000 Ls	40 000 Ls	45 000 Ls	40 000 Ls

Aprēķināt šīs investīcijas iekšējo ienesīguma normu.

Blokā A3:C8 ievadām sākuma datus, kā parādīts zīm. 1.12. Lai aprēķinātu iekšējā ienesīguma normu šūnā C10, ievadām formulu **=IRR(B4:B8)**.

Rezultātā iegūstam atbildi: IRR=17,01%.

C10	=IRR(B4:B8)		
	A	B	C
1	Iekšējā ienesīguma normas aprēķins		
2			
3	Datumi	Summa, Ls	Summas mērķis
4	01.01.1995	-100 000	Investīcija
5	01.01.1996	25 000,00	Līdzekļu atdeve
6	01.01.1997	40 000,00	Līdzekļu atdeve
7	01.01.1998	45 000,00	Līdzekļu atdeve
8	01.01.1999	40 000,00	Līdzekļu atdeve
9			
10		IRR	17,01%

Zīm. 1.12. Iekšējā ienesīguma normas aprēķina piemērs

2. Lai ilustrētu, kā tiek lietota funkcija **NPV**, otrajam piemēram aprēķināsim iekšējā ienesīguma normu.

Sākuma datu tabula un rezultāti iekšējā ienesīguma normas aprēķinam ar formulu **=IRR(D4:D14)**, kura ievadīta šūnā C16, redzami zīm. 1.13.

C16	=IRR(D4:D14)			
	A	B	C	D
1	Iekšējā ienesīguma normas aprēķins			
2				15%
3	Gada kārtas numurs	Investīcijas, Ls	Atdeve, Ls	Ikgadējās izmaksas, Ls
4	0	1000000,00		
5	1	500000,00	0,00	-500 000
6	2		0,00 200 000,00	200 000,00
7	3		0,00 500 000,00	500 000,00
8	4		0,00 500 000,00	500 000,00
9	5		0,00 500 000,00	500 000,00
10	6		0,00 500 000,00	500 000,00
11	7	700 000,00	500 000,00	-200 000
12	8		0,00 800 000,00	800 000
13	9		0,00 800 000,00	800 000,00
14	10		0,00 800 000,00	800 000,00
15				
16		IRR		20,58%

Zīm. 1.13. Iekšējā ienesīguma normas aprēķina piemērs

## Jautājumi pašpārbaudei

1. Kas ir procenti?
2. Dienas sākumā vidējā banānu cena tirgū bija 0,40 Ls par 1 kg. Līdz pusdienas laikam cena pieauga par 20%. Dienas beigās jaunā cena bija samazinājusies par 20%.
  - a) Kāda ir banānu cena dienas beigās?
  - b) Par cik procentiem nepieciešams samazināt cenu, kura bija dienas vidū, lai cena dienas beigās būtu atkal 0,40 Ls?
3. Uzzīmēt kapitāla augšanas grafikus vienkāršo un salikto procentu gadījumiem.
4. Paskaidrot, kāda loma ir laikam, pieņemot lēmumus, saistītus ar naudas ieguldīšanu vai naudas izmaksu.
5. Kā izmainīsies formula (1.6), ja nauda tiek ieguldīta nevis laika intervālu sākumos, bet laika intervālu beigās?
6. Paskaidrot periodisku vienāda lieluma iemaksu vai izmaksu aprēķināšanas tehniku.
7. Uz nomaksu divos gados ir nopirkta mašīna, kura maksā 5000 Ls. Izmaksu noteikumi ir šādi: 2000 Ls iemaksā uzreiz pirkšanas brīdī. Atlikušo summu izmaksā ar vienāda lieluma ikmēneša maksājumiem ar likmi 4% mēnesī. Kāds ir ikmēneša maksājumu lielums?
8. Kas ir iekšējā ienesīguma norma?

## Vingrinājumi

1. Pieņemsim, ka ienākuma nodoklis tiek aprēķināts pēc šāda likuma: ja ienākumi nepārsniedz 150 Ls, tad no ienākumu summas ir jāatņem 25 Ls, un nodokļa lielums ir 25% no iegūtās starpības. Aprēķināt ienākuma nodokli, ja ienākums ir 78 Ls.
2. Pieņemsim, ka sociālais nodoklis ir 1,5% no ienākumiem. Cik liels ir bijis ienākums, ja sociālais nodoklis bija 1 Ls?
3. Produkcijas vienības pašizmaksa ir 0,75 Ls, pēc tam tā palielinājās un kļuva 0,9 Ls. Par cik procentiem ir palielinājusies pašizmaksa?
4. Iedzīvotāju skaits ir palielinājies par 15%. Cik reizes ir palielinājies iedzīvotāju skaits?
5. Fabrikā strādā 42 sievietes, kas ir 30% no visiem strādājošajiem. Cik daudz strādnieku strādā fabrikā?

6. Pieņemsim, ka vidējā dolāra pārdošanas cena mēneša laikā ir izmainījusies no 0,615 Ls līdz 0,62 Ls par 1 dolāru. Par cik procentiem dolārs ir palicis dārgāks attiecībā pret latu?
7. Veikals ir pārdevis preces par 3000 Ls un ir guvis 8% lielu peļņu. Kāda ir preces pašizmaksa?
8. Firmas izlaistās produkcijas daudzums ir pieaudzis par 150%. Cik reizes ir palielinājies izlaistās produkcijas apjoms?
9. Firma ir pārdevusi produkciju par 4000 Ls un ir cietusi 3% lielus zaudējumus. Kāda ir šīs produkcijas pašizmaksa?
10. No 300 kg rūdas iegūst 50 kg vara. Kāds ir procentuālais vara saturs rūdā.
11. Prece maksāja 9,60 Ls. Pēc cenu pazeminājuma prece maksāja 9,20 Ls. Par cik procentiem bija pazemināta preces cena?
12. Procentuālais vara saturs rūdā ir 20%. Cik tonnu rūdas ir vajadzīgs, lai iegūtu 4,5 t vara?
13. Katra uzņēmuma akcija, kuras cena ir 50 Ls dod 4 Ls lielu peļņu. Daļa no šīs peļņas tiek izlietota uzņēmuma attīstībai, bet daļa tiek izmaksāta akciju turētājiem dividendēs, kuras lielums ir 2,50 Ls. Nosakiet:
  - a) cik procentus no akcijas vērtība veido dividendes;
  - b) cik procentus no akcijas vērtība veido peļņa.
14. Kompānijas "L.Gold" akciju dividendes veido 15% no akcijas vērtības. Akcionārs dividendēs saņēma 180 Ls. Kāda ir dotā akcionāra akciju vērtība?
15. Ražotājs pārdod vairumtirgotājam precī ar 20% uzcelojumu virs pašizmaksas, vairumtirgotājs pārdod precī veikalam ar 30% uzcelojumu attiecībā pret ražotāja cenu, bet veikals pārdod pircējiem ar 35% uzcelojumu attiecībā pret vairumtirgotāja cenu. Kādu procentu veido mazumtirdzniecības cena attiecībā pret preces pašizmaksu?
16. Atrisināt iepriekšējo uzdevumu vispārīgā veidā, proti: ražotāja cena par  $\alpha_1\%$  lielāka par preces pašizmaksu, vairumtirgotāja cena par  $\alpha_2\%$  lielāka par ražotāja cenu, bet mazumtirdzniecības cena par  $\alpha_3\%$  lielāka par vairumtirgotāja. Par cik procentiem mazumtirdzniecības cena lielāka par preces pašizmaksu?
17. Šķīdums satur 4% sāls. Cik kilogramus ūdens ir jāpievieno 60 kg šķīduma, lai sāls daudzums tajā būtu 3%?
18. Trīs mēnešu laikā preces cenu ikmēnesi palielināja par 5%, pēc tam trīs mēnešu laikā ikmēnesi pazemināja par 3%. Par cik procentiem ir izmainījusies preces sākotnējā cena?

19. Preces cenu pazemināja trīs reizes: pirmo reizi pazemināja par 10%, pēc tam jauno cenu pazemināja vēl par 15% un, beidzot, pēdējo pazemināja vēl par 20%. Par cik procentiem pavisam ir pazemināta preces sākotnējā cena?
20. Veikala ieņēmumi martā bija par 10% lielāki nekā februārī, bet aprīlī par 5% mazāki kā martā. Cik procentus no februāra ieņēmumiem veido aprīļa ieņēmumi?
21. Pirmajā tirdzniecības nedēļā pārdotais preces daudzums pārsniedza paredzēto par 7%. Otrajā nedēļā preces tika pārdots par 10% vairāk kā pirmajā nedēļā. Noteikt, par cik procentiem bija pārsniegts paredzētais pārdošanas daudzums divās nedēļās, ja pirmajā un otrajā nedēļā bija paredzēts pārdot vienādu preču daudzumu.
22. Pieņemsim, ka vācu markas (DM) kurss Rīgā ir salīdzinoši stabils un ir 0,28 Ls par 1 DM pārdodot un 0,29 Ls par 1 DM pērkot markas. Zināms, ka depozītnoguldījuma procents latiem ir 9% (saliktie) gadā un 4% noguldījumiem markās. Klientam ir 1000 DM. Viņš var tos konvertēt latos, noguldīt uz depozīta uz gadu (jo procents ir augstāks), un pēc tam iegūto summu konvertēt atpakaļ DM, bet var arī uzreiz DM noguldīt uz depozīta.
  - a) Kurš no variantiem izdevīgāks?
  - b) Kāds ir minimālais noguldījuma termiņš, pie kura pirmais variants ir izdevīgāks par otro?
  - c) Pie kuras valūtu kursu (pirkšanas-pārdošanas) attiecības pirmā varianta viena gada depozīts ir izdevīgāks?
23. Darba diena saīsinājās no 8 stundām uz 7 stundām. Par cik procentiem ir jāpaaugstina darba ražīgums, lai pie tām pašām likmēm darba alga palielinātos par 4%?
24. Preču apgrozījuma apjoms firmai katru gadu palielinājās par 7% (no iepriekšējā līmeņa). Par cik procentiem firmai ir palielinājies preču apgrozījuma apjoms četru gadu laikā?
25. Uzņēmuma darbinieku vidējā darba alga 1998. gadā bija 50 Ls. Pieņemsim, ka darba alga katru gadu palielināsies par 20% (no iepriekšējā līmeņa).
  - a) Kāda būs vidējā darba alga 2004. gadā?
  - b) Par cik procentiem būs palielinājusies darba alga šo gadu laikā?
26. Klients paņēma 1000 Ls lielu kredītu. Kāda ir procentu likme, ja zināms, ka pēc gada klientam ir jāatdod 1200 Ls?
27. Viens cilvēks noguldīja bankā 1000 Ls uz 10 gadiem uz saliktiem 8% gadā, otrs noguldīja 2000 Ls uz 5 gadiem uz saliktiem 4% gadā. Kuram no viņiem uz rēķina izrādīsies lielāka summa?

28. 10.06.2000. gadā klients paņēma bankā 2000 Ls lielu kredītu uz vienkāršiem 8% gadā. Kāda summa viņam būs jāatdod 14.04.2001. gadā, ja banka lieto
- parastos procentus ar precīzu dienu skaitu,
  - parastos procentus ar tuvinātu dienu skaitu?
29. Bankā noguldīti 2000 Ls uz saliktiem 7% ceturksnī. Pēc cik ilga laika noguldījuma summa pārsniegs 3000 Ls?
30. 8.04.1998. gadā klients noguldīja bankā 2000 dolārus uz jauktiem 8% gadā, un slēdza rēķinu 10.07.2000. gadā. Kādu summu viņš saņēma, slēdzot rēķinu?
31. Klients paņēma bankā 3600 Ls lielu kredītu uz 250 dienām pie norunas, ka pirmās 100 dienas procenti būs 15% gadā, pēc tam tas kļūs 20% gadā. Kāda summa klientam ir jāatdod, ja procenti ir
- komerciālais ar precīzu dienu skaitu;
  - precīzais ar precīzu dienu skaitu?
32. Klients 8.02.2000. gadā noguldīja uz rēķina 1300 dolārus uz 6% gadā. Kāda summa būs uz rēķina 15.09.2000. gadā, ja banka lieto
- precīzos procentus ar precīzu dienu skaitu,
  - parastos procentus ar tuvinātu dienu skaitu?
33. Bērnam piedzimstot, vecāki noguldīja bankā uz viņa vārda 1000 dolārus, par kuriem tiek maksāts kaut kāds saliktais gada procenti. Bērnam sasniedzot 16 gadu vecumu uz rēķina izrādījās 4000 dolāri. Kāda ir salikto procentu likme šajā bankā?
34. Ciemata iedzīvotāju skaits katru gadu palielinās par 2%. Par cik procentiem tas palielināsies 5 gadu laikā?
35. Ciematā dzīvoja 10 000 cilvēku. Piecu gadu laikā iedzīvotāju skaits pieauga par 2000 cilvēkiem, pie kam ikgadējais iedzīvotāju skaita pieauguma procenti visus šos gadus bija viens un tas pats. Par cik procentiem katru gadu palielinājās ciemata iedzīvotāju skaits?
36. Firma paņēma 6000 dolāru lielu kredītu uz četriem gadiem uz šādiem noteikumiem: pirmos divus gadus saliktie 16% gadā, nākošos divus gadus – saliktie 14% gadā. Kāda summa firmai būs jāatdod pēc četriem gadiem?
37. Summa  $K$  noguldīta bankā uz saliktiem 12% gadā. Noteikt *summas divkārtšošanās laiku*, t. i. laiku, pēc kura noguldītā summa būs kļuvusi divas reizes lielāka.
38. Klients noguldīja bankā 1000 dolārus uz saliktiem 8% gadā, pēc trim gadiem likmi pazemināja uz saliktiem 6% gadā. Kāda summa būs uz klienta rēķina pēc pieciem gadiem?

39. Pēc bērna piedzimšanas vecāki bankā atvēra rēķinu uz viņa vārda un katru mēnesi iemaksāja šajā rēķinā 50 Ls. Banka maksā salikto 1% mēnesī. Kāda summa būs uz bērna rēķina viņa 18. dzimšanas dienā?
40. Par noguldījumu tiek maksāti saliktie 7% gadā. Kāda summa jānogulda uz rēķina, lai:
- a) pēc gada uz rēķina būtu 1000 Ls;
  - b) pēc diviem gadiem uz rēķina būtu 1000 Ls?
41. Sekretārs-referents meklē darbu. Ir divas vakances. Vienā vietā piedāvā sākmā maksāt 100 Ls mēnesī, un pē tam katru ceturksni darba algu palielināt par 10 Ls. Otrā vietā piedāvā vispirms 60 Ls, un pēc tam katru mēnesi darba algu palielināt par 10%. Kurā no darba vietām darba alga par visu darba periodu būs lielāka, ja
- a) līgumu paraksta uz 1 gadu;
  - b) līgumu paraksta uz 3 gadiem?
42. Ģimene piecus gadus pēc kārtas katru mēnesi noguldīja uz depozīta 70 Ls. Pirmos 2 gadus likme bija saliktie 1% mēnesī, nākošos 2 gadus – saliktie 0,8% mēnesī un pēdējā gadā – 0,6% mēnesī.
- a) Kāda summa būs uz rēķina pēc 2 gadiem?
  - b) Kāda summa būs uz rēķina pēc 5 gadiem?
- Paskaidrojiet šo summu veidošanās mehānismu.
43. Pieņemsim, ka pilsonis  $N$  izsmēķē dienā vienu cigarešu paciņu, kura maksā 0,50 Ls. Viņš atteicās no šī ieraduma un iekonomēto naudu reizi mēnesī (noapaļojot uzskatīsim, ka mēnesī ir 30 dienas) nogulda bankā uz saliktiem 2% mēnesī. Kāda summa būs uz viņa rēķina
- a) pēc 5 gadiem?
  - b) pēc 10 gadiem?
44. Klients, kuram gada sākumā uz rēķina ir 400 Ls, gada laikā ik mēnesi iemaksā 50 Ls uz saliktiem 0,8% mēnesī. Gada beigās likme samazinājās līdz 0,6% mēnesī. Pie šīs jaunās likmes klients turpināja ik mēnesi iemaksāt 50 Ls vēl vienu gadu. Kāda summa būs uz rēķina pēc 2 gadiem, ja klients naudu iemaksā
- a) mēneša sākumā;
  - b) mēneša beigās?
45. Kāda summa būs uz rēķina pēc  $n$  gadiem, ja katru gadu iemaksātā summa ir  $K$ , un banka maksā saliktos  $p\%$  gadā?
46. Noteikt salikto mēneša procentu likmi, kura ir ekvivalenta 10% gadā.

47. Banka maksā saliktos 3% ceturksnī. Kāda ir ekvivalentā gada likme?
48. Banka X maksā saliktos 0,6% mēnesī, bet banka Y – saliktos 7,3% gadā. Kurā bankā ir izdevīgāk noguldīt naudu?
49. Klientam 1.01.2000. gadā bija jāmaksā firmai zināma summa. Tā kā viņš to izdarīt nevarēja, tad saskaņā ar līgumu tika aprēķināta soda nauda, kuras lielums ir 2% mēnesī no kopējās summas (parāda un soda naudas). Lai pilnībā norēķinātos ar parādu, klients 1.04.2000. gadā samaksāja 1800 Ls un 1.09.2000. gadā – 2400 Ls. Kāda summa klientam bija jāmaksā gada sākumā?
50. Klients 1. martā uz 8 mēnešiem paņēma 1200 Ls lielu kredītu uz saliktiem 1,5% mēnesī. 1. jūnijā viņš atdeva 400 Ls. Cik liela summa viņam būs jāmaksā 1. novembrī?
51. Firma saņem maksājumus ar bankas starpniecību, kura maksā saliktos 0,4% mēnesī. Firmai ir jāsaņem 3000 Ls 1.03.2000 un 4200 Ls – 1.09.2000. Cik liela summa firmai ir jāsaņem šī paša gada 1. jūlijā, lai šis maksājums būtu ekvivalents abiem iepriekš minētajiem maksājumiem?
52. Izejot no saliktiem 1,5% mēnesī, noteikt, cik lielam jābūt maksājumam 1.04.2000, lai tas būtu ekvivalents šādai maksājumu plūsmai:  
 1.01.2000 - 1200 Ls;  
 1.05.2000 - 1000 Ls;  
 1.10.2000 - 2300 Ls.
53. Divas firmas piedāvā vienu un to pašu preci. Pirmajai firmai ir uzreiz jāsamaksā 100 Ls, pēc gada – 100 Ls un vēl pēc gada – 90 Ls; otrai firmai ir uzreiz jāsamaksā 200 Ls, bet pēc gada 80 Ls. Kurš pirkšanas variants ir izdevīgāks, ja banka, kurā glabājās nauda, maksā saliktos 8% gadā?
54. Vienā dienā ir nopirkta divas vienādas mājas. Par pirmo ir uzreiz samaksāts 40 000 Ls; otra tika pārdota pie šādiem nosacījumiem: 20 000 Ls uzreiz, bet pēc tam 10 gadu laikā katru gadu tiks maksāti 2300 Ls. Kurš pirkšanas variants ir izdevīgāks, izejot no saliktiem 10% gadā?
55. Dziedātāja ir uzvarējusi konkursā, kura izsludinātais balvas lielums ir 10 000 dolāru. Tomēr izrādījās, ka balvas izmaksas kārtība ir šāda: 2000 dolāru uzreiz, bet atlikušie 8000 dolāri tiek izmaksāti 8 gadu laikā pa 1000 dolāriem ik gadu. Kāda ir šādas balvas vērtība konkursa dienas laikā, izejot no saliktiem 10% gadā?
56. Firma ir telpas savam ofisam. Ir divi varianti. Pirmajā gadījumā ir uzreiz jāsamaksā 1000 dolāru par visu gadu. Otrajā gadījumā ir uzreiz jāsamaksā

- 500 dolāri, pēc 3 mēnešiem – 250 dolāri un vēl pēc 3 mēnešiem 270 dolāri. Bankas procents – saliktie 2% ceturksnī. Kurš variants izdevīgāks?
57. Cilvēks pērk ārpilsētas māju. Šim nolūkam viņš hipotēku bankā ieņēma savu pilsētas dzīvokli un paņēma 40 000 dolāru lielu kredītu uz 20 gadiem uz saliktiem 2% mēnesī. Izmaksām jābūt vienāda lieluma un jāveic ik mēnesī. Noteikt šī ikmēneša maksājuma lielumu?
58. Pieņemsim, ka  $K$  – kredīts, paņemts uz  $n$  gadiem uz saliktiem  $p\%$  gadā. Kredīts jādzēš ar vienāda lieluma ikgadējiem maksājumiem. Noteikt ikgadējā maksājuma lielumu.
59. Saskaņā ar līgumu izmaksas tiks veiktas šādi. Līguma parakstīšanas brīdī – 5000 Ls, bet pēc tam reizi pusgadā 5 gadus pēc kārtas 2000 Ls. Noteikt visas šīs maksājumu plūsmas  $PV$  līguma parakstīšanas dienā, izejot no saliktiem 3% ceturksnī.
60. Ikgadējām izmaksām ar lielumu  $K$ , kuras tiek veiktas pietiekoši ilgi (var uzskatīt, ka bezgalīgi ilgi), noteikt  $PV$ , ja gada procents ir vienāds ar  $i$ .
61. Firma paņēma uz 7 gadiem 5000 Ls lielu kredītu uz saliktiem 15% gadā. Pirmos 6 gadus firma ikgadu maksāja bankai 800 Ls. Cik lielam jābūt pēdējam maksājumam?
62. Firma paņēma uz 5 gadiem 6000 Ls lielu kredītu uz saliktiem 18% gadā. Kredīts jāatdod ar vienāda lieluma ikmēneša maksājumiem. Noteikt šo maksājumu lielumu, izejot no saliktā mēneša procenta, kurš ekvivalents 18% gadā.
63. Atrisināt iepriekšējo uzdevumu, izejot no saliktā mēneša procenta  $j = 18/12 = 1,5\%$ .
64. Firma paņēma uz četriem gadiem 5000 Ls lielu kredītu uz 15% gadā ar noteikumu, ka kredīts tiks atdots ar vienāda lieluma pamatparāda maksājumiem. Atrast ikgadējo maksājumu lielumus.
65. Pilsonis  $N$  grib kāda projekta realizācijā ieguldīt 6000 dolārus. Sagaidāmā atdeve no šī projekta: 4000 dolāru trešā gada beigās un 4000 dolāru ceturta gada beigās skaitot no naudas ieguldīšanas momenta. Pilsonis  $N$  neiegulda naudu projektos, kuri ienes mazāk kā 15% gadā. Vai viņam ir vērts ieguldīt naudu dotajā projektā?
66. Kompānijas vadībai tiek piedāvāts celtniecības projekts rūpnīcai, kuras jauda būtu 10 000 izstrādājumu mēnesī. Celtniecības izmaksas ir 10 miljoni latu. No katra izstrādājuma realizācijas tiks iegūti 20 latī. Rūpnīca varēs darboties 20 gadus bez pārbūves. Kāds būs kompānijas vadības lēmums, ja zināms, ka kompānija neiegulda naudu projektos, kuri ienes mazāk kā 20% tīras peļņas gadā?

67. Brīvprātīgais pensiju fonds piedāvā šādus noteikumus: pēdējos piecus gadus pirms pensijas noguldītājs katru mēnesi iemaksā 10 Ls. Pēc tam 15 gadus katru mēnesi tiks izmaksāta zināma summa. Cik liela ir ikmēneša izmaksa, ja pensiju fonds izmanto peļņas likmi, vienādu ar saliktiem 2% mēnesī?
68. Cilvēks grib 10 gadus pēc kārtas (pirms aiziešanas pensijā) reizi ceturksnī iemaksāt bankā zināmu naudas summu, lai pēc tam 15 gadus pēc kārtas reizi ceturksnī saņemtu 300 Ls. Kāda summa būs uz rēķina tajā brīdī, kad cilvēks aizies pensijā un kāda ir ikceturkšņa iemaksājamā summa, ja tiek izmantoti saliktie 4% ceturksnī?
69. Klients paņēma 1100 Ls lielu kredītu. Kāda ir bijusi uzskaites likme, ja zināms, ka pēc gada klientam bija jāatdod 1250 Ls?
70. Noteikt uzskaites likmi, kura ekvivalenta procentu likmei 20%.
71. Vekselis ar nominālvērtību 2000 Ls un apmaksas termiņu 25.06.2000. gadā tika uzskaitīts 21.05.2000. gadā ar uzskaites likmi 18%. Kādu summu saņems vekseļa turētājs uzskaitot vekseli, pieņemot, ka gadā ir 365 dienas?
72. Vekselis, kura uzskaites likme bija 20%, tika pārdots (uzskaitīts) 25 dienas pirms apmaksas (dzēšanas) termiņa par 1050 dolāriem. Kāda ir vekseļa nominālvērtība?
73. Vekselis, kura nominālvērtība ir 3000 dolāru, 50 dienas pirms dzēšanas termiņa tika pārdots par 2800 dolāriem. Kāda bija šī vekseļa uzskaites likme?
74. Klients, kurš izrakstījis divus vekselus, vienu ar dzēšanas termiņu 1.09.2000. gadā par 1000 Ls un otru ar dzēšanas termiņu 30.09.2000. gadā par 800 Ls, lūdz aizstāt tos ar vienu vekseli, kura dzēšanas termiņš būtu 6.11.2000. gadā. Kādai jābūt jaunā vekseļa nominālvērtībai, lai tā uzskaites likme būtu 20%?
75. Bankā ir noguldīta summa  $K$  uz saliktiem 0,8% mēnesī. Inflācijas līmenis ir 11% gadā. Kāda ir gada laikā uzkrātās summas reālā vērtība?
76. Klients noguldīja bankā 3000 dolārus. Pieņemsim, ka banka maksā saliktos 8% gadā, bet uz procentiem ir uzlikts 25% liels nodoklis. Kāda ir faktiskā vērtība 1,5 gadu laikā uzkrātai summai?
77. Klients iemaksā investīciju fondā 15 000 dolārus. Investīciju fonds garantē saliktos 24% gadā. Procentiem uzliktā nodokļu likme ir 25%. Inflācijas līmenis ir 25% gadā. Kāda ir reālā vērtība peļņai, kuru klients guva 2 gadu laikā, ja pirmā gada beigās viņš peļņu neizņēma (nefiksēja)?
78. Kompānija apskata jautājumu par naudas investēšanu vienā no diviem projektiem  $A$  un  $B$ , katram no kuriem ir vajadzīgs 5000 Ls liels sākuma kapitāls. Sagaidāmā atdeve no projekta  $A$  ir šāda: otrā gada beigās no investēšanas

brīža – 3500 Ls, ceturtā gada beigās – arī 3500 Ls; no projekta B: otrā gada beigās – 2800 Ls, ceturtā gada beigās – 5000 Ls. Kāds būs kompānijas lēmums?

79. Firma ir ieguldījusi projekta izstrādē 4000 dolāru. Sagaidāmā līdzekļu atdeve ir šāda:

1. gads	2. gads
3000 dolāri	1800 dolāri

Noteikt iekšējā ienesīguma normu (IRR).

80. Firma ieguldīja projektā \$14 000. Līdzekļu atdeve bija šāda: par pirmo gadu – \$6000, par otro gadu – \$5000, par trešo gadu – \$3000. Trešā gada beigās novērtētā projekta atlikuma vērtība bija \$8000. Noteikt projekta iekšējā ienesīguma normu.

81. Klients ieguldīja darījumā 18 000 dolāru, bet pēc tam visu dzīvi katru mēnesi saņēma 300 dolāru. Kāda ir šāda naudas ieguldījuma iekšējā ienesīguma norma?

82. Cilvēks saņēma mantojumu, saskaņā ar kuru bankai viņam visa mūža garumā jāmaksā \$500. Cik liels ir atstātais mantojums, ja zināms, ka banka maksā saliktos 0,8% mēnesī?

## ALGEBRAS ELEMENTI

Izmantojot algebru, var risināt daudzus ekonomikas uzdevumus. Vienkāršākie šādas izmantošanas piemēri bija 1.nodaļā. Nākošajās nodaļās (2-6) tiks sniegts dziļāks algebrisks aparāts. Konkrētāk, nodaļā 3-6 tiks apskatīti lineārās algebras elementi un to pielietojumi. Ar šāda aparāta palīdzību var atrisināt virkni nopietnu ekonomisku problēmu; kā piemērs var kalpot tālāk apskatītais Ļeontjeva starpnozaru bilances modelis.

Pēc (2-6) nodaļas apgūšanas jūs:

- 1) *mācēsiet veikt aritmētiskas darbības ar algebriskā un trigonometriskā formā dotiem kompleksiem skaitļiem;*
- 2) *sapratīsiet matricu rēķinu nozīmi ekonomisku uzdevumu risināšanā;*
- 3) *mācēsiet saskaitīt un reizināt matricas, atrast apgriezto matricu;*
- 4) *mācēsiet sastādīt un risināt vienādojumu sistēmas ar matricu palīdzību;*
- 5) *mācēsiet risināt un izpētīt vienādojumu sistēmas ar Gausa metodes palīdzību;*
- 6) *sapratīsiet Ļeontjeva modeļa nozīmi, mācēsiet izmantot to līdzsvara izlaidis un līdzsvara cenas noteikšanai.*

## 2. KOMPLEKSIE SKAITĻI UN POLINOMI

### 2. 1. Kompleksie skaitļi

Pieņemsim, ka  $N$  – visu naturālo skaitļu kopa. Saskaitot naturālus skaitļus, atkal iegūstam naturālu skaitli. Tomēr saskaitīšanai pretējās darbības – atņemšanas – rezultāts var arī nebūt naturāls skaitlis. Ir jāpāriet pie naturālo skaitļu kopas paplašinājuma – visu veselo skaitļu kopas  $Z$ . Savukārt, veselu skaitļu reizinājums ir vesels skaitlis, bet, lai varētu veikt pretējo darbību – dalīšanu – ir jāpāriet uz veselo skaitļu kopas paplašinājumu – racionālo skaitļu kopu  $Q$ . Paceļot racionālu skaitli veselā pakāpē, iegūstam racionālu skaitli, bet, velkot sakni no racionāla skaitļa, rezultāts var nebūt racionāls skaitlis (piemēram,  $\sqrt{2}$  – iracionāls skaitlis): jāpāriet uz visu reālo skaitļu kopu  $R$ . Beidzot, reālo skaitļu kopā nevar izvilkt pāra pakāpes sakni no negatīva skaitļa, šādas darbības rezultāts nav reāls skaitlis. Atbilstošais reālo skaitļu kopas paplašinājums ir komplekso skaitļu kopa.

Par **kompleksu skaitli** sauc šādu izteiksmi

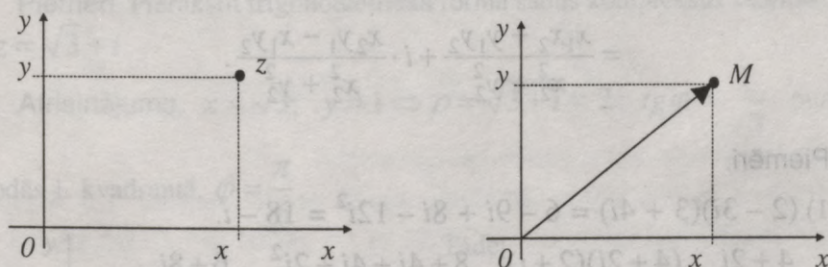
$$x + iy,$$

kur  $x, y$  – reāli skaitļi, bet  $i$  – *imaginārā vienība*, kura apmierina noteikumu  $i^2 = -1$ . Skaitli  $x$  sauc par reālo, bet  $y$  – par dotā kompleksā skaitļa imagināro daļu. Reāls skaitlis ir kompleksa skaitļa speciālgadījums, kad  $y = 0$ . Savukārt, ja  $x = 0$ , tad kompleksu skaitli  $iy$  sauc par tīri imagināru.

Divus kompleksus skaitļus  $z_1 = x_1 + iy_1$  un  $z_2 = x_2 + iy_2$  sauc par *vienādiem*, ja vienādas ir to reālās daļas:  $x_1 = x_2$  un imaginārās daļas:  $y_1 = y_2$ .

Kompleksos skaitļus  $z = x + iy$  un  $\bar{z} = x - iy$  sauc par *kompleksi saistītiem*.

Kompleksu skaitli  $z = x + iy$  ģeometriski var attēlot  $xOy$  plaknē kā punktu ar koordinātām  $(x, y)$  vai ar šī punkta radiusa vektoru.



Zīm.2.1.

Kompleksi saistītiem skaitļiem  $z = x + iy$  un  $\bar{z} = x - iy$  atbilst punkti, kuri ir simetriski pret  $Ox$  asi.

Par kompleksu skaitļu  $z_1 = x_1 + iy_1$  un  $z_2 = x_2 + iy_2$  summu sauc kompleksu skaitli

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Par šo skaitļu starpību sauc kompleksu skaitli

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Komplekso skaitļu reizināšanu veic pēc likuma

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + iy_1x_2 + ix_1y_2 + i^2y_1y_2 = \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2). \end{aligned}$$

Par komplekso skaitļu  $z_1 = x_1 + iy_1$  un  $z_2 = x_2 + iy_2$  dalījumu sauc kompleksu skaitli  $z_3 = x_3 + iy_3$ , kurš apmierina nosacījumu:  $z_2 \cdot z_3 = z_1$ , jeb  $(x_2 + iy_2)(x_3 + iy_3) = x_1 + iy_1$ , jeb

$$(x_2x_3 - y_2y_3) + i(x_2y_3 + y_2x_3) = x_1 + iy_1.$$

Izeļot no komplekso skaitļu vienādības definīcijas, iegūstam vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x_2x_3 - y_2y_3 = x_1, \\ x_2y_3 + y_2x_3 = y_1. \end{cases}$$

Atrisinot sistēmu, var iegūt  $x_3$  un  $y_3$ . Praksē vienkāršāk ir rīkoties šādi:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \end{aligned}$$

Piemēri.

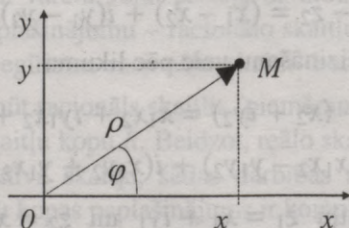
$$1) (2 - 3i)(3 + 4i) = 6 - 9i + 8i - 12i^2 = 18 - i.$$

$$2) \frac{4 + 2i}{2 - i} = \frac{(4 + 2i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{8 + 4i + 4i + 2i^2}{4 - i^2} = \frac{6 + 8i}{5} = 1,2 + 1,6i.$$

## 2.2. Kompleksā skaitļa trigonometriskā forma

Kā tika atzīmēts, kompleksu skaitli  $z = x + iy$  var attēlot kā radiusa vektoru punktam  $M$  ar koordinātēm  $(x, y)$ . Šī vektora garumu  $\rho$  sauc par kompleksā skaitļa moduli. Tiek apzīmēts  $|z|$ .

$$|z| = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



Zīm.2.2.

Lenķi  $\varphi$ , kuru veido vektors  $\overline{OM}$  ar  $Ox$  ass pozitīvo virzienu, sauc par kompleksā skaitļa  $z$  argumentu  $z$  un apzīmē  $Arg z$ . (Šo lenķi nosaka ar precizitāti līdz  $2\pi k$ ,  $k$  – patvaļīgs vesels skaitlis).

$$tg \varphi = \frac{y}{x}$$

Savukārt,  $x = \rho \cdot \cos \varphi$ ,  $y = \rho \cdot \sin \varphi$ . Tad  $z = \rho \cdot \cos \varphi + i \rho \cdot \sin \varphi = \rho(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ . Izteiksmi

$$z = \rho(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$$

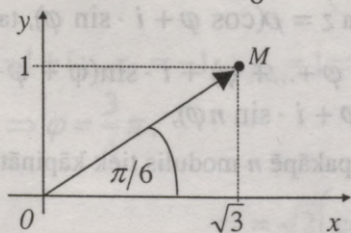
sauc par kompleksā skaitļa trigonometrisko formu.

Piemēri. Pierakstīt trigonometriskā formā šādus kompleksus skaitļus:

1)  $z = \sqrt{3} + i$ .

Atrisinājums.  $x = \sqrt{3}$ ;  $y = 1 \Rightarrow \rho = \sqrt{3+1} = 2$ ;  $tg \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ; punkts  $z$

atrodās 1. kvadrantā,  $\varphi = \frac{\pi}{6}$ .



Tādēļ

$$z = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

Zīm.2.3.

2)  $z = 2 - 2i$ .

Atrisinājums.  $x = 2$ ;  $y = -2 \Rightarrow \rho = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ ;  $tg \varphi = -1$ .

Punkts  $z$  – 4. kvadrantā,  $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ .

$$z = 2\sqrt{2} \left( \cos \left( -\frac{\pi}{4} \right) + i \cdot \sin \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right).$$

Trigonometriskajā formā ir ērti veikt komplekso skaitļu reizināšanu, dalīšanu un celšanu pakāpē.

Ja  $z_1 = \rho_1(\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1)$ ,  $z_2 = \rho_2(\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2)$ . Tad

$$1) z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2) = \\ = \rho_1 \rho_2 ((\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \\ + \sin \varphi_2 \cdot \cos \varphi_1)) = \rho_1 \rho_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

– reizinot kompleksos skaitļus to moduļi sareizinās un argumenti saskaitās.

2)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 (\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1)}{\rho_2 (\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2)} = \frac{\rho_1 (\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 - i \cdot \sin \varphi_2)}{\rho_2 (\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2) (\cos \varphi_2 - i \cdot \sin \varphi_2)} = \\ = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i \cdot (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_2 \cos \varphi_1)}{\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2} = \\ = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)),$$

– dalot moduļi dalās, bet argumenti tiek atņemti.

3) Kompleksa skaitļa  $z$  kāpināšana veselā pozitīvā pakāpē  $n$  ir šī skaitļa  $n$ -kārtīga reizināšana pašam ar sevi. Tādēļ, ja  $z = \rho(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ , tad

$$z^n = z \cdot z \cdot \dots \cdot z = \rho \cdot \rho \cdot \dots \cdot \rho (\cos(\varphi + \varphi + \dots + \varphi) + i \cdot \sin(\varphi + \varphi + \\ + \dots + \varphi)) = \rho^n (\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi),$$

– kāpinot kompleksu skaitli veselā pozitīvā pakāpē  $n$  modulis tiek kāpināts šajā pakāpē, bet arguments pareizināts ar  $n$ .

Pēdējās vienādības speciālgadījums  $\rho = 1$  tiek saukts par Muavra formulu:

$$(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi.$$

4) Par  $n$ -tās pakāpes sakni no kompleksa skaitļa  $z$  sauc tādu kompleksu skaitli  $w$ , ka  $w^n = z$ . Ja dots  $z = \rho(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ , apzīmējam  $w = \tau(\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$ . Tad  $w^n = z$ , t. i.

$$\tau^n (\cos n\theta + i \cdot \sin n\theta) = \rho(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi).$$

Kompleksu skaitļu vienādība nozīmē, ka to moduļi ir vienādi, bet argumenti var atšķirties tikai par  $2\pi k$ :

$$\tau^n = \rho, \quad n\theta = \varphi + 2\pi k,$$

no šejienes

$$\tau = \sqrt[n]{\rho}, \quad \theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n},$$

$$\sqrt[n]{z} = w = \sqrt[n]{\rho} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \cdot \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right).$$

Piemēri.  $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}i$ ,  $z_2 = -1 + i$ . Aprēķināt trigonometriskajā formā: 1)  $z_1 \cdot z_2$ ; 2)  $\frac{z_1}{z_2}$ ; 3)  $z_1^5$ ; 4)  $\sqrt[3]{z_2}$ .

Atrisinājums. Vispirms pārveidosim šos skaitļus trigonometriskajā formā:

$$z_1 = 2 + 2\sqrt{3}i; \quad x_1 = 2; \quad y_1 = 2\sqrt{3} \Rightarrow \rho = \sqrt{4 + 12} = 4;$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}; \quad \text{lenķis } \varphi \text{ ir 1. kvadrantā} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3};$$

$$z_1 = 4 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

$$z_2 = -1 + i; \quad x_2 = -1; \quad y_2 = 1 \Rightarrow \rho = \sqrt{2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = -1, \quad \text{lenķis } \varphi \text{ ir 2. kvadrantā} \Rightarrow \varphi = \frac{3}{4}\pi;$$

$$z_2 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3}{4}\pi + i \cdot \sin \frac{3}{4}\pi \right).$$

$$\begin{aligned} 1) \quad z_1 \cdot z_2 &= 4\sqrt{2} \left( \cos \left( \frac{\pi}{3} + \frac{3}{4}\pi \right) + i \cdot \sin \left( \frac{\pi}{3} + \frac{3}{4}\pi \right) \right) = \\ &= 4\sqrt{2} \left( \cos \frac{13}{12}\pi + i \cdot \sin \frac{13}{12}\pi \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad z_1 : z_2 &= \frac{4}{\sqrt{2}} \left( \cos \left( \frac{\pi}{3} - \frac{3}{4}\pi \right) + i \cdot \sin \left( \frac{\pi}{3} - \frac{3}{4}\pi \right) \right) = \\ &= \frac{4}{\sqrt{2}} \left( \cos \left( -\frac{5}{12}\pi \right) + i \cdot \sin \left( -\frac{5}{12}\pi \right) \right); \end{aligned}$$

$$3) z_1^5 = 4^5 \left( \cos 5 \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin 5 \frac{\pi}{3} \right) = 1028 \left( \cos \frac{5}{3} \pi + i \cdot \sin \frac{5}{3} \pi \right);$$

$$4) w = \sqrt[3]{z_2} = \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{3/4 \pi + 2\pi k}{3} + i \cdot \sin \frac{3/4 \pi + 2\pi k}{3} \right),$$

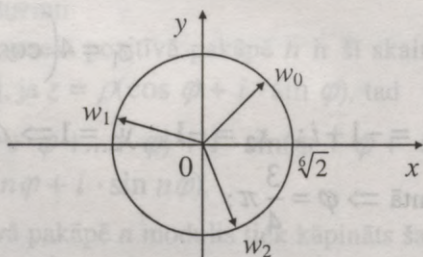
$$\text{ja } k = 0, \text{ to } w_0 = \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right),$$

$$\text{ja } k = 1, \text{ to } w_1 = \sqrt[6]{2} \left( \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3} \pi \right) + i \cdot \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3} \pi \right) \right),$$

$$\text{ja } k = 2, \text{ to } w_2 = \sqrt[6]{2} \left( \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{4}{3} \pi \right) + i \cdot \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{4}{3} \pi \right) \right),$$

tālāk  $w_3 = w_0$ ,  $w_4 = w_1, \dots$ , vērtības sāk atkārtoties. Attēlosim ģeometriski šī piemēra atbildes. Izvelkot trešās pakāpes sakni no kompleksā skaitļa, iegūstam trīs vektorus, kuru moduļi ir vienādi,

bet argumenti atšķiras par  $\frac{2\pi}{3}$ .



Zīm.2.4.

### 2.3. Polinoma sadalīšana reizinātājos

Apskatīsim mainīgā  $x$  polinomu  $P_n(x)$  ar pakāpi  $n$ .

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n, \quad (2.1)$$

Koeficients  $a_0$  nav vienāds ar nulli, pretējā gadījumā polinoma pakāpe būtu zemāka kā  $n$ . Ja nav nepieciešams akcentēt polinoma pakāpi, tad  $P_n(x)$  vietā raksta vienkārši  $P(x)$ .

Par polinoma sakni sauc skaitli, kuru ievietojot  $x$  vietā, polinoms pieņem vērtību vienādu ar nulli. Bez pierādījuma noformulēsim divas svarīgas algebras teorēmas.

**Gausa teorēma.** Katram polinomam  $P_n(x)$  ar pakāpi ne zemāku par vienu, eksistē vismaz viena reāla vai kompleksa sakne.

Šo teorēmu sauc par algebras pamatteorēmu.

Bezū teorēma. Polinoma  $P_n(x)$  dalījuma ar binomu  $(x - a)$  atlikums ir  $P_n(a)$ .

Sekas. Ja  $x = a$  ir polinoma  $P_n(x)$  sakne, tad  $P_n(x)$  dalās ar  $(x - a)$  bez atlikuma:

$$P_n(x) = (x - a)P_{n-1}(x).$$

Tātad, pieņemsim, ka dots polinoms (2.1). Saskaņā ar Gausa teorēmu, tam ir vismaz viena reāla vai kompleksa sakne. Apzīmēsim to  $x_1$ . Tad no Bezū teorēmas sekām izriet, ka

$$P_n(x) = (x - x_1)P_{n-1}(x).$$

Savukārt, ja  $(n - 1) \neq 0$ , polinomam  $P_{n-1}(x)$  arī ir sakne. Apzīmēsim to  $x_2$ . Tad  $P_{n-1}(x) = (x - x_2)P_{n-2}$ , bet

$$P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)P_{n-2}(x) \quad \text{utt.}$$

Atkārtojot šo  $n$  reizes, iegūstam:

$$P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)P_0(x).$$

$P_0(x)$  – 0-tās kārtas polinoms, t. i. skaitlis. Šis skaitlis ir  $a_0$ . Tādā veidā, iegūstam polinoma (2.1) izvirkājumu lineāros reizinātājos:

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

Starp saknēm  $x_1, x_2, \dots, x_n$  var būt vienādas. Sagrupējot reizinātājus, kuri satur vienādas saknes, iegūstam:

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2} \dots (x - x_k)^{\alpha_k}, \quad (2.2)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = n.$$

Šis pieraksts nozīmē, ka sakne  $x_1$  sastapta  $\alpha_1$  reizes, sakne  $x_2$  –  $\alpha_2$  reizes ... Sakni  $x_1$  sauc par sakni ar kārtu  $\alpha_1$ , sakne  $x_2$  – ar kārtu  $\alpha_2$  ...

Lai tālāk pārveidotu izvirkājumu (2.2) izmanto šādu faktu.

**Teorēma.** Ja komplekss skaitlis  $a + bi$  ir polinoma  $P_n(x)$  sakne ar kārtu  $\beta$ , tad kompleksi saistītais skaitlis  $(a - bi)$  arī ir šī polinoma sakne, pie kam ar tādu pašu kārtu.

Ja  $(a + bi)$  un  $(a - bi)$  – polinoma  $P(x)$  kompleksi saistītas saknes ar kārtu  $\beta$ , tad izvirkājumā (2.2) ir reizinātāji

$$(x - (a + bi))^\beta \cdot (x - (a - bi))^\beta = (((x - a) - bi)((x - a) + bi))^\beta =$$

$$= \left( (x-a)^2 - (bi)^2 \right)^\beta = \left( x^2 - 2ax + a^2 + b^2 \right)^\beta = \left( x^2 + px + q \right)^\beta,$$

kur  $p = -2a$ ,  $q = a^2 + b^2$ .

Tas nozīmē, ka katram kompleksi saistītu sakņu pārim izvirzījumā atbilst izteiksme  $(x^2 + px + q)^\beta$ . Nobeidzot, katru polinomu ar veidu (2.1) var izvirzīt šādi:

$$P_n(x) = a_0(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\dots(x-x_l)^{\alpha_l}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\dots \\ \dots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}, \quad (2.3)$$

kur  $x_1, x_2, \dots, x_l$  - polinoma reālas saknes, bet katrs kvadrāttrinoms atbilst kompleksi saistītu sakņu pārim.

Piemēri.

1) Dots polinoma saknes:  $0; 2+i; 2-i$ . Uzrakstīt šo polinomu.

$$P(x) = (x-0)(x-(2+i))(x-(2-i)) = x((x-2)-i)((x-2)+i) = \\ = x((x-2)^2 - i^2) = x(x^2 - 4x + 4 + 1) = x^3 - 4x^2 + 5x.$$

2) Sadalīt reizinātājos polinomu  $P(x) = x^5 - x$ .

$$x^5 - x = x(x^4 - 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1) = x(x-1)(x+1)(x^2 + 1).$$

### Jautājumi pašpārbaudei

1. Ko sauc par kompleksu skaitli?
2. Kāda ir kompleksa skaitļa ģeometriskā interpretācija?
3. Kā definē kompleksa skaitļa trigonometrisko formu?
4. Attēlojiet trigonometriskā formā komplekso skaitli  $(1-i)^{12}$ .
5. Pierakstiet  $n$ -tās kārtas polinoma sadalīšanu lineāros un kvadratiskos reizinātājos.
6. Sadalīt reizinātājos polinomu  $x^6 - 1$ .

### Vingrinājumi

Izskaitļot piemērus (1-3).

1.  $(2+i)(3-4i)$ .
2.  $(5-7i)(3i-4)$ .
3.  $\frac{5-7i}{2+i}$ .

4. Uzrakstīt trigonometriskā formā:

$$z = 1 - i, \quad z = \sqrt{3} + i,$$

$$z = \sqrt{3} - i, \quad z = 1 + i.$$

Izpidīt darbības trigonometriskā formā (5 – 10).

$$5. (1+i)(\sqrt{3}-i).$$

$$6. \frac{\sqrt{3}+i}{1-i}.$$

$$7. z = (2i - 2)^6.$$

$$8. z = \sqrt{1-i}.$$

$$9. z = (1+i\sqrt{3})^4.$$

$$10. z = \sqrt[3]{2+2i}.$$

Sadalīt reizinātājos (11 – 13).

$$11. P(x) = x^4 + x.$$

$$12. x^7 - x.$$

$$13. x^4 - 16.$$

### 3. DETERMINANTI UN MATRICAS

#### 3.1. Matricas

Par *matricu* sauc taisnstūrveida skaitļu tabulu. Piemēram,  $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ .

Matricu apzīmēšanai parasti izmanto apaļās iekavas:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Skaitļus  $a_{ij}$  sauc par matricas *elementiem*. Apzīmējumā  $a_{ij}$  indekss  $i$  norāda rindas numuru, indekss  $j$  – kolonnas numuru.

Matricas īsāk apzīmē ar lielajiem latīņu burtiem, piemēram, matrica  $A$ . Ja grib norādīt matricas rindu skaitu un kolonnu skaitu (matricas izmēru), tad matricas apzīmējumam pieraksta atbilstošos indeksus  $A_{m,n}$ . Šeit  $m$  – rindu skaits, bet  $n$  – kolonu skaits. Izmanto arī vienu no sekojošiem apzīmējumiem:  $\|a_{ij}\|$  jeb  $\|a_{ij}\|_{m,n}$ .

Ja matricas rindu skaits ir vienāds ar kolonnu skaitu ( $m = n$ ), tad matricu sauc par *kvadrātisku*. Šajā gadījumā rindu skaitu sauc par matricas kārtu. Šādai matricai elementus  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  sauc par galvenās diagonāles elementiem.

Piemērs.

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix} - 3. \text{ kārtas kvadrātiska matrica.}$$

Ja matricai ir viena rinda ( $m = 1$ ), tad to sauc par *matricu rindu* ( $a_{11},$

$a_{12}, \dots, a_{1n}$ ). Analogiski, matricu ar veidu  $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$  sauc par *matricu kolonnu*.

Par vienības matricu sauc šādu kvadrātisku matricu

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Šai matricai galvenās diagonāles elementi ir vieninieki, pārējie elementi – nulles.

Matricu  $B$  sauc par matricas  $A$  *transponēto* matricu, ja to iegūst no matricas  $A$ , samainot vietām rindas un kolonnas. Apzīmē  $A^T$ .

Piemērs.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

tad

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \\ 5 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

### 3.2. Otrās un trešās kārtas determinanti

Apskatām kvadrātisku matricu, kura sastāv no četriem elementiem:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Par *otrās kārtas determinantu*, atbilstošu šai matricai, sauc skaitli, kurš vienāds ar  $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$  un kuru apzīmē ar simbolu

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Tātad, pēc definīcijas  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ .

Elementus  $a_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$  sauc par šī determinanta elementiem.

Apskatām tagad kvadrātisku matricu  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ .

Par *trešās kārtas determinantu*, atbilstošu šai matricai (jeb par šīs matricas determinantu), sauc skaitli, vienādu ar

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

un apzīmē ar simbolu  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta$

Tātad, pēc definīcijas  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$ .

Diagonāli, kuru veido elementi  $a_{11}$ ,  $a_{22}$  un  $a_{33}$ , sauc par *galveno*, bet diagonāli, kuru veido elementi  $a_{31}$ ,  $a_{22}$  un  $a_{13}$ , – par *blakus*.

Atzīmēsim, ka pirmie trīs saskaitāmie, kuriem ir plus zīmes, ir galvenās diagonāles elementu reizinājums ( $a_{11}a_{22}a_{33}$ ), kā arī to elementu reizinājums, kuri ir virsotnes trijstūriem, kuru viena mala ir paralēla galvenajai diagonālei ( $a_{12}a_{23}a_{31}$  un  $a_{13}a_{21}a_{32}$ ):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Pēdējie trīs saskaitāmie, kuriem ir mīnus zīmes, veido elementu reizinājumi, veidoti pēc analogiska likuma, tikai par pamatu ir ņemta blakusdiagonāle:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Minēto likumu, kā veidot determinanta izteiksmē ieejošos sešus saskaitāmos, parasti sauc par *trijstūra likumu*.

Kvadratiskas matricas  $A$  determinantu apzīmē  $|A|$ .

### 3.3. Determinantu īpašības

1. *Īpašība*. Determinanta vērtība nemainās, ja visas tā rindas un kolonnas ar vienādiem numuriem samaina vietām:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Izmantojot jēdzienu *transponētā matrica*, šo īpašību var pierakstīt tā: ja  $A$  – kvadrātiska matrica, tad  $|A| = |A^T|$ . Lai pierādītu šo īpašību, jāpielieto trijstūra likums vienādības kreisajai un labajai pusei.

Šī īpašība nozīmē rindu un kolonnu vienlīdzību, tādēļ visas īpašības, kuras piemīt determinanta rindām, piemīt arī determinanta kolonnām, un otrādi.

2. **Īpašība.** Ja samaina vietām divas determinanta rindas (kolonnas), tad determinants maina zīmi.

Piemēram,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

3. **Īpašība.** Determinants, kuram divas rindas (kolonnas) ir vienādas, ir vienāds ar nulli.

Tiešām, samainot vietām vienādās kolonnas, no vienas puses, pēc 2. īpašības determinants (apzīmēsim to ar  $\Delta$ ) maina savu zīmi uz pretējo, tas ir, pieņem vērtību  $-\Delta$ . No otras puses, determinanta vērtība nevar izmainīties, jo samainītās kolonnas bija vienādas. Tātad

$$\Delta = -\Delta \text{ jeb } 2\Delta = 0, \text{ no kurienes } \Delta = 0.$$

4. **Īpašība.** Kādas rindas (kolonnas) elementu kopīgo reizinātāju var iznest pirms determinanta zīmes.

$$\text{Piemērs. } \begin{vmatrix} 6 & 9 & 5 \\ 9 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 9 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

5. **Īpašība.** Determinants, kuram divas rindas (kolonnas) ir proporcionālas, ir vienāds ar nulli.

Tiešām, ja determinantam divas kolonnas ir proporcionālas, tad vienas kolonnas elementus var iegūt pareizinot otras kolonnas elementus ar kādu kopīgo reizinātāju. Iznesot šo reizinātāju pirms determinanta zīmes, mēs iegūsim determinantu ar divām vienādām kolonnām. Pēc 3. īpašības determinants ir vienāds ar nulli.

6. **Īpašība.** Ja determinanta  $\Delta$  kādas kolonnas (rindas) katrs elements ir divu saskaitāmo summa, tad determinants  $\Delta$  ir vienāds ar divu determinantu summu, pie kam vienam no tiem atbilstošā kolonna sastāv no pirmajiem saskaitāmajiem, bet otram no otrajiem saskaitāmajiem.

Ja, piemēram,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a'_{11} + a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} + a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} + a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Tad

$$\Delta = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

7. Īpašība. Determinants nemaina savu vērtību, ja kādas rindas (kolonnas) visiem elementiem pieskaita citas rindas (kolonnas) atbilstošos elementus, pareizinātus ar vienu un to pašu skaitli.

Tiešām, pieskaitīsim, piemēram, determinanta  $\Delta$  pirmās kolonnas elementiem trešās kolonnas atbilstošos elementus, pareizinātus ar kādu skaitli  $k$ . Tad iegūsim šādu determinantu:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + ka_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Mēs redzam, ka determinanta pirmās kolonnas elementi ir divu saskaitāmo summa. No šejienes, pēc 6. īpašības,

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_{13} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{23} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Bet summas pirmais determinants ir  $\Delta$ , bet otrs ir vienāds ar nulli (saskaņā ar 5. īpašību, jo tam divas kolonnas ir proporcionālas). Tātad determinants  $\Delta'$  ir vienāds ar determinantu  $\Delta$ .

Piezīme. Izmantojot 7. īpašību var kādas kolonnas (rindas) visus elementus, izņemot vienu, padarīt vienādus ar nulli, pie kam determinanta vērtība neizmainās, kas ļauj vienkāršot determinantu aprēķināšanu.

### 3.4. Determinanta izvirzīšana pēc rindas (kolonnas) elementiem

Ja determinantam  $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$  izsvītrotu  $i$ -to rindu (turpmāk rak-

stīsim  $i$ -rindu) un  $j$ -to kolonnu ( $j$ -kolonnu), kuru krustpunktā atrodas elements  $a_{ij}$ , tad no atlikušajiem elementiem izveidojies otrās kārtas determinants, tiek saukts

par determinanta  $\Delta$  *minoru*, atbilstošu elementam  $a_{ij}$ . Apzīmēsim to  $M_{ij}$ . Tā, piemēram, detrinanta  $\Delta$  elementam  $a_{23}$  atbilstošais minors būs  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = M_{23}$ .

Par elementa  $a_{ij}$  *algebrisko papildinājumu* sauc tam atbilstošo minoru, ņemtu ar plus vai mīnus zīmi, atkarībā no tā, vai rindas un kolonnas numuru summa  $i + j$  ir pāru vai nepāru skaitlis. Elementa  $a_{ij}$  algebrisko papildinājumu apzīmē ar  $A_{ij}$ . Acīmredzami, ka  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ .

Tā, piemēram, elementa  $a_{32}$  algebriskais papildinājums būs

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

1. Teorēma. *Determinants ir vienāds ar summu, kuru veido jebkuras kolonnas (rindas) elementu reizinājums ar to algebriskajiem papildinājumiem*  
Piemēram,

$$\Delta = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}.$$

Pierādījumam izmantojam determinantu

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

$$\Delta = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{13} a_{21} a_{32} + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{31} a_{22} a_{13} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{33} a_{12} a_{21}.$$

Sagrupēsim šos saskaitāmos, apvienojot tos reizinājumus, kuri satur pirmās kolonnas vienu un to pašu elementu. Katrā grupā kopīgo reizinātāju iznesam prieks iekavām. Iegūsim šādu mūsu determinanta izteiksmi:

$$\Delta = a_{11}(a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) + a_{21}(a_{13} a_{32} - a_{33} a_{12}) + a_{31}(a_{12} a_{23} - a_{22} a_{13}).$$

Lielumi, kuri atrodas iekavās, ir elementu  $a_{11}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{31}$  algebriskie papildinājumi, tas ir

$$a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32} = A_{11};$$

$$a_{13} a_{32} - a_{33} a_{12} = A_{21};$$

$$a_{12} a_{23} - a_{22} a_{13} = A_{31},$$

tātad,

$$\Delta = a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31}.$$

Analoģiski  $\Delta = a_{21} A_{21} + a_{22} A_{22} + a_{23} A_{23}$ , jeb  $\Delta = a_{13} A_{13} + a_{23} A_{23} + a_{33} A_{33}$  utt.

Determinanta pieraksts pēc vienas no šīm formulām tiek saukts par determinanta izvirzījumu pēc atbilstošās rindas (kolonnas) elementiem.

Piemērs. Aprēķināt determinantu  $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ .

Aprēķināsim izvirzot pēc pirmās rindas  $\Delta = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$ .

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -13,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 12,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 10,$$

$$\Delta = 3 \cdot (-13) + 2 \cdot 12 + 2 \cdot 10 = 5.$$

**2. Teorēma.** Summa, kuru veido kādas kolonnas (rindas) elementu reizinājumi ar citas kolonnas (rindas) elementu algebriskiem papildinājumiem, ir vienāda ar nulli.

### 3.5. Augstāku kārtu determinanti

Pieņemsim, ka  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$  – 4. kārtas kvadrātiska matrica.

Analoģiski kā iepriekšējā punktā ar  $M_{ij}$  apzīmēsim determinantu (minoru), kuru iegūst no dotās matricas izsvītrojot  $i$ -rindu un  $j$ -kolonu. Pieņemam tālāk, ka

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

un nosaucam  $A_{ij}$  par elementa  $a_{ij}$  algebrisko papildinājumu. Var pierādīt, ka summa, kuru veido jebkuras fiksētas rindas (kolonnas) elementu reizinājumi ar to algebriskajiem papildinājumiem, ir viena un tā pati, t. i., nav atkarīga no rindas

vai kolonnas izvēles. Šī summa tiek saukta par dotās matricas  $A$  determinantu un apzīmēta šādi

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Piemērs. Aprēķināt determinantu

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Aprēķināsim izvirzot pēc 2. rindas

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{21} A_{21} + a_{22} A_{22} + a_{23} A_{23} + a_{24} A_{24} = \\ &= 0 \cdot A_{21} + 2 \cdot A_{22} + 3 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{24}. \end{aligned}$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6.$$

Pirmajā solī pirmo rindu reizinājām ar  $(-2)$  un pieskaitījām trešajai, kā rezultātā trešajā rindā parādījās nulles.

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 5.$$

Līdz ar to  $\Delta = 0 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 0 = 27$ .

Tādā veidā, 4. kārtas determinanta aprēķināšana reducējās uz 3. kārtas (kārtā par vienu zemāka) determinanta aprēķināšanu. Analogiski,  $n$ -tās kārtas determinanta aprēķināšana reducējās uz  $n - 1$  kārtas determinantu aprēķināšanu. Atzīmēsim, ka jebkuras kārtas determinantu var aprēķināt analogiski tam, kā tika darīts 72. lpp. Taču tas ir sarežģītāk, kā aprēķināšana, izvirzot pēc rindas (kolonnas).

$$\text{Determinantu } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{ kurš atbilst kvadratiskai matricai}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ apzīmēsim ar } |A|.$$

Atzīmēsim, ka visas īpašības, formulētas iepriekšējos punktos 3. kārtas determinantiem, attiecas arī uz jebkuras kārtas determinantiem.

Ja dota matrica  $A_{m,n}$ , tad par šīs matricas  $k$ -tās kārtas *minoru* ( $k \leq m$ ,  $k \leq n$ ) sauc jebkuru  $k$ -tās kārtas determinantu, kuru iegūst no šīs matricas izsvītrojot  $m-k$  rindas un  $n-k$  kolonnas. Piemēram, matricai

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & -5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \text{ gan } \begin{vmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix} \text{ ir tās 3. kārtas minoru.}$$

(Protams, ka tie nav visi matricas  $A$  minoru.)

### 3.6. Matricu saskaitīšana un reizināšana

Saskaitīt var tikai vienāda izmēra matricas. Saskaitot matricas, tiek saskaitīti elementi, kuri atrodas vienādās vietās.

Pieņemsim, ka  $A = \|a_{ij}\|$ ,  $B = \|b_{ij}\|$ . Tad

$$A + B = \|a_{ij}\| + \|b_{ij}\| = \|a_{ij} + b_{ij}\|.$$

Piemērs.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 6 & 8 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Matricu var reizināt ar skaitli. Pie kam katrs matricas elements tiek reizināts ar šo skaitli.

Piemērs.

$$6 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 24 & 6 \\ 12 & 30 & 36 \end{pmatrix}.$$

Ja matricas  $A$  kolonnu skaits ir vienāds ar matricas  $B$  rindu skaitu, tad var definēt matricu reizinājumu  $A \cdot B$ . Reizinājuma rezultāts ir matrica (apzīmēsim to  $C$ ), kuras elementus aprēķina pēc likuma:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}. \quad (3.1)$$

Piemērs.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Šeit  $c_{11} = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 0$ ;  $c_{21} = 4 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + (-5) \cdot 0 = -4$ .

Lai varētu lietot likumu (3.1), nepieciešams, lai elementu skaits matricas  $A$  rindā ( $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ ) būtu vienāds ar elementu skaitu matricas  $B$  kolonnā ( $b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj}$ ). Citiem vārdiem, nepieciešams, lai matricas  $A$  kolonnu skaits būtu vienāds ar matricas  $B$  rindu skaitu. Reizinājuma rezultātam – matricai  $C$  – ir tik rindu cik pirmajam reizinātājam, un tik kolonnu, cik to ir otrajam reizinātājam.

Dažas matricu reizinājuma īpašības

1. vispārējā gadījumā  $AB \neq BA$ . Piemēram,

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Vēl vairāk, var būt, ka matricu  $A$  var sareizināt ar matricu  $B$ , bet  $B$  ar  $A$  – nevar; piemēram, ja  $A$  – ( $m, n$ )-matrica, bet  $B$  – ( $n, l$ )-matrica un  $m \neq l$ .

Piemērs.

Pieņemsim, ka  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ . Tad  $A \cdot B = \begin{pmatrix} 16 & 14 & 28 \\ 32 & 41 & 66 \end{pmatrix}$ , bet

$B$  ar  $A$  sareizināt nevar.

2. Ja  $E$  –  $n$ -tās kārtas vienības matrica,  $A$  – ( $m \times n$ )-matrica, tad  $AE = A$ ; ja  $A$  – ( $n \times m$ )-matrica, tad  $EA = A$ .

3. Kvadrātisku matricu reizinājuma determinants ir vienāds ar atsevišķo determinantu reizinājumu:  $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ .

4.  $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ . Piemēram, pārbaudiet, ka

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}^T = (5 \ 6 \ -3) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

5. Atzīmēsim arī šādas svarīgas īpašības:

- a)  $A(BC) = (AB)C$ ;
- b)  $A(B + C) = AB + AC$ ;
- c)  $(A + B)C = AC + BC$ .

### 3.7. Apvērstā matrica

Matricu  $B$  sauc par matricas  $A$  *apvērsto* matricu, ja ir spēkā sakarības  $A \cdot B = B \cdot A = E$  ( $E$  – vienības matrica). Matricas  $A$  apvērsto matricu apzīmē ar  $A^{-1}$ .

1. **Teorēma.** *Lai matricai  $A$  eksistētu apvērstā, ir nepieciešami un pietiekami, lai tās determinants  $|A|$  nebūtu vienāds ar nulli.*

Teorēmas formulējumā mēs pirmo reizi sastapāties ar terminiem "nepieciešams" un "pietiekams". Tādēļ, pirms pierādīt teorēmu, izdarīsim atkāpi, veltītu jēdzieniem "nepieciešams" un "pietiekams".

Pieņemsim, ka  $A$  un  $B$  – kaut kādi apgalvojumi, piemēram: apgalvojums  $A$  – "nolija lietus", apgalvojums  $B$  – "uz asfalta parādījās peļķes". Skaidrs, ka no apgalvojuma  $A$  seko  $B$ . Šo faktu pieraksta šādi:  $A \Rightarrow B$  (saka, ka no  $A$  izriet  $B$ ). Vispārējā gadījumā, ja  $A \Rightarrow B$ , tad nosacījums  $A$  ir pietiekams nosacījumam  $B$ . Savukārt, šajā situācijā  $B$  ir nepieciešams nosacījumam  $A$ .

No tā, ka no  $A$  izriet  $B$  ( $A \Rightarrow B$ ), vēl neseko, ka no  $B$  izriet  $A$ . Piemēram, pieņemsim, ka  $A$  ir apgalvojums "vesels skaitlis beidzās ar 5", apgalvojums  $B$  – "skaitlis dalās ar 5". skaidrs, ka  $A \Rightarrow B$ , bet no  $B$  neizriet  $A$  (apzīmē  $B \not\Rightarrow A$ ); tiešām, skaitlis, kurš dalās ar 5, var beigties ne tikai ar 5, bet arī ar 0. Ja  $A \Rightarrow B$  un  $B \Rightarrow A$ , tad saka, ka  $A$  ir nepieciešams un pietiekams priekš  $B$  (jeb, ka  $B$  ir nepieciešams un pietiekams priekš  $A$ ). Pieraksta:  $A \Leftrightarrow B$ . Šajā gadījumā apgalvojumus  $A$  un  $B$  sauc par ekvivalentiem.

Atgriežamies pie noformulētās teorēmas: lai matricai  $A$  eksistētu apvērstā matrica, nepieciešami un pietiekami, lai  $|A| \neq 0$ . Šī teorēma dod apvērstās matricas eksistences nepieciešamo un pietiekamo nosacījumu. Pieņemsim, ka  $A$  ir apgalvojums "matricai  $A$  eksistē apvērstā",  $B$  – apgalvojums "matricas  $A$  determinants nav vienāds ar nulli ( $|A| \neq 0$ )". Ja  $A \Rightarrow B$ , tad  $B$  ir nepieciešamais noteikums apgalvojumam  $A$ . Tātad, apvērstās matricas eksistences nepieciešamais nosacījums skan šādi: ja matricai  $A$  eksistē apvērstā, tad  $|A| \neq 0$ .

Dots: matricai  $A$  eksistē apvērstā. Pierādīt:  $|A| \neq 0$ .

**Pierādījums.** Pēc apvērstās matricas definīcijas  $A \cdot A^{-1} = E$ . Saskaņā ar šo  $|A \cdot A^{-1}| = |E|$ . Vienības matricas determinants vienāds ar 1. To ir viegli pārbaudīt, tieši izrēķinot. No matricu reizinājumu 3. īpašības iegūstam  $|A \cdot A^{-1}| = |A| |A^{-1}|$ . Tādā veidā,  $|A| |A^{-1}| = 1$ . Tā kā determinantu reizinājums vienāds ar vienu, tad neviens no tiem nav vienāds ar nulli.

**Pietiekamība.** Ja  $B \Rightarrow A$ , tad  $B$  ir pietiekams apgalvojumam  $A$ . Tātad, apvērstās matricas eksistences pietiekamo nosacījumu var noformulēt šādi: ja  $|A| \neq 0$ , tad matricai eksistē apvērstā.

Tātad, dots:  $|A| \neq 0$ . Pierādīt: eksistē matricai  $A$  apvērstā matrica.

Dotā apgalvojuma pierādījums ir konstruktīvs, t. i. tiks izveidots algoritms (likums), kā atrast apvērsto matricu un tiks pārbaudīts, ka matrica, izveidota pēc šāda algoritma, tiešām ir matricas  $A$  apvērstā matrica.

Tāpat kā iepriekš, apzīmēsim ar  $A_{ij}$  matricas  $A$  elementa  $a_{ij}$  algebrisko papildinājumu.

Apvērstās matricas atrašanas algoritms ir šāds:

1) Tiek sastādīta matricas  $A$  elementu algebrisko papildinājumu matrica; apzīmēsim to  $A^*$ :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix};$$

2) Iegūtā matrica tiek transponēta, t. i. rindas un kolonnas tiek mainītas vietām:

$$A^{*T} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Matricu  $A^{*T}$  sauc par matricas  $A$  **piesaisīto** matricu.

3) Matricas  $A^{*T}$  katrs elements tiek izdalīts ar matricas  $A$  determinantu. (Pēc nosacījuma  $|A| \neq 0$ ). Iegūtā matrica

$$\frac{1}{|A|} A^{*T} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

ir matricas  $A$  apvērstā. Lai to pārbaudītu, pareizināsim to ar matricu  $A$ . Iegūstam

$$\frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \underbrace{\begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix}}_C$$

Tiešām,  $c_{11} = A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + \dots + A_{n1}a_{n1} = |A|$  (pēc p. 3.4 pirmās teorēmas, kā summa, kuru veido matricas  $A$  pirmās kolonnas elementu reizinājumi ar to algebriskiem papildinājumiem). Analogiski, visi pārējie galvenās diagonāles elementi ir vienādi ar  $|A|$ . No otras puses, visi pārējie matricas  $C$  elementi ir vienādi ar nulli, kā summas, kuras veido kādas kolonnas elementu reizinājumi ar citas kolonnas elementu algebriskiem papildinājumiem (p. 3.4 otrā teorēma).

Beidzot, ir acīm redzami, ka

$$\frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Tāpat pārbauda, ka  $A \cdot \frac{1}{|A|} A^{*T} = E$ . Tātad,  $\frac{1}{|A|} A^{*T}$  tiešām ir matricas  $A$

apvērstā matrica:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^{*T}. \quad (3.2)$$

Atzīmēsim dažas apvērstās matricas īpašības.

1. Ja dotajai matricai eksistē apvērstā, tad tā ir viena vienīga.

2. Ja matricai  $A$  eksistē apvērstā, tad arī transponētajai matricai  $A^T$  eksistē apvērstā, pie kam

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T. \quad (3.3)$$

Tiešām, tā kā  $(AB)^T = B^T A^T$ , tad  $A^T \cdot (A^{-1})^T = (A^{-1} A)^T = E^T = E$ .

Analogiski  $(A^{-1})^T \cdot A^T = E$ . Tātad,  $(A^{-1})^T$  ir matricas  $A^T$  apvērstā matrica,

t. i.  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ .

3.  $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ . Tiešām,  $A \cdot A^{-1} = E$ . Attiecīgi,  $|A \cdot A^{-1}| = |E| = 1$ . No šejienes  $|A| |A^{-1}| = 1$  un  $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ .

Piemērs. Aprēķināt matricai  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  apvērsto matricu.

Vispirms, lai aprēķinātu  $|A|$ , izvirzīsim determinantu pēc pirmās rindas.

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$|A| = 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 0 = -5 \neq 0.$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -9, \quad A_{22} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10,$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5.$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -9 & 3 & 10 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Beidzot

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^{*T} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} 1 & -9 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 10 & -5 \end{pmatrix}.$$

### 3.8. Piemēri par matricu pielietojumiem ekonomikā

Kā jau tika atzīmēts, lineārā algebra, tai skaitā matricu aparāts, ir atradusi būtiskus pielietojumus ekonomikā. Tā ir matricu izmantošana lineāru vienādojumu sistēmu risināšanā (par ko tiks stāstīts 5. nod.), tā ir arī pozitīvu matricu teorijas izmantošana. Matricu sauc par *pozitīvu* (apzīmē  $A > 0$ ), attiecīgi, *nenegatīvu* ( $A \geq 0$ ), ja visi tās elementi ir pozitīvi, attiecīgi – nenegatīvi. Nenegatīvu matricu izmantošanas piemērs tiks dots 6. nod. Beidzot, matricu izmantošana

daudzos gadījumos veicot aprēķinus ir vienkārši parocīga. Parādīsim šādas matricu izmantošanas piemēru.

Piemērs. Celtniecības materiālu ražošanas kompānija izlaiž četru veidu izstrādājumus:  $A_1, A_2, A_3, A_4$ . Tai ir trīs nodaļas. Tab. 3.1 norādīts, cik katra veida izstrādājumi ir izgatavoti katrā nodaļā pēdējā mēneša laikā.

Tab. 3.1

Nodaļas Nr.	Izstrādājuma veids			
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
1	200	300	250	500
2	300	200	400	600
3	450	500	800	1100

Katra izstrādājuma izgatavošanā tiek izmantots gan kvalificēts, gan nekvalificēts darbs. Kvalificēts darbs stundā izmaksā vidēji 20 dolārus, nekvalificēts – vidēji 8 dolārus stundā. Tab. 3.2 parādīts kvalificēta un nekvalificēta darba daudzums (stundās), nepieciešams katra veida izstrādājuma vienas vienības izgatavošanai.

Noteikt:

Tab. 3.2

- a) kvalificētā un nekvalificētā darba daudzumu, kurš patērēts katrā uzņēmumā pēdējā mēneša laikā;
- b) kopējo kvalificētā darba izmaksu un kopējo nekvalificētā darba izmaksu katrā uzņēmumā.

	Kvalific. darbs	Nekvalific. darbs
$A_1$	4	2
$A_2$	3	1
$A_3$	3	3
$A_4$	2	1

Atrisinājums. Apzīmēsim ar  $a_{ij}$   $j$  veida produkcijas daudzumu, izgatavotu  $i$ -uzņēmumā, bet ar  $b_{lk}$  – kvalificētā darba daudzumu (ja  $k = 1$ ) un nekvalificētā darba daudzumu (ja  $k = 2$ ), patērētu vienas vienības  $l$ -tā izstrādājuma izgatavošanai. Tad  $a_{i1}b_{11}$  ir kvalificētā darba daudzums, kurš patērēts izstrādājuma  $A_1$  izgatavošanai  $i$ -tajā uzņēmumā;  $a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + a_{i3}b_{31} + a_{i4}b_{41}$  ir kvalificētā darba daudzums, kurš patērēts  $i$ -tajā uzņēmumā visu izstrādājumu izgatavošanai. Analogiski nekvalificētam darbam. Tas nozīmē, ka, reizinot matricu

$$A = \begin{pmatrix} 200 & 300 & 250 & 500 \\ 300 & 200 & 400 & 600 \\ 450 & 500 & 800 & 1100 \end{pmatrix} \text{ ar } B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \\ 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ mēs iegūsim matricu, kura parāda}$$

kvalificēta (1. kolonna) un nekvalificēta (2. kolonna) darba daudzumu, kuru patērē katrā uzņēmumā:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 200 & 300 & 250 & 500 \\ 300 & 200 & 400 & 600 \\ 450 & 500 & 800 & 1100 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \\ 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3450 & 1950 \\ 4200 & 2600 \\ 7900 & 4900 \end{pmatrix}.$$

Apzīmēsim tagad ar  $C = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$  matricu, kurai galvenās diagonāles elementi parāda kvalificēta darba un nekvalificēta darba vienas stundas izmaksu. Tad matrica

$$(AB) \cdot C = \begin{pmatrix} 3450 & 1950 \\ 4200 & 2600 \\ 7900 & 4900 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69\,000 & 15\,600 \\ 84\,000 & 20\,800 \\ 158\,000 & 39\,200 \end{pmatrix}$$

kopējo kvalificēta (1. kolonna) un nekvalificēta (2. kolonna) darba izmaksu katrā uzņēmumā.

### Jautājumi pašpārbaudei

- Aprēķināt determinantu  $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 4 & 7 \end{vmatrix}$ . Vienkāršošanai izmantojiet 7. īpašību.
- Nosaučiet nosacījumu, pie kura iespējams sareizināt matricu  $A$  ar matricu  $B$ . Kāds ir rezultāta matricas izmērs?
- Kas ir apvērstā matrica?
- Nosaučiet apvērstās matricas eksistences nosacījumus.
- Parādiet apvērstās matricas aprēķināšanas algoritmu.

6. Sareiziniet matricas:  $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -7 \\ 3 & 1 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ .

7. Atrodiet apvērsto matricu:  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ .

## Vingrinājumi

Piemēros 1. – 5. aprēķināt determinanta vērtību:

$$1. \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}, \quad 2. \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -10 \end{vmatrix}, \quad 3. \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}, \quad 4. \begin{vmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ a & \sqrt{a} \end{vmatrix}, \quad 5. \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}.$$

Aprēķināt determinantus, izvirzot tos pēc: a) pirmās kolonnas elementiem;  
b) pēc otrās kolonnas elementiem.

$$6. \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad 7. \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ a & a & 1 \\ a & a & a \end{vmatrix}$$

Aprēķināt determinantus, izvirzot tos pēc tās rindas jeb kolonnas elementiem, kura satur visvairāk nulles:

$$8. \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}, \quad 9. \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 0 & -a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}$$

Piemēros 10. – 17. aprēķināt determinantus:

$$10. \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}, \quad 11. \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & -4 & 7 \end{vmatrix}, \quad 12. \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -4 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 8 \end{vmatrix}$$

$$13. \begin{vmatrix} -4 & 5 & 8 \\ 6 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 6 \end{vmatrix}, \quad 14. \begin{vmatrix} -6 & 4 & 2 \\ 3 & -5 & 11 \\ -4 & 2 & 0 \end{vmatrix}, \quad 15. \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -7 & 4 & 5 \\ -3 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$16. \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & -3 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}, \quad 17. \begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Aprēķināt 4. kārtas determinantus:

$$18. \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 6 \\ -8 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \end{vmatrix}, \quad 19. \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}, \quad 20. \begin{vmatrix} 4 & 3 & 8 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \\ 6 & 9 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & -4 \end{vmatrix}$$

$$21. \begin{vmatrix} 6 & 4 & -3 & -2 \\ -2 & 4 & 5 & 1 \\ -3 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 5 & 7 \end{vmatrix}, \quad 22. \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & -4 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 2 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Saskaitīt matricas  $A$  un  $B$ :

$$23. A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$24. A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -6 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

25. Piemēros 23, 24 matricām  $A, B$  atrast:

a)  $3A$ ; b)  $2A + B$ ; c)  $2B - 4A$ .

26. Atrast matricu  $X$  no šādiem vienādojumiem

$$\text{a) } 2A + X = 0; \quad \text{b) } 3A + 2X = E, \quad \text{kur } A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix};$$

$$\text{b) } 2A^T + X = B, \quad \text{kur } A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Sareizināt matricas, kuras dotas piemēros 27. – 33.:

$$27. \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad 28. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad 29. (1 \ 2 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$30. \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 2 \ 3); \quad 31. \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad 32. \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$33. \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 11 \\ 4 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

34. Ja iespējams, aprēķināt reizinājumus  $AB, AC, BC, BA, CA, CB$ :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 0 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Piemēros 35. – 42. atrast dotajām matricām apvērstās (ja tās eksistē):

$$35. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad 36. \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad 37. \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \quad 38. \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 10 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$39. \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}, \quad 40. \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ -2 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}, \quad 41. \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & -5 & 8 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad 42. \begin{pmatrix} -6 & 4 & 2 \\ -3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Piemēros 43. – 45. atrast matricu  $X$  no šādiem vienādojumiem:

$$43. AX + B = C, \text{ kur } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$44. X + A \cdot A^T = B, \text{ kur } A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$45. AX = A^T \cdot B, \text{ kur matricas } A \text{ un } B \text{ ir jāņem no 44. piemēra.}$$

46. Konfekšu izgatavošanai konditorejas fabrikā izmanto vairākus komponentus. Pieņemsim, ka fabrika izgatavo četrus veidus konfektes:  $A_1, A_2, A_3, A_4$ . Vienas t katra veida konfekšu izgatavošanai nepieciešamais komponentu daudzums pēc normatīviem ir redzams tab. 3.3.

Tab. 3.3

Izejviela	1 t konfekšu izgatavošanai patērētais izejvielu daudzums (t)			
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
Cukurs	0,2	0,4	0,3	0,3
Sīrups	0,3	–	0,2	0,2
Augļu biezenis	0,1	0,2	0,1	–
Kakao	0,4	0,4	0,4	0,5

Cik daudz katras izejvielas ir vajadzīgs, lai varētu izgatavot:  $A_1 - 6,2$  t;  $A_2 - 8$  t;  $A_3 - 10$  t;  $A_4 - 7$  t? (Izmantot matricu pierakstu.)

47. Firmai ir trīs nodaļas (pirmā Rīgā, otrā Jelgavā, trešā Daugavpilī), kuras ražo viena un tā paša sortimenta produkciju:  $A, B, C, D$ . Katras nodaļas nedēļas laikā saražotais produkcijas daudzums norādīts tab. 4.4.

Tab. 3.4

Nodaļas №	Produkcijas veids			
	$A$	$B$	$C$	$D$
1	14	35	20	11
2	10	40	30	14
3	20	10	30	12

Zināms, cik daudz izejvielu jāpatērē katra veida izstrādājuma vienas vienības izgatavošanai.

Tab. 3.5

Izejviela \ Produkcijas veids	Produkcijas veids			
	A	B	C	D
I	2	4	0	3
II	0	1	5	4
III	3	3	2	1

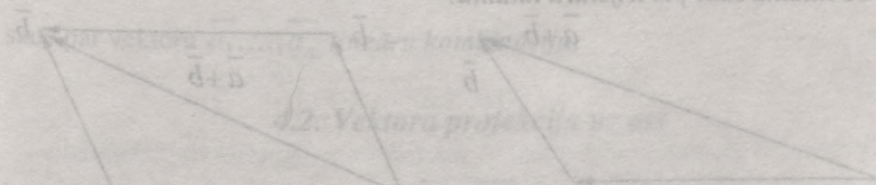
Izmantojot matricu pierakstu, noteikt, cik daudz katra veida izejvielu ir vajadzīgs katrai firmas nodaļai.

48. Uzņēmumam ir trīs veidu iekārtas: *A* veida – 6 vienības, *B* veida – 10 vienības, *C* veida – 8 vienības. Personāla skaits, kurš nepieciešams vienas vienības katra veida iekārtas apkalpošanai, norādīts tab. 3.6.

Tab. 3.6

Iekārtas veids	Viena iekārtas vienības apkalpošanai nepieciešamais personāla skaits		
	atslēdznieki	elektriķi	inženieri
<i>A</i>	3	1	1
<i>B</i>	4	2	1
<i>C</i>	2	2	–

Izmantojot matricu pierakstu, noteikt personāla sastāvu, kurš nepieciešams visu iekārtu apkalpošanai.



## 4. VEKTORU TELPAS

Ekonomikā bieži nākas strādāt ne ar atsevišķi paņemtiem skaitļiem, bet ar skaitļu komplektiem (rindām vai kolonnām). Piemēram,  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  – cenu komplekts tā saucamajam patērētāja groza precēm;  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – preču komplekts, kurš veido šo patērētāja grozu (šeit  $x_i$  – daudzums attiecīgajās vienībās tai precei, kurai piešķirts numurs  $i$ ), utt. Šādi skaitļu komplekti turpmāk tiks saukti par *n-dimensiju vektoriem*. Šajā nodaļā tiks apskatītas šādu vektoru kopas – *n-dimensiju vektoru telpas*, dažas to īpašības. Uzskatāmības dēļ mēs galveno uzmanību veltīsim gadījumiem  $n = 2$  un  $n = 3$ . Tādus vektorus (t. i. gadījumā, ja  $n = 2$  jeb  $n = 3$ ) sauc arī par ģeometriskiem.

### 4.1. Ģeometriskie vektori un lineārās darbības ar tiem

Par *vektoru* (ģeometrisku) sauc orientētu nogriezni, t. i. nogriezni, kuram ir norādīts sākums un beigas. Vektoru apzīmēsim vai ar simbolu  $\overline{AB}$ , kur  $A$  un  $B$  – attiecīgi dotā vektora sākuma un beigu punkti, vai ar vienu latīņu burtu, piemēram  $\overline{a}$  vai  $\overline{b}$ .

Vektoru sauc par *nulles*, ja sakrīt tā sākuma un beigu punkti. Vektorus sauc par *kolineāriem*, ja tie atrodas vai nu uz vienas taisnes, vai uz paralēlām taisnēm.

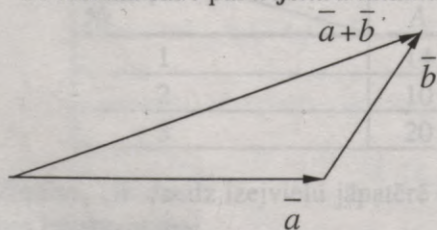
Divus vektorus sauc par *vienādiem*, ja tie ir kolineāri, tiem ir vienādi garumi un tie ir vienādi vērsti.

Lineārās darbības – vektoru saskaitīšana un vektora reizinājums ar skaitli.

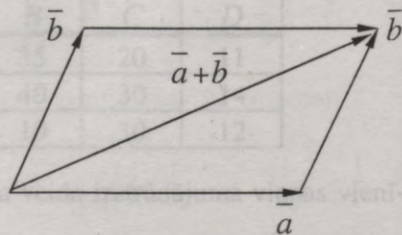
Vispirms definēsim divu vektoru *saskaitīšanu*.

Par divu vektoru  $\overline{a}$  un  $\overline{b}$  summu sauc vektoru  $\overline{a} + \overline{b}$ , kurš iet no vektora  $\overline{a}$  sākuma uz vektora  $\overline{b}$  beigām, pie noteikuma, ka vektora  $\overline{b}$  sākuma punkts sakrīt ar vektora  $\overline{a}$  beigu punktu.

Šo likumu sauc par *trijstūra likumu*.



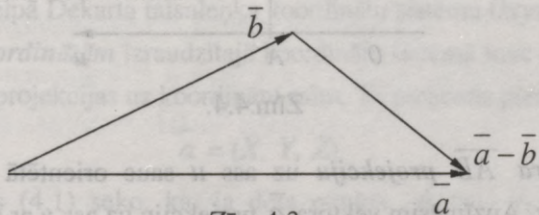
Zīm.4.1.



Zīm.4.2.

Atzīmēsim vēl vienu vektoru saskaitīšanas likumu – *paralelograma likumu*: ja vektori  $\vec{a}$  un  $\vec{b}$  ir pārcelti uz kopīgu sākuma punktu un uz šiem vektoriem ir izveidots paralelograms, tad to summa  $\vec{a} + \vec{b}$  ir šā paralelograma diagonāle, kura vilkta no kopējā sākuma punkta.

Par vektora  $\vec{a}$  un vektora  $\vec{b}$  *starpību* sauc tādu vektoru  $\vec{c}$ , kurš, saskaitīts ar vektoru  $\vec{b}$ , summā dod vektoru  $\vec{a}$ .



Zīm.4.3.

Par vektora  $\vec{a}$  *reizinājumu* ar skaitli (skalāru)  $\alpha$ , sauc vektoru  $\alpha\vec{a}$ , kurš ir kolineārs vektoram  $\vec{a}$ , kura garums ir  $|\alpha| \cdot |\vec{a}|$ , virziens sakrīt ar vektora  $\vec{a}$  virzienu, ja  $\alpha > 0$  un virziens ir pretējs vektora  $\vec{a}$  virzienam, ja  $\alpha < 0$ . Vektoru saskaitīšanas un vektora reizinājuma ar skaitli darbībām piemīt šādas īpašības:

- 1)  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ ;
- 2)  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ ;
- 3)  $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ ;
- 4)  $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ ;
- 5)  $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$ .

Atzīmēsim, ka, ja vektori  $\vec{a}$  un  $\vec{b}$  ir kolineāri, tad eksistē tāds *reāls skaitlis*  $\lambda$ , ka  $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ .

Ja doti vektori  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  un skaitļi  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , tad vektoru

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_n\vec{a}_n$$

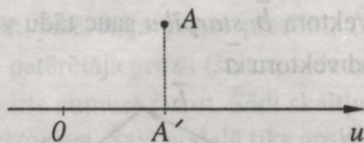
sauc par vektoru  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$  *lineāru kombināciju*.

## 4.2. Vektora projekcija uz ass

Pieņemsim, ka ir dots vektors  $\vec{a} = \overline{AB}$  un ass  $u$ . Novilksim no punktiem  $A$  un  $B$  perpendikulus pret asi  $u$  un apzīmēsim šo perpendikulu pamatus ar  $A'$  un  $B'$  attiecīgi (zīm. 4.5).

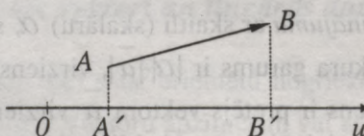
Par orientēta nogriežņa vērtību uz ass  $u$  sauc šī nogriežņa garumu, ņemtu ar plus zīmi, ja ass un nogriežņa virzieni sakrīt, un ņemtu ar mīnus zīmi, ja šie virzieni ir pretēji.

*Punkta A koordināta* uz ass  $u$  orientētā nogriežņa  $OA'$  vērtība.



Zīm.4.4.

Par vektora  $\overline{AB}$  projekciju uz ass  $u$  sauc orientētā nogriežņa  $\overline{A'B'}$  vērtību uz ass  $u$ . Apzīmēsim vektora  $\overline{a}$  projekciju uz ass  $u$  ar simbolu  $pr_u \overline{a}$ .

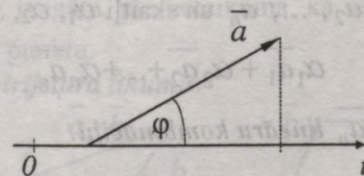


Zīm.4.5.

Apzīmēsim orientētā nogriežņa  $\overline{A'B'}$  vērtību ar  $A'B'$ . Atzīmēsim, ka,  $OA' + A'B' = OB'$ ; no šejienes  $A'B' = OB' - OA'$ . Tas nozīmē, ka vektora  $\overline{AB}$  projekcija uz ass ir vienāda ar starpību starp punktu  $B$  un  $A$  koordinātām uz ass. Ja apzīmēsim ar  $u_2$  punkta  $B$  koordinātu un ar  $u_1$  punkta  $A$  koordinātu, tad

$$pr_u \overline{AB} = u_2 - u_1. \quad (4.1)$$

Vektora  $\overline{a}$  projekcija uz ass  $u$  ir vienāda ar vektora  $\overline{a}$  garumu, reizinātu ar kosinusu  $\varphi$  leņķim, kuru veido vektors  $\overline{a}$  ar asi  $u$ .



Zīm. 4.6.

Vektora  $\overline{a}$  garumu sauksim par tā **moduli** un apzīmēsim  $|\overline{a}|$ . Tādējādi,

$$pr_u \overline{a} = |\overline{a}| \cos \varphi.$$

Vektora projekcijas uz ass īpašības: saskaitot divus vektorus, to projekcijas uz patvaļīgas ass  $u$  summējās. Reizinot vektoru ar skaitli, vektora projekcija uz patvaļīgas ass arī reizinās ar šo skaitli.

### 4.3. Vektoru koordinātas un komponentes

Izvēlamies telpā Dekarta taisnleņķa koordinātu sistēmu  $Oxyz$  un vektoru  $\vec{a}$ . Par vektora  $\vec{a}$  koordinātām izraudzītajā koordinātu sistēmā sauc skaitļus  $X, Y, Z$ , kuri ir vektora  $\vec{a}$  projekcijas uz koordinātu asīm. To pieņemts pierakstīt šādi:

$$\vec{a} = (X, Y, Z).$$

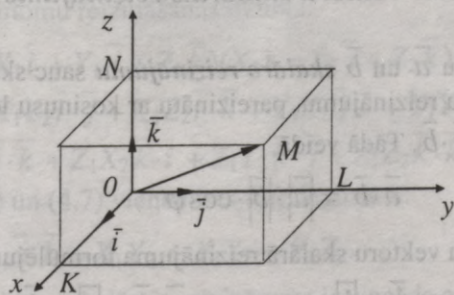
No formulas (4.1) seko, ka, ja dots punkts  $A(x_1, y_1, z_1)$  un punkts  $B(x_2, y_2, z_2)$ , tad vektora  $\vec{AB}$  koordinātas ir

$$X = x_2 - x_1; \quad Y = y_2 - y_1; \quad Z = z_2 - z_1. \quad (4.2)$$

No vektora projekcijas uz ass īpašībām (sk. p.4.2) izriet, ka vektoru summas koordinātas ir vienādas ar atbilstošo koordinātu summu un reizinot vektoru ar skaitli, tā koordinātas reizinās ar šo skaitli.

Vektoru izvirkājums pa ortiem. Apskatām trīs vektorus  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , kuri sākas koordinātu sākuma punktā  $O$ , to moduli ir vieni (  $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$  ) un to virzieni sakrīt attiecīgi ar asu  $Ox, Oy$  un  $Oz$  virzieniem. Šādus vektorus saucim par koordinātu ortiem.

Ņemam vektoru  $\vec{a} = (X, Y, Z)$ . Tad (zīm. 4.7)



Zīm.4.7.

$$\vec{a} = \vec{OM} = \vec{OK} + \vec{OL} + \vec{ON}.$$

Tā kā vektori  $\overline{OK}$  un  $\bar{i}$  kolineāri, tad  $\overline{OK} = \alpha \bar{i}$ , bet tā kā punkts  $K$  ir punkta  $M$  projekcija uz  $Ox$  ass, tad  $\alpha = X$ .

Tādēļ  $\overline{OK} = X \bar{i}$ . Analogiski  $\overline{OL} = Y \bar{j}$ ,  $\overline{ON} = Z \bar{k}$ ; tādējādi,

$$\bar{a} = X \bar{i} + Y \bar{j} + Z \bar{k}, \quad (4.3)$$

kur  $X, Y, Z$  – vektora  $\bar{a}$  koordinātas.

Vektorus  $X \bar{i}, Y \bar{j}, Z \bar{k}$  sauc par vektora  $\bar{a}$  *komponentēm*. Vektora  $\bar{a}$  attēlojumu kā komponentu summu sauc par *vektora  $\bar{a}$  izvirzījumu pa ortiem  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$* .

Piezīme. Tā kā  $OM^2 = OK^2 + OL^2 + ON^2$ , tas ir  $|a|^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$ , tad

$$|\bar{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \quad (4.4)$$

Piemērs. Atrast vektoru  $\overline{AB}$  un tā garumu, ja zināmas koordinātas punktiem  $A(7, -2, 3); B(9, -4, 2)$ .

Atrisinājums. No formulām (4.2) iegūstam, ka vektoram  $\overline{AB}$  koordinātas ir:  $X = 9 - 7 = 2; Y = -4 + 2 = -2; Z = 2 - 3 = -1$ .

Tātad,  $\overline{AB} = (2; -2; -1)$ .

No formulas (4.4)  $|\overline{AB}| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 3$ .

Atbilde.  $\overline{AB} = (2; -2; -1)$ .  $|\overline{AB}| = 3$ .

#### 4.4. Vektoru skalārais reizinājums

Par divu vektoru  $\bar{a}$  un  $\bar{b}$  *skalāro reizinājumu* sauc skaitli, kurš ir vienāds ar šo vektoru garumu reizinājumu, pareizinātu ar kosinusu leņķim starp tiem; to apzīmē ar simbolu  $\bar{a} \cdot \bar{b}$ . Tādā veidā,

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos \varphi. \quad (4.5)$$

Dosim citu divu vektoru skalārā reizinājuma formulējumu. Tā kā

$$\text{pr}_a \bar{b} = |\bar{b}| \cdot \cos \varphi, \text{ to } \bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \text{pr}_a \bar{b}.$$

Ja samainām vietām vektorus  $\bar{a}$  un  $\bar{b}$ , tad skalāram reizinājumam iegūstam citu izteiksmi:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{b}| \text{pr}_b \bar{a}.$$

Skalāram reizinājumam piemīt šādas īpašības. Tās acīmredzami izriet no definīcijas:

$$1) \bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a};$$

$$2) \bar{a}^2 = \bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}|^2 \geq 0, \text{ pie kam } \bar{a} \cdot \bar{a} = 0 \text{ nozīmē, ka } \bar{a} = 0;$$

$$3) (\alpha \bar{a}) \cdot \bar{b} = \alpha \cdot (\bar{a} \cdot \bar{b});$$

$$4) (\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c};$$

5) vektoru  $\bar{a}$  un  $\bar{b}$  skalārais reizinājums vienāds ar nulli tad un tikai tad, ja vektori ir perpendikulāri jeb viens no vektoriem ir nulles vektors.

#### 4.5. Skalārā reizinājuma izteikšana ar reizinātāju koordinātām

Vispirms apskatīsim jautājumu par ortu skalārajiem reizinājumiem.

$$\bar{i} \cdot \bar{i} = (\bar{i})^2 = |\bar{i}|^2 = 1; \quad \bar{j} \cdot \bar{j} = 1; \quad \bar{k} \cdot \bar{k} = 1. \quad (4.6)$$

Tā kā orti,  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$ ,  $\bar{k}$  ir savstarpēji perpendikulāri, tad

$$\bar{i} \cdot \bar{j} = 0; \quad \bar{j} \cdot \bar{k} = 0; \quad \bar{k} \cdot \bar{i} = 0. \quad (4.7)$$

Izvēlēsimies tagad divus vektorus

$$\bar{a} = X_1 \bar{i} + Y_1 \bar{j} + Z_1 \bar{k}; \quad \bar{b} = X_2 \bar{i} + Y_2 \bar{j} + Z_2 \bar{k} \quad (4.8)$$

un tos skalāri sareizināsim. Skalārā reizinājuma 1., 2., 4. īpašības ļauj reizināt labās puses pēc polinomu reizināšanas likuma:

$$\begin{aligned} \bar{a} \cdot \bar{b} &= (X_1 \bar{i} + Y_1 \bar{j} + Z_1 \bar{k})(X_2 \bar{i} + Y_2 \bar{j} + Z_2 \bar{k}) = \\ &= X_1 X_2 \bar{i} \cdot \bar{i} + X_1 Y_2 \bar{i} \cdot \bar{j} + X_1 Z_2 \bar{i} \cdot \bar{k} + Y_1 X_2 \bar{j} \cdot \bar{i} + Y_1 Y_2 \bar{j} \cdot \bar{j} + \\ &\quad + Y_1 Z_2 \bar{j} \cdot \bar{k} + Z_1 X_2 \bar{k} \cdot \bar{i} + Z_1 Y_2 \bar{k} \cdot \bar{j} + Z_1 Z_2 \bar{k} \cdot \bar{k}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Ievietojot (4.6) un (4.7) vienādībā (4.9), iegūstam:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2. \quad (4.10)$$

Tātad, divu vektoru skalārais reizinājums ir vienāds ar šo vektoru attiecīgo koordinātu savstarpējo reizinājumu summu.

Ar skalārā reizinājuma palīdzību var atrast leņķi, kuru veido divi no nulles atšķirīgi vektori  $\bar{a} = (X_1, Y_1, Z_1)$  un  $\bar{b} = (X_2, Y_2, Z_2)$ . Tiešām,

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos \varphi.$$

No šejienes

$$\cos \varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}. \quad (4.11)$$

Izmantojot formulas (4.11), (4.10) un (4.4), iegūstam izteiksmi lielumam  $\cos \varphi$ , izteiktu ar vektoru  $\bar{a}$  un  $\bar{b}$  koordinātēm:

$$\cos \varphi = \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \cdot \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}. \quad (4.12)$$

Atrādīsim vektora  $\bar{b} = (X_2, Y_2, Z_2)$  projekciju uz vektora  $\bar{a} = (X_1, Y_1, Z_1)$ .  $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \text{pr}_{\bar{a}} \bar{b}$ .

No šejienes

$$\text{pr}_{\bar{a}} \bar{b} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}|},$$

jeb

$$\text{pr}_{\bar{a}} \bar{b} = \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}}. \quad (4.13)$$

Piemērs.

Dotas trijstūra virsotnes  $A(0, -1, 5)$ ,  $B(-3, -1, 1)$ ,  $C(4, -1, 2)$ .  
Atrast  $\angle ABC = \beta$ .

Izmantojam formulu (4.11)

$$\cos \beta = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{|\overline{BA}| \cdot |\overline{BC}|}.$$

$$\overline{BA} = (3, 0, 4). \quad \overline{BC} = (7, 0, 1).$$

$$|\overline{BA}| = \sqrt{9 + 16} = 5. \quad |\overline{BC}| = \sqrt{49 + 1} = 5\sqrt{2}.$$

$$\overline{BA} \cdot \overline{BC} = 3 \cdot 7 + 0 + 4 \cdot 1 = 25.$$

Tādēļ  $\cos \beta = \frac{25}{5 \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Līdz ar to,  $\beta = \frac{\pi}{4}$ .

Atbilde.  $\angle ABC = \frac{\pi}{4}$ .

#### 4.6. $n$ -dimensiju vektori

Apakšpunktos 4.1–4.5 apskatītie ģeometriskie vektori ir jēdziena  $n$ -dimensiju vektors speciālgadījumi. Par  $n$ -dimensiju vektoru sauc sakārtotu  $n$  skaitļu virkni

$$\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Skaitļus  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sauc par par šī vektora koordinātām.

Ģeometriskais vektors plaknē  $a = (a_1, a_2)$  ir 2-dimensiju vektors, bet ģeometriskais vektors telpā  $a = (a_1, a_2, a_3)$  – 3-dimensiju vektors.

Apskatīsim piemēru no ekonomikas.

Pieņemsim, ka ir  $n$  dažādas preces (varētu būt, piemēram, preces, kuras veido tā saucamo patērētāju grozu),  $p_1$  – 1. preces cena,  $p_2$  – 2. preces cena, ...,  $p_n$  –  $n$ -tās preces cena. Tad  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  – cenu  $n$ -dimensiju vektors. Ja  $x_1$  – 1. preces daudzums,  $x_2$  – 2. preces daudzums, ...,  $x_n$  –  $n$ -tās preces daudzums, tad  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  ir preču vektors.

Analoģiski tam, kā tika darīts p. 4.1, tiek definēta  $n$ -dimensiju vektoru  $\bar{a}$  un  $\bar{b}$  summa un vektora  $\bar{a}$  reizinājums ar skaitli  $\alpha$ . Pieņemsim, ka  $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  –  $n$ -dimensiju vektori un  $\alpha$  – skaitlis. Tad

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

un

$$\alpha \cdot \bar{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n).$$

Par **nulles** sauc vektoru, kuram visas koordinātas ir vienādas ar nulli. Apzīmē  $\bar{0}$ .

Vektoru saskaitīšanai un vektora reizinājumam ar skaitli piemīt šādas galvenās īpašības:

1)  $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ ;

2)  $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ ;

3)  $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$ ;

4)  $\alpha(\bar{a} + \bar{b}) = \alpha\bar{a} + \alpha\bar{b}$ ;

5)  $(\alpha + \beta)\bar{a} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{a}$ ;

6)  $\alpha(\beta\bar{a}) = (\alpha\beta)\bar{a}$ .

Šīs īpašības ir pietiekoši acīmredzamas un to pārbaude tiek atstāta lasītājam.

2-dimensiju un 3-dimensiju vektoriem vienlaikus ar lineārām darbībām tika ieviesta skalārā reizinājuma operācija (sk. p. 4.4), kura katram vektoru pārim  $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$  un  $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$  piekārto skaitli  $\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ . Analogiski arī  $n$ -dimensiju vektoriem var ieviest šādu operāciju: ja  $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ , tad  $\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$  sauc par skalāro reizinājumu. Tam piemīt tādas pašas īpašības kā p. 4.4 (sk. īpašības 1–4) ieviestajam skalārajam reizinājumam.

$n$ -dimensiju vektoru skalārā reizinājuma jēdziens tiek plaši izmantots ekonomiskos pielietojumos. Piemēram, ja  $x$  ir preču vektors,  $p$  – cenu vektors, tad  $x \cdot p = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$  ir preču komplekta  $x$  vērtība.

#### 4.7. Vektoru lineārā atkarība

Pieņemsim, ka doti vektori  $\bar{a}, \bar{b}, \dots, \bar{f}$ . Par to *lineāru kombināciju* sauc vektoru

$$\alpha \bar{a} + \beta \bar{b} + \dots + \delta \bar{f},$$

kur  $\alpha, \beta, \dots, \delta$  – kaut kādi skaitļi. Vektorus  $\bar{a}, \bar{b}, \dots, \bar{f}$  sauc par *lineāri atkarīgiem*, ja eksistē šo vektoru lineāra kombinācija, vienāda ar nulles vektoru un ne visi šīs kombinācijas koeficienti ir vienādi ar nulli. Ja minēto vektoru lineāra kombinācija ir vienāda ar nulli tikai tad, ja visi koeficienti ir vienādi ar nulli, tad vektorus sauc par *lineāri neatkarīgiem*.

Piemēram, jebkuri divi nekolineāri 2- jeb 3-dimensiju (ģeometriskie) vektori ir lineāri neatkarīgi. Tiešām, ja  $\bar{a}$  un  $\bar{b}$  – lineāri atkarīgi, tad, saskaņā ar definīciju, eksistē tādi skaitļi  $\alpha$  un  $\beta$ , vismaz viens ir atšķirīgs no nulles (pieņemsim, ka tas ir  $\alpha$ ), ka  $\alpha \bar{a} + \beta \bar{b} = 0$ . Tad  $\bar{a} = -\frac{\beta}{\alpha} \bar{b}$ ; tas nozīmē, ka šie vektori ir kolineāri.

1. Teorēma. *Lai vektori  $\bar{a}, \bar{b}, \dots, \bar{f}$  būtu lineāri atkarīgi, ir nepieciešami un pietiekami, lai vismaz viens no vektoriem būtu izsakāms kā pārējo vektoru lineāra kombinācija.*

Pierādījums. Atgādināsim, ka, ja no apgalvojuma  $A$  izriet  $B$  ( $A \Rightarrow B$ ), tad  $A$  ir pietiekams apgalvojumam  $B$ , bet  $B$  – nepieciešams apgalvojumam  $A$ . Šajā gadījumā pieņemsim, ka  $A$  ir apgalvojums "vektori lineāri atkarīgi",  $B$  – apgalvojums "viens no vektoriem ir pārējo lineāra kombinācija".

Pietiekamība.  $B \Rightarrow A$ . Dots:  $B$  – viens no vektoriem, piemēram  $\vec{a}$ , ir pārējo lineāra kombinācija:  $\vec{a} = \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + \dots + \delta\vec{f}$ . Tad  $-\vec{a} + \beta\vec{b} + \dots + \delta\vec{f} = 0$ . Pēc definīcijas tas nozīmē, ka vektori ir lineāri atkarīgi.

Nepieciešamība. Pieņemsim, ka notiek apgalvojums  $A$  – vektori lineāri atkarīgi. Tātad,

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \dots + \delta\vec{f} = 0,$$

pie kam vismaz viens no koeficientiem, piemēram  $\alpha$ , nav vienāds ar nulli. Tad

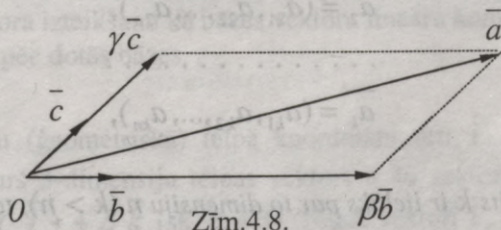
$$\vec{a} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{b} - \dots - \frac{\delta}{\alpha}\vec{f},$$

viens no vektoriem ir pārējo lineāra kombinācija.

Izmantojot šo teorēmu, pierādīsim šādu

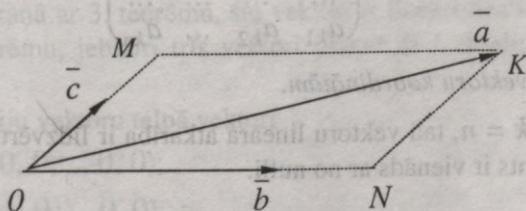
2. Teorēmu. Lai trīs ģeometriskie vektori būtu lineāri atkarīgi, ir nepieciešams un pietiekams, lai tie atrastos vienā plaknē.

Tiešām, ja vektori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  lineāri atkarīgi, tad, piemēram,  $\vec{a} = \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ .



Skaidrs, ka tie atrodas vienā plaknē.

No otras puses, pieņemsim, ka vektori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  atrodas vienā plaknē. Attēlosim tos izejošus no viena punkta  $O$ . No vektora  $\vec{a}$  virsotnes novelkam taisnes, paralēlas vektoriem  $\vec{b}$  un  $\vec{c}$ . Iegūsim paralelogramu  $OMKN$ .



Tā kā pie kaut kādām  $\gamma$  un  $\beta$  vērtībām  $\overline{OM} = \gamma\overline{c}$ , un  $\overline{ON} = \beta\overline{b}$ , tad  $\overline{a} = \gamma\overline{c} + \beta\overline{b}$ , tas ir vektori  $\overline{a}$ ,  $\overline{b}$ ,  $\overline{c}$  ir lineāri atkarīgi.

Sekas. Jebkuri trīs vektori, kuri neatrodas vienā plaknē, ir lineāri neatkarīgi.

3. Teorēma. *Lai divi ģeometriski vektori  $\overline{a}$  un  $\overline{b}$  būtu lineāri atkarīgi, ir nepieciešami un pietiekami, lai tie būtu kolineāri.*

Pierādījums. Saskaņā ar 1. teorēmu, vektoru  $\overline{a}$  un  $\overline{b}$  lineārā atkarība ir ekvivalenta tam, ka viens no vektoriem ir vienāds ar otru, pareizinātu ar kādu konstantu koeficientu:  $\overline{a} = \alpha\overline{b}$ . Pēdējā sakarība ir līdzvērtīga doto vektoru paralelībai.

Sekas. Ja divi vektori nav kolineāri, tad tie ir lineāri neatkarīgi.

Vektoru lineārās atkarības pārbaudei vispārīgā gadījumā ir ērta šāda teorēma.

4. Teorēma. *Pieņemsim, ka doti  $k$   $n$ -dimensiju vektori:*

$$\overline{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}),$$

$$\overline{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}),$$

$$\dots$$

$$\overline{a}_k = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}),$$

tad

- 1) ja vektoru skaits  $k$  ir lielāks par to dimensiju  $n$  ( $k > n$ ), tad vektori ir lineāri atkarīgi;
- 2) ja ( $k \leq n$ ), tad vektoru lineārā neatkarība ir līdzvērtīga tam, ka eksistē vismaz viens no nulles atšķirīgs  $k$ -tās kārtas minors matricai,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix},$$

sastādītai no šo vektoru koordinātām.

Sekas. Ja  $k = n$ , tad vektoru lineārā atkarība ir līdzvērtīga tam, ka matricas  $A$  determinants ir vienāds ar no nulli.

Piemēri.

1. Vektori  $\overline{a} = (4, 5)$ ;  $\overline{b} = (3, 1)$ ;  $\overline{c} = (6, 1)$  – lineāri atkarīgi, jo to skaits ir lielāks par to dimensiju.

2. Vektori  $\vec{a} = (1, 3, 0)$ ;  $\vec{b} = (2, 1, 1)$ ;  $\vec{c} = (4, 2, 3)$  – lineāri neatkarīgi, jo matricas  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  determinants nav vienāds ar nulli (sk. piemēru 85. lpp).

#### 4.8. *n*-dimensiju vektori un Eiklīda telpas

Par *n*-dimensiju vektoru telpu sauc visu *n*-dimensiju vektoru kopu, apskatītu kopā ar vektoru saskaitīšanas operāciju un vektoru reizinājumu ar skaitli. Piemēram, visu plaknes vektoru kopa (2-dimensiju vektori) ir 2-dimensiju vektoru telpa.

Par *n*-dimensiju vektoru telpas *bāzi* sauc jebkuru *n* lineāri neatkarīgu vektoru sistēmu. Tā kā jebkura vektora pievienošana bāzei pārvērš to par lineāri atkarīgu (vektoru skaits kļūst lielāks par to dimensiju, sk. 4. teorēmu no p. 4.7), tad var teikt, ka bāze – dotās telpas maksimālā lineāri neatkarīgu vektoru sistēma. Beidzot, svarīgi atzīmēt, ka, lai gan paši bāzes elementi ir lineāri neatkarīgi, jebkurš telpas vektors no tiem ir lineāri atkarīgs, jo ir to lineāra kombinācija.

Patvaļīgu vektora izteikšanu kā bāzes vektoru lineāru kombināciju sauc par vektora izvirzīšanu pēc dotās bāzes.

Piemēri.

1) 3-dimensiju (ģeometriskā) telpā koordinātu orti  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  ir lineāri neatkarīgi un jebkurš 3-dimensiju telpas vektors ir šo vektoru lineāra kombinācija:  $\vec{a} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$  (sk. p. 4.3). Tātad, vektori  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  veido bāzi. Tā kā  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ , tad vektori  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  ir 3-dimensiju telpas bāze.

Jāatzīmē, ka telpā ir bezgalīgi daudz dažādu bāzu, jebkuri trīs vektori, kuri neatrodas vienā plaknē, veido bāzi.

2) Divdimensiju telpā jebkuru nekolineāru vektoru pāris veido bāzi. No vienas puses, saskaņā ar 3. teorēmu, šie vektori ir lineāri neatkarīgi, no otras – saskaņā ar 2. teorēmu, jebkuri trīs vektori plaknē (t. i. divdimensiju telpā) ir lineāri atkarīgi.

3) *n*-dimensiju vektoru telpā vektori

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0, 0);$$

$$\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, 0);$$

$$\dots$$

$$\vec{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 0, 1)$$

arī veido bāzi. Vispirms, matrica, izveidota no šo vektoru koordinātām, ir vienības matrica, un tās determinants nav vienāds ar nulli; tātad, saskaņā ar iepriekšējā punkta teorēmu, šie vektori ir lineāri neatkarīgi. Bez tam, jebkurš,  $n$ -dimensiju vektors  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  ir šo vektoru lineāra kombinācija: 
$$\vec{a} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n.$$

4) Vektori  $\vec{a} = (2, 3, 5)$ ,  $\vec{b} = (4, 1, 1)$  neveido 3-dimensiju telpas bāzi, jo to skaits (2) nav vienāds ar vektoru dimensiju.

Vektoru telpu, kurā ievests skalārais reizinājums, sauc par *Eiklīda telpu*.

### Jautājumi pašpārbaudei

1. Ko sauc par vektoru?
2. Definēt vektora projekciju uz ass. Kas ir vektora koordinātas?
3. Kā definē vektoru summu un vektora reizinājumu ar skaitli?
4. Definēt vektoru skalāro reizinājumu. Kā tas tiek izteikts ar reizinātāju koordinātām?
5. Ko sauc par  $n$ -dimensiju telpu? Kāda ir tās bāzes loma?

### Vingrinājumi

1. Aprēķināt vektora  $\vec{a} = (1, 2, 2)$  moduli.
2. Dots divas vektora  $\vec{a}$  koordinātas:  $X = 6$ ,  $Y = -2$ . Noteikt vektora trešo koordinātu  $Z$  pie nosacījuma, ka  $|\vec{a}| = 7$ .
3. Dots punkti  $A(5, -2, 2)$  un  $B(-4, 2, 4)$ . Noteikt vektoru  $\vec{AB}$  un  $\vec{BA}$  koordinātas.
4. Noteikt vektora  $|\vec{a}| = (5, -4, 4)$  galapunktu, ja tā sākums ir punktā  $A(8, 2, -8)$ .
5. Noteikt vektora sākumu  $\vec{a} = (8, -8, -1)$ , ja tā galapunkts sakrīt ar punktu  $(4, -4, 2)$ .
6. Dots vektora modulis  $|\vec{a}| = 6$ . Aprēķināt vektora  $\vec{a}$  projekcijas uz koordinātu asīm, ja zināmi leņķi  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$ ,  $\gamma = 120^\circ$ , kurus vektors veido ar koordinātu asīm.
7. Vektori  $\vec{a} = (-2, 5, \gamma)$  un  $\vec{b} = (4, \beta, 1)$  kolineāri. Atrast šos vektorus.

8. Doti četri punkti:  $A(3, -1, 2)$ ,  $B(1, 2, -1)$ ,  $C(-1, 1, -3)$ ,  $D(3, -5, 3)$ .  
Pierādīt, ka  $ABCD$  – trapece.
9. Noteikt leņķi starp vektoriem  $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$  un  $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ .
10. Noteikt leņķi starp koordinātu plakņu  $xOy$  un  $yOz$  bisektrisēm.
11. Aprēķināt:
- a)  $|\vec{m} + \vec{n}|$ , ja  $\vec{m}$  un  $\vec{n}$  – vienības vektori, leņķis starp kuriem ir  $30^\circ$ .
- b)  $|\vec{a} - \vec{b}|$ , ja  $|\vec{a}| = 22$ ,  $|\vec{b}| = 4$  un  $(\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$ .
12. Dotas trijstūra virsotnes  $A(-4, 8, 1)$ ,  $B(-1, 2, 0)$  un  $C(5, -2, 4)$ . Noteikt iekšējo leņķi pie virsotnes  $B$ .
13. Vektors  $\vec{b}$  paralēls vektoram  $\vec{a} = (6, 4, -3)$  un apmierina nosacījumu  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 21$ . Atrast vektoru  $\vec{b}$ .
14. Doti vektori  $\vec{a} = (6, 4, -3)$  un  $\vec{b} = (2, -1, -2)$ . Atrast  $\text{pr}_{\vec{b}} \vec{a}$ .
15. Doti trīs vektori:  $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$  un  $\vec{c} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ . Aprēķināt  $\text{pr}_{\vec{c}}(\vec{a} - \vec{b})$ .
16. Doti trīs vektori:  $\vec{a} = (4, -2, 4)$ ,  $\vec{b} = (2, -2, 2)$  un  $\vec{c} = (-4, 4, 4)$ .  
Aprēķināt  $\text{pr}_{\vec{b} + \vec{a}} \vec{c}$ .
17. Pilsonis  $N$  iegādājies šādu akciju paketi: 150 kompānijas  $A$  akciju, 100 kompānijas  $B$  akciju, 50 kompānijas  $C$  akciju, 200 kompānijas  $D$  akciju un 250 kompānijas  $E$  akciju. Akciju cenas ir attiecīgi vienādas ar 2 Ls, 1,50 Ls, 1,30 Ls, 1,80 Ls un 1,00 Ls. Pierakstīt ar vektoru palīdzību nopirkto akciju paketi, cenu vektoru un nopirktās paketes cenu.
18. Firma ražo preces  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  šādos daudzumos:  $A$  – 250 vienības,  $B$  – 120 vienības,  $C$  – 300 vienības un  $D$  – 250 vienības nedēļā. Vienas katras preces vienības izgatavošanai nepieciešamais darba laika patēriņš (stundās) attiecīgi ir: 0,5; 1,2; 2; 1,5. Pierakstīt iknedēļas produkcijas izlaides vektoru, darba laika patēriņa uz vienu preces vienību vektoru, pierakstīt vektoru formā un aprēķināt summāro darba laika patēriņu.  
Pārbaudīt, vai piemēros 19. – 21. dotie vektori ir lineāri neatkarīgi:
19.  $\vec{a}_1 = (4, 5, 6)$ ;  $\vec{a}_2 = (3, 7, 4)$ ;  $\vec{a}_3 = (-2, 1, -3)$ ;  $\vec{a}_4 = (2, 1, 0)$ ;
20.  $\vec{a}_1 = (3, 4, 5, 1)$ ;  $\vec{a}_2 = (2, 1, 7, 3)$ ;  $\vec{a}_3 = (2, 5, 1, 7)$ .

21.  $\vec{a}_1 = (-2, 3, 1, 0, 5);$   
 $\vec{a}_2 = (3, 1, 4, 5, 1);$   
 $\vec{a}_3 = (-1, 4, 5, 5, 6);$   
 $\vec{a}_4 = (0, 3, 4, 2, 1).$

Pārbaudīt, vai piemēros 22. – 25. dotās vektoru sistēmas veido attiecīgās telpas bāzi:

22.  $\vec{a}_1 = (4, 3, 2);$   
 $\vec{a}_2 = (3, -2, 6);$   
 $\vec{a}_3 = (10, -1, 14).$
23.  $\vec{a}_1 = (2, 1, 0);$   
 $\vec{a}_2 = (3, 4, 2);$   
 $\vec{a}_3 = (1, -1, 4).$
24.  $\vec{a}_1 = (4, 4, 5, 1);$   
 $\vec{a}_2 = (3, 1, 4, 1);$   
 $\vec{a}_3 = (2, 4, -5, 0);$   
 $\vec{a}_4 = (3, 1, 4, 2).$
25.  $\vec{a}_1 = (3, 7, -4, 2);$   
 $\vec{a}_2 = (-3, 1, 4, 8);$   
 $\vec{a}_3 = (2, 6, 1, 3).$
26. Vektoru  $\vec{c} = (3, 7)$  izvirsīt pēc bāzes  $\vec{a}, \vec{b}$ , kur  $\vec{a} = (1, 3); \vec{b} = (2, 1).$
27. Vektoru  $\vec{a} = (3, 6, 7, 4)$  izvirsīt pēc vienības bāzes  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4.$

## 5. LINEĀRU ALGEBRISKU VIENĀDOJUMU SISTĒMAS

### 5.1. Lineāru algebrisku vienādojumu sistēmu pieraksts matricu formā

Apskatām  $m$  lineāru algebrisku vienādojumu sistēmu ar  $n$  nezināmajiem  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (5.1)$$

kurā  $a_{ij}$  – koeficienti pie nezināmajiem, bet  $b_i$  – brīvie locekļi:  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Matricu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

sauc par sistēmas matricu. Apskatām arī  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$  – nezināmo lielumu

matricu-kolonnu un  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$  – brīvo locekļu matricu kolonnu.

Reizinājums  $A \cdot X$  ir matrica kolonna:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Tās elementi ir vienādojumu sistēmas (5.1) kreisās puses. Tas nozīmē, ka sistēma (5.1) ir pa elementiem uzrakstīta vienādībā

$$A \cdot X = B. \quad (5.2)$$

Vienādība (5.2) ir vienādojumu sistēmas (5.1) pieraksts matricu formā.

Atzīmēsim vēl vienu sistēmas (5.1) pieraksta formu.

Apzīmēsim ar  $A_{.1}$  matricas  $A$  pirmo kolonnu, ar  $A_{.2}$  – otro utt.

$$A_{.1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad A_{.2} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad A_{.n} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Tad sistēma (5.1) pieņems veidu

$$x_1 A_{.1} + x_2 A_{.2} + \dots + x_n A_{.n} = B;$$

jo  $A_{.1}, A_{.2}, \dots, A_{.n}$  – ir vektori (tikai pierakstīti kā kolonnas), tad šo *sistēmas* (5.1) *pieraksta formu sauc par vektoriālu*. Šāda sistēmas (5.1) pieraksta forma tiek izmantota, piemēram, lineārajā programmēšanā, kura savukārt ir svarīgs daudzu ekonomikas uzdevumu risināšanas instruments.

## 5.2. Lineāru vienādojumu sistēmas atrisināšana matricu formā

Pieņemsim, ka dota sistēma (5.2)

$$A \cdot X = B,$$

kurai vienādojumu skaits ir vienāds ar nezināmo skaitu ( $m = n$ ) un sistēmas matricas determinants nav vienāds ar nulli ( $|A| \neq 0$ ). Pareizināsim no kreisās puses sistēmas (5.2) abas puses ar apvērstu matricu  $A^{-1}$  (apvērstā matrica eksistē, jo  $|A| \neq 0$ ):

$$A^{-1} A X = A^{-1} B.$$

Tā kā  $A^{-1} A = E$ , tad iegūstam  $E X = A^{-1} B$ , un tā kā  $E X = X$ , tad

$$X = A^{-1} B. \quad (5.3)$$

Piemērs. Atrisināt vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Dotajai sistēmai

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad |A| = -5.$$

Apdzīstā matrica

$$A^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -9 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 10 & -3 \end{pmatrix} \quad (\text{sk. 85. lpp.}).$$

Pēc formulas (5.3)

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -9 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 10 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -28 \\ 1 \\ 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,6 \\ -0,2 \\ -7 \end{pmatrix},$$

$$x_1 = 5,6, \quad x_2 = -0,2, \quad x_3 = -7.$$

### 5.3. Krāmera formulas

Atkal apskatām  $n$  vienādojumu sistēmu ar  $n$  nezināmajiem  $AX = B$ , kurai  $|A| \neq 0$ .

Matricu vienādtību  $X = A^{-1}B$  pierakstām šādi

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

jeb

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n \\ \dots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n \end{pmatrix}$$

Tad

$$x_1 = \frac{1}{|A|} (A_{11}b_1 + \dots + A_{n1}b_n); \quad x_2 = \frac{1}{|A|} (A_{12}b_1 + \dots + A_{n2}b_n), \dots, \quad (5.4)$$

$$x_n = \frac{1}{|A|} (A_{1n}b_1 + \dots + A_{nn}b_n).$$

Vēršam uzmanību uz to, ka determinants

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = A_{11}b_1 + \dots + A_{n1}b_n,$$

t. i., izteiksme iekavās pirmajai no vienādībām (5.4), ir determinants, kurš iegūts no  $|A|$ , nomainot 1. kolonnu ar dotās vienādojumu sistēmas brīvo locekļu kolonnu.

Analogiski

$$A_{12}b_1 + \dots + A_{n2}b_n = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_2.$$

Šis determinants ir iegūts no  $|A|$ , nomainot otro kolonnu ar brīvo locekļu kolonnu; beidzot

$$A_{1n}b_1 + \dots + A_{nn}b_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n-1} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & b_n \end{vmatrix} = \Delta_n -$$

ir determinants, iegūts no  $|A|$ , nomainot  $n$ -to kolonnu ar brīvo locekļu kolonnu.

Tagad formulas (5.4) iegūst veidu

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{|A|}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{|A|}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{|A|}. \quad (5.5)$$

Formulas (5.5) sauc par Krāmera formulām.

### 5.4. Kronekera-Kapelli teorēma

Lineāru vienādojumu sistēmu atrisināšanas matricu metode, tāpat kā atrisināšana ar Krāmera formulām, ir iespējama tikai tajā gadījumā, ja vienādojumu skaits ir vienāds ar nezināmo skaitu ( $m = n$ ) un sistēmas matricas determinants nav vienāds ar nulli. Ja šie nosacījumi izpildās, tad vienādojumu sistēmai eksistē atrisinājums, pie kam viens vienīgs. Ja šie nosacījumi neizpildās, tad atrisinājums vai nu vispār neeksistē (tādu sistēmu sauc par nesaderīgu) vai atrisinājumu ir

bezglābi daudz. Šī punkta virsrakstā norādītā teorēma dod sistēmas saderības nepieciešamo un pietiekamo nosacījumu, t. i. nosacījumu, kad sistēmai ir vismaz viens atrisinājums.

Vispirms ievēsim minora un matricas ranga jēdzienus.

### Matricas minori

Pieņemsim, ka dota matrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Izvēlamies šajā matricā  $k$  dažādas rindiņas un  $k$  dažādas kolonnas. No elementiem, kuri atrodas izvēlēto rindiņu un kolonnu krustpunktos, var izveidot matricu. Iegūtās matricas determinantu sauc par  $k$ -tās kārtas minoru.

Piemērs. Pieņemsim, ka

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 1 \\ 7 & 4 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Izvēlamies 2. un 3. rindiņu un 2. un 4. kolonnas. Iegūstam matricu, izveidotu no elementiem, kuri atrodas norādīto rindiņu un kolonnu krustpunktos  $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ .

Atbilstošais 2. kārtas minors ir determinants  $\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$ . Saprotams, ka eksistē arī

citi šīs matricas 2. kārtas minori, piemēram  $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$  vai  $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$ . Analogiski,

$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}$  vai  $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$  ir matricas  $A$  trešās kārtas minori.

Atzīmēsim, ka, minors  $M_{ij}$  apskatīts p. 4.4 ir šeit definēto minoru speciālgadījums.

Ir spēkā šāda minoru īpašība.

**1. Teorēma.** Ja matricas  $A$  visi  $k$ -tās kārtas minori ir vienādi ar nulli, tad arī visi augstāku kārtu minori ir vienādi ar nulli.

Tiešām, saskaņā ar p. 3.4 pirmo teorēmu  $k+1$  kārtas determinants ir vienāds ar summu, kuru veido jebkuras rindiņas (vai kolonnas) elementu reizinājums ar saviem algebriskiem papildinājumiem. Algebriskie papildinājumi var atšķirties no atbilstošajiem  $k$ -tās kārtas minoriem tikai ar zīmi. Tā kā pēc nosacījuma visi

$k$ -tās kārtas minori ir vienādi ar nulli, tad arī algebriskie papildinājumi ir vienādi ar nulli. Tātad,  $k + 1$  kārtas determinants ir vienāds ar nulli. Analogiski, ir vienādi ar nulli visi augstāku kārtu determinanti, ja tādi eksistē.

### Matricas rangs

Par matricas  $A$  rangu sauc augstākā no nulles atšķirīgā minora kārtu.

Piemērs. Pieņemsim, ka

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

Viens no šīs matricas 2. kārtas minoriem, piemēram, minors  $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ , nav vienāds

ar nulli. Tas nozīmē, ka matricas rangs nav mazāks kā divi. No otras puses, vienīgais 3. kārtas minors matricai  $A$ , ir tās determinants

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 7 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

kurš vienāds ar nulli. Tātad, matricas  $A$  rangs ir vienāds ar 2.

Matricas  $A$  rangs apzīmē  $r(A)$ . Apskatītajā piemērā  $r(A) = 2$ .

Minētā minoru īpašība (1. teorēma) atvieglo matricas ranga atrašanu. Tiešām, ja visi minori ar kārtu  $k$  ir vienādi ar nulli, tad arī visi augstāku kārtu minori ir vienādi ar nulli. Tātad, atšķirīgi no nulles var būt tikai starp minoriem ar kārtu zemāku kā  $k$ . Tādēļ ir jēga sākt ar 1. kārtas minoru pārbaudi un soli par soli pāriet uz augstāku kārtu minoriem.

Nākošā metode vienkāršo matricas ranga aprēķināšanu, samazinot pārbaudāmo (meklējot nenulles) minoru skaitu.

Pieņemsim, ka  $M$  – matricas  $A$  minors ar kārtu  $k$ . Minoru ar kārtu  $k + 1$ , kurš satur minoru  $M$ , sauc par minoru  $M$  *ierāmējošo* minoru. Piemēram,

matricai  $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$  minors  $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$  ierāmē minoru  $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ , bet minors

$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 7 & 7 \end{vmatrix}$  ierāmē minoru  $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ .



$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

tiek saukta par sistēmas matricu. Par *sistēmas paplašināto matricu* sauc matricu

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

kurū iegūst pievienojot matricai  $A$  brīvo locekļu kolonnu.

**Kronekera-Kapelli teorēma.** *Lai vienādojumu sistēma (5.4) būtu saderīga, ir nepieciešami un pietiekami, lai sistēmas matricas rangs būtu vienāds ar sistēmas paplašinātās matricas rangū.*

**Piemērs.** Noteikt, vai šī vienādojumu sistēma ir saderīga:

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ 7x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 1. \end{cases} \quad (5.7)$$

Pierakstām sistēmas matricu:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 7 & 7 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tās rangs ir vienāds ar divi (sk. 113. lpp.).

No otras puses, sistēmas paplašinātās matricas

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 5 \\ 7 & 7 & 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

rangs ir vienāds ar trīs. Tiešām, minors

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

ir atšķirīgs no nulles.

Līdz ar to,  $r(A) = 2$ , bet  $r(\bar{A}) = 3$ . Tātad, sistēma (5.7) ir nesaderīga, t. i. tai nav neviena atrisinājuma.

## 5.5. Lineāru algebrisku vienādojumu sistēmu atrisināšana ar Gausa metodi

Kā jau tika atzīmēts iepriekšējā punktā, lineāru vienādojumu sistēmu atrisināšana ar matricu paņēmieni un ar Krāmēra formulu palīdzību ir iespējama tikai tajā gadījumā, ja vienādojumu skaits ir vienāds ar nezināmo skaitu un sistēmas matricas determinants nav vienāds ar nulli.

Šajā punktā piedāvātai Gausa metodei, sauktai arī par nezināmo pakāpeniskās izslēgšanas metodi, piemīt šādas īpašības:

- atšķirībā no iepriekšējām, šī metode ir pielietojama jebkurai lineāru vienādoju sistēmai;

- salīdzinot ar iepriekšējām metodēm, šī ir ekonomiskāka aprēķinu skaita ziņā;

- Gausa metode dod pilnu atbildi par apskatāmās sistēmas atrisinājumu: Gausa metode noskaidro, vai sistēma ir saderīga vai ne; ja sistēma ir saderīga un eksistē viens vienīgs atrisinājums, tad šis atrisinājums tiek atrasts; ja atrisinājumu ir bezgalīgi daudz, tad tiek atrasts vispārīgais atrisinājums (sīkāk par to tālāk).

Vispirms apskatīsim trīs vienādojumu sistēmu ar trim nezināmajiem, kurai eksistē viens vienīgs atrisinājums:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad (5.8)$$

Pieņemsim, ka  $a_{11} \neq 0$ . Reizināsim sistēmas (5.8) pirmo vienādojumu ar

$$\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right). \text{ Iegūsim } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ -a_{21}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 = b'_1, \end{cases} \quad (5.9)$$

$$\text{kur } b_{12} = a_{12} \cdot \left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right), \quad b_{13} = a_{13} \cdot \left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right), \quad b'_1 = b_1 \cdot \left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right).$$

No sistēmas (5.8) otrā vienādojuma izslēgsim nezināmo  $x_1$ . Lai to izdarītu, sistēmas (5.8) otrajam vienādojumam pieskaitīsim vienādojumu (5.9). Analogiski, lai izslēgtu  $x_1$  no trešā sistēmas (5.8) vienādojuma, reizināsim sistēmas pirmo

vienādojumu ar  $\left(-\frac{a_{31}}{a_{11}}\right)$  un pieskaitīsim to trešajam vienādojumam. Sistēmā

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3 \end{cases} \quad (5.10)$$

$a'_{ij}$  un  $b'_i$  ( $i, j = 2, 3$ ) – koeficienti, kurus iegūst, izdarot norādītās darbības.

Pieņemsim tagad, ka sistēmai (5.10)  $a'_{22} \neq 0$ . Reizināsim sistēmas (5.10) otro vienādojumu ar  $\left(-\frac{a'_{32}}{a'_{22}}\right)$ . Rezultātā iegūsim

$$-a'_{32}x_2 + b_{23}x_3 = \tilde{b}_2, \quad (5.11)$$

$$\text{kur } b_{23} = a'_{23} \cdot \left(-\frac{a'_{32}}{a'_{22}}\right), \quad \tilde{b}_2 = b'_2 \cdot \left(-\frac{a'_{32}}{a'_{22}}\right).$$

Tagad analogiski iepriekšējam, izslēgsim no sistēmas (5.10) trešā vienādojuma nezināmo  $x_2$ . Lai to izdarītu, sistēmas (5.10) trešajam vienādojumam pieskaitīsim (5.11). Vienādojumā

$$a''_{33}x_3 = b''_3 \quad (5.12)$$

$a''_{33}$  un  $b''_3$  – koeficienti, iegūti norādīto darbību rezultātā.

Tādā veidā, no sistēmas (5.8) pāriesim uz ekvivalentu sistēmu

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ a''_{33}x_3 = b''_3. \end{cases} \quad (5.13)$$

No šejienes, ja  $a''_{33} \neq 0$ , tad  $x_3 = b''_3/a''_{33}$ .

Ievietojot iegūto  $x_3$  sistēmas (5.11) otrajā vienādojumā, iegūstam  $x_2$ .

Zinot  $x_2$  un  $x_3$ , no sistēmas pirmā vienādojuma iegūstam  $x_1$ .

Piemērs. Ar Gausa metodi atrisināt sistēmu

$$\begin{cases} 2x - 4y + 18z = 6, \\ 3x - y + 5z = -2, \\ 4x - 3y + 3z = 1. \end{cases}$$

Reizināsim pirmo vienādojumu ar koeficientu  $\left(-\frac{3}{2}\right)$ . Iegūsim  $-3x + 6y - 27z = -9$ ; pieskaitīsim to otrajam vienādojumam. Iegūsim  $5y - 22z = -11$ .

Rīkojoties analogiski ar trešo vienādojumu, iegūsim:

$$5y - 33z = -11.$$

Pierakstīsim iegūtos vienādojumus sistēmas formā

$$\begin{cases} 2x - 4y + 18z = 6, \\ 5y - 22z = -11, \\ 5y - 33z = -11. \end{cases}$$

Reizināsim pēdējās sistēmas otro vienādojumu ar  $(-1)$  un pieskaitīsim trešajam vienādojumam. Iegūsim:

$$\begin{cases} 2x - 4y + 18z = 6, \\ 5y - 22z = -11, \\ -11z = 0. \end{cases}$$

No šādā veidā iegūtās sistēmas nosacīsim nezināmos:

$$z = 0, \quad y = -2,2, \quad x = -1,4.$$

Vispārējā gadījumā  $m$  vienādojumu sistēma ar  $n$  nezināmajiem

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (5.14)$$

ar Gausa metodes palīdzību tiek pārveidota šādi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \dots \\ a'_{mm}x_m + \dots + a'_{mn}x_n = b'_m. \end{cases}$$

Ar Gausa metodes palīdzību var noteikt, vai vienādojumu sistēma ir saderīga vai nav saderīga, vai tai ir galīgs vai bezgalīgs skaits atrisinājumu, un atrast visus sistēmas atrisinājumus.

Ja pēc pakāpeniskās nezināmo izslēgšanas kādam no vienādojumiem kreisā puse izrādās vienāda ar nulli, bet šī vienādojuma labā puse nav vienāda ar nulli, tad tāda sistēma ir nesaderīga, tas ir tai nav neviena atrisinājuma. Ja pēc pakāpeniskās nezināmo izslēgšanas un to vienādojumu atmešanas, kuriem labās un kreisās puses vienādas ar nulli, vienādojumu skaits palicis mazāks par nezināmo skaitu (un sistēma nesatur nesaderīgus vienādojumus), tad tādai sistēmai ir bezgalīgi daudz atrisinājumu.

Apskatīsim šo gadījumu nedaudz sīkāk. Pieņemsim, ka norādīto darbību rezultātā sistēma (5.14) ir pārveidota veidā

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1l+1}x_{l+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2l+1}x_{l+1} + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \dots \\ a'_{ll}x_l + a'_{ll+1}x_{l+1} + \dots + a'_{ln}x_n = b'_l, \quad l < m. \end{cases} \quad (5.15)$$

Pārveidosim to:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1l}x_l = b_1 - a_{1l+1}x_{l+1} - \dots - a_{1n}x_n, \\ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2l}x_l = b'_2 - a'_{2l+1}x_{l+1} - \dots - a'_{2n}x_n, \\ \dots \\ a'_{ll}x_l = b'_l - a'_{ll+1}x_{l+1} - \dots - a'_{ln}x_n. \end{cases} \quad (5.16)$$

Šajā gadījumā nezināmos  $x_1, x_2, \dots, x_l$  sauc par **bāzes**, bet  $x_{l+1}, \dots, x_n$  – par **brīvajiem**. No sistēmas (5.16) pēdējā vienādojuma var  $x_l$  izteikt ar pārējiem nezināmajiem  $x_{l+1}, \dots, x_n$ . Ievietojot iegūto izteiksmi šīs sistēmas priekšpēdējā vienādojumā, var izteikt  $x_{l-1}$  ar brīvajiem nezināmajiem, utt. Atrastais sistēmas atrisinājums ir atkarīgs no brīvajiem nezināmajiem  $x_{l+1}, \dots, x_n$ . To sauc par **vispārīgo atrisinājumu**. Piešķirot brīvajiem nezināmiem dažādas konkrētas skaitliskas vērtības, iegūstam atbilstošos konkrētos sistēmas atrisinājumus. Šādu atrisinājumu ir bezgalīgi daudz. Atrisinājumu, kuram visi bāzes mainīgie vienādi ar nulli, sauc par **bāzes**.

Piemērs. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4, \\ 4x + 2y - 2z = 6, \\ 3x + 3y + 2z = 7. \end{cases} \quad (5.17)$$

Pieskaitot trešajam vienādojumam pirmo vienādojumu pareizinātu ar (-4) un otro vienādojumu pareizinātu ar 3, iegūsim:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4, \\ -6y - 14z = -10, \\ -3y - 7z = -5. \end{cases}$$

Pieskaitot trešajam vienādojumam otro vienādojumu pareizinātu ar (-1/2), iegūstam

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4, \\ -6y - 14z = -10, \\ 0z = 0. \end{cases}$$

Tādā veidā, trīs vienādojumu sistēmas atrisināšana ir reducējusies uz līdzvērtīgas sistēmas ar diviem vienādojumiem un trīs nezināmajiem, atrisināšanu. Atrisinot to, iegūstam:

$$y = (5 - 7z)/3, \quad x = 4 - 2y - 3z = (2 + 5z)/3.$$

Piešķirot  $z$  patvaļīgas vērtības, iegūstam atbilstošos  $x$  un  $y$ , tas ir, iegūstam bezgalīgi daudz atrisinājumu. Vispārīgo atrisinājumu var pierakstīt formā

$$\begin{cases} x = (2 + 5z)/3, \\ y = (5 - 7z)/3, \\ z = z. \end{cases}$$

### 5.6. Matricu īpašvektori un īpašvērtības

Pieņemsim, ka  $\bar{a}$  –  $n$ -dimensiju vektors,  $A$  –  $n$ -tās kārtas kvadrātiska matrica:  $A = \|a_{ij}\|_{n,n}$ . Tad reizinājums  $\bar{a} \cdot A$  ir definēts un ir atkal  $n$ -dimensiju vektors.

Vektoru  $\bar{a}$  sauc par matricas  $A$  *īpašvektoru*, ja tas nav nulles vektors un eksistē tāds skaitlis  $\lambda$ , ka

$$\bar{a} \cdot A = \lambda \bar{a}. \quad (5.18)$$

$\lambda$  sauc par matricas  $A$  *īpašvērtību*. Pie tam saka, ka īpašvektors  $\bar{a}$  atbilst dotajai īpašvērtībai  $\lambda$ .

No definīcijas uzreiz ir redzams, ka, ja  $\bar{a}$  ir matricas  $A$  īpašvektors, tad vektors  $\alpha \bar{a}$  arī ir īpašvektors jebkurai skaitļa  $\alpha$  vērtībai. Var pierādīt, ka dažādām īpašvērtībām atbilstoši īpašvektori ir lineāri neatkarīgi.

Piemērs, kurā īpašvērtības tiks izmantotas ekonomiska uzdevuma izpētei, tiks dots 6. nod., bet pašreiz apskatīsim jautājumu par īpašvērtību un īpašvektoru atrašanu.

Pieņemsim, ka  $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  – īpašvērtībai  $\lambda$  atbilstošais matricas  $A = \|a_{ij}\|$  īpašvektors, t. i.  $\bar{b} \cdot A = \lambda \bar{b}$ . Uzrakstīsim šo vienādību izvērsta veidā:

$$\begin{cases} b_1 a_{11} + b_2 a_{21} + \dots + b_n a_{n1} = \lambda b_1, \\ b_1 a_{12} + b_2 a_{22} + \dots + b_n a_{n2} = \lambda b_2, \\ \dots \\ b_1 a_{1n} + b_2 a_{2n} + \dots + b_n a_{nn} = \lambda b_n. \end{cases}$$

Pārnesīsim  $\lambda b_1, \lambda b_2, \dots, \lambda b_n$  uz kreiso pusi:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)b_1 + a_{21}b_2 + \dots + a_{n1}b_n = 0, \\ a_{12}b_1 + (a_{22} - \lambda)b_2 + \dots + a_{n2}b_n = 0, \\ \dots \\ a_{1n}b_1 + a_{2n}b_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)b_n = 0. \end{cases} \quad (5.19)$$

Pēc Krāmiera formulām  $b_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, b_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, b_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$ . Tā kā brīvo locekļu

kolonna ir atšķirīga no nulles, tad  $\Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_n = 0$ . No otras puses, saskaņā ar definīciju, īpašvektors  $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$  ir no nulles atšķirīgs. Tātad, sistēmas determinants  $\Delta = 0$ , t. i.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (5.20)$$

Šī vienādība ir vienādojums attiecībā pret nezināmo  $\lambda$ . Atrisinot to, atrodam  $\lambda$ . Ievietojot atrasto  $\lambda$  vērtību sistēmā (5.19) un atrisinot iegūto sistēmu attiecībā pret nezināmajiem  $b_1, b_2, \dots, b_n$ , atrodam īpašvektoru.

Piemērs. Atrast īpašvērtības un īpašvektorus matricai

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Atrisinājums. Sastādīsim vienādojumu (5.18):

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & -5 & 2 \\ 5 & -7 - \lambda & 3 \\ 6 & -9 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Aprēķinot determinantu, iegūstam:

$$\lambda^2(1 - \lambda) = 0,$$

no šejienes atrodam īpašvērtības  $\lambda_{1,2} = 0$ ,  $\lambda_3 = 1$ . Ņemam  $\lambda = 0$  un ievie-  
tojam to (5.19):

$$\begin{cases} 4b_1 + 5b_2 + 6b_3 = 0, \\ -5b_1 - 7b_2 - 9b_3 = 0, \\ 2b_1 + 3b_2 + 4b_3 = 0. \end{cases}$$

Atrisinot šo sistēmu ar Gausa metodi, iegūstam  $b_1 = t$ ,  $b_2 = -2t$ ,  $b_3 = t$ , kur  
 $t$  – patvaļīgs skaitlis, t. i.  $\bar{b} = t(1, -2, 1)$ . Analogiski, ievietojot sakarībā (5.19)  
vērtību  $\lambda_3 = 1$  un atrisinot iegūto sistēmu, atrodam īpašvērtībai  $\lambda = 1$   
atbilstošo atbilstošos īpašvektorus  $\bar{b} = t(3, -3, 1)$ .

### 5.7. Piemēri no ekonomikas

1. Mēbeļu firma izgatavo trīs veidu virtuves mēbeles: piekaramos skapīšus  
(A), virtuves galdus (B) un vertikālus virtuves skapjus (C). Izgatavošanas  
procesa laikā katra veida mēbele iziet caur trim cehiem. Darba laika patēriņš  
(stundās) viena gabala katra veida mēbeles izgatavošanai norādīts tab. 5.1.

Tabula 5.1

Mēbeles veids \ Cehs	A	B	C
I	2	3	3
II	3	4	3
III	3	2	4

Cik gabalu katra veida mēbeļu bija izgatavots, ja zināms, ka pirmajā cehā ir pa-  
tērētas pavisam 195 stundas, otrajā – 250 stundas, trešajā – 220 stundas?

Atrisinājums. Apzīmēsim ar  $x_1, x_2, x_3$ , cik gabalu A, B, C veida mēbeļu ir  
izgatavots. Tad  $2x_1$  ir pirmajā cehā A veida mēbeļu izgatavošanai patērēto  
darba stundu skaits,  $3x_2$  – B veida mēbeļu un  $3x_3$  – C veida mēbeļu. Atbilstoši,  
 $2x_1 + 3x_2 + 3x_3$  ir kopējais pirmajā cehā patērēto darba stundu skaits. Pēc

nosacījuma tas ir 195 stundas. Iegūstam vienādojumu  $2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 195$ . Analogiski,  $3x_1 + 4x_2 + 3x_3$  ir otrajā cehā patērēto darba stundu skaits, bet  $3x_1 + 2x_2 + 4x_3$  – trešā ceha. Tā kā pēc nosacījuma patērētais stundu skaits ir 250 un 220, tad iegūstam vēl divus vienādojumus:  $3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 250$  un  $3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 220$ , kuri kopā ar pirmo vienādojumu izveido sistēmu

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 195, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 250, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 220. \end{cases}$$

Atrisinot šo sistēmu (piemēram, ar Gausa metodi), iegūstam:  $x_1 = 30$ ,  $x_2 = 25$ ,  $x_3 = 20$ .

Atbilde. Bija izgatavoti 30 piekaramie skapīši, 25 virtuves galdi un 20 vertikālie skapji.

2. Neliela apavu darbnīca izgatavo vīriešu kurpes (A), sievietes kurpes (B) un modeļu kurpes (C). Apavu izgatavošanai izmanto vairāku veidu izejvielas. Ir patēriņa normas diviem izejvielu veidiem (tab. 5.2).

Tabula 5.2

Apavu veids \ Izejviela	A	B	C
I	2	6	2
II	6	2	2

Cik pāru katra veida apavu bija saražots, ja zināms, ka ir izlietots 30 vienību pirmā veida izejvielu un 70 vienību otrā veida izejvielu?

Atrisinājums. Apzīmēsim ar  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  izgatavoto A, B, C veida apavu pāru skaitu. Tad  $2x_1 + 6x_2 + 2x_3$  ir izlietotais pirmā veida izejvielu daudzums, bet  $6x_1 + 2x_2 + 2x_3$  – otrā veida. Tā kā pēc nosacījuma ir izlietotas 30 vienības pirmā veida izejviela un 70 vienības otrā veida, tad iegūstam divu vienādojumu sistēmu ar trim nezināmiem:

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 30, \\ 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 70. \end{cases}$$

Atņemot no otrā vienādojuma pirmo vienādojumu, iegūstam līdzvērtīgu sistēmu:

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 30, \\ 4x_1 - 4x_2 + 0 = 40. \end{cases}$$

Par brīvo nezināmo izvēlamies  $x_2$ :  $x_2 = t$ . Tad no otrā vienādojuma  $4x_1 = 40 + 4x_2$  jeb  $x_1 = 10 + t$ . Ievietojot pirmajā vienādojumā, iegūstam  $2(10 + t) + 6t + 2x_3 = 30$  jeb  $20 + 8t + 2x_3 = 30$ . No šejienes  $x_3 = 5 - 4t$ . Līdz ar to sistēmas atrisinājums būs formā

$$\begin{cases} x_1 = 10 + t, \\ x_2 = t, \\ x_3 = 5 - 4t. \end{cases}$$

Tā kā apavu pāru skaiti  $x_1, x_2, x_3$  var pieņemt tikai veselās nenegatīvas vērtības, tad  $t$  var pieņemt tikai vērtību 0 vai 1. Atbilstoši, uzdevumam ir divi atrisinājumi:

pirmais:  $x_1 = 10, x_2 = 0, x_3 = 5$ ;

otrais:  $x_1 = 11, x_2 = 1, x_3 = 1$ .

3. Uzņēmums izgatavo četru veidu produktus: A, B, C, D; ražošanai tiek izmantotas trīs veidu izejvielas. Vienas produkcijas vienības izgatavošanai nepieciešamais katras izejvielas daudzums norādīts tab. 5.3. Bez tam, tabulas pēdējā kolonā norādīts, cik lielas ir katras izejvielas rezerves:

Tabula 5.3

Produkcijas veids \ Izejvielas veids	A	B	C	D	Esošās izejvielu rezerves
I	1	2	3	1	1500
II	1	3	2	3	2000
III	4	0	1	2	2500

Ir zināma peļņa (latos) no vienas katra veida produkcijas vienības realizācijas:  $U_A = 0,5$  Ls,  $U_B = U_C = 2$  Ls,  $U_D = 1$  Ls. Cik daudz katra veida produkcijas ir jāražo, lai peļņa būtu vislielākā, pie noteikuma, ka visas izejvielas būtu pilnībā izlietotas?

Atrisinājums. Apzīmēsim ar  $x_1, x_2, x_3, x_4$  cik daudz A, B, C, D veida produkcijas ir jāražo. Tad  $U = 0,5x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4$  ir peļņa, kuru iegūst realizējot visu šo produkciju. Izmantojot to, ka zināms, cik daudz katra veida izejvielas tiek patērēts, un spriežot tāpat kā iepriekšējos piemēros, sastādīsim vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1500, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2000, \\ 4x_1 + x_3 + 2x_4 = 2500. \end{cases}$$

Atrisinot sistēmu ar Gausa metodi, iegūstam:

$$x_1 = 607,1 - 0,95t,$$

$$x_2 = 428,6 - 1,7t,$$

$$x_3 = t,$$

$$x_4 = 35,7 + 1,35t.$$

Atbilstoši, izteiksme peļņas aprēķināšanai pieņem veidu  $U = 0,5x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0,5(607,1 - 0,95t) + 2(428,6 - 1,7t) + 2t + 35,7 + 1,35t = 1196,45 - 0,525t$ . Tā kā produkcijas daudzumiem  $x_1, x_2, x_3, x_4$  jābūt nenegatīviem, tad  $t \geq 0$ ;  $607,1 - 0,95t \geq 0$ ;  $428,6 - 1,7t \geq 0$ ;  $35,7 + 1,35t \geq 0$ . Iegūstam

$$0 \leq t \leq 252,1.$$

Tā kā peļņu aprēķina no sakarības

$$U = 1196,45 - 0,525t,$$

tad lielākā peļņas vērtība būs pie  $t = 0$ . Tas nozīmē, ka lai gūtu vislielāko peļņu, ir jāražo 607,1 vienības produkta A, 428,6 vienības produkta B, produkts C nav jāražo nemaz, produkts D jāražo 35,7 vienības. Tad iegūtā peļņa būs 1196,45 Ls.

### Jautājumi pašpārbaudei

1. Pierakstiet vispārīgā veidā sistēmu ar  $m$  vienādojumiem un  $n$  nezināmajiem.
2. Pierakstiet šo sistēmu matricu formā, vektoriālā formā.
3. Kurā gadījumā vienādojumu sistēmu var atrisināt ar matricu paņēmienu? Pierakstiet atrisinājuma atrašanās formulu.
4. Ko sauc par matricas rangu? Kā to atrod?
5. Izskaidrojiet Gausa metodi. Kādas ir šīs metodes priekšrocības?
6. Kas ir matricas īpašvērtība un īpašvektors? Kā tos atrod?
7. Kompānija ražo trīs veidu produktus. Katra produkta izgatavošana sastāv no trim posmiem. Katra veida produkta vienas vienības izgatavošanai nepieciešamais laiks katrā posmā parādīts tab. 5.4. Tabulā ir arī parādīts kopējais

laiks, kurš atvēlēts katram darba posmam. Cik daudz katra veida produkcijas ir jāražo, lai viss darba laiks katrā posmā būtu pilnībā izmantots?

Tabula 5.4

Posms	Produkcijas veids			Kopējais darba laiks posmā
	A	B	C	
I	6	4	7	725
II	4	5	6	788
III	2	3	1	425

- Sastādīt uzdevuma matemātisko modeli (vienādojumu sistēmu).
- Pierakstīt to matricu formā un atrisināt ar matricu palīdzību.
- Atrisināt ar Gausa metodi.

### Vingrinājumi

Pierakstīt matricu formā vienādojumu sistēmu.

$$1. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x_1 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 = 5, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

Atrisināt, ja tas iespējams, vienādojumu sistēmas (3. – 9.):

- ar matricu paņēmienu,
- ar Krāmera formulām.

$$3. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 11. \end{cases} \quad 4. \begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1, \\ x - 2y + 4z = 3, \\ 3x - y + 5z = 2. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 3x + 2y - z = 0, \\ 2x - y + 3z = 0, \\ x + 3y - 4z = 0. \end{cases} \quad 6. \begin{cases} x + 2y + 3z = 4, \\ 2x + 4y + 6z = 3, \\ 3x + y - z = 1. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0, \\ x + 5y - 4z + 5 = 0, \\ 4x + y - 3z + 4 = 0. \end{cases} \quad 8. \begin{cases} x + 2y + 3z = 4, \\ 2x + y - z = 3, \\ 3x + 3y + 2z = 7. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 3x - y + 2z = 3, \\ 2x + 3y - 5z = 0, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

10. Piemēru 3. – 9. sistēmas atrisināt ar Gausa metodi.

Ar Gausa metodi atrisināt vienādojumu sistēmas (11. – 17.):

$$11. \begin{cases} x - y + z = 1, \\ 2x - y + 3z = 0. \end{cases} \quad 12. \begin{cases} 2x - 4y + 2z = 0, \\ 3x + 4y - 3z = 0. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 3x + 2y + 2z = 0, \\ 5x + 2y + 3z = 0. \end{cases} \quad 14. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2, \\ 2x_1 - 11x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 5, \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + x_4 = 9. \end{cases} \quad 16. \begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 7x_3 + x_4 = 7. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$$

18. Kažokzvēru fermā audzē nercus (A), lapsas (B) un ūdeles (C). Ir doti dati par trīs veidu barībām, kuras izmanto dzīvnieku audzēšanai; barības daudzums, kuru šie dzīvnieki saņem katru dienu, norādīts tab. 5.5.

Tabula 5.5

Barības veids	Barības vienību skaits dienā		
	A	B	C
I	2	3	2
II	3	1	4
III	5	7	6

Cik daudz nercu, lapsu un ūdeļu audzē fermā, ja zināms, ka nedēļā tiek izmantotas 6020 vienības pirmā veida barības, 7140 vienības otrā un 15 680 vienības trešā veida barības?

19. 90. lpp. 46. uzdevumā zināmas izejvielu rezerves: cukurs – 15,5 t, sīrupa – 11 t, augļu biezenis – 5,5 t, kakao – 23 t. Noteikt, cik daudz katra veida konfektes ir jāražo, lai visas izejvielas būtu pilnīgi izmantotas.
20. No divām bāzēm ir jānogādā 300 t kravas uz punktu A un 250 t kravas uz punktu. Pirmajā bāzē ir 150 t kravas, bet otrajā – 400 t. Vienas t kravas piegādes izmaksas (latos) norādītas tab. 5.6.

Tabula 5.6

Bāzes№	Piegādes punkts	
	A	B
I	30	40
II	25	20

- Cik daudz kravas ir jāved no katras bāzes uz katru no punktiem A un B, lai summārās transportēšanas izmaksas būtu vismazākās?
21. Montāžas cehā tiek montēti četru veidu izstrādājumi (A, B, C, D) no trīs tipu detaļām. Viena gabala katra veida izstrādājuma izgatavošanai nepieciešamais detaļu skaits redzams tab. 5.7.

Tabula 5.7

Detaļas veids	Viena izstrādājuma izgatavošanai nepieciešamais detaļu skaits			
	A	B	C	D
I	2	3	–	3
II	1	3	1	2
III	2	1	3	–

Zināms, ka pavisam bija izlietotas 10 pirmā tipa detaļas, 9 otrā tipa un 11 trešā tipa detaļas. Cik gabalu katra veida izstrādājumu bija izgatavots?

Atrast matricu īpašvērtības un īpašvektorus.

$$22. A = \begin{pmatrix} 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0,1 & 0,4 & 0,3 \\ 0 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

$$23. A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0 \\ 0,2 & 0,2 & 0 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

$$24. A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$25. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -3 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

## 6. LEONTJEVA "RESURSI-GALAPRODUKTS" MODELIS (STARPNOZARU BILANCES MODELIS)

### 6.1. Moduļa izveidošana

Mēs apskatīsim šo ekonomikā plaši pazīstamo modeli kā piemēru par lineārās algebras aparāta izmantošanu ekonomisko uzdevumu risināšanā.

Apskatīsim saimniecības modeli, sastāvošu no  $n$  nozarēm, katrai no kurām ir piešķirts kārtas numurs. Pieņemsim, ka katra nozare ražo viena veida produkciju. Apzīmēsim ar  $a_{ij}$  to nozares ar numuru  $i$  (turpmāk rakstīsim  $i$ - nozare) saražotās produkcijas daudzumu, kurš  $j$ - nozarei nepieciešams kā resurss vienas savas produkcijas vienības saražošanai. Piemēram, ja 1. nozare ražo elektroenerģiju, bet 2. nozare ir metalurģija, tad  $a_{12}$  – elektroenerģijas daudzums, kurš nepieciešams, lai izlaistu vienu vienību (piemēram, tonnu) čuguna. Kas šajā piemērā ir  $a_{11}$ ? Tas ir elektroenerģijas daudzums (tai skaitā, izmantojams dažādos palīgdienestos, agaismošanai utt.), kurš nepieciešams 1 vienības elektroenerģijas saražošanai.

$a_{ij}$  saucas par *tiešo izmaksu koeficientiem*, bet matrica  $A = \|a_{ij}\|$  – par *tiešo izmaksu koeficientu matricu* jeb *tehnoloģisko matricu*.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (6.1)$$

Apzīmēsim ar  $x_k$   $k$ -nozares saražoto produkcijas apjomu vienā laika vienībā, piemēram gadā. Vektoru

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

sauc par *pilno izlaides (galaprodukta) vektoru*. Tas parāda visu nozaru jaudu. Katru vektoru var uzskatīt par matricu rindu (bieži saka vektors rinda). Apzīmēsim ar  $X$  matricu, kuru iegūst transponējot šo matricu rindu, t. i.

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

Šī ir matrica kolonna, jeb vektors kolonna, dotajā gadījumā *pilnās izlaides (galaprodukta) vektors kolonna*.

Pieņemsim, ka resursa daudzums, kurš nepieciešams produkcijas ražošanai, ir proporcionāls šīs produkcijas daudzumam. Tad, tā kā  $a_{ij}$  –  $i$ -nozares produkcijas daudzums, kurš nepieciešams  $j$ -nozares vienas produkcijas vienības iegūšanai, un tā kā visa  $j$ -nozare ražo  $x_j$  vienības, tad

$$a_{ij}x_j = x_{ij} \quad (6.3)$$

ir tas  $i$ -nozares saražotais produkcijas daudzums, kurš nepieciešams, lai  $j$ -nozare varētu izlaist visu nepieciešamo produkcijas daudzumu  $x_j$ . Piemēram,  $a_{12}x_2$  – tas ir pirmās nozares saražotais produkcijas daudzums, kurš nepieciešams, lai nodrošinātu otro nozari,  $a_{13}x_3$  – lai nodrošinātu trešo nozari utt. Tad

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = t_1$$

ir pirmās nozares saražotais produkcijas daudzums, kurš tiek izmantots, lai nodrošinātu pārējo nozaru produkcijas pilnu izlaidi. Starpība

$$x_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) = y_1$$

ir pirmās nozares saražotais produkcijas daudzums, kurš paliek pāri neražošanas vajadzībām: iedzīvotājiem, uzkrājumiem utt. Analogiski,

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = t_i \quad (6.4)$$

ir  $i$ -nozares saražotais produkcijas daudzums, kurš tiek izmantots, lai nodrošinātu pārējo nozaru produkcijas pilnu izlaidi, bet

$$x_i - (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n) = y_i \quad (6.5)$$

ir  $i$ -nozares saražotais produkcijas daudzums, kurš paliek pāri neražošanas vajadzībām.

Modelis, kuru apraksta vienādojumu sistēma

$$\begin{cases} x_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) = y_1, \\ x_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n) = y_2, \\ \dots \\ x_n - (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n) = y_n, \end{cases} \quad (6.6)$$

saucas par **Leontjeva modeli** vai *modelis „resursi-galaprodukts”* (output-input);

$t_1, t_2, \dots, t_n$  – nozaru patēriņi. Vārda “resursi” vietā var lietot arī vārdu “izmaksas”.

Vektoru

$$(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

sauc par *beigu izlaides (galaprodukta) vektoru* vai *beigu pieprasījuma vektoru*. Apzīmēsim

$$Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

beigu izlaides vektoru kolonu.

Tātad, sākuma etapā, zinot pilnās izlaides vektoru  $X$  un tiešo izmaksu koeficientu matricu  $A$ , var aprēķināt:

a)  $x_{ij}$  –  $i$ -nozares produkcijas apjomu, kurš nepieciešams, lai nodrošinātu  $j$ -nozari;

b)  $t_i$  –  $i$ -nozares izmaksas, t. i.  $i$ -nozares produkcijas apjomu, kurš nepieciešams, lai nodrošinātu visas pārējās nozares;

c)  $Y$  – beigu pieprasījuma vektoru.

Ievedam vēl vienu matricu

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & y_1 \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} & y_n \end{pmatrix}$$

To sauc par *starpnozaru bilances matricu*. Šīs matricas rinda ar numuru  $i$  parāda attiecīgās nozares produkcijas sadalījumu, bet kolonna – šīs nozares pieprasījumu pēc citu nozaru resursiem.

Pāriesim pie Leontjeva modeļa pieraksta matricu formā. Šareizināsim

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix},$$

t. i.  $AX$  – ir izmaksu kolonna. Tālāk

$$X - AX = \begin{pmatrix} x_1 - (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n) \\ x_2 - (a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n) \\ \dots \\ x_n - (a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = Y.$$

Tādā veidā,

$$X - AX = Y \quad (6.7)$$

ir Ļeontjeva modelis matricu formā.

## 6.2. Līdzsvarota galaprodukcijas apjoma aprēķins

Iepriekšējā punktā bija teikts, ka, zinot pilno izlaides vektoru  $X$  un tiešo izmaksu koeficientu matricu  $A$ , var noteikt beigu izlaides vektoru  $Y$ , t. i. to produkcijas daļas apjomu, kurš aiziet patēriņam un uzkrājumiem. **Pretežā uzdevuma** būtība ir šāda: zinot vajadzīgo beigu izlaides vektoru  $Y$  (sabiedrības pasūtījums) un matricu  $A$ , noteikt, kādam jābūt pilnam izlaides vektoram  $X$ , lai nodrošinātu doto beigu izlaides vektoru  $Y$ . Tādu pilno galaprodukta apjomu sauc par **līdzsvara**. Ja jebkuram beigu pieprasījumam  $Y$  var piemeklēt to nodrošinošu līdzsvara galaproduktu  $X$ , (t. i. piemeklēt pietiekošas nozaru jaudas), tad atbilstošo Ļeontjeva modeli sauc par **produktīvu**. Sistēmas produktivitāte nav obligāts fakts: pie sliktām tehnoloģijām izmaksas  $t_i$  var būt tik lielas, ka beigu izlaide būs tuvu nullei. Tagad apskatīsim dažus modeļa produktivitātes pietiekamos nosacījumus. Vispirms sniegsim definīciju. Matricu  $A$  sauc par **nenegatīvu** (apzīmē  $A \geq 0$ ), ja visi tās elementi ir nenegatīvi:  $a_{ij} \geq 0$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ; tai skaitā, vektoru  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  sauc par nenegatīvu, ja visi  $x_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Pierakstam modeli "resursi-galaprodukts":

$$X - AX = Y.$$

Iznesot  $X$  pirms iekavām, iegūstam:

$$(E - A)X = Y, \quad \text{kur } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} - \text{vienības matrica.}$$

Ja matricai  $(E - A)$  eksistē apgrieztā  $(E - A)^{-1} = S$ , tad no pēdējā vienādojuma var izteikt  $X$ :

$$X = (E - A)^{-1}Y, \quad \text{jeb } X = SY. \quad (6.8)$$

Uzrakstīsim sistēmu (6.8) izvērstā veidā:

$$\begin{cases} x_1 = s_{11}y_1 + s_{12}y_2 + \dots + s_{1n}y_n, \\ x_2 = s_{21}y_1 + s_{22}y_2 + \dots + s_{2n}y_n, \\ \dots \\ x_n = s_{n1}y_1 + s_{n2}y_2 + \dots + s_{nn}y_n. \end{cases} \quad (6.8')$$

Skaidrs, ka, ja apvērsta matrica  $(E - A)^{-1} = S$  nenegatīva, tad modelis ir produktīvs. Šajā gadījumā arī matricu  $A$  saucim par produktīvu. Tādā gadījumā matricu  $S$  sauc par *pilno izmaksu koeficientu matricu* jeb par *multiplikatoru matricu*. Lai noskaidrotu šīs matricas elementu ekonomisko jēgu, izvēlē-

simies šādu beigu pieprasījuma vektoru:  $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$  un ievietosim to sistēmā (6.8').

Iegūsim

$$\begin{cases} x_1 = s_{11} \cdot 1 + 0 + \dots + 0, \\ x_2 = s_{21} \cdot 1 + 0 + \dots + 0, \\ \dots \\ x_n = s_{n1} \cdot 1 + 0 + \dots + 0. \end{cases}$$

Tātad, matricas  $S$  pirmās kolonnas elementi:  $s_{11}, s_{21}, \dots, s_{n1}$  parāda, cik daudz pirmās, otrās, ...,  $n$ -tās nozares produkcijas ir vajadzīgs, lai iegūtu vienu pirmās nozares beigu galaprodukta vienību. Atbilstoši,  $s_{ij}$  parāda, cik daudz  $i$ -nozares produkcijas ir vajadzīgs, lai varētu saražot  $j$ -nozares beigu pieprasījuma vienu produkcijas vienību. Svarīgi saprast, ka  $s_{ij} \geq a_{ij}$ . Apskatīsim to ar piemēru. Pieņemsim, ka 1. nozare ražo elektroenerģiju, bet  $i$ -nozare ir laku un krāsu rūpniecība. Tad  $a_{1i}$  – ir elektroenerģijas daudzums, kurš nepieciešams, lai saražotu vienu vienību, piemēram 1 tonnu, krāsas. Bet no šīs 1 tonnas tikai daļa tiks iedzīvotājiem, atlikusī krāsa būs nepieciešama pārējo nozaru vajadzībām. Tādēļ, lai neražojošām vajadzībām tiktu 1 tonna krāsas, ir jāsaražo vairāk krāsas un šim mērķim ir nepieciešama papildus elektroenerģija (šis daudzums tad arī ir  $s_{1i}$ ), nekā vienas tonnas krāsas saražošanai vispār ( $a_{1i}$ ), t. i.  $s_{1i} \geq a_{1i}$ .

Apskatīsim vienu modeļa produktivitātes pietiekamo nosacījumu. Lineārajā algebrā tiek pierādīts (Frobēniusa-Perrona teorēma), ka, ja matrica  $A$  ir nenegatīva, tad šīs matricas lielākā pēc moduļa īpašvērtība arī ir nenegatīva. Apzīmēsim šo vērtību ar  $\lambda_A$ .

Teorēma. Lai matrica  $A$  (un reizē ar to arī modelis) būtu produktīva, ir nepieciešami un pietiekami, lai  $\lambda_A$  būtu mazāks par viennieku.

Eksistē virkne citu produktivitātes kritēriju, bet jau viens minētais nosacījums spoži parāda lineārās algebras lomu, pētot makroekonomikas modeļus.

### 6.3. Līdzsvara cenu aprēķins

Apzīmēsim  $i$ -nozāres produkcijas cenu ar  $p_i$ . Pieņemsim, ka joprojām  $A = \|a_{ij}\|$  – tiešo izmaksu koeficientu matrica:  $a_{ij}$  –  $i$ -nozāres produkcijas apjoms, kurš nepieciešams, lai varētu saražot  $j$ -nozāres vienu produkcijas vienību;  $a_{ij}p_i$  ir šī daudzuma  $i$ -nozāres produkcijas cena. Lai saražotu  $j$ -nozāres vienu produkcijas vienību, ir vajadzīgs  $a_{1j}$  pirmās nozāres produkcijas,  $a_{2j}$  otrās nozāres produkcijas, ...,  $a_{nj}$   $n$ -nozāres produkcijas, kuru vērtības ir atbilstoši vienādas:  $a_{1j}p_1, a_{2j}p_2, \dots, a_{nj}p_n$ . Kopējā visu nozāru resursu izmaksas, kuras ir nepieciešamas, lai varētu saražot  $j$ -nozāres vienu produkcijas vienību ir:

$$a_{1j} \cdot p_1 + a_{2j} \cdot p_2 + \dots + a_{nj} \cdot p_n.$$

Tad starpība

$$p_j - (a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + \dots + a_{nj}p_n) = v_j \quad (6.9)$$

veido pievienoto vērtību, kuru iegūst  $j$ -nozāre par vienu savas produkcijas vienību. To sauc arī par pievienotās vērtības daļu. Šī pievienotā vērtība tiek izlietota darba algām, uzņēmēja peļņai, nodokļiem utt. Vienādojumu sistēma

$$\begin{cases} p_1 - (a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{n1}p_n) = v_1, \\ p_2 - (a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \dots + a_{n2}p_n) = v_2, \\ \dots \\ p_n - (a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \dots + a_{nn}p_n) = v_n \end{cases} \quad (6.10)$$

ļauj, zinot cenu vektoru

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T$$

un matricu  $A$ , noteikt pievienoto vērtību daļu vektoru:

$$V = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T.$$

Sistēmu (6.10) sauc par sistēmas (6.6) *duālo* sistēmu. Pierakstīsim sistēmu (6.10) matricu formā. Pievērsiet uzmanību tam, ka vienādojumu sistēmas (6.10) koeficienti ir nevis matricas  $A$  rindas, bet kolonnas, citiem vārdiem matricas  $A^T$  elementi.

$$A^T \cdot P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}p_1 + \dots + a_{n1}p_n \\ a_{12}p_1 + \dots + a_{n2}p_n \\ \dots \\ a_{1n}p_1 + \dots + a_{nn}p_n \end{pmatrix}$$

Tālāk,

$$P - A^T \cdot P = \begin{pmatrix} p_1 - (a_{11}p_1 + \dots + a_{n1}p_n) \\ p_2 - (a_{12}p_1 + \dots + a_{n2}p_n) \\ \dots \\ p_n - (a_{1n}p_1 + \dots + a_{nn}p_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} = V.$$

Tādējādi, mēs esam ieguvuši sistēmas (6.10) pierakstu matricu formā:

$$P - A^T P = V. \quad (6.11)$$

Apgrieztais uzdevums: zināma matrica  $A$  un vektors  $V$ . Noteikt cenu vektoru  $P$ , kurš ļauj iegūt doto pievienoto vērtību daļu vektoru  $V$ . Tādas sauc par *līdzsvara* cenām. Izteiksim no (6.11)  $P$ :

$$(E - A^T)P = V.$$

Tālāk, ja matricai  $(E - A^T)$  eksistē apgrieztā, tad

$$P = (E - A^T)^{-1} \cdot V = BV. \quad (6.12)$$

Modeli sauc par *pelnošu*, ja jebkuram (nenegatīvam) vektoram  $V$  var piemēklēt tādu cenu vektoru  $P$ , kurš ļauj iegūt doto  $V$ . Ja matrica  $(E - A^T)^{-1} = B$  ir nenegatīva, tad tādu cenu vektoru  $P$  vienmēr var atrast ar (6.12) palīdzību.

Pielietojot formulu (6.12), ir noderīgi zināt formulu

$$(E - A^T)^{-1} = ((E - A)^{-1})^T,$$

kuru mēs šeit izvedīsim.

Acīmredzami, ka  $E^T = E$  un ka  $(E - A^T) = (E^T - A^T) = (E - A)^T$ .

Tagad atliek izmantot formulu (3.3) no punkta 3.7  $(C^T)^{-1} = (C^{-1})^T$ . Šajā gadījumā  $C$  lomu spēlē  $(E - A)$ :

$$(E - A^T)^{-1} = ((E - A)^T)^{-1} = ((E - A)^{-1})^T = S^T.$$

Mēs šeit apskatījām Ļeontjeva modeļa vienkāršotu variantu. Nopietnākos kursus šis skaistais modelis, kurš ļauj atrisināt daudzus praktiskus uzdevumus, tiek apskatīts sīkāk. V. Ļeontjevs (1906. g.), dzimis Sanktpēterburgā, ir viens no lielākajiem 20. gadsimta ekonomistiem. Par modeļa „resursi-galaprodukts” izstrādi un pielietojumiem viņam ir piešķirta Nobela prēmija ekonomikā.

## 6.4. Lineārās algebras elementi MS Excel

### 6.4.1. Darbības ar matricām

Pakete MS Excel sniedz plašas iespējas darbam ar matricām. Šajā paragrāfā parādīsim, kā MS Excel veikt matricu atņemšanu, saskaitīšanu un reizināšanu, kā aprēķināt matricas determinantu un atrast apgriezto matricu, kā izveidot transponēto matricu.

Matricu saskaitīšana un atņemšana MS Excel notiek pa elementiem. Matricu saskaitīšanas un atņemšanas gadījumā pietiek darba lapas vienā šūnā ierakstīt formulu, kura izpilda vajadzīgo darbību ar matricu atbilstošajiem elementiem, un pēc tam iekopēt šo formulu tajās bloka šūnās, kuras ir atvēlētas rezultāta pierakstīšanai.

Piemērs.

Dotas matricas  $A$  un  $B$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 8 \\ 15 & 15 & 9 \end{pmatrix} \text{ un } B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 7 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Izskaitļot matricu  $C = A + B$  un  $D = A - B$  summu un starpību.

MS Excel darba lapas šūnu blokā A3:C4 (zīm. 6.1) pa rindām ievadām matricas  $A$  elementus, bet šūnu blokā E3:G4 – matricas  $B$  elementus.

A7	A	B	C	D	E	F	G
	Darbības ar matricām						
	Matrica A			Matrica B			
	3	15	8		2	-2	7
	15	15	9		3	3	5
	Matrica C=A+B			Matrica C=A-B			
	5	13	15		1	17	1
	18	18	14		12	12	4

Zīm.6.1. Matricu saskaitīšanas un atņemšanas piemērs MS Excel

Lai saskaitītu matricas  $A$  un  $B$ , šūnā A7 ievadām formulu **=A3+E3**, šajā šūnā tiks iegūts pirmais meklējamās matricas  $C$  pirmais elements. Šo formulu

iekopējam šūnu blokā A7:C8 un tajā iegūsim rezultātu matricu. Formulu kopēšanas procedūru mēs apskatījām punktā 1.9.

Lai atrastu matricu  $A$  un  $B$  starpību, šūnā E7 ievadām formulu  $=A3-E3$ , šajā šūnā iegūsim meklējamās matricas  $D$  pirmo elementu. Šo formulu iekopējam šūnu blokā A7:C8 un tajā iegūstam rezultātu matricu.

Lai sareizinātu divas matricas, tiek izmantota MS Excel grupas Mat & Trig iebūvētā funkcija MMULT. Šajā grupā ir arī citas iebūvētās funkcijas, kuras paredzētas darbam ar matricām: MDETERM (matricas determinanta aprēķināšana) un MINVERSE (apgrieztās matricas atrašana). Lai izveidotu transponēto matricu, ir jāizmanto grupā Lookup & Reference iebūvētā funkcija TRANSPOSE.

Funkcijas MMULT, TRANSPOSE, MINVERSE sniedz rezultātu matricu veidā, izvietotu šūnu blokā. Ievadot jebkuru no nosauktajām funkcijām darba lapas attiecīgajā šūnā, parādās rezultātu matricas pirmais elements. Lai iegūtu šīs matricas visus elementus nepieciešams izpildīt šādas darbības:

- 1) sākot ar formulu saturošo šūnu, ir jānodala šūnu bloks, kurš ir vienāds ar rezultātu matricas izmēru;
- 2) atzīmēt ar peles cursoru formulas ievada rindā (t. i. rindā **Formula Bar**);
- 3) nospieš vienlaicīgi trīs taustiņus Ctrl-Shift-Enter.

Piemēri.

1. Dots šādas matricas  $A$  un  $B$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 15 & 9 \end{pmatrix} \text{ un } B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 7 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aprēķināt matricu reizinājumu  $C = AB$ .

A7	A	B	C	D	E	F
	<b>Matricu reizināšana</b>					
	<b>Matrica A</b>			<b>Matrica B</b>		
	3	8		2	-2	7
	15	9		3	3	5
	<b>C=A*B</b>					
	30	18	61			
	57	-3	150			

Zīm.6.2. Matricu reizināšanas piemērs

MS Excel darba lapas šūnu A3:B4 blokā (zīm. 6.2) pa rindām ievadām matricas  $A$  elementus, šūnu blokā D3:F4 – matricas  $B$  elementus. Šūnā A7 ievadām formulu  $=MMULT(A3:B4;D3:F4)$ , šajā šūnā iegūsim pirmo meklējamās

matricas elementu. Sākot no šūnas A7, atdalām šūnu bloku A7:C8, kurš atbilst atgūstamā rezultātu masīva izmēram (2x3). Atzīmēsim ar peles kursoru ievadāmās formulas rindā (t. i. rindā **Formula Bar**) un vienlaicīgi nospiežam trīs taustiņus **Ctrl-Shift-Enter**. Rezultātā blokā A7:C8 iegūstam matricu reizinājumu  $C = AB$ .

2. Dota šāda matrica  $A$

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 & 16 \\ 3 & 5 & 4 & 6 \\ 7 & -2 & 1 & 4 \\ 10 & 4 & 10 & -5 \end{pmatrix}$$

- 1) aprēķināt 4. kārtas matricas  $A$  determinantu;
- 2) transponēt matricu  $A$ ;
- 3) atrast matricas  $A$  apgriezto matricu.

MS Excel darba lapas šūnu blokā A2:D5 (zīm. 6.3) pa rindām ievadām matricas  $A$  elementus.

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	
13	=MDETERM(A2:D5)									
1	Matrica A									
2	8	3	4	16		4. kārtas determinants			1125	
3	3	5	4	6						
4	7	-2	1	4						
5	10	4	10	-5						
6										
7	Transponētā matrica					Apvērsta matrica				
8	8	3	7	10	-0.30667	0.44	0.44444	-0.97778		
9	3	5	-2	4	-0.46666	0.8	0.44444	-0.17778		
10	4	4	1	10	0.57333	-0.64	-0.68889	0.275556		
11	16	6	4	-5	0.16	-0.16	-0.13333	0.013333		

Zīm.6.3.Darbības ar matricu  $A$  MS Excel vidē

Lai aprēķinātu matricas  $A$  ceturtās kārtas determinantu šūnā I3 ievadām formulu **=MDETERM(A2:D5)**, rezultātā iegūstam, ka determinanta vērtība ir 1125.

Matricas  $A$  transponēšanas procedūra ietver sevī sekojošus soļus:

a) šūnā A8 ievadām formulu **=TRANSPOSE(A2:D5)**, šajā šūnā iegūstam meklējamās matricas pirmo elementu;

b) sākot no šūnas A8, atdalām šūnu bloku A8:D11, kurš atbilst atgūstamā rezultātu masīva izmēram;

c) atzīmējam ar peles kursoru formulas ievada rindā (t. i. rindā **Formula Bar**) un vienlaicīgi nospiežam trīs taustiņus **Ctrl-Shift-Enter**, rezultātā šūnu blokā A8:D11 iegūstam transponēto matricu (sk. zīm. 6.3).

Analoģiski aprēķinām apgriezto matricu:

a) šūnā F8 ievadām formulu **=MINVERSE(A2:D5)**, šajā šūnā iegūsim pirmo meklējamās matricas elementu;

b) sākot no šūnas F8, atdalām šūnu bloku F8:I11, kurš atbilst atpakaļ atgriežamā rezultātu masīva izmēram;

c) atzīmējam ar peles kursoru formulas ievada rindā (t. i. rindā **Formula Bar**) un vienlaicīgi nospiežam trīs taustiņus **Ctrl-Shift-Enter**, rezultātā šūnu blokā F8:I11 iegūstam matricas *A* apgriezto matricu (sk. zīm. 6.3).

#### 6.4.2. Vienādojumu sistēmu risināšana

Iepriekš apskatītās MS Excel funkcijas ļauj ar matricu metodi pietiekoši vienkārši atrisināt lineāru vienādojumu sistēmas. Parādīsim to ar piemēru.

Piemērs.

Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 6x_4 = 1,$$

$$3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 3,$$

$$5x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 4,$$

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 = 5$$

ar matricu paņēmienienu.

MS Excel darba lapas šūnu blokā A4:D6 (zīm. 6.4) pa rindām ievadām matricu, kuru veido koeficienti pie nezināmajiem, blokā E4:E7 – brīvo locekļu kolonnu.

B9	= {=MMULT(MINVERSE(A4:D7);E4:E7)}				
	A	B	C	D	E
1	<b>Lineāru vienādojumu sistēmu atrisināšana. Matricu metode</b>				
2	<b>Koeficientu pie nezināmajiem un brīvo locekļu matrica.</b>				
3	x1	x2	x3	x4	b
4	2	3	7	6	1
5	3	5	3	1	3
6	5	3	1	3	4
7	3	3	1	6	5
8	Atrisinājums				
9	x1=	0.185714286			
10	x2=	0.778571429			
11	x3=	-0.63571429			
12	x4=	0.457142857			

Zīm.6.4. Vienādojumu sistēmas atrisināšanas piemērs MS Excel vidē

Vienādojumu sistēmas atrisinājumu atrod pēc formulas  $X = A^{-1}B$ . Atbilstoši tam šūnā B9 ievadām formulu:

$$=MMULT(MINVERSE(A4:D7);E4:E7),$$

kur funkcija **MINVERSE** aprēķina koeficientu pie nezināmajiem matricas apgriezto matricu  $A^{-1}$ , bet funkcija **MMULT** atrod reizinājumu  $A^{-1}B$ . Rezultātā šūnā B9 iegūstam atrisinājumu kolonnas pirmo elementu  $x_1 = 0,185714286$ .

Lai atrastu rezultātu vektoru, sākot no šūnas B9, atdalām bloku B9:B12, kurā atradīsies izvadāmie rezultāti (vektors kolonna ar garumu 4). Noklikšķinām ar peles kursoru formulas ievada rindā (t. i. rindā **Formula Bar**) un vienlaicīgi nospiežam trīs taustiņus Ctrl-Shift-Enter. Rezultātā šūnu blokā B9:B12 parādīsies vienādojumu sistēmas atrisinājums.

### 6.4.3. Ļeontjeva „resursi-galaprodukts” modeļa realizācija MS Excel vidē

Iebūvētās MS Excel matricu funkcijas atļauj pietiekoši vienkārši risināt dažādus starpnozaru bilances uzdevumus. To skaitā nosauksim pilnā galaprodukta, pievienotās vērtības un līdzsvara cenu aprēķināšanas uzdevumus. Tālāk ir doti šādu uzdevumu risināšanas piemēri.

Piemēri.

1. **Pilnā galaprodukta aprēķins.** Dota tiešo izmaksu koeficientu matrica  $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$  un beigu pieprasījuma vektors  $Y = \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \\ 270 \end{pmatrix}$ . Noteikt

pilnā galaprodukta vektoru  $X$ .

MS Excel darba lapas šūnu blokā A3:C5 (zīm. 6.5) pa rindām ievadām tiešo izmaksu matricu  $A$ , blokā A7:C9 – vienības matricu  $E$ . Beigu pieprasījuma vektoru  $Y$  ievadām blokā E3:E5.

E12		=MMULT(MINVERSE(A12;C14);E3;E5)				
	A	B	C	D	E	F
1	Pilnā galaprodukta aprēķins					
2	A				Y	
3	0.4	0.2	0.3		380	
4	0.2	0.3	0.4		400	
5	0.1	0.2	0.2		270	
6	E					
7	1	0	0			
8	0	1	0			
9	0	0	1			
10						
11	E·A				$X=(E-A)^{-1}Y$	
12	0.6	-0.2	-0.3		1621.86	
13	-0.2	0.7	-0.4		1567.442	
14	-0.1	-0.2	0.8		932.093	

Zīm.6.5. Pilnā galaprodukta aprēķina piemērs

Pilnā galaprodukta vektoru  $X$  aprēķina pēc formulas  $X = (E - A)^{-1}Y$ . Aprēķinu pēc šīs formulas veiksīm divos posmos. Vispirms blokā A12:C14 aprēķinām matricu  $E - A$ , pēc tam šūnā E12 ievadām formulu

$$=MMULT(MINVERSE(A12:C14);E3:E5),$$

kur funkcija **MINVERSE** aprēķina matricai  $E - A$  apgriezto matricu  $(E - A)^{-1}$ , bet ar funkciju **MMULT** atrod reizinājumu  $(E - A)^{-1}Y$ . Rezultātā šūnā E12 iegūstam pilnā galaprodukta vektora pirmo elementu, vienādu ar 1621,86.

Lai iegūtu pārējos vektora  $X$  elementus, sākot ar šūnu E12 atdalām bloku E12:E14, kurā ir jāatrodas izvadāmajam rezultātam (vektors kolonna ar garumu 3). Noklikšķinām ar peles kursoru formulas ievada rindā (t. i. rindā **Formula Bar**) un nospiežam vienlaicīgi trīs taustiņus **Ctrl-Shift-Enter**. Rezultātā šūnu blokā E12:E14 iegūstam visus pilnā galaprodukta vektora  $X$  elementus (sk. zīm. 6.5).

2. *Pievienotās vērtības aprēķins.* Tehnoloģiskajai matricai no 1. piemēra

un cenu vektoram  $P = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$  noteikt pievienoto vērtību daļu vektoru  $V$ .

E12	X ✓ = {=MMULT(TRANSPOSE(A12:C14);E3:E5)}					
	A	B	C	D	E	F
1	<b>Pievienotās vērtības aprēķins</b>					
2		<b>A</b>			<b>P</b>	
3	0.4	0.2	0.3		10	
4	0.2	0.3	0.4		12	
5	0.1	0.2	0.2		7	
6		<b>E</b>				
7	1	0	0			
8	0	1	0			
9	0	0	1			
10						
11		<b>E-A</b>			<b>V=(E-A)<sup>T</sup>P</b>	
12	0.6	-0.2	-0.3		2.9	
13	-0.2	0.7	-0.4		5	
14	-0.1	-0.2	0.8		-2.2	

Zīm.6.6. Pievienotās vērtības aprēķina piemērs

Uzdevuma risināšanas kārtība (zīm. 6.6) lielā mērā ir analogiska iepriekš 1. piemērā apskatītajai, tikai ir šādas atšķirības.

Šūnu blokā E3:E5 ievada cenu vektoru  $P$ . Pievienoto vērtību daļu vektoru  $V$  aprēķina pēc formulas  $V = (E - A)^T P$ , un tādēļ šūnā E12 ievadām formulu

**=MMULT(TRANPOSE(A12:C14);E3:E5),**

kur funkcija **TRANPOSE** veic matricas  $(E - A)$  transponēšanu, t. i.  $(E - A)^T$ , bet funkcija **MMULT** aprēķina reizinājumu  $(E - A)^T P$ .

Rezultātu matricas (vektors kolonna ar garumu 3) izvadīšanas tehnoloģija apskatīta iepriekš 1. piemērā.

3. **Līdzsvara cenu aprēķins.** Veikt līdzsvara cenu aprēķinu modelim, kurū nosaka 1. piemēra tehnoloģiskā matrica, ja zināms pievienoto vērtību daļu vektors  $V = \begin{pmatrix} 3 \\ 2,4 \\ 3,2 \end{pmatrix}$ .

$$V = \begin{pmatrix} 3 \\ 2,4 \\ 3,2 \end{pmatrix}$$

Uzdevuma risināšanas kārtība (zīm. 6.7) lielā mērā ir analogiska iepriekš 1. piemērā apskatītajai, tikai ir šādas atšķirības.

Šūnu blokā **E3:E5** ievada pievienoto vērtību daļu vektoru  $V$ . Līdzsvara cenu vektoru  $P$  aprēķina pēc formulas  $P = ((E - A)^{-1})^T V$ , tādēļ šūnā **E12** tiek ievadīta formula

**=MMULT(TRANPOSE(MINVERSE(A12:C14));F3:F5),**

kur formula **MINVERSE** aprēķina matricai  $E - A$  apgriezto matricu  $(E - A)^{-1}$ , funkcija **TRANPOSE** veic matricas  $(E - A)^{-1}$  transponēšanu, t. i.  $((E - A)^{-1})^T$ , bet funkcija **MMULT** atrod reizinājumu  $((E - A)^{-1})^T V$ .

Rezultātu matricas (vektors kolonna ar garumu 3) izvadīšanas tehnoloģija ir apskatīta iepriekš 1. piemērā.

E12		={MMULT(TRANPOSE(MINVERSE(A12:C14);E3:E5)}					
	A	B	C	D	E	F	G
1	Līdzsvara cenu aprēķins						
2	A			V			
3	0.4	0.2	0.3	3			
4	0.2	0.3	0.4	2.4			
5	0.1	0.2	0.2	3.2			
6	E						
7	1	0	0				
8	0	1	0				
9	0	0	1				
10							
11	E-A			$P=((E-A)^{-1})^T V$			
12	0.6	-0.2	-0.3	10.57			
13	-0.2	0.7	-0.4	10.18			
14	-0.1	-0.2	0.8	13.05			

Zīm.6.7. Līdzsvara cenu aprēķina piemērs

## Jautājumi pašpārbaudei

1. Kas ir tiešo izmaksu koeficienti?
2. Pierakstiet modeli "resursi-galaprodukts" matricu formā.
3. Ko raksturo starpnozaru bilances matricas rindas un kolonnas?
4. Kas ir multiplikatoru matrica? Kāda ir tās koeficientu ekonomiskā jēga?
5. Noformulējiet modeļa produktivitātes pietiekamos nosacījumus.
6. Kā tiek aprēķinātas līdzsvara cenas?
7. Pieņemsim, ka  $Y$  – beigu pieprasījuma vektors,  $A$  – tiešo izmaksu koeficientu matrica. Kāda ir  $A \cdot Y$  un  $A^2 \cdot Y$  ekonomiskā jēga?

## Vingrinājumi

1. Dota tiešo izmaksu koeficientu matrica  $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,4 & 0 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix}$  un pilnā gala-

produkta vektors  $X = \begin{pmatrix} 250 \\ 180 \\ 200 \end{pmatrix}$ .

- a) Noteikt beigu galaprodukta vektoru.
  - b) Uzrakstīt starpnozaru bilances matricu.
  - c) Paskaidrot, ko parāda starpnozaru bilances matricas otrā kolonna un trešā rinda.
2. Dota starpnozaru bilances matrica

$$D = \begin{pmatrix} 290 & 180 & 230 & 80 \\ 300 & 120 & 230 & 100 \\ 250 & 160 & 190 & 60 \end{pmatrix}$$

Noteikt tiešo izmaksu koeficientu matricu.

3. Dota tiešo izmaksu koeficientu matrica

$$A = \begin{pmatrix} 0,45 & 0,3 & 0,15 \\ 0,2 & 0,4 & 0 \\ 0,25 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$$

un beigu pieprasījuma vektors  $Y = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix}$ ;

- a) noteikt pilnā galaprodukta vektoru;  
 b) uzrakstīt starpnozarū bilances matricu.

4. Dota tehnoloģiskā matrica

$$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,15 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,25 \\ 0,1 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}$$

un beigu pieprasījuma vektors  $Y = \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 120 \end{pmatrix}$ .

Noteikt pilnā galaprodukta vektoru, kurš nepieciešams, lai nodrošinātu tikai pirmās nozares beigu pieprasījumu (to reizēm sauc par dotās nozares beigu pieprasījuma ieguldījumu visā pilnajā galaproduktā).

5. Noteikt 4. piemēra tehnoloģiskai matricai un cenu vektoram  $P = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 3,8 \\ 4,0 \end{pmatrix}$

atbilstošo pievienotās vērtības daļu vektoru.

6. Veikt līdzsvara cenu aprēķinu modelim, kuru nosaka 4. piemēra tehnoloģiskā

matrica, ja zināms pievienotās vērtības daļu vektors  $V = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2 \\ 1,2 \end{pmatrix}$ .

7. Dota tiešo izmaksu koeficientu matrica  $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}$ , beigu pieprasījuma

vektors  $Y = \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \end{pmatrix}$  un cenu vektors  $P = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ ;

- uzrakstīt modeli "resursi-galaprodukts";
- atrast multiplikatoru matricu;
- atrast pilno galaproduktu  $X$ ;
- uzrakstīt starpnozarū bilances matricu;
- noteikt beigu pieprasījuma atsevišķo komponentu ieguldījumu pilnajā galaproduktā;
- noteikt pievienotās vērtības daļu vektoru  $V$ ;
- uzskatīt, ka 60% no vektora  $V$  veido pēc līguma nolīgto strādnieku darba alga, 20% – uzņēmēja peļņa,
  - noteikt, kā izmainīsies cenu vektors, ja:
    - darba alga pirmajā nozarē palielināsies par 40%;
    - otrās nozares uzņēmēja peļņa palielināsies par 25%;

- 2) noteikt, kā izmainīsies otrās nozares uzņēmēja peļņa, ja šīs nozares ražošanas cena palielināsies par 20%.

8. Atbildēt uz 7. uzdevuma jautājumiem, ja ir šādi dati:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} 200 \\ 120 \\ 100 \end{pmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

9. Zināma starpnozaru bilances matrica  $B$  par 1999. gadu

$$B = \begin{pmatrix} 40 & 20 & 30 \\ 25 & 45 & 35 \end{pmatrix}$$

un plānotais pilnā galaprodukta vektors  $X = \begin{pmatrix} 95 \\ 105 \end{pmatrix}$  par 2000. gadu.

a) Noteikt beigu galaprodukta vektoru 2000. gadam.

b) Paskaidrot, ko matricā  $B$  nozīmē cipari 20 un 30. Ko raksturo šīs matricas pirmā rinda un pirmā kolonna?

10. Zināma starpnozaru bilances matrica  $B$  par 1999. gadu

$$B = \begin{pmatrix} 120 & 100 & 80 \\ 110 & 140 & 90 \end{pmatrix}$$

un beigu galaprodukta vektors  $Y = \begin{pmatrix} 85 \\ 95 \end{pmatrix}$  par 2000. gadu. Noteikt pilnā galaprodukta vektoru 2000. gadam.

## 7. VIENARGUMENTA FUNKCIJAS

### 7.1. Definīcija

Funkcijas jēdziens ir viens no matemātikas pamatjēdzieniem. Šis nodaļas mērķis ir atgādināt lasītājiem funkcijas jēdzienu, padziļināt un paplašināt skolas kursā iegūtās zināšanas par funkciju īpašībām un parādīt iespējas tās izmantot ekonomikā.

Pēc šīs nodaļas apgūšanas jūs:

- 1) zināsit funkcijas definīciju un tās definēšanas veidus;
- 2) zināsit galvenās funkciju īpašības;
- 3) zināsit un mācēsiet uzzīmēt galveno elementāro funkciju grafikus;
- 4) mācēsiet izveidot funkciju grafikus, izmantojot funkciju grafiku pārveidojumus;
- 5) zināsit un mācēsiet izmantot dažas funkcijas, kuras lieto ekonomikā.

Jāatzīmē, ka nozīmīgākās funkciju pētīšanas metodes tiks apskatītas vēl citās tālākās šīs grāmatas nodaļās. Viens no šīs nodaļas svarīgiem uzdevumiem ir iemācīties veidot funkciju grafikus, izmantojot to galvenās īpašības, grafiku pārveidojumus, algebrisku izteiksmju pārveidojumus.

Par **mainīgo** sauc lielumu, kurš pētīšanas procesā var mainīt savas vērtības. Par **funkciju** sauc likumu, kurš viena mainīgā (saukta par neatkarīgo) vērtībām viennozīmīgi piekārto otra mainīgā (saukta par atkarīgo) vērtības. Neatkarīgo mainīgo sauc arī par funkcijas **argumentu**. Visu to vērtību kopu, kuras var pieņemt neatkarīgais mainīgais, sauc par funkcijas **definīcijas apgabalu**. Apzīmēsim to ar  $D$ . Visu to vērtību kopu, kuras var pieņemt atkarīgais mainīgais, sauc par **funkcijas vērtību apgabalu**, apzīmēsim to ar  $E$ . Tātad var teikt, ka funkcija ir likums, kurš viennozīmīgi katram kopas  $D$  elementam piekārto kādu kopas  $E$  elementu. Tādējādi, lai definētu funkciju, vispirms ir jābūt dotām kopām  $D$  un  $E$ , otrkārt, ir jābūt dotam likumam, kurš katram kopas  $D$  elementam piekārto kopas  $E$  elementu. Apzīmēsim, piemēram, funkciju ar burtu  $f$ , neatkarīgo mainīgo ar  $x$  un atkarīgo mainīgo ar  $y$ . Izmantojot šos apzīmējumus, funkciju var pierakstīt šādi:  $y = f(x)$  jeb  $x \xrightarrow{f} y$ . Dažreiz funkcijas un atkarīgā mainīgā apzīmēšanai izmanto vienu un to pašu burtu. Tad funkcijas pieraksts izskatītos, piemēram, šādi:  $y = y(x)$ .

Par  $x$  un  $y$  var būt jebkura veida elementi. Pašlaik mēs apskatīsim tikai funkcijas, kuru definīcijas apgabali un vērtību apgabali ir skaitļu kopas. Piemēram,  $y = x^2$ ; šai funkcijai definīcijas apgabals  $D$  ir visu reālo skaitļu kopa, bet

vērtību apgabals  $E$  ir visu nenegatīvo reālo skaitļu kopa. Funkcijai  $y = \sqrt{1-x^2}$  definīcijas apgabalu iegūst no nosacījuma  $1-x^2 \geq 0$ , tātad  $x^2 \leq 1$  un  $|x| \leq 1$ . Mazākā funkcijas vērtība tiek sasniegta pie  $x = \pm 1$  ( $|x| = 1$ ) un ir vienāda ar nulli. Samazinoties  $|x|$ , funkcijas vērtības nepārtraukti palielinās un sasniedz savu lielāko vērtību, vienādu ar vieniņu, pie  $x = 0$ . Tātad funkcijas vērtību apgabals ir nogrieznis  $[0,1]$ .

Atkarīgā un neatkarīgā mainīgā apzīmēšanai var tikt izmantoti jebkuri burti, piemēram,

$$u = v^2, \quad y = x^2, \quad z = t^2;$$

šī ir viena un tā pati funkcija, viena un tas pats atbilstības likums.

Pieņemsim, ka dota funkcija  $y = f(x)$ . Ja  $x$  pieņem konkrētu vērtību  $x = a$ , tad tam atbilst  $y$  vērtība vienāda ar

$$f(a): a \xrightarrow{f} f(a).$$

Pēdējo sauc par funkcijas vērtību pie  $x = a$  vai par funkcijas vērtību punktā  $a$ . Piemēram, ja  $y = \sin x$ , tad punktā  $\pi/2$  šīs funkcijas vērtība ir  $\sin \pi/2 = 1$ .

## 7.2. Funkciju definēšanas veidi

Visvienkāršākais funkcijas definēšanas veids – *tabulārais*; izveido tabulu ar divām kolonnām (vai divām rindām), kreisajā kolonnā ieraksta argumenta vērtības, labajā – atbilstošās funkcijas vērtības. Piemēram, šāda tabula (tab. 7.1) nozīmē, ka

$$f(0) = 0; \quad f(0,1) = 0,2; \quad f(0,5) = 1; \quad \dots$$

Tabula 7.1

$x$	$y$
0	0
0,1	0,2
0,5	1
1	2
2	4
3	6

Šis paņēmiens ne vienmēr ir pielietojams. Piemēram, funkcijai

$$y = 2x + 1$$

nav iespējams ierakstīt tabulā visas iespējamās  $x$  vērtības. Šis paņēmieni ir ļoti svarīgs, piemēram, lai definētu funkcijas, iegūtas no eksperimentiem.

Piemērs. Kioskā pārdod saldējumu. Tabulā 7.2 ir attēlots dienā pārdoto porciju skaits, atkarībā no vienas porcijas cenas (pie vieniem un tiem pašiem citiem apstākļiem):

Tabula 7.2

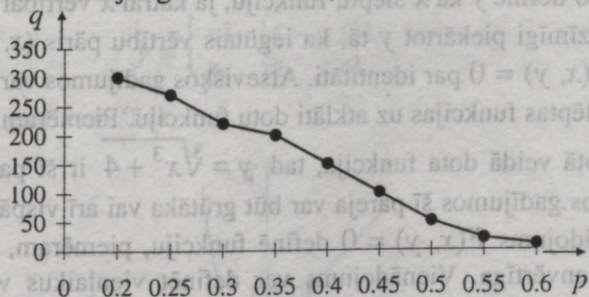
$p$	$q$
0,20	300
0,25	270
0,30	220
0,35	200
0,40	150
0,45	100
0,50	50
0,55	20
0,60	10

Kreisās puses kolonnā – cena santīmos (apzīmēta ar burtu  $p$ ), labās puses kolonnā – pārdoto porciju skaits  $q = f(p)$ , t.i. dota funkcija, kura parāda pieprasījuma atkarību no cenas. Šādām funkcijām (sauktām par pieprasījuma funkcijām), ir liela nozīme ekonomikā, mēs pie tām vēl atgriezīsimies.

Cits funkcijas definēšanas veids – *grafiskais*. Par funkcijas

$$y = f(x)$$

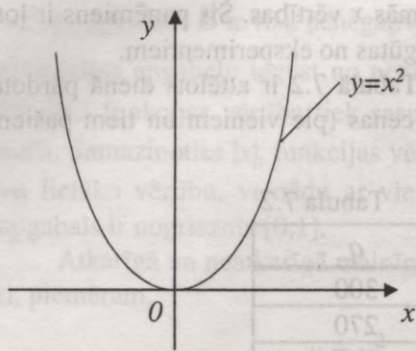
grafiku sauc visu to plaknes punktu kopu, kuru koordinātes ir  $(x, f(x))$ . Iepriekšējā piemērā minētās funkcijas grafiks ir šāds (zīm. 7.1)



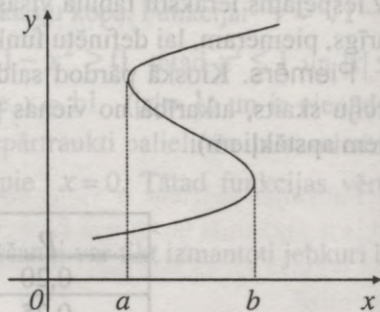
Zīm. 7.1.

Labākai uzskatāmībai grafika punkti ir savienoti ar taisnes nogriežņiem.

Kā cits piemērs var kalpot funkcijas  $y = x^2$  grafiks.



Zīm. 7.2.



Zīm. 7.3.

Atzīmēsim, ka nākošā līnija (zīm. 7.3) nav funkcijas grafiks, jo intervālā no  $a$  līdz  $b$  nenotiek funkcijas definīcijā prasītais nosacījums, ka funkcijai jābūt vienvērtīgai. Katrai  $x$  vērtībai no šī intervāla atbilst vairākas  $y$  vērtības.

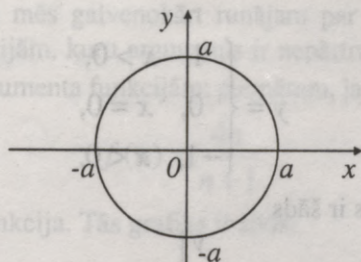
*Analītiskais* funkcijas definēšanas veids – funkcija tiek definēta ar formulu, ar kuras palīdzību dotajām argumenta vērtībām var noteikt atbilstošās funkcijas vērtības, piemēram,

$$y = x^2, \quad y = x^2 + 2^x + 4.$$

Vienlaikus ar šādām (kā šajos piemēros) *atklāti* definētām funkcijām funkcionāla atkarība starp mainīgajiem var tikt dota ar vienādojumu,

$$F(x, y) = 0,$$

kurš saista mainīgos  $x$  un  $y$ , bet kurā atkarīgais mainīgais nav atklāti izteikts ar neatkarīgo mainīgo, piemēram,  $x^3 - y^3 + 4 = 0$ . Šāda veida funkcionālas sakarības starp mainīgajiem  $x$  un  $y$  sauc par *slēptām*. Stingri runājot, vienādojums  $F(x, y) = 0$  definē  $y$  kā  $x$  slēptu funkciju, ja katrai  $x$  vērtībai no kādas kopas  $X$  var viennozīmīgi piekārtot  $y$  tā, ka iegūtais vērtību pāris  $(x, y)$  pārvērš vienādojumu  $F(x, y) = 0$  par identitāti. Atsevišķos gadījumos var diezgan vienkārši pāriet no slēptas funkcijas uz atklāti dotu funkciju. Piemēram, ja  $x^3 - y^3 + 4 = 0$  – slēptā veidā dota funkcija, tad  $y = \sqrt[3]{x^3 + 4}$  ir šī pati funkcija atklātā formā. Citos gadījumos šī pāreja var būt grūtāka vai arī vispār neiespējama. Ne katrs vienādojums  $F(x, y) = 0$  definē funkciju, piemēram, tādēļ, ka funkcija neiznāk vienvērtīga. Vienādojums var definēt vienlaikus vairākas funkcijas. Piemēram, no vidusskolas kursa pazīstamajam riņķa līnijas vienādojumam  $x^2 + y^2 = a^2$  atbilst divas funkcijas:  $y = \sqrt{a^2 - x^2}$  un  $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$ . Pirmās funkcijas grafiks ir augšējais pusriņķis, bet otrās grafiks – apakšējais (zīm. 7.4).



Zīm. 7.4.

Funkcionālu sakarību starp mainīgajiem  $x$  un  $y$  var iegūt ar trešā palīgmainīgā, saukta par parametru, palīdzību, proti – katrs mainīgais tiek definēts kā palīgparametra funkcija:

$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

Šajā gadījumā saka, ka funkcija ir dota *parametriskā* formā. Tā notiek, piemēram, aprakstot objekta kustību plaknē, kad katra koordināte  $x$ ,  $y$  tiek dota kā laika funkcija:

$$x = \varphi(t); \quad y = \psi(t).$$

Tad abas funkcijas kopā nosaka šī objekta kustības trajektoriju.

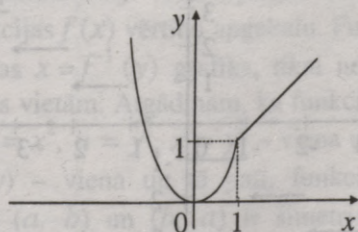
Piemērs. Funkcija  $y = \sqrt{1-x^2}$  var tikt definēta parametriski:

$$\begin{cases} y = \sin t; \\ x = \cos t; \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Funkcija var tikt noteikta ar vairākām formulām, katra no kurām darbojas dažādos intervālos, piemēram:

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{ja } x \leq 1, \\ x, & \text{ja } x > 1. \end{cases}$$

Šīs funkcijas grafiks ir šāds

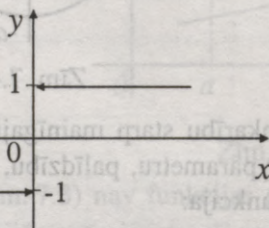


Zīm. 7.5.

Vēl viens piemērs.

$$y = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Šīs funkcijas grafiks ir šāds



Zīm. 7.6.

Šo funkciju apzīmē  $y = \operatorname{sgn} x$ .

Eksistē funkcijas, kuras nevar definēt ne ar vienu no iepriekš minētajiem paņēmieniem. Šādas funkcijas definē vārdiski aprakstot likumu, ar kuru viena mainīgā vērtībām tiek piekārtotas otra mainīgā vērtības.

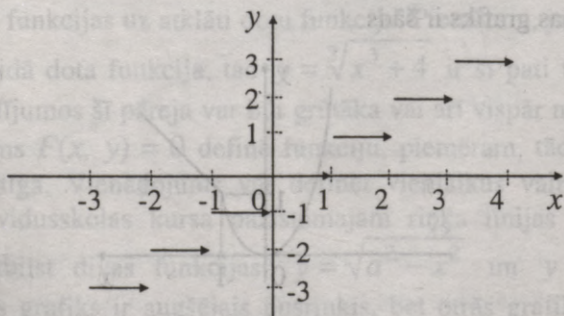
Piemērs.

$$y = \begin{cases} 1, & \text{ja } x \text{ - racionāls skaitlis,} \\ 0, & \text{ja } x \text{ - iracionāls skaitlis.} \end{cases}$$

Šo sauc par *Dirihlē funkciju*. Ne grafiski, ne analītiski, ne tabulāri nav iespējams definēt šo funkciju.

Dažreiz līdzīgi definē funkciju, kuru nevar pierakstīt analītiski, un pēc tam veido tās grafiku.

Piemērs:  $y(x)$  ir lielākais veselais skaitlis, kurš ir mazāks vai vienāds kā  $x$ . Apzīmē:  $y = E(x)$ . Piemēram,  $E(6,2) = 6$ . Šīs funkcijas grafiks ir

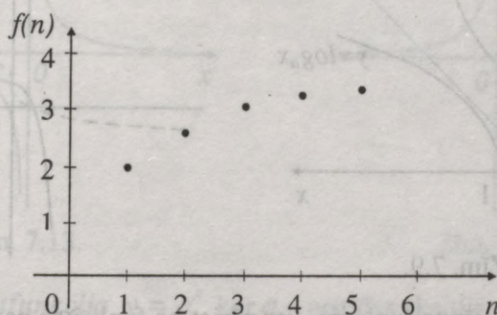


Zīm. 7.7.

Piezīme. Līdz šim mēs galvenokārt runājam par nepārtraukta argumenta funkcijām, t. i. Par funkcijām, kuru arguments ir nepārtraukts lielums. Tieši tāpat var runāt par diskrēta argumenta funkcijām; piemēram, ja  $n$  – naturāls skaitlis, tad

$$f(n) = \frac{4n}{n+1}$$

ir naturāla argumenta funkcija. Tās grafiks ir šāds:



Zīm. 7.8.

### 7.3. Apvērstā funkcija

Apskatām funkciju  $y = f(x)$ , kura katrai  $x$  vērtībai no definīcijas apgabala  $X$  piekārto kādu  $y$  vērtību no kopas  $Y$ . Pieņemsim, ka divām dažādām argumenta vērtībām  $x_1$  un  $x_2$  atbilst dažādas funkcijas vērtības, t. i. ja  $x_1 \neq x_2$ , tad izpildās  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .

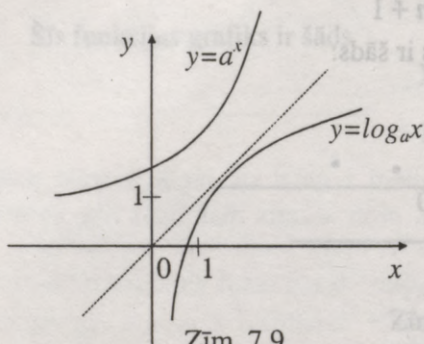
Tad katrai  $y \in Y$  vērtībai atradīsies tāda viena vienīga vērtība  $x \in X$ , ka  $f(x) = y$ .

Likums, kurš katram  $y \in Y$  piekārto atbilstošo  $x$  vērtību, definē funkcionālu sakarību  $\varphi(y) = x$ . Šo funkciju sauc par funkcijas  $y = f(x)$  apvērsto (inverso) funkciju. To apzīmē  $x = f^{-1}(y)$ . Apvērstās funkcijas definīcijas apgabals sakrīt ar tiešās funkcijas  $f(x)$  vērtību apgabalu. Funkcijas  $y = f(x)$  grafiks ir arī apvērstās funkcijas  $x = f^{-1}(y)$  grafiks, tikai neatkarīgais un atkarīgais mainīgie ir samainījušies vietām. Atgādinam, ka funkcija nav atkarīga no tā, kā ir apzīmēti mainīgie:  $y = x^2$ ,  $u = y^2$ ,  $x = y^2$  – viena un tā pati funkcija. Tāpat  $y = f^{-1}(x)$  un  $x = f^{-1}(y)$  – viena un tā pati, funkcijai  $y = f(x)$  apvērstā funkcija. Tā kā punkti  $(a, b)$  un  $(b, a)$  ir simetriski attiecībā pret I–III kvadranta bisektrisi, tad, apvērstās funkcijas  $y = f^{-1}(x)$  grafiks ir simetrisks tiešās funkcijas  $y = f(x)$  grafikam attiecībā pret šo bisektrisi.

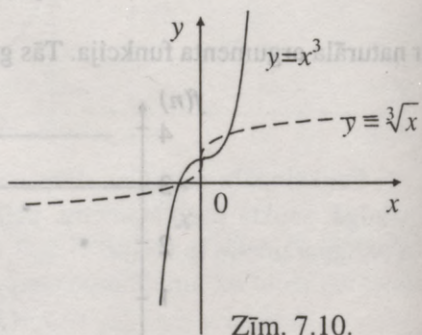
Piemēri.

1. Funkcijai  $y = a^x$  apvērstā ir funkcija  $x = \log_a y$  jeb  $y = \log_a x$ , ja argumentu apzīmē ar  $x$ , bet atkarīgo mainīgo ar  $y$ .

2. Funkcijai  $y = x^3$  apvērstā ir funkcija  $y = \sqrt[3]{x}$ .



Zīm. 7.9.



Zīm. 7.10.

Izmantojot apvērsto funkciju, var pāriet no funkcijas parametriskās formas uz atklāto formu:

Pieņemsim, ka funkcija dota parametriiski:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

pie kam funkcijai  $x = \varphi(t)$  eksistē apvērstā  $t = \varphi^{-1}(x)$ . Ievietojot funkcijā  $y = \psi(t)$  izteiksmi  $t = \varphi^{-1}(x)$ , iegūstam  $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$  – atklāti definētu funkciju.

#### 7.4. Galvenās elementārās funkcijas

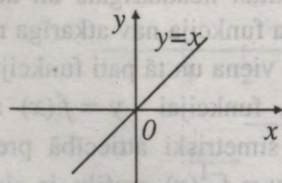
Pie galvenajām elementārajām funkcijām pieder:

1. **Pakāpes funkcija**  $y = x^a$ , kur  $a$  – reāls skaitlis; tai skaitā:

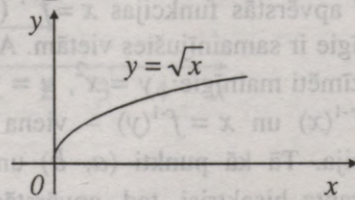
ja  $a = 1$ , tad

$y = x$  – lineāra funkcija;

ja  $a = \frac{1}{2}$ , tad  $y = x^{1/2}$ ;



Zīm. 7.11.

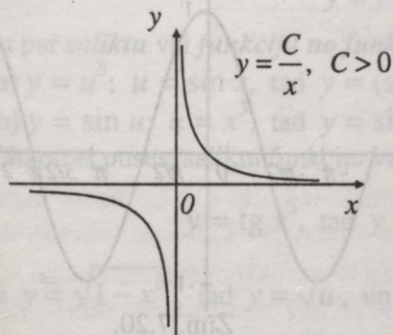


Zīm. 7.12.

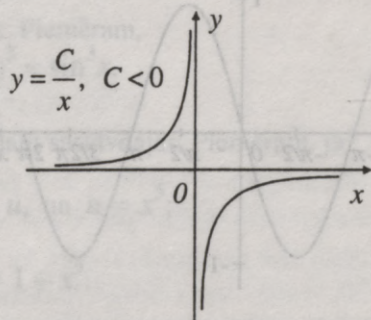
ja  $a = -1$ , tad  $y = Cx^{-1} = C/x$  – hiperbola; pie kam,

ja  $C > 0$ , hiperbola atrodas 1. un 3. kvadrantos;

ja  $C < 0$ , hiperbola atrodas 2. un 4. kvadrantos.

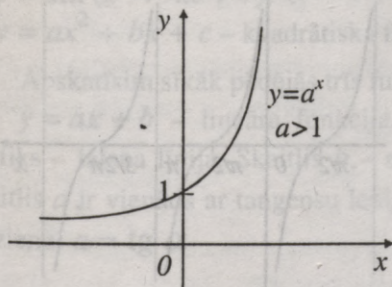


Zīm. 7.13.

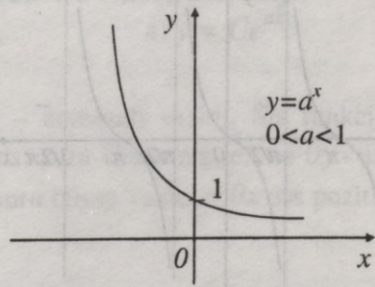


Zīm. 7.14.

2. Eksponentfunkcija  $y = a^x$ , kur  $a$  – pozitīvs skaitlis,  $a \neq 1$ .

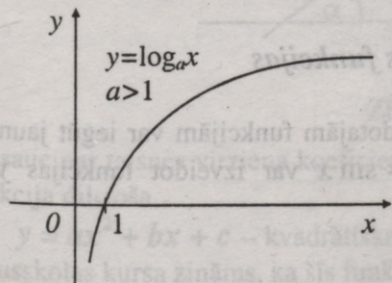


Zīm. 7.15.

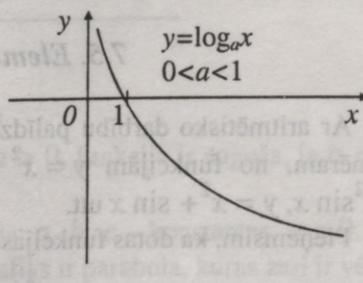


Zīm. 7.16.

3. Logaritmiskā funkcija  $y = \log_a x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .



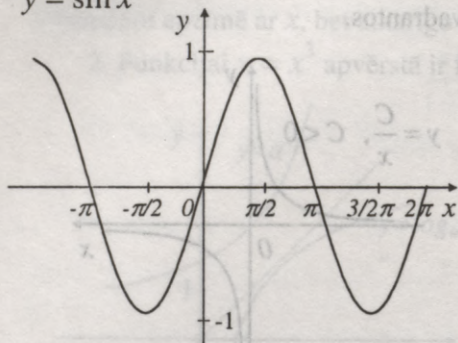
Zīm. 7.17.



Zīm. 7.18.

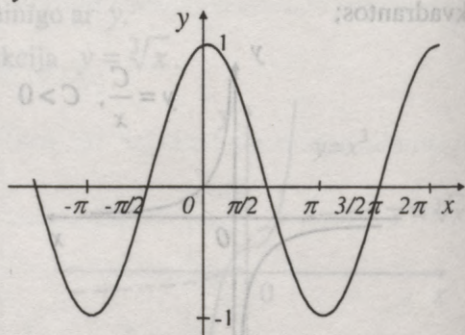
#### 4. Trigonometriskās funkcijas:

$$y = \sin x$$



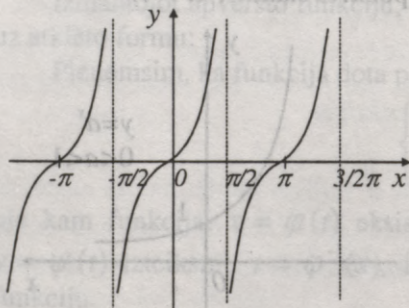
Zīm. 7.19.

$$y = \cos x$$



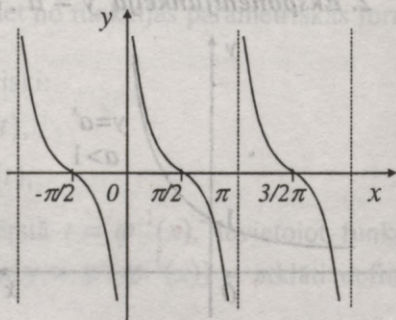
Zīm. 7.20.

$$y = \operatorname{tg} x$$



Zīm. 7.21.

$$y = \operatorname{ctg} x$$



Zīm. 7.22.

#### 5. Apvērstās trigonometriskās funkcijas:

$$y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad y = \operatorname{arctg} x, \quad y = \operatorname{arcctg} x.$$

#### 7.5. Elementārās funkcijas

Ar aritmētisko darbību palīdzību no dotajām funkcijām var iegūt jaunas; piemēram, no funkcijām  $y = x^2$  un  $y = \sin x$  var izveidot funkcijas  $y = x^2 \sin x$ ,  $y = x^2 + \sin x$  utt.

Pieņemsim, ka dotas funkcijas

$$y = f(u) \quad \text{un} \quad u = \varphi(x).$$

Ja funkcijas  $\varphi(x)$  vērtību apgabals pieder funkcijas  $f(u)$  definīcijas apgabalam, tad šīs funkcijas definē jaunu funkciju

$$y = f[\varphi(x)],$$

sauktu par *saliktu* vai *funkciju no funkcijas*. Piemēram,

a)  $y = u^3$ ;  $u = \sin x$ , tad  $y = (\sin x)^3 = \sin^3 x$ .

b)  $y = \sin u$ ;  $u = x^3$ , tad  $y = \sin x^3$ .

No otras puses, saliktu funkciju var sadalīt sastāvdaļās. Piemēram, ja

$$y = \operatorname{tg} x^5, \text{ tad } y = \operatorname{tg} u, \text{ un } u = x^5;$$

jeb, ja  $y = \sqrt{1-x^3}$ , tad  $y = \sqrt{u}$ , un  $u = 1-x^3$ .

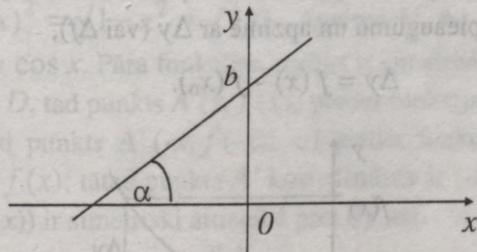
Par *elementārām* sauc funkcijas, kuras var iegūt no galvenajām elementārām funkcijām, ar galīga skaita aritmētisku darbību un saliktas funkcijas veidošanas palīdzību; piemēram,

1)  $y = \sin(x^2 + 4x + 7)$ ; 2)  $y = ax + b$  – lineāra funkcija;

3)  $y = ax^2 + bx + c$  – kvadrātiska funkcija; 4)  $y = Ce^{ax}$ .

Apskatīsim sīkāk pēdējās trīs funkcijas.

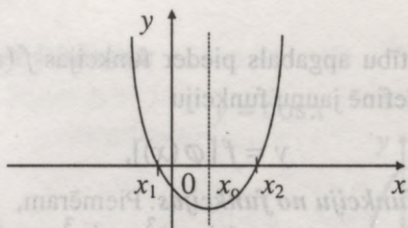
$y = ax + b$  – lineāra funkcija,  $a, b$  – konstanti skaitļi. Šīs funkcijas grafiks – taisna līnija. Skaitlis  $b$  – nogrieznis, kuru taisne atgriež no  $Oy$  ass; skaitlis  $a$  ir vienāds ar tangensu leņķim  $\alpha$ , kuru taisne veido ar  $Ox$  ass pozitīvo virzienu:  $a = \operatorname{tg} \alpha$ .



Zīm. 7.23.

To sauc par taisnes virziena koeficientu. Ja  $a > 0$ , funkcija ir augoša, ja  $a < 0$ , funkcija dilstoša.

$y = ax^2 + bx + c$  – kvadrātiska funkcija;  $a, b, c$  – konstantes,  $a \neq 0$ . No vidusskolas kursa zināms, ka šīs funkcijas grafiks ir parabola, kuras zari ir vērsti uz augšu, ja  $a > 0$ , un zari vērsti uz leju, ja  $a < 0$ . Kvadrātrinoma  $ax^2 + bx + c$ , saknes  $x_1, x_2$ , ja tās eksistē, ir grafika krustpunkti ar  $Ox$  asi,



Zīm. 7.24.

$x_0 = (x_1 + x_2) / 2$  – parabolas virsotnes abcisa, bet  $f(x_0)$  – šīs virsotnes ordināta.

**Funkcija  $y = Ce^{ax}$** ;  $C, a$  – konstantes. Ar burtu  $e$  ir apzīmēts iracionāls skaitlis 2,7182... (sīkāk par to tiks stāstīts 9. nodaļā). Funkciju sauc par eksponenciālu; šajā gadījumā saka arī, ka  $y$  mainās pēc eksponenciāla likuma.

Jāatzīmē, ka daudzas funkcijas, kuras nav elementāras (neelementāras funkcijas), tiek izmantotas praktiskos uzdevumos, tai skaitā ekonomiskos uzdevumos. Katrā statistikas mācību grāmatā ir vairāku tādu funkciju vērtību tabulas.

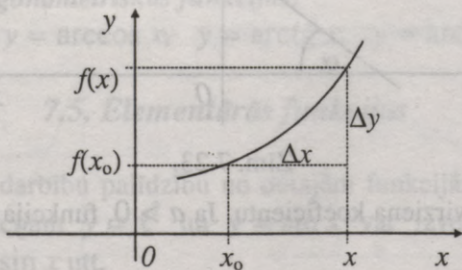
### 7.6. Argumenta un funkcijas pieaugums

Apskatīsim funkciju  $y = f(x)$ . Ja arguments izmainās no vērtības  $x_0$  līdz vērtībai  $x$ , tad saka, ka arguments ir guvis pieaugumu  $x - x_0$ . To apzīmē ar simbolu  $\Delta x$ :

$$\Delta x = x - x_0. \quad (7.1)$$

Savukārt, starpību starp funkcijas vērtībām punktos  $x$  un  $x_0$ , t. i.,  $f(x) - f(x_0)$ , sauc par funkcijas pieaugumu un apzīmē ar  $\Delta y$  (vai  $\Delta f$ ),

$$\Delta y = f(x) - f(x_0). \quad (7.2)$$



Zīm. 7.25.

Tā kā  $x = x_0 + \Delta x$ , tad funkcijas pieaugumu (2.2) var pierakstīt šādi

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Piemērs. Atrast funkcijas  $y = 3 \log_2 x$  pieaugumu, ja arguments izmaina savu vērtību no  $x_0 = 4$  līdz  $x = 8$ . Saskaņā ar definīciju

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = 3 \log_2 8 - 3 \log_2 4 = 3 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 9 - 6 = 3.$$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

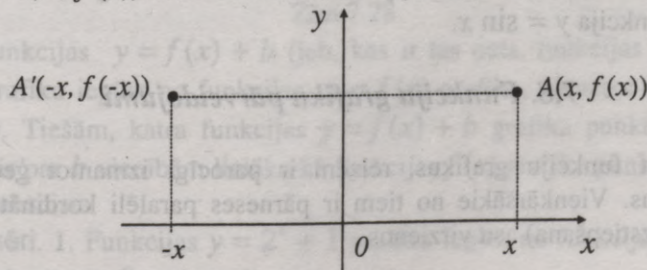
### 7.7. Dažas funkciju īpašības

Funkciju  $y = f(x)$  sauc par *augošu* intervālā  $X$ , ja lielākai argumenta vērtībai atbilst lielāka funkcijas vērtība, un sauc par *dilstošu*, ja lielākai argumenta vērtībai atbilst mazāka funkcijas vērtība.

Funkcija var būt vienā intervālā augoša, bet citā dilstoša, piemēram funkcija  $y = x^2$  intervālā  $(-\infty, 0)$  ir dilstoša, bet intervālā  $(0, +\infty)$  augoša. Intervāli, kuros funkcija ir vai nu tikai augoša, vai tikai dilstoša, tiek saukti par funkcijas *monotonitātes intervāliem*.

Analoģiski tam, kā sakarību  $y = kx$  kad  $k > 0$  sauc par *tiešo proporcionalitāti*, bet sakarību  $y = 1/x$  par *apgriezto proporcionalitāti*, reizēm sakarību starp  $x$  un  $y$ , izteiktu ar augošu funkciju, ekonomikā sauc par *tiešu*, bet izteiktu ar dilstošu funkciju par *apgrieztu*.

Funkciju  $y = f(x)$  sauc par *pāra*, ja jebkuram skaitlim  $x$ , kurš pieder definīcijas apgabalam  $D$ , arī skaitlis  $-x$  pieder  $D$  un  $f(-x) = f(x)$ . Piemēram, funkcijas  $y = \sqrt{1-x^2}$ ,  $y = \cos x$  ir pāra. Tiešām, ja  $y = \sqrt{1-x^2}$ , tad  $f(-x) = \sqrt{1-(-x)^2} = \sqrt{1-x^2} = f(x)$ . Analoģiski, no kosinusa funkcijas īpašības  $\cos(-x) = \cos x$ . Pāra funkcijas grafiks ir simetrisks attiecībā pret  $Oy$  asi. Tiešām, ja  $x \in D$ , tad punkts  $A(x, f(x))$  pieder funkcijas grafikam. Tā kā  $-x$  arī pieder  $D$ , tad punkts  $A'(-x, f(-x))$  arī pieder funkcijas grafikam. Pēc definīcijas  $f(-x) = f(x)$ ; tātad punkta  $A'$  koordinātes ir  $(-x, f(x))$ , bet punkti  $(x, f(x))$  un  $(-x, f(x))$  ir simetriski attiecībā pret  $Oy$  asi.



Zīm. 7.26.

Funkciju  $y = f(x)$  sauc par *nepāru*, ja jebkuram  $x$  no definīcijas apgabala  $D$  izpildās  $-x \in D$  un  $f(-x) = -f(x)$ . Piemēram,  $y = x^3$ ,  $y = \sin x$ . Nepāru funkcijas grafiks ir simetrisks attiecībā pret koordinātu sākuma punktu.

Atzīmēsim, ka pēc definīcijas kā pāru, tā nepāru funkcijas definīcijas apgabali ir simetriski attiecībā pret punktu  $O$ . Atzīmēsim arī, ka ne katra funkcija ir pāru jeb nepāru. Piemēram, funkcija  $y = (x + 1)^2$  vai  $y = x^3 + x^2$  utt. Šādu funkciju grafiki nav simetriski ne pret  $Oy$  asi, ne pret koordinātu sākuma punktu.

Ņemot vērā pāru un nepāru funkciju grafiku simetrijas īpašības, pietiek izpētīt šīs funkcijas tikai pie pozitīvām (jeb tikai pie negatīvām)  $x$  vērtībām.

Funkciju  $y = f(x)$  sauc par *periodisku*, ja eksistē tāds skaitlis  $T > 0$ , ka

$$f(x + T) = f(x). \quad (7.3)$$

Mazāko skaitli  $T$ , kuram piemīt šāda īpašība, sauc par funkcijas *periodu*. Piemēram, funkcija  $y = \sin x$  – periodiska ar periodu  $2\pi$ , bet funkcija  $y = \operatorname{tg} x$  – periodiska ar periodu  $\pi$ .

Reizēm par periodu sauc jebkuru  $T$ , kuram izpildās (2.3), bet mazāko  $T$  ar šādu īpašību sauc par mazāko periodu.

Atzīmēsim, ka ir pietiekami periodiskas funkcijas grafiku izpētīt intervālā  $[0, T]$ , jo funkcijas vērtības atkārtojas.

Par funkcijas  $y = f(x)$  *nulli* (jeb *sakni*) sauc tādu skaitli  $x$ , kuram  $f(x) = 0$ . Ģeometriski funkcijas nulles ir funkcijas grafika krustpunkti ar abscisu asi. Piemēram, funkcijai  $y = x^2 - 5x + 4$  tie ir punkti  $x = 1$  un  $x = 4$ .

Funkciju  $y = f(x)$  sauc par *ierobežotu no augšas*, ja eksistē tāds skaitlis  $M$ , ka visiem  $x$  izpildās nevienādība  $f(x) < M$ . Analogiski (duālā veidā) definē funkciju, *ierobežotu no apakšas*.

Piemērs. Funkcija  $y = a^x$  ierobežota no apakšas,  $a^x > 0$  visiem  $x$ . Skaitļa  $M$  lomū spēlē  $0$ .

Funkciju sauc par *ierobežotu*, ja tā ir ierobežota no augšas un no apakšas. Piemēram, funkcija  $y = \sin x$ .

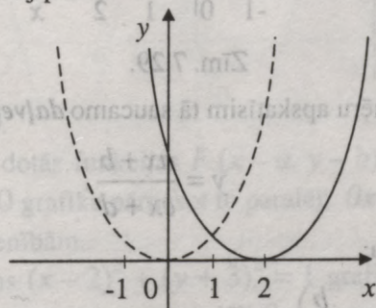
## 7.8. Funkciju grafiku pārveidojumi

Apskatot funkciju grafikus, reizēm ir parocīgi izmantot ģeometriskus pārveidojumus. Vienkāršākie no tiem ir pārnese paralēli kordinātu asīm un saspišana (izstiepšana) asu virzienos.

1) Funkcijas  $y = f(x - a)$  grafiku iegūst no funkcijas  $y = f(x)$  grafika ar paralēlu pārnēsi (nobīdi) gar  $Ox$  asi par  $a$  vienībām. Tiešām, lai funkcija  $f(x - a)$  iegūtu to pašu vērtību, ko funkcija  $f(x)$ , funkcijas  $f(x - a)$  argumentu vajag palielināt par  $a$ .

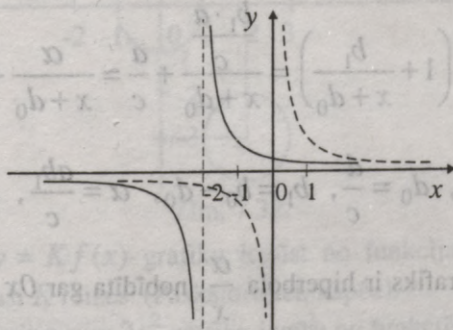
Piemēri.

1. Funkcijas  $y = (x - 2)^2$  grafiku iegūst no funkcijas  $y = x^2$  grafika, pārnēsot to paralēli  $Ox$  asij par 2.



Zīm.7.27.

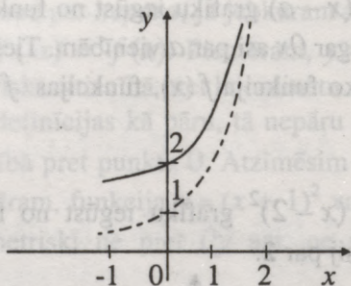
2. Funkcijas  $y = 1/(x + 2)$  grafiku iegūst no funkcijas  $y = 1/x$  grafika, pārnēsot to paralēli  $Ox$  asij par -2.



Zīm.7.28.

2) Funkcijas  $y = f(x) + b$  (jeb, kas ir tas pats, funkcijas  $y - b = f(x)$  grafiks) grafiku iegūst no funkcijas  $y = f(x)$  grafika, pārnēsot to paralēli  $Oy$  asij par  $b$ . Tiešām, katra funkcijas  $y = f(x) + b$  grafika punkta ordināta ar abscisu  $x$  ir par  $b$  vienībām lielāka kā funkcijas  $f(x)$  grafika punkta ordināta ar tādu pašu abscisu.

Piemēri. 1. Funkcijas  $y = 2^x + 1$  grafiku iegūst no funkcijas  $y = 2^x$  grafika, pārbīdot to gar  $Oy$  asi par 1.



Zīm. 7.29.

2. Kā svarīgu piemēru apskatīsim tā saucamo *daļveida-lineāro* funkciju

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Pārveidosim šo funkciju:

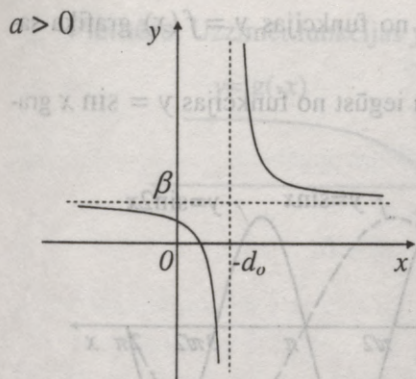
$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a\left(x + \frac{b}{a}\right)}{c\left(x + \frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c} \cdot \frac{x + b_0}{x + d_0} = \frac{a}{c} \cdot \frac{(x + d_0) + (b_0 - d_0)}{x + d_0} =$$

$$= \frac{a}{c} \left(1 + \frac{b_1}{x + d_0}\right) = \frac{b_1 \cdot a}{c} \cdot \frac{1}{x + d_0} + \frac{a}{c} = \frac{\alpha}{x + d_0} + \beta,$$

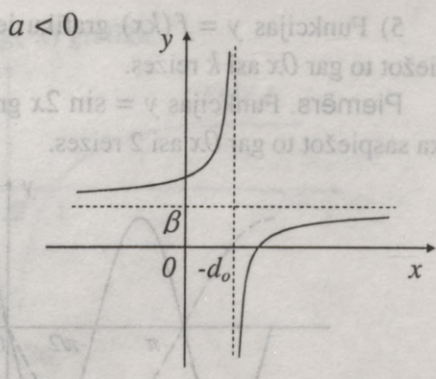
$$b_0 = \frac{b}{a}, \quad d_0 = \frac{d}{c}, \quad b_1 = b_0 - d_0, \quad \alpha = \frac{ab_1}{c}, \quad \beta = \frac{a}{c}.$$

Šīs funkcijas grafiks ir hiperbola  $\frac{\alpha}{x}$ , nobīdīta gar  $Ox$  asi par  $-d_0 = -\frac{d}{c}$

un gar  $Oy$  asi par  $\beta = \frac{a}{c}$ .



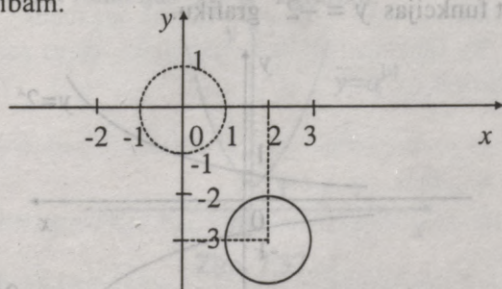
Zīm. 7.30.



Zīm. 7.31.

3) Apslēptā veidā dotās funkcijas  $F(x - a, y - b) = 0$  grafiks tiek iegūts no funkcijas  $F(x, y) = 0$  grafika pārnēsot to paralēli  $Ox$  asij par  $a$  vienībām un paralēli  $Oy$  asij par  $b$  vienībām.

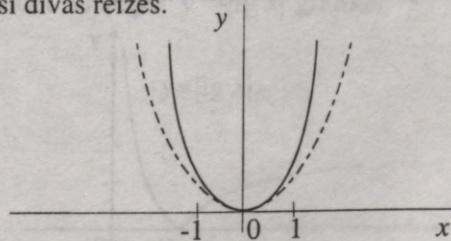
Piemērs. Funkcijas  $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 1$  grafiks tiek iegūts no funkcijas  $x^2 + y^2 = 1$  grafika, to pārnēsot paralēli  $Ox$  asij par 2 vienībām un paralēli  $Oy$  asij par -3 vienībām.



Zīm. 7.32.

4) Funkcijas  $y = Kf(x)$  grafiku iegūst no funkcijas  $y = f(x)$  grafika, izstiepjot to gar  $Oy$  asi  $K$  reizes. (Paskaidrojiet, kāpēc).

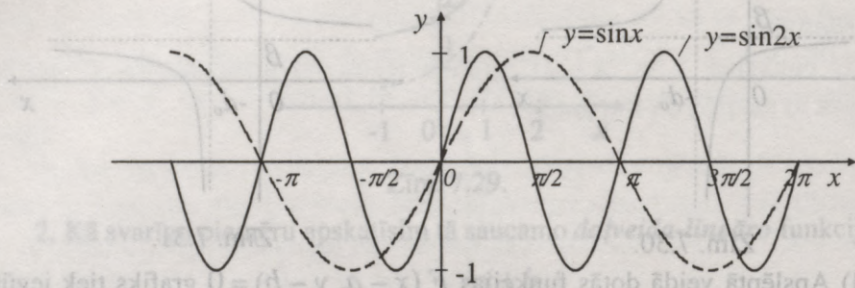
Piemērs. Funkcijas  $y = 2x^2$  grafiku iegūst no funkcijas  $y = x^2$  grafika, izstiepjot to gar  $Oy$  asi divas reizes.



Zīm. 7.33.

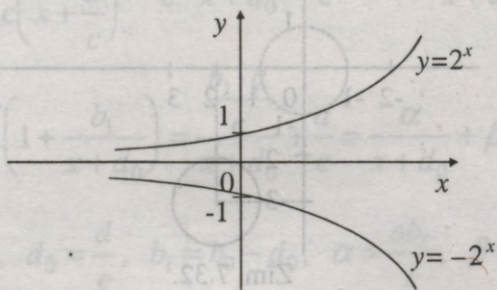
5) Funkcijas  $y = f(kx)$  grafiku iegūst no funkcijas  $y = f(x)$  grafika saspižot to gar  $Ox$  asi  $k$  reizes.

Piemērs. Funkcijas  $y = \sin 2x$  grafiku iegūst no funkcijas  $y = \sin x$  grafika saspižot to gar  $Ox$  asi 2 reizes.



Zīm. 7.34.

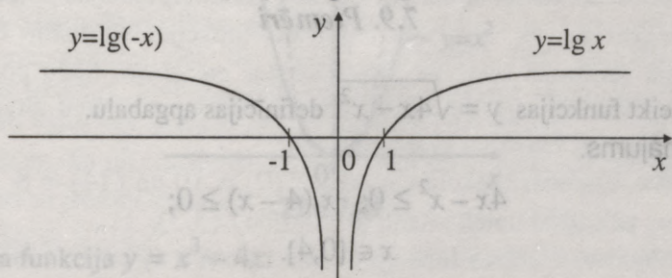
6) Funkcijas  $y = -f(x)$  grafiks ir simetrisks funkcijas  $y = f(x)$  grafikam attiecībā pret  $Ox$  asi. Tiešām, katram funkcijas  $f(x)$  grafika punktam  $(x, y)$  atbilst tam simetrisks attiecībā pret  $Ox$  asi funkcijas  $-f(x)$  punkts  $(x, -y)$ . Piemērs. Uzzīmēt funkcijas  $y = -2^x$  grafiku.



Zīm. 7.35.

Analoģiski, funkcijas  $y = f(-x)$  grafiks ir simetrisks funkcijas  $y = f(x)$  grafikam attiecībā pret  $Oy$  asi. (Paskaidrojiet, kāpēc).

Piemērs. Uzzīmēt funkcijas  $y = \lg(-x)$  grafiku.



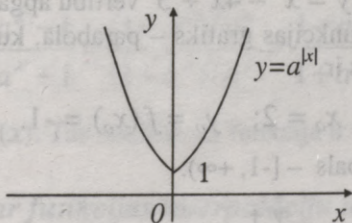
Zīm. 7.36.

7) a) Funkcijas  $y = f(|x|)$  grafiku veido šādi:

- vispirms izveido funkcijas  $f(x)$  grafiku  $x > 0$ ;
- pēc tam piezīmē grafika otru daļu, kura būtu simetriska attiecībā pret  $Oy$  asi jau izveidotajai grafika daļai.

Tiešām, tā kā  $|-x| = |x|$ , tad  $y(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = y(x)$ .

Piemērs. Izveidot funkcijas  $y = a^{|x|}$  grafiku.

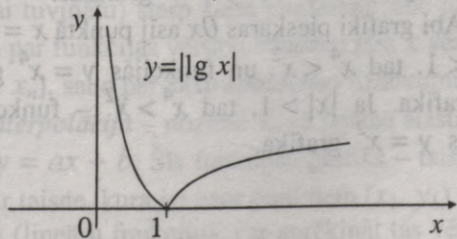


Zīm. 7.37.

b) Funkcijas  $y = |f(x)|$  grafiku veido šādi:

- izveido funkcijas  $y = f(x)$  grafiku;
- to grafika daļu, kura atrodas zem  $Ox$  ass, atspoguļo simetriski attiecībā pret  $Ox$  asi. (Paskaidrojiet, kāpēc).

Piemērs. Izveidot funkcijas  $y = |\lg x|$  grafiku.



Zīm. 7.38.

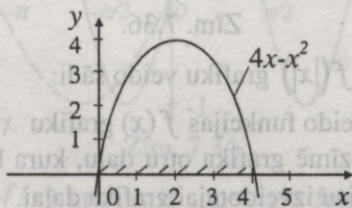
## 7.9. Piemēri

1. Noteikt funkcijas  $y = \sqrt{4x - x^2}$  definīcijas apgabalu.

Atrisinājums.

$$4x - x^2 \geq 0; \quad x(4 - x) \geq 0;$$

$$x \in [0, 4].$$



Zīm. 7.39.

Tātad, funkcijas definīcijas apgabals – nogrieznis  $[0, 4]$ .

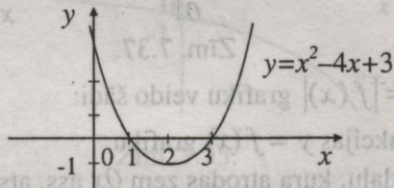
2. Noteikt funkcijas  $y = x^2 - 4x + 3$  vērtību apgabalu.

Atrisinājums. Šīs funkcijas grafiks – parabola, kuras zari vērsti uz augšu.

Tās virsotnes koordinātas ir

$$x_0 = 2; \quad y_0 = f(x_0) = -1.$$

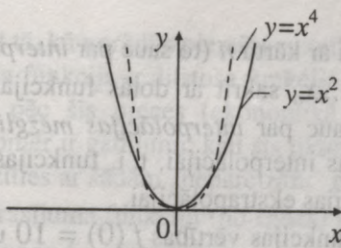
Tātad, vērtību apgabals –  $[-1, +\infty)$ .



Zīm. 7.40.

3. Salīdzināt funkciju  $y = x^2$  un  $y = x^4$  grafikus.

Atrisinājums. Abi grafiki pieskaras  $Ox$  asij punktā  $x = 0$ . Grafiki krustojas pie  $x = \pm 1$ . Ja  $|x| < 1$ , tad  $x^4 < x^2$  un funkcijas  $y = x^4$  grafiks atrodas zem funkcijas  $y = x^2$  grafika. Ja  $|x| > 1$ , tad  $x^4 > x^2$  – funkcijas  $y = x^4$  grafiks atrodas virs funkcijas  $y = x^2$  grafika.



Zīm.7.41.

4. Dota funkcija  $y = x^3 - 4x$ :

a) aprēķināt  $y(-2a)$ ;

b) pārbaudīt, vai punkts  $(1; 3)$  pieder funkcijas grafikam.

Atrisinājums.

a)  $y(-2a) = (-2a)^3 - 4(-2a) = -8a^3 + 8a$ .

b)  $y(1) = 1 - 4 \cdot 1 = -3 \neq 3$ .

Tātad, punkts  $(1; 3)$  nepieder funkcijas grafikam.

5. Vai funkcija  $y = (a^x - 1)/(a^x + 1)$  ir pāru vai nepāru?

Atrisinājums.

$$y(-x) = \frac{a^{-x} - 1}{a^{-x} + 1} = \frac{1/a^x - 1}{1/a^x + 1} = \frac{(1 - a^x)/a^x}{(1 + a^x)/a^x} = \frac{1 - a^x}{1 + a^x} = -\frac{a^x - 1}{a^x + 1} = -y(x).$$

Tādā veidā,  $y(-x) = -y(x)$ . Tas nozīmē, ka funkcija ir nepāru.

### 7.10. Jēdziens par funkcijas interpolāciju un ekstrapolāciju

Pieņemsim, ka funkcija  $y = f(x)$  dota ar tabulu (tab. 7.3), t. i. zināmas

Tabula 7.3

$x$	$x_1$	$x_2$	..... $x_n$
$y$	$y_1$	$y_2$	..... $y_n$

funkcijas vērtības punktos  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Uzdevumu par funkcijas vērtību atrašanu (precīzu vai tuvinātu) starp šiem punktiem sauc par *interpolācijas* uzdevumu. Uzdevumu par funkcijas vērtību atrašanu tām  $x$  vērtībām, kuras atrodas ārpus nogriežņa  $[x_1, x_n]$ , sauc par *ekstrapolācijas* uzdevumu. Pats vienkāršākais variants – *lineārā interpolācija* – nozīmē katrā posmā aizstāt funkciju  $y = f(x)$  ar lineāru funkciju  $y = ax + b$ . Šīs funkcijas grafiks – taisna līnija. Piemēram, posmā  $[x_1, x_2]$  – tā ir taisne, kura iet caur punktiem  $(x_1, y_1)$  un  $(x_2, y_2)$ . Zinot šīs taisnes vienādojumu (lineāru funkciju), var aprēķināt tās vērtību jebkurā punktā starp  $x_1$  un  $x_2$ . Eksistē smalkāki un sarežģītāki funkciju interpolācijas paņēmieni.

Piemēram, atrod polinomu ar kārtu  $n$  (to sauc par *interpolācijas polinomu*), kura vērtības punktos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sakrīt ar dotās funkcijas vērtībām. Punktos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  šajā gadījumā sauc par *interpolācijas mezgliem*. Šādu polinomu var izmantot ne tikai funkcijas interpolācijai, t. i. funkcijas vērtību atrašanai intervālā  $[x_1, x_n]$ , bet arī funkcijas ekstrapolācijai.

Piemērs. Zināmas funkcijas vērtības  $f(0) = 10$  un  $f(4) = 8$ . Ar lineārās interpolācijas palīdzību noteikt funkcijas vērtību  $f(3,5)$ .

Atrisinājums. Lineāras funkcijas vienādojums ir  $y = ax + b$ . Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem  $f(0) = 10$  un  $f(4) = 8$ , t. i.

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b = 10 \\ a \cdot 4 + b = 8 \end{cases} \Rightarrow b = 10, a = -0,5.$$

Tātad taisnes vienādojums  $y = -0,5x + 10$ . Tagad  $f(3,5) = -0,5 \cdot 3,5 + 10 = 8,25$ .

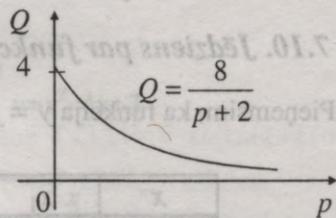
### 7.11. Ekonomikā izmantojamu funkciju piemēri

1. *Pieprasījuma funkcija atkarībā no cenas*  $Q = f(p)$  nosaka pieprasījuma pēc preces lielumu  $Q$  atkarībā no šīs preces cenas  $p$  (visi pārējie apstākļi vienādi). Šādas funkcijas piemērs bija apskatīts 158.lpp.

Apskatīsim vēl dažus piemērus pieprasījuma funkcijai atkarībā no cenas.

1)  $Q = \frac{8}{p+2}$ .

Tā kā  $p$  un  $Q$  jābūt nenegatīviem, tad šīs funkcijas grafiks ir hiperbolas daļa, kura atrodas 1. kvadrantā (nobīdīta gar  $p$  asi par  $-2$ ).

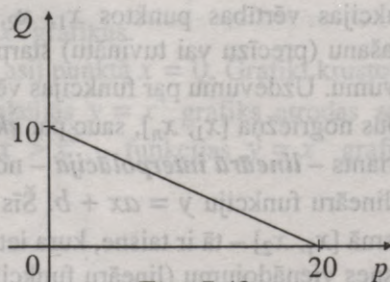


Zīm. 7.42.

2)  $Q = 10 - 0,5p$ .

Ja  $p = 0$  pieprasījums ir vienāds ar 10 vienībām. Paaugstinot cenu, pieprasījums sāk samazināties, un sākot ar cenu  $p = 20$ , kļūst vienāds ar nulli. Tādēļ pareizāk būtu pierakstīt šo pieprasījuma funkciju šādi:

$$Q = \begin{cases} 10 - 0,5p, & \text{ja } 0 \leq p \leq 20, \\ 0, & \text{ja } p > 20. \end{cases}$$



Zīm. 7.43.

Tomēr ir pieņemts rakstīt tā, kā norādīts piemēra noteikumos.

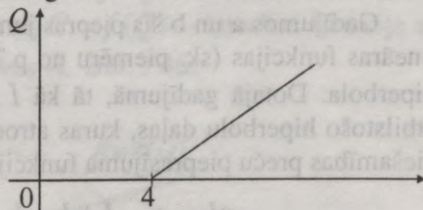
Parasti, pieprasījuma funkcija ir dilstoša funkcija, tas ir, palielinoties cenai, samazinās pieprasījums pēc šīs preces (ekonomikā šādu parādību sauc par pieprasījuma likumu). Tomēr ir gadījumi, kad šis likums nedarbojas, un turpinājumā studenti varēs iepazīties ar šādām „nepareizām” precēm.

Atzīmēsim, ka pieprasījuma funkciju (no cenas) bieži apzīmē  $Q_D = D(p)$ , kur  $D$  nāk no angļiskā *Demand* – pieprasījums.

2. **Piedāvājuma funkcija** (no cenas) norāda to preces daudzumu  $Q$ , kuru pie dotās cenas  $p$  ražotājs ir gatavs piedāvāt tirgum.

Piemērs.  $Q = 0,75p - 3$  – piedāvājuma funkcija. Tās grafiks redzams zīm. 7.44.

Kamēr cena ir zemāka par 4, ražotājam ir neizdevīgi piegādāt doto preci, piedāvājums ir vienāds ar nulli. Atkal varam atzīmēt, ka no matemātikas redzes viedokļa, korektāks būtu šāds pieraksts:



Zīm. 7.44.

$$Q = \begin{cases} 0, & \text{ja } 0 \leq p \leq 4, \\ 0,75p - 3, & \text{ja } p > 4. \end{cases}$$

Piedāvājuma funkciju bieži apzīmē  $Q = S(p)$ .  $S$  – no angļiskā *Supply* – piedāvājums.

Cenu, pie kuras piedāvājuma apjoms ir vienāds ar pieprasījuma apjomu, sauc par **līdzsvara**.

Piemērs. Atrast līdzsvara cenu precei A, ja zināma pieprasījuma funkcija

$$Q_D = \frac{8}{p+2} \text{ un piedāvājuma funkcija } Q_S = 0,75p - 3.$$

Piemērs. Saskaņā ar līdzsvara punkta definīciju  $Q_D = Q_S$ , t. i.  $\frac{8}{p+2} = 0,75p - 3$ . Tad  $8 = 0,75p^2 - 3p + 1,5p - 6$  jeb  $0,75p^2 - 1,5p - 14 = 0$ . Atrisinot šo kvadrātvienādojumu, iegūstam  $p \approx 5,43$ . Tātad, līdzsvara cena ir 5,43 naudas vienības, un atbilstošie  $Q_D = Q_S = 1,07$  vien.

3. **Pieprasījuma funkcija atkarībā no ienākumiem**  $Q = f(I)$  nosaka pieprasījuma pēc preces  $Q$  atkarību no apskatāmās pircēju grupas ienākumiem  $I$ .

Patērētāju pieprasījuma teorijā ir pazīstamas Tornkvista funkcijas, kuras ir pieprasījuma funkcijas dažādām preču grupām:

a)  $Q = \frac{aI}{I+b}$ ,  $a > 0, b > 0$  – pirmās nepieciešamības precēm;

b)  $Q = \frac{a(I-c)}{I+b}$ ,  $a > 0, b > 0, c > 0$  – nosacītām greznuma precēm

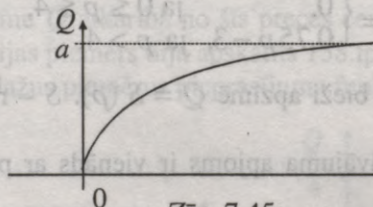
(vērtīgi pārtikas produkti, sadzīves aparātūra utt.);

c)  $Q = \frac{aI(I-c)}{I+b}$ ,  $a > 0, b > 0, c > 0$  – greznuma precēm (priekšmetiem).

Gadījumos **a** un **b** šīs pieprasījuma (no ienākumiem) funkcijas ir daļveida – lineāras funkcijas (sk. piemēru no p.7.8). Daļveida-lineāras funkcijas grafiks ir hiperbola. Dotajā gadījumā, tā kā  $I$  un  $Q$  – nenegatīvi lielumi, šie grafiki ir atbilstošo hiperbolu daļas, kuras atrodas 1. kvadrantā. Apskatām pirmās nepieciešamības preču pieprasījuma funkcijas grafiku.

$$Q = \frac{aI}{I+b} = a \cdot \frac{I+b-b}{I+b} = a \left( 1 - \frac{b}{I+b} \right) = -\frac{ba}{I+b} + a.$$

Šīs funkcijas grafiks ir hiperbolas daļa (zīm. 7.45):



Zīm.7.45.

Ja  $I = 0$ , tad  $Q = 0$  (kas ir pilnīgi saprotami: nulles ienākumiem atbilst nulles pieprasījums). Palielinoties  $I$ , izteiksme iekavās, kura tiek atņemta, samazinās, un līdz ar to,  $Q$  pieaug. Ja  $I$  neierobežoti pieaug, tad izteiksme  $b/(I+b)$  tiecas uz nulli, un  $Q$  tiecas uz  $a$ .

Nosacītā greznuma priekšmetu gadījumu apskatiet patstāvīgi kā piemēru, bet greznuma priekšmetu gadījums tiks apskatīts 10. nod. (2. daļa).

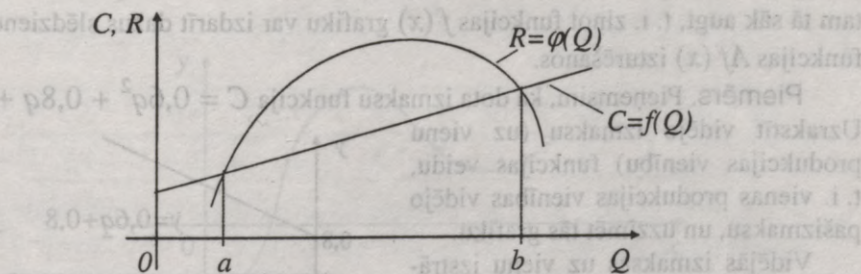
**4. Izmaksu funkcija** (jeb izdevumu funkcija)  $C = f(Q)$  parāda kopējo izmaksu  $C$  atkarību no saražotā šīs produkcijas daudzuma  $Q$ .

**5. Ieņēmumu funkcija**  $R = f(p)$  nosaka ieņēmumu  $R$ , iegūtu no preces pārdošanas, atkarību no šīs preces cenas.

Ieņēmums ir vienāds ar preces cenas  $p$  reizinājumu ar pārdoto preces daudzumu  $Q$ , t. i.  $R = p \cdot Q$ . Pārdoto preces daudzumu nosaka patērētāju

pieprasījums, kurš, savukārt, atkarīgs no preces cenas: palielinoties cenai pieprasījums krītas. Tādēļ nav iespējams viennozīmīgi paredzēt, kā cenas izmaiņas ietekmēs kopējo ieņēmumu, citiem vārdiem, kādu lēmumu attiecībā par cenu pieņemt pārdevējam, lai palielinātu kopējo ieņēmumu. Tālākajā gaitā, izmantojot matemātisko aparātu, tiks iegūti kritēriji, kuri ļaus pieņemt šādus lēmumus.

6. Ieņēmumu funkcijas un izmaksu funkcijas starpība definē *peļņas funkciju*, kuru gūst no šīs preces ražošanas. Šīs funkcijas izpētīšana var palīdzēt paredzēt, kā preces cenas izmaiņa atsauksies uz preces ražotāja peļņu. Dziļāk šis jautājums tiks apskatīts tēmā "Diferenciālrēķini". Šeit varam tikai atzīmēt, ka uzzīmējot ieņēmumu funkcijas un izmaksu funkcijas grafikus, var izdarīt dažus secinājumus par rentabilitāti. Pieņemsim, ka  $C = f(Q)$  – izmaksu funkcija un  $R = \varphi(Q)$  – ieņēmumu funkcija, to grafikus sk. zīm. 7.46.



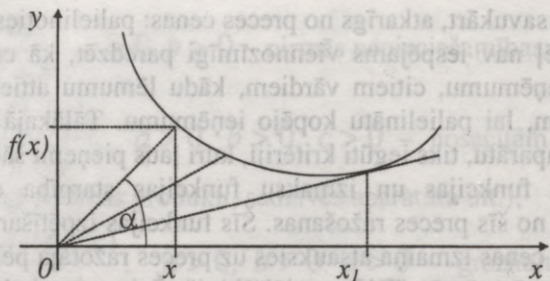
Zīm.7.46.

Izejot no šiem grafikiem var izdarīt secinājumu, ka intervālos  $[0, a]$ ,  $[b, +\infty)$  ražošana nes zaudējumus.

7. Ekonomikā plaši tiek izmantots *funkcijas vidējās vērtības* jēdziens. Ja dota funkcija  $f(x)$ , tad  $\frac{f(x)}{x}$  sauc par funkcijas  $f(x)$  vidējo vērtību. Apzīmē

$Af(x)$  ( $A$  – no angliskā *Average* – vidējais): ja  $R(q)$  – ieņēmumu funkcija, tad  $AR(q) = \frac{R(q)}{q}$  – vidējo ieņēmumu funkcija; ja  $C(q)$  – izmaksu funkcija, tad

$AC(q) = \frac{C(q)}{q}$  – vidējo izmaksu funkcija, utt. Apskatām funkcijas  $f(x)$  grafiku.

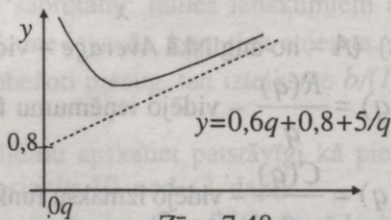
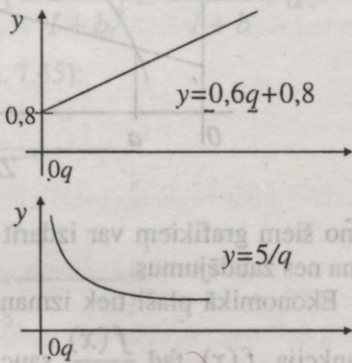


Zīm. 7.47.

Skaidrs, ka  $Af(x) = \frac{f(x)}{x} = \operatorname{tg} \alpha$ . Izmantojot šo piezīmi, var pamanīt, ka dotajai funkcijai  $f(x)$  atbilstošā funkcija  $Af(x)$  ir dilstoša līdz punktam  $x_1$ , pēc tam tā sāk augt, t. i. zinot funkcijas  $f(x)$  grafiku var izdarīt dažus slēdzienus par funkcijas  $Af(x)$  izturēšanos.

Piemērs. Pieņemsim, ka dota izmaksu funkcija  $C = 0,6q^2 + 0,8q + 5$ . Uzrakstīt vidējo izmaksu (uz vienu produkcijas vienību) funkcijas veidu, t. i. vienas produkcijas vienības vidējo pašizmaksu, un uzzīmēt tās grafiku.

Vidējās izmaksas uz vienu izstrādājumu (apzīmēsim tās ar  $y$ ) iegūst kopīgās izmaksas dalot ar produkcijas daudzumu (apjomu), tas ir  $y = C/q = 0,6q + 0,8 + 5/q$ . Šī funkcija ir divu funkciju summa:  $y = 0,6q + 0,8$ , kuras grafiks ir taisne, un hiperbolas  $y = 5/q$ . Šo funkciju grafiki, kā arī summārais grafiks ir attēloti zīm. 7.48.

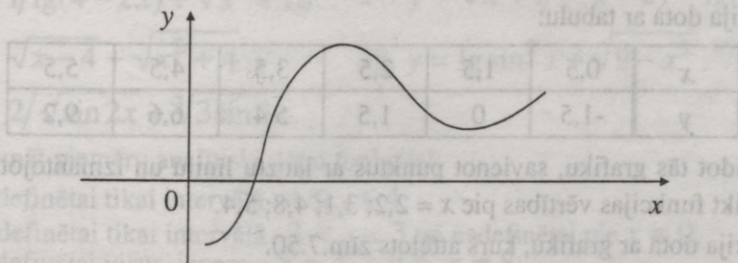


Zīm. 7.48.

Metodes, ar kuru palīdzību var sīkāk izpētīt šo funkciju, tiks apskatītas 10. nod. (2. daļa).

### Jautājumi pašpārbaudei

1. Ko sauc par funkciju?
2. Uzzīmēt galveno elementāro funkciju grafikus.
3. Kādos gadījumos notiek funkcijas grafika paralēlā pārnese gar koordinātu asīm?
4. Kas ir apvērstā funkcija? Kāds ir tās grafiks?
5. Kas ir funkcija  $y = f^{-1}(f(x))$ ? Uzzīmēt tās grafiku. (Pieņemam, ka funkcija  $f(x)$  definēta un tai eksistē apvērstā funkcija uz visas skaitļu ass.)
6. Funkcija  $y = f(x)$  dota grafiski:



Zīm.7.49.

Uzzīmēt grafikus funkcijām:  $y = f(x - a)$ ,  $y = f(x + a)$ ,  $y = |f(x)|$ ,  
 $y = f(|x|)$ ,  $y = -f(x)$ ,  $y = f(-x)$ .

7. Pieņemsim, ka  $C = 8 + 1,3q$  – izmaksu funkcija. Uzrakstīt vidējo izmaksu funkciju uz vienu produkcijas vienību (t. i. vienas produkcijas vienības pašizmaksu) un uzzīmēt tās grafiku.
8. Pieņemsim, ka algota strādājošā vidējā darba alga ir  $A$  naudas vienības, pieņemsim, ka vidēji uz vienu strādājošo iznāk  $x$  apgādājamas personas un pieņemsim, ka visi iespējamie pabalsti vienam iedzīvotājam (bezdarbnieka pabalsts, invaliditātes pabalsts, pabalsts bērniem utt.) vienādi ar  $B$ . Uzrakstīt veidu vidējā ieņēmuma funkcijai uz vienu ģimenes locekli un uzzīmēt šīs funkcijas grafiku.

## Vingrinājumi

1. Salīdzināt funkciju izturēšanos un grafikus:

a)  $y = x$  un  $y = x^3$ ;

b)  $y = x^2$ ,  $y = 2x^2$ ,  $y = -2x^2$ ;

c)  $y = 2^x$  un  $y = 3^x$ ;

d)  $y = \log_2 x$  un  $y = \log_3 x$ .

2. Dota funkcija  $f(x) = x^3 - 7$ . Atrast:  $f(0)$ ,  $f(2)$ ,  $f(a)$ ,  $f(2a)$ .

3. Dota funkcija  $\psi(u) = u^2 + 2^u$ .

Atrast:  $\psi(0)$ ,  $\psi(a)$ ,  $\psi(a^2)$ .

4.  $f(x) = x^2 - 4x + 1$ ;

izskaitļot  $f(0)$ ,  $f(1)$ ,  $f(-2)$ ,  $f(3)$ ,  $f(a + 1)$ .

5. Funkcija dota ar tabulu:

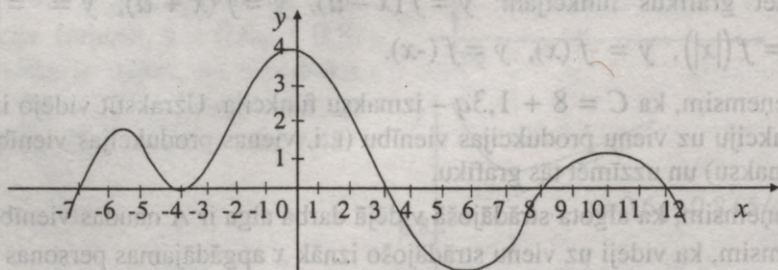
$x$	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5
$y$	-1,5	0	1,5	5,4	6,6	9,2

Izveidot tās grafiku, savienot punktus ar lauztu līniju un izmantojot grafiku noteikt funkcijas vērtības pie  $x = 2,2$ ;  $3,1$ ;  $4,8$ ;  $5,4$ .

6. Funkcija dota ar grafiku, kurš attēlots zīm.7.50.

a) Noteikt funkcijas saknes.

b) Noteikt, pie kurām neatkarīgā mainīgā vērtībām funkcija ir pozitīva, un pie kurām negatīva.



Zīm.7.50.

7. Dots:  $y = 2z^2$ ,  $z = 4x + 1$ . Izteikt  $y$  kā funkciju no  $x$ .

8. Dots:  $y = \sqrt[3]{z+4}$ ,  $z = 3tg x$ . Izteikt  $y$  kā funkciju no  $x$ .

Piemēros 9. – 13. dotās saliktās funkcijas sadalīt sastāvdaļās:

9.  $y = \sin 3x$ .

10.  $y = \sqrt[5]{(1+2x)^2}$ .

$$11. y = \lg(\operatorname{tg} x + 8). \quad 12. y = \sin^2(2x + 4).$$

$$13. y = 2^{(4x+2)^3}.$$

Atrast definīcijas apgabalus piemēros 14. – 30. dotajām funkcijām:

$$14. y = 4 - 2\lg x. \quad 15. y = 7\lg(x + 5).$$

$$16. y = \sqrt[4]{3 - 6x}. \quad 17. y = \sqrt{-2x}.$$

$$18. y = 2 / (x^2 - 3). \quad 19. y = 4 / (x^2 - 1).$$

$$20. y = 1 / (x^3 + 8). \quad 21. y = x / (x^2 - 3x + 12).$$

$$22. y = x / \sqrt{4 - x^2}. \quad 23. y = -6 + \sqrt{x^2 - 6x}.$$

$$24. y = \sqrt{x^2 - 9x + 8}. \quad 25. y = x / \sqrt{x^2 + 7x + 6} + \sqrt{x}.$$

$$26. y = 1 / \lg(4 - 2x) + \sqrt{x^2 + 16}. \quad 27. y = \sqrt[3]{x} + \sqrt{1 / (x + 2)} - \lg(x - 5).$$

$$28. y = \sqrt{x - 4} + \sqrt{x^2 + 4}. \quad 29. y = \lg \sin^2 x + \sqrt{9 - x^2}.$$

$$30. y = 2 / \sqrt{\sin 2x} + \sqrt[3]{3 \sin 2x}.$$

31. Izdomāt piemēru analītiski dotai funkcijai:

a) definētai tikai intervālā  $-4 \leq x \leq 4$ ;

b) definētai tikai intervālā  $-3 < x < 3$  un nedefinētai pie  $x = 0$ ;

c) definētai visur, izņemot  $x = 2, x = 6, x = 8$ .

Noteikt, vai piemēros 32. – 47. dotās funkcijas ir pāru, nepāru, vai nav ne pāru ne nepāru?

$$32. y = x^6 + 3x^2.$$

$$33. y = 3x - 2x^2.$$

$$34. y = x \cdot \cos^3 x.$$

$$35. y = x \cdot a^x.$$

$$36. y = x^2 + x^3/4 + x^4/10.$$

$$37. y = \sin x^2.$$

$$38. y = \sin^2 x + \cos^3 x.$$

$$39. y = 4 - x^4.$$

$$40. y = \operatorname{tg} 2x + x.$$

$$41. y = a^{-x^2} + x^2.$$

$$42. y = \operatorname{tg}(x^2 + x).$$

$$43. y = \log_4(x^2 + 8).$$

$$44. y = x^2 / (2^x - 1).$$

$$45. y = \left( a^{x^2} + 1 \right) / \left( a^{x^2} - 1 \right).$$

$$46. f(x) = \sin x / x.$$

$$47. \varphi(x) = (a^x - 4) / (a^x + 4).$$

Uzzīmēt grafikus piemēros 48. – 81. dotajām funkcijām:

$$48. y = 2x + 1.$$

$$49. y = -x + 5.$$

$$50. y = -3x - 6.$$

$$51. y = 0,5x + 4.$$

52.  $y = -2x - 2$ .  
 54.  $y = -1/(x - 3)$ .  
 56.  $y = -3/(x + 1)$ .  
 58.  $y = 1/x - 3$ .  
 60.  $y = 1/(x - 3) + 4$ .  
 62.  $y = x^2 - 6x + 5$ .  
 64.  $y = x^2 + 7x + 12$ .  
 66.  $y = 2(x - 3)^2$ .  
 68.  $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$ .  
 70.  $y = |0,4x + 2|$ .  
 72.  $y = 4^{|x|}$ .  
 74.  $y = |x^2 - 4x|$ .  
 76.  $y = \sqrt{-x + 1}$ .  
 78.  $y = -\sqrt{x}$ .  
 80.  $y = \frac{x}{x + 1}$ .
53.  $y = 1/(x + 3)$ .  
 55.  $y = 2/(x - 5)$ .  
 57.  $y = 1/x + 2$ .  
 59.  $y = -2/x + 1$ .  
 61.  $y = 1/(x + 4) - 2$ .  
 63.  $y = -x^2 + 4x$ .  
 65.  $y = (x + 4)^2$ .  
 67.  $x^2 + y^2 = 9$ .  
 69.  $y = |x|$ .  
 71.  $y = |-0,5x + 1|$ .  
 73.  $y = |\sin x|$ .  
 75.  $y = \lg(-x + 1)$ .  
 77.  $y = \sqrt{2x + 4}$ .  
 79.  $y = \sqrt{-x}$ .  
 81.  $y = \frac{2x + 3}{x - 1}$ .

Piemēros 82. – 85. dotajām funkcijām atrast lielāko un mazāko vērtību:

82.  $y = \sin 2x$ .  
 84.  $y = 2\cos x^2$ .  
 86. Funkcija  $y = f(x)$  dota ar tabulu:

$x$	20	25	30
$y$	37	34	29

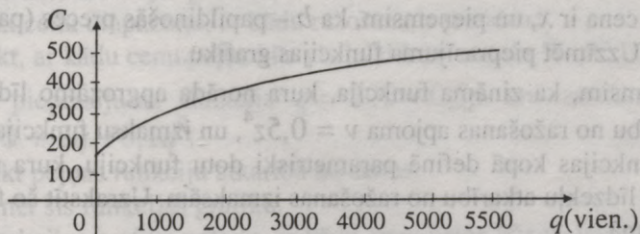
- a) izmantojot lineāro interpolāciju, atrast  $f(22)$ ;  
 b) izmantojot kvadrātisko interpolāciju, t. i. interpolāciju ar otrās kārtas polinomu, atrast  $f(22)$ .
87. Kompānija ražo precī A. Fiksētās ražošanas izmaksas ir 600 Ls, bet vienas preces vienības mainīgās izmaksas ir 2 Ls. Uzrakstīt vienādojumu izmaksu funkcijai atkarībā no saražotās produkcijas daudzuma. Uzzīmēt tās grafiku. Noteikt, cik lielas būs izmaksas, ja tiks ražotas 700 produkcijas vienības.

88. Zināma preces pieprasījuma funkcija

$$q = 350 - 8p.$$

- Kāds ir šīs funkcijas definīcijas apgabals?
  - Uzzīmēt tās grafiku.
  - Noteikt pieprasījumu, ja cena  $p = 10$ .
  - Uzrakstīt ieņēmumu funkciju atkarībā no cenas.
  - Uzzīmēt ieņēmumu funkcijas grafiku.
89. Dots izmaksu funkcijas grafiks (zīm. 7.51). Noteikt izmaksu lielumu, ja tiks ražotas 2500 produkcijas vienības. Kādas ir vienas produkcijas vienības vidējās izmaksas, ja ražošanas apjoms ir

- 2000 vienības;
- 4000 vienības?



Zīm.7.51.

90. Preces pieprasījums un preces cena ir saistīti ar vienādojumu

$$p = 80 - 2\sqrt{q}.$$

- Noteikt pieļaujamās  $p$  un  $q$  vērtības.
  - Uzzīmēt pieprasījuma funkcijas grafiku.
  - Noteikt pieprasījuma lielumu, ja cena  $p = 30$ .
91. Zināma pieprasījuma funkcija
- $$q = 800 - 20p.$$
- Uzrakstīt ieņēmumu funkciju atkarībā no cenas.
  - Uzzīmēt pieprasījuma funkcijas grafiku.
  - Noteikt, ar kādu cenu ieņēmums būs vislielākais un noteikt šī ieņēmuma lielumu.
92. Pieņemsim, ka pieprasījuma funkcija ir  $q = 6 - 0,4p$ . Uzzīmēt šīs funkcijas grafiku. Noteikt pieprasījuma apjomu, ja  $p = 2$  naudas vienības (n. v.). Par cik izmainīsies pieprasījuma apjoms, ja cena palielināsies par 0,3 n. v.?
93. Zināma izmaksu funkcija

$$C = 1200 + 0,5q.$$

- Dažādu iemeslu dēļ mainīgās izmaksas palielinājās par 20%.
- a) Uzrakstīt jaunās izmaksu funkcijas vienādojumu.
  - b) Uzzīmēt vecās un jaunās izmaksu funkcijas grafikus.
94. Pieņemsim, ka ražošanas izdevumu funkcija (izmaksu funkcija) ir  $C = 14 + 0,8q$ , kur  $q$  – ražošanas apjoms. Uzzīmēt vienas produkcijas vienības vērtības grafiku.
  95. Kompānijas ienākumi 2000. g. bija 1 milj. n. v., bet 2001. g. 1,5 milj. n. v. Pieņemot, ka, ienākumi aug pēc eksponenciālā likuma  $I = Ce^{at}$ , noteikt:
    - a) ienākumu augšanas likumu, t. i. noteikt parametrus  $C$  un  $a$ ;
    - b) kāds būs ienākums 2002. g. un kad tiks sasniegts ienākumu līmenis 5 milj. n. v. gadā, ja augšanas tempi paliks iepriekšējie?
  96. Pieņemsim, ka  $A$  – līdzekļu apjoms, kurš paredzēts kādās preces iegādei, kuras cena ir  $x$ , un pieņemsim, ka  $b$  – papildinošās preces (pavadošās dotu) cena. Uzzīmēt pieprasījuma funkcijas grafiku.
  97. Pieņemsim, ka zināma funkcija, kura norāda apgrozāmo līdzekļu lieluma atkarību no ražošanas apjoma  $v = 0,5z^4$ , un izmaksu funkcija  $w = 0,25z^2$ . šīs funkcijas kopā definē parametriski dotu funkciju, kura norāda apgrozāmo līdzekļu atkarību no ražošanas izmaksām. Uzrakstīt šo funkciju atklātā formā.
  98. Dota pieprasījuma funkcija  $q = 90 - 0,5p$ . Noteikt maksimālo ieņēmumu.
  99. Par **līdzsvara cenu** sauc cenu, pie kuras pieprasījuma apjoms vienāds ar piedāvājuma apjomu. Dota pieprasījuma funkcija  $q_D = 4/(x + 1)$  un piedāvājuma funkcija  $q_S = 1,5x - 3$ .
    - a) Uzzīmēt šo funkciju grafikus.
    - b) Atrast līdzsvara cenu.
    - c) Uzrakstīt realizācijas apjoma funkciju atkarībā no cenas un uzzīmēt tās grafiku.
    - d) Uzrakstīt ieņēmumu funkciju atkarībā no cenas un uzzīmēt tās grafiku.
  100. Belašu mazumtirgotājs iepērk tos restorānā par 0,10 Ls gabalā un pārdod tos par 0,20 Ls. Zināms, ka šī tirgotāja fiksētās izmaksas (maksa par vietu utt.) ir 5 Ls dienā. Uzzīmēt grafikus izmaksu funkcijai un ieņēmumu funkcijai un noteikt, kāds ir minimālais belašu daudzums, kurš šim tirgotājam ir jāpārdod dienā, lai viņš nestrādātu ar zaudējumiem.
  101. Atrisināt iepriekšējo uzdevumu ar pieņēmumu, ka tirgotāja fiksētās izmaksas nav zināmas, bet zināms, ka ar pārdošanas apjomu 100 belaši dienā, viņa izmaksas ir 14 Ls.

102. Dota pieprasījuma funkcija  $q = \frac{20}{p+4}$ . Uzrakstīt ieņēmumu funkciju. Uz-

zīmēt tās grafiku. Paskaidrot ieņēmumu funkcijas izturēšanos, palielino-

ties cenai.

103. Zināma pieprasījuma funkcija atkarībā no cenas

$$q = 600 - 8p$$

un izmaksu funkcija atkarībā no saražotā produkcijas daudzuma

$$C = 2500 + 7q.$$

Pieņemot, ka produkciju ražo tik daudz, cik to pārdod,

a) noteikt peļņas funkciju atkarībā no cenas;

b) uzzīmēt šīs funkcijas grafiku;

c) noteikt cenu diapazonu, ar kādu ražošana ir rentabla;

d) noteikt, ar kādu cenu peļņa būs vislielākā un noteikt šīs peļņas lielumu.

104. Zināma pieprasījuma funkcija  $q = 200 - 0,5p$  un izmaksu funkcija

$$C = 300 + 2q + 0,1q^2.$$

a) Noteikt peļņas funkciju atkarībā no cenas.

b) Uzzīmēt šīs funkcijas grafiku.

c) No funkcijas grafika noteikt, ar kādu cenu peļņa būs vislielākā.

105. Dota pieprasījuma funkcija  $q_D = 40 - 0,4p$  un piedāvājuma funkcija

$q_S = p - 2$ . Uzrakstīt ieņēmumu funkciju. Ar kādu cenu ieņēmums būs maksimāls?

106. Dota pieprasījuma funkcija  $q_D = 50 - 2p$  un piedāvājuma funkcija  $q_S =$

$= p - 10$ . Atrast maksimālo ieņēmumu. Paskaidrot ieņēmumu funkcijas izturēšanos pirms un pēc līdzsvara punkta.

## 8. ROBEŽAS

Robežu teorija ir matemātiskās analīzes bāze, bet robežas jēdziens – viens no svarīgākajiem tās jēdzieniem: katra no matemātiskās analīzes galvenajām darbībām – diferencēšana un integrēšana – ir saistīta ar atbilstošo pāreju uz robežu. Robežu teorija pēta robežu īpašības, to eksistences nosacījumus, likumus, kuri palīdz atrast robežas.

### 8.1. Skaitļu virknes robeža. Galvenās definīcijas

Atgādināsim, kā par naturāliem skaitļiem sauc veselus pozitīvus skaitļus.

Apskatīsim naturāla argumenta funkciju, t. i. funkciju, kuras arguments pieņem tikai veselas pozitīvas vērtības. Atzīmēsim to ar  $f(n)$ . Piešķirot  $n$  dažādas vērtības  $n = 1, 2, 3, \dots$ , iegūstam virkni

$$x_1 = f(1), x_2 = f(2), x_3 = f(3), \dots,$$

jeb īsāk

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (8.1)$$

Šo virkni sauc par skaitļu virkni.

Definīcija. Par skaitļu virkni sauc naturāla argumenta funkcijas vērtību virkni.  $x_n = f(n)$  sauc par vispārīgo (jeb  $n$ -to) skaitļu virknes locekli.

Skaitļu virkni (8.1) apzīmēsim ar  $\{x_n\}$ . Tādā veidā,  $x_1$  – ir pirmais,  $x_2$  – otrais, ...,  $x_n$  –  $n$ -tais virknes  $\{x_n\}$  loceklis.

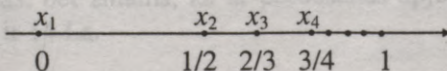
No šejienes seko, ka iepriekš minētā skaitļu virknes definīcija ir līdzvērtīga šādai:

par **skaitļu virkni** sauc bezgalīgu sanumurētu skaitļu virkni.

Skaitļu virkņu piemēri:

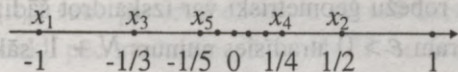
- 1,  $1/2$ ,  $1/3$ , ...,  $1/n$ , ... jeb  $\{1/n\}$ ;
- 0,  $1/2$ ,  $2/3$ ,  $3/4$ , ...,  $(n-1)/n$ , ... jeb  $\{(n-1)/n\}$ ;
- 1,  $1/2$ ,  $-1/3$ ,  $1/4$ , ...,  $(-1)^n/n$ , ... jeb  $\{(-1)^n/n\}$ ;
- 1, 1, -1, 1, ...,  $(-1)^n$ , ... jeb  $\{(-1)^n\}$ .

Skaitļu virknes locekļus var attēlot kā punktus uz skaitļu ass. Piemēram, virknei  $\{(n-1)/n\}$  zīmējums būs šāds



Zīm. 8.1.

Virknēm 1 – 3 ir raksturīga tādu konstantu punktu  $a$  eksistence, ka palielinoties numuram  $n$ , šo virkņu elementi neierobežoti tuvojas šiem dotajiem punktiem: virknei  $\{1/n\}$   $a$  ir vienāds ar 0, virknei  $\{(n-1)/n\}$   $a$  vienāds ar 1, virknei  $\{(-1)^n/n\}$  – tas ir skaitlis 0 (zīm. 8.2).



Zīm. 8.2.

Atzīmēsim, ka virknei  $\{(-1)^n\}$  (4. piemērs) šāda īpašība nepiemīt. Tāpat atzīmēsim, ka šī virkne izveidota tikai no diviem skaitļiem:  $-1$  un  $1$ .

Par mēru, kurš parāda  $x_n$  tuvošanos punktam  $a$  var kalpot attālums starp punktiem  $x_n$  un  $a$ , kurš vienāds ar  $|x_n - a|$ . Lieluma  $x_n$  neierobežota tuvošanās punktam  $a$  nozīmē, ka  $|x_n - a|$  neierobežoti samazinās, t. i. pieaugot numuram  $n$ , lielums  $|x_n - a|$  var kļūt mazāks par jebkuru pozitīvu skaitli  $\varepsilon$ , lai cik mazs tas arī nebūtu. Citiem vārdiem, jebkuram pēc patikas mazam pozitīvam skaitlim  $\varepsilon$  var norādīt tādu numuru  $N$ , ka visiem numuriem  $n > N$  izpildās nevienādība  $|x_n - a| < \varepsilon$ .

Definīcija. Skaitli  $a$  sauc par skaitļu virknes  $\{x_n\}$  robežu, ja jebkuram pozitīvam skaitlim  $\varepsilon$ , lai cik mazs arī tas nebūtu, var atrast tādu numuru  $N$ , ka visiem  $n > N$  izpildās nevienādība

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

To faktu, ka  $a$  ir skaitļu virknes  $\{x_n\}$  robeža, pieraksta šādi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

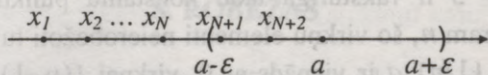
Vienlaikus ar šo pierakstu turpmāk izmantosim arī tam ekvivalentu pierakstu  $x_n \rightarrow a$ . Jāatzīmē, ka numurs  $N$  ir atkarīgs no  $\varepsilon$ : jo mazāks  $\varepsilon$ , jo lielāks, vispār runājot,  $N$ . Vienlaikus ar to fiksētam  $\varepsilon$  atbilst fiksēts  $N$ , bet tajā pašā laikā  $n$  – mainīgais, kurš pieņem visas vērtības, lielākas par  $N$ .

Nevienādība  $|x_n - a| < \varepsilon$  līdzvērtīga nevienādībām  $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$  un  $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ . Ņemot šo vērā robežas definīciju var pārfrāzēt šādi:

skaitli  $a$  sauc par skaitļu virknes  $\{x_n\}$  robežu, ja jebkuram  $\varepsilon > 0$  atradīsies tāds numurs  $N$ , ka visiem  $n > N$  izpildās nevienādība

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Attēlosim skaitļus  $a$ ,  $a - \varepsilon$ ,  $a + \varepsilon$  un virknes  $\{x_n\}$  locekļus ar punktiem uz skaitļu ass (zīm. 8.3).



Zīm. 8.3.

Skaitļu virknes robežu ģeometriski var izskaidrot šādi: tā ir tāds punkts uz skaitļu ass, ka jebkuram  $\epsilon > 0$  atradīsies numurs  $N + 1$ , sākot no kura visi virknes locekļi atrodas punkta  $a$   $\epsilon$ -apkārtnē.

## 8.2. Robežu īpašības

**Teorēma.** Ja skaitļu virknei eksistē robeža, tad tā ir viena vienīga.

Pierādījumu veidosim no pretējā. Pieņemsim, ka virknei  $\{x_n\}$  eksistē vairāk kā viena robeža. Pieņemsim, ka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{un} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b, \quad b \neq a.$$

Izvēlamies patvaļīgu pozitīvu

$$\epsilon < |b - a|/2$$

(t. i.  $\epsilon$  mazāks par pusi no attāluma starp punktiem  $a$  un  $b$ ). Pēc pieņēmuma

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

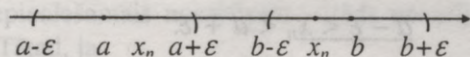
Tas nozīmē, ka jebkuram  $\epsilon > 0$  (tātad arī mūsu izvēlētajam  $\epsilon$ ) atradīsies tāds numurs  $N_1$ , ka visiem  $n > N_1$  izpildīsies nevienādība

$$|x_n - a| < \epsilon. \quad (8.2)$$

Analogiski,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$  nozīmē: dotajam  $\epsilon > 0$  atradīsies tāds numurs  $N_2$ , ka visiem  $n > N_2$  ir spēkā nevienādība

$$|x_n - b| < \epsilon. \quad (8.3)$$

Nevienādība  $|x_n - a| < \epsilon$  līdzvērtīga nevienādībām  $a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$ . Tas nozīmē, ja  $n > N_1$ , tad  $x_n$  atrodas punkta  $a$   $\epsilon$ -apkārtnē. Analogiski, nevienādība  $|x_n - b| < \epsilon$  nozīmē, ja  $n > N_2$  tad  $x_n$  atrodas punkta  $b$   $\epsilon$ -apkārtnē. Visiem  $n$ , kuri lielāki par  $N_1$  un  $N_2$ , izpildās abas nevienādības (8.2) un (8.3). Tātad,  $x_n$  atrodās gan punkta  $a$   $\epsilon$ -apkārtnē, gan punkta  $b$   $\epsilon$ -apkārtnē. Bet šīm apkārtņēm nav kopīgu punktu, jo  $\epsilon < |b - a|/2$ .



Zīm.8.4.

Esam ieguvuši pretrunu. Tātad virknei var būt tikai viena robeža.

Skaitļu virkni  $\{x_n\}$  sauc par ierobežotu, ja eksistē tāds pozitīvs skaitlis  $M$ , ka visi šīs virknes locekļi pēc moduļa nepārsniedz  $M$  – citiem vārdiem, ja visiem numuriem  $n$  izpildās nevienādība  $|x_n| \leq M$ .

Piemērs: virkne  $\{1/n\}$ . Par  $M$  var ņemt jebkuru skaitli, lielāku vai vienādu par 1, piemēram  $M = 2$ . Tiešām, visiem numuriem  $n$  izpildās nevienādība  $1/n < 2$ . Virkni  $\{x_n\}$  sauc par ierobežotu no augšas, ja var atrast tādu skaitli  $M$ , ka visiem  $n$  izpildās nevienādība  $x_n \leq M$ . Virkne  $\{x_n\}$  saucas par ierobežotu no apakšas, ja var atrast tādu skaitli  $m$ , ka visiem  $n$  izpildās nevienādība  $m \leq x_n$ .

Tā kā nevienādība  $|x_n| \leq M$  ir līdzvērtīga nevienādību sistēmai

$$\begin{cases} x_n \leq M; \\ -M \leq x_n, \end{cases} \quad (8.4)$$

tad ierobežota virkne ir ierobežota gan no augšas gan no apakšas ( $m$  lomu šajā situācijā spēlē –  $M$ ).

**Teorēma.** (Par virknes, kurai eksistē robeža, ierobežotību.) Ja virknei  $\{x_n\}$  eksistē robeža, tad tā ir ierobežota.

**Teorēma.** (Par virkni, kura atrodas pa vidu.) Pieņemsim, ka dotas trīs virknes  $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$ ,  $\{z_n\}$ , kuras apmierina šādus divus nosacījumus:

1. Virknēm  $\{x_n\}$  un  $\{z_n\}$  eksistē robežas un šīs robežas ir vienādas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a. \quad (8.5)$$

2. Visiem numuriem  $n$  izpildās nevienādības

$$x_n \leq y_n \leq z_n. \quad (8.6)$$

Tad virknei  $\{y_n\}$  arī eksistē robeža un

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a.$$

**Pierādījums.** Izvēlamies patvaļīgu  $\varepsilon > 0$ ; tā kā pēc nosacījuma

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

tad var atrast tādu numuru  $N_1$ , ka visiem  $n > N_1$

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \quad (8.7)$$

Tā kā

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a,$$

tad jebkuram  $\varepsilon$  var atrast tādu numuru  $N_2$ , ka visiem  $n > N_2$

$$a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon \quad (8.8)$$

Apzīmēsim ar  $N$  lielāko no skaitļiem  $N_1, N_2$ . Tad visiem  $n > N$  izpildās abas nevienādības (8.7) un (8.8). Apvienojot abu nevienādību pasvītrotās daļas un 2. punktu no teorēmas nosacījumiem:

$$a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon.$$

iegūstam, ka  $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$ .

Tādējādi, patvaļīgam  $\varepsilon$  var uzrādīt tādu numuru  $N$ , ka visiem  $n > N$  izpildās nevienādība  $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$ . Tas nozīmē, ka  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ . Teorēma ir pierādīta.

### 8.3. Bezgalīgi mazie lielumi

Virkni  $\{\alpha_n\}$  (mainīgu lielumu  $\alpha_n$ ) sauc par *bezgalīgi mazu*, ja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0.$$

Ņemot vērā robežas definīciju var dot otru bezgalīgi mazā lieluma definīciju:

mainīgu lielumu  $\alpha_n$  sauc par *bezgalīgi mazu* (saīsināti rakstīsim b.m.), ja jebkuram (pēc patikas mazam)  $\varepsilon > 0$  var atrast tādu numuru  $N$ , ka visiem  $n > N$  izpildās nevienādība  $|\alpha_n - 0| < \varepsilon$ , t. i.  $|\alpha_n| < \varepsilon$ .

Bezgalīgi mazā lieluma jēdzienam ir sevišķa loma robežu teorijā. Šo lomu nosaka šāds fundamentāls, lai arī vienkāršs, apgalvojums.

**Teorēma.** *Lai skaitlis  $a$  būtu virknes  $\{x_n\}$  robeža, nepieciešami un pietiekami, lai izpildītos vienādība*

$$x_n = a + \alpha_n,$$

kur  $\alpha_n$  – bezgalīgi mazs lielums.

Šo teorēmu turpmāk sauksim par teorēmu par sakaru starp robežu un b. m. lielumu

Dotā teorēma satur divus apgalvojumus. Noformulēsim un pierādīsim katru no tiem atsevišķi.

**Nepieciešamība.** Lai izpildītos  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , nepieciešams, lai

$$x_n = a + \alpha_n,$$

kur  $\alpha_n$  – b. m. Nepieciešamais nosacījums – tāds nosacījums, bez kura dotā īpašība neizpildās. Tātad, ja

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

tad obligāti ir jāizpildās sakarībai  $x_n = a + \alpha_n$ , kur  $\alpha_n$  – b. m.

**Pierādījums.** Pieņemsim, ka  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Apzīmēsim ar  $\alpha_n$  mainīgu lielumu  $(x_n - a)$ , tad  $x_n = a + \alpha_n$ . Atlicis tikai pārbaudīt, ka ievestais mainīgais lielums  $\alpha_n$  ir bezgalīgi mazs (b. m.). Tā kā

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

tad jebkuram  $\varepsilon > 0$  atradīsies tāds numurs  $N$ , ka  $|x_n - a| < \varepsilon$  visiem  $n > N$ . Tā kā  $\alpha_n = x_n - a$ , tad arī  $|\alpha_n| < \varepsilon$  visiem  $n > N$ . Pēc otrās b. m. lieluma definīcijas, tas nozīmē, ka  $\alpha_n$  – bezgalīgi mazs.

**Pietiekamība.** Lai izpildītos  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , pietiekami, lai  $x_n = a + \alpha_n$ , kur  $\alpha_n$  – b. m. Citiem vārdiem, ja  $x_n = a + \alpha_n$ , kur  $\alpha_n$  – b. m., tad  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**Pierādījums.** Pieņemsim, ka  $x_n = a + \alpha_n$ , kur  $\alpha_n$  – b. m. Tad  $\alpha_n = x_n - a$ . Tā kā  $\alpha_n$  – bezgalīgi mazs, tad jebkuram  $\varepsilon > 0$  atradīsies tāds numurs  $N$ , ka  $|\alpha_n| < \varepsilon$  visiem  $n > N$ . Tā kā  $\alpha_n = x_n - a$ , tad arī  $|x_n - a| < \varepsilon$  visiem  $n > N$ , t. i.  $a$  ir virknes  $\{x_n\}$  robeža.

**Teorēma.** Galīga skaita bezgalīgi mazu lielumu summa arī ir bezgalīgi mazs lielums.

Teorēmu pierādīsim divu bezgalīgi mazu lielumu  $\alpha_n$  un  $\beta_n$  gadījumam. Izvēlamies patvaļīgu  $\varepsilon > 0$ : pēc tam ņemam  $\varepsilon/2$ . Tā kā  $\alpha_n$  ir b. m. lielums, tad šim  $\varepsilon/2$  atradīsies tāds numurs  $N_1$ , ka visiem  $n > N_1$  izpildās nevienādība

$$|\alpha_n| < \varepsilon/2. \quad (8.9)$$

Analoģiski, tā kā  $\beta_n$  ir b. m. lielums, tad šim pašam  $\varepsilon/2$  atradīsies tāds numurs  $N_2$ , ka visiem  $n > N_2$

$$|\beta_n| < \varepsilon/2. \quad (8.10)$$

Ņemam  $N$ , vienādu ar lielāko no skaitļiem  $N_1$  un  $N_2$ . Tad, ja  $n > N$ , tad  $n > N_1$  un  $n > N_2$ . Tādēļ visiem  $n > N$  izpildās abas nevienādības (8.9) un (8.10). Apskatam bezgalīgi mazo lielumu summu  $\alpha_n + \beta_n$ . Pēc moduļu īpašības

$|\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n|$ . Pieņemsim tagad, ka  $n > N$ , tad  $|\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ .

Tādā veidā, patvaļīgam  $\varepsilon$  ir atrasts tāds numurs  $N$ , ka visiem  $n > N$  izpildās nevienādība  $|\alpha_n + \beta_n| < \varepsilon$ . Tas nozīmē, ka  $\alpha_n + \beta_n$  ir b. m. lielums.

Mēs pierādījām apgalvojumu: divu bezgalīgi mazu lielumu summa ir bezgalīgi mazs lielums. Pielietojot šo apgalvojumu vairākas reizes, iegūstam teorēmas apgalvojumu.

Piezīme. Tikko pierādītajā teorēmā ir būtiski, ka b. m. saskaitāmo skaits ir galīgs. Ja saskaitāmo skaits neierobežoti pieaug, tad teorēma var izrādīties nepareiza.

**Teorēma.** *Bezgalīgi maza lieluma reizinājums ar ierobežotu lielumu ir bezgalīgi mazs lielums.*

**Pierādījums.** Pieņemsim, ka  $x_n$  – b. m. lielums, bet  $y_n$  – ierobežots lielums, t. i. viņam atradīsies tāds skaitlis  $M > 0$ , ka  $|y_n| \leq M$  visiem numuriem  $n$ .

Izvēlamies patvaļīgu skaitli  $\varepsilon > 0$ , un pēc tam ņemam  $\varepsilon/M$ . Tā kā  $x_n$  ir b. m. lielums, tad šim skaitlim  $\varepsilon/M$  atradīsies tāds numurs  $N$ , ka visiem  $n > N$  izpildīsies nevienādība

$$|x_n| < \varepsilon/M.$$

Tad  $|x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < (\varepsilon/M) \cdot M = \varepsilon$ . Tādējādi, patvaļīgam  $\varepsilon$  mēs esam atraduši tādu numuru  $N$ , ka visiem  $n > N$  izpildās nevienādība  $|x_n \cdot y_n| < \varepsilon$ . Tas nozīmē, ka reizinājums  $x_n \cdot y_n$  ir b. m. lielums.

**Sekas.** Konverģējoša mainīga lieluma reizinājums ar bezgalīgi mazu lielumu ir b. m. lielums.

Tiešām, pieņemsim, ka mainīgs lielums konverģē, t. i. tam ir robeža. Saskaņā ar iepriekš pierādīto teorēmu, ja virknei ir robeža, tad tā ir ierobežota. Bet pēdējā teorēmā tika pierādīts, ka b. m. lieluma reizinājums ar ierobežotu ir b. m. lielums, kas arī bija vajadzīgs.

#### 8.4. Bezgalīgi lieli lielumi

Mainīgu lielumu  $x_n$  sauc par *bezgalīgi lielu*, ja jebkuram pēc patikas lielam skaitlim  $E > 0$  var atrast tādu numuru  $N$ , ka visiem  $n > N$  izpildās nevienādība

$$|x_n| > E.$$

Piemēri. 1.  $x_n = (-n)^3$ . 2.  $x_n = 2^n$ .

To faktu, ka lielums  $x_n$  ir bezgalīgi liels lielums, apzīmē šādi:  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ . Vienlaikus ar izteiksmi  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$  tiek izmantots pieraksts

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty.$$

To var noformulēt šādi: ja virkne  $x_n$  – bezgalīgi liela un visi tās locekļi, sākot no kāda numura ir pozitīvi (negatīvi), tad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \quad \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \right).$$

Piemēri. 1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = +\infty$ . 2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n)^3 = -\infty$ . 3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-2)^n = \infty$ .

Piezīme.  $\infty$  – nav skaitlis, bet simbols, un tādēļ (sk. robežas definīciju)  $\infty$  nav robeža parastā nozīmē.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$  ir jāsaprot kā pieraksts, kurš nozīmē, ka mainīgs lielums  $x_n$  ir bezgalīgi liels.

**Teorēma.** Ja  $x_n$  – bezgalīgi mazs, tad tam apgrieztais lielums  $\frac{1}{x_n}$  ir bezgalīgi liels. No otras puses, lielums, apgriezts bezgalīgi lielam, ir bezgalīgi mazs lielums.

### 8.5. Aritmētiskās operācijas ar robežām

**Teorēma.** Ja virknēm  $\{x_n\}$  un  $\{y_n\}$  ir robežas, tad:

1) virknei  $\{x_n + y_n\}$  arī ir robeža, pie kam

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

2) virknei  $\{x_n \cdot y_n\}$  arī ir robeža, pie kam

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

3) ja visi virknes  $y_n$  locekļi nav vienādi ar nulli un

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0,$$

tad virknei  $\{x_n/y_n\}$  arī ir robeža, pie kam

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n/y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n / \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

1. Pierādījums izmanto b. m. īpašības un teorēmu par saistību starp b. m. un robežu. Pieņemsim, ka  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , un  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ . Saskaņā ar teorēmu par saistību starp b. m. lielumu un robežu tas nozīmē, ka

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n, \quad \text{kur } \alpha_n \text{ un } \beta_n - \text{ b. m.}$$

Tad

$$x_n + y_n = a + \alpha_n + b + \beta_n = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n).$$

Tā kā b. m. lielumu summa arī ir b. m. lielums, tad  $\alpha_n + \beta_n$  ir b. m. Lie-  
lums; apzīmēsim to ar  $\gamma_n$ . Tādā veidā,  $x_n + y_n = (a + b) + \gamma_n$ , kur  $\gamma_n - \text{ b. m.}$   
Saskaņā ar teorēmu par saistību starp b. m. un robežu tas nozīmē, ka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b,$$

t. i.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$  eksistē un ir vienāda ar  $a + b$ , t. i.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

2.  $x_n \cdot y_n = (a + \alpha_n) \cdot (b + \beta_n) = ab + a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n$ . Saskaņā ar  
teorēmu par bezgalīgi maziem un tās sekām  $a \cdot \beta_n$ ,  $b \cdot \alpha_n$  un  $\alpha_n \cdot \beta_n$  ir b. m.  
lielumi. Šo b. m. summa ir b. m. lielums. Apzīmējam to ar  $\gamma_n$ :

$$\gamma_n = a \cdot \beta_n + b \cdot \alpha_n + \alpha_n \cdot \beta_n.$$

Tad

$$x_n \cdot y_n = ab + \gamma_n,$$

kur  $\gamma_n - \text{ b. m.}$  Tas nozīmē, ka  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = ab$ , t. i. robeža eksistē un ir vienāda  
ar atbilstošo robežu reizinājumu.

3. Jāparāda, ka  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n/y_n$  eksistē un ir vienāds ar robežu dalījumu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n / \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a/b.$$

Saskaņā ar to pašu teorēmu par saistību tas nozīmē, ka ir jāpierāda, ka  
 $x_n/y_n = a/b + \gamma_n$ , kur  $\gamma_n - \text{ b. m.}$  Tas, savukārt, ir līdzvērtīgs faktam, ka  $(x_n/y_n -$   
 $- a/b)$  ir b. m. lielums.

Izmantojot vienādības  $x_n = a + \alpha_n$ ,  $y_n = b + \beta_n$ , kur  $\alpha_n$  un  $\beta_n$  ir b. m.,  
iegūstam:

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{ab + b\alpha_n - ab - a\beta_n}{b \cdot y_n} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{y_n} \cdot (b\alpha_n - a\beta_n).$$

Saskaņā ar teorēmu par b. m. izteiksmi  $(b\alpha_n - a\beta_n)$  ir b. m. lielums. Pēc nosacījuma  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \neq 0$  un visi  $y_n \neq 0$ . To izmantojot, var parādīt, ka  $1/y_n$

ir ierobežots lielums. Tādēļ arī  $1/by_n$  ir ierobežots lielums; tātad,

$$\underbrace{\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{y_n}}_{\text{orp.}} \cdot \underbrace{(b\alpha_n - a\beta_n)}_{\text{b.m.}} = \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}$$

ir b. m. lielums. tas nozīmē, kā jau atzīmēts, ka  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n/y_n$  eksistē un ir vienāda ar  $a/b$ , kas arī bija vajadzīgs.

## 8.6. Funkcijas robeža

Iepriekšējā punktā tika apskatīta virknes  $\{x_n\}$  robeža, bet  $x_n = f(n)$  ir naturāla argumenta funkcija, tātad, mēs faktiski apskatījām naturāla argumenta funkcijas robežu. Šeit tiks apskatīta nepārtraukta argumenta funkcijas robežas jēdziens un īpašības.

Apskatām funkciju  $f(x)$ , kura definēta kādā punkta  $x_0$  apkārtnē, izņemot, varbūt, pašu punktu  $x_0$ . Izvēlamies tādu argumenta  $x$  vērtību virkni  $\{x_n\}$ , kura pieder funkcijas definīcijas apgabalam un konverģē uz skaitli  $x_0$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ .

Tā kā mēs pieļaujam, ka pašā punktā  $x_0$  funkcija varētu nebūt definēta, tad norunāsim, ka izpildās nosacījums: katrs virknes  $\{x_n\}$  loceklis ir atšķirīgs no  $x_0$ . Tādas argumenta vērtību virknes, konverģējošas uz skaitli  $x_0$ , var veidot daudzos veidos. Piemēram,

$$\{x_n\} = \{x_0 + 1/n\}, \quad \{x_n\} = \{x_0 - 1/n^2\}, \quad \{x_n\} = \{x_0 + (-1)^2/n^2\} -$$

ir dažādas virknes, kuras konverģē uz skaitli  $x_0$ .

Katrai tādai argumenta vērtību virknei, konverģējošai uz skaitli  $x_0$ , izvēlamies atbilstošo funkcijas vērtību virkni  $\{f(x_n)\}: f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$

Šajā gadījumā pastāv šādas iespējas:

1. Kādai argumenta vērtību virknei  $\{x_n\} \rightarrow x_0$ , atbilstošai funkcijas vērtību virknei, robeža neeksistē.

2. Lai arī kādu uz  $x_0$  konverģējošu argumenta vērtību virkni neizvēlētos, atbilstošai funkcijas vērtību virknei eksistē robeža, bet dažādām argumenta vērtību virknēm šīs robežas var iznākt dažādas, t. i. var būt, ka

$$\{f(x_n)\} \rightarrow A,$$

$$\{f(x_n')\} \rightarrow A' \text{ un } A' \neq A.$$

3. Lai arī kādu uz  $x_0$  konverģējošu argumenta vērtību virkni neizvēlētos, atbilstošā funkcijas vērtību virkne konverģē un pie tam visām virknēm ir viena un tā pati robeža.

Šajā trešajā gadījumā saka, ka funkcijai  $f(x)$  eksistē robeža kad  $x$  tiecas uz  $x_0$ .

**Definīcija.** Skaitli  $A$  sauc par **funkcijas  $f(x)$  robežu**, kad  $x$  tiecas uz  $x_0$ , ja jebkurai uz  $x_0$  konverģējošai argumenta vērtību virknei  $\{x_n\}$ , tādai ka  $x_n \neq x_0$ , atbilstošā funkcijas vērtību virkne  $\{f(x_n)\}$  konverģē (tiecas) uz skaitli  $A$ .

Šo funkcijas robežas definīciju sauc par definīciju virkņu valodā.

Atrunas  $x_n \neq x_0$  nepieciešamība funkcijas robežas definīcijā labi redzama šādā piemērā. Pieņemsim, ka  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ . Apskatīsim šīs funkcijas robežu, kad  $x \rightarrow 0$ . Vēlāk tiks parādīts, ka šī robeža eksistē un tai ir liela nozīme robežu atrašanas tehnikā. Tomēr šī funkcija nav definēta punktā  $0$ , un tādēļ  $x_n$  nedrīkst būt vienāds ar nulli.

**Piezīme.** Tas, ka  $f(x_n)$  tiecas uz  $A$  kad  $x_n \rightarrow x_0$  nozīmē, ka starpība  $|f(x_n) - A|$  var tikt padarīta pēc patikas maza, ja  $x_n$  pietiekoši maz atšķiras no  $x_0$ , t. i. ja starpība  $|x_n - x_0|$  ir pietiekoši maza.

Šī piezīme noved vēl pie vienas funkcijas robežas definīcijas.

**Definīcija.** Skaitli  $A$  sauc par funkcijas  $f(x)$  robežu, kad  $x$  tiecas uz  $x_0$ , ja jebkuram (pēc patikas mazam) pozitīvam skaitlim  $\varepsilon$  atradīsies tāds pozitīvs skaitlis  $\delta$ , ka visiem  $x$ , kuri apmierina nevienādību  $|x - x_0| < \delta$  un  $x \neq x_0$ , izpildās nevienādība  $|f(x) - A| < \varepsilon$ .

Šo definīciju sauc arī par funkcijas robežas definīciju " $\varepsilon - \delta$ " valodā.

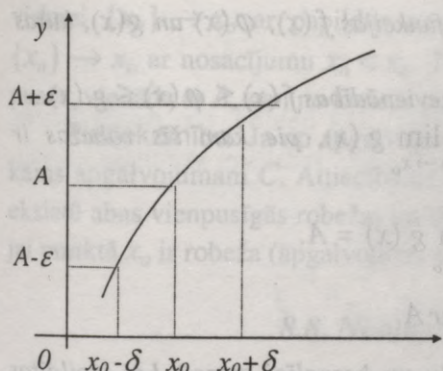
Abas definīcijas ir līdzvērtīgas, t. i. no definīcijas " $\varepsilon - \delta$ " valodā seko definīcija virkņu valodā, un otrādi. Šī fakta pierādījumu mēs izlaižam.

To faktu, ka skaitlis  $A$  ir funkcijas  $f(x)$  robeža punktā  $x_0$ , pieraksta šādi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

Dažreiz tiks izmantots arī šāds pieraksts:

$$f(x) \rightarrow A \text{ kad } x \rightarrow x_0.$$



Zīm.8.5.

Šo robežas definīciju var grafiski paskaidrot šādi: katram  $\varepsilon > 0$  var atrast tādu  $\delta > 0$ , ka jebkuram  $x$ , kurš pieder punkta  $x_0$   $\delta$ -apkārtnei, atbilstošā funkcijas vērtība  $f(x)$  pieder punkta  $A$   $\varepsilon$ -apkārtnei.

Piezīme. Dažādās situācijās ir piemērota viena vai otra robežas definīcija. Piemēram, ja vajag parādīt, ka funkcijai ir robeža punktā  $x_0$ , tad ir pie-

mērotāka definīcija " $\varepsilon - \delta$ " valodā, ja vajag parādīt, ka funkcijai neeksistē robeža, tad piemērotāka ir definīcija virkņu valodā. Parādīsim, piemēram, ka Dirihlē funkcijai nav robežas punktā  $0$ . Atgādināsim, ka šo funkciju definē šādi:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ja } x - \text{racionāls skaitlis,} \\ 0, & \text{ja } x - \text{iracionāls skaitlis.} \end{cases}$$

Izvēlamies divas virknes  $\{x_n\}$  un  $\{x'_n\}$ , kuras tiecas uz nulli, pie kam virkni  $\{x_n\}$  ņemam tā, lai visi tās locekļi būtu racionāli skaitļi (piemēram,  $x_n = 1/n$ ), bet virkni  $\{x'_n\}$  tā, lai visi tās locekļi būtu iracionāli skaitļi. Tad visiem  $n$  izpildās  $f(x_n) = 1$  (tā kā  $x_n$  - racionāli skaitļi) un tādēļ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1.$$

No otras puses, visiem  $n$  izpildās  $f(x'_n) = 0$  (tā kā  $x'_n$  - iracionāli skaitļi) un tādēļ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = 0.$$

Tādā veidā, dažādām virknēm  $\{x_n\} \rightarrow 0$  un  $\{x'_n\} \rightarrow 0$  atbilstošām funkciju vērtību virknēm eksistē atšķirīgas robežas, kas ir pretrunā ar robežas definīciju (virkņu valodā). Tātad, Dirihlē funkcijai punktā  $0$  nav robežas. Interesanti atzīmēt, ka šai funkcijai nav robežas nevienā punktā  $x_0$ .

Visiem jēdzieniem, īpašībām un teorēmām, formulētām un pierādītām iepriekšējos punktos virkņu robežām, eksistē savī analogi funkciju robežām. Piemēram.

**Teorēma.** Pieņemsim, ka dotas trīs funkcijas  $f(x)$ ,  $\varphi(x)$  un  $g(x)$ , kuras apmierina šādus nosacījumus:

1. Kādā punkta  $x_0$  apkārtņē izpildās nevienādības  $f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x)$ .
2. Eksistē robežas  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  un  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ , pie kam šīs robežas ir vienādas:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A.$$

Tad eksistē  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$ , arī vienāda ar  $A$ .

**Teorēma.** (Par saistību starp robežu un bezgalīgi mazo.) Lai izpildītos  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , nepieciešami un pietiekami, lai  $f(x) = A + \alpha(x)$ , kur  $\alpha(x)$  -

bezgalīgi maza funkcija ( $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ ).

### 8.7. Vienpusējās robežas

Skaitli  $A$  sauc par funkcijas  $f(x)$  robežu punktā  $x_0$  no labās puses, ja jebkurai virknei  $\{x_n\}$ , kura tiecas uz punktu  $x_0$  un apmierina papildus nosacījumu  $x_n > x_0$ , atbilstošā funkcijas vērtību virkne  $\{f(x)\}$  tiecas uz skaitli  $A$ . Analogiski definē robežu no kreisās puses. Apzīmējumi:  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$  - robeža no

labās puses;  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$  - robeža no kreisās puses.

Robežas no kreisās puses un no labās puses sauc par vienpusējām.

**Teorēma** (par vienpusējām robežām). Lai funkcijai  $f(x)$  punktā  $x_0$  eksistētu robeža, ir nepieciešami un pietiekami, lai funkcijai šajā punktā eksistētu vienpusējās robežas un šīs robežas būtu vienādas.

Noformulēsim atsevišķi katru no diviem apgalvojumiem, kurus satur šī teorēma.

**Nepieciešamība.** Ja no apgalvojuma  $C$  seko apgalvojums  $B$ , tad  $B$  ir nepieciešams apgalvojumam  $C$ . Tā kā teorēmā tiek runāts par robežas eksistences nepieciešamo nosacījumu, tad nepieciešamības formulējums būs šāds:

Ja funkcijai  $f(x)$  punktā  $x_0$  eksistē robeža, tad funkcijai eksistē vienpusējas robežas, kuras ir vienādas.

Šī fakta pierādījums ir diezgan acīmredzams. Tiešām, tas, ka funkcijai  $f(x)$  punktā  $x_0$  eksistē robeža nozīmē, ka jebkurai virknei  $\{x_n\}$ , kura tiecas uz  $x_0$  atbilstošā virkne  $\{f(x_n)\}$  tiecas uz skaitli  $A$ , tai skaitā tas ir spēkā jebkurai

virknei  $\{x_n\} \rightarrow x_0$  ar papildus nosacījumu  $x_n > x_0$ , kā arī jebkurai virknei  $\{x_n\} \rightarrow x_0$  ar nosacījumu  $x_n < x_0$ . Tas nozīmē, ka eksistē gan robeža no labās puses, vienāda ar  $A$ , gan no kreisās puses arī vienāda ar to pašu  $A$ .

**Pietiekamība.** Ja no apgalvojuma  $B$  seko apgalvojums  $C$ , tad  $B$  ir pietiekams apgalvojumam  $C$ . Attiecībā uz doto teorēmu tas nozīmē, ka, ja punktā  $x_0$  eksistē abas vienpusīgās robežas un tās ir vienādas (apgalvojums  $B$ ), tad funkcijai punktā  $x_0$  ir robeža (apgalvojums  $C$ ). Šī fakta pierādījumu mēs izlaižam.

### 8.8. Nenoteiktību novēršana

Apskatot aritmētiskās darbības ar robežām tika uzskatīts, ka abiem mainīgiem lielumiem ir robežas, bet, apskatot dalījuma robežu, tika izdarīta atruna, ka saucēja robeža nav vienāda ar nulli.

Apskatīsim gadījumus, kad, vai nu viens no mainīgiem lielumiem tiecas uz bezgalību, vai arī saucēja robeža ir vienāda ar nulli.

Skaidrs, ka, ja bezgalīgi lieli lielumi ir ar vienādām zīmēm, tad to summa arī ir bezgalīgi liels lielums. Bet, ja virknes  $\{x_n\}$  un  $\{y_n\}$  – bezgalīgi lieli ar dažādām zīmēm, tad par summas  $\{x_n + y_n\}$  robežu iepriekš neko pateikt nevar. Apskatām piemērus.

1. Ja  $x_n = 2n \rightarrow +\infty$ ,  $y_n = -n \rightarrow -\infty$ , tad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n - n) = \infty.$$

2. Ja  $x_n = 2n + 4 \rightarrow +\infty$ ,  $y_n = -2n \rightarrow -\infty$  tad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n + 4 - 2n) = 4.$$

Šie piemēri parāda, ka bezgalīgi lielu lielumu summa var būt jebkurš skaitlis, bet var arī neeksistēt. Tādā gadījumā saka, ka pastāv nenoteiktība ar veidu  $\infty - \infty$ .

Var būt arī citu veidu nenoteiktības: bezgalīgi maza lieluma reizinājums ar bezgalīgi lielu lielumu (nenoteiktība ar veidu  $0 \cdot \infty$ ); bezgalīgi liela lieluma dalījums ar bezgalīgi lielu (nenoteiktība ar veidu  $\infty/\infty$ ); bezgalīgi maza lieluma dalījums ar bezgalīgi mazu (nenoteiktība ar veidu  $0/0$ ) un citas.

Ir jāņem vērā, ka  $\infty - \infty$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty/\infty$ ,  $0/0$  – ir tikai simboli, ar kuriem apzīmē nenoteiktības veidu, tiem nepiemīt nekāda skaitliska jēga un nekādas darbības ar tiem izdarīt nedrīkst.

Novērst nenoteiktību – tas nozīmē noteikt, kā izturas izteiksme, kura veido doto nenoteiktību, noteikt tās robežu.

Piemēri. Atrast šādas robežas.

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + n)/(3n + 1)$ .

Šajā piemērā skaitītājs un saucējs – bezgalīgi lieli lielumi, t. i. pastāv nevienādība ar veidu  $\infty/\infty$ . Lai novērstu šo nevienādību, izdalīsim skaitītāju un saucēju ar  $n^2$ . Iegūsim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{3n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 1/n}{3 + 1/n^2} = \frac{1}{3}.$$

2.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 1}$ .

Skaitītājs un saucējs tiecas uz nulli; pastāv nenoteiktība ar veidu  $0/0$ . Sadalīsim reizinātājos izteiksmes skaitītājā un saucējā. Iegūsim

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2 - x + 1} = \frac{0}{3} = 0.$$

3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x)$ .

Šeit ir nenoteiktība ar veidu  $(\infty - \infty)$ . Pareizināsim skaitītāju un saucēju ar  $(\sqrt{x^2 - 1} + x)$ . Iegūsim

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 1} - x)(\sqrt{x^2 - 1} + x)}{(\sqrt{x^2 - 1} + x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = 0.$$

4.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^3-1} \right)$  (nenoteiktība  $\infty - \infty$ ) =

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^2 + x + 1 - 1}{x^3 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^2 + x}{x^3 - 1} \right) = \infty.$$

$$\begin{aligned}
 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x} \left( \frac{0}{0} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1-x^2} - 1)(\sqrt{1-x^2} + 1)}{x(\sqrt{1-x^2} + 1)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x^2-1}{x(\sqrt{1-x^2} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x(\sqrt{1-x^2} + 1)} = \frac{0}{2} = 0.
 \end{aligned}$$

### 8.9. Pirmā ievērojamā robeža

**Teorēma.** Bezgalīgi maza argumenta sinusa attiecības pret šo argumentu robeža ir vienāda ar viennieku, t. i.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)/x = 1$ .

**Pierādījums.** Tā kā  $x \rightarrow 0$ , var uzskatīt, ka  $|x| < \pi/2$ . Vispirms pieņemsim, ka  $0 < x < \pi/2$ . Ņemam riņķi ar radiusu viens (zīm. 8.6), leņķi  $AOD$  apzīmējam ar  $x$ , novelkam tangensu līniju  $BD$  un apskatām laukumus trijstūriem  $OAD$  ( $S_{\Delta OAD}$ ), sektoram  $OAD$  ( $S_{\text{sekl.}OAD}$ ) un trijstūriem  $OBD$  ( $S_{\Delta OBD}$ ).

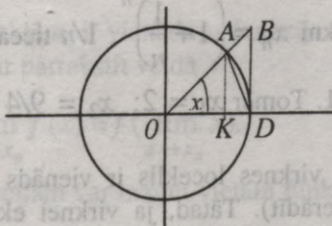
Ir acīm redzami, ka

$$S_{\Delta OAD} < S_{\text{sekl.}OAD} < S_{\Delta OBD};$$

$$S_{\Delta OAD} = 1/2 \cdot OD \cdot AK = 1/2 \cdot 1 \cdot \sin x;$$

$$S_{\text{sekl.}OAD} = 1/2 \cdot OA^2 \cdot x = 1/2 \cdot 1 \cdot x;$$

$$S_{\Delta OBD} = 1/2 \cdot OD \cdot BD = 1/2 \cdot 1 \cdot \text{tg } x.$$



Zīm.8.6.

Tādā veidā,  $\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \text{tg } x$ .

Izdalām visas nevienādības daļas ar  $\frac{1}{2} \sin x$ . Tā kā mēs pieņemām, ka

$0 < x < \pi/2$ , tad  $\sin x > 0$ , un nevienādību zīmes nemainās. Iegūstam  $1 < x/(\sin x) < 1/(\cos x)$ . No šejienes seko:

$$1 > (\sin x)/x > \cos x.$$

Šī nevienādība ir iegūta pieņemot, ka  $0 < x < \pi/2$ . Tā kā funkcija  $(\sin x)/x$  un  $\cos x$  pāru funkcijas, tad nevienādība ir pareiza arī tad, ja  $x \in (-\pi/2, 0)$ . Tātad, nevienādības ir pareizas visiem  $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ . Funkcija  $y = (\sin x)/x$  atrodas starp funkcijām  $y = 1$  un  $y = \cos x$ , pie kam  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$  un  $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$ .

Tad pēc teorēmas par robežu funkcijai, kura atrodas starp divām funkcijām, robeža funkcijai  $(\sin x)/x$  arī eksistē un ir vienāda ar 1, t.i.  $\lim_{x \rightarrow 0} ((\sin x)/x) = 1$ , kas arī bija jāpierāda.

Šo robežu sauc par **pirmo ievērojamu robežu**. To var pierakstīt vispārīgākā veidā: ja  $x \rightarrow c$   $\alpha(x) \rightarrow 0$ , tad

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1.$$

Piemērs.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$$

### 8.10. Otrā ievērojamā robeža

Apskatām skaitļu virkni  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ;  $1/n$  tiecas uz nulli. Varētu domāt,

ka  $(1 + 1/n)^n$  tiecās uz 1. Tomēr  $x_1 = 2$ ;  $x_2 = 9/4 = 2,25$ ;  $x_3 = 64/27 \approx 2,37, \dots$

Kā redzam, pirmais virknes loceklis ir vienāds ar 2 un virknes locekļi pieaug (to var stingri pierādīt). Tātad, ja virknei eksistē robeža, tad tā nav vienāda ar vienu.

Var pierādīt, ka šī robeža tiešām eksistē. To sauc par **otro ievērojamu robežu** un apzīmē ar burtu  $e$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e;$$

$e$  – iracionāls skaitlis;  $e = 2,718281 \dots$

Analoģiski, robeža funkcijai  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ ; apzīmējot  $\frac{1}{x} = \alpha$ , šo robežu var pierakstīt veidā

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^\alpha = e.$$

Eksponentfunkciju ar bāzi  $e$ , t. i.  $y = e^x$ , sauc par *eksponenti*. Šo funkciju bieži apzīmē  $y = \exp x$ . Logaritmu ar bāzi  $e$  sauc par *naturālo logaritmu*, pie kam  $\log_e x$  vietā pieņemts rakstīt  $\ln x$ .

Ekspontei un naturālam logaritmam ir liela nozīmē dažādos matemātikas pielietojumos, arī ekonomikā.

Piemērs.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x/2}\right)^{x/2 \cdot 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x/2}\right)^{x/2}\right]^2 = e^2.$$

## 8.11. Viena mainīgā funkcijas nepārtrauktība

1. Definīcija. Funkciju  $y = f(x)$  sauc par nepārtrauktu punktā  $x_0$ , ja

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \quad (8.11)$$

t. i. ja funkcijas robeža punktā  $x_0$  ir vienāda ar funkcijas vērtību šajā punktā.

Nosacījumu (8.11) var pārrakstīt veidā

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x). \quad (8.12)$$

Tātad, nepārtrauktām funkcijām var mainīt vietām funkcijas simbolu un robežas simbolu.

Lai izpildītos nosacījums (8.11), vispirms ir nepieciešams, lai funkcija būtu definēta punktā  $x_0$  un kādā šī punkta apkārtņē un lai eksistētu robeža  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

Tādēļ ir vērts 1. definīciju izrakstīt sīkāk.

2. Definīcija. Funkciju  $y = f(x)$  sauc par nepārtrauktu punktā  $x_0$ , ja izpildās nosacījumi:

1) funkcija ir definēta punktā  $x_0$  un kādā šī punkta apkārtņē;

2) eksistē robeža  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ;

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Tā kā  $\Delta x = x - x_0$ , bet  $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ , tad nosacījums (8.11) ir līdzvērtīgs šādam:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

Tātad, 1. definīciju var pārfrāzēt šādi:

3. Definīcija. Funkcija  $f(x)$  saucas par nepārtrauktu punktā  $x_0$ , ja

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0,$$

t. i. ja bezgalīgi mazam argumenta pieaugumam atbilst bezgalīgi mazs funkcijas pieaugums. Funkciju  $f(x)$  sauc par nepārtrauktu intervālā, ja tā ir nepārtraukta katrā šī intervāla punktā.

Zināms, ka galvenās elementārās funkcijas ir nepārtrauktas savos definīcijas apgabalos, t. i. katrā punktā, kur funkcija ir definēta.

Balstoties uz robežu īpašībām un nepārtrauktas funkcijas definīciju, viegli parādīt, ka

1) nepārtrauktu funkciju summa un reizinājums ir nepārtraukta funkcija;

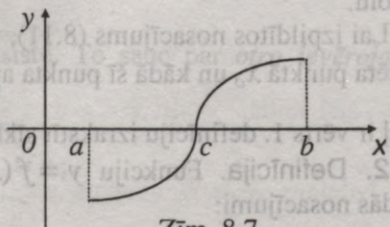
2) nepārtrauktu funkciju dalījums ir nepārtraukta funkcija, ja apskatāmajā punktā saucējs nav vienāds ar nulli;

3) salikta funkcija, izveidota no nepārtrauktām funkcijām, arī ir nepārtraukta funkcija, precīzāk: ja funkcija  $u(x)$  nepārtraukta punktā  $x_0$ , bet funkcija  $y = y(u)$  nepārtraukta punktā  $u_0$ , pie kam  $u(x_0) = u_0$ , tad funkcija  $y(u(x))$  nepārtraukta punktā  $x_0$ .

No visa teiktā izriet, ka jebkura elementārā funkcija ir nepārtraukta savā definīcijas apgabalā.

Eksistē vesela virkne svarīgu teorēmu par nepārtrauktām funkcijām. Mēs atzīmēsim divas no tām.

**Teorēma (1. Bolcāno-Košī).** Pieņemsim, ka funkcija  $f(x)$  ir nepārtraukta segmentā  $[a, b]$  un tā galapunktos funkcijas vērtībām ir pretējas zīmes. Tad nogriežņa  $[a, b]$  iekšienē atradīsies tāds punkts  $c$ , ka šajā punktā funkcijas vērtība ir vienāda ar nulli (t. i. atrodas funkcijas  $f(x)$  sakne) (zīm. 8.7).



Zīm. 8.7.

**Teorēma** (par apgriezītās funkcijas nepārtrauktību). Pieņemsim, ka funkcija  $f(x)$  intervālā  $X$  nepārtraukta un monotona (t. i. vai nu tikai aug vai nu tikai dilst). Tad attiecīgajā intervālā  $Y$  eksistē nepārtraukta apgrieztā funkcija  $f^{-1}(y)$ .

Uz pirmo no šīm teorēmām balstās viena no tuvinātām nepārtrauktas funkcijas sakņu atrašanas metodēm – **dalīšanas uz pusēm metode**.

Punkts  $x_0$ , kurā funkcija  $f(x)$  nav nepārtraukta, saucas par dotās funkcijas **pārtraukuma punktu**.

**Pārtraukuma punktu klasifikāciju** ir ērti veikt, izmantojot 2. definīciju. Šajā gadījumā (ņemot vērā teorēmu par vienusējām robežām) šīs definīcijas otro punktu aizstāsim ar diviem atsevišķiem punktiem:

2a) eksistē abas vienusējās robežas:  $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$  un  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ ;

2b) šīs vienusējās robežas ir vienādas.

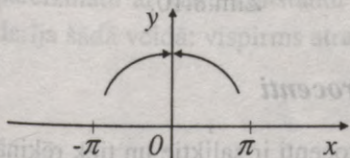
Ja neizpildās kaut viens no nosacījumiem 1, 2a, 2b, 3, tad  $x_0$  – pārtraukuma punkts. Punktu  $x_0$  sauc par **pirmā veida pārtraukuma punktu**, ja izpildās nosacījums 2a, bet neizpildās kaut viens no atlikušajiem nosacījumiem. Pie kam, ja izpildās nosacījums 2b (kopā ar nosacījums 2a tas ir līdzvērtīgs tam, ka eksistē  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ), bet neizpildās ne nosacījums 1 vai 3, tad punktu  $x_0$  sauc par

**novēršamu pārtraukuma punktu**.

**Piemērs.** Funkcijai  $y = \frac{\sin x}{x}$  ir pārtraukums punktā  $x_0 = 0$ , jo tā šajā

punktā nav definēta (neizpildās 1. punkts). Tomēr eksistē  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  (izpildās nosacījumi 2a un 2b). Tātad,  $x_0 = 0$  – novēršams pārtraukuma punkts (zīm. 8.8).

Apskatām jaunu funkciju.



Zīm. 8.8.

$$\tilde{y} = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Šī funkcija ir nepārtraukta visur.

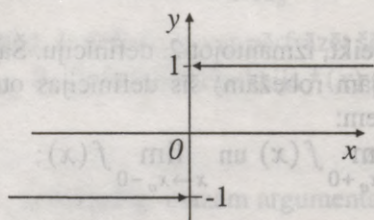
Ārpus punkta  $x = 0$  šo faktu nosaka funkcijas  $\frac{\sin x}{x}$  nepārtrauktība. Pār-

baudām jaunās funkcijas nepārtrauktību punktā  $x = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tilde{y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = \tilde{y}(0), \text{ kas arī bija nepieciešams.}$$

Nodēfinējot papildus funkcijas vērtību punktā  $x = 0$ , pārtrauktas funkcijas vietā ieguvām nepārtrauktu. Tas izskaidro nosaukumu "novēršams pārtraukuma punkts".

Ja izpildās nosacījums 2a, bet neizpildās nosacījums 2b, tad punktu  $x_0$  sauc par funkcijas **lēciena tipa pārtraukuma punktu**.



Zīm. 8.9.

Piemērs.

$$y = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Šajā piemērā  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 1$ ,

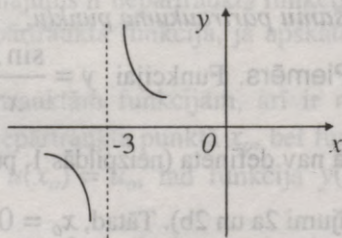
bet  $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = -1$ , t. i. robeža no kreisās puses nav vienāda ar robežu no labās puses.

Beidzot, ja neizpildās punkts 2a, tad  $x_0$  sauc par **otrā veida pārtraukuma punktu**; gadījumā, ja  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ , tad  $x_0$  sauc par **bezgalīga pārtraukuma punktu**.

Piemērs.  $y = \frac{1}{x+3}$ ;

$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x+3} = \infty$ , t. i.  $x = -3$  ir

bezgalīga pārtraukuma punkts.



Zīm. 8.10.

## 8.12. Nepārtraukti procenti

Pieņemsim, ka  $p$  – gada procentu likme, procenti ir saliktie un tiek rēķināti reizi ceturksnī. Ja sākuma summa uz rēķina ir  $K$ , tad pēc ceturkšņa summa rēķinā būs vienāda ar  $K(1 + i/4)$ , bet pēc diviem ceturkšņiem ar  $K(1 + i/4)^2$ ,

pēc gada ar  $K(1 + i/4)^4$ . atgādināsim, ka  $i = \frac{p}{100}$ .

Analoģiski, ja procentu rēķina katru mēnesi, tad summa pēc gada būs  $K(1 + i/12)^{12}$ . Ja gads sadalīts  $n$  vienādās daļās un procentu rēķina ik pēc gada  $n$ -tās daļas, tad pēc gada summa būs

$$K(1 + i/n)^n.$$

Apskatīsimies, kāda summa būs uz rēķina pēc gada, ja procentu rēķina nepārtraukti (katru momentu), citiem vārdiem, ja  $n$  tiecās uz bezgalību:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} K(1+i/n)^n &= \\ &= K \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 1/(n/i)\right)^n = \\ &= K \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 1/(n/i)\right)^{n/i \cdot i} = \\ &= K \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left(1 + 1/(n/i)\right)^{n/i} \right)^i = K \cdot e^i. \end{aligned}$$

Atbilstoši pēc  $\alpha$  gadiem uz rēķina būs summa  $K \cdot e^{i\alpha}$ :

$$K_\alpha = K \cdot e^{i\alpha}. \quad (8.13)$$

### 8.13. Skaitļu rindas

Izmantojot iepriekšējos punktus apskatītās robežas, ievadam jēdzienu "summa" bezgalīgam saskaitāmo skaitam. Jau skolas kursā bija definēta bezgalīgi dilstošas ģeometriskās progresijas (ar kvocientu, kurš pēc moduļa mazāks par vienu) locekļu summa

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots,$$

t. i. tādas bezgalīgas skaitļu virknes, kurai katrs loceklis ir vienāds ar iepriekšējo, pareizinātu ar kādu konstantu skaitli  $q$ , kuram izpildās nosacījums  $|q| < 1$ . To darīja šādā veidā: vispirms atrada  $n$  virknes saskaitāmo summu

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q},$$

un pēc tam definēja visas progresijas summu  $S$  (t. i. bezgalīgi daudzu saskaitāmo summu) kā summas  $S_n$  robežu, kad  $n \rightarrow \infty$ .

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b_1}{1-q}.$$

Jāatzīmē, ka parastā veidā, neizmantojot robežas jēdzienu, pieskaitot pa vienam saskaitāmajam, bezgalīga skaita saskaitāmo summu definēt nevar, jo šis process turpinātos bezgalīgi.

Pārejām pie vispārīgā gadījuma. Ievadam nepieciešamos jēdzienus. Pieņemsim, ka dota skaitļu virkne

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

Par *skaitļu rindu* sauc formālu izteiksmi ar veidu

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

$n$  saskaitāmo *summu* pieņemts apzīmēt ar simbolu  $\sum_{i=1}^n a_i^*$ , t. i.

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i.$$

Analoģiski, skaitļu rindai  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$  var izmantot kompaktāku pierakstu:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Šeit  $a_n$  sauc par *rindas vispārīgo (vai  $n$ -to) locekli*.

Skaitļu rindu piemēri:

$$1) 1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots$$

$$2) \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

Par rindas *parciālo summu* (jeb, precīzāk,  $n$ -to paciālo summu) sauc tās pirmo  $n$  saskaitāmo summu:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Piemēram,  $S_1 = a_1$ ,  $S_2 = a_1 + a_2$ ,  $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$ , ...

\* Šī saīsinātā pieraksta vispārīgāks veids  $\sum_{i=k}^l a_i$  nozīmē, ka tiek saskaitīti virknes  $a_n$  locekļi sākot no locekļa ar numuru  $k$  līdz loceklim ar numuru  $l$ , t. i.

$$\sum_{i=k}^l a_i = a_k + a_{k+1} + \dots + a_l.$$

Šeit  $\sum$  – summas zīme;  $i$  – summēšanas indekss. Jāatzīmē, ka summēšanas indeksa apzīmējums nav būtisks, t. i.  $\sum_{i=k}^l a_i = \sum_{m=k}^l a_m$ .

Nemam parciālo summu virkni  $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ . Šīs virknes robežu  $S$ , ja tā eksistē, sauc par *rindas summu*, t. i.

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n. \quad (8.14)$$

(Salīdziniet šo definīciju ar bezgalīgi dilstošas ģeometriskās progresijas summas definīciju.)

Tajā gadījumā, kad norādītā robeža eksistē, rindu sauc par *konverģējošu*, pretējā gadījumā sauc par *diverģējošu*. Vēlreiz uzsveram, ka rinda – tā ir *formāla* izteiksme ar veidu (8.13). Tā var konverģēt (t. i. summa eksistē) un var diverģēt. Konverģējošas rindas piemērs ir bezgalīgi dilstoša ģeometriskā progresija.

Ja rinda  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverģē un tās summa ir  $S$ , tad šo faktu pierakstīsim šādi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Viens no galvenajiem rindu teorijas jautājumiem – tas ir jautājums par rindas konverģenci. Atzīmēsim konverģējošu rindu vienkāršākās īpašības.

1. Ja rinda  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverģē, pie kam  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ , tad rinda  $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ , kur  $c$  – konstants skaitlis, arī konverģē, pie kam  $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \cdot S$ .

2. Ja rindas  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  un  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konverģē, tad rinda  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  arī konverģē, pie kam  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

3. Galīga skaita rindas locekļu pievienošana vai atmešana nemaina rindas konverģenci.

Šīs īpašības tieši seko no rindas konverģences definīcijas un atbilstošajām robežu īpašībām. Apskatām, piemēram 1. īpašību. Pēc nosacījuma eksistē

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ , kur  $S_n = a_1 + \dots + a_n$ . Rindas  $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$  parciālājamai summai ir veids

$ca_1 + \dots + ca_n = c(a_1 + \dots + a_n) = cS_n$ . Tad  $\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot S_n = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = c \cdot S$ ,

kas arī bija vajadzīgs.

Teorēma (konverģences nepieciešamais nosacījums). Ja rinda  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverģē, tad  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Pierādījums. Pēc nosacījuma eksistē  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ . Tada  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1}$  arī ir vienāds ar  $S$ . Bet tā kā  $S_n - S_{n-1} = (a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + \dots + a_{n-1}) = a_n$ , tad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Pāreja uz bezgalīgu summēšanu būtiski maina pierastās summas īpašības. Piemēram, pazīstamā īpašība "mainot saskaitāmo kārtību summa nemainās" ir pareiza tikai galīgam saskaitāmo skaitam. Eksistē tādas rindas, ka, lai kādu skaitli mēs nepaņemtu, var tā samainīt vietām rindas locekļus, ka rindas summa kļūst vienāda ar šo skaitli.

### Jautājumi pašpārbaudei

1. Definējiet skaitļu rindu un tās robežu. Sniedziet piemērus.
2. Pierādiet teorēmas par robežas unitāti (vienīgumu) un par virkni, kura atrodas starp divām virknēm.
3. Definējiet funkcijas robežu.
4. Kāda loma robežu teorijā ir bezgalīgi maziem?
5. Kas ir otrā ievērojamā robeža? Kāda ir skaitļa  $e$  loma?
6. Kā otrā ievērojamā robeža tiek izmantota procentu rēķinos?
7. Izdomājiet tādas funkcijas piemēru, kurai ir tāds novēršams pārtraukuma punkts, kur izpildās 1. un 2. punkts, bet neizpildās funkcijas nepārtrauktības 2. definīcijas 3. punkts. Kā šajā gadījumā var novērst pārtraukumu?
8. Cilvēks katru gadu rēķinā iemaksā 400 Ls. Kāda summa būs uz rēķina 10 gadus pēc rēķina atvēršanas, ja banka maksā nepārtrauktus 20% gadā?

### Vingrinājumi

Piemēros 1. – 5. uzrakstīt katras virknes pirmos piecus locekļus:

$$1. x_n = \frac{2n}{n+1}.$$

$$2. x_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}.$$

$$3. x_n = -\frac{n}{2n+1}$$

$$4. x_n = \frac{n+(-1)^n}{n}$$

$$5. x_n = a \cos n\pi$$

Atrast robežas(6. – 51.):

$$6. \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{2}{x-1}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{2}{x-1}$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n}{1-2n}$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^2+1}}{2n-1}$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-4n+1}{3n^2+3}$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+4}{2n^2+5}$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{25n^4+3n}{n^5-8}$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2+2n}}{n^2-1}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-4x^2+1}{6x+1}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1+\sin 2x}{1-\cos 4x}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3-3x}{4-5x^3}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-3x+2}{8x^2+4x+4}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x^2}{1-x^2} + 3^{\frac{1}{x}} \right)$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x}-2}{x}$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{2-x}}{x-1}$$

$$25. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+x}-x)$$

$$26. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x - \sqrt{x^2-3x+4})$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x}$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2-4x-21}{x^2-8x+7}$$

30.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 8}$
31.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x + 6}{x^3 + 8}$
32.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right)$
33.  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8} \right)$
34.  $\lim_{x \rightarrow -2} \left( \frac{1}{x+2} + \frac{4}{x^2-4} \right)$
35.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{1/x} + 4}{3 - 2^{1/x}}$
36.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x - 16}{x^2 + 7}$
37.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x-1}{x^2+1}$
38.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3-1}{2x^2+1}$
39.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-1}{3x^2-6x}$
40.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$
41.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$
42.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\pi/2 - x)}{2x}$
43.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$
44.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right)$
45.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\frac{\pi}{2} - x}$
46.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \cdot \operatorname{tg} x$
47.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x+4} - 2}$
48.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^n$
49.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{n} \right)^n$
50.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{k}{x} \right)^{mx}$
51.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-4}{3x+2} \right)^{\frac{x+1}{3}}$

52. Vai šīs funkcijas ir nepārtrauktas?

a)  $y = \begin{cases} x, & x \leq 2, \\ 0,5x + 1, & x > 2; \end{cases}$

b)  $y = \begin{cases} 2x - 3, & x \leq 1, \\ x + 1, & x > 1. \end{cases}$

Uzzīmējiet šo funkciju grafikus.

53. Nosakiet šīm funkcijām pārtraukuma punkta veidu:

$$a) y = \begin{cases} x+1, & x > 0, \\ -x+1, & x < 0; \end{cases}$$

$$b) y = 2^x;$$

$$c) y = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}.$$

54. 1996. gadā bankā tika noguldīta zināma summa, kura 2000. gadā kopā ar procentiem veidoja 2500 Ls.

a) Kāda summa būs uz rēķina 2002. gadā, ja tiek aprēķināti nepārtraukti 10% gadā?

b) Kāda summa bija noguldīta bankā 1996. gadā, ja banka aprēķina nepārtrauktus 6% gadā?

55. Banka rēķina nepārtrauktos procentus. Sākotnēji tika noguldīti 1000 Ls un pēc 4 gadiem procentos bija sakrājušies 718 Ls. Kāda ir bijusi procentu likme?

56. Noteikt gada likmi, kura ir ekvivalenta nepārtrauktiem 10% gadā.

57. Klients noguldīja bankā 10 000 dolārus uz 10% gadā, bet procentus rēķina reizi dienā. Pēc cik ilga laika summa būs divkāršojusies?

58. Noteikt gada procentu likmi, kura ekvivalenta nepārtrauktiem  $\alpha$  procentiem.

59. Noteikt nepārtraukto procentu likmi, kura ekvivalenta parastai gada likmei  $i$ .

60. Banka aprēķina nepārtrauktos 10% gadā. Uz kādu termiņu ir bijuši noguldīti 1000 Ls, ja termiņa beigās uzkrātā summa bija 1300 Ls?

61. Klients reizi mēnesī nogulda uz rēķina 40 Ls. Kāda summa būs uz rēķina pēc 5 gadiem, ja banka maksā nepārtrauktu 1% mēnesī?

62. Banka maksā 8% gadā, bet procentus rēķina reizi ceturksnī. Noteikt nepārtraukto procentu likmi, kura ir ekvivalenta šādam maksājumam.

## 9. VIENA MAINĪGĀ FUNKCIJAS DIFERENCIĀLRĒĶINI

Šajā un nākošajās nodaļās tiks aplūkoti diferenciālrēķini un to lietojumi. Diferencēšana jeb atvasināšana – tā ir kāda lieluma izmaiņas ātruma noteikšana atbilstoši cita lieluma izmaiņai. Piemēram, uzņēmuma vadītājs vēlētos zināt, cik strauji paaugstinās peļņa, palielinot pārdošanas apjomu. Ja ir zināma funkcija, kas nosaka peļņas atkarību no pārdošanas apjoma, tad, atvasinot funkciju, var noteikt peļņas izmaiņas ātrumu. No otras puses, to pašu uzņēmuma vadītāju nevar neinteresēt jautājums – pie kāda pārdošanas apjoma peļņa būs maksimāla. Arī uz šo jautājumu var iegūt atbildi ar diferenciālrēķinu palīdzību. Daudzi svarīgi ekonomikas rādītāji ir saistīti ar atvasinājuma jēdzienu; pirmkārt, tā ir elastība un dažādi marginālie raksturotāji (robežraksturotāji): marginālais pieprasījums, marginālie ieņēmumi, marginālās izmaksas utt.

Pēc šo nodaļu apguves jūs spēsīt:

- 1) izprast diferenciālrēķinu lomu;
- 2) pārvaldīt diferencēšanas tehniku;
- 3) prast lietot atvasinājumus marginālo raksturotāju noteikšanai;
- 4) prast lietot diferenciālrēķinus funkcijas pētīšanā, robežu aprēķināšanā;
- 5) prast lietot diferenciālrēķinus, risinot virkni ekonomikas uzdevumu.

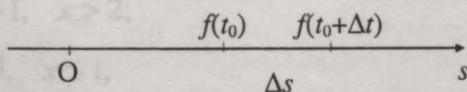
### 9.1. Atvasinājuma jēdzienu skaidrojošie piemēri

#### 1. piemērs. (par punkta ātrumu)

Pieņemsim, ka punkts kustas pa taisni vienā virzienā; ir zināms punkta kustības likums  $S = f(t)$ , kur  $t$  ir kustības laiks kopš tās sākuma,  $S$  ir punkta noietais ceļš šajā laikā. Nepieciešams noteikt punkta kustības ātrumu laika momentā  $t_0$ .

Ceļš, ko punkts nogājis līdz laika momentam  $t_0$ , ir vienāds ar  $f(t_0)$ . Apzīmēsim laika pieaugumu ar  $\Delta t$ . Noietais ceļš līdz laika momentam  $t_0 + \Delta t$  ir vienāds ar  $f(t_0 + \Delta t)$ . Tātad, laikā  $\Delta t$  punkta noietais ceļš  $\Delta s$  ir vienāds ar (9.1. zīm.)

$$\Delta s = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0).$$



9.1. zīm.

Dotajā ceļa posmā vidējais ātrums  $v_{\text{vid}}$  ir

$$v_{\text{vid}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}. \quad (9.1)$$

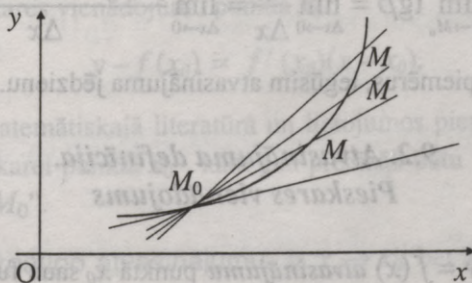
Jo mazāks ir  $\Delta t$ , jo precīzāk šī attiecība raksturo punkta ātrumu laika momentā  $t_0$ . Tādēļ par **punkta ātrumu laika momentā  $t_0$**  sauc attiecības (9.1) robežu, ja  $\Delta t$  tiecas uz nulli:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}.$$

## 2. piemērs (par līknes pieskari)

Vispirms dosim definīciju funkcijas grafika pieskarei punktā  $M_0$  (9.2. zīm.).

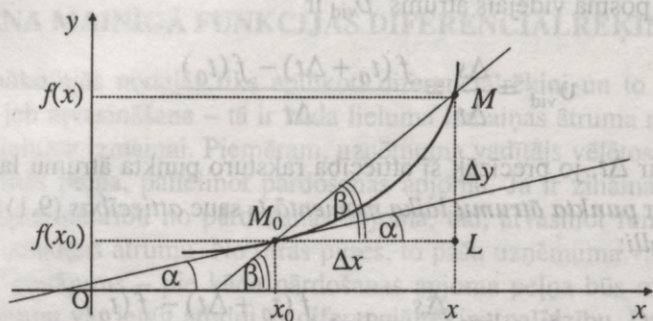
Pieņemsim, ka funkcija  $y = f(x)$  ir nepārtraukta. Atzīmēsim uz līknes (šīs funkcijas grafika) punktu  $M$ , kas nesakrīt ar punktu  $M_0$ , un novilksim sekanti  $M_0M$ . Tad pārvietosim punktu  $M$  pa līkni, tuvojoties punktam  $M_0$ . Līdz ar to sekante  $M_0M$  mainīs savu stāvokli.



9.2. zīm.

Par līknes **pieskari** punktā  $M_0$  sauc sekantes  $M_0M$  robežstāvokli (ja tas eksistē), punktam  $M$  pa līkni tiecoties uz punktu  $M_0$ .

Aplūkosim tagad 9.3. zīm. Atcerēsimies, ka par taisnes virziena leņķi attiecībā pret asi  $Ox$  sauc leņķi, ko veido šī taisne ar ass  $Ox$  pozitīvo virzienu. Tātad, dotajā zīmējumā pieskares virziena leņķis ir leņķis  $\alpha$ , bet sekantes virziena leņķis ir leņķis  $\beta$ .



9.3. zīm.

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{LM}{M_0L} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Savukārt, tā kā pieskare ir sekantes robežstāvoklis punktam  $M$  tiecoties uz punktu  $M_0$  (pie tam  $\Delta x \rightarrow 0$ ), tad

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{M \rightarrow M_0} \operatorname{tg} \beta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Vispārinot šos piemērus, iegūsim atvasinājuma jēdzienu.

## 9.2. Atvasinājuma definīcija.

### Pieskares vienādojums

Par *funkcijas*  $y = f(x)$  *atvasinājumu* punktā  $x_0$  sauc funkcijas pieauguma un atbilstošā argumenta pieauguma attiecību, ja argumenta pieaugums tiecas uz nulli. To apzīmē ar  $y'(x_0)$ ,  $f'(x_0)$ ,  $\frac{dy}{dx}$ . Tātad

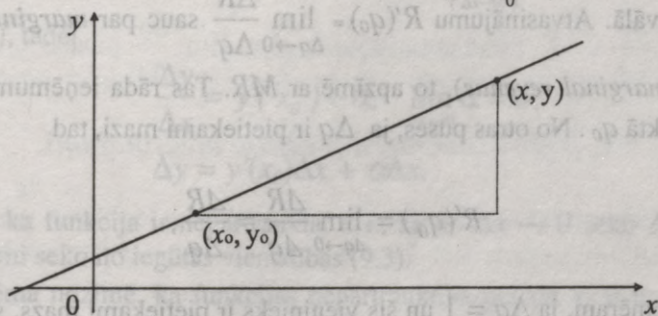
$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad (9.2)$$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0), \quad \Delta x = x - x_0.$$

1. piemērs rāda, ka atvasinājuma mehāniskā jēga ir punkta kustības ātrums. Plašākā nozīmē var teikt, ka *atvasinājuma mehāniskā jēga ir funkcijas izmaiņas ātrums*.

2. piemērs nozīmē, ka atvasinājuma ģeometriskā jēga ir virziena leņķa tangenss funkcijas grafika pieskarei punktā  $M_0(x_0, f(x_0))$ .

Ja uz taisnes ir dots punkts  $(x_0, y_0)$  un tās virziena koeficients  $K$ , tad jebkuram punktam  $(x, y)$  uz taisnes ir spēkā vienādība  $\frac{y - y_0}{x - x_0} = K$  (sk. 9.4. zīm.).



9.4. zīm.

Tātad,  $y - y_0 = K(x - x_0)$  ir dotās taisnes vienādojums. Izmantojot šo vienādojumu un atvasinājuma ģeometrisko jēgu  $K = y'(x_0)$ , var uzrakstīt funkcijas grafika pieskares vienādojumu punktā  $x_0$ :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Atzīmēsim, ka matemātiskajā literatūrā un lietojumos pieņemts teikt “vienādojums grafika pieskarei punktā  $x_0$ ”, kaut gan precīzāk būtu “vienādojums grafika pieskarei punktā  $M_0$ ”.

Piezīme par bezgalīgo atvasinājumu. Ja  $x \rightarrow x_0$ , bet attiecīgi  $f'(x) \rightarrow \infty$ , tad funkcijas grafikam punktā  $x_0$  ir vertikāla pieskare.

Aplūkosim vēl vienu piemēru.

### 3. piemērs (marginālie ieņēmumi)

Pieņemsim, ka  $R = R(q)$  ir *ieņēmumu funkcija* atkarībā no pārdošanas apjoma. (Lai gan mainīgais  $q$  bieži mainās diskrēti, ērtāk ir aplūkot to kā nepārtrauktu, bet  $R(q)$  uzskatīt par nepārtraukta argumenta funkciju.)

Pieņemsim, ka sākotnējais pārdošanas apjoms bija  $q_0$ , bet vēlāk kļūva  $q_0 + \Delta q$ . Atbilstoši, ieņēmumi sākotnēji bija  $R(q_0)$ , bet pēc tam  $R(q_0 + \Delta q)$ . Aplūkosim

$$\Delta R = R(q_0 + \Delta q) - R(q_0),$$

$\Delta R$  ir ieņēmumu apjoms no papildu pārdotās preces daudzuma  $\Delta q$ . Tad  $\frac{\Delta R}{\Delta q}$  ir vidējais ieņēmums pārdodot vienu preces vienību (pārdošanas apjoma intervālā no  $q_0$  līdz  $q_0 + \Delta q$ ). Var arī teikt, ka tas ir ieņēmumu izmaiņas vidējais ātrums dotajā intervālā. Atvasinājumu  $R'(q_0) = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta q}$  sauc par *margināliem ieņēmumiem* (*marginal revenue*), to apzīmē ar  $MR$ . Tas rāda ieņēmumu izmaiņas ātrumu punktā  $q_0$ . No otras puses, ja  $\Delta q$  ir pietiekami mazi, tad

$$R'(q_0) = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta q} \approx \frac{\Delta R}{\Delta q},$$

tā tas ir, piemēram, ja  $\Delta q = 1$  un šis vieninieks ir pietiekami mazs, salīdzinot ar  $q_0$ . Tādēļ ekonomikā mēdz teikt, ka marginālais ieņēmums ir ieņēmums no nākošās pēc  $q_0$  pārdotās preces vienības:  $MR = R(q + 1) - R(q)$ .

Līdzīgā veidā tiek ieviesti citi marginālie (robež-) raksturotāji. Ja  $q_D(t)$  ir pieprasījuma funkcija atkarībā no laika, tad  $MD = q'_D(t) \approx \frac{\Delta q}{\Delta t}$  ir *marginālais pieprasījums*; ja  $C = C(q)$  ir izmaksu funkcija atkarībā no produkcijas vienību skaita, tad  $MC = C'(q) \approx \frac{\Delta C}{\Delta q}$  ir *marginālās izmaksas* utt.

### 9.3. Atvasinājuma eksistences nepieciešamie nosacījumi

Atgādināsim, ka funkciju  $y = f(x)$  sauc par nepārtrauktu punktā  $x_0$ , ja bezgalīgi mazam argumenta pieaugumam šajā punktā atbilst bezgalīgi mazs funkcijas pieaugums, t. i., ja  $\Delta x \rightarrow 0$ , tad arī  $\Delta y \rightarrow 0$ .

**Teorēma.** Ja funkcijai  $y = f(x)$  punktā  $x_0$  eksistē atvasinājums, tad funkcija šajā punktā ir nepārtraukta.

**Pierādījums.** Pēc dotā funkcijai  $y = f(x)$  punktā  $x_0$  eksistē atvasinājums, t. i.,

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Atgādināsim teorēmu par robežas saistību ar bezgalīgi mazu lielumu: lai eksistētu robeža  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A$ , ir nepieciešami un pietiekami, ka  $\varphi(x) =$

$$= A + \alpha(x), \text{ kur } \alpha(x) \text{ ir bezgalīgi maza funkcija, } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (\Delta x \rightarrow 0)}} \alpha = 0. \text{ Šeit } \varphi(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

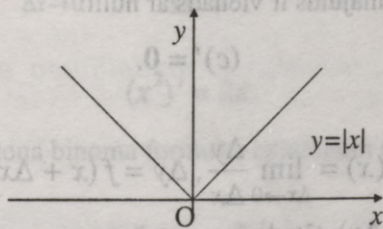
$A = y'(x_0)$ , tādēļ

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= y'(x_0) + \alpha, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0, \\ \Delta y &= y'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Jāpierāda, ka funkcija ir nepārtraukta, t. i., ka no  $\Delta x \rightarrow 0$  seko  $\Delta y \rightarrow 0$ . Tas acīmredzami seko no iegūtās vienādības (9.3).

Teorēma nozīmē, ka funkcijas nepārtrauktība punktā  $x_0$  ir nepieciešamais nosacījums atvasinājuma eksistencei šajā punktā. Tomēr vienlaicīgi šis nosacījums nav pietiekams, t. i., var būt tādas funkcijas, kuras ir nepārtrauktas kādā punktā, bet kurām tajā atvasinājums neeksistē.

Piemērs:  $y = |x|$ .



9.5. zīm.

Šī funkcija ir nepārtraukta visiem  $x$ . Tomēr punktā  $x = 0$  tai neeksistē atvasinājums.

Tiešām, aplūkosim vispirms robežu no labās puses  $\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ . Tā kā

$\Delta x \rightarrow +0$ , tas ir,  $x > 0$ , tad no moduļa definīcijas izriet:  $y = |x| = x$  un atbilstoši  $\Delta y = \Delta x$ . Tad

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Tagad pieņemsim, ka  $\Delta x \rightarrow -0$ , tas ir  $x < 0$ . Tad  $y = |x| = -x$ ; atbilstoši  $\Delta y = -\Delta x$ , bet

$$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Tātad, robeža no labās puses  $\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$  nav vienāda ar robežu no kreisās

pusēs  $\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$ . Tātad atvasinājums  $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  punktā  $x_0$  neeksistē.

#### 9.4. Dažu elementāru funkciju atvasinājumi

Aplūkosim dažu elementāru funkciju atvasinājumu iegūšanas piemērus.

1. Pieņemsim, ka dota funkcija  $y = c$  ( $c$  ir konstante). Šī funkcija nemaina savu vērtību, tādēļ  $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = c - c = 0$ . Tad

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

Tātad, konstantes atvasinājums ir vienāds ar nulli:

$$(c)' = 0.$$

2.  $y = \sin x$ .

No definīcijas  $y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ,  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ ,  $f(x) = \sin x$ ,  
 $f(x + \Delta x) = \sin(x + \Delta x)$ , tātad

$$\begin{aligned} \Delta y &= \sin(x + \Delta x) - \sin x = \\ &= 2 \sin\left(\frac{x + \Delta x - x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x + \Delta x + x}{2}\right) = 2 \sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right). \end{aligned}$$

Tad

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \end{aligned}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \cos x.$$

Tātad,

$$(\sin x)' = \cos x.$$

3. Līdzīgi, izmantojot kosinusu starpības formulu, var pierādīt formulu

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

4.  $y = x^2$ .

$$\begin{aligned} \Delta y' &= f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = \\ &= 2x\Delta x + (\Delta x)^2. \end{aligned}$$

Tad

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x,$$

t. i.,

$$(x^2)' = 2x.$$

Izsakot  $(a + b)^n$  ar Ņūtona binoma formulu, naturāliem  $n$  līdzīgi var iegūt sekojošu formulu:

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

5.  $y = \ln x$ .

$$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln \frac{x + \Delta x}{x} = \ln \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \ln \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right) = \ln \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{1}{\Delta x}}.$$

Tagad atradīsim robežu:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ln \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ln \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{x}} = \\ &= \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ln \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \ln \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

(Pēdējā rindā ir izmantota nepārtrauktas funkcijas īpašība:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \ln u(x) = \ln \lim_{x \rightarrow x_0} u(x).)$$

Tātad,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Līdzīgi, vispārīgākā gadījumā

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}.$$

## 9.5. Summas, reizinājuma un dalījuma atvasinājums

**Teorēma.** Pieņemsim, ka funkcijām  $u(x)$  un  $v(x)$  punktā  $x$  eksistē atvasinājumi. Tad:

1) funkciju summai  $u(x) + v(x)$  arī eksistē atvasinājums šajā punktā, turklāt summas atvasinājums ir vienāds ar šo funkciju atvasinājumu summu:

$$(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x); \quad (9.4)$$

2) funkciju reizinājumam punktā  $x$  arī eksistē atvasinājums, un reizinājuma atvasinājums tiek aprēķināts ar formulu:

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x); \quad (9.5)$$

3) ja funkcija  $v(x)$  punktā  $x$  nav vienāda ar nulli, tad dalījumam  $\frac{u(x)}{v(x)}$  eksistē atvasinājums, kuru aprēķina ar formulu:

$$\left( \frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}. \quad (9.6)$$

Pierādījums.

1) Pieņemsim, ka  $y(x) = u(x) + v(x)$ . Tad

$$\begin{aligned}\Delta y &= y(x + \Delta x) - y(x) = u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) - u(x) - v(x) = \\ &= u(x + \Delta x) - u(x) + v(x + \Delta x) - v(x) = \Delta u + \Delta v;\end{aligned}$$

savukārt,

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Abas pēdējās robežas eksistē no dotā, tās ir  $u'(x)$  un  $v'(x)$ . Tādēļ eksistē arī

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$ . No tā seko, ka atvasinājums  $y' = (u(x) + v(x))'$  eksistē un ir

vienāds ar summu  $u'(x) + v'(x)$ .

2) pieņemsim, ka  $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ . Aplūkosim argumenta pieaugumu

$\Delta x$ . Tad  $u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta u$ ,  $v(x + \Delta x) = v(x) + \Delta v$ ; atbilstoši

$$\begin{aligned}\Delta y &= u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x) = (u(x) + \Delta u)(v(x) + \Delta v) - \\ &- u(x) \cdot v(x) = u(x)v(x) + v(x)\Delta u + u(x)\Delta v + \Delta u\Delta v - u(x)v(x) = \\ &= v(x)\Delta u + u(x)\Delta v + \Delta u \cdot \Delta v.\end{aligned}$$

Noslēgumā atradīsim robežu:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( v(x) \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v \right) = \\ &= v(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = \\ &= v(x) \cdot u'(x) + u(x) \cdot v'(x) + u' \cdot 0 = u'(x)v(x) + u(x) \cdot v'(x),\end{aligned}$$

kas arī bija jāpierāda.

3) Dalījuma atvasinājuma formulas izvedums ir līdzīgs reizinājuma gadījumam un mēs to nesniegsim.

Sekas. Konstantu reizinātāju var iznest pirms atvasinājuma zīmes:

$$(cu)' = cu'; \quad c \text{ ir konstante.}$$

Tiešām, no atvasinājuma likuma seko  $(cu)' = c'u + cu'$ , bet, tā kā  $c' = 0$ , tad iegūsim:  $(cu)' = cu'$ .

Piemērs.

Kā piemēru, izmantojot formulu (9.6), atradīsim funkcijas  $y = \operatorname{tg} x$  atvasinājumu.

$$\begin{aligned}(\operatorname{tg} x)' &= \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - (\cos x)' \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.\end{aligned}$$

Tātad,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Līdzīgi var iegūt:

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

## 9.6. Saliktas funkcijas atvasinājums

Atgādināsim, ka, ja ir dotas funkcijas  $y = f(u)$ ,  $u = \varphi(x)$  un  $\varphi(x)$  vērtību apgabals ietilpst funkcijas  $f(x)$  definīcijas apgabalā, tad var aplūkot saliktu funkciju  $y(x) = f(\varphi(x))$ , kur  $x$  sauc par galveno argumentu, bet  $u$  par starparargumentu.

**Teorēma.** Pieņemsim, ka funkcijai  $u = \varphi(x)$  punktā  $x$  eksistē atvasinājums, bet funkcijai  $y = f(u)$  eksistē atvasinājums punktā  $u$ , kas atbilst dotajai  $x$  vērtībai. Tad saliktai funkcijai  $y(x) = f(\varphi(x))$  punktā  $x$  eksistē atvasinājums un šis atvasinājums tiek aprēķināts ar formulu

$$y'(x) = f'(u) \cdot \varphi'(x).$$

**Pierādījums.** Tā kā funkcijai  $y = f(u)$  punktā  $u$  eksistē atvasinājums, tad, lietojot formulu (9.3), var uzrakstīt:  $\Delta y = f'(u) \cdot \Delta u + \alpha \cdot \Delta u$ , ja  $\alpha = \alpha(\Delta u)$  ir bezgalīgi maza, t. i.,  $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \alpha = 0$ . Izdalīsim šīs vienādības abas puses ar  $\Delta x$ :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Atradīsim abu pēdējās vienādības pušu robežas, ja  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f'(u) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} = \\ &= f'(u) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Pēc dotā eksistē atvasinājums  $\varphi'(x)$ , tātad  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \varphi'(x)$ . Tā kā funkcija

$u = \varphi(x)$  ir atvasināma, tad šī funkcija ir nepārtraukta: no  $\Delta x \rightarrow 0$  seko  $\Delta u \rightarrow 0$ . Tādēļ,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \alpha = 0$ . No tā izriet, ka visas robežas vienādības labajā pusē eksistē. Tātad eksistē robeža arī kreisajā pusē, t. i., eksistē atvasinājums  $y'(x)$ :

$$y'(x) = f'(u) \cdot \varphi'(x).$$

Piemēri. Aprēķināt atvasinājumus sekojošām funkcijām.

1.  $y = (4 - 2x^3)^{10}$ .

Apzīmēsim  $4 - 2x^3 = u$ , tad  $y = u^{10}$ . Tā kā  $y'(x) = y'(u) \cdot u'(x)$ , tad  $y'(x) = 10u^9 \cdot (0 - 2 \cdot 3x^2) = 10(4 - 2x^3)^9 \cdot (-6x^2) = -60x^2(4 - 2x^3)^9$ .

2.  $y = \sin x^2$ .

Pieņemsim, ka  $y = \sin u$ ,  $u = x^2$ . Tad  $y'(x) = y'(u) \cdot u'(x) = (\cos u) \cdot 2x = 2x \cdot \cos x^2$ .

3.  $y = \sin^2 x = (\sin x)^2$ .

Šajā gadījumā  $y = u^2$ ,  $u = \sin x$ .  $y'(x) = y'(u) \cdot u'(x) = 2u \cdot \cos x = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$ .

### 9.7. Apvērstas funkcijas atvasinājums. Parametriski dotas funkcijas atvasinājums

**Teorēma.** Dots, ka funkcijai  $y = f(x)$  punktā  $x$  eksistē no nulles atšķirīgs atvasinājums. Tad apvērstai funkcijai  $x = f^{-1}(y)$  eksistē atvasinājums atbilstošā punktā  $y$ , un tas ir

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}.$$

Pierādījums.

$$(f^{-1}(y))' = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}};$$

tā kā  $f'(x) \neq 0$ , tad var pierādīt, ka funkcija ir monotona kādā punkta  $x$  apkārtnē. Tad no teorēmas par apvērstās funkcijas nepārtrauktību (9.11. p.) seko, ka apvērstā funkcija  $f^{-1}(y)$  aplūkojamā punktā  $y$  ir nepārtraukta. Tātad no  $\Delta y \rightarrow 0$  seko  $\Delta x \rightarrow 0$ . Tad

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Piemērs. Atrast funkcijas  $y = a^x$  atvasinājumu. Apvērstās funkcijas  $x = \log_a y$  atvasinājums ir  $x' = \frac{1}{y \cdot \ln a}$ . No teorēmas par apvērsto funkciju seko, ka

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\frac{1}{y \cdot \ln a}} = y \cdot \ln a = a^x \ln a,$$

iegūstam formulu

$$y' = (a^x)' = a^x \ln a.$$

Aplūkosim parametriski dotu funkciju

$$\begin{cases} x = g(t), \\ y = f(t). \end{cases}$$

**Teorēma.** Ja funkcijām  $y = f(t)$  un  $x = g(t)$  punktā  $t$  eksistē atvasinājums, turklāt  $g'(t) \neq 0$ , tad parametriski dotai funkcijai  $\begin{cases} x = g(t), \\ y = f(t) \end{cases}$  eksistē atvasinājums, kuru aprēķina ar formulu

$$y'_x(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Pierādījums. No vienādojuma  $x = g(t)$  izteiksim  $t$ :  $t = g^{-1}(x)$ . Tad  $y = f(t) = f(g^{-1}(x))$ . Aprēķināsim atvasinājumu iegūtai saliktai funkcijai:

$$y' = f'(t) \cdot (g^{-1}(x))'$$

Lietosim apvērstās funkcijas atvasinājuma formulu  $(g^{-1}(x))' = \frac{1}{g'(t)}$ . Tad

$$y' = f'(t) \cdot (g^{-1}(x))' = f'(t) \cdot \frac{1}{g'(t)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

### 9.8. Pamatfunkciju atvasinājumu tabula

Sniegsim pamatelementāro funkciju atvasinājumu tabulu. Vairākas no šīm formulām tika pierādītas iepriekšējos punktos, pārējās var pierādīt līdzīgi.

1)  $(c)' = 0,$

$c$  ir konstante

2)  $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1},$

atsevišķā gadījumā  $x' = 1;$

3)  $(a^x)' = a^x \ln a,$

atsevišķā gadījumā  $(e^x)' = e^x;$

4)  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a},$  atsevišķā gadījumā  $(\ln x)' = \frac{1}{x};$

5)  $(\sin x)' = \cos x;$

6)  $(\cos x)' = -\sin x;$

7)  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$

8)  $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$

9)  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

10)  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

11)  $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$

$$12) (\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Tā kā elementāru funkciju iegūst no pamatelementārām funkcijām ar galīga skaita aritmētiskām darbībām un saliktas funkcijas veidošanas darbību, tad, lietojot doto tabulu un summas, reizinājuma, dalījuma un saliktās funkcijas atvasinājumu noteikšanas likumus, var iegūt jebkuras elementārās funkcijas atvasinājumu.

### 9.9. Logaritmiskā atvasināšana

Meklējot atvasinājumus virknei funkciju, piemēram, tāda veida funkcijām, kuras vienlaicīgi ir gan pakāpes, gan eksponentfunkcijas  $(f(x))^{\varphi(x)}$ , ir izdevīgi vispirms logaritmēt atvasināmo funkciju. Šo paņēmieni sauc par *logaritmisko atvasināšanu*. Aplūkosim tā lietojumu konkrētam piemēram:

$y = x^{\sin x}$ . Logaritmējot iegūsim:

$$\ln y = \sin x \ln x.$$

Atvasināsim pēdējās vienādības abas puses:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}.$$

No kā seko

$$y' = \left( \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right) \cdot y$$

jeb

$$y' = \left( \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right) \cdot x^{\sin x}.$$

### 9.10. Funkcijas diferencējamība

Definīcija. Funkciju  $y = f(x)$  punktā  $x$  sauc par *diferencējamu*, ja funkcijas pieaugumu šajā punktā var uzrakstīt sekojošā veidā:

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x, \quad (9.8)$$

kur  $A$  ir konstante,  $\alpha = \alpha(\Delta x)$  ir bezgalīgi mazs lielums (t. i.,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0$ ).

**Teorēma.** Ja funkcijai  $y = f(x)$  punktā  $x$  eksistē atvasinājums, tad tā ir diferencējama šajā punktā.

**Pierādījums.** Tā kā funkcijai  $f(x)$  punktā  $x$  eksistē atvasinājums, tad no formulas (9.3) seko

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \Delta x,$$

kur  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0$ ,  $f'(x)$  ir konstante. Apzīmēsim  $f'(x) = A$ . Iegūsim

$$\Delta y = A \Delta x + \alpha \Delta x,$$

kur  $\alpha$  ir bezgalīgi mazs lielums. Šī vienādība nosaka aplūkojamās funkcijas diferencējamību.

Patiess ir arī apgrieztais apgalvojums.

**Teorēma.** Ja funkcija  $y = f(x)$  punktā  $x$  ir diferencējama, tad tai šajā punktā eksistē atvasinājums.

**Pierādījums.** Tā kā funkcija  $y = f(x)$  punktā  $x$  ir diferencējama, tad no definīcijas seko

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x.$$

Izdalīsim šīs vienādības abas puses ar  $\Delta x$ :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha.$$

Pāriesim robežu, kad  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (A + \alpha) = A + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = A.$$

Mēs pierādījām, ka atvasinājums eksistē un tas ir vienāds ar  $A$ , t. i.,  $f'(x) = A$ .

**Piezīme.** Dotās teorēmas nozīmē, ka viena argumenta funkcijai  $y = f(x)$  funkcijas diferencējamība un atvasināmība ir ekvivalenti jēdzieni. Tādēļ var teikt, ka viena mainīgā diferencējama funkcija ir atvasināma funkcija.

### 9.11. Funkcijas diferenciālis

Pieņemsim, ka  $y = f(x)$  ir diferencējama funkcija, t. i., tās pieaugumu  $\Delta y$  nosaka formula (9.8).

Par šīs funkcijas *diferenciāli* sauc vienādības (9.8) labās puses pirmo saskaitāmo. To apzīmē ar  $dy$ , tas ir

$$dy = A \cdot \Delta x. \quad (9.9)$$

Diferenciālis ir funkcijas pieauguma galvenā (lineārā) daļa. Tā kā iepriekšējā punkta teorēmā ir pierādīts, ka  $A = f'(x)$ , tad

$$dy = f'(x) \Delta x. \quad (9.10)$$

Aplūkosim piemērus.

1)  $y = x^2 \Rightarrow dy = 2x \Delta x$ , jeb  $d(x^2) = 2x \Delta x$ ;

2)  $y = x \Rightarrow dy = 1 \Delta x$ , jeb

$$dx = \Delta x. \quad (9.11)$$

Otrais piemērs nozīmē, ka neatkarīga mainīgā diferenciālis ir vienāds ar tā pieaugumu. Ievietojot vienādību (9.11) vienādībā (9.10), iegūsim:

$$dy = f'(x) \cdot dx. \quad (9.12)$$

### 9.12. Diferenciāļu īpašības

Tā kā diferenciālis ir vienāds ar funkcijas atvasinājuma un neatkarīgā mainīgā pieauguma reizinājumu, tad diferenciālim ir spēkā sekojoši likumi, kas ir līdzīgi atbilstošiem atvasināšanas likumiem: ja  $c$  ir konstante un  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  ir diferencējamas funkcijas, tad

1)  $d(c) = 0$ ;

2)  $d(u + v) = du + dv$ ;

3)  $d(u \cdot v) = v du + u dv$ ,

pie tam īpašā gadījumā, ja  $c$  ir konstante, tad  $d(c \cdot u) = c du$ ;

4)  $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$ .

Pārbaudīsim, piemēram, 3. īpašību.

Reizinot vienādības  $(uv)' = u'v + uv'$  abas puses ar  $dx$ , iegūsim:

$$(uv)' dx = u'v dx + uv' dx$$

jeb

$$d(uv) = v du + u dv, \text{ kas arī bija jāpierāda.}$$

### 9.13. Diferenciāla lietojumi tuvinātos aprēķinos

Tā kā  $dy$  ir funkcijas pieauguma galvenā daļa, tad pietiekami maziem  $\Delta x$  var rakstīt, ka  $\Delta y \approx dy$ .

Tā kā  $\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$ , tad:

$$y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) \approx dy, \text{ jeb } y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + dy.$$

Aizvietojot  $dy$  ar tā izteiksmi no vienādības (9.10), iegūsim:

$$y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + f'(x_0) \Delta x. \quad (9.13)$$

Šī formula tiek lietota tuvinātos aprēķinos.

Piemērs. Tuvināti aprēķināt  $\sqrt[5]{31}$ .

Izvēlēsimies  $x = 31$ ,  $x_0 = 32$ ; tad  $\Delta x = -1$ . Atbilstoši formulai (9.13)

$$y(x) \approx y(x_0) + f'(x_0) \Delta x.$$

Atvasinot  $y(x) = \sqrt[5]{x}$ , iegūsim

$$y'(x) = \frac{1}{5} x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}, \quad f'(x_0) = \frac{1}{5\sqrt[5]{32^4}} = \frac{1}{80}.$$

$$\text{Tad } \sqrt[5]{31} \approx \sqrt[5]{32} + \frac{1}{80} \cdot (-1) = 2 - \frac{1}{80} = 1,9875.$$

### 9.14. Funkcijas linearizācija

Funkcijas tuvinātu aizstāšanu ar citu funkciju (iespējams, vienkāršāku vai ērtāku konkrētā situācijā) sauc par tās **aproximāciju**. Gadījumā, ja šī cita funkcija ir lineāra, tad tādu tuvinātu aizstāšanu sauc par funkcijas linearizāciju.

Pieņemsim, ka dotā funkcija  $y = f(x)$  ir atvasināma punktā  $x_0$ , bet  $x$  atrodas kādā šī punkta apkārtnē. Tad, lietojot formulu (9.13), var rakstīt:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x.$$

Ievērojot, ka  $\Delta x = x - x_0$ , iegūsim

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (9.14)$$

Labajā pusē atrodas lineāra izteiksme. Mēs esam ieguvuši funkcijas  $f(x)$  tuvinātu lineāru izteiksmi, t. i., esam veikuši funkcijas  $f(x)$  linearizāciju.

Atceroties pieskares vienādojumu, var teikt, ka ģeometriski punkta  $x_0$  apkārtnē linearizācija ir funkcijas grafika tuvināta aizstāšana ar grafika pieskari šajā punktā.

Piemērs. 9.13. Diferenciāla līdztību tuvināšana

Linearizēt funkciju  $y = e^{-x^2}$  punkta  $x_0 = -1$  apkārtnē.

Atrisinājums. Atbilstoši (9.14)

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Tā kā  $f(x) = e^{-x^2}$ , tad  $f(x_0) = e^{-(-1)^2} = \frac{1}{e}$ ,  $f'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x)$ ,  
 $f'(x_0) = \frac{2}{e}$ . Tātad punkta  $x_0 = -1$  apkārtnē ir spēkā tuvināta izteiksme

$$e^{-x^2} \approx \frac{1}{e} + \frac{2}{e}(x + 1).$$

### 9.15. Augstāku kārtu atvasinājumi

Pieņemsim, ka ir dota funkcija  $y = f(x)$ . Iegūsim tās atvasinājumu  $f'(x)$ . Šis atvasinājums arī ir  $x$  funkcija, kuru atkal var atvasināt. Iegūto atvasinājumu  $(f'(x))'$  (atvasinājumu no  $f'(x)$ ) sauc par funkcijas  $y = f(x)$  *otrās kārtas atvasinājumu* un apzīmē ar  $f''(x)$  jeb  $\frac{d^2y}{dx^2}$ :  $f''(x) = (f'(x))'$ .

Piemēram:  $y = \sin x$ ,  $y' = \cos x$ ,  $y'' = -\sin x$ .

Līdzīgi definē trešās kārtas atvasinājumu utt.  $n$ -tās kārtas atvasinājumu

apzīmē ar  $f^{(n)}(x)$  jeb  $\frac{d^n y}{dx^n}$ .

#### Paškontroles jautājumi

1. Dodiet atvasinājuma definīciju; kāda ir tā ģeometriskā un mehāniskā jēga?
2. Kas ir marginālie ieņēmumi, marginālās izmaksas?
3. Formulējiet atvasināmības nepieciešamo nosacījumu. Vai tas ir pietiekams?
4. Kā tiek aprēķināts saliktas funkcijas atvasinājums?
5. Atrodiet sekojošu funkciju atvasinājumus:

$$y = e^{3x^2+4}; \quad y = \frac{1}{\sqrt[3]{4x^2+5}}$$

6. Pieprasījuma funkcija atkarībā no cenas dota ar formulu  $q_D(p) = \frac{80}{p+4}$ .

Nosakiet marginālo pieprasījumu, ja cena  $p = 3$ .

7. Dodiet diferencējamas funkcijas un diferenciāļa definīcijas.

8. Lietojot diferenciāli, tuvināti aprēķiniet  $\sqrt{80}$ .

### Vingrinājumi

Aprēķināt sekojošu funkciju (1. – 33.) atvasinājumus:

1.  $y = \frac{x^3}{4 + \cos x}$ .

2.  $y = 2^x \cdot \operatorname{tg} x$ .

3.  $y = \sqrt[3]{x^2} \cdot \log_3 x$ .

4.  $y = \frac{\sin x}{x^2} + \frac{x}{\cos x}$ .

5.  $y = x^3 \cdot \arcsin x$ .

6.  $y = \frac{3x + 2^x}{x - 2^x}$ .

7.  $y = 10^{7x+x^2}$ .

8.  $y = e^{x^2} \cdot \operatorname{tg} x^3$ .

9.  $y = \sqrt[5]{x+1} \cdot \sin 2x$ .

10.  $y = 2^{4x} \cdot \operatorname{tg} 3x$ .

11.  $y = \sin 3x + \operatorname{tg}^2 x$ .

12.  $y = 4^{6x+x^2}$ .

13.  $y = \sin x^4 + \sqrt[3]{\sin x}$ .

14.  $y = \left( \frac{x^2 + x + x^{1/4}}{x} \right)^8$ .

15.  $y = \ln(x^2 + \sqrt{3x})$ .

16.  $y = \sqrt[3]{4 \sin x + 5}$ .

17.  $y = \operatorname{lg}(x^2 + \sin x)$ .

18.  $y = \operatorname{tg}(x^2 + \sqrt{x-1})$ .

19.  $y = \frac{\sin^2 x}{\sqrt[5]{x}}$ .

20.  $y = x^2 \cdot \sqrt[4]{x-8x^2}$ .

21.  $y = \cos \frac{x^2+1}{e^x}$ .

22.  $y = (\arcsin x) \cdot \sqrt{1-x^2}$ .

23.  $y = \sqrt{x} \cdot \arctg x^2$ .

24.  $y = \frac{\sin(3x^2+4)}{x-2}$ .

25.  $y = \sqrt{4x + \ln \cos x}$ .

26.  $y = \sqrt[3]{2x + \sqrt{x}}$ .

$$27. y = \ln(4x + 2x^2).$$

$$28. y = \frac{3x^2}{\sqrt{4x - 5e^x}}.$$

$$29. y = 2\left(x + \sqrt[5]{x^2}\right)^{11}.$$

$$30. y = \ln \cos(5x^2 + 4).$$

$$31. y = \cos^3 x^2 + \sqrt{\sin 2x}.$$

$$32. y = 3\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \cos \frac{\pi}{4}.$$

$$33. y = \frac{e^{4x-x^2}}{10^{2x+1}}.$$

Aprēķināt sekojošu funkciju (34. – 37.) atvasinājumus:

$$34. y = x^{\sin x}.$$

$$35. y = x^x.$$

$$36. y = \frac{x^2 e^x \cdot \sin x}{\operatorname{tg}^5 x}.$$

$$37. y = x^{\arcsin x}.$$

Uzrakstīt funkciju (38. – 40.) grafiku pieskares vienādojumus:

$$38. y = e^{-x^2} \text{ punktā } x = -1.$$

$$39. y = x^3 \text{ punktā } x = 2.$$

$$40. y = \sqrt[3]{(2x-1)^2} \text{ punktā } x = 1.$$

41. Kādā punktā pieskare funkcijas  $y = (x-4)^3$  grafikam ir paralēla  $Ox$  asij?

Atrast funkciju (42. – 45.) diferenciāļus:

$$42. y = e^{\sin \sqrt[3]{x}}.$$

$$43. y = 3 \sin^5 4x.$$

$$44. y = \frac{x^4}{\operatorname{tg} x}.$$

$$45. y = \frac{2x-4}{2\sqrt{x+3}}.$$

46. Atrast funkcijas  $y = \sqrt{x}$  pieaugumu  $\Delta y$  intervālā  $[4; 4,02]$

a) precīzi;

b) tuvināti, lietojot diferenciāli.

47. Atrast funkcijas  $y = x^3$  pieaugumu  $\Delta y$  punktā  $x = 3$ , ja  $\Delta x = 0,04$ ,

a) precīzi (ar precizitāti līdz 0,001);

b) tuvināti, lietojot diferenciāli.

48. Dota pieprasījuma funkcija  $q = \sqrt{800 - 2p^2}$ . Atrast marginālā pieprasījuma izteiksmi. Aprēķināt tā vērtību, ja  $p = 2$ . Kāda ir iegūtās skaitliskās vērtības ekonomiskā jēga?

49. Zināma pieprasījuma funkcija  $q = \frac{20}{p+20}$ . Atrast marginālo ieņēmumu

izteiksmi un tās vērtību, ja  $p = 10$ . Kāda ir iegūtās skaitliskās vērtības ekonomiskā jēga?

50. Dota izmaksu funkcija  $C = 40 + 6q - q^{1/2}$ . Kā izmainīsies produkcijas vienības vidējā pašizmaksa, palielinot produkcijas apjomu punktā  $q = 100$  par vienu vienību (t. i., atrast marginālo vidējo pašizmaksu punktā  $q = 100$ )?

51. Tuvināti aprēķināt, lietojot diferenciāli:

a)  $\sqrt[3]{67}$ ,      b)  $\sqrt{82}$ ,      c)  $\sqrt[5]{33}$ .

52. Kopējās  $q$  produkcijas vienību ražošanas izmaksas sastāv no pastāvīgām izmaksām, kas vienādas ar 150 Ls, un mainīgām, kuras nosaka ar formulu

$$C_v = 50q - 0,01q^2.$$

Noteikt simtās produkcijas vienības izmaksas (precīzi un tuvināti, lietojot atvasinājumu).

53. Pieprasījuma funkciju atkarībā no cenas nosaka ar formulu

$$q_D = 18 - 0,2p.$$

Atrast izteiksmi ieņēmumu atkarībai no cenas un marginālos ieņēmumus, ja cena ir  $p = 20$ . Paskaidrot iegūtā skaitliskā lieluma ekonomisko jēgu.

54. Preces A kopējo pārdošanas apjomu laikā  $t$ , kurš pagājis kopš šīs preces tirdzniecības sākuma, nosaka ar formulu

$$q = 2000(1 - e^{-0,01t}), \quad t \text{ - laiks dienās.}$$

Atrast pārdošanas apjomu 20. dienā (precīzi un tuvināti, lietojot atvasinājumu).

## 10. DIFERENCIĀLRĒĶINU LIETOJUMI

Diferenciālrēķinus ļoti plaši lieto funkciju pētīšanas uzdevumos, dažādās zinātnes un tehnikas nozarēs, tostarp arī ekonomikas uzdevumos. Atzīmēsim dažus šādus uzdevumus.

1. Ir zināma pieprasījuma funkcija  $q_D = D(p)$ . Cenas paaugstinājums, nemainoties pieprasījumam, izraisītu ieņēmumu pieaugumu. No otras puses, pieprasījuma funkcija vairumā gadījumu ir dilstoša, t. i., cenas paaugstinājumam seko pieprasījuma samazināšanās. Atrast cenu, kas dos vislielākos ieņēmumus.

2. Funkcijas aproksimācijas uzdevums.

3. Robežu aprēķināšana bieži vien sagādā zināmas grūtības.

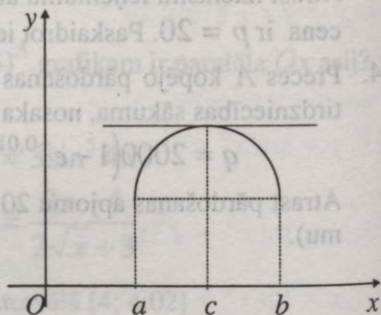
Diferenciālrēķini virknē gadījumu atvieglo šo uzdevumu.

Diferenciālrēķinu lietojumus pamato vairākas teorēmas; dažas no tām mēs tagad aplūkosim.

### 10.1. Teorēmas par vidējo vērtību

**Rolla teorēma.** Ja nogrieznī  $[a, b]$  nepārtrauktai funkcijai  $f(x)$  eksistē atvasinājums  $f'(x)$  valējā intervālā  $(a, b)$ , un tās vērtības nogriežņa galapunktos ir vienādas, tad intervālā  $(a, b)$  atrodas tāds punkts  $c$ , kurā atvasinājums ir vienāds ar nulli.

Rolla teorēmas ģeometriskā jēga ir šāda (10.1. zīm.): ja izpildās teorēmas nosacījumi, tad intervālā  $(a, b)$  atradīsies tāds punkts  $c$ , kurā pieskare funkcijas grafikam būs paralēla asij  $Ox$ . (Teorēmas pierādījumu izlaidīsim.)



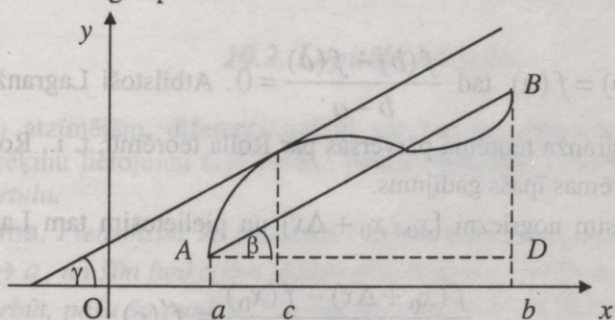
10.1. zīm.

**Secinājumi.** Ja funkcijai kādā intervālā  $X$  eksistē atvasinājums, tad starp katru šīs funkcijas sakņu pāri, kas pieder  $X$ , atrodas tās atvasinājuma sakne.

**Lagranža teorēma.** Ja nogrieznī  $[a, b]$  nepārtrauktai funkcijai  $f(x)$  eksistē atvasinājums  $f'(x)$  valējā intervālā  $(a, b)$ , tad intervālā  $(a, b)$  atrodas vismaz viens tāds punkts  $c$ , kuram

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Teorēmas ģeometriskā jēga ir sekojoša: intervālā  $(a, b)$  eksistē vismaz viens punkts, kurā pieskare funkcijas grafikam ir paralēla hordai  $AB$  (10.2. zīm.), kas savieno loka  $AB$  galapunktus.



10.2. zīm.

Tiešām, lielums  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  ir vienāds ar leņķa  $\beta$  tangensu, bet  $f'(c)$  ir

vienāds ar leņķa  $\gamma$  tangensu. Savukārt šo leņķu tangensu vienādība nozīmē, ka norādītās taisnes ir paralēlas.

Pierādījums. Aplūkosim palīgfunkciju  $F(x) = f(x) -$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) = f(x) - k(x - a). \text{ Ērtības labad daļu } \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

apzīmēsim ar  $k$ . Funkcija  $F(x)$  apmierina Rolla teorēmas nosacījumus. Tiešām, tā ir nepārtraukta, jo nepārtraukta ir funkcija  $f(x)$ , kā arī tā ir atvasināma, jo atvasinājumi eksistē funkcijām  $f(x)$  un  $k(x - a)$ . Pie tam

$$F(a) = f(a) - k(a - a) = f(a),$$

$$F(b) = f(b) - k(b - a) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a),$$

t. i.,  $F(b) = F(a)$ .

No Rolla teorēmas seko, ka funkcijai  $F(x)$  intervālā  $(a, b)$  atradīsies vismaz viens tāds punkts  $c$ , kurā  $F'(c) = 0$ . Tā kā  $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ,

tad  $F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ . Tātad,

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

un

$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ , kas arī bija jāpierāda.

Piezīmes.

1. Ja  $f(b) = f(a)$ , tad  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$ . Atbilstoši Lagranža teorēmai

$f'(c) = 0$ . Lagranža teorēma pārvēršas par Rolla teorēmu, t. i., Rolla teorēma ir Lagranža teorēmas īpašs gadījums.

2. Aplūkosim nogriezni  $[x_0, x_0 + \Delta x]$  un pielietosim tam Lagranža teorēmu

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x_0 + \Delta x - x_0} = f'(c),$$

no kā seko

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(c) \cdot \Delta x,$$

jeb

$$\Delta f = f'(c) \cdot \Delta x. \quad (10.1)$$

Pēdējo formulu sauc par *galīgo pieaugumu formulu*.

**Košī teorēma.** Ja nogrieznī  $[a, b]$  nepārtrauktām funkcijām  $f(x)$  un  $g(x)$  eksistē atvasinājumi intervālā  $(a, b)$ , pie tam  $g'(x)$  intervālā  $(a, b)$  nav vienāds ar nulli, tad intervālā  $(a, b)$  atradīsies vismaz viens tāds punkts  $c$ , kuram

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (10.2)$$

Teorēmu pierāda, reducējot to uz Rolla teorēmu (līdzīgi kā Lagranža teorēmā), izmantojot palīgfunkciju

$$F(x) = f(x) - Q \cdot [g(x) - g(a)],$$

kur  $Q = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ .

Piezīmes.

1. Rolla, Lagranža un Košī teorēmas sauc par vidējo vērtību teorēmām.

2. Ja neizpildās kaut viens no doto teorēmu nosacījumiem, tad teorēmas apgalvojums var izrādīties nepareizs. Piemēram, funkcija  $y = |x|$  nogrieznī  $[-1, 1]$  ir nepārtraukta, tai ir vienādas vērtības nogriežņa galapunktos, bet

punktā  $x = 0$  tai neeksistē atvasinājums. (Pārkāpts viens no Rolla teorēmas nosacījumiem.) Šīs funkcijas atvasinājums nekur nav vienāds ar nulli – tāpat teorēmas apgalvojums nav pareizs.

## 10.2. Lopitāla kārtula

Kā jau atzīmējām, diferenciālrēķini var būt noderīgi robežu aprēķinos. Diferenciālrēķinu lietojumu šajā nolūkā pamato sekojoša teorēma, ko sauc par Lopitāla kārtulu.

**Teorēma.** Pieņemsim, ka funkcijas  $f(x)$  un  $g(x)$  tiecas uz nulli vai bezgalību, ja  $x \rightarrow a$ , un šīm funkcijām eksistē atvasinājumi kādā punkta  $a$  apkārtnē, izņemot, varbūt, pašu šo punktu. Pie tam atvasinājums  $g'(x)$  šajā apkārtnē nav vienāds ar nulli. Ja eksistē robeža  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , tad eksistē arī  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  un

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Pierādīsim šo teorēmu, ja  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  un  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ .

Aplūkosim intervālā  $X$  definētas funkcijas:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a, \\ 0, & x = a, \end{cases} \quad \tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x), & x \neq a, \\ 0, & x = a, \end{cases}$$

un patvaļīgi izvēlēsimies punktu  $t \in X$ , tā, lai  $t > a$ .

Dotās funkcijas  $\tilde{f}(x)$  un  $\tilde{g}(x)$  nogrieznī  $[a, t]$  apmierina Košī teorēmas nosacījumus.

Tiešām, pusatvērtajā intervālā  $(a, t]$  tās ir vienādas attiecīgi ar funkcijām  $f(x)$  un  $g(x)$ , kuras ir nepārtrauktas un atvasināmas, pie tam  $g'(x) \neq 0$ . Turklāt šīs funkcijas ir nepārtrauktas punktā  $a$ ; ņemot vērā, ka ārpus punkta  $a$   $\tilde{f}(x) = f(x)$ , var rakstīt:

$$\lim_{x \rightarrow a} \tilde{f}(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = \tilde{f}(a).$$

Tas nozīmē, ka funkcija  $\tilde{f}(x)$  punktā  $a$  ir nepārtraukta.

Līdzīgi ir funkcijas  $\tilde{g}(x)$  gadījumā.

No Košī teorēmas seko, ka funkcijām  $\tilde{f}(x)$  un  $\tilde{g}(x)$  intervālā  $(a, t)$  atradīsies vismaz viens tāds punkts  $c$ , kuram

$$\frac{\tilde{f}(t) - \overbrace{\tilde{f}(a)}^0}{\tilde{g}(t) - \underbrace{\tilde{g}(a)}_0} = \frac{\tilde{f}'(c)}{\tilde{g}'(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad a < c < t.$$

No tā seko, ka

$$\frac{\tilde{f}'(t)}{\tilde{g}'(t)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \text{un} \quad \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (10.3)$$

Abās vienādības pusēs pāriesim uz robežu:

$$\frac{\lim_{t \rightarrow a} f(t)}{\lim_{t \rightarrow a} g(t)} = \frac{\lim_{t \rightarrow a} f'(c)}{\lim_{t \rightarrow a} g'(c)} = \frac{\lim_{c \rightarrow a} f'(c)}{\lim_{c \rightarrow a} g'(c)} = \frac{\lim_{t \rightarrow a} f'(t)}{\lim_{t \rightarrow a} g'(t)},$$

kas arī bija jāpierāda.

Piezīme. Teorēma ir spēkā arī gadījumā, ja  $x \rightarrow \infty$ .

Piemēri.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

$$\begin{aligned} 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} \left( \frac{0}{0} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{tg} x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x}{3x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{\cos^2 x \cdot 3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{3x^2} \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos^3 x)'}{(3x^2)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos^2 x \cdot \sin x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Lopitāla kārtula var tikt izmantota arī cita veida nenoteiktību aprēķināšanai. Ar piemēriem parādīsim, kā to var izdarīt.

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{e}{e^x - e} \right) (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e - ex + e}{(x-1)(e^x - e)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{e^x - e + (x-1)e^x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{xe^x - e} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x}{e^x + xe^x} = \frac{e}{2e} = \frac{1}{2}.$$

Dotajā piemērā nenoteiktība  $(\infty - \infty)$  pārveidota par nenoteiktību  $\left(\frac{0}{0}\right)$ , pēc

tam pielietota Lopotāla kārtula.

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\sin x} (0^0) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(\sin x)^{\sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \ln(\sin x)^{\sin x}}.$$

$$\text{Aprēķināsim: } \lim_{x \rightarrow 0} \ln(\sin x)^{\sin x} (0^0) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \ln \sin x (0 \cdot \infty) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{\sin x}} \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln \sin x)'}{\left( \frac{1}{\sin x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x}{-\frac{1}{\sin^2 x} \cdot \cos x} =$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0.$$

Noslēgumā iegūsim

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\sin x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \ln(\sin x)^{\sin x}} = e^0 = 1.$$

Risinot šo uzdevumu, nenoteiktība  $(0^0)$  tika (vairākos etapos) pārveidota par nenoteiktību  $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ , pēc tam pielietota Lopotāla kārtula. Ar līdzīgiem paņēmieniem var reducēt arī citas nenoteiktības uz  $\left(\frac{0}{0}\right)$  vai  $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$  veida nenoteiktībām.

### 10.3. Teilora formula

9.14. p. tika ieviests svarīgs matemātikas jēdziens – aproksimācija un tika aplūkota funkcijas aproksimācija ar lineāras funkcijas palīdzību. **Lineāra funkcija ir pirmās pakāpes polinoms.** Tagad aplūkosim funkcijas aproksimāciju punkta  $x_0$  apkārtnē ar patvaļīgas pakāpes polinomu, konkrēti ar  $n$ -tās pakāpes polinomu  $P_n(x)$ :

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n.$$

Tādu polinomu sauc par  $(x - x_0)$  pakāpju polinomu. Pieņemsim, ka kādā punkta  $x_0$  apkārtnē funkcijai  $y = f(x)$  eksistē visi tās atvasinājumi,  $(n + 1)$ -mās kārtas atvasinājumu ieskaitot. Nav grūti pārliecināties, ka polinomam

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad (10.4)$$

punktā  $x_0$  ne tikai eksistē vērtība, kas vienāda ar  $f(x_0)$ , bet arī visu tā atvasinājumu vērtības, līdz pat  $n$ -tai kārtai ieskaitot, ir vienādas ar funkcijas  $f(x)$  attiecīgās kārtas atvasinājumiem dotajā punktā. Šo polinomu sauc par funkcijas  $f(x)$  *Teilora polinomu* punktā  $x_0$ . Tas pārstāv funkcijas  $f(x)$  noteiktu tuvinājumu (aproximāciju). Apzīmējot dotā tuvinājuma kļūdu ar  $R_n(x)$  ( $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ ), var rakstīt:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x). \quad (10.5)$$

Ievietojot (10.5) izteiksmi (10.4), iegūsim:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x). \quad (10.6)$$

Šo vienādību sauc par *Teilora formulu*, lielumu  $R_n(x)$  sauc par Teilora formulas atlikuma locekli. Atsevišķā gadījumā, ja  $x_0 = 0$ , Teilora formulu sauc par *Maklorena formulu*.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x). \quad (10.7)$$

Kā jau tika minēts, Teilora formulas atlikuma loceklis  $R_n(x)$  rāda aproksimācijas kļūdu, kas rodas, aizstājot funkciju  $f(x)$  ar Teilora polinomu  $P_n(x)$ . Tādēļ svarīgi ir iegūt formulu, kas ļautu novērtēt atlikuma locekļa  $R_n(x)$  lielumu, dažādām  $x$  vērtībām.

Eksistē vairākās atlikuma locekļa izteiksmes. Mēs dodam divas no tām – atlikuma locekli Lagranža formā:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}, \quad (10.8)$$

kur  $c$  ir punkts, kas atrodas starp  $x$  un  $x_0$ ;

atlikuma locekli Košī formā:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x-x_0)(x-c)^n, \quad (10.9)$$

kur  $c$  ir punkts, kas arī atrodas starp  $x$  un  $x_0$ ;

Piemērs. Kā vienkāršu piemēru aplūkosim funkcijas  $f(x) = e^x$  Maklorena formulu.

Tā kā šīs funkcijas visi atvasinājumi arī ir vienādi ar  $e^x$ , tad

$$f(0) = e^0 = 1, \quad f'(0) = e^0 = 1, \quad f''(0) = 1, \quad \dots, \quad f^{(n)}(0) = 1.$$

Tātad funkcijas  $f(x) = e^x$  Maklorena formula ir

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + R_n(x). \quad (10.10)$$

Atlikuma locekli Lagranža formā ir šāds:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}. \quad (10.11)$$

Lietosim iegūto formulu (10.10) skaitļa  $e$  tuvinātai aprēķināšanai ar precizitāti līdz 0,001. Vispirms jānosaka tāds  $n$ , ar kuru tuvinājuma kļūda, k  $R_n(x)$  būtu mazāka par  $10^{-3}$ . Atrastais  $n$  norāda dotajai precizitātei nepieciešamo Maklorena polinoma pakāpi.

No formulas (10.11) seko, ka  $R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}$ , kur  $0 < c < 1$ . Šajā

piemērā  $x = 1$ . Tādēļ  $R_n(1) < \frac{e^1}{(n+1)!} (1)^{n+1}$ . Ja  $n = 6$ , tad  $R_6(x) \leq 10^{-3}$  (ja

$n = 5$ , tad  $R_5(x) > 10^{-3}$ ).

Tātad, ar precizitāti līdz  $10^{-3}$

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{(1)^2}{2!} + \dots + \frac{(1)^6}{6!} = 2,718.$$

## 10.4. Teilora rinda

8.13. p. ar robežu palīdzību tika formulēti skaitļu rindas un tās bezgalīga skaita locekļu *summas* jēdzieni. Iepriekšējā punktā tika aplūkota funkcijas aproksimācija ar polinomu (monomu summu). Pārejot uz robežu ( $n \rightarrow \infty$ ) šādā funkcijas izvirzījumā, mēs iegūsim no funkcijām sastāvošu rindu – funkciju rindu. Dosim pamatdefinīcijas. Pieņemsim, ka dota funkciju virkne  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$ , ...,  $\varphi_n(x)$ , .... Par **funkciju rindu** sauc šādu formālu izteiksmi

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \dots + \varphi_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x).$$

Ja argumentam  $x$  piešķirsim konkrētu vērtību  $x_0$ , tad iegūsim skaitļu rindu

$$\varphi_1(x_0) + \varphi_2(x_0) + \dots + \varphi_n(x_0) + \dots$$

Ja šī skaitļu rinda konverģē, tad apzīmēsim tās summu ar  $S(x_0)$ . Visu to argumenta vērtību kopu, ar kurām atbilstošās skaitļu rindas konverģē, sauc par aplūkojamās funkciju rindas konverģences apgabalu. Funkciju rindas konverģences apgabalā tās summa ir mainīgā  $x$  funkcija:

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \dots + \varphi_n(x) + \dots = S(x).$$

Aproksimējot funkciju  $f(x)$  ar Teilora polinomu (10.4), tuvinājuma kļūdu nosaka atlikuma loceklis  $R_n(x)$ . Ja, palielinoties numuram  $n$ , atlikuma loceklis tiecas uz nulli, tad Teilora formulā pārejot uz robežu, iegūstam funkcijas  $f(x)$  izteiksmi funkciju rindas formā

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots, \quad (10.12)$$

kuru sauc par **Teilora rindu**.

Teilora rindu atsevišķā gadījumā, ja  $x_0 = 0$ , sauc par **Maklorena rindu**:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

### 10.5. Funkcijas augšanas (dilšanas) saistība ar tās atvasinājuma zīmi

Funkciju  $f(x)$  sauc par augošu (dilstošu) nogrieznī  $X$ , ja jebkuriem šī nogriežņa punktiem  $x_1, x_2$  no nevienādības  $x_1 < x_2$  seko  $f(x_1) < f(x_2)$  ( $f(x_1) > f(x_2)$ ). Intervālus, kuros funkcijas vai nu tikai aug, vai tikai dilst sauc par funkcijas monotonitātes intervāliem.

**Teorēma (funkcijas augšanas vai dilšanas pietiekamais nosacījums).**

*Pieņemsim, ka nogrieznī  $[a, b]$  funkcija  $y = f(x)$  apmierina Lagranža teorēmas nosacījumus. Tad, ja intervālā  $(a, b)$  tās atvasinājums ir lielāks par nulli, tad funkcija šajā nogrieznī ir augoša, bet, ja mazāks par nulli – dilstoša.*

**Pierādījums.** Pieņemsim, ka  $x_1$  un  $x_2$  ir nogriežņa  $[a, b]$  patvaļīgi punkti un  $x_1 < x_2$ . Tā kā izpildās Lagranža teorēmas nosacījumi, tad var lietot galīgo pieaugumu formulu (10.1)

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \quad x_1 < c < x_2.$$

Tā kā  $x_2 - x_1 > 0$ , tad, ja intervālā  $(a, b)$  funkcijas atvasinājums  $f'(x) > 0$  (tas nozīmē, ka  $f'(c) > 0$ ), arī  $f(x_2) - f(x_1) > 0$ , t. i.,  $f(x_2) > f(x_1)$ . Lielākai argumenta vērtībai atbilst lielāka funkcijas vērtība; tātad  $f(x)$  ir augoša funkcija. Līdzīgi spriežam arī gadījumā, ja  $f'(x) < 0$ .

**Teorēma (funkcijas augšanas vai dilšanas nepieciešamais nosacījums).**

*Ja funkcijai  $f(x)$  nogrieznī  $X$  eksistē atvasinājums un funkcija tajā aug (dilst), tad šā nogriežņa jebkurā punktā  $f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) \leq 0$ ).*

**Pierādīsim teorēmu augošai funkcijai.** Nogrieznī  $X$  izvēlēsimies punktus  $x$  un  $x + \Delta x$ . Ja  $\Delta x > 0$ , tad  $x + \Delta x > x$ . Tā kā funkcija  $f(x)$  ir augoša, tad  $f(x + \Delta x) > f(x)$ . Tādēļ

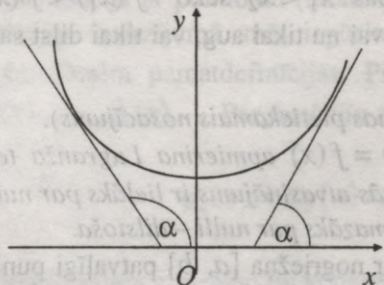
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0.$$

Līdzīgi, ja  $\Delta x < 0$ , tad  $x + \Delta x < x \Rightarrow f(x + \Delta x) < f(x)$  un

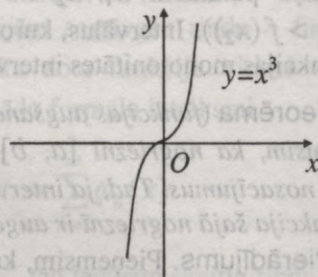
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0.$$

Tātad, neatkarīgi no  $\Delta x$  zīmes  $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ . Tātad  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$ , t. i.,  $f'(x) \geq 0$ , kas arī bija jāpierāda.

Pierādīto teorēmu ģeometriskā interpretācija ir šāda: ja funkcija ir augoša, tad tās grafika pieskares virziena leņķa tangenss ir pozitīvs; pieskare (ja tā eksistē) veido ar  $Ox$  asi šauru leņķi. Dilstošas funkcijas gadījumā grafika pieskare ar  $Ox$  asi veido platu leņķi (10.3. zīm.).



10.3. zīm.



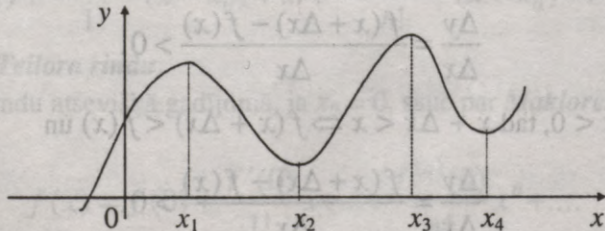
10.4. zīm.

Atzīmēsim arī, ka funkcija var būt stingri augoša kādā intervālā, bet atvasinājums tajā var būt vienāds ar nulli. Piemēram, funkcija  $y = x^3$  uz visas skaitļu ass ir augoša, bet tās atvasinājums punktā  $x = 0$  ir vienāds ar nulli (10.4. zīm.).

### 10.6. Ekstrēma punkti

Punktu  $x_0$  sauc par funkcijas  $f(x)$  **lokālā maksimuma (minimuma) punktu**, ja, pirmkārt, funkcija ir nepārtraukta dotajā punktā un, otrkārt, var atrast tādu punktu  $x_0$  apkārtni, kurā visiem  $x$  ir spēkā nevienādība  $f(x) < f(x_0)$  ( $f(x) > f(x_0)$ ).

Lokālā maksimuma un minimuma punktus sauc par **ekstrēma punktiem**.



10.5. zīm.

10.5. zīmējumā punkti  $x_1, x_3$  ir lokālā maksimuma punkti, bet punkti  $x_2, x_4$  ir lokālā minimuma punkti.

## 10.7. Funkcijas ekstrēma punkta nepieciešamais nosacījums

**Teorēma.** Pieņemsim, ka  $x_0$  ir funkcijas  $f(x)$  ekstrēma punkts. Tad, ja šajā punktā eksistē atvasinājums, tad tas ir vienāds ar nulli.

**Pierādījums.** Pieņemsim, piemēram, ka  $x_0$  ir lokālā maksimuma punkts. (Lokālā minimuma punkta gadījumā pierādījums ir līdzīgs.) No teorēmas nosacījuma izriet, ka punktā  $x_0$  eksistē atvasinājums

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

No teorēmas par vienusējām robežām seko, ka eksistē arī savstarpēji vienādas vienusējas robežas.

Tā kā  $x_0$  ir lokālā maksimuma punkts, tad  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$ .

Ja  $\Delta x \rightarrow +0$ , tad  $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$  un  $\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$ . Ja  $\Delta x \rightarrow -0$ , tad  $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$  un

$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$ . Tā kā šīm vienusējo robežu vērtībām jāsakrīt, tad tās ir vienādas ar nulli.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) = 0.$$

Pierādītā teorēma dod **ekstrēma punkta eksistences nepieciešamo nosacījumu**: atvasinājums šajā punktā vai nu ir vienāds ar nulli, vai neeksistē. Šādus punktus sauc par **kritiskajiem** punktiem. Punktus, kuros atvasinājums ir vienāds ar nulli sauc par **stacionāriem** punktiem.

Atzīmēsim, ka ne visi kritiskie (vai stacionārie) punkti ir ekstrēma punkti. Jau agrāk minētajai funkcijai  $y = x^3$  neeksistē ekstrēma punkti (tā ir monotoni augoša), kaut gan punktā  $x = 0$  tās atvasinājums ir vienāds ar nulli.

## 10.8. Funkcijas ekstrēma punkta pietiekamais nosacījums

**Ekstrēma punkti ir punkti, kuros mainās funkcijas monotonitātes raksturs**: maksimuma punktā – no augšanas uz dilšanu, minimuma punktā – no dilšanas uz augšanu. Izmantojot šo īpašību, pierādīsim (pirmo) ekstrēma punkta pietiekamo nosacījumu.

**Teorēma.** Pieņemsim, ka funkcija  $f(x)$  ir nepārtraukta kādā punkta  $x_0$  apkārtnē un šajā apkārtnē tai eksistē atvasinājums, izņemot, varbūt, pašu punktu

$x_0$ . Ja, pārejot šo punktu no kreisās puses uz labo, atvasinājums  $f'(x)$  maina zīmi, tad  $x_0$  ir ekstrēma punkts. Pie tam, ja zīme mainās no plusa uz mīnusu, tad  $x_0$  ir maksimuma punkts, ja no mīnusa uz plusu – minimuma punkts; ja atvasinājuma zīme nemainās, tad punktā  $x_0$  ekstrēms neeksistē.

Pieņemsim, ka, ejot caur punktu  $x_0$  (no kreisās puses), atvasinājums maina zīmi no plusa uz mīnusu. Tad pa kreisi no šī punkta funkcija ir augoša, pa labi – dilstoša. Bez tam punktā  $x_0$  funkcija  $f(x)$  ir nepārtraukta. Tātad  $x_0$  ir funkcijas maksimuma punkts. Spriedumi ir līdzīgi, ja atvasinājums maina zīmi no mīnusa uz plusu vai arī zīmi nemaina.

Tālāk aplūkosim funkcijas (augšanas vai dilšanas) pētīšanas algoritmu.

1) Aprēķināsim  $f'(x)$  un noteiksim punktus, kuros atvasinājums ir vienāds ar nulli vai neeksistē (kritiskos punktus).

2) Noteiksim atvasinājuma zīmi intervālos starp kritiskajiem punktiem. Pietiek izskaitļot katra intervāla patvaļīgā punktā atvasinājuma vērtību un noteikt tā zīmi.

3) Norādīsim funkcijas monotonitātes intervālus un ekstrēma punktus.

4) Izskaitļosim funkcijas vērtības ekstrēma punktus.

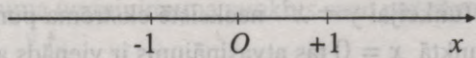
Piemēri. Atrast funkcijas  $y = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$  augšanas un dilšanas intervālus, kā arī ekstrēma punktus.

Aprēķināsim atvasinājumu

$$y' = \left( (x^2 - 1)^{2/3} \right)' = \frac{2}{3} (x^2 - 1)^{-1/3} \cdot 2x = \frac{4}{3} \cdot \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}.$$

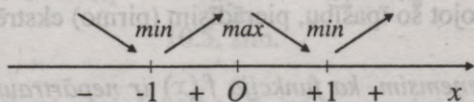
Noteiksim kritiskos punktus: atvasinājums ir vienāds ar nulli punktā  $x_1 = 0$  un neeksistē punktos  $x_2 = -1$  un  $x_3 = 1$ .

Šie punkti sadala  $Ox$  asi četros intervālos:



10.6. zīm.

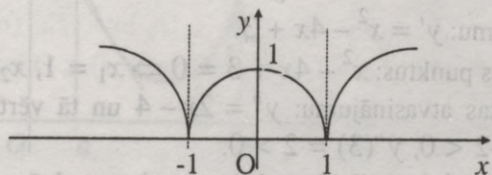
Noteiksim katrā intervālā atvasinājuma zīmi:  $y'(-2) < 0$ ,  $y'(-0,5) > 0$ ,  $y'(0,5) < 0$ ,  $y'(2) > 0$ . Norādīsim šīs zīmes zem skaitļu ass un ar bultiņām atēlosim funkcijas monotonitātes raksturu.



10.7. zīm.

Izskaitļosim funkcijas vērtības ekstrēma punktus:  $y(-1) = y(1) = 0$ ;  $y(0) = 1$ .

Atzīmēsim, ka punktos  $x = \pm 1$  funkcijai ir bezgalīgi atvasinājumi: funkcijas grafika pieskares šajos punktos ir vertikāles. Tagad attēlosim funkcijas grafiku (10.8. zīm.).



10.8. zīm.

Piezīme. Funkcijas maksimuma un minimuma punktus ir ērti atrast, ja iegūtos rezultātus apkopo tabulā. Dotajam piemēram tā ir sekojoša.

$x$	$(-\infty, -1)$	$-1$	$(-1, 0)$	$0$	$(0, 1)$	$1$	$(1, +\infty)$
$y'$	-	neek-sistē	+	0	-	neek-sistē	+
$y$	$\searrow$	0 <i>min</i>	$\nearrow$	1 <i>max</i>	$\searrow$	0 <i>min</i>	$\nearrow$

**Teorēma.** (funkcijas ekstrēma punkta eksistences otrais pietiekamais nosacījums). Ja  $x_0$  ir funkcijas  $f(x)$  stacionārais punkts un kādā šī punkta apkārtnē eksistē nepārtraukts otrās kārtas atvasinājums  $f''(x)$ , pie kam  $f''(x_0) > 0$  ( $f''(x_0) < 0$ ), tad  $x_0$  ir lokālā minimuma (maksimuma) punkts.

**Pierādījums.** Izvirzīsim funkciju  $y = f(x)$  pēc Teilora formulas (ja  $n = 1$ ):

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2,$$

punkts  $c$  atrodas starp punktiem  $x$  un  $x_0$ . Tā kā  $x_0$  ir stacionārais punkts, t. i.,  $f'(x_0) = 0$ , tad

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2.$$

Var parādīt (pierādījumu neaplūkosit), ka no  $f''(x)$  nepārtrauktības seko tādas punkta  $x_0$  apkārtnes eksistence, kuras patvaļīgā punktā  $c$  atvasinājumiem  $f''(c)$  un  $f''(x_0)$  ir vienādas zīmes. Tādēļ, ja  $f''(x_0) > 0$ , tad arī  $f''(c) > 0$ . Tātad

$f(x) > f(x_0)$ , t. i.,  $x_0$  ir lokālā minimuma punkts. Ja  $f''(x_0) < 0$ , tad arī  $f''(c) < 0$  un  $f(x) < f(x_0)$ , t. i.,  $x_0$  ir lokālā maksimuma punkts.

Piemērs. Atrast funkcijas  $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$  ekstrēma punktus.

Atrodam atvasinājumu:  $y' = x^2 - 4x + 3$ .

Atrodam stacionāros punktus:  $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3$ .

Atrodam otrās kārtas atvasinājumu:  $y'' = 2x - 4$  un tā vērtības stacionārajos punktos:  $y''(1) = -2 < 0, y''(3) = 2 > 0$ .

Tātad punktā  $x = 1$  funkcijai ir maksimums, bet punktā  $x = 3$  minimums.

### 10.9. Funkcijas lielākā un mazākā vērtība nogrieznī

Praksē mūs bieži interesē nevis lokālie ekstrēmi, bet *globālie* funkcijas *maksimuma* vai *minimuma* punkti kādā nogrieznī  $[a, b]$ , t. i., aplūkojamā nogriežņa punkti, kuros funkcija sasniedz savu lielāko vai mazāko vērtību. Šos punktus var atrast šādi: nosaka kritiskos punktus, izvēloties tos, kuri pieder dotajam nogriežnim, pēc tam šajos punktos un nogriežņa galapunktos izskaitļo funkcijas vērtības. No iegūtajām funkcijas vērtībām izvēlas mazāko un lielāko.

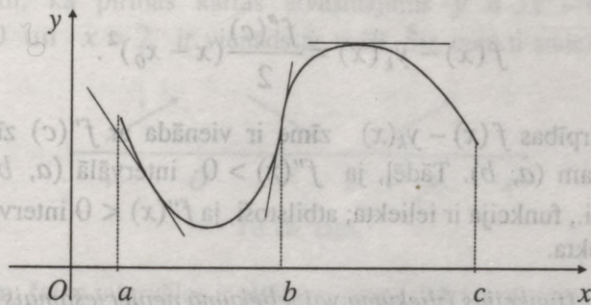
Piemērs. Atrast iepriekšējā piemērā aplūkotās funkcijas  $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$  lielāko un mazāko vērtību nogrieznī  $[-1, 2]$ .

Funkcijas stacionārie punkti ir  $x_1 = 1, x_2 = 3$ . Aplūkojamam intervālam pieder tikai punkts  $x_1 = 1$ . Tādēļ izskaitļosim funkcijas vērtības šajā punktā un nogriežņa galapunktos:  $f(1) = \frac{7}{3}, f(-1) = -\frac{13}{3}, f(2) = \frac{5}{3}$ . Tātad dotajā no-

grieznī funkcijas mazākā vērtība ir nogriežņa galapunktā  $f(-1) = -\frac{13}{3}$ , bet lielākā vērtība ir nogrieznī iekšējā punktā  $f(1) = \frac{7}{3}$ .

### 10.10. Funkcijas grafika liekums

Funkcijas  $y = f(x)$  grafiku intervālā  $(a, b)$  sauc par *izliektu (ieliektu)*, ja tas minētajā intervālā atrodas zem (virs) funkcijas grafika jebkuras pieskares. Atbilstoši arī funkciju  $f(x)$  sauc par izliektu (ieliektu). Izliektu funkciju (līkni) sauc arī par izliektu uz augšu, bet ieliektu – par izliektu uz leju. 10.9. zīmējumā



10.9. zīm.

funkcija  $y = f(x)$  intervālā  $(a, b)$  ir ieliekta, bet intervālā  $(b, c)$  izliekta.  $Ox$  ass punktu, kas atdala grafika ieliekto daļu no izliektās, sauc par *pārliekuma punktu*. Zīmējumā punkts  $b$  ir pārliekuma punkts.

**Teorēma.** (funkcijas izliekuma (ieliekuma) pietiekamais nosacījums).

Ja funkcijai  $y = f(x)$  intervālā  $(a, b)$  eksistē otrās kārtas atvasinājums un visos intervāla  $(a, b)$  punktos  $f''(x) > 0$  ( $f''(x) < 0$ ), tad funkcijas grafiks šajā punktā ir ieliekts (izliekts).

**Pierādījums.** Vispirms atzīmēsim, ka atbilstoši definīcijai funkcijas  $y = f(x)$  grafiks ir izliekts (ieliekts) intervālā  $(a, b)$ , ja  $f(x) - y_k(x) \leq 0$  ( $\geq 0$ ), kur  $y_k(x)$  ir intervāla  $(a, b)$  patvaļīgam punktam  $x_0$  atbilstošās funkcijas grafika pieskares ordināta.

Lai novērtētu starpības  $f(x) - y_k(x)$  zīmi, intervālā  $(a, b)$  izvēlēsimies patvaļīgu punktu  $x_0$ . Uzrakstīsim funkcijas  $f(x)$  grafika pieskares vienādojumu šajā punktā:

$$y_k(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Pēc tam funkciju  $f(x)$  izvirsīsim pēc Teilora formulas punkta  $x_0$  apkārtņē (ja  $n = 1$ ):

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2,$$

kur punkts  $c$  atrodas starp punktiem  $x$  un  $x_0$ , t. i., piered intervālam  $(a, b)$ .

Tad

$$\begin{aligned} f(x) - y_k(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2 - \\ &- f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2 \end{aligned}$$

jeb

$$f(x) - y_k(x) = \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2.$$

Tātad, starpības  $f(x) - y_k(x)$  zīme ir vienāda ar  $f''(c)$  zīmi. Punkts  $c$  pieder intervālam  $(a, b)$ . Tādēļ, ja  $f''(x) > 0$  intervālā  $(a, b)$ , tad  $f(x) - y_k(x) \geq 0$ , t. i., funkcija ir ieliekta; atbilstoši, ja  $f''(x) < 0$  intervālā  $(a, b)$ , tad funkcija ir izliekta.

**Teorēma.** (funkcijas izliekuma vai ieliekuma nepieciešamais nosacījums). Ja funkcija  $f(x)$  nogrieznī  $X$  ir izliekta (ieliekta) un tai eksistē otrās kārtas atvasinājums  $f''(x)$ , tad šajā intervālā  $f''(x) \leq 0$  ( $f''(x) \geq 0$ ).

Formulētā teorēma, kuru mēs nepierādīsim, nozīmē, ka funkcijas izliekuma intervālos pirmās kārtas atvasinājums  $f'(x)$  (funkcijas izmaiņas ātrums) dilst, bet funkcijas ieliekuma intervālos – aug.

No šīs teorēmas seko arī pārliekuma punkta eksistences nepieciešamais nosacījums.

**Teorēma.** Ja kādā pārliekuma punkta  $x_0$  apkārtnē funkcijai  $f(x)$  eksistē nepārtraukts otrās kārtas atvasinājums, tad tas ir vienāds ar nulli:  $f''(x_0) = 0$ .

**Teorēma.** (pārliekuma punkta pietiekamais nosacījums). Pieņemsim, ka kādā punkta  $x_0$  apkārtnē funkcija  $y = f(x)$  ir nepārtraukta un tai eksistē otrās kārtas atvasinājums visos tās punktos, izņemot, varbūt, pašu punktu  $x_0$ . Tad, ja ejot caur šo punktu no kreisās puses, otrās kārtas atvasinājums  $f''(x)$  maina zīmi, tad  $x_0$  ir pārliekuma punkts; pretējā gadījumā tas nav pārliekuma punkts.

Pierādījums acīmredzami seko no izliekuma vai ieliekuma pietiekamiem nosacījumiem un pārliekuma punkta definīcijas.

**Piemērs.** Atrast funkcijas  $y = x^3 - 3x^2 + 4$  izliekuma un ieliekuma intervālus un pārliekuma punktus.

Atrodam pirmās kārtas atvasinājumu  $y' = 3x^2 - 6x$  un pēc tam arī otrās kārtas atvasinājumu  $y'' = 6x - 6$ . Šie atvasinājumi eksistē visos skaitļu ass punktos. Atrodam  $x$  vērtību, ar kuru  $y''(x) = 0$ :

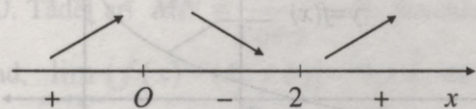
$$6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Ja  $x < 1$ , tad  $y''(x) < 0$  – funkcija ir izliekta;

ja  $x > 1$ , tad  $y''(x) > 0$  – funkcija ir ieliekta;

$x = 1$  ir pārliekuma punkts,  $y(1) = 2$ .

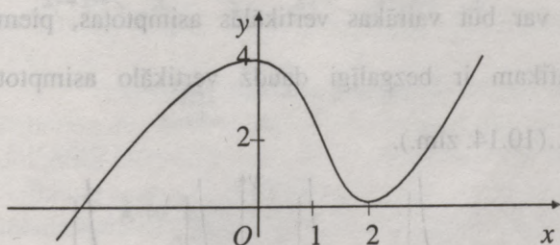
Atzīmēsim, ka pirmās kārtas atvasinājums  $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$  punktos  $x = 0$  un  $x = 2$  ir vienāds ar nulli. Šie punkti sadala  $Ox$  asi intervālos:



10.10. zīm.

10.10. zīm. šajos intervālos ir attēlotas pirmās kārtas atvasinājuma zīmes un funkcijas augšanas, dilšanas raksturs;  $y(0) = 4$ ,  $y(2) = 0$ .

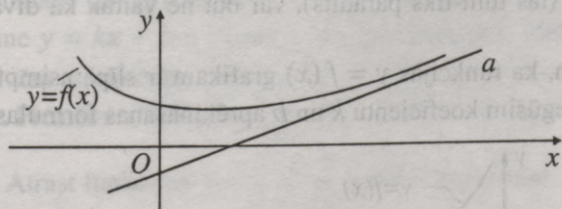
Uzzīmēsim šīs funkcijas grafiku (10.11. zīm.).



10.11. zīm.

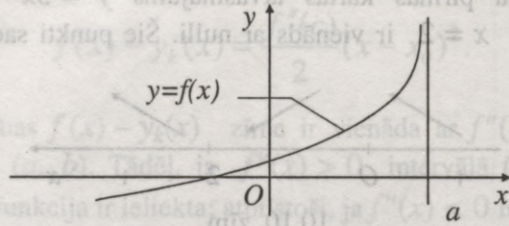
### 10.11. Funkcijas grafika asimptotas

Par funkcijas  $y = f(x)$  grafika *asimptotu* sauc taisni, attālums no kuras līdz grafika punktam tiecas uz nulli, ja grafika punkts neierobežoti attālinās no koordinātu sākumpunkta (10.12. zīm.).



10.12. zīm.

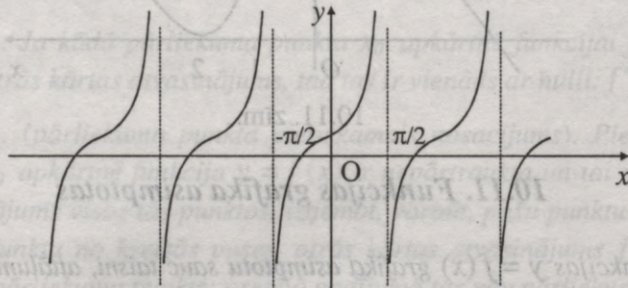
Asimptotas var būt *vertikālas* (10.13. zīm.) un *slīpas*. Horizontālas asimptotas tiek uzskatītas par slīpo asimptotu  $y = kx + b$  īpašu gadījumu, ja  $k = 0$ .



10.13. zīm.

Taisne  $x = a$  ir funkcijas  $y = f(x)$  grafika vertikāla asimptota, ja  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ .

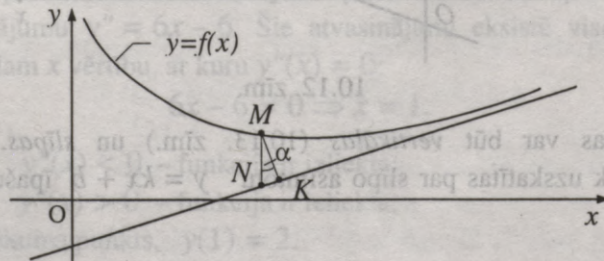
Funkcijai var būt vairākas vertikālās asimptotas, piemēram, funkcijas  $y = \operatorname{tg} x$  grafikam ir bezgalīgi daudz vertikālo asimptotu  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$  (10.14. zīm.).



10.14. zīm.

No otras puses (tas tūlīt tiks parādīts), var būt ne vairāk kā divas slīpās asimptotas.

Pieņemsim, ka funkcijas  $y = f(x)$  grafikam ir slīpā asimptota  $y = kx + b$  (10.15. zīm.). Iegūsim koeficientu  $k$  un  $b$  aprēķināšanas formulas.



10.15. zīm.

Jebkuram funkcijas grafika punktam  $M$  leņķis  $\alpha$  starp vertikāli  $MN$  un perpendikulu pret asimptoti  $MK$  ir viens un tas pats. No asimptotas definīcijas seko, ka  $MK \rightarrow 0$ . Tādēļ arī  $MN = \frac{MK}{\cos \alpha} \rightarrow 0$ . Savukārt,  $|MN| = |f(x) - (kx + b)|$ . Tātad,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0$ , t. i., starpība

$$f(x) - (kx + b) = \alpha(x) \quad (10.13)$$

ir bezgalīgi mazs lielums, ja  $x \rightarrow \pm\infty$ . Izdalīsim pēdējās vienādības abas puses ar  $x$  un pāriesim uz robežu, ja  $x \rightarrow \pm\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{f(x)}{x} - \left( k + \frac{b}{x} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\alpha(x)}{x},$$

iegūsim

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} - k = 0,$$

no kā seko, ka

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}. \quad (10.14)$$

Tagad no (10.13) iegūsim

$$b = f(x) - kx - \alpha(x).$$

Pārejot uz robežu, ja  $x \rightarrow \pm\infty$ , iegūsim:

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx). \quad (10.15)$$

Tātad, ja taisne  $y = kx + b$  ir funkcijas  $y = f(x)$  grafika asimptota, tad  $k$  un  $b$  atrod ar formulām (10.14) un (10.15). No otras puses, ja norādītās robežas eksistē, tad taisne  $y = kx + b$  ir līknes  $y = f(x)$  asimptota. Tādēļ līknei var būt ne vairāk par divām asimptotēm, viena, ja  $x \rightarrow +\infty$ , otra, ja  $x \rightarrow -\infty$ , bet tās var arī nebūt vispār. Piemēram, funkcijas  $y = \sin x$  grafikam asimptotas neeksistē.

Piemērs. Atrast funkcijas  $y = \frac{x^2 - 4}{2x + 3}$  grafika asimptotas.

Atrisinājums.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 4}{2x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - \frac{4}{x^2}}{2 + \frac{3}{x}} = \frac{1}{2};$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^2 - 4}{2x + 3} - \frac{1}{2}x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - 8 - 2x^2 - 3x}{2(2x + 3)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x - 8}{4x + 6} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3 - \frac{8}{x}}{4 + \frac{6}{x}} = -\frac{3}{4}$$

Tātad, asimptotas vienādojums ir

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$$

### 10.12. Funkcijas pētīšanas vispārīgā shēma

Lai izpētītu funkciju un uzzīmētu tās grafiku ir jānosaka:

- 1) funkcijas definīcijas apgabals; funkcijas simetrija un periodiskums;
- 2) funkcijas pārtraukuma punkti, to raksturs; vertikālās asimptotas;
- 3) funkcijas augšanas un dilšanas intervāli un ekstrēma punkti;
- 4) funkcijas grafika izliekuma un ieliekuma intervāli un pārliekuma punkti;
- 5) funkcijas grafika asimptotas;
- 6) funkcijas vērtības ekstrēma un pārliekuma punktos.

Pamatojoties uz visu šo iegūto informāciju, uzzīmē funkcijas grafiku.

Piemērs. Izpētīt funkciju  $y = \frac{x^2}{x-1}$ .

Atrisinājums.

1. Funkcijas definīcijas apgabals ir:  $x \in (-\infty, +1) \cup (+1, +\infty)$ .
2. Bezgalīga pārtraukuma punkts ir  $x = 1$ . Taisne  $x = 1$  ir vertikālā asimptota.

$$3. y' = \left( \frac{x^2}{x-1} \right)' = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

Kritiskie punkti ir:  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $x = 1$ .

$x$	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$y'$	+	0	-	neek-sistē	-	0	+
$y$	$\nearrow$	0 max	$\searrow$	neek-sistē	$\searrow$	4 min	$\nearrow$

$$4. y'' = \left( \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \right)' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{2(x-1)(x^2 - 2x + 1 - x^2 + 2x)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3},$$

ja  $x < 1$ , tad  $y''(x) < 0$  un funkcija ir izliekta,

ja  $x > 1$ , tad  $y''(x) > 0$ , un funkcija ir ieliekta.

5. Vertikālā asimptota ir  $x = 1$ .

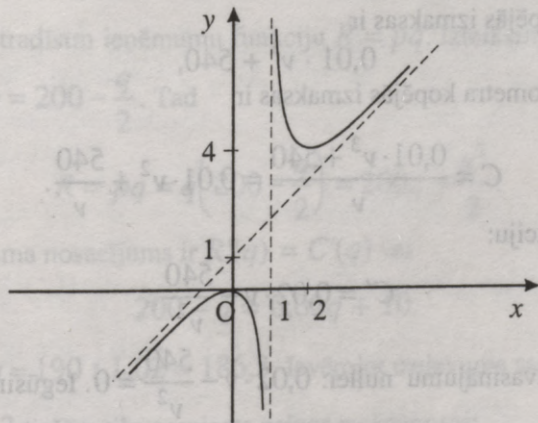
$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} \right) = 1.$$

Taisne  $y = x + 1$  ir slīpā asimptota.

6.  $y(0) = 0$ ,  $y(2) = 4$ .

Ņemot vērā iegūtos datus, uzzīmēsim funkcijas grafiku (10.16. zīm.).



10.16. zīm.

### 10.13. Diferenciālrēķinu lietojums ekonomikas uzdevumu risinājumos

#### 1. Uzdevums par ekonomisku tvaikoņa kuģošanu

Tvaikoņa kuģošanas izmaksas sastāv no divām daļām: pastāvīgās, kas ir vienāda ar 540 dolāriem stundā, un mainīgās, kas ir proporcionāla ātruma kubam. Zināms, ka šīs izmaksas ir vienādas ar 10 dolāriem stundā, ja kuģa ātrums ir 10 km/h. Ar kādu tvaikoņa ātrumu kuģošana būs maksimāli ekonomiska, t. i., 1 nopeldētā kilometra kopējās izmaksas būs vismazākās?

**Atrisinājums.** Lai atrisinātu uzdevumu, vispirms ir jāatrod funkcija, kas apraksta kopējo izmaksu atkarību no tvaikoņa ātruma, pēc tam jāatrod šīs funkcijas minimums.

Tvaikoņa ātrumu apzīmēsim ar  $v$ , viena kuģošanas kilometra izmaksas apzīmēsim ar  $C$ .

Zināms, ka 1 kuģošanas stundas mainīgās izmaksas ir proporcionālas ātruma kubam, t. i., vienādas ar  $a \cdot v^3$ . Ja ātrums ir 10 km/h, tad tās ir vienādas ar 10 dolāriem, t. i.,

$$10 \text{ dol./h} = a \cdot (10 \text{ km/h})^3,$$

no kā seko, ka  $a = 0,01 \text{ dol.h}^2/\text{km}^3$ .

Tad 1 stundas kopējās izmaksas ir

$$0,01 \cdot v^3 + 540,$$

bet viena ceļa kilometra kopējās izmaksas ir

$$C = \frac{0,01 \cdot v^3 + 540}{v} = 0,01 \cdot v^2 + \frac{540}{v}.$$

Izpētīsim šo funkciju:

$$C' = 0,02 \cdot v - \frac{540}{v^2}.$$

Pielīdzinām šo atvasinājumu nullei:  $0,02 \cdot v - \frac{540}{v^2} = 0$ . Iegūsim, ka

$v = 30 \text{ km/h}$ . Tā kā

$$C'' = 0,02 + \frac{2 \cdot 540}{v^3} > 0,$$

tad, kuģošanas izmaksas būs vismazākās, ja  $v = 30 \text{ km/h}$ .

Šīs izmaksas vienam ceļa kilometram būs

$$0,01 \cdot 30^2 + \frac{540}{30} = 27 \text{ dolāri.}$$

## 2. Peļņas maksimuma nepieciešamais nosacījums

Zināma izmaksu funkcija  $C = C(q)$  un ieņēmumu funkcija  $R = R(q)$ . Nepieciešams formulēt nosacījumu, kas ļautu noteikt tādu pārdošanas apjomu, ar kuru uzņēmuma peļņa būtu maksimāla.

*Uzņēmuma peļņa (apzīmēsim to ar  $Pr(q)$ ) ir vienāda ar dotās preces pārdošanas ieņēmumu un tās ražošanas izmaksu starpību:*

$$Pr(q) = R(q) - C(q).$$

Funkcijas maksimuma nepieciešamais nosacījums ir tās atvasinājuma vienādība ar nulli:

$$Pr'(q) = R'(q) - C'(q) = 0$$

jeb

$$R'(q) = C'(q). \quad (10.16)$$

Šī vienādība ir maksimālās peļņas nepieciešamais nosacījums. Tas nozīmē, ka, ja  $Pr(q)$  ir maksimāla, tad margināliem ieņēmumiem jābūt vienādiem ar marginālām izmaksām.

Piemērs. Zināma izmaksu funkcija

$$C = 0,01q^2 + 10q + 300$$

un pieprasījuma funkcija  $q = -2p + 400$ . Atrast maksimālo peļņu.

Vispirms atradīsim ieņēmumu funkciju  $R = pq$ . Izteiksim  $p$  no pieprasījuma funkcijas:  $p = 200 - \frac{q}{2}$ . Tad

$$R = pq = q\left(200 - \frac{q}{2}\right) = 200q - \frac{q^2}{2}.$$

Peļņas maksimuma nosacījums ir  $R'(q) = C'(q)$  vai

$$200 - q = 0,02q + 10.$$

No tā seko, ka  $q = 190 : 1,02 \approx 186,3$ . Ievērojot uzdevuma saturu ir skaidrs, ka punktā  $q = 186,3$  tiešām tiks sasniegts peļņas maksimums:

$$\begin{aligned} Pr(186,3) &= 200 \cdot 186,3 - \frac{186,3^2}{2} - (0,01 \cdot 186,3^2 + 10 \cdot 186,3 + 300) = \\ &= 17\,396,08. \end{aligned}$$

Tātad, maksimālā peļņa ir vienāda ar 17 396,08 naudas vienībām un tā tiks sasniegta ar pārdošanas apjomu  $q = 186,3$ .

### 3. Elastība

Tagad aplūkosim vienu no ekonomikas teorijas pamatjēdzieniem – elastību. Pieņemsim, ka dota funkcija  $y = f(x)$ . Apzīmēsim mainīgā  $x$  relatīvo pieaugumu ar  $\overline{\Delta x} = \frac{\Delta x}{x}$ , bet mainīgā  $y$  relatīvo pieaugumu ar  $\overline{\Delta y} = \frac{\Delta y}{y}$ . Jāatzīmē,

ka daudzos gadījumos mainīgā relatīvais pieaugums ir uzskatāmāks kā mainīgā pieaugums. Piemēram, dienas ieņēmumu pieaugums par 20 Ls ir nozīmīgs, ja ieņēmumi bija 60 Ls dienā, un mazāk nozīmīgs, ja ieņēmumi bija 500 Ls dienā.

Par mainīgā  $x$  funkcijas  $y$  elastību sauc robežu  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta y}}{\overline{\Delta x}}$ , ja tā eksistē. To apzīmē ar  $E_x(y)$ . Tātad

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta y}}{\overline{\Delta x}}. \quad (10.17)$$

Formulā (10.17)  $\overline{\Delta x}$  un  $\overline{\Delta y}$  aizvietojot atbilstoši ar  $\frac{\Delta x}{x}$  un  $\frac{\Delta y}{y}$ , iegūstam elastības aprēķiniem ērtu formulu:

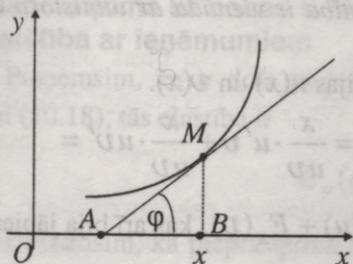
$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x}{y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y'(x).$$

Tātad

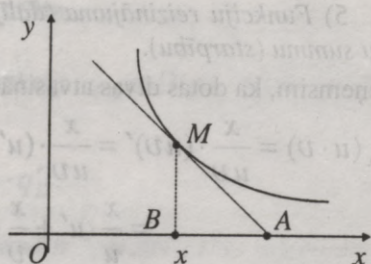
$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y'(x). \quad (10.18)$$

Ilustrēsim teikto ģeometriski. Pieņemsim, ka  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  un funkcija  $y = f(x)$  ir augoša (10.17. zīm.).  $x = |OB|$ ,  $y = |MB|$ ,  $y' = \operatorname{tg} \varphi = \frac{|MB|}{|AB|}$ . Tad

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y' = \frac{|OB|}{|MB|} \cdot \frac{|MB|}{|AB|} = \frac{|OB|}{|AB|}.$$



10.17. zīm.



10.18. zīm.

Līdzīgi dilstošai funkcijai :  $E_x(y) = -\frac{|OB|}{|AB|}$  (10.18. zīm.).

### Elastības īpašības

1) *Elastība ir marginālo un vidējo raksturotāju attiecība.*

Tiešām,

$$E_x(y) = \frac{x}{y} y'(x) = y'(x) : \frac{y}{x};$$

$y'(x)$  ir marginālais raksturotājs,  $\frac{y}{x}$  ir vidējais raksturotājs.

2) *Elastība tuvināti ir vienāda ar funkcijas procentuālo izmaiņu, argumentam mainoties par 1%.*

Tiešām,  $E_x(y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta y}}{\Delta x} \approx \frac{\overline{\Delta y}}{\Delta x}$ . Izvēlēsimies  $\Delta x = 0,01x$ , t. i., arguments

palielinās par 1%. Tad  $E_x(y) \approx \frac{\overline{\Delta y}}{\Delta x} = \frac{\Delta y/y}{0,01x/x} = \frac{\Delta y}{y} \cdot 100$ , kas arī bija jāpie-rāda.

3) *Elastība ir bezdimensionāls lielums.*

Tiešām,  $E_x(y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta y}}{\Delta x}$ . Acīmredzami, ka  $\overline{\Delta x} = \frac{\Delta x}{x}$  un  $\overline{\Delta y} = \frac{\Delta y}{y}$  ir bez-

dimensionāli lielumi.

4) *Konstantas funkcijas elastība ir vienāda ar nulli.*

Pieņemsim, ka  $y = c$ . Tad  $E_x(c) = \frac{x}{c} \cdot c' = 0$ .

5) Funkciju reizinājuma (dalījuma) elastība ir vienāda ar atbilstošo elastību summu (starpību).

Pieņemsim, ka dotas divas atvasināmas funkcijas  $u(x)$  un  $v(x)$ .

$$E_x(u \cdot v) = \frac{x}{uv} \cdot (uv)' = \frac{x}{uv} \cdot (u'v + uv') = \frac{x}{uv} \cdot u'v + \frac{x}{uv} \cdot uv' = \\ = \frac{x}{u} \cdot u' + \frac{x}{v} \cdot v' = E_x(u) + E_x(v), \text{ kas arī bija jāpierāda.}$$

Līdzīgi,  $E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v)$ .

6) Ja  $c$  ir konstante, tad  $E_x(cy) = E_x(y)$ .

Šī īpašība tieši seko no iepriekšējās:  $E_x(cy) = E_x(c) + E_x(y) = 0 + E_x(y) = E_x(y)$ .

Piemēri. 1) Piedāvājuma funkcija ir dota ar formulu

$$q_s = \frac{p^2}{2 + 4p}$$

Par cik procentiem mainīsies piedāvājums, ja cena ir  $p = 3$  un tā palielinās par 1%?

Atrisinājums. Atbilstoši 2. īpašībai, aprēķināmais procentuālais lielums ir vienāds ar piedāvājuma funkcijas elastību.

$$E_p(q_s) = \frac{p}{q} \cdot q'_s = \frac{p}{p^2/(2+4p)} \cdot \left(\frac{p^2}{2+4p}\right)' = \\ = \frac{2+4p}{p} \cdot \frac{2p(2+4p) - p^2 \cdot 4}{(2+4p)^2} = \frac{4+8p-4p}{2+4p} = \frac{4+4p}{2+4p}.$$

Ja  $p = 3$ , elastība ir vienāda ar  $E = \frac{4+4 \cdot 3}{2+4 \cdot 3} = \frac{8}{7}$ . Tātad, piedāvājums palieli-

nāsies par  $\frac{8}{7}$  procenta.

2) Atrast pakāpes funkcijas  $y = ax^b$  elastību, ja  $a$ ,  $b$  ir pastāvīgi koeficienti.

Atrisinājums.  $E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y' = \frac{x}{ax^b} \cdot a \cdot b \cdot x^{b-1} = b$ .

Šis piemērs rāda, ka pakāpes funkcijas elastība ir konstanta un vienāda ar kāpinātāju. Atzīmēsim bez pierādījuma pretējo apgalvojumu: *tikai pakāpes funkcijām ir konstanta elastība.*

#### 4. Pieprasījuma kā cenas funkcijas elastība.

##### Saistība ar ieņēmumiem

Pieņemsim, ka ir dota pieprasījuma funkcija  $q_D = D(p)$ . Atbilstoši formulai (10.18), tās elastība ir

$$E_p(q_D) = \frac{p}{q_D} \cdot q'_D.$$

Uzskatīsim, ka pieprasījuma līknes virziens ir "parasts", t. i., pieprasījuma funkcija ir dilstoša. Tas nozīmē, ka  $q'_D$  un  $E_p(q)$  ir negatīvi lielumi. Apzīmēsim

$$|E_p(q_D)| = e \text{ un pierādīsim:}$$

- 1) ja  $0 < e < 1$ , tad cenas palielinājumam seko ieņēmumu palielinājums; tādu pieprasījumu sauc par *neelastīgu*;
- 2) ja  $e > 1$ , tad cenas palielinājumam seko ieņēmumu samazinājums; tādu pieprasījumu sauc par *elastīgu*;
- 3) ja  $e = 1$ , tad ieņēmumi nemainīsies; tādu pieprasījumu sauc par *neitrālu*.

Tiešām, ieņēmumu palielināšanos vai samazināšanos nosaka funkcijas  $R = pq_D$  atvasinājuma zīme:

$$\begin{aligned} R'_p = (pq_D)' &= q_D + pq'_D = q_D \left( 1 + \frac{p}{q_D} \cdot q'_D \right) = q_D \left( 1 - \left( -\frac{p}{q_D} \cdot q'_D \right) \right) = \\ &= q_D(1 - e). \end{aligned}$$

Atbilstoši, ja  $e > 1$ , tad  $R'_p < 0$ ; palielinoties cenai ieņēmumi samazinās;

ja  $e < 1$ , tad  $R'_p > 0$ ; palielinoties cenai ieņēmumi aug.

No šiem spriedumiem izriet vēl viens svarīgs secinājums: *ieņēmumi ir vislielākie* ar tādu cenu  $p$ , kurai *pieprasījuma funkcijas elastības modulis ir vienāds ar 1*.

Piemērs. Pieprasījuma funkcija ir dota ar formulu  $q_D = 20 - 0,4p$ . Noteikt, kādā cenu diapazonā pieprasījums ir elastīgs.

Atrisinājums.

$$E_p(q) = \frac{p}{q} \cdot q' = \frac{p}{20 - 0,4p} \cdot (-0,4),$$

$$e = |E_p(q)| = \frac{0,4p}{20 - 0,4p} > 1.$$

Atrisinot šo nevienādību un ņemot vērā, ka  $q_D = 20 - 0,4p \geq 0$ , iegūstam:  $0,4p > 20 - 0,4p$  vai  $0,8p > 20 \Rightarrow p > 25$ . No otras puses, tā kā  $q_D = 20 - 0,4p \geq 0$ , tad  $p \leq 50$ . Tātad, pieprasījums būs elastīgs cenu diapazonā (25, 50].

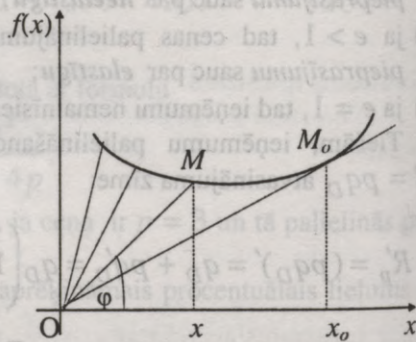
### 5. Vidējie raksturotāji. Saistība ar marginālajiem raksturotājiem

Ekonomikā daudzos gadījumos tiek izmantoti vidējie raksturotāji, piemēram, produkcijas vienības vidējās izmaksas: ja  $C(x)$  ir  $x$  produkcijas vienību izmaksas, tad vienas produkcijas vienības vidējās izmaksas ir  $\tilde{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$ .

Vispārīgā gadījumā vidējo lielumu (vai vidējo vērtību) definē ar formulu

$\tilde{f}(x) = \frac{f(x)}{x}$ . Geometriski funkcijas vi-

dējā vērtība punktā  $x$  ir tangenss no leņķa  $\varphi$ , kuru veido punkta  $M(x, f(x))$  rādiusvektors  $\overline{OM}$  ar  $Ox$  asi (10.19. zīm.). Dotajā zīmējumā funkcijas vismazākā vidējā vērtība ir punktā  $x_0$ . Aplūkosim funkcijas vidējās vērtības ekstrēma nosacījumus. Pieņemsim, ka  $\tilde{f}(x) =$



$= \frac{f(x)}{x}$ . Tad

10.19. zīm.

$$\tilde{f}'(x) = \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2}.$$

Funkcijas ekstrēma nepieciešamais nosacījums ir tās atvasinājuma vienādība ar nulli:  $\tilde{f}'(x) = 0$ . No tā seko, ka  $f'(x) \cdot x - f(x) = 0$  un

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x}. \quad (10.19)$$

Tātad, marginālo ( $f'(x)$ ) un vidējo  $\left(\frac{f(x)}{x}\right)$  raksturotāju vienādība ir funkcijas vidējā lieluma ekstrēma nepieciešamais nosacījums. Tā kā aplūkojam ekonomiskus uzdevumus, tad uzskatīsim, ka  $x > 0$  un  $f(x) \geq 0$ . Ja  $f'(x) > \frac{f(x)}{x}$ , tad  $f'(x) \cdot x - f(x) > 0$  un  $\tilde{f}'(x) > 0$ , t. i., funkcija  $\tilde{f}(x)$  ir augoša;

atbilstoši, ja  $f'(x) < \frac{f(x)}{x}$ , tad funkcija  $\tilde{f}(x)$  ir dilstoša. Citiem vārdiem, tur, kur funkcijas marginālā vērtība ir lielāka par vidējo, funkcijas vidējā vērtība aug, tur, kur mazāka – dilst. No tā seko *funkcijas vidējās vērtības ekstrēma pietiekamais nosacījums*.

Ja kādā punkta  $x_0$  apkārtnē, kurā ir spēkā nosacījums (10.19), pa kreisi no  $x_0$  ir patiesa nevienādība  $f'(x) < \frac{f(x)}{x}$ , bet pa labi  $-f'(x) > \frac{f(x)}{x}$  (tas ir  $\tilde{f}'(x)$  maina zīmi no “-” uz “+”), tad  $x_0$  ir funkcijas  $\tilde{f}(x)$  minimuma punkts. Ja nevienādību veidi mainās no “>” uz “<”, tad  $x_0$  ir maksimuma punkts.

Atzīmēsim arī *funkcijas vidējo vērtību saistību ar tās elastību*: nosacījums  $f'(x) < \frac{f(x)}{x}$  ir līdzvērtīgs sekojošam nosacījumam:  $\frac{x}{f(x)} f'(x) < 1$ . Tā kā  $\frac{x}{f(x)} f'(x) = E_x(f)$ , tad tas nozīmē, ka, ja  $E_x(f) < 1$ , tad funkcija  $\tilde{f}(x)$  ir dilstoša. Līdzīgi, ja  $E_x(f) > 1$ , tad  $\tilde{f}(x)$  ir augoša.

Piemērs. Izmaksu funkcija ir vienāda ar  $C(q) = 100 - 4q^{1/2} + 2q$ . Ar kādu ražošanas apjomu vidējā pašizmaksa (vidējās izmaksas) būs vismazākā?

Atrisinājums. Lietosim ekstrēma nepieciešamo nosacījumu (10.19)  
 $C'(q) = \frac{C(q)}{q}$ . Iegūsim  $C'(q) = -\frac{2}{\sqrt{q}} + 2$ ;  $\frac{C(q)}{q} = \frac{100}{q} - \frac{4}{\sqrt{q}} + 2$ .

Tad

$$-\frac{2}{\sqrt{q}} + 2 = \frac{100}{q} - \frac{4}{\sqrt{q}} + 2.$$

No tā seko, ka  $\frac{100}{q} - \frac{2}{\sqrt{q}} = 0$  vai  $\frac{2}{\sqrt{q}} \left( \frac{50}{\sqrt{q}} - 1 \right) = 0$ . Noslēgumā iegūsim  $\sqrt{q} = 50$  un  $q = 2500$ .

Viegli pārbaudīt, ka, ejot caur punktu  $q = 2500$ , starpība  $C'(q) - \frac{C(q)}{q}$  maina zīmi no mīnusa uz plusu. Tātad vidējās izmaksas būs minimālas, ja  $q = 2500$ .

## Paškontroles jautājumi

1. Formulējiet Lagranža teorēmu. Kāda ir tās ģeometriskā jēga? Kādēļ to sauc par vidējās vērtības teorēmu?
2. Formulējiet Lopitāla kārtulu. Kāda ir tās jēga? Aprēķiniet  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$ .
3. Kas ir aproksimācija? Kā šis jēdziens ir saistīts ar Teilora formulu? Uzrakstiet šo formulu. Uzrakstiet Maklorena formulu funkcijai  $y = \sin x$ .
4. Dodiet lokālā maksimuma (minimuma) punkta definīciju. Nosauciet ekstrēma punkta nepieciešamos nosacījumus.
5. Nosauciet ekstrēma punkta pietiekamos nosacījumus,
  - a) lietojot pirmās kārtas atvasinājumu,
  - b) lietojot otrās kārtas atvasinājumu.
6. Dodiet funkcijas izliekuma definīciju. Formulējiet tā nepieciešamos (pietiekamos) nosacījumus. Vai eksistē saistība starp funkcijas izliekumu un tās izmaiņas ātrumu?
7. Kas ir funkcijas grafika asimptota? Cik slīpo asimptotu var būt? Cik vertikālo asimptotu var būt?
8. Izpētiet funkciju  $y = e^{-x^2}$  un uzzīmējiet tās grafiku.
9. Pieņemsim, ka tūrisma braucieniem uz Itāliju kādā cenu diapazonā pieprasī-  
juma elastība ir vienāda ar 2. Par cik procentiem kritīsies šo braucienu  
pieprasījums, ja to cena palielināsies par 15%?
10. Ir zināma pieprasījuma funkcija  $q_D = 34 - p$ . Ar kādu cenas  $p$  vērtību  
ieņēmumi būs maksimālie?

## Vingrinājumi

Atrast robežu (1. – 10.):

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$ .

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\sin x}$ .

4.  $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x$ .

5.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$ .

6.  $\lim_{x \rightarrow \pi} (\sin x)^{x-\pi}$ .

$$7. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sin(x-1)}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} x^2}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{(2x-1)^3}{\operatorname{tg}(x-0,5)^2}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{e^{x-2}}$$

Izpētīt funkcijas augšanu un dilšanu (11. – 19.):

$$11. y = x^3 - x^2$$

$$12. y = x^2 - \frac{x^3}{3}$$

$$13. y = \frac{x}{x^2 + 4}$$

$$14. y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$$

$$15. y = \frac{x^4}{4} - 4x^2 + 6$$

$$16. y = \sqrt[3]{1-x^2}$$

$$17. y = 0,4x^3 - 1,2x^2 + 0,4x - 2$$

$$18. y = x \cdot e^x$$

$$19. y = x + 2e^{-x}$$

Atrast funkcijas vismazāko un vislielāko vērtību dotajā nogrieznī (20. – 23.):

$$20. y = x^3 - 12x + 4 \quad [0; 4].$$

$$21. y = 2x^4 - 6x^2 + 7 \quad [-1; 5].$$

$$22. y = x^3 + 3x^2 + 4 \quad [-1; 2].$$

$$23. y = 4x + \sqrt{x} \quad [0; 4].$$

Izpētīt funkciju, uzzīmēt tās grafiku (24. – 31.):

$$24. y = \frac{x^2 + 1}{2x - 3}$$

$$25. y = \frac{x^2}{2 + x^2}$$

$$26. y = \frac{2x^2}{x^2 - 4}$$

$$27. y = \frac{3x^2}{3x + 1}$$

$$28. y = xe^{-x}$$

$$29. y = \sqrt[3]{x^2} + 2$$

$$30. y = x^{2/3}(1-x)$$

$$31. y = x^2 e^x$$

32. Ekonomiskās statistikas uzdevumos nereti tiek izmantota sekojoša funkcija:

$$y = \frac{a}{1 + be^{-ct}}, \quad a, b, c > 0. \text{ To sauc par } \textit{logistisko} \text{ funkciju. Uzzīmēt šīs}$$

funkcijas grafiku (logistisko līkni), ja  $a = 1, b = 2, c = 0,5$ .

33. Uzzīmēt funkcijas  $y = a - be^{-cx}$ ,  $a, b, c > 0$ , grafiku. Šo grafiku sauc par *ierobežotā pieauguma līkni*.
34. 7.11. p. tika minēta pieprasījuma funkcija dažādiem preču veidiem atkarībā no iedzīvotāju ienākumiem, piemēram, greznuma priekšmetu pieprasījuma funkcija ir

$$q = \frac{aI(I-b)}{I+c},$$

ja  $q$  ir pieprasījuma apjoms,  $I$  ir ieņēmumi,  $a, b, c$  ir koeficienti;  $a, b, c > 0$ . Izpētīt šo funkciju un uzzīmēt tās grafiku, ja  $a = 1$ ,  $b = 4$ ,  $c = 2$ .

35. Zināma izmaksu funkcija  $C = 225 + 4q + q^2$ . Ja  $q$  ir saražotās produkcijas apjoms, tad  $C$  ir tā ražošanai nepieciešamās izmaksas. Izpētīt produkcijas vienības vidējās izmaksas (t. i., produkcijas vienības vidējo pašizmaksu) funkciju atkarībā no ražošanas apjoma un uzzīmēt tās grafiku.
36. Rūpnīca  $A$  atrodas  $a$  km attālumā no dzelzceļa, kas iet uz pilsētu  $B$ , un  $b$  km attālumā no pilsētas  $B$ . Ar kādu leņķi no rūpnīcas  $A$  pret dzelzceļu ir jāuzbūvē šoseja, lai kravu piegāde no tās uz pilsētu  $B$  būtu vislētākā, ja piegāde pa šoseju ir  $k$  reizes dārgāka ( $k > 1$ ) nekā pa dzelzceļu?
37. Rezervuāram ar tilpumu  $4 \text{ m}^3$  ir kvadrātisks pamats un atklāta augšpuse. Tā iekšējā virsma ir jāpārklāj ar alvu. Kādiem jābūt rezervuāra izmēriem, lai alvas patēriņš būtu vismazākais?
38. Izmaksu funkcija ir  $C = 0,2q^2 + 10q + 10$ , pieprasījuma funkcija ir  $q_D = -3p + 200$ . Atrast peļņas maksimumu.
39. Preces  $A$  pieprasījuma elastība ir vienāda ar  $0,8$ .
- Vai ieņēmumi no šīs preces pārdošanas, palielinoties cenai, pieaug vai samazinās?
  - Par cik procentiem izmainīsies pieprasījums, cenai palielinoties par  $10\%$ ?
40. Pieņemsim, ka  $C = C(q)$  ir izmaksu funkcija;  $q$  ir saražotās produkcijas apjoms. Zināms, ka izmaksu elastība, ja  $q = 500$ , ir vienāda ar  $0,6$  un, ka  $501$ . produkcijas vienības pašizmaksa ir vienāda ar  $5$ . Kāda ir vidējā pašizmaksa katrai no iepriekšējām  $500$  produkcijas vienībām? Kāda ir  $C(500)$  vērtība?
41. Pieprasījuma funkcija ir  $q = 20 - 4\sqrt{p}$ ,  $0 \leq p \leq 25$ . Noteikt elastīga pieprasījums intervālu.
42. Pieprasījuma funkcija ir  $q_D = 10 - p$ . Ar kādām  $p$  vērtībām cenas pieaugumam seko ieņēmumu pieaugums?
43. Atrisināt iepriekšējo uzdevumu funkcijai  $q = 2(4 - 0,4p)^2$ ,  $0 \leq p \leq 10$ .

44. Pieprasījuma funkcija ir  $q_D = \frac{2}{5p + 0,5}$ , piedāvājuma funkcija ir

$q_S = \frac{4p^2}{1 + 10p}$ . Noteikt pieprasījuma un piedāvājuma elastību līdzsvara punktā.

45. Pierādīt formulu

$$E_x(u + v) = \frac{uE_x(u) + vE_x(v)}{u + v}.$$

46. Pierādīt formulu

$$E_x(y(u(x))) = E_x(u(x)) \cdot E_u(y(u)).$$

Norādījums. Salīdzinājumam sk. formulas  $E_x(uv) = E_xu + E_xv$  pierādījumu (elastības 5. īpašība).

47. Ekonomikā bieži pieprasījumu  $q$  lieto kā neatkarīgu mainīgo. Šajā gadījumā saka, ka pieprasījuma vienādojums ir  $p = \varphi(q)$ . Lietojot elastības definīciju un apvērstās funkcijas atvasinājuma formulu, pierādīt, ka pieprasījuma elastību var aprēķināt ar formulu

$$E_p(q) = \frac{\varphi(q)}{p} \cdot \frac{1}{\varphi'(q)}.$$

48. Dota pieprasījuma funkcija  $q = 40 - 0,5p$ . Ar kādu cenu ieņēmumi būs vislielākie?

49. Zināma pieprasījuma funkcija  $q_D = 100 - 0,2p$  un piedāvājuma funkcija  $q_S = 2 + p$ . Ar kādu cenu ieņēmumi būs vislielākie?

50. Atrisināt iepriekšējo uzdevumu sekojošām pieprasījuma un piedāvājuma funkcijām: pieprasījuma funkcija  $q_D = 40 - p$ , piedāvājuma funkcija  $q_S = 3 + 0,5p$ . Paskaidrot risinājumu grafiski.

51. Koncertzālē ir vietas 2000 klausītājiem. Noteikt ar kādu biļešu cenu īpašnieka ieņēmumi būs vislielākie, ja pieprasījuma funkcija ir  $q_D = 3000 - 5p$ ,  $p$  ir cena santīmos. Vai šajā gadījumā zālē būs brīvas vietas? Kā mainīsies uzdevuma atbilde, ja zālē ir 1000 klausītāju vietas?

52. Koncertzālē ir vietas 2000 klausītājiem. Pieprasījuma funkcija ir lineāra  $q_D = b - ap$ . Kādu nosacījumu apmierina šīs funkcijas koeficienti  $a$  un  $b$ , ja zināms, ka vislielāko peļņu īpašnieks gūst ar pilnībā aizpildītu zāli?

53. Tirdzniecības firmai gadā ir nepieciešamas preces  $A$  2000 vienības (tāds ir patērētāju pieprasījums). Preci nepiegādā visam gadam uzreiz, bet pa preču

partijām. Tiklīdz partija ir pārdota, piegādā nākošo (pieņemsim, ka preces izpārdošana ir vienmērīga). Vienas preces vienības uzglabāšanas pašizmaksa gada laikā (ņemot vērā no apgrozījuma izņemtos līdzekļus, nomas maksu utt.) ir vienāda ar 25 Ls. Viena pasūtījuma izmaksas (ņemot vērā pasūtījuma noformēšanu, preces piegādi utt.) nav atkarīga no pasūtījuma apjoma un ir vienāda ar 36 Ls. Noteikt tādu pasūtījuma (partijas) apjomu, ar kuru pasūtījuma un uzglabāšanas kopējās gada izmaksas ir minimālas.

Norādījums. Var pieņemt, ka, ja pasūtītās partijas apjoms ir vienāds ar  $Q$ ,

tad vidējais preces daudzums, kas atrodas uzglabāšanā ir vienāds ar  $\frac{Q}{2}$ .

54. Apzīmēsim ar  $q$  preces  $A$  apjomu, kas atbilst līdzsvara cenai, bet ar  $t$  dotās preces nodokļa apmēru. Ir zināma funkcija  $q(t)$ , kas apraksta pārdošanas apjoma atkarību no nodokļa lieluma. Formulēt nosacījumu, ar kuru budžeta ienākumi no šī nodokļa būs vislielākie.

Norādījums. skat. 10.13. (4) p.

## 11. INTEGRĀLRĒĶINU ELEMENTI

*Integrēšana* no vienas puses ir no kāda argumenta nepārtraukti atkarīgas izteiksmes vērtību "summas" atrašana, no otras puses tā ir apvērstā operācija atvasināšanai.

Pēc nodaļas apgūšanas jūs:

- izprātīsiet integrēšanas procesa būtību;
- zināsit pamatintegrāļu tabulu un integrāļu pamatīpašības;
- spēsiet atrast vienkāršus integrāļus ar pamatmetožu palīdzību: tiešo integrēšanu un integrēšanu pa daļām;
- pratīsiet lietot integrāļus ekonomikas praktisko uzdevumu risināšanā.

### 11.1. Noteiktā integrāļa jēdzienu skaidrojoši piemēri.

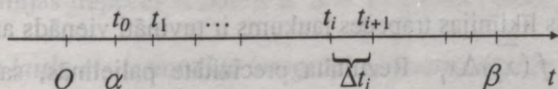
#### Noteiktā integrāļa definīcija

##### 1. piemērs.

Ir zināms ķermeņa kustības ātrums, kas ir nepārtraukta funkcija no laika:  $v = v(t)$ . Atrast ķermeņa noieta ceļu laika sprīdī no  $\alpha$  līdz  $\beta$ .

**Atrisinājums.** Ja ātrums ir pastāvīgs:  $v = v_0$ , tad laika intervālā  $t$  noietais ceļš ir vienāds ar  $v_0 \cdot t$ . Tā kā aplūkojamā piemērā ātrums ir atkarīgs no laika, tad lietosim sekojošu paņēmieni.

Laika sprīdī no  $\alpha$  līdz  $\beta$  sadalīsim nelielās daļās (11.1. zīm.).



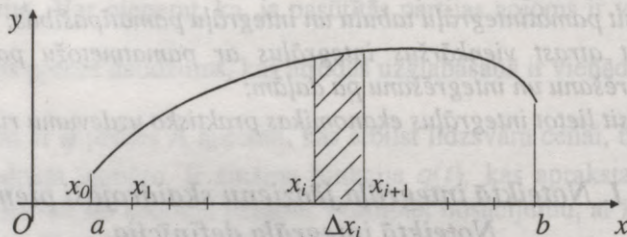
11.1. zīm.

Aplūkosim nogriezni  $[t_i, t_{i+1}]$ . Tā kā tas ir mazs un funkcija  $v(t)$  ir nepārtraukta, tad šajā nogrieznī funkcijas  $v(t)$  izmaiņas ir nelielas. Tādēļ funkciju  $v(t)$  šajā nogrieznī tuvināti var uzskatīt par pastāvīgu. Izskaitļosim funkcijas vērtību nogrieznī:  $v(t_i)$  (tā kā pēc pieņēmuma funkcija ir pastāvīga visā nogrieznī, tad par  $t_i$  var izvēlēties šī nogriežņa jebkuru punktu). Tad laika intervālā  $\Delta t_i$  ķermeņa noietais ceļš  $\Delta S_i$  būs aptuveni vienāds ar  $\Delta S_i \approx v(t_i) \cdot \Delta t_i$ . Viss laika sprīdī no  $\alpha$  līdz  $\beta$  noietais ceļš  $S$  būs aptuveni vienāds ar  $S \approx \sum_i v(t_i) \Delta t_i$ . Jo smalkāks būs laika sprīža sadalījums, jo lielāka būs precizitāte. Tātad, noietā ceļa precīzu vērtību var aprēķināt kā tuvinātās vērtības robežu, ja vislielākā no sasmalcinājuma daļām (apzīmēsim to ar  $\lambda$ ) tiecas uz nulli:

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_i v(\bar{t}_i) \Delta t_i, \quad \lambda = \max_i \Delta t_i.$$

2. piemērs (līklīnijas trapeces laukums)

Pieņemsim, ka dota nepārtraukta funkcija  $y = f(x)$ . Figūru, kuru no vienas puses ierobežo  $Ox$  ass, no otras – dotās funkcijas grafiks, bet no sāniem – taisnes  $x = a$  un  $x = b$ , sauc par līklīnijas trapeci.



11.2. zīm.

Jāaprēķina šīs figūras laukums. Izmantosim iepriekšējā piemērā lietoto paņēmieni. Sadalīsim nogriezni  $[a, b]$  nelielās daļās. Aplūkosim nogriezni  $[x_i, x_{i+1}]$ . Tam atbilst josla, kas ir līklīnijas trapeces daļa (zīmējumā tā ir iesvītrotā). Atradīsim šīs joslas laukumu. Tā kā  $[x_i, x_{i+1}]$  ir mazs, pieņemsim, ka šajā nogrieznī funkcija  $f(x)$  tuvināti ir pastāvīga. Tad aplūkojamās daļas laukums  $\Delta S_i$  ir vienāds ar  $\Delta S_i \approx f(\bar{x}_i) \Delta x_i$ , kur  $\bar{x}_i$  ir brīvi izraudzīts nogriežņa  $[x_i, x_{i+1}]$  punkts. Meklētais līklīnijas trapeces laukums ir tuvināti vienāds ar visu šādu  $\Delta S_i$  summu:  $S \approx \sum_i f(\bar{x}_i) \Delta x_i$ . Rezultāta precizitāte palielinās, samazinoties sasmalcinājuma daļas izmēram. Līklīnijas trapeces precīza laukuma vērtība ir vienāda ar

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_i f(\bar{x}_i) \Delta x_i, \quad \lambda = \max_i \Delta x_i.$$

Atzīmēsim, ka abos piemēros sasmalcinājums daļās un punkta izvēle katrā daļā bija patvaļīga.

Aplūkosim vispārīgu gadījumu. Pieņemsim, ka nogrieznī  $[a, b]$  ir dota funkcija  $y = f(x)$ .

1. Sasmalcināsim nogriezni  $[a, b]$  patvaļīgās daļās (tās sauc par elementārdaļām).
2. Katrā daļā brīvi izvēlēsimies punktu  $\bar{x}_i$ .
3. Izskaitļosim šajā punktā funkcijas  $f(\bar{x}_i)$  vērtību.

4. Aprēķināsim summu  $\sum_i f(\bar{x}_i)\Delta x_i$ . To sauc par funkcijas  $f(x)$  **integrālsummu** nogrieznī  $[a, b]$ .

Par funkcijas  $f(x)$  **noteikto integrāli** nogrieznī  $[a, b]$  sauc integrālsummas  $\sum_i f(\bar{x}_i)\Delta x_i$  robežu, kad vislielākais no sasmalcinājuma intervāliem tiecas uz nulli, ja šī robeža eksistē un nav atkarīga ne no nogriežņa  $[a, b]$  sasmalcinājuma elementārdaļās, ne no punktu  $\bar{x}_i$  izvēles tajās. Noteikto integrāli apzīmē ar simbolu:

$$\int_a^b f(x)dx;$$

$a, b$  sauc par integrēšanas robežām,  $f(x)$  – par zemintegrāļa funkciju,  $f(x)dx$  – par zemintegrāļa izteiksmi. Ja funkcijai  $f(x)$  eksistē noteiktais integrālis, tad šo funkciju sauc par **integrējamu** nogrieznī  $[a, b]$ . Tātad,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_i f(\bar{x}_i)\Delta x_i, \quad \lambda = \max \Delta x_i.$$

Atbilstoši šai definīcijai 1. piemērā aprēķinātais ceļš ir vienāds ar  $S = \int_{\alpha}^{\beta} v(t)dt$ .

2. piemēra līklīnijas trapeces laukums ir  $S = \int_a^b f(x)dx$ , tādēļ var teikt, ka **līklīnijas trapeces laukums ir noteiktā integrāļa ģeometriskā jēga**.

Šī punkta noslēgumā aplūkosim piemēru no ekonomikas.

### 3. piemērs.

Darba ražīgums ir laika vienībā saražotās produkcijas daudzums. Pieņemsim, ka darba dienas darba ražīgumu nosaka funkcija  $y = f(t)$ , ja  $t$  ir laiks, kas pagājis kopš darba dienas sākuma. Aprēķināt pirmajās trīs darba stundās saražotās produkcijas apjomu  $Q$ .

Atrisinājums. Spriežot līdžīgi kā pirmajos divos piemēros, var apgalvot, ka laikā  $\Delta t_i$  saražotās produkcijas apjoms  $\Delta Q_i$  aptuveni ir vienāds ar

$$\Delta Q_i \approx f(\bar{t}_i)\Delta t_i,$$

produkcijas apjoms visā aplūkojamā laika periodā –  $Q \approx \sum_i f(\bar{t}_i)\Delta t_i$ , bet precīza produkcijas apjoma vērtība ir vienāda ar

$$Q = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_i f(\bar{t}_i) \Delta t_i, \quad \lambda = \max_i \Delta t_i,$$

jeb

$$Q = \int_0^3 f(t) dt.$$

## 11.2. Noteiktā integrāļa īpašības

1. Ja  $c$  ir konstante, bet funkcija  $f(x)$  nogrieznī  $[a, b]$  ir integrējama, tad šī īpašība piemīt arī funkcijai  $c \cdot f(x)$ , pie tam

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

(īsi: konstantu reizinātāju var iznest pirms integrāļa zīmes).

Pierādījums.

$$\begin{aligned} \int_a^b cf(x) dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_i cf(\bar{x}_i) \Delta x_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} c \sum_i f(\bar{x}_i) \Delta x_i = c \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_i f(\bar{x}_i) \Delta x_i = \\ &= c \int_a^b f(x) dx, \text{ kas arī bija jāpierāda.} \end{aligned}$$

2. Ja funkcijas  $f(x)$  un  $g(x)$  nogrieznī  $[a, b]$  ir integrējamas, tad šī īpašība piemīt arī funkcijai  $f(x) + g(x)$ , pie tam

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Pierādījums.

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) + g(x)) dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_i (f(\bar{x}_i) + g(\bar{x}_i)) \Delta x_i = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left( \sum_i f(\bar{x}_i) \Delta x_i + \sum_i g(\bar{x}_i) \Delta x_i \right) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_i f(\bar{x}_i) \Delta x_i + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_i g(\bar{x}_i) \Delta x_i = \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

3. Ja funkcija  $f(x)$  nogrieznī  $[a, b]$  ir integrējama un  $c \in [a, b]$ , tad funkcija  $f(x)$  ir integrējama arī nogriežņos  $[a, c]$  un  $[c, b]$ , pie tam

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (11.1)$$

Pierādījums. No nosacījuma funkcija  $y = f(x)$  nogrieznī  $[a, b]$  ir integrējama, t. i., eksistē robeža  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_i f(\bar{x}_i) \Delta x_i$ . Pēc definīcijas šī robeža nav atkarīga no nogriežņa  $[a, b]$  sasmalcinājuma veida elementārdaļās. Tādēļ punktu  $c$  var izvēlēties par vienu no sasmalcinājuma punktiem. Tad integrālsummā var sadalīt divās summās:

$$\sum_{x_i \in [a, b]} f(\bar{x}_i) \Delta x_i = \sum_{x_i \in [a, c]} f(\bar{x}_i) \Delta x_i + \sum_{x_i \in [c, b]} f(\bar{x}_i) \Delta x_i,$$

no tā seko, ka

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{x_i \in [a, b]} f(\bar{x}_i) \Delta x_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{x_i \in [a, c]} f(\bar{x}_i) \Delta x_i + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{x_i \in [c, b]} f(\bar{x}_i) \Delta x_i = \\ &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Piezīme. 3. īpašība ir formulēta gadījumam, ja  $c \in [a, b]$ . Atzīmēsim, ka tā ir spēkā arī tad, ja  $c \notin [a, b]$  un funkcija  $f(x)$  ir integrējama lielākajā no nogriežņiem  $[a, c]$ ,  $[b, c]$ .

4. Integrāļa  $\int_a^b f(x) dx$  definīcijā ir pieņemts, ka  $a < b$ . Noteiktā integrāļa definīciju var formulēt arī gadījumam, ja  $a > b$ , uzskatot, ka, ja funkcija  $f(x)$  nogrieznī  $[a, b]$  ir integrējama, tad

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

### 11.3. Ņūtona-Leibnica formula

Noteiktā integrāļa aprēķināšana, balstoties tikai uz tā definīciju, t. i., lietojot integrālsummu, sagādātu lielas grūtības (vēsturiski tā arī bija). Vienkāršs un ērts noteiktā integrāļa aprēķināšanas paņēmieni, kas radīts matemātiskās analīzes veidošanās procesā, ir Ņūtona-Leibnica formula.

**Teorēma.** Ja funkcija  $f(x)$  nogrieznī  $[a, b]$  ir nepārtraukta, tad tā šajā nogrieznī ir integrējama un ir spēkā sakarība

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (11.2)$$

kur funkcija  $F(x)$  apmierina nosacījumu:  $F'(x) = f(x)$ . (Šādu funkciju sauc par  $f(x)$  primitīvo funkciju).

Formulu (11.2) sauc par **Ņūtona-Leibnica formulu**. Starpību  $F(b) - F(a)$  nosacīti pieņemts rakstīt formā  $F(x)|_a^b$ . Lietojot šo simbolu, Ņūtona-Leibnica formula iegūst sekojošu izskatu:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a). \quad (11.3)$$

Ņūtona-Leibnica formulas pierādījums tiks dots 11.9. punktā.

**Piemērs.**

$$\int_0^2 3x^2 dx = x^3 \Big|_0^2 = 8 - 0 = 8.$$

Lietojot Ņūtona-Leibnica formulu, vispirms ir jāatrod norādītai īpašībai atbilstošu funkciju  $F(x)$ . Ar šo uzdevumu mēs drīz nodarbosimies, tikai vispirms aplūkosim vēl vienu svarīgu īpašību.

### 11.4. Substitūcijas metode noteiktajam integrālim

**Teorēma.**

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(u) du, \quad \text{ja } \alpha = \varphi(a), \beta = \varphi(b).$$

**Pierādījums.** Vispirms atzīmēsim, ka, ja  $F'(u) = f(u)$ , tad  $F(\varphi(x))' = F'(u) \cdot u'(x) = f(u) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ , t. i., ja  $F(u)$  ir funkcijas

$f(u)$  primitīvā funkcija, tad  $F(\varphi(x))$  ir funkcijas  $f(\varphi(x))\varphi'(x)$  primitīvā funkcija.

Pēc Ņūtona-Leibnica formulas

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x))\Big|_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Savukārt,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(u)du = F(u)\Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\beta) - F(\alpha).$$

Tātad,

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(u)du.$$

### 11.5. Primitīvā funkcija

Atkārtosim vēlreiz, ka  $F(x)$  sauc par funkcijas  $f(x)$  **primitīvo funkciju**, ja  $F'(x) = f(x)$ . Piemēram, funkcijas  $y = 5x^4$  primitīvā funkcija ir  $y = x^5$ . Funkcija  $y = x^5 + c$ , ja  $c$  ir konstante, arī ir funkcijas  $y = 5x^4$  primitīvā funkcija. Vispārīgā gadījumā, ja  $F'(x) = f(x)$ , tad arī  $(F(x) + c)' = f(x)$ . Tas nozīmē, ka, ja funkcijai  $f(x)$  eksistē primitīvā funkcija, tad to ir bezgalīgi daudz. No otras puses, ir spēkā sekojoša teorēma.

**Teorēma.** Pieņemsim, ka  $F(x)$  un  $G(x)$  ir nepārtrauktas funkcijas  $f(x)$  divas primitīvās funkcijas. Tad

$$G(x) - F(x) = C,$$

t. i. šo primitīvo funkciju starpība ir konstants lielums.

**Pierādījums.** Tā kā  $F(x)$  un  $G(x)$  ir primitīvās funkcijas t. i.,  $F'(x) = f(x)$  un  $G'(x) = f(x)$ , tad

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Ja kādas funkcijas  $\varphi(x)$  atvasinājums visā nogrieznī  $X$  ir vienāds ar nulli, tad funkcija tajā ir konstanta. Tiešām, pieņemsim, ka  $x_1, x_2 \in X$ . Tad no Lagranža teorēmas seko, ka  $\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = \varphi'(a)(x_2 - x_1)$ , ja  $a \in (x_1, x_2) \subset X$ . Tā kā  $\varphi'(x) = 0$ , tad  $\varphi(x_2) = \varphi(x_1)$ , t. i., jebkuros punktos  $x_1, x_2 \in X$  funkcijas  $\varphi(x)$  vērtības ir vienādas; tātad funkcija  $\varphi(x)$  ir konstanta.

Minētājā teorēmā funkcijas  $\varphi(x) = G(x) - F(x)$  atvasinājums ir vienāds ar nulli. Tātad,  $G(x) - F(x) = C$ , kas arī bija jāpierāda.

Secinājums.  $F(x) + C$  ir funkcijas  $f(x)$  visu primitīvo funkciju kopa, kur  $F(x)$  ir jebkura primitīvā funkcija.

### 11.6. Nenoteiktais integrālis

Par funkcijas  $f(x)$  **nenoteikto integrāli** nogrieznī  $X$  sauc šīs funkcijas visu primitīvo funkciju kopu, t. i., funkciju  $F(x) + C$  kopu, kur  $F(x)$  ir jebkura atsevišķa primitīvā funkcija. Šo kopu apzīmē ar simbolu  $\int f(x)dx$ . Tātad, atbilstoši definīcijai

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \quad (11.4)$$

Piemērs.  $\int \cos x dx = \sin x + C$ .

Primitīvās funkcijas un nenoteiktā integrāļa atrašana ir atvasināšanai apvērsta darbība. Atbilstoši pamatintegrāļu tabula ir apvērsto atvasinājumu tabula.

#### Nenoteikto integrāļu tabula

- |   |  |
|---|--|
| 1) $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C;$   | 2) $\int \cos x dx = \sin x + C;$  |
| 3) $\int \sin x dx = -\cos x + C;$  | 4) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$                       |
| 5) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$                            | 6) $\int \frac{dx}{x} = \ln x  + C;$   |
| 7) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$ atsevišķā gadījumā $\int e^x dx = e^x + C;$ |  |
| 8) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$    | 9) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C.$ |

### 11.7. Nenoteikto integrāļu īpašības

1. Ja  $a$  ir konstante, tad

$$\int af(x)dx = a \cdot \int f(x)dx.$$

$$2. \int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Šo īpašību pierādījumi ir līdzīgi. Pierādīsim 1. īpašību. Funkcijas  $f(x)$  primitīvo funkciju apzīmēsim ar  $F(x)$ . Tad  $a \cdot F(x)$  ir funkcijas  $af(x)$  primitīvā funkcija. Atbilstoši,

$$\int af(x)dx = aF(x) + C = a\left(F(x) + \frac{C}{a}\right) = a(F(x) + C_1) = a \cdot \int f(x)dx.$$

Nākošās divas īpašības acīmredzami seko no nenoteiktā integrāļa definīcijas:

$$3. \left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

$$4. \int dF(x) = F(x) + C.$$

5. Mainīgā aizvietošana nenoteiktā integrālī:

$$\text{ja } \int f(u)du = F(u) + C, \text{ tad } \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C.$$

11.4. punktā pierādījām, ka, ja  $F(u)$  ir funkcijas  $f(u)$  primitīvā funkcija, tad  $F(\varphi(x))$  ir funkcijas  $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$  primitīvā funkcija. Tas nozīmē, ka, ja  $\int f(u)du = F(u) + C$ , tad  $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C$  jeb līdzvērtīgi

$$\int f(\varphi(x))d(\varphi(x)) = F(\varphi(x)) + C.$$

Piemēri.

$$1) \int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = \frac{x^3}{3} + C;$$

$$2) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x}} = \int x^{-5/2} dx = \frac{x^{-5/2+1}}{-5/2+1} + C = \frac{2x^{-3/2}}{-3} + C;$$

$$3) \int \frac{x^{1/2} + 5x^2 + 1}{x} dx = \int \left(x^{-1/2} + 5x + \frac{1}{x}\right) dx = \int x^{-1/2} dx + 5 \int x dx +$$

$$+ \int \frac{dx}{x} = \frac{x^{1/2}}{1/2} + \frac{5x^2}{2} + \ln|x| + C = 2x^{1/2} + \frac{5}{2}x^2 + \ln|x| + C;$$

$$\begin{aligned} 4) \int \frac{dx}{(1+x^2)x^2} &= \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)x^2} dx = \int \frac{1+x^2}{(1+x^2)x^2} dx - \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)x^2} = \\ &= \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{1+x^2} = \int x^{-2} dx - \arctg x + C = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} - \arctg x + C = \\ &= -\frac{1}{x} - \arctg x + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \int \operatorname{tg}^2 x dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \\ &= \operatorname{tg} x - x + C. \end{aligned}$$

1. – 5. piemēru risinājumos tika izmantota tikai nenoteikto integrāļu tabula un 1. un 2. īpašība. Risinot nākošos piemērus, lietošim arī 4. un 5. īpašību.

$$6) \int e^{5x} dx = \frac{1}{5} \int 5e^{5x} dx = \frac{1}{5} \int e^{5x} d(5x) = \frac{1}{5} \int e^u du = \frac{1}{5} e^u + C = \frac{1}{5} e^{5x} + C;$$

$$\begin{aligned} 7) \int 2x \cdot \cos x^2 dx &= \int \cos x^2 \cdot (x^2)' dx = \int \cos x^2 dx^2 = \int \cos u du = \\ &= \sin u + C = \sin x^2 + C; \end{aligned}$$

$$8) \int \frac{dx}{x+4} = \int \frac{d(x+4)}{x+4} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|x+4| + C;$$

$$\begin{aligned} 9) \int x^2 (1+x^3)^8 dx &= \frac{1}{3} \int 3x^2 (1+x^3)^8 dx = \frac{1}{3} \int (1+x^3)^8 (x^3)' dx = \\ &= \frac{1}{3} \int (1+x^3)^8 (x^3+1)' dx = \frac{1}{3} \int (1+x^3)^8 d(1+x^3) = \frac{1}{3} \int u^8 du = \\ &= \frac{1}{3} \frac{u^9}{9} + C = \frac{1}{27} (1+x^3)^9 + C. \end{aligned}$$

Aprēķināt noteiktos integrāļus:

$$\begin{aligned} 10) \int_0^5 x^3 \sqrt{2+x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_0^5 2x(2+x^2)^{1/2} dx = \frac{1}{2} \int_0^5 (2+x^2)^{1/2} dx^2 = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^5 (2+x^2)^{1/2} d(2+x^2) = \left. \begin{array}{l} \text{aizvietosim } 2+x^2=u \\ \text{ja } x=0, \text{ tad } u=2 \\ \text{ja } x=5, \text{ tad } u=27 \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_2^{27} u^{1/2} du = \frac{1}{2} \frac{u^{3/2}}{3/2} \Big|_2^{27} = \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{8} u^{4/3} \Big|_2^{27} = \frac{3}{8} (27^{4/3} - 2^{4/3}) = \frac{3}{8} (81 - \sqrt[3]{16}).$$

Piezīme. Ar noteiktu pieredzi šajā piemērā var iztikt bez mainīgā aizvietošanas, ievērojot, ka

$$\frac{1}{2} \int_0^5 (2+x^2)^{1/3} d(2+x^2) = \frac{1}{2} \frac{(2+x^2)^{4/3}}{4/3} \Big|_0^5.$$

11) Dota funkcija  $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 3x^2 - 1, & x \geq 1. \end{cases}$  Aprēķināt  $\int_0^3 f(x) dx$ .

No noteiktā integrāļa 3. īpašības seko, ka

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

tādēļ

$$\begin{aligned} \int_0^3 f(x) dx &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = \int_0^1 2x dx + \int_1^3 (3x^2 - 1) dx = \\ &= x^2 \Big|_0^1 + (x^3 - x) \Big|_1^3 = 1 - 0 + 27 - 3 = 25. \end{aligned}$$

### 11.8. Integrēšana pa daļām

Pieņemsim, ka  $u(x)$ ,  $v(x)$  ir diferencējamas funkcijas. No diferenciāļa īpašības seko, ka

$$d(uv) = v \cdot du + u \cdot dv.$$

Integrēsim šīs vienādības abas puses:

$$\int d(uv) = \int v du + \int u dv,$$

no kā seko

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du.$$

No nenoteiktā integrāļa 4. īpašības izriet vienādība  $\int d(uv) = uv + C$ , tādēļ

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (11.5)$$

Formulu (11.5) sauc par *parciālās integrēšanas formulu*. Šo formulu ir ērti lietot gadījumā, ja izdodas integrāli  $\int u dv$  izteikt tādā formā, ka  $v$  un integrāļa  $\int v du$  atrašana ir vienkāršāka par sākotnējā integrāļa atrašanu.

Piemēri. Aprēķināt:

1.  $\int x \cdot \cos x dx$ . Aizvietosim  $u = x$ ,  $dv = \cos x dx$ . Tad  $du = dx$ ,  $v = \int \cos x dx = \sin x + C$ . Risinot piemēru, par  $v$  var izvēlēties jebkuru primitīvo funkciju, jo  $C$  pievienošana neiespaido galarezultātu, tādēļ izvēlēsimies  $v = \sin x$ . Lietojot formulu (11.5), iegūsim:

$$\int x \cos x dx = x \cdot \sin x - \int \sin x dx = x \cdot \sin x + \cos x + C.$$

Risinot šāda veida uzdevumus, ir svarīga  $u$  un  $dv$  izvēle. Ja pēdējā piemērā aizvietosim  $u = \cos x$ ,  $dv = dx$ , tad, lietojot formulu (11.5), iegūsim sarežģītāku integrāli nekā sākotnējais.

2.  $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$ . Aizvietosim  $u = x$ ,  $dv = \frac{dx}{\cos^2 x}$ . Tad

$$du = dx, v = \operatorname{tg} x.$$

Lietojot formulu (11.5), iegūsim

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\cos^2 x} dx &= x \cdot \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x dx = x \cdot \operatorname{tg} x - \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = \\ &= x \cdot \operatorname{tg} x + \int \frac{(-\sin x) dx}{\cos x} = x \cdot \operatorname{tg} x + \int \frac{d \cos x}{\cos x} = x \cdot \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + C. \end{aligned}$$

1. piezīme. Līdzīgi formulai (11.5) noteiktā integrāļa parciālās integrēšanas formula ir

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (11.6)$$

Piemērs. Aprēķināt  $\int_0^1 x e^x dx$ . Aizvietosim  $u = x$ ,  $dv = e^x dx$ ; tad

$$du = dx, v = e^x.$$

No formulas (11.6) seko, ka

$$\begin{aligned} \int_0^1 x e^x dx &= (x \cdot e^x) \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 - e^x \Big|_0^1 = \\ &= e - 0 - (e^1 - e^0) = e - e + 1 = 1. \end{aligned}$$

2. **piezīme.** Diferenciālreķinos eksistē summas, dalījuma, saliktas funkcijas atvasinājumu aprēķināšanas precīzi likumi, kurus lietojot, jebkurai elementārai funkcijai var atrast atvasinājumu. Integrālreķinos situācija ir daudz sarežģītāka. Funkciju reizinājuma, dalījuma un saliktas funkcijas integrāļu aprēķināšanai noteikumi neeksistē. Ir tikai paņēmieni, kas ļauj aprēķināt integrāļus no dažādām konkrēta veida funkcijām. Divi tādi vienkārši paņēmieni tika aplūkoti augstāk. Citu paņēmienu aplūkošana neietilpst šī kursa uzdevumā. Svarīgāk ir aplūkot noteikto integrāļu lietošanas piemērus ekonomikā.

3. **piezīme.** Atzīmēsim bez pierādījuma, ka katrai nepārtrauktai funkcijai eksistē primitīvā funkcija. No otras puses, pat nepārtrauktas funkcijas primitīvā funkcija var nebūt elementāra funkcija. Neelementāru funkciju nevar izteikt ar pamatelementārām funkcijām ar galīga skaita aritmētisko darbību palīdzību un izmantojot salikto funkciju. Ja primitīvā funkcija ir neelementāra, tad integrāli sauc par *neizsakāmu elementārās funkcijās*. Dažiem no šādiem integrāļiem ir liela nozīme lietojumos, to vidū arī ekonomikas uzdevumos. Piemēram,  $\int e^{-x^2} dx$ . Tā kā neelementāras funkcijas analītiski aprakstīt ir sarežģīti, tad tās bieži vien uzdod vai nu tabulāri vai grafiski.

### 11.9. Integrāļi ar mainīgu augšējo robežu

Noteiktais integrālis  $\int_a^b f(t) dt$  ir skaitlis, kas atkarīgs no funkcijas  $f(t)$  un integrēšanas robežu  $a$  un  $b$  vērtībām (sk. definīciju). Aplūkosim integrāli

$$\int_a^x f(t) dt,$$

kuram funkcija  $f(t)$  un apakšējā robeža  $a$  ir fiksēti, bet augšējā robeža ir nenoteikta. Tādu integrāli sauc par *noteikto integrāli ar mainīgu augšējo robežu*. Tas ir savas augšējās robežas funkcija, kuru apzīmēsim ar  $\Phi(x)$ .

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

**Teorēma.** Ja funkcija  $f(x)$  ir nepārtraukta, tad

$$\Phi'(x) = f(x),$$

t. i., atvasinājums no integrāļa ar mainīgu augšējo robežu ir vienāds ar zemintegrāļa funkciju, vai, citiem vārdiem, integrālis ar mainīgu augšējo robežu ir zemintegrāļa funkcijas primitīvā funkcija.

Lietojot šo teorēmu, pierādīsim Ņūtona-Leibnica formulu (11.3. p.):

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

kur  $F(x)$  ir funkcijas  $f(x)$  kāda primitīvā funkcija. Tā kā no iepriekšējās teorēmas seko, ka  $\Phi(x)$  arī ir funkcijas  $f(x)$  primitīvā funkcija, tad atbilstoši teorēmai par primitīvām funkcijām ir spēkā vienādība

$$\Phi(x) = F(x) + C, \quad (11.7)$$

kur  $C$  ir kāda konstante.

Tā kā  $\int_a^x f(t) dt = \Phi(x)$ , tad  $\int_a^b f(x) dx = \Phi(b)$ . Savukārt, no formulas (12.7) seko, ka  $\Phi(b) = F(b) + C$ , t. i.,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) + C. \quad (11.8)$$

Līdzīgi  $\Phi(a) = \int_a^a f(x) dx = 0$ . No otras puses,  $\Phi(a) = F(a) + C$ . No kurienes seko, ka  $F(a) + C = 0$  un  $C = -F(a)$ . Formulā (11.8) ievietojot  $C$  vērtību, iegūstam meklējamo formulu:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

### 11.10. Neīstie integrāļi

Šajā punktā aplūkosim noteiktā integrāļa vispārinājumu gadījumiem, kuros vai nu integrēšanas nogrieznis ir bezgalīgs, vai arī funkcija integrēšanas nogrieznī nav ierobežota. Šāda veida integrāļus plaši lieto varbūtību teorijā, statistikā un virknē citu nozaru.

Pieņemsim, ka funkcija  $y = f(x)$  ir integrējama nogrieznī  $[a, B]$  jebkuram  $B > a$ . Tādā gadījumā, ja eksistē robeža

$$\lim_{B \rightarrow +\infty} \int_a^B f(x) dx,$$

tad to sauc par **neīsto integrāli** no funkcijas  $f(x)$  (**bezgalīgā pusintervālā**  $[a, +\infty)$ ). Šo neīsto integrāli apzīmē ar simbolu

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

Līdzīgi definē neīsto integrāli  $\int_a^{-\infty} f(x) dx$ :

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^b f(x) dx. \quad (11.9)$$

Ja neīstais integrālis eksistē, tad to sauc par **konverģējošu**. Pretējā gadījumā saka, ka neīstais integrālis diverģē. Konverģējoša neīstā integrāļa ģeometriskā jēga ir bezgalīgas figūras laukums. Precīzāk, ar bezgalīgas figūras laukumu jāsaprot atbilstošā neīstā integrāļa vērtība.

Piemēri.

1. Aprēķināt  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ .

Atrisinājums.

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^3} &= \lim_{B \rightarrow \infty} \int_2^B \frac{dx}{x^3} = \lim_{B \rightarrow \infty} \left( \frac{x^{-2}}{-2} \right) \Big|_2^B = \lim_{B \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{2x^2} \right) \Big|_2^B = \\ &= \lim_{B \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{2B^2} + \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

2. Kādu summu  $K$  jāiegulda bankā ar nepārtrauktiem 10% gadā, lai neierobežoti ilgu laiku katru gadu varētu saņemt 2500 Ls?

Atrisinājums. Atbilstoši nosacījumam  $a = 2500$  Ls ir vienā laika vienībā (gadā) saņemtā summa. Atbilstoši, laika sprīdī  $\Delta t_i$  saņemamā summa ir vienāda ar  $a \cdot \Delta t_i$ . Ja šī summa ir saņemta pēc laika  $t_i$ , tad tās diskontētā vērtība sākumsummas noguldīšanas brīdī ir vienāda ar  $(a \cdot \Delta t_i) e^{-0,1t_i}$ . Summējot visas diskontētās vērtības laika sprīdī  $[0, B]$  ar patvaļīgu  $B$  un pārejot uz robežu, iegūsim:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_i a \cdot e^{-0,1t_i} \Delta t_i = \int_0^B a e^{-0,1t} dt.$$

$B$  tiecoties uz bezgalību, atrodam meklēto izmaksu diskontēto vērtību neierobežotam laikam:  $K = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_0^B ae^{-0,1t} dt = \int_0^{+\infty} ae^{-0,1t} dt$ . Izskaitļosim šo integrāli:

$$S = \int_0^{+\infty} ae^{-0,1t} dt = a \int_0^{+\infty} e^{-0,1t} dt = a \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_0^B e^{-0,1t} dt = a \lim_{B \rightarrow +\infty} \left. \frac{e^{-0,1t}}{-0,1} \right|_0^B =$$

$$= a \cdot \lim_{B \rightarrow +\infty} (10 - 10/e^{0,1B}) = a \cdot 10 = 25\ 000.$$

Atbilde.  $K = 25\ 000$  Ls.

Pieņemsim, ka funkcija ir definēta, bet nav ierobežota pusintervālā  $[a, b)$ , un jebkurai  $\alpha$  no šī pusintervāla eksistē integrālis  $\int_a^\alpha f(x) dx$ . Tādā gadījumā, ja eksistē robeža

$$\lim_{\alpha \rightarrow b} \int_a^\alpha f(x) dx,$$

tad to sauc par *neīsto integrāli no neierobežotas funkcijas*  $f(x)$  nogrieznī  $[a, b)$ . Līdzīgi var definēt neīsto integrāli no nogrieznī  $(a, b]$  neierobežotas funkcijas.

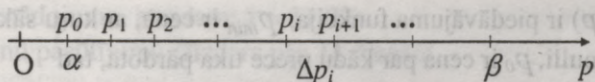
### 11.11. Noteiktā integrāļa lietojuma piemēri ekonomikas uzdevumos

#### 1. piemērs. Patērētāja ieguvums

Dažādās ekonomikas nozarēs tiek aplūkots jautājums par preču cenas izmaiņas ietekmi uz pircēju labklājību. Šāda veida jautājumi radīja jēdzienu – *patērētāja ieguvumu* (*consumer's surplus*).

Pieņemsim, ka  $D(p)$  ir pieprasījuma funkcija ar parastu līknes slīpumu (t. i., dilstoša funkcija). Par cenu  $\beta$  patērētāja iegādātās preces apjoms ir vienāds ar  $D(\beta)$ . Cenai samazinoties līdz  $\alpha < \beta$ , iegādātās preces apjoms palielinās līdz  $D(\alpha)$ , pie tam daļu no šī preces apjoma patērētājs bija gatavs pirkt par augstāko cenu  $\beta$ . Tātad patērētājs ir ieguvējs. Lai precīzi noteiktu patērētāja ieguvumu, aplūkosim šo situāciju tuvāk.

Sadalīsim nogriezni no  $\alpha$  līdz  $\beta$  elementārdaļās (11.3. zīm.).



### 11.3. zīm.

Aplūkosim elementārdaļu  $[p_i, p_{i+1}]$ . Tā kā šī elementārdaļa ir maza, tās robežās pieprasījuma funkciju tuvināti uzskatīsim par pastāvīgu. Tad šajā nogrieznī patērētāja ieguvums (cenai pazeminoties no  $p_{i+1}$  līdz  $p_i$ ) ir aptuveni vienāds ar

$$D(\tilde{p}_i)\Delta p_i,$$

kur  $\tilde{p}_i$  ir nogriežņa  $[p_i, p_{i+1}]$  patvaļīgs punkts. Cenas samazināšanās no  $\beta$  līdz  $\alpha$  (apzīmēsim to ar  $B(\alpha, \beta)$ ) izraisītais kopējais ieguvums summējas no ieguvumiem, kas iegūti katrā no elementārdaļām:

$$B(\alpha, \beta) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_i D(\tilde{p}_i)\Delta p_i, \quad \lambda = \max \Delta p_i,$$

jeb

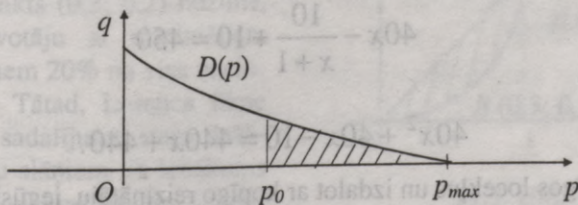
$$B(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} D(p)dp. \quad (11.10)$$

Tātad, formula (11.10) nosaka kopējo patērētāja ieguvumu, cenai samazinoties no  $\beta$  līdz  $\alpha$ .

Apzīmēsim ar  $p_{\max}$  vērtību, ar kuru sākot pieprasījums ir vienāds ar nulli, bet ar  $p_0$  – cenu par kādu patērētājs iegādājās preci. Ieguvumu  $B(p_0, p_{\max})$  sauc par *patērētāja ieguvumu*. Apzīmēsim to ar  $C.S.(p_0)$ . Tad

$$C.S.(p_0) = \int_{p_0}^{p_{\max}} D(p)dp.$$

$C.S.(p_0)$  ģeometriskā jēga ir figūras (līklīniju trapeces) laukums zem pieprasījuma funkcijas grafika intervālā no  $p_0$  līdz  $p_{\max}$  (11.4. zīm.).



11.4. zīm.

Līdzīgi, ja  $S(p)$  ir piedāvājuma funkcija,  $p_{min}$  ir cena, ar kuru sākot piedāvājums ir lielāks par nulli,  $p_0$  ir cena par kādu prece tika pārdota, tad

$$\int_{p_{min}}^{p_0} S(p) dp$$

sauc par *ražotāja ieguvumu*.

## 2. piemērs.

Pēc preces piegādes tās daudzums noliktavā bija vienāds ar 500 nosacītām vienībām. Šīs preces pieprasījuma intensitāti, t. i., pieprasījumu laika vienībā (dienā), apraksta ar formulu

$$q(t) = 40 + \frac{10}{(t+1)^2},$$

kur  $t$  ir laiks (dienās), kas pagājis kopš preces piegādes brīža. Pēc normatīva jaunu pasūtījumu noformē, kad atlikušās preces daudzums nepārsniedz 10% no piegādātās preces. Pēc cik dienām vajadzēs noformēt jaunu piegādes pasūtījumu?

**Atrisinājums.** Apzīmēsim ar  $x$  laiku no piegādes brīža līdz jauna pasūtījuma momentam. Spriežot līdzīgi kā iepriekšējos piemēros, var apgalvot, ka laika intervālā  $\Delta t_i$  pieprasījuma apjoms  $\Delta Q_i$  aptuveni ir vienāds ar  $q(t_i)\Delta t_i$ . Pieprasījuma apjoms  $Q$  laikā  $x$ , kas pagājis kopš piegādes brīža, aptuveni ir vienāds ar  $\sum_i q(t_i)\Delta t_i$ , bet precīzi

$$Q = \int_0^x q(t) dt = \int_0^x \left( 40 + \frac{10}{(t+1)^2} \right) dt = \left( 40t - \frac{10}{t+1} \right) \Big|_0^x = 40x - \frac{10}{x+1} + 10.$$

Tā kā jauna pasūtījuma brīdī preces atlikumam noliktavā ir jābūt vienādam ar 10% no 500, tas ir, 50 vienībām, tad izvestās preces daudzumam (kurš ir vienāds ar pieprasījuma apjomu laikā  $x$ ) ir jābūt vienādam ar 450. Tātad, iegūsim vienādību:

$$40x - \frac{10}{x+1} + 10 = 450$$

jeb

$$40x^2 + 40x - 10 = 440x + 440.$$

Savelkot līdzīgos locekļus un izdalot ar kopīgo reizinātāju, iegūsim:

$$4x^2 - 40x - 45 = 0.$$

Atrisinot šo vienādojumu, atrodam:  $x = 11,02$ .

Tātad, jaunu pasūtījumu jāizdara pēc 11 dienām.

### 3. piemērs.

Firmas pastāvīgās izmaksas ir 200 Ls, marginālo izmaksu funkcija ir vienāda ar  $MC = 8 + 0,01Q$ . Noteikt firmas izmaksu funkciju. Kādas būs vidējās izmaksas, ja  $Q = 100$ ?

Atrisinājums. Tā kā funkcija  $MC = C'(Q)$ , tad  $C(Q)$  ir  $MC$  primitīvā funkcija. Atbilstoši,

$$C(Q) = \int (8 + 0,01Q)dQ = 8Q + 0,005Q^2 + c_1, \quad (11.11)$$

kur  $c_1$  ir patvaļīga konstante. Tā kā pastāvīgās izmaksas ir 200 Ls, tad  $C(0) = 200$  Ls. Ievietojot šo vērtību formulā (11.11), atrodam, ka  $c_1 = 200$ . Noslēgumā iegūsim:

$$C(Q) = 8Q + 0,005Q^2 + 200.$$

Vidējo izmaksu funkcija ir

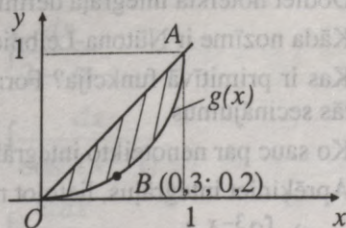
$$AC(Q) = \frac{C(Q)}{Q} = 8 + 0,005Q + \frac{200}{Q}.$$

Ja  $Q = 100$ , iegūsim  $AC(100) = 8 + 0,5 + 2 = 10,5$  Ls.

### 4. piemērs. Džini koeficients

(ieņēmumu sadalījuma nevienmērīguma raksturotājs).

Par Lorenca līkni sauc funkcijas  $y = g(x)$  grafiku, kas raksturo kādas valsts nacionālā ienākuma daļas minimālo lielumu dotajam iedzīvotāju slānim. Grafikā (11.5. zīm.) uz  $Ox$  ass atliek iedzīvotāju skaitu ar minimālo ienākumu, bet uz ass  $Oy$  – nacionālā ienākuma daļu, ko saņem šī iedzīvotāju daļa. Piemēram, Lorenca līknes punkts  $(0,3; 0,2)$  nozīmē, ka 30% iedzīvotāju ar minimāliem ienākumiem saņem 20% no visa nacionālā ienākuma. Tātad, Lorenca līkne rāda ienākumu sadalījumu starp dažādiem iedzīvotāju slāņiem. Ja ienākums sadalītos pilnīgi vienmērīgi, tad Lorenca līkne būtu taisne  $y = x$ . Jo nevien-



11.5. zīm.

mērīgāk sadalās ienākums, t. i., jo mazāku daļu no nacionālā ienākuma saņem ievērojama mazapmaksāto iedzīvotāju daļa, jo ievērojamāk Lorenca līkne novirzās (uz leju) no taisnes  $y = x$ . Par ienākumu sadalījuma nevienmērīguma mēru izvēlas divkāršotu figūras laukumu starp taisni  $y = x$  un Lorenca līkni (11.5. zīm. tā ir iesvītrotā). Šo lielumu (apzīmēsim to ar  $K$ ) sauc par **Džini koeficientu**. Ņemot vērā noteiktā integrāļa ģeometrisko jēgu un to, ka minētais laukums ir vienāds ar trijstūra  $OAI$  ("1" ir punkts uz abscisu ass) un figūras zem Lorenca līknes laukumu starpību, varam rakstīt:

$$K = 2 \left( \int_0^1 x dx - \int_0^1 g(x) dx \right) = 2 \int_0^1 (x - g(x)) dx, \quad (11.12)$$

kur  $y = g(x)$  ir Lorenca līknes vienādojums. Jo  $K$  ir tuvāks nullei, jo vienmērīgāk ir sadalīts nacionālais ienākums.

Piemērs. Lorenca līkni nosaka vienādojums  $y = \sqrt{x^3}$ . Izskaitļot Džini koeficientu.

Atrisinājums.

$$\begin{aligned} K &= 2 \int_0^1 (x - \sqrt{x^3}) dx = 2 \left( \int_0^1 x dx - \int_0^1 \sqrt{x^3} dx \right) = 2 \left( \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - \frac{x^{5/2}}{5/2} \Big|_0^1 \right) = \\ &= 2 \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{5} \right) = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

### Paškontroles jautājumi

1. Kā veidojas integrāļsumma?
2. Dodiet līklīnijas trapeces laukuma atrašanas piemēru.
3. Dodiet noteiktā integrāļa definīciju.
4. Kāda nozīme ir Ņūtona-Leibnica teorēmai?
5. Kas ir primitīvā funkcija? Formulējiet teorēmu par primitīvām funkcijām un tās secinājumus.
6. Ko sauc par nenoteikto integrāli?
7. Aprēķiniet integrāļus, lietojot nenoteiktā integrāļa 5. īpašību:

a)  $\int 2^{3-x} dx,$

c)  $\int \sin 5x dx,$

b)  $\int \sqrt[5]{4x-2} dx,$

d)  $\int e^{\cos x} \sin x dx.$

8. Aprēķiniet sekojošus noteiktos integrāļus:

$$\text{a) } \int_1^2 x^2 dx, \quad \text{b) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x dx, \quad \text{c) } \int_0^1 x(1+x^2)^4 dx.$$

9. Dota funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 8, & 0 \leq x \leq 4, \\ x^2 - 2x, & x \geq 4. \end{cases}$$

Aprēķiniet  $\int_2^6 f(x) dx$ .

Kāda ir noteiktā integrāļa 3. īpašības loma šī piemēra risinājumā?

10. Ir zināms, ka sākot ar kādu laika momentu, preces pārdošanas apjoms laika vienībā (dienā) mainījās nepārtraukti un to noteica formula  $q = 8t - 3 \cdot e^{-0,2t}$ , ja  $0 \leq t \leq 30$ ,  $t$  ir laiks (dienās), kas pagājis kopš minētā laika momenta. Nosakiet kopējo pārdošanas apjomu pirmajās 7 dienās.

### Vingrinājumi

Atrast integrāļus (1. – 30.):

- |                                      |  |
|--------------------------------------|--|
| 1. $\int \sin(x-2) dx$ .             | 2. $\int \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) dx$ . |
| 3. $\int 2^{2x-1} dx$ .              | 4. $\int \sqrt{4-x} dx$ .                          |
| 5. $\int \sqrt[3]{2+3x} dx$ .        | 6. $\int x \cdot \sin x^2 dx$ .                    |
| 7. $\int \frac{xdx}{(x^2-1)^3}$ .    | 8. $\int x^2 e^{x^3} dx$ .                         |
| 9. $\int \frac{dx}{x-2}$ .           | 10. $\int \frac{dx}{2-3x}$ .                       |
| 11. $\int \frac{x^2 dx}{x^3+4}$ .    | 12. $\int \frac{dx}{\cos^2(x-1)}$ .                |
| 13. $\int \frac{dx}{\sin^2(2x-1)}$ . | 14. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x^2}$ .                |
| 15. $\int \frac{dx}{2^{3x+1}}$ .     | 16. $\int x \cdot 2^{x^2} dx$ .                    |

17.  $\int \frac{dx}{x^2 + 1}$ .      18.  $\int \frac{xdx}{x^4 + 1}$ .
19.  $\int x^2(1 + 3x^3)^5 dx$ .      20.  $\int x\sqrt{x^2 - 4} dx$ .
21.  $\int \frac{3x^2 + x}{x^3 + \frac{x^2}{2}} dx$ .      22.  $\int \frac{x^2 dx}{x^6 + 1}$ .
23.  $\int \frac{\sin x dx}{\cos^5 x}$ .      24.  $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$ .
25.  $\int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x}$ .      26.  $\int x \cdot \cos 3x dx$ .
27.  $\int x \cdot \sin x dx$ .      28.  $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$ .
29.  $\int x \cdot e^{2x} dx$ .      30.  $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$ .

Aprēķināt noteiktos integrāļus (31. – 42.):

31.  $\int_4^9 \sqrt{x^3} dx$ .      32.  $\int_1^4 (\sqrt{x} + 1) dx$ .
33.  $\int_0^1 e^x \sqrt{e^x - 1} dx$ .      34.  $\int_1^2 \frac{x^2 dx}{3x^3 - 1}$ .
35.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x dx$ .      36.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x dx$ .
37.  $\int_0^1 x \cdot (x^2 + 1)^3 dx$ .      38.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$ .
39.  $\int_1^e \frac{\ln x dx}{x}$ .      40.  $\int_0^1 (x + 1)e^{3x} dx$ .
41.  $\int_1^e \ln x dx$ .      42.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \cos 2x dx$ .

43. Zināma marginālo izmaksu funkcija  $MC = 10 - 0,04Q$ ,  $0 \leq Q \leq 250$ . At-  
rast izmaksu funkciju  $C(Q)$  ar nosacījumu, ka  $C(100) = 1000$  Ls.
44. Marginālo ieņēmumu funkcija no cenas ir vienāda ar  $MR = 100 - p^{1/2}$ . Ar ce-  
nu  $p = 25$  Ls ieņēmumi bija vienādi ar 2550 Ls. Uzrakstīt ieņēmumu funkciju.
45. Marginālo izmaksu funkcija ir vienāda ar  $MC = 10 + 0,02Q$ , marginālo  
ieņēmumu funkcija ir vienāda ar  $MR = 80 + 1,1Q$ . Atrast peļņas funkciju  
 $P_r(Q)$ , ja zināms, ka ar pārdošanas apjomu  $Q = 10$  peļņa bija vienāda ar  
500 naudas vienībām. Cik produkcijas vienības jāsarāžo, lai peļņa nebūtu  
mazāka par 800 naudas vienībām?
46. Marginālo ieņēmumu funkcija ir vienāda ar  $MR = \frac{8000}{(p+10)^2}$ . Kādi būs  
ieņēmumi ar cenu  $p = 15$ , ja ar cenu  $p = 10$  ieņēmumi bija vienādi ar 400?
47. Darba ražīgumu dienas laikā apraksta ar funkciju  $y = f(t)$ , kur  $t$  ir laiks kopš  
darba dienas sākuma. Noteikt 7-stundu darba dienā saražotās preces apjomu, ja:

$$a) f(t) = 2 + \frac{4}{t+3},$$

$$b) f(t) = \begin{cases} c, & 0 \leq t \leq 2, \\ \frac{4}{\sqrt{t+2}}, & 2 \leq t \leq 7. \end{cases}$$

Kādam ir jābūt  $c$ , lai funkcija  $f(t)$  būtu nepārtraukta?

48. Dota pieprasījuma funkcija  $q_D = 10 - 0,2p$ . Noteikt patērētāja ieguvumu,  
ja cena ir  $p = 20$ .
49. Dota piedāvājuma funkcija  $q_S = 0,5p - 1$ . Noteikt ražotāja ieguvumu, ja  
cena ir  $p = 4$ .
50. Noteikt patērētāja ieguvumu, ja ir zināma pieprasījuma funkcija  
 $q_D = 10 \cdot e^{-0,2p} + 400$ , bet cena par preces vienību ir samazinājusies no 20  
līdz 15 dolāriem.
51. Zināmas pieprasījuma un piedāvājuma funkcijas:  $q_D = 80 - 0,4p$ ;  
 $q_S = p - 4$ . Noteikt patērētāja un ražotāja ieguvumu līdzsvara punktā.
52. Atbildēt uz iepriekšējā uzdevuma jautājumiem, ja pieprasījuma un piedāvā-  
juma funkcijas ir sekojošas:  $q_D = \frac{40}{p+1}$ ;  $q_S = 1,5p - 2$ .
53. Nolikta preču izvešanas intensitāte ir uzdota ar formulu  $q = 2 - 0,1t$ , kur  
 $t$  ir laiks (dienās) kopš izvešanas sākuma,  $q$  ir dienā izvedamās preces dau-  
dzums (tonnās). Cik dienās tiks izvesta visa prece, ja sākumā bija 16 tonnas?

54. Preces A krājums noliktavā ir 1000 vienības. Preces pieprasījuma intensitāti nosaka formula

$$q = \frac{100}{\sqrt[3]{t+2}},$$

kur  $t$  ir laiks (dienās), kas pagājis kopš pārdošanas sākuma.

Noteikt

- pirmajās 6 dienās pārdotās preces daudzumu;
  - preces atlikumu pēc 10 dienu tirdzniecības;
  - cik dienām pietiks nosacījumos minētais preces daudzums.
55. Firmas pirmā darba gada laikā naudas ienākumu intensitāti noteica formula

$$f(t) = A(1 - e^{-0,1t}),$$

kur  $t$  ir laiks (dienās) kopš firmas darba sākuma.

Noteikt naudas ienākumu kopējo daudzumu pirmā mēneša laikā (30 dienas).

56. Pieņemsim, ka ieņēmumus (tūkstošos dolāru) no kāda projekta laika vienībā nosaka funkcija

$$f(t) = 20t - 0,5t^2,$$

kur  $t$  ir laiks (mēnešos) kopš projekta darba sākuma. Noteikt pirmo divu gadu ieņēmumu diskontēto vērtību līguma parakstīšanas brīdī, ja pieņem, ka mēneša nepārtrauktā procentu likme ir 0,5%.

57. Firmas kontā nauda ienāk ar intensitāti  $f(t) = 800 \cdot e^{0,02t}$  latī mēnesī, kur  $t$  ir laiks mēnešos kopš līguma parakstīšanas brīža. Kāda summa būs firmas kontā pēc diviem gadiem, ja pieņem, ka banka ieskaita nepārtrauktos 0,6% mēnesī?

58. Ar 56. uzdevuma nosacījumiem noteikt

- kopējo ieņēmumu vērtību laikā  $t$ ;
- to diskontēto vērtību.

59. Aprēķināt Džini koeficientu Lorenca līknei  $y = \frac{1}{2}x(x^2 + 1)$ .

60. Bankas nodaļa dienas pirmajā pusē pirmajās četrās darba stundās pieņem skaidras naudas norēķinus. Naudas ienākšanas intensitāti šajā laikā nosaka formula

$$f(t) = 3 - |t - 3|,$$

kur  $t$  ir laiks kopš darba sākuma. Noteikt vienā dienā ieņemto skaidrās naudas daudzumu.

61. Veikala noliktavā atrodas  $Q$  preces vienības. Preces vienības uzglabāšana laika vienībā (dienā) izmaksā  $C_1$  naudas vienības. Zināms, ka preces pieprasījums ir pastāvīgs un ir vienāds ar  $a$  vienībām dienā. Noteikt preces uzglabāšanas izmaksas kopš tās ienākšanas brīža līdz pilnīgai pārdošanai.

## 12. VAIRĀKU MAINĪGO FUNKCIJAS

9. un 10. nodaļā aplūkojām viena mainīgā funkcijas diferenciālrēķinus. Pētāmais objekts tur galvenokārt bija viena lieluma izmaiņas ātrums atkarībā no otra lieluma izmaiņas. Praksē biežāk pētāmais lielums ir atkarīgs no vairākiem faktoriem, tādēļ jāaplūko ne tikai viena mainīgā funkcija (kā vienkāršākais gadījums), bet arī vairāku mainīgo funkcijas.

Pēc šīs nodaļas apguves jūs:

- 1) izpratīsiet vairāku mainīgo funkcijas nozīmi lietojumos ekonomikā;
- 2) zināsit tēmas "Vairāku mainīgo funkcijas" pamatjēdzienus;
- 3) pratīsiet atrast parciālos atvasinājumus;
- 4) pratīsiet lietot vairāku mainīgo funkcijas diferenciālrēķinus ekstrēmu vērtību atrašanai (tai skaitā arī nosacītā ekstrēma atrašanai);
- 5) pratīsiet lietot vairāku mainīgo funkcijas diferenciālrēķinus dažādu ekonomisko rādītāju aprēķinos un dažu optimizācijas uzdevumu risinājumos ekonomikā.

### 12.1. Pamatjēdzieni

Atgādināsim, ka par *funkciju* sauc likumu, kas vienas kopas elementiem (apzīmēsim to ar  $X$ ) viennozīmīgi piekārto otras kopas elementus (apzīmēsim to ar  $U$ ):

$$x \xrightarrow{f} u, \quad x \in X, \quad u \in U.$$

Elementu kopu  $X$ , kurā ir noteikta funkcija, sauc par funkcijas definīcijas apgabalu. Funkcijas visu pieņemto vērtību kopu sauc par funkcijas vērtību apgabalu. Parasti, funkciju pieraksta šādi:  $u = f(x)$ .

Līdz šim mēs aplūkojām viena mainīgā funkciju, t. i., funkciju  $u = f(x)$ , kur  $x$  un  $u$  pieder reālo skaitļu kopai  $R$ . Šajā nodaļā aplūkosim gadījumu, kurā  $x$  ir  $n$  neatkarīgu skaitļu virkne  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , bet  $u$ , kā iepriekš, pieder  $R$ .

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Šādu funkciju sauc par  $n$  *mainīgo funkciju*. Tai skaitā divu mainīgo funkcija ir

$$u = f(x_1, x_2).$$

Šajā gadījumā skaitļu pāri  $(x_1, x_2)$  var iedomāties kā punkta  $M$  koordinātas plaknē vai kā šī punkta rādiusvektora koordinātas. Līdzīgi, trīs mainīgo

funkcijai  $u = f(x_1, x_2, x_3)$  argumentu kopu  $(x_1, x_2, x_3)$  ir ērti iedomāties kā punktu  $M(x_1, x_2, x_3)$  trīsdimensiju telpā vai kā šī punkta rādiusvektoru; beidzot, patvaļīgam mainīgo skaitam  $n$  var runāt par punktu  $M$   $n$ -dimensiju telpā  $R^n$ , bet par funkciju  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – kā par šī punkta funkciju  $u = f(M)$ . Turpmāk lietosim visas minētās pieraksta formas:  $u = f(x)$ ,  $u = f(x_1, \dots, x_n)$ ,  $u = f(M)$ .

Piemēri. 1. Saražotās produkcijas daudzums  $z$  ir atkarīgs no patērētā darba, pamatfondiem, izejvielām utt. Šo atkarību aprakstošo funkciju  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  sauc par *ražošanas funkciju*. Vienkāršākās ir divfaktoru (t. i., atkarīgas no diviem mainīgajiem) ražošanas funkcijas, piemēram (divfaktoru) lineārā ražošanas funkcija

$$z = ax + by, \quad a, b > 0, \quad x, y \geq 0,$$

vai Koba-Duglasa ražošanas funkcija

$$z = cx^\alpha y^\beta.$$

Pēdējā piemērā koeficientiem  $\alpha, \beta$  ir īpaša ekonomiskā jēga, bet par to runāsim nedaudz vēlāk (12.7. p.).

2. Ekonomikā bieži lieto *derīguma funkcijas* jēdzienu. Ar derīgumu  $u$  saprot no preču klāsta  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  iegūto patērētāja novērtēto labumu (kaut kādā veidā izteiktu skaitliskā formā).

Piemēram,

$$1. u = x_1 x_2,$$

$$2. u = a_1 \ln(x_1 - b_1) + a_2 \ln(x_2 - b_2),$$

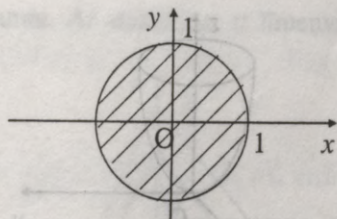
kur  $x_i > b_i$ ,  $a_i > 0$ ,  $b_i > 0$ ,  $i = 1, 2$ .

Divu mainīgo funkcijas  $u = f(x_1, x_2)$  gadījumam veltīsim lielāku uzmanību, jo tas ir vienkāršāks un labi ilustrē vairāku mainīgo funkciju teoriju.

Piemēri. Atrast sekojošas funkcijas definīcijas apgabalu:

$$1. z = \sqrt{1 - x^2 - y^2};$$

šajā gadījumā  $1 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1$ . Ar nevienādību  $x^2 + y^2 \leq 1$  definētais apgabals ir riņķis ar rādiusu vienādu ar 1 (12.1. zīm.).

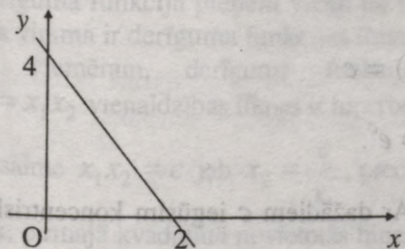


12.1. zīm.

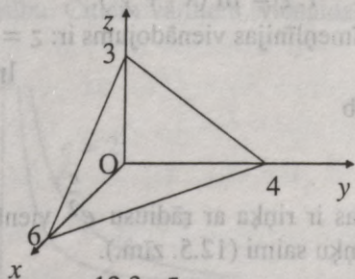
$$2. u = \frac{1}{\sqrt{4 - (x^2 + y^2 + z^2)}}$$

šajā gadījumā  $4 - (x^2 + y^2 + z^2) > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 < 4$ . Šīs nevienādības definētais apgabals ir trīsdimensiju telpas daļa, konkrēti – lodes ar rādiusu 2 iekšpuse (pati sfēra definīcijas apgabalā neietilpst).

Pieņemsim, ka dots vienādojums  $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ . Šīs vienādības definēto virsmu sauc par telpas  $R^n$  punktu kopu, kas apmierina šo vienādību. Gadījumā, ja  $n = 2$ , “virsmas” vietā saka “līnija”. Piemēram, vienādojums  $2x + y - 4 = 0$  definē taisni (taisnu līniju) (12.2. zīm.). Vienādojums  $2x + 3y + 4z - 12 = 0$  definē plakni (plaknes virsmu) (12.3. zīm.; sk. 8. nod.).



12.2. zīm.

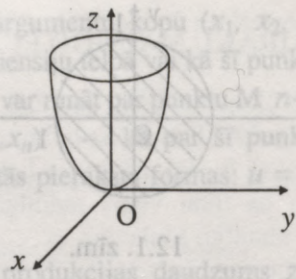


12.3. zīm.

Vienādojumam  $F(x_1, \dots, x_n) = 0$  atbilstošo virsmu, ja  $n > 3$ , nav iespējams attēlot ģeometriski.

Pieņemsim, ka dota funkcija  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Ar vienādojumu  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) - z = 0$  definēto virsmu (vai grafiku) sauc par minētajai funkcijai atbilstošo virsmu. Citiem vārdiem, tā ir punktu  $(x_1, x_2, \dots, x_n, z)$  kopa  $(n + 1)$ -dimensiju telpā  $R_{n+1}$ , kas apmierina vienādojumu  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Ja aplūko viena mainīgā funkciju, tad tās grafiks ir plaknes līnija; ja aplūko divu mainīgo funkciju, tad tās grafiks ir virsma trīsdimensiju telpā, piemēram funkcijas  $z = x^2 + y^2$  grafiks ir:

funkcijai  $u = f(x_1, x_2, x_3)$  argumenti  $(x_1, x_2, x_3)$  ir šti iedonāties tā  
 punkta  $M(x_1, x_2, x_3)$  tridimensijā telpā  $R^3$  un punkta rādusvektoru; beidzot  
 patvērtīgam mainīgo skaitam  $u$  var būt atbilstošs  $n$ -dimensiju telpā  $R^n$ , bet  
 par funkciju  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ir jānosaka punkta funkciju  $u = f(M)$ .  
 Turpmāk lietotā visai nāvērtās pieņemamā funkcija  $u = f(x)$  vai  $u = f(x_1, \dots, x_n)$   
 $u = f(M)$ .



12.4. zīm.

### 12.2. Līmeņvirsmas

Par funkcijas  $u = f(x)$  **līmeņvirsmu** sauc telpas  $R^n$  to punktu ģeometrisko vietu, kuros funkcija pieņem vienu un to pašu vērtību  $c$ . Šādas virsmas vienādojums ir  $u(x) = c$ , vai

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = c.$$

Mainot  $c$ , iegūstam dažādas līmeņvirsmas.

Divu mainīgo funkcijas gadījumā līmeņvirsmu sauc par **līmeņlīniju**.

Piemēri. Kāda forma ir sekojošu funkciju līmeņvirsmām (līnijām):

1.  $z = \ln(x^2 + y^2)$ .

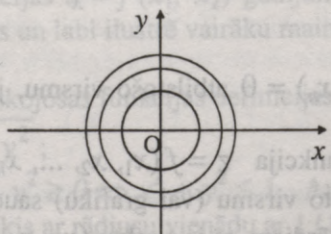
Līmeņlīnijas vienādojums ir:  $z = c$ , t. i.,

$$\ln(x^2 + y^2) = c$$

jeb

$$x^2 + y^2 = e^c.$$

Tas ir riņķa ar rādiusu  $e^{\frac{c}{2}}$  vienādojums. Ar dažādiem  $c$  iegūsim koncentrisku riņķu saimi (12.5. zīm.).



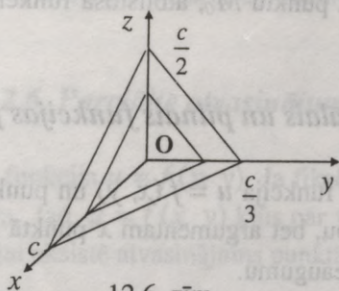
12.5. zīm.

2.  $u = x + 3y + 2z$ .

Līmeņvirsmas vienādojums ir:  $u = c$ , vai

$$x + 3y + 2z = c.$$

Tas ir plaknes vienādojums. Ar dažādiem  $c$  līmeņvirsmas ir paralēlu plakņu saime (12.6. zīm.).



12.6. zīm.

Atzīmēsim līmeņvirsmu divas īpašības:

1. Caur katru funkcijas definīcijas apgabala punktu var novilkt līmeņvirsmu.

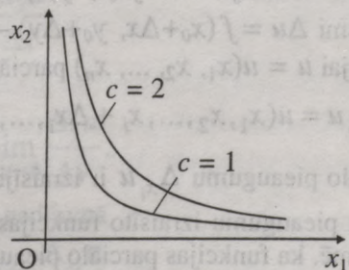
2. Caur doto punktu var novilkt tikai vienu dotās funkcijas līmeņvirsmu. Tiešām, ja  $u(x) = c_1$  un  $u(x) = c_2$  ir caur doto punktu  $x^0$  esošās līmeņvirsmas, tad  $u(x^0) = c_1$  un  $u(x^0) = c_2$ . Tā kā dotajai argumenta  $x^0$  vērtībai atbilst tikai viena funkcijas vērtība, tad  $c_1 = c_2$ . Tātad šīs līmeņvirsmas sakrīt.

Pieņemsim, ka  $u = u(x)$  ir derīguma funkcija. Par **vienlīdzības jeb neitrālo virsmu** (vienaldzības līkni, ja  $n = 2$ ) sauc visu to preču klāstu  $x$  kopu, kuriem derīguma funkcija pieņem vienu un to pašu vērtību. Citiem vārdiem, vienaldzības virsma ir derīguma funkcijas līmeņvirsma.

Piemēram, derīguma funkcijas  $u = x_1 x_2$  vienaldzības līknes ir hiperbo-

lu saime  $x_1 x_2 = c$  jeb  $x_2 = \frac{c}{x_1}$ , precī-

zāk, pirmajā kvadrantā novietotās hiperbolas daļas. 12.7. zīm. attēlotas divas vienaldzības līknes, ja  $c = 1$  un  $c = 2$ .



12.7. zīm.

**Vingrinājums.** Attēlojiet derīguma funkcijas  $u = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$  vienaldzības līknes.

### 12.3. Funkcijas robeža punktā

Pieņemsim, ka  $\{M_k\}$  ir punktu  $(x_k, y_k)$  virkne. Saka, ka  $\{M_k\}$  tiecas uz punktu  $M_0(x_0, y_0)$ , ja  $x_k \rightarrow x_0$  un  $y_k \rightarrow y_0$ . Līdzīgi saka, ja  $\{M_k\}$  ir punktu virkne 3-dimensiju vai  $n$ -dimensiju telpā.

Skaitli  $A$  sauc par funkcijas  $f(M)$  robežu punktā  $M_0$ , ja jebkurai skaitļu virknei  $M_k$ , kas tiecas uz punktu  $M_0$ , atbilstošā funkcijas vērtību  $f(M_k)$  virkne tiecas uz skaitli  $A$ .

### 12.4. Parciālais un pilnais funkcijas pieaugums

Pieņemsim, ka dota funkcija  $u = f(x, y)$  un punkts  $M_0(x_0, y_0)$ . Fiksēsim argumenta  $y = y_0$  vērtību, bet argumentam  $x$  punktā  $x_0$  piešķirsim pieaugumu  $\Delta x$ . Funkcija arī iegūs pieaugumu.

Par funkcijas  $z = f(x, y)$  *parciālo pieaugumu* pēc mainīgā  $x$  punktā  $M_0(x_0, y_0)$  sauc starpību

$$\Delta_{xz} = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0). \quad (12.1)$$

Līdzīgi definē funkcijas parciālo pieaugumu pēc mainīgā  $y$ :

$$\Delta_{yz} = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Divu mainīgo funkcija  $u = f(x, y)$  ar fiksētu viena mainīgā vērtību  $y = y_0$  kļūst par viena mainīgā funkciju  $u = f(x, y_0)$ . Piemēram, funkcija  $u = x^2 + y^2$ , ja  $y = 4$ , kļūst par viena mainīgā funkciju  $u = x^2 + 16$ . Tādēļ divu mainīgo funkcijas parciālo pieaugumu var aplūkot kā pieaugumu viena mainīgā funkcijai, kas iegūta, fiksējot otro mainīgo.

Par funkcijas  $u = f(x, y)$  *pilno pieaugumu* punktā  $M_0(x_0, y_0)$  sauc izteiksmi  $\Delta u = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ . Vispārīgā gadījumā  $n$  mainīgo funkcijai  $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  parciālais pieaugums pēc  $x_i$  ir starpība

$$\Delta_{x_i} u = u(x_1, x_2, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - u(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n). \quad (12.2)$$

Parciālo pieaugumu  $\Delta_{x_i} u$  ir izraisījis tikai argumenta  $x_i$  pieaugums. Visu argumentu pieaugumu izraisīto funkcijas pieaugumu sauc par tās pilno pieaugumu. Jāatzīmē, ka funkcijas parciālo pieaugumu var aplūkot kā pilnā pieauguma īpašu gadījumu, kad visu argumentu pieaugumi, izņemot aplūkojamo, ir vienādi ar nulli. Atzīmēsim arī, ka vispārīgā gadījumā funkcijas pilnais pieaugums nav vienāds ar parciālo pieaugumu summu. Kā piemēru var aplūkot funkciju  $u = xy$ .

### 12.5. Funkcijas nepārtrauktība

Punktā  $M_0$  un tā apkārtnē definētu funkciju  $u = f(M)$  sauc par *nepārtrauktu* šajā punktā, ja visu tās argumentu kopas bezgalīgi mazam pieaugumam atbilst bezgalīgi mazs funkcijas pilnais pieaugums.

Minētais formulējums ir definīcija funkcijas nepārtrauktībai punktā pēc *mainīgo kopas*. Var definēt funkcijas nepārtrauktību arī atsevišķi pēc jebkura no mainīgajiem.

## 12.6. Parciālie atvasinājumi

Pieņemsim, ka dota funkcija  $u = f(x, y)$ . Ja fiksējam tās viena argumenta vērtību, piemēram,  $y = y_0$ , tad  $u = f(x, y)$  kļūs par viena mainīgā  $x$  funkciju. Pieņemsim, ka šai funkcijai eksistē atvasinājums punktā  $x_0$ :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x}. \quad (12.3)$$

Tādu atvasinājumu sauc par funkcijas  $u = f(x, y)$  parciālo atvasinājumu pēc mainīgā  $x$  punktā  $(x_0, y_0)$ .

Definīcija. *Robežu (12.3), ja tā eksistē, sauc par funkcijas  $u = f(x, y)$  parciālo atvasinājumu pēc mainīgā  $x$  punktā  $(x_0, y_0)$ .*

Šo parciālo atvasinājumu apzīmē ar vienu no sekojošiem simboliem:

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x}, u'_x(x_0, y_0), f'_x(x_0, y_0).$$

Tātad,

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x}. \quad (12.4)$$

Līdzīgi

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y}.$$

$n$  mainīgo funkcijas  $u = u(x_1, \dots, x_n)$  gadījumā

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i}$$

ir parciālais atvasinājums pēc mainīgā  $x_i$ . Lai aprēķinātu tādu atvasinājumu, visus argumentus, izņemot  $x_i$ , ir jāpieņem par konstantēm.

Piemēri. Atrast sekojošu funkciju parciālos atvasinājumus:

$$1) z = 2x^2y - xy^3.$$

Aprēķinot parciālo atvasinājumu pēc  $x$ , argumentu  $y$  uzskatām par konstanti. Tad

$$z'_x = 4xy - y^3.$$

Līdzīgi

$$z'_y = 2x^2 - 3xy^2.$$

$$2) z = \sqrt[3]{xy} + \operatorname{tg} xy.$$

$$z'_x = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{y} + \frac{1}{\cos^2 xy} y = \frac{\sqrt[3]{y}}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{y}{\cos^2 xy}.$$

$$z'_y = \frac{\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{y^2}} + \frac{x}{\cos^2 xy}.$$

## 12.7. Piemēri no ekonomikas

1. Dažas preces īpašības pieprasījuma funkcijas parciālā atvasinājuma terminos

2. nodaļā aplūkojam pieprasījuma funkciju no cenas  $q_D = D(p)$  – funkciju, kas nosaka preces cenas ietekmi uz dotās preces pieprasījumu. Vispārīgā gadījumā preces pieprasījums ir atkarīgs ne tikai no pašas cenas, bet arī no daudziem citiem faktoriem, ieskaitot arī citu preču cenas un patērētāja ieņēmumus. Aplūkosim konkrēti sekojošas formas pieprasījuma funkciju:

$$q_D = D(p, p_1, p_2, I),$$

kur  $p$  ir minētās preces (apzīmēsim to ar  $A$ ) cena;

$p_1$  ir aizvietojošās preces  $B$  cena;

$p_2$  ir papildinošās (komplementārās) preces  $C$  cena;

$I$  ir pircēja ieņēmumi.

Parciālo atvasinājumu terminos var izteikt minētās preces un ar to saistīto preču pamatīpašības, piemēram: precī sauc par normālu, ja, palielinoties ieņēmumiem, pieprasījums pēc tās palielinās. Tas nozīmē, ka prece ir normāla, ja

$\frac{\partial D}{\partial I} > 0$ . Par zemas kvalitātes (vai mazvērtīgu) sauc precī, kurai  $\frac{\partial D}{\partial I} < 0$ . Pre-

ces var būt savstarpēji aizvietojamās vai papildināmas. Ja aizvietojošās preces  $B$  cena  $p_1$  palielinās, tad pieprasījums pēc tās samazinās un, atbilstoši, palielinās

preces  $A$  pieprasījums, kas kaut daļēji var aizvietot precī  $B$ , t. i.,  $\frac{\partial D}{\partial p_1} > 0$ .

Papildinošai precei otrādi,  $\frac{\partial D}{\partial p_2} < 0$  (paskaidrojiet kāpēc). Sarežģītākos gadījumos pieprasījuma funkcija un tātad arī cenu veidošanās ir atkarīga no daļējo atvasinājumu zīmēm un pat no dažādu daļējo atvasinājumu absolūto vērtību attiecībām.

## 2. Elastība

10.13. punktā aplūkojam viena mainīgā funkcijas elastību. Līdzīgi definē vairāku mainīgo funkcijas elastību. Piemēram, funkcijas  $u = f(x_1, \dots, x_n)$  elastība pēc mainīgā  $x_i$  punktā  $M_0(x_{1,0}, x_{2,0}, \dots, x_{n,0})$  (apzīmēsim to ar  $E_{x_i}(u)$ ) ir sekojoša robeža:

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta_{x_i} u}}{\Delta x_i} = E_{x_i}(u),$$

kur  $\overline{\Delta_{x_i} u} = \frac{\Delta_{x_i} u(M_0)}{f(M_0)}$ ,  $\Delta x_i = \frac{\Delta x_i}{x_{i,0}}$ .

Pieņemot aptuveni, ka  $\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta_{x_i} u}}{\Delta x_i} \approx \frac{\overline{\Delta_{x_i} u}}{\Delta x_i}$ , tāpat kā 10.13. punktā var apgalvot, ka funkcijas  $u = f(M)$  elastība pēc mainīgā  $x_i$  ir funkcijas  $u(M)$  procentuālā izmaiņa, mainoties argumentam  $x_i$  par vienu procentu (pārējie argumenti nemainās).

Sprīžot līdzīgi kā 10.13. punktā, iegūsim, ka

$$E_{x_i}(u) = \frac{x_i}{u} \frac{\partial u}{\partial x_i}. \quad (12.5)$$

Piemērs. Pieņemsim, ka  $U = cK^a L^b$  ir divfaktoru ražošanas funkcija, kur  $K$  ir pamatkapitāla apjoms;

$L$  ir ieguldītā darba apjoms;

$U$  ir saražotās produkcijas apjoms;

$a, b, c$  ir konstanti koeficienti.

Ar formulu (12.5) aprēķinot elastību, noskaidrosim koeficientu  $a, b$  nozīmi.

$$E_K(U) = \frac{K}{U} \frac{\partial U}{\partial K} = \frac{K}{cK^a L^b} caK^{a-1} L^b = a.$$

Līdzīgi

$$E_L(U) = b.$$

Tātad, koeficients  $a$  rāda, par cik procentiem palielināsies saražotās produkcijas apjoms, pamatkapitālam palielinoties par vienu procentu. Līdzīgi, koeficients  $b$  rāda produkcijas apjoma procentuālo izmaiņu, darba apjomam palielinoties par vienu procentu.

### 12.8. Vairāku mainīgo funkcijas diferencējamība

Funkciju  $z = z(x, y)$  sauc par diferencējamu punktā  $(x_0, y_0)$ , ja tā ir definēta kādā šī punkta apkārtnē un tās pilno pieaugumu minētajā punktā var uzrakstīt šādā formā

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \quad (12.6)$$

kur  $A, B$  ir konstantes, bet  $\alpha, \beta$  ir no  $\Delta x$  un  $\Delta y$  atkarīgi bezgalīgi mazi lielumi:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \alpha(\Delta x, \Delta y) = 0, \quad \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0.$$

Viena mainīgā funkcijai diferencējamība ir līdzvērtīga atvasinājuma eksistencei. Vairāku mainīgo funkcijai tāda līdzvērtība nepastāv: pat no visu parciālo atvasinājumu eksistences dotajā punktā var nesekot funkcijas diferencējamību.

**Teorēma.** (Diferencējamības nepieciešamais nosacījums.) Ja funkcija  $z = z(x, y)$  ir diferencējama punktā  $(x_0, y_0)$ , tad

- 1) tā šajā punktā ir nepārtraukta;
- 2) šajā punktā eksistē parciālie atvasinājumi  $z'_x, z'_y$ .

1. Dots: funkcija  $z = z(x, y)$  ir diferencējama punktā  $(x_0, y_0)$ ; pierādīt:  $z(x, y)$  ir nepārtraukta šajā punktā.

Pierādījums. Tā kā funkcija  $z = z(x, y)$  ir diferencējama, tad tās pilno pieaugumu punktā  $(x_0, y_0)$  var uzrakstīt šādā formā

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y;$$

$A, B$  ir konstantes,  $\alpha, \beta$  ir bezgalīgi mazi lielumi.

Tagad ir skaidrs, ka ja  $\Delta x \rightarrow 0$  un  $\Delta y \rightarrow 0$ , tad arī  $\Delta z \rightarrow 0$ , tas ir bezgalīgi mazam argumentu pieaugumam atbilst bezgalīgi mazs funkcijas pilnais pieaugums. Tātad funkcija  $z(x, y)$  ir nepārtraukta punktā  $(x_0, y_0)$ .

2. Dots: funkcija  $z = z(x, y)$  ir diferencējama; pierādīt: punktā  $(x_0, y_0)$  eksistē abi parciālie atvasinājumi.

Pierādījums. Pierādīsim, ka eksistē  $z'_x(x_0, y_0)$ . Atbilstoši definīcijai

$$z'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}.$$

Parciālais pieaugums pēc  $x$  ir funkcijas pieaugums, ja mainīgais  $y$  ir fiksēts:  $y = y_0$ , bet  $\Delta y = 0$ . Citiem vārdiem, ja  $\Delta y = 0$ , tad  $\Delta z = \Delta_x z$ . No dotā funkcija  $z = z(x, y)$  ir diferencējama, tas ir

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y; \quad \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \alpha = 0, \quad \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \beta = 0,$$

$A, B$  ir konstantes. Tā kā  $\Delta_x z = \Delta z$ , ja  $\Delta y = 0$ , tad  $\Delta_x z = A\Delta x + \alpha\Delta x$ . Izdalot pēdējās vienādības abas puses ar  $\Delta x$  un pārejot uz robežu ja  $\Delta x \rightarrow 0$ , iegūsim:

$$\begin{aligned} z'_x(x_0, y_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A\Delta x + \alpha\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A\Delta x}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha\Delta x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} A + \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y = 0}} \alpha = A. \end{aligned}$$

Tā kā eksistē abas pēdējās robežas, tad eksistē arī robeža  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A$ , t. i., eksistē parciālais atvasinājums  $z'_x(x_0, y_0)$ .

Piezīme. Reizē ar atvasinājuma  $z'_x(x_0, y_0)$  eksistenci teorēmā ir pierādīts, ka  $z'_x(x_0, y_0) = A$ . Līdzīgi, pierādot  $z'_y(x_0, y_0)$  eksistenci, iegūsim ka  $z'_y(x_0, y_0) = B$ .

**Teorēma.** (Divu mainīgo funkcijas diferencējamības pietiekamais nosacījums.) Pieņemsim, ka funkcija  $z = z(x, y)$  apmierina nosacījumus:

- 1) parciālie atvasinājumi  $z'_x$  un  $z'_y$  eksistē punktā  $(x_0, y_0)$  un kādā tā apkārtnē;
- 2) punktā  $(x_0, y_0)$  šie parciālie atvasinājumi ir nepārtraukti.

Tad funkcija  $z = z(x, y)$  punktā  $(x_0, y_0)$  ir diferencējama.

(Pierādījumu neaplūkosit).

## 12.9. Divu mainīgo funkcijas diferenciālis

Pieņemsim, ka funkcija  $z = z(x, y)$  ir diferencējama punktā  $(x_0, y_0)$ , t. i., tās pilno pieaugumu šajā punktā var uzrakstīt šādā formā

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

kur  $A$  un  $B$  ir konstantes, bet  $\alpha$  un  $\beta$  ir bezgalīgi mazi lielumi.

Pieaugumu  $\Delta x$  un  $\Delta y$  lineāro izteiksmi  $A\Delta x + B\Delta y$  sauc par funkcijas (pilno) diferenciāli dotajā punktā un apzīmē ar  $dz(x_0, y_0)$ , vai  $dz$ :

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

Tā kā

$$A = z'_x(x_0, y_0), \quad B = z'_y(x_0, y_0),$$

tad

$$dz = z'_x(x_0, y_0)\Delta x + z'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Neatkarīgajiem mainīgajiem  $x$  un  $y$  ir spēkā vienādība  $\Delta x = dx$ ,  $\Delta y = dy$  (sk. 9.11. p.), tādēļ

$$dz = z'_x(x_0, y_0)dx + z'_y(x_0, y_0)dy. \quad (12.7)$$

Tā kā  $\alpha$  un  $\beta$  ir bezgalīgi mazi lielumi, tad pilnais diferenciālis  $dz$  ir funkcijas  $z = z(x, y)$  pieauguma galvenā daļa. Šī īpašība pamato pilnā diferenciāļa lietošanu tuvinātos aprēķinos:

$$\begin{aligned} z(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= z(x_0, y_0) + \Delta z \approx z(x_0, y_0) + dz = \\ &= z(x_0, y_0) + z'_x(x_0, y_0)\Delta x + z'_y(x_0, y_0)\Delta y. \end{aligned} \quad (12.8)$$

Piemērs. Tuvināti aprēķināt  $1,04^{1,98}$ .

Aplūkosim funkciju  $z = x^y$ . Šajā piemērā jāaprēķina  $z(x_1, y_1)$ , ja  $x_1 = 1,04$ ,  $y_1 = 1,98$ . Izvēlēsimies  $x_0 = 1$  un  $y_0 = 2$ . Tad  $\Delta x = 0,04$ , bet  $\Delta y = -0,02$ . Aprēķināsim parciālos atvasinājumus:

$$z'_x = yx^{y-1}, \quad z'_y = x^y \ln x.$$

Tagad atbilstoši formulai (13.8)

$$\begin{aligned} 1,04^{1,98} &= z(x_1, y_1) \approx z(x_0, y_0) + z'_x(x_0, y_0)\Delta x + z'_y(x_0, y_0)\Delta y = \\ &= 1^2 + 2 \cdot 1^{2-1} \cdot 0,04 + 1^2 \cdot \ln 1 \cdot (-0,02) = 1,08. \end{aligned}$$

Piezīmes.

1) Tā kā  $\Delta x = x - x_0$  un  $\Delta y = y - y_0$ , tad formulu (12.8.) var uzrakstīt sekojošā formā

$$z(x, y) \approx z(x_0, y_0) + z'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + z'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Šī formula tuvināti aizstāj (aproksimē) aplūkojamo funkciju ar atbilstošu lineāru funkciju.

2) Izteiksmes  $z'_x(x_0, y_0)dx$  un  $z'_y(x_0, y_0)dy$  sauc par funkcijas  $z(x, y)$  parciālajiem diferenciāļiem atbilstoši pēc mainīgā  $x$  un  $y$ . Atšķirībā no funkcijas pilnā pieauguma, pilnais diferenciālis ir vienāds ar parciālo diferenciāļu summu.

3) Trīs un vairāku mainīgo funkcijām diferenciāļa definīcija ir līdzīga minētajai. Piemēram, ja funkcija  $u = u(x, y, z)$ , tad  $du = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz$ .

## 12.10. Augstāku kārtu parciālie atvasinājumi un diferenciāļi

Funkcijas  $z(x, y)$  parciālie atvasinājumi  $z'_x(x, y)$  un  $z'_y(x, y)$  arī ir mainīgo  $x$  un  $y$  funkcijas. Tām atkal var atrast parciālos atvasinājumus:  $(z'_x)'_x$ ,  $(z'_x)'_y$ ,  $(z'_y)'_x$  un  $(z'_y)'_y$ . Tos sauc par otrajiem atvasinājumiem vai otrās kārtas atvasinājumiem un apzīmē ar

$$(z'_x)'_x = z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad (z'_x)'_y = z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y};$$

$$(z'_y)'_x = z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}; \quad (z'_y)'_y = z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Līdzīgi definē un apzīmē trešās un augstākas kārtas atvasinājumus.

Protams, rodas jautājums, vai otrās un augstāku kārtu atvasinājumi, kuri ņemti pēc dažādiem mainīgajiem, ir atkarīgi no diferenciēšanas kārtības, proti, vai ir patiesa vienādība  $z''_{xy} = z''_{yx}$ ?

Atbildi dod nākošā teorēma, kuru mēs formulēsim bez pierādījuma.

**Teorēma.** Ja atvasinājumi  $z''_{xy}$  un  $z''_{yx}$  ir definēti un nepārtraukti punktā  $(x_0, y_0)$  un tā kādā apkārtnē, tad

$$z''_{xy}(x_0, y_0) = z''_{yx}(x_0, y_0).$$

Līdzīgi spriedumi ir patiesi gan vairāku mainīgo funkcijām, gan arī augstāku kārtu atvasinājumiem.

Atbilstoši definīcijai, funkcijas diferenciālis, ja tas eksistē, ir vienāds ar

$$dz = z'_x(x, y)dx + z'_y(x, y)dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Tā kā  $z'_x(x, y)$  un  $z'_y(x, y)$  ir  $x$  un  $y$  funkcijas, tad arī  $dz$  ir mainīgo  $x, y$  funkcija, no kuras atkal var iegūt diferenciāli  $d(dz)$ . Šo diferenciāli sauc par funkcijas  $z(x, y)$  otro diferenciāli (vai otrās kārtas diferenciāli) un apzīmē ar  $d^2z$ :

$$d^2z = d(dz).$$

Līdzīgi, trešais diferenciālis ir vienāds ar

$$d^3z = d(d^2z) \text{ utt.}$$

## 12.11. Apslēpto funkciju diferencēšana.

### Aizvietojuma marginālā norma

Atcerēsimies, ka atbilstoši definīcijai vienādojums  $F(x, y) = 0$  nosaka  $y$  kā  $x$  apslēpto funkciju, ja katrai  $x$  vērtībai no kādas kopas  $X$  var viennozīmīgi piekārtot tādu  $y$  vērtību, ka iegūtais vērtību pāris  $(x, y)$  pārvērš vienādību  $F(x, y) = 0$  identitātē.

Šajā punktā aplūkosim sekojošus jautājumus: kādiem nosacījumiem jāatbilst funkcijai  $F(x, y)$ , lai vienādojums  $F(x, y) = 0$  definētu  $y$  kā apslēpto funkciju no  $x$ ; kādos gadījumos šī funkcija  $y(x)$  ir diferencējama un kāda ir tās atvasinājuma izteiksme?

**Teorēma (par apslēptās funkcijas eksistenci un diferencējamību).** Pieņemsim, ka funkcija  $F(x, y)$  apmierina nosacījumus:

1) tā reizē ar saviem parciālajiem atvasinājumiem ir definēta un nepārtraukta apgabālā  $D = [x_0 - a, x_0 + a; y_0 - b, y_0 + b]$ , tas ir, taisnstūrī ar centru punktā  $(x_0, y_0)$ ;

2)  $F(x_0, y_0) = 0$ ;

3)  $F'_y(x, y)$  punktā  $(x_0, y_0)$  ir atšķirīgs no nulles.

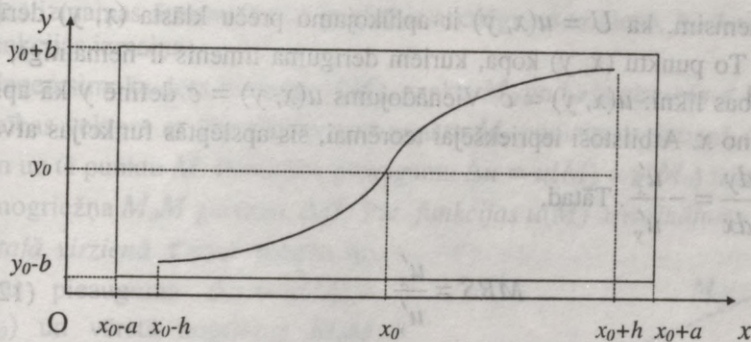
Tad:

1) punkta  $(x_0, y_0)$  kādā apkārtņē vienādojums  $F(x, y) = 0$  definē vienvērtīgu nepārtrauktu funkciju  $y = f(x)$ ;

2) šai funkcijai  $y = f(x)$  eksistē atvasinājums, kuru aprēķina ar formulu

$$y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \quad (12.9)$$

**Pierādījums.** Pirmo šīs teorēmas apgalvojumu pieņemsim bez pierādījuma. Ievērosim, ka 1. – 3. teorēmas nosacījumi ierobežo funkciju  $F(x, y)$ , kura vēl nedefinē apslēpto funkciju  $y = f(x)$ . Šo apslēpto funkciju nosaka vienādojums  $F(x, y) = 0$ . Ģeometriski teorēmas 1. apgalvojumu var ilustrēt ar grafiku (12.8. zīm.).



12.8. zīm.

Pierādīsim teorēmas 2. apgalvojumu, pieņemot, ka 1. apgalvojums ir patiess.

Atbilstoši diferencējamības pietiekamiem nosacījumiem, no dotā teorēmas nosacījuma seko, ka funkcija  $F(x, y)$  ir diferencējama apgabala  $D$  iekšpusē.

Diferencēsim vienādības  $F(x, y) = 0$  abas puses:

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0.$$

No tā seko, ka

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y}, \quad \text{kas arī bija jāpierāda.}$$

Piemērs no ekonomikas. Par preces  $Y$  aizvietojuuma ar precī  $X$  normu sauc preces  $Y$  daudzumu, no kura patērētājs ir ar mieru atteikties apmaiņā pret preces  $X$  apjoma palielināšanu par vienu vienību *ar nosacījumu, ka nemainās šī preču klāsta derīguma līmenis*. Apzīmēsim aizvietojuuma normu ar  $RS$  (*Rate of Substitution*). Atbilstoši šai definīcijai

$$RS = -\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

(Šeit un turpmāk precī apzīmēsim ar lielo burtu, bet tās daudzumu ar atbilstošo mazo burtu). Savukārt, aizvietojuuma marginālo normu (*Marginal Rate of Substitution*) nosaka kā aizvietojuuma normas robežu, kad  $\Delta x$  tiecas uz nulli. To apzīmē ar  $MRS$ . Tātad,

$$MRS = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( -\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = -\frac{dy}{dx}. \quad (12.10)$$

Pieņemsim, ka  $U = u(x, y)$  ir aplūkojamo preču klāsta  $(x, y)$  derīguma funkcija. To punktu  $(x, y)$  kopa, kuriem derīguma līmenis ir nemainīgs, veido vienaldzības līkni:  $u(x, y) = c$ . Vienādojums  $u(x, y) = c$  definē  $y$  kā apslēpto funkciju no  $x$ . Atbilstoši iepriekšējai teorēmai, šīs apslēptās funkcijas atvasinājums ir  $\frac{dy}{dx} = -\frac{u'_x}{u'_y}$ . Tātad,

$$MRS = \frac{u'_x}{u'_y} \quad (12.11)$$

Vispārīgā gadījumā, aplūkojot  $n$  preču klāstu  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  un derīguma funkciju  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , marginālā norma preces  $X_j$  aizvietojumam ar precī  $X_i$  ir vienāda ar

$$MRS = \frac{u'_{x_i}}{u'_{x_j}}$$

Aizvietošanas marginālās normas svarīga īpašība ir tās dilšana (precīzāk – neaugšana), palielinoties argumentam  $x$ . Tēlaini runājot, palielinoties  $x$ , patērētājs ir gatavs atdot arvien mazāku preces  $Y$  daudzumu, ja  $x$  palielinās par vienu vienību. Aizvietošanas marginālās normas dilšana nozīmē, ka tās atvasinājums nav pozitīvs:  $(MRS)'_x \leq 0$ . Tātad, ņemot vērā formulu (12.10),  $(-y'_x)'_x \leq 0$ , bet  $y''_{xx} \geq 0$ . Tas nozīmē, ka vienaldzības līkne  $y = y(x)$  ir ieliekta.

Piemērs. Derīguma funkcija ir dota ar formulu  $u = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ . Aprēķināt marginālo normu preces  $X_2$  aizvietojumam ar precī  $X_1$  punktā  $M_0(4, 1)$ .

Atrisinājums. No formulas (12.11) izriet, ka marginālā norma ir

$$MRS = \frac{u'_{x_1}}{u'_{x_2}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x_1}}}{\frac{1}{2\sqrt{x_2}}} = \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}$$

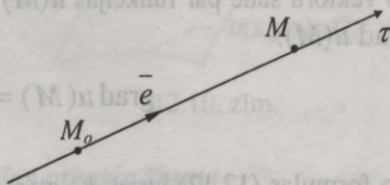
Atbilstoši,  $MRS$  punktā  $M_0(4, 1)$  ir vienāda ar  $\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$ .

### 12.12. Atvasinājums dotajā virzienā

Atgādināsim, ka viena mainīgā funkcijas atvasinājuma mehāniskā jēga ir funkcijas izmaiņas ātrums. Parciālais atvasinājums ir vairāku mainīgo funkcijas izmaiņas ātrums atbilstošās koordinātu ass virzienā. Vispārīgā gadījumā

funkcijas izmaiņas ātrums dotajā punktā ir atkarīgs no virziena, kurā tiek aplūkota funkcijas izmaiņa.

Pieņemsim, ka dota funkcija  $u(M)$ , punkts  $M_0$  un kāds virziens  $\tau$ , ko nosaka vienības vektors  $\bar{e}$ . Novilksim caur punktu  $M_0$  norādītajā virzienā staru, un atliksim uz tā punktu  $M$ . Funkcijas pieaugumu  $\Delta u = u(M) - u(M_0)$  izdalīsim ar vērstā nogriežņa  $M_0M$  garumu  $\Delta\rho^*$ . Par funkcijas  $u(M)$  atvasinājumu punktā  $M_0$  dotajā virzienā  $\tau$  sauc robežu no funkcijas pieauguma  $\Delta u = u(M) - u(M_0)$  un vērstā nogriežņa  $M_0M$  garuma  $\Delta\rho$  attiecības, kad punkts  $M$  pa staru  $\tau$  tiecas uz punktu  $M_0$ , ja šī robeža eksistē. Atvasinājumu dotajā virzienā apzīmē ar



12.9. zīm.

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \tau} \right|_{M=M_0} \quad \text{jeb} \quad u'_\tau(M_0).$$

Tātad,

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{u(M) - u(M_0)}{\Delta\rho} = \lim_{\Delta\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta\rho}.$$

Mehāniskā jēga atvasinājumam dotajā virzienā ir funkcijas izmaiņas ātrums punktā  $M_0$  virzienā  $\tau$ . Parciālais atvasinājums  $u'_x$  ir funkcijas  $u(x, y, z)$  atvasinājums  $Ox$  ass virzienā.

### 12.13. Atvasinājuma dotajā virzienā aprēķināšana

Minētā definīcija atvasinājumam dotajā virzienā nav atkarīga no koordinātu sistēmas izvēles. Pieņemsim, ka ir dota kāda koordinātu sistēma  $Oxyz$  (tad  $u(M) = u(x, y, z)$ ). Nākošā teorēma aizstāj atvasinājuma dotajā virzienā aprēķināšanu ar parciālo atvasinājumu noteikšanu.

**Teorēma.** Pieņemsim, ka funkcija  $u(x, y, z)$  ir diferencējama punktā  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  un  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  ir virziena  $\tau$  vienības vektora  $\bar{e}$  koordinātas. Tad atvasinājums  $u'_\tau$  punktā  $M_0$  eksistē un to aprēķina ar formulu

$$u'_\tau(M_0) = u'_x(M_0)\cos\alpha + u'_y(M_0)\cos\beta + u'_z(M_0)\cos\gamma. \quad (12.12)$$

\* Atgādināsim, ka lielums  $\Delta\rho$  ir vienāds ar nogriežņa  $M_0M$  garumu, ja tā virziens sakrīt ar  $\tau$  virzienu, bet pretējā gadījumā ir vienāds ar šī nogriežņa garumu ar mīnusa zīmi.

## 12.14. Gradients

Pētot atvasinājumu dotajā virzienā, liela nozīme ir sekojošam vektoram:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k}.$$

Šo vektoru sauc par funkcijas  $u(M)$  **gradientu** punktā  $M$  un apzīmē ar simbolu  $\text{grad } u(M)$ :

$$\text{grad } u(M) = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k}.$$

No formulas (12.12) izriet, ka atvasinājums dotajā virzienā  $\tau$  ir vektora  $\text{grad } u$  un virziena  $\tau$  vienības vektora  $\bar{e} = \{\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma\}$  skalārais reizinājums.

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = (\text{grad } u) \cdot \bar{e}.$$

Tā kā vektoru skalārais reizinājums ir vienāds ar viena vektora projekcijas uz otru un otrā vektora moduļa reizinājumu un  $|\bar{e}| = 1$ , tad  $u'_\tau$  ir vienāds ar vektora  $\text{grad } u$  projekciju uz vienības vektora  $\bar{e}$  virzienu:

$$u'_\tau = \text{Pr}_{\bar{e}} \text{grad } u = |\text{grad } u| \cos \varphi,$$

kur  $\varphi$  ir leņķis starp vektoriem  $\text{grad } u$  un  $\bar{e}$ . No pēdējās vienādības izriet, ka punktā  $M$  atvasinājums dotajā virzienā sasniedz lielāko vērtību, ja leņķis starp vektoriem  $\text{grad } u$  un  $\bar{e}$  ir vienāds ar nulli (jo  $\cos \varphi = 1$ ). Šajā gadījumā  $u'_\tau = |\text{grad } u|$ .

Tātad, gradients  $\text{grad } u(M)$  ir vektors, kurš apmierina sekojošus nosacījumus:

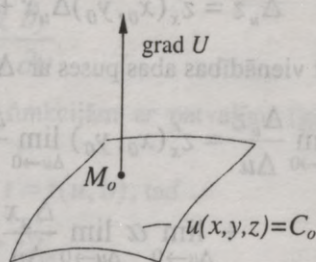
- 1) punktā  $M$  dotā vektora virzienā funkcijas izmaiņas ātrums ir lielākais;
- 2) vektora  $\text{grad } u(M)$  modulis ir vienāds ar šo lielāko funkcijas izmaiņas ātrumu.

Esam ieguvuši vēl vienu gradienta definīciju, turklāt tā nav atkarīga no izvēlētās koordinātu sistēmas.

Starp funkcijas gradientu un šīs funkcijas līmeņvirsmu punktā  $M_0$  pastāv sakarība.

**Teorēma.** Funkcijas  $u(M)$  gradients punktā  $M_0$  ir perpendikulārs pret funkcijas līmeņvirsmu šajā punktā.

**Piezīme.** Funkcijas gradienta perpendikularitāte pret līmeņvirsmu ir acīmredzams fakts; tiešām līmeņvirsmas normāles virziens sakrīt ar vektora gradienta virzienu, kurš ir funkcijas  $u(M)$  maksimālās izmaiņas virziens.



12.10. zīm.

### 12.15. Saliktas funkcijas atvasinājums

Pieņemsim, ka dotas funkcijas  $z = z(x, y)$ ,  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ , pie kam funkcija  $z = z(x, y)$  ir definēta kādā apgabalā  $D$ , bet mainīgo  $u, v$  vērtības ir tādas, ka tām atbilstošais punkts  $(x, y)$  neatrodas ārpus apgabala  $D$ .

**Teorēma.** Pieņemsim, ka funkcija  $z = z(x, y)$  ir diferencējama punktā  $(x_0, y_0)$ , bet funkcijas  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$  ir diferencējamās punktā  $(u_0, v_0)$ , pie tam  $x_0 = x(u_0, v_0)$ ,  $y_0 = y(u_0, v_0)$ . Tad saliktai funkcijai  $z = z(x(u, v), y(u, v))$  punktā  $(u_0, v_0)$  eksistē parciālie atvasinājumi  $z'_u$  un  $z'_v$ , kuru izteiksmes ir sekojošas:

$$z'_u(u_0, v_0) = z'_x(x_0, y_0)x'_u(u_0, v_0) + z'_y(x_0, y_0)y'_u(u_0, v_0);$$

$$z'_v(u_0, v_0) = z'_x(x_0, y_0)x'_v(u_0, v_0) + z'_y(x_0, y_0)y'_v(u_0, v_0).$$

**Pierādījums.** Pierādīsim parciālā atvasinājuma  $z'_u(u_0, v_0)$  eksistenci un iegūsim tā aprēķināšanas formulu.

Piešķirsim argumentam  $u$  punktā  $u_0$  pieaugumu  $\Delta u$ , bet pieaugumu  $\Delta v$  pielīdzināsim nullei. Tad  $x$  un  $y$  iegūs pieaugumus  $\Delta x = \Delta_u x$ ,  $\Delta y = \Delta_u y$ , bet mainīgais  $z$  iegūs pieaugumu  $\Delta z = \Delta_u z$ . Tā kā funkcija  $z = z(x, y)$  ir diferencējama punktā  $(x_0, y_0)$ , tad šo pieaugumu var uzrakstīt sekojošā formā:

$$\Delta z = z'_x(x_0, y_0)\Delta x + z'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \tag{12.13}$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \alpha = 0, \quad \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \beta = 0.$$

Tā kā  $\Delta z = \Delta_u z$ ,  $\Delta x = \Delta_u x$ ,  $\Delta y = \Delta_u y$ , tad pēdējo vienādību var pārrakstīt šādi:

$$\Delta_u z = z'_x(x_0, y_0)\Delta_u x + z'_y(x_0, y_0)\Delta_u y + \alpha\Delta_u x + \beta\Delta_u y.$$

Izdalot vienādības abas puses ar  $\Delta u$  un pārejot uz robežu, kad  $\Delta u \rightarrow 0$ , iegūsim:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta_u z}{\Delta u} &= z'_x(x_0, y_0) \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta_u x}{\Delta u} + z'_y(x_0, y_0) \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta_u y}{\Delta u} + \\ &+ \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \alpha \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta_u x}{\Delta u} + \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \beta \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta_u y}{\Delta u}. \end{aligned} \quad (12.14)$$

Tā kā funkcijas  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$  ir diferencējamas punktā  $(u_0, v_0)$ , tad tām

eksistē parciālie atvasinājumi  $x'_u(u_0, v_0) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta_u x}{\Delta u}$  un  $y'_u(u_0, v_0) =$

$= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta_u y}{\Delta u}$ . Vienādība (12.14) iegūst formu

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta_u z}{\Delta u} &= z'_x(x_0, y_0)x'_u(u_0, v_0) + z'_y(x_0, y_0)y'_u(u_0, v_0) + \\ &+ x'_u(u_0, v_0) \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \alpha + y'_u(u_0, v_0) \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \beta. \end{aligned}$$

Ir atlicis pierādīt, ka  $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \alpha = 0$  un  $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \beta = 0$ . No formulas (12.13) izriet,

ka  $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \alpha = 0$  un  $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \beta = 0$ . Tātad, jāpierāda, ka no  $\Delta u \rightarrow 0$  seko  $\Delta x \rightarrow 0$

un  $\Delta y \rightarrow 0$  (atgādināsim, ka  $\Delta v = 0$  kā sākumā tika pieņemts). Tātad, ir pietiekami pārliecināties par funkciju  $x(u, v)$  un  $y(u, v)$  nepārtrauktību. Tā seko

no funkciju  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$  diferencējamības punktā  $(u_0, v_0)$ . Tātad,

$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \alpha = 0$ ,  $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \beta = 0$  un eksistē robeža

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta_u z}{\Delta u} = z'_x(x_0, y_0)x'_u(u_0, v_0) + z'_y(x_0, y_0)y'_u(u_0, v_0),$$

t. i., eksistē atvasinājums  $z'_u(u_0, v_0)$ , kas vienāds ar doto izteiksmi.

Atvasinājuma  $z'_v$  gadījumā pierādījums ir līdzīgs.

Piezīmes.

1) Saliktas funkcijas atvasinājumu aprēķināšanas formulas kompakti var uzrakstīt sekojošā formā

$$z'_u = z'_x \cdot x'_u + z'_y \cdot y'_u, \quad z'_v = z'_x \cdot x'_v + z'_y \cdot y'_v$$

jeb  $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}.$

2) Dotās formulas ir viegli vispārināt funkcijām ar patvaļīgu (galīgu) mainīgo skaitu. Piemēram:

ja  $z = z(x, y, t), \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad t = t(u, v)$ , tad

$$z'_u = z'_x x'_u + z'_y y'_u + z'_t t'_u.$$

Piemērs. Atrast  $z'_v$ , ja  $z = e^{xy}$ , bet  $x = v \cos u, \quad y = v \sin u$ .

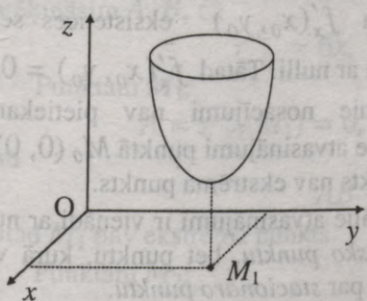
$$\begin{aligned} z'_v &= z'_x x'_v + z'_y y'_v = e^{xy} y \cos u + e^{xy} x \sin u = \\ &= e^{v^2 \cos u \sin u} (v \sin u \cos u + v \cos u \sin u) = v \sin 2u \cdot e^{v^2 \sin u \cos u}. \end{aligned}$$

### 12.16. Vairāku mainīgo funkcijas ekstrēmi

Punktu  $M_0$  sauc par funkcijas  $f(M)$  lokālā maksimuma (minimuma) punktu, ja funkcijas definīcijas apgabalā eksistē tāda šī punkta apkārtnē, ka visos tās punktos  $M$  pastāv nevienādības  $f(M_0) > f(M)$  ( $f(M_0) < f(M)$ ). Apzīmējot funkcijas pieaugumu ar  $\Delta f = f(M) - f(M_0)$ , lokālā maksimuma (minimuma) punkta definīciju var uzrakstīt sekojošā veidā: punktu  $M_0$  sauc par funkcijas  $f(M)$  lokālā maksimuma (minimuma) punktu, ja eksistē tāda punkta  $M_0$  apkārtnē, ka visos tās punktos ir spēkā nevienādība

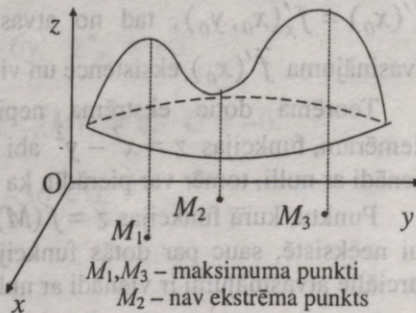
$$\Delta f < 0 \quad (\Delta f > 0).$$

Lokālā maksimuma un lokālā minimuma punktus sauc par **ekstrēma punktiem** (ekstremālie punkti) (12.11., 12.12. zīm.).



$M_1$  – minimuma punkts

12.11. zīm.



$M_1, M_3$  – maksimuma punkti  
 $M_2$  – nav ekstrēma punkts

12.12. zīm.

Vingrinājumi. Lietojot apzīmējumu  $\Delta f = f(M) - f(M_0)$ , formulējiet nosacījumu tam, ka  $M_0$  nav ekstrēma punkts.

No definīcijas seko, ka funkcijas  $f(M)$  ekstrēma punkti ir tās definīcijas apgabala iekšējie punkti.

Tāpat kā ekstrēma punktu definīcija, tā arī formulējumi sekojošiem ekstrēmu nepieciešamajiem nosacījumiem ir doti  $n$  mainīgo funkcijām  $f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Geometriskās interpretācijas un pierādījumi, kā parasti, tiek doti divu mainīgo funkcijas gadījumam (kaut gan vispārīgā gadījumam pierādījums ir gandrīz tāds pats).

### 12.17. Ekstrēma nepieciešamie nosacījumi

**Teorēma.** Pieņemsim, ka punkts  $M_0$  ir funkcijas  $f(M)$  ekstrēma punkts. Ja šajā punktā eksistē parciālais atvasinājums pēc kāda no mainīgajiem, tad tas ir vienāds ar nulli.

**Pierādījums.** Pieņemsim, ka punkts  $M_0(x_0, y_0)$  ir funkcijas  $f(M) = f(x, y)$  ekstrēma punkts, piemēram, lokālā maksimuma punkts, un šajā punktā eksistē parciālais atvasinājums  $f'_x(M_0)$ . Jāpierāda, ka  $f'_x(M_0) = 0$ . No lokālā maksimuma punkta definīcijas seko, ka eksistē tāda punkta  $M_0$  apkārtnē, ka jebkuram tās punktam  $M$  ir spēkā nevienādība  $f(M_0) > f(M)$ .

Fiksēsim  $y = y_0$ . Tā kā nevienādība  $f(M_0) > f(M)$  ir patiesa visiem minētās apkārtnes punktiem, tad tā ir patiesa arī šīs apkārtnes punktiem  $(x, y_0)$ :  $f(x_0, y_0) > f(x, y_0)$ . Pēdējā nevienādība nozīmē, ka viena mainīgā funkcija  $\tilde{f}(x) = f(x, y_0)$  kādā punkta  $x_0$  apkārtnē apmierina nevienādību  $\tilde{f}(x_0) > \tilde{f}(x)$ , t. i.,  $x_0$  ir funkcijas maksimuma punkts. Tātad, ja eksistē atvasinājums  $\tilde{f}'(x_0)$ , tad tas ir vienāds ar nulli (paskaidrojiet, kāpēc). Tā kā  $\tilde{f}'(x_0) = f'_x(x_0, y_0)$ , tad no atvasinājuma  $f'_x(x_0, y_0)$  eksistences seko atvasinājuma  $\tilde{f}'(x_0)$  eksistence un vienādība ar nulli. Tātad  $f'_x(x_0, y_0) = 0$ .

Teorēmā dotie ekstrēma nepieciešamie nosacījumi nav pietiekami. Piemēram, funkcijas  $z = x^2 - y^2$  abi parciālie atvasinājumi punktā  $M_0(0, 0)$  ir vienādi ar nulli, tomēr var pierādīt, ka šis punkts nav ekstrēma punkts.

Punktu, kurā funkcijas  $z = f(M)$  parciālie atvasinājumi ir vienādi ar nulli vai neeksistē, sauc par dotās funkcijas *kritisko punktu*, bet punktu, kurā visi parciālie atvasinājumi ir vienādi ar nulli, sauc par *stacionāro punktu*.

## 12.18. Ekstrēma pietiekamie nosacījumi

Pieņemsim, ka dota divu mainīgo funkcija  $z = f(x, y)$  un punkts  $M(x_0, y_0)$ . Apzīmēsim  $z''_{xx}(x_0, y_0) = A$ ,  $z''_{yy}(x_0, y_0) = B$ ,  $z''_{xy}(x_0, y_0) = C$ . Ir patiesa sekojoša teorēma.

**Teorēma.** Pieņemsim, ka funkcijai eksistē nepārtraukti pirmās un otrās kārtas parciālie atvasinājumi kādā stacionārā punkta  $M_0(x_0, y_0)$  apkārtnē. Tad:

- 1) ja  $AB - C^2 > 0$ , tad  $M_0$  ir ekstrēma punkts, pie tam,
  - ja  $A > 0$ , tad  $M_0$  ir lokālā minimuma punkts,
  - ja  $A < 0$ , tad  $M_0$  ir lokālā maksimuma punkts;
- 2) ja  $AB - C^2 < 0$ , tad  $M_0$  nav ekstrēma punkts;
- 3) ja  $AB - C^2 = 0$ , tad  $M_0$  var būt un var arī nebūt ekstrēma punkts.

**Piemērs.** Atrast ekstrēma punktus funkcijai

$$z = x^3 + y^3 - 6xy.$$

**Atrisinājums.** Atradīsim stacionāros punktus

$$\begin{aligned} z'_x = 3x^2 - 6y &= 0 \\ z'_y = 3y^2 - 6x &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6y = 0 \\ 3y^2 - 6x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2y = 0 \\ y^2 - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2}{2} \\ y^2 - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^4}{4} - 2x = 0 \Rightarrow x^4 - 8x = 0,$$

$$x_1 = 0, x_2 = 2.$$

$$\text{Atbilstoši: } y_1 = 0, y_2 = 2.$$

Ieguvām divus stacionāros punktus  $M_1(0, 0)$  un  $M_2(2, 2)$ . Katram no punktiem aprēķināsim  $A, B, C$ :

$$z''_{xx} = 6x, \quad z''_{yy} = 6y, \quad z''_{xy} = -6.$$

Punktam  $M_1$ :

$$A = z''_{xx}(M_1) = 0, \quad B = z''_{yy}(M_1) = 0, \quad C = -6.$$

Tad

$$AB - C^2 = -36 < 0.$$

Tātad  $M_1$  nav ekstrēma punkts.

Punktam  $M_2$ :

$$A = z''_{xx}(M_2) = 6 \cdot 2 = 12, \quad B = z''_{yy}(M_2) = 6 \cdot 2 = 12, \quad C = -6.$$

Tad

$$AB - C^2 = 144 - 36 > 0.$$

Tā kā  $A = 12 > 0$ , tad  $M_2$  ir lokālā minimuma punkts.

Dosim  $n$  mainīgo funkcijas ekstrēma pietiekamos nosacījumus.

Pirms pārejam pie šo nosacījumu izklāsta, aplūkosim lineārās algebras dažas nepieciešamās definīcijas un sakarības.

Par  $n$  mainīgo  $x_1, x_2, \dots, x_n$  kvadrātisko formu sauc funkciju

$$\begin{aligned}\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \\ &= a_{11}x^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{2n}x_2x_n + \dots + \\ &\quad + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \dots + a_{nn}x_n^2,\end{aligned}$$

kur  $a_{ij} = a_{ji}$  visiem  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

Koeficientu  $a_{ij}$  matricu  $A = \|a_{ij}\|$  sauc par kvadrātiskās formas matricu. Minorus

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots, \\ \Delta_n &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

sauc par matricas  $A$  galvenajiem minoriem.

Kvadrātisko formu  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  sauc par pozitīvi (negatīvi, nenegatīvi, nepozitīvi) definētu, ja jebkurām tās mainīgo  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  vērtībām kvadrātiskā forma ir pozitīva, t. i.,  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$  (attiecīgi,  $\varphi(x_1, \dots, x_n) < 0$ ,  $\varphi(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ ,  $\varphi(x_1, \dots, x_n) \leq 0$ ).

Kvadrātisko formu sauc par nenoteiktu, ja tās vērtības var būt gan pozitīvas, gan negatīvas.

Kvadrātiskās formas zīmes pastāvības noteikšanai var lietot *Silvestra kritēriju*: kvadrātiskā forma ar matricu  $A = \|a_{ij}\|$  tad un tikai tad ir:

- 1) pozitīvi definēta, ja matricas visi galvenie minori ir lielāki par nulli;
- 2) negatīvi definēta, ja matricas  $A$  galveno minoru zīmes ir mainīgas (alternējošas), pie tam  $\Delta_1 < 0$ .

Formulēsim ekstrēma pietiekamos nosacījumus.

Lietosim apzīmējumu  $a_{ij} = f''_{x_i x_j}(M_0)$ .

**Teorēma.** Pieņemsim, ka  $M_0$  ir funkcijas  $f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  stacionārais punkts un kādā tā apkārtnē eksistē nepārtraukti parciālie atvasinājumi līdz otrai kārtai, ieskaitot.

Tad, ja kvadrātiskā forma ar matricu  $A = \|a_{ij}\|$  ir:

- 1) pozitīvi definēta, tad  $M_0$  ir minimuma punkts;
- 2) negatīvi definēta, tad  $M_0$  ir maksimuma punkts;
- 3) nenoteikta, tad  $M_0$  nav ekstrēma punkts;
- 4) pusnoteikta (nenegatīvi vai nepozitīvi definēta), tad nepieciešami papildus pētījumi.

Piemērs. Atrast funkcijas ekstrēmumus

$$u = x^2 + y^2 + z^2 - xz + 3x - 2y.$$

Atrisinājums. Aprēķināsim parciālos atvasinājumus:

$$u'_x = 2x - z + 3; \quad u'_y = 2y - 2; \quad u'_z = 2z - x.$$

Atrisinot sistēmu

$$\begin{cases} 2x - z + 3 = 0, \\ 2y - 2 = 0, \\ 2z - x = 0, \end{cases}$$

atrodam stacionāro punktu  $M_1(-2, 1, -1)$ .

Aprēķinot otrās kārtas atvasinājumus, atrodam  $a_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ :

$$a_{11} = u''_{xx}(-2, 1, -1) = 2; \quad a_{12} = u''_{xy}(-2, 1, -1) = 0; \quad a_{13} = u''_{xz}(-2, 1, -1) = -1;$$

$$a_{21} = u''_{yx}(-2, 1, -1) = 0; \quad a_{22} = u''_{yy}(-2, 1, -1) = 2; \quad a_{23} = u''_{yz}(-2, 1, -1) = 0;$$

$$a_{31} = u''_{zx}(-2, 1, -1) = -1; \quad a_{32} = u''_{zy}(-2, 1, -1) = 0; \quad a_{33} = u''_{zz}(-2, 1, -1) = 2.$$

Izveidojam matricu  $\|a_{ij}\| = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  un atrodam tās galvenos minorus:

$$\Delta_1 = 2 > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 > 0.$$

Visi galvenie minori ir lielāki par nulli, tātad atbilstoši Silvestra kritērijam kvadrātiskā forma ar matricu  $\|a_{ij}\|$  ir pozitīvi definēta. Tātad,  $M_1$  ir minimuma punkts.

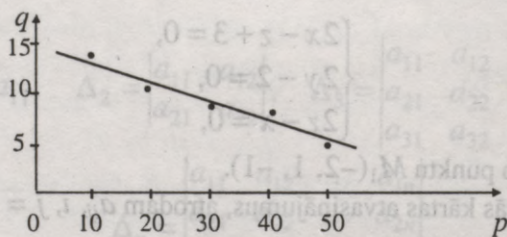
### 12.19. Mazāko kvadrātu metode

Aplūkosim piemēru. Pieņemsim, ka pētījumu rezultātā ir iegūtas pieprasījuma funkcijas vērtības kādai precei ar dažādām cenām (cena  $p$  ir izteikta santīmos par kilogramu, bet pieprasījums  $q$  – tonnās):

Tabula 12.1.

$p_i$	10	20	30	40	50
$q_i$	14,2	11,8	9,9	8,2	5,8

Jāatrod pieprasījuma funkcijas analītisko formulu. Atliksim datus grafikā.



12.13. zīm.

Punktu novietojums ļauj domāt, ka meklējamā funkcionālā sakarība ir lineāra:

$$q = ap + b.$$

Lietojot tabulas datus, jāatrod (pēc iespējas precīzāk) nezināmie koeficienti  $a$  un  $b$ .

Vispārīgā veidā uzdevumu var formulēt sekojoši: pamatojoties uz eksperimentāliem datiem (tabulas formā dotu funkciju), atrast analītisko izteiksmi funkcionālai atkarībai starp mainīgajiem. Minētā piemērā ir jau redzami šī uzdevuma risinājuma divi etapi: noteikt nezināmās funkcijas veidu un atrast nezināmos koeficientus.

Pieņemsim, ka funkcijai  $y = f(x)$  (kuras analītiskā izteiksme nav zināma) ir dota vērtību tabula

Tabula 12.2

$y_1$	$y_2$	...	$y_n$
$x_1$	$x_2$	...	$x_n$

un, ievērojot dažus apsvērumus (piemēram, punktu novietojumu grafikā) var uzskatīt, ka meklējamā funkcija ir lineāra:

$$y = ax + b. \quad (12.15)$$

Mūsu mērķis ir atrast tādus koeficientus  $a$  un  $b$ , lai summārā kļūda būtu minimāla.

Paskaidrosim, ko mēs saprotam ar summāro kļūdu. Ja  $x = x_1$ , tad nezināmās funkcijas vērtība (12.15) ir  $y_1^* = ax_1 + b$ , bet funkcijas vērtība no tabulas ir vienāda ar  $y_1$ .

Tātad, tuvinājuma kļūda šajā punktā ir vienāda ar  $y_1^* - y_1 = ax_1 + b - y_1$ .

Līdzīgi, punktā  $x_2$  kļūda ir vienāda ar  $y_2^* - y_2 = ax_2 + b - y_2$  utt., punktā  $x_n$

kļūda ir vienāda ar  $y_n^* - y_n = ax_n + b - y_n$ . Dažādos punktos aprēķinātās kļūdas var atšķirties ar zīmi, tādēļ, lai summējot tās savstarpēji neiznīcinātos, šo kļūdu vērtības vispirms ceļ kvadrātā. Iegūto lielumu

$$S = (y_1^* - y_1)^2 + (y_2^* - y_2)^2 + \dots + (y_n^* - y_n)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i^* - y_i)^2$$

sauc par summāro kvadrātisko kļūdu. Ņemot vērā, ka  $y_i^* = ax_i + b$ , var rakstīt:

$$S = (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + \dots + (ax_n + b - y_n)^2$$

jeb

$$S = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2. \quad (12.16)$$

Summārā kvadrātiskā kļūda ir atkarīga no koeficientu  $a$  un  $b$  izvēles:  $S = S(a, b)$ . Jāatrod tādi  $a$  un  $b$ , kas minimizē šo divu mainīgo funkciju. Minimuma nepieciešamais nosacījums ir parciālo atvasinājumu vienādība ar nulli. Tādēļ aprēķina abus parciālos atvasinājumus  $S'_a$  un  $S'_b$ :

$$\begin{aligned} S'_a &= 2(ax_1 + b - y_1) \cdot x_1 + 2(ax_2 + b - y_2) \cdot x_2 + \dots + 2(ax_n + b - y_n) \cdot x_n = \\ &= \sum_{i=1}^n 2x_i(ax_i + b - y_i); \end{aligned}$$

$$S'_b = 2(ax_1 + b - y_1) + \dots + 2(ax_n + b - y_n) = \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i)$$

un pielīdzina tos nullei:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n 2x_i(ax_i + b - y_i) = 0, \\ \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i) = 0. \end{cases} \quad (12.17)$$

Atrisinot divu lineāru vienādojumu sistēmu ar diviem nezināmiem (12.17), atrod piemērotus  $a$  un  $b$ . Ievietojot atrastos  $a$  un  $b$  formulā (12.16), atrod summārās kvadrātiskās kļūdas (vismazāko) vērtību.

Piemērs. Atrast tabulā 12.1. dotās pieprasījuma funkcijas analītisko izteiksmi.

Uzrakstīsim summāro kvadrātisko kļūdu:

$$S = (10a + b - 14,2)^2 + (20a + b - 11,8)^2 + (30a + b - 9,9)^2 + (40a + b - 8,2)^2 + (50a + b - 5,8)^2.$$

Atradīsim parciālos atvasinājumus

$$S'_a = 2(10a + b - 14,2) \cdot 10 + 2(20a + b - 11,8) \cdot 20 + 2(30a + b - 9,9) \cdot 30 + 2(40a + b - 8,2) \cdot 40 + 2(50a + b - 5,8) \cdot 50 = 11\,000a + 300b - 2586;$$

$$S'_b = 2(10a + b - 14,2) + 2(20a + b - 11,8) + 2(30a + b - 9,9) + 2(40a + b - 8,2) + 2(50a + b - 5,8) = 300a + 10b - 99,8.$$

Atrisinot vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 11\,000a + 300b - 2586 = 0, \\ 300a + 10b - 99,8 = 0, \end{cases}$$

atrodam:  $a = -0,204$ ,  $b = 16,1$ . Summārā kvadrātiskā kļūda šajā gadījumā ir  $S = 0,152$ .

Pieņemsim, ka ir pamats domāt, ka meklējamā funkcija nav lineāra, bet gan cita veida, piemēram, tā ir kvadrātiska  $y = ax^2 + bx + c$  vai kāda cita funkcija. Mazāko kvadrātu metodes ideja paliek iepriekšējā: katram punktam nosaka kļūdu  $y_i^* - y_i$  (kvadrātiskai funkcijai, piemēram,  $y_i^* = ax_i^2 + bx_i + c$ ), ceļ to kvadrātā; summējot visu doto punktu kļūdas, iegūst summāro kvadrātisko kļūdu. Tā ir nezināmu parametru (koeficientu) funkcija. Izmantojot šīs vairāku mainīgo

funkcijas minimuma nosacījumus, iegūst vienādojumu sistēmu, kas satur nezināmos parametrus. Vienādojumu skaits ir vienāds ar nezināmo parametru skaitu. Atrisinot iegūto sistēmu, atrod meklējamos parametrus.

Ja ir jāizvēlas starp vairākiem iespējamiem nezināmās funkcijas veidiem, piemēram, lineāru vai kvadrātisku, tad var atrast parametrus katram iespējamam variantam, aprēķināt katrā gadījumā summāro kvadrātisko kļūdu un izvēlēties variantu, kuram šī kļūda ir mazāka.

## 12.20. Nosacītais ekstrēms

Virknē vairāku mainīgo funkcijas ekstrēmu atrašanas uzdevumos neatkarīgajiem mainīgajiem tiek uzlikti papildu nosacījumi.

Piemērs. Ir zināms cenu vektors  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ , derīguma funkcija  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , kur  $(x_1, \dots, x_n)$  ir preču klāsts. Jāatrod tāds preču klāsts  $(x_1, \dots, x_n)$ , kurš ar doto derīguma līmeni  $u = u_0$  minimizētu pircēju izdevumus, kurus apraksta formula  $C = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$ . Citiem vārdiem, ir jāatrod funkcijas  $C$  minimums, ja mainīgie  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ir saistīti ar vienādojumu  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = u_0$ .

Vispārīgā gadījumā uzdevums tiek formulēts sekojoši: jāatrod funkcijas ekstrēms, ja argumenti ir saistīti ar vienādojumiem

$$\varphi_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad \varphi_2(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad \dots, \quad \varphi_k(x_1, \dots, x_n) = 0. \quad (12.18)$$

Šo uzdevuma sauc par *nosacītā ekstrēma* atrašanu vai *Lagranža uzdevumu*. Funkciju  $f(x_1, \dots, x_n)$  sauc par *mērķa funkciju*, bet ierobežojumus (12.18) par *saites vienādojumiem*.

Ja gan mērķa funkcijai, gan funkcijām  $\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_k(x_1, \dots, x_n)$  eksistē nepārtraukti atvasinājumi, tad nosacītā ekstrēma punkta atrašanai lieto

### Lagranža nenoteikto reizinātāju metodi.

Metode satur sekojošas darbības jeb posmus: tiek sastādīta palīgfunckcija ar  $n + k$  mainīgajiem (to sauc par *Lagranža funkciju*)

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = f(x_1, \dots, x_n) - \lambda_1 \varphi_1(x_1, \dots, x_n) - \lambda_2 \varphi_2(x_1, \dots, x_n) - \dots - \lambda_k \varphi_k(x_1, \dots, x_n). \quad (12.19)$$

Var pierādīt, ka, ja  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ir funkcijas  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  nosacītā ekstrēma punkts, tad visi  $(n + k)$  Lagranža funkcijas parciālie atvasinājumi ir vienādi ar nulli. Tātad, Lagranža funkcijas parciālo atvasinājumu vienādība ar nulli ir nosacītā ekstrēma punkta nepieciešamais nosacījums. Tādēļ, nosacītā

ekstrēma punkta meklēšanas otrs posms ir  $n + k$  vienādojumu sistēmas sastādīšana:

$$\begin{cases} L'_{x_i} = 0, & i = 1, 2, \dots, n; \\ L'_{\lambda_j} = 0, & j = 1, 2, \dots, k. \end{cases} \quad (12.20)$$

Atrisinot sistēmu, atrod iespējamās nosacītās ekstrēmas punktus. Lai pārliecinātos, ka šajos punktos eksistē nosacītās ekstrēmas punkti, nepieciešami papildus pētījumi. Nosacīto ekstrēmu punktu pietiekamo nosacījumu formulējumi ir sarežģītāki un tos neaplūkoshim. Jāatzīmē, ka aplūkojamā uzdevuma ekonomiskais saturs daudzos gadījumos norāda vai tiešām aplūkojamā punktā eksistē nosacītais ekstrēms, un ja eksistē, tad kāds tas ir.

Atrisinot sistēmu (12.20), atrod ne tikai punktu  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , kurā varētu būt nosacītais ekstrēms, bet arī palīgmainīgo  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  vērtības. Lai noskaidrotu šo lielumu jēgu, aplūkosim palīguzdevumu: atrast funkcijas  $u = f(x_1, x_2)$  ekstrēmu, ja mainīgos saista vienādojums

$$\varphi_1(x_1, x_2) = M.$$

Lagranža funkcija šajā gadījumā ir vienāda ar

$$L(x_1, x_2) = u(x_1, x_2) - \lambda(\varphi_1(x_1, x_2) - M).$$

Pieņemsim, ka ir atrasts nosacītās ekstrēmas punkts  $(x_1, x_2)$  un nosacītās ekstrēmas vērtība  $u$ . Visi šie lielumi ir atkarīgi arī no  $M$ : mainoties saites vienādojumam, mainīsies nosacītās ekstrēmas vērtība, t. i.,  $u = u(M)$ . Norādīsim bez pierādījuma, ka Lagranža koeficients  $\lambda$  dotajā gadījumā ir vienāds ar  $u'_M$ :

$$u'_M = \lambda, \quad (12.21)$$

t. i., tas rāda nosacītās ekstrēmas vērtības izmaiņas ātrumu, mainoties  $M$  vērtībai. (Vispārīgā gadījumā, pārveidojot saites vienādojumu (12.18) formā

$$\varphi_1(x_1, \dots, x_n) = M_1, \quad \varphi_2(x_1, \dots, x_n) = M_2, \quad \dots, \quad \varphi_k(x_1, \dots, x_n) = M_k,$$

atzīmēsim, ka Lagranža koeficients  $\lambda_i$  ir vienāds ar  $u'_{M_i}$ .)

Ja  $M$  iegūst pieaugumu  $\Delta M$ , tad līdzīgi kā viena mainīgā funkcijas gadījumā (9.13. p.) var rakstīt:

$$u(M + \Delta M) \approx u(M) + u'_M \Delta M,$$

un tā kā  $u'_M = \lambda$ , tad

$$u(M + \Delta M) \approx u(M) + \lambda \Delta M. \quad (12.22)$$

Šī tuvinātā vienādība tiks izmantota nākošā punkta 1. piemēra risinājumā.

## 12.21. Piemēri no ekonomikas

1. piemērs. Aplūkosim 12.19. punktā formulēto uzdevumu; zināms cenu vektors  $p = (4; 1)$  un derīguma funkcija  $u = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ . Atrast preču klāstu  $(x_1; x_2)$ , kas ar doto derīguma līmeni  $u = 5$  minimizētu patērētāja izmaksas.

Atrisinājums. Patērētāja izmaksas nosaka funkcija

$$C = 4x_1 + x_2.$$

Saites vienādojumu var rakstīt formā:  $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 5$ , jeb

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} - 5 = 0.$$

Izveidosim Lagranža funkciju:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 4x_1 + x_2 - \lambda(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} - 5).$$

Noteiksim parciālos atvasinājumus:

$$L'_{x_1} = 4 - \frac{\lambda}{2\sqrt{x_1}}; \quad L'_{x_2} = 1 - \frac{\lambda}{2\sqrt{x_2}}; \quad L'_\lambda = -\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} + 5.$$

Pielīdzināsim tos nullei:

$$\begin{cases} 4 - \frac{\lambda}{2\sqrt{x_1}} = 0, \\ 1 - \frac{\lambda}{2\sqrt{x_2}} = 0, \\ -\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} + 5 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x_1} = \frac{\lambda}{8}, \\ \sqrt{x_2} = \frac{\lambda}{2}, \\ -\frac{\lambda}{8} - \frac{\lambda}{2} + 5 = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = 8, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 16.$$

Tātad, preču klāsts  $(1, 16)$  ar derīguma līmeni  $u = 5$  minimizē patērētāja izmaksas. Šis minimums ir vienāds ar  $C = 4 \cdot 1 + 16 = 20$ .

Piezīme. Ja minētajā uzdevumā derīguma līmenis nedaudz izmainīsies, piemēram, būs vienāds ar 5,2, tad nav nepieciešams atkārtoti veikt visus aprēķinus. Var lietot tuvināto vienādību (12.22). Jaunā nosacītā ekstrēma tuvinātā vērtība būs

$$20 + 8 \cdot 0,2 = 21,6.$$

## 2. piemērs. Patērētāja līdzsvara punkts

Pieņemsim, ka dota derīguma funkcija  $u = u(x_1, \dots, x_n)$  un budžeta ierobežojums  $px = p_1x_1 + \dots + p_nx_n \leq I$ . Atgādināsim, ka  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  ir cenu vektors,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  ir preču klāsts,  $I$  ir šo preču iegādei atvēlētais līdzekļu apjoms. Punktu, kurā ar doto budžeta ierobežojumu patērētājam derīgums sasniedz maksimumu, sauc par **patērētāja līdzsvara punktu**.

Derīguma funkcijai  $u(x_1, \dots, x_n)$  kā aksioma tiek pieņemta tā saucamā nepiesātinātības īpašība: ja kādam  $i$  ir spēkā  $x_i' > x_i$ , tad  $u(x_1, \dots, x_i', \dots, x_n) > u(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ , t. i., funkcija ir augoša pēc katra argumenta. No šīs īpašības izriet, ka līdzsvara punkta atrašanās uzdevums ir līdzvērtīgs sekojošam uzdevumam:

**atrast derīguma funkcijas  $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  maksimuma punktu, ja saites vienādojums ir**

$$p_1x_1 + \dots + p_nx_n = I. \quad (12.23)$$

Tiešām, pieņemsim, ka  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$  ir līdzsvara punkts, t. i.,  $u(x^0)$  ir maksimālais derīgums ar doto budžeta ierobežojumu, un  $p_1x_1^0 + \dots + p_nx_n^0 < I$ .

Tad kādam  $x_1^0 > x_1^0$  izpildīsies  $p_1x_1^0 + \dots + p_nx_n^0 = I$ . No nepiesātinātības īpašības seko, ka  $u(x_1^0, \dots, x_n^0) > u(x_1^0, \dots, x_n^0)$ , kas ir pretrunā ar  $u(x^0)$  kā maksimumu. Šī pretruna nozīmē, ka maksimālo vērtību var sasniegt tikai tajos punktos, kur  $p_1x_1 + \dots + p_nx_n = I$ .

3. piemērs. Pieņemsim, ka dota 1. piemēra derīguma funkcija  $u = x_1^{1/2} + x_2^{1/2}$ . Atrast patērētāja līdzsvara punktu ar budžeta ierobežojumu  $p_1x_1 + p_2x_2 = I$ .

Atrisinājums. Uzrakstīsim Lagranža funkciju:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^{1/2} + x_2^{1/2} - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - I).$$

Atrodīsim parciālos atvasinājumus:

$$L'_{x_1} = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} - \lambda p_1, \quad L'_{x_2} = \frac{1}{2\sqrt{x_2}} - \lambda p_2, \quad L'_\lambda = -p_1x_1 - p_2x_2 + I.$$

Pielīdzinot tos nullei, iegūsim vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x_1}} - \lambda p_1 = 0, \\ \frac{1}{2\sqrt{x_2}} - \lambda p_2 = 0, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = I, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{4p_1^2 \lambda^2}, \\ x_2 = \frac{1}{4p_2^2 \lambda^2}, \\ p_1 \cdot \frac{1}{4p_1^2 \lambda^2} + p_2 \cdot \frac{1}{4p_2^2 \lambda^2} = I, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{4I} \cdot \frac{p_1 + p_2}{p_1 p_2},$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{I p_2}{p_1 (p_1 + p_2)}, \\ x_2 = \frac{I p_1}{p_2 (p_1 + p_2)}. \end{cases} \quad (12.24)$$

Izteiksme (12.24) nosaka tās  $x_1$  un  $x_2$ , vērtības, kas dod derīguma funkcijas maksimumu dažādām  $p_1, p_2, I$  vērtībām. Funkcijas (12.24) ir preču  $x_1, x_2$ , pieprasījuma funkcijas atkarībā no abu preču cenas un atvēlētajiem līdzekļiem  $I$ .

1. piezīme. Vispārīgā gadījumā  $x_1, x_2, \dots, x_n$  vērtības, kas nosaka derīguma funkcijas  $u(x_1, \dots, x_n)$  maksimumu, t. i., uzdevuma (12.23) atrisinājumu, ir atkarīgas no cenām un ienākuma  $I$ . Funkcijas

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(p_1, \dots, p_n, I), \\ x_2 &= x_2(p_1, \dots, p_n, I), \\ &\dots \dots \dots \\ x_n &= x_n(p_1, \dots, p_n, I), \end{aligned} \quad (12.25)$$

kas izsaka šo atkarību, ir preču  $x_1, \dots, x_n$  pieprasījuma funkcijas atkarībā no cenām  $p_1, \dots, p_n$  un ienākuma  $I$ .

Atzīmēsim, ka tieši no patērētāju līdzsvara punkta atrašanās uzdevuma nostādnes seko derīga un skaista pieprasījuma funkciju homogenitātes īpašība: ja šo funkciju visu argumentu vērtības vienlaicīgi palielinās  $k$  reizes, tad funkciju vērtības nemainās. Citiem vārdiem, ja visas cenas un ienākumu vienlaicīgi palielinās  $k$  reizes, tad doto preču pieprasījums nemainīsies.

Tiešām, pieprasījuma funkcija ir uzdevuma atrisinājums ar ierobežojumu (12.23), bet šis ierobežojums nemainīsies, ja visas cenas un ienākumu vienlaicīgi palielinās  $t$  reizes.

#### 4. piemērs.

Kā Lagranža funkcijas lietojuma ceturto piemēru aplūkosim uzdevumu par *aizvietojuma marginālās normas atrašanu līdzsvara punktā*.

Pieņemsim, ka dota derīguma funkcija  $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  un budžeta ierobežojumi  $p_1x_1 + \dots + p_nx_n \leq I$ . Atrast preces  $X_j$  aizvietojuma marginālo normu ar precī  $X_i$  līdzsvara punktā.

Atrisinājums. Atbilstoši formulai (12.11)

$$MRS = \frac{u'_{x_i}}{u'_{x_j}}. \quad (12.26)$$

Izveidosim Lagranža funkciju:

$$L(x) = u(x_1, \dots, x_n) - \lambda(p_1x_1 + \dots + p_nx_n - I).$$

Līdzsvara punktā parciālie atvasinājumi  $L'_{x_i}$  un  $L'_{x_j}$  ir vienādi ar nulli.

$$L'_{x_i} = u'_{x_i} - \lambda p_i = 0,$$

$$L'_{x_j} = u'_{x_j} - \lambda p_j = 0.$$

No šiem vienādojumiem seko, ka

$$u'_{x_i} = \lambda p_i, \quad u'_{x_j} = \lambda p_j. \quad (12.27)$$

Ievietojot atrastos atvasinājumus formulā (12.26), iegūsim *aizvietojuma marginālo normu līdzsvara punktā*:

$$MRS = \frac{p_i}{p_j}. \quad (12.28)$$

Līdzās pierādītai vienādībai (12.28) no (12.27) seko arī cits svarīgs secinājums:

$$\frac{u'_{x_1}}{p_1} = \frac{u'_{x_2}}{p_2} = \dots = \frac{u'_{x_n}}{p_n} = \lambda, \quad (12.29)$$

t. i., patērētāja līdzsvara punktā preces marginālā derīguma un tā cenas attiecība ir konstants lielums (vienāds ar  $\lambda$ ).

2. piezīme. Līdzsvara punkta atrašanas uzdevumam vienādība (12.21) iegūst formu

$$u'_i = \lambda.$$

Tātad,  $\lambda$  ir preču klāsta maksimālā derīguma izmaiņas ātrums, mainoties ienākumiem. Ne tik matemātiski precīzi, bet pietiekami uzskatāmi to var izteikt arī šādi:  $\lambda$  ir preču klāsta maksimālā derīguma izmaiņa, ja ienākumi palielinās par vienu naudas vienību, vai  $\lambda$  ir vienai papildus naudas vienībai atbilstošs derīgums; citiem vārdiem,  $\lambda$  ir *naudas marginālais derīgums*.

## Paškontroles jautājumi

1. Ko sauc par  $n$  mainīgo funkciju? Nosauciet ekonomikā lietojamus šādu funkciju piemērus.
2. Ko sauc par līmeņvirsmu (līniju)? Kas ir vienaldzības līnijas?
3. Dodiet funkcijas parciālā pieauguma un parciālā atvasinājuma definīcijas.
4.  $z = \sqrt{x^2 + xy^3}$ . Atrodiet  $z'_x$  un  $z'_y$ .
5. Pieņemsim, ka  $U = C \cdot K^\alpha \cdot L^\beta$  ir ražošanas funkcija. Aprēķiniet tās elastību pēc mainīgā  $L$ . Dota ražošanas funkcija  $U = C \cdot K^{0,8} \cdot L^{0,3}$ . Kāda ir kāpinātāju 0,8 un 0,3 ekonomiskā jēga?
6. Dodiet  $n$  mainīgo diferencējamas funkcijas definīciju. Nosauciet diferencējamības nepieciešamos nosacījumus un pietiekamos nosacījumus. Salīdziniet ar viena mainīgā funkcijas gadījumu.
7. Dodiet apslēptās funkcijas definīciju. Formulējiet tās eksistences un diferencējamības teorēmu.
8. Kas ir aizvietošanas marginālā norma? Dota derīguma funkcija  $u = xy$ . Atrodiet marginālo normu preces  $X$  aizvietojumam ar preci  $Y$  punktā  $(2, 1)$ .
9. Dodiet lokālā maksimuma punkta definīciju. Nosauciet vairāku mainīgo funkcijas ekstrēmu punktu nepieciešamos nosacījumus, divu mainīgo funkcijas ekstrēma pietiekamos nosacījumus.
10.  $z = x^2y + x^3y - 3x^2y^2$ . Atrodiet ekstrēma punktus.
11. Kas ir Lagranža uzdevums? Kāda ir Lagranža nenoteikto reizinātāju metodes būtība?
12. Dota derīguma funkcija  $u = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}$  un cenu vektors  $p = (4, 2, 5)$ . Noteikt preču klāstu, kurš ar doto ienākumu  $I = 50$  ļauj iegūt maksimālo derīgumu.
13. Kādiem mērķiem tiek izmantota mazāko kvadrātu metode? Izklāstiet metodes ideju.

## Vingrinājumi

Atrast un attēlot funkciju (1. – 10.) definīcijas apgabalus:

1.  $z = \ln(x + y - 4)$ .
2.  $z = \sqrt{x^2 + y + 1}$ .
3.  $z = \log_2\left(y - \frac{2}{x}\right)$ .
4.  $z = \ln(y^2 - 3x + 2)$ .

5.  $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$ .

6.  $z = \ln(x - 2\sqrt{y})$ .

7.  $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}$ .

8.  $z = \frac{1}{x^2 - y^2}$ .

9.  $z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x}$ .

10.  $z = \sqrt{xy} + \sqrt{y-x}$ .

11. Uzzīmēt 1. – 7. piemēros aplūkoto funkciju līmeņlīnijas (virsmas).

Uzzīmēt funkciju (12. – 16.) līmeņlīnijas (virsmas):

12.  $z = e^{y-x^2}$ .

13.  $z = \sqrt{y + \frac{1}{x}}$ .

14.  $z = 3^{x+y-1}$ .

15.  $4 = x + y + 2z$ .

16.  $u = 2^{x+y-z}$ .

17. Uzzīmēt vienaldzības līnijas sekojošām derīguma funkcijām:

a)  $u = 2 \ln x + 3 \ln y$ ,

b)  $u = \min\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)$ .

18. Divfaktoru ražošanas funkcijas līmeņlīnijas sauc par **izokvantām**. Uzzīmēt izokvantas:

a) lineārai ražošanas funkcijai

$$z = 2x + 3y,$$

b) Koba-Duglasa ražošanas funkcijai

$$z = bL^{0.5} \cdot K^{0.5}.$$

Aprēķināt parciālos atvasinājumus (19. – 34.):

19.  $z = x^2y - 2x + y^2$ .

20.  $z = \frac{x^2}{y}$ .

21.  $z = x^{3y}$ .

22.  $z = \sqrt{2xy - 4x}$ .

23.  $z = \ln(xy + 3x - y)$ .

24.  $z = \sin \frac{x}{y}$ .

25.  $z = \operatorname{tg}(xy - x\sqrt{x+y})$ .

26.  $u = 2^{xyz}$ .

27.  $u = \cos(xy + yz)$ .

28.  $u = (x^2y + y^2z + 4z)^{10}$ .

$$29. u = x^y \cdot \sqrt{xz + yz}. \quad 30. u = \log_2(xz + \sqrt{1 - y^2}).$$

$$31. u = \sqrt[5]{x_1 + 2\sqrt{x_2 x_3}}. \quad 32. u = \sqrt[3]{y + \sqrt{xz}}.$$

$$33. u = z \cdot \cos^4(2x - 3y). \quad 34. u = e^{xy} \cdot \sqrt{y - z}.$$

Aprēķināt parciālos atvasinājumus norādītajos punktos:

$$35. z = \sqrt{4x^2 + y} + \sqrt{x}, \quad M(1; 5).$$

$$36. z = \ln(xy + \sqrt{x}), \quad M(1; 0).$$

$$37. z = 5^{xy-4}, \quad M(2; 3).$$

Aprēķināt sekojošu funkciju elastību pēc katra mainīgā:

$$38. u = xyz. \quad 39. u = 2x_1 + x_2 + 3x_3.$$

$$40. z = \frac{x_1 x_2}{x_3(x_1 + x_3)}. \quad 41. z = x^{1/5} \cdot y^{4/5}.$$

$$42. u = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}.$$

$$43. \text{Dota ražošanas funkcija} \quad z = 2x + 6y.$$

Aprēķināt tās elastību pēc mainīgā  $x$  punktā  $(4; 2)$ .

$$44. \text{Dota pieprasījuma funkcija} \quad q_D = 20 - 0,8p + 0,2I,$$

kur  $p$  ir preces cena,  $I$  – pircēja ienākumi. Aprēķināt pieprasījuma elastību

a) pēc ienākumiem;

b) pēc cenas punktā  $(4; 200)$ , ( $p = 4; I = 200$ ).

Ko nozīmē katra no iegūtajām vērtībām?

$$45. \text{Zināma preces } A \text{ pieprasījuma funkcija} \quad q_D = 100 - 2,5p + 1,3p_1 - 0,8p_2 - I,$$

kur  $p$  ir preces  $A$  cena,  $p_1$  ir preces  $B$  cena,  $p_2$  ir preces  $C$  cena,  $I$  – pircēja ienākumi. Vai prece  $A$  ir normāla; vai zemas kvalitātes? Kura no precēm  $B$  un  $C$  precī  $A$  papildina un kura aizvieto?

46. Atrast 19. – 34. piemēru funkciju pilnos diferenciāļus.

47. Atrast pilnos diferenciāļus:

$$a) z = \frac{xy}{y^2 - 4x}; \quad b) z = \sin(xy + 2).$$

Atrast apslēpto funkciju atvasinājumus ( $\frac{dy}{dx}$  – 48. – 51. piemēram,  $\frac{dz}{dx}$  –

52. piemērā):

48.  $xy - x^2 - y^2 = 1$ .

49.  $xy + \cos x = 0$ .

50.  $xe^y + 2ye^x = 3$ .

51.  $x^2 + y^2 + 2xy = 0$  (punktā  $M(1; 1)$ ).

52.  $e^x + 2yz = 0$  (punktā  $M(0; -1; 0,5)$ ).

53. Dota derīguma funkcija

$$u = \sqrt[3]{x_1} + 2\sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_3}.$$

Atrast marginālo normu preces  $X_1$  aizvietojumam ar precī  $X_2$  punktā  $(1, 8, 1)$ .

54. Lietojot apslēptās funkcijas atvasinājuma formulu, atrast pieprasījuma elastību norādītām  $p$  un  $q$  vērtībām:

a)  $p^2 + pq + \sqrt{q} = 25$ ,  $p = 2$ ,  $q = 9$ ;

b)  $2p^3 + pq + 3q^{\frac{3}{2}} = 294$ ,  $p = 5$ ,  $q = 4$ .

Atrast funkciju (55. – 68.) ekstrēma punktus:

55.  $z = x^3 + 2x^2 - xy + \frac{y^2}{2}$ .

56.  $z = x^2 + 4x^2y + 2y^2$ .

57.  $z = x^3 + y^3 + 6xy$ .

58.  $z = x^2 + xy^2 + y^3$ .

59.  $z = 2x^2 - 4xy + 6y^2 - 8x + 16$ .

60.  $z = x^2 + 4xy - 2y^2 + 4x + 2y$ .

61.  $z = x^3 + 3xy^2 - 10x - 6y$ .

62.  $z = x^2y + 2y^2 + 4x$ .

63.  $z = x^2 + 2xy - 3y^2 + y$ .

64.  $z = x^2 + x^3 - xy + y^2$ .

65.  $z = 2y^3 + 6x^2y - 20y + 12x + 10$ .

66.  $z = x^2 - y^2$ .

67.  $z = e^{xy}(x - 2y)$ .

68.  $z = x^3 + y^3 - 4xy$ .

69. Starp saražotās preces apjomu  $q$  un pirmā un otrā tipa izmantoto izejvielu daudzumiem  $x_1$  un  $x_2$  pastāv sekojoša sakarība:  $q = 0,25\sqrt{x_1} + 0,75\sqrt{x_2}$ .

Preces cena ir vienāda ar 20 Ls, pirmās izejvielas cena ir 3 Ls, otrās – 2,5 Ls.

Preces vienības izlaidei nepieciešamās darba izmaksas ir 5 Ls. Ar kādu saražotās preces apjomu peļņa būs vislielākā?

70. Zināmas divas saražoto preču cenas:  $p_1 = 30$  Ls un  $p_2 = 50$  Ls. Zināma arī izmaksu funkcija  $C = 0,25x_1^2 + 2x_1 + x_1x_2 + 3x_2^2$ . Ar kādu saražotās preces apjomu peļņa būs vislielākā?

71. Atrast punktus, kuros izpildās funkcijas nosacītā ekstrēma nepieciešamais nosacījums:

a)  $z = x^2 + y^2$ , ja  $2x + 3y = 4$ ;

b)  $z = x + 2x^2 + y$ , ja  $x - 2y = 3$ .

72. Kādiem jābūt izmēriem taisnstūra paralēlskaldņa formas kastei ar tilpumu  $V$ , lai tās izgatavošanai būtu nepieciešams minimālais izejvielu daudzums?

Norāde. Iegūtos vienādojumus  $L'_x = 0$ ,  $L'_y = 0$ ,  $L'_z = 0$  atbilstoši pareizināt ar  $x$ ,  $y$ ,  $z$  un pierādīt, ka  $x = y = z$ .

73. Zināma derīguma funkcija  $u = x_1x_2$  un cenu vektors  $p = (2; 3)$ .

a) Noteikt preču klāstu, kurš ar doto ienākumu  $I = 30$  ļautu iegūt maksimālo derīgumu.

b) Kā izmainīsies derīguma maksimums, ja ienākumu līmenis palielināsies līdz 32?

74. Iepriekšējā piemēra derīguma funkcijai un cenu vektoram ar doto derīguma līmeni  $u = 5$  atrast pircēja minimālos izdevumus.

75. Atrast derīguma funkcijas  $u = x_1x_2$  maksimumam atbilstošu preču klāstu  $x = (x_1, x_2)$ , pastāvot budžeta ierobežojumiem  $p_1x_1 + p_2x_2 = I$ . Kāda ir  $x_1$  un  $x_2$  iegūto izteiksmju jēga?

76. Atrisināt iepriekšējo uzdevumu derīguma funkcijai  $u = x_1x_2x_3$  un budžeta ierobežojumiem  $p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = I$ .

77. Zināma derīguma funkcija  $u = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_3}$  un cenu vektors  $p = (4, 1, 9)$ .

a) Atrast pircēja minimālās izmaksas ar derīguma līmeni  $u = 11$ .

b) Kā izmainīsies šīs minimālās izmaksas, ja derīguma līmenis būs 11,4?

78. Lietojot mazāko kvadrātu metodi, atrast pieprasījuma funkcijas analītisko izteiksmi, kurai zināmas šādas empīriskās vērtības:

a)

$p_i$	2	4	6	8
$q_i$	8,81	7,58	6,37	5,24

b)

$p_i$	1	3	5	7	9
$q_i$	6,1	3,6	2,34	1,74	1,31

79. Zināma ražošanas funkcija  $U = 2K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{3}{4}}$  un darba apjoma un kapitāla ierobežojumi  $K + 3L = 48$ . Atrast maksimāli iespējamo produkcijas apjomu.

80. Firma plāno darba algas un izejvielu iepirkšanas izmaksas 50 000 Ls apmērā gadā. Ja ar  $L$  apzīmējam darba algas izmaksas, ar  $R$  – izejvielas izmaksas, tad ražošanas funkcijai ir šāds veids

$$U = 10L^{1/2} \cdot R^{1/2}$$

Kā pārdalīt izmaksas starp darba algu un izejvielu iepirkumu, lai saražotās produkcijas apjoms būtu maksimālais?

### 13. DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMI

Daudzu uzdevumu, tai skaitā arī ekonomisko, risināšanas gaitā iegūst vienādojumus, kuri satur gan meklējamo funkciju, gan arī šīs funkcijas atvasinājumus. Šādus vienādojumus sauc par diferenciālvienādojumiem. Piemēram, pieņemsim, ka preces cena mainās laikā,  $p = p(t)$ , bet pieprasījums  $q_D$  un piedāvājums  $q_S$  ir atkarīgi ne tikai no preces cenas, bet arī no šīs cenas izmaiņas ātruma, t. i.,  $q_D = D(p, p')$  un  $q_S = S(p, p')$ . Tad līdzsvara cenas noteikšanai jāaplūko vienādojums  $D(p, p') = S(p, p')$ , kurā nezināma ir funkcija  $p(t)$ , kas atspoguļo līdzsvara cenas atkarību no laika. Vienādojums satur arī šīs funkcijas atvasinājumu.

Pēc šīs nodaļas apguves jūs:

- izpratīsīt diferenciālvienādojumu nozīmi ekonomikas uzdevumu risinājumos;*
- pārzināsīt pamatjēdzienus: diferenciālvienādojumu, tā kārtu, tā atrisinājumu, partikulāro atrisinājumu;*
- praīsīt atrisināt vienkāršākos pirmās un otrās kārtas diferenciālvienādojumus;*
- lietosīt diferenciālvienādojumus dažu ekonomikas uzdevumu risinājumos.*

#### 13.1. Pamatdefinīcijas

Par *diferenciālvienādojumu* sauc vienādojumu, kurš saista argumentu, nezināmo funkciju un tās atvasinājumus. Ja nezināmā funkcija ir atkarīga no viena mainīgā, tad diferenciālvienādojumu sauc par parastu. Ja nezināmā funkcija ir vairāku mainīgo funkcija, tad to sauc par parciālo diferenciālvienādojumu. Mēs aplūkosim tikai parastos diferenciālvienādojumus. Šāda vienādojuma vispārīgā forma ir:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Par diferenciālvienādojuma *kārtu* sauc tajā ietilpstošo atvasinājumu augstāko kārtu. Piemēram, vienādojums  $y' + 2y + x = 0$  ir pirmās kārtas vienādojums, bet vienādojums  $y'' = xy'y$  ir otrās kārtas vienādojums. Par diferenciālvienādojuma *atrisinājumu* sauc funkciju, kuru līdz ar tās atvasinājumiem ievietojojot diferenciālvienādojumā iegūst identitāti.

Tiešā integrēšana ir diferenciālvienādojuma risināšanas vienkāršākais gadījums. Piemēram, aplūkosim vienādojumu  $y' = 3x^2$ . To integrējot, iegūsim funkciju kopu  $y = x^3 + C$ , kuras visas ir dotā vienādojuma atrisinājumi. Šis piemērs

rāda, ka diferenciālvienādojumam var būt bezgalīgi daudz atrisinājumu. Diferenciālvienādojuma visu atrisinājumu kopu sauc par *vispārīgo atrisinājumu*. Lai no tādas kopas izdalītu konkrēto atrisinājumu, nepieciešami papildus nosacījumi. Tos var uzdot dažādās formās. Visbiežāk tie ir tā saucami sākuma nosacījumi. To skaits ir atkarīgs no vienādojuma kārtas. Atrisinājumu, kurš apmierina sākuma nosacījumus sauc par *partikulāro atrisinājumu*.

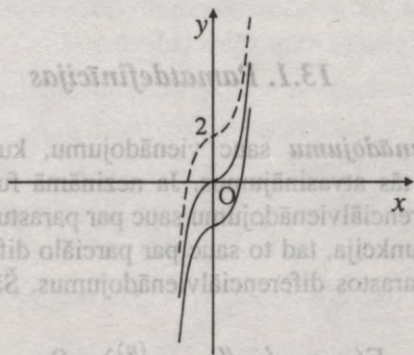
### 13.2. Pirmās kārtas diferenciālvienādojumi

Pirmās kārtas diferenciālvienādojuma vispārīgais veids ir  $F(x, y, y') = 0$ . Vienādojumu

$$y' = f(x, y) \quad (13.1)$$

sauc par tā normālformu.

Pirmās kārtas vienādojumam sākuma nosacījums ir  $y(x_0) = y_0$ . Ģeometriski tas nosaka punktu  $(x_0, y_0)$ , caur kuru iet meklējamā līkne  $y = y(x)$  - *partikulārā atrisinājuma grafiks*. Aplūkosim iepriekšējā punktā minēto diferenciālvienādojumu  $y' = 3x^2$  un tā atrisinājumu kopu  $y = x^3 + C$ . Diferenciālvienādojumu atrisinājumu grafikus parasti sauc par integrāllīnijām. Minētam piemēram šīs līknes attēlotas 13.1. zīm.



13.1. zīm.

Sākuma nosacījums  $y(0) = 2$  no visu atrisinājumu kopas izdala to, kura grafiks iet caur punktu  $(0, 2)$ . 13.1. zīm. šis grafiks attēlots ar raustītu līniju.

Var uzdot jautājumus: vai caur katru plaknes punktu iet diferenciālvienādojuma  $y' = f(x, y)$  integrāllīnija; ja caur doto punktu iet integrāllīnija, vai tā ir vienīgā? Šī jautājuma daļēja atbilde ir apgalvojums, kuru dosim bez pierādījuma.

**Teorēma (atrisinājuma eksistence un unitāte).** Pieņemsim, ka dots vienādojums

$$y' = f(x, y).$$

Ja funkcija  $f(x, y)$  un tās parciālais atvasinājums  $f_y'(x, y)$  ir nepārtraukti kādā apgabālā  $D$ , tad katrā šī apgabala punktā  $(x_0, y_0)$  eksistē un pie tam vienīgais dotā diferenciālvienādojuma atrisinājums  $y = \varphi(x)$ , kas apmierina nosacījumu  $y(x_0) = y_0$ .

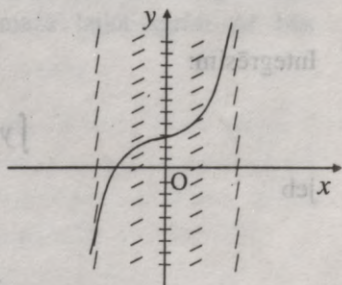
Geometriski tas nozīmē, pirmkārt, ka caur katru apgabala  $D$  punktu  $(x_0, y_0)$ , kurš minēts teorēmā, iet dotā vienādojuma atrisinājums, un, otrkārt, tāds caur punktu  $(x_0, y_0)$  ejošs atrisinājums ir tikai viens.

Aplūkosim pirmās kārtas diferenciālvienādojuma  $y' = f(x, y)$  ģeometrisko skaidrojumu (interpretāciju).

Pieņemsim, ka  $D$  ir apgabals, kurš minēts atrisinājuma eksistences un unitātes teorēmā, un punkts  $(x_0, y_0) \in D$ . Funkcijas  $f(x, y)$  vērtību  $f(x_0, y_0)$  šajā punktā nosaka atvasinājuma  $y'$  vērtība, t. i., integrālās līnijas pieskares virziena koeficients šajā punktā. Tātad, vienādojums  $y' = f(x, y)$  katram punktam no apgabala  $D$  piekārto noteiktu virzienu. Apgabalu  $D$  kopā ar doto virzienu kopu sauc par virzienu lauku.

Var apgalvot, ka diferenciālvienādojuma ģeometriskā interpretācija ir tā dotais virzienu lauks. Aplūkotajam piemēram  $y' = 3x^2$  virzienu lauks ir parādīts 13.2. zīm., kurā ir attēlota arī integrāllīnija, kuras pieskares katrā punktā sakrīt ar virzienu lauku.

Aplūkosim dažus diferenciālvienādojumu veidus.



13.2. zīm.

### 13.3. Diferenciālvienādojumi ar atdalāmiem mainīgajiem

Sekojošas formas diferenciālvienādojumu

$$y' = f(x) \cdot g(y) \quad (13.2)$$

sauc par vienādojumu ar atdalāmiem mainīgajiem. Pārrakstīsim vienādojumu

(13.2) formā  $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$ . Iegūsim, ka

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx. \quad (13.3)$$

Pārveidojumu no vienādojuma (13.2) uz vienādojumu (13.3) sauc par mainīgo atdalīšanu. Integrēsim vienādojumu (13.3):  $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$ . Iegūsim vienā-

dojumu  $G(y) = F(x) + C$ , kas nosaka atrisinājumu  $y = y(x)$  kā apslēptu mainīgā  $x$  funkciju.

Piemēri.

1. Atrisināt vienādojumu

$$y' = x\sqrt{y(1+x^2)}.$$

Atrisinājums. Uzrakstīsim vienādojumu šādā formā

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y} \cdot x\sqrt{1+x^2},$$

no tā seko, ka

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = x\sqrt{1+x^2} dx.$$

Integrēsim:

$$\int y^{-\frac{1}{2}} dy = \frac{1}{2} \int 2x(1+x^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\frac{\frac{1}{y^{\frac{1}{2}}}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C.$$

Pārveidosim:

$$2\sqrt{y} = \frac{1}{3} \sqrt{(1+x^2)^3} + C.$$

Ieguvām vienādojuma vispārīgo atrisinājumu kā apslēptu mainīgā  $x$  funkciju.

2. Atrast diferenciālvienādojuma

$$y' = \frac{y \ln y}{x},$$

atsisinājumu, kurš apmierina sākuma nosacījumu:  $y(1) = e$ .

Atrisinājums.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \ln y}{x}.$$

Atdalām mainīgos:

$$\frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{x}.$$

Integrējot pēdējā vienādojuma abas puses, iegūsim:

$$\ln|\ln y| = \ln|x| + \ln|C| \quad \text{jeb} \quad \ln|\ln y| = \ln|Cx|.$$

No tā seko, ka  $\ln y = Cx$ ; noslēgumā iegūsim vispārīgo atrisinājumu  $y = e^{Cx}$ . Ievietosim vispārīgo atrisinājumu sākuma nosacījumā  $y(1) = e$ :  $e = e^{C \cdot 1}$ . No tā seko, ka  $C = 1$ ; tātad partikulārais atrisinājums, kas apmierina sākuma nosacījumu, ir funkcija  $y = e^x$ .

3. Aplūkosim vēlreiz 8. nodaļā iztīrāto *uzdevumu par nepārtrauktiem procentiem*. Nepārtrauktos procentus var uzskatīt kā relatīvo (t. i., uz vienu naudas vienību) bankā noguldītā kapitāla izmaiņas ātrumu. Paskaidrosim to konkrētāk: pieņemsim, ka  $K$  ir bankas kapitāla mainīgā vērtība,  $i$  ir procentu likme. Tad kapitāla pieaugums  $\Delta K$  pietiekami mazā laika sprīdī  $\Delta t$  būs  $\Delta K = K \cdot i \cdot \Delta t$ , no tā seko, ka

$$i = \frac{\Delta K}{\Delta t} : K.$$

Pārejot uz robežu, kad  $\Delta t \rightarrow 0$ , iegūsim:

$$i = \frac{K'(t)}{K}.$$

Tā kā  $K'(t)$  ir kapitāla palielināšanās ātrums, tad šis vienādojums nozīmē, ka nepārtraukto banku procentu likme  $i$  ir vienas naudas vienības liela kapitāla palielināšanās. Vienādojums  $i = \frac{K'(t)}{K}$  ir diferenciālvienādojums ar atdalāmiem mainīgajiem

$$K' = i \cdot K$$

jeb

$$\frac{dK}{dt} = i \cdot K.$$

Atdalām mainīgos:  $\frac{dK}{K} = idt$ . Integrējot iegūsim:  $\ln K = i \cdot t + C$  jeb

$K = e^{it+C}$ . Apzīmēsim ar  $K_0$  sākuma kapitālu, t. i., kapitālu laika momentā  $t = 0$ . Tad  $K_0 = e^{i \cdot 0 + C} = e^C$ . Tātad

$$K = e^{it+C} = e^{it} \cdot e^C = K_0 \cdot e^{it}.$$

Formula  $K = K_0 \cdot e^{it}$  rāda kapitāla lielumu laika momentā  $t$ , ja sākuma kapitāls ir vienāds ar  $K_0$ , banku procenti ir nepārtraukti un procentu likme ir vienāda ar  $i$ .

### 13.3. Pirmās kārtas lineārie diferenciālvienādojumi

Par lineāro pirmās kārtas diferenciālvienādojumu sauc vienādojumu

$$y' + a(x)y = b(x), \quad (13.4)$$

kur  $a(x)$  un  $b(x)$  ir zināmas funkcijas; t. i., šis vienādojums ir lineārs attiecībā pret nezināmo funkciju un tās atvasinājumu. Ir vairākas šī uzdevuma risināšanas metodes. Mēs aplūkosim substitūcijas metodi. Meklēsim atrisinājumu  $y(x)$  divu nezināmo funkciju reizinājuma formā:  $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ . Tad  $y' = u'v + uv'$ . Ievietojot vienādojumā (13.4), iegūsim:

$$u'v + uv' + a(x)uv = b(x). \quad (13.5)$$

Ir iegūts viens vienādojums ar divām nezināmām funkcijām  $u(x)$ ,  $v(x)$ . Vienu no šīm funkcijām, piemēram  $v(x)$ , mēs varam izvēlēties pēc saviem apsvērumiem, otru funkciju nosaka šī izvēle un vienādojums (13.5).

Pārveidosim vienādojumu (13.5) šādi

$$u'v + u(v' + a(x)v) = b(x). \quad (13.6)$$

Pielīdzināsim izteiksmi  $v' + a(x)v$  nullei un no iegūtā vienādojuma  $v' + a(x)v = 0$  izteiksim  $v$ .

$$\frac{dv}{dx} + a(x)v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -a(x)v \Rightarrow \frac{dv}{v} = -a(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int a(x)dx \Rightarrow \ln|v| = -\int a(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = e^{-\int a(x)dx}. \quad (13.7)$$

Ievietojot atrasto  $v$  vienādojumā (13.6), iegūsim  $u'v = b(x)$ , kur  $v$  nosaka formula (13.7). Atrisinot iegūto vienādojumu ar atdalāmiem mainīgajiem, atrodam  $u(x)$ . Tā kā  $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ , tad atliek tikai sareizināt atrastos  $u(x)$  un  $v(x)$ .

Piemērs. Atrast diferenciālvienādojuma

$$y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x,$$

partikulāro atrisinājumu, kas apmierina nosacījumu  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ .

Atrisinājums. Pieņemsim  $y = uv$ , tad  $y' = u'v + uv'$ . Ievietojot dotajā vienādojumā, iegūsim:

$$u'v + uv' - uv \cdot \operatorname{ctg} x = 2x \sin x$$

jeb

$$u'v + u(v' - v \cdot \operatorname{ctg} x) = 2x \cdot \sin x. \quad (13.8)$$

Atrisinām

$$v' - v \cdot \operatorname{ctg} x = 0 \Rightarrow v' = v \cdot \operatorname{ctg} x \Rightarrow \frac{dv}{dx} = v \cdot \operatorname{ctg} x \Rightarrow \frac{dv}{v} = \operatorname{ctg} x dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int \frac{\cos x dx}{\sin x} \Rightarrow \ln|v| = \ln|\sin x| \Rightarrow v = \sin x.$$

Ievietojot atrasto  $v$  vienādojumā (13.8), iegūsim:

$$u' \sin x = 2x \cdot \sin x \Rightarrow u' = 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int du = \int 2x dx \Rightarrow u = x^2 + C.$$

Tā kā  $y = uv$ , iegūsim vispārīgo atrisinājumu

$$y = (x^2 + C) \cdot \sin x.$$

Ņemot vērā sākuma nosacījumu  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ , atradīsim  $C$ :

$$0 = \left(\frac{\pi^2}{4} + C\right) \cdot \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi^2}{4} + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{\pi^2}{4}.$$

Tātad, partikulārais atrisinājums ir vienāds ar

$$y = \left(x^2 - \frac{\pi^2}{4}\right) \sin x.$$

### 13.5. Homogēns pirmās kārtas diferenciālvienādojums

Vienādojumu  $y' = f(x, y)$  sauc par homogēnu, ja funkcija  $f(x, y)$  apmierina nosacījumu: patvaļīgam parametram  $t$  pastāv vienādība  $f(tx, ty) = f(x, y)$ . Piemēram,  $y' = \frac{x^2 + y^2}{y^2}$ . Šajā gadījumā  $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{y^2}$ ; Tad  $f(tx, ty) = \frac{(tx)^2 + (ty)^2}{(ty)^2} = \frac{t^2(x^2 + y^2)}{t^2 y^2} = \frac{x^2 + y^2}{y^2} = f(x, y)$  un izpildās

homogenitātes nosacījums.

Funkcijas, kuras apmierina minēto nosacījumu, var pārveidot formā  $f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ . Tiešām, tā kā parametru  $t$  var brīvi izvēlēties, ņemsim  $t = \frac{1}{x}$ .

Tad  $f(x, y) = f(tx, ty) = f\left(\frac{1}{x}x, \frac{1}{x}y\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ . Tas nozīmē, ka homogēnu diferenciālvienādojumu var uzrakstīt šādi

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \quad (13.9)$$

Iegūto vienādojumu ar substitūcijas  $\frac{y}{x} = u$  palīdzību var pārveidot par vienādojumu ar atdalāmiem mainīgajiem. Tiešām, pieņemsim, ka

$$\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u'x + u.$$

Iegūto izteiksmi ievietosim vienādojumā (13.9):

$$\begin{aligned} u'x + u &= \varphi(u) \Rightarrow u'x = \varphi(u) - u \Rightarrow \frac{du}{dx} \cdot x = \varphi(u) - u \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{du}{\varphi(u) - u} &= \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \ln|x| + \ln c. \end{aligned}$$

Aprēķinot integrāli pēdējās vienādības kreisajā pusē un ievietojot  $u = \frac{y}{x}$ , iegūsim homogēnā vienādojuma vispārīgo atrisinājumu.

Piemērs. Atrisināt vienādojumu

$$(y - x)ydx + x^2dy = 0.$$

Atrisinājums. Pārveidosim vienādojumu sekojošā formā

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{(y - x)y}{x^2}. \quad (13.10)$$

Tas ir homogēns vienādojums. Tiešām,

$$f(tx, ty) = -\frac{(ty - tx)ty}{(tx)^2} = -\frac{t^2(y - x)y}{t^2x^2} = -\frac{(y - x)y}{x^2} = f(x, y).$$

Risinājumā lietojam substitūciju  $\frac{y}{x} = u$  vai  $y = ux$ . Tad  $y' = u'x + u$ . Ieviešam formulā (13.10):

$$u'x + u = -\frac{(ux - x)ux}{x^2}$$

jeb

$$u'x + u = -\frac{x^2(u - 1)u}{x^2} \Rightarrow u'x + u = -u^2 + u \Rightarrow u'x = -u^2 \Rightarrow \frac{du}{dx}x =$$

$$= -u^2 \Rightarrow \frac{du}{u^2} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int u^{-2} du = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{u^{-1}}{-1} =$$

$$= -\ln|x| - \ln|c| \Rightarrow \frac{1}{u} = \ln|cx|.$$

Aizvietojot  $u = \frac{y}{x}$ , iegūsim  $\frac{x}{y} = \ln|cx|$  jeb  $y = \frac{x}{\ln|cx|}$ .

### 13.6. Augstāku kārtu diferenciālvienādojumi

Iepriekšējos punktos aplūkojām pirmās kārtas diferenciālvienādojumu dažus vienkāršākos veidus. Virknē ekonomikas uzdevumu, piemēram, pētot fondu rezervju ietekmi uz cenu līmeni, nepieciešams atrisināt augstākas kārtas diferenciālvienādojumus. Mēs aplūkosim tikai otrās kārtas diferenciālvienādojumus. Vispārīgā veidā šādu vienādojumu var uzrakstīt šādi:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (13.11)$$

vai, ja to var pārveidot atklāti attiecībā pret augstākās kārtas atvasinājumu,

$$y'' = f(x, y, y'). \quad (13.12)$$

Otrās kārtas vienādojuma sākuma nosacījumus raksta šādi:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0. \end{cases} \quad (13.13)$$

Geometriski sākuma nosacījumi definē punktu  $(x_0, y_0)$ , caur kuru jāiet integrāllīnijai un šīs līknes pieskares virzienu.

Augstāku kārtu diferenciālvienādojumiem ir spēkā atrisinājuma eksistences un unitātes teorēma, kas ir formulēta līdzīgi 13.2. p. minētajai pirmās kārtas diferenciālvienādojumu teorēmai.

Augstāku kārtu diferenciālvienādojumu integrēšana ir sarežģītāka nekā pirmās kārtas diferenciālvienādojumu gadījumā. Viena no šādu vienādojumu risināšanas metodēm (ja tas ir iespējams) ir vienādojuma kārtas pazemināšana.

### 13.7. Diferenciālvienādojuma kārtas pazemināšana

Aplūkosim divus gadījumus, kuros otrās kārtas diferenciālvienādojums pieļauj šādu kārtas pazemināšanu.

#### 1. Diferenciālvienādojumam ir sekojoša forma

$$y'' = f(x, y'),$$

t. i., vienādojums atklāti nesatur  $y$ . Apzīmēsim  $y' = z(x)$ , tad  $y'' = z'(x)$ . Vienādojums vienkāršojas:  $z' = f(x, z)$ . Tas ir pirmās kārtas vienādojums. Atradīsim tā vispārīgo atrisinājumu  $z = \varphi(x, c_1)$ . Ievietosim  $z$  vietā  $y'$ :  $y' = \varphi(x, c_1)$ . Integrējot šo vienādību, iegūsim:  $y = \int \varphi(x, c_1) dx + c_2$ .

Piemērs, Atrisināt diferenciālvienādojumu

$$y'' = \frac{y'}{x \cdot \ln x}.$$

Apzīmēsim  $y' = z(x)$ . Tad  $y'' = z'(x)$ ,  $z' = \frac{z}{x \cdot \ln x}$ . Tas ir vienādojums ar atdalāmiem mainīgajiem.

$$\frac{dz}{z} = \frac{z}{x \cdot \ln x} \quad \text{vai} \quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x \cdot \ln x} \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x \cdot \ln x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|z| = \ln|\ln x| + \ln|c_1| \Rightarrow z = c_1 \ln x.$$

Ievietosim  $z$  vietā  $y'$ . Iegūsim  $y' = c_1 \ln x$ . Integrēsim pa daļām

$$\begin{aligned} y &= c_1 \int \ln x dx \left| \begin{array}{l} \ln x = u \quad du = \frac{1}{x} dx \\ dx = dv \quad v = x \end{array} \right. = c_1 (uv - \int v du) = \\ &= c_1 \left( x \cdot \ln x - \int x \frac{1}{x} dx \right) = c_1 (x \cdot \ln x - x + c_2). \end{aligned}$$

Atbilde:  $y = c_1(x \cdot \ln x - x + c_2)$ .

## 2. Diferenciālvienādojumam ir sekojoša forma

$$y'' = f(y, y'),$$

t. i., vienādojums atklātā veidā nesatur  $x$ . Lietosim sekojošu substitūciju:

$$\frac{dy}{dx} = y' = p(y). \text{ Tad } y'' = \frac{d(y')}{dx}. \text{ Tas ir saliktas funkcijas atvasinājums, jo}$$

$y' = p(y)$ ,  $y = y(x)$ . Tādēļ  $y'' = p'(y) \cdot y'(x) = p' \cdot p$ . Ievietosim sākuma vienādojumā

$$p'p = f(y, p).$$

Tas ir pirmās kārtas diferenciālvienādojums ar argumentu  $y$  un nezināmo funkciju  $p(y)$ . Atrādīsim šī vienādojuma vispārīgo atrisinājumu:  $p = g(y, c_1)$ .

$$\text{Aizvietojam } p \text{ ar } \frac{dy}{dx}: \frac{dy}{dx} = g(y, c_1). \text{ Tad } \frac{dy}{g(y, c_1)} = dx, \int \frac{dy}{g(y, c_1)} = \int dx.$$

Apzīmējot integrāli kreisajā pusē ar  $G(y, c_1)$ , iegūsim sākuma vienādojuma vispārīgo atrisinājumu:  $G(y, c_1) = x + c_2$ .

Augstākās kārtas diferenciālvienādojumu svarīga klase ir lineārie diferenciālvienādojumi.

## 13.8. Lineāri otrās kārtas diferenciālvienādojumi

Par lineāru  $n$ -tās kārtas diferenciālvienādojumu sauc vienādojumu, kas ir lineārs attiecībā pret nezināmo funkciju  $y$  un tās atvasinājumiem  $y'$ ,  $y''$ , ...,  $y^{(n)}$ . Lineārs otrās kārtas diferenciālvienādojums ir šāds

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = \varphi(x), \quad (13.14)$$

kur  $a_1(x)$ ,  $a_2(x)$ ,  $\varphi(x)$  ir zināmas funkcijas. Uzskatīsim, ka šīs funkcijas ir nepārtrauktas. Ja  $\varphi(x) \equiv 0$ , tad vienādojumu sauc par *lineāru homogēnu*, pretējā gadījumā par – *lineāru nehomogēnu*.

Aplūkosim lineāru otrās kārtas diferenciālvienādojumu atrisinājumu dažas īpašības.

1. teorēma. Ja  $y_1(x)$  un  $y_2(x)$  ir atrisinājumi lineāram homogēnam diferenciālvienādojumam

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \quad (13.15)$$

bet  $c_1$  un  $c_2$  ir konstantes, tad funkcija  $y = c_1y_1 + c_2y_2$  (to sauc par funkciju  $y_1$  un  $y_2$  lineāru kombināciju) arī ir vienādojuma (13.15) atrisinājums.

Pierādījums. Vienādojuma (13.15) labajā pusē ievietosim  $c_1y_1 + c_2y_2$ :

$$\begin{aligned} (c_1y_1 + c_2y_2)'' + a_1(x) \cdot (c_1y_1 + c_2y_2)' + a_2(x) \cdot (c_1y_1 + c_2y_2) &= \\ = c_1y_1'' + c_2y_2'' + a_1 \cdot (c_1y_1' + c_2y_2') + a_2 \cdot (c_1y_1 + c_2y_2) &= \\ = c_1y_1'' + a_1c_1y_1' + a_2c_1y_1 + c_2y_2'' + a_1c_2y_2' + a_2c_2y_2 &= \\ = c_1(y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1) + c_2(y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2). \end{aligned}$$

Tā kā  $y_1$  ir vienādojuma (13.15) atrisinājums, tad  $y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1 \equiv 0$ . Līdzīgi, tā kā  $y_2$  ir vienādojuma (13.15) atrisinājums, tad  $y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2 \equiv 0$ . Tādēļ, visa pēdējā izteiksme ir vienāda ar nulli. Tas nozīmē, ka lineārā kombinācija  $c_1y_1 + c_2y_2$  apmierina vienādojumu (13.15), t. i., ir tā atrisinājums.

2. teorēma. Ja  $y_{\text{neh}}(x)$  ir nehomogēnā vienādojuma (13.14)

$$y'' + a_1y' + a_2y = \varphi(x)$$

atrisinājums, bet  $y_h(x)$  ir atbilstošā homogēnā vienādojuma (13.15)

$$y'' + a_1y' + a_2y = 0$$

atrisinājums, tad  $y = y_h + y_{\text{neh}}$  ir nehomogēnā vienādojuma (13.14) atrisinājums.

Pierādījums. Ievietosim  $y = y_h + y_{\text{neh}}$  vienādojuma (13.14) labajā pusē:

$$\begin{aligned} (y_h + y_{\text{neh}})'' + a_1(y_h + y_{\text{neh}})' + a_2(y_h + y_{\text{neh}}) &= \\ = y_h'' + y_{\text{neh}}'' + a_1(y_h' + y_{\text{neh}}') + a_2(y_h + y_{\text{neh}}) &= \\ = (y_h'' + a_1y_h' + a_2y_h) + (y_{\text{neh}}'' + a_1y_{\text{neh}}' + a_2y_{\text{neh}}). \end{aligned}$$

Tā kā  $y_h$  ir vienādojuma (13.15) atrisinājums, tad izteiksme pirmajās iekavās ir vienāda ar nulli; tā kā  $y_{neh}$  ir vienādojuma (13.14) atrisinājums, tad izteiksme otrajās iekavās ir vienāda ar  $\varphi(x)$ . Tātad visa izteiksme ir vienāda ar  $\varphi(x)$ . Tas nozīmē, ka  $y = y_h + y_{neh}$  ir vienādojuma (13.14) atrisinājums.

Funkcijas  $y_1(x)$  un  $y_2(x)$  sauc par *lineāri neatkarīgām* kādā nogrieznī  $[a, b]$ , ja jebkuriem konstantiem  $K_1$  un  $K_2$ , no kuriem vismaz viens nav vienāds ar nulli, lineārā sakarība  $K_1 y_1(x) + K_2 y_2(x)$  dotajā nogrieznī nav vienāda (identiski) ar nulli; tas ir līdzvērtīgi apgalvojumam, ka nogrieznī  $[a, b]$  attiecība

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)}$$
 nav konstanta.

Funkciju  $y_1(x)$  un  $y_2(x)$  determinantu

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

sauc par *Vronska determinantu*. Var pierādīt, ka vienādojuma (13.15) atrisinājumu  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  lineārā neatkarība ir līdzvērtīga tam, ka Vronska determinants nav vienāds ar nulli vismaz vienā punktā  $x_0$ , kurā vienādojuma (13.15) koeficienti ir nepārtraukti.

Nākošās divas teorēmas formulēsim bez pierādījuma.

**3. teorēma.** Ja  $y_1(x)$  un  $y_2(x)$  ir lineārā homogēnā vienādojuma (13.15) lineāri neatkarīgi atrisinājumi, bet  $c_1, c_2$  ir patvaļīgas konstantes, tad

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

ir šī vienādojuma vispārīgais atrisinājums.

**4. teorēma.** Pieņemsim, ka  $y_{neh}(x)$  ir lineārā nehomogēnā vienādojuma (13.14) atrisinājums, bet  $\bar{y}(x)$  ir atbilstoša homogēnā vienādojuma (13.15) vispārīgais atrisinājums. Tad

$$y = \bar{y}(x) + y_{neh}(x)$$

ir lineārā nehomogēnā vienādojuma (13.14) vispārīgais atrisinājums.

**4. teorēma** nozīmē, ka, lai atrastu nehomogēna vienādojuma vispārīgo atrisinājumu, ir pietiekami noteikt, pirmkārt, atbilstošā homogēnā vienādojuma vispārīgo atrisinājumu un, otrkārt, jebkuru dotā nehomogēnā vienādojuma atrisinājumu. Vispirms aplūkosim šī uzdevuma pirmo daļu nozīmīgam gadījumam, kurā koeficienti  $a_1$  un  $a_2$  ir konstantes.

### 13.9. Otrās kārtas lineārs homogēns diferenciālvienādojums ar konstantiem koeficientiem

Pieņemsim, ka dots vienādojums (13.15)

$$y'' + a_1y' + a_2y = 0,$$

kur  $a_1, a_2$  ir konstantes.

Mēģināsim atrast šī vienādojuma atrisinājumu formā  $y = e^{kx}$ , kur  $k$  ir (pagaidām) nezināma konstante. Tad  $y' = ke^{kx}$ ,  $y'' = k^2e^{kx}$ . Ievietojot tos vienādojumā (13.15), iegūsim

$$k^2e^{kx} + a_1ke^{kx} + a_2e^{kx} = 0$$

jeb

$$e^{kx}(k^2 + a_1k + a_2) = 0.$$

No tā seko, ka

$$k^2 + a_1k + a_2 = 0. \quad (13.16)$$

Iegūto kvadrātvienādojumu sauc par diferenciālvienādojuma (13.15) raksturīgo vienādojumu. Atrisinot to, atradīsim saknes:

$$k_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}. \quad (13.17)$$

Ja  $k$  ir raksturīgā vienādojuma sakne, tad funkcija  $y = e^{kx}$  ir vienādojuma (13.15) atrisinājums. Raksturīgā vienādojuma atrisinājumam ir iespējami trīs gadījumi:

- vienādojuma saknes  $k_1, k_2$  ir reāli un dažādi skaitļi;
- vienādojuma saknes ir reālas un vienādas;
- vienādojuma saknes ir kompleksas.

Aplūkosim šos gadījumus.

1)  $k_1 \neq k_2$  ir reāli skaitļi. Funkcijas  $y_1 = e^{k_1x}$  un  $y_2 = e^{k_2x}$  ir vienādojuma atrisinājumi. Tā kā  $k_1 \neq k_2$ , tad šo funkciju attiecība  $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_1x}}{e^{k_2x}} = e^{(k_1-k_2)x}$  nav konstanta; tātad funkcijas ir lineāri neatkarīgas, tad no 3. teorēmas izriet, ka  $y = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_2x}$  ir aplūkojamā homogēnā vienādojuma vispārīgais atrisinājums.

2)  $k = k_1 = k_2$  (tā kā saknes ir vienādas, tad no (13.17) seko, ka  $k_1 = k_2 = -\frac{a_1}{2}$ ). Lai atrastu vispārīgo atrisinājumu, jānosaka divi lineāri neat-

karīgi atrisinājumi. Viens atrisinājums ir  $y_1 = e^{kx}$ . Pārbaudīsim, vai šajā gadījumā funkcija  $y_2 = xe^{kx}$  arī ir atrisinājums. Atrādīsim  $y_2'$  un  $y_2''$ :

$$y_2' = e^{kx} + kxe^{kx}, \quad y_2'' = ke^{kx} + ke^{kx} + k^2xe^{kx} = 2ke^{kx} + k^2xe^{kx}.$$

Ievietosim vienādojumā (13.15):

$$\begin{aligned} 2ke^{kx} + k^2xe^{kx} + a_1(e^{kx} + kxe^{kx}) + a_2xe^{kx} &= \\ = e^{kx}((k^2 + a_1k + a_2)x + (2k + a_1)). \end{aligned} \quad (13.18)$$

$k$  ir raksturīgā vienādojuma sakne, tādēļ  $k^2 + a_1k + a_2 = 0$ . Tā kā  $k = -\frac{a_1}{2}$ , tad  $2k + a_1 = 0$ . Tādēļ, pēc substitūcijas  $y = xe^{kx}$  vienādojumā (13.15) iegūtā izteiksme (13.18) ir identiski vienāda ar nulli; tātad  $y = xe^{kx}$  arī ir aplūkojamā diferenciālvienādojuma atrisinājums. Atrisinājumi  $y_1 = e^{kx}$  un  $y_2 = xe^{kx}$  ir lineāri neatkarīgi, tādēļ (3. teorēma)

$$y = c_1e^{kx} + c_2xe^{kx} = e^{kx}(c_1 + c_2x)$$

ir vienādojuma (13.15) vispārīgais atrisinājums.

3)  $k = \alpha \pm \beta i$  saknes ir kompleksi saistītas. Pieņemsim bez pierādījuma, ka šajā gadījumā vispārīgā atrisinājuma forma ir sekojoša:

$$y = c_1e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2e^{\alpha x} \sin \beta x = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x).$$

Piemēri. Atrisināt diferenciālvienādojumu

$$a) y'' + 6y' + 5y = 0.$$

Uzrakstīsim raksturīgo vienādojumu

$$k^2 + 6k + 5 = 0.$$

Tā saknes ir  $k_1 = 5$ ,  $k_2 = -1$ . Tā kā saknes ir dažādas, tad vispārīgais atrisinājums ir vienāds ar  $y = c_1e^{-5x} + c_2e^{-x}$ .

$$b) y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Šajā gadījumā raksturīgā vienādojuma saknes ir vienādas:  $k = k_1 = k_2 = -2$ . Tādēļ vispārīgais atrisinājums ir šāds  $y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$ .

c)  $y'' + 4y' + 5y = 0$ .

Šajā gadījumā raksturīgajam vienādojumam  $k^2 + 4k + 5 = 0$  ir kompleksas saknes  $k = -2 \pm \sqrt{4-5} = -2 \pm i$ . Tādēļ vispārīgais atrisinājums ir sekojošā formā

$$y = e^{-2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x).$$

Piezīme. Atzīmēsim, ka augstāku kārtu lineāru homogēnu diferenciālvienādojumu risināšanas metodes ir līdzīgas minētajām. Meklējot vienādojuma atrisinājumu formā  $y = e^{kx}$ , iegūst raksturīgo vienādojumu, kura kārtā ir vienāda ar diferenciālvienādojuma kārtu. Atbilstoši raksturīgā vienādojuma sakņu spektram (sakņu kopai) meklē dotā diferenciālvienādojuma lineāri neatkarīgus atrisinājumus. Situācija daudzējādā ziņā ir līdzīga otrās kārtas diferenciālvienādojumu aplūkotiem trim gadījumiem.

### 13.10. Otrās kārtas lineāri nehomogēni diferenciālvienādojumi

Aplūkosim vienādojumu (13.14):

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = \varphi(x).$$

Atbilstoši 4. teorēmai, šāda vienādojuma vispārīgais atrisinājums ir attiecīgā homogēna vienādojuma vispārīgā atrisinājuma un dotā nehomogēnā vienādojuma patvaļīga atrisinājuma summa:  $y = \bar{y} + y_{\text{neh}}$ . Otrās kārtas lineāri homogēna diferenciālvienādojuma ar konstantiem koeficientiem atrisināšanas metodes aplūkojām iepriekšējā punktā. Tagad aplūkosim vienu nehomogēna vienādojuma risināšanas metodi –

#### nenoteikto koeficientu variācijas metodi.

Metodes ideja ir sekojoša: atrod atbilstošā homogēnā vienādojuma vispārīgo atrisinājumu

$$\bar{y} = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

(atgādināsim, ka šeit  $y_1, y_2$  ir homogēnā vienādojuma lineāri neatkarīgi atrisinājumi, bet  $c_1, c_2$  ir patvaļīgas konstantes). Pēc tam nehomogēnā vienādojuma atrisinājumu meklē formā

$$y_{\text{neh}} = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2, \quad (13.19)$$

kur  $c_1(x)$  un  $c_2(x)$  ir nezināmas  $x$  funkcijas (no kā radies nosaukums) – nenoteikto koeficientu variācijas metode). Jāatrod tādas funkcijas  $c_1(x)$  un  $c_2(x)$ , lai funkcija (13.19) pārvērstu vienādību (13.14) identitātē.

Tātad, meklēsim atrisinājumu (13.19) formā. Atvasināsim:

$$y'_{\text{neh}} = c'_1 y_1 + c_1 y'_1 + c'_2 y_2 + c_2 y'_2.$$

Tā kā vienā vienādojumā ir divas nezināmas funkcijas, tad ir jānosaka papildus nosacījumi. Minētajā gadījumā izvēlēsimies sekojošus nosacījumus:

$$c'_1 y_1 + c'_2 y_2 = 0, \quad (13.20)$$

tad

$$y'_{\text{neh}} = c_1 y'_1 + c_2 y'_2. \quad (13.21)$$

Atradīsim otro atvasinājumu

$$y''_{\text{neh}} = c'_1 y'_1 + c_1 y''_1 + c'_2 y'_2 + c_2 y''_2. \quad (13.22)$$

Ievietosim izteiksmes (13.19), (13.21) un (13.22) vienādojumā (13.14):

$$c'_1 y'_1 + c_1 y''_1 + c'_2 y'_2 + c_2 y''_2 + a_1 (c_1 y'_1 + c_2 y'_2) + a_2 (c_1 y_1 + c_2 y_2) = \varphi(x),$$

pārgrupēsim saskaitāmos:

$$c_1 (y''_1 + a_1 y'_1 + a_2 y_1) + c_2 (y''_2 + a_1 y'_2 + a_2 y_2) + c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 = \varphi(x). \quad (13.23)$$

Tā kā  $y_1$  ir homogēnā vienādojuma atrisinājums, tad  $y''_1 + a_1 y'_1 + a_2 y_1 = 0$ , t. i., izteiksme pirmajās iekavās ir vienāda ar nulli, līdzīgi izteiksme arī otrajās iekavās ir vienāda ar nulli, jo  $y_2$  arī ir homogēnā vienādojuma atrisinājums. Tādēļ vienādība (13.23) vienkāršojas:

$$c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 = \varphi(x). \quad (13.24)$$

Apvienojot vienādojumus (13.24) un (13.20), iegūsim vienādojumu sistēmu attiecībā pret nezināmiem  $c'_1(x)$  un  $c'_2(x)$ :

$$\begin{cases} c'_1 y_1 + c'_2 y_2 = 0, \\ c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 = \varphi(x). \end{cases} \quad (13.25)$$

Šai sistēmai eksistē atrisinājums, jo tās determinants  $\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}$  ir funkciju  $y_1$

un  $y_2$  Vronska determinants; tas nav vienāds ar nulli, jo  $y_1$  un  $y_2$  ir homogēnā vienādojuma (13.15) lineāri neatkarīgi atrisinājumi. Atrisinot sistēmu (13.25), atradīsim funkcijas  $c'_1(x)$  un  $c'_2(x)$ . Integrējot, atradīsim funkcijas  $c_1(x)$  un

$c_2(x)$ . Ievietojot tās formulā (13.19), atradīsim nehomogēnā diferenciālvienādojuma atrisinājumu  $y_{\text{neh}}$ .

Piemēri.

1) Atrast vispārīgo atrisinājumu diferenciālvienādojumam

$$y'' - y = 2x.$$

Vispirms atrisināsim atbilstošo homogēno vienādojumu

$$y'' - y = 0,$$

kura raksturīgais vienādojums ir  $k^2 - 1 = 0$ . No tā seko, ka  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = -1$ . Tad homogēnā vienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$\bar{y} = c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$$

Meklēsim nehomogēnā vienādojuma atrisinājumu sekojošā formā:

$$y_{\text{neh}} = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{-x}. \quad (13.26)$$

IZveidosim sistēmu (13.25), ja minētajam piemēram  $y_1 = e^x$  un  $y_2 = e^{-x}$ :

$$\begin{cases} c_1' e^x + c_2' e^{-x} = 0, \\ c_1' e^x - c_2' e^{-x} = 2x. \end{cases}$$

Saskaitot vienādojumus, iegūsim  $2c_1' e^x = 2x$ , no tā seko, ka  $c_1' = x \cdot e^{-x}$ . Līdzīgi, atskaitot, piemēram, no pirmā vienādojuma otro, iegūsim  $2c_2' e^{-x} = -2x$ , no tā seko, ka  $c_2' = -x \cdot e^x$ . Atradīsim  $c_2(x) = -\int x e^x dx$ . Aprēķinot šo integrāli pa daļām (sk. piemēru no 11.8. p.), iegūsim  $c_2(x) = -x e^x + e^x + \tilde{c}_2$ . Līdzīgi,  $c_1(x) = \int x e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + \tilde{c}_1$ . Ievietojot iegūtās funkcijas izteiksmē (13.26), iegūsim nehomogēnā vienādojuma atrisinājumu:

$$\begin{aligned} y_{\text{neh}} &= (-x e^{-x} - e^{-x} + \tilde{c}_1) \cdot e^x + (-x e^x + e^x + \tilde{c}_2) \cdot e^{-x} = \\ &= -x - 1 + \tilde{c}_1 e^x - x + 1 + \tilde{c}_2 e^{-x} = \\ &= \tilde{c}_1 e^x + \tilde{c}_2 e^{-x} - 2x. \end{aligned} \quad (13.27)$$

Viegli ievērot, ka (13.27) ir nehomogēnā vienādojuma vispārīgais atrisinājums, jo  $\tilde{c}_1 e^x + \tilde{c}_2 e^{-x} = \bar{y}$  ir homogēnā vienādojuma vispārīgais atrisinājums, bet  $y = -2x$  ir nehomogēnā vienādojuma atrisinājums.

2) Atrast partikulāro atrisinājumu iepriekšējā piemēra vienādojumam ar sākuma nosacījumiem:

$$y(0) = 0; \quad y'(0) = 1. \quad (13.28)$$

Iepriekšējā piemērā iegūtais vispārīgais atrisinājums ir

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - 2x.$$

Tad

$$y' = c_1 e^x - c_2 e^{-x} - 2.$$

Izmantojot sākuma nosacījumus (13.28), iegūsim:

$$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2, \\ 1 = c_1 - c_2 - 2, \end{cases}$$

no tā seko, ka  $c_1 = 1,5$ ,  $c_2 = -1,5$ . Tātad, partikulārais atrisinājums ir vienāds ar

$$y = 1,5e^x - 1,5e^{-x} - 2x.$$

### 13.11. Diferenciālvienādojumu lietojuma piemēri - ekonomikas uzdevumu risinājumos

#### 1. piemērs.

1990. gadā pilsētā N. bija 30 000 iedzīvotāju. Sekojošo gadu laikā iedzīvotāju skaits pilsētā palielinājās ar ātrumu, kurš proporcionāls iedzīvotāju skaitam konkrētajā laika momentā, pie tam 1994. gadā tas bija 36 000 cilvēku. Noteikt:

- pilsētas iedzīvotāju skaita izmaiņas likumu;
- pilsētas iedzīvotāju skaitu 2000. gadā.

Atrisinājums. Apzīmēsim ar  $t$  laiku, kurš pagājis kopš atskaites brīža, t. i., kopš 1990. g., bet ar  $y = y(t)$  – iedzīvotāju skaitu laika momentā  $t$ . Atbilstoši nosacījumam

$$y' = k \cdot y,$$

kur  $k$  ir proporcionalitātes koeficients. Šis diferenciālvienādojums ar atdalāmiem mainīgajiem apraksta iedzīvotāju skaita izmaiņu pilsētā atkarībā no laika.

$$\frac{dy}{dt} = k \cdot y \Rightarrow \frac{dy}{y} = k dt \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = k \int dt.$$

No tā seko, ka

$$\ln|y| = kt + \ln|c|$$

un

$$y = c \cdot e^{kt}. \quad (13.29)$$

Sākuma brīdī pilsētā bija 30 000 iedzīvotāju, t. i., sākuma nosacījumu var rakstīt šādi:  $y(0) = 30\,000$ . Izmantojot atrisinājumu (13.29), iegūsim

$$30\,000 = c \cdot e^{k \cdot 0},$$

tātad  $c = 30\,000$ . Tad partikulārais atrisinājums ir  $y = 30\,000 \cdot e^{kt}$ . Ņemot vērā, ka 1994. g. iedzīvotāju skaits bija 36 000 cilvēku, atradīsim  $k$ :

$$36\,000 = 30\,000 \cdot e^{4k}.$$

Tad  $e^{4k} = 1,2$ ,  $4k = \ln 1,2 = 0,18$ ,  $k = 0,045$ . No tā seko, ka pilsētas iedzīvotāju skaita izmaiņas likums ir šāds:

$$y = 30\,000 \cdot e^{0,045t}.$$

Savukārt, 2000. gadā iedzīvotāju skaits pilsētā bija vienāds ar

$$y = 30\,000 \cdot e^{-0,045 \cdot 10} \approx 47\,049 \text{ cilv.}$$

## 2. piemērs.

Pieņemsim, ka  $A$  ir labi reklamēta prece. Speciālisti šīs preces noieta tirgus apjomu novērtēja kā vienādu ar 10 000 vienībām. Pirmajā nedēļā tika pārdotas 500 vienības. Noteikt likumu, kas apraksta kopējo pārdošanas apjomu kopš sākuma momenta.

Atrisinājums. Apzīmēsim laikā  $t$  ( $t$  – nedēļās) kopš realizācijas sākuma pārdotās preces kopējo daudzumu ar  $y$ . Tā kā prece ir plaši reklamēta, tad var pieņemt, ka laika vienībā pārdotās preces daudzums, t. i., lieluma  $y$  izmaiņas ātrums, ir proporcionāls atlikušajai tirgus ietilpībai, tātad

$$y' = k(10\,000 - y), \quad (13.30)$$

kur  $(10\,000 - y)$  ir atlikusī tirgus ietilpība,  $k$  ir proporcionalitātes koeficients. Ir iegūts diferenciālvienādojums ar atdalāmiem mainīgajiem:

$$\frac{dy}{dt} = k(10\,000 - y),$$

$$\frac{dy}{10\,000 - y} = kdt \Rightarrow \int \frac{dy}{10\,000 - y} = k \int dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\ln(10\,000 - y) = kt - \ln c \Rightarrow 10\,000 - y = c \cdot e^{-kt}.$$

Noslēgumā iegūsim, ka  $y = 10\,000 - c \cdot e^{-kt}$  ir vienādojuma (13.30) vispārīgais atrisinājums. Pieņemsim, ka  $y(0) = 0$ , t. i., sākuma momentā vēl nekas nebija pārdots. Ņemot vērā šo sākuma nosacījumu, atradīsim  $c$ :

$$0 = 10\,000 - c \cdot e^{-k \cdot 0} \Rightarrow c = 10\,000.$$

$$y = 10\,000 - 10\,000 \cdot e^{-kt}. \quad (13.31)$$

Pirmajā nedēļā tika pārdotas 500 vienības, t. i.,  $y(1) = 500$ . Tādēļ

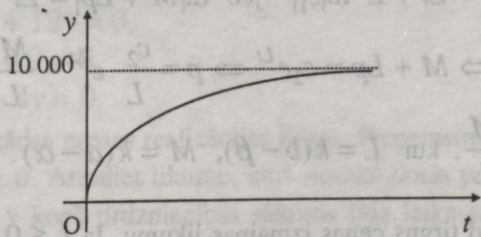
$$500 = 10\,000 - 10\,000 \cdot e^{-k}; \quad 10\,000 \cdot e^{-k} = 9500; \quad e^{-k} = 0,95;$$

$$-k = \ln 0,95 = -0,05; \quad k = 0,05.$$

Tātad, partikulārais atrisinājums ir šāda funkcija:

$$y = 10\,000 - 10\,000 \cdot e^{-0,05t}.$$

Šīs funkcijas grafiks ir attēlots 13.3. zīm.



13.3. zīm.

Ar (13.31) veida funkciju definēto augšanas likumu sauc par *ierobežotās (limitētās) augšanas likumu*.

### 3. piemērs.

Pieņemsim, ka aplūkojamās preces cena, kā arī pieprasījuma un piedāvājuma apjoms ir laika funkcijas. Ir zināmas pieprasījuma un piedāvājuma funkcijas

$$q_D(t) = a + bp(t), \quad q_S(t) = \alpha + \beta p(t); \quad (13.32)$$

tāpat ir zināms, ka cenas izmaiņas ātrums ir proporcionāls pieprasījuma un piedāvājuma apjomu starpībai. Noteikt:

- cenas izmaiņas likumu;
- nosacījumus, ar kuriem preces cena  $p(t)$  tiecas uz līdzsvara cenu (ar kuru  $q_D = q_S$ ).

**Atrisinājums.** Atbilstoši nosacījumam

$$\frac{dp}{dt} = k(q_D(t) - q_S(t)),$$

kur  $k$  ir kāds proporcionalitātes koeficients,  $k > 0$ .

Ievietosim vienādojumā izteiksmes (13.32):

$$\frac{dp}{dt} = k(a + bp(t) - \alpha - \beta p(t)) \Rightarrow \frac{dp}{dt} = k(a - \alpha) + pk(b - \beta).$$

Lai saīsinātu pierakstu, apzīmēsim  $k(a - \alpha) = M$ ,  $k(b - \beta) = L$ . Tad

$$\frac{dp}{M + Lp} = dt; \quad \int \frac{dp}{M + Lp} = \int dt \Rightarrow \frac{1}{L} \ln|M + Lp| = t + \ln|c_1| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|M + Lp| = Lt + L \cdot \ln|c_1| \quad \text{jeb} \quad \ln|M + Lp| = Lt + \ln|c_1|^L =$$

$$= Lt + \ln c_2 \Rightarrow M + Lp = c_2 e^{Lt} \Rightarrow p = \frac{c_2}{L} \cdot e^{Lt} - \frac{M}{L} \quad \text{jeb}$$

$$p = ce^{Lt} - \frac{M}{L}, \quad \text{kur } L = k(b - \beta), \quad M = k(a - \alpha). \quad (13.33)$$

Funkcija (13.33) dod tirgus cenas izmaiņas likumu. Ja  $L \leq 0$ , t. i., ja  $\beta \geq b$ ,

tad, laikam ritot,  $p \rightarrow -\frac{M}{L} = \frac{\alpha - a}{b - \beta}$ . Tātad, ierobežojums  $b - \beta \leq 0$  ir nepieciešamais un pietiekamais nosacījums, lai tirgus cenas tiektos uz līdzsvara cenu.

### Paškontroles jautājumi

- Definējiet diferenciālvienādojuma, tā kārtas, atrisinājuma, vispārīgā atrisinājuma un partikulārā atrisinājuma jēdzienus.

2. Definējiet sekojošu pirmās kārtas diferenciālvienādojumu un izklāstiet tā risinājuma metodi:
- ar atdalāmiem mainīgajiem,
  - lineāru,
  - homogēnu.
3. Atrisiniet sekojošus pirmās kārtas diferenciālvienādojumus:
- $y' = yxe^{x^2}$ , ar sākuma nosacījumu  $y(0) = e$ ,
  - $y' - 2y = e^{3x}$ ,
  - $2xy' - 2y = xe^{\frac{3y}{x}}$ .
4. Nosauciet divu veidu diferenciālvienādojumus, kas pieļauj kārtas pazemināšanu un paskaidrojiet tās norisi.
5. Atrisiniet sekojošus otrās kārtas diferenciālvienādojumus:
- $y \cdot y'' - 2(y')^2 = 0$ ,
  - $xy'' + 3y' = x^2$ .
6. Ko sauc par lineāru otrās kārtas diferenciālvienādojumu? Formulējiet teorēmu par tā vispārīgā atrisinājuma struktūru.
7. Izklāstiet atrisināšanas metodi lineāram otrās kārtas diferenciālvienādojumam ar konstantiem koeficientiem.
8. Atrisiniet sekojošus diferenciālvienādojumus:
- $y'' - 8y' + 12y = 0$ ,
  - $y'' + 6y' + 9 = 0$ ,
  - $y'' + y' + 4y = 0$ .
9. Tiek pētīts kādas preces realizācijas tirgus. Pieņemsim, ka šī tirgus ietilpība ir vienāda ar  $a$ . Atrodiet likumu, kurš nosaka dotās preces kopējo pārdošanas apjomu  $y$  kopš tirdzniecības sākuma līdz laika momentam  $t$ , ja ir zināms, ka laika vienībā pārdotās preces daudzums ir proporcionāls gan jau pārdotās preces daudzumam, gan atlikušajai tirgus ietilpībai.
- Norādījums: laika vienībā pārdotās preces daudzums ir vienāds ar  $y'$ .

### Vingrinājumi

Atrisināt diferenciālvienādojumus (1. – 39.):

1.  $xy' = 3y$ .

2.  $y' = \frac{\cos x}{y^2}$ .

3.  $y' = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{y}$ .
4.  $y^2 y' - 2x = 0$ .
5.  $y' \sqrt{x^3} = y$ ;  
ar sākuma nosacījumu  $y(1) = e$ .
6.  $y' \operatorname{ctg} x = 2y - 1$ .
7.  $y' + y = 3$ .
8.  $y' = \frac{y+1}{2x+3}$ .
9.  $y' = 2\sqrt{y} \ln x$ ;  
ar sākuma nosacījumu  $y(e) = 1$ .
10.  $e^x y' + e^y = 0$ .
11.  $y' \cdot \cos x + y \cdot \sin x = 1$ ;  
ar sākuma nosacījumu  $y(0) = 0$ .
12.  $xy' = x^3 + y$ .
13.  $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$ .
14.  $y' \sin x + y \cdot \cos x = x$ ;  
ar sākuma nosacījumu  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ .
15.  $y' - 2y = e^{-3x}$ ;  
ar sākuma nosacījumu  $y(0) = 2$ .
16.  $y' - y \cdot \operatorname{tg} x = 2 \sin x$ .
17.  $y' - \frac{y}{x} = 2x$ .
18.  $y' + y = \sin x$ .
19.  $y' + 2y = e^x$ .
20.  $y' + \frac{y}{x} = \frac{e^x}{x}$ ;  
ar sākuma nosacījumu  $y(1) = 1$ .
21.  $y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x}$ .
22.  $(x-2y)dx - xdy = 0$ .
23.  $xydx - (x^2 - y^2)dy = 0$ .
24.  $y' - \frac{y}{x} = e^{\frac{y}{x}}$ .
25.  $xy' - y = \sqrt{x^2 - y^2}$ .
26.  $y' = 4 \cos x - 3x^2$ .
27.  $y''' = x - 1$ .
28.  $y'' = \frac{y'}{x} - 2$ .
29.  $y'' = \frac{x+y'}{x}$ .
30.  $y'' - \frac{2y'}{x+1} = (x+1)^3$ .

31.  $y'' - \frac{y'}{x} = \frac{x+1}{x}$ .      32.  $yy'' + y'^2 = 0$ .
33.  $yy'' - (y')^2 + (y')^3 = 0$ .      34.  $y'' + 7y' + 10y = 0$ .
35.  $y'' + 5y' + 10y = 0$ .      36.  $y'' + 6y' + 8y = 0$ .
37.  $y'' + 6y' + 9y = 0$ .      38.  $y'' + 2y' + 4y = 0$ .
39.  $y'' + y = -\text{ctg}^2 x$ .
40. Dota pieprasījuma funkcija  $q_D = \alpha + ap + a_1 p'$  un piedāvājuma funkcija  $q_S = \beta + bp$ . Šeit  $\alpha$ ,  $a$ ,  $a_1$ ,  $\beta$ ,  $b$  ir zināmi koeficienti. Atrast līdzsvara cenas  $p(t)$  izmaiņas atkarību no laika. Sākuma momentā ( $t = 0$ ) cena ir vienāda ar  $p_0$ . Izpētīt funkcijas  $p(t)$  atkarību no koeficientu  $\alpha$ ,  $a$ ,  $a_1$ ,  $\beta$ ,  $b$  zīmēm.
41. Atrast pieprasījuma funkciju ar pastāvīgu elastību.
42. 1995.gadā kompānijas pamatfondu vērtība bija 20 000 dolāri. Turpmāko gadu laikā tā mainījās ar ātrumu, kas proporcionāls šo fondu vērtībai konkrētajā laika momentā, pie tam 2000. g. tā bija 24 000 dolāri. Noteikt  
 a) kompānijas pamatfondu vērtības izmaiņas likumu,  
 b) pamatfondu vērtību 2006. g.
43. Ir zināms, ka 36 izstrādājuma vienību ražošanas izmaksas ir vienādas ar 600 Ls, 64 izstrādājuma vienību ražošanas izmaksas ir vienādas ar 800 Ls un izmaksas funkcijas elastība ir konstanta. Atrast izmaksu funkciju.

## 14. MATEMĀTISKO UZDEVUMU RISINĀŠANA PAKOTNĒ MATHEMATICA

### 14.1. Pakotnes Mathematica vispārīgs raksturojums

Mūsdienās matemātiska rakstura uzdevumi personāldatoros tiek risināti, izmantojot dažāda veida programmu sistēmas. Starp tām vispirms būtu jānosauc pakotnes Mathematica, MathCAD, MatLab un MAPLE V. Lai ilustrētu minēto programmu skaitļošanas iespējas, esam izvēlējušies pakotni Mathematica, kura ļauj pietiekami vienkārši risināt daudzus uzdevumus, kas aplūkoti šajā grāmatā. Ja lasītājs vēlas apgūt citas nosauktās programmu pakotnes, tad iesakām izmantot atbilstošu literatūru. Šo pakotņu aprakstam ir veltīta vesela rinda grāmatu. Daļu no tām var atrast literatūras sarakstā 375. lpp. Šajās grāmatās lasītājs var apgūt matemātiskās pakotnes Mathematica [1.–3.], MathCAD [10.], MatLab [7., 8.] un MAPLE V [5., 9.].

Pakotne Mathematica, ir integrēta daudzfunkcionāla programmu sistēma, kura ir domāta skaitlisko un simbolisko aprēķinu veikšanai [1., 2.]. Pakotnē ir iekļauti dažādi skaitlisko metožu lietojumi: matemātisko funkciju vērtību aprēķināšana, to grafiku attēlošana, matricu algebras operācijas, algebriskie pārveidojumi, polinomu algebras izmantošana, funkciju integrēšana un diferencēšana, vienādojumu sakņu noteikšana, funkciju ekstrēmu noteikšana, lineārās programēšanas uzdevumu risināšana u. c. Šajā pakotnē lietotājam ir plašas iespējas darbam ar tekstuālo, grafisko un ilustratīvo informāciju, kā arī ar multivīdi. Viena no pakotnes izcilajām īpašībām ir tās dotās iespējas matemātisko objektu attēlošanai (vizualizācijai) divdimensiju un trīsdimensiju grafikā.

Pakotnes Mathematica ražotājs – firma *Wolfram Research Inc.*, ir sagatavojusi pakotnes versijas, kuras lietotājs var izmantot gandrīz visās populārākajās datoru sistēmās: IBM PC un PS/2, Nec PC, RISC Ultrix, Macintosh, HP 9000/700 Series Ultrix, Sun SPARC/Solaris, IBM RISC System/6000 u. c.

Pakotne Mathematica ir organizēta divos līmeņos, tai ir programmatūras funkcionāli ārējais slānis (papildprogrammas) jeb *čaula* un iekšējais slānis jeb *kodols*, kas realizē datora vai datoru sistēmas vadības funkcijas. Lietotājs savas darbības veic, izmantojot pakotnes čaulu. Čaula nodrošina saskarnes (interfeisa) funkcijas, kā arī risina vispārīga rakstura uzdevumus. Čaulas lietojumizvēlnē ir iekļautas šādas komandu grupas: File (darbs ar datnēm (failiem)); Edit (dokumenta rediģēšana); Cell (operācijas ar dotā dokumenta sekcijām); Graph (funkcijas, grafiki un animācijas); Action (skaitlisko aprēķinu vadība dotajā dokumentā); Style ( stilu un fontu rediģēšana); Options ( čaulas parametru vērtību izvēle); Windows (darbs ar pakotnes logiem un buferiem); Help (interaktīvā palīdzības nodrošināšana). Pakotnes kodols apstrādā visas no čaulas iegūtās izteiksmes. Jebkuri skaitliskie aprēķini pakotnē tiek veikti ar kodola komandu

palīdzību, kuras tajā tiek automātiski ielādētas. Pakotnes kodola programmēšana notiek speciālā Math-valodā. Pakotnes Mathematica iespējas būtiski paplašina papildu datnes, kuras var pievienot pēc vajadzības. Starp papildu datnēm vispirms būtu jānosauca ārējo moduļu bibliotēku, kas ir domāta dažādu fizikas un matemātikas lietojumu uzdevumu risināšanai, to skaitā: statistisko datu apstrādei, finansu rēķiniem, elektrotehnikas uzdevumu risināšanai, optisko sistēmu izstrādei, modelēšanai un analīzei, signālu apstrādei un analīzei u. c.

Darbam pakotnē izmantojamā pamatkonstrukcija ir *matemātiskā izteiksme*. Ievadot izteiksmi, tā jāpārveido Math-valodas formātā. Ievadītās izteiksmes pārveidojumu rezultāti tiek doti izejas formātā, kas ir maksimāli tuvs tradicionālam matemātisko izteiksmju pierakstam.

Matemātiskā izteiksme ir skaitļu, rindu, argumentu un funkciju nosaukumu kopa, kas satur arī operāciju simbolus un iekavas. Pakotnē tiek izmantoti četru tipu *skaitļi*: vesēlie, racionālie (parastie daļskaitļi), reālie (decimālā pierakstā) un kompleksie. Šie skaitļi var saturēt jebkuru ciparu daudzumu. *Simbolu rindas* tiek ielēgtas pēdējās un sastāv no ciparu, burtu un īpašu simbolu virknes. Pakotne Mathematica satur vairāk nekā 1000 *iebūvētu funkciju*, kas nodrošina plašas matemātisko aprēķinu iespējas. Vispārīgā gadījumā iebūvēto funkciju izsauc šādi:

funkcijas\_vārds [argumentu\_saraksts, izvēles (opcijas)].

Funkcijas vārdu raksta ar latīņu burtiem, pie tam vārda pirmais burts ir lielais. Tālāk kvadrātiekvās norāda argumentu sarakstu un izvēles (opcijas). Argumentu saraksts satur pieļaujamo argumentu uzskaitījumu, argumentus atdala ar komatiem. Dažreiz argumentu grupas ieslēdz figūriekavās. Katrai funkcijai ir stingri noteikts pieļaujamo argumentu skaits. Opcijas norāda atsevišķu funkciju skaitļošanas veidu. Opcijas var arī neuzrādīt (noklusēt). Pilnu iebūvēto funkciju sarakstu, šo funkciju lietojumu un sintaksi var atrast grāmatā [12.]. Plašāk lietoto funkciju aprakstu var atrast arī [1., 2.]. Izmantojot pakotnes palīdzības komandu grupu Help, var iegūt papildu informāciju par visām iebūvētām funkcijām. Aplūkosim dažu funkciju pierakstu piemērus:

Sqrt[20] – izskaitļo kvadrātsakni no skaitļa 20;

N[Sqrt[20], 15] – izskaitļo kvadrātsakni no skaitļa 20 ar precizitāti līdz 15 cipariem.

Vairākus izteiksmes elementus var apvienot *sarakstā*, kuru ieslēdz figūriekavās. Saraksta elementi var būt jebkuras izteiksmes, to starpā arī saraksti. Piemēram, trešās kārtas kvadrātisku matricu var uzdot ar sarakstu {{2, 5, 6}, {3, 5, 9}, {1, 6, 7}}, kur katrs no iekšējiem sarakstiem uzdo matricas atbilstošās rindas elementus.

Izteiksmēs tiek izmantoti aritmētisko operāciju, piešķires un salīdzināšanas simboli. Ja izteiksme nesatur apaļās iekavas, tad aritmētiskās operācijas veic parastā secībā:

- pakāpes operācija (simbols ^);
- reizināšana (var lietot simbolu \* vai tukšumu) un dalīšana (simbols /);
- saskaitīšana un atņemšana (attiecīgi simboli + un -)

Piešķires operāciju izteiksmēs apzīmē ar := vai =, pie tam šiem apzīmējumiem ir dažāda jēga. Ar simbolu := tiek piešķirta vēl "neizskaitļota" vērtība, bet ar simbolu = tiek piešķirta jau "izskaitļota" vērtība. Piemēram,  $Y = \sin[2 \cdot x] / 3$  un  $X = 5.33$ . Salīdzināšanas izteiksmēs un vienādojumos vienādības zīmi uzdod ar simbolu ==. Piemēram, kvadrātvienādojumu uzdod šādi  $a \cdot x^2 + b \cdot x + c == 0$ .

Veicot skaitļošanu programmu pakotnes vidē, lietotājam ir jāsaprotavo *aktīvais dokuments*, kas sastāv no sekciju virknes, pie tam katru sekciju identificē, noslēdzot to no labās puses ar kvadrātiekavu ]. Kvadrātiekavas augstumam jābūt tādām, lai ietvertu visas sekcijas rindas. Jebkurai sekcijai ir jāsaturo vismaz viena teksta rinda. Izšķir divus sekciju veidus: alfabētizējmu (tekstuālo) un grafisko sekciju. Tekstuālā sekcija var saturēt tekstu, ziņojumus un matemātiskās izteiksmes, kas noformētas atbilstoši dotiem standartiem (pakotnes Input-stilā). Grafiskā sekcija satur grafiskā objekta PostScript (aprakstu grafikas drukāšanai). Math-valodā katru izteiksmi ir jāskā rakstīt jaunā rindā. Ja izteiksme satur vairākas teksta rindas, tad ieteicams visu izteiksmi ieslēgt apaļajās iekavās vai arī pārnest uz nākošo rindu pēc operācijas simbola vai atvērtas kvadrātiekavas [ utt. Visi pakotnes Mathematica dokumenti tiek saglabāti datņu paplašinājumos .ma .

14.1. zīmējumā ir dots dokumenta piemērs tā radīšanas stadijā. Tas satur divas tekstuālās sekcijas: pirmā sekcija ietver virsrakstu un uzdevuma tekstu, otrā sekcija uzdod argumenta  $x$  vērtību un matemātisko izteiksmi.

**Example. Find  $5x^2 + 3(x + 1.5) / 2x$ ; where  $x = 1.45$ ;** ]

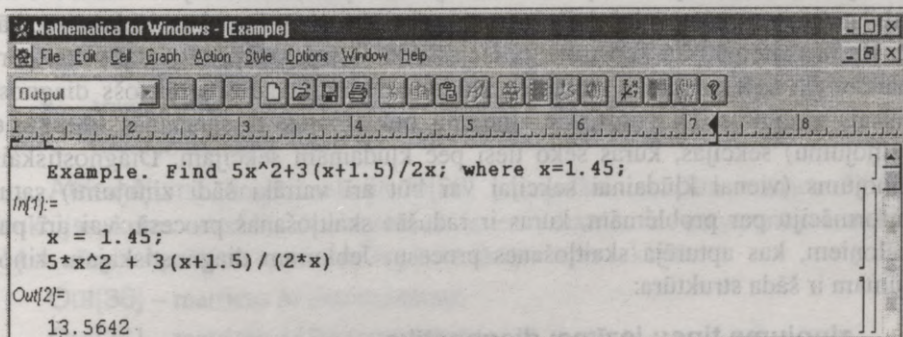
$x = 1.45$ ;

$5 \cdot x^2 + 3(x + 1.5) / (2 \cdot x)$  ]

14.1. zīm. Aktīvā dokumenta struktūras piemērs uzdevuma ievada posmā

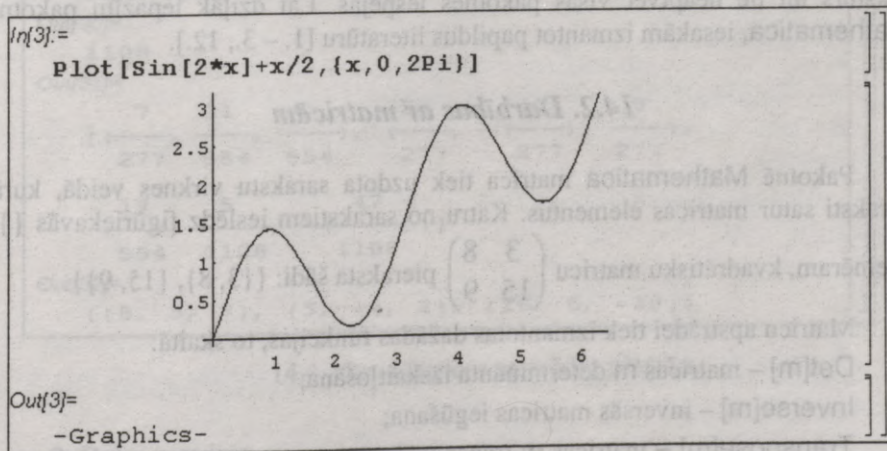
Lai veiktu darbības, kas dotas ieejas sekcijā, jāuzklikšķina peles kursori uz sekcijas laukuma un vienlaicīgi jānospiež tastatūras taustiņi Shift-Enter. Pēc tam sistēmas kodols veiks nepieciešamos skaitliskos aprēķinus; ieejas sekcijai tiks piešķirts vārds In[n] (kur n – sekcijas kārtas numurs); skaitļošanas rezultāts tiks atgriezts izejas sekcijā, kura sāksies ar vārdu Out[n]. Jāatzīmē, ka ne vienmēr In[n] sekcijas izteiksmju izskaitļotās vērtības tiks norādītas izveidotajā Out[n] sekcijā. Tā, piemēram, rezultāts netiks norādīts, ja dotā izteiksme

beidzas ar simbolu – semikolonu (;), vai, ja izteiksmē ir lietots piešķires simbols :=. Minētā piemēra skaitliskie rezultāti ir logā, kas attēlots 14.2. zīm. Viegli ievērot, ka otrā un trešā sekcijas ir apvienotas ar papildus kvadrātiekvādu, t. i., tās veido vienotu funkcijas vērtības aprēķināšanas grupu, kura apzīmēta ar In[1]. Dotās izteiksmes skaitliskā vērtība ir norādīta izejas sekcijā Out[2] un tā ir vienāda ar 13,5642.



14.2. zīm. Pakotnes Mathematica logs ar aprēķinu rezultātiem

Kā grafisko sekciju lietojuma piemēru aplūkosim funkcijas  $y = \sin 2x + \frac{x}{2}$  grafika konstruēšanu, argumenta  $x$  vērtībām mainoties intervālā no 0 līdz  $2\pi$ . Šī uzdevuma risināšanas rezultāti ir attēloti 14.3. zīm.



14.3. zīm. Grafisko sekciju saturoša dokumenta piemērs

Pirmā sekcija In[3] satur funkciju Plot, kura tiek izmantota, lai konstruētu dotās funkcijas grafiku norādītajā argumenta  $x$  maiņas kopā. Otrā sekcija satur

grafisko objektu, bet trešā sekcija Out[3] satur pakotnes ziņojumu. Visas trīs sekcijas ir apvienotas ar papildus kvadrātiekvu vienotā grafiskā objektā – divdimensiju grafikā.

#### Piezīmes.

1. Nospiežot taustiņu kombināciju Shift-Enter, kodolam tiek nodota aktīvā sekcija, kura tiek izpildīta, pie tam sekcijai tiek piešķirts kārtējais numurs  $n$  un atbilstošais nosaukums In[n]. Dokumenta sekcijas var tikt izpildītas jebkurā secībā.
2. Katra matemātiskā konstrukcija ieejas sekcijā tiek pakļauta sintaktiskai pārbaudei. Ja tiek pamanīta sintakses kļūda, tad tiek izvadīts atbilstošs diagnostiskais ziņojums. Diagnostiskie ziņojumi tiek izvadīti tā saucamās Message (ziņojumu) sekcijās, kuras seko tieši pēc kļūdainām sekcijām. Diagnostiskais ziņojums (vienai kļūdainai sekcijai var būt arī vairāki šādi ziņojumi) satur informāciju par problēmām, kuras ir radušās skaitļošanas procesā, vai arī par cēloņiem, kas apturēja skaitļošanas procesu. Jebkuram diagnostiskajam ziņojumam ir šāda struktūra:

#### ziņojuma tips:: iezīme: diagnostika.

Piemēram, atvērto un aizvērto apaļo iekavu skaita nesakrišana aritmētiskā izteiksmē rada diagnostisko ziņojumu: Syntax:: sntxi: Incomplete expression.

Tālāk aplūkosim dažādu matemātisko uzdevumu risināšanas piemērus pakotnē Mathematica, kas ļaus lasītājam iepazīties ar vairākām Math-valodas konstrukcijām, kuras tiek lietotas skaitļošanā. Šiem piemēriem ir tīri ilustratīvs raksturs un tie neaptver visas pakotnes iespējas. Lai dziļāk iepazītu pakotni Mathematica, iesakām izmantot papildus literatūru [1. – 3., 12.].

### 14.2. Darbības ar matricām

Pakotnē Mathematica matrica tiek uzdots sarakstu virknes veidā, kurā saraksti satur matricas elementus. Katru no sarakstiem ieslēdz figūriekavās {}.

Piemēram, kvadrātisku matricu  $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 15 & 9 \end{pmatrix}$  pieraksta šādi: {{3, 8}, {15, 9}}.

Matricu apstrādei tiek izmantotas dažādas funkcijas, to skaitā:

Det[m] – matricas m determinanta izskaitļošana;

Inverse[m] – inversās matricas iegūšana;

Transpose[m] – matricas m transponēšana;

Dot[m1, m2] – matricu m1 un m2 reizināšana

un daudzas citas.

Piemēri.

1. Dota kvadrātiskā matrica

$$M = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 16 \\ 5 & -4 & 6 \\ 7 & 2 & -10 \end{pmatrix}.$$

Atrast matricas  $M$

- 3. kārtas determinantu;
- transponēto matricu;
- inverso matricu.

Atrisinājums. Ieejas sekcijā In[29] pa rindām ievadām matricu  $M$  un funkcijas, kuras atrod tās determinantu, inverso matricu un transponēto matricu (14.4. zīm.). Aprēķinu rezultātus iegūsim šādās izejas sekcijās:

Out[30] – matricas  $M$  determinantu;

Out[31] – matricas  $M$  inverso matricu;

Out[32] – transponēto matricu.

```
In[29]:=
m:={{8,3,16},{5,-4,6},{7,2,-10}}
Det[m]
Inverse[m]
Transpose[m]

Out[30]=
1108

Out[31]=
      7      31      41      23      48      8
  { (-----, -----, -----), (-----, - (-----), -----),
    277      554      554      277      277      277

      19      5      47
  { (-----, -----, - (-----)) }
    554      1108      1108

Out[32]=
{{8, 5, 7}, {3, -4, 2}, {16, 6, -10}}
```

14.4. zīm. Matricas apstrādes piemērs

2. Dotas matricas

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \text{ un } B = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 9 \\ 3 & 13 & 7 \end{pmatrix}.$$

Atrast matricu reizinājumu  $C = A B$ .

Atrisinājums. Ieejas sekcijā In[34] ievadām funkciju Dot, kas reizinās matricu  $A$  ar matricu  $B$  (145. zīm.). Viegli ievērot, ka matricas ir uzdotas ar to rindu elementu virknēm, pie kam katra rinda ir ieslēgta figūriekavās {}.

```
In[34]:=
Dot[{{6, 5}, {5, 10}}, {{6, -12, 9}, {3, 13, 7}}]

Out[34]:=
{{51, -7, 89}, {60, 70, 115}}
```

14.5. zīm. Matricu reizināšanas piemērs

Rezultējošā matrica  $C = AB$  ir parādīta sekcijā Out[34] un tā ir

$$\begin{pmatrix} 51 & -7 & 89 \\ 60 & 70 & 115 \end{pmatrix}$$

### 14.3. Lineāru vienādojumu sistēmas atrisināšana

Pakotne Mathematica satur vairākas funkcijas, kas veltītas lineāru vienādojumu sistēmu atrisināšanai. Izmantosim vienu no tām – funkciju Solve, kura ļauj atrast arī dažādu vienādojumu saknes. Vienādojumu sistēmu atrisināšanai funkcijai Solve ir šāds formāts

Solve[m.X==B],

kur  $m$  – ir nezināmo jeb sistēmas mainīgo koeficientu matrica;

$X$  – nezināmo vektors (simbolisks pieraksts);

$B$  – brīvo locekļu vektors; pie tam vienādību simboliski norāda šādi:  $=$ .

Piemēri.

1. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -4. \end{cases}$$

Atrisinājums. Ieejas sekcijā In[1] (14.6. zīm.) ievadīsim funkciju Solve ar šādiem argumentiem:

{{2,-3,1},{1,5,-4},{4,1,-3}} – nezināmo koeficientu matrica;

{x1, x2, x3} – nezināmo saraksts;

{2,-5,-4} – brīvo locekļu vektors.

Sekcijā Out[1] iegūsim uzdevuma atrisinājumu:  $x_1=5$ ;  $x_2=6$ ;  $x_3=10$ .

```
In[1]:=
Solve[{{(2,-3,1),(1,5,-4),(4,1,-3)}.{x1,x2,x3}}==(2,-5,-4)]
Out[1]:=
{{x1 -> 5, x2 -> 6, x3 -> 10}}
```

14.6. zīm. Vienādojumu sistēmas atrisināšanas piemērs viena atrisinājuma gadījumā.

2. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 6, \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Atrisinājums. Ieejas sekcijā In[2] (14.7. zīm.) ievadīsim funkciju Solve ar šādiem argumentiem:

{{2,3,4}, {4,1,-3}, {6,4,1}} – nezināmo koeficientu matrica;

{x1, x2, x3} – nezināmo saraksts;

{5,6,1} – brīvo locekļu vektors.

Sekcijā Out[2], kurā jāatrodas uzdevumu atrisinājumam, iegūsim tukšu sarakstu {}, t. i., vienādojumu sistēmai nav atrisinājumu.

```
In[2]:=
Solve[{{(2,3,4),(4,1,-3),(6,4,1)}.{x1,x2,x3}}==(5,6,1)]
Out[2]:=
{}
```

14.7. zīm. Nesaderīgas vienādojumu sistēmas atrisināšanas piemērs.

3. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 5, \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + x_4 = 9. \end{cases}$$

Atrisinājums. Ieejas sekcijā In[3] ievadīsim funkciju Solve, kā tas norādīts

14.8. zīm. Izejas sekcijā Out[3] iegūsim sistēmas vispārīgo atrisinājumu:

$$x_1 = \frac{38}{37} + \frac{12}{37}x_4; \quad x_2 = \frac{41}{37} + \frac{11}{37}x_4; \quad x_3 = -\frac{13}{37} + \frac{29}{37}x_4.$$

Atzīmēsim, ka šajā piemērā pirms sekcijas Out[3] ir iekļauta cita sekcija, kas satur brīdinājumu ar ziņojumu, ka tiek izvadīti bezgalīgi daudz vienādojumu sistēmas atrisinājumi.

```
In[3]:=
Solve[{{(2,-1,-3,2)},(1,2,-5,3)},(2,5,-4,1)}.{x1,x2,x3,x4}==(2,5,9)]
Solve::svars:
Warning: Equations may not give solutions for all "solve"
variables.
Out[3]=
{{x1 ->  $\frac{38}{37} + \frac{12 x_4}{37}$ , x2 ->  $\frac{41}{37} + \frac{11 x_4}{37}$ , x3 ->  $-\left(\frac{\phantom{x_4}}{37}\right) + \frac{29 x_4}{37}$ }}
```

14.8. zīm. Vienādojuma sistēmas atrisināšanas piemērs ar bezgalīga skaita atrisinājumiem.

Ja izteiksmes ir sarežģītas, tad ieteicams aprēķinus veikt pa soļiem. Iepriekšējā piemērā izveidosim trīs soļus: koeficientu matricas definēšanu, vienādojumu sistēmas definēšanu un vienādojuma sakņu noteikšanu. Atbilstoši ieejas sekcijā In[4] (149. zīm.) attiecīgajās rindās ievadīsim:

koeficientu matricu m;

vienādojumu sistēmu m.X==B,

funkciju Solve[%,{x1, x2, x3, x4}], kas atradīs lineārās vienādojumu sistēmas saknes x1, x2, x3, x4; simbols % šajā izteiksmē norāda, ka funkcijas Solve pirmais arguments ir iepriekšējā izteiksme, t. i., vienādojumu sistēma m.X==B.

Izejas sekcijā Out[5] tiek norādīta vienādojumu sistēma simboliskā pierakstā, kura iegūta, ievietojot argumentus. Uzdevuma vispārīgais atrisinājums ir redzams sekcijā Out[6].

```
In[4]:=
m:={{(2,-1,-3,2)},(1,2,-5,3)},(2,5,-4,1)}
m.{x1,x2,x3,x4}==(2,5,9)
Solve[m, {x1,x2,x3,x4}]
Out[5]=
{2 x1 - x2 - 3 x3 + 2 x4, x1 + 2 x2 - 5 x3 + 3 x4,
 2 x1 + 5 x2 - 4 x3 + x4} == {2, 5, 9}
Solve::svars:
Warning: Equations may not give solutions for all "solve"
variables.
Out[6]=
{{x1 ->  $\frac{38}{37} + \frac{12 x_4}{37}$ , x2 ->  $\frac{41}{37} + \frac{11 x_4}{37}$ , x3 ->  $-\left(\frac{\phantom{x_4}}{37}\right) + \frac{29 x_4}{37}$ }}
```

14.9. zīm. Vienādojumu sistēmas uzdošanas un atrisināšanas pa soļiem piemērs.

#### 14.4. Atvasinājumu aprēķināšana

Viena vai vairāku argumentu funkciju diferencēšana Math-valodā tiek veikta ar iebūvētām funkcijām Dt un D.

Atvasinājumu aprēķināšanai izmantosim funkciju Dt, kurai viena argumenta funkcijas  $f(x)$  diferencēšanā ir šādi formāti:

Dt[f[x], x] – funkcijas f[x] atvasinājuma pēc argumenta x aprēķināšana;

Dt[f[x], {x, n}] – funkcijas f[x] n-tās kārtas atvasinājuma pēc x aprēķināšana.

Piemērs. Aprēķināt funkcijas  $y = \sqrt[5]{x+1} \cdot \sin 2x$  atvasinājumu.

Atrisinājums. Ieejas sekcijā In[1] (14.10.zīm.) ievadīsim izteiksmi, kas satur doto funkciju Dt[(x+1)^(1/5)\*Sin[2\*x],x]. Ar tās palīdzību aprēķināsim funkcijas atvasinājumu. Simbolisko pierakstu atvasinājumam

$y' = 2\sqrt[5]{x+1} \cdot \cos 2x + \frac{\sin 2x}{5\sqrt[5]{(1+x)^4}}$  iegūsim izejas sekcijā Out[1].

```
In[1]:=
Dt[(x+1)^(1/5)*Sin[2*x],x]
Out[1]:=
2 (1+x)^(1/5) Cos[2 x] + (Sin[2 x])/(5 (1+x)^(4/5))
```

14.10. zīm. Atvasinājuma aprēķināšanas piemērs.

Parciālo atvasinājumu aprēķināšanai izmantosim funkciju D ar šādiem formātiem:

D[f[x,y,...], x] – funkcijas f[x,y,...] parciālā atvasinājuma pēc argumenta x aprēķināšana;

D[f[x,y,...], {x, n}] – funkcijas f[x,y,...] n-tās kārtas parciālā atvasinājuma pēc argumenta x aprēķināšana;

D[f[x,y,...], {x,y,...}] – funkcijas f[x,y,...] jauktā parciālā atvasinājuma pēc argumentiem x,y,... aprēķināšana.

Piemērs. Aprēķināt funkcijas  $z = x^{3y}$  pirmās un otrās kārtas parciālos atvasinājumus.

Atrisinājums. Lai aprēķinātu pirmās kārtas parciālos atvasinājumus, ieejas sekcijā In[1] (14.11. zīm.) ievadīsim funkcijas D[x^(3\*y),x] un D[x^(3\*y),y], kuras atradīs dotās funkcijas parciālos atvasinājumus pēc argumentiem x un y. Aprēķinu rezultātu simbolisko pierakstu iegūsim divās sekcijās: sekcijā Out[1] –

parciālo atvasinājumu pēc  $x$ , kurš ir vienāds ar  $z'_x = 3x^{3y-1}y$ , bet sekcijā Out[2] – parciālo atvasinājumu pēc  $y$ , kurš ir vienāds ar  $z'_y = 3x^{3y} \ln x$ .

```
In[1]:=
  D[x^(3*y), x]
  D[x^(3*y), y]
Out[1]=
  -1 + 3 y
  3 x      y
Out[2]=
  3 y
  3 x      Log[x]
```

14.11. zīm. Pirmās kārtas parciālo atvasinājumu aprēķināšanas piemērs

Otrās kārtas parciālos atvasinājumus atrod līdzīgi, ievadot šāda izskata funkcijas:  $D[x^{(3*y)}, \{x, 2\}]$  un  $D[x^{(3*y)}, \{y, 2\}]$  (jaukto atvasinājumu neapska-tīsim). Otrās kārtas parciālo atvasinājumu aprēķina rezultāti tiks izvadīti sekcijā Out[3] un Out[4] (14.12. zīm.) un tie ir vienādi atbilstoši ar  $z''_{xx} = 3x^{3y-2}y(3y-1)$ ;  $z''_{yy} = 9x^{3y}(\ln x)^2$ .

```
In[3]:=
  D[x^(3*y), {x, 2}]
  D[x^(3*y), {y, 2}]
Out[3]=
  -2 + 3 y
  3 x      y      (-1 + 3 y)
Out[4]=
  3 y      2
  9 x      Log[x]
```

14.12. zīm. Otrās kārtas parciālo atvasinājumu aprēķināšanas piemērs

### 14.5. Integrāļu aprēķināšana

Viena vai vairāku mainīgo funkciju integrēšanai Math-valodā tiek izman-totas iebūvētās funkcijas Integrate un NIntegrate. Lai aprēķinātu funkcijas  $f(x)$  noteikto integrāli pa nogriezni  $[a, b]$ , lietosim funkciju Integrate ar šādu formātu:

Integrate[f(x), {x, a, b}].

Piemērs. Aprēķināt noteikto integrāli  $\int_0^1 x(x^2 + 1)^3 dx$ .

Atrisinājums. Ieejas sekcijā In[1] (14.13. zīm.) ievadīsim funkciju  $\text{Integrate}[x^*(x^2+1)^3, \{x, 0, 1\}]$ , kura aprēķinās funkcijas  $f(x) = x \cdot (x^2 + 1)^3$  noteikto integrāli pa nogriezni  $[0; 1]$ . Noteiktā integrāļa izskaitļoto vērtību  $\frac{15}{8}$  iegūsim izejas sekcijā Out[1].

```
In[1]:=
Integrate[x*(x^2+1)^3, {x, 0, 1}]
Out[1]=
15
-----
8
```

14.13. zīm. Noteiktā integrāļa aprēķināšanas piemērs

Lai atrastu funkcijas  $f(x)$  nenoteikto integrāli, arī izmantosim iebūvēto funkciju  $\text{Integrate}$  ar šādu formātu:

$\text{Integrate}[f(x), x]$ .

Piemērš. Atrast integrāli  $\int x \sin x \, dx$ .

Atrisinājums. Integrāļa aprēķināšanas izteiksme ir ievadīta sekcijā In[5] (14.14. zīm.), bet integrēšanas rezultāts simboliskā pierakstā ir redzams sekcijā Out[5]. Esam ieguvuši šādu atbildi:  $-x \cdot \cos x + \sin x + C$ .

```
In[5]:=
Integrate[x*Sin[x], x]
Out[5]=
-(x Cos[x]) + Sin[x]
```

14.14. zīm. Nenoteiktā integrāļa aprēķināšanas piemērs

Piezīmes.

Bieži funkcijas integrēšanas rezultātu simboliskajā pierakstā vēl ir iespējams vienkāršot, veicot attiecīgus matemātiskos pārveidojumus.

Ja funkcija  $\text{Integrate}$  primitīvo funkciju nevar izteikt simboliskajā pierakstā, tad tā rezultātu izsaka vai nu iebūvēto funkciju terminos, vai arī dod to ieejas formātā.

## 14.6. Funkcijas ekstrēmu atrašana

Lai atrastu viena vai vairāku argumentu funkcijas minimumu, pakotnē Mathematica ir iekļauta iebūvētā funkcija FindMinimum, kura izvada dotās funkcijas lokālo minimumu bāzes punkta apkārtnē. Funkcija FindMinimum pieļauj šādus formātus:

```
FindMinimum[f[x], {x, x0};
FindMinimum[f[x], {x, x0, x1};
FindMinimum[f[x], {x, x0, a, b}];
FindMinimum[f[x, y, ...], {x, x0}, {y, y0}, ...],
```

kur  $f[x]$  vai  $f[x, y, \dots]$  – dotā vienargumenta  $x$  vai vairāku argumentu  $x, y, \dots$  funkcija;

$x_0$  vai  $\{x_0, y_0, \dots\}$  – bāzes punkts, kura apkārtnē tiek meklēts minimums;

$\{x_0, x_1\}$  –  $x$  maiņas intervāls, kuru norāda, ja funkcijas  $f(x)$  ekstrēmu meklē ar iterāciju metodi; to norāda gadījumos, kuros pakotne nevar aprēķināt dotās funkcijas  $f(x)$  atvasinājumu;

$[a, b]$  – argumenta  $x$  pieļaujamais intervāls.

Tā kā funkcijas  $f(x, y, \dots)$  maksimumam atbilst funkcijas  $-f(x, y, \dots)$  minimums, tad aplūkoto funkciju FindMinimum var lietot arī funkcijas maksimuma noteikšanai.

Piemērs.

Atrast funkcijas  $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 10x - 6y$  minimumu.

Atrisinājums. Par bāzes punktu izvēlēsimies punktu ar koordinātām  $x = 1$ ,  $y = 1$ . Lai atrastu funkcijas minimumu, FindMinimum izteiksmi ievadīsim ieejas sekcijā In[1] (14.15. zīm.). Funkcijas minimuma meklēšanas rezultātus satur izejas sekcija Out[1], t. i., funkcijas  $f(x, y)$  minimums ir vienāds ar  $-13,8564$  un tas atrodas punktā ar koordinātām  $x = 1,73205$  un  $y = 0,57735$ .

```
In[1]:=
FindMinimum[x^3+3*x*y^2-10*x-6*y, {x, 1}, {y, 1}]
Out[1]:=
{-13.8564, {x -> 1.73205, y -> 0.57735}}
```

14.15. zīm. Funkcijas ekstrēma atrašanas piemērs

## 14.7. Diferenciālvienādojumu atrisināšana

Lai atrisinātu parastos diferenciālvienādojumus, lieto funkciju DSolve, kurai ir vairāki kodēšanas formāti. Aplūkosim piemērus, kuriem funkcijas DSolve formāts ir šāds:

DSolve[difur, y[x], x],

kur difur – ir dotais diferenciālvienādojums, bet y[x] – argumenta x nezināma funkcija.

Piemēri.

1. Atrisināt diferenciālvienādojumu  $y' = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{y}$ .

Atrisinājums. Ieejas sekcijā In[4] (14.16. zīm.) ievadīsim funkciju DSolve [y'[x] == (x\*sqrt[1+x^2])/y[x], y[x], x], kura atrisinās doto diferenciālvienādojumu.

Uzdevuma atrisinājums  $y_1 = -\sqrt{\frac{2 \cdot (1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}} + C$  un

$y_2 = +\sqrt{\frac{2 \cdot (1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}} + C$  simboliskā pierakstā ir redzams izejas sekcijā Out[4].

```
In[4]:=
DSolve[y' [x]==(x*sqrt [1+x^2])/y[x], y[x], x]
Out[4]=
      2 3/2
      2 (1 + x )
      { {y[x] -> -sqrt[-----] + C[1]} },
                3
      2 3/2
      2 (1 + x )
      {y[x] -> sqrt[-----] + C[1]} }
```

14.16. zīm. Pirmās kārtas diferenciālvienādojuma atrisināšanas piemērs

2. Atrisināt trešās kārtas diferenciālvienādojumu  $y''' + 3y'' + 2y' + x = 0$ .

Atrisinājums. Ieejas sekcijā In[2] (14.17. zīm.) ievadīsim funkciju DSolve [y'''[x]+3\*y''[x]+2\*y'[x]+x==0, y[x], x], kura atrisinās doto diferenciālvien-

nādojumu. Uzdevuma atrisināšanas rezultāts  $y = \frac{3x - x^2}{4} + c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}$  simboliskā pierakstā ir redzams sekcijā Out[2].

```
In[2]:=
DSolve[y''''[x]+3*y'''[x]+2*y''[x]+x==0,y[x],x]
Out[2]=
{{y[x] -> \frac{3 x^2}{4} - \frac{x}{4} + \frac{C[1]}{2 E^x} + \frac{C[2]}{E^x} + C[3]}}
```

14.17. zīm. Trešās kārtas diferenciālvienādojuma atrisināšanas piemērs.

Lai atrastu diferenciālvienādojuma partikulāro atrisinājumu, funkcijas Dsolve parametru difur uzdod ar sarakstu, kurā iekļauj doto diferenciālvienādojumu un sākuma nosacījumus.

Piemērs. Atrisināt diferenciālvienādojumu  $y' - 2y = e^{-3x}$  ar sākuma nosacījumu  $y(0) = 2$ .

Atrisinājums. Ieejas sekcijā In[6] (14.18.zīm.) ievadīsim funkciju Dsolve [{y'[x]-2\*y[x]==Exp[-3\*x], y[0]==2}, y[x], x], kura atrisinās doto diferenciālvienādojumu. Uzdevuma atrisinājums  $y = -\frac{1}{5e^{3x}} + \frac{11e^{2x}}{5}$  simboliskā pierakstā ir redzams izejas sekcijā Out[6].

```
In[6]:=
DSolve[{y'[x]-2*y[x]==Exp[-3*x], y[0]==2}, y[x], x]
Out[6]=
{{y[x] -> -\frac{1}{5 E^{3 x}} + \frac{11 E^{2 x}}{5}}}
```

14.18. zīm. Diferenciālvienādojuma ar sākuma nosacījumiem atrisināšanas piemērs

## VINGRINĀJUMU ATBILDES

### 1

1. 13,25. 3. 20%. 5. 140. 7. 2777,78. 9. 4123,71. 11. 4,17%. 13. a) 5%; 6) 8%.  
 15. 210,6%. 17. 20. 19. 38,8%. 21. 12,35%. 23. 18,86%. 25. a) 149,30;  
 b) 198,6%. 27. Otrajam. 29. 6 ceturkšņi. 31. a) 4050; b) 4043,84. 33. 9,05%.  
 35. 3,71%. 37. 6,116. 39. 38271,96. 41. a) 1. darba vietā; b) Otrajā.  
 43. a) 1710,77; b) 7323,87. 45.  $\frac{K(1+p/100)((1+p/100)^n - 1)}{p/100}$ . 47. 12,55%.  
 49. 3744,56. 51. 7214,89. 53. 1. variants. 55. 7334,93. 57. 806,96.  
 59. 19657,61. 61. 5246,66. 63. 148,04. 65. Nē. 67. 23,47. 69. 0,12.  
 71. 1965,48. 73. 48%. 75. 0,9913K. 77. 4692,28. 79. 14,35%. 81. 1,667%  
 mēnesī.

### 2

1.  $10 - 5i$ . 3.  $3,4 - 3,8i$ . 5.  $\frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$ . 7.  $2^9 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = i \cdot 2^9$ . 9.  $16 \left( \cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi \right)$ . 11.  $x(x+1)(x^2 - x + 1)$ .  
 13.  $(x-2)(x+2)(x^2 + 4)$ .

### 3

1. 40. 3. 0. 5. 1. 7.  $a^3 - 2a^2 + a$ . 9.  $-a^3 + a$ . 11. 88. 13. -536. 15. -65.  
 17. 29. 19. 54. 21. -742. 23.  $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 9 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ . 25. a)  $\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 12 & 15 \\ 18 & 9 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 6 & 12 & 15 \\ 9 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ ;  
 b)  $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 3 & 14 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 6 & 8 & 11 \\ 0 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ ; c)  $\begin{pmatrix} -10 & -4 \\ -26 & -12 \\ -30 & -10 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} -4 & -16 & -18 \\ -24 & 2 & 10 \end{pmatrix}$ .  
 27.  $\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$ . 29. (13). 31.  $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ . 33.  $\begin{pmatrix} 50 & -4 & 90 \\ 31 & 10 & 67 \end{pmatrix}$ . 35.  $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ .

$$37. \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \quad 39. \begin{pmatrix} 18 & -11 & -8 \\ -11 & 7 & 5 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \quad 41. -\frac{1}{93} \begin{pmatrix} -47 & 5 & 18 \\ -10 & 7 & -12 \\ 29 & -11 & -21 \end{pmatrix}.$$

$$43. \begin{pmatrix} -23/14 \\ 6/14 \end{pmatrix}. \quad 45. \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -116 & 104 \\ 92 & -96 \end{pmatrix}. \quad 47. \begin{pmatrix} 201 & 179 & 198 \\ 222 & 246 & 224 \\ 116 & 208 & 162 \end{pmatrix}.$$

4

1.3. 3. (-9; 4; 2); (9; -4; -2). 5. (-4; 4; 3). 7.  $\bar{a} = (-2; 5; -0,5)$ ;  $\bar{b} = (4; -10; 1)$ .

9.  $72^\circ$  11. a) 1,93; b) 24,99. 13. (126/61, 84/61, -63/61). 15.  $12/\sqrt{17} \approx 2,91$ .

17.  $\bar{a} = (150; 100; 50; 200; 250)$ ;  $\bar{p} = (2; 1,5; 1,3; 1,8; 1)$ ,  $C = 1125$ . 19. Lineāri atkarīgi. 21. Lineāri neatkarīgi. 23. Jā. 25. Nē.

27.  $\bar{a} = 3\bar{e}_1 + 6\bar{e}_2 + 7\bar{e}_3 + 4\bar{e}_4$ .

5

1.  $AX = B$ , kur  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ . 3. (9/7; 5/7; -15/7).

5.  $\left(-\frac{5}{7}z; \frac{11}{7}z; z\right)$ ,  $z \in \mathbb{R}$ . 7. (5; 6; 10). 9. (24/29; -21/29; -3/29).

11.  $(-1-2z; -2-z; z)$ ,  $z \in \mathbb{R}$ . 13.  $(x; x/2; -2x)$ ,  $z \in \mathbb{R}$ .

15.  $\left(\frac{38}{37} + \frac{12}{37}x_4; \frac{41}{37} + \frac{11}{37}x_4; -\frac{13}{37} + \frac{29}{37}x_4; x_4\right)$ . 17. (3,4; -0,6 $x_4$ ; -2,2-

0,2 $x_4$ ; -2;  $x_4$ ). 19. (20; 10; 15; 10). 21. (2; 1; 2; 1).

23.  $\lambda_1 = 0,537$ ,  $\bar{x}_1 = (1,686t; t; 1,39t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ;  $\lambda_2 = 0,037$ ,  $\bar{x}_2 = (-0,814t; t; 1,956t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ;  $\lambda_3 = 0,2$ ,  $\bar{x}_3 = (0; 0; t)$ . 25.  $\lambda_1 = -4$ ,  $\bar{x} = (0; t; -t)$ .

6

1.a)  $\begin{pmatrix} 119 \\ 40 \\ 13 \end{pmatrix}$ ; b)  $\begin{pmatrix} 75 & 36 & 20 & 119 \\ 100 & 0 & 40 & 40 \\ 75 & 72 & 40 & 13 \end{pmatrix}$ . 3.a)  $\begin{pmatrix} 78,5 \\ 76 \\ 69,5 \end{pmatrix}$ ; b)  $\begin{pmatrix} 35 & 23 & 10 & 10 \\ 16 & 30 & 0 & 30 \\ 20 & 15 & 14 & 20 \end{pmatrix}$ .

5.  $\begin{pmatrix} 1,54 \\ 0,385 \\ 0,95 \end{pmatrix}$ . 7. a)  $x_1 - (0,2x_1 + 0,3x_2) = 20$ ,  $x_2 - (0,3x_1 + 0,4x_2) = 40$ ;

b)  $2,564 \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix}$ ; c)  $\begin{pmatrix} 61,54 \\ 97,44 \end{pmatrix}$ ; d)  $\begin{pmatrix} 12,31 & 29,23 & 20 \\ 18,46 & 38,97 & 40 \end{pmatrix}$ ; e)  $\begin{pmatrix} 30,77 \\ 15,38 \end{pmatrix}$ ,  
 $\begin{pmatrix} 30,77 \\ 82,05 \end{pmatrix}$ ; f)  $\begin{pmatrix} 1,7 \\ 1,8 \end{pmatrix}$ ; g) 1)  $\begin{pmatrix} 4,7 \\ 5,5 \end{pmatrix}$ ; 2) Paliel. 1,33 reizes. 9.  $\begin{pmatrix} 32,7 \\ 33,6(1) \end{pmatrix}$ .

7

3.1;  $a^2 + 2^a$ ;  $a^4 + 2^{a^2}$ . 7.  $y = 2(4x+1)^2$ . 9.  $y = \sin t$ ,  $t = 3x$ . 11.  $y = \lg a$ ,  
 $a = b + 8$ ,  $b = \lg x$ . 13.  $y = 2^t$ ,  $t = m^3$ ,  $m = 4x + 2$ . 15.  $D(y) = (-5; +\infty)$ .  
17.  $D(y) = (-\infty; 0]$ . 19.  $x \neq \pm 1$ . 21.  $D(y) = R$ . 23.  $D(y) = (-\infty; 0] \cup [6; +\infty)$ .  
25.  $D(y) = [0; +\infty)$ . 27.  $D(y) = (5; +\infty)$ . 29.  $D(y) = [-3; 0] \cup (0; 3]$ .  
31. a)  $y = \sqrt{x^2 - 16}$ ; b)  $y = \frac{\ln(x^2 - 9)}{x}$ ; c)  $y = \frac{1}{(x-2)(x-6)(x-8)}$ . 33. Vis-

pārēja veida funkcija. 35. Vispārēja veida funkcija. 37. Pāru. 39. Pāru.  
41. Pāru. 43. Pāru. 45. Pāru. 47. Vispārēja veida funkcija. 83. Lielākā  
vērtība ir vienāda ar 3; mazākā vērtība ir vienāda ar 1. 85. Lielākās vērtības  
nav; mazākā vērtība vienāda ar 1. 87.  $C = 600 + 2q$ ;  $C(700) = 2000$  Ls.

89. a) 350; b) 450. 91. a)  $800p - 20p^2$ ; c)  $R_{\max} = 8000$  pie  $p = 20$ .  
93. a)  $C = 1200 + 0,6q$ . 95. a)  $I = e^{0,2027t}$ ,  $t$  - laiks (gados), kurš pagājis kopš  
1992. g.; b) 2,25 milj. naudas vien.; pēc 7,93 gadiem. 97.  $v = 8w^2$ . 99. b) 2,72;

c)  $Q = \begin{cases} 1,5x - 3; & 2 \leq x \leq 2,72; \\ 4/(x+1); & 2,72 < x < +\infty; \end{cases}$  d)  $R = \begin{cases} 1,5x^2 - 3x; & 2 \leq x \leq 2,72; \\ 4x/(x+1); & 2,72 < x < +\infty. \end{cases}$  101. 40.

103. a)  $-8p^2 + 656p - 6700$ ; c) (11,96; 70,04); d) 41; 6747,99.

105.  $R = \begin{cases} p^2 - 2p, & 2 \leq p \leq 30, \\ 40p - 0,4p^2, & 30 \leq p \leq 100, \end{cases}$   $R_{\max} = 1000$  pie  $p = 50$ .

8

1. 1; 4/3; 3/2; 8/5; 5/3. 3. -1/3; -2/3; -3/7; -4/9; -5/11. 5. -a; a; -a; a; -

a. 7.  $-\infty$ . 9.  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . 11.  $\infty$ . 13. 0. 15. 1. 17.  $-\frac{6}{5}$ . 19. 3. 21.  $-\frac{1}{56}$ .

23.  $-\frac{1}{4}$ . 25.  $\frac{1}{2}$ . 27.  $\frac{1}{2}$ . 29.  $\frac{5}{3}$ . 31.  $\frac{1}{4}$ . 33.  $\frac{1}{2}$ . 35. 2,5. 37. 0. 39. 1.

41.  $\frac{2}{3}$ . 43.  $\frac{1}{2}$ . 45. 0. 47. 4. 49.  $e^2$ . 51.  $e^{-2/3}$ . 53. a) novēršams;  
 b) bezgalīgs; c) novēršams. 55. 13,53%. 57. 6,93. 59.  $\ln(1+i)$ . 61. 3304,95.

9

1.  $y' = \frac{x^2(12+3\cos x+x\cdot\sin x)}{16+8\cos x+\cos^2 x}$ . 3.  $y' = \frac{2\log_3 x}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}\cdot\ln 3}$ . 5.  $y' = 3x^2 \cdot \arcsin x + \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$ . 7.  $(7+2x)10^{7x+x^2} \cdot \ln 10$ . 9.  $y' = \frac{\sin 2x}{5\sqrt[5]{(x+1)^4}} + 2\sqrt[5]{x+1} \cos 2x$ . 11.  $y' = 3 \cos 3x + \frac{2 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$ . 13.  $y' = 4x^3 \cos x^4 + \frac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}$ .  
 15.  $y' = \frac{4\sqrt{x^3} + \sqrt{3}}{2\sqrt{x}(x^2 + \sqrt{3x})}$ . 17.  $y' = \frac{2x + \cos x}{(x^2 + \sin x) \ln 10}$ . 19.  $y' = \frac{\sin 2x}{\sqrt[5]{x}} - \frac{\sin^2 x}{5x\sqrt[5]{x}}$ .  
 21.  $y' = \frac{(x-1)^2}{e^x} \cdot \sin \frac{x^2+1}{e^x}$ . 23.  $y' = \frac{\operatorname{arctg} x^2}{2\sqrt{x}} + \frac{2x\sqrt{x}}{1+x^4}$ . 25.  $y' = \frac{4 - \operatorname{tg} x}{2\sqrt{4x + \ln \cos x}}$ .  
 27.  $y' = \frac{4+2^{x^2} \cdot 2x \cdot \ln 2}{4x+2^{x^2}}$ . 29.  $y' = 22(x + \sqrt[5]{x^2})^{10} \cdot \left(1 + \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}\right)$ . 31.  $y' = -3x \cdot \cos x^2 \sin 2x^2 + \sqrt{\cos 2x} \cdot \sqrt{\operatorname{ctg} 2x}$ . 33.  $y = \frac{2 \cdot e^{4x-x^2} (2-x-\ln 10)}{10^{2x+1}}$ .  
 35.  $y' = x^x (\ln x + 1)$ . 37.  $y' = x^{\arcsin x} \left( \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin x}{x} \right)$ . 39.  $y = 12x - 16$ .  
 41. (4; 0). 43.  $dy = 30 \sin^3 4x \cdot \sin 8x dx$ . 45.  $dy = \left( \frac{2}{2\sqrt{x+3}} - \frac{2x-4}{\sqrt{x}(2\sqrt{x+3})^2} \right) dx$ .  
 47. a)  $\Delta y \approx 1,094$ , b)  $\Delta y = 1,08$ . 49.  $R'(p) = \frac{400}{(p+20)^2}$ ;  $R'(10) = 0,022$ .  
 51a)  $\sqrt[3]{67} \approx 4,0625$ ; b)  $\sqrt{82} \approx 9,05$  (5); c)  $\sqrt[5]{33} \approx 2,0125$ . 53.  $R = 18p - 0,2p^2$ ,  $R'(20) = 10$ .

1. 0,5. 3. 0. 5.  $\infty$ . 7.  $\infty$ . 9. 0. 11.  $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$  -augoša;  $\left(0; \frac{2}{3}\right)$  -dilstoša. 13.  $(-2; 2)$  -augoša;  $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$  -dilstoša. 15.  $(-2,82; 0) \cup (2,82; +\infty)$  -augoša;  $(-\infty; -2,82) \cup (0; 2,82)$  -dilstoša. 17.  $(-\infty; 0,184) \cup (1,816; +\infty)$  -augoša;  $(0,183; 1,816)$  -dilstoša. 19.  $(-\infty; \ln 2)$  -dilstoša;  $(\ln 2; +\infty)$  -augoša. 21.  $y_{\text{vism}} = 2,507$ ;  $y_{\text{visl}} = 1107$ . 23.  $y_{\text{vism}} = 0$ ;  $y_{\text{visl}} = 18$ . 25. Definēta visur; Grafiks ir sim. att. pret Oy asi;  $y_{\text{min}} = 0$  npi  $x = 0$ .  $\left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{4}\right)$  un  $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{4}\right)$  ir pārlietuma punkti. Horiz. asimpt.  $y = 1$ . 27. Definēta visur, izņemot  $x = -\frac{1}{3}$ .  $x = -\frac{1}{3}$  ir vert. asimpt. Punktā  $x = -\frac{2}{3}$  ir lokālais maksimums. Punktā  $x = 0$  ir lokālais minimums. Sl. asimpt.  $y = x - \frac{1}{3}$ . 29. Definēta visur. Grafiks ir sim. att. pret Oy asi;  $y_{\text{min}} = 2$ , ja  $x = 0$ . Pārlietuma punktu nav. Asimpt. nav. 31. Definēta visur;  $y_{\text{max}} = 4e^{-2}$ , ja  $x = -2$ ;  $y_{\text{min}} = 0$ , ja  $x = 0$ ;  $(-3,41; 0,38)$  un  $(-0,59; 0,19)$  ir pārlietuma punkti. Horiz. asimpt.  $y = 0$ , ja  $x \rightarrow -\infty$ . 33. Definēta visur; visur augoša; pārlietuma punktu nav. Horiz. asimpt.  $y = a$ , ja  $x \rightarrow +\infty$ . 35.  $\bar{c} = 4 + q + \frac{225}{q}$ . Definēta  $q > 0$ ;  $\bar{c}_{\text{min}} = 34$ , ja  $q = 15$ ; sl. asimpt.  $\bar{c} = q + 4$ , ja  $q \rightarrow +\infty$ . 37.  $2 \times 2 \times 1$ . 39. a) augoša; b)  $\approx 8\%$ . 41.  $(11,11; 25)$ . 43.  $0 \leq p < 10/3$ . 49. 250. 51. a)  $p = 300$ , būs; a)  $p = 400$ ; nebūs. 53. 75,89.

1.  $-\cos(x-2) + c$ . 3.  $\frac{2^{2x-2}}{\ln 2} + c$ . 5.  $\frac{\sqrt[3]{(2+3x)^4}}{4} + c$ . 7.  $-\frac{1}{4(x^2-1)^2} + c$ . 9.  $\ln|x-2| + c$ . 11.  $\frac{1}{3} \ln|x^3+4| + c$ . 13.  $-\frac{1}{2} \text{ctg}(2x-1) + c$ . 15.  $\frac{1}{3 \cdot 2^{1+3x} \ln 2} + c$ . 17.  $\arctg x + c$ . 19.  $\frac{(1+3x^3)^6}{54} + c$ . 21.  $\ln\left|x^3 + \frac{x^2}{2}\right| + c$ . 23.  $\frac{1}{4 \cos^4 x} + c$ .

$$25. -\frac{1}{2\sin^2 x} + c. \quad 27. \sin x - x \cdot \cos x + c. \quad 29. \frac{1}{2}e^{2x} \left(x - \frac{1}{2}\right) + c. \quad 31. 84,4.$$

$$33. \frac{2}{3}(e-1)^{3/2}. \quad 35. \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right). \quad 37. 1,875. \quad 39. 0,5. \quad 41. 1.$$

$$43. C = 10Q - 0,02Q^2 + 200. \quad 45. 70Q + 0,54Q^2 - 254; \quad 13,63. \quad 47. a) 18,8159; \\ 6) 12; \quad \bar{n} = 2. \quad 49. 1. \quad 51. CS = 3920; \quad PS = 1568. \quad 53. 11,06. \quad 55. 20,498A.$$

$$57. 44 \, 235,23 \text{ Ls.} \quad 59. \frac{1}{8}. \quad 61. C_1 \cdot \frac{Q^2}{2a}.$$

## 12

$$1. y > 4 - x; \quad x \in \mathbb{R}. \quad 3. y > \frac{2}{x}; \quad x \neq 0. \quad 5. x^2 + y^2 \geq 4. \quad 7. x^2 + y^2 > 9.$$

$$9. y \geq -x; \quad x \geq 0. \quad 19. z'_x = 2xy - 2; \quad z'_y = x^2 + 2y. \quad 21. z'_x = 3yx^{3y-1}; \quad z'_y =$$

$$= 3x^{3y} \ln x. \quad 23. z'_x = \frac{y+3}{xy+3x-y}; \quad z'_y = \frac{x-1}{xy+3x-y}. \quad 25. z'_x = \frac{y - \sqrt{x+y} - \frac{x}{2\sqrt{x+y}}}{\cos^2(xy - x\sqrt{x+y})};$$

$$z'_y = \frac{x - \frac{x}{2\sqrt{x+y}}}{\cos^2(xy - x\sqrt{x+y})}. \quad 27. u'_x = -y \sin(xy + yz); \quad u'_y = -(x+z) \sin(xy + yz);$$

$$u'_z = -y \sin(xy + yz). \quad 29. u'_x = y \cdot x^{y-1} \sqrt{xz + yz} + \frac{x^y \cdot z}{2\sqrt{xz + yz}}; \quad u'_y = x^y \cdot \sqrt{xz + yz} \cdot \ln x +$$

$$+ \frac{x^y \cdot z}{2\sqrt{xz + yz}}; \quad u'_z = \frac{x^y(x+y)}{2\sqrt{xz + yz}}. \quad 31. u'_{x_1} = \frac{1}{5\sqrt[5]{(x_1 + 2\sqrt{x_2 x_3})^4}}; \quad u'_{x_2} =$$

$$= \frac{\sqrt{x_3}}{5\sqrt[5]{(x_1 + 2\sqrt{x_2 x_3})^4} \cdot \sqrt{x_2}}; \quad u'_{x_3} = \frac{\sqrt{x_2}}{5\sqrt[5]{(x_1 + 2\sqrt{x_2 x_3})^4} \cdot \sqrt{x_3}}. \quad 33. u'_x =$$

$$= -8z \cos^3(2x - 3y) \cdot \sin(2x - 3y); \quad u'_y = 12z \cos^3(2x - 3y) \cdot \sin(2x - 3y); \quad u'_z = \\ = \cos^4(2x - 3y). \quad 35. z'_x = 11/6; \quad z'_y = 1/6. \quad 35. z'_x = 75 \cdot \ln 5; \quad z'_y = 50 \cdot \ln 5.$$

$$39. E_{x_1}(u) = \frac{2x_1}{2x_1 + x_2 + 3x_3}; \quad E_{x_2}(u) = \frac{x_2}{2x_1 + x_2 + 3x_3}; \quad E_{x_3}(u) = \frac{3x_3}{2x_1 + x_2 + 3x_3}.$$

41.  $E_x(z) = \frac{1}{5}$ ;  $E_y(z) = \frac{4}{5}$ . 43. 0,4. 45. A ir zemas kvalitātes prece; B ir aizvietojošā; C ir papildinošā. 47. a)  $dz = \frac{y^3 dx}{(y^2 - 4x)^2} - \frac{x(4x + y^2)}{(y^2 - 4x)^2} dy$ ;
- b)  $dz = y \cos(xy + 2) dx + x \cos(xy + 2) dy$ . 49.  $\frac{\sin x - y}{x}$ . 51. -1. 53.  $\frac{1}{2}$ .
55. (0; 0) ir minimuma punkts. 57. (-2; -2) ir maksimuma punkts. 59. (3; 1) ir minimuma punkts. 61.  $(\sqrt{3}; 1/\sqrt{3})$  ir minimuma punkts;  $(-\sqrt{3}; -1/\sqrt{3})$  ir maksimuma punkts. 63. Ekstrēma punktu nav. 65.  $(1/\sqrt{3}; -\sqrt{3})$  ir maksimuma punkts;  $(-1/\sqrt{3}; \sqrt{3})$  ir minimuma punkts. 67. Ekstrēma punktu nav.
69.  $x_1 = 0,39$ ;  $x_2 = 5,06$ . 71. a)  $(8/13; 12/13)$ ; b)  $(3/8; -21/16)$ . 73. a)  $(7,5; 5)$ ; b)  $\approx 5$ ; c) 1,5. 75.  $x_1 = 1/2 p_1$ ;  $x_2 = 1/2 p_2$ . 77. a) 396 n. vien; b)  $\approx$  par 43,2 n. v. (precīzi par 45 n. v.). 79. 24.

### 13

1.  $y = cx^3$ . 3.  $y^2 = 2/3 \cdot \sqrt{(1+x^2)^3} + c$ . 5.  $y = e^{-2/\sqrt{x+3}}$ . 7.  $y = ce^{-x} + 3$ .
9.  $y = (x \ln x - x + 1)^2$ . 11.  $y = \sin x$ . 13.  $y = (-e^{-x^2} + c)/2x^2$ . 15.  $y = -0,2e^{-3x} + 2,2e^{2x}$ . 17.  $y = x(2x + c)$ . 19.  $y = e^{-2x} \left( \frac{1}{3} e^{3x} + c \right)$ . 21.  $y = -x/\ln cx$ . 23.  $y^2 = -x^2/2 \ln cy$ . 25.  $\arcsin y/x = \ln cx$ . 27.  $y = x^4/24 - x^3/6 + c_1 x^2 + c_2 x + c_3$ . 29.  $y = \frac{x^2}{2} \ln c_1 x + c_2$ . 31.  $y = \frac{x^2}{2} \ln c_1 x - x + c_2$ .
33.  $\frac{1}{c_1} \ln|y| + y = x + c_2$ . 35.  $y = e^{-2,5x} \left( c_1 \cos \frac{\sqrt{15}}{2} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{15}}{2} x \right)$ . 37.  $y = c_1 e^{-3x} + c_2 x \cdot e^{-3x}$ . 39.  $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \cos x \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + 2$ . 41.  $q = c \cdot p^a$ .
43.  $c = 100\sqrt{q}$ .

## LITERATŪRA

1. Апатенок Р. Ф., Маркина А. М., Попова Н. В., Хейнман В. Б. Элементы линейной алгебры. – Минск: *Вышэйш. школа*, 1977.
2. Ашманов С. А. Введение в математическую экономику. – М.: *Наука*, 1984.
3. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: *Наука*, 1975.
4. Гринглаз Л. Я. Высшая математика для экономистов. – Рига: *РИМЭ*, 1998.
5. Гринглаз Л. Я., Коростелева В. А., Нечаева М. Ф., Санкин В. А., Седнева М. П., Симонян Л. А., Сморгачев Е. Т. Учебная программа, методические указания и контрольные задания по дисциплине "Высшая математика". – Рига, 1984.
6. Гринглаз Л. Я., Санкин В. А. Высшая математика. Математический анализ. – Рига, 1988.
7. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М.: *Прогресс*, 1975.
8. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: *Наука*, 1967.
9. Крыньский Х. Э. Математика для экономистов. – М.: *Статистика*, 1970.
10. Кочович Е. Финансовая математика. – М.: *Финансы и статистика*, 1994.
11. Кудрявцев В. А., Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики. – М.: *Наука*, 1986.
12. Оревков Ю. П., Сидоров А. В., Черемных Ю. Н. Математический анализ для студентов-экономистов. – М.: *МАСИ*, 1993. – Ч. 1; 1995. – Ч. 2.
13. Пиндайк Р., Рубинфельд Д. Микроэкономика. – М.: *Экономика. Дело*, 1992.
14. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: *Наука*, 1976 – Т.1; 1981 – Т.2.
15. Хайнман Д. Н. Современная микроэкономика: анализ и применение. – М.: *Финансы и статистика*, 1992.
16. Четыркин Е. М. Методы финансовых и экономических расчетов. – М.: *Дело ЛТД*, 1995.
17. Яунземс А. Математика для экономических наук. – Рига: *Латв. унив-т*, 1993.
18. Barnett R. A., Ziegler M. K. Applied Mathematics for Business and Economics, Life Sciences and Social Sciences. – *Dellen publishing company, Collier Macmillan Publishers*, 1989.

19. Curwin J., Slater R. Quantitative Methods for Business decisions. – *Chapman & Hall*, 1991.
20. Frolova L. Ekonomisko procesu matemātiskā modelēšana. – Rīga: *Turība*, 1999.
21. Jaunzeme M. Finansu matemātika. – Rīga: *Turība*, 2000.
22. Hazans M., Bāliņa S. Tirgus ekonomikas vienkāršākie matemātiskie modeļi. – Rīga, 1993.
23. Hazans M., Bāliņa S. Kā aug nauda. – Rīga, 1994.
24. McKenna C. J., Rees R. Economics: a mathematical introduction. – *Oxford University Press*, 1993.
25. Spooner H. A., Wilson D. A. L. The Essence of Mathematics for Business. – *Prentice Hall*, 1991.

### Literatūra par matemātisko programmu pakotnēm

1. Аладьев В. З., Шишаков М. Л. Введение в среду пакета Mathematica 2.2. – М.: ИИД “Филинь”, 1997. – 368 с.
2. Воробьев Е. М. Введение в систему “Математика”. – М.: *Финансы и статистика*, 1998. – 262 с.
3. Давыдов Е. Г. Введение в интегрированную систему “Mathematica 2”. Технология работы и практика решения задач. – М.: *Радио и связь*, 1997. – 72 с.
4. Додж М., Кината К., Стинсен К. Эффективная работа с MS Excel 97. – СПб: *Путер*, 1998.
5. Говорухин В. Н., Цибулин В. Г. Введение в MAPLE. Математический пакет для всех. – М.: *Мир*, 1998. – 200 с.
6. Овчаренко Е. К., Ильина О. П., Балыбердин Е. В. Финансово-экономические расчеты в Excel. – М.: ИИД “Филинь”, 1998. – 184 с.
7. Потемкин В. Г. MatLab 5 для студентов. – М.: *Диалог – МИФИ*, 1998. – 314 с.
8. Потемкин В. Г. MatLab. Справочное пособие. – М.: *Диалог – МИФИ*, 1998. – 352 с.
9. Прохоров Г. М., Лебедев М. А., Колбеев В. В. Пакет символьных вычислений MAPLE V. – М.: *Петит*, 1997. – 200 с.
10. MathCAD 6.0 PLUS. Финансовые и научные расчеты в среде Windows 95. – М.: ИИД “Филинь”, 1997. – 712 с.
11. *Microsoft Excel 2000*: Справочник / Под ред. Ю. Колесникова. – СПб.: *Путер*, 1999. – 480 с.
12. Guide to Standard Mathematica Packages. Version 2.2. – *TELOS*, 1994.

## ALFABĒTISKAIS RĀDĪTĀJS

- Absolūtā vērtība 12
- Aizvietojuma norma 301
- marginālā (robež-) 301
  - - līdzsvara punktā 320
- Algebriskais papildinājums 77, 83
- Antisipatīvā procentu rēķināšana 33
- Anuitāte 22
- Aproksimācija 223
- Asimptota, grafika 245
- horizontālā 245
  - slīpā 245
  - vertikālā 245
- Atklāti definēta funkcija 148
- Atvasinājums, dotajā virzienā 303
- funkcijas 208
  - - apvērstās (inversās) 217
  - - parametriski dotas 218
  - - saliktas 216, 305
  - - geometriskā, mehāniskā jēga 208
  - - otrās kārtas 224
  - - parciālais 293
  - - summas, reizinājuma, dalījuma 214
- Atvasinājumu tabula 219
- Augšanas nepieciešamais nosacījums, funkcijas 237
- pietiekamais nosacījums 237
- Bāzes atrisinājums 118
- Bāzes nezināmie (mainīgie) 118
- Brīvie nezināmie (mainīgie) 118
- Cenu indekss 35
- Dalīšanas uz pusēm metode 39
- Determinants 73, 78
- otrās kārtas matricai 73
  - n-tās kārtas 78
  - Vronska 339
- Determinanta īpašības 74
- Dekarta koordinātu sistēma plaknē 12
- telpā 13
- Diferencējama funkcija 220
- Diferenciālis 221, 297
- Diferenciāļa īpašības 222
- izmantošana tuvinātajos aprēķinos 223
- Diferenciālvienādojums 327
- ar pastāvīgiem koeficientiem, homogēns 340
  - - nehomogēns 342
  - ar samazināmu kārtu 336
  - lineārs 337
  - otrās kārtas 335
  - pirmās kārtas 328
  - - ar atdalāmiem mainīgiem 329
  - - homogēns 334
  - - lineārs 332
- Diferenciālvienādojuma kārtā 237
- lietošanas piemēri ekonomikā 345
  - partikulārais atrisinājums 328
  - vispārīgais atrisinājums 328
- Dilšanas nepieciešamais nosacījums, funkcijas 237
- pietiekamais nosacījums 237
- Diskonts 31
- Diskontēšana 25
- Efektīvā gada procentu likme 24
- Eiklīda telpa 104
- EkspONENTE 195
- Ekstrēma punkti 238, 307
- nepieciešamais nosacījums 239, 308
  - pietiekamais nosacījums 239, 309
- Ekstrēms, nosacītais 315
- Ekvivalentā procentu likme 23
- Elastība, funkcijas 252, 295
- pieprasījuma, tās sakars ar ieņēmumiem 255
- Formula, Ņūtona - Leibnīca 268
- Teilora, Maklorena 234
- Funkcija 156
- apvērstā 151
  - augoša 157
  - dilstoša 157
  - Dirihlē 150
  - elementāra 155
  - ieņēmumu 168
  - ierobežota 158
  - izmaksu - 168
  - neelementāra 168

- nepāru 158
- pāru 157
- peļņas 169
- periodiska 158
- piedāvājuma 167
- pieprasījuma 166
- salikta 155
- slēpta 148
- Tornkvista 167

**Funkcija, apslēptā, tās atvasinājums 300**

- derīguma 298
- diferencējama 220
- izliekta, ieliekta 242
- Koba – Duglasa 288
- Lagranža 315
- nepārtraukta 292
- ražošanas 288
- vairāku argumentu (mainīgo) 287

**Funkcijas arguments 145**

- definēšanas veidi 146
- definīcijas, vērtību apgabals 145
- ekstrapolācija 165
- grafiks 147
- galvenās elementārās 152
- interpolācija 165
- pieaugums 156
- sakne 158
- vidējā vērtība 169

**Funkcijas grafiku pārveidojumi 158**

**Funkcijas lielākā un mazākā vērtība nogrieznī 242**

- linearizācija 223
- parciālais pieaugums 292
- pētīšanas vispārīgā shēma 248
- pilnais pieaugums 292

**Gausa metode 115**

**Globālais maksimums**

**(minimums) 242**

**Gradients 304**

**Ieguvums (labums), patērētāja 279**

**Iekšējā ienesīguma norma 36**

**Ieliekuma, izliekuma nepieciešamais**

**nosacījums, funkcijas 45**

- pietiekamais nosacījums 243

**Inflācija 35**

**Integrālis, ar mainīgu augšējo robežu 275**

- neīstais 276
- - no neierobežotas funkcijas 278
- - pa bezgalīgu intervālu 276
- neizsakāms ar elementārām funkcijām 275
- nenoteiktais 270
- noteiktais 265
- - ģeometriskā jēga 265
- - īpašības 266
- - robežas 265

**Integrāļsumma 265**

**Integrējama funkcija 265**

**Integrēšana pa daļām (parciālā) 273**

**Intervāls 14**

**Izokvanta 322**

**Koeficients, Džini 282**

**Kolineāri vektori 92**

**Kompleksa skaitļa arguments 65**

- modulis 64
- trigonometriskā forma 65

**Kompleksi saistīts skaitlis 63**

**Komplekss skaitlis 62**

**Kompleksu skaitļu kāpināšana pakāpē 66**

- reizināšana 63, 65
- saskaitīšana 63

**Kopa 13**

- tukša 13

**Kopu apvienojums, šķēlums 13, 14**

**Kopas papildinājums 14**

**Krāmiera formulas 109**

**Kredītu dzēšana 27**

- vienāda lieluma maksājumiem 28
- vienāda lieluma parāda maksājumiem 30

**Kritiskais punkts 239, 308**

**Kvadrātiskā forma 310**

- negatīvi definēta 311
- nenoteiktā 311
- pozitīvi definēta 311

**Ļeontjeva modelis (starpnozaru bilances) 128**

- produktīvais 131

**Ļeontjeva modeļa produktivitātes**

**nosacījums 133**

**Liekums, grafika 242**

**Lielums bezgalīgi liels 184**

- mazs 182

- Lielums diskrets 11
  - konstants 11
  - mainīgs 11
  - nepārtraukts 11
- Lineāras vienādojumu sistēmas 107
- Lineāras vienādojumu sistēmas matrica 114
  - paplašinātā matrica 114
- Lineāras vienādojumu sistēmas vispārīgais atrisinājums 118
- Līnija (līkne), līmeņa 290
  - Lorenca 281
  - vienaldzības 291
- Lokālā maksimuma, minimuma punkti 328
- Lopitāla kārtula 231
- Marginālais derīgums, naudas 320
- Marginālās izmaksas 210
- Marginālie ieņēmumi 210
- Matrica apvērstā 82
  - kvadrātiska 72
  - multiplikatoru 132
  - nenegatīva 131
  - piesaistītā 83
  - pilno izmaksu koeficientu 132
  - pozitīva 85
  - tiešo izmaksu koeficientu 132
  - transponētā 73
  - vienības 72
- Matricas (determinanta) diagonāle galvenā 72
  - blakus 74
- Matricas īpašvektors 119
  - īpašvērtība 119
  - rangs 112
  - reizinājums ar skaitli 80
- Matricu reizinājums 81
- Metode, konstanšu variācijas 342
  - mazāko kvadrātu 312
- Minors 77, 111
- Naturālais logaritms 195
- Nenoteiktības novēršana 191
- Nominālā gada procentu likme 24
- Norma, aizvietojuama 301
  - marginālā 301
  - - līdzsvara punktā 320
- $n$ -tais rindas loceklis 200
- $n$ -tais skaitļu virknes loceklis 178
- Orientēts nogrieznis 92
- Otrā ievērojamā robeža 194
- Orts 95
- Pakotne, matemātisko programmu 352
- Pakotnes Mathematica aktīvais dokuments 354
  - funkcija D 361
  - - Det 356
  - - Dot 356
  - - Dsolve 365
  - - Dt 361
  - - FindMinimum 364
  - - Integrate 362
  - - Inverse 356
  - - Nintegrate 362
  - - Solve 358
  - - Transpose 356
  - iebūvētā funkcija 353
  - iespējas 352
  - matemātiskā izteiksme 353
  - sekcija 354
- Pakotnes MS Excel iespējas 42
  - instruments Analysis ToolPak 42
  - matricu apstrādes funkcija 135
  - - MDETERM 137
  - - MINVERSE 138
  - - MMULT 136
  - - TRANSPOSE 137
- Pakotnes MS Excel finansu funkcijas 43
  - - DISC 49
  - - EFFECT 44
  - - FV 43
  - - INTRATE 49
  - - IPMT 45
  - - IRR 51
  - - NPV 50
  - - PMT 44
  - - PRICEDISC 48
- Paralelograma likums 93
- Pārlikuma punkts 243
- Pārtraukuma punkts 197
  - punktu klasifikācija 197
- Patērētāja ieguvums (labums) 279
  - līdzsvara punkts 318
- Patērētāju kredīta dzēšana 30
- Peļņas maksimuma nosacījums 251

- Pieskare 207
- Pilnā galaprodukta vektors 129
- Pirmā ievērojamā robeža 193
- Polinoms 68
- Polinoma sadalīšana reizinātājos 68
- Primitīvā funkcija 269
- Procents 16, 17
  - nepartrauktais 198
  - parastais ar precīzu dienu skaitu 19
  - precīzais ar precīzu dienu skaitu 19
  - vienkāršais, saliktais 18,19
- Procentu likme 18
- Procentu kapitalizācija 19
- Punkta koordinātas uz ass 12, 94
  - plaknē, telpā 12, 13
- Punkts, patērētāja līdzsvara 318
  
- Ražotāja ieguvums (labums) 280
- Reāla skaitļa modulis 12
- Rente 23
- Rinda, funkciju 236
  - Maklorena, Teilora 237
- Rindas konverģence 201
  - parciālsūma 201
  - summa 201
  - vispārīgais loceklis 200
- Robeža funkcijas 187
  - vienpusējā 190
  - virknes 179
  
- Sakars starp funkcijas atvasināmību un nepartrauktību 210
- Skaitļu ass 12
  - intervāls, nogrieznis, pusintervāls 14
  - rinda 199
  - virkne 178
- Skaitlis komplekss, imaginārs 62
  - $e$  194
  - naturāls, racionāls 11
  - reāls, irracionāls 11
- Stacionārs punkts 239, 308
- Starpnozaru bilances matrica 130
- Substitūcijas metode nenoteiktajā integrālī 271
  - noteiktajā integrālī 268
- Summas divkāršošanās periods 56
- Summārā kvadrātiskā kļūda 313
  
- Tabula, atvasinājumu 219
  - nenoteikto integrāļu 270
- Teorēma Bezū 69
  - Bolcāno-Košī 196
  - Gausa 73
  - Košī 230
  - Kronekera-Kapelli 114
  - Lagranža 228
  - par primitīvām funkcijām 269
  - par robežas vienīgumu 180
  - par virkni, kura atrodas starp virknēm 181
  - par sakaru starp robežu un bezgalīgi mazo 182
  - Rolla 228
- Tiešo izmaksu koeficienti 128
- Tīrie diskontētie ienākumi 36
  
- Uzkrātā summa 18
- Uzskaites likme 31
- Uzskaites likme  $i$ , ekvivalenta procentu likme  $i$  32
  
- Vekselis 33
- Vekseļa uzskaitē 33
- Vektors 92
  - $n$ -dimensiju 99
- Vektora koordinātas 95
  - izvirzījums pa ortiem 95
  - modulis 94
  - reizinājums ar skaitli 93
  - projekcija uz ass 93
- Vektoru lineāra atkarība 100
  - kombinācija 93
  - saskaitīšana 92
  - skalārais reizinājums 96
  - starpība 93
- Vektoru telpa 103
- Vektoru telpas bāze 103
- Vidējie raksturotāji 256
- Vienādojums, pieskares 209
- Virknes vispārīgais loceklis 178
- Virsmā, līmeņ- 290
  - vienaldzības 291

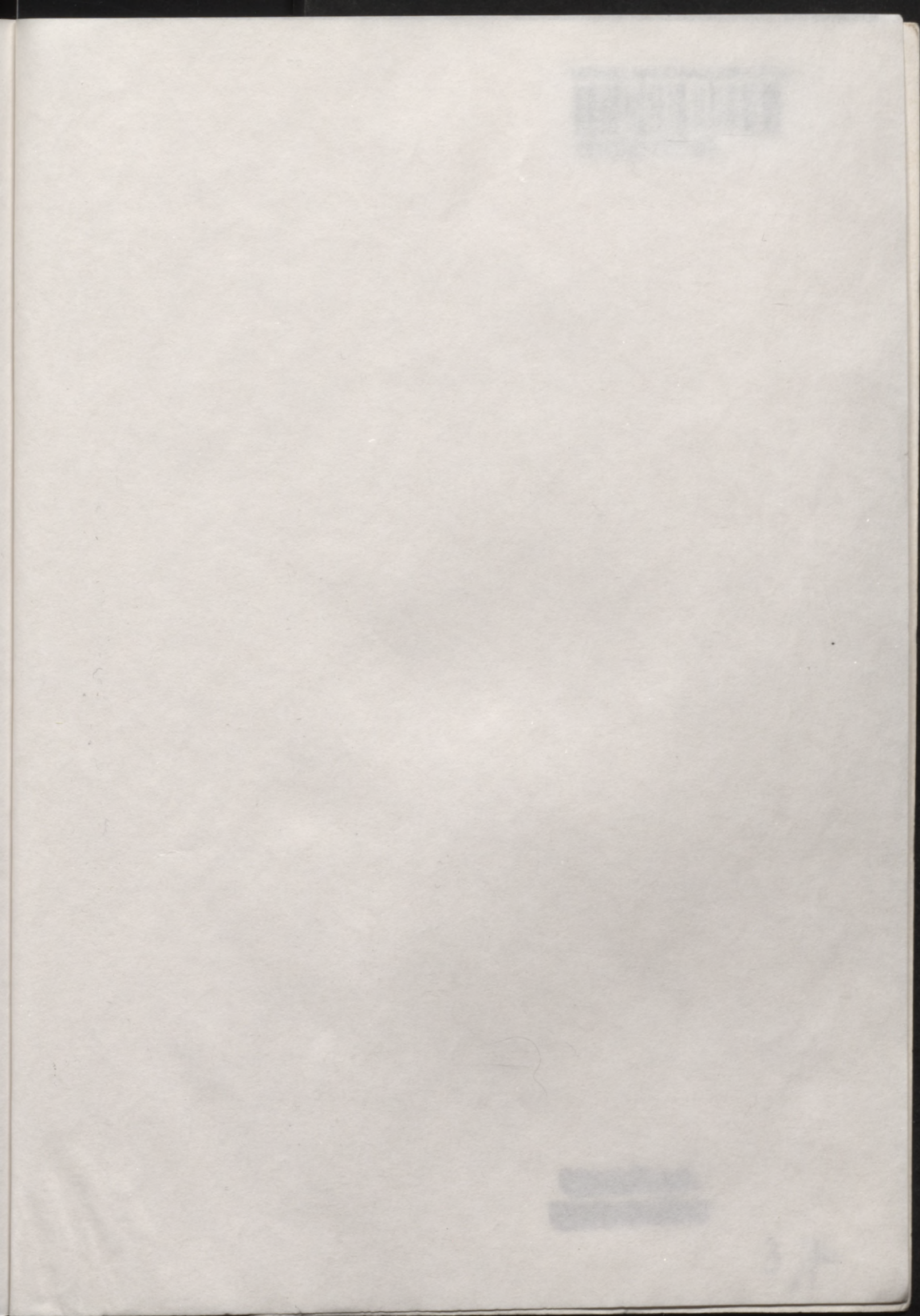
Tabula avasinajumu 219  
 - nenotikto integrāļu 270  
 Teorēma Bēsi 69  
 - Bolcno-Koši 196  
 - Gausa 73  
 - Koši 250  
 - Kronckera-Koši 114  
 - Lagranža 228  
 - par primitīvām funkcijām 269  
 - par robežas vienīgumu 180  
 - par virkni, kura trošas stūps  
 virkņām 181  
 - par saskaites stūps robežu un bezgalīgām  
 maksu 182  
 - Roli 228  
 Triju izmaksu koeficientu 128  
 Tīrās diskontētie iekārtumi 30  
 Uzskaites summa 18  
 Uzskaites likums 31  
 Uzskaites likums ekvivalents procentu  
 likums 32  
 Vektors 37  
 Vektora uzskaites 33  
 Vektors 92  
 - n-dimensiju 99  
 Vektora koordinātas 92  
 - izvērtējums pa orienu 92  
 - modulis 94  
 - reizinājums ar skalāru 93  
 - projekcija uz asi 93  
 Vektora līniju atkārtā 100  
 - kombinācija 92  
 - zāskaitēšana 92  
 - skalārais reizinājums 96  
 - stūps 92  
 Vektoru telpa 103  
 Vektoru telpas bāze 107  
 Vidējie tūktātoji 236  
 Vienādojumu sistēmas 209  
 Virknes vispārīgais loceklis 128  
 Virsmas līmeņa 200  
 - vienādojuma 201

Priekšrocība 207  
 Pirmās galaproduktu vektors 139  
 Pirmās ievērojama robeža 193  
 Polinoms 68  
 Polinoma sadalīšana reizinātājos 68  
 Pirmizrīvē funkcija 269  
 Procentu likums 127  
 - nepārtrauktāis 198  
 - parastais ar precīzu dienu skaitu 19  
 - precīzais ar precīzu dienu skaitu 19  
 - vienmērīgais, sākotnējais 18, 19  
 Procentu likums 18  
 Procentu kapitālaizdevi 19  
 Punkta koordinātas uz asi 12  
 - plaknē, telpā 12, 13  
 Punkta, parastās līnijas, izvērtējums 348  
 - 553  
 Rādītāja ieguvums (labums) 280  
 Reāls skaits modulis 12  
 Rente 23  
 Rindas funkcija 269  
 - Maklora rinda 282  
 Rindas konverģence 201  
 - summa 201  
 - vispārīgais loceklis 200  
 Rubeža funkcijas 182  
 - vienpusēja 190  
 - virknes 179  
 Sakars stūps funkcijas avasinajumu  
 nepārtrauktību 210  
 Skaitļu ass 12  
 - intervāls, nogrieznis, pusintervāls 14  
 - rinda 199  
 - virkne 178  
 Skalārais kompleksais, imaginārais 92  
 - 194  
 - 44  
 - 45  
 - 15  
 - 178  
 Skalārais reizinājums 96  
 - reāls, imaginārais 11  
 Stacionārs punkts 239  
 Stacionārs bilances matricas 130  
 Substitūcijas metode nenotikto integrāli 234  
 - notikto integrāli 208  
 Summas divkārīgās robežas 68  
 Summārais kvadrātskaidrs 313

Iespiests SIA "Elpa-2" tipogrāfijā,  
Doma laukums 1,  
Rīga, LV-1914  
Pas. Nr. 575

3

Latvian SIA "Eipa-2" registration  
Doma Jaunums 1  
Riga, LV-1014  
Pas. Nr. 272



2

1875  
1876

LATVIJAS NACIONĀLA BIBLIOTEKA



0303077008

OPUSKŪNS  
KĀRTOJĀNS

3,70



**Rīgas Starptautiskā un biznesa administrācija (RSEBAA)** sagatavo augsti kvalificētus speciālistus praktiskai darbībai atbilstoši mūsdienu Eiropas un Latvijas prasībām.

Augstskolas programmas, izmantojot Eiropas mācību iestāžu pieredzi, paredz apgūt biznesa priekšmetus, kas palīdz studentiem izprast biznesa pasauli ar zinātniskās pētniecības un prakses starpniecību.

2000.gadā augstskolai ar Augstākās izglītības padomes lēmumu piešķirta beztermiņa akreditācija. 2001.gadā RSEBAA Centrālajā un Austrumeiropas menedžmenta

attīstības asociācijā (CEEMAN) saņēmusi starptautisko akreditāciju.

### **Leonīds Grīnglāzs**

Matemātikas doktors, Rīgas Starptautiskās ekonomikas un biznesa administrācijas augstskolas profesors. Beidzis Latvijas Universitātes aspirantūru.

Strādā par pasniedzēju Rīgas augstskolās vairāk kā 35 gadus. Lekciju kursi augstākajā matemātikā, matemātiskajā statistikā, ekonomikas matemātiskajās metodēs. Autors un līdzautors virknei mācību grāmatu šinīs priekšmetos, kā arī divām monogrāfijām algebrā.

### **Jevgeņijs Kōpitovs**

Habilitētais inženierzinātņu doktors, profesors, akadēmiķis Starptautiskajā Sakaru Akadēmijā. Beidzis Rīgas Cīvilās aviācijas inženieru institūtu.

No 1973.gada strādā par pasniedzēju Rīgas augstskolās, no 1999.gada Transporta un Sakaru Institūta rektors. Pasniedz kursus: *Datu bāzes un bankas, Informācijas tehnoloģijas biznesā un pārvaldē, Datu algoritmi un struktūras.*

146 zinātnisko un mācību metodisko darbu, tai skaitā 14 mācību grāmatu un monogrāfiju, autors. Zinātnisko interešu loks: informāciju sistēmu piemērošana biznesa un transporta sistēmās, datu bāzu modernās tehnoloģijas. Sagatavojis trijus zinātņu doktorus.



ISBN 9984-705-07-2

