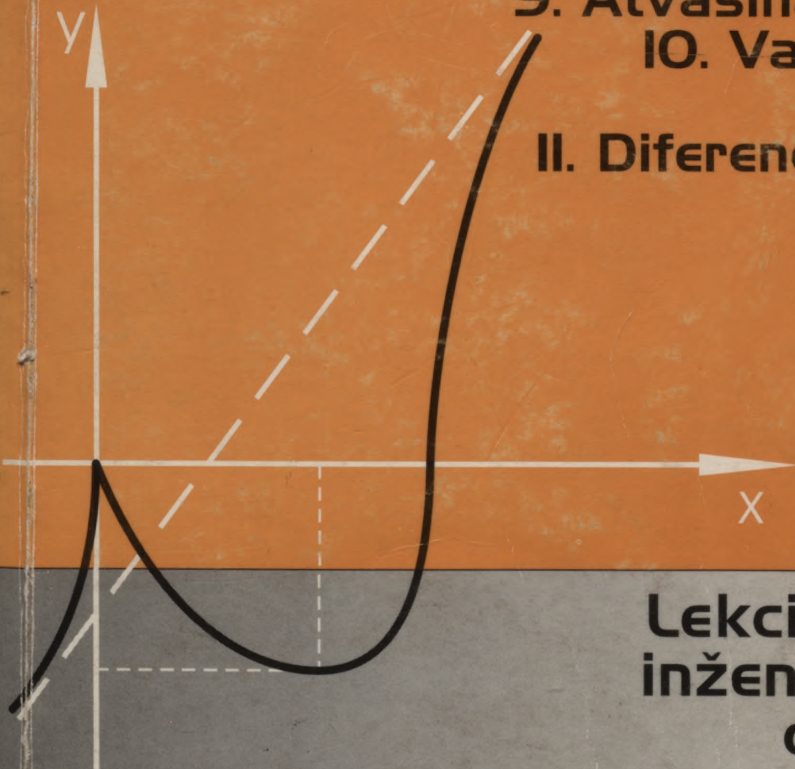
Kārlis ŠTEINERS

AUGSTĀKĀ MATEMĀTIKA



III

Lekciju konspekts inženierzinātņu un dabaszinātņu studentiem

ZVAIGZNE ABC

7-10

Kārlis ŠTEINERS

AUGSTĀKĀ MATEMĀTIKA

III

Lekciju konspekts
inženierzinātņu un dabaszinātņu
studentiem

ZVAIGZNE ABC

Viena no svarīgākajām augstākās matemātikas kursa tēmām ir matemātiskās analīzes jēdzieni, spriedumi un metodes, jo tie ir pamatā matemātikas praktiskiem lietojumiem dažādās inženierzinātņu un dabaszinātņu nozarēs. **Šajā grāmatā aplūkoti matemātiskās analīzes kursa ievadjautājumi, kas saistīti ar funkcijas robežas un atvasinājuma jēdzieniem.** Lai gan vairākus elementārās funkciju teorijas jēdzienus skolēni apgūst jau vidusskolā, grāmatā ir ietverts šo jautājumu atkārtojums un padziļinājums, jo tie nepieciešami kursa tālākajā izklāstā. Šī iemesla dēļ grāmatā dots arī pārskats par vidusskolas algebrā aplūkotajām elementārajām pamatfunkcijām, kopu teorijas jēdzieniem, reālā skaitļa jēdzienu un citiem jautājumiem.

Grāmatu kā mācību līdzekli var lietot arī koledžu studenti un vidusskolēni, kas apgūst matemātikas profilkursu.

Tāpat kā grāmatas «Augstākā matemātika» 1. un 2. daļā, arī šeit uz krāsas fona no vielas sistemātiskā izklāsta ir atdalīti dažādi komentāri, kopsavilkumi, vēsturiskas ziņas. Šīs piezīmes domātas, lai lasītājs varētu iegūt īsu pārskatu par svarīgākajiem faktiem, spriedumiem, formulām un metodēm, neiedziļinoties atttiecīgo jautājumu sīkākā izklāstā.

Grāmatā ietverti daudzu uzdevumu risināšanas paraugi, paredzot, ka sistemātiskām praktiskām nodarbībām tiek izmantots «Uzdevumu krājums augstākajā matemātikā» (autori Dz. Bože, L. Biezā, B. Siliņa, A. Strence; Apgāds Zvaigzne ABC, 3. izd., 1996. g.).

Kārlis Šteiners
AUGSTĀKĀ MATEMĀTIKA
6. VIENA ARGUMENTA FUNKCIJA 7. FUNKCIJAS ROBEŽA
8. FUNKCIJAS ATVASINĀJUMS 9. ATVASINĀJUMA LIETOJUMI
10. VAIRĀKARGUMENTU FUNKCIJA
11. DIFERENCIĀLĢEOMETRIJAS ELEMENTI

Redaktore B. Siliņa
Mākls. redaktore A. Lubgāne
Tehn. redaktore A. Svilpe
Maketētājs R. Lejasmeiers
Vāku zīm. S. Belsone

Apgāds Zvaigzne ABC, SIA, K. Valdemāra ielā 105, Rīgā, LV–1013.
Red. nr. E–581.
A/s «Poligrāfists», K.Valdemāra ielā 6, Rīgā, LV–1010.

ISBN 9984-17-175-2

VI NODAĻA

VIENA ARGUMENTA FUNKCIJA

6.1. §. KOPU TEORIJAS UN MATEMĀTISKĀS LOĢIKAS JĒDZIENI

1. KOPA

Jēdzienu «kopa» pieņem par matemātikas pamatjēdzienu, un to nevar definēt ar citu matemātikas jēdzienu palīdzību, bet var tikai paskaidrot aprakstoši.

Ar vārdu «kopa» matemātikā saprot dažādu objektu apvienojumu pēc kaut kādām noteiktām šo objektu pazīmēm, ar kuru palīdzību var noteikt, vai brīvi izraudzīts objekts pieder pie aplūkojamās kopas vai arī nepieder pie tās.

Objektus, no kuriem sastāv kopa, sauc par kopas elementiem.

Kopas apzīmē ar alfabēta lielajiem burtiem, bet kopas elementus – ar mazajiem burtiem.

Piemēram,
komplekso skaitļu kopu apzīmē ar burtu $\boldsymbol{C}$,
reālo skaitļu kopu – ar $\boldsymbol{R}$,
racionālo skaitļu kopu – ar $\boldsymbol{Q}$,
veselo skaitļu kopu – ar $\boldsymbol{Z}$,
naturālo skaitļu kopu – ar $\boldsymbol{N}$.

Ja elements a pieder pie kopas A, tad raksta $a \in A$. Ja elements b nepieder pie kopas X, tad raksta $b \bar{\in} X$ vai arī $b \notin X$.

Piemēram, $(2+3i) \in \boldsymbol{C}$, $2{,}7 \bar{\in} \boldsymbol{Z}$.

Ja kopas elementu skaits pārsniedz jebkuru naturālu skaitli, tad kopu sauc par bezgalīgu. Kopu sauc par galīgu, ja tās elementu skaitu var izteikt ar kādu naturālu skaitli.

Piemēram, reālo skaitļu kopa ir bezgalīga, bet burtu kopa alfabētā ir galīga kopa.

Galīgu skaitļu kopu var uzdot ar šīs kopas elementu sarakstu.

Piemēram, ciparu kopā ir 10 elementi, un to var uzdot šādi:

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Ja nav iespējams dot visu kādas kopas elementu sarakstu, tad norāda kopīgo īpašību, kāda piemīt visiem šīs kopas elementiem un nepiemīt nevienam citam objektam.

Piemēram, nav iespējams uzrakstīt visus tos reālos skaitļus, kuru kvadrāts ir mazāks nekā skaitlis 9. Skaitļu kopu ar šo īpašību pieraksta tā:

$$\{x \in \boldsymbol{R} \mid x^2 < 9\}.$$

Ja aplūkojamā īpašība nepiemīt nevienam objektam, tad saka, ka ir iegūta *tukša kopa*, t. i., tāda kopa, kurā nav neviena elementa. Tukšu kopu apzīmē ar simbolu Ø.

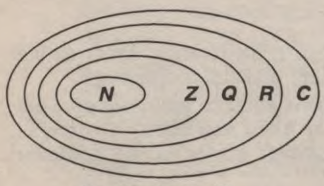
Piemēram, tukša kopa ir nevienādības $x^2+4<0$ reālo atrisinājumu kopa, jo nav tādu reālu skaitļu, kuru kvadrāts ir mazāks nekā -4. Šo apgalvojumu pieraksta, izmantojot tukšas kopas apzīmējumu:

$$\{x \in \boldsymbol{R} \mid x^2 < -4\} = \varnothing.$$

Ja kādas kopas A visi elementi pieder arī pie kopas B, tad saka, ka kopa A ir kopas B apakškopa, un raksta $A \subset B$.

Piemēram, naturālo skaitļu kopa ir veselo skaitļu kopas apakškopa. Savukārt veselo skaitļu kopa ir racionālo skaitļu kopas apakškopa, bet racionālo skaitļu kopa ir reālo skaitļu kopas apakškopa. Tā kā katru reālu skaitli x var uzrakstīt kompleksa skaitļa formā $x+0i$, tad reālo skaitļu kopa ir komplekso skaitļu kopas apakškopa. Tātad

$$\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{C}.$$



$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$

1. zīm.

Kopu īpašību grafiskai ilustrēšanai pieņem, ka aplūkojamās kopas elementi ir plaknes daļas punkti, ko ierobežo kāda brīvi izraudzīta slēgta līnija. Šādus zīmējumus sauc par *Eilera–Venna* diagrammām. Ar 1. zīmējumā attēloto Eilera–Venna diagrammu ilustrēts spriedums par komplekso skaitļu kopas apakškopām.

2. KOPU VIENĀDĪBA UN EKVIVALENCE. DARBĪBAS AR KOPĀM

Divas kopas A un B sauc par vienādām un raksta $A=B$, ja tās sastāv no vieniem un tiem pašiem elementiem (elementu secība abās kopās var būt atšķirīga).

Piemēram, kopas $X=\{1, 3, 5, 7, 9\}$ un $Y=\{7, 1, 5, 9, 3\}$ ir vienādas, jo tās sastāv no vieniem un tiem pašiem skaitļiem.

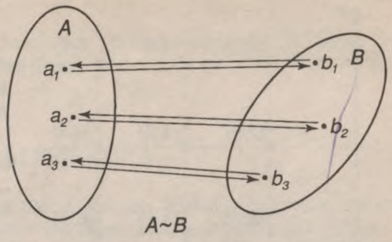
Kopas A un B ir vienādas tad un tikai tad, ja $A \subset B$ un $B \subset A$.

Divas kopas A un B sauc par ekvivalentām un raksta $A \sim B$, ja katram kopas A elementam a ir piekārtots viens un tikai viens kopas B elements b un turklāt katrs kopas B elements b ir piekārtots vienam un tikai vienam kopas A elementam a. Šādā gadījumā saka arī, ka starp kopu elementiem pastāv *abpusēji viennozīmīga atbilstība*.

Leonards Eilers (1707–1783) – izcils 18. gadsimta matemātiķis, fiziķis, astronoms. Dzimis Šveicē, mācījies Bāzeles ģimnāzijā un Bāzeles Universitātē pie profesora Johana Bernulli, mūža lielāko daļu strādājis Pēterburgas Zinātņu akadēmijā un Berlīnes Akadēmijā. Būdams vispusīgs zinātnieks, Eilers ir veicis fundamentālus pētījumus ļoti daudzās matemātikas nozarēs: matemātiskajā analīzē, funkciju teorijā, variāciju rēķinos, diferenciālvienādojumu teorijā, skaitļu teorijā, kopu teorijā, grafu teorijā. Nodarbojies arī ar hidrodinamiku, magnētisma teoriju, navigācijas, artilērijas un kuģu būves teoriju, debess mehāniku.

Džons Venns (1834–1923) – angļu filozofs un loģiķis.

Attēlojot ekvivalentas kopas grafiski ar Eilera–Venna diagrammām, no katra kopas A elementa a novelk bultiņu uz tam atbilstošo kopas B elementu b un no katra kopas B elementa b novelk bultiņu uz to kopas A elementu a, kuram ir piekārtots elements b (2. zīm.).



2. zīm.

P i e m ē r a m , naturālo skaitļu kopa ir ekvivalenta ar visu pozitīvo pāra skaitļu kopu

$$\{2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, \ldots\},$$

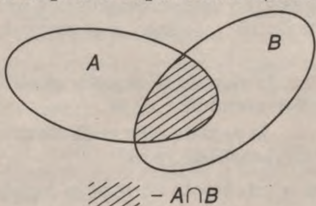
jo katram naturālam skaitlim n atbilst tieši viens pozitīvs pāra skaitlis $2n$ un otrādi: katram pozitīvam pāra skaitlim $2n$ atbilst tieši viens naturāls skaitlis n.

No šī piemēra varam secināt, ka bezgalīga kopa var būt ekvivalenta ar savu apakškopu. Acīmredzami *divas galīgas kopas ir ekvivalentas tad un tikai tad, ja tām ir vienāds elementu skaits.*

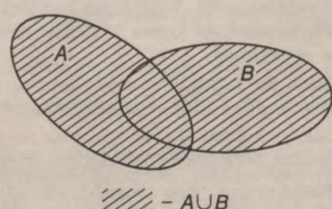
Kopām definē šādas **operācijas**: kopu šķēlumu, kopu apvienojumu, kopu starpību un kopu Dekarta reizinājumu.

Par divu kopu A un B šķēlumu sauc tādu kopu C, kas sastāv no visiem tiem elementiem, kuri pieder gan pie kopas A, gan arī pie kopas B (3. zīm.).

Kopu šķēluma veidošanas operāciju apzīmē ar simbolu $\cap$ un raksta $C=A\cap B$ (lasa: «kopa C ir kopu A un B šķēlums»).



3. zīm.



4. zīm.

P i e m ē r a m , ja $A=\{1, 3, 5, 7\}$ un $B=\{5, 7, 9\}$, tad $A\cap B=\{5, 7\}$.

Ja kopām A un B nav kopīgu elementu, tad to šķēlums ir tukša kopa: $A\cap B=\varnothing$.

Par divu kopu A un B apvienojumu sauc tādu kopu C, kas sastāv no visiem tiem elementiem, kuri pieder vismaz vienai no dotajām kopām (4. zīm.).

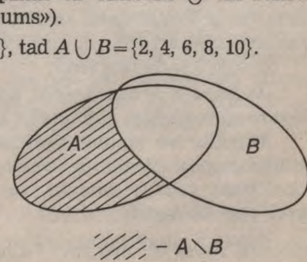
Kopu apvienojuma veidošanas operāciju apzīmē ar simbolu $\cup$ un raksta $C=A\cup B$ (lasa: «kopa C ir kopu A un B apvienojums»).

P i e m ē r a m , ja $A=\{2, 4, 6, 8\}$ un $B=\{4, 8, 10\}$, tad $A\cup B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$.

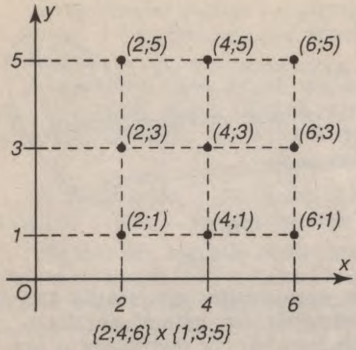
Par divu kopu A un B starpību sauc tādu kopu C, kas sastāv no visiem tiem kopas A elementiem, kuri nepieder pie kopas B (5. zīm.).

Kopu starpības veidošanas operāciju apzīmē ar simbolu $\setminus$ un raksta $C=A\setminus B$ (lasa: «kopa C ir kopu A un B starpība»).

P i e m ē r a m , ja $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ un $B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, tad $A\setminus B=\{1, 3, 5\}$.



5. zīm.



6. zīm.

Par divu kopu A un B Dekarta reizinājumu sauc tādu kopu C, kuras elementi ir visi iespējamie kopu A un B elementu sakārtoti pāri (a; b), kur $a \in A$ un $b \in B$.

Kopu Dekarta reizinājuma veidošanas operāciju apzīmē ar simbolu $\times$ un raksta $C = A \times B$ (lasa: «kopa C ir kopu A un B Dekarta reizinājums»).

Piemēram, ja $A = \{2, 4, 6\}$ un $B = \{1, 3, 5\}$, tad

$$A \times B = \{(2; 1), (4; 1), (6; 1), (2; 3), (4; 3), (6; 3), (2; 5), (4; 5), (6; 5)\}.$$

Šim piemēram ir vienkārša ģeometriska ilustrācija: ja kopas A elementi ir Ox ass punktu koordinātas un kopas B elementi ir Oy ass punktu koordinātas, tad kopas $A \times B$ elementi ir atbilstošo xOy plaknes punktu koordinātas (6. zīm.).

3. IEROBEŽOTAS KOPAS. SUPRĒMS UN INFĪMS

Aplūkosim vēl dažus kopu teorijas jēdzienus, ko lieto matemātiskajā analīzē.

Pieņemsim, ka kopas X elementi ir reāli skaitļi, t. i., kopa X ir reālo skaitļu kopas apakškopa.

Saka, ka ***kopa X ir ierobežota no augšas, ja eksistē tāds reāls skaitlis M, ka visiem šīs kopas elementiem x ir spēkā nevienādība $x \leqslant M$.***

Saka, ka ***kopa X ir ierobežota no apakšas, ja eksistē tāds reāls skaitlis m, ka visiem šīs kopas elementiem ir spēkā nevienādība $x \geqslant m$.***

Piemēram, visu negatīvo skaitļu kopa ir ierobežota no augšas, jo jebkurš negatīvs skaitlis ir mazāks nekā skaitlis 0.

Naturālo skaitļu kopa ir ierobežota no apakšas, jo visi šīs kopas elementi ir lielāki par jebkuru negatīvu skaitli (vai arī – lielāki nekā skaitlis 0).

Ja kopa X ir ierobežota no augšas un arī ierobežota no apakšas, tad kopu sauc par ierobežotu. Tātad ierobežotai kopai eksistē tāds skaitlis M un tāds skaitlis m, ka visiem šīs kopas elementiem ir spēkā nevienādības $m \leqslant x \leqslant M$.

Piemēram, reālo skaitļu intervāls (3; 7) ir ierobežota kopa, jo visi šīs kopas elementi ir lielāki nekā skaitlis $m = 2{,}5$, bet mazāki nekā skaitlis $M = 8$. Protams, var izvēlēties arī citas m un M vērtības: $m \leqslant 3$, $M \geqslant 7$.

Ir spēkā šāda **teorēma**.

Ja kopa X ir ierobežota, tad eksistē tāds pozitīvs skaitlis μ, ka visiem šīs kopas elementiem x ir spēkā nevienādība $|x| \leqslant \mu$.

Mazāko no visiem skaitļiem, kuri ir lielāki (vai vienādi) par jebkuru kādas kopas elementu, sauc par šīs kopas suprēmu. Lielāko no visiem skaitļiem, kuri ir mazāki (vai vienādi) par jebkuru kādas kopas elementu, sauc par šīs kopas infīmu.

Kopas X suprēmu apzīmē ar simbolu $\sup X$, bet infīmu – ar $\inf X$.

Piemēram, ja kopa X ir reālo skaitļu intervāls (3; 7), tad $\sup X = 7$ un $\inf X = 3$.

Ir spēkā šāda **teorēma**.

Ja kopa ir ierobežota no augšas, tad tai eksistē suprēms. Ja kopa ir ierobežota no apakšas, tad tai eksistē infīms.

4. REĀLO SKAITĻU KOPA

Matemātiskajā analīzē ļoti svarīgs ir reālā skaitļa jēdziens. Skolas matemātikas kursā reālā skaitļa jēdzienu apgūst pakāpeniski: aplūko naturālos skaitļus un daļskaitļus, veselos negatīvos skaitļus, negatīvos daļskaitļus, bezgalīgos periodiskos un bezgalīgos neperiodiskos decimāldaļskaitļus.

Kā zināms, katru veselu skaitli var izteikt bezgalīga periodiska decimāldaļskaitļa veidā, pierakstot tā decimālciparu vietā pa labi no komata bezgalīgi daudz nulles. Arī katru daļskaitli var izteikt kā bezgalīgu periodisku decimāldaļskaitli. Tātad *jebkuru racionālu skaitli var pārveidot par bezgalīgu periodisku decimāldaļskaitli*. Taču matemātikā ir arī tādas operācijas (piemēram, saknes aprēķināšana, logaritmēšana, mērīšana), kuru rezultātu ne vienmēr var izteikt ar bezgalīgu periodisku decimāldaļskaitli. Šo darbību rezultātā bieži iegūst *bezgalīgus neperiodiskus decimāldaļskaitļus jeb iracionālus skaitļus*. Tāpēc ir lietderīgi apvienot vienā skaitļu kopā visus bezgalīgos periodiskos decimāldaļskaitļus un bezgalīgos neperiodiskos decimāldaļskaitļus.

Par reālo skaitļu kopu sauc visu racionālo skaitļu** (jeb bezgalīgo periodisko decimāldaļskaitļu) **kopas un visu iracionālo skaitļu** (jeb bezgalīgo neperiodisko decimāldaļskaitļu) **kopas apvienojumu.

Tātad *reālo skaitļu kopas elementi ir bezgalīgi decimāldaļskaitļi*. Aplūkosim galvenās **reālo skaitļu kopas īpašības**.

1. Jebkuriem diviem reāliem skaitļiem x un y ir spēkā viena no attieksmēm $x=y$, $x<y$ vai arī $x>y$, t. i., reālo skaitļu kopa ir sakārtota.
2. Reālo skaitļu kopa ir bezgalīga; tajā nav vismazākā elementa un nav arī vislielākā elementa.
3. Reālo skaitļu kopā ir definētas šādas darbības: saskaitīšana, atņemšana, reizināšana, dalīšana (izņemot dalīšanu ar nulli), saknes aprēķināšana (izņemot pāra pakāpes sakni no negatīva skaitļa).
4. Starp jebkuriem diviem reāliem skaitļiem atrodas bezgalīgi daudz citu reālu skaitļu; šo īpašību sauc par reālo skaitļu kopas blīvuma īpašību.
5. Reālo skaitļu kopa ir nepārtraukta. Vienkāršoti nepārtrauktības īpašību var izskaidrot ar tās *ģeometrisko ilustrāciju*: reālo skaitļu kopā eksistē skaitlis, kas izsaka jebkura nogriežņa garumu, un otrādi – jebkuram pozitīvam reālam skaitlim eksistē tāds nogrieznis, kura garumu izsaka šis skaitlis (ja ir dots garuma vienības nogrieznis).

No reālo skaitļu kopas nepārtrauktības īpašības izriet apgalvojums, ka *katram reālam skaitlim x atbilst noteikts koordinātu taisnes punkts un otrādi – katram koordinātu taisnes punktam atbilst noteikts reāls skaitlis (šī punkta koordināta)*. Tas nozīmē, ka starp reālo skaitļu kopu un taisnes punktu kopu pastāv abpusēji viennozīmīga atbilstība jeb ka šīs kopas ir ekvivalentas. Šis fakts dod iespēju matemātiskajā analīzē lietot ģeometriskas interpretācijas un ģeometrisku terminoloģiju: ***jēdzieni «reāls skaitlis» un «koordinātu taisnes punkts» tiek uzskatīti par sinonīmiem***. Piemēram, saka «funkcija ir definēta punktā x_0», ar to saprotot, ka reāls skaitlis x_0 pieder pie funkcijas definīcijas apgabala. Tāpēc ***reālo skaitļu kopu sauc arī par reālo skaitļu taisni***.

Funkciju teorijā bieži lieto dažādas **reālo skaitļu kopas apakškopas**. Svarīgākās no tām ir intervāli.

Reālo skaitļu x kopu, kuriem ir spēkā nevienādības $a \leqslant x \leqslant b$, sauc par *slēgtu intervālu*; to apzīmē šādi: $[a; b]$.

Reālo skaitļu x kopu, kuriem ir spēkā nevienādības $a<x<b$, sauc par *vaļēju intervālu*; to apzīmē šādi: $(a; b)$.

Kopas, kuras definē ar nevienādībām $a \leqslant x < b$ vai $a < x \leqslant b$, sauc par *pusslēgtiem* (*vai pusvaļējiem*) *intervāliem*; tās apzīmē šādi: $[a;\ b)$ un $(a;\ b]$.

Par *bezgalīgiem intervāliem* sauc kopas $[a;\ +\infty)$ jeb $a \leqslant x$, $(a;\ +\infty)$ jeb $a < x$, $(-\infty;\ b]$ jeb $x \leqslant b$, $(-\infty;\ b)$ jeb $x < b$.

Arī visu reālo skaitļu kopu $\boldsymbol{R}$ (jeb skaitļu taisni) parasti raksta kā bezgalīgu intervālu $(-\infty;\ +\infty)$.

Robežu teorijā īpaši aplūko tādus intervālus, kas ir simetriski attiecībā pret kādu dotu punktu x_0. Šādu intervālu sauc par ***punkta x_0 apkārtni*** un apzīmē ar simbolu $U(x_0)$.

Par reālā skaitļa x moduli jeb absolūto vērtību sauc pašu šo skaitli, ja tas ir lielāks nekā nulle vai arī vienāds ar nulli, bet šim skaitlim pretējo skaitli, ja tas ir mazāks nekā nulle, t. i.,

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ ja } x \geqslant 0, \\ -x, \text{ ja } x < 0. \end{cases}$$

No moduļa definīcijas izriet secinājums, ka katram reālam skaitlim x ir spēkā nevienādība $x \leqslant |x|$.

Izmantojot reālā skaitļa moduļa definīciju un secinājumu, pierāda šādas **īpašības**:

1. $|x+y| \leqslant |x| + |y|$,
2. $|x-y| \geqslant |x| - |y|$,
3. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$,
4. $|x^n| = |x|^n \quad (n \in \boldsymbol{N})$,
5. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.

5. MATEMĀTISKĀS LOĢIKAS SIMBOLI

Lai varētu saīsināti un uzskatāmi pierakstīt dažādus spriedumus, kopu teorijā un arī citās matemātikas nozarēs parasti *lieto matemātiskās loģikas simbolus*:

$$\forall,\ \exists,\ \rceil,\ \Rightarrow,\ \Leftrightarrow.$$

Ja ir jānorāda, ka ***visiem*** aplūkojamās kopas elementiem ir spēkā kāda īpašība, lieto *simbolu* $\forall$, ko *sauc par* ***universālkvantoru*** un lasa «*katram*» vai «*visiem*».

Piemēram, apgalvojumu «katram intervāla (1; 5) skaitlim x ir spēkā nevienādība $x^2-6x+5<0$» var pierakstīt šādi:

$$\forall x \in (1;\ 5) \mid x^2-6x+5<0.$$

Lai pierakstītu izteikumu, ka aplūkojamā īpašība ir spēkā ***vismaz vienam*** kopas elementam, lieto *simbolu* $\exists$, ko *sauc par* ***eksistences kvantoru*** un lasa: «*eksistē*».

Piemēram, ar pierakstu

$$\exists x \in \boldsymbol{Z} \mid x^2=25$$

izsaka apgalvojumu: «eksistē vesels skaitlis x, kura kvadrāts ir vienāds ar 25». Veselo skaitļu kopā $\boldsymbol{Z}$ ir divi skaitļi ar minēto īpašību, proti, $+5$ un -5. Taču *eksistences kvantors neapgalvo tikai viena, bet vismaz viena elementa eksistenci ar norādīto īpašību.*

Ja ir nepieciešams norādīt, ka ***tikai vienam*** *kopas elementam* ir spēkā kāda noteikta īpašība, tad lieto simbolu $\exists!$.

Piemēram, ar pierakstu

$$\exists! n \in \boldsymbol{N} \mid n^2-6n+8<0$$

ir izteikts apgalvojums, ka tikai vienam naturālam skaitlim ir spēkā nevienādība $n^2-6n+8<0$ (šis skaitlis ir 3).

Apgalvojuma «katram» ***noliegumu*** *apzīmē ar simbolu* $\rceil\forall$, ko lasa «ne katram».

P i e m ē r a m, izteikumu «ne katram reālam skaitlim x pakāpe $(x-3)^2$ ir pozitīvs skaitlis» pieraksta šādi:

$$\neg\forall x\in \boldsymbol{R} \mid (x-3)^2>0.$$

Analogi apgalvojuma «eksistē» noliegumu apzīmē ar simbolu $\neg\exists$ (jeb $\bar{\exists}$), ko lasa «neeksistē».

P i e m ē r a m, ar pierakstu

$$\neg\exists\, x\in \boldsymbol{R} \mid x^2=-1$$

ir izteikts apgalvojums: «neeksistē reāls skaitlis, kura kvadrāts ir -1».

Ja no kāda apgalvojuma A izriet secinājums B, tad raksta $A\Rightarrow B$ ($\Rightarrow$ ir loģiskās ***secināšanas** jeb **implikācijas** **zīme***).

Ja no apgalvojuma A izriet secinājums B un otrādi - no B izriet apgalvojums A, tad saka, ka šie apgalvojumi jeb ***izteikumi ir ekvivalenti***, un raksta $A\Leftrightarrow B$ ($\Leftrightarrow$ ir ***ekvivalences zīme***).

P i e m ē r a m, apgalvojumi $|x|\leqslant 1$ un $-1\leqslant x\leqslant 1$ ir ekvivalenti, un tāpēc raksta:

$$(|x|\leqslant 1)\Leftrightarrow(-1\leqslant x\leqslant 1).$$

6.2. §. FUNKCIJAS JĒDZIENS

1. FUNKCIJAS DEFINĪCIJA UN AR TO SAISTĪTIE JĒDZIENI

Lai matemātikas metodes varētu lietot praksē, ir svarīgi noskaidrot, kuri no aplūkotajiem lielumiem ir konstantes, kuri - mainīgi lielumi, kā arī to, vai starp mainīgajiem lielumiem pastāv funkcionāla sakarība.

Tā, p i e m ē r a m, var noskaidrot, pēc kāda likuma vada elektriskā pretestība ir atkarīga no temperatūras, vai polimēru materiāla deformācija ir atkarīga no gaisa mitruma u. tml.

Funkcionālas sakarības pētīšanai pieņem, ka mainīgo lielumu vērtības ir kādu kopu elementi. Apzīmēsim ar X un Y divas šādu lielumu kopas, bet to elementus attiecīgi ar x un y.

D e f i n ī c i j a

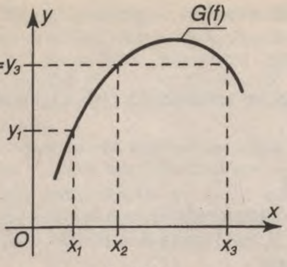
Ja katrai mainīgā lieluma x vērtībai ($x\in X$) saskaņā ar kādu noteiktu likumu atbilst tikai viena mainīgā lieluma y vērtība ($y\in Y$), tad šādu atbilstību starp kopām sauc par viena argumenta funkciju (bieži par funkciju sauc arī pašu mainīgo lielumu y un raksta $y=f(x)$).

Brīvi izraudzītu kopas X skaitli x sauc par argumentu jeb neatkarīgo mainīgo lielumu, bet tam piekārtoto kopas Y skaitli y - par funkcijas vērtību jeb atkarīgo mainīgo lielumu; to apzīmē ar $f(x)$.

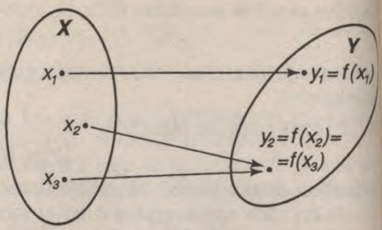
Kopu, no kuras tiek ņemtas funkcijas f argumenta vērtības, sauc par funkcijas definīcijas apgabalu un apzīmē ar simbolu $D(f)$.

Kopu, kuras elementi ir visas funkcijas vērtības $f(x)$, ja arguments $x\in D(f)$, sauc par funkcijas vērtību apgabalu un apzīmē ar simbolu $E(f)$.

Piekārtojumu starp kopu elementiem var ilustrēt grafiski ar Eilera–Venna diagrammu, novelkot bultiņu no katra kopas X elementa uz tam piekārtoto kopas Y elementu (7. zīm.).



7. zīm.



8. zīm.

Saskaņā ar funkcijas definīciju *nevienam kopas X elementam nevar būt piekārtoti vairāki kopas Y elementi, bet dažādiem kopas X elementiem var būt piekārtots viens un tas pats kopas Y elements.*

Parasti *funkciju uzdod ar vērtību tabulu, grafiku, analītiskā veidā vai arī ar kādu citu algoritmu.*

Uzdodot funkciju grafiski, lieto Dekarta koordinātu sistēmu plaknē; uz Ox ass atliek argumenta vērtības, bet uz Oy ass – funkcijas vērtības. *Par funkcijas f grafiku sauc visu to punktu kopu koordinātu plaknē, kuru koordinātas ir $(x; f(x))$, ja $x \in D(f)$.* Funkcijas grafiku apzīmē ar simbolu $G(f)$ (8. zīm.).

Jāpiebilst, ka *ne katra līnija koordinātu plaknē ir funkcijas grafiks.* Līnija nav funkcijas grafiks, ja var novilkt tādu Oy asij paralēlu taisni, kas šo līniju krusto vairāk nekā vienā punktā. Tādā gadījumā eksistē x vērtība, kurai ir piekārtotas vairāk nekā viena y vērtība, bet tas ir pretrunā ar funkcijas definīciju.

Saka, ka **funkcija ir uzdota analītiski**, *ja piekārtojuma likums starp kopu X un Y elementiem ir izteikts ar vienu vai vairākām formulām, t. i., ar analītiskām izteiksmēm.*

Piemēram,
$$y=x^2,\quad y=\sqrt{x+1},\quad y=\begin{cases}2x-3, & \text{ja } x\leqslant 0\\ x^2-1, & \text{ja } x>0.\end{cases}$$

Atkarībā no funkcijas analītiskās izteiksmes veida ***izšķir atklātas, apslēptas un parametriskā veidā dotas funkcijas***.

Ja no funkcijas analītiskās izteiksmes ir izteikts mainīgais lielums y, tad saka, ka **funkcija ir dota atklātā veidā**.

Piemēram, $y=2x-3$, $y=\sin x+\cos x$ ir atklātā veidā dotas funkcijas.

Atklātā veidā dotu funkciju vispārīgā gadījumā pieraksta kā vienādību $y=f(x)$.

Saka, ka **funkcija ir dota apslēptā veidā**, ja no analītiskās izteiksmes, kas saista vienā vienādojumā mainīgos x un y, nav izteikts mainīgais lielums y.

Piemēram, $2x+5y-4=0$, $\sin x+\cos x-2y=0$ ir apslēptā veidā dotas funkcijas.

Vispārīgajā gadījumā apslēptā veidā dotu funkciju pieraksta kā vienādojumu $F(x; y)=0$. Taču ne katrs šāds vienādojums definē apslēptu funkciju.

Piemēram, nav tādu reālu x un y vērtību, kas apmierina vienādojumu $x^2+y^2+1=0$. Tāpēc šis vienādojums nav funkcijas izteiksme.

Arī riņķa līnijas vienādojums $x^2+y^2-1=0$ nav apslēptas funkcijas izteiksme, jo katrai x vērtībai no intervāla $(-1; +1)$ ar šo vienādojumu tiek piekārtotas divas y vērtības: $y=\pm\sqrt{1-x^2}$. Var uzskatīt, ka ar riņķa līnijas vienādojumu ir dotas divas dažādas funkcijas, proti,

$$y=\sqrt{1-x^2} \quad \text{un} \quad y=-\sqrt{1-x^2}.$$

Saka, ka **funkcija ir dota parametriskā veidā**, ja piekārtojuma likums starp x un y vērtībām ir izteikts ar šādu divu vienādību sistēmu:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases}$$

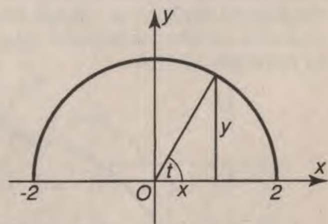
kur t ir mainīgs lielums, ko sauc par *parametru*. Parasti vienlaikus ar sistēmu norāda arī parametra vērtību intervālu: $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$.

Piemēram, funkciju $y = \sqrt{4 - x^2}$, kuras grafiks ir riņķa līnijas $x^2 + y^2 = 4$ daļa 1. un 2. kvadrantā, var uzdot parametriskā veidā šādi:

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi. \end{cases}$$

Šeit parametrs t ir leņķis, ko riņķa līnijas rādiuss veido ar Ox asi (9. zīm.).

Funkcijām definē attieksmes «vienāds», «lielāks», «mazāks», kā arī aritmētiskas darbības, attiecinot šīs sakarības uz visām atbilstošajām funkciju vērtībām. Piemēram, *saka, ka funkcijas f un φ ir vienādas, ja $D(f) = D(\varphi)$ un katram $x \in D(f)$ ir spēkā vienādība $f(x) = \varphi(x)$.*



9. zīm.

Funkcijas jēdziens ir attīstījies vairāku tūkstošu gadu laikā. Vispirms funkcionālu sakarību starp mainīgajiem lielumiem izteica ar vērtību tabulu. Tā, atšifrējot seno babiloniešu ķīļrakstus, konstatēja, ka jau 4000 gadu pirms mūsu ēras ir sastādītas tabulas, kas atbilst funkcijām $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \frac{1}{x}$ u. c.

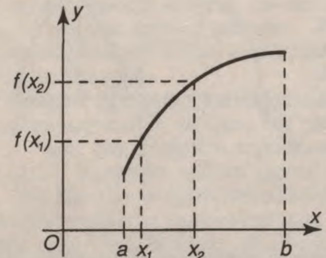
Sengrieķu un arābu matemātiķi sastādīja trigonometrisko funkciju tabulas. Samērā vēlu (sākot ar 17. gs.), kad R. Dekarts bija izveidojis koordinātu metodi un analītiskās ģeometrijas pamatus, bet F. Vjets ieviesis algebrā burtu simboliku, funkcijas jēdzienu sāka saistīt ar līnijām koordinātu plaknē un to vienādojumiem. Tā radās funkcionālas sakarības grafiskais un analītiskais izteiksmes veids, matemātiķu darbos parādījās ar funkcijas jēdzienu saistīta simbolika un terminoloģija. Attīstījās un pilnveidojās arī funkcijas jēdziena definīcija. Tā I. Ņūtons savos pētījumos aplūkoja mainīgos lielumus, kas atkarīgi tikai no laika; šādus mainīgos lielumus viņš sauca par **fluentām** (nosaukums radies no latīņu vārda «fluere», kas nozīmē tecēt, mainīties).

Terminu «funkcija» ieviesa vācu matemātiķis G. Leibnics (1646–1716) (nosaukums cēlies no latīņu vārda «functus», kas nozīmē realizē, izpilda). Simbolu $f(x)$ pirmais sāka lietot L. Eilers. Funkcijas jēdziena attīstības sakarā minams arī Johans Bernulli un citi matemātiķi. Pilnveidojot un precizējot funkcijas jēdziena definīciju, L. Eilera darbos radās apmēram šāds funkcijas jēdziena skaidrojums: mainīgo lielumu y sauc par mainīgā lieluma x funkciju, ja katrai pieļaujamai x vērtībai atbilst noteikta y vērtība. Taču 19., 20. gs. sakarā ar straujo dabaszinātņu un tehnikas attīstību parādījās pētījumi, kuru matemātiskajam aprakstam bija nepieciešams paplašināt funkcijas jēdzienu. Radās vispārīgāks funkcijas jēdziena traktējums kā īpaša atbilstība starp kopām – kopas attēlojums kopā, kur kopu elementi var būt brīvi izraudzīti matemātiski objekti.

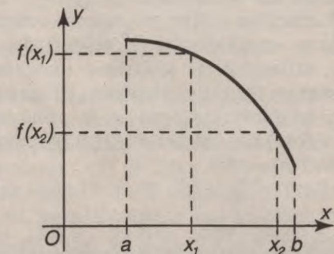
2. MONOTONAS, PERIODISKAS, IEROBEŽOTAS, PĀRA UN NEPĀRA FUNKCIJAS

Pētot funkciju, parasti noskaidro, vai tai piemīt kāda no funkciju vispārīgajām īpašībām: vai funkcija ir *monotona, periodiska, ierobežota, vai tā ir pāra* (*nepāra*) *funkcija* u. tml.

Lai noskaidrotu **monotonas funkcijas jēdzienu**, aplūkosim 10. un 11. zīmējumā attēlotos funkciju grafikus. 10. zīmējumā attēlotā funkcija ir *augoša* intervālā $[a;\ b]$, jo, palielinot argumenta vērtības, palielinās arī funkcijas vērtības, t. i., katrai lielākai argumenta vērtībai atbilst arī lielāka funkcijas vērtība. 11. zīmējumā attēlotā funkcija ir *dilstoša* intervālā $[a;\ b]$, jo, palielinot argumenta vērtības, funkcijas vērtības samazinās, t. i., katrai lielākai argumenta vērtībai atbilst mazāka funkcijas vērtība.



10. zīm.



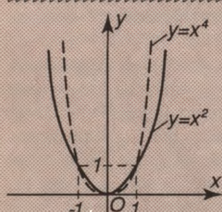
11. zīm.

Definīcija

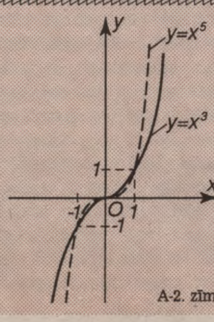
Funkciju sauc par augošu (dilstošu) intervālā $[a;\ b]$, ***ja katrām divām argumenta vērtībām*** x_1 ***un*** x_2 ***no šī intervāla, kurām*** $x_1 < x_2$, ***ir spēkā nevienādība*** $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Saka, ka ***funkcija kādā intervālā ir monotona, ja tā šajā intervālā ir vai nu augoša, vai arī dilstoša***.

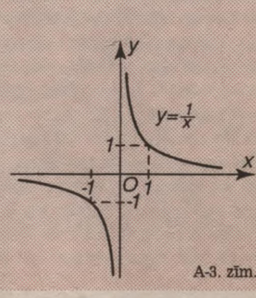
Ja katrām divām argumenta vērtībām x_1 un x_2, kurām $x_1 < x_2$, ir spēkā nevienādība $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, tad saka, ka funkcija ir *nedilstoša*, bet, ja $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, tad saka, ka funkcija ir *neaugoša*.



A-1. zīm.



A-2. zīm.



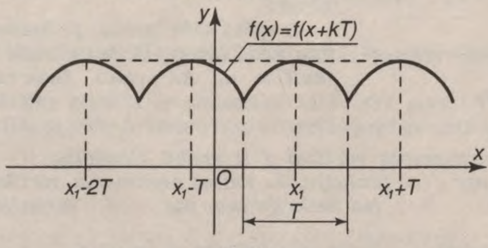
A-3. zīm.

Ja funkcijas vērtības pēc noteikta likuma periodiski atkārtojas, tad saka, ka funkcija ir **periodiska**. Piemēram, viena no sinusa funkcijas īpašībām ir vienādība $\sin(x+2\pi k)=\sin x$. Tātad sinusa funkcijas vērtības ir vienādas visos tajos punktos, kuri cits no cita atšķiras par lielumu $2\pi k$ ($k \in Z$). Šo īpašību sauc par *periodiskumu*, bet skaitli 2π - par sinusa funkcijas periodu. Vispārīgā gadījumā periodisku funkciju definē šādi.

Definīcija

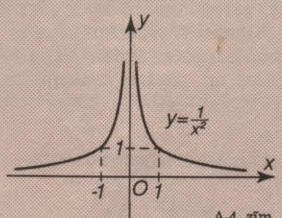
Funkciju sauc par periodisku, ja eksistē tāds skaitlis $T \neq 0$, ka ar katru argumenta vērtību x ir spēkā vienādība $f(x+T)=f(x)$. Pēc moduļa mazāko no šādiem skaitļiem T sauc par funkcijas periodu.

Ja funkcijas periods ir skaitlis T, tad ir spēkā arī šādas vienādības: $f(x \pm 2T)=f(x \pm 3T)= \ldots =f(x \pm kT)=f(x)$, kur $k \in Z$.

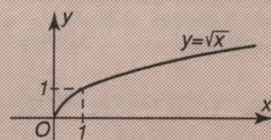


12. zīm.

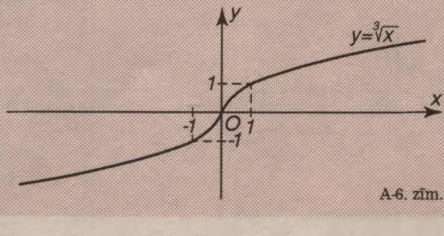
No definīcijas izriet periodiskas funkcijas **grafika īpašība**: ja periodiskas funkcijas grafiks ir iegūts kādā intervālā, kura garums ir vienāds ar periodu T, tad, šo līniju pārnesot paralēli Ox asij par lielumu kT ($k \in Z$), iegūst funkcijas grafiku pārējos definīcijas apgabala punktos (12. zīm.).



A-4. zīm.



A-5. zīm.



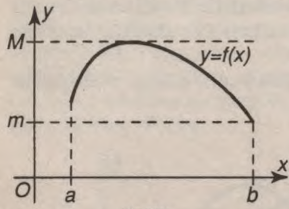
A-6. zīm.

6.1. paragrāfā aplūkojām jēdzienu par ierobežotām kopām. Analogi definē arī ierobežotas funkcijas.

Definīcija

Saka, ka funkcija kādā intervālā ir ierobežota no augšas, ja eksistē tāds skaitlis M, ka visos šī intervāla punktos ir spēkā nevienādība $f(x) \leqslant M$.

Saka, ka funkcija kādā intervālā ir ierobežota no apakšas, ja eksistē tāds skaitlis m, ka visos šī intervāla punktos ir spēkā nevienādība $f(x) \geqslant m$.



13. zīm.

Ja funkcija ir ierobežota kā no augšas, tā arī no apakšas, t. i., ***ja visos intervāla punktos ir spēkā nevienādības $m \leqslant f(x) \leqslant M$, tad funkciju sauc par ierobežotu šajā intervālā.***

Ierobežotas funkcijas grafiks parādīts 13. zīmējumā.

Ir spēkā šāda īpašība: ***ja funkcija ir ierobežota kādā intervālā, tad eksistē tāds pozitīvs skaitlis μ, ka visos intervāla punktos $|f(x)| \leqslant \mu$.***

Definīcija

Ja katrai argumenta vērtībai x ir spēkā vienādība $f(-x)=f(x)$, tad funkciju sauc par pāra funkciju. Ja katrai argumenta vērtībai x ir spēkā vienādība $f(-x)=-f(x)$, tad funkciju sauc par nepāra funkciju.

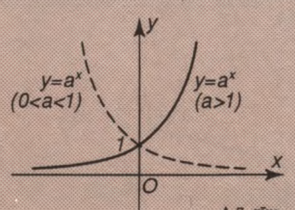
Piemēram, $f(x)=\dfrac{1-3x^2}{2x^4}$ ir pāra funkcija, jo $\forall\, x \in D(f)$

$$f(-x)=\frac{1-3(-x)^2}{2(-x)^4}=\frac{1-3x^2}{2x^4}=f(x).$$

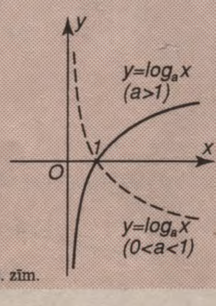
Savukārt $f(x)=2x^5-7x^3+3x$ ir nepāra funkcija, jo $\forall\, x \in D(f)$ ir spēkā vienādība $f(-x)=2(-x)^5-7(-x)^3+3(-x)=-2x^5+7x^3-3x=-(2x^5-7x^3+3x)=-f(x)$. □

Analogi šo piemēru risinājumiem var pierādīt šādas **īpašības**.

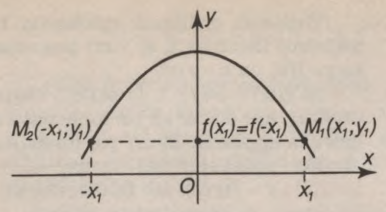
1. Divu vai vairāku pāra funkciju summa vai reizinājums arī ir pāra funkcija.
2. Divu nepāra funkciju reizinājums vai dalījums ir pāra funkcija.
3. Divu vai vairāku nepāra funkciju summa ir nepāra funkcija.
4. Pāra funkcijas reizinājums vai dalījums ar nepāra funkciju ir nepāra funkcija.



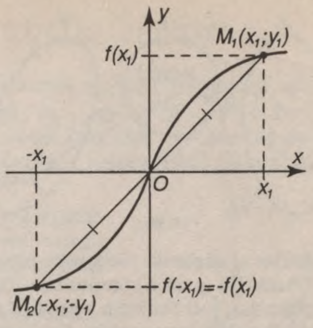
A-7. zīm.



A-8. zīm.



14. zīm.



15. zīm.

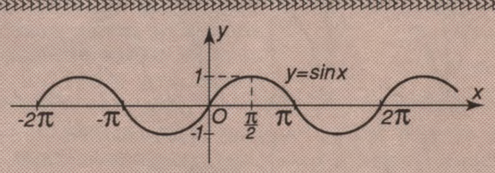
Izmantojot pāra un nepāra funkciju definīcijas, pierāda šādas **grafiku īpašības**.

Pāra funkcijas grafiks ir simetrisks attiecībā pret Oy asi (14. zīm.). ***Nepāra funkcijas grafiks ir simetrisks attiecībā pret koordinātu sākumpunktu*** (15. zīm.).

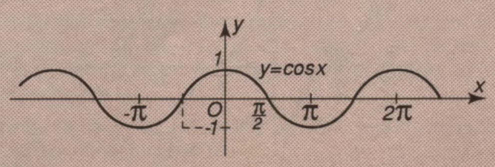
6.3. §. SALIKTAS FUNKCIJAS JĒDZIENS

Aplūkojot funkcionālu sakarību starp mainīgiem lielumiem, ir iespējams, ka arī funkcijas arguments ir kāda cita mainīga lieluma funkcija.

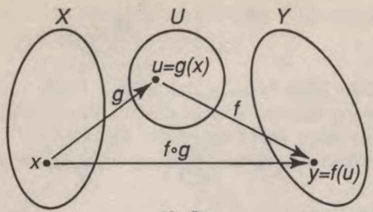
Piemēram, pieņemsim, ka funkcijas $y=\sqrt{u}$ arguments u ir mainīgā lieluma x funkcija: $u=1-x^2$. Tā kā ir tādas u vērtības, kas pieder kā pie funkcijas $y=\sqrt{u}$ definīcijas apgabala, tā arī pie funkcijas $u=1-x^2$ vērtību apgabala, tad ir matemātiska jēga izteiksmei $y=\sqrt{1-x^2}$, ko iegūst, ievietojot pirmās funkcijas argumenta u vietā izteiksmi $1-x^2$. Šādi iegūtu funkciju sauc par **saliktu funkciju**.



A-9. zīm.



A-10. zīm.



16. zīm.

Vispārīgā gadījumā aplūkojam trīs mainīgus lielumus x, u, y un pieņemam, ka $y=f(u)$ un $u=g(x)$.

Ja $E(g)\subset D(f)$, t. i., eksistē tādas u vērtības, kas pieder kā pie funkcijas f definīcijas apgabala, tā arī pie funkcijas g vērtību apgabala, tad iegūst saliktu funkciju $y=f(g(x))$ jeb funkciju g un f kompozīciju, ko apzīmē ar simbolu $f\circ g$. Šādu vienas funkcijas ievietošanu otras funkcijas argumenta vietā sauc par superpozīciju.

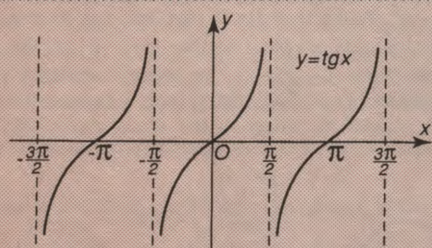
Funkciju g un f kompozīcija ilustrēta ar 16. zīmējumā attēloto Eilera–Venna diagrammu. Šeit funkcija g kopu X attēlo kopā U, funkcija f kopu U attēlo kopā Y, bet šo funkciju kompozīcija $f\circ g$ kopu X attēlo kopā Y.

Atrodot saliktas funkcijas $y=f(g(x))$ vērtību, vispirms ar argumenta x vērtību izpilda darbības, kas ir apzīmētas ar g; pēc tam ar iegūto $g(x)$ vērtību izpilda darbības, kas apzīmētas ar f. Tāpēc g sauc par *iekšējo funkciju*, bet f – par *ārējo funkciju*. Parasti saliktai funkcijai ir vairākas iekšējās funkcijas.

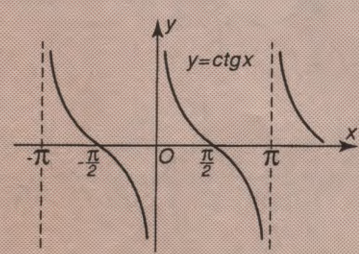
Piemēram, salikta funkcija $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-5x}}$ ir iegūta, izpildot superpozīciju ar funkcijām $y=\dfrac{1}{u}$, $u=\sqrt{v}$ un $v=x^2-5x$.

Piemērs. **Dotas funkcijas $f(x)=x^2$ un $g(x)=\lg x$. Uzrakstīt izteiksmes saliktām funkcijām $f(g(x))$, $g(f(x))$, $f(g(f(x)))$, $g(f(g(x)))$.**

Tā kā šeit ar f ir apzīmēta kvadrātā kāpināšanas darbība, bet ar g – decimāllogaritma atrašana, tad $f(g(x))=(\lg x)^2=\lg^2 x$; $g(f(x))=\lg x^2=2\lg x$; $f(g(f(x)))=(\lg x^2)^2=(2\lg x)^2=4\lg^2 x$; $g(f(g(x)))=\lg(\lg x)^2=2\lg\lg x$.



A-11. zīm.



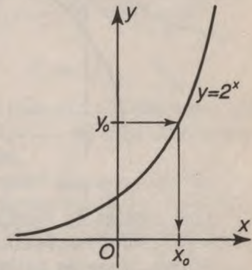
A-12. zīm.

6.4. §. INVERSĀS FUNKCIJAS JĒDZIENS

Pētot funkcijas, parasti pēc dotās argumenta vērtības ir jāatrod atbilstošā funkcijas vērtība. Piemēram, ja $f(x)=\sqrt{x}$, tad $f(4)=\sqrt{4}=2$, $f(9)=\sqrt{9}=3$. Taču bieži ir jāaplūko arī **apgriezts uzdevums**: pēc dotās funkcijas vērtības jānosaka tai atbilstošā argumenta vērtība. Ar šādu uzdevumu sastopamies, risinot dažādus vienādojumus.

Piemēram, atrisināt vienādojumu $2^x=8$ nozīmē atrast, ar kādu argumenta x vērtību eksponentfunkcijas $y=2^x$ vērtība ir skaitlis 8. Šajā piemērā ir tikai viena tāda argumenta vērtība: $x=3$.

Var pierādīt, ka katram skaitlim y_0 no eksponentfunkcijas $y=2^x$ vērtību apgabala $(0; +\infty)$ atbilst tikai viena argumenta x vērtība x_0, ar kuru ir spēkā vienādība $2^{x_0}=y_0$ (17. zīm.). Šo atbilstību sauc par eksponentfunkcijas *inverso* funkciju, un tā ir logaritmiskā funkcija $x=\log_2 y$.



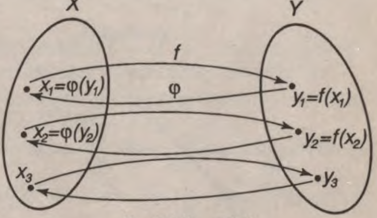
$y_0=2^{x_0} \Leftrightarrow x_0=\log_2 y_0$

17. zīm.

Vispārīgā gadījumā inverso funkciju definē šādi.

Ja katram skaitlim y_0 no funkcijas $y=f(x)$ vērtību apgabala $E(f)$ pēc noteikta likuma φ atbilst tikai viena x vērtība x_0 no funkcijas f definīcijas apgabala $D(f)$ un tieši tā, ar kuru $f(x_0)=y_0$, tad saka, ka $y=f(x)$ ir apvēršama funkcija un $x=\varphi(y)$ sauc par funkcijas $y=f(x)$ apvērsto jeb inverso funkciju.

Inversās funkcijas definīciju ilustrē 18. zīmējumā attēlotā Eilera–Venna diagramma.



$X=D(f)=E(\varphi)$
$Y=E(f)=D(\varphi)$

18. zīm.

No definīcijas izriet, ka *dotās funkcijas f vērtību apgabals ir inversās funkcijas φ definīcijas apgabals un otrādi: dotās funkcijas definīcijas apgabals ir inversās funkcijas vērtību apgabals, t. i., $D(\varphi)=E(f)$ un $E(\varphi)=D(f)$.*

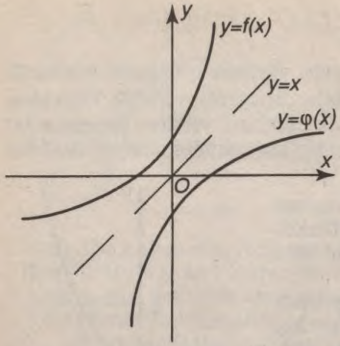
Tātad no vienādības $y=f(x)$ seko, ka $x=\varphi(y)$. Tomēr parasti arī inversās funkcijas argumentu apzīmē ar x un funkcijas vērtību - ar y, proti, mainot apzīmējumus izteiksmē $x=\varphi(y)$, iegūst šādu inversās funkcijas pierakstu: $y=\varphi(x)$.

Piemēram, eksponentfunkcijas $y=a^x$ inversā funkcija ir $x=\log_a y$ ($a>0$; $a\neq 1$). Ja šajā izteiksmē argumentu apzīmē ar x un atkarīgo mainīgo lielumu - ar y, tad iegūst parasti lietoto logaritmiskās funkcijas pierakstu $y=\log_a x$.

Matemātikā bieži lieto šādu divu savstarpēji inversu funkciju **īpašību**: tā kā $x=\varphi(y)$, kur $y=f(x)$, tad $\varphi(f(x))=x$, t. i., *izpildot pēc kārtas divas savstarpēji inversas operācijas ar x, iegūst šo pašu x vērtību, ja tikai tā pieder pie funkciju f un φ definīciju kopām.*

Piemēram, tā kā $y=a^x$ un $x=\log_a y$ ir divas savstarpēji inversas funkcijas, tad iegūstam šādas divas identitātes:

$$y=a^{\log_a y} \quad \text{un} \quad x=\log_a a^x.$$



19. zīm.

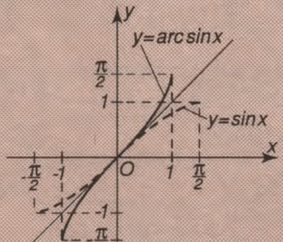
Konstruējot funkciju grafikus, bieži lieto **inversās funkcijas grafika īpašību:** ***divu savstarpēji inversu funkciju $y=f(x)$ un $y=\varphi(x)$ grafiki ir simetriski attiecībā pret taisni $y=x$, t. i., attiecībā pret koordinātu asu veidotā 1. un 3. kvadranta leņķa bisektrisi.***

Tātad, lai iegūtu inversās funkcijas $y=\varphi(x)$ grafiku, konstruē dotās funkcijas $y=f(x)$ grafiku, novelk taisni $y=x$ un pret šo taisni simetriski atspoguļo dotās funkcijas grafiku (19. zīm.).

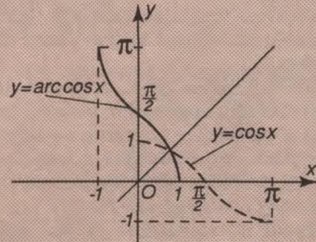
Ar šo metodi parasti konstruē logaritmiskās funkcijas grafiku pēc eksponentfunkcijas grafika un ciklometrisko funkciju grafikus pēc trigonometrisko funkciju grafikiem.

Ļoti svarīgs ir jautājums par inversās funkcijas eksistenci, jo *ne katrai funkcijai visā tās definīcijas apgabalā eksistē inversā funkcija.*

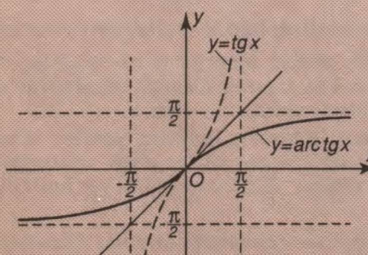
Būtisks inversās funkcijas eksistences nosacījums ir prasība, lai katrai dotās funkcijas $y=f(x)$ vērtībai y atbilstu tikai viena argumenta x vērtība. Bet šāda īpašība nepārtrauktai funkcijai ir spēkā tikai tad, ja funkcija visā definīcijas apgabalā ir augoša vai arī dilstoša, t. i., monotona. Tādējādi par inversās funkcijas eksistenci ir šāda **teorēma**.



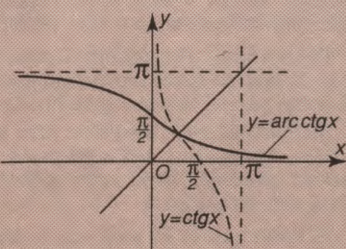
A-13. zīm.



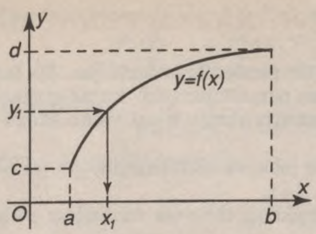
A-14. zīm.



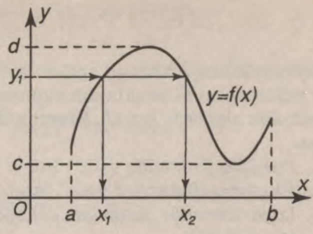
A-15. zīm.



A-16. zīm.



20. zīm.



21. zīm.

Ja funkcija f kādā intervālā [a; b] ir monotona (augoša vai dilstoša) un tās vērtību apgabals ir intervāls [c; d], tad intervālā [c; d] tai eksistē inversā funkcija φ, kas arī ir monotona (augoša vai dilstoša).

20. zīmējumā attēlots intervālā $[a; b]$ monotoni augošas funkcijas grafiks; kā redzams, brīvi izraudzītai y vērtībai y_1 no šīs funkcijas vērtību apgabala - intervāla $[c; d]$ atbilst tikai viena x vērtība x_1 no intervāla $[a; b]$. Tātad šai funkcijai *inversā funkcija eksistē.*

Turpretī 21. zīmējumā attēlotā funkcija intervālā $[a; b]$ nav monotona un šīs funkcijas vērtību apgabalā - intervālā $[c; d]$ ir tādas y vērtības (piemēram, y_1), kurām atbilst vairāk nekā tikai viena x vērtība. Tātad šai funkcijai aplūkotajā intervālā *inversā funkcija neeksistē.*

Ja funkcija visā definīcijas apgabalā nav monotona, tad, lai izveidotu inverso funkciju, dotā funkcija ir jāaplūko tādā definīcijas apgabala intervālā, kurā tā ir vai nu augoša, vai dilstoša. Šādi rīkojas, definējot inversās funkcijas sinusa un kosinusa funkcijām.

Piemērs. **Noteikt intervālu, kurā funkcijai $y=1-x^2$ eksistē inversā funkcija. Uzrakstīt inversās funkcijas izteiksmi un uzzīmēt tās grafiku.**

Dabiskajā definīcijas apgabalā $(-\infty; +\infty)$ dotā funkcija nav monotona - intervālā $(-\infty; 0]$ tā ir augoša, bet intervālā $[0; +\infty)$ - dilstoša (22. zīm.).

Izraudzīsimies intervālu, kurā funkcija ir augoša. Tātad, sašaurinot definīcijas apgabalu, pieņemsim, ka $D(f)=(-\infty; 0]$.

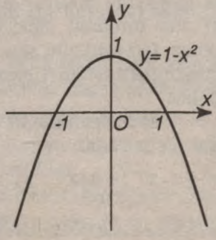
Lai atrastu inversās funkcijas φ izteiksmi, no vienādības $y=1-x^2$ izsakām x:

$$x^2=1-y, \quad x=\pm\sqrt{1-y}.$$

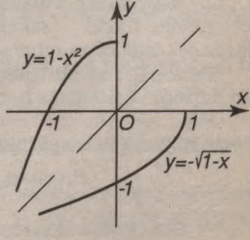
Tātad katrai y vērtībai no intervāla $(-\infty; 1)$ atbilst divas x vērtības. Taču, tā kā doto funkciju aplūkojam tikai intervālā $(-\infty; 0]$, tad *inversās funkcijas izteiksme* ir $x=-\sqrt{1-y}$. Apzīmējot šajā izteiksmē argumentu ar x un atkarīgo mainīgo lielumu - ar y, iegūstam $y=-\sqrt{1-x}$.

Saskaņā ar inversās funkcijas definīciju $D(\varphi)=E(f)=(-\infty; 1]$ un $E(\varphi)=D(f)=(-\infty; 0]$.

Inversās funkcijas grafiku iegūst, attēlojot funkcijas $y=1-x^2$ grafiku intervālā $(-\infty; 0]$ simetriski pret taisni $y=x$ (23. zīm.).



22. zīm.



23. zīm.

6.5. §. JĒDZIENS PAR ELEMENTĀRAJĀM FUNKCIJĀM

Matemātiskajā analīzē aplūko galvenokārt elementārās funkcijas. Šīs funkcijas ir veidotas no tā sauktajām elementārajām pamatfunkcijām, kuras apskata jau vidusskolas algebras kursā. **Elementāro pamatfunkciju klasi veido šādas funkcijas.**

1. *Pakāpes funkcijas* $y=x^{a}$, kur a var būt jebkurš reāls skaitlis.
2. *Eksponentfunkcijas* $y=a^{x}$ $(a>0,\ a\neq 1)$.
3. *Logaritmiskās funkcijas* (eksponentfunkciju inversās funkcijas) $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$.
4. *Trigonometriskās funkcijas* $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$.
5. *Ciklometriskās funkcijas* (trigonometrisko funkciju inversās funkcijas) $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg} x$, $y=\operatorname{arcctg} x$.

Funkcijas, kuras iegūst no elementārajām pamatfunkcijām un konstantēm, izpildot ar tām galīgā skaitā saskaitīšanu, atņemšanu, reizināšanu, dalīšanu, kā arī saliktu funkciju veidošanas operāciju, sauc par elementārajām funkcijām.

Piemēram, elementārās funkcijas ir

$$y=\sin(2x+5),\quad y=\frac{x-5}{\log_2 x},\quad y=\arccos(3-7x),\quad y=\sqrt{x}+\frac{3x}{x+5}\ \text{u. tml.}$$

Elementārās funkcijas sīkāk klasificē atkarībā no tā, kādas darbības tiek izpildītas ar argumentu, atrodot funkcijas vērtību. Izšķir algebriskās un transcendentās elementārās funkcijas.

Funkciju sauc par algebrisku, ja, atrodot tās vērtību, ar argumentu ir jāizpilda galīgs skaits algebrisku darbību: saskaitīšana, atņemšana, reizināšana, dalīšana, kāpināšana racionāla skaitļa pakāpē (tātad arī saknes atrašana). Pārējos gadījumos funkciju sauc par transcendentu*.

Piemēram,

$$y=5x^3-3x+x^2,\quad y=\frac{2-5x}{x+4x},\quad y=\sqrt{ax^2+bx+c}\ \text{u. tml.}$$

ir algebriskas funkcijas.

Savukārt transcendentu funkciju izteiksmes satur trigonometriskās, ciklometriskās, logaritmiskās un eksponentfunkcijas vai arī pakāpes ar iracionāliem kāpinātājiem.

Piemēram,

$$y=2^x(1+\sin x),\quad y=\frac{\arcsin(x-1)}{1+\operatorname{tg} x},\quad y=x^{\sqrt{2}}\ \text{u. tml.}$$

ir transcendentas funkcijas.

Ja algebriskās funkcijas izteiksme nesatur argumenta pakāpes ar daļveida kāpinātāju (tātad - saknes), tad funkciju sauc par racionālu. Ja algebriskās funkcijas izteiksme satur saknes, tad funkciju sauc par iracionālu.

Racionālās algebriskās funkcijas savukārt iedala veselās racionālās funkcijās un daļveida racionālās funkcijās.

Par veselu racionālu funkciju sauc argumenta vērtību polinomu ar naturāliem kāpinātājiem. Tā vispārīgais veids ir šāds:

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n.$$

---

* Latīņu vārds «transcedens» nozīmē «kas iziet ārpus robežām». Šajā gadījumā - funkcija, kuras vērtību atrašana ir ārpus algebrisko darbību robežām.

Par daļveida racionālu funkciju sauc divu polinomu attiecību:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}.$$

Piemēram,

$$y=3x+2,\quad y=x^2-5x+6,\quad y=2x^3+5x^2-4x+7$$

ir veselas racionālas funkcijas;

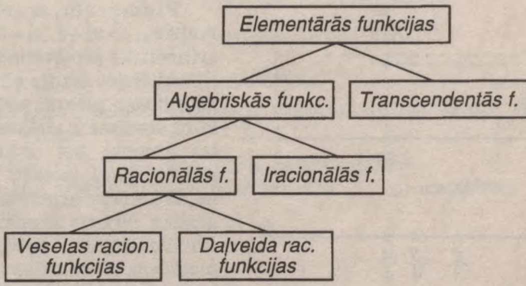
$$y=\frac{x+1}{3x^2-5x+2},\quad y=\frac{4x^3-8x+1}{x^2+3x-2}$$

ir daļveida racionālas funkcijas;

$$y=\sqrt[3]{3x+7},\quad y=\frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{2x-3}}$$

ir iracionālas funkcijas.

Elementāro funkciju klasifikācija attēlota 24. zīmējumā.



24. zīm.

6.6. §. SKAITĻU VIRKNE

1. VIRKNES JĒDZIENS UN UZDOŠANAS VEIDI

Funkcijas, kuru argumenta vērtības ir tikai naturāli skaitļi, sauc par skaitļu virknēm, un to argumentu parasti apzīmē ar burtu n.

Tātad skaitļu virkne ir definēta naturālo skaitļu kopā *N* vai kādā šīs kopas apakškopā.

Virkni sauc par bezgalīgu, ja tā ir definēta visā kopā *N*, bet par galīgu, ja tā definēta kādā galīgā naturālo skaitļu kopas apakškopā.

Naturālā argumenta funkcijas vērtības sauc par virknes locekļiem.

Tāpat kā parastās viena argumenta funkcijas, arī *skaitļu virknes var uzdot ar tabulu, analītisko izteiksmi un grafiku.*

Sastādot skaitļu virknes **vērtību tabulu**, nav nepieciešams norādīt argumenta vērtības, jo *virknes locekļa kārtas numurs ir vienāds ar šim loceklim atbilstošo argumenta vērtību.*

Piemēram, naturālo skaitļu kvadrātu virkne:

$$(1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots).$$

Vispārīgā gadījumā virkni pieraksta šādi:

$$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots) \text{ vai } (x_n).$$

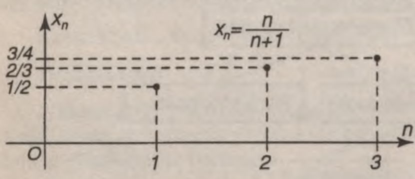
Indeksu n sauc arī par virknes locekļa kārtas numuru.

Ļoti bieži virkni uzdod ar **analītisku izteiksmi**, pēc kuras katrai argumenta n vērtībai var atrast atbilstošo virknes locekli x_n. Šādu izteiksmi sauc par virknes vispārīgā locekļa formulu.

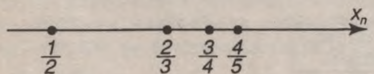
Piemēram, pēc vispārīgā locekļa formulas $x_n = \frac{n}{n+1}$ aprēķinātie virknes locekļi ir

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots\right).$$

Dažkārt virkni definē ar tādu analītisku izteiksmi, pēc kuras var aprēķināt katru virknes locekli, ja ir zināms tā iepriekšējais loceklis (vai arī daži iepriekšējie locekļi), kā arī virknes pirmais loceklis. Šādu izteiksmi sauc par rekurences formulu.



25. zīm.



26. zīm.

Piemēram, ar rekurences formulu $x_{n+1} = x_n + 2$, $x_1 = 3$ tiek definēta aritmētiskā progresija (3, 5, 7, 9, ...).

Attēlojot skaitļu virkni **grafiski**, koordinātu plaknē atzīmē punktus, kuru abscisas ir virknes locekļu kārtas numuri, bet ordinātas – attiecīgie virknes locekļi. Atšķirībā no nepārtraukta argumenta funkcijas grafika *virknes grafiks* nav nepārtraukta līnija, bet *sastāv no izolētiem punktiem*. 25. zīmējumā attēlots virknes $x_n = \frac{n}{n+1}$ grafiks.

Bieži virknes ģeometriskai ilustrēšanai lieto arī citu paņēmienu: virknes locekļus attēlo ar punktiem uz koordinātu taisnes (26. zīm.).

2. VIRKŅU VIENĀDĪBA UN NEVIENĀDĪBA. DARBĪBAS AR VIRKNĒM

Tāpat kā parastajām viena argumenta funkcijām, arī skaitļu virknēm definē attieksmes «vienāds», «lielāks», «mazāks» un aritmētiskās darbības: saskaitīšanu, atņemšanu, reizināšanu, dalīšanu.

Tā, piemēram, saka, ka *virkne* (x_n) *ir mazāka nekā virkne* (y_n), *ja*

$$x_1 < y_1, x_2 < y_2, \dots, x_n < y_n, \dots .$$

Analogi definē virkņu vienādību un pārējās attieksmes.

Par virkņu summu, starpību, reizinājumu, dalījumu sauc virknes, kuru locekļi ir vienādi ar doto virkņu atbilstošo locekļu summu, starpību, reizinājumu, dalījumu, t. i.,

$$(x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, x_3 \pm y_3, \dots, x_n \pm y_n, \dots),$$
$$(x_1 y_1, x_2 y_2, x_3 y_3, \dots, x_n y_n, \dots),$$
$$\left(\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \frac{x_3}{y_3}, \dots, \frac{x_n}{y_n}, \dots\right).$$

3. VIRKŅU GALVENĀS ĪPAŠĪBAS

Skaitļu virkņu lietojumos matemātikā bieži ir jānosaka, vai virknei piemīt tādas īpašības kā monotonitāte un ierobežotība.

Par monotonām virknēm sauc augošas, dilstošas, neaugošas un nedilstošas virknes.

Virkni sauc par *augošu*, ja katrs tās loceklis ir mazāks nekā nākamais loceklis, t. i., ja $x_n < x_{n+1}\ \forall\, n \in \boldsymbol{N}$.

Virkni sauc par *dilstošu*, ja katrs tās loceklis ir lielāks nekā nākamais loceklis, t. i., ja $x_n > x_{n+1}\ \forall\, n \in \boldsymbol{N}$.

Virkni sauc par *neaugošu*, ja $x_n \geqslant x_{n+1}\ \forall\, n \in \boldsymbol{N}$.

Virkni sauc par *nedilstošu*, ja $x_n \leqslant x_{n+1}\ \forall\, n \in \boldsymbol{N}$.

Piemēri

1) $(2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, \ldots)$ ir augoša virkne;

2) $\left(2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots\right)$ ir dilstoša virkne;

3) $\left(1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \ldots\right)$ ir neaugoša virkne;

4) $(2, 4, 4, 8, 16, 16, 32, \ldots)$ ir nedilstoša virkne.

Ja visi virknes locekļi ir vienādi ar vienu un to pašu skaitli, tad virkni sauc par *konstantu* virkni.

Piemēram, $(7, 7, 7, \ldots, 7, \ldots)$ ir konstanta virkne.

Nemonotonu virkņu piemēri ir tā sauktās *oscilējošās virknes*. Oscilējošas ir šādas virknes:

1) $(3, -3, 3, -3, \ldots, (-1)^{n+1}3, \ldots)$;

2) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, \ldots, (-1)^n \frac{1}{2n}, \ldots\right)$;

3) $(1, -3, 5, -7, \ldots, (-1)^{n+1}(2n-1), \ldots)$.

Lai noskaidrotu, vai aplūkojamā virkne ir monotona, nepietiek ar tās dažu pirmo locekļu salīdzināšanu, bet atbilstoši definīcijai ir jāpierāda kāda no nevienādībām

$$x_n < x_{n+1}, \quad x_n > x_{n+1}, \quad x_n \geqslant x_{n+1} \ \text{vai} \ x_n \leqslant x_{n+1}.$$

Piemērs. **Pierādīt, ka virkne $x_n = \dfrac{3n-2}{2n+1}$ ir augoša.**

Saskaņā ar augošas virknes definīciju ir jāpierāda, ka katram naturālam skaitlim n ir spēkā nevienādība $x_n < x_{n+1}$ jeb $x_n - x_{n+1} < 0$.

Tā kā $x_{n+1} = \dfrac{3(n+1)-2}{2(n+1)+1} = \dfrac{3n+1}{2n+3}$, tad

$$x_{n+1} - x_n = \frac{3n+1}{2n+3} - \frac{3n-2}{2n+1} = \frac{(3n+1)(2n+1)-(3n-2)(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)} =$$

$$= \frac{7}{(2n+3)(2n+1)} > 0 \quad \forall\, n \in \boldsymbol{N}. \ \square$$

Analogi kā funkcijai, arī virknei definē **ierobežotības jēdzienu.**

Virkni (x_n) sauc par ierobežotu no augšas, ja eksistē tāds skaitlis M, ka visi virknes locekļi ir mazāki nekā M vai vienādi ar M, t. i., $\exists$ tāds M, ka $\forall\, n \in \boldsymbol{N}$ ir $x_n \leqslant M$.

Virkni (x_n) sauc par ierobežotu no apakšas, ja eksistē tāds skaitlis m, ka visi virknes locekļi ir lielāki nekā m vai vienādi ar m, t. i., $\exists$ tāds m, ka $\forall\, n \in N$ ir $x_n \geqslant m$.

Ja virkne ir ierobežota gan no augšas, gan arī no apakšas, tad to sauc par ierobežotu virkni, t. i., virkne ir ierobežota, ja $\exists$ tādi m un M, ka $\forall\, n \in N$ ir $m \leqslant x_n \leqslant M$.

Var pierādīt, ka ***ierobežotai virknei eksistē tāds pozitīvs skaitlis μ, ka visiem virknes locekļiem ir spēkā nevienādība $|x_n| \leqslant \mu$.***

Piemērs. **Pierādīt, ka virkne $x_n = \dfrac{3n-2}{2n+1}$ ir ierobežota.**

Jau pierādījām, ka šī virkne ir augoša. Tātad visi virknes locekļi ir lielāki nekā pirmais loceklis $x_1 = \frac{1}{3}$, t. i., $m = \frac{1}{3}$.

Pierādīsim, ka virkne ir ierobežota arī no augšas, t. i., $x_n \leqslant M \quad \forall\, n \in N$.

Lai vienkāršotu pierādījumu, pārliecināsimies, ka visi virknes locekļi ir mazāki nekā, piemēram, skaitlis 2. Tātad pierādīsim nevienādību

$$\frac{3n-2}{2n+1} < 2 \quad \text{jeb} \quad \frac{3n-2}{2n+1} - 2 < 0.$$

Izpildot pārveidojumus, iegūstam, ka

$$\frac{3n-2}{2n+1} - 2 = \frac{3n-2-4n-2}{2n+1} = -\frac{n+4}{2n+1} < 0,$$

jo katram naturālam skaitlim n ir spēkā nevienādība $\dfrac{n+4}{2n+1} > 0$. Tātad $\forall\, n \in N$ ir $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{3n-2}{2n+1} < 2$, t. i., *dotā virkne ir ierobežota.*

VII NODAĻA

FUNKCIJAS ROBEŽA

7.1. §. JĒDZIENS PAR MAINĪGA LIELUMA ROBEŽU

Matemātikā bieži sastopamies ar tādiem mainīgiem lielumiem, kuru vērtības, izpildoties zināmiem nosacījumiem, neierobežoti tuvojas, tiecas uz kādu pastāvīgu lielumu (skaitli). Aplūkosim dažus piemērus.

1. piemērs

Iepriekšējā paragrāfā pierādījām, ka skaitļu virkne $x_n=\dfrac{3n-2}{2n+1}$ ir monotoni augoša un ierobežota no augšas.

Uzrakstām šo virkni: $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{7}{7}, \dfrac{10}{9}, \dfrac{13}{11}, \dfrac{17}{13}, \ldots\right)$. Ievērojam, ka, palielinoties kārtas numuram n, virknes locekļi tuvojas skaitlim 1,5.

Piemēram, $x_{50}=\dfrac{148}{101}=1{,}465346\ldots$, $x_{100}=\dfrac{298}{201}=1{,}482587\ldots$, $x_{1000}=\dfrac{2998}{2001}=1{,}498250\ldots$ utt.

Var pierādīt, ka virknes locekļu un skaitļa 1,5 starpību moduļi neierobežoti samazinās. Tāpēc saka, ka skaitlis 1,5 ir virknes $x_n=\dfrac{3n-2}{2n+1}$ robeža, un raksta:

$$\frac{3n-2}{2n+1}\to 1\text{, kad } n\to\infty \quad \text{jeb} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{2n+1}=1{,}5.$$

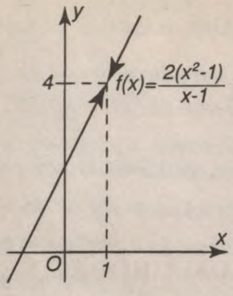
Šajā pierakstā simbols «lim» ir latīņu vārda «limes» saīsinājums; **vārds «limes» nozīmē «robeža».**

2. piemērs

Funkcija $f(x)=\dfrac{2(x^2-1)}{x-1}$ nav definēta punktā $x=1$. Sastādīsim šīs funkcijas vērtību tabulu ar tādām argumenta vērtībām, kas tiecas uz skaitli 1, piemēram,

x	0,9	0,99	0,999	0,9999	...	$x\to 1$
$f(x)$	3,8	3,98	3,998	3,9998	...	

Tabulā redzams, ka funkcijas vērtības tiecas uz skaitli 4. Var pierādīt, ka šīs funkcijas vērtības no skaitļa 4 atšķiras ļoti maz jeb, kā pieņemts teikt, ***pēc patikas maz***, t. i., starpības modulis $\left|\dfrac{2(x^2-1)}{x-1}-4\right|$ ir mazāks par jebkuru mazu pozitīvu skaitli ar visām x vērtībām, kuras ir pietiekami tuvu skaitlim 1



27. zīm.

(27. zīm.). Tāpēc saka, ka skaitlis 4 ir funkcij $f(x)=\dfrac{2(x^2-1)}{x-1}$ robeža, kad $x\to 1$, un raksta:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2(x^2-1)}{x-1}=4.$$

3. piemērs

Funkcijai $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ir īpašība, ka šīs funkcijas vēr bu moduļi neierobežoti samazinās, ja neierobežoti p lielina argumenta x moduļus.

Piemēram, ja $x=100$, tad $\dfrac{1}{x}=0{,}01$; ja $x=1000$, t $\dfrac{1}{x}=0{,}001$; ja $x=-10\,000$, tad $\dfrac{1}{x}=-0{,}0001$.

Šo īpašību izsaka ar pierakstu:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \quad \text{un} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0 \quad \text{vai vienkārši} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Ja funkcijas argumentam dod vērtības, kas arvien mazāk atšķiras no null tad šīs funkcijas vērtību moduļi neierobežoti palielinās.

Piemēram, ja $x=0{,}001$, tad $\dfrac{1}{x}=1000$; ja $x=-0{,}0001$, tad $\dfrac{1}{x}=-10\,000$.

Arī šo īpašību izsaka, lietojot robežas simbolu:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x>0)}}\frac{1}{x}=+\infty, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\(x<0)}}\frac{1}{x}=-\infty \quad \text{vai vispārīgi} \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty.$$

Kā redzams no funkcijas grafika (sk. A-3. zīm.): attālums no grafika punkt līdz Ox asij neierobežoti samazinās (tiecas uz nulli), ja neierobežoti paliel argumenta absolūtās vērtības.

Savukārt funkcijas vērtību moduļi neierobežoti palielinās, ja argumenta ab lūtās vērtības neierobežoti samazina. Šādā gadījumā saka, ka Ox ass ir funkc grafika horizontālā asimptota, bet Oy ass – vertikālā asimptota.

4. piemērs

Acīmredzot funkcijas $f(x)=x^3$ vērtību moduļi neierobežoti palielinās, ja n robežoti palielina argumenta absolūtās vērtības (sk. A-2. zīm.). Lietojot robe simbolu, to pieraksta šādi:

$$\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty, \quad \lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty \quad \text{vai vispārīgi} \quad \lim_{x\to\infty}x^3=\infty. \ \square$$

No piemēriem redzams, ka robežu teorijā aplūko šādus jēdzienus

1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ (funkcijas robeža ir skaitlis A, kad arguments tiecas skaitli a);

2) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ vai arī $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ (funkcijas vai skaitļu virknes robeža skaitlis A, kad arguments tiecas uz bezgalību);

3) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ (funkcijas robeža ir bezgalība, kad arguments tiecas skaitli a);

4) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ (funkcijas robeža ir bezgalība, kad arguments tiecas bezgalību).

Nākamajā paragrāfā aplūkosim šo jēdzienu definīcijas.

7.2. §. ROBEŽU DEFINĪCIJAS

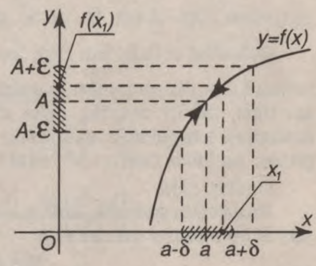
1. SKAITLIS *A* IR FUNKCIJAS ROBEŽA, KAD ARGUMENTS TIECAS UZ SKAITLI *a*

Pieņemsim, ka a ir punkts, kura jebkurā apkārtnē atrodas bezgalīgi daudz funkcijas $f(x)$ definīcijas apgabala punktu, turklāt pats skaitlis a var piederēt pie definīcijas apgabala, bet var arī pie tā nepiederēt.

Definējot jēdzienu $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, jāievēro, ka ar visām tām x vērtībām, kuras ir pietiekami tuvu skaitlim a $(x \neq a)$, funkcijas vērtībām $f(x)$ no skaitļa A jāatšķiras pēc patikas maz.

Funkcijas vērtības atšķirību no skaitļa A izsaka ar starpības moduli $|f(x)-A|$. Savukārt to, ka šī atšķirība ir pēc patikas maza, izsaka ar nevienādību $|f(x)-A| < \varepsilon$, kur ar grieķu alfabēta burtu ε («epsilon») apzīmē brīvi izraudzītu mazu pozitīvu skaitli.

Lai matemātiski korektāk formulētu šos spriedumus, ilustrēsim ar funkcijas grafika palīdzību izteikumu «*x vērtības, kuras ir pietiekami tuvu punktam a*» (28. zīm.).



$x_1 \in (a-\delta;\, a+\delta)$, $f(x_1) \in (A-\varepsilon;\, A+\varepsilon)$

28. zīm.

Vienkāršības labad pieņemsim, ka funkcija ir monotona.

Brīvi izraugāmies mazu pozitīvu skaitli ε un uz Oy ass atliekam intervālu $(A-\varepsilon;\, A+\varepsilon)$; šo intervālu sauc par punkta A ε-apkārtni un apzīmē ar simbolu $U_\varepsilon(A)$.

No intervāla galapunktiem $A-\varepsilon$ un $A+\varepsilon$ velkam taisnes paralēli Ox asij; šo taišņu krustpunktus ar funkcijas grafiku projicējam uz Ox ass. Tādējādi uz Ox ass iegūstam intervālu, kuru punkts a sadala divās daļās.

Ja a nav šī intervāla viduspunkts, tad, intervāla mazāko daļu atliekot simetriski pret a, iegūstam intervālu $(a-\delta;\, a+\delta)$, ko sauc par punkta a δ-apkārtni un apzīmē ar $U_\delta(a)$.

Acīmredzot visām argumenta x vērtībām no punkta a δ-apkārtnes $(x \neq a)$ atbilstošās funkcijas vērtības $f(x)$ atrodas punkta A ε-apkārtnē, t. i.,

$$\forall x \in (a-\delta;\, a+\delta) \text{ ir } f(x) \in (A-\varepsilon;\, A+\varepsilon), \ (x \neq a) \text{ jeb}$$

$$\forall x, \text{ kuriem } 0 < |x-a| < \delta, \text{ ir } |f(x)-A| < \varepsilon.$$

Šie spriedumi ir pamatā funkcijas robežas definīcijai.

Definīcija

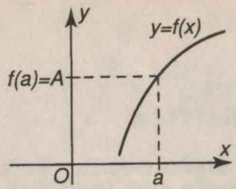
Skaitli A sauc par funkcijas robežu, kad $x \to a$, ***un raksta*** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, ***ja katram pozitīvam skaitlim*** ε ***var atrast tādu pozitīvu skaitli*** δ, ***ka ar visām tām x vērtībām, kurām*** $0 < |x-a| < \delta$, ***ir spēkā nevienādība*** $|f(x)-A| < \varepsilon$.

Lietojot matemātiskās loģikas simbolus, šo definīciju var pierakstīt saīsināti:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \text{ tāds } \delta > 0, \text{ ka } \forall x, \text{ kuriem } 0 < |x-a| < \delta, \text{ ir } |f(x)-A| < \varepsilon.$$

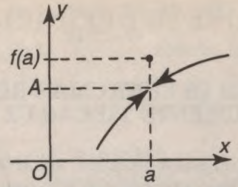
Definīcijā var lietot arī punkta apkārtnes jēdzienu un apzīmējumu:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall U_\varepsilon(A) \ \exists U_\delta(a), \text{ ka } \forall x \in U_\delta(a), \ (x \neq a), \ f(x) \in U_\varepsilon(A).$$



$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A = f(a)$

29. zīm.



$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A \neq f(a)$

30. zīm.

Piebilde. Sākumā j norādījām, ka a ir punk kura jebkurā apkārtnē atr das bezgalīgi daudz funkcij definīcijas apgabala punkt bet pats skaitlis a var arī n piederēt pie funkcijas defi cijas apgabala. Tāpēc, defi jot robežas jēdzienu, aplū $|f(x)-A|$ vērtības tikai t ja $x \neq a$. Ja funkcija ir de nēta punktā a un $\lim\limits_{x \to a} f(x)=A$, tad ir iespējams, ka $f(a)=A$, bet var būt arī tā, $f(a) \neq \lim\limits_{x \to a} f(x)=A$ (sk. 29. un 30. zīm.). □

Definējot robežu $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, īpaši tiek uzsvērts, ka argumenta x vērtība var b jebkurš skaitlis no punkta a apkārtnes: gan tāds, kas ir lielāks nekā skaitlis a, g arī tāds, kas ir mazāks nekā a (izņemot pašu skaitli a). Taču bieži ir jāp funkcijas izturēšanās gadījumā, kad **arguments tiecas uz a tikai no vien puses**: no labās (tad $x>a$) vai arī no kreisās puses (tad $x<a$).

Definīcija

Funkcijas robežu, kad $x \to a$ un $x > a$, sauc par robežu no labās puses v par labo robežu un raksta:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) \quad \text{jeb} \quad \lim_{x \to a+0} f(x).$$

Funkcijas robežu, kad $x \to a$ un $x < a$, sauc par robežu no kreisās pus vai par kreiso robežu un raksta:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) \quad \text{jeb} \quad \lim_{x \to a-0} f(x).$$

Ja a ir viens no funkcijas definīcijas intervāla galapunktiem, tad var run tikai par vienpusēju robežu šajā punktā (labo vai kreiso).

Ja a ir intervāla iekšējais punkts, tad pieraksts $\lim\limits_{x \to a} f(x)=A$ nozīmē to, $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A$.

Ja punktā a robeža no labās puses nav vienāda ar robežu no kreisās puses, t saka, ka $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ neeksistē.

Lietojot robežas definīciju, var noteikt funkcijas robežu.

Piemēri

1. Pierādīt, ka $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2(x^2-1)}{x-1} = 4$, lietojot robežas definīciju.

Saskaņā ar robežas definīciju jāpierāda, ka

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0, \text{ ka } \forall x, \text{ kuriem } 0<|x-1|<\delta \ \text{ ir } \left|\frac{2(x^2-1)}{x-1}-4\right|<\varepsilon.$$

Lai atrastu skaitli δ, pēdējā nevienādība ir jāatrisina attiecībā pret $|x-1|$ pakāpeniski to aizstājot ar ekvivalentām nevienādībām (vai arī ar tādām, kurām izriet šī nevienādība). Tā kā $x \neq 1$, tad

$$\left|\frac{2(x^2-1)}{x-1}-4\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{2(x-1)(x+1)}{x-1}-4\right|<\varepsilon \Leftrightarrow |2(x+1)-4|<\varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |2x-2|<\varepsilon \Leftrightarrow |2(x-1)|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-1|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Tātad nevienādība

$$\left|\frac{2(x^2-1)}{x-1}-4\right|<\varepsilon$$

ir spēkā ar visām tām x vērtībām, kurām $|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}$, $(x\neq 1)$. Tāpēc par skaitli δ var izvēlēties $\frac{\varepsilon}{2}$.

Līdz ar to ir pierādīts, ka $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta=\frac{\varepsilon}{2}$, ka $\forall x$, kuriem $0<|x-1|<\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ ir

$$\left|\frac{2(x^2-1)}{x-1}-4\right|<\varepsilon.$$

Tātad $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2(x^2-1)}{x-1}=4.$

2. Pierādīt, ka $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x^2+1}=\frac{3}{5}.$

Saskaņā ar funkcijas robežas definīciju ir jāpierāda, ka

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta>0, \text{ ka } \forall x, \text{ kam } |x-2|<\delta \text{ ir } (x\neq 2)\quad \left|\frac{x^2-1}{x^2+1}-\frac{3}{5}\right|<\varepsilon \text{ jeb}$$

$$\left|\frac{5x^2-5-3x^2-3}{5(x^2+1)}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\left|\frac{2x^2-8}{5(x^2+1)}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\left|\frac{2(x^2-4)}{5(x^2+1)}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left|\frac{2(x-2)(x+2)}{5(x^2+1)}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{2|x-2|\cdot|x+2|}{5(x^2+1)}<\varepsilon. \tag{1}$$

Noskaidrosim, kādā skaitļa 2 apkārtnē ir spēkā nevienādība (1). Tam nolūkam atradīsim tādu nevienādību, kuru var atrisināt attiecībā pret $|x-2|$ un no kuras izriet nevienādība (1).

Tā kā $x\to 2$, tad var pieņemt, ka x atrodas tuvu skaitlim 2. Pieņemsim, ka $|x-2|<1$ jeb $-1<x-2<1$, no kurienes $1<x<3$.

Acīmredzot šajā intervālā reizinātājam $|x+2|$ izteiksmē (1) ir maksimālā vērtība, ja $x=3$, t. i., $\max\limits_{1\leqslant x\leqslant 3}|x+2|=5$. Savukārt dalītājam x^2+1 izteiksmē (1) ir minimālā vērtība, ja $x=1$: $\min\limits_{1\leqslant x\leqslant 3}(x^2+1)=2$.

Tātad $\forall x\in(1;3)$, $(x\neq 2)$ ir spēkā nevienādība

$$\frac{2|x-2|\cdot|x+2|}{5(x^2+1)}<\frac{2|x-2|\cdot\max\limits_{1\leqslant x\leqslant 3}|x+2|}{5\min\limits_{1\leqslant x\leqslant 3}(x^2+1)}=\frac{2|x-2|\cdot 5}{5\cdot 2}=|x-2|.$$

Līdz ar to, ja ir spēkā nevienādība $|x-2|<\varepsilon$, tad $\forall x\in(1;3)$ (t. i., $\forall x$, kam $0<|x-2|<1$) ir spēkā arī nevienādības

$$\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}-\frac{3}{5}\right|=\frac{2|x-2|\cdot|x+2|}{5(x^2+1)}<|x-2|<\varepsilon.$$

Citiem vārdiem, ja $|x-2|<1$ un $|x-2|<\varepsilon$, tad ir spēkā nevienādība

$$\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}-\frac{3}{5}\right|<\varepsilon.$$

Tātad par skaitli δ var ņemt mazāko no skaitļiem ε un 1, t. i.,

$$\delta=\min(\varepsilon;1).$$

Tādējādi ir pierādīts, ka

$$\forall \varepsilon>0\ \exists\ \delta=\min(\varepsilon;\ 1),\ \text{ka}\ \forall x\neq 2,\ \text{kam}\ |x-2|<\delta\ \ \text{ir}\ \ \left|\frac{x^2-1}{x^2+1}-\frac{3}{5}\right|<\varepsilon$$

$$\text{jeb}\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x^2+1}=\frac{3}{5}.$$

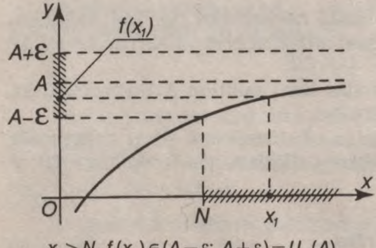
2. SKAITLIS A IR FUNKCIJAS (VIRKNES) ROBEŽA, KAD ARGUMENTS TIECAS UZ BEZGALĪBU

Ja funkcija ir definēta bezgalīgā intervālā $(a;\ +\infty)$, tad var pētīt funkcija izturēšanos, kad $x\to+\infty$.

Pieņemsim, ka, argumenta vērtībām neierobežoti palielinoties, funkcijas vē tības arvien mazāk atšķiras no skaitļa A. Tas nozīmē, ka starpības moduli $|f(x)-A|$ ir mazāks par jebkuru mazu pozitīvu skaitli ε, ja vien argumenta vērtības ir pietiekami lieli skaitļi. Šādā gadījumā saka, ka A ir funkcijas robeža kad $x\to+\infty$, un raksta

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A.$$

Noskaidrosim ar funkcijas grafika palīdzību, ko nozīmē «pietiekami liela argumenta vērtības» (vienkāršības dēļ pieņemsim, ka funkcija ir monotona, sk 31. zīm.). Brīvi izvēlamies pozitīvu skaitli ε un koordinātu plaknē uz Oy as atzīmējam punkta A ε-apkārtni – intervālu $(A-\varepsilon;\ A+\varepsilon)$.



$x_1>N,\ f(x_1)\in(A-\varepsilon;\ A+\varepsilon)=U_\varepsilon(A)$

31. zīm.

No punktiem $A-\varepsilon$ un $A+\varepsilon$ velkam Ox asij paralēlas taisnes.

Ja funkcija ir monotona, tad tika viena no šīm taisnēm krusto funkcija grafiku. Krustpunktu projicējot uz O asi, iegūstam šīs ass punktu, kuram a bilstošo skaitli apzīmēsim ar N.

Acīmredzot visām x vērtībām, ka lielākas nekā N, atbilstošās funkcija vērtības un skaitļa A atšķirība ir maz ka nekā ε, t. i., šīs vērtības atrodas pu kta A ε-apkārtnē $U_\varepsilon(A)$. Tādējādi iegū tam šādu definīciju.

Skaitli A sauc par funkcijas robežu, kad $x\to+\infty$, un raksta $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$, ja katram pozitīvam skaitlim ε var atrast tādu skaitli N, ka ar visām vērtībām, kas lielākas nekā N, ir spēkā nevienādība $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Izmantojot matemātiskās loģikas simbolus un punkta apkārtnes jēdzien definīciju var pierakstīt arī šādi.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A\ \Leftrightarrow\ \forall\ U_\varepsilon(A)\ \exists\ N,\ \ \text{ka}\ \ \forall x>N:\ f(x)\in U_\varepsilon(A).$$

Analogi definē robežu $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$.

Ja funkcija ir definēta intervālā $(-\infty;\ +\infty)$ un $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$, ta robežas pierakstā simbola «∞» priekšā neliek nekādu zīmi un raksta $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ saprotot, ka šajā gadījumā $|x|\to+\infty$.

Ja $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$, *tad taisni* $y=A$ *sauc par funkcijas grafika horizontālo asimptotu*.

Kā zināms, skaitļu virkne (x_n) ir naturāla argumenta n funkcija. Tāpēc ir jēga aplūkot virknes robežas jēdzienu, kad n (virknes locekļa kārtas numurs) neierobežoti palielinās, t. i., $n\to\infty$.

Tātad virknes robežu definē analogi kā funkcijas robežu $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$. Definīcijas pamatā ir spriedums, ka virknes locekļi x_n no robežas A atšķiras mazāk par jebkuru mazu pozitīvu skaitli ε, ja vien virknes locekļu kārtas numurs ir pietiekami liels skaitlis.

Definīcija

Skaitli A sauc par virknes (x_n) robežu un raksta $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$, ja katram pozitīvam skaitlim ε var atrast tādu skaitli N, ka visiem virknes locekļiem, kuru kārtas numuri $n>N$, ir spēkā nevienādība $|x_n-A|<\varepsilon$.

Ar matemātiskās loģikas simbolu palīdzību definīciju pieraksta šādi:

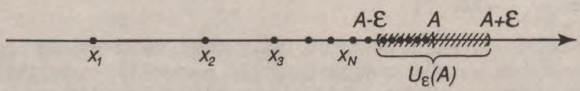
$$\lim_{n\to\infty} x_n=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists N,\ \text{ka}\ \forall n>N\ \text{ir}\ |x_n-A|<\varepsilon$$

jeb

$$\forall U_\varepsilon(A)\ \exists N,\ \text{ka}\ \forall n>N\colon x_n\in U_\varepsilon(A).$$

No definīcijas izriet šāds secinājums.

Ja skaitlis A ir virknes x_n robeža, tad **jebkurā punkta A apkārtnē atrodas bezgalīgi daudz virknes locekļu, bet ārpus katras A apkārtnes ir tikai galīgs skaits virknes locekļu** (sk. 32. zīm.).



32. zīm.

Šo faktu lieto dažādos pierādījumos.

Piemērs. **Pierādīt, ka konstantas virknes $C, C, C, \ldots, C, \ldots$ robeža ir skaitlis C, t. i.,**

$$\lim C=C.$$

Pierādījumā var izmantot šādu spriedumu: katrā punkta C apkārtnē atrodas visi šīs virknes locekļi (tātad bezgalīgi daudz), bet ārpus apkārtnes nav neviena virknes locekļa. Līdz ar to skaitlis C ir šīs virknes robeža. □

Aplūkosim piemērus, kuros virknes robežu atrod, izmantojot robežas definīciju.

1. piemērs. 7.1. paragrāfā aplūkojām skaitļu virkni $x_n=\dfrac{3n-2}{2n+1}$.

Aprēķinot šīs virknes locekļus, konstatējām, ka, palielinot naturālā argumenta n vērtības (piemēram, ja $n=50$, 100, 1000 utt.), virknes locekļi arvien mazāk atšķiras no skaitļa 1,5. Tāpēc pieņēmām, ka 1,5 ir virknes robeža. Taču šāds pieņēmums ir tikai hipotēze, kas jāpierāda ar robežas definīcijas palīdzību, t. i., jāparāda, ka starpības modulis $|x_n-1{,}5|$ ir mazāks par jebkuru mazu pozitīvu skaitli ε, ja vien virknes locekļa kārtas numurs n ir pietiekami liels skaitlis. Tātad saskaņā ar virknes robežas definīciju ir jāpierāda, ka

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N,\ \text{ka}\ \forall n>N\ \text{ir spēkā nevienādība}\ \left|\frac{3n-2}{2n+1}-1{,}5\right|<\varepsilon.$$

Pierādījuma gaitā pēdējā nevienādība ir jāatrisina, to pakāpeniski aizstājot a ekvivalentām nevienādībām (vai arī ar tādām, no kurām izriet šī nevienādība Tādējādi iegūstam, ka

$$\left|\frac{3n-2}{2n+1}-1{,}5\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{3n-2-3n-1{,}5}{2n+1}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{-3{,}5}{2n+1}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3{,}5}{2n+1}<\varepsilon \Leftrightarrow 2n+1>\frac{3{,}5}{\varepsilon} \Leftrightarrow 2n>\frac{3{,}5}{\varepsilon}-1 \Leftrightarrow n>\frac{3{,}5-\varepsilon}{2\varepsilon}.$$

No šīm savstarpēji ekvivalentajām nevienādībām izriet, ka nevienādīb $\left|\frac{3n-2}{2n+1}-1{,}5\right|<\varepsilon$ ir spēkā visiem tiem virknes locekļiem, kuru kārtas numurs n i lielāks nekā skaitlis $\frac{3{,}5-\varepsilon}{2\varepsilon}$. Tāpēc par skaitli N var izraudzīties $\frac{3{,}5-\varepsilon}{2\varepsilon}$ vai arī t *veselo daļu* $\left[\frac{3{,}5-\varepsilon}{2\varepsilon}\right]$.

Līdz ar to ir pierādīts, ka

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists N=\left[\frac{3{,}5-\varepsilon}{2\varepsilon}\right],$$

$$\text{ka } \forall n>N \text{ ir } \left|\frac{3n-2}{2n+1}-1{,}5\right|<\varepsilon$$

un tātad $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-2}{2n+1}=1{,}5$. □

Lietojot robežas atrašanai definīciju, ir iespējams, ka nevienādību $|x_n-A|<$ nevar atrisināt tieši, aizstājot to ar ekvivalentām nevienādībām, bet tā jāaizstāj a tādām nevienādībām, no kurām izriet dotā nevienādība. Paskaidrosim šos spriedu mus ar piemēru.

2. piemērs. **Pierādīt, ka** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$.

Saskaņā ar robežas definīciju ir jāpierāda, ka

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists N, \text{ka } \forall n>N \text{ ir } \left|\frac{1}{2^n}-0\right|<\varepsilon \text{ jeb } \frac{1}{2^n}<\varepsilon.$$

Tā kā visiem naturāliem skaitļiem $2^n>n$, tad ir spēkā nevienādība $\frac{1}{2^n}<\frac{1}{n}$. Ja izvēlamies $n>\frac{1}{\varepsilon}$ jeb $\frac{1}{n}<\varepsilon$, tad

$$\frac{1}{2^n}<\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

Tādējādi ir pierādīts, ka

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists N=\frac{1}{\varepsilon},$$

$$\text{ka } \forall n>N \text{ ir } \frac{1}{2^n}<\varepsilon \text{ jeb } \left|\frac{1}{2^n}-0\right|<\varepsilon,$$

t. i., $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$.

3. FUNKCIJAS ROBEŽA IR BEZGALĪBA, KAD ARGUMENTS TIECAS UZ SKAITLI *a*

Bieži ir jāaplūko funkcijas, kuru vērtību moduļi neierobežoti palielinās, kad $x \to a$. Piemēram, $f(x)=\frac{1}{x-3}$, kad $x \to 3$; $f(x)=\operatorname{tg} x$, kad $x \to \frac{\pi}{2}$. Šādos gadījumos saka, ka funkcija ir *«bezgalīgi liela»* vai arī *«funkcijas robeža ir bezgalība»*, un raksta:

$$\lim_{x \to a} f(x)=\infty.$$

Definējot šo jēdzienu, jānorāda, ka funkcijas vērtību moduļi ir lielāki nekā jebkurš pozitīvs skaitlis M, ja vien argumenta vērtības ir pietiekami tuvu skaitlim a.

Definīcija

Saka, ka funkcijas $f(x)$ robeža ir bezgalība, kad $x \to a$, un raksta $\lim_{x \to a} f(x)=\infty$, ja katram pozitīvam skaitlim M var atrast tādu pozitīvu skaitli δ, ka ar visām tām x vērtībām, kurām $0<|x-a|<\delta$, ir spēkā nevienādība $|f(x)|>M$.

Lietojot saīsinātu pierakstu, definīciju var pierakstīt šādi:

$$\lim_{x \to a} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0\ \exists\, \delta>0, \text{ ka } \forall x, \text{ kuriem } 0<|x-a|<\delta,$$
$$\text{ir } |f(x)|>M$$

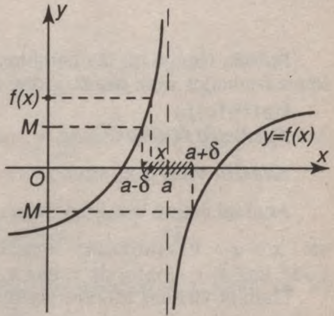
vai arī:

$$\forall M>0\ \exists\, U_\delta(a),$$
$$\text{ka } \forall x \in U_\delta(a),\ x \neq a,\ |f(x)|>M.$$

Definīcija ilustrēta 33. zīmējumā.

Ja funkcija $f(x)$ ir bezgalīgi liela, kad $x \to a$, un kādā punkta a apkārtnē tās vērtības ir tikai pozitīvas, tad raksta $\lim_{x \to a} f(x)=+\infty$. Analogi saprot arī pierakstu $\lim_{x \to a} f(x)=-\infty$.

Konstruējot bezgalīgi lielas funkcijas grafiku, ir jānovelk Oy asij paralēla taisne $x=a$; šo taisni sauc par grafika vertikālo asimptotu. Pēc tam nosaka vienpusējo robežu zīmes, kad $x \to a+0$ un $x \to a-0$.



33. zīm.

Piemēram,

$$\lim_{x \to 3+0} \frac{1}{x-3}=+\infty \quad \text{un} \quad \lim_{x \to 3-0} \frac{1}{x-3}=-\infty.$$

4. FUNKCIJAS ROBEŽA IR BEZGALĪBA, KAD ARGUMENTS TIECAS UZ BEZGALĪBU

Ja funkcija ir definēta bezgalīgā intervālā $(-\infty; +\infty)$ vai intervālā $(a; +\infty)$, vai arī intervālā $(-\infty; a)$, tad ir iespējams, ka funkcijas vērtību moduļi neierobežoti palielinās, ja neierobežoti palielina argumenta absolūtās vērtības. Piemēram, $x^3 \to +\infty$, kad $x \to +\infty$, un $x^3 \to -\infty$, kad $x \to -\infty$. Šādos gadījumos saka, ka *funkcija ir bezgalīgi liela, kad arguments tiecas uz plus vai mīnus bezgalību,* un raksta:

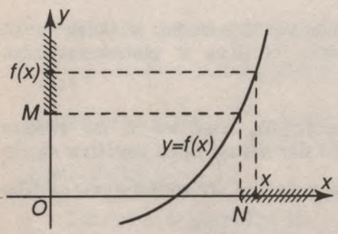
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \quad \text{vai vispārīgi} \quad \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty.$$

Šo robežu definīcijas pamatā ir spriedums, ka funkcijas vērtību moduļi ir lielāki par jebkuru pozitīvu skaitli M visām tām argumenta vērtībām, kuru moduļi ir pietiekami lieli.

Definīcija

Saka, ka funkcijas $f(x)$ robeža ir bezgalība, kad $x\to\infty$, un raksta $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, ja katram pozitīvam skaitlim M var atrast tādu pozitīvu skaitli N, ka visām tām x vērtībām, kurām $|x|>N$, ir spēkā nevienādība $|f(x)|>M$, t. i.,

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0\ \exists N>0,$$
$$\text{ka } \forall x, \text{ kuriem } |x|>N, \text{ ir } |f(x)|>M.$$



34. zīm.

Definīcija ilustrēta 34. zīmējumā gadījumam $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

7.3. §. BEZGALĪGI MAZAS FUNKCIJAS UN TO ĪPAŠĪBAS

Robežu teorijā un tās lietojumos īpaši aplūko funkcijas, kuru robeža ir nulle; šādas funkcijas sauc par bezgalīgi mazām funkcijām.

Definīcija

Funkciju $f(x)$ sauc par bezgalīgi mazu funkciju, kad $x\to a$, ja $\lim_{x\to a} f(x)=0$.

Skaitļu virkni x_n sauc par bezgalīgi mazu virkni, ja $\lim_{n\to\infty} x_n=0$.

Analogi definē bezgalīgi mazas funkcijas arī gadījumos, kad $x\to+\infty$, $x\to-\infty$ vai $x\to\infty$. Piemēram, bezgalīgi mazas funkcijas ir $y=\frac{1}{x}$, kad $x\to\infty$, $y=2^x$, kad $x\to-\infty$, $y=\sin x$, kad $x\to 0$ u. c.

Lietojot virknes robežas definīciju, var pierādīt, ka

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=0, \quad \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n^2}\right)=0, \quad \lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}=0.$$

Tātad

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots, \frac{1}{2n-1}, \ldots,$$
$$-1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, \ldots, -\frac{1}{n^2}, \ldots,$$
$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, (-1)^n\frac{1}{2^n}, \ldots$$

ir bezgalīgi mazas virknes.

Bezgalīgi mazas funkcijas parasti apzīmē ar grieķu alfabēta burtiem $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ vai arī, nenorādot argumentu, - vienkārši ar α, β, γ. Analogi bezgalīgi mazas skaitļu virknes apzīmē šādi: α_n, β_n, γ_n.

Tā kā $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, tad saskaņā ar robežas definīciju katram $\varepsilon>0$ var atrast tādu punkta a δ-apkārtni $U_\delta(a)$, ka visām x vērtībām no šīs apkārtnes ($x\neq a$) ir spēkā nevienādība $|\alpha(x)|<\varepsilon$.

Lietojot saīsinātu pierakstu, bezgalīgi mazas funkcijas definīcija ir šāda:

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\, U_\delta(a),\ \text{ka}\ \ \forall x\in U_\delta(a)\ (x\neq a)\ \ \text{ir}\ \ |\alpha(x)|<\varepsilon.$$

Turpmāko jautājumu apskatā izmantosim vairākas bezgalīgi mazu funkciju īpašības.

1. SAKARĪBA STARP BEZGALĪGI MAZU FUNKCIJU UN BEZGALĪGI LIELU FUNKCIJU

Bezgalīgi mazas funkcijas apgrieztā funkcija ir bezgalīgi liela funkcija un otrādi - bezgalīgi lielas funkcijas apgrieztā funkcija ir bezgalīgi maza funkcija (pieņemot, ka nevienā punktā šo funkciju vērtība nav nulle).

Pierādīsim šīs teorēmas pirmo daļu.

Dots: $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$.

Jāpierāda: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{\alpha(x)}=\infty$.

No dotā izriet:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\, U_\delta(a),\ \text{ka}\ \forall x\in U_\delta(a)\ (x\neq a)\ \text{ir}\ |\alpha(x)|<\varepsilon.$$

Tā kā no nevienādības $|\alpha(x)|<\varepsilon$ seko, ka $\dfrac{1}{|\alpha(x)|}>\dfrac{1}{\varepsilon}$ jeb $\left|\dfrac{1}{\alpha(x)}\right|>\dfrac{1}{\varepsilon}$, tad, lietojot apzīmējumu $M=\dfrac{1}{\varepsilon}$, var secināt, ka

$$\forall\ \frac{1}{\varepsilon}>M\ \exists\, U_\delta(a),\ \text{ka}\ \forall x\in U_\delta(a)\ (x\neq a)\ \text{ir}\ \left|\frac{1}{\alpha(x)}\right|>M.$$

Saskaņā ar bezgalīgi lielas funkcijas definīciju šis spriedums nozīmē to, ka $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{\alpha(x)}=\infty$; tātad $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ ir bezgalīgi liela funkcija. □

Analogi pierāda teorēmas otro daļu. Tādējādi *iegūst šādus divus savstarpēji ekvivalentus apgalvojumus*:

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to a}\frac{1}{\alpha(x)}=\infty \quad \text{un} \quad \lim_{x\to a}f(x)=\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=0.$$

Izmantojot šos spriedumus robežu aprēķinos, ***bieži lieto nosacītus pierakstus*** «$\dfrac{1}{0}=\infty$» un «$\dfrac{1}{\infty}=0$»; tomēr tos nedrīkst uzskatīt par «pamatojumu» dalīšanai ar nulli. Jāatceras, ka dalīšana ar nulli nav definēta, bet simbols «∞» nav skaitlis un ar šo simbolu nav definētas aritmētiskas darbības.

2. BEZGALĪGI MAZU FUNKCIJU SUMMA

Divu vai vairāku (galīga skaita) bezgalīgi mazu funkciju summa ir bezgalīgi maza funkcija.

Pierādījums

Dots: $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ un $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=0$.

Jāpierāda: $\lim\limits_{x\to a}(\alpha(x)+\beta(x))=0$.

Tā kā $\alpha(x)$ un $\beta(x)$ ir bezgalīgi mazas funkcijas, tad katram pozitīvam skaitlim $\frac{\varepsilon}{2}$ var atrast tādu punkta a apkārtni, kuras visos punktos $(x\neq a)$ ir spēkā gan nevienādība $|\alpha(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$, gan arī $|\beta(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$, t. i.,

$$\forall\ \frac{\varepsilon}{2}>0\ \exists\ U_\delta(a),\ \text{ka}\ \forall x\in U_\delta(a)\ (x\neq a)\ \text{ir}$$

$$|\alpha(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |\beta(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\ \text{un tātad arī}\ |\alpha(x)|+|\beta(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Izmantojot nevienādību $|a+b|\leqslant|a|+|b|$, iegūstam, ka

$$|\alpha(x)+\beta(x)|\leqslant|\alpha(x)|+|\beta(x)|<\varepsilon$$

un šī nevienādība ir spēkā $\forall x\in U_\delta(a)$, $x\neq a$. Tātad

$$\lim_{x\to a}(\alpha(x)+\beta(x))=0.\ \square$$

3. BEZGALĪGI MAZAS FUNKCIJAS REIZINĀJUMS AR IEROBEŽOTU FUNKCIJU

Ja $\alpha(x)$ ir bezgalīgi maza funkcija, kad $x\to a$ un $f(x)$ ir ierobežota funkcija, tad $f(x)\cdot\alpha(x)$ ir bezgalīgi maza funkcija, kad $x\to a$.

Pierādījums

Dots: $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$; $f(x)$ – ierobežota funkcija, t. i., $\exists M>0$, ka $|f(x)|\leqslant M$ visiem x no kādas punkta a apkārtnes.

Jāpierāda: $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot\alpha(x))=0$.

Brīvi izvēlamies pozitīvu skaitli ε; tad arī $\frac{\varepsilon}{M}>0$.

Tā kā $\alpha(x)$ ir bezgalīgi maza funkcija, kad $x\to a$, tad

$$\forall\ \frac{\varepsilon}{M}>0\ \exists\ U(a),\ \text{ka}\ \forall x\in U(\text{a})\ \text{ir}\ |\alpha(x)|<\frac{\varepsilon}{M}.$$

Pieņemsim, ka apkārtne $U(a)$ ir izraudzīta tā, ka $\forall x\in U(a)$ ir spēkā arī nevienādība $|f(x)|\leqslant M$.

Izmantojot īpašību $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$, iegūstam, ka $\forall x\in U(a)$ ir $|f(x)\cdot\alpha(x)|=$ $=|f(x)|\cdot|\alpha(x)|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$.

Tātad

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot\alpha(x))=0.\ \square$$

Secinājumi

1. *Bezgalīgi mazas funkcijas reizinājums ar konstantu lielumu ir bezgalīgi maza funkcija*, t. i.,

$$\text{ja } \lim_{x \to a} \alpha(x) = 0, \quad \text{tad arī } \lim_{x \to a} (C\alpha(x)) = 0, \text{ kur } C - \text{const.}$$

2. *Divu vai vairāku bezgalīgi mazu funkciju reizinājums ir bezgalīgi maza funkcija*, t. i.,

$$\text{ja } \lim_{x \to a} \alpha(x) = 0 \text{ un } \lim_{x \to a} \beta(x) = 0, \quad \text{tad arī } \lim_{x \to a} (\alpha(x) \cdot \beta(x)) = 0.$$

3. *Bezgalīgi mazas funkcijas dalījums ar funkciju, kuras robeža nav nulle, ir bezgalīgi maza funkcija*, t. i.,

$$\text{ja } \lim_{x \to a} \alpha(x) = 0 \text{ un } \lim_{x \to a} f(x) = A \neq 0, \quad \text{tad } \lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{f(x)} = 0.$$

4. SAKARĪBA STARP FUNKCIJAS ROBEŽAS JĒDZIENU UN BEZGALĪGI MAZU FUNKCIJU

Noskaidrojot robežas jēdzienu, izmantojām šādu spriedumu: skaitlis A ir funkcijas $f(x)$ robeža, ja starpības modulis $|f(x) - A|$ neierobežoti samazinās, kad $x \to a$ (vai arī kad $x \to \infty$). Bet tas nozīmē, ka starpība $f(x) - A$ ir bezgalīgi maza funkcija. Ir spēkā šāda **teorēma**.

Skaitlis A ir funkcijas f(x) robeža, kad $x \to a$, tad un tikai tad, ja $f(x) - A = \alpha(x)$ jeb $f(x) = A + \alpha(x)$, kur $\alpha(x)$ ir bezgalīgi maza funkcija.

Patiešām,

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists\, U(a), \text{ ka } \forall x \in U(a),\ x \neq a \text{ ir } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists\, U(a), \text{ ka } \forall x \in U(a),\ x \neq a \text{ ir } |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Salīdzinot šos abus izteikumus, redzam, ka $f(x) - A = \alpha(x)$. Tādējādi

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x).$$

7.4. §. TEORĒMAS PAR FUNKCIJU ROBEŽĀM

1. teorēma

Ja $\lim_{x \to a} f(x) = A$ un $\lim_{x \to a} \varphi(x) = B$, tad

$$1)\ \lim_{x \to a} (f(x) \pm \varphi(x)) = A \pm B,$$

$$2)\ \lim_{x \to a} (f(x) \cdot \varphi(x)) = A \cdot B,$$

$$3)\ \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{B} \quad (\text{ja } B \neq 0).$$

Pierādījums

Izmantojam sakarību starp funkcijas robežas jēdzienu un bezgalīgi mazu funkciju:

$$f(x) = A + \alpha(x) \quad \text{un} \quad \varphi(x) = B + \beta(x),$$

kur $\alpha(x)$ un $\beta(x)$ ir bezgalīgi mazas funkcijas, kad $x \to a$.

1) $f(x)+\varphi(x)=(A+\alpha(x))+(B+\beta(x))=(A+B)+(\alpha(x)+\beta(x))=$
$=(A+B)+\gamma(x)$, kur $\gamma(x)=\alpha(x)+\beta(x)$.

$\gamma(x)$ ir bezgalīgi maza funkcija kā divu bezgalīgi mazu funkciju summa.

Tā kā $f(x)+\varphi(x)=(A+B)+\gamma(x)$, $\lim\limits_{x\to a}\gamma(x)=0$, tad

$$\lim_{x\to a}(f(x)+\varphi(x))=A+B.$$

Analogi pierāda funkciju starpības gadījumu.

2) Funkciju reizinājuma gadījumā

$$f(x)\cdot\varphi(x)=(A+\alpha(x))\cdot(B+\beta(x))=A\cdot B+B\alpha(x)+A\beta(x)+\alpha(x)\cdot\beta(x)=$$
$$=A\cdot B+\gamma(x).$$

Šajā pārveidojumā izmantojām īpašību, ka bezgalīgi mazas funkcijas reizinājums ar konstanti ir bezgalīgi maza funkcija un divu bezgalīgi mazu funkciju reizinājums ir bezgalīgi maza funkcija; rezultātā ieguvām trīs bezgalīgi mazu funkciju summu, kas arī ir bezgalīgi maza funkcija un kuru apzīmējām ar $\gamma(x)$. Tādējādi

$$f(x)\cdot\varphi(x)=A\cdot B+\gamma(x).$$

Tāpēc $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot\varphi(x))=A\cdot B$.

Secinājums. *Konstantu reizinātāju, ar kuru reizināta funkcija, var iznest pirms robežas simbola*, t. i.,

$$\lim_{x\to a}(C\cdot f(x))=C\cdot\lim_{x\to a}f(x).$$

Patiešām, $\lim\limits_{x\to a}(C\cdot f(x))=\lim\limits_{x\to a}C\cdot\lim\limits_{x\to a}f(x)=C\cdot\lim\limits_{x\to a}f(x)$.

3) Funkciju dalījuma gadījumā:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)}=\frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)}-\frac{A}{B}+\frac{A}{B}=$$
$$=\frac{A\cdot B+B\cdot\alpha(x)-A\cdot B-A\cdot\beta(x)}{B^2+B\cdot\beta(x)}+\frac{A}{B}=$$
$$=\frac{B\cdot\alpha(x)-A\cdot\beta(x)}{B^2+B\cdot\beta(x)}+\frac{A}{B}=\frac{A}{B}+\gamma(x).$$

Šajā pārveidojumā izmantojām īpašību, ka bezgalīgi mazas funkcijas reizinājums ar konstanti ir bezgalīgi maza funkcija, divu bezgalīgu mazu funkciju starpība ir bezgalīgi maza funkcija un bezgalīgi mazas funkcijas dalījums ar funkciju, kuras robeža nav nulle, ir bezgalīgi maza funkcija, kuru apzīmējām ar $\gamma(x)$. Tādējādi esam ieguvuši, ka

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{A}{B}+\gamma(x),\quad \text{t. i.,}\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{A}{B}.$$

Līdz ar to teorēma ir pierādīta. □

2. teorēma

Ja kādā punkta a apkārtnē $f(x)<M$ un $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, tad $A\leqslant M$ jeb $\lim\limits_{x\to a}f(x)\leqslant M$.

Pierādījums

Pieņemsim pretējo: $A>M$ jeb $A-M>0$. Tad pozitīvo skaitli $A-M$ var izraudzīties par ε funkcijas robežas definīcijā un ir pareizs šāds apgalvojums:

skaitlim $A-M>0$ $\exists\, U(a)$, ka $\forall x\in U(a)$, $x\neq a$ ir $|f(x)-A|<A-M$.

Pārveidojot šo nevienādību, iegūstam, ka

$$-(A-M)<f(x)-A<A-M, \quad -A+M<f(x)-A<A-M$$

un $f(x)>M$. Taču šī nevienādība ir pretrunā ar doto: $f(x)<M$ kādā punkta a apkārtnē. Tātad pieņēmums ir nepareizs un

$$\lim_{x\to a} f(x)\leqslant M. \quad \square$$

3. teorēma

Ja kādā punkta a apkārtnē $f(x)<\varphi(x)$ un šīm funkcijām eksistē galīgas robežas, kad $x\to a$, tad $\lim\limits_{x\to a} f(x)\leqslant \lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$.

Pierādījums

No nevienādības $f(x)<\varphi(x)$ iegūstam, ka $f(x)-\varphi(x)<0$. Tāpēc saskaņā ar iepriekšējo teorēmu $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-\varphi(x))\leqslant 0$, no kurienes

$$\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a}\varphi(x)\leqslant 0 \quad \text{jeb} \quad \lim_{x\to a} f(x)\leqslant \lim_{x\to a}\varphi(x). \quad \square$$

4. teorēma

Ja kādā punkta a apkārtnē

$$f(x)\leqslant\varphi(x)\leqslant h(x) \tag{1}$$

un $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=A$, tad arī $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A$.

Pierādījums

Brīvi izvēlamies skaitli $\varepsilon>0$.

Tā kā $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, tad kādā punkta a apkārtnē ir spēkā nevienādība

$$|f(x)-A|<\varepsilon \quad \text{jeb} \quad A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon. \tag{2}$$

Tā kā $\lim\limits_{x\to a} h(x)=A$, tad kādā citā punkta a apkārtnē ir spēkā nevienādība

$$|h(x)-A|<\varepsilon \quad \text{jeb} \quad A-\varepsilon<h(x)<A+\varepsilon. \tag{3}$$

Var izvēlēties tādu punkta a apkārtni, ka tajā ir spēkā kā nevienādība (1), tā arī (2) un (3); šo apkārtni apzīmēsim ar $U(a)$.

Tātad $\forall x\in U(a)$ ir $A-\varepsilon<f(x)\leqslant\varphi(x)\leqslant h(x)<A+\varepsilon$, no kurienes iegūstam, ka $A-\varepsilon<\varphi(x)<A+\varepsilon$ jeb $|\varphi(x)-A|<\varepsilon$. Tādējādi ir pareizs apgalvojums:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists U(a), \text{ ka } \forall x\in U(a),\ x\neq a \text{ ir } |\varphi(x)-A|<\varepsilon, \text{ t. i.,}$$

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=A. \quad \square$$

7.5. §. ROBEŽAS APRĒĶINĀŠANA. NENOTEIKTĪBU NOVĒRŠANA

1. NENOTEIKTĪBA „$\dfrac{\infty}{\infty}$"

Iepriekšējā paragrāfa 1. teorēmu nevar izmantot robežas aprēķināšanai, ja $f(x)$ un $\varphi(x)$ ir bezgalīgi lielas funkcijas.

Pieņemsim, ka $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ un $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$ (šeit a vietā var būt arī $+\infty$, $-\infty$, $a+0$, $a-0$).

Ja $f(x)$ un $\varphi(x)$ ir bezgalīgi lielas funkcijas, tad šo funkciju dalījuma robežai lieto simbolisku pierakstu

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}\quad\text{vai}\left(\frac{\infty}{\infty}\right),$$

ko lasa «nenoteiktība $\frac{\infty}{\infty}$».

Bezgalīgi lielu funkciju dalījuma robeža var būt bezgalība, nulle vai arī no nulles atšķirīgs skaitlis.

Atrodot robežu, bieži izmanto īpašību, ka bezgalīgi lielas funkcijas apgrieztā funkcija ir bezgalīgi maza funkcija un tātad tās robeža ir nulle. Lai varētu lietot šo īpašību, parasti funkcija $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ir jāpārveido.

Piemēram, ja $f(x)$ un $\varphi(x)$ ir polinomi, tad skaitītāja un saucēja izteiksmes dala ar x^n, kur n ir polinoma $\varphi(x)$ pakāpe. Lieto arī citus identiskus pārveidojumus.

Piemēri

1. $$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^3+5x^2-1}{2x^3-7x+6}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{6x^3}{x^3}+\frac{5x^2}{x^3}-\frac{1}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3}-\frac{7x}{x^3}+\frac{6}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^3}}{2-\frac{7}{x^2}+\frac{6}{x^3}}=$$
$$=\frac{6+0-0}{2-0+0}=3$$

2. $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^4+3n-2}{3n^5-5n^4+10}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^4}{n^5}+\frac{3n}{n^5}-\frac{2}{n^5}}{\frac{3n^5}{n^5}-\frac{5n^4}{n^5}+\frac{10}{n^5}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}+\frac{3}{n^4}-\frac{2}{n^5}}{3-\frac{5}{n}+\frac{10}{n^5}}=$$
$$=\frac{0+0-0}{3-0+0}=0$$

3. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x}{x+2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x}-\frac{3x}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{2}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-3}{1+\frac{2}{x}}=\infty$$

4. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+\sqrt{4x^2+1}}{\sqrt{x^2+5}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3x}{x}+\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+5}}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}}=$$
$$=\frac{3+\sqrt{4+0}}{\sqrt{1+0}}=5$$

5. $$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})$$

Šajā piemērā $\sqrt{n^2+n}$ un $\sqrt{n^2-n}$ ir bezgalīgi lielas virknes, tāpēc to starpība ir nenoteikta izteiksme "$\infty-\infty$". Reizinot un dalot šo izteiksmi ar tās algebriski saistīto izteiksmi, iegūst nenoteiktību "$\frac{\infty}{\infty}$", kuru pārveido analogi kā iepriekšējos piemēros. Tādējādi

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})=(\infty-\infty)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n})}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n)-(n^2-n)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}+\frac{\sqrt{n^2-n}}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \frac{2}{1+1} = 1.$$

2. NENOTEIKTĪBA „$\frac{0}{0}$"

Teorēma par divu funkciju dalījuma $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ robežu nav tieši izmantojama robežas aprēķināšanai arī tad, ja $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ un $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)=0$, t. i., ja $f(x)$ un $\varphi(x)$ ir bezgalīgi mazas funkcijas.

Šādu funkciju dalījuma robežai lieto pierakstu

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = „\frac{0}{0}" \quad \text{vai} \quad \left(\frac{0}{0}\right),$$

ko lasa «nenoteiktība $\frac{0}{0}$».

Bezgalīgi mazu funkciju attiecības robeža var būt gan 0, *gan* ∞, *gan arī reāls skaitlis, kas nav nulle* (*robeža var arī neeksistēt*).

Ir vairākas metodes nenoteiktības "$\frac{0}{0}$" novēršanai. Viena no tām – daļveida izteiksmes $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ saīsināšana, izdalot tās skaitītāju un saucēju ar binomu $x-a$. Saskaņā ar robežas definīciju $x\to a$, bet $x\neq a$ un $x-a\neq 0$; tāpēc skaitītāju un saucēju drīkst dalīt ar $x-a$. Lai varētu saīsināt doto daļveida izteiksmi, parasti tās skaitītāju un saucēju sadala reizinātājos tā, lai viens no reizinātājiem būtu $x-a$.

Piemēri

1. $$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-4} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x+4}{x+2} = \frac{2^2+2\cdot 2+4}{2+2} = \frac{12}{4} = 3$$

2. $$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-5)} = \lim_{x\to 3} \frac{x-2}{x-5} = \frac{3-2}{3-5} = -\frac{1}{2}$$

3. $$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{3+x}-2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{3+x}+2)}{(\sqrt{3+x}-2)(\sqrt{3+x}+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{3+x}+2)}{3+x-4} =$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{3+x}+2)}{x-1} = \lim_{x\to 1} (\sqrt{3+x}+2) = \sqrt{3+1}+2 = 4$$

4. $$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1\right)}{(x-1)\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1\right)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1\right)} =$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1} = \frac{1}{3}$$

7.6. §. BEZGALĪGI MAZU FUNKCIJU SALĪDZINĀŠANA

Dažādos robežu teorijas lietojumos salīdzina bezgalīgi mazas funkcijas, *pētot to attiecības robežu.*

Definīcija

Bezgalīgi mazas funkcijas $\alpha(x)$ un $\beta(x)$ sauc par vienādas kārtas bezgalīgi mazām funkcijām, kad $x \to a$, ja

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0.$$

Ja α un β ir vienādas kārtas bezgalīgi mazas funkcijas, tad raksta $\alpha = O(\beta)$ (vai $\beta = O(\alpha)$); šo pierakstu lasa: «α ir lielais O no β».

Piemēram, $\alpha(x) = x^3 - 8$ un $\beta(x) = x^2 - 4$ ir vienādas kārtas bezgalīgi mazas funkcijas, kad $x \to 2$, jo

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3-8}{x^2-4} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = 3.$$

Definīcija

Bezgalīgi mazas funkcijas $\alpha(x)$ un $\beta(x)$ sauc par ekvivalentām jeb asimptotiski vienādām bezgalīgi mazām funkcijām, kad $x \to a$, ja

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

Ekvivalentas bezgalīgi mazas funkcijas pieraksta šādi: $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Piemēram, $\alpha(x) = x^2 - 1$ un $\beta(x) = 2(x-1)$ ir ekvivalentas bezgalīgi mazas funkcijas, kad $x \to 1$, jo

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{2(x-1)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{2(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{2} = 1.$$

Tātad $(x^2-1) \sim 2(x-1)$, kad $x \to 1$.

Definīcija

Bezgalīgi mazu funkciju $\alpha(x)$ sauc par augstākas kārtas bezgalīgi mazu funkciju nekā $\beta(x)$, kad $x \to a$, ja

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0.$$

Ja α ir augstākas kārtas bezgalīgi maza funkcija nekā β, tad raksta $\alpha = o(\beta)$; šo pierakstu lasa: «α ir mazais o no β».

Piemēram,

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^2}{x-2} = \lim_{x \to 2} (x-2) = 0,$$

tāpēc $(x-2)^2 = o(x-2)$.

Intuitīvi ir skaidrs, ka *augstākas kārtas bezgalīgi mazas funkcijas vērtības straujāk tiecas uz nulli nekā zemākas kārtas bezgalīgi mazas funkcijas vērtības, bet ekvivalentu bezgalīgi mazu funkciju vērtības vienādi strauji tiecas uz nulli.*

Robežu aprēķinos īpaša nozīme ir ekvivalentām bezgalīgi mazām funkcijām, novēršot $\frac{0}{0}$ veida nenoteiktības.

Aplūkosim teorēmas par ekvivalentu bezgalīgi mazu funkciju lietošanu (lai saīsinātu pierakstus, turpmāk $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ vietā rakstīsim $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}$).

1. teorēma

Atrodot divu bezgalīgi mazu funkciju attiecības robežu, vienu vai abas bezgalīgi mazās funkcijas drīkst aizstāt ar tām ekvivalentām bezgalīgi mazām funkcijām.

Pierādījums

Dots: $\alpha\backsim\alpha'$ jeb $\lim\dfrac{\alpha}{\alpha'}=1$,

$\beta\backsim\beta'$ jeb $\lim\dfrac{\beta}{\beta'}=1$.

Jāpierāda: $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

Patiešām, tā kā $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha'}{\beta'}\cdot\dfrac{\beta'}{\beta}\cdot\dfrac{\alpha}{\alpha'}$, tad

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\left(\frac{\alpha'}{\beta'}\cdot\frac{\beta'}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\alpha'}\right)=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}\cdot\lim\frac{\beta'}{\beta}\cdot\lim\frac{\alpha}{\alpha'}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}\cdot1\cdot1=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}.$$

Tātad $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$. □

2. teorēma

Ja divu bezgalīgi mazu funkciju summā $\alpha+\beta$ saskaitāmais β ir augstākas kārtas bezgalīgi maza funkcija nekā saskaitāmais α, tad $\alpha+\beta\backsim\alpha$.

Pierādījums

Dots: $\beta=o(\alpha)$ jeb $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$.

Jāpierāda: $\alpha+\beta\backsim\alpha$ jeb $\lim\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha}=1$.

Patiešām,

$$\lim\frac{\alpha+\beta}{\alpha}=\lim\left(\frac{\alpha}{\alpha}+\frac{\beta}{\alpha}\right)=\lim1+\lim\frac{\beta}{\alpha}=1+0=1.\quad\square$$

Secinājums. $\alpha+o(\alpha)\backsim\alpha$ un, atrodot robežu, var izmantot arī šādu vienādību:

$$\lim\frac{\alpha+o(\alpha)}{\beta+o(\beta)}=\lim\frac{\alpha}{\beta}.$$

Ja $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, tad $\alpha(x)$ ir augstākas kārtas bezgalīgi maza funkcija nekā $\beta(x)$, kad $x\to a$ $(\alpha(x)=o(\beta(x)))$.

Salīdzinot divas bezgalīgi mazas funkcijas, dažkārt precizē to kārtu, proti,

ja $\alpha(x)=o(\beta(x))$, kad $x\to a$, bet

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^n}=C\neq0,$$

tad saka, ka $\alpha(x)$ ir n-tās kārtas bezgalīgi maza funkcija attiecībā pret $\beta(x)$, kad $x\to a$.

Piemēram, $1-\cos x=o(x)$, kad $x\to 0$, jo

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1\cdot 0=0.$$

Bet $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{2}$. Tātad $1-\cos x$ ir 2. kārtas bezgalīgi maza funkcija, salīdzinot ar x, kad $x\to 0$.

Savukārt $\operatorname{tg}x-\sin x$ ir 3. kārtas bezgalīgi maza funkcija, salīdzinot ar x, kad $x\to 0$, jo $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x}=0$, bet $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0\Leftrightarrow \alpha(x)\underset{x\to a}{=}o(\beta(x))$$

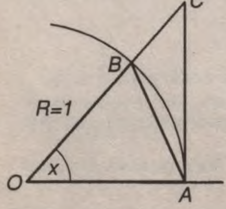
$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1\Leftrightarrow \alpha(x)\underset{x\to a}{\sim}\beta(x)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C\neq 0\Leftrightarrow \alpha(x)\underset{x\to a}{=}O(\beta(x))\quad \text{un arī}\quad \beta(x)\underset{x\to a}{=}O(\alpha(x))$$

7.7. §. PIRMĀ IEVĒROJAMĀ ROBEŽA $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$

Tā kā $\sin 0=0$, tad $\dfrac{\sin x}{x}$, kad $x\to 0$, ir nenoteikta izteiksme $"\dfrac{0}{0}"$.

Pierādīsim, ka $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.



35. zīm.

Uz vienības riņķa līnijas atliekam loku AB, kura garums ir x. Tā kā riņķa līnijas rādiuss $R=1$, tad šim lokam atbilstošais centra leņķis arī ir x radiānu (sk. 35. zīm.), bet sektora AOB laukums

$$S_{\text{sekt. }AOB}=\frac{1}{2}R^2x=\frac{1}{2}x.$$

Novelkam hordu AB un $CA\perp OA$. No zīmējuma redzams, ka trijstūra AOB laukums ir mazāks nekā sektora AOB laukums, bet šī sektora laukums ir mazāks nekā trijstūra OAC laukums:

$$S_{\triangle AOB}<S_{\text{sekt. }AOB}<S_{\triangle AOC}. \qquad (1)$$

Tā kā $S_{\triangle AOC}=\dfrac{1}{2}\,OA\cdot AC=\dfrac{1}{2}\,R\cdot R\operatorname{tg}x=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}x$, bet

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\,AO\cdot BO\sin x=\frac{1}{2}\,R\cdot R\sin x=\frac{1}{2}\sin x,$$

tad no nevienādības (1) seko, ka

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x \quad \text{jeb} \quad \sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Dalot šīs nevienādības visus locekļus ar $\sin x > 0$, iegūstam:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \text{jeb} \quad 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x. \tag{2}$$

Izmantosim teorēmu par robežpāreju nevienādībās (sk. 7.4.§. 4. teorēmu), kad $x \to +0$.

Tā kā $\lim\limits_{x \to +0} \cos x = 1$ un $\lim\limits_{x \to +0} 1 = 1$, tad no nevienādībām (2) izriet, ka arī

$$\lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Robeža ir atrasta gadījumam, kad $x > 0$.

Pierādīsim, ka arī

$$\lim_{x \to -0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Lietosim substitūciju $x = -t$. Acīmredzami, ja $x \to -0$, tad $t \to +0$ un

$$\lim_{x \to -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{t \to +0} \frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t \to +0} \frac{-\sin t}{-t} = \lim_{t \to +0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Tādējādi esam pierādījuši, ka neatkarīgi no tā, vai arguments ir pozitīvs vai negatīvs,

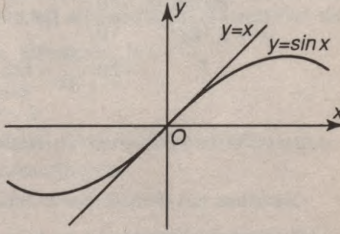
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad \square \tag{3}$$

Šo rezultātu bieži izmanto matemātikā un tās lietojumos, tāpēc to sauc par pirmo ievērojamo robežu.

No vienādības (3) secinām, ka $y = \sin x$ un $y = x$ ir ekvivalentas bezgalīgi mazas funkcijas, kad $x \to 0$, t. i., $\sin x \sim x$. Šim faktam ir vienkārša ģeometriska ilustrācija: nelielā koordinātu sākumpunkta apkārtnē funkcijas grafiks maz atšķiras no taisnes $y = x$ (36. zīm.).

Tuvinātos aprēķinos dažkārt lieto aptuvenu vienādību $\sin x \approx x$, ja x pēc moduļa ir mazs skaitlis (tuvs nullei). Piemēram, izmantojot kalkulatoru, varam pārliecināties, ka $\sin 0{,}1 = 0{,}0998334\ldots \approx 0{,}1$.

Robežu (3) un tās secinājumu, ka $\sin x \sim x$, bieži izmanto robežu aprēķinos, lai novērstu nenoteiktību „$\frac{0}{0}$". Aplūkosim piemērus.



36. zīm.

1. Aprēķināt robežu $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\cos x \cdot x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$$

Tātad arī $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$ jeb $\operatorname{tg} x \sim x$, t. i., $y = \operatorname{tg} x$ un $y = x$ ir *ekvivalentas bezgalīgi mazas funkcijas*, kad $x \to 0$.

2. Aprēķināt robežu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left[\begin{array}{l}\text{Substitūcija:}\\ y=\arcsin x \Leftrightarrow x=\sin y;\\ \text{ja } x\to 0, \text{ tad } y\to 0.\end{array}\right]=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\dfrac{\sin y}{y}}=1$$

Tādējādi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$ jeb $\arcsin x \backsim x$, kad $x\to 0$.

3. Aprēķināt robežu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{x}$.

1. paņēmiens

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{5x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}=5\cdot\lim_{5x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5$$

2. paņēmiens

Tā kā $\sin 5x \backsim 5x$, kad $x\to 0$, tad saskaņā ar 7.6.§. 1. teorēmu, atrodot robežu, $\sin 5x$ var aizvietot ar $5x$. Tāpēc

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{x}=\lim 5=5.$$

4. Aprēķināt robežu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{x}{2}\cdot\sin\dfrac{x}{2}}{x^2}=$$

$$=\left[\text{ja } x\to 0, \text{ tad } \sin\frac{x}{2}\backsim\frac{x}{2}\right]=2\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{x}{2}}{x^2}=\frac{2}{4}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=\frac{1}{2}$$

5. Aprēķināt robežu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 3x}{\operatorname{tg} 2x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{\operatorname{tg} 2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=[\text{ja } x\to 0, \text{ tad } \arcsin 3x\backsim 3x \text{ un } \operatorname{tg} 2x\backsim 2x]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{2x}=\lim\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

Sakarības, kas ekvivalentas ar robežām $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ un $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1$, atrada jau sengrieķu ģeometrs Dinostrats 4. gs. p. m. ē. Piebildīsim, ka sengrieķu zinātnieki izstrādāja un lietoja metodes, kuras var uzskatīt par pirmsākumu robežu teorijai. Vienu no šīm metodēm, tā saukto «izsmelšanas metodi», izveidoja Eidokss; to lietoja dažādos ģeometrijas uzdevumos, piemēram, aprēķinot piramīdas tilpumu.

Ja $\alpha\to 0$, tad $\sin\alpha\backsim\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha\backsim\alpha$, $\arcsin\alpha\backsim\alpha$, $\operatorname{arctg}\alpha\backsim\alpha$.

$$\boldsymbol{\alpha\backsim\sin\alpha\backsim\operatorname{tg}\alpha\backsim\arcsin\alpha\backsim\operatorname{arctg}\alpha, \text{ ja } \alpha\to 0}$$

7.8. §. ROBEŽAS EKSISTENCES JAUTĀJUMI

Ne vienmēr mainīgam lielumam (funkcijai, skaitļu virknei) robeža eksistē.

Piemēram, neeksistē robeža funkcijai $y=\sin x$, kad $x \to +\infty$ vai arī kad $x \to -\infty$, jo nav tāda skaitļa, no kura sinusa funkcijas vērtības atšķiras pēc patikas maz visām tām argumenta x vērtībām, kuru moduļi ir pietiekami lieli skaitļi.

Analogi spriežot, secinām, ka robeža neeksistē arī dažādām virknēm.

Piemēram, robeža neeksistē skaitļu virknei 3; 7; 3; 7; ... ; 3; 7; ... , jo nav tāda skaitļa, kura pēc patikas mazā ε-apkārtnē atrodas bezgalīgi daudz šīs virknes locekļu, bet ārpus šīs apkārtnes – galīgs skaits virknes locekļu.

Ja virknei eksistē galīga robeža, tad saka, ka virkne konverģē. Ja virknei neeksistē galīga robeža, tad saka, ka virkne diverģē. (Latīņu vārds «convergere» nozīmē tiekties, tuvoties; «divergentia» nozīmē sadalīšanās, sazarošanās.)

Aplūkosim dažas teorēmas par skaitļu virknes robežas eksistenci, kuras izmantosim turpmākajā vielas izklāstā.

1. teorēma (teorēma par virknes robežas unitāti).

Ja skaitļu virkne konverģē, tad tai eksistē tikai viena robeža.

Pierādot šo teorēmu, pieņem, ka ir spēkā pretējais apgalvojums: virknei x_n eksistē divas dažādas robežas – skaitlis A un skaitlis B (pieņemsim, ka $A<B$).

Saskaņā ar virknes robežas definīciju no pieņēmuma, ka $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$, izriet:

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists N_1, \text{ka } \forall n>N_1 \quad x_n \in U_\varepsilon(A),$$

t. i., visi tie virknes locekļi, kuru kārtas numurs lielāks par skaitli N_1, atrodas punkta A ε-apkārtnē.

Savukārt no pieņēmuma, ka $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=B$, izriet:

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists N_2, \text{ka } \forall n>N_2 \ x_n \in U_\varepsilon(B),$$

t. i., visi tie virknes locekļi, kuru kārtas numurs lielāks par skaitli N_2, atrodas punkta B ε-apkārtnē. Bet tad visiem tiem virknes locekļiem, kuru kārtas numurs lielāks par lielāko no skaitļiem N_1 un N_2, vienlaikus jāatrodas gan intervālā $(A-\varepsilon; A+\varepsilon)$, gan arī intervālā $(B-\varepsilon; B+\varepsilon)$. Taču tas nav iespējams, ja ε izvēlas tik mazu, ka šiem intervāliem nav kopīgu punktu, piemēram, ja $\varepsilon<\dfrac{B-A}{2}$.

Līdz ar to pieņēmums, ka $A<B$, ir nepareizs.

Analogi spriežot, secinām, ka nevar būt $A>B$.

Tātad $A=B$ un konverģentai virknei nevar būt divas dažādas robežas. □

2. teorēma (konverģences nepieciešamais nosacījums).

Ja virkne konverģē, tad tā ir ierobežota virkne.

Pierādījums

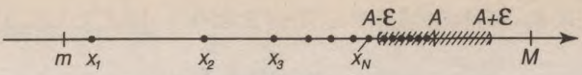
Dots: virkne konverģē, t. i., $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$.

Jāpierāda: virkne ir ierobežota, t. i., $\exists\, m$ un M, ka $\forall\, n$ ir $m \leqslant x_n \leqslant M$.

Saskaņā ar robežas definīciju

$$\forall \varepsilon>0, \ \exists N, \text{ka } \forall n>N \quad x_n \in U_\varepsilon(A).$$

Tas nozīmē, ka visi virknes locekļi, kuru kārtas numurs ir lielāks nekā skaitlis N, atrodas intervālā $(A-\varepsilon; A+\varepsilon)$, bet ārpus šī intervāla ir pirmie N virknes locekļi x_1, x_2, x_3, ... , x_N.



37. zīm.

Tādā gadījumā ir iespējams izveidot tādu intervālu $[m; M]$, kurā atrodas gan apkārtne $(A-\varepsilon;\ A+\varepsilon)$, gan arī tie pirmie N virknes locekļi, kas neietilpst šajā apkārtnē. 37. zīmējumā ilustrēts gadījums, kad virkne ir augoša. Acīmredzami tad skaitļus m un M var izraudzīties šādi: $m \leqslant x_1$, $M \geqslant A+\varepsilon$. □

Virknes ierobežotība ir konverģences nepieciešamais nosacījums, bet nav konverģences pietiekamais nosacījums. Tas nozīmē, ka *ne katra ierobežota virkne konverģē.*

Piemēram, virkne (3; 7; 3; 7; ...) ir ierobežota, jo visi šīs virknes locekļi atrodas, piemēram, intervālā (2; 8). Taču jau noskaidrojām, ka šai virknei neeksistē robeža.

Matemātiskās analīzes kursā ir vairākas teorēmas par virknes konverģences pietiekamiem nosacījumiem. Aplūkosim visvienkāršāko no šīm teorēmām – Veierštrāsa teorēmu par robežas eksistenci.

3. teorēma (konverģences pietiekamais nosacījums).

Ja virkne ir augoša un ierobežota no augšas, vai arī dilstoša un ierobežota no apakšas, tad tai eksistē galīga robeža.

Intuitīvi, protams, ir skaidrs, ka, ja bezgalīga virkne ir augoša un ierobežota no augšas ar kādu skaitli M, tad jābūt tādam skaitlim $A \leqslant M$, kura jebkurā ε-apkārtnē atrodas bezgalīgi daudz virknes locekļu, t. i., skaitlis A ir virknes robeža.

Teorēmas pierādījumā izmanto ierobežotas kopas suprēma un infīma īpašības (skat. 6.1. §).

Pieņemsim, ka (x_n) ir bezgalīgi augoša un no augšas ierobežota skaitļu virkne. Šādai virknei eksistē suprēms (mazākais no skaitļiem, kas lielāki par visiem virknes locekļiem); apzīmēsim to ar A. Tātad visiem virknes locekļiem ir spēkā nevienādība $x_n \leqslant A$, bet, lai cik mazu izraugāmies pozitīvu skaitli ε, eksistē tāds virknes loceklis x_N, kas ir lielāks par skaitli $A-\varepsilon$ (pretējā gadījumā A nav suprēms). Tā kā virkne ir monotoni augoša, tad par skaitli $A-\varepsilon$ ir lielāki bezgalīgi daudz virknes locekļu:

$$x_N;\ x_{N+1};\ x_{N+2};\ x_{N+3};\ \ldots .$$

Tātad $A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Analogi, izmantojot infīma īpašību, pierāda, ka virkne konverģē, ja tā ir dilstoša un ierobežota no apakšas. □

Veierštrāsa teorēmu bieži lieto, lai pamatotu robežas eksistenci. Piemēram, ģeometrijā šo teorēmu lieto, lai definētu riņķa līnijas garuma jēdzienu. Vispirms

Kārlis Teodors Vilhelms Veierštrāss (1815–1897) – vācu matemātiķis, studējis jurisprudenci Bonnas universitātē, vēlāk pievērsies matemātikai un iestājies Minsteres akadēmijā, lai kļūtu par skolotāju. Jaunībā bijis skolotājs, vienlaikus nopietni nodarbodamies ar pētījumiem matemātikā. Mūža otrajā pusē kļuvis par profesoru Berlīnes universitātē, kur izveidojis un lasījis metodiski oriģinālu matemātiskās analīzes kursu, bijis arī Berlīnes universitātes rektors.

pierāda, ka riņķa līnijā ievilktu regulāru daudzstūru perimetru virkne p_n ir augoša un ierobežota no augšas. Pēc Veierštrāsa teorēmas šādai virknei eksistē robeža. Savukārt ap riņķa līniju apvilktu regulāru daudzstūru perimetru virkne P_n ir dilstoša un ierobežota no apakšas, tātad arī šai virknei robeža eksistē. Ir pierādīts, ka abu virkņu robežas ir vienādas, t. i.,

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} P_n = C.$$

Šo robežu sauc par riņķa līnijas garumu.

Ģeometrijā pierāda arī to, ka riņķa līnijas garuma attiecība pret tās diametru visām riņķa līnijām ir viens un tas pats skaitlis; šo skaitli apzīmē ar π. Tātad $\frac{C}{2R} = \pi$ un $C = 2\pi R$. Tādējādi

$$\pi = \frac{C}{2R} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} p_n}{2R} = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{2R} \text{ vai arī } \pi = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{2R}.$$

Tātad skaitlis π ir robeža virknei, kuras locekļi ir ievilktu (apvilktu) regulāru daudzstūru perimetru attiecība pret riņķa līnijas diametru. Šveices matemātiķis J. Lamberts (1728–1777) ir pierādījis, ka π ir iracionāls skaitlis.

7.9. §. OTRĀ IEVĒROJAMĀ ROBEŽA $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. SKAITLIS *e*. NENOTEIKTĪBA 1^∞

Matemātikā bieži lieto funkcijas $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ robežu, kad $x\to\infty$. Acīmredzami bāzes izteiksmes $1+\frac{1}{x}$ robeža, kad $x\to\infty$, ir skaitlis 1, bet kāpinātājs ir bezgalīgi liels lielums. Tāpēc aplūkotā funkcija ir nenoteikta izteiksme 1^∞.

Lai noskaidrotu, vai šai funkcijai robeža eksistē, kad $x\to\infty$, aizstāsim funkciju ar skaitļu virkni $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ un aprēķināsim dažus šīs virknes locekļus:

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, \ldots, y_{10}, \ldots, y_{100}, \ldots, y_{1000}, \ldots .$$

Šo virknes locekļu tuvinātas vērtības dotas tabulā.

n	1	2	3	4	5	...	10	...	100	...	1000	...
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2	2,25	2,37	2,44	2,49	...	2,59	...	2,705	...	2,717	...

Tabulā redzams, ka, palielinoties kārtas numuram, palielinās arī virknes locekļi. Matemātiski precīzi pierāda, ka virkne ir augoša, salīdzinot izteiksmju

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{un} \quad y_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

izvirzījumus pēc Ņūtona binoma formulas. Tādējādi pierāda, ka ir spēkā nevienādība $y_n < y_{n+1}$ visiem naturāliem skaitļiem n.

Lietojot izteiksmes $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ izvirzījumu pēc Ņūtona binoma formulas, pierāda arī to, ka visiem naturāliem skaitļiem n ir spēkā nevienādības

$$2 \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Tātad virkne $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ir augoša un ierobežota no augšas. Pēc Veierštrāsa teorēmas par virkņu konverģenci, šādai virknei robeža eksistē. Ir pierādīts, ka šī robeža ir iracionāls skaitlis, ko apzīmē ar burtu e (šo apzīmējumu matemātikā ieviesa L. Eilers). Tātad

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Tā kā skaitlis e ir bezgalīgs neperiodisks decimāldaļskaitlis, tad aprēķinos lieto šī skaitļa tuvinātas vērtības. Par skaitļa e tuvinātu vērtību var ņemt kādu virknes y_n locekli ar pietiekami lielu kārtas numuru, piemēram, $y_{1000} = 2{,}717\ldots$. Parasti tomēr lieto citas skaitļa e aprēķināšanas metodes; aprēķināts, ka

$$e = 2{,}7182818284590\ldots.$$

Var pierādīt, ka skaitlis e ir ne tikai skaitļu virknes $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ robeža, bet arī funkcijas $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ robeža, kad $x \to +\infty$ un arī kad $x \to -\infty$.

Pierādīsim, ka $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$. Tā kā šeit $x>0$, tad katru aplūkojamo x vērtību var iekļaut starp diviem pēc kārtas sekojošiem naturāliem skaitļiem n un $n+1$:

$$n \leqslant x < n+1. \tag{1}$$

Tad ir spēkā arī šādas nevienādības:

$$\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1} \quad \text{un} \quad 1+\frac{1}{n} \geqslant 1+\frac{1}{x} > 1+\frac{1}{n+1}.$$

Tā kā, lielāku bāzes izteiksmi kāpinot ar lielāku kāpinātāju, iegūst lielāku pakāpi, tad

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \geqslant \left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n. \tag{2}$$

Viegli pārliecināties, ka

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e \quad \text{un arī} \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = e$$

(skat. piemērus šī paragrāfa beigās).

Franču matemātiķis **Šarls Ermits** 1873. g. pierādīja, ka e ir transcendents iracionāls skaitlis. Tas nozīmē, ka neeksistē tāds algebrisks vienādojums ar veseliem koeficientiem un kāpinātājiem, kura sakne ir skaitlis e.

Ievērosim skaitļa e analoģiju ar skaitli π. Abus šos skaitļus definē kā īpašu virkņu robežas; turklāt robežas eksistences pierādīšanai lieto Veierštrāsa teorēmu, t. i., pierāda, ka virknes ir monotonas un ierobežotas. Tāpat kā skaitlis e, arī π ir transcendents iracionāls skaitlis; šos skaitļus nav iespējams konstruēt uz koordinātu taisnes, lietojot tikai cirkuli un lineālu.

No nevienādībām (1) izriet, ka $x\to+\infty$, ja $n\to+\infty$, un saskaņā ar teorēmu par robežpāreju nevienādībās (sk. 7.4.§. 4. teorēmu) no nevienādībām (2) iegūstam, ka arī

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \tag{3}$$

(Piebildīsim, ka šis pierādījums ir vienkāršots un nav pilnīgi korekts, jo teorēmā par robežpāreju nevienādībās aplūko 3 funkciju vai arī 3 virkņu nevienādības.)

Aplūkosim gadījumu, kad $x\to-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left[\begin{array}{l}\text{Substitūcija:}\\ x=-t,\ t=-x;\\ \text{ja } x\to-\infty, \text{ tad } t\to+\infty.\end{array}\right]=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{t-1}{t}\right)^t}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^t=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t=\lim_{t\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\cdot\left(1+\frac{1}{t-1}\right)\right)=$$

$$=\lim_{(t-1)\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\cdot\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)=e\cdot1=e. \tag{4}$$

Tātad skaitlis e ir aplūkotās funkcijas robeža, kad $x\to+\infty$ un arī kad $x\to-\infty$ jeb

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \tag{5}$$

Robežu (5) sauc par otro ievērojamo robežu (skat. 7.7.§ pirmo ievērojamo robežu). □

Aprēķinot robežas, aplūkojām nenoteiktības "$\frac{\infty}{\infty}$" un "$\frac{0}{0}$". Nenoteikta izteiksme ir arī funkcija $f(x)^{\varphi(x)}$, ja $f(x)\to1$ un $\varphi(x)\to\infty$, jo, izdarot robežpāreju bāzes izteiksmē un kāpinātājā, iegūst nenoteiktību "1^∞".

Robežu aprēķinos, kuros jānovērš nenoteiktība "1^∞", lieto otro ievērojamo robežu (5). Ērtākai šīs vienādības lietošanai uzdevumos argumentu x aizvietosim ar t:

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e.$$

Piemēri

1. $$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=(1^\infty)=\left[\begin{array}{l}\text{Substitūcija:}\\ x=\frac{1}{t},\ t=\frac{1}{x};\\ \text{ja } x\to0, \text{ tad } t\to\infty.\end{array}\right]=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e$$

Tātad arī $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

2. $$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{2x}=(1^\infty)=\left[\begin{array}{l}\text{Substitūcija:}\\ -\frac{3}{x}=\frac{1}{t},\ x=-3t;\\ \text{ja } x\to\infty, \text{ tad } t\to\infty.\end{array}\right]=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-6t}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^{-6}=\left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^{-6}=e^{-6}$$

3. $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-2}\right)^{3x-1}=(1^{\infty})=\left[\begin{array}{l}\text{Substitūcija:}\\ \dfrac{1}{x-2}=\dfrac{1}{t},\ x-2=t,\\ x=t+2;\ \text{ja } x\to\infty,\quad t\to\infty.\end{array}\right]=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3t+5}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)^{5}\right)=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3t}\cdot\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{5}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{3}\cdot 1=\left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{3}=e^{3}$$

4. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^{2x+1}=(1^{\infty})=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(3x-1)+1+1}{3x-1}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x-1}\right)^{2x+1}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\text{Substitūcija:}\\ \dfrac{2}{3x-1}=\dfrac{1}{t},\ 2t=3x-1,\ x=\dfrac{2}{3}t+\dfrac{1}{3};\\ \text{ja } x\to\infty,\ \text{tad } t\to\infty.\end{array}\right]=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{4}{3}t+\frac{5}{3}}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{4}{3}t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{5}{3}}\right)=\left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{\frac{4}{3}}\cdot\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{5}{3}}=$$

$$=e^{\frac{4}{3}}\cdot 1=e^{\frac{4}{3}}$$

5. $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot 1=e$$

6. $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\left[\begin{array}{l}\text{Substitūcija:}\\ \dfrac{1}{n+1}=\dfrac{1}{m},\ n+1=m,\ n=m-1;\\ \text{ja } n\to\infty,\ \text{tad } m\to\infty.\end{array}\right]=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m-1}=$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\cdot\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-1}\right)=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\cdot\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-1}=$$

$$=e\cdot 1=e$$

7.10. §. FUNKCIJAS $y=e^x$ UN $y=\ln x$. HIPERBOLISKĀS FUNKCIJAS

Matemātikā, dabaszinātnēs, inženierzinātnēs u. c. bieži lieto eksponentfunkciju un logaritmisko funkciju ar bāzi e. Kā zināms, eksponentfunkcijai $y=a^x$ bāze a var būt jebkurš pozitīvs skaitlis, kas nav vienāds ar 1. Lai vienkāršotu šīs funkcijas atvasinājuma izteiksmi, ir izdevīgi par bāzi izraudzīties skaitli e. Tā iegūst eksponentfunkciju $y=e^x$, kurai lieto arī šādu pierakstu: $y=\exp(x)$. Šīs funkcijas *inversā funkcija* ir logaritmiskā funkcija ar bāzi e: $y=\log_e x$, ko sauc par naturālo logaritmu funkciju; tās pierakstā nenorāda bāzi e, bet lieto simbolu «ln», t. i., raksta $y=\ln x$.

Ievērosim, ka $\ln e=1$, bet $\ln 1=0$.

Funkciju $y=e^x$ un $y=\ln x$ īpašības ir tādas pašas kā jebkurai eksponentfunkcijai un logaritmiskai funkcijai ar bāzi $a>1$ (to grafiki attēloti 38. zīmējumā).

Izmantojot eksponentfunkcijas e^x un e^{-x}, definē vēl šādas funkcijas:

1) hiperbolisko sinusu (sinus hyperbolicus):

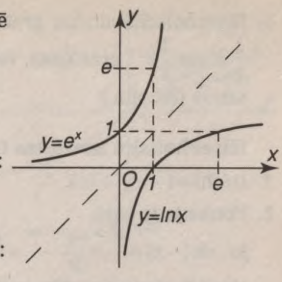
$$\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},$$

2) hiperbolisko kosinusu (cosinus hyperbolicus):

$$\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},$$

3) hiperbolisko tangensu (tangens hyperbolicus):

$$\operatorname{th} x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},$$



38. zīm.

4) hiperbolisko kotangensu (cotangens hyperbolicus):

$$\operatorname{cth} x=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}.$$

Aplūkosim hiperbolisko funkciju galvenās īpašības un grafikus.

Hiperboliskā sinusa funkcija $\operatorname{sh} x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

1. $D(\operatorname{sh})=(-\infty;\ +\infty)$, jo eksponentfunkcijas e^x un e^{-x} ir definētas visā reālo skaitļu kopā.
2. Funkcija ir nepāra, jo $\operatorname{sh}(-x)=\dfrac{e^{-x}-e^{-(-x)}}{2}=\dfrac{e^{-x}-e^x}{2}=-\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=-\operatorname{sh} x$; tātad funkcijas grafiks ir simetrisks attiecībā pret koordinātu sākumpunktu.
3. Funkcijas grafiks iet caur koordinātu sākumpunktu, jo $\operatorname{sh} 0=\dfrac{e^0-e^0}{2}=\dfrac{1-1}{2}=0$.

   Citu krustpunktu ar Ox asi nav, jo no vienādības $\operatorname{sh} x=0$ iegūst: $\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow e^x-e^{-x}=0$, $e^x=e^{-x}$, $x=-x$, $2x=0$, $x=0$.
4. Tā kā $e^x\to+\infty$, ja $x\to+\infty$, un $e^{-x}\to 0$, ja $x\to+\infty$; tad

   $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{2}=+\infty.$$

   Savukārt $e^x\to 0$, ja $x\to-\infty$, un $e^{-x}\to+\infty$, ja $x\to-\infty$; tāpēc

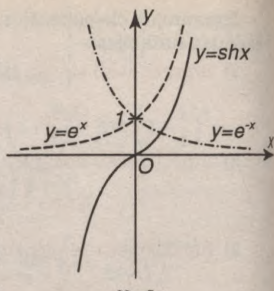
   $$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{2}=-\infty.$$

Praksē galvenokārt lieto divas logaritmu sistēmas:

1) logaritmus ar bāzi 10 jeb decimāllogaritmus (apzīmē $\lg x$),
2) logaritmus ar bāzi e jeb naturālos logaritmus (apzīmējums $\ln x$ saistīts ar latīņu nosaukumu «logarithmus naturalis»).

Abām logaritmu sistēmām pirmsākumi meklējami apmēram vienā laikā. Pirmās decimāllogaritmu tabulas izskaitļoja anglis **G. Brigss** (1556–1630). Tabulas logaritmiem, kuru bāze tuva skaitlim e, sastādīja Šveices matemātiķis **I. Birgi** (1552–1630). Skotu matemātiķa **Dž. Nepera** (1550–1617) tabulas atbilst logaritmiem, kuru bāze tuva skaitlim $\dfrac{1}{e}$.

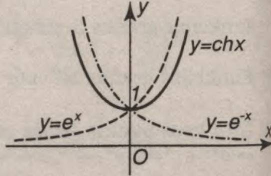
5. Hiperboliskā sinusa grafiku iegūst no funkciju $\frac{1}{2}e^x$ un $\frac{1}{2}e^{-x}$ grafikiem, veicot šo «grafiku atņemšanu» (39. zīm.).



39. zīm.

Hiperboliskā kosinusa funkcija $\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

1. $D(\operatorname{ch})=(-\infty;\ +\infty)$.
2. Funkcija ir pāra, jo $\operatorname{ch}(-x)=\frac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2}=\frac{e^{-x}+e^{x}}{2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\operatorname{ch} x$; tātad funkcijas grafiks ir simetrisks attiecībā pret Oy asi.
3. Hiperboliskā kosinusa grafiks krusto Oy asi punktā (0; 1), jo $\operatorname{ch} 0=\frac{e^0+e^0}{2}=\frac{1+1}{2}=1$.
4. Ox asi grafiks nekrusto, jo no vienādības $\operatorname{ch} x=0$ iegūst vienādojumu, kuram nav reālu sakņu:
$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=0 \Rightarrow e^x+e^{-x}=0 \text{ (tā kā } e^x>0 \text{ un } e^{-x}>0,$$
$$\text{tad arī } e^x+e^{-x}>0\ \forall x\in(-\infty;\ +\infty)).$$
5. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{2}=+\infty$, jo $e^x\to+\infty$ un $e^{-x}\to 0$, kad $x\to+\infty$, bet $e^x\to 0$ un $e^{-x}\to+\infty$, kad $x\to-\infty$.
6. Hiperboliskā kosinusa grafiku iegūst no funkciju $\frac{1}{2}e^x$ un $\frac{1}{2}e^{-x}$ grafikiem, veicot šo «grafiku saskaitīšanu» (40. zīm.).



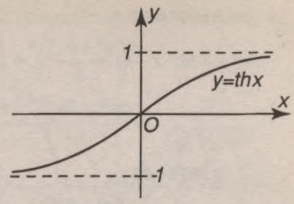
40. zīm.

Hiperboliskā tangensa funkcija $\operatorname{th} x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

1. Acīmredzot $\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.
2. $D(\operatorname{th})=(-\infty;\ +\infty)$, jo funkcijas $\operatorname{sh} x$ un $\operatorname{ch} x$ ir definētas visā reālo skaitļu kopā un $\operatorname{ch} x\neq 0$.
3. $\operatorname{th} x$ ir nepāra funkcija, jo $\operatorname{th}(-x)=\frac{\operatorname{sh}(-x)}{\operatorname{ch}(-x)}=\frac{-\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=-\operatorname{th} x$; tātad šīs funkcijas grafiks ir simetrisks attiecībā pret koordinātu sākumpunktu.
4. Funkcijas grafiks iet caur koordinātu sākumpunktu, jo $\operatorname{th} 0=\frac{\operatorname{sh} 0}{\operatorname{ch} 0}=\frac{0}{1}=0$; citu krustpunktu ar Ox asi nav, jo no vienādības $\operatorname{th} x=0$ iegūst: $\operatorname{sh} x=0\Rightarrow x=0$.
5. Atrodam funkcijas robežas, kad $x\to+\infty$ un $x\to-\infty$.
$$\lim_{x\to+\infty}\operatorname{th} x=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x-e^{-x})e^x}{(e^x+e^{-x})e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-e^0}{e^{2x}+e^0}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^{2x}+1)-2}{e^{2x}+1}=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{e^{2x}+1}\right)=1-0=1, \text{ jo } e^{2x}\to+\infty, \text{ kad } x\to+\infty.$$

Analogi
$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{th} x = \lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{e^{2x}+1}\right) = 1-2 = -1,$$
jo $e^{2x}\to 0$, kad $x\to-\infty$.

Tādējādi secinām, ka funkcijas grafikam ir divas Ox asij paralēlas asimptotas; to vienādojumi ir $y=1$ un $y=-1$. Funkcijas grafiks attēlots 41. zīmējumā.

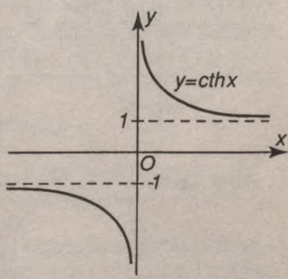


41. zīm.

Hiperboliskā kotangensa funkcija $\operatorname{cth} x = \dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.

1. Acīmredzot $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$.
2. $D(\operatorname{cth}) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, jo $\operatorname{sh} x = 0$, ja $x=0$, bet funkcijas $\operatorname{ch} x$ un $\operatorname{sh} x$ ir definētas visā reālo skaitļu kopā.
3. Tāpat kā $\operatorname{th} x$, arī $\operatorname{cth} x$ ir nepāra funkcija, un tās grafiks ir simetrisks attiecībā pret koordinātu sākumpunktu.
4. Funkcijas grafiks nekrusto Ox asi, jo $\operatorname{ch} x \neq 0$ un tātad arī $\operatorname{cth} x \neq 0$. Grafiks nekrusto arī Oy asi, jo punktā $x=0$ funkcija nav definēta.
5. Lai atrastu robežas funkcijas definīcijas apgabala intervālu galos, vispirms pārveidojam funkcijas izteiksmi:
$$\operatorname{cth} x = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \frac{(e^x+e^{-x})e^x}{(e^x-e^{-x})e^x} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} = \frac{(e^{2x}-1)+2}{e^{2x}-1} = 1+\frac{2}{e^{2x}-1}.$$
$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{cth} x = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{e^{2x}-1}\right) = \left(1+\frac{2}{e^{+\infty}-1}\right) = \left(1+\frac{2}{+\infty}\right) = 1+0 = 1$$
$$\lim_{x\to+0} \operatorname{cth} x = \lim_{x\to+0}\left(1+\frac{2}{e^{2x}-1}\right) = \left(1+\frac{2}{e^{+0}-1}\right) = \left(1+\frac{2}{1+0-1}\right) = \left(1+\frac{2}{+0}\right) = +\infty$$
(tā kā eksponentfunkcija e^{2x} ir augoša, tad $e^{2x}>1$ jeb $e^{2x}-1>0$, ja $x>0$; lai atspoguļotu šo īpašību, atrodot vienpusējo robežu, raksta $\lim\limits_{x\to+0}(e^{2x}-1) = (e^{+0}-1) = (1+0)-1 = +0$).
Analogi
$$\lim_{x\to-0} \operatorname{cth} x = \lim_{x\to-0}\left(1+\frac{2}{e^{2x}-1}\right) = \left(1+\frac{2}{e^{-0}-1}\right) = \left(1+\frac{2}{1-0-1}\right) = \left(1+\frac{2}{-0}\right) = -\infty$$
(šeit ievērots, ka $e^{2x}<1$ jeb $e^{2x}-1<0$, ja $x<0$).
$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{cth} x = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{2}{e^{2x}-1}\right) = \left(1+\frac{2}{e^{-\infty}-1}\right) =$$
$$= 1+\frac{2}{0-1} = -1$$

Tātad hiperboliskā kotangensa funkcijas grafikam ir divas Ox asij paralēlas asimptotas – taisnes $y=1$ un $y=-1$, bet taisne $x=0$, t. i., Oy ass, ir vertikālā asimptota. Funkcijas grafiks attēlots 42. zīmējumā.



42. zīm.

Izmantojot hiperbolisko funkciju analītiskās izteiksmes, viegli pierādīt dažādas sakarības, kas līdzīgas trigonometrijas formulām vai arī nedaudz atšķiras no tām. Aplūkosim dažas no tām.

1. piemērs

$$\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^2 x=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=\frac{e^{2x}+2e^xe^{-x}+e^{-2x}+e^{2x}-2e^xe^{-x}+e^{-2x}}{4}=$$

$$=\frac{2e^{2x}+2e^{-2x}}{4}=\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}=\operatorname{ch}2x$$

2. piemērs

$$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=\frac{e^{2x}+2e^xe^{-x}+e^{-2x}-e^{2x}+2e^xe^{-x}-e^{-2x}}{4}=$$

$$=\frac{4e^0}{4}=1$$

3. piemērs

$$\operatorname{sh}2x=\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}=\frac{(e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x})}{2}=2\,\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2}=$$

$$=2\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{ch}x$$

Tātad $\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1$, $\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^2 x=\operatorname{ch}2x$, $\operatorname{sh}2x=2\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{ch}x$. Salīdzināsim šīs vienādības ar trigonometrijas formulām

$$\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x;\quad \cos^2 x+\sin^2 x=1;\quad \sin 2x=2\sin x\cos x.$$

Iepazīstoties ar hiperboliskajām funkcijām, uzmanību piesaista to nosaukumi, kas atvasināti no trigonometrijas terminiem un 2. kārtas līnijas – hiperbolas nosaukuma. Noskaidrojot šo jautājumu, aplūkosim dažas sakarības, kas saistītas ar riņķa līnijas $x^2+y^2=a^2$ un vienādsānu hiperbolas $x^2-y^2=a^2$ punktiem.

Pieņemsim, ka $M(x;y)$ ir riņķa līnijas $x^2+y^2=a^2$ punkts un t ir leņķis, ko rādiusvektors $\overrightarrow{OM}$ veido ar Ox asi (A-17. zīm.). Saskaņā ar trigonometrisko funkciju definīcijām

$$\frac{x}{a}=\cos t \quad \text{un} \quad \frac{y}{a}=\sin t;$$

no šīm vienādībām iegūst riņķa līnijas parametriskos vienādojumus

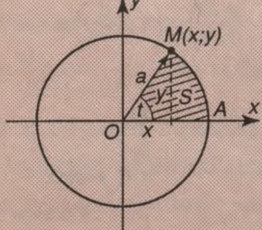
$$\begin{cases} x=a\cos t\\ y=a\sin t. \end{cases} \qquad (1)$$

Ja centra leņķis t ir izteikts radiānos, tad riņķa sektora MOA laukumu S aprēķina pēc formulas $S=\frac{ta^2}{2}$, no kurienes $t=\frac{2S}{a^2}$. Tātad riņķa līnijas punkta koordinātas var izteikt ar vienādībām

$$x=a\cos\frac{2S}{a^2} \quad \text{un}$$

$$y=a\sin\frac{2S}{a^2}, \qquad (2)$$

kur S ir atbilstošā riņķa sektora laukums, bet a – riņķa rādiuss.



$$x^2+y^2=a^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=a\cos t\\ y=a\sin t \end{cases}$$

$$t=\frac{2S}{a^2}$$

A-17. zīm.

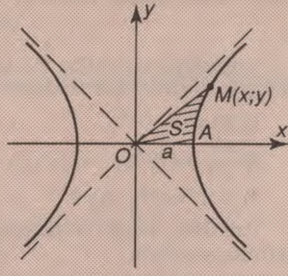
Parādīsim, ka analogas sakarības ir spēkā arī vienādsānu hiperbolas $x^2-y^2=a^2$ punkta koordinātām. Ja $M(x;\,y)$ ir šīs hiperbolas punkts 1. kvadrantā un S ir hiperboliskā sektora MOA laukums (A-18. zīm.), tad var pierādīt, ka $\operatorname{ch}\frac{2S}{a^2}=\frac{x}{a}$ un $\operatorname{sh}\frac{2S}{a^2}=\frac{y}{a}$, no kurienes

$$x=a\operatorname{ch}\frac{2S}{a^2} \quad \text{un} \quad y=a\operatorname{sh}\frac{2S}{a^2}, \tag{3}$$

kur S ir atbilstošā hiperboliskā sektora laukums, bet a ir hiperbolas reālā pusass. Lietojot apzīmējumu $t=\frac{2S}{a^2}$, iegūstam hiperbolas parametriskos vienādojumus

$$\begin{cases} x=a\operatorname{ch}t \\ y=a\operatorname{sh}t \end{cases} \tag{4}$$

(šeit jāievēro, ka atšķirībā no riņķa līnijas parametriskajiem vienādojumiem (1) parametrs t nav leņķa AOM mērs).



$$x^2-y^2=a^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\operatorname{ch}t \\ y=\operatorname{sh}t \end{cases}$$

$$t=\frac{2S}{a^2}$$

A-18. zīm.

Tādējādi rodam izskaidrojumu terminiem «hiperboliskais sinuss» un «hiperboliskais kosinuss».

Hiperboliskajām funkcijām ir spēkā vairākas sakarības, kas analogas trigonometrijas formulām. Piemēram, $\operatorname{th}x=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}$ $\left(\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}\right)$; $\operatorname{cth}x=\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}$ $\left(\operatorname{ctg}x=\frac{\cos x}{\sin x}\right)$; $\operatorname{sh}2x=2\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{ch}x$ $(\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x)$; $\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1$ (bet $\cos^2x-\sin^2x=\cos 2x$); $\operatorname{ch}^2x+\operatorname{sh}^2x=\operatorname{ch}2x$ (bet $\cos^2x+\sin^2x=1$).

Tieša saikne pastāv starp kompleksa argumenta hiperboliskajām un trigonometriskajām funkcijām. Piemēram, ir spēkā šādas sakarības: $\cos x=\operatorname{ch}(ix)$, $\sin x=\frac{1}{i}\operatorname{sh}(ix)$.

7.11. §. JĒDZIENS PAR KOMPLEKSA ARGUMENTA EKSPONENTFUNKCIJU. EILERA FORMULA

Matemātiskajā analīzē aplūko funkcijas, kurām argumenta vērtības un funkcijas vērtības ir reāli skaitļi. Taču matemātikā un tās lietojumos fizikā un dažādās inženierzinātņu nozarēs *liela nozīme ir arī kompleksā mainīgā funkciju teorijai*; *tās pamatā ir kompleksa argumenta funkcijas jēdziens*. Noskaidrojot šo jēdzienu, pieņemsim, ka kompleksā skaitļa $z=x+yi$ reālā daļa x un imaginārās daļas koeficients y ir mainīgi lielumi. Tad saka, ka $z=x+yi$ ir mainīgs komplekss skaitlis jeb kompleksais mainīgais.

Aplūkosim kopu D, kuras elementi ir kompleksi skaitļi z.

Definīcija

Ja pēc noteikta likuma katram kompleksam skaitlim z no kopas $D\subset C$ atbilst cits komplekss skaitlis w, tad saka, ka ir definēta kompleksa argumenta funkcija, un raksta $w=f(z)$ vai arī $w=w(z)$.

Kopu D sauc par funkcijas f definīcijas apgabalu. Kompleksā mainīgā funkcijas definīcijas apgabals var būt visu xOy plaknes punktu kopa jeb visa kompleksā plakne vai arī kāda šīs plaknes daļa.

Sīkāk apskatīsim kompleksa argumenta eksponentfunkciju $w=e^z$ jeb $w=e^{x+yi}$. Šo funkciju definē ar vienādību

$$e^{x+yi}=e^x(\cos y+i\sin y). \quad (1)$$

Izmantojot vienādību (1), pierāda šādas kompleksa argumenta eksponentfunkcijas īpašības, kas analogas reāla kāpinātāja pakāpes īpašībām:

1) $e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$,

2) $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}=e^{z_1-z_2}$,

3) $(e^z)^m=e^{mz}$, $m\in \mathbf{Z}$.

Patiešām, lietojot trigonometriskā formā dotu kompleksu skaitļu reizināšanas kārtulu, atrodam:

$$\begin{aligned}e^{z_1}e^{z_2}&=e^{x_1+y_1i}e^{x_2+y_2i}=e^{x_1}(\cos y_1+i\sin y_1)\cdot e^{x_2}(\cos y_2+i\sin y_2)=\\&=e^{x_1}e^{x_2}(\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2))=e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2))=\\&=e^{(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i}=e^{(x_1+y_1i)+(x_2+y_2i)}=e^{z_1+z_2}.\end{aligned}$$

Analogi pierāda pārējās īpašības. □

Atzīmēsim īpašību, kāda nepiemīt reāla argumenta eksponentfunkcijai.

Kompleksa argumenta eksponentfunkcija ir periodiska funkcija; tās periods ir $2\pi i$.

Šīs īpašības pierādījums izriet no vienādības (1):

$$e^{z+2\pi i}=e^z(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=e^z(1+0)=e^z. \ \square$$

Ja kompleksā argumenta reālā daļa $x=0$, tad no vienādības (1) iegūst:

$$e^{0+yi}=e^0(\cos y+i\sin y) \text{ jeb}$$

$$e^{yi}=\cos y+i\sin y. \quad (2)$$

Izteiksmi (2) sauc par Eilera formulu; ar šo formulu iegūst kompleksa skaitļa izteiksmi eksponentformā.

Izmantojam kompleksā skaitļa z pierakstu trigonometriskā formā:

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

kur r – kompleksā skaitļa modulis, φ – kompleksā skaitļa arguments.
Tā kā saskaņā ar Eilera formulu (2) $\cos\varphi+i\sin\varphi=e^{\varphi i}$, tad

$$z=re^{i\varphi}.$$

Ievietosim vienādībā (2) y vietā $-y$. Tā kā $\cos(-y)=\cos y$ un $\sin(-y)=-\sin y$, tad

$$e^{-yi}=\cos(-y)+i\sin(-y)=\cos y-i\sin y.$$

Saskaitot vienādības

$$e^{yi}=\cos y+i\sin y,$$
$$e^{-yi}=\cos y-i\sin y,$$

iegūstam: $e^{yi}+e^{-yi}=2\cos y$, no kurienes

$$\cos y=\frac{e^{yi}+e^{-yi}}{2}. \quad (3)$$

Atņemot šīs vienādības, iegūstam, ka $e^{yi}-e^{-yi}=2i\sin y$; no šejienes:

$$\sin y=\frac{e^{yi}-e^{-yi}}{2i} \quad (4)$$

Salīdzinot vienādības (3) un (4) ar hiperboliskā kosinusa un hiperboliskā sinusa izteiksmēm, konstatējam, ka

$$\cos y = \mathrm{ch}(yi) \quad \text{un} \quad \sin y = \frac{1}{i}\,\mathrm{sh}(yi). \tag{5}$$

Ar vienādību (5) palīdzību var izrisināt dažādas trigonometrisko funkciju pakāpes pazemināšanas formulas.

Piemērs

$$\cos^3 x = (\cos x)^3 = (\mathrm{ch}\, xi)^3 = \left(\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3xi}+3e^{2xi}e^{-xi}+3e^{xi}e^{-2xi}+e^{-3xi}\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(e^{3xi}+e^{-3xi}+3\left(e^{xi}+e^{-xi}\right)\right) = \frac{1}{8}\left(2\,\frac{e^{3xi}+e^{-3xi}}{2}+3\cdot 2\,\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\,\mathrm{ch}\,3xi + \frac{3}{4}\,\mathrm{ch}\,xi = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x. \text{ Tātad } \cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x.$$

7.12. §. ARGUMENTA PIEAUGUMA UN FUNKCIJAS PIEAUGUMA JĒDZIENI

Pētot funkcijas, bieži ir jānosaka, par cik ir palielinājusies vai samazinājusies funkcijas vērtība, ja kādā definīcijas apgabala punktā palielina (vai samazina) argumenta vērtību.

Piemēram, ja $x=2$, tad $x^2=2^2=4$, bet, ja $x=2{,}5$, tad $x^2=2{,}5^2=6{,}25$. Tātad, palielinot argumenta x vērtību par 0,5, funkcijas $f(x)=x^2$ vērtība punktā $x_0=2$ palielinās par 2,25.

Vispārīgā gadījumā aplūkosim funkcijas $f(x)$ argumenta vērtības x_0 un x_1 ($x_0 \in D(f)$ un $x_1 \in D(f)$). Funkcijas vērtības šajos punktos ir $f(x_0)$ un $f(x_1)$.

Definīcija

Starpību starp divām argumenta vērtībām x_1 un x_0 sauc par argumenta pieaugumu un apzīmē ar simbolu Δx; tātad

$$\Delta x = x_1 - x_0.$$

Starpību starp divām funkcijas vērtībām $f(x_1)$ un $f(x_0)$ sauc par funkcijas pieaugumu punktā x_0 un apzīmē ar simbolu $\Delta f(x_0)$ jeb Δy; tātad

$$\Delta f(x_0) = f(x_1) - f(x_0).$$

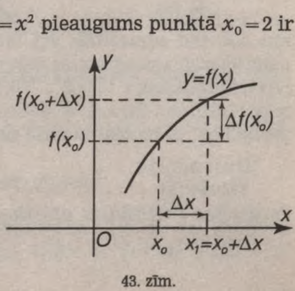
Aplūkotajā piemērā $\Delta x=0{,}5$, bet funkcijas $f(x)=x^2$ pieaugums punktā $x_0=2$ ir $\Delta f(2)=2{,}25$.

Tā kā no vienādības $\Delta x = x_1 - x_0$ iegūst, ka $x_1 = x_0 + \Delta x$, tad

$$\Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0). \tag{1}$$

Atkarībā no tā, kura argumenta vērtība ir lielāka: x_0 vai x_1, *argumenta pieaugums var būt pozitīvs vai negatīvs skaitlis.*

Ja $\Delta x>0$, tad *funkcijas pieaugums $\Delta f(x_0)$ ir pozitīvs vai negatīvs lielums atkarībā no tā, vai funkcija ir augoša vai dilstoša.* 43. zīmējumā



43. zīm.

ilustrēti argumenta pieauguma un funkcijas pieauguma jēdzieni gadījumam, kad $\Delta x > 0$ un $\Delta f(x_0) > 0$.

Ja ir jāatrod *funkcijas pieauguma izteiksme brīvi izraudzītā definīcijas apgabala punktā* x, tad izteiksmē (1) x_0 vietā ievieto x; tādējādi iegūst funkcijas pieauguma formulu

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x). \quad (2)$$

Piemēri

1. **Uzrakstīt funkcijas $f(x) = x^2$ pieauguma izteiksmi.**

Vispirms atrodam $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$.

Saskaņā ar formulu (2) iegūstam:

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

2. **Uzrakstīt funkcijas $f(x) = \ln x$ pieauguma izteiksmi.**

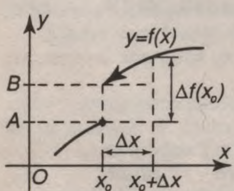
$$\Delta f(x) = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln \frac{x + \Delta x}{x} = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

3. **Uzrakstīt funkcijas $f(x) = 5 - x^2$ pieauguma izteiksmi un aprēķināt $\Delta f(x_0)$, ja $x_0 = 3$ un $\Delta x = 0{,}2$.**

$$\Delta f(x) = 5 - (x + \Delta x)^2 - (5 - x^2) = 5 - x^2 - 2x\Delta x - (\Delta x)^2 - 5 + x^2 =$$
$$= -2x\Delta x - (\Delta x)^2 = -(2x\Delta x + (\Delta x)^2)$$

Ja $x_0 = 3$ un $\Delta x = 0{,}2$, tad $\Delta f(3) = -(2 \cdot 3 \cdot 0{,}2 + 0{,}2^2) = -1{,}24$.

7.13. §. FUNKCIJAS NEPĀRTRAUKTĪBAS JĒDZIENS



44. zīm.

Viena no svarīgākajām funkciju īpašībām ir funkcijas nepārtrauktība. Priekšstats par šo īpašību saistās ar funkcijas grafiku kā nepārtrauktu līniju. Piemēram, 43. zīmējumā attēlotā funkcija ir nepārtraukta punktā x_0, bet 44. zīmējumā funkcijai punktā x_0 ir pārtraukums.

Lai definētu funkcijas nepārtrauktības jēdzienu, lieto argumenta pieauguma, funkcijas pieauguma un robežas jēdzienus.

Aplūkosim nepārtrauktas funkcijas grafiku (sk. 43. zīm.). Acīmredzami, ja samazina argumenta pieaugumu Δx, tad samazinās arī funkcijas pieaugums $\Delta f(x_0)$. Intuitīvi ir skaidrs, ka, neierobežoti samazinoties argumenta pieaugumam, arī funkcijas pieaugums samazinās neierobežoti, t. i., ja $\Delta x \to 0$, tad arī $\Delta f(x_0) \to 0$. Šie apsvērumi ir pamatā punktā x_0 nepārtrauktas funkcijas definīcijai. Protams, jāievēro, ka funkcija ir pārtraukta punktā x_0, ja tā šajā punktā nav definēta.

Definīcija

Funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta punktā x_0, ja šis punkts pieder pie funkcijas definīcijas apgabala un bezgalīgi mazam argumenta pieaugumam Δx šajā punktā atbilst arī bezgalīgi mazs funkcijas pieaugums $\Delta f(x_0)$, t. i., ja

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0. \quad (1)$$

Pārveidosim izteiksmi (1). Tā kā $\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, tad saskaņā ar vienādību (1)

$$\lim_{\Delta x\to 0}(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))=0 \text{ jeb}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)-\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0)=0,$$

no kurienes

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0). \tag{2}$$

Tā kā $f(x_0)$ ir konstants lielums, tad $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x_0)=f(x_0)$.

Savukārt, pieņemot, ka $x_0+\Delta x=x$ (argumenta vērtība pēc pieauguma), no tā, ka $\Delta x\to 0$, seko, ka $x\to x_0$. Līdz ar to vienādību (2) var pārveidot šādi:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0). \tag{3}$$

Tādējādi no nepārtrauktības definīcijas izriet **secinājums**: *ja funkcija ir nepārtraukta punktā x_0, tad funkcijas robeža, kad $x\to x_0$, ir vienāda ar funkcijas vērtību punktā x_0.*

Viegli pierādīt arī apgriezto apgalvojumu: no vienādības $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ seko, ka $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=0$. Tātad *abi apgalvojumi ir savstarpēji ekvivalenti*:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Tāpēc bieži funkcijas nepārtrauktību punktā x_0 definē arī ar vienādību (3).

Atzīmēsim vēl šādu īpašību: tā kā $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$, tad no vienādības $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ iegūst, ka

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(\lim_{x\to x_0} x). \tag{4}$$

Tātad ***nepārtrauktai funkcijai robežpāreju drīkst izpildīt aiz funkcijas simbola***. Šo īpašību, aprēķinot robežu, lietojām jau iepriekšējā vielas izklāstā.

Piemēram, lai atrastu robežu $\lim\limits_{x\to\pi}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$, izmanto sinusa funkcijas nepārtrauktību un īpašību (4):

$$\lim_{x\to\pi}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\lim_{x\to\pi}\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\right)=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}.$$

Definīcija

Saka, ka funkcija ir nepārtraukta intervālā (a; b), ja tā ir nepārtraukta visos šī intervāla punktos.

Piemērs. **Pierādīt, ka funkcija $f(x)=x^2$ ir nepārtraukta visos šīs funkcijas definīcijas apgabala $(-\infty; +\infty)$ punktos.**

Pieņemsim, ka x_0 ir brīvi izraudzīts intervāla $(-\infty; +\infty)$ punkts. Izmantojot teorēmu par reizinājuma robežu, atrodam, ka

$$\lim_{x\to x_0} x^2=\lim_{x\to x_0}(x\cdot x)=\lim_{x\to x_0} x\cdot\lim_{x\to x_0} x=x_0\cdot x_0={x_0}^2.$$

Tātad šīs funkcijas robeža ir vienāda ar funkcijas vērtību punktā x_0; tas nozīmē, ka funkcija ir nepārtraukta brīvi izraudzītā definīcijas apgabala punktā un līdz ar to visā definīcijas apgabalā $(-\infty; +\infty)$.

7.14. §. FUNKCIJAS PĀRTRAUKUMA PUNKTI

Ievērojot iepriekšējā paragrāfā aplūkoto secinājumu no nepārtrauktības definīcijas un funkcijas robežas jēdziena definīciju (7.2. §.), atzīmēsim, ka *funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta punktā x_0, ja ir spēkā šādi četri* ***nosacījumi***.

1. Punkts x_0 pieder pie funkcijas definīcijas apgabala: $x_0 \in D(f)$.
2. Eksistē galīga robeža, kad x tiecas uz x_0 no kreisās puses: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$; eksistē galīga robeža, kad x tiecas uz x_0 no labās puses: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = B$.
3. Funkcijas vienpusējās robežas ir vienādas:
$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x), \quad \text{t. i.,} \quad A = B.$$
4. Vienpusējās robežas ir vienādas ar funkcijas vērtību punktā x_0:
$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Ja vismaz viens no šiem nosacījumiem nav spēkā, tad saka, ka funkcija ir pārtraukta punktā x_0 vai arī - ka x_0 ir funkcijas pārtraukuma punkts.

Piemēram, 44. zīmējumā attēlotajai funkcijai x_0 ir pārtraukuma punkts, jo nav izpildīts nepārtrauktības 3. nosacījums - vienpusējās robežas punktā x_0 nav vienādas: $A \neq B$.

Ja funkcijas vienpusējās robežas punktā x_0 ir galīgas, proti, ir izpildīts nepārtrauktības 2. nosacījums, bet nav spēkā kāds no pārējiem nosacījumiem, tad saka, ka x_0 ir funkcijas pirmā veida pārtraukuma punkts.

Ja vismaz viena no vienpusējām robežām punktā x_0 ir bezgalība, tad saka, ka x_0 ir otrā veida pārtraukuma punkts.

Zīmējot grafiku, otrā veida pārtraukuma punktā parasti novelk Oy asij paralēlu taisni - funkcijas *vertikālo asimptotu*.

Pirmā veida pārtraukums ir 27., 28., 30., 44. zīmējumā attēlotajām funkcijām.

Otrā veida pārtraukums ir A-3., A-4., 33., 42. zīmējumā attēlotajām funkcijām.

Piemērs. **Uzzīmēt funkcijas**
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, \text{ ja } x \in (-\infty;\ 0) \\ \ln x, \text{ ja } x \in (0;\ 1] \\ 2^x, \text{ ja } x \in (1;\ +\infty) \end{cases}$$
grafiku un noteikt šīs funkcijas pārtraukuma punktus.

Funkcijas $\frac{1}{x}$, $\ln x$ un 2^x ir elementārās pamatfunkcijas, un savos dabiskajos definīcijas apgabalos tās ir nepārtrauktas. Līdz ar to funkcijai $f(x)$ pārtraukums ir iespējams definīcijas apgabalu intervālu galos: punktos $x_1 = 0$ un $x_2 = 1$. Pārbaudīsim nepārtrauktības nosacījumus šajos punktos.

$$\underline{\underline{x_1 = 0}}$$

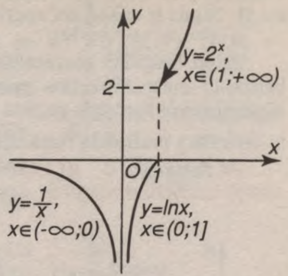
1. Saskaņā ar doto funkcija $f(x)$ nav definēta punktā $x_1 = 0$.
2. $\lim\limits_{x \to -0} f(x) = \lim\limits_{x \to -0} \dfrac{1}{x} = -\infty$;
$\lim\limits_{x \to +0} f(x) = \lim\limits_{x \to +0} \ln x = -\infty$.

Tātad punktā $x_1=0$ funkcijai ir 2. veida pārtraukums.

$$\underline{\underline{x_2=1}}$$

1. Funkcija $f(x)$ ir definēta punktā $x_2=1$; $f(x_2)=\ln 1=0$.
2. $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0} \ln x=\ln 1=0$;
   $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0} 2^x=2$.
3. $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 1+0} f(x)$.

Tā kā punktā $x_2=1$ funkcijas vienpusējās robežas ir galīgas, bet nav izpildīts nepārtrauktības 3. nosacījums (vienpusējās robežas nav vienādas), tad šajā punktā ir 1. veida pārtraukums. Funkcijas grafiks attēlots 45. zīmējumā.



45. zīm.

7.15. §. DARBĪBAS AR NEPĀRTRAUKTĀM FUNKCIJĀM. JĒDZIENS PAR ELEMENTĀRO FUNKCIJU NEPĀRTRAUKTĪBU

1. teorēma (funkciju summas, starpības, reizinājuma, dalījuma nepārtrauktība).

Ja funkcijas $f(x)$ un $h(x)$ ir nepārtrauktas punktā x_0, tad šajā punktā ir nepārtrauktas arī funkcijas

$$f(x)\pm h(x),\quad f(x)\cdot h(x)\quad \text{un}\quad \frac{f(x)}{h(x)},\quad \text{ja } h(x_0)\neq 0.$$

Pierādījumā izmanto teorēmu par funkciju summas, starpības, reizinājuma un dalījuma robežu (sk. 7.4. §).

Tā kā dotās funkcijas ir nepārtrauktas, tad $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ un $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=h(x_0)$. Tāpēc

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm h(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0} h(x)=f(x_0)\pm h(x_0);$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot h(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} h(x)=f(x_0)\cdot h(x_0);$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{h(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} h(x)}=\frac{f(x_0)}{h(x_0)}.$$

Tātad šo četru darbību rezultātā iegūto funkciju robeža, kad $x\to x_0$, ir vienāda ar attiecīgās funkcijas vērtību punktā x_0, t. i., funkcijas ir nepārtrauktas punktā x_0. □

2. teorēma (inversās funkcijas nepārtrauktība).

Ja funkcija $y=f(x)$ ir nepārtraukta punktā x_0 un tai eksistē inversā funkcija $x=\varphi(y)$, tad inversā funkcija ir nepārtraukta punktā $y_0=f(x_0)$.

Teorēmas pierādījums izriet no šāda sprieduma. Tā kā $y=f(x)$ ir nepārtraukta funkcija, tad punktā x_0 bezgalīgi mazam argumenta pieaugumam atbilst arī bezgalīgi mazs funkcijas pieaugums:

$$\text{ja } \Delta x\to 0, \text{ tad arī } \Delta y\to 0.$$

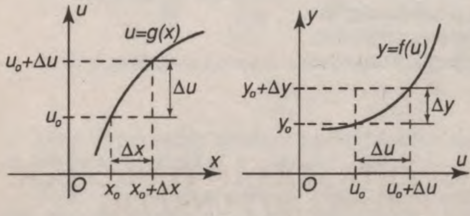
Funkcija f ir monotona (augoša vai dilstoša), jo tai eksistē inversā funkcija (sk. 6.4. §). Tāpēc ir spēkā arī apgrieztais apgalvojums:

ja $\Delta y \to 0$, tad $\Delta x \to 0$.

Tātad bezgalīgi mazam funkcijas $x = \varphi(y)$ argumenta pieaugumam Δy atbilst bezgalīgi mazs funkcijas pieaugums Δx punktā y_0; tas nozīmē, ka $x = \varphi(y)$ ir nepārtraukta funkcija punktā y_0. □

3. teorēma (saliktās funkcijas nepārtrauktība).

Ja funkcija $u = g(x)$ ir nepārtraukta punktā x_0 un funkcija $y = f(u)$ ir nepārtraukta punktā $u_0 = g(x_0)$, tad saliktā funkcija $y = f(g(x))$ arī ir nepārtraukta punktā x_0.



46. zīm.

Pierādījums izriet no šāda sprieduma. Funkcijas $u = g(x)$ argumenta pieaugumam punktā x_0 atbilst funkcijas pieaugums Δu. Savukārt Δu ir funkcijas $y = f(u)$ argumenta pieaugums punktā u_0, kuram atbilst funkcijas pieaugums Δy. Tādējādi var aplūkot trīs savstarpēji saistītus mainīgo lielumu pieaugumus Δx, Δu, Δy.

Tā kā $u = g(x)$ ir nepārtraukta funkcija, tad $\Delta u \to 0$, ja $\Delta x \to 0$. Savukārt no funkcijas $y = f(u)$ nepārtrauktības izriet, ka $\Delta y \to 0$, ja $\Delta u \to 0$. Tāpēc var apgalvot: ja $\Delta x \to 0$, tad arī $\Delta y \to 0$. Tas nozīmē, ka saliktā funkcija $y = f(g(x))$ ir nepārtraukta punktā x_0. Aplūkotie jēdzieni ilustrēti 46. zīmējumā. □

Teorēmas par darbībām ar nepārtrauktām funkcijām izmanto, lai pamatotu šādu apgalvojumu: ***visas elementārās funkcijas ir nepārtrauktas to dabiskajos definīcijas apgabalos***. Šajā nolūkā pierāda, ka *nepārtrauktas ir visas elementārās pamatfunkcijas*, t. i., pakāpes funkcijas, eksponentfunkcijas, logaritmiskās funkcijas, trigonometriskās funkcijas un ciklometriskās funkcijas (sk. 6.5. §).

Tā kā elementārās funkcijas iegūst no elementārajām pamatfunkcijām, izpildot ar tām galīgā skaitā saskaitīšanu, atņemšanu, reizināšanu, dalīšanu un saliktu funkciju veidošanas operāciju, tad no šo funkciju nepārtrauktības un minētajām teorēmām izriet, ka ***jebkura elementārā funkcija ir nepārtraukta***. Šo īpašību ļoti bieži izmanto matemātikā un tās lietojumos.

7.16. §. DAŽAS NEPĀRTRAUKTU FUNKCIJU ĪPAŠĪBAS

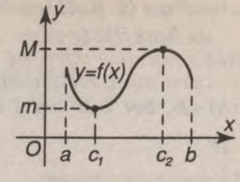
Ar funkciju pētīšanu saistītos jautājumos, tuvināti atrodot vienādojumu reālās saknes, atrisinot nevienādības, kā arī daudzos spriedumos un pierādījumos izmanto nepārtrauktu funkciju īpašības. Aplūkosim dažas galvenās teorēmas par nepārtrauktu funkciju īpašībām.

1. teorēma (Veierštrāsa teorēma par nepārtrauktām funkcijām).

Ja funkcija ir nepārtraukta slēgtā intervālā $[a; b]$, tad šajā intervālā tā ir ierobežota un vismaz vienā intervāla punktā sasniedz savu minimālo vērtību m, un vismaz vienā šī intervāla punktā sasniedz savu maksimālo vērtību M.

Teorēma ilustrēta 47. zīmējumā; šeit $y_{min}=m=f(c_1)$, bet $y_{max}=M=f(c_2)$, kur $c_1 \in [a; b]$ un $c_2 \in [a; b]$.

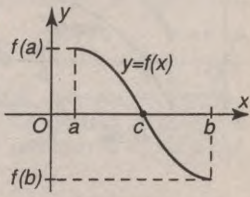
Ievērosim, ka šī teorēma var arī nebūt spēkā, ja funkcija ir nepārtraukta vaļējā intervālā $(a; b)$. Piemēram, funkcija $y=\operatorname{tg} x$ ir nepārtraukta vaļējā intervālā $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, bet šajā intervālā tā ir neierobežota funkcija, kurai nav ne minimālās, ne arī maksimālās vērtības.



47. zīm.

2. teorēma (1. Košī teorēma par nepārtrauktām funkcijām).

Ja funkcija ir nepārtraukta slēgtā intervālā* [*a*; *b*] *un vienā no intervāla galapunktiem funkcijas vērtība ir pozitīva, bet otrā – negatīva, tad vismaz vienā intervāla iekšējā punktā funkcijas vērtība ir nulle.



48. zīm.

Teorēmai ir vienkārša ģeometriskā ilustrācija: ja nepārtrauktas funkcijas vērtības intervāla $[a; b]$ galos ir skaitļi ar pretējām zīmēm, tad vismaz vienā intervāla iekšējā punktā funkcijas grafiks krusto Ox asi – šajā punktā funkcijas vērtība ir nulle (sk. 48. zīm., kur $f(a)>0$, $f(b)<0$ un $f(c)=0$; $c \in (a; b)$). □

Secinājums

Ja funkcija kādā intervālā ir ***nepārtraukta*** *un nevienā šī intervāla punktā tās vērtība* ***nav 0****, tad visos intervāla punktos funkcijas vērtības ir vai nu* ***tikai pozitīvas****, vai arī* ***tikai negatīvas****.*

Patiešām, pieņemot pretējo apgalvojumu, ka kādā intervāla punktā x_1 funkcijas vērtība ir pozitīva, bet kādā citā punktā x_2 – negatīva, saskaņā ar 2. teorēmu secinām, ka starp x_1 un x_2 atrodas punkts c, kurā funkcijas vērtība ir 0. Bet tas ir pretrunā ar doto nosacījumu: funkcijas vērtība nevienā intervāla punktā nav nulle. □

Košī teorēmas secinājumu izmanto, lai pamatotu nevienādību atrisināšanas metodi ar tā saukto intervālu metodi.

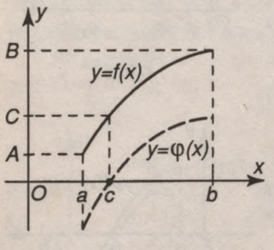
Piemēram, atrisinot nevienādību $f(x)>0$, kur $f(x)$ ir elementāra funkcija, ir jānosaka visi tie intervāli, kuros funkcijas $f(x)$ vērtības ir pozitīvas.

Tā kā $f(x)$ ir elementārā funkcija, tad tā ir nepārtraukta savā definīcijas apgabalā; pieņemsim, ka tas ir intervāls $(a; b)$. Tāpēc, lai atrisinātu nevienādību, vispirms atrisina vienādojumu $f(x)=0$, t. i., atrod visus tos punktus, kuros funkcijas vērtība ir 0. Šie punkti sadala intervālu $(a; b)$ mazākos intervālos, turklāt katrā no tiem funkcijas vērtības ir vai nu tikai pozitīvas, vai arī negatīvas. Tāpēc pietiek katrā intervālā brīvi izraudzīties tikai vienu skaitli un noteikt funkcijas vērtības zīmi (šāda zīme ir arī visos pārējos attiecīgā intervāla punktos).

Ogistēns Luijs Košī (1789–1857) – franču matemātiķis un inženieris, vairāk nekā 800 darbu autors – galvenokārt matemātiskajā analīzē, diferenciālvienādojumu teorijā, kompleksā mainīgā funkciju teorijā.

3. teorēma (2. Košī teorēma par nepārtrauktām funkcijām).

Ja funkcija ir nepārtraukta slēgtā intervālā [a; b] un intervāla galapunktos funkcijas vērtības nav vienādas, tad šajā intervālā funkcija pieņem jebkuru starpvērtību starp vērtībām intervāla galos, t. i., ja $f(a)=A$ un $f(b)=B$, bet C ir brīvi izraudzīts skaitlis starp A un B, tad vismaz vienā intervāla punktā c ir spēkā vienādība $f(c)=C$ (49. zīm.).



49. zīm.

Pierādījums

Pieņemsim, ka $A<C<B$ jeb $f(a)<C<f(b)$. Izveidojam *palīgfunkciju*

$$\varphi(x)=f(x)-C.$$

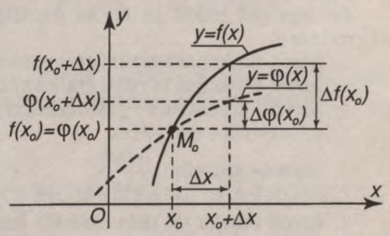
Tā kā $\varphi(a)=f(a)-C<0$, bet $\varphi(b)=f(b)-C>0$ un $\varphi(x)$ ir nepārtraukta funkcija intervālā $[a; b]$, tad vismaz vienā intervāla punktā c saskaņā ar 1. Košī teorēmu $\varphi(c)=0$ jeb $f(c)-C=0$; tātad $f(c)=C$. □

FUNKCIJAS ATVASINĀJUMS

8.1. §. JĒDZIENS PAR FUNKCIJAS IZMAIŅAS ĀTRUMU. ATVASINĀJUMA DEFINĪCIJA

Šajā nodaļā apskatīsim vienu no galvenajiem jēdzieniem, ko visvairāk izmanto dažādos matemātiskās analīzes praktiskos lietojumos. Šis jēdziens ir funkcijas atvasinājums. Atvasinājuma jēdziena labākai izpratnei saistīsim to ar funkcijas īpašību izpēti.

Aplūkosim 50. zīmējumā attēlotos funkciju $y=f(x)$ un $y=\varphi(x)$ grafikus. Abas funkcijas ir augošas; to grafiki krustojas punktā M_0, kura abscisa ir x_0 (tātad $f(x_0)=\varphi(x_0)$). Salīdzinot šo funkciju vērtības citā punktā $x_0+\Delta x$, redzam, ka $f(x_0+\Delta x)>\varphi(x_0+\Delta x)$ un arī $\Delta f(x_0)>\Delta\varphi(x_0)$. Tātad *funkcija* $f(x)$ *punktā* x_0 *aug ātrāk nekā funkcija* $\varphi(x)$.



50. zīm.

Lai raksturotu šo īpašību – **funkcijas izmaiņas ātrumu**, sastāda funkcijas pieauguma attiecību pret argumenta pieaugumu: $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$. Ar šādu attiecību definē jēdzienu «***funkcijas izmaiņas vidējais ātrums intervālā*** $[x_0;\ x_0+\Delta x]$» (analogi kā fizikā ir jēdziens «kustības vidējais ātrums kādā laika intervālā»).

Attiecība $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ vispārīgā gadījumā ir atkarīga no intervāla $[x_0;\ x_0+\Delta x]$ garuma, jo, mainot Δx, mainās $\Delta f(x_0)$ un arī šī attiecība.

Lai noteiktu funkcijas izmaiņas ātrumu *tieši punktā* x_0, ir jāaplūko attiecība $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ bezgalīgi mazā intervālā $[x_0;\ x_0+\Delta x]$ jeb precīzāk – jāatrod robeža $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$. Ar šo robežu definē funkcijas $f(x)$ atvasinājumu punktā x_0.

Definīcija

Par funkcijas atvasinājumu punktā x_0 ***sauc funkcijas pieauguma un argumenta pieauguma attiecības robežu šajā punktā, kad argumenta pieaugums tiecas uz nulli.***

Atvasinājumu punktā x_0 apzīmē ar vienu no simboliem

$$f'(x_0),\quad y'\Big|_{x=x_0}\quad \text{vai arī}\quad \frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}.$$

Tātad

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \text{ jeb } f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Funkcijas $f(x)$ atvasinājums punktā x_0 ir *skaitlis* $f'(x_0)$. Ja atvasinājumu atrod mainīgai argumenta vērtībai x, tad atvasinājums ir *funkcija*, ko apzīmē ar vienu no simboliem $f'(x)$, y' vai arī $\frac{dy}{dx}$. Tādējādi

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \text{ jeb } f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

vai arī

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Ja funkcijas $x(t)$ arguments ir laiks, tad atvasinājumu apzīmē arī šādi:

$$\dot{x}(t); \text{ tātad } x_t'=\frac{dx}{dt}=\dot{x}(t).$$

Funkcijas atvasinājuma atrašanu sauc par *atvasināšanu jeb diferencēšanu.*

No iepriekš teiktā izriet, ka funkcijas atvasinājumu atrod pēc šāda algoritma.

1. Atrod funkcijas vērtību $f(x)$ punktā x.
2. Atrod funkcijas vērtību $f(x+\Delta x)$ citā definīcijas apgabala punktā $x+\Delta x$.
3. Atrod argumenta pieaugumam Δx atbilstošo funkcijas pieaugumu $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$.
4. Sastāda attiecību $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$.
5. Atrod robežu (ja tāda eksistē) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$; šī robeža ir funkcijas atvasinājums $f'(x)$.

Piemēri. **Lietojot definīciju, atrast doto funkciju atvasinājumus.**

1. $f(x)=x$

Tā kā šai funkcijai $f(x+\Delta x)=x+\Delta x$, tad $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)=x+\Delta x-x=$ $=\Delta x$. Tāpēc $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$ un $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}1=1$. Tātad

$$x'=1.$$

2. $f(x)=x^2$

Šai funkcijai $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+\Delta x^2$.

Tātad $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$. Līdz ar to

$$(x^2)'=2x.$$

3. $f(x)=\sqrt{x}$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Tātad

$$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Iegūto rezultātu var uzrakstīt arī šādi: $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}.$

Aplūkotajos piemēros atradām atvasinājumu pakāpju funkcijai x^{α} ar šādiem kāpinātājiem: $\alpha=1$; 2; $\frac{1}{2}$. Viegli pārliecināties, ka visos gadījumos iegūto rezultātu var uzrakstīt kā vienādību

$$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}.$$

Šo pakāpes funkcijas atvasināšanas formulu jebkuram reālam kāpinātājam α pierādīsim turpmākajā vielas apskatā.

8.2. §. ATVASINĀJUMA FIZIKĀLĀ JĒGA

Iepriekšējā paragrāfā aplūkotais atvasinājuma atrašanas algoritms faktiski vispārina tos spriedumus, kādus lieto, definējot dažādus fizikālus jēdzienus. Apskatīsim dažus no tiem.

1. TAISNVIRZIENA KUSTĪBAS MOMENTĀNAIS ĀTRUMS

Materiāla punkta kustība pa taisni ir noteikta, ja katrā laika momentā var atrast šī punkta koordinātu. Parasti punkta koordinātu x atkarībā no laika t atrod pēc kādas dotas formulas, t. i., punkta kustības likumu uzdod kā laika funkciju. Piemēram, $x=vt$, $x=\frac{at^2}{2}$ vai vispārīgā veidā $x=x(t)$. Noskaidrosim šīs funkcijas atvasinājuma fizikālo nozīmi, ievērojot iepriekšējā paragrāfā aplūkoto algoritmu.

1. Atrod funkcijas vērtību $x(t)$ punktā t, tātad nosaka punkta koordinātu pēc t laika vienībām no kustības sākuma.

2. Atrod funkcijas vērtību $x(t+\Delta t)$, t. i., atrod punkta koordinātu pēc $(t+\Delta t)$ laika vienībām no kustības sākuma.

3. Atrod argumenta pieaugumam Δt atbilstošo funkcijas pieaugumu $\Delta x=$ $=x(t+\Delta t)-x(t)$ (lielums Δx ir *punkta pārvietojums* laika intervālā $[t;\ t+\Delta t]$).

4. Sastāda attiecību $\frac{\Delta x}{\Delta t}$; šīs attiecības fizikālā nozīme ir kustības vidējais ātrums $v_{\text{vid.}}$ laika intervālā $[t;\ t+\Delta t]$.

5. Atrod robežu $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}$. Noskaidrojot šīs robežas fizikālo jēgu, spriež tā. Vidējā ātruma vērtība ir atkarīga no laika intervāla garuma Δt. Ņemot mazāku laika intervālu $[t;\ t+\Delta t]$, samazināsies arī punkta pārvietojums Δx un mainīsies attiecība $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ – vidējais ātrums. *Iedomāsimies kustību un tās vidējo ātrumu bezgalīgi mazā laika intervālā, tātad robežgadījumu, kad* $\Delta t\to 0$. Ja šāda vidējā ātruma robeža eksistē, tad to pieņem par kustības momentāno ātrumu laika

momentā t (precīzāk - par momentānā ātruma vektora moduli). Tādējādi **par materiāla punkta kustības momentāno ātrumu v laika momentā t sauc vidējā ātruma robežu:** $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0} v_{\text{vid.}}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}$. Šī robeža ir funkcijas $x(t)$ atvasinājums $x'(t)$. Tādējādi iegūstam šādu secinājumu.

Ja $x=x(t)$ ir materiāla punkta koordinātas atkarība no laika taisnvirziena kustībā (noietais ceļš vienvirziena kustībā), tad šīs funkcijas atvasinājums ir punkta momentānā ātruma v modulis:

$$v=x'(t) \text{ jeb } v=\frac{dx}{dt} \quad (v=\dot{x}(t)).$$

Piemēram, vienmērīgi paātrinātā kustībā noieto ceļu (punkta koordinātu) atkarībā no laika izsaka formula $s=\frac{at^2}{2}$. Kustības momentāno ātrumu atrod, atvasinot šo funkciju:

$$v=\left(\frac{at^2}{2}\right)'=\frac{a}{2}(t^2)'=\frac{a}{2}2t=at.$$

2. TAISNVIRZIENA KUSTĪBAS PAĀTRINĀJUMS

Pieņemsim, ka $v=v(t)$ ir taisnvirziena kustības ātrums atkarībā no laika. Piemēram, $v=gt$ ir brīvās krišanas ātrums. Noskaidrojot atvasinājuma atrašanas algoritma fizikālo jēgu ātruma funkcijai, spriežam šādi.

1. $v(t)$ ir kustības ātrums laika momentā t, skaitot no kustības sākuma.
2. $v(t+\Delta t)$ ir kustības ātrums laika momentā $t+\Delta t$.
3. $\Delta v=v(t+\Delta t)-v(t)$ ir ātruma izmaiņa, kas radusies laika intervālā $[t;\ t+\Delta t]$.
4. Ar attiecību $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ definē kustības vidējo paātrinājumu.
5. Ar robežu $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=v'(t)$ definē kustības paātrinājumu a laika momentā t.

Tādējādi, ja funkcija $v=v(t)$ ir taisnvirziena kustības ātruma atkarība no laika, tad šīs funkcijas atvasinājums ir kustības paātrinājums (precīzāk - paātrinājuma vektora modulis), t. i.,

$$a=v'(t) \text{ jeb } a=\frac{dv}{dt}.$$

3. STRĀVAS STIPRUMS

Elektrības lādiņš q, kas elektriskajā ķēdē izplūst caur vadītāja šķērsgriezumu, ir atkarīgs no laika t. Pieņemsim, ka šo atkarību izsaka funkcija $q=q(t)$. Parādīsim, kā ar šīs funkcijas atvasinājumu definē strāvas stipruma jēdzienu.

1. $q(t)$ ir lādiņš, kas izplūdis caur vadītāja šķērsgriezumu no strāvas plūšanas sākuma momenta līdz momentam t.

2. $q(t+\Delta t)$ ir lādiņš, kas izplūdis no strāvas plūšanas sākuma momenta līdz laika momentam $t+\Delta t$.

3. $\Delta q=q(t+\Delta t)-q(t)$ ir lādiņš, kas izplūdis caur vadītāja šķērsgriezumu laika intervālā $[t;\ t+\Delta t]$.

4. Ar attiecību $\frac{\Delta q}{\Delta t}$ definē vidējo strāvas stiprumu $I_{\text{vid.}}$.

5. Vidējā strāvas stipruma robeža, kad $\Delta t \to 0$, raksturo mainīgu strāvu laika momentā t; šo robežu sauc par momentāno strāvas stiprumu I, t. i.,

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = q'(t).$$

Tādējādi, ja caur vadītāja šķērsgriezumu izplūdušo elektrības lādiņu atkarībā no laika izsaka funkcija $q = q(t)$, tad šīs funkcijas atvasinājums ir momentānais strāvas stiprums. Tātad

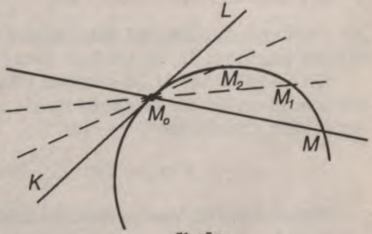
$$I = q'(t) \text{ jeb } I = \frac{dq}{dt}.$$

No aplūkotajiem piemēriem var vispārināt atvasinājuma fizikālo nozīmi: **ja funkcija, kuras arguments ir laiks, apraksta kādu procesu, tad funkcijas atvasinājums ir procesa norises ātrums.**

Bieži funkcija izsaka kāda fizikāla lieluma atkarību no kāda cita fizikāla lieluma, kas var nebūt laiks. Piemēram, metāla stieņa garums ir atkarīgs no temperatūras, strāvas stiprums elektriskajā ķēdē ir atkarīgs no vada pretestības u. tml. Šādos gadījumos funkcijas atvasinājums raksturo pirmā fizikālā lieluma izmaiņas ātrumu atkarībā no otrā fizikālā lieluma maiņas.

8.3. §. ATVASINĀJUMA ĢEOMETRISKĀ ILUSTRĀCIJA

Atvasinājuma ģeometriskā ilustrācija ir saistīta ar jēdzienu par funkcijas grafika pieskari. Vispārīgā gadījumā brīvi izraudzītai līknei pieskari definē, izmantojot robežas jēdzienu. Noskaidrojot līknei punktā M_0 novilktās pieskares jēdzienu, vispirms aplūko taisni M_0M, kas līkni krusto punktos M_0 un M; šo taisni sauc par *sekanti* (51. zīm.). Ja punktu M izvēlas tuvāk punktam M_0, tad mainās sekantes M_0M stāvoklis.



51. zīm.

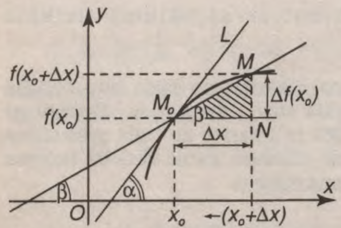
Funkcijas atvasinājuma atrašanu sauc par **diferencēšanu**. Šis termins ir izveidojies no latīņu vārda differentia, kas nozīmē «starpība», «atšķirība», jo, atrodot atvasinājumu, tiek sastādīta funkcijas vērtību starpība – funkcijas pieaugums. Terminu «atvasinājums» (franciski «derivee») un simbolus y', $f'(x)$ ieviesa franču matemātiķis Žozefs Lagranžs 1797. gadā, bet darbības vārdu «atvasināt» (latīniski «derivare») lietoja jau 1675. gadā I. Ņūtons un 1677. gadā vācu matemātiķis G. Leibnics. I. Ņūtons, izstrādājot klasiskās mehānikas pamatus, pētīja tikai no laika atkarīgus mainīgos lielumus, ko viņš sauc par fluentām. Fluentas izmaiņas ātrumu (tātad no laika atkarīgas funkcijas atvasinājumu) I. Ņūtons sauca par fluksiju.

17. gs. matemātikā vēl nebija izstrādāta robežu teorija, bet matemātiķi lietoja bezgalīgi mazu lielumu jēdzienu, ar kuru palīdzību definēja atvasinājumu. Tā G. Leibnics atvasinājuma jēdzienu saprata kā bezgalīgi maza funkcijas pieauguma dy attiecību pret bezgalīgi mazu argumenta pieaugumu dx, t. i., $\frac{dy}{dx}$. Piemēram, kustības momentāno ātrumu Leibnics definēja kā bezgalīgi mazā laika intervālā noietā ceļa ds attiecību pret laika intervāla garumu dt, t. i., $v = \frac{ds}{dt}$.

Pieņemsim, ka punkts M, pārvietojoties pa līkni, neierobežoti tiecas uz punktu M_0 (zīmējumā parādīti daži punkta M «starpstāvokļi» M_1, M_2, ...). Tad sekante M_0M pagriežas ap punktu M_0 un tiecas uz noteiktu «robežstāvokli» – taisnes KL stāvokli, ko sauc par *līknes pieskari* punktā M_0.

Tādējādi ***funkcijas grafika pieskari var definēt kā taisni, uz kuru tiecas sekante M_0M, ja punkts M, pārvietojoties pa grafiku, neierobežoti tuvojas punktam M_0.***

Pieskare punktā M_0 eksistē, ja sekantes M_0M «robežstāvoklis» nav atkarīgs no tā, kurā pusē punktam M_0 ir izraudzīts punkts M.



52. zīm.

Izmantojot priekšstatu par grafika pieskari, noskaidrosim, kāda ģeometriska ilustrācija ir funkcijas $f(x)$ atvasinājumam punktā x_0, t. i., robežai $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$.

Aplūkosim 52. zīmējumu, kurā attēlots funkcijas $y=f(x)$ grafiks, funkcijas vērtības $f(x_0)$ un $f(x_0+\Delta x)$, kā arī pieaugumi Δx un $\Delta f(x_0)$. No taisnleņķa trijstūra M_0NM atrodam, ka

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\frac{MN}{M_0N}=\operatorname{tg}\beta.$$

Ko ģeometriski izsaka robeža $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$? Samazinoties Δx, punkts $x_0+\Delta x$ tuvojas punktam x_0. Bet tad atbilstošais grafika punkts M, pārvietojoties pa līkni, tuvojas punktam M_0 un sekante tiecas uz taisni M_0L – grafika pieskari.

Tā kā sekantes M_0M virzienu nosaka leņķis β, bet pieskares M_0L virzienu – šīs taisnes un Ox ass veidotais leņķis α, tad secinām, ka $\beta\to\alpha$, ja $\Delta x\to 0$. Tādējādi izriet šāds spriedums:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\beta=\lim_{\beta\to\alpha}\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\alpha.$$

Taisnes un Ox ass pozitīvā virziena veidotā leņķa tangensu sauc par taisnes virziena koeficientu, to apzīmē ar burtu k. Līdz ar to $f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha=k$ un atvasinājuma ģeometriskā interpretācija ir šāda.

Funkcijas atvasinājums punktā x_0 ir vienāds ar virziena koeficientu pieskarei, kas novilkta funkcijas grafikam punktā $(x_0; f(x_0))$.

8.4. §. FUNKCIJAS GRAFIKA PIESKARES UN NORMĀLES VIENĀDOJUMI

Par līknes normāli punktā M_0 sauc taisni, kas iet caur punktu M_0 un ir perpendikulāra šai punktā novilktai līknes pieskarei (53. zīm.).

Lai iegūtu grafika pieskares un normāles vienādojumus, lieto taisnes vienādojumu

$$y-y_0=k(x-x_0),$$

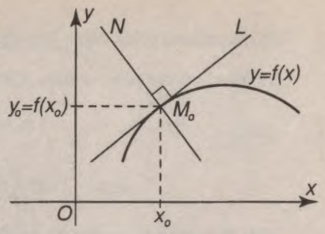
kur $(x_0; y_0)$ ir kāda taisnes punkta koordinātas, bet k ir šīs taisnes virziena koeficients.

Ja $M_0(x_0;\, y_0)$ ir funkcijas $y=f(x)$ grafika punkts, tad $y_0=f(x_0)$ un saskaņā ar atvasinājuma ģeometrisko interpretāciju $k_{\text{piesk.}}=f'(x_0)$. Tādējādi iegūstam grafika **pieskares vienādojumu**:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \quad \text{jeb}$$

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0). \qquad (1)$$

Normāles M_0N virziena koeficientu atrod pēc *divu taišņu perpendikularitātes nosacījuma* $k_1=-\dfrac{1}{k_2}$.



53. zīm.

Tātad $k_{\text{norm.}}=-\dfrac{1}{k_{\text{piesk.}}}=-\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Tā kā arī **normāle** iet caur punktu $M_0(x_0; f(x_0))$, tad **normāles vienādojums** ir

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) \quad \text{jeb} \quad y=f(x_0)-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0). \qquad (2)$$

Piemērs. **Sastādīt funkcijas $f(x)=\sqrt{x}$ grafikam novilktās pieskares un normāles vienādojumus punktā, kura abscisa $x_0=4$.**

Tā kā $f(x)=\sqrt{x}$, tad $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (sk. 8.1.§ piemērus), un $f(x_0)=\sqrt{4}=2$, bet $f'(x_0)=\dfrac{1}{2\sqrt{4}}=\dfrac{1}{4}$.

Izmantojot formulas (1) un (2), atrodam, ka *pieskares vienādojums* ir

$$y-2=\frac{1}{4}(x-4) \quad \text{jeb} \quad x-4y+4=0,$$

bet *normāles vienādojums*: $y-2=-\dfrac{1}{\frac{1}{4}}(x-4)$ jeb $4x+y-18=0$.

Uzdevums. **Sastādīt vienādojumus pieskarei un normālei, kas novilktas elipses**

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases} \qquad (1)$$

punktā $P_0(x_0; y_0)$. Punktam P_0 atbilst parametra vērtība $t=\frac{\pi}{3}$ (A-19. zīm.).

Funkcijas $y=f(x)$ grafika punktā $P_0(x_0; y_0)$ novilktās pieskares vienādojums ir

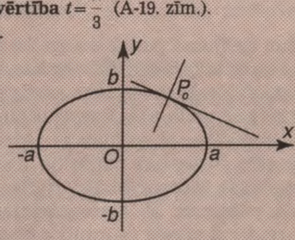
$$y=y_0+y'_x(x_0)(x-x_0),$$

normāles vienādojums:

$$y=y_0-\frac{1}{y'_x(x_0)}(x-x_0).$$

Atrodam punkta P_0 koordinātas:

$$x_0=a\cos\frac{\pi}{3}=a\cdot\frac{1}{2}=\frac{a}{2}, \quad y_0=b\sin\frac{\pi}{3}=b\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{b\sqrt{3}}{2}.$$



A-19. zīm.

Ja pieņem, ka $t\in[0; \pi]$, tad ar vienādojumiem (1) ir dota elipses daļa augšējā pusplaknē, kuru var uzskatīt par funkcijas grafiku, bet vienādojumi (1) ir šīs funkcijas parametriskie vienādojumi.

Parametriskā veidā dotas funkcijas $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ atvasinājumu atrod pēc formulas $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Tā kā $x'_t=(a\cos t)'_t=-a\sin t$, $y'_t=(b\sin t)'_t=b\cos t$, tad

$$y'_x=\frac{b\cos t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t.$$

$$\text{Ja } t=\frac{\pi}{3}, \text{ tad } y'_x(x_0)=-\frac{b}{a}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}=-\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{b\sqrt{3}}{3a}.$$

Līdz ar to elipsei punktā P_0 novilktās *pieskares vienādojums* ir

$$y=\frac{b\sqrt{3}}{2}-\frac{b\sqrt{3}}{3a}\left(x-\frac{a}{2}\right) \quad \text{jeb} \quad y=-\frac{b\sqrt{3}}{3a}x+\frac{2b\sqrt{3}}{3}.$$

Normāles vienādojums:

$$y=\frac{b\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\frac{b\sqrt{3}}{3a}}\left(x-\frac{a}{2}\right) \quad \text{jeb} \quad y=\frac{a\sqrt{3}}{b}x-\frac{(a^2-b^2)\sqrt{3}}{2b}.$$

8.5. §. GRAFISKĀ ATVASINĀŠANA

Ir eksperimenti, kuru gaitā pašrakstītāja iekārta zīmē līniju, kas grafiski attēlo kādu procesu atkarībā no laika. Dažkārt ir *nepieciešams grafiski attēlot arī šī procesa norises ātrumu.* Tātad vispārīgā gadījumā pēc funkcijas $y=f(x)$ grafika ir jāatrod atvasinājuma $y'=f'(x)$ grafiks. Atvasinājuma grafika iegūšanas metodi sauc par ***grafisko atvasināšanu***, un tās pamatā ir funkcijas atvasinājuma ģeometriskā interpretācija. Noskaidrosim grafiskās atvasināšanas metodi.

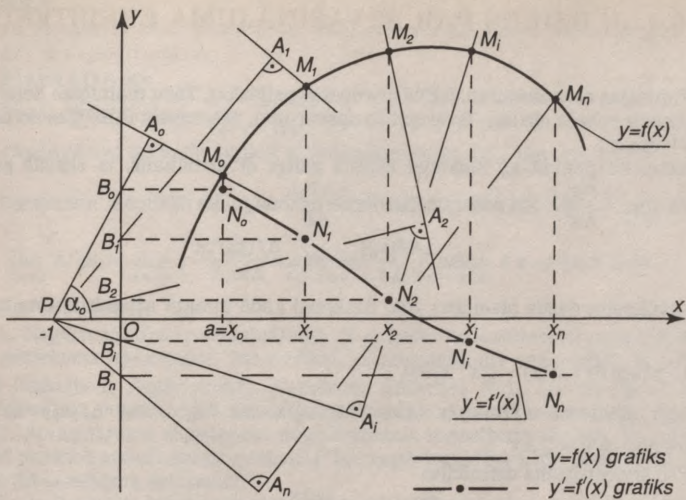
54. zīmējumā attēlots funkcijas $y=f(x)$ grafiks, kuram jākonstruē atvasinājuma $y'=f'(x)$ grafiks. Intervālu $[a; b]$, kurā tiek aplūkota funkcija, sadala n daļās ar punktiem

$$x_0=a;\ x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_i;\ \ldots;\ x_n=b.$$

Šiem dalījuma punktiem atbilst funkcijas grafika punkti M_0, M_1, M_2, ..., M_n. Lai noteiktu atvasinājuma vērtības, šajos grafika punktos būtu jānovelk pieskares un jāatrod pieskaru virziena koeficienti. Tā kā nav paņēmiena, kā vispārīgā gadījumā ar cirkuli un lineālu konstruē pieskari līknei, kas nav riņķa līnija, tad konstrukcija ir precīzāka, ja grafika punktos velk normāles. To dara ar speciālas ierīces - spoguļa derivatora palīdzību. Ja nav šīs ierīces, var lietot taisnstūrveida spogulīti, ko pieliek perpendikulāri grafika plaknei punktā M_i un pagriež tā, lai grafika daļas līdz punktam M_i atspoguļojums spogulī būtu bez lauzuma šajā punktā. Tad spogulis ir vērsts pa grafika normāli punktā M_i, kuru novelk gar spoguļa malu.

Atvasinājuma grafika konstrukciju izpilda šādā secībā.

1. Uz Ox ass atzīmē punktu $P(-1; 0)$.
2. Punktā M_0 ar spoguļa palīdzību novelk normāli.



54. zīm.

3. Pret normāli konstruē perpendikulu PA_0, kas krusto Oy asi punktā B_0; punkta B_0 ordināta OB_0 ir vienāda ar atvasinājuma $f'(x)$ vērtību punktā x_0.

Patiešām, no trijstūra POB_0 atrodam, ka $\frac{OB_0}{OP} = \operatorname{tg}\alpha_0$, bet $OB_0 = OP \cdot \operatorname{tg}\alpha_0 = \operatorname{tg}\alpha_0$, jo $OP=1$.

Tā kā α_0 ir leņķis, ko ar Ox asi veido perpendikuls, kas novilkts pret normāli punktā M_0, tad tas ir arī šajā punktā novilktās pieskares virziena leņķis. Tāpēc $\operatorname{tg}\alpha_0 = f'(x_0)$ un $OB_0 = f'(x_0)$.

4. No punkta B_0 velk taisni paralēli Ox asij līdz krustojumam ar perpendikulu, kas novilkts pret Ox asi punktā x_0. Šis krustpunkts N_0 ir atvasinājuma $f'(x)$ grafika punkts.

5. Analogi atrod pārējām argumenta vērtībām x_1, x_2, ..., x_n atbilstošos atvasinājuma grafika punktus N_1, N_2, ..., N_n.

6. Savienojot punktus N_0, N_1, N_2, ..., N_n, iegūst atvasinājuma grafiku.

Piezīme. Bieži vien, apstrādājot eksperimentu rezultātus, izrādās, ka mērogi uz Ox un Oy asīm nav vienādi. Tad atvasinājuma skaitlisko vērtību aprēķināšanai jālieto **mēroga koeficients**. Pieņemsim, ka argumenta x vienai vienībai uz Ox ass atbilst m_x garuma vienības, bet funkcijas vērtības y vienai vienībai uz Oy ass atbilst m_y garuma vienības; tad atvasinājuma vērtību punktā x_i aprēķina pēc šādas formulas:

$$f'(x_i) = \frac{m_x}{m_y} \operatorname{tg}\alpha_i \quad \text{jeb}$$

$$f'(x_i) = \frac{m_x}{m_y} OB_i.$$

8.6. §. JĒDZIENS PAR ATVASINĀJUMA EKSISTENCI

Funkcijas atvasinājumu definē ar robežas palīdzību. Taču mainīgam lielumam ne vienmēr robeža eksistē. Ievērojot šo apsvērumu, precizēsim funkcijas atvasinājuma jēdzienu.

Saka, ka punktā x_0 funkcijai eksistē galīgs atvasinājums, ja eksistē galīga robeža $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$. Šīs robežas eksistence nozīmē to, ka

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Aplūkosim dažus piemērus, kad funkcijai kādā punktā **atvasinājums neeksistē**.

1. piemērs. $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x_0=0$.

Šajā gadījumā $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)=\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x}$, bet $\Delta f(x_0)=\Delta f(0)=$ $=\sqrt[3]{0+\Delta x}-\sqrt[3]{0}=\sqrt[3]{\Delta x}$.

Pēc atvasinājuma definīcijas

$$f'(0)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}} = \infty.$$

Tātad funkcijai $f(x)=\sqrt[3]{x}$ punktā 0 neeksistē galīgs atvasinājums. Tas nozīmē, ka funkcijas grafikam koordinātu sākumpunktā novilktās pieskares virziena leņķis ir 90°, jo $\operatorname{tg} 90°=\infty$; tātad neeksistē pieskares virziena koeficients $k=\operatorname{tg} 90°$. No teiktā iziet, ka funkcijas grafikam koordinātu sākumpunktā pieskare sakrīt ar Oy asi (sk. A-6. zīm.).

2. piemērs. $f(x)=|x|$, $x_0=0$ (55. zīm.).

Atrodam funkcijas pieauguma izteiksmi:

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)=|x+\Delta x|-|x|.$$

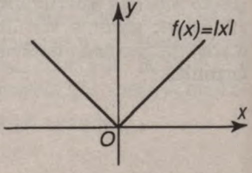
Funkcijas pieaugums koordinātu sākumpunktā

$$\Delta f(0)=|0+\Delta x|-|0|=|\Delta x|.$$

Ja $\Delta x>0$, tad $|\Delta x|=\Delta x$ un $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim 1 = 1$.

Ja $\Delta x<0$, tad $|\Delta x|=-\Delta x$ un $\lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = \lim(-1)=-1$.

Tā kā $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} \neq \lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x}$, tad šai funkcijai punktā 0 atvasinājums neeksistē. Kā redzams 55. zīmējumā, punktā $O(0; 0)$ funkcijas grafikam ir lauzums. □



55. zīm.

Matemātiskās analīzes spriedumos ļoti bieži izmanto sakarību starp atvasinājuma eksistenci un funkcijas nepārtrauktību, ko formulē kā *atvasinājuma eksistences nepieciešamo nosacījumu* šādas teorēmas veidā.

Teorēma

Ja funkcijai $f(x)$ punktā x_0 eksistē atvasinājums, tad funkcija šajā punktā ir nepārtraukta.

Pierādījums

Dots: eksistē $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$.

Jāpierāda: funkcija punktā x_0 ir nepārtraukta, t. i., $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=0$.

Uzrakstām identitāti $\Delta f(x_0)=\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}\cdot\Delta x$ un atrodam robežu

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}\cdot\Delta x\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=f'(x_0)\cdot 0=0.\ \square$$

Secinājumi

1. Nepārtrauktība ir atvasinājuma eksistences *nepieciešamais nosacījums, bet nav pietiekams nosacījums*. Tas nozīmē, ka atvasinājums var neeksistēt punktā, kurā funkcija ir nepārtraukta. Piemēram, funkcijas $f(x)=\sqrt[3]{x}$ un $f(x)=|x|$ ir nepārtrauktas punktā $x_0=0$, bet atvasinājums šajā punktā tām neeksistē.

2. Atvasinājuma eksistences nepieciešamais nosacījums nozīmē, ka pārtraukuma punktos atvasinājums neeksistē, bet nepārtrauktība kādā punktā vēl negarantē atvasinājuma eksistenci.

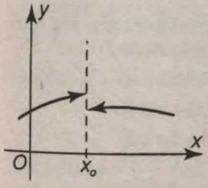
3. *Ja funkcijai kādā intervālā eksistē galīgs atvasinājums, tad tās grafiks ir **gluda nepārtraukta līnija** un nevienā intervāla punktā grafika pieskare nav perpendikulāra Ox asij.*

4. Funkcijai $f(x)$ neeksistē atvasinājums punktā x_0 šādos gadījumos:

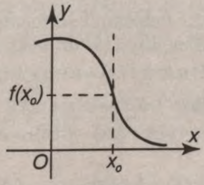
1) ja x_0 ir funkcijas pārtraukuma punkts (56. zīm.);

2) ja grafika pieskare punktā $(x_0; f(x_0))$ ir perpendikulāra Ox asij (57. zīm.);

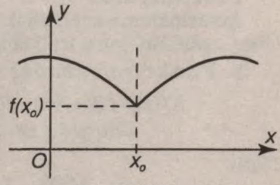
3) ja punkts $(x_0; f(x_0))$ ir grafika lauzuma punkts, kurā neeksistē pieskare (58. zīm.).



56. zīm.



57. zīm.



58. zīm.

8.7. §. ATVASINĀŠANAS KĀRTULAS UN FORMULAS

1. KONSTANTAS FUNKCIJAS ATVASINĀJUMS

Konstantas funkcijas atvasinājums ir vienāds ar nulli: $C'=0$.

Patiešām, ja visām x vērtībām $f(x)=C$, tad šādas funkcijas pieaugums jebkurā punktā ir vienāds ar nulli, jo

$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)=C-C=0$. Tāpēc

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=\lim 0=0.\ \square$$

Šo faktu var uzskatāmi ilustrēt ģeometriski. Funkcijas $f(x)=C$ grafiks ir Ox asij paralēla taisne. Tāpēc jebkurā grafika punktā vilktā pieskare sakrīt ar grafiku un arī ir paralēla ar Ox asi, tātad tās virziena leņķis $\alpha=0$ un virziena koeficients $k=\operatorname{tg}0=0$, t. i., $f'(x)=\operatorname{tg}0=0$.

2. IDENTITĀTES ATVASINĀŠANA

Ja divas funkcijas ir identiskas, tad identiski ir arī šo funkciju atvasinājumi, t. i., ja $f(x)\equiv g(x)$, tad arī $f'(x)\equiv g'(x)$.

Šis apgalvojums izriet no atvasinājuma definīcijas: ja $f(x)\equiv g(x)$, tad $f(x+\Delta x)\equiv g(x+\Delta x)$ un $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)\equiv g(x+\Delta x)-g(x)=\Delta g(x)$. Tā kā $\Delta f(x)\equiv\Delta g(x)$, tad arī $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\equiv\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}$ un

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\equiv\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}.$$ Tātad $f'(x)\equiv g'(x)$. □

3. FUNKCIJU SUMMAS, STARPĪBAS, REIZINĀJUMA, DALĪJUMA ATVASINĀJUMI

Ja funkcijām $u(x)$ un $v(x)$ eksistē atvasinājumi, tad eksistē atvasinājumi arī šo funkciju summai, starpībai, reizinājumam un dalījumam, turklāt

$$(u(x)\pm v(x))'=u'(x)\pm v'(x);$$
$$(u(x)\cdot v(x))'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x);$$
$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}\qquad (v(x)\neq 0).$$

Pierādījums

Atvasinājuma definīcijas ērtākai lietošanai šo formulu pamatojumos tās darbības rezultātu, kuru izpilda ar funkcijām $u(x)$ un $v(x)$, apzīmēsim ar $f(x)$.

1. Funkciju summas gadījumā $f(x)=u(x)+v(x)$ un

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)=(u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x))-(u(x)+v(x))=$$
$$=(u(x+\Delta x)-u(x))+(v(x+\Delta x)-v(x))=\Delta u(x)+\Delta v(x).$$

Tāpēc

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x)+\Delta v(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u(x)}{\Delta x}+\frac{\Delta v(x)}{\Delta x}\right)=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v(x)}{\Delta x}=u'(x)+v'(x).$$

Tātad $(u+v)'=u'+v'$.

Iegūtā formula ir spēkā jebkuram galīgam saskaitāmo funkciju skaitam.

Analogi pierāda funkciju starpības atvasināšanas likumu jeb kārtulu.

2. Funkciju reizinājuma gadījumā $f(x)=u(x)\cdot v(x)$.

Funkciju reizinājuma atvasināšanas formulu pierādīsim, izmantojot atvasinājuma definīciju un ievērojot šādus spriedumus:

a) $u(x+\Delta x)=u(x)+\Delta u$ un $v(x+\Delta x)=v(x)+\Delta v$;

b) fiksētai x vērtībai $u(x)$ un $v(x)$ ir konstantes, un tāpēc reizinājumā tos var ņemt pirms robežas simbola;

c) tā kā eksistē atvasinājums $u'(x)$, tad $u(x)$ ir nepārtraukta funkcija un tāpēc $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$.

Atrodam $\Delta f(x)$ izteiksmi:

$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= f(x+\Delta x) - f(x) = u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x) = \\ &= (u(x)+\Delta u)(v(x)+\Delta v) - u(x)\cdot v(x) = \\ &= u(x)\cdot v(x) + \Delta u\cdot v(x) + \Delta v\cdot u(x) + \Delta u\cdot\Delta v - u(x)\cdot v(x) = \\ &= \Delta u\cdot v(x) + \Delta v\cdot u(x) + \Delta u\cdot \Delta v.\end{aligned}$$

Ievietojot $\Delta f(x)$ izteiksmi atvasinājuma definīcijas formulā, atrodam $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u\cdot v(x)+\Delta v\cdot u(x)+\Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\left(v(x)\,\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) + \lim_{\Delta x\to 0}\left(u(x)\,\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) + \lim_{\Delta x\to 0}\left(\Delta u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = \\ &= v(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = \\ &= u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) + 0\cdot v'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x).\end{aligned}$$

Tādējādi $(uv)' = u'v + uv'$.

No šīs formulas secinām, ka *konstantu reizinātāju C var ņemt pirms atvasinājuma zīmes*, t. i., $(C\cdot u)' = C\cdot u'$.

Patiešām, tā kā $C' = 0$, tad

$$(C\cdot u(x))' = C'\cdot u(x) + C\cdot u'(x) = 0 + C\cdot u'(x) = C\cdot u'(x). \ \square$$

3. Funkciju dalījuma gadījumā $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, no kurienes $u(x) = f(x)\cdot v(x)$.

Ja funkcijas ir identiskas, tad arī to atvasinājumi ir identiski. Tāpēc

$$u'(x) = (f(x)\cdot v(x))'.$$

Saskaņā ar reizinājuma atvasināšanas kārtulu

$$u'(x) = f'(x)\cdot v(x) + f(x)\cdot v'(x).$$

Izsakām no šīs vienādības $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{u'(x) - f(x)\,v'(x)}{v(x)}.$$

Tā kā $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, tad

$$f'(x) = \frac{u'(x) - \dfrac{u(x)}{v(x)}\cdot v'(x)}{v(x)} = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}.$$

Līdz ar to ir pierādīta formula:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \ \square$$

Piemēri. **Atrast doto funkciju atvasinājumus.**

1. $f(x) = 5x^2 + \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$

Funkciju $f(x)$ atvasinām, lietojot pakāpes funkcijas atvasināšanas formulu $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ (sk. 8.1. §.).

Tā kā $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ un $\frac{1}{x}=x^{-1}$, tad $f(x)=5x^2+x^{\frac{1}{2}}+x^{-1}$ un

$$f'(x)=(5x^2+x^{\frac{1}{2}}+x^{-1})'=(5x^2)'+\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'+(x^{-1})'=$$
$$=5\cdot 2x+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-x^{-2}=10x+\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}.$$

2. $f(x)=(3x^2-x)(2x+5)$

Saskaņā ar funkciju reizinājuma atvasināšanas formulu

$$f'(x)=(3x^2-x)'(2x+5)+(3x^2-x)(2x+5)'=$$
$$=(6x-1)(2x+5)+(3x^2-x)(2+0)=$$
$$=18x^2+26x-5.$$

3. $f(x)=\dfrac{2x^3+7x-1}{5x+3}$

Atvasinājumu atrodam, lietojot funkciju dalījuma atvasināšanas formulu.

$$f'(x)=\frac{(2x^3+7x-1)'(5x+3)-(2x^3+7x-1)(5x+3)'}{(5x+3)^2}=$$
$$=\frac{(6x^2+7)(5x+3)-(2x^3+7x-1)\cdot 5}{(5x+3)^2}=\frac{20x^3+18x^2+26}{(5x+3)^2}$$

4. SALIKTAS FUNKCIJAS ATVASINĀŠANAS KĀRTULA

Saliktas funkcijas jēdzienu aplūkojām 6.3. paragrāfā. Noskaidrojām, ka saliktu funkciju $y=f(g(x))$ iegūst, izpildot superpozīciju ar divām funkcijām $y=f(u)$ un $u=g(x)$. Aplūkosim kārtulu, pēc kuras atvasina saliktas funkcijas.

Ja funkcijai $u=g(x)$ eksistē atvasinājums $u'_x=g'(x)$ punktā x un funkcijai $y=f(u)$ eksistē atvasinājums $y'_x=f'(u)$ punktā $u=g(x)$, tad saliktai funkcijai $y=f(g(x))$ eksistē atvasinājums punktā x un to atrod pēc formulas

$$y'_x=f'_u(u)\cdot g'_x(x) \quad \text{jeb} \quad y'_x=y'_u\cdot u'_x.$$

Pierādījums

Brīvi izvēloties funkcijas $u=g(x)$ definīcijas apgabala punktu x un izmainot argumentu par pieaugumu Δx, iegūstam funkcijas pieaugumu

$$\Delta u=g(x+\Delta x)-g(x).$$

Iegūtais Δu ir argumenta pieaugums funkcijai $y=f(u)$, kuram atbilst funkcijas pieaugums

$$\Delta y=f(u+\Delta u)-f(u)$$

(šie jēdzieni ilustrēti 46. zīmējumā).

Tādējādi, aplūkojot trīs savstarpēji saistītus mainīgo lielumu pieaugumus Δx, Δu, Δy, sastādām attiecību $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Reizinot šīs daļas skaitītāju un saucēju ar Δu (ja $\Delta u\neq 0$), iegūst identitāti

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y\cdot\Delta u}{\Delta x\cdot\Delta u}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Atrodot Δy un Δx attiecības robežu, kad $\Delta x \to 0$, lieto šādu spriedumu: tā kā funkcijai $u=g(x)$ eksistē atvasinājums, tad šī funkcija punktā x ir nepārtraukta; tāpēc $\Delta u \to 0$, ja $\Delta x \to 0$. To ievērojot, iegūstam:

$$y'_x=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta u \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=y'_u\cdot u'_x. \ \square$$

Saliktās funkcijas atvasināšanas formulu ērti lietot šādas kārtulas veidā: ***saliktas funkcijas atvasinājums ir vienāds ar ārējās funkcijas atvasinājuma un iekšējās funkcijas atvasinājuma reizinājumu.***

Piemēri

1. Atvasināt funkciju $y=\sqrt{1-x^2}$.

Šīs saliktās funkcijas iekšējā funkcija ir $u=1-x^2$, bet ārējā funkcija ir $y=\sqrt{u}$. Šo funkciju atvasinājumi ir

$u'_x=(1-x^2)'=-2x$, $y'_u=(\sqrt{u})'=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}$. Tāpēc

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot(-2x)=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

No piemēra redzams, ka saliktas funkcijas atvasināšana notiek pretējā secībā nekā šīs funkcijas vērtību aprēķināšana. Aplūkotajā gadījumā funkcijas vērtības aprēķināšanas secība ir šāda:

a) atrod $1-x^2$ vērtību;

b) atrod iegūtā skaitļa kvadrātsakni.

Turpretī, atvasinot funkciju, rīkojas pretējā secībā:

a) atvasina kvadrātsakni, neinteresējoties par to, kāda izteiksme atrodas zem saknes;

b) atvasina zemsaknes izteiksmi $1-x^2$.

2. Atvasināt funkciju $y=\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^3$.

Šeit pēdējā darbība (ārējā funkcija) ir kāpināšana kubā. Lietojot formulu $(u^3)'=3u^2$, atrodam:

$$y'=3\left(\frac{x}{x+1}\right)^2\cdot\left(\frac{x}{x+1}\right)'=3\,\frac{x^2}{(x+1)^2}\,\frac{x'(x+1)-x(x+1)'}{(x+1)^2}=$$

$$=3\,\frac{x^2}{(x+1)^2}\cdot\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=\frac{3x^2}{(x+1)^4}.$$

5. LOGARITMISKĀS FUNKCIJAS ATVASINĀJUMS

Vispirms atradīsim atvasināšanas formulu naturālo logaritmu funkcijai $y=\ln x$. Izpildot pārveidojumus, izmantosim logaritmēšanas likumus, nepārtrauktas funkcijas īpašību par robežpāreju aiz funkcijas simbola un skaitļa e definīciju:

$$\lim_{t \to \infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e.$$

Lietojot atvasinājuma definīciju, atrodam:

$$(\ln x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln \frac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \ln \lim_{\Delta x \to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Substitūcija:} \\ \frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{t},\ \Delta x = \frac{x}{t};\ \text{ja } \Delta x \to 0, \text{ tad } t \to \infty \end{array}\right] = \ln \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{t}{x}} =$$

$$= \ln \lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^{\frac{1}{x}} = \ln\left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^{\frac{1}{x}} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}.$$

Tātad

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Ja $u = u(x)$, tad saskaņā ar saliktas funkcijas atvasināšanas kārtulu (sk. 4. p.)

$$(\ln u)'_x = \frac{1}{u} u'_x.$$

Ja logaritmiskās funkcijas bāze ir skaitlis $a > 0$ $(a \neq 1)$, tad tās atvasinājumu atrod, izmantojot logaritma bāzes maiņas formulu

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} \ln x.$$

Tā kā $\frac{1}{\ln a}$ ir konstante, tad to kā reizinātāju var ņemt pirms atvasinājuma zīmes. Tādējādi iegūst, ka

$$(\log_a x)' = \left(\frac{1}{\ln a} \ln x\right)' = \frac{1}{\ln a} (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Tādējādi $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, bet saliktas funkcijas gadījumā

$$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'_x.$$

Piemēri. **Atvasināt dotās funkcijas.**

1. $y = \ln(5x^2 + 3x - 2)$

Saskaņā ar saliktas logaritmiskās funkcijas atvasināšanas formulu

$$y' = (\ln(5x^2+3x-2))' = \frac{1}{5x^2+3x-2}(5x^2+3x-2)' = \frac{10x+3}{5x^2+3x-2}.$$

2. $y = \lg(3x+2)$

Tā kā logaritma bāze $a = 10$, tad

$$y' = (\lg(3x+2))' = \frac{1}{(3x+2)\ln 10}(3x+2)' = = \frac{3}{(3x+2)\ln 10}.$$

3. $y = (1+\ln x)^3$

$$y' = 3(1+\ln x)^2 (1+\ln x)' = 3(1+\ln x)^2 \frac{1}{x} = \frac{3(1+\ln x)^2}{x}.$$

6. LOGARITMISKĀ ATVASINĀŠANA

Vairākos gadījumos, atrodot atvasinājumu, ir *lietderīgi pirms atvasināšanas funkciju logaritmēt un vispirms atrast funkcijas logaritma atvasinājumu*. Šādu paņēmienu sauc par ***logaritmisko atvasināšanu***. Tātad, ja $y=f(x)>0$, vispirms atrod

$$\ln y=\ln f(x).$$

Pēc tam šo identitāti atvasina pēc x, lietojot saliktas logaritmiskās funkcijas atvasināšanas kārtulu:

$$(\ln y)'_x=(\ln f(x))'_x \Rightarrow \frac{1}{y}y'_x=(\ln f(x))'_x.$$

No šejienes $y'_x=y(\ln f(x))'_x$ jeb $y'_x=f(x)\,(\ln f(x))'_x$.

Logaritmisko atvasināšanas metodi ir izdevīgi lietot tad, ja jāatvasina vairāku funkciju reizinājums (dalījums) vai arī pakāpe gadījumā, kad bāze un kāpinātājs ir funkcija.

Piemēri. **Atvasināt dotās funkcijas.**

1. $y=x^{\sqrt{x}}$

Atrodam $\ln y=\ln(x^{\sqrt{x}})=\sqrt{x}\ln x$; $\ln y=\sqrt{x}\ln x$. Atvasinot iegūto identitāti, lietojam reizinājuma atvasināšanas kārtulu:

$$(\ln y)'_x=(\sqrt{x}\ln x)'_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}y'_x=(\sqrt{x})'\ln x+\sqrt{x}\,(\ln x)'=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x+\sqrt{x}\,\frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$y'_x=y\left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)=x^{\sqrt{x}}\cdot\frac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}.$$

2. $y=\dfrac{x^3(2x-3)^5}{\sqrt{x+1}}$

$$\ln y=\ln\frac{x^3(2x-3)^5}{\sqrt{x+1}}=$$

$$=\ln x^3+\ln(2x-3)^5-\ln\sqrt{x+1}=$$

$$=3\cdot\ln x+5\cdot\ln(2x-3)-\frac{1}{2}\cdot\ln(x+1)$$

$$(\ln y)'_x=(3\ln x+5\ln(2x-3)-\frac{1}{2}\ln(x+1))'_x$$

$$\frac{1}{y}y'_x=\frac{3}{x}+5\,\frac{2}{2x-3}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1}$$

$$y'_x=y\left(\frac{3}{x}+\frac{10}{2x-3}-\frac{1}{2x+2}\right)=\frac{x^3(2x-3)^5}{\sqrt{x+1}}\left(\frac{3}{x}+\frac{10}{2x-3}-\frac{1}{2x+2}\right)$$

7. EKSPONENTFUNKCIJAS ATVASINĀJUMS

Lai iegūtu eksponentfunkcijas atvasinājumu, var lietot logaritmisko atvasināšanas metodi, t. i., vispirms logaritmēt vienādību $y=a^x$:

$$\ln y=\ln a^x=x\ln a.$$

Atvasinām iegūto vienādību, izmantojot saliktas logaritmiskās funkcijas atvasināšanas formulu.

$$(\ln y)'_x=(x\ln a)'_x \Rightarrow \frac{1}{y}y'_x=\ln a.$$

No pēdējās vienādības iegūstam, ka $y'_x=y\cdot\ln a$. Bet, tā kā $y=a^x$, tad $y'_x=a^x\cdot\ln a$ jeb $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$. Ievietojot šajā vienādībā a vietā skaitli e un ievērojot to, ka $\ln e=1$, atrodam: $(e^x)'=e^x$.

Līdz ar to ir iegūtas šādas atvasināšanas formulas:

$$(a^x)'=a^x\cdot\ln a \quad \text{un} \quad (e^x)'=e^x.$$

Savukārt saliktas eksponentfunkcijas a^u un e^u, kur $u=u(x)$, atvasina šādi:

$$(a^u)'_x=a^u\cdot\ln a\cdot u'_x \quad \text{un} \quad (e^u)'_x=e^u\cdot u'_x.$$

Piemēri. **Atvasināt dotās funkcijas.**

1. $y=e^{-x}$

$y'=(e^{-x})'=e^{-x}(-x)'=-e^{-x}$

2. $y=e^{\sqrt{x}}$

$y'=(e^{\sqrt{x}})'=e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x})'=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

3. $y=2^{3x^2+x}$

$y'=(2^{3x^2+x})'=2^{3x^2+x}\ln 2\,(3x^2+x)'=(6x+1)\,2^{3x^2+x}\cdot\ln 2$

8. PAKĀPES FUNKCIJAS ATVASINĀJUMS

Atvasinot pakāpes funkcijas ar dažādiem racionāliem kāpinātājiem, secinājām, ka apskatītajos piemēros atvasinājumu var atrast pēc formulas $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$ (sk. 8.1. §). Pierādīsim šo formulu jebkuram reālam kāpinātājam α, lietojot logaritmisko atvasināšanas metodi.

Logaritmējot vienādību $y=x^\alpha$, iegūstam $\ln y=\ln x^\alpha=\alpha\ln x$. Lietojot saliktas logaritmiskās funkcijas atvasināšanas kārtulu, atvasinām iegūto identitāti:

$$(\ln y)'_x=\alpha(\ln x)'_x \Rightarrow \frac{1}{y}y'_x=\alpha\frac{1}{x};\quad y'_x=y\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}.$$

Tā kā $y=x^\alpha$, tad $y'_x=x^\alpha\cdot\alpha\cdot\dfrac{1}{x}=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$. Tātad

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}.$$

Ja $u=u(x)$, tad saliktu pakāpes funkciju atvasina šādi:

$$(u^\alpha)'_x=\alpha\cdot u^{\alpha-1}\cdot u'_x.$$

Piebildīsim, ka pierādījums ir spēkā tikai pozitīvām x vērtībām, jo pakāpi x^α logaritmējām. Taču ar substitūcijas palīdzību var parādīt, ka atvasināšanas formula ir spēkā visā definīcijas apgabalā tām pakāpes funkcijām, kas ir definētas arī negatīvām x vērtībām.

Piemēri. **Atvasināt dotās funkcijas.**

1. $y=\sqrt[3]{x^2}$

Pārveidojam doto funkciju par pakāpes funkciju $y=x^{\frac{2}{3}}$.

$$y'=\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

2. $y=(5x^4-7x^3+6)^4$

$$y'=((5x^4-7x^3+6)^4)'=4(5x^4-7x^3+6)^3\cdot(5x^4-7x^3+6)'=$$
$$=4(5x^4-7x^3+6)^3\cdot(20x^3-21x^2)$$

3. $y=\ln^3 x$

$$y'=(\ln^3 x)'=3\ln^2 x\cdot(\ln x)'=\frac{3\ln^2 x}{x}$$

9. TRIGONOMETRISKO FUNKCIJU ATVASINĀJUMI

a) sinusa funkcijas atvasinājums

Lai iegūtu sinusa funkcijas atvasināšanas formulu, lieto atvasinājuma definīciju un «pirmo ievērojamo robežu»

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

(sk. 7.7. §).

Atrodot sinusa funkcijas pieauguma izteiksmi, lieto trigonometrijas formulu

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Tātad, ja $f(x)=\sin x$, tad

$$\Delta f(x)=\sin(x+\Delta x)-\sin x=$$
$$=2\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Lietojot atvasinājuma definīciju, iegūstam:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=1\cdot\cos x=\cos x.$$

Tādējādi sinusa funkcijas atvasinājums ir

$$(\sin x)'=\cos x.$$

Ja $u=u(x)$, tad $(\sin u)'_x=\cos u\cdot u'_x$.

Piemēram, ja $y=\sin(1-x)$, tad $y'=\cos(1-x)\cdot(1-x)'=-\cos(1-x)$.

b) kosinusa funkcijas atvasinājums

Arī kosinusa funkcijas atvasināšanas formulu var iegūt, lietojot atvasinājuma definīciju, taču var izmantot arī iepriekš izrisināto saliktas sinusa funkcijas atvasinājumu.

Tā kā pēc redukcijas formulas

$$\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\text{ tad}$$

$$(\cos x)'=\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)'=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'=\sin x\cdot(-1)=-\sin x.$$

Tātad

$$(\cos x)'=-\sin x.$$

Ja $u=u(x)$, tad $(\cos u)'_x=-\sin u\cdot u'_x$.

c) **tangensa funkcijas atvasinājums**

Tangensa un kotangensa funkciju atvasinājumus var iegūt, lietojot funkciju dalījuma atvasināšanas kārtulu

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

un izmantojot jau zināmos sinusa un kosinusa atvasinājumus.

Tā kā

$$\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}\quad\left(x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}\right),\text{ tad}$$

$$(\operatorname{tg}x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cdot\cos x-\sin x\cdot(\cos x)'}{(\cos x)^2}=$$

$$=\frac{\cos x\cdot\cos x+\sin x\cdot\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Tātad

$$(\operatorname{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Ja $u=u(x)$, tad saliktu tangensa funkciju atvasina šādi:

$$(\operatorname{tg}u)'_x=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'_x.$$

d) **kotangensa funkcijas atvasinājums**

Analogi iepriekšējam izvedumam iegūst arī kotangensa funkcijas atvasinājumu.

Tā kā $\operatorname{ctg}x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ $(x\neq\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z})$, tad

$$\operatorname{ctg}(x)'=\frac{(\cos x)'\sin x-\cos x\,(\sin x)'}{\sin^2 x}=\frac{-\sin x\cdot\sin x-\cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Tādējādi

$$(\operatorname{ctg}x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}\quad\text{un}\quad(\operatorname{ctg}u)'_x=-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'_x.$$

Piemēri. **Atvasināt dotās funkcijas.**

1. $y=\sin^2 x$

Tā kā šajā saliktajā funkcijā ārējā funkcija ir kāpināšana kvadrātā, tad

$$y'=(\sin^2 x)'=2\sin x\cdot(\sin x)'=2\sin x\cdot\cos x=\sin 2x.$$

2. $y=\cos(2x+3)$

$$y'=(\cos(2x+3))'=-\sin(2x+3)\cdot(2x+3)'=-2\sin(2x+3)$$

3. $y=\sqrt{\operatorname{ctg} x}$

$$y'=(\sqrt{\operatorname{ctg} x})'=\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{ctg} x}}\cdot(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{2\sin^2 x\sqrt{\operatorname{ctg} x}}$$

10. INVERSAS FUNKCIJAS ATVASINĀŠANAS KĀRTULA

Inversas funkcijas jēdzienu aplūkojām 6.4. paragrāfā.

Pieņemsim, ka funkcijas $y=f(x)$ inversā funkcija ir $x=\varphi(y)$, un noskaidrosim, kā atrod funkcijas $x=\varphi(y)$ atvasinājumu x'_y, ja zināms funkcijas $y=f(x)$ atvasinājums y'_x.

Ja funkcijai $y=f(x)$ eksistē inversā funkcija $x=\varphi(y)$ un punktā x eksistē atvasinājums $y'_x=f'(x)\neq 0$, tad inversai funkcijai eksistē atvasinājums punktā y, turklāt

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)} \quad \text{jeb} \quad x'_y=\frac{1}{y'_x}.$$

Pierādot šo atvasināšanas kārtulu, spriežam tā: tā kā funkcijas $y=f(x)$ argumenta pieaugums Δx punktā x ir inversās funkcijas $x=\varphi(y)$ funkcijas pieaugums punktā y, bet funkcijas pieaugums Δy ir inversās funkcijas argumenta pieaugums, tad

$$f'(x)=y'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{un} \quad \varphi'(y)=x'_y=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}.$$

Uzrakstām identitāti $\dfrac{\Delta x}{\Delta y}=\dfrac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$, no kuras iegūstam, ka

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Tātad

$$x'_y=\frac{1}{y'_x}.$$

Piebildīsim, ka, atrodot šo robežu, izmantojām nosacījumu, ka funkcijai $y=f(x)$ punktā x eksistē atvasinājums un tāpēc šajā punktā tā ir nepārtraukta funkcija; tātad $\Delta y\to 0$, ja $\Delta x\to 0$. Tā kā funkcija ir monotona, jo tai eksistē inversā funkcija, tad var apgalvot, ka arī $\Delta x\to 0$, ja $\Delta y\to 0$. □

11. CIKLOMETRISKO FUNKCIJU ATVASINĀJUMI

Tā kā ciklometriskās funkcijas un trigonometriskās funkcijas ir savstarpēji inversas funkcijas, tad lietosim iepriekš aplūkoto inversās funkcijas atvasināšanas kārtulu $x'_y=\dfrac{1}{y'_x}$, no kurienes $y'_x=\dfrac{1}{x'_y}$.

a) **funkcijas $y=\arcsin x$ atvasinājums**

Funkcijas $y=\arcsin x$ (sk. A-13. zīm.) inversā funkcija ir $x=\sin y$, kur $x\in[-1;\ +1]$ un $y\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$. Tāpēc

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{(\sin y)'_y}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Esam ieguvuši atvasināšanas formulu

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Saskaņā ar saliktas funkcijas atvasināšanas kārtulu funkciju $y=\arcsin u$, kur $u=u(x)$, atvasina šādi:

$$(\arcsin u)'_x=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'_x.$$

b) **funkcijas $y=\arccos x$ atvasinājums**

Funkcijas $y=\arccos x$ (sk. A-14. zīm.) inversā funkcija ir $x=\cos y$, kur $x\in[-1;\ +1]$ un $y\in[0;\ \pi]$.

Lietojot inversās funkcijas atvasināšanas likumu un ievērojot to, ka intervālā $[0;\ \pi]$ $\sin y\geqslant 0$, atrodam atvasinājumu:

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{(\cos y)'_y}=-\frac{1}{\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Tādējādi

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{un} \quad (\arccos u)'_x=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'_x.$$

c) **funkcijas $y=\operatorname{arctg} x$ atvasinājums**

Funkcijas $y=\operatorname{arctg} x$ (sk. A-15. zīm.) inversā funkcija ir $x=\operatorname{tg} y$, kur $x\in(-\infty;\ +\infty)$ un $y\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Izmantojot inversās funkcijas atvasināšanas likumu un trigonometrijas pamatformulas, iegūstam

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{(\operatorname{tg} y)'_y}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}}=\frac{1}{\frac{\sin^2 y+\cos^2 y}{\cos^2 y}}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

Tātad

$$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2} \quad \text{un} \quad (\operatorname{arctg} u)'_x=\frac{1}{1+u^2}\cdot u'_x.$$

d) **funkcijas $y=\operatorname{arcctg} x$ atvasinājums**

Tā kā funkcijas $y=\operatorname{arcctg} x$ (sk. A-16. zīm.) inversā funkcija ir $x=\operatorname{ctg} y$, kur $x\in(-\infty;\ +\infty)$ un $y\in(0;\ \pi)$, tad analogi iepriekšējiem spriedumiem iegūstam

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'_y}=\frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 y}}=-\frac{1}{\frac{\sin^2 y+\cos^2 y}{\sin^2 y}}=-\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y}=-\frac{1}{1+x^2}.$$

Tātad

$$(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2} \quad \text{un} \quad (\operatorname{arcctg} u)'_x=-\frac{1}{1+u^2}\cdot u'_x.$$

Piemēri. **Atvasināt dotās funkcijas.**

1. $y=\arcsin\sqrt{x}$

$$y'=(\arcsin\sqrt{x})'=\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\cdot(\sqrt{x})'=\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$$

2. $y=\arccos(2x)$

$$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\cdot(2x)'=-\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$$

3. $y=\operatorname{arctg}(\ln x)$

$$y'=\frac{1}{1+\ln^2 x}(\ln x)'=\frac{1}{1+\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$$

4. $y=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$

$$y'=-\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{x^2+1}$$

12. HIPERBOLISKO FUNKCIJU ATVASINĀJUMI

a) **hiperboliskā sinusa un hiperboliskā kosinusa atvasinājumi**

Tā kā hiperboliskā sinusa un hiperboliskā kosinusa funkcijas definē ar formulām

$$\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \quad \text{un} \quad \operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \quad \text{(sk. 39. un 40. zīm.)},$$

tad, atrodot šo funkciju atvasinājumus, lieto eksponentfunkcijas atvasināšanas formulu. Tādējādi iegūstam

$$(\operatorname{sh}x)'=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'=\frac{(e^x-e^{-x})'}{2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\operatorname{ch}x$$

un

$$(\operatorname{ch}x)'=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'=\frac{(e^x+e^{-x})'}{2}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\operatorname{sh}x.$$

Līdz ar to esam ieguvuši formulas

$$(\operatorname{sh}x)'=\operatorname{ch}x \quad \text{un} \quad (\operatorname{ch}x)'=\operatorname{sh}x,$$

bet saliktām funkcijām, ja $u=u(x)$:

$$(\operatorname{sh}u)'_x=\operatorname{ch}u\cdot u'_x \quad \text{un} \quad (\operatorname{ch}u)'_x=\operatorname{sh}u\cdot u'_x.$$

b) **hiperboliskā tangensa un hiperboliskā kotangensa atvasinājumi**

Hiperboliskā tangensa un hiperboliskā kotangensa funkcijas definē ar attiecībām

$$\operatorname{th}x=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x} \quad \text{un} \quad \operatorname{cth}x=\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x} \quad \text{(sk. 41. un 42. zīm.)}.$$

Atvasinot šīs funkcijas, lieto divu funkciju dalījuma atvasināšanas kārtulu, ievērojot sakarību $\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1$.

$$(\operatorname{th}x)'=\left(\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}\right)'=\frac{(\operatorname{sh}x)'\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x(\operatorname{ch}x)'}{\operatorname{ch}^2 x}=\frac{\operatorname{ch}x\cdot\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}^2 x}=$$

$$=\frac{\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

Tātad

$$(\operatorname{th} x)'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \quad \text{un} \quad (\operatorname{th} u)'_x=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 u}\cdot u'_x.$$

Analogi

$$(\operatorname{cth} x)'=\left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)'=\frac{(\operatorname{ch} x)'\operatorname{sh} x-\operatorname{ch} x(\operatorname{sh} x)'}{\operatorname{sh}^2 x}=\frac{\operatorname{sh} x\cdot\operatorname{sh} x-\operatorname{ch} x\cdot\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x}=$$

$$=\frac{\operatorname{sh}^2 x-\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x}=-\frac{\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x}=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Tādējādi

$$(\operatorname{cth} x)'=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \quad \text{un} \quad (\operatorname{cth} u)'_x=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u}\cdot u'_x.$$

13. PARAMETRISKĀ VEIDĀ DOTAS FUNKCIJAS ATVASINĀJUMS

Funkcija $y=f(x)$ ir dota parametriskā veidā, ja sakarību starp argumenta x vērtībām un atkarīgā mainīgā lieluma y vērtībām izsaka ar sistēmu

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t), \end{cases}$$

kur t ir mainīgais lielums, ko sauc par parametru.

Ja parametriskā veidā dotai funkcijai eksistē atvasinājumi $x'_t=x'(t)\neq 0$ un $y'_t=y'(t)$, turklāt funkcijai $x=x(t)$ eksistē inversā funkcija, tad funkcijas $y=f(x)$ atvasinājumu atrod šādi:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}.$$

Pierādījumā izmantosim nosacījumu, ka $x=x(t)$ ir nepārtraukta funkcija, jo tai eksistē atvasinājums. Tāpēc $\Delta x\to 0$, ja $\Delta t\to 0$. Tā kā šī funkcija ir monotona, jo tai eksistē inversā funkcija, tad ir spēkā arī apgrieztais apgalvojums: $\Delta t\to 0$, ja $\Delta x\to 0$.

Parametra t pieaugumam Δt atbilst funkciju $x=x(t)$ un $y=y(t)$ pieaugumi Δx un Δy.

Saskaņā ar atvasinājuma definīciju

$$x'_t=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t},\quad y'_t=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t},\quad y'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Tā kā

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\dfrac{\Delta y}{\Delta t}}{\dfrac{\Delta x}{\Delta t}},$$

tad

$$y'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\Delta y}{\Delta t}}{\dfrac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta t}}{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{y'_t}{x'_t}.\ \square$$

Piemērs. **Atvasināt parametriskā veidā dotu funkciju**

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t), \quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi \end{cases}$$

(funkcijas grafiks ir cikloīda).

Lietojot parametriskā veidā dotas funkcijas atvasināšanas formulu, atrodam:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{a(1-\cos t)'}{a(t-\sin t)'}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cdot\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

14. APSLĒPTAS FUNKCIJAS ATVASINĀŠANA

Lai atrastu apslēptas funkcijas $F(x;\ y)=0$ (sk. 6.2.§) atvasinājumu y'_x, ir jāatvasina identitāte $F(x;\ y)=0$ pēc x, ievērojot, ka y ir x funkcija. Pēc tam no iegūtās vienādības jāizsaka y'_x.

Piemērs. **Atrast apslēptas funkcijas $e^{\frac{y}{x}}-3y-2x=0$ atvasinājumu y'_x.**

Atvasinām doto vienādību pēc x, ievērojot saliktas funkcijas atvasināšanas likumu.

$$\left(e^{\frac{y}{x}}-3y-2x\right)'=0$$

$$\left(e^{\frac{y}{x}}\right)'_x-(3y)'_x-(2x)'_x=0, \quad e^{\frac{y}{x}}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_x-3\cdot y'_x-2=0$$

$$e^{\frac{y}{x}}\ \frac{y'_x\cdot x-y\cdot x'}{x^2}-3y'_x-2=0, \quad e^{\frac{y}{x}}\,xy'_x-y\,e^{\frac{y}{x}}-3x^2y'_x-2x^2=0$$

$$y'_x\left(xe^{\frac{y}{x}}-3x^2\right)=ye^{\frac{y}{x}}+2x^2.$$

Izsakot y'_x, iegūstam

$$y'_x=\frac{ye^{\frac{y}{x}}+2x^2}{xe^{\frac{y}{x}}-3x^2}.$$

ATVASINĀŠANAS FORMULU KOPSAVILKUMS

$C'=0$ (C – const) $(u\pm v)'=u'\pm v'$ $(u\cdot v)'=u'v+uv' \Rightarrow (Cu)'=Cu'$ $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2} \Rightarrow \left(\frac{u}{C}\right)'=\frac{u'}{C}, \quad \left(\frac{C}{v}\right)'=-\frac{Cv'}{v^2}$
$[f(\underbrace{g(x)}_{u})]'_x=f'_u(u)\cdot g'_x(x)$ jeb $y'_x=y'_u\cdot u'_x$.
Ja $y=f(x) \Leftrightarrow x=\varphi(y)$, tad $\varphi'_y(y)=\frac{1}{f'_x(x)}$ jeb $x'_y=\frac{1}{y'_x}$.
Ja $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\varphi(t) \end{cases}$, tad $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_{xx}=\frac{y''_{tt}\,x'_t-y'_t\,x''_{tt}}{(x'_t)^3}$.

$(x)^{\alpha}=\alpha x^{\alpha-1}$	$(u^{\alpha})'_x=\alpha u^{\alpha-1}\cdot u'_x$
$(a^x)'=a^x\ln a$	$(a^u)'_x=a^u\ln a\cdot u'_x$
$(e^x)'=e^x$	$(e^u)'_x=e^u\cdot u'_x$
$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	$(\ln u)'_x=\frac{1}{u}\cdot u'_x$
$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$	$(\log_a u)'_x=\frac{1}{u\cdot\ln a}\cdot u'_x$
$(\sin x)'=\cos x$	$(\sin u)'_x=\cos u\cdot u'_x$
$(\cos x)'=-\sin x$	$(\cos u)'_x=-\sin u\cdot u'_x$
$(\mathrm{tg}\,x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$	$(\mathrm{tg}\,u)'_x=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'_x$
$(\mathrm{ctg}\,x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\mathrm{ctg}\,u)'_x=-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'_x$
$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)'_x=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'_x$
$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)'_x=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'_x$
$(\mathrm{arctg}\,x)'=\frac{1}{1+x^2}$	$(\mathrm{arctg}\,u)'_x=\frac{1}{1+u^2}\cdot u'_x$
$(\mathrm{arcctg}\,x)'=-\frac{1}{1+x^2}$	$(\mathrm{arcctg}\,u)'_x=-\frac{1}{1+u^2}\cdot u'_x$
$(\mathrm{sh}\,x)'=\mathrm{ch}\,x$	$(\mathrm{sh}\,u)'_x=\mathrm{ch}\,u\cdot u'_x$
$(\mathrm{ch}\,x)'=\mathrm{sh}\,x$	$(\mathrm{ch}\,u)'_x=\mathrm{sh}\,u\cdot u'_x$
$(\mathrm{th}\,x)'=\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$	$(\mathrm{th}\,u)'_x=\frac{1}{\mathrm{ch}^2 u}\cdot u'_x$
$(\mathrm{cth}\,x)'=-\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$	$(\mathrm{cth}\,u)'_x=-\frac{1}{\mathrm{sh}^2 u}\cdot u'_x$

8.8. §. AUGSTĀKU KĀRTU ATVASINĀJUMI

1. AUGSTĀKAS KĀRTAS ATVASINĀJUMA JĒDZIENS

Pieņemsim, ka funkcijai $y=f(x)$ intervālā $(a; b)$ eksistē atvasinājums $f'(x)$. Tad brīvi izraudzītā intervāla punktā x var meklēt funkcijas $f'(x)$ pieauguma $\Delta f'(x)$ un argumenta pieauguma Δx attiecības robežu, kad Δx tiecas uz nulli.

Ja eksistē robeža $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}=(f'(x))'$, ***tad to sauc par funkcijas*** $f(x)$ ***otrās kārtas atvasinājumu un apzīmē ar simboliem*** y'', $f''(x)$ ***vai*** $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Tātad funkcijas *otrās kārtas atvasinājums ir pirmās kārtas atvasinājuma atvasinājums*, t. i.,

$$y''=(y')' \quad \text{vai} \quad f''(x)=(f'(x))'.$$

Analogi definē trešās, ceturtās vai vispārīgi – *n-tās kārtas atvasinājumus*, kurus apzīmē ar šādiem simboliem:

$$f^{(3)}(x),\ y^{(3)},\ \frac{d^3y}{dx^3} \text{ – trešās kārtas atvasinājums } (y'')';$$

$$f^{(4)}(x),\ y^{(4)},\ \frac{d^4y}{dx^4} \text{ – ceturtās kārtas atvasinājums } (y^{(3)})';$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x),\ y^{(n)},\ \frac{d^ny}{dx^n} \text{ – } n\text{-tās kārtas atvasinājums } (y^{(n-1)})'.$$

Piemēri

1. **Atrast funkcijas $y=\operatorname{arctg} x$ otrās kārtas atvasinājumu.**

$$y'=(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2},\quad y''=\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'=-\frac{(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

2. **Atrast funkcijas $y=e^{ax}$ (a – const.) n-tās kārtas atvasinājumu.**

Atrodam $y'=(e^{ax})'=a\cdot e^{ax}$, $y''=(ae^{ax})'=a^2\cdot e^{ax}$, $y^{(3)}=(a^2e^{ax})'=a^3\cdot e^{ax}$.

Viegli ievērot, ka šīs funkcijas augstāku kārtu atvasinājumos funkcija e^{ax} ir reizināta ar tādu skaitļa a pakāpi, kuras kāpinātājs ir vienāds ar atvasinājuma kārtu. Tātad

$$y^{(4)}=a^4e^{ax},\quad y^{(5)}=a^5e^{ax} \quad \text{vai vispārīgi}$$
$$y^{(n)}=a^ne^{ax}.$$

Piebildīsim, ka šāds secinājums gan ir tikai hipotēze, kas jāpierāda ar matemātiskās indukcijas metodi.

3. **Atrast funkcijas $y=\ln x$ n-tās kārtas atvasinājumu.**

$$y'=(\ln x)'=\frac{1}{x}=x^{-1},\quad y''=(x^{-1})'=-1\cdot x^{-2},\quad y^{(3)}=(-1\cdot x^{-2})'=1\cdot 2x^{-3}=2!\,x^{-3}$$

$$y^{(4)}=(1\cdot 2x^{-3})'=-1\cdot 2\cdot 3x^{-4}=-3!\,x^{-4},\ \ldots$$

$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)x^{-n}=(-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}$$

2. FUNKCIJU SUMMAS UN REIZINĀJUMA AUGSTĀKU KĀRTU ATVASINĀJUMI

Ja $u=u(x)$ un $v=v(x)$ ir n reizes atvasināmas funkcijas un C ir konstante, tad, lietojot matemātisko indukciju, viegli pierādīt šādas formulas:

$$(Cu)^{(n)}=C\cdot u^{(n)} \quad \text{un} \quad (u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}.$$

Funkciju $u(x)$ un $v(x)$ reizinājuma uv n-tās kārtas atvasinājuma izteiksmē lieto binomiālos koeficientus

$$C_n^m=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(m-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot m}.$$

Piemēram, $C_5^3=\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}=10$, $C_2^1=\frac{2}{1}=2$, $C_3^1=\frac{3}{1}=3$, $C_3^2=\frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}=3$.

Lai iegūtu $(uv)^{(n)}$ izteiksmi, vispirms atrodam reizinājuma uv 1., 2., 3. kārtas atvasinājumus:

$$(uv)'=u'v+uv',$$
$$(uv)''=(u'v+uv')'=u''v+u'v'+u'v'+uv''=u''v+2u'v'+uv''=u''v+C_2^1\,u'v'+uv'';$$
$$(uv)^{(3)}=(u''v+2u'v'+uv'')'=u^{(3)}v+u''v'+2u''v'+2u'v''+u'v''+uv^{(3)}=$$
$$=u^{(3)}v+3u''v'+3u'v''+uv^{(3)}=u^{(3)}v+C_3^1\,u''v'+C_3^2\,u'v''+uv^{(3)}.$$

Analogi atrodam, ka

$$(uv)^{(4)}=u^{(4)}v+C_4^1\,u^{(3)}v'+C_4^2\,u^{(2)}v^{(2)}+C_4^3\,u'v^{(3)}+uv^{(4)}.$$

Vispārinot sakarības, kādas var konstatēt šajās atvasinājumu izteiksmēs, iegūstam **n-tās kārtas atvasinājumu**

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+C_n^1u^{(n-1)}v'+C_n^2\,u^{(n-2)}v^{(2)}+C_n^3\,u^{(n-3)}\,v^{(3)}+\ldots+uv^{(n)}.$$

Šo izteiksmi sauc par Leibnica formulu; tās pierādījumā lieto matemātisko indukciju.

Ievērosim, ka Leibnica formulas struktūra ir analoga Ņūtona binoma formulai, ko lieto, atrodot divu skaitļu summas n-to pakāpi:

$$(a+b)^n=a^n+C_n^1\,a^{n-1}b+C_n^2\,a^{n-2}b^2+C_n^3\,a^{n-3}b^3+\ldots+b^n.$$

Piemērs. **Atrast funkcijas $y=e^{2x}\sin x$ trešās kārtas atvasinājumu.**

Saskaņā ar Leibnica formulu

$$(uv)^{(3)}=u^{(3)}v+C_3^1\,u^{(2)}v'+C_3^2\,u'v^{(2)}+uv^{(3)}=u^{(3)}v+3u^{(2)}v'+3u'v''+uv^{(3)}.$$

Apzīmēsim $u=e^{2x}$ un $v=\sin x$.

Tad $u'=2e^{2x}$, $u''=4e^{2x}$, $u^{(3)}=8e^{2x}$ un $v'=\cos x$, $v''=-\sin x$, $v^{(3)}=-\cos x$, bet

$$y^{(3)}=(e^{2x}\sin x)^{(3)}=8e^{2x}\sin x+3\cdot 4e^{2x}\cos x-3\cdot 2e^{2x}\sin x-e^{2x}\cos x=$$
$$=2e^{2x}\sin x+11e^{2x}\cos x=e^{2x}(2\sin x+11\cos x).$$

3. PARAMETRISKĀ VEIDĀ DOTAS FUNKCIJAS OTRĀS KĀRTAS ATVASINĀJUMS

Pieņemsim, ka funkcija $y=f(x)$ ir dota parametriskā veidā

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t), \quad t\in(\alpha;\ \beta); \end{cases}$$

turklāt eksistē atvasinājumi x'_t, x''_{tt}, y'_t, y''_{tt} un funkcijai $x=x(t)$ eksistē inversā funkcija $t=t(x)$. Tad funkcijas $y=f(x)$ otrās kārtas atvasinājumu y''_{xx} atrod pēc formulas

$$y''_{xx}=\frac{y''_{tt}x'_t-y'_tx''_{tt}}{(x'_t)^3}.$$

Šo formulu pierāda, lietojot saliktas un inversas funkcijas atvasināšanas kārtulas (sk. 8.7.§. 4. un 8.7.§. 10.).

Tā kā $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$ (sk. 8.7.§. 13.), tad

$$y''_{xx}=(y'_x)'_x=(y'_x)'_t\cdot t'_x=(y'_x)'_t\cdot\frac{1}{x'_t}=\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t\cdot\frac{1}{x'_t}=$$

$$=\frac{y''_{tt}x'_t-y'_tx''_{tt}}{(x'_t)^2}\cdot\frac{1}{x'_t}=\frac{y''_{tt}x'_t-y'_tx''_{tt}}{(x'_t)^3}.$$

Piemērs. **Atrast parametriskā veidā dotas funkcijas**

$$\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\quad(0<t<\pi)\end{cases}$$

otrās kārtas atvasinājumu y''_{xx}.

Tā kā $x'_t=(a\cos t)'=-a\sin t$, $x''_{tt}=(-a\sin t)'=-a\cos t$, $y'_t=(b\sin t)'=b\cos t$, $y''_{tt}=(b\cos t)'=-b\sin t$, tad

$$y''_{xx}=\frac{-b\sin t\cdot(-a\sin t)-b\cos t\cdot(-a\cos t)}{(-a\sin t)^3}=\frac{ab(\sin^2t+\cos^2t)}{-a^3\cdot\sin^3t}=-\frac{b}{a^2\sin^3t}.$$

4. OTRĀS KĀRTAS ATVASINĀJUMA FIZIKĀLĀ NOZĪME

8.2. paragrāfā noskaidrojām funkcijas pirmās kārtas atvasinājuma fizikālo nozīmi: ja $x=x(t)$ ir materiāla punkta koordināta atkarībā no laika t taisnvirziena kustībā, tad šīs funkcijas atvasinājums x'_t ir punkta momentānā ātruma modulis, t.i., $v=x'(t)$ jeb $v=\dot{x}(t)$. Savukārt, ja $v=v(t)$ ir ātruma atkarība no laika, tad atvasinājums $v'(t)$ ir kustības momentānais paātrinājums a. Tā kā $a=v'(t)$ un $v(t)=x'(t)$, tad

$$a=v'(t)=(x'(t))'=x''(t)\quad\text{jeb}\quad a=\ddot{x}(t).$$

Tādējādi, ja $x=x(t)$ ir materiāla punkta kooordinātas atkarība no laika taisnvirziena kustībā, tad šīs funkcijas *otrās kārtas atvasinājums ir kustības paātrinājums*.

Šo sakarību bieži lieto fizikā 2. Ņūtona likuma pierakstā:

$$F=ma=m\cdot x''(t)\quad\text{jeb}\quad F=m\cdot\ddot{x}(t).$$

Piemēri

1. **Ķermenis, kura masa $m=2$ kg, pārvietojas pa taisni; tā kustības likums ir $x(t)=t^2+t+1$. Noteikt spēku, kas darbojas uz ķermeni, un kinētisko enerģiju pēc 2 sekundēm no kustības sākuma (koordināta x mērīta metros, laiks t – sekundēs).**

Atrodam $\dot{x}(t)=2t+1$, $\ddot{x}(t)=2$, $\dot{x}(2)=2\cdot2+1=5$. Tātad kustība ir vienmērīgi paātrināta ar paātrinājumu $a=\ddot{x}=2$ m/s^2. Laika momentā $t=2$ s ātrums $v=\dot{x}(2)=$ $=5$ m/s.

Līdz ar to $F=m\cdot a=2\cdot2=4$ (N) un $E=\dfrac{m\cdot v^2}{2}=\dfrac{2\cdot25}{2}=25$ (J).

2. Punkts kustas pa taisni pēc likuma $x=\sqrt{t}$. Pierādīt, ka kustības paātrinājums ir proporcionāls ātruma kubam.

Atrodam kustības ātrumu: $v=\dot{x}=(\sqrt{t})'=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}$. Kustības paātrinājums

$$a=\ddot{x}=\left(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\right)'=-\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{4}(t^{-\frac{1}{2}})^3=-2\cdot\frac{1}{8}(t^{-\frac{1}{2}})^3=-2\left(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\right)^3=-2v^3.$$

Tātad $a=k\cdot v^3$, kur proporcionalitātes koeficients $k=-2$.

ATVASINĀJUMA LIETOJUMI

9.1. §. TEORĒMAS PAR DIFERENCĒJAMĀM FUNKCIJĀM

No funkcijas atvasinājuma jēdziena ģeometriskās interpretācijas un fizikālās nozīmes rodas priekšstats par atvasinājuma lietošanu funkciju pētīšanā un fizikā. Aplūkojot sīkāk šos jautājumus, *iepazīsimies ar dažām teorēmām par funkcijām, kurām eksistē atvasinājums.*

1. FERMĀ TEORĒMA

Ja 1) ***punkts c ir kāda intervāla*** $[a; b]$ ***iekšējais punkts,***
2) ***punktā c funkcijai f(x) ir vai nu vislielākā vērtība, vai arī vismazākā vērtība šajā intervālā,***
3) ***punktā c funkcijai eksistē atvasinājums*** $f'(c)$,
tad $f'(c)=0$.

Pierādījums

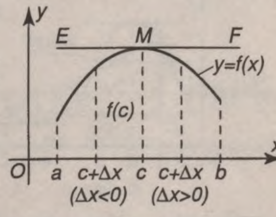
Aplūkosim gadījumu, kad punktā c funkcijai ir vislielākā vērtība, t. i., $f(c)\geqslant f(x)$ jeb $f(x)-f(c)\leqslant 0$ $\forall x\in[a; b]$ (59. zīm.). Apzīmējot $c+\Delta x=x$, iegūstam, ka funkcijas pieaugums

$$\Delta f(c)=f(c+\Delta x)-f(c)\leqslant 0$$

kā pozitīvām, tā arī negatīvām argumenta pieauguma Δx vērtībām. To ievērojot, noteiksim funkcijas pieauguma un argumenta pieauguma attiecības zīmi punktā c.

Ja $\Delta x>0$, tad $\dfrac{\Delta f(c)}{\Delta x}\leqslant 0$ un arī $\lim\limits_{\Delta x\to+0}\dfrac{\Delta f(c)}{\Delta x}\leqslant 0$. (1)

Ja $\Delta x<0$, tad $\dfrac{\Delta f(c)}{\Delta x}\geqslant 0$ un arī $\lim\limits_{\Delta x\to-0}\dfrac{\Delta f(c)}{\Delta x}\geqslant 0$. (2)



59. zīm.

Tā kā funkcijai $f(x)$ punktā c eksistē atvasinājums, tad jābūt spēkā vienādībai

$$\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta f(c)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{\Delta f(c)}{\Delta x}.$$

Pjērs Fermā (1601–1665) – franču matemātiķis, neatkarīgi no R. Dekarta pētījumiem radījis analītisko ģeometriju; kopā ar B. Paskālu izstrādājis varbūtību teorijas pamatus. Skaitļu teorijā ir pazīstama «Fermā mazā teorēma», bet algebrisko vienādojumu teorijā – «Fermā lielā teorēma»: *vienādojumam* $x^n+y^n=z^n$ *nav atrisinājumu veselos skaitļos, ja* $n>2$.

Bet šī vienādība ir iespējama tikai tad, ja robežas (1) un (2) ir vienādas ar nulli. Tātad

$$f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(c)}{\Delta x}=0.$$

Analogi pierāda teorēmu gadījumā, kad punktā c funkcijai ir vismazākā vērtība. □

Fermā teorēmai ir vienkārša ģeometriskā interpretācija. Ja α ir grafika pieskares un Ox ass veidotais leņķis, tad no vienādības $f'(c)=\operatorname{tg}\alpha=0$ izriet, ka $\alpha=0$. Tādējādi, ja ir spēkā teorēmas nosacījumi, tad **funkcijas grafika punktā $M(c;\ f(c))$ vilktā pieskare EF ir paralēla Ox asij** (sk. 59. zīm.).

2. ROLLA TEORĒMA*

***Ja** 1) $f(x)$ **ir nepārtraukta funkcija slēgtā intervālā** $[a;\ b]$,*

*2) **eksistē atvasinājums** $f'(x)$ **vismaz šī intervāla iekšējos punktos**,*

*3) **intervāla galapunktos funkcijas vērtības ir vienādas, t. i.,** $f(a)=f(b)$,*

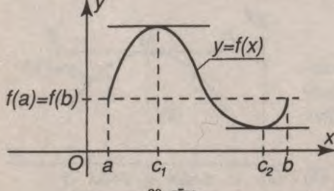
***tad vismaz vienā intervāla iekšējā punktā c funkcijas atvasinājums ir vienāds ar nulli, t. i.,** $f'(c)=0$.*

Pierādījums

Tā kā funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta slēgtā intervālā, tad šajā intervālā tā sasniedz savu minimālo vērtību m un arī maksimālo vērtību M.

Ja $M=m$, tad funkcija ir konstanta, t. i., $f(x)=C$ un tās atvasinājums ir vienāds ar nulli visos intervāla punktos.

Tā kā $f(a)=f(b)$, tad funkcijas minimālā un maksimālā vērtība vienlaikus nevar būt intervāla galapunktos, bet vismaz vienu no šīm vērtībām funkcija pieņem kādā intervāla iekšējā punktā c. Bet tad saskaņā ar Fermā teorēmu $f'(c)=0$. □



60. zīm.

Rolla teorēmai ir vienkārša ģeometriskā interpretācija. Patiešām, spriežot līdzīgi kā Fermā teorēmas gadījumā, secinām, ka, ja ir spēkā Rolla teorēmas nosacījumi, tad **vismaz vienā funkcijas grafika punktā var novilkt Ox asij paralēlu pieskari**. 60. zīmējumā ilustrēts gadījums, kad funkcijai intervāla iekšējā punktā c_1 ir maksimālā vērtība M un punktā c_2 – minimālā vērtība m. Tātad $f'(c_1)=0$ un $f'(c_2)=0$.

Piemērs. **Pārbaudīt, vai funkcijai $f(x)=x^2-4x+3$ intervālā $[0;\ 4]$ ir spēkā Rolla teorēma.**

Pārliecināsimies, ka šī funkcija apmierina teorēmas nosacījumus:

1) $f(x)=x^2-4x+3$ ir vesela racionāla funkcija un ir nepārtraukta visā reālo skaitļu kopā, tātad arī intervālā $[0;\ 4]$,

2) atvasinājums $f'(x)=2x-4$ eksistē visiem reāliem skaitļiem, tātad arī intervālā $(0;\ 4)$,

3) tā kā $f(0)=3$ un arī $f(4)=16-16+3=3$, tad $f(0)=f(4)$.

Tātad visi Rolla teorēmas nosacījumi ir apmierināti un ir spēkā arī šīs teorēmas apgalvojums. Patiešām, intervāla $(0;\ 4)$ iekšējā punktā $c=2$ atvasinājums $f'(x)=2x-4$ ir vienāds ar 0.

* Mišels Rolls (1652–1719) – franču matemātiķis.

3. LAGRANŽA TEORĒMA

Ja 1) ***f(x)* ir nepārtraukta funkcija slēgtā intervālā [*a*; *b*],**

2) ***eksistē atvasinājums f′(x) vismaz šī intervāla iekšējos punktos,***

tad vismaz vienā intervāla iekšējā punktā c funkcijas atvasinājumu var izteikt ar vienādību

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \qquad (1)$$

Pierādījums

Lietosim apzīmējumu $k=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ un izveidosim palīgfunkciju

$$F(x)=f(x)-f(a)-k(x-a).$$

Pārliecināsimies, ka palīgfunkcija $F(x)$ apmierina Rolla teorēmas nosacījumus intervālā $[a; b]$. Patiešām,

1) funkcija $F(x)$ ir nepārtraukta intervālā $[a; b]$, jo tā ir nepārtrauktu funkciju summa,

2) saskaņā ar teorēmas nosacījumiem intervālā $(a; b)$ eksistē atvasinājums $F'(x)=f'(x)-k$,

3) $F(a)=f(a)-f(a)-k(a-a)=0$,

$$F(b)=f(b)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=0;$$

tātad intervāla galos funkcijas vērtības ir vienādas.

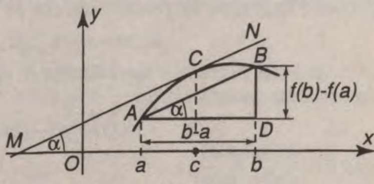
Līdz ar to funkcijai $F(x)$ ir spēkā arī Rolla teorēmas apgalvojums, t. i., eksistē $c\in(a; b)$, ka $F'(c)=0$. Tātad $F'(c)=f'(c)-k=0$, no kurienes $f'(c)=k$ jeb

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \ \square$$

Lagranža teorēmas ģeometriskā interpretācija aplūkota 61. zīmējumā.

Intervāla $[a; b]$ galapunktiem atbilst funkcijas grafika punkti A un B. No taisnleņķa trijstūra ADB iegūstam:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{BD}{AD} \text{ jeb } \operatorname{tg}\alpha=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \qquad (2)$$



61. zīm.

Saskaņā ar atvasinājuma ģeometrisko nozīmi $f'(c)$ ir funkcijas grafika punktā $C(c; f(c))$ vilktās pieskares virziena koeficients. Bet tad no vienādībām (1) un (2) seko, ka nogrieznis AB un pieskare MN ar Ox asi veido vienādus leņķus α. Tātad,

ja ir spēkā Lagranža teorēmas nosacījumi, tad vismaz vienā funkcijas grafika punktā var novilkt hordai *AB* paralēlu pieskari.

Ar 61. zīmējuma palīdzību var noskaidrot arī teorēmas pierādījumā lietotās palīgfunkcijas $F(x)$ ģeometrisko nozīmi. Tā kā k ir taisnes AB virziena koeficients, tad šīs taisnes vienādojums ir

$$y=f(a)+k(x-a).$$

Žozefs Lagranžs (1736–1813) – franču matemātiķis, izstrādājis ekstrēmu uzdevumu risināšanas metodes matemātiskajā analīzē un variāciju rēķinos, veicis pētījumus diferenciālvienādojumu teorijā, skaitļu teorijā, izstrādājis mehāniskās kustības vienādojumus vispārinātajās koordinātās.

Tādējādi palīgfunkcija $F(x)=f(x)-f(a)-k(x-a)$ izsaka starpību starp funkcijas $f(x)$ un taisnes AB punkta ordinātas vērtībām.

Lagranža teorēmas formulu (1) bieži lieto, lai izteiktu funkcijas pieaugumu intervāla galos:

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

Ja intervāla sākumpunktu a apzīmē ar x un galapunktu b - ar $x+\Delta x$, tad

$$b-a=x+\Delta x-x=\Delta x,$$

$$f(b)-f(a)=f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta f(x).$$

Tādējādi

$$\Delta f(x)=f'(c)\Delta x, \tag{3}$$

kur $c\in(x;\ x+\Delta x)$.

Izteiksmi (3) sauc par **Lagranža galīgo pieaugumu formulu**.

Atzīmēsim, ka speciālā gadījumā no Lagranža teorēmas iegūst Rolla teorēmu. Patiešām, ja ir spēkā vienādība $f(a)=f(b)$, tad no Lagranža teorēmas formulas (1) iegūstam, ka $f'(c)=0$.

4. KOŠĪ TEORĒMA

Ja 1) ***$f(x)$ un $\varphi(x)$ ir nepārtrauktas funkcijas slēgtā intervālā [a; b],***

2) ***eksistē atvasinājumi $f'(x)$ un $\varphi'(x)$ vismaz šī intervāla iekšējos punktos,***

3) ***visos intervāla punktos $\varphi'(x)\neq 0$,***

tad vismaz vienā intervāla [a; b] iekšējā punktā c ir spēkā vienādība

$$\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}.$$

Viegli konstatēt, ka speciālā gadījumā, kad $\varphi(x)=x$, no Košī teorēmas formulas seko Lagranža teorēmas formula, jo tad

$$\varphi'(x)=x'=1 \quad \text{un} \quad \varphi(b)-\varphi(a)=b-a.$$

Arī Košī teorēmas pierādījums ir analogs Lagranža teorēmas pierādījumam. Izmantosim palīgfunkciju

$$F(x)=f(x)-f(a)-k(\varphi(x)-\varphi(a)),$$

kur $k=\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$.

Palīgfunkcija $F(x)$ apmierina Rolla teorēmas nosacījumus, jo

1) funkcija $F(x)$ ir nepārtraukta intervālā $[a;\ b]$ kā nepārtrauktu funkciju summa,

2) saskaņā ar teorēmas nosacījumiem intervālā $(a;\ b)$ eksistē atvasinājums $F'(x)=f'(x)-k\varphi'(x)$,

3) $F(a)=F(b)$, jo $F(a)=f(a)-f(a)-k(\varphi(a)-\varphi(a))=0$ un arī

$$F(b)=f(b)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}(\varphi(b)-\varphi(a))=0.$$

Tātad palīgfunkcijai ir spēkā arī Rolla teorēmas apgalvojums, proti, eksistē $c\in(a;\ b)$, ka $F'(c)=0$, t. i., $F'(c)=f'(c)-k\varphi'(c)=0$, no kurienes

$$\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=k=\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}. \ \square$$

9.2. §. ATVASINĀJUMA LIETOŠANA ROBEŽAS APRĒĶINĀŠANĀ. LOPITĀLA LIKUMS

1. NENOTEIKTĪBA „$\frac{0}{0}$"

Robežu teorijā jau aplūkojām dažus robežas aprēķināšanas paņēmienus, kad funkciju dalījums $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ir nenoteikta izteiksme „$\frac{0}{0}$" vai arī „$\frac{\infty}{\infty}$".

Piemēram,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x+2}=3.$$

Ievērojot to, ka

$$(x^3-8)'=3x^2 \quad \text{un} \quad (x^2-4)'=2x,$$

aprēķināsim doto funkciju atvasinājumu attiecības robežu, kad $x\to 2$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2}{2x}=\lim_{x\to 2}\frac{3x}{2}=3.$$

Tātad šajā piemērā

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x^3-8)'}{(x^2-4)'}=3,$$

t. i., funkciju attiecības robeža ir vienāda ar šo funkciju atvasinājumu attiecības robežu.

Aplūkosim teorēmu, ar kuru pamato šādu robežas aprēķināšanas paņēmienu (šo paņēmienu sauc par **Lopitāla likumu** jeb kārtulu*).

Ja 1) ***funkcijām $f(x)$ un $\varphi(x)$ eksistē atvasinājums kādā punkta a apkārtnē,***
2) ***visos šīs apkārtnes punktos $\varphi'(x)\neq 0$,***
3) ***$f(a)=0$ un $\varphi(a)=0$,***
4) ***eksistē galīga vai bezgalīga robeža*** $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$,

tad

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

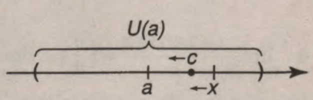
Pierādījums

Brīvi izvēlamies kādu punktu x no punkta a apkārtnes $U(a)$ un aplūkojam intervālu $[a; x]$ (62. zīm.). Šajā intervālā funkcijas $f(x)$ un $\varphi(x)$ apmierina Koši teorēmas nosacījumus. Tātad ir spēkā arī šīs teorēmas apgalvojums, t. i., eksistē $c\in(a; x)$, ka

$$\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}.$$

Tā kā $f(a)=0$ un $\varphi(a)=0$, tad

$$\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=\frac{f(x)}{\varphi(x)}. \qquad (1)$$



62. zīm.

* Gijoms Fransuā de Lopitāls (1661–1704) – franču matemātiķis.

Ja $x \to a$, tad arī $c \to a$, jo c ir intervāla $(a; x)$ iekšējs punkts.

Izmantojot vienādību (1), iegūstam attiecības $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ robežu, kad $x \to a$:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \lim_{c \to a} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Līdz ar to

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \ \square$$

Piezīmes

1. Lopitāla likumu var lietot arī tādā gadījumā kad $x \to \infty$ un

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} \varphi(x) = 0.$$

Patiešām, izmantojot substitūciju $x = \frac{1}{z}$, iegūstam:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{z}; \\ \text{ja } x \to \infty, \text{ tad } z \to 0 \end{array}\right] = \lim_{z \to 0} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \left(\frac{1}{z}\right)'}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \left(\frac{1}{z}\right)'} = \lim_{z \to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

2. Ja teorēmas nosacījumus apmierina gan funkcijas $f(x)$ un $\varphi(x)$, gan arī to atvasinājumi $f'(x)$ un $\varphi'(x)$, tad *Lopitāla likumu, aprēķinot robežu, var lietot atkārtoti*, t. i.,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}.$$

Piemēri

1. $$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{(\operatorname{tg} x - x)'}{(\sin x - x^2)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{\cos x - 2x} = \frac{1-1}{1-0} = 0$$

2. $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin 2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(x \sin 2x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sin 2x + 2x \cos 2x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)'}{(\sin 2x + 2x \cos 2x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2 \cos 2x + 2(\cos 2x - 2x \sin 2x)} = \frac{1}{4}$$

3. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\pi - 2 \operatorname{arctg} x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-\frac{2}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{1+x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\frac{1}{x^2} + 1} = 2$$

2. NENOTEIKTĪBA „$\frac{\infty}{\infty}$"

Lopitāla likums ir spēkā arī tad, ja jāatrod divu bezgalīgi lielu funkciju attiecības robeža. Tātad

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Aplūkosim bez pierādījuma **teorēmu** par šādu funkciju attiecības robežu.

Ja 1) ***funkcijām $f(x)$ un $\varphi(x)$ eksistē atvasinājums kādā punkta a apkārtnē, izņemot pašu punktu a, kurā šīm funkcijām ir otrā veida pārtraukums,***

2) ***visos šīs apkārtnes punktos (izņemot pašu punktu a) $\varphi'(x) \neq 0$,***

3) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ ***un*** $\lim_{x \to a} \varphi(x) = \infty$,

4) ***eksistē robeža*** $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$,

tad eksistē arī robeža $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, ***pie tam***

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A.$$

Piezīmes

1. Teorēma ir spēkā arī tad, ja $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \infty$.

2. Lopitāla likumu var lietot arī tad, ja $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ un $\lim_{x \to \infty} \varphi(x) = \infty$.

3. Ja teorēmas nosacījumus apmierina ne vien funkcijas $f(x)$ un $\varphi(x)$, bet arī šo funkciju atvasinājumi $f'(x)$ un $\varphi'(x)$, tad *Lopitāla likumu, aprēķinot robežu, var lietot atkārtoti*, t. i.,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}.$$

Piemēri

1. $$\lim_{x \to +0} \frac{\ln \sin x}{\ln x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to +0} \frac{(\ln \sin x)'}{(\ln x)'} = \lim_{x \to +0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x \to +0} \frac{x \cos x}{\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to +0} \cos x \cdot \lim_{x \to +0} \frac{x}{\sin x} = 1 \cdot 1 = 1$$

2. $$\lim_{x \to \infty} \frac{3x-1}{2x+5} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{(3x-1)'}{(2x+5)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Piezīme. Ne vienmēr bezgalīgi mazu vai arī bezgalīgu lielu funkciju attiecības robežu var aprēķināt, lietojot Lopitāla likumu. *Ir iespējams, ka šādu funkciju attiecības robeža eksistē, bet neeksistē funkciju atvasinājumu attiecības robeža.*

Piemēram,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1+\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}|\sin x|\leqslant 1;\ 0<\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|\leqslant\dfrac{1}{|x|};\\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{|x|}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|=0\end{array}\right]=1+0=1.$$

Taču šo funkciju atvasinājumu attiecībai robeža neeksistē. Patiešām,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\sin x)'}{x'}=\lim_{x\to\infty}(1+\cos x),$$

bet funkcijai $1+\cos x$ neeksistē robeža, kad $x\to\infty$.

Tātad, formulējot iepriekš aplūkotās teorēmas par Lopitāla likumu, **būtisks nosacījums ir robežas** $\lim\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ **eksistence.**

3. NENOTEIKTĪBA "$0\cdot\infty$"

Nenoteikta izteiksme ir arī bezgalīgi mazas funkcijas un bezgalīgi lielas funkcijas reizinājums. *Aprēķinot šādu funkciju reizinājuma robežu, dotā izteiksme ir jāpārveido daļas veidā.* Tad iegūst nenoteiktu izteiksmi "$\dfrac{0}{0}$" vai arī "$\dfrac{\infty}{\infty}$", kuras robežu atrod, lietojot Lopitāla likumu. Tādējādi, ja

$$\lim_{x\to a}f(x)=0 \quad \text{un} \quad \lim_{x\to a}\varphi(x)=\infty,$$

(šeit un turpmāk $x\to a$ vietā var būt arī $x\to\infty$), tad

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot\varphi(x))=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\left(\dfrac{1}{\varphi(x)}\right)'}$$

vai arī

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot\varphi(x))=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to a}\frac{(\varphi(x))'}{\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)'}.$$

Piemērs

$$\lim_{x\to 0}x\operatorname{ctg}x=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\dfrac{1}{\operatorname{ctg}x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg}x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 x}}=1$$

4. NENOTEIKTĪBA "0^0"

Ja pakāpes kāpinātājs ir bezgalīgi maza funkcija un arī bāze ir bezgalīgi maza funkcija, tad saka, ka šāda pakāpe ir nenoteikta izteiksme "0^0", t. i., ja $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ un $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$, tad

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{\varphi(x)}=(0^0).$$

Aprēķinot šādas izteiksmes robežu, lieto logaritmisko identitāti $a^{\log_a b}=b$, kuras atsevišķs gadījums ir $e^{\ln b}=b$.

Līdz ar to, ja $f(x)>0$, tad $f(x)=e^{\ln f(x)}$.

Tādējādi, izmantojot šo identitāti un nepārtrauktas funkcijas īpašību, robežas aprēķinu veic šādi:

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{\varphi(x)}=(0^0)=\lim_{x\to a}(e^{\ln f(x)})^{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}e^{\varphi(x)\cdot\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}(\varphi(x)\cdot\ln f(x))}.$$

Acīmredzot *kāpinātājā ir nenoteikta izteiksme* "$0\cdot\infty$", kuru pārveido par nenoteiktu izteiksmi "$\frac{\infty}{\infty}$" vai arī "$\frac{0}{0}$" un pēc tam lieto Lopitāla likumu:

$$\lim_{x\to a}(\varphi(x)\cdot\ln f(x))=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to a}\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to a}\frac{(\ln f(x))'}{\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)'}.$$

Piemērs

$$\lim_{x\to\pi}(\sin x)^{\pi-x}=(0^0)=\lim_{x\to\pi}(e^{\ln\sin x})^{\pi-x}=\lim_{x\to\pi}(e^{(\pi-x)\ln\sin x})=e^{\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)\ln\sin x}$$

Atrodam

$$\lim_{x\to\pi}(\pi-x)\ln\sin x=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to\pi}\frac{\ln\sin x}{\frac{1}{\pi-x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\pi}\frac{(\ln\sin x)'}{\left(\frac{1}{\pi-x}\right)'}=\lim_{x\to\pi}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{(\pi-x)^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{(\pi-x)^2}{\operatorname{tg}x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\pi}\frac{((\pi-x)^2)'}{(\operatorname{tg}x)'}=\lim_{x\to\pi}\frac{-2(\pi-x)}{\frac{1}{\cos^2 x}}=-2\lim_{x\to\pi}(\pi-x)\cos^2 x=0.$$

Tātad $\lim\limits_{x\to\pi}(\sin x)^{\pi-x}=e^0=\underline{\underline{1}}$.

5. NENOTEIKTĪBA "1^∞"

Ja $\lim\limits_{x\to a}f(x)=1$ un $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$, tad pakāpe $(f(x))^{\varphi(x)}$, kad $x\to a$, ir nenoteikta izteiksme "1^∞".

Robežu $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{\varphi(x)}$ atrod analogi kā iepriekš aplūkotajā nenoteiktības "0^0" gadījumā:

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{\varphi(x)}=(1^\infty)=\lim_{x\to a}(e^{\ln f(x)})^{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}e^{\varphi(x)\cdot\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}(\varphi(x)\cdot\ln f(x))}.$$

Ja $\lim\limits_{x\to a}f(x)=1$, tad $\lim\limits_{x\to a}\ln f(x)=0$. Tāpēc

$$\lim_{x\to a}(\varphi(x)\cdot\ln f(x))=(\infty\cdot 0)=\lim_{x\to a}\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to a}\frac{(\ln f(x))'}{\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)'}.$$

Piemērs

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}=(1^\infty)=\lim_{x\to 0}(e^{\ln(1+\sin x)})^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\ln(1+\sin x)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{x}}.$$

Atrodam $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\ln(1+\sin x))'}{x'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{1+\sin x}}{1}=1.$

Tātad $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}=e^1=\underline{\underline{e}}$.

6. NENOTEIKTĪBA "$\infty - \infty$"

Divu bezgalīgi lielu funkciju starpība ir nenoteikta izteiksme "$\infty - \infty$". Atrodot šādas izteiksmes robežu, *doto funkciju starpību vispirms pārveido funkciju dalījuma formā*, lai iegūtu nenoteiktību "$\frac{0}{0}$" vai arī "$\frac{\infty}{\infty}$". Pēc tam lieto Lopitāla likumu vai arī kādu citu šo nenoteikto izteiksmju robežas aprēķināšanas paņēmienu.

Vispārīgā gadījumā pārveidojumus veic šādi:

ja $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ un $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)=\infty$, tad

$$\lim_{x\to a}(f(x)-\varphi(x))=(\infty-\infty)=\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{\varphi(x)}}\right)=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{\varphi(x)}}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to a}\frac{\left(\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{f(x)}\right)'}{\left(\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{\varphi(x)}\right)'}.$$

Tomēr jāatzīmē, ka, lietojot šo vispārīgo shēmu, parasti iegūst ļoti sarežģītas atvasinājumu izteiksmes. Tāpēc *ir lietderīgi izmantot citus funkciju starpības pārveidošanas paņēmienus* (saucēju vienādošanu, reizināšanu un dalīšanu ar algebriski saistīto izteiksmi, trigonometriskus pārveidojumus u. c.).

Piemēri

1. $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{x-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-x\ln x}{(x-1)\ln x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1-x\ln x)'}{((x-1)\ln x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-\ln x-x\cdot\frac{1}{x}}{\ln x+(x-1)\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{-\ln x}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=-\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{\left(\ln x+1-\frac{1}{x}\right)'}=$$

$$=-\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=-\frac{1}{2}$$

2. $$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-1}-x)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2-1}-x)(\sqrt{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^2-1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0$$

3. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x\sin x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(\sin x+x\cos x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=0$$

9.3. §. FUNKCIJAS DIFERENCIĀLIS

1. DIFERENCIĀĻA JĒDZIENA ĢEOMETRISKĀ ILUSTRĀCIJA

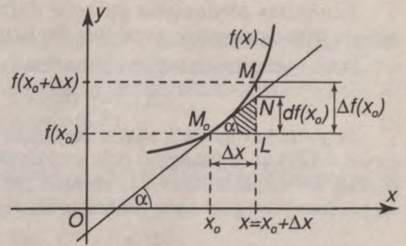
Aplūkosim augošu funkciju $f(x)$, kuras grafiks ir ieliekta līnija (63. zīm.). Pieņemsim, ka šai funkcijai punktā x_0 eksistē atvasinājums, tātad funkcijas grafikam punktā $M_0(x_0; f(x_0))$ eksistē pieskare. Aplūkosim argumenta vērtību $x=x_0+\Delta x$. Argumenta pieaugumam Δx atbilstošais funkcijas pieaugums $\Delta f(x_0)$ ir vienāds ar nogriežņa LM garumu. Šo nogriezni punktā M_0 novilktā pieskare sadala divās daļās: LN un NM. Tādējādi

$$LM=LN+NM. \quad (1)$$

Novērtēsim katru saskaitāmo atsevišķi. No taisnleņķa trijstūra M_0LN iegūstam:

$$LN=M_0L\cdot \operatorname{tg}\alpha=\Delta x\cdot f'(x_0)=f'(x_0)\Delta x.$$

Savukārt nogriežņa NM garums ir starpība starp funkcijas vērtību punktā x un pieskares punkta N ordinātu.



63. zīm.

Izraugoties skaitlim x_0 tuvāku argumenta vērtību x, t. i., samazinot Δx, samazinās gan nogrieznis LN, gan arī nogrieznis NM. Taču ļoti maziem Δx nogriežņa NM garums ir daudz mazāks nekā nogriežņa LN garums.

Tādējādi, ja Δx ir mazs lielums, tad vienādībā (1) LN *ir funkcijas pieauguma* $LM=\Delta f(x_0)$ *galvenā daļa*, bet $NM<<LN$. Tāpēc var uzskatīt, ka $LM\approx LN$ jeb

$$\Delta f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x. \quad (2)$$

Funkcijas pieauguma galveno daļu $f'(x_0)\Delta x$ sauc par funkcijas diferenciāli un apzīmē ar simbolu $df(x_0)$ jeb dy.

Kā redzams 63. zīmējumā, *funkcijas diferenciālis $df(x_0)$ ir vienāds ar funkcijas grafikam punktā $M_0(x_0; f(x_0))$ vilktās pieskares punkta ordinātas pieaugumu, ja abscisa ir palielināta par lielumu Δx.*

2. FUNKCIJAS DIFERENCIĀĻA DEFINĪCIJA UN GALVENĀS ĪPAŠĪBAS. JĒDZIENS PAR FUNKCIJAS DIFERENCĒJAMĪBU

Pieņemsim, ka funkcijai $f(x)$ punktā x_0 eksistē atvasinājums, t. i., eksistē robeža

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0).$$

Saskaņā ar secinājumu no robežas definīcijas iegūstam vienādību

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)+\gamma,$$

kur γ ir bezgalīgi mazs lielums, kad $\Delta x\to 0$. Tātad

$$\Delta f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\gamma\cdot\Delta x, \quad (3)$$

t. i., funkcijas pieaugumu var izteikt kā divu saskaitāmo summu (šo faktu ilustrē vienādība (1)).

Ja $\Delta x \to 0$, tad saskaitāmais $\gamma \cdot \Delta x$ kā divu bezgalīgi mazu lielumu reizinājums samazinās straujāk nekā $f'(x_0)\Delta x$.

Pārliecināsimies, ka $\gamma \cdot \Delta x$ ir augstākas kārtas bezgalīgi mazs lielums nekā $f'(x_0)\Delta x$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\gamma \cdot \Delta x}{f'(x_0)\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\gamma}{f'(x_0)} = 0, \quad \text{jo} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \gamma = 0 \quad \text{un} \quad f'(x_0) \neq 0.$$

Tātad $f'(x_0)\Delta x$ ir funkcijas pieauguma $\Delta f(x_0)$ galvenā daļa, bet $\gamma \Delta x$ ir augstākas kārtas bezgalīgi mazs lielums nekā galvenā daļa, kad $\Delta x \to 0$.

Definīcija

Funkcijas pieauguma galveno daļu, kas ir lineāra attiecībā pret argumenta pieaugumu Δx, sauc par funkcijas diferenciāli.

Funkcijas diferenciāli *apzīmē ar simbolu* $df(x_0)$ jeb dy. Tātad

$$df(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x \quad \text{jeb} \quad dy = y'\Delta x. \tag{4}$$

Ja $y = x$, tad $dy = x'\Delta x = \Delta x$. Ievietojot šajā vienādībā y vietā x, iegūstam, ka $dx = \Delta x$. Līdz ar to funkcijas diferenciāļa pierakstā argumenta pieauguma Δx vietā parasti lieto apzīmējumu dx, ko sauc par **argumenta diferenciāli**. Tādējādi no vienādības (4) iegūst šādu funkcijas diferenciāļa pierakstu:

$$df(x_0) = f'(x_0)\,dx \quad \text{jeb} \quad dy = y'dx. \tag{5}$$

Piemēram, ja $y = \sin x$, tad $dy = (\sin x)'dx = \cos x\,dx$.

No vienādības (5) iegūstam, ka

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} \quad \text{jeb} \quad y' = \frac{dy}{dx},$$

t. i., *funkcijas atvasinājums ir vienāds ar funkcijas diferenciāļa un argumenta diferenciāļa attiecību* (šo attiecību bieži lieto kā funkcijas atvasinājuma apzīmējumu).

Izmantojot atvasināšanas likumus, viegli pierādīt šādas **diferenciāļa īpašības**.

1) $d(u \pm v) = du \pm dv$
2) $d(uv) = vdu + udv$

Pierādīsim to. Pieņemsim, ka $u = u(x)$ un $v = v(x)$ ir funkcijas, kurām eksistē atvasinājums. Saskaņā ar formulu (5) iegūstam:

$$d(uv) = (uv)'\,dx = (u'v + uv')\,dx = vu'dx + uv'dx = vdu + udv. \quad \square$$

3) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$

4) **Diferenciāļa formas invariance**

Ja funkcijas $y = f(u)$ un $u = \varphi(x)$ veido saliktu funkciju $y = f(\varphi(x))$ un šīm funkcijām eksistē atvasinājums, tad iegūstam šādu saliktas funkcijas diferenciāļa izteiksmi:

$$dy = (f(\varphi(x)))'\,dx = f'_u(u) \cdot \varphi'(x)\,dx = f'_u(u)\,du.$$

Tātad, ja $y = f(u)$, kur $u = \varphi(x)$, tad $dy = f'(u)\,du$.

Tādējādi varam secināt, ka ***funkcijas diferenciāļa forma nav atkarīga no tā, vai arguments ir neatkarīgs mainīgs lielums vai arī tas ir kāda cita mainīga lieluma funkcija***. Šo īpašību sauc par diferenciāļa formas **invarianci** *.

---

* Latīņu izcelsmes vārds «invariants» nozīmē «nemainīgs», t. i., lielums, kas nemainās, ja izdara pārveidojumus.

Noskaidrojot diferenciāļa jēdzienu, konstatējām, ka funkcijas pieauguma izteiksmē (3) $\gamma\Delta x$ ir augstākas kārtas bezgalīgi mazs lielums nekā funkcijas pieauguma galvenā daļa $f'(x_0)\Delta x$.

Bet $\gamma\Delta x$ kā divu bezgalīgi mazu lielumu reizinājums ir arī augstākas kārtas bezgalīgi mazs lielums nekā Δx, kad $\Delta x \to 0$. Patiešām,

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\gamma\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \gamma = 0, \quad \text{t. i.,} \quad \gamma\Delta x = o(\Delta x).$$

Tātad no vienādības (3) iegūstam šādu funkcijas pieauguma izteiksmi:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x). \tag{6}$$

Definīcija

Ja funkcijas pieaugumu var izteikt kā divu saskaitāmo summu, no kuriem viens saskaitāmais ir proporcionāls argumenta pieaugumam Δx, bet otrs saskaitāmais ir augstākas kārtas bezgalīgi mazs lielums nekā Δx, t. i., ja

$$\Delta f(x_0) = k\cdot\Delta x + o(\Delta x), \tag{7}$$

tad saka, ka funkcija ir diferencējama.

Var pierādīt, ka proporcionalitātes koeficients vienādībā (7) ir funkcijas atvasinājums punktā x_0, t. i., $k = f'(x_0)$.

3. FUNKCIJAS DIFERENCIĀĻA LIETOJUMI

Funkcijas diferenciāļa jēdziens ir viens no matemātiskās analīzes pamatjēdzieniem. Vēsturiski tas izveidojās saistībā ar priekšstatu par bezgalīgi maziem lielumiem, kurus 17.–18. gs. lietoja, risinot dažādus fizikas, astronomijas, mehānikas un ģeometrijas uzdevumus. Šo risinājumu pamatā bija dažādu tuvinātu aprēķinu un sakarību izmantošana.

Aplūkosim dažus diferenciāļa lietojumu piemērus tuvinātos aprēķinos.

a) funkcijas vērtības tuvināta aprēķināšana

Pieņemsim, ka punktā $x_0 + \Delta x$ ir jāaprēķina funkcijas $f(x)$ vērtība $f(x_0 + \Delta x)$, pie tam funkcijas vērtība punktā x_0 ir zināma vai arī to var viegli aprēķināt (sk. 63. zīm.). Kā zināms,

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f(x_0).$$

Ja Δx modulis ir mazs, tad var uzskatīt, ka funkcijas pieaugums $\Delta f(x_0)$ ir aptuveni vienāds ar tā galveno daļu – diferenciāli, t. i.,

$$\Delta f(x_0) \approx df(x_0) = f'(x_0)\Delta x.$$

Tādējādi iegūst aptuvenu vienādību

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x, \tag{8}$$

kuru var lietot funkcijas vērtības tuvinātai aprēķināšanai.

Piemēri

1. Aprēķināt aptuvenu funkcijas $f(x) = x\sqrt{1+x}$ vērtību punktā 3,004.

Argumenta vērtību 3,004 var izteikt kā summu $3 + 0{,}004$. Tātad $x_0 = 3$, bet argumenta pieaugums $\Delta x = 0{,}004$ ir relatīvi mazs skaitlis.

Atrodam $f(x_0) = f(3) = 3\sqrt{1+3} = 6$, $f'(x) = (x\sqrt{1+x})' = \sqrt{1+x} + \dfrac{x}{2\sqrt{1+x}}$,

$f'(x_0) = f'(3) = 2 + \dfrac{3}{4} = 2{,}75.$

Izmantojot aptuveno vienādību (8), iegūstam, ka

$$f(3{,}004) \approx 6+2{,}75\cdot 0{,}004=6{,}011.$$

2. Aprēķināt aptuvenu $\operatorname{arctg} 0{,}97$ **vērtību.**

Šeit $f(x)=\operatorname{arctg} x$. Tā kā skaitli 0,97 var izteikt kā starpību $1-0{,}03$, tad $x_0=1$ un $\Delta x=-0{,}03$. Atrodam

$$f(x_0)=\operatorname{arctg} 1=\frac{\pi}{4},\quad f'(x)=(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2},\quad f'(x_0)=f'(1)=0{,}5,$$

$$f'(x_0)\,\Delta x=0{,}5\cdot(-0{,}03)=-0{,}015.$$

Ievietojot šos skaitļus formulā (8), atrodam, ka

$$\operatorname{arctg} 0{,}97 \approx \frac{\pi}{4}-0{,}015 \approx \frac{3{,}14159}{4}-0{,}015=0{,}7704.$$

(Salīdzināsim aprēķināto aptuveno funkcijas vērtību ar skaitli, ko iegūst, izmantojot kalkulatoru: $\operatorname{arctg} 0{,}97 \approx 0{,}77017091$.)

b) funkcijas pieauguma tuvināta aprēķināšana; diferenciāļa lietojums kļūdu teorijā

Funkcijas diferenciāli bieži lieto funkcijas pieauguma tuvinātai aprēķināšanai. Jau iepriekš aplūkotajā funkcijas vērtības tuvinātā aprēķinā izmantojām ideju, ka funkcijas pieaugums ir aptuveni vienāds ar tā galveno daļu – diferenciāli, ja vien argumenta pieauguma Δx modulis ir pietiekami mazs, t. i.,

$$\Delta f(x_0) \approx df(x_0)=f'(x_0)\,\Delta x. \tag{9}$$

Piemēram, ja funkcijas $f(x)=\sqrt{x}$ arguments mainās no vērtības $x_0=4$ līdz $x=4{,}41$, tad argumenta pieaugums $\Delta x=0{,}41$ ir mazs skaitlis un funkcijas pieaugumu tuvināti var aprēķināt ar diferenciāļa izteiksmi (9).

Tā kā $f'(x)=(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ un $f'(x_0)=f'(4)=\dfrac{1}{2\sqrt{4}}=\dfrac{1}{4}$, tad $\Delta f(4)\approx\dfrac{1}{4}\cdot 0{,}41=0{,}1025$.

(Salīdzināsim iegūto skaitli ar funkcijas pieauguma precīzo vērtību: $\Delta f(4)=$ $=\sqrt{4{,}41}-\sqrt{4}=2{,}1-2=0{,}1$.)

Funkcijas pieauguma tuvināto formulu (9) plaši lieto kļūdu teorijā rezultāta kļūdas novērtēšanai. Aplūkosim galvenos jēdzienus, kurus lietosim turpmākajos spriedumos.

Pētot kādu parādību, veicot eksperimentu vai strādājot laboratorijas darbu, nepieciešams izdarīt dažādus mērījumus – noteikt ķermeņa masu, temperatūru, garumu, strāvas stiprumu u. tml. Atkārtojot vairākas reizes vienu un to pašu mērījumu, parasti iegūst dažādus skaitļus. Tā iemesls ir mērīšanas kļūdas, kuru ietekmi praktiski nav iespējams novērst. Tātad *mērīšanas rezultāts ir mainīgs lielums.*

Ja mērāmā lieluma patiesā vērtība ir a, bet izmērītā vērtība ir x, tad starpību $|a-x|$ sauc par mērījuma absolūto kļūdu.

Tā kā patiesā vērtība a nav zināma, tad nav iespējams atrast arī absolūto kļūdu. Taču parasti var novērtēt maksimālo iespējamo absolūto kļūdu, ko sauc par **absolūtās kļūdas robežu**. Absolūtās kļūdas robežu apzīmēsim ar Δx. Tātad

$$|a-x| \leqslant \Delta x.$$

Piemēram, ja, mērot spriegumu, voltmetra iedaļas vērtība ir 2 V, tad šo skaitli var pieņemt par mērīšanas maksimālo absolūto kļūdu. Tomēr absolūtā kļūda vien neraksturo mērījuma kvalitāti. Piemēram, ja, mērot galda garumu un grāmatas lapas garumu, kļūdāmies par 1 cm, tad otrais mērījums ir nekvalitatīvāks, salīdzinot ar pirmo. Tāpēc mērījuma raksturošanai lieto arī **relatīvo kļūdu** – absolūtās kļūdas attiecību pret izmērīto lielumu:

$$\frac{|a-x|}{x} \leqslant \frac{\Delta x}{x}.$$

Relatīvo kļūdu parasti izsaka procentos.

Piemēram, ja izmērītais spriegums ir (50 ± 2) V, tad šī mērījuma relatīvā kļūda ir

$$\frac{2}{50}=0{,}04=4\,\%.$$

Pieņemsim, ka $y=f(x)$ ir formula, pēc kuras aprēķina lielumu y, ja lieluma x vērtība ir x_0 un tā ir izmērīta ar maksimālo absolūto kļūdu Δx, t. i., $x=x_0\pm\Delta x$.

Aprēķinot pēc dotās formulas, iegūstam vērtību $y_0=f(x_0)$, kas arī ir noteikta ar zināmu kļūdu Δy.

Lai novērtētu šo kļūdu, lieto funkcijas diferenciāli. Aprēķinātā lieluma absolūtā kļūda Δy ir funkcijas $y=f(x)$ pieauguma modulis, ja arguments ir mainījies par lielumu Δx. Tā kā mērīšanas maksimālā kļūda Δx ir mazs skaitlis, tad Δy ir aptuveni vienāds ar funkcijas diferenciāļa dy moduli. Tādējādi iegūstam šādu *aprēķinātā lieluma kļūdas novērtējumu*:

$$\Delta y=|f(x_0+\Delta x)-f(x_0)|\approx|df(x_0)|=|f'(x_0)\Delta x|=|f'(x_0)|\,\Delta x.$$

Piemērs. **Aprēķināt lodes tilpumu, ja, izmērot rādiusu $R=12$ cm, tiek pieļauta mērīšanas kļūda par 1 mm, t. i., $R=(12\pm0{,}1)$ cm.**

Pēc lodes tilpuma formulas $V=\frac{4}{3}\pi R^3$, ja $R=12$ cm, atrodam, ka $V=2304\pi$.

Lai noteiktu, ar kādu kļūdu ir atrasts tilpums, atrodam funkcijas $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ diferenciāli, uzskatot, ka R ir mainīgs lielums:

$$dV=\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)'\Delta R=4\pi R^2\cdot\Delta R.$$

Tā kā $R=12$ un $\Delta R=0{,}1$, tad $dV=4\pi 12^2\cdot0{,}1=57{,}6\pi$. Tātad aprēķinātā lodes tilpuma *absolūtā kļūda* $\Delta V\approx57{,}6\pi$ cm^3, bet *relatīvā kļūda* $\frac{\Delta V}{V}\approx\frac{57{,}6\pi}{2304\pi}=0{,}025=2{,}5\,\%$.

4. AUGSTĀKU KĀRTU DIFERENCIĀĻI

Pieņemsim, ka funkcijai $y=f(x)$, kuras arguments x ir neatkarīgs mainīgs lielums ($f(x)$ nav salikta funkcija), eksistē atvasinājumi

$$f'(x), f''(x), f^{(3)}(x), \dots, f^{(n)}(x).$$

Funkcijas diferenciālis $dy=f'(x)\,dx$ arī ir argumenta x funkcija, tāpēc ir jēga aplūkot funkcijas $f'(x)\,dx$ pieauguma galveno daļu – diferenciāli.

Definīcija

Funkcijas $y=f(x)$ diferenciāļa diferenciāli sauc par šīs funkcijas otrās kārtas diferenciāli; to apzīmē ar simbolu d^2y.

Tātad $d^2y=d\,(dy)=d\,(f'(x)\,dx)=(f'(x)\,dx)'\cdot dx=(f'(x))'dx\cdot dx=f''(x)\,dx^2$.

No vienādības $d^2y=f''(x)\,dx^2$ iegūstam funkcijas 2. kārtas atvasinājuma izteiksmi kā 2. kārtas diferenciāļa d^2y un argumenta diferenciāļa kvadrāta $(dx)^2=dx^2$ dalījumu:

$$f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Analogi definē 3., 4. un vispārīgi n-tās kārtas diferenciāli:

$$d^3y = d(d^2y) = d(f''(x)\,dx^2) = (f''(x)\,dx^2)' \cdot dx =$$
$$= (f''(x))' \cdot dx^2 \cdot dx = f^{(3)}(x)\,dx^3.$$

No šīs vienādības iegūstam, ka

$$f^{(3)}(x) = \frac{d^3y}{dx^3}.$$

Tātad *funkcijas $y=f(x)$ n-tās kārtas diferenciālis ir šīs funkcijas $(n-1)$-ās kārtas diferenciāļa diferenciālis*:

$$d^ny = d(d^{n-1}y) = d(f^{(n-1)}(x) \cdot dx^{n-1}) = (f^{(n-1)}(x)\,dx^{n-1})'\,dx =$$
$$= (f^{(n-1)}(x))'\,dx^{n-1} \cdot dx = f^{(n)}(x)\,dx^n,$$

no kurienes

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Piezīmes. Izpildot šos pārveidojumus, izmantojām nosacījumu, ka dx, dx^2, ..., dx^{n-1} ir no x neatkarīgi lielumi, un tāpēc, atvasinot reizinājumu, tos kā konstantus reizinātājus var ņemt pirms iekavām.

Ja $y=f(x)$ ir salikta funkcija, t. i., $x=\varphi(t)$, tad dx nav konstants lielums un saskaņā ar diferenciāļa īpašību

$$d(f'(x) \cdot dx) = d(f'(x)) \cdot dx + f'(x) \cdot d(dx) = f''(x)\,dx^2 + f'(x)\,d^2x.$$

Tas nozīmē, ka *saliktu funkciju augstāku kārtu diferenciāļiem nav spēkā diferenciāļa formas invariance.*

9.4.§. TEILORA FORMULA

1. JĒDZIENS PAR FUNKCIJAS APROKSIMĒŠANU AR POLINOMU

Aplūkojot funkcijas diferenciāļa lietojumus, ieguvām šādu aptuvenu vienādību funkcijas vērtību tuvinātai aprēķināšanai:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x.$$

Ja šajā vienādībā ievietojam $\Delta x = x - x_0$ un $x_0 + \Delta x = x$, tad funkcijas vērtība punktā x

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{1}$$

Salīdzinot iegūto vienādību ar funkcijas $f(x)$ grafikam punktā $(x_0; f(x_0))$ novilktās pieskares vienādojumu

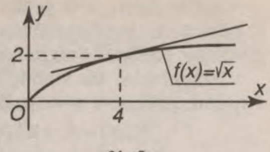
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \tag{2}$$

redzam, ka *funkcijas vērtība punktā x ir aptuveni vienāda ar pieskares atbilstošā punkta ordināti, ja tikai punkts x atrodas pietiekami tuvu punktam x_0.*

Piemēram, ja $f(x)=\sqrt{x}$ un $x_0=4$, tad $f(x_0)=\sqrt{4}=2$, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$ un pieskares vienādojums (2) ir šāds:

$$y = 2 + \frac{1}{4}(x-4) \quad \text{jeb} \quad y = \frac{1}{4}x + 1. \tag{3}$$

64. zīmējumā attēlots funkcijas $f(x)=\sqrt{x}$ grafiks un punktā (4; 2) novilktā pieskare. Kā redzams, punkta $x_0=4$ apkārtnē funkcijas grafiks maz novirzās no pieskares. Tāpēc pieskares vienādojumu var izmantot funkcijas $f(x)=\sqrt{x}$ vērtību tuvinātai aprēķināšanai ar tādām argumenta vērtībām, kas ir tuvu skaitlim 4. Piemēram, ja $x=4{,}41$, tad, izmantojot grafika pieskares vienādojumu (3), atrodam, ka



64. zīm.

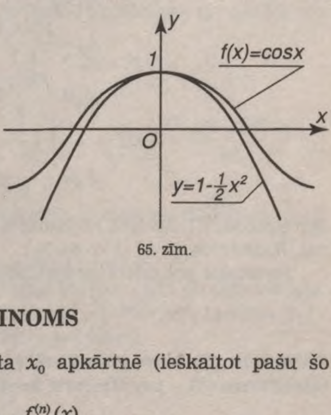
$$y\Big|_{x=4{,}41}=2+\frac{1}{4}(4{,}41-4)=2{,}1025.$$

Salīdzinot iegūto skaitli ar funkcijas $f(x)=\sqrt{x}$ precīzo vērtību šajā punktā $\sqrt{4{,}41}=2{,}1$, redzam, ka aptuvenā aprēķina absolūtā kļūda ir tikai 0,0025.

Tātad, *ja funkcijai* $f(x)$ *punktā* x_0 *eksistē galīgs atvasinājums un* $f(x_0)$, $f'(x_0)$ *vērtības var viegli aprēķināt, tad punktā x, kas atrodas pietiekami tuvu punktam* x_0, *funkcijas vērtību var aprēķināt tuvināti, izmantojot punktā* $(x_0; f(x_0))$ *novilktās grafika pieskares vienādojumu* (2), kura labās puses izteiksme ir 1. pakāpes polinoms. Tādējādi funkciju aizstāj (aizvieto) ar 1. pakāpes polinomu. ***Šādu funkcijas aizvietošanu ar polinomu sauc par aproksimēšanu****.

Tomēr aproksimācija ar 1. pakāpes polinomu kaut cik precīzus rezultātus dod tikai tad, ja punkta x_0 apkārtnē funkcijas grafika liekums ir ļoti mazs, t. i., grafiks maz novirzās no pieskares un punkts x ir pietiekami tuvu punktam x_0. Intuitīvi ir skaidrs, ka funkcijas grafiku – līkni precīzāk var aproksimēt ar liektu līniju, kas ir kāda augstākas pakāpes polinoma grafiks.

Piemēram, funkcijas $f(x)=\cos x$ grafika daļa kādā punkta $x_0=0$ apkārtnē ir līdzīga parabolai, kuras vienādojuma $y=1-\frac{1}{2}x^2$ labās puses izteiksme ir 2. pakāpes polinoms (65. zīm.). Turpmākajā vielas izklāstā aplūkosim funkcijas aproksimāciju punkta x_0 apkārtnē ar n-tās pakāpes polinomu.



65. zīm.

2. TEILORA POLINOMS

Pieņemsim, ka funkcijai $f(x)$ kādā punkta x_0 apkārtnē (ieskaitot pašu šo punktu) eksistē atvasinājumi

$$f'(x),\ f''(x),\ f^{(3)}(x),\ \ldots,\ f^{(n)}(x).$$

Jāatrod tāds n-tās pakāpes polinoms

$$P_n(x)=A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+\ldots+A_n(x-x_0)^n, \tag{4}$$

lai būtu spēkā vienādības:

$$\begin{gathered} f(x_0)=P_n(x_0),\ f'(x_0)=P_n'(x_0),\ f''(x_0)=P_n''(x_0), \\ f^{(3)}(x_0)=P_n^{(3)}(x_0),\ \ldots,\ f^{(n)}(x_0)=P_n^{(n)}(x_0). \end{gathered} \tag{5}$$

* Latīņu vārds «approximare» nozīmē «tuvoties». Aproksimācija ir kāda matemātiska objekta: skaitļa, funkcijas, vienādojuma aizstāšana ar citu, vienkāršāku objektu. Ar aproksimācijas ideju matemātikā ir saistītas tuvināto aprēķinu metodes; šajā gadījumā – funkcijas vērtību tuvināta aprēķināšana.

Acīmredzot, ja ir spēkā vienādības (5), tad funkcijas $f(x)$ un polinoma $P_n(x)$ grafikiem ir kopīgs punkts $(x_0;\ f(x_0))$, šajā punktā abiem grafikiem ir kopīga pieskare, pieskares virziena koeficients mainās ar vienādu ātrumu utt.

Izmantosim šīs vienādības, lai noteiktu polinoma (4) koeficientus. Vispirms atrodam polinoma atvasinājumus:

$$P_n'(x)=A_1+2A_2(x-x_0)+3A_3(x-x_0)^2+\ldots+nA_n(x-x_0)^{n-1},$$
$$P_n''(x)=1\cdot 2A_2+2\cdot 3A_3(x-x_0)+\ldots+n(n-1)A_n(x-x_0)^{n-2},$$
$$P_n^{(3)}(x)=1\cdot 2\cdot 3A_3+\ldots+n(n-1)(n-2)A_n(x-x_0)^{n-3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1A_n.$$

Ievietojot polinomā un tā atvasinājumos x vietā x_0 un ievērojot vienādības (5), iegūstam:

$$P_n(x_0)=A_0=f(x_0),$$
$$P_n'(x_0)=A_1=f'(x_0),$$
$$P_n''(x_0)=1\cdot 2A_2=f''(x_0),$$
$$P_n^{(3)}(x_0)=1\cdot 2\cdot 3A_3=f^{(3)}(x_0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_n^{(n)}(x_0)=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot nA_n=f^{(n)}(x_0).$$

No šīm vienādībām atrodam polinoma $P_n(x)$ koeficientus A_i $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$:

$$\begin{aligned} A_0&=f(x_0),\\ A_1&=f'(x_0),\\ A_2&=\frac{f''(x_0)}{1\cdot 2}=\frac{f''(x_0)}{2!},\\ A_3&=\frac{f^{(3)}(x_0)}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{f^{(3)}(x_0)}{3!},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ A_n&=\frac{f^{(n)}(x_0)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n}=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}. \end{aligned} \tag{6}$$

(Ar simbolu $n!$, ko lasa «n faktoriāls», apzīmē pirmo n naturālo skaitļu reizinājumu. Piemēram, $4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$.)

Ievietojot polinomā (4) koeficientu izteiksmes (6), iegūstam:

$$P_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{7}$$

***Polinomu* (7) *sauc par funkcijas* $f(x)$ *Teilora polinomu**, *bet koeficientu izteiksmes* (6) – *par Teilora koeficientiem*.**

3. TEILORA FORMULAS ATLIKUMA LOCEKLIS

Teilora polinoma (7) un funkcijas $f(x)$ vērtības ir vienādas tikai punktā x_0. Citā punktā x šīs vērtības vispārīgā gadījumā nav vienādas.

Apzīmēsim funkcijas vērtības $f(x)$ un polinoma vērtības $P_n(x)$ starpību ar $R_n(x)$:

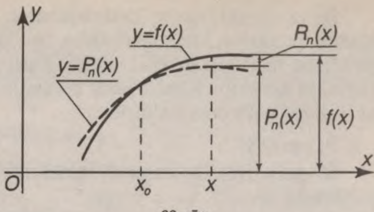
$$R_n(x)=f(x)-P_n(x). \tag{8}$$

* Bruks Teilors (1685–1731) – angļu matemātiķis.

Lielumu $R_n(x)$ sauc par Teilora formulas atlikuma locekli, un tas ir atkarīgs no polinoma pakāpes n un punkta x.

Atlikuma locekļa ģeometriskā nozīme parādīta 66. zīmējumā: $R_n(x)$ ir funkcijas grafika novirze no polinoma grafika punktā x.

Tā kā $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$, tad, izmantojot Teilora polinoma izteiksmi (7), iegūstam:



66. zīm.

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x). \quad (9)$$

Vienādību (9) sauc par Teilora formulu.

Lietojot šo formulu, izmanto vairākas atlikuma locekļa $R_n(x)$ izteiksmes. Aplūkosim divas no tām.

a) **Teilora formulas atlikuma loceklis Peāno formā**

Aplūkojot 66. zīmējumu, intuitīvi ir skaidrs, ka lielums $R_n(x)$, kas izsaka funkcijas $f(x)$ grafika novirzi no polinoma $P_n(x)$ grafika punktā x, samazinās, ja $x\to x_0$. Pie tam $R_n(x)$ ir daudz mazāks lielums nekā attālums starp punktiem x_0 un x.

Var pierādīt, ka $R_n(x)$ ***ir augstākas kārtas bezgalīgi mazs lielums nekā $(x-x_0)^n$, kad $x\to x_0$***, t. i.,

$$R_n(x)=o((x-x_0)^n). \quad (10)$$

Patiešām, tā kā $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$, tad, ievērojot vienādības (5) un lietojot Lopitāla likumu, atrodam:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-P_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-P_n''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\ldots=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)-P_n^{(n)}(x)}{n!}=0.$$

Tātad $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$, kad $x\to x_0$.

Šo izteiksmi sauc par Teilora formulas atlikuma locekļa novērtējumu Peāno formā.*

b) **Teilora formulas atlikuma loceklis Lagranža formā**

Šī paragrāfa sākumā noskaidrojām, ka funkcijas vērtība kādā punktā x mazāk atšķiras no Teilora polinoma $P_n(x)$ vērtības šajā punktā jeb atlikuma loceklis $R_n(x)$ ir mazāks, ja ir sastādīts augstākas pakāpes Teilora polinoms.

Ja Teilora polinoma pakāpe ir n, tad tā pēdējais loceklis ir

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Var pierādīt, ka ***analoga izteiksme ir arī n-tās pakāpes Teilora formulas atlikuma loceklim***:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad (11)$$

kur c ir skaitlis, kas atrodas starp x_0 un x.

Vienādību (11) sauc par Teilora formulas atlikuma locekļa izteiksmi Lagranža formā.

---

* Džuzepe Peāno (1858–1932) – itāļu matemātiķis.

Šo izteiksmi nevar tieši izmantot, lai aprēķinātu atlikuma locekli, jo nav zināms punkts c, kurā jāaprēķina $(n+1)$-kārtas atvasinājuma vērtība. Taču ar tās palīdzību bieži var noteikt skaitli, kuru nepārsniedz $R_n(x)$. Līdz ar to var novērtēt tuvinātā aprēķina kļūdu, kāda rodas, ja funkcijas vērtību punktā x tuvināti atrod ar Teilora polinoma palīdzību.

Piemērs

Šī paragrāfa 1. punktā atradām $f(x)=\sqrt{x}$ grafika pieskares vienādojumu punktā (4; 2):

$$y=2+\frac{1}{4}(x-4).$$

Viegli pārliecināties, ka šī vienādojuma labās puses izteiksme ir dotās funkcijas 1. pakāpes Teilora polinoms punktā $x_0=4$.

Pēc formulas (9) atradīsim šīs funkcijas 3. pakāpes Teilora polinomu punktā $x_0=4$. Šajā nolūkā vispirms atrodam funkcijas atvasinājumus $f'(x), f''(x), f^{(3)}(x)$ un aprēķinām šo atvasinājumu vērtības punktā $x_0=4$:

$$f'(x)=(\sqrt{x})'=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$f''(x)=\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)'=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}},$$

$$f^{(3)}(x)=\left(-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\right)'=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}=\frac{3}{8\sqrt{x^5}},$$

$$f(x_0)=\sqrt{4}=2,\quad f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4},\quad f''(x_0)=-\frac{1}{4\sqrt{4^3}}=-\frac{1}{32},$$

$$f^{(3)}(x_0)=\frac{3}{8\sqrt{4^5}}=\frac{3}{256}.$$

Ievietojot vienādībā (9) funkcijas un atvasinājumu vērtības, iegūstam funkcijas $f(x)=\sqrt{x}$ izvirzījumu pēc Teilora formulas:

$$\begin{aligned}\sqrt{x}&=2+\frac{1}{4\cdot 1!}(x-4)-\frac{1}{32\cdot 2!}(x-4)^2+\frac{3}{256\cdot 3!}(x-4)^3+R_3(x)=\\ &=2+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{64}(x-4)^2+\frac{1}{512}(x-4)^3+R_3(x),\end{aligned}\tag{12}$$

kur $R_3(x)$ ir Teilora formulas atlikuma loceklis.

Aprēķināsim tuvināti $\sqrt{6}$ vērtību:

$$\sqrt{6}\approx 2+\frac{1}{4}(6-4)-\frac{1}{64}(6-4)^2+\frac{1}{512}(6-4)^3\approx 2{,}4394531$$

(ar kalkulatoru atrastā skaitļa 6 kvadrātsaknes vērtība ir 2,4494897).

4. MAKLORENA FORMULA

Praksē bieži lieto funkcijas Teilora formulas izteiksmi, kas sastādīta koordinātu sākumpunktā. Šo izteiksmi iegūst, ievietojot vienādībā (9) x_0 vietā skaitli 0. Tad iegūstam formulu

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x).\tag{13}$$

***Vienādību* (13) *sauc par Maklorena formulu**.**

Vairākām funkcijām ir sastādīti izvirzījumi pēc Maklorena formulas. Šos izvirzījumus kā formulas bieži lieto tuvinātos aprēķinos, dažādos novērtējumos un pierādījumos.

Aplūkosim dažu elementāro pamatfunkciju izvirzījumus.

a) **Funkcijas $f(x)=e^x$ izvirzījums pēc Maklorena formulas**

Tā kā $f'(x)=(e^x)'=e^x$, $f''(x)=f^{(3)}(x)=\ldots=f^{(n)}(x)=e^x$, tad $f(0)=f'(0)=f''(0)=$ $=f^{(3)}(0)=\ldots=f^{(n)}(0)=e^0=1$ un saskaņā ar formulu (13) iegūstam šādu izvirzījumu:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x), \tag{14}$$

$$n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots .$$

b) **Funkcijas $f(x)=\sin x$ izvirzījums pēc Maklorena formulas**

Atrodam funkcijas atvasinājumus:

$f'(x)=(\sin x)'=\cos x$, $f''(x)=(\cos x)'=-\sin x$,

$f^{(3)}(x)=(-\sin x)'=-\cos x$, $f^{(4)}(x)=(-\cos x)'=\sin x$ utt.

Nosakām sinusa funkcijas un tās atvasinājumu vērtības punktā $x=0$:

$f(0)=\sin 0=0, f'(0)=\cos 0=1$, $f''(0)=-\sin 0=0$,

$f^{(3)}(0)=-\cos 0=-1$, $f^{(4)}(0)=\sin 0=0$ utt.

Ievietojot šos skaitļus formulā (13), redzams, ka funkcijas izvirzījums satur tikai x pakāpes ar nepāra kāpinātājiem, pie tam koeficienta zīme periodiski mainās no plusa uz mīnusu:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+R_n(x), \tag{15}$$

$$n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots .$$

c) **Funkcijas $f(x)=\cos x$ izvirzījums pēc Maklorena formulas**

Atrodam kosinusa funkcijas atvasinājumus:

$f'(x)=(\cos x)'=-\sin x$, $f''(x)=(-\sin x)'=-\cos x$,

$f^{(3)}(x)=(-\cos x)'=\sin x$, $f^{(4)}(x)=(\sin x)'=\cos x$ utt.

Kosinusa funkcijas un tās atvasinājumu vērtības punktā $x=0$ ir šādas:

$f(0)=\cos 0=1$, $f'(0)=-\sin 0=0$, $f''(0)=-\cos 0=-1$,

$f^{(3)}(0)=\sin 0=0$, $f^{(4)}(0)=\cos 0=1$ utt.

Ievietojot šos skaitļus formulā (13), iegūstam kosinusa funkcijas izvirzījumu; šī izteiksme satur x pakāpes tikai ar pāra kāpinātājiem, bet koeficientu zīme periodiski mainās no plusa uz mīnusu:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+R_n(x), \tag{16}$$

$$n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots .$$

Funkciju izvirzījumus pēc Teilora formulas plaši lieto praksē. Viens no pielietojumu veidiem ir saistīts ar funkciju vērtību tuvinātu aprēķināšanu ar iepriekš dotu precizitāti. Tad, izmantojot Teilora formulas atlikuma locekļa izteiksmi, nosaka, cik locekļu jāņem Teilora polinomā, lai sasniegtu vajadzīgo precizitāti.

---

* Kolinzs Maklorens (1698–1746) – skotu matemātiķis, Teilora skolnieks.

Piemērs. **Aprēķināt skaitļa e aptuvenu vērtību ar precizitāti līdz** 0,001.

Ievietojot funkcijas e^x izvirzījumā (14) x vietā skaitli 1, iegūstam:

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{n!}+R_n(1). \tag{17}$$

Lai noskaidrotu, cik saskaitāmo jāņem izteiksmē (17), sastādām Teilora formulas atlikuma locekļa izteiksmi Lagranža formā (11). Tā kā

$$f^{(n+1)}(x)=e^x,\quad f^{(n+1)}(c)=e^c,\quad \text{tad}$$

$$R_n(x)=\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$$

un

$$R_n(1)=\frac{e^c}{(n+1)!},\quad \text{kur } 0<c<1.$$

Tā kā eksponentfunkcija e^x ir augoša un $0<c<1$, tad ir spēkā nevienādība $e^c<e^1$. Kā zināms, $e<3$; tāpēc $e^c<e<3$. Līdz ar to

$$\frac{e^c}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}.$$

Tādējādi esam noskaidrojuši, ka vajadzīgā precizitāte ir sasniegta, ja ir spēkā šādas nevienādības:

$$R_n(1)=\frac{e^c}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}<0{,}001.$$

Atrisinot nevienādību $\frac{3}{(n+1)!}<0{,}001$ jeb $(n+1)!>3000$, atrodam locekļu skaitu n Teilora polinomā. Tā kā $6!=720$, bet $7!=5040>3000$, tad secinām, ka $n+1=7$ jeb $n=6$. Tātad, lai sasniegtu vajadzīgo precizitāti 0,001, Teilora polinomā jāņem 6 locekļi:

$$e\approx1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}=2+0{,}5+0{,}1667+0{,}0417+0{,}0083=2{,}718.$$

Viegli ievērot, ka šajā piemērā, aprēķinot jebkura polinoma locekļa vērtību, var izmantot iepriekšējā locekļa vērtību. Piemēram, atrodot $\frac{1}{4!}=\frac{1}{3!4}$, iepriekšējā locekļa vērtība $\frac{1}{3!}$ ir jādala ar 4 utt. Šis apstāklis dod iespēju skaitļa e tuvinātai aprēķināšanai sastādīt vienkāršu skaitļošanas programmu.

Tomēr jāpiezīmē, ka ar Teilora formulu praktiski nav iespējams aprēķināt tuvinātu funkcijas vērtību ar jebkuru precizitāti. Pieņemsim, ka ir jāaprēķina ar ļoti augstu precizitātes pakāpi funkcijas vērtība tādā punktā, kas atrodas tālu no punkta x_0, kurā sastādīta Teilora formula. Tad Teilora polinomā ir jāņem ļoti daudz locekļu un to vērtības ir jāaprēķina ļoti precīzi. Izmantojot aprēķinos elektronisko skaitļotāju, jāievēro, ka aritmētiskās darbības tas var izpildīt tikai ar noteiktu precizitātes pakāpi. Piemēram, dalot skaitli 1 ar skaitli 3, iegūst tuvinātu vērtību 0,33333333, kas varbūt ir aprēķināta ļoti precīzi. Taču, ja, aprēķinot polinoma vērtību, ir jāsaskaita ļoti daudz šādu skaitļu, tad gala rezultāts var izrādīties nepietiekami precīzs. Tāpēc matemātikā ir izstrādātas arī citas funkciju aproksimēšanas metodes, kas dod iespēju samazināt šādu kļūdu ietekmi uz rezultāta precizitāti.

5. TEILORA FORMULAS DIFERENCIĀĻU FORMA

Pārveidosim Teilora formulas izteiksmi

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+$$

$$+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

izmantojot apzīmējumus $\Delta x=x-x_0$ un $\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)$:

$$\Delta f(x_0)=\frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x+\frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2+\frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}\Delta x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n+R_n(x).$$

Tā kā $\Delta x=dx$, $f'(x_0)\,dx=df(x_0)$, $f''(x_0)\,dx^2=d^2f(x_0)$, $\ldots$, $f^{(n)}(x_0)\,dx^n=d^nf(x_0)$, tad iegūstam Teilora formulas izteiksmi, kurā funkcijas $f(x)$ pieaugums punktā x_0 ir izteikts ar šīs funkcijas diferenciāļu palīdzību:

$$\Delta f(x_0)=\frac{1}{1!}df(x_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0)+\frac{1}{3!}d^3f(x_0)+\ldots+\frac{1}{n!}d^nf(x_0)+R_n(x). \tag{18}$$

Arī Teilora formulas atlikuma locekļa izteiksmi Lagranža formā

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

pārveido, izmantojot funkcijas $(n+1)$-ās kārtas diferenciāli:

$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(c),$$

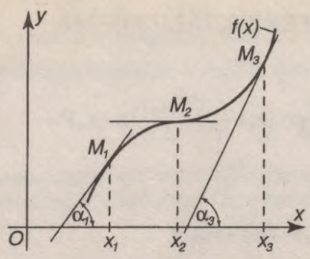
kur c ir kāds intervāla $(x_0;\ x_0+\Delta x)$ skaitlis; šo skaitli parasti izsaka šādi: $c=x_0+\Theta\Delta x$, kur $0<\Theta<1$.

9.5.§. PIRMĀS KĀRTAS ATVASINĀJUMA LIETOŠANA FUNKCIJU PĒTĪŠANĀ

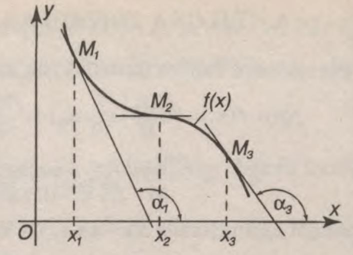
1. FUNKCIJAS MONOTONITĀTES PĒTĪŠANA

Viens no svarīgākajiem atvasinājuma lietojumiem ir saistīts ar funkcijas īpašību izpēti. Piemēram, izmantojot atvasinājumu, var noskaidrot, kuros definīcijas apgabala intervālos funkcija ir augoša un kuros – dilstoša. Priekšstatu par funkcijas monotonitātes pētīšanu ar atvasinājuma palīdzību var iegūt, aplūkojot funkcijas grafiku un grafikam novilktās pieskares. Tā 67. zīmējumā ir attēlots augošas funkcijas grafiks, kura punktos $M_1(x_1;\ f(x_1))$, $M_2(x_2;\ f(x_2))$, $M_3(x_3;\ f(x_3))$ novilktas pieskares.

Kā redzams, punktos M_1 un M_3 novilktās pieskares ar Ox asi veido šaurus leņķus α_1 un α_3, bet punktā M_2 novilktā pieskare ir paralēla Ox asij, un tās virziena leņķis $\alpha_2=0°$.



67. zīm.



68. zīm.

Tā kā $\alpha_1 < 90°$, $\alpha_2 = 0°$, $\alpha_3 < 90°$, tad $f'(x_1) = \mathrm{tg}\,\alpha_1 > 0$, $f'(x_2) = \mathrm{tg}\,\alpha_2 = 0$, $f'(x_3) = \mathrm{tg}\,\alpha_3 > 0$.

Turpretī 68. zīmējumā attēlotajam **dilstošas funkcijas grafikam** novilkto pieskaru virziena leņķi ir vai nu plati, vai arī vienādi ar nulli:

$\alpha_1 > 90°$, $\alpha_2 = 0°$, $\alpha_3 > 90°$. Tāpēc $f'(x_1) = \mathrm{tg}\,\alpha_1 < 0$, $f'(x_2) = \mathrm{tg}\,\alpha_2 = 0$, $f'(x_3) = \mathrm{tg}\,\alpha_3 < 0$.

Aplūkotie zīmējumi ģeometriski interpretē šādu **teorēmu**.

Ja funkcijai $f(x)$ kādā intervālā eksistē atvasinājums un tā ir augoša šajā intervālā, tad katrā intervāla punktā $f'(x) \geqslant 0$, bet, ja funkcija ir dilstoša, tad $f'(x) \leqslant 0$.

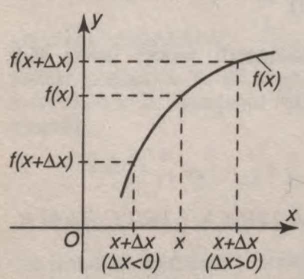
Pierādījums

Pieņemsim, ka *funkcija ir augoša* (69. zīm.) un x ir brīvi izraudzīts intervāla punkts. Aplūkosim funkcijas vērtības punktā x un punktā $x + \Delta x$.

Ja $\Delta x > 0$, tad $f(x+\Delta x) > f(x)$ un $\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) > 0$.

Tātad funkcijas pieauguma un argumenta pieauguma attiecība ir pozitīva:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} > 0.$$



69. zīm.

Ja $\Delta x < 0$, tad $f(x+\Delta x) < f(x)$ un $\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) < 0$.

Arī šajā gadījumā $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} > 0$.

Tādējādi, neatkarīgi no argumenta pieauguma Δx zīmes, funkcijas pieauguma un argumenta pieauguma attiecība ir lielāka nekā nulle; tāpēc šīs attiecības robeža, kad $\Delta x \to 0$, ir nenegatīva:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \geqslant 0.$$

Analogi pierāda, ka *dilstošai funkcijai* $f'(x) \leqslant 0$. □

Funkciju pētīšanā ļoti svarīga ir **apgrieztā teorēma**.

Ja funkcijai $f(x)$ kādā intervālā eksistē atvasinājums un visos intervāla punktos $f'(x) > 0$, tad funkcija šajā intervālā ir augoša, bet, ja $f'(x) < 0$, tad – dilstoša.

Pierādījums

Pieņemsim, ka $f'(x) > 0$, un brīvi izraudzīsimies divus aplūkojamā intervāla punktus $x_1 < x_2$.

Tā kā intervālā $[x_1; x_2]$ funkcija ir nepārtraukta un diferencējama, tad saskaņā ar Lagranža teorēmu (sk. 9.1. §) starp x_1 un x_2 eksistē vismaz viens tāds punkts c, ka ir spēkā vienādība

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1). \qquad (1)$$

Tā kā $x_1 < x_2$, tad $x_2 - x_1 > 0$. Pēc dotā arī $f'(c) > 0$.

Tātad no vienādības (1) izriet, ka

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \quad \text{jeb} \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Tādējādi ir pierādīts, ka lielākai argumenta vērtībai atbilst arī lielāka funkcijas vērtība, t. i., funkcija $f(x)$ ir augoša.

Analogi pierāda, ka funkcija ir dilstoša, ja $f'(x) < 0$. □

Šo teorēmu lieto, lai noteiktu funkcijas augšanas un dilšanas intervālus.

Piemērs. **Noteikt intervālus, kuros funkcija $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$ ir augoša un kuros – dilstoša.**

Atrodam funkcijas atvasinājumu $f'(x) = 3x^2 + 12x + 9$ un atrisinām nevienādību $f'(x) > 0$:

$$3x^2 + 12x + 9 > 0.$$

Tā kā kvadrāttrinoma saknes ir $x_1 = -3$ un $x_2 = -1$, tad, sadalot to reizinātājos, iegūstam:

$$3(x+3)(x+1) > 0.$$

Šīs nevienādības atrisinājumi ir visi reālie skaitļi, kas apmierina nevienādības $x < -3$ vai $x > -1$. Tātad dotā *funkcija ir augoša intervālos* $(-\infty; -3)$ un $(-1; +\infty)$.

Analogi, atrisinot nevienādību

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9 < 0,$$

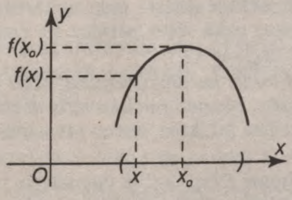
atrod, ka *funkcija ir dilstoša intervālā* $(-3; -1)$.

2. FUNKCIJAS MAKSIMUMA UN MINIMUMA PUNKTI

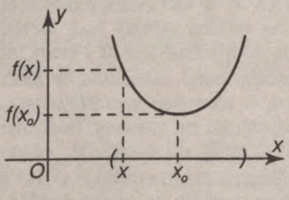
Definīcija

Punktu x_0 sauc par funkcijas $f(x)$ maksimuma punktu, ja šim punktam eksistē tāda apkārtne, ka ar visām x vērtībām no šīs apkārtnes ir spēkā nevienādība $f(x) \leqslant f(x_0)$ (70. zīm.).

Punktu x_0 sauc par funkcijas $f(x)$ minimuma punktu, ja šim punktam eksistē tāda apkārtne, ka ar visām x vērtībām no šīs apkārtnes ir spēkā nevienādība $f(x) \geqslant f(x_0)$ (71. zīm.).



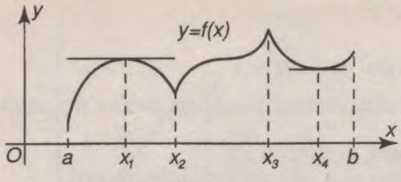
70. zīm.



71. zīm.

Maksimuma punktu un minimuma punktu kopīgs nosaukums ir **ekstrēma punkti***. 72. zīmējumā attēlotajai funkcijai intervālā $(a; b)$ ir četri ekstrēma punkti, no tiem x_1 un x_3 ir maksimuma punkti, bet x_2 un x_4 – minimuma punkti.

* Latīņu vārds «extremus» nozīmē «galējs».



72. zīm.

Secinājums no definīcijas

Ja funkcija ir definēta slēgtā intervālā $[a; b]$, tad ekstrēma punkti var būt tikai šī intervāla iekšējie punkti. Ne intervāla sākumpunkts a, ne galapunkts b nevar būt ekstrēma punkts, jo nevienam no šiem punktiem nav tādas apkārtnes, kas ietilpst definīcijas apgabalā $[a; b]$.

Atzīmēsim vēl, ka *ne vienmēr funkcijas vislielākā vērtība ir kādā no maksimuma punktiem*, jo vislielāko vērtību funkcija var pieņemt kādā no slēgta intervāla galapunktiem. Analogi *ne vienmēr funkcijas vismazākā vērtība ir kādā no minimuma punktiem*. Piemēram, 72. zīmējumā attēlotajai funkcijai vislielākā vērtība ir maksimuma punktā x_3, bet vismazākā vērtība – intervāla $[a; b]$ sākumpunktā a.

Dažkārt lieto arī terminu *lokāls maksimuma punkts* un *lokāls minimuma punkts*, ar to saprotot, ka šādā punktā funkcijai ir vislielākā vērtība vai vismazākā vērtība tikai kādā noteiktā (nelielā) šī punkta apkārtnē. Šādas apkārtnes var noteikt 72. zīmējumā ap lokālajiem ekstrēma punktiem x_1, x_2, x_3, x_4.

3. EKSTRĒMA EKSISTENCES NEPIECIEŠAMAIS NOSACĪJUMS

Aplūkojot 72. zīmējumu, redzams, ka funkcijas grafika punktos, kuru abscisas ir ekstrēma punkti x_1 un x_4, var novilkt Ox asij paralēlas pieskares. Tātad šo pieskaru virziena leņķi $\alpha_1 = \alpha_4 = 0°$. Tāpēc $f'(x_1) = \operatorname{tg}\alpha_1 = 0$ un arī $f'(x_4) = \operatorname{tg}\alpha_4 = 0$.

Savukārt grafika punkti, kuru abscisas ir x_2 un x_3, ir grafika lauzuma punkti. Tātad punktos x_2 un x_3 atvasinājums neeksistē.

Līdz ar to esam aplūkojuši ģeometrisko interpretāciju šādai ekstrēma eksistences nepieciešamo nosacījumu **teorēmai.**

Ja punkts x_0 ir funkcijas $f(x)$ ekstrēma punkts, tad $f'(x_0) = 0$ vai arī $f'(x_0)$ neeksistē.

Pierādījums

Pierādījumā izmanto 9.1. paragrāfā aplūkoto Fermā teorēmu: ja kādā intervāla iekšējā punktā, kurā eksistē atvasinājums, funkcijai ir vislielākā vai arī vismazākā vērtība, tad šajā punktā atvasinājums ir vienāds ar nulli.

Tā kā x_0 ir ekstrēma punkts, tad šim punktam eksistē tāda apkārtne, kurā funkcijas vērtība punktā x_0 ir lielāka (mazāka) nekā visos pārējos šīs apkārtnes punktos. Tāpēc saskaņā ar Fermā teorēmu $f'(x_0) = 0$. □

Atvasinājuma vienādība ar nulli vai arī fakts, ka atvasinājums kādā punktā neeksistē, ir ekstrēma nepieciešamais nosacījums, bet nav pietiekamais nosacījums. Tas nozīmē, ka ne vienmēr funkcijai ir ekstrēms punktos, kuros atvasinājums ir vienāds ar nulli vai neeksistē.

Piemēram, funkcijai $f(x) = x^3$ atvasinājums $f'(x) = 3x^2$ ir vienāds ar nulli, ja $x = 0$. Taču koordinātu sākumpunktā šai funkcijai nav ne maksimuma, ne minimuma (sk. A-2. zīm.).

Definīcija

Punktus, kuros funkcijas atvasinājums ir vienāds ar nulli vai neeksistē, sauc par kritiskajiem punktiem. Kritiskajā punktā funkcijai var būt vai nu maksimums, vai minimums, taču ir arī iespējams, ka kritiskajā punktā ekstrēma nav.

4. EKSTRĒMA EKSISTENCES PIETIEKAMIE NOSACĪJUMI

Lai noskaidrotu *maksimuma punkta pietiekamos nosacījumus*, aplūkosim 72. zīmējumā funkciju punkta x_1 apkārtnē $(a; x_2)$. Intervālā $(a; x_1)$ funkcija ir augoša, tātad šeit $f'(x)>0$. Turpretī intervālā $(x_1; x_2)$ funkcija ir dilstoša un šajā intervālā $f'(x)<0$.

Tātad maksimuma punktā funkcijas atvasinājums ir vienāds ar nulli (vai neeksistē) un šajā punktā atvasinājums maina zīmi no plusa uz mīnusu.

Aplūkojot funkciju minimuma punkta x_4 apkārtnē $(x_3; b)$ (sk. 72. zīm.), redzam, ka intervālā $(x_3; x_4)$ funkcija ir dilstoša. Tāpēc šajā intervālā $f'(x)<0$. Intervālā $(x_4; b)$ funkcija ir augoša, un tātad šajā intervālā $f'(x)>0$.

Tādējādi minimuma punktā atvasinājums ir vienāds ar nulli (vai neeksistē), un šajā punktā atvasinājums maina zīmi no mīnusa uz plusu. Tātad atvasinājuma zīmes maiņa kritiskajā punktā ir ekstrēma eksistences pietiekamais nosacījums. Ir spēkā šāda **teorēma.**

Ja x_0 ir funkcijas vienīgais kritiskais punkts intervālā $(a; b)$ un

1) $f'(x)>0$ *kādā intervālā* $(a; x_0)$, *bet* $f'(x)<0$ *intervālā* $(x_0; b)$, *tad* x_0 *ir maksimuma punkts*;

2) $f'(x)<0$ *kādā intervālā* $(a; x_0)$, *bet* $f'(x)>0$ *intervālā* $(x_0; b)$, *tad* x_0 *ir minimuma punkts*.

Pierādījums

Pierādīsim teorēmas pirmo daļu.

Dots: $f'(x)>0 \ \forall x \in (a; x_0)$ un $f'(x)<0 \ \forall x \in (x_0; b)$.

Jāpierāda: x_0 ir maksimuma punkts.

Intervālā $(a; x_0)$ brīvi izvēlamies kādu skaitli $x_1<x_0$. Tā kā funkcija apmierina Lagranža teorēmas nosacījumus intervālā $[x_1; x_0]$, tad saskaņā ar šo teorēmu eksistē punkts $c_1 \in (x_1; x_0)$, ka ir spēkā vienādība

$$f(x_0)-f(x_1)=f'(c_1)(x_0-x_1).$$

Pēc dotā $f'(c_1)>0$ un arī $x_0-x_1>0$; tāpēc

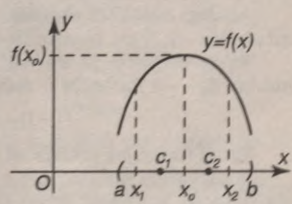
$$f(x_0)-f(x_1)>0 \quad \text{jeb} \quad f(x_0)>f(x_1). \qquad (1)$$

Analogi intervālā $(x_0; b)$ brīvi izraugāmies kādu skaitli $x_2>x_0$ un uzrakstām Lagranža teorēmas vienādību intervālā $[x_0; x_2]$, t. i., eksistē punkts $c_2 \in (x_0; x_2)$, ka

$$f(x_2)-f(x_0)=f'(c_2)(x_2-x_0).$$

Saskaņā ar doto $f'(c_2)<0$ un $x_2-x_0>0$; tāpēc

$$f(x_2)-f(x_0)<0 \quad \text{jeb} \quad f(x_0)>f(x_2). \qquad (2)$$



73. zīm.

Tā kā x_1 un x_2 ir punkta x_0 apkārtnes – intervāla $(a; b)$ brīvi izraudzīti skaitļi, tad no nevienādībām (1) un (2) izriet, ka visām x vērtībām no šīs apkārtnes ir spēkā nevienādība $f(x_0)>f(x)$, t. i., x_0 ir maksimuma punkts (73. zīm.). □

5. FUNKCIJAS EKSTRĒMU ATRAŠANAS KĀRTULA

No ekstrēmu eksistences nepieciešamo un pietiekamo nosacījumu teorēmām izriet šāds funkcijas **maksimuma un minimuma punktu atrašanas algoritms.**

1. Atrod funkcijas atvasinājumu $f'(x)$.
2. Atrisina vienādojumu $f'(x)=0$ un atrod tās x vērtības, ar kurām atvasinājums neeksistē. Iegūtos kritiskos punktus sakārto augošā secībā:
$$x_1<x_2< \dots <x_n.$$
3. Brīvi izvēlas divus skaitļus a_1 un b_1 tā, lai būtu spēkā nevienādības
$$a_1<x_1< b_1<x_2.$$
4. Atvasinājumā $f'(x)$ argumenta x vietā ievieto skaitli a_1 un nosaka $f'(a_1)$ zīmi; pēc tam x vietā ievieto skaitli b_1 un nosaka $f'(b_1)$ zīmi.
   Ja a) $f'(a_1)>0$ un $f'(b_1)<0$, tad x_1 ir maksimuma punkts;
   b) $f'(a_1)<0$ un $f'(b_1)>0$, tad x_1 ir minimuma punkts;
   c) $f'(a_1)$ un $f'(b_1)$ ir ar vienādām zīmēm, tad x_1 nav ekstrēma punkts.
5. Atrod funkcijas vērtību $f(x_1)$ ekstrēma punktā x_1.
   (Analogi pārbauda pārējos kritiskos punktus $x_2, x_3, \dots, x_n$.)

Piemērs. **Atrast funkcijas $f(x)=x^3+6x^2+9x$ ekstrēmus.**

1. $f'(x)=3x^2+12x+9=3(x^2+4x+3)$.
2. Atrisinām vienādojumu $f'(x)=0$, t. i., $3(x^2+4x+3)=0$.
   Šī kvadrātvienādojuma saknes ir -3 un -1. Tā kā atvasinājums $f'(x)=3x^2+12x+9$ ir definēts visām reālām x vērtībām, tad funkcijai citu kritisko punktu nav.
   Sakārtojam kritiskos punktus augošā secībā: $x_1=-3$, $x_2=-1$.

3. un 4. Lai noskaidrotu ekstrēma eksistenci kritiskajā punktā -3, brīvi izvēlamies kādu skaitli no intervāla $(-\infty; -3)$, piemēram, skaitli -4, un kādu skaitli no intervāla $(-3; -1)$, piemēram, skaitli -2. Šos skaitļus ievietojam atvasinājuma izteiksmē un nosakām atvasinājuma zīmi:
$$f'(-4)=3(16-16+3)=9>0, \quad f'(-2)=3(4-8+3)=-3<0.$$
Atvasinājuma vērtības *zīmes maiņa no plusa uz mīnusu* norāda, ka kritiskajā punktā $x_1=-3$ *funkcijai ir maksimums.*

5. Atrodam funkcijas vērtību maksimuma punktā:
$$f(-3)=(-3)^3+6(-3)^2+9(-3)=0.$$

Analogi nosakām ekstrēmu kritiskajā punktā $x_2=-1$. Izvēlamies kādu skaitli intervālā $(-1; +\infty)$, piemēram, skaitli 0, un nosakām atvasinājuma zīmi: $f'(0)=9>0$.

Tā kā $f'(x)<0$, ja $x\in(-3; -1)$, un $f'(x)>0$, ja $x\in(-1; +\infty)$, tad kritiskajā punktā $x_2=-1$ *funkcijai ir minimums*. Funkcijas vērtība minimuma punktā ir
$$f(-1)=(-1)^3+6(-1)^2+9(-1)=-4.$$

Tātad funkcijas grafiks iet caur punktiem $(-3; 0)$ un $(-1; -4)$.

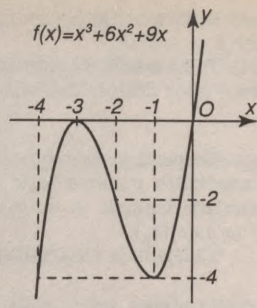
Šī paragrāfa sākumā, pētot funkcijas monotonitāti, noskaidrojām, ka aplūkojamā funkcija ir augoša intervālos $(-\infty; -3)$ un $(-1; +\infty)$, bet dilstoša intervālā $(-3; -1)$.

Tādējādi ar atvasinājuma palīdzību ir izpētītas vairākas funkcijas īpašības, kas nepieciešamas, konstruējot grafiku.

Lai varētu precīzāk uzzīmēt grafiku, aprēķinām funkcijas vērtības vēl dažos citos definīcijas apgabala punktos:

$$f(-4)=-4, \quad f(-2)=-2, \quad f(0)=0.$$

Funkcijas grafiks attēlots 74. zīmējumā.



74. zīm.

9.6. §. OTRĀS KĀRTAS ATVASINĀJUMA LIETOŠANA FUNKCIJU PĒTĪŠANĀ

1. GRAFIKA IZLIEKUMA UN IELIEKUMA PĒTĪŠANA

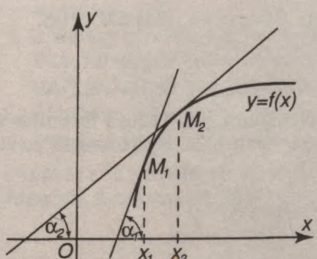
Zīmējot funkcijas grafiku, ir skaidrs, ka tikai ar pirmās kārtas atvasinājumu vien nevar iegūt pilnīgu priekšstatu par grafika formu atsevišķos intervālos. Tā, piemēram, nav īsti zināms, kā jāzīmē grafiks intervālā starp maksimuma punktu un minimuma punktu (sk. 74. zīm.).

Grafika formas izpētei *nepieciešams noskaidrot jēdzienus par izliektu līniju un ieliektu līniju.*

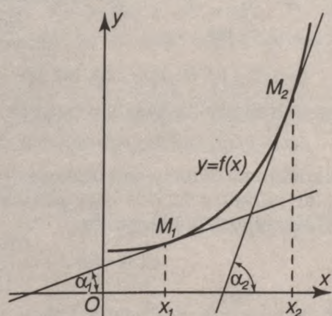
Definīcija

Līniju sauc par izliektu kādā intervālā, ja tā atrodas zem pieskares, kas novilkta brīvi izraudzītā līnijas punktā (75. zīm.).

Līniju sauc par ieliektu kādā intervālā, ja tā atrodas virs pieskares, kas novilkta brīvi izraudzītā līnijas punktā (76. zīm.).



75. zīm.



76. zīm.

Funkcijas grafika izliekumu vai ieliekumu kādā intervālā var noskaidrot ar otrās kārtas atvasinājuma palīdzību.

Aplūkosim 75. zīmējumu, kurā attēlots *izliektas funkcijas grafiks* un divos grafika brīvi izraudzītos punktos $M_1(x_1; f(x_1))$, $M_2(x_2; f(x_2))$, $(x_1 < x_2)$ novilktas pieskares.

Salīdzinot pieskaru virziena leņķus, redzam, ka $\alpha_1 > \alpha_2$ un tātad arī $\operatorname{tg}\alpha_1 > \operatorname{tg}\alpha_2$ jeb $f'(x_1) > f'(x_2)$.

Tā kā mazākai argumenta vērtībai x_1 atbilst lielāka $f'(x_1)$ vērtība, tad secinām, ka $f'(x)$ ir dilstoša funkcija un tāpēc tās atvasinājums ir mazāks nekā nulle, t. i.,

$$(f'(x))' = f''(x) < 0.$$

Turpretī, ja *funkcijas grafiks ir ieliekta līnija* (76. zīm.), tad divos grafika brīvi izraudzītos punktos $M_1(x_1;\ f(x_1))$ un $M_2(x_2;\ f(x_2))$, $(x_1 < x_2)$ novilkto pieskaru virziena leņķiem α_1 un α_2 ir spēkā nevienādība $\alpha_1 < \alpha_2$. Tātad arī $\operatorname{tg}\alpha_1 < \operatorname{tg}\alpha_2$ un $f'(x_1) < f'(x_2)$.

Tādējādi, ja funkcijas grafiks ir ieliekts, tad $f'(x)$ ir augoša funkcija un tāpēc

$$(f'(x))' = f''(x) > 0.$$

Līdz ar to ir noskaidrota ģeometriskā ilustrācija šādai **teorēmai.**

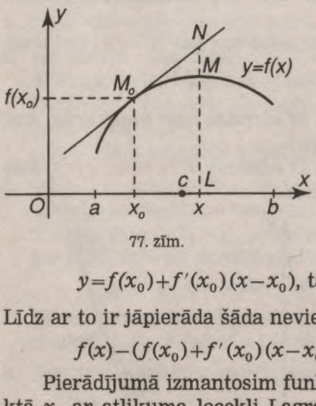
Ja funkcijai $f(x)$ intervālā $(a;\ b)$ eksistē 2. kārtas atvasinājums un visos intervāla punktos $f''(x) < 0$, tad funkcijas grafiks šajā intervālā ir izliekts, bet, ja $f''(x) > 0$, tad grafiks ir ieliekts.

Pierādījums

Aplūkosim pirmo gadījumu.

Dots: $f''(x) < 0\ \forall x \in (a;\ b)$.

Jāpierāda: intervālā $(a;\ b)$ grafiks ir izliekta līnija, t. i., jebkurā intervāla punktā x grafiks atrodas zem pieskares, kas novilkta brīvi izraudzītā grafika punktā $M_0(x_0; f(x_0))$ (77. zīm.).



77. zīm.

Lai pierādītu, ka jebkurā intervāla $(a;\ b)$ punktā x funkcijas grafiks atrodas zem pieskares, jāpierāda, ka

$$LM < LN \quad \text{jeb} \quad LM - LN < 0,$$

kur $M(x;\ f(x))$ ir funkcijas grafika punkts, bet $N(x;\ y)$ ir argumentam x atbilstošais pieskares punkts.

Tā kā punktā $M_0(x_0; f(x_0))$ novilktās *pieskares vienādojums* ir

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \text{ tad } LN = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \text{ un } LM = f(x).$$

Līdz ar to ir jāpierāda šāda nevienādība:

$$f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) < 0 \quad \text{jeb} \quad f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) < 0. \tag{1}$$

Pierādījumā izmantosim funkcijas $f(x)$ izvirzījumu pēc Teilora formulas punktā x_0 ar atlikuma locekli Lagranža formā (sk. 9.4. §.). Ja šajā formulā izraugās 1. pakāpes Teilora polinomu, tad

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + R_1(x), \tag{2}$$

kur $R_1(x) = \dfrac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2$, $c \in (x_0;\ x)$.

No vienādības (2) izriet, ka

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = R_1(x).$$

Acīmredzot $R_1(x) < 0$, jo $(x - x_0)^2 > 0$ un saskaņā ar doto $f''(c) < 0$. Līdz ar to nevienādība (1) ir pierādīta. □

Piemērs. **Atrast funkcijas $f(x)=x^3+6x^2+9x$ grafika izliekuma un ieliekuma intervālus.**

Atrodam $f''(x)=6x+12$. Saskaņā ar teorēmu $f(x)$ grafiks ir izliekts intervālā, kurā $f''(x)<0$.

Atrisinot nevienādību $6x+12<0$, atrodam, ka $x<-2$.

Analogi, atrisinot nevienādību $6x+12>0$, iegūstam: $x>-2$.

Tātad funkcijas grafiks ir izliekts intervālā $(-\infty; -2)$, bet ieliekts - intervālā $(-2; +\infty)$ (sk. 74. zīm.).

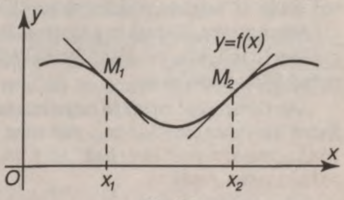
2. GRAFIKA PĀRLIEKUMA PUNKTI

Par pārliekuma punktu sauc tādu grafika punktu, kurš atdala līknes izliekto daļu no ieliektās daļas.

78. zīmējumā attēlotā funkcijas grafika pārliekuma punkti ir punkti M_1 un M_2.

No iepriekš aplūkotās teorēmas par grafika izliekumu un ieliekumu izriet, ka *pārliekuma punktā funkcijas 2. kārtas atvasinājums maina zīmi no plusa uz mīnusu vai arī no mīnusa uz plusu.* Bet tas ir iespējams tikai tad, ja šajā punktā 2. kārtas atvasinājums ir vienāds ar nulli vai arī neeksistē.

Tomēr jāievēro, ka *ne vienmēr punktos, kuros 2. kārtas atvasinājums ir vienāds ar nulli vai neeksistē, funkcijas grafikam ir pārliekums.* Piemēram, funkcijas $f(x)=x^4$ 2. kārtas atvasinājums $f''(x)=12x^2$ ir vienāds ar nulli, ja $x=0$. Taču koordinātu sākumpunktā šīs funkcijas grafikam nav pārliekuma (skat. A-1. zīm.).



78. zīm.

Tātad, nosakot funkcijas $y=f(x)$ grafika pārliekuma punktus, ir **jārīkojas pēc šāda algoritma**.

1. Atrod $f'(x)$.
2. Atrod $f''(x)$.
3. Atrisina vienādojumu $f''(x)=0$ un atrod visas tās x vērtības, ar kurām $f''(x)$ neeksistē. Iegūtos skaitļus sakārto augošā secībā: $x_1<x_2<x_3<\ldots<x_n$.
4. Brīvi izraugās divus skaitļus a_1 un b_1 tā, lai būtu spēkā nevienādības $a_1<x_1<b_1<x_2$.
5. 2. kārtas atvasinājuma $f''(x)$ izteiksmē x vietā ievieto skaitli a_1 un nosaka $f''(a_1)$ zīmi; pēc tam x vietā ievieto skaitli b_1 un nosaka $f''(b_1)$ zīmi. Ja $f''(a_1)$ un $f''(b_1)$ zīmes ir pretējas, tad x_1 ir pārliekuma punkta abscisa.
6. Atrod funkcijas vērtību $f(x_1)$.

(Analogi pārbauda pārējos punktus $x_2, x_3, \ldots, x_n$.)

Piemērs. **Atrast funkcijas $f(x)=x^3+6x^2+9x$ grafika pārliekuma punktus.**
Atrodam funkcijas atvasinājumus:

$$f'(x)=3x^2+12x+9, \quad f''(x)=6x+12.$$

Atrisinām vienādojumu $f''(x)=6x+12=0$; tā sakne ir $x=-2$.

Tā kā 2. kārtas atvasinājums $f''(x)=6x+12$ ir definēts visiem reāliem skaitļiem, tad citu kritisko punktu nav.

Brīvi izraugāmies kādu skaitli, kas mazāks nekā -2, piemēram, skaitli -3, un konstatējam, ka

$$f''(-3)=6\cdot(-3)+12=-6<0.$$

Pēc tam izvēlamies kādu skaitli, kas ir lielāks nekā skaitlis -2, piemēram, -1, un konstatējam, ka

$$f''(-1)=6\cdot(-1)+12=6>0.$$

Tātad punktā -2 otrās kārtas atvasinājums maina zīmi un *šajā punktā funkcijas grafikam ir pārliekums.*

Atrodam pārliekuma punkta ordinātu:

$$f(-2)=(-2)^3+6\cdot(-2)^2+9\cdot(-2)=-2.$$

Līdz ar to esam noteikuši, ka grafikam *pārliekums ir punktā* $(-2;\ -2)$; šis punkts atdala grafika izliekto daļu no ieliektās daļas (sk. 74. zīm.).

3. OTRĀS KĀRTAS ATVASINĀJUMA LIETOŠANA FUNKCIJAS EKSTRĒMU NOTEIKŠANAI

Iepriekšējā paragāfā noskaidrojām, ka, atrodot funkcijas maksimumu un minimumu, jānosaka 1. kārtas atvasinājuma zīmes maiņa kritiskā punkta apkārtnē. Taču to kritisko punktu izpētei, kuros 1. kārtas atvasinājums ir vienāds ar nulli, var lietot citu metodi, izmantojot funkcijas 2. kārtas atvasinājumu. Metodes ģeometriskā interpretācija izriet no šāda sprieduma. Ja kritiskajā punktā, kurā 1. kārtas atvasinājums ir vienāds ar nulli, funkcijai ir maksimums, tad kādā šī punkta apkārtnē grafiks ir izliekts, un tāpēc šādā kritiskajā punktā 2. kārtas atvasinājums ir negatīvs. Savukārt minimuma punkta apkārtnē funkcijas grafiks ir ieliekts, un tātad kritiskajā punktā 2. kārtas atvasinājums ir pozitīvs. Ir spēkā šāda **teorēma**.

Ja funkcijai eksistē nepārtraukts 2. kārtas atvasinājums kādā intervālā, kurā atrodas punkts x_0, pie tam $f'(x_0)=0$ un $f''(x_0)<0$, tad x_0 ir funkcijas maksimuma punkts, bet, ja $f'(x_0)=0$ un $f''(x_0)>0$, tad x_0 ir šīs funkcijas minimuma punkts.

Pierādījums

Pieņemsim, ka $f''(x_0)<0$. Tā kā $f''(x)$ ir nepārtraukta funkcija, tad punktam x_0 eksistē tāda apkārtne $U(x_0)$, kuras visos punktos ir spēkā nevienādība $f''(x)<0$.

Uzrakstām funkcijas $f(x)$ 1. pakāpes izvirzījumu pēc Teilora formulas:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+R_1(x),$$

kur $R_1(x)=\dfrac{f''(c)}{2!}(x-x_0)^2$ un $c\in U(x_0)$.

No šejienes

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+R_1(x).$$

Saskaņā ar doto $f'(x_0)=0$. Tāpēc

$$f(x)-f(x_0)=R_1(x).$$

Atlikuma locekļa $R_1(x)$ formulā $c\in U(x_0)$, tāpēc $f''(c)<0$.

Līdz ar to $R_1(x)<0$ un $f(x)-f(x_0)<0$ jeb $f(x_0)>f(x)$ $\forall x\in U(x_0)$.

Tātad x_0 ir funkcijas maksimuma punkts. □

No aplūkotās teorēmas izriet šāds **algoritms funkcijas ekstrēma punktu noteikšanai**.

1. Atrod $f'(x)$.
2. Atrisina vienādojumu $f'(x)=0$; pieņemsim, ka šī vienādojuma saknes ir $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

3. Atrod $f''(x)$.
4. Otrās kārtas atvasinājuma izteiksmē x vietā ievieto skaitli x_1 un nosaka $f''(x_1)$ zīmi. Ja
   a) $f''(x_1)<0$, tad x_1 ir maksimuma punkts,
   b) $f''(x_1)>0$, tad x_1 ir minimuma punkts,
   c) $f''(x_1)=0$, tad ar šo metodi ekstrēmu nevar noteikt un ir jāpēta 1. kārtas atvasinājuma zīmes maiņa kritiskā punkta apkārtnē.

(Analogi izpēta ekstrēmu pārējos kritiskajos punktos.)

Piemērs. **Noteikt funkcijas $f(x)=x^3+6x^2+9x$ ekstrēma punktus, lietojot 2. kārtas atvasinājumu.**

Šai funkcijai ekstrēma punktus jau atradām, izmantojot tikai 1. kārtas atvasinājumu (sk. 9.5.§. 5. p.). Konstatējām, ka $x_1=-3$ ir maksimuma punkts, bet $x_2=-1$ – minimuma punkts.

Pārliecināsimies, ka, izmantojot 2. kārtas atvasinājumu, šos ekstrēmus var noteikt vienkāršāk.

Atrodam funkcijas atvasinājumus: $f'(x)=3x^2+12x+9$, $f''(x)=6x+12$.

Vienādojuma $3x^2+12x+9=0$ saknes $x_1=-3$ un $x_2=-1$ ir kritiskie punkti, kurus ievietojam 2. kārtas atvasinājuma izteiksmē. Tā kā

$$f''(-3)=6\cdot(-3)+12<0 \quad \text{un} \quad f''(-1)=6\cdot(-1)+12>0,$$

tad $x_1=-3$ ir maksimuma punkts, bet $x_2=-1$ ir minimuma punkts.

Piezīme. *Ar šo algoritmu ekstrēmus var noteikt tikai tajos kritiskajos punktos, kuros 1. kārtas atvasinājums eksistē un ir vienāds ar nulli.* Kritiskajos punktos, kuros 1. kārtas atvasinājums neeksistē (t. i., grafika lauzuma punktos), neeksistē arī 2. kārtas atvasinājums.

9.7.§. AUGSTĀKU KĀRTU ATVASINĀJUMU LIETOŠANA FUNKCIJAS PĒTĪŠANĀ

Ir iespējams, ka n reizes diferencējamas funkcijas $f(x)$ kritiskajā punktā x_0 ar nulli vienāds ir ne tikai 1. kārtas atvasinājums, bet arī šīs funkcijas augstāku kārtu atvasinājumi. Pieņemsim, ka $f'(x_0)=f''(x_0)=f^{(3)}(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, bet $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. Tad no funkcijas izvirzījuma pēc Teilora formulas

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+R_{n-1}(x)$$

izriet, ka $f(x)-f(x_0)=R_{n-1}(x)$,

$$\text{kur } R_{n-1}(x)=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n \quad \text{un} \quad c\in(x_0;\, x). \tag{1}$$

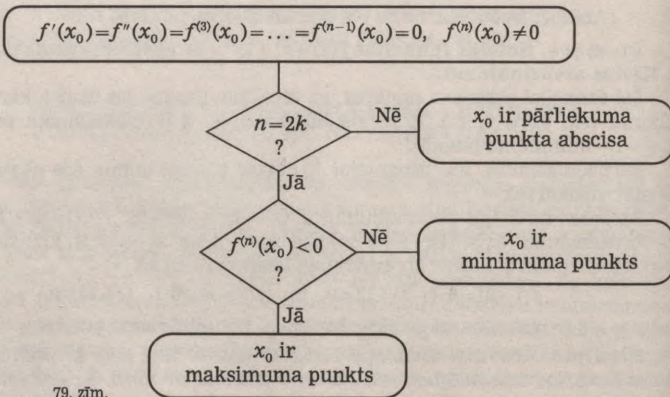
Ja $f^{(n)}(x)$ ir nepārtraukta funkcija punktā x_0, tad eksistē tāda šī punkta apkārtne $U(x_0)$, kurā $f^{(n)}(x_0)$ un $f^{(n)}(c)$ zīmes ir vienādas.

Ja n **ir pāra skaitlis** un $f^{(n)}(x_0)<0$, tad no vienādības (1) izriet, ka $R_{n-1}(x)<0$ un tātad arī $f(x)-f(x_0)<0$ jeb $f(x_0)>f(x)$ $\forall x\in U(x_0)$. Tas nozīmē, ka šajā gadījumā x_0 *ir maksimuma punkts.*

Ja n ir pāra skaitlis un $f^{(n)}(x_0)>0$, tad $R_{n-1}(x)>0$ un arī $f(x)-f(x_0)>0$ jeb $f(x_0)<f(x)$ $\forall x \in U(x_0)$. Tātad x_0 *ir minimuma punkts.*

Ja n **ir nepāra skaitlis**, tad $R_{n-1}(x)$ izteiksmē (1) reizinātāja $(x-x_0)^n$ zīme un līdz ar to arī starpības $f(x)-f(x_0)$ zīme ir atkarīga no tā, vai $x<x_0$ vai arī $x>x_0$. Līdz ar to secinām, ka *šajā gadījumā* x_0 *nav ekstrēma punkts*, bet ir pārliekuma punkta abscisa, kurā novilktā pieskare ir paralēla Ox asij, jo $f'(x_0)=0$.

Šo spriedumu kopsavilkums dots 79. zīmējumā attēlotajā shēmā.



79. zīm.

Piemēri

1. Atrast funkcijas $f(x)=x^4$ ekstrēma punktu.

Atrodam funkcijas atvasinājumus:

$f'(x)=4x^3,\quad f''(x)=12x^2,\quad f^{(3)}(x)=24x,\quad f^{(4)}(x)=24.$

Acīmredzot $f'(0)=f''(0)=f^{(3)}(0)=0$, bet $f^{(4)}(0)=24>0$.

Tā kā $n=4$ ir pāra skaitlis, tad $x_0=0$ ir minimuma punkts (sk. A-1. zīm.).

2. Atrast funkcijas $f(x)=x^5$ pārliekuma punktu.

Atrodam funkcijas atvasinājumus:

$f'(x)=5x^4,\quad f''(x)=20x^3,\quad f^{(3)}(x)=60x^2,\quad f^{(4)}(x)=120x,\quad f^{(5)}(x)=120.$

Acīmredzot $f'(0)=f''(0)=f^{(3)}(0)=f^{(4)}(0)=0$, bet $f^{(5)}(0)=120\neq 0$.

Tā kā $n=5$ ir nepāra skaitlis, tad $x_0=0$ ir pārliekuma punkta abscisa. Pārliekuma punkta koordinātas ir (0; 0), šajā punktā grafikam novilktā pieskare sakrīt ar Ox asi, jo $f'(0)=0$ (sk. A-2. zīm.).

9.8. §. GRAFIKA ASIMPTOTAS

1. HORIZONTĀLĀ ASIMPTOTA

Konstruējot grafiku, bieži ir *jāizmanto ar funkcijas robežu saistītas īpašības.*

Piemēram, konstruējot funkcijas $f(x)=\dfrac{1}{x}$ grafiku, izmanto īpašību, ka

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0 \quad \text{un} \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty \quad \left(\text{turklāt } \lim_{x\to +0}\frac{1}{x}=+\infty,\ \lim_{x\to -0}\frac{1}{x}=-\infty\right).$$

Tas nozīmē, ka šīs funkcijas grafiks neierobežoti tuvojas Ox asij, kad $x \to \infty$, un neierobežoti tuvojas Oy asij, kad $x \to 0$.

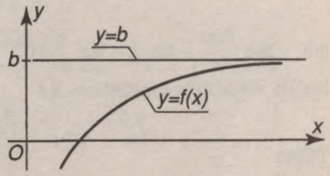
Taisni, kurai piemīt īpašība, ka kādas līknes punkta attālums līdz šai taisnei tiecas uz nulli, ja punkts pa līkni pārvietojas uz bezgalību, sauc par ***asimptotu.***

Šajā piemērā Ox ass ir funkcijas grafika horizontālā asimptota, bet Oy ass – vertikālā asimptota.

Definīcija

Par funkcijas $f(x)$ grafika horizontālo asimptotu sauc Ox asij paralēlu taisni, kuras vienādojums ir $y=b$, ja $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ (80. zīm.).

Piemēram, funkcijas $f(x)=\dfrac{2x+1}{x}$ grafika horizontālā asimptota ir taisne $y=2$, jo $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)=2.$



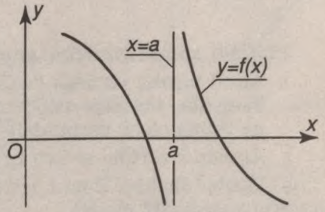
80. zīm.

2. VERTIKĀLĀ ASIMPTOTA

Definīcija

Par funkcijas $f(x)$ grafika vertikālo asimptotu sauc Oy asij paralēlu taisni, kuras vienādojums ir $x=a$, ja $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ (81. zīm.).

Piemēram, funkcijas $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ grafika vertikālā asimptota ir taisne $x=3$, jo $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{1}{x-3}=\infty.$



81. zīm.

3. SLĪPĀ ASIMPTOTA

Definīcija

Par funkcijas $f(x)$ grafika slīpo asimptotu sauc taisni, kuras vienādojums ir $y=kx+b$, ja attālums no funkcijas grafika punkta $M(x;\, f(x))$ līdz šai taisnei tiecas uz nulli, kad $x\to\infty$ (82. zīm.).

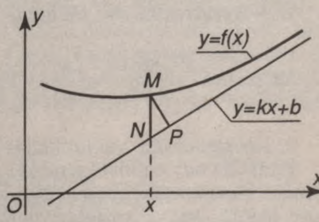
Atradīsim koeficientu k un parametru b. Brīvi izraudzītā funkcijas definīcijas apgabala punktā x velkam perpendikulu pret Ox asi, kas grafiku krusto punktā $M(x;\, f(x))$, bet asimptotu – punktā $N(x;\, y)$, kur $y=kx+b$.

Attālums no punkta M līdz asimptotai ir nogriežņa MP garums, kur MP ir perpendikuls pret asimptotu.

No trijstūra MNP redzams, ka $MP<MN$. Tātad, ja $MN\to0$, tad arī $MP\to0$.

Pieņemsim, ka $MN\to0$ jeb $(f(x)-(kx+b))\to0$, kad $x\to\infty$, t. i.,

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=0. \qquad (1)$$



82. zīm.

Pārveidojam vienādību (1) šādi:

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\left(\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right)=0.$$

Tā kā reizinātājs x ir bezgalīgi liels lielums, tad šī reizinājuma robeža var būt vienāda ar nulli tikai tādā gadījumā, ja

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right)=0$$

jeb $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}k-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{b}{x}=0.$

No šīs vienādības iegūstam, ka

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}-k=0.$$

Tātad

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}. \tag{2}$$

Ievietojot pēc formulas (2) atrasto k vērtību vienādībā (1), iegūstam, ka

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)-\lim_{x\to\infty}b=0$$

jeb

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx). \tag{3}$$

Tādējādi, *nosakot funkcijas grafika slīpo asimptotu*, rīkojas pēc šāda **algoritma**.

1. Atrod taisnes virziena koeficientu, izmantojot formulu (2). Ja šī robeža ir bezgalība, tad slīpo asimptotu nav. Ja robeža ir vienāda ar nulli, tad $k=0$ un asimptota ir horizontāla.
2. Atrasto k vērtību ievieto formulā (3) un aprēķina b.
3. Iegūtos skaitļus k un b ievieto taisnes vienādojumā $y=kx+b$ un konstruē šo taisni koordinātu plaknē.

Piezīmes. Nosakot horizontālās un slīpās asimptotas, atsevišķi ir jāaplūko gadījumi, kad $x\to+\infty$ un kad $x\to-\infty$. Tātad funkcijas grafikam var būt ne vairāk kā divas horizontālās un slīpās asimptotas.

Nosakot vertikālās asimptotas, atsevišķi jāaplūko vienpusējās robežas, kad $x\to a+0$ un kad $x\to a-0$; pie tam, konstruējot grafiku, ir svarīgi noteikt, vai katrā no šiem gadījumiem robeža ir $+\infty$ vai arī $-\infty$. Funkcijas grafikam var būt vairākas vertikālās asimptotas.

Piemērs. **Atrast funkcijas $f(x)=\frac{x^2-6x+5}{x-3}$ grafika asimptotas un uzzīmēt grafika skici.**

1. Noskaidrosim, vai funkcijas grafikam eksistē horizontālā asimptota.

Tā kā $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-6x+5}{x-3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-6+\frac{5}{x}}{1-\frac{3}{x}}=\infty$, tad horizontālo asimptotu nav.

2. Noskaidrosim, vai funkcijas grafikam eksistē vertikālā asimptota.

Funkcija nav definēta punktā $x_0=3$. Šajā punktā funkcijas robeža ir bezgalība. Atrodot vienpusējās robežas zīmi, kad $x\to 3+0$, ieteicams funkcijā x vietā ievietot kādu skaitli, kas ir nedaudz lielāks nekā 3, piemēram, 3,1, un noteikt izteiksmes skaitītāja un saucēja vērtības zīmi. Analogi rīkojas gadījumā, kad $x\to 3-0$, –

ievieto kādu skaitli, kas ir nedaudz mazāks nekā 3, piemēram, 2,9, un nosaka skaitītāja un saucēja zīmi:

$$\lim_{x\to 3+0}\frac{x^2-6x+5}{x-3}=\lim_{x\to 3+0}\frac{(x-1)(x-5)}{x-3}=\left(\frac{+\cdot-}{+}\right)=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 3-0}\frac{x^2-6x+5}{x-3}=\lim_{x\to 3-0}\frac{(x-1)(x-5)}{x-3}=\left(\frac{+\cdot-}{-}\right)=+\infty.$$

Līdz ar to vertikālā asimptota ir taisne $x=3$.

3. Noteiksim slīpo asimptotu (ja tāda eksistē).

Pēc formulas (2) atrodam virziena koeficientu:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-6x+5}{x(x-3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-6x+5}{x^2-3x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}}{1-\frac{3}{x}}=1.$$

Tā kā $k=1$, tad saskaņā ar formulu (3):

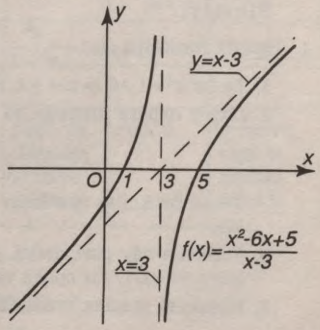
$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-6x+5}{x-3}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x+5}{x-3}=$$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-3+\frac{5}{x}}{1-\frac{3}{x}}=-3.$$

Tātad slīpās asimptotas vienādojums ir $y=x-3$.

Konstruējam koordinātu plaknē taisnes $x=3$ un $y=x-3$ (83. zīm.). Vienpusējo robežu zīmes punkta 3 apkārtnē nosaka funkcijas grafika novietojumu ap vertikālo asimptotu.

Grafika precizēšanai atrodam tā krustpunktus ar koordinātu asīm: $f(0)=-\frac{5}{3}$, $f(1)=0$, $f(5)=0$.



83. zīm.

9.9. §. FUNKCIJAS PĒTĪŠANAS VISPĀRĪGĀ SHĒMA

Iepriekšējo jautājumu apskatā konstatējām, ka ar atvasinājumu un robežas palīdzību ir iespējams noskaidrot vairākas funkcijas īpašības, kuras izmanto grafika konstruēšanai. Konstruējot grafiku, ir jāzina funkcijas definīcijas apgabals, kā arī jāievēro vairākas īpašības, kuras nosaka, nelietojot atvasinājumu. Tā, piemēram, jānoskaidro funkcijas periodiskums, grafika simetrija un krustpunkti ar koordinātu asīm u. c. Tādējādi, *lai konstruētu funkcijas grafiku,* **lieto šādu funkcijas pētīšanas shēmu**.

1. Atrod funkcijas definīcijas apgabalu.
2. Noskaidro, vai funkcija ir pāra (nepāra) funkcija.
3. Noskaidro, vai funkcija ir periodiska, un atrod periodu.
4. Atrod grafika krustpunktus ar koordinātu asīm un nosaka, kādos intervālos funkcija ir pozitīva un kādos – negatīva.

5. Atrod 1. kārtas atvasinājumu. Nosaka, kādos intervālos funkcija ir augoša un kādos – dilstoša. Aprēķina ekstrēmu koordinātas.
6. Atrod 2. kārtas atvasinājumu; nosaka, kādos intervālos grafiks ir izliekts, kādos – ieliekts, un atrod pārliekuma punktus.
7. Atrod grafika asimptotu vienādojumus.
8. Atrod funkcijas vienpusējās robežas definīcijas apgabala intervālu galos.

Vairākas operācijas, kas paredzētas šajā plānā, ir saistītas ar nevienādību atrisināšanu. Kā zināms, viens no nevienādību atrisināšanas paņēmieniem ir intervālu metode. Pētot funkciju ar intervālu metodi, vispirms atrod visus tos punktus, kuros $f(x)$, $f'(x)$ un $f''(x)$ ir vienādi ar nulli vai neeksistē. Šie punkti funkcijas definīcijas apgabalu sadala vairākos intervālos, kuros jānosaka $f(x)$, $f'(x)$ un $f''(x)$ zīmes. Šajā nolūkā attiecīgajā intervālā brīvi izraugās kādu skaitli x_0 un atrod $f(x_0)$, $f'(x_0)$ un $f''(x_0)$ vērtību zīmes. Saskaņā ar nepārtrauktas funkcijas īpašību šādas zīmes ir arī visos pārējos attiecīgā intervāla punktos.

Pētījuma rezultātus apkopo tabulā, pēc kuras var viegli konstatēt svarīgākās funkcijas īpašības.

Piemēri

1. Izpētīt funkciju $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ un uzzīmēt tās grafiku.

1. Tā kā $x^2-1\neq 0 \Rightarrow x\neq \pm 1$, tad $D(f)=(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$.
2. $f(x)$ ir nepāra funkcija, jo
$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^2-1}=-\frac{x^3}{x^2-1}=-f(x).$$
Tātad funkcijas grafiks ir simetrisks attiecībā pret koordinātu sākumpunktu.
3. Funkcija nav periodiska, jo neeksistē tāds no nulles atšķirīgs skaitlis T, ar kuru $\forall x\in D(f)$ ir spēkā vienādība $f(x+T)=f(x)$.
4. Nosakām grafika krustpunktu ar Ox asi:
$$f(x)=0,\quad \frac{x^3}{x^2-1}=0 \Rightarrow x^3=0 \Rightarrow x_1=x_2=x_3=0.$$
5. Atrodam 1. kārtas atvasinājumu un kritiskos punktus:
$$f'(x)=\left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)'=\frac{3x^2(x^2-1)-x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2};$$
$$f'(x)=0 \Rightarrow x^2(x^2-3)=0 \Rightarrow x^2=0 \quad \text{vai} \quad x^2-3=0 \Rightarrow$$
$$x_1=x_2=0,\ x_4=\sqrt{3},\ x_5=-\sqrt{3}.$$
6. Atrodam 2. kārtas atvasinājumu un šī atvasinājuma kritiskos punktus:
$$f''(x)=\left(\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}\right)'=\left(\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}\right)'=$$
$$=\frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2-(x^4-3x^2)\,2(x^2-1)\,2x}{(x^2-1)^4}=\ldots=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$
$$f''(x)=0 \Rightarrow 2x(x^2+3)=0 \Rightarrow x_1=0.$$
7. Punkti $-\sqrt{3}$, -1, 0, 1, $\sqrt{3}$ definīcijas apgabalu sadala 6 intervālos: $(-\infty;\ -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3};\ -1)$, $(-1;\ 0)$, $(0;\ 1)$, $(1;\ \sqrt{3})$, $(\sqrt{3};\ +\infty)$. Taču, tā kā grafiks ir simetrisks attiecībā pret koordinātu sākumpunktu, tad funkciju

var pētīt tikai Ox ass pozitīvajā daļā, t. i., intervālos $(0;\ 1)$, $(1;\ \sqrt{3})$, $(\sqrt{3};\ +\infty)$. Lai noteiktu $f(x)$, $f'(x)$ un $f''(x)$ zīmes šajos intervālos, izraudzīsimies šādus skaitļus: $0{,}5 \in (0;\ 1)$, $1{,}5 \in (1;\ \sqrt{3})$ un $2 \in (\sqrt{3};\ +\infty)$. Pēc $f(x)$, $f'(x)$ un $f''(x)$ izteiksmēm atrodam, ka $f(0{,}5) < 0$, $f(1{,}5) > 0$, $f(2) > 0$,

$$f'(0{,}5) < 0,\ f'(1{,}5) < 0,\ f'(2) > 0,$$

$$f''(0{,}5) < 0,\ f''(1{,}5) > 0,\ f''(2) > 0.$$

Atrodam funkcijas vērtību kritiskajā punktā $\sqrt{3}$:

$$f(\sqrt{3}) = \frac{(\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3})^2 - 1} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}6.$$

Pētījumu rezultātus apkopojam tabulā.

x	0	$(0;\ 1)$	1	$(1;\ \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3};\ +\infty)$
$f(x)$	0	$-$	neeks.	$+$	2,6	$+$
$f'(x)$	0	$-$	neeks.	$-$	0	$+$
$f''(x)$	0	$-$	neeks.	$+$	$+$	$+$
Funkcijas īpašības	Pārl. punkts	negatīva, dilstoša, grafiks izliekts	vert. asimpt.	pozitīva, dilstoša, grafiks ieliekts	min. p.	pozitīva, augoša, grafiks ieliekts

8. Grafika asimptotas

Funkcijas grafikam *nav horizontālu asimptotu*, jo

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{1 - \frac{1}{x^2}} = \infty.$$

Taisnes $x = 1$ un $x = -1$ ir grafika *vertikālās asimptotas*, jo

$$\lim_{x \to \pm 1} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \infty.$$

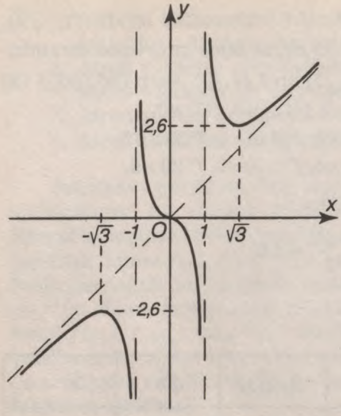
Atrodam vienpusējās robežas, kad $x \to 1$:

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1+0} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = \left(\frac{1}{+0}\right) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1-0} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = \left(\frac{1}{-0}\right) = -\infty.$$

Atrodam grafika slīpo asimptotu:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x(x^2 - 1)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1,$$



84. zīm.

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-k\cdot x)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3+x}{x^2-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=0.$$

Tā kā $k=1$ un $b=0$, tad no taisnes vienādojuma $y=kx+b$ iegūstam grafika slīpo asimptotu $y=x$.

9. Konstruējam koordinātu plaknē asimptotas $x=-1$, $x=1$, $y=x$ un saskaņā ar īpašību pētījuma rezultātiem - funkcijas grafiku Ox ass pozitīvajā daļā. Pēc tam iegūto grafiku simetriski attēlojam attiecībā pret koordinātu sākumpunktu (84. zīm.).

2. Izpētīt funkciju $f(x)=\sqrt[3]{x^3-6x^2}$ un uzzīmēt tās grafiku.

1. $D(f)=(-\infty;\ +\infty)$, jo 3. pakāpes sakne ir definēta jebkuram reālam skaitlim, ko iegūst kā polinoma x^3-6x^2 vērtību.

2. Funkcija nav pāra un nav arī nepāra funkcija, jo

$$f(-x)=\sqrt[3]{(-x)^3-6(-x)^2}=\sqrt[3]{-x^3-6x^2}\neq f(x) \quad \text{un}$$

$$f(-x)=\sqrt[3]{-x^3-6x^2}=\sqrt[3]{-(x^3+6x^2)}=-\sqrt[3]{x^3+6x^2}\neq -f(x);$$

tātad grafiks nav simetrisks ne attiecībā pret Oy asi, ne arī attiecībā pret koordinātu sākumpunktu.

3. Funkcija nav periodiska, jo neeksistē tāds no nulles atšķirīgs skaitlis T, ar kuru ir spēkā vienādība $f(x+T)=f(x)$. Patiešām, var pārliecināties, ka vienādība

$$\sqrt[3]{(x+T)^3-6(x+T)^2}=\sqrt[3]{x^3-6x^2}$$

ir spēkā tikai tad, ja $T=0$.

4. Lai noteiktu grafika krustpunktus ar Ox asi, atrisinām vienādojumu

$$f(x)=0, \quad \text{t. i.,}$$

$$\sqrt[3]{x^3-6x^2}=0 \Rightarrow x^2(x-6)=0.$$

Šī vienādojuma saknes ir: $x_1=x_2=0$, $x_3=6$.

5. Atrodam funkcijas 1. kārtas atvasinājumu:

$$f'(x)=\frac{1}{3}(x^3-6x^2)^{-\frac{2}{3}}(3x^2-12x)=\frac{3x(x-4)}{3\sqrt[3]{(x^3-6x^2)^2}}=$$

$$=\frac{x(x-4)}{\sqrt[3]{x^4(x-6)^2}}=\frac{x(x-4)}{x\sqrt[3]{x(x-6)^2}}=\frac{x-4}{\sqrt[3]{x(x-6)^2}}.$$

$f'(x)=\dfrac{x-4}{\sqrt[3]{x(x-6)^2}}=0$, ja $x=4$, bet $f'(x)$ neeksistē punktos $x_1=0$ un $x_3=6$.

6. Atrodam 2. kārtas atvasinājumu:

$$f''(x)=\frac{\sqrt[3]{x(x-6)^2}-(x-4)\cdot\frac{1}{3}(x(x-6)^2)^{-\frac{2}{3}}(3x^2-24x+36)}{\sqrt[3]{x^2(x-6)^4}}.$$

Vienkāršojot šo izteiksmi, iegūstam: $f''(x)=\dfrac{-8}{\sqrt[3]{x^4(x-6)^5}}$. Acīmredzot $f''(x)\neq 0$, bet $f''(x)$ neeksistē punktos $x_1=0$ un $x_3=6$.

7. Punkti 0; 4 un 6 funkcijas definīcijas apgabalu sadala četros intervālos:

$$(-\infty;\,0),\quad (0;\,4),\quad (4;\,6)\quad \text{un}\quad (6;\,+\infty).$$

Lai noteiktu $f(x)$, $f'(x)$ un $f''(x)$ zīmes šajos intervālos, izraudzīsimies šādus skaitļus:

$$-1\in(-\infty;\,0),\ 1\in(0;\,4),\ 5\in(4;\,6)\ \text{un}\ 7\in(6;\,+\infty).$$

No $f(x)$, $f'(x)$ un $f''(x)$ izteiksmēm viegli konstatēt, ka $f(-1)<0$, $f(1)<0$, $f(5)<0$, $f(7)>0$, $f'(-1)>0$, $f'(1)<0$, $f'(5)>0$, $f'(7)>0$, $f''(-1)>0$, $f''(1)>0$, $f''(5)>0$, $f''(7)<0$.

Šī pētījuma rezultātus ierakstām tabulā, pēc kuras var noteikt arī funkcijas ekstrēma punktus un pārliekuma punktus:

x	$(-\infty;\,0)$	0	$(0;\,4)$	4	$(4;\,6)$	6	$(6;\,+\infty)$
$f(x)$	$-$	0	$-$	$-3{,}2$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	neeks.	$-$	0	$+$	neeks.	$+$
$f''(x)$	$+$	neeks.	$+$	$+$	$+$	neeks.	$-$
Funkcijas īpašības	negatīva, augoša, grafiks ieliekts	maks. p-ts	negatīva, dilstoša, grafiks ieliekts	min. p-ts	negatīva, augoša, grafiks ieliekts	pārl. p-ts	pozitīva, augoša, grafiks izliekts

8. Grafika asimptotas.

Tā kā $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x^3-6x^2}=\infty$, tad funkcijas grafikam *nav horizontālas asimptotas.*

Nav arī vertikālas asimptotas, jo funkcija ir definēta visām reālām x vērtībām.

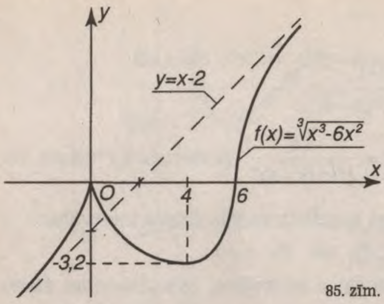
Lai noteiktu grafika slīpo asimptotu, atrodam robežas:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-6x^2}}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{1-\frac{6}{x}}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-6x^2}-x\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{t};\\ \text{ja } x\to\infty,\ \text{tad } t\to 0\end{array}\right]=\lim_{t\to 0}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{t^3}-\frac{6}{t^2}}-\frac{1}{t}\right)=$$



85. zīm.

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{1-6t}-1}{t} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{3} \frac{(1-6t)^{-\frac{2}{3}}\cdot(-6)}{1} = -2.$$

Tātad grafika *slīpās asimptotas vienādojums ir $y = x - 2$.*

9. Konstruējam koordinātu plaknē asimptotu un saskaņā ar tabulā apkopotajām funkcijas īpašībām konstruējam grafiku (85. zīm.).

Uzdevums. **Izpētīt funkciju $f(x)=e^{-x^2}$ un uzzīmēt tās grafiku.**

1. $D(f)=(-\infty;\ +\infty)$.

2. $f(x)$ ir pāra funkcija, jo $f(-x)=e^{-(-x)^2}=e^{-x^2}=f(x)$. Tātad grafiks ir simetrisks attiecībā pret Oy asi.

3. Funkcija nav periodiska, jo $f(x+T)=e^{-(x+T)^2}\neq e^{-x^2}=f(x)$, ja $T\neq 0$.

4. Tā kā $e^{-x^2}\neq 0$ nevienai x vērtībai, tad grafiks nekrusto Ox asi.

5. Atrodam 1. kārtas atvasinājumu un kritiskos punktus:

$f'(x)=(e^{-x^2})'=-2xe^{-x^2}$;

$f'(x)=0, \quad -2xe^{-x^2}=0 \Rightarrow x_1=0, \quad (e^{-x^2}\neq 0)$.

6. Atrodam 2. kārtas atvasinājumu un šī atvasinājuma kritiskos punktus:

$f''(x)=(-2xe^{-x^2})'=-2(xe^{-x^2})'=-2(e^{-x^2}+xe^{-x^2}(-2x))=2e^{-x^2}(2x^2-1)$;

$f''(x)=0 \Rightarrow 2e^{-x^2}(2x^2-1)=0 \Rightarrow 2x^2-1=0,\ x^2=\frac{1}{2} \Rightarrow$

$$x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}7, \qquad x_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}\approx -0{,}7.$$

7. Punkti $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 0 un $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sadala definīcijas apgabalu 4 intervālos. Taču, tā kā grafiks ir simetrisks attiecībā pret Oy asi, tad pētām funkciju tikai Ox ass pozitīvajā daļā – intervālos $\left(0;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ un $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ +\infty\right)$.

Acīmredzami $f(x)=e^{-x^2}>0\ \forall x\in(-\infty;\ +\infty)$, bet $f'(x)=-2xe^{-x^2}<0\ \forall x\in(0;\ +\infty)$.

Nosakot $f''(x)=2e^{-x^2}(2x^2-1)$ zīmes aplūkotajos intervālos, izvēlamies skaitļus $0{,}5\in\left(0;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $1\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ +\infty\right)$ un atrodam, ka $f''(0{,}5)<0$, $f''(1)>0$.

Aprēķinām funkcijas vērtības kritiskajos punktos:

$$f(0)=e^0=1,$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{e}}\approx 0{,}6.$$

Funkcijas īpašības nosakām, izmantojot tabulu.

x	0	$\left(0;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ +\infty\right)$
$f(x)$	1	+	$\approx 0{,}6$	+
$f'(x)$	0	–	–	–
$f''(x)$	–	–	0	+
Funkcijas īpašības	maks. punkts	pozitīva, dilstoša, grafiks izliekts	pārl. punkts	pozitīva, dilstoša, grafiks ieliekts

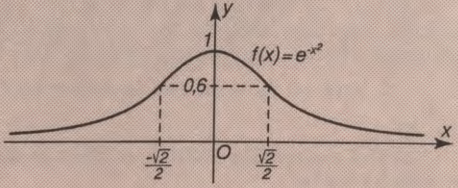
8. Grafika asimptotas.
Horizontālā asimptota ir Ox ass, jo

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = \left(\frac{1}{+\infty}\right) = 0.$$

Vertikālo asimptotu nav, jo funkcija ir definēta visā reālo skaitļu kopā.
Slīpo asimptotu nav, jo

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{xe^{x^2}} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0.$$

9. Ievērojot funkcijas īpašības, konstruējam grafiku intervālā $(0;\ +\infty)$; pēc tam iegūto līkni attēlojam simetriski attiecībā pret Oy asi (A-20. zīm.).



A-20. zīm.

Piezīme. Ar aplūkoto funkciju sastopamies varbūtību teorijā – gadījuma lieluma normālā sadalījuma blīvuma funkcija ir

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$ kur a un σ – konstantes.

Šīs funkcijas grafiku – *Gausa līkni* iegūst, attiecīgi deformējot $f(x)=e^{-x^2}$ grafiku un pārbīdot Ox ass virzienā par lielumu a.

9.10 §. FUNKCIJAS VISLIELĀKĀS UN VISMAZĀKĀS VĒRTĪBAS ATRAŠANA

Ja funkcija ir nepārtraukta slēgtā intervālā, tad vismaz vienā šī intervāla punktā funkcija sasniedz savu vislielāko vērtību un vismaz vienā punktā tā pieņem vismazāko vērtību. *Funkcijas vislielākā vērtība var būt kādā no maksimuma punktiem vai arī kādā no slēgtā intervāla galapunktiem. Analogi funkcijas vismazākā vērtība var būt kādā no minimuma punktiem vai arī kādā no intervāla galapunktiem.* Piemēram, 72. zīmējumā funkcijai vislielākā vērtība ir maksimuma punktā x_3, bet vismazākā vērtība ir intervāla $[a;\ b]$ sākumpunktā a.

Tātad, lai atrastu slēgtā intervālā $[a;\ b]$ definētai un nepārtrauktai funkcijai vislielāko un vismazāko vērtību, rīkojas pēc šāda **algoritma**.

1. Atrod intervālā $[a;\ b]$ visus funkcijas kritiskos punktus.
2. Aprēķina funkcijas vērtības kritiskajos punktos.
3. Aprēķina funkcijas vērtību intervāla sākumpunktā a un galapunktā b.
4. No iegūtajām funkcijas vērtībām atrod vislielāko un vismazāko skaitli.

Piemērs. **Atrast funkcijas** $f(x)=x^3-9x^2+15x-3$ **vislielāko un vismazāko vērtību intervālā** $[0;\ 8]$.

1. Atrodam funkcijas kritiskos punktus:

$$f'(x)=3x^2-18x+15;$$

$$3x^2-18x+15=0 \Rightarrow x_1=1,\ x_2=5.$$

2. Funkcijas vērtības kritiskajos punktos ir šādas:

$$f(1)=4, \quad f(5)=-28.$$

3. Funkcijas vērtības intervāla $[0;\ 8]$ galos ir: $f(0)=-3, f(8)=53$.

4. Salīdzinot atrastos skaitļus, redzam, ka funkcijas vislielākā vērtība 53 ir intervāla galapunktā 8, bet vismazākā vērtība -28 ir kritiskajā punktā 5, kas ir minimuma punkts.

Piezīme. Ja funkcijas definīcijas apgabals nav slēgts intervāls, tad ir iespējams, ka definīcijas apgabalā nav tādu punktu, kuros funkcijai ir vislielākā un vismazākā vērtība. Piemēram, funkcija $f(x)=\operatorname{tg} x$ ir definēta vaļējā intervālā $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, kurā šai funkcijai nav ne maksimālās, ne arī minimālās vērtības (sk. A-11. zīm.).

Meklējot ekstremālās vērtības vaļējā intervālā definētai funkcijai, var izmantot šādu kārtulu.

Ja funkcija ir nepārtraukta un kādā intervālā tai ir tikai viens ekstrēma punkts – maksimuma punkts, tad šajā punktā funkcijai ir vislielākā vērtība. Ja funkcijai ir tikai viens ekstrēma punkts – minimuma punkts, tad šajā punktā tai ir vismazākā vērtība. (Šo apgalvojumu ilustrē 70. un 71. zīmējums.)

X NODAĻA

VAIRĀKARGUMENTU FUNKCIJA

10.1.§. DIVU ARGUMENTU FUNKCIJAS JĒDZIENS

Pētot funkcionālas sakarības, parasti izrādās, ka kāds lielums ir atkarīgs no vairākiem mainīgiem lielumiem. Piemēram, noteikta daudzuma *gāzes spiediens* ir atkarīgs no tilpuma un temperatūras; *siltuma daudzums*, ko izdala elektriskajā ķēdē strāva, ir atkarīgs no strāvas stipruma, vadītāja pretestības un laika; *polimēru materiāla deformācija* ir atkarīga no pieliktās slodzes, slodzes darbības laika, temperatūras, gaisa mitruma u. c. faktoriem. Šādu parādību matemātiskam aprakstam nepieciešams vairāku argumentu funkcijas jēdziens un ar to saistītie matemātiskās analīzes jautājumi.

Aplūkosim divu argumentu funkcijas jēdzienu. Pieņemsim, ka kādas kopas elementi ir sakārtotu reālu skaitļu pāri $(x; y)$. Katru skaitļu pāri var attēlot ar punktu Dekarta taisnleņķa koordinātu plaknē, bet aplūkoto kopu – kā noteiktu šīs koordinātu plaknes apgabalu D. Šādu sakārtotu reālu skaitļu pāru $(x; y)$ kopu sauc arī par telpu R^2.

Ja katram sakārtotam mainīgo lielumu x un y vērtību pārim (x; y), kas ņemts no kādas kopas D, pēc noteikta likuma f atbilst viena mainīgā lieluma z vērtība, tad saka, ka ir definēta divu argumentu x un y funkcija, un raksta z = f(x; y).

Divu argumentu funkcijai galvenokārt lieto analītisko izteiksmes veidu. Analogi kā viena argumenta funkcijai aplūko **atklātā un apslēptā veidā dotas divu argumentu funkcijas**.

Piemēram,

$$z=\sqrt{x^2+y^2}, \quad z=\sin xy, \quad z=\frac{1}{x+y}$$

ir atklātā veidā dotas divu argumentu funkcijas.

Ja no funkcijas analītiskās izteiksmes nav izteikts atkarīgais mainīgais lielums, tad saka, ka ***funkcija ir dota apslēptā veidā***. Piemēram,

$$2x+3y+6z-12=0,$$
$$2^{x+y}-xyz=0$$

vai vispārīgi $\boldsymbol{F(x; y; z)=0}$.

Divu argumentu funkcijām lieto arī **tabulāro izteiksmes veidu**. Šādas funkcijas vērtību tabula ir jāsastāda matricas veidā, kuras 1. rindā raksta, piemēram, argumenta y vērtības, bet 1. kolonnā – argumenta x vērtības. Noteiktam argumenta vērtību pārim atbilstošo funkcijas vērtību raksta kā matricas elementu tajā rindā, kurā ir attiecīgā argumenta x vērtība, un tajā kolonnā, kurā ir argumenta y vērtība.

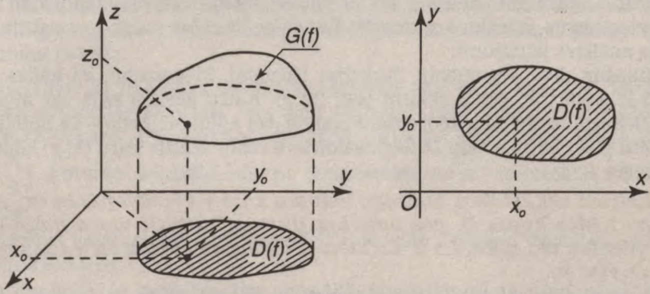
P i e m ē r a m, funkcijas $z=2x+3y$ vērtības dažām argumentu x un y vērtībām dotas tabulā.

$x \backslash y$	0	1	2	3
0	0	3	6	9
1	2	5	8	11
2	4	7	10	13
3	6	9	12	15
4	8	11	14	17

Lai divu argumentu funkciju attēlotu grafiski, lieto Dekarta koordinātu sistēmu telpā.

Par divu argumentu funkcijas f grafiku $G(f)$ sauc visu to punktu kopu koordinātu telpā, kuru koordinātas ir $(x; y; f(x; y))$, ja $(x; y) \in D(f)$.

Tādējādi divu argumentu **funkcijas grafiks ir virsma** 3 dimensiju telpā, bet šīs funkcijas definīcijas apgabalu $D(f)$ parasti attēlo kā kādu xOy plaknes apgabalu (86. zīm.).

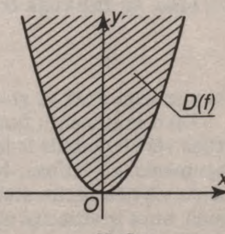


86. zīm.

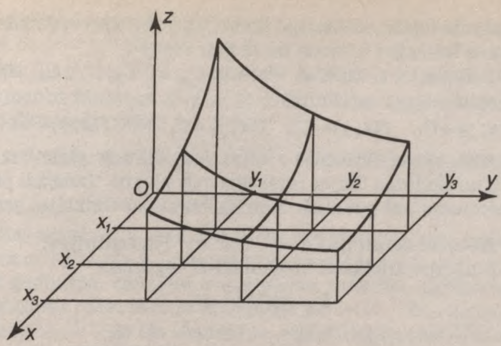
P i e m ē r a m, funkcijas $z=\sqrt{y-x^2}$ definīcijas apgabalu nosaka nevienādība $y-x^2 \geqslant 0$ jeb $y \geqslant x^2$. Tātad definīcijas apgabals ir tā xOy plaknes daļa, kas atrodas starp parabolas $y=x^2$ zariem, ieskaitot arī parabolas punktus (87. zīm.).

Veicot eksperimentu, kurā pēta funkcionālu sakarību $z=f(x; y)$, vispirms izraugās vienam argumentam konstantu vērtību, piemēram, $x=x_1$, un nosaka z vērtības atkarībā no argumenta y vērtībām $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$. Tādējādi iegūst vērtību tabulu viena argumenta funkcijai $z=f(x_1; y)$. Pēc tam fiksē citu argumenta x vērtību $x=x_2$ un, mainot y vērtības, sastāda vērtību tabulu funkcijai $z=f(x_2; y)$ utt. (sk. tabulu).

$x \backslash y$	y_1	y_2	y_3	...	y_n
x_1	z_{11}	z_{12}	z_{13}	...	z_{1n}
x_2	z_{21}	z_{22}	z_{23}	...	z_{2n}
x_3	z_{31}	z_{32}	z_{33}	...	z_{3n}
...	...	...	...	...	...
x_n	z_{n1}	z_{n2}	z_{n3}	...	z_{nn}



87. zīm.



88. zīm.

Lai attēlotu g r a f i s k i funkcionālu sakarību $z=f(x;\ y)$ pēc eksperimentā iegūtās vērtību tabulas, dažkārt lieto tā saukto **«šķēlumu metodi»**, t. i., Dekarta koordinātu telpā konstruē funkciju

$$z=f(x_1;\ y),\ z=f(x_2;\ y),\ z=f(x_3;\ y),\ \ldots,$$
$$z=f(x;\ y_1),\ z=f(x;\ y_2),\ z=f(x;\ y_3),\ \ldots$$

vērtībām atbilstošas līnijas (88. zīm.). Šādas līnijas dod priekšstatu par funkcijas $z=f(x;\ y)$ grafiku - virsmu, jo tās iegūst, šķeļot virsmu ar plaknēm

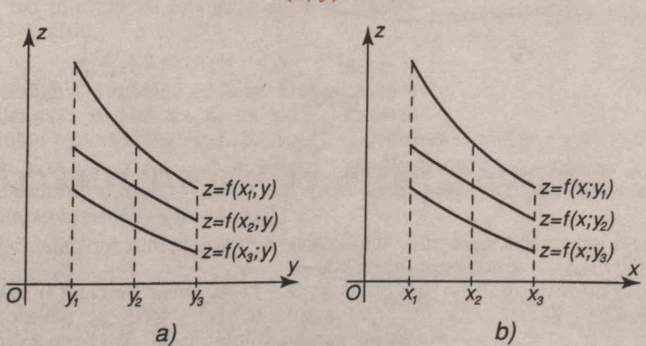
$$x=x_1,\quad x=x_2,\quad x=x_3,\ \ldots,\ y=y_1,\quad y=y_2,\quad y=y_3,\ \ldots .$$

Cits paņēmiens funkcionālas sakarības $z=f(x;\ y)$ grafiskai attēlošanai ir šāds: konstruē yOz koordinātu plaknē funkciju $z=f(x_1;\ y)$, $z=f(x_2;\ y)$, $z=f(x_3;\ y)$, ... grafikus, norādot pie katras līnijas atbilstošo argumenta x vērtību (89. zīm. a). Analogi xOz plaknē attēlo funkciju $z=f(x;\ y_1)$, $z=f(x;\ y_2)$, $z=f(x;\ y_3)$, ... grafikus (89. zīm. b).

Dažkārt divu argumentu funkcijas $z=f(x;\ y)$ grafiskai ilustrēšanai lieto funkcijas **līmeņlīnijas**.

Par funkcijas $z=f(x;\ y)$ līmeņlīniju sauc visu to punktu kopu xOy plaknē, kuros šai funkcijai ir konstanta vērtība C. Līmeņlīnijas vienādojums ir

$$f(x;\ y)=C.$$



89. zīm.

Tātad līmeņlīniju iegūst, savienojot funkcijas definīcijas apgabala plaknē visus tos punktus, kuros funkcijai ir viena un tā pati vērtība.

Izraugoties konstantei C dažādas vērtības C_1, C_2, C_3, ..., C_n, iegūstam līmeņlīniju vienādojumus

$$f(x; y)=C_1, \quad f(x; y)=C_2, \quad f(x; y)=C_3, \quad \dots, \quad f(x; y)=C_n.$$

Šādas līnijas iegūst, šķeļot funkcijas $z=f(x; y)$ grafiku ar plaknēm $z=C_1$, $z=C_2$, $z=C_3$, ..., $z=C_n$ un šķēluma līnijas projicējot xOy plaknē. Tādējādi pēc līmeņlīniju formas un novietojuma var gūt zināmu priekšstatu par funkcijas grafiku.

Piemērs. **Noteikt funkcijas $z=5-\sqrt{x^2+y^2}$ līmeņlīnijas.**

Pielīdzinot funkcijas izteiksmi konstantei C, iegūstam

$$5-\sqrt{x^2+y^2}=C,$$

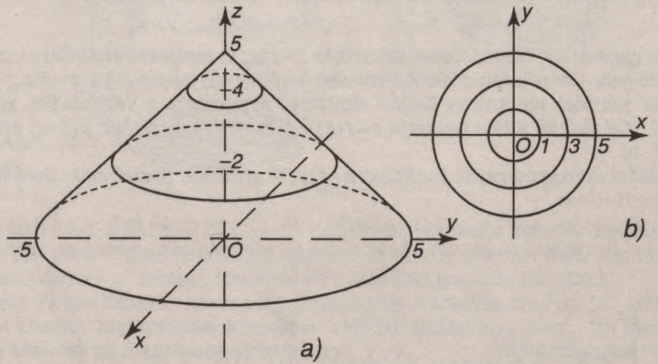
no kurienes

$$\sqrt{x^2+y^2}=5-C \quad \text{jeb} \quad x^2+y^2=(5-C)^2.$$

Tātad šīs funkcijas līmeņlīnijas dažādām C vērtībām ($C<5$) ir riņķa līnijas ar centru koordinātu sākumpunktā (90. zīm. b):

ja $C=4$, tad $x^2+y^2=1$;
ja $C=2$, tad $x^2+y^2=9$;
ja $C=0$, tad $x^2+y^2=25$ utt.

Viegli pārliecināties, ka dotās funkcijas grafiks ir konusa virsma ar virsotni punktā (0; 0; 5); šķeļot šo virsmu ar plaknēm $z=C$ ($C<5$), iegūst riņķa līnijas (90. zīm. a).



90. zīm.

10.2. §. JĒDZIENS PAR *n*-ARGUMENTU FUNKCIJU

Līdzīgi iepriekšējā paragrāfā aplūkotajai divu argumentu funkcijai definē 3, 4, 5 un vispārīgi – n argumentu funkcijas.

Trīs argumentu funkcijas gadījumā aplūko kopu, kuras elementi ir sakārtoti reālu skaitļu trijnieki (x; y; z). Šādu skaitļu trijnieku attēlo ar punktu, kura koordinātas ir (x; y; z) Dekarta taisnleņķa koordinātu telpā. Aplūkoto kopu sauc arī par telpu R^3.

Ja katram sakārtotam reālu skaitļu trijniekam $(x; y; z)$, kas ņemts no kādas kopas D, pēc noteikta likuma f atbilst viena mainīgā lieluma u vērtība, tad saka, ka ir definēta 3 argumentu funkcija, un raksta $u=f(x; y; z)$.

Trīs argumentu funkcijai $u=f(x; y; z)$ definīcijas apgabalu ģeometriski attēlo kā apgabalu 3 dimensiju telpā.

Piemēram, funkcijas $u=\sqrt{9-x^2-y^2-z^2}$ definīcijas apgabalu nosaka nevienādība

$$9-x^2-y^2-z^2 \geqslant 0 \quad \text{jeb} \quad x^2+y^2+z^2 \leqslant 9.$$

Tātad definīcijas apgabals ir visu to punktu koordinātas, kuri atrodas telpas daļā, ko robežo sfēra $x^2+y^2+z^2=9$, ieskaitot sfēras punktus. □

Vispārīgā gadījumā, definējot n-argumentu funkciju, aplūko kopu, kuras elementi ir n sakārtotu reālu skaitļu kompleksi jeb korteži $(x_1; x_2; x_3; \dots ; x_n)$. Šādu kopu sauc par telpu R^n, un tās elementus, saglabājot iepriekš lietoto ģeometrisko terminoloģiju, sauc arī par n-dimensiju telpas punktiem.

Ja katram n reālu sakārtotu skaitļu kortežam $(x_1; x_2; x_3; \dots ; x_n)$, kas ņemts no kādas kopas D, pēc noteikta likuma f atbilst viena mainīgā lieluma u vērtība, tad saka, ka ir definēta n argumentu funkcija, un raksta $u=f(x_1; x_2; x_3; \dots ; x_n)$.

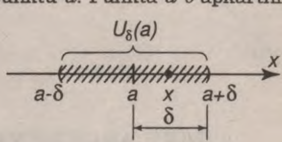
Vairākargumentu funkcijas uzdod galvenokārt analītiskā veidā.

Piemēram, $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$, $u=\dfrac{\sin(x+y)}{2z+3t}$.

10.3. §. VAIRĀKARGUMENTU FUNKCIJAS ROBEŽA

1. JĒDZIENS PAR PUNKTA APKĀRTNI n DIMENSIJU TELPĀ

Definējot viena argumenta funkcijas $f(x)$ robežu, kad $x \to a$, lietojām punkta a apkārtni, t. i., tādu intervālu, kas simetrisks pret punktu a. Punkta a δ-apkārtni apzīmējām ar $U_\delta(a)$ vai arī $(a-\delta; a+\delta)$ (91. zīm.).



91. zīm.

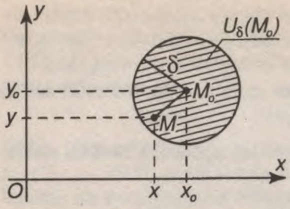
Acīmredzot, ja punkts x pieder apkārtnei $U_\delta(a)$, tad tā attālums līdz punktam a ir mazāks nekā $\delta>0$, proti,

$$x \in U_\delta(a) \Leftrightarrow |x-a| < \delta.$$

Noskaidrojot robežas jēdzienu divu argumentu funkcijai $f(x; y)$, kad $x \to x_0$ un $y \to y_0$, Dekarta koordinātu plaknē aplūko punktu $M_0(x_0; y_0)$ jeb skaitļu pāri $(x_0; y_0) \in \boldsymbol{R}^2$.

Par punkta $M_0(x_0; y_0)$ apkārtni koordinātu plaknē izraugās riņķi ar centru punktā M_0 (vai arī kvadrātu, kura malas paralēlas koordinātu asīm un diagonāles krustojas punktā M_0).

Franču izcelsmes vārds «kortežs» (cortege) nozīmē «svinīgs gājiens» vai «transportlīdzekļu rinda svinīgā braucienā». Matemātikā to lieto kā terminu kādas kopas elementu sakārtotas virknes $(x_1, x_2, x_3, \dots , x_n)$ apzīmēšanai.



92. zīm.

Šeit un turpmāk par punkta M_0 brīvi izraudzītu apkārtni telpā $\boldsymbol{R}^2$ uzskatīsim riņķi ar centru punktā M_0 un rādiusu $\delta>0$; šo apkārtni apzīmēsim ar $U_\delta(M_0)$ (92. zīm.).

Acīmredzot, ja punkts $M(x; y)$ pieder apkārtnei $U_\delta(M_0)$, tad tā attālums no M_0 ir mazāks nekā δ, t. i.,

$$M(x; y)\in U_\delta(M_0) \Leftrightarrow MM_0<\delta$$

jeb

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta; \quad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2.$$

Analogi, runājot par trīs argumentu funkcijas $f(x; y; z)$ robežu, kad $x\to x_0$, $y\to y_0$, $z\to z_0$, aplūko punktu $M_0(x_0; y_0; z_0)$ Dekarta koordinātu telpā jeb sakārtotu skaitļu trijnieku $(x_0; y_0; z_0)\in\boldsymbol{R}^3$.

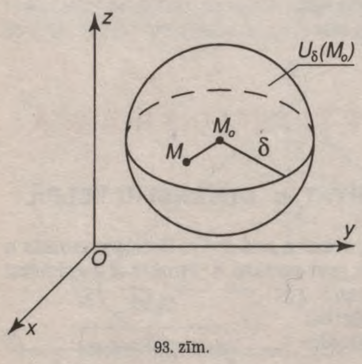
Par punkta M_0 apkārtni $U_\delta(M_0)$ uzskatīsim lodi ar centru punktā M_0 un rādiusu $\delta>0$ (93. zīm.).

Tādējādi, ja punkts $M(x; y; z)$ pieder apkārtnei $U_\delta(M_0)$, tad tā attālums no punkta M_0 ir mazāks nekā δ, t. i.,

$$M(x; y; z)\in U_\delta(M_0) \Leftrightarrow MM_0<\delta$$

jeb

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta.$$



93. zīm.

Vispārinot šo ģeometrisko terminoloģiju n argumentu funkcijai $f(x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n)$, var runāt par punkta $M_0(x_1^0; x_2^0; x_3^0; \ldots; x_n^0)$ apkārtni telpā $\boldsymbol{R}^n$.

Ar punkta M_0 δ-apkārtni $U_\delta(M_0)$ šeit sapratīsim tādu kopu, kuras elementi ir sakārtoti n reālu skaitļu korteži $(x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n)$, ja šie skaitļi apmierina nevienādību

$$\sqrt{(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2+\ldots+(x_n-x_n^0)^2}<\delta.$$

Šādu apkārtni sauksim par ***«n dimensiju lodi ar centru punktā M_0 un rādiusu δ»***. Saprotams, ka gadījumā, ja $n>3$, šim jēdzienam neeksistē atbilstošs objekts elementārajā ģeometrijā.

2. DIVU ARGUMENTU FUNKCIJAS ROBEŽAS DEFINĪCIJA

Aplūkosim divu argumentu funkciju $z=f(x; y)$.

Pieņemsim, ka $M_0(x_0; y_0)$ ir punkts, kura jebkurā apkārtnē atrodas bezgalīgi daudz funkcijas $f(x; y)$ definīcijas apgabala punktu (M_0 var piederēt funkcijas definīcijas apgabalam, bet var arī tam nepiederēt), bet $M(x; y)$ ir brīvi izraudzīts funkcijas definīcijas apgabala punkts.

Ar pierakstu

$$M\to M_0 \quad \text{jeb} \quad x\to x_0 \quad \text{un} \quad y\to y_0$$

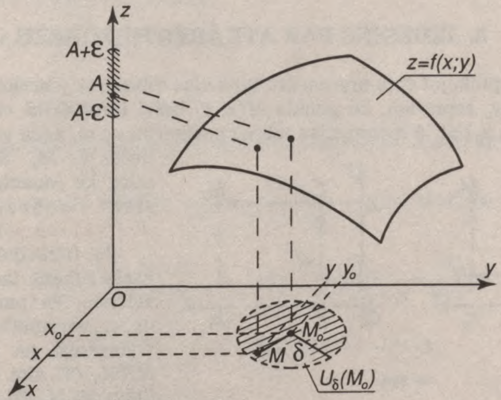
sapratīsim, ka jebkuras brīvi izraudzītas argumentu vērtību virknes

$$x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n; \ldots \quad \text{un} \quad y_1; y_2; y_3; \ldots; y_n; \ldots$$

robežas attiecīgi ir x_0 un y_0.

Noskaidrosim jēdzienu «**skaitlis A ir funkcijas $f(x; y)$ robeža, kad $x \to x_0$ un $y \to y_0$**». Definīcijas ģeometriskā ideja ir šāda: lai cik mazu izvēlamies pozitīvu skaitli ε, var atrast tādu punkta $M_0(x_0; y_0)$ apkārtni $U_\delta(M_0)$, ka visos šīs apkārtnes punktos $M(x; y)$ (kas nesakrīt ar M_0) funkcijas vērtības no skaitļa A atšķiras mazāk par ε, t. i., atrodas intervālā $(A-\varepsilon; A+\varepsilon)$.

Šis spriedums ilustrēts 94. zīmējumā, kur parādīts funkcijas $z=f(x; y)$ grafiks - virsma, xOy plaknē atzīmēts punkts $M_0(x_0; y_0)$, kam atbilst funkcijas robeža A - uz Oz ass atzīmētā iedaļa. Apkārtne $U_\delta(M_0)$ attēlota kā riņķis xOy plaknē ar centru punktā M_0 un rādiusu δ. Šajā apkārtnē ņemts punkts $M(x; y)$, kam atbilstošā funkcijas vērtība $f(M) \in (A-\varepsilon; A+\varepsilon)$.



94. zīm.

Definīcija

Skaitli A sauc par funkcijas f(x; y) robežu, kad M(x; y) → $M_0(x_0; y_0)$, un raksta

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x; y) = A \quad jeb \quad \lim_{M \to M_0} f(M) = A,$$

ja katram pozitīvam skaitlim ε var atrast tādu punkta M_0 apkārtni $U_\delta(M_0)$, ka visiem punktiem $M(x; y) \neq M_0$ no šīs apkārtnes ir

$$|f(x; y) - A| < \varepsilon.$$

Definīciju var pierakstīt arī saīsināti:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x; y) = A \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ U_\delta(M_0), \text{ ka } \forall M(x; y) \in U_\delta(M_0),\ M \neq M_0$$

$$\text{ir } |f(x; y) - A| < \varepsilon.$$

Tā kā apkārtni šeit saprotam kā riņķi ar centru punktā M_0 un rādiusu δ, un punkta M piederību šai apkārtnei - kā nevienādību $MM_0 < \delta$, tad robežu definē arī šādi:

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = A \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0, \text{ ka } \forall M, \text{ kam } 0 < MM_0 < \delta, \text{ ir}$$

$$|f(M) - A| < \varepsilon.$$

Vai arī, lietojot punktu koordinātas un attāluma formulu:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y) = A \Leftrightarrow$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, ka $\forall (x;y)$, kam

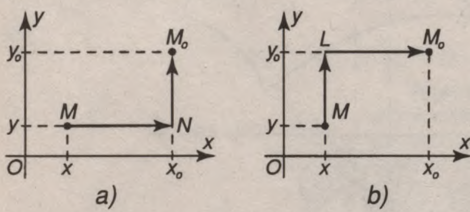
$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta, \text{ ir } |f(x;y) - A| < \varepsilon.$$

Piezīmes. 1. Izmantojot punkta apkārtnes jēdzienu n dimensiju telpā, var līdzīgi definēt robežu arī n argumentu funkcijai gadījumā, kad $n > 2$.

2. Vairākargumentu funkcijām ir spēkā analogas teorēmas un īpašības par robežām kā viena argumenta funkcijām.

3. JĒDZIENS PAR ATKĀRTOTU ROBEŽU

Iepriekš, aplūkojot divu argumentu funkcijas robežu, ar pierakstu $M \to M_0$ jeb $x \to x_0$ un $y \to y_0$ sapratām, ka punkts $M(x;y)$ **brīvi izraudzītā veidā** tiecas uz punktu $M_0(x_0; y_0)$ un A ir funkcijas robeža neatkarīgi no tā, kādā veidā punkts M tiecas uz M_0. Šādā gadījumā saka, ka funkcijai $f(x;y)$ eksistē robeža (precīzāk – *divkāršā robeža*), kad $M \to M_0$.



95. zīm.

Ja funkcijai eksistē divkāršā robeža, tad kā vienu no veidiem, kā punkts M tiecas uz M_0, var aplūkot punkta pārvietošanos pa lauztu līniju MNM_0 (95. zīm. a) vai arī pa līniju MLM_0 (95. zīm. b).

Pirmajā gadījumā, atrodot robežu, funkcijas $f(x;y)$ izteiksmē argumentu y uzskata par konstantu (fiksē) un atrod

$$\lim_{x \to x_0} f(x;y).$$

Pēc tam meklē iegūtās izteiksmes robežu, kad $y \to y_0$, t. i., atrod

$$\lim_{y \to y_0} (\lim_{x \to x_0} f(x;y)). \tag{1}$$

Otrajā gadījumā, atrodot robežu, vispirms argumentu x uzskata par konstantu un atrod

$$\lim_{y \to y_0} f(x;y),$$

bet pēc tam –

$$\lim_{x \to x_0} (\lim_{y \to y_0} f(x;y)). \tag{2}$$

Izteiksmes (1) *un* (2) *sauc par funkcijas* ***atkārtotajām robežām*****, *kad*** $M(x;y) \to M_0(x_0; y_0)$.

Ne vienmēr atkārtotās robežas ir vienādas. Šādā gadījumā saka, ka funkcijai **neeksistē divkāršā robeža.**

Piemēram, neeksistē robeža

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y},$$

jo $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-y+x^2+y^2}{x+y}\right)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{-y+y^2}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y(y-1)}{y}=-1,$

bet $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x-y+x^2+y^2}{x+y}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1+x)}{x}=1.$ □

Svarīga ir **teorēma par atkārtoto robežu vienādību**, kuru aplūkosim bez pierādījuma.

Ja 1) $\exists \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)=A,$

2) $\forall y\in Y\ \exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x;y)=g(y),$

3) $\forall x\in X\ \exists \lim\limits_{y\to y_0} f(x;y)=h(x),$

tad $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x;y)=\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x;y)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)=A.$

Tātad, *ja zināms, ka funkcijai eksistē divkāršā robeža, tad to atrod kā atkārtoto robežu.*

Piemērs. **Atrast robežu** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$**, ja zināms, ka šī robeža eksistē.**

1) Atrodam

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)}{x^2+1-1}=\lim_{x\to 0}(\sqrt{x^2+1}+1)=2.$$

2) Arī otrā atkārtotā robeža ir 2:

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{\sqrt{y^2+1}-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\ldots=2. \ \square$$

Atzīmēsim, ka *atkārtoto robežu vienādība vēl negarantē divkāršās robežas eksistenci.*

Piemērs

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{2xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2}=\lim_{x\to 0}0=0.$$

Arī

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{2xy}{x^2+y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2}=\lim_{y\to 0}0=0.$$

Taču robeža $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ neeksistē, jo, pārvietojoties uz koordinātu sākumpunktu $O(0;0)$ xOy plaknē pa dažādām taisnēm $y=kx$, iegūst dažādas robežas vērtības.

Piemēram, pārvietojoties pa taisni $y=x$, iegūstam:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2xy}{x^2+y^2}=[y=x]=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot x}{x^2+x^2}=1,$$

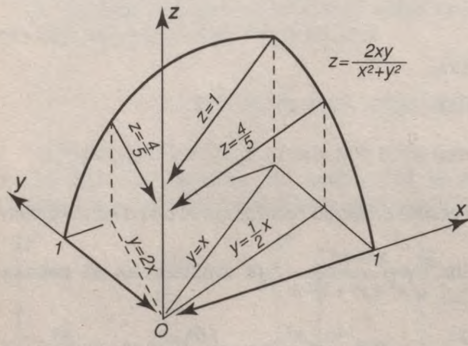
bet, pārvietojoties pa taisni $y=2x$, iegūstam

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2xy}{x^2+y^2}=[y=2x]=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot 2x}{x^2+4x^2}=\frac{4}{5}.$$

Acīmredzot robeža ir atkarīga no taisnes $y=kx$ virziena koeficienta:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2xy}{x^2+y^2}=[y=kx]=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot kx}{x^2+k^2x^2}=\frac{2k}{1+k^2}.$$

96. zīmējumā attēlots funkcijas grafiks – virsma; uz grafika parādītas virsmas šķēluma līnijas ar plaknēm, kas vilktas perpendikulāri xOy plaknei caur taisnēm $y=\frac{1}{2}x$, $y=x$ un $y=2x$. Uz katras no šīm taisnēm funkcijai ir konstanta vērtība – attiecīgi $\frac{4}{5}$, 1 un $\frac{4}{5}$, kas vienāda ar robežu, pārvietojoties uz punktu O pa attiecīgo taisni. Tādējādi šī funkcija nav definēta punktā $O(0;\ 0)$; tās grafiku veido xOy plaknei paralēlu taišņu kopa, turklāt šo taišņu attālums līdz plaknei xOy ir dažāds. Tāpēc arī funkcijai neeksistē viennozīmīga robeža, kad $x\to 0$ un $y\to 0$.



96. zīm.

10.4.§. VAIRĀKARGUMENTU FUNKCIJAS NEPĀRTRAUKTĪBAS JĒDZIENS

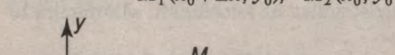
1. FUNKCIJAS PARCIĀLIE PIEAUGUMI UN PILNAIS PIEAUGUMS

Tāpat kā viena argumenta funkcijai, arī vairākargumentu funkcijām nepārtrauktības un atvasinājuma jēdzienus definē ar funkcijas pieauguma un argumentu pieaugumu palīdzību. Lai, noskaidrojot šos jēdzienus, varētu izmantot ģeometriskas ilustrācijas, aplūkosim divu argumentu funkciju $z=f(x;\ y)$.

Pieņemsim, ka $M_0(x_0;\ y_0)$ ir funkcijas $z=f(x;\ y)$ definīcijas apgabala punkts. Aplūkosim vēl šādus funkcijas definīcijas apgabala punktus:

$$M_1(x_0+\Delta x;\ y_0),\quad M_2(x_0;\ y_0+\Delta y),\quad M_3(x_0+\Delta x;\ y_0+\Delta y).$$

Acīmredzot šie punkti ir tāda taisnstūra virsotnes, kura malas paralēlas koordinātu asīm (97. zīm.).



97. zīm.

Atrodam funkcijas vērtības šajos punktos:

$$z_0=f(M_0)=f(x_0;\ y_0),$$
$$z_1=f(M_1)=f(x_0+\Delta x;\ y_0),$$
$$z_2=f(M_2)=f(x_0;\ y_0+\Delta y),$$
$$z_3=f(M_3)=f(x_0+\Delta x;\ y_0+\Delta y).$$

Lai salīdzinātu funkcijas vērtības punktos M_1, M_2 un M_3 ar vērtību sākumā izraudzītajā punktā M_0, atrod starpības z_1-z_0, z_2-z_0 un z_3-z_0, t. i.,

$$f(x_0+\Delta x;\, y_0)-f(x_0;\, y_0),\, f(x_0;\, y_0+\Delta y)-f(x_0;\, y_0),\, f(x_0+\Delta x;\, y_0+\Delta y)-f(x_0;\, y_0).$$

Definīcija

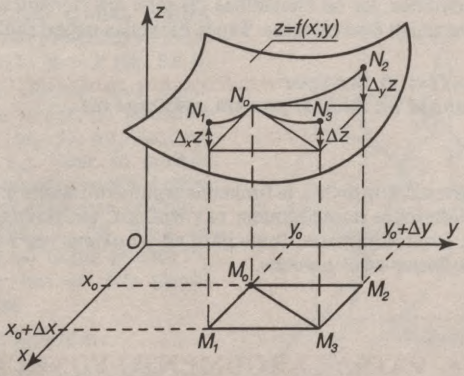
Starpību $\Delta_x z = f(x_0+\Delta x;\; y_0)-f(x_0;\; y_0)$ ***sauc par funkcijas parciālo pieaugumu pēc x.***

Starpību $\Delta_y z = f(x_0;\; y_0+\Delta y)-f(x_0;\; y_0)$ ***sauc par funkcijas parciālo pieaugumu pēc y.***

Starpību $\Delta z=f(x_0+\Delta x;\; y_0+\Delta y)-f(x_0;\; y_0)$ ***sauc par funkcijas pilno pieaugumu.***

Funkcijas $z=f(x;\, y)$ parciālie pieaugumi un pilnais pieaugums ilustrēti 98. zīmējumā. Šeit N_0, N_1, N_2 un N_3 ir funkcijas grafika punkti un

$$\Delta_x z=M_1N_1-M_0N_0,\quad \Delta_y z=M_2N_2-M_0N_0,\quad \Delta z=M_3N_3-M_0N_0.$$



98. zīm.

2. DIVU ARGUMENTU FUNKCIJAS NEPĀRTRAUKTĪBAS DEFINĪCIJA

Definējot funkcijas $z=f(x;\, y)$ nepārtrauktības jēdzienu, izmanto šīs funkcijas pilno pieaugumu Δz. 98. zīmējumā ir attēlots punktā $M_0(x_0;y_0)$ nepārtrauktas divu argumentu funkcijas grafiks - virsma. Intuitīvi ir skaidrs, ka funkcijas pilnais pieaugums Δz šajā punktā tiecas uz nulli, ja argumentu pieaugumi Δx un Δy tiecas uz nulli. Šis spriedums ir pamatā nepārtrauktības definīcijai.

Definīcija

Saka, ka funkcija $z=f(x;\, y)$ ***ir nepārtraukta punktā*** $M_0(x_0;\, y_0)$***, ja tā ir definēta šajā punktā un arī kādā tā apkārtnē un ja bezgalīgi maziem argumentu pieaugumiem*** Δx ***un*** Δy ***atbilst bezgalīgi mazs funkcijas pieaugums*** Δz***, t. i., ja***

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z=0. \tag{1}$$

Pārveidosim izteiksmi (1). Tā kā funkcijas pilnais pieaugums $\Delta z= =f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y)-f(x_0; y_0)$, tad no vienādības (1) izriet, ka

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} (f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y)-f(x_0; y_0))=0,$$

no kurienes $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y)=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x_0; y_0)$ jeb

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y)=f(x_0; y_0), \tag{2}$$

jo $f(x_0; y_0)$ ir konstants lielums.

Izmantojot apzīmējumus $x_0+\Delta x=x$, $y_0+\Delta y=y$ un ievērojot to, ka $x\to x_0$, $y\to y_0$, ja $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, no vienādības (2) iegūstam, ka

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x; y)=f(x_0; y_0). \tag{3}$$

Viegli pārliecināties, ka no vienādības (3) seko arī vienādība (1) un tātad šīs vienādības ir savstarpēji ekvivalentas. Tāpēc funkcijas nepārtrauktību var definēt arī šādi.

Funkciju $z=f(x; y)$ sauc par nepārtrauktu punktā $M_0(x_0; y_0)$, ja tā ir definēta šajā punktā un kādā šī punkta apkārtnē un

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x; y)=f(x_0; y_0).$$

Analogi nepārtrauktību definē, ja funkcijas argumentu skaits ir lielāks nekā divi.

Ja kāds no definīcijas nosacījumiem nav izpildīts, tad funkcijai punktā M_0 ir pārtraukums. Divu argumentu funkcijām *pārtraukums var būt atsevišķā punktā vai arī kādas līnijas visos punktos.*

10.5. §. VAIRĀKARGUMENTU FUNKCIJAS PARCIĀLIE ATVASINĀJUMI

1. PARCIĀLO ATVASINĀJUMU DEFINĪCIJA UN ĢEOMETRISKĀ ILUSTRĀCIJA

Analogi kā viena argumenta funkcijai, vairākargumentu funkcijām atvasinājumu definē ar funkcijas parciālā pieauguma un atbilstošā argumenta pieauguma attiecības robežu, kad argumenta pieaugums tiecas uz nulli.

Divu argumentu funkcijai $z=f(x; y)$ ir iespējami divi gadījumi:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} \quad \text{un} \quad \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

Definīcija

Funkcijas $z=f(x; y)$ parciālā pieauguma pēc x un argumenta pieauguma Δx attiecības robežu, kad $\Delta x\to 0$, t. i.,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x; y)-f(x; y)}{\Delta x}$$

sauc par funkcijas parciālo atvasinājumu pēc x.

Robežu

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x;\, y+\Delta y) - f(x;\, y)}{\Delta y}$$

sauc par funkcijas parciālo atvasinājumu pēc y.

Funkcijas $z=f(x;\, y)$ parciālo atvasinājumu pēc x punktā $M(x;\, y)$ apzīmē ar šādiem simboliem:

$$z'_x,\quad f'_x(x;\, y),\quad \frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial f(x;\, y)}{\partial x},$$

bet parciālo atvasinājumu pēc y – ar simboliem

$$z'_y,\quad f'_y(x;\, y),\quad \frac{\partial z}{\partial y},\quad \frac{\partial f(x;\, y)}{\partial y}.$$

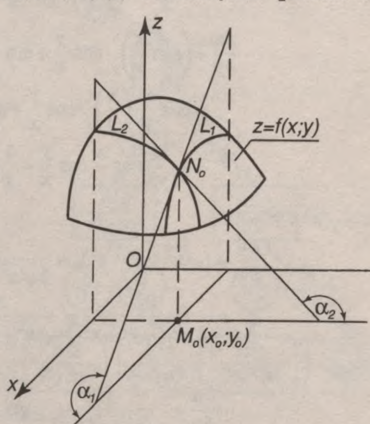
Analogi definē parciālos atvasinājumus arī trīs, četru un vispār n argumentu funkcijām.

Kā zināms, viena argumenta funkcijas $y=f(x)$ atvasinājums punktā x_0 ir vienāds ar funkcijas grafika punktā $(x_0; f(x_0))$ novilktās pieskares virziena koeficientu: $f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha=k$ (sk. 8.3.§).

Analogi var ilustrēt divu argumentu funkcijas $z=f(x;\, y)$ parciālos atvasinājumus $f'_x(x_0;\, y_0)$ un $f'_y(x_0;\, y_0)$ punktā $M_0(x_0;\, y_0)$. Caur šo punktu novelkam xOz plaknei paralēlu plakni $y=y_0$, kas, šķeļot funkcijas grafiku – virsmu, veido līniju L_1 (99. zīm.). Ja šķēluma plaknē šai līnijai punktā N_0 novelk pieskari, kas ar xOy plakni veido leņķi α_1, tad

$$f'_x(x_0;\, y_0)=\operatorname{tg}\alpha_1.$$

Analogi $f'_y(x_0;\, y_0)=\operatorname{tg}\alpha_2$, kur α_2 ir yOz plaknei paralēli novilktās plaknes $x=x_0$ un funkcijas grafika šķēluma līnijas L_2 pieskares virziena leņķis.



99. zīm.

2. PARCIĀLĀ ATVASINĀŠANA

Atrodot vairākargumentu funkcijas parciālos atvasinājumus, lieto jau pazīstamos viena argumenta funkciju atvasināšanas likumus un formulas. Taču ir jāievēro, ka saskaņā ar parciālo atvasinājumu definīciju, *atvasinot pēc viena argumenta, pārējie argumenti ir jāuzskata par konstantiem lielumiem*.

Tā, piemēram, atvasinot pēc x funkciju $z=x^3y^2+3y+x$, y^2 ir jāuzskata par konstantu reizinātāju, bet $3y$ – par konstantu saskaitāmo.

Tāpēc $z'_x=3x^2y^2+1$.

Atvasinot pēc y, konstants ir reizinātājs x^3, bet x – konstants saskaitāmais.

Tāpēc $z'_y=2yx^3+3$.

Piemēri. **Atrast parciālos atvasinājumus.**

1. $z=x^3y^2-2x^2y^3+3x+4y$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2-4xy^3+3$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2x^3y-6x^2y^2+4$$

2. $z=\sin\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\sin\frac{x}{y}\right)'_x\cdot\cos\frac{y}{x}+\sin\frac{x}{y}\cdot\left(\cos\frac{y}{x}\right)'_x=$$

$$=\cos\frac{x}{y}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_x\cdot\cos\frac{y}{x}-\sin\frac{x}{y}\cdot\sin\frac{y}{x}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_x=$$

$$=\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\cdot\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x^2}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\sin\frac{x}{y}\right)'_y\cdot\cos\frac{y}{x}+\sin\frac{x}{y}\cdot\left(\cos\frac{y}{x}\right)'_y=$$

$$=\cos\frac{x}{y}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_y\cdot\cos\frac{y}{x}+\sin\frac{x}{y}\left(-\sin\frac{y}{x}\right)\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_y=$$

$$=-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}-\frac{1}{x}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$$

3. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=(\sqrt{x^2+y^2+z^2})'_x=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot(x^2+y^2+z^2)'_x=$$

$$=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Analogi

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\quad\text{un}\quad\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

jo $(x^2+y^2+z^2)'_y=2y$ un $(x^2+y^2+z^2)'_z=2z$.

3. AUGSTĀKU KĀRTU PARCIĀLIE ATVASINĀJUMI

Aplūkosim divu argumentu funkciju $z=f(x;\ y)$.

Šīs funkcijas parciālie atvasinājumi $\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x;\ y)$ un $\frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x;\ y)$ arī ir divu argumentu x un y funkcijas. Tātad arī tām var meklēt parciālos atvasinājumus kā pēc x, tā pēc y. Rezultātā iegūst dotās funkcijas četrus ***otrās kārtas parciālos atvasinājumus***, kurus apzīmē ar šādiem simboliem:

1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx}=f''_{xx}(x;\ y)$ (funkciju f divas reizes atvasina pēc x);

2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=z''_{xy}=f''_{xy}(x;\ y)$ (funkciju f vispirms atvasina pēc x un iegūto rezultātu atvasina pēc y);

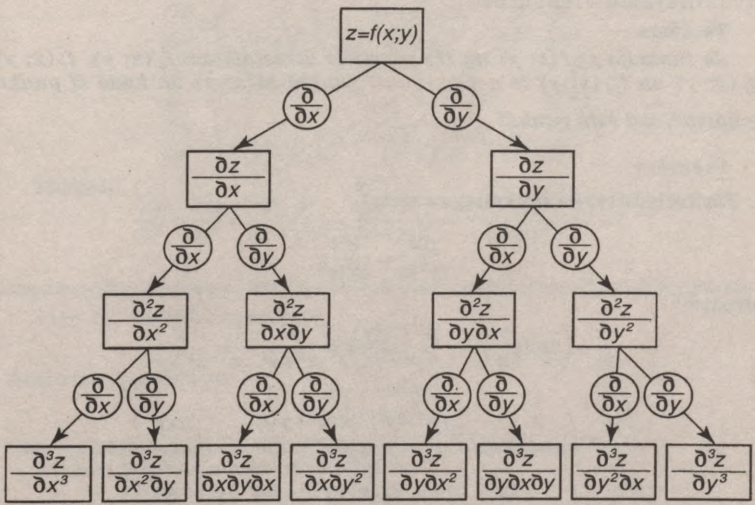
3) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=z''_{yx}=f''_{yx}(x;\,y)$ (funkciju f vispirms atvasina pēc y un iegūto rezultātu atvasina pēc x);

4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy}=f''_{yy}(x;\,y)$ (funkciju f divas reizes atvasina pēc y).

Katru otrās kārtas atvasinājumu var atkal atvasināt kā pēc x, tā pēc y. Rezultātā atrod astoņus trešās kārtas atvasinājumus:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3};\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y};\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y\,\partial x};\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2};\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y\,\partial x^2};\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y\,\partial x\,\partial y};\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2\,\partial x};\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3},$$

no kuriem savukārt iegūst 4. kārtas atvasinājumus utt. (sk. 100. zīm.).



100. zīm.

Analogi atrod augstāku kārtu atvasinājumus funkcijām, kuru argumentu skaits ir lielāks nekā 2.

Piemērs. **Atrast otrās kārtas parciālos atvasinājumus funkcijai** $z=2x^3y^3+3x^2y^3$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(2x^3y^3+3x^2y^3)'_x=6x^2y^3+6xy^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(2x^3y^3+3x^2y^3)'_y=6x^3y^2+9x^2y^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(6x^2y^3+6xy^3)'_x=12xy^3+6y^3$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=(6x^2y^3+6xy^3)'_y=18x^2y^2+18xy^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=(6x^3y^2+9x^2y^2)'_x=18x^2y^2+18xy^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(6x^3y^2+9x^2y^2)'_y=12x^3y+18x^2y$$

Kā redzams, šajā piemērā jauktie 2. kārtas parciālie atvasinājumi ir vienādi, t. i., $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

Atrodot 3. kārtas atvasinājumus, varam pārliecināties, ka arī

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}=\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^3 z}{\partial y\,\partial x^2}\quad \text{un}\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2\,\partial x}=\frac{\partial^3 z}{\partial y\,\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}\quad \text{utt.}$$

Tātad šajā piemērā, atrodot augstāku kārtu jauktos parciālos atvasinājumus, atvasināšanas rezultāts ir atkarīgs tikai no tā, cik reižu pēc katra argumenta atvasina, bet nav atkarīgs no atvasināšanas secības.

Aplūkosim bez pierādījuma teorēmu par 2. kārtas jaukto parciālo atvasinājumu vienādību.

Teorēma

Ja funkcija $z=f(x;\,y)$ un tās parciālie atvasinājumi $f'_x(x;\,y)$, $f'_y(x;\,y)$, $f''_{xy}(x;\,y)$ un $f''_{yx}(x;\,y)$ ir nepārtraukti punktā $M(x;\,y)$ un kādā šī punkta apkārtnē, tad šajā punktā $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

Piemēri

1. Pārliecināties, ka funkcijai $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2\,\partial x}=\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}.$$

Atrodam:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)'_y=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_y=\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_y=\frac{x'_y(x^2+y^2)-x(x^2+y^2)'_y}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2\,\partial x}=\left(-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)'_x=-\frac{2y(x^2+y^2)^2-2xy\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^4}=$$

$$=-\frac{2y(x^2+y^2)-8x^2y}{(x^2+y^2)^3}=\frac{8x^2y-2x^2y-2y^3}{(x^2+y^2)^3}=\frac{6x^2y-2y^3}{(x^2+y^2)^3}.$$

Analogi:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)'_x=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_x=\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_y=-\frac{x^2+y^2-2y\cdot y}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}=\left(-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)'_y=-\frac{-2y(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)\cdot 2(x^2+y^2)2y}{(x^2+y^2)^4}=\frac{6x^2y-2y^3}{(x^2+y^2)^3}.$$

Tādējādi

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2\,\partial x}=\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}=\frac{6x^2y-2y^3}{(x^2+y^2)^3}.$$

2. Dota funkcija $u=\ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. **Pārliecināties, ka**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Pirms atvasināšanas ir lietderīgi doto funkciju pārveidot, izmantojot logaritmēšanas likumus:

$$u=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=-\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2).$$

Atrodam atvasinājumus.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(-\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right)'_x=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+y^2}=-\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_x=-\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(-\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right)'_y=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{x^2+y^2}=-\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_y=-\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Tādējādi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2+y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=0.$$

Piemērs. **Pierādīt, ka funkcija**

$$y=\ln\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{t}\right)$$

apmierina vienādojumu

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial t}+\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{x^2}$$

(šādu vienādojumu sauc par otrās kārtas parciālo diferenciālvienādojumu).

Atrodam funkcijas parciālos atvasinājumus:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\left(\ln\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{t}\right)\right)'_x=\frac{1}{\frac{1}{x}-\frac{1}{t}}\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{t}\right)'_x=\frac{xt}{t-x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{t}{x(t-x)}=\frac{t}{x^2-xt},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial t}=\left(\frac{t}{x^2-xt}\right)'_t=\frac{t'_t(x^2-xt)-t(x^2-xt)'_t}{(x^2-xt)^2}=\frac{x^2-xt+xt}{(x^2-xt)^2}=\frac{x^2}{(x^2-xt)^2},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\left(\frac{t}{x^2-xt}\right)'_x=\frac{t'_x(x^2-xt)-t(x^2-xt)'_x}{(x^2-xt)^2}=\frac{0-2xt+t^2}{(x^2-xt)^2}=\frac{t^2-2xt}{(x^2-xt)^2}.$$

Ievietojam dotajā vienādojumā $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial t}$ un $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ izteiksmes:

$$\frac{x^2}{(x^2-xt)^2}+\frac{t^2-2xt}{(x^2-xt)^2}\overset{?}{=}\frac{1}{x^2},$$

$$\frac{x^2+t^2-2xt}{(x^2-xt)^2}\overset{?}{=}\frac{1}{x^2},\quad\frac{(x-t)^2}{(x(x-t))^2}\overset{?}{=}\frac{1}{x^2},\quad\frac{(x-t)^2}{x^2(x-t)^2}\overset{?}{=}\frac{1}{x^2},$$

$$\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}.$$

Tātad funkcija y ir dotā diferenciālvienādojuma atrisinājums.

10.6.§. VAIRĀKARGUMENTU FUNKCIJAS PILNAIS DIFERENCIĀLIS

1. PILNĀ PIEAUGUMA FORMULA

Aplūkosim divu argumentu funkciju $z=f(x; y)$. Šīs funkcijas vērtība punktā $M_0(x_0; y_0)$ ir $f(x_0; y_0)$. Ja argumentu x izmaina par lielumu Δx un argumentu y izmaina par lielumu Δy, tad funkcijas vērtība mainās par lielumu

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y)-f(x_0; y_0),$$

ko sauc par funkcijas pilno pieaugumu.

Ja funkcijai $z=f(x; y)$ punktā $M_0(x_0; y_0)$ eksistē nepārtraukti parciālie atvasinājumi $f'_x(x_0; y_0)$ un $f'_y(x_0; y_0)$, tad funkcijas pilno pieaugumu var izteikt ar parciālo atvasinājumu palīdzību šādā veidā:

$$\Delta z=f'_x(x_0; y_0)\cdot\Delta x+f'_y(x_0; y_0)\cdot\Delta y+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y, \tag{1}$$

kur α un β ir bezgalīgi mazi lielumi, kad $\Delta x\to 0$ un $\Delta y\to 0$. Vienādību (1) sauc par funkcijas **pilnā pieauguma formulu**.

Var pierādīt, ka $\alpha\Delta x+\beta\Delta y$ ir augstākas kārtas bezgalīgi mazs lielums nekā $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$, t. i., $\alpha\Delta x+\beta\Delta y=o(\rho)$, kad $\Delta x\to 0$ un $\Delta y\to 0$. Tātad pilnā pieauguma formulu raksta arī šādi:

$$\Delta z=f'_x(x_0; y_0)\Delta x+f'_y(x_0; y_0)\Delta y+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}).$$

2. PILNĀ DIFERENCIĀĻA JĒDZIENS

Var pierādīt, ka pilnā pieauguma formulā (1) summa $\alpha\Delta x+\beta\Delta y$ ir augstākas kārtas bezgalīgi mazs lielums nekā pirmo divu saskaitāmo summa $f'_x(x_0; y_0)\Delta x+f'_y(x_0; y_0)\Delta y$, kad $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$. Tātad $f'_x(x_0; y_0)\Delta x+f'_y(x_0; y_0)\Delta y$ ir funkcijas pieauguma Δz galvenā daļa.

Definīcija

Funkcijas $z=f(x; y)$ pilnā pieauguma galveno daļu, kas ir lineāri atkarīga no argumentu pieaugumiem Δx un Δy, sauc par funkcijas pilno diferenciāli; pilno diferenciāli apzīmē ar simbolu dz vai $df(x; y)$.

Tātad

$$df(x_0; y_0)=f'_x(x_0; y_0)\Delta x+f'_y(x_0; y_0)\Delta y$$

jeb

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

Pilnā diferenciāļa pierakstā lieto šādus apzīmējumus: $\Delta x=dx$, $\Delta y=dy$. Līdz ar to iegūstam, ka

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{2}$$

Saskaitāmos $\frac{\partial z}{\partial x}dx$ un $\frac{\partial z}{\partial y}dy$ sauc par funkcijas parciālajiem diferenciāļiem.

Ja funkcijas argumentu skaits ir lielāks nekā 2, tad pilnais diferenciālis ir vienāds ar tik parciālo diferenciāļu summu, cik daudz ir argumentu, proti, ja $u=f(x_1; x_2: \dots ; x_n)$, tad

$$du=\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2+\dots+\frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n.$$

Piemēri. **Uzrakstīt dotajām funkcijām pilnā diferenciāļa izteiksmi.**

1. $z=\sin(x^2+y^3)$

$$dz=(\sin(x^2+y^3))'_x dx+(\sin(x^2+y^3))'_y dy=2x\cos(x^2+y^3)\,dx+3y^2\cos(x^2+y^3)\,dy$$

2. $u=x^2+y^2+z^2$

$$du=2xdx+2ydy+2zdz$$

3. PILNĀ DIFERENCIĀĻA LIETOJUMI

Tāpat kā viena argumenta funkcijas diferenciāli, arī vairākargumentu funkcijas pilno diferenciāli lieto tuvinātos aprēķinos.

Ja Δx un Δy moduļi ir mazi lielumi, tad ***funkcijas pilnais pieaugums aptuveni ir vienāds ar tās pilno diferenciāli***:

$$\Delta f(x_0; y_0)\approx f'_x(x_0; y_0)\Delta x+f'_y(x_0; y_0)\Delta y \qquad (3)$$

jeb

$$f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y)-f(x_0; y_0)\approx f'_x(x_0; y_0)\Delta x+f'_y(x_0; y_0)\Delta y.$$

No šīs izteiksmes iegūstam

$$f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y)\approx f(x_0; y_0)+f'_x(x_0; y_0)\Delta x+f'_y(x_0; y_0)\Delta y. \qquad (4)$$

Piemērs. **Dota funkcija $f(x; y)=\sqrt{5x^2+3y^2+5}$. Izmantojot funkcijas pilno diferenciāli, aprēķināt tuvinātu $f(1{,}9; 5{,}2)$ vērtību.**

Tā kā $1{,}9=2-0{,}1$ un $5{,}2=5+0{,}2$, tad $x_0=2$, $y_0=5$, $\Delta x=-0{,}1$, $\Delta y=0{,}2$, $f(x_0; y_0)=\sqrt{5\cdot 2^2+3\cdot 5^2+5}=10$.

Atrodam funkcijas pilno diferenciāli:

$$df(x; y)=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y=$$

$$=\frac{10x}{2\sqrt{5x^2+3y^2+5}}\Delta x+\frac{6y}{2\sqrt{5x^2+3y^2+5}}\Delta y.$$

Pilnā diferenciāļa vērtība punktā (2; 5) ar argumenta pieaugumiem $\Delta x=-0{,}1$ un $\Delta y=0{,}2$ ir šāda:

$$df(2; 5)=\frac{10\cdot 2}{2\cdot 10}\cdot(-0{,}1)+\frac{6\cdot 5}{2\cdot 10}\cdot 0{,}2=0{,}2.$$

Līdz ar to, izmantojot formulu (4), atrodam, ka

$$f(1{,}9; 5{,}2)\approx 10+0{,}2=10{,}2. \ \square$$

Svarīga nozīme ir funkcijas pilnā diferenciāļa lietojumiem kļūdu teorijā – aprēķinātā rezultāta absolūtās kļūdas novērtēšanai, ja aprēķinos izmantoti skaitļi, kas noteikti ar zināmu mērīšanas kļūdu. Šo jautājumu aplūkojām jau 9.3. paragrāfā gadījumam, kad formulā ir tikai viens mainīgs lielums. Taču parasti, veicot eksperimentu, ir jāmēra vairāki lielumi un jāizmanto formulas, kas satur vairākus mainīgus lielumus.

Pieņemsim, ka $u=f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ ir formula, pēc kuras aprēķina u, ja lielumi x_i ir izmērīti ar kļūdu Δx_i, t. i., $x_i = x_{i0} \pm \Delta x_i$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Aprēķinātā lieluma u_0 kļūdu Δu var novērtēt ar funkcijas pilnā diferenciāļa palīdzību šādi:

$$\Delta u \approx |du| = \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \Delta x_n \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \Delta x_1 \right| + \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \Delta x_2 \right| + \ldots + \left| \frac{\partial u}{\partial x_n} \Delta x_n \right| .$$

Tā kā $\Delta x_i > 0$, tad

$$\Delta u \approx \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right| \cdot \Delta x_1 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right| \cdot \Delta x_2 + \ldots + \left| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right| \cdot \Delta x_n . \tag{5}$$

Piemēri

1. **Gaismas laušanas koeficientu aprēķina pēc formulas $n = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, kur α ir gaismas krišanas leņķis, bet β – laušanas leņķis. Aprēķināt laušanas koeficientu, ja $\alpha = (45 \pm 2)°$ un $\beta = (30 \pm 1)°$. Novērtēt iegūtā rezultāta absolūto un relatīvo kļūdu.**

Tā kā $1° \approx 0{,}0175$ radiāni, tad $\Delta\alpha = 0{,}035$, $\Delta\beta = 0{,}0175$, $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$, $\beta_0 = \frac{\pi}{6}$. Pēc gaismas laušanas koeficienta formulas atrodam, ka

$$n = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{2}\cdot 2}{2\cdot 1} = \sqrt{2} \approx 1{,}414.$$

Novērtēsim šī rezultāta absolūto kļūdu. Saskaņā ar formulu (5):

$$\Delta n \approx \left| \frac{\partial n}{\partial\alpha} \right| \Delta\alpha + \left| \frac{\partial n}{\partial\beta} \right| \Delta\beta.$$

Atrodam atvasinājumus:

$$\frac{\partial n}{\partial\alpha} = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \right)'_\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}, \quad \frac{\partial n}{\partial\beta} = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \right)'_\beta = -\frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\sin^2\beta}.$$

Līdz ar to *absolūtā kļūda*

$$\Delta n \approx \left| \frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{6}} \right| \cdot 0{,}035 + \left| -\frac{\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{6}}{\sin^2\frac{\pi}{6}} \right| \cdot 0{,}0175 \approx \underline{\underline{0{,}092}}.$$

Tātad $n = 1{,}414 \pm 0{,}092$.

Iegūtā rezultāta *relatīvā kļūda* ir $\dfrac{0{,}092}{1{,}414} \approx 0{,}0651 \approx \underline{\underline{6{,}5\,\%}}$.

2. **Aprēķināt ķermeņa blīvumu, ja, nosverot gaisā, tā masa ir $m_1 = (32{,}4 \pm 0{,}2)$ g, bet, nosverot ūdenī, – $m_2 = (27{,}6 \pm 0{,}4)$ g. Novērtēt rezultāta absolūto un relatīvo kļūdu.**

Ja ķermeņa tilpums ir V, blīvums ρ, gravitācijas paātrinājums g un ūdens blīvums $\rho_0 = 1\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, tad saskaņā ar Arhimēda likumu

$$m_2 g = m_1 g - V\rho_0 g.$$

Tā kā $m_1 = V\rho$ un $V = \dfrac{m_1}{\rho}$, tad iegūstam, ka

$$m_2 = m_1 - \frac{m_1}{\rho}\rho_0 \quad \text{jeb} \quad \rho = \frac{m_1}{m_1 - m_2}\cdot\rho_0.$$

Tātad $\rho = \dfrac{32{,}4}{32{,}4 - 27{,}6}\cdot 1 = 6{,}75\left(\dfrac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$.

Šī rezultāta kļūdas novērtēšanai atrodam parciālos atvasinājumus

$$\frac{\partial\rho}{\partial m_1} = \left(\frac{m_1}{m_1 - m_2}\cdot\rho_0\right)'_{m_1} = \rho_0\frac{m_1 - m_2 - m_1}{(m_1 - m_2)^2} = -\frac{\rho_0 m_2}{(m_1 - m_2)^2},$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial m_2} = \left(\frac{m_1}{m_1 - m_2}\cdot\rho_0\right)'_{m_2} = \rho_0\frac{m_1}{(m_1 - m_2)^2}.$$

Saskaņā ar formulu (5):

$$\Delta\rho \approx \left|-\frac{\rho_0 m_2}{(m_1 - m_2)^2}\right|\Delta m_1 + \left|\frac{\rho_0 m_1}{(m_1 - m_2)^2}\right|\Delta m_2.$$

Tā kā $m_{10} = 32{,}4$, $m_{20} = 27{,}6$, $\Delta m_1 = 0{,}2$, $\Delta m_2 = 0{,}4$, tad absolūtā kļūda

$$\Delta\rho \approx \frac{1\cdot 27{,}6}{(32{,}4 - 27{,}6)^2}\cdot 0{,}2 + \frac{1\cdot 32{,}4}{(32{,}4 - 27{,}6)^2}\cdot 0{,}4 \approx 0{,}80.$$

Līdz ar to esam aprēķinājuši, ka *ķermeņa blīvums* $\rho = (6{,}75 \pm 0{,}80)\,\dfrac{\text{g}}{\text{cm}^3}$; rezultāta *relatīvā kļūda* ir $\dfrac{\Delta\rho}{\rho} = \dfrac{0{,}79}{6{,}75} \approx 0{,}119 = 11{,}9\,\%$.

4. AUGSTĀKU KĀRTU PILNIE DIFERENCIĀĻI

Aplūkosim 2 argumentu funkciju $z = f(x;\, y)$, kuras argumenti x un y ir neatkarīgi mainīgie lielumi (t. i., $f(x;\, y)$ nav salikta funkcija), un pieņemsim, ka tai *eksistē nepārtraukti augstāku kārtu parciālie atvasinājumi.*

Šīs funkcijas pilnais diferenciālis

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{dy}dy \tag{6}$$

arī ir 2 argumentu funkcija, un var aplūkot tās pilno diferenciāli, ko sauc par dotās funkcijas 2. kārtas pilno diferenciāli un apzīmē ar simbolu d^2z. Tātad $d^2z = d(dz)$.

Tā kā dx un dy ir konstanti lielumi, tad saskaņā ar pilnā diferenciāļa īpašībām iegūstam, ka

$$\begin{aligned}
d^2z &= d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx\right) + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy = \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dy\right)dx + \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot dy\right)dy = \\
&= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dy\,dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 = \\
&= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.
\end{aligned} \tag{7}$$

Analogi definē 3. kārtas pilno diferenciāli un iegūst šādu izteiksmi:

$$d^3z = d(d^2z) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx\, dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3. \quad (8)$$

2. kārtas pilnā diferenciāļa izteiksmes (7) struktūra ir analoga summas kvadrāta formulai

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

bet 3. kārtas pilnā diferenciāļa (8) struktūra ir analoga summas kuba formulai

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Protams, šī līdzība ir nosacīta, jo, piemēram, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ir 2. kārtas parciālā atvasinājuma apzīmējums, kuram nav nekāda sakara ar kāpināšanu kvadrātā.

Pilno diferenciāļu izteiksmju struktūras analoģiju ar saīsinātās reizināšanas formulām izmanto, lai varētu īsāk pierakstīt diferenciāļu izteiksmes. Tam nolūkam lieto ***simbolu*** $\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy$, ko ***sauc par 1. kārtas pilnā diferenciāļa operatoru.***

Ja aiz šī simbola ir rakstīta kāda 2 argumentu funkcija $z=f(x; y)$, tad ar tādu pierakstu apzīmē 1. kārtas pilnā diferenciāļa izteiksmi (6), t. i.,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right) z = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial x} dy$$

(operatora darbība uz funkciju z atgādina reizināšanas distributīvo likumu, proti, polinoma reizināšanu ar monomu).

Aplūkosim simbolu

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2}{\partial y^2} dy^2,$$

kura struktūra ir analoga ar summas kvadrāta formulu un kuru sauksim par *2. kārtas pilnā diferenciāļa operatoru.* Ja aiz šī operatora ir rakstīta funkcija $z=f(x; y)$, tad ar šādu pierakstu apzīmē 2. kārtas pilnā diferenciāļa izteiksmi (7).

Analogi *3. kārtas pilnā diferenciāļa operatoru* iegūst kā simbolisku izteiksmi

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^3 = \frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} dx\, dy^2 + \frac{\partial^3}{\partial y^3} dy^3.$$

Ja aiz šī operatora raksta funkciju $z=f(x; y)$, tad ar tādu pierakstu apzīmē 3. kārtas pilnā diferenciāļa izteiksmi (8).

Tātad, lietojot operatorus, pilno diferenciāļu izteiksmes var rakstīt šādi:

$$dz = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right) z,$$

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 z,$$

$$d^3z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^3 z,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n z.$$

Līdzīgi iegūst augstāku kārtu pilno diferenciāļu izteiksmes arī vairākargumentu funkcijām $u=f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$, kurām argumentu skaits ir lielāks nekā 2:

$$d^m u=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^m u.$$

Piemērs. **Uzrakstīt 2. kārtas pilnā diferenciāļa izteiksmi funkcijai** $z=\sin(2x+3y)$.

Atrodam parciālos atvasinājumus:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2\cos(2x+3y),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=3\cos(2x+3y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-4\sin(2x+3y),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-6\sin(2x+3y),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-9\sin(2x+3y).$$

Saskaņā ar formulu (7) iegūstam:

$$d^2 z=-4\sin(2x+3y)\,dx^2-12\sin(2x+3y)\,dx\,dy-9\sin(2x+3y)\,dy^2.$$

10.7. §. DAŽI FUNKCIJAS PILNĀ PIEAUGUMA FORMULAS LIETOJUMI

1. SALIKTAS VAIRĀKARGUMENTU FUNKCIJAS PARCIĀLIE ATVASINĀJUMI

Kā zināms, viena argumenta saliktu funkciju atvasina pēc šāda likuma: ja funkcijām $y=f(u)$ un $u=g(x)$ eksistē atvasinājumi, tad saliktai funkcijai $y=f(g(x))$ arī eksistē atvasinājums, kuru atrod pēc formulas $y'_x=y'_u\cdot u'_x$ jeb $y'_x=f'_u(u)\cdot g'_x(x)$.

Arī saliktas vairākargumentu funkcijas parciālos atvasinājumus atrod pēc analoga likuma, kuru iegūst, izmantojot vairākargumentu funkcijas pilnā pieauguma formulu.

Teorēma

Ja funkcijām $z=f(u; v)$, $u=g(x; y)$, $v=h(x; y)$ eksistē nepārtraukti parciālie atvasinājumi, tad saliktai funkcijai $z=f(g(x; y); h(x; y))$ arī eksistē parciālie atvasinājumi, kurus atrod pēc formulām

$$z'_x=z'_u\cdot u'_x+z'_v\cdot v'_x \qquad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{1}$$

jeb

$$z'_y=z'_u\cdot u'_y+z'_v\cdot v'_y \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{2}$$

Pierādījums

Saskaņā ar parciālā atvasinājuma definīciju $z'_x=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$. Lai atrastu $\Delta_x z$ izteiksmi, spriežam tā: ja funkciju $u=g(x; y)$ un $v=h(x; y)$ argumentu x izmaina par pieaugumu Δx, tad iegūst šo funkciju parciālos pieaugumus

$$\Delta_x u=g(x+\Delta x; y)-g(x; y) \quad \text{un} \quad \Delta_x v=h(x+\Delta x; y)-h(x; y),$$

kurus var uzskatīt par funkcijas $z=f(u; v)$ argumentu pieaugumiem. Izmainot šīs funkcijas argumentus par lielumiem $\Delta_x u$ un $\Delta_x v$, iegūst funkcijas pieaugumu $\Delta_x z$.

Saskaņā ar funkcijas pilnā pieauguma formulu (sk. 10.4.§ 1. p.) iegūstam

$$\Delta_x z=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\Delta_x u+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\Delta_x v+\alpha\cdot\Delta_x u+\beta\cdot\Delta_x v,$$

kur α un β ir bezgalīgi mazi lielumi, kad $\Delta_x u\to 0$, $\Delta_x v\to 0$. Tātad

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\Delta_x u}{\Delta x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\Delta_x v}{\Delta x}+\alpha\cdot\frac{\Delta_x u}{\Delta x}+\beta\cdot\frac{\Delta_x v}{\Delta x}. \tag{3}$$

Tā kā funkcijas u un v ir nepārtrauktas, jo tām eksistē atvasinājumi, tad $\Delta_x u\to 0$ un $\Delta_x v\to 0$, kad $\Delta x\to 0$. Tātad α un β ir bezgalīgi mazi lielumi arī tad, ja $\Delta x\to 0$, t. i., $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=0$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\beta=0$. To ievērojot, no vienādības (3) iegūstam

$$z'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\Delta_x u}{\Delta x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\Delta_x v}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta_x u}{\Delta x}+\beta\frac{\Delta_x v}{\Delta x}\right)=$$

$$=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x v}{\Delta x}+0+0=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Analogi izrisina arī z'_y izteiksmi. □

Ja $z=f(u;\ v)$, kur $u=g(x)$ un $v=h(x)$, t. i., saliktā funkcija $z=f(g(x);\ h(x))$ ir viena argumenta x funkcija, tad

$$z'_x=\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}.$$

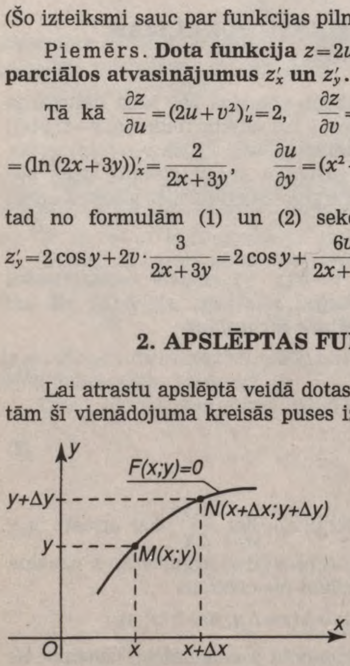
(Šo izteiksmi sauc par funkcijas pilno atvasinājumu.)

Piemērs. **Dota funkcija $z=2u+v^2$, kur $u=x^2+\sin y$, $v=\ln(2x+3y)$. Atrast parciālos atvasinājumus z'_x un z'_y.**

Tā kā $\frac{\partial z}{\partial u}=(2u+v^2)'_u=2$, $\frac{\partial z}{\partial v}=(2u+v^2)'_v=2v$, $\frac{\partial u}{\partial x}=(x^2+\sin y)'_x=2x$, $\frac{\partial v}{\partial x}=(\ln(2x+3y))'_x=\frac{2}{2x+3y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=(x^2+\sin y)'_y=\cos y$, $\frac{\partial v}{\partial y}=(\ln(2x+3y))'_y=\frac{3}{2x+3y}$, tad no formulām (1) un (2) seko, ka $z'_x=2\cdot 2x+2v\cdot\frac{2}{2x+3y}=4x+\frac{4v}{2x+3y}$ un $z'_y=2\cos y+2v\cdot\frac{3}{2x+3y}=2\cos y+\frac{6v}{2x+3y}$.

2. APSLĒPTAS FUNKCIJAS ATVASINĀJUMI

Lai atrastu apslēptā veidā dotas funkcijas $F(x;\ y)=0$ atvasinājumu y'_x, uzskatām šī vienādojuma kreisās puses izteiksmi $F(x;\ y)$ kā divu argumentu funkciju $z=F(x;\ y)$, kas definēta kādā xOy plaknes apgabalā, kurā aplūkojam apslēptās funkcijas $F(x;\ y)=0$ grafiku (101. zīm.). Ir spēkā šāds **apslēptā veidā dotas funkcijas atvasināšanas likums.**



101. zīm.

Ja** 1) **ar vienādojumu $F(x;\ y)=0$ ir definēta nepārtraukta funkcija $y=f(x)$,

2) $F(x;\ y)$, $F'_x(x;\ y)$ un $F'_y(x;\ y)$ ir nepārtrauktas funkcijas kādā punkta $M(x;\ y)$ apkārtnē, kurš pieder pie funkcijas $F(x;\ y)=0$ grafika,

3) $F'_y(x; y) \neq 0$ *punktā* $M(x; y)$,

$$\textit{tad}\quad y'_x = -\frac{F'_x(x; y)}{F'_y(x; y)} \quad \textit{jeb} \quad y'_x = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}. \tag{4}$$

Pierādījums

Uz funkcijas $F(x; y)=0$ grafika izvēlamies divus punktus: $M(x; y)$ un $N(x+\Delta x; y+\Delta y)$. Tātad šo punktu koordinātas apmierina vienādojumus

$$F(x; y)=0 \tag{5}$$

un

$$F(x+\Delta x; y+\Delta y)=0. \tag{6}$$

Atņemot no vienādības (6) vienādību (5), iegūstam, ka funkcijas F pilnais pieaugums ΔF ir vienāds ar nulli:

$$\Delta F = F(x+\Delta x; y+\Delta y) - F(x; y) = 0.$$

Izmantojot divu argumentu funkcijas pilnā pieauguma formulu, iegūstam vienādību

$$\Delta F = F'_x \Delta x + F'_y \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y = 0, \tag{7}$$

kur α un β ir bezgalīgi mazi lielumi, kad $\Delta x \to 0$ un $\Delta y \to 0$. Dalot vienādības (7) abas puses ar Δx, atrodam, ka

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = F'_x + F'_y \frac{\Delta y}{\Delta x} + \alpha + \beta \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

no kurienes

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x + \alpha}{F'_y + \beta}.$$

Tā kā $y'_x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ un $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \beta = 0$, tad $y'_x = -\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{F'_x + \alpha}{F'_y + \beta} = -\dfrac{F'_x}{F'_y}$. □

Ja ar vienādojumu $F(x; y; z)=0$ ir definēta 2 argumentu funkcija $z=f(x; y)$ un ir spēkā analogi nosacījumi kā iepriekšējā teorēmā, tad var pierādīt, ka

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} \quad \text{un} \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}. \tag{8}$$

Vispārīgi, ja ar vienādojumu $F(x_1; x_2; \ldots ; x_n; u)=0$ ir definēta n argumentu funkcija $u=f(x_1; x_2; \ldots ; x_n)$ un F, F'_{x_i}, F'_u ir nepārtrauktas funkcijas, bet $F'_u \neq 0$, tad

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{F'_{x_i}}{F'_u} \quad (i=1; 2; 3; \ldots ; n).$$

Piemēri

1. Atrast parciālos atvasinājumus funkcijai $z=f(x; y)$, kas dota ar vienādojumu $x \sin y + y \sin x + z \sin x - 1 = 0$.

Saskaņā ar formulām (8) atrodam:

$$z'_x = -\frac{(x\sin y + y\sin x + z\sin x - 1)'_x}{(x\sin y + y\sin x + z\sin x - 1)'_z} = -\frac{\sin y + y\cos x + z\cos x}{\sin x},$$

$$z'_y = -\frac{(x\sin y + y\sin x + z\sin x - 1)'_y}{(x\sin y + y\sin x + z\sin x - 1)'_z} = -\frac{x\cos y + \sin x}{\sin x}.$$

2. Atrast atvasinājumu viena argumenta funkcijai $y=f(x)$, kas dota ar vienādojumu $xy+\ln y+\ln x=0$.

Izmantojot formulu (4), atrodam:

$$y'_x=-\frac{(xy+\ln y+\ln x)'_x}{(xy+\ln y+\ln x)'_y}=-\frac{y+\dfrac{1}{x}}{x+\dfrac{1}{y}}=-\frac{(xy+1)y}{x(xy+1)}=\underline{\underline{-\frac{y}{x}}}.$$

Problēmuzdevums. Homogēna šķidruma stāvokli raksturo spiediens p, tilpums V un temperatūra T. Pieņemsim, ka šos lielumus saista vienādojums $F(p;\ V;\ T)=0$, ko sauc par šķidruma stāvokļa vienādojumu. Ar šo vienādojumu ir uzdotas funkcijas $p=f(V;\ T)$ un $V=g(p;\ T)$. Lietojot funkcijas $V=g(p;\ T)$ parciālos atvasinājumus, definē šādus šķidrumu raksturojošus lielumus, kurus lieto fizikālajā ķīmijā:

1) šķidruma tilpuma termiskās izplešanās koeficientu $\alpha=\frac{1}{V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}$,

2) šķidruma izotermiskās saspiešanas koeficientu $\beta=-\frac{1}{V}\cdot\frac{\partial V}{\partial p}$.

Saskaņā ar apslēptas funkcijas parciālo atvasinājumu atrašanas likumu no vienādojuma $F(p;\ V;\ T)=0$ iegūstam:

$$\frac{\partial V}{\partial T}=-\frac{F'_T}{F'_V} \quad \text{un} \quad \frac{\partial V}{\partial p}=-\frac{F'_p}{F'_V}.$$

Tātad $\alpha=-\frac{1}{V}\frac{F'_T}{F'_V}$ un $\beta=\frac{1}{V}\frac{F'_p}{F'_V}$.

No šejienes atrodam, ka

$$\frac{\alpha}{\beta}=-\frac{F'_T}{F'_p}.$$

Savukārt $\frac{\partial p}{\partial T}=-\frac{F'_T}{F'_p}$ un tātad $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\partial p}{\partial T}$.

Atvasinājums $\frac{\partial p}{\partial T}$ rāda, par cik palielinās šķidruma iekšējais spiediens, ja temperatūra palielinās par vienu temperatūras vienību, bet šķidruma tilpums nemainās.

Koeficientu attiecību $\frac{\alpha}{\beta}$ un tās fizikālo nozīmi lieto aprēķinos. Aplūkosim piemēru.

Pieņemsim, ka dzīvsudraba termometra stikla caurulīte spēj izturēt 200 atmosfēru lielu iekšējo spiedienu. Caurulīte ir piepildīta ar dzīvsudrabu un aizkausēta 50 °C temperatūrā. Noteikt, vai dzīvsudrabu var sasildīt līdz 55 °C temperatūrai, caurulīti nesaplēšot, ja dzīvsudraba termiskās izplešanās koeficients $\alpha=1{,}8\cdot10^{-4}$, bet izotermiskās saspiešanas koeficients $\beta=3{,}9\cdot10^{-6}$.

Atrodam koeficientu attiecību $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1{,}8\cdot10^{-4}}{3{,}9\cdot10^{-6}}\approx46$.

Tātad $\frac{\partial p}{\partial T}\approx46$. Līdz ar to, paaugstinot temperatūru par 1 °C, iekšējais spiediens caurulītē palielinās par 46 atmosfērām. Tādējādi, palielinot temperatūru par 5 °C, spiediens palielināsies līdz 230 atmosfērām un termometra caurulīte saplīsīs, jo tā var izturēt tikai 200 atmosfēru lielu iekšējo spiedienu.

10.8.§. VAIRĀKARGUMENTU FUNKCIJAS TEILORA FORMULA

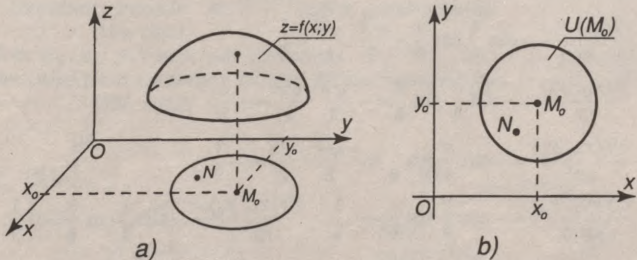
9.4. paragrāfā aplūkojām viena argumenta funkcijas $y=f(x)$ Teilora formulu. Viens no šīs formulas pieraksta veidiem ir funkcijas pieauguma $\Delta f(x_0)$ izteiksme ar augstāku kārtu diferenciāļu palīdzību:

$$\Delta f(x_0)=\frac{1}{1!}\,df(x_0)+\frac{1}{2!}\,d^2f(x_0)+\ldots+\frac{1}{n!}\,d^nf(x_0)+R_n(x).$$

Analoga izteiksme ir spēkā arī vairākargumentu funkcijas pilnajam pieaugumam.

Pieņemsim, ka divu argumentu funkcijai $z=f(x;\ y)$ *kādā punkta $M_0(x_0;y_0)$ apkārtnē eksistē nepārtraukti augstāku kārtu parciālie atvasinājumi* (102. zīm.). Šīs funkcijas ***pilno pieaugumu*** punktā $M_0(x_0;\ y_0)$ var izteikt ar augstāku kārtu pilno diferenciāļu palīdzību šādi:

$$\Delta f(x_0;y_0)=\frac{1}{1!}\,df(x_0;y_0)+\frac{1}{2!}\,d^2f(x_0;y_0)+\frac{1}{3!}\,d^3f(x_0;y_0)+$$
$$+\ldots+\frac{1}{n!}\,d^nf(x_0;y_0)+R_n(x;y). \qquad (1)$$



102. zīm.

Vienādību (1) sauc par funkcijas $f(x;y)$ **Teilora formulu diferenciāļu formā.**

Atlikuma locekli $R_n(x;\ y)$ var izteikt ar $(n+1)$-ās kārtas pilnā diferenciāļa palīdzību, kuru aprēķina kādā punkta M_0 apkārtnes $U(M_0)$ punktā $N(x_0+\Theta_1\Delta x;\ y_0+\Theta_2\Delta y)$, kur $0<\Theta_1<1$, $0<\Theta_2<1$. Tādējādi

$$R_n(x;y)=\frac{1}{(n+1)!}\,d^{n+1}f(x_0+\Theta_1\Delta x;\ y_0+\Theta_2\Delta y). \qquad (2)$$

Ievērojot to, ka

$$\Delta f(x_0;y_0)=f(x_0+\Delta x;\ y_0+\Delta y)-f(x_0;y_0)=f(x;y)-f(x_0;y_0),$$

un izmantojot augstāku kārtu pilno diferenciāļu izteiksmes (sk. 10.6.§ 4. p.), no vienādības (1) iegūst funkcijas $f(x;y)$ Teilora formulu kā izvirzījumu pēc $x-x_0$ un $y-y_0$ pakāpēm.

Piemērs. **Uzrakstīt Teilora formulas pirmos divus locekļus funkcijas $f(x;y)=\sin x\cos y$ izvirzījumam punktā $M_0\left(\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right)$.**

Šajā gadījumā

$$\Delta f(x_0; y_0) = df(x_0; y_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0; y_0) + R_2(x; y). \qquad (3)$$

Tā kā $df(x_0; y_0) = \dfrac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x} dx + \dfrac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial y} dy$,

$$d^2 f(x_0; y_0) = \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial x \partial y} dx\,dy + \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial y^2} dy^2,$$

$$x_0 = \frac{\pi}{4}, \quad y_0 = \frac{\pi}{4}, \quad dx = \Delta x = x - x_0 = x - \frac{\pi}{4}, \quad dy = \Delta y = y - y_0 = y - \frac{\pi}{4},$$

tad vispirms atrodam dotās funkcijas parciālos atvasinājumus:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (\sin x \cos y)'_x = \cos x \cos y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = (\sin x \cos y)'_y = -\sin x \sin y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (\cos x \cos y)'_x = -\sin x \cos y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (\cos x \cos y)'_y = -\cos x \sin y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (-\sin x \sin y)'_y = -\sin x \cos y.$$

Parciālo atvasinājumu vērtības punktā $M_0\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$ ir šādas:

$$\frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x} = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial y} = -\sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$\frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial x^2} = -\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$\frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial x \partial y} = -\cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial y^2} = -\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Tātad

$$df(x_0; y_0) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{4}\right), \qquad (4)$$

$$d^2 f(x_0; y_0) = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(y - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{4}\right)^2 =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(y - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{4}\right)^2. \qquad (5)$$

Atrodam funkcijas pilnā pieauguma izteiksmi:

$$\Delta f(x_0; y_0) = f(x; y) - f(x_0; y_0) = \sin x \cos y - \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = \sin x \cos y - \frac{1}{2}. \qquad (6)$$

Ievietojot vienādībā (3) diferenciāļu izteiksmes (4), (5) un pilnā pieauguma izteiksmi (6), iegūstam šādu funkcijas izvirzījumu:

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 -$$

$$-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(y - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{4}\left(y - \frac{\pi}{4}\right)^2 + R_2(x; y).$$

Saskaņā ar formulu (2) sastādām atlikuma locekļa izteiksmi:

$$R_2(x;\,y)=\frac{1}{3!}\,d^3f\left(\frac{\pi}{4}+\Theta_1\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right);\ \frac{\pi}{4}+\Theta_2\cdot\left(y-\frac{\pi}{4}\right)\right),\ \text{kur } 0<\Theta_1<1,\ 0<\Theta_2<1 \text{ un}$$

$$d^3f(x;\,y)=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\,dx^3+3\,\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}\,dx^2\,dy+3\,\frac{\partial^3 f}{\partial x\,dy^2}\,dx\,dy^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\,dy^3.$$

10.9. §. VAIRĀKARGUMENTU FUNKCIJAS EKSTRĒMI

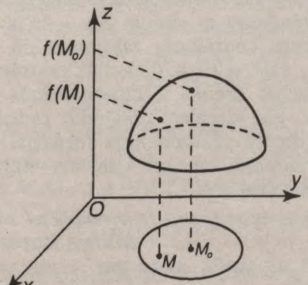
1. EKSTRĒMU PUNKTU DEFINĪCIJA UN EKSISTENCES NEPIECIEŠAMIE NOSACĪJUMI

Aplūkosim divu argumentu funkciju $z=f(x;\,y)$.

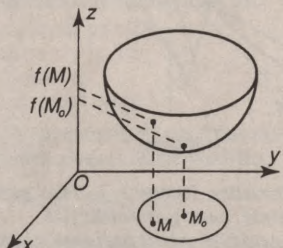
Definīcija

Punktu $M_0(x_0;\,y_0)$ sauc par funkcijas $z=f(x;\,y)$ maksimuma punktu, ja šim punktam eksistē tāda apkārtne, ka visiem apkārtnes punktiem $M(x;\,y)$ (izņemot punktu M_0) ir spēkā nevienādība $f(M_0)>f(M)$ jeb $f(x_0;\,y_0)>f(x;\,y)$ (103. zīm.).

Punktu $M_0(x_0;\,y_0)$ sauc par funkcijas minimuma punktu, ja visiem šīs apkārtnes punktiem (izņemot M_0) ir spēkā nevienādība $f(M_0)<f(M)$ jeb $f(x_0;\,y_0)<f(x;\,y)$ (104. zīm.).



103. zīm.



104. zīm.

No definīcijas izriet secinājums, ka visām pietiekami mazām (pēc moduļa) Δx un Δy vērtībām maksimuma punktā funkcijas pilnais pieaugums

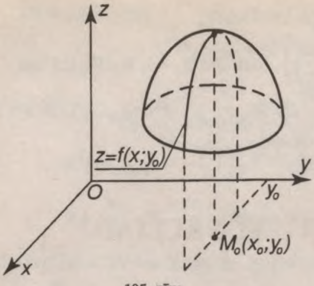
$$\Delta f(x_0;\,y_0)=f(x_0+\Delta x;\,y_0+\Delta y)-f(x_0;\,y_0)<0,$$

bet minimuma punktā funkcijas pilnais pieaugums

$$\Delta f(x_0;\,y_0)>0.$$

Maksimuma un minimuma punktus sauc par funkcijas ekstrēma punktiem.

Ekstrēma eksistences nepieciešamos nosacījumus formulē ar šādu **teorēmu**.



105. zīm.

Ja punkts $M_0(x_0; y_0)$ ir funkcijas $z=f(x; y)$ ekstrēma punkts, tad $f'_x(x_0; y_0)=0$ un $f'_y(x_0; y_0)=0$ vai arī šajā punktā parciālie atvasinājumi neeksistē.

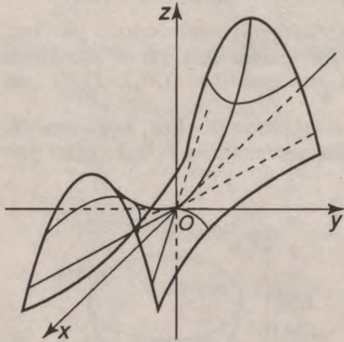
Pierādījums

Pieņemsim, ka $M_0(x_0; y_0)$ ir funkcijas $z=f(x; y)$ maksimuma punkts (105. zīm.). Šķeļot šīs funkcijas grafiku ar plakni $y=y_0$, uz virsmas iegūst līniju, kas ir viena argumenta x funkcijas $z=f(x; y_0)$ grafiks.

Arī šai funkcijai punktā $M_0(x_0; y_0)$ ir maksimums, un tāpēc *saskaņā ar viena argumenta funkcijas ekstrēma eksistences nepieciešamo nosacījumu* atvasinājums

$z'_x\Big|_{x=x_0}=f'_x(x_0; y_0)=0$ vai arī šis atvasinājums neeksistē.

Analogi pierāda, ka arī parciālais atvasinājums $f'_y(x_0; y_0)=0$ vai neeksistē. □



106. zīm.

Teorēmā ir izteikti tikai ekstrēma eksistences nepieciešamie nosacījumi; šie nosacījumi nav pietiekami. Tas nozīmē, ka ne vienmēr punktos, kuros parciālie atvasinājumi ir vienādi ar nulli vai neeksistē, funkcijai ir ekstrēms (maksimums vai minimums).

Piemēram, aplūkosim funkciju $z=x^2-y^2$. Acīmredzot šīs funkcijas parciālie atvasinājumi $z'_x=2x$ un $z'_y=-2y$ ir vienādi ar nulli koordinātu sākumpunktā $O(0; 0)$. Taču šajā punktā funkcijai ekstrēma nav. Funkcijas grafiks ir hiperboliskais paraboloīds. Šīs virsmas zīmējumā redzams, ka koordinātu sākumpunkts funkcijai nav ne maksimuma punkts, ne arī minimuma punkts (106. zīm.).

Punktus, kuros 1. kārtas parciālie atvasinājumi ir vienādi ar nulli vai neeksistē, sauc par funkcijas kritiskajiem punktiem. Punktus, kuros 1. kārtas parciālie atvasinājumi ir vienādi ar nulli, sauc par stacionārajiem punktiem.

Tātad stacionāros punktus atrod, atrisinot vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} f'_x(x; y)=0 \\ f'_y(x; y)=0. \end{cases}$$

Piemērs. **Atrast funkcijas $z=x^3+8y^3-6xy$ stacionāros punktus.**

Tā kā $z'_x=3x^2-6y$ un $z'_y=24y^2-6x$, tad ir jāatrisina šāda vienādojumu sistēma:

$$\begin{cases} 3x^2-6y=0 \\ 24y^2-6x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2 \\ 4y^2-x=0 \end{cases} \Rightarrow 4\cdot\frac{1}{4}x^4-x=0,\quad x^4-x=0,$$

$$x(x^3-1)=0,\quad x_1=0,\quad x^3-1=0,\quad x_2=1,\quad y_1=0,\quad y_2=\frac{1}{2}.$$

Tātad funkcijai ir *divi stacionārie punkti*: $M_1(0;\ 0)$ un $M_2\left(1;\ \frac{1}{2}\right)$. Lai noskaidrotu, vai un kādi ekstrēmi ir šajos punktos, ir jāzina ekstrēma eksistences pietiekamie nosacījumi.

2. DIVU ARGUMENTU FUNKCIJAS EKSTRĒMU EKSISTENCES PIETIEKAMIE NOSACĪJUMI

Ekstrēmu pētīšanai funkcijas stacionārajos punktos lieto 2. kārtas parciālos atvasinājumus.

Pieņemsim, ka punkts $M_0(x_0;\ y_0)$ ir funkcijas $z=f(x;\ y)$ stacionārais punkts.

Atrodam funkcijas 2. kārtas parciālos atvasinājumus

$$z''_{xx}=f''_{xx}(x;\ y),\quad z''_{xy}=f''_{xy}(x;\ y),\quad z''_{yy}=f''_{yy}(x;\ y)$$

un aprēķinām šo atvasinājumu vērtības punktā $M_0(x_0;y_0)$. Lietosim šādus apzīmējumus:

$$a_{11}=f''_{xx}(x_0;y_0),\quad a_{12}=f''_{xy}(x_0;y_0),\quad a_{22}=f''_{yy}(x_0;y_0).$$

Ar šiem skaitļiem sastāda un aprēķina 2. kārtas determinantu

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}^2,$$

kuru lieto, formulējot šādu 2 argumentu funkcijas ekstrēmu eksistences pietiekamo nosacījumu – **teorēmu**.

Ja punkts $M_0(x_0;\ y_0)$ ir funkcijas $z=f(x;\ y)$ stacionārais punkts, kura apkārtnē eksistē nepārtraukti 2. kārtas parciālie atvasinājumi un

1) ***$D>0$, $a_{11}<0$, tad $M_0(x_0;\ y_0)$ ir maksimuma punkts;***
2) ***$D>0$, $a_{11}>0$, tad $M_0(x_0;\ y_0)$ ir minimuma punkts;***
3) ***$D<0$, tad $M_0(x_0;\ y_0)$ nav ekstrēma punkts;***
4) ***$D=0$, tad ar šo algoritmu ekstrēmu noteikt nevar.***

Teorēmas pierādījumā lieto funkcijas $f(x;y)$ izvirzījumu ar Teilora formulu punktā $M_0(x_0;y_0)$ (10.8. §), izmantojot šīs formulas pirmos divus locekļus:

$$\Delta f(x_0;y_0)=df(x_0;y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0;y_0)+R_2(x;y).$$

Tā kā stacionārajā punktā 1. kārtas parciālie atvasinājumi ir vienādi ar nulli, tad arī $df(x_0;y_0)=0$ un visām pietiekami mazām Δx un Δy moduļu vērtībām funkcijas pilnā pieauguma $\Delta f(x_0;y_0)$ zīmi nosaka 2. kārtas diferenciālis $d^2f(x_0;y_0)$.

Ja $D>0$ un $a_{11}<0$, tad var pierādīt, ka $d^2f(x_0;y_0)<0$ un tātad arī $\Delta f(x_0;y_0)<0$, t. i., $M_0(x_0;y_0)$ ir *maksimuma punkts.*

Ja $D>0$ un $a_{11}>0$, tad $d^2f(x_0;y_0)>0$ un arī $\Delta f(x_0;y_0)>0$. Tātad $M_0(x_0;y_0)$ ir *minimuma punkts.* □

Piemērs. **Atrast funkcijas $z=x^3+8y^3-6xy$ ekstrēmus.**

Iepriekšējā piemērā konstatējām, ka $M_1(0;\ 0)$ un $M_2\left(1;\ \frac{1}{2}\right)$ ir šīs funkcijas stacionārie punkti.

Lai izpētītu ekstrēmus stacionārajos punktos, atrodam funkcijas 2. kārtas parciālos atvasinājumus. Tā kā $z'_x=3x^2-6y$ un $z'_y=24y^2-6x$, tad $z''_{xx}=6x$, $z''_{xy}=-6$, $z''_{yy}=48y$.

Noskaidrosim, vai stacionārajā punktā $M_1(0;\ 0)$ ir ekstrēms. Tā kā $a_{11}=z''_{xx}(M_1)=0\cdot 6=0$, $a_{12}=z''_{xy}(M_1)=-6$, $a_{22}=z''_{yy}(M_1)=48\cdot 0=0$, tad

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix}=-36<0.$$

Saskaņā ar ekstrēmu eksistences pietiekamo nosacījumu teorēmu secinām, ka $M_1(0;\ 0)$ nav ekstrēma punkts, jo šajā punktā $D<0$.

Analogi izpētām ekstrēmu stacionārajā punktā $M_2\left(1;\ \frac{1}{2}\right)$:

$$a_{11}=z''_{xx}(M_2)=6\cdot 1=6,\quad a_{12}=z''_{xy}(M_2)=-6,\quad a_{22}=z''_{yy}(M_2)=48\cdot\frac{1}{2}=24;$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 24 \end{vmatrix}=144-36=108>0.$$

Tā kā $D>0$ un $a_{11}>0$, tad $M_2\left(1;\ \frac{1}{2}\right)$ *ir funkcijas minimuma punkts.*

3. NOSACĪTAIS EKSTRĒMS

Praksē bieži jārisina dažādi *optimizācijas uzdevumi*. To būtību aptuveni var paskaidrot šādi: nosacījumi, no kuriem ir atkarīgs gala rezultāts, jāizvēlas tā, lai šis rezultāts kaut kādā nozīmē būtu optimāls. Vienkāršākos gadījumos šādu uzdevumu risināšanu var reducēt uz *funkcijas vislielākās vai vismazākās vērtības atrašanu*. Parasti atbilstoši uzdevuma nosacījumiem ir jāizveido funkcija, kas atkarīga no diviem vai vairākiem mainīgiem lielumiem, piemēram,

$$z=f(x;\ y),\tag{1}$$

kā arī viens vai vairāki vienādojumi, kas satur šos mainīgos lielumus:

$$\varphi(x;\ y)=0.\tag{2}$$

Vienādojumu (2) sauc par **saites vienādojumu**.

Tādējādi var formulēt šādu uzdevumu: ***no visām x un y vērtībām, kas apmierina saites vienādojumu* (2), *atrast tās vērtības, ar kurām funkcijai* (1) *ir maksimālā vai arī minimālā vērtība.***

Šādu uzdevumu sauc par **nosacītā ekstrēma** jeb **saistītā ekstrēma** uzdevumu, un tā atrisināšanai vienkāršākos gadījumos no saites vienādojuma (2) izsaka mainīgo lielumu y ar izteiksmi $y=h(x)$, kuru ievieto y vietā funkcijā (1). Rezultātā iegūst viena argumenta funkciju $z=f(x;\ h(x))$, kurai meklē vislielāko vai arī vismazāko vērtību pēc 9.10. paragrāfā aplūkotā algoritma.

Piemēri

1. **Gāzes maisījums sastāv no slāpekļa oksīda NO un skābekļa O_2. Oksidēšanās reakcijas $2NO+O_2=2NO_2$ ātrumu nosaka ar funkciju $v=kxy^2$, kur**
   x ir O_2 koncentrācija aplūkojamā laika momentā,
   y ir NO koncentrācija,
   k ir proporcionalitātes koeficients, kas nav atkarīgs no x un y.
   Aprēķināt, kādai ir jābūt skābekļa koncentrācijai gāzes maisījumā, lai oksidēšanās ātrums būtu vislielākais.

Tā kā x un y ir koncentrācija tilpuma procentos, tad, risinot šo nosacītā ekstrēma uzdevumu, var izmantot saites vienādojumu

$$x+y=100,\quad \text{no kurienes}\quad y=100-x.$$

Līdz ar to iegūstam reakcijas ātruma izteiksmi kā skābekļa koncentrācijas funkciju:

$$v=kxy^2=k(100-x)^2x=k(10\,000x-200x^2+x^3).$$

Atrodam šīs funkcijas ekstrēmus:

$$v'=k(10\,000-400x+3x^2),$$

$$v'=0 \Rightarrow k(10\,000-400x+3x^2)=0 \Rightarrow$$

$$3x^2-400x+10\,000=0.$$

Kvadrātvienādojuma saknes - funkcijas kritiskie punkti ir $x_1=100$ un $x_2=\dfrac{100}{3}$.

Ekstrēmu noteikšanai kritiskajos punktos izmantojam 2. kārtas atvasinājumu $v''=k(-400+6x)$.

Tā kā $v''\Big|_{x=100}=k(-400+6\cdot 100)=200k>0,$

$$v''\Big|_{x=\frac{100}{3}}=k\left(-400+6\cdot\frac{100}{3}\right)=-200k<0,$$

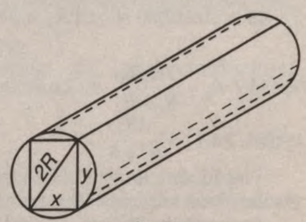
tad secinām, ka funkcijai v maksimums ir kritiskajā punktā $x_2=\dfrac{100}{3}\approx 33{,}3.$

Tātad *oksidēšanās reakcijas ātrums ir vislielākais, ja skābekļa koncentrācija ir* 33,3 %, *bet* NO *koncentrācija* - 66,7 %.

2. **Aprēķināt, kādai ir jābūt taisnstūrveida sijas šķērsgriezuma izmēru attiecībai, lai sijas izturība liecē būtu vislielākā, ja sijas izturību liecē aprēķina pēc formulas $\sigma=kxy^2$, kur**
   x ir sijas šķērsgriezuma taisnstūra pamats,
   y - taisnstūra augstums,
   k - proporcionalitātes koeficients.

Pieņemsim, ka sija ir izzāģēta no baļķa, kura rādiuss ir R (107. zīm.). Tad lielumiem x un y ir jāapmierina saites vienādojums

$$x^2+y^2=4R^2 \quad \text{jeb} \quad y^2=4R^2-x^2.$$



107. zīm.

Ievietojot šo izteiksmi formulā $\sigma=kxy^2$, iegūstam viena argumenta funkciju $\sigma=kx(4R^2-x^2)= =k(4R^2x-x^3)$.

Šīs funkcijas dabiskais definīcijas apgabals ir visa reālo skaitļu kopa, taču uzdevuma jēgai atbilst tikai x vērtību intervāls $(0;\,2R)$.

Atrodam šīs funkcijas kritiskos punktus:

$$\sigma'=k(4R^2x-x^3)'=k(4R^2-3x^2),$$

$$\sigma'=0 \Rightarrow k(4R^2-3x^2)=0 \Rightarrow x^2=\frac{4}{3}R^2,\quad x=\pm\frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

Protams, uzdevuma nosacījumiem atbilst tikai kritiskais punkts $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$. Ekstrēma izpētīšanai šajā punktā atrodam 2. kārtas atvasinājumu

$$\sigma''=k(4R^2-3x^2)'=-6kx.$$

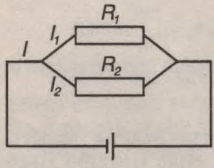
Tā kā $\sigma''\Big|_{x=\frac{2R}{\sqrt{3}}}<0$, tad kritiskajā punktā ir *funkcijas maksimums*.

No vienādības $y=\sqrt{4R^2-x^2}$ iegūstam, ka $y=\sqrt{4R^2-\frac{4R^2}{3}}=2R\sqrt{\frac{2}{3}}$. Tādējādi $x=\frac{2R}{\sqrt{3}}$ un $y=\frac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, bet sijas šķērsgriezuma izmēru attiecība ir $\frac{y}{x}=\frac{2R\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,2R}=$ $=\sqrt{2}\approx 1{,}4=\frac{14}{10}=\frac{7}{5}$.

Tātad *visizturīgākā sija liecē ir tad, ja tās šķērsgriezuma augstuma un pamata garumu attiecība ir apmēram vienāda ar* $\frac{7}{5}$.

3. Elektriskajā ķēdē ir divas paralēli saslēgtas pretestības R_1 un R_2. Pierādīt, ka strāva I ķēdes sazarojumā sadalās tā, ka šajās pretestībās noteiktā laikā t izdalās vismazākais kopīgais siltuma daudzums (108. zīm.).

Pieņemsim, ka ķēdes daļā ar pretestību R_1 plūst strāva I_1 un ķēdes daļā ar pretestību R_2 plūst strāva I_2. Ķēdes kopīgo pretestību R aprēķina pēc formulas



108. zīm.

$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$, no kurienes

$$R=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}.$$

Sprieguma kritums ķēdē ir

$$U=IR=\frac{IR_1R_2}{R_1+R_2}.$$

Tā kā pretestības R_1 un R_2 ir saslēgtas paralēli, tad arī

$$U=I_1R_1 \quad \text{un} \quad U=I_2R_2.$$

Tātad $I_1R_1=\frac{IR_1R_2}{R_1+R_2}$, no kurienes $I_1=\frac{IR_2}{R_1+R_2}$. Analogi no vienādības $I_2R_2=\frac{IR_1R_2}{R_1+R_2}$ iegūst, ka $I_2=\frac{IR_1}{R_1+R_2}$.

Pierādīsim, ka ar šādām strāvas I_1 un I_2 vērtībām pretestībās R_1 un R_2 izdalās vismazākais kopīgais siltuma daudzums.

Saskaņā ar Džoula–Lenca likumu pretestībā R_1 izdalās siltums $Q_1=kI_1^2R_1t$, bet pretestībā R_2 – $Q_2=kI_2^2R_2t$.

Kopīgais siltuma daudzums, kas laikā t izdalās abās pretestībās,

$$Q=Q_1+Q_2=kI_1^2R_1t+kI_2^2R_2t,$$

ir divu argumentu I_1 un I_2 funkcija.

Atradīsim šīs funkcijas minimuma punktu, izmantojot saites vienādojumu, kas izriet no Kirhofa likuma: $I=I_1+I_2$. Tā kā $I_2=I-I_1$, tad

$$Q=kI_1^2R_1t+k(I-I_1)^2R_2t=kt(I_1^2R_1+I^2R_2-2II_1R_2+I_1^2R_2).$$

$$\frac{dQ}{dI_1}=kt(2I_1R_1-2IR_2+2I_1R_2)=2kt(I_1R_1-IR_2+I_1R_2);$$

$$\frac{dQ}{dI_1}=0 \Rightarrow 2kt(I_1R_1-IR_2+I_1R_2)=0;$$

$$I_1R_1-IR_2+I_1R_2=0 \Rightarrow I_1=\frac{IR_2}{R_1+R_2}.$$

Tā kā $\frac{d^2Q}{dI_1^2}=2kt(R_1+R_2)>0$, tad kritiskajā punktā funkcijai Q ir minimums.

Atrodam $I_2=I-I_1=I-\frac{IR_2}{R_1+R_2}=\frac{IR_1+IR_2-IR_2}{R_1+R_2}=\frac{IR_1}{R_1+R_2}$.

Tātad *paralēli saslēgtās pretestībās izdalītais kopīgais siltuma daudzums ir vismazākais, ja pretestībā* R_1 *plūst strāva* $I_1=\frac{IR_2}{R_1+R_2}$, *bet pretestībā* R_2 *- strāva* $I_2=\frac{IR_1}{R_1+R_2}$. Šīs izteiksmes sakrīt ar I_1 un I_2 izteiksmēm, kuras ieguvām, lietojot Oma likumu.

4. LAGRANŽA NENOTEIKTO KOEFICIENTU METODE NOSACĪTĀ EKSTRĒMA UZDEVUMU RISINĀŠANAI

Iepriekšējā punktā, risinot nosacītā ekstrēma uzdevumus, doto divu argumentu funkciju ar saites vienādojuma palīdzību varēja pārveidot par viena argumenta funkciju, kurai noteicām ekstrēmus. Taču šāds risināšanas paņēmiens nav lietojams, ja no saites vienādojuma atklātā veidā nevar izteikt nevienu no mainīgajiem lielumiem. Praktiski šo paņēmienu nevar izmantot arī tad, ja funkcijai ir vairāk nekā divi argumenti un ir vairāki saites vienādojumi. Šādos gadījumos lieto **Lagranža nenoteikto koeficientu metodi**, ar kuru iepazīsimies, aplūkojot divu argumentu funkciju $z=f(x; y)$ un vienu saites vienādojumu $\varphi(x; y)=0$.

Tā kā ar saites vienādojumu mainīgo lielumu y definē kā argumenta x funkciju, tad $z=f(x; y)$ ir salikta argumenta x funkcija un tās atvasinājumu atrod šādi:

$$z'_x=f'_x+f'_y\cdot y'_x.$$

Saskaņā ar apslēptas funkcijas atvasināšanas likumu no saites vienādojuma $\varphi(x; y)=0$ atrodam:

$$y'_x=-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}.$$

Tātad

$$z'_x=f'_x-f'_y\cdot\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}.$$

No nosacījuma, ka ekstrēma punktā $z'_x=0$, iegūstam vienādojumu $f'_x-f'_y\cdot\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}=0$, kuru pārveido šādi: $\frac{f'_x}{\varphi'_x}=\frac{f'_y}{\varphi'_y}$. Apzīmējot atvasinājumu attiecību ar parametru $-\lambda$, iegūst, ka ekstrēma punktā ir spēkā vienādības $\frac{f'_x}{\varphi'_x}=\frac{f'_y}{\varphi'_y}=-\lambda$ jeb $\frac{f'_x}{\varphi'_x}=-\lambda$ un $\frac{f'_y}{\varphi'_y}=-\lambda$, no kurienes

$$f'_x+\lambda\varphi'_x=0 \quad \text{un} \quad f'_y+\lambda\varphi'_y=0.$$

Pievienojot šiem vienādojumiem saites vienādojumu, iegūstam vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} f'_x+\lambda\varphi'_x=0 \\ f'_y+\lambda\varphi'_y=0 \\ \varphi(x; y)=0. \end{cases} \tag{3}$$

Atrisinot vienādojumu sistēmu (3), *atrod to punktu koordinātas, kuros funkcijai* $z=f(x; y)$ *ir iespējams nosacītais ekstrēms.*

Viegli ievērot, ka šīs sistēmas vienādojumu kreisās puses izteiksmes ir funkcijas

$$F(x; y; \lambda)=f(x; y)+\lambda\varphi(x; y) \tag{4}$$

parciālie atvasinājumi pēc x, y un λ. Funkciju (4) sauc par Lagranža funkciju, bet parametru λ – par Lagranža nenoteikto koeficientu.

Tātad, lai sastādītu vienādojumu sistēmu (3), pēc dotās funkcijas $z=f(x; y)$ un saites vienādojuma $\varphi(x; y)=0$ ir jāuzraksta Lagranža funkcija (4), jāatrod tās parciālie atvasinājumi pēc x, y un λ un šie atvasinājumi jāpielīdzina nullei.

Pieņemsim, ka, atrisinot sistēmu (3), ir atrastas stacionārā punkta M_0 koordinātas x_0 un y_0. Lai noskaidrotu, vai šajā punktā ir nosacītais maksimums, minimums vai arī M_0 nav ekstrēma punkts, atrod šajā punktā Lagranža funkcijas F otrās kārtas parciālos atvasinājumus un lieto šī paragrāfa 2. punktā aplūkotos ekstrēma eksistences pietiekamos nosacījumus.

Var izmantot arī funkcijas F otrās kārtas pilno diferenciāli punktā $M_0(x_0; y_0)$:

$$d^2F(x_0; y_0)=\frac{\partial^2F(x_0; y_0)}{\partial x^2}\Delta x^2+2\frac{\partial^2F(x_0; y_0)}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y+\frac{\partial^2F(x_0; y_0)}{\partial y^2}\Delta y^2.$$

Ja $d^2F(x_0; y_0)<0$, tad $M_0(x_0; y_0)$ ir *nosacītā maksimuma punkts*.

Ja $d^2F(x_0; y_0)>0$, tad $M_0(x_0; y_0)$ ir *nosacītā minimuma punkts*.

Ja $d^2F(x_0; y_0)=0$, tad ar 2. kārtas pilno diferenciāli *ekstrēmu noteikt nevar* un ir jālieto augstāku kārtu pilnie diferenciāļi.

Ilustrēsim Lagranža metodi ar piemēriem.

Piemēri

1. Uz taisnes $x+y=1$ noteikt tādu punktu, lai attālumu kvadrātu summa no šī punkta līdz punktiem $A(1; 2)$ un $B(4; 1)$ būtu vismazākā.

Meklēto punktu apzīmēsim ar $M(x; y)$. Tā kā $AM=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$ un $BM=\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}$, tad attālumu kvadrātu summa AM^2+BM^2 ir divu argumentu funkcija

$$z=(x-1)^2+(y-2)^2+(x-4)^2+(y-1)^2=2x^2+2y^2-10x-6y+22,$$

kuras argumentu vērtībām ir jāapmierina saites vienādojums

$$x+y=1 \quad \text{jeb} \quad x+y-1=0.$$

Lai atrisinātu šo nosacītā ekstrēma uzdevumu, sastādām Lagranža funkciju

$$F(x; y; \lambda)=2x^2+2y^2-10x-6y+22+\lambda(x+y-1).$$

Atrodam un pielīdzinām nullei Lagranža funkcijas parciālos atvasinājumus:

$$\begin{cases} F'_x=4x-10+\lambda=0 \\ F'_y=4y-6+\lambda=0 \\ F'_\lambda=x+y-1=0. \end{cases}$$

No šīs sistēmas pirmajiem diviem vienādojumiem atrodam, ka $10-4x=\lambda$ un $6-4y=\lambda$; tātad $10-4x=6-4y$ jeb $x-y=1$.

Atrisinām šo vienādojumu kopā ar sistēmas trešo vienādojumu (saites vienādojumu):

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow x=1, \quad y=0.$$

Pierādīsim, ka stacionārajā punktā $M_0(1; 0)$ funkcijai z ir nosacītais minimums, nosakot Lagranža funkcijas F otrās kārtas pilnā diferenciāļa zīmi.

Tā kā $F''_{xx}=4$, $F''_{xy}=0$ un $F''_{yy}=4$, tad $d^2F=4\Delta x^2+4\Delta y^2$.

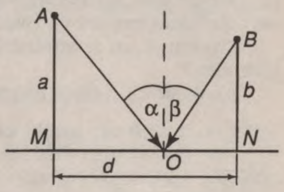
Acīmredzot $d^2F>0$ ar jebkurām x un y vērtībām.

Tātad *no taisnes* $x+y=1$ *punkta* $M_0(1;\ 0)$ *attālumu kvadrātu summa līdz punktiem* $A(1;\ 2)$ *un* $B(4;\ 1)$ *ir vismazākā.*

2. Saskaņā ar Fermā principu gaisma starp diviem punktiem A un B izplatās tā, ka izplatīšanās laiks ir minimāls. Homogēnā vidē gaisma izplatās pa taisni. Izmantojot Fermā principu, atrast gaismas atstarošanās likumu.

Pieņemsim, ka gaismas stars iziet no punkta A, atstarojas no optiski caurspīdīgas vides robežvirsmas punktā O un nonāk punktā B (109. zīm.).

Punktu A un B attālumi līdz robežvirsmai ir $AM=a$ un $BN=b$. Krītošais gaismas stars ar punktā O novilkto normāli veido leņķi α, bet atstarotais stars – leņķi β; attālums starp robežvirsmas punktiem M un N ir d.



109. zīm.

Ja gaismas izplatīšanās ātrums aplūkojamā vidē ir v, tad laiks, kādā gaisma no punkta A pēc atstarošanās nonāk punktā B, ir

$$T=t_1+t_2=\frac{AO}{v}+\frac{OB}{v}.$$

Tā kā $AO=\dfrac{a}{\cos\alpha}$ un $OB=\dfrac{b}{\cos\beta}$, tad

$$T=\frac{a}{v\cos\alpha}+\frac{b}{v\cos\beta},$$

t. i., laiks T ir krišanas leņķa α un atstarošanas leņķa β funkcija: $T=T(\alpha;\ \beta)$.

Noteiksim šai funkcijai minimumu, izmantojot saites vienādojumu $OM+ON=d$ jeb $a\,\mathrm{tg}\,\alpha+b\,\mathrm{tg}\,\beta=d$.

Sastādām Lagranža funkciju:

$$F(\alpha;\ \beta;\ \lambda)=\frac{a}{v\cos\alpha}+\frac{b}{v\cos\beta}+\lambda(a\,\mathrm{tg}\,\alpha+b\,\mathrm{tg}\,\beta-d).$$

No šīs funkcijas parciālajiem atvasinājumiem iegūstam šādu vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} F'_\alpha=\dfrac{a\sin\alpha}{v\cos^2\alpha}+\dfrac{a\lambda}{\cos^2\alpha}=0 \\ F'_\beta=\dfrac{b\sin\beta}{v\cos^2\beta}+\dfrac{b\lambda}{\cos^2\beta}=0 \\ F'_\lambda=a\,\mathrm{tg}\,\alpha+b\,\mathrm{tg}\,\beta-d=0. \end{cases}$$

Pārveidojot pirmos divus vienādojumus, atrodam, ka

$$\frac{\sin\alpha}{v}=-\lambda \text{ un } \frac{\sin\beta}{v}=-\lambda. \text{ Tātad } \sin\alpha=\sin\beta \text{ un } \alpha=\beta,$$

t. i., *krišanas leņķis ir vienāds ar atstarošanas leņķi.*

Lai pierādītu, ka ar nosacījumu $\alpha=\beta$ funkcijai $T(\alpha;\ \beta)$ ir minimums, noteiksim Lagranža funkcijas 2. kārtas pilno diferenciāli.

Atrodam 2. kārtas parciālos atvasinājumus:

$$F''_{\alpha\alpha}=\left(\frac{a\sin\alpha}{v\cos^2\alpha}+\frac{a\lambda}{\cos^2\alpha}\right)'_\alpha=\frac{a}{v}\cdot\frac{\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha+2v\lambda\sin\alpha}{\cos^3\alpha}.$$

Šo izteiksmi vienkāršojam, ievērojot to, ka $\lambda=-\dfrac{\sin\alpha}{v}$ jeb $v\lambda=-\sin\alpha$:

$$F''_{\alpha\alpha}=\frac{a}{v\cos\alpha}.$$

Analogi iegūstam, ka

$$F''_{\beta\beta}=\left(\frac{b\sin\beta}{v\cos^2\beta}+\frac{b\lambda}{\cos^2\beta}\right)'_\beta=\frac{b}{v\cos\beta}.$$ Tā kā $F''_{\alpha\beta}=0$, tad

$$d^2F=F''_{\alpha\alpha}\Delta\alpha^2+2F''_{\alpha\beta}\Delta\alpha\Delta\beta+F''_{\beta\beta}\Delta\beta^2=\frac{a}{v\cos\alpha}\Delta\alpha^2+\frac{b}{v\cos\beta}\Delta\beta^2.$$

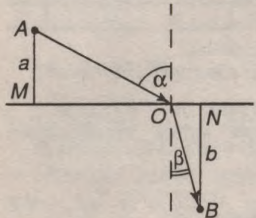
Tā kā $\cos\alpha>0$, $\cos\beta>0$, jo α un β ir šauri leņķi, tad $d^2F>0$, t. i., secinām, ka *gaisma pa lauztu līniju AOB izplatās* minimālā laikā, ja $\alpha=\beta$.

3. Izmantojot Fermā principu, atrast gaismas laušanas likumu, ja divas caurspīdīgas optiski dažādi blīvas vides atdala plakne un gaismas izplatīšanās ātrums pirmajā vidē ir v_1, bet otrajā vidē – v_2.

Pieņemsim, ka krītošais gaismas stars ar normāli, kas novilkta pret robežvirsmu krišanas punktā O, veido leņķi α, bet lauztais stars – leņķi β.

Punktu A un B attālumi līdz robežvirsmai ir $AM=a$ un $BN=b$, bet $MN=d$ (110. zīm.).

Analogi, kā risinot iepriekšējo uzdevumu, atrodam, ka gaismas izplatīšanās laiku no A uz B var izteikt kā summu $T=t_1+t_2=\dfrac{AO}{v_1}+\dfrac{OB}{v_2}$. Tā kā



110. zīm.

$$AO=\frac{a}{\cos\alpha},\quad OB=\frac{b}{\cos\beta},$$

tad T ir divu argumentu α un β funkcija:

$$T=\frac{a}{v_1\cos\alpha}+\frac{b}{v_2\cos\beta}.$$

Noteiksim šīs funkcijas minimumu ar Lagranža metodi.

No vienādības $MO+ON=d$, kur $MO=a\,\mathrm{tg}\,\alpha$ un $ON=b\,\mathrm{tg}\,\beta$, iegūstam saites vienādojumu $a\,\mathrm{tg}\,\alpha+b\,\mathrm{tg}\,\beta=d$ jeb $a\,\mathrm{tg}\,\alpha+b\,\mathrm{tg}\,\beta-d=0$. Līdz ar to varam sastādīt Lagranža funkciju:

$$F(\alpha;\beta;\lambda)=\frac{a}{v_1\cos\alpha}+\frac{b}{v_2\cos\beta}+\lambda(a\,\mathrm{tg}\,\alpha+b\,\mathrm{tg}\,\beta-d),$$

no kuras parciālajiem atvasinājumiem iegūstam vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} F'_\alpha=\dfrac{a\sin\alpha}{v_1\cos^2\alpha}+\dfrac{a\lambda}{\cos^2\alpha}=0\\ F'_\beta=\dfrac{b\sin\beta}{v_2\cos^2\beta}+\dfrac{b\lambda}{\cos^2\beta}=0\\ F'_\lambda=a\,\mathrm{tg}\,\alpha+b\,\mathrm{tg}\,\beta-d=0.\end{cases}$$

No sistēmas pirmajiem diviem vienādojumiem atrodam, ka $\dfrac{\sin\alpha}{v_1}=-\lambda$ un $\dfrac{\sin\beta}{v_2}=-\lambda$. Tātad $\dfrac{\sin\alpha}{v_1}=\dfrac{\sin\beta}{v_2}$ jeb

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{v_1}{v_2}. \qquad (5)$$

Var pierādīt, ka gaisma no punkta A uz punktu B pa lauztu līniju AOB izplatās vismazākā laikā, ja ir spēkā vienādība (5). *Vienādību (5) sauc par gaismas laušanas likumu*, kuru formulē šādi: ***gaismas stara krišanas leņķa un laušanas leņķa sinusu attiecība dotajām vidēm ir konstants lielums, kas vienāds ar gaismas izplatīšanās ātrumu attiecību šajās vidēs.***

DIFERENCIĀLĢEOMETRIJAS ELEMENTI

Funkcijas atvasinājumus lieto arī dažādu ģeometrijas objektu (līkņu un virsmu) īpašību pētīšanā. Šo ģeometrijas nozari sauc par diferenciālģeometriju. Aplūkosim dažus diferenciālģeometrijas jēdzienus, kurus lieto matemātiskajā analīzē un fizikā.

11.1. §. LĪNIJAS LOKA DIFERENCIĀLIS

Pieņemsim, ka funkcijai $y=f(x)$ intervālā $[a; b]$ eksistē *nepārtraukts atvasinājums* $f'(x)$. Šādas funkcijas grafiks ir gluda līnija - loks AB (111. zīm.). Lietosim jēdzienu - **loka garums**, kuru analogi kā riņķa līnijas garumu *definē ar ievilktas lauztas līnijas garuma robežu* (sīkāk šo jēdzienu aplūko integrālrēķinos).

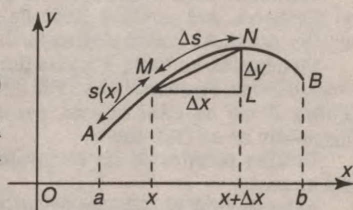
Aplūkosim funkcijas grafika punktu $M(x; y)$ un loku AM. Šī loka garums ir atkarīgs no punkta M, tātad - no šī punkta abscisas x, jeb loka garums AM ir funkcija $s(x)$. Tādējādi iegūstam jēdzienu: loka garums kā x funkcija. No ģeometriskiem apsvērumiem ir skaidrs, ka funkcija $s(x)$ ir nepārtraukta. Līdz ar to ir jēga aplūkot šīs funkcijas pieaugumu Δs, pieauguma galveno daļu - diferenciāli ds un atvasinājumu $s'(x)$.

Argumenta vērtībai $x+\Delta x$ atbilst grafika loks AN, kura garums ir $s(x+\Delta x)$. Tātad, argumentam mainoties no x uz $x+\Delta x$, rodas loka garuma pieaugums

$$\Delta s=s(x+\Delta x)-s(x).$$

Saskaņā ar atvasinājuma definīciju

$$s'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta x}. \qquad (1)$$



111. zīm.

Lai noteiktu Δs, aplūkosim 111. zīmējumā taisnleņķa trijstūri MLN, kura hipotenūza

$$MN=\sqrt{ML^2+LN^2}=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}.$$

Ja samazina Δx, tad samazinās arī loka garuma pieaugums Δs un horda MN. Var pierādīt, ka Δs un MN ir ekvivalenti bezgalīgi mazi lielumi, kad $\Delta x\to 0$, t. i., $\Delta s \backsim \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$, un tāpēc, atrodot robežu (1), Δs var aizvietot ar $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$. Tādējādi atrodam, ka

$$s'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\sqrt{1+\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}=$$

$$=\sqrt{1+\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}=\sqrt{1+(y')^2}.$$

Tātad $s'(x)=\sqrt{1+(y')^2}$.

Tā kā $ds = s'(x)\,dx$, tad

$$ds = \sqrt{1+(y')^2}\,dx \qquad (2)$$

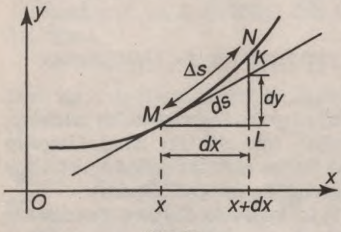
jeb $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+(y')^2}$.

Tā kā $y' = \frac{dy}{dx}$, tad no vienādības (2) seko arī šāda loka diferenciāļa izteiksme:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \qquad (3)$$

Tātad ds ir tāda taisnleņķa trijstūra hipotenūzas garums, kura katetes ir argumenta diferenciālis dx un funkcijas diferenciālis dy. Saskaņā ar funkcijas diferenciāļa ģeometrisko ilustrāciju (sk. 9.3. §) šāds trijstūris ir 112. zīmējumā redzamais trijstūris MLK, kur MK ir funkcijas grafika pieskares nogrieznis.

Tādējādi esam noskaidrojuši loka diferenciāļa ds ģeometrisko ilustrāciju: *loka diferenciālis ds, kas ir loka garuma pieauguma Δs galvenā daļa, ir vienāds ar punktā M funkcijas grafikam novilktās pieskares nogriežņa MK garumu* (sk. 112. zīm.).



112. zīm.

Ja funkcija $y=f(x)$ ir dota parametriskā veidā

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases}$$

tad $dx = x'(t)\,dt$, $dy = y'(t)\,dt$ un no formulas (3) iegūstam, ka

$$ds = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt.$$

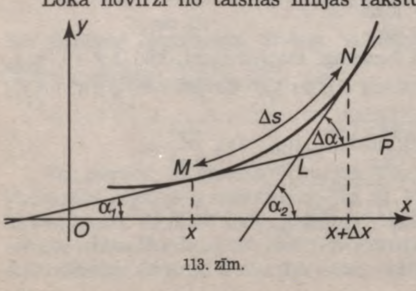
11.2. §. LĪNIJAS LIEKUMS

Aplūkojot kādu līniju, pētot tās formu, parasti cenšas novērtēt līnijas novirzi no pieskares, kas novilkta kādā līnijas punktā. Lai varētu raksturot šo līnijas īpašību skaitliski, definē jēdzienu – **līnijas liekums**.

Pieņemsim, ka līnija ir kādas funkcijas $y=f(x)$ grafiks, kurai *eksistē 2. kārtas atvasinājums*. Pieņemsim, ka kādā intervālā $[x; x+\Delta x]$ *funkcija ir monotona un tās grafiks ir vai nu tikai ieliekta, vai arī izliekta līnija*; grafika loka MN garumu apzīmēsim ar Δs (113. zīm.).

Grafika punktos M un N novelkam pieskares, kuru virziena leņķi ir attiecīgi α_1 un α_2.

Loka novirzi no taisnas līnijas raksturo leņķis starp pieskarēm NLP, kas ir vienāds ar starpības moduli $|\Delta\alpha| = |\alpha_2 - \alpha_1|$. Taču $|\Delta\alpha|$ vērtība ir atkarīga ne tikai no loka MN izliekuma, bet arī no šī loka garuma Δs. Tāpēc *līnijas liekuma raksturošanai lieto attiecību* $\frac{|\Delta\alpha|}{\Delta s}$, ko sauc par loka MN **vidējo liekumu** un apzīmē ar $k_{\text{vid.}}$. Tātad



113. zīm.

$$k_{\text{vid.}} = \left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|. \qquad (1)$$

Tomēr parasti līnija nav liekta vienmērīgi. Piemēram, parabola virsotnes tuvumā ir vairāk izliekta, bet tālāk no virsotnes tā mazāk atšķiras no taisnes. Tāpēc, lai raksturotu loka MN liekumu tuvāk punktam M, meklē vidējo liekumu mazākam lokam. Tādējādi ir jēga aplūkot vidējā liekuma robežu, kad $\Delta s \to 0$. Šo robežu sauc par **līknes liekumu punktā M** un apzīmē ar K. Tātad

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right|. \qquad (2)$$

Vienādība (2) atgādina funkcijas atvasinājuma izteiksmi. Patiešām, ja uzskata, ka grafika loka garums s ir neatkarīgs mainīgais lielums jeb arguments, tad pieskares virziena leņķis α ir šī argumenta funkcija $\alpha(s)$, kuras atvasinājums ir

$$\alpha'(s) = \frac{d\alpha}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s}.$$

To ievērojot, no vienādības (2) iegūstam šādu līknes liekuma izteiksmi:

$$K = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right|. \qquad (3)$$

Atradīsim liekuma formulu gadījumā, kad līkne ir 2 reizes diferencējamas funkcijas grafiks. Izmantojot funkcijas atvasinājuma ģeometrisko interpretāciju, no vienādības $y' = \operatorname{tg} \alpha$ seko, ka $\alpha = \operatorname{arctg} y'$. Šo vienādību var uzskatīt kā pieskares virziena leņķa α funkciju atkarībā no argumenta x, jo atvasinājums y' ir x funkcija. Saskaņā ar saliktas funkcijas atvasināšanas likumu atrodam, ka

$$\alpha'_x = (\operatorname{arctg} y')'_x = \frac{1}{1+(y')^2} \cdot (y')'_x = \frac{y''}{1+(y')^2} \quad \text{un}$$

$$d\alpha = \alpha'_x \cdot dx = \frac{y''}{1+(y')^2}\, dx. \qquad (4)$$

Ievietojot formulā (3) leņķa diferenciāļa izteiksmi (4) un loka diferenciāļa izteiksmi $ds = \sqrt{1+(y')^2}\, dx$, iegūstam:

$$K = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right| = \left| \frac{y''dx}{(1+(y')^2)\sqrt{1+(y')^2}\, dx} \right| = \left| \frac{y''}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}} \right|.$$

Tātad funkcijas $y = f(x)$ **grafika liekumu** atrod pēc formulas

$$K = \frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (5)$$

Piemēri

1. Atrast funkcijas $y = \sin x$ grafika liekumu maksimuma punktā $x = \frac{\pi}{2}$.

Tā kā $y' = (\sin x)' = \cos x$, $y'' = (\cos x)' = -\sin x$ un $y' \Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$, $y'' \Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = -\sin \frac{\pi}{2} = -1$, tad, lietojot formulu (5), atrodam:

$$K = \frac{|-1|}{(1+0)^{\frac{3}{2}}} = \underline{\underline{1.}}$$

2. Atrast riņķa līnijas liekumu, ja tās rādiuss ir R.

Intuitīvi ir skaidrs, ka riņķa līnija ir vienmērīgi liekta un tās liekums visos punktos ir vienāds.

Izmantosim riņķa līnijas kanonisko vienādojumu $x^2 + y^2 = R^2$ un riņķa līnijas daļu 1. un 2. kvadrantā aplūkosim kā funkcijas $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ grafiku.

Atrodam šīs funkcijas atvasinājumus:

$$y'=(\sqrt{R^2-x^2})'=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}},$$

$$y''=-\left(\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)'=-\frac{\sqrt{R^2-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{R^2-x^2}}}{R^2-x^2}=-\frac{R^2}{(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ievietojam y' un y'' izteikmes formulā (8):

$$K=\frac{R^2}{(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{x^2}{R^2-x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{R^2}{(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{R^2}{R^2-x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=$$

$$=\frac{R^2}{(R^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{R^2}{R^3}=\frac{1}{R}.$$

Tātad *riņķa līnijas liekums ir tās rādiusa apgrieztais lielums*:

$$K=\frac{1}{R} \tag{6}$$

vai

$$R=\frac{1}{K}. \tag{7}$$

11.3. §. LĪNIJAS LIEKUMA RIŅĶIS UN LIEKUMA RĀDIUSS

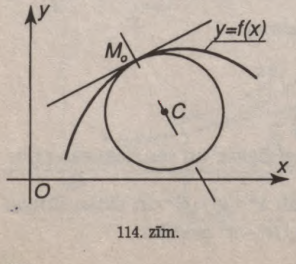
Lai varētu precīzāk noteikt līknes formu kāda punkta apkārtnē, šo *līkni salīdzina ar riņķa līnijas loku.*

Pieņemsim, ka funkcijai $y=f(x)$ punktā x_0 eksistē 1. un 2. kārtas atvasinājums, pie tam $f''(x_0)\neq 0$.

Pēc 11.2. § formulas (5) atrodam šīs līnijas liekumu K punktā $M_0(x_0; f(x_0))$ un, lietojot formulu $R=\frac{1}{K}$, **aprēķinām tādas riņķa līnijas rādiusu, kuras liekums ir vienāds ar funkcijas grafika liekumu punktā M_0.**

Caur punktu M_0 novelkam funkcijas grafika normāli, uz grafika ieliekuma pusi atliekam nogriezni M_0C, kura garums ir $R=\frac{1}{K}$, un konstruējam riņķa līniju ar centru punktā C un rādiusu M_0C (114. zīm.). Šādi iegūtu riņķa līniju sauc par līknes $y=f(x)$ **liekuma riņķa līniju** un tās rādiusu – par **līknes liekuma rādiusu**; to parasti apzīmē ar burtu ρ. Tātad

$$\rho=\frac{1}{K}.$$



114. zīm.

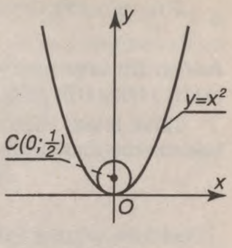
Liekuma riņķa līniju var izmantot, lai kāda punkta apkārtnē pētāmo līkni konstruētu precīzāk.

Piemērs. **Atrast parabolas $y=x^2$ liekuma rādiusu punktā $O(0;\ 0)$ un konstruēt liekuma riņķa līniju.**

Tā kā funkcijas $y=x^2$ atvasinājumi ir $y'=2x$, $y''=2$ un $y'(0)=0$, $y''(0)=2$, tad pēc 11.2.§ formulas (5) atrodam, ka $K=2$.

Tātad parabolas liekuma rādiuss koordinātu sākumpunktā ir $\rho=\frac{1}{2}$.

Konstruējam liekuma riņķa līniju ar centru punktā $C\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$ un rādiusu $\rho=\frac{1}{2}$. Šī riņķa līnija dod iespēju precīzāk konstruēt parabolu $y=x^2$ tās virsotnes apkārtnē (115. zīm.).

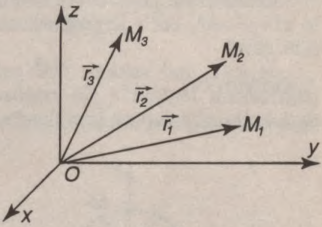


115. zīm.

11.4. §. JĒDZIENS PAR VEKTORFUNKCIJU

Aplūkosim rādiusvektoru $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$, kura sākumpunkts sakrīt ar koordinātu sistēmas sākumpunktu, bet galapunkts ir punkts $M(x;\ y;\ z)$.

Pieņemsim, ka vektora $\vec{r}$ *garums, virziens un vērsums pēc kāda noteikta likuma mainās*, bet tiek saglabāts viens un tas pats sākumpunkts O (116. zīm. vektori $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$). Šādu mainīgu vektoru sauc par vektorfunkciju.



116. zīm.

Definīcija

Ja katrai mainīgā lieluma (parametra) t vērtībai, kas ņemta no kādas skaitļu kopas $T\subset R$, atbilst noteikts vektors $\vec{r}$, tad $\vec{r}(t)$ sauc par argumenta t vektorfunkciju un raksta $\vec{r}=\vec{r}(t)$.

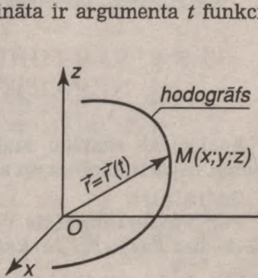
Tā kā vektoru $\vec{r}$ nosaka tā koordinātas – vektora projekcijas uz koordinātu asīm (atcerēsimies, ka rādiusvektora $\overrightarrow{OM}$ koordinātas ir vienādas ar galapunkta M koordinātām $(x;\ y;\ z)$), tad, mainot t, pēc noteikta likuma mainās arī vektora koordinātas, t. i., katra vektora $\vec{r}=(x;\ y;\ z)$ koordināta ir argumenta t funkcija:

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t). \end{cases} \qquad (1)$$

Tātad vektorfunkciju $\vec{r}=\vec{r}(t)$ var uzdot ar vektora koordinātu funkcijām:

$$\vec{r}(t)=(x(t);\ y(t);\ z(t)).$$

Ja vektora koordinātu funkcijas (1) ir nepārtrauktas, tad vektora galapunkts M, pārvietojoties telpā, apraksta līniju, ko sauc par **hodogrāfu** (117. zīm.).



117. zīm.

Definīcija

Par vektorfunkcijas

$$\vec{r}=\vec{r}(t)=(x(t);\ y(t);\ z(t))$$

hodogrāfu sauc visu to punktu kopu telpā, kuru koordinātas ir $(x(t);\ y(t);\ z(t))$, ***ja*** $t \in T$.

Tātad telpas līniju var analītiski uzdot ar vektorfunkciju $\vec{r}=\vec{r}(t)$ vai arī ar vektora koordinātu izteiksmēm

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t), \quad (t \in T), \end{cases}$$

ko sauc arī par līnijas parametriskajiem vienādojumiem.

Bieži vektorfunkcijas argumentam t ir fizikāla vai ģeometriska nozīme. *Ja t ir laiks, tad vektorfunkcijas hodogrāfs ir materiāla punkta kustības trajektorija.*

Vektorfunkcijas arguments t var būt arī pagrieziena leņķis.

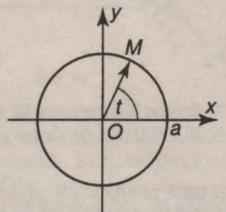
Piemēram, **aplūkosim vektorfunkciju**

$$\vec{r}=(a\cos t;\ a\sin t;\ kt), \tag{2}$$

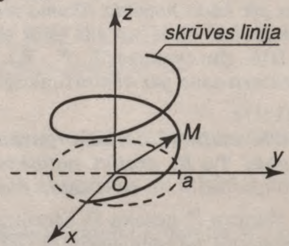
kur a un k ir no t neatkarīgi koeficienti, bet $t \in [0;\ +\infty)$.

Acīmredzot, ja $k=0$, tad hodogrāfs ir riņķa līnija xOy plaknē; tās vienādojums ir $x^2+y^2=a^2$, bet t ir pagrieziena leņķis, ko rādiusvektors $\overrightarrow{OM}$ veido ar Ox asi (118. zīm.).

Ja $k>0$, tad vektora $\overrightarrow{OM}$ galapunkta M aplikāta z palielinās proporcionāli pagrieziena leņķim t. Šo hodogrāfu sauc par **skrūves līniju** (119. zīm.); tās projekcija xOy plaknē ir riņķa līnija $x^2+y^2=a^2$.



118. zīm.



119. zīm.

11.5. §. VEKTORFUNKCIJAS ROBEŽA, NEPĀRTRAUKTĪBA UN ATVASINĀJUMS

Analogi kā skalārai funkcijai $y=f(x)$, arī vektorfunkcijai $\vec{r}=\vec{r}(t)$ definē robežas, nepārtrauktības un atvasinājuma jēdzienus.

Definīcija

Par vektorfunkcijas $\vec{r}=\vec{r}(t)$ robežu, kad $t \to t_0$, sauc vektoru $\vec{r}_0$ un raksta $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t)=\vec{r}_0$, ja katram pozitīvam skaitlim ε eksistē tāds pozitīvs skaitlis δ, ka visām t vērtībām, kurām $|t-t_0|<\delta$, ir spēkā nevienādība $|\vec{r}(t)-\vec{r}_0|<\varepsilon$.

Kaut arī šī definīcija formāli ir analoga robežas $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ definīcijai, tomēr jāievēro, ka fiksētai t vērtībai starpība $\vec{r}(t)-\vec{r}_0$ ir vektors un $|\vec{r}(t)-\vec{r}_0|$ ir šī vektora modulis – tātad pozitīvs skaitlis. To ievērojot, vektorfunkcijas robežu var definēt arī šādi:

$$\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r}_0,\quad \text{ja}\quad |\vec{r}(t)-\vec{r}_0|\to 0,\quad \text{kad}\quad t\to t_0.$$

Par vektorfunkcijas robežu ir spēkā analogas īpašības kā par skalāra argumenta funkcijas $y=f(x)$ robežu (sīkāk tās šeit neaplūkosim).

Definīcija

Saka, ka vektorfunkcija $\vec{r}=\vec{r}(t)$ ir nepārtraukta argumenta vērtībai t_0, ja $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)$.

Definīcija

Par vektorfunkcijas $\vec{r}=\vec{r}(t)$ atvasinājumu pēc argumenta t sauc robežu

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}.$$

Vektorfunkcijas atvasinājumu apzīmē ar simbolu $\dot{\vec{r}}$ jeb $\frac{d\vec{r}}{dt}$. No aplūkotajām definīcijām izriet, ka *vektorfunkcijas atvasinājums ir vektors.*

Teorēma

Ja $\vec{r}(t)=(x(t);\ y(t);\ z(t))$, tad $\frac{d\vec{r}}{dt}=\left(\frac{dx}{dt};\ \frac{dy}{dt};\ \frac{dz}{dt}\right)$, t. i., vektorfunkcijas atvasinājuma koordinātas ir vienādas ar šīs vektorfunkcijas attiecīgo koordinātu atvasinājumiem.

Pierādījums

Tā kā $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$, tad

$\vec{r}(t+\Delta t)=x(t+\Delta t)\vec{i}+y(t+\Delta t)\vec{j}+z(t+\Delta t)\vec{k}$ un

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r}&=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)=\\&=x(t+\Delta t)\vec{i}+y(t+\Delta t)\vec{j}+z(t+\Delta t)\vec{k}-x(t)\vec{i}-y(t)\vec{j}-z(t)\vec{k}=\\&=(x(t+\Delta t)-x(t))\vec{i}+(y(t+\Delta t)-y(t))\vec{j}+(z(t+\Delta t)-z(t))\vec{k}=\\&=\Delta x\vec{i}+\Delta y\vec{j}+\Delta z\vec{k}.\end{aligned}$$

Līdz ar to saskaņā ar vektorfunkcijas atvasinājuma definīciju iegūstam, ka

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{r}}{dt}&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x\vec{i}+\Delta y\vec{j}+\Delta z\vec{k}}{\Delta t}=\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}.\end{aligned}$$

Tātad

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\left(\frac{dx}{dt};\ \frac{dy}{dt};\ \frac{dz}{dt}\right).\ \square$$

Piemēram, ja $\vec{r}(t)=(a\cos t;\ a\sin t;\ kt)$, tad

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=(-a\sin t;\ a\cos t;\ k).$$

Par vektorfunkcijas atvasinājumu ir spēkā šādas īpašības.

1. Ja $\vec{r}_1=\vec{r}_1(t)$ un $\vec{r}_2=\vec{r}_2(t)$ ir divas vektorfunkcijas, tad

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_1\pm\vec{r}_2)=\frac{d\vec{r}_1}{dt}\pm\frac{d\vec{r}_2}{dt}.$$

2. Ja $\varphi(t)$ ir skalāra funkcija un $\vec{r}(t)$ - vektorfunkcija, tad

$$\frac{d}{dt}(\varphi\vec{r})=\frac{d\varphi}{dt}\vec{r}+\varphi\frac{d\vec{r}}{dt}.$$

3. Ja $\vec{r}_1\vec{r}_2$ ir divu vektorfunkciju skalārais reizinājums, tad

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_1\vec{r}_2)=\frac{d\vec{r}_1}{dt}\vec{r}_2+\vec{r}_1\frac{d\vec{r}_2}{dt}.$$

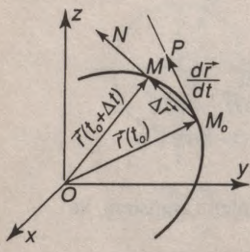
4. Ja $\vec{r}_1\times\vec{r}_2$ ir divu vektorfunkciju vektoriālais reizinājums, tad

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_1\times\vec{r}_2)=\frac{d\vec{r}_1}{dt}\times\vec{r}_2+\vec{r}_1\times\frac{d\vec{r}_2}{dt}.$$

5. Ja $\vec{r}=\vec{r}(s)$ un $s=f(t)$ veido saliktu vektorfunkciju $\vec{r}=\vec{r}(f(t))$, tad

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}.$$

11.6. §. VEKTORFUNKCIJAS ATVASINĀJUMA ĢEOMETRISKĀ ILUSTRĀCIJA



120. zīm.

Pieņemsim, ka vektorfunkcijas $\vec{r}=\vec{r}(t)$ argumenta vērtībai t_0 atbilst vektors $\vec{r}(t_0)=\overrightarrow{OM_0}$, bet argumenta vērtībai $t_0+\Delta t$ atbilst vektors $\vec{r}(t_0+\Delta t)=\overrightarrow{OM}$ (120. zīm.). Tad $\Delta\vec{r}=\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_0}=$ $=\overrightarrow{M_0M}$.

Tātad $\Delta\vec{r}$ ir vektors, kas sakrīt ar vektorfunkcijas hodogrāfa hordu M_0M.

Tā kā Δt ir skalārs lielums, tad $\Delta\vec{r}$ un $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{1}{\Delta t}\Delta\vec{r}$ ir kolineāri vektori un $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\overrightarrow{M_0N}$. Vektors $\overrightarrow{M_0N}$ atrodas uz taisnes M_0M - hodogrāfa sekantes.

Ja $\Delta t\to 0$, tad punkts M, pārvietojoties pa hodogrāfu, tiecas uz punktu M_0. Līdz ar to sekante M_0M pagriežas ap punktu M_0 un tiecas uz taisnes M_0P stāvokli, kas ir hodogrāfa pieskare punktā M_0. Tādējādi $\overrightarrow{M_0P}=\frac{d\vec{r}}{dt}$ un iegūstam šādu vektorfunkcijas atvasinājuma ģeometrisko interpretāciju.

Vektorfunkcijas $\vec{r}=\vec{r}(t)$ atvasinājums $\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t=t_0}$ ir vektors, kas atrodas uz vektorfunkcijas hodogrāfa punktā $M_0(x(t_0);\ y(t_0);\ z(t_0))$ novilktās pieskares.

11.7. §. VEKTORFUNKCIJAS ATVASINĀJUMA FIZIKĀLĀ NOZĪME

Ja vektorfunkcijas arguments t ir laiks, tad $\vec{r}=\vec{r}(t)$ *ir materiāla punkta kustības likums un šī punkta kustības trajektorija ir vektorfunkcijas hodogrāfs.*

Pieņemsim, ka 120. zīmējumā attēlotā līkne ir materiāla punkta kustības trajektorija. Tad loka M_0M garums ir punkta noietais ceļš laika intervālā $[t_0;\ t_0+\Delta t]$.

Ja Δt ir pietiekami mazs lielums, tad

$\cup M_0M \approx |\overrightarrow{M_0M}| = |\Delta\vec{r}|$, attiecība $\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$ aptuveni ir vienāda ar kustības *vidējo ātrumu*, bet robeža $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}=\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$ ir kustības *momentānais lineārais ātrums*. Līdz ar to izriet šāds secinājums.

Ja $\vec{r}=\vec{r}(t)$ *ir materiāla punkta kustības likums pa līkni, kas ir šīs vektorfunkcijas hodogrāfs, tad atvasinājuma modulis* $\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$ *ir kustības momentānā lineārā ātruma modulis, bet lineārā ātruma vektors* $\frac{d\vec{r}}{dt}$ *atrodas uz kustības trajektorijai novilktās pieskares.*

11.8. §. LĪKNES PIESKARES VIENĀDOJUMS

Pieņemsim, ka vektorfunkcijai $\vec{r}=\vec{r}(t)=(x(t);\ y(t);\ z(t))$ eksistē atvasinājums $\frac{d\vec{r}}{dt}=\left(\frac{dx}{dt};\ \frac{dy}{dt};\ \frac{dz}{dt}\right)\ \forall t\in(\alpha;\ \beta)$.

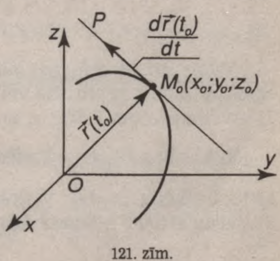
Tātad vektorfunkcijas *hodogrāfs ir gluda līnija, kurai eksistē pieskare* kādā punktā $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, kur

$$x_0=x(t_0),\quad y_0=y(t_0),\quad z_0=z(t_0) \tag{1}$$

(121. zīm.). Lai sastādītu šīs pieskares vienādojumu, izmantojam analītiskajā ģeometrijā aplūkoto taisnes vienādojumu telpā:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{p}, \tag{2}$$

kur $\vec{v}=(l;\ m;\ p)$ ir šīs taisnes virziena vektors.



121. zīm.

Tā kā vektors

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\left(\frac{dx}{dt};\ \frac{dy}{dt};\ \frac{dz}{dt}\right),\quad t=t_0$$

atrodas uz hodogrāfa pieskares M_0P, tad vektors $\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t=t_0}$ ir taisnes virziena vektors, t. i, $\vec{v}=\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t=t_0}$ un līdz ar to

$$l=\frac{dx(t_0)}{dt};\quad m=\frac{dy(t_0)}{dt};\quad p=\frac{dz(t_0)}{dt}. \tag{3}$$

Ievietojot taisnes vienādojumā (2) vienādības (1) un (3), iegūstam līknes punktā M_0 novilktās **pieskares vienādojumu**:

$$\frac{x-x(t_0)}{\frac{dx(t_0)}{dt}}=\frac{y-y(t_0)}{\frac{dy(t_0)}{dt}}=\frac{z-z(t_0)}{\frac{dz(t_0)}{dt}}. \tag{4}$$

Piemērs. **Sastādīt pieskares vienādojumu, kas novilkta skrūves līnijai**

$$\begin{cases} x=a\cos t\\ y=a\sin t\\ z=kt \end{cases}$$

punktā $t=\frac{\pi}{6}$ (sk. 119. zīm.).

Atrodam:

$$\frac{dx}{dt}=-a\sin t,\quad \frac{dy}{dt}=a\cos t,\quad \frac{dz}{dt}=k;$$

$$x\left(\frac{\pi}{6}\right)=a\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{a\sqrt{3}}{2},\quad y\left(\frac{\pi}{6}\right)=a\sin\frac{\pi}{6}=\frac{a}{2},\quad z\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}k,$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{6}}=-a\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{a}{2},\quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{6}}=a\cos\frac{\pi}{6}=\frac{a\sqrt{3}}{2},\quad \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{6}}=k.$$

Ievietojot šīs funkciju un atvasinājumu vērtības vienādojumā (4), iegūstam *pieskares vienādojumu, kas novilkta skrūves līnijai*:

$$\frac{x-\frac{a\sqrt{3}}{2}}{-\frac{a}{2}}=\frac{y-\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{z-\frac{\pi}{6}k}{k}.$$

11.9. §. VIRSMAS PIESKARPLAKNES VIENĀDOJUMS

Viens no ģeometrijas objektiem, kurus aplūko diferenciālģeometrijā, ir virsmas. Virsmas analītiskā veidā var uzdot dažādi:

1) ar vienādojumu $F(x;y;z)=0$, piemēram, $x^2+y^2+z^2=R^2$ jeb $x^2+y^2+z^2-R^2=0$ (sfēra), $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ (2. kārtas konuss);
2) kā funkcijas $z=f(x;y)$ grafiku, piemēram, $z=\sqrt{x^2+y^2}$;
3) parametriskā veidā ar trim divparametru vienādojumiem

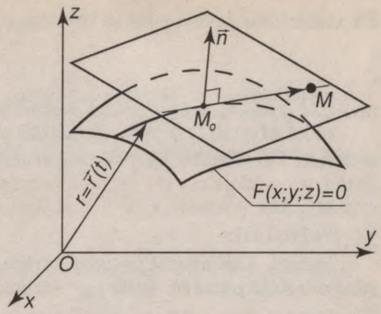
$$\begin{cases} x=x(u;v)\\ y=y(u;v)\\ z=z(u;v),\quad (u;v)\in(D) \end{cases}$$

jeb ar vektorfunkciju

$$\vec{r}=\vec{r}(u;v).$$

Izraudzīsimies uz dotas virsmas kādu punktu M_0. Caur šo punktu uz virsmas var novilkt bezgalīgi daudz līniju. Pieņemsim, ka katrai no šīm līnijām punktā M_0 eksistē pieskare.

Ja visas pieskares atrodas vienā plaknē, tad šo plakni sauc par ***virsmas pieskarplakni*** *punktā M_0.*



122. zīm.

Aplūkosim gadījumu, kad virsma dota ar vienādojumu $F(x;\ y;\ z)=0$, uz virsmas atrodas punkts $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, kurā ir novilkta pieskarplakne, un šajā punktā $F(x;y;z)$ ir diferencējama 3 argumentu funkcija (122. zīm.).

Lai sastādītu pieskarplaknes vienādojumu, izvēlamies šajā plaknē kādu punktu $M(x;\ y;\ z)$ un konstruējam vektoru $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;\, y-y_0;\, z-z_0)$.

Saskaņā ar pieskarplaknes definīciju uz virsmas ir tāda līnija, kura iet caur punktu M_0. Uz šīs līnijas pieskares punktā M_0 atrodas vektors $\overrightarrow{M_0M}$. Pieņemsim, ka līnija ir vektorfunkcijas $\vec{r}=\vec{r}(t)=(x(t);\, y(t);\, z(t))$ hodogrāfs un punkts M_0 atbilst parametra t vērtībai t_0. Pēc vektorfunkcijas atvasinājuma ģeometriskās interpreräcijas $\dfrac{d\vec{r}(t_0)}{dt}$ ir vektors, kas atrodas uz hodogrāfa pieskares.

Tātad vektori $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;\ y-y_0;\ z-z_0)$ un $\dfrac{d\vec{r}}{dt}=\left(\dfrac{dx}{dt};\ \dfrac{dy}{dt};\ \dfrac{dz}{dt}\right)$ ir kolineāri vektori, jo tie atrodas uz vienas un tās pašas taisnes. Līdz ar to eksistē tāds skaitlis λ, ka ir spēkā vienādība

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\lambda\overrightarrow{M_0M}$$

jeb koordinātu formā:

$$\frac{dx}{dt}=\lambda(x-x_0),\quad \frac{dy}{dt}=\lambda(y-y_0),\quad \frac{dz}{dt}=\lambda(z-z_0). \tag{1}$$

Tā kā līnija $\vec{r}=\vec{r}(t)$ jeb $\begin{cases} x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$ atrodas uz virsmas $F(x;\ y;\ z)=0$, tad šīs līnijas punktu koordinātas apmierina virsmas vienādojumu. Tātad ir pareiza vienādība

$$F(x(t);\, y(t);\, z(t))=0.$$

Atvasinām šo vienādību pēc argumenta t, lietojot saliktas vairākargumentu funkcijas atvasināšanas likumu:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}=0. \tag{2}$$

Ievietojot vienādībā (2) atvasinājumu izteiksmes (1), iegūstam:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\lambda(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}\lambda(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}\lambda(z-z_0)=0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(z-z_0)=0. \tag{3}$$

Šīs vienādības kreisā puse ir vektoru

$$\vec{n}=\left(\frac{\partial F}{\partial x};\ \frac{\partial F}{\partial y};\ \frac{\partial F}{\partial z}\right) \tag{4}$$

un $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;\ y-y_0;\ z-z_0)$ skalārais reizinājums koordinātu formā.

Tā kā $M(x;y;z)$ ir brīvi izraudzīts punkts pieskarplaknē, tad no vienādības (3) secinām, ka jebkurš šīs plaknes vektors $\overrightarrow{M_0M}$ ir perpendikulārs vektoram (4). Tātad **vienādojums (3) ir pieskarplaknes vienādojums *dotās virsmas punktā M_0, bet* vektors (4) ir šīs plaknes normāles vektors.**

Definīcija

Taisni, kas novilkta caur virsmas punktu M_0 perpendikulāri pieskarplaknei šajā punktā, sauc par virsmas normāli punktā M_0.

Tātad vektors (4) *ir virsmas normāles virziena vektors,* un, lietojot 11.8.§ formulu (2), iegūstam caur virsmas $F(x;\ y;\ z)=0$ punktu M_0 vilktas **normāles vienādojumu:**

$$\frac{x-x_0}{\dfrac{\partial F(M_0)}{\partial x}}=\frac{y-y_0}{\dfrac{\partial F(M_0)}{\partial y}}=\frac{z-z_0}{\dfrac{\partial F(M_0)}{\partial z}}.$$

Kopsavilkums

1. $F'_x(x_0;y_0;z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0;y_0;z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0;y_0;z_0)(z-z_0)=0$ ir virsmas $F(x;\ y;\ z)=0$ **pieskarplaknes vienādojums** punktā $M_0(x_0;y_0;z_0)$.
2. Vektors $\vec{n}=(F'_x(x_0;\ y_0;\ z_0);\ F'_y(x_0;\ y_0;\ z_0);\ F'_z(x_0;\ y_0;\ z_0))$ ir virsmas **normāles vektors** punktā $M_0(x_0;y_0;z_0)$.
3. $\dfrac{x-x_0}{F'_x(x_0;\ y_0;\ z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F'_y(x_0;\ y_0;\ z_0)}=\dfrac{z-z_0}{F'_z(x_0;\ y_0;\ z_0)}$
   ir virsmas **normāles vienādojums**, kas novilkta caur punktu M_0.

Piemērs. **Uzrakstīt virsmas $z=2x^2+y^2$ pieskarplaknes vienādojumu punktā $M_0(1;\ -1;\ 3)$.**

Pārveidojam doto vienādojumu formā $F(x;\ y;\ z)=0$:

$$2x^2+y^2-z=0.$$

Tā kā $F(x;\ y;\ z)=2x^2+y^2-z$, tad $F'_x=4x$; $F'_y=2y$; $F'_z=-1$; $F'_x(1;\ -1;\ 3)=4$; $F'_y(1;\ -1;\ 3)=-2$; $F'_z(1;\ -1;\ 3)=-1$.

Ievietojam pieskarplaknes vienādojumā punkta M_0 koordinātas un parciālo atvasinājumu vērtības:

$$4(x-1)-2(y+1)-1(z-3)=0 \Rightarrow 4x-2y-z-3=0.$$

Tātad dotās virsmas *pieskarplaknes vienādojums punktā M_0* ir

$$4x-2y-z-3=0,$$

bet $\vec{n}=(4;\ -2;\ -1)$ ir šīs virsmas (pieskarplaknes) normāles vektors.

SATURS

Kārlis ŠTEINERS

AUGSTĀKĀ MATEMĀTIKA

Kārlis Šteiners
Latvijas Universitātes Fizikas un matemātikas fakultātes docents, Vispārīgās matemātikas katedras vadītājs, vidusskolas matemātikas skolotāju profesionālo studiju programmas un matemātikas didaktikas maģistratūras direktors, matemātikas doktors

Lekciju konspekts inženierzinātņu un dabaszinātņu studentiem

ZVAIGZNE ABC

ISBN 9984-17-175-2