

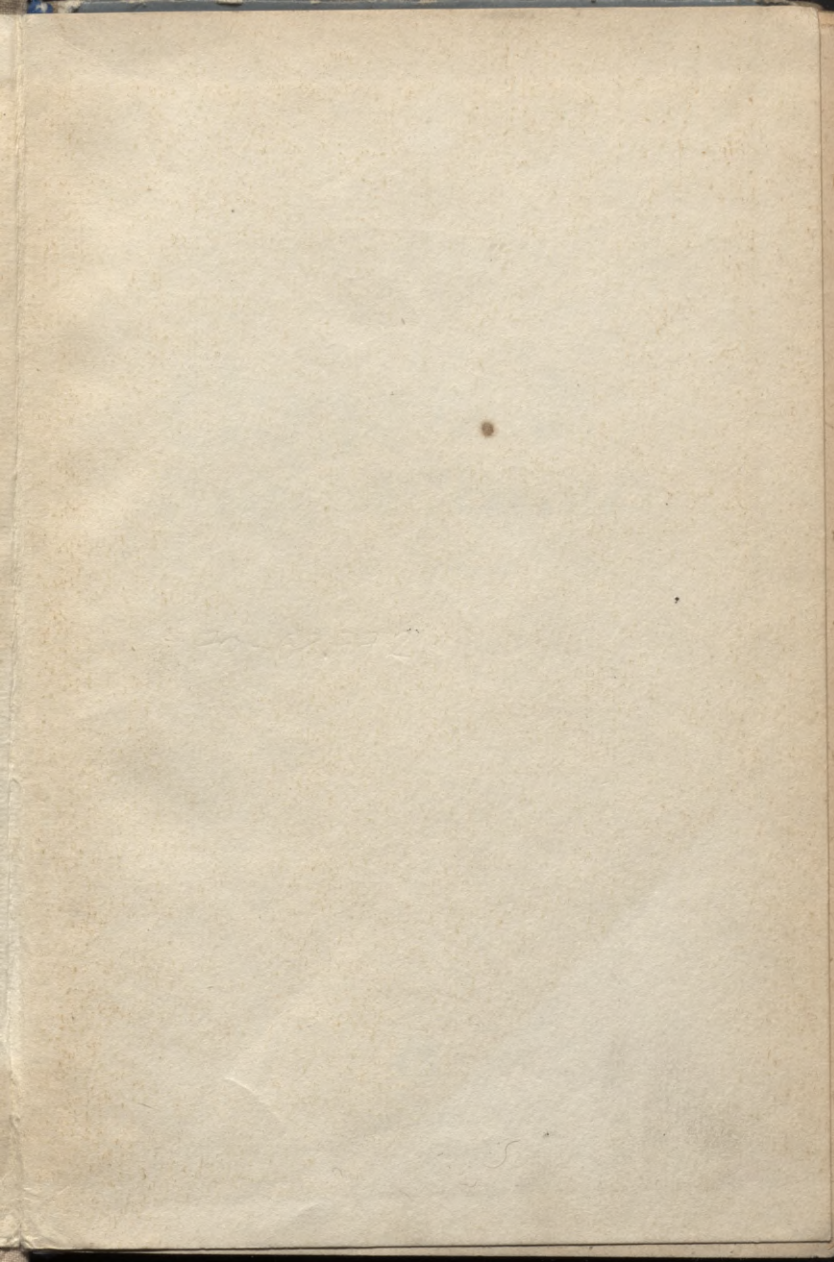
70-4  
L 115

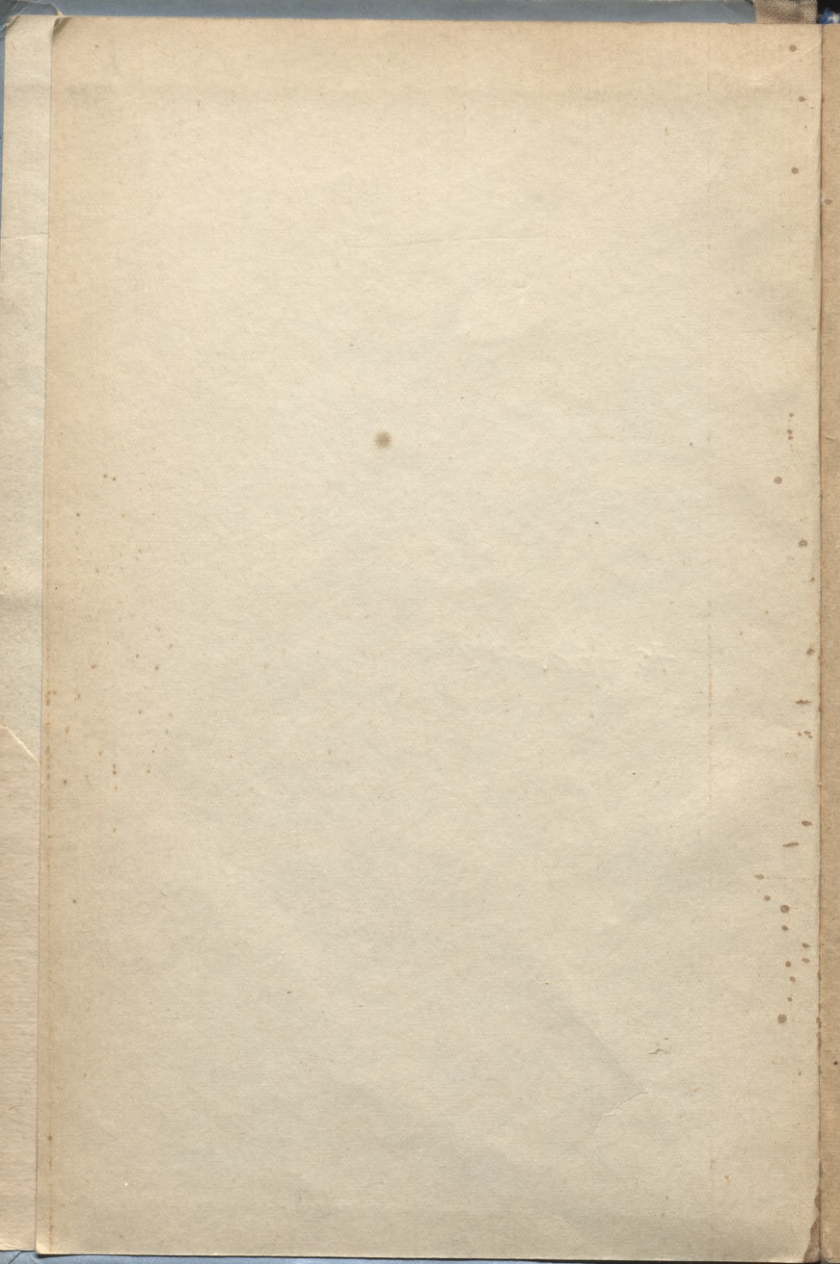
# Augstākā matemātika



70-68.772









70-4  
L 115

7  
5811

N. BRĀZMA, A. BRIGMANE, A. KRASTIŅŠ, J. RĀTS

# Augstākā matemātika

*Otrais pārstrādātais un papildinātais izdevums*



IZDEVNIECIBA «ZVAIGZNE»  
RĪGA 1970

Vija Lāča Latv. PSR  
Valsts bibliotēka  
~~70~~ 68.772 ✓  
0308110887

Книга является вторым переработанным и дополненным изданием вышедшей в 1964 году книги «Высшая математика».

Цель книги ознакомить читателей с общим курсом высшей математики в полном объеме программы для студентов экономических специальностей высших учебных заведений. Изложение материала данной программы построено так, чтобы книгой могли бы пользоваться и студенты других специальностей, изучающих основы высшей математики по программам, отличающимся от экономических специальностей. Так, например, ею могут пользоваться студенты лесохозяйственной, фармацевтической, агрономической и зоотехнической специальности, а также студенты техникумов, пропуская по желанию или мере необходимости главы, разделы, параграфы и упражнения, которые в тексте обозначены звездочкой\*. Каждый раздел книги содержит значительное число разрешенных примеров и заканчивается упражнениями для самостоятельного изучения пройденного материала.



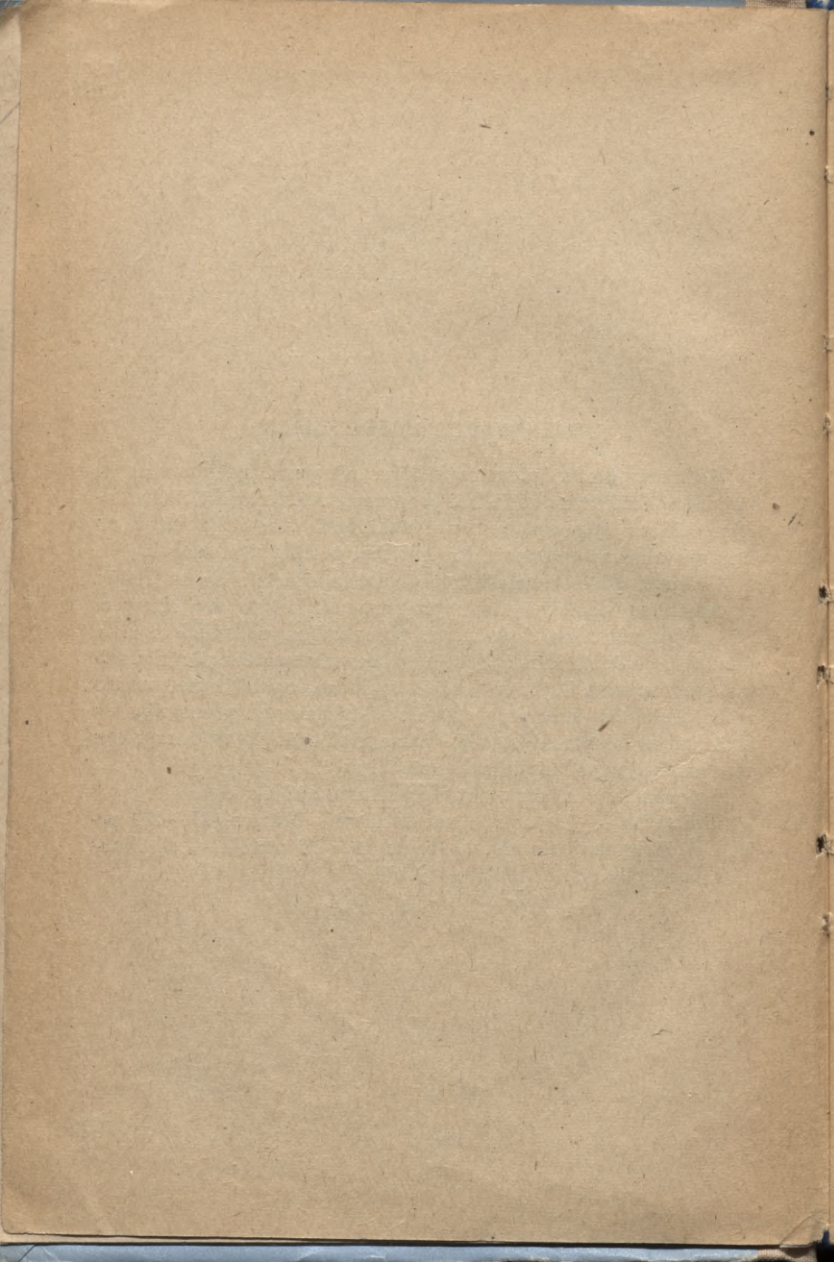
## PRIEKŠVārds 2. izdevumam

Grāmatas otrais izdevums atšķiras no pirmā izdevuma ar to, ka jaunajā izdevumā atbilstoši programmai ietverta arī rindu teorija, vektoru algebras elementi, analītiskā ģeometrija telpā un lineārās algebras elementi, kā iepriekšējā izdevumā nebija.

Grāmata atbilst augstskolu ekonomisko specialitāšu augstākās matemātikas vispārīgā kursa programmai, bet to var izmantot arī mežsaimniecības, farmācijas, agronomijas, zootehnikas u. c. fakultāšu studenti, kuri apgūst augstāko matemātiku pēc minimālās programmas. Tajās specialitātēs, kurās augstāko matemātiku māca pēc visšaurākās programmas, kā, piemēram, agronomijas un zootehnikas fakultātēs, studējošie var izlaist tās daļas, paragrāfus un vingrinājumus, kas tekstā apzīmēti ar \*.

So grāmatu var izmantot arī tehnikumu audzēkņi.

Grāmatas 8.—16. nodaļu sarakstījis N. Brāzma, 27.—29. nodaļu A. Brigmane, ievadu, 1.—6. un 19.—26. nodaļu — A. Krasinš, bet 7., 17. un 18. nodaļu — J. Rāts.



## IEVADS

Matemātikas kā patstāvīgas zinātņu nozares raksturīgās iezīmes ir tās abstraktums, loģiskā stingriba un ļoti plašās pielietošanas iespējas.

«Bet nekādā ziņā tirā matemātikā cilvēka saprāts neoperē tikai ar saviem paša radījumiem un izdomājumiem. Skaitļa un figūras jēdzieni nav nekur citur ņemti kā no reālās pasaules. Desmit pirkstu, ar ko cilvēki mācījušies skaitīt, t. i., izdarīt pirmo aritmētisko operāciju, ir viss kas cits, tikai ne prāta brīvs radījums. Lai skaitītu, tad ir nepieciešami ne tikai skaitāmie priekšmeti, bet arī jau spēja, aplūkojot šos priekšmetus, abstrahēties no visām to pārējām īpašībām, izņemot skaitli, bet šī spēja ir ilgas vēsturiskas attīstības un pieredzes rezultāts. Kā skaitļa, tā arī figūras jēdzieni ir aizgūti vienīgi no ārējās pasaules, bet nav radušies galvā tirās domāšanas ceļā. Vajadzēja būt lietām ar noteiktu formu un vajadzēja šīs formas salīdzināt, iekams varēja iegūt jēdzienu par figūru. *Tirās matemātikas objekts ir reālās pasaules telpiskās formas un kvantitatīvās attiecības, tātad ļoti reāls materiāls. Tas, ka šis materiāls sastopams ļoti abstraktā formā, var tikai vāji apslēpt tā rašanos no ārējās pasaules.*»\*

Vēsture māca, ka matemātisko zinātņu attīstība vienmēr bijusi cieši saistīta ar cilvēku sabiedrības un ražošanas spēku attīstību. Matemātikas pozitīvo lomu cilvēces kultūras, zinātnes un tehnikas attīstībā nav iespējams pārvērtēt, jo gandrīz katrs cilvēku prāta un roku darinājums tā vai citādi ir saistīts ar noteiktu aprēķinu. Jau senās Ēģiptes zemkopība Nilas ielejā diktēja ģeometrijas attīstību zemes mērīšanas nolūkiem, ūdens krātuvju un hidrotehnisku būvju celtniecībai. Celtniecība savukārt stimulēja mehānikas attīstību, kas nedalāmi saistīta ar matemātiskiem aprēķiniem.

---

\* F. Engelss, Anti-Dīrings. LVI, 1947, 41. lpp. (kursīvs autoru).



Astronomiskie novērojumi, kalendārs, saules pulkstenis un citas ikdienas dzīves nepieciešamības ir tas dzinēj spēks, kas noteica matemātikas attīstību tās sākuma posmā.

Matemātiskās metodes vairākus gadu simteņus lietoja tikai astronomijā, fizikā un dažās citās zinātnēs. Šīs zinātnes savukārt diktēja matemātikas attīstības ceļus un prasīja, lai matemātika risinātu tikai šo zinātņu attīstībai svarīgos uzdevumus.

Tagad stāvoklis radikāli izmainījies. Mūsu dienās matemātiskās metodes dziļi iespiedušās gandrīz visās zinātņu nozarēs. Matemātiku izmanto fizikā un tehnikā, bioloģijā un medicīnā, astronomijā un ķīmijā, ekonomikā un lauksaimniecībā, valodniecībā un demogrāfijā utt., un tās savukārt liek matemātikai meklēt arvien jaunas attīstības perspektīvas.

Nemākulīga matemātisko metožu lietošana var ievazāt aplamības dažādās zinātņu nozarēs. Turpretim pareiza matemātisko metožu lietošana palīdz pilnveidot zinātni, un tā tikai tad saņiedz pilnību, ja tai izdodas pielietot matemātiku.\*

Matemātiski formulētas dabas parādību un norišu likumsakarības ir drošs pamats stihisko dabas spēku pakļaušanai cilvēka apzinātai darbībai un to izmantošanai cilvēces labā.

Tādēļ arvien lielāka vērība tiek pievērsta matemātisko zināšanu līmenim un visdažādāko specialitāšu pārstāvju matemātiskai kultūrai. Arvien vairāk yietas daudzveidīgo augstskolu mācību plānos ieņem augstākā matemātika. Kaut arī matemātikai ļoti bieži ir tikai palīgroma dažādu jautājumu risināšanā, to nedrīkst uzlūkot kā gatavu recepšu krājumu, no kura attiecīgās nozares speciālists vajadzīgā brīdī paņems un pielietos tieši viņam noderīgo. Mācoties matemātiku, vissvarīgākais uzdevums ir piesavināties iemaņu domāt ar tiem priekšstatiem un jēdzieniem, kuri veido attiecīgā matemātikas kursa saturu.

Tai matemātikai, kuru pieņemts saukt par elementāro un kuras vienkāršākie pamata rezultāti veido tagadnes skolas kursu, ir ļoti ilgs vēsturiskās attīstības laiks. Par elementārās matemātikas (ģeometrijas, algebras un trigonometrijas) periodu skaita apmēram 2000 gadus ilgu laika posmu, kurš noslēdzās XVII g. s. ar «augstākās» matemātikas rašanos.

Elementārās matemātikas periodu savukārt var sadalīt divos posmos: ģeometrijas periods (līdz mūsu ēras II g. s.) un algebras prevalēcijas periods (no II līdz XVII g. s.).

Elementārā matemātika, īpaši ģeometrija, kuras sākumi atrodami ap VI g. s. pirms mūsu ēras Ēģiptē un Tuvo Austrumu zemēs, piedzīvoja augstu uzplaukumu senajā Grieķijā — Eiklīda, Arhimēda, Apolonija u. c. darbos. Elementārā ģeometrija, kuru tagad māca skolas kursā, ar maz izņēmumiem apkopota jau III g. s. pirms mūsu ēras Eiklīda darbos. Grieķiem bija zināmi arī trigonometrijas sākumi. Tie devuši savu daļu arī algebras

\* «Воспоминания о Марксе и Энгельсе», Госполитиздат, 1956, 66. lpp.

sākumam, bet Arhimēda darbi laukuma un tilpuma aprēķināšanā jau cieši pieslēdzās «augstākās» matemātikas nozarei — integrālreķiniem.

Apolonija pētījumi par konusa šķēlumiem — elipsi, hiperbolu un parabolu savukārt cieši pieslēdzās analītiskajai ģeometrijai, kura arī ir augstākās matemātikas nozare.

Grieķi it kā izsmēla elementārās ģeometrijas iespējas, un ar to izskaidrojams tas, ka mūsu ēras sākumā spožais ģeometrijas progress apsika. To nomainīja algebras un trigonometrijas attīstības sākumi Ptolemaja, Diofanta u. c. darbos.

Ar grieķu kultūras norietu matemātikas attīstības centrs pārvietojās uz Indiju, Vidusāziju un arābu zemēm. Ģeometrijas attīstībai šo zemju zinātnieki pakalpoja ar to, ka saglabāja grieķu darbus turpmākām paaudzēm, bet aritmētikas un algebras laukā spēra platu soli uz priekšu.

Vārds «algebra» pirmo reizi lietots arābu matemātiķa un astronoma Muhameda ibn Musa Al-Horezmi (Muhameda Musas dēla no Horezmas) sacerējumā IX g. s. Eiklīda, Ptolemaja, Al-Horezmi darbi tulkoti latīņu valodā XII g. s. no arābu valodas, un tikai XVI g. s. eiropiešu zinātne pārspēja savu priekšteču darbus. Šai laikā Vjets (1591. g.) ieviesa skaitļu apzīmēšanu ar burtiem, Nelpers (1614. g.) izgudroja logaritmus, Brigs (1624. g.) izskaitļoja pirmās decimālogaritmu tabulas. Tajā pašā laikā Eiropā parādījās kombinatorika un Ņūtona binoma formula. Līdz ar to it kā noslēdzās konstanto lielumu matemātikas — elementārās matemātikas periods. Turpmākiem sasniegumiem elementārajā matemātikā ir ciešs sakars ar «augstāko» matemātiku — mainīgo lielumu matemātiku.

\*Sākot ar XVII g. s., vadošo lomu matemātikā ieņem mainīga lieluma, funkcijas un robežas jēdzieni. Mainīgā lieluma un funkcijas jēdzieni radās tad, kad dabas zinātnē centrālo vietu ieņēma kustības pētīšana. Šie jēdzieni neradās pēkšņi Dekarta, Ņūtona, Leibnīca vai Fermā galvā, bet tie ir vispārīgās attīstības rezultāts. Saka, ka Ņūtons bija spiests «izgudrot» diferenciālreķinus un integrālreķinus, lai rastu iespēju attīstīt mehāniku.

Nav nejaušība, ka gandrīz vienā laikā radās trīs jaunas matemātikas disciplīnas: analītiskā ģeometrija, diferenciālreķini un integrālreķini. Tas bija laiks, kad Eiropā pārgāja uz kapitālistiskās ražošanas formu, kad radās Kopernika mācība par heliocentrisko pasaules sistēmu, kad Keplers atklāja, ka planētas griežas ap Sauli pa elipsēm, kad Galilejs veidoja modernās mehānikas pamatus, kad atklāja, ka no lielgabala izšautas lodes ceļš ir parabola utt.

Sākot ar XVII g. s. beigām, norisinājās ārkārtīgi strauja visdažādāko augstākās matemātikas nozaru attīstība, kura cieši saistīta ar sava laika dabas zinātņu un tehnikas attīstību. Ļoti liela nozīme šajā attīstībā ir Pēterburgas zinātņu akadēmijas



loceklim Leonardam Euleram (1707—1783), franču matemātiķiem Ž. Lagranžam (1736—1813), O. Košī (1789—1857), krievu matemātiķiem N. Lobačevskim (1792—1856), M. Ostrogradskim (1801—1861), P. Čebiševam (1821—1894) un daudziem citiem.

Novilkt stingru robežu starp elementāro un augstāko matemātiku nav iespējams. Tomēr pastāv dažas raksturīgas pazīmes, kas atšķir vēsturiski radušos matemātikas kursu, kuru sauc par elementāro matemātiku, no tām dažādajām matemātikas nozarēm, kuras apzīmē ar kopīgu vārdu — augstākā matemātika. Svarīgākās no šīm pazīmēm jau pieminējām, pieskaroties dažiem matemātikas vēsturiskās attīstības posmiem. Elementārā matemātika nodarbojas galvenokārt ar *nemainīgiem* (*konstantiem*) lielumiem, sadalot tos zināmos un nezināmos. Turpretim augstākā matemātika, neatmetot lielumu sadalīšanu zināmos un nezināmos, galveno vērību pievērš *mainīgiem lielumiem* un to savstarpējai sakarībai un atkarībai. Elementārās matemātikas atsevišķas nozares veidojušās cita no citas neatkarīgi. Turpretim augstākā matemātika veidojusies uz algebrisko un ģeometrisko metožu dziļas sintēzes pamata.

Ja to matemātiku, kuru māca vidusskolās, sauktu par elementāro, bet to, kuru pēc dažādām programmām māca dažāda tipa tehniskās augstskolās, sauktu par augstāko, tad kā īpašs matemātikas attīstības etaps jāskaita mūsdienu matemātika, kas radusies, plaši sazarojusi un kolosāli izaugusi XIX un XX gadu simtenī. Tā ir studiju objekts fizikas-matemātikas fakultātēs.

Modernās matemātikas etapa sākumu iezīmē dziļas, kvalitatīvas izmaiņas visās matemātikas pamatnozārēs: algebrā, ģeometrijā, matemātiskā analizē. Izmaiņu raksturu ļoti spilgti izteic neeiklīda ģeometrijas rašanās piemērs. Eiklīda ģeometriju tūkstošiem gadu visi uzskatīja par vienīgi iespējamo loģiski nevainojami uzbūvēto ģeometrijas sistēmu, kurā ikviena patiesība ir citu, iepriekš pierādītu patiesību loģiskas sekas. Šī ģeometrija balstās uz 5 aksiomām un 5 postulātiem.

**Aksiomas.** 1. Divi lielumi, kas vienādi ar vienu un to pašu trešo lielumu, ir vienādi savā starpā. 2. Ja vienādiem lielumiem pieskaita vienādus lielumus, tad summas arī ir vienādas. 3. Ja no vienādiem lielumiem atņem vienādus lielumus, tad starpības arī ir vienādas. 4. Ja divus lielumus var savietot vienu ar otru, tad šie lielumi ir vienādi. 5. Veselais ir lielāks par savu daļu.

**Postulāti.** 1. Divus punktus var savienot ar vienu vienīgu taisni. 2. Taisnes nogriežni abos tā galos uz taisnes var pagarināt. 3. Ap katru punktu kā ap centru var apvilkt riņķa līniju ar katru rādiusu. 4. Visi taisnie leņķi ir vienādi. 5. Ja dotā plaknē ir taisne un punkts, kas neatrodas uz taisnes, tad caur šo punktu var novilkt vienu vienīgu taisni, kura nekrusto doto taisni.

Šīs aksiomas un postulāti, ar kuriem aprakstīja pamatjēdzienu



(punkta, taisnes, plaknes) īpašības, šķita tik acīm redzami un neizbēgami, ka nevienam neradās šaubas par tiem. Izņēmums bija 5. postulāts par paralēlām taisnēm. Divu tūkstošu gadu laikā izcilākie sava laikmeta ģeometri neveiksmīgi mēģināja pierādīt šo postulātu, balstoties uz iepriekšējām aksiomām un postulātiem. Lūzums radās 1826. g., kad Lobačevskis (gandrīz tajā pašā laikā arī ungāru matemātiķis Boijai un vācu matemātiķis Gauss) nonāca pie atziņas, ka Eiklīda ģeometrija nav vienīgā un ka ir iespējama arī cita, loģiski tikpat nevainojami uzbūvēta ģeometrija, kuru šodien sauc par Lobačevska (neeiklīda) ģeometriju, un šajā ģeometrijā Eiklīda 5. postulāts atvietots ar šādu apgalvojumu: ja plaknē dota taisne un punkts, kas neatrodas uz taisnes, tad caur šo punktu var novilkt neierobežoti daudz taisņu, kuras nekrusto doto taisni.

Straujais matemātisko zinātņu uzplaukums, kāds novērojams lielās franču-revolūcijas laikā ar Laplasa, Puasona, Furjē u. c. darbiem, turpinājās visu pagājušo gadu simteni, izteikdamies vācu matemātiķu Rīmana, Veierštrāsa, Dedekinda, Kantora, Hilberta, franču matemātiķu Galuā, Borela, Lebēga, krievu matemātiķu A. Markova, A. Lapunova, S. Kovaļevskas, V. Steklova, izcilo krievu inženieru N. Zukovska, S. Capligina, A. Krilova un daudzu citu darbos.

Uzzīmēt kaut cik pietiekamu ainu, lai nespeciālists matemātikā iegūtu priekšstatu par tagadnes modernās matemātikas sasniegumiem, par tās nozīmi zinātnē un tehnikā, par to vareno matemātisko zinātņu augšupeju, kas sākās Padomju Savienībā pēc Lielās Oktobra sociālistiskās revolūcijas un turpinās mūsu dienās, ir uzdevums, kurš nav atrisināms šīs grāmatas ietvaros.

Padomju Savienībā ir daudz universitāšu, zinātņu akadēmiju un zinātniskās pētniecības institūtu, kuros darbojas veseli matemātiķu kolektīvi. Tie aktīvi virza uz priekšu tagadnes matemātikas attīstību. Izcila loma šeit ir M. Keldišam, I. Vinogradovam, P. Aleksandrovam, A. Kolmogorovam, S. Bernšteinam, S. Soboļevam, V. Smirnovam, I. Petrovskim un daudziem citiem, kuru vārdus pazīst visa matemātiskā pasaule.

## ANALITISKĀ ĢEOMETRIJA PLAKNE

## 1. NODAĻA

## KOORDINĀTU METODE

**1. §. Analītiskās ģeometrijas nozīme un iedalījums.** Analītiskā ģeometrija ir matemātikas nozare, kas ar algebras palīdzību pēta ģeometrisku objektu formu un īpašības. Tā balstās uz koordinātu metodi, ar kuru var noteikt savstarpēji viennozīmīgu atbilstību starp skaitļiem un punktiem un savstarpēji viennozīmīgu atbilstību starp vienādojumiem un punktu ģeometriskām vietām (līnijām, virsmām). Koordinātu metode pirmo reizi sistemātiski lietota franču filozofa un matemātiķa Renē Dekarta darbos, un tādēļ analītiskās ģeometrijas izcelšanos saista ar viņa vārdu.

Analītiskās ģeometrijas lomu zinātnes attīstībā F. Engelss raksturojis šādi: «Lūzuma punkts matemātikā bija Dekarta *mainīgais lielums*. Ar to matemātikā ienāca *kustība* un *dialektika*, un šā iemesla pēc *tūlīt kļuva nepieciešami diferenciālrēķini* un *integrālrēķini*, kuri tūlīt arī radās un kurus visumā pabeidza, bet nevis izgudroja Ņūtons un Leibnīcs.»\*

Elementāro ģeometriju iedala planimetrijā un stereometrijā. Analogi izšķir arī analītisko ģeometriju plaknē un analītisko ģeometriju telpā.

**2. §. Reālie skaitļi un to absolūtā vērtība.** Matemātikas pamatjēdzieni ir skaitlis un lielums. Naturālie (dabiskie) skaitļi 1, 2, 3, ... rodas skaitīšanas rezultātā. Skaitīšana ir visvienkāršākais mērīšanas gadījums. Vispār mērit nozīmē kvantitatīvi salīdzināt divus vienādas dabas lielumus, no kuriem viens ir mērijamais objekts, bet otrs ir izvēlēta mēra vienība. Matemātikas pielietojumos lielumu var definēt kā skaitļa un izvēlētas mēra vienības reizinājumu:

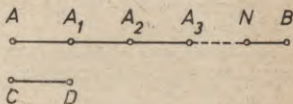
$$\text{Lielums} = \text{skaitlis} \times \text{mēra vienība}.$$

Kā mērīšanas piemēru iztīrāsīm taisnes nogriežņa  $AB$  garuma

\* F. Engelss, Dabas dialektika. LVI, 1952, 229. lpp.



mērišanu (1. zīm.). Pieņemsim par mēra vienību nogriezni  $CD$  un, sākot no punkta  $A$ , pakāpeniski atliksim nogriezni  $CD$  uz nogriežņa  $AB$  tā, lai  $CD=AA_1=A_1A_2=\dots=A_{n-1}N$ . Tad ir iespējami 2 gadījumi: 1) nogrieznis  $CD$  ietilpst nogrieznī  $AB$   $n$  reizes bez atlikuma, t. i., punkts  $N$  sakrīt ar punktu  $B$  vai 2) punkts  $N$  nesakrīt ar punktu  $B$  un rodas atlikums  $NB$ , kas mazāks par  $CD$ . Pirmajā gadījumā nogriežņa  $AB$  garumu izteic naturāls skaitlis  $n$ .



1. zīm.

Otrā, vispārīgajā gadījumā uz nogriežņa  $NB$  analogi atliksim nogriežņa  $CD$  vienu desmitdaļu, t. i., tādu nogriezni, kurš 10 reizes bez atlikuma ietilpst mēra vienībā  $CD$ . Ja mēra vienības desmitdaļa ietilpst pirmajā atlikumā  $NB$   $n_1$  reizi un rodas jauns atlikums, to savukārt mēra ar mēra vienības vienu simtdaļu utt.

Vispār nogriežņa  $AB$  garumu izteic skaitlis

$$\frac{AB}{CD} = n, n_1 n_2 n_3 \dots$$

Šis skaitlis ir decimāldaļa, kurā ir  $n$  veselu,  $n_1$  desmitdaļu,  $n_2$  simtdaļu,  $n_3$  tūkstošdaļu utt.

Ja  $n, n_1 n_2 n_3 \dots$  ir galīga decimāldaļa vai arī bezgalīga, bet periodiska decimāldaļa (kuru vienmēr var pārvērst vienkāršā daļā), tad sakām, ka nogriežņi  $AB$  un  $CD$  ir *samērojami* un mērišanas rezultāts ir *racionāls skaitlis*. Acīm redzot, naturāls skaitlis ir racionāla skaitļa speciāls gadījums.

Ja  $n, n_1 n_2 n_3 \dots$  ir bezgalīga, neperiodiska decimāldaļa, tad saka, ka nogriežņi  $AB$  un  $CD$  ir *nesamērojami* un mērišanas rezultāts ir *iracionāls skaitlis*.

Kā racionālie, tā iracionālie skaitļi var būt *pozitīvi* (lielāki par nulli) vai *negatīvi* (mazāki par nulli). Visus racionālos un iracionālos skaitļus, ieskaitot nulli, sauc par *reāliem skaitļiem*.

Atzīmēsim bez pierādījuma šādu pamatteorēmu par reāliem skaitļiem: *Lai kādi būtu divi dažādi reāli skaitļi  $a$  un  $b$ , vienmēr ir bezgalīgi daudz tādu reālu skaitļu, kā racionālu, tā iracionālu, kas atrodas starp  $a$  un  $b$ .*

Augstākajā matemātikā bieži jālieto *reālā skaitļa absolūtās vērtības*\* jēdziens, tādēļ atgādināsim tā definīciju un īpašības.

Par reāla skaitļa  $a$  absolūto vērtību  $|a|$  sauc skaitli  $a$ , ja  $a \geq 0$ , un skaitli  $(-a)$ , ja  $a < 0$ . Piemēram,  $|+3|=3$  un  $|-3|=-(-3)=3$ . No definīcijas seko, ka nevienādība  $|a| \leq b$ , kur  $b > 0$ , ir līdzvērtīga ar nevienādībām  $-b \leq a \leq +b$ . Pamatojoties uz definīciju, viegli pierādāmas reālo skaitļu absolūto vērtību īpašības.

\* Absolūtās vērtības vietā mēdz lietot arī terminus «absolūtais lielums» jeb «modulis».

1. Summas absolūtā vērtība nav lielāka par saskaitāmo absolūto vērtību summu:

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

Piemēram,  $|-6+4| < |-6| + |4|$ , jo  $|-6+4| = 2$ , bet  $|-6| + |4| = 10$ .

2. Starpības absolūtā vērtība nav mazāka par mazināmā un mazinātāja absolūto vērtību starpību:

$$|a-b| \geq |a| - |b|.$$

Piemēram,  $|4-6| > |4| - |6|$ , jo  $|4-6| = 2$ , bet  $|4| - |6| = -2$ .

3. Reizinājuma absolūtā vērtība ir vienāda ar reizinātāju absolūto vērtību reizinājumu:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|.$$

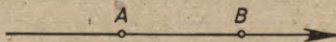
4. Dalījuma absolūtā vērtība ir vienāda ar dalāmā un dalītāja absolūto vērtību dalījumu:

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

3. §. Ass un vektors. Bez tādiem ģeometrijas pamata jēdzieniem kā punkts, taisne un taisnes nogrieznis analītiskajā ģeometrijā svarīgi jēdzieni ir *orientēta taisne* (ass) un *orientēts taisnes nogrieznis* (vektors).

Uz katras taisnes eksistē divi savstarpēji pretim vērsti virzieni. Ja vienu no tiem uzskata par pozitīvu, tad saka, ka taisne ir orientēta. *Orientētu taisni sauc par asi*. Taisnes orientāciju zīmējumos parasti parāda ar bultu. Bultas vērsums norāda pozitīvo virzienu uz ass. Tā, piemēram, 2. zīmējumā virziens no punkta *A* uz punktu *B* ir pozitīvs, bet no *B* uz *A* — negatīvs.

Taisnes nogrieznis, kas savieno divus punktus *A* un *B*, sauc par orientētu, ja ir norādīts, kuru no šiem punktiem skaitīt par



2. zīm.

nogriežņa sākuma un kuru par gala punktu. Orientētu taisnes nogriezni analītiskajā ģeometrijā sauc par *vektoru*<sup>1</sup>.

Vektora jēdziens matemātikā ir relatīvi jauns. Savā attīstībā tas tālu pārsniedzis ģeometriskās uzskatāmības ietvarus, un tā pielietojumi sastopami gandrīz visās mūsdienu matemātikas un

<sup>1</sup> No latīņu vārda *vehere* (braukt).



fizikas nozarēs. Attīstības sākuma stadijā šis jēdziens saistījās tikai ar orientētu taisnes nogriežni, kas pēc garuma un pēc virziena attēlo pārvietojumu, kāds pa taisni jāizdara punktam  $A$ , lai tas sakristu ar punktu  $B$ .



3. zīm.

Vektoru geometriski attēlo ar bultu, kas vērsta no sākuma punkta  $A$  uz gala punktu  $B$ , un apzīmē ar simbolu  $\overrightarrow{AB}$  jeb  $\overline{AB}$ . Pirmais burtš šādā simbolā norāda vektora sākuma punktu, otrais — gala punktu. Bieži vektoru apzīmē ar vienu burtu, piemēram,  $\vec{a}$  jeb  $\overline{a}$ . Vektoru apzīmēšanai iespieddarbos mēdz lietot no konteksta atšķirīgus burtus, piemēram, gotu alfabēta burtus vai arī treknāka iespieduma latīņu alfabēta burtus.

Taisni, uz kuras atrodas vektors, sauc par *vektora pamatu* jeb darbības līniju. Tā, piemēram, 3. zīmējumā  $a$  taisne  $t$  ir vektora  $\vec{a}$  jeb  $\overline{AB}$  pamats.

Divus un vairāk vektorus sauc par *kolineāriem vektoriem*, ja to pamati ir savstarpēji paralēli vai sakrīt. Ja kolineāriem vektoriem ir kopīgs sākuma punkts, tad tie atrodas uz vienas taisnes. Tie var būt ar vienādu *vērsumu* (3. zīm.  $b$ ) vai savstarpēji pretimvērsti (3. zīm.  $c$ ).

Ar kādu noteiktu mēra vienību izmērīto taisnes nogriežņa  $AB$  garumu, kuru sauc arī par vektora  $\overline{AB}$  *moduli*, apzīmēsim ar  $|AB|$ . Ja vektors apzīmēts ar vienu burtu, piemēram, ar  $\vec{a}$ , tad tā moduli apzīmēsim ar to pašu burtu parastā iespiedumā bez bultiņas vai arī ievietosim vektora apzīmēšanai lietoto burtu divās vertikālās svītriņās (moduļa zīme), t. i.,  $|a|$ .

Vektorus iedala *brīvos*, *slidošos* un *saistītos vektoros*. Brīvu vektoru, nemainot tā fizikālo jēgu vai darbības efektu, drīkst pārnēst paralēli sev jebkurā telpas punktā. Tāds, piemēram, ir spēka pāra moments. Slidošu vektoru, nemainot darbības efektu, drīkst pārnēst tikai pa tā pamatu. Tāds, piemēram, ir cietam ķermenim pielikts spēks. Saistīta vektora sākuma punktu nedrīkst nekādā veidā pārvietot. Tāds, piemēram, ir atsevišķas šķidruma daļiņas

ātrums. Jāievēro, ka šai kursā apskatīsim tikai brīvus vektorus. Definīcijas un darbības, kuras formulēsīm šādiem brīviem vektoriem, var zaudēt savu jēgu, ja tās pielieto slidošiem vai saistītiem vektoriem.

**Definīcija.** Divus vektorus  $\vec{a}$  un  $\vec{b}$  sauc par vienādiem, ja tie ir kolineāri, vienādi vērsti un tiem ir vienādi moduli, t. i.,  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ . Tādā un tikai tādā gadījumā raksta  $\vec{a} = \vec{b}$ .

Ja nav izpildīts kaut viens no vektoru vienādības definīcijā minētiem trim nosacījumiem, tad vektori nav vienādi.

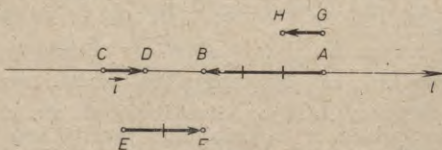
Tā, piemēram,  $\vec{AB} \neq \vec{BA}$ , jo šiem vektoriem gan ir vienādi moduli  $|\vec{AB}| = |\vec{BA}|$  un kopīgs pamats, bet tiem nav vienāds vērsums.

Katrs vektors  $\vec{a} = \vec{AB}$  kādam punktam  $A$  viennozīmīgi piekārtu punktu  $B$ . Vektoru  $\vec{AA}$ , kas punktam  $A$  piekārtu šo pašu punktu  $A$ , sauc par *nullvektoru*. Tā apzīmēšanai lietosim simbolu  $\vec{o}$ . Nullvektors ir kolineārs ar jebkuru vektoru, un tā modulis ir vienāds ar nulli, t. i.,  $|\vec{o}| = 0$ .

**4. §. Ass vektori un to algebriskais lielums.** Vektoru, kas nav nullvektors, var izmantot tā pamata un tam paralēlo taisņu orientēšanai. Tā kā vektora garumam virziena noteikšanā nav nekādas nozīmes, tad šai nolūkā var izmantot vektoru, kura garums (modulis) pieņemts par mēra vienību. Tādu vektoru sauc par *vienības vektoru* jeb *ortu*.

Orientētu vektora pamatu sauksim par šī *vektora asi*. Visus vektorus, kas kolineāri ar kādu doto ortu, sauksim par šī orta ass vektoriem. Tā, piemēram, 4. zīmējumā attēlots Orts  $\vec{i} = \vec{CD}$ , tā ass  $l$  un vēl trīs dažādi šīs ass vektori  $\vec{AB}$ ,  $\vec{EF}$  un  $\vec{GH}$ .

Starp kādas ass vektoriem un reāliem skaitļiem pastāv savstarpēji viennozīmīga atbilstība. Tas nozīmē, ka katram ass vek-



4. zīm.

toram atbilst viens noteikts reāls skaitlis, un otrādi — katram reālam skaitlim atbilst noteikts ass vektors. Šo reālo-skaitli sauc par ass *vektora algebrisko lielumu* jeb *koordināti*. Ja vektors apzīmēts ar simbolu  $\vec{AB}$ , tad tā algebrisko lielumu apzīmēsīm ar  $AB$ , bet, ja vektors apzīmēts ar simbolu  $\vec{a}$  un tā ass ar  $l$ , tad tā algebrisko lielumu apzīmēsīm ar  $a_l$ . Ass *vektora algebriskais lie-*



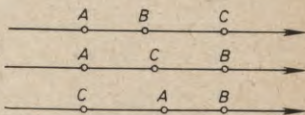
lums ir vienāds ar tā moduli, t. i.,  $a_l = |a|$ , ja vektoram un tā asij ir vienādi vērsumi, un  $a_l = -|a|$ , ja vektora vērsums ir pretējs tā ass vērsumam. 4. zīmējumā attēloto ass vektoru algebriskie lielumi ir:  $CD=1$ ,  $AB=-3$ ,  $EF=2$ ,  $GH=-1$ .

**Teorēma (Sala teorēma).** Lai kāds būtu punktu  $A$ ,  $B$  un  $C$  novietojums uz ass, vektoru  $\vec{AB}$ ,  $\vec{BC}$  un  $\vec{CA}$  algebriskie lielumi vienmēr izpilda identitāti

$$AB + BC + CA = 0 \quad (1.1)$$

**Pierādījums.** Divu sav-

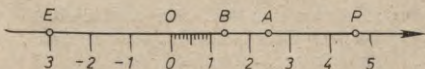
starpēji pretēju vektoru  $\vec{AB}$  un  $\vec{BA}$  moduli ir vienādi,  $|AB| = |BA|$ , bet to algebriskajiem lielumiem ir pretējas zīmes,  $AB = -BA$ . Tādēļ vienmēr ir pareiza identitāte  $AB + BA = 0$ . Pieņemsim, ka lielums  $AB$  ir pozitīvs. Tad ir iespējami 3 gadījumi (5. zīm.): 1) punkts  $B$  atrodas starp punktiem  $A$



5. zīm.

un  $C$ , 2) punkts  $C$  atrodas starp punktiem  $A$  un  $B$ , 3) punkts  $A$  atrodas starp punktiem  $C$  un  $B$ . Pirmajā gadījumā  $AC = AB + BC$ , bet  $AC = -CA$ , un tādēļ  $AB + BC + CA = 0$ . Otrajā gadījumā  $AC + CB = AB$ , bet  $AC = -CA$  un  $CB = -BC$ , un tādēļ  $AB + BC + CA = 0$ . Trešajā gadījumā  $CA + AB = CB$ , bet  $CB = -BC$ , un tādēļ vienmēr  $AB + BC + CA = 0$ . Ja  $AB$  ir negatīvs, tad  $BA$  ir pozitīvs un  $BA + AC + CB = 0$  jeb  $AB + BC + CA = 0$ , ko arī vajadzēja pierādīt.

**5. §. Punktu koordinātes uz ass.** Ja uz dotās ass (6. zīm.) kādu tās punktu  $O$  izvēlamies par sākuma punktu, tad jebkura šīs ass punkta  $P$  stāvokli pilnīgi nosaka vektors  $\vec{OP}$ , kuru sauc par punkta  $P$  rādiusvektoru. Rādiusvektora  $\vec{OP}$  algebrisko lielumu  $x = OP$  sauc par punkta  $P$  koordināti. Tādēļ jēdziens «punkta koordināte» sakrīt ar jēdzienu «rādiusvektora koordināte».

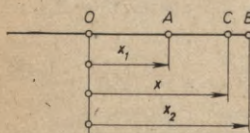


6. zīm.

Punkta koordināti raksta iekavās aiz punkta apzīmējuma, piemēram,  $A\left(\frac{5}{2}\right)$ ,  $B(\sqrt{2})$ ,  $E(-3)$ . Šiem punktiem atbilstošo rādiusvektoru koordinātes (algebriskie lielumi) ir  $OA = \frac{5}{2}$ ,  $OB = \sqrt{2}$  un  $OE = -3$  (6. zīm.).

1. teorēma. Ja uz ass ir doti divi punkti  $A(x_1)$  un  $B(x_2)$ , tad ass vektora  $\vec{AB}$  algebriskais lielums  $AB = x_2 - x_1$  un modulis  $|AB| = |x_2 - x_1|$ .

Pierādījums. Izvēlēsimies punktu  $O$  par sākuma punktu (7. zīm.). Tad punktu  $A$  un  $B$  rādiusvektoru algebriskie lielumi ir  $OA = x_1$ , bet  $OB = x_2$ . Saskaņā ar formulu (1.1)



7. zīm.

no kurienes

$$OA + AB + BO = 0,$$

no kurienes

$$AB = OB - OA$$

jeb

$$AB = x_2 - x_1, \quad (1.2)$$

un

$$|AB| = |x_2 - x_1|, \quad (1.3)$$

ko arī vajadzēja pierādīt.

Piemērs. Doti punkti  $A(1)$ ,  $B(4)$  un  $C(-5)$ . Noteikt vektoru  $\vec{AB}$ ,  $\vec{BA}$ ,  $\vec{AC}$  un  $\vec{CB}$  algebriskos lielumus  $AB$ ,  $BA$ ,  $AC$  un  $CB$ .

Atrisinājums. Saskaņā ar formulu (1.2)

$$AB = 4 - 1 = 3,$$

$$BA = 1 - 4 = -3,$$

$$AC = -5 - 1 = -6,$$

$$CB = 4 - (-5) = 9.$$

Piemērs. Atrast attālumu starp punktiem  $A(4)$  un  $B(-3)$ .

Atrisinājums. Saskaņā ar formulu (1.3)

$$|AB| = |-3 - 4| = |-7| = 7.$$

2. teorēma. Ja uz ass doti divi punkti  $A(x_1)$  un  $B(x_2)$  un uz šīs ass ir jāatrod tāds trešais punkts  $C(x)$ , lai attiecība  $AC : CB$  būtu kāds dots reāls skaitlis  $\lambda$ , tad

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}. \quad (1.4)$$

Pierādījums. Saskaņā ar formulu (1.2)  $AC = x - x_1$  un  $CB = x_2 - x$ , bet  $AC : CB = \lambda$  jeb  $x - x_1 = \lambda(x_2 - x)$ . No šejienes seko  $x(1 + \lambda) = x_1 + \lambda x_2$  un formula (1.4), ko arī vajadzēja pierādīt.

Piezīme.  $\lambda$  var būt jebkurš reāls skaitlis, izņemot  $(-1)$ , jo tad formula (1.4) zaudē jēgu. Ja  $\lambda > 0$ , tad lielumiem  $AC$  un  $CB$  ir vienāda zīme un punkts  $C$  atrodas starp  $A$  un  $B$ . Ja  $\lambda = 1$ ,



tad  $|AC| = |CB|$ , t. i., punkti  $A$  un  $B$  ir simetriski pret punktu  $C$ . Tādā gadījumā no formulas (1.4) seko, ka

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}. \quad (1.5)$$

Ja  $\lambda = 0$ , tad  $C$  sakrīt ar punktu  $A$ . Ja  $\lambda < 0$ , tad  $AC$  un  $CB$  ir ar pretējām zīmēm un punkts  $C$  atrodas uz nogriežņa  $AB$  pagarinājuma aiz punkta  $A$  vai punkta  $B$ .

Piemērs. Atrast punktu  $C(x)$ , kas dala attālumu starp punktiem  $A(2)$  un  $B(-5)$  attiecībā  $\lambda = \frac{3}{4}$ .

Atrisinājums. Saskaņā ar formulu (1.4)

$$x = \frac{2 + \frac{3}{4} \cdot (-5)}{1 + \frac{3}{4}} = -1.$$

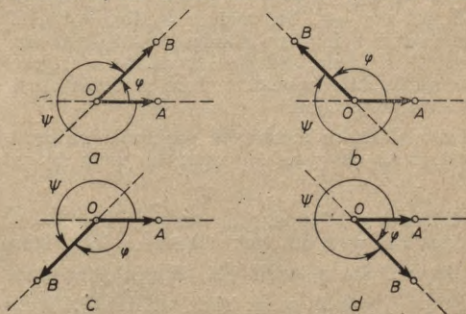
Tātad meklējamais punkts ir  $C(-1)$ .

**6. §. Leņķis starp diviem vektoriem.** Katrā plaknē eksistē divi, viens otram pretimvērši pagriezienu (rotācijas) virzieni (8. zīm.). Ja vienu no tiem pieņem par pozitīvu, tad saka, ka plakne ir orientēta. Pozitīvajam pretējais pagriezienu virziens orientētā plaknē ir negatīvs.

Pieņemsim, ka orientētā plaknē ir doti divi vektori  $\vec{a} = \vec{OA}$  un  $\vec{b} = \vec{OB}$ , kas nav nullvektori un kam izvēlēts kopīgs sākuma punkts  $O$ . Apzīmēsim ar  $\varphi$  un  $\psi$  (9. zīm.) leņķus, par kuriem ir jāpagriež vektors  $\vec{a}$ , lai tā ass sakristu ar vektora  $\vec{b}$  asi. Leņķi  $\varphi$

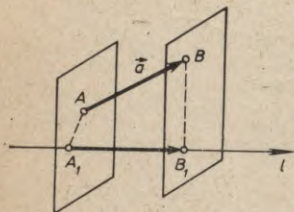


8. zīm.



9. zīm.

un  $\psi$  ir ar dažādām zīmēm, un starp tiem pastāv sakarības:  $\varphi = \psi \pm 2\pi$ ;  $\cos \varphi = \cos \psi$ ;  $\sin \varphi = \sin \psi$ . Par leņķi starp vektoriem  $\vec{a}$  un  $\vec{b}$  sauc pēc absolūtās vērtības mazāko leņķi  $\varphi$  vai  $\psi$ , par kuru orientētā plaknē ir jāpagriež viens no šiem vektoriem, lai tā pamats un vērsums sakristu ar otra vektora pamatu un vērsumu.



10. zīm.

Analogi noteic leņķi starp kādu asi  $l$  un vektoru  $\vec{a}$ , kā arī starp divām asīm. Šī leņķa absolūtā vērtība nav lielāka par  $\pi$ . Tā ir vienāda ar  $\pi$ , ja vektori  $\vec{a}$  un  $\vec{b}$  ir kolineāri, bet savstarpēji pretimvērsti (3. zīm. c). Ja kolineāriem vektoriem ir vienāds vērsums (3. zīm. b), tad starp tiem ir leņķis  $\varphi = 0$ . Divus vektorus,

starp kuriem ir leņķis  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , sauc par ortogonāliem (savstarpēji perpendikulāriem) vektoriem.

**7. §. Vektora projekcija uz ass.** Ja caur vektora  $\vec{a} = \vec{AB}$  sākuma punktu  $A$  un gala punktu  $B$  velk paralēlas plaknes, kuras krusto doto asi  $l$ , un krustpunktus apzīmē ar  $A_1$  un  $B_1$  (10. zīm.), tad ass vektoru  $\vec{A_1B_1}$  sauc par vektora  $\vec{a}$  komponenti uz ass  $l$  un komponentes algebrisko lielumu  $A_1B_1$  par vektora  $\vec{a}$  paralēlprojekciju jeb koordināti uz ass  $l$ . Ja caur vektora sākuma un gala punktiem vilktās, paralēlās plaknes ir perpendikulāras pret doto asi  $l$ , tad  $A_1B_1$  sauc par vektora  $\vec{a}$  taisnleņķa projekciju jeb koordināti uz ass  $l$ .

Taisnleņķa projekcijas apzīmēšanai lietojam šādus pierakstus:  $\text{pr}_l \vec{AB} = A_1B_1$  jeb  $\text{pr}_l \vec{a} = a_l$ . Saskaņā ar vektora projekcijas definīciju katram vektoram ir viena vienīga komponente un projekcija uz dotās ass  $l$ . Vienādiem vektoriem ir vienādas projekcijas, bet ir neierobežots skaits dažādu vektoru, kam uz dotās ass ir vienādas komponentes un projekcijas.

**Teorēma.** Vektora taisnleņķa projekcija uz ass vienāda ar vektora moduļa un  $\cos \varphi$  reizinājumu, kur  $\varphi$  ir leņķis starp asi un vektoru.

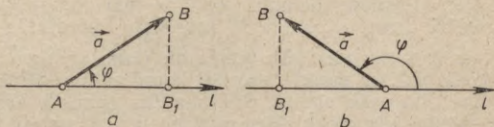
**Pierādījums.** Pieņemsim, ka vektora  $\vec{a} = \vec{AB}$  sākuma punkts atrodas uz ass  $l$ , un apzīmēsim ar  $\varphi$  leņķi starp asi  $l$  un vektoru  $\vec{a}$ . Ja  $\varphi$  ir šaurs leņķis (11. zīm. a), tad  $\text{pr}_l \vec{AB} = AB_1 = |AB_1|$ , bet  $|AB_1| = |AB| \cos \varphi$ . Tādēļ  $\text{pr}_l \vec{AB} = |AB| \cos \varphi$ .

Ja  $\varphi$  ir plats leņķis (11. zīm. b), tad  $\text{pr}_l \vec{AB} = AB_1 = -|AB_1|$ ,



bet  $|AB_1| = |AB| \cos(\pi - \varphi) = -|AB| \cos \varphi$  un  $\text{pr}_l \vec{AB} = |AB| \cos \varphi$ .  
Tādēļ vienmēr

$$\text{pr}_l \vec{AB} = |AB| \cos \varphi \quad (1.6)$$



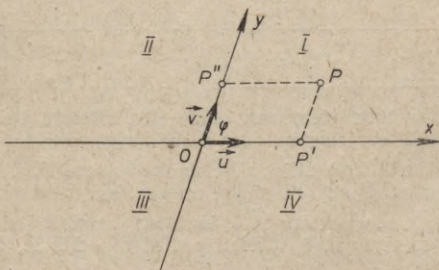
11. zīm.

jeb

$$a_l = |a| \cos \varphi. \quad (1.7)$$

8. §. **Koordinātu sistēma plaknē.** Pieņemsim, ka  $\vec{u}$  un  $\vec{v}$  ir divi nekolineāri orti, kuru asis  $Ox$  un  $Oy$  krustojas patvaļīgi izvēlēta punktā  $O$  (12. zīm.). Divu nekolineāru ortu asis un to krustpunkts  $O$ , ko sauc par *koordinātu sākumu*, veido *Dekarta koordinātu sistēmu plaknē*. Vienu no koordinātu sistēmas asīm sauc par *abscisu asi* ( $Ox$  ass), bet otru par *ordinātu asi* ( $Oy$  ass). Leņķi  $\varphi$ , par kuru jāpagriež abscisu ass, lai tā sakristu ar ordinātu asi, sauc par *koordinātu leņķi*. Pēc koordinātu leņķa  $\varphi$  lieluma izšķir *slīpleņķa* un *taisnleņķa* koordinātu sistēmas. Visbiežāk lietotā Dekarta koordinātu sistēma plaknē ir taisnleņķa koordinātu sistēma.

Tās koordinātu leņķis  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ .



12. zīm.

Lai noteiktu kāda punkta  $P$  stāvokli plaknē, tad šajā plaknē jāizvēlas koordinātu sistēma  $\{O; \vec{u}; \vec{v}\}$  un caur punktu  $P$  jāvelk koordinātu asīm paralēlas taisnes (12. zīm.). Apzīmējot ar  $P'$  punktu, kurā krustojas  $Oy$  asij paralēlā taisne ar  $Ox$  asi, un ar  $P''$  punktu, kurā krustojas  $Ox$  asij paralēlā taisne ar  $Oy$  asi, iegūstam

divus koordinātu asu vektorus  $\vec{OP}'$  un  $\vec{OP}''$ . Punktus  $P'$  un  $P''$  sauc par punkta  $P$  (slīpenā) projekcijām uz koordinātu asīm.

Vektora  $\vec{OP}'$  algebrisko lielumu  $x=OP'$  sauc par punkta  $P$  abscisu, bet  $\vec{OP}''$  algebrisko lielumu  $y=OP''$  — par punkta  $P$  ordināti. Lai kur plaknē atrastos punkts  $P$ , izvēlētajā koordinātu sistēmā  $\{O; \vec{u}; \vec{v}\}$  tam ir viena vienīga abscisa un viena vienīga ordināte. Tādēļ jebkura plaknes punkta stāvokli koordinātu sistēmā nosaka divi un tikai divi reāli skaitļi. Šos skaitļus (punkta abscisu un ordināti) raksta iekavās blakus punkta apzīmējumam un sauc par punkta koordinātēm. Pirmo raksta punkta abscisu, bet otro — ordināti. Tā, piemēram, pieraksts  $P(x; y)$  nozīmē, ka punkta  $P$  abscisa ir skaitlis  $x$ , bet ordināte — skaitlis  $y$ . Visiem abscisu ass punktiem ordināte ir 0, bet ordinātu ass punktiem abscisa ir 0. Piemēram, pieraksts  $P'(x; 0)$  norāda, ka punkts  $P'$  atrodas uz abscisu ass, bet pieraksts  $P''(0; y)$  norāda, ka punkts  $P''$  atrodas uz ordinātu ass. Abas koordinātes ir nulles tikai koordinātu sākuma punktam  $O(0; 0)$ .

Dekarta koordinātu sistēmas asis sadala plakni četros kvadrantos. Kvadrantus pieņemts numurēt tā, kā tas parādīts 12. zīmējumā. Atkarībā no tā, kurā kvadrantā atrodas punkts, tā koordinātēm ir «+» vai «-» zīme.

|                | Kvadrants |    |     |    |
|----------------|-----------|----|-----|----|
|                | I         | II | III | IV |
| Abscisas zīme  | +         | -  | -   | +  |
| Ordinātes zīme | +         | +  | -   | -  |

Lai doto punktu, piemēram,  $A(3; -2)$ , attēlotu Dekarta koordinātu sistēmā, var rīkoties dažādi. Viens paņēmieni ir šāds: no sākuma punkta  $O(0; 0)$  atliek abscisu ass vektoru  $O\vec{A}$ , kura algebriskais lielums  $OA'=3$  (13. zīm.), un pēc tam no punkta  $A'(3; 0)$  atliek ordinātu ass vektoru  $\vec{A'A}$ , kura algebriskais lielums  $A'A=-2$ . Šajā zīmējumā vēl attēloti punkti  $B(-2,5; 3)$ ,  $C(-1; -3)$  un  $D(4; \sqrt{2})$ .

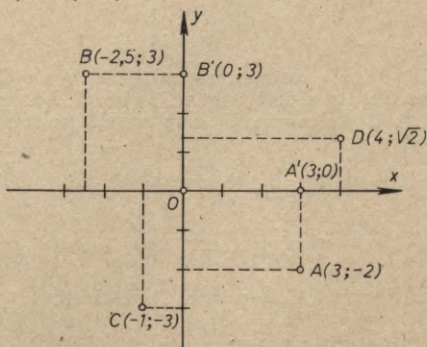
9. §. Attālums starp diviem punktiem plaknē. Teorēma. Ja  $A(x_1; y_1)$  un  $B(x_2; y_2)$  ir divi punkti plaknē un  $|AB|$  — attālums starp tiem, tad

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1.8)$$

Pierādījums. Apzīmēsim vektora  $\vec{AB}$  projekciju uz abscisu un ordinātu asīm attiecīgi ar  $A'B'$  un  $A''B''$  (14. zīm.). Ar



$P$  apzīmēsim punktu, kurā krustojas koordinātu asīm paralēlas taisnes, kas novilkas caur punktiem  $A$  un  $B$ .  $APB$  ir taisnleņķa trijstūris, no kura pēc Pitagora teorēmas  $|AB|^2 = |AP|^2 + |PB|^2$ . Katetes  $|AP|$  un  $|PB|$  kā taisnstūra pretējās malas ir vienādas



13. zīm.

ar vektora  $\vec{AB}$  projekciju absolūtām vērtībām  $|A'B'|$  un  $|A''B''|$ . Saskaņā ar formulu (1.3)  $|A'B'| = |x_2 - x_1|$  un  $|A''B''| = |y_2 - y_1|$ , tādēļ  $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ , ko arī vajadzēja pierādīt.

Piemērs. Aprēķināt attālumu starp punktiem  $A(-4; 3)$  un  $B(0; 6)$ .

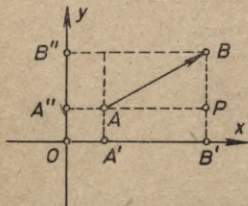
Atrisinājums. Saskaņā ar formulu (1.8)

$$|AB| = \sqrt{(0+4)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{16+9} = 5.$$

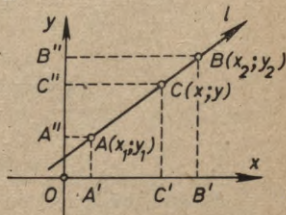
#### 10. §. Taisnes nogriežņa dalīšana dotajā attiecībā.

Teorēma. Ja plaknē doti divi punkti  $A(x_1; y_1)$ ,  $B(x_2; y_2)$  un ja punkts  $C(x; y)$  (15. zīm.); kas atrodas uz vienas ass ar punktiem  $A(x_1; y_1)$  un  $B(x_2; y_2)$ , daļa orientētu nogriežni  $AB$  dotajā attiecībā

$$\lambda = \frac{AC}{CB},$$



14. zīm.



15. zīm.

tad punkta  $C$  koordinātes ir

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y &= \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

**Pierādījums.** Apzīmēsim punktu  $A$ ,  $B$  un  $C$  taisnleņķa projekcijas uz  $Ox$  ass attiecīgi ar  $A'$ ,  $B'$  un  $C'$ , bet uz  $Oy$  ass ar  $A''$ ,  $B''$  un  $C''$ . Tā kā nogriežņi starp paralēlām taisnēm ir proporcionāli, tad

$$\frac{A'C'}{C'B'} = \frac{AC}{CB} = \lambda$$

un

$$\frac{A''C''}{C''B''} = \frac{AC}{CB} = \lambda.$$

Saskaņā ar formulu (1.4) punkta  $C'$  abscisa ir

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

Līdz ar to ir pierādīta viena no formulām (1.9), jo punktu  $C'$  un  $C$  abscisas ir vienādas. Otrā formula pierādāma pilnīgi analogi, jo punktu  $C''$  un  $C$  ordinātes ir vienādas.

Ja  $\lambda = 1$ , tad punkts  $C(x; y)$  ir nogriežņa  $AB$  viduspunkts un

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (1.10)$$

**Piemērs.** Punktā  $A(4; 3)$  pielikts svars  $P = 12$  kg un punktā  $B(-6; -2)$  svars  $Q = 8$  kg. Atrast sistēmas smaguma centra koordinātes.

**Atrisinājums.** Tā kā smaguma centrs  $C(x; y)$  daļa orientēto nogriežņi  $\vec{AB}$  apgriezti proporcionāli nogriežņa galos pieliktajiem svāriem, tad

$$\lambda = \frac{AC}{CB} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}; \quad x = \frac{4 + \frac{2}{3} \cdot (-6)}{1 + \frac{2}{3}} = 0;$$

$$y = \frac{3 + \frac{2}{3} \cdot (-2)}{1 + \frac{2}{3}} = 1.$$

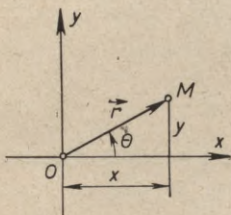
Smaguma centrs atrodas punktā  $C(0; 1)$ .

**11. §. Punktu rādiusvektori plaknē.** Par punkta  $M(x; y)$  (16. zīm.) rādiusvektoru sauč vektoru  $\vec{r} = \vec{OM}$ , kura sākuma punkts

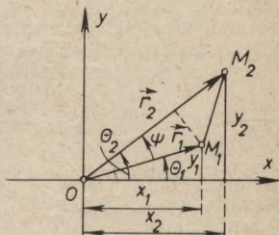


ir koordinātu sākums  $O$ , bet gala punkts atrodas punktā  $M$ . Rādiusvektora projekcijas uz koordinātu asīm ir vienādas ar dotā punkta koordinātēm:

$$x = r \cos \Theta, \quad y = r \sin \Theta, \quad (1.11)$$



16. zīm.



17. zīm.

kur  $r$  ir rādiusvektora  $\vec{r}$  modulis, bet  $\Theta$  — leņķis starp abscisu asi un rādiusvektoru. Saskaņā ar Pitagora teorēmu

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1.12)$$

Pieņemsim, ka doti divi punkti  $M_1(x_1; y_1)$  un  $M_2(x_2; y_2)$  (17. zīm.). Aprēķināsim leņķi  $\psi$  starp šo punktu rādiusvektoriem un viena rādiusvektora projekciju uz otra rādiusvektora virzienā novilktais ass. Apzīmēsim leņķus starp abscisu asi un rādiusvektoriem  $\vec{r}_1 = \vec{OM}_1$  un  $\vec{r}_2 = \vec{OM}_2$  attiecīgi ar  $\Theta_1$  un  $\Theta_2$ , bet leņķi starp abiem rādiusvektoriem ar  $\psi = \Theta_2 - \Theta_1$ . Pēc trigonometrijas formulām  $\cos \psi = \cos(\Theta_2 - \Theta_1) = \cos \Theta_2 \cos \Theta_1 + \sin \Theta_2 \sin \Theta_1$  un  $\sin \psi = \sin(\Theta_2 - \Theta_1) = \sin \Theta_2 \cos \Theta_1 - \cos \Theta_2 \sin \Theta_1$ . Ievērojot, ka

$$\cos \Theta_1 = \frac{x_1}{r_1}, \quad \cos \Theta_2 = \frac{x_2}{r_2}; \quad \sin \Theta_1 = \frac{y_1}{r_1} \quad \text{un} \quad \sin \Theta_2 = \frac{y_2}{r_2},$$

var rakstīt, ka

$$\left. \begin{aligned} \cos \psi &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{r_1 r_2}, \\ \sin \psi &= \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{r_1 r_2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

Saskaņā ar formulu (1.6)  $\text{pr}_{\vec{r}_2} \vec{r}_1 = r_1 \cos \psi = r_1 \cos(\Theta_2 - \Theta_1) = r_1 \cos \Theta_2 \cos \Theta_1 + r_1 \sin \Theta_2 \sin \Theta_1$ , bet  $r_1 \cos \Theta_1 = x_1$  un  $r_1 \sin \Theta_1 = y_1$ , tādēļ

$$\text{pr}_{\vec{r}_2} \vec{r}_1 = x_1 \cos \Theta_2 + y_1 \sin \Theta_2. \quad (1.14)$$

**12. §. Trijstūra laukums plaknē.** Ja plaknē dotus punktus  $M_1(x_1; y_1)$  un  $M_2(x_2; y_2)$  (17. zīm.) savieno ar taisnes nogriezni,

tad šo punktu rādiusvektori  $\vec{r}_1 = \vec{OM}_1$ ,  $\vec{r}_2 = \vec{OM}_2$  un vektors  $\vec{M_1M_2}$  veido trijstūri  $OM_1M_2$ , kura viena virsotne atrodas koordinātu sākumā  $O$ . Šāda trijstūra laukumu apzīmēsim ar  $S_{012}$  vai  $S_{021}$ . Indeksi 0,1 un 2 pie burtā  $S$  norāda, ka trijstūra virsotnes ir punktos  $O(0;0)$ ,  $M_1(x_1; y_1)$  un  $M_2(x_2; y_2)$ . Indeksu kārtība norāda, kādā secībā virsotnes seko cita citai, apejot trijstūra perimetru divos dažādos iespējamajos virzienos.

Saskaņā ar pazīstamo trigonometrijas formulu

$$S_{012} = \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin \psi, \quad (1.15)$$

kur  $r_1$  un  $r_2$  ir rādiusvektoru moduli, bet  $\psi$  — leņķis starp rādiusvektoriem  $\vec{r}_1$  un  $\vec{r}_2$ . Ievietojot formulā (1.15)  $\sin \psi$  no formulām (1.13), dabūjam

$$S_{012} = \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1). \quad (1.16)$$

Tā kā  $r_1$  un  $r_2$  ir pozitīvi skaitļi, tad  $S_{012}$  ir pozitīvs, ja, ejot pa trijstūra perimetru no  $M_1$  uz  $M_2$ , trijstūris  $OM_1M_2$  paliek pa kreisi, jo tad leņķis  $\psi$  ir pozitīvs un  $\sin \psi > 0$ . Pretējā gadījumā  $S_{012}$  ir negatīvs, bet  $S_{021}$  ir pozitīvs. Tādēļ, ja, ejot pa perimetru no  $M_1$  uz  $M_2$ , trijstūris  $OM_1M_2$  paliek pa labi, tad tā laukumu izsaka ar formulu

$$S_{021} = \frac{1}{2} (x_2 y_1 - x_1 y_2). \quad (1.16')$$

Aprēķinot trijstūra un daudzstūra laukumu, bieži lieto *determinanta jēdzienu*.

Skaitļi  $x_1 y_2 - x_2 y_1$ , kas atbilst četru skaitļu kvadrātiskai tabulai

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix},$$

sauc par *otrās kārtas determinantu*. To apzīmē ar simbolu

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Tātad

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Skaitļus  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $y_1$ ,  $y_2$  sauc par *determinanta elementiem*. Saka, ka elementi  $x_1$  un  $y_2$  atrodas uz determinanta *galvenās diagonāles*, bet  $x_2$  un  $y_1$  — uz *blakus diagonāles*. Otrās kārtas determinantu aprēķina, atņemot no galvenā diagonālē novietoto skaitļu reizinājuma blakus diagonālē novietoto skaitļu reizinājumu.



Piemēram,

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (4) \cdot (-3) = 22,$$

bet

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-3) - 2 \cdot 5 = -22.$$

Vispārīgi:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}.$$

Formulu (1.16) viegli atcerēties, lietojot otrās kārtas determinanta jēdzienu.

$$S_{012} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}. \quad (1.17)$$

Piemērs. Aprēķināt trijstūra laukumu, ja tā virsotnes ir punktos  $A(-2; 5)$ ,  $B(-4; 3)$  un  $O(0; 0)$ . Saskaņā ar formulu (1.17)

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [(-2) \cdot 3 - (-4) \cdot 5] = 7.$$

**13. §. Daudzstūra laukums.** Uzdevumu par daudzstūra laukuma aprēķināšanu var aizstāt ar tādu trijstūru laukumu aprēķināšanu, kam viena virsotne ir koordinātu sākumā. To panāk, savienojot ar taisnes nogriežņiem dotā daudzstūra virsotnes ar koordinātu sākumu. Tā dabū tik minētā veida trijstūru, cik virsotņu ir aprēķināmajam daudzstūrim.

Ja, piemēram, jāaprēķina daudzstūra laukums, kura virsotnes ir punktos  $A_1(x_1; y_1)$ ,  $A_2(x_2; y_2)$ ,  $A_3(x_3; y_3)$  un  $A_4(x_4; y_4)$  (18. zīm.), tad, savienojot šos punktus ar koordinātu sākumu, dabū četrus trijstūrus:  $OA_1A_2$ ,  $OA_2A_3$ ,  $OA_3A_4$  un  $OA_4A_1$ . Apzīmēsim šo trijstūru laukumus attiecīgi ar  $S_{012}$ ,  $S_{023}$ ,  $S_{043}$  un  $S_{014}$ , bet aprēķināmā četrstūra laukumu ar  $S_{1234}$ , tad no zīmējuma redzams, ka

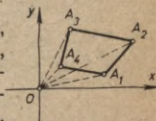
$$S_{1234} = S_{012} + S_{023} - S_{043} - S_{014}.$$

Saskaņā ar formulu (1.17)

$$S_{021} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \quad S_{023} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix},$$

$$S_{043} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix},$$

$$S_{014} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$



18. zīm.

un četrstūra laukums

$$S_{1234} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right\}. \quad (1.18)$$

Formulu (1.18) viegli atcerēties, ja ievēro, ka determinanta pirmā rindiņa ir iepriekšējā determinanta otrās rindiņas atkārtojums.

Formulas (1.18) speciāls gadījums ir jebkura veida trijstūra laukuma aprēķināšanas formula:

$$S_{123} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right\}. \quad (1.19)$$

Piemērs. Aprēķināt trijstūra laukumu, ja tā virsotnes ir punktos  $A(-5; 2)$ ,  $B(6; -1)$  un  $C(1; 4)$ .

Atrisinājums. Pēc formulas (1.19)

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} [(5-12) + (24+1) + (2+20)] = 20. \end{aligned}$$

Trijstūra  $ABC$  laukums ir 20 kv. vienības.

Piezīme. Šādā veidā aprēķinot trijstūra laukumu, rezultāts ir nulle, ja trijstūra visas virsotnes atrodas uz vienas taisnes, bet rezultāts ir negatīvs skaitlis, ja perimetru apiet negatīvā virzienā, t. i., tādā virzienā, kad trijstūris paliek pa labi. Aprēķināmais laukums tad ir iegūtā rezultāta absolūtā vērtība.

### Vingrinājumi

1. Trijstūra virsotnes ir punkti  $A(-3; 2)$ ,  $B(-1; 5)$ ,  $C(2; -3)$ . Uzzīmēt šo trijstūri Dekarta koordinātu sistēmā un aprēķināt tā malu garumus.

2. Atrast uz  $Ox$  ass punktu, kura attālumi no diviem dotajiem punktiem  $A(-1; 3)$  un  $B(2; 5)$  būtu vienādi.

3. Doti divi punkti  $A\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{3}\right)$  un  $B\left(-3; \frac{1}{2}\right)$ . Atrast tāda punkta koordinātes, kurš dala nogriezni  $AB$  attiecībā 3:2.

4. Sadalīt 4 vienlīdzīgās daļās nogriezni  $\overline{AB}$ , kura sākums ir punktā  $A(3; -2)$ , bet gals — punktā  $B(-4; 1)$ , nosakot dalītājpunktu koordinātes.

5. Aprēķināt trijstūra mediānu krustpunkta koordinātes, ja trijstūra virsotnes ir punktos  $A(0; 5)$ ,  $B(-2; 1)$  un  $C(5; 3)$ .

6. Aprēķināt punkta  $M(3; -2)$  rādiusvektora garumu.

7. Aprēķināt trijstūra  $A(-2; -3)$ ,  $B(10; -1)$ ,  $C(2; 7)$  laukumu.

8. Aprēķināt piecstūra  $A(2; -3)$ ,  $B(4; 0)$ ,  $C(2; 2)$ ,  $D(-4; 1)$   $E(-3; -2)$  laukumu.



## VIENĀDOJUMU ĢEOMETRISKĀ NOZĪME

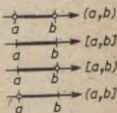
**14. §. Kopas jēdziens.** Vārdu «kopa» bieži sastopam ikdienas valodā. Var runāt, piemēram, par pirmā kursa studentu kopu, graudu kopu apcirknī, izplatījuma zvaigžņu kopu, daudzstūra malu kopu utt. Katru kopu veido tās elementi (studenti, graudi, zvaigznes utt.). Kopu, kurā ietilpst galīgs skaits elementu, sauc par galīgu. Matemātikā ļoti bieži jā sastopas ar kopām, kuru elementu skaits ir bezgalīgs. Tādas kopas ir, piemēram, visu natūrālo skaitļu, visu pārskaitļu, visu skaitļu 2 pozitīvo pakāpju, visu reālo skaitļu, visu taisnes punktu, visu caur dotu punktu novilkto taisņu kopas utt.

**15. §. Skaitļu intervāli.** Ja dots, ka  $a < b$ , kur  $a$  un  $b$  ir reāli skaitļi, tad par intervālu sauc visu to reālo skaitļu kopu, kuri atrodas starp  $a$  un  $b$ . Izšķir vaļējus un slēgtus intervālus.

Par *vaļēju intervālu*  $(a, b)$  sauc tādu skaitļu kopu, kurā ietilpst visi skaitļi  $x$ , kas apmierina nevienādības  $a < x < b$ . Šādu intervālu ģeometriski attēlo ass nogrieznis starp punktiem  $a$  un  $b$ , izslēdzot šos gala punktus (19. zīm.).

Par *slēgtu intervālu* (*segmentu*)  $[a, b]$  sauc tādu skaitļu kopu, kurā ietilpst visi skaitļi  $x$ , kas apmierina nevienādības  $a \leq x \leq b$ . Slēgtu intervālu (*segmentu*) ģeometriski attēlo kā ass nogriezni starp punktiem  $a$  un  $b$ , ieskaitot gala punktus.

Intervāls var būt arī vienpusīgi slēgts, t. i., *slēgts no apakšas*  $[a, b)$  vai *slēgts no augšas*  $(a, b]$ . Ja intervālā ietilpst visi reālie skaitļi, t. i., visa reālo skaitļu ass, tad to simboliski apzīmē ar  $(-\infty, +\infty)$  jeb  $-\infty < x < +\infty$ .



**16. §. Konstanti un mainīgi lielumi.** Novērojot dabas parādības vai tehnisko procesu norisi, redzam, ka dažādiem novērojamiem lielumiem atkarībā no apstākļiem ir dažāds raksturs. Tā, piemēram, degvielas svars automašīnas degvielas tvertnē braukšanas laikā gan straujāk, gan lēnāk samazinās, bet, ja motors nedarbojas, praktiski nemainās. Degvielas svars autocisternā neatkarīgi no mašīnas kustības praktiski nemainās, ar laiku mainās mašīnas nobraukto kilometru skaits utt.

Lai pakļautu matemātiskai analīzei dažādus fizikālus lielumus — garumu, laukumu, tilpumu, masu, blīvumu, laiku, temperatūru, enerģiju, pagriezienu leņķi utt., tad šos lielumus skaitīšanas operāciju vai mērīšanas ceļā izteic ar skaitļiem. Atkarībā no apstākļiem katrs lielums var pieņemt dažādas skaitliskas vērtības vai arī to izteic tikai viens skaitlis. Pirmajā gadījumā attiecīgo lielumu sauc par *mainīgu*, otrajā — par *konstantu*.

Konstantos lielumus mēdz apzīmēt ar alfabēta pirmajiem burtiem  $a, b, c, \dots$ , mainīgos — ar alfabēta pēdējiem burtiem  $x, y$ ,

$z, \dots$ . Mainīga lieluma gadījumā jānorāda arī tā *maiņas apgabals*, t. i., visu to skaitļu kopa, kuras ikviens skaitlis ir kāda no mainīgā lieluma vērtībām. Tā, piemēram, ja ir teikts, ka mainīgā lieluma  $x$  vērtība var būt jebkurš pozitīvs skaitlis, kas mazāks par 1, tad  $x$  maiņas apgabals ir valējs intervāls  $0 < x < 1$ .

Katru konstantu lielumu var uzskatīt kā tādu *mainīgā lieluma speciālu gadījumu*, kura maiņas apgabalā ietilpst tikai viens vienišķs skaitlis (punkts).

Konstantam lielumam var būt pilnīgi noteikta skaitliska vērtība neatkarīgi no dotā uzdevuma nosacījumiem, bet var būt arī tādi konstanti lielumi, kuriem ir noteikta skaitliska vērtība tikai noteiktā jautājumā. Pirmā veida konstantos lielumus sauc par *absolūti konstantiem*. Absolūti konstants lielums ir, piemēram, riņķa līnijas un tās diametra attiecība, kas visos gadījumos ir vienāda ar  $\pi \approx 3,1416$ .

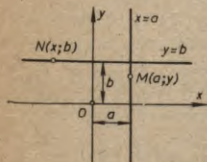
Konstantos lielumus, kas nav absolūti konstanti, bet kam katrā konkrētā piemērā var būt sava noteikta skaitliska vērtība, sauc par *parametriem*. Par parametru sauc, piemēram, skaitli  $c$  Boila—Mariota likuma formulā  $pv=c$ , kur  $p$  ir gāzes spiediens un  $v$  — tās tilpums pie nemainīgas temperatūras, jo katrai konkrētai gāzei un konkrētai temperatūrai ir sava  $c$  vērtība.

**17. §. Punktu ģeometriskā vieta.** Par punktu ģeometrisku vietu plaknē sauc tādu plaknes punktu kopu, kuru atrašanās vieta atbilst dotajiem nosacījumiem. Definējot punktu ģeometrisku vietu, jādot tie nosacījumi, kuri jāapmierina definējamās ģeometriskās vietas punktiem. Tā, piemēram, leņķa bisektrise ir to punktu ģeometriskā vieta, kuri atrodas vienādā attālumā no leņķa malām; riņķa līnija ir to punktu ģeometriskā vieta, kas atrodas vienādā attālumā  $r$  no dotā punkta  $C$ , kuru sauc par riņķa līnijas centru. Taisnleņķa koordinātu sistēmā ordinātu asij paralēla taisne (20. zīm.) ir to punktu ģeometriskā vieta, kuru abscisas ir konstants lielums  $x=a$ . Vienādojums

$$x=a \quad (2.1)$$

apmierina to un tikai to punktu koordinātes, kuru abscisa ir  $a$ , tādēļ  $x=a$  ir  $Oy$  asij paralēlas taisnes vienādojums. Analogi  $y=b$  ir  $Ox$  asij paralēlas taisnes vienādojums.

Katras punktu ģeometriskās vietas elementi ir punkti ar pilnīgi noteiktām koordinātēm. Viens analītiskās ģeometrijas pamatzdevums ir atrast algebrisku vienādojumu, kas saista savā starpā šīs koordinātes.



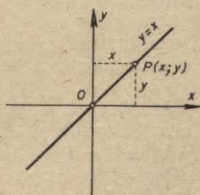
20. zīm.

Lai atbildētu uz jautājumu, vai katru punktu ģeometrisku vietu plaknē var izteikt ar vienādojumu un kā šāds vienādojums atrodams, noskaidrosim jēdzienu par līniju un tās vienādojumu.

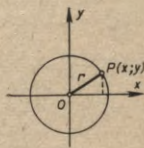
**18. §. Līnijas vienādojums.** Elementārajā ģeometrijā apskata tikai divas līnijas — taisni



un riņķa līniju. Analītiskajā ģeometrijā (plaknē) arī apskata šīs līnijas, bet definē tās kā punktu ģeometriskās vietas, kuru koordinātes apmierina noteiktus vienādojumus. Tā, piemēram, ģeometriskā vieta visiem tiem taisnleņķa koordinātu sistēmas pirmā un trešā kvadranta punktiem, kuri atrodas vienādā attālumā no



21. zīm.



22. zīm.

koordinātu asīm, ir pirmā-trešā kvadranta bisektrise (21. zīm.). Patvaļīgs punkts  $P(x; y)$  atrodas uz bisektrises tad un tikai tad, ja tā abscisa ir vienāda ar ordināti, t. i., ja tā koordinātes apmierina vienādojumu  $y=x$  jeb

$$x - y = 0. \quad (2.2)$$

Vienādojumu (2.2) sauc par taisnleņķa koordinātu sistēmas pirmā-trešā kvadranta bisektrises vienādojumu.

Ģeometriskā vieta punktiem, kuri atrodas vienādā attālumā  $r$  no taisnleņķa koordinātu sistēmas sākuma punkta  $O$ , ir riņķa līnija ar centru punktā  $O$  un rādiusu  $r$ . Apzīmēsim šādas riņķa līnijas patvaļīgu punktu ar  $P(x; y)$  (22. zīm.). Šis punkts atrodas uz riņķa līnijas tad un tikai tad, ja  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  (9. §.), t. i., ja tā koordinātes apmierina vienādojumu

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0. \quad (2.3)$$

Vienādojumu (2.3) sauc par riņķa līnijas *kanonisko* (visvienkāršāko) vienādojumu taisnleņķa koordinātu sistēmā.

Pieņemsim, ka ir dots vienādojums, kas saista savā starpā divus mainīgus lielumus  $x$  un  $y$ . Šāda vienādojuma pierakstīšanai vispārīgā gadījumā lieto simbolu

$$F(x; y) = 0, \quad (2.4)$$

kur burts  $F$  apzīmē visu to matemātisko darbību kopumu, kas šajā vienādojumā saista lielumus  $x$  un  $y$ .

Vienādojumam (2.4) var būt pēc patikas daudz atrisinājumu, t. i., tādu skaitļu pāru, kuri apmierina šo vienādojumu. Katrs tāds skaitļu pāris nosaka punktu plaknē. Visu šo punktu kopa plaknē ir punktu ģeometriskā vieta, ko sauc par līniju.



*Linija plaknē ir to punktu ģeometriskā vieta, kuru koordinātes apmierina vienādojumu  $F(x; y) = 0$ .*

Ja nosacījumus, kuri jāapmierina dotajai punktu ģeometriskajai vietai, nav iespējams izteikt ar vienu vienādojumu formā (2.4), tad apskatāmā punktu ģeometriskā vieta nav linija.

Vienādojumu (2.4) sauc par *linijas vienādojumu*. Linijas vienādojums ir tāds vienādojums, kuru apmierina to un tikai to punktu koordinātes, kas atrodas uz linijas. Analītiskajā ģeometrijā vārdus «linija» un «vienādojums» bieži nešķiro un lieto vienu otra vietā.

Lai pārliecinātos, piemēram, vai punkts  $M(-3; 4)$  atrodas uz linijas  $x^2 + y^2 = 25$  resp. vai linija iet caur šo punktu, līnijas vienādojumā jāievieto  $x = -3$  un  $y = 4$ . Tā kā  $(-3)^2 + 4^2 = 25$ , tad punkts  $M(-3; 4)$  atrodas uz linijas  $x^2 + y^2 = 25$ . Turpretim linija  $y = x^2 + 5$  neiet caur punktu  $N(1; 2)$ , jo  $2 \neq 1^2 + 5$ .

**19. §. Divu līniju krustpunkti.** Pieņemsim, ka dotas divas līnijas ar to vienādojumiem  $F_1(x; y) = 0$  un  $F_2(x; y) = 0$ ; jāatrod šo līniju krustpunktu koordinātes. Krustpunktu koordinātes apmierina abu doto līniju vienādojumus. Tādēļ, lai atrastu krustpunktu koordinātes, jāatrisina vienādojumu sistēma

$$\begin{cases} F_1(x; y) = 0, \\ F_2(x; y) = 0. \end{cases}$$

Dotajām līnijām ir tik krustpunktu, cik reālu atrisinājumu ir vienādojumu sistēmai. Ja sistēmai nav neviena atrisinājuma, tad dotajām līnijām nav neviena kopīga punkta, t. i., tās nekrustojas.

Algebrisko līniju krustpunktu skaits nevar pārsniegt reizinājumu  $pq$ , kur  $p$  ir vienas, bet  $q$  otras līnijas kārtā (20. §.).

Piemērs. Atrast riņķa līnijas  $x^2 + y^2 - 8 = 0$  un taisnes  $y - x = 0$  krustpunktus.

Atrisinājums. No vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} y = x, \\ 2x^2 - 8 = 0 \end{cases}$$

dabūjam, ka  $x_{1,2} = \pm 2$  un  $y_{1,2} = \pm 2$ . Tātad meklējamie krustpunkti ir  $P_1(2; 2)$  un  $P_2(-2; -2)$ .

**20. §. Līniju klasifikācija.** Atkarībā no vienādojuma (2.4), kas taisnleņķa koordinātu sistēmā saista patvaļīga līnijas punkta  $M$  koordinātes  $x$  un  $y$ , visas līnijas klasificē *algebriskās* un *transcendentās* līnijās.

Līniju sauc par *algebrisku*, ja tās vienādojuma  $F(x; y) = 0$  kreiso pusi  $F(x; y)$  var izteikt kā polinomu, t. i., kā tādu saskaitāmo summu, kuras ikviens loceklis ir monoms  $ax^m y^n$ . Seit  $a$  ir reāls skaitlis, bet  $m$  un  $n$  — naturāli skaitļi vai 0.

Bez algebriskām ir arī transcendentas līnijas.

Algebriskās līnijas klasificē pēc to kārtas. Par monoma  $ax^m y^n$

pakāpi sauc skaitli  $p=m+n$ , bet par polinoma pakāpi sauc vislielāko no saskaitāmo monomu pakāpēm. Ja līnijas vienādojumā (2.4)  $F(x; y)$  ir polinoms, kura pakāpe ir  $k$ , tad līniju sauc par  $k$ -tās kārtas līniju. Tā, piemēram, taisnes, kuru vienādojumi ir (2.1) un (2.2), ir pirmās kārtas līnijas; riņķa līnija, kuras vienādojums ir (2.3), ir otrās kārtas līnija; līnija, kuras vienādojums ir  $xy-c=0$ , arī ir otrās kārtas līnija; līnija, kuras vienādojums  $2x^2y-5x+4=0$ , ir trešās kārtas līnija utt. Analītiskās ģeometrijas kursā parasti apskata tikai pirmās un otrās kārtas līnijas.

Šīs nodaļas noslēgumā formulēsim analītiskās ģeometrijas (plaknē) pamatzdevumus.

1. *Dota līnija kā punktu ģeometriskā vieta. Sastādīt līnijas vienādojumu.*

2. *Dots līnijas vienādojums. Izpētīt līnijas formu un novietni koordinātu sistēmā.*

### Vingrinājumi

1. Atzīmēt taisnleņķa koordinātu sistēmā 5 punktus, kuru abscisa  $x=3$ . Uz kādas līnijas atrodas šie punkti?

2. Atzīmēt taisnleņķa koordinātu sistēmā 5 punktus, kuru ordināte  $y=-1$ . Uz kādas līnijas atrodas šie punkti?

3. Sastādīt vienādojumu tō punktu ģeometriskai vietai, kuru attālums no ordinātu ass ir divas reizes lielāks nekā no abscisu ass.

4. Sastādīt vienādojumu tō punktu ģeometriskai vietai, kuri atrodas vienādā attālumā no diviem dotajiem punktiem  $P_1(5; 6)$  un  $P_2(2; 3)$ .

5. No koordinātu sākuma pret katru taisni, kas iet caur punktu  $(0; 4)$ , novilkts perpendikuls. Kāds ir šo perpendikulu un taisņu krustpunktu ģeometriskās vietas vienādojums?

6. Noskaidrot, kādas punktu ģeometriskās vietas ir definētas ar vienādojumiem: a)  $xy=0$ ; b)  $x^2+y^2=0$ ; c)  $(x-1) \cdot (y+2)=0$ ; d)  $x^2-4=0$ ; e)  $y^2+4=0$ ; f)  $x^2+y^2-4=0$ .

7. Noskaidrot, kurš no dotajiem punktiem  $A(0; 0)$ ,  $B(1; 1)$ ,  $C(1; -1)$ ,  $D(-1; 1)$ ,  $E(1; 2)$  atrodas uz līnijas  $x-y^3=0$ .

8. Noteikt riņķa līnijas  $x^2+y^2=32$  krustpunktus ar taisni  $y=x$ .

### 3. NODAĻA

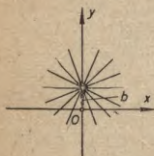
#### TAISNE PLAKNĒ

21. §. Taisnes vienādojums ar virziena koeficientu. Plaknē var būt bezgalīgi daudz taisņu. Ja gribam apskatīt vienu no tām, tad tā ar kaut kādiem *parametriem* jāizdala no pārējām, nosakot tās stāvokli koordinātu sistēmā. Taisnes stāvokli koordinātu sistēmā bieži nosaka ar šādu paņēmieni: dod taisnes un  $Oy$  ass (25. zīm.) krustpunktu  $B$  ordināti  $b$  un leņķi  $\alpha$ , ko taisne veido ar abscisu ass pozitīvo virzienu.

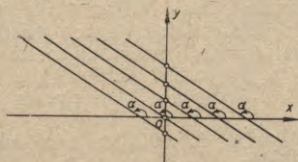
Parametru  $b$  sauc par taisnes *sākuma ordināti*, bet parametru  $\alpha$  — par *virziena leņķi*.



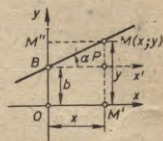
Sākuma ordināte  $b$  var būt jebkurš reāls skaitlis. Caur katru  $Oy$  ass punktu var novilkt ne tikai vienu, bet gan neierobežoti daudz taisņu, kurām ir kopīga sākuma ordināte  $b$  (23. zīm.). Izņēmuma gadījumā, ja taisne ir paralēla ordinātu asij, tās vir-



23. zīm.



24. zīm.



25. zīm.

ziena leņķis  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  un  $b$  — neeksistē. Visos citos gadījumos  $\alpha$  ir pozitīvs, bet mazāks par  $\pi$ , t. i.,  $0 \leq \alpha < \pi$ , jo to skaita pozitīvā virzienā no abscisu ass līdz taisnei. Taisnes, kurām vienādi virziena leņķi, bet dažādas sākuma ordinātes, ir savā starpā paralēlas (24. zīm.).

Ar parametriem  $b$  un  $\alpha$  var noteikt katras taisnes stāvokli koordinātu sistēmā, ja vien taisne nav paralēla ordinātu asij.

Pierādīsim pamatteorēmu par taisni. *Katras taisnes vienādojums taisnleņķa koordinātu sistēmā ir lineārs algebrisks vienādojums.*

Lai to pierādītu, pieņemsim, ka taisne nav paralēla ordinātu asij un ka dota tās sākuma ordināte  $b = OB$  (25. zīm.) un virziena leņķis  $\alpha$ , kas zīmējumā parādīts kā leņķis starp palīgasi  $Bx'$  un taisni. Apzīmēsim patvaļīga šīs taisnes punkta  $M$  koordinātes ar  $x$  un  $y$ , punkta  $M(x; y)$  projekciju uz palīgass  $Bx'$  ar  $P$ , uz  $Ox$  ass ar  $M'$  un uz  $Oy$  ass — ar  $M''$ .

No zīmējuma redzam, ka  $|PM| = |BP| \cdot \operatorname{tg} \alpha$ , bet  $\operatorname{pr}_{Oy} \vec{PM} = BM'' = y - b$  un  $\operatorname{pr}_{Ox} \vec{BP} = OM' = x$ , tādēļ

$$y - b = x \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

jeb

$$y = kx + b, \quad (3.1)$$

kur ērtības labā  $\operatorname{tg} \alpha$  apzīmēts ar  $k$ :

$$k = \operatorname{tg} \alpha. \quad (3.2)$$

Vienādojumu (3.1) pārvērš par identitāti to un tikai to punktu koordinātes, kuri atrodas uz taisnes, tādēļ vienādojums (3.1) ir taisnes vienādojums. Ja taisne paralēla ordinātu asij, tad, kā redzējam 17. §, tās vienādojums ir

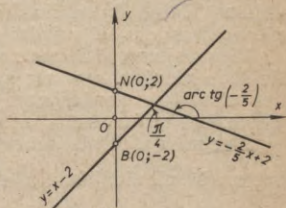
$$x = a. \quad (3.3)$$

Tā kā vienādojumi (3.1) un (3.3) ir lineāri algebriski vienādojumi, tad teorēmu esam pierādījuši.

Skaitli  $k = \operatorname{tg} \alpha$  sauc par *taisnes virziena koeficientu*, bet vienādojumu (3.1) sauc par *taisnes vienādojumu ar virziena koeficientu* jeb par *taisnes atklāto vienādojumu*.

Ja, piemēram, taisnes virziena leņķis  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  un sākuma ordināte

$b = -2$ , tad  $k = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$  un šīs taisnes vienādojums ir  $y = x - 2$  jeb  $x - y - 2 = 0$  (26. zīm.). Zīmējumā attēlota arī taisne  $y = -\frac{2}{5}x + 2$ , kuras



26. zīm.

virziena koeficients  $k = -\frac{2}{5}$  un sā-

kuma ordināte  $b = 2$ . Šī taisne krusto ordinātu asi punktā  $N(0; 2)$  un veido ar abscisu ass pozitīvo virzienu leņķi, kura tangenss ir  $-\frac{2}{5}$ .

Taisne, kuras sākuma ordināte  $b$  ir 0, iet caur koordinātu sākumu. Tādas taisnes vienādojums ir

$$y = kx. \quad (3.4)$$

Ja virziena leņķis  $\alpha = 0$ , tad arī  $k = 0$  un no vienādojuma (3.1) iegūstam, ka  $y = b$ . Tas ir abscisu asij paralēlas taisnes vienādojums. Ja arī  $b = 0$ , tad dabū *abscisu ass vienādojumu*  $y = 0$ . Analogi no vienādojuma (3.3) seko, ka *ordinātu ass vienādojums* ir  $x = 0$ .

**22. §. Taisnes vispārīgais vienādojums.** Pierādīsim iepriekš pierādītajai teorēmai apgriezto *teorēmu*.

*Katrs lineārs algebrisks vienādojums*

$$Ax + By + C = 0 \quad (3.5)$$

*taisnleņķa koordinātu sistēmā ir taisnes vienādojums.* Vienādojumā (3.5)  $A$ ,  $B$  un  $C$  ir patvaļīgi reāli skaitļi. Lai vienādojums (3.5) saturētu vismaz vienu no mainīgajiem lielumiem  $x$  un  $y$ , tad  $A$  un  $B$  vienlaicīgi nevar būt 0.

Lai pierādītu teorēmu, pieņemsim, ka  $B \neq 0$ , tad vienādojumu (3.5) var pārrakstīt šādā formā:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Apzīmēsim:  $-\frac{A}{B} = k$  un  $-\frac{C}{B} = b$ , tad  $y = kx + b$ , bet tas ir taisnes vienādojums.



Ja  $B=0$ , tad  $A \neq 0$ , jo  $A$  un  $B$  vienlaicīgi nevar būt 0. Ja  $B=0$ , tad  $Ax+C=0$  jeb  $x = -\frac{C}{A}$ . Apzīmējot  $-\frac{C}{A}=c$ , iegūstam vienādojumu  $x=c$ , kas ir ordinātu asij paralēlas taisnes vienādojums. Tātad katrs lineārs algebrisks vienādojums ir taisnes vienādojums, ko arī vajadzēja pierādīt.

Vienādojumu (3.5) sauc arī par *taisnes vispārīgo vienādojumu*. Ar šādu vienādojumu var izteikt jebkuru taisni plaknē. Lai taisnes vispārīgo vienādojumu pārveidotu formā ar virziena koeficientu, tad no vispārīgā vienādojuma atliek tikai izteikt atklāti  $y$ .

Piemērs. Dots taisnes vienādojums  $3x-4y+12=0$ . Izsakot no šī vienādojuma  $y$ , dabūjam  $y = \frac{3}{4}x + 3$ , kur taisnes virzienā koeficients  $k = \frac{3}{4}$  un sākuma ordināte  $b = 3$ .

Apskatīsim gadījumus, kad daži taisnes vispārīgā vienādojuma koeficienti ir nulles.

1. Ja  $C=0$ , tad  $Ax+By=0$ . Tā ir taisne, kas iet caur koordinātu sākumu, jo punkta  $(0;0)$  koordinātes apmierina tās vienādojumu.

2. Ja  $A=0$ , tad  $By+C=0$  un  $y = -\frac{C}{B}$ . Tā ir taisne, kas paralēla abscisu asij.

3. Ja  $B=0$ , tad  $Ax+C=0$  un  $x = -\frac{C}{A}$ . Tā ir ordinātu asij paralēla taisne.

4. Ja  $A=0$  un  $C=0$ , tad  $By=0$  un  $y=0$ . Taisne sakrīt ar abscisu asi.

5. Ja  $B=0$  un  $C=0$ , tad  $Ax=0$  un  $x=0$ . Taisne sakrīt ar ordinātu asi.

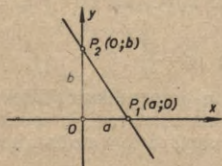
**23. §. Taisnes vienādojums ar asu nogriežņiem.** Ja taisnes vispārīgajā vienādojumā (3.5)  $A$ ,  $B$  un  $C$  nav nulles, tad vienādojumu var pārveidot šādi:

$$\begin{aligned} Ax + By &= -C, \\ \frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} &= 1, \\ \frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} &= 1. \end{aligned}$$

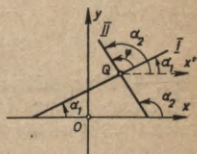
Apzīmējot  $-\frac{C}{A}=a$  un  $-\frac{C}{B}=b$ , taisnes vispārīgo vienādojumu esam pārveidojuši formā

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (3.6)$$

Šo vienādojumu apmierina punktu  $P_1(a; 0)$  un  $P_2(0; b)$  koordinātes, jo  $\frac{a}{a} + \frac{0}{b} = 1$  un  $\frac{0}{a} + \frac{b}{b} = 1$ . Skaitļi  $a$  un  $b$  vienādojumā (3.6) ir koordinātu asu nogriežņu  $OP_1$  un  $OP_2$  lielumi (27. zīm.). Vienādojumu (3.6) sauc par *taisnes vienādojumu ar asu nogriež-*



27. zīm.



28. zīm.

ņiem. Šādā formā taisnes vienādojumu var izteikt, ja taisne nav paralēla kādai koordinātu asij un tā neiet caur koordinātu sākumu. Taisnes vienādojums ar asu nogriežņiem ir ērts taisnes konstrukcijai, ja vien abu asu nogriežņi ir pietiekami lieli, t. i., ja punkti  $P_1$  un  $P_2$  atrodas pietiekami tālu no koordinātu sākuma.

Piemērs. Taisnes vienādojumu  $3x - 4y + 12 = 0$  pārveidojot formā ar asu nogriežņiem.

Atrisinājums. Ja  $x=0$ , tad  $4y=12$ , no kurienes  $y=3$ , un, ja  $y=0$ , tad  $3x=-12$  un  $x=-4$ . Tas nozīmē, ka taisne  $3x - 4y + 12 = 0$  krusto koordinātu asis punktos  $P_1(-4; 0)$  un  $P_2(0; 3)$ .

Dotās taisnes vienādojums ar asu nogriežņiem ir  $\frac{x}{-4} + \frac{y}{3} = 1$ .

**24. §. Leņķis starp divām taisnēm.** Pieņemsim, ka dotas divas taisnes ar vienādojumiem:

$$y = k_1x + b_1,$$

$$y = k_2x + b_2.$$

Par leņķi starp divām taisnēm sauc leņķi  $\varphi$ , pa kuru ap kopīgo krustpunktu  $Q$  pozitīvā virzienā jāpagriež pirmā taisne, lai tā sakristu ar otro taisni (28. zīm.). Saskaņā ar šo definīciju leņķa  $\varphi$  maiņas intervāls ir  $0 \leq \varphi < \pi$ . Ja taisnes paralēlas, tad  $\varphi = 0$ .

No zīmējuma redzams, ka  $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ , kur  $\alpha_1$  ir pirmās un  $\alpha_2$  otrās taisnes virziena leņķis. No trigonometrijas zināms, ka

$$\operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2}.$$

Tā kā  $\operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \operatorname{tg} \varphi$ ,  $\operatorname{tg} \alpha_2 = k_2$  un  $\operatorname{tg} \alpha_1 = k_1$ , tad

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}. \quad (3.7)$$



Formula (3.7) zaudē jēgu, ja  $1+k_1k_2=0$ . Tad, kā redzēsīm nākošajā paragrāfā, taisnes ir perpendikulāras, t. i.,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ .

Piemērs. Atrast leņķi starp taisnēm: 1)  $y=2x-3$  un 2)  $3x+y-2=0$ .

Atrisinājums. Šajā piemērā  $k_1=2$  un  $k_2=-3$ . Pēc formulas (3.7)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-3-2}{1-2 \cdot 3} = 1; \quad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

**25. §. Divu taisņu paralelītātes un perpendikularitātes nosacījumi.** Divas taisnes ir paralēlas tad un tikai tad, ja ir vienādi to virziena leņķi  $\alpha_1$  un  $\alpha_2$  respektīvi ir vienādi to virziena koeficienti

$$k_1 = k_2. \quad (3.8)$$

Divas taisnes ir perpendikulāras tad un tikai tad, ja to virziena leņķi atšķiras viens no otra par leņķi  $\frac{\pi}{2}$ , t. i.,  $\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$ , tādēļ divu taisņu perpendikularitātes nosacījumu izteic vienādība

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} + \alpha_1 \right) = -\operatorname{ctg} \alpha_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1}$$

jeb

$$k_2 = -\frac{1}{k_1},$$

no kurienes

$$k_1 k_2 = -1. \quad (3.9)$$

1. piemērs. Aprēķināt leņķi starp taisnēm: 1)  $2x-3y+1=0$  un 2)  $2x-3y+5=0$ .

Atrisinājums. Doto taisņu vienādojumi ar virziena koeficientu ir 1)  $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$  un 2)  $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$ , no kurienes  $k_1 = \frac{2}{3}$  un  $k_2 = \frac{2}{3}$ . Tā kā virziena koeficienti vienādi, tad taisnes ir paralēlas.

2. piemērs. Atrast leņķi starp taisnēm 1)  $\frac{x}{-4} + \frac{y}{3} = 1$  un 2)  $4x+3y=0$ .

Atrisinājums. Pirmās taisnes vienādojums dots ar asu nogriežņiem, otrās — vispārīgā formā. Izsakot no šiem vienādojumiem  $y$ , dabū, ka 1)  $y = \frac{3}{4}x + 3$  un 2)  $y = -\frac{4}{3}x$ . No šiem vienādojumiem redzams, ka taisņu virziena koeficienti ir  $k_1 = \frac{3}{4}$  un

$k_2 = -\frac{4}{3}$ . Tas nozīmē, ka dotās taisnes ir perpendikulāras, jo  $k_1 k_2 = -1$ .

26. §. Caur doto punktu vilktas taisnes vienādojums. Pieņemsim, ka dots punkts, caur kuru jānovelk taisne dotajā virzienā. Tas nozīmē, ka dotas punkta  $M_1$  koordinātes  $(x_1; y_1)$  un taisnes virziena koeficients  $k$ . Jāatrod šīs taisnes vienādojums.

Speciālā gadījumā, kad taisne paralēla ordinātu asij, taisnes vienādojums ir  $x=x_1$ . Ja taisne nav paralēla ordinātu asij, tad vienādojumā  $y=kx+b$  nezināms ir tikai skaitlis  $b$ . Tā kā dotais punkts  $M_1(x_1; y_1)$  atrodas uz taisnes, tad tā koordinātes apmierina vienādojumu  $y=kx+b$ , tādēļ  $y_1=kx_1+b$  jeb  $b=y_1-kx_1$ . Ievietojot atrasto  $b=y_1-kx_1$  vienādojumā  $y=kx+b$ , dabū  $y=kx+y_1-kx_1$  jeb

$$y-y_1=k(x-x_1). \quad (3.10)$$

Sis vienādojums ir lineārs algebrisks vienādojums ar diviem mainīgajiem  $x$  un  $y$ , kuru apmierina punkta  $M_1$  koordinātes, jo, ievietojot šajā vienādojumā  $x=x_1$  un  $y=y_1$ , dabū identitāti  $0=0$ . Tādēļ vienādojums (3.10) ir tādas taisnes vienādojums, kas vilkta caur doto punktu dotajā virzienā.

Ar vienādojumu (3.10) var izteikt jebkuru taisni, kas iet caur punktu  $M_1(x_1; y_1)$ , izņemot ordinātu asij paralēlu taisni  $x=x_1$ . Mainoties skaitlīm  $k$ , taisne griežas ap punktu  $M_1(x_1; y_1)$ , ienemot visdažādākos stāvokļus plaknē. Visu to taisņu kopu plaknē, kurām ir viens kopīgs punkts, sauc par *taisņu šķipsnu*. Kopīgo punktu sauc par *šķipsnas centru*. Saka, ka ar patvaļīgu  $k$  vienādojums (3.10) izteic taisņu šķipsnu, kuras centrs ir dotajā punktā  $M_1(x_1; y_1)$ . Tā, piemēram, vienādojums  $y-3=k(x-2)$  izteic taisņu šķipsnu, kuras centrs ir punktā  $(2; 3)$ , taisņu šķipsnas  $y+3=k(x-2)$  centrs ir punktā  $(2; -3)$  utt.

Piemērs. Atrast taisnes vienādojumu, kas iet caur punktu  $M_1(3; -2)$  un ir perpendikulāra taisnei  $y=\frac{3}{2}x+2$ .

Atrisinājums. Dotās taisnes  $y=\frac{3}{2}x+2$  virziena koeficients ir  $k_1=\frac{3}{2}$ . Meklējamās taisnes virziena koeficients saskaņā ar formulu (3.9) ir  $k=-\frac{2}{3}$ , un tās vienādojums saskaņā ar formulu (3.10) ir  $y+2=-\frac{2}{3}(x-3)$ ;  $3y+6=-2x+6$  jeb  $2x+3y=0$ .

27. §. Caur diviem dotajiem punktiem vilktas taisnes vienādojums. Pieņemsim, ka doti divi punkti  $M_1(x_1; y_1)$  un  $M_2(x_2; y_2)$ ; jāatrod vienādojums taisnei, kas novilkta caur šiem punktiem.

Ja taisne  $y-y_1=k(x-x_1)$ , kas iet caur punktu  $M_1(x_1; y_1)$ ,



iet arī caur punktu  $M_2(x_2; y_2)$ , tad punkta  $M_2$  koordinātēm jāapmierina tās vienādojums, tas nozīmē, ka  $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$  jeb

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (3.11)$$

$k$  ir taisnes virziena koeficients, kura iet caur diviem dotajiem punktiem  $M_1(x_1; y_1)$  un  $M_2(x_2; y_2)$ . Ievietojot atrasto  $k$  vienādojumā  $y - y_1 = k(x - x_1)$ , dabū meklējamo vienādojumu

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

jeb

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \quad (3.12)$$

Izpēmuma gadījumā, kad doto punktu abscisas ir vienādas, t. i., kad  $x_1 = x_2$ , meklējamā taisne ir paralēla ordinātu asij, un tās virziena koeficients nav aprēķināms ar formulu (3.11). Tādā gadījumā meklējamās taisnes vienādojums ir  $x = x_1$ .

Piemērs. Atrast vienādojumu taisnei, kura novilkta caur punktiem  $M_1(2; 3)$  un  $M_2(-2; 1)$ .

Atrisinājums. Saskaņā ar formulu (3.12) meklējamais taisnes vienādojums ir  $\frac{y-3}{1-3} = \frac{x-2}{-2-2}$  jeb  $x - 2y + 4 = 0$ .

**28. §. Divu taisņu krustpunkts.** Pieņemsim, ka dotas divas taisnes ar vienādojumiem vispārīgā formā:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Divām taisnēm, kas atrodas vienā plaknē, ir iespējami šādi savstarpēji stāvokļi: 1) tās krustojas, 2) tās ir paralēlas, 3) tās viena ar otru sakrīt.

Ja taisnes krustojas, tad tām ir viens kopīgs punkts, kura koordinātes apmierina abu taisņu vienādojumus. Tas nozīmē, ka krustpunkta koordinātes ir dotās vienādojumu sistēmas atrisinājums. Ja taisnes ir paralēlas, tad sistēmai nav atrisinājuma. Ja taisnes viena ar otru sakrīt, tad sistēmā ir tikai viens neatkarīgs vienādojums, t. i., šajā vienādojumu sistēmā viens vienādojums iegūstams no otra, pareizinot to ar kādu skaitli.

Atrisinājumu visos gadījumos izteic formulas

$$x = -\frac{C_1B_2 - C_2B_1}{A_1B_2 - A_2B_1} \quad \text{un} \quad y = -\frac{C_2A_1 - C_1A_2}{A_1B_2 - A_2B_1}.$$

jeb

$$x = \frac{D_1}{D}; \quad y = \frac{D_2}{D}, \quad (3.13)$$

kur

$$D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}.$$

Skaitli  $D$  sauc par *vienādojumu sistēmas determinantu* (12. §). Ja  $D \neq 0$ , tad vienādojumu sistēmai ir viens vienīgs atrisinājums un formulas (3.13) izteic doto taisņu krustpunkta koordinātes. Ja  $D = 0$ , bet  $D_1$  vai  $D_2$  ir no nulles atšķirīgi skaitļi, t. i.,  $\frac{A_1}{A_2} =$

$= \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ , tad sistēmai nav atrisinājuma, jo dotās taisnes ir paralēlas. Ja  $D = D_1 = D_2 = 0$ , t. i.,  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ , tad sistēmā ir tikai viens neatkarīgs vienādojums. Tas nozīmē, ka dotās taisnes sakrīt viena ar otru.

1. piemērs. Atrast taisņu  $2x - y - 3 = 0$  un  $4x + 3y - 11 = 0$  krustpunkta koordinātes.

Atrisinājums.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 10,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 11 & 3 \end{vmatrix} = 20 \quad \text{un} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 11 \end{vmatrix} = 10.$$

Saskaņā ar formulām (3.13):  $x = \frac{20}{10} = 2$ ;  $y = \frac{10}{10} = 1$ , t. i., taisnes krustojas punktā  $M(2; 1)$ .

2. piemērs. Atrast taisņu  $2x - y - 3 = 0$  un  $4x - 2y - 11 = 0$  krustpunkta koordinātes.

Atrisinājums.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{bet} \quad D_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 11 & -2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Tas nozīmē, ka taisnes ir paralēlas.

3. piemērs. Atrast taisņu  $2x - y - 3 = 0$  un  $4x - 2y - 6 = 0$  krustpunkta koordinātes. Šajā piemērā nav dotas divas taisnes, jo otro vienādojumu dabū, pareizinot pirmo vienādojumu ar 2.

**29. §.\* Taisnes normālvienādojums.** Lai noteiktu taisnes stāvokli koordinātu sistēmā, dažkārt ir izdevīgi lietot šādus parametrus: 1) taisnes attālumu  $p = |ON|$  no koordinātu sākuma  $O$  (29. zīm.) un 2) leņķi  $\varphi$  starp taisnei perpendikulāro vektoru  $\vec{ON}$  un abscisu asi.

Uz taisnes, kurai doti parametri  $p$  un  $\varphi$ , izvēlamies patvaļīgu punktu  $M(x; y)$ . Neatkarīgi no punkta  $M(x; y)$  stāvokļa uz taisnes tā rādiusvektora  $\vec{r}$  projekcija uz vektoru  $\vec{ON}$  ir  $p$ . Saskaņā ar formulu (1.14)  $\text{proj}_{\vec{ON}} \vec{r} = x \cos \varphi + y \sin \varphi$ . Ja punkts  $M(x; y)$  atrodas uz



taisnes, tad tā koordinātes apmierina vienādojumu  $p = x \cos \varphi + y \sin \varphi$  jeb

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0. \quad (3.14)$$

So vienādojumu sauc par taisnes *normālvienādojumu*. Tam ir divas raksturīgas pazīmes: 1) tā koeficientu kvadrātu summa ir 1, jo  $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ , un 2) tā brīvais loceklis ir negatīvs skaitlis. Ja kādā dotā lineārā algebriskā vienādojumā šīs abas pazīmes ir izpildītas, tad tāds vienādojums ir taisnes normālvienādojums. Tā kā katras taisnes vienādojumu var izteikt kā vispārīgā, tā normālveidā, tad, acīm redzot, vienādojums (3.14) atšķiras no vienādojuma (3.5) tikai ar noteiktu reizinātāju  $\lambda$ , kuru sauc par *normējošo faktoru* jeb *reizinātāju*.

Pareizinot taisnes vispārīgo vienādojumu  $Ax + By + C = 0$  ar kādu pagaidām nenoteiktu reizinātāju  $\lambda$ , dabū vienādojumu

$$\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0.$$

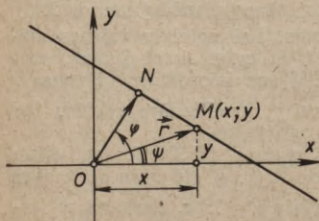
Šis vienādojums ir taisnes normālvienādojums, ja  $\lambda A = \cos \varphi$ ,  $\lambda B = \sin \varphi$  un  $\lambda C = -p$ , respektīvi, ja ir izpildīti nosacījumi: 1)  $(\lambda A)^2 + (\lambda B)^2 = 1$  un 2)  $\lambda C < 0$ . No pirmā nosacījuma izriet, ka  $\lambda^2(A^2 + B^2) = 1$  jeb

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (3.15)$$

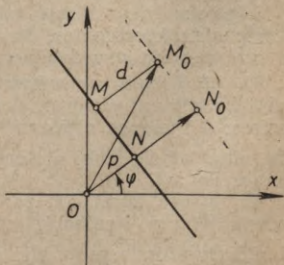
No otrā nosacījuma izriet, ka  $\lambda$  zīme jāizvēlas tā, lai tā būtu pretējā brīvā locekļa  $C$  zīmei taisnes vispārīgajā vienādojumā. Formula (3.15) izteic taisnes normējošo faktoru, ar kuru jāreizinā vispārīgā formā dots taisnes vienādojums, lai to pārveidotu normālveidā.

**Piemērs.** Pārveidot normālveidā taisnes vienādojumu

$$3x - 4y + 15 = 0.$$



29. zīm.



30. zīm.

Atrisinājums. Normējošais faktors

$$\lambda = -\frac{1}{\sqrt{9+16}} = -\frac{1}{5}.$$

Taisnes normālvienādojums  $-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 3 = 0$ , kur  $\cos \varphi = -\frac{3}{5}$ ,  $\sin \varphi = \frac{4}{5}$  un  $p = 3$ .

30. §.\* Attālums no punkta līdz taisnei. Pieņemsim, ka dota taisne  $x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0$  un punkts  $M_0(x_0; y_0)$  (30. zīm.). Jāatrod attālums  $d$  no punkta līdz taisnei.

Projicēsim punktu  $M_0$  uz dotajai taisnei perpendikulārā vektora  $\vec{ON}$  virzienā novilkto asi un apzīmēsim šo projekciju ar  $N_0$ . No zīmējuma redzams, ka rādiusvektora  $\vec{OM}_0$  projekcija uz vektora  $\vec{ON}$  ir  $ON_0 = ON + NN_0$ , no kurienes  $NN_0 = \text{pr}_{\vec{ON}} \vec{OM}_0 - ON = \text{pr}_{\vec{ON}} \vec{OM}_0 - p$ . Bet  $|NN_0| = |MM_0| = d$  un saskaņā ar formulu (1.14)  $\text{pr}_{\vec{ON}} \vec{OM}_0 = x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi$ , tādēļ

$$d = |NN_0| = |x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi - p|. \quad (3.16)$$

Ja taisne dota ar vienādojumu  $Ax + By + C = 0$ , tad attālumu no punkta  $M_0(x_0; y_0)$  līdz šai taisnei var aprēķināt pēc formulas

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|. \quad (3.17)$$

1. piemērs. Aprēķināt punkta  $M_0(1; -2)$  attālumu līdz taisnei

$$x + y - 1 = 0.$$

Atrisinājums. Saskaņā ar formulu (3.17)

$$d = \left| \frac{1 - 2 - 1}{\sqrt{2}} \right| = \left| -\frac{2}{\sqrt{2}} \right| = \sqrt{2}.$$

2. piemērs. Pierādīt, ka taisnes  $3x + 4y + 25 = 0$  un  $6x + 8y + 7 = 0$  ir paralēlas, un aprēķināt attālumu starp tām.

Atrisinājums. Pirmās taisnes virziena koeficients  $k_1 = -\frac{3}{4}$ , un otrās  $k_2 = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$ . Dotās taisnes ir paralēlas, jo  $k_1 = k_2$ . Izvēloties patvaļīgu  $x$ , piemēram,  $x = 0$ , un ievietojot to otrajā vienādojumā, dabūjam  $8y + 7 = 0$ , no kurienes  $y = -\frac{7}{8}$ . Tātad punkts  $M(0; -\frac{7}{8})$  atrodas uz otrās taisnes. Šī un jebkura



cita otrās taisnes punkta attālums no pirmās taisnes ir vienāds ar attālumu starp dotajām paralēlām taisnēm. Pirmās taisnes normālvienādojums ir  $-\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 5 = 0$ , un attālums starp taisnēm ir  $d = \left| -\frac{3}{5} \cdot 0 - \frac{4}{5} \left( -\frac{7}{8} \right) - 5 \right| = \left| -\frac{43}{10} \right| = 4,3$ .

### Vingrinājumi

1. Sastādīt vienādojumu taisnei, kuras sākuma ordināte ir 3 un virziena leņķis  $\frac{\pi}{3}$ .

2. Sastādīt vienādojumu taisnei, kuras virziena koeficients ir  $\frac{3}{2}$  un sākuma ordināte -4. Noskaidrot algebriski un parliecināties zīmējumā, vai punkti A (2; -1), B (4; 2), C (6; 4), D (-4; -10), E (-6; -12) atrodas uz šīs taisnes.

3. Uzzīmēt taisnes, kuru vienādojumi ir 1)  $2x + 3y - 6 = 0$ ; 2)  $2x - 3y + 8 = 0$ ; 3)  $3x + 4y + 10 = 0$ ; 4)  $5x - 3y - 12 = 0$ , un uzrakstīt šo taisņu vienādojumus ar asu nogriežņiem.

4. Iepriekšējā piemērā minētos taisņu vienādojumus pārveidot formā ar virziena koeficientu.

5. Uzzīmēt iepriekš minētās taisnes pēc tādiem diviem punktiem, kuru abscisas ir  $x_1 = 1$  un  $x_2 = 2$ .

6. Aprēķināt leņķi starp taisnēm, kuru vienādojumi ir  $y = 2x - 3$  un  $y = 3x + 5$ .

7. Atrast vienādojumu taisnei, kura iet caur punktu  $M_1 (-4; 3)$  un ir paralēla taisnei, kas dota ar vienādojumu  $y = 3x - 9$ . Uzzīmēt abas taisnes taisnleņķa koordinātu sistēmā.

8. Atrast vienādojumu taisnei, kura iet caur punktu  $M_1 (-4; 2)$  un ir perpendikulāra taisnei, kas dota ar vienādojumu  $5x + 6y - 13 = 0$ . Uzzīmēt abas taisnes taisnleņķa koordinātu sistēmā.

9. Aprēķināt virziena koeficientu taisnei, kura savieno punktus  $M_1 (1; 2)$  un  $M_2 (-2; -3)$ .

10. Atrast vienādojumu taisnei, kura iet caur punktu A (-1; 3) un ir paralēla taisnei, kas savieno punktus  $M_1 (2; 1)$  un  $M_2 (-2; -4)$ .

11. Atrast vienādojumu taisnei, kura iet caur punktu A  $\left( -2; \frac{3}{2} \right)$  un ir perpendikulāra taisnei, kas savieno punktus  $M_1 \left( 1; \frac{5}{2} \right)$  un  $M_2 (2; -3)$ .

12. Pierādīt, ka trīs punkti A  $\left( 2; \frac{3}{4} \right)$ , B  $\left( \frac{3}{2}; -1 \right)$  un C  $\left( \frac{9}{2}; \frac{19}{2} \right)$  atrodas uz vienas taisnes.

13. Aprēķināt trijstūra virsotņu koordinātes, ja tā malu vienādojumi ir  $x - 4y + 7 = 0$ ,  $x - 2y + 5 = 0$  un  $x - y + 1 = 0$ .

14. Atrast vienādojumu taisnei, kura iet caur taisņu  $3x + 5y + 21 = 0$  un  $4x + 3y + 17 = 0$  krustpunktu un ir perpendikulāra pret taisni  $2x + 7y - 4 = 0$ .

15.\* Noskaidrot, kurš no taisņu vienādojumiem 1)  $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{2}{3} = 0$ , 2)  $\frac{7}{25}x - \frac{24}{25}y - \frac{13}{25} = 0$ , 3)  $15x + 8y - \frac{136}{15} = 0$  ir taisnes normālvienādojums un cik tālu atrodas šīs taisnes no koordinātu sākuma.

16.\* Uzrakstīt normālvienādojumus 3. uzdevumā dotajām taisnēm.

17.\* Aprēķināt punktu  $M_1 (3; 1)$  un  $M_2 (2; -3)$  attālumus līdz taisnei  $5x + 12y - 23 = 0$ .

## OTRĀS KĀRTAS LINIJAS

**31. §. Otrās kārtas līnijas definīcija.** Līniju, kuras vienādojums taisnleņķa koordinātu sistēmā vispārīgajā gadījumā ir otrās pakāpes algebrisks vienādojums

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad (4.1)$$

sauc par *otrās kārtas līniju*. Šeit koeficienti  $A, B, C, D, E$  un  $F$  ir jebkuri reāli skaitļi.  $A, B$  un  $C$ , protams, reizē nav 0, jo tad vienādojums ir lineārs. Bet lineārs algebrisks vienādojums  $2Dx + 2Ey + F = 0$  ir pirmās kārtas līnijas, t. i., taisnes vienādojums.

Koeficientus pie  $xy, x$  un  $y$  raksta formā  $2B, 2D$  un  $2E$  turpmāku ērtību labā.

Otrās kārtas līnijas ir riņķa līnija, elipse, hiperbola un parabola.

**32. §. Riņķa līnija.** Par riņķa līniju sauc to punktu ģeometriski vietu, kuri atrodas vienādā attālumā  $r$  no kāda dota plaknes punkta  $C$ . Punktu  $C$  sauc par riņķa līnijas centru, bet attālumu  $r$  par riņķa līnijas rādiusu.

Lai pierādītu, ka riņķa līnija ir otrās kārtas līnija, tad jādabū riņķa līnijas vienādojums un jāpārliedz, ka tas ir otrās pakāpes algebrisks vienādojums.

Apzīmēsim centra  $C$  (31. zīm.) koordinātes ar  $x_0$  un  $y_0$ , t. i.,  $C(x_0; y_0)$ , un patvaļīga riņķa līnijas punkta  $M$  koordinātes ar  $x$  un  $y$ , t. i.,  $M(x; y)$ . Tad riņķa līnijas rādiuss  $r = |CM|$ , bet pēc formulas (1.8) attālums  $|CM| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ , no kurienes

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2. \quad (4.2)$$

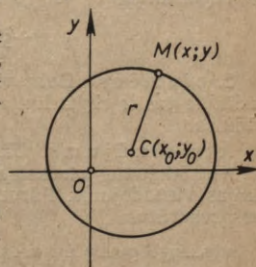
Šo vienādojumu apmierina to un tikai to punktu koordinātes, kuri atrodas uz riņķa līnijas. Tādēļ vienādojums (4.2) ir riņķa līnijas vienādojums.

Liekot vienādojumā (4.2), kuru sauc par riņķa līnijas *normālviēnādojumu*,  $x_0 = y_0 = 0$ , dabū tādas riņķa līnijas vienādojumu, kuras centrs atrodas koordinātu sākumā, t. i.,

$$x^2 + y^2 = r^2. \quad (4.3)$$

Vienādojumu (4.3) sauc par riņķa līnijas *kanonisko* vienādojumu (sk. 18. §).

Atverot vienādojumā (4.2) iekavas



31. zīm.



un pārnēsot visus locekļus vienā pusē, dabū riņķa līnijas *vispārīgo* vienādojumu

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + (x_0^2 + y_0^2 - r^2) = 0$$

jeb, apzīmējot  $-x_0 = D$ ,  $-y_0 = E$  un  $x_0^2 + y_0^2 - r^2 = F$ ,

$$x^2 + y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad (4.4)$$

kas ir vienādojuma (4.1) speciāls gadījums.

Salīdzinot vienādojumus (4.4) un (4.1), redzam, ka riņķa līnijas vienādojumā koeficienti pie  $x^2$  un  $y^2$  ir vienādi un iztrūkst reizinājuma  $xy$ . Tas norāda, ka vienādojums (4.1) var definēt riņķa līniju tikai tad, ja  $A = C$  un  $B = 0$ .

Ievērosim, ka katru riņķa līniju var definēt ar otrās pakāpes algebrisku vienādojumu (4.4), bet ne katrs vienādojums formā (4.4) definē reālu riņķa līniju. Lai par to pārliecinātos, pietiek pārveidot vienādojumu (4.4) formā (4.2). To panāk, veidojot pilnus kvadrātus

$$x^2 + 2Dx + D^2 - D^2 + y^2 + 2Ey + E^2 - E^2 + F = 0 \text{ jeb} \\ (x + D)^2 + (y + E)^2 = D^2 + E^2 - F. \quad (4.4a)$$

Ja  $D^2 + E^2 - F > 0$ , tad vienādojums (4.4a) ir riņķa līnijas normālvienādojums. Riņķa līnijas rādiuss ir  $r = \sqrt{D^2 + E^2 - F}$ , un centrs atrodas punktā  $C(-D; -E)$ . Ja  $D^2 + E^2 - F = 0$ , tad vienādojumu (4.4a) apmierina tikai viena punkta  $C(-D; -E)$  koordinātes, bet, ja  $D^2 + E^2 - F < 0$ , tad šis vienādojums reālu līniju nedefinē, jo kvadrātu summa nevar būt negatīvs lielums. Tad saka, ka vienādojums (4.4) ir imagināras riņķa līnijas vienādojums.

1. piemērs. Dots riņķa līnijas centrs  $C(-2; 1)$  un rādiuss  $r = 5$ . Uzrakstīt tās vienādojumu.

Atrisinājums. Saskaņā ar formulu (4.2) riņķa līnijas normālvienādojums ir  $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 5^2$ . Atverot iekavaš, dabū šis riņķa līnijas vispārīgo vienādojumu

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0.$$

2. piemērs. Dots vienādojums  $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$ . Pierādīt, ka tas ir riņķa līnijas vienādojums, un atrast tās centru un rādiusu.

Atrisinājums. Tā kā koeficienti pie  $x^2$  un  $y^2$  ir vienādi un vienādojumā iztrūkst  $xy$ , tad šis vienādojums var būt riņķa līnijas vienādojums. Pārveidosim doto vienādojumu, veidojot pilnus kvadrātus:

$$(x^2 - 6x + 9) - 9 + (y^2 + 4y + 4) - 4 - 3 = 0, \text{ no kurienes} \\ (x-3)^2 + (y+2)^2 - 16 = 0 \text{ jeb } (x-3)^2 + (y+2)^2 = 16.$$

Pārveidotais vienādojums ir riņķa līnijas normālvienādojums ar centru punktā  $C(3; -2)$  un rādiusu  $r=4$ .

3. piemērs. Vienādojums  $x^2+y^2-6x+4y+13=0$  ģeometriski izsaka punktu  $C(3; -2)$ , jo, pārveidojot to pēc 2. piemēra parauga, dabūjam  $(x-3)^2+(y+2)^2=0$ .

4. piemērs. Vienādojums  $x^2+y^2-6x+4y+14=0$  ir imagināras riņķa līnijas vienādojums, jo, pārveidojot to pēc 2. piemēra parauga, dabūjam  $(x-3)^2+(y+2)^2=-1$ .

33. §. **Elipse.** Par elipsi sauc to punktu ģeometriskā vietu, kuru attālumu summa līdz diviem dotiem punktiem ir konstants lielums.

Apzīmēsim dotos punktus, kurus sauc par elipses **fokusiem**, ar  $F$  un  $F_1$  (32. zīm.) un attālumu starp tiem ar  $2c$ . Ar  $2a$  apzīmēsim to pozitīvo konstanto lielumu, ar kuru ir vienāda attālumu summa no patvaļīga elipses punkta  $M(x; y)$  līdz fokusiem. Saprota, ka  $2a \geq 2c$ . Ja  $2a=2c$ , definētā punktu ģeometriskā vieta ir taisnes nogrieznis  $FF_1$ . Izslēdzot šo gadījumu, pieņemsim, ka  $a > c$ .

Saskaņā ar definīciju  $r_1+r_2=2a$ , kur  $r_1=|F_1M|$  un  $r_2=|FM|$ . Ja  $c=0$ , tad punkti  $F$  un  $F_1$  sakrīt un  $r_1=r_2=a$ . Tādā gadījumā elipse pārvēršas par riņķa līniju ar rādiusu  $a$ , kas norāda, ka riņķa līnija ir elipses speciāls gadījums.

Izvēlēsimies koordinātu sistēmu tā, lai punkti  $F$  un  $F_1$  atrastos uz  $Ox$  ass un koordinātu sākums dalītu attālumu starp fokusiem uz pusēm, tad fokusu koordinātes ir  $F(c; 0)$  un  $F_1(-c; 0)$ . Attālumi  $|FM|$  un  $|F_1M|$  saskaņā ar formulu (1.8) ir

$|FM| = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}$ ,  $|F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}$ , un to summa saskaņā ar definīciju ir

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

So vienādojumu apmierina to un tikai to punktu koordinātes, kuri atrodas uz elipses. Tādēļ tas ir elipses vienādojums. Vienādojumu vienkāršosim, to pārrakstot:

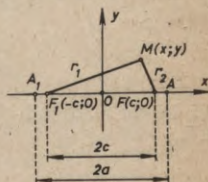
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Kāpinot abas puses kvadrātā un vienkāršojot, iegūstam

$$a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

jeb

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x.$$



32. zīm.



Kāpinot vēlreiz abas puses kvadrātā un vienkāršojot, dabūjam

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2} x^2 + y^2 = a^2 - c^2.$$

Tālāk izdalīsim vienādojuma abas puses ar  $a^2 - c^2$ , jo  $a^2 - c^2 \neq 0$ , tad

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Tā kā  $2a > 2c$ , tad  $a^2 > c^2$  un  $a^2 - c^2 > 0$ . Apzīmēsim  $a^2 - c^2$  ar  $b^2$ , t. i.,

$$a^2 - c^2 = b^2. \quad (4.5)$$

Ievietojot šo apzīmējumu pēdējā vienādojumā, dabūjam

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.6)$$

Var pierādīt, ka katra punkta koordinātes, kas apmierina elipses vienādojumu, apmierina arī vienādojumu (4.6). Tas nozīmē, ka vienādojums (4.6) arī ir elipses vienādojums. Šādā formā uzrakstīti to sauc par elipses *kanonisko* vienādojumu.

Elipse ir otrās kārtas līnija, jo vienādojums (4.6), kuru var pārrakstīt formā

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0, \quad (4.6')$$

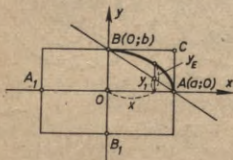
ir otrās kārtas līnijas vispārīgā vienādojuma (4.1) speciāls gadījums. Elipses vienādojumam šāda forma ir tikai tad, ja fokusi ir simetriski pret koordinātu sākumu un tie atrodas uz koordinātu sistēmas ass.

**34. §. Elipses formas pētišana pēc tās kanoniskā vienādojuma.** Elipses kanoniskajā vienādojumā (4.6) mainīgie lielumi  $x$  un  $y$  saistīti tikai pāra pakāpēs. Tādēļ, ja uz elipses atrodas punkts  $M_1(x; y)$ , uz tās atrodas arī punkti  $M_2(-x; y)$ ,  $M_3(-x; -y)$  un  $M_4(x; -y)$ . Tas nozīmē, ka elipse ir *simetriska* pret koordinātu asīm, jo katram elipses punktam  $M$  var uzrādīt tādu atbilstošu elipses punktu  $M'$ , lai taisnes nogrieznis  $MM'$  būtu perpendikulārs pret  $Ox$  (vai  $Oy$ ) asi, krustotu šo asi un krustpunkts ar  $Ox$  (vai  $Oy$ ) asi būtu taisnes nogriežņa  $MM'$  viduspunkts. Tas nozīmē, ka elipse ir simetriska arī pret koordinātu sākumu  $O$ , jo katram elipses punktam  $M$  var uzrādīt tādu atbilstošu elipses punktu  $M''$ , lai taisnes nogrieznis  $MM''$  ietu caur koordinātu sākumu un koordinātu sākums būtu šī nogriežņa viduspunkts.

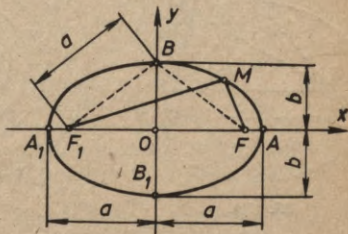
Šo īpašību dēļ  $Ox$  un  $Oy$  asis sauc par elipses *simetrijas asīm* vai vienkārši par elipses asīm, bet asu krustpunktu  $O$  — par *elipses centru*.

Tā kā pozitīvu lielumu summā neviens saskaitāmais nevar

būt lielāks par summu, tad no vienādojuma (4.6) seko, ka  $\frac{x^2}{a^2} \leq 1$  un  $\frac{y^2}{b^2} \leq 1$  jeb  $-a \leq x \leq +a$  un  $-b \leq y \leq +b$ . Šīs nevienādības rāda, ka visi elipses punkti ieslēgti taisnstūrī, kura malu vienādojumi ir  $x = -a$ ,  $x = +a$ ,  $y = -b$ ,  $y = +b$  (33. zīm.).



33. zīm.



34. zīm.

Pārrakstīsim vienādojumu (4.6) formā

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (4.6'')$$

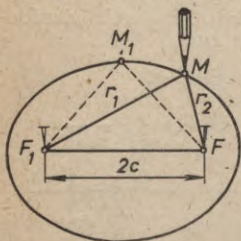
Ievērojot simetriju, pietiek, ja aplūkojam elipses formu pirmajā kvadrantā, kur visu punktu abscisas un ordinātes ir pozitīvas,  $x \geq 0$  un  $y \geq 0$ , t. i., vienādojumā (4.6'') jāizvēlas «+» zīme. Ja vienādojumā  $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$  liek  $x=0$ , tad  $y=b$ , bet, ja  $x=a$ , tad  $y=0$ . Mainot  $x$  intervālā  $0 \leq x \leq a$ ,  $y$  maiņas intervāls ir  $0 \leq y \leq b$ .

Punkts  $A(a; 0)$ , kurā elipse krusto  $Ox$  asi, un tam simetriskais punkts  $A_1(-a; 0)$  ir vistālāk no ordinātu ass novietotie elipses punkti. Analogi  $B(0; b)$ , kurā elipse krusto  $Oy$  asi, un  $B_1(0; -b)$  ir vistālāk no abscisu ass novietotie elipses punkti. Punktus  $A, A_1, B, B_1$  sauc par *elipses virsotnēm*. Lielumu  $2a = |A_1A|$  sauc par elipses *lielo asi*, bet  $2b = |B_1B|$  — par *mazo asi*; lielumus  $a$  un  $b$  sauc attiecīgi par *lielo* un *mazo pusasi*.

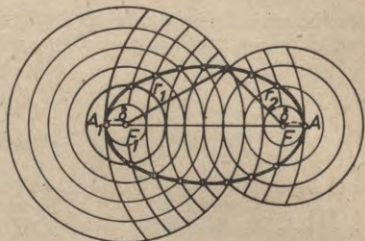
Saskaņā ar formulu (3.6) vienādojums taisnei, kas iet caur elipses virsotnēm  $A$  un  $B$ , ir  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  jeb  $y = \frac{b}{a}(a-x)$ . Apzīmējot ar  $y_e$  elipses ordinātes, bet ar  $y_t$  tai pašai abscisai  $x$  atbilstošās taisnes ordinātes, salīdzināsim šo ordinātu lielumus  $y_e = \frac{b}{a} \sqrt{(a+x)(a-x)}$  un  $y_t = \frac{b}{a} \sqrt{(a-x)(a-x)}$ . Salīdzinājums rāda, ka  $y_e > y_t$  pie visiem  $x$  intervālā  $0 < x < a$ . Tas nozīmē, ka visi elipses punkti šajā intervālā atrodas tālāk no abscisu ass nekā



taisnes punkti un pirmā kvadrantā elipsei var būt 33. zīm. attēlotā loka  $BA$  forma. Saskaņā ar simetriju visu elipsi dabūsim, atspoguļojot loku  $BA$  pret koordinātu asīm. Elipsei ir izliekta ovāla forma (34. zīm.).



35. zīm.



36. zīm.

Aprakstīsim dažus vienkāršus paņēmienus, kā uzzīmēt elipsi. Tā, piemēram, var sasiet  $2a+2c$  vienības garu neelastīgu diegu gredzenā un novietot to zīmējuma plaknē tā, lai izraudzītie fokusi  $F$  un  $F_1$  atrastos gredzena iekšpusē (35. zīm.), iedurt punktus  $F$  un  $F_1$  adatas un ar zīmuļa smaili punktā  $M$  nostiept diegu, lai tas zīmējuma plaknē izveidotu trijstūri  $FMF_1$ . Zīmuļa smaile, slīdēdama gar nostiepto diegu, rakstīs attēlojamās elipses punktus.

Viens no paņēmieniem, kā ar cirkuļa palīdzību uzzīmēt pēc patikas daudz elipses punktu, parādīts 36. zīm. Uz taisnes nogriežņa  $A_1A$ , kura garums  $2a$ , vienādā attālumā  $\delta=a-c$  no nogriežņa galiem atzīmēti punkti  $F$  un  $F_1$ . Novelkot ap punktu  $F$  riņķa līniju ar rādiusu  $r_2=2a-r_1$ , bet ap punktu  $F_1$  ar patvaļīgu rādiusu  $r_1<2a$  riņķa līniju, šīs riņķa līnijas krustosies divos punktos. Atzīmētie punkti atrodas uz elipses, kuras lielā ass ir  $2a$  un fokusu attālums  $|FF_1|=2c$ , jo saskaņā ar konstrukciju  $a>c$  un  $r_1+r_2=2a$ .

**35. §. Elipses ekscentricitāte.** Salīdzinot elipses kanonisko vienādojumu (4.6) ar riņķa līnijas kanonisko vienādojumu  $x^2+y^2=a^2$ , redzam, ka elipse pārvēršas par riņķa līniju, ja tās pusasis  $a$  un  $b$  ir vienādas.

Salīdzināsim vienādojumu (4.6) ar vienādojumu

$$x^2+y^2=1. \quad (4.7)$$

Sis vienādojums ir tādas riņķa līnijas vienādojums, kuras centrs atrodas koordinātu sākumā un rādiuss ir 1. Ja punkts  $M(x;y)$  atrodas uz riņķa līnijas, t. i., ja tā koordinātes apmierina vienādojumu (4.7), tad punkta  $P(ax;by)$  koordinātes apmierina vienādojumu (4.6). Tas nozīmē, ka elipsi (4.6) dabū no riņķa līnijas vienādojuma (4.7), ja visu tās punktu abscisas  $x$  atvieto ar  $ax$

un ordinātes  $y$  — ar  $by$ . Tātad elipse ir līnija, kuru var dabūt no riņķa līnijas, to vienmērīgi deformējot (izstiepjot vai saspiežot) pret  $Ox$  un  $Oy$  asīm.

Ja  $a=b$ , tad elipses fokusu attālums no centra  $c=\sqrt{a^2-b^2}$  kļūst vienāds ar nulli. Ja  $a \neq b$ , tad arī  $c \neq 0$  un šo lielumu var uzskatīt kā mēru tam, par cik elipse atšķiras no riņķa līnijas. Lielumu  $c$  sauc par elipses *lineāro ekscentricitāti*. Jāņem vērā, ka elipses formu nevar ietekmēt vienīgi skaitlis  $c$ , bet gan tā attiecība pret vienu no elipses pusasīm, tādēļ par elipses *skaitlisko ekscentricitāti* jeb vienkārši par *ekscentricitāti* sauc skaitli

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}. \quad (4.8)$$

No šīs formulas redzams, ka elipses ekscentricitāte  $\varepsilon$  visos gadījumos ir skaitlis, kas mazāks par 1. Riņķa līnijas ekscentricitāte ir 0.

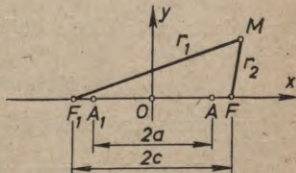
Katras riņķa līnijas projekcija uz plaknes, kura ar riņķa līnijas plakni veido leņķi  $\alpha$ , ir elipse, ja  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Tādēļ elipse ir līnija, pa kuru plakne šķel, piemēram, riņķa cilindru, ja vien šķēlējplakne nav perpendikulāra vai paralēla cilindra asiņ. Pa elipsēm, kuru vienā fokusā atrodas Saule, kustas visas planētas. Mehānikā svarīga loma ir inerces elipsei, izlidzināšanas rēķinos — kļūdu elipsei utt.

**Piemērs.** Dota elipse  $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$ . Noteikt tās pusasīs, ekscentricitāti un fokusa koordinātes.

**Atrisinājums.** Izdalot doto vienādojumu ar 225, to pārveidojam formā  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ . No tā seko, ka lielā pusass  $a=5$ , mazā pusass  $b=3$ , fokusu attālums no centra  $c=\sqrt{25-9}=4$ , ekscentricitāte  $\varepsilon = \frac{4}{5} = 0,8$  un fokusu koordinātes  $F(4; 0)$ ,  $F_1(-4; 0)$ .

**36. §. Hiperbola.** Par hiperbolu sauc to punktu ģeometrisku vietu, kuru attālumu starpība līdz diviem dotajiem punktiem pēc absolūtās vērtības ir konstants lielums.

Dotos punktus, kurus sauc par hiperbolas fokusi, apzīmēsim ar  $F$  un  $F_1$  (37. zīm.) un attālumu starp tiem ar  $2c$ . Ar  $2a$  apzīmēsim to pozitīvo konstanto lielumu, ar kuru ir vienāda attālumu starpība (pēc absolūtās vērtības) no patvaļīga hiperbolas punkta  $M(x; y)$  līdz fokusi. Saprota, ka  $2a \leq 2c$ . Ja  $2a = 2c$ , tad definētā punktu ģeometriskā vieta ir caur punktiem  $F$  un  $F_1$



37. zīm.



novilktās taisnes punktu kopa, kuri atrodas ārpus ass nogriežņa  $FF_1$ . Izslēdzot šo gadījumu, pieņemsim, ka  $a < c$ .

Saskaņā ar definīciju  $|r_1 - r_2| = 2a$  jeb  $r_1 - r_2 = \pm 2a$ , kur  $r_1 = |F_1M|$  un  $r_2 = |FM|$ . No definīcijas izriet, ka hiperbolai ir divi atsevišķi zari: uz viena zara  $r_1 > r_2$ , bet uz otra  $r_1 < r_2$ .

Izvēlēsimies koordinātu sistēmu tā, lai  $F$  un  $F_1$  atrastos uz  $Ox$  ass un koordinātu sākums dalītu attālumu starp fokusi uz pusēm. Tad fokusu koordinātes ir  $F(c; 0)$  un  $F_1(-c; 0)$  un attālum  $|FM|$  un  $|F_1M|$  saskaņā ar formulu (1.5) ir  $|FM| = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}$  un  $|F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}$ . Saskaņā ar definīciju

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

So vienādojumu apmierina to un tikai to punktu koordinātes, kuri atrodas uz hiperbolas. Tādēļ tas ir hiperbolas vienādojums. Vienkāršosim šo vienādojumu, iepriekš to pārrakstot sekojoši:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Kāpinot abas puses kvadrātā un vienkāršojot, iegūstam

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Vēlreiz kāpinot abas vienādojuma puses kvadrātā un vienkāršojot, dabūjam

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2} x^2 + y^2 = a^2 - c^2.$$

Sis vienādojums ir tāds pats kā elipses gadījumā, tikai ar to atšķirību, ka tagad  $a < c$ , tātad  $a^2 - c^2 < 0$ . Apzīmējot  $a^2 - c^2 = -b^2$  jeb

$$c^2 - a^2 = b^2 \quad (4.9)$$

un izdalot iegūtā vienādojuma abas puses ar  $a^2 - c^2 = -b^2$ , dabūjam hiperbolas *kanonisko vienādojumu*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.10)$$

Hiperbola ir otrās kārtas līnija, jo vienādojums (4.10), kuru var pārrakstīt formā

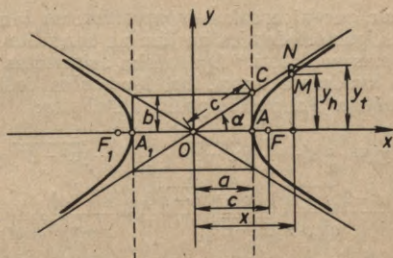
$$b^2 x^2 - a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0, \quad (4.10')$$

ir otrās kārtas līnijas vispārīgā vienādojuma (4.1) speciāls gadījums.

**37. §. Hiperbolas formas pētīšana pēc tās kanoniskā vienādojuma. Asimptotas.** Viegli pārliecināties, ka hiperbola, tāpat kā

elipse, ir simetriska pret  $Ox$  un  $Oy$  asīm un koordinātu sākumu  $O$ . Tādēļ koordinātu asis sauc par hiperbolas *simetrijas asīm* un punktu  $O$  par tās *centru*.

No vienādojuma (4.10) secinām, ka  $\frac{x^2}{a^2} \geq 1$  jeb  $x^2 \geq a^2$  un



38. zīm.

$\frac{y^2}{b^2} \geq 0$  jeb  $y^2 \geq 0$ . Tas nozīmē, ka  $|x| \geq a$  un  $|y| \geq 0$ . Tādēļ intervālā  $-a < x < +a$  (38. zīm.) neatrodas neviena hiperbolas punkta abscisa. Visi hiperbolas punkti atrodas ārpus joslas, kuru robežo taisnes  $x = -a$  un  $x = +a$ .

Pārrakstīsim vienādojumu (4.10) formā

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}. \quad (4.10'')$$

Ievērojot simetriju, pietiek aplūkot hiperbolas formu pirmajā kvadrantā, kur  $x \geq a$  un  $y \geq 0$ . Tad vienādojumā (4.10'') jāizvēlas  $y$  pozitīva vērtība. Ja vienādojumā  $y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$  ievietojam  $x = a$ , tad  $y = 0$ . Mainot  $x$  intervālā  $a \leq x < \infty$ ,  $y$  maiņas intervāls ir  $0 \leq y < \infty$ .

Punkts  $A(a; 0)$ , kurā hiperbola krusto  $Ox$  asi, un tam simetriskais punkts  $A_1(-a; 0)$  ir vistuvāk  $Oy$  asij novietotie hiperbolas punkti; punktus  $A$  un  $A_1$  sauc par *hiperbolas virsotnēm*.  $Oy$  asi hiperbola (4.10) nekrusto. Lielumu  $|A_1A| = 2a$  sauc par hiperbolas *reālo asi*, bet lielumu  $2b$  — par *imagināro asi*; lielumus  $a$  un  $b$  sauc attiecīgi par *reālo* un *imagināro* pusasi.

Vienādojumu (4.10'') varam pārrakstīt šādi:

$$y = \pm \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}. \quad (4.10''')$$

Ja  $|x|$  ir ļoti liels, tad izteiksme  $\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$  ļoti maz atšķiras no 1.



Atvietojot šo kvadrātsakni vienādojumā (4.10'') ar 1, dabūjam divu taisņu vienādojumus

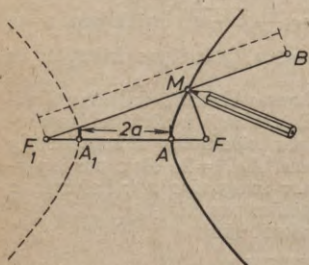
$$y = \pm \frac{b}{a}x. \quad (4.11)$$

Sīs taisnes sauc par hiperbolas *asimptotām*, un tām piemīt īpašība, ka punkts, pārvietodamies pa tām uz bezgalību, neierobežoti tuvojas hiperbolas punktiem.\* Apzīmēsim asimptotas punktu ordinātes pirmajā kvadrantā ar  $y_t$ , bet hiperbolas ordinātes ar  $y_h$ . Tad, lai kāds būtu  $x \geq a$ , pastāv pozitīva starpība:

$$\begin{aligned} y_t - y_h &= \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \\ &= \frac{b(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{a(x + \sqrt{x^2 - a^2})} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}. \end{aligned}$$

Ja  $x$  neierobežoti aug, tad difference  $y_t - y_h > 0$  neierobežoti dilst. Tādēļ, jo tālāk no koordinātu sākuma uz asimptotas atrodas punkts, jo mazāk tā ordināte atšķiras no hiperbolas punkta ordinātes, ja asimptotas un hiperbolas punktu abscisas ir vienādas. Citiem vārdiem, jo tālāk no centra, jo mazāk hiperbolas zari atšķiras no taisnēm — hiperbolas asimptotām.

Uzzīmēsim taisnstūri, kura malu vienādojumi  $x = \pm a$  un  $y = \pm b$  (38. zīm.). Šī taisnstūra diagonāles iet caur koordinātu sākumu. Diagonāļu virziena koeficienti ir  $k_1 = \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$  un  $k_2 = \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha = -\frac{b}{a}$ , tādēļ to vienādojumi  $y = \pm \frac{b}{a}x$  sakrīt ar asimptotu vienādojumiem (4.11). Līdz ar to esam noskaidrojuši, ka hiperbolas imaginārā ass ir tikko aprakstītā taisnstūra vienas malas garums.

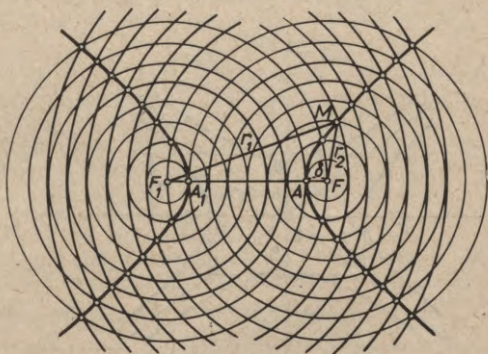


39. zīm.

Aprakstīsim dažus vienkāršus paņēmienus, kā uzzīmēt hiperbolu. Tā, piemēram, hiperbolas konstruēšanai var izveidot šādu mehānismu: punktā  $F_1$  (39. zīm.) piestiprina grozāma lineāla vienu galu, bet tā otrā galā  $B$  piestiprina neelastīgu diegu, kura garums  $d$  mazāks par lineāla garumu  $|F_1B|$ . Diega otru galu nostiprina punktā  $F$ . Ja ar zīmuli smaili

\* Par līnijas asimptotu vispār sauc taisni (ja tāda eksistē), kurai piemīt īpašība, ka punkts, pārvietodamies pa šo taisni uz bezgalību, neierobežoti tuvojas dotās līnijas punktiem.

nostiepj diegu un piespiež to lineāla malai, tad, grozot lineālu ap punktu  $F_1$ , zīmūļa smaile apraksta hiperbolu. Ja  $|F_1F|=2c$  un  $|F_1B|-d=2a$ , tad ar šādu mehānismu var uzzīmēt hiperbolu, kuras reālā pusass ir  $a$  un imaginārā pusass  $b=\sqrt{c^2-a^2}$ .



40. zīm.

Viens paņēmieni, kā ar cirkuli uzzīmēt pēc patikas daudz hiperbolas punktu, parādīts 40. zīmējumā. Par dotiem uzskata lielumus  $|F_1F|=2c$  un  $|A_1A|=2a$ , pie tam  $c>a$ . Novelkot riņķa līniju ap punktu  $F$  ar patvaļīgi izvēlētu rādiusu  $r_2>c-a$  un ap  $F_1$  — riņķa līniju ar rādiusu  $r_1=2a+r_2$ , šīs riņķa līnijas krustojas divos punktos, kuri atrodas uz hiperbolas.

**38. §. Hiperbolas ekscentricitāte.** Saskaņā ar formulu (4.9)  $c=\sqrt{a^2+b^2}$ , kur skaitli  $c$  sauc par hiperbolas *lineāro ekscentricitāti*, bet lielumu

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} \quad (4.12)$$

sauc par *skaitlisko ekscentricitāti* jeb vienkārši par *ekscentricitāti*. No definīcijas izriet, ka hiperbolas ekscentricitāte vienmēr lielāka par 1.

Ja  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$ , tad  $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ , bet  $\sqrt{a^2+b^2}=c$  un  $\frac{c}{a}=\varepsilon$ , tādēļ  $\cos \alpha = \frac{1}{\varepsilon}$ . Tas nozīmē, ka lielākai ekscentricitātei  $\varepsilon$  atbilst lielāks asimptotas virziena leņķis  $\alpha$  un lielāki asimptotu veidotie krustleņķi  $2\alpha$ , kuru iekšpusē atrodas hiperbolas zari.

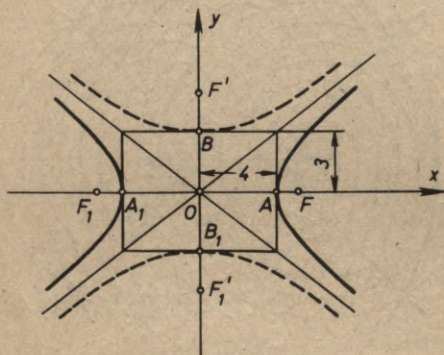
Ja  $\varepsilon=\sqrt{2}$ , tad hiperbolas asimptotas ir savstarpēji perpendi-



kulāras un hiperbolas pusasis ir vienādas. Hiperbolas vienādojums (4.10) tad pārrakstāms šādā formā:

$$x^2 - y^2 = a^2. \quad (4.13)$$

Hiperbolu, kuras pusasis ir vienādas, sauc par *vienādsāņu hiperbolu*.



41. zīm.

Jā hiperbolas kanoniskā vienādojuma (4.10) labajā pusē apmaina skaitli 1 ar  $-1$ , tad dabū vienādojumu

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (4.14)$$

jeb

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1. \quad (4.14')$$

Līnija, kas definēta ar vienādojumu (4.14) respektīvi (4.14'), arī ir hiperbola, jo šādā formā hiperbolas vienādojumu mēs iegūtu, ja  $Oy$  ass sakristu ar reālo asi un  $Ox$  ass ar imagināro asi. Šīs hiperbolas asimptotas ir taisnes  $x = \pm \frac{a}{b}y$  jeb  $y = \pm \frac{b}{a}x$ , t. i., hiperbolām (4.10) un (4.14) ir kopīgas asimptotas. Šādas hiperbolas sauc par savstarpēji *saistītām hiperbolām*.

Piemērs. Dota hiperbola  $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$ . Noteikt pusasis, ekscentricitāti, fokusu koordinātes un virsotņu koordinātes, kā arī uzrakstīt asimptotu vienādojumus un saistītās hiperbolas vienādojumu.

Atrisinājums. Izdalot doto vienādojumu ar 144, iegūstam vienādojumu formā  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ . No tā seko, ka reālā pusass  $a = 4$ ,

imaginārā pusass  $b=3$ , lineārā ekscentricitāte  $c=\sqrt{16+9}=5$ , ekscentricitāte  $\varepsilon=\frac{5}{4}=1,25$ , fokusu koordinātes  $F_1(-5;0)$  un  $F(5;0)$ , virsotņu koordinātes  $A_1(-4;0)$  un  $A(4;0)$ . Asimptotu vienādojumi ir  $y=\frac{3}{4}x$  un  $y=-\frac{3}{4}x$ , bet saistītās hiperbolas vienādojums  $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$  jeb  $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$  (41. zīm.). Saistītās hiperbolas fokusu koordinātes ir  $F'_1(0;-5)$  un  $F'(0;5)$ , bet virsotņu koordinātes  $B_1(0;-3)$  un  $B(0;3)$ .

**39. §. Parabola.** Par parabolu sauc to punktu *ģeometrisku vietu, kuru attālumi no dota punkta un dotas taisnes ir vienādi.*

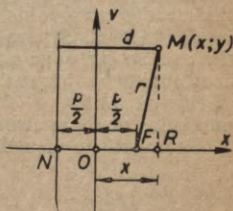
Doto punktu sauc par parabolas *fokusu* un doto taisni — par tās *direktrisi*. Apzīmēsim ar  $F$  parabolas fokusu (42. zīm.) un ar  $p$  — attālumu no fokusa līdz direktrisei.

Izvēlēsimies taisnleņķa koordinātu sistēmu tā, lai  $Ox$  ass ietu caur fokusu  $F$  perpendikulāri direktrisei, bet koordinātu sākums  $O$  būtu taisnes nogriežņa  $NF$  viduspunkts, kur  $N(-\frac{p}{2};0)$  ir direktrises un abscisu ass krustpunkts. Tad fokusa koordinātes ir  $F(\frac{p}{2};0)$  un *direktrises vienādojums*

$$x = -\frac{p}{2}. \quad (4.15)$$

Ja  $M(x;y)$  ir patvaļīgs parabolas punkts,  $r$  — tā attālums no fokusa, bet  $d$  — attālums no direktrises, tad  $d=NO+OR=\frac{p}{2}+x$  un  $r=|FM|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$ . Saskaņā ar definīciju  $r=d$  jeb

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\frac{p}{2}+x.$$



42. zīm.

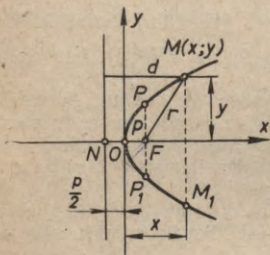
So vienādojumu apmierina to un tikai to punktu koordinātes, kuri atrodas uz parabolas. Tādēļ tas ir parabolas vienādojums.

Kāpinot šī vienādojuma abas puses kvadrātā, atverot iekavas un savēlot līdzīgos locekļus, dabūjam

$$\begin{aligned} \left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2 &= \left(x+\frac{p}{2}\right)^2; \\ x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2 &= x^2+px+\frac{p^2}{4}; \\ y^2 &= 2px. \end{aligned} \quad (4.16)$$



Vienādojumu (4.16) sauc par parabolas *kanonisko vienādojumu*. Parabola ir otrās kārtas līnija, jo vienādojums (4.16) ir vienādojuma (4.1) speciāls gadījums. Lielumu  $p$  sauc par *parabolas parametru*.



43. zīm.



44. zīm.

40. §. Parabolas formas pētīšana pēc tās kanoniskā vienādojuma. Ja punkts  $M(x; y)$  (43. zīm.) atrodas uz parabolas, tad uz tās atrodas arī punkts  $M_1(x; -y)$ , jo koordināte  $y$  ieiet vienādojumā (4.16) tikai pāra pakāpē. Tādēļ parabola ir *simetriska* pret  $Ox$  asi. Šo asi sauc par parabolas *simetrijas asi*; simetrijas ass krustpunktu ar parabolu sauc par *parabolas virsotni*. Liekot vienādojumā (4.16)  $y=0$ , dabūjam, ka arī  $x=0$ . Tas nozīmē, ka parabolas virsotne atrodas koordinātu sākumā.

Pārrakstīsim vienādojumu (4.16) šādā formā:

$$y = \pm \sqrt{2px}. \quad (4.16')$$

Tā kā  $p > 0$ , tad parabolas vienādojumā (4.16) resp. vienādojumā (4.16') negatīvām  $x$  vērtībām neatbilst neviena reāla  $y$  vērtība. Tas nozīmē, ka koordinātu sistēmas otrā un trešā kvadrantā neatrodas neviena parabolas (4.16) punkts.

Ja  $x$  neierobežoti pieaug, tad neierobežoti palielinās arī  $|y|$ . Viegli pārļiecināties, ka punkti  $P\left(\frac{p}{2}; p\right)$  un  $P_1\left(\frac{p}{2}; -p\right)$  atrodas uz parabolas, jo šo punktu koordinātes apmierina parabolas vienādojumu. Taisnes nogrieznis  $P_1P$  ir parabolas horda, kas iet caur fokusu un ir perpendikulāra parabolas simetrijas asiņ. Šīs hordas garums  $|P_1P| = 2p$ . Tādēļ, jo lielāks ir parabolas parametrs, jo tālāk atrodas punkti  $P$  un  $P_1$  no parabolas simetrijas ass — parabola ir «platāka». Var pierādīt, ka parabolai nav asimptotu un tās forma atšķiras no hiperbolas zara formas.

Viens no parabolas punktu konstrukcijas paņēmieniem ar cirkuļa un lineāla palīdzību parādīts 44. zīmējumā. Ap fokusu  $F$  ar rādiusu  $r \geq \frac{p}{2}$  novelkam riņķa līniju. Pēc tam paralēli direktrisei,  $d=r$  vienību attālumā no tās novelkam taisni. Taisnes un riņķa līnijas krustpunktī  $M$  un  $M_1$  ir parabolas punkti, jo pēc konstrukcijas šo punktu attālumi no direktrises un no fokusa ir vienādi.

Līnija, kuras vienādojums ir

$$y^2 = -2px, \text{ kur } p > 0, \quad (4.17)$$

arī ir parabola ar virsotni koordinātu sākumā (45. zīm.). Tās simetrijas ass sakrīt ar  $Ox$  asi, un visi tās punkti novietoti 2. un 3. kvadrantā, jo šajā gadījumā pozitīvām  $x$  vērtībām neatbilst neviena reāla  $y$  vērtība. Šādā formā mēs iegūtu parabolas vienādojumu, ja fokusu izvēlētos punktā  $F\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$  un par direktrisi

būtu taisne  $x = \frac{p}{2}$ .

Vienādojums

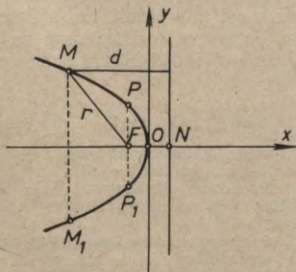
$$x^2 = 2py, \text{ kur } p > 0, \quad (4.18)$$

kuru iegūst, apmainot koordinātu asis vietām, arī ir parabolas vienādojums. Šīs parabolas simetrijas ass ir  $Oy$  ass, virsotne atrodas koordinātu sākumā, fokuss — punktā  $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$  un direktrises vienādojums ir  $y = -\frac{p}{2}$ .

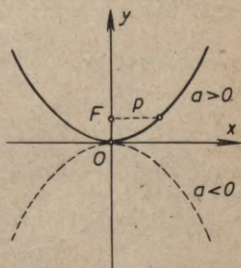
Vienādojums

$$y = ax^2, \text{ kur } a > 0, \quad (4.19)$$

viegli pārveidojams formā (4.18). Apzīmējot  $\frac{1}{a} = 2p$ , iegūstam



45. zīm.



46. zīm.



$x^2 = \frac{1}{a}y = 2py$ . Tātad  $y = ax^2$  ir tādas parabolas vienādojums, kuras simetrijas ass ir ordinātu ass, virsotne sakrīt ar koordinātu sākumu, fokuss atrodas punktā  $F\left(0; \frac{1}{4a}\right)$  un direktrises vienādojums ir  $y = -\frac{1}{4a}$ . Parabola (4.19) attēlota 46. zīmējumā ar nepārtrauktu līniju, ar svītrlīniju attēlota parabola  $y = -ax^2$ .

1. piemērs. Atrast parabolas  $y^2 = 4x$  fokusa koordinātes un direktrises vienādojumu.

Atrisinājums. Salīdzinot doto vienādojumu ar vienādojumu (4.16), redzam, ka  $2p = 4$  un  $p = 2$ . Tādēļ fokusa koordinātes ir  $F(1; 0)$  un direktrises vienādojums  $x = -1$  jeb  $x + 1 = 0$ .

2. piemērs. Atrast parabolas  $y^2 = -4x$  fokusa koordinātes un direktrises vienādojumu.

Atrisinājums. Parabolas parametrs  $p = 2$ , bet fokusa koordinātes ir  $F(-1; 0)$  un direktrises vienādojums  $x - 1 = 0$ .

3. piemērs. Atrast parabolas  $y = 4x^2$  fokusa koordinātes un direktrises vienādojumu.

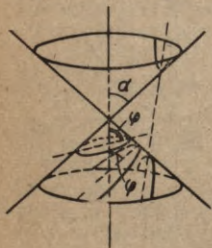
Atrisinājums. Salīdzinot doto vienādojumu ar vienādojumu (4.19), redzam, ka  $a = 4$ , bet parabolas parametrs  $p = \frac{1}{2a} = \frac{1}{8}$ . Tādēļ fokusa koordinātes ir  $F\left(0; \frac{1}{16}\right)$  un direktrises

vienādojums  $y = -\frac{1}{16}$  jeb  $16y + 1 = 0$ .

4. piemērs. Atrast parabolas  $y = -4x^2$  fokusa koordinātes un direktrises vienādojumu.

Atrisinājums. Parabolas parametrs  $p = \frac{1}{8}$ , bet fokusa koordinātes  $F\left(0; -\frac{1}{16}\right)$  un direktrises vienādojums  $16y - 1 = 0$ .

41. §. Konusa šķēlumi. Ja šķēlējplakne veido ar konusa asi leņķi  $\varphi = 90^\circ$ , tad šķēlumā rodas riņķa līnija (47. zīm.). Ja  $\alpha < \varphi < 90^\circ$ , kur  $\alpha$  ir leņķis starp konusa asi un veiduli, tad šķēlumā rodas elipse. Ja  $\varphi < \alpha$ , tad šķēlumā rodas hiperbola. Ja  $\varphi = \alpha$ , tad šķēlumā rodas parabola.



47. zīm.

### Vingrinājumi

1. Sastādīt riņķa līnijas vienādojumu, ja tās rādiuss  $r = 4$  un centrs punktā  $C(-1; 3)$ .

2. Sastādīt kanonisko vienādojumu riņķa līnijai, kuras rādiuss  $r = 5$  un centrs atrodas koordinātu sākumā.

3. Noteikt rādiusu un centra koordinātes riņķa līnijām, kuru vienādojumi ir 1)  $x^2 + y^2 - 6x = 0$ , 2)  $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$ , 3)  $x^2 + y^2 - 10x + 24y - 56 = 0$ , 4)  $3x^2 + 3y^2 + 6x - 4y - 1 = 0$ .

4. Sastādīt elipses kanonisko vienādojumu, zinot, ka 1) elipses pusasis ir 5 un 4, 2) attālums starp fokusi ir 8, bet lielās ass garums 10, 3) lielā pusass 13 un ekscentricitāte  $\frac{12}{13}$ .

5. Aprēķināt elipses ekscentricitāti, zinot, ka 1) nogrieznis, kas savieno elipses fokusus, redzams no virsotnes (mazās ass galā) zem  $60^\circ$  leņķa, 2) attālums starp divām blakus esošām elipses virsotnēm ir divas reizes lielāks par attālumu starp fokusi, 3) attālums starp fokusi ir vienāds ar pusasu summu.

6. Noteikt elipses  $4x^2 + 25y^2 - 100 = 0$  pusasu garumus.

7. Aprēķināt elipses  $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{10} = 1$  un taisnes  $2x + 5y + 4 = 0$  krustpunkta koordinātes.

8. Noteikt, kurš no punktiem  $M_1 (1; 2)$ ,  $M_2 (-1; 3)$ ,  $M_3 (6; 1)$ ,  $M_4 (-1; 7)$ ,  $M_5 \left( \sqrt{13}; 5\sqrt{\frac{2}{3}} \right)$  atrodas uz elipses, kurš iekšpus tās un kurš ārpus tās.

9. Noteikt, kurš no punktiem  $M_1 (4; 1)$ ,  $M_2 (1; -2)$ ,  $M_3 (\sqrt{2}; 1)$  atrodas uz hiperbolas  $x^2 - y^2 = 1$ .

10. Sastādīt hiperbolas kanonisko vienādojumu, zinot, ka 1) reālā pusasa  $a = 5$  un imaginārā  $b = 3$ , 2) reālās ass garums ir 8 un attālums starp fokusi 10, 3) reālās ass garums ir 48 un ekscentricitāte  $\frac{13}{12}$ , 4) reālās ass garums ir 16, bet  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{4}$ , kur  $\varphi$  ir leņķis starp hiperbolas asimptotu un absisu asi.

11. Uzzīmēt hiperbolu  $x^2 - y^2 = 16$  un tās asimptotas, noteikt fokusu koordinātes, ekscentricitāti un leņķi starp asimptotām.

12. Doti hiperbolas asimptotu vienādojumi  $y = \pm \frac{5}{12}x$  un punkts  $M (24; 5)$  uz hiperbolas. Sastādīt hiperbolas vienādojumu.

13. Noteikt fokusa koordinātes parabolām 1)  $y^2 = 4x$ , 2)  $x^2 = 4y$ , 3)  $y^2 = -8x$ , 4)  $x^2 = -8y$ .

14. Sastādīt parabolas vienādojumu, zinot, ka attālums no fokusa līdz direktrisei ir 2.

15. Atrast parabolas vienādojumu, zinot, ka 1) tā iet caur punktiem  $(0; 0)$ ,  $(1; -3)$  un ir simetriska pret  $Ox$  asi, 2) tā iet caur punktiem  $(0; 0)$ ,  $(2; -4)$  un ir simetriska pret  $Oy$  asi.

## 5. NODAĻA \*

### TAISNLEŅĶA KOORDINĀTU TRANSFORMĀCIJA PLAKNĒ

42. §. Koordinātu transformācijas uzdevums. Geometrisku objektu (punktu, līniju) formu un stāvokli koordinātu sistēmā nosaka skaitļi un vienādojumi. Viena un tā paša punkta koordinātes un vienas un tās pašas līnijas vienādojumi divās dažādās koordinātu sistēmās ir dažādi. Tā, piemēram, vienādojums  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$  ir riņķa līnijas vienādojums taisnleņķa koordinātu sistēmā  $Oxy$ . Citā taisnleņķa koordinātu sistēmā  $O'x'y'$ , kuras sākuma punkts  $O' (x_0; y_0)$  atrodas dotās riņķa līnijas centrā, šis līnijas vienādojums ir  $x'^2 + y'^2 = r^2$ .



Ja aplūkojam kāda punkta kustību divās dažādās koordinātu sistēmās, no kurām vienu nosacīti pieņemam par nekustīgu, bet otra kustas līdz ar punktu, tad punkta kustības trajektorijas šādās divās koordinātu sistēmās ir dažādas. Tā, piemēram, ja no vagona, kas kustas vienmērīgi pa taisnu ceļu, izkrit smags priekšmets, tad novērotājs vagonā redzēs šī priekšmeta kustības trajektoriju kā vertikālu taisni, bet novērotājs, kurš stāv uz zemes, redzēs to kā parabolu. Šeit viena koordinātu sistēma cieši saistīta ar kustīgo vagonu, bet otra ar zemi.

Izdevīga koordinātu sistēmas izvēle var ievērojami vienkāršot liniju vienādojumus un uzdevumu risinājumus. Tādēļ nepieciešams, zinot patvaļīga punkta koordinātes vienā koordinātu sistēmā, aprēķināt tā paša punkta koordinātes jaunā koordinātu sistēmā. Šāda uzdevuma atrisināšanu sauc par koordinātu transformāciju.

Divām dažādām taisnleņķa koordinātu sistēmām var būt 1) vienāds asu virziens, bet dažādi koordinātu sākuma punkti, 2) dažāds asu virziens, bet kopīgs sākuma punkts, 3) dažādi sākuma punkti un dažādi asu virzieni. Pirmajā gadījumā koordinātu transformāciju veic ar asu paralēlu pārnesešu jeb *translāciju*, otrajā gadījumā — ar asu rotāciju. Trešajā gadījumā apvienotas translācija un rotācija, kuras var izpildīt vienu pēc otras.

43. §. **Koordinātu sistēmas translācija.** Pieņemsim, ka taisnleņķa koordinātu sistēmā  $Oxy$  (48. zīm.) ir doti punkti  $M(x; y)$  un  $O'(x_0; y_0)$ , pie tam  $O'$  ir jaunas koordinātu sistēmas sākuma punkts. Caur punktu  $O'$  paralēli  $Ox$  asij novilksim jaunās koordinātu sistēmas asi  $O'x'$  un paralēli  $Oy$  asij —  $O'y'$ . Punkta  $M$  koordinātes jaunajā koordinātu sistēmā  $O'x'y'$  apzīmēsim ar  $(x'; y')$ . Punkta  $M$  projekcijas uz vecās koordinātu sistēmas asīm apzīmēsim ar  $M_1$  un  $M_2$ , bet uz jaunās koordinātu sistēmas asīm — ar  $M'_1$  un  $M'_2$ . Jaunās koordinātu sistēmas sākuma punkta  $O'$  projekcijas uz vecās sistēmas asīm apzīmēsim ar  $O_1$  un  $O_2$ .

Acīm redzot,

$$OM_1 = OO_1 + O_1M_1 = OO_1 + O'M'_1, \quad \text{un}$$

$$OM_2 = OO_2 + O_2M_2 = OO_2 + O'M'_2,$$

t. i.,

$$x = x_0 + x', \quad (5.1)$$

$$y = y_0 + y'$$

jeb

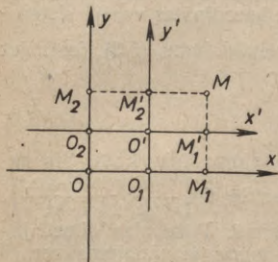
$$x' = x - x_0, \quad (5.2)$$

$$y' = y - y_0.$$

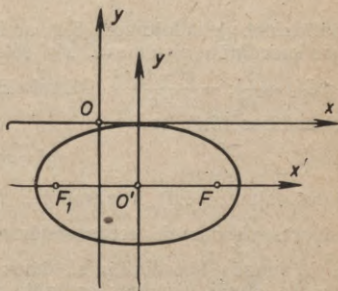
1. piemērs. Noteikt punkta  $M(-1; 2)$  koordinātes jaunajā koordinātu sistēmā, kuras sākums ir punktā  $O'(0; -1)$  un asis ir paralēlas vecās sistēmas asīm.

Atrisinājums. Saskaņā ar formulām (5.2) punkta  $M$  koordinātes jaunajā koordinātu sistēmā ir  $x' = -1 - 0 = -1$  un  $y' = 2 - (-1) = 3$ .

2. piemērs. Atrast līnijas  $9x^2 + 25y^2 - 36x + 150y + 36 = 0$  vienādojumu jaunajā koordinātu sistēmā  $O'x'y'$ , kuras asis paralēlas



48. zīm.



49. zīm.

vecās sistēmas  $Oxy$  asīm, bet koordinātu sākums ir pārnests punktā  $O'(2; -3)$ .

Atrisinājums. Saskaņā ar formulām (5.1) ievietosim dotajā vienādojumā  $x = x' + 2$  un  $y = y' - 3$ . Tad  $9(x' + 2)^2 + 25(y' - 3)^2 - 36(x' + 2) + 150(y' - 3) + 36 = 0$ , t. i.,  $9x'^2 + 52y'^2 = 225$  jeb  $\frac{x'^2}{25} + \frac{y'^2}{9} = 1$ . Dotā līnija ir elipse (49. zīm.), kuras centrs at-

rodas punktā  $O'(2; -3)$  un simetrijas asis sakrīt ar jaunās koordinātu sistēmas asīm respektīvi tās ir paralēlas vecās koordinātu sistēmas asīm; pusasu garumi ir  $a = 5$ ,  $b = 3$ ; attālums no centra līdz fokusi  $c = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ ; fokusu koordinātes jaunajā sistēmā  $F_1(-4; 0)$ ,  $F(4; 0)$ , bet vecajā sistēmā  $F_1(-2; -3)$ ,  $F(6; -3)$ .

3. piemērs. Pierādīt, ka līnija  $y = ax^2 + bx + c$  ir parabola, atrast tās virsotnes koordinātes un simetrijas ass vienādojumu.

Atrisinājums. Pārveidosim doto līnijas vienādojumu, veidojot labajā pusē pilnu kvadrātu. To panākam, pieskaitot un atņemot  $\frac{b^2}{4a}$ . Tad

$$y = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2}{4a} + c;$$

$$y + \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2. \quad (5.3)$$



$$\left. \begin{aligned} x' &= x + \frac{b}{2a}, \\ y' &= y + \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Salīdzinot vienādojumus (5.4) ar formulām (5.2), redzam, ka jaunās koordinātu sistēmas  $O'x'y'$  sākuma koordinātes vecajā sistēmā ir  $O'(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2-4ac}{4a})$ . Pārrakstām vienādojumu (5.3), ievērojot vienādības (5.4), tad

$$y' = ax'^2. \quad (5.5)$$

Viēnādojums (5.5) ir parabolas viēnādojums (sk. 4.19). Šīs parabolas virsotne ir vecās sistēmas punktā  $O'(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2-4ac}{4a})$ , t. i., jaunās koordinātu sistēmas sākumā. Parabolas simetrijas ass ir jaunās sistēmas ordinātu ass, kuras viēnādojums vecajā sistēmā ir  $x = -\frac{b}{2a}$ .

4. piemērs. Noteikt parabolas  $x = y^2 - 4y + 3$  virsotnes un fokusa koordinātes, atrast direktrises un simetrijas ass viēnādojumus.

Atrisinājums. Pārveidosim doto viēnādojumu, veidojot labajā pusē pilnu kvadrātu. To panāksim, pieskaitot un atņemot 4. Tad  $x = (y^2 - 4y + 4) - 4 + 3$  jeb  $(y - 2)^2 = x + 1$ . Pārnesot koordinātu sākumu punktā  $O'(-1; 2)$  (50. zīm.) un nemainot koordinātu asu virzienu, t. i., ievietojot  $y' = y - 2$  un  $x' = x + 1$ , dabūjam parabolas viēnādojumu kanoniskā formā  $y'^2 = x'$ . Seko, ka parabolas virsotne ir punktā  $O'(-1; 2)$ , tās parametrs  $p = \frac{1}{2}$ . Fokuss atrodas jaunās sistēmas punktā  $F(1/4; 0)$ , kura koordinātes vecajā sistēmā ir  $x = -1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$  un  $y = +2 + 0 = +2$ , t. i., fokuss atrodas vecās sistēmas punktā  $F(-\frac{3}{4}; 2)$ . Direktrises viēnādojums sākaņā ar formulu (4.15) jaunajā sistēmā ir  $x' = -\frac{1}{4}$ , bet vecajā sistēmā šis taisnes viēnādojums ir  $x + 1 = -\frac{1}{4}$ , t. i.,  $x = -\frac{5}{4}$ . Simetrijas ass šai gadījumā ir jaunā abscisu ass, kuras viēnādojums vecajā koordinātu sistēmā ir  $y = +2$ .

5. piemērs. Pierādīt, ka līnija  $9x^2 - 16y^2 + 36x + 96y - 252 = 0$  ir hiperbola, noteikt tās centra un fokusu koordinātes, atrast asimptotu viēnādojumus.

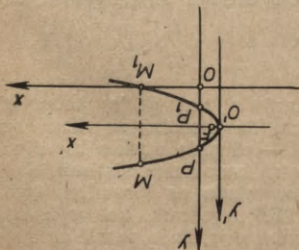
Atrisinājums. Pārveidosim doto vienādojumu, veidojot pilnus kvadrātus. To panākam, pieskaitot un atņemot vienādu skaitļus. Tad dabūjam, ka  $9(x^2 + \frac{36}{9}x + 4) - 36 - 16(y^2 - \frac{96}{16}y + 9) + 144 - 252 = 0$  jeb  $9(x+2)^2 - 16(y-3)^2 = 144$ . Izdalot abas puses ar 144, dabūjam

$$\frac{(x+2)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1. \quad (5.6)$$

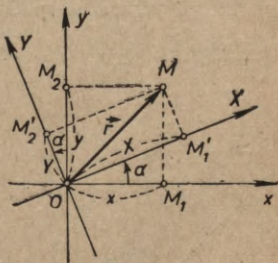
Pārnesot koordinātu sākumu punktā  $O'(-2; 3)$ , nemainot koordinātu asu virzienu, t. i., liekot  $x' = x+2$  un  $y' = y-3$ , dabūjam

$$\frac{x'^2}{16} - \frac{y'^2}{9} = 1. \quad (5.7)$$

Vienādojums (5.7) ir hiperbolas vienādojums kanoniskā formā [sk. (4.10)]. Tās centrs atrodas jaunās koordinātu sistēmas sākumā, t. i., punktā  $O'(-2; 3)$ . Pusasu garumi ir  $a=4$  un  $b=3$ , bet fokusu attālumi no centra ir  $c = \sqrt{16+9} = 5$ . Tātad fokusu koordinātes jaunajā sistēmā ir  $F_1(-5; 0)$  un  $F(5; 0)$ . So punktu koordinātes vecajā sistēmā ir  $F_1(-7; 3)$  un  $F(3; 3)$ . Asimptotu vienādojumi saskaņā ar formulām (4.11) jaunajā sistēmā ir  $y' = \pm \frac{3}{4}x'$ . Ievietojot šajos vienādojumos  $x' = x+2$  un  $y' = y-3$ , dabūjam asimptotu vienādojumus vecajā koordinātu sistēmā:  $3x - 4y + 18 = 0$  un  $3x + 4y - 6 = 0$ .



50. zīm.



51. zīm.

44. §. Koordinātu sistēmas rotācija. Pieņemsim, ka divām taisnleņķa koordinātu sistēmām  $Oxy$  un  $OXY$  (51. zīm.) ir kopīgs sākums, bet starp  $Ox$  un  $OX$  asīm ir leņķis  $\alpha$ . Tas pats leņķis, acīm redzot, ir arī starp  $Oy$  un  $OY$  asīm. Apzīmēsim patvaļīga punkta  $M$  rādusvektoru  $\vec{OM}$  ar  $\vec{r}$ . Tā projekcijas uz  $Oxy$  sistēmas



asīm apzīmēsim ar  $(x; y)$ , bet uz  $OXY$  sistēmas asīm — ar  $(X; Y)$ . Šīs projekcijas ir punkta  $M$  koordinātes attiecīgajās koordinātu sistēmās. Saskaņā ar formulu (1.14)  $X = x \cos \alpha + y \sin \alpha$  un  $Y = x \cos \left( \alpha + \frac{\pi}{2} \right) + y \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{2} \right)$ . Pēc minētās formulas arī  $x = X \cos(-\alpha) + Y \sin(-\alpha)$  un  $y = X \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) + Y \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$  jeb

$$\begin{cases} x = X \cos \alpha - Y \sin \alpha, \\ y = X \sin \alpha + Y \cos \alpha, \end{cases} \quad (5.8)$$

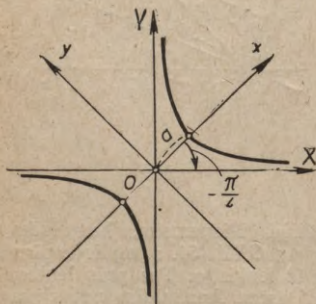
un

$$\begin{cases} X = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ Y = -x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{cases} \quad (5.9)$$

Šo formulu iegaumēšanai noder tabula:

|     | $X$           | $Y$            |
|-----|---------------|----------------|
| $x$ | $\cos \alpha$ | $-\sin \alpha$ |
| $y$ | $\sin \alpha$ | $\cos \alpha$  |

Tabulā atzīmētas kosinusu vērtības leņķiem starp attiecīgajām asīm. Tā, piemēram, starp  $Ox$  un  $OY$  asīm ir leņķis  $\frac{\pi}{2} + \alpha$ , bet  $\cos \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\sin \alpha$ .



52. zīm.

Lielumi  $x$  un  $y$  ir patvaļīgā punkta  $M$  koordinātes vienā, bet  $X, Y$  — tā paša punkta koordinātes otrā koordinātu sistēmā. Salīdzinot tabulu ar formulām (5.8) vai (5.9), redzam, ka vajadzīgā koordināte ir divās paralēlās ailēs (horizontāli vai vertikāli) novietoto lielumu reizinājumu summa.

Piemērs. Dota vienādsānu hiperbola  $x^2 - y^2 = a^2$ . Uzrakstīt tās vienādojumu koordinātu sistēmā, kuras asis sakrīt ar šīs hiperbolas asimptotām.

Atrisinājums. Dotās hiperbolas asimptotas ir taisnes

$y = \pm x$ , kas ir koordinātu sistēmas kvadrantu bisektrises. Izvēlēsimies jauno koordinātu asu virzienus tā, kā parādīts 52. zīmējumā. Ievērojot, ka  $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  un  $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , koordinātu transformācijas formulas ir

$$\begin{aligned}x &= \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y), \\y &= -\frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y = -\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y).\end{aligned}$$

Ievietojot atrastās izteiksmes vienādojumā  $x^2 - y^2 = a^2$ , dabūjam

$$\frac{1}{2}(X+Y)^2 - \frac{1}{2}(X-Y)^2 = a^2$$

jeb

$$XY = \frac{a^2}{2}. \quad (5.10)$$

Vienādojums (5.10) tāpat ir vienādsānu hiperbolas vienādojums, kuras asimptotas ir koordinātu asis. Šis vienādojums izteic divu lielumu  $X$  un  $Y$  apgrieztu proporcionalitāti [sk. formulu (6.16)].

### Vingrinājumi

1. Noteikt parabolu a)  $y = -3 + 4x - x^2$  un b)  $x = y^2 - 2y + 2$  virsotņu koordinātes, simetrijas ass vienādojumus un parametru lielumus.

2. Noteikt parabolas  $y = x^2 - 4x + 5$  fokusa koordinātes.

3. Noteikt līniju formu un raksturot to novietojumu koordinātu sistēmā  
1)  $x^2 + 2y^2 + 4x - 4y = 0$ ; 2)  $4x^2 - y^2 - 8x - 6y - 4 = 0$ ; 3)  $4x^2 + 4x + 2y - 1 = 0$ .



## IEVADS MATEMĀTISKAJĀ ANALIZĒ

## 6. NODAĻA

## FUNKCIJAS UN TO KLASIFIKĀCIJA

45. §. Jēdziens par funkciju un tās vērtību. Mainīgu lielumu pētīšana un analīze iegūst nozīmi un jēgu tikai tad, ja vienlaidīgi pēta divus vai vairākus mainīgus lielumus to savstarpējā likumsakarībā. Piemēram, nav nozīmes novērot kustības laikā automobiļa degvielas daudzuma izmaiņu tvertnē, nesaistot to ar nobraukto attālumu, ātrumu, ceļa profilu vai kādu citu mainīgu lielumu, vai ar visiem šiem lielumiem kopā. Matemātiskā analīze galvenokārt pēta sakarības starp diviem vai vairākiem mainīgiem lielumiem.

Matemātikā bieži saka, ka « $y$  ir  $x$  funkcija». Tas nozīmē tikai to, ka katrai vērtībai, kādu var pieņemt  $x$ , atbilst noteikta  $y$  vērtība. Apskatīsim dažus piemērus, kuros izteikta *funkcionālā sakarība* starp diviem lielumiem.

1. Brīvā kritienā noietais ceļš ir tieši proporcionāls krišanas laika kvadrātam. Šo likumsakarību izteic matemātiska formula

$$s = \frac{gt^2}{2}, \quad (6.1)$$

kur  $g \approx 9,81$  m/sec<sup>2</sup>. Šajā piemērā ceļš  $s$  ir laika (argumenta)  $t$  funkcija.

2. Analoga matemātiska formula izteic funkcionālu sakarību starp ātrumu  $v$  (argumentu) un kustīgas masas  $m$  enerģiju  $E$  (funkciju):

$$E = \frac{mv^2}{2}. \quad (6.2)$$

3. Ja taisnleņķa trijstūra katete apzīmēta ar  $b$  un tās pieleņķis ir  $\alpha$ , tad trijstūra laukumu  $S$  aprēķina pēc formulas

$$S = \frac{1}{2} b^2 \operatorname{tg} \alpha. \quad (6.3)$$

Šī formula ar konstantu  $\alpha$  izteic taisnleņķa trijstūra laukumu  $S$  kā katetes garuma  $b$  funkciju.

Minētajos piemēros funkcionālā sakarība starp dažādiem fizikāliem lielumiem ir viena un tā pati. Abstrahējot lielumu konkrēto fizikālo jēgu, šo funkcionālo sakarību var izteikt ar formulu

$$y = \frac{1}{2} kx^2, \quad (6.4)$$

kur  $x$  ir arguments un  $y$  — tā funkcija, bet  $k$  ir proporcionalitātes koeficients, t. i., dots pozitīvs skaitlis.

#### 4. Formula

$$y = \frac{1}{2} \sqrt{4 - x^2} \quad (6.5)$$

izteic reālu funkcionālu sakarību starp lielumiem  $x$  un  $y$  tikai tad, ja  $|x| \leq 2$ , t. i., ja  $x$  pieder skaitļu kopai, kuras punkti atrodas slēgtā intervālā  $-2 \leq x \leq +2$ . Atbilstošās  $y$  vērtības pieder slēgtam intervālam  $0 \leq y \leq 1$ .

#### 5. Formula

$$y = \lg(1 - x^2) \quad (6.6)$$

izteic reālu funkcionālu sakarību starp lielumiem  $x$  un  $y$  tikai tad, ja  $|x| < 1$ , t. i., ja  $x$  pieder vaļējam intervālam  $-1 < x < +1$ . Atbilstošās  $y$  vērtības pieder intervālam  $-\infty < y \leq 0$ .

**Funkcijas definīcija.** *Lielumu  $y$  sauc par lieluma  $x$  funkciju, ja pastāv likums, pēc kura katrai  $x$  vērtībai, kas pieder dotajai skaitļu kopai, atbilst noteikta  $y$  vērtība. Neatkarīgo mainīgo lielumu  $x$  sauc par argumentu.*

Funkcijas definīcija prasa tāda likuma eksistenci, kurš nosaka atbilstību starp  $x$  un  $y$ , bet neprasa, lai tas, kā piemēros 1÷5, būtu dots ar matemātisku formulu. Atbilstību starp  $x$  un  $y$  var izteikt arī ar vārdiem, tabulu, grafiku utt.

Funkcijas definīcijā pieminēto argumenta  $x$  vērtību kopu sauc par *funkcijas definīcijas jeb eksistences apgabalu*.

Tā kā funkcija un tās arguments vispārīgajā gadījumā ir mainīgi lielumi, tad tiem katram ir savs maiņas apgabals. Argumenta maiņas apgabals sakrīt ar funkcijas definīcijas apgabalu.

Tā, piemēram, ja funkcija dota ar šādiem vārdiem: katram racionālam  $x$  atbilstošais  $y=1$  un katram iracionālam  $x$  atbilstošais  $y=0$ , tad šādas funkcijas definīcijas apgabalā ietilpst visi reālie skaitļi, bet funkcijas maiņas apgabalā ir tikai divi skaitļi: 0 un 1.

Ar formulu (6.5) definētās funkcijas definīcijas apgabals ir segments  $[-2; +2]$ , bet funkcijas maiņas apgabals ir segments  $[0; 1]$ . Formula (6.6) definē funkciju, kuras definīcijas apgabals ir intervāls  $(-1; +1)$ , bet funkcijas maiņas apgabalā ietilpst visi nepozitīvie skaitļi  $(-\infty; 0]$ .



Formula (6.4) definē noteiktu  $y$  katram  $x$ , bet, ja ar šo formulu ir izteikta kāda no funkcionālajām sakarībām (6.1) — (6.3), tad funkcijas definīcijas apgabalā ietilpst tikai pozitīvās argumenta vērtības.

Funkcijas apzīmēšanai burtā  $y$  vietā bieži lieto simbolu  $f(x)$  vai citu tamlīdzīgu apzīmējumu. Ar šādu simbolu izsaka likumu, pēc kura dotai argumenta vērtībai  $x$  iegūst atbilstošu funkcijas vērtību.

Vispār, lai izteiktu frāzi « $y$  ir  $x$  funkcija», raksta:  $y=f(x)$ ,  $y=\varphi(x)$ ,  $y=y(x)$  un tamlīdzīgi. Dažādu funkcionālu sakarību apzīmēšanai lieto dažādus burtus un dažādus simbolus. Šādus simbolus lasa «igrek ir ef no iks» vai «igrek ir fi no iks», «igrek ir igrek no iks»\*.

Ja, piemēram, formulā (6.5) kreisās puses vietā būtu rakstīts  $f(x)$ , tad šis simbols nozīmētu, ka, lai dabūtu dotai argumenta vērtībai  $x$  atbilstošu funkcijas  $f(x)$  vērtību, būtu jāizdara labajā pusē norādītās darbības.

Ar simbolu  $f(a)$  jeb  $y|_{x=a}$  apzīmē skaitli, kas vienāds ar argumenta vērtībai  $x=a$  atbilstošo funkcijas  $y=f(x)$  vērtību.

Ja, piemēram,

$$f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}, \text{ tad } f(0) = \frac{\sqrt{4-0^2}}{2} = 1,$$

$$f(2) = \frac{\sqrt{4-2^2}}{2} = 0 \text{ un, ja } y = \sin t, \text{ tad}$$

$$y|_{t=0} = \sin 0 = 0, \quad y|_{t=\frac{3\pi}{2}} = \sin \frac{3\pi}{2} = -1.$$

**46. §. Funkcijas definēšanas veidi.** Pastāv dažādi veidi, kā izteikt funkcijas vērtību piekārtojumu argumenta vērtībām. Svarīgākie funkciju definēšanas veidi ir tabulārais, grafiskais un analītiskais.

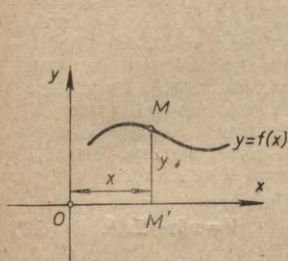
Definēt funkciju *ar tabulu* nozīmē uzrakstīt blakus katrai argumenta vērtībai atbilstošo funkcijas vērtību. Tā, piemēram, gaisa temperatūru kā laika funkciju var attēlot šādā tabulā:

| Laiks       | 4    | 6    | 8    | 10   | 12   |
|-------------|------|------|------|------|------|
| Temperatūra | +2,0 | +1,7 | +2,5 | +4,5 | +8,0 |

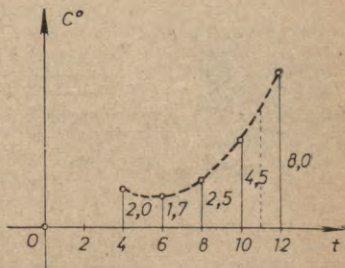
\* Lasītājs būs ievērojis (4. §), ka punktu  $P$ , kura koordināte uz kādas ass ir  $x$ , pieraksta ar simbolu  $P(x)$ . Ar tādu pašu simbolu var būt dota arī kāda funkcija. Simbola nozīme katrā gadījumā saprotama no teksta, kurā tas sastopams.

Šai piemērā funkcijas definīcijas apgabalā uzrādīti 5 skaitļi — plkst. četros, sešos utt. Atbilstošās funkcijas vērtības ir šajos momentos novērotās 5 dažādas gaisa temperatūras grādos.

Katras funkcijas  $y=f(x)$  vērtība ar tai atbilstošo argumenta vērtību veido skaitļu pāri, kuru var uzskatīt par kāda punkta



53. zīm.



54. zīm.

koordinātēm plaknē. Visi punkti  $M$  (53. zīm.), kuru abscisas ir  $x$  un ordinātes  $y=f(x)$ , veido geometrisku vietu, kura parasti ir kāda līnija. Šo punktu  $M$  geometrisko vietu sauc par funkcijas  $y=f(x)$  grafiku.

Ja iepriekšējā tabulā dotā funkcija būtu jāattēlo grafiski, tad tās grafikā zināmi būtu pieci punkti. Savienojot šos punktus ar svītrlīniju, dabūjam šīs funkcijas grafiku (54. zīm.). Pieņemot, ka iezīmētā līnija ir temperatūras grafika, gūstam uzskatāmu priekšstatu par tās maiņu laikā no plkst. četriem līdz divpadsmitiem. Funkcijas grafika bieži ir vienīgais līdzeklis, kā iegūt attiecīgo funkcionālo sakarību. Tā, piemēram, funkcionālo sakarību grafikas veidā attēlo pašrakstītāji instrumenti — termogrāfi, barogrāfi, seismogrāfi utt., kas zīmē temperatūras, gaisa spiediena, Zemes garozas svārstību u. c. grafikas kā laika funkcijas.

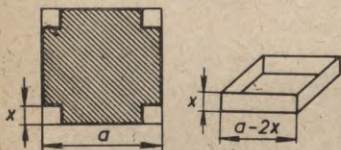
Funkcijas izteiksmi sauc par *analītisku*, ja tā uzrāda visas tās matemātiskās operācijas (aritmetiskās, algebriskās, trigonometriskās u. c.), kādas jāizpilda ar argumentu, lai dabūtu funkcijas vērtību. Analītiskas izteiksmes ir, piemēram,  $\frac{gx^2}{2}$ ;  $\frac{1}{2}b^2 \lg x$ ;  $\sqrt{4-x^2}$ ;  $\lg(1-x^2)$  utt. Divu analītisku izteiksmju vienādību sauc par formulu.

Tā, piemēram, formulas (6.1) — (6.6) izteic funkcijas analītiskā veidā.

Jāievēro, ka ne katru funkciju var izteikt ar formulu un ka arī tajos gadījumos, kad funkciju izteic analītiski, *formula un funkcija* nav identificējami jēdzieni, jo 1) formulas eksistences apgabals, t. i., neatkarīgā mainīgā lieluma iespējamo vērtību



kopa, kurai atbilst noteiktas atkarīgā mainīgā lieluma vērtības, var nesakrist ar funkcijas definīcijas apgabalu, 2) funkcijas analītiskās izteiksmes dažādos definīcijas apgabala punktos un intervālos var būt dažādas un 3) vienu un to pašu funkciju var izteikt ar dažādām formulām.



55. zīm.

1. piemērs. No loksnes, kurai ir kvadrāta forma un malas garums  $a$ , katrā stūrī izgriezti kvadrāti ar malas garumiem  $x$  (55. zīm.). Uzlokot saīsinātās loksnes malas, izveidots vaļējs trauks, kuram ir taisnstūra paralēlskaldņa forma. Tā tilpumu  $V$  var aprēķināt pēc formulas

$$V = x(a - 2x)^2. \quad (6.7)$$

Formulas (6.7) eksistences apgabals ir visi reālie skaitļi, t. i.,  $-\infty < x < +\infty$ , jo, lai kādu skaitli liktu  $x$  vietā šajā formulā, tam vienmēr atbildīs noteikta  $V$  vērtība.

Ja ar formulu (6.7) pie  $a = \text{const.}$ \* definēts tilpums  $V$  kā augstuma  $x$  funkcija, tad šīs funkcijas definīcijas apgabals, acīm redzot, ir visi skaitļi intervālā  $0 < x < \frac{a}{2}$ . Jebkurai citai argumenta  $x$  vērtībai, kas neietilpst šajā intervālā, reāla funkcijas  $V$  vērtība neatbilst.

2. piemērs. Funkcija dota ar vienādību  $y = |x^3|$ . Tās definīcijas apgabals ir  $-\infty < x < +\infty$ , jo katram reālam skaitlim, kas ievietots šajā vienādībā, atbilst noteikta  $y$  vērtība. Kā zināms, lai dabūtu vienādību  $y = |x^3|$ , jārikojas šādi:

$$\left. \begin{aligned} y &= x^3, \text{ ja } x \geq 0, \\ y &= -x^3, \text{ ja } x \leq 0. \end{aligned} \right\}$$

Lietojot pēdējās divas vienādības, funkcijas aprēķināšanas formulas dažādos definīcijas apgabala posmos ir dažādas.

3. piemērs. Trīs dažādas formulas

$$f(x) = \cos^2 x + \sin^2 x, \quad f(x) = \sin^2 x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{2}, \text{ un}$$

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x$$

intervālā  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  definē vienu un to pašu funkciju. Tās maiņas apgabalā ir tikai skaitlis 1.

\* Konstantu lielumu bieži apzīmē ar latīņu vārda «constans» saīsinājumu, tādēļ vienlīdzība  $a = \text{const.}$  nozīmē, ka  $a$  ir konstants lielums.

Viena no svarīgākajām XVII gs. matemātiskajām idejām bija saistīt analītiski dotu funkciju  $y=f(x)$  ar tās grafiku. Vienkāršs paņēmienš, kā grafiski intervālā  $a \leq x \leq b$  attēlot analītiski dotu funkciju  $y=f(x)$ , ir šāds: 1) intervālā  $[a, b]$  patvaļīgi izvēlas skaitļus:  $x_0=a, x_1, x_2, \dots, x_n=b$  un aprēķina šiem skaitļiem atbilstošās funkcijas vērtības  $y_0=f(x_0), y_1=f(x_1), y_2=f(x_2), \dots, y_n=f(x_n)$ , 2) ar skaitļu pāriem noteiktos punktus  $M_0(x_0; y_0), M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2), \dots, M_n(x_n; y_n)$  atzīmē koordinātu sistēmā, 3) savieno punktus  $M_0, M_1, \dots, M_n$  ar vienlaidu līniju. Ja iezīmēto punktu ir pietiekami daudz, t. i., tie atrodas pietiekami tuvu cits pie cita un noskaidro līnijas formu, tad novilkta līnija ir funkcijas grafika.

Lai uzzīmētu, piemēram, funkcijas  $y=\frac{x^3}{2}$  grafiku segmentā  $[-2; 2]$ , sastādām vērtību tabulu

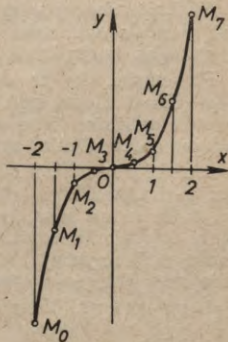
|     |    |                  |                |                 |   |                |               |                 |   |
|-----|----|------------------|----------------|-----------------|---|----------------|---------------|-----------------|---|
| $x$ | -2 | $-\frac{3}{2}$   | -1             | $-\frac{1}{2}$  | 0 | $\frac{1}{2}$  | 1             | $\frac{3}{2}$   | 2 |
| $y$ | -4 | $-\frac{27}{16}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{16}$ | 0 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{27}{16}$ | 4 |

koordinātu sistēmā atzīmējam punktus  $M_0(-2; -4), M_1(-\frac{3}{2}; -\frac{27}{16}), M_2(-1; -\frac{1}{2})$  utt. un savienojam tos ar vienlaidu līniju (56. zīm.).

Ja dažās intervālā  $[a, b]$  vietās līnijas forma nav pietiekami noskaidrota, tad šādās vietās jāizvēlas argumenta  $x$  papildu vērtības, jāaprēķina attiecīgās funkcijas  $y$  vērtības un jāatzīmē tik daudz papildu punktu, lai noskaidrotos funkcijas grafikas forma.

Sis paņēmienš tomēr dod tikai aptuvenu priekšstatu par analītiski definētas funkcijas grafiku, jo nav iespējams uzzīmēt tik daudz punktu, lai bez pētījumiem apgalvotu, ka funkcijas grafikā starp diviem atzīmētiem blakus punktiem nav pārtraukumu vai lūzumu. Tādēļ zīmēšana «pēc vērtību tabulas» ne vienmēr ir visvienkāršākais paņēmienš, kā dabūt analītiski dotas funkcijas grafiku.

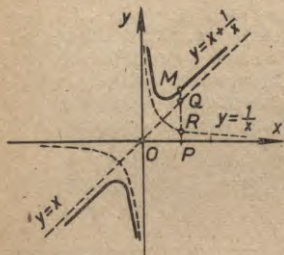
Līnijas (funkcijas grafikas) konstruēšanu var atvieglot, izmantojot līniju ģeometriskās īpašības. Šo darbu var vienkāršot arī ar tādām palīgkonstrukcijām, kurās izmantotas vienkāršākas pazīstamu funkciju grafikas.



56. zīm.



Tā, piemēram, zīmējot funkcijas  $y = \sqrt{4-x^2}$  grafiku, nav lietderīgi sastādīt vērtību tabulu. Zinot, ka vienādojums, ar kuru definēta šī funkcija, ir riņķa līnijas vienādojums, kuras centrs atrodas koordinātu sākumā ar rādiusu 2, atliek apvilkt ap koordinātu sākumu riņķa līniju ar rādiusu 2. Uzzīmētās riņķa līnijas daļa, kas atrodas pirmajā un otrajā kvadrantā, ir intervālā  $-2 \leq x \leq 2$  definētās funkcijas  $y = \sqrt{4-x^2}$  grafika.



57. zīm.

Riņķa līnijas daļa, kas atrodas trešajā un ceturtajā kvadrantā, ir tajā pašā intervālā  $-2 \leq x \leq 2$  definētās funkcijas  $y = -\sqrt{4-x^2}$  grafika.

Lai uzzīmētu, piemēram, funkcijas  $y = x + \frac{1}{x}$  grafiku (57. zīm.), tad vispirms var uzzīmēt divu vienkāršāku palīgfunkciju  $y = x$  un  $y = \frac{1}{x}$  grafikas.

Pirmā no tām (caur koordinātu sākumu novilkta taisne) ir pirmā-trešā kvadranta bisektrise, otrā — vienādsānu hiperbola, kuras asimptotas ir koordinātu asis. Palīgfunkciju grafikas zīmējumā parādītas ar svītrotām līnijām. Pēc tam ar lineāla un cirkuļa palīdzību summējam palīgfunkciju ordinātes, kas atbilst kopīgām abscisām, piemēram,  $PR + RQ = PM$ . Tā dabū pēc patikas daudz funkcijas  $y = x + \frac{1}{x}$  grafikas punktus.

**47. §. Atklātās un apslēptās funkcijas.** Funkciju klasificēšana atklātās un apslēptās funkcijās attiecas tikai uz analītiskā veidā dotām funkcijām.

*Funkciju sauc par atklātu, ja to izsaka formula  $y = f(x)$ , kur  $f(x)$  ir kāda analītiska izteiksme.* Atklātās funkcijas, piemēram, ir funkcijas, kuras izteiktas ar formulām (6.1) ÷ (6.7).

Pieņemsim, ka ir dots kāds vienādojums, piemēram,  $3x + 4y - 12 = 0$ . Liekot šajā vienādojumā  $x$  vietā jebkuru reālu skaitli, vienmēr dabūsim vienu noteiktu  $y$  vērtību. Tādēļ saka, ka šis vienādojums definē  $y$  kā apslēptu  $x$  funkciju visā reālo skaitļu kopā.

**Apslēptas funkcijas definīcija.** Ja pieņemsim, ka  $F(x; y)$  ir analītiska izteiksme, kas saista divus mainīgus lielumus  $x$  un  $y$ , tad saka, ka vienādojums  $F(x; y) = 0$  definē  $y$  kā apslēptu  $x$  funkciju segmentā  $a \leq x \leq b$ , ja katrai  $x$  vērtībai, kas ņemta no šī segmenta, atbilst noteikta  $y$  vērtība, kura pārvērš vienādojumu  $F(x; y) = 0$  identitātē.

**1. piemērs.** Vienādojums

$$x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \quad (6.8)$$

segmentā  $-2 \leq x \leq +2$  definē apslēptā veidā divas  $x$  funkcijas:

$$y = \frac{1}{2} \sqrt{4-x^2} \quad (6.8')$$

un

$$y = -\frac{1}{2} \sqrt{4-x^2}. \quad (6.8'')$$

58. zīmējumā attēlotas šo abu funkciju grafikas.

Jāatzīmē, ka ne katrs vienādojums ar diviem mainīgiem lielumiem definē vienu no šiem lielumiem kā otra funkciju.

2. piemērs. Vienādojums

$$x^2 + 4y^2 + 4 = 0 \quad (6.9)$$

nekādu reālu funkciju nedefinē, jo nav tāda reāla skaitļu pāra, kas, ievietots vienādojumā (6.9) mainīgo lielumu  $x$  un  $y$  vietā, pārvērstu to par identitāti.

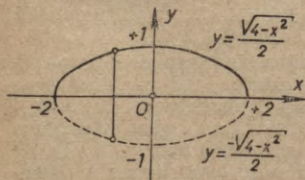
Katru atklātā veidā dotu funkciju  $y=f(x)$  var bez grūtībām pārrakstīt kā apslēptu funkciju  $y-f(x)=0$ , bet ne katru apslēptā veidā dotu funkciju  $F(x; y)=0$  var izteikt atklātā formā  $y=f(x)$ .

3. piemērs. Atklātā veidā dotas funkcijas  $y=3x-\cos x$  pieraksts apslēptā formā ir  $3x-\cos x-y=0$  jeb  $y+\cos x-3x=0$ .

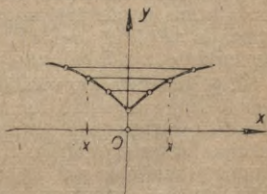
4. piemērs. Vienādojums  $y^3-x+1=0$  definē  $y$  kā apslēptu funkciju visām  $x$  vērtībām. Šo funkciju var izteikt atklātā formā, izrēķinot no dotā vienādojuma  $y$ :

$$y = \sqrt[3]{x-1}.$$

5. piemērs. Vienādojums  $y - \frac{1}{2} \sin y - x = 0$  definē  $y$  kā  $x$  funkciju, bet šo funkciju nevar izteikt atklātā formā.



58. zīm.



59. zīm.

48. §. Pāra un nepāra funkcijas. Segmentā  $-a \leq x \leq +a$  definētu funkciju  $y=f(x)$  sauc par pāra funkciju, ja  $f(x)=f(-x)$ , un par nepāra funkciju, ja  $f(-x)=-f(x)$ .

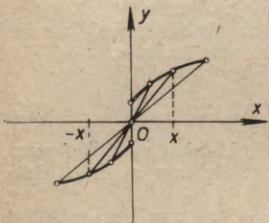
Tā, piemēram,  $y=3x^4-x^2$  ir pāra funkcija, jo  $3 \cdot (-x)^4 - (-x)^2 = 3x^4 - x^2$ . Pāra funkcija ir arī  $\cos x$ , jo  $\cos(-x) = \cos x$ .



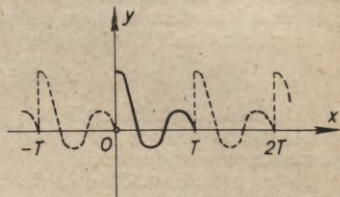
Nepāra funkcija ir, piemēram,  $y=x^3$ , jo  $(-x)^3=-x^3$ . Arī  $\sin x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{ctg} x$  ir nepāra funkcijas, jo  $\sin(-x)=-\sin x$ ,  $\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg} x$  un  $\operatorname{ctg}(-x)=-\operatorname{ctg} x$ .

Pāra funkcijas grafika ir simetriska pret ordinātu asi (59. zīm.), bet nepāra funkcijas grafika — pret koordinātu sākumu (60. zīm.).

Vairums funkciju nav ne pāra, ne nepāra funkcijas, piemēram,  $y=10^x$  vai  $y=x^3+x^2$ .



60. zīm.



61. zīm.

**49. §. Periodiskas funkcijas.** Funkciju  $f(x)$  sauc par periodisku, ja eksistē tāds skaitlis  $c$ , ka visiem  $x$  izpildās vienādība

$$f(x+c)=f(x). \quad (6.10)$$

Vismazāko no pozitīviem skaitļiem  $c=T$ , ar kuru visiem  $x$  izpildās vienādība (6.10), sauc par funkcijas  $f(x)$  *vismazāko periodu* jeb vienkārši par *periodu*. Periodiskas funkcijas, piemēram, ir  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{ctg} x$  u. c.

Periodiskas funkcijas grafika atkārtojas pēc katra intervāla, kura garums ir vienāds ar periodu  $T$ . Tas nozīmē, ka tās grafika segmentā  $nT \leq x \leq (n+1)T$ , kur  $n=\pm 1, \pm 2, \dots$  ir tāda pati kā segmentā  $0 \leq x \leq T$  (61. zīm.).

**50. §. Inversās (apvērstās) funkcijas.** Ja starp diviem mainīgiem lielumiem pastāv funkcionāla sakarība, tad viens no šiem lielumiem ir arguments (neatkarīgi mainīgais lielums), bet otrs — funkcija (atkarīgi mainīgais lielums). Kurš no diviem mainīgiem lielumiem skaitāms par argumentu, kurš par funkciju, tas ir atkarīgs no dotā uzdevuma. Ja dotajā uzdevumā vienam no mainīgiem lielumiem ir argumenta, bet otram funkcijas loma, tad šajā uzdevumā to lomas nav maināmas. Tā, piemēram, nosakot dota lieluma  $x$  logaritmu  $y$ ,  $x$  ir arguments, bet  $y$  — funkcija. Turpretim, ja pēc dota logaritma  $y$  jānosaka lielums  $x$ , tad  $y$  ir arguments, bet  $x$  — funkcija. Risinot dažādus uzdevumus ar vieniem un tiem pašiem lielumiem, bieži lielumam, kuram vienā uzdevumā ir argumenta loma, otrā uzdevumā ir funkcijas loma un,

otrādi, lielums, kas vienā uzdevumā ir funkcija, citā uzdevumā jāskaita par argumentu.

Tā, piemēram, ķermenim brīvi krītot vakuumā, tā noieto ceļu  $s$  atkarībā no laika  $t$  aprēķina pēc formulas  $s = \frac{gt^2}{2}$ , kur  $t$  ir ķermeņa krišanas laiks un  $g$  — gravitācijas konstante. Šajā piemērā  $t$  ir arguments, bet  $s$  — funkcija. Turpretim, ja pēc noieta ceļa garuma jāaprēķina krišanas laiks, tad par argumentu jāuzskata ceļš  $s$ , bet par funkciju — laiks  $t$ . Tad no vienādojuma  $s = \frac{gt^2}{2}$  jāizsaka  $t$  kā  $s$  funkcija, t. i.,  $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$ , ņemot pirms radikāļa plusa zīmi, jo pēc uzdevuma fizikālās dabas  $t$  nevar būt negatīvs lielums. Šādas divas funkcijas sauc par savstarpēji inversām funkcijām.

Savstarpēji inversas funkcijas ir, piemēram,  $y = x^3 + 1$  un  $x = \sqrt[3]{y-1}$ ,  $y = 10^x$  un  $x = \lg y$  utt.

Ja funkcionāla sakarība starp diviem mainīgiem lielumiem definēta ar vienādojumu  $F(x; y) = 0$ , piemēram,

$$2x - y + 4 = 0, \quad (6.11)$$

tad jānorāda, kurš no šiem lielumiem ir funkcija, kurš arguments.

Izsakot no vienādojuma (6.11) lielumu  $y$  kā atklātu  $x$  funkciju, dabūjam

$$y = 2x + 4. \quad (6.11')$$

Izsakot no vienādojuma (6.11) lielumu  $x$  kā atklātu  $y$  funkciju, dabūjam

$$x = \frac{y}{2} - 2. \quad (6.11'')$$

Funkcijas, kuras definētas ar vienādojumiem (6.11') un (6.11''), ir savstarpēji inversas funkcijas.

Vispār, ja vienādojums  $y = f(x)$  definē  $y$  kā atklātu  $x$  funkciju un ja no šī vienādojuma var izteikt  $x$  kā  $y$  funkciju  $x = \varphi(y)$ , kurā definēta visām  $y$  vērtībām funkcijas  $y = f(x)$  maiņas apgabalā, tad  $x = \varphi(y)$  sauc par funkcijas  $y = f(x)$  inverso funkciju.

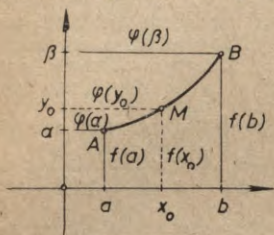
Stingri ņemot, inversā funkcija  $x = \varphi(y)$  var eksistēt arī tad, ja no vienādojuma, kurš definē doto funkciju  $y = f(x)$ , nav iespējams izteikt atklāti  $x = \varphi(y)$ ; jābūt tikai izpildītai prasībai, lai katrai  $y$  vērtībai tā maiņas apgabalā atbilstu viena noteikta  $x$  vērtība.

Ja vienādojumi  $y = f(x)$  un  $x = \varphi(y)$  definē divas savstarpēji inversas funkcijas, tad katra punkta  $M(x_0; y_0)$  koordinātes, kuras apmierina vienu no šiem vienādojumiem, apmierina arī otru vienādojumu, bet katra tāda punkta koordinātes, kas neapmierina vienu no šiem vienādojumiem, neapmierina arī otru. Tas nozīmē,

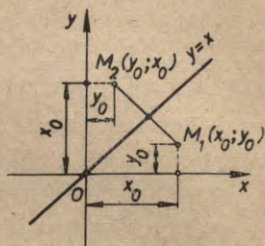


ka divu savstarpēji inversu funkciju  $y=f(x)$  un  $x=\varphi(y)$  grafikas ir viena un tā pati līnija (62. zīm.).

Savstarpēji inversas funkcijas  $y=f(x)$  un  $x=\varphi(y)$  ir divas dažādas funkcijas. So divu dažādo funkciju grafikas zīmējumā sakrīt tādēļ, ka vienā gadījumā funkcijas vērtības attēlotas kā



62. zīm.



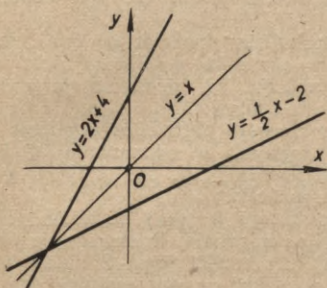
63. zīm.

punktu ordinātes, bet otrā kā abscisas; arī argumenta vērtības vienā gadījumā attēlotas kā punktu abscisas, bet otrā kā ordinātes. Šādā divējādā funkcijas un argumenta vērtību ģeometriskā interpretācija neļauj uzskatāmi salīdzināt divas pēc būtības dažādas funkcijas. Lai šo traucējumu novērstu, vienosimies visos gadījumos argumentu vērtības attēlot kā punktu abscisas un funkcijas vērtības kā ordinātes. Tad, protams, arī savstarpēji inverso funkciju analitiskās definīcijas formulās argumenta apzīmēšanai abos gadījumos jālieto tas burts, ar kuru apzīmēta abscisu ass, bet funkcijas apzīmēšanai — ordinātu ass apzīmējums, t. i., vienādojumu  $y=f(x)$  un  $x=\varphi(y)$  vietā jāraksta vienādojumi  $y=f(x)$  un  $y=\varphi(x)$ .

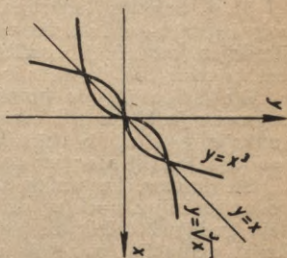
Tā kā katrī divi punkti  $M_1(x_0; y_0)$  un  $M_2(y_0; x_0)$  (63. zīm.), kuru abscisas un ordinātes savstarpēji apmainītas, ir simetriski pret taisni  $y=x$ , tad divu savstarpēji inversu funkciju  $y=f(x)$  un  $y=\varphi(x)$  grafikas ir simetriskas pret šo taisni. Tā, piemēram, no vienādojuma  $y=2x+4$  seko, ka  $x=\frac{1}{2}y-2$ . Tādēļ  $y=2x+4$

un  $y=\frac{1}{2}x-2$  ir divas savstarpēji inversas funkcijas, kuru grafikas simetriskas pret taisni  $y=x$  (64. zīm.). No vienādojuma  $y=x^3$  seko, ka  $x=\sqrt[3]{y}$ . Tādēļ  $y=x^3$  un  $y=\sqrt[3]{x}$  arī ir savstarpēji inversas funkcijas (65. zīm.). Ja, aprēķinot  $x$  no vienādojuma  $y=f(x)$ , dabū vairākas  $x$  vērtības, kas atbilst katrai  $y$  vērtībai tā maiņas apgalbā, tad saskaņā ar definīciju inversā funkcija neeksistē. Tā, piemēram, ja funkcija definēta ar formulu  $y=\frac{x^2}{2}-4$  un tās defi-

nīcijas apgabals ir  $-\infty < x < +\infty$ , tad tai neeksistē inversā funkcija, jo katrai  $y$  vērtībai tā mainās apgalā  $-4 \leq y < +\infty$  atbilst divas  $x$  vērtības:  $x = \sqrt{2y+8}$  un  $x = -\sqrt{2y+8}$ . Turpretim funkcijai, kas definēta ar to pašu formulu  $y = \frac{x^2}{2} - 4$ , bet tās defi-

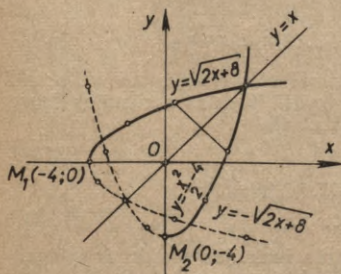


64. zīm.

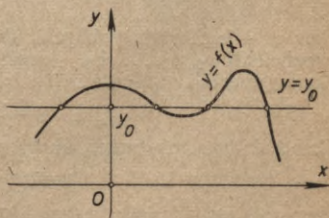


65. zīm.

nīcijas apgabals ir  $0 \leq x < +\infty$ , eksistē inversā funkcija  $y = \sqrt{2x+8}$ . Funkcijai  $y = \frac{x^2}{2} - 4$ , ja tā definēta intervālā  $-\infty < x \leq 0$ , arī eksistē inversā funkcija  $y = -\sqrt{2x+8}$  (66. zīm.). Tāpat funkcijai  $y = \sin x$ , kas definēta intervālā  $(-\infty; +\infty)$  un mainās segmentā  $[-1; 1]$ , nav inversās funkcijas, jo katram  $y$  no segmenta  $[-1; 1]$  atbilst bezgalīgi daudz  $x$  vērtību. Turpretim funkcijai  $y = \sin x$ , kas definēta segmentā  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ , eksistē inversā funkcija  $x = \arcsin y$  resp.  $y = \arcsin x$  (sk. 6. nod. 53. §).



66. zīm.



67. zīm.



Ja vienādojumā  $y=f(x)$  katrai  $y$  vērtībai atbilst vairākas  $x$  vērtības, tad katra abscisu asij paralēla taisne  $y=y_0$  (67. zīm.), kur  $y_0$  ir jebkura funkcijas  $y=f(x)$  vērtība, krusto šīs funkcijas grafiku tik punktos, cik  $x$  vērtību atbilst attiecīgajai  $y$  vērtībai  $y_0$ . Šādos gadījumos dažkārt saka, ka  $x$  ir daudzvērtīga  $y$  funkcija atšķirībā no definīcijas, pēc kuras funkcija var būt tikai *vienvērtīga* (45. §).

**51. §. Saliktās funkcijas.** Apskatīsim funkciju  $y=F(u)$ , kur  $u$  ir argumenta  $x$  funkcija, t. i.,  $u=\varphi(x)$ . Tad  $y=F[\varphi(x)]$  sauc par *funkcijas funkciju* jeb *saliktu funkciju*. Tā, piemēram, ja  $y=u^3$ , bet  $u=\cos x$ , tad  $y=\cos^3 x$  ir salikta funkcija.

**Definīcija.** Ja funkcijas  $u=\varphi(x)$  definīcijas apgabals ir segments  $[a, b]$  un tās maiņas apgabals ir segments  $[\alpha, \beta]$ , bet funkcija  $y=F(u)$  ir definēta segmentā  $[\alpha, \beta]$ , tad funkciju  $y=F[\varphi(x)]=f(x)$  sauc par saliktu funkciju.

Pienēmums, ka visām starpmainīgā  $u=\varphi(x)$  vērtībām jāatrodas funkcijas  $y=F(u)$  definīcijas apgabalā, ir svarīgs, jo pretējā gadījumā izteiksme  $y=f(x)$  var zaudēt jēgu. Saliktās funkcijas definīcijas apgabals vai nu sakrīt ar starpmainīgā definīcijas apgabalu, vai arī ir tā daļa. Tā, piemēram, funkcija  $y=\sqrt{x^2-1}$  ir salikta funkcija, tādēļ to var uzrakstīt formā  $y=\sqrt{u}$ , kur  $u=x^2-1$ . Starpmainīgā  $u$  definīcijas apgabals šajā piemērā ir visa reālo skaitļu ass, bet saliktās funkcijas definīcijas apgabalā neietilpst intervālam  $(-1; 1)$  piederīgie skaitļi.

Saliktās funkcijas var veidot ne vien no divām, bet no jebkura cita noteiktu funkciju skaita, piemēram,  $y=\cos^2 \sqrt{2x-3}$  ir četru šādu funkciju  $y=u^2$ ,  $u=\cos v$ ,  $v=\sqrt{z}$  un  $z=2x-3$  salikta funkcija.

**52. §. Algebriskās funkcijas.** Ja funkcijas vērtības atrašanai tās atklātajā izteiksmē ar argumentu jāizpilda saskaitīšana, reizināšana, dalīšana, kāpināšana un saknes vilkšana, pie tam šo darbību skaits ir galīgs, tad funkcija ir *algebriska*. Vienkāršākā algebriskā funkcija ir *vesela racionāla funkcija* jeb *polinoms*, kura vispārīgais veids ir

$$P(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\dots+a_{m-1}x+a_m, \quad (6.12)$$

kur  $m$  — polinoma pakāpe ir dots naturāls skaitlis vai nulle un koeficienti  $a_0, a_1, \dots, a_m$  — reāli skaitļi. Veselas racionālas funkcijas speciāli gadījumi ir *lineārā funkcija*

$$y=kx+b, \quad (6.13)$$

kur  $k$  un  $b$  ir konstantes, un *kvadrātiskā funkcija*

$$y=ax^2+bx+c, \quad (6.14)$$

kur  $a, b$  un  $c$  ir konstantes. Lineārās funkcijas grafika ir taisne, bet kvadrātiskās — parabola. Šīs funkcijas apskatītas 3., 4. un 5. nodaļā.

Divu polinomu  $P(x)$  un  $Q(x)$  attiecību

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_{n-1}x + b_n}, \quad (6.15)$$

kur  $m$  un  $n$  ir naturāli skaitļi, bet koeficienti  $b_0, b_1, \dots, b_n$  un  $a_0, a_1, \dots, a_m$  ir reāli skaitļi, sauc par *daļveida racionālu funkciju*.

Daļveida racionālas funkcijas speciāls gadījums ir *apgrieztā proporcionalitāte*

$$y = \frac{k}{x}, \quad (6.16)$$

kur  $k$  ir dots skaitlis.

Apgrieztās proporcionalitātes grafika ir vienādsānu hiperbola. Šī funkcija apskatīta 4. un 5. nodaļā.

Funkcijas, kas definētas ar izteiksmēm (6.12) un (6.15), sauc par *racionālām algebriskām funkcijām*. Ja atklātas algebriskas funkcijas izteiksmē sastopama saknes vilkšana un rezultāts nav racionāla funkcija, tad tādu algebrisku funkciju sauc par *iracionālu*. Tā, piemēram,

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x^2 - 3}}$$

ir iracionāla algebriska funkcija.

**53. §. Elementārās pamatfunkcijas.** Par elementārām pamatfunkcijām sauc šādas funkcijas:

pakāpes funkciju  $y = x^a$ ,

eksponentfunkciju  $y = a^x$ ,

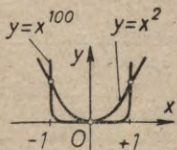
logaritmisko funkciju  $y = \log_a x$ ,

trigonometriskās funkcijas  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $y = \operatorname{ctg} x$ ,

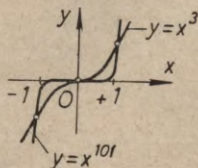
ciklometriskās funkcijas  $y = \arcsin x$ ,  $y = \arccos x$ ,

$y = \operatorname{arctg} x$ ,  $y = \operatorname{arcctg} x$ .

Pakāpes funkcija  $y = x^a$  ar veselu pozitīvu kāpinātāju  $a$  ir vesela racionāla funkcija, kas definēta visām reālām  $x$  vērtībām. Šādu funkciju grafikas sauc par parabolām. Funkcijas ar dažādiem  $a$ , kas ir pāra skaitļi, attēlotas 68. zīm., bet dažādiem  $a$ , kas ir nepāra skaitļi, — 69. zīmējumā.



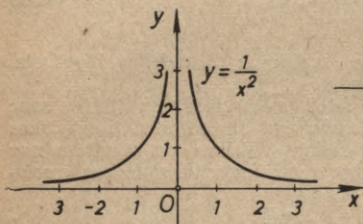
68. zīm.



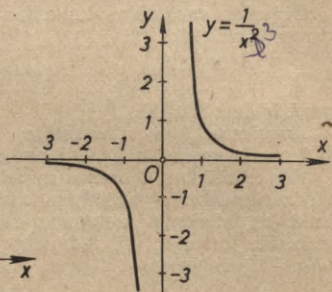
69. zīm.



Ja  $\alpha = -m$  ir vesels negatīvs skaitlis, tad pakāpes funkcija  $y = \frac{1}{x^m}$  ir racionāla funkcija, kas nav definēta vērtībai  $x=0$ . Šādu funkciju grafikas sauc par hiperbolām. Tām ir divi atsevišķi zari, kuri ir simetriski pret ordinātu asi, ja  $m$  ir pāra skaitlis (70. zīm.),



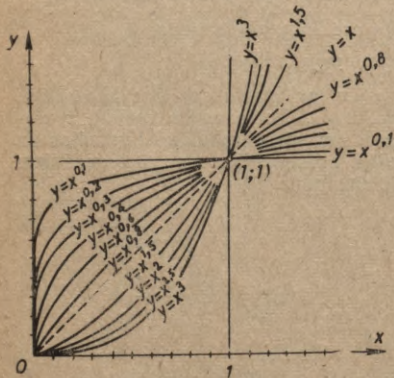
70. zīm.



71. zīm.

un simetriski pret koordinātu sākumu, ja  $m$  ir nepāra skaitlis (71. zīm.).

Ja  $\alpha = \frac{p}{q}$  ir daļskaitlis, tad pakāpes funkcija ir iracionāla algebriska funkcija  $y = \sqrt[q]{x^p}$ , kas atkarībā no daļas  $\frac{p}{q}$  var būt



72. zīm.

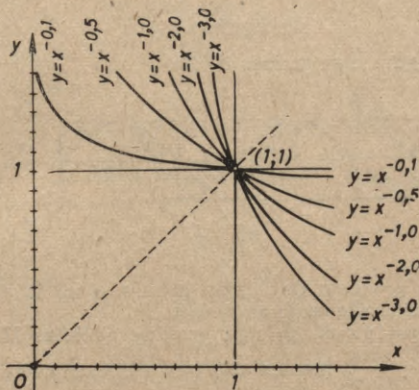
definēta visām reālām argumenta vērtībām (ja  $q$  nepāra skaitlis un  $\frac{p}{q} > 0$ )

vai visām pozitīvām argumenta vērtībām, ieskaitot nulli (ja  $q$  pāra skaitlis

un  $\frac{p}{q} > 0$ ). Ja  $\frac{p}{q} < 0$ , tad vērtībai  $x=0$  funkcija nav definēta.

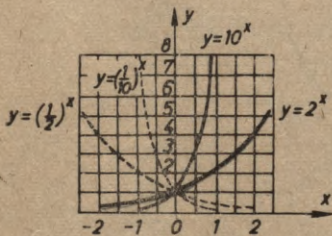
Pakāpes funkcijas grafikas pirmajā kvadrantā ar dažādām kāpinātāja vērtībām attēlotas 72. un 73. zīmējumā.

Eksponentfunkcija  $y=a^x$  ir definēta visām reālām argumenta  $x$  vērtībām. Bāze  $a$  var būt jebkurš konstants pozitīvs skaitlis, izņemot skaitli 1. Eksponentfunkciju grafikas pie dažādām bāzēm attēlotas 74. zīmējumā.

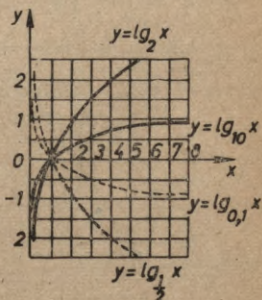


73. zīm.

Logaritmiskā funkcija  $y=\log_a x$  un eksponentfunkcija  $y=a^x$  ir savstarpēji inversas funkcijas, jo skaitļa logaritms ir kāpinātājs, ar kuru jākāpina bāze, lai dabūtu doto skaitli. Tādēļ arī šajā gadījumā bāze  $a$  var būt jebkurš pozitīvs skaitlis, izņemot skaitli 1. Logaritmiskā funkcija ir definēta visām pozitīvām argumenta vērtībām. Šo funkciju grafikas pie dažādām bāzēm attēlotas 75. zīmējumā.



74. zīm.



75. zīm.

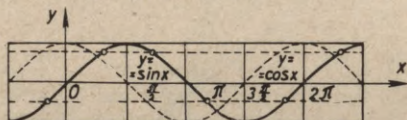


Trigonometrisko funkciju  $y = \sin x$  un  $y = \cos x$  grafikas attēlotas 76. zīmējumā.

Funkcijas  $y = \sin x$  definīcijas apgabals ir  $(-\infty; +\infty)$ ; tās grafiku sauc par *sinusoidu*. Funkcija  $y = \sin x$  ir periodiska funkcija, jo

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x,$$

kur  $k = \pm 1; \pm 2; \dots$  un periods  $T = 2\pi$ .



76. zīm.

Funkcijas  $y = \cos x$  definīcijas apgabals arī ir  $(-\infty; +\infty)$ , un tā ir periodiska funkcija ar periodu  $2\pi$ .

Funkciju  $y = \operatorname{tg} x$  un  $y = \operatorname{ctg} x$  grafikas attēlotas 77. zīmējumā.

Funkcija  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$  nav definēta tām argumenta vērtībām, kurām

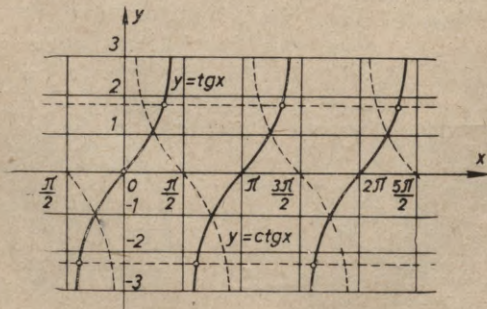
$\cos x = 0$ , t. i.,  $x = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$ ,  $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$  nav definēta tām argumenta vērtībām, kurām  $\sin x = 0$ , t. i.,  $x = 0; \pm \pi; \pm 2\pi, \dots$

$y = \operatorname{tg} x$  un  $y = \operatorname{ctg} x$  ir periodiskas funkcijas ar periodu  $\pi$ , jo

$$\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x; \quad \operatorname{ctg}(x + k\pi) = \operatorname{ctg} x, \text{ kur}$$

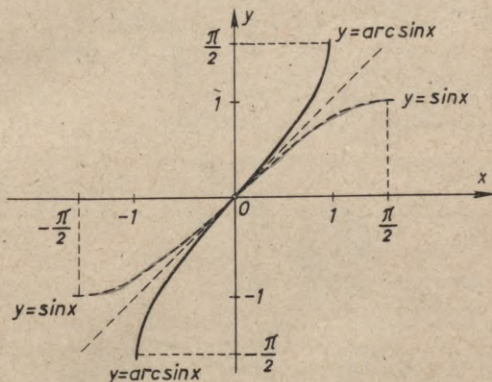
$$k = \pm 1; \pm 2; \dots$$

Novelkot abscisu asij paralēlu taisni, kas krusto trigonometriskās funkcijas grafiku, dabū neierobežoti lielu krustpunktu skaitu (76. un 77. zīm.).



77. zīm.

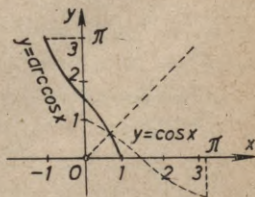
Funkcijai  $y = \sin x$ , ja šo funkciju apskata visā tās definīcijas apgabalā  $(-\infty; +\infty)$ , nav inversās funkcijas. Ierobežojot funkcijas  $y = \sin x$  definīcijas apgabalu ar segmentu  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ , katrai  $y$  vērtībai tā maiņas apgabalā  $-1 \leq y \leq +1$  atbilst viena noteikta  $x$  vērtība. Tādēļ segmentā  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  definētai funkcijai



78. zīm.

$y = \sin x$  eksistē inversā funkcija, kuru apzīmē ar simbolu  $x = \arcsin y$ . Apmainot  $x$  un  $y$  vietām, šo funkciju raksta  $y = \arcsin x$  un lasa «igrek vienāds ar arksinuss  $x$ ». Tās definīcijas apgabals ir  $-1 \leq x \leq +1$  un maiņas apgabals  $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq +\frac{\pi}{2}$  (78. zīm.).

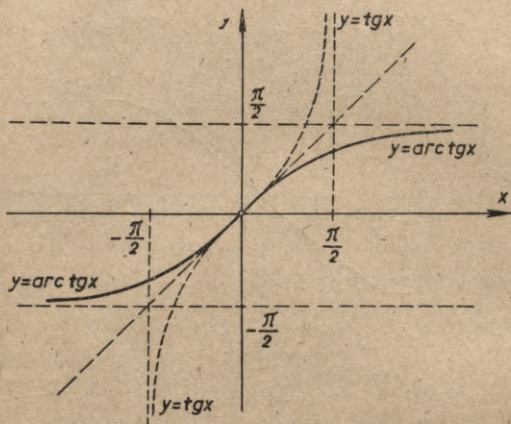
Funkcijai  $y = \cos x$  arī nav inversās funkcijas, ja šo funkciju apskata visā tās definīcijas apgabalā  $(-\infty; +\infty)$ . Ierobežojot funkcijas  $y = \cos x$  definīcijas apgabalu ar segmentu  $0 \leq x \leq \pi$ , katrai  $y$  vērtībai tā maiņas apgabalā  $-1 \leq y \leq +1$  atbilst viena noteikta  $x$  vērtība. Tādēļ segmentā  $[0; \pi]$  definētai funkcijai  $y = \cos x$  eksistē inversā funkcija, kuru apzīmē ar simbolu  $x = \arccos y$ . Apmainot  $x$  ar  $y$ , dabūjam  $y = \arccos x$ . Šīs funkcijas definīcijas apgabals ir  $-1 \leq x \leq +1$  un maiņas apgabals  $0 \leq y \leq \pi$  (79. zīm.).



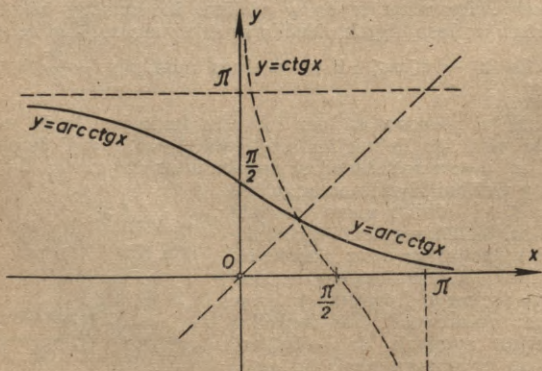
79. zīm.



Ierobežojot funkcijas  $y = \operatorname{tg} x$  definīcijas apgabalu ar intervālu  $-\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}$ , katrai  $y$  vērtībai tā maiņas apgabalā  $-\infty < y < +\infty$  atbilst viena noteikta  $x$  vērtība. Tādēļ intervālā  $(-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2})$  definētai funkcijai  $y = \operatorname{tg} x$  eksistē inversā funkcija, kuru apzīmē ar simbolu  $x = \operatorname{arctg} y$ . Apmainot  $x$  ar  $y$ , dabūjam



80. zīm.



81. zīm.

$y = \arctg x$ . Šīs funkcijas definīcijas apgabals ir  $-\infty < x < +\infty$  un maiņas apgabals  $-\frac{\pi}{2} < y < +\frac{\pi}{2}$  (80. zīm.).

Analogi, ierobežojot funkcijas  $y = \operatorname{ctg} x$  definīcijas apgabalu ar intervālu  $0 < x < \pi$ , katrai  $y$  vērtībai tā maiņas apgabalā  $-\infty < y < +\infty$  atbilst viena noteikta  $x$  vērtība. Tādēļ intervālā  $(0; \pi)$  definētai funkcijai  $y = \operatorname{ctg} x$  eksistē inversā funkcija, kuru apzīmē ar simbolu  $x = \operatorname{arcc} \operatorname{ctg} y$ . Apmainot  $x$  ar  $y$ , dabūjam  $y = \arcc \operatorname{ctg} x$ . Šīs funkcijas definīcijas apgabals ir  $-\infty < x < +\infty$  un maiņas apgabals  $0 < y < \pi$  (81. zīm.).

**54. §. Elementārās funkcijas.** Funkciju sauc par elementāru, ja to var izteikt ar vienu analītisku izteiksmi, kas veidota no elementārām pamatfunkcijām, izpildot ierobežotā skaitā saskaitīšanas, reizināšanas, dalīšanas un saliktu funkciju veidošanas darbības.

Funkciju, kas nav elementāra, sauc par neelementāru. Elementārās funkcijas, piemēram, ir

$$y = \lg(\operatorname{arcc} \operatorname{tg} \sqrt{4-x^2}),$$

$$y = \frac{\cos^3 x - \sin^2 x + 3\sqrt{x}}{\sqrt{4^{2x} + \lg \operatorname{ctg} 5x}}.$$

Visas algebriskās funkcijas ir elementāro funkciju atsevišķs gadījums, jo to analītiskās izteiksmes veidotas tikai no vienas elementārās pamatfunkcijas  $x^a$ , izpildot ar to ierobežota skaita aritmētiskas darbības.

### Vingrinājumi

1. Dota funkcija  $y = \frac{3x-1}{x+3}$ . Atrast  $y|_{x=1}$ .
2. Dota funkcija  $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ . Atrast  $f(2)$ ,  $f(2a)$ ,  $f(x+1)$ ,  $f(x)+1$ ,  $f\left(\frac{1}{x}\right)$ ,  $\frac{1}{f(x)}$ ,  $f(\sqrt{x})$ .
3. Dota funkcija  $f(x) = x^2 - 2x + 3$ . Atrast vienādojuma  $f(x) = f(-1)$  saknes.
4. Noteikt definīcijas apgabalus funkcijām 1)  $y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ , 2)  $y = 1 - \lg x$ , 3)  $y = \lg(x+3)$ , 4)  $y = \sqrt{5-2x}$ , 5)  $y = \frac{1}{x^2-1}$ , 6)  $y = \frac{1}{x^2+1}$ , 7)  $y = \frac{1}{x^3-x}$ .
5. Uzzīmēt funkciju grafikas: 1)  $y = x^3$ , 2)  $y = -\frac{1}{2}x^3$ , 3)  $y = \frac{1}{2}x^3 - x + 1$ .
6. Uzrakstīt  $y$  kā atklātu  $x$  funkciju, kuru definē vienādojumi: 1)  $x^2 + y^2 = 1$ , 2)  $2^{xy} = 5$ , 3)  $\lg x + \lg(y+1) = 4$ .
7. Atrast inversās funkcijas šādām funkcijām: 1)  $y = 1 - 3x$ , 2)  $y = x^2 + 1$ , 3)  $y = 10^{x+1}$ , 4)  $y = \log x^2$ , 5)  $y = 2 \sin 3x$ .
8. Dots  $y = z^3$ ,  $z = \sqrt{x+1}$ ,  $x = a^t$ . Izteikt  $y$  kā saliktu  $t$  funkciju.
9. Uzrakstīt, no kādām funkcijām ir saliktas šādas elementārās funkcijas: 1)  $y = \sqrt{x+1}$ , 2)  $y = \cos^3 2x$ , 3)  $y = \lg \sin x$ , 4)  $y = 3^{(2x+1)^2}$ .



## MAINĪGĀ LIELUMA ROBEŽA

55. §. **Mainīgu lielumu veidi:** augošs, dilstošs, ierobežots mainīgs lielums. Matemātikā, fizikā, tehnikā, kā arī ikdienas dzīvē sastopamies ar maiņas procesiem, kuros mainās viens vai vairāki mainīgi lielumi. Pie tam pats process noris tā, ka katram tā momentam atbilst noteiktas mainīgo lielumu vērtības.

**Piemēri.** 1. Riņķa līnijā, kuras rādiuss ir  $R$ , ievilksim regulārus daudzstūrus. Sākot ar trīsstūri un turpmāk arī citiem daudzstūriem, pakāpeniski dubultosim malu skaitu. Šajā procesā mainīsies šādi daudzstūra lielumi: malu skaits, iekšējais un ārējais leņķis, malu garums, perimetrs, laukums u. c. lielumi.

2. Automašīna kustības procesā mainīgi lielumi ir automašīna attālums no izejas punkta (garāžas), ātrums, degvielas daudzums rezervuārā, ūdens temperatūra radiatorā utt.

Ja mainīgajam lielumam ir fizikāls raksturs un tas dabiski ir saistīts ar laiku (kā piemērā ar automobili), tad visas šāda mainīgā lieluma vērtības ir sakārtotas tādā noteiktā secībā, ka par jebkurām divām mainīgā lieluma vērtībām var pateikt, kura no tām ir *iepriekšējā* un kura *sekojošā*. Seit iepriekšējā ir tā vērtība, kura atbilst agrākam laika momentam, bet sekojošā ir tā vērtība, kura atbilst vēlākam laika momentam.

Arī gadījumā, ja mainīgajam lielumam ir abstrakts, matemātisks raksturs (tas nav saistīts ar laiku), šādu sakārtojumu var izdarīt. Tā 1. piemērā iepriekšējās ir tās mainīgo lielumu vērtības, kas atbilst daudzstūrim ar mazāku malu skaitu, bet sekojošās ir tās vērtības, kas atbilst daudzstūrim ar lielāku malu skaitu. Šajā gadījumā mainīgā lieluma vērtības ir sanumurējamas un sakārtojamas skaitļu virknē. Par šādu mainīgo lielumu saka, ka tas mainās pa kādas skaitļu virknes locekļiem atšķirībā no 2. piemēra, kur mainīgie lielumi mainās *nepārtraukti*, pieņemot *visas* starpvērtības starp jebkurām divām noteiktām šo mainīgo lielumu vērtībām.

Pieņemsim, ka turpmāk visiem apskatāmajiem mainīgajiem lielumiem vērtības ir sakārtotas, kā norādīts iepriekšējos piemēros.

1. definīcija. *Mainīgo lielumu sauc par monotoni augošu (dilstošu), ja katra mainīgā lieluma sekojošā vērtība ir lielāka (mazāka) par iepriekšējo.*

Par tādu mainīgo lielumu saka, ka tas *mainās vienā virzienā*.

**Piemēri.** 1. Palielinot regulāra ievilkta daudzstūra malu skaitu, tā perimetrs, laukums un iekšējais leņķis monotoni aug, bet malu garums un ārējais leņķis monotoni dilst.

2. Mainīgais lielums  $x = \sin \alpha$ , leņķim  $\alpha$  augot, nemainās monotoni; tas mainās monotoni tikai atsevišķos lieluma  $\alpha$  maiņas

intervālos [piem., intervālā  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  monotoni aug, bet intervālā  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$  monotoni dilst].

2. definīcija. *Mainīgo lielumu  $x$  sauc par ierobežotu, ja maiņas procesā tā absolūtā vērtība nekad nepārsniedz kādu pozitīvu skaitli  $M$ , t. i.,  $|x| \leq M$ .*

Piemēri. 1. Mainīgais lielums  $x = (-1)^n$ , kur  $n$  pieņem pēc kārtas visas dabiskās skaitļu virknes 1, 2, 3, 4, ... vērtības, ir ierobežots, jo  $|x| \leq 1$ .

2. Mainīgais lielums  $x = \frac{2n-1}{n}$  jeb  $x = 2 - \frac{1}{n}$ , kur  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ , ir ierobežots, jo tas pieņem pēc kārtas vērtības  $1; 1\frac{1}{2}; 1\frac{2}{3}; 1\frac{3}{4}; 1\frac{4}{5}; \dots$ , t. i.,  $|x| < 2$ .

3. Mainīgais lielums  $x = \sin \alpha$  ir ierobežots lielums, jo  $|x| = |\sin \alpha| \leq 1$ .

**56. §. Bezgalīgi mazi lielumi un to pamatīpašības.** Ļoti svarīgs mainīgā lieluma veids ir bezgalīgi mazi lielumi. Ne velti matemātisko analīzi agrāk mēdza saukt par «bezgalīgi mazo rēķiniem».

Ievadam apskatīsim šādus piemērus.

1. Siltā istabā ienests ledus gabals sāk kust, un tā tilpums arvien vairāk samazinās. Kušanas procesā ledus gabala tilpums kļūst un arī paliek mazāks par katru iedomājamu (lai arī cik mazu) tilpumu jeb, kā mēdz teikt, minētais tilpums tiecas uz nulli.

2. Apskatīsim mainīgo lielumu  $x = \frac{1}{n}$ , kur  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

Lielums  $x$  šajā maiņas procesā pieņem vērtības  $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots$  Tātad  $x$  arvien vairāk samazinās (tas ir monotoni dilstošs lielums). Lai cik mazu pozitīvu skaitli, piem., 0,0001, mēs iedomātos, maiņas procesā agri vai vēlu iestāsies tāds moments, sākot ar kuru mainīgā lieluma sekojošās vērtības kļūs un tālākā maiņas gaitā arī paliks mazākas par šo iedomāto skaitli.

3. Apskatīsim mainīgo lielumu  $x = \frac{(-1)^n}{n}$ , kur  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

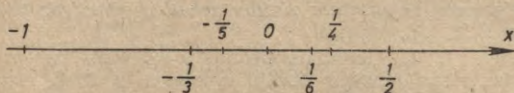
Tas pieņem maiņas procesā vērtības  $-1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \dots$

Nemot  $x$  vērtību par punkta abscisu un attēlojot maiņas procesu ar kustīgu punktu uz skaitļu ass (82. zīm.), redzam, ka šis punkts svārstās ap sākuma punktu, pie tam tā attālums no



sākuma punkta  $|x| = \frac{1}{n}$  maiņas procesā kļūst un turpmāk arī paliek pēc patikas mazs.

Izvēlēsimies uz skaitļu ass kādu intervālu  $(-\varepsilon; \varepsilon)$  ar centru punktā  $O$  un garumu  $2\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ). Ja ņemam, piem.,  $\varepsilon = 1$ , tad visas



82. zīm.

mainīgā lieluma  $x$  vērtības, sākot ar otro, atradīsies intervāla  $(-1; 1)$  iekšpusē. Ja ņemsim  $\varepsilon = 0,1$ , tad dažas mainīgā lieluma vērtības, proti  $-1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{10}$ , gan attēlosies ārpus inter-

vāla  $(-0,1; 0,1)$ , bet visas pārējās vērtības  $-\frac{1}{11}; \frac{1}{12}; -\frac{1}{13}; \dots$

jau attēlosies šī intervāla iekšpusē. Tālāk, pieņemot, ka  $\varepsilon = 0,001$ , pirmās 1000 vērtības attēlojas intervāla  $(-0,001; 0,001)$  ārpusē, bet visas pārējās, sākot ar 1001, izrādīsies šī intervāla iekšpusē.

Tātad, lai cik mazu mēs izvēlētos pozitīvu skaitli  $\varepsilon$ , vienmēr tikai galīgs skaits punktu atradīsies intervāla  $(-\varepsilon; \varepsilon)$  ārpusē, bet visi pārējie (un tādu ir bezgalīgi daudz!) atradīsies tā iekšpusē.

**Definīcija.** *Mainīgo lielumu  $x$  sauc par bezgalīgi mazu lielumu (jeb saka, ka tas tiecas uz nulli), ja dotajā maiņas procesā tā absolūtā vērtība  $|x|$  kļūst un tālākā mainīšanās gaitā arī paliek mazāka par jebkuru iepriekš dotu pozitīvu skaitli  $\varepsilon$ , lai arī cik mazu mēs šo  $\varepsilon$  izvēlētos.*

Sajā gadījumā raksta, ka  $x \rightarrow 0$  ( $x$  tiecas uz nulli).

Bezgalīgi maza lieluma definīcijā uzsvērts, ka jāiestājas momentam, pēc kura tā absolūtā vērtība paliks mazāka par jebkuru iepriekš uzdotu (nemainīgu) skaitli  $\varepsilon$ . Tā, piemēram, lielums  $x = 1;$

$\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{3}; 1; \frac{1}{4}; \dots$  nav bezgalīgi mazs lielums, jo maiņas procesā tas brīžiem gan kļūst mazāks par katru iepriekš dotu pozitīvu skaitli, bet tālākajā mainīšanās gaitā *nepaliek* mazāks par šo

skaitli. Tāpat lielums  $x = \frac{n+1}{100n}$ , t. i.,  $x = \frac{2}{100}; \frac{3}{200}; \frac{4}{300}; \frac{5}{400}; \dots$

nav bezgalīgi mazs lielums, jo  $x = \frac{n+1}{100n} = \frac{n}{100n} + \frac{1}{100n} = \frac{1}{100} +$

$+\frac{1}{100n} > \frac{1}{100}$  un tātad maiņas procesā nekad nekļūst mazāks par  $\frac{1}{100}$ .

Svarīgi atzīmēt, ka bezgalīgi mazs lielums pēc būtības ir *maiņīgs lielums*. Nevienu skaitli, lai cik mazs tas būtu, nevar uzskatīt par bezgalīgi mazu lielumu, jo vienmēr varam izvēlēties tādu  $\epsilon$ , kas ir mazāks par šo skaitli. Izņēmums ir skaitlis *nulle*, kuru mēs uzskatīsim par bezgalīgi mazu lielumu, jo nulle ir mazāka par katru iepriekš dotu pozitīvu skaitli.

Bezgalīgi maza lieluma jēdzienu nedrīkst sajaukt ar ikdienā lietoto *ļoti maza lieluma* jēdzienu. Tā, piemēram, 1 cm garš nogrieznis, salīdzinot ar attālumu no Zemes līdz Saulei ir *ļoti mazs* lielums, bet ne bezgalīgi mazs (jau tāpēc vien, ka tas ir pastāvīgs lielums). Turpretim, ja mēs konstatētu, ka attālums starp kādām divām stāvvaižgnēm neierobežoti samazinās, tad šo attālumu varam uzskatīt par bezgalīgi mazu lielumu, lai arī šobrīd tas mērijams gaismas gados. Stingri ievērosim, ka matemātiskais termins «bezgalīgi mazs lielums» nav domāts mainīgā lieluma skaitliskās vērtības raksturošanai, bet gan mainīgā lieluma *maiņas rakstura* apzīmēšanai.

Apskatīsim dažas bezgalīgi mazu lielumu īpašības.

1. *Divu bezgalīgi mazu lielumu summa (starpība) ir bezgalīgi mazs lielums.*

Tiešām, ja katrs saskaitāmais tiecas uz nulli, tad arī summa tiecas uz nulli. Tā, piemēram, ja

$$\alpha = 10; 1; 0,1; 0,01; 0,001; \dots$$

$$\beta = 110; 11; 1,1; 0,11; 0,011; \dots$$

tad

$$\alpha + \beta = 120; 12; 1,2; 0,12; 0,012; \dots$$

ir bezgalīgi mazs lielums.\*

Arī divu bezgalīgi mazu lielumu starpība ir bezgalīgi mazs lielums, jo starpību varam vienmēr uzskatīt par summu:

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta).$$

Arī trīs, desmit un vispār galīga skaita bezgalīgi mazu lielumu summa vai starpība (īsāk: algebriska summa) ir atkal bezgalīgi mazs lielums. Ja turpretim dotajā maiņas procesā saskaitāmo bezgalīgi mazu lielumu skaits neierobežoti aug, tad summa var arī nebūt bezgalīgi maza. Piemēram (ja ir  $n$  vienādi saskaitāmie):

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n};$$

$$\frac{2}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{2}{n} = n \cdot \frac{2}{n} = 2;$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

\* Te iepriekš jāvienojas, ka par divu kādā maiņas procesā līdzdarbojošos bezgalīgi mazo lielumu summu sauksim mainīgo lielumu, ko dabū, saskaitot abu doto mainīgo lielumu atbilstošās vērtības.



Te pirmā summa ir bezgalīgi mazs lielums (kad  $n=1, 2, 3, 4, \dots$ ), otrā summa ir pastāvīgs lielums, bet trešā summa neierobežoti aug. Tāpat, neierobežoti daļot patvaļīgu taisnes nogriezni  $AB$  2, 4, 8, 16 utt. vienādās daļās, dalīšanas rezultātā iegūto nogriežņu lielums būs bezgalīgi mazs lielums, bet to summa tāda nebūs, jo tā vienmēr paliks vienāda ar nogriezni  $AB$ .

2. *Bezgalīgi maza lieluma reizinājums ar ierobežotu lielumu ir bezgalīgi mazs lielums.*

Tā, piemēram, ja bezgalīgi mazais lielums pieņem vērtības 1; 0,1; 0,01; 0,001; ..., bet ierobežotais lielums pastāvīgi paliek mazāks pēc absolūtās vērtības par 1000, tad reizinājumi (pēc kārtas) būs (pēc absolūtās vērtības) mazāki par 1000; 100; 10; 1; 0,1; 0,01; ..., t. i., bezgalīgi mazā lieluma reizinājums ar ierobežotu lielumu ir bezgalīgi mazs lielums.

No šīs īpašības izriet, ka pastāvīga un bezgalīgi maza lieluma reizinājums ir bezgalīgi mazs lielums un ka divu (vai vairāku, noteiktā skaitā ņemtu) bezgalīgi mazu lielumu reizinājums ir bezgalīgi mazs lielums (pastāvīgs un bezgalīgi mazs lielums abi ir ierobežoti).

Atzīmēsim vēl, ka divu bezgalīgi mazu lielumu *dalījums* var arī nebūt bezgalīgi mazs lielums. Piemēram, ja  $\alpha = \frac{1}{n}$ ,  $\beta = \frac{1}{n^2}$ ,

$\gamma = \frac{2}{n}$ , kur  $n=1, 2, 3, 4, \dots$ , tad  $\alpha$ ,  $\beta$  un  $\gamma$  ir bezgalīgi mazi lie-

lumi, bet  $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{n}$  ir bezgalīgi mazs lielums, kamēr  $\frac{\gamma}{\alpha} = 2$  ir pa-

stāvīgs (tātad ierobežots) lielums  $\neq 0$ , turpretim  $\frac{\alpha}{\beta} = n$  neiero-

bežoti aug (sk. arī 63. §.).

57. §. **Bezgalīgi lieli lielumi, to pamatīpašības.** Definīcija. *Mainīgu lielumu  $x$  sauc par bezgalīgi lielu lielumu, ja tas dotajā maiņas procesā pēc absolūtās vērtības neierobežoti aug, precizāk, ja tā absolūtā vērtība  $|x|$  maiņas procesā kļūst un, tālāk mainoties, arī paliek lielāka par katru iepriekš dotu pozitīvu skaitli  $M$ , lai cik lielu mēs to izvēlētos.*

Sajā gadījumā raksta, ka  $x \rightarrow \infty$  ( $x$  tiecas uz bezgalību).

Piemēri. 1)  $x=n$ ; 2)  $x=-n$ ; 3)  $x=(-1)^n \cdot n$  ( $n=1, 2, 3, 4, \dots$ ). Pirmajā gadījumā  $x$  pieņem tikai pozitīvas vērtības, otrajā gadījumā tikai negatīvas vērtības, bet trešajā gadījumā gan pozitīvas, gan negatīvas vērtības. Maiņas procesā visos trijos gadījumos  $|x|$  kļūst un tālākā mainīšanās gaitā arī paliek lielāks par 10; 100; 1000 utt., t. i., lielāks par katru iepriekš dotu pozitīvu skaitli  $M$ .

Ņemot mainīgā lieluma  $x$  vērtību par punkta abscisu, dabūsim kustīgu punktu uz skaitļu ass, kas pirmajā gadījumā attālinās no sākuma punkta pa labi, otrajā gadījumā pa kreisi, bet trešajā gadījumā svārstās ar arvien pieaugošu amplitūdu ap sākuma

punktu. Lai kādu mēs izvēlētos pozitīvu skaitli  $M$ , agri vai vēlū maiņas procesā iestāsies tāds moments, sākot ar kuru mainīgais punkts nonāks intervāla  $(-M; M)$  ārpusē un tālākā mainīšanās gaitā tur arī paliks;

4) mainīgais lielums  $x = [1 + (-1)^n] \cdot n$  ( $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ ), t. i., lielums, kas pieņem vērtības 0; 4; 0; 8; 0; 12; 0; 16; 0; ... ir gan neierobežots, bet nav bezgalīgi liels, jo maiņas procesā vienmēr tas pieņem arī vērtību nulli, tātad *nepaliek* lielāks par katru pozitīvu skaitli  $M$ .

Bezgalīgi liela lieluma jēdzienu nedrīkst sajaukt ar ļoti liela lieluma jēdzienu. Pirmais norāda vienīgi mainīgā lieluma maiņas raksturu, bet ne tā skaitlisko vērtību.

Ja bezgalīgi lielais lielums  $x$  maiņas procesā, sākot ar kādu momentu, pieņem tikai pozitīvas vērtības (kā 1. piem.), tad saka, ka  $x$  tiecas uz plus bezgalību, un raksta  $x \rightarrow +\infty$ , bet, ja tas pieņem tikai negatīvas vērtības (kā 2. piem.), tad saka, ka  $x$  tiecas uz mīnus bezgalību, un raksta  $x \rightarrow -\infty$ . Ja nav svarīgi, kāda zīme ir bezgalīgi lielam lielumam, tad raksta vienkārši  $x \rightarrow \infty$ .

Atzīmēsim dažas vienkāršas bezgalīgi lielu lielumu īpašības.

1. *Bezgalīgi liela lieluma apgriezts lielums ir bezgalīgi mazs lielums, bet bezgalīgi maza lieluma apgriezts lielums ir bezgalīgi liels lielums.*

To mēdz dažreiz nosacīti pierakstīt tā:  $\frac{1}{\infty} = 0$ ;  $\frac{1}{0} = \infty$ . Šādi pieraksti ir pareizi jāsaprot. Tā, piemēram, pirmais pieraksts nozīmē, ka, ja vienādībā  $\frac{1}{x} = a$  lielums  $x$  neierobežoti aug, tad šajā pašā procesā lielums  $a$  neierobežoti tuvojas nullei.

Analogi atšifrējamas visas formulas, kas satur bezgalības simbolu. Tā formula  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \pm \infty$  ir saīsināts nosacīts pieraksts šādam faktam: maiņas procesā, kad lielums  $\varphi$  neierobežoti tuvojas  $\frac{\pi}{2}$ , lielums  $x = \operatorname{tg} \varphi$  pēc absolūtās vērtības neierobežoti aug, t. i., ir bezgalīgi liels lielums. Šādā veidā bieži ar simbolu  $\infty$  var izpildīt tādas pašas darbības kā ar parastiem skaitļiem, kaut gan, protams,  $\infty$  nav skaitlis, bet ir simbols bezgalīgi liela lieluma apzīmēšanai, pie tam dažādos piemēros tas var apzīmēt dažādus bezgalīgi lielus lielumus.

2. *Bezgalīgi liela lieluma un ierobežota lieluma summa ir bezgalīgi liels lielums:  $x + \infty = \infty$ , ja  $|x| < M$ .*

Arī divu vienādas zīmes bezgalīgi lielu lielumu summa ir bezgalīgi liels lielums. Turpretim divu dažādu zīmju bezgalīgi lielu lielumu summa var arī nebūt bezgalīgi liels lielums. To pieraksta šādi:  $\infty + \infty = \infty$ ;  $\infty - \infty$  ir *nenoteiktība*. Tātad ar simbolu  $\infty$  ne vienmēr var rīkoties kā ar skaitli; ne vienmēr  $\infty - \infty = 0$ , jo  $\infty - \infty$  ir tikai saīsināts pieraksts starpībai  $x - y$ ,



kur  $x$  un  $y$  ir bezgalīgi lieli lielumi, vispārīgā gadījumā dažādi. Tādēļ katrā atsevišķā gadījumā šī starpība var būt dažādas dabas mainīgs lielums — galīgs, bezgalīgi mazs vai bezgalīgi liels.

3. Divu bezgalīgi lielu lielumu reizinājums ir bezgalīgi liels lielums:  $\infty \cdot \infty = \infty$ . Vēl vairāk: bezgalīgi liela lieluma reizinājums ar ierobežotu lielumu, kurš netiecas uz nulli, ir bezgalīgi liels lielums. Līdz ar to arī bezgalīgi liela lieluma reizinājums ar skaitli, kurš nav nulle, ir bezgalīgi liels lielums.

Turpretim bezgalīgi liela lieluma reizinājums ar bezgalīgi mazu lielumu ir nenoteiktība. Tiešām, ja  $x=n$ ;  $y=\frac{1}{n}$ ;  $z=\frac{1}{n^2}$ ;

$u=\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$  ( $n=1, 2, 3, 4, \dots$ ), tad  $x \cdot y=1$  (galīgs lielums),  $x \cdot z=\frac{1}{n}$

(bezgalīgi mazs lielums), bet  $x \cdot u=\sqrt[n]{n}$  (bezgalīgi liels lielums).

58. §. Lielumi, kas tiecas uz robežu. Vispirms apskatīsim dažus piemērus.

1. Dots taisnleņķa trijstūris  $ABC$  (83. zīm.). Iedomāsimies, ka tā virsotne  $B$  slīd pa perpendikulu  $CB$  uz leju, neierobežoti tuvojoties taisnā leņķa virsotnei  $C$ . Katetes  $CB$  garums šajā maiņas procesā ir bezgalīgi mazs lielums. Apskatīsim šajā procesā hipotenūzas  $AB$  garuma maiņu.

Tā kā  $0 < AB - AC < CB$  un  $CB \rightarrow 0$ , tad arī  $AB - AC \rightarrow 0$ , t. i., starpība starp hipotenūzas  $AB$  un katetes  $AC$  garumiem ir bezgalīgi mazs lielums.

2. Regulāra daudzstūra iekšējo leņķi nosaka pēc formulas

$$\varphi = \frac{2d(n-2)}{n}.$$

Liksim  $n$  neierobežoti palielināties. Vispirms pārrakstīsim  $\varphi$  šādi:

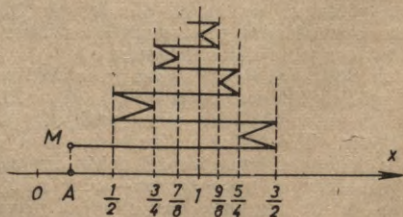
$$\varphi = 2d - \frac{4d}{n}$$

un apskatīsim starpību

$$2d - \varphi = \frac{4d}{n}.$$



83. zīm.



84. zīm.

Lielums  $2d$  ir pastāvīgs,  $n$  bezgalīgi liels lielums, bet  $\frac{4d}{n} = 4d \frac{1}{n}$  ir bezgalīgi mazs lielums (kā pastāvīga lieluma reizinājums ar bezgalīgi mazu lielumu  $\frac{1}{n}$ ). Starpība  $2d - \varphi$  tātad ir bezgalīgi mazs lielums.

3. Punkts  $M$  kustas plaknē pa lauztu līniju (84. zīm.). Ap-skatīsim, kā mainās punkta  $M$  abscisa  $x$ , kas ir reizē arī punkta  $M$  projekcijas  $A$  abscisa. Punkts  $A$  kustas vispirms pa labi līdz punktam  $\frac{3}{2}$ , tad pa kreisi līdz punktam  $\frac{5}{4}$ , tad atkal pa labi līdz punktam  $\frac{3}{2}$ , pa kreisi līdz punktam  $\frac{1}{2}$ , pa labi līdz punktam  $\frac{3}{4}$  utt. No zīmējuma redzams, ka attālums starp punktiem  $A$  un  $l$  un arī starpība  $x - l$  tiecas uz nulli.

**Definīcija.** Skaitli  $a$  sauc par mainīga lieluma  $x$  robežu, ja starpība  $x - a$  dotajā maiņas procesā ir bezgalīgi mazs lielums.

Šajā gadījumā raksta, ka  $x \rightarrow a$  jeb  $\lim x = a$  (lasa: robeža no  $x$  ir vienāda ar  $a$ ;  $\lim$  izveidojies no latīņu vārda «limes», kas nozīmē robežu).

Saskaņā ar šo definīciju bezgalīgi maza lieluma robeža ir nulle. Bezgalīgi lieli lielumi turpretim ne uz kādu robežu netiecas, kaut arī te mēdz lietot pierakstu  $\lim x = \infty$ .

Mainīgs lielums var dažādi tiekties uz robežu. Tā 1. piemērā hipotenūzas  $AB$  garums tiecas uz robežu (uz katetes  $AC$  garumu), palikdams vienmēr lielāks par šo robežu. 2. piemērā  $\varphi$  tiecas uz robežu  $2d$ , palikdams vienmēr mazāks par to. Turpretim 3. piemērā mainīgais lielums  $x$  maiņas procesā kļūst te lielāks, te mazāks par savu robežu  $l$ , pie tam kļūdamas bezgalīgi daudz reizi arī vienāds ar šo robežu.

Vispār, ja mainīgais lielums  $x$  tiecas uz robežu  $a$ , palikdams vienmēr lielāks par šo robežu, tad saka, ka  $x$  tiecas uz  $a$  no labās puses (padomāt par lielumu  $x$  un  $a$  attēliem uz skaitļu ass), un to apzīmē šādi:  $x \rightarrow a + 0$ . Analogi, ja  $x$  tiecas uz  $a$ , palikdams vienmēr mazāks par to, tad saka, ka  $x$  tiecas uz  $a$  no kreisās puses, un raksta  $x \rightarrow a - 0$ .

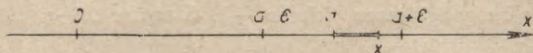
Ievērojot bezgalīgi maza lieluma definīciju, varam dot arī šādu mainīgā lieluma robežas definīciju: saka, ka mainīgais lielums  $x$  tiecas uz robežu  $a$ , ja dotajā maiņas procesā starpības  $x - a$  absolūtā vērtība  $|x - a|$  kļūst un tālākā mainīšanās gaitā arī paliek mazāka par jebkuru iepriekš dotu pozitīvu skaitli  $\epsilon$ .

Tā kā  $|x - a|$  ģeometriski nozīmē garumu skaitļu ass nogrieznim starp punktiem  $x$  un  $a$ , tad definīcija apgalvo, ka maiņas



procesā  $x$  nonāks intervāla  $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$  iekšpusē un turpmākā mainīšanās gaitā tur arī paliks (85. zīm.).

Minēsim dažus secinājumus, kas izriet no robežas definīcijas.



85. zīm.

1. Mainīgais lielums nevar tiekties uz divām dažādām robežām, jo mainīgais punkts nevar reizē atrasties divu dažādu intervālu iekšpusē, kas viens otru nesedz.

2. Ne katram mainīgajam lielumam ir robeža. Piemēram, mainīgais lielums  $x = \sin a$ , leņķim  $a$  neierobežoti palielinoties, svārstās starp  $-1$  un  $+1$  un ne uz kādu robežu netiecas.

3. Pastāvīga lieluma  $c$  robeža ir pats šis lielums, jo starpība  $c - c = 0$  ir bezgalīgi mazs lielums.

4. Ja  $x \rightarrow a$ , tad  $x - a = a$  ir bezgalīgi mazs lielums, tādēļ var rakstīt

$$x = a + a, \quad (7.1)$$

t. i., katru mainīgo lielumu, kas tiecas uz robežu, var uzrakstīt šīs robežas  $a$  un bezgalīgi maza lieluma  $a$  summas veidā. Arī otrādi: ja mainīgais lielums  $x$  ir uzrakstāms šādas summas veidā, tad  $a$  ir mainīgā lieluma  $x$  robeža.

Apskatīsim vēl dažus piemērus:

1)  $x = \frac{2n+5}{n}$ ;  $n=1, 2, 3, 4, \dots$  Maiņas procesā  $x$  pieņem šādas vērtības:

$$7; 4\frac{1}{2}; 3\frac{2}{3}; 3\frac{1}{4}; 3; 2\frac{5}{6}; 2\frac{5}{7}; 2\frac{5}{8}; 2\frac{5}{9}; \dots$$

Intuitīvi secinām, ka  $\lim x = 2$ . Pierādīsim, ka tas tiešām tā ir. Tādēļ konstatēsim, ka  $x - 2$  ir bezgalīgi mazs lielums. Tiešām,

$$x - 2 = \frac{2n+5}{n} - 2 = \frac{2n+5-2n}{n} = \frac{5}{n} = 5 \cdot \frac{1}{n},$$

bet pastāvīga lieluma  $5$  reizinājums ar bezgalīgi mazu lielumu  $\frac{1}{n}$  ir bezgalīgi mazs lielums.

Pie tā paša slēdziena nonākam, ja ievērojam, ka

$$x = \frac{2n+5}{n} = \frac{2n}{n} + \frac{5}{n} = 2 + \frac{5}{n}.$$

un, tā kā  $\frac{5}{n}$  ir bezgalīgi mazs lielums, tad  $\lim x=2$  (sk. 4. secinājumu no robežas definīcijas).

Šajā piemērā, starp citu,  $x$  tiecas uz robežu no labās puses, t. i., paliekot par to visu laiku lielāks. To pieraksta tā:  $x \rightarrow 2+0$ ;

2) mainīgais lielums  $x$  pieņem pēc kārtas šādas vērtības:

$$0,3; 0,33; 0,333; 0,3333; \dots$$

Pierādīsim, ka tā robeža ir  $\frac{1}{3}$ . Tiešām, tā kā

$$x - \frac{1}{3} = \frac{3}{10} - \frac{1}{3}; \frac{33}{100} - \frac{1}{3}; \frac{333}{1000} - \frac{1}{3}; \dots$$

jeb

$$x - \frac{1}{3} = -\frac{1}{30}; -\frac{1}{300}; -\frac{1}{3000}; \dots,$$

tad  $x - \frac{1}{3}$  ir bezgalīgi mazs lielums, t. i.,  $\lim x = \frac{1}{3}$ ;

$$3) x = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right); n=1, 2, 3, 4, \dots$$

Te  $x$  maiņas procesā pieņem vērtības

$$0; \frac{1}{2}; -\frac{2}{3}; \frac{3}{4}; -\frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \dots$$

Mainīgais lielums svārstās ap sākuma punktu, te tuvojoties 1, te atkal tuvojoties  $-1$ . Mainīgajam lielumam tādēļ robeža *neeksistē*;

$$4) x = \frac{101n+1}{100n}; n=1, 2, 3, 4, \dots$$

Mainīgais lielums pieņem vērtības

$$1\frac{2}{100}; 1\frac{3}{200}; 1\frac{4}{300}; 1\frac{5}{400}; 1\frac{6}{500}; 1\frac{7}{600}; 1\frac{8}{700}; \dots$$

Varētu likties, ka  $\lim x=1$ . Tas tomēr ir aplami, jo

$$\begin{aligned} x-1 &= \frac{101n+1}{100n} - 1 = \frac{101n+1-100n}{100n} = \frac{n+1}{100n} = \frac{n}{100n} + \\ &+ \frac{1}{100n} = \frac{1}{100} + \frac{1}{100n} > \frac{1}{100}, \end{aligned}$$

t. i.,  $x-1$  nav bezgalīgi mazs lielums. Intuīcija šoreiz mūs ir maldinājusi. Šai gadījumā ir robeža  $1\frac{1}{100}$ .



59. §. Kopsavilkums. Pamatteorēmas par robežām. Robežu eksistences teorēmas. Mainīgais lielums kādā maiņas procesā var piederēt pie viena no šādiem veidiem.

1. Tas var būt ierobežots, un tam var būt robeža; speciālā gadījumā, ja šī robeža ir nulle, tas ir bezgalīgi mazs lielums.

2. Tas var būt ierobežots, bet tam var neeksistēt robeža. Kā piemēru var minēt  $x = \sin \alpha$ , kad  $\alpha$  neierobežoti aug.

3. Tas var būt neierobežots un pie tam bezgalīgi liels; tādā gadījumā nosacīti raksta  $\lim x = \infty$  (arī  $+\infty$  vai  $-\infty$ ) un saka, ka tā robeža ir bezgalība, kaut gan patiesībā robeža neeksistē.

4. Tas var būt neierobežots, bet ne bezgalīgi liels. Kā piemēru var minēt  $x = \operatorname{tg} \alpha$ , kad  $\alpha \rightarrow \infty$ . Šis  $\operatorname{tg} \alpha$  kļūst lielāks pēc absolūtās vērtības par katru iepriekš dotu skaitli  $M$ , bet nepaliek par to lielāks.

Ja mainīgajam lielumam eksistē robeža, tad tas ir ierobežots. Bet otrādi, kā tas parādīts 2. punktā, ne vienmēr var apgalvot.

Apskatīsim pamatteorēmas par robežām, kas turpmāk būs nepieciešamas mainīgo lielumu robežu atrašanai.

1. teorēma. Ja vienā un tai pašā maiņas procesā  $x \rightarrow a$ , bet  $y \rightarrow b$ , tad  $x+y \rightarrow a+b$  jeb  $\lim(x+y) = \lim x + \lim y$ , t. i., summas robeža ir vienāda ar atsevišķo saskaitāmo robežu summu.

Pierādījums. Seit pietiek ievērot, ka  $x = a + \alpha$  un  $y = b + \beta$ , kur  $\alpha$  un  $\beta$  ir bezgalīgi mazi lielumi. Tādēļ  $x+y = (a+b) + (\alpha+\beta)$ ; šeit  $(a+b)$  ir pastāvīgs lielums un  $(\alpha+\beta)^*$  bezgalīgi mazs lielums un pēc robežas definīcijas

$$\lim(x+y) = a+b = \lim x + \lim y.$$

Teorēma paplašināma arī galīga skaita saskaitāmiem un to algebriskām summām.

2. teorēma. Reizinājuma robeža ir vienāda ar atsevišķo reizinātāju robežu reizinājumu:  $\lim(xy) = \lim x \cdot \lim y$ .

Pierādījums. Pielietojot iepriekšējos apzīmējumus  $xy = (a+\alpha) \cdot (b+\beta) = ab + (a\beta + b\alpha + \alpha\beta)$ , bet visi pēdējās iekavās ieslēgtie lielumi ir bezgalīgi mazi lielumi, tādēļ arī to summa ir bezgalīgi mazs lielums.\*\* Bet, tā kā  $xy = ab + \text{bezg. mazs lielums}$ , tad  $\lim(xy) = ab$  jeb

$$\lim(xy) = \lim x \cdot \lim y.$$

Teorēma attiecināma arī uz vairākiem reizinātājiem.

Secinājums. Ja mainīgais lielums satur pastāvīgu reizinātāju, tad šo pastāvīgo reizinātāju var ņemt pirms robežas zīmes.

$$\lim cx = \lim c \cdot \lim x = c \lim x.$$

\* Sk. 56. § bezgalīgi mazo lielumu pamatīpašības.

\*\* Turpat.

3. teorēma. *Dalījuma robeža ir vienāda ar dalāmā un dalītāja robežu dalījumu, ja vien dalītāja robeža nav nulle:*

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y}.$$

Pierādījums.

$$\frac{x}{y} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha}{b+\beta} - \frac{a}{b} = \frac{ab + \alpha b - ab - a\beta}{b(b+\beta)} = (b\alpha - a\beta) \cdot \frac{1}{b(b+\beta)}.$$

Pirmais reizinātājs ir bezgalīgi mazs lielums, bet otrais reizinātājs ir ierobežots, jo saucējs tiecas uz  $b^2$ . Tas nozīmē, ka, sākot no kāda brīža, saucējs kļūs un paliks lielāks, piemēram, par  $\frac{1}{2}b^2$ , bet

$\left| \frac{1}{b(b+\beta)} \right|$  kļūs un paliks mazāks par  $\frac{1}{\frac{1}{2}b^2} = \frac{2}{b^2}$ . Bet ierobežota

lieluma reizinājums ar bezgalīgi mazu lielumu ir bezgalīgi mazs lielums. Tas nozīmē, ka

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{a}{b} = \frac{\lim x}{\lim y}, \text{ ja } \lim y = b \neq 0.$$

Piezīme. Ja  $\lim y = 0$ , bet  $\lim x = a \neq 0$ , tad  $\lim \frac{x}{y} = \lim \frac{1}{y} \cdot x = \infty \cdot a = \infty$ . Ja turpretim gan  $\lim y = 0$ , gan  $\lim x = 0$ , tad izteiksme  $\frac{x}{y}$  ir nenoteiktība, par kuru būs runa tālāk.

4. teorēma. *Katram monotoni augošam (dilstošam), bet ierobežotam mainīgajam lielumam eksistē robeža (Veierštrasa robežas eksistences teorēma).*

Šī teorēma (to nepierādīsim) lietota jau vidusskolā. Tā, piemēram, ievilkta regulāra daudzstūra perimetrs ir monotoni augošs lielums, ja malu skaits aug, bet tas tomēr ir ierobežots; tas visā maiņas procesā ir mazāks, piemēram, par *apvilktu* kvadrāta perimetru. Tādēļ eksistē perimetra robeža, kas ir vienāda ar riņķa līnijas garumu.

Cits piemērs: mainīgais lielums  $x$  pieņem pēc kārtas visas  $\sqrt{2}$  vērtības, kas ņemtas ar iztrūkumu un aprēķinātas vispirms ar precizitāti līdz 1, tad līdz 0,1, pēc tam līdz 0,01 utt., t. i.,

$$x = 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; \dots$$

Mainības procesā  $x$  monotoni aug, bet paliek tomēr mazāks par kādu skaitli, piem., 1,5. Mainīgajam lielumam  $x$  tādēļ eksistē robeža — skaitlis  $\sqrt{2}$ .



5. teorēma. Ja mainīgais lielums  $x$  paliek vienmēr ieslēgts starp diviem mainīgajiem lielumiem  $y$  un  $z$  ( $y \leq x \leq z$ ), kuri tiecas uz vienu un to pašu robežu, tad arī mainīgais lielums  $x$  tiecas uz to pašu robežu.

Pierādījums. Ja  $y \leq x \leq z$ , bet  $\lim y = \lim z = a$ , tad  $a + \alpha < x < a + \beta$ , kur  $\alpha$  un  $\beta$  ir bezgalīgi mazi lielumi. Bet tad  $a < x - a < \beta$ , t. i.,  $x - a$  ir bezgalīgi mazs lielums, tātad arī  $\lim x = a$ .

Šo teorēmu dažreiz lieto citu teorēmu pierādīšanai.

60. §. Jēdziens par funkcijas robežu; robežu aprēķināšanas piemēri. Pieņemsim, ka mainīgais lielums  $y$  ir kāda cita mainīgā lieluma  $x$  funkcija:

$$y = f(x).$$

Mainīgā lieluma robežu varam atrast, ja ir zināms tā maiņas process. Funkcijas robežu turpretim meklē, norādot vienīgi, ka tās arguments  $x$  tiecas uz kādu skaitli  $a$  (vai  $\infty$ ). Tāds norādījums nenosaka noteiktu maiņas procesu, jo mēs varam visdažādākos veidos likt argumentam tiekties uz doto skaitli  $a$  (vai  $\infty$ ). Katram šādam argumenta maiņas procesam atbilstis savs funkcijas  $f(x)$  maiņas process.

Definīcija. Ja funkcijas robeža jebkurā argumenta maiņas procesā, kad  $x \rightarrow a$  (vai  $x \rightarrow \infty$ ), ir viena un tā pati, tad šo kopējo robežu  $b$  sauc par funkcijas robežu un raksta

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ [attieciģi } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b]. \quad (7.2)$$

Lasa: robeža no  $f(x)$ , kad  $x$  tiecas uz  $a$  ( $x$  tiecas uz bezgalību) ir vienāda ar  $b$ .

Dažreiz meklē funkcijas  $y = f(x)$  robežu, kad  $x \rightarrow a$ , ar nosacījumu, lai vienmēr būtu  $x > a$ . Tas nozīmē, ka  $x$  var patvaļīgā veidā tiekties uz  $a$ , vienīgi tam vienmēr jāpaliek lielākam par  $a$ . Robežu, kas iegūta ar šādu nosacījumu, sauc par funkcijas *labo* robežu, un to apzīmē šādi:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b \text{ jeb, ja } a=0, \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = b.$$

Analogi, ja  $x \rightarrow a-0$ , t. i.,  $x$  tiecas uz  $a$  no kreisās puses, tad iegūto robežu sauc par funkcijas *kreisā* robežu un to pieraksta ar  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$  resp.  $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = b$ .

Saprotams, ka funkcijai eksistē robeža (kad  $x \rightarrow a$ ) parastā nozīmē, ja abas šīs robežas, t. i., kreisā un labā, ir vienādas.

Līdzīgi vajadzības gadījumos apskata atsevišķi funkcijas robežu, kad  $x \rightarrow +\infty$  un  $x \rightarrow -\infty$ .

Kas attiecas uz funkcijas robežu *aprēķināšanu*, tad te var pie-

lietot teorēmas par robežām (59. §), kā arī bezgalīgi mazu un bezgalīgi lielu lielumu īpašības.

Piezīme. Funkcijai nav jābūt definētai punktā  $x=a$ , jo tādā gadījumā varam pieņemt, ka  $x$  tikai tuvojas  $a$ , bet maiņas procesā nekad neklūst vienāds ar  $a$  (ja funkcija ir definēta punktā  $x=a$ , tad maiņas procesā  $x$  šo vērtību  $a$  parasti var arī pieņemt).

Apskatīsim robežu atrašanās piemērus.

1. piemērs.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x-1} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = 2 \cdot \infty = \infty.$$

Robežas aprēķināšanai izmantojam vispirms 59. § 2. teorēmas secinājumu par pastāvīga reizinātāja ņemšanu pirms robežas zīmes. Pēc tam ņemām vērā, ka  $x-1$  ir bezgalīgi mazs lielums, kad  $x \rightarrow 1$ , bet tā apgrieztais lielums  $\frac{1}{x-1}$  ir bezgalīgi liels lielums. Beidzot pielietojam bezgalīgi liela lieluma īpašību, ka tā reizinājums ar skaitli, kurš nav nulle, ir bezgalīgi liels lielums. Funkcijas robeža tātad šajā gadījumā neeksistē.

Praksē šādas funkcijas robežas noskaidrošanai lieto vienkāršāku kārtulu: *ja skaitītājs ir ierobežots lielums, bet saucējs tiecas uz nulli, tad daļa tiecas uz bezgalību*. Dažreiz lieto arī nosacīto pierakstu  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x-1} = \frac{2}{0} = \infty$ .

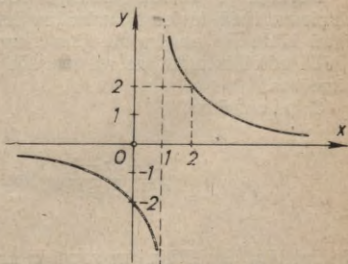
Atzīmēsim vēl, ka 1. piemērā dabūjam dažādas bezgalības ( $+\infty$  vai  $-\infty$ ) atšķirībā no tā, vai  $x \rightarrow 1+0$ , vai  $x \rightarrow 1-0$ . Tiešām,

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{2}{x-1} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x-1} = 2 \cdot (+\infty) = +\infty,$$

bet

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{2}{x-1} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{x-1} = 2 \cdot (-\infty) = -\infty.$$

Pirmajā gadījumā lielums  $x-1$  un tātad arī tā apgrieztais lielums  $\frac{1}{x-1}$  ir pozitīvi, kamēr otrajā gadījumā tie ir negatīvi. Rezultāta zīme jāņem vērā, piemēram, zīmējot funkcijas  $y = \frac{2}{x-1}$  grafiku (86. zīm.). Vispār robežu aprēķināšana dažkārt ir efektīvs paņēmieni grafiku konstruēšanai. Šim nolūkam vēl



86. zīm.



jāatrod  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x-1} = 0$ , jo tad ir noteikta arī hiperbolas  $y = \frac{2}{x-1}$  horizontālā asimptota  $y=0$  (vertikālā asimptota ir  $x=1$ ).

2. piemērs.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+3}{x-1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (2x+3)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x-1)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} 2x + \lim_{x \rightarrow 2} 3}{\lim_{x \rightarrow 2} x - \lim_{x \rightarrow 2} 1} = \frac{2 \lim_{x \rightarrow 2} x + 3}{2-1} = \frac{2 \cdot 2 + 3}{1} = 7.$$

So piemēru atrisinājām, izmantojot teorēmas par robežām (iepriekšējā piemērā to nevarējām, jo tur saucēja robeža ir nulle). Izrādās tomēr, ka to pašu rezultātu varēja dabūt arī vienkārši, liekot funkcijas izteiksmē  $x=2$ . Var parādīt, ka tā var rīkoties visos tajos gadījumos, kad funkcija, kuras robežu meklējam, pieder pie elementārām funkcijām un  $x=a$  pieder funkcijas definīcijas apgabalam. Tādā gadījumā

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a), \quad (7.3)$$

t. i., *funkcijas robeža, kad  $x \rightarrow a$ , ir vienāda ar funkcijas vērtību, kad argumenta vērtība ir  $a$ .*

Šī kārtula nav lietojama šādos gadījumos:

a) ja  $f(x)$  ir daļveida funkcija un daļas saucējs, kad  $x=a$ , ir nulle. (Ja bez tam skaitītājs, kad  $x=a$ , nav nulle, tad, kā redzējām 1. piemērā, daļa tiecas uz bezgalību);

b) ja  $x \rightarrow \infty$ , jo  $\infty$  nav skaitlis un to nevar tieši ievietot funkcijas izteiksmē;

c) ja daļas skaitītājs un saucējs, kad  $x=a$ , abi ir vienādi ar nulli vai abi tiecas uz  $\infty$ , kad  $x \rightarrow a$ . Šajā gadījumā dabūjam šāda tipa nenoteiktības:  $\frac{0}{0}$  un  $\frac{\infty}{\infty}$ , par kurām jārunā īpaši;

d) ja gadījumā, kad  $x \rightarrow a$ , dabūjam kādu no citām nenoteiktībām  $\infty - \infty$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $0^0$ ,  $\infty^0$  vai  $1^\infty$ .

Parasti, ja jāatrod funkcijas robeža, kad  $x \rightarrow a$ , mēs mēģinām vispirms tieši ievietot funkcijas izteiksmē  $x=a$  un tikai tad, ja dabū kādu no augšminētajām nenoteiktībām, cenšamies kaut kā citādi noteikt funkcijas robežu. Kā to dara, parādīsim turpmākos piemēros.

3. piemērs.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x - 1}{3x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{3}.$$

Te dalījām skaitītāju un saucēju ar  $x$  augstāko pakāpi  $x^2$  un tad pielietojām teorēmas par summas un dalījuma robežām.

#### 4. piemērs.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^3}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Šeit dalījām skaitītāju un saucēju ar  $x^3$ . Šāds paņēmieni lietojams vienmēr, ja meklē robežu daļveida racionālai funkcijai, kad  $x \rightarrow \infty$ .

#### 5. piemērs.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} = \infty,$$

jo skaitītājs ir ierobežots lielums (tiecas uz 1), bet saucējs tiecas uz nulli.

Pēc pēdējiem trim piemēriem var spriest par racionālu daļu robežām, kad  $x \rightarrow \infty$ . Ja skaitītāja un saucēja polinomi ir ar vienādu pakāpi, tad daļas robeža, kad  $x \rightarrow \infty$ , ir vienāda ar šo polinomu «vecāko» locekļu koeficientu attiecību (ar polinoma vecāko locekli saprotam locekli, kurš satur  $x$  augstākā pakāpē). Ja turpretim abu polinomu pakāpes ir dažādas, tad daļas robeža ir nulle vai bezgalība atkarībā no tā, vai skaitītāja polinoma pakāpe ir zemāka vai augstāka par saucēja polinoma pakāpi.

#### 6. piemērs.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{1}}{1} = 1.$$

Arī te sekmīgi noteicām robežu, dalot skaitītāju un saucēju ar  $x$  (skaitītāja zemsaknes izteiksme tad jādala ar  $x^2$ ).

Ir jābrīdina no kļūdām, ko pielaiž, meklējot robežas funkcijām, kas satur saknes darbības. Ilustrācijai aprēķināsim robežu tai pašai 6. piemēra funkcijai, kad  $x \rightarrow -\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{-\sqrt{1}}{1} = -1.$$

Bieži pēc dalīšanas ar  $x$  arī šeit atstāj skaitītāja sakni ar plusa zīmi, bet tas nav pareizi. Nedrīkstam ignorēt faktu, ka  $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$



tikai tad, ja  $a > 0$ ; bet, ja  $a < 0$ , tad  $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b}$ . Pēdējo robežu aprēķinot, mēs skaitītāju un saucēju dalām ar  $x < 0$ , jo  $x \rightarrow -\infty$ .

7. piemērs.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x-1)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{x+2} = \frac{1}{3}.$$

So robežu aprēķinājām, sadalot skaitītāju un saucēju reizinātājos un saīsinot daļu ar  $x-1$ . Ievērosim, ka šī saīsināšana ir likumīga (mēs nesaīsinām ar nulli), jo maiņas procesā, kad  $x \rightarrow 1$ ,  $x-1 \neq 0$ .

8. piemērs.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \sqrt{1-x})}{(1 - \sqrt{1-x})(1 + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \sqrt{1-x})}{1 - (1-x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \sqrt{1-x})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sqrt{1-x}) = 1 + \sqrt{1} = 2. \end{aligned}$$

**61. §. Divas svarīgas robežas. Naturālie logaritmi.** Tikko aplūkotojos piemēros sniegti dažī norādījumi dažādu algebrisku funkciju robežu aprēķināšanai. Ar to tomēr nepietiek, lai varētu atrast kaut kuras funkcijas robežu. *Transcendentu* funkciju robežu aprēķināšanai jānoskaidro dažas svarīgas robežas.

I.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = ?$$

Liekot tieši funkcijas  $\frac{\sin x}{x}$  izteiksmē  $x=0$ , dabūjam  $\frac{0}{0}$  tipa nenoteiktību.

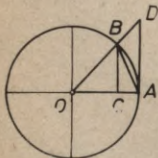
Tā kā  $\frac{\sin x}{x}$  ir pāra funkcija, tad pietiek apskatīt gadījumu, kad  $x > 0$ , t. i., kad  $x$  tiecas uz nulli no labās puses.

Ņemam trigonometrisko riņķi (87. zīm.) un salīdzinām trijstūru  $OAB$  un  $OAD$  laukumus ar sektora  $OAB$  laukumu.

$$L_{\triangle OAB} < L_{\text{sekt. } OAB} < L_{\triangle OAD}$$

jeb, ievērojot šo laukumu izteiksmes,

$$\frac{1}{2} OA \cdot CB < \frac{1}{2} \overset{\frown}{AB} \cdot OA < \frac{1}{2} OA \cdot AD.$$



87. zīm.

Saīsinot ar  $\frac{1}{2} OA$ , dabūjam, ka

$$CB < \overset{\frown}{AB} < AD$$

jeb, ja trigonometriskā riņķa rādiuss ir 1, tad

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Dalot ar  $\sin x > 0$ , dabū

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

jeb

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Liekot lokam  $x$  tiekties uz nulli, dabūjam  $\cos x \rightarrow 1$ , un  $\frac{\sin x}{x}$  būdams maiņas procesā ielēgts starp 1 un lielumu, kurš tiecas uz 1, arī pats tiecas uz 1 (59. § 5. teorēma), t. i.,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (7.4)$$

Piezīme. Ievērosim, ka loks  $x$  ir mērīts radiānos. Tā kā loka un tā sinusa attiecības robeža ir 1, kad  $x \rightarrow 0$ , tad maziem leņķiem (mēritiem radiānos)  $\sin x$  maz atšķiras no  $x$ . To bieži izmanto aptuvenos aprēķinos, maza leņķa sinusa vietā ņemot pašu leņķi, mēritu radiānos.

1. piemērs.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

2. piemērs.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3 \right) = 3 \cdot \lim_{3x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3 \cdot 1 = 3.$$

3. piemērs.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left( \lim_{\frac{x}{2} \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$



Robežu aprēķinājām, izmantojot trigonometrijas formulu  $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ . Vienkāršāk te lietot sakarību

$$1 - \cos x = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x},$$

ko dabū no sakarības  $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$ , ja to dala ar  $1 + \cos x$ . Tad

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{(1 + \cos x) \cdot x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = \\ &= 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

4. piemērs.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \left( \frac{\pi}{180} \cdot x \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin \left( \frac{\pi}{180} \cdot x \right)}{\frac{\pi}{180} \cdot x} \cdot \frac{\pi}{180} \right] = \\ &= \frac{\pi}{180} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \left( \frac{\pi}{180} x \right)}{\frac{\pi}{180} x} = \frac{\pi}{180} \cdot 1 = \frac{\pi}{180}. \end{aligned}$$

II.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = ?$$

Te sastopamies ar  $1^\infty$  tipa nenoteiktību, jo  $\left( 1 + \frac{1}{x} \right) \rightarrow 1$ , kad  $x \rightarrow \infty$ .

Apskatīsim vienkāršāko gadījumu, kad arguments  $x$  mainās pa dabiskās skaitļu virknes locekļiem 1, 2, 3, 4, ..., t. i., apskatīsim robežu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

Mainīgais lielums  $\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n$  pieņem pēc kārtas šādas vērtības:

$$2; 2 \frac{1}{4}; 2 \frac{10}{27}; 2 \frac{113}{256}; 2 \frac{1526}{3125}; \dots$$

Lai konstatētu, ka mainīgā lieluma robeža eksistē, pierādīsim, ka tas mainās monotoni un ir ierobežots (Veierštrasa teorēma).

Izvirzot pēc Ņūtona binoma formulas, dabū

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \\ &+ \dots + \frac{n(n-1)(n-2) \dots [n-(n-1)]}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \\ &+ \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Tā kā visi izvirzījuma locekļi ir pozitīvi, tad

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2. \quad (7.5)$$

No otras puses,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!},$$

jo, atmetot izvirzījumā iekavas  $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ ,  $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$  utt., kas katra ir mazāka par 1, summa palielinās. Nevienādību vēl vairāk pastiprinām, labās puses visos saucējos apmainot ar 2 visus reizi-nātājus, kuri lielāki par 2:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

Tā kā pēdējās nevienādības labajā pusē iekavās ieslēgtie locekļi veido ģeometrisku progresiju ar kvocientu  $q = \frac{1}{2}$  un pirmo locekli  $a_1 = 1$ , bet šīs progresijas pirmo  $n$  locekļu summa

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{1\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 2 - \frac{1}{2^{n-1}},$$

tātad mazāka par 2, tad

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3. \quad (7.6)$$

Apvienojot nevienādības (7.5) un (7.6), dabūjam, ka

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3,$$

kas rāda, ka mainīgais lielums  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  ir ierobežots.



No Ņūtona binoma izvirzījuma

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots$$

izriet arī, ka mainīgais lielums  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ,  $n$  augot, pieaug, jo  $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots$  kļūst mazāki un tātd  $\left(1 - \frac{1}{n}\right), \left(1 - \frac{2}{n}\right), \dots$  kļūst lielāki, bez tam pievienojas vēl jauni pozitīvi locekļi. Mainīgais lielums  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  tātd ir monotoni augošs un ierobežots. Pēc Veierštrasa teorēmas šim mainīgajam lielumam eksistē robeža.

Šo robežu apzīmē ar burtu  $e$ , pie tam  $2 < e < 3$ . Var pierādīt, ka skaitlis  $e$  ir iracionāls skaitlis. Aptuveni to var aprēķināt, ja ņem Ņūtona binoma izvirzījumā pietiekami lielu  $n$ .

Tad dabū

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,71828, \quad (7.7)$$

kur  $e$  ir aprēķināts ar piecām decimālzīmēm.

Var pierādīt, ka arī

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad (7.8)$$

t. i., ka robeža iznāk tāda pati, ja  $x$  tiecas uz bezgalību jebkurā veidā, pieņemot pozitīvas vai negatīvas vērtības, bet ne tikai veselas pozitīvas vērtības kā iepriekš.

1. piemērs.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{8}{x}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{8}{x}\right)^{\frac{x}{8}}\right]^8 = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^8 = \\ &= \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^8 = e^8. \end{aligned}$$

Te liekam  $\frac{x}{8} = t$  un ievērojam, ka arī  $t \rightarrow \infty$ , kad  $x \rightarrow \infty$ .

2. piemērs.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e.$$

Seit liekam  $\frac{1}{x} = t$  un ievērojam, ka  $t \rightarrow \infty$ , ja  $x \rightarrow 0$ .

3. piemērs.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{3x}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\frac{t}{3}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^{\frac{1}{3}} = \\ &= \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}.\end{aligned}$$

Skaitlis  $e$  kalpo par bāzi t. s. *naturāliem logaritmiem*. Skaitļa  $N$  naturālo logaritmu apzīmē ar  $\ln N$  ( $\log_e N$  vietā). Augstākajā matemātikā visbiežāk lieto naturālos logaritmus. Lai izteiktu skaitļa  $N$  naturālo logaritmu ar decimālo logaritmu palīdzību, logaritmējām identitāti

$$e^{\ln N} = N$$

pie bāzes 10 un dabūjam  $\ln N \cdot \lg e = \lg N$ , no kurienes

$$\ln N = \frac{\lg N}{\lg e} \approx 2,3026 \lg N.$$

Piemēri.

$$1) \ln 2 \approx 2,3026 \cdot \lg 2 \approx 2,3026 \cdot 0,3010 \approx 0,6931.$$

$$2) \ln 10 \approx 2,3026 \cdot \lg 10 = 2,3026.$$

Redzam, ka  $\ln 10 = \frac{1}{\lg e}$ . Starp divu dažādu sistēmu logaritmiem vispār pastāv sakars

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

(to dabū, logaritmējot pie bāzes  $b$  logaritmisko identitāti  $a^{\log_a b} = b$ ).

Logaritmējot savukārt identitāti

$$10^{\lg N} = N$$

pie bāzes  $e$ , dabū

$$\lg N \cdot \ln 10 = \ln N,$$

no kurienes  $\lg N = \frac{\ln N}{\ln 10} \approx 0,4343 \ln N$ .

Izrakstīsim vēlreiz dabūtās sakarības:

$$\left. \begin{aligned}\ln N &= \frac{\lg N}{\lg e} = \lg N \cdot \ln 10 \approx 2,3026 \lg N, \\ \lg N &= \frac{\ln N}{\ln 10} = \ln N \cdot \lg e \approx 0,4343 \ln N.\end{aligned}\right\} \quad (7.9)$$



Skaitli  $M = \lg e = \frac{1}{\ln 10} \approx 0,4343$  sauc par pārejas moduli no vienas logaritmu sistēmas uz otru.

Logaritmējot identitāti

$$a^{\log_a N} = N$$

pie bāzes  $e$ , dabūjam formulu pārejai no naturāliem logaritmiem uz logaritmiem pie kaut kuras bāzes  $a$ :

$$\log_a N \cdot \ln a = \ln N,$$

no kurienes

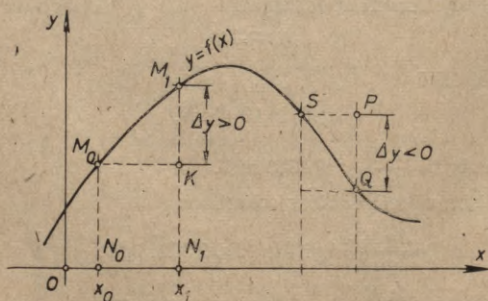
$$\log_a N = \frac{\ln N}{\ln a} = \log_a e \cdot \ln N. \quad (7.10)$$

Naturālajiem logaritmiem ir tās pašas vispārīgās īpašības, kādas ir decimāliem logaritmiem. Tā kā  $\ln 1 = 0$ , tad funkcijas  $y = \ln x$  grafika krusto  $Ox$  asi punktā  $x = 1$ . Ja  $x$  monotonī aug, tad  $y = \ln x$  monotonī aug, pie tam  $\ln x$  aug straujāk par  $\lg x$ , sasniedzot vērtību 1 jau pie argumenta vērtības  $x = e$ .

**62. §. Funkcijas pieaugums. Jēdziens par funkcijas nepārtrauktību.** Apskatīsim kādu funkciju  $y = f(x)$ , kuras grafika parādīta 88. zīm. Ja arguments pieņem vērtību  $x_0$ , tad funkcijas vērtība ir vienāda ar  $f(x_0)$ . Šo vērtību attēlo ordināte  $N_0 M_0$ .

Dodot argumentam citu vērtību  $x_1$ , funkcija dabū jaunā vērtību  $f(x_1)$ , ko zīmējumā attēlo nogrieznis  $N_1 M_1$ .

**1. definīcija.** Starpību starp jauno un sākotnējo argumenta vērtību, t. i.,  $x_1 - x_0$ , sauc par argumenta pieaugumu, bet starpību starp atbilstošajām funkcijas vērtībām, t. i.,  $f(x_1) - f(x_0)$ , sauc par funkcijas pieaugumu, ja argumenta vērtība pieaug no  $x_0$  līdz  $x_1$ .



88. zīm.

Geometriski argumenta pieaugumu attēlo orientēts abscisu ass nogrieznis  $N_0N_1=x_1-x_0$ , bet atbilstošo funkcijas pieaugumu — orientēts (ordinātu asij paralēls) nogrieznis  $\overline{KM}_1=f(x_1)-f(x_0)$ .

Mainīgā lieluma pieaugumu apzīmē ar grieķu burtu  $\Delta$  (delta). Tā, piemēram,  $\Delta x$  (delta iks) apzīmē argumenta pieaugumu,  $\Delta y$  (delta igrek) — funkcijas  $y$  pieaugumu,  $\Delta f(x)$  (delta ef iks) — funkcijas  $f(x)$  pieaugumu utt.

Izmantojot šos apzīmējumus, varam rakstīt, ka  $\Delta x=x_1-x_0$ , no kurienes  $x_1=x_0+\Delta x$ ,

$$\Delta y=f(x_1)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

Piemērs. Ja  $f(x)=x^2$ , tad  $f(x_0+\Delta x)=(x_0+\Delta x)^2$ ,

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = (x_0+\Delta x)^2 - x_0^2 = \\ &= x_0^2 + 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.\end{aligned}$$

Funkcijas pieaugums  $\Delta y$  ir atkarīgs no diviem lielumiem — no argumenta sākotnējās vērtības  $x_0$  un no argumenta pieauguma  $\Delta x$ . Tā apskatītajā piemērā, ja  $x_0=1$  un  $\Delta x=0,2$ , tad

$$\Delta y = 2 \cdot 1 \cdot 0,2 + (0,2)^2 = 0,4 + 0,04 = 0,44,$$

bet, ja  $x_0=2$ , tad pie tā paša  $\Delta x=0,2$  dabūjam

$$\Delta y = 2 \cdot 2 \cdot 0,2 + (0,2)^2 = 0,8 + 0,04 = 0,84.$$

Tāpēc mēdz runāt ne vienkārši par argumenta vai funkcijas pieaugumu, bet par argumenta un funkcijas pieaugumu dotajā punktā  $x=x_0$ .

Funkcijas pieaugums var būt gan pozitīvs, gan negatīvs (88. zīm.  $\overline{KM}_1 > 0$ , bet  $PQ < 0$ ).

Piemērs.  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

Te

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{x_0+\Delta x} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0 - (x_0+\Delta x)}{x_0(x_0+\Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}$$

un

$$[\Delta y]_{x_0=3}^{\Delta x=1} = \frac{-1}{3(3+1)} = -\frac{1}{12}.$$

2. definīcija. Funkciju sauc par nepārtrauktu dotajā punktā, ja 1) tā ir definēta šajā punktā un, 2) argumenta pieaugumam tiecoties uz nulli, arī funkcijas pieaugums tiecas uz nulli, t. i., ja

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0. \quad (7.11)$$



1. piemērs. Funkcija  $y = \frac{1}{x-1}$  ir nepārtraukta visām argumenta vērtībām, izņemot  $x=1$ . Tiešām, tā kā

$$f(x) = \frac{1}{x-1},$$

tad

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{1}{(x+\Delta x)-1} - \frac{1}{x-1} = \\ &= \frac{x-1-(x+\Delta x-1)}{(x+\Delta x-1)(x-1)} = \frac{-\Delta x}{(x+\Delta x-1)(x-1)}\end{aligned}$$

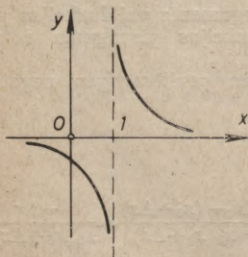
un

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \frac{0}{(x-1)^2} = 0,$$

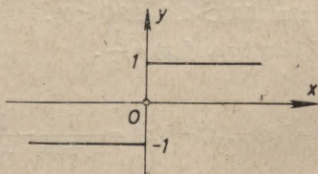
ja vien  $x \neq 1$ .

No 89. zīm. attēlotās funkcijas grafikas redzam, ka punktā  $x=1$  grafikai ir pārtraukums; funkcijas vērtība, argumentam ejot caur punktu  $x=1$ , mainās no  $-\infty$  uz  $+\infty$ . Saka, ka punktā  $x=1$  funkcijai ir bezgalīgs lēcienš.

2. piemērs. Funkcija  $f(x) = \frac{x}{|x|}$  ir definēta un nepārtraukta visiem  $x$ , izņemot  $x=0$ . Ja  $x > 0$ , tad  $|x|=x$  un  $f(x)=1$ ; ja  $x < 0$ , tad  $|x|=-x$  un  $f(x)=-1$  (90. zīm.).



89. zīm.



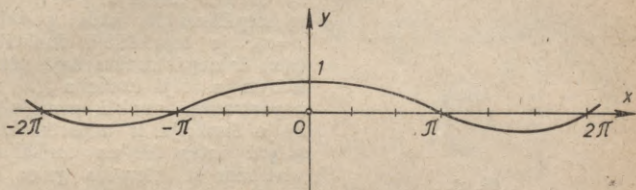
90. zīm.

Funkcijas grafikai punktā  $x=0$  ir pārtraukums, un funkcijai punktā  $x=0$  ir galīgs lēcienš.

3. piemērs. Funkcija  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  nav definēta punktā  $x=0$ ; saka, ka tā ir pārtraukta šajā punktā. Tomēr  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  neatka-

rīgi no tā, vai  $x \rightarrow 0$  no labās vai kreisās puses (91. zīm.). Šādu funkcijas pārtraukumu sauc par *novēršamu pārtraukumu*. Apskatāmo funkciju var padarīt par nepārtrauktu punktā  $x=0$ , piedēfinējot funkcijai šajā punktā vērtību 1. Tādējādi dabū jaunu funkciju

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \text{ ja } x \neq 0; f(0) = 1.$$



91. zīm.

Vispār funkcijai punktā  $x=a$  ir novēršams pārtraukums, ja eksistē  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

Funkcijas nepārtrauktību formulēsim vēl citā veidā. Tā kā

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

tad vienādības (7.11) vietā varam rakstīt

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$$

jeb

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0) = 0. \quad (7.12)$$

Seit  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0) = f(x_0)$ , jo  $f(x_0)$  nemainās. Bez tam, apzīmējot  $x_0 + \Delta x = x$  un ievērojot, ka no  $\Delta x \rightarrow 0$  sekō  $x \rightarrow x_0$ , vienādību (7.12) var pārrakstīt šādi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = 0$$

jeb

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \quad (7.13)$$

t. i., *funkcija ir nepārtraukta punktā  $x=x_0$ , ja funkcijas robeža, kad  $x \rightarrow x_0$ , ir vienāda ar funkcijas vērtību punktā  $x=x_0$ .*

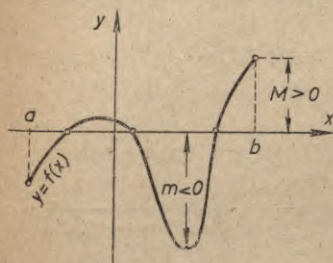
Pēdējo rezultātu var pārrakstīt arī šādi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x), \quad (7.14)$$



kas norāda, ka nepārtrauktu funkciju gadījumā simboli «lim» un «f» ir apmaināmi vietām.

Nepārtrauktām funkcijām var pierādīt šādas galvenās īpašības: 1) divu kādā punktā nepārtrauktu funkciju summa, starpība, reizinājums vai dalījums ir atkal nepārtraukta funkcija



92. zīm.

šajā punktā (ja vien dalītāja vērtība šajā punktā nav nulle); 2) salikta funkcija  $y=f[\varphi(x)]$  ir nepārtraukta kādā punktā  $x=x_0$ , ja iepriekšējā funkcija  $\varphi(x)$  ir nepārtraukta šajā punktā un ja ārējā funkcija  $f(u)$  ir nepārtraukta punktā  $u=\varphi(x_0)$ ; 3) ja funkcija ir nepārtraukta slēgtā intervālā un funkcijas vērtībām šī intervāla galos ir pretējas zīmes, tad vismaz vienā intervāla iekšējā punktā

funkcijas vērtība ir nulle (92. zīm. tie ir punkti, kuros funkcijas grafika krusto  $Ox$  asi). Funkcijai, kas ir nepārtraukta intervālā, tikai šādi punkti var nodalīt argumentu ass intervālus ar pretējām funkcijas vērtību zīmēm; 4) ja funkcija ir nepārtraukta slēgtā intervālā, tad tai eksistē šai intervālā vislielākā un vismazākā vērtība (92. zīm.  $M$  ir vislielākā, bet  $m$  — vismazākā funkcijas vērtība slēgtā intervālā  $[a, b]$ ).

Atzīmēsim, ka pēdējā īpašībā svarīga ir prasība, lai intervāls būtu slēgts. Tā, piemēram, funkcija  $y=x$  valējā intervālā  $(0,1)$  nesasniedz ne savu vislielāko, ne vismazāko vērtību, jo, lai cik tuvu punktam 1 mēs ņemtu intervāla punktu  $x_1$ , eksistē cits punkts  $x_2$ , piemēram,  $x_2=\frac{x_1+1}{2}$ , kas ir vēl tuvāk punktam 1 un kurā  $f(x_2) > f(x_1)$ .

Ievērosim, ka *elementāro* funkciju nepārtrauktības intervāli sakrīt ar šo funkciju definīcijas intervāliem. To redzam, salīdzinot formulu (7.13) ar vienādību (7.3).

Noslēgumā atzīmēsim, ka, aprakstot ar funkciju palīdzību procesus dabā un ņemot šīm funkcijām par argumentu laiku, funkciju pārtraukuma punktiem parasti atbilst tādi notikumi, kuri norisinās ļoti strauji un kurus praktiski var uzskatīt par momentāniem. Tā, piemēram, trieciena gadījumā ķermeņa ātrums mainās momentāni (eksplodējot ar gāzi pildītam karsētam traukam, gāzes temperatūra pēkšņi mainās).

**63. §. Bezgalīgi mazu lielumu salīdzināšana. Ekvivalenti bezgalīgi mazi lielumi.** Kā jau agrāk minēts (56. §), divu bezgalīgi mazu lielumu dalījums var būt gan bezgalīgi mazs, gan ierobežots, gan arī bezgalīgi liels lielums. Šajā sakarībā mēdz runāt par bezgalīgi mazu lielumu *kārtu*.

1. definīcija. Bezgalīgi mazo lielumu  $\beta$  sauc par augstākas kārtas bezgalīgi mazu lielumu nekā  $\alpha$ , ja  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ .

Tā, piemēram, ja  $\beta = \alpha^2 - 3\alpha^3$ , tad  $\beta$  ir augstākas kārtas bezgalīgi mazs lielums nekā  $\alpha$ , jo

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\alpha^2 - 3\alpha^3}{\alpha} = \lim (\alpha - 3\alpha^3) = 0.$$

2. definīcija. Bezgalīgi mazo lielumu  $\beta$  sauc par zemākas kārtas bezgalīgi mazu lielumu nekā  $\alpha$ , ja  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$  (jeb

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0).$$

Tā, piemēram, ja

$$\beta = 3\sqrt{\alpha} + 2\alpha^2,$$

tad  $\beta$  ir zemākas kārtas bezgalīgi mazs lielums nekā  $\alpha$ , jo

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{3\sqrt{\alpha} + 2\alpha^2}{\alpha} = \lim \left( \frac{3}{\sqrt{\alpha}} + 2\alpha \right) = \lim \frac{3}{\sqrt{\alpha}} + \lim 2\alpha = \infty.$$

No 1. definīcijas izriet, ka gadījumā, ja  $\beta$  ir augstākas kārtas bezgalīgi mazs lielums nekā  $\alpha$ , tad  $\beta$  it kā «straujāk» tiecas uz nulli nekā  $\alpha$ . Iznāk, ka  $\beta$  ir ne tikai bezgalīgi mazs, bet sastāda pat bezgalīgi mazu daļu no kāda cita bezgalīgi maza lieluma  $\alpha$ .

3. definīcija. Bezgalīgi mazus lielumus  $\alpha$  un  $\beta$  sauc par vienādas kārtas bezgalīgi maziem, ja to attiecības robeža ir skaitlis, kas nav nulle. Speciālā gadījumā, ja abu šo lielumu attiecības robeža ir 1, tad lielumus  $\alpha$  un  $\beta$  sauc par ekvivalentiem bezgalīgi maziem lielumiem un raksta  $\alpha \sim \beta$ .

Tā, piemēram, lielumi  $\alpha$  un  $\beta = \alpha + \alpha^2$  ir ekvivalenti, jo  $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha + \alpha^2}{\alpha} = 1 + \alpha \rightarrow 1$ ; lielumi  $2\alpha$  un  $\alpha + \alpha^2$  turpretim ir gan vienādas kārtas bezgalīgi mazi lielumi (jo  $\frac{\alpha + \alpha^2}{2\alpha} = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$ ), bet ne ekvivalenti.

Minēsim vēl dažus ekvivalentu lielumu piemērus.

1)  $\alpha \sim \sin \alpha$ , kad  $\alpha \rightarrow 0$ , jo  $\frac{\sin \alpha}{\alpha} \rightarrow 1$ , kad  $\alpha \rightarrow 0$ ;

2)  $\alpha \sim \operatorname{tg} \alpha$ , kad  $\alpha \rightarrow 0$ , jo  $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} \rightarrow 1$ , kad  $\alpha \rightarrow 0$ ;

3)  $\operatorname{tg} \alpha \propto \sin \alpha$ , kad  $\alpha \rightarrow 0$ , jo

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \cos \alpha = 1;$$

4)  $\sin 2\alpha \propto 2\alpha$ , kad  $\alpha \rightarrow 0$ , jo  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} = 1$ .

### Vingrinājumi

1. Attēlot uz skaitļu ass maiņas procesu  $x = \frac{n-1}{2n}$ , kad  $n=1, 2, 3, 4, \dots$

Pierādīt, ka mainīgais lielums  $x$  tiecas uz robežu  $\frac{1}{2}$ . (Norādījums: konstatēt, ka starpība  $x - \frac{1}{2}$  ir bezgalīgi mazs lielums.)

2. Attēlot uz skaitļu ass maiņas procesu  $x = \frac{3}{n+1}$ , kad  $n=1, 2, 3, 4, \dots$ . Konstatēt, ka  $x$  ir bezgalīgi mazs lielums. (Norādījums: pārliecināties, ka maiņas procesā  $x$  var kļūt un palikt mazāks par katru iepriekš dotu pozitīvu skaitli  $\varepsilon$ , piemēram,  $\varepsilon=0,01; 0,001, 0,0001$  utt.)

3. Pierādīt, ka  $x = \frac{n^2-1}{2n}$  ir bezgalīgi liels lielums, kad  $n=1, 2, 3, 4, \dots$  (Norādījums: ar dalīšanu izteikt  $x$  kā divu lielumu starpību.)

4. Apskatot dažādus argumenta maiņas procesus, piem.,  $x=2+\frac{1}{n}$ ;  $x=2-\frac{1}{n}$ ;  $x=2+\frac{1}{2n}$ ;  $x=2-\frac{2}{n}$  u. tml. un atbilstošos funkcijas maiņas procesus, konstatēt, ka  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2=4$ . (Var arī likt  $x=2+\alpha$ , kur  $\alpha$  ir bezgalīgi mazs lielums un, sastādot starpību  $x^2-4$ , parādīt, ka tā ir bezgalīgi mazs lielums.)

5. Pierādīt, ka  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x}=2$ . (Norādījums: sastādīt starpību  $\frac{2x+1}{x}-2$  un parādīt, ka tā ir bezgalīgi mazs lielums, kad  $x \rightarrow \infty$ . Var iepriekš izpildīt arī dalīšanu. Ilustrācijai sastādīt arī funkcijas maiņas procesu pie argumenta maiņas procesa  $x=1; 10; 100; 1000; \dots$ )

6. Noteikt vienpusīgās robežas  $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{3}{x-2}$  un  $\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{3}{x-2}$ . Nosakot arī  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x-2}$ , uzzīmēt funkcijas grafiku (vienādsānu hiperbolu).

Atrast robežas.

$$7. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2-5}{x+2}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \sqrt{\frac{5}{8}}} \frac{3x^2-5}{x+2}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{2x^2-7x+6}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2+x-3}{5x^2+4x-1}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{2x^2+3x-2}{x^2-1}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2-5}{x+2}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{8}} \frac{9x^2-4}{3x+2}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2+5x-3}{3x^2+10x+3}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2+2x}{x^2+x-2}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{2x^2+3x-2}{x^2-1}$$



$$17. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x - 2}{3x^2 + 1}.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5}{2x - 1}.$$

$$21. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + \sqrt{x^4 - 3}}{3x^2 - 1}.$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt{7 - x}}{x - 3}.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 5x}.$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 3x}{3 \operatorname{tg} 4x}.$$

$$29. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x.$$

$$31. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x.$$

$$33. \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - 1}).$$

$$18. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 5}{4 - 7x^2}.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 1}{x^2 + x}\right)^3.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{1 + \sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{\sqrt{9 - x} - 2}.$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{2 \sin 3x}.$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 - \cos 2x}.$$

$$30. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^x.$$

$$32. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^{x-3}.$$

# DIFERENCIĀLREĶINI

## 8. NODAĻA

### FUNKCIJAS ATVASINĀJUMS

Funkcijas atvasinājuma jēdziena rašanās ir saistīta ar ātruma atrašanu nevienmērīgā kustībā un pieskares vilkšanu likai linijai. Šīs problēmas XVII gs. atrisināja Ņūtons un Leibnics.

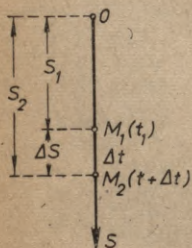
**64. §. Kustības ātrums.** Ķermenim brīvi kritot, tā noiето ceļu  $s$  atkarībā no laika  $t$  izsaka formula

$$s = \frac{gt^2}{2}.$$

Noskaidrosim ķermeņa ātrumu jebkurā krišanas laika momentā.

Pieņemsim, ka momentā  $t_1$  ķermenis atrodas punktā  $M_1$  (93. zīm.). Interesēsimies par ķermeņa kustību laika sprīdī  $\Delta t$ , t. i., laika sprīdī starp momentiem  $t_1$  un  $t_1 + \Delta t$ . Ķermeņa noietais ceļš līdz momentam  $t_1$  ir  $s_1 = \frac{gt_1^2}{2}$ , bet līdz momentam  $t_1 + \Delta t$  tas ir

$$\begin{aligned} s_2 &= \frac{g(t_1 + \Delta t)^2}{2} = \frac{g[t_1^2 + 2t_1\Delta t + (\Delta t)^2]}{2} = \\ &= \frac{gt_1^2}{2} + g\left[t_1\Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{2}\right]. \end{aligned}$$



Laika sprīdī  $\Delta t$  starp momentiem  $t_1$  un  $t_1 + \Delta t$  ceļa pieaugums

$$\Delta s = s_2 - s_1 = g\left[t_1\Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{2}\right].$$

93. zīm.

Ceļa pieaugumu  $\Delta s$  dalot ar atbilstošo laika sprīdi  $\Delta t$ , dabūjam *kustības vidējo ātrumu*  $v_{\text{vid}}$  tai pašā laika sprīdī:

$$v_{\text{vid}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = gt_1 + g \frac{\Delta t}{2}.$$

Nemot  $\Delta t$  arvien mazāku, dabūjam vidējos ātrumus arvien īsākiem laika sprīžiem ap momentu  $t_1$ . Vidējā ātruma robežu  $v$ , kad  $\Delta t \rightarrow 0$ , sauc par *kustības momentāno* (acumirkļīgo) *ātrumu* laika momentā  $t_1$ , t. i.,

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{vid}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( gt_1 + g \frac{\Delta t}{2} \right) = gt_1.$$

Iepriekš teikto vispārinot uz jebkuru laika momentu  $t$ , dabūjam, ka momentānais ātrums  $v$  laika momentā  $t$  ir

$$v = gt.$$

1. piezīme. Apskatītā ķermeņa brīvā krišana sākas koordinātu sākuma punktā bez sākuma ātruma. Ja  $t=0$  uzskatām par sākuma momentu, tad dabūjam, ka šinī momentā  $s=0$  un  $v=0$ .

Apskatīsim ātrumu jebkurā kustībā. Pieņemsim, ka funkcija

$$s = F(t)$$

izteic materiāla punkta koordināti  $s$  kustībā pa taisni atkarībā no laika  $t$ , t. i.,  $s = F(t)$  ir šī punkta *kustības vienādojums*. Lai atrastu ātrumu momentā  $t_1$ , apskatīsim punkta kustību laika sprīdī starp momentiem  $t_1$  un  $t_1 + \Delta t$ . Punkta koordināte momentā  $t_1$  ir  $s_1 = F(t_1)$ , bet momentā  $t_1 + \Delta t$  tā ir  $s_2 = F(t_1 + \Delta t)$ . Laika sprīdī  $\Delta t$  noietais ceļš

$$\Delta s = s_2 - s_1 = F(t_1 + \Delta t) - F(t_1).$$

*Kustības vidējais ātrums*  $v_{\text{vid}}$  šinī laika sprīdī ir

$$v_{\text{vid}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{F(t_1 + \Delta t) - F(t_1)}{\Delta t}.$$

Vidējā ātruma robežu  $v$ , kad  $\Delta t \rightarrow 0$ , sauc par *kustības momentāno ātrumu* laika momentā  $t_1$ , t. i.,

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t_1 + \Delta t) - F(t_1)}{\Delta t}.$$

Momentānais ātrums  $v$  jebkurā momentā  $t$  ir

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t}. \quad (8.1)$$



Turpmāk  $v$  vienkārši saucim par *kustības ātrumu momentā  $t$* . Lai to varētu aprēķināt dažādu kustību gadījumos, jāprot atrast robežu (8.1) dažādām funkcijām  $F(t)$ .

2. piezīme. Ja  $v > 0$ , tad kaut kuram pietiekami mazam  $\Delta t > 0$  atbilst  $\Delta s > 0$ , t. i., punkts pārvietojas augoša  $s$  virzienā. Ja turpretim  $v < 0$ , tad kaut kuram pietiekami mazam  $\Delta t > 0$  atbilst  $\Delta s < 0$ , t. i., punkts pārvietojas dilstoša  $s$  virzienā.

**65. §. Procesa ātrums.** Ar dalījuma robežu formā (8.1) jāsaņem arī citos uzdevumos.

Apskatīsim ķermeņa temperatūras maiņas ātrumu. Ja temperatūra  $T$  ar laiku mainās, tad tā ir laika  $t$  funkcija, t. i.,

$$T = f(t).$$

Noskaidrosim, ko sauc par temperatūras maiņas ātrumu, t. i., par sasīšanas vai atdzišanas ātrumu.

Momentā  $t_1$  temperatūra ir  $T_1 = f(t_1)$ , bet kādā citā momentā  $t_1 + \Delta t$  temperatūra ir  $T_2 = f(t_1 + \Delta t)$ . Laika sprīdī starp momentiem  $t_1$  un  $t_1 + \Delta t$  temperatūras pieaugums (tas var būt kā pozitīvs, tā arī negatīvs) ir

$$\Delta T = T_2 - T_1 = f(t_1 + \Delta t) - f(t_1).$$

Temperatūras maiņu  $\Delta T$  dālot ar atbilstošo laika sprīdi  $\Delta t$ , dabūjam attiecību

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{f(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{\Delta t},$$

ko sauc par *temperatūras maiņas vidējo ātrumu šinī laika sprīdī*. Robežu

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{\Delta t}$$

sauc par *temperatūras maiņas ātrumu momentā  $t_1$* .

Ja šī robeža ir pozitīva, tad to sauc arī par sasīšanas ātrumu, jo līdz ar  $\Delta t > 0$  arī  $\Delta T > 0$ , bet, ja tā ir negatīva, — par atdzišanas ātrumu, jo līdz ar  $\Delta t > 0$  ir  $\Delta T < 0$ .

Vispār dalījuma robežu

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \quad (8.2)$$

sauc par temperatūras maiņas ātrumu jebkurā momentā  $t$ .

Apskatīsim ķīmisku reakciju. Reakcijas produkta koncentrāciju\* laika momentā  $t$  apzīmēsim ar  $x$ , tad

$$x = f(t).$$

\* Vielas daudzumu šķīduma tilpuma vai svara vienībā sauc par šīs vielas koncentrāciju.

Dalījuma robežu

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \quad (8.3)$$

sauc par *reakcijas ātrumu* laika momentā  $t$ .

Apskatisim procesu, kurā kāds fizikāla vai citāda rakstura lielums ar skaitlisku vērtību  $z$  ar laiku mainās, t. i.,

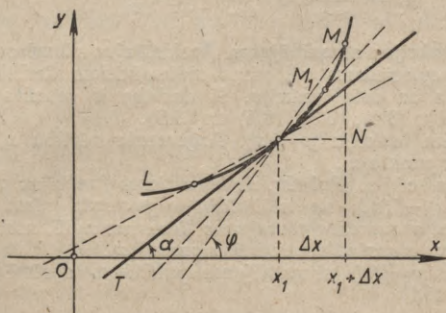
$$z = f(t).$$

Dalījuma robežu

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \quad (8.4)$$

sauc par procesa ātrumu momentā  $t$ .

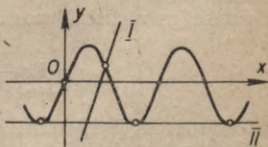
**66. §. Līnijas pieskare.** Pieņemsim, ka līnija  $L$  (94. zīm.) ir funkcijas  $y=f(x)$  grafika. Apzīmēsim ar  $M_1$  šīs līnijas punktu, kura abscisa ir  $x_1$ . Noskaidrosim jēdzienu par *līnijas pieskari*



94. zīm.

punktā  $M_1$ . Elementārajā ģeometrijā pieskari riņķa līnijai definē kā taisni, kam ar riņķa līniju ir tikai viens kopīgs punkts. Turpretim citām līnijām taisne ar minēto īpašību var arī nebūt pieskare. Tā 95. zīm. taisne  $I$  nav līnijas (sinusoīdas) pieskare, lai gan tai ir viens kopīgs punkts ar līniju. Turpretim taisne  $II$  ir līnijas pieskare, kaut gan tai ir daudz kopīgu punktu ar līniju.

Lai noskaidrotu pieskares jēdzienu, izvēlamies uz līnijas  $L$  vēl vienu punktu  $M$  ar abscisu  $x_1 + \Delta x$ . Caur punktiem  $M_1$  un  $M$  velkam sekanti un leņķi, ko šī sekante veido



95. zīm.

ar  $Ox$  ass pozitīvo virzienu, apzīmējam ar  $\varphi$ . Liekam punktam  $M$  neierobežoti tuvotes punktam  $M_1$  pa līniju  $L$ . Tad sagaidāms, ka sekante  $M_1M$  neierobežoti tuvosies attiecīgai robežtaisnei  $T$ , kuras virziena leņķi apzīmēsim ar  $\alpha$ .

**Definīcija.** *Robežtaisni  $T$ , uz ko tiecas caur līnijas  $L$  punktiem  $M_1$  un  $M$  vilktā sekante, kad punkts  $M$  neierobežoti tuvojas punktam  $M_1$ , sauc par šīs līnijas pieskari punktā  $M_1$ .*

Aprēķināsim pieskares virziena leņķi. Kā redzams 94. zīm., apskatītajā robežpārejā mainīgā leņķa  $\varphi$  robeža vienāda ar  $\alpha$ . No taisnleņķa trijstūra  $M_1NM$  atrodam

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{NM}{M_1N} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

Pārejot uz robežu, iegūstam izteiksmi pieskares virziena leņķa  $\alpha$  tangensam (virziena koeficientam)

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\varphi \rightarrow \alpha} \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}. \quad (8.5)$$

**67. §. Funkcijas atvasinājums.** Apskatītajos piemēros noskaidrojām, ka nepieciešams vēl viens matemātiskās darbības veids, kas jāizpilda ar doto funkciju. Šī darbība ir robežas atrašana formulās (8.1), (8.2), (8.3), (8.4) un (8.5).

Apskatīsim funkciju  $y=f(x)$ . Argumenta vērtību  $x_1$  turpmāk sauksim par punktu  $x_1$ .

**1. definīcija.** *Robežu, uz kuru tiecas funkcijas pieauguma  $\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$  un atbilstošā argumenta pieauguma  $\Delta x$  dalījums, kad argumenta pieaugums tiecas uz nulli, sauc par funkcijas  $y=f(x)$  atvasinājuma vērtību punktā  $x_1$ .*

Funkcijas  $y=f(x)$  atvasinājumu punktā  $x_1$  apzīmē ar  $f'(x_1)$  jeb  $y'|_{x=x_1}$ , tad

$$f'(x_1) = y'|_{x=x_1} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}. \quad (8.6)$$

**2. definīcija.** *Robežu, uz kuru tiecas funkcijas pieauguma  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$  un argumenta pieauguma  $\Delta x$  dalījums, kad argumenta pieaugums tiecas uz nulli, sauc par funkcijas  $y=f(x)$  atvasinājumu.*

Funkcijas atvasinājumu apzīmē ar  $f'(x)$  jeb  $y'$ , tad

$$f'(x) = y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (8.7)$$

Kā redzams,  $f'(x_1)$  vienāds ar  $[f'(x)]_{x=x_1}$ , t. i., ar funkcijas  $f'(x)$  vērtību, kad  $x$  vietā liek  $x_1$ . Līdzīga nozīme ir arī apzīmējumam  $y'|_{x=x_1}$ .



Tā kā katrai  $x$  vērtībai atbilst sava funkcijas atvasinājuma vērtība, tad funkcijas atvasinājumu sauc arī par *atvasināto funkciju*. Funkcijas atvasinājuma atrašanas darbību sauc par *funkcijas atvasināšanu* jeb *diferencēšanu*. Matemātiskās analīzes nozari, kura apskata funkciju atvasināšanu un atvasināšanas pielietojumu metodes kā funkciju pētīšanā, tā arī ģeometrijā, fizikā, ķīmijā, tehnikā u. c., sauc par *diferenciālrēķiniem*.

1. piezīme. Funkcijas atvasinājuma definīcijās ar  $\Delta x \rightarrow 0$  domāta  $\Delta x$  tiekšanās uz nulli patvaļīgā veidā, ļaujot  $\Delta x$  pieņemt kā pozitīvas, tā arī negatīvas vērtības, tomēr izslēdzot vērtību  $\Delta x = 0$ .

2. piezīme. Ja funkcijai eksistē atvasinājums kādā punktā, t. i., eksistē galīga robeža (8.6) apskatāmajā punktā, tad, ja  $\Delta x \rightarrow 0$ , šinī punktā arī  $\Delta y \rightarrow 0$ . Seko, ka funkcija ir nepārtraukta minētajā punktā (62. §). Funkcijas atvasināšana ir nenoteiktības atklāšanas īpašs gadījums (60. §).

Ja argumentu un funkciju apzīmē, piemēram, ar  $y = \varphi(x)$ ,  $u = u(x)$  vai  $z = F(t)$ , tad attiecīgo funkcijas atvasinājumu apzīmē ar  $y' = \varphi'(x)$ ,  $u' = u'(x)$ ,  $z' = F'(t)$ . Lieto arī apzīmējumus  $y'_x$ ,  $u'_x$ ,  $z'_t$ , norādot argumentu, pēc kura funkcija atvasināma. Attiecīgos funkcijas atvasinājumus lasa: «igreka atvasinājums pēc iksa», « $u$  atvasinājums pēc iksa», « $z$  atvasinājums pēc  $t$ ».

Funkcijas  $s = F(t)$ , kur arguments  $t$  ir laiks, atvasinājumu mehānikā parasti apzīmē ar  $\dot{s}$ .

*Funkcijas atvasināšanas vispārīgā kārtula:*

1) funkcijai  $y = f(x)$  atrod  $f(x + \Delta x)$ ;

2) šai funkcijai atrod pieaugumu  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ ;

3) dala funkcijas pieaugumu ar argumenta pieaugumu  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ;

4) atrod šī dalījuma robežu (8.7).

Piemērs. Atrast funkcijas  $y = x^2$  atvasinājumu un atvasinājuma vērtību punktā  $x = 3$ .

Atrisinājums. Apzīmēsim  $f(x) = x^2$ .

1)  $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$ ;

2)  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$ ;

3)  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$ ;

4)  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x$ .

Tātad, ja  $y = x^2$ , tad

$$y' = 2x. \quad (8.8)$$

Funkcijai  $f(x) = x^2$  atvasinājums ir  $f'(x) = 2x$ . Funkcijas atvasinājuma vērtība punktā  $x = 3$  ir  $y'|_{x=3} = f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$ .

68. §. Funkcijas atvasinājuma mehāniskā un dabaszinātniskā nozīme. Formulēsim 64. un 65. § aplūkoto piemēru rezultātus ar funkciju atvasinājumu palīdzību.

1. Ja  $s=F(t)$  ir kustības vienādojums, tad funkcijas atvasinājums

$$F'(t) = v = \dot{s} \quad (8.9)$$

izsaka kustības ātrumu.

2. Ja ķermeņa temperatūru  $T$  atkarībā no laika izsaka funkcija  $T=f(t)$ , tad šīs funkcijas atvasinājums

$$T'_t = f'(t) \quad (8.10)$$

izsaka temperatūras maiņas ātrumu.

3. Ja ķīmiskas reakcijas produkta koncentrāciju  $x$  atkarībā no laika izsaka funkcija  $x=f(t)$ , tad šīs funkcijas atvasinājums

$$x'_t = f'(t) \quad (8.11)$$

izsaka reakcijas ātrumu.

Ja  $z$  ir kāda fizikāla lieluma skaitliskā vērtība un  $z=f(t)$ , kur  $t$  ir laiks, tad funkcijas atvasinājums

$$z'_t = f'(t) \quad (8.12)$$

izsaka procesa (ši vārda plašākā nozīmē) ātrumu.

Piezīme. Cits funkcijas atvasinājuma dabaszinātniskās nozīmes paveids izpaužas piemēros, kur viens fizikāls lielums mainās atkarībā nevis no laika, bet no kāda cita fizikāla lieluma. Tad funkcijas atvasinājums izsaka pirmā fizikālā lieluma maiņas straujumu atkarībā no otra fizikālā lieluma maiņas. Apskatīsim, piemēram, ķermeņa iegūtā siltuma daudzuma  $Q$  atkarību no ķermeņa temperatūras  $T$ , tam sasilstot no  $0^\circ\text{C}$ . Seit  $Q=f(T)$ . Tad diference  $\Delta Q = f(T+\Delta T) - f(T)$  izsaka ķermeņa iegūto siltuma daudzumu, ķermenim sasilstot no  $T$  līdz  $T+\Delta T$ . Dalījums

$$\frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{f(T+\Delta T) - f(T)}{\Delta T}$$

izsaka ķermeņa vidējo iegūto siltuma daudzumu, temperatūrai mainoties no  $T$  līdz  $T+\Delta T$ , attiecinātu uz  $1^\circ\text{C}$  (jeb vidējo siltuma iegūšanas straujumu minētā temperatūras intervālā). Šo dalījumu sauc par ķermeņa vidējo siltuma kapacitāti temperatūras intervālam  $(T, T+\Delta T)$ . Funkcijas atvasinājums

$$Q'_T = f'(T) = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{f(T+\Delta T) - f(T)}{\Delta T}$$

izsaka ķermeņa iegūto siltuma daudzumu pie temperatūras  $T$ , attiecinātu uz  $1^\circ\text{C}$  (jeb siltuma iegūšanas straujumu pie temperatūras  $T$ ). Šo atvasinājumu sauc par ķermeņa siltuma kapacitāti pie temperatūras  $T$ .

Apskatot vispār kādu funkciju  $y=f(x)$ , varam teikt, ka funkcijas atvasinājums  $y'=f'(x)$  izsaka funkcijas maiņas straujumu. Ja  $f'(x)>0$ , šis atvasinājums izsaka funkcijas augšanas straujumu, bet, ja  $f'(x)<0$ , — funkcijas dilšanas straujumu.

Piemērs. Ja, materiālai daļiņai kustoties pa taisni, noieto ceļu  $s$  atkarībā no laika  $t$  izsaka vienādojums  $s=t^2$ , tad kustības ātrums  $v$  jebkurā momentā  $t$  saskaņā ar izteiksmi (8.8) ir  $v=s=2t$ , bet kustības ātrums  $v_1$  momentā  $t=3$  ir  $v_1=6$ . Pie tam atkarībā no lietotām garuma un laika mēra vienībām ātrums mērīts attiecīgās ātruma mērvienībās.

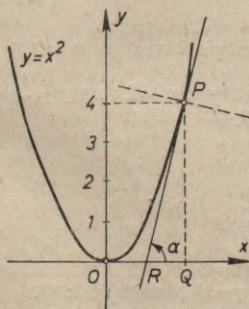
**69. §. Funkcijas atvasinājuma ģeometriskā nozīme, pieskares un normāles vienādojumi.** Pārrakstot pieskares virziena leņķa tangensa izteiksmi (8.5) ar funkcijas atvasinājuma palīdzību, dabūjam

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x_1). \quad (8.13)$$

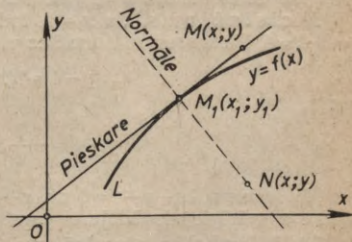
Vienādība (8.13) izsaka funkcijas atvasinājuma ģeometrisko nozīmi — funkcijas atvasinājuma vērtība  $Ox$  ass punktā  $x_1$  ir vienāda līnijas  $L$  punktā  $M_1$  ar abscisu  $x_1$  vilktās pieskares virziena leņķa tangensam, t. i., pieskares virziena koeficientam.

Piemērs. Konstruēt pieskari funkcijas  $y=x^2$  grafikai punktā  $x=2$ .

Apskatāmā grafikas punkta  $P$  (96. zīm.) ordināte ir  $y=2^2=4$ .



96. zīm.



97. zīm.

Tad  $y'=2x$  un  $y'|_{x=2}=2 \cdot 2=4$ , tātad  $\operatorname{tg} \alpha=4$ .  $Q$  ir punkta  $P$  projekcija uz  $Ox$  ass, un  $RQ$  ir nogrieznis ar garumu 1. Tad  $\angle QRP$  ir meklētais leņķis  $\alpha$ , jo  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{QP}{RQ} = \frac{4}{1} = 4$ . Meklētā pieskare ir  $RP$ .

**Definīcija.** Taisni, kas novilkta caur līnijas  $L$  doto punktu  $M_1$  (97. zīm.) perpendikulāri līnijas  $L$  pieskarei šinī punktā, sauc par līnijas  $L$  normāli punktā  $M_1$ .



Līnijas pieskares un normāles vienādojumus meklēsim kā taisnēm, kas novilkta caur doto punktu dotajos virzienos (26. §), t. i., izskatā

$$\begin{aligned} y - y_1 &= k(x - x_1) && \text{(pieskarei),} \\ y - y_1 &= k_1(x - x_1) && \text{(normālei).} \end{aligned}$$

Punkts  $M_1(x_1; y_1)$  ir dotais līnijas punkts,  $k$  — pieskares virziena koeficients,  $k_1$  — normāles virziena koeficients un  $(x; y)$  — jebkura pieskares resp. normāles punkta koordinātes. Zināms, ka  $k = \operatorname{tg} \alpha$ , kur  $\alpha$  — pieskares virziena leņķis.

Pieņemsim, ka dotā līnija ir funkcijas  $y = f(x)$  grafika. Tad  $y_1 = f(x_1)$  un  $k = f'(x_1)$ , bet no divu taisņu perpendikularitātes pazīmes (25. §) seko, ka

$$k_1 = -\frac{1}{k} = -\frac{1}{f'(x_1)}.$$

Līdz ar to pieskares vienādojums ir

$$y - y_1 = f'(x_1) \cdot (x - x_1), \quad (8.14)$$

un normāles vienādojums

$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)} (x - x_1). \quad (8.15)$$

Piemērs. Atrast parabolas  $y = x^2$  pieskares un normāles vienādojumus punktā  $x = 2$  (96. zīm.).

Atrisinājums. Ja  $x_1 = 2$ , tad  $y_1 = 2^2 = 4$ ;  $y' = 2x$  un  $y'|_{x=2} = 2 \cdot 2 = 4$ . Pieskares un normāles vienādojumi tad ir

$$y - 4 = 4(x - 2)$$

un

$$y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 2).$$

No šejienes  $4x - y - 4 = 0$  un  $x + 4y - 18 = 0$  ir pieskares un normāles vispārīgie vienādojumi parabolai  $y = x^2$  punktā  $P(2; 4)$ .

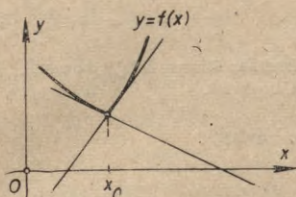
**70. §. Funkcijas atvasinājuma eksistence.** Var konstatēt, ka funkcijas atvasinājums ne vienmēr eksistē, t. i., ne vienmēr dalījumam

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (8.16)$$

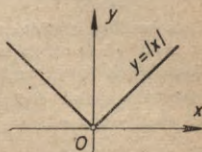
ir galīga robeža, kad  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Atvasinājums neeksistē funkcijas pārtraukuma punktā. Ja pārtraukuma punktā  $x_0$  funkcijas vērtība  $f(x_0)$  ir definēta un līdz ar to ir definēts arī dalījums (8.16), tad šī dalījuma skaitītājs

tomēr netiecas uz nulli, kad saucējs neierobežoti dilst. Pretējā gadījumā funkcija būtu nepārtraukta punktā  $x_0$  (62. §). Tātad funkcijas pārtraukuma punktā  $x_0$  neeksistē dalījuma (8.16) robeža, ja  $\Delta x \rightarrow 0$ , t. i., neeksistē atvasinājums punktā  $x_0$ .



98. zīm.



99. zīm.

Funkcijas vērtība  $f(x_0)$  pārtraukuma punktā  $x_0$  var būt arī nedefinēta, piemēram, funkcija  $y = \frac{1}{x}$  nav definēta punktā  $x_0 = 0$ . Tad punktā  $x_0$  nav definēts arī dalījums (8.16) un nevar runāt par šī dalījuma robežu un līdz ar to par funkcijas atvasinājumu punktā  $x_0$ .

*Atvasinājums neeksistē arī grafikas lūzuma punktā (98. zīm.), kur funkcijas grafikai nav noteiktas pieskares un funkcijai nav atvasinājuma. Šādā gadījumā dalījumam (8.16) ir dažāda kreisā un labā robeža, ja  $\Delta x \rightarrow 0$ , bet šim dalījumam robeža neeksistē, kad  $\Delta x \rightarrow 0$  patvaļīgā veidā. Tad saka, ka funkcijas grafikai lūzuma punktā ir kreisā un labā pieskare.*

Tā, piemēram, funkcijas  $y = |x|$  grafikai (99. zīm.) punktā  $x = 0$  kreisā pieskare saplūst ar funkcijas grafiku 2. kvadrantā, labā pieskare — ar grafiku 1. kvadrantā. Funkcijas grafikai punktā  $x = 0$  nav pieskares parastā nozīmē, tāpēc funkcijai neeksistē atvasinājums punktā  $x = 0$ , lai gan šinī punktā funkcija ir nepārtraukta.

No teiktā izriet, ka, ja funkcijai eksistē atvasinājums kādā punktā, tad šinī punktā funkcija ir nepārtraukta (67. § 2. piezīme). Turpretim no funkcijas nepārtrauktības kādā punktā neseko šīs funkcijas atvasinājuma eksistence šajā punktā.

1. definīcija. Funkciju sauc par *diferencējamu* dotajā punktā, ja šinī punktā funkcijai eksistē atvasinājums.

2. definīcija. Funkciju sauc par *diferencējamu* dotajā intervālā, ja funkcijai eksistē atvasinājums šī intervāla jebkurā punktā. Tā, piemēram, funkcija  $y = x^2$  ir diferencējama jebkurā  $Ox$  ass punktā un arī jebkurā  $Ox$  ass intervālā  $(a, b)$  vai  $[a, b]$ .

## Vingrinājumi

Balstoties uz atvasināšanas vispārīgo kārtulu, atrast funkcijas atvasinājumu un atvasinājuma vērtību dotajā punktā.

1.  $f(x) = 3x^2 - 5$ ,  $f'(1) = ?$

2.  $f(x) = x^3 + 2x$ ,  $f'(0) = ?$

3.  $f(x) = \frac{1}{2x}$ ,  $f'(-1) = ?$

Dots kustības vienādojums; atrast kustības ātrumu dotajā momentā.

4.  $s = 3t^2 - 5$  ( $s$  mērīts cm,  $t$  — sek),  $t = 1$  sek.

5.  $s = t^3 + 2t$  ( $s$  metros,  $t$  sek)  $t = 0$ .

Konstruēt pieskari funkcijas grafikai punktā  $x$ .

6.  $y = 3x^2 - 5$ ,  $x = 1$ .

7.  $y = \frac{1}{2x}$ ,  $x = -1$ .

Atrast pieskares un normāles vienādojumu dotajā grafikas punktā.

8.  $y = 3x^2 - 5$ ,  $x = 1$ .

9.  $y = \frac{1}{2x}$ ,  $x = -1$ .

## 9. NODAĻA

### FUNKCIJU ATVASINĀŠANA

Sarežģītas funkcijas ir grūti atvasināt pēc vispārīgās kārtulas (67. §), tādēļ lieto elementāro pamatfunkciju atvasinājumu formulas un funkcionālu sakarību atvasināšanas kārtulas.

**71. §. Dažu elementāro pamatfunkciju atvasinājumu formulas**

1.  $y = c$ , kur  $c$  ir konstante. Apzīmējam  $f(x) = c$ , tad

1)  $f(x + \Delta x) = c$ ; 2)  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 0$ ;

3)  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$ ; 4)  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim 0 = 0$ .

Tātad, ja  $y = c$ , tad  $y' = 0$ , t. i.,

$$c' = 0, \quad (9.1)$$

*konstantes atvasinājums vienāds ar nulli.*

Tā, piemēram, ja  $y = 3$ , tad  $y' = 3' = 0$ .

Formulas (9.1) mehāniskā nozīme: Ja ķermenis ir mierā, t. i., tā koordināte uz taisnes nemainās ( $s = c$ ), tad tā ātrums ir vienāds ar nulli ( $v = \dot{s} = 0$ ).

Formulas (9.1) ģeometriskā nozīme: Funkcijas  $y = c$  grafika ir taisne, kas paralēla  $Ox$  asij (100. zīm.). Šādai grafikai jeb-



kurā punktā pieskare sakrīt ar pašu grafiku, un šai grafikai virziena leņķa tangenss vienāds ar nulli ( $\operatorname{tg} \alpha = y' = 0$ ).

2.  $y = x$ . Apzīmējam:  $f(x) = x$ , tad

1)  $f(x + \Delta x) = x + \Delta x$ .

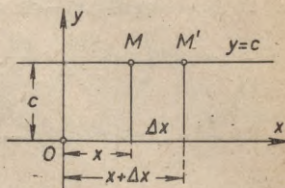
2)  $\Delta y = (x + \Delta x) - x = \Delta x$ .

3)  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$  un

4)  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim 1 = 1$ .

Tātad, ja  $y = x$ , tad  $y' = 1$ , t. i.,

$$x' = 1. \quad (9.2)$$



100. zīm.

Formulas (9.2) ģeometriskā nozīme: Funkcijai  $y = x$  grafika ir 1.

un 3. koordinātu leņķa bisektrise. Šādai grafikai kaut kurā punktā pieskare sakrīt ar pašu grafiku, un šai grafikai virziena leņķa tangenss vienāds ar vienu:  $\operatorname{tg} \alpha = y' = 1$ .

3.  $y = x^n$  ( $n$  — naturāls skaitlis). Apzīmējam  $f(x) = x^n$ , tad pēc Ņūtona binoma formulas

1)  $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots$

2)  $\Delta y = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots$

3)  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}\Delta x + \dots$

4)  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}\Delta x + \dots \right) = nx^{n-1}$ .

Tātad, ja  $y = x^n$ , tad  $y' = nx^{n-1}$ , t. i.,

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \quad (9.3)$$

Piemēri. 1)  $(x^2)' = 2x^{2-1} = 2x$  [sk. arī formulu (8.8)];

2)  $(x^3)' = 3x^2$ .

1. piezīme. Ja  $n = 1$ , tad formula (9.3) sakrīt ar formulu (9.2).

2. piezīme. Formula (9.3) izrādās pareiza arī tad, ja  $n$  ir negatīvs skaitlis vai daļskaitlis (pierādījumu sk. 77. §).

Piemēri.

1. Ja  $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$ , tad  $y' = (-1)x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$ .

2. Ja  $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ , tad  $y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

4.  $y = \sin x$ , kur leņķis  $x$  mērīts radiānos. Apzīmējam  $f(x) = \sin x$ , tad

$$1) f(x + \Delta x) = \sin(x + \Delta x).$$

$$2) \Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} = \\ = 2 \cos \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \frac{\Delta x}{2}.$$

$$3) \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \cos \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

4) robežpārejas  $\Delta x \rightarrow 0$  realizēšanai ievērosim, ka

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \cos x$$

un

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1.$$

Tātad  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x \cdot 1 = \cos x$ , un mēs dabūjam: ja  $y = \sin x$ , tad

$y' = \cos x$ , t. i.,

$$(\sin x)' = \cos x. \quad (9.4)$$

5.  $y = \cos x$ , kur leņķis  $x$  mērīts radiānos. Apzīmējam:  $f(x) = \cos x$ , tad

$$1) f(x + \Delta x) = \cos(x + \Delta x);$$

$$2) \Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = \\ = -2 \sin \frac{x + \Delta x + x}{2} \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} = -2 \sin \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \frac{\Delta x}{2};$$

$$3) \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}};$$

$$4) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin x \cdot 1 = -\sin x.$$

Tātad, ja  $y = \cos x$ , tad  $y' = -\sin x$ , t. i.,

$$(\cos x)' = -\sin x. \quad (9.5)$$

6.  $y = \ln x$ . Apzīmējam  $f(x) = \ln x$ , tad

1)  $f(x + \Delta x) = \ln(x + \Delta x)$ .

2)  $\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln \frac{x + \Delta x}{x} = \ln \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)$ .

3)  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot \ln \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)$ . (9.6)

Robežpārejas  $\Delta x \rightarrow 0$  realizēšanai izmantosim formulu (7.8). Šim nolūkam vispirms iekavu izteiksmi vienādībā (9.6) pieskaņosim iekavu izteiksmei formulā (7.8), ievēdot apzīmējumu

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{z} \quad \text{jeb} \quad z = \frac{x}{\Delta x}, \quad (9.7)$$

no kurienes vienādībā (9.6) sastopamais reizinātājs  $\frac{1}{\Delta x}$  izsakāms

šādi:  $\frac{1}{\Delta x} = \frac{z}{x}$ . Līdz ar to dabūjam

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{z}{x} \cdot \ln \left( 1 + \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{x} \cdot \ln \left( 1 + \frac{1}{z} \right)^z.$$

(Šeit izmantota pakāpes logaritma īpašība  $\log a^z = z \log a$ , kura pastāv kaut kuras bāzes logaritmiem, pie tam šoreiz  $a = 1 + \frac{1}{z}$ .);

4) ja  $\Delta x \rightarrow 0$ , tad saskaņā ar vienādībām (9.7)  $z \rightarrow \infty$  (šeit  $x = \text{const}$ ), un mēs dabūjam

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln \left( 1 + \frac{1}{z} \right)^z = \frac{1}{x} \cdot \lim_{z \rightarrow \infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{z} \right)^z = \\ &= \frac{1}{x} \cdot \ln \lim_{z \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{z} \right)^z = \frac{1}{x} \cdot \ln e = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Šeit darbību  $\lim$  un  $\ln$  secību var mainīt tāpēc, ka logaritmiskā funkcija ir nepārtraukta. Ievērojot šo nepārtrauktību, piemērojam vienādību (7.14), ņemot  $f$  vietā  $\ln$  un  $x$  vietā  $\left( 1 + \frac{1}{z} \right)^z$ .

Tātad, ja  $y = \ln x$ , tad  $y' = \frac{1}{x}$ , t. i.,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \quad (9.8)$$

## 72. §. Summas, reizinājuma un dalījuma atvasināšana.

1. Summas atvasinājums. Apskatīsim gadījumu, kad  $y$  vienāds ar divu citu diferencējamu funkciju summu:  $y = u + v$ , kur



$y=y(x)$ ,  $u=u(x)$  un  $v=v(x)$ . Izteiksim  $y'$  atkarībā no  $u'$  un  $v'$ .  
Tad  $y(x)=u(x)+v(x)$ ,

$$1) y(x+\Delta x)=u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x);$$

$$2) \Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)=[u(x+\Delta x)-u(x)]+ \\ +[v(x+\Delta x)-v(x)]$$

jeb

$$\Delta y=\Delta u+\Delta v;$$

$$3) \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x};$$

$$4) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x};$$

un dabūjam, ka, ja  $y=u+v$ , tad  $y'=u'+v'$ , t. i.,

$$(u+v)'=u'+v'. \quad (9.9)$$

Tātad funkciju summas atvasinājums vienāds ar šo funkciju atvasinājumu summu.

Piemērs. Atvasināt funkciju  $y=x^3+1$ .

$$y'=(x^3)' + 1' = 3x^2 + 0 = 3x^2.$$

Funkciju algebriskas summas atvasinājums. Vispirms atzīmēsim, ka starpībai  $y=u-v$  atvasinājumu var sastādīt tāpat kā summai. Dabūsim  $y'=u'-v'$ . Vispār pastāv kār-tula: kaut kurā galīgā skaitā ņemtu funkciju algebriskas summas atvasinājums ir vienāds ar šo funkciju atvasinājumu attiecīgo algebrisko summu.

Atsevišķā gadījumā trim funkcijām varam rakstīt

$$(u+v-w)'=u'+v'-w'. \quad (9.10)$$

Piemērs. Atvasināt funkciju  $y=x^5-\ln x+\sqrt{2}$ ,  $y'=(x^5)' - (\ln x)' + (\sqrt{2})' = 5x^4 - \frac{1}{x}$ .

2. Reizinājuma atvasinājums. Apskatīsim gadījumu, kad  $y$  vienāds ar divu citu diferencējamu funkciju reizinājumu:  $y=uv$ , kur  $y=y(x)$ ,  $u=u(x)$  un  $v=v(x)$ . Tad  $y(x)=u(x) \cdot v(x)$ .

$$1) y(x+\Delta x)=u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x);$$

$$2) \Delta y=u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x)-u(x) \cdot v(x).$$

No otras puses,  $\Delta u=u(x+\Delta x)-u(x)$ , no kurienes

$$u(x+\Delta x)=u(x)+\Delta u;$$

tāpat dabūjam arī

$$v(x+\Delta x)=v(x)+\Delta v.$$

Tad varam pārveidot  $\Delta y$  izteiksmi:

$$\begin{aligned}\Delta y &= [u(x) + \Delta u][v(x) + \Delta v] - u(x) \cdot v(x) = \\ &= \Delta u \cdot v(x) + u(x) \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v;\end{aligned}$$

$$3) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v(x) + u(x) \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v;$$

$$\begin{aligned}4) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} u(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \\ &+ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v.\end{aligned}\quad (9.11)$$

Seit ir lietota funkciju summas un pēc tam reizinājuma robežas īpašība. Tālāk noskaidrojas:

a)  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x) = v(x) = v$  un  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} u(x) = u(x) = u$ , jo  $v(x)$  un  $u(x)$  nav atkarīgi no  $\Delta x$ ;

$$b) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y', \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u', \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v';$$

c) no  $v'$  eksistences seko funkcijas  $v$  nepārtrauktība, t. i.,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = 0$  [62. §].

No vienādības (9.11) seko, ka, ja  $y = uv$ , tad  $y' = u'v + uv'$ , t. i.,

$$(uv)' = u'v + uv'. \quad (9.12)$$

Piemērs. Atvasināt funkciju  $y = x \sin x$ .

$$y' = x' \sin x + x (\sin x)' = 1 \sin x + x \cos x = \sin x + x \cos x.$$

Atvasinājums funkcijai  $y = cu$ , kur  $u = u(x)$  un  $c = \text{const}$ . Tad  $y' = c'u + cu' = cu'$ , jo  $c' = 0$ . Tātad, ja  $y = cu$ , tad  $y' = cu'$ , t. i.,

$$(cu)' = cu'. \quad (9.13)$$

Šo sakarību vārdos var izteikt šādi: *konstantu reizinātāju var ņemt ārpus atvasināšanas zīmes.*

Piemēri. Atvasināt funkcijas.

$$1) y = 3 \cdot \cos x, \quad y' = 3(\cos x)' = 3(-\sin x) = -3 \sin x;$$

$$2) y = \frac{x^5}{10}, \quad y' = \frac{1}{10}(x^5)' = \frac{1}{10}5x^4 = \frac{1}{2}x^4.$$

Reizinājuma atvasināšanas kārtulas paplašinājums. Pastāv kārtulas paplašinājums kaut kurā galīgā

skaitā ņemtu funkciju reizinājumam. Tā, piemēram, trīs funkciju reizinājumam:

$$(uvw)' = [(uv)w]' = (uv)'w + uvw' = (u'v + uv')w + uvw',$$

t. i.,

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'. \quad (9.14)$$

3. Dalījuma atvasinājums. Apskatīsim gadījumu, kad  $y$  vienāds ar divu citu diferencējamu funkciju dalījumu:  $y = \frac{u}{v}$ ,

kur  $y = y(x)$ ,  $u = u(x)$  un  $v = v(x)$ . Tad  $y(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ ,

$$1) \ y(x + \Delta x) = \frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} = \frac{u(x) + \Delta u}{v(x) + \Delta v};$$

$$2) \ \Delta y = \frac{u(x) + \Delta u}{v(x) + \Delta v} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{v(x)[u(x) + \Delta u] - u(x)[v(x) + \Delta v]}{[v(x) + \Delta v]v(x)} = \\ = \frac{v(x)\Delta u - u(x)\Delta v}{[v(x) + \Delta v]v(x)};$$

$$3) \ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v(x) \frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x) \frac{\Delta v}{\Delta x}}{[v(x) + \Delta v]v(x)};$$

4) pēc robežpārejas  $\Delta x \rightarrow 0$  dabūjam, ka, ja  $y = \frac{u}{v}$ , tad  $y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$ , t. i.,

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}. \quad (9.15)$$

Piemērs. Atvasināt funkciju  $y = \frac{x-1}{x+1}$ .

$$y' = \frac{(x+1)(x-1)' - (x-1)(x+1)'}{(x+1)^2} = \\ = \frac{(x+1) \cdot 1 - (x-1) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2};$$

73. §. Saliktas funkcijas atvasināšana. Apskatīsim saliktu funkciju

$$y = F(u), \text{ kur } u = \varphi(x). \quad (9.16)$$

Izslēdzot no šīm vienādībām  $u$ , dabūjam

$$y = F[\varphi(x)]. \quad (9.17)$$



Pieņemsim, ka funkcijas (9.16) ir diferencējamas apskatāmā jām argumentu vērtībām. Izteiksim dotās saliktās funkcijas atvasinājumu  $y' = y'_x$  atkarībā no  $y'_u = F'(u)$  un  $u'_x = \varphi'(x)$ .

Dodam  $x$  pieaugumu  $\Delta x$ . Tad  $u$  saskaņā ar vienādību  $u = \varphi(x)$  dabū pieaugumu  $\Delta u$ , bet  $y$  saskaņā ar vienādību  $y = F(u)$  dabū pieaugumu  $\Delta y$ . Varam rakstīt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}. \quad (9.18)$$

Ja  $\Delta x \rightarrow 0$ , tad  $\frac{\Delta u}{\Delta x} \rightarrow u'_x$ . Funkcijas  $u = \varphi(x)$  nepārtrauktības dēļ, kura seko no šīs funkcijas atvasinājuma eksistences (70. §), arī  $\Delta u \rightarrow 0$ , un līdz ar to arī  $\frac{\Delta y}{\Delta u} \rightarrow y'_u$ . No formulas (9.18) tad dabūjam, ka, ja  $y = F(u)$ , kur  $u = \varphi(x)$ , tad

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \quad (9.19)$$

jeb  $y' = F'(u) \cdot \varphi'(x)$ .\*

1. piemērs. Atvasināt funkciju  $y = (x^3 - 1)^4$ .

$$y = u^4, \text{ kur } u = x^3 - 1;$$

$$y'_u = (u^4)'_u = 4u^3, \quad u'_x = (x^3 - 1)'_x = 3x^2;$$

$$y' = y'_x = (u^4)'_u \cdot (x^3 - 1)'_x = 4u^3 \cdot 3x^2 = 12u^3 x^2 = 12(x^3 - 1)^3 x^2.$$

Turpmāk centisimies atvasināt saliktu funkciju, neapzīmējot starpmainīgo ar īpašu burtu  $u$ . Proti, rīkosimies šādi:

$$y' = 4(x^3 - 1)^3 \cdot (x^3 - 1)' = 4(x^3 - 1)^3 \cdot 3x^2 = 12(x^3 - 1)^3 x^2.$$

Izsekosim secībai, kādā jāizpilda darbības ar  $x$ , lai dabūtu  $y$  vērtību:  $x$  jāceļ kubā, pēc tam jāatņem 1 un, beidzot, difference jākāpina ar 4. Kā redzams, šeit pēdējā darbība ir kāpināšana ar 4. Līdz ar to arī atvasināšana jāsāk ar minēto 4. pakāpes atvasināšanu, kas dod  $4(x^3 - 1)^3$ . Pēc tam atvasinām diferenci un, beidzot, pakāpi  $x^3$ .

2. piemērs. Atvasināt funkciju  $y = \sin x^2$  jeb  $y = \sin(x^2)$ .

$$y = \sin u, \quad u = x^2; \quad y'_u = (\sin u)'_u = \cos u,$$

$$u'_x = (x^2)'_x = 2x;$$

$$y' = (\sin u)'_u \cdot (x^2)'_x = \cos u \cdot 2x = 2x \cos x^2.$$

Isāk varam rakstīt šādi:

$$y' = \cos x^2 \cdot (x^2)' = \cos x^2 \cdot 2x = 2x \cos x^2.$$

\* Sniegtais kārtulas pamatojums pastāv ar noteikumu, ka, ja  $\Delta x$  atšķiras no nulles, tad arī  $\Delta u$  atšķiras no nulles. Tomēr kārtulu var pierādīt citādi, atmetot šo noteikumu.

3. piemērs. Atvasināt funkciju  $y = \sin^2 x$  jeb  $y = (\sin x)^2$ .

$$y' = 2 \sin x \cdot (\sin x)' = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x.$$

4. piemērs. Atvasināt funkciju  $y = \ln(3x-1)$ .

$$y' = \frac{1}{3x-1} \cdot (3x-1)' = \frac{3}{3x-1}.$$

5. piemērs. Atvasināt funkciju  $y = \sqrt{1-x^2}$  jeb, to pārveidojot,  $y = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ .

$$y' = \frac{1}{2} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1-x^2)' = \frac{1}{2} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

6. piemērs. Atvasināt funkciju  $y = \ln \sin 2x$ .

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\sin 2x} \cdot (\sin 2x)' = \frac{1}{\sin 2x} \cdot \cos 2x \cdot (2x)' = \\ &= \frac{1}{\sin 2x} \cos 2x \cdot 2 = 2 \operatorname{ctg} 2x. \end{aligned}$$

7. piemērs. Atvasināt funkciju  $y = 2 \cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ .

$$\begin{aligned} y' &= 2 \left[ \cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right]' = 2 \cdot 2 \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \left[ \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right]' = \\ &= 2 \cdot 2 \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \left[ -\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right] \cdot \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)' = \\ &= -2 \cdot 2 \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} = -\sin 2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \\ &= -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x. \end{aligned}$$

Šādu rezultātu var iegūt arī, ja pirms atvasināšanas doto funkciju iepriekš pārveido pēc pusleņķa kosinusa formulas:

$$\begin{aligned} y &= 2 \cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1 + \cos 2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \\ &= 1 + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1 + \sin x. \end{aligned}$$

Atvasinot iegūstam

$$y' = 0 + \cos x = \cos x.$$

**74. §. Inversas funkcijas atvasināšana.** Pieņemsim, ka dotā funkcija  $y=f(x)$  apskatāmajām  $x$  vērtībām ir diferencējama un monotona. Funkciju sauc par monotonu, ja līdz ar  $\Delta x > 0$  pastāv vai nu  $\Delta y > 0$  visām apskatāmajām  $x$  vērtībām (funkcija tad aug), vai līdz ar  $\Delta x > 0$  pastāv  $\Delta y < 0$  visām apskatāmajām  $x$  vērtībām (funkcija tad dilst)\*. Tad šīm  $x$  vērtībām eksistē inversā funkcija  $x=\varphi(y)$  (50. §), kura arī izrādās monotona. Var rakstīt vienādību:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} \quad (9.20)$$

Ja  $\Delta x \rightarrow 0$ , tad dotās funkcijas nepārtrauktības dēļ arī  $\Delta y \rightarrow 0$  un varam rakstīt, ka

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} \quad (9.21)$$

(Seit labajā pusē lietota dalījuma robežas īpašība, kur bez tam  $\Delta x \rightarrow 0$  vietā rakstīts  $\Delta y \rightarrow 0$ ). No vienādības (9.21) izriet šāda sakarība starp savstarpēji inverso funkciju atvasinājumiem  $y'_x = =f'(x)$  un  $x'_y = \varphi'(y)$ :

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} \quad (9.22)$$

Šī sakarība starp savstarpēji inverso funkciju atvasinājumiem pastāv, ja viena no šīm funkcijām ir diferencējama un monotona apskatāmām mainīgo lielumu vērtībām. Tad arī otra minētā funkcija izrādās ar tām pašām īpašībām.

Piemērs. Funkcijai  $y=3x-1$  inversā funkcija ir  $x=\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}$ ,

un to atvasinājumi  $y'_x=3$  un  $x'_y=\frac{1}{3}$  apmierina sakarību (9.22).

**75. §. Funkciju  $y=\log_a x$ ,  $y=\operatorname{tg} x$ ,  $y=\operatorname{ctg} x$ ,  $y=a^x$  un  $y=e^x$  atvasinājumu formulas.** Turpmākās formulas iegūsim, pielietojot iepriekšējās formulas.

**1.  $y=\log_a x$ .** Funkcijas atvasinājuma atrašanai izsakām šo funkciju ar naturālo logaritmu, izmantojot formulu (7.10).

$$y = \frac{1}{\ln a} \ln x = \log_a e \cdot \ln x.$$

No šejienes

$$y' = \frac{1}{\ln a} (\ln x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad \text{jeb} \quad y' = \frac{1}{x} \log_a e.$$

---

\* Monotonai funkcijai grafika ir visur kāpjoša vai visur lejup slidoša līnija.



Tātad

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{1}{x} \log_a e. \quad (9.23)$$

Piemērs. Ja  $y = \lg x$  ( $a = 10$ ), tad

$$y' = \frac{1}{x \ln 10} = \frac{1}{x} \lg e \approx \frac{1}{x} \cdot 0,4343.$$

2.  $y = \operatorname{tg} x$ . Funkciju izsakām ar sinusu un kosinusu un pēc tam atvasinām kā dalījumu:

$$\begin{aligned} y &= \frac{\sin x}{\cos x}, \quad y' = \frac{\cos x (\sin x)' - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Tātad

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}. \quad (9.24)$$

3.  $y = \operatorname{ctg} x$  jeb  $y = \frac{\cos x}{\sin x}$ :

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\sin x (-\sin x)' - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}, \\ (\operatorname{ctg} x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x}. \end{aligned} \quad (9.25)$$

4.  $y = a^x$ . Šai funkcijai inversā funkcija ir  $x = \log_a y$ . Tā kā logaritmiskās funkcijas atvasinājumu jau zinām (pie tam logaritmiskā funkcija ir monotona, skat. 74. §), tad varam rakstīt, ka

$$x'_y = \frac{1}{y \ln a},$$

un saskaņā ar formulu (9.22) dabūjam

$$y' = y'_x = y \ln a = a^x \ln a.$$

Tātad

$$(a^x)' = a^x \ln a. \quad (9.26)$$

Piemērs. Ja  $y = 10^x$ , tad  $y' = 10^x \ln 10 \approx 2,30 \cdot 10^x$ .

5.  $y = e^x$ . Tas ir funkcijas  $y = a^x$  atsevišķs gadījums, kad  $a = e$ . Soreiz  $\ln a = \ln e = 1$ , un

$$(e^x)' = e^x. \quad (9.26')$$

P i e m ē r s. Atvasināt funkciju  $y = e^{2x}$ . Funkciju atvasinām kā saliktu funkciju:

$$y' = e^{2x} (2x)' = 2e^{2x}.$$

**76. §.\* Apslēptas funkcijas atvasināšana.** Vispirms apskatīsim *identitātes atvasināšanu*. Identitāte ar argumentu  $x$  ir vienādība

$$f_1(x) = f_2(x), \quad (9.27)$$

kas pastāv visām  $x$  vērtībām kādā noteiktā intervālā.

Pieņemsim, ka identitātē (9.27) vismaz viena no funkcijām  $f_1(x)$  un  $f_2(x)$  ir diferencējama intervālā, kur pastāv šī identitāte. Ņemsim tādu  $\Delta x$ , lai ne tikai  $x$ , bet arī  $x + \Delta x$  un  $x - \Delta x$  atrastos šai intervālā. Tad pastāv vienādība

$$1) f_1(x + \Delta x) = f_2(x + \Delta x)$$

minētai  $\Delta x$  un arī visām citām mazākām  $|\Delta x|$  vērtībām. Atņemot dabūjam

$$2) f_1(x + \Delta x) - f_1(x) = f_2(x + \Delta x) - f_2(x)$$

un, izdalot ar  $\Delta x$ :

$$3) \frac{f_1(x + \Delta x) - f_1(x)}{\Delta x} = \frac{f_2(x + \Delta x) - f_2(x)}{\Delta x}.$$

Saskaņā ar minēto eksistē robeža:

$$4) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_1(x + \Delta x) - f_1(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_2(x + \Delta x) - f_2(x)}{\Delta x}$$

jeb

$$f_1'(x) = f_2'(x), \quad (9.28)$$

t. i., identitāti drīkst atvasināt intervālā, kur pastāv dotā identitāte.

**P i e z ī m e.** Arī jaunā vienādība (9.28) ir identitāte tai pašā intervālā, kur pastāv dotā identitāte.

**P i e m ē r s.** Atvasināt identitāti

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1.$$

Ka tā ir identitāte un pie tam intervālā  $(-\infty, +\infty)$ , seko no summas kuba formulas. Atvasinot dabūjam

$$3(x+1)^2 = 3x^2 + 6x + 3,$$

kas ir jauna identitāte tai pašā intervālā, par ko var pārliedzināties pēc summas kvadrāta formulas.

Identitātei pretstatā ir vienādojums. Vienādojums ar nezināmo  $x$  ir vienādība, ko apmierina tikai dažas  $x$  vērtības — vienādojuma saknes. Tā, piemēram,  $2x^2 - 3x + 3 = x^2 + 1$  ir vienādojums, ko apmierina tikai divas  $x$  vērtības  $x_1 = 1$  un  $x_2 = 2$ .

Ja vienādojumu  $f_1(x) = f_2(x)$  apmierina kāda  $x$  vērtība, tad šo vienādojumu tomēr neapmierina cita vērtība  $x + \Delta x$  ar kaut kuru pēc patikas mazu  $|\Delta x|$ :  $f_1(x + \Delta x) \neq f_2(x + \Delta x)$ . Tāpēc ar vienādojumu nevar izdarīt tādus pārveidojumus, kas ļautu secināt vienādības  $f_1'(x) = f_2'(x)$  pastāvēšanu.

Piemēram, atvasinot augšminēto vienādojumu, mēs dabūtu jaunu vienādojumu  $4x - 3 = 2x$ , kura sakne ir  $x = \frac{3}{2}$  un kura atšķiras no iepriekšējā vienādojuma saknēm  $x_1 = 1$  un  $x_2 = 2$ .

Apslēptas funkcijas atvasināšana. Dots vienādojums

$$F(x, y) = 0. \quad (9.29)$$

Pieņemsim, ka tas apslēptā veidā definē  $y$  kā  $x$  funkciju

$$y = y(x), \quad (9.30)$$

t. i., funkciju, kura pēc ievietošanas vienādojumā (9.29) to pārvērš par identitāti ar argumentu  $x$  (47. §):

$$F[x, y(x)] = 0. \quad (9.31)$$

1. piemērs. Vienādojums

$$3x - 5y + 2 = 0 \quad (9.29')$$

apslēptā veidā definē funkciju

$$y = \frac{3}{5}x + \frac{2}{5}. \quad (9.30')$$

Ievietojot šo  $y$  izteiksmi iepriekšējā vienādojumā  $y$  vietā, dabūjam identitāti

$$3x - 5\left(\frac{3}{5}x + \frac{2}{5}\right) + 2 = 0, \quad (9.31')$$

kas pastāv intervālā  $(-\infty, +\infty)$ , par ko var pārliecināties pēc iekavu atvēršanas.

2. piemērs. Vienādojums

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (9.29'')$$

apslēptā veidā definē divas  $x$  funkcijas

$$y = +\sqrt{1-x^2} \text{ un } y = -\sqrt{1-x^2}. \quad (9.30'')$$



So funkciju grafikas ir augšējā resp. apakšējā puse riņķa linijai ar centru sākuma punktā un ar rādiusu 1. Ievietojot kaut kuru no šīm  $y$  izteiksmēm iepriekšējā vienādojumā  $y$  vietā, dabūjam identitāti

$$x^2 + (\pm\sqrt{1-x^2})^2 = 1, \quad (9.31'')$$

kas pastāv intervālā  $[-1, 1]$ , par ko var pārliecināties pēc saknes saīsināšanas ar kāpinātāju. Seit identitāte nepastāv ārpus minētā intervāla, jo tur zemsaknes izteiksme ir negatīva un sakne ir imagināra.

Lai atrastu atvasinājumu funkcijai, ko definē apslēptā veidā vienādojums (9.29), atvasina identitāti (9.31) pēc  $x$ . Atvasināšanas gaitā ar  $y$  rīkojas kā ar starpmainīgo lielumu. Rezultātā parasti iegūstam pirmās pakāpes vienādojumu attiecībā pret  $y'$ , kuru atrisinot atrodam  $y'$ .

1. piemērā atvasinot doto vienādojumu kā identitāti, dabūjam

$$3 - 5y' = 0.$$

No šejienes

$$y' = \frac{3}{5}. \quad (9.32)$$

Atrastais  $y'$  sakrīt ar attiecīgās atklātās funkcijas (9.30') atvasinājumu.

2. piemērā atvasinot doto vienādojumu kā identitāti, iegūstam

$$2x + 2yy' = 0.$$

Seit  $y^2$  atvasināts kā salikta  $x$  funkcija ar starpmainīgo lielumu  $y$ . No šejienes

$$y' = -\frac{x}{y}. \quad (9.32')$$

Iegūtā formula izsaka reizē atvasinājumu kaut kurai no funkcijām (9.30'').

2. piemēra turpinājums. Apslēptai funkcijai, ko definē vienādojums (9.29''), atrast atvasinājuma vērtību punktā

$x = \frac{1}{2}$  negatīvai  $y$  vērtībai. Vispirms, liekot vienādojumā (9.29'')

$x = \frac{1}{2}$ , dabūjam  $y^2 = \frac{3}{4}$ , no kurienes  $y = \frac{1}{2}\sqrt{3}$  vai  $y = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ . Sa-

skaņā ar uzdevuma noteikumu jāņem  $y = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ , kas nozīmē

izvēlēties punktu uz riņķa līnijas apakšējās puses. Meklēto atvasinājuma vērtību dabūjam no formulas (9.32'), ievietojot  $x = \frac{1}{2}$  un  $y = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ :

$$y' \Big|_{x=\frac{1}{2}, y=-\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

**Kārtula.** Lai atvasinātu apslēptu funkciju, ko definē vienādojums ar diviem nezināmiem  $x$  un  $y$ , tad šo vienādojumu atvasina kā identitāti ar argumentu  $x$ , uzskatot  $y$  par  $x$  funkciju un rīkojoties ar  $y$  kā ar starpmainīgo lielumu.

1. **piezīme.** Atvasinot apslēptu funkciju pēc minētās kārtulas, rezultātu parasti dabū, izteiktu atkarībā no argumenta  $x$  un funkcijas  $y$  pretēji visiem iepriekšējiem atvasināšanas gadījumiem, kad  $y'$  izteikts tikai atkarībā no argumenta  $x$ .

2. **piezīme.** Lai atvasinātu apslēptu funkciju, nav vaja dzīgs dotā vienādojumā visus locekļus pārnest vienādojuma kreisajā pusē. Tā 2. piemērā dotais vienādojums varētu būt  $x^2 + y^2 = 1$  vai arī  $x^2 = 1 - y^2$ . Nepārnēsot locekļus uz kreiso pusi un rīkojoties pēc šīs kārtulas, arī šeit var atrast  $y'$ .

**77. §.\* Logaritmiskā atvasināšana, pakāpes funkcijas atvasinājums vispārīgā gadījumā.** Lai atvasinātu atklātu funkciju (47. §), dažreiz ir lietderīgi doto vienādību vispirms logaritmēt pie bāzes  $e$ . Tad  $y$  dabūjam kā apslēptu  $x$  funkciju un atvasinām apslēptu funkciju. Minēto paņēmieni sauc par logaritmisko atvasināšanu.

1. **piemērs.**  $y = a^x$ . Logaritmējot  $\ln y = x \ln a$  un atvasinot  $\frac{1}{y} y' = \ln a$ , no kurienes  $y' = y \ln a = a^x \ln a$ , atkal iegūstam formulu (9.26).

2. **piemērs.**  $y = x^x$ . Logaritmējot pie bāzes  $e$ ,  $\ln y = x \ln x$ , un atvasinot dabūjam  $\frac{1}{y} y' = 1 \cdot \ln x + x \frac{1}{x} = \ln x + 1$ , no kurienes  $y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$ .

Atvasināsim pakāpes funkciju

$$y = x^a,$$

kur  $a$  var būt vesels skaitlis vai daļskaitlis (pozitīvs vai negatīvs). Logaritmējot pie bāzes  $e$ ,  $\ln y = a \ln x$ , un, atvasinot  $\frac{1}{y} y' = a \frac{1}{x}$ , dabūjam  $y' = ay \frac{1}{x} = ax^a \frac{1}{x} = ax^{a-1}$ . Tātad

$$(x^a)' = ax^{a-1}. \quad (9.33)$$

Ar to ir pamatota 71. § 2. piezīme.

78. §.\* **Ciklometrisko funkciju atvasināšana.** Šo funkciju atvasinājumus iegūsim, izmantojot trigonometrisku funkciju atvasinājumus.

1. Dota funkcija  $y = \arcsin x$ . Tai inversā funkcija ir  $x = \sin y$ , un tās atvasinājums  $x'_y = \cos y$ . Tad saskaņā ar formulu (9.22)\*

$$y' = y'_x = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Šeit  $\cos y$  atvietots ar  $\sqrt{1 - \sin^2 y}$ , lai  $y'$  izteiktu atkarībā no  $x$ . Tātad

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}; \quad (9.34)$$

Piezīme. Šai formulā vienmēr jāņem *pozitīvā saknes vērtība*, jo ar  $\arcsin x$  ir domāta arksinusa galvenā vērtība (53. §), kura jāņem 1. vai 4. kvadrantā, t. i.,  $y$  ir 1. vai 4. kvadrantā. Bet tad  $\cos y$ , kas vienāds apskatāmai kvadrātsaknei formulā (9.34), ir pozitīvs.

2. Dots, ka  $y = \arccos x$ . Tai inversā funkcija ir  $x = \cos y$ , un tās atvasinājums  $x'_y = -\sin y$ . Tad

$$y' = y'_x = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Tātad

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad (9.35)$$

Var pārbaudīt, ka arī šeit vienmēr jāņem *pozitīvā saknes vērtība*.

3. Dots, ka  $y = \operatorname{arctg} x$ . Tai inversā funkcija ir  $x = \operatorname{tg} y$ , un tās atvasinājums  $x'_y = \frac{1}{\cos^2 y}$ . Tad

$$y' = \cos^2 y = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Tātad

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}. \quad (9.36)$$

4. Līdzīgā ceļā var dabūt arī

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}. \quad (9.37)$$

---

\* Funkcija  $\sin y$  ir monotona (74. §) apskatāmajām  $y$  vērtībām intervālā  $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ , kuras pieņem funkcija  $y = \arcsin x$  (53. §). Līdzīgas piezīmes jādod arī pārējām ciklometriskajām funkcijām.



79. §. Funkciju atvasināšanas pamatformulas un kārtulas

| Pamatformulas |                                            |                        |                       | Kārtulas                     |                          |
|---------------|--------------------------------------------|------------------------|-----------------------|------------------------------|--------------------------|
| $y$           | $y'$                                       | $y$                    | $y'$                  | $y$                          | $y'$                     |
| $c$           | $0$                                        | $\operatorname{tg} x$  | $\frac{1}{\cos^2 x}$  | $u+v$                        | $u'+v'$                  |
| $\sin x$      | $\cos x$                                   | $\operatorname{ctg} x$ | $-\frac{1}{\sin^2 x}$ | $uv$                         | $u'v+uv'$                |
| $\cos x$      | $-\sin x$                                  | $a^x$                  | $a^x \ln a$           | $cu$                         | $cu'$                    |
| $\ln x$       | $\frac{1}{x}$                              | $e^x$                  | $e^x$                 | $\frac{u}{v}$                | $\frac{vu'-uv'}{v^2}$    |
| $\log_a x$    | $\frac{1}{x \ln a} = \frac{1}{x} \log_a e$ | $x^a$                  | $ax^{a-1}$            | $y=F(u)$<br>$u=\varphi(x)$   | $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ |
|               |                                            |                        |                       | $y=f(x)$ ,<br>$x=\varphi(y)$ | $y'_x = \frac{1}{x'_y}$  |

\* Papildu formulas

| $y$         | $y'$                      | $y$                        | $y'$               |
|-------------|---------------------------|----------------------------|--------------------|
| $\arcsin x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  | $\operatorname{arctg} x$   | $\frac{1}{1+x^2}$  |
| $\arccos x$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\operatorname{arccotg} x$ | $-\frac{1}{1+x^2}$ |

80. §. Augstāku kārtu atvasinājumi. Funkcijas  $y=f(x)$  atvasinājums  $y'$  jeb  $f'(x)$  ir jauna  $x$  funkcija (67. §), kurai savukārt var meklēt atvasinājumu. Saskaņā ar funkcijas atvasinājuma definīciju šis jaunais atvasinājums ir šāda dalījuma robeža:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}.$$

To apzīmē ar  $y''$  jeb  $f''(x)$  un sauc par funkcijas  $y=f(x)$  otro atvasinājumu:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x} = f''(x) = y''. \quad (9.38)$$

Līdzšinējo funkcijas atvasinājumu  $y'$  sauc par pirmo atvasinājumu.

Funkcijas otro atvasinājumu atrod, pirmo atvasinājumu vēlreiz atvasinot pēc parastām atvasināšanas formulām un kārtulām. Atzīmēsim, ka  $f''(x_1)$  nozīmē  $[f'(x)]'_{x=x_1}$ , t. i., funkcijas  $f(x)$  otrā atvasinājuma  $f''(x)$  vērtību punktā  $x=x_1$ .

Piemērs. Funkcijai  $f(x)=2x^3-9x^2+12x$  pirmais atvasinājums ir  $f'(x)=6x^2-18x+12$ , bet otrais atvasinājums

$$f''(x)=12x-18.$$

Otrā atvasinājuma vērtības, piemēram, punktos  $x=1$  un  $x=2$  ir

$$f''(1)=12 \cdot 1 - 18 = -6 \text{ un } f''(2)=12 \cdot 2 - 18 = 6.$$

**Definīcija.** Funkciju sauc par divas reizes nepārtraukti diferencējamu dotajā punktā, ja funkcijai šajā punktā eksistē pirmais un otrais atvasinājums, pie kam otrais atvasinājums ir nepārtraukta funkcija šinī punktā.

Funkcija, kurai piemīt minētā īpašība, kā arī tās pirmais atvasinājums ir nepārtraukta funkcija šai pašā punktā. Sis apgalvojums izriet no atvasinājuma eksistences kā pašai funkcijai, tā arī tās pirmajam atvasinājumam (70. §).

Funkcijas otro atvasinājumu vēlreiz atvasinot, dabū funkcijas trešo atvasinājumu. Pēdējo atvasinot, dabū vēl ceturto utt. Ja dotā funkcija ir  $y=f(x)$ , tad minētos atvasinājumus apzīmē šādi:

$f'''(x)$  jeb  $y'''$  — trešais atvasinājums;  
 $f^{IV}(x)$  jeb  $f^{(4)}(x)$ , jeb  $y^{IV}$ , jeb  $y^{(4)}$  — ceturtais atvasinājums, utt.;  
 $f^{(n)}(x)$  jeb  $y^{(n)}$  —  $n$ -tais atvasinājums.

Piemērs. Funkcijai  $f(x)=2x^3-9x^2+12x$  ir

$f''(x)=12x-18$ ,  $f'''(x)=12$ ,  $f^{IV}(x)=0$ , un arī visi tālākie atvasinājumi kā konstantes 0 atvasinājumi vienādi ar nulli, t. i.,  $f^{(n)}(x)=0$ , kad  $n \geq 4$ .

**81. §. Funkcijas otrā atvasinājuma mehāniskā nozīme.** Ja kustības vienādojums ir  $s=F(t)$ , tad funkcijas atvasinājums  $s$  jeb  $F'(t)$  izteic kustības ātrumu mīklī  $t$  (68. §);

$$v=F'(t).$$

Ātrums laika momentā  $t+\Delta t$  ir  $v_1=F'(t+\Delta t)$ , bet ātruma pieaugums starp  $t$  un  $t+\Delta t$  ir

$$\Delta v = v_1 - v = F'(t+\Delta t) - F'(t).$$

Ātruma pieaugumu  $\Delta v$  dalot ar atbilstošo laika sprīdi  $\Delta t$ , dabūjam kustības vidējo paātrinājumu tai pašā laika sprīdī

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{F'(t+\Delta t) - F'(t)}{\Delta t}.$$

Šī dalījuma robežu, kad  $\Delta t \rightarrow 0$ , sauc par kustības momentāno paātrinājumu laika momentā  $t$  jeb īsāk — par kustības paātrinājumu momentā  $t$ . Apzīmēsim to ar  $a$ , t. i.,

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F'(t + \Delta t) - F'(t)}{\Delta t}.$$

No otras puses, šeit sastopamā dalījuma robeža ir ātruma  $v$  atvasinājums  $\dot{v}$  un saskaņā ar formulu (9.38) — arī apskatāmā materiālā punkta (64. §) koordinātes  $s = F(t)$  otrais atvasinājums  $\ddot{s} = F''(t)$ . Tāpēc dabūjam, ka

$$a = \dot{v} = \ddot{s} = F''(t). \quad (9.39)$$

Tātad kustības paātrinājums vienāds ar ātruma atvasinājumu vai ar apskatāmā materiālā punkta koordinātes otro atvasinājumu.

Piemērs. Brīvā kritienā noietais ceļš  $s$  izsakāms atkarībā no laika  $t$  pēc formulas  $s = \frac{gt^2}{2}$ . Ar atvasināšanu dabūjam kustības ātrumu

$$v = \frac{g}{2} (t^2)' = \frac{g}{2} \cdot 2t = gt$$

(64. §). Ar vēlreizēju atvasināšanu atrodam kustības paātrinājumu:

$$a = (gt)' = g.$$

### Vingrinājumi

Atvasināt funkcijas.

1.  $y = x^4 - 3x^3 + 17x - 4.$

3.  $x = a^2 t^2 + b^2.$

5.  $y = (x^2 - 2x)(1 - x + x^2).$

7.  $y = 2x(7 - x^2)(x^2 + 3).$

9.  $y = \frac{1 + x - x^2}{1 - x + x^2}.$

11.  $f(x) = \frac{2x + 3}{2 - 3x}, f'(-1) = ?$

13.  $y = \frac{6x^7}{7a} - \frac{2a}{3b}.$

15.  $y = 2x^3 + \frac{1}{2x} - \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^6}.$

17.  $y = x^2 \sqrt{x} - x \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x^3}.$

2.  $s = t - \frac{3}{2}t^2 + \frac{2}{3}t^3 - \frac{5}{4}t^4.$

4.  $y = (x + 1)(x^2 + 2).$

6.  $y = 8(3x^2 - 5 + 5).$

8.  $y = \frac{x}{3x + 2}.$

10.  $y = \frac{1 + x}{1 - x} + \frac{1 - x}{1 + x}.$

12.  $y = \frac{x^3 - 1}{3}.$

14.  $f(t) = \frac{t^3 + 1}{t^3 - 1}.$

16.  $y = 6x^{-\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 2^5.$

18.  $y = \frac{4}{\sqrt{x}} + 6 \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^2}} - 3 \sqrt[2]{x^2}.$



19. Kustības vienādojums ir  $s=4+12t-\frac{1}{4}t^2$  ( $s$  metros,  $t$  sekundēs). Pēc cik ilga laika kopš sākuma momenta  $t=0$  ķermenis apstājas?

20. Kustības vienādojums ir  $s=40t+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{6}t^3$  ( $s$  metros,  $t$  sekundēs). Kādu attālumu ķermenis noiet no momenta  $t=0$  līdz apstāšanās brīdim?

21. Dažās ķīmiskās reakcijās produkta koncentrāciju  $x$  nosaka formula  $x=\frac{a^2kt}{akt+1}$ , kur  $t$  ir laiks, bet  $a$  un  $k$  — konstantes. Atrast reakcijas ātrumu; pēc tam ātrumu izteikt atkarībā no  $x$ .

22. Funkcijas  $y=-\frac{1}{2}x^2+2x$  grafikai punktos  $x=-1$  un  $x=2$  1) konstruēt pieskares; 2) atrast pieskares un normāles vienādojumus.

Atvasināt funkcijas.

23.  $y=x^2 \sin x$ .

24.  $y=\sin x \cdot \cos x$ .

25.  $y=\frac{\cos x}{x^2}$ .

26. Funkcijas  $y=\sin x$  grafikai punktos  $x=0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$  1) konstruēt pieskares; 2) atrast pieskares un normāles vienādojumus.

Atvasināt funkcijas:

27.  $y=x \ln x - x$ .

28.  $y=\frac{x^3}{3} \ln x + \frac{2}{9}x^3$ .

29.  $y=\frac{\ln x}{x+1}$ .

30.  $y=(2x^3+x)^5$ .

31.  $y=\sqrt{x^2+2x-1}$ .

32.  $f(t)=t^2\sqrt{t+1}$ .

33.  $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^3}}$ .

34.  $s=\sqrt{1+\frac{2}{t}}$ .

35.  $y=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ .

36.  $x=\frac{t^2}{\sqrt{1-t}}$ .

37.  $y=3 \sin 5x+5 \cos 3x$ .

38.  $y=x^2 \sin 2x$ .

39.  $y=\frac{\cos(2x-1)}{x+1}$ .

40.  $y=3 \sin^2 x - \cos^2 x$ .

41.  $f(\varphi)=\sin \varphi \cdot \cos 3\varphi$ .

42.  $y=\ln(x-1)-\ln(x+1)$ .

43.  $y=\ln(x^2-3x+1)$ .

44.  $y=\ln \frac{a+x}{a-x}$ .

Norādījums. Pirms atvasināšanas piemērot dalījuma logaritma īpašību.

45.  $y=\ln \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$ .

46.  $y=\ln x^2 + \ln^2 x$ .

47.  $y=\ln \ln x$ .

48.  $y=\ln \sin x$ .

49.  $y=3x \lg x$ .

50.  $y=\frac{\lg x}{\ln x}$ .

51.  $y=\lg \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)$ .

52.  $y=\lg \sqrt{1-2x^3}$ .

53.  $y=\lg \cos x$ .

54.  $y=\operatorname{tg} x \cdot \ln x$ .

55.  $y = \operatorname{tg} 3x - \operatorname{ctg} 3x.$

56.  $y = \sin^2 x \cdot \operatorname{tg} x.$

57.  $y = x \operatorname{tg}^2 x.$

58.  $y = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} x}{x}.$

59.  $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$

60.  $y = \lg \operatorname{ctg} x.$

61.  $y = e^x (x^2 - 2x + 2).$

62.  $y = e^x \cdot \operatorname{ctg} x.$

63.  $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}.$

64.  $y = x^3 10^x.$

65.  $y = 5 \cdot 4^x - 4 \cdot 5^x.$

66.  $y = \frac{1}{2} (e^{2x} - e^{-2x}).$

67.  $y = (x^4 - 2x^2) e^{x^2}.$

68.  $y = e^{2x^2 + 5x - 4}.$

69.  $y = e^{\ln x}.$

70.  $y = \ln \frac{e^x}{1 - e^x}.$

71.  $s = e^{-2t} \sin(3t + 1).$

72.  $y = \frac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}}.$

73.  $y = 2 - x - \frac{1}{3} 2^{-3x}.$

74.  $y = \frac{2^{3x}}{x + 1}.$

75. Ja ķermenis atdziest vidē, kuras temperatūra ir  $0^\circ\text{C}$ , tad temperatūras atkarību no laika izsaka formula  $T = T_0 e^{-kt}$ , kur  $T$  ir ķermeņa temperatūra mirklī  $t$ ,  $T_0$  — ķermeņa sākuma temperatūra, bet  $k$  — konstante. Konstatēt, ka atdzišanas ātrums ir proporcionāls esošai temperatūrai.

76. Dažās ķīmiskās reakcijās produkta koncentrāciju  $x$  nosaka formula

$$1) x = a(1 - e^{-kt}), \quad 2) x = \frac{ab(1 - e^{(b-a)kt})}{a - be^{(b-a)kt}},$$

kur  $t$  ir laiks, bet  $a$ ,  $b$  un  $k$  — konstantes. Atrast reakcijas ātrumu; pēc tam ātrumu izteikt atkarībā no  $x$ .

77. Pārliedzot, ka vienādību  $2x - x^2 = 1 - (1 - x)^2$  drīkst atvasināt, pie tam pēc atvasināšanas rodas identitāte. Vai drīkst atvasināt vienādību  $2x = 1 - (1 - x)^2$ ?

Apslēptā veidā definētām funkcijām atrast a) atvasinājumu  $y'$ , b) atvasinājuma vērtību dotajā punktā, c) izteiksmi atklātā veidā.

78.  $2x^2 + y^2 - 3 = 0$ , punkts  $x = 1$  un  $y < 0$ .

79.  $x^2 + y^2 - x^3 = 5$ , punkts  $x = 2$  un  $y > 0$ .

80.  $y^2 = 4x$ , punkts  $x = 1$  un  $y < 0$ .

Apslēptā veidā definētām funkcijām atrast atvasinājumu.

81.  $(x + y)^3 = axy$ ,  $y' = ?$

82.  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $y' = ?$

83.  $u^3 v - 2u^2 v^2 + uv^3 = 1$ ,  $v'_u = ?$

84. Atrast viengredzējumu pieskarei un normālei dotajā līnijas punktā, ja līnijai ir 79. vingrinājumā dots vienādojums un ja dotajam līnijas punktam  $x = 2$  un  $y > 0$ .

Atvasināt funkcijas.

85.  $y = x^{-x}.$

86.  $y = (1 + x)^{2x}.$

87.  $y = \frac{(x-2)^2 \sqrt{x+1}}{(x-5)^3}$

88.  $y = \arcsin x \cdot \arccos x.$

89.  $y = x \operatorname{arctg} x.$

90.  $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}.$

91.  $y = \arcsin 5x$ .

92.  $y = \arcsin \frac{1}{x}$ .

93.  $y = \arcsin 3x + \arccos 3x$ .

94.  $y = \arcsin \sqrt{1-x^2}$ .

95.  $y = \arctg \frac{x}{2}$ .

96.  $y = \arctg(1+x^2)$ .

97.  $y = \arctg \frac{2x}{1-x^2}$ .

Atrast augstākas kārtas atvasinājumus.

98.  $y = (1-2x)^5$ ,  $y'' = ?$

99.  $f(t) = e^t(\sin t + \cos t)$ ,  $f'(t) = ?$

100.  $x = \ln(1-t)$ ,  $x''' = ?$

101.  $f(x) = \sin^2 x$ ,  $f''(0) = ?$ ,  $f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = ?$ ,  $f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = ?$

102. Kustības vienādojums ir  $s = a \sin 3t$  ( $s$  — centimetros,  $t$  — sek,  $a = \text{const.}$ ). Atrast kustības paātrinājumu laika momentos  $t = \frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{\pi}{2}$ .

103. Vertikāli uz augšu sviesta ķermeņa kustības vienādojums ir  $s = v_0 t - 4.9 t^2$ , kur  $v_0$  ir sākuma ātrums ( $s$  — metros,  $t$  — sek). Atrast ātrumu un paātrinājumu laika momentā  $t = 3$  sek, ja  $v_0 = 50$  m/sek.

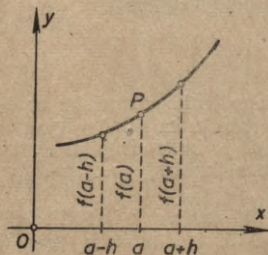
## 10. NODAĻA

### FUNKCIJAS ATVASINĀJUMA LIETOSANA FUNKCIJU PETISANAI

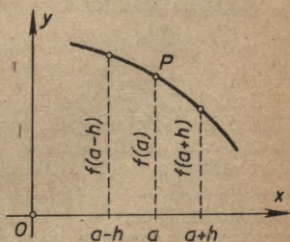
Šīs nodaļas pirmos piecos paragrāfos pieņemsim, ka pētāmā funkcija  $y = f(x)$  ir definēta un divas reizes nepārtraukti diferencējama visos apskatāmajos  $Ox$  ass punktos, kā arī šo punktu tuvumā.

82. §. Funkcijas augšana un dilšana. Funkcija  $y = f(x)$  punktā  $a$  aug, ja katram pietiekami mazam  $h > 0$  pastāv nevienādības  $f(a-h) < f(a) < f(a+h)$ , t. i., ja pietiekami tuvu punktam  $a$  augošam argumentam atbilst augoša funkcija (101. zīm.).

Funkcija  $y = f(x)$  punktā  $a$  dilst, ja katram pietiekami mazam  $h > 0$  pastāv nevienādības  $f(a-h) > f(a) > f(a+h)$ , t. i., ja



101. zīm.

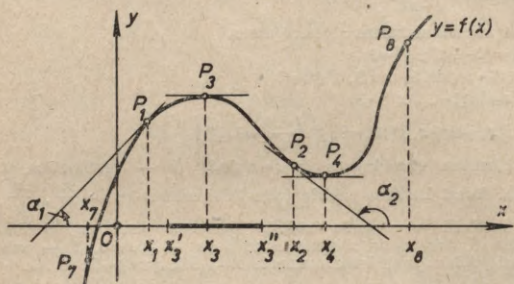


102. zīm.



pietiekami tuvu punktam  $a$  augošam argumentam atbilst dilstoša funkcija (102. zīm.).\*

Ja funkcijai ir dota grafika, tad no tās var redzēt, kuros  $Ox$  ass punktos funkcija aug un kuros dilst. Tā, piemēram, funkcija  $y=f(x)$  (103. zīm.) aug punktā  $x_1$ , bet dilst punktā  $x_2$ .



103. zīm.

Noskaidrosim, kā pēc funkcijas atvasinājuma var noteikt, vai dotajā punktā funkcija aug vai dilst.

Apskatīsim funkciju  $y=f(x)$  punktā  $x_1$ , kur

$$f'(x_1) > 0. \quad (10.1)$$

Punktā  $P_1$  (103. zīm.) novilktais pieskares virziena leņķi apzīmēsim ar  $\alpha_1$ . Tā kā funkcijas atvasinājums ģeometriski nozīmē pieskares leņķa tangensu (69. §), tad  $f'(x_1) = \operatorname{tg} \alpha_1$ . No formulas (10.1) seko, ka  $\operatorname{tg} \alpha_1 > 0$ , t. i., ka  $\alpha_1$  ir šaurs leņķis (I kvadranta leņķis). 103. zīm. redzams, ka tādā gadījumā funkcija  $y=f(x)$  punktā  $x_1$  aug.

Tāpat šo pašu funkciju apskatīsim punktā  $x_2$ , kur

$$f'(x_2) < 0. \quad (10.2)$$

Punktā  $P_2$  novilktais pieskares virziena leņķi apzīmēsim ar  $\alpha_2$ . Līdzīgi iepriekšējam gadījumam varam rakstīt, ka  $f'(x_2) = \operatorname{tg} \alpha_2$ , un no formulas (10.2) seko, ka  $\operatorname{tg} \alpha_2 < 0$ , t. i., ka  $\alpha_2$  ir plats leņķis (II kvadranta leņķis). 103. zīm. redzams, ka šinī gadījumā funkcija  $y=f(x)$  punktā  $x_2$  dilst.

Funkcijas augšanas un dilšanas pietiekamā pazīme. Ja apskatāmajā punktā  $f'(x) > 0$ , tad funkcija  $y=f(x)$

\* Sk. arī 74. § (monotona funkcija).

šīnī punktā aug, bet, ja apskatāmajā punktā  $f'(x) < 0$ , tad funkcija  $y=f(x)$  šīnī punktā dilst.\*

Vārds «pietiekams» šeit jāsaprot šādi: ja, piemēram, ir apmierināts nosacījums  $f'(x) > 0$ , tad ar to pietiek, lai noteiktu, ka attiecīgajā punktā funkcija  $y=f(x)$  ir augoša. Līdzīgi jāsaprot arī turpmākās pietiekamās pazīmes.

Pazīmei apgrieztā īpašība pastāv tālāk norādītā pavājinātā nozīmē. Proti, ja funkcija  $y=f(x)$  apskatāmā punktā, piemēram, aug, tad šai punktā  $f'(x) > 0$  (103. zīm. punkts  $x_1$ ) vai  $f'(x) = 0$  (sk. tālāk 104. zīm. punkts  $x_5$ ).

Piemērs. Noskaidrot, vai funkcija  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$  aug vai dilst punktā 1)  $x=0$  un 2)  $x=\frac{3}{2}$ .

Atrisinājums.  $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2)$ . Atvasinājuma vērtības dotajos punktos ir šādas:

1)  $f'(0) = 12 > 0$ , tātad punktā  $x=0$  funkcija aug;

$$2) f'\left(\frac{3}{2}\right) = 6 \left[ \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 2 \right] = 6 \cdot \frac{9-18+8}{4} = 6 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) < 0,$$

tātad punktā  $x=\frac{3}{2}$  funkcija dilst. (Tālāk 105. zīm. pārliecināsimies par iegūto rezultātu pareizību.)

Funkcijas augšanas un dilšanas intervāli. Tie ir  $Ox$  ass intervāli, kuros funkcija aug respektīvi dilst katrā intervāla punktā.

Piemērs. Funkcijai  $f(x) = x^2 - 2x + 3$  atrast augšanas un dilšanas intervālus.

Atrisinājums. Funkcijas atvasinājums ir  $f'(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$ . Ja  $x < 1$ , tad  $x-1 < 0$  un arī  $f'(x) < 0$ ; tātad funkcijai ir dilšanas intervāls  $(-\infty, 1)$ . Ja turpretim  $x > 1$ , tad  $x-1 > 0$  un  $f'(x) > 0$ ; funkcijas augšanas intervāls ir  $(1, +\infty)$ .

**83. §. Funkcijas maksimums un minimums.** 103. zīm. redzams, ka funkcijas  $y=f(x)$  grafikas punktā  $P_3$  ordināte  $y$  ir lielāka nekā visiem citiem pietiekami tuviem grafikas punktiem. Punkta  $P_3$  abscisu apzīmēsim ar  $x_3$ . Tādā gadījumā saka, ka  $Ox$  ass punktā  $x_3$  funkcijai  $y=f(x)$  ir maksimums.

Turpretim punkta  $P_4$  ordināte  $y$  ir mazāka nekā visiem citiem pietiekami tuviem grafikas punktiem. Punkta  $P_4$  abscisu apzīmēsim ar  $x_4$ . Šīnī gadījumā saka, ka  $Ox$  ass punktā  $x_4$  funkcijai ir minimums.

**Definīcija.** Funkcijai  $y=f(x)$  punktā  $x_3$  ( $x_4$ ) ir maksimums (minimums), ja šīnī punktā funkcijas vērtība ir lielāka (mazāka) par funkcijas vērtībām visos citos pietiekami tuvos punktos. Funkcijas maksimumu un minimumu sauc arī par funkcijas ekstrēmu.

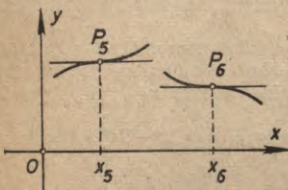
\* Sk. arī 64. § 2. piezīmi, 65. § (sasīlšanas un atdzišanas ātrums) un 68. § (funkcijas augšanas un dilšanas straujums).



Noskaidrosim, kā pēc funkcijas atvasinājuma var noteikt, vai pie dotās  $x$  vērtības funkcijai ir ekstrēms.

103. zīm. funkcijas  $y=f(x)$  grafikai punktos  $P_3$  un  $P_4$  pieskares ir paralēlas  $Ox$  asij, un tātad šo pieskaru virziena leņķis un arī tā tangenss vienāds ar nulli. Saskaņā ar funkcijas atvasinājuma ģeometrisko nozīmi varam rakstīt, ka

$$f'(x_3)=0 \text{ un } f'(x_4)=0. \quad (10.3)$$



104. zīm.

No šejienes izriet:

Funkcijas ekstrēma nepieciešamā pazīme. Ja funkcijai  $y=f(x)$  apskatāmajā punktā ir ekstrēms, tad šinī punktā  $f'(x)=0$ .

Vārds «nepieciešams» šeit jāsaprot šādi: ja apskatāmajā punktā funkcijai  $y=f(x)$  ir ekstrēms, tad nepieciešams, lai  $f'(x)=0$ . Līdzīgi jāsaprot arī turpmākās nepieciešamās pazīmes.

Pazīmei apgrieztā īpašība pastāv šādā pavājinātā nozīmē: ja apskatāmā punktā  $f'(x)=0$ , tad šinī punktā funkcijai  $y=f(x)$  var būt kā ekstrēms, tā arī funkcija tur var augt vai dilt. Minētie augšanas un dilšanas gadījumi redzami 104. zīm. punktos  $P_5$  un  $P_6$ , kuru abscisas ir  $x_5$  respektīvi  $x_6$ . Šajos punktos pieskares ir paralēla  $Ox$  asij (jo  $f'(x_5)=0$  un  $f'(x_6)=0$ ), un tomēr šajos punktos funkcijai nav ekstrēma. Punktā  $x_5$  funkcija aug, bet punktā  $x_6$  dilst.

**Piemērs.** Atrast punktus, kur funkcijai  $f(x)=2x^3-9x^2+12x$  var būt ekstrēms.

**Atrisinājums.** Tā kā funkcijas maksimums un minimums var būt tikai tajos punktos, kur  $f'(x)$  vienāds ar nulli, tad pielīdzinām  $f'(x)$  izteiksmi nullei:

$$6x^2-18x+12=6(x^2-3x+2)=0$$

jeb

$$x^2-3x+2=0,$$

no kurienes pēc kvadrātvienādojuma atrisināšanas dabūjam

$$x_1=1 \text{ un } x_2=2.$$

Tie ir vienīgie punkti, kur  $f'(x)=0$ , un tātad arī vienīgie punkti, kur funkcijai var būt ekstrēms.

Lai noteiktu, vai apskatāmajā punktā funkcijai ir maksimums vai minimums, jānoskaidro  $f'(x)$  zīmes maiņa ap šo punktu, kad  $x$  aug. Pieņemsim, ka apskatāmajā punktā  $f'(x)=0$  un  $f'(x)$  zīme mainās no  $+$  un  $-$ . Tad šajā punktā funkcija  $f(x)$  pāriet no augošanas uz dilstošu, un līdz ar to šinī punktā funkcijai ir **maksimums** (103. zīm. punkts  $x_3$ ). Ja turpretim ap apskatāmo punktu  $f'(x)$  zīme mainās no  $-$  uz  $+$ , tad šajā punktā  $f(x)$  pāriet no



dilstošas uz augošu un šinī punktā funkcijai ir *minimums* (103. zīm. punkts  $x_4$ ).

Lai savukārt noskaidrotu  $f'(x)$  zīmes maiņu ap apskatāmo punktu, piemēram, ap punktu  $x_3$ , tad patvaļīgi izvēlamies ap šo punktu  $x_3$  tādu intervālu  $[x'_3, x''_3]$ , kurā  $f'(x)$  vienāds ar nulli vienīgi apskatāmajā punktā  $x_3$  (103. zīm.). Šādā intervālā  $f'(x)$  var mainīt zīmi vienīgi punktā  $x_3$  (62. § 3. īpašība). Ja izrādās, ka  $f'(x'_3) > 0$  un  $f'(x''_3) < 0$ , tad šai punktā  $f(x)$  pāriet no augošas uz dilstošu un punktā  $x_3$  funkcijai ir maksimums. Ja turpretim izrādītos, ka  $f'(x'_3) < 0$  un  $f'(x''_3) > 0$ , tad punktā  $x_3$   $f(x)$  pārietu no dilstošas uz augošu un punktā  $x_3$  funkcijai būtu minimums.

Funkcijas maksimuma un minimuma pirmā pietiekamā pazīme. Ja apskatāmajā punktā  $f'(x) = 0$  un, punktam pārvietojoties augoša  $x$  virzienā, ap minēto punktu  $f'(x)$  zīme mainās no  $+$  uz  $-$  (no  $-$  uz  $+$ ), tad šai punktā funkcijai ir maksimums (minimums).

Piemērs. Funkcijai  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$  atrast maksimumu un minimumu.

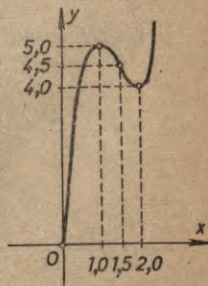
Atrisinājums. Noskaidrosim  $f'(x)$  zīmes maiņu ap iepriekš atrastajiem punktiem  $x_1 = 1$  un  $x_2 = 2$ . Ap šiem punktiem patvaļīgi izvēlētos intervālos  $\left[0; \frac{3}{2}\right]$  un  $\left[\frac{3}{2}; 3\right]$   $f'(x)$  vienāds ar nulli vienīgi punktos  $x_1$  un  $x_2$ . Noskaidrotās  $f'(x)$  zīmes šo intervālu galos sakopotas tabulā:

| $x$     | 0           | 1           | $\frac{3}{2}$                    | 2           | 3           |
|---------|-------------|-------------|----------------------------------|-------------|-------------|
| $f'(x)$ | $f'(0) > 0$ | $f'(1) = 0$ | $f'\left(\frac{3}{2}\right) < 0$ | $f'(2) = 0$ | $f'(3) > 0$ |

Kā redzams no tabulas, punktā  $x=1$  funkcijai ir maksimums, bet punktā  $x=2$  minimums. Funkcijas  $f(x)$  vērtības ekstrēmu punktos ir  $f(1)=5$  un  $f(2)=4$ . Par iegūto rezultātu pareizību var pārlicināties, apskatot funkcijas grafiku 105. zīmējumā.

1. piezīme. Apskatītās pazīmes pastāv, pieņemot, ka apskatāmajā punktā funkcija ir *diferencējama* (sk. nod. sākumu). Punktā, kur funkcija nav diferencējama, arī var būt ekstrēms, lai gan tur funkcijas atvasinājums nav vienāds ar nulli, jo atvasinājuma tur nav (98. zīm., punkts  $x_0$ ).

Stacionāri punkti. Vispār punkts, kur funkcijas atvasinājums vienāds ar nulli, sauc par funkcijas *stacionāriem punktiem*. Meklējot funkcijas maksimumu un minimumu, vispirms atrod stacionāros punktus



105. zīm.

un pēc tam noskaidro, kuros no tiem ir maksimums un kuros minimums.

2. piezīme. Definējot funkcijas maksimumu un minimumu, mēs salīdzinām funkcijas vērtību  $f(x_3)$  respektīvi  $f(x_4)$  ar tās vērtībām citos pietiekami tuvos punktos. Tas neliedz citos attālākos punktos funkcijai pieņemt vērtības, kas ir lielākas par funkcijas maksimuma vērtību (103. zīm.  $f(x_8)$  ir lielāks par funkcijas maksimumu  $f(x_3)$ ), kā arī vērtības, kas ir mazākas par funkcijas minimuma vērtību (103. zīm.  $f(x_7)$  ir mazāks par funkcijas minimumu  $f(x_4)$ ), jo  $f(x_7) < 0$ , kamēr  $f(x_4) > 0$ ). Funkcijas vērtību salīdzināšana attālākos punktos būs apskatīta 86. §.

**84. §. Līnijas ieliekums un izliekums.** Definīcija. Funkcijas  $y=f(x)$  grafika punktā  $P$  ar abscisu  $a$  ir ieliekta (izliekta), ja tā atrodas virs(zem) jebkuras pieskares, kas novilkta caur grafikas punktu, kurš ir pietiekami tuvu punktam  $P$  (106. un 107. zīm.).

Apskatisim pazīmi, kā pēc funkcijas otrā atvasinājuma var noteikt, vai dotajā punktā funkcijas grafika ir ieliekta vai izliekta.

Apskatisim funkcijas  $y=f(x)$  grafiku punktā  $a$ , ja

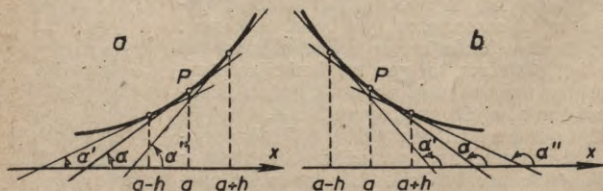
$$f''(a) > 0. \quad (10.4)$$

Tā kā  $f''(a) = [f'(x)]'_{x=a}$  (80. §), tad nevienādība (10.4) nozīmē, ka  $[f'(x)]'_{x=a} > 0$ , t. i., funkcijas  $f'(x)$  atvasinājums punktā  $a$  ir pozitīvs. Tāpēc funkcija  $f'(x)$  punktā  $a$  aug (82. §). Bet  $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$ , kur  $\alpha$  ir funkcijas  $y=f(x)$  grafikas pieskares virziena leņķis attiecīgā grafikas punktā. Līdz ar to  $\operatorname{tg} \alpha$  un arī pats leņķis  $\alpha$  punktā  $a$  aug, t. i., pietiekami tuvu punktam  $a$  augošam argumentam atbilst augošs leņķis  $\alpha$ . Tātad nevienādībām  $a-h < a < a+h$  ar katru pietiekami mazu  $h$  atbilst  $\alpha' < \alpha < \alpha''$  (106. zīm.). Kā redzams, apskatītā gadījumā funkcijas grafika ir ieliekta punktā  $a$ .

Tālāk apskatisim funkcijas  $y=f(x)$  grafiku punktā  $a$ , ja

$$f''(a) < 0. \quad (10.5)$$

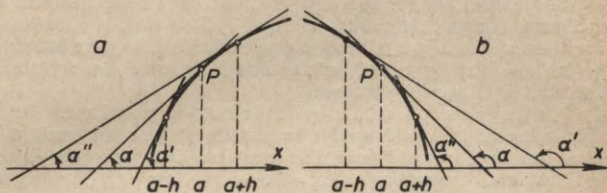
Šī nevienādība nozīmē, ka  $[f'(x)]'_{x=a} < 0$ . Tāpēc funkcija  $f'(x)$  punktā  $a$  dilst. No vienādības  $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$  seko, ka  $\operatorname{tg} \alpha$  un arī



106. zīm.



$a$  punktā  $a$  dilst, t. i., pietiekami tuvu punktam  $a$  augošam argumentam atbilst dilstošs leņķis  $\alpha$ . Tātad nevienādībām  $a-h < a < a+h$  ar katru pietiekami mazu  $h$  atbilst  $\alpha' > \alpha > \alpha''$  (107. zīm.). Kā redzams, funkcijas grafika ir izliekta punktā  $a$ .



107. zīm.

Līnijas ieliekuma un izliekuma pietiekamā pazīme. Ja apskatāmajā punktā  $f''(x) > 0$ , tad funkcijas  $y=f(x)$  grafika šinī punktā ir ieliekta, bet, ja  $f''(x) < 0$ , tad izliekta.

Piemērs. Noskaidrot, vai funkcijas  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$  grafika ir ieliekta vai izliekta punktā 1)  $x=1$  un 2)  $x=2$ .

Atrisinājums.  $f''(x) = 12x - 18$ ,  $f''(1) = -6 < 0$ ,  $f''(2) = 6 > 0$ . Tātad punktā  $x=1$  grafika ir izliekta, bet punktā  $x=2$  — ieliekta.

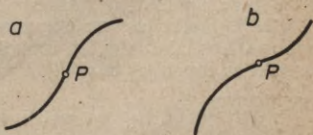
Līnijas ieliekuma un izliekuma intervāli. Tie ir  $Ox$  ass intervāli, kuros funkcijas grafika ir ieliekta respektīvi izliekta katrā intervāla punktā.

Piemērs. Funkcijas  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$  grafikai atrast ieliekuma un izliekuma intervālus.

Atrisinājums.  $f''(x) = 12x - 18 = 12\left(x - \frac{3}{2}\right)$ . Ja  $x < \frac{3}{2}$ , tad  $x - \frac{3}{2} < 0$  un arī  $f''(x) < 0$ ; tātad funkcijas grafikai ir izliekuma intervāls  $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ . Ja turpretim  $x > \frac{3}{2}$ , tad  $x - \frac{3}{2} > 0$  un  $f''(x) > 0$ ; grafikai ir ieliekuma intervāls  $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ .

Infleksijas punkti. Uz līnijas var būt arī punkti, kur tā pāriet no ieliekuma uz izliekumu (punkts  $P$  108. zīm. a) vai no izliekuma uz ieliekumu (punkts  $P$  108. zīm. b). Šādus punktus sauc par infleksijas punktiem (jeb pārliekuma punktiem).

Infleksijas punktā  $f''(x)$



108. zīm.



maina zīmi no plusa uz mīnusu (108. zīm. a) vai no mīnusa uz plusu (108. zīm. b). Tāpēc infleksijas punktā jābūt

$$f''(x)=0 \quad (10.6)$$

(62. § 3. īpašība), ja tur funkcija ir divas reizes nepārtraukti diferencējama (sk. nodaļas sākumu).

Infleksijas punkta nepieciešamā pazīme. Ja funkcijas  $y=f(x)$  grafikai apskatāmajā punktā ir infleksijas punkts, tad šajā punktā  $f''(x)=0$ .

Infleksijas punkta pietiekamā pazīme. Ja apskatāmajā punktā  $f''(x)=0$  un ap šo punktu  $f''(x)$  zīme mainās uz pretējo, tad šajā punktā funkcijas grafikai ir infleksijas punkts.

Piemērs. Funkcijas  $f(x)=2x^3-9x^2+12x$  grafikai atrast infleksijas punktus.

Atrisinājums.  $f''(x)=12x-18$ . To pielīdzinot nullei, dabūjam  $12x-18=0$ , no kurienes  $x=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}$ . Tātad infleksijas punkts var būt vienīgi punktā  $x=\frac{3}{2}$ . Lai noskaidrotu, vai tas patiešām ir infleksijas punkts, apskatām  $f''(x)$  zīmes maiņu ap punktu  $x=\frac{3}{2}$ . Šim nolūkam salīdzinām  $f''(x)$  zīmes, piemēram, punktos  $x=1$  un  $x=2$ .<sup>\*</sup> Atrastās  $f''(x)$  zīmes sakopotas tabulā:

| $x$      | 1            | $\frac{3}{2}$                     | 2            |
|----------|--------------|-----------------------------------|--------------|
| $f''(x)$ | $f''(1) < 0$ | $f''\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ | $f''(2) > 0$ |

Kā redzams, punktā  $x=\frac{3}{2}$ , kur var būt vienīgais infleksijas punkts,  $f''(x)$  zīme mainās no mīnusa uz plusu, un tātad šai punktā funkcijas grafikai ir infleksijas punkts. Šī punkta ordināte ir  $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{2}=4,5$ .

Piezīme. Infleksijas punktu piemēri ir arī punkti  $P_5$  un  $P_6$  104. zīm. Šajos infleksijas punktos ne tikai  $f''(x)=0$ , bet arī  $f'(x)=0$ , jo funkcijas  $y=f(x)$  grafikas pieskares ir paralēlas  $Ox$  asij. Abi šie punkti ir reizē stacionāri un infleksijas punkti.

**85. §. Funkcijas maksimuma un minimuma otrā pietiekamā pazīme.** Noskaidrosim, kā funkcijas maksimumu un minimumu var noteikt ar funkcijas otrā atvasinājuma palīdzību.

<sup>\*</sup> Šeit punktu  $x=1$  un  $x=2$  izraudzīšanai vienīgā prasība ir, lai intervālā  $[1; 2]$   $f''(x)$  būtu vienāds ar nulli tikai apskatāmajā punktā  $x=\frac{3}{2}$ .

Funkcijai  $y=f(x)$  apskatīsim stacionāru punktu  $x_3$ , kur šīs funkcijas grafikas pieskare paralēla  $Ox$  asi. Ja šajā punktā bez tam  $f''(x_3) < 0$ , tad punktā  $x_3$  funkcijas  $y=f(x)$  grafika ir izliekta un funkcijai šinī punktā ir maksimums (103. zīm.).

Vēl apskatīsim funkcijai  $y=f(x)$  stacionāru punktu  $x_4$ , kur  $f'(x_4)=0$  un kur bez tam  $f''(x_4) > 0$ . Tad punktā  $x_4$  funkcijas grafikas pieskare paralēla  $Ox$  asi, bet šajā punktā grafika ir ieliekta. Tāpēc punktā  $x_4$  funkcijai ir minimums (103. zīm.).

Tātad, ja apskatāmajā punktā  $f'(x)=0$  un  $f''(x) < 0$ , tad šajā punktā funkcijai  $y=f(x)$  ir maksimums, bet, ja  $f''(x) > 0$ , tad minimums.

**Piemērs.** Funkcijai  $f(x)=2x^3-9x^2+12x$  atrast maksimumu un minimumu.

**Atrisinājums.** Kā zināms, šai funkcijai stacionāri punkti, t. i., punkti, kur  $f'(x)=0$ , ir  $x_1=1$  un  $x_2=2$ . Bez tam  $f''(1)=-6$  un  $f''(2)=6$ . Tātad

$$f'(1)=0, f''(1)=-6 < 0 \text{ un } f'(2)=0, f''(2)=6 > 0.$$

Tāpēc punktā  $x=1$  funkcijai ir maksimums, bet punktā  $x=2$  — minimums, kas saskan ar agrāk iegūto rezultātu.

**Piezīme.** Piemēros par funkcijas maksimuma un minimuma atrašanu ir lietderīgi vispirms piemērot otro pietiekamo pazīmi. Ja apskatāmajā punktā  $f''(x)=0$  vai ja  $f''(x)$  zīmi ir grūti noskaidrot, tad lieto pirmo pietiekamo pazīmi.

**86. §. Funkcijas vislielākā un vismazākā vērtība slēgtā intervālā.** Nosakot funkcijas ekstrēmu, mēs salīdzinājām funkcijas vērtības tikai pētāmajam punktam pietiekami tuvos punktos. Šeit salīdzināsim funkcijas vērtības kādā slēgtā intervālā.

Lai noteiktu vislielāko (vismazāko) funkcijas vērtību slēgtā intervālā, tad jāsalīdzina funkcijas vērtības visos intervāla iekšējos stacionāros punktos ar funkcijas vērtībām intervāla galos. Tad vislielākā (vismazākā) no visām šīm vērtībām ir arī vislielākā (vismazākā) funkcijas vērtība dotajā intervālā.\*

Tā, piemēram, funkcijai  $y=f(x)$  intervālā  $[x_1, x_8]$  (103. zīm.) vislielākā vērtība  $f(x_8)$  ir intervāla labajā galā, bet vismazākā vērtība  $f(x_4)$  — vienā no stacionārajiem punktiem.

Funkcijas vislielākās un vismazākās vērtības eksistenci slēgtā intervālā nosaka nepārtrauktu funkciju īpašība (62. § 4. īpašība).

**1. piemērs.** Funkcijai  $f(x)=2x^3-9x^2+12x$  atrast vislielāko un vismazāko vērtību intervālā  $[0; 2]$ .

**Atrisinājums.** Vienīgais stacionārais punkts intervāla iekšienē ir  $x=1$ , kur  $f(1)=5$ . Funkcijas vērtības šī intervāla galos ir  $f(0)=0$  un  $f(2)=4$ . Lielākā no šīm trim vērtībām, t. i.,  $f(1)=5$ , ir arī vislielākā funkcijas vērtība dotajā intervālā.

\* Salīdzināmo funkcijas vērtību skaitu var samazināt, apskatot tikai tos stacionāros punktus, kuros ir ekstrēms, bet ekstrēmu noteikšana savukārt prasa papildu darbu.



Turpretim mazākā no minētam trim vērtībām  $f(0)=0$  ir vismazākā funkcijas vērtība dotajā intervālā.

2. piemērs. Dota kvadrātveida loksne, kuras malas garums ir  $a$ . Izgriežot tās stūros četrus vienāda lieluma kvadrātus un uzlokojot loksnes saīsinātās malas, izveidots vaļējs trauks (55. zīm.). Noskaidrot, cik lieli kvadrāti ir jāizgriež, lai dabūtu trauku ar vislielāko tilpumu.

Atrisinājums. Vispirms jāastāda funkcija, kas izsaka trauka tilpumu  $V$  atkarībā no izgriežamo kvadrātu malu garuma  $x$ , un jānoskaidro, pie kādas  $x$  vērtības šai funkcijai ir vislielākā vērtība. Trauka tilpums  $V$  atkarībā no  $x$  ir

$$V = (a - 2x)^2 x.$$

Noskaidrosim intervālu, kurā šai funkcijai jāatrod vislielākā vērtība. Galējie izgriežamo kvadrātu gadījumi ir 1)  $x=0$ , 2)  $x = \frac{1}{2}a$ .

Tātad funkcijai  $V$  jāatrod vislielākā vērtība intervālā  $[0, \frac{1}{2}a]$ . Vispirms noteiksīm stacionāros punktus šī intervāla iekšienē.

$$f'(x) = 2(a - 2x)(-2)x + (a - 2x)^2 = (a - 2x)(a - 6x).$$

Kā redzams,  $f'(x) = 0$ , ja 1)  $x = \frac{1}{2}a$  un 2)  $x = \frac{1}{6}a$ . Pirmais gadījums atkrit, jo  $x = \frac{1}{2}a$  nav intervāla iekšienē. Tātad  $x = \frac{1}{6}a$  ir vienīgais stacionārais punkts, apskatāmā intervāla iekšienē, un līdz ar to jāsalīdzina šādas funkcijas vērtības:

$$1) f(0) = 0; \quad 2) f\left(\frac{1}{6}a\right) = \left(a - 2 \cdot \frac{1}{6}a\right)^2 \cdot \frac{1}{6}a = \frac{2}{27}a^3, \quad 3) f\left(\frac{1}{2}a\right) = 0.$$

Acīm redzot, funkcijas vislielākā vērtība apskatāmajā intervālā ir punktā  $x = \frac{1}{6}a$ . Tātad traukam vislielākais tilpums iznāk, ja izgriež kvadrātus, kuru malas vienādas dotās loksnes malas sestai daļai. Attiecīgā trauka tilpums tad ir  $\frac{2}{27}a^3$ .

**87. §. Funkciju grafiku konstruēšana.** Konstruējamo grafiku var pētīt, piemēram, šādā secībā:

- 1) noteikt funkcijas definīcijas apgabalu;
- 2) noteikt funkcijas grafikas krustpunktus ar koordinātu asīm;
- 3) noskaidrot, vai šī grafika ir simetriska pret koordinātu asīm;
- 4) aprēķināt grafikas ekstrēmus;
- 5) noteikt grafikas ieliekuma un izliekuma intervālus un infleksijas punktus;



6)  $Ox$  ass punktos, kur funkcija kļūst bezgalīga, noskaidrot, vai funkcija tiecas uz  $+\infty$  vai  $-\infty$ , kad  $x$  tiecas uz apskatāmo punktu no kreisās vai labās puses. Bez tam noskaidrot, vai funkcija tiecas uz robežu, kad  $x \rightarrow \pm\infty$ , un uz kuru robežu.

Precīzākai grafikas konstruēšanai ieteicams aprēķināt pēc vajadzības vēl citus grafikas punktus, izmantojot funkcijas izteiksmi.

Piemērs. Konstruēt grafiku funkcijai

$$y = \frac{(x+1)^2}{4(x-1)^3}$$

Atrisinājums. 1. Funkcijas definīcijas apgabals sastāv no diviem intervāliem:  $(-\infty, 1)$  un  $(1, +\infty)$ .

2. Liekot  $x=0$ , dabūjam  $y=-\frac{1}{4}$ ; liekot  $y=0$ , dabūjam  $x=-1$ .

Tātad grafikas krustpunkti ar koordinātu asīm ir  $(0; -\frac{1}{4})$  un  $(-1; 0)$ .

3. Grafika nav simetriska ne pret vienu koordinātu asi, jo dotā vienādojumā ne  $x$ , ne arī  $y$  neieiet tikai pāra pakāpēs (34. §).

4. Atrodam funkcijas pirmo un otro atvasinājumu:

$$y' = \frac{(x+1)(x-3)}{4(x-1)^2}, \quad y'' = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

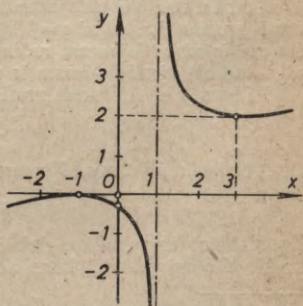
Vienīgie stacionārie punkti ir  $x=-1$  un  $x=3$ . Spriežot pēc  $y''$  zīmes šajos punktos, pirmajā no tiem izrādās funkcijas maksimums, bet otrā punktā minimums. Attiecīgie grafikas punkti ir  $(-1; 0)$  — maksimums,  $(3; 2)$  — minimums.

5. Grafika ir izliekta intervālā  $(-\infty, 1)$ , jo tur  $x < 1$  un tātad  $y'' < 0$ ; turpretim grafika ir ieliekta intervālā  $(1, +\infty)$ , jo tur  $x > 1$  un  $y'' > 0$ .

6. Funkcija kļūst bezgalīga vienīgi punktā  $x=1$ . Kad  $x < 1$ , tad  $x-1 < 0$ ,  $(x+1)^2 > 0$  un  $y < 0$ ; liekot  $x \rightarrow 1-0$ , dabūjam  $y \rightarrow -\infty$ . Kad turpretim  $x > 1$ , tad  $x-1 > 0$ ,  $(x+1)^2 > 0$  un  $y > 0$ ; liekot  $x \rightarrow 1+0$ , dabūjam  $y \rightarrow +\infty$ . Liekot  $x \rightarrow \pm\infty$ , funkcija netiecas uz robežu.

Izmantojot noskaidrotās īpašības un aprēķinot vēl dažus grafikas punktus, dabūjam 109. zīm. grafiku.

88. §.\* Grafiskā metode un izmēģinājumu metode vienādojumu



109. zīm.

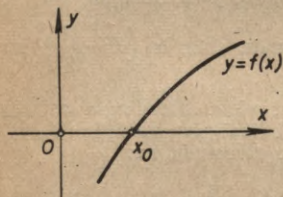
aptuvenai atrisināšanai. 1. Grafiskā metode. *Grafiski noteikt vienādojuma*

$$f(x) = 0 \quad (10.7)$$

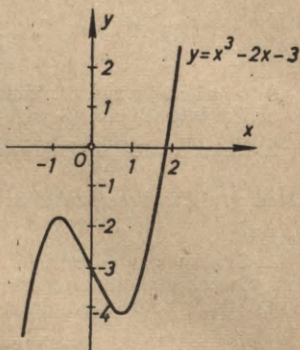
reālās saknes.

Vienādojuma sakņu atrašanai ņemam funkciju

$$y = f(x), \quad (10.8)$$



110. zīm.



111. zīm.

kam izteiksme  $f(x)$  sakrīt ar vienādojuma (10.7) kreiso pusi, un konstruējam šai funkcijai grafiku. Pieņemsim, ka šī grafika redzama 110. zīm. Abscisu grafikas krustpunktam ar  $Ox$  asi apzīmēsim ar  $x_0$ . Tad punktam  $x_0$  atbilstošā ordināte  $y$  vienāda ar nulli, t. i.,  $f(x_0) = 0$ . Tātad reālais skaitlis  $x_0$  apmierina vienādojumu (10.7), un tāpēc  $x_0$  ir vienādojuma (10.7) reāla sakne.

**Kārtula.** *Vienādojuma  $f(x) = 0$  grafiskai atrisināšanai konstruē grafiku funkcijai  $y = f(x)$ . Abscisa grafikas krustpunktam ar  $Ox$  asi ir vienādojumam reāla sakne. Ja šādi krustpunkti ir vairāki, tad arī vienādojumam ir vairākas reālas saknes.*

**Piemērs.** Atrisināt grafiski vienādojumu

$$x^3 - 2x - 3 = 0. \quad (10.7')$$

**Atrisinājums.** Ņemam funkciju

$$y = x^3 - 2x - 3. \quad (10.8')$$

Konstruējot tai grafiku, dabūjam 111. zīm. attēloto līniju\*, kas krusto  $Ox$  asi punktā, kura abscisa ir  $x \approx 1,9$ . Skaitlis 1,9 ir vie-

\* Šeit var aprobežoties ar daļēju 87. § paņēmieni lietošanu grafikas konstruēšanai.



nādojuma (10.7') saknes aptuvena vērtība. Lai pārliccinātos par šīs saknes precizitāti, aprēķinām  $y$  funkcijas (10.8') grafikas punktam  $x=1,9$ . Šī ordināte ir  $y=0,059$ , t. i., minētais grafikas punkts patiešām ir tuvu  $Ox$  asij, un tāpēc  $x=1,9$  ir dotā vienādojuma saknes aptuvena vērtība.

Salīdzināsim vēl citus grafikas punktus, kuri ir tuvu minētajam punktam, piemēram,

$$\text{ja } x=1,8 \text{ tad } y=-0,77;$$

$$\text{ja } x=2,0, \text{ tad } y=1.$$

Kā redzams, šie punkti ir daudz tālāk no  $Ox$  ass nekā punkts  $x=1,9$ . Tāpēc  $x=1,9$  ir precīzāka saknes vērtība nekā 1,8 vai 2,0.

2. Izmēģinājumu metode. Vienādojuma  $f(x)=0$  reālās saknes aptuveni var atrast arī ar izmēģinājumu metodi. Risinot ar šo metodi, vispirms jānoskaidro funkcijas  $y=f(x)$  vērtību zīmes vairākos patvaļīgi izraudzītos punktos, kuri seko cits citam, piemēram, punktos  $x=-2; -1; 0; 1; 2; \dots$ , un jāuzmeklē tie intervāli, kuru galos funkcijas vērtībām ir pretējas zīmes. Katrā šādā intervālā jāatrodas vienādojuma  $f(x)=0$  saknei, ja šī intervālā funkcija  $y=f(x)$  ir nepārtraukta. Vienādojuma saknes eksistenci šeit garantē attiecīga nepārtrauktu funkciju īpašība (62. § 3. īpašība).

Pēc tam šajos intervālos atkal patvaļīgi izvēlas punktus, kuros noskaidro funkcijas  $y=f(x)$  vērtību zīmes. Tā atrodam jaunus vēl īsākus intervālus ar pretējām zīmēm intervāla galos. Vienādojuma reālo sakņu aptuvenās vērtības ir tie gala punkti, kuros funkcijas absolūtā vērtība ir vismazākā.

Piemērs. Vienādojuma  $x^3-2x-3=0$  reālo sakņu aptuvenai atrašanai nosakām funkcijas (10.8') vērtību zīmes punktos  $x=-2; -1; 0; 1; 2; 3$  un tās sakopojam tabulā:

| $x$         | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|-------------|----|----|---|---|---|---|
| $f(x)$ zīme | -  | -  | - | - | + | + |

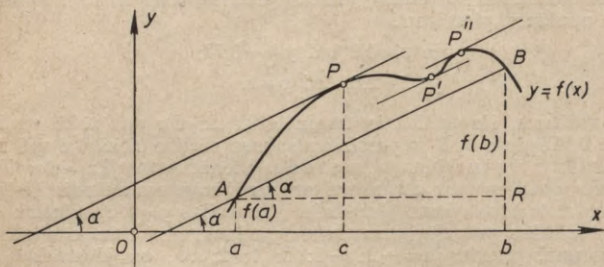
No tabulas redzams, ka vienādojuma sakne ir intervālā  $[1; 2]$ . Šai intervālā izvēlamies punktus  $x=1,1; 1,2; 1,3; \dots$ , kuros atkal noskaidrojam funkcijas vērtību zīmes. Izrādās, ka vienādojuma sakne ir intervālā  $[1,8; 1,9]$ . Vienādojuma saknes aptuvenā vērtība ir tas gala punkts, kurā funkcijas absolūtā vērtība ir vismazākā, šai gadījumā  $x=1,9$ .

Turpinot izmēģinājumus, var atrast vienādojuma sakni ar pēc patikas lielu precizitāti.

89. §. Galīgo pieaugumu formula. Apskatīsim formulu, kuru izlietosim galvenokārt funkciju vispārīgu īpašību pierādīšanai.



Pieņemsim, ka funkcija  $y=f(x)$  ir *diferencējama* slēgtā intervālā  $[a, b]$  (112. zīm.). Šinī intervālā funkcija ir arī nepārtraukta (70. §). Ģeometriski šo funkciju varam attēlot kā līniju, kura ir nepārtraukta starp punktiem  $A$  un  $B$  un kurai eksistē pieskare (un pie tam tikai viena) katrā līnijas punktā starp  $A$  un  $B$ .



112. zīm.

Kā redzams zīmējumā, uz līnijas starp  $A$  un  $B$  eksistē vismaz viens tāds punkts  $P^*$ , caur kuru vilktā pieskare ir paralēla secantei  $AB$ . Izteiksim šo apgalvojumu ar formulas palīdzību.

Apzīmējot punkta  $P$  abscisu ar  $c$  un punktā  $P$  vilktās pieskares virziena leņķi ar  $\alpha$ , saskaņā ar funkcijas atvasinājuma ģeometriskā nozīmi dabūjam, ka

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(c). \quad (10.9)$$

Bet no taisnleņķa trijstūra  $ARB$  seko, ka

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (10.10)$$

Salīdzinot vienādības (10.9) un (10.10), dabūjam, ka

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

jeb

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a). \quad (10.11)$$

Šī vienādība izsaka sakaru starp argumenta galīgu pieaugumu  $b - a$  un atbilstošo funkcijas pieaugumu  $f(b) - f(a)^*$ , un tāpēc šo vienādību sauc par *galīgo pieaugumu formulu*. Tās būtība ir šāda: intervālā  $(a, b)$  eksistē tāds skaitlis  $c$ , ka  $f'(c)$ , pareizināts ar

\*  $P$  vietā var ņemt arī  $P'$  vai  $P''$ .

\*\* Pretstatā tiem ir bezgalīgi mazi pieaugumi, ar kuriem esam sastapušies, piemēram, apskatot nepārtrauktas funkcijas (62. §).

argumenta pieaugumu  $b-a$ , ir vienāds ar atbilstošo funkcijas pieaugumu  $f(b)-f(a)$ . Šeit precīza  $c$  vērtība nav zināma; ir zināms vienīgi, ka  $c$  atrodas starp  $a$  un  $b$ .\*

Formulu (10.11) pārrakstīsim, liekot  $a$  vietā  $x_0$ ,  $b$  vietā  $x$ , bet  $c$  vietā  $\xi$ :

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi) \cdot (x - x_0). \quad (10.12)$$

Piemērs. Zinot, ka  $\lg 100 = 2$ , aptuveni aprēķināt  $\lg 101$ .

Atrisinājums. Ņemsim funkciju  $f(x) = \lg x$  un šādas argumenta vērtības:  $x_0 = 100$ ,  $x = 101$ . Tad  $x - x_0 = 1$  un  $\xi = 100 + h$ , kur  $0 < h < 1$ . Tālāk

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln 10}, \quad f'(\xi) = \frac{1}{(100+h) \ln 10},$$

un pēc formulas (10.12) dabūjam

$$\lg 101 = \lg 100 + \frac{1}{(100+h) \ln 10} \cdot 1 = 2 + \frac{1}{(100+h) \ln 10}.$$

Ar pēdējās vienādības palīdzību precīzu  $\lg 101$  vērtību mēs dabūt nevaram, jo nezinām  $h$ . Toties aptuvenu  $\lg 101$  vērtību varam atrast, noapaļojot  $h$ , piemēram, uz leju, t. i., liekot  $h = 0$ :

$$\lg 101 \approx 2 + \frac{1}{100 \ln 10} = 2 + \frac{0,434}{100} = 2,00434.$$

Salīdzinot šo logaritma vērtību ar tabulās atrodamo  $\lg 101 = 2,00432$ , izrādās, ka kļūda ir tikai 0,00002.

Secinājums. Ja  $f'(x) = 0$  identiski (t. i., visām apskatāmajām  $x$  vērtībām), tad  $f(x) = \text{const}$ .

Tā ir apgriezta īpašība agrāk apskatītai: ja  $f(x) = \text{const}$ , tad  $f'(x) = 0$  (9.1).

Pierādījums. Tā kā  $f'(x) = 0$  identiski, tad arī  $f'(\xi) = 0$ , un no formulas (10.12) seko, ka  $f(x) = f(x_0)$ , t. i., ka  $f(x)$  vērtība kaut kurā punktā  $x$  vienāda ar  $f(x)$  vērtību kādā fiksētā punktā  $x_0$  un tāpat  $f(x) = \text{const}$ , kas bija jāpierāda.

### Vingrinājumi

Noskaidrot, vai dotā funkcija punktā  $x = -1$  a) ir pozitīva, negatīva vai nulle; b) aug, dilst vai ir stacionāra.

1.  $f(x) = x^3(6x^2 - 1)$ .

2.  $f(x) = (x^2 - 1)^2 + 2$ .

3.  $f(x) = -\lg(1,2+x)$ .

\* Formula (10.11) pamatota tikai geometriski. Pierādījumu šai formulai var atrast katrā plašākā matemātiskās analīzes mācību grāmatā. Atzīmēsim vēl, ka šīs formulas pastāvēšanai nav jāprasa, lai būtu  $a < b$ .

Atrast funkcijas augšanas un dilšanas intervālus.

4.  $f(x) = 1 - 2x - 2x^2$ .

5.  $f(x) = x^3 - 3x$ .

6.  $y = x^3 + 3x$ .

7.  $y = \frac{x^2 - 1}{x}$ .

Atrast funkcijas maksimumu un minimumu.

8.  $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ .

9.  $f(x) = x + \frac{9}{x}$ .

10.  $f(x) = \frac{x^2}{1 - x^2}$ .

Noskaidrot, vai funkcijas grafika punktā  $x = -1$  ir ieliekta vai izliekta.

11.  $f(x) = x^3(6x^2 - 1)$ .

12.  $f(x) = (x^2 - 1)^2 + 2$ .

13.  $f(x) = -\lg(1,2 + x)$ .

Noskaidrot funkcijas grafikas infleksijas punktus, kā arī ieliekuma un izliekuma intervālus.

14.  $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 5$ .

15.  $f(x) = (x - 1)^4 + e^x$ .

Atrast funkcijas maksimumu un minimumu.

16.  $y = x^2(2 - x)^2$ .

17.  $f(x) = 1 + \sqrt{1 - x}$ .

18.  $f(x) = x^2 e^{-x}$ .

19.  $y = \frac{x^3}{x^2 + 3}$ .

20.  $y = \frac{x^4 - 2x^2 - 2}{x^2 + 1}$ .

Atrast funkcijas vislielāko un vismazāko vērtību dotajā intervālā.

21.  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ ,  $[-2; 2]$ .

22.  $f(x) = x + 2\sqrt{x} + 2$ ,  $[0; 4]$ .

23.  $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3$ ,  $[-1; 2]$ .

24. Jāizgatavo četrstūrains kaste ar vāku, kuras tilpums ir  $72 \text{ cm}^3$ , pie tam pamata malu attiecība ir  $2:1$ . Kādiem jābūt kastes šķautņu garumiem, lai kastes pilnā virsma būtu vismazākā?

25. Jāizgatavo konusveida piltuve, kuras veidules garums ir  $20 \text{ cm}$ . Kādam jābūt piltuves augstumam, lai tās tilpums būtu vislielākais?

26. No riņķa izgriezts sektors, kura centra leņķis ir  $\alpha$ . Salokot šo sektoru, izveidota koniska virsma. Pie kādas leņķa  $\alpha$  vērtības iegūtā konusa tilpums ir vislielākais?

Konstruēt funkcijas grafiku.

27.  $y = \frac{(x - 3)^2}{2(x - 1)}$ .

28.  $y = \frac{x}{1 + x^2}$ .

29.  $y = \frac{1}{x^2 - 1}$ .

30.  $y = \frac{x}{1 - x^2}$ .

Grafiski un ar izmēģinājumu metodi atrisināt vienādojumu.

31.  $x^3 + 3x - 1 = 0$ .

32.  $x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = 0$ .

33.  $x^3 - 9x + 2 = 0$ .



## FUNKCIJAS DIFERENCIALIS

Apskatīsim iespēju nodalīt no funkcijas pieauguma vienkārši aprēķināmu galveno sastāvdaļu.

90. §. **Diferenciāla jēdziens.** To noskaidrosim, izejot no funkcijas atvasinājuma definīcijas

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x), \quad (11.1)$$

kur robežpārejā neatkarīgais *mainīgais* lielums ir  $\Delta x$ , bet  $x$  ir *konstants*. Saskaņā ar 58. § no iepriekšējās vienādības seko

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha, \quad (11.2)$$

kur  $\alpha \rightarrow 0$ , kad  $\Delta x \rightarrow 0$ . Šo vienādību pareizinot ar  $\Delta x$ , dabūjam, ka

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x. \quad (11.3)$$

Redzam, ka funkcijas pieaugums  $\Delta y$  sadalīts divu locekļu summā. Ja  $\Delta x \rightarrow 0$ , tad pirmais loceklis ir bezgalīgi mazs kā konstantes  $f'(x)$  reizinājums ar bezgalīgi mazu lielumu  $\Delta x$ ; pie tam  $f'(x)\Delta x$  ir *vienādas kārtas bezgalīgi mazs lielums* salīdzinājumā ar bezgalīgi mazu lielumu  $\Delta x$ , ja  $f'(x) \neq 0$  (63. §). Turpretim otrais loceklis  $\alpha \cdot \Delta x$  kā divu bezgalīgi mazu lielumu  $\alpha$  un  $\Delta x$  reizinājums ir augstākas kārtas bezgalīgi mazs lielums salīdzinājumā ar bezgalīgi mazu lielumu  $\Delta x$ .

Tad izrādās, ka  $f'(x) \cdot \Delta x$  ir funkcijas pieauguma  $\Delta y$  galvenā sastāvdaļa, pie tam tā ir proporcionāla ar  $\Delta x$  (jo  $f'(x) = \text{const}$ ), kamēr  $\alpha \cdot \Delta x$  ir funkcijas pieauguma korekcijas loceklis, kurš nav proporcionāls ar  $\Delta x$  (jo  $\alpha$  ir mainīgs lielums).

**Definīcija.** *Funkcijas pieauguma galveno sastāvdaļu*, kura ir proporcionāla ar  $\Delta x$ , sauc par *funkcijas diferenciāli* un apzīmē ar  $dy$ :

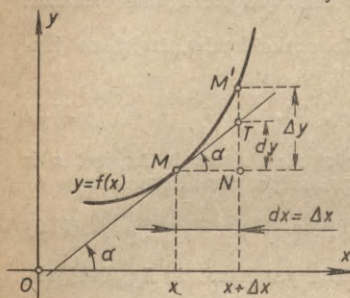
$$dy = f'(x) \Delta x. \quad (11.4)$$

Simetrijas pēc  $\Delta x$  vietā raksta  $dx$ , un to sauc par *argumenta diferenciāli*. Tad varam rakstīt, ka

$$\left. \begin{array}{l} \text{jeb} \\ \text{jeb arī} \end{array} \right\} \begin{array}{l} dy = f'(x) dx \\ dy = y' dx \\ df(x) = f'(x) dx. \end{array} \quad (11.5)$$

Tātad *funkcijas diferenciālis*  $dy$  vienāds *funkcijas atvasinājuma*  $f'(x)$  reizinājumam ar *argumenta diferenciāli*  $dx$ , kur  $dx = \Delta x$ .

91. §. Funkcijas diferenciāļa ģeometriskā nozīme. Ņemsim funkcijas  $y=f(x)$  grafiku (113. zīm.) un uz tās punktu  $M$ , kura abscisu  $x$  šeit uzskatīsim par nemainīgu. Atradīsim nogriezni, kura lielums vienāds ar funkcijas diferenciāli  $dy$ .



113. zīm.

Ievērojot funkcijas atvasinājuma ģeometrisko nozīmi, t. i., vienādību  $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$ , dabūjam, ka

$$dy = f'(x) dx = \operatorname{tg} \alpha \cdot MN = NT,$$

t. i., funkcijas diferenciālis  $dy$  vienāds ar nogriežņa  $NT$  lielumu. Tātad funkcijas diferenciālis ģeometriski nozīmē dotajā grafikas punktā novilktais pieskares jebkura punkta ordinātes pieaugumu, pārejot no dotā grafikas punkta uz minēto pieskares punktu.

Salīdzinājumam atzīmēsim, ka funkcijas pieaugums  $\Delta y$  vienāds ar nogriežņa  $NM'$  lielumu. Vēl atzīmēsim, ka

$$\Delta y - dy = NM' - NT = TM'.$$

Izmantojot formulas (11.3) un (11.4), šai pašai differencei dabūjam, ka

$$\Delta y - dy = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x - f'(x) \cdot \Delta x = \alpha \cdot \Delta x.$$

No šejienes

$$TM' = \alpha \cdot \Delta x.$$

Tātad  $TM'$  izrādās augstākas kārtas bezgalīgi mazs lielums, salīdzinot ar  $\Delta x$ , kad  $\Delta x \rightarrow 0$ .

92. §. Skaitliskais piemērs par funkcijas diferenciāli. Apskatīsim funkciju  $f(x) = x^3$ , kad argumenta vērtība  $x=1$ . Tad

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2; \quad f(1) = 1; \quad f'(1) = 3; \quad \Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1) = \\ &= (1 + \Delta x)^3 - 1 = 3\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3; \\ dy &= f'(1) \Delta x = 3\Delta x, \quad \Delta y - dy = 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3. \end{aligned}$$

Ņemsim arvien mazākas  $\Delta x$  vērtības un aprēķināsim atbilstošās  $\Delta y$ ,  $dy$  un differences  $\Delta y - dy$  vērtības (sk. tabulu).

| $\Delta x = dx$ | $\Delta y$ | $dy$  | $\Delta y - dy$ |
|-----------------|------------|-------|-----------------|
| 1               | 7          | 3     | 4               |
| 0,1             | 0,331      | 0,3   | 0,031           |
| 0,01            | 0,0303     | 0,03  | 0,0003          |
| 0,001           | 0,003003   | 0,003 | 0,000003        |

Tabula uzskatāmi rāda  $\Delta y$  un  $dy$  kā vienādas kārtas un  $\Delta y - dy$  kā augstākas kārtas bezgalīgi mazu lielumu salīdzinājumā ar bezgalīgi mazu  $\Delta x$ .

Bez tam tabulā redzams, ka maza  $\Delta x$  gadījumā funkcijas pieauguma  $\Delta y$  vietā bez lielas kļūdas var ņemt funkcijas diferenciāli  $dy$ , pie tam kļūda relatīvi ir jo mazāka, jo mazāks ir  $\Delta x$ .

**93. §. Funkciju diferenciāļu pielietojumi, absolūtās un relatīvās kļūdas, aptuvenu formulu iegūšana.** Funkcijas diferenciāli pielieto tāpēc, ka tas ir aptuvens funkcijas pieaugums un vieglāk aprēķināms nekā funkcijas pieaugums. Pastāv divi tipiski funkciju diferenciāļu pielietojumu gadījumi.

1. Rezultāta kļūdas novērtēšana. Iedomāsimies, piemēram, kubu, kura šķautnes var izmērīt ar zināmu precizitāti. Noskaidrot, ar kādu precizitāti var noteikt kuba tilpumu.

Kuba šķautnes garumu apzīmēsim ar  $x$  un pieņemsim, ka  $x = 100 \text{ mm} \pm 0,2 \text{ mm}$ . Tas nozīmē, ka kuba šķautņu garums var būt starp  $100 - 0,2 = 99,8 \text{ (mm)}$  un  $100 + 0,2 = 100,2 \text{ (mm)}$ .

Ja šķautņu garums būtu precīzi  $x = 100 \text{ mm}$ , tad kuba tilpums būtu  $x^3 = 100^3 \text{ mm}^3 = 1\,000\,000 \text{ mm}^3$ . Bet, ja šķautņu garums būtu  $x + \Delta x = 100 \text{ mm} + 0,2 \text{ mm} = 100,2 \text{ mm}$ , tad kuba tilpums būtu  $(x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 = 100^3 + 3 \cdot 100^2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 100 \cdot 0,2^2 + 0,2^3 = 1\,000\,000 + 6000 + 12 + 0,008 \approx 1\,006\,000 \text{ (mm}^3\text{)}$ . Tātad kuba šķautņu mērīšanas neprecizitāte par  $0,2 \text{ mm}$  ( $0,2\%$ ) rada kuba aprēķinātā tilpuma neprecizitāti par apmēram  $6000 \text{ mm}^3$  ( $0,6\%$ ). Īstais kuba tilpums ir starp  $1\,000\,000 - 6000 = 994\,000 \text{ (mm}^3\text{)}$  un  $1\,000\,000 + 6000 = 1\,006\,000 \text{ (mm}^3\text{)}$ .

Skaitlis  $6000$  ir visvienkāršākā aptuvenā vērtība funkcijas  $y = x^3$  pieaugumam  $\Delta y$ , ja argumenta pieaugums  $\Delta x = 0,2$  un  $x = 100$ . Tā dabūta,  $\Delta y$  izteiksmē atmetot abus atlikušos saskaitāmos  $12$  un  $0,008$ .

Funkcijas pieaugumu vieglāk var atrast, ja funkcijas pieauguma vietā aprēķina funkcijas diferenciāli:

$$dy = (x^3)' dx = 3x^2 dx$$

un, ja  $\Delta x = dx = 0,2$ , tad

$$dy = 3 \cdot 100^2 \cdot 0,2 = 6000 \text{ (mm}^3\text{)}.$$

Tātad dabūjam to pašu skaitli  $6000$ .

**Absolūtā un relatīvā kļūda.** Starpību starp precīzo šķautnes garuma  $a$  un tās aptuveno garumu  $x$  sauc par šķautnes garuma kļūdu, bet šīs differences absolūto vērtību  $|a - x|$  — par *absolūto kļūdu*. Parasti ne kļūda, ne arī absolūtā kļūda nav zināma, jo grūti iedomāties, kā varētu pilnīgi precīzi izmērīt kuba šķautnes garumu. Toties parasti izdodas absolūto kļūdu novērtēt ar skaitli  $\Delta$ , kuru absolūtā kļūda nevar pārsniegt, t. i., novērtēt ar nevienādību  $|a - x| \leq \Delta$ . Lielumu  $\Delta$  sauc par *maksimālo absolūto*



*kļūdu*. Apskatītā piemērā šķautnes maksimālā absolūtā kļūda ir 0,2 mm.

Tomēr minētās kļūdas vienpusīgi raksturo mērījuma vai aprēķina precizitāti. Tā, piemēram, 2 mm kļūda ir niecīga, ja mēri istabas garumu, bet 2 mm kļūda ir nepieļaujami liela, ja mēri mašīnas detaļas garumu. Mērījuma vai aprēķina precizitāti labāk raksturo minēto kļūdu attiecība pret mērītā respektīvi aprēķinātā priekšmeta lielumu, piemēram, pret istabas garumu respektīvi mašīnas detaļas garumu.

Kuba šķautnes absolūtās kļūdas (maksimālās absolūtās kļūdas) attiecību pret šīs šķautnes garumu  $a$  vai šķautnes aptuveni izmērīto garumu  $x$ , t. i.,  $\left| \frac{a-x}{a} \right| \approx \frac{|a-x|}{|x|} \left( \frac{\Delta}{a} \approx \frac{\Delta}{x} \right)$ , sauc par kuba šķautnes *relatīvo kļūdu* (*maksimālo relatīvo kļūdu*).

Apzīmējot kuba šķautnes garuma kļūdu ar  $\Delta x$  un kuba aprēķinātā tilpuma kļūdu ar  $\Delta y$ , dabūjam

$$|\Delta x| = |dx| \leq 0,2 \text{ (mm)}, \quad |\Delta y| \approx |dy| \leq 6000 \text{ mm}^3,$$

kur  $0,2 \text{ mm}$  un  $6000 \text{ mm}^3 = 6 \text{ cm}^3$  ir attiecīgi kuba šķautnes respektīvi kuba tilpuma maksimālās absolūtās kļūdas. Kuba šķautnes garuma un kuba tilpuma relatīvajām kļūdām  $\left| \frac{\Delta x}{x} \right|$  respektīvi  $\left| \frac{\Delta y}{y} \right|$  pastāv novērtējumi:

$$\left| \frac{\Delta x}{x} \right| = \left| \frac{dx}{x} \right| \leq \frac{0,2}{100} = 0,002,$$

$$\left| \frac{\Delta y}{y} \right| \approx \left| \frac{dy}{y} \right| \leq \frac{6000}{1\,000\,000} = 0,006,$$

kur 0,002 (0,2%) un 0,006 (0,6%) ir attiecīgi kuba šķautnes garuma resp. kuba tilpuma maksimālās relatīvās kļūdas. Rezultāts tāpat ir  $y = 1000 \pm 6 \text{ cm}^3$ .

2. Funkcijas vērtības aptuvena aprēķināšana. Aptuveni aprēķināsim  $\lg 101$ , zinot, ka  $\lg 100 = 2$  (89. § piemērs).

Ņemsim funkciju  $y = \lg x$ . Tai pieaugums ir  $\lg(x + \Delta x) - \lg x = \Delta y$ . Atbilstošā aptuvenā vienādība ir

$$\lg(x + \Delta x) - \lg x \approx dy,$$

no kurienes

$$\lg(x + \Delta x) \approx \lg x + dy.$$

Seit

$$dy = (\lg x)' dx = \frac{1}{x \ln 10} \cdot dx \approx \frac{0,434}{x} dx = \frac{0,434}{x} \Delta x.$$

Tātad

$$\lg(x + \Delta x) \approx \lg x + \frac{0,434}{x} \Delta x.$$

Liekot šeit  $x=100$  un  $\Delta x=1$ , dabūjam, ka

$$\lg 101 \approx \lg 100 + \frac{0,434}{100} \cdot 1 = 2 + 0,00434$$

jeb

$$\lg 101 \approx 2,00434,$$

kas saskan ar agrāk iegūto rezultātu.

*Aptuvenu formulu iegūšanas metode ar diferenciāļu palīdzību.* Rīkojoties pēc iepriekšējā piemēra parauga, dažādām funkcijām var iegūt formulas aptuvenu funkcijas vērtību aprēķināšanai. Proti, no vienādībai  $f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta y$  atbilstošās aptuvenās vienādības

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx dy = f'(x) dx = f'(x) \Delta x$$

seko vispārīga aptuvena formula mazām  $\Delta x$  vērtībām

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \Delta x. \quad (11.6)$$

**Piemēri.** 1. Funkcijai  $f(x) = \sin x$  saskaņā ar formulu (11.6) dabūjam aptuvenu formulu mazam  $\Delta x$ :

$$\sin(x + \Delta x) \approx \sin x + \cos x \cdot \Delta x;$$

liekot šeit speciāli  $x=0$ ,  $\Delta x=a$ , iegūstam  $\sin a \approx a$  (61. §).

2. Funkcijai  $f(x) = \sqrt{x}$  dabūjam aptuvenu formulu mazam  $\Delta x$ :

$$\sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \Delta x;$$

liekot šeit  $x=1$ ,  $\Delta x=a$ , iegūstam

$$\sqrt{1+a} \approx 1 + \frac{a}{2}.$$

**94. §. Diferenciāļu pamatformulu tabula.** Funkciju atvasināšanas pamatformulām atbilst attiecīgas diferenciāļu pamatformulas, no kurām svarīgākās sakopotas tabulā.

| $y$        | $dy$                      | $y$      | $dy$              | $y$                    | $dy$                        |
|------------|---------------------------|----------|-------------------|------------------------|-----------------------------|
| $c$        | 0                         | $a^x$    | $a^x \ln a \, dx$ | $\cos x$               | $-\sin x \, dx$             |
| $x^a$      | $ax^{a-1} \, dx$          | $e^x$    | $e^x \, dx$       | $\operatorname{tg} x$  | $\frac{1}{\cos^2 x} \, dx$  |
| $\ln x$    | $\frac{1}{x} \, dx$       | $\sin x$ | $\cos x \, dx$    | $\operatorname{ctg} x$ | $-\frac{1}{\sin^2 x} \, dx$ |
| $\log_a x$ | $\frac{1}{x \ln a} \, dx$ |          |                   |                        |                             |

No tabulas izriet, piemēram,  $dx^a = ax^{a-1} \, dx$ ,  $d \ln x = \frac{1}{x} \, dx$  utt.

95. §. Funkcijas atvasinājums kā diferenciāļu dalījums. Dāļot vienādību (11.5) ar  $dx$ , dabūjam, ka

$$\frac{dy}{dx} = f'(x), \quad (11.7)$$

t. i., funkcijas diferenciālis  $dy$ , dalīts ar argumenta diferenciāli  $dx$ , vienāds ar funkcijas atvasinājumu  $f'(x)$ .

Šīs īpašības dēļ pierakstu  $\frac{dy}{dx}$  lieto ne tikai funkcijas diferenciāļa un argumenta diferenciāļa dalījuma apzīmēšanai, bet arī funkcijas atvasinājuma apzīmēšanai. Abus minētā pieraksta iztulkojumus drīkst pēc vajadzības lietot vienu otra vietā. Seit norādīto iespēju plaši izmantosim vēlāk (16. nod.).

96. §.\* Diferenciāļu formas invariance. Noteiksim saliktas funkcijas diferenciāļa izteiksmi. Pieņemsim, ka

$$y = F(u), \text{ kur } u = \varphi(x),$$

t. i.,  $y = F[\varphi(x)]$ . Tad  $y' = y'_u \cdot u'_x = F'(u) \varphi'(x)$  un

$$dy = F'(u) \varphi'(x) dx. \quad (11.8)$$

Funkcijas  $u = \varphi(x)$  diferenciālis savukārt ir

$$du = \varphi'(x) dx. \quad (11.9)$$

No vienādībām (11.8) un (11.9) seko, ka

$$dy = F'(u) du. \quad (11.10)$$

No otras puses, pēdējā formula saskaņā ar formulu (11.5) izteiktu funkcijas diferenciāli arī tad, ja  $u$  būtu neatkarīgais mainīgais lielums.

Tātad saliktas funkcijas diferenciāli izsaka atkarībā no starpmainīgā  $u$  diferenciāļa pēc tās pašas formulas, pēc kuras izteiktu funkcijas diferenciāli, ja  $u$  būtu neatkarīgais mainīgais lielums. Citiem vārdiem, diferenciāļa forma nav atkarīga no tā, vai funkcijas arguments  $u$  ir neatkarīgais mainīgais lielums vai arī šis  $u$  ir cita argumenta funkcija.

Minēto īpašību sauc par diferenciāļa formas invarianci (ne-mainīgumu).

Piemērs. Dota funkcija  $y = \ln \sin x$ . Atrast  $dy$ . Apzīmējot  $u = \sin x$ , dabūjam  $y = \ln u$  un saskaņā ar formulu (11.10) varam rakstīt, ka

$$dy = \frac{du}{u}, \quad (11.10')$$

kur

$$du = \cos x dx. \quad (11.9')$$



Neapzīmējot starpmainīgo ar  $u$ , pastāv vienādība

$$dy = \frac{d \sin x}{\sin x} \quad (11.10'')$$

Salīdzinājumam izpildām darbības līdz galam:

$$dy = \frac{d \sin x}{\sin x} = \frac{\cos x dx}{\sin x} = \operatorname{ctg} x dx,$$

kas saskan ar rezultātu, kurš iegūts pēc formulas (11.5):

$$dy = (\ln \sin x)' dx = \frac{(\sin x)'}{\sin x} dx = \frac{\cos x}{\sin x} dx = \operatorname{ctg} x dx.$$

**97. §. Jēdziens par darbībām ar aptuveniem skaitļiem.** Precīzie cipari. Ja aptuvenā skaitļa  $a$  maksimālā absolūtā kļūda nepārsniedz šī skaitļa pēdējā cipara vienību, tad teiksim, ka skaitļa  $a$  visi cipari ir *precīzie cipari*. Ja turpretim minētā kļūda nepārsniedz *vairākas* pēdējā cipara vienības, tad teiksim, ka skaitļa  $a$  visi cipari, izņemot pēdējo, ir precīzie cipari, bet *pēdējais cipars ir nedrošs*. Rakstot aptuvenos skaitļus, mēdz saglabāt tikai precīzos ciparus un varbūtējo pēdējo nedrošo ciparu. Rakstot šādus skaitļus, vajadzības gadījumā no skaitļa kā reizinātāju izcel 10 attiecīgā vesēlā pakāpē.

Piemērs. Ja skaitlim 36700 maksimālā absolūtā kļūda ir 1) 100 vai 2) 300, tad šo skaitli pārraksta šādi: 1)  $367 \cdot 10^2$  vai 2)  $3,67 \cdot 10^4$ , lai skaitļa pēdējais cipars būtu 1) precīzais cipars vai 2) nedrošais cipars (abos gadījumos tas ir cipars 7). Skaitļa maksimālās absolūtās kļūdas norādīšanai dažreiz lieto šādu rakstību: 1)  $367 \cdot 10^2 \pm 10^2$  vai 2)  $367 \cdot 10^2 \pm 3 \cdot 10^2$ .

Vērtīgie cipari. Skaitļa ciparus, neskaitot varbūtējās nulles no kreisās puses, sauc par *vērtīgiem cipariem*. Par aptuvena skaitļa kļūdu var daļēji spriest pēc *precīzo vērtīgo ciparu* skaita skaitli.

Piemēri. 1) 1 kubikpēda = 0,0283 m<sup>3</sup> — trīs precīzie vērtīgie cipari; 2) 1 colla = 2,5400 cm — pieci precīzie vērtīgie cipari; 3) ja skaitlis 46,137 iegūts, izpildot darbības ar aptuveniem skaitļiem, un ir zināms, ka šī skaitļa maksimālā relatīvā kļūda ir 0,1%, tad apskatāmā lieluma vērtība var atšķirties no minētā skaitļa par 0,1%, t. i., par 0,046. Tātad apskatāmā lieluma vērtība var būt starp  $46,137 - 0,046 = 46,091$  un  $46,137 + 0,046 = 46,183$ , un tāpēc apņēmtajam skaitlim ir tikai trīs precīzie vērtīgie cipari.

Skaitļu noapaļošana. Ja aptuvenais skaitlis satur liekus ciparus (ciparus, kuri nav precīzie un arī nav nedroši, bet ir nepareizi), tad šis skaitlis jānoapaļo. Noapaļojot saglabā tikai precīzos ciparus un varbūtējo pēdējo nedrošo ciparu; liekos ciparus atmet, pie tam, ja pirmais atmetamais cipars ir lielāks par 4,

tad pēdējo saglabājamo ciparu palielina par 1; pretējā gadījumā pēdējo saglabājamo ciparu atstāj neizmainītu. Vienīgi, ja aptuvenā skaitļa atmetamā daļa satur vienu pašu ciparu 5, tad noapaļo tā, lai pēdējais saglabājamais cipars būtu pāra skaitlis.

Pēc noapaļošanas rodas papildu kļūda, kas nepārsniedz pusi no pēdējā saglabātā cipara vienības, un tāpēc visi cipari ir precīzie, ja aptuvenā skaitļa kļūda pirms noapaļošanas nepārsniedz pusi no pēdējā saglabātā cipara vienības.

Piemērs. Minētā 3. piemērā rezultāts pēc noapaļošanas ir 46,1, pie tam visi trīs cipari ir precīzie.

Decimālzīmes. Skaitļa ciparus aiz komata sauc par *decimālzīmēm*.

Piemēri. Iepriekšminētajiem skaitļiem  $0,0283 \text{ m}^3$  un  $2,5400 \text{ cm}$  ir četras precīzas decimālzīmes, bet skaitlim 46,1 — viena precīza decimālzīme.

Ciparu skaits darbībā ar aptuveniem skaitļiem. Apskatīsim darbības ar skaitļiem, kuriem visi dotie cipari ir precīzie cipari, un dabūsim rezultātus, kur visi cipari, izņemot pēdējo, ir precīzie cipari, bet pēdējais cipars ir precīzais vai nedrošs cipars. Turpmākos piemēros liksim jautājuma zīmi pirmā nezināmā cipara vietā aiz komata, lai uzskatāmi parādītu, kurš pirmais cipars rezultātā nav zināms.

Kārtulas. 1. *Saskaitot* divus aptuvenus skaitļus vai *atņemot* tos vienu no otra, rezultātā jāpatur tik decimālzīmju, cik to ir skaitlim ar mazāko precīzo decimālzīmju skaitu.

Piemēri.

$$\begin{array}{r} + 20,73? \\ + 15,2? \\ \hline 35,9? \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 0,2073? \\ + 0,152? \\ \hline 0,359? \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - 207,3? \cdot 10^4 \\ - 152,? \cdot 10^4 \\ \hline 55,? \cdot 10^4 \end{array}$$

Šeit mazākais precīzo decimālzīmju skaits ir otram saskaitāmajam respektīvi mazinātajam, un tāpēc arī rezultātā paturēts tikpat decimālzīmju.

2. *Reizinot* vai *dalot* divus aptuvenus skaitļus, rezultātā jāpatur tik vērtīgo ciparu, cik to ir skaitlim ar mazāko precīzo vērtīgo ciparu skaitu.

Piemēri:

$$\begin{array}{r} \times 20,73? \\ 15,2? \\ \hline ?? ??? \\ 4146? \\ 10365? \\ 2073? \\ \hline 315,? \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 20,73? & 15,2? \\ - 15,2? & \hline 55? & 1,36? \\ - 456? & \\ \hline 9? & \\ - 912? & \\ \hline ? & \end{array}$$



Seit mazākais precīzo vērtīgo ciparu skaits ir otram reizinātājam respektīvi dalītājam (tris vērtīgie cipari), un tāpēc arī rezultātā paturēts tikpat vērtīgo ciparu.

Piezīme. Ja vienam dotajam skaitlim ir vairāk decimāl-zīmju (saskaitīšanas vai atņemšanas gadījumā) vai vairāk vērtīgo ciparu (reizināšanas vai dalīšanas gadījumā) nekā otram skaitlim, tad šāds skaitlis pirms darbības izpildīšanas jānoapaļo, paturot rezervei vienu decimālzīmi respektīvi vērtīgo ciparu vairāk nekā otram skaitlim. Tā, piemēram, lai sareizinātu aptuvenus skaitļus  $20,734 \times 15,2$ , to vietā reizina  $20,73 \times 15,2$ .

Lai nebūtu jārēķina ar liekiem cipariem, aptuvenu skaitļu reizināšanu un dalīšanu ieteicams izpildīt, kā parādīts tālāk. Izpildot starpdarbības, rezervei mēdz rēķināt ar vienu ciparu vairāk, nekā prasīts rezultātā, un beigās lieko ciparu atmet.

$$\begin{array}{r} \times 20,73 \\ 15,2 \\ \hline 2073 \\ + 1036 \\ 41 \\ \hline 315,0 \approx 315 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20,73 \quad 15,2 \\ - 152 \quad | \quad 1,364 \approx 1,36 \\ \hline 553 \\ - 456 \\ \hline 97 \\ - 91 \\ \hline 6 \end{array}$$

#### Vingrinājumi.

1. Salīdzināt lodes tilpuma  $V$  pieaugumu  $\Delta V$  ar diferenciāli  $dV$ , ja lodes rādiuss  $R=1$  un  $\Delta R=0,5; 0,1; 0,01$ .

2. Salīdzināt lodes tilpuma  $V$  pieaugumu  $\Delta V$  ar diferenciāli  $dV$ , ja lodes rādiusam  $R$  ir pieaugums  $\Delta R=0,5; 0,1; 0,01$ .

Atrast funkcijas diferenciāli.

3.  $y = x^2 + 2x - 1$ .

4.  $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ .

5.  $u = \sin 2x$ .

6.  $x = \sqrt{1-t^2}$ .

7.  $v = \frac{2t}{1+t^2}$ .

8.  $y = \ln(1-x)$ .

9.  $y = \lg \operatorname{tg} x$ .

10.  $y = \lg \operatorname{tg} x$ .

11. Aprēķināt riņķa laukumu  $S$  un tā maksimālo absolūto un relatīvo kļūdu, ja riņķa diametrs  $2R=100 \pm 0,2$  mm. Kāda ir riņķa rādiusa maksimālā absolūtā un relatīvā kļūda?

12. Atrast lodes tilpumu  $V$ , uzrādot rezultāta maksimālo absolūto kļūdu, ja lodes diametrs  $2R=100 \pm 0,2$  mm.

13. Ar diferenciāļa palīdzību aptuveni aprēķināt  $\sin 31^\circ$ , zinot, ka  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ .

14. Ar diferenciāļa palīdzību aptuveni aprēķināt  $\lg \sin 31^\circ$ , zinot, ka  $\lg \sin 30^\circ = \lg \frac{1}{2} = \overline{1},699$ .

Ar diferenciāļa palīdzību atrast dotās izteiksmes aptuvenu formulu mazām  $\alpha$  vērtībām.

15.  $\frac{1}{1+\alpha}$ . 16.  $\sqrt[3]{(1+\alpha)^2}$ . 17.  $\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}$ . 18.  $\operatorname{tg} \alpha$ . 19.  $\ln(1+\alpha)$ .



## VAIRĀKU ARGUMENTU FUNKCIJAS

98. §. **Pamatjēdzieni.** Šeit apskatīsim funkcijas, kuras atkarīgas no diviem, trim un vairāk argumentiem, piemēram:

1) taisnstūra laukums  $S=xy$  ir taisnstūra pamata  $x$  un augstuma  $y$  funkcija;

2) taisna paralēlskaldņa tilpums  $V=xyz$  ir tā pamata malu  $x$ ,  $y$  un augstuma  $z$  funkcija;

3) attālums starp diviem punktiem (9. §)

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

ir šo punktu četru koordinātu funkcija;

4) elektriskās strāvas stiprums  $I=\frac{U}{R}$  ir sprieguma  $U$  un pretestības  $R$  funkcija.

Tālāk precizēsim divu argumentu funkcijas jēdzienu.

Funkcijas definīcijas apgabalu noskaidrosim ar piemēriem.

Funkcija

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2} \quad (12.1)$$

ir definēta tām  $x$ ,  $y$  vērtībām, kuras apmierina nevienādību

$$x^2+y^2\leq 1, \quad (12.2)$$

šeit pieļaujot arī vienādību. Tiešām, tikai pie šīm  $x$ ,  $y$  vērtībām zemsaknes izteiksme ir *nenegatīva* un tātad  $z$  pieņem reālu vērtību. Toties funkcija

$$z=\ln(1-x^2-y^2) \quad (12.3)$$

ir definēta  $x$ ,  $y$  vērtībām, kuras apmierina nevienādību

$$x^2+y^2<1, \quad (12.4)$$

šoreiz izslēdzot vienādību. Tikai pie šīm  $x$ ,  $y$  vērtībām iekavu izteiksme ir *pozitīva* un tātad logaritms ir definēts.

Ievērojot to, ka  $d=\sqrt{x^2+y^2}$  ir punkta  $M(x, y)$  attālums no koordinātu sākuma punkta, nevienādību (12.2) apmierina visu to plaknes punktu koordinātes, kuri atrodas riņķī un uz riņķa līnijas, kuras centrs ir koordinātu sākuma punktā un rādiuss 1. Šādu riņķi sauc par *slēgtu*. Funkcija (12.1) ir definēta tikai tiem punktiem ar koordinātēm  $x$ ,  $y$ , kuri aizpilda minēto slēgto riņķi. Tātad funkcijas definīcijas apgabals ir slēgts riņķa apgabals ar centru koordinātu sākuma punktā un rādiusu 1.

Turpretim nevienādību (12.4) apmierina tikai to punktu koordinātes, kuri atrodas iekšpus riņķa līnijas, kuras centrs ir koor-

dinātu sākuma punktā un rādiuss 1, bet neapmierina to punktu koordinātes, kuri atrodas uz riņķa līnijas, jo saskaņā ar formulu (12.4)  $x^2 + y^2$  nevar būt vienāds ar 1. Šādu riņķi sauc par *valēju*. Funkcijas (12.3) definīcijas apgabals ir valējs riņķa apgabals ar centru koordinātu sākuma punktā un rādiusu 1.

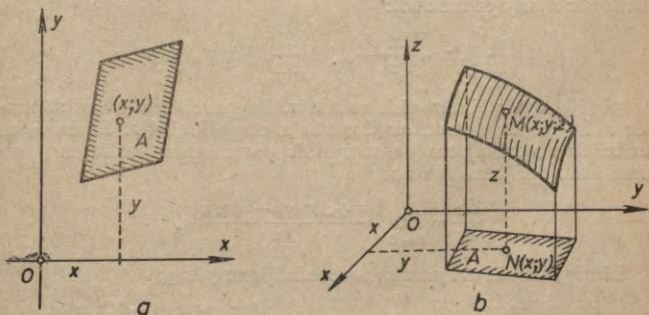
Divu argumentu funkcijas definīcija. Pieņemsim, ka dota skaitļu pāru  $x, y$  kopa, kam atbilstošie punkti ar koordinātēm  $x$  un  $y$  aizpilda plaknes apgabalu  $A$  (114. zīm. a). Ja katram no minētiem skaitļu pāriem saskaņā ar doto priekšrakstu atbilst noteikts skaitlis  $z$ , tad saka, ka  $z$  ir divu argumentu  $x$  un  $y$  funkcija, kas definēta apgabalā  $A$ . To apzīmē šādi:

$$z = f(x, y). \quad (12.5)$$

Burta  $f$  vietā raksta arī citus burtus, kuriem dažreiz pievieno indeksus (numurus):  $F, \varphi, f_1, f_2$ . Līdzīgi definē arī triju, četru utt. argumentu funkcijas.

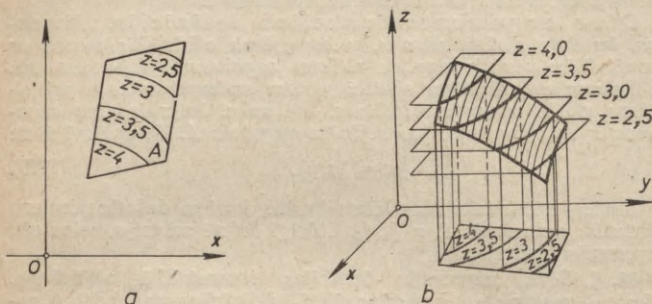
**99. §. Divu argumentu funkcijas ģeometriskā attēlošana.** Pirmā metode. Funkcijas (12.5) definīcijas apgabalā  $A$  ņemam  $Oxy$  plaknes punktu  $N$  ar koordinātēm  $x$  un  $y$  (114. zīm. b). Pievienojot tām atbilstošo trešo koordināti  $z$ , ko izsaka funkcija (12.5), konstruējam telpā attiecīgu punktu  $M$  ar koordinātēm  $x, y, z$ . Iedomājoties atkārtotu šādu konstrukciju katram apgabala  $A$  punktam, attiecīgie telpas punkti parasti izveido virsmu. Šī virsma ģeometriski attēlo funkciju (12.5) taisnleņķu koordinātu sistēmā telpā. Saka arī, ka minētā virsma ir to punktu ģeometriskā vieta, kuru koordinātes apmierina vienādojumu (12.5).

Tā, piemēram, funkciju  $z = 1 - x - y$  ģeometriski attēlo plakne, kas šķēļ visas trīs koordinātu asis vienu garuma vienību attālumā no to sākuma punkta. Turpretim funkciju  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  ģeometriski attēlo augšējā pussfēra, kuras centrs ir koordinātu sākuma punktā un rādiuss 1.



114. zīm.

Otrā metode. Izvēloties dažas atsevišķas  $z$  vērtības  $z_1, z_2, \dots$ , funkcijai (12.5)  $Oxy$  plaknē konstruējam t. s. *līmeņa līnijas*, kuru vienādojumi ir  $f(x, y) = z_1, f(x, y) = z_2, \dots$ , 115. zīm. a redzamas līmeņa līnijas, kuru vienādojumi ir  $f(x, y) = 2,5$ ,



115. zīm.

$f(x, y) = 3, f(x, y) = 3,5, f(x, y) = 4$ , t. i., līmeņa līnijas  $z=2,5, z=3, z=3,5, z=4$ , bet 115. zīm. b parādīts, kā tās ir radušās. Pēc šīm līnijām, ja tās konstruētas pietiekami tuvām  $z$  vērtībām, var spriest par funkcijas (12.5) vērtībām līdzīgi tam, kā pēc topogrāfiskas kartes līmeņa līnijām spriež par apkārtnes reljefu.

**100. §. Parciālie atvasinājumi.** Apskatīsim, kā atvasina divu argumentu funkciju  $z=f(x, y)$ .

Ja  $y$  vērtību uzskata par konstantu, tad šī divu argumentu funkcija kļūst par viena argumenta  $x$  funkciju. Šīs funkcijas atvasinājumu, ja tas eksistē, sauc par funkcijas *parciālo atvasinājumu pēc  $x$*  un apzīmē šādi:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ jeb } \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \text{ jeb } \frac{\partial f}{\partial x}, \text{ jeb } f'_x(x, y).$$

Ar pēdējo apzīmējumu tiek uzsvērts, ka parciālais atvasinājums pēc  $x$  ir, vispār ņemot, argumentu  $x$  un  $y$  funkcija. Saskaņā ar funkcijas atvasinājuma definīciju šis parciālais atvasinājums nozīmē šādu dalījuma robežu:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Līdzīgi definē arī *parciālo atvasinājumu pēc  $y$* :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$



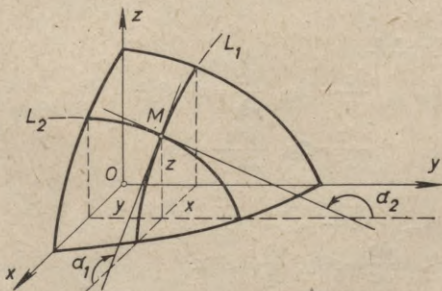
Praktiski divu argumentu funkcijas parciālos atvasinājumus atrod pēc parastām funkciju atvasināšanas formulām un kārtulām, nemainīgo argumentu pieņemot par konstanti, un funkciju atvasina pēc mainīgā argumenta tāpat, kā atvasina viena argumenta funkciju.

Piemēri:

$$1) z = x^2y + 2y^3, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 6y^2.$$

$$2) z = e^{xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = (e^{xy})'_x = (e^{xy})'_{xy} (xy)'_x = e^{xy}y, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = (e^{xy})'_y = (e^{xy})'_{xy} (xy)'_y = e^{xy}x.$$

Parciālo atvasinājumu ģeometriskā nozīme. Kā zināms, funkciju  $z=f(x, y)$  ģeometriski taisnleņķu koordinātu sistēmā attēlo attiecīga virsma. Minēto argumenta  $x$  funkciju (ar fiksētu  $y$ ) ģeometriski attēlo plaknes līnija  $L_1$  (116. zīm.), ko dabū, šķēļot virsmu ar plakni, kas ir paralēla  $Oxz$  plaknei un krusto  $Oy$  asi punktā ar ordināti  $y$ . Tad saskaņā ar funkcijas atvasinājuma ģeometrisko nozīmi parciālais atvasinājums  $\frac{\partial z}{\partial x}$  ir vienāds ar leņķa  $\alpha_1$  tangensu, ko veido šķēluma līnijai  $L_1$  punktā  $M(x, y, z)$  novilkta pieskare ar  $Ox$  ass pozitīvo virzienu.



116. zīm.

Līdzīgi minēto argumenta  $y$  funkciju (ar fiksētu  $x$ ) ģeometriski attēlo otra plaknes līnija  $L_2$ , ko dabū, šķēļot minēto virsmu ar plakni, kas ir paralēla  $Oyz$  plaknei un krusto  $Ox$  asi punktā ar abscisu  $x$ . Tad  $\frac{\partial z}{\partial y}$  ir vienāds ar leņķa  $\alpha_2$  tangensu, ko veido

šķēluma līnijai  $L_2$  punktā  $M(x, y, z)$  novilkta pieskare ar  $Oy$  ass pozitīvo virzienu.

Līdzīgi definē parciālos atvasinājumus ar triju, četru utt. argumentu funkcijām. Tomēr šoreiz trūkst ērtas iespējas funkciju geometriski attēlot un līdz ar to arī trūkst funkciju parciāliem atvasinājumiem vienkāršas geometriskas nozīmes.

Otrās kārtas parciālie atvasinājumi. Atvasinot divu argumentu funkcijas  $z=f(x, y)$  parciālos atvasinājumus, dabū otrās kārtas parciālos atvasinājumus. Tā atvasinot vēlreiz atvasinājumu  $\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x, y)$  pēc  $x$  un  $y$ , dabū 2. kārtas atvasinājumus, ko apzīmē šādi:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \text{ jeb } f''_{xx}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \text{ jeb } f''_{xy}(x, y).$$

Turpretim, atvasinot vēl reizi  $\frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x, y)$  pēc  $x$  un  $y$ , dabū

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \text{ jeb } f''_{yx}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \text{ jeb } f''_{yy}(x, y).$$

Piemēri:

1)  $z=x^2y+2y^3$ .

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^2+6y^2.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=2x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=2x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y;$$

2)  $z=e^{xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial x}=e^{xy}y, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=e^{xy}x.$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^{xy}y^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=e^{xy}xy+e^{xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=e^{xy}xy+e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{xy}x^2.$$

Parciālos atvasinājumus  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  un  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$  sauc par *otrās kārtas jauktajiem atvasinājumiem*. Abos apskatītajos piemēros šie atva-

sinājumi izrādās vienādi. Var pierādīt, ka jauktie atvasinājumi vienmēr ir vienādi, ja tie ir nepārtrauktas\* divu argumentu funkcijas.

**101. §. Funkcijas pilnais pieaugums un pilnais diferenciālis.**  
Divu argumentu funkcijai  $z=f(x, y)$  pilnais pieaugums ir

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \quad (12.6)$$

Tas ir funkcijas pieaugums, ja abiem argumentiem doti pieaugumi  $\Delta x$  un  $\Delta y$ . Pretstatā ir funkcijas parciālie pieaugumi, kad tikai vienam argumentam dod pieaugumu

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y), \quad \Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Līdzīgi 90. § arī divu argumentu funkcijas pilno pieaugumu var sadalīt pieauguma galvenā sastāvdaļā un korekcijas locekļos. So sadalījumu var iegūt šādu:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \alpha' \cdot \Delta y, \quad (12.7)$$

kur  $\alpha \rightarrow 0$  un  $\alpha' \rightarrow 0$ , kad  $\Delta x \rightarrow 0$  un  $\Delta y \rightarrow 0$  (šīs formulas pamatojumu sk. tālāk). Šeit korekcijas locekļi  $\alpha \cdot \Delta x$  un  $\alpha' \cdot \Delta y$  ir augstākas kārtas bezgalīgi mazi lielumi salīdzinājumā ar bezgalīgi maziem lielumiem  $\Delta x$  un  $\Delta y$ .

Funkcijas pieauguma galveno sastāvdaļu apzīmē ar  $dz$ :

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y, \quad (12.8)$$

un to sauc par funkcijas  $z=f(x, y)$  pilno diferenciāli.

Simetrijas pēc  $\Delta x$  un  $\Delta y$  vietā šeit raksta  $dx$  un  $dy$ , un tos sauc par argumentu diferenciāļiem. Līdz ar to vienādības (12.8) vietā raksta

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad \text{jeb} \quad dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy, \\ \text{jeb} \quad dz = f'_x(x, y) dx + f'_y(x, y) dy. \quad (12.9)$$

Atsevišķos saskaitāmos šo vienādību labajās pusēs sauc par funkcijas *parciālajiem diferenciāļiem*.

**Piemērs.** Iedomāsimies cilindru, kura pamata diametru un augstumu var izmērīt ar zināmu precizitāti. Noskaidrot, ar kādu precizitāti var aprēķināt cilindra tilpumu.

Cilindra pamata diametru apzīmēsim ar  $2x$  un pieņemsim, ka  $2x = 20 \text{ mm} \pm 0,1 \text{ mm}$ . Tad cilindra pamata rādiuss ir  $x = 10 \text{ mm} \pm$

\* Divu argumentu funkcijas nepārtrauktību sk. V. I. Smirnova «Augstākās matemātikas kurss», I daļa.



$\pm 0,05$  mm. Cilindra augstumu apzīmēsim ar  $y$  un pieņemsim, ka  $y = 100 \text{ mm} \pm 0,1 \text{ mm}$ .

Aprēķināmo cilindra tilpumu apzīmēsim ar  $z$ . Tad pēc formulas  $V = \pi R^2 H$  varam rakstīt, ka

$$z = \pi x^2 y,$$

un izskaitļojot dabūjam, ka  $z = \pi 10^2 \cdot 100 \text{ mm}^3 = 10\,000\pi \text{ mm}^3 = 31\,416 \text{ mm}^3$ .

Cilindra tilpuma kļūda ir  $\Delta z$ , ja pamata rādiusa un augstuma kļūdas ir attiecīgi  $\Delta x$  un  $\Delta y$ , pie tam  $|\Delta x| \leq 0,05$  un  $|\Delta y| \leq 0,1$ . Tilpuma kļūdu aptuveni izsaka arī  $dz$ , pie tam saskaņā ar formulu (12.9)

$$dz = 2\pi xy dx + \pi x^2 dy, \quad (12.10)$$

kur  $dx = \Delta x$ ,  $dy = \Delta y$  un

$$|dx| \leq 0,05, \quad |dy| \leq 0,1. \quad (12.11)$$

Diferenciāli  $dx$  un  $dy$  var būt pozitīvi un negatīvi. Ar vienādām zīmēm tie ir tad, ja  $x$  un  $y$  abi izmērīti par lielu vai abi par mazu (1. gadījums), bet ar pretējām zīmēm, ja viens no tiem ir izmērīts par lielu un otrs par mazu (2. gadījums).

1. gadījumā formulas (12.10) labajā pusē abi locekļi ir ar vienādām zīmēm; tātad  $x$  un  $y$  kļūdas aritmētiski summējas:

$$|dz| = |2\pi xy dx| + |\pi x^2 dy|. \quad (12.12)$$

Turpretim 2. gadījumā izteiksmes (12.10) labajā pusē abi locekļi ir ar pretējām zīmēm; tātad  $x$  un  $y$  kļūdas daļēji kompensējas:

$$|dz| < |2\pi xy dx| + |\pi x^2 dy|, \quad (12.13)$$

jo šoreiz vienādībā (12.10)  $dz$  īstenībā vienāds divu locekļu differencei un  $|dz|$  ir mazāks par šo pašu divu locekļu aritmētisku summu nevienādības (12.13) labajā pusē.

Apvienojot abus gadījumus, t. i., apvienojot formulas (12.12) un (12.13), dabūjam, ka

$$|dz| \leq |2\pi xy dx| + |\pi x^2 dy|$$

jeb

$$|dz| \leq 2\pi xy |dx| + \pi x^2 |dy|. \quad (12.14)$$

Sajā un arī citos tamlīdzīgos piemēros kļūdu novērtējumus parasti raksta īsāk: no vienādības (12.10) uzreiz secina nevienādību (12.14).

Ievietojot formulā (12.14) dotās skaitliskās vērtības, dabūjam, ka  $|dz| \leq 2\pi \cdot 10 \cdot 100 \cdot 0,05 + \pi 10^2 \cdot 0,1 = 100\pi + 10\pi = 110\pi \approx 350$ . Tātad cilindra tilpums ir

$$z = 31\,400 \pm 350 \text{ mm}^3 \text{ jeb } z = 31,4 \pm 0,35 \text{ cm}^3.$$

Seit tilpuma vērtība noapaļota, ievērojot iespējamo tilpuma maksimumā absolūto kļūdu.

Vispārinājums. Līdzīgi divu argumentu funkcijas gadījumam var apskatīt pilno pieaugumu un pilno diferenciāli arī triju, četru utt. argumentu funkcijām. Trīs argumentu funkcijai  $u=f(x, y, z)$  pilnais diferenciālis ir

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Vienādības (12.7) pamatojums. Šis pamatojums attieksies uz divu argumentu funkcijām, kurām eksistē abi parciālie atvasinājumi, pie tam šie atvasinājumi ir nepārtrauktas funkcijas.

Funkcijas  $z=f(x, y)$  pilnā pieauguma izteiksmi  $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$  pārveidojam, pieskaitot un atņemot  $f(x, y+\Delta y)$ :

$$\Delta z = [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] + [f(x, y+\Delta y) - f(x, y)].$$

Viena argumenta  $x$  funkcijas  $f(x, y+\Delta y)$  pieaugumu un viena argumenta  $y$  funkcijas  $f(x, y)$  pieaugumu sadalot saskaņā ar 90. § pieauguma galvenā sastāvdaļā un korekcijas locekli, dabūjam, ka

$$\Delta z = f'_x(x, y+\Delta y) \cdot \Delta x + \alpha_1 \cdot \Delta x + f'_y(x, y) \cdot \Delta y + \alpha_2 \cdot \Delta y.$$

Seit  $\alpha_1 \rightarrow 0$ , kad  $\Delta x \rightarrow 0$ , un  $\alpha_2 \rightarrow 0$ , kad  $\Delta y \rightarrow 0$ . Apzīmējam  $f'_x(x, y+\Delta y) = f'_x(x, y) + \alpha_3$ , pie tam saskaņā ar minēto funkcijas  $f'_x$  nepārtrauktību  $\alpha_3 \rightarrow 0$ , kad  $\Delta y \rightarrow 0$ . Tad

$$\Delta z = [f'_x(x, y) + \alpha_3] \Delta x + \alpha_1 \cdot \Delta x + f'_y(x, y) \Delta y + \alpha_2 \cdot \Delta y.$$

Atverot kvadrātiekvādas un savelkot līdzīgos locekļus,

$$\Delta z = f'_x(x, y) \Delta x + f'_y(x, y) \Delta y + (\alpha_1 + \alpha_3) \Delta x + \alpha_2 \Delta y.$$

Apzīmējot  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_3$ ,  $\alpha' = \alpha_2$ , dabūjam formulu (12.7), pie tam saskaņā ar iepriekšējo  $\alpha \rightarrow 0$  un  $\alpha' \rightarrow 0$ , kad  $\Delta x \rightarrow 0$  un  $\Delta y \rightarrow 0$ .

## 102. §. Funkcijas ekstrēms

Definīcija. Funkcijai  $z=f(x, y)$   $Oxy$  plaknes punktā  $(x_0, y_0)$  ir *maksimums* (*minimums*), ja šajā punktā funkcijas vērtība  $f(x_0, y_0)$  ir lielāka (mazāka) par funkcijas vērtībām visos citos punktam  $(x_0, y_0)$  pietiekami tuvos  $Oxy$  plaknes punktus.

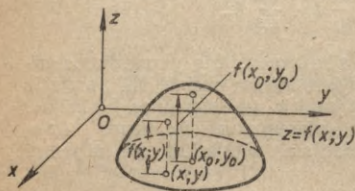
Geometriskā nozīme. Ja punktā  $(x_0, y_0)$  funkcijai  $z=f(x, y)$  ir maksimums (minimums), tad uz virsmas, kura geometriski attēlo doto funkciju,  $Oxy$  plaknes punktam  $(x_0, y_0)$  atbilst visaugstākais (viszemākais) punkts salīdzinājumā ar visiem citiem pietiekami tuviem virsmas punktiem (117. un 118. zīm.).

Pieņemsim, ka punktā  $(x_0, y_0)$  funkcijai  $z=f(x, y)$  ir, piemēram, maksimums. Tad saskaņā ar maksimuma definīciju  $f(x_0, y_0)$

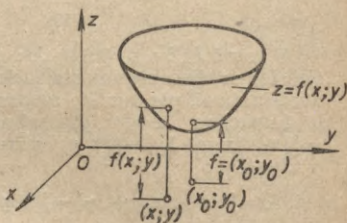


ir lielāks par  $f(x, y)$  vērtībām arī punktam  $(x_0, y_0)$  pietiekami tuvos  $Oxy$  plaknes punktos, kuri atrodas uz taisnes  $y=y_0$ , t. i., arī viena argumenta  $x$  funkcijai  $f(x, y_0)$  punktā  $x=x_0$  ir maksimums, un tāpēc saskaņā ar ekstrēma nepieciešamo pazīmi viena argumenta funkcijām (83. §)

$$[f'_x(x, y_0)]_{x=x_0} = f'_x(x_0, y_0) = 0. \quad (12.15)$$



117. zīm.



118. zīm.

Līdzīgā kārtā arī viena argumenta  $y$  funkcijai  $f(x_0, y)$  punktā  $y=y_0$  ir maksimums, un tāpēc

$$[f'_y(x_0, y)]_{y=y_0} = f'_y(x_0, y_0) = 0. \quad (12.16)$$

Tās pašas divas pazīmes dabūjamas arī, pieņemot, ka punktā  $(x_0, y_0)$  funkcijai  $z=f(x, y)$  ir minimums.

Līdzīgas funkcijas ekstrēma pazīmes var atrast arī funkcijai ar trim, četriem utt. argumentiem.

**Funkcijas ekstrēma nepieciešamā pazīme.** Ja divu argumentu funkcijai  $z=f(x, y)$  apskatāmajā punktā  $x=x_0, y=y_0$  ir ekstrēms (maksimums vai minimums), tad šajā punktā funkcijas parciālie atvasinājumi pēc abiem argumentiem ir vienādi ar nulli.

**Piemērs.** Aprēķināt funkcijas  $z=x^2+2y^2+2x-8y+12$  maksimumu un minimumu.

**Atrisinājums.** Dotajai funkcijai atrodam parciālos atvasinājumus pēc abiem argumentiem  $\frac{\partial z}{\partial x}=2x+2, \frac{\partial z}{\partial y}=4y-8$  un pielīdzinām dullei:  $2x+2=0, 4y-8=0$ . No šejienes seko, ka  $x=-1, y=2$ . Tātad  $(-1; 2)$  ir vienīgais punkts, kur funkcijai var būt ekstrēms.

Lai noskaidrotu, vai atrastajā punktā funkcijai ir maksimums vai minimums, funkcijas izteiksmi pārveidojam šādi:

$$z = (x+1)^2 + 2(y-2)^2 + 3,$$



no kurienes seko, ka apskatāmajā punktā  $(-1; 2)$  ir  $z=3$ , kamēr citos  $Oxy$  plaknes punktos  $z>3$ . Tātad punktā  $(-1; 2)$  funkcijai ir minimums.

**103. §. Saliktas funkcijas atvasināšana.** Apskatīsim tādu saliktas funkcijas vispārinājumu, kad  $y$  var izteikt atkarībā no  $x$  ar divu starpmainīgo  $u$  un  $v$  starpniecību, t. i., ja funkcionālo atkarību var izteikt šādi:

$$y = F(u, v), \text{ kur } y = \varphi(x), v = \psi(x). \quad (12.17)$$

No šīm vienādībām izslēdzot  $u$  un  $v$ , doto funkciju var izteikt arī tā:

$$y = F[\varphi(x), \psi(x)]. \quad (12.18)$$

Piemērs.

$$y = \sin^2 x \cdot (\ln x - 1)^2 + \sin x + 1.$$

Seit  $y$  var šādi izteikt atkarībā no  $x$  ar starpmainīgo palīdzību:

$$y = u^2 v^2 + u + 1, \text{ kur } u = \sin x, v = \ln x - 1.$$

Pieņemsim, ka funkcijas (12.17) ir *diferencējamās*. Izteiksim  $y' = y'_x$  atkarībā no  $\frac{\partial y}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial y}{\partial v}$ ,  $u'_x = \varphi'(x)$  un  $v'_x = \psi'(x)$ .

Dodam  $x$  pieaugumu  $\Delta x$ . Tad  $u$  un  $v$  saskaņā ar pēdējām divām vienādībām (12.17) dabū pieaugumus  $\Delta u$  respektīvi  $\Delta v$ . Toties  $y$  saskaņā ar formulu (12.7) (liekot tur  $x$ ,  $y$  un  $z$  vietā attiecīgi  $u$ ,  $v$  un  $y$ ) dabū pieaugumu

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v + \alpha \cdot \Delta u + \alpha' \cdot \Delta v, \quad (12.19)$$

kur  $\alpha \rightarrow 0$  un  $\alpha' \rightarrow 0$ , kad  $\Delta u \rightarrow 0$  un  $\Delta v \rightarrow 0$ . Dalām pēdējo vienādību ar  $\Delta x$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha' \frac{\Delta v}{\Delta x} \quad (12.20)$$

un liekam  $\Delta x \rightarrow 0$ . Tad 1)  $\frac{\Delta u}{\Delta x} \rightarrow u'_x$ ,  $\frac{\Delta v}{\Delta x} \rightarrow v'_x$ ; 2) pēdējo divu funkciju (12.17) nepārtrauktības dēļ (67. § 2. piezīme) arī  $\Delta u \rightarrow 0$ ,  $\Delta v \rightarrow 0$ , no kurienes savukārt seko, ka  $\alpha \rightarrow 0$  un  $\alpha' \rightarrow 0$ . Līdz ar to no vienādības (12.20) dabūjam, ka

$$y' = \frac{\partial y}{\partial u} u'_x + \frac{\partial y}{\partial v} v'_x. \quad (12.21)$$

Šī vienādība ir saliktas funkcijas atvasināšanas formula divu starpmainīgo gadījumam.

P i e m ē r s. Minētā piemēra funkcijai dabūjam

$$u'_x = \cos x, \quad v'_x = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 2uv^2 + 1, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 2u^2v$$

un

$$\begin{aligned} y' &= (2uv^2 + 1) \cos x + 2u^2v \frac{1}{x} = \\ &= [2 \sin x (\ln x - 1)^2 + 1] \cos x + 2 \sin^2 x (\ln x - 1) \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

**104. §. Apslēptas funkcijas atvasināšana.** Tāpat kā 76. §, apskatīsim vienādojumu

$$F(x, y) = 0, \quad (12.22)$$

pieņemot, ka tas apslēptā veidā definē  $y$  kā  $x$  funkciju  $y = y(x)$ , pie tam šādas funkcijas var būt vairākas. Par minētās funkcijas  $y = y(x)$  eksistenci var spriest, zinot divu argumentu funkciju ģeometriski nozīmi.

Nemsim divu argumentu funkciju  $z = F(x, y)$  un iedomāsimies virsmu, kas ģeometriski attēlo šo funkciju. Ja minētā virsma šķēļ  $Oxy$  plakni, tad kaut kurā šķēluma līniju punktā  $z = 0$  un arī  $F(x, y) = 0$ . Tātad šķēluma līniju punktu koordinātes apmierina vienādojumu (12.22). Šis šķēluma līnijas ir arī grafikas minētām funkcijām  $y = y(x)$ . Šādas funkcijas var būt vairākas pat tad, ja minētai virsmai ir viena pati šķēluma līnija ar  $Oxy$  plakni (piemēram, ja šķēluma līnija ir riņķa līnija).

Zinot parciālos atvasinājumus, apslēptai funkcijai atvasinājumu var izteikt formulas veidā. Iedomāsimies minēto funkciju  $y = y(x)$  ievietotu vienādojumā (12.22), tā ka pēdējais kļūst par identitāti ar argumentu  $x$ :

$$F[x, y(x)] = 0. \quad (12.23)$$

Šo identitāti atvasinām pēc  $x$ . Kreisās puses atvasinājums saskaņā ar formulu (12.21) ir

$$\frac{\partial F}{\partial x} x' + \frac{\partial F}{\partial y} y' = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y',$$

jo  $x' = 1$ . Vienādības (12.23) labajā pusē nulles atvasinājums ir nulle. Tātad

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0,$$

no kurienes beidzot dabūjam, ka

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \quad (12.24)$$

(pieņemot, ka  $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ ). Vienādība (12.24) ir *apslēptas funkcijas atvasināšanas formula*.

Piemēri. Atvasināt apslēptas funkcijas, kas dotas 76. §.

1)  $3x - 5y + 2 = 0$ .

$$F(x, y) = 3x - 5y + 2, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 3, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -5,$$

$$y' = -\frac{3}{-5} = \frac{3}{5};$$

2)  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ .

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y,$$

$$y' = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}.$$

Piezīme. Formulas (12.24) pierādījums pastāv, pieņemot, ka eksistē minētā funkcija  $y=y(x)$  un ka tā ir diferencējama. Funkcijas  $y=y(x)$  eksistence, kā arī iespēja šo funkciju atvasināt arī šeit (tāpat kā 76. §) nav pierādīta.

### Vingrinājumi.

Atrast funkciju parciālos atvasinājumus.

1.  $z = x^3y - 4xy^3$ .

2.  $z = 2x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt{x}}$ .

3.  $z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ .

4.  $z = \frac{u}{v} - \frac{v}{u}$ .

5.  $z = \ln \operatorname{tg} \frac{y}{x}$ .

6.  $z = 2e^{-\frac{x}{y}}$ .

7.  $t = \operatorname{arctg} \frac{u+v}{u-v}$ .

8.  $u = x^2y - 2y^2z + z^3$ .

9.  $u = e^{x^3 + xy^2 + xz^2}$ .

10. Iepriekšējiem piemēriem atrast pilno diferenciāli.

11. Atrast pilnā diferenciāļa vērtību funkcijai  $z = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$ , kad  $x=3$ ,  $y=4$ ,  $\Delta x=0,1$ ,  $\Delta y=0,2$ .

12. Aptuveni atrast funkcijas  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$  maiņu, ja  $x$  mainās no 2 līdz 2,1, bet  $y$  no 3 līdz 2,5.



13. Atrast konusa tilpumu  $V$  un tā maksimālo absolūto un relatīvo kļūdu, ja pamata riņķa diametrs  $2r=100\pm 0,4$  mm un augstums  $h=200\pm 1$  mm. Kāda ir pamata rādiusa un augstuma maksimālā absolūtā un relatīvā kļūda?

14. Atrast taisnstūra prizmas tilpumu  $V$ , uzrādot maksimālo absolūto rezultāta kļūdu, ja triju savstarpēji perpendikulāru šķautņu garumi  $x=200\pm 0,4$  mm,  $y=150\pm 0,3$  mm un  $z=100\pm 0,1$  mm.

Atrast punktus, kur funkcijai var būt ekstrēms.

15.  $z=3x^2-5y^2+2xy-4x+y+3$ .

16.  $z=x^2y+x^2+2y^3+5y^2$ .

17.  $u=xy-2y^2-z^2+yz-2x$ .

18. Atrast funkcijas  $y=x^x$  atvasinājumu, uzskatot to par saliktu funkciju ar diviem starpmainīgajiem.

19. 9. nod. 85. un 86. vingr. funkcijām atrast atvasinājumus kā saliktām funkcijām ar diviem starpmainīgajiem.

20. Lietojot apslēptas funkcijas atvasināšanas formulu, atrisināt 9. nod. 80.—83. vingrinājumu.

## INTEGRĀLRĒKINI

## 13. NODAĻA

## NENOTEIKTAIS INTEGRĀLIS

Funkciju integrēšana ir apgriezta darbība funkciju atvasināšanai, tāpat kā, piemēram, saknes vilkšana no skaitļa ir apgriezta darbība skaitļa kāpināšanai.

**105 §. Primitīvā funkcija.** Diferenciālrēķinos dotajai funkcijai atradam atvasinājumu. Tā, piemēram, funkcijai  $y = \ln x$  atvasinājums  $y' = \frac{1}{x}$ . Turpmāk apskatīsim apgrieztu darbību. Zinot  $y'$  izteiksmi, noteiksim  $y$  izteiksmi. Tā, piemēram, zinot, ka  $y' = x^2$ , atrast  $y$ . Nav grūti uzminēt, ka šeit var ņemt  $y = \frac{1}{3}x^3$ , jo  $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$ . Tomēr tā nav vienīgā atbilde, jo var ņemt arī  $y = \frac{1}{3}x^3 + 1$ , tāpēc ka  $\left(\frac{1}{3}x^3 + 1\right)' = x^2$ . Vispār šeit var ņemt  $y = \frac{1}{3}x^3 + C$ , kur  $C$  ir patvaļīga konstante, jo arī  $\left(\frac{1}{3}x^3 + C\right)' = x^2$ .

Funkciju  $\frac{1}{3}x^3$  vai vispār funkciju  $\frac{1}{3}x^3 + C$  sauc par funkcijas  $x^2$  *primitīvo* funkciju līdzīgi tam, kā  $x^2$  sauc par funkcijas  $\frac{1}{3}x^3$  *atvasināto* funkciju.

Vispār, ja ir dota atvasinātā funkcija

$$y' = f(x), \quad (13.1)$$

tad par tās *primitīvo funkciju* sauc funkciju  $y = F(x)$ , kuras atvasinājums  $F'(x) = f(x)$ . Ja ir atrasta viena primitīvā funkcija  $F(x)$ , tad arī

$$y = F(x) + C \quad (13.2)$$

ir funkcijas (13.1) primitīvā funkcija, kur  $C$  ir patvaļīga konstante, jo arī  $[F(x) + C]' = f(x)$ .

Pierādīsim, ka funkcijas  $y' = f(x)$  primitīvās funkcijas vispārīgā izteiksme ir  $y = F(x) + C$ .

**Teorēma.** Funkcijas  $f(x)$  kaut kuras divas primitīvās funkcijas var atšķirties tikai ar konstantu saskaitāmo, t. i., ja

$$F'(x) = f(x) \text{ un } F'_1(x) = f(x), \quad (13.3)$$

tad

$$F_1(x) = F(x) + C. \quad (13.4)$$

Tātad, ja viena primitīvā funkcija ir  $F(x)$ , tad visas pārējās primitīvās funkcijas izsaka  $F(x) + C$ .

**Pierādījums.** Ņemsim funkciju

$$\Phi(x) = F_1(x) - F(x).$$

Tās atvasinājums saskaņā ar formulām (13.3) ir

$$\Phi'(x) = F'_1(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Tātad funkcijas  $\Phi(x)$  atvasinājums identiski vienāds ar nulli. Tāpēc funkcija  $\Phi(x)$  vienāda ar konstanti (89. § secinājums):

$$\Phi(x) = F_1(x) - F(x) = C,$$

no kurienes dabūjam vienādību (13.4), ko vajadzēja pierādīt.

**Piemērs.** Funkcijas  $x^2$  vienīgās primitīvās funkcijas izsaka izteiksme  $\frac{1}{3}x^3 + C$ .

**Secinājums.** Ja divām funkcijām  $F(x)$  un  $F_1(x)$  ir viēnādi atvasinājumi, t. i.,  $F'(x) = F'_1(x)$ , tad pašas funkcijas var savā starpā atšķirties tikai ar konstantu saskaitāmo:  $F_1(x) = F(x) + C$ .

**106. §. Nenoteiktais integrālis.** Funkcijas  $y' = f(x)$  primitīvās funkcijas vispārīgo izteiksmi apzīmē šādi:

$$\int f(x) dx, \quad (13.5)$$

un to sauc par funkcijas  $f(x)$  nenoteikto integrāli. Tas ir

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad (13.6)$$

ja

$$[F(x) + C]' = f(x). \quad (13.7)$$

Tā, piemēram,

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C, \quad (13.8)$$



jo

$$\left(\frac{1}{3}x^3 + C\right)' = x^2. \quad (13.9)$$

Integrāli (13.5) funkciju  $f(x)$  sauc par *zemintegrāļa funkciju*, bet izteiksmi  $f(x)dx$  — par *zemintegrāļa izteiksmi*. Darbību, kuras rezultātā no  $f(x)$  dabūjam  $F(x) + C$ , sauc par *funkcijas integrēšanu*. Ievērojot vienādības (13.6) un (13.7), redzām, ka integrēšana ir funkcijas atvasināšanai apgriezta darbība, pie tam atvasināšanas rezultātā atgūstam zemintegrāļa funkciju  $f(x)$ . Tā, piemēram, integrējot  $x^2$ , dabūjam  $\frac{1}{3}x^3 + C$ , bet, pēdējo atvasinot, atgūstam  $x^2$ . Patvaļīgo konstanti šeit sauc par *integrācijas konstanti*, bet  $x$  — par *integrācijas mainīgo lielumu*.

Matemātiskās analīzes nozari, kura apskata funkciju integrēšanu, sauc par integrālrēķiniem.

Funkcijas integrēšana līdzšinējā nozīmē ir bezgalīgi daudznozīmīga darbība, jo rezultātā sastopamā patvaļīgā konstante  $C$  var pieņemt bezgalīgi daudz dažādu vērtību.

Piezīme. Dažreiz apzīmējumu  $\int f(x)dx$  saprot šaurākā nozīmē kā kādu vienu primitīvo funkciju:

$$\int f(x)dx = F(x), \quad (13.10)$$

$$F'(x) = f(x). \quad (13.11)$$

Tā, piemēram,

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3, \quad (13.12)$$

$$\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2. \quad (13.13)$$

Izšķir trīs dažādus primitīvās funkcijas atrašanas gadījumus: 1) jāatrod primitīvās funkcijas vispārīgā izteiksme; 2) jāatrod kaut kāda viena primitīvā funkcija; 3) jāatrod tā primitīvā funkcija, kura apmierina attiecīgu papildu prasību.

Piemērs 3. gadījumam. Funkcijai  $x^2$  atrast to primitīvo funkciju, kura vienāda ar 2, ja  $x=0$ , t. i., atrast tādu  $y$ , lai būtu apmierināti nosacījumi

$$\int x^2 dx = y, \quad y|_{x=0} = 2.$$

Vispirms atrodam  $y$  vispārīgo izteiksmi  $y = \frac{1}{3}x^3 + C$ , kur jāizvēlas piemērota  $C$  vērtība, ievietojot  $x=0$  un  $y=2$ :  $2=0+C$ , no kurienes  $C=2$ . Meklētā primitīvā funkcija ir  $y = \frac{1}{3}x^3 + 2$ .

Funkcijas integrēšana kā diferenciāļa atrašanās apgrieztā darbība. Varam arī teikt, ka vienādība  $\int f(x)dx = F(x) + C$  pastāv, ja primitīvās funkcijas diferenciālis vienāds ar zemintegrāļa izteiksmi:

$$d[F(x) + C] = [F(x) + C]' dx = f(x) dx. \quad (13.14)$$

Tā, piemēram, vienādība (13.8) pastāv, jo

$$d\left(\frac{1}{3}x^3 + C\right) = \left(\frac{1}{3}x^3 + C\right)' dx = x^2 dx. \quad (13.15)$$

Ievērojot vienādības (13.6) un (13.14), funkcijas integrēšana ir arī diferenciāļa atrašanās apgrieztā darbība, pie tam diferenciāļa atrašanas rezultātā atgūstam zemintegrāļa izteiksmi  $f(x)dx$ .

**107. §. Primitīvās funkcijas mehāniskā nozīme.** Diferenciālrēķinos apskatījām punkta kustības vienādojumu  $s = F(t)$  un bija jāatrod ātrums  $v$  kā laika  $t$  funkcija. To dabūjam, atvasinot doto funkciju:  $v = F'(t)$  (68. §).

Turpmāk apskatīsim apgrieztu uzdevumu, kad dots punkta kustības ātrums  $v$  kā laika  $t$  funkcija

$$v = f(t) \quad (13.16)$$

un jāatrod kustības vienādojums  $s = F(t)$ . Tā kā  $v = \dot{s} = f(t)$ , tad jāatrod dotās funkcijas  $f(t)$  primitīvā funkcija:

$$s = \int f(t) dt = \int v dt. \quad (13.17)$$

Seit ar integrāli jāsaprot primitīvās funkcijas vispārīgā izteiksme, ja nav papildu nosacījuma par kustību, t. i., ja runa ir par kustību vispār. Ja turpretim dots papildu nosacījums, piemēram, dota  $s$  vērtība sākuma mirklī  $t=0$ :

$$s|_{t=0} = s_0, \quad (13.18)$$

tad runa ir par konkrētu kustību, un ar integrāli tad jāsaprot tā primitīvā funkcija, kura apmierina šo papildu nosacījumu. Vienādību (13.18) sauc par sākuma nosacījumu.

Piemērs. Apskatīsim brīvas krišanas ātrumu, ja ķermenis krīt bez sākuma ātruma:

$$v = gt, \quad (13.19)$$

kur  $g$  ir konstante. Integrējot dabūjam, ka

$$s = \int gtdt = \frac{gt^2}{2} + C, \quad (13.20)$$

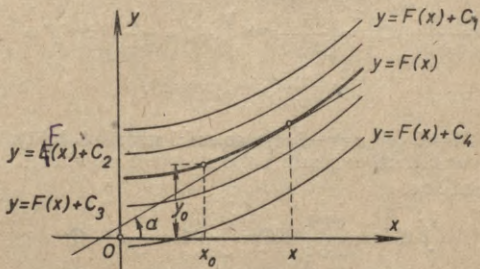
jo  $\left(\frac{gt^2}{2} + C\right)' = gt$ . Šeit  $C$  ir patvaļīga konstante, ja nav papildu nosacījuma. Ja turpretim dots sākuma nosacījums (13.18), tad minētai konstantei jāatrod tāda vērtība, lai būtu apmierināts šis nosacījums. No vienādībām (13.18) un (13.20) secinām, ka  $s_0 = 0 + C$ , no kurienes  $C = s_0$  un tāpat

$$s = \frac{gt^2}{2} + s_0.$$

Tas ir kustības vienādojums brīvas krišanas gadījumā, ja kustība sākas punktā  $s = s_0$  bez sākuma ātruma. Ja dots, ka  $s_0 = 0$ , t. i., ka kustība sākas koordinātu sākuma punktā, tad

$$s = \frac{gt^2}{2}.$$

108. §. Primitīvās funkcijas ģeometriskā nozīme. Pieņemsim, ka dota funkcija  $y' = f(x)$ . Ar  $y = F(x)$  apzīmēsim kaut kuru tās primitīvo funkciju (119. zīm.). Tā kā punktā ar abscisu  $x$  primitīvās funkcijas  $y = F(x)$  grafikai novilktais pieskares virziens



119. zīm.

leņķa  $\alpha$  tangenss ir vienāds ar primitīvās funkcijas atvasinājuma  $y' = F'(x)$  vērtību  $Ox$  ass punktā  $x$  (69. §):  $\operatorname{tg} \alpha = F'(x)$ , tad varam rakstīt, ka

$$\operatorname{tg} \alpha = f(x). \quad (13.21)$$

Atrast primitīvo funkciju  $F(x)$  ģeometriski nozīmē atrast tādu funkciju  $y = F(x)$ , kuras grafikai punktā  $x$  novilktais pieskares virziens leņķa tangenss ir vienāds ar dotās funkcijas  $f(x)$  vērtību  $Ox$  ass punktā  $x$ .

Ja viena šāda primitīvā funkcija  $F(x)$  ir atrasta, tad citas primitīvās funkcijas dabū, pārbīdot funkcijas  $y = F(x)$  grafiku



paralēli  $Oy$  asij uz augšu vai uz leju. Šādai grafikas pārbīdei atbilst patvaļīgas konstantes  $C$  pieskaitīšana funkcijai  $F(x)$ .

Apmierināt papildu nosacījumu

$$y|_{x=x_0}=y_0 \quad (13.22)$$

nozīmē atrast to primitīvo funkciju, kuras grafika iet caur doto punktu  $(x_0; y_0)$  (119. zīm.). Arī papildu nosacījumu (13.22) sauc par *sākuma nosacījumu*.

**109. §. Dažas integrēšanas pamatformulas.** Apskatīsim formulas vienkāršāko funkciju integrēšanai. Tās atbilst elementāro pamatfunkciju atvasināšanas formulām.

Konstantes integrēšanas formula

$$\int adx = ax + C, \quad (13.23)$$

jo  $(ax + C)' = a$ , kur  $a$  ir konstante.

Pakāpes funkcijas integrēšanas formula:

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1), \text{ jo} \quad (13.24)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \right)' &= \left( \frac{1}{a+1} x^{a+1} \right)' + 0 = \frac{1}{a+1} (x^{a+1})' = \\ &= \frac{1}{a+1} (a+1) x^a = x^a, \end{aligned}$$

ja tikai  $a+1 \neq 0$  jeb  $a \neq -1$  (jo ar nulli nedrīkst dalīt). Formulā (13.24)  $a$  var būt arī daļskaitlis (pozitīvs vai negatīvs).

1. piemērs.

$$\int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = \frac{x^3}{3} + C = \frac{1}{3} x^3 + C;$$

2. piemērs.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C.$$

Ja  $a = -1$ , tad dabūjam formulu

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x + C,$$

jo  $(\ln x + C)' = \frac{1}{x}$ . Seit primitīvā funkcija atrasta tikai gadījumam, kad  $x > 0$ , jo tikai tad eksistē  $\ln x$ . Ja turpretim  $x < 0$ , tad

$-x=|x|$ , un apskatām funkciju  $\ln(-x)=\ln|x|$ . Šīs funkcijas atvasinājums ir

$$[\ln(-x)]' = \frac{1}{-x} (-x)' = \frac{1}{x}. \text{ Tātad šoreiz}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C = \ln|x| + C.$$

Apvienojot abus gadījumus, kad  $x > 0$  un  $x < 0$ , dabūjam

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C. \quad (13.25)$$

Eksponentfunkcijas integrēšanas formula:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a \neq 1), \quad (13.26)$$

jo  $\left(\frac{a^x}{\ln a} + C\right)' = \frac{1}{\ln a} (a^x)' = \frac{1}{\ln a} a^x \ln a = a^x$  (ja  $\ln a \neq 0$  jeb  $a \neq 1$ ).

3. piemērs.

$$\int 10^x dx = \frac{10^x}{\ln 10} + C = 0,4343 \cdot 10^x + C.$$

Ja  $a=e$ , tad  $\ln a = \ln e = 1$ , un no formulas (13.26) dabūjam

$$\int e^x dx = e^x + C. \quad (13.27)$$

Trigonometrisko funkciju integrēšana:

$$\int \sin x dx = -\cos x + C; \quad (13.28)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C; \quad (13.29)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C; \quad (13.30)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C. \quad (13.31)$$

Pēdējo formulu pamatojums līdzīgs iepriekšējo formulu pamatojumam.

\* Funkcijas, kuras integrējamas ar ciklotrisku funkciju palīdzību:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C; \quad (13.32)$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C. \quad (13.33)$$

**110. §. Nenoteiktā integrāļa īpašības.** 1. Diferencēšana un integrēšana kā savstarpēji pretējas darbības.

1) No vienādībām (13.6) un (13.7) seko, ka

$$\left[ \int f(x) dx \right]' = f(x), \quad (13.34)$$

t. i., integrēšana un diferencēšana kā pretējas darbības savstarpēji iznīcinās, pie tam rezultātā dabū zemintegrāļa funkciju. Tā, piemēram,

$$\left( \int x^2 dx \right)' = x^2.$$

2) Integrēšanas un diferencēšanas darbības var izpildīt arī apgrieztā secībā. Tad no formulām (13.6) un (13.11) seko, ka

$$\int F'(x) dx = F(x) + C, \quad (13.35)$$

t. i., arī diferencēšana un integrēšana kā pretējas darbības savstarpēji iznīcinās, tikai rezultātam jāpieskaita patvaļīga konstante  $C$ . Tā, piemēram,

$$\int \left( \frac{1}{3} x^3 \right)' dx = \frac{1}{3} x^3 + C.$$

3) No vienādībām (13.6) un (13.14) seko, ka

$$d \int f(x) dx = f(x) dx, \quad (13.36)$$

t. i., arī integrēšana un diferenciāļa atrašana kā pretējas darbības savstarpēji iznīcinās jeb diferenciālis no nenoteiktā integrāļa vienāds ar zemintegrāļa izteiksmi. Tā, piemēram,

$$d \int x^2 dx = x^2 dx.$$

2. Integrālis no funkcijas, kas reizināta ar konstanti, un no funkciju summas.

Apskatāmajām īpašībām diferenciālreķinos atbilst atvasināšanas kārtulas funkcijas reizinājumam ar konstanti un funkciju summai (72. §).

$$1) \int a f(x) dx = a \int f(x) dx + C, \quad (13.37)$$

t. i., konstantu reizinātāju var ņemt ārpus integrāļa zīmes.

Lai to pierādītu, atvasinām vienādības (13.37) abās pusēs esošās izteiksmes:

$$\begin{aligned} \left[ \int a f(x) dx \right]' &= a f(x), \\ \left[ a \int f(x) dx \right]' &= a \left[ \int f(x) dx \right]' = a f(x). \end{aligned}$$



Tā kā abi atvasinājumi ir vienādi, tad saskaņā ar 105. § secinājumu abu pēdējo vienādību kreisajās pusēs iekavās esošās izteiksmes var savā starpā atšķirties tikai ar konstantu saskaitāmo. Tātad pastāv vienādība (13.37).

$$2) \int [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + C, \quad (13.38)$$

t. i., *funkciju summas integrālis vienāds ar šo funkciju integrāļu summu*. Pierādījums līdzīgs iepriekšējās īpašības pierādījumam.

Pastāv arī vienādības (13.38) paplašinājums kaut kurā galīgā skaitā ņemtu funkciju algebriskai summai, kur saskaitāmie var būt savienoti ar «+» vai «-» zīmi.

**Piezīme.** Integrēšanas konstanti  $C$  vienādībās (13.37) un (13.38) var nerakstīt, jo var uzskatīt, ka šī konstante pievienota vienādības labajā pusē esošam integrālim. Tā, piemēram,

$$\begin{aligned} \int \left( 4x^3 + 1 - \frac{3}{x} \right) dx &= \int 4x^3 dx + \int dx - \int \frac{3}{x} dx = 4 \int x^3 dx + \int dx - \\ &- 3 \int \frac{dx}{x} = 4 \frac{x^4}{4} + x - 3 \ln|x| + C = x^4 + x - 3 \ln|x| + C. \end{aligned}$$

Iegūtā rezultāta pareizību var pārbaudīt, rezultātu atvasinot:

$$(x^4 + x - 3 \ln|x| + C)' = 4x^3 + 1 - \frac{3}{x}.$$

Atvasināšanas rezultātā ir iegūta zemintegrāļa izteiksme. Tātad dotā izteiksme integrēta pareizi.

**111) §. Substitūcijas (aizvietošanas) metode.** Funkcijas izdodas integrēt ar līdzšinējiem paņēmieniem tikai visvienkāršākos gadījumos, kad pēc nenoteiktā integrāļa īpašību pielietošanas var piemērot integrēšanas pamatformulas. Šeit iepazīsimies ar funkciju integrēšanas pirmo speciālo metodi, ar kuru iegūsim arī divas jaunas integrēšanas formulas.

Substitūcijas metodes būtība ir tā, ka integrācijas mainīgo lielumu aizvieto ar jaunu mainīgo lielumu. Diferenciālreķinos tai atbilst saliktu funkciju atvasināšana (73. §).

Substitūcijas metode balstās uz šādu formulu:

$$\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = \int f(t) dt \quad (13.39)$$

kur  $t = \varphi(x)$  ir diferenciējama funkcija, kurai eksistē diferenciālis  $dt = \varphi'(x) dx$ .

**Pierādījums.** Atvasinām pierādāmās vienādības abās pusēs esošās izteiksmes pēc  $x$ , pēc tam labās puses izteiksmi atvasinām kā saliktu funkciju:

$$\begin{aligned} \left[ \int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx \right]' &= f[\varphi(x)] \varphi'(x); \\ \left[ \int f(t) dt \right]'_x &= \left[ \int f(t) dt \right]'_t \cdot t'_x = f(t) \cdot \varphi'(x) = f[\varphi(x)] \varphi'(x). \end{aligned}$$

Tā kā atvasinājumi ir vienādi, tad abas izteiksmes var savā starpā atšķirties tikai ar konstantu saskaitāmo (105. § secinājums). Tātad pastāv vienādība (13.39). Konstanti  $C$  šai formulā var nerakstīt (110. § piezīme).

Dažreiz, pēc šīs metodes ievēdot palīga mainīgo lielumu, dotais integrālis kļūst vienkāršāks. To redzam sekojošos piemēros.

1. piemērs.

$$\int (x-2)^5 dx = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{1}{6} (x-2)^6 + C.$$

$$t = x-2,$$

$$dt = (x-2)' dx = dx.$$

Šajā piemērā  $\varphi(x) = x-2$ ,  $f[\varphi(x)] = (x-2)^5$ ,  $\varphi'(x) = 1$  un  $f(t) = t^5$ . Integrē pēc palīga mainīgā lieluma  $t$  un rezultātā atgriežas pie izejas mainīgā lieluma  $x$ .

2. piemērs.

$$\int \frac{dx}{2x+3} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| + C = \frac{1}{2} \ln|2x+3| + C.$$

$$t = 2x+3,$$

$$dt = (2x+3)' dx = 2dx,$$

$$dx = \frac{1}{2} dt.$$

3. piemērs.

$$\begin{aligned} \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} &= -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{2} \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \\ &= -\sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

$$t = 1-x^2,$$

$$dt = (1-x^2)' dx = -2xdx,$$

$$xdx = -\frac{1}{2} dt.$$

4. piemērs.

$$\int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \int e^t dt = -\frac{1}{2} e^t + C = -\frac{1}{2} e^{-2x} + C.$$

$$t = -2x,$$

$$dt = (-2x)' dx = -2dx,$$

$$dx = -\frac{1}{2} dt.$$

Integrējot ar substitūcijas metodi, integrācijas palīga mainīgajam lielumam var arī nelietot īpašu apzīmējumu. Šādā ceļā vēlreiz atrisinām 4. piemēru:

$$\int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \int e^{-2x} (-2) dx = -\frac{1}{2} \int e^{-2x} d(-2x) = -\frac{1}{2} e^{-2x} + C.$$

Pārbaude:  $d(-2x) = (-2x)' dx = (-2) dx$ . Šajā piemērā palīga mainīgais lielums ir  $-2x$ , ko iepriekš apzīmējām ar  $t$ .

5. piemērs.

$$\begin{aligned} \int \sin(3x-1) dx &= \frac{1}{3} \int \sin t dt = -\frac{1}{3} \cos t + C = \\ &= -\frac{1}{3} \cos(3x-1) + C. \end{aligned}$$

$$t = 3x-1,$$

$$dt = (3x-1)' dx = 3dx,$$

$$dx = \frac{1}{3} dt.$$

Neievēdot palīga mainīgajam lielumam īpašu apzīmējumu:

$$\begin{aligned} \int \sin(3x-1) dx &= \frac{1}{3} \int \sin(3x-1) d(3x-1) = \\ &= -\frac{1}{3} \cos(3x-1) + C. \end{aligned}$$

Pārbaude:  $d(3x-1) = (3x-1)' dx = 3dx$ .

Ieteicams lasītājam atrisināt arī pirmos trīs piemērus, neievēdot palīga mainīgajam lielumam īpašu apzīmējumu.

112. §.\* Funkciju  $y = \frac{1}{x^2+a^2}$ ,  $y = \frac{1}{x^2-a^2}$ ,  $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$  un  $y = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$  integrēšanas formulas.

$$1. \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \int \frac{\frac{d}{dx} \frac{x}{a}}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C.$$

(Pieņemam, ka  $a \neq 0$ .) Šeit integrēts pēc formulas (13.33). Tātad

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0). \quad (13.40)$$



Piemērs.

$$\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C.$$

$$2. \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \frac{dx}{(x+a)(x-a)} = \frac{1}{2a} \int \frac{(x+a) - (x-a)}{(x+a)(x-a)} dx.$$

Seit skaitītājs zem integrāļa zīmes pareizināts ar  $2a$ , un integrālis arī izdalīts ar  $2a$  (pieņemot, ka  $a \neq 0$ ). Pēc tam skaitītājs pārveidots:  $2a = x+a - x+a = (x+a) - (x-a)$ . Tālāk zemintegrāļa izteiksmi sadalām divos locekļos:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2-a^2} &= \frac{1}{2a} \int \left[ \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right] dx = \\ &= \frac{1}{2a} \left[ \int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a} \right] = \frac{1}{2a} \left[ \int \frac{d(x-a)}{x-a} - \int \frac{d(x+a)}{x+a} \right] = \\ &= \frac{1}{2a} [\ln|x-a| - \ln|x+a|] + C = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C. \end{aligned}$$

Rezultātā iegūstam formulu

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad (a \neq 0). \quad (13.41)$$

Piemērs.

$$\int \frac{dx}{x^2-9} = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C.$$

3. Nākamo integrēšanas formulu dabūsim šādas atvasināšanas rezultātā:

$$\begin{aligned} [\ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})]' &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} (x + \sqrt{x^2 \pm a^2})' = \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \left[ 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \right] = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2} + x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}. \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} &= \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C. \end{aligned}$$

Apskatot gadījumu, kad iekavu izteiksme iznāk negatīva, un rīkojoties līdzīgi formulas (13.25) izvedumam, var dabūt šādu formulu:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C. \quad (13.42)$$

Piemērs.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2}} = \ln|x + \sqrt{x^2-2}| + C.$$

$$4. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d\frac{x}{a}}{\sqrt{a^{-2}(a^2-x^2)}} = \int \frac{d\frac{x}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}.$$

(Šeit jābūt  $a \neq 0$ , pie tam vienmēr var izvēlēties  $a > 0$ .) Integrējot pēc formulas (13.32), dabūjam

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C. \quad (13.43)$$

**113. §. Parciālā integrēšana** (integrēšana pa daļām). Diferenciālrēķinos tai atbilst reizinājuma atvasināšana.

Attiecīgu integrēšanas formulu iegūsim no reizinājuma atvasināšanas formulas

$$(uv)' = u'v + uv',$$

kura ir līdzvērtīga vienādībai

$$uv' = (uv)' - u'v.$$

Integrējot šo vienādību un ievērojot, ka

$$\int (uv)' dx = uv + C,$$

dabūjam meklēto formulu

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx,$$

ko sauc par *parciālās integrēšanas formulu*. Integrēšanas konstanti  $C$  vairs nerakstām, jo iedomāsimies, ka tā pievienota vienādības labās puses integrālim.

Isāk parciālās integrēšanas formulu raksta šādi:

$$\underline{\int u dv = uv - \int v du}, \quad (13.44)$$

kur diferenciāļi  $dv = v' dx$ ,  $du = u' dx$ . Integrāļu pārveidošanu ar šīs formulas palīdzību sauc par parciālo integrēšanu.

So formulu lieto galvenokārt tad, ja ar to doto integrāli izdodas aizstāt ar citu vienkāršāku integrāli vai vismaz izdodas aizstāt ar tādu integrāli, ko var pēc tam vienkāršot. Tātad pēc

šīs formulas integrēšanu izpilda it kā «pa daļām», atskaldot locekli  $uv$ .

1. piemērs. Atrast

$$\int \ln x \, dx.$$

Seit jāņem

$$u = \ln x,$$

$$dv = dx,$$

no kurienes

$$du = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx,$$

$$v = \int dx = x.$$

Tad pēc formulas (13.44) dabūjam

$$\int \ln x \, dx = \ln x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \ln x - \int dx = x \cdot \ln x - x + C.$$

Lai integrētu parciāli, dotā zemintegrāļa izteiksme jāsadala divos reizinātajos  $u$  un  $dv$ , pie tam reizinātajam  $dv$  jāsaturs  $dx$ . Jāievēro, ka formulas (13.44) labajā pusē sastopams reizinātāja  $u$  atvasinājums, kamēr funkcijas  $v$  iegūšanai diferenciāļa  $dv$  izteiksme jāintegrē. Tāpēc parasti par  $u$  izvēlas funkciju, kura pēc atvasināšanas būtu iespējami vienkāršāka, kamēr par  $dv$  izvēlas tādu diferenciāļa veida izteiksmi, kura pēc integrēšanas būtu iespējami vienkāršāka.

2. piemērs. Atrast

$$\int x e^x \, dx.$$

Seit reizinātājs  $x$  pēc atvasināšanas vienkāršojas un funkcija  $e^x$  pēc integrēšanas nesarežģijas. Tāpēc pieņemam

$$u = x \text{ un } dv = e^x dx.$$

Turpretim otrāda reizinātāju izvēle nebūtu lietderīga, jo reizinātāja  $e^x$  atvasināšana gan nesarežģī to, toties funkcijas  $x$  integrēšana rada sarežģītāku izteiksmi  $\frac{x^2}{2}$ .

Tātad izvēlamies

$$u = x \text{ un } dv = e^x dx,$$

no kurienes

$$du = x' dx = dx \text{ un}$$

$$v = \int e^x dx = e^x.$$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$$



### 3. piemērs. Atrast

$$\int x^2 \cos 3x dx.$$

Soreiz kā atvasinājums, tā arī integrālis no  $\cos 3x$  dod ar attiecīgu koeficientu to pašu  $\sin 3x$ , t. i.,  $(\cos 3x)' = -3 \sin 3x$ , bet  $\int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \sin 3x$ . Toties reizinātāju  $x^2$  labāk atvasināt nekā integrēt, jo pēc atvasināšanas šī reizinātāja pakāpe samazinās, kamēr pēc integrēšanas — palielinās. Tāpēc jāņem

$$u = x^2, \quad du = 2x dx,$$

$$dv = \cos 3x dx, \quad v = \int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \sin 3x,$$

un dabūjam

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos 3x dx &= x^2 \cdot \frac{1}{3} \sin 3x - \int \frac{1}{3} \sin 3x \cdot 2x dx = \\ &= \frac{1}{3} x^2 \sin 3x - \frac{2}{3} \int x \sin 3x dx. \end{aligned}$$

Kā redzams, ar vienreizēju parciālo integrēšanu ir izdevies  $x$  kāpinātāju samazināt par vienu, tomēr zemintegrāļa izteiksmes struktūra nav mainījusies. Tāpēc iegūto integrāli  $\int x \sin 3x dx$  vēlreiz integrēsim parciāli, ar ko  $x$  kāpinātājs atkal samazināsies par vienu un ar to  $x$  kā reizinātājs pazudīs. Tātad

$$u_1 = x, \quad du_1 = dx,$$

$$dv_1 = \sin 3x dx, \quad v_1 = \int \sin 3x dx = -\frac{1}{3} \cos 3x$$

un

$$\begin{aligned} \int x \sin 3x dx &= x \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cos 3x - \int \left(-\frac{1}{3}\right) \cos 3x dx = \\ &= -\frac{1}{3} x \cos 3x + \frac{1}{9} \sin 3x + C_1. \end{aligned}$$

Beidzot atrodam

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos 3x dx &= \frac{1}{3} x^2 \sin 3x - \frac{2}{3} \left( -\frac{1}{3} x \cos 3x + \frac{1}{9} \sin 3x \right) + C = \\ &= \frac{1}{3} x^2 \sin 3x + \frac{2}{9} x \cos 3x - \frac{2}{27} \sin 3x + C. \end{aligned}$$

### 4. piemērs. Atrast

$$\int e^x \sin x dx.$$

Seit var abējādi izvēlēties  $u$  un  $dv$ . Pēc divreizējas parciālās integrēšanas dabūjam algebrisku vienādojumu, kurā nezināmais lielums ir apskatāmais integrālis:

$$\begin{aligned}\int e^x \sin x dx &= e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = \\ &= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx,\end{aligned}$$

no kurienes

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$$

**114. §.\* Racionālu un iracionālu izteiksmju integrēšana ar papildināšanu līdz pilnam kvadrātam.** Seit apskatīsim tikai trīs speciālu tipu integrāļus:

$$1) \int \frac{mx+n}{x^2+px+q} dx, \quad 2) \int \frac{mx+n}{\sqrt{x^2+px+q}} dx, \quad 3) \int \frac{mx+n}{\sqrt{q+px-x^2}} dx,$$

kur  $m, n, p$  un  $q$  ir reāli skaitļi.

1. Vispirms skaitītājā atbrīvosimies no locekļa ar  $x$ , izmantojot īpašu paņēmieni, kurš derīgs visu minēto tipu integrāļiem. Atrodam saucēja kvadrātiskā trinoma diferenciāli:

$$d(x^2+px+q) = (x^2+px+q)' dx = (2x+p) dx.$$

Skaitītāju pārveidosim tā, lai iegūtu saucēja kvadrātiskā trinoma diferenciāli. Lai dabūtu locekli  $2x$ , skaitītājā ņemam ārpus iekavām konstantu reizinātāju  $\frac{m}{2}$  un iznesam to ārpus integrāļa zīmes:

$$\int \frac{mx+n}{x^2+px+q} dx = \frac{m}{2} \int \frac{2x + \frac{2n}{m}}{x^2+px+q} dx.$$

Pēc tam skaitītājam pieskaitām  $p$  un atņemam  $p$ :

$$\int \frac{mx+n}{x^2+px+q} dx = \frac{m}{2} \int \frac{2x+p + \frac{2n}{m} - p}{x^2+px+q} dx.$$

Tālāk integrāli sadalām divu integrāļu summā:

$$\int \frac{mx+n}{x^2+px+q} dx = \frac{m}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \frac{m}{2} \int \frac{\frac{2n}{m} - p}{x^2+px+q} dx.$$

Labajā pusē pirmajam integrālim pielietojam substitūciju, ievērojot minēto diferenciāļa izteiksmi:

$$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx = \int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} = \ln|x^2+px+q| + C_1.$$

Otrajam integrālim, ņemot konstanto skaititāju ārpus integrāļa zīmes, iegūstam

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q}, \quad (13.45)$$

un to apskatīsim vēlāk.

Līdzīgā veidā rīkojoties otrā un trešā gadījumā, dabūjam integrāļus

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + px + q}} \quad (13.46)$$

un

$$\int \frac{dx}{\sqrt{q + px - x^2}}. \quad (13.47)$$

2. Tālāk atradīsim integrāļus (13.45), (13.46) un (13.47), kvadrātisko trinomu papildinot līdz pilnam kvadrātam. Ja  $x^2$  sastopams ar «+» zīmi [integrālī (13.45) un (13.46)], tad rakstām

$$x^2 + px + q = x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} x + \frac{p^2}{4} + q - \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right).$$

Seit var būt šādi gadījumi:

1)  $q - \frac{p^2}{4} > 0$ . Tad apzīmējam  $q - \frac{p^2}{4} = a^2$  un dabūjam

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2.$$

Tagad varam atrast integrāli (13.45):

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + px + q} &= \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2} = \int \frac{d\left(x + \frac{p}{2}\right)}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2} = \\ &= \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{a} + C_2 = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{2a} + C_2; \end{aligned}$$

2)  $q - \frac{p^2}{4} = 0$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + px + q} &= \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \int \left(x + \frac{p}{2}\right)^{-2} d\left(x + \frac{p}{2}\right) = \\ &= \frac{\left(x + \frac{p}{2}\right)^{-1}}{-1} + C_2 = -\frac{1}{x + \frac{p}{2}} + C_2. \end{aligned}$$



3)  $q - \frac{p^2}{4} < 0$ . Apzīmējam  $q - \frac{p^2}{4} = -a^2$  un dabūjam  $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - a^2$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + px + q} &= \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - a^2} = \\ &= \int \frac{d\left(x + \frac{p}{2}\right)}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x + \frac{p}{2} - a}{x + \frac{p}{2} + a} \right| + C_1 = \\ &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{2x + p - 2a}{2x + p + 2a} \right| + C_2. \end{aligned}$$

Līdzīgi var atrast arī integrāli (13.46). Šoreiz nav jāapskata atsevišķi gadījumi, un mēs dabūjam, ka

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \pm a^2,$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + px + q}} &= \int \frac{d\left(x + \frac{p}{2}\right)}{\sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \pm a^2}} = \\ &= \ln \left| x + \frac{p}{2} + \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \pm a^2} \right| + C_2 = \\ &= \ln \left| x + \frac{p}{2} + \sqrt{x^2 + px + q} \right| + C_2. \end{aligned}$$

Beidzot apskatām integrāli (13.47). Šoreiz papildināsim līdz pilnam kvadrātam šādi:

$$\begin{aligned} q + px - x^2 &= q - (x^2 - px) = q - \left(x^2 - 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4}\right) = \\ &= q + \frac{p^2}{4} - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Šeit vienīgā iespēja ir, ka  $q + \frac{p^2}{4} > 0$ , jo citādi zemsaknes izteiksme ir negatīva un zemintegrāļa funkcija nepieņem reālas vērtības. Apzīmējot  $q + \frac{p^2}{4} = a^2$  (kur izvēlamies  $a > 0$ ), dabūjam  $q + px - x^2 = a^2 - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2$  un

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{q+px-x^2}} &= \int \frac{d\left(x-\frac{p}{2}\right)}{\sqrt{a^2-\left(x-\frac{p}{2}\right)^2}} = \arcsin \frac{x-\frac{p}{2}}{a} + C_2 = \\ &= \arcsin \frac{2x-p}{2a} + C_2.\end{aligned}$$

1. piemērs.

$$\begin{aligned}\int \frac{x-1}{x^2+4x+13} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x-2}{x^2+4x+13} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+4-6}{x^2+4x+13} dx = \\ d(x^2+4x+13) &= (2x+4) dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+4}{x^2+4x+13} dx - 3 \int \frac{dx}{x^2+4x+13} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+4x+13)}{x^2+4x+13} - 3 \int \frac{dx}{(x^2+2)^2+3^2} = \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2+4x+13| - \operatorname{arctg} \frac{x+2}{3} + C.\end{aligned}$$

2. piemērs.

$$\begin{aligned}\int \frac{x dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}} &= \frac{-1}{18} \int \frac{-18x dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}} = \frac{-1}{18} \int \frac{12-18x-12}{\sqrt{12x-9x^2-2}} dx = \\ d(12x-9x^2-2) &= (12-18x) dx \\ &= -\frac{1}{18} \int \frac{12-18x}{\sqrt{12x-9x^2-2}} dx + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}} = \\ 12x-9x^2-2 &= -2 - (9x^2-12x) = \\ &= -2 - [(3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2 - 2^2] = 2 - (3x-2)^2. \\ &= -\frac{1}{18} \int (12x-9x^2-2)^{-\frac{1}{2}} d(12x-9x^2-2) + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{2-(3x-2)^2}} = \\ &= -\frac{1}{18} \frac{(12x-9x^2-2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{2}{9} \int \frac{d(3x-2)}{\sqrt{2-(3x-2)^2}} = \\ &= -\frac{1}{9} \sqrt{12x-9x^2-2} + \frac{2}{9} \arcsin \frac{3x-2}{\sqrt{2}} + C.\end{aligned}$$

115. §.\* Trigonometrisku izteiksmju integrēšana. Apskatīsim tikai dažus speciālus gadījumus.

$$1. \quad \int \sin^p x \cos^q x dx, \quad (13.48)$$

kur  $p$  un  $q$  ir reāli skaitļi, no kuriem vismaz viens ir pozitīvs nepāra skaitlis. Tā, piemēram,  $p=2n+1$ , kur  $n$  ir naturāls skaitlis vai nulle. Tad

$$\begin{aligned}\sin^p x dx &= \sin^{2n+1} x dx = (\sin^2 x)^n \cdot \sin x dx = \\ &= -(1 - \cos^2 x)^n d \cos x,\end{aligned}$$

un integrāli pārveidojam šādi:

$$\int \sin^p x \cos^q x dx = - \int (1 - \cos^2 x)^n \cos^q x d \cos x.$$

Pēc iekavu atvēršanas un integrāļa sadalīšanas integrāļu algebriskā summā dabūjam summu no šāda tipa integrāļiem:

$$\begin{aligned}\int \cos^m x \cos^q x d \cos x &= \int \cos^{m+q} x d \cos x = \\ &= \frac{\cos^{m+q+1} x}{m+q+1} + C.\end{aligned}$$

Līdzīgi var apskatīt arī gadījumu, kad  $q=2n'+1$ , kur  $n'$  ir naturāls skaitlis vai nulle.

Piemērs.

$$\begin{aligned}&\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt{\sin x}} \\ \cos^3 x dx &= \cos^2 x \cos x dx = (1 - \sin^2 x) d \sin x, \\ \int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt{\sin x}} &= \int (1 - \sin^2 x) \sin^{-\frac{1}{2}} x d \sin x = \\ &= \int \sin^{-\frac{1}{2}} x d \sin x - \int \sin^{\frac{3}{2}} x d \sin x = \frac{\sin^{\frac{1}{2}} x}{\frac{1}{2}} - \frac{\sin^{\frac{5}{2}} x}{\frac{5}{2}} + C = \\ &= 2\sqrt{\sin x} - \frac{2}{5} \sin^2 x \sqrt{\sin x} + C.\end{aligned}$$

2. Ja integrāli (13.48) viens no kāpinātājiem  $p$  vai  $q$  ir naturāls skaitlis  $n$ , bet otrs nulle, tad dabūjam

$$\int \sin^n x dx \text{ vai } \int \cos^n x dx. \quad (13.49)$$

Ja šeit  $n$  ir nepāra skaitlis, tad šie integrāļi iekļaujas iepriekšējā gadījumā, un to atrašanās metode jau apskatīta. Ja turpretim  $n$



ir pāra skaitlis  $n=2m$  ( $m$  naturāls), tad integrāļu atrašanai var izmantot trigonometrijas formulas

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \text{un} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}. \quad (13.50)$$

Lietojot šīs formulas, integrāļus (13.49) var pārrakstīt šādi:

$$\int \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^m dx \quad \text{resp.} \quad \int \left( \frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^m dx.$$

Pēc iekavu atvēršanas un integrāļa sadalīšanas integrāļu algebriskā summā atkal rodas integrāļi no kosinusiem nepāra vai pāra pakāpēs, tomēr zemākās pakāpēs nekā integrāļos (13.49). Jaunos integrāļus atkal pārveido pēc līdzšinējiem norādījumiem, vajadzības gadījumos šos pārveidojumus vairākkārt atkārtojot. Šādi rīkojas tikmēr, kamēr visus locekļus izdodas integrēt vai kā pakāpes, vai kā integrāļus no vairākkārtīgu leņķu kosinusiem, vai kā konstantes.

P i e m ē r s.

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x dx &= \int \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx = \\ &= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx + \frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx = \\ &= \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{32} \sin 4x + C = \\ &= \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C. \end{aligned}$$

### 3. Integrāļi

$$\int \operatorname{tg}^{2n+1} x dx \quad \text{un} \quad \int \operatorname{ctg}^{2n+1} x dx, \quad (13.51)$$

kur  $n$  ir vesels skaitlis (pozitīvs vai negatīvs), iekļaujas 1. gadījumā pēc pārveidojuma  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$  resp.  $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ . Tiešām, šie integrāļi tad pārveidojas:

$$\int \sin^{2n+1} x \cos^{-(2n+1)} x dx \quad \text{resp.} \quad \int \cos^{2n+1} x \sin^{-(2n+1)} x dx,$$

kur sinusam vai kosinusam kāpinātājs ir pozitīvs nepāra skaitlis. Tālāk rīkojas tāpat kā 1. gadījumā.

**116. §. Elementāro funkciju integrēšanas iespējas.** Atzīmēsim šādus faktus par nenoteiktajiem integrāļiem.

1. Ar šeit apskatītām metodēm izdodas integrēt tikai dažu atsevišķu veidu elementāras funkcijas, bet ne kaut kuru elementāru funkciju.

2. Izrādās, ka eksistē tādas elementāras funkcijas, kurām integrāļus nav iespējams izteikt (t. i., atrast) ar elementāru funkciju palīdzību, piemēram:

$$\int e^{-x^2} dx, \int \frac{dx}{\ln x}, \int \frac{\sin x}{x} dx. \quad (13.52)$$

3. Ar integrāļu (13.52) un citu tamlīdzīgu integrāļu palīdzību matemātikā definē jaunas «neelementāras» funkcijas, kurām ir liela nozīme arī matemātikas pielietojumos.

### Vingrinājumi.

1. Funkcijām  $x^3$ ,  $\frac{1}{x}$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$  atrast primitīvās funkcijas.
2. Iepriekšējā vingrinājuma rezultātus izteikt ar integrāļiem.
3. Funkcijai  $x^3$  atrast to primitīvo funkciju, kura vienāda ar  $-1$ , kad  $x=2$ .

$$4. \text{ Aprēķināt integrāļus: } \int (-3) dx, \int x^4 dx, \int \frac{dx}{x^2}, \int \sqrt{x} dx, \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}, \\ \int \frac{\sqrt{x} dx}{x^2}, \int 2^x dx.$$

Aprēķināt integrāļus:

5.  $\int \left( (10x^4 - 4)\sqrt{x} + 3 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} \right) dx.$
6.  $\int \left( \sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{2}{x^5} \right) dx.$
7.  $\int \frac{(\sqrt[3]{x} + 3x)^2}{x^2} dx.$
8.  $\int \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 3} dx.$
9.  $\int (2e^x - \sin x + 6) dx.$
10.  $\int (4 \cos x + 3 \cdot 10^x) dx.$
11.  $\int \left( \frac{2}{\cos^2 x} - \frac{1}{2 \sin^2 x} \right) dx.$
12.  $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}.$
13.  $\int \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^2 x} dx.$
14.  $\int \frac{\cos 2x dx}{\cos x + \sin x}.$
15.  $\int \left( \frac{1}{3(1+x^2)} - \frac{1}{\sqrt{4(1-x^2)}} \right) dx.$
16.  $\int (3-x)^4 dx.$
17.  $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-5}}.$
18.  $\int \left( \frac{1}{1+2x} - \frac{2}{1-2x} \right) dx.$
19.  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3-6}}.$
20.  $\int \frac{5x^4 + 2x}{x^5 + x^2 + 1} dx.$
21.  $\int \frac{x dx}{4x^2 - 9}.$

22.  $\int x\sqrt{4x^2+1} dx.$
24.  $\int e^{x^2} x dx.$
26.  $\int (\cos 5x - \sin 4x) dx.$
28.  $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx.$
30.  $\int \frac{e^x dx}{9+e^{2x}}.$
32.  $\int \frac{dx}{2-3x^2}.$
34.  $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2-4x}}.$
36.  $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$
38.  $\int x \ln x dx.$
40.  $\int x \cos x dx.$
42.  $\int (x^2-2x+2)e^x dx.$
44.  $\int \operatorname{arctg} x dx.$
46.  $\int x \operatorname{arctg} x dx.$
48.  $\int \frac{x dx}{x^2-2x-3}.$
50.  $\int \frac{dx}{x^2-6x+10}.$
52.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-2}}.$
54.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x}}.$
56.  $\int \frac{dx}{\sqrt{4+6x-9x^2}}.$
58.  $\int \cos^2 x \sin x dx.$
60.  $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[3]{\cos x}}.$
62.  $\int \sin^2 3x dx.$
64.  $\int \operatorname{tg}^3 2x dx.$
66.  $\int \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sin x} dx.$
23.  $\int 10^{-3x} dx.$
25.  $\int \frac{e^x dx}{e^x+4}.$
27.  $\int \frac{2x+\cos x}{\sqrt{x^2+\sin x}} dx.$
29.  $\int \frac{dx}{9x^2+4}.$
31.  $\int \frac{dx}{4x^2-9}.$
33.  $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}.$
35.  $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}.$
37.  $\int \frac{\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2} dx.$
39.  $\int x^2 e^x dx.$
41.  $\int x^2 \sin 5x dx.$
43.  $\int e^{-3x} \cos 2x dx.$
45.  $\int \arcsin x dx.$
47.  $\int \frac{3x-2}{3x^2-4x+3} dx.$
49.  $\int \frac{2-4x}{2x^2+x-1} dx.$
51.  $\int \frac{4x-2}{4x^2+4x+5} dx.$
53.  $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}.$
55.  $\int \frac{dx}{\sqrt{6-x-x^2}}.$
57.  $\int \frac{1-x}{\sqrt{3x-2x^2}} dx.$
59.  $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x}.$
61.  $\int \sin^5 x dx.$
63.  $\int \cos^4 2x dx.$
65.  $\int \operatorname{ctg}^3 4x dx.$
67.  $\int \frac{dx}{\sin x}.$



## NOTEIKTAIS INTEGRĀLIS

Seit apskatīsim funkciju integrēšanu jaunā uztverē, kas vēsturiski vispirms radās, aprēķinot laukumu figūrām, ko ierobežo likas līnijas, ja tās nav riņķa līnijas. Jau III gs. pirms mūsu ēras Arhimēds nodarbojās ar laukuma aprēķināšanu figūrai, ko ierobežo parabolas loks. Tomēr toreiz šādu uzdevumu atrisināšanai bija gadījuma raksturs.

Tikai XVII gs. Ņūtonam un Leibnicam izdevās noskaidrot ciešo sakaru starp laukuma aprēķināšanu un nevienmērīgas kustības ātruma atrašanu vai pieskares vilkšanu likai līnijai. Līdz ar to arī pierādīja ciešo sakaru starp funkciju integrēšanu ar noteikto integrāli — no vienas puses, un nenoteikto integrāli kā funkciju atvasināšanai apgriezto darbību — no otras puses.

### 117. §. Problēmas, kas noved pie noteiktā integrāļa jēdziena.

1. Līklīnijas trapeces laukums. Par līklīnijas trapeci sauc plakanu figūru, ko ierobežo  $Ox$  ass (trapeces pamats), nepārtrauktas funkcijas

$$y = f(x) \quad (14.1)$$

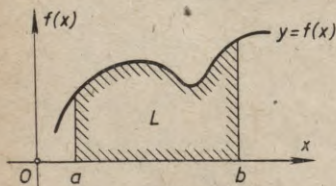
grafika un divas taisnes  $x = a$  un  $x = b$  ( $a < b$ , 120. zīm.). Seit apskatīsim tikai tādu gadījumu, kad intervālā  $[a, b]$   $f(x) \geq 0$ , t. i., kad šīnī intervālā funkcijas grafika ir virs  $Ox$  ass, un definēsim minēto laukumu kā attiecīga mainīgā lieluma robežu.

Sadalīsim intervālu  $[a, b]$  vienāda vai dažāda garuma elementāros intervālos, kuru garumus apzīmēsim ar  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_k, \dots, \Delta x_n$  (121. zīm.). Katrā elementārā intervālā patvaļīgi izvēlēsimies vienu punktu un to abscisas apzīmēsim attiecīgi ar  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ .

Apskatīsim reizinājumus

$$f(\xi_1) \Delta x_1, f(\xi_2) \Delta x_2, \dots, f(\xi_k) \Delta x_k, \dots, f(\xi_n) \Delta x_n. \quad (14.2)$$

Pirmais reizinājums izsaka laukumu taisnstūrim, kura pamats ir  $\Delta x_1$ , bet augstums  $f(\xi_1)$ . Līdzīga nozīme ir arī pārējiem reizinājumiem.



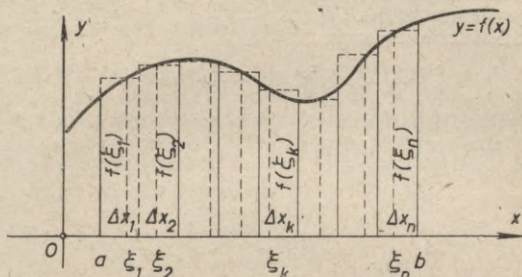
120. zīm.

So reizinājumu summa ir vienāda ar minēto taisnstūru laukumu summu, un saīsināti to apzīmē šādi:

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k. \quad (14.3)$$

Seit burts  $\Sigma$  («sigma») apzīmē summu, bet tam apakšā un

augšā pierakstītie  $k=1$  un  $n$  nozīmē to, ka sekojošā izteiksmē  $f(\xi_k)\Delta x_k$  indeksa  $k$  vietā jāliek pēc kārtas  $1, 2, \dots, n$ , un dabūjam reizinājumus (14.2); pats summas apzīmējums  $\Sigma$  tad norāda, ka minētie reizinājumi ir jāsakaita.



121. zīm.

Visi taisnstūri kopā izveido figūru, kurai aptuveni ir liklīnijas trapeces forma, un atšķirība ir jo mazāka, jo šaurākās joslās sadalām liklīnijas trapeci, respektīvi, jo lielāku ņemam šo joslu skaitu.

Apzīmēsim maksimālo no elementāro intervālu garumiem  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$  ar  $\lambda$ , t. i., apzīmēsim  $\max \Delta x_k = \lambda$ . Liksīm  $\lambda \rightarrow 0$  (no tā seko arī, ka  $n \rightarrow \infty$ ) un apskatīsim summas (14.3) robežu. Ja minētā summas robeža eksistē, tad šo robežu sauc par liklīnijas trapeces laukumu  $L$ :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = L. \quad (14.4)$$

Šī vienādība minēto laukumu izsaka ar īpaša veida summas robežas palīdzību.

2. Noietā ceļa aprēķināšana pēc dotā kustības ātruma. Tas ir viegli aprēķināms, ja kustība ir vienmērīga ( $v = \text{const.}$ ). Tad  $s = vt$ , kur  $s$  ir laikā  $t$  noietais ceļš. Grūtāk ir aprēķināt  $s$ , ja kustības ātrums  $v$  ir mainīgs. Apskatīsim punkta kustību uz taisnes un pieņemsim, ka dots ātrums  $v$  kā laika  $t$  funkcija:

$$v = f(t). \quad (14.5)$$

Aprēķināsim noieto ceļu  $s$ , laika sprīdī no  $t=a$  līdz  $t=b$  ( $a < b$ ). Minēto laika sprīdī, t. i., intervālu  $[a, b]$  sadalīsim elementāros laika sprīžos  $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n$  un pieņemsim, ka šie elementārie laika sprīži ir tik īsi, lai katrā no tiem ātrumu varētu bez

manāmas kļūdas uzskatīt par nemainīgu. Katrā elementārajā laika sprīdī izvēlēsimies vienu momentu, un tos apzīmēsim attiecīgi ar  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ . Ātrumu vērtības šajos momentos  $f(\tau_1), f(\tau_2), \dots, f(\tau_n)$  uzskatīsim par aptuvenām ātrumu vērtībām attiecīgajos elementārajos laika sprīžos.

Apškatīsim reizinājumus

$$f(\tau_1)\Delta t_1, f(\tau_2)\Delta t_2, \dots, f(\tau_n)\Delta t_n. \quad (14.6)$$

Pirmais reizinājums aptuveni izsaka noieto ceļu laika sprīdī  $\Delta t_1$ , otrais — laika sprīdī  $\Delta t_2$  utt.

Šo reizinājumu summa

$$\sum_{k=1}^n f(\tau_k)\Delta t_k \quad (14.7)$$

aptuveni izsaka noieto ceļu  $s_1$  apskatāmajā laika intervālā  $[a, b]$ . Tuvinājums ir jo precīzāks, jo īsākos elementāros intervālos sadalīsim laika intervālu  $[a, b]$ .

Apzīmēsim  $\max \Delta t_k = \lambda$  un liksim  $\lambda \rightarrow 0$ . Pēc šīs robežpārejas summas (14.7) robeža-precīzi vienāda ar noieto ceļu  $s_1$  laika intervālā  $[a, b]$ :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\tau_k)\Delta t_k = s_1. \quad (14.8)$$

Šī vienādība noieto ceļu  $s_1$  izsaka ar īpaša veida summas robežas palīdzību.

**18. §. Noteiktā integrāļa definīcija.** Apskatītajos piemēros formulas (14.4) un (14.8) atšķiras vienīgi ar dažādiem argumentiem. Šajos piemēros izpildītas šādas darbības.

1. Argumenta  $x$  respektīvi  $t$  maiņas intervāls sadalīts  $n$  elementāros intervālos  $\Delta x_k$  respektīvi  $\Delta t_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ).

2. Katrā elementārajā intervālā patvaļīgi izvēlēts viens punkts ar abscisu  $\xi_k$  respektīvi  $\tau_k$ , un šīnī punktā ņemta funkcijas vērtība  $f(\xi_k)$  respektīvi  $f(\tau_k)$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ).

3. Minētās funkcijas vērtības reizinātas ar atbilstošo intervālu garumiem:  $f(\xi_k)\Delta x_k$  respektīvi  $f(\tau_k)\Delta t_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ).

4. Ņemta reizinājumu summa

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k \text{ resp. } \sum_{k=1}^n f(\tau_k)\Delta t_k.$$

5. Atrasta šīs summas robeža (14.4) respektīvi (14.8), kad  $\max \Delta x_k \rightarrow 0$  respektīvi  $\max \Delta t_k \rightarrow 0$ .

Arī daudzos citos piemēros ģeometrijā, mehānikā, fizikā, ķīmijā u. c. nepieciešams noteikt līdzīgās summas robežas.



Turpmāk summas robežu apskatīsim vispārīgā veidā.

Vispirms atzīmēsim, ka summa (14.3) vispār ir atkarīga kā no intervāla  $[a, b]$  sadalījuma veida elementārajos intervālos, tā arī no punktu  $\xi_k$  izvēles. Toties izrādās, ka summas robeža (14.4) parasti nav atkarīga no minētajiem apstākļiem.

Ievedīsim summas robežai (14.4) īpašu nosaukumu un apzīmējumu.

**Definīcija.** Ja summas robeža (14.4) eksistē, pie tam tā nav atkarīga ne no intervāla  $[a, b]$  sadalījuma veida elementārajos intervālos, ne arī no punktu  $\xi_k$  izvēles attiecīgos elementārajos intervālos, tad šo summas robežu sauc par funkcijas  $f(x)$  noteikto integrāli robežās no  $a$  līdz  $b$ .

Summas robežu (14.4) apzīmē šādi:

$$\int_a^b f(x) dx, \quad (14.9)$$

t. i.,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx, \quad (14.10)$$

kur  $\lambda = \max \Delta x_k$ .

Noteiktais integrālis tāpat ir skaitlis, kas vienāds ar summas robežu vienādībā (14.10). Seit  $a$  un  $b$  sauc par *integrācijas robežām*, intervālu  $[a, b]$  — par *integrācijas intervālu*, bet  $x$  — par *integrācijas mainīgo lielumu*.

Integrāļa apzīmējums radies no burta  $S$ , ko agrāk lietoja summas apzīmēšanai. Vārds «integrālis» ir cēlies no latīņu vārda «integer», kas nozīmē «vesels», jo ar noteikto integrāli ir domāta veselā (piemēram, liklīnijas trapeces laukuma) salikšana no tā sastāvdaļām (minētajā piemērā — no joslu laukumiem).

Var likties savādi, kāpēc tā pati integrāļa zīme tiek lietota kā nenoteiktā, tā arī noteiktā integrāļa apzīmēšanai, kuri pēc būtības izteic divas pavisam dažādas darbības. Tālāk (120. §) redzēsim, ka starp šīm darbībām pastāv ciešs sakars.

Bez pierādījuma apskatīsim šādu teorēmu.

**Noteiktā integrāļa eksistences teorēma** (bez pierādījuma). Ja funkcija  $f(x)$  ir nepārtraukta slēgtā intervālā  $[a, b]$ , tad summas robeža (14.10) eksistē, pie tam šī robeža nav atkarīga ne no minētā intervāla sadalījuma veida elementārajos intervālos, ne arī no punktu  $\xi_k$  izvēles attiecīgajos elementārajos intervālos.

**1. piezīme.** Ja šīs teorēmas nosacījumi ir apmierināti, tad summas robežas (14.10) atrašanai var kaut kādā speciālā veidā izvēlēties: a) integrācijas intervāla sadalījumu elementārajos intervālos (piemēram,  $n$  vienāda garuma intervālos); b) punktus

$\xi_k$  attiecīgajos elementārajos intervālos (piemēram, tos var ņemt elementāro intervālu kreisajos vai labajos galos).

Turpmāk apskatīsim tikai tādas funkcijas, kas ir *nepārtrauktas slēgtā integrācijas intervālā* un kurām tātad pastāv noteikto integrāļu eksistences teorēma.

Tagad 117. § apskatītos jēdzienus izteiksim ar noteiktajiem integrāļiem.

1. Par liklinijas trapeces laukumu  $L$  sauc integrāli  $\int_a^b f(x) dx$  jeb

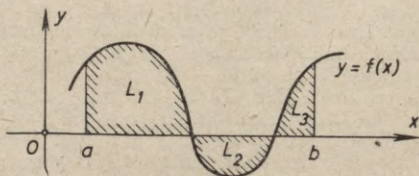
$$L = \int_a^b y dx \quad (a < b). \quad (14.11)$$

Vienādība (14.11) izsaka *noteiktā integrāļa ģeometrisko nozīmi*.

2. piezīme. Vienādība (14.11) iegūta ar noteikumu, ka  $f(x) \geq 0$  intervālā  $[a, b]$ . Noskaidrosim, ko šī vienādība nozīmē, ja funkcija  $f(x)$  intervālā  $[a, b]$  var pieņemt kā pozitīvas, tā arī negatīvas vērtības (122. zīm.). Tad negatīvām  $f(x)$  vērtībām atbilst negatīvi taisnstūru laukumi  $f(\xi_k) \Delta x_k$ , kuri pēc summēšanas un robežpārejas dod laukumu ar mīnusa zīmi. Ar «+» zīmi ir laukumi  $L_1$  un  $L_3$ , bet ar «-» zīmi ir laukums  $L_2$  (122. zīm.). Tā kā vienādībā (14.11)  $L$  vienāds šādu laukumu algebriskai summai, tad

$$L = L_1 - L_2 + L_3,$$

kur  $L_1 > 0$ ,  $L_2 > 0$  un  $L_3 > 0$ .



122. zīm.

2. *Noietais ceļš*  $s_1$  laika sprīdī no  $t=a$  līdz  $t=b$  ir  $\int_a^b f(t) dt$  jeb

$$s_1 = \int_a^b v dt. \quad (14.12)$$

Šī vienādība izsaka *vienu noteiktā integrāļa mehānisko nozīmi*.

Piemērs. Aprēķināt  $\int_a^b dx$ .

Seit zemintegrāļa funkcija pie visām  $x$  vērtībām vienāda ar vienu, tāpēc

$$\int_a^b dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} [\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n] = \lim_{\lambda \rightarrow 0} (b-a) = b-a.$$

Geometriski šis integrālis izsaka laukumu taisnstūrim, kam pamata garums ir  $b-a$ , bet augstums vienāds ar vienu. Rakstot  $x$  vietā  $t$  un uzskatot to par laiku, šis integrālis izsaka noieto ceļu laika sprīdī no  $t=a$  līdz  $t=b$ , ja kustības ātrums  $v=1$ .

**19 §. Noteiktā integrāļa pamatīpašības.** 1. Definējot noteikto integrāli ar vienādību (14.10), līdz šim tika pieņemts, ka  $a < b$ . Ar šo pašu vienādību definēsim noteikto integrāli arī gadījumā, ja  $a > b$ . Sai gadījumā  $\Delta x_k < 0$  kā negatīvs nogriežņa lielums. Apmainot integrācijas robežas, t. i., turpmāk ņemot  $a$  par augšējo robežu un  $b$  par apakšējo robežu, arī  $\Delta x_k$  maina zīmi uz pretējo un tātad kļūst  $> 0$ . Līdz ar to summas robeža (14.10) un arī noteiktais integrālis maina zīmi uz pretējo. Tātad

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx, \quad (14.13)$$

t. i., apmainot integrācijas robežas, noteiktā integrāļa zīme mainās uz pretējo.

$$2. \quad \int_a^a f(x) dx = 0, \quad (14.14)$$

t. i., noteiktais integrālis vienāds ar nulli, ja tam abas integrācijas robežas ir vienādas. Tiešām, šinī gadījumā summas robežas izteiksmē (14.10) nav neviena saskaitāmā, un tāpēc šī robežas izteiksme un arī attiecīgais integrālis (14.14) vienāds ar nulli.

3. Noteiktā integrāļa vērtība nav atkarīga no integrācijas maiņīgā lieluma apzīmējuma, t. i., piemēram,

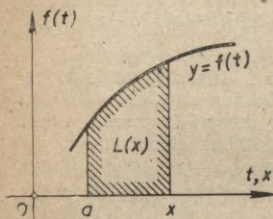
$$\int_a^{b'} f(x) dx = \int_a^b f(t) dt. \quad (14.15)$$

Tiešām, arī atbilstošajā summas robežas izteiksmē saskaitāmo skaitliskās vērtības nav atkarīgas no zemintegrāļa funkcijas argumenta un tā pieaugumu apzīmējumiem, bet atkarīgas tikai no šīs funkcijas grafikas ordinātu un argumenta pieaugumu lielumiem.



Integrācijas mainīgajam lielumam  $x$  vietā lietot citu apzīmējumu nepieciešams, piemēram, tāpēc, ka sastopami integrāļi ar mainīgu augšējo robežu  $x$ :

$$\int_a^x f(t) dt. \quad (14.16)$$



123. zīm.

Ģeometriski šis integrālis izsaka laukumu  $L(x)$  tādai *mainīgai* līklīnijas trapecei, ko ierobežo  $Ox$  ass, funkcijas  $y=f(x)$  grafika un divas  $Oy$  asiņ paralēlas taisnes, kuras krusto  $Ox$  asi punktos  $a$  un  $x$  (123. zīm.).

$$4. \quad \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx. \quad (14.17)$$

Saskaņā ar šo vienādību *saskaita integrāļus ar vienādu zemintegrāļa funkciju*. Lai to pierādītu, integrāļus vienādības kreisajā pusē aizstāj ar atbilstošajām summu robežām, kuras pēc apvienojuma dod summas robežu tās pašas vienādības integrālim labajā pusē. (Sk. arī 118. § 2. piezīmi.)

$$5. \quad \int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx, \quad (14.18)$$

t. i., *konstantu reizinātāju var ņemt ārpus noteiktā integrāļa zīmes*. Pierādījums tieši izriet no noteiktā integrāļa definīcijas:

$$\int_a^b cf(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n cf(\xi_k) \Delta x_k = c \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = c \int_a^b f(x) dx.$$

$$6. \quad \int_a^b [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx, \quad (14.19)$$

t. i., *funkciju summas noteiktais integrālis vienāds ar šo funkciju noteikto integrāļu summu*, pie tam visi integrāļi jāņem ar vienādām integrācijas robežām. Pierādījums līdzīgs iepriekšējās īpašības pierādījumam.

Pastāv arī vienādības (14.19) paplašinājums kaut kurā galīgā skaitā ņemtu funkciju algebriskai summai.

7. Kā zināms, noteiktais integrālis (14.19) vienāds ar 124. zīm. norādītās līklīnijas trapeces laukumu (ja  $a < b$ ). Apskatīsim taisnstūri, kam pamats ir kopīgs ar šo līklīnijas trapeci un kam pamata malas garums tād ir  $b-a$ , bet augstums  $f(c)$ .

Kā redzams 124. zīm., eksistē vismaz viens tāds punkts  $x=c^*$  intervāla  $[a, b]$  iekšienē, lai taisnstūris ar augstumu  $f(c)$  būtu *vienliels* ar liklinijas trapeci. To izsakot ar formulu, dabūjam, ka jāpastāv šādi vienādībai:

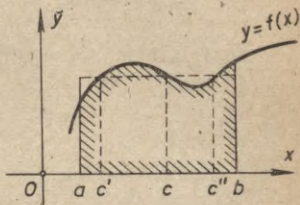
$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b-a). \quad (14.20)$$

Šīs formulas būtību izsaka teorēma:

Vidējās vērtības teorēma noteiktajam integrālim. Intervāla  $[a, b]$  iekšienē eksistē tāds skaitlis  $c$ , ka  $f(c)$ , reizināts ar integrācijas intervāla garumu  $b-a$ , ir vienāds ar funkcijas  $f(x)$  noteikto integrāli robežās no  $a$  līdz  $b$ . Seit precīza  $c$  vērtība nav zināma; ir tikai zināms, ka  $c$  atrodas starp  $a$  un  $b$  \*\*.

Formulā (14.20) vērtību  $f(c)$  sauc par funkcijas  $f(x)$  *vidējo vērtību intervālā*  $[a, b]$ .

Vienādību (14.20) lieto noteikto integrāļu aptuvenai novērtēšanai, lai apmēram spriestu par šo integrāļu vērtību, piemēram, lai izvairītos no rupjām kļūdām, aprēķinot integrāļus. Saskaņā ar šo vienādību integrāļa vērtību parasti noapaļo uz augšu (attiecīgi uz leju), ņemot  $f(c)$  vietā, kurš nav zināms, funkcijas  $f(x)$  vislielāko (respektīvi vismazāko) vērtību integrācijas intervālā vai citādi noapaļojot  $f(c)$  vērtību.



124. zīm.

**Piemērs.** Aptuveni novērtēt integrāli  $\int_0^1 \frac{dx}{2x+3}$ .

Saskaņā ar vidējās vērtības teorēmu dabūjam

$$\int_0^1 \frac{dx}{2x+3} = \frac{1}{2c+3} \cdot (1-0) = \frac{1}{2c+3},$$

kur  $0 < c < 1$ . Integrāļa vērtību noapaļojam uz augšu, ņemot  $\frac{1}{2c+3}$  vietā zemintegrāļa funkcijas  $\frac{1}{2x+3}$  vislielāko vērtību intervālā  $[0, 1]$ . Pēdējo savukārt dabūjam, ņemot saucēja  $2x+3$  vismazāko vērtību tanī pašā intervālā, t. i., liekot saucējā  $x=0$ . Tātad

$$\frac{1}{2c+3} < \frac{1}{2 \cdot 0 + 3} = \frac{1}{3}.$$

\* Punkta  $x=c$  vietā var ņemt arī  $x=c'$  vai  $x=c''$ .

\*\* Sniegtais formulas (14.20) pamatojums balstās tikai uz ģeometrisko iztulkojumu, un tāpēc tas nav formulas pierādījums. Formulas (14.20) pastāvēšanai nav jāprasa  $a < b$ .





Ievietojot pārveidoto summas-izteiksmi sakarības (41.21) labajā pusē, beidzot iegūstam

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} [F(b) - F(a)] = F(b) - F(a).$$

Ņūtona — Leibnica formula:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (14.22)$$

kur  $F(b)$  un  $F(a)$  ir funkcijas  $f(x)$  kaut kuras primitīvās funkcijas  $F(x)$  vērtības, ko parasti atrod, aprēķinot nenoteikto integrāli  $\int f(x) dx$  ar līdzšinējo zemintegrāļa izteiksmi, pie tam vienkāršības labad integrēšanas rezultātu ņem bez integrācijas konstantes.

Formula (14.22) ir viena no vissvarīgākām matemātiskās analīzes formulām, jo tā saista savā starpā būtiski dažādus matemātiskās analīzes jēdzienus: noteikto integrāli ar nenoteikto integrāli un līdz ar to arī ar funkciju atvasināšanu kā integrēšanai apgriezto darbību.

Diferenci formulas (14.22) labajā pusē saīsināti apzīmē šādi:  $F(x) \Big|_a^b$  jeb  $[F(x)]_a^b$ . Pēdējie divi apzīmējumi nozīmē, ka  $F(x)$  izteiksmē  $x$  vietā vispirms jāliek  $b$ , pēc tam  $a$  un tad no pirmās  $F(x)$  vērtības jāatņem otrā vērtība. Līdz ar to formulu (14.22) var pārrakstīt arī šādi:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = [F(x)]_a^b. \quad (14.23)$$

1. piemērs.

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}.$$

Saskaņā ar noteiktā integrāļa ģeometrisko nozīmi šis integrālis izsaka 125. zīmējumā attēloto laukumu.

2. piemērs.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{2x+3} &= \frac{1}{2} \ln|2x+3| \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (\ln 5 - \ln 3) \approx \\ &\approx \frac{1}{2} (1,6094 - 1,0986) = 0,2554. \end{aligned}$$

3. piemērs.

$$\begin{aligned} \int_1^2 \ln x dx &= [x \cdot \ln x - x]_1^2 = 2 \cdot \ln 2 - 2 - \\ &- (1 \cdot \ln 1 - 1) = 2 \cdot \ln 2 - 1 \approx 0,3863. \end{aligned}$$



125. zīm.

4. piemērs. Brīvā kritienā kustības ātrums  $v=gt$ . Atrast noieto ceļu  $s_1$  laika spridī no  $t_1$  līdz  $t_2$ .

$$s_1 = \int_{t_1}^{t_2} v dt = \int_{t_1}^{t_2} g t dt = \frac{1}{2} g t^2 \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{2} g t_2^2 - \frac{1}{2} g t_1^2 = \frac{1}{2} g (t_2^2 - t_1^2).$$

Piezīme. Ņūtona—Leibnica formulu nevar lietot, ja zemintegrāļa funkcijai ir pārtraukums integrācijas intervālā, jo noteikto integrāli mēs apskatām tikai nepārtrauktām funkcijām. Tā, piemēram, mēs nevaram runāt pa integrāļa

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$$

aprēķināšanu, jo šeit zemintegrāļa funkcijai ir pārtraukums punktā  $x=0$ .

**121. §. Substitūcija noteiktajā integrālī un noteiktā integrāļa parciālā integrēšana.** Ja ir jāaprēķina noteiktais integrālis, pie tam atbilstošā nenoteiktā integrāļa atrašanai jālieto substitūcijas vai parciālās integrēšanas metode, tad var rīkoties divējādi:

1) nenoteikto integrāli atrod ar substitūcijas vai parciālās integrēšanas metodi līdz galam un pēc tam lieto Ņūtona—Leibnica formulu. Tā aprēķināts 120. § 2. un 3. piemēra noteiktais integrālis;

2) pielieto substitūcijas vai parciālās integrēšanas metodi noteiktajam integrālim.

Substitūcija noteiktajā integrālī. Integrācijas robežas izmaina tā, kā tas izriet no substitūcijas vienādības. Minētās darbības 120. § 2. piemērā izpilda šādi:

1. piemērs.

$$\int_0^1 \frac{dx}{2x+3} = \frac{1}{2} \int_3^5 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} [\ln t]_3^5 = \frac{1}{2} (\ln 5 - \ln 3) \approx 0,2554.$$

$$t=2x+3$$

$$dt=2dx$$

$$dx=\frac{1}{2} dt$$

|     |   |   |
|-----|---|---|
| $x$ | 0 | 1 |
| $t$ | 3 | 5 |

Saskaņā ar substitūcijas vienādību  $t=2x+3$  vērtībai  $x=0$  atbilst  $t=2 \cdot 0+3=3$ , bet vērtībai  $x=1$  atbilst  $t=2 \cdot 1+3=5$ ; abas šīs  $x$  vērtības un atbilstošās  $t$  vērtības sakopotas tabulā.

Lietoto substitūcijas metodi noteiktajā integrālī nepierādīsim. Atzīmēsim vienīgi, ka substitūcija noteiktajā integrālī ir atļauta, ja integrācijas intervālā *monotonai*  $x$  *maiņai* atbilst saskaņā ar substitūcijas vienādību *monotona* ( $t$  i., pastāvīgi augoša vai pa-

stāvīgi dilstoša) jaunā integrācijas mainīgā lieluma maiņa. Acīm redzot, apskatītajā piemērā minētā prasība ir apmierināta.

2. piemērs. Aprēķināt  $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$ .

Izvēloties substitūciju  $x=2 \sin t$ , dabūjam

$$x=2 \sin t$$

$$dx=2 \cos t dt$$

|     |   |                 |
|-----|---|-----------------|
| $x$ | 0 | 2               |
| $t$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ |

$$\begin{aligned} \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4 \sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt = \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4(1-\sin^2 t)} \cos t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \\ &= 4 \left[ \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\sin \pi}{4} \right) = \pi. \end{aligned}$$

Noteiktā integrāļa parciālā integrēšana. To izpilda saskaņā ar vienādību

$$\int_{x=a}^{x=b} u dv = uv \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_{x=a}^{x=b} v du, \quad (14.24)$$

ko var pierādīt ar Ņūtona—Leibnica formulas palīdzību.

3. piemērs.

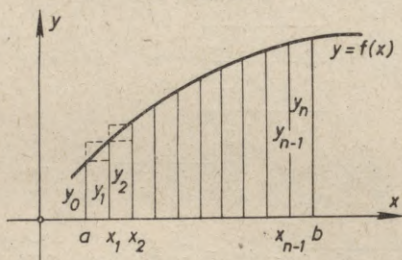
$$\begin{aligned} \int_1^2 \ln x dx &= x \cdot \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x} dx = 2 \cdot \ln 2 - 1 \cdot \ln 1 - \int_1^2 dx = \\ &= 2 \cdot \ln 2 - 1 \approx 0,3863. \end{aligned}$$

122. §.\* Noteiktā integrāļa aptuvena aprēķināšana. To lieto galvenokārt divos gadījumos: 1) kad apskatāmajam noteiktajam integrālim atbilstošo nenoteikto integrāli neizdodas atrisināt ar elementāro funkciju palīdzību un tāād nevar lietot Ņūtona—Leibnica formulu; 2) kad jāaprēķina noteiktais integrālis funkcijai, kurai formula nav zināma, bet ir zināmas vērtības tikai atsevišķos integrācijas intervāla punktos (piemēram, tās ir iegūtas mērījumu rezultātā).

Pēc šīs metodes dotajam noteiktajam integrālim atbilstošo līk-līnijas trapeci sadala lielāka skaita vertikālās joslās un aptuveni aprēķina šo joslu laukumus.



Tā konkrēti, lai aprēķinātu integrāli (14.9), integrācijas intervālu  $[a, b]$  sadalām  $n$  vienāda garuma elementāros intervālos ar garumu  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ . Zemintegrāļa funkcijas vērtības dalījumu punktos apzīmēsim pēc kārtas ar  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n$  (126. zīm.).



126. zīm.

Taisnstūra formulas. Visvienkāršāk joslu laukumus aptuveni aprēķināt kā taisnstūru laukumus, ņemot joslu kreiso vai labo malu garumus par atbilstošo taisnstūru augstumiem. Izvēloties joslu kreisās malas, dabūjam taisnstūru laukumus

$$y_0\Delta x, y_1\Delta x, \dots, y_{n-1}\Delta x.$$

So taisnstūru laukumu summa

$$y_0\Delta x + y_1\Delta x + \dots + y_{n-1}\Delta x = \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1})$$

ir aptuveni vienāda ar liklīnijas trapeces laukumu un līdz ar to arī ar doto noteikto integrāli. Tātad

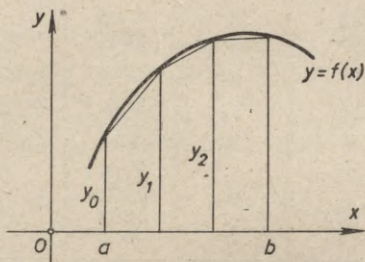
$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}). \quad (14.25)$$

Ņemot joslu labās malas, līdzīgi dabūjam otru formulu

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n). \quad (14.26)$$

Abas pēdējās formulas sauc par *taisnstūru formulām* noteiktā integrāļa aptuvenai aprēķināšanai. Tās parasti dod neprecīzus

rezultātus, jo, rēķinot pēc šīm formulām, netiek pareizi ievēroti mazo trijstūru laukumi starp taisnstūru augšējām malām un funkcijas grafiku (126. zīm. šie trijstūri parādīti tikai pirmajām divām joslām. Precīzākus rezultātus var dabūt pēc trapeču formulas).



127. zīm.

**Trapeču formula.** Šīs formulas iegūšanai joslu laukumus aptuveni aprēķina kā trapeču laukumus (127. zīm.). Šo trapeču laukumu summa ir

$$\begin{aligned} & \frac{y_0 + y_1}{2} \Delta x + \frac{y_1 + y_2}{2} \Delta x + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \Delta x = \\ & = \frac{b-a}{n} \left( \frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right). \end{aligned}$$

Šai summai ir aptuveni vienāds dotais noteiktais integrālis. Tātad

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left( y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_0 + y_n}{2} \right). \quad (14.27)$$

Pastāv citas vēl precīzākas formulas noteikto integrāļu aptuvenai aprēķināšanai.

**Piemērs.** Iegūtās formulas pielietosim 120. § 2. piemēra integrālim  $\int_0^1 \frac{dx}{2x+3}$ , lai gan šīs formulas īstenībā ir domātas citādiem nolūkiem, kā norādīts šī paragrāfa sākumā. Integrācijas intervālu  $[0; 1]$  sadalīsim 10 vienādās daļās, t. i., ņemsim  $n=10$ . Tad  $\frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0,1$ , un zemintegrāļa funkcijas vērtības

jāaprēķina punktos, kuru abscisas ir 0; 0,1; 0,2; ...; 0,9; 1. Tā, piemēram, ja  $x_1=0,1$ , tad  $y_1=\frac{1}{2 \cdot 0,1+3}=0,3125$ .\*

Aprēķini sakopoti tabulā.

|       |     |       |        |                             |
|-------|-----|-------|--------|-----------------------------|
| $x_1$ | 0,1 | $y_1$ | 0,3125 | $x_0=a=0$                   |
| $x_2$ | 0,2 | $y_2$ | 0,2941 |                             |
| $x_3$ | 0,3 | $y_3$ | 0,2778 | $y_0=\frac{1}{3}=0,3333$    |
| $x_4$ | 0,4 | $y_4$ | 0,2632 | $x_{10}=b=1$                |
| $x_5$ | 0,5 | $y_5$ | 0,2500 | $y_{10}=\frac{1}{5}=0,2000$ |
| $x_6$ | 0,6 | $y_6$ | 0,2381 |                             |
| $x_7$ | 0,7 | $y_7$ | 0,2273 |                             |
| $x_8$ | 0,8 | $y_8$ | 0,2174 |                             |
| $x_9$ | 0,9 | $y_9$ | 0,2083 |                             |

$$\Sigma=2,2887$$

Pēc taisnstūru formulas (14.25):

$$\int_0^1 \frac{dx}{2x+3} \approx 0,1(y_0+\Sigma)=0,1(0,3333+2,2887)=0,2622.$$

Pēc taisnstūru formulas (14.26):

$$\int_0^1 \frac{dx}{2x+3} \approx 0,1(\Sigma+y_{10})=0,1(2,2887+0,2000)=0,2489.$$

Pēc trapecu formulas (14.27):

$$\int_0^1 \frac{dx}{2x+3} \approx 0,1\left(\Sigma + \frac{y_0+y_{10}}{2}\right)=0,1\left(2,2887 + \frac{0,3333+0,2000}{2}\right)=0,2555.$$

Solidzinot šos rezultātus ar piemērā iepriekš dabūto precizo rezultātu 0,2554, redzam, ka pēc taisnstūru formulām iegūtie rezultāti ir kļūdaini jau otrā decimālzīmē par vienu vienību, kamēr pēc trapecu formulas iegūtais rezultāts atšķiras no precīzā tikai ceturrtā decimālzīmē par vienu vienību.

**123. §.\* Neistie integrāļi.** Noteiktais integrālis ir definēts ar summas robežu (118. §) tikai galīga garuma integrācijas intervāla gadījumā. Tomēr noteiktos integrāļus apskata arī bezgalīga garuma integrācijas intervālos, bet tad lietderīgi integrāli definēt

\* Šeit aprēķini izpildīti pēc apgrieztu lielumu tabulām.



ne tieši kā summas robežu, bet gan ar īpašas papildu robežpārejas palīdzību, un tāpēc šādus integrāļus sauc par *neistiem*.

Konkrēti, integrāli

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \quad (14.28)$$

definē ar vienādību:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_a^X f(x) dx. \quad (14.29)$$

Ja robeža šīs vienības labajā pusē eksistē (kā galīga robeža!), tad saka, ka *integrālis* (14.28) *eksistē*. Ja turpretim robeža (14.29) neeksistē, tad saka, ka *integrālis* (14.28) *neeksistē*.

Piemērs.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^X = \\ &= \lim_{X \rightarrow +\infty} [\operatorname{arctg} X - \operatorname{arctg} 0] = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Praktiski uzreiz piemēro Ņūtona—Leibnica formulu tieši neistajam integrālim, t. i.,

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^{+\infty} = \operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

### Vingrinājumi.

Aprēķināt noteikto integrāli un pārbaudīt iegūto rezultātu, noskaidrojot ar elementārās ģeometrijas palīdzību attiecīgās figūras laukumu.

1.  $\int_1^3 (2x+1) dx.$

2.  $\int_3^4 (3 - \frac{1}{2}x) dx.$

Aprēķināt noteikto integrāli.

3.  $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx.$

4.  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx.$

5.  $\int_0^{\pi} \sin x dx.$

6.  $\int_0^2 (4x^3+1) dx.$

7.  $\int_0^2 (x^3+3x^2-2x) dx$

8.  $\int_{-1}^1 (1-3x^2)^2 dx.$

9.  $\int_1^4 \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx.$

Ar noteiktā integrāļa palīdzību atrast laukumu figūrai, ko ierobežo dotās taisnes un  $Ox$  ass. Ar elementārās ģeometrijas palīdzību pārbaudīt iegūta rezultāta pareizību.

10.  $y = \frac{1}{2}x - 1$ ,  $x = 3$ ,  $x = 5$ .

11.  $3x - 2y + 5 = 0$ ,  $x = -1$ ,  $x = 3$ .

Ar noteiktā integrāļa palīdzību atrast laukumu figūrai, ko ierobežo dotā līnija, divas taisnes un  $Ox$  ass. Zīmējumā parādīt aprēķināmo figūru.

12.  $y = x^2 + 2$ ,  $x = -1$ ,  $x = 2$ .

13.  $y = \frac{2}{x}$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ .

14.  $y = \cos x$ ,  $x = -\frac{\pi}{2}$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$ .

15.  $y = \ln x$ ,  $x = 1$ ,  $x = 4$ .

16. Ķermeņa kustības ātrums ir  $v = 2t + 3$  cm/sek. Aprēķināt noieto ceļu laika sprādi no  $t = 1$  sek līdz  $t = 2$  sek.

17. Vertikāli augšup sviesta ķermeņa ātrums  $v = v_0 - gt$ , kur  $v_0$  ir sākumā ātrums ( $t$  sekundēs,  $v$  metros sekundē,  $g = 9,8$  m/sek<sup>2</sup>). Atrast ķermeņa uzsviešanas augstumu, ja  $v_0 = 50$  m/sek.

Ar vidējās vērtības teorēmas palīdzību novērtēt noteikto integrāli, noapaļojot tā vērtību uz augšu un uz leju.

18.  $\int_1^2 \frac{2dx}{x}$ .

19.  $\int_0^1 \sqrt{1-x^3} dx$ .

20.  $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$ .

Aprēķināt noteikto integrāli.

21.  $\int_0^2 \frac{x dx}{1+x^2}$ .

22.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx$ .

23.  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$ .

24.  $\int_0^1 \frac{x dx}{(x^2 + 1)^2}$ .

25.  $\int_0^{\sqrt[3]{3}} \frac{x dx}{\sqrt[3]{4-x^2}}$ .

26.  $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$ .

27.  $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^2}$ .

28.  $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$ .

29.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx$ .

30.  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$ .

31.  $\int_0^1 x e^{-x} dx$ .

32.  $\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx$ .

$$33. \int_1^2 x \cdot \ln x \, dx.$$

$$34. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x \, dx.$$

$$35. \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \sin 2x \, dx.$$

Aptuveni aprēķināt noteikto integrāli, lietojot trapeču formulu un sadalot integrācijas intervālu 10 daļās.

$$36. \int_0^1 \sqrt{1-x^3} \, dx.$$

$$37. \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} \, dx.$$

38. Ar trapeču formulas palīdzību aptuveni aprēķināt noteikto integrāli  $\int_1^5 f(x) \, dx$ , ja  $f(x)$  vērtības dotas pielikuma 2. tabulā.

Aprēķināt integrāli.

$$39. \int_0^{\infty} e^{-x} \, dx.$$

$$40. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

$$41. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}.$$

## 15. NODAĻA

### NOTEIKTĀ INTEGRAĻA PIELIETOJUMI

**124. §. Plakanu figūru laukumu aprēķināšana.** Tā balstās uz noteiktā integrāļa ģeometriskās nozīmes. Proti, apskatāmo figūru sadala piemērotās līkliniju trapecēs un pēc tam figūras laukumu aprēķina kā līkliniju trapeču laukumu algebrisku summu. Nosakot šīs līklinijas trapeces, parasti jāaprēķina arī līniju krustpunktu koordinātes.

**1. piemērs.** Atrast laukumu figūrai, ko ierobežo parabolas  $y^2=x$  un  $y=x^2$ .

**Atrisinājums.** Aprēķinot iegūstam, ka doto parabolu krustpunktu koordinātes ir  $(0;0)$  un  $(1;1)$  (128. zīm.). Apskatāmās figūras laukumu var izteikt kā divu līkliniju trapeču laukumu diferenci, kurām par pamatu ir  $Ox$  ass nogrieznis starp punktiem  $x=0$  un  $x=1$ . Pirmo no minētajām trapecēm augšā ierobežo parabola  $y=\sqrt{x}$ , bet otro — parabola  $y=x^2$ , un tāpēc

$$L = \int_0^1 \sqrt{x} \, dx - \int_0^1 x^2 \, dx = \left. \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \right|_0^1 - \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

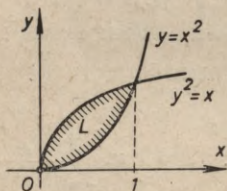
Apskatīsim gadījumu, kad līklinijas trapecei pamats atrodas uz  $Oy$  ass, t. i., kad šo trapeci ierobežo  $Oy$  ass, funkcijas  $x=\varphi(y)$  grafika un taisnes  $y=c$  un  $y=d$  ( $c < d$ , 129. zīm.).



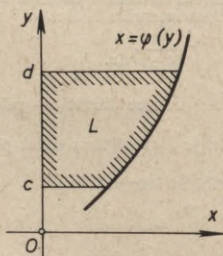
Salīdzinot ar agrāko gadījumu (117. un 118. §), redzam, ka koordinātes ir apmainītas lomām, un arī laukuma formula dabūjama no formulas (14.11), apmainot koordinātes. Tātad

$$L = \int_c^d \varphi(y) dy \text{ jeb}$$

$$L = \int_c^d x dy \quad (c < d). \quad (15.1)$$



128. zīm.



129. zīm.

2. piemērs. Atrast laukumu figūrai, ko ierobežo parabola  $x = 4 - y^2$  un  $Oy$  ass.

Atrisinājums. Lai atrastu integrācijas robežas, meklējam dotās parabolas krustpunktus ar  $Oy$  asi:  $4 - y^2 = 0$ , no kurienes  $y = \pm 2$ . Pati figūra atrodas pa labi no  $Oy$  ass (lasītājam par to pārliecināties zīmējumā!). Meklētais laukums ir

$$L = \int_{-2}^2 (4 - y^2) dy = \left[ 4y - \frac{y^3}{3} \right]_{-2}^2 = \left( 8 - \frac{8}{3} \right) - \left( -8 + \frac{8}{3} \right) = 10 \frac{2}{3}.$$

125. §. Rotācijas ķermeņu tilpumu aprēķināšana. Aprēķināsim tilpumu rotācijas ķermenim, ko, rotējot ap  $Ox$  asi, veido līklīnijas trapece, kuru ierobežo  $Ox$  ass, funkcijas  $y = f(x)$  grafika un divas taisnes  $x = a$  un  $x = b$  ( $a < b$ , 130. zīm.).

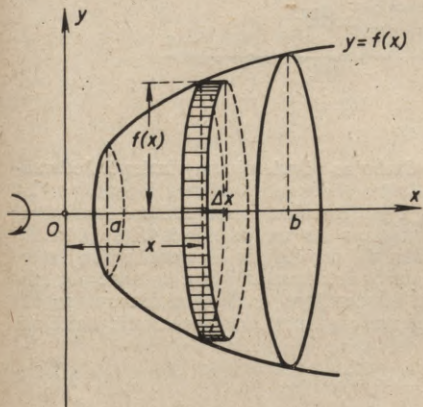
Apskatāmo tilpumu dabūsim kā elementāru cilindru tilpumu summas robežu. Viens šāds elementārs cilindrs redzams 130. zīm. Tam pamata rādiuss ir  $f(x)$ , augstums  $\Delta x$  un tātad tilpums ir  $\pi f(x)^2 \Delta x$ . Summējot elementāro cilindru tilpumus un izdarot robežpāreju, kad cilindru augstumi tiecas uz nulli, dabūjam

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx \text{ jeb}$$

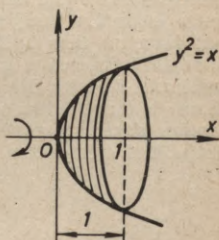
$$V = \pi \int_a^b y^2 dx. \quad (15.2)$$

Sis integrālis izsaka minētā rotācijas ķermeņa tilpumu.

Piemērs. Rotējot parabolai  $y^2=x$  ap  $Ox$  asi, veidojas virsma, ko sauc par rotācijas paraboloidu. Atrast tilpumu ķermenim, ko ierobežo šis rotācijas paraboloids un  $Ox$  asij perpendikulārā plakne, kura atrodas vienas garuma vienības attālumā no paraboloida virsotnes (131. zīm.).



130. zīm.



131. zīm.

Atrisinājums.

$$V = \pi \int_0^1 y^2 dx = \pi \int_0^1 x dx = \pi \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \pi \approx 1,571.$$

Piezīme. Ja rotācijas ķermeni veido liklīnijas trapece, rotējot ap  $Oy$  asi, tad rotācijas ķermeņa tilpumu aprēķina pēc formulas

$$V = \pi \int_c^d \varphi(y)^2 dy \text{ jeb}$$

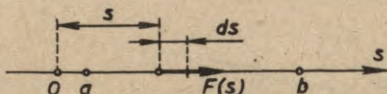
$$V = \pi \int_c^d x^2 dy. \quad (15.3)$$

Šeit liklīnijas trapeci ierobežo  $Oy$  ass, funkcijas  $x=\varphi(y)$  grafika un divas taisnes  $y=c$  un  $y=d$  ( $c < d$ ).

126. §. Mehāniskais darbs. Ja kustība notiek pa taisnes nogriezni ar garumu  $s$  konstanta spēka  $F$  iedarbības rezultātā, kad

šis spēks darbojas pārvietojuma virzienā, tad, kā zināms, par mehānisko darbu  $A$  sauc reizinājumu  $A = F \cdot s$ .

Noskaidrosim, ko sauc par mehānisko darbu mainīga spēka gadījumā. Pieņemsim, ka 1) kustība notiek pa  $Ox$  asi no punkta  $s=a$  līdz punktam  $s=b$  (132. zīm.); 2) kustību ir radijūs



132. zīm.

mainīgs spēks  $F(s)$ , kurš darbojas pārvietojuma virzienā. Iedomāsimies intervālu  $[a, b]$  sadalītu tādos elementāros intervālos, lai kaut kurā no tiem spēks  $F(s)$  manāmi neizmainītos. Apzīmējot elementārā intervāla garumu ar  $\Delta s$  un izvēloties  $F(s)$  vērtību, piemēram, šī intervāla sākumā, minētajam elementārajam intervālam dabūjam aptuvenu darba izteiksmi  $F(s)\Delta s$ , ko sauc par *elementāro darbu*. Summējot elementāros darbus un izdarot robežpāreju, kad elementāro intervālu garumi tiecas uz nulli, dabūjam

$$A = \int_a^b F(s) ds. \quad (15.4)$$

Sis integrālis izsaka darbu, ko pastrādā kustības virzienā darbojošais spēks  $F(s)$ , ja tas rada kustību no punkta  $s=a$  līdz punktam  $s=b$ .

**Piemērs.** Atrast darbu, kas jāpastrādā atsperes izstiepšanai par 3 cm, ja ir zināms, ka atsperes izstiepšanai vajadzīgais spēks proporcionāls atsperes pagarinājumam un atsperes pagarināšanai par 1 cm nepieciešams 1 ņūtonu liels spēks.

**Atrisinājums.** Darbu aprēķināsim džoulos, un tāpēc par garuma vienību turpmāk ņemsim metru. Atsperes izstiepšanai vajadzīgais spēks izteicams kā  $kx$ , kur  $k$  — proporcionalitātes koeficients. Tā kā atsperes pagarināšanai par 1 cm = 0,01 m vajadzīgs 1 ņūtonu liels spēks, tad pie  $x=0,01$  spēks ir  $kx = k \cdot 0,01 = 1$ , no kurienes  $k=100$ . Atspere tiek izstiepta no līdzsvara stāvokļa  $x=0$  līdz pagarinājumam  $x_1=0,03$  (m). Tātad pēc formulas (15.4) dabūjam

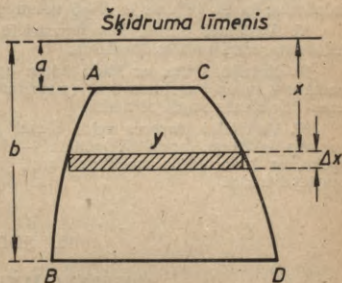
$$A = \int_0^{0,03} 100x dx = 50 [x^2]_0^{0,03} = 0,045 \text{ (džoulu)}.$$

**127. §. Šķidruma spiediens uz vertikālu sienu.** Apskatīsim gadījumu, kad plakanai vertikālai sienai, uz ko spiež šķidrums, ir figūras  $ABDC$  veids (133. zīm.), pie tam ir zināma sienas mai-



nīgā platuma  $y$  atkarība no dziļuma  $x$ , t. i., ir zināma funkcija  $y=f(x)$ . Arī šķidruma spiediens, attiecināts uz sienas laukuma vienību, atkarīgs no dziļuma  $x$ , jo šis spiediens vienāds ar tā šķidruma stabiņa smagumu, kuru varam iedomāties virs attiecīgā dziļumā horizontāli novietotas laukuma vienības.

Iedomāsimies vertikālo sienu sadalītu tādās šaurās horizontālās joslās, lai uz katras joslas spiediens māmā neizmainītos. Apzīmējot joslas platumu ar  $\Delta x$  un uzskatot šo joslu aptuveni par taisnstūri, tās laukums ir  $y\Delta x$ . Ar  $\gamma$  apzīmēsim šķidruma vienas tilpuma vienības svaru. Tad šķidruma spiediens dziļumā  $x$ , attiecināts uz laukuma vienību, saskaņā ar iepriekšminēto ir  $\gamma x$ . Ņemot šī spiediena vērtību, piemēram, uz joslas augšējās malas, aptuveni dabūjam šķidruma spiedienu uz minēto joslu:  $\gamma x \cdot y\Delta x$ . Summējot spiedienus uz visām sienas joslām un izdarot robežpāreju, kad joslu platumi tiecas uz nulli, dabūjam



133. zīm.

$$P = \gamma \int_a^b xy dx.$$

Sis integrālis izsaka *spiedienu*, ar kādu šķidrums spiež uz augšminēto sienu.

### Vingrinājumi

Aprēķināt laukumu figūrai, ko ielēdz dotās līnijas.

1.  $y=9-x^2$ ,  $y=0$ .
2.  $y^2=2x+4$ ,  $x=0$ .
3.  $x=2-y-y^2$ ,  $x=0$ .
4.  $y^2=2x+1$ ,  $x-y-1=0$ .
5.  $y=x^2$ ,  $y=2-x^2$ .
6.  $y^2+8x=16$ ,  $y^2-24x=48$ .
7.  $x^2=2y$ ,  $x^2+y^2=8$ ,  $y>0$ .

Aprēķināt tilpumu ķermenim, ko veido figūra, rotējot ap  $Ox$  asi, ja šo figūru ierobežo dotās līnijas.

8.  $y^2=4x$ ,  $x=3$ .
9.  $xy=4$ ,  $x=1$ ,  $x=4$ ,  $y=0$ .

Aprēķināt tilpumu ķermenim, ko veido figūra, rotējot ap  $Oy$  asi, ja šo figūru ierobežo dotās līnijas.

10.  $x^2=6y$ ,  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $y=2$ .
11.  $y^2+2y=3-x$ ,  $x=0$ .

12. Elipse, kam lielā ass vienāda ar  $2a$ , bet mazā ass — ar  $2b$ , rotē 1) ap lielo asi, 2) ap mazo asi. Aprēķināt iegūto rotācijas elipsoīdu tilpumus. Robežgadījumā iegūt lodes tilpumu.

13. Aprēķināt darbu, kas jāpastrādā atsperes izstiepšanai par 20 mm, ja atsperes pagarināšanai par 1 mm vajadzīgs 0,3 ņūtonus liels spēks.

14. Aprēķināt darbu, kas jāpastrādā ūdens izpumpēšanai no cilindriskā iedobuma, ja tā dziļums ir  $H=5$  m un pamata riņķa rādiuss  $R=3$  m.

15. Aprēķināt darbu, kas jāpastrādā ūdens izpumpēšanai no pusslēriska iedobuma, kura rādiuss  $R=0,6$  m.

16. Noteikt spēku, ar kādu ūdens spiež uz vertikālu taisnstūra sienu ar pamatu 8 m un augstumu 6 m (piemēram, uz slūžām), ja ūdens līmenis sniedzas līdz sienas augšējai malai.

17. Vertikālai trapeces veida sienai (piemēram, dambim) augšējā pamata garums ir 20 m, apakšējā pamata — 10 m, bet augstums ir 6 m. Noteikt spēku, ar kādu ūdens spiež uz sienu, ja ūdens līmenis sniedzas līdz sienas augšējai malai.

## 16.\* NODAĻA

### DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMI

**128. §. Pamatjēdzieni.** *Par diferenciālvienādojumu sauc vienādojumu, kas satur argumentu, nezināmo funkciju un tās atvasinājumus (atvasinājuma vietā var būt arī argumenta un nezināmās funkcijas diferenciāļi).*\* Diferenciālvienādojumi, piemēram, ir

$$yy' - 3x^2 = 0, \quad (16.1)$$

$$y' = x^3, \quad (16.2)$$

$$ydx + xdy = 0. \quad (16.3)$$

Tie ir *pirmās kārtas diferenciālvienādojumi*, jo tajos sastopams nezināmās funkcijas *pirmās kārtas atvasinājums* vai tā vietā argumenta un funkcijas diferenciāļi, bet nav augstāku kārtu atvasinājumu. Pirmās kārtas diferenciālvienādojuma vispārīgais veids ir

$$F(x, y, y') = 0 \quad (16.4)$$

vai

$$y' = f(x, y), \quad (16.5)$$

ja vienādojums ir atrisināts attiecībā pret  $y'$ , vai arī

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (16.6)$$

ja vienādojums ir diferenciālā veidā.

Par diferenciālvienādojuma *atrisinājumu* sauc kaut kuru funkciju, kas apmierina šo vienādojumu. Diferenciālvienādojuma atrisinājuma atrašanu sauc par diferenciālvienādojuma *atrisināšanu* jeb diferenciālvienādojuma *integrēšanu*.

\* Var būt gadījumi, kad arguments vai nezināmā funkcija, vai tie abi reizē diferenciālvienādojumā neieiet tieši, piemēram, vienādojumā  $y' = x^3$  neieiet tieši  $y$ .

1. piemērs. Diferenciālvienādojuma  $y' = x^3$  atrisinājums ir  $y = \frac{1}{4}x^4 + C$ .

2. piemērs. Lai integrētu diferenciālvienādojumu  $yy' - 3x^2 = 0$ , to vispirms pārveidojam, ņemot  $yy' = \frac{1}{2} (y^2)'$ , un iegūstam vienādojumu:

$$\frac{1}{2} (y^2)' - 3x^2 = 0$$

jeb

$$(y^2)' = 6x^2,$$

no kurienes pēc integrēšanas dabūjam

$$y^2 = \int 6x^2 dx = 2x^3 + C.$$

Izsakot  $y$ , iegūstam divus diferenciālvienādojuma atrisinājumus:

$$y_{1,2} = \pm \sqrt{2x^3 + C}.$$

3. piemērs. Lai atrisinātu diferenciālvienādojumu  $ydx + xdy = 0$ , ievērosim, ka šī vienādojuma kreisā puse ir divu argumentu funkcijas  $xy$  pilnais diferenciālis, jo  $d(xy) = ydx + xdy$ . Līdz ar to diferenciālvienādojumu var pārrakstīt šādi:

$$d(xy) = 0,$$

no kurienes seko vienādojums: \*

$$xy = C, \quad (16.7)$$

kas izsaka atrisinājumu apslēptā veidā.

Ja diferenciālvienādojuma atrisinājumu izsaka vienādojums apslēptā veidā, tad šo vienādojumu sauc par *diferenciālvienādojuma integrāli*.

Pirmās kārtas diferenciālvienādojuma atrisinājumu (integrāli), kurš satur patvaļīgu konstanti  $C$ , sauc par šī diferenciālvienādojuma *vispārīgo atrisinājumu* (*vispārīgo integrāli*). Ja turpretim šai konstantei izvēlas kādu skaitlisku vērtību, tad dabū diferenciālvienādojuma *partikulāro atrisinājumu* (*partikulāro integrāli*).

Diferenciālvienādojumu atrisināšanas uzdevumos parasti ir jāatrod tāds partikulārs šī vienādojuma atrisinājums (integrālis), kurš apmierina attiecīgu *sākuma nosacījumu*. Tā, piemēram, meklēsim diferenciālvienādojuma (16.3) integrāli, kurš apmierina sākuma nosacījumu:

$$y|_{x=1} = 2. \quad (16.8)$$

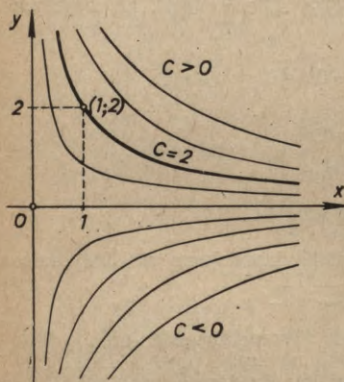
---

\* Seit ir jāatsaucas uz šādu divu argumentu funkciju īpašību: ja  $du(x, y) = 0$  identiski, tad  $u(x, y) = \text{const.}$



Ievietojot diferenciālvienādojuma (16.3) vispārīgā integrāli (16.7)  $x=1$  un  $y=2$ , dabūjam  $1 \cdot 2 = C$ , no kurienes  $C=2$ . Meklētais partikulārais integrālis ir

$$xy=2. \quad (16.9)$$



134. zīm.

Atrisinājuma ģeometriskā nozīme. Diferenciālvienādojuma atrisinājumu grafikas sauc par *integrāllīnijām*. Diferenciālvienādojuma vispārīgajam atrisinājumam atbilst bezgalīgi daudz integrāllīniju, jo katrai konstantes  $C$  vērtībai atbilst savs partikulārais atrisinājums un arī sava integrāllīnija. Šīs integrāllīnijas veido dotā diferenciālvienādojuma integrāllīniju saimi. Tā diferenciālvienādojumam (16.3) integrāllīniju saime ir vienādsānu hiperbolu saime ar vienādojumu (16.7) (visām šīm hiperbolām ir kopīgas asimptotas — koordinātu asis; sk. 134. zīm., kur integrāllīnijas ir konstruētas tikai argumentu vērtībām  $x > 0$ ).

Atrast diferenciālvienādojuma atrisinājumu, kurš apmierina doto sākuma nosacījumu, ģeometriski nozīmē — no integrāllīniju saimes izvēlēties to līniju, kura iet caur doto punktu. Piemēram, sākuma nosacījums (16.8) nozīmē, ka integrāllīnijai jāiet caur punktu

$$x=1, \quad y=2.$$

Atrisinājuma pārbaude. Diferenciālvienādojums atrisināts pareizi, ja iegūtais atrisinājums pēc ievietošanas diferenciālvienādojumā padara to par identitāti. Tā, piemēram, pārbaudīsim, kā atrisinājums, ko izsaka vienādojums (16.7), apmierina diferenciālvienādojumu (16.3). No vienādojuma (16.7) sekō, ka

$$y = \frac{C}{x}, \quad dy = -\frac{C}{x^2} dx \quad \text{un} \quad ydx + xdy = \frac{C}{x} dx + x \cdot \left(-\frac{C}{x^2}\right) dx = 0$$

identiski. Tātad minētais atrisinājums ir pareizs.

Ja vienādojuma (16.3) vietā būtu dots šim vienādojumam līdzvērtīgs diferenciālvienādojums

$$y' = -\frac{y}{x}, \quad (16.10)$$

tad rezultātu pārbauda šādi. No vienādojuma (16.7) seko, ka  $y = \frac{C}{x}$ ,  $y' = -\frac{C}{x^2}$ , un, ievietojot to vienādojumā (16.10), dabūjam kreisajā pusē  $-\frac{C}{x^2}$ , bet labajā pusē  $-y \frac{1}{x} = -\frac{C}{x} \cdot \frac{1}{x}$ . Tātad atkal iznāk identitāte

$$-\frac{C}{x^2} = -\frac{C}{x} \cdot \frac{1}{x};$$

un minētais atrisinājums ir pareizs.

Ja bez tam dots sākuma nosacījums, tad pārbauda arī, vai iegūtais atrisinājums apmierina šo nosacījumu. Tā, piemēram, pārliecināsimies, ka vienādojums (16.9) apmierina nosacījumu (16.8). Ievietojot vienādojumā (16.9)  $x=1$  un  $y=2$  no nosacījuma (16.8), dabūjam  $1 \cdot 2 = 2$ ; tātad nosacījums ir apmierināts.

**129. §. Diferenciālvienādojumu piemēri mehānikā, fizikā, ķīmijā un bioloģijā.** Apskatīsim piemērus, kad diferenciālvienādojums izsaka attiecīgu zināmu vai pieņemtu dabas likumsakarību par apskatāmā procesa norisi kaut kurā momentā vai punktā (vai kaut kurā patvaļīgi izraudzītā «pietiekami īsā» laika sprīdī respektīvi «pietiekami mazā» telpas daļā), nenorādot procesa vispārīgo norisi. Diferenciālvienādojuma atrisinājums tad izsaka procesa vispārīgo norisi, t. i., apskatāmā fizikālā lieluma maiņu atkarībā no laika «lielā» laika sprīdī vai atkarībā no kādas koordinātes «lielā» maiņas intervālā. Sinī paragrāfā apskatīti tikai paši diferenciālvienādojumi, bet atrisinājumi doti 130. un 131. §.

1. piemērs. *Organiskas augšanas diferenciālvienādojums.* Iedomāsimies vidi, kurā notiek dzīvu organismu (piemēram, baktēriju) vairošanās. Pieņemsim, ka elementārā laika sprīdī  $\Delta t$  (piemēram, vienā stundā) \*šo organismu daudzuma, t. i., skaita vai svara pieaugums  $\Delta x$  ir proporcionāls dzīvo organismu skaitam vai svaram  $x$  un laika sprīdim  $\Delta t$ . Tas ir, pieņemsim, ka pastāv šāda vienādība:

$$\Delta x = kx\Delta t,$$

kur  $k$  ir proporcionalitātes koeficients. Dālot ar  $\Delta t$ , dabūjam vienādojumu  $\frac{\Delta x}{\Delta t} = kx$ , no kurienes, ņemot pēc tam arvien mazāku  $\Delta t$ , pēc robežpārejas  $\Delta t \rightarrow 0$  dabūjam diferenciālvienādojumu  $x'_t = kx$  jeb

$$\frac{dx}{dt} = kx, \quad (16.11)$$

t. s. *organiskas augšanas diferenciālvienādojumu*. Šis vienādojums izsaka šādu īpašību: organismu vairošanās ātrums ir proporcionāls esošam organismu daudzumam.



2. piemērs. *Atdzišanas diferenciālvienādojums*. Ar  $T$  apzīmēsim ķermeņa temperatūru mirkli  $t$ , pieņemot, ka visās ķermeņa vietās temperatūra ir vienāda. Apskatīsim gadījumu, kad apkārtējās vides temperatūra ir  $0^\circ\text{C}$ . Novērojumi rāda, ka ķermeņa temperatūras maiņas ātrums  $T'_t = \frac{dT}{dt}$  ir proporcionāls esošai temperatūrai  $T$ , t. i.,

$$\frac{dT}{dt} = -kT, \quad (16.12)$$

kur  $-k$  ( $k > 0$ ) ir proporcionalitātes koeficients. Šeit mīnusa zīme ir vajadzīga šāda iemesla dēļ: 1) ja ķermeņa temperatūra  $T > 0$ , tad tas atdziest, t. i.,  $T'_t < 0$ , un koeficientam jābūt negatīvam; 2) ja turpretim ķermeņa temperatūra  $T < 0$ , tad tas sasilst, t. i.,  $T'_t > 0$ , un koeficientam atkal jābūt negatīvam. Vienādojumu (16.12) sauc par *atdzišanas diferenciālvienādojumu*.

3. piemērs. *Pirmās pakāpes ķīmiskas reakcijas kinētiskais vienādojums*. Ar  $a$  apzīmēsim sākuma koncentrāciju vielai, kas piedalās reakcijā, bet ar  $x$  — reakcijas produkta koncentrāciju mirkli  $t$ . Tad vienkāršākajā gadījumā koncentrācija vielai, kura piedalās reakcijā, mirkli  $t$  ir  $a - x$ . Apskatīsim ķīmisku reakciju (t. s. *pirmās pakāpes reakciju*), kur reakcijas ātrums  $x'_t = \frac{dx}{dt}$  ir proporcionāls lielumam  $a - x$ , t. i.,

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x), \quad (16.13)$$

kur  $k$  ir proporcionalitātes koeficients. Šo vienādojumu sauc par *pirmās pakāpes ķīmiskas reakcijas kinētisko vienādojumu*.

4. piemērs. *Otrās pakāpes ķīmiskas reakcijas kinētiskais vienādojums*. Ar  $a$  un  $b$  apzīmēsim sākuma koncentrāciju divām vielām, kas piedalās reakcijā, bet ar  $x$  — reakcijas produkta koncentrāciju mirkli  $t$ . Tad vienkāršākajā gadījumā koncentrācija abām vielām, kuras piedalās reakcijā, mirkli  $t$  ir  $a - x$  respektīvi  $b - x$ . Apskatīsim ķīmisku reakciju (t. s. *otrās pakāpes reakciju*), kur reakcijas ātrums ir proporcionāls abām koncentrācijām ( $a - x$ ) un ( $b - x$ ), t. i.,

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x), \quad (16.14)$$

kur  $k$  ir proporcionalitātes koeficients. Šo vienādojumu sauc par *otrās pakāpes ķīmiskas reakcijas kinētisko vienādojumu*.

5. piemērs. *Diferenciālvienādojums materiālās daļiņas taisnlinijas kustībai vidē ar berzi*, pieņemot, ka berze ir proporcionāla ātrumam un zināma pa kustības taisni darbojošā ārējā spēka atkarība no laika. Par kustības taisni ņemsim  $Ox$  asi, materiālās



daļiņas masu apzīmēsim ar  $m$ , bet uz materiālo daļiņu pa šo asi darbojošos zināmo ārējo spēku apzīmēsim ar  $F(t)$ . Tad kustības ātrums  $v = \dot{s}$ , un berzes spēks  $-\lambda v$  ( $\lambda > 0$ ). Seit mīnusa zīme ir vajadzīga šādu iemeslu dēļ: 1) ja materiālā daļiņa kustas pozitīvā virzienā, tad  $s$  aug un tāpēc  $v = \dot{s} > 0$ ; bet berzes spēks tad darbojas negatīvā virzienā un tāpēc šim spēkam jābūt negatīvam; 2) ja turpretim materiālā daļiņa kustas negatīvā virzienā, tad  $s$  dilst un tāpēc  $v = \dot{s} < 0$ ; bet berzes spēks šoreiz darbojas pozitīvā virzienā, un tāpēc šim spēkam jābūt pozitīvam. Kustības paātrinājums  $a = \dot{v} = \ddot{s}$ .

Saskaņā ar attiecīgo dinamikas likumu pastāv vienādība  $ma = R$ , kur  $m$  ir materiālās daļiņas masa, bet  $R$  — materiālai daļiņai pielikto spēku kopspeks. Šajā gadījumā  $R = -\lambda v + F(t)$ , un mēs dabūjam kustības diferenciālvienādojumu:

$$m\dot{v} = -\lambda v + F(t). \quad (16.15)$$

Tālāk apskatīsim dažus speciālus pirmās kārtas diferenciālvienādojumu veidus, kad var norādīt konkrētus priekšrakstus šo vienādojumu integrēšanai.

**130. §. Diferenciālvienādojums ar atdalāmiem mainīgajiem.** Tā sauc diferenciālvienādojumu, ko var izteikt šādā veidā:

$$y' = \frac{f_1(x)}{f_2(y)}. \quad (16.16)$$

Tas ir vienādojuma (16.5) apakšgadījums, kad vienādojuma labajā pusē esošo funkciju var izteikt ar divu citu funkciju dalījumu, no kurām pirmā atkarīga tikai no  $x$ , bet otrā — tikai no  $y$ . (Vienādojuma (16.16) labo pusi var uzskatīt arī par divu funkciju  $f_1(x)$  un  $\frac{1}{f_2(y)}$  reizinājumu, no kurām pirmā atkarīga tikai no  $x$ , bet otrā — tikai no  $y$ .)

Vienādojuma (16.16) atrisināšanas metode. Vispirms  $y'$  atvieto ar diferenciāļu dalījumu  $\frac{dy}{dx}$  (95. §). Tad atdala mainīgos lielumus, vienādojumu reizinot un dālot ar attiecīgām izteiksmēm tā, lai vienādojuma vienā pusē no mainīgajiem  $x$  un  $y$  paliktu tikai  $x$ , bet otrā pusē tikai  $y$ :

$$f_2(y) dy = f_1(x) dx. \quad (16.17)$$

Pēc tam vienādojuma kreisā puse jāintegrē pēc  $y$ , bet labā puse pēc  $x$ :

$$\int f_2(y) dy = \int f_1(x) dx + C. \quad (16.18)$$

Šī vienādība apslēptā veidā izsaka meklēto funkciju  $y=y(x)$ , kuras atrašanās jāatrisina vienādībā sastopamie integrāļi.

Pārlicināsimies par to, ka vienādība (16.18) ir vienādības (16.17) un arī vienādojuma (16.16) sekas. Vienādības (16.18) abās pusēs esošās izteiksmes atvasinām pēc  $x$ :

$$\begin{aligned}(\int f_1(x) dx)'_x &= f_1(x), \\ (\int f_2(y) dy)'_x &= (\int f_2(y) dy)'_y \cdot y' = f_2(y) y'.\end{aligned}$$

Tā kā abu izteiksmju atvasinājumi saskaņā ar vienādojumu (16.16) ir vienādi, tad pašas šīs izteiksmes var savā starpā atšķirties tikai ar konstantu saskaitāmo (105. § secinājums), t. i., pastāv vienādība (16.18).

Vienādība (16.18) satur patvaļīgu konstanti  $C$ , un tāpēc tā ir diferenciālvienādojuma (16.16) vispārīgais integrālis.

Apskatīto metodi diferenciālvienādojumu atrisināšanai sauc par *mainīgo lielumu atdalīšanas metodi*. Ar šo metodi var atrisināt daudzus 128. un 129. § piemērus. Sajos piemēros meklēsim diferenciālvienādojuma vispārīgo atrisinājumu vai integrāli.

1. piemērs.  $yy' - 3x^2 = 0$ .

$$y \frac{dy}{dx} = 3x^2, \quad y dy = 3x^2 dx,$$

integrējot dabū

$$\begin{aligned}\int y dy &= \int 3x^2 dx + C_1, \\ \frac{y^2}{2} &= x^3 + C_1, \quad y = \pm \sqrt{2x^3 + C}, \quad \text{kur } 2C_1 = C.\end{aligned}$$

2. piemērs.  $ydx + xdy = 0$ .

$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$ , integrējot:  $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} + C_1$ ,  $\ln|y| = -\ln|x| + \ln|C|$ , kur  $C_1 = \ln|C|$ , un dabūjam, ka  $xy = C$ . Šeit integrācijas konstante apzīmēta ar  $\ln|C|$ , nevis ar  $C$ , lai rezultātu dabūtu vienkāršākā izskatā.

3. piemērs.  $\frac{dx}{dt} = kx$ .

$\frac{dx}{x} = kdt$ ; integrējot:  $\ln|x| = kt + \ln|C| = \ln e^{kt} + \ln|C|$ , no kurienes  $x = Ce^{kt}$ . Apzīmējot organismu sākuma daudzumu ar  $a$ , dabūjam sākuma nosacījumu:  $x|_{t=0} = a$ . Pēc šī nosacījuma ievērošanas atrodam  $x = ae^{kt}$ .

4. piemērs.  $\frac{dT}{dt} = -kT$ .

$\frac{dT}{T} = -kdt$ ; integrējot:  $\ln|T| = -kt + \ln|C|$ , no kurienes  $T = Ce^{-kt}$ .

Ar  $T_0$  apzīmēsim ķermeņa sākuma temperatūru. Tad pēc sākuma nosacījuma  $T|_{t=0} = T_0$  ievērošanas dabūjam  $T = T_0 e^{-kt}$ .

5. piemērs.  $\frac{dx}{dt} = k(a-x)$ .

$\frac{dx}{a-x} = kdt$ ; integrējot:  $-\ln|a-x| = kt - \ln|C|$ , no kurienes pēc sākuma nosacījuma  $x|_{t=0} = 0$  ievērošanas atrodam  $x = a(1 - e^{-kt})$ .

6. piemērs.  $\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)$ .

$$\frac{dx}{(a-x)(b-x)} = kdt, \quad \int \frac{dx}{(a-x)(b-x)} = \int kdt + C_1.$$

Kreisajā pusē sastopamo integrāli apskatām atsevišķi, aprobežojoties ar vispārīgo gadījumu  $a \neq b$ :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(a-x)(b-x)} &= \frac{1}{a-b} \int \frac{(a-x) - (b-x)}{(a-x)(b-x)} dx = \\ &= \frac{1}{a-b} \left[ \int \frac{dx}{b-x} - \int \frac{dx}{a-x} \right] = \frac{1}{a-b} [-\ln|b-x| + \ln|a-x|] = \\ &= \frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{a-x}{b-x} \right|. \end{aligned}$$

Tad diferenciālvienādojuma integrālis ir

$$\frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{a-x}{b-x} \right| = kt + \frac{1}{a-b} \ln|C|$$

$\left( C_1 = \frac{1}{a-b} \ln|C| \right)$ , no kurienes  $\frac{b-x}{a-x} = Ce^{(b-a)kt}$ ; pēc sākuma nosacījuma  $x|_{t=0} = 0$  ievērošanas un  $x$  izteikšanas dabūjam

$$x = ab \cdot \frac{1 - e^{(b-a)kt}}{a - be^{(b-a)kt}}.$$

**131. §. Lineārs pirmās kārtas diferenciālvienādojums.** Tā sauc diferenciālvienādojumu, ko var izteikt šādā veidā:

$$y' + P(x)y = Q(x). \quad (16.19)$$

So vienādojumu sauc par lineāru tāpēc, ka tas ir pirmās pakāpes vienādojums attiecībā pret  $y$  un  $y'$ . Tāds, piemēram, ir vienādojums (16.15), kur  $x$  vietā ir  $t$ , bet  $y$  vietā  $v$ .



Vienādojuma (16.19) atrisināšanas metode. Vienādojuma atrisinājumu  $y$  meklē divu citu funkciju  $u$  un  $v$  reizinājuma veidā:

$$y = uv. \quad (16.20)$$

No šejienes  $y' = u'v + uv'$ . Ievietojot šīs izteiksmes vienādojumā (16.19), dabūjam vienādojumu

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x). \quad (16.21)$$

Šeit vienu no funkcijām  $u$  vai  $v$  mēs varam izvēlēties patvaļīgi, un pēc tam otrā funkcija jāņem tā, lai šis vienādojums tiktu apmierināts. Funkciju izvēlamies tā, lai vienādojums (16.21) būtu pēc iespējas vienkāršots.

Izrādās lietderīgi  $u$  ņemt no attiecīgiem locekļiem ārpus iekavām

$$u'v + u[v' + P(x)v] = Q(x)$$

un pēc tam pieprasīt, lai izteiksme iekavās anulējas

$$v' + P(x)v = 0. \quad (16.22)$$

Šis ir palīga diferenciālvienādojums, un to atrisina kā vienādojumu ar atdalāmiem mainīgajiem. Tā atrisinājums ir

$$v = e^{-\int P(x)dx}. \quad (16.23)$$

Tā kā šeit pietiek atrast kādu vienu funkcijas  $v$  izteiksmi, kāpinātājā ņem pēc iespējas vienkāršu nenoteiktā integrāļa atrisinājumu, ko dabū, atmetot integrācijas konstanti.

Vienādojuma (16.21) vietā paliek vienkāršots diferenciālvienādojums

$$u'v = Q(x) \quad (16.24)$$

jeb, ievērojot vienādību (16.23),

$$u' = Q(x)e^{\int P(x)dx}. \quad (16.25)$$

Integrējot dabūjam

$$u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C. \quad (16.26)$$

Reizinot izteiksmi (16.26) ar izteiksmi (16.23), dabūjam  $y$ :

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[ \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right], \quad (16.27)$$

kas ir vispārīgais diferenciālvienādojuma (16.19) atrisinājums.

1. piemērs. Atrisināt diferenciālvienādojumu (16.15). Lai pielietotu formulu (16.27), vispirms locekli  $\lambda v$  pārnēsim uz kreiso

pusi, bet pašu vienādojumu dalām ar  $m$ . Tad  $P(x)$  vietā jāņem  $\frac{\lambda}{m}$ ,  $Q(x)$  vietā  $\frac{F(t)}{m}$ , bet  $\int P(x) dx$  vietā dabūjam

$$\int \frac{\lambda}{m} dt = \frac{\lambda}{m} t.$$

Dotā vienādojuma vispārīgais atrisinājums tad ir

$$v = \frac{1}{m} e^{-\frac{\lambda}{m} t} \left[ \int F(t) e^{\frac{\lambda}{m} t} dt + C \right]. \quad (16.28)$$

Ātruma  $v$  atrašanai vēl ir jāizpilda integrēšanas darbība, ko var pilnīgi veikt tikai tad, ja funkcijai  $F(t)$  dota konkrēta izteiksme.

**Piezīme.** Atrisinot piemērus, parasti neatsaucas uz iegūto formulu (16.27), bet gan katrā piemērā atkārto šīs formulas izveidumam lietoto risinājuma gaitu.

**2. piemērs.** Atrast vispārīgo atrisinājumu diferenciālvienādojumam

$$y' + \frac{y}{x} = x. \quad (16.29)$$

**Atrisinājums.** Ievērojot izteiksmi (16.20), dabūjam vienādojumu

$$\begin{aligned} u'v + uv' + \frac{uv}{x} &= x \text{ jeb} \\ u'v + u \left( v' + \frac{v}{x} \right) &= x. \end{aligned} \quad (16.30)$$

Pieprasām:  $v' + \frac{v}{x} = 0$ , no kurienes pēc integrēšanas dabūjam, ka  $v = \frac{1}{x}$ . Funkcijai  $u$  paliek vienādojums

$$u'v = x \text{ jeb } u' = x^2.$$

Vēlreiz integrējot, dabūjam

$$u = \frac{1}{3} x^3 + C. \quad (16.31)$$

Pēc reizināšanas ar  $v$  atrodam diferenciālvienādojuma (16.29) vispārīgo atrisinājumu

$$y = \frac{1}{3} x^2 + \frac{C}{x}. \quad (16.32)$$

**132. §. Totālais diferenciālvienādojums** (eksaktais diferenciālvienādojums). Tā sauc diferenciālvienādojumu

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0, \quad (16.33)$$

ja tā kreisā puse ir kādas divu argumentu funkcijas pilnais diferenciālis. Apzīmējot minēto funkciju ar  $u(x, y)$ , dabūjam

$$du(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = P(x, y) dx + Q(x, y) dy, \quad (16.34)$$

un diferenciālvienādojums ir līdzvērtīgs ar vienādojumu

$$du(x, y) = 0, \quad (16.35)$$

no kurienes seko, ka \*

$$u(x, y) = C. \quad (16.36)$$

Šī vienādība ir diferenciālvienādojuma (16.35) vispārīgais integrālis.

Kā redzams, diferenciālvienādojuma integrēšana reducējas uz funkcijas  $u(x, y)$  atrašanu. Šī funkcija  $u(x, y)$  eksistē, ja vienādojuma kreisā puse ir pilnais diferenciālis.

Pilnā diferenciāļa nepieciešamā pazīme. Ja izteiksme

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad (16.37)$$

ir pilnais diferenciālis, tad nepieciešama vienādības

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (16.38)$$

pastāvēšana identiski, t. i., visām apskatāmajām  $x$  un  $y$  vērtībām.

Tiešām, pilnā diferenciāļa pastāvēšanas gadījumā no vienādības (16.34) seko

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Pilnā diferenciāļa pietiekamā pazīme. Ja vienādība (16.38) pastāv identiski, tad izteiksme (16.37) ir pilnais diferenciālis.

Pierādījumu iegūsim, reizē sniedzot arī metodi funkcijas  $u(x, y)$  konstruēšanai.

Vienādība (16.34) ir līdzvērtīga šādam vienādību pārim:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y). \quad (16.39)$$

Integrējam pirmo vienādību pēc  $x$ , turot  $y$  konstantu, dabūjam

$$u(x, y) = \int P(x, y) dx + \varphi(y),$$

\* Sk. zemteksta piezīmi 128. § 3. piemēram.



kur integrācijas konstante pie dažādām konstantām  $y$  vērtībām var pieņemt dažādas vērtības, un tāpēc tā īstenībā ir  $y$  funkcija, ko šeit apzīmējam ar  $\varphi(y)$ . Līdz ar to divu argumentu funkcijas  $u(x, y)$  meklēšana ir reducēta uz viena argumenta funkcijas  $\varphi(y)$  meklēšanu. Apzīmēsim vēl

$$\int P(x, y) dx = F(x, y), \quad (16.40)$$

un dabūjam

$$u(x, y) = F(x, y) + \varphi(y). \quad (16.41)$$

Funkcijas  $\varphi(y)$  atrašanai izteiksmi (16.41) ievietojam otrā vienādībā (16.39):

$$\frac{\partial u}{\partial y} = F'_y(x, y) + \varphi'(y) = Q(x, y),$$

no kurienes

$$\varphi'(y) = Q(x, y) - F'_y(x, y). \quad (16.42)$$

Uzdevuma atrisinājums ir iespējams, ja šīs vienādības labā puse nav atkarīga no  $x$ , t. i., ja tā ir konstanta attiecībā pret  $x$  (jo šīs vienādības kreisā puse nav atkarīga no  $x$ ) jeb ja atvasinājums

$$\frac{\partial}{\partial x}[Q(x, y) - F'_y(x, y)]$$

vienāds ar nulli. Bet šis atvasinājums arī izrādās vienāds ar nulli, ja pastāv vienādība (16.38):

$$\frac{\partial}{\partial x}[Q - F'_y] = \frac{\partial Q}{\partial x} - F''_{yx} = \frac{\partial Q}{\partial x} - F''_{xy} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0^*,$$

jo saskaņā ar formulu (16.40):

$$F''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right) = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Integrējot vienādību (16.42), dabūjam

$$\varphi(y) = \int [Q(x, y) - F'_y(x, y)] dy + C'. \quad (16.43)$$

So izteiksmi ievietojot vienādībā (16.41), atrodam meklēto funkciju  $u(x, y)$ . Ar šīs funkcijas ievietošanu vienādībās (16.39) var pārliecināties, ka iegūtā funkcija  $u(x, y)$  apmierina uzdevuma prasības, pie tam vienkāršības labad var ņemt  $C' = 0$ . Reizē ir arī pierādīts, ka vienādības (16.38) pastāvēšanas gadījumā izteiksme (16.37) ir pilnais diferenciālis.

\* Mēs pieņemam, ka funkcijas  $F(x, y)$  otrās kārtas jauktie atvasinājumi ir vienādi (100. §).

1. piemērs. Integrēt vienādojumu  $ydx + xdy = 0$ .

Atrisinājums. Seit pazīme (16.38) ir apmierināta, jo  $\frac{\partial y}{\partial y} = 1 = \frac{\partial x}{\partial x}$ . Saskaņā ar vienādībām (16.39) dabūjam

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x. \quad (16.44)$$

Integrējam pirmo vienādību pēc  $x$ :

$$u = xy + \varphi(y)$$

un pēc tam ievietojam  $u$  izteiksmi otrā vienādībā:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + \varphi'(y) = x,$$

no kurienes  $\varphi'(y) = 0$  un  $\varphi(y) = C'$ , kur var ņemt  $C' = 0$ . Tātad  $u = xy$  un dotā diferenciālvienādojuma vispārīgais integrālis ir  $xy = C$ , kas saskan ar vienādību (16.7).

Integrējošais reizinātājs. Dažreiz vienādojums formā (16.6) nav totāls diferenciālvienādojums, bet, pareizinoš ar attiecīgu izteiksmi  $M(x, y)$ , tas kļūst par totālu diferenciālvienādojumu. Tādā gadījumā izteiksmi  $M(x, y)$  sauc par *integrējošo reizinātāju*.

2. piemērs. Integrēt vienādojumu  $ydx - xdy = 0$ .

Sis vienādojums nav totāls diferenciālvienādojums, jo  $\frac{\partial y}{\partial y} = 1 \neq \frac{\partial(-x)}{\partial x} = -1$ . Toties pēc dalīšanas ar  $x^2$ , t. i., pēc reizināšanas ar  $\frac{1}{x^2}$ , tas kļūst par totālu diferenciālvienādojumu:

$$\frac{ydx - xdy}{x^2} = 0 \quad \text{jeb} \quad \frac{y}{x^2} dx - \frac{1}{x} dy = 0,$$

jo tagad

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{x^2} \right) = \frac{1}{x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{1}{x} \right).$$

Tātad  $\frac{1}{x^2}$  šeit ir integrējošais reizinātājs. Tagad atradīsim funkciju  $u(x, y)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{y}{x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{x}; \\ u &= -\frac{y}{x} + \varphi(y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{x} + \varphi'(y) = -\frac{1}{x}, \end{aligned}$$

no kurienes  $\varphi'(y) = 0$  un  $\varphi(y) = C' = 0$ . Tātad  $u = -\frac{y}{x}$ , un diferenciālvienādojuma vispārīgais integrālis ir  $-\frac{y}{x} = -C$ , no kurienes

$$y = Cx.$$

Atzīmēsim, ka šo pašu diferenciālvienādojumu var integrēt arī kā vienādojumu ar atdalāmiem mainīgajiem.

**133. §. Otrās kārtas diferenciālvienādojums, ko var atrisināt ar tiešu integrēšanu.** Par *otrās kārtas diferenciālvienādojumu* sauc vienādojumu, kas satur argumentu, nezināmo funkciju un tās pirmās un otrās kārtas atvasinājumus.\* Visvienkāršākais šāda diferenciālvienādojuma veids ir

$$y'' = f(x). \quad (16.45)$$

Sis vienādojums ne  $y$ , ne  $y'$  nesatur tieši, un to var atrisināt ar tiešu integrēšanu.

Integrējot vienu reizi, dabūjam

$$y' = \int f(x) dx + C_1.$$

Integrējot otro reizi, atrodam

$$y = \int \left[ \int f(x) dx \right] dx + C_1 x + C_2, \quad (16.46)$$

kas ir diferenciālvienādojuma (16.45) vispārīgais atrisinājums, un tas satur divas patvaļīgas konstantes.

Praktiski parasti ir jāatrod tāds partikulārs diferenciālvienādojuma atrisinājums, kas apmierina papildu nosacījumus (parasti sākuma nosacījumus). Lai atrastu vērtības divām patvaļīgām konstantēm, vajadzīgi divi papildu nosacījumi.

1. piemērs. Integrējot vienādojumu  $y'' = x^2$ , atrast partikulāro atrisinājumu, kas apmierina nosacījumus:

$$y|_{x=0} = 1, \quad y'|_{x=0} = -2.$$

Atrisinājums.  $y' = \frac{1}{3}x^3 + C_1$ ,  $y = \frac{1}{12}x^4 + C_1x + C_2$  (vispārīgais atrisinājums). Pielietojam sākuma nosacījumus, liekot abās pēdējās vienādībās  $x=0$ :

$1 = C_2$  un  $-2 = C_1$ . Diferenciālvienādojuma partikulārais atrisinājums ir  $y = \frac{1}{12}x^4 - 2x + 1$ .

2. piemērs. Brīvās krišanas gadījumā ar  $m$  apzīmēsim krītošas materiālas daļiņas masu, bet ar  $F$  — smaguma spēku, kas

\* Daži no minētiem lielumiem otrās kārtas diferenciālvienādojumā var neieiet tieši, piemēram, vienādojumā (16.45)  $y$  un  $y'$  neieiet tieši. Vienādojumā obligāti jāieiet otrās kārtas atvasinājumam.



darbojas uz šo daļiņu. Tad  $F=mg$ , kur  $g$  ir gravitācijas konstante. Ņemsim  $O$ s asi krišanas virzienā, t. i., vertikāli uz leju. Kustības paātrinājums ir  $\ddot{s}$ . Saskaņā ar attiecīgo dinamikas likumu (129. § 5. piem.) dabūjam diferenciālvienādojumu:

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= F \text{ jeb} \\ \ddot{s} &= g, \end{aligned} \quad (16.47)$$

pieņemot, ka gaisa pretestību varam neievērot.

Pēc divreizējas integrēšanas dabūjam kustības vienādojumu vispārīgā veidā

$$s = \frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2$$

ar divām patvaļīgām konstantēm  $C_1$  un  $C_2$ . Pieņemsim, ka doti sākuma nosacījumi

$$s|_{t=0} = s_0 \text{ un } v|_{t=0} = \dot{s}|_{t=0} = v_0,$$

kur  $s_0$  ir krītošās daļiņas sākuma koordināte,  $v_0$  — daļiņas sākuma ātrums. Ievērojot šos nosacījumus, iegūstam  $C_1 = v_0$ ,  $C_2 = s_0$ , un kustības vienādojums ir

$$s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0.$$

Speciālā gadījumā, kad  $s_0 = 0$  un  $v_0 = 0$ , t. i., kad krišana sākas koordinātu sākuma punktā bez sākuma ātruma, kustības vienādojums ir

$$s = \frac{1}{2}gt^2.$$

Salīdzinot dažādās grāmatas nodaļās apskatītos brīvās krišanas piemērus, redzam, ka, atvasinot kustības vienādojumu, atrodam kustības ātrumu un paātrinājumu, bet, integrējot ātrumu vai paātrinājumu, atrodam kustības vienādojumu.

**134. §. Otrās kārtas lineārais homogēnais diferenciālvienādojums ar konstantiem koeficientiem.** Šāda diferenciālvienādojuma veids ir

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (16.48)$$

kur  $p$  un  $q$  ir konstantes. Šo vienādojumu sauc par lineāru tāpēc, ka tas ir pirmās pakāpes vienādojums attiecībā pret  $y$ ,  $y'$  un  $y''$ . Par homogēnu to sauc tādēļ, ka attiecībā uz minētiem lielumiem vienādojums satur tikai pirmās pakāpes locekļus, bet nesatur locekli ar pakāpi 0, t. i., brīvo locekli.

Šādus diferenciālvienādojumus var atrisināt ar *Eilera metodi*,

pēc kuras meklē partikulārus atrisinājumus šādā izskatā:  $y = e^{rx}$ . Tad  $y' = re^{rx}$ ,  $y'' = r^2 e^{rx}$ , un pēc ievietošanas vienādojumā (16.48) dabūjam

$$r^2 e^{rx} + pr e^{rx} + q e^{rx} = 0$$

jeb pēc saīsināšanas ar eksponentfunkciju

$$r^2 + pr + q = 0. \quad (16.49)$$

Sis vienādojums ir algebrisks otrās pakāpes vienādojums, ko sauc par diferenciālvienādojuma (16.48) *raksturīgo vienādojumu*.

Ja vienādojumam (16.49) ir *divas reālas dažādas saknes*  $r_1$  un  $r_2$ , tad vienādojumam (16.48) ir divi partikulāri atrisinājumi  $y_1 = e^{r_1 x}$  un  $y_2 = e^{r_2 x}$ . Vienādojuma (16.48) atrisinājums ir arī funkcija

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, \quad (16.50)$$

par ko var pārliecināties, šo funkciju ievietojot vienādojumā (16.48). Ja šeit  $C_1$  un  $C_2$  ir patvaļīgas konstantes, tad funkciju (16.50) sauc par *diferenciālvienādojuma* (16.48) *vispārīgo atrisinājumu raksturīgā vienādojuma reālu dažādu sakņu gadījumā*.

1. piemērs. Atrisināt vienādojumu  $y'' + 5y' + 6y = 0$ .

Raksturīgais vienādojums šeit ir  $r^2 + 5r + 6 = 0$ , un tā saknes ir  $r_1 = -2$ ,  $r_2 = -3$ . Diferenciālvienādojumam vispārīgais atrisinājums ir  $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$ .

*Atrisinājuma fizikālā nozīme.* Uzdevumos, kur  $x$  nozīmē laiku, parasti  $r_1$  un  $r_2$  iznāk negatīvi (ja tie ir reāli). Funkcija (16.50) tad izsaka aperiodiski rimstošu procesu kā divu dilstošu eksponentfunkciju summa. Tā, piemēram, šāda funkcija var izteikt izstieptā atsperē piekārtā ķermeņa kustību vidē ar pietiekami lielu berzi (teiksim, smagā eļļā), ķermenim tuvojoties līdzsvara stāvoklim bez ārējā spēka iedarbības.

Vēl apskatīsim gadījumu, kad raksturīgā vienādojuma (16.49) saknes ir *kompleksas*:

$$r_1 = a + bi, \quad r_2 = a - bi.$$

Tad diferenciālvienādojuma (16.48) risināšana ar Eilera metodi sarežģījas, jo partikulāros atrisinājumus iegūstam eksponentfunkciju veidā ar kompleksiem kāpinātājiem, kuru nozīme šeit nav skaidra. Izrādās, ka vienādojumam (16.48) par atrisinājumu der funkcija

$$y = C e^{ax} \sin(bx + \Theta), \quad (16.51)$$

par ko var pārliecināties, ievietojot šo funkciju diferenciālvienādojumā (16.48). Ja šeit  $C$  un  $\Theta$  ir patvaļīgas konstantes, tad



funkciju (16.51) sauc par *diferenciālvienādojuma* (16.48) *vispārīgo atrisinājumu raksturīgā vienādojuma kompleksu sakņu gadījumā*.

2. piemērs. Atrisināt vienādojumu  $y'' + 4y' + 13y = 0$ .

Raksturīgais vienādojums šeit ir  $r^2 + 4r + 13 = 0$ , un tā saknes ir  $r_1 = -2 + 3i$ ,  $r_2 = -2 - 3i$ . Diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums ir  $y = Ce^{-2x} \sin(3x + \Theta)$ .

Atrisinājuma fizikālā nozīme. Uzdevumos, kur  $x$  nozīmē laiku, parasti  $a$  iznāk negatīvs. Funkcija (16.51) tad izsaka rimstošu svārstību procesu kā dilstošas eksponentfunkcijas reizinājumu ar sinusa funkciju. Tā, piemēram, šāda funkcija var izteikt atsperē piekārtā ķermeņa kustību ap savu līdzsvara stāvokli vidē ar pietiekami mazu berzi, ja šo kustību rada vienīgi sākuma mirklī esošie apstākļi (piemēram, atsperes izstiepšana), bet ne ārējs spēks, kas darbojas uz atsperi svārstību laikā.

**135. §. Diferenciālvienādojumu atrisināšanas veidi.** Kā redzams, apskatīto vienkāršāko diferenciālvienādojumu veidu gadījumos diferenciālvienādojumu atrisinājumu izdodas izteikt

1) tieši ar elementārām funkcijām, kā, piemēram, lineāriem homogēniem diferenciālvienādojumiem ar konstantiem koeficientiem [formulas (16.50) un (16.51)];

2) ar integrāļiem no zināmām funkcijām, kur šie integrāļi vēl jāatrisina, kā, piemēram, diferenciālvienādojumiem ar atdalāmiem mainīgajiem [formula (16.18)], lineāriem pirmās kārtas diferenciālvienādojumiem [formula (16.27)] un totāliem diferenciālvienādojumiem [formulas (16.40), (16.41) un (16.43)].

Otrajā gadījumā saka, ka diferenciālvienādojuma atrisinājums izteikts ar *kvadrātūrām*. (Vārda «kvadrātūra» tiešā nozīme ir laukuma aprēķināšana, ar ko saistās integrāļa atrisināšana.)

Sarežģītāku veidu diferenciālvienādojumiem atrisinājumus neizdodas izteikt iepriekšminētajos veidos. Tomēr atrisinājumus tiem garantē atrisinājumu *eksistences un unitātes teorēmas*. Šīs teorēmas precizē nosacījumus, pie kuriem var galvot par vienādojumu atrisinājumu eksistenci un vienīgumu.

Ipaši atzīmēsim unitātes teorēmu nozīmi: ja apskatāmā tipa uzdevumam par diferenciālvienādojuma atrisināšanu pastāv unitātes teorēma un ja ar kaut kādu metodi ir iegūts šī uzdevuma atrisinājums, tad ir garantija tam, ka pētāmais process, kuram jānotiek saskaņā ar formulēto uzdevumu, patiešām norisināsies — attiecīgās precizitātes robežās — saskaņā ar iegūto atrisinājumu.

Pazīstot diferenciālvienādojuma integrēšanas uzdevuma atrisinājuma eksistenci un unitāti, šī vienādojuma atrisinājumu var meklēt arī ar *skaitliskām diferenciālvienādojumu atrisināšanas metodēm*. So metožu lietošana nozīmē diferenciālvienādojuma atrisinājuma vērtību aptuvenu aprēķināšanu (piemēram, ar skaitļojamām mašīnām) atsevišķām argumenta vērtībām, izmantojot tieši pašu diferenciālvienādojumu, bet ne šī vienādojuma atrisinājuma formulu.



## Vingrinājumi

1. Pārbaudīt, ka funkcijas 1)  $y=Cx^3$  un 2)  $y=-4x^3$  apmierina diferenciālvienādojumu  $xy'-3y=0$ , pie tam otrā funkcija apmierina arī sākuma nosacījumu:  $y=4$ , kad  $x=-1$ .

2. Zinot, ka diferenciālvienādojumam  $xy'-3y=0$  vispārīgais atrisinājums ir  $y=Cx^3$ , atrast šim vienādojumam to atrisinājumu, kurš apmierina sākuma nosacījumu 1)  $y=3$ , kad  $x=1$ , 2)  $y=6$ , kad  $x=-2$ .

Diferenciālvienādojumam atrast vispārīgo atrisinājumu.

3.  $x^2y'+y=0$ .

4.  $xyy'=1-x^2$ .

5.  $x+xy+y'(y+xy)=0$ .

6.  $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$ .

7.  $2st^2ds=(1+t^2)dt$ .

Diferenciālvienādojumam atrast partikulāro atrisinājumu, kurš apmierina sākuma nosacījumu.

8.  $xy'+y=0$ ;  $y=4$ , kad  $x=-2$ . 9.  $2y'\sqrt{x}=y$ ;  $y=1$ , kad  $x=4$ .

10. Istabā, kuras temperatūra ir  $20^\circ\text{C}$ , novietots līdz  $100^\circ\text{C}$  sakarsēts ķermenis. Līdz  $60^\circ\text{C}$  tas atdziest 10 minūtēs. Pēc cik ilga laika tas atdziest līdz  $25^\circ\text{C}$ ?

Diferenciālvienādojumam atrast vispārīgo atrisinājumu.

11.  $y' - \frac{3y}{x} = x$ .

12.  $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

13.  $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$ .

14.  $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$ .

Diferenciālvienādojumam atrast partikulāro atrisinājumu, kas apmierina sākuma nosacījumu.

15.  $xy' + y - e^x = 0$ ;  $y=2$ , kad  $x=1$ .

16.  $t^2s = 2ts - 3$ ;  $s=3$ , kad  $t=1$ .

Materiālā daļiņa ar masu  $m$  kustas pa taisni bez sākuma ātruma vidē ar berzi dotā spēka  $F(t)$  iespaidā, kurš darbojas kustības virzienā. Atrast ātrumu  $v$  atkarībā no laika  $t$ , pieņemot, ka berze ir proporcionāla ātrumam.

17.  $F(t)=kt$ , kur  $k$  — konstante. 18.  $F(t)=f_0 \sin \omega t$ .

19. Elektriskā strāva  $i$ , kas plūst elektriskā ķēdē ar virknē saslēgtu pretestību  $R$  un induktivitāti  $L$ , apmierina diferenciālvienādojumu  $L \frac{di}{dt} + Ri = u$ , kur  $u$  — ķēdei pieslēgtais spriegums. Atrast strāvu ķēdē, kad sākuma mirkli  $t=0$  tai pieslēgts konstants spriegums  $u=u_0$ , bet sākuma strāvas nav (pieņemam, ka  $L$  un  $R$  ir konstanti).

Diferenciālvienādojumam atrast vispārīgo atrisinājumu.

20.  $(xy^2-2x^3)dx+(x^2y-2y^3)dy=0$ .

21.  $(ye^x-2x)dx+e^xdy=0$ .

22.  $\frac{ydx}{x^2+y^2} = \left( \frac{x}{x^2+y^2} - 1 \right) dy$ .

Diferenciālvienādojumam atrast vispārīgo atrisinājumu, zinot vienādojumam integrējošu reizinātāju.

23.  $ydx - (x+y^2)dy=0$ ,  $M = \frac{1}{y^2}$ .

24.  $(x^2+y^2+2x)dx+2ydy=0$ ,  $M=e^x$ .

Diferenciālvienādojumam atrast vispārīgo atrisinājumu.

25.  $y''=x+\cos x$ .

26.  $y''=\ln x$ .

27.  $y''-y'-2y=0$ .

28.  $y''-4y=0$ .

29.  $y''+3y'=0$ .

30.  $y''+4y=0$ .

31.  $y''+6y'+13y=0$ .

32.  $4y''-8y'+5y=0$ .

Diferenciālvienādojumam atrast partikulāro atrisinājumu, kurš apmierina sākuma nosacījumus.

33.  $y''-4y'+3y=0$ ,  $y|_{x=0}=6$ ,  $y'|_{x=0}=10$ .

34.  $y''+4y'+29y=0$ ,  $y|_{x=0}=0$ ,  $y'|_{x=0}=15$ .

## BEZGALIGAS RINDAS

## 17. NODAĻA

## SKAITĻU RINDAS

136. §. Bezgalīga rinda kā maiņas process. Bezgalīga rinda ir viens no svarīgākajiem matemātiskās analīzes jēdzieniem, un tai ir tiešs sakars ar mainīga lieluma robežu.

Rindas jēdziena labākai izpratnei aplūkosim maiņas procesu, kurā mainīgais lielums mainās pa kādas skaitļu virknes locekļiem, piemēram,

$$x = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Attiecīgā skaitļu virkne te ir

$$1; 1\frac{1}{2}; 1\frac{3}{4}; 1\frac{7}{8}; 1\frac{15}{16}; \dots \quad (17.1)$$

Šīs virknes atsevišķos locekļus varam dabūt arī šādi:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1; \quad x_2 = 1 + \frac{1}{2}; \quad x_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}; \\ x_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}; \quad x_5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}; \dots, \end{aligned}$$

t. i., summējot pēc kārtas skaitļu virknes

$$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2^2}; \frac{1}{2^3}; \frac{1}{2^4}; \dots \quad (17.2)$$

locekļus.

Pētāmo maiņas procesu (17.1) tādējādi ir iespējams saistīt ar citu (parasti vienkāršāku) maiņas procesu (17.2), pie tam mainīgā lieluma  $x$  robežu dabū kā skaitļu virknes (17.2) visu locekļu

summu. Tiešām, tā kā skaitļu virkne (17.2) ir bezgalīgi dilstoša ģeometriskā progresija ar kvocientu  $q = \frac{1}{2}$  un pirmo locekli  $a_1 = 1$ , tad tās summa, kā zināms, ir

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2,$$

ko dabū arī tieši, pārejot mainīgā lieluma  $x$  izteiksmē  $2 - \frac{1}{2^{n-1}}$  uz robežu, kad  $n \rightarrow \infty$ .

Izteiksmi

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots,$$

kas satur bezgalīgi daudz saskaitāmos, sauc par *bezgalīgu rindu* jeb vienkārši par *rindu*.

Ikkatrs maiņas process  $x = f(n)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , t. i., process, kurā mainīgais lielums mainās pa kādas skaitļu virknes

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$$

locekļiem, ir izsakāms vienmēr kādas bezgalīgas rindas veidā. Pietiek tikai ņemt  $a_1 = x_1$ ;  $a_2 = x_2 - x_1$ ;  $a_3 = x_3 - x_2$ ;  $a_4 = x_4 - x_3$ ; ..., un no dabūtajiem skaitļiem sastādītā rinda

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

ir meklētā. Tādējādi katra bezgalīga rinda pārstāv kādu noteiktu maiņas procesu, kurā mainīgā lieluma katru sekojošo vērtību dabū no iepriekšējās, pievienojot tai vēl vienu rindas locekli.

Sādas «bezgalīgas summas» matemātiskajā analizē plaši izmanto gan dažādu elementāru funkciju tuvināto vērtību ērtākai aprēķināšanai, gan dažādu jaunu funkciju definēšanai. Plašu pielietojumu bezgalīgās rindas atrod arī funkciju integrēšanā, diferenciālvienādojumu atrisināšanā u. c.

Rindas var sastādīt ne vien no skaitļiem, bet arī no funkcijām, vektoriem vai citiem matemātiskiem objektiem. Attiecīgās rindas tad arī sauc par skaitļu rindām, funkciju rindām, vektoru rindām vai tml. Sajā nodaļā mēs aplūkosim vienīgi skaitļu rindas.

**137. §. Pamatjēdzieni; konverģentas un diverģentas rindas.** Skaitļu rinda

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

ir dota, ja ir zināma vai nu tās vispārīgā locekļa  $a_n$  izteiksme (kā dabiskā argumenta  $n$  funkcija), vai arī ir uzrakstīti tik daudz tās pirmo locekļu, ka kļūst saprotama jebkura rindas locekļa



veidošanās kārtula. Pirmajā gadījumā rindas locekļus dabū, ņemot pēc kārtas vispārīgā locekļa izteiksmē  $n=1, 2, 3, \dots$ , bet otrajā gadījumā cenšas vispirms sastādīt vispārīgā locekļa izteiksmi.

Dažkārt nākas noteikt arī rindas locekļus, kas ir abās pusēs rindas vispārīgajam loceklim, t. i., locekļus  $a_{n-1}$  un  $a_{n+1}$ .

Piemēri. 1. Uzrakstīt rindu, kuras vispārīgais loceklis  $a_n = \frac{n^2}{(n+2)!}$ ; noteikt arī šīs rindas locekļus  $a_{n-1}$  un  $a_{n+1}$ .

Liekot pēc kārtas vispārīgā locekļa formulā  $n=1, 2, 3, \dots$ , dabū

$$a_1 = \frac{1}{3!}; \quad a_2 = \frac{2^2}{4!}; \quad a_3 = \frac{3^2}{5!}; \dots,$$

un doto rindu var uzrakstīt tā:

$$\frac{1}{3!} + \frac{2^2}{4!} + \frac{3^2}{5!} + \dots$$

Ievērosim, ka rindas locekļu skaitītājos kāpināšanas darbība nav izpildīta. Ar to cenšas padarīt rindu «uzskatāmāku» (sevišķi, ja rindas vispārīgā locekļa izteiksme nav dota) — tā kļūst labāk saskatāms rindas locekļu veidošanās likums.

Lai dabūtu rindas locekļus  $a_{n-1}$  un  $a_{n+1}$ , ir jāņem rindas vispārīgā locekļa izteiksmē  $n$  vietā attiecīgi  $n-1$  un  $n+1$ . Dabūjam

$$a_{n-1} = \frac{(n-1)^2}{(n-1+2)!} = \frac{(n-1)^2}{(n+1)!};$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+1+2)!} = \frac{(n+1)^2}{(n+3)!}.$$

2. Noteikt vispārīgā un tam sekojošā locekļa izteiksmes rindā

$$\frac{3 \cdot 5}{2} + \frac{5 \cdot 7}{2^2 + 1} + \frac{7 \cdot 9}{3^2 + 1} + \frac{9 \cdot 11}{4^2 + 1} + \dots$$

Rindas locekļu saucēju veidošanās likums viegli saskatāms, ja ievēro, ka arī pirmā locekļa saucējs  $2=1^2+1$ ; vispārīgā locekļa saucējs tāpat ir  $n^2+1$ . Lai noteiktu vispārīgā locekļa skaitītāju, ievērosim, ka skaitītāju pirmie reizinātāji veido aritmētisko progresiju ar diferenci  $d=2$  un pirmo locekli 3; vispārīgā locekļa skaitītāja pirmais reizinātājs tāpat vienāds ar  $3+2(n-1)=2n+1$ . Tā kā visu locekļu skaitītāju otrie reizinātāji ir par 2 lielāki nekā pirmie, tad

$$a_n = \frac{(2n+1)(2n+3)}{n^2+1}.$$

Lai noteiktu sekojošo locekli, dabūtājā vispārīgā locekļa izteiksmē  $n$  jāapmaina ar  $n+1$ . Dabūjam

$$a_{n+1} = \frac{[2(n+1)+1][2(n+1)+3]}{(n+1)^2+1} = \frac{(2n+3)(2n+5)}{(n+1)^2+1}.$$

(Šajā piemērā skaitītāju var uzrakstīt arī vieglāk, ja ievēro, ka katra locekļa pirmais reizinātājs ir vienāds ar iepriekšējā locekļa otro reizinātāju, bet otrais reizinātājs vienmēr par 2 lielāks nekā pirmais.)

**Piezīme.** Rindas apzīmēšanai bieži izmanto arī summas simbolu  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

Apzīmēsim rindas pirmo  $n$  locekļu summu ar  $s_n$ , t. i.,

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n.$$

Summu  $s_n$  sauksim par rindas  $n$ -to *parciālsumu*. Ja  $n$  mainās, tad mainās arī  $s_n$ ; pie tam ir iespējami divi gadījumi.

1. *Parciālsumma*  $s_n$  tiecas uz kādu galīgu robežu  $s$ , kad  $n \rightarrow \infty$ . Tādā gadījumā saka, ka dotā rinda *konverģē* un ka tās summa ir vienāda ar  $s$ .

2. *Parciālsummai*  $s_n$  neeksistē galīgā robeža, kad  $n \rightarrow \infty$ . Tādā gadījumā saka, ka dotā rinda *diverģē* un ka tādai rindai summas nav.

Ilustrācijai aplūkosim *ģeometrisku rindu*

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + \dots,$$

t. i., rindu, kuras locekļi mainās ģeometriskā progresijā. Tās parciālsumma, kā zināms, ir

$$s_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{1-q^n}{1-q},$$

un te ir jāizšķir šādi gadījumi.

1. Ja  $|q| < 1$ , tad  $q^n \rightarrow 0$  un  $s_n \rightarrow \frac{1}{1-q}$ , kad  $n \rightarrow \infty$ ; šajā gadījumā ģeometriskā rinda konverģē un tās summa  $s = \frac{1}{1-q}$ .

2. Ja  $|q| > 1$ , tad  $q^n \rightarrow \infty$ , un, tā kā saucējs  $1-q$  ir pastāvīgs, tad arī  $s_n \rightarrow \infty$ , t. i., rinda diverģē.

3. Ja  $q = 1$ , tad rinda pieņem veidu

$$1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$$

un tās parciālsumma  $s_n = n$ ; tātad arī šajā gadījumā  $s_n \rightarrow \infty$ .

4. Ja  $q = -1$ , tad mums ir rinda

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

un tās parciālsумma  $s_n$ , kad  $n \rightarrow \infty$ , kļūst pārmaiņus vienāda ar 0 vai 1. Tādējādi arī šajā gadījumā parciālsумmai  $s_n$  neeksistē robeža, t. i., rinda diverģē.

Kopsavilkumā varam teikt, ka ģeometriskā rinda konverģē vienīgi tajos gadījumos, kad  $|q| < 1$ .

Kā otru piemēru aplūkosim rindu

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

Te mums trūkst gatavas parciālsумmas izteiksmes kā ģeometriskai rindai. Tā tomēr viegli sastādāma, ja ievērojam, ka rindas atsevišķie locekļi ir uzrakstāmi kā divu skaitļu differences

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} &= 1 - \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \quad \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}; \dots \\ \dots; \quad \frac{1}{n(n+1)} &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Tādēļ

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

no kurienes

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\text{un } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Aplūkotā rinda tāpat konverģē, un tās summa ir vienāda ar 1.

**138. §. Konverģentu rindu īpašības; rindu konverģences nepieciešamais noteikums.** Atzīmēsim vispirms tās konverģento rindu īpašības, kuru dēļ dažas operācijas ar tām ir izpildāmas kā ar galīgām summām.

1. Ja rinda

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

konverģē un tās summa ir  $s$ , tad konverģē arī rinda

$$ka_1 + ka_2 + ka_3 + \dots + ka_n + \dots,$$

ko dabū, ja pirmās rindas katru locekli pareizina ar kādu skaitli  $k$ , un tās summa ir vienāda ar  $ks$ . Isāk: *konverģentu rindu var pa locekļiem reizināt ar vienu un to pašu skaitli.*

Tiešām, apzīmējot otrās rindas parciālsумmu ar  $S_n$ , varam rakstīt

$$S_n = (ka_1 + ka_2 + \dots + ka_n) = k(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = ks_n,$$



bet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (k s_n) = k \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = k s,$$

ar ko apgalvojums ir pierādīts.

2. Ja konverģē rindas

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

un

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots,$$

un to summas ir attiecīgi  $s$  un  $S$ , tad konverģē arī rinda

$$(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \dots + (a_n \pm b_n) + \dots$$

un tās summa ir  $s \pm S$ . Isāk: *divas konverģentas rindas var pa locekļiem saskaitīt.*

Lai to pierādītu, jāievēro, ka pēdējās rindas parciālsумma

$$(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \dots + (a_n \pm b_n) = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \pm \\ \pm (b_1 + b_2 + \dots + b_n) = s_n \pm S_n,$$

un jāpāriet uz robežu, kad  $n \rightarrow \infty$ .

Būtu kļūdaini tomēr domāt, ka it visas kārtulas, kas pareizas galīgām summām, saglabājas arī bezgalīgām rindām. Tā, piemēram, mēs zinām, ka galīga skaita saskaitāmo summa nav atkarīga no saskaitāmo kārtības. Vēlāk redzēsīm, ka konverģentām rindām ne vienmēr drikstam patvaļīgi pārkārtot rindas locekļus, neriskējot ne vien izmainīt rindas summu, bet pat pārvērst doto rindu diverģentā rindā.

3. Rindas konverģences īpašība saglabājas, ja mēs izmainām galīgu skaitu tās locekļu. Tas viegli saprotams, ja ievēro, ka tā dabūtās rindas summa atšķiras no sākotnējās rindas summas par kādu galīgu lielumu.

4. *Konverģentas rindas vispārīgais loceklis  $a_n$  tiecas uz nulli, kad  $n \rightarrow \infty$ .*

Tiesām, tā kā

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

un

$$s_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1},$$

tad

$$a_n = s_n - s_{n-1}.$$

Bet, tā kā rinda konverģē, tad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

Pierādītā teorēma izsaka t. s. rindu konverģences *nepieciešamo noteikumu*. Ja šis noteikums nav izpildīts, t. i., ja  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , tad rinda nevar konverģēt (tā diverģē). Tā, piemēram, rinda

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{n}{n+1} + \dots$$

diverģē, jo  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$ ;

tātad  $a_n$  netiecas uz nulli.

Ka šis noteikums nav *pietiekams*, secināms, aplūkojot t. s. *harmonisko rindu*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Rindas vispārīgais loceklis te tiecas uz nulli, tomēr šī rinda diverģē.

Lai par to pārliecinātos, ņemsim pazīstamo robežu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

un atcerēsimies, ka maiņas procesā mainīgais lielums  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  visu laiku paliek mazāks par savu robežu (sk. 61. §), t. i.,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e.$$

Logaritmējot šīs nevienādības abas puses pie bāzes  $e$ , dabūjam

$$n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \ln e = 1,$$

no kurienes

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

Tā kā

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n,$$

tad pēdējā nevienādība pārrakstāma formā

$$\ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}.$$

Liksim tagad dabūtajā nevienādībā  $n=1, 2, 3, \dots$ . Tas dod šādas  $n$  nevienādības:

$$\ln 2 - \ln 1 < 1$$

$$\ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2}$$

$$\ln 4 - \ln 3 < \frac{1}{3}$$

$$\ln 5 - \ln 4 < \frac{1}{4}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}.$$

Saskaitot šīs  $n$  nevienādības, kreisajā pusē visi locekļi, izņemot otro un priekšpēdējo, anulējas. Bet, tā kā  $\ln 1 = 0$ , tad rezultātā dabū, ka

$$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Pēdējās nevienādības labajā pusē ir harmoniskās rindas daļsumma  $s_n$ . Tā kā  $\ln(n+1) \rightarrow \infty$ , kad  $n \rightarrow \infty$ , tad no šīs nevienādības secināms, ka arī  $s_n \rightarrow \infty$ , t. i., harmoniskā rinda diverģē.

**139. §. Pozitīvu locekļu rindas; rindu salīdzināšana.** Ja rindas visi locekļi ir pozitīvi, tad tās daļsumma  $s_n$  monotoni aug un tādēļ ir iespējami tikai divi gadījumi: vai nu  $s_n \rightarrow \infty$ , un rinda tādā gadījumā diverģē, vai arī  $s_n \rightarrow s$  ( $s$  — galīgs skaitlis), t. i., rinda konverģē; trešais gadījums, kad daļsumma nepārtraukti svārstās, te nav iespējams.

Pozitīvu locekļu rindu konverģenci bieži vien ir iespējams noteikt, salīdzinot to ar kādu citu rindu, kuras konverģence (vai diverģence) jau zināma. Ja pētāmas rindas locekļi, sākot ar kādu numuru, nepārsniedz kādas pazīstamas *konverģentas* rindas atbilstošos locekļus, tad šī rinda konverģē. Ja turpretim jaunās rindas locekļi nav mazāki par kādas pazīstamas *diverģentas* rindas atbilstošajiem locekļiem, tad arī jaunā rinda diverģē.

1. piemērs. Aplūkosim rindu

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \dots + \frac{1}{n^n} + \dots$$

Šīs rindas locekļi, sākot ar otro, nepārsniedz ģeometriskās rindas

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$



attiecīgos locekļus, jo  $n^n \geq 2^n$ , sākot ar  $n=2$ . Bet, tā kā pēdējā rinda konverģē (kvocients  $q=\frac{1}{2}$ ), tad konverģē arī dotā rinda.

2. piemērs. Noskaidrot konverģenci rindai

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

Salīdzinot šo rindu ar harmonisko rindu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots,$$

redzam, ka tās locekļi nav mazāki par harmoniskās rindas locekļiem ( $\sqrt{n} \leq n$ , tādēļ  $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ ), bet, tā kā harmoniskā rinda diverģē, tad diverģē arī dotā rinda.

3. piemērs. Rindu

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots$$

ar harmonisko rindu tieši salīdzināt nevaram. Salīdzināsim to ar rindu, ko dabū, harmoniskās rindas katru locekli pareizinot ar  $\frac{1}{2}$  (rindas konverģenci, tātad arī diverģenci tas neiespaido), t. i., ar rindu

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n} + \dots$$

Tā kā dotās rindas locekļi ir lielāki par dabūtās diverģentās rindas atbilstošajiem locekļiem, tad dotā rinda diverģē.

4. piemērs. Ja rindai

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

atmetam pirmo locekli (tas konverģenci neiespaido), tad dabū rindu

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots,$$

kuras locekļi nepārsniedz rindas

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

attiecīgos locekļus, jo  $(n+1)^2 > n(n+1)$ . Bet, tā kā pēdējā rinda, kā agrāk redzējām, konverģē, tad konverģē arī iepriekšējā un līdz ar to arī dotā rinda.

1. piezīme. Ja dotās rindas locekļi izrādītos *lielāki* par atbilstošajiem konverģentas rindas locekļiem, tad vēl neko par dotās rindas konverģenci nevar secināt. Tā, piemēram, ja rindu

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

gribētu salīdzināt ar rindu

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

tieši, tad mēs secinātu, ka dotās rindas locekļi ir lielāki par otrās rindas atbilstošajiem locekļiem, jo  $n^2 < n(n+1)$ . Bet no tā vēl neko nevaram spriest par dotās rindas konverģenci (dotā rinda varētu arī diverģēt). Tāpat gadījumā, ja dotās rindas locekļi *nepārsniedz* kādas diverģentas rindas atbilstošos locekļus, tad no tā vēl neseko dotās rindas konverģence; tikpat labi tā varētu arī diverģēt.

2. piezīme. Rindu salīdzināšanai izdevīgi izmantot rindu

$$1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \dots + \frac{1}{n^k} + \dots$$

Var pierādīt (sk. 141. § 3. piemēru), ka tāda rinda konverģē, ja  $k > 1$  (kā 4. piemērā), bet diverģē, ja  $k \leq 1$  ( $k=1$  harmoniskai rindai, bet 2. piemērā  $k=\frac{1}{2}$ ). Rindu salīdzināšana ir spēcīgs pārņemiens rindu konverģences noteikšanā, ja vien to veic saprātīgi. Tas jāievēro jo sevišķi tāpēc, ka sastādīt rindām vienkāršas parciālsummā izteiksmes un noteikt šo parciālsummā robežas izdodas tikai retos gadījumos.

**140. §. Dalambēra pietiekamā konverģences pazīme pozitīvu locekļu rindām.** Ar rindu salīdzināšanu ir pamatojama arī šāda t. s. Dalambēra konverģences pazīme:

*Ja pozitīvu locekļu rindai*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$  un  $l < 1$ , tad rinda konverģē; ja turpretim  $l > 1$ , tad rinda diverģē.

Otro apgalvojumu var pierādīt pavisam vienkārši, jo attiecība  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$  tad, sākot ar kādu numuru, kļūst un, numuram tālāk augot, arī paliek lielāka par 1, t. i.,  $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$  jeb  $a_{n+1} > a_n$ . Tas rāda, ka

tādā gadījumā rindas locekļi, sākot ar kādu numuru, aug un nav izpildīts nepieciešamais konverģences noteikums.

Pieņemsim tagad, ka  $l < 1$ . Izvēlēsimies kādu patvaļīgu skaitli  $q$  starp  $l$  un 1. Tā kā attiecība  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$  neierobežoti tuvojas  $l$ , tad maiņas procesā, sākot ar kādu numuru  $n=m$ , tā kļūst un, numuram tālāk pieaugot, arī paliks mazāka par  $q$ , t. i.,

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} < q; \frac{a_{m+2}}{a_{m+1}} < q; \frac{a_{m+3}}{a_{m+2}} < q; \dots,$$

no kurienes

$$a_{m+1} < a_m q; a_{m+2} < a_{m+1} q < a_m q^2; a_{m+3} < a_{m+2} q < a_m q^3; \dots,$$

t. i., dotās rindas locekļi, sākot ar numuru  $m$ , nepārsniedz ģeometriskas rindas

$$a_m + a_m q + a_m q^2 + a_m q^3 + \dots$$

locekļus. Bet, tā kā  $0 < q < 1$ , tad šī ģeometriskā rinda konverģē. Bet tad konverģē arī dotā rinda.

1. piemērs. Noteikt konverģenci rindai

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \frac{5}{3^4} + \dots$$

Rindas vispārīgais loceklis  $a_n = \frac{n}{3^{n-1}}$ , bet sekojošais loceklis  $a_{n+1} = \frac{n+1}{3^n}$ . Attiecība

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)3^{n-1}}{3^n \cdot n} = \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3n},$$

un tādēļ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3}.$$

Saskaņā ar Dalambēra konverģences pazīmi šī rinda konverģē.

2. piemērs. Rindai

$$k + \frac{k^2}{2!} + \frac{k^3}{3!} + \dots + \frac{k^n}{n!} + \dots,$$

kur  $k$  ir pozitīvs skaitlis,

$$a_{n+1} = \frac{k^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{k^{n+1}}{n!(n+1)},$$

bet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^{n+1} n!}{n! (n+1) k^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n+1} = 0,$$



tādēļ arī šī rinda konverģē, pie tam neatkarīgi no tā, cik liels ir skaitlis  $k$ . Ievērosim, ka, piemēram, ja  $k=1000$ , rindas locekļi sākmā aug  $\left(\frac{1000}{n+1} > 1\right)$ , ja vien  $n < 999$ , bet, sākot ar 1000. locekli, sāk strauji dilt.

**Piezīme.** Gadījumos, kad  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{n} = 1$ , Dalambēra pazīme atbildi par rindas konverģenci vai diverģenci nedod. Tā, piemēram, nē vien rindai

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} = 1,$$

bet arī harmoniskai rindai

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1;$$

tomēr pirmā rinda konverģē, kamēr otrā diverģē.

Šādu rindu konverģences noteikšanai jālieto citi kritēriji.

**141. §.\* Konverģences integrālā pazīme.** Dažreiz jautājumu par rindas konverģenci vai diverģenci var izšķirt, salīdzinot doto rindu ar neīsto integrāli (sk. 123. §), kam zemintegrāļa funkcija  $f(x)$  veselām argumenta vērtībām dod rindas locekļus

$$a_1 = f(1); a_2 = f(2); a_3 = f(3); \dots a_n = f(n); \dots$$

Var pierādīt šādu t. s. konverģences integrālo pazīmi:  
*Rinda*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots, \text{ kur } a_n = f(n),$$

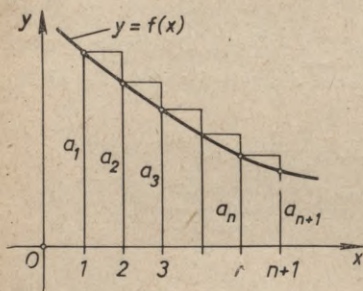
*kuras locekļi ir pozitīvi un monotoni dilst, ir konverģenta vai diverģenta atkarībā no tā, vai integrālis*

$$I = \int_1^{\infty} f(x) dx$$

*eksistē vai neeksistē.*

Pierādījumam attēlosim grafiski rindas locekļus, atliekot uz abscisu ass rindas locekļu numurus  $1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots$ , bet uz ordinātu ass — atbilstošās rindas locekļu vērtības  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$  (135. zīm.). Caur dabūtajiem punktiem novilksim līniju  $y=f(x)$ .

Aplūkojot 135. zīmējumu, ievērojam, ka rindas daļējās summas  $s_n$  var izteikt ar tādu taisnstūru laukumu summu, kuru pamati ir vienādi ar vienību, bet augstumi vienādi ar rindas locekļu vērtībām  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Visu šo taisnstūru laukumu summa ir lielāka



135. zīm.

par liklīnijas trapeces laukumu, ko ierobežo likne  $y = f(x)$  un taisnes  $x=1$ ,  $x=n+1$ ,  $y=0$ . Izsakot trapeces laukumu ar noteikto integrāli, varam rakstīt, ka

$$s_n > \int_1^{n+1} f(x) dx. \quad (17.3)$$

Aplūkosim tagad 136. zīmējumu. Te pirmā taisnstūra augstums ir  $a_2$ , tādēļ tā laukums arī ir vienāds ar  $a_2$ . Otrā taisnstūra laukums ir  $a_3$  utt., bet pēdējā taisnstūra laukums ir  $a_{n+1}$ . Visu šo taisnstūru laukumu summa ir vienāda ar rindas locekļu summu, sākot ar  $a_2$  līdz  $a_{n+1}$ , t. i., vienāda ar  $s_{n+1} - a_1$ . No otras puses, taisnstūru kopīgais laukums šoreiz ir mazāks par tās pašas liklīnijas trapeces laukumu, tādēļ

$$s_{n+1} - a_1 < \int_1^{n+1} f(x) dx,$$

no kurienes

$$s_{n+1} < \int_1^{n+1} f(x) dx + a_1. \quad (17.4)$$

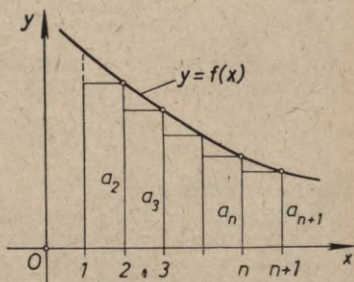
Aplūkosim tagad abus iespējamus gadījumus.

1. Pieņemsim, ka integrālis  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  eksistē, t. i., tam ir galīga vērtība. Tā kā

$$\int_1^{n+1} f(x) dx < \int_1^{\infty} f(x) dx,$$

tad saskaņā ar nevienādību (17.4)

$$s_n < s_{n+1} < \int_1^{\infty} f(x) dx + a_1,$$



136. zīm.

t. i., parciālsūmma  $s_n$  ir ierobežota. Bet, numuram  $n$  augot, tā var tikai augt, jo visi rindas locekļi ir pozitīvi. Pēc pazīstamās Veierštrāsa teorēmas šādam monotoni augošam, bet ierobežotam mainīgam lielumam eksistē robeža

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s,$$

t. i., rinda konverģē.

2. Pieņemsim tagad, ka  $\int_1^{\infty} f(x) dx = \infty$ . Tas nozīmē, ka  $\int_1^{n+1} f(x) dx$ , numuram  $n$  augot, neierobežoti aug. Bet tad saskaņā ar nevienādību (17.3) arī  $s_n$  neierobežoti aug, t. i., dotā rinda diverģē.

Ar to teorēma arī ir pierādīta.

Konverģences integrālā pazīme bieži vien palīdz izšķirt jautājumu par rindas konverģenci tajos gadījumos, kad Dalambēra pazīme atbildi nedod. Aplūkosim dažus piemērus.

1. piemērs. Harmoniskās rindas

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

locekļi monotoni dilst, bet vispārīgais loceklis  $a_n = f(n) = \frac{1}{n}$ . Tādēļ var ņemt  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Šajā gadījumā integrālis

$$I = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{\infty}$$

un tas neeksistē, jo  $\ln x \rightarrow \infty$ , ja  $x \rightarrow \infty$ . Tātad dotā rinda diverģē, ko mēs ar citu paņēmieni pierādījām jau iepriekš (sk. 138. §).

2. piemērs. Rindai

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

zemintegrāļa funkcija  $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$  arī ir monotoni dilstoša intervālā  $(1; +\infty)$ , bet

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x(x+1)} &= \int_1^{\infty} \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = \ln \frac{x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \Big|_1^{\infty} = \\ &= \ln \frac{x}{x+1} \Big|_1^{\infty} = \ln \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \Big|_1^{\infty} = \ln 1 - \ln \frac{1}{2} = \ln 2; \end{aligned}$$

ši rinda tātad konverģē.



3. piemērs. Aplūkosim vēl t. s. *vispārināto harmonisko rindu*

$$1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \dots + \frac{1}{n^k} + \dots,$$

kur  $k$  ir jebkurš skaitlis. Ja  $k \leq 0$ , rinda ir, acīm redzot, diverģenta, bet, ja  $k > 0$ , tad rindas locekļi monotoni dilst un tās konverģences noteikšanai varam izmantot integrālo pazīmi. Liekot  $f(x) = \frac{1}{x^k}$  un pieņemot, ka  $k \neq 1$  (šis gadījums jau aplūkots 1. piemērā), dabū

$$I = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^k} = \int_1^{\infty} x^{-k} dx = \left. \frac{x^{1-k}}{1-k} \right|_1^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1-k}}{1-k} - \frac{1}{1-k}.$$

Tālākais ir atkarīgs no kāpinātāja  $k$  vērtības: ja  $k < 1$ , tad  $1-k > 0$  un  $x^{1-k} \rightarrow \infty$ , bet, ja  $k > 1$ , tad  $1-k < 0$  un  $x^{1-k} = \frac{1}{x^{k-1}} \rightarrow 0$ . Pirmajā gadījumā rinda tāpat diverģē, bet otrajā gadījumā konverģē.

Tā kā rinda diverģē arī, ja  $k=1$ , tad kopsavilkumā varam teikt, ka vispārinātā harmoniskā rinda konverģē, ja  $k > 1$ , bet diverģē, ja  $k \leq 1$ .

Ievērosim, ka, lietojot aplūkotās rindas konverģences noteikšanai Dalambēra pazīmi, mēs atbildi nedabūtu, jo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{(n+1)^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^k = 1.$$

Integrālā pazīme tāpat arī šoreiz izrādījās spēcīgāka par Dalambēra pazīmi. Atsevišķos gadījumos vienīgi var rasties grūtības neistā integrāļa aprēķināšanā.

**142. §. Alternējošas rindas. Leibnica konverģences pazīme.** Par alternējošu rindu sauc rindu

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots,$$

kur  $a_1, a_2, a_3, \dots$  ir pozitīvi skaitļi, t. i., rindu, kurai ik divi blakus stāvošie locekļi ir ar pretējām zīmēm.\*

\* Izklāsta vienkāršības dēļ pieņemts, ka rindas pirmais loceklis ir pozitīvs. Gadījumā, kad rindas pirmais loceklis ir negatīvs, var reducēt uz iepriekšējo, pareizinot rindu pa locekļiem ar skaitli  $(-1)$ . Kā agrāk redzējām, šāda operācija rindas konverģenci neizjauc; vienīgi rindas summa maina zīmi uz pretējo.

Ievērosim vēl, ka (ērtības dēļ) rindas locekļa zīme ir izlikta atsevišķi, jo skaitļi  $a_1, a_2, a_3, \dots$  ir domāti pozitīvi.

Alternējošām rindām ir spēkā šāda t. s. Leibnica teorēma:

*Ja alternējošas rindas locekļi pēc absolūtās vērtības monotoni dilst un vispārīgais loceklis tiecas uz nulli, tad rinda konverģē.*

Lai teorēmu pierādītu, pieņemsim vispirms, ka  $n$  ir pāra skaitlis; tad rindas parciālsумma  $s_n$  ir uzrakstāma divos veidos:

$$s_n = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{n-1} - a_n)$$

un

$$s_n = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{n-2} - a_{n-1}) - a_n.$$

Abās šajās vienādībās visas iekavas ir pozitīvas, jo  $a_k > a_{k+1}$  visiem  $k$ . No pirmās vienādības tādēļ secināms, ka

$$s_n > 0$$

(kā pozitīvu skaitļu summa) un rindas parciālsумma monotoni aug reizē ar  $n$ , jo nāk klāt arvien jauni pozitīvi saskaitāmie. Otrā vienādība savukārt rāda, ka parciālsумma  $s_n$  ir ierobežota, jo

$$s_n < a_1$$

(no  $a_1$  tiek atņemti pozitīvi skaitļi). Pēc pazīstamās Veierštrāsa teorēmas, šādam monotoni augošam, bet ierobežotam mainīgam lielumam eksistē robeža.

Ierobežojumu, ka parciālsумmu indeksi ir pāra skaitļi, var atņemt, ja ievēro, ka

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1}.$$

Tā kā  $a_{n+1} \rightarrow 0$ , tad arī parciālsумmas ar nepāra indeksiem tiecas uz to pašu robežu.

Ļoti uzskatāmu Leibnica teorēmas pierādījumu iegūst, ja rindas parciālsумmas attēlojam uz skaitļu ass (sk. 137. zīm.). Tā kā

$$s_1 = a_1,$$

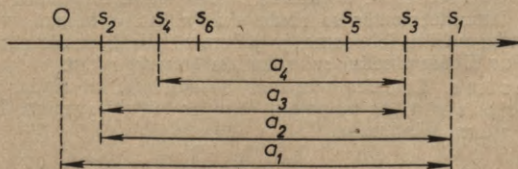
$$s_2 = a_1 - a_2,$$

$$s_3 = a_1 - a_2 + a_3,$$

$$s_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4$$

utt., bet

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \dots,$$



137. zīm.

tad parciālsomas ar pāra indeksiem izrādās monotoni augošas, bet parciālsomas ar nepāra indeksiem — monotoni dilstošas. Abos gadījumos tās ir ierobežotas, jo ir mazākas par  $a_1$ .

Alternējošām rindām piemīt šāda īpašība, kas padara tās ļoti ērti lietojamas tuvinātos aprēķinos. *Kļūda, ko pieļaujam, ja konverģentas rindas summas vietā ņemam tās parciālsomu, pēc absolūtās vērtības nepārsniedz pirmā atmetstā locekļa absolūto vērtību.*

Tiešām, atmetot visus locekļus, sākot ar  $a_{n+1}$ , mēs pieļaujam kļūdu

$$\begin{aligned} R_n &= (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + (-1)^{n+2} a_{n+3} + \dots = \\ &= (-1)^n (a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \dots). \end{aligned}$$

Bet iekavās atkal ir konverģenta alternējoša rinda, kuras ikviena parciālsoma (un tātad arī rindas summa!), kā redzējam, ir mazāka par rindas pirmo locekli, kas šoreiz ir loceklis  $a_{n+1}$ . Rindas parciālsoma  $s_n$  tātad dod rindas summas  $s$  tuvinājumu ar iztrūkumu vai uzviju atkarībā no tā, vai pirmais no atmetstajiem locekļiem  $a_{n+1}$  ir pozitīvs vai negatīvs.

Ilustrācijai aplūkosim rindu

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots$$

Šī rinda izpilda abus Leibnisa teorēmas nosacījumus: tās locekļi pēc absolūtās vērtības dilst

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots > \frac{1}{n} > \dots$$

un  $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ . Rinda tātad konverģē.

Dotās rindas parciālsomas  $s_1, s_3, s_5, \dots$  dod rindas summu  $s$  ar uzviju, bet  $s_2, s_4, s_6, \dots$  — ar iztrūkumu. Aprēķinot  $s_9 = 0,745$ , mēs dabūtu rindas summu  $s$  ar precizitāti līdz 0,1, t. i.,  $s \approx 0,7$ , jo pirmā atmetstā locekļa absolūtā vērtība ir 0,1. Lai atrastu summas tuvināto vērtību ar trim pareizām decimālzīmēm, būtu jāsummē 999 šīs rindas locekļi.

Kā vēlāk redzēsīm, aplūkotās rindas summas precīzā vērtība  $s = \ln 2$ . Izmantot tomēr šo rindu skaitļa  $\ln 2$  aptuvenās vērtības noteikšanai nebūtu ieteicams, jo jāsummē pārāk daudz rindas locekļu. Par tādām rindām saka, ka tās *konverģē lēni*.

Piezīme. Leibnisa teorēmas nosacījums, lai rindas locekļi pēc absolūtās vērtības monotoni diltu, ir būtiski svarīgs. Tā, piemēram, alternējošai rindai

$$-1 + 2 - \frac{1}{2} + \frac{2}{2} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{2}{4} - \frac{1}{5} + \frac{2}{5} - \dots$$



locekļi gan tiecas uz nulli, bet visu laiku pēc absolūtās vērtības nedilst. Ja, summējot šīs rindas pirmos  $2n$  locekļus, apvienojam ik divus saskaitāmos grupā, tad dabūjam

$$s_{2n} = (-1+2) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + \dots + \left(-\frac{1}{n} + \frac{2}{n}\right)$$

jeb

$$s_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n},$$

t. i., dotās rindas parciālsomma ir vienāda ar harmoniskās rindas parciālsommu, kas, kā zināms, neierobežoti aug, kad  $n \rightarrow \infty$ . Alternējošās rindas konverģenci tādad var garantēt vienīgi tādā gadījumā, kad ir izpildīti Leibnica teorēmas abi nosacījumi.

**143. §. Patvaļīgu locekļu rindas; rindu absolūtā un nosacītā konverģence.** Aplūkosim tagad rindas, kurām ir bezgalīgi daudz gan pozitīvo, gan negatīvo locekļu, pie tam locekļu zīmju maiņas likums var nebūt tik vienkāršs, kā tas, piemēram, bija alternējošām rindām.\*

*Teorēma. Patvaļīgu locekļu (maiņzīmju) rinda*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (17.5)$$

*konverģē, ja konverģē rinda*

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n| + \dots, \quad (17.6)$$

*kas sastādīta no tās locekļu absolūtajām vērtībām.*

Pierādījumam apzīmēsim rindas (17.5) parciālsommu ar  $s_n$ , bet rindas (17.6) parciālsommu ar  $S_n$ . Pēc nosacījuma  $s_n$  satur gan pozitīvus, gan negatīvus locekļus. Apzīmēsim pozitīvo locekļu summu, kas ietilpst parciālsummā  $s_n$ , ar  $s_k$ , bet negatīvo locekļu absolūto vērtību summu ar  $s_m$  ( $k+m=n$ ). Tad

$$s_n = s_k - s_m, \text{ bet } S_n = s_k + s_m.$$

Tā kā rinda (17.6) konverģē, tad  $S_n \rightarrow S$ ; bez tam (kā pozitīvu locekļu summa) vienmēr  $S_n < S$ . Arī pozitīvie mainīgie lielumi  $s_k$  un  $s_m$ , numuram  $n$  augot, var tikai augt. Bet, tā kā tie ir iero-

---

\* Gadījums, kad visi rindas locekļi ir negatīvi, nekā būtiski jauna nedod; reizinot tādu rindu pa locekļiem ar  $(-1)$ , dabūsim pozitīvu locekļu rindu un abu rindu summas atšķirsies tikai ar zīmi. Tāpat nekas jauns nerodas, ja vienādzīmju locekļi (vai nu pozitīvie, vai negatīvie) ir galīgā skaitā. Tādā gadījumā tos varam ignorēt, jo galīgs skaits locekļu rindas konverģenci neiespaido.

bežoti, jo to summa  $s_k + s_m = S_n < S$ , tad tiem abiem eksistē robeža. Bet tad eksistē robeža arī parciālsummam  $s_n$ , jo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_k + s_m) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_k + \lim_{n \rightarrow \infty} s_m,$$

t. i., rinda (17.5) konverģē.

Apgrīztais apgalvojums: ja patvaļīgu locekļu rinda konverģē, tad konverģē arī rinda, kas sastādīta no tās locekļu absolūtajām vērtībām, ne vienmēr ir pareizs; sastādītā rinda var izrādīties arī diverģenta.

Visas konverģentās rindas tādejādi var sadalīt divās klasēs.

Pie pirmās klases pieder rindas, kas konverģē reizē ar rindām, kas sastādītas no to locekļu absolūtajām vērtībām. Tādas rindas sauc par *absolūti konverģentām* rindām.

Pie otrās klases pieder konverģentas rindas, kurām rindas, kas sastādītas no to locekļu absolūtajām vērtībām, diverģē. Tādas rindas sauc par *nosacīti konverģentām* rindām.

Tā, piemēram, rinda

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \dots$$

konverģē absolūti, jo konverģē rinda, kas sastādīta no tās locekļu absolūtajām vērtībām

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$$

(Tās ir ģeometriskas rindas ar kvocieniem  $-\frac{1}{2}$  un  $\frac{1}{2}$ .) Turpretim rinda

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots$$

gan konverģē (pēc Leibnīca pazīmes), bet tikai nosacīti, jo no tās locekļu absolūtajām vērtībām sastādītā rinda

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

ir harmoniskā rinda un tā tad diverģē.

Galīgām summām, kā zināms, ir spēkā t. s. komutatīvā īpašība: summas vērtība nav atkarīga no tā, kādā secībā izdara saskaitīšanu. Izrādās, ka arī absolūti konverģentām rindām piemīt šī komutatīvā īpašība. Locekļu pārkārtošana *nosacīti* konverģentā rindā var turpretim izmainīt tās summu vai pat padarīt rindu diverģentu. Tā, piemēram, ja rindā

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots$$

pārgrupējam locekļus, liekot pēc katra pozitīva locekļa divus vienu otram sekojošos negatīvos locekļus, tad dabū rindu

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots,$$

jeb

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \dots$$

Izpildot tagad atņemšanu katrā iekaviņā, dabūsim rindu

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots,$$

kuras locekļi sastāda tikai puši no sākotnējās rindas locekļiem; arī tās summa tādēļ ir divreiz mazāka par sākotnējās rindas summu. Rindas summa locekļu pārgrupēšanas dēļ ir izmainījusies.

Sis šķietami paradoksalais rezultāts izskaidrojams ar to, ka nosacīti konverģentās rindās visi pēc kārtas ņemtie pozitīvie locekļi, tāpat visi negatīvie locekļi, veido diverģentu rindu, un do tās rindas konverģence ir izskaidrojama tieši ar to «līdzsvaru», kas pastāv starp abu diverģento rindu locekļiem. Pārkārtojot rindas locekļus, šo līdzsvaru var izjaukt.

Sastādot turpretim tādas atsevišķas rindas no *absolūti* konverģentu rindu pozitīvajiem un negatīvajiem locekļiem, dabū divas konverģentas vienādzīmju rindas, kuru konverģenci šāda locekļu pārgrupēšana neiespaido.

Atšķirībā no komutatīvās īpašības, kas, kā redzējām, piemīt tikai absolūti konverģentām rindām, asociatīvā īpašība piemīt *jebkurai* konverģentai rindai. Ikvienā konverģentā rindā, nemainot locekļu kārtību, var tos apvienot kādās vien patik grupās. Saskaitot locekļus katrā grupā, dabūsim jaunu rindu, kas konverģēs uz to pašu summu. Tā, piemēram, nosacīti konverģentā rindā

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

locekļus var grupēt šādi:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \dots$$

Izpildot darbības iekavās, dabū pozitīvu locekļu rindu

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{(2n-1)2n} + \dots,$$

kurai ir tā pati summa kā sākotnējai rindai.



Pretējā darbība — iekavu atvēršana — pieļaujama tikai tādā gadījumā, ja pēc iekavu atvēršanas rodas *konverģenta* rinda. Tā, piemēram, rinda

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{3}{4}\right) + \left(1 - \frac{7}{8}\right) + \left(1 - \frac{15}{16}\right) + \dots,$$

tātad ģeometriskā rinda

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots,$$

konverģē un tai ir summa 1, kamēr rinda

$$1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{3}{4} + 1 - \frac{7}{8} + 1 - \frac{15}{16} + \dots,$$

ko dabū pēc iekavu atvēršanas, diverģē, jo tās parciālsomas ar pāra indeksiem tiecas uz to pašu robežu 1, bet parciālsomas ar nepāra indeksiem tiecas uz 2. Iekavu atvēršana šajā gadījumā nav pieļaujama.

### Vingrinājumi

Rindu  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  uzrakstīt formā  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ .

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3^n}; \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{(n+2)!}; \quad 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n^3}; \quad 4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2n}{\sqrt{n^2+2n}}.$$

Noteikt rindas vispārīgo locekli  $a_n$  un abus tam blakus stāvošos locekļus  $a_{n-1}$  un  $a_{n+1}$ .

$$5. 7 + \frac{8}{2^3} + \frac{9}{3^3} + \frac{10}{4^3} + \dots; \quad 6. \frac{3}{2!} + \frac{5}{3!} + \frac{7}{4!} + \frac{9}{5!} + \dots;$$

$$7. \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 6} + \frac{1}{3 \cdot 7} + \dots; \quad 8. \frac{4}{5} - \frac{6}{9} + \frac{8}{17} - \frac{10}{33} + \dots.$$

Izmantojot konverģences nepieciešamo noteikumu vai rindu salīdzināšanas paņēmieni, noteikt konverģenci rindām.

$$9. \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{5 \cdot 2^3} + \frac{1}{7 \cdot 2^4} + \dots; \quad 10. 1 + \frac{3}{4} + \frac{4}{6} + \frac{5}{8} + \dots$$

$$11. \frac{3}{2} + \frac{4}{2 \cdot 3} + \frac{5}{3 \cdot 4} + \frac{6}{4 \cdot 5} + \dots; \quad 12. \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \dots$$

$$13. \frac{1}{99} + \frac{2}{199} + \frac{3}{299} + \frac{4}{399} + \dots; \quad 14. \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{4}{17} + \frac{5}{26} + \dots$$

$$15. \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{20}} + \frac{1}{\sqrt{30}} + \frac{1}{\sqrt{40}} + \dots$$

Lietojot Dalambēra pazīmi, noteikt rindu konvergenci.

$$16. \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \dots$$

$$17. \frac{11}{3} + \frac{31}{9} + \frac{51}{27} + \frac{71}{81} + \dots$$

$$18. 1 + \frac{3}{2 \cdot 3} + \frac{3^2}{2^2 \cdot 5} + \frac{3^3}{2^3 \cdot 7} + \dots$$

$$19. 2 + \frac{4}{3!} + \frac{6}{5!} + \frac{8}{7!} + \dots$$

$$20. \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \dots$$

Noteikt rindu konvergenci, lietojot integrālo konverģences pazīmi.

$$21. 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \frac{1}{\sqrt[3]{7}} + \dots$$

$$22. \frac{1}{2^3} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{5^3} + \dots$$

$$23. \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \frac{1}{5\sqrt{4}} + \dots$$

Noskaidrot rindu konvergenci, lietojot dažādus paņēmienus.

$$24. \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^4} + \frac{5}{2^6} + \frac{6}{2^8} + \dots$$

$$25. \frac{1}{3} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}} + \dots$$

$$26. \frac{1}{2} + \frac{2}{7} + \frac{3}{12} + \frac{4}{17} + \dots$$

$$27. \frac{1}{2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{28} + \frac{1}{65} + \dots$$

$$28. \frac{2}{3^2 \cdot 2!} + \frac{2^2}{3^3 \cdot 3!} + \frac{2^3}{3^4 \cdot 4!} + \frac{2^4}{3^5 \cdot 5!} + \dots$$

Noskaidrot alternējošo rindu konvergenci vai diverģenci, pie tam konverģences gadījumā noskaidrot arī: 1) vai rinda konverģē absolūti, vai tikai nosacīti, 2) cik rindas locekļu jāņem, lai kļūda, nosakot rindas aptuveno summu, nepārsniegtu 0,001.

$$29. \frac{1}{2} - \frac{1}{7} + \frac{1}{12} - \frac{1}{17} + \dots$$

$$30. \frac{1}{2} - \frac{2}{5} + \frac{3}{8} - \frac{4}{11} + \dots$$

$$31. 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \dots$$

$$32. \frac{1}{2^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{6^3} - \frac{1}{8^3} + \dots$$

$$33. 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \dots$$

## 18. NODAĻA

### PAKĀPJU RINDAS

**144. §. Jēdziens par funkciju rindu. Pakāpju rinda, tās konverģences intervāls.** Rindu teorijā, kā arī tās pielietojumos sevišķi svarīgu vietu ieņem rindas, kuru locekļi ir kāda mainīga lieluma  $x$  funkcijas, t. i., rindas

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (18.1)$$

Atšķirībā no skaitļu rindām šo rindu summas (tāpat to daļējās summas) nav vairs skaitļi, bet funkcijas.

Katrai fiksētai mainīgā lieluma  $x$  vērtībai  $x_0$  funkciju rinda kļūst par skaitļu rindu

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots$$

Ja dabūtā skaitļu rinda izrādās konverģenta, tad saka, ka funkciju rinda šai  $x$  vērtībai konverģē vai arī ka funkciju rinda konverģē punktā  $x=x_0$ . Ja kādai citai  $x$  vērtībai  $x_1$  atbilstošā skaitļu rinda izrādītos diverģenta, tad saka, ka funkciju rinda punktā  $x=x_1$  diverģē. Tādējādi funkciju rindas konverģences jautājums vienmēr saistās ar to  $x$  vērtību noskaidrošanu, kurām šī rinda konverģē vai diverģē.

Visu to  $x$  vērtību kopu, kurām dotā funkciju rinda konverģē, sauc par šīs funkciju rindas *konverģences apgabalu*. Tā, piemēram, funkciju rindā

$$1+x+x^2+x^3+\dots+x^n+\dots, \quad (18.2)$$

liekot pēc kārtas  $x=\frac{1}{2}$ ;  $-\frac{1}{2}$ ; 2, dabū skaitļu rindas

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots;$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\dots,$$

$$1+2+2^2+2^3+\dots,$$

no kurām divas pirmās konverģē kā ģeometriskās rindas, bet trešā diverģē. Ar funkciju rindu (18.2) tāpat ir dota vesela saime ģeometrisku rindu. Arī pašu funkciju rindu (18.2) tādēļ sauksim par ģeometrisku rindu (tās kvocients  $q=x$ ).

Ģeometriskā rinda (18.2) konverģē visiem  $|x|<1$ ; tās konverģences apgabals tāpat ir intervāls  $(-1; 1)$ .

Rindas summu dabūsim, lietojot pazīstamo formulu  $s=\frac{a_1}{1-q}$ .

Tā dod  $s=\frac{1}{1-x}$ , kas rāda, ka funkciju rindas summa savukārt ir tā paša mainīgā  $x$  funkcija.

No visām funkciju rindām īpaša nozīme matemātiskajā analizē ir rindām, kuru locekļi ir  $x$  pakāpes. Vispārīgā veidā tādas rindas var uzrakstīt tā:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n+\dots, \quad (18.3)$$

kur  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  ir skaitļi, t. s. rindas *koefficienti*. Tādas rindas sauc par *pakāpju rindām*; arī iepriekš aplūkotā funkciju rinda (18.2) ir šāda pakāpju rinda.

**Piezīme.** Atšķirībā no skaitļu rindām par vispārīgo locekli te pieņemts saukt ne rindas  $n$ -to locekli, bet  $(n+1)$ -mo locekli  $a_nx^n$ . Pirmais loceklis  $a_0$  te ir t. s. nulltais (arī brīvais) loceklis, un attiecīgi mainās arī rindas pieraksts ar summas simbolu; tas

$$\text{būs } \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n.$$



Pievērsisimies tagad jautājumam par pakāpju rindas konverģences apgabala noteikšanu. Te varam izmantot Dalambēra konverģences pazīmi pozitīvu locekļu rindām. Bet, tā kā pakāpju rindas locekļi var būt gan pozitīvi, gan negatīvi (atkarībā no koeficientu un mainīgā lieluma  $x$  zīmes), tad mēs šo pazīmi pielietosim rindai

$$|a_0| + |a_1| \cdot |x| + |a_2| \cdot |x|^2 + \dots + |a_n| \cdot |x|^n + \dots, \quad (18.4)$$

t. i., interesēsīsimies par pakāpju rindas absolūto konverģenci.

Pēc Dalambēra pazīmes rinda (18.4) konverģē, ja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}| \cdot |x|^{n+1}}{|a_n| \cdot |x|^n} < 1,$$

t. i., ja

$$|x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

(pēc saīsināšanas ar  $x^n$  var ņemt  $|x|$  pirms robežas zīmes, jo tas no  $n$  nav atkarīgs). Bet šis nosacījums būs izpildīts vienīgi tad, ja

$$|x| < \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Lietojot apzīmējumu

$$\varrho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad (18.5)$$

varam teikt, ka pakāpju rinda konverģē visiem  $x$ , kam  $|x| < \varrho$ , t. i., tā konverģē intervālā  $(-\varrho; \varrho)$ .

Skaitli  $\varrho$  sauc par pakāpju rindas konverģences rādiusu, pie tam te ir iespējami trīs gadījumi.

1. Ja  $\varrho = \infty$ , tad pakāpju rindas konverģences intervālā ietilpst visi reālie skaitļi. Tā, piemēram, pakāpju rindas

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

konverģences rādiuss

$$\varrho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty,$$

tādēļ tā konverģē visos skaitļu ass punktos.

2. Ja  $\varrho = 0$ , tad konverģences intervāls deģenerējas par punktu  $x=0$ , un pakāpju rinda konverģē uz savu nullto locekli. Tā pakāpju rindai

$$1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + \dots + n!x^n + \dots$$

konverģences rādiuss,

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

un tādēļ tā konverģē vienīgi punktā  $x=0$ .

3. Ja konverģences rādiusam ir galīga vērtība ( $\rho \neq 0$ ), tad konverģences intervāls ir *ierobežots*, pie tam šī intervāla iekšpusē, kur  $|x| < \rho$ , rinda konverģē, bet intervāla ārpusē, kur  $|x| > \rho$ , rinda diverģē.

Konverģences intervāla gala punktus pakāpju rinda var gan konverģēt, gan diverģēt. Lai noskaidrotu, kā rinda tur izturas, atsevišķi jāpētī skaitļu rindas, kuras dabū, liekot pakāpju rindā  $x = -\rho$  un  $x = \rho$ . Tā pakāpju rindai

$$1 + x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \dots + \frac{x^n}{n^2} + \dots$$

konverģences rādiuss

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^2 = 1^2 = 1,$$

kam atbilst konverģences intervāls  $(-1; 1)$ . Liekot pēc kārtas  $x = -1$  un  $x = 1$ , dabū skaitļu rindas

$$1 - 1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \dots$$

un

$$1 + 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots,$$

no kurām pirmā konverģē pēc Leibnica teorēmas, bet otra — kā vispārinātā harmoniskā rinda, kuras vispārīgais loceklis  $a_n = \frac{1}{n^k}$  un  $k = 2 > 1$  (sk. 141. §. 3. piemēru). Aplūkotā pakāpju rinda tād konverģē slēgtā intervālā  $[-1; 1]$ .

Ja pakāpju rinda nesatur visas  $x$  pakāpes (ja tai ir «robi»), tad izmantot formulu (18.5) konverģences rādiusa noteikšanai nedrīkst. Tādos gadījumos pakāpju rindai katrreiz jāpiemēro D'alambēra konverģences kritērijs tieši tā, kā to darijām, izvedot formulu (18.5).

Aplūkosim piemēru. Noteikt konverģences rādiusu pakāpju rindai

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^3} + \frac{x^6}{2^5} + \frac{x^8}{2^7} + \dots$$

Rindas vispārīgais loceklis te ir

$$u_n = \frac{x^{2n}}{2^{2n-1}}, \text{ bet } u_{n+1} = \frac{x^{2n+2}}{2^{2n+1}},$$

tādēļ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n+2} \cdot 2^{2n-1}}{2^{2n+1} \cdot x^{2n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2^2} = \frac{x^2}{4},$$

un rinda konverģē, ja  $\frac{x^2}{4} < 1$ , no kurienes  $x^2 < 4$  un  $|x| < 2$ . Ar to ir noteikts arī konverģences rādiuss  $\rho = 2$  un konverģences intervāls  $(-2; 2)$ . Intervāla gala punktos pakāpju rinda kļūst par skaitļu rindu  $2+2+2+\dots$ , tādēļ dotā pakāpju rinda konverģē tikai vajējā intervālā  $(-2; 2)$ .

**145. §. Pakāpju rindu atvasināšana un integrēšana; dotās funkcijas izvirzīšana pakāpju rindā.** Attiecībā uz pakāpju rindām ir spēkā šādas divas svarīgas teorēmas.

1. teorēma. Ja pakāpju rindas konverģences rādiuss ir  $\rho$  un summa  $f(x)$ , t. i.,

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = f(x), \quad (18.6)$$

tad rindai, kuru dabū, to pa locekļiem atvasinot, ir tas pats konverģences rādiuss  $\rho$  un tās summa ir vienāda ar funkcijas  $f(x)$  atvasinājumu, t. i.,

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots = f'(x).$$

Isāk: *pakāpju rindu var pa locekļiem atvasināt.*

Kas attiecas uz konverģenci kādā intervāla galā, tad tā vispārīgi nesaglabājas (divergence gan).

2. teorēma. Rindai, ko dabū, integrējot pa locekļiem rindu (18.6) robežās no nulles līdz  $x$ , ir tas pats konverģences rādiuss,

un tās summa ir vienāda ar  $\int_0^x f(x) dx$ , t. i.,

$$a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \dots = \int_0^x f(x) dx.$$

Isāk: *pakāpju rindu var pa locekļiem integrēt.*

Integrējot rindu pa locekļiem, saglabājas arī tās konverģence intervāla galos; rindas kvalitāte tādējādi it kā uzlabojas.

Ar abām teorēmām (kuras pieņemam bez pierādījuma) cieši saistās jautājums par dotās funkcijas *izvirzīšanu* pakāpju rindā, t. i., funkcijas izteikšanu pakāpju rindas veidā. Tas dod iespēju vienkāršāk aprēķināt šīs funkcijas atsevišķās vērtības.

Pirms formulējam problēmu vispārīgā veidā, aplūkosim dažus atsevišķus gadījumus.



Aplūkosim rindu

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots$$

Tā ir ģeometriskā rinda ar kvocientu  $q = -x$  un tātad konverģe, ja  $|x| < 1$ . Tās summa  $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1+x}$ . Tādējādi varam rakstīt, ka

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots \quad (18.7)$$

Pēdējo vienādību varam uzskatīt par funkcijas  $\frac{1}{1+x}$  izvirzījumu pakāpju rindā pēc augošām  $x$  pakāpēm. No šī izvirzījuma viegli varam dabūt citus izvirzījumus.

1. Funkcijas  $\ln(1+x)$  izvirzījums. Tā kā  $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x}$ , tad meklēto izvirzījumu dabūsim, rindu (18.7) integrējot pa locekļiem:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots \quad (18.8)$$

Šī rinda, tāpat kā rinda (18.7), konverģē intervālā  $(-1; 1)$ . Bez tam tā konverģē arī intervāla galapunktā  $x=1$ ; tādēļ

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots,$$

kur labā pusē ir mums pazīstamā alternējošā rinda.

2. Funkcijas  $\operatorname{arctg} x$  izvirzījums. Liekot izvirzījumā (18.7)  $x$  vietā  $x^2$ , dabū

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

Tā kā

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2},$$

tad, integrējot pa locekļiem šo jauno rindu, dabū

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (18.9)$$

Arī šī rinda konverģē intervālā  $(-1; 1)$ . Bez tam tā konverģē arī abos intervāla galos (ko gan par sākotnējo rindu nevar apgalvot). Liekot  $x=1$ , dabūjam

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots,$$

un šo skaitļu rindu varētu izmantot skaitļa  $\pi$  tuvinātai aprēķināšanai (ši rinda gan ļoti lēni konverģē).

**146. §. Maklorēna rinda; tās pielietojums funkciju izvērzišanai pakāpju rindās.** Iepriekš aplūkotajiem piemēriem par funkciju izvērzišanu pakāpju rindās bija tikai gadījuma raksturs; šos izvērziņumus dabūjām, izmantojot kādas citas funkcijas jau zināmu izvērziņu. Noskaidrosim tagad jautājumu, kā iespējams izvērzt rindā jebkuru funkciju, kurai šāds izvērziņums eksistē.

Pieņemsim tāpat, ka doto funkciju  $f(x)$  var izvērzt pakāpju rindā

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \dots, \quad (18.10)$$

kur  $a_0, a_1, a_2, \dots$  ir pagaidām vēl nenoteikti koeficienti, pie tam šī rinda konverģē kādā intervālā  $(-q; q)$ . Izrādās, ka rindas koeficientus var izteikt ar funkcijas  $f(x)$  un tās atvasināto funkciju vērtībām punktā  $x=0$ .

Tiešām, liekot vienādībā (18.10)  $x=0$ , dabūjam

$$f(0) = a_0.$$

Atvasināsim tagad vienādības abas puses atkārtoti pēc  $x$ ; tad dabūsim

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + \dots \\ f''(x) &= 2a_2 + 2 \cdot 3a_3x + 3 \cdot 4a_4x^2 + 4 \cdot 5a_5x^3 + \dots \\ f'''(x) &= 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4x + 3 \cdot 4 \cdot 5a_5x^2 + \dots \\ f^{(4)}(x) &= 2 \cdot 3 \cdot 4a_4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5a_5x + \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

Liekot šajās vienādībās atkal  $x=0$ , dabūsim

$$\begin{aligned} f'(0) &= a_1; \\ f''(0) &= 2a_2, \text{ t. i., } a_2 = \frac{f''(0)}{2}; \\ f'''(0) &= 2 \cdot 3a_3, \text{ t. i., } a_3 = \frac{f'''(0)}{2 \cdot 3}; \\ f^{IV}(0) &= 2 \cdot 3 \cdot 4a_4, \text{ t. i., } a_4 = \frac{f^{IV}(0)}{2 \cdot 3 \cdot 4}; \end{aligned}$$

kas rāda, ka visi rindas koeficienti izsakāmi vienveidīgi pēc formulas

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot (n=1, 2, 3, \dots). \quad (18.11)$$

Ievietojot atrastos koeficientus sākotnējā vienādībā (18.10), dabū rindu

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots, \quad (18.12)$$

ko sauc par funkcijas  $f(x)$  *Maklorēna rindu*.

Tātad, ja funkciju  $f(x)$  var izvirzīt pakāpju rindā, tad šī rinda ir noteikti Maklorēna rinda. Arī agrāk atrastās rindas funkcijām  $\ln(1+x)$  un  $\arctg x$  ir tādas Maklorēna rindas, par ko var pārlielināties, aprēķinot šo rindu koeficientus pēc formulas (18.11).

Lai funkciju varētu izvirzīt pakāpju rindā, tai ir jāizpilda diezgan stingri nosacījumi: tās visu kārtu atvasinājumiem jāeksistē punktā  $x=0$ . Tā, piemēram, funkcijai  $f(x) = \sqrt{x}$  punktā  $x=0$  neeksistē neviens atvasinājums, tādēļ šī funkcija nav izvirzāmā Maklorēna rindā. Plašāka diskusija rāda, ka atsevišķos gadījumos arī ar to vēl nepietiek. Var tomēr pierādīt, ka katrai elementārai funkcijai, kurai eksistē visi atvasinājumi punktā  $x=0$ , formula (18.12) ir pareiza jebkurā intervālā, kurā iegūtā Maklorēna rinda konverģē.

Apskatīsim piemērus.

1. Funkcijas  $e^x$  izvirzījums. Ja

$$f(x) = e^x,$$

tad  $f'(x) = e^x$ ;  $f''(x) = e^x$ ;  $f'''(x) = e^x$ , ...,  $f^{(n)}(x) = e^x$ , ... un  $f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = \dots = 1$ . Funkcijas  $e^x$  Maklorēna rindai tādēļ ir šāds veids:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (18.13)$$

Ar Dalambēra pazīmi jau noskaidrojām (sk. 144. §), ka šī rinda konverģē visiem  $x$ . No iegūtā izvirzījuma, liekot  $x$  vietā  $-x$ , dabū arī izvirzījumu

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

bet, liekot  $x$  vietā  $-x^2$ ,

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \dots,$$

pie tam arī šie abi izvirzījumi konverģē visiem  $x$ .

2. Funkciju  $\sin x$  un  $\cos x$  izvirzījumi. Ja

$$f(x) = \sin x,$$



tad  $f'(x) = \cos x$ ;  $f''(x) = -\sin x$ ;  $f'''(x) = -\cos x$ ;  $f^{IV}(x) = \sin x$ ; ...  
 un  $f(0) = 0$ ;  $f'(0) = 1$ ;  $f''(0) = 0$ ;  $f'''(0) = -1$ ;  $f^{IV}(0) = 0$ ; ...  
 Sajā gadījumā iegūstam rindu

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (18.14)$$

/ Analogi dabū arī funkcijas  $\cos x$  izvirzījumu

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \quad (18.15)$$

bet vienkāršāk to dabū, atvasinot iepriekšējās vienādības abas puses.

Abi izvirzījumi atkal konverģē visiem  $x$ , jo to locekļu absolūto vērtību rindas sastāda tikai daļu no funkcijas  $e^x$  izvirzījuma locekļu absolūto vērtību rindas.

Ievērosim, ka *nepāra* funkcijas  $\sin x$  izvirzījums satur tikai  $x$  nepāra pakāpes, kamēr *pāra* funkcijas  $\cos x$  izvirzījumā visi locekļi ir  $x$  pāra pakāpes. Funkcijas Maklorēna rinda tātad palīdz saskatīt funkcijas īpašības.

Iegūtās rindas var izmantot, lai izvirzītu rindā arī citas trigonometriskās funkcijas. Tā, piemēram, lai izvirzītu rindā funkciju  $\cos 2x$ , pietiek likt pēdējā izvirzījumā  $x$  vietā  $2x$ . Tad dabū

$$\cos 2x = 1 - \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^4 x^4}{4!} - \frac{2^6 x^6}{6!} + \dots$$

Izvirzījumu funkcijai  $\sin^2 x$  vienkāršāk dabūsim, ievērojot, ka  $\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$ . Tas dod

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} \left( 1 - 1 + \frac{2^2 x^2}{2!} - \frac{2^4 x^4}{4!} + \frac{2^6 x^6}{6!} - \dots \right)$$

jeb

$$\sin^2 x = \frac{2x^2}{2!} - \frac{2^3 x^4}{4!} + \frac{2^5 x^6}{6!} - \frac{2^7 x^8}{8!} + \dots$$

3. *Ņūtona binoma izvirzījums* (binomiālā rinda).  
 Aplūkosim funkciju

$$f(x) = (1+x)^m,$$

kur  $m$  ir patvaļīgs reāls skaitlis. Te

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1}$$

$$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}$$

$$f'''(x) = m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3}$$

$$\dots \dots \dots f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)(1+x)^{m-n},$$

$$\dots \dots \dots$$

Tā kā

$f(0) = 1$ ;  $f'(0) = m$ ;  $f''(0) = m(m-1)$ ;  $f'''(0) = m(m-1)(m-2)$ ; ...,  $f^{(n)}(0) = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)$ , ..., tad Maklorēna rinda ir uzrakstāma veidā

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots \quad (18.16)$$

Labā pusē ir t. s. *binomiālā rinda*. Ja  $m$  ir vesels pozitīvs skaitlis, tad, sākot ar  $n=m+1$ , rindas koeficienti kļūst vienādi ar nulli, un mēs dabūjam parasto Ņūtona binoma izvirzījumu

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots + mx^{m-1} + x^m,$$

kas ir *galīga summa*.

Lai noskaidrotu binomiālās rindas konvergenci, ievērosim, ka

$$a_{n+1} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)(m-n)}{(n+1)!}.$$

Tādēļ konverģences rādiuss

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)(n+1)!}{n!m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)(m-n)} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{m-n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1 + \frac{1}{n}}{\frac{m}{n} - 1} \right| = \left| \frac{1}{-1} \right| = 1. \end{aligned}$$

Tādējādi binomiālā rinda konverģē intervālā  $(-1; 1)$ . Konverģence intervāla galos ir atkarīga no kāpinātāja  $m$  vērtības.

Liekot binomiālajā rindā attiecīgi  $m = -1$ ;  $m = \frac{1}{2}$ ;  $m = -\frac{1}{2}$ , dabū šādas bieži sastopamas binomiālās rindas:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots$$

(tā ir jau agrāk lietotā ģeometriskā rinda).

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 - \dots$$

No pēdējās rindas, liekot  $x$  vietā  $-x^2$ , dabū arī šādu izvirzījumu:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots$$

Ja vēl ievērosim, ka

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x,$$

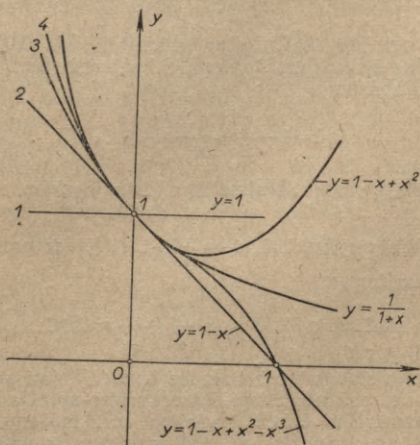
tad, integrējot pēdējo rindu pa locekļiem, dabū

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots,$$

kas, starp citu, ir ļoti ērta skaitļa  $\pi$  tuvinātai aprēķināšanai. Liekot  $x = \frac{1}{2}$ , dabū

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^3 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{2^5 \cdot 5} + \dots$$

Seit pietiek jau ar šīs skaitļu rindas 4 locekļiem, lai dabūtu  $\frac{\pi}{6} \approx 0,5234$  ar trim pareizām decimālzīmēm.



138. zīm.



Piezīme. Stingri jāievēro, ka kādas funkcijas  $f(x)$  vērtības sakrīt ar tās Maklorēna rindas summu tikai konverģences intervāla punktos. Tā, piemēram, funkcijas  $f(x) = \frac{1}{1+x}$  vērtība punktā  $x=2$  ir  $f(2) = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$ , kamēr tās Maklorēna rindai

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

punktā  $x=2$  summa neeksistē.

Lai iegūtu pārskatu, kā rindas parciālsomas tuvojas rindas summai, ieteicams aplūkot 138. zīm., kur attēlota gan funkcijas  $y = \frac{1}{1+x}$ , gan arī tās Maklorēna rindas pirmo četru parciālsomu grafikas. Katras sekojošās parciālsomas grafika (zīmējumā tās apzīmētas ar numuriem 1, 2, 3 un 4) arvien ciešāk piekļaujas dotās funkcijas grafikai.

**147. §. Pakāpju rindu pielietojumi tuvinātos aprēķinos.** Funkciju izvīrījumus pakāpju rindās var plaši pielietot dažādos tuvinātos aprēķinos. Aplūkosim dažas iespējas.

1. Pēc funkciju  $e^x$ ,  $\sin x$  un  $\cos x$  izvīrījumiem ar cik patik lielu precizitāti var noteikt šo funkciju vērtības jebkurai argumenta  $x$  vērtībai. Tā, piemēram, lai noteiktu skaitli  $e$ , funkcijas izvīrījumā liekam  $x=1$ . Tas dod

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots,$$

pie tam, lai noteiktu skaitli  $e$  ar precizitāti līdz 0,0001, pietiek ņemt šīs rindas 8 locekļus. Analogi, liekot, piemēram,  $\sin x$  izvīrījumā  $x=1$ , dabūsim

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots,$$

kas ir alternējoša rinda. Ja atmetisim visus locekļus, sākot ar ceturto, kļūda pēc absolūtās vērtības nepārsniegs pirmā atmetšā locekļa absolūto vērtību, t. i.,  $\frac{1}{7!} = \frac{1}{5040}$ . Tādēļ ar precizitāti līdz 0,0002 dabūjam, ka

$$\sin 1 \approx \sin 57^\circ 18' \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} \approx 0,842.$$

Abu funkciju  $\sin x$  un  $\cos x$  rindas konverģē ļoti strauji. Konverģenci var vēl paātrināt, iepriekš reducējot aprēķinus uz šaura leņķa trigonometrisko funkciju vērtību aprēķināšanu. Tā panākam, ka jau trīs rindas locekļi dod rezultātu ar precizitāti līdz 0,0001, kas ir parastā trigonometrisko funkciju vērtību tabulu

precizitāte. Tieši ar šādu paņēmieni arī sastāda trigonometrisko funkciju vērtību tabulas.

2. Binomiālo rindu var pielietot tuvinātai sakņu vilkšanai no skaitļiem. Tā, piemēram, lai aprēķinātu  $\sqrt[3]{110}$ , izdarām vispirms šādu pārveidojumu:

$$\sqrt[3]{110} = \sqrt[3]{100+10} = \sqrt[3]{100\left(1+\frac{1}{10}\right)} = 10 \sqrt[3]{1+\frac{1}{10}} = 10\left(1+\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Liekot tagad izvirzījumā (sk. 278. lpp.)

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots$$

$x = \frac{1}{10}$ , dabū

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{110} &= 10\left(1 + \frac{1}{20} - \frac{1}{800} + \frac{1}{16\,000} - \frac{1}{256\,000} + \dots\right) \approx \\ &\approx 10 + 0,5 - 0,0125 + 0,0006 = 10,4881\end{aligned}$$

ar visām četrām pareizām decimālzīmēm.

Analogi, izdarot iepriekš nepieciešamos pārveidojumus, nosaka jebkuras citas pakāpes saknes. Tā, piemēram,

$$\sqrt[3]{72} = \sqrt[3]{64+8} = \sqrt[3]{64\left(1+\frac{1}{8}\right)} = 4\sqrt[3]{1+\frac{1}{8}} = 4\left(1+\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$\sqrt[5]{30} = \sqrt[5]{32-2} = \sqrt[5]{32\left(1-\frac{1}{16}\right)} = 2\sqrt[5]{1-\frac{1}{16}} = 2\left(1-\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{5}}$$

u. tml. Šeit vienmēr iepriekš «atskalda» dotajam zemsaknes skaitlim tuvāko skaitli, no kura sakne velkas bez atlikuma, un tad šo skaitli ņem pirms iekavām. Tas nepieciešams tādēļ, ka binomiālā rinda konverģē tikai visiem  $|x| < 1$ . To neievērojot, varam dabūt aplamus rezultātus.

3. Parādisim tagad, kā pakāpju rindas var izmantot skaitļu naturālo logaritmu aprēķināšanai. Agrāk dabūtā rinda

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \dots$$

šim nolūkam nav visai piemērota, jo, lai, piemēram, noteiktu pēc šī izvirzījuma  $\ln 2$  ar precizitāti kaut vai līdz 0,001, ir jāņem 1000 rindas locekļi. Bez tam te jāņem vērā ierobežojums  $|x| < 1$ .

No šī izvirzījuma tomēr varam dabūt citu izvirzījumu, kas labāk piemērots mūsu uzdevumam. Šai nolūkā ņemsim vispirms izvirzījumā  $x$  vietā  $-x$ ; tas dod

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^7}{7} - \dots$$

Atņemot tagad šo vienādību no iepriekšējās, pie tam ievērojot, ka  $\ln(1+x) - \ln(1-x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ , dabūjam

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left( x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right).$$

Šo pēdējo izvirzījumu, kas tāpat konverģē visiem  $|x| < 1$ , tad arī lieto naturālo logaritmu aprēķināšanai.

Lai aprēķinātu, piemēram,  $\ln 2$ , liekam  $\frac{1+x}{1-x} = 2$ , no kurienes izrēķinām  $x$ . Tā kā  $1+x=2-2x$ , tad  $3x=1$  un  $x=\frac{1}{3}$ . Tādēļ

$$\ln 2 = 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \dots \right),$$

pie tam pietiek ņemt tikai 3 locekļus iekavās, lai dabūtu  $\ln 2 \approx 0,6931$  ar kļūdu, kas nepārsniedz 0,0001.

4. Funkciju izvirzījumi pakāpju rindās dod iespēju aprēķināt tuvināti noteiktos integrāļus, arī tos, kuru primitīvās funkcijas nav izsakāmas galīgā veidā ar elementārām funkcijām. Tā, piemēram, izmantojot jau agrāk dabūto izvirzījumu (sk. 146. §) funkcijai  $e^{-x^2}$ , var atrast, ka

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx &= \int_0^1 \left( 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots \right) dx = \left( x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right) \Big|_0^1 \approx \\ &\approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} = \frac{26}{35} \approx 0,743, \end{aligned}$$

pie tam kļūda nepārsniedz pirmo atmesto locekli  $\frac{1}{216} \approx 0,005$ .

Tāpat, izmantojot agrāk dabūto rindu (sk. 146. §)

$$\sin^2 x = \frac{2x^2}{2!} - \frac{2^3 x^4}{4!} + \frac{2^5 x^6}{6!} - \frac{2^7 x^8}{8!} + \dots,$$

varam rakstīt, ka, piemēram,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x} dx &= \int_0^1 \left( x - \frac{2^3 x^3}{4!} + \frac{2^5 x^5}{6!} - \frac{2^7 x^7}{8!} + \dots \right) dx = \\ &= \left( \frac{x^2}{2} - \frac{2^3 x^4}{4!4} + \frac{2^5 x^6}{6!6} - \frac{2^7 x^8}{8!8} + \dots \right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{12} + \frac{1}{135} - \frac{1}{2520} + \dots \approx 0,4241, \end{aligned}$$

pie tam kļūda nepārsniedz 0,0004.



Abi aplūkotie piemēri ir tādi, kur primitīvā funkcija nav izsakāma ar elementārām funkcijām.

5. Rindu pielietojumu *diferenciālvienādojumu atrisināšanā* ilustrēsim ar šādu piemēru: ir jānosaka diferenciālvienādojuma

$$y'' + xy' + y = x \cos x \quad (18.17)$$

atrisinājums, kas izpilda sākuma nosacījumus

$$y(0) = 0; \quad y'(0) = 1. \quad (18.18)$$

Iedomāsimies, ka meklētais atrisinājums izvirzīts Maklorēna rindā

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

Izvirzījuma brīvais loceklis un tam sekojošā locekļa koeficients mums jau ir doti ar sākuma nosacījumiem (18.18). Lai dabūtu nākošā locekļa koeficientu, liekam dotajā diferenciālvienādojumā  $x=0$  (un tātad  $y=0$ ;  $y'=1$ ). Tas dod  $y''(0)=0$ . Pārējo atvasināto funkciju vērtības punktā  $x=0$  dabūsim, atkārtoti atvasinot vispirms pašu diferenciālvienādojumu (18.17)

$$\begin{aligned} y''' + xy'' + 2y' &= \cos x - x \sin x, \\ y^{(4)} + xy''' + 3y'' &= -2 \sin x - x \cos x, \\ y^{(5)} + xy^{(4)} + 4y''' &= -3 \cos x + x \sin x, \\ y^{(6)} + xy^{(5)} + 5y^{(4)} &= 4 \sin x + x \cos x, \\ y^{(7)} + xy^{(6)} + 6y^{(5)} &= 5 \cos x - x \sin x \text{ utt.} \end{aligned}$$

un tad liekot iegūtajās vienādībās  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $y'=0$ , kā arī pārējās atvasināto funkciju jau aprēķinātās vērtības. Tā atrodam

$$y'''(0) = -1; \quad y^{(4)}(0) = 0; \quad y^{(5)}(0) = 1; \quad y^{(6)}(0) = 0; \quad y^{(7)}(0) = -1; \dots$$

Tātad

$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

jeb, kas ir tas pats,

$$y = \sin x.$$

Ka atrastā funkcija tiešām ir dotā diferenciālvienādojuma atrisinājums, varam pārliecināties, ievietojot to tieši diferenciālvienādojumā.

Te jāpiezīmē, ka ne jau vienmēr mēs atrisinājumu dabūsim kādas pazīstamas rindas veidā. Vispārīgā gadījumā atrisinājuma pareizību varēsim pārbaudīt, ieliekot diferenciālvienādojumā pašu rindu un tās atvasinājumus. Grūtības vispārīgā gadījumā sagādā arī tās precizitātes noskaidrošana, kuru iegūstam, izmantojot atrisinājumam tikai galīgu skaitu rindas locekļu.

148. §.\* **Teilora rinda.** Maklorēna rindu varējām sastādīt tikai tādai funkcijai, kura ne vien pati ir definēta punktā  $x=0$ , bet kurai eksistē arī visi atvasinājumi šajā punktā. Jau tādas vienkāršas funkcijas kā  $f(x)=\sqrt{x}$  vai  $f(x)=\ln x$  tādēļ nav izvirzāmas Maklorēna rindā.

Ir iespējams pakāpju rindas jēdzienu vispārināt, ņemot par tās locekļiem ne vienkārši  $x$  pakāpes, bet gan binoma  $x-a$  pakāpes, kur  $a$  ir piemēroti izvēlēts skaitlis. Šādas vispārinātas jeb t. s. *Teilora rindas* tad varam mēģināt sastādīt visos tajos gadījumos, kad funkcijas izvirzījums Maklorēna rindā neeksistē.

Pieņemsim, ka dotā funkcija  $f(x)$  pieļauj šādu izvirzījumu pēc  $x-a$  pakāpēm:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + a_4(x-a)^4 + \dots,$$

kur  $a_0, a_1, a_2, \dots$  ir pagaidām nenoteikti koeficienti. Lai šos koeficientus noteiktu, atvasināsim, tāpat kā meklējot Maklorēna rindas koeficientus, vienādības abas puses atkārtoti pēc  $x$ . Tad dabū

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + 4a_4(x-a)^3 + \dots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3(x-a) + 3 \cdot 4a_4(x-a)^2 + \dots$$

$$f'''(x) = 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4(x-a) + \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

Liekot visās šajās vienādībās (arī sākotnējā)  $x=a$ , dabūjam:

$$f(a) = a_0; \quad f'(a) = a_1; \quad f''(a) = 2a_2; \quad f'''(a) = 2 \cdot 3a_3; \dots,$$

no kurienes

$$a_0 = f(a); \quad a_1 = \frac{f'(a)}{1}; \quad a_2 = \frac{f''(a)}{1 \cdot 2}; \quad a_3 = \frac{f'''(a)}{1 \cdot 2 \cdot 3}; \dots$$

Ieliekot tagad atrastās koeficientu vērtības sākotnējā vienādībā, atrodam, ka

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots \quad (18.19)$$

Tā arī ir meklētā Teilora rinda. Speciālā gadījumā, kad  $a=0$ , no tās dabūjam Maklorēna rindu.

1. piemērs. Izvirzīt Teilora rindā polinomu

$$f(x) = x^3 - 4x + 5$$

pēc augošām binoma  $x-2$  pakāpēm.

Atvasinot funkciju  $f(x)$ , dabūjam  $f'(x) = 3x^2 - 4$ ;  $f''(x) = 6x$ ;  $f'''(x) = 6$ ;  $f^{(n)}(x) = 0$ , ja  $n > 3$ . Liekot ta-

gad  $x=2$ , iegūstam  $f(2)=5$ ;  $f'(2)=8$ ;  $f''(2)=12$ ;  $f'''(2)=6$ ;  $f^{(n)}(2)=0$ , ja  $n>3$ . Dotās funkcijas izvērziņums Teilora rindā ir

$$f(x) = 5 + \frac{8}{1!}(x-2) + \frac{12}{2!}(x-2)^2 + \frac{6}{3!}(x-2)^3$$

jeb

$$f(x) = 5 + 8(x-2) + 6(x-2)^2 + (x-2)^3.$$

Teilora rindai šai gadījumā iznācis galīgs locekļu skaits. Viegli saprotams, ka šāda galīga rinda radīsies katram polinomam.

2. piemērs. Izvērziņ Teilora rindā pēc binoma  $x-1$  pakāpēm funkciju  $f(x) = \ln x$ .

Te  $f'(x) = \frac{1}{x}$ ;  $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ ;  $f'''(x) = \frac{1 \cdot 2}{x^3}$ ;  $f^{(4)}(x) = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4}$ ; ..., no kurienes

$$f'(1) = 1; f''(1) = -1; f'''(1) = 1 \cdot 2; f^{(4)}(1) = -1 \cdot 2 \cdot 3; \dots$$

Tādēļ

$$\begin{aligned} \ln x = & \ln 1 + 1 \cdot (x-1) - \frac{1}{1 \cdot 2}(x-1)^2 + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}(x-1)^3 - \\ & - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}(x-1)^4 + \dots \end{aligned}$$

jeb

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots$$

Lai noskaidrotu, kādā intervālā dabūtā rinda konverģē, varam lietot atkal Dalambēra konverģences pazīmi. Tā kā šeit

$$u_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(x-1)^n}{n}; \quad u_{n+1} = (-1)^n \cdot \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1},$$

tad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-1)^{n+1} \cdot n}{(n+1)(x-1)^n} \right| = |x-1| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = |x-1|.$$

Atrastā pakāpju rinda tāpat konverģē, ja  $|x-1| < 1$ , t. i.,  $-1 < x-1 < 1$  jeb  $0 < x < 2$ .

Intervāla galapunktā  $x=0$  dabū diverģentu skaitļu rindu  $-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots$ , bet otrā galapunktā  $x=2$  iznāk jau agrāk

skaitļa  $\ln 2$  aprēķināšanai izmantotā rinda  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

Aplūkotā rinda tādēļ konverģē intervālā  $0 < x \leq 2$ .



3. piemērs. Aplūkosim jau agrāk lietoto izvīrījumu

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots, \quad (18.20)$$

kas konverģē visiem  $|x| < 1$ . Konverģences intervāla labajā galā šī rinda diverģē, kaut gan pašai funkcijai punktā  $x=1$  ir pilnīgi noteikta vērtība. Arī dotās funkcijas vērtību aprēķināšanai konverģences intervāla ārpusē aplūkotā rinda nav lietojama.

Mēģināsim tagad izvīrīt funkciju  $f(x) = \frac{1}{1+x}$  pēc binoma  $x-1$  pakāpēm. Pārrakstot ērtības dēļ funkcijas izteiksmi formā  $f(x) = (1+x)^{-1}$ , dabūsim

$$f'(x) = -(1+x)^{-2}; \quad f''(x) = 2(1+x)^{-3}; \\ f'''(x) = -2 \cdot 3 \cdot (1+x)^{-4}; \quad f^{IV}(x) = 2 \cdot 3 \cdot 4 (1+x)^{-5}; \dots,$$

no kurienes tālāk atrodam

$$f(1) = \frac{1}{2}; \quad f'(1) = -\frac{1}{2^2}; \quad f''(1) = \frac{2!}{2^3}; \quad f'''(1) = -\frac{3!}{2^4}; \\ f^{(4)}(1) = \frac{4!}{2^5}; \dots$$

Dotās funkcijas izvīrījums Teilora rindā tādat ir

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}(x-1) + \frac{1}{2^3}(x-1)^2 - \frac{1}{2^4}(x-1)^3 + \frac{1}{2^5}(x-1)^4 - \dots \quad (18.21)$$

Tā ir atkal ģeometriskā rinda ar kvocientu  $q = -\frac{1}{2}(x-1)$ . Šī rinda tādēļ konverģē, ja  $\frac{1}{2}|x-1| < 1$ , no kurienes seko, ka  $|x-1| < 2$ , t. i.,  $-2 < x-1 < 2$  jeb  $-1 < x < 3$ . Par rindu (18.21) mēdz teikt, ka tā ir rindas (18.20) analītiskais turpinājums ārpus intervāla  $(-1; 1)$ . Intervāla  $(-1; 1)$  punktos abu rindu summas ir vienādas, bet ārpus šī intervāla, proti, intervālā  $(1; 3)$  doto funkciju  $\frac{1}{1+x}$  var pārstāvēt tikai rinda (18.21).

4. piemērs. Noteikt diferenciālvienādojuma

$$y' = x^2 + y^2 \quad (18.22)$$

atrisinājumu, kas izpilda sākuma nosacījumu  $y(1) = 0$ .

Atšķirībā no iepriekšējā paragrāfā aplūkotā piemēra te nav vairs dota funkcijas vērtība punktā  $x=0$ , bet gan punktā  $x=1$ .

Diferenciālvienādojuma atrisinājumu tadēļ meklēsim Teilora rindas veidā

$$y = y(1) + \frac{y'(1)}{1!} (x-1) + \frac{y''(1)}{2!} (x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!} (x-1)^3 + \dots$$

Rindas pirmais loceklis jau zināms:  $y(1)=0$ . Pirmā atvasinājuma vērtību dabū no dotā diferenciālvienādojuma:  $y'(1)=1+0=1$ . Pārējo atvasinājumu vērtības punktā  $x=1$  dabūsim, atkārtoti atvasinot diferenciālvienādojumu (18.22):

$$\begin{aligned} y'' &= 2x + 2yy' \\ y''' &= 2 + 2y'^2 + 2yy'' \\ y^{(4)} &= 6y'y'' + 2yy''' \\ y^{(5)} &= 6y''^2 + 8y'y''' + 2yy^{(4)} \\ &\dots \end{aligned}$$

Liekot iegūtajās sakarībās  $x=1$ ,  $y=0$ ,  $y'=1$ , kā arī atrastās pārējo atvasinājumu vērtības, dabūjam

$$y''(1)=2; \quad y'''(1)=4; \quad y^{(4)}(1)=12; \quad y^{(5)}(1)=56; \dots$$

Meklētais atrisinājums tādad ir

$$y = (x-1) + (x-1)^2 + \frac{2}{3} (x-1)^3 + \frac{1}{2} (x-1)^4 + \frac{7}{15} (x-1)^5 + \dots \quad (18.23)$$

Galvenās grūtības te sagādā aprēķinu precizitātes noteikšana, jo mēs taču nezinām pat dabūtās rindas konverģences intervālu. Zināmu ieskatu par precizitāti varam iegūt, ja sastādām atrastās funkcijas atvasinājumu

$$y' = 1 + 2(x-1) + 2(x-1)^2 + 2(x-1)^3 + \frac{7}{3} (x-1)^4 + \dots \quad (18.24)$$

un, izejot no dabūtajām sakarībām (18.23) un (18.24), nosakām atsevišķi vienādojuma (18.22) kreiso un labo pusi dažos «kontrol-punktos».

Izvēloties kontrolei, piemēram, punktu  $x=1,5$ , dabūjam

$$y' = 2,90; \quad y = 0,88; \quad x^2 + y^2 = 3,02.$$

Līdzīgā veidā dabū, ka punktā  $x=0,5$

$$y' = 0,40; \quad y = -0,32; \quad x^2 + y^2 = 0,35.$$

Atšķirība starp vienādojuma abām pusēm (pēc absolūtas vērtības) pirmajā gadījumā ir 0,12, bet otrajā gadījumā 0,05. Ja vēlamies dabūt labāku saskaņu, rindā (18,23) jāņem vairāk locekļus.

## Vingrinājumi

Noteikt pakāpju rindas konverģences intervālu un noteikt konverģenci intervāla galapunktos.

1.  $1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3^2} + \frac{x^3}{3^3} + \dots$
2.  $\frac{x}{3} + \frac{2x^2}{5} + \frac{3x^3}{7} + \frac{4x^4}{9} + \dots$
3.  $\frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{3^2\sqrt{2}} + \frac{x^6}{3^3\sqrt{3}} - \frac{x^8}{3^4\sqrt{4}} + \dots$
4.  $1 + \frac{x}{3 \cdot 2} + \frac{x^2}{3^2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3^3 \cdot 4} + \dots$
5.  $x + \frac{x^2}{20} + \frac{x^3}{300} + \frac{x^4}{4000} + \frac{x^5}{50\,000} + \dots$
6.  $\frac{x^2}{5} + \frac{x^4}{5^2 \cdot 2^3} + \frac{x^6}{5^3 \cdot 3^3} + \frac{x^8}{5^4 \cdot 4^3} + \dots$

Izvirzīt dotās funkcijas Maklorēna rindā un noteikt dabūtās rindas konverģences intervālu.

7.  $\frac{x}{x+2}$ ;    8.  $\frac{1}{(2-x)^2}$ ;    9.  $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ;
10.  $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$ ;    11.  $\sin x^2$ .

Aprēķināt tuvinātās vērtības, ņemot izvērījuma trīs locekļus.

12.  $\sqrt[3]{222}$ ;    13.  $\ln 0,88$ ;    14.  $\cos 18^\circ$ .

Aprēķināt ar precizitāti līdz ceturtai decimālzīmei.

15.  $\sqrt[5]{34}$ ;    16.  $\ln 1,2$ ;    17.  $\frac{1}{\sqrt[20]{e}}$ .

Aprēķināt noteikto integrāļu tuvinātās vērtības, izvēršot zemintegrāļa funkcijas pakāpju rindā (ņemt trīs rindas locekļus).

18.  $\int_0^{0,5} \frac{e^x - 1}{x} dx$ ;    19.  $\int_0^{0,4} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ ;
20.  $\int_0^{0,3} \frac{\arctg x}{x} dx$ .

Atrast pirmos četrus locekļus diferencialvienādojuma integrāļa izvērījuma pakāpju rindā ar dotajiem sākuma nosacījumiem.

21.  $y' + y^2 = e^x$ ;  $y(0) = 0$ ;
22.  $y'' - y \cos x = x$ ;  $y(0) = 1$ ;  $y'(0) = 0$ .

23. Uzrakstīt trīs pirmos locekļus funkcijas  $f(x) = x^3 \ln x$  izvērījumam Tei-lora rindā pēc binoma  $x-1$  pakāpēm.



VEKTORU ALGEBRAS ELEMENTI  
UN ANALITISKĀ ĢEOMETRIJA TELPĀ

## 19. NODAĻA

## VEKTORU ALGEBRAS ELEMENTI

**149. §. Skalāri un vektoriāli lielumi.** Par skalāriem sauc tādus lielumus, kurus izvēlētajā mēru sistēmā izteic ar vienu vienīgu skaitli. Tā, piemēram, kāda daudzstūra laukumu izteic kvadrātcimetru skaits, temperatūru — grādu skaits, elektrības daudzumu — kulonu skaits utt. Visi reālie skaitļi ir skalāri lielumi.

Par vektoriāliem lielumiem jeb vektoriem sauc tādus lielumus, kuru raksturošanai nepietiek ar vienu skaitli un kuriem bez to skaitliskās vērtības (vektora moduļa) jāuzrāda arī virziens. Tā, piemēram, runājot par spēku, nepietiek, ja ir zināma tā skaitliskā vērtība gramos, kilogramos vai tonnās, jo ir jāzina arī tā darbības virziens. Tas pats attiecas uz ātrumu, paātrinājumu utt. Neviens reāls skaitlis nav vektors, bet katrs reāls skaitlis, kas nav mazāks par nulli, var būt kāda vektora modulis.

Dažādus vektoriālus lielumus ģeometriski izteic ar orientētiem taisnes nogriežņiem, kurus apskatījām 1. nodaļā (sk. 3.—8. §).

**150. §. Vektoru summa.** Definīcija. Par vektoru  $\vec{a}$  un  $\vec{b}$  summu sauc vektoru  $\vec{c}$ , ko dabū, savienojot pirmā vektora  $\vec{a}$  sākumu ar otrā vektora  $\vec{b}$  galu, ja vektors  $\vec{b}$  atlikts no vektora  $\vec{a}$  gala (139. zīm.). Sai gadījumā raksta  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ .

Atgādinām, ka šai kursā mēs apskatām tikai brīvus vektorus (sk. 3. §).

Vektoru summai ir komutatīvā īpašība,

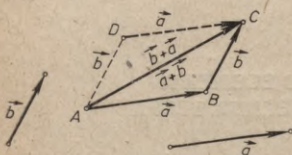
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}, \quad (19.1)$$

jo, ja  $\vec{a} = \vec{AB} = \vec{DC}$  (139. zīm.) un  $\vec{b} = \vec{AD} = \vec{BC}$ , tad  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$  un  $\vec{b} + \vec{a} = \vec{AD} + \vec{DC} = \vec{AC}$ .

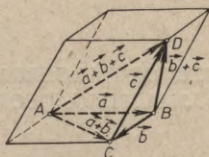
Vektoru summai ir asociatīva īpašība,

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}), \quad (19.2)$$

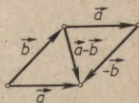
jo, ja  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$  un  $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$  (140. zīm.), tad  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$  un  $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$ . Formulā (19.2) tātad



139. zīm.



140. zīm.



141. zīm.

abās pusēs var atņemt iekavas. Vispār, ja ir dota vektoru sistēma  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  ( $n \geq 2$ ), tad, atkārtojot  $(n-1)$  reizi vektoru saskaitīšanas operāciju, dabū vektoru  $\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n$  jeb

$$\vec{s} = \sum_{i=1}^n \vec{a}_i. \quad (19.3)$$

Jebkura vektora  $\vec{a}$  summa ar nullvektoru  $\vec{o}$  ir vienāda ar vektoru  $\vec{a}$ ,

$$\vec{a} + \vec{o} = \vec{a}. \quad (19.4)$$

Ja dots vektors  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ , tad vektoru  $\overrightarrow{BA}$  sauc par vektoram  $\vec{a}$  pretēju vektoru un apzīmē ar  $(-\vec{a})$ . Katram vektoram  $\vec{a}$  eksistē pretējs vektors, kurš izpilda identitāti

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{o}. \quad (19.5)$$

Atņemt kādu vektoru nozīmē pieskaitīt pretēju vektoru. Ģeometriski vektoru atņemšanas kārtula parādīta 141. zīmējumā.

**151. §. Vektora reizinājums ar skaitli.** Definīcija. Par vektora  $\vec{a}$  reizinājumu ar skaitli  $\lambda$  sauc vektoru

$$\vec{b} = \lambda \vec{a}, \quad (19.6)$$

kas kolineārs ar vektoru  $\vec{a}$  un tā modulis  $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$ . Tā vērsums ir vienāds ar  $\vec{a}$  vērsumu, ja  $\lambda > 0$ , un tas ir pretim vērstis vektoram  $\vec{a}$ , ja  $\lambda < 0$ .

Piemēram, pareizināt vektoru  $\vec{a}$  ar skaitli 3 nozīmē trīskāršot tā moduli, nemainot virzienu; pareizināt to pašu vektoru  $\vec{a}$  ar skaitli  $-3$  nozīmē trīskāršot tā moduli un apgriezt vērsumu, bet pareizināt ar  $\frac{1}{2}$  nozīmē saīsināt vektora moduli uz pusi, nemainot virzienu. 142. zīm. attēloti vektori  $\vec{a}$ ,  $3\vec{a}$ ,  $-3\vec{a}$ ,  $\frac{1}{2}\vec{a}$  un  $-\frac{3}{2}\vec{a}$ .

No definīcijas izriet, ka  $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ ,

$$(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}, \quad (19.7)$$

$$n\vec{a} = \vec{a} + \vec{a} + \dots + \vec{a}, \quad (19.8)$$

kur  $n$  ir saskaitāmo skaits. Balstoties uz ģeometrisko uzskatāmību, nav grūti pierādīt, ka

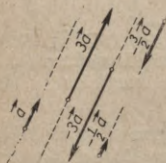
$$\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}, \quad (19.9)$$

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}, \quad (19.10)$$

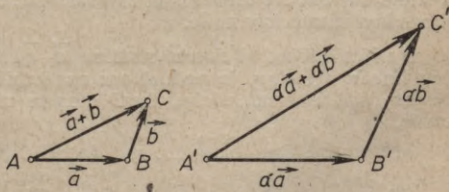
$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}, \quad (19.11)$$

kur  $\vec{a}$  un  $\vec{b}$  ir dotie vektori, bet  $\alpha$  un  $\beta$  jebkādi reāli skaitļi. Pierādīsim, piemēram, formulu (19.11). Sai nolūkā attēlosim (143. zīm.) vektoru  $\vec{a} = \vec{AB}$  un  $\vec{b} = \vec{BC}$  summu  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{a} + \vec{b}$ . Bez tam attēlosim vektoru  $\alpha\vec{a} = \vec{A'B'}$  un  $\beta\vec{b} = \vec{B'C'}$  summu  $\vec{A'C'} = \vec{A'B'} + \vec{B'C'} = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ .

Tā kā trijstūra  $A'B'C'$  malas  $A'B'$  un  $B'C'$  ir paralēlas un proporcionālas trijstūra  $ABC$  malām  $AB$  un  $BC$ , tad trijstūri  $ABC$



142. zīm.



143. zīm.

un  $A'B'C'$  ir līdzīgi. Tādēļ arī malas  $AC$  un  $A'C'$  ir paralēlas un proporcionālas,  $|A'C'| : |AC| = |\alpha|$ . Skaidrs, ka vektori  $\vec{A'C'}$  un  $\vec{AC}$  ir ar vienādu vērsumu, ja  $\alpha > 0$ , un tie ir savstarpēji pretimvērsti, ja  $\alpha < 0$ . No tā izriet, ka  $\vec{A'C'} = \alpha\vec{AC}$  vai  $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ , ko arī vajadzēja pierādīt.



Ar formulām (19.10) un (19.11) izteiktā distributīvā īpašība ir pareiza arī trim un vispārīgi  $n$  saskaitāmiem.

Vienības vektoru, kura pamats un vērsums sakrīt ar kāda vektora  $\vec{a}$  pamatu un vērsumu, sauc par vektora  $\vec{a}$  ortu un apzīmē ar  $\vec{a}^0$ .

Acīm redzot,

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^0. \quad (19.12)$$

**152. §. Vektoru lineārā neatkarība.** Vektoru  $\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$  sauc par vektoru sistēmas  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ , ( $n \geq 2$ ) lineāru kombināciju un skaitļus  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  par lineārās kombinācijas koeficientiem. Ģeometriski lineāru kombināciju attēlo tā, ka no kāda patvaļīgi izvēlēta punkta  $A$  velk vektoru  $\vec{AA}_1 = \lambda_1 \vec{a}_1$ , no tā gala punkta  $A_1$  kā no sākuma velk vektoru  $\vec{A_1A_2} = \lambda_2 \vec{a}_2$  utt., līdz nonāk pie vektora  $\vec{A_{n-1}A_n} = \lambda_n \vec{a}_n$ , un pēc tam savieno punktus  $A$  un  $A_n$ . Vektors  $\vec{AA_n} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$  ir attēlojamā lineārā kombinācija. Tā, piemēram, 144. zīmējumā attēloti vektori  $\vec{a}, \vec{b}$  un  $\vec{c}$ , kas atrodas šī zīmējuma plaknē un šo 3 vektoru divas lineārās kombinācijas:  $\vec{s} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \frac{3}{2}\vec{c}$ , un  $\vec{o} = 4\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$ .

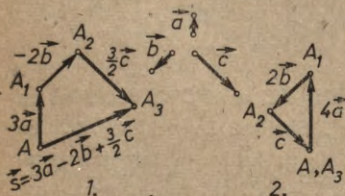
Nullvektors ir jebkuras vektoru sistēmas lineāra kombinācija, ja visi lineārās kombinācijas koeficienti ir nulles,  $0 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{a}_n = \vec{o}$ , bet, kā redzējam 144. zīmējuma 2. piemērā, nullvektors var būt arī tāda vektoru lineāra kombinācija, kurā vismaz viens koeficients nav nulle.

**Dēfinīcija.** Vektoru sistēmu  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ , ( $n \geq 2$ ) sauc par lineāri atkarīgu, ja nullvektoru var izteikt kā šīs vektoru sistēmas lineāru kombināciju, kurā vismaz viens koeficients nav nulle.

Vektoru sistēmu  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ , ( $n \geq 2$ ), kas nav lineāri atkarīga, sauc par lineāri neatkarīgu. Tādai sistēmai vienādība

$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{o}$  iespējama tikai tad, ja  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ .

**1. teorēma.** Katra vektoru sistēma, kurā ietilpst kaut viens nullvektors, ir lineāri atkarīga.



144. zīm.

**Pierādījums.** Pieņemsim, ka  $\vec{a}_1 = \vec{0}$  ietilpst vektoru sistēmā  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ . Tad neatkarīgi no skaitļa  $\lambda_1$ ,  $\lambda_1 \vec{a}_1 = \lambda_1 \vec{0} = \vec{0}$  un eksistē lineāra kombinācija  $\vec{0} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$ , kurā koeficienti  $\lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n = 0$ , bet  $\lambda_1 \neq 0$ . Tas nozīmē, ka vektoru sistēma ir lineāri atkarīga, ko arī vajadzēja pierādīt.

**2. teorēma.** Ja lineāri atkarīgai vektoru sistēmai  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ , ( $n \geq 2$ ) pievieno patvaļīgu vektoru sistēmu  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ , tad paplašinātā vektoru sistēma  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$  arī ir lineāri atkarīga.

**Pierādījums.** Saskaņā ar teorēmas nosacījumu lineārā kombinācijā  $\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n = \vec{0}$  vismaz viens koeficients nav nulle. Tādēļ arī lineārā kombinācijā  $\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n + 0 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{v}_m = \vec{0}$  vismaz viens koeficients nav nulle. Tas nozīmē, ka paplašinātā vektoru sistēma ir lineāri atkarīga, ko arī vajadzēja pierādīt.

**3. teorēma.** Vektori  $\vec{u}$  un  $\vec{v}$  ir kolineāri tad un tikai tad, ja tie ir lineāri atkarīgi.

**Pierādījums.** Pieņemsim, ka  $\vec{u}$  un  $\vec{v}$  ir lineāri atkarīgs vektoru pāris. Tas nozīmē, ka lineārā kombinācijā  $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \vec{0}$  vismaz viens koeficients nav nulle. Ja  $\alpha \neq 0$ , tad  $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ , kur  $\lambda = -\frac{\beta}{\alpha}$ .

Tādēļ saskaņā ar formulu (19.6) vektori  $\vec{u}$  un  $\vec{v}$  ir kolineāri.

Otrādi, pieņemsim, ka  $\vec{u}$  un  $\vec{v}$  ir kolineāri vektori un vismaz viens no tiem, piemēram,  $\vec{v}$  nav nullvektors. Tad eksistē tāds reāls skaitlis  $\lambda$ , kas apmierina vienādību  $\vec{u} = \lambda \vec{v}$  jeb  $(-1) \cdot \vec{u} + \lambda \vec{v} = \vec{0}$ . Tā kā  $(-1) \neq 0$ , tad vektori  $\vec{u}$  un  $\vec{v}$  ir lineāri atkarīgs vektoru pāris. Ar to teorēma pierādīta.

**Sekas.** Ja vektoru pāris  $\{\vec{u}, \vec{v}\}$  nav kolineārs, tad vienādība  $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \vec{0}$  iespējama tikai tad, kad  $\alpha = \beta = 0$ .

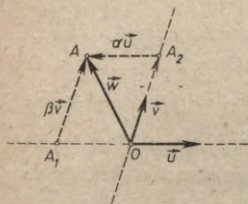
**153. §. Komplanāri vektori.** Vektoru sadalīšana komponentēs. Vairākus vektorus sauc par komplanāriem vektoriem, ja to pamati ir paralēli vienai plaknei vai arī atrodas dotajā plaknē. Ja komplanāriem vektoriem ir kopīgs sākuma punkts, tad tie atrodas vienā plaknē. Tādēļ runāt par komplanāru vektoru sistēmu ir jēga tikai tad, ja tajā ir vismaz 3 vektori, jo divi vektori, kam kopīgs sākuma punkts, vienmēr atrodas vismaz vienā plaknē. Acīm redzot, jebkura kolineāru vektoru sistēma ir komplanāra.

**1. teorēma.** Ja  $\vec{u}$  un  $\vec{v}$  ir lineāri neatkarīgs vektoru pāris,



tad katru šim vektoru pārim komplanāru vektoru  $\vec{w}$  var izteikt kā vienu vienīgu vektoru pāra  $\{\vec{u}, \vec{v}\}$  lineāru kombināciju

$$\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}, \quad (19.13)$$



145. zīm.

**Pierādījums.** Izvēlēsimies vektoriem  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  un  $\vec{w}$  kopīgu sākuma punktu  $O$  (145. zīm.) un pieņemsim, ka  $\vec{w}$  nav kolineārs ar  $\vec{u}$  vai  $\vec{v}$ . Velkot caur vektora  $\vec{w} = \vec{OA}$  gala punktu divas vektoru  $\vec{u}$  un  $\vec{v}$  asīm paralēlas taisnes, izveidojas paralelograms  $OA_1AA_2$ . Paralelograma malas ir vektoriem  $\vec{u}$  un  $\vec{v}$  kolineāri vektori  $\vec{OA}_1 = \vec{A_2A} = \alpha \vec{u}$  un  $\vec{OA}_2 = \vec{A_1A} = \beta \vec{v}$ , bēd saskaņā ar vektoru summas definīciju  $\vec{OA} = \vec{OA_2} + \vec{A_2A}$  jeb  $\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$ . Ja  $\vec{w}$  ir kolineārs ar vektoru  $\vec{u}$ , tad šajā formulā  $\beta = 0$ . Ja  $\vec{w}$  ir kolineārs ar vektoru  $\vec{v}$ , tad  $\alpha = 0$ .

Ar to ir pierādīts, ka katru vektoru  $\vec{w}$ , kas komplanārs ar lineāri neatkarīgu vektoru pāri  $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ , var izteikt kā šī vektoru pāra lineāru kombināciju (19.13). Atliek pierādīt, ka šī lineārā kombinācija ir vienīgā.

Pieņemsim, ka bez izteiksmes (19.13) eksistē vēl kāda cita izteiksme

$$\vec{w} = \alpha_1 \vec{u} + \beta_1 \vec{v}. \quad (19.14)$$

Salīdzinot izteiksmes (19.13) un (19.14), iegūstam  $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \alpha_1 \vec{u} + \beta_1 \vec{v}$  jeb

$$(\alpha - \alpha_1) \vec{u} + (\beta - \beta_1) \vec{v} = \vec{0}. \quad (19.15)$$

Tā kā vektori  $\vec{u}$  un  $\vec{v}$  ir lineāri neatkarīgi, tad izteiksme (19.15) iespējama tikai tad, ja  $\alpha - \alpha_1 = 0$  un  $\beta - \beta_1 = 0$  jeb  $\alpha = \alpha_1$  un  $\beta = \beta_1$ . Tādēļ izteiksme (19.13) ir viena vienīga, ko arī vajadzēja pierādīt.

**S e k a s.** Jebkurā plaknē var uzrādīt ne vairāk kā divus lineāri neatkarīgus vektorus.

Katru lineāri neatkarīgu vektoru pāri  $\{\vec{u}, \vec{v}\}$  sauc par plaknes bāzi. Lineārās kombinācijas (19.13) koeficientus sauc par vektora  $\vec{w}$  koordinātēm, bet vektorus  $\alpha \vec{u}$  un  $\beta \vec{v}$  — par vektora  $\vec{w}$  komponentēm bāzē  $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ .



2. teorēma. Vektoru sistēma  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  ir komplanāra tad un tikai tad, ja tā ir lineāri atkarīga.

Pierādījums. Pieņemsim, ka vektoru sistēma  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  ir lineāri atkarīga. Tas nozīmē, ka lineārajā kombinācijā  $\lambda_1\vec{u} + \lambda_2\vec{v} + \lambda_3\vec{w} = \vec{0}$  vismaz viens koeficients nav nulle. Ja  $\lambda_3 \neq 0$ , tad  $\vec{w} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\vec{u} - \frac{\lambda_2}{\lambda_3}\vec{v}$ , kur  $\alpha = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3}$  un  $\beta = -\frac{\lambda_2}{\lambda_3}$ . Tādēļ saskaņā ar iepriekšējo teorēmu vektori  $\vec{u}, \vec{v}$  un  $\vec{w}$  ir komplanāri.

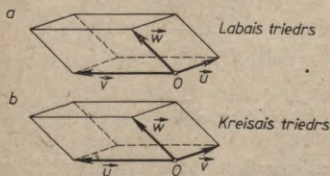
Otrādi, pieņemsim, ka vektori  $\vec{u}, \vec{v}$  un  $\vec{w}$  ir komplanāri, bet vismaz divi no tiem, piemēram,  $\vec{u}$  un  $\vec{v}$ , nav kolineāri. Tad saskaņā ar iepriekšējo teorēmu eksistē tādi reāli skaitļi  $\alpha$  un  $\beta$ , kas apmierina vienādību  $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$  jeb  $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + (-1)\vec{w} = \vec{0}$ . Tā kā  $(-1) \neq 0$ , tad vektoru sistēma  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  ir lineāri atkarīga. Ar to teorēma ir pierādīta.

Sekas. Ja vektoru sistēma  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  nav komplanāra, tad izteiksme  $\lambda_1\vec{u} + \lambda_2\vec{v} + \lambda_3\vec{w} = \vec{0}$  iespējama tikai tad, kad  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ .

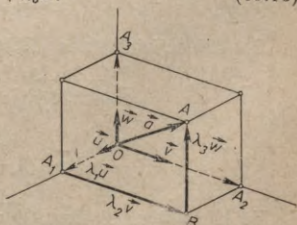
Izvēloties nekomplanāru vektoru sistēmas vektoriem kopīgu sākuma punktu, tie veido kāda trijplakņu kakta šķautnes jeb t. s. vektoriālo triedru. Vektoriālā triedra  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  vektori seko viens otram noteiktā kārtībā, pirmais ir  $\vec{u}$ , otrais  $\vec{v}$ , trešais  $\vec{w}$ . Atkarībā no tā, kā, skatoties no vektora  $\vec{w}$  gāla punkta, notiek īsākais pagrieziens, lai vektora  $\vec{u}$  virzienu sakļautu ar vektora  $\vec{v}$  virzienu, izšķir labo un kreiso triedru. Labajā triedrā šis pagrieziens ir pretējs pulksteņa rādītāju kustības virzienam (146. zīm. a), kreisajā triedrā — to kustības virzienā (146. zīm. b).

3. teorēma. Ja  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  ir nekomplanāru vektoru sistēma, tad katru vektoru  $\vec{a}$  var izteikt kā vienu vienīgu vektoru sistēmas  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  lineāru kombināciju

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{u} + \lambda_2\vec{v} + \lambda_3\vec{w}. \quad (19.16)$$



146. zīm.



147. zīm.

Pierādījums. Izvēlēsimies vektoriem  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  kopīgu sākuma punktu  $O$  (147. zīm.). Tādā gadījumā šo vektoru asis ir kāda trijplakņu kakta šķautnes. Sākuma punkts  $O$  ir trijplakņu kakta virsotne. Vektors  $\vec{a}$  var atrasties trijplakņu kakta iekšpusē, uz vienas no trim skaldnēm vai uz kādas no trim šķautnēm. Katrā gadījumā par vektora  $a$  sākuma punktu izvēlēsimies trijplakņu kakta virsotni  $O$  un, pieņemot, ka vektors  $\vec{a} = \vec{OA}$  atrodas trijplakņu kakta iekšpusē, vilksim caur tā gala punktu  $A$  visām trim trijplakņu kakta skaldnēm paralēlas plaknes. Tad veidojas paralēlskalnis, kura diagonāle ir vektors  $\vec{a}$ . Paralēlskalņa šķautnes ir vektoriem  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  kolineāri vektori  $\vec{OA}_1 = \lambda_1 \vec{u}$ ;  $\vec{OA}_2 = \lambda_2 \vec{v}$  un  $\vec{OA}_3 = \lambda_3 \vec{w}$ , kur  $\lambda_1, \lambda_2$  un  $\lambda_3$  ir kādi reāli skaitļi. Saskaņā ar vektoru summas definīciju  $\vec{OA} = \vec{OA}_1 + \vec{A_1B} + \vec{BA}$ . Tā kā paralēlskalņa kolineārās un vienādi vērstās šķautnes ir vienādas, tad  $\vec{A_1B} = \vec{OA}_2$ ;  $\vec{BA} = \vec{OA}_3$  un  $\vec{OA} = \vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \vec{OA}_3$  jeb  $\vec{a} = \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} + \lambda_3 \vec{w}$ . Ja vektors  $\vec{a}$  atrodas uz vienas no trijplakņu kaktu skaldnēm, tad tas ir komplanārs ar diviem vektoriem, kas pieder pie vektoru sistēmas  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  un koeficients pie trešā šīs sistēmas vektora lineārajā kombinācijā (19.17) ir vienāds ar nulli. Piemēram, ja vektors  $\vec{a}$  atrodas uz tās skaldnes, kurā atrodas vektori  $\vec{u}$  un  $\vec{v}$ , tad  $\lambda_3 = 0$ . Ja vektors  $\vec{a}$  atrodas uz vienas no trijplakņu kakta šķautnēm, tad divi koeficienti lineārajā kombinācijā (19.16) ir nulles. Piemēram, ja vektors  $\vec{a}$  atrodas uz vienas šķautnes ar vektoru  $\vec{w}$ , tad  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ .

Ar to ir pierādīts, ka katru vektoru  $\vec{a}$  var izteikt kā lineāri neatkarīgas vektoru sistēmas  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  lineāru kombināciju (19.16). Atliek pierādīt, ka šī lineārā kombinācija ir vienīgā.

Pieņemsim, ka bez izteiksmes (19.16) eksistē vēl kāda cita izteiksme

$$\vec{a} = \mu_1 \vec{u} + \mu_2 \vec{v} + \mu_3 \vec{w}. \quad (19.17)$$

Salīdzinot izteiksmes (19.16) un (19.17), iegūstam

$$\lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} + \lambda_3 \vec{w} = \mu_1 \vec{u} + \mu_2 \vec{v} + \mu_3 \vec{w}$$

jeb

$$(\lambda_1 - \mu_1) \vec{u} + (\lambda_2 - \mu_2) \vec{v} + (\lambda_3 - \mu_3) \vec{w} = \vec{0}. \quad (19.18)$$

Tā kā vektoru sistēma  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  nav komplanāra, tad izteiksme (19.18) iespējama tikai tad, ja  $\lambda_1 - \mu_1 = 0$ ;  $\lambda_2 - \mu_2 = 0$ ;  $\lambda_3 - \mu_3 = 0$



jeb  $\lambda_1 = \mu_1$ ;  $\lambda_2 = \mu_2$ ;  $\lambda_3 = \mu_3$ . Tādēļ izteiksme (19.16) ir vienīgā, ko arī vajadzēja pierādīt.

*S e k a s. Telpā var uzrādīt ne vairāk kā trīs lineāri neatkarīgus vektorus.*

Katru trīs lineāri neatkarīgu vektoru sistēmu sauc par *telpas bāzi*. Izvēlētas bāzes vektoru lineārās kombinācijas (19.16) koeficientus  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  un  $\lambda_3$  sauc par vektora  $\vec{a}$  *koordinātēm*, bet vektorus  $\vec{\lambda}_1\vec{u}$ ,  $\vec{\lambda}_2\vec{v}$  un  $\vec{\lambda}_3\vec{w}$  par vektora  $\vec{a}$  *komponentēm* bāzē  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ .

Ja bāze izvēlēta, tad lineārās kombinācijas (19.16) vietā var saīsināti rakstīt  $\vec{a} = (\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3)$ .

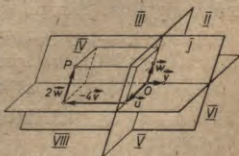
**154. §. Dekarta koordinātu sistēma telpā.** Koordinātu sistēmu telpā veido trīs izvēlēti bāzes vektori un *sākuma punkts*  $O$  (148. zīm.). Bāzes vektoru ass, kas krustojas sākuma punktā  $O$ , sauc par *koordinātu asīm*. Vienu no tām sauc par *abscisu asi*, otru par *ordinātu*, trešo par *aplikātu asi*. Atkarībā no tā, kādu triedru veido bāzes vektori, izšķir *labo* un *kreiso koordinātu sistēmu*. Šajā grāmatā kreiso koordinātu sistēmu nelietosim.

Katrs koordinātu asu pāris atrodas vienā no trim *koordinātu plaknēm*. Koordinātu plaknes sadala telpu astoņos oktantos. To numerācija parādīta 148. zīmējumā.

Jebkura punkta  $P$  stāvokli izvēlētajā koordinātu sistēmā pilnīgi nosaka tā rādiusvektors  $\vec{OP} = \vec{r}$ . Par punkta  $P$  koordinātēm sauc tā rādiusvektora koordinātes izvēlētajā bāzē. Tā, piemēram, 148. zīmējumā attēlots punkts  $P$ , kas atrodas IV oktantā, un tā rādiusvektors  $\vec{OP} = \vec{u} - 4\vec{v} + 2\vec{w}$  jeb īsāk  $\vec{OP} = (1; -4; 2)$ . Skaitļi  $(1; -4; 2)$  ir arī punkta  $P$  koordinātes koordinātu sistēmā  $\{O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ . Punkta koordinātes raksta iekavās blakus punkta apzīmējumam, piemēram,  $P(1; -4; 2)$ . Pirmo skaitli šajā pierakstā sauc par punkta *abscisu*, otro par *ordināti*, bet trešo par *aplikātu*.

Katram punktam telpā, tāpat kā vektoram, ir tādā 3 koordinātes — un otrādi — katrai sakārtotai trīs skaitļu kopai atbilst viens vienīgs punkts, kuru var konstruēt pēc dotajām koordinātēm. Trīs savstarpēji perpendikulārus ortus  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ , kam moduļi vienādi ar vienu, t. i.,  $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ , sauc par *ortonormētu telpas bāzi*. Ortonormēta bāze un sākuma punkts  $O$  veido taisnleņķa koordinātu sistēmu telpā (149. zīm.). Taisnleņķa koordinātu sistēmas abscisu ass

( $Ox$  ass) ortu ir  $\vec{i}$ , ordinātu ass ( $Oy$  ass) ortu ir  $\vec{j}$ , un aplikātu ass ( $Oz$  ass) ortu ir  $\vec{k}$ . Patvaļīga punkta  $P$  taisnleņķa koordinātes pieņemts apzīmēt ar  $(x; y; z)$ . Tādējādi pieraksts  $P(x; y; z)$  nozīmē, ka punkta  $P$  abscisa ir skaitlis  $x$ ,



148. zīm.

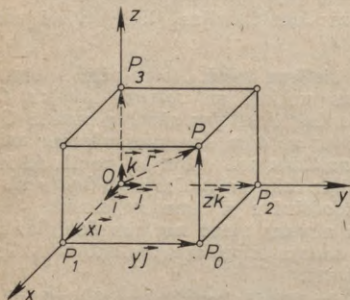


ordināte — skaitlis  $y$  un aplikāta — skaitlis  $z$ . Šie skaitļi ir vienādi ar punkta  $P$  rādiusvektora

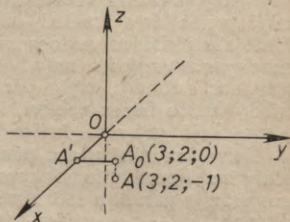
$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (19.19)$$

jeb šāsinātā pierakstā

$$\vec{r} = (x; y; z) \quad (19.20)$$



149. zīm.



150. zīm.

projekcijām (koordinātēm) uz taisnleņķa koordinātu sistēmas  $\{O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$  asīm. 149. zīmējumā redzams, ka rādiusvektora  $\vec{r} = \vec{OP}$  komponentes ir vektori  $\vec{OP}_1 = x\vec{i}$ ,  $\vec{OP}_2 = y\vec{j}$ ,  $\vec{OP}_3 = z\vec{k}$ . So ass vektoru algebriskie lielumi  $x = OP_1$ ,  $y = OP_2$  un  $z = OP_3$  ir punkta  $P$  un tā rādiusvektora  $OP$  taisnleņķa koordinātes.

Punkti, kuru aplikāta ir 0, atrodas  $xOy$  plaknē. Tā, piemēram, punkts  $P_0(x; y; 0)$  ir punkta  $P(x; y; z)$  taisnleņķa projekcija  $xOy$  plaknē. Punkti, kuru aplikāta un ordināte ir nulle, atrodas uz abscisu ass. Punkts  $P_1(x; 0; 0)$  ir punkta  $P(x; y; z)$  taisnleņķa projekcija uz abscisu ass. Tā paša punkta projekcija uz ordinātu ass ir punkts  $P_2(0; y; 0)$ , bet uz aplikātu ass  $P_3(0; 0; z)$ . 150. zīmējumā, piemēram, attēlots punkts  $A(3; 2; -1)$  taisnleņķa koordinātu sistēmā. Šis punkts atrodas V oktantā, tā rādiusvektors ir  $\vec{OA} = (3; 2; -1)$ . Punkta  $A(3; 2; -1)$  projekcija  $xOy$  plaknē ir punkts  $A_0(3; 2; 0)$ , bet projekcija uz  $Ox$  ass ir punkts  $A'(3; 0; 0)$ .

Ja kāda vektora  $a$  koordinātes, ortonormētā telpas bāzē ir skaitļi  $a_x, a_y, a_z$ , tad lineārās kombinācijas  $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$  vietā īsāk raksta

$$\vec{a} = (a_x; a_y; a_z). \quad (19.21)$$

Tādēļ vienmēr ir spēkā simboliska identitāte

$$(a_x; a_y; a_z) = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}. \quad (19.22)$$

Var lietot šādus pierakstus:

$$\vec{o} = (0; 0; 0), \quad (19.23)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{i} &= (1; 0; 0), \\ \vec{j} &= (0; 1; 0), \\ \vec{k} &= (0; 0; 1). \end{aligned} \right\} \quad (19.24)$$

Divi vektori  $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$  un  $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$  ir vienādi tad un tikai tad, ja ir vienādas atbilstošās to koordinātes:  $a_x = b_x$ ;  $a_y = b_y$  un  $a_z = b_z$ .

Vektoru summas  $\vec{a} + \vec{b}$  koordinātes ir vienādas ar saskaitāmo vektoru koordinātu summu:

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= (a_x; a_y; a_z) + (b_x; b_y; b_z) = \\ &= (a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z). \end{aligned} \quad (19.25)$$

Piemēram,  $(3; -1; 0) + (4; 2; -15) = (7; 1; -15)$ .

Pareizināt vektoru  $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$  ar kādu reālu skaitli  $\lambda$  nozīmē pareizināt visas šī vektora koordinātes ar  $\lambda$ :

$$\vec{a} = \lambda(a_x; a_y; a_z) = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z). \quad (19.26)$$

Piemēram,  $3(2; -1; 4) = (6; -3; 12)$ .

Katra vektoru sistēmas  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  lineāra kombinācija

$$\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n \quad (19.27)$$

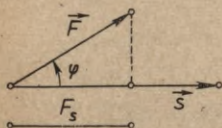
ir identiska ar 3 lineāru vienādojumu sistēmu:

$$\left. \begin{aligned} b_x &= \lambda_1 a_{1x} + \lambda_2 a_{2x} + \dots + \lambda_n a_{nx} \\ b_y &= \lambda_1 a_{1y} + \lambda_2 a_{2y} + \dots + \lambda_n a_{ny} \\ b_z &= \lambda_1 a_{1z} + \lambda_2 a_{2z} + \dots + \lambda_n a_{nz} \end{aligned} \right\} \quad (19.28)$$

kur  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  ir lineārās kombinācijas (19.27) koeficienti, bet  $(b_x; b_y; b_z)$  un  $(a_{ix}; a_{iy}; a_{iz})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , izteiksmē (19.27) ietilpstošo vektoru koordinātes.

**155. §. Vektoru skalārais reizinājums.** Pastāvīga spēka  $\vec{F}$  darbu, kas paveikts, pārvietojot kādu materiālu punktu pa taisna

virziena ceļu  $\vec{s}$ , kura garums ir  $|s|$ , fizikā aprēķina ar formulu  $A = |\vec{s}| \cdot F_s$ , kur  $F_s = |F| \cos \varphi$  ir pastāvīgā spēka  $\vec{F}$  projekcija uz ceļa  $\vec{s}$  ass un  $\varphi$  — leņķis starp spēku  $\vec{F}$  un ceļu  $\vec{s}$  (151. zīm.). Padarītais darbs tātad ir vektoru  $\vec{F}$  un  $\vec{s}$  funkcija  $A = |\vec{s}| \cdot |\vec{F}| \cos \varphi$ .



151. zīm.

Sai funkcijai ir īpašs apzīmējums  $A = \vec{F} \cdot \vec{s}$  un to sauc par vektoru  $\vec{F}$  un  $\vec{s}$  skalāro reizinājumu.

Neatkarīgi no fizikālās interpretācijas par vektoru  $\vec{a}$  un  $\vec{b}$  skalāro reizinājumu sauc reālu skaitli, kuru apzīmē ar simbolu  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  un iegūst, pareizinot pirmā vektora moduli ar otrā vektora projekciju uz pirmā vektora ass, t. i.,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot pr_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot pr_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi, \quad (19.29)$$

kur  $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$  ir leņķis starp vektoriem  $\vec{a}$  un  $\vec{b}$ .

Bez apzīmējuma  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  skalārā reizinājuma apzīmēšanai lieto arī citus simbolus, piemēram,  $\vec{a}\vec{b}$ ,  $(\vec{a}, \vec{b})$  u. c.

Saskaņā ar definīcijas formulu (19.29) skalāram reizinājumam ir spēkā komutatīvā īpašība

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

Acīm redzot,

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0 = |\vec{a}|^2 \quad (19.30)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{e} = pr_{\vec{e}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{e}) \quad (19.31)$$

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \cos \angle(\vec{e}_1, \vec{e}_2), \quad (19.32)$$

kur  $\vec{a}$  ir patvaļīgs vektors, bet  $\vec{e}$ ,  $\vec{e}_1$  un  $\vec{e}_2$  — vienības vektori.

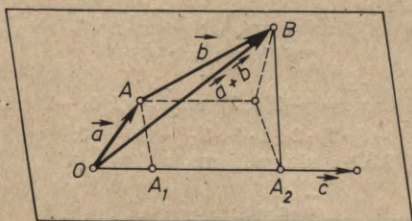
Skalārais reizinājums  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$  ir vienāds ar nulli, ja vismaz viens no skaitļiem  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$  vai  $\cos \varphi$  ir nulle. Ja  $\cos \varphi = 0$ , tad  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  un vektori ir savstarpēji perpendikulāri (ortogonāli). Tā kā nullvektoru var uzskatīt par ortogonālu ar jebkuru vektoru, tad skalārais reizinājums ir vienāds ar nulli tad un tikai tad, ja vektori ir ortogonāli. Skalārais reizinājums ir pozitīvs, ja leņķis starp vektoriem ir šaurs, bet negatīvs, ja šis leņķis — plats.

Skalāram reizinājumam ir spēkā asociatīvā īpašība attiecībā uz skaitlisku reizinātāju  $\lambda$ , t. i.,

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}). \quad (19.33)$$



Lai par to pārlicinātos, atcerēsimies formulu (1.6), pēc kuras  $\text{pr}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$ . Ja vektoru  $\vec{a}$  pareizina ar skaitli  $\lambda$ , tad arī tā projekcija uz kādas ass jāreizina ar šo skaitli, t. i.,  $\text{pr}_{\vec{b}} (\lambda \vec{a}) = \lambda |\vec{a}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$  un  $|b| \text{pr}_{\vec{b}} (\lambda \vec{a}) = \lambda |a| |b| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$ ,



152. zīm.

bet saskaņā ar skalārā reizinājuma definīciju tas nozīmē, ka  $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$ . Analogi pierādāms, ka  $(\lambda \vec{b}) \cdot \vec{a} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$ . Tādēļ formula (19.33) ir pareiza.

Lai pierādītu, ka skalāram reizinājumam ir spēkā arī distributīvā īpašība

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}, \quad (19.34)$$

tad balstīsimies uz ģeometrisko uzskatāmību, kas attēlota 152. zīmējumā. No zīmējuma redzams, ka  $OA_1 = \text{pr}_{\vec{c}} \vec{a}$ ,  $A_1A_2 = \text{pr}_{\vec{c}} \vec{b}$  un  $OA_2 = \text{pr}_{\vec{c}} (\vec{a} + \vec{b}) = OA_1 + A_1A_2$ .

Tādēļ

$$\text{pr}_{\vec{c}} (\vec{a} + \vec{b}) = \text{pr}_{\vec{c}} \vec{a} + \text{pr}_{\vec{c}} \vec{b}. \quad (19.35)$$

Pareizinot izteiksmes (19.35) abas puses ar vektora  $\vec{c}$  moduli  $|c|$ , iegūstam

$$|c| \cdot \text{pr}_{\vec{c}} (\vec{a} + \vec{b}) = |c| \cdot \text{pr}_{\vec{c}} \vec{a} + |c| \cdot \text{pr}_{\vec{c}} \vec{b}. \quad (19.36)$$

Formulas (19.36) kreisā puse saskaņā ar skalārā reizinājuma definīciju ir skaitlis  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$ , bet labā puse skaitļu  $\vec{a} \cdot \vec{c}$  un  $\vec{b} \cdot \vec{c}$  summa. Ar to ir pierādīta formula (19.34).

Ja vektori  $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$  un  $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$  uzdoti ar savām koordinātēm, tad, balstoties uz distributīvo īpašību un ievērojot, ka

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \quad (19.37)$$

un

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0, \quad (19.38)$$

dabūjam, ka

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \end{aligned} \quad (19.39)$$

Piemēram, vektoru  $\vec{a} = (-2; 1; 3)$  un  $\vec{b} = (2; 4; -1)$  skalārais reizinājums ir  $\vec{a} \cdot \vec{b} = (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) = -3$ .

Formulas (19.39) īpašs gadījums ir

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2, \quad (19.40)$$

bet  $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ . Tādēļ, ja zināmas vektora  $\vec{a}$  koordinātes taisnleņķa koordinātu sistēmā, tad tā modulis aprēķināms pēc formulas

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (19.41)$$

Piemēram, vektora  $\vec{a} = (-3; 4; -12)$  modulis ir  $|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + (-12)^2} = \sqrt{169} = 13$ . Saskaņā ar formulu (19.12) šī vektora Orts ir vektors

$$\vec{a}^0 = \left( -\frac{3}{13}; \frac{4}{13}; -\frac{12}{13} \right).$$

### 156. §. Vienkāršākie uzdevumi par taisnleņķa koordinātēm

1°. *Vektora virziena kosinusi.* Ja vektora  $\vec{a}$  projekcijas uz taisnleņķa koordinātu sistēmas  $\{O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$  asīm apzīmētas ar  $a_x$ ,  $a_y$  un  $a_z$ , bet  $\alpha$  ir leņķis starp  $\vec{i}$  ( $Ox$  asi) un  $\vec{a}$ ,  $\beta$  — leņķis starp  $\vec{j}$  ( $Oy$  asi) un  $\vec{a}$ ,  $\gamma$  — leņķis starp  $\vec{k}$  ( $Oz$  asi) un  $\vec{a}$ , tad saskaņā ar formulu (1.7) vektora  $\vec{a}$  virziena kosinusi ir:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}; \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}; \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}, \quad (19.42)$$

kāpinot formulu (19.42) abas puses kvadrātā, summējot un ņemot vērā, ka  $|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$ , iegūstam

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (19.43)$$

Vektora virziena kosinusi pilnīgi nosaka vektora virzienu, bet neko nelielina par tā moduli.

Tā kā

$$\vec{a}^0 \cdot \vec{i} = \text{pr}_{\vec{i}} \vec{a}^0 = \cos \angle(\vec{a}^0, \vec{i}) = \cos \alpha,$$

$$\vec{a}^0 \cdot \vec{j} = \text{pr}_{\vec{j}} \vec{a}^0 = \cos \angle(\vec{a}^0, \vec{j}) = \cos \beta,$$

$$\vec{a}^0 \cdot \vec{k} = \text{pr}_{\vec{k}} \vec{a}^0 = \cos \angle(\vec{a}^0, \vec{k}) = \cos \gamma$$

un  $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^0$ , tad vektora  $\vec{a}$  virziena kosinusi ir vienādi ar tā orta koordinātēm, t. i.,

$$\vec{a}^0 = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma). \quad (19.44)$$

Piemēram, vektora  $\vec{a} = (-3; 4; -12)$  Orts, kā redzējām iepriekšējā paragrāfā, ir vektors  $\vec{a}^0 = \left(-\frac{3}{13}; \frac{4}{13}; -\frac{12}{13}\right)$ . Vektora  $\vec{a}$  virziena kosinusi tādad ir

$$\cos \alpha = -\frac{3}{13}; \quad \cos \beta = \frac{4}{13}; \quad \cos \gamma = -\frac{12}{13}.$$

2°. Vektoru kolinearitātes nosacījumi. Divu vektoru,  $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$  un  $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$  kolinearitātes nepieciešamais un pietiekamais nosacījums saskaņā ar 152. § 3. teorēmu ir to lineārā atkarība, t. i.,  $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ . Tādēļ saskaņā ar formulām (19.26)  $b_x = \lambda a_x$ ;  $b_y = \lambda a_y$  un  $b_z = \lambda a_z$ . Izslēdzot no šīm izteiksmēm skaitli  $\lambda$ , dabūjam kolinearitātes nosacījumus:

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}. \quad (19.45)$$

Ja kāda vektora  $\vec{a}$  koordināte ir nulle, piemēram,  $a_y = 0$ , tad vektora  $\vec{a}$  pamats ir paralēls  $xOz$  plaknei un pats vektors perpendikulārs  $Oy$  asij.

3°. Vektoru ortogonalitātes (perpendikularitātes) nosacījums.

Saskaņā ar vektoru  $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$  un  $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$  skalārā reizinājuma īpašībām vektoru ortogonalitātes nepieciešamais un pietiekamais nosacījums ir skalārā reizinājuma vienādība ar nulli, t. i.,

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0. \quad (19.46)$$

4°. Leņķis starp vektoriem. Saskaņā ar formulām (19.29), (19.39) un (19.41) kosinusu leņķim  $\varphi$ , kas ir starp vektoriem  $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$  un  $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$ , aprēķina pēc formulas

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \quad (19.47)$$



Piemērs. Atrast vektora  $\vec{a} = 2\vec{e} + 3\vec{j} - \vec{k}$  projekciju uz vektora  $\vec{b} = -3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$  ass un noteikt leņķi starp šiem vektoriem.

Atrisinājums. Saskaņā ar formulu (19.39)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-3) + 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = -10$  un saskaņā ar formulu (19.41)  $|\vec{b}| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{11}$ ,

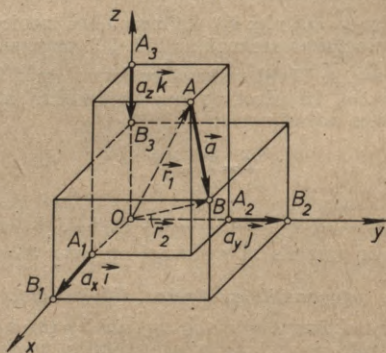
$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{14},$$

bet saskaņā ar formulu (19.29)

$$\text{pr}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{-10}{\sqrt{11}} \approx -3,03.$$

Saskaņā ar formulu (19.47)

$$\cos \varphi = \frac{-10}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{11}} = \frac{-10}{\sqrt{154}} \approx -0,8, \text{ no kurienes } \varphi \approx 143^\circ 10'.$$



153. zīm.

5°. Attālums starp diviem punktiem. Vektors  $\vec{a} = (a_x; b_y; a_z)$ , kura sākuma punkts  $A(x_1; y_1; z_1)$  un gala punkts  $B(x_2; y_2; z_2)$  ir divu rādiusvektoru  $\vec{r}_2 = \vec{OB}$  un  $\vec{r}_1 = \vec{OA}$  starpība (153. zīm.). Tā kā

$$\vec{r}_2 = (x_2; y_2; z_2) \text{ un } \vec{r}_1 = (x_1; y_1; z_1), \text{ tad}$$

$$\vec{a} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$$

jeb saskaņā ar divu vektoru vienādības nosacījumu

$$\left. \begin{aligned} a_x &= x_2 - x_1, \\ a_y &= y_2 - y_1, \\ a_z &= z_2 - z_1. \end{aligned} \right\} \quad (19.48)$$

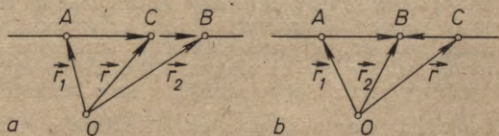
Attālums starp punktiem  $A$  un  $B$  ir vektora  $\vec{a}$  modulis, kuru var aprēķināt pēc formulas (19.41). No šejienes.

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (19.49)$$

Piemērs. Vektora  $\vec{a}$  sākuma punkts ir  $A(-5; 11; 1)$  un gala punkts  $B(-1; -8; 9)$ . Noteikt šī vektora ortu.

Atrisinājums. Saskaņā ar formulu (19.49)  $|a| = \sqrt{(-1+5)^2 + (-8-11)^2 + (9-1)^2} = \sqrt{441} = 21$ . Saskaņā ar formulām (19.48)  $a_x = 4$ ;  $a_y = -19$  un  $a_z = 8$  un saskaņā ar formulām (19.42)  $\cos \alpha = \frac{4}{21}$ ;  $\cos \beta = -\frac{19}{21}$ ,  $\cos \gamma = \frac{8}{21}$ . Tādēļ meklējamais ort  $\vec{a}^0 = \left( \frac{4}{21}; -\frac{19}{21}; \frac{8}{21} \right)$ .

6°. *Nogriežņa dalīšana dotajā attiecībā*. Ja caur diviem punktiem  $A$  un  $B$  ir vilkta taisne un uz tās atrodas trešais punkts  $C$ , kurš nesakrīt ar punktu  $B$ , tad skaitli  $\lambda = \frac{AC}{CB}$  sauc par attiecību, kādā punkts  $C$  dala orientēto taisnes nogriezni  $\vec{AB}$ . Ja  $\lambda > 0$ , tad punkts  $C$  atrodas starp punktiem  $A$  un  $B$  (154. zīm. a). Ja  $\lambda < 0$ , tad punkts  $C$  neatrodas starp punktiem  $A$  un  $B$  (154. zīm. b).



154. zīm.

Doti punkti  $A(x_1; y_1; z_1)$  un  $B(x_2; y_2; z_2)$  un attiecība  $\lambda = \frac{AC}{CB}$ . Jāatrod punkts  $C(x; y; z)$ . Apzīmēsim punktu  $A, B$  un  $C$  rādiusvektorus ar  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  un  $\vec{r}$ . Tad, kā redzams no 154. zīmējuma,  $\vec{AC} = \vec{r} - \vec{r}_1$  un  $\vec{CB} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ . Tā kā  $\vec{AC}$  un  $\vec{CB}$  ir kolineāri vektori un to algebrisko lielumu attiecība  $\lambda$  ir dota, tad  $\vec{AC} = \lambda \vec{CB}$  un

vienmēr ir spēkā vektoriāla vienādība  $\vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r})$ . No tās seko  $(1 + \lambda)\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda\vec{r}_2$  un

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \lambda\vec{r}_2}{1 + \lambda} \quad (19.50)$$

jeb saskaņā ar formulām (19.26)

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \quad (19.51)$$

Atzīmēsim vēl dažus formulas (19.50) paveidus. Liekot  $\lambda = \frac{n}{m}$ , formula (19.50) kļūst simetriskāka

$$\vec{r} = \frac{m\vec{r}_1 + n\vec{r}_2}{m + n} \quad (19.52)$$

Tā kā skaitļus  $m$  un  $n$  dotajā attiecībā  $\lambda = \frac{n}{m}$  vienmēr var izvēlēties tādus, lai to summa  $m + n$  būtu vienāda ar 1, tad

$$\vec{r} = m\vec{r}_1 + n\vec{r}_2, \quad (m + n = 1) \quad (19.53)$$

jeb

$$\vec{r} = (1 - n)\vec{r}_1 + n\vec{r}_2. \quad (19.54)$$

**157. §. Vektoru vektoriāls reizinājums.** Runājot par algebrisku operāciju, kas nosaukta par reizināšanu, zinām, ka *skaitļa reizinājums ar skaitli* ir skaitlis, ka *skaitļa reizinājums ar vektoru* ir vektors un ka vektora *skalārais reizinājums* ar vektoru ir skaitlis. Tagad iepazīsimies ar algebrisku operāciju, kuru sauc par vektora *vektoriālo reizinājumu* ar vektoru. Atšķirībā no skalārā reizinājuma vektora vektoriālais reizinājums ar vektoru ir vektors.

**Definīcija.** Par vektoru  $\vec{a}$  un  $\vec{b}$  vektoriālo reizinājumu sauc vektoru  $\vec{c}$ , kura modulis un virziens noteikts šādi:

1)  $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$ ;

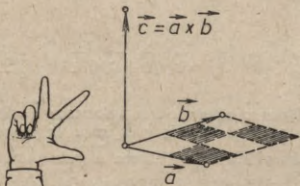
2) vektors  $\vec{c}$  ir perpendikulārs abiem vektoriem  $\vec{a}$  un  $\vec{b}$ ;

3) vektori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  un  $\vec{c}$  veido labo vektoriālo triedrū. Tas nozīmē, ka, apvienojot visu trīs vektoru  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  un  $\vec{c}$  sākuma punktus, vektoram  $\vec{c}$  jābūt vērstam tā, kā ir vērsts perpendikulāri pret delnu saliekts labās rokas trešais pirksts, ja pirmais pirksts (īkšķis) norāda vektora  $\vec{a}$ , bet otrais — vektora  $\vec{b}$  virzienu (155. zīm.).

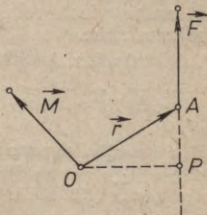


Vektora  $\vec{a}$  un vektora  $\vec{b}$  vektoriālo reizinājumu  $\vec{c}$  parasti apzīmē ar simbolu  $\vec{a} \times \vec{b}$  jeb  $[\vec{a}\vec{b}]$ . Tā garuma skaitliskā vērtība (modulis) saskaņā ar definīciju ir vienāda ar tāda paralelograma laukumu, kura malas ir vektori  $\vec{a}$  un  $\vec{b}$ , jo

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}). \quad (19.55)$$



155. zīm.



156. zīm.

Vektoriālā reizinājuma jēdziens ir radies mehānikā. Cieta ķermeņa statikā būtiski svarīga loma ir tādām jēdzieniem kā spēka moments pret punktu. Ja spēks  $\vec{F}$  pielikts punktā  $A$  (156. zīm.), tad par spēka  $\vec{F}$  momenta vektoru pret punktu  $O$  sauc vektoru  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ , kur  $\vec{r} = \vec{OA}$  ir rādiusvektors, kas savieno punktu  $O$  ar spēka  $F$  pielikšanas punktu  $A$ . Momenta skaitliskā vērtība (modulis) tāpat ir vienāda ar spēka moduli, pareizinātu ar punkta  $O$  attālumu  $|OP|$  no taisnes, kas ir spēka vektora  $\vec{F}$  pamats.

Vektoriālā reizinājuma īpašības.

1°. Divu kolineāru vektoru  $\vec{a}$  un  $\vec{b}$  vektoriālais reizinājums ir nullvektors:

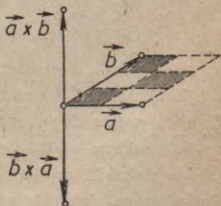
$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0},$$

jo tādā gadījumā  $\sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$  un  $|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$ .

2°. Vektoriālam reizinājumam ir *anti-komutatīvā īpašība*, t. i., mainot reizinātāju kārtību, vektoriālais reizinājums maina zīmi (157. zīm.)

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}). \quad (19.56)$$

Šī īpašība izriet tieši no definīcijas. Tā kā vektoriālajam reizinājumam nav spēkā



157. zīm.

komutativā īpašība, tad reizinātāju rakstīšanas kārtībai ir būtiski svarīga nozīme.

3°. Asociatīvā īpašība attiecībā pret skalāru reizinātāju:

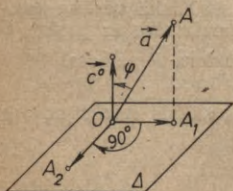
$$\vec{a} \times \lambda \vec{b} = \lambda \vec{a} \times \vec{b} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b}). \quad (19.57)$$

Ja  $\lambda > 0$ , tad šī īpašība ir acīm redzama, jo, cik reizes, nemainot virzienu, palielina vienu paralelograma malu, tikpat reizes palielinās paralelograma laukums. Ja  $\lambda < 0$ , tad formula paliek spēkā, jo, ja maina viena reizinātāja zīmi, tad mainās arī vektoriālā reizinājuma zīme.

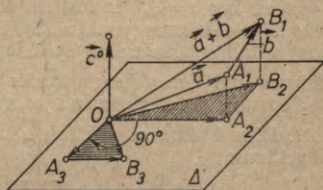
4°. Distributīvā īpašība:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}; \quad \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}. \quad (19.58)$$

Lai to pierādītu, pieņemsim, ka vektora  $\vec{c}$  ortam  $\vec{c}^0$  un vektoram  $\vec{a} = \vec{OA}$  ir kopīgs sākuma punkts  $O$ , kas atrodas kādā plaknē  $\Delta$ , pret kuru ir perpendikulārs vektors  $\vec{c}^0$  (158. zīm.). Taisne, kas vilkta caur vektora  $\vec{a}$  gala punktu  $A$  perpendikulāri plaknei  $\Delta$ , krusto šo plakni punktā  $A_1$ . Vektoru  $\vec{OA}_1$  sauc par vektora  $\vec{a} = \vec{OA}$  projekciju plaknē  $\Delta$ . Raugoties uz plakni  $\Delta$  no vektora  $\vec{c}^0$  gala punkta, pagriezīsim vektoru  $\vec{OA}_1$  plaknē  $\Delta$  par  $90^\circ$  pulksteņa rādītāja kustības virzienā un parādīsim, ka tā iegūtais vektors  $\vec{OA}_2$  ir vienāds ar vektoru  $\vec{a} \times \vec{c}^0$ . Tiešām  $|\vec{OA}_1| = |\vec{OA}_2| = |\vec{a}| \cdot \cos(90^\circ - \varphi) = |\vec{a}| \cdot \sin \varphi$ , kur  $\varphi$  ir leņķis starp vektoriem  $\vec{a}$  un  $\vec{c}^0$ . Vektors  $\vec{OA}_2$  pēc konstrukcijas ir perpendikulārs vektoriem  $\vec{a}$  un  $\vec{c}^0$ . Vektori  $\vec{a}$ ,  $\vec{c}^0$  un  $\vec{OA}_2$  veido labo triedrū. Tātad  $\vec{OA}_2 = \vec{a} \times \vec{c}^0$ .



158. zīm.



159. zīm.

Izvēlēsimies 3 vektoriem  $\vec{c}^0$ ,  $\vec{a}$  un  $\vec{a} + \vec{b}$  kopīgu sākuma punktu  $O$  (159. zīm.). Caur šo punktu  $O$  perpendikulāri vektoram  $\vec{c}^0$  vilksim plakni  $\Delta$  un apzīmēsim ar  $\vec{OA}_2$  vektora  $\vec{a} = \vec{OA}_1$  projekciju šajā plaknē, bet vektora  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{OB}_1$  projekciju plaknē  $\Delta$  ar  $\vec{OB}_2$ . Acīm redzot,  $\vec{OA}_1 + \vec{A_1B_1} = \vec{OB_1}$  un  $\vec{OA}_2 + \vec{A_2B_2} = \vec{OB_2}$ . Raugoties uz plakni  $\Delta$  no vektora  $\vec{c}^0$  gala punkta, pagriezīsim vektorus  $\vec{OA}_2$  un  $\vec{OB_2}$  plaknē  $\Delta$  par  $90^\circ$  pulksteņa rādītāju kustības virzienā. Tad dabūjam

vektorus  $\vec{OA}_3$  un  $\vec{OB}_3$ , kurus saista vienādība  $\vec{OA}_3 + \vec{A_3B_3} = \vec{OB_3}$ . Saskaņā ar iepriekšējā rindkopā aprakstīto konstrukciju  $\vec{OA}_3 = \vec{a} \times \vec{c}^0$ ;  $\vec{OB}_3 = (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}^0$  un  $\vec{A_3B_3} = \vec{b} \times \vec{c}^0$ . Tādēļ

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}^0 = \vec{a} \times \vec{c}^0 + \vec{b} \times \vec{c}^0. \quad (19.59)$$

Pareizināsim izteiksmes (19.59) abas puses ar vektora  $\vec{c}$  moduli  $|c|$ . Tad, ievērojot vektoriālā reizinājuma asociatīvo īpašību attiecībā pret skalāro reizinājumu, dabūjam vienādību

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times |c| \cdot \vec{c}^0 = \vec{a} \times |c| \cdot \vec{c}^0 + \vec{b} \times |c| \vec{c}^0. \quad (19.60)$$

Tā kā  $|c| \cdot \vec{c}^0 = \vec{c}$ , tad  $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ , ko arī vajadzēja pierādīt.

Ja vektori  $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$  un  $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$  doti ar savām koordinātēm, tad, balstoties uz tikko pierādīto distributīvo īpašību un ievērojot, ka

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}, \quad (19.61)$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}; \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}; \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \quad (19.62)$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}; \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}; \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \quad (19.63)$$

dabūjam

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= a_x b_y \vec{k} - a_x b_z \vec{j} - a_y b_x \vec{k} + a_y b_z \vec{i} + a_z b_x \vec{j} - a_z b_y \vec{i} = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}. \end{aligned} \quad (19.64)$$

Iegūtais rezultāts ir pārskatāmāks, ja to uzraksta, lietojot 1. no daļas 12. § aprakstītos determinantus:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}, \quad (19.65)$$

jeb

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left( \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right). \quad (19.66)$$

So rezultātu var viegli iegaumēt, ja vektoru  $\vec{a}$  un  $\vec{b}$  koordinātes uzraksta kā skaitļu tabulu (matricu)

$$\begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix}. \quad (19.67)$$

Aizsedzot matricas pirmo kolonu, paliek tie skaitļi, kuri veido formulas (19.66) pirmo determinantu. Aizsedzot matricas otro



kolonu, paliek skaitļi, kuri veido formulas (19.66) otro determinantu, bet ar mīnusa zīmi. Aizsedzot matricas trešo kolonu, vajadzīgā kārtībā paliek skaitļi, kuri veido formulas trešo determinantu.

Piemērs. Atrast vektoru  $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k}$  un  $\vec{b}=4\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$  vektoriālo reizinājumu.

Atrisinājums. Uzrakstīsim vektoru  $\vec{a}$  un  $\vec{b}$  koordinātu matricu

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aizsedzot matricas pirmo kolonu, dabūjam

$$(\vec{a} \times \vec{b})_x = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 6 = 3.$$

Aizsedzot otro kolonu un rakstot determinantu ar mīnusa zīmi, dabūjam

$$(\vec{a} \times \vec{b})_y = - \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = - (6 - 24) = 18.$$

Aizsedzot trešo kolonu, dabūjam

$$(\vec{a} \times \vec{b})_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 12 = -10.$$

Tātad

$$\vec{a} \times \vec{b} = 3\vec{i} + 18\vec{j} - 10\vec{k}$$

jeb īsāk pieraksta

$$\vec{a} \times \vec{b} = (3; 18; -10).$$

### Vingrinājumi

1. Noteikt ortus vektoriem 1)  $\vec{a}=5\vec{i}-2\vec{j}-14\vec{k}$ ; 2)  $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}$ .
2. Noteikt vektora  $\vec{a}=(33; -10; 6)$  virziena leņķu kosinusus.
3. Cik lieli ir leņķi starp vektoru un koordinātu asīm, ja tie visi trīs ir vienādi?
4. Aprēķināt leņķi starp vektoriem  $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$  un  $\vec{b}=(1; -2; 2)$ .
5. Parādīt, ka vektori  $2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$  un  $4\vec{i}+9\vec{j}+\vec{k}$  ir savstarpēji ortogonāli.
6. Atrast vektoru  $\vec{b}$ , kurš kolineārs ar vektoru  $\vec{a}=(2; -1; 2)$  un apmierina vektoriālu vienādību  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -18$ .
7. Doti vektori  $\vec{a}=(3; 0; -1)$ ,  $\vec{b}=(2; 4; 3)$ ,  $\vec{c}=(-1; 3; 2)$ ,  $\vec{d}=(2; 0; 1)$ . Aprēķināt 1)  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$  un 2)  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ .

## VIENĀDOJUMU ĢEOMETRISKĀ NOZĪME

158. §. Vienādojums ar vienu mainīgo lielumu. Visvienkāršākā vienādība

$$x=a, \quad (20.1)$$

kur  $a$  ir dots skaitlis, ģeometriski izsaka kāda punkta koordināti uz  $ass$  (sk. 5. §). Taisnleņķa koordinātu sistēmā plaknē vienādība (20.1) izteic tādu taisni, kura ir paralēla  $Oy$  asij resp. perpendikulāra pret  $Ox$  asi (sk. 17. §). Visiem šīs taisnes punktiem ir viena kopīga īpašība — to abscisas ir  $a$ . Šādas īpašības nav nevienam citam punktam, kurš neatrodas uz  $Oy$  asij paralēlas taisnes.

Vilksim taisnleņķa koordinātu sistēmā telpā plakni, kura ir paralēla  $yOz$  plaknei (perpendikulāra  $Ox$  asij) un krustojas ar  $Ox$  asi punktā  $A(a; 0; 0)$ . Katrs patvaļīgs punkts  $P(x; y; z)$  atrodas šajā plaknē tad un tikai tad, ja tā projekcija uz abscisu  $ass$  ir punkts  $A(a; 0; 0)$ . Tas nozīmē, ka nepieciešamais un pietiekamais nosacījums tam, lai kāds patvaļīgs punkts  $P(x; y; z)$  atrastos šajā plaknē, ir vienādība (20.1). Tādēļ  $x=a$  ir  $yOz$  plaknei paralēlas ( $Ox$  asij perpendikulāras) plaknes vienādojums taisnleņķa koordinātu sistēmā telpā. Visiem šīs plaknes punktiem ir viena kopīga īpašība — to abscisas ir  $a$ . Šādas īpašības nav nevienam citam punktam, kurš neatrodas minētajā plaknē.

Analogi var pierādīt, ka

$$1) y=b \quad \text{un} \quad 2) z=c \quad (20.2)$$

ir 1)  $xOz$  un 2)  $xOy$  plaknei paralēlu plakņu vienādojumi. Seit  $b$  un  $c$  ir doti skaitļi. Ja  $a=b=c=0$ , tad dabūjam koordinātu plakņu  $yOz$ ,  $xOz$  un  $xOy$  vienādojumus:

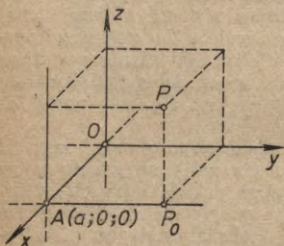
$$x=0, \quad y=0 \quad \text{un} \quad z=0. \quad (20.2')$$

Taisni, pa kuru dotā plakne šķel kādu koordinātu plakni, sauc par dotās plaknes pēdu attiecīgajā koordinātu plaknē. Taisnes krustpunktu ar kādu plakni sauc par taisnes pēdu plaknē. Piemēram, plaknes  $x=a$  pēda  $xOy$  plaknē ir  $Oy$  asij paralēla taisne, bet  $xOz$  plaknē —  $Oz$  asij paralēla taisne (160. zīm.). Trešās pēdas šai plaknei nav, jo tā ir paralēla ar  $yOz$  plakni.  $Ox$  ass pēda plaknē  $x=a$  ir punkts  $A(a; 0; 0)$ .

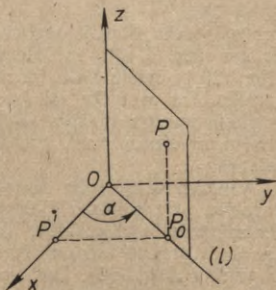
Ja vienādojumam  $f(x)=0$  ir  $n$  reālas saknes, t. i.,  $n$  reāli skaitļi  $a_1, a_2, \dots, a_n$  apmierina vienādojumu  $f(x)=0$ , tad šī vienādojuma ģeometriskā nozīmi izteic  $n$  vienādojumi:  $x=a_1, x=a_2, \dots, x=a_n$ , kas ir  $yOz$  plaknei paralēlu plakņu kopa, kuru krustpunkti ar  $Ox$  asi ir  $A_1(a_1; 0; 0), A_2(a_2; 0; 0), \dots, A_n(a_n; 0; 0)$ . Piemēram, vienādojums  $x^2-x-2=0$  telpā izteic divas plaknes

$x=2$  un  $x=-1$ , kuras paralēlas  $yOz$  plaknei un krusto  $Ox$  asi punktos  $A_1(2; 0; 0)$  un  $A_2(-1; 0; 0)$ .

159. §. Vienādojums ar diviem mainīgiem lielumiem. Visvienkāršākais vienādojums ar diviem mainīgiem lielumiem  $x$  un  $y$  ir  $y=kx$ , kur  $k$  ir dots skaitlis. Ja šāds vienādojums saista punktu koordinātes taisnleņķa koordinātu sistēmā plaknē, tad tas



160. zīm.



161. zīm.

geometriski nozīmē taisni, kura vilkta caur koordinātu sākumu un veido ar abscisu ass pozitīvo virzienu leņķi  $\alpha = \arctg k$ .

Pieņemsim, ka vienādojums

$$y=kx \quad (20.3)$$

saista punktu koordinātes telpā. Šādu vienādojumu, acīm redzot, apmierina katra tāda punkta  $P_0(x; y; 0)$  koordinātes, kurš atrodas  $xOy$  plaknē uz taisnes  $(l)$ , kas šai plaknē novilkta caur koordinātu sākumu un veido ar abscisu ass pozitīvo virzienu leņķi  $\alpha = \arctg k$  (161. zīm.). Vilksim plakni, kuras pēda  $xOy$  plaknē ir taisne  $(l)$ , bet pēdas pārējās divās koordinātu sistēmas plaknēs ir  $Oz$  ass. Kāds patvaļīgs punkts  $P(x; y; z)$  atrodas uz šīs plaknes tad un tikai tad, ja tā projekcija  $P_0$  plaknē  $xOy$  atrodas uz taisnes  $(l)$ . Tādēļ punkts  $P(x; y; z)$  atrodas uz vilktās plaknes tad un tikai tad, ja tā koordinātes  $x$  un  $y$  apmierina vienādojumu (20.3). Vienādojums (20.3) taisnleņķa koordinātu sistēmā telpā izsaka plakni, kura iet caur  $Oz$  asi. Otrādi, katru plakni, kura iet caur  $Oz$  asi, var izteikt ar vienādojumu (20.3).

Apzīmējot  $k = -\frac{A}{B}$ , vienādojumu (20.3) varam pārrakstīt simetriskākā formā

$$Ax + By = 0. \quad (20.3')$$

Analogā veidā var pārliacināties, ka vienādojums

$$By + Cz = 0, \quad (20.3'')$$



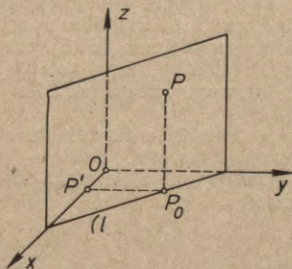
kur  $B$  un  $C$  doti skaitļi, ir tādas plaknes vienādojums, kura iet caur  $Ox$  asi, un

$$Ax + Cz = 0 \quad (20.3''')$$

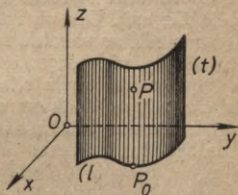
ir tādas plaknes vienādojums, kura iet caur  $Oy$  asi.

Katrs lineārs algebrisks vienādojums

$$Ax + By + C = 0 \quad (20.4)$$



162. zīm.



163. zīm.

taisnleņķa koordinātu sistēmā plaknē izsaka kādu taisni ( $l$ ) (sk. 22. §). Vilksim telpā plakni, kuras pēda  $xOy$  plaknē ir taisne ( $l$ ), bet pārējās divas pēdas ir paralēlas  $Oz$  asij (162. zīm.). Acīm redzot, katra taisnes ( $l$ ) punkta koordinātes  $P_0(x; y; 0)$  apmierina vienādojumu (20.4). Kāds patvaļīgs punkts  $P(x; y; z)$  atrodas uz vilktās plaknes tad un tikai tad, ja tā projekcija  $P_0$  plaknē  $xOy$  atrodas uz taisnes ( $l$ ). Tādēļ punkts  $P(x; y; z)$  atrodas uz vilktās plaknes tad un tikai tad, ja tā koordinātes  $x$  un  $y$  ir saistītas ar vienādojumu (20.4). Vienādojums (20.4) taisnleņķa koordinātu sistēmā telpā izsaka  $Oz$  asij paralēlu plakni. Otrādi, katru  $Oz$  asij paralēlu plakni var izteikt ar vienādojumu (20.4). Analogi vienādojums

$$By + Cz + D = 0, \quad (20.4')$$

kur  $B$ ,  $C$ ,  $D$  ir doti skaitļi, taisnleņķa koordinātu sistēmā telpā izsaka  $Ox$  asij paralēlu plakni un

$$Ax + Cz + D = 0 \quad (20.4'')$$

ir  $Oy$  asij paralēlas plaknes vienādojums.

Vienādojums

$$F(x; y) = 0 \quad (20.5)$$

taisnleņķa koordinātu sistēmā plaknē izsaka līniju, kuras punktu koordinātes apmierina šo vienādojumu (sk. 18. §).

Ja kāda taisne ( $t$ ) pārvietojas telpā, krustodama visu laiku kādu dotu līniju ( $l$ ) un palikdama paralēla dotajam vektoram, tad

tā veido virsmu, kuru sauc par *cilindru* (163. zīm.). Taisni ( $t$ ) sauc par cilindra *veiduli* (veidotāju), bet līniju ( $l$ ) par *vaduli* (vadītāju).

Pieņemsim, ka vienādojums (20.5) ir kādas līnijas ( $l$ ) vienādojums  $xOy$  plaknē un ka šī līnija ir tāda cilindra ( $c$ ) vadule, kura veidule paralēla  $Oz$  asij. Katrs patvaļīgs punkts  $P(x; y; z)$  atrodas uz cilindra ( $c$ ) tad un tikai tad, ja tā projekcija  $P_0$  plaknē  $xOy$  atrodas uz līnijas ( $l$ ). Tātad punkts  $P(x; y; z)$  atrodas uz cilindra ( $c$ ) tad un tikai tad, ja tā koordinātes  $x$  un  $y$  apmierina vienādojumu (20.5). Tādēļ vienādojums (20.5) taisnleņķa koordinātu sistēmā telpā izsaka cilindru, kura veidule ir paralēla  $Oz$  asij. Otrādi, katru cilindru, kura veidule paralēla  $Oz$  asij, var izteikt ar vienādojumu (20.5).

Piemēram, vienādojums  $x^2 + y^2 = r^2$  taisnleņķa koordinātu sistēmā telpā izsaka riņķa cilindru, kura rādiuss ir  $r$ , veidule — paralēla  $Oz$  asij un šķēlums ar  $xOy$  plakni (vadule) ir riņķa līnija ar centru koordinātu sākumā un rādiusu  $r$ .

Analogi vienādojums

$$F(y; z) = 0 \quad (20.5')$$

taisnleņķa koordinātu sistēmā telpā izsaka cilindru, kura veidule paralēla  $Ox$  asij, un vienādojums

$$F(x; z) = 0 \quad (20.5'')$$

izsaka cilindru, kura veidule paralēla  $Oy$  asij.

Piemēram, vienādojums  $\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$  izsaka cilindru, kura veidule paralēla  $Ox$  asij un šķēlums ar  $yOz$  plakni ir elipse, kuras centrs atrodas koordinātu sākumā, lielā pusass  $a=3$ , mazā pusass  $b=2$ .

**160. §. Vienādojums ar trīs mainīgiem lielumiem.** Līdz šim apskatītās plaknes un cilindri ir *virsmas* speciālgadījumi. Vispār analītiskajā ģeometrijā par virsmu sauc punktu kopu<sup>1</sup> telpā, kuru koordinātes kādā noteiktā koordinātu sistēmā apmierina vienādojumu ar 3 mainīgiem lielumiem

$$F(x; y; z) = 0. \quad (20.6)$$

No šeit minētās virsmas definīcijas izriet, ka dotās virsmas vienādojums ir tāds vienādojums ar 3 mainīgiem lielumiem, kurš kļūst par tāpatību tad un tikai tad, ja tajā mainīgo lielumu vietā ievieto patvaļīgas dotās virsmas punkta koordinātes.

1.<sup>o</sup> Piemērs. Atrast vienādojumu sfērai, kuras rādiuss ir  $r$ , un centrs atrodas punktā  $C(a; b; c)$ .

<sup>1</sup> Var teikt arī «punktu ģeometrisku vietu».



Atrisinājums. Sfēra ir punktu ģeometriskā vieta, kuri atrodas vienādā attālumā no viena un tā paša punkta, ko sauc par sfēras centru. Attālumu no sfēras centra līdz patvaļīgam sfēras punktam sauc par sfēras rādiusu. Apzīmēsim patvaļīgu sfēras punktu ar  $P(x; y; z)$ . Punkts  $P(x; y; z)$  atrodas uz sfēras tad un tikai tad, ja  $|PC|=r$ , bet saskaņā ar formulu (19.49)  $|PC| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ . Tādēļ

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2. \quad (20.7)$$

Vienādojums (20.7) ir sfēras vienādojums. Ja sfēras centrs atrodas koordinātu sākumā, tad  $a=b=c=0$  un tās vienādojums ir

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2. \quad (20.8)$$

2.° piemērs. Noskaidrot, vai punkts  $M(3; -4; 12)$  atrodas uz sfēras, kuras centrs ir koordinātu sākums un rādiuss 13.

Atrisinājums. Saskaņā ar formulu (20.8) sfēras vienādojums ir  $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ . Ievietojot punkta  $M(3; -4; 12)$  koordinātes šajā vienādojumā, rodas identitāte  $3^2 + (-4)^2 + 12^2 = 169$ . Tātad punkts  $M$  atrodas uz dotās sfēras.

Virsma taisnleņķa koordinātu sistēmā sauc par *algebrisku*, ja tās vienādojuma  $F(x; y; z) = 0$  kreiso pusi var izteikt kā polinomu attiecībā pret mainīgajiem  $x, y$  un  $z$ . Atkarībā no polinoma pakāpes izšķir pirmās, otrās un augstāku kārtu virsmas. Piemēram, plakne (20.4) ir pirmās kārtas, bet sfēra (20.7) ir otrās kārtas virsma.

161. §. Linijas vienādojumi telpā. Liniju telpā var definēt kā divu virsmu šķēlumu, t. i., kā tādu punktu ģeometrisku vietu, kuri atrodas uz divām virsmām. Tātad punktu koordinātēm, kuras apmierina vienas virsmas vienādojumu, ir jāapmierina arī otras virsmas vienādojums.

*Linija telpā ir punktu ģeometriskā vieta, kuru koordinātes apmierina vienādojumu sistēmu*

$$\begin{cases} F_1(x; y; z) = 0, \\ F_2(x; y; z) = 0. \end{cases} \quad (20.9)$$

Vienādojumus (20.9) sauc par dotas linijas vienādojumiem. Piemēram, apskatīsim vienādojumu sistēmu

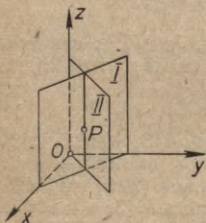
$$\begin{cases} 3x + 2y - 6 = 0, \\ x - 2y = 0. \end{cases} \quad (20.10)$$

Taisnleņķa koordinātu sistēmā telpā pirmais vienādojums ir  $Oz$  asiļ paralēlas plaknes vienādojums [sk. formulu (20.4)], bet otrais ir tādas plaknes vienādojums, kas vilkta caur  $Oz$  asi [sk. formulu (20.3')]. Šo divu plakņu šķēlums, acīm redzot, ir  $Oz$  asiļ

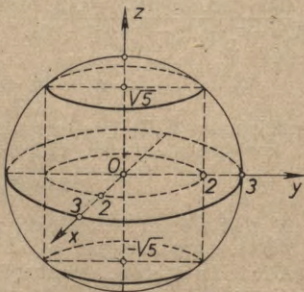


paralēla taisne (164. zīm.). Vienādojumu sistēmas (20.10) var atvietot ar citu, tai ekvivalentu vienādojumu sistēmu

$$\left. \begin{aligned} 2x-3 &= 0, \\ 4y-3 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (20.10')$$



164. zīm.



165. zīm.

kuras pirmo vienādojumu dabū, izslēdzot no sistēmas (20.10) mainīgo  $y$ , bet otro vienādojumu dabū, izslēdzot no sistēmas (20.10) mainīgo  $x$ .

Vienādojumu sistēmā (20.10') pirmais vienādojums ir  $yOz$  plaknei paralēlas plaknes vienādojums, bet otrais —  $xOz$  plaknei paralēlas plaknes vienādojums [sk. formulas (20.1), (20.2')]. Šīs divas plaknes šķēlas pa to pašu taisni, kura bija dota ar vienādojumu sistēmu (20.10). Tas pilnā mērā saskan ar mūsu priekšstatu par plakni un taisni, jo divas plaknes šķēlas pa vienu taisni, bet katru taisni var uzskatīt par neierobežoti daudzu plakņu pāru šķēlumu.

Līniju telpā var izteikt ar diviem vienādojumiem (20.9) neierobežoti daudzos veidos, jo katru divu doto virsmu vietā var izvēlēties divas citas virsmas, kurās šķēlas pa to pašu līniju. Analītiski tas nozīmē ņemt dotas vienādojumu sistēmas vietā kādu citu, tai ekvivalentu vienādojumu sistēmu.

Piemēram, apskatīsim vienādojumu sistēmu

$$\left. \begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= 9, \\ x^2+y^2 &= 4. \end{aligned} \right\} \quad (20.11)$$

Izslēdzot no šīs sistēmas  $x^2+y^2$ , dabūjam jaunu veidojumu  $z^2-5=0$ . Atstājot sistēmas (20.11) pirmo vienādojumu nemainītu, varam uzrakstīt jaunu vienādojumu sistēmu:

$$\left. \begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= 9, \\ z^2-5 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (20.11')$$

Atstājot sistēmas (20.11) otro vienādojumu nemainītu, varam uzrakstīt vēl citu vienādojumu sistēmu:

$$\left. \begin{aligned} z^2 - 5 &= 0, \\ x^2 + y^2 &= 4. \end{aligned} \right\} \quad (20.11'')$$

Vienādojumu sistēmas (20.11—20.11'') ir savstarpēji ekvivalentas. Visos 3 gadījumos tie ir divu riņķa līniju vienādojumi telpā, tikai sistēmā (20.11) šīs riņķa līnijas ir sfēras un cilindra šķēlumi, sistēmā (20.11) tās ir sfēras un divu plakņu šķēlumi, bet trešajā gadījumā — cilindra un divu plakņu šķēlumi (165. zīm.).

Ja ar vienādojumiem (20.9) taisnleņķa koordinātu sistēmā telpā ir dota kāda līnija ( $l$ ) un no šīs sistēmas izsaka divus mainīgos lielumus, piemēram,  $x$  un  $y$ , kā trešā mainīgā lieluma  $z$  funkcijas, t. i., atvieto vienādojumu sistēmu (20.9) ar tai ekvivalentu sistēmu

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(z), \\ y &= \psi(z) \end{aligned} \right\} \quad (20.12)$$

jeb

$$\left. \begin{aligned} f_1(x; z) &= 0, \\ f_2(y; z) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (20.12) \quad f_1(x; z) = 0 \quad f_2(y; z) = 0$$

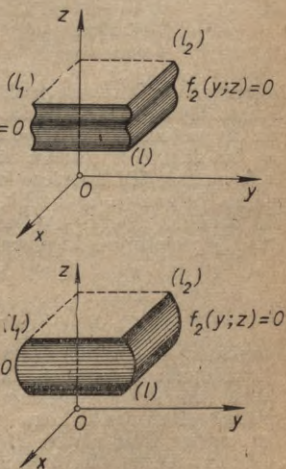
tad dotā līnija ( $l$ ) ir izteikta ar diviem cilindru vienādojumiem [sk. formulas (20.5) un (20.5')]. Šo cilindru veidules ir paralēlas  $Oy$  un  $Ox$  asīm, un tiem ir kopīga vadule — dotā līnija ( $l$ ). Šādus cilindrus sauc par *projicējošiem cilindriem*, jo to veidules projicē dotās līnijas punktus uz koordinātu sistēmas plaknēm (166. zīm.).

Piemērs. Dota līnija

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 4, \\ (x-1)^2 + y^2 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (20.13)$$

Atrast šīs līnijas projekcijas visās trīs koordinātu sistēmas plaknēs.

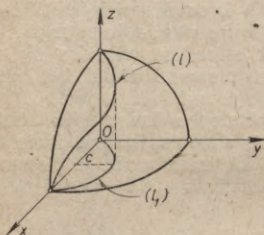
Atrisinājums. Sistēmas (20.13) pirmais vienādojums ģeometriski izsaka sfēru ar centru koordinātu sākumā un rādiusu  $R=2$ . Otrais vienādojums nav atkarīgs no mainīgā lieluma  $z$ ; tāpēc ģeometriski tas izsaka cilindru, kura veidule ir paralēla  $Oz$



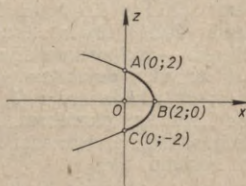
166. zīm.

asij. Šis cilindrs projicē doto līniju  $xOy$  plaknē. Projektija ir riņķa līnija

$$\left. \begin{aligned} (x-1)^2 + y^2 &= 1, \\ z &= 0, \end{aligned} \right\}$$



167. zīm.



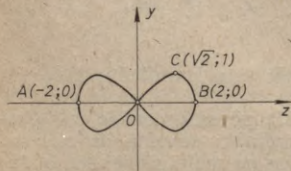
168. zīm.

kuras centrs atrodas punktā  $C(1; 0; 0)$  un rādiuss  $r=1$ . Dotās līnijas  $(l)$  daļa, kas atrodas koordinātu sistēmas pirmajā oktantā, un tās projektija  $(l_1)$   $xOy$  plaknē attēlota 167. zīmējumā.

Lai dabūtu tā cilindra vienādojumu, kas doto līniju  $(l)$  projicē  $xOz$  plaknē, tad no vienādojumu sistēmas (20.13) jāizslēdz mainīgais lielums  $y$ . To panāk, atņemot no pirmā vienādojuma otro. Tā dabūjam  $x^2 - (x-1)^2 + z^2 = 3$  jeb  $z^2 + 2x - 4 = 0$ . Meklējamā līnijas  $(l)$  projektija  $xOz$  plaknē ir līnijas

$$\left. \begin{aligned} z^2 + 2x - 4 &= 0, \\ y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

punktu kopa, kuru abscisām un aplikātām, ja tās pa pāriem ievieto vienādojumu sistēmā (20.13), atbilst reālas  $y$  vērtības. Šajā gadījumā līnijas  $(l)$  projektija ir parabolas  $z^2 + 2x - 4 = 0$  loks  $xOz$  plaknē (168. zīm.). Loku norobežo punkti  $A(0; 2)$  un  $C(0; -2)$ , un tas iet caur punktu  $B(2; 0)$ . Viegli pārlicināties, ka vienādojumu sistēmā (20.13) reālas  $y$  vērtības iespējamas tikai tad, ja  $0 \leq x \leq 2$  un  $-2 \leq z \leq 2$ .



169. zīm.

Lai dabūtu tā cilindra vienādojumu, kas doto līniju  $(l)$  projicē  $yOz$  plaknē, tad no vienādojumu sistēmas (20.13) jāizslēdz mainīgais lielums  $x$ . To panāk, ievietojot  $x = 1 \pm \sqrt{1 - y^2}$  no otrā vienādojuma pirmajā. Tā dabūjam  $(1 \pm \sqrt{1 - y^2})^2 + y^2 + z^2 = 4$  jeb



$z^4 - 4z^2 + 4y^2 = 0$ . Meklējamā līnijas ( $l$ ) projekcija  $yOz$  plaknē ir līnija (169. zīm.)

$$\left. \begin{aligned} z^4 - 4z^2 + 4y^2 &= 0, \\ x &= 0, \end{aligned} \right\}$$

jo visu šīs līnijas reālo punktu ordinātēm un aplikātām,  $-1 \leq y \leq +1$ ,  $-2 \leq z \leq +2$ , ja tās pa pāriem ievieto vienādojumu sistēmā (20.13), atbilst reālas  $x$  vērtības.

**162. §. Līniju parametriskie vienādojumi.** Katram punktam uz dotas līnijas telpā ir 3 koordinātes, kuras var būt definētas kā kāda ceturrtā lieluma funkcijas:

$$x = \varphi(t); \quad y = \psi(t); \quad z = \chi(t). \quad (20.14)$$

Vienādojumos (20.14) katrai *parametra*  $t$  vērtībai tā maiņas apgabālā atbilst noteiktas  $x$ ,  $y$ ,  $z$  vērtības. Mainoties parametram  $t$ , punkts  $P(x; y; z)$  pārvietojas telpā, veidodams kādu līniju. Tādēļ vienādojumus (20.14) sauc par līnijas *parametriskajiem vienādojumiem*. Līniju parametriskos vienādojumus mēdz lietot, piemēram, pētot punkta kustību telpā; tad parametrs  $t$  ir laiks, formulas (20.14) nosaka kustības likumu, bet līniju, kuras parametriskie vienādojumi ir šīs formulas, sauc par kustības trajektoriju. Jāpiezīmē, ka vienu un to pašu līniju var iegūt no dažādiem vienādojumiem (20.14), jo kustības likumi pa vienu un to pašu trajektoriju var būt dažādi. Ja no līnijas parametriskajiem vienādojumiem izslēdz parametru, tad dabū divu virsmu vienādojumus  $F_1(x; y; z)$  un  $F_2(x; y; z)$ . Šīs virsmas šķēļas pa doto līniju. Izslēgt parametru no līnijas parametriskajiem vienādojumiem ne vienmēr ir iespējams, un tas bieži vien nav arī lietderīgi.

**163. §. Līnijas un virsmas krustpunkti.** Ja kāda līnija krusto virsmu, tad krustpunkta koordinātēm jāapmierina kā līnijas, tā virsmas vienādojumi. Tā kā līniju telpā nosaka divi vienādojumi  $F_1(x; y; z) = 0$  un  $F_2(x; y; z) = 0$ , bet virsmu viens vienādojums  $F(x; y; z) = 0$ , tad līnijas un virsmas krustpunkta koordinātēm jāapmierina vienādojumu sistēma

$$\left. \begin{aligned} F_1(x; y; z) &= 0, \\ F_2(x; y; z) &= 0, \\ F(x; y; z) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (20.15)$$

Ja vienādojumu sistēmai (20.15) ir atrisinājumi, tad līnija krusto virsmu tik punktos, cik atrisinājumu ir šādai vienādojumu sistēmai. Ja vienādojumu sistēmai (20.15) nav atrisinājumu, tad līnija virsmu nekrusto.

Līnijas un virsmas krustpunktu atrašanas uzdevums ievērojami vienkāršojas, ja līnija uzdota ar saviem parametriskajiem

vienādojumiem (20.14). Tādā gadījumā dotajā virsmas vienādojumā  $F(x; y; z) = 0$  mainīgo  $x, y$  un  $z$  vietā ievieto to izteiksmes (20.14) un aprēķina vienādojuma  $F[\varphi(t); \psi(t); \chi(t)] = 0$  saknes. Reālās saknes, ja tādas eksistē, dod tās parametra  $t$  vērtības, pie kurām līnija (20.14) krusto virsmu  $F(x, y, z) = 0$ . Ievietojot līnijas parametriskajos vienādojumos  $t$  vietā reālo sakņu vērtības, iegūst krustpunktu koordinātes.

### Vingrinājumi

1. Noskaidrot šādu vienādojumu ģeometriskos nozīmi:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } y^2 - 4y + 3 = 0, & \text{b) } y - z = 0, & \text{c) } z - 2x + 3 = 0, & \text{d) } zx = 0, \\ \text{e) } y^2 - z^2 = 0, & \text{f) } y = \sin x, & \text{g) } x^2 - y^2 = 1, & \text{h) } x^2 + y^2 = 1, \\ \text{i) } x^2 + y^2 + z^2 = 1, & \text{j) } x^2 + y^2 + z^2 = 0. & & \end{array}$$

2. Noskaidrot vienādojumu sistēmu ģeometriskos nozīmi

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} (x-1)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 25 \\ y+1 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1 \\ x - 2 = 0 \end{array} \right\}$$

3. Uzrakstīt sfēras vienādojumu, ja tās centrs ir punktā  $C(2; -1; 3)$  un rādiuss 9.

4. Atrast vienādojumu cilindram, kurš projicē  $xOy$  plaknē līniju

$$\left. \begin{array}{l} 6xy - 9y^2 - 2zx + 6x - 9y + 3z - 36 = 0, \\ 2x - 3y + z = 0. \end{array} \right\}$$

## 21. NODAĻA

### PLAKNE UN TAISNE TELPĀ

**164. §. Plaknes vispārīgais vienādojums. 1. teorēma.** *Katras plaknes vienādojums taisnleņķa koordinātu sistēmā telpā ir pirmās pakāpes (lineārs) algebrisks vienādojums*

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (21.1)$$

kur  $A, B, C$  un  $D$  ir reāli skaitļi. Lai vienādojums (21.1) saturētu vismaz vienu no mainīgajiem lielumiem  $x, y, z$ , tad  $A, B$  un  $C$  vienlaicīgi nevar būt 0.

**Pierādījums.** Pieņemsim, ka taisnleņķa koordinātu sistēmā telpā ir dota kāda plakne. Izvēlēsimies uz tās kādu punktu  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  un apzīmēsim patvaļīga punkta  $M$  koordinātes ar  $(x; y; z)$ . Bez tam izvēlēsimies brīvu vektoru  $\vec{n} = (A; B; C)$ , kurš nav nullvektors, bet ir perpendikulārs pret doto plakni (170. zīm.). Saskaņā ar formulām (19.48) vektora  $\vec{M_0M}$  koordinātes ir  $(x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ . Punkts  $M$  atrodas dotajā plaknē tad un tikai tad, ja vektori  $\vec{M_0M}$  un  $\vec{n}$  ir ortogonāli. Tādēļ nepieciešamais



un pietiekamais nosacījums, lai punkts  $M(x; y; z)$  atrastos dotajā plaknē, ir

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0. \quad (21.2)$$

Vienādojums (21.2) ir dotās plaknes vienādojums. Atverot iekavas un apzīmējot skaitli  $(-Ax_0 - By_0 - Cz_0)$  ar  $D$ , dabūjam  $Ax + By + Cz + D = 0$ , t. i., vienādojumu (21.1). Teorēma ir pierādīta.

**Piemērs.** Sastādīt vienādojumu plaknei, kura iet caur punktu  $M_0(1; -1; 2)$  perpendikulāri vektoram  $\vec{n} = (2; 2; -3)$ .

**Atrisinājums.** Saskaņā ar formulu (21.2), meklējamais vienādojums ir  $2(x-1) + 2(y+1) - 3(z-2) = 0$  jeb  $2x + 2y - 3z + 6 = 0$ .

**2. teorēma.** Katrs lineārs algebrisks vienādojums taisnleņķa koordinātu sistēmā telpā izsaka plakni.

**Pierādījums.** Pieņemsim, ka ir dots kāds patvaļīgs lineārs algebrisks vienādojums  $Ax + By + Cz + D = 0$  un taisnleņķa koordinātu sistēma telpā. Acīm redzot, vienmēr var atrast tādas skaitļus  $x_0, y_0, z_0$ , kuri apmierina šo vienādojumu, t. i.,  $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ . Atņemot no dotā vienādojuma šo identitāti, dabūjam vienādojumu  $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$ , bet tas taisnleņķa koordinātu sistēmā telpā izsaka plakni, kura iet caur punktu  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  perpendikulāri vektoram  $\vec{n} = (A; B; C)$ . Vektoru  $\vec{n}$  sauc par taisnes *normālvektoru*. Teorēma ir pierādīta.

Gadījumā, ja vienādojumā (21.1), kuru sauc par *plaknes vispārīgo vienādojumu*, kāds no koeficientiem  $A, B, C, D$  ir nulle, tad dabūjam nepilnos plakņu vienādojumus. Tādus vienādojumus apskatījām 158. un 159. §, izņemot gadījumu, kad plaknes vienādojums ir  $Ax + By + Cz = 0$ , t. i., šai vienādojumā iztrūkst brīvais loceklis  $D$ . Šāds vienādojums izsaka plakni, kura iet caur koordinātu sākumu  $O(0; 0; 0)$ , jo  $A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 0 = 0$  ir identitāte.

**Piemērs.** Pārbaudīt, vai punkts  $M(3; 2; -1)$  atrodas plaknē  $2x + 3y - 3z + 6 = 0$ .

**Atrisinājums.** Tā kā  $2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) + 6 \neq 0$ , tad punkts  $M$  neatrodas dotajā plaknē, bet ir ārpus tās.

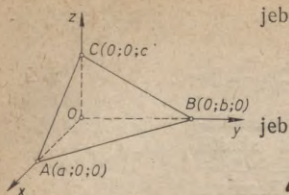
**165. §. Plaknes vienādojums ar asu nogriežņiem.** Pieņemsim, ka ir dots kāds plaknes vienādojums  $Ax + By + Cz + D = 0$ , kurā visi koeficienti  $A, B, C, D$  ir no nulles atšķirīgi skaitļi. Izdalīsim vienādojumu ar  $(-D)$ , tad dabūsim

$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} - 1 = 0$$



170. zīm.





171. zīm.

jeb

$$\frac{x}{\frac{D}{A}} + \frac{y}{\frac{D}{B}} + \frac{z}{\frac{D}{C}} = 1,$$

jeb

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad (21.3)$$

kur

$$a = -\frac{D}{A}, \quad b = -\frac{D}{B}, \quad \text{un} \quad c = -\frac{D}{C}.$$

Skaitļiem  $a, b, c$  vienādojumā (21.3) ir ļoti vienkārša ģeometriskā nozīme. Šis vienādojums kļūst par tāpatību, ja tajā ievieto punkta  $A(a; 0; 0)$  koordinātes, jo  $\frac{a}{a} + \frac{0}{b} + \frac{0}{c} = 1$ . Tādēļ skaitlis  $a$

ir abscisu ass nogriežņa  $\vec{OA}$  lielums  $a = OA$  (171. zīm.).  $A$  ir plaknes un abscisu ass krustpunkts, jo tas atrodas uz dotās plaknes un uz abscisu ass. Analogi  $b = OB$ , kur  $B(0; b; 0)$  ir plaknes un ordinātu ass krustpunkts, bet  $c = OC$ , kur  $C(0; 0; c)$  ir plaknes un aplikātu ass krustpunkts.

**Piemērs.** Sastādīt plaknes vienādojumu, zinot, ka tā nošķel no koordinātu asīm nogriežņus  $a=4, b=2, c=-8$ .

**Atrisinājums.** Pēc formulas (21.3) meklējamais plaknes vienādojums ir  $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{-8} = 1$  jeb  $2x + 4y - z - 8 = 0$ .

**166. §. Leņķis starp divām plaknēm.** Pieņemsim, ka ir divi divu plakņu vienādojumi  $A_1x + B_1y + C_1z + D = 0$  un  $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ . Par leņķi starp divām plaknēm sauc leņķi starp šīm plaknēm perpendikulāriem vektoriem  $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$  un  $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ . Šī leņķa kosinusu aprēķina pēc formulām (19.47).

Ja vektori  $\vec{n}_1$  un  $\vec{n}_2$  ir ortogonāli, tad plaknes ir perpendikulāras.

Ja vektori  $\vec{n}_1$  un  $\vec{n}_2$  ir kolineāri, tad plaknes ir paralēlas.

**Piemērs.** Aprēķināt leņķi  $\varphi$  starp plaknēm  $2x + 3y - z + 4 = 0$  un  $x + 2y + 3z + 7 = 0$ .

**Atrisinājums.** Pēc formulas (19.47)

$$\cos \varphi = \frac{2+6-3}{\sqrt{4+9+1} \cdot \sqrt{1+4+9}} = \frac{5}{14} \approx 0,357; \quad \varphi \approx 69^\circ 5'.$$

**167. §. Plaknes normālvienādojums.** Pieņemsim, ka ir dots kādas plaknes vispārīgais vienādojums  $Ax + By + Cz + D = 0$ , un pareizināsim to ar kādu pagaidām nenoteiktu reizinātāju  $\lambda$ . Tad dabūsim  $\lambda Ax + \lambda By + \lambda Cz + \lambda D = 0$ , kur vektors  $(\lambda A; \lambda B; \lambda C)$  ir perpendikulārs dotajai plaknei, bet tā modulis ir  $\sqrt{\lambda^2(A^2 + B^2 + C^2)}$ .

Izvēlēsimies tādu  $\lambda$ , lai šis vektors būtu vienības vektors, t. i., lai  $\sqrt{\lambda^2(A^2+B^2+C^2)}=1$ . Tad jābūt

$$\lambda = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad (21.4)$$

Reizinātāja  $\lambda$  zīmi varam brīvi izvēlēties. Izvēlēsimies to vienmēr tā, lai  $\lambda D < 0$ , t. i., lai  $\lambda$  zīme būtu pretēja brīvā locekļa  $D$  zīmei, un apzīmēsim  $\lambda D = -p$ . Šādu  $\lambda$  sauc par *normējošo faktoru* jeb *reizinātāju*.

Pareizinot dotās plaknes vispārīgo vienādojumu ar normējošo faktoru, mēs pārveidojam plaknes vispārīgo vienādojumu formā

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0, \quad (21.5)$$

kur  $\alpha, \beta, \gamma$  ir plaknei perpendikulārā vienības vektora  $\vec{n}^0$  virziena leņķi un  $(\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma) = (\lambda A; \lambda B; \lambda C)$  ir šī vektora koordinātes. Vienādojumu (21.5) sauc par plaknes *normālvienādojumu*.

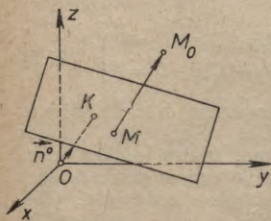
Pierādīsim, ka skaitlis  $p$  vienādojumā (21.5) ir vienāds ar attālumu no koordinātu sākuma līdz plaknei. Sai nolūkā vilksim no koordinātu sākuma pret doto plakni perpendikulu un apzīmēsim tā pamatu šai plaknē ar  $K$  (172. zīm.). Tad  $\vec{OK} = |\vec{OK}| \cdot \vec{n}^0$ , kur  $\vec{n}^0 = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$ .

Patvaļīgs punkts  $M(x; y; z)$  atrodas dotajā plaknē tad un tikai tad, ja  $\vec{OM} \cdot \vec{n}^0 = |\vec{OK}|$ , kur  $\vec{OM} = (x; y; z)$  ir punkta  $M$  rādiusvektors. No tā seko, ka  $|\vec{OK}| = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma$ , bet saskaņā ar vienādojumu (21.5) šis skaitlis ir vienāds ar  $p$ . Skaitlis  $p = |\vec{OK}|$  tātad ir vienāds ar attālumu no koordinātu sākuma līdz plaknei.

Piemērs. Pārveidot normālformā vienādojumu  $2x + 2y - z + 12 = 0$ .

Atrisinājums.  $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{4+4+1}} = -\frac{1}{3}$ , un dotās plaknes normālvienādojums ir

$$-\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z - 4 = 0.$$



173. zīm.

**168. §. Attālums no punkta līdz plaknei.** Pieņemsim, ka ir jāatrod punkta  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  attālums līdz plaknei, kura uzdota ar savu normālvienādojumu  $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$ . Vilksim (173. zīm.) no punkta  $M_0$  pret plakni perpendikulu un apzīmēsim



tā krustpunktu ar plakni ar  $M(x; y; z)$ . Meklējamais attālums  $d$  tad ir vektora  $\vec{MM}_0 = (x_0 - x; y_0 - y; z_0 - z)$  modulis. Šis vektors ir kolineārs ar vektoru  $\vec{n}^0 = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$ , un tādēļ to skalārais reizinājums  $\vec{MM}_0 \cdot \vec{n}^0 = \pm |\vec{MM}_0| = \pm d$ . Plusa zīme šeit rāda, kad leņķis starp vektoriem  $\vec{n}^0$  un  $\vec{MM}_0$  ir 0, bet mīnusa zīme tad, kad šis leņķis ir  $\pi$ . No pēdējās vienādības seko, ka

$$(x_0 - x) \cos \alpha + (y_0 - y) \cos \beta + (z_0 - z) \cos \gamma = \pm d$$

jeb

$$x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) = \pm d,$$

bet

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p.$$

Tādēļ

$$d = \pm (x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p). \quad (21.6)$$

Attālums ir būtiski pozitīvs lielums. Tādēļ formulā (21.6) no divām zīmēm vienmēr jāņem tā, kas dod pozitīvu rezultātu. Plusa zīme norāda, ka dotais punkts un koordinātu sākums atrodas katrs savā plaknes pusē. Mīnusa zīme norāda, ka dotais punkts un koordinātu sākums ir vienā plaknes pusē.

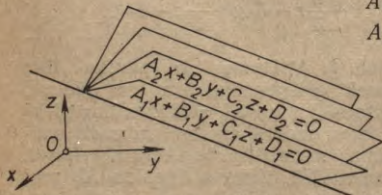
**Piemērs.** Dota plakne  $3x + 4y - 12z + 14 = 0$  un punkts  $M_0(4; 3; 1)$ . Atrast punkta  $M_0$  attālumu līdz dotajai plaknei.

**Atrisinājums.** Pārveidosim doto vienādojumu normālformā. Dabūjam  $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{9+16+144}} = -\frac{1}{13}$ , un dotās plaknes normālvienādojums ir  $-\frac{1}{13}(3x + 4y - 12z + 14) = 0$ . Pēc formulas

(21.6)  $d = \left| -\frac{1}{13}(3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 - 12 \cdot 1 + 14) \right| = 2$ . Šajā gadījumā punkts  $M_0$  un koordinātu sākums atrodas vienā plaknes pusē, jo  $d = |-2|$ .

**169. §. Taisnes vispārīgie vienādojumi.** Katru taisni telpā var definēt kā divu plakņu šķelumu. Tādēļ taisnes vispārīgie vienādojumi taisnleņķa koordinātu sistēmā telpā ir divu lineāru algebrisku vienādojumu sistēma.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (21.7)$$



174. zīm.

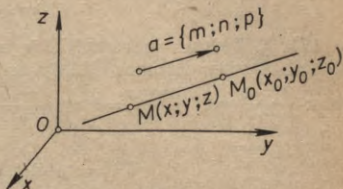
Caur katru doto taisni var novilkt bezgalīgi daudz plakņu. Katra plakņu pāra vienādojumi ir dotās taisnes vispārīgie vienādojumi (174. zīm.).

Ne katra divu lineāru al-



gebrisku vienādojumu sistēma definē taisni. Ja plaknes ir paralēlas, t. i., ja vektori  $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$  un  $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$  ir kolineāri, tad vienādojumu sistēma (7) taisni nedefinē.

**170. §. Taisnes kanoniskie vienādojumi.** Pieņemsim, ka taisnlenķa koordinātu sistēmā telpā ir dota kāda taisne. Izvēlēsimies uz tās kādu punktu  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  un apzīmēsim patvaļīga punkta  $M$  koordinātes ar  $(x; y; z)$ . Bez tam izvēlēsimies brīvu vektoru  $\vec{a} = (m; n; p)$ , kas nav nullvektors un ir kolineārs ar doto taisni (175. zīm.). Vektora  $\vec{M_0M}$  koordinātes ir  $(x-x_0; y-y_0; z-z_0)$ . Punkts  $M$  atrodas uz dotās taisnes tad un tikai tad, ja vektori  $\vec{M_0M}$  un  $\vec{a}$  ir kolineāri. Tādēļ nepieciešamais un pietiekamais nosacījums, lai punkts  $M(x; y; z)$  atrastos uz dotās taisnes, ir



175. zīm.

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} \quad (21.8)$$

Vienādojumus (21.8) sauc par kanoniskajiem vienādojumiem taisnei, kura iet caur punktu  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  un ir paralēla vektoram  $\vec{a} = (m; n; p)$ . Vektoru  $\vec{a}$  sauc par taisnes virziena vektoru. Ja kāda no vektora  $\vec{a}$  koordinātēm ir nulle, tad šo nulli pieraksta simetrijas dēļ arī raksta kā dalītāju vienādojumos (21.8), paturot prātā, ka šāda nulle pierakstā nozīmē taisnes perpendikularitāti attiecīgajai koordinātu sistēmas asij.

Ja taisne iet caur diviem dotajiem punktiem  $A(x_1; y_1; z_1)$  un  $B(x_2; y_2; z_2)$ , tad par tās virziena vektoru var pieņemt vektoru  $\vec{AB} = (x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1)$  un par punktu uz tās vienu no dotajiem punktiem, piemēram, punktu  $A(x_1; y_1; z_1)$ . Tādas taisnes kanoniskie vienādojumi saskaņā ar (21.8) ir

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad (21.9)$$

**Piemērs.** Atrast vienādojumus taisnei, kura iet caur punktu  $M_0(2; -3; 1)$  un ir perpendikulāra plaknei  $x-4y+5=0$ .

**Atrisinājums.** Dotajai plaknei perpendikulārais vektors  $\vec{n} = (1; -4; 0)$  pēc uzdevuma noteikumiem ir kolineārs ar meklējamo taisni. Tās kanoniskie vienādojumi ir  $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z-1}{0}$ .

Nulle kā dalītājs atrastās taisnes kanonisko vienādojumu pierakstā nozīmē tikai to, ka šī taisne ir perpendikulāra  $Oz$  asij. Šīs taisnes vispārīgie vienādojumi ir

$$\left. \begin{aligned} 4x + y - 5 &= 0, \\ z - 1 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

**171. §. Taisnes parametriskie vienādojumi.** Apzīmēsim visas attiecības vienādojumos (21.8) ar  $t$ . Tad dabūjam 3 vienādojumus:  $\frac{x-x_0}{m}=t$ ,  $\frac{y-y_0}{n}=t$  un  $\frac{z-z_0}{p}=t$

jeb

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + mt, \\ y &= y_0 + nt, \\ z &= z_0 + pt. \end{aligned} \right\} \quad (21.10)$$

Vienādojumus (21.10), kuros visas trīs taisnes patvaļīgā (tekošā) punkta koordinātes  $x$ ,  $y$  un  $z$  izteiktas kā ceturrtā mainīgā lieluma  $t$  funkcijas, sauc par taisnes parametriskajiem vienādojumiem.

**172. §. Leņķis starp divām taisnēm.** Par leņķi starp divām taisnēm sauc leņķi starp šo taisņu virziena vektoriem. Divas taisnes ir paralēlas, ja to virziena vektori ir kolineāri, un savstarpēji perpendikulāras, ja virziena vektori ortogonāli.

1. piemērs. Aprēķināt leņķi  $\varphi$  starp taisnēm

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+4}{7} \quad \text{un} \quad \frac{x+6}{5} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-1}.$$

Atrisinājums. Doto taisņu virziena vektori ir  $\vec{a}_1 = (1; -2; 7)$  un  $\vec{a}_2 = (5; 1; -1)$ . Pēc formulas (19.47)

$$\cos \varphi = \frac{1 \cdot 5 + (-2) \cdot 1 + 7 \cdot (-1)}{\sqrt{1+4+49} \cdot \sqrt{25+1+1}} = -\frac{4}{27\sqrt{2}} \approx -0,1048; \quad \varphi \approx 96^\circ 01'.$$

2. piemērs. Uzrakstīt vienādojumus taisnei, kura iet caur punktu  $M_0(0; -2; 1)$  un ir perpendikulāra divām dotajām taisnēm

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2} \quad \text{un} \quad \frac{x}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{1}.$$

Atrisinājums. Doto taisņu virziena vektori ir  $\vec{a}_1 = (1; -1; 2)$  un  $\vec{a}_2 = (3; -2; 1)$ . Par meklējamās taisnes virzienu vektoru var pieņemt vektoriālo reizinājumu

$$\vec{a} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \vec{k} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}.$$

Tātad meklējamās taisnes virziena vektors ir  $\vec{a} = (3; 5; 1)$  un pēc formulām (21.8) meklējamās taisnes vienādojumi ir

$$\frac{x}{3} = \frac{y+2}{5} = \frac{z-1}{1}.$$

### 173. §. Leņķis starp plakni un taisni.

Par leņķi starp plakni un taisni sauc leņķi starp taisnes projekciju plaknē un taisni (176. zīm.). Ja taisnes virziena vektors ir  $\vec{a} = (m; n; p)$  un plaknes normālvektors  $\vec{n} = (A; B; C)$ , tad leņķi starp plakni un taisni aprēķinām pēc formulas

$$\cos(90^\circ \pm \varphi) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|}$$

jeb

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \quad (21.11)$$

Plakne un taisne ir paralēlas tad un tikai tad, kad vektori  $\vec{a}$  un  $\vec{n}$  ir savstarpēji ortogonāli, t. i.,

$$Am + Bn + Cp = 0. \quad (21.12)$$

Plakne un taisne ir perpendikulāras tad un tikai tad, ja vektori  $\vec{a}$  un  $\vec{n}$  ir kolineāri, t. i.,

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \quad (21.13)$$

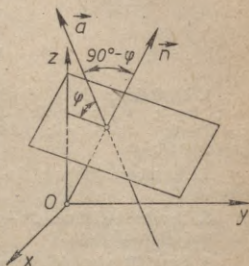
Taisne atrodas dotajā plaknē, ja tai ir kopīgs punkts ar plakni un bez tam izpildās nosacījums (21.12).

P i e m ē r s. Aprēķināt leņķi starp taisni

$$\left. \begin{aligned} 2x - y - 1 &= 0, \\ 3x + z - 5 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

un plakni  $x - 3y - 2z + 5 = 0$ .

A t r i s i n ā j u m s. Taisnes virziena vektors ir vektoru  $\vec{a}_1 = (2; -1; 0)$  un  $\vec{a}_2 = (3; 0; 1)$  vektoriālais reizinājums  $\vec{a} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1; -2; 3),$



176. zīm.



un plaknes normālvektors ir  $\vec{n} = (1; -3; -2)$ . Pēc formulas (21.11)

$$\sin \varphi = \frac{|-1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 3|}{\sqrt{1+9+4} \cdot \sqrt{1+4+9}} = \frac{1}{14} \approx 0,07; \quad \varphi \approx 4^\circ.$$

### Vingrinājumi

1. Noskaidrot šādu vienādojumu ģeometrisko nozīmi telpā:  $x=a$ ;  $y=b$ ;  $z=c$ ;  $x=0$ ;  $y=0$ ;  $z=0$ ;  $Ax+D=0$ ;  $Bx+D=0$ ;  $Cx+D=0$ ;  $Ax+By=0$ ;  $Ax+Cz=0$ ;  $Bx+Cz=0$ ;  $Ax+By+D=0$ ;  $Ax+Cz+D=0$ ;  $Bx+Cz+D=0$ ;  $Ax+By+Cz=0$ .

2. Atrast uz plaknes  $2x-y+5z-10=0$  punktus, kuros tā krusto koordinātu asi.

3. Uzrakstīt plaknes  $2x-y+5z-10=0$  vienādojumu ar asu nogriežņiem un tās normālviensādojumu.

4. Sastādīt vienādojumu plaknei, kura iet caur punktu  $(-2; 7; 3)$  un ir paralēla ar plakni  $x-4y+5z+7=0$ .

5. Atrast vienādojumu plaknei, kura iet caur punktu  $(-4; 2; 0)$  un ir perpendikulāra pret taisni  $\frac{x+4}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{-1}$ .

6. Atrast vienādojumus taisnei, kura iet caur punktu  $(4; 2; 0)$  un ir perpendikulāra plaknei  $3x-2y-z=0$ .

7. Atrast vienādojumus taisnei, kura iet caur punktu  $(-1; 0; 2)$  un ir paralēla taisnei  $\frac{x+3}{2} = y = z$ .

8. Caur plaknes  $x-3y+2z+4=0$  un  $Oz$  ass krustpunktu novilkt taisni, kura perpendikulāra plaknei  $x-2y=0$ .

9. Atrast vienādojumu plaknei, kura paralēla ar  $Ox$  asi un iet caur punktiem  $(-2; 4; -1)$  un  $(2; -3; 2)$ .

10. Aprēķināt leņķus starp plaknēm

a)  $4x-5y+3z-4=0$  un  $x-4y-z+3=0$ ;

b)  $3x-y+2z+10=0$  un  $5x+9y-3z=0$ ;

c)  $6x+2y-4z+11=0$  un  $9x+3y-6z-2=0$ .

11. Aprēķināt leņķi starp taisnēm  $\frac{x+4}{3} = \frac{y}{6} = \frac{z-1}{2}$  un  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{9} = \frac{z+1}{6}$ .

12. Atrast taisnes  $\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$  un plaknes  $3x+5y-z-2=0$  krustpunktu.

13. Atrast vienādojumus taisnei, kura atrodas plaknē  $2x+y-3z+1=0$  un iet caur diviem punktiem, kuros šī plakne krustojas ar taisnēm,  $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z+1}{2}$  un  $\frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+4}{-6}$ .

14. Atrast punkta  $(11; 17; -9)$  projekciju plaknē  $5x+8y-6z+5=0$ .

15. Pārveidot kanoniskā formā taisnes vienādojumus

$$\left. \begin{aligned} 16x - 2y - z + 16 &= 0, \\ 20x + y - 3z + 20 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

16. Aprēķināt leņķi starp taisni

$$\left. \begin{aligned} 3x + y - z + 1 &= 0, \\ 2x - y + 4z - 2 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ un plakni } x - 8y + 3z + 6 = 0.$$

## 22. NODAĻA

### OTRĀS KĀRTAS VIRSMAS

**174. §. Rotācijas virsmas.** Saskaņā ar teikto 20. nodaļā vienādojums  $x^2 + y^2 = a^2$  taisnleņķa koordinātu sistēmā telpā ir tāda cilindra vienādojums, kura veidule ir paralēla  $Oz$  asij, bet vadule ir riņķa līnija  $xOy$  plaknē ar centru koordinātu sākumā un rādiusu  $a$ . Tā kā  $xOy$  plaknes vienādojums ir  $z=0$ , tad aprakstīta cilindra vadules — riņķa līnijas vienādojumi ir

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= a^2, \\ z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (22.1)$$

Ja riņķa līnija rotē ap kādu no saviem diametriem, piemēram, ap  $Oy$  asi, tad veidojas rotācijas virsma, kas šajā konkrētajā piemērā ir sfēra ar rādiusu  $a$  un centru koordinātu sākumā. Šādas sfēras vienādojums ir [sk. formulu (20.8)]

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2. \quad (22.2)$$

Salīdzinot vienādojumus (22.1) un (22.2), redzam, ka vienādojumu (22.2) dabū, ja pirmajā no vienādojumiem (22.1) mainīgo lielumu  $x$  atvieto ar  $\sqrt{x^2 + z^2}$ . Tas nozīmē, ka šajā konkrētajā gadījumā, atvietojo  $xOy$  plaknē definētās līnijas vienādojumā  $x$  ar  $\sqrt{x^2 + z^2}$ , dabūjam vienādojumu tai rotācijas virsmai, kuru veido dotā līnija, rotējot ap  $Oy$  asi. Izrādās, ka šāds rotācijas virsmas vienādojuma atrašanas paņēmieni lietojams visos gadījumos, kad kādā taisnleņķa koordinātu sistēmas plaknē ir uzdota līnija, kura, rotējot ap vienu no šīs koordinātu plaknes asīm, veido rotācijas virsmu.

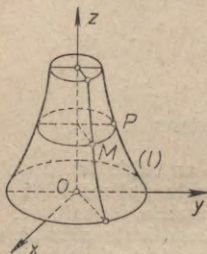
Pieņemsim, ka  $yOz$  plaknē ir uzdota līnija ( $l$ ), ar vienādojumiem

$$\left. \begin{aligned} F(y; z) &= 0, \\ x &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (22.3)$$

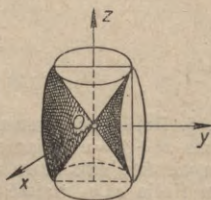
Apskatīsim rotācijas virsmu, kuru veido šī līnija, rotējot bez slīdes un deformācijas ap  $Oz$  asi (177. zīm.). Apzīmēsim patvaļīga punkta  $M$  koordinātes ar  $(x; y; z)$ . Punkts  $M$  atrodas uz

rotācijas virsmas tad un tikai tad, ja tas atrodas uz riņķa līnijas, kuru veido kāds līnijas (l) punkts  $P(0; y_0; z_0)$ , rotējot ap  $Oz$  asi. Salīdzinot punktu  $M$  un  $P$  koordinātes, atrodam, ka

$$z_0 = z \text{ un } y_0 = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (22.4)$$



177. zīm.



178. zīm.

Tā kā koordinātes  $y_0$  un  $z_0$  apmierina pirmo no vienādojumiem (22.3), tad

$$F(\sqrt{x^2 + y^2}; z) = 0. \quad (22.5)$$

Vienādojums (22.5) ir tās rotācijas virsmas vienādojums, kuru veido līnija (22.3), rotējot ap  $Oz$  asi.

Ja tā pati līnija (22.3) rotētu ap  $Oy$  asi, tad analogā veidā dabūtu rotācijas virsmas vienādojumu

$$F(y; \sqrt{x^2 + z^2}) = 0. \quad (22.6)$$

1. piemērs. Atrast vienādojumu rotācijas virsmai, kuru veido taisne  $z = ky$ ;  $x = 0$ , rotējot 1) ap  $Oz$  asi, 2) ap  $Oy$  asi.

Atrisinājums. 1. Pēc formulas (22.5) apmainīsim taisnes vienādojumā  $y$  ar  $\sqrt{x^2 + y^2}$ . Tad dabūjam  $z = k\sqrt{x^2 + y^2}$  jeb  $k^2x^2 + k^2y^2 - z^2 = 0$ . Šī virsma ir apaļš konuss, kura virsotne atrodas koordinātu sākumā un kura ass ir  $Oz$  ass.

2. Pēc formulas (22.6) taisnes vienādojumā  $z = ky$  apmainīsim  $z$  ar  $\sqrt{x^2 + z^2}$ . Tad dabūjam  $\sqrt{x^2 + z^2} = ky$  jeb  $x^2 - k^2y^2 + z^2 = 0$ . Arī šī virsma ir apaļš konuss, kura virsotne atrodas koordinātu sākumā, bet šī konusa ass ir  $Oy$  ass (178. zīm.).

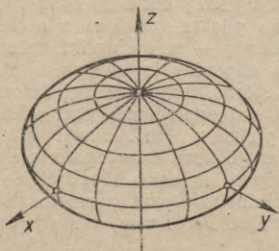
2. piemērs. Atrast vienādojumu rotācijas virsmai, kuru veido elipse  $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ;  $x = 0$ , rotējot ap  $Oz$  asi.

Atrisinājums. 1. Pēc formulas (22.5) apmainīsim elipses vienādojumā  $y$  ar  $\sqrt{x^2 + y^2}$ . Tad dabūjam  $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ . Šo



virsmu sauc par *sāspiestu rotācijas elipsoīdu* jeb *sferoīdu*, ja  $|c| < |b|$  (179. zīm.), vai par *izstieptu rotācijas elipsoīdu*, ja  $|c| > |b|$  (180. zīm.).

Piezīme. Sfēra ir rotācijas elipsoīda speciāls gadījums, kad  $b=c$ . Pirmajā tuvinājumā Zemes virsma ir sferoīds, kuram lielā



179. zīm.



180. zīm.

pusass  $b=6378$  km, bet mazā pusass  $c=6356$  km. Zemes sferoīds ir saspiests no poliem un izstiepts uz ekvatora.

3. piemērs. Atrast vienādojumu rotācijas virsmai, kuru veido hiperbola  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ,  $x=0$ , rotējot 1) ap  $Oz$  asi, 2) ap  $Oy$  asi.

Atrisinājums. 1. Pēc formulas (22.5) apmainīsim hiperbolas vienādojumā  $y$  ar  $\sqrt{x^2 + y^2}$ . Tad dabūjam  $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

Šo virsmu sauc par *viendobuma rotācijas hiperboloīdu*.

2. Pēc formulas (22.6) apmainīsim hiperbolas vienādojumā  $z$  ar  $\sqrt{x^2 + z^2}$ . Tad dabūjam  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{c^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ . Šo virsmu sauc par *divdobumu rotācijas hiperboloīdu*.

4. piemērs. Atrast vienādojumu rotācijas virsmai, kuru veido parabola  $y^2 = 2pz$ ,  $x=0$ , rotējot ap  $Oz$  asi.

Atrisinājums. Pēc formulas (22.5) apmainīsim parabolas vienādojumā  $y$  ar  $\sqrt{x^2 + y^2}$ , tad dabūjam  $x^2 + y^2 = 2pz$ . Šo virsmu sauc par *rotācijas paraboloidu*.

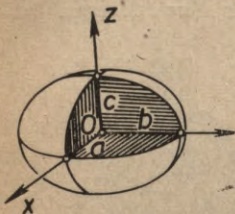
175. §. **Elipsoīds.** Par elipsoīdu sauc virsmu, kuras kanoniskais (visvienkāršākais) vienādojums ir

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (22.7)$$

Salīdzināsim vienādojumu (22.7) ar vienādojumu

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \quad (22.8)$$

Vienādojums (22.8) ir tādas sfēras vienādojums, kuras centrs atrodas koordinātu sākumā un rādiuss ir 1. Ja punkts ar koordinātēm  $(x; y; z)$  atrodas uz sfēras, t. i., tā koordinātes apmierina vienādojumu (22.8), tad punkts ar koordinātēm  $(ax; by; cz)$  apmierina vienādojumu (22.7). Tas nozīmē,



181. zīm.

ka elipsoīdu (22.7) dabū no sfēras (22.8), ja visu tās punktu abscisas  $x$  atvieto ar  $ax$ , ordinātes  $y$  — ar  $by$ , aplikātas  $z$  — ar  $cz$ . Tātad elipsoīds ir virsma, kuru var dabūt no sfēras, to vienmērīgi deformējot (izstiepjot vai saplacinot) pret  $yOz$ ,  $xOz$  un  $xOy$  plaknēm (181. zīm.). Elipsoīda šķēlums ar jebkuru koordinātu plakni ir elipse. Elipses ir arī visi elipsoīda šķēlumi ar plaknēm, kuras paralēlas koordinātu plaknēm. Piemēram, vienādojumi

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1, \\ z &= h, \end{aligned} \right\} \quad (22.9)$$

kur  $|h| < |c|$ , izteic elipsoīda šķēlumu ar plakni, kura paralēla  $xOy$  plaknei. Vienādojumu sistēmu (22.9) var aizstāt ar šādu ekvivalentu vienādojumu sistēmu:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 - \frac{h^2}{c^2}, \\ z &= h \end{aligned} \right\}$$

jeb

$$\frac{x^2}{a^2 \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1; \quad z = h. \quad (22.9')$$

Pirmais no vienādojumiem (22.9) izteic eliptisku cilindru, kura veidule paralēla  $Oz$  asi, bet vadule ir elipse  $xOy$  plaknē ar pusasīm  $a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$  un  $b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$ . Tātad vienādojumi (22.9') ir elipses vienādojumi.

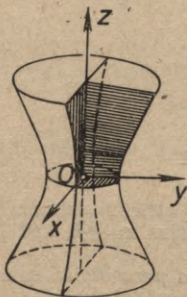
Ja  $a=b$ , tad vienādojums (22.7) izteic rotācijas elipsoīdu, bet, ja  $a=b=c$ , tad sfēru ar centru koordinātu sākumā un rādiusu  $a$ .

**176. §. Hiperboloīdi. I. Par viendabuma hiperboloīdu** sauc virsmu, kuras kanoniskais (visvienkāršākais) vienādojums ir

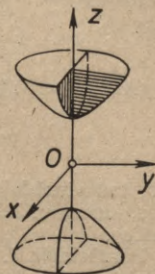
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (22.10)$$

Katra  $xOy$  plaknei paralēla plakne šķēļ šo virsmu pa elipsi (182. zīm.), jo vienādojumi

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 + \frac{z^2}{c^2}, \\ z &= h, \end{aligned} \right\} \quad (22.11)$$



182. zīm.



183. zīm.

ir elipses vienādojumi, lai kāds būtu reālais skaitlis  $h$ . Šķēlums ar  $yOz$  plakni ir hiperbola

$$x=0; \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Šķēlums ar  $xOz$  plakni arī ir hiperbola

$$y=0; \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Ja  $a=b$ , tad vienādojums (22.10) izteic viendobuma rotācijas hiperboloīdu, kura šķēlums ar katru  $xOy$  plaknei paralēlu plakni ir riņķa līnija. Minēsim bez pierādījuma, ka viendobuma rotācijas hiperboloīdu veido, rotējot ap asi, ne vien hiperbola, bet arī katra taisne, kura rotē ap tai šķērsu taisni, ja vien šīs šķērsās taisnes nav savstarpēji perpendikulāras. Uz katra viendobuma hiperboloīda atrodas divas tāiņu saimes.

II. Par *divdobumu hiperboloīdu* sauc virsmu, kuras kanoniskais (visvienkāršākais) vienādojums ir

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \quad (22.12)$$

Šai virsmai ar  $xOy$  plakni nav reālu šķēlumu, jo vienādojumi  $z=0; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$  nedefinē reālu līniju.



Šķēlumi ar plaknēm

$$\left. \begin{array}{l} z = \pm h, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1. \end{array} \right\} \quad (22.13)$$

ir elipses (183. zīm.), ja  $|h| > |c|$ .  
Šķēlums ar  $yOz$  plakni ir hiperbola

$$x=0; \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

un ar  $xOz$  plakni — arī hiperbola

$$y=0; \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Ja  $a=b$ , tad vienādojums (22.12) izteic divdobumu rotācijas hiperboloīdu, kuram visi šķēlumi ar plakni  $z=\pm h$ , kad  $|h| > |c|$ , ir riņķa līnijas,

**177. §. Paraboloidi.** I. Par *eliptisko paraboloidu* sauc virsmu, kuras kanoniskais (visvienkāršākais) vienādojums ir

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad \text{kur } pq > 0. \quad (22.14)$$

Pieņemsim, ka  $p > 0$  un  $q > 0$ . Virsmas šķēlums ar plakni  $z=h$  ir elipse (184. zīm.)

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x^2}{2ph} + \frac{y^2}{2qh} = 1, \\ z = h, \end{array} \right\}$$

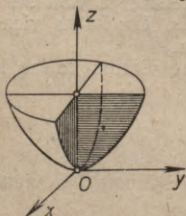
kuras pusasis  $\sqrt{2ph}$  un  $\sqrt{2qh}$  ir reāli lielumi, ja  $h > 0$ .

Šķēlums ar  $yOz$  plakni ir parabola

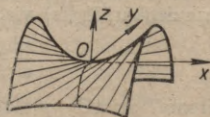
$$x=0; \quad y^2 = 2qz$$

un ar  $xOz$  plakni arī parabola

$$y=0; \quad x^2 = 2pz.$$



184. zīm.



185. zīm.

Ja  $p=q$ , tad vienādojums (22.14) izteic rotācijas paraboloidu, kuram visi šķēlumi ar plakni  $z=h$ , kad  $h>0$ , ir riņķa līnijas.

II. Par *hiperbolisko paraboloidu* sauc virsmu, kuras kanoniskais (visvienkāršākais) vienādojums ir

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad \text{kur } pq > 0. \quad (22.15)$$

Pieņemsim, ka  $p>0$  un  $q>0$ . Šīs virsmas šķēlums ar  $yOz$  plakni ir parabola (185. zīm.)

$$x=0; \quad y^2 = -2qz.$$

Šķēlums ar  $xOz$  plakni ir parabola

$$y=0; \quad x^2 = 2pz.$$

Šķēlums ar  $xOy$  plakni ir divas krusteniskas taisnes: a)  $z=0$ ;  $y = \sqrt{\frac{q}{p}} \cdot x$  un b)  $z=0$ ;  $y = -\sqrt{\frac{q}{p}} \cdot x$ , jo vienādojuma  $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0$  kreisā puse sadalās reizinātājos:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right) \left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = 0.$$

Virsmas (22.15) šķēlumi ar  $xOy$  plaknei paralēlām plaknēm ir hiperbolas

$$z=h; \quad \frac{x^2}{2ph} - \frac{y^2}{2qh} = 1,$$

vai

$$z=-h; \quad \frac{y^2}{2qh} - \frac{x^2}{2ph} = 1.$$

Hiperboliskais paraboloids ir izņēmums starp otrās kārtas virsmām tajā ziņā, ka neviens tā šķēlums ar koordinātu asīm perpendikulārām plaknēm nav elipse. Šī virsma, kura atgādina seglus, ir raksturīga ar to, ka uz tās atrodas divas taisņu saimes.

178. §. **Koniskas virsmas.** Pieņemsim, ka ir dots virsmas vienādojums

$$F(x; y; z) = 0 \quad (22.16)$$

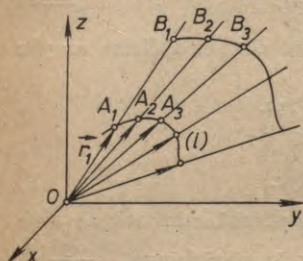
un ka funkcija  $F(x; y; z)$  ir tāda, kurai ir spēka identitātē

$$F(\lambda x; \lambda y; \lambda z) = \lambda^n \cdot F(x; y; z). \quad (22.17)$$

Te  $\lambda$  ir patvaļīgs reizinātājs un  $n$  kāds noteikts pakāpes rādītājs. Tādas funkcijas sauc par *homogēnām funkcijām* un skaitli  $n$  par homogēnās funkcijas *dimensiju* jeb *pakāpi*. Piemēram,  $x^2 - 2xy + y^2 + 9z^2$  ir otrās pakāpes homogēna funkcija, jo  $(\lambda x)^2 - 2(\lambda x)(\lambda y) + (\lambda y)^2 + 9(\lambda z)^2 = \lambda^2(x^2 - 2xy + y^2 + 9z^2)$ , turpretim

$x^2 - 2xy + y^2 + 9z^2 - 1$  nav homogēna funkcija, jo, ievietojot šīs funkcijas izteiksmē  $x, y, z$  vietā  $\lambda x, \lambda y, \lambda z$ , nav spēkā identitāte (22.17).

Ja virsmas vienādojuma (22.16) kreisā puse ir homogēna funkcija, tad šīs virsmas veidule ir taisne, kura iet caur koordinātu sākumu.



186. zīm.

Tiešām, ja uz virsmas (22.16) atrodas punkts  $A(x_1; y_1; z_1)$ , tad  $F(x_1; y_1; z_1) = 0$  un  $F(\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1) = \lambda^n F(x_1; y_1; z_1)$  neatkarīgi no tā, kāds ir patvaļīgais reizinātājs  $\lambda$ . Tādēļ, ja uz virsmas atrodas punkts  $A(x_1; y_1; z_1)$ , tad uz tās atrodas arī punkts  $B(x; y; z)$ , kura koordinātes iegūst, pareizinot punkta  $A$  koordinātes ar patvaļīgu reizinātāju  $\lambda$ :

$$\left. \begin{aligned} x &= \lambda x_1, \\ y &= \lambda y_1, \\ z &= \lambda z_1. \end{aligned} \right\} \quad (22.18)$$

Ja parametrs  $\lambda$  mainās, tad punkts  $B$  apraksta taisni, kura iet caur punktu  $A$  un caur koordinātu sākumu. Šīs taisnes parametriskie vienādojumi ir vienādojumi (22.18), kuros parametrs ir  $\lambda$  un taisnes virziena vektors ir punkta  $A$  rādiusvektors  $\vec{r}_1 = (x_1; y_1; z_1)$ . Ja virziena vektora gala punkts  $A$  maina stāvokli telpā, kustoties pa kādu dotu līniju (vaduli)  $l$ , tad šī vektora pamats (veidule) apraksta virsmu. Šādu virsmu sauc par *konisku virsmu* ar virsotni koordinātu sākumā (186. zīm.).

Tātad vienādojums  $F(x; y; z) = 0$ , kura kreisā puse ir homogēna funkcija, ģeometriski izsaka konisku virsmu ar virsotni koordinātu sākumā.

Piemēram, vienādojums  $x^2 - 2xy + y^2 + 9z^2 = 0$  ģeometriski izsaka otrās kārtas konisku virsmu ar virsotni koordinātu sākumā. Jāpiezīmē, ka koniska virsma var pārvērsties par plakni, kura iet caur koordinātu sākumu, jo tādas plaknes vienādojuma  $Ax + By + Cz = 0$  kreisā puse ir pirmās pakāpes homogēna funkcija.

Ja vienādojuma  $F(u; v; w) = 0$  kreisā puse ir homogēna funkcija, kuras argumenti savukārt ir trīs citu argumentu  $x, y, z$  lineāras funkcijas:  $u = x - a$ ;  $v = y - b$ ;  $w = z - c$ , tad koniskās virsmas  $F(u; v; w) = 0$  virsotne atrodas punktā  $O'(a; b; c)$ .

**179. §. Otrās kārtas virsmas vispārīgais vienādojums.** Virsmu, kuras vienādojums vispārīgā gadījumā ir otrās pakāpes algebrisks vienādojums

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0, \quad (22.19)$$

sauc par otrās kārtas virsmu. Te  $A, B, \dots, J$  ir doti reāli skaitļi — vienādojuma koeficienti. Šajā vienādojumā koeficienti  $A, B, C$ ,



$D, E, F$  reizē nav 0, jo tad vienādojums ir lineārs. Bet lineārs vienādojums ir pirmās kārtas virsmas, t. i., plaknes vienādojums.

Visu iespējamo gadījumu analīze, kura šajā kursā neietilpst, rāda, ka atkarībā no tā, kādi ir vienādojuma (22.19) koeficienti, šis vienādojums ģeometriski var izteikt vienu no šādiem 12 gadījumiem:

- 1) elipsoīdu (181. zīm.);
- 2) viendobuma hiperboloīdu (182. zīm.);
- 3) divdobumu hiperboloīdu (183. zīm.);
- 4) eliptisko paraboloidu (184. zīm.);
- 5) hiperbolisko paraboloidu (185. zīm.);
- 6) otrās kārtas cilindrisku virsmu;
- 7) otrās kārtas konisku virsmu;
- 8) plakņu pāri, piemēram,

$$(2x - 3y + z - 6)(x + y - 3z + 5) = 0;$$

- 9) dubultplakni, piemēram,

$$(3x - 2y + z - 4)^2 = 0;$$

- 10) taisni, piemēram,

$$(2x + y + z - 3)^2 + (x - 3y + 6z - 5)^2 = 0;$$

- 11) punktu, piemēram,

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 4)^2 = 0;$$

12) vienādojuma (22.19) koeficienti ir tādi, ka neviena reāla punkta koordinātes šo vienādojumu neapmierina (imagināra virsma), piemēram,

$$\begin{aligned}(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 4)^2 &= -1, \\ (2x + y + z - 3)^2 + (x - 3y + 6z - 5)^2 &= -2, \\ (3x - 2y + z - 4)^2 &= -3.\end{aligned}$$

### Vingrinājumi

1. Sastādīt vienādojumus rotācijas virsmām, kuras, rotējot ap  $Ox$  asi, veido  $xOy$  plaknē uzdotās līnijas:

- a) taisne  $y = kx$ ,
- b) sinusoida  $y = \sin x$ ,
- c) riņķa līnija  $(x - a)^2 + y^2 = R^2$ .

2. Aprakstīt šādas otrās kārtas virsmas:

- a)  $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 36 = 0$ ;
- b)  $x^2 + 4y^2 - 9z^2 - 36 = 0$ ;
- c)  $x^2 + 4y^2 - 9z^2 + 36 = 0$ ;
- d)  $x^2 + 4y^2 - 9z^2 = 0$ ;
- e)  $x^2 + 4y^2 - z = 0$ ;
- f)  $x^2 - 4y^2 - z = 0$ .

## LINEĀRĀS ALGEBRAS ELEMENTI

## 23. NODAĻA

## LINEĀRU ALGEBRISKU VIENĀDOJUMU SISTĒMAS

180. §. Lineārs algebrisks vienādojums un tā atrisinājumi. Šīs grāmatas 3. un 21. nodaļā plaši iztīrāta lineāru algebrisku vienādojumu ģeometriskā interpretācija, kad mainīgo (nezināmo) skaits dotajā vienādojumā nav lielāks par 3.

Par lineāru algebrisku vienādojumu ar  $n$  nezināmajiem  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sauc vienādojumu

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b. \quad (23.1)$$

Te  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ir doti reāli skaitļi, kurus sauc par *vienādojuma koeficientiem*. Doto skaitli  $b$  sauc par vienādojuma *brīvo locekli* jeb *labo pusi*. Ja brīvais loceklis ir nulle, tad vienādojumu sauc par *homogēnu*, pretējā gadījumā — par *nehomogēnu vienādojumu*.

Katrā lineārā algebriskā vienādojumā vismaz viens koeficients nav nulle. Ja, piemēram,  $a_1 \neq 0$ , tad no (23.1) seko:

$$x_1 = \frac{b}{a_1} - \frac{a_2}{a_1}x_2 - \frac{a_3}{a_1}x_3 - \dots - \frac{a_n}{a_1}x_n. \quad (23.2)$$

Katrai patvaļīgai skaitļu kopai  $x_2 = a_2, x_3 = a_3, \dots, x_n = a_n$ , kas ievietota izteiksmē (23.2), atbilst viena pilnīgi noteikta  $x_1$  vērtība

$$a_1 = \frac{b}{a_1} - \frac{a_2}{a_1}a_2 - \frac{a_3}{a_1}a_3 - \dots - \frac{a_n}{a_1}a_n.$$

Acīm redzot, skaitļu kopa  $\{a_1; a_2; \dots; a_n\}$ , ievietota lineārajā vienādojumā (23.1), pārvērš to par identitāti. Katru tādu sākotnējo skaitļu kopu sauc par lineārā *vienādojuma atrisinājumu*. Tā kā  $n-1$  skaitļi šādā skaitļu kopā var izvēlēties patvaļīgi, tad katram lineāram algebriskam vienādojumam ar  $n$  nezināmajiem ( $n \geq 2$ ) ir bezgalīgi daudz atrisinājumu.

Piemērs. Vienādojums  $2x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 18 = 0$  ir lineārs ne-





Lineāru vienādojumu sistēmu sauc par *homogēnu*, ja visi tās brīvie locekļi ir nulles, t. i., ja  $b_1=b_2=\dots=b_m=0$ . Ja kaut viens brīvais loceklis sistēmā (23.3) nav nulle, tad šo sistēmu sauc par *nehomogēnu* lineāru algebrisku vienādojumu sistēmu. Piemēram,

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 1 &= 0, \\ -x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 8 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (23.5)$$

ir nehomogēna lineāru algebrisku vienādojumu sistēma. Šīs vienādojumu sistēmas 3 nezināmie ir  $x_1, x_2, x_3$ , brīvie locekļi  $b_1=2, b_2=-1, b_3=8$ , bet koeficienti  $a_{11}=a_{22}=a_{23}=1; a_{12}=3; a_{13}=a_{31}=-1; a_{21}=2; a_{32}=7$  un  $a_{33}=-5$ .

Vienādojumu sistēmas (23.3) koeficientu tabulu, kas sakārtota  $m$  rindās un  $n$  kolonās, sauc par šīs sistēmas *matricu*:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (23.6)$$

Skaitļu tabulu, kurā bez sistēmas koeficientiem ietilpst arī brīvo locekļu kolona, sauc par *vienādojumu sistēmas paplašināto matricu*. Piemēram, vienādojumu sistēmas (23.5) paplašinātā matrica ir

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 7 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

**182. §. Vienādojumu sistēmas atrisinājums.** Ievietojot vienādojumu sistēmā nezināmo  $x_1, x_2, \dots, x_n$  vietā kaut kādus skaitļus  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , dabū

$$a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = \beta_1, \quad (i=1, 2, \dots, m),$$

kur  $\beta_i$  ir kāds skaitlis, kas vispār nav vienāds ar  $i$ -tā vienādojuma brīvo locekli  $b_i$ . Ja pastāv aritmētiska identitāte

$$a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = b_1, \quad (i=1, 2, \dots, m),$$

tad saka, ka skaitļi  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  *apmierina vienādojumu sistēmu*, un sakārtoto skaitļu kopu  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  sauc par *vienādojumu sistēmas atrisinājumu*.

1. piemērs. Skaitļu kopa  $\{-1; 1; 0\}$  ir vienādojumu sistēmas (23.5) atrisinājums, jo, liekot šajā sistēmā nezināmo vietā skaitļus  $x_1=-1; x_2=1; x_3=0$ , visi sistēmas (23.5) vienādojumi pārvēršas par aritmētiskām identitātēm

$$\begin{aligned} 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 - 1 \cdot 0 - 2 &= 0, \\ 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 &= 0, \\ -1 \cdot (-1) + 7 \cdot 1 - 5 \cdot 0 - 8 &= 0. \end{aligned}$$

Vienādojumu sistēma var būt *saderīga* vai *nesaderīga*. Vienādojumu sistēmu sauc par saderīgu, ja tai ir vismaz viens atrisinājums. Tā ir nesaderīga, ja tai nav neviena atrisinājuma.

Saderīgām sistēmām var būt viens vienīgs atrisinājums vai arī neierobežots skaits atrisinājumu. Piemēram, vienādojumu sistēmai (23.5) bez jau pieminētā atrisinājuma  $\{-1; 1; 0\}$  ir neierobežots skaits atrisinājumu. Visus sistēmas (23.5) atrisinājumus, kā vēlāk redzēsīm, var izteikt kā viena parametra lineāras funkcijas:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -1 - 0,8t, \\ x_2 &= 1 + 0,6t, \\ x_3 &= t, \end{aligned} \right\} \quad (23.7)$$

kur  $t$  ir patvaļīgs reāls skaitlis. Tiešām, lai kāds būtu  $t$ , ievietojot vienādojumu sistēmā (23.5) nezināmo vietā funkcijas (23.7), visi sistēmas vienādojumi pārvēršas par identitātēm:

$$\begin{aligned} (-1 - 0,8t) + 3(1 + 0,6t) - t - 2 &= 0, \\ 2(-1 - 0,8t) + (1 + 0,6t) + t + 1 &= 0, \\ -(-1 - 0,8t) + 7(1 + 0,6t) - 5t - 8 &= 0. \end{aligned}$$

Funkciju kopu (23.7) sauc par vienādojumu sistēmas (23.5) *vispārīgā atrisinājumu*.

2. piemērs. Vienādojumu sistēma

$$\left. \begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 &= 4, \\ -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 5, \end{aligned} \right\} \quad (23.8)$$

ir saderīga. Tās atrisinājums ir  $\{5; 6; -1\}$ , jo, ievietojot skaitļus  $x_1=5$ ;  $x_2=6$  un  $x_3=-1$  vienādojumu sistēmā (23.8), visi tās vienādojumi pārvēršas par aritmētiskām identitātēm. Kā vēlāk redzēsīm, šis atrisinājums ir vienīgais.

3. piemērs. Vienādojumu sistēma

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= -1, \\ -x_1 + 7x_2 - 5x_3 &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (23.9)$$

ir nesaderīga. Lai to pierādītu, pieņemsim nezināmos  $x_1, x_2, x_3$  par neatkarīgi mainīgiem lielumiem, apzīmēsīm differences starp sistēmas (23.9) labajām un kreisajām pusēm ar

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= 2 - x_1 - 3x_2 + x_3, \\ v_2 &= -1 - 2x_1 - x_2 - x_3, \\ v_3 &= 1 + x_1 - 7x_2 + 5x_3, \end{aligned} \right\} \quad (23.10)$$

un nosauksim lineārās funkcijas  $v_1, v_2, v_3$  par *bāzes mainīgajiem*. Acīm redzot, vienādojumu sistēma (23.9) ir saderīga tad un tikai



tad, ja eksistē kaut viena tāda nezināmo  $x_1, x_2, x_3$  vērtību kopa, kurai atbilstošās visu bāzes mainīgo vērtības ir  $v_1=v_2=v_3=0$ . Tādēļ pietiek parādīt, ka pieņēmums par atrisinājuma eksistenci noved pie pretrunas ar nosacījumu  $v_1=v_2=v_3=0$ . Lai to parādītu, pēc brīvas izvēles izslēgsim no lineāro funkciju sistēmas (23.10) neatkarīgi mainīgiem lielumiem vienu nezināmo apmaiņā pret kādu no bāzes mainīgajiem. Tāda *neatkarīgi mainīgā un bāzes mainīgā lomu apmaiņa ir iespējama, ja koeficients pie izslēdzamā nezināmā tajā vienādojumā, kas šo nezināmo saista ar apmaiņamo bāzes mainīgo, nav nulle*. Sai gadījumā koeficienti pie  $x_1$  visos sistēmas (23.10) vienādojumos nav nulles. Tādēļ  $x_1$  var samainīt lomām ar jebkuru no bāzes mainīgajiem, piemēram, var samainīt lomām  $x_1$  un  $v_1$ . Sai nolūkā no sistēmas (23.10) pirmā vienādojuma izteic  $x_1=2-v_1-3x_2+x_3$  un ievieto to pārējos divos vienādojumos. Tad dabū jaunu lineāru vienādojumu sistēmu

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 2 - v_1 - 3x_2 + x_3, \\ v_2 &= -1 - 2(2 - v_1 - 3x_2 + x_3) - x_2 - x_3, \\ v_3 &= 1 + (2 - v_1 - 3x_2 + x_3) - 7x_2 + 5x_3 \end{aligned} \right\}$$

jeb

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 2 - v_1 - 3x_2 + x_3, \\ v_2 &= -5 + 2v_1 + 5x_2 - 3x_3, \\ v_3 &= 3 - v_1 - 10x_2 + 6x_3. \end{aligned} \right\} \quad (23.11)$$

Tā kā koeficients pie  $x_2$ , piemēram, otrajā sistēmas (23.11) vienādojumā, nav nulle, tad arī  $x_2$  un  $v_2$  var samainīt lomām.

Sai nolūkā no sistēmas (23.11) otrā vienādojuma izteic  $x_2 = 1 - \frac{2}{5}v_1 + \frac{1}{5}v_2 + \frac{3}{5}x_3$  un ievieto to pārējos divos vienādojumos. Tad dabū

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -1 + \frac{1}{5}v_1 - \frac{3}{5}v_2 - \frac{4}{5}x_3, \\ x_2 &= 1 - \frac{2}{5}v_1 + \frac{1}{5}v_2 + \frac{3}{5}x_3, \\ v_3 &= -7 + 3v_1 - 2v_2. \end{aligned} \right\} \quad (23.12)$$

Samainīt lomām  $x_3$  un  $v_3$ , acīm redzot, nav iespējams, jo koeficients pie  $x_3$  sistēmas (23.12) trešajā vienādojumā ir nulle. Ja  $v_1=v_2=0$ , tad  $x_1=-1-\frac{4}{5}x_3$ ;  $x_2=1+\frac{3}{5}x_3$ , bet  $v_3=-7$  neatkarīgi no tā, kāda ir  $x_3$  vērtība. Tādēļ pieņēmums par tādas nezināmo  $x_1, x_2, x_3$  vērtību kopas eksistenci, kurai atbilstu  $v_1=v_2=v_3=0$ , noved pie pretrunas un dotā vienādojumu sistēma (23.9) ir nesaderīga.





Tā kā katrā lineārā algebriskā vienādojumā vismaz viens koeficients nav nulle, tad katrā tabulas (23.14) rindā vismaz viens skaitlis nav nulle, un, tā kā katrs nezināmais ietilpst vismaz vienā sistēmas vienādojumā, tad arī katrā tabulas kolonā, neieskaitot sistēmas brīvo locekļu kolonu, vismaz viens skaitlis nav nulle.

Jebkurš no tabulas (23.14) skaitļiem  $a_{ij}$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ;  $j=1, 2, \dots, n$ ) atrodas kādas rindas un kolonas krustojumā. Ja izvēlas kādu tādu kolonu un rindu, kuru kustojumā novietotais elements  $a_{ij}$  nav nulle, piemēram,  $a_{pk} \neq 0$ , tad ir iespējams izslēgt nezināmo  $x_k$  no neatkarīgi mainīgo skaita, apmainot to lomām ar bāzes mainīgo  $v_p$ . To panāk, izsakot no sistēmas (23.13)  $p$ -tā vienādojuma

$$x_k = \frac{b_k}{a_{pk}} - \frac{a_{p1}}{a_{pk}} x_1 - \dots - \frac{a_{pj}}{a_{pk}} x_j - \dots - \frac{1}{a_{pk}} v_p - \dots - \frac{a_{pn}}{a_{pk}} x_n$$

un ievietojot šādu  $x_k$  pārējos sistēmas (23.13) vienādojumos. Tad dabū jaunu vienādojumu sistēmu, kuru pierakstīsim jaunas tabulas (I) formā:

| I       | I       | $-x_1$    | $-x_2$          | $-x_j$          | $-v_p$     | $-x_n$          |
|---------|---------|-----------|-----------------|-----------------|------------|-----------------|
| $v_1$   | $b'_1$  | $a'_{11}$ | $a'_{12} \dots$ | $a'_{1j} \dots$ | $-ca_{1k}$ | $\dots a'_{1n}$ |
| $v_2$   | $b'_2$  | $a'_{21}$ | $a'_{22} \dots$ | $a'_{2j} \dots$ | $-ca_{2k}$ | $\dots a'_{2n}$ |
| $\dots$ | $\dots$ | $\dots$   | $\dots$         | $\dots$         | $\dots$    | $\dots$         |
| $v_1$   | $b'_1$  | $a'_{11}$ | $a'_{12} \dots$ | $a'_{1j} \dots$ | $-ca_{1k}$ | $\dots a'_{1n}$ |
| $\dots$ | $\dots$ | $\dots$   | $\dots$         | $\dots$         | $\dots$    | $\dots$         |
| $x_k$   | $cb_p$  | $ca_{p1}$ | $ca_{p2} \dots$ | $ca_{pj} \dots$ | $c$        | $\dots ca_{pn}$ |
| $\dots$ | $\dots$ | $\dots$   | $\dots$         | $\dots$         | $\dots$    | $\dots$         |
| $v_m$   | $b'_m$  | $a'_{m1}$ | $a'_{m2} \dots$ | $a'_{mj} \dots$ | $-ca_{mk}$ | $\dots a'_{mn}$ |

(23.15)

Te

$$c = \frac{1}{a_{pk}}, \quad (23.16)$$

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij}a_{pk} - a_{ik}a_{pj}}{a_{pk}}, \quad (23.17)$$

( $i \neq p$ ;  $j \neq k$ )

un

$$b'_i = \frac{b_i a_{pk} - b_p a_{ik}}{a_{pk}}, \quad (i \neq p) \quad (23.18)$$



Tiešām, ja sākuma tabulā  $a_{pk} \neq 0$ , tad

$$x_k = \frac{b_p}{a_{pk}} - \frac{1}{a_{pk}} \sum_{j=1}^{k-1} a_{pj} x_j - \frac{v_p}{a_{pk}} - \frac{1}{a_{pk}} \sum_{j=k+1}^n a_{pj} x_j$$

un

$$\begin{aligned} v_i &= b_i - \sum_{j=1}^{k-1} a_{ij} x_j - \frac{a_{ik}}{a_{pk}} \left( b_p - \sum_{j=1}^{k-1} a_{pj} x_j - v_p - \sum_{j=k+1}^n a_{pj} x_j \right) - \sum_{j=k+1}^n a_{ij} x_j = \\ &= \frac{b_i a_{pk} - b_p a_{ik}}{a_{pk}} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{a_{ij} a_{pk} - a_{ik} a_{pj}}{a_{pk}} x_{ij} + \frac{a_{ik}}{a_{pj}} v_p - \\ &- \sum_{j=k+1}^n \frac{a_{ij} a_{pk} - a_{ik} a_{pj}}{a_{pk}} x_{ij}, \quad (i=1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, m). \end{aligned}$$

Izvēlēto sākuma tabulas skaitli  $a_{pk} \neq 0$ , kas atrodas  $p$ -tās rindas un  $k$ -tās kolonas krustojumā, sauc par šīs tabulas *galveno elementu*. Jebkuru vienādojumu sistēmas koeficientu, kas nav nulle, var vai nu pilnīgi patvaļīgi, vai arī, vadoties no kādiem īpašiem apsvērumiem, izvēlēties par galveno elementu. Ja  $a_{pk} \neq 0$  ir galvenais elements, tad to rindu un kolonu, kurā šis elements atrodas, sauc par *galveno rindu* un *galveno kolonu*.

Par modificētās Žordāna izslēgšanas metodes *vienu soli* ar galveno elementu  $a_{pk} \neq 0$  sauc  $p$ -tā bāzes mainīgā  $v_p$  apmaiņu lomām ar neatkarīgi mainīgo  $x_k$ .

Tātad izpildīt vienu modificētās Žordāna izslēgšanas metodes soli ar galveno elementu  $a_{pk}$  nozīmē atvietot sākuma tabulu (23.14) ar jaunu tabulu (23.15). Vienā solī ietilpst šādas darbības:

1) atvietot sākuma tabulas *galveno elementu* ar tā apgrieztu lielumu

$$c = a'_{kp} = \frac{1}{a_{pk}};$$

2) atvietot *galvenās rindas* elementus ar skaitļiem, kurus dabū, pareizinot šīs rindas elementus ar galvenā elementa  $a_{pk}$  apgrieztu lielumu  $c$ ;

3) atvietot *galvenās kolonas* elementus ar skaitļiem, kurus dabū, pareizinot šīs kolonas elementus ar galvenā elementa  $a_{pk}$  apgrieztu lielumu  $c$  un mainot zīmi;

4) atvietot *visus citus* sākuma tabulas elementus, kas neatrodas galvenajā rindā vai galvenajā kolonā, ar skaitļiem, kurus aprēķina pēc formulām (23.17) vai (23.18).

Formulu (23.17), (23.18) un to paveidu atvieglotai iegaumēšanai un praktiskai izmantošanai pastāv dažādas mnemoniskas kārtulas. Viena no tām ir «*taisnstūra kārtula*». Lai formulētu šo viegli iegaumējamo kārtulu, jāievēro, ka katrā no formulām



(23.17) vai (23.18) iesaistīti četri sākuma tabulas skaitļi: 1) atvietojamais elements, 2) galvenais elements, 3) tas galvenās rindas elements, kas atrodas vienā kolonā ar atvietojamā elementu, un 4) tas galvenās kolonās elements, kas atrodas vienā rindā ar atvietojamā elementu. Grafiski šie 4 skaitļi katrā konkrētā gadījumā atrodas kāda taisnstūra virsotnēs. Viena no taisnstūra diagonālēm vienmēr savieno atvietojamā un galveno elementu. Šo diagonāli nosacīti sauc par *galveno diagonāli*. Otrā, t. s. *blakus diagonāle* savieno atbilstošos galvenās rindas un galvenās kolonās elementus.

Ievērojot to, taisnstūra kārtulu var formulēt šādi:

*Katrā jaunās tabulas elementu, kas neatvieto galvenās rindas vai galvenās kolonās elementu, dabū, ja no galvenās diagonāles galos novietoto elementu reizinājuma atņem blakus diagonāles galos novietoto elementu reizinājumu un iegūto diferenci izdala ar galveno elementu.*

1. piemērs. Atrisināt vienādojumu sistēmu (23.8) ar modificēto Žordāna izslēgšanas metodi.

Atrisinājums. Pārrakstīsim doto vienādojumu sistēmu sākuma tabulas formā:

|       | 1 | $-x_1$    | $-x_2$ | $-x_3$ |
|-------|---|-----------|--------|--------|
| $v_1$ | 0 | 1         | -1     | -1     |
| $v_2$ | 4 | 3         | -2     | -1     |
| $v_3$ | 5 | <u>-2</u> | 3      | 3      |

Ja par galveniem izvēlamies, piemēram, pirmo kolonu<sup>1</sup> un trešo rindu, tad galvenais elements ir skaitlis  $a_{31} = -2$ , kas tabulā apvilīts ar četrstūri. Izpildot ar šo galveno elementu vienu Žordāna izslēgšanas soli, dabū jaunu tabulu, kurā mainīgie  $x_1$  un  $v_3$  samainīti ar to lomām:

| I     | 1    | $-v_3$ | $-x_2$ | $-x_3$     |
|-------|------|--------|--------|------------|
| $v_1$ | 2,5  | 0,5    | 0,5    | <u>0,5</u> |
| $v_2$ | 11,5 | 1,5    | 2,5    | 3,5        |
| $x_1$ | -2,5 | -0,5   | -1,5   | -1,5       |

Aizpildot jauno tabulu (I), vispirms samaina vietām  $x_1$  un  $v_3$  un ieraksta savā vietā galvenā elementa apgriezto lielumu — 0,5.

<sup>1</sup> Dodot brīvo locekļu kolonai numuru nulle, pārējo tabulas kolonu numuri sakrīt ar nezināmo indeksiem, bet rindu numuri ar bāzes mainīgo indeksiem.

Pēc tam atvieto galvenās rindas pārējos elementus ar skaitļiem  $-2,5$ ;  $-1,5$ ;  $-1,5$ , kurus dabū, izdalot galvenās rindas elementus  $5,3$  un  $3$  ar galveno elementu  $-2$ . Tad atvieto galvenās kolonas pārējos elementus ar skaitļiem  $0,5$  un  $1,5$ , kurus dabū, izdalot galvenās kolonas elementus  $1$  un  $3$  ar galveno elementu  $-2$  un mainot dalījumu zīmes. Beidzot, visus pārējos sākuma tabulas elementus atvieto ar skaitļiem

$$b'_1 = \frac{0 \cdot (-2) - 1 \cdot 5}{-2} = 2,5; \quad b'_2 = \frac{4 \cdot (-2) - 5 \cdot 3}{-2} = 11,5;$$

$$a'_{12} = \frac{(-1) \cdot (-2) - 1 \cdot 3}{-2} = 0,5; \quad a'_{22} = \frac{(-2) \cdot (-2) - 3 \cdot 3}{-2} = 2,5;$$

$$a'_{13} = a'_{12} = 0,5; \quad a'_{23} = \frac{(-1) \cdot (-2) - 3 \cdot 3}{-2} = 3,5,$$

kurus dabū pēc taisnstūra kārtulas.

Ar to noslēdzas pirmais modificētās Žordāna izslēgšanas metodes solis.

Ja dabūto jauno tabulu (I) uzskata par sākuma tabulu un tajā par galveniem izvēlas, piemēram, trešo kolonu un pirmo rindu, tad jaunais galvenais elements ir  $a_{13,1} = 0,5$ , kas tabulā atiecīgi iezīmēti.<sup>1</sup> Izpildot ar šo galveno elementu nākošo Žordāna izslēgšanas soli, dabū jaunu tabulu

| II    | 1  | $-v_3$ | $-x_2$    | $-v_1$ |
|-------|----|--------|-----------|--------|
| $x_3$ | 5  | 1      | 1         | 2      |
| $v_2$ | -6 | -2     | <u>-1</u> | -7     |
| $x_1$ | 5  | 1      | 0         | 3      |

Pieņemot jaunajā tabulā (II) par galveniem otro kolonu un otro rindu, galvenais elements ir skaitlis  $a_{22,2} = -1$ , ar kuru nākošajā Žordāna izslēgšanas solī dabū tabulu (III)

| III   | 1  | $-v_3$ | $-v_2$ | $-v_1$ |
|-------|----|--------|--------|--------|
| $x_3$ | -1 | -1     | 1      | -5     |
| $x_2$ | 6  | 2      | -1     | 7      |
| $x_1$ | 5  | 1      | 0      | 3      |

<sup>1</sup> Simbols  $a_{13,1}$  apzīmē pirmā vienādojuma trešā nezināmā koeficientu pirmajā tabulā. Vispārīgi simbols  $a_{ij,k}$  apzīmē  $i$ -tā vienādojuma  $j$ -tā nezināmā koeficientu  $k$ -tajā tabulā.

Ar trešo soli izslēgšanas process ir noslēdzies, jo visi bāzes mainīgie pārvērsti par neatkarīgi maināmiem lielumiem, un vienādojumu sistēmas nezināmie ir to lineārās funkcijas:

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= -1 + v_3 - v_2 + 5v_1, \\ x_2 &= 6 - 2v_3 + v_2 - 7v_1, \\ x_1 &= 5 - v_3 - 3v_1. \end{aligned} \right\}$$

Nosacījumu  $v_1 = v_2 = v_3 = 0$  apmierina viena vienīga nezināmo lielumu vērtību kopa  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = 6$ ,  $x_3 = -1$ , kas arī ir vienādojumu sistēmas (23.8) vienīgais atrisinājums.

2. piemērs. Atrisināt vienādojumu sistēmu (23.5) ar modificēto Žordāna izslēgšanas metodi.

Atrisinājums.

|       | 1  | $-x_1$                | $-x_2$ | $-x_3$ |
|-------|----|-----------------------|--------|--------|
| $v_1$ | 2  | $\boxed{\frac{1}{2}}$ | 3      | -1     |
| $v_2$ | -1 | $\frac{2}{2}$         | 1      | 1      |
| $v_3$ | 8  | -1                    | 7      | -5     |

| I     | 1  | $-v_1$ | $-x_2$       | $-x_3$ |
|-------|----|--------|--------------|--------|
| $x_1$ | 2  | 1      | 3            | -1     |
| $v_2$ | -5 | -2     | $\boxed{-5}$ | 3      |
| $v_3$ | 10 | 1      | 10           | -6     |

| II    | 1  | $-v_1$ | $-v_2$ | $-x_3$ |
|-------|----|--------|--------|--------|
| $x_1$ | -1 | -0,2   | 0,6    | 0,8    |
| $x_2$ | 1  | 0,4    | -0,2   | -0,6   |
| $v_3$ | 0  | -3,0   | 2,0    | 0      |

Šī tabulā atbilst vienādojumu sistēmai

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -1 + 0,2v_1 - 0,6v_2 - 0,8x_3, \\ x_2 &= 1 - 0,4v_1 + 0,2v_2 + 0,6x_3, \\ v_3 &= 3v_1 - 2v_2, \end{aligned} \right\}$$

kurā neatkarīgi mainīgie lielumi ir  $v_1$ ,  $v_2$  un  $x_3$ , bet bāzes mainīgie  $x_1$ ,  $x_2$  un  $v_3$ . Kā redzams, izpildīt vēl vienu Žordāna izslēgšanas soli, lai apmainītu lomām mainīgos  $v_3$  un  $x_3$ , nav iespējams, jo tabulas (II) trešās rindas un trešās kolonas krustojumā atrodas nulle. Var gan samainīt lomām  $v_3$  ar jebkuru no mainīgiem  $v_1$



vai  $v_2$ , bet tāds solis vienādojumu sistēmas atrisināšanā nekā jauna nedod. Izdarot tādu soli, mainās tikai tabulas (II) pirmās un otrās kolonas elementi, bet nulltā un trešā kolona paliek bez izmaiņām. Šajā piemērā  $v_3 = 3v_1 - 2v_2$ , un, ja divi no trim lielumiem  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  ir nulles, tad arī trešais ir nulle neatkarīgi no  $x_1$ ,  $x_2$  un  $x_3$  vērtībām.

Liekot  $v_1 = v_2 = 0$ , dabū

$$x_1 = -1 - 0,8x_3,$$

$$x_2 = 1 + 0,6x_3.$$

Šis izteiksmes ar jebkuru patvaļīgu  $x_3$  vērtību atbilst nosacījumam  $v_1 = v_2 = v_3 = 0$ . Tātad tās ir dotās vienādojumu sistēmas (23.5) vispārīgais atrisinājums. Apzīmējot  $x_3 = t$ , dabū sistēmas vispārīgo atrisinājumu kā viena parametra lineāru funkciju saimi (23.7).

Tā kā šajā piemērā  $v_3 = 3v_1 - 2v_2$ , tad  $v_1 = \frac{2}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_3$  un  $v_2 = \frac{3}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_3$ . Tas nozīmē, ka dotajā vienādojumu sistēmā (23.5) jebkurš vienādojums ir pārējo divu vienādojumu sekas. Piemēram, otro vienādojumu dabū, ja pirmo vienādojumu pareizina ar  $\frac{3}{2}$ , trešo ar  $-\frac{1}{2}$  un pareizinātos vienādojumus saskaita. Tādēļ saka, ka šajā vienādojumu sistēmā ir tikai divi *lineāri neatkarīgi vienādojumi*, bet trešais ir pārējo divu *lineāra kombinācija*.

Risinot vienādojumu sistēmu ar Žordāna metodi, no pēdējā izslēgšanas soļa tabulas redzams, vai sistēma ir saderīga, un nolasāms ne vien saderīgās sistēmas vispārīgais atrisinājums, bet atklājas arī iepriekš nepamanītas lineāras sakarības starp sistēmas vienādojumiem.

3. piemērs. Atrisināt vienādojumu sistēmu (23.9).

Atrisinājums.

|       | 1  | $-x_1$                                          | $-x_2$ | $-x_3$ |
|-------|----|-------------------------------------------------|--------|--------|
| $v_1$ | 2  | <span style="border: 1px solid black;">1</span> | 3      | -1     |
| $v_2$ | -1 | 2                                               | 1      | 1      |
| $v_3$ | 1  | -1                                              | 7      | -5     |

| I     | 1  | $-v_1$ | $-x_2$                                           | $-x_3$ |
|-------|----|--------|--------------------------------------------------|--------|
| $x_1$ | 2  | 1      | 3                                                | -1     |
| $v_2$ | -5 | -2     | <span style="border: 1px solid black;">-5</span> | 3      |
| $v_3$ | 3  | 1      | 10                                               | -6     |

| II    | I  | $-v_1$         | $-v_2$         | $-x_3$         |
|-------|----|----------------|----------------|----------------|
| $x_1$ | -1 | $-\frac{1}{5}$ | $\frac{3}{5}$  | $\frac{4}{5}$  |
| $x_2$ | 1  | $\frac{2}{5}$  | $-\frac{1}{5}$ | $-\frac{3}{5}$ |
| $v_3$ | -7 | -3             | 2              | 0              |

No pēdējās tabulas redzams, ka vienādojumu sistēma (23.9) ir nesaderīga, jo  $v_3 = -7 + 3v_1 - 2v_2$  neatkarīgi no  $x_1, x_2, x_3$  vērtībām un no tā, ka  $0 \neq -7$ , tad nosacījums  $v_1 = v_2 = v_3 = 0$  nav izpildāms.

**184. §. Vienādojumu sistēmas lineāra kombinācija.** Ja katru dotās vienādojumu sistēmas vienādojumu pareizina ar kādu skaitli un visus vienādojumus pēc pareizināšanas saskaita, tad iegūst jaunu vienādojumu, kuru sauc par dotās *vienādojumu sistēmas lineāru kombināciju*. Pareizinoš, piemēram, trīs dotos vienādojumus

$$\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0, & | & -1 \\ x_2 - x_3 = 5, & | & 3 \\ 2x_1 - 3x_2 = -4, & | & 0 \end{array} \quad (23.19)$$

ar uzrādītajiem skaitļiem  $-1, 3, 0$  un saskaitot, dabū jaunu vienādojumu  $-x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 15$ , kas ir sistēmas (23.19) lineāra kombinācija.

Vispār, ja  $m$  vienādojumu sistēma ar  $n$  nezināmajiem (23.3) pārrakstīta formā (23.13), tad bāzes mainīgie  $v_1, v_2, \dots, v_m$  ir  $n$  argumentu  $x_1, x_2, \dots, x_n$  lineāras funkcijas. Par šo funkciju sistēmas lineāru kombināciju sauc funkciju

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m. \quad (23.20)$$

Te  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  ir doti skaitļi, kurus sauc par *lineārās kombinācijas koeficientiem*. Ja  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$ , tad  $w = 0$  neatkarīgi no tā, kāda ir dotā funkciju sistēma. Ja  $v_1 = v_2 = \dots = v_m = 0$ , tad arī  $w = 0$  neatkarīgi no tā, kādi ir lineārās kombinācijas koeficienti. Tādēļ, ja kādu skaitļu kopa  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  apmierina vienādojumu sistēmu (23.3), tad tā apmierina arī jebkuru šīs sistēmas lineāru kombināciju.

Pārrakstot, piemēram, vienādojumu sistēmu (23.19) lineāru funkciju sistēmas formā, dabū

$$\left. \begin{array}{l} v_1 = -x_1 + 2x_2 - 5x_3, \\ v_2 = 5 - x_2 + x_3, \\ v_3 = -4 - 2x_1 + 3x_2. \end{array} \right\} \quad (23.21)$$







brīvie locekļi ierakstāmi ar pretēju zīmi un tabulas galvā neatkarīgi mainīgiem lielumiem nav (—) zīmju.

Parastās Žordāna izslēgšanas metodes vienā soli ietilpst visas tās pašas darbības, kuras jāizpilda, realizējot vienu modificētās metodes soli, tikai ar to atšķirību, ka, atvietojojot galvenās rindas elementus, jāmaina iegūto skaitļu zīme, bet tā nav jāmaina galvenās kolonas elementiem.

Salīdzināšanas nolūkā atkārtosim vienādojumu sistēmas (23.8) risinājumu, izmantojot 183. § lietotās modificētās metodes vietā parasto Žordāna izslēgšanas metodi:

|       | 1  | $x_1$     | $x_2$ | $x_3$ |
|-------|----|-----------|-------|-------|
| $v_1$ | 0  | 1         | -1    | -1    |
| $v_2$ | -4 | 3         | -2    | -1    |
| $v_3$ | -5 | <u>-2</u> | 3     | 3     |

| I     | 1     | $v_3$ | $x_2$ | $x_3$      |
|-------|-------|-------|-------|------------|
| $v_1$ | -2,5  | -0,5  | 0,5   | <u>0,5</u> |
| $v_2$ | -11,5 | -1,5  | 2,5   | 3,5        |
| $x_1$ | -2,5  | -0,5  | 1,5   | 1,5        |

| II    | 1 | $v_3$ | $x_2$     | $v_1$ |
|-------|---|-------|-----------|-------|
| $x_3$ | 5 | 1     | -1        | 2     |
| $v_2$ | 6 | 2     | <u>-1</u> | 7     |
| $x_1$ | 5 | 1     | 0         | 3     |

| III   | 1  | $v_3$ | $v_2$ | $v_1$ |
|-------|----|-------|-------|-------|
| $x_3$ | -1 | -1    | 1     | -5    |
| $x_2$ | 6  | 2     | -1    | 7     |
| $x_1$ | 5  | 1     | 0     | 3     |

Pēdējā tabulā ierakstītie skaitļi ir vienādi ar 183. § 1. piemēra gala tabulā dabūtajiem skaitļiem. Arī aritmētisko darbību un pie rakstu skaits, risinot vienādojumu sistēmu ar parasto vai ar modificēto Žordāna metodi, ir vienādi. Šajā kursā parasto Žordāna izslēgšanas metodi nelietosim, jo matemātisko metožu pielietojumos ekonomikā priekšroka dodama modificētajai Žordāna izslēgšanas metodei.

187. §. Saīsinātā Žordāna izslēgšanas metode. Katrā Žordāna izslēgšanas solī, kā redzējām, no sākuma bāzes mainīgajiem pēc brīvas izvēles izslēdz vienu elementu, apmainot to lomām ar brīvi izvēlētu sākuma tabulas neatkarīgi mainīgo (nezināmo) elementu. Apmaiņa iespējama tad, ja bāzes mainīgā rindas (galvenās rindas) un neatkarīgi mainīgā koeficientu kolonas (galvenās kolonas) krustojumā neatrodas nulle, jo nulle nevar būt izslēgšanas soļa galvenais elements. Ja, risinot vienādojumu sistēmu, ir vajadzība iegūt atbildi tikai uz 182. § beigās minētajiem 3 jautājumiem, tad risinājumu var saīsināt, atmetot katrā nākošā Žordāna izslēgšanas solī to tabulas kolonu, kuras elementi ir koeficienti pie neatkarīgi mainīgā lomā pārceltā sākuma bāzes mainīgā.

P i e m ē r s. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 3, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 2, \\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 &= 7, \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 12, \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 2x_4 &= 20. \end{aligned} \right\} \quad (23.24)$$

Atrisinājums. Pārrakstām doto vienādojumu sistēmu sākuma tabulas formā:

|       | 1  | $-x_1$                                          | $-x_2$ | $-x_3$ | $-x_4$ |
|-------|----|-------------------------------------------------|--------|--------|--------|
| $v_1$ | 3  | <span style="border: 1px solid black;">1</span> | 2      | 3      | 1      |
| $v_2$ | 2  | 1                                               | 4      | 5      | 2      |
| $v_3$ | 7  | 2                                               | 9      | 8      | 3      |
| $v_4$ | 12 | 3                                               | 7      | 7      | 2      |
| $v_5$ | 20 | 5                                               | 7      | 9      | 2      |

Izpildot vienu Žordāna izslēgšanas soli ar galveno elementu  $a_{11} = 1$  un atmetot 1. kolonu, dabū jaunu tabulu:

| I     | 1  | $-x_2$ | $-x_3$ | $-x_4$                                          |
|-------|----|--------|--------|-------------------------------------------------|
| $x_1$ | 3  | 2      | 3      | <span style="border: 1px solid black;">1</span> |
| $v_2$ | -1 | 2      | 2      | <span style="border: 1px solid black;">1</span> |
| $v_3$ | 1  | 5      | 2      | 1                                               |
| $v_4$ | 3  | 1      | -2     | -1                                              |
| $v_5$ | 5  | -3     | -6     | -3                                              |

Izpildot nākošo soli ar galveno elementu  $a_{24 \cdot 1} = 1$  un atmetot ceturto kolonu, dabū:

| II    | 1  | $-x_2$   | $-x_3$ |
|-------|----|----------|--------|
| $x_1$ | 4  | 0        | 1      |
| $x_4$ | -1 | 2        | 2      |
| $v_3$ | 2  | <u>3</u> | 0      |
| $v_4$ | 2  | 3        | 0      |
| $v_5$ | 2  | 3        | 0      |

Acīm redzot, jebkuru no vēl neizslēgtajiem sākuma bāzes maiņīgajiem  $v_3$ ,  $v_4$  vai  $v_5$  var apmainīt lomām ar  $x_2$ , bet nevienu no tiem vairs nevar apmainīt lomām ar  $x_3$ , jo  $a_{33 \cdot 2} = a_{43 \cdot 2} = a_{53 \cdot 2} = 0$  un neviena no tiem nevar būt galvenais elements. Izvēloties nākošajā izslēgšanas solī par galveno elementu  $a_{32 \cdot 2} = 3$  un atmetot otro kolonu, dabū:

| III   | 1              | $-x_3$ |
|-------|----------------|--------|
| $x_1$ | 4              | 1      |
| $x_4$ | $-\frac{7}{3}$ | 2      |
| $x_2$ | $\frac{2}{3}$  | 0      |
| $v_4$ | 0              | 0      |
| $v_5$ | 0              | 0      |

(23.25)

No tabulas (23.25) redzams, ka vienādojumu sistēma (23.24) ir ekvivalenta ar vienādojumu sistēmu

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 4 - x_3, \\ x_2 &= \frac{2}{3}, \\ x_4 &= -\frac{7}{3} - 2x_3. \end{aligned} \right\} \quad (23.26)$$

Vienādojumu sistēma (23.24) ir saderīga, jo tajā ir tikai 3 lineāri neatkarīgi vienādojumi, pārējie divi ir 3 citu šīs sistēmas vienādojumu lineāras kombinācijas. Sai sistēmai ir bezgalīgi daudz atrisinājumu. Tās vispārīgais atrisinājums ir

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 4 - t, \\ x_2 &= \frac{2}{3}, \\ x_3 &= t, \\ x_4 &= -\frac{7}{3} - 2t, \end{aligned} \right\}$$

kur  $t$  ir jebkurš reāls skaitlis.



Saīsinātā Žordāna izslēgšanas metode tātad dod atbildi uz visiem 3 lineāru vienādojumu sistēmu atrisināšanas pamatjautājumiem, bet nedod atbildi, piemēram, uz jautājumu, kādas lineāras sakarības pastāv starp sākuma sistēmas vienādojumiem, ja sistēma ir lineāri atkarīga, kā tas ir arī šajā piemērā.

**188. §. Gausa metode.** Šī metode atšķiras no iepriekšējās ar to, ka pēc katra izslēgšanas soļa atmet ne vien sākuma tabulas galvenai kolonai atbilstošo kolonu, bet arī sākuma tabulas galvenai rindai atbilstošo rindu jaunajā tabulā. Atmesto jaunās tabulas rindu pieraksta atsevišķi kā vienādojumu. Pēc katra izslēgšanas soļa rodas viens tāds *eliminācijas* vienādojums. *Eliminācijas vienādojumu sistēma* ir ekvivalenta ar doto sākuma vienādojumu sistēmu, un tās atrisināšana ir relatīvi vienkārša.

1. piemērs. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 &= 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -3. \end{aligned} \right\} \quad (23.27)$$

Atrisinājums. Pārrakstām doto vienādojumu sistēmu sākuma tabulas formā:

|       | 1  | $-x_1$   | $-x_2$ | $-x_3$ | $-x_4$ |
|-------|----|----------|--------|--------|--------|
| $v_1$ | 2  | <u>2</u> | 3      | 11     | 5      |
| $v_2$ | 1  | 1        | 1      | 5      | 2      |
| $v_3$ | -3 | 2        | 1      | 3      | 2      |
| $v_4$ | -3 | 1        | 1      | 3      | 4      |

Pieņemot par sākuma tabulas galveno elementu  $a_{11}=2$  un izpildot ar šo elementu vienu Žordāna izslēgšanas soli, dabū pirmo eliminācijas vienādojumu

$$x_1 = 1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_4$$

un pēc galvenās rindas un galvenās kolonas atmešanas — jaunu, pirmo reizi reducētu tabulu:

| I     | 1  | $-x_2$                          | $-x_3$         | $-x_4$         |
|-------|----|---------------------------------|----------------|----------------|
| $v_2$ | 0  | <u><math>\frac{1}{2}</math></u> | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ |
| $v_3$ | -5 | -2                              | -8             | -3             |
| $v_4$ | -4 | $-\frac{1}{2}$                  | $-\frac{5}{2}$ | $\frac{3}{2}$  |

Pieņemot par vienu reizi reducētās tabulas galveno elementu  $a_{22,1} = -\frac{1}{2}$  un izpildot ar šo elementu jaunu Žordāna izslēgšanas soli, dabū otro eliminācijas vienādojumu

$$x_2 = 0 - x_3 - x_4$$

un pēc galvenās rindas un galvenās kolonas atmešanas — jaunu, otro reizi reducētu tabulu:

| II    | 1  | $-x_3$                                           | $-x_4$ |
|-------|----|--------------------------------------------------|--------|
| $v_3$ | -5 | <span style="border: 1px solid black;">-6</span> | -1     |
| $v_4$ | -4 | -2                                               | 2      |

Pieņemot par divas reizes reducētās tabulas galveno elementu  $a_{33,2} = -6$ , nākošajā izslēgšanas solī dabū trešo eliminācijas vienādojumu

$$x_3 = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} x_4$$

un trešo reizi reducētu tabulu:

| III   | 1              | $-x_4$        |
|-------|----------------|---------------|
| $v_4$ | $-\frac{7}{3}$ | $\frac{7}{3}$ |

Trešo reizi reducētajā tabulā atlicis tikai viens galvenais elements  $a_{44,3} = \frac{7}{3}$  pēdējam izslēgšanas solim. No tā seko pēdējais eliminācijas vienādojums  $x_4 = -1$ .

Apkopojot visus eliminācijas vienādojumus, dabū vienādojumu sistēmu

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_4, \\ x_2 &= 0 - x_3 - x_4, \\ x_3 &= \frac{5}{6} - \frac{1}{6}x_4, \\ x_4 &= -1 \end{aligned} \right\} \quad (23.28)$$

jeb

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 &= 2, \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 0, \\ 6x_3 + x_4 &= 5, \\ x_4 &= -1. \end{aligned} \right\} \quad (23.29)$$

Eliminācijas vienādojumu sistēma (23.28) jeb (23.29) ir ekvivalenta ar doto sistēmu (23.27) un viegli atrisināma ar pakāpeniskas ievietošanas palīdzību. Ievietojot pēdējā vienādojumā atklāti izteikto  $x_4 = -1$  priekšpēdējā vienādojumā, dabū  $x_3 = 1$ . Ievietojot atrastos  $x_3 = 1$  un  $x_4 = -1$  nākošajā vienādojumā, dabū  $x_2 = 0$  un, beidzot,  $x_1 = -2$ . Atrastās nezināmo vērtības ir dotās vienādojumu sistēmas (23.27) vienīgais atrisinājums.

2. piemērs. Izpētīt vienādojumu sistēmu

$$\left. \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5, \\ x_1 - 2x_2 + (k^2 + 2)x_3 - x_4 &= k + 2, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= k^2 \end{aligned} \right\} \quad (23.30)$$

atkarībā no parametra  $k$  vērtības.

Atrisinājums.

Pārrakstām sistēmu tabulas formā un risinām to pēc Gausa metodes, iezīmējot katrā tabulā izvēlēto galveno elementu un izrakstot pēc katra izslēgšanas soļa attiecīgo eliminācijas vienādojumu.

|       | 1     | $-x_1$      | $-x_2$ | $-x_3$  | $-x_4$ |
|-------|-------|-------------|--------|---------|--------|
| $v_1$ | 1     | $\boxed{1}$ | -2     | 3       | -1     |
| $v_2$ | 5     | 1           | -1     | 3       | 1      |
| $v_3$ | $k+2$ | 1           | -2     | $k^2+2$ | -1     |
| $v_4$ | $k^2$ | 1           | -2     | 3       | -1     |

$$x_1 = 1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4.$$

| I     | 1       | $+x_2$      | $-x_3$  | $-x_4$ |
|-------|---------|-------------|---------|--------|
| $v_2$ | 4       | $\boxed{1}$ | 0       | 2      |
| $v_3$ | $k+1$   | 0           | $k^2-1$ | 0      |
| $v_4$ | $k^2-1$ | 0           | 0       | 0      |

$$x_2 = 4 - 2x_4$$

| II    | 1       | $-x_3$          | $-x_4$ |
|-------|---------|-----------------|--------|
| $v_3$ | $k+1$   | $\boxed{k^2-1}$ | 0      |
| $v_4$ | $k^2-1$ | 0               | 0      |

(23.31)

Ja  $k^2 - 1 = 0$ , tad  $k = \pm 1$ , un, ja  $k = -1$ , tad arī  $k+1 = 0$ . Tādēļ, ja  $k = -1$ , tad otro reizi reducētajā tabulā (23.31) visi elementi





brīvo locekļu kolonā ir tikai nulles, tad šāda sistēma ir vienmēr saderīga, jo katrai tādai sistēmai eksistē *triviālais atrisinājums*

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0.$$

Risinot homogēnu vienādojumu sistēmu ar kādu no iztīrātajām metodēm, sākuma tabulā neraksta brīvo locekļu kolonu, jo neviena Žordāna izslēgšanas solis nemaina nevienu tādu tabulas kolonu, kurā ir tikai nulles.

**P i e m ē r s.** Noskaidrot, pie kādām reālām  $k$  vērtībām dotajai homogēnajai vienādojumu sistēmai

$$\left. \begin{aligned} x_2 + x_5 &= kx_1, \\ x_1 + x_3 &= kx_2, \\ x_2 + x_4 &= kx_3, \\ x_3 + x_5 &= kx_4, \\ x_1 + x_4 &= kx_5 \end{aligned} \right\} \quad (23.36)$$

eksistē netriviāli atrisinājumi.

**A t r i s i n ā j u m s.** Pierakstīsim doto vienādojumu sistēmu tabulas formā un risināsim to ar saīsināto Žordāna izslēgšanas metodi.

|       | $-x_1$ | $-x_2$      | $-x_3$ | $-x_4$ | $-x_5$ |
|-------|--------|-------------|--------|--------|--------|
| $v_1$ | $-k$   | $\boxed{1}$ | 0      | 0      | 1      |
| $v_2$ | 1      | $-k$        | 1      | 0      | 0      |
| $v_3$ | 0      | 1           | $-k$   | 1      | 0      |
| $v_4$ | 0      | 0           | 1      | $-k$   | 1      |
| $v_5$ | 1      | 0           | 0      | 1      | $-k$   |

| I     | $-x_1$      | $-x_3$ | $-x_4$ | $-x_5$ |
|-------|-------------|--------|--------|--------|
| $x_2$ | $-k$        | 0      | 0      | 1      |
| $v_2$ | $1 - k^2$   | 1      | 0      | $k$    |
| $v_3$ | $k$         | $-k$   | 1      | $-1$   |
| $v_4$ | 0           | 1      | $-k$   | 1      |
| $v_5$ | $\boxed{1}$ | 0      | 1      | $-k$   |

| II    | $-x_3$      | $-x_4$    | $-x_5$       |
|-------|-------------|-----------|--------------|
| $x_2$ | 0           | $k$       | $1 - k^2$    |
| $v_2$ | $\boxed{1}$ | $k^2 - 1$ | $k(2 - k^2)$ |
| $v_3$ | $-k$        | $1 - k$   | $k^2 - 1$    |
| $v_4$ | 1           | $-k$      | 1            |
| $x_1$ | 0           | 1         | $-k$         |

| III   | $-x_4$                 | $-x_5$        |
|-------|------------------------|---------------|
| $x_2$ | $k$                    | $1-k_2$       |
| $x_3$ | $k^2-1$                | $k(2-k^2)$    |
| $v_3$ | $k^3-2k+1$             | $-k^4+3k^2-1$ |
| $v_4$ | $\frac{-(k^2+k-1)}{1}$ | $k^3-2k+1$    |
| $x_1$ | $1$                    | $-k$          |

(23.37)

Tā kā  $k^3-2k+1=(k-1)(k^2+k-1)$  un  $-k^4+3k^2-1=(k^2+k-1)(-k^2+k+1)$ , tad gadījumā, ja  $k^2+k-1=0$ , visi trešo reizi reducētās tabulas skaitļi, kurus varētu izvēlēties par nākošā izslēgšanas soļa galvenajiem elementiem, ir nulles, un ar to izslēgšana izbeidzas.

Tātad, ja  $k^2+k-1=0$ , t. i., ja  $k_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ , tad dotajā vienādojumu sistēmā (23.36) ir tikai trīs lineāri neatkarīgi vienādojumi. Pārējie divi vienādojumi ir trīs citu vienādojumu lineāras kombinācijas. Trīs lineāri neatkarīgo vienādojumu sistēma skaņā ar tabulu (23.37) ir ekvivalenta ar šādu vienādojumu sistēmu:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -x_4 + kx_5, \\ x_2 &= -kx_4 + (k^2-1)x_5, \\ x_3 &= -(k^2-1)x_4 - k(2-k^2)x_5. \end{aligned} \right\} \quad (23.38)$$

Ja  $k = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ , tad vienādojumu sistēma (23.38) ir vienādojumu sistēmas (23.36) vispārīgais atrisinājums, kurā  $x_1$  un  $x_5$  ir *brīvie nezināmie* un  $x_1, x_2, x_3$  — *bāzes nezināmie*. Liekot  $x_4=t_1$  un  $x_5=t_2$ , šo vispārīgo atrisinājumu var izteikt šādi:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -t_1 + kt_2, \\ x_2 &= -kt_1 + (k^2-1)t_2, \\ x_3 &= -(k^2-1)t_1 - k(2-k^2)t_2, \\ x_4 &= t_1, \\ x_5 &= t_2, \end{aligned} \right\}$$

kur  $t_1$  un  $t_2$  ir jebkuri reāli skaitļi.

Ja  $k \neq -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ , tad  $k^2+k-1 \neq 0$  un tabula (23.37) nav pēdējā. Tad ir iespējams nākošais Žordāna izslēgšanas solis, kurā par galveno elementu var izvēlēties jebkuru no 4 skaitļiem, kas atrodas palikušo kolonu un trešās vai ceturtās rindas krustojumā.



Ja galvenais elements ir, piemēram,  $a_{44,3} = -(k^2 + k - 1)$ , tad dabū jaunu tabulu:

|       |                       |
|-------|-----------------------|
| IV    | $-x_5$                |
| $x_2$ | $-(k-1)$              |
| $x_3$ | $-k^2 + k + 1$        |
| $u_3$ | $-(k^2 + k - 1)(k-2)$ |
| $x_4$ | $-(k-1)$              |
| $x_1$ | $-1$                  |

(23.39)

No tabulas (23.39) redzams, ka vienādojumu sistēmai ir netriviāli atrisinājumi arī tad, ja  $a_{35,4} = -(k^2 + k - 1)(k-2) = 0$ . Tātad, ja  $k=2$ , tad dotajā vienādojumu sistēmā (23.36) ir četri lineāri neatkarīgi vienādojumi un katrs šīs sistēmas vienādojums ir pārējo četru vienādojumu lineāra kombinācija. Cetur lineāri neatkarīgo vienādojumu sistēma saskaņā ar tabulu (23.39) ir ekvivalenta ar vienādojumu sistēmu  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$ . Līdz ar to, ja  $k=2$ , tad vienādojumu sistēmas (23.36) vispārīgais atrisinājums ir  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = t$ , kur  $t$  ir patvaļīgs reāls skaitlis.

Ja  $k \neq 2$  un  $k \neq -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ , tad tabula (23.29) nav pēdējā un iespējams vēl viens Žordāna izslēgšanas solis ar galveno elementu  $a_{45,4} = -(k^2 + k - 1)(k-2)$ . Tādā gadījumā homogēnu vienādojumu sistēmai (23.36) eksistē tikai triviālais atrisinājums  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$ .

**190. §. Lineāru vienādojumu sistēmas risināšanas gaitas kontrole.** Par lineāru vienādojumu sistēmas atrisinājumu pareizību var un vajag pārliecināties, ievietojot dabūto vispārīgo atrisinājumu dotajā vienādojumu sistēmā. Ja tas vienādojumu sistēmu neapmierina, tad risināšanas gaitā ir pieļauta kļūda. Katras vienādojumu sistēmas risināšana prasa relatīvi daudz laika un pūļu, un kļūdīšanās iespēja ir liela, jo sevišķi, kad jārisina daudzu vienādojumu sistēmas. Tādēļ ir lietderīgi kontrolēt risināšanas gaitu katrā Žordāna izslēgšanas solī. Viens no biežāk lietotiem risināšanas gaitas kontroles paņēmieniem ir *kolonu summu kontrole* vai rindu summu kontrole.

Ja vienādojumu sistēmas (23.13) beigās pievieno vienādojumu

$$\sigma = s_0 - s_1 x_1 - s_2 x_2 - \dots - s_n x_n \quad (23.40)$$

un līdz ar to tabulu (23.14), par kuras galveno elementu pieņemts  $a_{pk} \neq 0$ , pagarina ar divām rindām, no kurām pirmajā ieraksta skaitļus  $s_0, s_1, \dots, s_n$ , kas ir tabulas kolonu *reducētas summas*

$$s_0 = \sum_{i=1}^{p-1} b_i + \sum_{i=p+1}^m b_i, \quad (23.41)$$

$$s_j = \sum_{i=1}^{p-1} a_{ij} + \sum_{i=p+1}^m a_{ij}, \quad (23.42)$$

$$(j=1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n),$$

$$s_k = \sum_{i=1}^{p-1} a_{ik} + \sum_{i=p+1}^m a_{ik} - 1, \quad (23.43)$$

tad, izpildot vienu Žordāna izslēgšanas soli, jaunās tabulas  $(m+2)$ -ajā rindā<sup>1</sup> rodas skaitļi

$$s'_0 = \sum_{i=1}^{p-1} b'_i + \frac{b_p}{a_{pk}} + \sum_{i=p+1}^m b'_i, \quad (23.44)$$

$$s'_j = \sum_{i=1}^{p-1} a'_{ij} + \frac{a_{pj}}{a_{pk}} + \sum_{i=p+1}^m a'_{ij}, \quad (23.45)$$

$$(j=1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n),$$

$$s'_k = -\frac{1}{a_{pk}} \sum_{i=1}^{p-1} a_{ip} + \frac{1}{a_{pk}} - \frac{1}{a_{pk}} \sum_{i=p+1}^m a_{ik}. \quad (23.46)$$

Te ar  $s'_0$ ,  $s'_j$ ,  $s'_k$  apzīmētas jaunās tabulas kolonu pilnās kontrolsummas.

Tātad, lai kontrolētu viena Žordāna izslēgšanas soļa aritmētisko operāciju izpildes pareizību, sākuma tabula jāpagarina ar tabulas kolonu *reducēto summu rindu*. Par kolonu reducētām summām sauc tādas summas, kurās neietilpst galvenās rindas elementi; no galvenās kolonas summas bez tam atņemts skaitlis 1.

Izpildot tā pagarinātai tabulai vienu Žordāna izslēgšanas soli, sākuma tabulas reducēto summu rindas pārveidotiem skaitļiem, kurus pieraksta jaunās tabulas  $(m+2)$ -ajā rindā (atstājot brīvu  $(m+1)$ -o rindu), jābūt vienādiem ar jaunās tabulas attiecīgo kolonu *visu* elementu summām.

Ja jaunās tabulas kolonu summas, noapaļošanās precizitātes robežās, nav vienādas ar  $(m+2)$ -ajā rindā pierakstītajiem skaitļiem, tad aprēķinos vai pierakstā ir kļūda, kas jāizlabo pirms jaunās tabulas  $(m+1)$ -ās rindas aizpildīšanas ar jaunās tabulas kolonu reducētajām summām.

Risinot vienādojumu sistēmu ar Gausa metodi un izdarot kolonu summas kontroli, jāievēro, ka jaunās tabulas kolonu visu elementu summā jāieskaita arī pirms šīs tabulas izrakstītā eliminācijas vienādojuma attiecīgie koeficienti.

Neatkarīgi no kolonu summu kontroles var lietot tai analogo *rindu summu kontroli*. Atšķirība starp šīm kontrolēm ir tā, ka, izdarot rindu summu kontroli, tabula nav jāpagarina, bet ir jāiz-

<sup>1</sup> Jaunās tabulas  $(m+1)$ -ā rinda jāatstāj brīva šīs tabulas kolonu reducēto summu ierakstīšanai.

stiepj par divām rindām, no kurām pirmajā raksta rindu reducētās summas, otrajā parādās rindu pilnās summas. Galvenās rindas reducētajā summā galvenā elementa vietā jāpieskaita (bet ne jāatņem, kā pie kolonu summu kontroles) skaitlis 1. Pārējo rindu reducētajās summās neietilpst galvenās kolonas elementi.

Piemērs. Atrisināt vienādojumu sistēmu (23.27) ar saīsināto Žordāna metodi un kolonu summu kontroli.

Atrisinājums.

|           | $-x_1$                 | $-x_2$          | $-x_3$         | $-x_4$ | 1  |
|-----------|------------------------|-----------------|----------------|--------|----|
| $v_1$     | $\boxed{2}$            | 3               | 11             | 5      | 2  |
| $v_2$     | 1                      | 1               | 5              | 2      | 1  |
| $v_3$     | 2                      | 1               | 3              | 2      | -3 |
| $v_4$     | 1                      | 1               | 3              | 4      | -3 |
| $\sigma$  | 3                      | 3               | 11             | 8      | -5 |
| $\sigma'$ |                        |                 |                |        |    |
| I         |                        |                 |                |        |    |
| $x_1$     | $\frac{3}{2}$          | $\frac{11}{2}$  | $\frac{5}{2}$  | 1      |    |
| $v_1$     | $\boxed{-\frac{1}{2}}$ | $-\frac{1}{2}$  | $-\frac{1}{2}$ | 0      |    |
| $v_3$     | -2                     | -8              | -3             | -5     |    |
| $v_4$     | $-\frac{1}{2}$         | $-\frac{5}{2}$  | $\frac{3}{2}$  | -4     |    |
| $\sigma$  | -2                     | -5              | 1              | -8     |    |
| $\sigma'$ | $-\frac{3}{2}$         | $-\frac{11}{2}$ | $\frac{1}{2}$  | -8     |    |
| II        |                        |                 |                |        |    |
| $x_1$     | 4                      | 1               | 1              |        |    |
| $x_2$     | 1                      | 1               | 0              |        |    |
| $v_3$     | $\boxed{-6}$           | -1              | -5             |        |    |
| $v_4$     | -2                     | 2               | -4             |        |    |
| $\sigma$  | 2                      | 4               | -3             |        |    |
| $\sigma'$ | -3                     | 3               | -8             |        |    |

| III       | $-x_4$                | 1               |
|-----------|-----------------------|-----------------|
| $x_1$     | $\frac{1}{3}$         | $-\frac{7}{3}$  |
| $x_2$     | $\frac{5}{6}$         | $-\frac{5}{6}$  |
| $x_3$     | $\frac{1}{6}$         | $\frac{5}{6}$   |
| $v_4$     | $\boxed{\frac{7}{3}}$ | $-\frac{7}{3}$  |
| $\sigma$  | $\frac{1}{3}$         | $-\frac{7}{3}$  |
| $\sigma'$ | $\frac{11}{3}$        | $-\frac{14}{3}$ |
| IV        |                       |                 |
| $x_1$     | -2                    |                 |
| $x_2$     | 0                     |                 |
| $x_3$     | 1                     |                 |
| $x_4$     | -1                    |                 |
| $\sigma$  |                       |                 |
| $\sigma'$ | -2                    |                 |

191. §. Vienādojumu sistēmas matricas rangs un sistēmas saderība. Lai kuru aprakstīto risināšanas metodi izvēlamies vienādojumu sistēmas (23.3) atrisināšanai, darbs vienmēr sākas ar tabulu (23.14). Risināšanas gaita visos gadījumos noris soli pa soļim, apmainot katrā Žordāna izslēgšanas solī lomām vienu neatkarīgi mainīgo ar kādu bāzes mainīgo. Neatkarīgi no tā, vai katrā Žordāna izslēgšanas solī atmet vienu tabulas kolonu (saīsinātā Žordāna metode) vai atmet kolonu un arī rindu (Gausa metode), šoļu skaits nevar pārsniegt neatkarīgi mainīgo (nezināmo) skaitu



$n$  un nevar pārsniegt arī bāzes mainīgo (vienādojumu) skaitu  $m$ , t. i.,

$$r \leq \min(m, n), \quad (23.50)$$

kur  $r$  ir solū skaits.

Tā kā vienādojumu sistēmas atrisinājuma eksistence un unitāte (vienīgums) nav atkarīgi no vienādojumu un nezināmo numerācijas, tad soli skaits  $r$  nav atkarīgs no tās vai citas galveno elementu izvēles katrā solī.

Lineāru algebrisku vienādojumu sistēmas atrisinājuma iegūšanai nepieciešamais un pietiekamais Žordāna izslēgšanas soļu skaits ir vienāds ar dotajai sistēmas matricai raksturīgu skaitli  $r$ , kuru sauc par šīs matricas rangu.

Saskaņā ar formulu (23.50) iespējami šādi 4 gadījumi.

1°.  $r=m=n$ . Tādā gadījumā sistēmai ir viens vienīgs atrisinājums. Tabulā, kuru dabū pēc  $r$ -tā Žordāna izslēgšanas soļa, visi sākuma neatkarīgi mainīgie (nezināmie)  $x_1, x_2, \dots, x_n$  un visi sākuma bāzes mainīgie  $v_1, v_2, \dots, v_m$  atrodas mainītās lomās. Šī tabula atbilst vienādojumu sistēmai

[illegible]

Liekot  $v_1=v_2=\dots=v_n=0$ , dabū  $x_1=c_{10}$ ,  $x_2=c_{20}$ , ...,  $x_n=c_{n0}$ , kas ir vienīgais sistēmas (23.3) atrisinājums.

Ja risināšanu izdara pēc Gausa metodes (pēc katra Zordāna izslēgšanas soļa atmet šī soļa galveno kolonu un galveno rindu, izrakstot atsevišķi eliminācijas vienādojumus), tad eliminācijas vienādojumu sistēmai, kas ekvivalenta ar doto sistēmu, ir trijstūra forma:

[illegible]

kur  $a_{ii} \neq 0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ). Atrisinot eliminācijas vienādojumu sistēmu (23.52), dabū vienīgo šī gadījuma atrisinājumu.

2°.  $r=m < n$ . Tādā gadījumā vienādojumu sistēmai ir bezgalīgi daudz atrisinājumu. Tabulā, kuru dabū pēc  $r$ -tā Zordāna izslēgšanas soļa, visi sākuma bāzes mainīgie  $v_1, v_2, \dots, v_m$  ir nonākuši neatkarīgi mainīgo lomā, bet šajā lomā ir palikuši arī  $(n-r)$  sākuma neatkarīgie mainīgie (nezināmie). Nezaudējot pieraksta





bāzes mainīgie numurēti ar indeksiem  $n+1, n+2, \dots, m$ , tabula atbilst vienādojumu sistēmai

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= c_{10} - c_{11}v_1 - c_{12}v_2 - \dots - c_{1n}v_n, \\ x_2 &= c_{20} - c_{21}v_1 - c_{22}v_2 - \dots - c_{2n}v_n, \\ &\dots \dots \dots \\ x_n &= c_{n0} - c_{n1}v_1 - c_{n2}v_2 - \dots - c_{nn}v_n, \\ v_{n+1} &= c_{n+1,0} - c_{n+1,1}v_1 - c_{n+1,2}v_2 - \dots - c_{n+1,n}v_n, \\ &\dots \dots \dots \\ v_m &= c_{m0} - c_{m1}v_1 - c_{m2}v_2 - \dots - c_{mn}v_n. \end{aligned} \right\} (23.57)$$

Ja  $c_{n+1,0} = c_{n+2,0} = \dots = c_{m0} = 0$ , tad, liekot  $v_1 = v_2 = \dots = v_n = 0$ , dabū sistēmas (23.3) vienīgo atrisinājumu  $x_1 = c_{10}$ ,  $x_2 = c_{20}$ ,  $\dots$ ,  $\dots$ ,  $x_n = c_{n0}$ ; tādā gadījumā sistēmas (23.3)  $m-n$  vienādojumi ir pārējo  $n$  vienādojumu lineāras kombinācijas. Ja kaut viens no skaitļiem  $c_{i0}$  ( $i = n+1, n+2, \dots, m$ ) nav nulle, sistēma (23.3) ir nesaderīga.

Ja sistēmas (23.3) risināšana notiek pēc Gausa metodes, tad eliminācijas vienādojumu sistēmai šajā gadījumā ir trijstūra forma (23.52), bet  $n$ -to reizi reducētajā tabulā paliek vēl  $(m-n)$  rindas. Katrā no tām ir tikai viens reducētās brīvās kolonas skaits. Ja visi šie skaitļi ir nulles, tad sistēma saderīga un tai ir viens vienīgs atrisinājums. Ja kaut viens no  $n$ -to reizi reducētās tabulas skaitļiem nav nulle, sistēma ir nesaderīga.

4°.  $r < n \leq m$ . Tādā gadījumā sistēmai ir vai nu bezgalīgi daudz atrisinājumu, vai arī tā ir nesaderīga. Tabula, kuru dabū pēc  $r$ -tā Žordāna izslēgšanas sola, atbilst vienādojumu sistēmai

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= C_{10} - C_{11}v_1 - C_{12}v_2 - \dots - C_{1r}v_r - C_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - C_{1n}x_n, \\ X_2 &= C_{20} - C_{21}v_1 - C_{22}v_2 - \dots - C_{2r}v_r - C_{2,r+1}x_{r+1} - \dots - C_{2n}x_n, \\ &\dots \dots \dots \\ X_r &= C_{r0} - C_{r1}v_1 - C_{r2}v_2 - \dots - C_{rr}v_r - C_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - C_{rn}x_n, \\ v_{r+1} &= C_{r+1,0} - C_{r+1,1}v_1 - C_{r+1,2}v_2 - \dots - C_{r+1,r}v_r - 0 \cdot x_{r+1} - \dots - 0 \cdot x_n, \\ v_{r+2} &= C_{r+2,0} - C_{r+2,1}v_1 - C_{r+2,2}v_2 - \dots - C_{r+2,r}v_r - 0 \cdot x_{r+1} - \dots - 0 \cdot x_n, \\ &\dots \dots \dots \\ v_m &= C_{m0} - C_{m1}v_1 - C_{m2}v_2 - \dots - C_{mr}v_r - 0 \cdot x_{r+1} - \dots - 0 \cdot x_n. \end{aligned} \right\} \quad (23.58)$$

Ja  $c_{r+1,0} = c_{r+2,0} = \dots = c_{m0} = 0$ , tad, liekot  $v_1 = v_2 = \dots = v_2 = 0$ , dabū sistēmas (23.3) vispārīgo atrisinājumu (23.54) vai (23.55). Ja kaut viens no skaitļiem  $c_{i0}$  ( $i = r+1, r+2, \dots, m$ ) nav nulle, sistēma (23.3) ir nesaderīga.

Ja sistēmas (23.3) risināšana notiek pēc Gausa metodes, tad eliminācijas vienādojumu sistēmai šajā gadījumā ir trapeces forma (23.56), bet  $r$ -to reizi reducētajā tabulā paliek vēl  $(m-r)$  rindas ar nullēm, izņemot, varbūt, brīvo locekļu reducēto kolonu. Ja  $r$ -to reizi reducētajā brīvo locekļu kolonā kaut viens elements



nav nulle, sistēma ir nesaderīga. Ja  $r$ -to reizi reducētajā brīvo locēkļu kolonā visi elementi ir nulles, sistēma ir saderīga. Tās vispārīgo atrisinājumu (23.54) vai (23.55) dabū, atrisinot eliminācijas vienādojumu sistēmu.

Uzskaitīto 4 gadījumu analīzi var apvienot šādā secinājumā, kas pazīstams ar nosaukumu Kronekera—Kapelli teorēma: *Lineāru algebrisku vienādojumu sistēma ir saderīga tad un tikai tad, ja sistēmas matricas rangs ir vienāds ar sistēmas paplašinātās matricas rangs.*

### Vingrinājumi

1. Noskaidrot, vai vienādojumu sistēma ir saderīga un, ja tā ir saderīga, tad kāds ir tās vispārīgais atrisinājums:

a)

$$\left. \begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 - x_3 &= 20, \\ 6x_1 + 5x_2 &- 2x_4 = 45, \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 - 6x_4 &= -3, \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 58. \end{aligned} \right\}$$

b)

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 &= 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 &= 2. \end{aligned} \right\}$$

c)

$$\left. \begin{aligned} 9x_2 - 2x_4 &= -8, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 5, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 &= 5, \\ -2x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= -9. \end{aligned} \right\}$$

2. Noskaidrot, pie kādām  $k$  vērtībām sistēma ir saderīga un kāds ir tās atrisinājums:

$$\left. \begin{aligned} (1+k)x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 + (1+k)x_2 + x_3 &= k, \\ x_1 + x_2 + (1+k)x_3 &= k^2. \end{aligned} \right\}$$

3. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 &= 0, \\ 4x_1 - 5x_2 - 6x_3 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

### 24. NODAĻA

#### LINEĀRĀ $n$ DIMENSIJU VEKTORU TELPA

192. §.  $n$  dimensiju vektori. Šai nodaļā mēs apskatīsim vektoru vispārinājumus. Aplūkosim tādu bezgalīgu kopu, kuras elementi ir  $n$  sanumurētu reālu skaitļu kopas  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \dots$ . Katru kopas  $R_n$  elementu pierakstīsim rindas vai kolonas veidā ar

$$\vec{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n) \quad (24.1)$$

vai

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (24.2)$$

un nosauksim par  $n$  dimensiju vektoru. Piemēram,  $\vec{x} = (1; -0,5)$  ir divdimensiju vektors, kas pieder kopai  $R_2$ , bet  $\vec{x} = (1; -0,5; 0)$  ir trīsdimensiju vektors, kas pieder kopai  $R_3$ .

Pasvītrosim, ka katrs  $n$  dimensiju vektors ir neskalārs lielums, kuram ir  $n$  komponentes. Katru komponenti raksturo viens no  $n$  skaitļiem, kas sakārtoti rindā vai kolonā.

Skaitļu sakārtojuma, kuru norāda katram skaitlim pievienotais indekss, ir būtiski svarīga nozīme, jo ir pilnīgi skaidrs, ka, piemēram, vektori  $(3; 0; 1)$  un  $(3; 1; 0)$  nav vienādi.

Rakstības veids (24.2) iespiedumā aizņem daudz vietas. Tādēļ atkarībā no konkrētās situācijas pierakstu (24.2) atvietosim ar

$$\vec{x} = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}. \quad (24.3)$$

Vienādas dimensijas vektoru  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \dots$  rakstībai rindas (24.1) vai kolonas (24.3) veidā nav būtiskas nozīmes. Abi rakstības veidi ir ekvivalenti. Vektoru rakstības veidu (24.1) un (24.3) savstarpīgo apmaiņu sauc par *transponēšanu*, bet vektorus (24.1) un (24.2) par savstarpēji *transponētiem vektoriem*.

Divi savstarpēji transponēti vektori ir vienādi. So vienādību vajadzības gadījumā pierakstīsim ar formulu

$$(x_1; x_2; \dots; x_n) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}^T$$

vai

$$(x_1; x_2; \dots; x_n)^T = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}.$$

Piemēram,  $\vec{x} = \{1; -3; 0; 7\} = (1; -3; 0; 7)^T$  ir 4 reālu skaitļu kolona, kurā dotie skaitļi sanumurēti norādītā secībā:  $x_1 = 1$ ;  $x_2 = -3$ ;  $x_3 = 0$ ;  $x_4 = 7$ .

**Definīcija.** Divus vektorus  $\vec{x} = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$  un  $\vec{y} = \{y_1; y_2; \dots; y_n\}$  sauc par vienādiem tad un tikai tad, ja  $x_1 = y_1$ ;  $x_2 = y_2$ ;  $\dots$ ;  $x_n = y_n$ . Tādā gadījumā raksta:  $\vec{x} = \vec{y}$  jeb

$$\{x_1; y_2; \dots; x_n\} = \{y_1; y_2; \dots; y_n\} \quad (24.4)$$

Piemēram, vektori  $\vec{x} = \{2; 3; -1; 2\}$  un  $\vec{y} = \{2; -1; 3; 2\}$  nav vienādi, bet vektors  $\vec{x}$  ir vienāds ar vektoru  $\vec{z} = \{2; 3; -1; 2\}$ .

Ja  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ , vektoru  $\vec{x}$  sauc par *nullvektoru*. To apzīmēsim ar  $\vec{o} = \{0; 0; \dots; 0\}$ .

Lai saisināti pierakstītu, ka vektors  $\vec{x}$  pieder pie vektoru kopas  $R_n$ , lietojam pierakstu  $\vec{x} \in R_n$ . Šeit simbols  $\in$  ir t. s. piederības zīme.

**Definīcija.** Par divu vektoru  $\vec{x} \in R_n$  un  $\vec{y} \in R_n$  *summu* sauc vektoru

$$\vec{x} + \vec{y} = \{x_1 + y_1; x_2 + y_2; \dots; x_n + y_n\}. \quad (24.5)$$

Piemēram, vektoru  $\vec{x} = \{3; -1; 0; \frac{1}{2}\}$  un  $\vec{y} = \{1; 1; 1; \frac{3}{2}\}$  summa ir vektors  $\vec{x} + \vec{y} = \{3+1; -1+1; 0+1; \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\} = \{4; 0; 1; 2\}$ .

**Definīcija.** Par vektora  $\vec{x} \in R_n$  *reizinājumu ar skaitli  $\alpha$*  sauc vektoru

$$\alpha \vec{x} = \{\alpha x_1; \alpha x_2; \dots; \alpha x_n\}. \quad (24.6)$$

Piemēram, vektora  $\vec{x} = \{0; 1; 0; 0; 6\}$  reizinājums ar skaitli 2 ir vektors  $2\vec{x} = \{0; 2; 0; 0; 12\}$ .

Vektoru saskaitīšanu un vektora reizināšanu ar skaitli sauc par *lineārām algebriskām operācijām*. Viegli pārlicināties, ka lineārām algebriskām operācijām, kas definētas ar formulām (24.5) un (24.6), ir šādas īpašības.

- 1°. Saskaitīšana ir *komutatīva*:  $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ .
- 2°. Saskaitīšana ir *asociatīva*:  $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ .
- 3°. Eksistē elements  $\vec{o}$  («*nullvektors*»), ar kuru  $\vec{x} + \vec{o} = \vec{x}$ , katram  $\vec{x} \in R_n$ .
- 4°. Katram  $\vec{x} \in R_n$  atrodams tāds  $\vec{y} \in R_n$  («*pretējais elements*»), ar kuru  $\vec{x} + \vec{y} = \vec{o}$ .
- 5°.  $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$  katram  $\vec{x} \in R_n$ .
- 6°. Reizināšana ir *asociatīva*:  $\alpha(\beta \vec{x}) = (\alpha\beta) \vec{x}$ , katram  $\vec{x} \in R_n$  un jebkuriem reāliem skaitļiem  $\alpha, \beta$ .
- 7°. Saskaitīšana un reizināšana ir *distributīva*:  $(\alpha + \beta) \vec{x} = \alpha \vec{x} + \beta \vec{x}$ , katram  $\vec{x} \in R_n$  un jebkuriem reāliem skaitļiem  $\alpha, \beta$ .
- 8°. Reizināšana un saskaitīšana ir *distributīva*:  $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha \vec{x} + \alpha \vec{y}$ , katram  $\vec{x} \in R_n$ , katram  $\vec{y} \in R_n$  un jebkuram reālam skaitlim  $\alpha$ .



Piemērs. Doti vektori

$$\begin{aligned}\vec{a}_1 &= \{1; 2; 3; 4\}, \\ \vec{a}_2 &= \{2; 4; 6; 8\}, \\ \vec{a}_3 &= \{0; 1; 1; 0\}.\end{aligned}\tag{24.7}$$

Atrast vektoru  $\vec{b} = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 + 0 \cdot \vec{a}_3$ .

Atrisinājums.  $\vec{b} = 2\{1; 2; 3; 4\} - \{2; 4; 6; 8\} + 0 \cdot \{0; 1; 1; 0\} = \{2; 4; 6; 8\} - \{2; 4; 6; 8\} + \{0; 0; 0; 0\} = \{2-2+0; 4-4+0; 6-6+0; 8-8+0\} = \{0; 0; 0; 0\} = \vec{0}$ . Tātad meklējamais vektors  $\vec{b} = \{0; 0; 0; 0\}$  ir 4 dimensiju nullvektors.

**193. §. Lineārās vektoru telpas definīcija.** Salīdzinot iepriekšējā paragrāfā minētās lineāro algebrisko operāciju īpašības 1°–8° ar tām īpašībām, kādas ir analītiskajā ģeometrijā lietoto vektoru (orientēto taisnes nogriežņu) summai un vektora reizinājumam ar skaitli, konstatējama šo īpašību pilnīga sakrīšana. Šīs īpašības pilnīgi sakrīt arī ar reālo skaitļu summas un reizinājuma īpašībām, ja vektoru  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \dots$  vietā liek skaitļus  $x, y, z, \dots$ . Tātad likumiem, pēc kuriem atrod divu elementu summu un elementa reizinājumu ar skaitli, ir vienas un tās pašas īpašības vismaz 3 pieminētajās kopās: a)  $n$  dimensiju vektoru kopā  $R_n$ ; b) visu telpā, plaknē vai uz taisnes doto orientēto nogriežņu (vektoru) kopā, c) visu reālo skaitļu kopā.

**Definīcija.** Kopu  $R$  sauc par *lineāru vektoru telpu* un tās elementus  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \dots$  par vektoriem, ja 1) ir zināms likums, pēc kura katriem diviem šīs kopas elementiem  $\vec{x}$  un  $\vec{y}$  piekārto trešo elementu  $\vec{z} \in R$ , kuru apzīmē ar simbolu  $\vec{x} + \vec{y}$  un sauc par elementu  $\vec{x}$  un  $\vec{y}$  summu; 2) ir zināms likums, pēc kura katram  $\vec{x} \in R$  un katram reālam skaitlim  $\alpha$  piekārto elementu  $\vec{u} \in R$ , kuru apzīmē ar simbolu  $\alpha \vec{x}$  un sauc par elementa  $\vec{x}$  reizinājumu ar skaitli  $\alpha$ ; 3) likumiem, pēc kuriem atrod elementu summu un elementu reizinājumu ar skaitli, ir visas iepriekš minētās īpašības 1°–8°.

Saskaņā ar šo definīciju lineāra vektoru telpa vispirms ir visu reālo skaitļu kopa, lineāra vektoru telpa ir visu orientēto nogriežņu (vektoru) kopa telpā, lineāra vektoru telpa ir visu  $n$  dimensiju vektoru kopa  $R_n$ , kurā lineārās algebriskās operācijas definētas ar formulām (24.5) un (24.6). Šo telpu sauksim par lineāro  $n$  dimensiju vektoru telpu.



Ja kāds no vektoriem  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  ir pārējo šīs sistēmas vektoru lineāra kombinācija, piemēram,

$$\vec{a}_k = c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 + \dots + c_{k-1} \vec{a}_{k-1}, \quad (24.12)$$

kur  $c_1, c_2, \dots, c_{k-1}$  ir reāli skaitļi, tad var apgalvot, ka vektoru sistēma  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  ir lineāri atkarīga. Tiešām, no izteiksmes (24.12) seko  $c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 + \dots + c_{k-1} \vec{a}_{k-1} - \vec{a}_k = \vec{0}$ . Tā kā šajā vektoriālajā vienādojumā koeficients pie  $\vec{a}_k$  ir  $-1 \neq 0$ , tad vektoru sistēma ir lineāri atkarīga.

Otrādi, ja vektoru sistēma ir lineāri atkarīga, tad var apgalvot, ka vismaz viens šīs sistēmas vektors ir pārējo vektoru lineāra kombinācija. Tiešām, ja izteiksmē (24.11), piemēram,  $x_k \neq 0$ , tad

$$\vec{a}_k = -\frac{x_1}{x_k} \vec{a}_1 - \frac{x_2}{x_k} \vec{a}_2 - \dots - \frac{x_{k-1}}{x_k} \vec{a}_{k-1},$$

kas rāda, ka vektors  $\vec{a}_k$  ir pārējo sistēmas vektoru lineāra kombinācija.

Tā kā nullvektoru var izteikt kā jebkuras vektoru sistēmas lineāru kombināciju  $\vec{0} = 0 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{a}_k$ , tad pareiza ir sekojošā teorēma.

*Katra vektoru sistēma, kurā ietilpst nullvektors, ir lineāri atkarīga.*

**2. teorēma.** Ja kāda galīga vektoru sistēma  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  ir lineāri neatkarīga, tad lineāri neatkarīga ir arī katra tās apakšsistēma.

**Pierādījums.** Pieņemsim, ka vektoru apakšsistēma  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  ir lineāri atkarīga, tad izteiksmē  $c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 + 0 \cdot \vec{a}_3 + \dots + 0 \cdot \vec{a}_k = \vec{0}$  vismaz viens no koeficientiem  $c_1$  vai  $c_2$  nav nulle. No tā seko, ka vektoru sistēma  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  ir lineāri atkarīga, bet tas ir pret-runā ar teorēmas nosacījumu. Tātad pieņēmums, ka apakšsistēma  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  ir lineāri atkarīga, noved pie pretrunas, un teorēma ir pierādīta.

**1. piemērs.** Vektoru sistēma (24.7) ir lineāri atkarīga, jo  $\vec{a}_2 = 2\vec{a}_1$ , un tādēļ  $2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 + 0 \cdot \vec{a}_3 = \vec{0}$ .

**2. piemērs.** Noskaidrot, vai vektoru sistēma

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= \{1; 2; 1\}, \\ \vec{a}_2 &= \{1; -3; 6\}, \\ \vec{a}_3 &= \{3; 0; 0\} \end{aligned} \quad (24.13)$$

ir lineāri neatkarīga.



**Atrisinājums.** Sastādisim vektoriālu vienādojumu  $\vec{x}_1\vec{a}_1 + \vec{x}_2\vec{a}_2 + \vec{x}_3\vec{a}_3 = \vec{0}$ . Vektoriālais vienādojums ir tādas lineāru homogēnu vienādojumu sistēmas saīsināts pieraksts, kuras koeficientu kolonas ir dotie vektori. Tā ir vienādojumu sistēma

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0, \\ 2x_1 - 3x_2 &= 0, \\ x_1 + 6x_2 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Ja šai vienādojumu sistēmai ir kāds netriviāls atrisinājums, tad dotā vektoru sistēma (24.13) ir lineāri atkarīga. Ja tāda nav, vektoru sistēma ir lineāri neatkarīga. Atrisināsim šo vienādojumu sistēmu, lietojot iepriekšējā nodaļā aprakstīto Gausa metodi.

|       | $-x_1$                                                        | $-x_2$ | $-x_3$ |
|-------|---------------------------------------------------------------|--------|--------|
| $v_1$ | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</span> | 1      | 3      |
| $v_2$ | 2                                                             | -3     | 0      |
| $v_3$ | 1                                                             | 6      | 0      |

| I     | $-x_2$ | $-x_3$ |
|-------|--------|--------|
| $v_2$ | -5     | -6     |
| $v_3$ | 5      | 3      |

| II    | $-x_3$ |
|-------|--------|
| $v_3$ | -9     |

$$x_3 = 0.$$

$$x_1 = -x_2 - 3x_3;$$

$$x_2 = -\frac{6}{5}x_3;$$

Tātad eliminācijas vienādojumu sistēma ir

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -x_2 - 3x_3, \\ x_2 &= -\frac{6}{5}x_3, \\ x_3 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Sai sistēmai eksistē tikai triviālais atrisinājums. Tādēļ vektoru sistēma (24.13) ir lineāri neatkarīga.

**3. piemērs.** Noskaidrot, vai vektoru sistēma

$$\left. \begin{aligned} \vec{a}_1 &= \{1; 3; 0; 5\}, \\ \vec{a}_2 &= \{1; 2; 1; 4\}, \\ \vec{a}_3 &= \{1; 1; 2; 3\}, \\ \vec{a}_4 &= \{0; 2; -2; 2\}, \\ \vec{a}_5 &= \{1; -3; 6; -1\} \end{aligned} \right\} \quad (24.14)$$

ir lineāri neatkarīga.

**Atrisinājums.** Uzrakstīsim lineāru homogēnu vienādojumu sistēmu

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_5 &= 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 &= 0, \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 6x_5 &= 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (24.15)$$

kuras koeficientu kolonas ir dotie vektori, un atrisināsim šo sistēmu, lietojot modificēto Žordāna izslēgšanas metodi.

|       | $-x_1$   | $-x_2$ | $-x_3$ | $-x_4$ | $-x_5$ |
|-------|----------|--------|--------|--------|--------|
| $v_1$ | <u>1</u> | 1      | 1      | 0      | 1      |
| $v_2$ | 3        | 2      | 1      | 2      | -3     |
| $v_3$ | 0        | 1      | 2      | -2     | 6      |
| $v_4$ | 5        | 4      | 3      | 2      | -1     |

| I     | $-v_1$ | $-x_2$    | $-x_3$ | $-x_4$ | $-x_5$ |
|-------|--------|-----------|--------|--------|--------|
| $x_1$ | 1      | 1         | 1      | 0      | 1      |
| $v_2$ | -3     | <u>-1</u> | -2     | 2      | -6     |
| $v_3$ | 0      | 1         | 2      | -2     | 6      |
| $v_4$ | -5     | -1        | -2     | 2      | -6     |

| II    | $-v_1$ | $-v_2$ | $-x_3$ | $-x_4$ | $-x_5$ |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $x_1$ | -2     | 1      | -1     | 2      | -5     |
| $x_2$ | 3      | -1     | 2      | -2     | 6      |
| $v_3$ | -3     | 1      | 0      | 0      | 0      |
| $v_4$ | -2     | -1     | 0      | 0      | 0      |

Ja  $v_1=v_2=0$ , tad no tabulas II

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_3 - 2x_4 + 5x_5, \\ x_2 &= -2x_3 + 2x_4 - 6x_5 \end{aligned} \right\}$$

jeb

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= t_1 - 2t_2 + 5t_3, \\ x_2 &= -2t_1 + 2t_2 - 6t_3, \\ x_3 &= t_1, \\ x_4 &= t_2, \\ x_5 &= t_3, \end{aligned} \right\} \quad (24.16)$$

kur  $t_1=x_3$ ;  $t_2=x_4$ ;  $t_3=x_5$  ir patvaļīgi reāli skaitļi. Tādēļ vektoru sistēmas (24.14) lineārajā kombinācijā  $\vec{x}_1\vec{a}_1 + \vec{x}_2\vec{a}_2 + \vec{x}_3\vec{a}_3 + \vec{x}_4\vec{a}_4 + \vec{x}_5\vec{a}_5 = \vec{0}$  trīs koeficientus var izvēlēties patvaļīgi un pārējos divus aprēķināt ar formulām (24.16). Tātad nullvektoru var izteikt kā tādu vektoru sistēmas (24.14) lineāru kombināciju, kurai visi koeficienti nav nulles. Šī sistēma ir lineāri atkarīga.

Vienādojumu sistēmas (24.15) vispārīgajā atrisinājumā (24.16) koeficientu kolonas pie parametriem  $t_1, t_2, t_3$  ir vektori  $\vec{c}_1 = \{1; -2; 1; 0; 0\}$ ,  $\vec{c}_2 = \{-2; 2; 0; 1; 0\}$ ,  $\vec{c}_3 = \{5; -6; 0; 0; 1\}$ . Tādēļ vispārīgo atrisinājumu  $x = \{x_1; x_2; \dots; x_5\}$  var izteikt kā vektoru sistēmas  $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$  lineāru kombināciju

$$\vec{x} = t_1 \vec{c}_1 + t_2 \vec{c}_2 + t_3 \vec{c}_3. \quad (24.17)$$

No izteiksmēm (24.17) un (24.16) redzams, ka vektoru sistēma  $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$  ir lineāri neatkarīga tad un tikai tad, ja  $t_1 = t_2 = t_3 = 0$ . Vektoru sistēmu  $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$  sauc par homogēno vienādojumu sistēmas (24.15) atrisinājumu fundamentālo sistēmu.

**196. §. Vektoru sistēmas rangs un telpas dimensija.** Definīcija. Ja no vektoru sistēmas  $S$  vektoriem var izveidot lineāri neatkarīgu apakšsistēmu ar  $r$  vektoriem un katra sistēmas  $S$  apakšsistēma ar  $r+1$  vektoru ir lineāri atkarīga, tad skaitli  $r$  sauc par vektoru sistēmas  $S$  rangu.

Saskaņā ar šo definīciju vektoru sistēmas  $S$  rangs ir maksimālais lineāri neatkarīgās apakšsistēmas vektoru skaits.

Definīcija. Lineārās vektoru telpas rangs sauc par tās dimensiju.

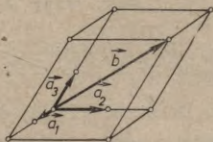
Turpmāk aplūkojamo jautājumu izpratnes atvieglošanai atgādināsim dažus analītiskās ģeometrijas piemērus. Pieņemsim, ka ir dota analītiskajā ģeometrijā lietoto vektoru (orientēto taisnes nogriežņu) sistēma  $S$ , kura ietilpst trīsdimensiju vektoru telpā  $R_3$ .

Tad ir iespējami vairāki gadījumi:

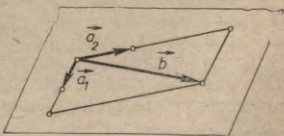
a) Vektoru sistēmai  $S$  pieder trīs nekomplanāri vektori  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ . Tādā gadījumā ikvienu telpas  $R_3$  vektoru un tātad arī visus vektorus  $\vec{b} \in S$  var izteikt kā šo trīs vektoru  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  lineāras kombinācijas (187. zīm.).

Sādā gadījumā saka, ka vektoru sistēmas rangs ir 3, un vektorus  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  sauc par vektoru sistēmas  $S$  bāzi. Tā ir arī telpas  $R_3$  bāze.

b) Visi sistēmas  $S$  vektori atrodas vienā plaknē, bet šai sistēmai pieder divi nekolineāri vektori  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ . Tad visus sistēmas  $S$



187. zīm.



188. zīm.



vektorus var izteikt kā vektoru  $\vec{a}_1$  un  $\vec{a}_2$  linearas kombinācijas (188. zīm.).

Sādā gadījumā saka, ka vektoru sistēmas rangs ir 2 un vektori  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  ir sistēmas  $S$  bāze.



189. zīm.

Visi sistēmas  $S$  vektori atrodas uz vienas taisnes, bet vismaz viens vektors  $\vec{a}_1 \in S$  nav nullvektors. Tad visus sistēmas  $S$  vektorus var izteikt kā vektora  $\vec{a}_1$  reizinājumu ar reālu skaitli (189. zīm.).

Sādā gadījumā saka, ka vektoru sistēmas rangs ir 1 un vektors  $\vec{a}_1$  ir sistēmas  $S$  bāze.

d)  $S$  satur tikai nullvektoru. Tad sistēmas  $S$  rangs ir 0.

**197. §. Bāze un vektora koordinātes. Definīcija.** Katru vektoru sistēmas  $S$  apakšsistēmu  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  sauc par sistēmas  $S$  bāzi, ja dotā apakšsistēma ir lineāri neatkarīga un bez tam jebkuru vektoru  $\vec{b} \in S$  var izteikt kā lineāru kombināciju

$$\vec{b} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_k \vec{a}_k. \quad (24.18)$$

Nav grūti pierādīt, ka pie dotajiem nosacījumiem lineārā kombinācija (24.18) ir viena vienīgā. Lai to pierādītu, pieļausim, ka eksistē vēl kāda cita lineāra kombinācija

$$\vec{b} = x'_1 \vec{a}_1 + x'_2 \vec{a}_2 + \dots + x'_k \vec{a}_k.$$

Atņemot no šīs izteiksmes izteiksmi (24.18), dabū

$$(x'_1 - x_1) \vec{a}_1 + (x'_2 - x_2) \vec{a}_2 + \dots + (x'_k - x_k) \vec{a}_k = \vec{0}.$$

No tā seko, ka  $x'_1 = x_1, x'_2 = x_2, \dots, x'_k = x_k$ , jo dotā vektoru sistēma ir lineāri neatkarīga. Tādēļ lineārā kombinācija (24.18) ir vienīgā, ko arī vajadzēja pierādīt.

**1. teorēma.** Ja vektoru sistēma  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  ir vektoru sistēmas  $S$  bāze un izteiksmē  $\vec{b} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_k \vec{a}_k$  koeficients pie kāda no bāzes vektoriem nav nulle, tad, izslēdzot šo vienu vektoru no bāzes un liekot tā vietā vektoru  $\vec{b} \in S$ , dabū jaunu sistēmas  $S$  bāzi.

Sai teorēmai ir plaši pielietojumi lineārās programmēšanas teorijā, kuru kā vienu no matemātiskām metodēm plaši izmanto optimālu darbības plānu sastādīšanā.

Lai teorēmu pierādītu, pieņemsim, ka izteiksmē (24.18) koeficients  $x_1$  pie vektora  $\vec{a}_1$  nav nulle. Izslēdzot no bāzes vektoru  $\vec{a}_1$  un ņemot tā vietā vektoru  $\vec{b}$ , dabū jaunu vektoru sistēmu

$\vec{b}, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_k$ . Atliek pierādīt, ka šī vektoru sistēma ir lineāri neatkarīga un ka katru vektoru  $\vec{y} \in S$  var izteikt kā vektoru sistēmas  $\vec{b}, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_k$  lineāru kombināciju.

Pieļausim, ka izteiksmē  $c_1\vec{b} + c_2\vec{a}_2 + \dots + c_k\vec{a}_k = \vec{0}$  koeficients  $c_1 \neq 0$ . Tad

$$\vec{b} = -\frac{c_2}{c_1}\vec{a}_2 - \dots - \frac{c_k}{c_1}\vec{a}_k.$$

Ievietojot šo  $\vec{b}$  izteiksmē (24.18), dabū

$$\sum_{i=2}^k (c_1x_i + c_i)\vec{a}_i + c_1x_1\vec{a}_1 = \vec{0}. \quad (24.19)$$

Tā kā bāze  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  ir lineāri neatkarīga, tad izteiksme (24.19) iespējama, ja  $c_1x_i + c_i = c_1x_i = 0$ , ( $i=2, 3, \dots, k$ ).

Tā kā  $x_1 \neq 0$ , tad  $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$ . Ar to ir pierādīts, ka vektoru sistēma  $\vec{b}, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  ir lineāri neatkarīga.

Saskaņā ar pieņēmumu  $x_1 \neq 0$ . Tādēļ no izteiksmes (24.18)

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{x_1}\vec{b} - \frac{x_2}{x_1}\vec{a}_2 - \dots - \frac{x_k}{x_1}\vec{a}_k. \quad (24.20)$$

Tā kā vektoru sistēma  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  ir bāze, tad jebkuru vektoru  $\vec{y} \in S$  var izteikt kā lineāru kombināciju

$$\vec{y} = \beta_1\vec{a}_1 + \beta_2\vec{a}_2 + \dots + \beta_k\vec{a}_k. \quad (24.21)$$

Ievietojot vektoru  $\vec{a}_1$  no izteiksmes (24.20) izteiksmē (24.21), dabū

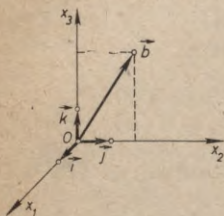
$$\vec{y} = \frac{1}{x_1}\vec{b} - \sum_{i=2}^k \frac{\beta_i x_i - \beta_1 x_i}{x_1} \cdot \vec{a}_i. \quad (24.22)$$

Izteiksme (24.22) rāda, ka katru vektoru  $y \in S$  var izteikt kā vektoru sistēmas  $\vec{b}, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  lineāru kombināciju. Ar to teorēma ir pierādīta.

Ja no izteiksmes (24.18) izslēdz tādu vektoru  $\vec{a}_1$ , kura koeficients  $x_1 = 0$ , un izslēgto vektoru atvieto ar vektoru  $\vec{b} \in S$ , tad jaunā vektoru sistēma nav bāze. Lai par to pārliecinātos, pieņemsim, ka  $x_1 = 0$ . Tad  $\vec{b} - x_2\vec{a}_2 - x_3\vec{a}_3 - \dots - x_k\vec{a}_k = \vec{0}$ , bet tas nozīmē, ka vektoru sistēma  $\vec{b}, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  ir lineāri atkarīga. Tādēļ tā nav vektoru sistēmas  $S$  bāze.



Piemērs. Telpas  $R_3$  bāzē  $\vec{i}=\{1; 0; 0\}$ ,  $\vec{j}=\{0; 1; 0\}$ ,  $\vec{k}=\{0; 0; 1\}$  dots vektors  $\vec{b}=\{0; 2; 3\}=2\vec{j}+3\vec{k}$ . Tā kā koeficients pie bāzes vektora  $\vec{i}$  ir nulle, tad šo vektoru nevar atvietot ar vektoru  $\vec{b}$ , jo vektoru sistēma  $\vec{b}, \vec{j}, \vec{k}$  nevar būt telpas  $R_3$  bāze.



190. zīm.

Tas uzskatāmi parādīts 190. zīmējumā.

Vektoru sistēma  $\vec{b}, \vec{j}, \vec{k}$  ir komplanāra. Šie vektori visi atrodas  $x_2Ox_3$  plaknē. Turpretim vektoru sistēmas  $\vec{b}, \vec{i}, \vec{j}$  un  $\vec{b}, \vec{i}, \vec{k}$  nav komplanāras, un tādēļ katru no tām var pieņemt par telpas  $R_3$  bāzi.

2. teorēma. Visām vektoru sistēmās  $S$  bāzēm ir vienāds vektoru skaits.

Pierādījums. Pieņemsim, ka vektoru sistēma  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  ir viena, bet  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_r$  cita vektoru sistēmas  $S$  bāze. Jāpierāda, ka  $k=r$ . Saskaņā ar bāzes definīciju katru otrās bāzes vektoru var izteikt kā pirmās bāzes lineāru kombināciju. Piemēram,  $\vec{b}_1 = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_k \vec{a}_k$ , kur vismaz viens koeficients  $\alpha_1 \neq 0$ . Pieņemsim, ka  $\alpha_1 \neq 0$ . Tad saskaņā ar iepriekšējo teorēmu  $\vec{b}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  ir sistēmas  $S$  bāze un vektoru  $\vec{b}_2$  var izteikt kā šīs jaunās bāzes lineāru kombināciju

$$\vec{b}_2 = \beta_1 \vec{b}_1 + \sum_{i=1}^n \beta_i \vec{a}_i,$$

kur vismaz viens koeficients  $\beta_1 \neq 0$ . Pretējā gadījumā būtu  $\vec{b}_2 = \beta \vec{b}_1$ , kas ir pretrunā ar lineāro neatkarību. Pieņemsim, ka  $\beta_2 \neq 0$ . Tad  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_k$  ir jauna vektoru sistēmas  $S$  bāze. Šo atvietošanas procesu var turpināt, kamēr rodas viena no šāda veida bāzēm:  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_r$  vai  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_r, \vec{a}_{r+1}, \dots, \vec{a}_k$ . Acīm redzot,  $k \geq r$ . Ja līdzīgā veidā bāzes  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_r$  vektorus pakāpeniski atvietotu ar vektoriem  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ , tad rastos nevienādība  $k \leq r$ . Tātad  $k=r$ .

3. teorēma. Vektoru sistēmas bāzes vektoru skaits ir vienāds ar vektoru sistēmas rangu.

Pierādījums. Pieņemsim, ka sistēmas  $S$  rangs ir  $r$  un  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_r$  ir lineāri neatkarīga apakšsistēma, bet vektori  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  ir sistēmas  $S$  bāze. Atvietojojt bāzes vektorus pakā-



peniski ar vektoriem  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_r$ , kļūst acīm redzams, ka  $k \geq r$ , bet  $r$  ir maksimālais lineāri neatkarīgās apakšsistēmas vektoru skaits. Tādēļ  $k=r$ .

4. teorēma. Katra lineāri neatkarīga telpas  $R_n$  vektoru sistēma ar  $n$  vektoriem  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  ir šīs telpas bāze.

Pierādījums. Sastādīsim šādu telpas  $R_n$  vektoru sistēmu:

$$\left. \begin{aligned} \vec{e}_1 &= \{1; 0; \dots; 0\}, \\ \vec{e}_2 &= \{0; 1; \dots; 0\}, \\ &\dots \dots \dots \\ \vec{e}_n &= \{0; 0; \dots; 1\}. \end{aligned} \right\} \quad (24.23)$$

Lai kādi būtu reāli skaitļi  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , vienmēr  $c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + \dots + c_n\vec{e}_n = \{c_1; 0; \dots; 0\} + \{0; c_2; \dots; 0\} + \dots + \{0; 0; \dots; c_n\} = \{c_1; \dots; c_2; \dots; c_n\} = \vec{c} \in R_n$ . Tā kā  $\vec{c} = \{c_1; c_2; \dots; c_n\}$  var būt nullvektors tikai tad, ja  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ , tad vektoru sistēma (24.23) ir lineāri neatkarīga. Bez tam nō izteiksmes

$$\vec{c} = \{c_1; c_2; \dots; c_n\} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + \dots + c_n\vec{e}_n \quad (24.24)$$

redzams, ka katru vektoru  $\vec{c} \in R_n$  var izteikt kā vektoru sistēmas (24.23) lineāru kombināciju. Tādēļ šī sistēma ir telpas  $R_n$  bāze. Vektoru sistēmu (24.23) saucim par telpas  $R_n$  sākuma bāzi. Saskaņā ar teorēmas nosacījumu vektoru sistēma  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  ir lineāri neatkarīga un tās vektoru skaits ir vienāds ar telpas  $R_n$  sākuma bāzes vektoru skaitu. Tādēļ visus sākuma bāzes  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  vektorus var pakāpeniski atvietot ar vektoriem  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ . Tātad katra lineāri neatkarīga  $n$  vektoru sistēma  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  veido telpas  $R_n$  bāzi un katrs vektors  $\vec{y} \in R_n$  ir viena vienīga dotās bāzes vektoru sistēmas lineāra kombinācija.

Patvaļīga lineāri neatkarīga  $r < n$  vektoru sistēma veido telpas  $R_n$  bāzes daļu, kuru var papildināt ar  $n-r=s$  vektoriem tā, lai veidotos bāze. Tas panākams, atvietojoš sākuma bāzē (24.23)  $n-r$  vektorus ar patvaļīgās vektoru sistēmas vektoriem.

Definīcija. Ja  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  ir telpas  $R_n$  bāze un  $\vec{b} \in R_n$  izteikts kā bāzes vektoru sistēmas lineāra kombinācija

$$\vec{b} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n,$$

tad reālos skaitļus  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sauc par vektora  $\vec{b}$  koordinātēm dotajā bāzē.

1. piemērs. Vektora  $\vec{b} = \{2; 1; -3; -3\}$  koordinātes 4 dimensiju vektoru telpas  $R_4$  sākuma bāzē ir skaitļi  $b_1=2, b_2=1, b_3=-3, b_4=-3$ ,  
jo

$$\begin{aligned}\vec{2e}_1 &= 2\{1; 0; 0; 0\} = \{2; 0; 0; 0\}, \\ \vec{e}_2 &= \{0; 1; 0; 0\}, \\ -3\vec{e}_3 &= -3\{0; 0; 1; 0\} = \{0; 0; -3; 0\}, \\ -3\vec{e}_4 &= -3\{0; 0; 0; 1\} = \{0; 0; 0; -3\},\end{aligned}$$

un  $\vec{2e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 - 3\vec{e}_4 = \{2; 1; -3; -3\} = \vec{b}$ .

2. piemērs. Dota vektoru sistēma

$$\begin{aligned}\vec{a}_1 &= \{2; 1; 2; 1\}, \\ \vec{a}_2 &= \{3; 1; 1; 1\}, \\ \vec{a}_3 &= \{11; 5; 3; 3\}, \\ \vec{a}_4 &= \{5; 2; 2; 4\}.\end{aligned}\tag{24.25}$$

Parādīt, ka vektoru sistēma (24.25) ir telpas  $R_4$  bāze, un aprēķināt vektora  $\vec{b} = \{2; 1; -3; -3\}$  koordinātes bāzē (24.24).

Atrisinājums. Lai pierādītu, ka vektoru sistēma (24.25) ir lineāri neatkarīga un līdz ar to tā ir telpas  $R_4$  bāze, pietiek atrisināt lineāru homogēnu vienādojumu sistēmu

$$\vec{x}_1\vec{a}_1 + \vec{x}_2\vec{a}_2 + \vec{x}_3\vec{a}_3 + \vec{x}_4\vec{a}_4 = \vec{0}$$

Jeb

$$\left. \begin{aligned}2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 &= 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0.\end{aligned} \right\}\tag{24.26}$$

Ja vienādojumu sistēmai (24.26) nav netriviālu atrisinājumu, tad vektoru sistēma (24.25) ir telpas  $R_4$  bāze un jebkuru vektoru  $\vec{y} \in R_4$ , tātad arī  $\vec{b} = \{2; 1; -3; -3\}$ , var izteikt kā vienu vienīgu vektoru sistēmas (24.25) lineāru kombināciju  $\vec{x}_1\vec{a}_1 + \vec{x}_2\vec{a}_2 + \vec{x}_3\vec{a}_3 + \vec{x}_4\vec{a}_4 = \vec{b}$ . Šī izteiksme ir iepriekšējā nodaļā atrisinātā lineāru nehomogēnu vienādojumu sistēmas (23.17) vektoriālais pieraksts.

Vienādojumu sistēmai (23.27), kā redzams, ir viens vienīgs atrisinājums  $\vec{x} = \{-2; 0; 1; -1\}$ . Atrisinot vienādojumu sistēmu

(23.27), vienlaicīgi noskaidroti abi šī piemēra jautājumi: 1) vienādojumu sistēmai (23.27) atbilstošai homogēnu vienādojumu sistēmai (24.26) nav netriviālu atrisinājumu, tātad vektori (24.25) ir telpas  $R_4$  bāze, un 2) vienādojumu sistēmas (23.27) vienīgais atrisinājums  $\vec{x} = \{-2; 0; 1; -1\}$  ir vektora  $\vec{b}$  koordinātes bāze (24.25). Tiešām,  $-2\vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + 1 \cdot \vec{a}_3 - 1 \cdot \vec{a}_4 = \{-4; -2; -4; -2\} + \{0; 0; 0; 0\} + \{11; 5; 3; 3\} + \{-5; -2; -2; -4\} = \{2; 1; -3; -3\} = \vec{b}$ .

### 198. §. Vektoru skalārais reizinājums un ortogonalitāte.

**Definīcija.** Par divu vektoru  $\vec{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$  un  $\vec{y} = (y_1; y_2; \dots; y_n)$  skalāro reizinājumu sauc doto vektoru koordinātu reizinājumu summu. Skalāro reizinājumu apzīmē ar vienu no šādiem simboliem:  $\vec{x} \cdot \vec{y}$ ,  $x \cdot y$  jeb  $[xy]$ . Tātad

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Piemēram, vektoru  $\vec{x} = (2; 3; -1; 0)$  un  $\vec{y} = (4; -4; -9; 12)$  skalārais reizinājums ir skaitlis  $\vec{x} \cdot \vec{y} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-4) + (-1) \cdot (-9) + 0 \cdot 12 = 5$ .

Saskaņā ar definīciju skalārajam reizinājumam ir šādas īpašības.

1.  $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}^T$ .
2.  $(\lambda \vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot (\lambda \vec{y}) = \lambda (\vec{x} \cdot \vec{y})$ ,

kur  $\lambda$  ir reāls skaitlis.

3.  $(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z}$ .
4.  $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$ , pie tam  $\vec{x} \cdot \vec{x} = 0$

tikai tad, ja  $\vec{x} = \vec{0}$ .

**Definīcija.** Pozitīvo kvadrāta sakni no reālā skaitļa  $\vec{x} \cdot \vec{x}$  sauc par vektora  $\vec{x}$  garumu jeb *moduli*. To apzīmēsim ar simbolu  $|\vec{x}|$ . Tātad

$$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}. \quad (24.27)$$

Piemēram, vektora  $\vec{x} = \{4; 0; -3; 12\}$  garums ir skaitlis  $|\vec{x}| = \sqrt{16 + 0 + 9 + 144} = 13$ .



**Definīcija.** Par attālumu no vektora  $\vec{x} \in R_n$  līdz vektoram  $\vec{y} \in R_n$  sauc vektora  $\vec{x} - \vec{y}$  moduli, t. i.,

$$|\vec{x} - \vec{y}| = \left[ \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (24.28)$$

**Piemērs.** Aprēķināt attālumu starp 4 dimensiju telpas vektoriem  $\vec{x} = \{3; -9; 2; 7\}$  un  $\vec{y} = \{3; -5; 2; 4\}$ .

**Atrisinājums.**  $\vec{x} - \vec{y} = \{3; -9; 2; 7\} - \{3; -5; 2; 4\} = \{0; -4; 0; 3\}$ , un saskaņā ar definīcijas formulu (24.28) meklējamais attālums ir

$$|\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{0^2 + (-4)^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Saskaņā ar definīcijas formulu (24.28):

$$1) |\vec{x} - \vec{y}| > 0, \text{ ja } \vec{x} - \vec{y} \neq \vec{0}, \quad (24.29)$$

$$2) |\vec{x} - \vec{y}| = |\vec{y} - \vec{x}|, \quad (24.30)$$

$$3) |\vec{x} - \vec{y}| + |\vec{y} - \vec{z}| \geq |\vec{x} - \vec{z}|. \quad (24.31)$$

Nevienādība (24.29) nozīmē, ka attālums starp diviem vektoriem vienmēr ir pozitīvs.

Vienādība (24.30) nozīmē, ka attālums no vektora  $\vec{x}$  līdz vektoram  $\vec{y}$  ir vienāds ar attālumu no  $\vec{y}$  līdz  $\vec{x}$ .

Izteiksmi (24.31) sauc par «trijstūra nevienādību». Trīsdimensiju telpā šī izteiksme nozīmē, ka trijstūra divu malu summa nav mazāka par trešo malu.

Lineāru  $n$  dimensiju vektoru telpu, kurā attālums definēts saskaņā ar formulu (24.28), sauc par *Eiklida telpu*. Garuma un attāluma definīcija telpā  $R_n$  ir attiecīgo trīsdimensiju telpas jēdzienu un priekšstatu vispārinājums. Šāds vispārinājums ir arī divu vektoru ortogonalitātes jēdziens  $n$  dimensiju telpā.

**Definīcija.** Divus vektorus  $\vec{x} \in R_n$  un  $\vec{y} \in R_n$  sauc par ortogonāliem, ja  $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ .

Piemēram, vektori  $\vec{x} = \{4; 0; -3; 12\}$  un  $\vec{y} = \{3; 12; 4; 0\}$  ir savstarpēji ortogonāli, jo  $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ .

**199. §. Ortonormēta bāze.** Teorēma. Ja telpas  $R_n$  vektoru sistēmas  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  vektori ir pa pāriem ortogonāli un šajā sistēmā nav nullvektora, tad tā ir telpas  $R_n$  bāze.

Pierādījums. Pareizināsim lineārās kombinācijas  $\vec{x}_1\vec{a}_1 + \vec{x}_2\vec{a}_2 + \dots + \vec{x}_n\vec{a}_n = \vec{0}$  abas puses skalāri ar  $\vec{a}_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ). Tad dabūsim

$$\sum_{i=1}^n (\vec{x}_i\vec{a}_i) \cdot \vec{a}_j = 0, \quad (j=1, 2, \dots, n).$$

Saskaņā ar ortogonalitātes nosacījumu  $\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = 0$ , ja  $i \neq j$ , bet, ja  $i=j$ , tad  $\vec{a}_i \cdot \vec{a}_i \neq 0$ . Tādēļ  $x_i=0$  visiem  $i=1, 2, \dots, n$ . Tātad dotā vektoru sistēma ir lineāri neatkarīga, bet katra lineāri neatkarīga telpas  $R_n$  vektoru sistēma ir tās bāze. Ar to teorēma ir pierādīta.

Ja kādu vektoru  $\vec{a}$  izdala ar tā garumu  $|\vec{a}|$ , tad dabū vektoru  $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ , kuru sauc par vienības vektoru. Tādu telpas  $R_n$  bāzi, kuras visi vektori ir pa pāriem ortogonāli un to garumi vienādi ar 1, sauc par ortonormētu bāzi. Ortonormētas bāzes piemērs ir telpas  $R_n$  sākuma bāze (24.23).

## 200\*. §. Lineārās $n$ dimensiju vektoru telpas $R_n$ apakštelpa.

Definīcija. Bezgalīgu vektoru sistēmu  $S$  sauc par telpas  $R_n$  apakštelpu, ja

a) no  $\vec{a} \in S$  un  $\vec{b} \in S$  seko  $\vec{a} + \vec{b} \in S$  un

b) no  $\vec{a} \in S$  seko  $x\vec{a} \in S$ , kur  $x$  ir jebkurš reāls skaitlis.

Piemēram, ja telpas  $R_3$  vektoru sistēmā  $S$  ietilpst visi tie vektori, kuri atrodas vienā plaknē, kas iet caur koordinātu sākumu, tad vektoru sistēma  $S$  ir telpas  $R_3$  apakštelpa. Jebkura apakštelpas  $S$  lineāra kombinācija  $\vec{x}_1\vec{a}_1 + \vec{x}_2\vec{a}_2 + \dots + \vec{x}_k\vec{a}_k$  arī ietilpst apakštelpā  $S$ .

Katrā telpas  $R_n$  apakštelpā  $S$  ietilpst telpas nullvektors. Tiešām, ja  $\vec{a} \in S$ , tad no definīcijas seko, ka  $\vec{0} \cdot \vec{a} \in S$ .

Vektoru sistēma  $S$ , kurā ietilpst visi telpas  $R_n$  vektori, ir viens no triviāliem apakštelpas gadījumiem. Otrs triviālais gadījums ir tāda apakštelpa, kurā ietilpst tikai telpas  $R_n$  nullvektors.

Definīcija. Apakštelpu, kurā ietilpst visas bezgalīgai vektoru sistēmai  $S$  piederīgo vektoru  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots$  galīgas lineāras kombinācijas, sauc par vektoru sistēmas *lineāro čaulu*. To apzīmēsim ar  $L(S)$  jeb  $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots)$ .

No šīs definīcijas izriet, ka vektoru sistēmas  $S$  rangs ir vienāds ar lineārās čaulas  $L(S)$  rangu, jo, ja  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_r$  ir







kuras koeficientu kolonas ir vektori (24.38). Vienādojumu sistēmai (24.39), kā redzams, eksistē tikai triviālais atrisinājums  $t_1 = t_2 = \dots = t_s = 0$ . Tādēļ vektoru sistēma (24.38) ir lineāri neatkarīga un tās rangs ir  $s = n - r$ .

Tā kā jebkurš no vektoriem (24.38) ir homogēnās vienādojumu sistēmas (24.32) jeb (24.35) atrisinājums, tad  $\vec{a}^i \cdot \vec{c}_j = 0$ , ( $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, s$ ). Šīs vienādojumu sistēmas atrisinājums ir arī jebkura vektoru sistēmas (24.38) lineārā kombinācija

$$\vec{\xi} = t_1 \vec{c}_1 + t_2 \vec{c}_2 + \dots + t_s \vec{c}_s, \quad (24.40)$$

kur  $t_1, t_2, \dots, t_s$  ir patvaļīgi reāli skaitļi.

Tiešām, liekot izteiksmēs (24.35) vektora  $\vec{x}$  vietā vektoru  $\vec{\xi}$ , dabū

$$a_i \vec{\xi} = a^i \cdot (t_1 \vec{c}_1 + t_2 \vec{c}_2 + \dots + t_s \vec{c}_s) = \sum_{j=1}^s t_j (\vec{a}^i \cdot \vec{c}_j) = 0.$$

Vektoru  $\vec{\xi}$  sauc par *homogēnās vienādojumu sistēmas (24.32) vispārīgo atrisinājumu*.

Homogēnās vienādojumu sistēmas (24.32) vispārīgais atrisinājums ir visas vektoru sistēmas (24.38) lineārās kombinācijas. Tās veido apakštelpu lineārajā  $n$  dimensiju telpā.

**Definīcija.** Lineārās  $n$  dimensiju telpas  $R_n$  apakštelpu  $S$ , kuru veido visi homogēnās vienādojumu sistēmas atrisinājumi  $\vec{\xi} \in R_n$ , sauc par šīs *vienādojumu sistēmas atrisinājumu telpu*  $L(S)$ .

Tā kā atrisinājumu telpā  $L(S)$  ietilpst lineāri neatkarīgā vektoru sistēma (24.38), tad šīs telpas rangs  $\sigma$  nav mazāks par  $s = n - r$ , t. i.,  $\sigma \geq n - r$ .

Pieņemsim, ka telpas  $R_n$  vektoru sistēmas (24.36) rangs ir  $q$  un ka vektori  $\vec{a}^1, \vec{a}^2, \dots, \vec{a}^q$  ir lineāri neatkarīgu vektoru sistēma. Tā kā vienādojumu sistēmas (24.32) atrisinājumu telpas  $L(S)$  rangs  $\sigma \geq n - r$ , tad eksistē tāda lineāri neatkarīga vektoru sistēma  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\sigma$ , kuras ikviens vektors ir ortogonāls ar katru no vektoriem  $\vec{a}^i$ , ( $i = 1, 2, \dots, q$ ), bet  $q + \sigma \leq n$ , jo maksimālais lineāri neatkarīgo vektoru skaits telpā  $R_n$  nevar pārsniegt  $n$ . No izteiksmēm  $\sigma \geq n - r$  un  $q + \sigma \leq n$  seko

$$q + \sigma \leq n \leq r + \sigma \quad (24.41)$$

un

$$q \leq r. \quad (24.42)$$

Tas nozīmē, ka reālo skaitļu tabulā

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (24.43)$$

rindu sistēmas rangs  $q$  nav lielāks par kolonu sistēmas rangu  $r$ .

Apmainot tabulā (24.43) rindas ar kolonām, iegūst jaunu tabulu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (24.44)$$

kuras rindu sistēmas rangs  $r$  nav lielāks par kolonu sistēmas rangu  $q$ , t. i.,

$$r \leq q. \quad (24.45)$$

No nevienādībām (24.42) un (24.45) seko

$$r = q. \quad (24.46)$$

Ievietojot vienādību (24.46) nevienādību sistēmā (24.41), dabū  $r + \sigma \leq n \leq r + \sigma$ . No šejienes seko  $\sigma = n - r$ . Tā kā  $n - r = s$ , tad,  $s = \sigma$ . Līdz ar to ir pierādīta teorēma:

*Homogēnu vienādojumu sistēmā, kurai ir  $n$  nezināmie, koeficientu kolonu sistēmas rangs  $r$  ir vienāds ar koeficientu rindu sistēmas rangu  $q$ , un šīs vienādojumu sistēmas atrisinājumu telpas rangs ir*

$$s = n - r.$$

Sekas. Ja homogēnu vienādojumu sistēmā ir  $n$  nezināmie un tās koeficientu kolonu (rindu) rangs ir  $r$ , tad atrisinājumu telpas bāze ir katra lineāri neatkarīga šīs telpas vektoru sistēma, kurā ir  $n - r$  vektori.

Katru homogēno vienādojumu sistēmas atrisinājumu telpas bāzi sauc par *atrisinājumu fundamentālo sistēmu*.

Viena no vienādojumu sistēmas (24.32) atrisinājumu fundamentālajām sistēmām ir, piemēram, vektori (24.38).

**202\*. §. Lineāru nehomogēnu vienādojumu sistēmas vispārīgais atrisinājums un tā eksistence.** Pieņemsim, ka ir dota lineāru nehomogēnu vienādojumu sistēma

$$\vec{x}_1 a_1 + \vec{x}_2 a_2 + \dots + \vec{x}_n a_n = \vec{b}, \quad (24.47)$$

kur  $\vec{b} = \{b_1; b_2; \dots; b_m\}$  un  $\vec{a}_j = \{a_{1j}; a_{2j}; \dots; a_{mj}\}$ , ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) ir doti telpas  $R_m$  vektori.



Šo vienādojumu sistēmu var pārrakstīt šādi:

$$\vec{a}^i \cdot \vec{x} = b_i, \quad (i=1, 2, \dots, m), \quad (24.48)$$

kur  $\vec{a}^i = (a_{i1}; a_{i2}; \dots; a_{in})$ ,  $i=1, 2, \dots, m$  ir doti telpas  $R_n$  vektori,  $b_1, b_2, \dots, b_m$  ir doti skaitļi, no kuriem vismaz viens nav nulle, un  $\vec{x} \in R_n$  ir nezināmais vienādojumu sistēmas atrisinājumu vektors.

Ja nehomogēno vienādojumu sistēmai (24.48) atbilstošās homogēnu vienādojumu sistēmas  $\vec{a}^i \cdot \vec{x} = 0$ ,  $i=1, 2, \dots, m$  vispārīgais atrisinājums ir  $\vec{\xi} \in R_n$  un nehomogēno vienādojumu sistēmai eksistē vismaz viens atrisinājums  $\vec{c}_0 = \{c_{10}; c_{20}; \dots; c_{n0}\}$ , tad tās vispārīgais atrisinājums ir

$$\vec{x} = \vec{c}_0 + \vec{\xi}. \quad (24.49)$$

Tiešām,

$$\vec{a}^i \cdot (\vec{c}_0 + \vec{\xi}) = \vec{a}^i \cdot \vec{c}_0 + \vec{a}^i \cdot \vec{\xi} = b_i, \quad (i=1, 2, \dots, m).$$

Iepriekšējā paragrāfā noskaidrojām, ka, ja nezināmo skaits ir  $n$ , tad homogēno vienādojumu sistēmas vispārīgais atrisinājums ir telpas  $R_n$  apakštelpa. Turpretim nehomogēno vienādojumu sistēmas vispārīgais atrisinājums tam pašam nezināmo skaitam nevar būt lineāras telpas apakštelpa, jo tajā neietilpst nullvektors. Tiešām,  $\vec{o} = \{0; 0; \dots; 0\}$  nevar būt vienādojumu sistēmas (24.48) atrisinājums, jo vismaz viens no skaitļiem  $b_i$  nav nulle.

Tādēļ, ja nehomogēno vienādojumu sistēmai eksistē atrisinājums, tad vektors  $\vec{b}$  pieder pie tās apakštelpas, pie kuras pieder vektori  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ . Tas nozīmē, ka vektoru sistēmas  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  rangs  $r$  ir vienāds ar paplašinātās vektoru sistēmas  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}$  rangu. Ja turpretim nehomogēno vienādojumu sistēma ir nesaderīga, tad šie rangi nav vienādi, jo tad vektoru  $\vec{b}$  nevar izteikt kā vektoru sistēmas  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  lineāru kombināciju.

Sie spriedumi ļauj formulēt iepriekšējās nodaļas noslēgumā minēto Kronekera — Kapelli teorēmu šādi:

*Lineāru nehomogēnu vienādojumu sistēmai eksistē atrisinājums tad un tikai tad, ja tās koeficientu kolonu sistēmas  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  rangs ir vienāds ar paplašinātās kolonu sistēmas  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}$  rangu, kur  $\vec{b}$  ir vienādojumu sistēmas brīvo locekļu kolona  $\{b_1; b_2; \dots; b_m\}$ .*

**203. §. Hiperplakne.** Katrs lineārs algebrisks vienādojums Dekarta koordinātu sistēmā telpā  $R_3$ , kā zināms, izsaka plakni, un otrādi — katras plaknes vienādojums šādā koordinātu sistēmā ir lineārs algebrisks vienādojums

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 - b = 0, \quad (24.50)$$

kurā vismaz viens no koeficientiem  $a_1, a_2, a_3$  nav nulle. Telpas  $R_3$  vektors  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  ir ortogonāls ar jebkuru vektoru, kurš atrodas plaknē (24.50). Vektors  $\vec{x} = \{x_1; x_2; x_3\}$  ir patvaļīga plaknes punkta  $P(x_1; x_2; x_3)$  rādiusvektors, bet skaitlis  $p = |b| : |\vec{a}|$  ir plaknes attālums no koordinātu sākuma.

Izmantojot vektoru skalārā reizinājuma definīciju un simboliku, vienādojumu (24.50) var pārrakstīt

$$\vec{a} \cdot \vec{x} - b = 0, \quad (24.51)$$

un plakni telpā  $R_3$  definēt kā visu to rādiusvektoru  $\vec{x} \in R_3$  kopu, kuri apmierina vienādojumu (24.51). Te  $\vec{a} \in R_3$  ir dots vektors, kas nav nullvektors un ir perpendikulārs ar plakni, bet  $b$  ir dots reāls skaitlis.

Pēc analogijas ar ģeometriskās uzskatāmības telpu, kurā ikviens vektors ir sakārtota skaitļu trijotne un arī katra punkta koordinātes ir trīs sakārtotu skaitļu kopa, saka, ka  $n$  sakārtotu skaitļu kopa ir punkts  $P(x_1; x_2; \dots; x_n)$   $n$  dimensiju telpā  $R_n$  un šīs telpas vektors  $\vec{x} = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$  ir punkta  $P(x_1; x_2; \dots; x_n)$  rādiusvektors, t. i., tāds vektors, kura sākums sakrīt ar telpas  $R_n$  koordinātes sākumu  $O(0; 0; \dots; 0)$  un gals atrodas punktā  $P(x_1; x_2; \dots; x_n)$ . Saīsinātā pierakstā punktu  $P(x_1; x_2; \dots; x_n)$  apzīmēsim ar  $P(\vec{x})$ .

**Definīcija.** Par *hiperplakni*  $n$  dimensiju telpā sauc visu to vektoru  $\vec{x} \in R_n$  kopu, kas apmierina vienādojumu

$$\vec{a} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) = 0, \quad (24.52)$$

kur  $\vec{a} \in R_n$  ir dots vektors, kas nav nullvektors, un  $\vec{x}_0 \in R_n$  ir dots vektors, kas var būt arī nullvektors.

Ja vektori  $\vec{a} = (a_1; a_2; \dots; a_n)$  un  $\vec{x}_0 = \{x_{10}; x_{20}; \dots; x_{n0}\}$  uzdoti ar savām koordinātēm sākuma bāzē, tad vienādojumu (24.52) var pārveidot koordinātu formā

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n - b = 0, \quad (24.53)$$



kur  $b = a_1x_{10} + a_2x_{20} + \dots + a_nx_{n0}$  ir reāls skaitlis, bet  $\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  ir tāds un tikai tāds mainīgs vektors, kura koordinātes apmierina lineāro algebrisko vienādojumu (24.53).

Ja  $\vec{x}_0 = \vec{0}$ , tad arī  $b = 0$  un punkta  $O(0; 0; \dots; 0)$  koordinātes apmierina vienādojumu (24.53). Tādā gadījumā saka, ka hiperplakne iet caur koordinātu sākumu. Skaitlis  $b$  ir tieši proporcionāls attālumam no koordinātu sākuma līdz hiperplaknei. Ja šo attālumu apzīmē ar  $p$ , tad  $p = |b| : |\vec{a}|$ , kur  $|\vec{a}|$  ir vektora  $\vec{a} = (a_1; a_2; \dots; a_n)$  modulis.

Piemēram, hiperplakne  $2x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 15 = 0$  neiet caur koordinātu sākumu, jo tās vienādojuma brīvais loceklis  $b = 15$  nav nulle. Tās attālums no koordinātu sākuma aprēķināms, izdalot skaitli 15 ar  $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-4)^2 + 3^2} = \sqrt{30}$ . Tātad hiperplakne atrodas 15 :  $\sqrt{30} = 2,739$  vienību attālumā no koordinātu sākuma.

Ja vienādojuma (24.53) brīvais loceklis  $b = 0$  un visi koeficienti, izņemot  $a_k$ , ir nulles, tad paliek vienādojums  $x_k = 0$ . Tas ir  $k$ -tās koordinātu plaknes vienādojums  $n$  dimensiju telpā. Šī hiperplakne ir visu to punktu  $P(0, 0, \dots, 0, x_k, 0, \dots, 0)$  ģeometriskā vieta, kam ir patvaļīga  $k$ -tā koordināte, bet visas pārējās koordinātes ir nulles.

Saskaņā ar hiperplaknes definīciju katras hiperplaknes vienādojums tātad ir lineārs algebrisks vienādojums. Otrādi, katrs lineārs algebrisks vienādojums izraudzītājā telpas bāzē attēlo hiperplakni. Piemēram, taisne plaknē ir hiperplaknē telpā  $R_2$ .

#### 204. § Jēdziens par nogriezni lineārā $n$ dimensiju telpā.

Pieņemsim, ka telpā  $R_n$  dots punkts  $A(x_{11}; x_{21}; \dots; x_{n1})$  ar savu rādiusvektoru  $\vec{x}_1 = \{x_{11}; x_{21}; \dots; x_{n1}\}$  un punkts  $B(x_{12}; x_{22}; \dots; x_{n2})$  ar savu rādiusvektoru  $\vec{x}_2 = \{x_{12}; x_{22}; \dots; x_{n2}\}$ .

**Definīcija.** Par nogriezni, kas šavieno punktus  $A(\vec{x}_1)$  un  $B(\vec{x}_2)$  telpā  $R_n$ , sauc visu to punktu kopu, kuru rādiusvektorus  $\vec{x}$  noteic ar formulu<sup>1</sup>

$$\vec{x} = (1-t)\vec{x}_1 + t\vec{x}_2, \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (24.54)$$

jeb

$$\vec{x} = t_1\vec{x}_1 + t_2\vec{x}_2, \quad (t_1 + t_2 = 1). \quad (24.45)$$

Apzīmēsim kādai parametra  $t$  vērtībai atbilstošā rādiusvektora  $\vec{x}$  koordinātes ar  $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$  un pieņemsim, ka  $\vec{x}$  ir punkta

<sup>1</sup> Šīs formulas ir formulas (19.54) vispārinājums. Tādēļ pirms 204. § lasīšanas jāatkārtō 156. § 6°.

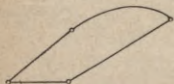


$\vec{C}(x)$  rādiusvektors. Tad var apgalvot, ka šis punkts atrodas uz nogriežņa  $AB$  (sk. 154. zīm. a).

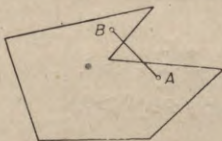
Saskaņā ar vektoriālo vienādību (24.54) un vektoru vienādības definīciju punkta  $C$  koordinātes aprēķināmas ar formulām

$$x_i = (1-t)x_{i1} + tx_{i2}, \quad (i=1, 2, \dots, n; 0 \leq t \leq 1). \quad (24.56)$$

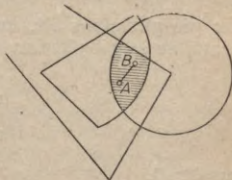
**205. §. Izliekta punktu kopa.** Definīcija. Par izliektu sauc tādu telpas  $R_n$  punktu kopu  $T$ , kurai bez punktiem  $A \in T$  un  $B \in T$  pieder jebkurš nogriežņa  $AB$  punkts.



191. zīm.



192. zīm.



193. zīm.

Saskaņā ar definīciju izliekta punktu kopa vispirms ir jebkurš nogrieznis  $AB$ , kas definēts ar formulu (24.54) jeb ar formulām (24.56).

Izliektas punktu kopas telpā  $R_2$  ir, piemēram, plaknes daļa, kas atrodas kādā trijstūrā, paralelogramā, regulāra daudzstūrā, elipses, ieliekta lēnča, parabolas, 191. zīm. attēlotās figūras iekšpusē. Turpretim 192. zīm. attēlotās figūras iekšpusē ieslēgtie plaknes punkti nav izliekta punktu kopa, jo ne visi zīmējumā attēlotā nogriežņa  $AB$  punkti pieder pie šīs punktu kopas.

Izliektu punktu kopu piemēri telpā  $R_3$  ir, piemēram, telpas daļa, kas atrodas tetraedra, kuba, piramīdas, elipsoīda, trijplakņu kakta iekšpusē.

**Definīcija.** Visu to punktu kopu, kas pieder pie divām vai vairākām izliektu punktu kopām, sauc par *šķēlumu*.

Katrš izliektu punktu kopu šķēlums arī ir izliekta punktu kopa (193. zīm.).

**206. §. Pustelpas jēdziens.** Analogi tam, kā katra plaknē novilkta taisne sadala plakni divās pusplaknēs, katra hiperplakne sadala telpu  $R_n$  divās pustelpās. Ja kāda telpas  $R_n$  punkta  $P(\vec{x}_0)$  koordinātes ievieto dotajā hiperplaknes vienādojumā  $\vec{a} \cdot \vec{x} - b = 0$ , kur  $b \geq 0$ , tad dabū skaitli  $v = \vec{a} \cdot \vec{x}_0 - b$ . Skaitlis  $v$  vienāds ar 0 tad un tikai tad, ja punkts  $P(\vec{x}_0)$  atrodas uz hiperplaknes. Visos citos gadījumos  $v \neq 0$  un pastāv viena no nevienādībām  $v > 0$  vai  $v < 0$ .

Teorēma. Pustel pa, kuru norobežo jebkura hiperplakne, ir izliekta punktu kopa.

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \vec{a} \cdot \vec{x}_1 - b \geq 0, \\ v_2 &= \vec{a} \cdot \vec{x}_2 - b \geq 0, \end{aligned} \right\} \quad (24.57)$$

Lai pierādītu, ka pustelpa  $T^+$ , kuru norobežo dotā hiperplakne  $\vec{a} \cdot \vec{x} - b = 0$ , ir izliekta punktu kopa, pietiek pierādīt, ka katrs nogriežņa  $AB$  punkts  $C(\vec{x})$  pieder pie pustelpas  $T^+$ . Saskaņā ar nogriežņa  $AB$  definīciju jebkura šī nogriežņa punkta  $C(\vec{x})$  koordinātes aprēķina ar formulu (24.54). Ievietojot vektoru  $\vec{x}$  no formulas (24.54) hiperplaknes vienādojumā, dabū  $v = \vec{a} \cdot [(1-t)\vec{x}_1 + t\vec{x}_2] - b$ . Atņemot un pieskaitot šīs izteiksmes labajai pusei skaitli  $(1-t)b + tb$ , dabū  $v = (1-t)\vec{a} \cdot \vec{x}_1 + t\vec{a} \cdot \vec{x}_2 - (1-t)b - tb + (1-t)b + tb - b = (1-t)(\vec{a} \cdot \vec{x}_1 - b) + t(\vec{a} \cdot \vec{x}_2 - b)$ . Ievērojot nevienādības (24.57) un to, ka  $0 \leq t \leq 1$ , secinām, ka arī pārējie iekavās ieslēgtie lielumi ir nenegatīvi un līdz ar to  $v \geq 0$ . Tātad jebkurš nogriežņa  $AB$  punkts  $C$  pieder pie pustelpas  $T^+$ .

**S e k a s.** Dažādu hiperplakņu norobežoto pustelpu šķēlums neatkarīgi no šo pustelpu skaita ir izliekta punktu kopa.

[illegible]



Pareizinot jebkuras nevienādības abas puses ar  $-1$ , mainās nevienādības zīme. Tādēļ vienmēr pastāv iespēja pārveidot doto nevienādību sistēmu tā, lai visi tās brīvie locekļi  $b_1, b_2, \dots, b_m$  būtu ar vienādām zīmēm. Tādā gadījumā, protams, var rasties nevienādību sistēma ar dažādi vērstām nevienādību zīmēm, t. i., ar zīmēm « $\leq$ » vai « $\geq$ ». Otrādi, ja nevienādību zīmes dotajā sistēmā ir dažādas, tad vienmēr pastāv iespēja pārveidot šo nevienādību sistēmu formā (24.58). Tādā gadījumā, protams, brīvajiem locekļiem var izrādīties dažādas zīmes.

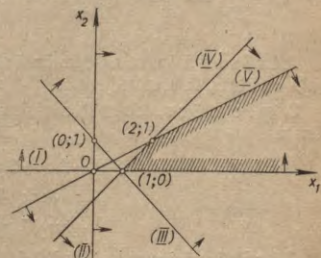
Ja dotā nevienādību sistēmā ir  $n$  nezināmo, tad par tās atrisinājumu apgabalu sauc visu to  $n$  dimensiju telpas punktu kopu, kuru koordinātes apmierina visas dotās nevienādības.

Atvietojot dotajā nevienādību sistēmā visas nevienādības zīmes « $\leq$ » vai « $\geq$ » ar vienādības zīmēm « $=$ », rodas lineāru vienādojumu sistēma ar  $n$  nezināmajiem. Katrs no šiem vienādojumiem izsaka kādu hiperplakni, kura sadala telpu divās puslaspēs, kas ir izliektas punktu kopas. Noteikta skaita hiperplakņu norobežoto puslaspes šķēlums, ja tajā ietilpst kaut viens punkts, ir izliekta punktu kopa. So izliekto punktu kopu sauc par izliektu daudzskaldni telpā  $R_n$ .

Ja nevienādību sistēma ar  $n$  nezināmajiem ir saderīga, tad tās atrisinājumu apgabals ir izliekts daudzskaldnis telpā  $R_n$ .

Ja nezināmo skaits nav lielāks par 2, nevienādību sistēmas atrisinājumu apgabalu var noteikt grafiski. Tādā gadījumā «hiperplaknes» ir taisnes plaknē, «puslaspes» ir pusplaknes. To šķēlums ir kāds izliekts daudzstūris, kuram var iztrūkt viena mala. Šim daudzstūrim piešķirīgie punkti ir nevienādību sistēmas atrisinājumu apgabals.

1. piemērs. Atrast atrisinājumu apgabalu nevienādību sistēmai



194. zīm.

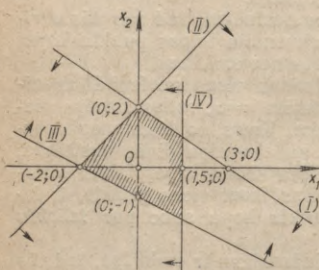
$$\left. \begin{aligned} x_1 &\geq 0, \\ x_2 &\geq 0, \\ x_1 + x_2 &\geq 1, \\ -x_1 + x_2 &\leq -1, \\ x_2 - 2x_1 &\geq 0. \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &(I) \\ &(II) \\ &(III) \\ &(IV) \\ &(V) \end{aligned}$$

Atrisinājums. Atvietojot visas nevienādības zīmes ar vienādības zīmēm, dabū 5 dažādu taisņu vienādojumus. Šīs 5 taisnes attēlotas 194. zīmējumā un nevienādību sistēmas atrisinājumu apgabals parādīts ar svītrojumu.

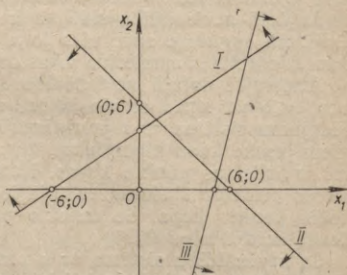


2. piemērs. Atrast atrisinājumu apgabalu nevienādību sistēmai

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 6, & (I) \\ -x_1 + x_2 &\leq 2, & (II) \\ -x_1 - 3x_2 &\leq 3, & (III) \\ x_1 &\leq 1,5. & (IV) \end{aligned} \right\}$$



195. zīm.



196. zīm.

Atrisinājums. Nevienādību sistēmas atrisinājumu apgabals attēlots 195. zīmējumā.

3. piemērs. Atrast atrisinājumu apgabalu nevienādību sistēmai

$$\left. \begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 &\geq 12, & (I) \\ x_1 + x_2 &\leq 6, & (II) \\ 4x_1 - x_2 &\geq 20. & (III) \end{aligned} \right\}$$

Atrisinājums. Atvietojoiet visas nevienādības zīmes ar vienādības zīmēm, dabū trīs taisņu vienādojumus. Šīs taisnes attēlotas 196. zīmējumā. Zīmējumā ar bultiņām norādītas tās pusplaknes, kurām piederīgo punktu koordinātes apmierina attiecīgo nevienādību. No zīmējuma redzams, ka nav neviena tāda punkta, kas būtu kopīgs visām trim pusplaknēm. Tādēļ nevienādību sistēma ir nesaderīga.

### Vingrinājumi

1. Atrisināt vektoriālu vienādojumu  $2\vec{x} + 3\vec{a} = 5\vec{b}$ , ja  $\vec{a} = \{3; 2; 1\}$ ,  $\vec{b} = \{1; 5; 6\}$ .
2. Parādīt, ka vektori  $\{2; 1; 2; 0\}$ ,  $\{3; 0; 4; 3\}$ ,  $\{1; 4; 1; 2\}$  ir lineāri neatkarīgi, bet vektori  $\{2; 3; 1\}$ ,  $\{1; 0; 4\}$ ,  $\{2; 4; 1\}$ ,  $\{0; 3; 2\}$  lineāri atkarīgi.

3. Izteikt vektoru  $\vec{c} = \{4; 5\}$  kā vektoru  $\vec{a} = \{1; 3\}$  un  $\vec{b} = \{2; 2\}$  lineāru kombināciju. Attēlot vektorus  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  un vektora  $\vec{c}$  komponentes bāzē  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  grafiski.

4. Kāds ir vektoru sistēmas  $\vec{a} = \{6; 1; 2; -3\}$ ,  $\vec{b} = \{1; -2; 1; 1\}$ ,  $\vec{c} = \{3; 7; -1; -6\}$ ;  $\vec{d} = \{1; 1; 0; 0\}$  rangs?

5. Dabūt atrisinājumu fundamentālo sistēmu un noteikt koeficientu kolonnas rangus homogēnām vienādojumu sistēmām.

$$\text{a) } \left. \begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 &= 0, \\ 4x_1 - 5x_2 - 6x_3 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

$$\text{b) } \left. \begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 &= 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

## 25. NODAĻA

### MATRICAS

#### 208. §. Pamata jēdzieni un simbolika.

Paplašinot analītiskajā ģeometrijā lietotā vektora jēdzienu, iepriekšējā nodaļā noskaidrojām, ka jebkura  $n$  skaitļu kopa, kuras elementi  $a_i$ , ( $i=1, 2, \dots, n$ ) sakārtoti rindā  $(a_1; a_2; \dots; a_n)$  vai kolonnā  $\{a_1; a_2; \dots; a_n\}$ , ir lielums, kuru apzīmējam ar  $\vec{a}$  un nosaucām par  $n$  dimensiju vektoru. Dotie skaitļi  $a_i$ , ( $i=1, 2, \dots, n$ ), kuras sauc par vektora koordinātēm, izvēlētajā telpas  $R_n$  bāzē cits no cita atšķiras ar vienu indeksu  $i=1, 2, \dots, n$ . Jau 19. gs. tika noskaidrots, ka vektori ir ļoti šaura neskalāru lielumu — t. s. tenzoru — klase. Vispārīgajā gadījumā indeksu skaits var būt divi, trīs un vairāk:  $a_{ijk}, \dots$ . Tenzorus, kuru koordinātes cita no citas atšķiras ar diviem indeksiem, sauc par otrā ranga tenzoriem. Otrā ranga tenzora koordinātes izvēlētajā bāzē var sakārtot kvadrātiskā skaitļu tabulā

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (25.1)$$

Šādā tabulā pirmais indekss norāda rindu, bet otrs kolonu, pie kuras pieder otrā ranga tenzora koordināte  $a_{ik}$ , ( $i=1, 2, \dots, n$ ;  $k=1, 2, \dots, n$ ). Piemēram,  $a_{23}$  ir koordināte, kas atrodas tabulas otrās rindas un trešās kolonas krustojumā. Ieslēdzot tabulu iekavās, tiek pasvītrots, ka šī tabula ir patstāvīgs matemātisks objekts, kuru sauc par *matricu*. Ar vārdu matrica 19. nodaļā tika apzīmēta divu vektoru koordinātu tabula (19.67). Ar to pašu vārdu 23. nodaļā nosaucām lineāru algebrisku vienādojumu sistēmas koeficientu tabulu. Neatkarīgi no šī termina izmantošanas

līdzšinējā kursā definēsim matricu kā patstāvīgu algebrisku objektu  $A$ , ar kuru var izpildīt noteiktas algebriskas operācijas.

**Definīcija.** Reālu skaitļu kopu  $A$ , kurā ir  $m \cdot n$  skaitļi  $a_{ik}$ , ( $i=1, 2, \dots, m$ ;  $k=1, 2, \dots, n$ ), kas sakārtoti  $m$  rindās un  $n$  kolonās, sauc par *matricu* un apzīmē ar

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (25.2)$$

jeb saīsināti

$$A = (a_{ik}). \quad (25.3)$$

Matricu apzīmēšanai lieto arī simbolus:

$$\|a_{ik}\| = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \right\| \quad \text{jeb} \quad \left[ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \right] = [a_{ik}]$$

Skaitļus  $a_{ik}$  sauc par *matricas elementiem*. Matricu, kuras visi elementi ir nulles, sauc par *nullmatricu*. To apzīmē ar  $O$ .

Matricu  $A$ , kurai ir  $m$  rindas un  $n$  kolonas, sauc par  $(m \cdot n)$  tipa taisnstūra matricu. Matricas  $A$  tipu  $(m \cdot n)$  saīsināti apzīmēsim ar  $\tau(A)$  vai arī, pievienojot rindu un kolonu skaitu kā divus iekavās ielēgtus un ar punktu atdalītus indeksus, matricas simboliskajiem apzīmējumiem, t. i.,  $A_{(m,n)} = (a_{ik})_{(m,n)}$ .

Piemēram, matricu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad C = (2 \quad -3 \quad 0); \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (25.4)$$

tipi ir  $\tau(A) = (3 \cdot 2)$ ;  $\tau(B) = (2 \cdot 1)$ ;  $\tau(C) = (1 \cdot 3)$ , un  $O$  ir  $(2 \cdot 3)$  tipa nullmatrica.

$(n \cdot 1)$  tipa matricai ir tikai viena kolona ar  $n$  skaitļiem. Šāda matrica  $A_{(n,1)} = (a_{ik})_{(n,1)}$  ir  $n$  dimensiju telpas vektors (*kolona*)  
 $\rightarrow$   
 $a_k = \{a_{1k}; a_{2k}; \dots; a_{nk}\}.$

Līdzīgi  $(1 \cdot n)$  tipa matricai ir tikai viena rinda ar  $n$  skaitļiem. Šāda matrica  $A_{(1,n)} = (a_{ik})_{(1,n)}$  ir  $n$  dimensiju telpas vektors (*rinda*)  
 $\rightarrow$   
 $a^i = (a_{i1}; a_{i2}; \dots; a_{in}).$

**Definīcija.** Divas matricas  $A = (a_{ik})$  un  $B = (b_{ik})$  sauc par *vienādām* tad un tikai tad, ja tām ir vienāds tips  $\tau(A) = \tau(B)$  un  $a_{ik} = b_{ik}$  visiem  $i=1, 2, \dots, m$ ;  $k=1, 2, \dots, n$ .

Ja kādas matricas  $A$  rindas samaina ar tās kolonām, tad dabū jaunu matricu  $A^T$ , kuru sauc par *transponēto matricu*. Var rakstīt  $(a_{ik})^T = (a_{ki}).$



Piemēram, skaitļu tabulas (24.43) un (24.44) ir savstarpēji transponētas matricas. Piemēros (25.4) doto matricu transponētās matricas ir

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B^T = (0 \quad 1); \quad C^T = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad O^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Katru  $(m \cdot n)$  tipa matricas kolonu var uzskatīt par  $m$  dimensiju vektoru, kas ietilpst kādā telpas  $R_m$  vektoru sistēmā. Analogi katru  $(m \cdot n)$  tipa matricas rindu var uzskatīt par  $n$  dimensiju vektoru, kas ietilpst kādā telpas  $R_n$  vektoru sistēmā. Apzīmēsim matricas  $A = (a_{ik})_{(m,n)}$  rindas ar  $\vec{a}^1, \vec{a}^2, \dots, \vec{a}^m$ , bet kolonas ar  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ . Tad varam rakstīt:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a}^1 \\ \vec{a}^2 \\ \vdots \\ \vec{a}^m \end{pmatrix}.$$

Matricu, kuras rindu un kolonu skaits ir vienādi, sauc par *kvadrātisku matricu*. Rindu vai kolonu skaitu kvadrātiskā matricā sauc par tās *kārtu*. Piemēram, matrica (25.1) ir  $n$ -tās kārtas kvadrātiskā matrica.

Kvadrātiskas matricas  $(a_{ik})_{(n,n)}$  elementus  $a_{ii}$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , t. i., visus tos elementus, kam abi indeksi vienādi, sauc par *galvenās diagonāles* elementiem.

Kvadrātisku matricu  $A = (a_{ik})$ , kura ir vienāda ar savu transponēto matricu  $A^T = (a_{ki})$ , sauc par *simetrisku matricu*. Tāda, piemēram, ir matrica

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 3 & 14 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Šīs matricas galvenās diagonāles elementi ir  $a_{11}=7$ ,  $a_{22}=14$ ,  $a_{33}=1$ . Simetriskai matricai pret galveno diagonāli simetriskie elementi ir pa pāriem vienādi, t. i., pastāv  $a_{ik}=a_{ki}$ . Piemēram,  $a_{21}=a_{12}=3$ ,  $a_{31}=a_{13}=5$ ,  $a_{32}=a_{23}=0$ .

Kvadrātisku matricu, kurai visi elementi ir nulles, izņemot galvenās diagonāles elementus, sauc par *diagonālmaticu*.

Diagonālmaticu, kuras visi galvenās diagonāles elementi ir vieninieki, sauc par *vienības matricu*. To apzīmēsim ar

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

**209. §. Matricu summa un reizinājums ar skaitli.** Divas matricas  $A = (a_{ik})$  un  $B = (b_{ik})$  var saskaitīt, ja to tipi ir vienādi. Divas dažāda tipa matricas nav saskaitāmas.

**Definīcija.** Par divu vienāda tipa matricu  $A = (a_{ik})_{(m,n)}$  un  $B = (b_{ik})_{(m,n)}$  summu sauc matricu  $A+B=C$ , kuras tips ir vienāds ar matricu  $A$  un  $B$  tipu, un tās elementi  $c_{ik}$ , ( $i=1, 2, \dots, m$ ;  $k=1, 2, \dots, n$ ) ir matricu  $A$  un  $B$  attiecīgo elementu summas, t. i.,

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}.$$

Saskaņā ar šo definīciju

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}. \quad (25.5)$$

Piemēram,

$$\begin{pmatrix} x & 2 & -1 \\ u & 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & -1 & 4 \\ -v & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & 1 & 3 \\ u-v & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

**Definīcija.** Par matricas  $A = (a_{ik})_{(m,n)}$  reizinājumu ar reālu skaitli  $\lambda$  sauc matricu  $C = (c_{ik})_{(m,n)}$ , kuras tips ir vienāds ar matricas  $A$  tipu, un tās elementi  $c_{ik}$ , ( $i=1, 2, \dots, m$ ;  $k=1, 2, \dots, n$ ) ir matricas  $A$  elementu reizinājumi ar skaitli  $\lambda$ , t. i.,  $c_{ik} = \lambda a_{ik}$ .

Saskaņā ar šo definīciju

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \quad (25.6)$$

Piemēram,

$$\lambda \begin{pmatrix} x & 2 & -1 \\ u & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x & 2\lambda & -\lambda \\ \lambda u & 3\lambda & 5\lambda \end{pmatrix}.$$

Viegli pārliecināties, ka ar formulām (25.5) un (25.6) definētai matricu summai un matricas reizinājumam ar skaitli piemīt visas 192. § uzskaitītās vektoru lineāro operāciju īpašības 1°—8° un bezgalīga kopa, kuru veido visas vienāda tipa matricas, arī ir lineāra vektoru telpa.

Tādēļ lineāras algebriskas operācijas ar vienāda tipa matricām izpildāmas tā, kā izpilda šīs operācijas ar  $n$  dimensiju vektoru telpai piederīgiem vektoriem.

Piemērs.

$$2 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} + 0,5 \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 8 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 2+1 & 6+2 & 4+3 \\ 8+3 & -2+2 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 7 \\ 11 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

210. §. Matricu reizināšana. Divas matricas  $A_{(m,n)} = (\vec{a}_1 \vec{a}_2 \dots \vec{a}_n)$

un  $B_{(n,p)} = (\vec{b}^1 \vec{b}^2 \dots \vec{b}^p)$  var sareizināt, ja pirmās matricas  $A$  kolonu skaits ir vienāds ar otrās matricas  $B$  rindu skaitu. Ja pirmās matricas  $A$  kolonu skaits nav vienāds ar otrās matricas  $B$  rindu skaitu, tad matricu  $A$  un  $B$  reizinājums neeksistē.

Definīcija. Par  $(m \cdot n)$  tipa matricas  $A = (a_{ik})_{(m,n)}$  reizinājumu ar  $(n \cdot p)$  tipa matricu  $B = (b_{ik})_{(n,p)}$  sauc  $(m \cdot p)$  tipa matricu  $C$ , kuras elementi  $c_{ik}$  ir matricas  $A$   $i$ -tās rindas  $\vec{a}^i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$  un matricas  $B$   $k$ -tās kolonas  $\vec{b}_k = \{b_{1k}, b_{2k}, \dots, b_{nk}\}$  skalāri reizinājumi:

$$c_{ik} = \vec{a}^i \cdot \vec{b}_k \quad (25.6)$$

jeb

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}.$$

Saskaņā ar šo definīciju

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a}^1 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}^1 \cdot \vec{b}_2 & \dots & \vec{a}^1 \cdot \vec{b}_p \\ \vec{a}^2 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}^2 \cdot \vec{b}_2 & \dots & \vec{a}^2 \cdot \vec{b}_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vec{a}^m \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}^m \cdot \vec{b}_2 & \dots & \vec{a}^m \cdot \vec{b}_p \end{pmatrix} \quad (25.7)$$

Matricu  $A$  un  $B$  reizinājumu apzīmē ar  $AB = C$  jeb  $A \cdot B = C$ .

Piemērs: Pareizināt doto (4.2) tipa matricu  $A$  ar doto (2.3) tipa matricu  $B$ , ja

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Atrisinājums. Matricas  $A$  un  $B$  var sareizināt, jo matricas  $A$  kolonu skaits 2 ir vienāds ar matricas  $B$  rindu skaitu. Reizinājuma  $A_{(4,2)} \cdot B_{(2,3)} = C_{(4,3)}$  rindu skaits 4 ir vienāds ar matricas  $A$  rindu skaitu, un kolonu skaits 3 ir vienāds ar matricas  $B$  kolonu skaitu<sup>1</sup>:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 18 \\ 2 & 6 & 13 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad (25.8)$$

<sup>1</sup> Matricu reizinājuma tipa noteikšanai noder t. s. tipu vienādojums:  $(m \cdot n) \times (s \cdot p) = (m \cdot p)$ , ja  $n = s$ . Ja  $n \neq s$ , reizinājums neeksistē. Piemēram,  $(m \cdot 3) \times (3 \cdot p) = (m \cdot p)$ , bet  $(m \cdot 3) \times (1 \cdot p) \neq (m \cdot p)$ .



jeb

$$A \cdot B = C.$$

Sajā konkrētajā piemērā, lai atrastu visus 12 reizinājuma matricas  $C$  elementus  $c_{ik}$ , izskaitļoti 12 divdimensiju vektoru skalārie reizinājumi. Piemēram, lai dabūtu matricas elementu  $c_{13}=18$ , t. i., to elementu, kas atrodas šīs matricas 1. rindas un 3. kolonas krustojumā, tad saskaņā ar formulu (25.6) skalāri sareizinātas matricas  $A$  pirmā rinda  $\vec{a}^1=(3; 4)$  ar matricas  $B$  trešo kolonu  $\vec{b}_3=\{2; 3\}$ . Tiešām,  $\vec{a}^1 \cdot \vec{b}_3 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 18$ . Analogi,  $c_{33} = \vec{a}^3 \cdot \vec{b}_3 = (0; 1) \cdot \{2; 3\} = 3$ ;  $c_{42} = \vec{a}^4 \cdot \vec{b}_2 = 0$  utt.

No matricu reizinājuma definīcijas un iztirzātā piemēra redzams, ka šim reizinājumam, ja tāds eksistē, vispārīgajā gadījumā nepiemīt komutatīvā īpašība, t. i., vispār  $AB \neq BA$ .

Ja  $A$  un  $B$  ir vienādas kārtas kvadrātiskās matricas, tad vispārīgā gadījumā eksistē divi dažādi reizinājumi:  $AB$  un  $BA$ . Atsevišķā gadījumā, ja  $AB=BA$ , matricas  $A$  un  $B$  sauc par savstarpēji komutatīvām matricām.

Paskaidrosim teikto ar piemēriem.

1.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

jeb

$$A \cdot B = C.$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

jeb

$$B \cdot A = D.$$

Kā redzams,

$$AB \neq BA, \text{ jo } C \neq D.$$

2.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 13 \\ -13 & 13 \end{pmatrix}$$

jeb

$$A \cdot B = C.$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 13 \\ -13 & 13 \end{pmatrix}$$

jeb

$$B \cdot A = C.$$

Tātad otrajā piemērā dotās otrās kārtas matricas  $A$  un  $B$  ir savstarpēji komutatīvas, jo  $AB=BA$ .

Matricas definīcija un lineārās algebriskās operācijas ar matricām (summa un reizinājums ar skaitli), kā arī matricu reizinājums cieši saistās ar lineāru algebrisku vienādojumu sistēmu atrisināšanu. Tas savukārt atrod plašus pielietojumus visdažādākos praktiskās dzīves jautājumos. Ilustrēsim to ar vienkāršotu piemēru, kas noskaidro, kādēļ divu matricu reizinājums definēts tādā formā, kura pirmā brīdī šķiet mākslota un visai komplicēta, turklāt visu reizinājuma elementu aprēķināšana nenoliedzami ir visai darbietilpīgs process.

Pieņemsim, ka četru dažādu produkcijas veidu  $Z_1, Z_2, Z_3$  un  $Z_4$  ražošanai nepieciešami divi dažādi starpprodukcijas veidi  $y_1$  un  $y_2$ , bet starpproduktu ražošanai savukārt vajadzīgas 3 dažādas izejvielas  $x_1, x_2$  un  $x_3$ , turklāt šādos daudzumos:

katrai produkcijas  $Z_1$  vienībai:

3 starpprodukta  $y_1$  un 4 starpprodukta  $y_2$  vienības,

katrai produkcijas  $Z_2$  vienībai:

2 starpprodukta  $y_1$  un 3 starpprodukta  $y_2$  vienības,

katrai produkcijas  $Z_3$  vienībai:

0 starpprodukta  $y_1$  un 1 starpprodukta  $y_2$  vienība,

katrai produkcijas  $Z_4$  vienībai:

3 starpprodukta  $y_1$  un 0 starpprodukta  $y_2$  vienības,

katrai starpprodukta  $y_1$  vienībai:

1 izejvielas  $x_1$  un 2 izejvielas  $x_3$  vienības,

katrai starpprodukta  $y_2$  vienībai:

2 izejvielas  $x_2$  un 3 izejvielas  $x_3$  vienības.

Lai noskaidrotu, cik un kāds izejvielu vienību daudzums nepieciešams vienas gala produkcijas vienības ražošanai, jāatrisina šādas lineāru algebrisku vienādojumu sistēmas:

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= 3y_1 + 4y_2, \\ z_2 &= 2y_1 + 3y_2, \\ z_3 &= y_2, \\ z_4 &= 3y_1. \end{aligned} \right\} \quad (25.9) \quad \left. \begin{aligned} y_1 &= x_1 + 2x_3, \\ y_2 &= 2x_2 + 3x_3. \end{aligned} \right\} \quad (25.10)$$

So divu vienādojumu sistēmu koeficientu matricas ir vienādas ar matricām  $A_{(4,2)}$  un  $B_{(2,3)}$ , kas ir reizinātāji piemērā (25.8). Ievietojot  $y_1$  un  $y_2$  izteiksmes no (25.10) vienādojumu sistēmā (24.9), dabū jaunu vienādojumu sistēmu

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= 3x_1 + 8x_2 + 18x_3, \\ z_2 &= 2x_1 + 6x_2 + 13x_3, \\ z_3 &= 2x_2 + 3x_3, \\ z_4 &= 3x_1 + 6x_3. \end{aligned} \right\} \quad (25.11)$$

Šī sistēma sniedz atbildi uz jautājumu, cik un kāds izejvielu vienību daudzums nepieciešams vienas gala produkcijas vienības ražošanai. Vienādojumu sistēmas (25.11) koeficientu matricu

produkcijas plānošanā mēdz saukt arī par patēriņa matricu. Šī matrica, kā redzams, ir vienāda ar matricu  $C_{(4,3)}$ , kas atrasta piemērā (25.8) kā matricu  $A_{(4,2)}$  un  $B_{(2,3)}$  reizinājums.

Pieņemsim, ka vienādojumu sistēmā (25.11) mainīgie  $x_1, x_2, x_3$  savukārt ir kādu citu argumentu lineāras funkcijas, piemēram,

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 3t_1 + 2t_2, \\ x_2 &= t_1, \\ x_3 &= t_2. \end{aligned} \right\} \quad (25.12)$$

Ievietojot  $x_1, x_2, x_3$  no izteiksmēm (25.12) vienādojumu sistēmā (25.11), dabū jaunu vienādojumu sistēmu

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= 17t_1 + 24t_2, \\ z_2 &= 12t_1 + 17t_2, \\ z_3 &= 2t_1 + 3t_2, \\ z_4 &= 9t_1 + 12t_2. \end{aligned} \right\} \quad (25.13)$$

Vienādojumu sistēmas (25.13) matrica  $G_{(4,2)}$ , kā viegli pārliecināties, ir sistēmas (24.11) un (25.12) matricu  $C_{(4,3)}$  un  $D_{(3,2)}$  reizinājums, t. i.,

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 & 18 \\ 2 & 6 & 13 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 24 \\ 12 & 17 \\ 2 & 3 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

jeb

$$C_{(4,3)} \cdot D_{(3,2)} = G_{(4,2)}.$$

Tā kā  $C_{(4,3)} = A_{(4,2)} \cdot B_{(2,3)}$ , tad  $A_{(4,2)} B_{(2,3)} D_{(3,2)} = G_{(4,2)}$ . To pašu rezultātu (25.13) dabū, ja mainīgos  $x_1, x_2, x_3$  no sistēmas (25.12) ievieto sistēmā (24.10) un pēc tam sistēmā (24.9). Tādēļ *matricu reizinājumam* piemīt asociatīva īpašība:

$$(AB)D = A(BD).$$

Matricu reizinājuma transponēšanas operācijai ir šāda īpašība:

$$(AB)^T = B^T A^T. \quad (25.14)$$

Katras  $(m \cdot n)$  tipa matricas  $A$  reizinājums ar nullmatricu  $O_{(n,p)}$  ir  $(m \cdot p)$  tipa nullmatrica, un  $(m \cdot n)$  nullmatricas  $O_{(m,n)}$  reizinājums ar katru  $(n \cdot p)$  tipa matricu ir nullmatrica  $O_{(m,p)}$ .

Piemēri.

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 12 & 3 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kvadrātiska  $n$ -tās kārtas nullmatrica  $O$  ir komutatīva ar jebkuru tās pašas kārtas matricu:  $AO = OA = O$ .



Katras  $(m \cdot n)$  tipa matricas  $A$  reizinājums ar  $n$ -tās kārtas vienības matricu  $E_n$  ir matrica  $A$ , un vienības matricas  $E_m$  reizinājums ar katru  $(m \cdot p)$  tipa matricu  $A$  ir šī matrica  $A$ .

Piemēri.

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \\ 12 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \\ 12 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

Kvadrātiska  $n$ -tās kārtas vienības matrica  $E$  ir komutatīva ar jebkuru tās pašas kārtas matricu  $A$ , t. i.,

$$EA = AE = A.$$

Divu matricu  $A$  un  $B$  reizinājums var būt nullmatrica arī tad, ja  $A \neq O$  un  $B \neq O$ . Piemēram,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Šādas īpašības, kā zināms, nav divu reālu skaitļu  $a$  un  $b$  reizinājumam, jo, ja  $ab=0$ , tad vai nu  $a=0$ , vai  $b=0$ , vai arī  $a=b=0$ .

**211. §. Matricas rangs.** Iepriekšējās nodaļas noslēgumā tika pierādīta teorēma, ka tādu vektoru sistēmas rangs, kuru koordinātes ir kādā taisnstūra skaitļu tabulā ierakstīto reālo skaitļu kolonas, ir vienāds ar tās pašas tabulas rindu (vektoru) sistēmas rangu.

**Definīcija.** Par matricas  $A = (a_{ik})_{(m,n)}$  *rangu* sauc mazāko no tās kolonu sistēmas  $\begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ (a_1 & a_2 & \dots & a_n) \end{matrix}$  vai rindu sistēmas  $\{\vec{a}^1 \vec{a}^2 \dots \vec{a}^m\}$  rangiem, tātad

$$r(A) \leq \min(m, n).$$

Divas matricas  $A$  un  $B$  sauc par *ekvivalentām*, ja tām ir vienādi rangi.

Ja matricu  $B$  var dabūt no matricas  $A$ , izpildot šādas operācijas:

- 1° samainot vietām jebkuras divas paralēlas kolonas (rindas);
- 2° pareizinot jebkuru kolonu (rindu) ar patvaļīgu reālu skaitli, kas nav nulle;
- 3° pareizinot kādu kolonu (rindu) ar patvaļīgu skaitli un piešķatot iegūto reizinājumu jebkurai paralēlai kolonai (rindai);
- 4° nosvītrojot kolonu (rindu), kurā ir tikai nulles; tad saka, ka matrica  $B$  rodas no matricas  $A$  ar elementārajām transformācijām. Operācijas 1°–4° sauc par *matricas elementārajām transformācijām*.

**1. teorēma.** *Elementārās transformācijas nemaina matricas rangu.*

Pierādījums. Teorēmas apgalvojumi 1. un 4. elementārās transformācijas gadījumā ir acīm redzami, jo vektoru sistēmas rangs nav atkarīgs no tā, kādā kārtībā uzraksta vektorus, ne arī no tā, cik nullvektoru izmet vai pievieno kādai vektoru sistēmai.

2. elementārās transformācijas gadījumā, kad kādu matricas  $A = (\vec{a}_1 \vec{a}_2 \dots \vec{a}_n)$  kolonu, piemēram,  $\vec{a}_1$ , pareizina ar skaitli  $\lambda \neq 0$ , dabū jaunu matricu  $B = (\lambda \vec{a}_1 \vec{a}_2 \dots \vec{a}_n) = (\vec{b}_1 \vec{b}_2 \dots \vec{b}_n)$ . Tā kā  $\vec{b}_1 = \lambda \vec{a}_1$  jeb  $\vec{a}_1 = \frac{1}{\lambda} \vec{b}_1$ , bet  $\vec{a}_2 = \vec{b}_2$ ,  $\vec{a}_3 = \vec{b}_3$ , ...,  $\vec{a}_n = \vec{b}_n$ , tad visas matricas  $A$  kolonas ir matricas  $B$  kolonu lineāras kombinācijas, un otrādi, matricas  $B$  kolonas ir matricas  $A$  kolonu lineāras kombinācijas. Tādēļ 2. elementārā transformācija nevar izmainīt matricas rangu.

3. elementārās transformācijas gadījumā, kad kādu matricas  $A$  kolonu, piemēram,  $\vec{a}_2$ , pareizina ar skaitli  $\lambda$  un pieskaita, piemēram, kolonai  $\vec{a}_1$ , dabū jaunu matricu  $B = (\vec{b}_1 \vec{b}_2 \dots \vec{b}_n) = (\vec{a}_1 + \lambda \vec{a}_2 \vec{a}_2 \dots \vec{a}_n)$ . Arī šajā gadījumā matricas  $B$  kolonas ir matricas  $A$  kolonu lineāras kombinācijas:  $\vec{b}_1 = \vec{a}_1 + \lambda \vec{a}_2$  jeb  $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 - \lambda \vec{a}_2$ ,  $\vec{a}_2 = \vec{b}_2$ , ...,  $\vec{a}_n = \vec{b}_n$ . Tādēļ arī 3. elementārā transformācija nevar izmainīt matricas rangu, un visas matricas, kuras citu no citas dabū ar elementārām transformācijām, ir ekvivalentas.

Tā kā matricas kolonu sistēmas rangs ir vienāds ar tās rindu sistēmas rangu, tad šī teorēma un tās pierādījums attiecas arī uz matricas rindu sistēmu.

Piemēram, matricas

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

ir ekvivalentas, jo tās citu no citas var dabūt ar elementārajām transformācijām un tādēļ to rangi ir vienādi. Tiešām, nosvītrojot matricas  $A$  ceturto rindu  $\vec{a}^4 = (0; 0; 0; 0)$ , dabū matricu  $B$ . Pareizino matricas  $B$  otro kolonu  $\vec{b}_2 = \{4; 0; 0; 0\}$  ar skaitli  $\left(-\frac{3}{4}\right)$  un pieskaitot pirmajai kolonai, dabū  $-\frac{3}{4}\vec{b}_2 + \vec{b}_1 = -\frac{3}{4}\{4; 0; 0\} + \{3; 0; 0\} = \{0; 0; 0\}$ ; atmetot šo nullvektoru, dabū matricu  $C$ . Pareizino matricas  $C$  otro rindu  $\vec{c}^2 = (0; 7; 2)$  ar skaitli  $\left(-\frac{2}{7}\right)$  un pieskaitot trešajai rindai  $\vec{c}^3 = (0; 2; 1)$ , dabū matricas  $D$  trešo



rindu  $\vec{d}^3 = -\frac{2}{7}\vec{c}^2 + \vec{c}^3 = (0; 0; \frac{3}{7})$ ; pirmās divas matricas  $D$  rindas

ir vienādas ar matricas  $C$  rindām:  $\vec{c}^2 = \vec{d}^2, \vec{c}^1 = \vec{d}^1$ .

Matricas  $D$  rangs  $r(D)=3$ , jo šīs matricas trīs rindas (kolonas) veido lineāri neatkarīgu vektoru sistēmu. Tiešām lineāru homogēnu vienādojumu sistēmai

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_3 &= 0, \\ 7x_2 + 2x_3 &= 0, \\ \frac{3}{7}x_3 &= 0, \end{aligned} \quad (25.15)$$

acīm redzot, eksistē tikai triviālais atrisinājums  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ . Līdz ar to arī  $r(C) = r(B) = r(A) = 3$ .

Elementāro transformāciju mērķis ir pārveidot jebkuru  $(m \cdot n)$  tipa matricu  $(a_{ik})$  tā, lai tā būtu ekvivalenta ar  $(r \cdot n)$  tipa matricu, kurai šāda forma:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1r} & c_{1,r+1} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2r} & c_{2,r+1} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \dots & c_{rn} \end{pmatrix} \quad (25.16)$$

t. i., tādu matricu, kuru veidojot 1) nosvītrotas  $m-r$  rindas vai arī  $r=m$ ; 2)  $c_{ii} \neq 0$ ;  $i=1, 2, \dots, r$ ; 3)  $c_{ij}=0$  visiem  $j < i$ .

Matricu (25.16) sauc par *trapeces formas matricu*. Tās transponētā matrica arī ir trapeces formas matrica.

Ja  $r=n$ , tad matricu (25.16) sauc par *augšējo trijstūrmaticu*. Augšējās trijstūrmatricas transponēto matricu sauc par *apakšējo trijstūrmaticu*.

2. teorēma. Katru matricu, kas nav nullmatrica, ar elementārajām transformācijām var pārveidot trapeces formā.

Pierādījums. Izmantojot 1° elementāro transformāciju, var vienmēr panākt, lai matricas pirmās rindas un pirmās kolonas elements  $a_{11} \neq 0$ . Pareizinot šīs matricas pirmo rindu pēc kārtas ar skaitļiem  $-\frac{a_{21}}{a_{11}}, -\frac{a_{31}}{a_{11}}, \dots, -\frac{a_{m1}}{a_{11}}$  un pieskaitot otrajai, trešajai, ...,  $m$ -tajai rindai, dabū matricu

$$(a'_{ik}) = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1m} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} \end{pmatrix}.$$

Izsvītrojot matricā  $(a'_{ik})$  tās rindas un kolonas, kurās ir tikai nulles, un vajadzības gadījumā pielietojot atkal 1° elementāro transformāciju, var panākt, ka  $a'_{22} \neq 0$ . Pareizinot pārveidotās



matricas otro rindu pēc kārtas ar skaitļiem  $-\frac{a'_{32}}{a'_{22}}, -\frac{a'_{42}}{a'_{22}}, \dots,$   
 $-\frac{a'_{m2}}{a'_{22}}$  un pieskaitot trešajai, ceturtajai un visām turpmākajām  
rindām, dabū jaunu matricu, kurā arī otrās kolonas elementi, sākot  
ar trešo rindu, ir nulles. Turpinot šādu procesu  $r \leq m$  reizes, katru  
 $(m \cdot n)$  tipa matricu var pārveidot tai ekvivalentā trapeces formas  
matricā (25.16).

Kvadrātisku  $n$ -tās kārtas matricu  $A$  sauc par *regulāru* jeb *ne-*  
*deģenerētu* matricu, ja tās rangs  $r(A) = n$ .

Kvadrātisku  $n$ -tās kārtas matricu  $A$  sauc par *singulāru* jeb  
*deģenerētu* matricu, ja tās rangs  $r(A) < n$ .

**212. §. Lineārie attēlojumi.** Pieņemsim, ka ir dots likums, pēc  
kura katram  $n$  dimensiju telpas bāzē  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  uzdotam vek-  
toram

$$\vec{x} = \xi_1 \vec{a}_1 + \xi_2 \vec{a}_2 + \dots + \xi_n \vec{a}_n$$

piekārto reālu skaitli  $f(\vec{x})$ , un ka šis likums izpilda šādus nosa-  
cījumus:

$$1^\circ) f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \quad \text{visiem } \vec{x}, \vec{y} \in R_n, \quad (25.17)$$

$$2^\circ) f(\lambda \vec{x}) = \lambda f(\vec{x}) \quad \text{visiem } \vec{x} \in R_n$$

un katram reālam skaitlim  $\lambda$ .

Funkciju  $f(\vec{x})$ , kas atbilst nosacījumiem (25.17), sauc par  $n$   
dimensiju telpā  $R_n$  definētu *lineāru formu*.

Saskaņā ar lineārās formas īpašībām (25.17)

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f(\xi_1 \vec{a}_1 + \xi_2 \vec{a}_2 + \dots + \xi_n \vec{a}_n) = \\ &= \xi_1 f(\vec{a}_1) + \xi_2 f(\vec{a}_2) + \dots + \xi_n f(\vec{a}_n) = \\ &= \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \dots + \xi_n a_n = \vec{\xi} \cdot \vec{a}, \end{aligned}$$

kur  $a_i = f(\vec{a}_i)$  ir konstanti reāli skaitļi, kas atkarīgi vienīgi no bā-  
zes izvēles, bet  $\vec{a} = (a_1; a_2; \dots; a_n)$  un  $\vec{\xi} = (\xi_1; \xi_2; \dots; \xi_n)$  ir telpas  
 $R_n$  vektori, kas doti ar savām koordinātēm bāzē  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ .

Tajā gadījumā, ja vektors  $\vec{x}$  uzdots telpas  $R_n$  sākuma bāzē, t. i.,  
 $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n$ , vektora  $\vec{x}$  lineārā forma ir izteiksme

$$f(\vec{x}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = \vec{c} \cdot \vec{x}, \quad (25.18)$$

kur  $\vec{c} = (c_1; c_2; \dots; c_n)$  ir dots vektors un  $c_i = f(\vec{e}_i)$  — fiksēti skaitļi.







toru pārim  $\vec{x}$  un  $\vec{y}$  ir spēkā vienādība  $\vec{A}\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot \vec{A}\vec{y}$ , t. i., ja  $A = A^T$  ir simetriska matrica.

Par kvadrātisku formu sauc funkciju  $\vec{Ax} \cdot \vec{x} = \vec{x} \cdot \vec{Ax}$ , kuru dabū no simetriskas bilineāras formas, ņemot tajā  $\vec{x} = \vec{y}$ .

214. §. Inversā matrica. Pieņemsim, ka ir dota lineāru formu sistēma

$$\begin{aligned} v_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ v_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ v_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{aligned} \quad (25.26)$$

jeb

$$\vec{v} = A\vec{x}, \quad (25.27)$$

Te  $A = (a_{ik}) = (\overset{\rightarrow}{a}_1 \overset{\rightarrow}{a}_2 \dots \overset{\rightarrow}{a}_n)$  ir dotās sistēmas (25.26) koeficientu matrica, kura katram telpas  $R_n$  vektoram  $\overset{\rightarrow}{x} = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$  piekārto kādu tās pašas telpas vektoru  $\overset{\rightarrow}{v} = \{v_1; v_2; \dots; v_n\}$ .

Ja matrica  $A$  nav deģenerēta, t. i., ja tās rangs  $r(A) = n$ , tad šīs matricas kolonu sistēma  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  ir lineāri neatkarīga. Tādā gadījumā katram dotam vektoram  $\vec{v} \in R_n$  atbilst viens vienīgs vienādojumu sistēmas (25.26) atrisinājuma vektors  $\vec{x} = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ . Izmantojot, piemēram, 23. nodaļā aprakstīto Žordāna izslēgšanas metodi, atrisinājumu pēc  $n$  izslēgšanas soļiem var izteikt šādi:

$$\begin{aligned} x_1 &= b_{11}v_1 + b_{12}v_2 + \dots + b_{1n}v_n, \\ x_2 &= b_{21}v_1 + b_{22}v_2 + \dots + b_{2n}v_n, \\ &\vdots \\ x_n &= b_{n1}v_1 + b_{n2}v_2 + \dots + b_{nn}v_n \end{aligned} \quad (25.28)$$

jeb saīsinātā rakstībā:

$$\vec{x} = B\vec{v}. \quad (25.29)$$

Te  $B = (b_{ik})_{(n,n)} = (\vec{b}_1 \vec{b}_2 \dots \vec{b}_n)$  ir sistēmas (25.28) koeficientu matrica.

Ievietojot  $\vec{x}$  no izteiksmes (25.29) izteiksmē (25.27), rodas identitāte

$$\vec{v} = A B \vec{v}. \quad (25.30)$$

Otrādi, ievietojot  $\vec{v}$  no izteiksmes (25.27) izteiksmē (25.29), rodas identitāte

$$\vec{x} = B A \vec{x}. \quad (25.31)$$

No identitātēm (25.30) un (25.31) izriet, ka  $AB = BA = E$  ir  $n$ -tās kārtas vienības matrica.

**Definīcija.** Matricu  $B$ , kas komutatīva ar matricu  $A$  un kuras reizinājums ar  $A$  ir vienības matrica  $E$ , sauc par matricas  $A$  inverso matricu.

Matricas  $A$  inverso matricu apzīmē ar  $A^{-1}$ .

Saskaņā ar inversās matricas definīciju

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E. \quad (25.32)$$

Nevienai deģenerētai kvadrātiskai matricai un nevienai  $(m \cdot n)$  tipa taisnstūra matricai nav inversās matricas.

**Piemērs.** Nošķaidrot, ar kādu skaitļa  $c$  vērtību matrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & c \end{pmatrix}$$

ir nedeģenerēta, un atrast matricas  $A$  inverso matricu, ja eksistē tāds skaitlis  $c$ , ar kuru matrica  $A$  nav deģenerēta.

**Atrisinājums.** Sastādīsim lineāru formu (vienādojumu) sistēmu

$$\begin{cases} v_1 = x_1 + x_2 + x_3, \\ v_2 = x_1 + 2x_2 + x_3, \\ v_3 = 2x_1 + x_2 + cx_3, \end{cases}$$

kuras koeficientu matrica ir  $A$ , un, izmantojot modificēto Zordāna izslēgšanas metodi, pakāpeniski apmainīsim lomām mainīgos  $\{x_1; x_2; x_3\}$  ar mainīgajiem  $\{v_1; v_2; v_3\}$ . Dabūsim

|       | $+x_1$   | $-x_2$ | $-x_3$ |
|-------|----------|--------|--------|
| $v_1$ | <u>1</u> | 1      | 1      |
| $v_2$ | 1        | 2      | 1      |
| $v_3$ | 2        | 1      | $c$    |

| I     | $-v_1$ | $-x_2$   | $-x_3$ |
|-------|--------|----------|--------|
| $x_1$ | 1      | 1        | 1      |
| $v_2$ | -1     | <u>1</u> | 0      |
| $v_3$ | -2     | -1       | $c-2$  |

| II    | $-v_1$ | $-v_2$ | $-x_3$        |
|-------|--------|--------|---------------|
| $x_1$ | 2      | -1     | 1             |
| $x_2$ | -1     | 1      | 0             |
| $v_3$ | -3     | 1      | $\boxed{c-2}$ |

Ja  $c-2=0$ , t. i.,  $c=2$ , tad matrica  $A$  ir deģenerēta, tās rangs  $r(A)=2$ , un tai nav inversās matricas.

Ja  $c-2 \neq 0$ , t. i.,  $c \neq 2$ , tad matrica  $A$  nav deģenerēta, jo tad ir iespējams apmainīt lomām arī  $x_3$  un  $v_3$ . Izpildot nākošo Zor-dāna izslēgšanas soli, dabū

| III   | $-v_1$             | $-v_2$             | $-v_3$           |
|-------|--------------------|--------------------|------------------|
| $x_1$ | $\frac{2c-1}{c-2}$ | $\frac{-c+1}{c-2}$ | $\frac{-1}{c-2}$ |
| $x_2$ | -1                 | 1                  | 0                |
| $x_3$ | $\frac{-3}{c-2}$   | $\frac{1}{c-2}$    | $\frac{1}{c-2}$  |

Tātad, ja  $c$  ir jebkurš reāls skaitlis, izņemot  $c=2$ , matricai  $A$  eksistē inversā matrica

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2c-1}{c-2} & \frac{-c+1}{c-2} & \frac{-1}{c-2} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{-3}{c-2} & \frac{1}{c-2} & \frac{1}{c-2} \end{pmatrix}.$$

Ja, piemēram,  $c=1$ , tad

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**215. §. Matricu bloki.** Ja starp dotās taisnstūra matricas rindām (kolonām) novelk horizontālas (vertikālas) taisnes, tad saka, ka šī matrica ir sadalīta blokos. Katrs bloks savukārt ir kāda matrica. Piemēram, matrica

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] \\ [A_{21}] & [A_{22}] \end{pmatrix}$$



sadalīta 4 blokos:

$$[A_{11}] = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; [A_{12}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; [A_{21}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; [A_{22}] = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bloks  $[A_{11}]$  ir simetriska otrās kārtas matrica,  $[A_{12}]$  —  $(2 \times 3)$  tipa nullmatrica,  $[A_{21}]$  — otrās kārtas vienības matrica,  $[A_{22}]$  —  $(2 \times 3)$  tipa taisnstūra matrica.

Bloku skaits, acīm redzot, vienmēr mazāks par matricas elementu skaitu, bet tas nevar būt mazāks par 2. Matricu sadalīšana blokos var būt lietderīga un bieži vien nepieciešama, kad jāpieraksta un jāizpilda algebriskas operācijas ar matricām, kuru elementu skaits ļoti liels. Algebrisko operāciju izpilde vienkāršojas, ja atsevišķi matricas bloki ir nullmatricas, diagonālās vai vienības matricas.

Divu vienāda skaita, tipa un izvietojuma blokos sadalītu matricu  $A$  un  $B$  summu dabū, saskaitot šo matricu attiecīgos blokus kā patstāvīgas matricas. Matrica  $A+B=C$  rodas, ja iegūtos summu blokus izvieto matricā  $C$  atbilstoši summēto bloku izvietojumam matricās  $A$  un  $B$ . Piemēram,

$$\left( \begin{array}{cc|ccc} a & x & 1 & 0 & 0 \\ b & y & 0 & 1 & 0 \\ \hline c & z & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) + \left( \begin{array}{cc|ccc} 0 & -x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -y & 2 & 2 & 2 \\ \hline 0 & z & 3 & 3 & 3 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|ccc} a & 0 & 2 & 1 & 1 \\ b & 0 & 2 & 3 & 2 \\ \hline c & 2z & 3 & 3 & 4 \end{array} \right).$$

Pieņemsim, ka matrica  $A$  sadalīta  $r \times k$  blokos un matrica  $B$  savukārt  $k \times p$  blokos. Ja matricām  $A$  un  $B$  eksistē reizinājums  $AB=C$ , tad šo reizinājumu  $C$  var dabūt kā matricu, kurai ir  $r \times p$  bloki, t. i.,

$$[C_{ij}] = \sum_{j=1}^k [A_{is}] \cdot [B_{sj}], \quad \left( \begin{array}{l} i=1, 2, \dots, r \\ j=1, 2, \dots, p \end{array} \right). \quad (25.32)$$

Sadalot matricu  $A$  blokos  $[A_{is}]$  un matricu  $B$  blokos  $[B_{sj}]$ , jāraugās, lai bloka  $[A_{is}]$  kolonu skaits būtu vienāds ar bloka  $[B_{sj}]$  rindu skaitu. Pretējā gadījumā matricas reizinājuma  $C$  atrašanai nevar piemērot formulu (25.32).

P i e m ē r s. Dotas matricas

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -3 & 5 & 0 \\ 2 & 8 & 6 & -3 & 5 \\ 3 & -6 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -6 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dabūt matricu  $A$  un  $B$  reizinājumu  $C$ , izmantojot lietderīgāko sadalījumu blokos.

Ā t r i s i n ā j u m s. Matricu  $B$  lietderīgi sadalīt 4 blokos:

$$[B_{11}] = E_3; \quad [B_{12}] = \{1; 1; 1\}; \quad [B_{21}] = O_{(2,3)}; \quad [B_{22}] = \{1; 1\}.$$

Tam atbilstoši matrica  $A$  jāsadala šādos blokos:

$$[A_{11}] = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -3 \\ 2 & 8 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}; [A_{12}] = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; [A_{21}] = \\ = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}; [A_{22}] = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Saskaņā ar formulām (25.32)

$$C = \begin{pmatrix} [A_{11}] \cdot E + [A_{12}] \cdot O & [A_{11}][B_{12}] + [A_{12}][B_{22}] \\ [A_{21}] \cdot E + [A_{22}] \cdot O & [A_{21}][B_{12}] + [A_{22}][B_{22}] \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{ccc|cc} 5 & 4 & -3 & 11 & \\ 2 & 8 & 6 & 18 & \\ 3 & -6 & 9 & 6 & \\ \hline 0 & 2 & 5 & 2 & \\ 1 & 0 & -2 & 1 & \end{array} \right).$$

### Vingrinājumi

1. Izpildīt norādītās algebriskās operācijas ar matricām.

a)

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -11 \\ 5 & -6 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -11 & 8 & 15 \\ 4 & 7 & 8 \\ 21 & 3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 5 & 4 \\ 9 & 3 & 7 \\ 36 & -15 & -8 \end{pmatrix};$$

b)

$$\begin{pmatrix} 21 & -12 & 21 \\ 15 & 33 & -48 \\ -9 & 0 & -15 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 7 & -4 & 7 \\ 5 & 11 & -16 \\ -3 & 0 & -5 \end{pmatrix};$$

c)

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 4 & -12 & 8 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 1 & 10,5 & -2 \end{pmatrix}$$

d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e)

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Noteikt matricas rangu un gadījumā, ja matrica ir nedeģenerēta, dabūt tās inverso matricu.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 9 & 11 \\ 2 & -2 & 6 & -2 \\ -1 & 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

## DETERMINANTI

**216. §. Otrās un trešās kārtas determinanti.** Lineāru algebrisku vienādojumu sistēmu atrisināšanā un izpētīšanā, kā arī citos teorētiskās dabas jautājumos ļoti noderīgs ir katrai kvadrātiskai matricai viennozīmīgi piekārtots reāls skaitlis, kuru sauc par dotās matricas  $A = (a_{ik})$  *determinantu* un apzīmē ar simbolu  $\text{Det}(A) = |a_{ik}|$  jeb  $|A| = |a_{ik}|$ , jeb arī vienkārši ar  $A$ , ja no konteksta ir skaidrs, ka nav runa par matricu  $A$ , bet gan par reālu skaitli  $A$ . Otrās kārtas matricas

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

determinants  $|A|$ , kā zināms (12. § un 28. §), ir

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Saka, ka otrās kārtas determinantam ir četri elementi, kas sakārtoti divās rindās un divās kolonās. Šis determinants ir divu tā locekļu  $a_{11}a_{22}$  un  $a_{21}a_{12}$  algebriska summa.

Ja  $|A| \neq 0$ , tad lineāru algebrisku vienādojumu sistēmai

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

ir viens vienīgs atrisinājums

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}; \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad (26.1)$$

kur

$$\begin{aligned} |A_1| &= \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}, \\ |A_2| &= \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1. \end{aligned}$$

Formulas (26.1) ir t. s. *Krāmera kārtulas* matemātiskā izteiksme.

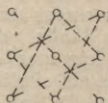
**Definīcija.** Par trešās kārtas matricas  $A = (a_{ik})$  determinantu sauc reālu skaitli

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned} \quad (26.2)$$

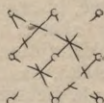


Trešās kārtas matricas determinantu sauc arī vienkārši par trešās kārtas determinantu un apzīmē ar simbolu

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (26.3)$$



197. zīm.



198. zīm.

Saskaņā ar definīciju trešās kārtas determinants satur  $3^2=9$  elementus, kas sakārtoti 3 rindās un 3 kolonās. Šis determinants ir 6 locekļu algebriska summa. Katrs loceklis ir 3 elementu reizinājums. Trim locekļiem zīme saglabājas nemainīga (+), bet pārējiem trim locekļiem zīme mainās uz pretējo (-).

Katrs determinanta loceklis satur pa vienam elementam no katras rindas un no katras kolonas. Zīme nemainās loceklim, kurā ietilpst visi trīs galvenās diagonāles elementi, un arī tiem diviem locekļiem, kurus veido 197. zīm. parādīto trijstūru virsotnēs novietotie elementi. Zīme mainās tiem locekļiem, kurus veido blakus diagonāles elementi un 198. zīm. parādīto trijstūru virsotnēs novietotie elementi.

197. un 198. zīmējumos attēlotās shēmas trešās kārtas determinantu aprēķināšanai pazīstamas ar nosaukumu *Sarrusa kārtula*.

Piemērs.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 1 - \\ - 3 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot 3 = -12.$$

**217. §.  $n$ -tās kārtas determinanti.** Pieņemsim, ka ir dota  $n$ -tās kārtas matrica  $A = (a_{ik})$ . Izraudzīsim un pierakstīsim atsevišķi kādu šīs matricas pirmās rindas elementu  $a_{1k_1}$ , izsvītrojot pirmo rindu un  $k_1$  kolonu, t. i., to rindu un kolonu, kurā atrodas atsevišķi pierakstītais matricas elements. Pēc tam pierakstīsim atsevišķi kādu otrās rindas un  $k_2$  kolonas elementu  $a_{2k_2}$ , izsvītrojot otro rindu un  $k_2$  kolonu. Šo procesu turpinot, t. i., izrakstot no katras rindas un katras kolonas pa vienam elementam, dabū tādu  $n$  elementu izlasi

$$a_{1k_1}, a_{2k_2}, \dots, a_{nk_n}, \quad (26.4)$$

kuri katrs atrodas savā rindā un kolonā. Tas nozīmē, ka skaitļi  $k_1, k_2, \dots, k_n$  ir kāda skaitļu  $1, 2, 3, \dots, n$  permutācija. Kā zināms,

jebkuri  $n$  simboli, kas seko cits citam noteiktā kārtībā, veido kādu permutāciju. Piemēram, katrs dabisko skaitļu 1, 2, 3, 4 grupējums ir kāda šo skaitļu permutācija: (1, 2, 3, 4), (2, 1, 3, 4), (4, 3, 2, 1) utt. No 4 elementiem var izveidot  $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$  savstarpēji atšķirīgas permutācijas; no  $n$  elementiem — tieši  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$  permutācijas. Tātad eksistē tieši  $n!$  izlašu (26.4), kuras no  $n$ -tās kārtas matricas  $n^2$  elementiem var sastādīt tā, lai katrs elements, kas ietilpst izlasē, būtu ņemts no savas rindas un kolonas.

Vienosimies skaitīt par normālu tādu dabisko skaitļu 1, 2, 3, ...,  $n$  sakārtojumu permutācijā, kur mazākais skaitlis atrodas pirms lielākā. Ja turpretim mazākais skaitlis kādā permutācijā atrodas aiz lielākā, tad skaitisim, ka šajā permutācijā ir kārtības traucējums — *inversija*. Piemēram, permutācijā (2, 4, 3, 1) ir četras inversijas: a) 3 atrodas pirms 1, b) 4 atrodas pirms 1, c) 4 atrodas pirms 3 un d) 2 atrodas pirms 1.

**Definīcija.** Par  $n$ -tās kārtas matricas  $A = (a_{ik})$  determinantu sauc algebrisku summu

$$|A| = \sum (-1)^t a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n}, \quad (26.5)$$

kuras locekļu skaits ir  $n!$ , katrs loceklis ir tādu  $n$  elementu reizinājums, kas izlasīti pa vienam no katras rindas un kolonas, reizināmo elementu otrie indeksi  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$  katrā locekļī veido  $n$  dabisko skaitļu permutāciju un  $t$  ir inversiju skaits šajā permutācijā.

$n$ -tās kārtas matricas  $A$  determinantu sauc arī vienkārši par  $n$ -tās kārtas determinantu un apzīmē ar simbolu

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (26.6)$$

Inversiju skaits  $t$  var būt pāra un nepāra skaitlis. Atbilstoši tam izšķir pāra un nepāra permutācijas. Ja pāra permutācijā, t. i., tādā permutācijā, kurā inversiju skaits ir pāra skaitlis, samaina ar vietām divus simbolus, tad rodas jauna permutācija, kurā inversiju skaits ir nepāra skaitlis. Otrādi, samainot vietām divus nepāra permutācijas simbolus, rodas pāra permutācija.

Lai to pierādītu, pieņemsim, ka skaitļi  $k_1, k_2, \dots, k_n$  ir kāda dabisko skaitļu 1, 2, ...,  $n$  permutācija. Ja permutācijā apmaina divus blakus novietotos skaitļus, tad inversiju skaits vai nu palielinās, vai arī samazinās par vienu vienību. Līdz ar to pāra permutācija pārvēršas nepāra permutācijā vai, otrādi, nepāra permutācija pārvēršas pāra permutācijā. Ja permutācijā apmaina vietām divus skaitļus  $k_i$  un  $k_j$  ( $j > i$ ), tad  $k_j$  nonāk pirms skaitļiem  $k_{j-1}, k_{j-2}, \dots, k_{i+1}$ ,  $k_i$  un notiek  $j-i-1$  inversiju izmaiņas. Tajā pašā laikā  $k_i$  nonāk aiz skaitļiem  $k_{i+1}, k_{i+2}, \dots, k_{j-1}$  un notiek  $j-i$  inversiju izmaiņas. Kopējais inversiju izmaiņu skaits tātad ir



$2(j-i)-1$ , bet tas visiem  $j$  un  $i$  ir nepāra skaitlis. Tādēļ, ja sākumā bija pāra permutācija, tad pēc divu elementu apmaiņas ar to vietām rodas nepāra permutācija. Otrādi, ja sākumā bija nepāra permutācija, tad pēc divu elementu apmaiņas ar vietām rodas pāra permutācija.

Piemērs. Trešās kārtas determinanta aprēķināšanas formulā

$$|a_{ik}| = \sum (-1)^t a_{1k_1} a_{2k_2} a_{3k_3}$$

atrast visus summas locekļus ar to zīmēm.

Atrisinājums. Katrā loceklī ietilpstošo trīs elementu otrie indeksi  $(k_1, k_2, k_3)$  ir skaitļu  $(1, 2, 3)$  permutācijas. No skaitļiem 1, 2, 3 var sastādīt pavisam 6 permutācijas, no tām  $(1, 2, 3)$ ,  $(2, 3, 1)$ ,  $(3, 1, 2)$  ir pāra, bet  $(3, 2, 1)$ ,  $(1, 3, 2)$  un  $(2, 1, 3)$  ir nepāra permutācijas. Tādēļ  $|a_{ik}| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$ , kas saskan ar formulu (26.2).

**218. §. Determinantu pamata īpašības.** 1. īpašība. Ja kādā determinanta rindā (kolonā) ir tikai nulles, tad determinants vienāds ar nulli.

Tiešām, ja  $i$ -tā rindā ir tikai nulles, tad katrā šī determinanta loceklī viens reizinātājs ir nulle, jo katrā loceklī ietilpst viens  $i$ -tās rindas elements.

2. īpašība. Ja determinantā visas rindas samaina ar atbilstošajām kolonām, vai otrādi, tad determinanta vērtība nemainās. Šo īpašību citādi formulēt var šādi.

Divu savstarpēji transponētu kvadrātisku matricu determinanti ir vienādi.

Pieņemsim, ka  $A = (a_{ik})$  un  $B = (b_{ik})$  ir savstarpēji transponētas  $n$ -tās kārtas matricas. Ja  $B = A^T$ , tad  $(a_{ki}) = (b_{ik})$  un saskaņā ar definīciju:

$$|b_{ik}| = \sum (-1)^t b_{1k_1} \dots b_{nk_n} = \sum (-1)^t a_{k_1 1} \dots a_{k_n n} = |a_{ik}|.$$

Piemērs.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -12; \quad |A^T| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -12.$$

Saskaņā ar šo īpašību visas determinantu īpašības, kuras formulētas rindām, ir pareizas arī tad, ja vārda «rinda» vietā liek vārdu «kolona».

3. īpašība. Ja apmaina vietām divas determinanta kolonas (rindas), tad determinanta absolūtā vērtība nemainās, bet mainās zīme.

Apmainot vietām divas kolonas, mainās divi otrie indeksi katrā izteiksmes (26.5) loceklī, un tādēļ mainās visu locekļu zīmes, jo nepāra permutācija pārvēršas pāra permutācijā — un otrādi.



Piemērs.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -12, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 12.$$

4. īpašība. *Determinants, kam divas vienādas kolonas (rindas), ir vienāds ar nulli.*

Ja kvadrātiskā matricā  $A = (a_{ik})$  ir divas identiskas kolonas, tad, apmainot tās ar vietām, matrica neizmainās, bet tās determinants  $|A|$  maina zīmi. Tātad  $|A| = -|A|$  jeb  $2|A| = 0$  un  $|A| = 0$ .

Piemērs.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0.$$

5. īpašība. Ja determinantā  $|A|$  kādas rindas (kolonas) elementus pareizina ar kādu skaitli  $\lambda$ , tad šāds determinants ir  $\lambda|A|$ .

So īpašību var formulēt arī tā. Ja determinantā visi kādas rindas (kolonas) elementi satur kopīgu reizinātāju  $\lambda$ , tad to kā reizinātāju var iznest pirms determinanta zīmes.

Pieņemsim, ka visi  $i$ -tās rindas elementi pareizināti ar skaitli  $\lambda$ . Tad arī visi determinanta locekļi ir pareizināti ar šo skaitli, jo katrā locekļī ietilpst viens  $i$ -tās rindas elements. Tātad pats determinants ir pareizināts ar skaitli  $\lambda$ .

Ievērosim, ka  $|\lambda A| \neq \lambda|A|$ , bet  $|\lambda A| = \lambda^n|A|$ .

Piemērs.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad 2A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix},$$
$$|B| = 2|A|, \text{ jo } |B| = 10, |A| = 5, |2A| = 20.$$

6. īpašība. *Determinants, kam divas proporcionālas rindas (kolonas), ir vienāds ar nulli.*

Tiešām, ja  $i$ -tās rindas elementi atšķiras no  $j$ -tās rindas elementiem ( $i \neq j$ ) tikai ar konstantu reizinātāju  $\lambda$ , tad šo kopīgo reizinātāju var ņemt pirms determinanta simbola un dabūt determinantu, kam divas identiskas rindas. Tāds determinants saskaņā ar 4. īpašību ir vienāds ar nulli.

Piemērs.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 15 & -11 & 16 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 15 & -11 & 16 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 = 0.$$

7. īpašība. Ja determinantā visi  $i$ -tās rindas (kolonas) elementi ir divu skaitļu summas

$$a_{ik} = b_i + c_k,$$

tad šo determinantu var izteikt kā divu determinantu summu, t. i.,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & \dots & b_n + c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (26.7)$$

Tiešām katru matricas  $A$  determinanta locekli var izteikt šādi:

$$a_{1k_1} \dots a_{ik_1} \dots a_{nk_n} = a_{1k_1} \dots (b_{k_1} + c_{k_1}) \dots a_{nk_n} = \\ = a_{1k_1} \dots b_{k_1} \dots a_{nk_n} + a_{1k_1} \dots c_{k_1} \dots a_{nk_n}.$$

Ievietojot šīs izteiksmes definīcijas formulā (26.5), dabū divu determinantu summu (26.7). Protams, šo īpašību bez sevišķām grūtībām var vispārināt un visus  $i$ -tās rindas elementus izteikt kā vairāku saskaitāmo summas.

8. īpašība. Ja determinanta  $i$ -tā rinda (kolona) ir pārējo rindu (kolonu) lineāra kombinācija, tad determinants ir vienāds ar nulli.

Sī īpašība ir 6. īpašības vispārinājums. Ja  $i$ -tā rinda ir citu  $s$  rindu ( $1 \leq s \leq n-1$ ) lineāra kombinācija, tad visi  $i$ -tās rindas elementi ir  $s$  skaitļu summas, un saskaņā ar 7. īpašību determinantu var izteikt kā  $s$  determinantu summu. Katrā determinantā  $i$ -tā rinda ir proporcionāla kādai citai rindai. Tādēļ saskaņā ar 6. īpašību visi atsevišķie determinanti ir nulles, un līdz ar to dotais determinants ir nulle.

9. īpašība. Determinants nemainās, ja kādas rindas (kolonas) elementiem pieskaita paralēlas rindas (kolonas) atbilstošos elementus, kas pareizināti ar vienu un to pašu skaitli.

Tiešām, ja determinanta  $|A|$   $i$ -tai rindai pieskaita  $j$ -tās rindas ( $i \neq j$ ) elementus, kas pareizināti ar skaitli  $\lambda$ , tad katrs  $i$ -tās rindas elements jaunajā determinantā ir  $a_{is} + \lambda a_{js}$ ;  $s = 1, 2, \dots, n$ . Saskaņā ar 7. īpašību jaunais determinants ir vienāds ar divu determinantu summu. Šajā summā pirmais saskaitāmais ir  $|A|$ , bet otrajam saskaitāmajam ir divas proporcionālas rindas, un tādēļ tas vienāds ar nulli.

Piemērs.

$$\begin{vmatrix} 121 & 122 & 123 \\ 124 & 125 & 126 \\ 127 & 128 & 129 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 121 & 122 & 123 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Te, izmantojot 9. īpašību, no otrās rindas atņemta pirmā rinda un no trešās rindas atņemta otrā rinda. Tā dabūts determinants, kuram divas vienādas rindas. Saskaņā ar 4. īpašību tāds determinants ir vienāds ar nulli.



### 219. §. Matricas minori un determinanta adjunkti.

**Definīcija.** Ja  $(m \cdot n)$  tipa matricā  $A$  izsvītro  $r$  rindas un  $r$  kolonas,  $1 \leq r \leq \min(m, n)$ , tad no izsvītroto rindu un kolonu krustojumos novietotajiem elementiem izveidojas kvadrātiska  $r$ -tās kārtas apakšmatrica, kuras determinantu sauc par matricas  $A$   $r$ -tās kārtas minoru.

Piemēram, determinants

$$|M| = \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = ay - bx$$

ir viens no (3.4) tipa matricas

$$A = \begin{pmatrix} a & 4 & b & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ x & 5 & y & z \end{pmatrix}$$

otrās kārtas minoriem.

Katru  $n$ -tās kārtas matricas  $A$   $r$ -tās kārtas minoru var uzskatīt arī par tādas matricas determinantu, kura paliek, ja matricā  $A$  nosvītro  $n-r$  rindas un  $n-r$  kolonas. Tā, piemēram, nosvītrojot  $n$ -tās kārtas matricā vienu rindu un vienu kolonu, paliek  $(n-1)$ -ās kārtas matrica, kuras determinants ir dotās matricas  $(n-1)$ -ās kārtas minors.

**Definīcija.** Par  $n$ -tās kārtas matricas  $A = (a_{ik})$  elementa  $a_{ik}$  *adjunktu* jeb *algebrisko papildinājumu*  $A_{ik}$  sauc šīs matricas  $(n-1)$ -ās kārtas minoru  $|M|$ , pareizinātu ar  $(-1)^{i+k}$ , kur  $|M|$  ir tās apakšmatricas determinants, kura paliek, ja matricā  $A$  izsvītro  $i$ -to rindu un  $k$ -to kolonu.

Piemēram, trešās kārtas determinantam

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

ir pavisam 9 adjunkti. Pirmās rindas elementu adjunkti saskaņā ar definīciju ir skaitļi:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3.$$

**220. §. Determinanta izvēšana pēc kādas rindas (kolonas) elementiem.** Determinanta aprēķināšana saskaņā ar definīcijas formulu (26.5) ir ļoti grūts un sarežģīts darbs, jo jau ceturtās kārtas determinantam ir 24 locekļi, piektās kārtas determinantam 120 locekļi utt. Determinanta aprēķināšanu var vienkāršot, ja saskaņā ar pamata īpašībām kādā rindā vai kolonā izveido iespējami daudz nulļu un pēc tam šo rindu (kolonu) izmanto determinanta aprēķināšanai ar izvēšanas metodi, kuru tūdaļ aprakstīsim.

Saskaņā ar definīcijas formulu (26.5) katrā determinanta lo-



ceklī iet viens  $i$ -tās rindas elements. Sagrupēsim visus determinanta locekļus  $n$  grupās tā, lai pirmajā grupā, kuru ieslēgsim iekavās, būtu visi tie locekļi, kam ir kopīgs reizinātājs  $a_{11}$ , otrajā grupā, kuru ieslēgsim divās iekavās, būtu visi tie locekļi, kam ir kopīgs reizinātājs  $a_{12}$ , utt. Nemot katras grupas kopīgo reizinātāju aiz iekavām un apzīmējot tās summas, kas paliek iekavās, attiecīgi ar  $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n}$ , dabū

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}. \quad (26.8)$$

So vienādību sauc par determinanta  $|A|$  izvērsumu pēc  $i$ -tās rindas elementiem. Katrai summai  $A_{ik}$ ,  $k=1, 2, \dots, n$ , ir  $(n-1)!$  locekļu, un katrā loceklī kā reizinātāji ietilpst  $n-1$  matricas  $A$  elements. Summas  $A_{ik}$  locekļos nav neviena elementa no  $i$ -tās rindas un  $k$ -tās kolonas, jo šie divi indeksi figurē pie elementa  $a_{ik}$ , bet katrā loceklī var parādīties tikai viens elements no katras rindas un kolonas. Pirms katra locekļa ir plusa vai mīnusa zīme atkarībā no permutācijas  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$  inversiju skaita.

Izrādās, ka izteiksmē (26.8) lietotās summas  $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n}$  ir attiecīgi vienādas ar  $n$ -tās kārtas determinanta  $|A|$  elementu  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$  adjunktiem.

Piemēram, determinanta

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

otrās rindas elementu adjunkti ir

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

un saskaņā ar formulu (26.8)

$$|A| = -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

jeb

$$|A| = a_{21}(a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) + a_{23}(a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32}),$$

kas saskan ar trešās kārtas determinanta definīcijas formulu (26.2).

Izteiksmei (26.8) analoga formula eksistē  $n$ -tās kārtas determinanta  $|A|$  izvēršanai pēc  $j$ -tās kolonas elementiem

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}, \quad (26.9)$$

kur  $A_{ij}$  ir elementa  $a_{ij}$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , adjunkts.

Piemēram,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 5 \\ 3 & 0 & 7 & 1 \\ 6 & 0 & 4 & 0 \\ 6 & 9 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 3 & 7 & 1 \\ 6 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

jeb

$$\Delta = 9 \left[ 5 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} \right] = 45(12-42) - 9(8-36) = -1098.$$

Ar formulām (26.8) un (26.9) ir izteikta determinantu

10. īpašība. *Determinanta rindas (kolonas) elementu un to adjunktū reizinājumu summa ir vienāda ar determinanta vērtību.*

11. īpašība. *Determinanta rindas (kolonas) elementu un citas rindas (kolonas) attiecīgo adjunktū reizinājumu summa ir nulle.*

Pieņemsim, ka determinanta  $|A|$  pirmās kolonas elementi ir  $b_1, b_2, \dots, b_n$  un šīs kolonas adjunkti  $A_{11}, A_{21}, \dots, A_{n1}$ . Saskaņā ar 10. īpašību  $|A| = b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \dots + b_n A_{n1}$ . Liekot šajā izteiksmē  $b_1 = a_{12}, b_2 = a_{22}, \dots, b_n = a_{n2}$ , dabū determinantu:

$$a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \dots + a_{n2}A_{n1} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

kuram ir divas vienādas kolonas. Tātad izteiksme, kuru dabū, summējot otrās rindas elementu un pirmās rindas attiecīgo adjunktū reizinājumus, ir nulle. Pierādījuma būtība nemainās, ja pirmās kolonas adjunktū vietā izvēlas  $j$ -tās kolonas adjunktus un otrās kolonas elementu vietā izvēlas  $k$ -tās kolonas elementus. Tādēļ

$$a_{1k}A_{1j} + a_{2k}A_{2j} + \dots + a_{nk}A_{nj} = \begin{cases} 0, & \text{ja } j \neq k \\ |A|, & \text{ja } j = k \end{cases} \quad (26.10)$$

221. §. *Inversās matricas eksistence.* Pieņemsim, ka ir dota  $n$ -tās kārtas matrica  $A = (a_{jk})$ . Ja eksistē tāda kvadrātiskā matrica  $B = A^{-1}$ , kas apmierina nosacījumu  $A^{-1}A = AA^{-1} = E$ , kur  $E$  ir  $n$ -tās kārtas vienības matrica, tad  $B = A^{-1}$  ir matricas  $A$  inversā matrica.

**Teorēma.** *Katrai kvadrātiskai matricai  $A$ , kuras determinants  $|A| \neq 0$ , eksistē viena un tikai viena inversā matrica.*

**Pierādījums.** Sastādīsim matricu

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

kuras elementi  $A_{ik}$  ir dotās matricas  $A$  determinanta  $|A|$  elementu  $a_{ik}$  adjunkti. Matricu  $A$  sauc par dotajai matricai  $A$  *pievienoto matricu*. Pareizinot doto matricu  $A$  ar pievienoto matricu  $A$  un ievērojot determinantu 10. un 11. īpašību, dabū

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix},$$

$$A\tilde{A} = |A| \cdot E. \quad (26.11)$$

Acīm redzot, arī

$$\tilde{A}A = |A| \cdot E.$$

Tātad

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A| \cdot E. \quad (26.12)$$

Pareizinot izteiksmi (26.12) ar  $\frac{1}{|A|}$ , dabū

$$\left(\frac{1}{|A|}A\right)\tilde{A} = \left(\frac{1}{|A|}\tilde{A}\right)A = E.$$

Ar to ir pierādīts, ka katrai kvadrātiskajai matricai  $A$ , kuras determinants  $|A| \neq 0$ , eksistē inversā matrica.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}. \quad (26.13)$$

Atliek pierādīt, ka šī inversā matrica ir vienīgā.

Pieņemsim, ka bez matricas (26.13) eksistē vēl kāda cita matrica  $X$ , kura izpilda vienādību  $AX = E$ . Pareizinot šo matricu vienādojumu no kreisās puses ar  $A^{-1}$ , dabūsim  $(A^{-1}A)X = A^{-1}E$  jeb  $EX = A^{-1}$ , jeb  $X = A^{-1}$ . Pieņemsim, ka eksistē tāda matrica  $Y$ , kura izpilda vienādību  $YA = E$ . Pareizinot šo matricu vienādojumu no labās puses ar  $A^{-1}$ , dabūsim  $Y(AA^{-1}) = EA^{-1}$  jeb  $Y = A^{-1}$ . Tātad  $X = Y = A^{-1}$  un teorēma ir pilnīgi pierādīta.

Matricu  $A$ , kuras determinants  $|A| \neq 0$ , sauc par *nedeģenerētu matricu*. Ja  $|A| = 0$ , tad matrica ir *deģenerēta*.

Divu nedeģenerētu matricu  $A$  un  $B$  reizinājuma inversās matricas atrašanai eksistē kārtula

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Tiešām,

$$ABB^{-1}A^{-1} = AA^{-1} = E.$$

Šo kārtulu dabiskā ceļā var paplašināt ar vairāku matricu reizinājumu.



222. §. Krāmēra kārtula. Pieņemsim, ka ir dota lineāru algebrisku vienādojumu sistēma

$$A\vec{x}=\vec{b}, \quad (26.14)$$

kur  $A=(a_{ik})$  ir dotā  $n$ -tās kārtas matrica,  $\vec{b} \in R_n$  ir dotais brīvo locekļu vektors un  $\vec{x} \in R_n$  — nezināmais vektors. Pareizinot vienādojumu (26.14) no kreisās puses ar matricas  $A$  pievienoto matricu  $\tilde{A}$ , dabū  $\tilde{A}A\vec{x}=\tilde{A}\vec{b}$  jeb  $|A|\vec{x}=\tilde{A}\vec{b}$ . Ja  $|A| \neq 0$ , tad lineārai algebrisku vienādojumu sistēmai (26.14) ir viens vienīgs atrisinājums

$$\vec{x} = \frac{\tilde{A}\vec{b}}{|A|} = A^{-1}\vec{b} \quad (26.15)$$

jeb koordinātu formā

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|}, \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (26.16)$$

Te  $|A_j| = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \dots + b_n A_{nj}$  ir tādas  $n$ -tās kārtas matricas  $A$  determinants, kuru dabū, ja matricas  $A$   $j$ -to kolonu atvieto ar brīvo locekļu kolonu  $\vec{b} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ .

Formulas (26.16) ir Krāmēra kārtulas matemātiskā izteiksme  $n$  vienādojumu un  $n$  nezināmo gadījumā.

Piemērs. Lietojot Krāmēra kārtulu, atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 7, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 1. \end{aligned} \right\}$$

Atrisinājums. Te sistēmas determinants ir

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Determinanta  $|A|$  aprēķināšanai šajā gadījumā varētu lietot Sarrusa kārtulu, kas pielietojama trešās kārtas determinantiem. Neatkarīgi no Sarrusa kārtulas var, piemēram, rīkoties šādi: pieskaitīt divkārsotu otro kolonu pirmajai kolonai, pieskaitīt otro kolonu trešajai kolonai un pārveidoto determinantu izvērst pēc trešās rindas elementiem. Tad dabūsim

$$|A| = \begin{vmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 24 - 6 = 18.$$



## VARBŪTĪBU TEORIJA UN MATEMĀTISKĀ STATISTIKA

## 27. NODAĻA

## MATEMĀTISKĀ STATISTIKA I

**223. §. Matemātiskās statistikas saturs.** Matemātiskā statistika ir mācība par novērojumu datu matemātisko apstrādi un apstrādes rezultātu vispārināšanu.

Matemātiskās statistikas metodes plaši lieto dažādās zinātņu nozarēs. Visur, kur noris organizēti eksperimenti vai jāapstrādā uzskaites dati, talkā nāk matemātiskā statistika. Tā palīdz sākotnēji likumsakarības un izvairīties no pārsteidzīgiem secinājumiem, kontrolēt eksperimenta kvalitāti un būt objektīviem dažādu parādību vērtēšanā.

Ja matemātisko statistiku pielieto bioloģiska rakstura datu apstrādei, tad runā par biometriju. Ja dati attiecas uz lauksaimniecību, sevišķi mežsaimniecību, tad matemātiskās statistikas metodes mēdz apzīmēt ar nosaukumu «variāciju statistika».

Matemātiskās statistikas metodes parasti saistītas ar lielu skaitļošanas darbu, un vēl nesenā pagātnē šo metožu pielietojumu kavēja piemērotas skaitļošanas tehnikas trūkums. Patlaban skaitļošanas tehnika attīstās ļoti strauji, un informācijas apstrādei var izmantot elektronu skaitļojamās mašīnas skaitļošanas centros. Sakarā ar skaitļošanas darba mehanizēšanu matemātiskās statistikas metodes iespējams lietot arvien plašāk. Mūsu dienās savu sākotnējo nozīmi zaudējušas tādas datu apstrādes metodes, kuras piemērotas «roku darbam», tāpēc mūsu kursā galvenā vērība veltīta metodēm un formulām, kuras ērtas no modernās skaitļošanas tehnikas viedokļa.

**224. §. Ģenerālā kopa un paraugs.** Matemātiskās statistikas pamata jēdzieni ir *paraugs* jeb *izlase* un *ģenerālā kopa* jeb *universs*.

*Paraugs* ir ierobežots vienveidīgu objektu (datu) kopums, kurš iegūts no visu objektu kopas jeb *ģenerālās kopas*.

Ģenerālā kopa var būt reāla vai iedomāta (hipotētiska). Tā,



piemēram, vienas šķirnes kviešu graudu kaudze ir reāla ģenerālā kopa, vairāki desmiti, simti vai tūkstoši graudu, kuri paņemti no kaudzes proteīna satura noteikšanai, — paraugs. Brigādes sagatavotais skābbarības krājums, skuju miltu produkcija — reālas ģenerālās kopas. Pārbaudei paņemtie iesvari — paraugs. Ļoti bieži, īpaši organizētos eksperimentos, ģenerālā kopa ir tikai iedomāta. Tā, piemēram, pētot priežu sējeņu attīstību, ierīkots izmēģinājumu lauciņš ar 300 sējeņiem. Tas ir paraugs. Ģenerālā kopa — neierobežoti liels līdzīgos apstākļos augušu sējeņu kopums. Tāda kopa reāli neeksistē, tā ir iedomāta.

Paraugus sastāda nolūkā izpētīt kādu *variējošu lielumu* jeb *pazīmi*, kas piemīt kopas objektiem. Tāds lielums ir, piemēram, priežu sējeņu garums noteiktā attīstības stadijā. Garums ir variējošs lielums, jo dažādiem sējeņiem tas ir dažāds. Tāpat variējošs lielums ir 1000 graudu svars, proteīna saturs graudos, govju dzīvsvars utt.

Izšķir *kvantitatīvas un kvalitatīvas pazīmes*. Pie kvantitatīvām pieder tādas, kuras var izteikt ar skaitļiem. Tā, piemēram, augu, dzīvnieku lineārie izmēri, svars ir kvantitatīvas pazīmes. Pie kvalitatīvām pieder pazīmes, kuru gradācijas var tikai aprakstīt. Tā, piemēram, kukurūzas dīgstu krāsa ir kvalitatīva pazīme ar divām gradācijām: zaļš un dzeltens.

Izšķir parauga skaitliskos raksturojumus un attiecīgos ģenerālās kopas *skaitliskos raksturojumus* jeb *parametrus*. Tāds skaitliskais raksturojums ir, piemēram, sējeņu vidējais garums. Nosakot vidējo garumu 10, 20 vai 300 sējeņiem, iegūsim dažādus skaitļus. Tātad no parauga atrastais vidējais garums arī ir variējošs lielums. Teorētiski un praktiski pierādīts, ka, palielinoties parauga apjomam (objektu skaitam), no parauga atrastie skaitliskie raksturojumi arvien vairāk nostabilizējas, tuvojoties savām «istajām» vērtībām — ģenerālās kopas rādītājiem.

Apstrādājot datus, svarīgi iegūt ne tikai informāciju par paraugu, bet arī novērtēt konstantes — ģenerālos rādītājus. No teiktā izriet divi galvenie uzdevumi, kuri jārisina matemātiskajai statistikai:

- a) jāaprēķina parauga skaitliskie raksturojumi;
- b) atrastie rezultāti jāvispārina uz ģenerālo kopu.

Otrais uzdevums veicams tikai ar varbūtību teorijas palīdzību, kura ir matemātiskās statistikas teorētiskais pamats.

Atkarībā no objektu skaita paraugā mēdz izšķirt a) mazus paraugus, kuros objektu skaits  $n$  nepārsniedz 30; b) lielus paraugus, kuros  $n > 30$ . Taču šis iedalījums nav stingri noteikts.

Atkarībā no parauga sastādīšanas tehnikas plašāk lietotie veidi ir *randomizēts paraugs* un *sistemātisks paraugs*.

Paraugus ir randomizēti, ja tā objekti izvēlēti no ģenerālās kopas «uz labu laimi» jeb pēc lozes principa.

Rendomisizācija ir obligāts priekšnosacījums daudzu matemātiskās statistikas metožu pielietošanai (metodes, kuras saistītas ar varbūtību teorijas jēdzieniem).

Praksē rendomisizāciju parasti grūti realizēt un «tīra» rendomisizācija reti sastopama.

Sistemātisks paraugs veidojas, ja objektus izvēlas pēc kādas iepriekš noteiktas sistēmas, piemēram, ņem katru desmito vai piecdesmito objektu.

Pieņemsim, ka jāpēti kvalitatīva pazīme: kartupeļu ceru saslimšana ar vīrusu slimību. Tam nolūkam no kartupeļu stādījumiem jāsastāda ceru paraugs un jānosaka saslimušo ceru procents. Praksē parasti rīkojas tā, ka paraugu sastāda, ejot pa lauka diagonāli. Paraugā ietilpina cerus, kuri ir uz šīs diagonāles. Tā izveidojas sistemātisks paraugs. Lai realizētu «tīru» rendomisizāciju, katram ceram vajadzētu piekārtot numuru un vajadzīgo ceru skaitu izlozēt.

**225. §. Vidējie lielumi.** Skaitļus, kas raksturo paraugu, var iedalīt vairākās grupās. Svarīgākās ir: *vidējie lielumi, izkliedes mēri un sakarības mēri*.

Datu apstrādē visplašāk lietotais vidējais lielums ir *vidējais aritmētiskais*. To aprēķina pēc formulas

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}, \quad (27.1)$$

kur ar  $x_i$  apzīmēti dotie skaitļi, bet ar  $\bar{x}$  — to vidējais aritmētiskais;  $n$  ir novērojumu skaits.

Tā, piemēram, skaitļiem 51, 54, 55, 57, kuri izsaka graudu skaitu četrās vārpās, vidējais aritmētiskais ir

$$\bar{x} = \frac{51 + 54 + 55 + 57}{4} = 54,25.$$

Vidējais aritmētiskais parāda, kāda pazīmes daļa (piemērā — cik graudu) pienāktos katram objektam (vārpai), ja kopējais pazīmes daudzums tiktu sadalīts vienmērīgi starp visiem objektiem.

Vidējais aritmētiskais vienmēr ir intervālā starp vismazāko skaitli  $x_{\min}$  un vislielāko  $x_{\max}$ , tas ir centrs, ap kuru grupējas visi skaitļi. Vidējam aritmētiskajam ir tāds pats nosaukums kā skaitļiem, kuriem tas aprēķināts.

Ļoti svarīgs jēdziens ir skaitļa  $x_i$  *novirze no vidējā aritmētiskā*. Tā ir starpība starp doto skaitli un vidējo aritmētisko. Iepriekšējā piemērā pirmā skaitļa novirze ir  $x_1 - \bar{x} = 51 - 54,25 = -3,25$ .

No vidējā aritmētiskā īpašībām atzīmēsim tā saucamo «nulles» īpašību, kura noderīga aprēķinu pareizības pārbaudei. Tā izsaka, ka *noviržu summa no vidējā aritmētiskā ir vienāda ar nulli*, t. i.,

$$\sum (x_i - \bar{x}) = 0. \quad (27.2)$$



Apskatītajā piemērā

$$(-3,25) + (-0,25) + (+0,75) + (+2,75) = 0.$$

Dotajiem skaitļiem vidējo aritmētisko var atrast vienmēr, bet ne vienmēr tas ir piemērotākais vidējais rādītājs. Tā, piemēram, ja jāraksturo kāda lieluma vidējais augšanas temps vairākos laika periodos, tad nelieto vidējo aritmētisko, bet gan *vidējo ģeometrisko*.

Par vidējo augšanas tempu sauc skaitli, kas rāda, cik reizes katrā periodā izmainītos pētāmais lielums, ja maiņa visos periodos norisētu vienmērīgi.

Apzīmēsim pētāmā lieluma vērtību pirmā perioda sākumā ar  $x_1$ , pirmā perioda beigās ar  $x_2$ ; tad attiecība  $\frac{x_2}{x_1}$  ir augšanas temps pirmajā periodā. Ja periodu skaits ir  $n-1$ , tad vidējais ģeometriskais no augšanas tempiem resp. vidējais augšanas temps atrodams pēc formulas

$$\bar{x}_g = \sqrt[n-1]{\frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_3}{x_2} \cdot \dots \cdot \frac{x_n}{x_{n-1}}} \quad (27.3)$$

jeb

$$\bar{x}_g = \sqrt[n-1]{\frac{x_n}{x_1}}. \quad (27.3')$$

Tātad vidējo augšanas tempu var atrast, zinot tikai  $x_1$  un pazīmes vērtību pēdējā perioda beigās  $x_n$ . Praktiski  $\bar{x}_g$  atrod ar logaritmu tabulu palīdzību.

Piemērs. Tabulas 27.1 dati raksturo augšanas dinamiku vienam šaurlapu lupīnas augam laikā no 10. VI līdz 10. VII. Atrast vidējo augšanas tempu.

Tabula 27. 1

| Datumi      | 10. VI | 20. VI | 30. VI | 10. VII |
|-------------|--------|--------|--------|---------|
| Garumi (cm) | 7,5    | 16,5   | 40,0   | 56,0    |

$$\bar{x}_g = \sqrt[3]{\frac{56,0}{7,5}} \approx \sqrt[3]{7,467},$$

$$\lg \bar{x}_g \approx \frac{1}{3} \lg 7,467 \approx \frac{1}{3} \cdot 0,8730 = 0,2910.$$

Antilogaritmu tabulās atrod  $\bar{x}_g \approx 1,96$ .

Aprēķinātais skaitlis rāda, ka, ja augšanas temps būtu vienmērīgs, tad šaurlapu lupīnai katrā dekādē auga garums palielinātos 1,96 reizes.



Vidējā geometriskā pielietojumu kā vidējā augšanas tempa rādītāju nosaka šāds apsvērums. Saskaņā ar vidējā augšanas tempa definīciju tam piemīt šāda īpašība: reizinot  $x_1$  ar vidējo augšanas tempu tādā pakāpē, kāds ir periodu skaits, jāiegūst pēdējais skaitlis  $x_n$ . Šāda īpašība ir vidējam geometriskajam  $\bar{x}_g(x_1 \cdot \bar{x}_g^{n-1} = x_n)$ , tāpēc arī kā vidējais augšanas temps jālieto vidējais geometriskais, nevis vidējais aritmētiskais, kuram šādas īpašības nav. Apskatītajā piemērā augšanas tempu vidējais aritmētiskais ir

$$\bar{x} = \frac{\frac{16,5}{7,5} + \frac{40,0}{16,5} + \frac{56,0}{40,0}}{3} = \frac{2,2 + 2,4 + 1,4}{3} = 2,0,$$

bet

$$7,5 \cdot 2,0^3 = 7,5 \cdot 8 = 60,0 \neq 56,0.$$

Vidējā laukuma atrašanai jāaprēķina vidējais kvadrātiskais  $\bar{x}_{kv}$  pēc formulas

$$\bar{x}_{kv} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}} \quad (27.4)$$

Piemērs. Doti 5 skaitļi  $x_i$  (22,0; 30,0; 28,0; 30,5; 27,0), kas izsaka diametra mērījumus (cm) piecām priedēm. Atrast vidējo šķersgriezuma laukumu  $\bar{L}$ .

Ievērojot riņķa laukuma formulu  $L = \pi R^2 = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2$ , varam rakstīt, ka

$$\bar{L} = \frac{\sum L_i}{n} = \frac{\pi}{n} \sum \left(\frac{x_i}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sum x_i^2}{n} = \frac{\pi}{4} \cdot \bar{x}_{kv}^2.$$

Sie pārveidojumi rāda, ka vidējā laukuma atrašanai jālieto vidējais diametrs, kurš aprēķināts kā vidējais kvadrātiskais un nevis kā vidējais aritmētiskais.

Dotajā piemērā

$$\bar{x}_{kv}^2 = \frac{22,0^2 + 30,0^2 + 28,0^2 + 30,5^2 + 27,0^2}{5} = 765,5$$

un

$$\bar{L} = \frac{1}{4} \cdot 3,14 \cdot 765,5 \approx 601 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Diametru vidējais aritmētiskais ir

$$\bar{x} = \frac{22,0 + 30,0 + 28,0 + 30,5 + 27,0}{5} = 27,5.$$

Vidējais laukums, kuru aprēķina ar vidējo aritmētisko, dod nepareizu rezultātu:

$$\bar{L} = \frac{1}{4} \cdot 3,14 \cdot 27,5^2 \approx 594 \text{ (cm}^2\text{)} \neq 601 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

**226. §. Izkļiedes mēri.** Tikpat svarīgi, kā atrast vidējo aritmētisko jeb centru, ir noskaidrot, *kā skaitļi sagrupēti ap šo centru.* Skaitļu izkļiedi ap vidējo aritmētisko raksturo *variāciju amplitūda, dispersija, standartnovirze un variāciju koeficients.* Tie ir svarīgākie izkļiedes mēri. Jo lielāka skaitļu izkļiede ap vidējo, jo lielāki šie rādītāji. Izkļiedes mēru aprēķināšanu ilustrēsim ar piemēru.

Pieņemsim, ka divām rudzu šķirnēm izmērīti sešu augu garumi un iegūti tabulā 27.2 sakopotie rezultāti.

Tabula 27. 2

|           |     |     |     |     |     |     |
|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1. šķirne | 150 | 151 | 144 | 150 | 149 | 156 |
| 2. šķirne | 140 | 150 | 130 | 160 | 170 | 150 |

Mērījumi doti centimetros. Abām šķirnēm augu vidējais garums ir viens un tas pats  $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 150$ , taču 1. šķirnei augu garumi mazāk izkļiedēti ap vidējo nekā 2. šķirnei. Šo īpašību daļēji atspoguļo variāciju amplitūda, t. i., starpība starp vislielāko skaitli  $x_{\max}$  un vismazāko  $x_{\min}$ . 1. šķirnei  $x_{\max} - x_{\min} = 12$  cm, turpretim 2. šķirnei  $x_{\max} - x_{\min} = 30$  cm.

Taču variāciju amplitūda nav pietiekami labs izkļiedes mērs, jo tā fiksē tikai galējo skaitļu starpību. Izkļiedi ap vidējo aritmētisko labi raksturo *noviržu kvadrātu summa*, kuru apzīmēsim ar  $Q$ . Tad

$$Q = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2. \quad (27.5)$$

Noviržu kvadrātu summai ir ļoti plaši pielietojumi, kas pamatojas uz šādu šīs summas īpašību: ja kāda lieluma izkļiedi rada vairāki faktori, tad noviržu kvadrātu summu iespējams sadalīt vairākos saskaitāmajos tā, lai katrs saskaitāmais parādītu attiecīga faktora ietekmi kopējās izkļiedes radīšanā.

Ja noviržu kvadrātu summu dala ar  $n-1$ , tad iegūst izkļiedes mēru — dispersiju, kuru apzīmēsim ar  $s^2$ , t. i.,

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad (27.6)$$



Aritmētisko kvadrātsakni no dispersijas sauc par standartnovirzi (vidējo kvadrātisko novirzi), un to apzīmēsim ar  $s$ . Tad

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}. \quad (27.7)$$

Standartnovirzi mēri tādās pašās vienībās kā pētāmo lielumu. Iepriekšējā piemērā standartnovirzes abu šķirņu augu garumiem aprēķina šādi:

$$s_1 = \sqrt{\frac{(151-150)^2 + (144-150)^2 + (149-150)^2 + (156-150)^2}{5}} = \\ = \sqrt{14,80} \approx 3,9 \text{ (cm)},$$

$$s_2 = \sqrt{\frac{(140-150)^2 + (130-150)^2 + (160-150)^2 + (170-150)^2}{5}} = \\ = \sqrt{200} \approx 14 \text{ (cm)}.$$

Var rasties jautājums, kāpēc formulā (27.6) jādala ar  $n-1$  un nevis ar  $n$ . Konstruējot izkliedes mēru — dispersiju, jācenšas ne tikai noregulēt noviržu kvadrātu summas lielumu atbilstoši novērojumu skaitam, bet arī pēc iespējas tuvināt no parauga aprēķināto izkliedes mēru atbilstošajam ģenerālajam rādītājam. Ir pierādīts, ka, dalot noviržu kvadrātu summu ar  $n$ , atrastais dalījums vienmēr ir mazāks par atbilstošo ģenerālo dispersiju, turpretim, dalot ar  $n-1$ , šādas sistemātiskas nobīdes no ģenerālās dispersijas nav. Tāpēc, aprēķinot dispersiju, dalītājā raksta  $n-1$ , un tā iegūst *ģenerālās dispersijas nepārbidīto novērtējumu*  $s^2$ .

Dalītāju  $n-1$  sauc par dispersijas brīvības pakāpju skaitu. Apzīmējot to ar  $v$ , dabūjam, ka  $v=n-1$ .

Brīvības pakāpju skaita jēdziens matemātiskajā statistikā ir ļoti svarīgs, tāpēc analizēsīm to sīkāk. Definējot  $s^2$ , izmantots iepriekš atrastais vidējais aritmētiskais  $\bar{x}$ . Tātad, aprēķinot dispersiju, visiem izejas skaitļiem  $x_i$  uzlikts viens ierobežojums — to summai respektīvi vidējam aritmētiskajam jābūt iepriekš dotam. Praktiski tas nozīmē, ka, lai aprēķinātu dispersiju, tad  $n-1$  skaitļus varam izvēlēties brīvi, turpretim  $n$ -tais skaitlis ir pilnīgi noteikts un atrodams no sakarības

$$x_n = \bar{x}n - x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1}.$$

Redzam, ka brīvības pakāpju skaits  $v$  sakrīt ar «brīvo» skaitļu skaitu. Dispersijas brīvības pakāpju skaitu var atrast, ja no visu skaitļu skaita atņem to ierobežojumu skaitu, kuri uzlikti izejas informācijai pie dispersijas aprēķināšanas.

Standartnovirze nav noderīga dažādu lielumu izkliedes salīdzināšanai, ja lielumiem ir dažādi vidējie aritmētiskie vai arī ja



lielumiem ir dažādi nosaukumi. Šādos gadījumos lieto relatīvu izkliedes mēru — *variāciju koeficientu*, kuru apzīmē ar  $V$  un aprēķina pēc formulas

$$V = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\%. \quad (27.8)$$

Piemērs. Rajona saimniecībā vidējais izslaukums no vienas govs gadā  $\bar{x} = 31,1$  cnt, standartnovirze  $s_x = 1,9$  cnt, viena centnera piena vidējā pašizmaksa  $\bar{y} = 15,5$  rbļ., bet standartnovirze  $s_y = 2,5$  rbļ. Noskaidrot, kuram lielumam ir lielāka mainība (izkliede). Dabūjam

$$V_x = \frac{1,9}{31,1} \cdot 100\% \approx 6,1\%$$

$$V_y = \frac{2,5}{15,5} \cdot 100\% \approx 16,1\%.$$

Kā rāda relatīvie izkliedes mēri, pašizmaksai ir ievērojami lielāka mainība nekā izslaukumam.

Lai atrastu standartnovirzi pēc formulas (27.7), tad vispirms jāatrod skaitļu  $x_1$  novirzes no vidējā aritmētiskā. Noviržu aprēķins ir darbietilpīgs process, pie tam, tā kā  $\bar{x}$  parasti jānoapaļo, novirzes ir tikai aptuvenas un to kāpināšana kvadrātā vēl vairāk pasliktina aprēķinu precizitāti. Tāpēc formula

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_1 - \bar{x})^2}{n-1}}$$

ir ērta tajos gadījumos, kad skaitļu maz un  $\bar{x}$  aprēķināts precīzi, t. i., ja skaitļu summa  $\sum x_1$  izdalās bez atlikuma ar  $n$ , dodot mazu zīmīgo ciparu skaitu. Šādiem nosacījumiem atbilda tabulas skaitļi.

Lai nebūtu jāaprēķina novirzes, noviržu kvadrātu summu pārveido pēc formulas

$$Q = \sum (x_1 - \bar{x})^2 = \sum x_1^2 - \frac{(\sum x_1)^2}{n}. \quad (27.9)$$

Noviržu kvadrātu summu tātad var atrast, zinot doto skaitļu summu  $\sum x_1$ , to kvadrātu summu  $\sum x_1^2$  un novērojumu skaitu  $n$ . Attiecīgi dispersija

$$s^2 = \frac{\sum x_1^2}{n-1} - \frac{(\sum x_1)^2}{n(n-1)} \quad (27.10)$$

un standartnovirze

$$s = \sqrt{\frac{\sum x_1^2}{n-1} - \frac{(\sum x_1)^2}{n(n-1)}}. \quad (27.11)$$

Piemērs. Atrast ar formulu (27.11) standartnovirzi dotajiem skaitļiem  $x_1: 4,0; 6,5; 6,2; 4,8; 5,4; 5,3; 5,9$ . Dabūjam

$$\Sigma x_1 = 4,0 + 6,5 + 6,2 + 4,8 + 5,4 + 5,3 + 5,9 = 38,1,$$

$$\Sigma x_1^2 = 4,0^2 + 6,5^2 + 6,2^2 + 4,8^2 + 5,4^2 + 5,3^2 + 5,9^2 = 211,79,$$

$$s = \sqrt{\frac{211,79}{6} - \frac{38,1^2}{7 \cdot 6}} \approx \sqrt{0,7362} \approx 0,86.$$

Ja jāapstrādā liels skaitļu materiāls, tad datus ieteicams nodot skaitļošanas centrā.

**227. §. Variāciju rinda un tās sastādīšana.** *Variāciju rinda ir tabula, kurā parādītas pētāmās pazīmes gradācijas — klases un klašu biežumi jeb to objektu skaits, kuri ietilpst attiecīgajā klasē.* Variāciju rindām ir divējāda nozīme.

1. Ar variāciju rindu palīdzību vieglāk atrast liela parauga skaitliskos raksturojumus, ja aprēķini jāizdara pašu spēkiem bez skaitļošanas tehnikas. Raugoties no šāda viedokļa, variāciju rindu nozīme arvien vairāk samazinās, jo visus tos rādītājus, kurus mēs aprēķinām variāciju rindai, bez grūtībām var atrast arī nesagrupētam materiālam, lietojot moderno skaitļošanas tehniku.

2. Variāciju rinda uzskatāmi parāda objektu sadalījumu pa klasēm. Tā ir principiāli jauna informācija, kuru no nesagrupēta skaitļu materiāla nevar iegūt. Grupējums pa klasēm palīdz uztvert likumsakarību, kāda pastāv starp pazīmes vērtībām un to parādīšanās biežumiem.

Sastādot variāciju rindu, dotos skaitļus grupē klasēs — piemērota garuma intervālos. Grupēšanu var izdarīt tikai pietiekami liela paraugam. Klašu skaitu  $k$  parasti ņem robežās no 10 līdz 12. Klases intervāla lielumu  $c$  aptuveni atrod, dalot variāciju amplitūdu ar izvēlēto klašu skaitu  $k$ , t. i.,

$$c \approx \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}.$$

Tā, piemēram, ja  $x_{\max} = 493$ ,  $x_{\min} = 198$  un  $k = 10$ , tad

$$\frac{493 - 198}{10} = \frac{295}{10} = 29,5,$$

un par klases intervāla lielumu pieņem 30. Tālāk izvēlas pirmās klases sākuma skaitli, kurš nedrīkst pārsniegt  $x_{\min}$ . Par  $c$ , kā arī par pirmās klases sākumu jāņem pēc iespējas noapaļoti skaitļi, lai klases būtu pārskatāmākas un variāciju rindas apstrāde vienkāršāka.

1. piemērs. Pieņemsim, ka ir 20 skaitļi: 37,5; 35,8; 39,2; 34,6; 32,4; 33,7; 30,1; 35,6; 35,9; 36,4; 34,8; 36,4; 33,3; 34,6; 35,2; 36,7; 35,2; 38,1; 37,1; 32,6, kuri izsaka teļu dzīvsvāru piedzimstot (kg).

Tā kā novērojumu skaits  $n=20$  šeit ir neliels, tad skaitļus grupēsim 5 klasēs, tātad  $k=5$ .

$$x_{\max}=39,2; \quad x_{\min}=30,1;$$

$$\frac{x_{\max}-x_{\min}}{k} = \frac{39,2-30,1}{5} = \frac{9,1}{5} = 1,82 \approx 2;$$

$$c=2.$$

Ja par pirmās klases sākuma skaitli izvēlas 30, tad iegūst šādu variāciju rindu:

Tabula 27.3

| $x_i$ | 30—32 | 32—34 | 34—36 | 36—38 | 38—40 |                 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------------|
| $m_i$ | 1     | 4     | 8     | 5     | 2     | $\Sigma m_i=20$ |

Ar  $x_i$  apzīmētas klases, bet ar  $m_i$  — biežumi.

Kā praktiski ērti atrast biežumus liela novērojumu skaita gadījumā, redzams nākošajā piemērā.

2. piemērs. Dotie skaitļi izsaka 125 govju izslaukumus (kg) laktācijas periodā.

5401, 5622, 3864, 4183, 4268, 3298, 5292, 4175, 4764,  
 4918, 4338, 4445, 3897, 3502, 3946, 4028, 2606, 5194,  
 4578, 4785, 3652, 3828, 4076, 3645, 4640, 4276, 4744,  
 4812, 3575, 3301, 4174, 3790, 4998, 3432, 4292, 4624,  
 4532, 3869, 2915, 3413, 4409, 4670, 4317, 5136, 4483,  
 4362, 4329, 4954, 3788, 4195, 4326, 4583, 3576, 5212,  
 3137, 4204, 5017, 3972, 4682, 3992, 4281, 3856, 3608,  
 4892, 4998, 4313, 5332, 3276, 4845, 3224, 4539, 4592,  
 3686, 4709, 5136, 3862, 4285, 3822, 3623, 4616, 3674,  
 4205, 4297, 3924, 3981, 4407, 4290, 4880, 4402, 3386,  
 5780, 3779, 4518, 4709, 3672, 4166, 4179, 3507, 4129,  
 3592, 4379, 4231, 3919, 3924, 4912, 5443, 4436, 3102,  
 4601, 4081, 4424, 4511, 4277, 4326, 4103, 4075, 4317,  
 2984, 4281, 4020, 4375, 3989, 3617, 4695, 3715.

Izskatot dotos skaitļus, atrodam  $x_{\max}=5780$ ,  $x_{\min}=2606$ . Izvēlēsimies  $k=12$ , tad

$$c \approx \frac{5780-2606}{12} = 264,5.$$

Ja dalījumu noapaļo stipri uz augšu, tad, sastādot variāciju rindu, pēdējā vai pat vairākas pēdējās klases var izrādīties tukšas, tātad izvēlētais klašu skaits praktiski par vienu vai dažām vienībām samazināsies. Ja turpretim  $c$  noteikts, stipri samazinot dalījumu, tad visi skaitļi neietilpst  $k$  klasēs un izvēlētais klašu skaits jāpalielina.



Izvēlēsimies  $c=300$  un pirmās klases sākuma skaitli vienādu ar 2400. Atrodot  $c$ , dalījums stipri palielināts, toties pirmās klases sākuma skaitlis ņemts ievērojami mazāks par vismazāko skaitli 2606, tāpēc pamats cerēt, ka visi dati sagrupēsies tieši 12 klasēs. To rāda arī vienkāršs aprēķins:

$$2400 + 300 \cdot 12 = 6000.$$

Tālāk tabulā 27.4 vertikālā ailē vispirms ieraksta klases, tad pēc kārtas izskata visus pierakstītos skaitļus, atzīmējot katru skaitli ar vertikālu svītriņu pretim attiecīgajai klasei. Pārskatāmības labā katru piekto svītriņu velk horizontāli, pārmaiņus virs un zem iepriekšējām četrām svītriņām.

Tabula 27.4

| Klases    |              | $m_1$ |
|-----------|--------------|-------|
| 2400—2700 |              | 1     |
| 2700—3000 |              | 2     |
| 3000—3300 |              | 5     |
| 3300—3600 |              | 9     |
| 3600—3900 |              | 19    |
| 3900—4200 |              | 21    |
| 4200—4500 |              | 29    |
| 4500—4800 |              | 19    |
| 4800—5100 |              | 10    |
| 5100—5400 |              | 6     |
| 5400—5700 |              | 3     |
| 5700—6000 |              | 1     |
|           | $\Sigma m_1$ | 125   |

Laī varētu izpildīt vajadzīgos aprēķinus, variāciju rindā klašu vietā pietiek uzrādīt to centrālos skaitļus. Pēdējā piemērā variāciju rinda pēc klašu aizstāšanas ar to centrālajiem jeb vidējiem skaitļiem ir šāda:

Tabula 27.5

|       |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |                    |
|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|--------------------|
| $x_1$ | 2550 | 2850 | 3150 | 3450 | 3750 | 4050 | 4350 | 4650 | 4950 | 5250 | 5550 | 5850 |                    |
| $m_1$ | 1    | 2    | 5    | 9    | 19   | 21   | 29   | 19   | 10   | 6    | 3    | 1    | $\Sigma m_1 = 125$ |

1. piemērā variāciju rinda ir šāda:

Tabula 27.6

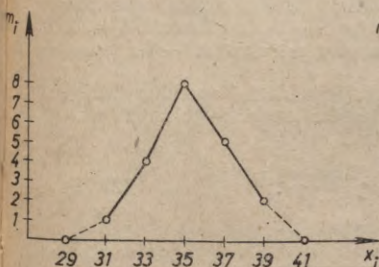
|       |    |    |    |    |    |                   |
|-------|----|----|----|----|----|-------------------|
| $x_1$ | 31 | 33 | 35 | 37 | 39 |                   |
| $m_1$ | 1  | 4  | 8  | 5  | 2  | $\Sigma m_1 = 20$ |

Piezīme. Grupējot datus klasēs, vairākus dažādos skaitļus aizstāj ar vienu un to pašu skaitli — klases centru. Tā pirmajā piemērā skaitļi 32,4; 33,7; 32,6; 33,3 tiek aizstāti ar otrās klases centrālo skaitli 33, bet 39,2 un 38,1 — ar piektās klases centru 39. Sakarā ar to no variāciju rindas aprēķinātie lielumi nav pilnīgi tādi paši kā no nesagrupētā materiāla atrastie, taču teorētiski un praktiski pierādīts, ka pietiekami liela novērojumu skaita gadījumā grupēšanas rezultātā dabūtā neprecizitāte ir tik maza, ka to var neievērot.

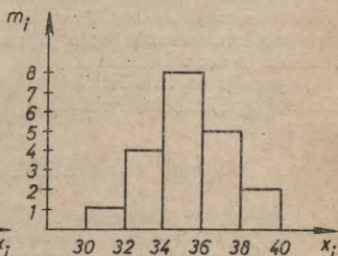
**228. §. Variāciju rindas apstrāde.** Lai variāciju rindā esošās likumsakarības kļūtu uzskatāmas, konstruē variāciju rindas grafiku. Matemātiskajā statistikā variāciju rindas grafiskai attēlošanai visbiežāk lieto *poligonu* un *histogrammu*.

199. zīmējumā konstruēta grafika tabulā 27.6 dotajai variāciju rindai. Taisnleņķa koordinātu sistēmā pētāmā lieluma vērtības atliktas kā abscisas, bet atbilstošie biežumi — kā ordinātes. Savienojot blakus esošos punktus ar taisnes nogriežņiem, iegūst lauztu līniju, kuru var pagarināt līdz abscisu asiņ, kā parādīts 199. zīmējumā. Iegūto lauztu līniju sauc par poligonu. Bieži saka arī «sadalījuma poligons», jo tas attēlo datu sadalījumu pa atsevišķām klasēm.

Ja variāciju rindā dotas klases, tad to attēlo histogrammas veidā (200. zīm.). Klases atliek kā abscisu ass nogriežņus, uz katra nogriežņa kā pamata konstruē taisnstūri, kura augstums ir klases biežums. No taisnstūriem izveidotā figūra ir sadalījuma histogramma.



199. zīm.



200. zīm.

Savienojot histogrammas augšējo pamatu viduspunktus ar taisnes nogriežņiem, iegūst poligonu. Tāpat nav grūti no dotā poligona iegūt atbilstošo histogrammu.

Nogriežņa garumu, kas histogrammā attēlo klasi, var pieņemt par mēra vienību. Ja uz ordinātu ass atlikti relatīvie biežumi, tad katra histogrammas taisnstūra laukums skaitliski vienāds ar

atbilstošo relatīvo biežumu un visu laukumu summa vienāda ar 1, t. i.,

$$\frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} + \dots + \frac{m_k}{n} = \frac{\sum m_i}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

**Piezīme.** Vertikālo asi šādos zīmējumos var arī neparādīt, pie tam mēra vienības abām asīm parasti izvēlas dažādas ar tādu nolūku, lai zīmējums nevienas ass virzienā nebūtu pārāk izstiepts.

Variāciju rindai izšķir vienkāršos un svērtos vidējos lielumus. Par skaitļa  $x_i$  «svaru» uzskata atbilstošo biežumu. Aprēķinot vienkāršos vidējos, biežumus neievēro, turpretim, aprēķinot svērtos vidējos, arī biežumi jāņem vērā. Variāciju rindai pieņemts aprēķināt tikai svērtos rādītājus. Tā svērtā vidējo aritmētisko  $\bar{x}$  aprēķina pēc formulas

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i} \quad (27.12)$$

Tabulā 27.6 dotajai variāciju rindai svērtais vidējais aritmētiskais

$$\bar{x} = \frac{31 \cdot 1 + 33 \cdot 4 + 35 \cdot 8 + 37 \cdot 5 + 39 \cdot 2}{20} = 35,3.$$

Par modālo klasi sauc klasi ar vislielāko biežumu. 1. piemērā tā ir 34—36. Variāciju rindas modālās klases centru sauc par modu (vienkāršā moda). To apzīmē ar  $M_0$ . Mūsu piemērā  $M_0 = 35$ . Aprēķinot svērtā modu, būtu jāņem vērā arī biežumi — tās aprēķināšanu te neapskatīsim.

Dispersiju un standartnovirzi variāciju rindai aprēķina līdzīgi kā nesagrupētiem skaitļiem, tikai jāievēro «svāri» — biežumi. Dispersija

$$s^2 = \frac{\sum x_i^2 m_i}{n-1} - \frac{(\sum x_i m_i)^2}{n(n-1)} \quad (27.13)$$

Standartnovirze

$$s = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 m_i}{n-1} - \frac{(\sum x_i m_i)^2}{n(n-1)}} \quad (27.14)$$

Apstrādājot variāciju rindu pašu spēkiem, ieteicams klašu centrālos skaitļus vispirms kodēt, aizstājot tos ar nosacītiem skaitļiem — kodiem  $a_i$ , kurus atrod pēc formulas

$$a_i = \frac{x_i - x_0}{c}$$



Par  $x_0$  izvēlas kādu no  $x_1$ , vēlams modu, par  $c$  — klases intervāla lielumu. Lietojot kodus,  $x$  un  $s$  aprēķina pēc formulām

$$\bar{x} = x_0 + \frac{\sum \alpha_i m_i}{n} c, \quad (27.15)$$

$$s = c \sqrt{\frac{\sum \alpha_i^2 m_i}{n-1} - \frac{(\sum \alpha_i m_i)^2}{n(n-1)}} \quad (27.16)$$

Piemērs. Aprēķināt vidējo aritmētisko, standartnovirzi un variāciju koeficientu tabulā 27.7 dotajai variāciju rindai. Pieņemsim, ka  $x_0 = 4350$  un  $c = 300$ .

Tabula 27.7

| $x_1$ | $m_i$            | $\alpha_i$ | $\alpha_i m_i$            | $\alpha_i^2 m_i$            |
|-------|------------------|------------|---------------------------|-----------------------------|
| 2550  | 1                | -6         | -6                        | 36                          |
| 2850  | 2                | -5         | -10                       | 50                          |
| 3150  | 5                | -4         | -20                       | 80                          |
| 3450  | 9                | -3         | -27                       | 81                          |
| 3750  | 19               | -2         | -38                       | 76                          |
| 4050  | 21               | -1         | -21                       | 21                          |
| 4350  | 29               | 0          | 0                         | 0                           |
| 4650  | 19               | 1          | 19                        | 19                          |
| 4950  | 10               | 2          | 20                        | 40                          |
| 5250  | 6                | 3          | 18                        | 54                          |
| 5550  | 3                | 4          | 12                        | 48                          |
| 5850  | 1                | 5          | 5                         | 25                          |
|       | $\sum m_i = 125$ |            | $\sum \alpha_i m_i = -48$ | $\sum \alpha_i^2 m_i = 530$ |

$$\bar{x} = 4350 + \frac{-48}{125} \cdot 300 = 4350 - 115,2 = 4234,8; \quad \bar{x} \approx 4235 \text{ kg};$$

$$s = 300 \sqrt{\frac{530}{125} - \left(-\frac{48}{125}\right)^2} \approx 300 \sqrt{4,24 - 0,38^2} \approx 606,9;$$

$$s = 607 \text{ kg}; \quad V = \frac{606,9}{4234,8} \cdot 100\% \approx 14,3\%.$$

229. §. Jēdziens par korelāciju. Pētot divus variējošus lielumus, piemēram, nokrišņu daudzumu un ražas lielumu, var konstatēt, ka starp tiem pastāv noteikts sakars. Tāpat ir sakarība starp 'aršanas dziļumu un ražas lielumu, sniega kārtas biezumu ziemā un sekojošo plūdu apjomu, auga sēklas svaru un no šīs sēklas izauguša stāda garumu utt.

Vienkāršākā sakarība starp diviem mainīgiem lielumiem ir funkcionāla sakarība, kurā katrai viena mainīgā lieluma vērtībai atbilst viena noteikta otra mainīgā lieluma vērtība. Sakarībai starp variējošiem lielumiem ir citāds raksturs. Analizējot minētos piemērus, redzam, ka noteiktai viena lieluma vērtībai, piemēram,

dotajam sēklas svaram, atbilst daudzas otra lieluma vērtības — dažādi stādu garumi.

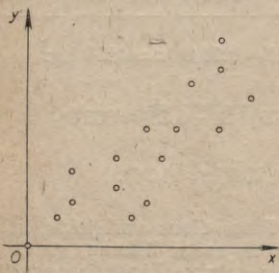
Ja katrai viena variējošā lieluma skaitliskajai vērtībai atbilst daudzas otra lieluma vērtības, tad starp abiem lielumiem pastāv *statistiska sakarība*. Funkcionāla sakarība ir matemātiska abstrakcija, un praksē arī katra funkcionāla sakarība parādās kā statistiska sakarība.

Visbiežāk sastopamais sakarības veids ir *korelācija*. Sakarību sauc par korelāciju, ja viena lieluma dažādām skaitliskajām vērtībām atbilst otra lieluma dažādi vidējie aritmetiskie. Tā, piemēram, pastāv korelācija starp kukurūzas vālišu garumu un svaru, jo vālitēm ar dažādu garumu atbilst dažāds vidējais svars.

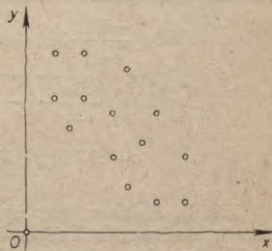
Lai gūtu ieskatu par korelācijas raksturu, pirms aprēķinu sākas ieteicams atlikt skaitļu pārus kā punktus koordinātu sistēmā. Pēc punktu izvietojuma var spriest par korelācijas formu, virzienu un pakāpi.

Atkarībā no formas izšķir *lineāru* un *liklinijas korelācijas*. Korelāciju sauc par lineāru, ja viena lieluma vienādām izmaiņām atbilst caurmērā vienādas otra lieluma izmaiņas. Ja korelācija ir lineāra, tad konstruētie punkti vairāk vai mazāk blīvi grupējas ap taisni, kura, ja to pagarina, krusto  $Ox$  asi. Lineārai korelācijai izšķir *pozitīvu* un *negatīvu virzienu*. Ja, vienam lielumam palielinoties, arī otrs lielums vidēji palielinās, tad korelācija ir pozitīva, ja turpretim, vienam lielumam palielinoties, otrs vidēji samazinās, tad korelācija ir negatīva.

Pozitīva korelācija pastāv, piemēram, starp kukurūzas vālišu garumu un svaru, diametru un rindu skaitu vālitē utt.



201. zīm.



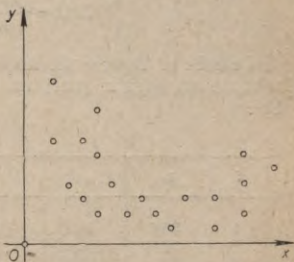
202. zīm.

Negatīvas korelācijas bieži sastopamas ekonomikā. Tā, piemēram, negatīva korelācija pastāv starp produkcijas ražošanas apjomu un produkcijas vienības pašizmaksu.

Korelācija ir liklinijas, ja punkti sagrupēti ap kādu likni. Liklinijas korelācijai par virzienu runāt nevar.

201., 202. un 203. zīmējumā parādīts punktu iespējamais izvietojums pozitīvas, negatīvas un liklinijas korelācijas gadījumos.

Ieskats par korelācijas raksturu var mainīties, mainoties novērojumu skaitam un variējošo lielumu amplitūdām. Tā, piemēram, ja mūsu rīcībā ir dati par graudaugu ražību un pašizmaksu nedaudzās saimniecībās, kurās ražas atšķiras maz, korelācija izrādīsies lineāra, ja turpretim datu būs daudz un ražu svārstības lielas, tad var izrādīties, ka korelācijai starp šiem pašiem lielumiem ir liklinijas raksturs. Teiktais saprotams no 203. zīmējuma, kurā attēlota liklinijas korelācija. Aplūkojot nelielus  $x$  izmaiņas intervālus, var uzskatīt, ka atbilstošie punkti grupējas ap taisni. (Pietiekami mazā  $x$  izmaiņas intervālā atbilstošo liknes gabalu var aizstāt ar taisnes nogriezni.)



203. zīm.

**230. §. Korelācijas koeficients un tā aprēķināšana.** Divas viena virziena lineāras korelācijas var atšķirties ar to, cik cieši punkti blīvijas ap taisni. Jo šaurāka ir punktu josla, jo ciešāka ir korelācija. Sakarības ciešumu jeb pakāpi lineāras korelācijas gadījumā raksturo korelācijas koeficients, kuru apzīmē ar  $r$  un definē ar formulu

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum (y_i - \bar{y})^2}} \quad (27.17)$$

Korelācijas koeficients var mainīties no  $-1$  līdz  $1$ , tātad, ja aprēķinātā korelācijas koeficienta absolūtā vērtība pārsniedz  $1$ , jāmeklē kļūda tā izskaitļošanā. Jo ciešāka ir lineārā korelācija starp pētāmajiem lielumiem, jo tuvāka  $1$  ir korelācijas koeficienta absolūtā vērtība. Ja lineāras korelācijas starp lielumiem nav, tad  $r=0$ . Pieņemts uzskatīt korelāciju par vāju, ja  $0 < |r| \leq 0,33$ , par vidēju, — ja  $0,33 < |r| \leq 0,66$ , par augstu, — ja  $0,66 < |r| < 1$ . Ja  $|r|=1$ , tad pastāv ideāla lineāra korelācija —  $y$  izmaiņas ir tieši proporcionālas  $x$  izmaiņām.

Formula (27.17) nav ērta skaitļošanai, jo iepriekš jāatrod novirzes  $x_i - \bar{x}$  un  $y_i - \bar{y}$ . Tāpēc noviržu reizinājumu summu pārveido līdzīgi tam, kā pārveidojam noviržu kvadrātu summu (sk. formulu 27.9), izsakot to ar doto skaitļu reizinājumu summas  $\sum x_i y_i$  un to summu reizinājuma  $\sum x_i \sum y_i$  palīdzību. Tad dabūjam

$$\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n} \quad (27.18)$$



Formulu (27.17) tad var pārrakstīt tā:

$$r = \frac{\sum x_1 y_1 - \frac{\sum x_1 \sum y_1}{n}}{\sqrt{\sum x_1^2 - \frac{(\sum x_1)^2}{n}} \sqrt{\sum y_1^2 - \frac{(\sum y_1)^2}{n}}} \quad (27.19)$$

Piemērs. Aprēķināt koeficientu korelācijai starp vidējo izslaukumu no govīm  $x$  (cnt) un viena centnera piena pašizmaksu  $y$  (rbļ).

Tabula 27.8

| $i$      | $x_1$ | $y_1$ | $x_1^2$ | $y_1^2$ | $x_1 y_1$ |
|----------|-------|-------|---------|---------|-----------|
| 1        | 33,6  | 14,8  | 1128,96 | 219,04  | 497,28    |
| 2        | 30,6  | 14,0  | 936,36  | 196,00  | 428,40    |
| 3        | 29,1  | 16,3  | 846,81  | 265,69  | 474,33    |
| 4        | 32,8  | 14,6  | 1075,84 | 213,16  | 478,88    |
| 5        | 30,2  | 15,9  | 912,04  | 252,81  | 480,18    |
| 6        | 28,9  | 20,4  | 835,21  | 416,16  | 589,56    |
| 7        | 32,5  | 12,2  | 1056,25 | 148,84  | 396,50    |
| $\Sigma$ | 217,7 | 108,2 | 6791,47 | 1711,70 | 3345,13   |

$$r = \frac{3345,13 - \frac{217,7 \cdot 108,2}{7}}{\sqrt{6791,47 - \frac{217,7^2}{7}} \sqrt{1711,70 - \frac{108,2^2}{7}}} \approx \frac{-19,89}{\sqrt{21,00} \sqrt{39,24}} \approx -0,69.$$

Ja korelācijas koeficients jāaprēķina, nepielietojot elektronu skaitļošanas mašīnas, tad darbu iespējams atvieglināt, kodējot sākuma informāciju. Apzīmēsim

$$\alpha_1 = \frac{x_1 - x_0}{c_x} \quad \text{un} \quad \beta_1 = \frac{y_1 - y_0}{c_y},$$

kur  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $c_x$  un  $c_y$  ir patvaļīgi skaitļi, kas izvēlēti ar tādu aprēķinu, lai kodi  $\alpha_1$  un  $\beta_1$  būtu pēc iespējas mazi un noapaļoti skaitļi. Var pierādīt, ka  $r$  aprēķināšanai der formula

$$r = \frac{\sum \alpha_1 \beta_1 - \frac{\sum \alpha_1 \sum \beta_1}{n}}{\sqrt{\sum \alpha_1^2 - \frac{(\sum \alpha_1)^2}{n}} \sqrt{\sum \beta_1^2 - \frac{(\sum \beta_1)^2}{n}}} \quad (27.20)$$

Iepriekšējā piemērā pieņemsim  $x_0 = 30$  un  $c_x = 0,1$ , bet  $y_0 = 15$  un  $c_y = 0,1$ . Tad  $\alpha_1 = \frac{33,6 - 30}{0,1} = 36$ ;  $\alpha_2 = \frac{30,6 - 30}{0,1} = 6$ , utt.

Tabulā 27.9 parādīti attiecīgie aprēķini ar kodiem.

Tabula 27.9

| $i$      | $\alpha_i$ | $\beta_i$ | $\alpha_i^2$ | $\beta_i^2$ | $\alpha_i\beta_i$ |
|----------|------------|-----------|--------------|-------------|-------------------|
| 1        | 36         | -2        | 1296         | 4           | -72               |
| 2        | 6          | -10       | 36           | 100         | -60               |
| 3        | -9         | 13        | 81           | 169         | -117              |
| 4        | 28         | -4        | 784          | 16          | -112              |
| 5        | 2          | 9         | 4            | 81          | 18                |
| 6        | -11        | 54        | 121          | 2916        | -594              |
| 7        | 25         | -28       | 625          | 784         | -700              |
| $\Sigma$ | 77         | 32        | 2947         | 4070        | -1637             |

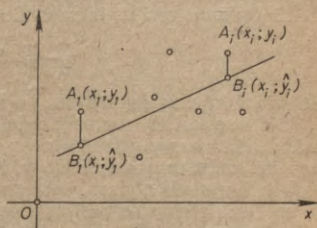
$$r = \frac{-1637 - \frac{77 \cdot 32}{7}}{\sqrt{2947 - \frac{77^2}{7}} \sqrt{4070 - \frac{32^2}{7}}} \approx \frac{-1989}{\sqrt{2100} \sqrt{3924}} \approx -0,69.$$

Piezīme. Seit iztīrāto korelāciju dažreiz sauc par pāra korelāciju, ar to pasvīturojot faktu, ka te pētīta sakarība tikai divu lielumu starpā, neinteresējoties par citiem lielumiem, kuri vārētu būt saistīti ar apskatāmajiem lielumiem.

**231. §. Regresijas taisne.** Lineāras korelācijas gadījumā var atrast tās taisnes vienādojumu, ap kuru sagrupēti punkti. Šo taisni nosaka saskaņā ar *vismazāko kvadrātu principu* un sauc par *regresijas taisni*.

Taisne ir atrasta saskaņā ar vismazāko kvadrātu principu, ja tā izpilda prasību  $\Sigma (A_i B_i)^2 = \min$ , kur  $A_i(x_i, y_i)$  ir dotie punkti,  $B_i(x_i, \hat{y}_i)$  — atbilstošie punkti uz taisnes (204. zīm.).

Tātad regresijas taisnei nogriežņu  $A_i B_i$  lielumu kvadrātu summa ir vismazākā, salīdzinot ar jebkuru citu taisni, kuru var novilkt plaknē  $xOy$ .



204. zīm.

Regresijas taisnes vienādojumu meklēsim formā  $\hat{y} = bx + b_0$ ,

kur koeficienti  $b$  un  $b_0$  jāaprēķina, izmantojot skaitļu pārus  $x_i, y_i$ .

Lai atrastu metodi koeficientu aprēķināšanai, pārveidosim kvadrātu summu, ievērojot, ka  $A_i B_i = y_i - \hat{y}_i$ . Tad

$$\Sigma (A_i B_i)^2 = \Sigma (y_i - \hat{y}_i)^2 = \Sigma (y_i - bx_i - b_0)^2.$$

Sī summa ir divu argumentu  $b$  un  $b_0$  funkcija. Šādas funkcijas minimuma punktu atrod, pielīdzinot tās parciālos atvasinājumus nullei un atrisinot iegūto vienādojumu sistēmu. Dabūsim

$$\left. \begin{aligned} \Sigma (y_1 - bx_1 - b_0) \cdot x_1 &= 0, \\ \Sigma (y_1 - bx_1 - b_0) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

jeb

$$\left. \begin{aligned} b \Sigma x_1^2 + b_0 \Sigma x_1 &= \Sigma x_1 y_1, \\ b \Sigma x_1 + b_0 n &= \Sigma y_1. \end{aligned} \right\} \quad (27.21)$$

Atrādīsim lielumu  $b$  izsakot no otrā vienādojuma  $b_0$  un ievie-  
tojot pirmajā vienādojumā. Dabūsim

$$b_0 = \frac{\Sigma y_1 - b \Sigma x_1}{n} \quad \text{jeb} \quad b_0 = \bar{y} - b\bar{x}, \quad (27.22)$$

$$b = \frac{n \Sigma x_1 y_1 - \Sigma x_1 \Sigma y_1}{n \Sigma x_1^2 - (\Sigma x_1)^2}$$

jeb

$$b = \frac{\Sigma x_1 y_1 - \frac{\Sigma x_1 \Sigma y_1}{n}}{\Sigma x_1^2 - \frac{(\Sigma x_1)^2}{n}} \quad (27.23)$$

Lielumu  $b$  sauc par *regresijas koeficientu*. Tas rāda, par cik vienī-  
bām vidēji palielinās  $y$ , ja  $x$  palielinās par vienu vienību.

Ievietojot  $b$  un  $b_0$  vērtības vienādojumā  $\hat{y} = bx + b_0$ , iegūstam  
regresijas taisnes vienādojumu dotajai izejas informācijai.

Dažreiz regresijas taisnes vienādojumu dod formā

$$\hat{y} - \bar{y} = b(x - \bar{x}). \quad (27.24)$$

So vienādojumu iegūst no  $\hat{y} = bx + b_0$ , ievietojot tanī  $b_0 = \bar{y} - b\bar{x}$ .

Seit apskatīto regresijas taisni dažreiz sauc par regresijas  
taisni lielumam  $y$  atkarībā no  $x$  atšķirībā no otras regresijas tais-  
nes lielumam  $x$  atkarībā no  $y$ , kuru varētu atrast, ja nogriežņus  
 $A_1B_1$  vilktu nevis  $Oy$  ass, bet gan  $Ox$  ass virzienā. Turpmāk apska-  
tīsim tikai pirmo regresijas taisni, kas dod *rezultatīvo pazīmi*  $y$   
atkarībā no *faktoriālās pazīmes*\*  $x$ . Ja abas pazīmes var mainīt  
lomām, tad regresijas taisni lielumam  $x$  atkarībā no  $y$  iegūst ana-  
logi pirmajai taisnei, apmainot apzīmējumus.

\* Jau ar pētāmo lielumu specifiku noteikts, kura pazīme uzskatāma par  
faktoriālo, kura — par rezultatīvo. Salīdzinājumā ar matemātiskās analīzes  
jēdzieniem var vilkt šādas paralēles: faktoriālā pazīme — neatkarīgais mai-  
nīgais jeb arguments, rezultatīvā pazīme — atkarīgais mainīgais jeb funkcija.  
Tā, piemēram, mēslojuma doza — faktoriālā pazīme, ražas pieaugums — re-  
zultatīvā pazīme.



Piemērs. Uzrakstīt regresijas taisnes vienādojumu apšu atvašu garumam  $y$  atkarībā no diametra  $x$ , ja doti diametra un garuma mērījumi 20 atvasēm.

Regresijas taisnes atrašanai nepieciešamas summas  $\Sigma x_i$ ,  $\Sigma y_i$ ,  $\Sigma x_i^2$ ,  $\Sigma x_i y_i$ . Tabulā 27.10 iekārtotas ailes to atrašanai. Aprēķināts arī  $\Sigma y_i^2$ , kas nepieciešams regresijas analīzei nākošajā paragrāfā.

Tabula 27.10

| $i$      | $x_i(\text{cm})$ | $y_i(\text{m})$ | $x_i^2$ | $x_i y_i$ | $y_i^2$ |
|----------|------------------|-----------------|---------|-----------|---------|
| 1        | 1,1              | 1,3             | 1,21    | 1,43      | 1,69    |
| 2        | 1,6              | 3,2             | 2,56    | 5,12      | 10,24   |
| 3        | 0,6              | 1,3             | 0,36    | 0,78      | 1,69    |
| 4        | 0,7              | 1,7             | 0,49    | 1,19      | 2,89    |
| 5        | 0,6              | 1,1             | 0,36    | 0,66      | 1,21    |
| 6        | 0,8              | 1,8             | 0,64    | 1,44      | 3,24    |
| 7        | 1,0              | 1,0             | 1,00    | 1,00      | 1,00    |
| 8        | 0,8              | 1,3             | 0,64    | 1,04      | 1,69    |
| 9        | 0,6              | 0,8             | 0,36    | 0,48      | 0,64    |
| 10       | 1,1              | 1,8             | 1,21    | 1,98      | 3,24    |
| 11       | 1,3              | 3,0             | 1,69    | 3,90      | 9,00    |
| 12       | 1,4              | 2,9             | 1,96    | 4,06      | 8,41    |
| 13       | 0,7              | 1,6             | 0,49    | 1,12      | 2,56    |
| 14       | 1,6              | 3,3             | 2,56    | 5,28      | 10,89   |
| 15       | 1,0              | 2,2             | 1,00    | 2,20      | 4,84    |
| 16       | 1,6              | 3,3             | 2,56    | 5,28      | 10,89   |
| 17       | 0,9              | 1,2             | 0,81    | 1,08      | 1,44    |
| 18       | 0,6              | 1,4             | 0,36    | 0,84      | 1,96    |
| 19       | 1,5              | 2,8             | 2,25    | 4,20      | 7,84    |
| 20       | 0,8              | 1,9             | 0,64    | 1,52      | 3,61    |
| $\Sigma$ | 20,3             | 38,9            | 23,15   | 44,60     | 88,97   |

$$b = \frac{44,60 - \frac{20,3 \cdot 38,9}{20}}{23,15 - \frac{20,3^2}{20}} \approx \frac{44,60 - 39,48}{23,15 - 20,60} \approx 2,01,$$

$$b_0 = \frac{38,9 - 2,01 \cdot 20,3}{20} = \frac{38,9 - 40,8}{20} = -\frac{1,9}{20} = -0,095.$$

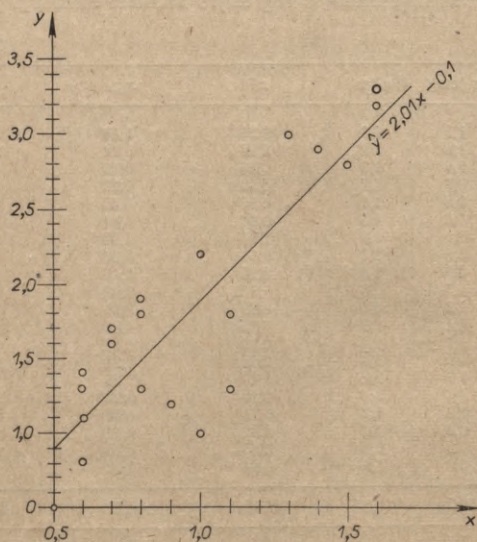
205. zīmējumā doti punkti  $A_1(x_i y_i)$  un regresijas taisne

$$\hat{y} = 2,01x - 0,10.$$

Regresijas vienādojuma atrašana ir svarīga no vairākiem vie-dokļiem.

Regresijas vienādojums parāda sakarības galveno tendenci (raksturu). Saka, ka ar regresijas vienādojuma palīdzību «izlī-dzina» novērojumu datus, t. i., izlīdzina gadījuma rakstura «zīg-zagus», fiksē likumsakarību.

Ievietojot regresijas vienādojumā  $x$  vietā vērtības no intervāla  $(x_{\min}; x_{\max})$ , var atrast (prognozēt) atbilstošās  $\hat{y}$  vērtības. Šādu darbību sauc par *interpolāciju*. Tā mūsu piemērā, ievietojot  $x = 1,2$  cm, iegūstam  $\hat{y} = 2,0 \cdot 1,2 - 0,10 = 2,31$  (m). Ja  $x > x_{\max}$  vai



205. zīm.

$x < x_{\min}$ , tad atbilstošā  $\hat{y}(x)$  aprēķināšanu sauc par *ekstrapolāciju*. Tā pieļaujama ar nosacījumu, ka sakarībai ārpus apskatītā intervāla  $(x_{\min}; x_{\max})$  ir tāds pats raksturs kā intervāla iekšpusē. Tā kā ne vienmēr šāds nosacījums spēkā, tad ekstrapolēt ne vienmēr iespējams. Parasti jāaprobežojas ar tādu ekstrapolāciju, kur izvēlēta  $x$  vērtība tikai nedaudz pārsniedz maksimālo vai ir nedaudz mazāka par minimālo vērtību.

Tā regresijas taisnes vienādojums pašizmaksai atkarībā no vidējā izslaukuma lieluma 230. §, piemēram, ir

$$\hat{y} = -0,95x + 45,00.$$

Izvēloties  $x = 50,0$  cnt, iegūstam

$$\hat{y} = -0,95 \cdot 50,0 + 45,00 = -2,5 \text{ (rbj)}.$$

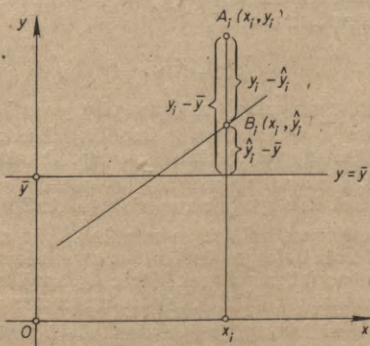
Tātad, izmantojot prognozēšanai to regresijas taisnes vienādojumu, kas iegūts  $x$  izmaiņu intervālam (28,9; 33,6), vidējam izslaukuma lielumam  $x=50,0$  cnt atbilst negatīva 1 centnera piena pašizmaksa. Šī aplamība izskaidrojama ar nelikumīgu ekstrapolāciju. Plašākam  $x$  svārstību intervālam, acīm redzot, atbilst citāda regresijas taisne; piemērotāka var izrādīties pat ne taisne, bet gan parabola vai hiperbola.

232. §. Kopējās kvadrātu summas sadalīšana sastāvdaļās regresijas analizē. Pieņemsim, ka 206. zīmējumā attēloti punkti  $A_1(x_1, y_1)$  un atbilstošā regresijas taisne  $\hat{y} = bx + b_0$ . Šajā zīmējumā uzskatāmi parādīta identitāte

$$y_1 - \bar{y} = (\hat{y}_1 - \bar{y}) + (y_1 - \hat{y}_1).$$

Parādīsim, ka tāda pati sakarība kā starp novirzēm pastāv arī starp šo noviržu kvadrātu summām, t. i.,

$$\Sigma (y_1 - \bar{y})^2 = \Sigma (\hat{y}_1 - \bar{y})^2 + \Sigma (y_1 - \hat{y}_1)^2. \quad (27.25)$$



206. zīm.

Lai šo sakarību pierādītu, pārveidosim summas labajā pusē. Ievērojot, ka  $\hat{y}_1 = \bar{y} + b(x_1 - \bar{x})$  (sk. formulu (27.24)) dabūjam,  $\Sigma (\hat{y}_1 - \bar{y})^2 = \Sigma [\bar{y} + b(x_1 - \bar{x}) - \bar{y}]^2 = \Sigma b^2(x_1 - \bar{x})^2 = \frac{[\Sigma (x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y})]^2 \cdot \Sigma (x_1 - \bar{x})^2}{[\Sigma (x_1 - \bar{x})^2]^2}$ , no kurienes

$$\Sigma (\hat{y}_1 - \bar{y})^2 = \frac{[\Sigma (x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y})]^2}{\Sigma (x_1 - \bar{x})^2} \quad (27.26)$$



$$\begin{aligned}\Sigma (y_1 - \hat{y}_1)^2 &= \Sigma [y_1 - \bar{y} - b(x_1 - \bar{x})]^2 = \Sigma (y_1 - \bar{y})^2 - 2\Sigma (y_1 - \bar{y}) \cdot b(x_1 - \bar{x}) + \\ &+ \Sigma b^2 (x_1 - \bar{x})^2 = \Sigma (y_1 - \bar{y})^2 - \frac{2\Sigma (y_1 - \bar{y})(x_1 - \bar{x}) \cdot \Sigma (y_1 - \bar{y})(x_1 - \bar{x})}{\Sigma (x_1 - \bar{x})^2} + \\ &+ \frac{[\Sigma (x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y})]^2}{\Sigma (x_1 - \bar{x})^2},\end{aligned}$$

no kurienes

$$\Sigma (y_1 - \hat{y}_1)^2 = \Sigma (y_1 - \bar{y})^2 - \frac{[\Sigma (x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y})]^2}{\Sigma (x_1 - \bar{x})^2}; \quad (27.27)$$

Ievietojot formulu (27.26) un (27.27) labās puses sakarībā (27.25), dabūjam identitāti, t. i., esam pierādījuši formulas (27.25) pareizību.

Lietosim apzīmējumus un nosaukumus:  $\Sigma (y_1 - \bar{y})^2 = Q_y$  — *kopējā kvadrātu summa rezultativajai pazīmei y*;  $\Sigma (\hat{y}_1 - \bar{y})^2 = Q_r$  — *regresijas kvadrātu summa*,  $\Sigma (y_1 - \hat{y}_1)^2 = Q_z$  — *atlikuma kvadrātu summa*. Saskaņā ar formulu (27.25)

$$Q_y = Q_r + Q_z. \quad (27.28)$$

Kopējā kvadrātu summa  $Q_y$  raksturo visu  $y$  vērtību izkliedi ap vidējo aritmētisko  $\bar{y}$ ;  $Q_r$  raksturo to kopējās izkliedes daļu, kuru izskaidro regresijas taisnes vienādojums resp. tā raksturo regresijas taisnes punktu izkliedi ap vidējo  $\bar{y}$ ;  $Q_z$  parāda punktu izkliedi ap regresijas taisni, tā atspoguļo empirisko  $y_1$  vērtību un teorētiski aprēķināto  $\hat{y}_1$  sakrišanas pakāpi. Jo mazāks  $Q_z$ , jo mazāka  $y_1$  variācijas neizskaidrotā daļa, jo piemērotāks atrastais regresijas vienādojums sakarības izlīdzināšanai. Tāpēc  $Q_z$  aprēķināšana ir ļoti svarīga. Kā rāda formula (27.27), kvadrātu summas atrašanai nav vajadzīgs zināt teorētiskos  $\hat{y}_1$ , jo formulas labajā pusē ietilpst tikai lielumu  $x$  un  $y$  noviržu kvadrātu un reizinājumu summas. Taču praktiski  $Q_z$  atrašanai visbiežāk lieto formulu

$$Q_z = \Sigma y_1^2 - b \Sigma x_1 y_1 - b_0 \Sigma y_1, \quad (27.29)$$

kuru var pierādīt, izdarot dažus elementārus pārveidojumus.

Piemērā par apšu garuma un diametra sakarību iegūstam

$$Q_z = 88,97 - 2,01 \cdot 44,60 + 0,095 \cdot 38,9 = 3,02.$$

Ja vienai un tai pašai izejas informācijai atrasti dažāda tipa regresijas vienādojumi: lineāri, kvadrātiski utt., tad atlikuma kvadrātu summa  $Q_z$  noderīga vienādojuma piemērotības raksturoša-

nai\*. Tas vienādojums, kuram  $Q_z$  mazāks, labāk izskaidro pētāmo sakarību.

Vēl plašāki pielietojumi nekā atlikuma kvadrātu summai ir relatīvam formulas piemērotības mēram, kuru aprēķina ar formulu

$$r^2 = \frac{Q_r}{Q_y}; \quad (27.30)$$

Lielumu  $r^2$  sauc par *determinācijas koeficientu*. Ja to izsaka procentos, tad tas parāda to kopējās izkliedes daļu, kuru izskaidro atrastais vienādojums. Jāievēro, ka lielumam  $r^2$  kā determinācijas koeficientam ir nozīme tikai konkrētā uzdevuma ietvaros, t. i., pie konkrētā kopējās kvadrātu summas sadalījuma veida  $Q_y = Q_r + Q_z$ , kur  $Q_r$  attiecas uz regresiju ar mūsu izvēlēto faktoriālo pazīmi  $x$ . Koeficienta  $r^2$  vispārīnāšana var būt par cēloni pretrunīgiem slēdzieniem. Parādisim, ka taisnes gadījumā  $r^2$  ir mums jau pazīstamā korelācijas koeficienta kvadrāts. Tam nolūkam pārveidosim formulas (27.30) labo pusi

$$\frac{Q_r}{Q_y} = \frac{\Sigma(\hat{y}_1 - \bar{y})^2}{\Sigma(y_1 - \bar{y})^2} = \frac{[\Sigma(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y})]^2}{\Sigma(x_1 - \bar{x})^2 \cdot \Sigma(y_1 - \bar{y})^2} = \left[ \frac{\Sigma(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x_1 - \bar{x})^2} \sqrt{\Sigma(y_1 - \bar{y})^2}} \right]^2$$

(Sal. ar formulu (27.17).)

No šejienes seko, ka korelācijas koeficients

$$r = \pm \sqrt{\frac{\Sigma(\hat{y}_1 - \bar{y})^2}{\Sigma(y_1 - \bar{y})^2}}. \quad (27.31)$$

Determinācijas koeficientu  $r^2$  mēdz izteikt šādā formā:

$$r^2 = \frac{\Sigma(y_1 - \bar{y})^2 - \Sigma(y_1 - \hat{y}_1)^2}{\Sigma(y_1 - \bar{y})^2} = 1 - \frac{\Sigma(y_1 - \hat{y}_1)^2}{\Sigma(y_1 - \bar{y})^2} = 1 - \frac{Q_z}{Q_y},$$

no kurienes

$$r = \pm \sqrt{1 - \frac{Q_z}{Q_y}}. \quad (27.32)$$

Korelācijas koeficienta zīme sakrīt ar regresijas koeficienta zīmi.

Piemērs. Atrādisim koeficientu korelācijai starp apšu atvašu garumu un diametru pēc formulām (27.32) un (27.19). Dabūjam

$$Q = 88,97 - \frac{38,9^2}{20} = 88,97 - 75,66 = 13,31,$$

$$r = \sqrt{1 - \frac{3,02}{13,31}} = \sqrt{0,7731} \approx 0,88.$$

\* Liklinijas regresijas gadījumā atlikuma kvadrātu summa  $Q_z$  raksturo punktu izkliedi ap līkni, un to aprēķina pēc speciālām formulām. Parabolai sk. (27.47).



Pēc formulas (27.19) dabūjam

$$r = \frac{44,60 - \frac{20,3 \cdot 38,9}{20}}{\sqrt{23,15 - \frac{20,3^2}{20}}} = \frac{44,60 - 39,48}{\sqrt{2,55} \sqrt{13,31}} \approx 0,88.$$

Kā redzam, korelācijas koeficienta jēdziens saistīts ar vismazāko kvadrātu metodi. Formulas (27.31) un (27.32) atklāj, kāpēc korelācijas koeficients var funkcionēt kā sakarības ciešuma mērs. Jo ciešāka sakarība starp  $x$  un  $y$ , t. i., jo blīvāk punkti grupējas ap taisni, jo mazāka atlikumu kvadrātu summa  $Q_z$  un jo tuvāka skaitlim 1 ir korelācijas koeficienta absolūtā vērtība.

**233. §. Korelācijas tabula un korelācijas koeficienta aprēķināšana no korelācijas tabulas.** Apstrādājot lielu skaitļu materiālu un neizmantojot elektronu skaitļošanas mašīnas, iepriekš apskatītie paņēmieni korelācijas koeficienta atrašanai prasa daudz laika un darba, tāpēc šādos gadījumos ieteicama doto skaitļu pāru iepriekšēja grupēšana — korelācijas tabulas sastādīšana.

Pieņemsim, ka jāatrod korelācijas koeficients sakarībai starp 60 kukurūzas vālišu diametru  $x$  cm un svaru  $y$  g. Dotos skaitļu pārus sagrupēsim korelācijas tabulā. Tabulas sastādīšana notiek līdzīgi grupēšanai variāciju rindā. Vispirms katram lielumam atsevišķi nosakām vēlamu klašu skaitu  $k_x$  un  $k_y$  un klases intervāla lielumus  $c_x$  un  $c_y$ . Mūsu gadījumā diametrs mērīts ar precizitāti līdz 0,5 cm, pie tam  $x_{\min}=2,5$  cm,  $x_{\max}=5,5$  cm, no tā, dabiski, izriet, ka  $k_x=7$  un  $c_x=1$ . Svaram minimālais skaitlis 22 g, bet maksimālais 197 g. Orientējoties uz 10 svara klasēm, aprēķinām klases intervāla lielumu  $c_y$ . Dabūjam

$$\frac{197-22}{10} = \frac{175}{10} = 17,5 \approx 20.$$

Pieņemsim, ka  $c_y=20$ , un par pirmās klases sākuma skaitli ņemsim arī 20.

Pēc tam kad sagrafētas tabulas ailes un ierakstītas klašu robežas, kā arī to centrālie skaitļi, var izdarīt punktēšanu — katra skaitļu pāra atzīmēšanu attiecīgajā rūtiņā. Tabulā 27.11 parādīta punktēšana un ierakstīts arī katra pāra biežums  $m_{ij}$ , kur  $i=1, 2, \dots, 7$  un  $j=1, 2, \dots, 9$ . Kā redzam, katram lielumam var būt savs klašu skaits, tas nozīmē, ka korelācijas tabula var būt ne tikai kvadrāta, bet arī taisnstūra formā.

Lai no korelācijas tabulas atrastu koeficientu, tabulai jāiekārto papildu ailes kodiem  $\alpha_i, \alpha_1 m_i, \alpha_2^2 m_i, \beta_j, \beta_1 m_j, \beta_2^2 m_j$ , kur

$$\alpha_i = \frac{x_i - x_0}{c_x}; \quad \beta_j = \frac{y_j - y_0}{c_y}.$$



Tabula 27.11

|             |       |     |     |     |     |     |     |     |       |
|-------------|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-------|
| 180—<br>200 | 190   |     |     |     |     |     |     | 1   | 1     |
| 160—<br>180 | 170   |     |     | 1   |     | 1   |     |     | 2     |
| 140—<br>160 | 150   |     |     |     | 2   | 1   | 1   |     | 4     |
| 120—<br>140 | 130   |     |     | 3   | 5   | 1   |     |     | 9     |
| 100—<br>120 | 110   |     | 1   | 5   | 1   | 6   |     |     | 13    |
| 80—<br>100  | 90    |     |     | 5   | 3   | 2   |     |     | 10    |
| 60—<br>80   | 70    |     | 1   | 6   | 2   |     |     |     | 9     |
| 40—<br>60   | 50    | 1   | 1   | 4   | 1   | 2   |     |     | 9     |
| 20—<br>40   | 30    | 1   | 1   | 1   |     |     |     |     | 3     |
| $y_1$       | $x_1$ | 2,5 | 3,0 | 3,5 | 4,0 | 4,5 | 5,0 | 5,5 | $m_j$ |
| $m_i$       |       | 1   | 1   | 4   | 25  | 14  | 13  | 2   | 60    |

Korelācijas koeficientu tabulai aprēķina pēc formulas

$$r = \frac{\sum \alpha_i \beta_j m_{ij} - \frac{\sum \alpha_i m_i \cdot \sum \beta_j m_j}{n}}{\sqrt{\sum \alpha_i^2 m_i - \frac{(\sum \alpha_i m_i)^2}{n}} \sqrt{\sum \beta_j^2 m_j - \frac{(\sum \beta_j m_j)^2}{n}}} \quad (27.33)$$

Lieluma  $\sum \alpha_i \beta_j m_{ij}$  ērtākai atrašanai korelācijas tabulu sadala četros kvartālos tā, lai ar treknākām svītrām izdalītos ailes, kuras satur  $x_0$  un  $y_0$ . Reizinājumu  $\alpha_i \beta_j$  ieraksta katras rūtiņas augšējā stūrī un reizinājumu summu  $\sum \alpha_i \beta_j m_{ij}$  atrod atsevišķi katram kvartālam un pēc tam summē. Tabulā 27.12 parādīta korelācijas koeficienta aprēķināšanas tehnika, pieņemot  $x_0=4,0$  cm un  $y_0=110$  g.

Pagaidām nav jāpievērš uzmanība pēdējai horizontālajai ailei; to izmantosim nākošajā paragrāfā.

$$\begin{aligned} \Sigma \alpha_i \beta_j m_{ij} &= 0 + 12 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 1 + \\ &\quad \text{I kvartālā} \qquad \qquad \qquad \text{II kvartālā} \\ &\quad + 2 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 12 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + \\ &\quad \text{III kvartālā} \\ &+ (-1) \cdot 3 + (-2) \cdot 2 + (-2) \cdot 2 + (-3) \cdot 1 + (-6) \cdot 2 = 40, \\ &\quad \text{IV kvartālā} \\ r &= \frac{40 - \frac{37 \cdot (-40)}{60}}{\sqrt{101 - \frac{37^2}{60}} \sqrt{234 - \frac{(-40)^2}{60}}} \approx 0,51. \end{aligned}$$

Korelācijas tabula noderīga vairākiem mērķiem. Tā atvieglo koeficienta aprēķināšanu lielam novērojumu skaitam; bez tam, tā kā reizē ar tabulu tiek apstrādātas arī divas variāciju rindas, tad vienlaicīgi ar korelācijas koeficientu var aprēķināt arī abu lielumu vidējos aritmētiskos un standartnovirzes. No tabulas 27.12 dabūjam

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x_0 + \frac{\Sigma \alpha_i m_i}{n} c_x; \quad \bar{x} = 4,0 + \frac{37}{60} \cdot 1 \approx 4,6 \text{ (cm)} \\ s_x &= c_x \sqrt{\frac{\Sigma \alpha_i^2 m_i}{n-1} - \frac{(\Sigma \alpha_i m_i)^2}{n(n-1)}}; \quad s_x = 1 \cdot \sqrt{\frac{101}{59} - \frac{37^2}{60 \cdot 59}} \approx 1,2 \text{ (cm)} \\ \bar{y} &= y_0 + \frac{\Sigma \beta_j m_j}{n} \cdot c_y; \quad \bar{y} = 110 + \frac{-40}{60} \cdot 20 \approx 96,7 \text{ (g)} \\ s_y &= c_y \sqrt{\frac{\Sigma \beta_j^2 m_j}{n-1} - \frac{(\Sigma \beta_j m_j)^2}{n(n-1)}}; \quad s_y = 20 \cdot \sqrt{\frac{234}{59} - \frac{(-40)^2}{60 \cdot 59}} \approx 37,6 \text{ (g)} \end{aligned}$$

Korelācijas tabula ir savdabīga koordinātu sistēma, kura uzskatāmi parāda vāļišu sadalījumu pa svara un garuma klasēm. No biežumu joslas veida, tās virziena un platuma var spriest par korelācijas formu, virzienu un sakarības ciešumu.

No korelācijas tabulas var atrast korelācijas attiecību, kuru lieto kā sakarības mēru liklīnijas korelācijas gadījumā.

**234. §. Korelācijas attiecība.** Korelācijas koeficients konstruēts tā, ka tas noderīgs kā sakarības mērs tikai lineārai korelācijai. Jo vairāk korelācija atšķiras no lineārās, jo mazāku kopējās variācijas daļu izskaidro regresijas taisne un jo mazāk efektīvs korelācijas koeficients kā sakarības ciešuma mērs. Šādos gadījumos ir loģiski taisnes punktu  $B_1(x_1, \hat{y}_1)$  vietā apskatīt parastā grupējuma

Tabula 27.12

|                  |      |      |      |      |       |       |       |       |           |               |                 |    |
|------------------|------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|-----------|---------------|-----------------|----|
| 190              |      |      |      |      |       |       | 12    | 1     | 1         | 4             | 4               | 16 |
| 170              | I    |      |      | 1    |       | 6     | 1     | II    | 2         | 3             | 6               | 18 |
| 150              |      |      |      | 2    | 2     | 4     | 1     | 6     | 1         | 4             | 2               | 16 |
| 130              |      |      |      | 3    | 1     | 5     | 2     | 1     |           | 9             | 1               | 9  |
| 110              |      |      | 1    | 5    | 1     | 6     |       |       | 13        | 0             | 0               | 0  |
| 90               |      |      |      | 5    | -1    | -2    |       |       | 10        | -1            | -10             | 10 |
| 70               | III  |      | 2    | 1    | 6     | -2    |       | IV    | 9         | -2            | -18             | 36 |
| 50               |      | 6    | 3    | 1    | 4     | -3    | -6    |       | 9         | -3            | -27             | 81 |
| 30               | 12   | 1    | 4    | 1    | 1     |       |       |       | 3         | -4            | -12             | 48 |
| $y_j$<br>$x_i$   | 2,5  | 3,0  | 3,5  | 4,0  | 4,5   | 5,0   | 5,5   | $m_j$ | $\beta_j$ | $\beta_j m_j$ | $\beta_j^2 m_j$ |    |
| $m_1$            | 1    | 1    | 4    | 25   | 14    | 13    | 2     | 60    |           | -40           | 234             |    |
| $\alpha_1$       | -3   | -2   | -1   | 0    | 1     | 2     | 3     |       |           |               |                 |    |
| $\alpha_1 m_1$   | -3   | -2   | -4   | 0    | 14    | 26    | 6     | 37    |           |               |                 |    |
| $\alpha_1^2 m_1$ | 9    | 4    | 4    | 0    | 14    | 52    | 18    | 101   |           |               |                 |    |
| $\bar{y}_1$      | 30,0 | 50,0 | 65,0 | 88,4 | 108,6 | 106,9 | 170,0 |       |           |               |                 |    |

viduspunktus  $C_1(x_i, \bar{y}_1)$ , kur  $\bar{y}_1$  ir nosacītie vidējie  $y$ , kas atbilst katrai vērtību klasei  $x_i$ . Sakarības mēra

$$r = \pm \sqrt{\frac{\sum (\hat{y}_1 - \bar{y})^2}{\sum (y_1 - \bar{y})^2}}$$

vietā loģiski likt lielumu

$$\eta_{y/x} = \sqrt{\frac{\sum (\bar{y}_1 - \bar{y})^2 \cdot m_1}{\sum (y_j - \bar{y})^2 \cdot m_j}} \quad (27.34)$$



Lielumu  $\eta_{y/x}$  sauc par korelācijas attiecību lielumam  $y$  atkarībā no  $x$ , un to aprēķina no sagrupēta skaitļu materiāla resp. no korelācijas tabulas.

Rezultatīvā lieluma nosacītos vidējos  $\bar{y}_i$  atrod kā svērtos vidējos aritmētiskos, ievērojot, ka katrai faktoriālā lieluma klasei atbilst otra lieluma variāciju rinda. Tabulā 27.12 svara nosacītie vidējie aritmētiskie, kas atbilst diametra klasēm 2,5; 3,0; 3,5 utt., ierakstīti tabulas pēdējā horizontālajā ailē.

Aprēķinu piemēri. Diametra  $x$  vērtībai 2,5 nosacītais vidējais  $\bar{y}_1 = \frac{30 \cdot 1}{1} = 30,0$  (g).

Diametra  $x$  vērtībai 4,5 nosacītais vidējais

$$\bar{y}_5 = \frac{50 \cdot 1 + 70 \cdot 2 + 90 \cdot 3 + 110 \cdot 1 + 130 \cdot 5 + 150 \cdot 2}{14} = 108,6 \text{ (g)}.$$

Atradīsim atsevišķi summas korelācijas attiecības skaitītājā un saucējā:

$$\begin{aligned} \Sigma (\bar{y}_i - \bar{y})^2 \cdot m_i &= (30,0 - 96,7)^2 \cdot 1 + (50,0 - 96,7)^2 \cdot 1 + \\ &+ (65,0 - 96,7)^2 \cdot 4 + (88,4 - 96,7)^2 \cdot 25 + (108,6 - 96,7)^2 \cdot 14 + \\ &+ (106,9 - 96,7)^2 \cdot 13 + (170,0 - 96,7)^2 \cdot 2 = 26\,452. \end{aligned}$$

Tā kā te ir darīšana ar grupējumu, tad katram starpības kvadrātam jāpieraksta «svars»  $m_i$ , t. i., to vāļišu skaits, kuras ietilpst attiecīgajā svara klasē.

Kopējo kvadrātu summu var atrast pēc formulas

$$\begin{aligned} \Sigma (y_i - \bar{y})^2 \cdot m_j &= c_y^2 \left[ \Sigma \beta_j^2 m_j - \frac{(\Sigma \beta_j m_j)^2}{n} \right], \\ \Sigma (y_j - \bar{y})^2 \cdot m_j &= 20^2 \left[ 234 - \frac{(-40)^2}{60} \right] \approx 82932. \end{aligned}$$

Korelācijas attiecības kvadrāts

$$\eta_{y/x}^2 = \frac{26452}{82932} = 0,3190 \approx 32\%.$$

Lielums  $\eta_{y/x}^2$  parāda to rezultatīvās pazīmes izkliedes daļu, kuru nosaka faktoriālās pazīmes maiņa. Šajā gadījumā 32% no kopējās svara izkliedes saistītas ar diametra izmaiņām.

Korelācijas attiecība

$$\eta_{y/x} = \sqrt{0,3190} \approx 0,57.$$

Atzīmēsim šādas korelācijas attiecības īpašības.

1. Tā kā liklīnijas korelācijai par virzienu runāt nevar, tad korelācijas attiecība ir pozitīvs skaitlis starp 0 un 1, t. i.,

$$0 \leq \eta_{y/x} \leq 1.$$

Tā ir 0, ja visi nosacītie vidējie  $\bar{y}_i$  vienādi savā starpā un vienādi ar  $\bar{y}$ . Korelācijas attiecība ir 1, ja tās skaitītājs vienāds ar saucēju, t. i., ja visa  $y$  izkļiede izskaidrojama tikai ar  $x$  maiņu un nekādu nekontrolētu faktoru ietekmes nav.

2. Korelācijas attiecība nav mazāka par attiecīgo korelācijas koeficientu (mūsu piemērā  $\eta_{y/x}=0.57 > 0.51=r$ ), jo, aprēķinot korelācijas attiecību, tiek pilnīgāk fiksēta abu lielumu  $x$  un  $y$  savstarpējā sakarība. Jo vairāk atšķiras korelācijas attiecība no koeficienta, jo vairāk izteikts sakarības liklīnijas raksturs. Ja grupu vidējie atrodas visi uz vienas taisnes, tad  $\bar{y}_i = \hat{y}_i$  un attiecība vienāda ar koeficientu. Tā kā, aprēķinot attiecību, izmantots grupējums, bet grupējums, sevišķi, ja novērojumu skaits ir mazs, var sakarību deformēt, tad ieteicams atturēties no korelācijas attiecības aprēķināšanas mazam novērojumu skaitam.

3. Atšķirībā no korelācijas koeficienta  $r$ , kurš saskaņā ar formulu (27.17) ir simetrisks attiecībā pret  $x$  un  $y$  un dotajiem skaitļu pāriem var būt tikai viens, korelācijas attiecību var interpretēt divējādi resp. eksistē divas dažādas attiecības: lielumam  $y$  atkarībā no  $x$  un lielumam  $x$  atkarībā no  $y$ , kur pēdējā attiecība uzdota ar formulu

$$\eta_{x/y} = \sqrt{\frac{\sum (\bar{x}_j - \bar{x})^2 \cdot m_j}{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot m_i}}. \quad (27.35)$$

To tāpat var atrast no korelācijas tabulas, iepriekš aprēķinot nosacītos vidējos  $\bar{x}_j$ , kas atbilst katrai svara klasei  $y_j$ . Tā, piemēram, no tabulas (27.13) datiem izriet, ka  $\eta_{y/x}=1$ , bet  $\eta_{x/y}=0$ . Tas nozīmē, ka  $y$  maiņa ir pilnīgi nosacīta ar  $x$  maiņu, turpretim vidējās  $x$  vērtības  $\bar{x}_j$  nemainās, ja mainās  $y$ .

Tabula 27.13

|               |    |    |    |    |    |             |
|---------------|----|----|----|----|----|-------------|
| 9             |    |    | 30 |    |    | 3           |
| 8             |    | 20 |    | 20 |    | 3           |
| 7             | 10 |    |    |    | 10 | 3           |
| $y_j$ \ $x_i$ | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | $\bar{x}_j$ |
| $\bar{y}_i$   | 7  | 8  | 9  | 8  | 7  |             |

**235. §. Daudzfaktoru regresija.** Ja rezultatīvā pazīme atkarīga no vairāku faktoriālo pazīmju maiņas, tad sakarību starp pazīmēm izsaka *daudzfaktoru regresijas vienādojuma formā*. Visplašāk pielietotais ir *lineāro* regresijas vienādojumu tips, kurš dots ar formulu

$$\hat{y} = b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_jx_j + \dots + b_kx_k + b_0, \quad (27.36)$$

kur  $x_1, x_2, \dots, x_k$  ir faktoriālās pazīmes,  $b_j$  — regresijas koeficients lielumam  $y$  atkarībā no  $x_j$  (kurš parāda, par cik vienībām vidēji izmainās rezultatīvā pazīme, ja faktoriālā pazīme  $x_j$  palielinās par 1 vienību, bet pārējās vienādojumā ieslēgtās faktoriālās pazīmes nemainās),  $b_0$  — brīvais loceklis.

Daudzfaktoru regresijas vienādojumu, tāpat kā pāra regresijas vienādojumu, definē saskaņā ar vismazāko kvadrātu principu.

Pieņemsim, ka ir divas faktoriālās pazīmes  $x_1$  un  $x_2$ , t. i.,  $k=2$ . Tad vienādojuma

$$\hat{y} = b_1x_1 + b_2x_2 + b_0 \quad (27.37)$$

geometriskā interpretācija ir plakne. Pieņemsim, ka no punktiem  $A_1(x_{11}, x_{21}, y_1)$   $Oy$  ass virzienā novilkta taisnes līdz krustpunktiem  $B_1(x_{11}, x_{21}, \hat{y}_1)$  ar šo plakni. Plakne ir atrasta saskaņā ar vismazāko kvadrātu principu, ja  $\Sigma (A_1B_1)^2 = \min$ , salīdzinot ar kvadrātu summu attiecībā pret jebkuru citu plakni.

Pielietojot diferenciālrēķinus, var pierādīt, ka vienādojuma (27.37) koeficientu atrašanai jāatrisina vienādojumu sistēma \*

$$\left. \begin{aligned} b_1\Sigma x_1^2 + b_2\Sigma x_1x_2 + b_0\Sigma x_1 &= \Sigma x_1y, \\ b_1\Sigma x_2x_1 + b_2\Sigma x_2^2 + b_0\Sigma x_2 &= \Sigma x_2y, \\ b_1\Sigma x_1 + b_2\Sigma x_2 + b_0n &= \Sigma y. \end{aligned} \right\} \quad (27.38)$$

Ja vienādojums satur  $k$  faktoriālās pazīmes, tad sistēma koeficientu  $b_1, b_2, \dots, b_k, b_0$  atrašanai ir šāda:

$$\left. \begin{aligned} b_1\Sigma x_1^2 + b_2\Sigma x_1x_2 + \dots + b_j\Sigma x_1x_j + \dots + b_k\Sigma x_1x_k + b_0\Sigma x_1 &= \Sigma x_1y, \\ b_1\Sigma x_2x_1 + b_2\Sigma x_2^2 + \dots + b_j\Sigma x_2x_j + \dots + b_k\Sigma x_2x_k + b_0\Sigma x_2 &= \Sigma x_2y, \\ \dots \\ b_1\Sigma x_jx_1 + b_2\Sigma x_jx_2 + \dots + b_j\Sigma x_j^2 + \dots + b_k\Sigma x_jx_k + b_0\Sigma x_j &= \Sigma x_jy, \\ \dots \\ b_1\Sigma x_kx_1 + b_2\Sigma x_kx_2 + \dots + b_j\Sigma x_kx_j + \dots + b_k\Sigma x_k^2 + b_0\Sigma x_k &= \Sigma x_ky, \\ b_1\Sigma x_1 + b_2\Sigma x_2 + \dots + b_j\Sigma x_j + \dots + b_k\Sigma x_k + b_0n &= \Sigma y. \end{aligned} \right\} \quad (27.39)$$

\* Lai nesaraibinātu pierakstu, indekss  $i=1, 2, \dots, n$  izlaists. Faktiski

$$\Sigma x_i^2 = \Sigma_{i=1}^n x_{i1}^2, \quad \Sigma x_2y = \Sigma_{i=1}^n x_{21}y_i.$$



Var pierādīt, ka koeficientus  $b_j$  var aprēķināt arī no sistēmas

$$\left. \begin{aligned} b_1 Q_{11} + b_2 Q_{12} + \dots + b_j Q_{1j} + \dots + b_k Q_{1k} &= Q_{1y}, \\ b_1 Q_{21} + b_2 Q_{22} + \dots + b_j Q_{2j} + \dots + b_k Q_{2k} &= Q_{2y}, \\ \dots &\dots \\ b_1 Q_{j1} + b_2 Q_{j2} + \dots + b_j Q_{jj} + \dots + b_k Q_{jk} &= Q_{jy}, \\ \dots &\dots \\ b_1 Q_{k1} + b_2 Q_{k2} + \dots + b_j Q_{kj} + \dots + b_k Q_{kk} &= Q_{ky}, \end{aligned} \right\} \quad (27.40)$$

kur

$$\begin{aligned} Q_{jj} &= \sum x_j^2 - \frac{(\sum x_j)^2}{n}, \\ Q_{jk} &= Q_{kj} = \sum x_j x_k - \frac{\sum x_j \sum x_k}{n}, \\ Q_{jy} &= \sum x_j y - \frac{\sum x_j \sum y}{n}. \end{aligned}$$

Seit doto skaitļu summu vietā ir noviržu summas. Novirzes ņemtas no vidējā aritmētiskā. Lietojot šādu sistēmu, vienādojumu skaits ir par vienu mazāks, jo  $b_0$  atrod no sakarības

$$b_0 = \frac{\sum y - b_1 \sum x_1 - b_2 \sum x_2 - \dots - b_k \sum x_k}{n} \quad (27.41)$$

jeb

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}_1 - b_2 \bar{x}_2 - \dots - b_k \bar{x}_k \quad (27.41')$$

Tā kā noviržu summas  $Q_{jj}$ ,  $Q_{jk}$ ,  $Q_{jy}$  vajadzīgas pāra korelācijas koeficientu un pazīmju standartnoviržu aprēķināšanai, tad sistēmas (27.40) koeficientu izskaitļošana nav lieks darbs. Praksē regresijas analīzi veic ar elektronu skaitļošanas mašīnām pēc speciāli sastādītām programmām. Izskaitļojot regresijas koeficientus bez elektronu skaitļošanas mašīnām, ērtāka ir sistēma (27.40), jo tani vienādojumu skaits par vienu mazāks, salīdzinot ar sistēmu (27.39).

Atlikuma kvadrātu summa, rēķinot pēc sistēmas (27.39),

$$Q_z = \sum y^2 - b_1 \sum x_1 y - b_2 \sum x_2 y - \dots - b_k \sum x_k y - b_0 \sum y. \quad (27.42)$$

Lietojot sistēmu (27.40),

$$Q_z = Q_y - b_1 Q_{1y} - b_2 Q_{2y} - \dots - b_k Q_{ky}, \quad (27.42')$$

kur

$$Q_y = \sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n}.$$

Analogi pāra regresijai definē arī relatīvo formulas atbilstības mēru — determinācijas koeficientu, kuru daudzfaktoru regresijas

gadījumā apzīmē ar  $R^2$ . Determinācijas koeficients, izteikts procentos, parāda to rezultatīvās pazīmes  $y$  izkļedes daļu, kuru nosaka regresijas vienādojums. Determinācijas koeficients

$$R^2 = \frac{\sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{Q_z}{Q_y} \quad (27.43)$$

Aritmētisko kvadrātsakni no  $R^2$  sauc par *daudzfaktoru korelācijas koeficientu*. Tas ir

$$R = \sqrt{1 - \frac{Q_z}{Q_y}} \quad (27.44)$$

Var pierādīt, ka vispārīgi — jo lielāki pāra korelācijas koeficienti  $r_{ij}$ , jo lielāks arī  $R$ , tāpēc svarīgi daudzfaktoru regresijas vienādojumā ieslēgt tieši tās faktoriālās pazīmes, kurām, atsevišķi ņemot, ir augsta korelācija ar rezultatīvo pazīmi  $y$ . Nav vēlams regresijas vienādojumā ieslēgt divas tādas faktoriālās pazīmes, kuras dublē viena otru resp. starp kurām pastāv augsta korelācija. Viena no šādām pazīmēm jāatmet, parasti tā, kurai ir mazāka korelācija ar rezultatīvo pazīmi.

No teiktā izriet iepriekšējas pāra korelācijas koeficientu aprēķināšanas un to savstarpējas salīdzināšanas nepieciešamība.

**Piemērs.** Atradīsim daudzfaktoru regresijas vienādojumu miežu ražai (cnt/ha) atkarībā no maija un jūnija hidrotermiskajiem koeficientiem. Lai demonstrētu aprēķinu tehniku, izmantosim Vecauces mācību-pētījumu saimniecības datus laikā no 1957. līdz 1965. gadam.

Tabula 27.14

| Gads     | $y$   | $x_1$  | $x_2$  |
|----------|-------|--------|--------|
| 1957.    | 13,7  | 0,1086 | 0,0669 |
| 1958.    | 29,8  | 0,1392 | 0,1194 |
| 1959.    | 25,6  | 0,0908 | 0,0942 |
| 1960.    | 25,3  | 0,0984 | 0,1715 |
| 1961.    | 21,5  | 0,1984 | 0,2076 |
| 1962.    | 13,0  | 0,1870 | 0,0812 |
| 1963.    | 16,7  | 0,0772 | 0,1683 |
| 1964.    | 26,2  | 0,1440 | 0,0874 |
| 1965.    | 28,5  | 0,0638 | 0,1805 |
| $\Sigma$ | 200,3 | 1,1074 | 1,1770 |

Tabulā 27.14 doti:

$y_1$  — miežu raža (cnt/ha);

$x_1$  — hidrotermiskais koeficients maija mēnesim (kopējais nokrišņu daudzums (mm), dalīts ar temperatūru summu (grādos));

$x_2$  — hidrotermiskais koeficients jūnija mēnesim.

$$\Sigma x_1^2 = 0,154196$$

$$\Sigma x_1 y = 24,0270$$

$$\Sigma x_2^2 = 0,175253$$

$$\Sigma x_2 y = 26,9889$$

$$\Sigma y^2 = 4780,01$$

$$\Sigma x_1 x_2 = 0,142781$$

$$Q_{11} = 0,154196 - \frac{1,1074^2}{9} \approx 0,017937$$

$$Q_{12} = Q_{21} = 0,142781 - \frac{1,1074 \cdot 1,1770}{9} \approx -0,002042$$

$$Q_{22} = 0,175253 - \frac{1,1770^2}{9} \approx 0,021328$$

$$Q_{1y} = 24,0270 - \frac{1,1074 \cdot 200,3}{9} \approx -0,6188$$

$$Q_{2y} = 26,9889 - \frac{1,1770 \cdot 200,3}{9} \approx 0,7941$$

$$Q_y = 4780,01 - \frac{200,3^2}{9} \approx 322,22$$

$$r_{1y} = \frac{Q_{1y}}{\sqrt{Q_{11}} \sqrt{Q_y}}; \quad r_{1y} = \frac{-0,6188}{\sqrt{0,017937} \sqrt{322,22}} \approx -0,258$$

$$r_{2y} = \frac{Q_{2y}}{\sqrt{Q_{22}} \sqrt{Q_y}}; \quad r_{2y} = \frac{0,7941}{\sqrt{0,021328} \sqrt{322,22}} \approx 0,266$$

$$r_{12} = \frac{Q_{12}}{\sqrt{Q_{11}} \sqrt{Q_{22}}}; \quad r_{12} = \frac{-0,002042}{\sqrt{0,017937} \sqrt{0,021328}} \approx -0,055$$

Sistēma  $b_1$  un  $b_2$  atrašanai:

$$\begin{cases} b_1 Q_{11} + b_2 Q_{12} = Q_{1y} \\ b_1 Q_{12} + b_2 Q_{22} = Q_{2y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 \cdot 0,017937 + b_2 (-0,002042) = -0,6188, \\ b_1 (-0,002042) + b_2 \cdot 0,021328 = 0,7941. \end{cases}$$

Atrisinot sistēmu, iegūst

$$b_1 \approx -30,59; \quad b_2 \approx 34,30.$$

Pēc formulas (27.41)

$$b_0 = \frac{200,3 + 30,59 \cdot 1,1074 - 34,30 \cdot 1,1770}{9} \approx 21,53.$$

Regresijas vienādojums ir

$$\hat{y} = -30,59x_1 + 34,30x_2 + 21,53.$$

Atlikuma kvadrātu summa pēc formulas (27.42')

$$Q_z = 322,22 - (-30,59)(-0,6188) - 34,30 \cdot 0,7941 \approx 276,05,$$

$$R^2 = 1 - \frac{Q_z}{Q_y}; \quad R^2 = 1 - \frac{276,05}{322,22} = 0,1433 \approx 14\%.$$



Apmēram 14% no ražu svārstībām var izskaidrot ar lineāro sakarību starp ražu un maija, jūnija hidotermisko koeficientu. Apmēram 86% no ražu variācijas paliek neizskaidrota — te izpaužas nekontrolēto faktoru iedarbība. Korelācijas koeficients

$$R = \sqrt{0,1433} \approx 0,38.$$

Vienādojums ar tik zemu daudzfaktoru korelācijas koeficientu nav noderīgs ražu prognozēšanai. Acīm redzot, jāmeklē citas faktoriālās pazīmes, kurām ar  $y$  ir lineāra korelācija, un tās jāieslēdz vienādojumā. Tāda pazīme ir, piemēram, augusta hidotermiskais koeficients, kuram ar ražu ir ievērojama negatīva korelācija. Ieslēdzot šo pazīmi vienādojumā, mums būtu jāatrod četri nezināmie koeficienti  $b_1, b_2, b_3$  un  $b_0$ , ko varētu izdarīt, atrisinot četru (transformējot — trīs) lineāru vienādojumu sistēmu. Koeficienti  $b_1, b_2, b_0$  izmainītos, salīdzinot ar iepriekšējiem rezultātiem.

**236. §. Liklinijas regresijas vienādojumi.** Daudzfaktoru regresijas vienādojuma atrašanas shēma noder par pamatu liklinijas regresijas vienādojumu koeficientu izskaitļošanai.

Liklinijas regresijas vienādojumu definē analogi lineāram regresijas vienādojumam — saskaņā ar vismazāko kvadrātu principu, tikai punkti  $B_1(x_1, \hat{y}_1)$  šoreiz atrodas vai nu uz parabolas, vai hiperbolas, vai citas līnijas. Seit ierobežosimies tikai ar viena faktora liklinijas regresijas apskatu.

Pieņemsim, ka sakarības loģiskās analīzes ceļā, kā arī vadoties no punktu  $A_1(x_1, y_1)$  izvietojuma plaknē, noskaidrots, ka vislabāk sakarības izlīdzināšanai noder parabola, kuras vienādojumu meklēsim formā

$$\hat{y} = b_1 x^2 + b_2 x + b_0. \quad (27.45)$$

Apzīmēsim  $x^2 = x_1, x = x_2$ . Tad koeficientu  $b_1$  un  $b_2$  atrašanai noder sistēma

$$\left. \begin{aligned} b_1 \Sigma x^4 + b_2 \Sigma x^3 + b_0 \Sigma x^2 &= \Sigma x^2 y, \\ b_1 \Sigma x^3 + b_2 \Sigma x^2 + b_0 \Sigma x &= \Sigma x y, \\ b_1 \Sigma x^2 + b_2 \Sigma x + b_0 n &= \Sigma y, \end{aligned} \right\} \quad (27.46)$$

ja vien izdara attiecīgus aizvietojumus:

$$\Sigma x_1^2 = \Sigma x^4, \quad \Sigma x_1 x_2 = \Sigma x^3 \text{ utt.}$$

Daudzfaktoru regresijas aparāts, kvadrātu summas  $Q_z, Q_r$ , determinācijas koeficients  $R^2$  un korelācijas koeficients  $R$  — kā formulas piemērotības mērs — lietojami arī liklinijas regresijas gadījumā.\*

\* Liklinijas regresijas gadījumā  $R$  sauc arī par teorētisko korelācijas attiecību.

Kā vingrinājumu apskatīsim vēl vienādojuma

$$\hat{y} = b_1 x + b_2 \cdot \frac{1}{x} + b_3 \cdot \frac{1}{x^2} + b_0$$

koeficientu atrašanas metodiku.

To var uzskatīt par trīsfaktoru vienādojumu, kur

$$x_1 = x, \quad x_2 = \frac{1}{x} \quad \text{un} \quad x_3 = \frac{1}{x^2}.$$

Saskaņā ar sistēmu (27.39) un ievērojot, ka  $\Sigma x \cdot \frac{1}{x} = n$ , var uzrakstīt četru vienādojumu sistēmu nezināmo koeficientu atrašanai:

$$\left. \begin{aligned} b_1 \Sigma x^2 + b_2 \cdot n + b_3 \Sigma \frac{1}{x} + b_0 \Sigma x &= \Sigma xy, \\ b_1 n + b_2 \Sigma \frac{1}{x^2} + b_3 \Sigma \frac{1}{x^3} + b_0 \Sigma \frac{1}{x} &= \Sigma \frac{1}{x} y, \\ b_1 \Sigma \frac{1}{x} + b_2 \Sigma \frac{1}{x^3} + b_3 \Sigma \frac{1}{x^4} + b_0 \Sigma \frac{1}{x^2} &= \Sigma \frac{1}{x^2} y, \\ b_1 \Sigma x + b_2 \Sigma \frac{1}{x} + b_3 \Sigma \frac{1}{x^2} + b_0 n &= \Sigma y. \end{aligned} \right\}$$

P i e m ē r s. Dots koka caurmērs  $x_1$  (cm) un vainaga sākuma augstums  $y_1$  (m) 13 kokiem 50 gadu vecā egļu audzē. Atrast sakarību starp  $y$  un  $x$  parabolas vienādojuma formā.

Tabula 27.15

| $i$   | 1   | 2   | 3   | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   | 11   | 12   | 13   | $\Sigma$ |
|-------|-----|-----|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|----------|
| $x_1$ | 7   | 9   | 12  | 12   | 13   | 16   | 16   | 17   | 17   | 19   | 22   | 23   | 18   | 201      |
| $y_1$ | 7,0 | 0,1 | 9,4 | 11,6 | 12,1 | 14,4 | 11,0 | 10,6 | 10,3 | 13,2 | 11,0 | 12,1 | 12,2 | 145,0    |

Vispirms atrod vajadzīgās summas:

$$\begin{aligned} \Sigma x^2 &= 3375; & \Sigma xy &= 2301,6 \\ \Sigma x^3 &= 60249; & \Sigma x^2 y &= 39215,4 \\ \Sigma x^4 &= 1126503; & \Sigma y^2 &= 1657,6 \end{aligned}$$

Ievietojot sistēmā (27.46), dabū

$$\begin{cases} 1126503b_1 + 60249b_2 + 3375b_0 = 39215,4 \\ 60249b_1 + 3375b_2 + 201b_0 = 2301,6 \\ 3375b_1 + 201b_2 + 13b_0 = 145 \end{cases}$$

Transformējot uz divu vienādojumu sistēmu resp. izslēdzot  $b_3$ , iegūst:

$$\left. \begin{aligned} 250301b_1 + 8066b_2 &= 1571, \\ 8066b_1 + 267b_2 &= 60. \end{aligned} \right\}$$

No šejienes

$$b_1 = -0,0364; \quad b_2 = 1,326 \text{ un } b_0 = 0,12.$$

Regresijas vienādojums ir

$$\hat{y} = -0,0364x^2 + 1,326x + 0,12.$$

Izdarīsim interpolāciju dažām  $x$  vērtībām; dabūsim

$$\hat{y}(10) = -3,64 + 13,26 + 0,12 = 9,74 \text{ (m)},$$

$$\hat{y}(20) = -14,56 + 26,52 + 0,12 = 12,08 \text{ (m)}.$$

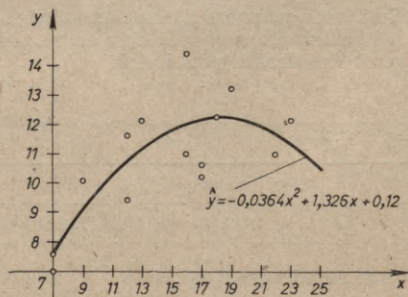
Parabolas maksimuma punktu atrod, pielīdzinot nullei atvasinājumu; dabūsim

$$\frac{d\hat{y}}{dx} = -0,0728x + 1,326; \quad -0,0728x + 1,326 = 0,$$

no kurienes

$$x = 18,2 \text{ (cm)}.$$

Tātad parabolas virsotnes abscisa  $x = 18,2$  cm.



207. zīm.

Ievietojot parabolas vienādojumā, dabūjam

$$\hat{y}(18,2) = -0,0364 \cdot 331,24 + 1,326 \cdot 18,2 + 0,12 = 12,19.$$

Parabolas maksimums

$$\hat{y}_{\max} = \hat{y}(18,2) = 12,19 \text{ (m)}.$$



Iegūto informāciju izmanto parabolas konstruēšanā. 207. zīmējumā atliekti punkti un konstruēta parabola.

Atlikuma kvadrātu summa

$$Q_z = \Sigma y^2 - b_1 \Sigma x^2 y - b_2 \Sigma xy - b_0 \Sigma y. \quad (27.47)$$

Mūsu gadījumā

$$Q_z = 1657,6 - (-0,0364) \cdot 39215,4 - 1,3256 \cdot 2301,6 - 0,1184 \cdot 145 \approx 18,4.$$

$$Q_y = 1657,6 - \frac{145^2}{13} \approx 40,3,$$

$$R^2 = 1 - \frac{18,4}{40,3} \approx 0,5434; R \approx \sqrt{0,5434} \approx 0,74.$$

Determinācijas koeficients jeb teorētiskās korelācijas attiecības kvadrāts ir 54,34 %, teorētiskā korelācijas attiecība  $R \approx 0,74$ .

### Vingrinājumi

1. C vitamīna saturu (mg/100 g) konservētā tomātu sulā izsaka šādi skaitļi: 16, 22, 21, 20, 23, 22, 27, 15, 13, 22, 17, 18, 29, 17, 22, 16, 23, 20, 24, 26. Atrast šo skaitļu vidējo aritmētisko un standartnovirzi.

2. Dota variāciju rinda, kur  $x_i$  ir piena tauku procents,  $m_i$  — govju skaits. Atrast variāciju rindas vidējo aritmētisko, standartnovirzi un variāciju koeficientu.

Tabula 27.16

|       |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $x_i$ | 3,35 | 3,45 | 3,55 | 3,65 | 3,75 | 3,85 | 3,95 | 4,05 |
| $m_i$ | 2    | 7    | 8    | 13   | 17   | 23   | 21   | 21   |
| $x_i$ | 4,15 | 4,25 | 4,35 | 4,45 | 4,55 | 4,65 | 4,75 |      |
| $m_i$ | 8    | 6    | 6    | 4    | 1    | 2    | 1    |      |

3. Dotie skaitļi izsaka 135 bulļu dzīvysvaru piedzimstot (kg). Sadalīt skaitļus 12 klasēs, atrast variāciju rindas  $x$ ,  $s$ ,  $V\%$ . Konstruēt sadalījuma poligonu.

39, 55, 52, 46, 37, 60, 49, 56, 38, 32, 44, 47, 41, 52, 45, 36, 36,  
46, 40, 45, 43, 47, 40, 44, 32, 45, 52, 43, 38, 37, 40, 47, 45, 37,  
40, 59, 40, 45, 38, 45, 48, 40, 38, 46, 44, 45, 48, 48, 45, 43, 50,  
38, 39, 46, 40, 42, 38, 48, 53, 43, 38, 50, 50, 36, 51, 50, 44, 49,  
50, 45, 36, 31, 45, 43, 42, 44, 40, 41, 47, 44, 37, 42, 45, 46, 40,  
37, 42, 46, 46, 50, 45, 48, 42, 43, 37, 32, 53, 38, 41, 40, 44, 43,  
46, 37, 38, 44, 43, 54, 49, 45, 40, 46, 37, 41, 39, 40, 33, 45, 61,  
36, 45, 40, 50, 40, 45, 46, 50, 44, 34, 45, 45, 47, 38, 37, 40.

4. Dots koka zaleņa svars  $y_1$  (kg) atkarībā no koka caurmēra  $x_1$  (cm). Atrast korelācijas koeficientu  $r$ , uzrakstīt regresijas taisnes vienādojumu, konstruēt punktus  $A_1(x_1, y_1)$  un regresijas taisni.

Tabula 27.17

| $i$   | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8   |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| $x_1$ | 12 | 15 | 16 | 19 | 20 | 21 | 24 | 28  |
| $y_1$ | 24 | 57 | 38 | 30 | 87 | 77 | 83 | 144 |

## 28. NODAĻA

### VARBŪTĪBU TEORIJA

**237. §. Daži pamatjēdzieni.** Pie varbūtību teorijas pamatjēdzieniem pieder *izmēģinājums* un *notikums*. *Noteiktu nosacījumu (apstākļu) kompleksa radišanu sauc par izmēģinājumu. Izmēģinājuma rezultāts ir notikums.*

Tā, piemēram, grauda iesēšana ir izmēģinājums, bet grauda uzdīgšana vai neuzdīgšana — notikums. Šajā piemērā noteikti nosacījumi ir: grauda atrašanās zemē un dīgšanai piemērots gada-laiks.

Tas fakts, ka viens un tas pats notikums vienā izmēģinājumā notiek, bet otrā — analogā izmēģinājumā — nenotiek, liecina, ka pastāv tādi *papildu nosacījumi*, kuru iedarbībā mainās izmēģinājuma rezultāts. Visus daudzveidīgos papildu nosacījumus jeb gadījuma apstākļus nevar ne precizēt, ne izmainīt. Tā, piemēram, grauda uzdīgšana atkarīga no daudziem papildu apstākļiem, kuru ietekmi uz notikumu mēs nevaram pilnībā precizēt; tādi apstākļi ir augsnes sastāvs, mitrums, temperatūra, dzīvo organismu klātbūtne zemē u. c. apstākļi.

Runājot par noteiktiem nosacījumiem, domāsim tikai tādus nosacījumus, kuru iedarbība uz notikumu vienveidīgos izmēģinājumos paliek viena un tā pati, bet neietilpināsim šo nosacījumu skaitā gadījuma apstākļus.

Ir notikumi, kuriem izmēģinājuma rezultātā katrā ziņā jānotiek, un tos sauc par *nenovēršamiem* notikumiem. Tā, piemēram, vidējos ģeogrāfiskos platumos nekustīgam novērotājam 24 stundu laikā naktij noteikti seko diena. Būtiski svarīga šeit noteiktu nosacījumu realizēšana, t. i., atrašanās vidējos ģeogrāfiskos platumos un nekustīga novērotāja esamība. Ja novērotājs atrastos ziemeļpola tuvumā, tad 24 stundu laikā naktij var arī nesekot dienu, jo nakts tur ilgst pusgadu. Tāpat 24 stundu laikā naktij var nesekot dienu arī tad, ja novērotājs, atrazdamies kādā vidējā ģeogrāfiskā platumā, pietiekami ātri un piemērotā virzienā lido ap Zemi. Kosmonautam H. Titovam, lidojot ap Zemi ar ātrumu



27 700 km stundā, 25 stundu laikā nakts mainījās ar dienu 17 reizes.

Tāpat ir notikumi, kuri izmēģinājuma rezultātā nekādā ziņā nevar notikt, tādus notikumus sauc par *neiespējamām*.

Tomēr vairums notikumu ir tādi, kuri pie konkrētiem nosacījumiem var notikt un var nenotikt resp., kuru *iestāšanās ir atkarīga no gadījuma*. Tos sauc par *gadījuma notikumiem*. Tā, piemēram, grauda uzdīgšana, trāpījums, šaujot mērķi, ir gadījuma notikumi.

Vienā izmēģinājumā nevaram paredzēt, vai notiks mūs interesējošais gadījuma notikums vai ne. Tomēr izrādās, ka, *daudzreiz atkārtojot izmēģinājumu, visu daudzo izmēģinājumu rezultāti — gadījuma notikumi — pakļauti noteiktām likumsakarībām*. Ja izmēģinājumu atkārtu daudzas reizes, tad runā par *masveida gadījuma notikumiem jeb parādībām*. Minēsim dažus masveida parādību likumsakarību piemērus.

1. piemērs. Metot monētu vienu reizi, nevaram paredzēt metiena rezultātu. Atkārtojot metienus daudzas reizes, izrādās, ka ģerbonis krīt apmēram tikpat daudz reižu kā cipars.

2. piemērs. Metot spēļu kauliņu, ja vien tas ir pilnīgi simetrisks, ar vienmērīgu masas sadalījumu, jebkurš punktu skaits krīt apmēram vienādu skaitu reižu no visu metienu kopskaita.

3. piemērs. Jau ļoti sen konstatēts, ka veselām valstīm un lielām pilsētām jaunpiedzimušo zēnu skaita attiecība pret meiteņu skaitu no gada gadā ir gandrīz nemainīga. Pētidams šo likumsakarību, franču zinātnieks Laplass iepazīnās ar plašiem statistikas materiāliem, kuri attiecās uz Londonu, Pēterburgu un visu Franciju. Statistikas dati parādīja, ka minētā attiecība desmit gadu laikā svārstījusies ap vienu un to pašu skaitli  $\frac{22}{21}$ . Tas

nozīmē, ka no 1000 jaunpiedzimušajiem caurmērā ir 512 zēni un 488 meitenes.

**238. §. Varbūtību teorijas saturs un sakars ar matemātisko statistiku.** *Varbūtību teorija ir zinātne par masveida gadījuma notikumu likumsakarībām.*

Zinot likumsakarības, kurām pakļauti masveida gadījuma notikumi, iespējams *paredzēt* šo notikumu norisi, ja vien visos izmēģinājumos realizēts viens un tas pats nosacījumu komplekss.

Spēja paredzēt masveida parādību gaitu ir pamatā varbūtību teorijas pielietojumiem visdažādākajās dabas zinātņu nozarēs, kā arī tehnikā. Tā, piemēram, jautājumu par ražas prognozēšanu atkarībā no meteoroloģiskiem apstākļiem var risināt ar varbūtību teorijas palīdzību.

Ipaši jāatzīmē varbūtību teorijas pielietošana statistikā, jo uz tās bāzes izauga un attīstījās mūsdienu matemātiskā statistika.

Matemātiskā statistika apstrādā no parauga iegūtos novērojumu datus un no tiem izdara slēdzienus par masveida parādībām. Lai atrastu parauga skaitliskos raksturojumus, nav jāpielieto



varbūtību teorija. Taču matemātiskās statistikas uzdevums ir ne tikai raksturot paraugu, bet gan daudz plašāks — raksturot arī ģenerālo kopu. Šī uzdevuma veikšanai nepieciešama varbūtību teorija.

No teiktā seko, ka *varbūtību teorijai un matemātiskajai statistikai ir viens un tas pats pētījumu objekts — masveida parādību likumsakarības. Atšķirībā no matemātiskās statistikas, kuras pētījumi balstās uz novērojumu datiem, varbūtību teorijas pamatā ir teorētiski apsvērumi.* Varbūtību teorija ir matemātiskās statistikas matemātiskais modelis, un, kā redzēsīm turpmāk, daudziem matemātiskās statistikas jēdzieniem atbilst analogi varbūtību teorijas jēdzieni.

Varbūtību teorija radās 16. gs., cenšoties noskaidrot azarta spēļu likumsakarības. Pirmos būtiskos rezultātus varbūtību teorijā guva šveicietis Bernulli 18. gs. sākumā; lielu ieguldījumu tajā deva arī Laplass, Gauss, Puasons. Varbūtību teorijas attīstībā izšķiroša nozīme bija 19. gs. krievu matemātiķim P. Čebiševam un viņa skolai (lielo skaitļu likums vispārīgā veidā un citi izcili rezultāti). Tālāk varbūtību teoriju pilnveidojuši padomju matemātiķi A. Kolmogorovs, A. Hinčins, S. Bernšteins un citi.

**239. §. Notikuma varbūtība.** Varbūtību teorijas svarīgākais jēdziens ir *notikuma varbūtība*. Pirms šī jēdziena definīcijas nepieciešams apskatīt dažus notikumu veidus.

*Divus vai vairākus notikumus sauc par nesavienojamiem, ja tie izslēdz viens otru; par vienīgi iespējamiem, ja katrā izmēģinājumā viens no šiem notikumiem katrā ziņā notiek; par vienādi iespējamiem, ja ir pamats uzskatīt, ka viens notikums nav vairāk iespējams par otru.*

1. piemērs. Metot monētu, ģerboņa un cipara krišana ir nesavienojami un vienīgi iespējami notikumi, jo ģerboņa krišana izslēdz iespēju krist ciparam šajā pašā metienā un metienam nevar būt citu rezultātu kā tikai ģerboņa vai cipara krišana. Lai minētie notikumi būtu arī *vienādi iespējami*, nepieciešams pieņemt, ka monēta ir pareizas formas homogēns cilindrs un ģerboņa un cipara atzīmes neietekmē monētas vienas vai otras puses krišanu.

2. piemērs. Ja kauliņam ir kuba veids ar pilnīgu simetriju un vienmērīgu masas sadalījumu, kuru neietekmē punktu skaita atzīmes, tad, vienu reizi metot kauliņu, jebkura punktu skaita no 1 līdz 6 krišana ir nesavienojami, vienīgi un vienādi iespējami notikumi.

Pieņemot, ka piecu punktu krišana ir notikums  $A$ , redzam, ka notikums  $A$  ir viens no minētiem sešiem notikumiem. Saka, ka notikuma  $A$  *varbūtība* ir  $\frac{1}{6}$ , to pieraksta tā:  $P(A) = \frac{1}{6}$ .

3. piemērs. Pieņemsim, ka urnā ir 10 pēc formas, lieluma un virsmas apdares vienādas lodītes.\* Ja no tām 7 ir baltas un

\* Visos turpmākajos piemēros par lodītēm, spēļu kauliņu un monētu pieņemsim, ka šiem priekšmetiem piemīt šeit apskatītajos piemēros minētās īpašības.

3 — melnas, tad, uzskatot, ka baltas lodītes izvilksana ir notikums  $A$ , bet melnas lodītes izvilksana — notikums  $B$ , var rakstīt:

$$P(A) = \frac{7}{10}; \quad P(B) = \frac{3}{10}.$$

Šajā piemērā notikumi  $A$  un  $B$  nav vienādi iespējami, jo balto lodīšu ir vairāk nekā melno, toties šos notikumus var saskaldīt *elementāros notikumos* — *gadījumos*, kuri nozīmē jebkuras lodītes izvilksanu no urnas. Gadījumu skaits šajā piemērā ir 10, tie ir nesavienojami, vienīgi un vienādi iespējami. Notikumam  $A$  labvēlīgi ir 7 gadījumi, jo urnā ir 7 baltas lodītes, bet notikumam  $B$  — 3 gadījumi, jo urnā ir 3 melnas lodītes.

**Definīcija.** *Par kāda notikuma  $A$  varbūtību  $P(A)$  sauc notikumam  $A$  labvēlīgo gadījumu skaita  $m$  attiecību pret visu gadījumu kopskaitu  $n$ :*

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad (28.1)$$

*pieņemot, ka gadījumi ir nesavienojami, vienīgi iespējami un vienādi iespējami.*

Šo definīciju sauc par varbūtības *klasisko definīciju*. Te notikuma varbūtība definēta, pamatojoties uz notikumu vienādo iespējamību, pie tam ar formulu (28.1) definētās varbūtības aprēķināšanai nav vajadzīgi nekādi izmēģinājumi. Tomēr jāievēro, ka notikuma varbūtību var aprēķināt pēc minētās formulas tikai dažos vienkāršākos piemēros, kad zināms visu gadījumu kopskaits un notikumam  $A$  labvēlīgo gadījumu skaits. Ar varbūtības klasisko definīciju nevar noteikt notikuma varbūtību sarežģītākos uzdevumos, kuri ir, piemēram, bioloģiska vai tehniskā rakstura. Tādos gadījumos aprēķina notikuma *statistisko varbūtību*, kuras pamatā ir notikuma *relatīvais biežums*.

**Definīcija.** *Par notikuma relatīvo biežumu sauc attiecību*

$$\omega(A) = \frac{m}{n}, \quad (28.2)$$

*kur  $n$  ir izmēģinājumu skaits, bet  $m$  — notikuma iestāšanās gadījumu skaits, ja visos izmēģinājumos realizēti vienādi nosacījumi.*

Tā, piemēram, ja šāvējs no 100 šāvieniem trāpijis mērķī 70 reizes, tad trāpījumu relatīvais biežums ir  $\frac{70}{100} = 0,7$ .

•Pieredze rāda, ka, daudzkārt atkārtojot vienu un to pašu izmēģinājumu sēriju, notikuma relatīvais biežums izmainās maz. Tajos gadījumos, kad pielietojama varbūtības klasiskā definīcija, viegli ievērot, ka *notikuma relatīvais biežums svārstās ap skaitli, kas izsaka notikuma varbūtību*, pie tam lielas relatīvā biežuma



novirzes no varbūtības konstatējamās jo retāk, jo lielāks izmēģinājumu skaits. Tā, piemēram, zinātnieks K. Pirsons metis monētu 12 000 reižu, pēc tam palielinājis metienu skaitu līdz 24 000. Izmēģinājumu rezultāti parādīti tabulā 28.1.

Tabula 28.1

| Metienu skaits | Ģerboņu skaits | Relatīvais biežums |
|----------------|----------------|--------------------|
| 12 000         | 6019           | 0,5016             |
| 24 000         | 12 012         | 0,5005             |

Redzam, ka, palielinoties izmēģinājumu skaitam, notikuma (notikums — ģerboņa krišana) relatīvais biežums tuvojas varbūtībai  $\frac{1}{2}$ . Piemērā par spēļu kauliņu jebkura punktu skaita krišanas

teorētiski aprēķinātā varbūtība ir  $\frac{1}{6}$ , bet praktiski, izdarot daudzkārtējus metienus, jebkura punktu skaita krišanas relatīvais biežums arī aptuveni vienāds ar  $\frac{1}{6}$ .

Tātad kāda notikuma  $A$  relatīvo biežumu, ja  $n$  ir liels, var uzskatīt par mums nezināmās notikuma  $A$  varbūtības aptuveno vērtību. Tāpēc praktiski gadījumos, kad notikuma varbūtību nevar aprēķināt pēc formulas (28.1), tās vietā lieto relatīvo biežumu, kurš noteikts lielam izmēģinājumu skaitam. So relatīvo biežumu sauc par statistisko varbūtību jeb vienkārši — par varbūtību.

Jāievēro, ka varbūtība visos gadījumos uzskatāma par apskatāmās parādības respektīvi notikuma objektīvu īpašību, kura raksturo notikuma iespējas pakāpi un eksistē neatkarīgi no tā, vai izmēģinājumi notiek vai ne.

Tālāk apskatīsim vairākas varbūtību īpašības, balstoties uz varbūtības klasisko definīciju. Visas varbūtību īpašības pareizas arī statistiskajai varbūtībai.

Ja notikums  $A$  nav iespējams, tad tam labvēlīgu gadījumu nav, t. i.,  $m=0$ , tāpēc  $P(A)=0$  (piemēram, melnas lodītes izvilkšana no urnas, kurā ir tikai baltas lodītes).

Ja notikums  $A$  ir nenovēršams, tad tam visi gadījumi ir labvēlīgi, t. i.,  $m=n$ , tāpēc  $P(A)=1$  (piemēram, baltas lodītes izvilkšana no urnas, kurā ir tikai baltas lodītes).

Jebkura notikuma varbūtība ir starp 0 un 1, t. i.,

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Jo varbūtība  $P(A)$  tuvāk skaitlim 1, jo mazāk  $m$  atšķiras no  $n$  un notikums  $A$  ir jo vairāk iespējams. Otrādi, jo  $P(A)$  tuvāk



skaitlim 0, jo tuvāks nullei arī  $m$  un notikums  $A$  ir jo mazāk iespējams.

Piezīme. Kā notikuma relatīvo biežumu, tā arī varbūtību bieži izsaka procentos. Tā, piemēram, ja sēklu dīgspēja ir 75%, tad varbūtība, ka «uz labu laimi» paņemta sēkla būs dīgspējīga, ir 0,75 jeb 75%.

**240. §. Lielo skaitļu likums un praktiskās neiespējamības princips.** Viens no varbūtību teorijas pamatlikumiem ir *lielo skaitļu likums*, kuru apskatīsim vienkāršotā formulējumā.

*Jo lielāks novērojumu skaits, jo lielāka varbūtība, ka praktiskie rezultāti jo labāk pakļausies teorētiski atrastajam likumsakarībam, ja vien praksē realizējušies tie nosacījumi, kuri ir teorētisko likumsakarību izvedumu pamatā.*

Vienu no lielo skaitļu likuma darbības piemēriem apskatījām jau iepriekšējā paragrāfā. Jo lielāks novērojumu skaits, jo lielāka iespējas pakāpe, ka praktiski (izdarot metienus) noteiktais relatīvais biežums labāk sakrītis ar teorētiski atrasto varbūtību.

Tāpat, jo lielāks randomizētais paraugs jo lielāka garantija, ka no parauga atrastais vidējais aritmētiskais mazāk atšķirsies no ģenerālās kopas vidējā.

Lielo skaitļu likums saista teoriju ar praksi, tāpēc jebkuram varbūtību teorijas rezultātam ir praktiska — statistiska jēga. Proti, varbūtību teorijas rezultātu apstiprinājumu var iegūt, izdarot daudzus izmēģinājumus praksē.

Plaši pielietojumi ir arī *praktiskās neiespējamības principam*. Tā saturs šāds. Ja  $P(A)$  ir pietiekami mazs, tad var pieņemt, ka izdarot vienu izmēģinājumu, notikums  $A$  neiestāsies.

Uz jautājumu, cik mazai jābūt notikuma varbūtībai, lai notikumu drīkstētu uzskatīt par praktiski neiespējamu, nevar dot vispārīgu atbildi — tā atkarīga no konkrētā notikuma rakstura. Tā, piemēram, ja varbūtība, ka iesētais grauds neuzdīgs, ir 0,01, tad ar to var samierināties, jo no 100 sēklām caurmērā tikai viena nebūs dīgspējīga. Ja turpretim varbūtība, ka uzceltā ēka sagraus, ir 0,01, tad ar to nekādā ziņā nevar samierināties.

Lauksaimniecības rakstura izmēģinājumos viscaur pieņemts varbūtību  $P$  uzskatīt par pietiekami mazu, ja tā nepārsniedz 5% (5% līmenis). To pieraksta tā:  $P \leq 0,05$ . Ja kļūdaina slēdziena iespējas pakāpe nav augstāka par 5%, tad tas nozīmē, ka mēs riskējam kļūdīties ne vairāk kā 5 gadījumos no 100.

Minētais princips kā mūsu praktiskās darbības regulētājs novērojams ik uz soļa. Gandrīz ik dienas mūs apdraud dažādas nejaušības, taču praktiski nelaimes gadījumu varbūtības mēdz būt tik mazas, ka mēs ar to iespēju vienkārši nerēķināmies, tāpat kā loterijas biļetes īpašnieks neplāno savu turpmāko dzīvi saskaņā ar iespēju laimēt automašīnu.

**241. §. Varbūtību saskaitīšana.** Pieņemsim, ka urnā ir 10 lodītes — 2 zilas, 5 zaļas, 3 baltas. Nosauksim zilās lodītes izvilkšanu

no urnas par notikumu  $A$ , zaļās — par notikumu  $B$  un baltās — par notikumu  $C$ . Tad

$$P(A) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}; \quad P(B) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}; \quad P(C) = \frac{3}{10}.$$

Izvilkt no šīs urnas krāsainu lodīti, t. i., zilu vai zaļu, nozīmē notikumu « $A$  vai  $B$ ». Šī notikuma varbūtību apzīmēsim ar  $P(A \text{ vai } B)$ . Tā kā urnā ir 7 krāsainas lodītes, tad

$$P(A \text{ vai } B) = \frac{7}{10},$$

t. i., varbūtība  $P(A \text{ vai } B)$  ir vienāda ar varbūtību  $P(A) = \frac{2}{10}$  un  $P(B) = \frac{5}{10}$  summu. Tātad šajā piemērā

$$P(A \text{ vai } B) = P(A) + P(B). \quad (28.3)$$

Apskatītajā piemērā notikumi  $A$  un  $B$  ir nesavienojami, jo no urnas izvilktā lodīte nevar būt reizē zila un zaļa.

**Teorēma.** *Ja  $A$  un  $B$  ir nesavienojami notikumi, tad notikuma « $A$  vai  $B$ » varbūtība vienāda ar atsevišķo notikumu  $A$  un  $B$  varbūtību summu.*

Pierādīsim vienādību (28.3) nesavienojamiem notikumiem  $A$  un  $B$ .

**Pierādījums.** Notikumiem  $A$  un  $B$  labvēlīgo gadījumu skaitu apzīmēsim attiecīgi ar  $m_1$  un  $m_2$ , bet visu iespējamo gadījumu kopskaitu ar  $n$ . Tad notikumam « $A$  vai  $B$ » labvēlīgo gadījumu skaits ir  $m_1 + m_2$ , jo notikumu  $A$  un  $B$  nesavienojamības dēļ neviens no notikumam  $A$  labvēlīgiem gadījumiem nevar iestāties reizē ar kādu no notikumam  $B$  labvēlīgiem gadījumiem. Apskatāmiem notikumiem varbūtības ir

$$P(A) = \frac{m_1}{n}, \quad P(B) = \frac{m_2}{n}, \quad P(A \text{ vai } B) = \frac{m_1 + m_2}{n},$$

no kurienes seko vienādība (18.3), un teorēma ir pierādīta.

**Vispārinājums.** Varbūtību saskaitīšanas teorēma ir pareiza arī jebkuram galīgam nesavienojamu notikumu skaitam.

Tā, piemēram, ja  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ir  $n$  nesavienojami notikumi, tad

$$P(A_1 \text{ vai } A_2 \text{ vai } \dots \text{ vai } A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n). \quad (28.4)$$

*Divus notikumus  $A$  un  $\bar{A}$  (lasīt: «ne  $A$ ») sauc par pretējiem, ja tie ir vienīgi iespējami un nesavienojami.*



Tā, piemēram, ja urnā ir 7 baltas un 3 melnas lodītes, tad baltas un melnas lodītes izvilkšana ir pretēji notikumi. Šajā piemērā  $P(A) = \frac{7}{10}$ ,  $P(\bar{A}) = \frac{3}{10}$  un

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1. \quad (28.5)$$

Tā kā viens no pretējiem notikumiem  $A$  un  $\bar{A}$  katrā ziņā iestājas, jo tie ir vienīgi iespējami, tad

$$P(A \text{ vai } \bar{A}) = 1.$$

No otras puses, šo notikumu nesavienojamības dēļ

$$P(A \text{ vai } \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}).$$

No abām pēdējām vienādībām seko formula (28.5), kas pierāda šādu teorēmu: *Divu pretēju notikumu varbūtību summa vienāda ar vienu.*

**Vispārinājums.** *Par vairākiem notikumiem saka, ka tie veido notikumu pilnu sistēmu, ja tie ir vienīgi iespējami un nesavienojami. Tā kā viens no pilnās sistēmas notikumiem katrā ziņā iestājas, tad šo notikumu varbūtību summa vienāda ar vienu.*

Tā, piemēram, ja urnā ir 2 zilas, 5 zaļas un 3 baltas lodītes, tad zilas, zaļas un baltas lodītes izvilkšana veido notikumu pilnu sistēmu. Šajā piemērā  $P(A) = \frac{2}{10}$ ,  $P(B) = \frac{5}{10}$ ,  $P(C) = \frac{3}{10}$  un

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1.$$

Vispār, ja  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ir vienīgi iespējami un nesavienojami notikumi, tad tie veido notikumu pilnu sistēmu un

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1. \quad (28.6)$$

**242. §. Varbūtību reizināšana.** *Par notikumu  $A_1, A_2, \dots, A_n$  savietojumu sauc tādu jaunu notikumu « $A_1$  un  $A_2$  un ... un  $A_n$ », kurš iestājas tad, ja iestājas visi minētie notikumi (vienlaicīgi vai arī dažādos laikos).*

Tā, piemēram, baltu lodīšu izvilkšana no divām dažādām urnām, velkot no katras urnas pa vienai lodītei, ir divu notikumu savietojums. Apzīmējot baltas lodītes izvilkšanu no pirmās un otrās urnas attiecīgi ar  $A$  un  $B$ , balto lodīšu izvilkšana no abām urnām ir notikums « $A$  un  $B$ ».

*Notikumus sauc par savstarpēji neatkarīgiem, ja katra notikuma varbūtība nav atkarīga no tā, vai pārējie notikumi notiek vai ne. Ja šis nosacījums nav izpildīts, tad notikumus sauc par atkarīgiem.*

Iepriekšējā piemērā notikumi  $A$  un  $B$  ir neatkarīgi, jo no vienas urnas izvilktais lodītes krāsa neietekmē no otras urnas izvilktais lodītes krāsu.



Pieņemsim, ka balto lodīšu skaits pirmajā un otrajā urnā ir 7 un 5, bet lodīšu kopskaits šajās urnās ir attiecīgi 10 un 12. Tad

$$P(A) = \frac{7}{10}, \quad P(B) = \frac{5}{12}.$$

Visus notikumam «A un B» labvēlīgos gadījumus dabūsim, ja jebkuru pirmās urnas balto lodīti kombinēsim ar jebkuru otrās urnas balto lodīti. Šādu gadījumu skaits ir  $7 \cdot 5 = 35$ . Turpretim visus iespējamos gadījumus dabūsim, ja jebkuru pirmās urnas balto vai melno lodīti kombinēsim ar jebkuru otrās urnas balto vai melno lodīti, un šādu gadījumu kopskaits ir  $10 \cdot 12 = 120$ . Ievērojot to, iegūstam

$$P(A \text{ un } B) = \frac{7}{10} \cdot \frac{5}{12} = P(A) \cdot P(B).$$

Neatkarīgu notikumu varbūtību reizināšanas teorēma. *Divu neatkarīgu notikumu A un B savietojuma varbūtība ir vienāda ar notikumu A un B varbūtību reizinājumu.*

$$P(A \text{ un } B) = P(A) \cdot P(B). \quad (28.7)$$

*Pierādījums.* Pieņemsim, ka notikumam A labvēlīgi  $m_1$  gadījumi no  $n_1$  iespējamajiem gadījumiem, bet notikumam B labvēlīgi  $m_2$  gadījumi no  $n_2$ . Tad notikumu varbūtības ir

$$P(A) = \frac{m_1}{n_1}, \quad P(B) = \frac{m_2}{n_2}.$$

Notikumu A un B savietojumam labvēlīgos gadījumus dabūjam, kombinējot jebkuru no  $m_1$  gadījumiem ar jebkuru no  $m_2$  gadījumiem. Šādu labvēlīgu gadījumu skaits ir  $m_1 \cdot m_2$ . Visus iespējamus gadījumus dabūjam, kombinējot jebkuru no  $n_1$  gadījumiem ar jebkuru no  $n_2$  gadījumiem, tāpēc visu iespējamo gadījumu kopskaits ir  $n_1 n_2$  un notikumu A un B savietojuma varbūtība ir

$$P(A \text{ un } B) = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2} = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = P(A) \cdot P(B),$$

kas pierāda formulu (28.7).

*Vispārinājums.* *So varbūtību reizināšanas teorēmu var vispārināt jebkuram galīga skaita savstarpēji neatkarīgu notikumu savietojumam. Ja  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ir n savstarpēji neatkarīgi notikumi, tad*

$$P(A_1 \text{ un } A_2 \text{ un } \dots \text{ un } A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \dots P(A_n). \quad (28.8)$$

*Piemērs.* Kāda ir varbūtība, ka, metot piecas reizes monētu, pirmās trīs reizes uzmetīsīm ģerboni un pēdējās divas reizes ciparu?

Piemērā minēto notikumu apzīmēsim ar  $A$ . Tātad jāatrod varbūtība  $P(A)$ . Varbūtību uzmet gērboni apzīmēsim ar  $p$ , varbūtību uzmet ciparu — ar  $q$ . Tad  $p = q = \frac{1}{2}$  un pēc formulas (28.8)

$$P(A) = p \cdot p \cdot p \cdot q \cdot q = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}.$$

**Teorēma.** *Varbūtību, ka notiks vismaz viens no savstarpēji neatkarīgiem notikumiem  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , atrod, atņemot no viena pretējo notikumu  $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$  varbūtību reizinājumu.*

Pierādījums. Apzīmēsim ar  $A$  notikumu, ka notiks vismaz viens no notikumiem  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Notikumi  $A$  un « $\bar{A}_1$  un  $\bar{A}_2$  un ... un  $\bar{A}_n$ » (neiestājas neviens no notikumiem) ir pretēji, tāpēc to varbūtību summa vienāda ar vienu, t. i.,

$$P(A) + P(\bar{A}_1 \text{ un } \bar{A}_2 \text{ un } \dots \text{ un } \bar{A}_n) = 1.$$

Saskaņā ar formulu (28.5)

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \dots P(\bar{A}_n). \quad (28.9)$$

Apzīmējot notikumu  $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$  varbūtības attiecīgi ar  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , var rakstīt, ka

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \dots q_n. \quad (28.9')$$

**Piemērs.** Konstatēts, ka republikā gadu ar normāliem meteoroloģiskiem apstākļiem ir tikpat daudz kā gadu ar labiem un sliktiem apstākļiem kopā, bet labu gadu ir tikpat daudz kā sliktu gadu. (Par kritēriju pieņemta meteoroloģisko apstākļu ietekme uz ražas lielumu.) Atrast varbūtību, ka vismaz viens no trim pēc kārtas sekojošiem gadiem būs labs. (Pieņemts, ka meteoroloģiskie apstākļi atsevišķos gados ir savstarpēji neatkarīgi.)

No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka normāla gada varbūtība ir 0,5, laba gada varbūtība vienāda ar sliktā gada varbūtību un vienāda ar 0,25. Varbūtība, ka pirmais gads nebūs labs, ir  $q_1 = 1 - 0,25 = 0,75$ . Attiecīgi arī  $q_2 = 0,75$  un  $q_3 = 0,75$ . Pēc formulas (28.9')

$$P(A) = 1 - 0,75 \cdot 0,75 \cdot 0,75 = 1 - 0,75^3 \approx 58\%.$$

Pieņemsim, ka urnā ir 7 baltas un 3 melnas lodītes. No urnas velkam lodīti divas reizes, pie tam pirmajā reizē izvilktu lodīti neliekam urnā atpakaļ. Varbūtība pirmajā reizē izvilkt baltu lodīti ir  $\frac{7}{10}$ . Ja pirmā izvilktā lodīte ir balta, tad varbūtība otrā reizē izvilkt baltu lodīti ir  $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ , jo tad pēc pirmās vilkšanas balto lodīšu skaits urnā ir 6 (no 9 lodītēm). Ja turpretim



pirmajā reizē izvilkta lodīte ir melna, tad varbūtība otrā reizē izvilkta baltu lodīti ir  $\frac{7}{9}$ , jo tad pēc pirmās vilkšanas balto lodīšu skaits ir 7 (no 9 lodītēm). Baltas lodītes izvilkšanu no urnas pirmajā reizē apzīmēsim ar  $A$ , bet baltas lodītes izvilkšanu otrajā reizē — ar  $B$ . *Notikums  $B$  ir atkarīgs no notikuma  $A$ , jo varbūtība izvilkta baltu lodīti otrā reizē ir atkarīga no tā, vai pirmajā reizē izvilkta lodīte bijusi balta vai melna.*

**Definīcija.** *Par notikuma  $B$  nosacīto varbūtību sauc notikuma  $B$  varbūtību, kas aprēķināta ar nosacījumu, ka notikums  $A$  noticis.*

To apzīmēsim ar  $P_A(B)$ . Iepriekšējā piemērā

$$P_A(B) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Atkarīgu notikumu varbūtību reizinašanas teorēma. *Ja notikums  $B$  atkarīgs no notikuma  $A$ , tad notikumu  $A$  un  $B$  savietojuma varbūtība vienāda ar notikuma  $A$  varbūtību, pareizinātu ar notikuma  $B$  nosacīto varbūtību.*

$$P(A \text{ un } B) = P(A) \cdot P_A(B). \quad (28.10)$$

1. piemērs. Ja urnā ir 7 baltas un 3 melnas lodītes, tad varbūtība divas reizes izvilkta baltu lodīti (pie tam pirmajā reizē izvilkta lodīte nav atlikta urnā atpakaļ) ir

$$\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{7}{15}.$$

2. piemērs. 18 studenti praktikanti nosūtīti darbā uz trijām laukkopības brigādēm. Pirmajā brigādē vajadzīgi 9 cilvēki, otrajā 6 un trešajā 3. Darba vietu izšķir lozējot. Studenti  $A$ ,  $B$ ,  $C$  veļ lozes pirmie pēc kārtas. Kāda varbūtība, ka a) visi nokļūs vienā brigādē, b) katrs nokļūs savā brigādē?

Atisinājums a) gadījumā ir šāds. Nosacījums, ka visiem studentiem jānokļūst vienā brigādē, tiks izpildīts, ja visi trīs studenti nokļūs vai nu pirmajā, vai otrajā, vai trešajā brigādē. No tā izriet risinājums, kas ir reizinašanas un saskaitīšanas teorēmu sakopojums.

Apzīmēsim ar  $P(A)$  varbūtību, ka students  $A$  nokļūs I brigādē, ar  $P_A(B)$  varbūtību, ka students  $B$  nokļūs I brigādē, pieņemot, ka students  $A$  izlozējis I brigādi, ar  $P_{AB}(C)$  varbūtību, ka students  $C$  nokļūs I brigādē, pieņemot, ka studenti  $A$  un  $B$  izlozējuši I brigādi. Varbūtība, ka visi studenti nokļūs I brigādē, vienāda ar šo varbūtību reizinaājumu, t. i.,

$$P_I = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C) = \frac{9}{18} \cdot \frac{8}{17} \cdot \frac{7}{16} = 0,103 \approx 10\%.$$



Līdzīgi atrod varbūtības, ka visi studenti nokļūs II vai III brigādē. Dabūsim

$$P_{II} = \frac{6}{18} \cdot \frac{5}{17} \cdot \frac{4}{16} = 0,025 = 2,5\%; \quad P_{III} = \frac{3}{18} \cdot \frac{2}{17} \cdot \frac{1}{16} = 0,001 = 0,1\%.$$

Varbūtību, ka visi trīs studenti  $A, B, C$  nokļūs vienā brigādē, iegūst, iepriekš atrastās varbūtības summējot. Tad dabūjam

$$P = P_I + P_{II} + P_{III} = 0,103 + 0,025 + 0,001 \approx 13\%.$$

Ja šādu izlozi organizētu daudzas reizes, sagaidāms, ka 13% gadījumu studenti  $A, B$  un  $C$  nokļūs vienā brigādē.

b) gadījuma risinājums. Minētie studenti nokļūs katrs savā brigādē, ja realizēsies viens no zemāk uzrādītajiem variantiem.

| I brigādē    | II brigādē   | III brigādē  |
|--------------|--------------|--------------|
| students $A$ | students $B$ | students $C$ |
| " $A$        | " $C$        | " $B$        |
| " $B$        | " $A$        | " $C$        |
| " $B$        | " $C$        | " $A$        |
| " $C$        | " $A$        | " $B$        |
| " $C$        | " $B$        | " $A$        |

Var pārbaudīt, ka visu variantu varbūtības vienādas savā starpā un vienādas ar  $\frac{9}{18} \cdot \frac{6}{17} \cdot \frac{3}{16} \approx 0,033$ .

Meklēto varbūtību atrod, visu variantu varbūtības summējot resp. skaitli 0,033 reizinot ar 6. Tātad varbūtība, ka studenti  $A, B$  un  $C$  nokļūs katrs savā brigādē, vienāda ar 20%.

**243. §. Bernulli formula.** Varbūtību teorijā ir daudz uzdevumu, kuri atrisināmi, pielietojot varbūtību reizināšanas, kā arī saskaitīšanas teorēmas. No šī veida uzdevumiem var izdalīt tipu, kura risināšana vienkāršojas, izmantojot Bernulli formulu. Apskatīsim šī tipa uzdevumu piemēru.

Pieņemsim, ka loterejā ir 10% laimestu. Iegādātas 4 loterejas biļetes. Kāda varbūtība, ka 2 no tām laimēs? (Pieņemt, ka kopējais biļešu skaits tik liels, ka laimesta varbūtība visām biļetēm viena un tā pati, t. i., 0,1 — neatkarīgi no tā, vai iepriekšējās biļetes laimējušas vai ne.)

Apskatīsim visus iespējamās variantus; kuri atbilst prasībai, lai laimējušo biļešu skaits būtu 2 (1 — laimēs,  $n$  — nelaimēs).

| 1. biļete | 2. biļete | 3. biļete | 4. biļete |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1         | 1         | $n$       | $n$       |
| 1         | $n$       | 1         | $n$       |
| 1         | $n$       | $n$       | 1         |
| $n$       | 1         | 1         | $n$       |
| $n$       | 1         | $n$       | 1         |
| $n$       | $n$       | 1         | 1         |

Pirmā varianta varbūtība ir

$$P = 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,9 \cdot 0,9 = 0,0081.$$

Gluži tādas pašas ir arī pārējo variantu varbūtības. Notikums — laimēs 2 biļetes — iestāsies tad, kad realizēsies vai nu pirmais, vai otrais, vai utt. sestais variants. No tā izriet, ka meklējamā varbūtība ir visu mūsu prasībai atbilstošo variantu varbūtību summa. Apzīmējot meklējamo varbūtību ar  $P_{2,4}$ , var rakstīt

$$P_{2,4} = \underbrace{0,0081 + 0,0081 + \dots + 0,0081}_{6 \text{ reizes}} = 6 \cdot 0,0081 = 0,0486 = 4,86\%.$$

Reizinātājs 6 parāda, cik dažādos veidos no 4 biļetēm var izvēlēties divus laimestus. (Laimēti var būt: 1. un 2. biļete, 1. un 3. biļete utt.) Tāpēc reizinātājs 6 ir kombināciju skaits no 4 pa 2, kuru apzīmē ar  $C_4^2$ . Katrs saskaitāmais 0,0081 savukārt ir  $0,1^2$  un  $0,9^2$ , resp.,  $p^2$  un  $q^2$  reizinājums. Rezultātā dabūjam šakarību

$$P_{2,4} = C_4^2 p^2 q^2.$$

Apzīmēsim ar  $n$  neatkarīgo izmēģinājumu skaitu, ar  $m$  notikuma  $A$  iestāšanās gadījumu skaitu, ar  $p$  notikuma  $A$  varbūtību vienā atsevišķā izmēģinājumā, ar  $q$  notikumam  $A$  pretējā notikuma varbūtību. Tad

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}. \quad (28.11)$$

Ievērojot, ka

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

formulu (28.11) var pārrakstīt tā:

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}. \quad (28.11')$$

Aprēķinos jāievēro, ka  $0! = 1$ .

Formula (28.11) resp. (28.11') ir Bernulli formula.

**Bernulli formulas pierādījums.** Varbūtība, ka notikums notiks pirmajos  $m$  izmēģinājumos un nenotiks atlikušajos  $n-m$  izmēģinājumos, saskaņā ar neatkarīgu notikumu varbūtību reizināšanas teorēmu ir  $p^m q^{n-m}$ . Šī varbūtība nav atkarīga no tā, kuros  $m$  izmēģinājumos no apskatītajiem  $n$  iestājas notikums  $A$ . No  $n$  izmēģinājumiem var izvēlēties  $m$  izmēģinājumus tik dažādos veidos, cik kombināciju var sastādīt no  $n$  pa  $m$ , t. i., dažādo veidu skaits vienāds ar  $C_n^m$ . Tāpēc saskaņā ar varbūtību saskaitīšanas teorēmu meklējamā varbūtība  $P_{m,n}$  vienāda ar  $C_n^m p^m q^{n-m}$ , kas pierāda Bernulli formulu.

1. piemērs. Sēklu dīgtspēja vienāda ar 60%. Kāda varbūtība ka no 10 sēklām uzdīgs 8?



Nosauksim sēklas dīgšanu par notikumu  $A$ . Tad  $P(A) = p = 0,6$ . 10 sēklu iesešana ir 10 neatkarīgi izmēģinājumi, kuros notikums  $A$  var iestāties 0, 1, 2, ..., 10 reizes, t. i., no iesētajām 10 sēklām var neuzdīgt neviena, bet var uzdīgt 1,2,3 utt. Ar  $P_{8,10}$  apzīmēsim varbūtību, ka no 10 iesētām sēklām uzdīgs 8, un to aprēķināsim pēc formulas (28.11). Dabūsim

$$P_{8,10} = C_{10}^8 0,6^8 \cdot 0,4^2 = 45 \cdot 0,6^8 \cdot 0,4^2,$$

Logaritmējot dabūjam

$$\begin{aligned} \lg P_{8,10} &= \lg 45 + 8 \lg 0,6 + 2 \lg 0,4 = 1,6532 + 2,2256 + \bar{1},2042 = \\ &= 1,0830, \end{aligned}$$

no kurienes

$$P_{8,10} \approx 0,121.$$

2. piemērs. Ilgstoši rūpnīcas ražotās produkcijas novērojumi liecina, ka brāķis sastāda  $p$ -to daļu no visas produkcijas. Tātad varbūtība, ka «uz labu laimi» paņemtā detaļa būs brāķis, vienāda ar  $p$ .

Komplektēsim paraugu pēc Bernulli shēmas (katru eksemplāru pēc izpētišanas pievienosim ģenerālajai kopai, lai tās sastāvs pirms katras vienības izņemšanas būtu viens un tas pats).

Noteiksim varbūtību, ka šādi sastādītajā  $n$  vienību paraugā būs  $m$  brāķa detaļu.

Ja  $p = 0,02$ ;  $m = 15$ ;  $n = 500$ , tad pēc formulas (28.11')

$$P_{15,500} = \frac{500!}{15!485!} 0,02^{15} \cdot 0,98^{485} \approx 0,035.$$

Lai izpildītu norādītās darbības, lieto logaritmu tabulas.

**244. §. Diskrēts gadījuma lielums, tā varbūtību sadalījums, vidējā vērtība un dispersija.** *Par diskrētu gadījuma lielumu sauc mainīgu lielumu, kura skaitliskās vērtības ir atkarīgas no gadījuma, pie tam tās var sanumurēt un katrai vērtībai ir noteikta varbūtība.\**

1. piemērs. Metot kauliņu, uzmeto punktu skaits ir atkarīgs no gadījuma un var pieņemt veselu skaitļu vērtības no 1 līdz 6. Uzmeto punktu skaits ir diskrēts gadījuma lielums, tā iespējamās skaitliskās vērtības ir 1, 2, 3, 4, 5, 6, un katras vērtības varbūtība ir  $\frac{1}{6}$ .

2. piemērs. Kādā naudas loterijā ir 100 bilešu, no tām 26 laimesti, kuri sadalās šādi: 5 — par 10 rbļ., 8 — par 5 rbļ., 13 — par 1 rbl. Vienas biļetes īpašniekam laimētā naudas summa

\* «Katrai vērtībai ir noteikta varbūtība» jāsaprot tā, ka katras vērtības realizēšana ir notikums ar noteiktu varbūtību.



ir gadījuma lielums\*, kura iespējamās vērtības ir 0; 1; 5; 10 un katras vērtības varbūtība ir attiecīgi 0,74; 0,13; 0,08 un 0,05. Ja no 20 laimestiem ir 2 laimesti par 10 rbl., 15 — par 5 rbl. un 3 — par 1 rbl., tad iepriekš minēto vērtību varbūtības ir 0,80; 0,03; 0,15 un 0,02.

Lai raksturotu diskrētu gadījuma lielumu, nepietiek uzskaitīt tā iespējamās skaitliskās vērtības, bet nepieciešams dot arī šo vērtību varbūtības. Tā, piemēram, laimesta lielumam abos apskatītajos gadījumos ir vienas un tās pašas skaitliskās vērtības, bet šo vērtību varbūtības pavisam citādas.

*Likumu, ar kura palīdzību var atrast gadījuma lieluma iespējamo skaitlisko vērtību varbūtības, sauc par tā varbūtību sadalījuma likumu (respektīvi — par varbūtību sadalījumu).*

Gadījuma lielumu apzīmēsim ar  $X$ , tā iespējamās skaitliskās vērtības, sakārtotas augošā kārtībā, ar  $x_1, x_2, \dots, x_k$  un tām atbilstošās varbūtības — ar  $p_1, p_2, \dots, p_k$ . Diskrēta gadījuma lieluma  $X$  varbūtību sadalījumu parasti attēlo tabulas 28.2 veidā ( $i=1, 2, \dots, k$ ).

Tabula 28.2

|       |       |       |     |       |
|-------|-------|-------|-----|-------|
| $x_1$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_k$ |
| $p_1$ | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_k$ |

1. un 2. piemērā apskatīto gadījuma lielumu varbūtību sadalījumi attiecīgi parādīti tabulās 28.3 un 28.4.

Tabula 28.3

|       |               |               |               |               |               |               |
|-------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $x_i$ | 1             | 2             | 3             | 4             | 5             | 6             |
| $p_i$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

Tabula 28.4

|       |      |      |      |      |
|-------|------|------|------|------|
| $x_i$ | 0    | 1    | 5    | 10   |
| $p_i$ | 0,74 | 0,13 | 0,08 | 0,05 |

Ievērosim, ka visu iespējamo vērtību varbūtību summa ir 1. Tā, piemēram, no tabulas 28.4

$$0,74 + 0,13 + 0,08 + 0,05 = 1.$$

Piezīme. 27. nodaļā runājam par variējošu lielumu. Jēdzieniem «variējošs lielums» un «gadījuma lielums» ir vienāds saturs. Pirmo apzīmējumu lieto variāciju statistikā, otro — varbūtību teorijā. Varbūtības statistiskais analogs ir relatīvais biežums, tā-

\* Šajā un sekojošos paragrāfos bieži apzīmējumu «diskrēts» īsākas izteiksmes dēļ izlaidīsim.

pēc variāciju rindu savukārt var uzskatīt par varbūtību sadalījuma statistisko analogu.

*Varbūtību sadalījuma raksturošanai lieto atbilstošā gadījuma lieluma  $X$  vidējo vērtību  $\mu$  un dispersiju  $\sigma^2$ .*

*Definīcija. Par diskrēta gadījuma lieluma  $X$  vidējo vērtību  $\mu$  sauc tā iespējamo vērtību  $x_1$  un attiecīgo varbūtību  $p_1$  reizinājumu summu.*

$$\mu = \mu(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_k p_k, \quad (28.12)$$

jeb

$$\mu = \sum x_i p_i. \quad (28.12')$$

Piemērs. Atrast vidējo vērtību  $\mu$  gadījuma lielumam, kura varbūtību sadalījums attēlots tabulā 28.5.

Tabula 28.5

|       |      |      |      |      |      |      |
|-------|------|------|------|------|------|------|
| $x_i$ | -1,3 | -0,4 | 0,1  | 0,4  | 1,1  | 1,2  |
| $p_i$ | 0,15 | 0,10 | 0,20 | 0,15 | 0,25 | 0,15 |

$$\begin{aligned} \mu &= -1,3 \cdot 0,15 - 0,4 \cdot 0,10 + 0,1 \cdot 0,20 + 0,4 \cdot 0,15 + \\ &+ 1,1 \cdot 0,25 + 1,2 \cdot 0,15 = -0,195 - 0,040 + 0,020 + 0,060 + \\ &+ 0,275 + 0,180 = 0,300. \end{aligned}$$

Vidējais aritmētiskais ir vidējās vērtības statistiskais analogs. Formula (27.12), kura izsaka vidējo aritmētisko, ir analoga formulai (28.12'), kura definē vidējo vērtību.

Ja varbūtības vietā lieto attiecīgā notikuma ar formulu (28.2) definēto relatīvo biežumu, tad formulas (28.12) un (28.12') izsaka *diskrēta gadījuma lieluma vidējo aritmētisko*. Ir jāatšķir *vidējā vērtība no vidējā aritmētiskā*. Tā kā vidējās vērtības noteikšanā lieto varbūtības, kuras bieži nav precīzi zināmas, tad arī vidējā vērtība praktiski parasti nav precīzi nosakāma. Notikuma relatīvie biežumi dažādās izmēģinājumu sērijās svārstās ap skaitli, kas izsaka notikuma varbūtību, gluži tāpat arī *vidējie aritmētiskie grupējas ap vidējo vērtību*. Tā kā par varbūtības aptuvenu vērtību var uzskatīt tādu relatīvo biežumu, kuru atrod, izdarot pietiekami daudz novērojumu, tad arī *par aptuvenu vidējo vērtību var pieņemt tādu vidējo aritmētisko, kas aprēķināts pie liela novērojumu skaita*.

Gadījuma lieluma  $X$  vērtību izkliedi ap šī lieluma vidējo vērtību  $\mu$  raksturo gadījuma lieluma dispersija  $\sigma^2$  un standartnovirze  $\sigma$ .

Diskrēta gadījuma lieluma  $X$  novirze no vidējās vērtības, t. i.,  $X - \mu$ , tāpat arī šīs novirzes kvadrāts  $(X - \mu)^2$  ir diskrēts gadījuma lielums, kura varbūtību sadalījumu attēlo tabula 28.6.

Tabula 28.6

|                 |                 |     |                 |
|-----------------|-----------------|-----|-----------------|
| $(x_1 - \mu)^2$ | $(x_2 - \mu)^2$ | ... | $(x_k - \mu)^2$ |
| $p_1$           | $p_2$           | ... | $p_k$           |

Gadījuma lieluma dispersija ir tā novirzes kvadrāta vidējā vērtība.

Pēc formulām (28.12) un (28.12') iegūstam

$$\sigma^2 = \sigma^2(X) = (x_1 - \mu)^2 p_1 + (x_2 - \mu)^2 p_2 + \dots + (x_k - \mu)^2 p_k \quad (28.13)$$

jeb

$$\sigma^2 = \sum (x_i - \mu)^2 p_i. \quad (28.13')$$

Attiecīgi

$$\sigma = \sqrt{\sum (x_i - \mu)^2 p_i}. \quad (28.14)$$

Piemērs. Atrast dispersiju un standartnovirzi iepriekšējā piemērā dotajam gadījuma lielumam.

Saskaņā ar formulām (28.13) un (28.14) iegūstam

$$\sigma^2 = (-1,3 - 0,3)^2 \cdot 0,15 + (-0,4 - 0,3)^2 \cdot 0,10 + (0,1 - 0,3)^2 \cdot 0,20 + (0,4 - 0,3)^2 \cdot 0,15 + (1,1 - 0,3)^2 \cdot 0,25 + (1,2 - 0,3)^2 \cdot 0,15 = 0,7240,$$

no kurienes

$$\sigma \approx 0,85.$$

**245. §. Varbūtību binomiālais sadalījums.** Ja gadījuma lieluma varbūtību sadalījums dots ar Bernulli formulu, tad saka, ka gadījuma lielumam ir *varbūtību binomiālais sadalījums*. Tas pastāv tad, ja izdarīti  $n$  neatkarīgi izmēģinājumi un katrā izmēģinājumā notikumam ir viena un tā pati varbūtība  $p$ .

Tabulā 28.7 dotas notikuma iestāšanās gadījumu skaita iespējamās vērtības:  $0, 1, \dots, m, \dots, n$  un to varbūtības, kuras atlasas pēc Bernulli formulas.

Tabula 28.7

|           |       |             |                     |     |                     |     |              |       |
|-----------|-------|-------------|---------------------|-----|---------------------|-----|--------------|-------|
| $m$       | 0     | 1           | 2                   | ... | $m$                 | ... | $n-1$        | $n$   |
| $P_{m,n}$ | $q^n$ | $npq^{n-1}$ | $C_n^2 p^2 q^{n-2}$ | ... | $C_n^m p^m q^{n-m}$ | ... | $np^{n-1} q$ | $p^n$ |

Tabulā 28.8 ir laimestu skaita varbūtību sadalījums 243. § apskatītajam piemēram.

Tabula 28.8

|           |        |        |        |        |        |                            |
|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|----------------------------|
| $m$       | 0      | 1      | 2      | 3      | 4      |                            |
| $P_{m,n}$ | 0,6561 | 0,2916 | 0,0486 | 0,0036 | 0,0001 | $\sum_{m=1}^n P_{m,n} = 1$ |



Kontrolei lietderīgi varbūtības summēt — summai jābūt vienā-  
dai ar vienu.

Tabulas statistiskā jēga ir šāda. Ja 10 000 cilvēku iegādātos  
katrs pa 4 biļetēm, tad sagaidāms, ka 6561 biļešu īpašniekam ne-  
būs neviena laimesta, 2916 biļešu komplekti saturēs pa vienam lai-  
mestam, 486 — 2 laimestus, 36 — 3 laimestus un tikai vienā ga-  
dījumā no 10 000 laimēs visas 4 biļetes. Tāda prognoze izdarāma  
saskaņā ar lielo skaitļu likumu.

Var pierādīt, ka binomiālajam sadalījumam vidējā vērtība

$$\mu = np. \quad (28.15)$$

Dispersija

$$\sigma^2 = npq, \quad (28.16)$$

standartnovirze

$$\sigma = \sqrt{npq}. \quad (28.17)$$

Sai piemērā

$$\mu = 4 \cdot 0,1 = 0,4;$$

$$\sigma^2 = 4 \cdot 0,1 \cdot 0,9 = 0,36;$$

$$\sigma = \sqrt{0,36} = 0,6.$$

**246. §. Binomiālā sadalījuma visvarbūtīgākā vērtība.** To dis-  
krēta gadījuma lieluma vērtību, kurai ir vislielākā varbūtība, sauc  
par *visvarbūtīgāko* vērtību jeb *modu*. Tā, piemēram, tabulā 28.5  
dotajam gadījuma lielumam moda ir 1,1, jo tai atbilst vislielākā  
varbūtība 0,25.

Gadījuma lielumam var būt arī vairākas modas, t. i., vairākas  
iespējamās vērtības ar vienādām vislielākajām varbūtībām.

Gadījuma lielumam ar varbūtību binomiālo sadalījumu moda  
ir vesels skaitlis, jo šeit moda izsaka visvarbūtīgāko notikuma  
iestāšanās gadījumu skaitu. Var pierādīt, ka šai gadījumā moda ir  
vesels skaitlis  $m_0$ , kurš apmierina nevienādības

$$np - q \leq m_0 \leq np + p. \quad (28.18)$$

Šīs nevienādības labā puse atšķiras no kreisās puses par 1  
( $np + p - np + q = 1$ ), tāpēc abas puses reizē ir daļskaitļi vai reizē  
veseli skaitļi.

Ja  $np - q$  ir daļskaitlis, tad ir viena moda, ja  $np - q$  ir vesels  
skaitlis, tad ir divas modas. Tā, piemēram, ja  $n = 15$ ,  $p = \frac{1}{3}$ , tad

$$np - q = \frac{15}{3} - \frac{2}{3} = 4\frac{1}{3} \text{ un } np + p = \frac{15}{3} + \frac{1}{3} = 5\frac{1}{3}; 4\frac{1}{3} \leq m_0 \leq 5\frac{1}{3}; m_0 = 5.$$

Pieņemsim, ka  $n = 15$ ;  $p = \frac{1}{2}$ ; tad  $np - q = \frac{15}{2} - \frac{1}{2} = 7$  un  $np + p = 8$ .

Aprēķinot varbūtības  $P_{7,15}$  un  $P_{8,15}$ , var konstatēt, ka tās ir vienādas.

$$P_{7,15} = C_{15}^7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = C_{15}^7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{15} = 0,196,$$

$$P_{8,15} = C_{15}^8 \left(\frac{1}{2}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = C_{15}^7 \left(\frac{1}{2}\right)^{15} = 0,196.$$

Sajā gadījumā ir divas modas 7 un 8 ar vienādām vislielākajām varbūtībām 0,196.

Ja reizinājums  $np$  ir vesels skaitlis, tad moda vienāda ar šo reizinājumu, t. i.,  $m_0 = np$ .

243. § 2. piemērā visvarbūtīgākais brāķa detaļu skaits apskatītajā 500 vienību paraugā ir 10, jo  $np = 500 \cdot 0,02 = 10 = m_0$ .

Apskatisim vēl šādu piemēru. Ilggadīgi novērojumi parādījuši, ka pirmo piecu gadu laikā iet bojā 15% no jauniestādītajiem konkrētas šķirnes plūmju kociņiem. Kolhoznieka piemājas dārzā iestādīti 10 šīs šķirnes kociņi. Kāds ir visvarbūtīgākais izkritušo kociņu skaits?

Seit

$$p = 0,15, \quad n = 10.$$

Saskaņā ar formulu (28.18),

$$1,5 - 0,85 \leq m_0 \leq 1,5 + 0,15 \text{ jeb } 0,65 \leq m_0 \leq 1,65,$$

t. i.,

$$m_0 = 1.$$

Vislielākā varbūtība, ka izkritis viens kociņš.

247. §. **Binomiālā sadalījuma grafisks attēlojums.** Pieņemsim, ka urnā ir 3 lodītes, no kurām 2 baltas un 1 melna. Tātad baltās lodītes izvilkšanas varbūtība ir  $p = \frac{2}{3}$ , bet melnās —  $q = \frac{1}{3}$ . No

urnas sešas reizes pēc kārtas ņem pa lodītei, pie tam katru izvilkto lodīti pēc krāsas atzīmēšanas atliek urnā atpakaļ. Izvilkto balto lodīšu skaits var būt 0, 1, 2, 3, 4, 5, kā arī 6. Katras vērtības varbūtību atrod pēc Bernulli formulas. Balto lodīšu skaita varbūtību sadalījums dots tabulā 28.9, bet tā grafisks attēlojums 208. un 209. zīmējumos.

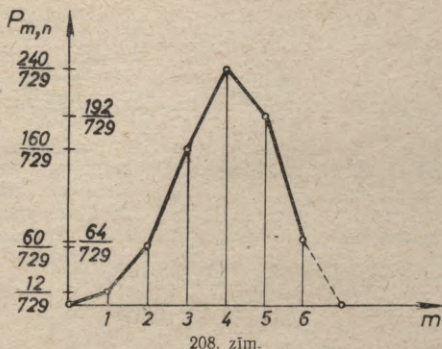
Tabula 28.9

| Balto lodīšu skaits $m$ | 0               | 1                | 2                | 3                 | 4                 | 5                 | 6                |
|-------------------------|-----------------|------------------|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|------------------|
| Varbūtības $P_{m,n}$    | $\frac{1}{729}$ | $\frac{12}{729}$ | $\frac{60}{729}$ | $\frac{160}{729}$ | $\frac{240}{729}$ | $\frac{192}{729}$ | $\frac{64}{729}$ |

Varbūtības grafiski attēlotas 1) kā ordinātes punktiem ar abscišām  $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ , pie tam ordinātu galapunkti savienoti

ar taisnes nogriežņiem (208. zīm.); 2) kā laukumi taisnstūriem, kuru pamata garums ir viena vienība, bet augstums vienāds ar atbilstošu varbūtību (209. zīm.).

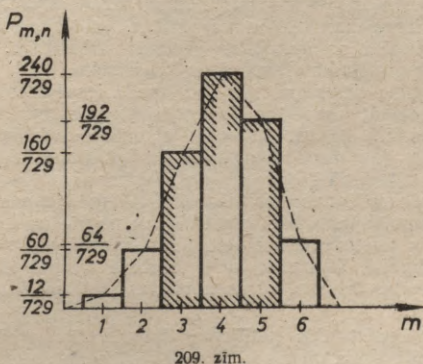
Abos gadījumos lietderīgi uz ordinātu ass ņemt citādu mērogu



nekā uz abscisu ass. Pirmajā gadījumā iegūstam *sadalījuma poligonu*, otrajā — *histogrammu*. Svarīgi iegaumēt, ka grafikā attēloto taisnstūru laukumi skaitliski vienādi ar iespējamo vērtību varbūtībām.

Tā kā visu taisnstūru pamatu garumi vienādi ar 1 un augstumu summa arī ir 1 (binomiālā sadalījuma gadījumā  $(q+p)^n = 1$ ), tad taisnstūru laukumu summa ir 1, t. i.,

$$1 \cdot \frac{1}{729} + 1 \cdot \frac{12}{729} + 1 \cdot \frac{60}{729} + 1 \cdot \frac{160}{729} + 1 \cdot \frac{240}{729} + 1 \cdot \frac{192}{729} + 1 \cdot \frac{64}{729} = 1.$$





Pēdējā vienādība izsaka *varbūtību*, ka balto lodišu skaits pieņem vienu no septiņām iespējamām vērtībām.

Trīs lielāko taisnstūru laukumu summa ir aptuveni vienāda ar 0,812, jo

$$1 \cdot \frac{160}{729} + 1 \cdot \frac{240}{729} + 1 \cdot \frac{192}{729} = \frac{592}{729} \approx 0,812.$$

Tā skaitliski vienāda ar varbūtību, ka balto lodišu skaits būs vai nu 3, 4, vai 5.

Iedomāsimies, ka apskatītajā piemērā neatkarīgo izmēģinājumu skaitu  $n$  palielinām. Gadījuma lielums — balto lodišu skaits — var pieņemt  $n+1$  vērtību. Lai zīmējums nebūtu pārāk izstiepts, horizontālajā virzienā jāņem ļoti maza mēra vienība. Atliekot zīmējumā katrai iespējamai vērtībai atbilstošo varbūtību un ordinātū galapunktus savienojot ar vienkāršu gludu līniju, iegūstam *varbūtību sadalījuma līkni* (210. zīm.).



210. zīm.

Jāievēro, ka no līknes var nolasīt tikai diskrētā gadījuma lieluma  $X$  *iespējamo* vērtību varbūtības, arī taisnstūru laukumi skaitliski vienādi ar *iespējamo* vērtību varbūtībām. Iespējamās vērtības 210. zīmējumā atzīmētas ar krustiņiem.

Ja gadījuma lielumam  $X$  ir ļoti daudz iespējamo vērtību, tad svarīgi aprēķināt varbūtību, ka gadījuma lielums pieņem kādu vērtību intervālā  $(\alpha, \beta)$ , jo katras atsevišķas vērtības varbūtība pie liela  $n$  ir ļoti maza. Varbūtību, ka gadījuma lielums  $X$  pieņem vērtību intervālā  $(\alpha, \beta)$ , apzīmēsim ar  $P\{\alpha < X < \beta\}$ . Pēc varbūtību saskaitīšanas teorēmas tā skaitliski vienāda ar to taisnstūru laukumu summu, kuri konstruēti uz nogriežņa  $\alpha\beta$ .

Lielam  $n$  taisnstūru laukumu summa praktiski neatšķiras no līkņainu trapeces laukuma, kuru ierobežo varbūtību sadalījuma līkne, vertikālas taisnes, kuras novilkas punktos  $\alpha$  un  $\beta$ , un nogrieznis  $\alpha\beta$ .

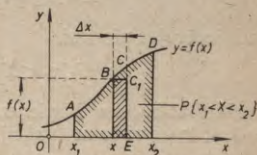
248. §. Nepārtraukts gadījuma lielums, tā varbūtību sadalījums, vidējā vērtība un dispersija. Atšķirībā no diskrētā gadījuma

lieluma *nepārtraukts gadījuma lielums*\* var pieņemt jebkuru vērtību kādā intervālā, un tā iespējamo vērtību skaits ir neierobežoti liels. Apskatīsim dažus nepārtraukta gadījuma lieluma piemērus.

1. piemērs. Ja artilērists izšauj no viena ieroča uz vienu mērķi nemainīgos apstākļos, tad izrādās, ka šāviņa lidojuma tālums dažādos šāvienos ir dažāds. Šāviņa lidojuma tālums ir nepārtraukts gadījuma lielums.

2. piemērs. Konkrēta priekšmeta lieluma (piemēram, svara) katra atsevišķa mērījuma rezultāts ir nepārtraukts gadījuma lielums, kurš var pieņemt jebkuru vērtību priekšmeta īstā lieluma tuvumā.

Var pierādīt, ka *nepārtrauktam gadījuma lielumam katras iespējamās vērtības varbūtība ir 0\*\**, tāpēc jāūtīnām par katras atsevišķas vērtības varbūtību nav nozīmes. Būtiski svarīgi aprēķināt varbūtību, ka nepārtraukts gadījuma lielums  $X$  pieņem vērtību kādā intervālā  $(x_1, x_2)$  (211. zīm.). Šo vērtību apzīmēsim ar  $P\{x_1 < X < x_2\}$ .



211. zīm.

Piezīme. Tā kā katras atsevišķas vērtības varbūtība ir 0, tad  $P\{x_1 < X < x_2\} = P\{x_1 \leq X \leq x_2\} = P\{x_1 < X \leq x_2\} = P\{x_1 \leq X < x_2\}$ . Arī diskrētām gadījuma lielumam šīs varbūtības aptuveni vienādas, ja vien iespējamo vērtību skaits ir pietiekami liels, t. i., katras iespējamās vērtības varbūtība ir pietiekami maza.

Likumu, ar kura palīdzību var noteikt varbūtību, ka nepārtraukts gadījuma lielums  $X$  pieņem vērtību intervālā  $(x_1, x_2)$ , sauc par šī lieluma varbūtību sadalījumu.

Nepārtrauktam gadījuma lielumam  $X$  varbūtību sadalījumu var dot ar sadalījuma funkciju  $F(x)$ , kura izsaka varbūtību, ka  $X$  pieņem vērtību, mazāku par  $x$ . Šo varbūtību apzīmējot ar  $P\{X < x\}$ , var rakstīt

$$F(x) = P\{X < x\}.$$

Par nepārtrauktu gadījuma lielumu sauc mainīgu lielumu  $X$ , kura vērtības atkarīgas no gadījuma un kuram eksistē nepārtraukta varbūtību sadalījuma funkcija.

Apzīmēsim ar  $A$  notikumu, ka  $X$  pieņem vērtību, mazāku par  $x_2$ , ar  $B$  notikumu, ka  $X$  pieņem vērtību, mazāku par  $x_1$ , un ar  $C$  notikumu, ka  $X$  pieņem vērtību, mazāku par  $x_2$ , bet ne mazāku par  $x_1$ . Tad notikumi  $B$  un  $C$  ir nesavienojami, pie tam notikums

\* Nepārtraukta gadījuma lieluma definīciju apskatīsim vēlāk pēc dažu palīgžēdzienu precizēšanas.

\*\* Ja notikuma varbūtība ir 0, nevar apgalvot, ka notikums ir neiespējams. Tā, piemēram, katrā izmēģinājumā nepārtraukts gadījuma lielums pieņem vienu iespējamo vērtību, t. i., iestājas notikums, kura varbūtība ir 0.



$A$  iestāsies tad, ja iestāsies vai nu notikums  $B$ , vai  $C$ . Pēc varbūtību saskaitīšanas teorēmas

$$P(B) + P(C) = P(A)$$

jeb

$$P\{X < x_1\} + P\{x_1 \leq X < x_2\} = P\{X < x_2\},$$

un, tā kā

$$P\{X < x_1\} = F(x_1), \quad P\{X < x_2\} = F(x_2),$$

tad, ievērojot piezīmi,

$$P\{x_1 < X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1).$$

Varbūtība, ka  $X$  pieņem vērtību elementārā intervālā  $(x, x + \Delta x)$ , ir vienāda ar funkcijas  $F(x)$  pieaugumu, t. i.,

$$P\{x < X < x + \Delta x\} = F(x + \Delta x) - F(x).$$

Pieņemot, ka  $F(x)$  ir diferencējama visiem  $x$ , atradīsim  $F(x)$  atvasinājumu.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P\{x < X < x + \Delta x\}}{\Delta x} = F'(x).$$

Apzīmēsim  $F'(x) = f(x)$ , un, tā kā funkcijas pieaugums ir aptuveni vienāds ar tās diferenciāli, tad

$$P\{x < X < x + \Delta x\} \approx f(x) \cdot \Delta x. \quad (28.19)$$

Reizinājumu  $f(x) \cdot \Delta x$  sauc par *varbūtības diferenciāli*, bet funkciju  $f(x)$  mēdz saukt par *diferenciālo sadalījuma funkciju*.\*

Tāpat kā, zinot laukuma vai tilpuma diferenciāli, ar integrēšanas palīdzību atrod pašu laukumu vai attiecīgi tilpumu, zinot *varbūtības diferenciāli, ar integrēšanas palīdzību var atrast varbūtību, ka gadījuma lielums  $X$  pieņem vērtību intervālā  $(x_1, x_2)$ .*

$$P\{x_1 < X < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = F(x_2) - F(x_1). \quad (28.19')$$

Šī formula rāda, ka, lai dotu nepārtrauktu gadījuma lieluma varbūtību sadalījumu, pietiek dot funkciju  $f(x)$ .

Tā kā noteiktais integrālis geometriski interpretējams kā laukums, tad varbūtība, ka  $X$  pieņem vērtību intervālā  $(x_1, x_2)$ , ir skaitliski vienāda ar liklīniju trapeces  $x_1ADx_2$  laukumu, kuru ierobežo funkcijas  $y=f(x)$  grafika — varbūtību sadalījuma līkne, taisnes  $x=x_1$ ,  $x=x_2$  un  $Ox$  ass (211. zīm.). Līdzīgi varbūtību  $P\{x < X < x + \Delta x\}$  attēlo liklīniju trapeces  $xBCEx$  laukums, bet tās aptuveno vērtību  $f(x) \cdot \Delta x$  izsaka taisnstūra  $xBC_1E$  laukums.

\*  $f(x)$  sauc arī par varbūtības blīvumu jeb blīvuma funkciju punktā  $x$ .



Lai atrastu sakarības nepārtraukta gadījuma lieluma  $X$  vidējās vērtības  $\mu$  un dispersijas  $\sigma^2$  aprēķināšanai, ievērosim, ka *visos aprēķinos ar nepārtrauktiem gadījuma lielumiem varbūtību diferenciālim  $f(x)dx$  ir tā pati loma, kas varbūtībai  $p_i$  aprēķinos ar diskrētiem gadījuma lielumiem.* Tāpēc formulās (28.12') un (28.13') apmainīsim  $p_i$  ar  $f(x)dx$ , bet summas — ar attiecīgajiem integrāļiem. Ja  $X$  iespējamās vērtības atrodas intervālā  $(\alpha, \beta)$ , tad

$$\mu = \int_{\alpha}^{\beta} xf(x) dx \quad (28.20)$$

un

$$\sigma^2 = \int_{\alpha}^{\beta} (x - \mu)^2 f(x) dx, \quad (28.21)$$

kur  $x - \mu$  ir novirze no vidējās vērtības.

Ja  $X$  iespējamās vērtības atrodas intervālā  $(-\infty, \infty)$ , tad

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx \quad (28.22)$$

un

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx. \quad (28.23)$$

**249. §. Teorēmas par vidējo vērtību un dispersiju.** *Gadījuma lielumus  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sauc par savstarpēji neatkarīgiem, ja apstāklis, ka kāds no šiem lielumiem pieņēmis noteiktu vērtību, neietekmē citu lielumu varbūtību sadalījumus.*

Bez pierādījuma atzīmēsim dažas svarīgas teorēmas par gadījuma lieluma vidējo vērtību un dispersiju.

1. teorēma. *Ja  $c$  ir patvaļīga konstante, tad*

$$\mu(cX) = c\mu(X) \quad (28.24)$$

un

$$\sigma^2(cX) = c^2\sigma^2(X). \quad (28.25)$$

2. teorēma. *Divu gadījuma lielumu  $X_1$  un  $X_2$  summas vidējā vērtība vienāda ar to vidējo vērtību summu.*

$$\mu(X_1 + X_2) = \mu(X_1) + \mu(X_2). \quad (28.26)$$

3. teorēma. *Ja  $X_1$  un  $X_2$  ir neatkarīgi gadījuma lielumi, tad to algebriskās summas dispersija vienāda ar attiecīgo dispersiju summu.*

$$\sigma^2(X_1 \pm X_2) = \sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2). \quad (28.27)$$

Abas pēdējās teorēmas ir vispārināmas jebkuram galīgam gadījuma lielumu skaitam.

1. piemērs. Izdarot  $n$  neatkarīgus izmēģinājumus, notikuma biežums ir diskrets gadījuma lielums  $X$ , kurš var pieņemt vērtības  $0, 1, 2, \dots, m, \dots, n$ . Attiecīgi notikuma relatīvais biežums ir diskrets gadījuma lielums  $\frac{X}{n}$ , kurš var pieņemt vērtības  $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{m}{n}, \dots, 1$ . Varbūtība, ka  $n$  izmēģinājumos notikums iestāsies  $m$  reizes, vienāda ar varbūtību, ka notikuma relatīvais biežums būs  $\frac{m}{n}$ . Tas nozīmē, ka lielumu  $X$  un  $\frac{X}{n}$  vērtību varbūtības atrod pēc vienas un tās pašas Bernulli formulas. Tāpēc teiksim, ka *relatīvajam biežumam pastāv varbūtību binomiālā sadalījuma likums*.

Pēc formulām (28.15) un (28.16) lieluma  $X$  vidējā vērtība ir  $np$  un dispersija ir  $npq$ , kur  $p$  ir notikuma varbūtība.

Saskaņā ar 1. teorēmu relatīvajam biežumam vidējā vērtība ir

$$\mu\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n}\mu(X) = \frac{1}{n} \cdot np$$

jeb

$$\mu\left(\frac{X}{n}\right) = p, \quad (28.28)$$

bet dispersija

$$\sigma^2\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sigma^2(X) = \frac{1}{n^2}npq$$

jeb

$$\sigma^2\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{pq}{n}; \quad (28.29)$$

Relatīvā biežuma standartnovirze ir

$$\sigma\left(\frac{X}{n}\right) = \sqrt{\frac{pq}{n}}; \quad (28.30)$$

2. piemērs. Pieņemsim, ka nemainīgos apstākļos kādam lielumam izdarīti  $n$  mērījumi. Ir vesela rinda apstākļu (instrumenta stāvoklis, novērotāja novietojums, gaisa sastāvs u. c.), kuru ietekmē dažādi mērījumi dod dažādus rezultātus un rodas t. s. *gadījuma kļūdas*. Mērījumu rezultātus apzīmēsim ar  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Katra mērījuma rezultāts ir nepārtraukts gadījuma lielums, kurš visās iespējamās  $n$  mērījumu sērijās var pieņemt dažādas skaitliskās vērtības priekšmeta istā lieluma tuvumā.

Visiem minētajiem lielumiem  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ir viena un tā pati vidējā vērtība — priekšmeta īstais lielums, kuru apzīmēsim ar  $\mu$ . Tā kā visi mērījumi notiek nemainīgos apstākļos, tad mērījuma rezultātiem var pieņemt vienu un to pašu standartnovirzi  $\sigma$ .

Gadījuma lielumus  $X_1, X_2, \dots, X_n$  varam uzskatīt par savstarpēji neatkarīgiem.

$n$  mērījumu rezultātu vidējais aritmētiskais  $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$  arī ir gadījuma lielums. Tā vidējā vērtība pēc 1. un 2. teorēmas ir

$$\begin{aligned}\mu(\bar{X}) &= \mu\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) = \\ &= \frac{1}{n}[\mu(X_1) + \mu(X_2) + \dots + \mu(X_n)] = \frac{1}{n} \cdot n\mu\end{aligned}$$

jeb

$$\mu(\bar{X}) = \mu. \quad (28.31)$$

Gadījuma lieluma  $X$  dispersija saskaņā ar 1. un 3. teorēmu ir

$$\begin{aligned}\sigma^2(\bar{X}) &= \sigma^2\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) = \\ &= \frac{1}{n^2} \sigma^2(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2\end{aligned}$$

jeb

$$\sigma^2(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}. \quad (28.32)$$

Attiecīgi standartnovirze ir

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (28.33)$$

**Secinājums.** Ja ir  $n$  savstarpēji neatkarīgi gadījuma lielumi ar vienu un to pašu vidējo vērtību un vienu un to pašu standartnovirzi, tad to vidējam aritmētiskajam ir tāda pati vidējā vērtība kā katram no dotajiem gadījuma lielumiem, bet  $\sqrt{n}$  reizes mazāka standartnovirze.

Tātad daudzu savstarpēji neatkarīgu gadījuma lielumu vidējais aritmētiskais ir ar mazāku izkliedi nekā katrs no dotajiem lielumiem atsevišķi. Tas nozīmē, ka vairāku mērījumu vidējais aritmētiskais ir daudz tuvāk vidējai vērtībai (mērijamā lieluma īstajai vērtībai) nekā katrs atsevišķs mērījums.

**250. §. Varbūtību normālais sadalījums.** Viens no svarīgākajiem nepārtrauktu gadījuma lielumu varbūtību sadalījumu veidiem ir varbūtību normālais sadalījums.

Ja gadījuma lieluma varbūtību sadalījums dots ar funkciju

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (28.34)$$



tad saka, ka gadījuma lielumam ir varbūtību normālais sadalījums.  $\sigma$  ir attiecīgā gadījuma lieluma standartnovirze,  $\mu$  — tā vidējā vērtība.

Lai atrastu varbūtību normālā sadalījuma likni\*, izpētīsim funkciju  $f(x)$  un konstruēsim tās grafiku.

Funkcijai ir šādas īpašības:

1) funkcijas grafika ir simetriska pret taisni, kura paralēla  $Oy$  asij un atrodas attālumā  $\mu$  no šīs ass (212. zīm.), jo abscisām  $\mu - \Delta x$  un  $\mu + \Delta x$  atbilst vienādas ordinātes  $y$ ;

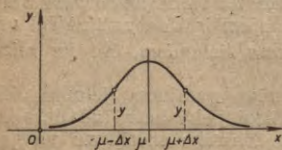
2) ar atvasināšanu var noskaidrot, ka funkcijai vienīgais maksimums ir punktā  $x = \mu$ , pie tam funkcijas maksimālā vērtība ir

$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \approx \frac{0,4}{\sigma}$ . Minimuma funkcijai nav;

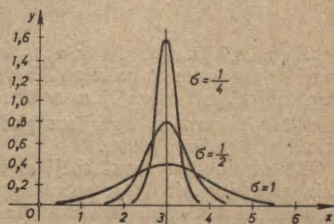
3) funkcija ir pozitīva visiem  $x$  un tiecas uz nulli, kad  $x \rightarrow \pm\infty$ , tādēļ funkcijas grafika asimptotiski tuvojas  $Ox$  asij;

4) funkcijas grafikas, kuras atbilst dažādām  $\sigma$  vērtībām, redzamas 213. zīmējumā. (Šeit ņemts  $\mu=3$ , tomēr skaitļa  $\mu$  izvēle līknes veidu neietekmē.) Kā redzams, jo lielāka standartnovirze  $\sigma$ , jo lēzenāka līkne — un otrādi — jo mazāka standartnovirze, jo līkne stāvāka.

Varbūtību normālā sadalījuma likums vai arī aptuveni normālais sadalījums pastāv daudziem gadījuma lielumiem. Tā, piemēram, cilvēku auguma garumam ir varbūtību normālais sadalījums. Tas nozīmē, ka bieži sastopami vidēja auguma cilvēki, turpretim ļoti maza un ļoti liela auguma cilvēki sastopami daudz retāk; tāpat vienādas novirzes no auguma vidējā garuma novērojamas vienādi bieži.



212. zīm.



213. zīm.

Normālais sadalījums spēkā arī dzīvnieku dažādām fiziskām īpašībām, augu svaram, garumam, dažādu lauksaimniecības kultūru ražām, dažādu materiālu mehāniskajām īpašībām utt.

\* Šo likni mēdz saukt arī par Gausa varbūtību likni jeb vienkārši par Gausa likni.

Minētos faktus pamato *Ļapunova teorēma*, kuras sekas ir šādas:

*Ja gadījuma lielums  $X$  uzskatāms par ļoti liela skaita savstarpēji neatkarīgu gadījuma lielumu  $X_1, X_2, \dots, X_n$  summu, pie tam katra atsevišķa lieluma ietekme uz visu summu ir ļoti maza, tad gadījuma lielumam  $X$  ir varbūtību sadalījums, kas aptuveni vienāds ar normālo.*

Tātad, ja vien ir pamats pētāmo lielumu uzskatīt par ļoti daudz neatkarīgu gadījuma lielumu summu, kura praktiski nav atkarīga no katra atsevišķā saskaitāmā, tad var apgalvot, ka pētāmajam lielumam ir varbūtību normālais sadalījums. Tā, piemēram, konkrēta auga garums ir atkarīgs no ļoti daudziem gadījuma apstākļiem. Katrs gadījuma apstāklis uz auga garumu atstāj ļoti niecīgu ietekmi, tomēr visi kopumā tie var ievērojami ietekmēt pētāmo lielumu — auga garumu.

Ievērojot teikto, ir skaidrs, ka arī *mērījumu gadījuma kļūdām pastāv varbūtību normālais sadalījums*, jo tās rodas ļoti daudzu sīku gadījuma faktoru iedarbības rezultātā (sk. 249. § 2. piem.). Arī paši mērījumi ar gadījuma kļūdām seko varbūtību normālā sadalījuma likumam.

Piezīme. Jāatšķir mērījuma gadījuma kļūda no sistematiskās kļūdas. Pēdējo rada faktors, kurš darbojas pastāvīgi un parasti stipri iespaido mērījuma rezultātu. Tā, piemēram, svēršana ar kļūdainiem svariem rada sistematisku kļūdu.

**251. §. Varbūtību binomiālā sadalījuma asimptotiskā formula (Laplasa lokālā teorēma).** *Varbūtību normālais sadalījums ir binomiālā sadalījuma robežgadījums, kad neatkarīgo izmēģinājumu skaits ir neierobežoti liels, t. i., kad  $n \rightarrow \infty$ . Ja  $p = q = \frac{1}{2}$ , tad binomiālā sadalījuma grafikas (poligons, histogramma) jau nelielām  $n$  vērtībām labi atbilst Gausa liknei, t. i., ar formulu (28.34) definētās funkcijas grafikai. Pie šāda nosacījuma no sadalījuma tabulas (sk. 245. § tabulu 28.7) galīgi vienādi attālināto gadījuma lieluma vērtību varbūtības ir vienādas*

$$C_n^m p^m q^{n-m} = C_n^{n-m} p^{n-m} q^m = C_n^m \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

un binomiālā sadalījuma grafikas ir simetriskas figūras (sk. 214. zīm. a un b).

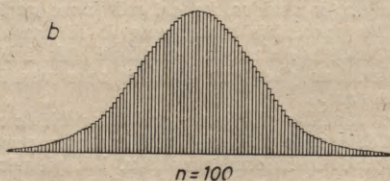
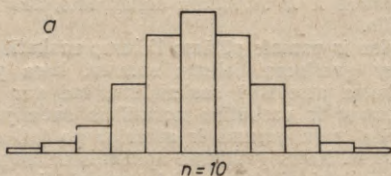
Varbūtību, ka  $n$  neatkarīgos izmēģinājumos notikums iestāsies  $m$  reizes, ir grūti aprēķināt pēc Bernulli formulas, ja  $n$  liels. Tāpēc  $P_{m,n}$  aprēķināšanai lieto *asimptotisko formulu*

$$P_{m,n} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(m-np)^2}{2npq}}, \quad (28.35)$$

kuras pamatā ir minētā sakarība starp binomiālo un normālo sadalījumiem, kad  $n \rightarrow \infty$ . Šī formula dod jo labāku tuvinājumu, jo



lielāks  $n$  un jo mazāk  $p$  atšķiras no  $q$ . Formulas labā pusē izsaka tādu  $m$  funkciju, kuras grafika simetriska pret taisni, kas paralēla ordinātu asij un novilkta  $np$  vienību attālumā no tās. Ja  $p$  un  $q$  maz atšķiras no viena vai nulles, tad attiecīgais poligons



214. zīm.

vai histogramma ir stipri asimetriskas figūras un formulas lietošana arī lielām  $n$  vērtībām rada ievērojamu kļūdu. Formulas lietošanu atvieglo I tabula (pielikumā), kura sastādīta lielumam

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}},$$

kur

$$t = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

Formulu (28.35) var pārrakstīt šādi:

$$P_{m,n} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} f(t). \quad (28.35')$$

Piezīme. Risinot piemērus, jāievēro, ka  $f(t)$  ir pāra funkcija, t. i.,  $f(-t) = f(t)$ .

1. piemērs. Aprēķināsim 243. § 1. piemērā varbūtību, ka no 10 sēklām uzdīgs 8, t. i.,  $P_{8,10}$  ar asimptotiskās formulas palīdzību.



Pēc dotā  $n=10$ ,  $m=8$ ,  $p=0,6$ ,  $q=0,4$ .

Atradam  $m-np=8-6=2$ ;  $\sqrt{npq}=\sqrt{2,4}\approx 1,549$ ;  $t=\frac{2}{1,549}\approx 1,29$ .

Tabulā  $t$  vērtībai 1,29 atbilst  $f(t)=0,1736$ .

$$P_{8,10}=\frac{0,1736}{1,549}\approx 0,112.$$

Šī varbūtības precīzāka vērtība  $P_{8,10}\approx 0,121$  aprēķināta 243. paragrāfā. Relatīvā kļūda ir

$$\frac{|0,121-0,112|}{0,121}\cdot 100\%\approx 7,4\%.$$

2. piemērs. Aprēķināsim varbūtību, ka, 100 reizes metot monētu, 40 reizes uzmetīs ģerboni.

$$p=q=\frac{1}{2}; n=100; m=40.$$

Pēc Bernulli formulas (28.11')

$$P_{40,100}=\frac{100!}{40!60!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{40}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{60}\approx 0,01084.$$

Pēc asimptotiskās formulas (28.35')

$$P_{40,100}=\frac{1}{5}\cdot 0,0540=0,01080.$$

Relatīvā kļūda ir

$$\frac{|0,01084-0,01080|}{0,01080}\cdot 100\%\approx 0,4\%.$$

Te relatīvā kļūda ir ievērojami mazāka nekā 1. piemērā, kas izskaidrojams ar to, ka  $n$  lielāks un  $p=q=\frac{1}{2}$ .

**252. §. Puasona sadalījums.** Iepriekšējā paragrāfā redzējām, ka normālais sadalījums ir labs binomiālā sadalījuma tuvinājums, ja  $p\approx q$ . Ja  $p$  vērtība ir ļoti maza un  $n$  vērtība ļoti liela, labu tuvinājumu iegūst ar citu formulu, kura definē t. s. *Puasona sadalījumu*. Šī formula ir

$$P_{m,n}\approx \frac{\mu^m}{m!}e^{-\mu}. \quad (28.36)$$

Te  $\mu=np$ . Ar šo formulu dotā funkcija ir tabulēta, un konkrētiem  $m$  un  $\mu$  tās vērtības atrod tieši speciālā tabulā. Atradisim  $P_{15,500}$ , ja  $p=0,02$ , pielietojot formulu (28.36) (sk. 243. §). Dabūjam

$$P_{15,500}\approx \frac{10^{15}}{15!}e^{-10}\approx 0,035.$$

Puasona sadalījumu sauc arī par *reto parādību likumu*, jo tā pamatā ir nosacījums, ka vienā-atsevišķā izmēģinājumā notikuma varbūtība  $p$  ir ļoti maza.

Puasona sadalījumam ir liela nozīme ne tikai kā binomiālā sadalījuma robežgadījumam, bet arī tāpēc, ka Puasona sadalījums ir atkarīgs tikai no viena parametra  $\mu$ . Pielietojot formulu (28.36), nav jāzina atsevišķi ne  $n$ , ne  $p$ , taču svarīgi, lai to reizinājums resp. vidējā vērtība  $\mu$  būtu konstanta visās izmēģinājumu sērijās.

Piemērs. Pieņemsim, ka nolūkā pārbaudīt sēklas materiāla tīrību no timotiņa sēklu kopuma paņemti 30 iesvari un katrā no tiem noteikts nezāļu sēklu skaits. Iesvaru sadalījums atkarībā no atrasto nezāļu sēklu skaita dots tabulas 28.10 pirmajās divās ailēs. Šajā gadījumā varam pieņemt, ka ir izpildīti Puasona sadalījuma priekšnosacījumi: katrā izmēģinājumu sērijā — iesvarā sēklu skaits ir ļoti liels, nezāļu sēklu koncentrācija  $p$  ļoti maza un vidēji uz katru iesvaru ir viens un tas pats nezāļu sēklu skaits  $\mu$ .

Tabula 28.10

| $m$ | Iesvaru skaits | $P_m$  | Teorētiskais iesvaru skaits |
|-----|----------------|--------|-----------------------------|
| 0   | 4              | 0,1496 | 4,49                        |
| 1   | 9              | 0,2842 | 8,53                        |
| 2   | 8              | 0,2700 | 8,10                        |
| 3   | 5              | 0,1710 | 5,13                        |
| 4   | 3              | 0,0812 | 2,44                        |
| 5   | 1              | 0,0309 | 0,93                        |

Pamatojoties uz šo pieņēmumu, prognozētais iesvaru procents jāaprēķina pēc formulas (28.36). Vispirms aprēķina  $\mu$  kā svērtu vidējo aritmētisko variāciju rindai; dabūsim

$$\mu \approx \bar{x} = \frac{0 \cdot 4 + 1 \cdot 9 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 1}{30} \approx 1,9.$$

Teorētiski sagaidāmo iesvaru skaitu atrod, reizinot  $P_m$  ar 30. Tā, piemēram,  $4,49 = 0,1496 \cdot 30$ . Kā redzams, praktiski iegūtais iesvaru skaits labi atbilst teorētiski sagaidāmajam.

Der iegaumēt, ka Puasona sadalījumam vidējā vērtība vienāda ar dispersiju, t. i.,

$$\mu = \sigma^2.$$

Mūsu piemērā  $s^2$  atrod kā dispersiju variāciju rindai (sk. 228. §). Iegūst  $s^2 = 1,8 \approx 1,9\bar{x}$ .

**253. §. Varbūtību integrālis.** Ja gadījuma lielumam  $X$  ir varbūtību normālais sadalījums, tad, ievietojot formulā (28.19')  $f(x)$  vietā ar formulu (28.34) definēto funkciju, iegūstam

$$P\{x_1 < X < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx. \quad (28.37)$$

Integrāļa aprēķināšanai lieto substitūciju  $\frac{x-\mu}{\sigma} = t$ ,  $\frac{1}{\sigma} dx = dt$ , pie tam pastāv šāda integrācijas robežu atbilstība:

|     |                                  |                                  |
|-----|----------------------------------|----------------------------------|
| $x$ | $x_1$                            | $x_2$                            |
| $t$ | $t_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma}$ | $t_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma}$ |

Iegūstam

$$P\{x_1 < X < x_2\} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (28.38)$$

Aprēķinot noteikto integrāli ar Ņūtona—Leibnīca formulu, vispirms atrod atbilstošo nenoteikto integrāli. Integrāli

$$\int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

nevar izteikt ar elementārām funkcijām, tāpēc integrāļa (28.38) aprēķināšanā lieto gatavu tabulu. Vispirms izdarīsim dažus pārveidojumus saskaņā ar noteiktā integrāļa īpašībām.

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t_1} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) = \frac{1}{2} [\Phi(t_2) - \Phi(t_1)], \end{aligned}$$

kur

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (28.39)$$

Ar formulu (28.39) definēto funkciju  $\Phi(t)$  sauc par varbūtību integrāli. Praksē varbūtību integrāļa vērtības atrod ar II tabulas palīdzību.



Pēc formulas (28.38) un tai sekojošiem pārveidojumiem

$$P\{x_1 < X < x_2\} = \frac{1}{2} [\Phi(t_2) - \Phi(t_1)]. \quad (28.40)$$

Ievērojot integrācijas robežu atbilstību, formulu (28.40) var pārrakstīt

$$P\{x_1 < X < x_2\} = \frac{1}{2} \left[ \Phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right) \right]. \quad (28.41)$$

Varbūtība, ka  $X$  pieņem vērtību intervālā  $(\mu - t_1\sigma, \mu + t_1\sigma)$ , ir

$$P\{\mu - t_1\sigma < X < \mu + t_1\sigma\} = \frac{1}{2} \left[ \Phi\left(\frac{\mu + t_1\sigma - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - t_1\sigma - \mu}{\sigma}\right) \right] = \frac{1}{2} [\Phi(t_1) - \Phi(-t_1)].$$

Ievērosim, ka  $\Phi(t)$  ir nepāra funkcija, t. i.,  $\Phi(-t) = -\Phi(t)$ , tāpēc

$$P\{\mu - t_1\sigma < X < \mu + t_1\sigma\} = \Phi(t_1). \quad (28.42)$$

Lietojot II tabulu, atradīsim varbūtības, ka gadījuma lieluma  $X$  vērtība atrodas tā vidējās vērtības  $\sigma$ ,  $2\sigma$  un attiecīgi  $3\sigma$  intervālos.

$$P\{\mu - \sigma < X < \mu + \sigma\} = \Phi(1) \approx 0,683;$$

$$P\{\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma\} = \Phi(2) \approx 0,955;$$

$$P\{\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma\} = \Phi(3) \approx 0,997.$$

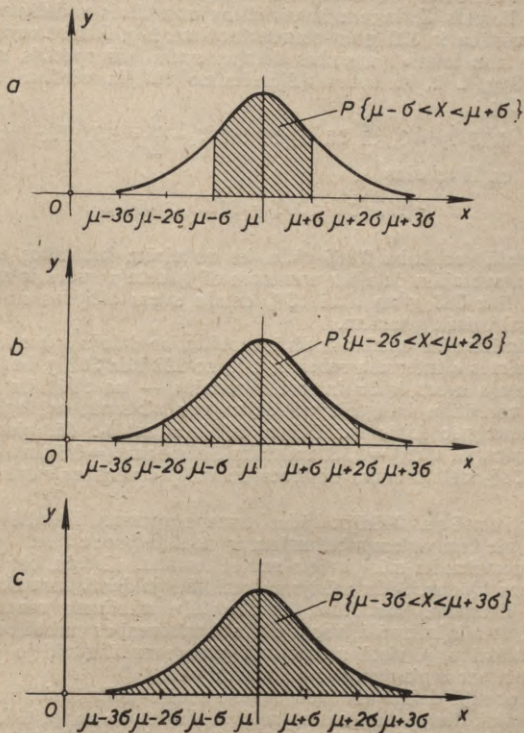
Šīs sakarības rāda, ka tādas gadījuma lieluma vērtības, kuras atšķiras no vidējās vērtības mazāk kā par  $\sigma$ , attiecīgi  $2\sigma$  un  $3\sigma$ , pie varbūtību normālā sadalījuma sastopamas aptuveni 683, 955 vai 997 gadījumos no 1000. Tas uzskatāmi redzams 215. a, b, c zīmējumā, kur iesvitrotie laukumi attēlo varbūtības  $P\{\mu - \sigma < X < \mu + \sigma\}$ ,  $P\{\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma\}$  un  $P\{\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma\}$ .

Minētās likumsakarības dažreiz sauc attiecīgi par  $\sigma$ ,  $2\sigma$ ,  $3\sigma$  *interoāla likumiem* un formulē tā:

*Ja gadījuma lielumam ir varbūtību normālais sadalījums, tad standartnovirzes  $\sigma$  robežās uz vienu un otru pusi no vidējās vērtības ir aptuveni 68,3% visu gadījuma lieluma vērtību; divkārtotās standartnovirzes, t. i.,  $2\sigma$  robežās ir 95,5%; bet triskārtotās standartnovirzes, t. i.,  $3\sigma$  robežās ir 99,7% visu gadījuma lieluma vērtību.*

Dažreiz praksē varbūtību 99,7% uzskata par pietiekami lielu, lai secinātu, ka atbilstošais notikums ir *praktiski nenovēršams* (pieņem, ka, izdarot vienu izmēģinājumu, tam katrā ziņā jānotiek), tāpēc  $3\sigma$  intervāla likumu mēdz formulēt arī šādi.

Gadījuma lielums, kuram ir varbūtību normālais sadalījums, var mainīties neierobežoti, tomēr praktiski tas pieņem tikai tās vērtības, kuras atrodas trīskāršotās standartnovirzes robežās uz vienu vai otru pusi no vidējās vērtības.



215. zīm.

Formula (28.42) izsaka varbūtību, ka  $X$  vērtība atrodas dotā intervāla iekšpusē. Varbūtību, ka  $X$  pieņem vērtību ārpus dotā intervāla, var atrast, ievērojot, ka  $X$  vērtības atrašanās un ne-atrašanās dotajā intervālā ir pretēji notikumi, kuru varbūtību summa ir 1. Tāpēc varbūtība, ka  $X$  vērtība atrodas ārpus vidējās vērtības  $\sigma$  intervāla, ir  $1 - 0,683 = 0,317$ , tāpat varbūtības, ka tā atrodas ārpus vidējās vērtības  $2\sigma$  vai  $3\sigma$  intervāla, ir attiecīgi



vienādas ar  $1 - 0,955 = 0,045$  un  $1 - 0,997 = 0,003$ . Skaitļi 0,317; 0,045 un 0,003 izsaka to neiesvītoto laukumu lielumus, kuri atrodas zem liknēm atbilstoši 215. *a*, *b* un *c* zīmējumā.

Apskatīsim dažus *varbūtību integrāļa pielietojumu piemērus*.

1. piemērs. Uz darbgalda izgatavoto detaļu svars ir gadījuma lielums  $X$ , kuram ir varbūtību normālais sadalījums. Tā vidējā vērtība ir 300 g un standartnovirze 2 g. Atrast varbūtību, ka «uz labu laimi» paņemtas detaļas svars būs robežās no 297 līdz 303 g, t. i., ka svars atšķirsies no vidējās vērtības mazāk kā par 3 g.

Pēc dotā  $t_1\sigma = 3$ , tā kā  $\sigma = 2$ , tad  $t_1 = \frac{3}{2} = 1,5$ . Pēc formulas (28.42) un II tabulas

$$P\{297 < X < 303\} = \Phi(1,5) \approx 0,866.$$

Atrastā varbūtība 0,866 rāda, ka no visām konkrētos apstākļos izgatavotajām detaļām apmēram 87% detaļu svars ir robežās no 297 līdz 303 g un tikai 13% detaļu svars atšķiras no 300 g par 3 vai vairāk gramiem.

Atzīmēsim, ka apmēram divām trešdaļām detaļu svars ir standartnovirzes  $\sigma$  intervāla robežās, t. i., no 298 līdz 302 g, bet 99,7% visu detaļu svars ir  $3\sigma$  intervāla robežās — no 294 līdz 306 g.

Ar varbūtību integrāļa palīdzību var atrisināt arī apgriezto uzdevumu: pēc dotās varbūtības  $\Phi(t_1)$  atrast  $t_1$ . Tā, piemēram, pieņemsim, ka  $\Phi(t_1) = 0,38$ , tad tabulā atrodam  $t_1 = 0,5$  un  $t_1\sigma = 1$  g. Tātad 38% detaļu svara novirzes no vidējās vērtības nepārsniedz 1 g.

2. piemērs. Mērijot kāda ķermeņa garumu, izdarīti 40 mērījumi, pie tam visiem mērījumiem ir vienāda precizitāte.

Pieņemsim, ka mērījumiem nav sistemātisku kļūdu, bet ir tikai gadījuma kļūdas. Šādu mērījumu rezultāti pakļauti normālā sadalījuma likumam. Varbūtību, ka atsevišķa mērījuma rezultāts  $X$  ietilpst dotajā intervālā, var aprēķināt aptuveni ar varbūtību integrāļa palīdzību,  $\mu$  vietā ņemot mērījumu rezultātu vidējo aritmētisko, bet par  $\sigma$  pieņemot to standartnovirzi.

27. nodaļā definējam tādu skaitļu vidējo aritmētisko un standartnovirzi, kurus iegūstam, mērijot katru no  $n$  priekšmetiem vienu reizi, turpretim šajā piemērā viens priekšmets mērīts  $n$  reizes. Mērījumu rezultātā kā vienā, tā otrā gadījumā iegūstam  $n$  skaitļus, kuriem vidējo aritmētisko un standartnovirzi var atrast pēc vienām un tām pašām 27. nodaļā apskatītajām formulām, ar vieniem un tiem pašiem paņēmieniem.

Pieņemsim, ka minēto 40 mērījumu rezultātu vidējais aritmētiskais  $\bar{x} = 65,2$  cm un standartnovirze  $s = 0,3$  cm. Aprēķināt  $P\{65,0 < X < 65,4\}$ .

Pēc dotā  $t_1s = 0,2$ , tātad  $t_1 = \frac{0,2}{0,3} = 0,67$



un

$$P\{65,0 < X < 65,4\} = \Phi(0,67) \approx 0,497.$$

Aprēķinātā varbūtība liecina, ka aptuveni 50% no visiem mērījumu rezultātiem jābūt robežās no 65,0 līdz 65,4 cm.

3. piemērs. Izdarot  $n$  neatkarīgus izmēģinājumus, notikuma  $A$  relatīvais biežums ir diskrets gadījuma lielums ar vidējo

vērtību — notikuma varbūtību  $p$  un standartnovirzi  $\sqrt{\frac{pq}{n}}$ . Relatīvajam biežumam pastāv binomiālā sadalījuma likums, kurš lielām  $n$  un ne pārāk mazām  $p$  vērtībām tuvs normālā sadalījuma likumam. Tāpēc formulu (28.42) var pielietot, lai aprēķinātu notikuma relatīvā biežuma iespējamās novirzes no notikuma varbūtības.

Pieņemsim, ka notikuma varbūtība katrā izmēģinājumā vienāda ar 0,6. Kāda ir varbūtība, ka 150 izmēģinājumos notikuma relatīvais biežums atšķirsies no notikuma varbūtības ne vairāk kā par 7%?

Saskaņā ar doto  $t_1\sigma = 0,07$ , kur  $\sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0,6 \cdot 0,4}{150}} \approx 0,04$ , tātad  $t_1 = \frac{0,07}{0,04} = 1,75$ ;  $\Phi(t_1) = \Phi(1,75) \approx 0,920$ . Meklētā varbūtība aptuveni vienāda ar 0,920.

254. §. Varbūtības  $P\{m_1 \leq X \leq m_2\}$  atrašana ar varbūtību integrāļa palīdzību (Laplasa integrālā teorēma).

Varbūtība, ka diskrets gadījuma lielums  $X$ , kuram ir binomiālais sadalījums, pieņems vērtību intervālā starp  $m_1$  un  $m_2$  saskaņā ar varbūtību saskaitīšanas teorēmu ir šāda:

$$P\{m_1 \leq X \leq m_2\} = P_{m_1, n} + P_{m_1+1, n} + P_{m_1+2, n} + \dots + P_{m_2-1, n} + P_{m_2, n}.$$

Katru atsevišķo varbūtību var atrast ar Bernulli formulu vai ar binomiālā sadalījuma asimptotisko formulu. Taču šāds darbs prasītu daudz laika, tāpēc varbūtību summu aprēķināsim aptuveni ar varbūtību integrāļa palīdzību. Varbūtību integrāļa pielietojumam summas  $P_{m_1, n} + \dots + P_{m_2, n}$  aptuvenai aprēķināšanai ir tāds pats pamats kā asimptotiskās formulas (28.35) pielietojumam katras atsevišķas varbūtības  $P_{m, n}$  atrašanai, proti, binomiālā sadalījuma tiekšanās uz normālo sadalījumu, ja  $n \rightarrow \infty$ .

Tātad

$$P\{m_1 \leq X \leq m_2\} \approx \frac{1}{2}[\Phi(t_2) - \Phi(t_1)], \quad (28.43)$$

kur

$$t_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} \quad \text{un} \quad t_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Piemērs. Automāts štancē detaļas, no kurām vidēji 40% ir pirmās šķiras. Kāda varbūtība, ka no 600 «uz labu laimi»

ņemtām detaļām pirmās šķiras detaļu skaits  $X$  būs robežās no 220 līdz 250?

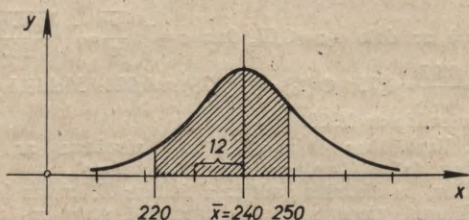
Pēc dotā:  $m_1=220$ ,  $m_2=250$ ,  $n=600$ ,  $p=0,4$

$$t_1 = \frac{220 - 600 \cdot 0,4}{\sqrt{600 \cdot 0,4 \cdot 0,6}} \approx -1,67$$

$$t_2 = \frac{250 - 240}{\sqrt{144}} \approx 0,83$$

$$P\{220 \leq X \leq 250\} \approx \frac{1}{2} [\Phi(0,83) - \Phi(-1,67)] = \\ = \frac{1}{2} (0,5935 + 0,9051) \approx 0,750.$$

Rezultāta statistiskā jēga ir šāda: ja no detaļu kopprodukcijas paņemtu, piemēram, 100 randomizētus paraugus ar 600 detaļām katrā, tad sagaidāms, ka 75 paraugiem pirmās šķiras detaļu skaits būs norādītajās robežās — starp 220 un 250.



216. zīm.

Lai atrisinātu uzdevumus, kuri saistās ar normālo sadalījumu, lietderīgi izmantot zīmējumu, kurā varbūtības uzskatāmi attēlotas kā laukumi. Tā pēdējā piemērā meklētā varbūtība ir skaitliski vienāda ar laukumu zem normālā sadalījuma liknes starp taisnēm  $x=220$  un  $x=250$ . No 216. zīmējuma redzams, ka varbūtību var atrast, ņemot pusi no divu tādu laukumu summas, kuri simetriski pret taisni  $x=\bar{x}=240$ .

### Vingrinājumi

1. Saujot ar šauteni, trāpījumu relatīvais biežums izrādījās vienāds ar 0,85. Atrast trāpījumu skaitu, ja pavisam izdarīti 120 šāvienī.
2. Atrast varbūtību, ka ar spēļu kauliņu uzņemto punktu skaits ir pāra skaitlis.
3. Urnā ir 11 baltas, 6 melnas un 3 zilas lodītes. No tās velk vienu lodīti. Atrast varbūtību, ka izvilktā lodīte ir a) balta, b) melna, c) zila, d) ne zila, e) ne balta.
4. Mantu-naudas loterijā uz katrām 10 000 biļetēm laimē 250 mantu un 50 naudas laimestus. Cik liela ir laimesta varbūtība (naudas vai mantu), ja ir viena loterijas biļete?



5. Kāda varbūtība, ka, metot monētu un spēļu kauliņu, reizē uzmetīs ģerboni un vienu punktu?

6. Urnā ir 3 baltas, 2 melnas un 4 zilas lodītes. No urnas velk lodīti divas reizes, pie tam pirmajā reizē izvilktā lodīte atlikta urnā atpakaļ. Atrast varbūtību, ka a) abās reizēs izvelk baltu lodīti, b) vispirms izvelk baltu, pēc tam melnu lodīti, c) vispirms izvelk zilu, pēc tam baltu lodīti, d) abās reizēs izvelk melnu lodīti.

7. Ir zināms, ka izmēģinājumu laucīnā ir 30% slimu vārpu. Atrast varbūtību, ka, izvēloties «uz labu laimi» 3 vārpas, a) visas izrādīsies veselas, b) visas būs slimas, c) vismaz viena izrādīsies vesela.

8. Televīzijas studijā ir 3 televīzijas kameras. Katrai kamerai varbūtība, ka tā būs ieslēgta dotajā momentā, vienāda ar 0,6. Atrast varbūtību, ka dotajā momentā a) būs ieslēgta vismaz viena kamera, b) būs ieslēgtas vismaz divas kameras.

9. No 6. vingrinājumā minētās urnas velk lodīti divas reizes un pirmajā reizē izvilktu lodīti neliek urnā atpakaļ. Atrast 6. vingrinājumā minētās varbūtības.

10. Reizē met divus spēļu kauliņus. Uz abiem kauliņiem uzņemto punktu skaita summa ir diskrets gadījuma lielums  $X$ , kurš var pieņemt visas veselu skaitļu vērtības no 2 līdz 12. Atrast šī lieluma varbūtību sadalījumu, modu, vidējo vērtību un standartnovirzi.

11. Konkrētam šāvējam noteiktos apstākļos varbūtība trāpīt mērķī ir 0,50. Šāvējs šauj 10 reizes. Atrast varbūtību, ka trāpījumu skaits būs 7, a) ar Bernulli formulu, b) ar varbūtību binomiālā sadalījuma asimptotisko formulu, c) salīdzināt iegūtos rezultātus, aprēķinot relatīvo kļūdu, d) atrast modu un tai atbilstošo varbūtību.

12. Veikalā ir dažādi putekļu sūcēji. Varbūtība, ka pircējs, kurš iegādājies putekļu sūcēju, nopircis «Ventu», vienāda ar 0,8. Atrast varbūtību, ka no pieciem pārdotajiem putekļu sūcējiem četri ir «Venta».

13. Spēļu kauliņu met 120 reizes. Kāds ir visvarbūtīgākais sešu punktu krišanas gadījumu skaits?

14. Laimesta varbūtība ir 0,3. Atrast vidējo vērtību to loterijas biļešu skaitam, kuras laimēs, ja iegādātas 20 biļetes.

15. Dots divu neatkarīgu gadījuma lielumu dispersijas  $\sigma^2(X_1)=5$ ,  $\sigma^2(X_2)=4$ . Atrast šo lielumu summas dispersiju.

16. Gadījuma lieluma dispersija  $\sigma^2(X)=5$ . Atrast dispersiju lielumiem: a)  $-2X$ ; b)  $3X$ .

17. Gadījuma lielumam  $X$  pastāv varbūtību normālā sadalījuma likums. Atrast varbūtību, ka gadījuma lieluma skaitliskā vērtība atrodas tā vidējās vērtības a)  $0,5\sigma$ ; b)  $2,6\sigma$ ; c)  $4\sigma$  intervālos.

18. Kādā putnu fermā vistu olu vidējais diametrs ir 58,0 mm un standartnovirze  $s=2,7$  mm. Pieņemot, ka olas diametram pastāv varbūtību normālais sadalījums, aprēķināt, kādam procentam olu diametrs ir robežās no 55,0 mm līdz 61,0 mm.

19. Detaļu vidējais svars ir 7400 g, pie tam svara novirzes, kuras pārsniedz 50 g, sastopamas vidēji 5 reizes uz katriem 100 izstrādājumiem. Pieņemot, ka detaļas svaram ir varbūtību normālais sadalījums, atrast, kādas svara novirzes uz vienu un otru pusi no vidējā svara var garantēt ar varbūtību 0,5.

20. Šāviņa lidojuma vidējais tālums ir 2400 m. Pieņemot, ka lidojuma tālumam ir varbūtību normālais sadalījums ar standartnovirzi 40 m, atrast, kādam procentam šāviņu būs pārlidojums no 60 līdz 80 m.

21. Sēklu dīgspēja ir 70%. Kāda varbūtība, ka no 1000 sēklām uzdīgs 680 līdz 720?

22. Notikuma varbūtība katrā no 10 000 neatkarīgiem izmēģinājumiem vienāda ar 0,75. Atrast varbūtību, ka notikuma relatīvais biežums atšķirsies no tā varbūtības ne vairāk kā par 0,001.

23. Cik reizu vajag mest monētu, lai ar varbūtību 0,6 varētu sagaidīt, ka ģerboņa krišanas relatīvais biežums atšķirsies no varbūtības  $p=0,5$  ne vairāk kā par 0,01?



## MATEMĀTISKĀ STATISTIKA II

255. §. Normālā sadalījuma liknes konstrukcija variāciju rindai. No varbūtību teorijas viedokļa variējošs lielums ir gadījuma lielums ar noteiktu varbūtību sadalījumu, kuru atspoguļo no attiecīgās ģenerālās kopas sastādīts randomizēts paraugs. Tas nozīmē, ka, sagrupējot parauga datus variāciju rindā, iegūsim empīrisku sadalījumu, kas atbilst kādam teorētiskam modelim — varbūtību sadalījumam. Tā, piemēram, iepriekšējā nodaļā 252. paragrāfā redzējām, ka praktiski iegūtais iesvaru skaita sadalījums labi atbilst Puasona sadalījumam.

Lai salīdzinātu variāciju rindu ar kādu teorētisku sadalījumu, vispirms saskaņā ar izvēlēto teorētiskā sadalījuma formulām jāaprēķina rindas teorētiskie biežumi  $m'_i$ .

Salīdzināsim rindu ar normālo sadalījumu. Šai nolūkā dotajai variāciju rindai ar biežumiem  $m_1, m_2, \dots, m_k$  konstruēsim atbilstošu teorētisku rindu ar biežumiem  $m'_1, m'_2, \dots, m'_k$ . Te teorētiskais biežums  $m'_1$  ir skaitlis, kāds rāda, kādam jābūt klases  $x_1$  biežumam randomizētā paraugā, ja tas ņemts no kopas, kurā spēkā normālā sadalījuma likums.

Saskaņā ar formulām (28.19) un (28.34) varbūtība, ka gadījuma lielums  $X$ , kuram ir varbūtību normālais sadalījums, pieņem vērtību intervālā  $(x, x + \Delta x)$ , ir

$$P\{x < X < x + \Delta x\} \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \Delta x. \quad (29.1)$$

Pieņemsim, ka intervāls  $(x, x + \Delta x)$  ir viena variāciju rindas klase, t. i.,  $\Delta x = c$  un  $X$  var pieņemt vienu noteiktu vērtību šajā intervālā, t. i., klases centrālo skaitli  $x_1$ . Šīs vērtības varbūtību apzīmēsim ar  $P(x_1)$ . Tad

$$P(x_1) \approx P\{x < X < x + \Delta x\}, \quad (29.2)$$

bet, no otras puses, jābūt

$$\frac{m'_1}{n} \approx P(x_1). \quad (29.3)$$

Tā kā ne  $\mu$ , ne  $\sigma$  nav zināmi, tad to vietā lieto no parauga atastos rādītājus  $\bar{x}$  un  $s$ . Ievērojot visas trīs iepriekšējās formulas, var rakstīt

$$\frac{m'_1}{n} \approx \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1 - \bar{x})^2}{2s^2}} \cdot c,$$

no kurienes

$$m'_1 \approx \frac{nc}{s} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1 - \bar{x})^2}{2s^2}}. \quad (29.4)$$

Ar šo formulu var aprēķināt, kādam jābūt skaitļa  $x_1$  biežumam, ja pētāmajam lielumam būtu spēkā normālā sadalījuma likums ar vidējo vērtību  $\bar{x}$  un standartnovirzi  $s$ .

Aprēķinu vienkāršošanai var pielietot I tabulu (pielikumā) funkcijai

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Šajā gadījumā  $t_1 = \frac{x_1 - \bar{x}}{s}$  un formulu var pārrakstīt šādi:

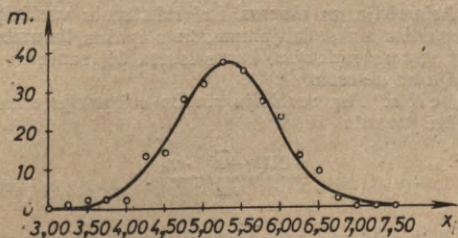
$$m'_1 \approx \frac{nc}{s} \cdot f(t_1) \quad (29.4')$$

Piemērs. Tabulā 29.1 dota variāciju rinda konkrētas labības šķirnes ražām (kg) no 240 izmēģinājumu lauciņiem. Katra lauciņa lielums 25 m<sup>2</sup>. Aprēķināt rindas teorētiskos biežumus saskaņā ar varbūtību normālā sadalījuma likumu, konstruēt novērotos biežumus un normālā sadalījuma likni.

Tabula 29.1

|                |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|----------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Raža           | 3,25 | 3,50 | 3,75 | 4,00 | 4,25 | 4,50 | 4,75 | 5,00 | 5,25 |
| Lauciņu skaits | 1    | 2    | 2    | 2    | 13   | 14   | 28   | 32   | 37   |
| Raža           | 5,50 | 5,75 | 6,00 | 6,25 | 6,50 | 6,75 |      |      |      |
| Lauciņu skaits | 35   | 27   | 23   | 13   | 9    | 2    | 240  |      |      |

Lietojot kodus, var atrast  $\bar{x} = 5,293 \approx 5,29$  un  $s = 0,6475 \approx 0,65$ . Lielumu  $m'_1$  izskaitļošanai nepieciešamie aprēķini sakārtoti tabulā 29.2. Rindas sākumā un beigās pierakstīti papildu skaitļi 3,00;



217. zīm.

7,00; 7,25 un 7,50, kuru biežumi paraugā ir 0, bet teorētiskie biežumi var arī nebūt 0. Dabūjam

$$\frac{cn}{s} = \frac{0,25 \cdot 240}{0,6475} \approx 92,66.$$

217. zīmējumā konstruēta normālā sadalījuma likne, kura atbilst teorētiskajiem biežumiem, turpat ar punktiem parādīti novērotie biežumi. Kā redzams no zīmējuma, šie punkti novietoti ļoti tuvu normālā sadalījuma liknei, tātad novērojumu dati labi atbilst normālajam sadalījumam.

Tabula 29.2

| $x_1$ | $m_1$              | $x_1 - \bar{x}$ | $\frac{x_1 - \bar{x}}{s}$ | $\bar{f}(t_1)$ | $m'_1$                |
|-------|--------------------|-----------------|---------------------------|----------------|-----------------------|
| 3,00  | 0                  | -2,29           | -3,53                     | 0,0008         | 0,1                   |
| 3,25  | 1                  | -2,04           | -3,15                     | 0,0028         | 0,3                   |
| 3,50  | 2                  | -1,79           | -2,76                     | 0,0088         | 0,8                   |
| 3,75  | 2                  | -1,54           | -2,38                     | 0,0235         | 2,2                   |
| 4,00  | 2                  | -1,29           | -1,99                     | 0,0551         | 5,1                   |
| 4,25  | 13                 | -1,04           | -1,61                     | 0,1092         | 10,1                  |
| 4,50  | 14                 | -0,79           | -1,22                     | 0,1895         | 17,6                  |
| 4,75  | 28                 | -0,54           | -0,83                     | 0,2827         | 26,2                  |
| 5,00  | 32                 | -0,29           | -0,45                     | 0,3605         | 33,4                  |
| 5,25  | 37                 | -0,04           | -0,06                     | 0,3982         | 36,9                  |
| 5,50  | 35                 | 0,21            | 0,32                      | 0,3790         | 35,1                  |
| 5,75  | 27                 | 0,46            | 0,71                      | 0,3101         | 28,7                  |
| 6,00  | 23                 | 0,71            | 1,10                      | 0,2179         | 20,2                  |
| 6,25  | 13                 | 0,96            | 1,48                      | 0,1334         | 12,4                  |
| 6,50  | 9                  | 1,21            | 1,87                      | 0,0694         | 6,4                   |
| 6,75  | 2                  | 1,46            | 2,25                      | 0,0317         | 2,9                   |
| 7,00  | 0                  | 1,71            | 2,64                      | 0,0122         | 1,1                   |
| 7,25  | 0                  | 1,96            | 3,03                      | 0,0040         | 0,4                   |
| 7,50  | 0                  | 2,21            | 3,41                      | 0,0012         | 0,1                   |
|       | $\Sigma m_1 = 240$ |                 |                           |                | $\Sigma m'_1 = 240,0$ |

256. §. Asimetrija un ekscess. Lai raksturotu variāciju rindas atbilstību normālajam sadalījumam, lieto īpašus lielumus — *asimetrijas* un *ekscesa rādītājus*, kurus īsuma dēļ sauksim vienkārši par *asimetriju* un *ekscesu*.

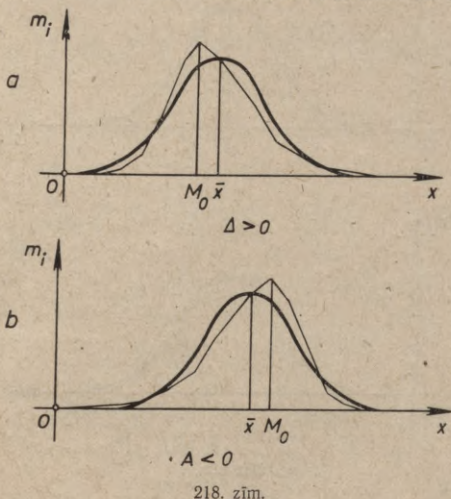
Definīcija. Par variāciju rindas asimetriju sauc lielumu  $A$ , kuru definē formula

$$A = \frac{\Sigma (x_1 - \bar{x})^3 \cdot m_1}{ns^3}, \quad (29.5)$$

Simetriskām rindām  $\Sigma (x_1 - \bar{x})^3 m_1 = 0$ , jo simetriskās rindās pēc absolūtās vērtības vienādas pozitīvās un negatīvās novirzes sa-



stopamas vienādi bieži un šo noviržu kubu summa ir 0. Tātad simetriskām rindām rādītājs  $A$  ir 0. Ja variāciju rinda nav simetriska, tad skaitļiem, kuri vienādi novirzīti no vidējā aritmētiskā uz abām pusēm no tā, atbilst dažādi biežumi un  $\Sigma (x_i - \bar{x})^3 m_i$



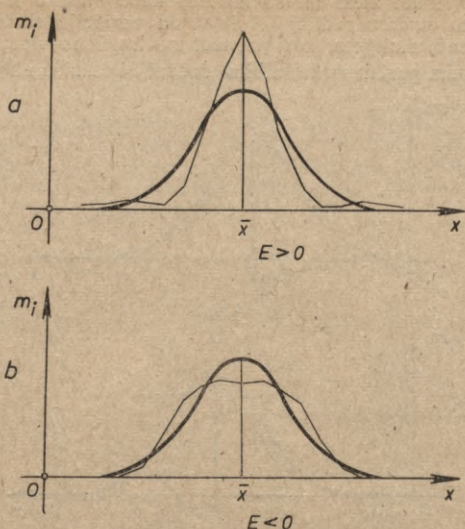
ir vai nu pozitīva, vai negatīva, pie tam šīs summas atšķirība no nulles ir jo lielāka, jo izteiktāka rindas asimetrija. Lai asimetriju raksturotu nenosaukts skaitlis, ar kura palīdzību varētu salīdzināt dažāda nosaukuma rindas, noviržu kubu summu daļa ar standartnovirzes kubu.

Ja moda ir mazāka par vidējo aritmētisko, tad  $A > 0$  un asimetriju sauc par pozitīvu. Ja moda ir lielāka par vidējo aritmētisko, tad  $A < 0$  un asimetriju sauc par negatīvu (sk. 218. zīm. a, b). Salīdzināšanai konstruētas arī normālā sadalījuma liknes.

Ja abus 219. zīmējumā a un b attēlotos poligonus apvilktu ar vienlaidu gludu līniju, tad iegūtu divas līknes ar citādu virsotnes formu nekā normālā sadalījuma līknei. Pirmajai līknei būtu stāvāka un smailāka, bet otrajai — plakanāka virsotne nekā normālā sadalījuma līknei. Lai skaitliski raksturotu minētās atšķirības, lieto *ekscesu*.

Par variāciju rindas ekscesu sauc lielumu  $E$ , kuru definē formula

$$E = \frac{\Sigma (x_i - \bar{x})^4 \cdot m_i}{ns^4} - 3. \quad (29.6)$$



219. zīm.

Lielums  $E$  konstruēts tā, lai normālā sadalījuma gadījumā tas būtu vienāds ar 0. Ja skaitļu koncentrācija ap vidējo aritmētisko ir lielāka, nekā tai vajadzētu būt pēc normālā sadalījuma, t. i., ja atbilstošā likne centra apvidū ir stāvāka vai smailāka, tad  $E > 0$ . Ja skaitļu sadalījums ir vienmērīgāks, t. i., ja atbilstošai liknei ir lēzenāka virsotne, tad  $E < 0$ .

Ievērojot teikto, secinām, ka pietiekami mazas asimetrijas un ekscesa gadījumā varam uzskatīt, ka variāciju rinda atbilst normālā sadalījuma likumam.

Asimetriju un ekscesu var aprēķināt sagrupētam skaitļu materiālam — variāciju rindai vai arī nesagrupētam, kas izdevīgi tad, ja lietojam skaitļošanas tehniku.

Aprēķinu pamatā ir šādi pārveidojumi:

$$\Sigma (x_i - \bar{x})^3 = \Sigma x_i^3 - \frac{3\Sigma x_i^2 \Sigma x_i}{n} + \frac{2(\Sigma x_i)^3}{n^2}, \quad (29.7)$$

$$\Sigma (x_i - \bar{x})^4 = \Sigma x_i^4 - \frac{4\Sigma x_i^3 \Sigma x_i}{n} + \frac{6\Sigma x_i^2 (\Sigma x_i)^2}{n^2} - \frac{3(\Sigma x_i)^4}{n^3} \quad (29.8)$$

Pielietojot šīs formulas variāciju rīndai resp. ievērojot biežumus  $m_i$ , iegūst

$$\Sigma (x_i - \bar{x})^3 m_i = \Sigma x_i^3 m_i - \frac{3 \Sigma x_i^2 m_i \Sigma x_i m_i}{n} + \frac{2 (\Sigma x_i m_i)^3}{n^2} \quad (29.7')$$

un

$$\Sigma (x_i - \bar{x})^4 m_i = \Sigma x_i^4 m_i - \frac{4 \Sigma x_i^3 m_i \Sigma x_i m_i}{n} + \frac{6 \Sigma x_i^2 m_i (\Sigma x_i m_i)^2}{n^2} - \frac{3 (\Sigma x_i m_i)^4}{n^3} \quad (29.8')$$

Apstrādājot variāciju rindu, izdevīgi lietot kodus  $\alpha_i$ , kur  $\alpha_i = \frac{x_i - x_0}{c}$ . Tad iepriekšējās formulās  $x_i$  vietā viscaur jāraksta  $\alpha_i$  un polinomi labajās pusēs jāreizina attiecīgi ar  $c^3$  un  $c^4$ . Ievērojot teikto, asimetrijas un ekscesa aprēķināšanai visērtākās ir šādas formulas: \*

$$A = \frac{\Sigma \alpha_i^3 m_i - \frac{3 \Sigma \alpha_i^2 m_i \Sigma \alpha_i m_i}{n} + \frac{2 (\Sigma \alpha_i m_i)^3}{n^2}}{\sqrt{\frac{1}{n} \left[ \Sigma \alpha_i^2 m_i - \frac{(\Sigma \alpha_i m_i)^2}{n} \right]^3}} \quad (29.9)$$

un

$$E = \frac{\Sigma \alpha_i^4 m_i - \frac{4 \Sigma \alpha_i^3 m_i \Sigma \alpha_i m_i}{n} + \frac{6 \Sigma \alpha_i^2 m_i (\Sigma \alpha_i m_i)^2}{n^2} - \frac{3 (\Sigma \alpha_i m_i)^4}{n^3}}{\frac{1}{n} \left[ \Sigma \alpha_i^2 m_i - \frac{(\Sigma \alpha_i m_i)^2}{n} \right]^3} - 3. \quad (29.10)$$

Apskatīsim asimetrijas un ekscesa aprēķināšanu iepriekšējā paragrāfā dotajai variāciju rīndai. Tabulā 29.3 doti kodi un to pakāpes.

Atrādīsim asimetrijai atsevišķi skaitītāju un saucēju.

$$\begin{aligned} \Sigma \alpha_i^3 m_i - \frac{3 \Sigma \alpha_i^2 m_i \Sigma \alpha_i m_i}{n} + \frac{2 (\Sigma \alpha_i m_i)^3}{n^2} &= \\ = -85 - \frac{3 \cdot 1617 \cdot 41}{240} + \frac{2 \cdot 41^3}{240^2} &\approx -911, \\ \sqrt{\frac{1}{n} \left[ \Sigma \alpha_i^2 m_i - \frac{(\Sigma \alpha_i m_i)^2}{n} \right]^3} &= \sqrt{\frac{1}{240} \left[ 1617 - \frac{41^2}{240} \right]^3} \approx 4176. \\ A &= -\frac{911}{4176} \approx -0,22. \end{aligned}$$

\* Sakarā ar to, ka asimetriju un ekscesu parasti aprēķina lielam skaitļu materiālam, formulās netiek ievērota atšķirība starp  $n$  un  $n-1$ . Formula (29.9) nesatur  $c^3$ , jo tas parādās kā reizinātājs skaitītājā un saucējā un saīsinās. Tā paša iemesla dēļ formula (29.10) nesatur  $c^4$ .



| $x_i$    | $m_i$ | $\alpha_i$ | $\alpha_i m_i$ | $\alpha_i^2 m_i$ | $\alpha_i^3 m_i$ | $\alpha_i^4 m_i$ |
|----------|-------|------------|----------------|------------------|------------------|------------------|
| 3,25     | 1     | -8         | -8             | 64               | -512             | 4096             |
| 3,50     | 2     | -7         | -14            | 98               | -686             | 4802             |
| 3,75     | 2     | -6         | -12            | 72               | -432             | 2592             |
| 4,00     | 2     | -5         | -10            | 50               | -250             | 1250             |
| 4,25     | 13    | -4         | -52            | 208              | -832             | 3328             |
| 4,50     | 14    | -3         | -42            | 126              | -378             | 1134             |
| 4,75     | 28    | -2         | -56            | 112              | -224             | 448              |
| 5,00     | 32    | -1         | -32            | 32               | -32              | 32               |
| 5,25     | 37    | 0          | 0              | 0                | 0                | 0                |
| 5,50     | 35    | 1          | 35             | 35               | 35               | 35               |
| 5,75     | 27    | 2          | 54             | 108              | 216              | 432              |
| 6,00     | 23    | 3          | 69             | 207              | 621              | 1863             |
| 6,25     | 13    | 4          | 52             | 208              | 832              | 3328             |
| 6,50     | 9     | 5          | 45             | 225              | 1125             | 5625             |
| 6,75     | 2     | 6          | 12             | 72               | 432              | 2592             |
| $\Sigma$ | 240   |            | 41             | 1617             | -85              | 31 557           |

Ekscesam skaitītāja vērtība ir 31 894, bet saucēja vērtība 10 805, tātad

$$E = \frac{31\,894}{10\,805} - 3 \approx -0,05.$$

Atrastie rādītāji maz atšķiras no nulles, kas liecinā par variāciju rindas labu atbilstību normālajam sadalījumam.

**257. §. Vidējā aritmētiskā kļūda.** Izmēģinājumu precizitātes rādītājs. No novērojumu datiem aprēķināto standartnovirzi  $s$  sauc arī par *atsevišķa mērījuma* jeb *atsevišķa novērojuma kļūdu* \*. No-saukums «kļūda» saistās ar standartnovirzes īpašību: jo lielāka aprēķinātā standartnovirze, jo vairāk atsevišķi mērījumi izkļiedēti ap vidējo vērtību un jo tālāk konkrēts mērījums var attālināties no centra.

Līdzīgi tam, kā atsevišķi mērījumi izkļiedēti ap vidējo vērtību, arī vairāku no vienas ģenerālās kopas ņemtu paraugu vidējie aritmētiskie var būt izkļiedēti ap ģenerālo vidējo vērtību. Šīs izkļiedes mērs ir vidējo aritmētisko standartnovirze, kuru sauc par vidējā aritmētiskā kļūdu un apzīmē ar  $s_x$ . Jo lielāka kļūda  $s_x$ , jo tālāk atsevišķa parauga vidējais aritmētiskais var atrasties no ģenerālās vidējās vērtības  $\mu$ . Vidējā aritmētiskā kļūdu  $s_x$  var aprēķināt no viena parauga saskaņā ar 249. § secinājumu pēc formulas (28.33), jo  $n$  novērojumu rezultātus, kuri ietilpst rendomizētā

\* Mūsu kursā ar vārdu «kļūda» apzīmēts lielums, ko literatūrā sauc arī par standartkļūdu jeb vidējo kvadrātisko kļūdu.

paraugā, var uzskatīt par neatkarīgiem gadījuma lielumiem ar vienu un to pašu varbūtību sadalījumu. Tātad

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}. \quad (29.11)$$

Te skaitītājā ir ģenerālās dispersijas nepārbidītais novērtējums (sk. 226. §), jo pati ģenerālā dispersija nav zināma.

Tā kā kļūda ir apgriezti proporcionāla kvadrātsaknei no novērojumu skaita, tad, palielinoties novērojumu skaitam  $n$ , vidējā aritmētiskā kļūda samazinās jeb no lielāka parauga aprēķinātais vidējais aritmētiskais ir ar mazāku kļūdu nekā no maza parauga atrastais.

Piemērs. No vienas šķirnes rudzu vārpu kopas paņemts 100 vārpu paraugs, to vidējais garums  $\bar{x}=8,4$  cm, bet garuma standartnovirze  $s=1,50$  cm. Atrast vidējā aritmētiskā kļūdu.

$$s_{\bar{x}} = \frac{1,50}{\sqrt{100}} = 0,15 \text{ cm.}$$

Bieži vidējā aritmētiskā kļūdu izsaka procentos no vidējā aritmētiskā. Iegūto rādītāju sauc par *procentuālo kļūdu* (vidējā aritmētiskā variāciju koeficientu). To apzīmē ar  $s_{\bar{x}} \%$ .

$$s_{\bar{x}} \% = \frac{s_{\bar{x}}}{\bar{x}} 100 \%. \quad (29.12)$$

Lauka izmēģinājumu datu apstrādē pēc formulas (29.12) atrasto procentuālo kļūdu sauc par *izmēģinājuma precizitātes rādītāju*.

Izmēģinājuma precizitāti, vadoties no  $s_{\bar{x}} \%$  lieluma, pieņemts vērtēt šādi:

$$\begin{aligned} \text{ja } s_{\bar{x}} \% &\leq 3\% \text{ — augsta precizitāte;} \\ 3\% &< s_{\bar{x}} \% \leq 8\% \text{ — apmierinoša;} \\ s_{\bar{x}} \% &> 8\% \text{ — neapmierinoša.} \end{aligned}$$

Uz jautājumu, cik liela dažādos novērojumos drīkstētu būt procentuālā kļūda, nevar dot vispārīgu atbildi. Jāievēro, ka  $s_{\bar{x}} \%$  atkarīgs tiklab no  $s$ , kā arī no  $n$ . Standartnovirzes  $s$  lielumu iespaido divējāda veida faktori: 1) dažādi nekontrolējami gadījuma faktori, kuri rada pētāmā lieluma dabisko izkliedi (dabisko variāciju). Tā saistās ar šī lieluma sadalījuma formu; 2) novērotāja darba kvalitāte, novērojumu organizācija. Ja darba kvalitāte zema, bez dabiskās izkļiedes rodas vēl liela papildu variācija, kā rezultātā rādītājs  $s_{\bar{x}} \%$  pasliktinās. Tāpēc visos izmēģinājumos jācenšas darbu veikt tā, lai standartnovirze  $s$  atspoguļotu tikai lieluma dabisko izkliedi, kura var būt lielāka vai mazāka



atkarībā no pētāmā lieluma rakstura. Arī procentuālā kļūda likum-sakarīgi var būt dažāda lieluma. Tā, piemēram, pieņemsim, ka pētāmajai pazīmei ir Puasona sadalījums. Tā kā pēc Puasona sadalījuma dispersija vienāda ar vidējo aritmētisko, tad variāciju koeficients var iznākt 100% un pat vairāk, arī procentuālā kļūda būs ievērojama.

Ja  $\bar{x}=0,64$  un  $s^2=0,64$ ,  $n=100$ , tad

$$V = \frac{0,8}{0,64} \cdot 100\% = 125\%, \quad s_{\bar{x}} = \frac{0,8}{\sqrt{100}} = \frac{0,8}{10} = 0,08,$$

$$s_{\bar{x}}\% = \frac{0,08}{0,64} \cdot 100\% = 12,5\%.$$

**258. §. Stjudenta sadalījums.** Pieņemsim, ka no vienas ģenerālās kopas, kurai ir normālais sadalījums un kuras vidējā vērtība  $\mu$  ir dota, sastādīti vairāki paraugi, katrs ar apjomu  $n$ , un visiem paraugiem atrasti vidējie aritmētiskie  $\bar{x}$ . Tad katram paraugam var atrast dalījumu

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_{\bar{x}}}$$

Angļu zinātnieks V. Gossets (pseidonīms — Stjudent) 1908. gadā atrada šī lieluma  $t$  teorētisko sadalījumu, kuru no tā laika sauc par  $t$  sadalījumu jeb par Stjudenta sadalījumu. Visu  $t$  vērtību vidējais aritmētiskais ir 0, un no dažādiem paraugiem aprēķinātās  $t$  vērtības svārstās ap 0 tā, ka visbiežāk sastopamas vērtības — tuvas nullei, turpretim, jo lielāka  $t$  absolūtā vērtība, jo retāk tā sastopama. Stjudenta sadalījums atkarīgs tikai no parauga apjoma  $n$  resp. no brīvības pakāpju skaita  $\nu = n - 1$ . Stjudenta sadalījums līdzinās normālajam sadalījumam, pie tam jo vairāk, jo lielāks brīvības pakāpju skaits. Ja  $\nu > 100$ , tad Stjudenta sadalījums praktiski sakrīt ar normālo sadalījumu, t. i., tas vairs nav atkarīgs no novērojumu skaita.

Stjudenta sadalījumam ir liela teorētiska un praktiska nozīme. Tas ir pamatā matemātiskās statistikas galvenajām nodaļām — mācībai par ģenerālo rādītāju novērtēšanu un hipotēžu pārbaudi. Speciāli šo problēmu risināšanai arī piemērots  $t$  sadalījuma tabulas iekārtojums (sk. III tabulu pielikumā). Tabulas pirmajā ailē dots brīvības pakāpju skaits  $\nu$ , bet pirmajā un pēdējā rindā varbūtības.

Skaitļi tabulas iekšienē ir  $t$  vērtības. Tā, piemēram, brīvības pakāpju skaitam  $\nu=9$  un varbūtībai 0,05 atbilst  $t=2,26$ . Šo skaitļu jēga ir šāda: tādas  $t$  vērtības, kuras pēc absolūtā lieluma pārsniedz 2,26, sastopamas tikai 5% no visa paraugu skaita, ja katrā paraugā ir 10 objekti. Līdzīgi, ja parauga apjoms ir 30, tad varbūtība, ka no tā atrastais  $t$  pārsniegs 2,045, ir 5%, bet varbūtība iegūt  $t$ , kurš pārsniegtu 2,756 ir vēl mazāka — tikai 1%.



Stjudenta tabulā dotās varbūtības 0,5; 0,1; 0,05; 0,01 un 0,001 sauc par *būtiskuma* jeb *nozīmības līmeņiem*. Tiem atbilstošos  $t$  mēdz apzīmēt ar  $t_{0,10}$ ;  $t_{0,05}$  u. tml. Vispār — ar būtiskuma līmeni saprot varbūtību, kuru vienojas uzskatīt par pietiekami mazu, lai notikuma parādīšanās iespēju vienā atsevišķā izmēģinājumā ignorētu. Parasti lauksaimnieciskā rakstura problēmu risināšanā būtiskuma līmenis ir 5%.

Būtiskuma līmeņu papildinājumus līdz 1 resp. 100% sauc par ticamības līmeņiem. Tie doti III tabulas pirmajā rindā.

Lai precizētu iepriekš teikto, apzīmēsim ticamības līmeni (ticamību) ar  $P$ , tad būtiskuma līmenis būs  $1-P$ . Ja  $t_1$  ir fiksēta vērtība Stjudenta sadalījuma tabulā un  $t$  — no parauga atrastā vērtība, tad var rakstīt, ka  $P=P\{|t|<t_1\}$  un  $1-P=P\{|t|>t_1\}$  resp. ticamība ir varbūtība, ka no parauga atrastā  $t$  vērtība būs intervālā « $-t_1$  līdz  $t_1$ » iekšpusē, bet būtiskuma līmenis — varbūtība, ka tā būs šī intervāla ārpusē.

**259. §. Ģenerālā vidējā aritmētiskā novērtējums.** Ģenerālais vidējais aritmētiskais  $\mu$  parasti nav zināms, taču ir iespējams to novērtēt ar noteiktu precizitāti un ticamību.

Lai iegūtu ģenerālā vidējā aritmētiskā novērtējumu, pārveidosim vienādību

$$P=P\{|t|<t_1\}.$$

Ievērosim, ka nevienādība  $|t|<t_1$  ir ekvivalenta nevienādībām

$$-t_1<\frac{\bar{x}-\mu}{s_{\bar{x}}}<t_1,$$

no kurienes

$$-t_1 s_{\bar{x}}<\bar{x}-\mu<t_1 s_{\bar{x}}$$

jeb

$$\bar{x}-t_1 s_{\bar{x}}<\mu<\bar{x}+t_1 s_{\bar{x}};$$

tātad

$$P\{\bar{x}-t_1 s_{\bar{x}}<\mu<\bar{x}+t_1 s_{\bar{x}}\}=P.$$

Atrastā sakarība dod varbūtību, ka intervāls no  $\bar{x}-t_1 s_{\bar{x}}$  līdz  $\bar{x}+t_1 s_{\bar{x}}$  «pārklās» (ietvers) ģenerālo vidējo aritmētisko  $\mu$ .

Praktiski novērtējumu atrod šādi.

Vispirms izvēlas piemērotu ticamības līmeni — parasti 95%. Atbilstoši izvēlētajam ticamības līmenim un parauga apjomam  $v=n-1$  Stjudenta tabulā atrod  $t$  vērtību. Pieņemot 95% ticamības līmeni, tabulā jāmeklē  $t_{0,05}$ . Pēc tam uzraksta intervālu  $\bar{x}\pm t_{0,05} s_{\bar{x}}$ , kura apakšējā robeža ir  $\bar{x}-t_{0,05} s_{\bar{x}}$ , bet augšējā ir  $\bar{x}+t_{0,05} s_{\bar{x}}$ . Tas ir 95% ticamības intervāls ģenerālā vidējā aritmētiskā  $\mu$  novērtēšanai. Uzdotā intervāla un tam atbilstošās ticamības jēga ir šāda: ir 95% ticamība (varbūtība), ka intervāls  $\bar{x}\pm t_{0,05} s_{\bar{x}}$  pārklās ģenerālo vidējo aritmētisko. Tikai vienā gadījumā no 20 var

«pagadities» tāds paraugs (izmēģinājums), pēc kura datiem konstruētais intervāls nepārklās ģenerālo vidējo.

Novērtējuma precizitāti raksturo intervāla garums; jo tas lielāks, jo precizitāte zemāka. Var aprēķināt arī novērtējuma relatīvo precizitāti  $\varepsilon$  pēc formulas

$$\varepsilon = \frac{t_{0,05} s_{\bar{x}}}{\bar{x}} \cdot 100\%. \quad (29.13)$$

Tātad relatīvā precizitāte  $\varepsilon$  ir puse no ticamības intervāla, izteikta procentos no vidējā aritmētiskā.

Ļoti bieži rezultātu mēdz uzrakstīt formā  $\bar{x} \pm s_{\bar{x}}$ . Te novērtējuma relatīvā precizitāte  $\varepsilon$  sakrīt ar precizitātes rādītāju  $s_{\bar{x}}\%$ , jo te  $t$  vērtība (reizinātājs pie kļūdas  $s_{\bar{x}}$ ) ir 1. Pieraksts  $\bar{x} \pm s_{\bar{x}}$  arī uzdod noteiktu intervālu ģenerālā vidējā aritmētiskā novērtēšanai, tikai ticamība, ka šis intervāls pārklās ģenerālo vidējo, ir zemāka par 95%. Tā, piemēram, ja  $v = \infty$ , tad  $t$  vērtībai 1 atbilst varbūtība 68,3% (sk. III tabulu), t. i., intervāla  $\bar{x} \pm s_{\bar{x}}$  ticamība ir tikai 68,3%.

Kā redzams, precizitāte un ticamība saistītas tā, ka, vienai palielinoties, otra samazinās. Vienlaicīgi paaugstināt precizitāti un ticamību iespējams tikai uz vidējā aritmētiskā kļūdas samazināšanas rēķina.

Piemērs. Izmērot 64 rudzu vārpu garumu, konstatēts, ka to vidējais garums  $\bar{x} = 7,7$  cm un standartnovirze  $s = 1,4$  cm. Atrast ģenerālā vidējā aritmētiskā 95% ticamības intervālu.

Pie  $v = 63$   $t_{0,05} = 2,0$ ,  $s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$ , t. i.,  $s_{\bar{x}} = \frac{1,4}{8} = 0,18$  cm. Meklētais intervāls ir  $7,7 \pm 2,0 \cdot 0,18 = 7,7 \pm 0,36$  jeb no 6,34 cm līdz 8,06 cm. Relatīvā precizitāte ir

$$\varepsilon = \frac{0,36}{7,7} \cdot 100\% = 4,7\%,$$

tātad pie 95% ticamības relatīvā precizitāte ir 4,7%. Ir 95% varbūtība, ka intervāls no 6,34 cm līdz 8,06 cm pārklāj visas tās vārpu kopas vidējo garumu, no kuras ņemts minētais 64 vārpu paraugs.

**260. §. Nulles hipotēzes.** Nulles hipotēžu pārbaude ir matemātiskās statistikas centrālais uzdevums, jo visas zinātniskās pētniecības darba problēmas tā vai citādi saistās ar kādas hipotēzes izvirzīšanu un pārbaudi.

Lai saprastu nulles hipotēzes būtību, apskatīsim šādu piemēru. No rudzu šķirņu izmēģinājumu kolekcijas sējumiem iegūti 100 vārpu garumu mērījumi katrai no šķirnēm: 'Priekuļu standarts', 'Zīma' un 'Champquer'. Rezultāti doti tabulā.



| Šķirne               | $\bar{x}$ (cm) | s (cm) | $s_{\bar{x}}$ (cm) |
|----------------------|----------------|--------|--------------------|
| 'Priekuļu standarts' | 8,4            | 1,51   | 0,15               |
| 'Zima'               | 8,2            | 1,20   | 0,12               |
| 'Champaquer'         | 9,6            | 1,47   | 0,15               |

Kā redzams, šķirnei 'Champaquer' vārpu vidējais garums lielāks nekā standartam, bet šķirnei 'Zima' tas ir mazāks.

Taču izdarīt šādu slēdzienu vispār par šķirnēm nedrīkst, jo no parauga aprēķinātais vārpu vidējais garums ir variējošs lielums, kura svārstības mērs ir tā kļūda  $s_{\bar{x}}$ . No citiem 100 vārpu paraugiem iegūtie vidējie garumi un to starpības var būt citādi. Sakarā ar teikto rodas jautājums: vai ir iespējams kaut ko spriest par šķirņu savstarpējām attiecībām, ja no katras šķirnes mums ir tikai viens paraugs. Lai šo jautājumu atrisinātu, to vispirms formulē ar *nulles hipotēzes palīdzību*.

Mūsu piemērā nulles hipotēze ir pieņēmums, ka starpība starp šķirņu «īstajiem» jeb «ģenerālajiem» vidējiem vārpu garumiem ir nulle, t. i., ka, neierobežoti palielinot parauga apjomu, dažādu šķirņu vidējie garumi sakrīt.

Šīs hipotēzes pārbaudes uzdevums ir noskaidrot, vai izmēģinājumu dati atbilst šim pieņēmumam vai nē, un atkarībā no tā hipotēzi vai nu pieņemt, vai noraidīt.

Nulles hipotēzi ļoti uzskatāmi var pārbaudīt, konstruējot katra šķirnes «īstajam» vidējam vārpas garumam 95% ticamības intervālu.

Pie  $v=100-1=99$ ,  $t_{0,05}=2,0$  un 95% ticamības intervāls:

'Priekuļu standartam'  $8,4 \pm 2,0 \cdot 0,15 = 8,4 \pm 0,30$ , t. i.,  
no 8,10 cm līdz 8,70 cm

'Zima'  $8,2 \pm 2,0 \cdot 0,12 = 8,2 \pm 0,24$ , t. i.,  
no 7,96 cm līdz 8,44 cm.

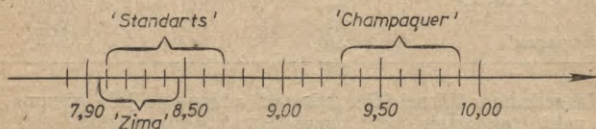
'Champaquer'  $9,6 \pm 0,30$ , t. i., no 9,30 līdz 9,90 cm.

220. zīmējumā parādīti attiecīgie intervāli standartam un šķirnei 'Zima', kā arī šķirnei 'Champaquer'. Standartam un šķirnei 'Zima' 95% ticamības intervāli sedzas, tas nozīmē, ka «īstie», vidējie garumi var sakrist (ja tie atrodas kopējā daļā). Līdz ar to mums nav pamata noraidīt nulles hipotēzi attiecībā uz šīm šķirnēm. Šis apgalvojums jāsaprot pareizi. Mēs neizslēdzam iespēju, ka «īstie» vārpu garumi ir atšķirīgi, taču konkrētie mūsu rīcībā esošie dati nedod pamatu secināt, ka tie tiešām ir atšķirīgi.

Standartam un šķirnei 'Champaquer' nulles hipotēze tiek pārlicinoši noraidīta, jo intervāliem, kuros varētu atrasties «īstie» garumi, nav kopīgu punktu.



Līdzīgi kā šajā piemērā — nulles hipotēze visos gadījumos ir pieņēmums, ka «istā starpība ir nulle», tikai atkarībā no konkrētās problēmas rakstura tie rādītāji, kuru starpību mēģinām novērtēt, var būt dažāda tipa: divi korelācijas koeficienti, divas dispersijas utt.



220. zīm.

*Noraidīt nulles hipotēzi nozīmē atzīt starpību par būtisku, pieņemt nulles hipotēzi nozīmē apgalvot, ka starpība nav būtiska.*

Praksē nulles hipotēžu pārbaudē viscaur lieto analītiskus kritērijus. Nākošajos paragrāfos apskatīsim aprēķinu tehniku dažu nulles hipotēžu pārbaudei.

**261. §. Divu vidējo aritmētisko salīdzināšana nesaistītiem novērojumiem.** Ar nesaistītiem novērojumiem saprot divu tādu paraugu datus, kurus nav nekāda pamata sagrupēt pāros. Tā, piemēram, salīdzinot divu rudzu šķirņu vārpu vidējos garumus, mēs no vienas šķirnes vārpu kopas izvēlamies randomizētu paraugu neatkarīgi no otras šķirnes vārpu kopas un nav pamata uzskatīt, ka viena parauga konkrēta vārpa kaut kādā veidā saistās ar otra parauga konkrētu vārpu.

Abu paraugu vidējo aritmētisko salīdzināšana ir nulles hipotēzes pārbaude, kur nulles hipotēze — pieņēmums, ka starp salīdzināmo kopu vidējām vērtībām starpība ir nulle. Matemātiski to var pierakstīt šādi:

$$\mu_1 - \mu_2 = 0.$$

Nesaistītos novērojumos vidējie aritmētiskie ir neatkarīgi, un no varbūtību teorijas viedokļa tie ir neatkarīgi gadījuma lielumi, kuru dispersiju var aprēķināt pēc formulas (28.27).

Pieņemsim, ka dotie paraugi ir  $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}$  un  $x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2j}, \dots, x_{2n_2}$ , bet turpmāk otros indeksus atmetīsim. Apzīmēsim

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum x_1}{n_1}, \quad \bar{x}_2 = \frac{\sum x_2}{n_2},$$

$$s_1^2 = \frac{\sum (x_1 - \bar{x}_1)^2}{n_1 - 1}, \quad s_2^2 = \frac{\sum (x_2 - \bar{x}_2)^2}{n_2 - 1}.$$

Tālāk apzīmēsim

$$s^2 = \frac{\sum (x_1 - \bar{x}_1)^2 + \sum (x_2 - \bar{x}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2}. \quad (29.14)$$

Ja abi paraugi ņemti no vienas ģenerālās kopas, tad  $s^2$  (apkopotā dispersija) ir ģenerālās dispersijas  $\sigma^2$  novērtējums, pie tam šīs apkopotās dispersijas brīvības pakāpju skaits ir  $\nu = n_1 + n_2 - 2$ . Starpības  $D = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$  dispersiju tagad var izteikt šādi:

$$s_D = \sqrt{\frac{s^2}{n_1} + \frac{s^2}{n_2}} = s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = s \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}} \quad (29.15)$$

Var pierādīt, ka lielumam

$$t_D = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \quad (29.16)$$

ir Stjūdenta sadalījums\* ar brīvības pakāpju skaitu  $\nu = n_1 + n_2 - 2$ . Ja  $n_1 = n_2$ , tad  $s_D = \sqrt{s_{x_1}^2 + s_{x_2}^2}$  un

$$t_D = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{s_{x_1}^2 + s_{x_2}^2}} \quad (29.17)$$

Lai pārbaudītu nulles hipotēzi, rīkojas pēc šāda kritērija (*Stjūdenta kritērijs*):

- 1) atrod starpību  $D = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$ ;
- 2) atrod starpības klūdu  $s_D$ ;
- 3) sastāda attiecību

$$t_D = \frac{D}{s_D} \quad (29.18)$$

4) izvēlas piemērotu būtiskuma līmeni. Izdarot slēdzienus, var rasties divējāda veida kļūdas: var noraidīt pareizu nulles hipotēzi — to sauc par *pirmā veida kļūdu*, var pieņemt nepareizu nulles hipotēzi — to sauc par *otrā veida kļūdu*.

*Būtiskuma līmenis ir pirmā veida kļūdas varbūtība*. Pieņemot būtiskuma līmeni vienādu ar 5%, mēs samierināties ar iespēju noraidīt pareizu nulles hipotēzi 1 gadījumā no 20. Stjūdenta tabulā atrod  $t_{0,05}$ , kas atbilst brīvības pakāpju skaitam  $\nu = n_1 + n_2 - 2$ . Tad  $t_D$  salīdzina ar  $t_{0,05}$ . Ja  $|t_D| > t_{0,05}$ , tad nulles hipotēzi jeb starpību atzīst par būtisku pie 5% būtiskuma līmeņa. Šo faktu mēdz pierakstīt šādi:  $P < 0,05$ .

Ja turpretim  $|t_D| < t_{0,05}$ , tad nav pamata nulles hipotēzi noraidīt, jo varbūtība, ka atrastā  $t_D$  vērtība radusies tās variācijas rezultātā, kāda vispār piemīt no parauga aprēķinātajiem lielumiem, nav pietiekami maza.

\* Ar nosacījumu, ka paraugi ņemti no ģenerālās kopas, kurā pazīmei ir normālais sadalījums.



Piemērs. Noskaidrosim, vai starpība starp vidējiem vārpu garumiem uzskatāma par būtisku (sk. iepriekšējo paragrafu).

a) Salīdzināsim 'Priekuļu standartu' ar šķirni 'Zima':

$$D = 8,4 - 8,2 = 0,2,$$

$$s_D = \sqrt{0,15^2 + 0,12^2} = \sqrt{0,0369} = 0,19,$$

$$t_D = \frac{0,2}{0,19} = 1,05.$$

Vērtībai  $v = 100 + 100 - 2 = 198$ , t. i.,  $v = \infty$  tabulā atrodam  $t_{0,05} = 1,96$ . Tā kā  $1,05 < 1,96$ , tad nulles hipotēze netiek noraidīta pie 5% būtiskuma līmeņa. Konkrētie mūsu rīcībā esošie dati neļauj secināt, ka šķirnei 'Zima' vārpu vidējais garums būtu mazāks kā 'Priekuļu standartam'.

b) Salīdzinot šķirni 'Champaquer' ar standartu, iegūst  $D = 1,2$ ,  $s_D = 0,21$ ,  $t_D = 5,71$ , kas liecina, ka starpība ir būtiska gan pie 5%, gan 1% būtiskuma līmeņa, jo  $|t_D| > t_{0,05} = 1,96$  un  $|t_D| > t_{0,01} = 2,58$ . Tātad  $P < 0,05$  un pat  $P < 0,01$ .

1. piezīme. Ja vidējie aritmētiskie  $\bar{x}_1$  un  $\bar{x}_2$  iegūti no saistītām rindām, kur katrs skaitļu pāris  $x_{11}$  un  $x_{21}$  ir nedalāma vienība, tad arī vidējie aritmētiskie nav neatkarīgi un šeit parādīto metodi to salīdzināšanā lietot nevar. Tādos gadījumos pielieto tā saucamo pāru metodi vai arī kļūdu  $s_D$  aprēķina, ievērojot korelācijas koeficientu  $r$ , kuru atrod no dotajām skaitļu rindām. Šos paņēmienus apskata plašākos matemātiskās statistikasursos.

2. piezīme. Izmēģinājumu praksē visbiežāk sastopami gadījumi, kad salīdzināmo variantu skaits pārsniedz 2. Tādos gadījumos nulles hipotēžu pārbaudē vispiemērotākā metode ir *dispersiju analīze*, kuru arī iztīrā plašākosursos.

**262. §. Korelācijas koeficienta novērtējums\*.** No parauga datiem atrastais korelācijas koeficients ir gadījuma lielums, kura iespējamās vērtības izklidētas ap ģenerālo korelācijas koeficientu  $\rho$ . Tāpēc, ja  $\rho$  vērtība ir nulle, no parauga atrastais  $r$  var arī nebūt nulle un var rasties maldīgs ieskaits, ka starp pētāmajiem lielumiem pastāv lineāra korelācija, lai gan faktiski šādas korelācijas nav.

No minētajiem apsvērumiem izriet nepieciešamība pārbaudīt hipotēzi  $\rho = 0$ , t. i., noskaidrot, vai korelācijas koeficients *būtiski atšķiras no nulles*. No visiem uzdevumiem, kas saistīti ar kore-

\* Korelācijas un regresijas koeficientu novērtēšanas metodika izstrādāta, balstoties uz pieņēmuma, ka ņemts randomizēts paraugs no ģenerālās kopas, kurā pazīmes  $x$ ,  $y$  pakļautas normālajam sadalījumam ar blīvuma funkciju

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho xy}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2}\right)}.$$

Ja ir  $k$  faktoriālās pazīmes, tad normālā sadalījuma jēdziens tiek attiecīgi vispārināts.



lācijas koeficienta vispārīnāšanu, šīs hipotēzes pārbaude praksē sastopama visbiežāk, un to var izdarīt ar dažādām metodēm. Apskatīsim dažas no tām.

Hipotēzi  $q=0$  var pārbaudīt, sastādot attiecību

$$t_r = \frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}} \quad (29.19)$$

un salīdzinot to ar  $t_{0,05}$ , jo ir pierādīts, ka šai attiecībai ir Stjudenta sadalījums ar brīvības pakāpju skaitu  $v=n-2$ . Ja  $|t_r| > t_{0,05}$ , tad nulles hipotēzi noraida, ja turpretim  $|t_r| < t_{0,05}$ , tad nulles hipotēze paliek spēkā.

Piemērs. No 100 saimniecību datiem atrasta korelācija starp graudu ražošanas izmaksām (rbļ. par 1 ha) un ar vienu kombināciju novāktu platību (sezonā ha). Korelācijas koeficients  $r = -0,248$ . Pārbaudīt nulles hipotēzi  $q=0$ . Sastādām

$$|t_r| = \frac{0,248}{\sqrt{\frac{1-0,248^2}{100-2}}} \approx 2,53.$$

Pēc Stjudenta sadalījuma tabulas atrod  $t_{0,05}=1,98$ . Tā kā  $2,53 > 1,98$ , tad korelācija ir pierādīta.

Praksē visērtāk lietot IV tabulu, kur dotas korelācijas koeficienta robežvērtības pie 5% un 1% būtiskuma līmeņa. Mūsu piemērā pie  $v \approx 100$  un 5% būtiskuma līmeņa šāda robežvērtība ir 0,195. Ja no parauga datiem atrastā koeficienta absolūtā vērtība pārsniedz tabulas skaitli, tad korelācija ir pierādīta, ja tā ir mazāka par tabulas skaitli, hipotēze  $q=0$  paliek spēkā.

**263. §. Regresijas koeficienta novērtējums.** Ja regresijas taisnes vienādojums atrasts no parauga datiem, tad tas uzskatāms par tuvinājumu «istajam» regresijas vienādojumam, kurš izsaka lineāro sakarību ģenerālajā kopā. Šādā aspektā no parauga atrastie regresijas rādītāji ir atbilstošo ģenerālo rādītāju novērtējumi. Lai atrastu intervālus, kuri ar dotu ticamību «pārklāj» ģenerālos rādītājus, jāreķina kļūdas, tāpat kā to darijām, novērtējot ģenerālo vidējo aritmētisko.

232. paragrāfā definētā atlikumu kvadrātu summa  $Q_x = \sum (y_1 - \hat{y}_1)^2$  parāda  $y$  vērtību izkliedi ap regresijas taisni. Arī ģenerālajā kopā pastāv izkliede ap šīs kopas regresijas taisni  $\mu = \beta x + \beta_0$ . Lai novērtētu šo izkliedi,  $Q_x$  daļa ar brīvības pakāpju skaitu  $v, v=n-2$  un iegūst atlikuma dispersiju

$$s_{y,x}^2 = \frac{\sum (y_1 - \hat{y}_1)^2}{n-2} \quad (29.20)$$

\* Brīvības pakāpju skaits ir  $v=n-2$ , jo  $Q_x$  aprēķināšanā izmantoti divi vidējie  $\bar{x}$  un  $\bar{y}$  (sk. 232. §).

Atlikuma dispersijai, tāpat kā katras atsevišķas pazīmes dispersijai, ja tā aprēķināta no parauga datiem, ir divējāda nozīme: tā kalpo kā ģenerālās dispersijas novērtējums, bet ir arī izklīdes raksturotāja paša parauga datiem. To ievērojot, ir skaidrs, ka atlikuma dispersija ir uzskatāma arī par formulas piemērotības mēru, jo tā, līdzīgi atlikuma kvadrātu summai, parāda punktu izklīdi ap regresijas taisni.

Atlikuma standartnovirze

$$s_{y \cdot x} = \sqrt{\frac{\sum (y_1 - \hat{y}_1)^2}{n-2}} \quad (29.21)$$

jeb, ievērojot formulu (27.29),

$$s_{y \cdot x} = \sqrt{\frac{\sum y_1^2 - b \sum x_1 y_1 - b_0 \sum y_1}{n-2}} \quad (29.21')$$

Var pierādīt, ka regresijas koeficienta standartnovirze jeb kļūda aprēķināma pēc formulas

$$s_b = \frac{s_{y \cdot x}}{s_x \cdot \sqrt{n-1}} \quad (29.22)$$

jeb

$$s_b = \sqrt{\frac{\sum y_1^2 - b \sum x_1 y_1 - b_0 \sum y_1}{(n-2) \left[ \sum x_1^2 - \frac{(\sum x_1)^2}{n} \right]}} \quad (29.22')$$

Ir 95% ticamības, ka intervāls  $b \pm t_{0,05} s_b$  «pārklāj» ģenerālo regresijas koeficientu  $\beta$ . Lielumu  $t_{0,05}$  atrod pie brīvības pakāpju skaita  $\nu = n - 2$ .

**Piemērs.** Aprēķināsim atlikuma standartnovirzi un regresijas koeficienta kļūdu 231. § piemēram par apšu atvašu garuma un diametra sakarību.

Tā kā  $Q_z = 3,02$  un  $\nu = 20 - 2 = 18$ , tad

$$s_{y \cdot x} = \sqrt{\frac{3,02}{18}} = \sqrt{0,1678} = 0,41.$$

$$s_b = \sqrt{\frac{0,1678}{23,15 - \frac{20,3^2}{20}}} = \sqrt{0,0658} \approx 0,26.$$

Konstruēsim 95% ticamības intervālu ģenerālajam regresijas koeficientam  $\beta$ . Skaitlim  $\nu = 18$  atrodam  $t_{0,05} = 2,10$ . Tātad

$$b \pm t_{0,05} s_b = 2,01 \pm 2,10 \cdot 0,26 = 2,01 \pm 0,55.$$

Varbūtība, ka intervāls (1,46; 2,56) ietver ģenerālo regresijas koeficientu, ir 95%.

Tā kā intervāls neietver nulli, tad ģenerālais koeficients nevar būt nulle. Nulles hipotēzi  $\beta=0$  var pārbaudīt arī, sastādot attiecību

$$t_b = \frac{b}{s_b}. \quad (29.23)$$

Lielumam  $t_b$  ir Stjudenta sadalījums ar brīvības pakāpju skaitu  $v=n-2$ . Salīdzinot  $|t_b|$  ar  $t_{0,05}$ , regresiju atzīst par būtisku, ja  $|t_b| > t_{0,05}$ .

**264. §. Rezultatīvās pazīmes prognozēto vērtību kļūdu intervāli.** No parauga datiem atrastais regresijas vienādojums  $\hat{y} = bx + b_0$  ir novērtējums šāda paša tipa vienādojumam ģenerālajā kopā  $\mu = \beta x + \beta_0$ . Aprēķinot izvēlētajai  $x_1$  vērtībai  $\hat{y}_1$ , svarīgi atrast intervālu  $\hat{y}_1 \pm t_{0,05} \cdot s_{\hat{y}_1}$ , ar kuru var pārklāt atbilstošo ģenerālo vērtību  $\mu_1$  pie ticamības līmeņa 95%. Šai nolūkā iepriekš jāaprēķina prognozes  $\hat{y}_1$  kļūda  $s_{\hat{y}_1}$ . Ievērosim, ka  $\hat{y}_1 = \bar{y} + b(x_1 - \bar{x})$ , t. i.,  $\hat{y}_1$  ir divu gadījuma lielumu  $\bar{y}$  un  $b(x_1 - \bar{x})$  summa, tātad  $\hat{y}_1$  dispersija  $s^2_{\hat{y}_1}$  ir šo abu gadījuma lielumu dispersiju summa. Vidējā aritmētiskā  $\bar{y}$  dispersija

$$s^2_{\bar{y}} = \frac{s^2_{y \cdot x}}{n}. \quad (29.24)$$

Šī formula vidējā aritmētiskā kļūdas aprēķināšanai kļūst saprotama, ja atceramies, ka kļūdas aprēķinam jābalstās uz gadījuma faktoru radīto dispersiju, izslēdzot visu sistemātisko variāciju (sk. 275. §). Izmantojot to informāciju, ko iegūstam, analizējot regresiju, iespējams no kopējās kvadrātu summas izslēgt to izkļiedes daļu, kurai pamatā ir kontrolētā faktora  $x$  izmaiņas. Līdz ar to iespējams samazināt to dispersiju, kas jāņem vidējā aritmētiskā kļūdas aprēķināšanas pamatā. No formulas (29.22) seko

$$s^2_b = \frac{s^2_{y \cdot x}}{Q_x},$$

kur

$$Q_x = \sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n},$$

bet lielumam  $b(x_1 - \bar{x})$  dispersija ir proporcionāla  $(x_1 - \bar{x})^2$ . (Sk. formulu (28.25).) Tātad

$$s^2_{\hat{y}_1} = \frac{s^2_{y \cdot x}}{n} + \frac{s^2_{y \cdot x}}{Q_x} (x_1 - \bar{x})^2. \quad (29.25)$$



95% ticamības intervāls lieluma  $\mu_1$  novērtēšanai ir

$$\hat{y}_1 \pm t_{0,05} s_{\hat{y}_1} = \hat{y}_1 \pm t_{0,05} \cdot s_{y \cdot x} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_1 - \bar{x})^2}{Q_x}} \quad (29.26)$$

Ir iespējams konstruēt 95% ticamības intervālu atsevišķas vērtības prognozēšanai, izejot no regresijas analīzes datiem. Tad formulā (29.25) jāpieliek trešais saskaitāmais  $s^2_{y \cdot x}$ , jo individuālu  $y_1$  vērtību izklidē ietekmē vēl papildu izklīdes avots — nekontrolētie gadījuma faktori, kuri rada variāciju ap regresijas taisni. Tātad

$$s^2_{y_1} = s^2_{y \cdot x} + \frac{s^2_{y \cdot x}}{n} + \frac{s^2_{y \cdot x}}{Q_x} (x_1 - \bar{x})^2 \quad (29.27)$$

un

$$s_{y_1} = s_{y \cdot x} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_1 - \bar{x})^2}{Q_x}} \quad (29.28)$$

Redzam, ka lielumu  $\hat{y}_1$  un  $y_1$  dispersijas atrastas saskaņā ar tiem izklīdes avotiem, kuri ir to rašanās pamatā.

Jāievēro, ka rezultatīvās pazīmes kļūdu intervāla platums ir atkarīgs ne tikai no mērķa, kādam tas konstruēts, bet arī no konkrētās  $x_1$  vērtības, kurai prognoze izdarīta. Jo tālāk izvēlētajā  $x_1$  vērtība atrodas no centra — vidējā aritmētiskā, jo plašāks ir kļūdu intervāls resp. jo neprecīzāks ir no vienādojuma aprēķinātais  $\hat{y}_1$ .

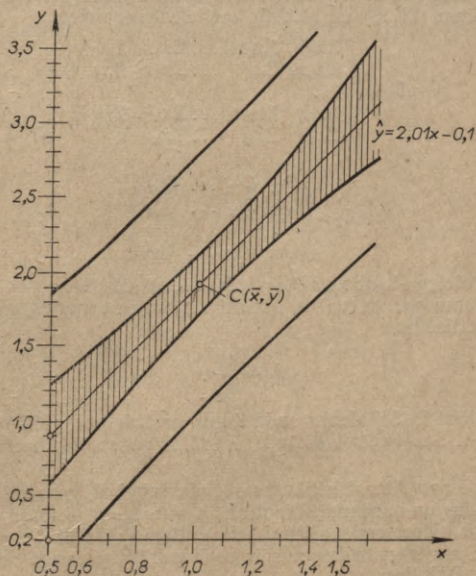
Ja dažādiem  $x_1$  atrod robežas  $\hat{y}_1 \mp t_{0,05} s_{\hat{y}_1}$  un  $y_1 \mp t_{0,05} s_{y_1}$  un atliek tās zīmējumā, tad iegūst divas kļūdu zonas, kuras paplašinās,  $x_1$  vērtībai attālinoties no vidējās vērtības  $x = \bar{x}$ . Šaurākā zona domāta vidējo vērtību  $\mu_1$  novērtēšanai, bet platākā — individuālo  $y_1$  «pārklāšanai». Ja novērtēšana izdarīta pie 95% ticamības līmeņa, tad tikai 5% vidējo, kā arī 5% individuālo vērtību var atrasties ārpus attiecīgajām zonām.

Tabula 29.5

| $x_1$ | $s_{\hat{y}_1}$ | $s_{y_1}$ | $\hat{y}_1 \pm t_{0,05} \cdot s_{\hat{y}_1}$ |            | $y_1 \pm t_{0,05} \cdot s_{y_1}$ |
|-------|-----------------|-----------|----------------------------------------------|------------|----------------------------------|
| 0,6   | 0,14            | 0,43      | 1,11 ± 2,1 · 0,14                            | 0,82; 1,40 | 0,21; 2,01                       |
| 0,8   | 0,11            | 0,43      | 1,51 ± 2,1 · 0,11                            | 1,28; 1,74 | 0,61; 2,41                       |
| 1,0   | 0,09            | 0,42      | 1,92 ± 2,1 · 0,09                            | 1,73; 2,11 | 1,04; 2,80                       |
| 1,2   | 0,10            | 0,42      | 2,32 ± 2,1 · 0,10                            | 2,11; 2,53 | 1,44; 3,20                       |
| 1,4   | 0,14            | 0,43      | 2,72 ± 2,1 · 0,14                            | 2,43; 3,01 | 1,82; 3,62                       |
| 1,6   | 0,18            | 0,44      | 3,12 ± 2,1 · 0,18                            | 2,74; 3,50 | 2,20; 4,04                       |

Piemērs. Atrast vidējo apšu atvašu garumu, kā arī individuālo garuma mērījumu novērtējuma zonas.

Tabulā 29.5 sakārtoti nepieciešamie palīgaprēķini, un 221. zīmējumā konstruēta regresijas taisne  $\hat{y} = bx + b_0$ , kā arī zonu robežas.



221. zīm.

**265. §. Daudzfaktoru regresijas koeficientu novērtējums.** Atlikuma dispersiju daudzfaktoru regresijas gadījumā definē ar formulu

$$s^2_{y.12\dots k} = \frac{Q_z}{n-k-1}, \quad (29.29)$$

kur  $k$  ir faktoriālo pazīmju skaits.  
Atlikuma standartnovirze

$$s_{y.12\dots k} = \sqrt{\frac{Q_z}{n-k-1}}. \quad (29.30)$$

Šeit  $Q_z$  ir atlikuma kvadrātu summa, kuru atrod pēc formulām (27.42) vai (27.42').

Regresijas koeficienta  $b_j$  kļūda ir

$$s_{b_j} = s_{y.12\dots k} \sqrt{c_{jj}}, \quad (29.31)$$

kur  $c_{jj}$  ir sistēmas (27.39) vai (27.40) koeficientu matricai inversās matricas diagonāles elements. Var pierādīt, ka normālvienādojumu sistēmu (27.39) un (27.40) koeficientu matricu

$$A_1 = \begin{pmatrix} \sum x_1^2 & \sum x_1 x_2 & \dots & \sum x_1 x_k & \sum x_1 \\ \sum x_2 x_1 & \sum x_2^2 & \dots & \sum x_2 x_k & \sum x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum x_k x_1 & \sum x_k x_2 & \dots & \sum x_k^2 & \sum x_k \\ \sum x_1 & \sum x_2 & \dots & \sum x_k & n \end{pmatrix}$$

un

$$A_2 = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1k} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{k1} & Q_{k2} & \dots & Q_{kk} \end{pmatrix}$$

inverso matricu elementi  $c_{jj}$  ( $j=1, 2, \dots, k$ ) sakrīt.

Jautājumu par to, vai  $b_j$  būtiski atšķiras no nulles, noskaidro, sastādot attiecību

$$t_{b_j} = \frac{b_j}{s_{b_j}}, \quad (29.32)$$

Sai attiecībai ir Stjudenta sadalījums ar brīvības pakāpju skaitu  $v=n-k-1$ . Ja  $|t_{b_j}| > t_{0,05}$ , tad ģenerālās regresijas koeficients  $\beta_j$  nav nulle.

**Piemērs.** Atrast atlikuma standartnovirzi, regresijas koeficientu kļūdas un pārbaudīt hipotēzēs  $\beta_1=0$ ,  $\beta_2=0$  piemērā par ražu atkarību no hidrotermiskajiem koeficientiem (sk. 235. §), pieņemot, ka apskatītais 9 gadu kopums ir rendomizēts paraugs no normālas kopas. Dabūjam

$$s_{y.12} = \sqrt{\frac{276,05}{9-2-1}} \approx 6,8,$$

$$c_{11} = \frac{Q_{22}}{D}; \quad c_{22} = \frac{Q_{11}}{D}, \quad \text{kur } D = \begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{vmatrix}.$$

$$D = \begin{vmatrix} 0,017937 & -0,002042 \\ -0,002042 & 0,021328 \end{vmatrix} \approx 0,000379,$$

$$c_{11} = 56,27; \quad s_{b_1} = 6,8 \sqrt{56,27} \approx 51,0,$$

$$|t_{b_1}| = 0,60 < 2,45 = t_{0,05}.$$

**Kā redzam,**  $|t_{b_1}| < t_{0,05}$ , tāpēc hipotēzi  $\beta_1=0$  nevar noraidīt. Līdzīgu slēdzienu var izdarīt par koeficientu  $\beta_2$ . Šādi rezultāti izskaidrojami galvenokārt ar mazo novērojumu gadu skaitu.



Tā kā atlikuma dispersijai saucējs ir  $n-k-1$ , tad saprotams, ka pie maza novērojumu skaita  $n$  jāizvairās no liela faktoriālo pazīmju skaita  $k$ . Pie maza  $n$  un liela  $k$  daudzfaktoru korelācijas koeficients  $R$  var iznākt ļoti liels, taču atrastajai regresijai nebūs vispārinājuma spēka. Tā, piemēram, ja ir 3 skaitļu trijotnes ( $n=3$ ) un divas faktoriālās pazīmes ( $k=2$ ), tad regresijas plakne ies tieši caur visiem trijiem punktiem un nekādas izkliedes *ap* šo plakni nebūs, t. i.,  $Q_z=0$ . Līdz ar to  $R^2=100\%$ ,  $R=1$ , bet  $s^2_{y.12} = \frac{0}{0}$ , tas nozīmē, ka jautājums par regresijas vispārināšanu nav izvirzāms.

# PIELIKUMS

I tabula

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$$

| t   | 0      | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    |
|-----|--------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 0,0 | 0,3989 | 3989 | 3989 | 3988 | 3986 | 3984 | 3982 | 3980 | 3977 | 3973 |
| 0,1 | 3970   | 3965 | 3961 | 3956 | 3951 | 3945 | 3939 | 3932 | 3925 | 3918 |
| 0,2 | 3910   | 3902 | 3894 | 3885 | 3876 | 3867 | 3857 | 3847 | 3836 | 3825 |
| 0,3 | 3814   | 3802 | 3790 | 3778 | 3765 | 3752 | 3739 | 3726 | 3712 | 3697 |
| 0,4 | 3683   | 3668 | 3653 | 3637 | 3621 | 3605 | 3589 | 3572 | 3555 | 3538 |
| 0,5 | 3521   | 3503 | 3485 | 3467 | 3448 | 3429 | 3410 | 3391 | 3372 | 3352 |
| 0,6 | 3332   | 3312 | 3292 | 3271 | 3251 | 3230 | 3209 | 3187 | 3166 | 3144 |
| 0,7 | 3123   | 3101 | 3079 | 3056 | 3034 | 3011 | 2989 | 2966 | 2943 | 2920 |
| 0,8 | 2897   | 2874 | 2850 | 2827 | 2803 | 2780 | 2756 | 2732 | 2709 | 2685 |
| 0,9 | 2661   | 2637 | 2613 | 2589 | 2565 | 2541 | 2516 | 2492 | 2468 | 2444 |
| 1,0 | 0,2420 | 2396 | 2371 | 2347 | 2323 | 2299 | 2275 | 2251 | 2227 | 2203 |
| 1,1 | 2179   | 2155 | 2131 | 2107 | 2083 | 2059 | 2036 | 2012 | 1989 | 1965 |
| 1,2 | 1942   | 1919 | 1895 | 1872 | 1849 | 1826 | 1804 | 1781 | 1758 | 1736 |
| 1,3 | 1714   | 1691 | 1669 | 1647 | 1626 | 1604 | 1582 | 1562 | 1539 | 1518 |
| 1,4 | 1497   | 1476 | 1456 | 1435 | 1415 | 1394 | 1374 | 1354 | 1334 | 1315 |
| 1,5 | 1295   | 1276 | 1257 | 1238 | 1219 | 1200 | 1182 | 1163 | 1145 | 1127 |
| 1,6 | 1109   | 1092 | 1074 | 1057 | 1040 | 1023 | 1006 | 0989 | 0973 | 0957 |
| 1,7 | 0940   | 0925 | 0909 | 0893 | 0878 | 0863 | 0848 | 0833 | 0818 | 0804 |
| 1,8 | 0790   | 0775 | 0761 | 0748 | 0734 | 0721 | 0707 | 0694 | 0681 | 0669 |
| 1,9 | 0656   | 0644 | 0632 | 0620 | 0608 | 0596 | 0584 | 0573 | 0562 | 0551 |
| 2,0 | 0,0540 | 0529 | 0519 | 0508 | 0498 | 0488 | 0487 | 0468 | 0459 | 0449 |
| 2,1 | 0440   | 0431 | 0422 | 0413 | 0404 | 0396 | 0387 | 0379 | 0371 | 0363 |
| 2,2 | 0355   | 0347 | 0339 | 0332 | 0325 | 0317 | 0310 | 0303 | 0297 | 0290 |
| 2,3 | 0283   | 0277 | 0270 | 0264 | 0258 | 0252 | 0246 | 0241 | 0235 | 0229 |
| 2,4 | 0224   | 0219 | 0213 | 0208 | 0203 | 0198 | 0194 | 0189 | 0184 | 0180 |
| 2,5 | 0175   | 0171 | 0167 | 0163 | 0158 | 0154 | 0151 | 0147 | 0143 | 0139 |
| 2,6 | 0136   | 0132 | 0129 | 0126 | 0122 | 0119 | 0116 | 0113 | 0110 | 0107 |
| 2,7 | 0104   | 0101 | 0099 | 0096 | 0093 | 0091 | 0088 | 0086 | 0084 | 0081 |
| 2,8 | 0079   | 0077 | 0075 | 0073 | 0071 | 0069 | 0067 | 0065 | 0063 | 0061 |
| 2,9 | 0060   | 0058 | 0056 | 0055 | 0053 | 0051 | 0050 | 0048 | 0047 | 0046 |
| 3,0 | 0,0044 | 0043 | 0042 | 0040 | 0039 | 0038 | 0037 | 0036 | 0035 | 0034 |
| 3,1 | 0033   | 0032 | 0031 | 0030 | 0029 | 0028 | 0027 | 0026 | 0025 | 0025 |
| 3,2 | 0024   | 0023 | 0022 | 0022 | 0021 | 0020 | 0020 | 0019 | 0018 | 0018 |
| 3,3 | 0017   | 0017 | 0016 | 0016 | 0015 | 0015 | 0014 | 0014 | 0013 | 0013 |
| 3,4 | 0012   | 0012 | 0012 | 0011 | 0011 | 0010 | 0010 | 0010 | 0009 | 0009 |
| 3,5 | 0009   | 0008 | 0008 | 0008 | 0008 | 0007 | 0007 | 0007 | 0007 | 0006 |
| 3,6 | 0006   | 0006 | 0006 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0004 |
| 3,7 | 0004   | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 |
| 3,8 | 0003   | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 |
| 3,9 | 0002   | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0001 | 0001 |

Varbūtību integrālis

II tabula

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

| <i>t</i> | $\Phi(t)$ | <i>t</i> | $\Phi(t)$ | <i>t</i> | $\Phi(t)$ | <i>t</i> | $\Phi(t)$ | <i>t</i> | $\Phi(t)$ |
|----------|-----------|----------|-----------|----------|-----------|----------|-----------|----------|-----------|
| 0,00     | 0,0000    | 0,50     | 0,3829    | 1,00     | 0,6827    | 1,50     | 0,8664    | 2,00     | 0,9545    |
| 01       | 0,0080    | 51       | 0,3899    | 01       | 0,6875    | 51       | 0,8690    | 05       | 0,9596    |
| 02       | 0,0160    | 52       | 0,3969    | 02       | 0,6923    | 52       | 0,8715    | 10       | 0,9643    |
| 03       | 0,0239    | 53       | 0,4039    | 03       | 0,6970    | 53       | 0,8740    | 15       | 0,9684    |
| 04       | 0,0319    | 54       | 0,4108    | 04       | 0,7017    | 54       | 0,8764    | 20       | 0,9722    |
| 0,05     | 0,0399    | 0,55     | 0,4177    | 1,05     | 0,7063    | 1,55     | 0,8789    | 2,25     | 0,9756    |
| 06       | 0,0478    | 56       | 0,4245    | 06       | 0,7109    | 56       | 0,8812    | 30       | 0,9786    |
| 07       | 0,0558    | 57       | 0,4313    | 07       | 0,7154    | 57       | 0,8836    | 35       | 0,9812    |
| 08       | 0,0638    | 58       | 0,4381    | 08       | 0,7199    | 58       | 0,8859    | 40       | 0,9836    |
| 09       | 0,0717    | 59       | 0,4448    | 09       | 0,7243    | 59       | 0,8882    | 45       | 0,9857    |
| 0,10     | 0,0797    | 0,60     | 0,4515    | 1,10     | 0,7287    | 1,60     | 0,8904    | 2,50     | 0,9876    |
| 11       | 0,0876    | 61       | 0,4581    | 11       | 0,7330    | 61       | 0,8926    | 55       | 0,9892    |
| 12       | 0,0955    | 62       | 0,4647    | 12       | 0,7373    | 62       | 0,8948    | 60       | 0,9907    |
| 13       | 0,1034    | 63       | 0,4713    | 13       | 0,7415    | 63       | 0,8969    | 65       | 0,9920    |
| 14       | 0,1113    | 64       | 0,4778    | 14       | 0,7457    | 64       | 0,8990    | 70       | 0,9931    |
| 0,15     | 0,1192    | 0,65     | 0,4843    | 1,15     | 0,7499    | 1,65     | 0,9011    | 2,75     | 0,9940    |
| 16       | 0,1271    | 66       | 0,4907    | 16       | 0,7540    | 66       | 0,9031    | 80       | 0,9949    |
| 17       | 0,1350    | 67       | 0,4971    | 17       | 0,7580    | 67       | 0,9051    | 85       | 0,9956    |
| 18       | 0,1428    | 68       | 0,5035    | 18       | 0,7620    | 68       | 0,9070    | 90       | 0,9963    |
| 19       | 0,1507    | 69       | 0,5098    | 19       | 0,7660    | 69       | 0,9090    | 95       | 0,9968    |
| 0,20     | 0,1585    | 0,70     | 0,5161    | 1,20     | 0,7699    | 1,70     | 0,9109    | 3,00     | 0,99730   |
| 21       | 0,1663    | 71       | 0,5223    | 21       | 0,7737    | 71       | 0,9127    | 10       | 0,99806   |
| 22       | 0,1741    | 72       | 0,5285    | 22       | 0,7775    | 72       | 0,9146    | 20       | 0,99863   |
| 23       | 0,1819    | 73       | 0,5346    | 23       | 0,7813    | 73       | 0,9164    | 30       | 0,99903   |
| 24       | 0,1897    | 74       | 0,5407    | 24       | 0,7850    | 74       | 0,9181    | 40       | 0,99933   |
| 0,25     | 0,1974    | 0,75     | 0,5467    | 1,25     | 0,7887    | 1,75     | 0,9199    | 3,50     | 0,99953   |
| 26       | 0,2051    | 76       | 0,5527    | 26       | 0,7923    | 76       | 0,9216    | 60       | 0,99968   |
| 27       | 0,2128    | 77       | 0,5587    | 27       | 0,7959    | 77       | 0,9233    | 70       | 0,99978   |
| 28       | 0,2205    | 78       | 0,5646    | 28       | 0,7995    | 78       | 0,9249    | 80       | 0,99986   |
| 29       | 0,2282    | 79       | 0,5705    | 29       | 0,8029    | 79       | 0,9265    | 90       | 0,99990   |
| 0,30     | 0,2358    | 0,80     | 0,5763    | 1,30     | 0,8064    | 1,80     | 0,9281    | 4,00     | 0,99994   |
| 31       | 0,2434    | 81       | 0,5821    | 31       | 0,8098    | 81       | 0,9297    |          |           |
| 32       | 0,2510    | 82       | 0,5878    | 32       | 0,8132    | 82       | 0,9312    |          |           |
| 33       | 0,2586    | 83       | 0,5935    | 33       | 0,8165    | 83       | 0,9328    |          |           |
| 34       | 0,2661    | 84       | 0,5991    | 34       | 0,8198    | 84       | 0,9342    |          |           |
| 0,35     | 0,2737    | 0,85     | 0,6047    | 1,35     | 0,8230    | 1,85     | 0,9357    |          |           |
| 36       | 0,2812    | 86       | 0,6102    | 36       | 0,8262    | 86       | 0,9371    |          |           |
| 37       | 0,2886    | 87       | 0,6157    | 37       | 0,8293    | 87       | 0,9385    |          |           |
| 38       | 0,2961    | 88       | 0,6211    | 38       | 0,8324    | 88       | 0,9399    |          |           |
| 39       | 0,3035    | 89       | 0,6265    | 39       | 0,8355    | 89       | 0,9412    |          |           |
| 0,40     | 0,3108    | 0,90     | 0,6319    | 1,40     | 0,8385    | 1,90     | 0,9426    |          |           |
| 41       | 0,3182    | 91       | 0,6372    | 41       | 0,8415    | 91       | 0,9439    |          |           |
| 42       | 0,3255    | 92       | 0,6424    | 42       | 0,8444    | 92       | 0,9451    |          |           |
| 43       | 0,3328    | 93       | 0,6476    | 43       | 0,8473    | 93       | 0,9464    |          |           |
| 44       | 0,3401    | 94       | 0,6528    | 44       | 0,8501    | 94       | 0,9476    |          |           |
| 0,45     | 0,3473    | 0,95     | 0,6579    | 1,45     | 0,8529    | 1,95     | 0,9488    |          |           |
| 46       | 0,3545    | 96       | 0,6629    | 46       | 0,8557    | 96       | 0,9500    |          |           |
| 47       | 0,3616    | 97       | 0,6680    | 47       | 0,8584    | 97       | 0,9512    |          |           |
| 48       | 0,3688    | 98       | 0,6729    | 48       | 0,8611    | 98       | 0,9523    |          |           |
| 49       | 0,3759    | 99       | 0,6778    | 49       | 0,8638    | 99       | 0,9534    |          |           |



$t_1$  vērtības dotajam  $\gamma$  un dotajai varbūtībai

$$P = P\{|t| < t_1\}$$

| $\gamma \backslash P$   | Ticamības līmeņi |       |        |        |         |
|-------------------------|------------------|-------|--------|--------|---------|
|                         | 0,5              | 0,9   | 0,95   | 0,99   | 0,999   |
| 1                       | 1,000            | 6,314 | 12,706 | 63,657 | 636,619 |
| 2                       | 0,816            | 2,920 | 4,303  | 9,925  | 31,598  |
| 3                       | 0,765            | 2,353 | 3,182  | 5,841  | 12,941  |
| 4                       | 0,741            | 2,132 | 2,776  | 4,604  | 8,610   |
| 5                       | 0,727            | 2,015 | 2,571  | 4,032  | 6,859   |
| 6                       | 0,718            | 1,943 | 2,447  | 3,707  | 5,959   |
| 7                       | 0,714            | 1,895 | 2,365  | 3,499  | 5,405   |
| 8                       | 0,706            | 1,860 | 2,306  | 3,355  | 5,041   |
| 9                       | 0,703            | 1,833 | 2,262  | 3,250  | 4,781   |
| 10                      | 0,700            | 1,812 | 2,228  | 3,169  | 4,587   |
| 11                      | 0,697            | 1,796 | 2,201  | 3,106  | 4,437   |
| 12                      | 0,695            | 1,782 | 2,179  | 3,055  | 4,318   |
| 13                      | 0,694            | 1,771 | 2,160  | 3,012  | 4,221   |
| 14                      | 0,692            | 1,761 | 2,145  | 2,977  | 4,140   |
| 15                      | 0,691            | 1,753 | 2,131  | 2,947  | 4,073   |
| 16                      | 0,690            | 1,746 | 2,120  | 2,921  | 4,015   |
| 17                      | 0,689            | 1,740 | 2,110  | 2,898  | 3,965   |
| 18                      | 0,688            | 1,734 | 2,101  | 2,878  | 3,922   |
| 19                      | 0,688            | 1,729 | 2,093  | 2,861  | 3,883   |
| 20                      | 0,687            | 1,725 | 2,086  | 2,845  | 3,850   |
| 21                      | 0,686            | 1,721 | 2,080  | 2,831  | 3,819   |
| 22                      | 0,686            | 1,717 | 2,074  | 2,819  | 3,792   |
| 23                      | 0,685            | 1,714 | 2,069  | 2,807  | 3,767   |
| 24                      | 0,685            | 1,711 | 2,064  | 2,797  | 3,745   |
| 25                      | 0,684            | 1,708 | 2,060  | 2,787  | 3,725   |
| 26                      | 0,684            | 1,706 | 2,056  | 2,779  | 3,707   |
| 27                      | 0,684            | 1,703 | 2,052  | 2,771  | 3,690   |
| 28                      | 0,683            | 1,701 | 2,048  | 2,763  | 3,674   |
| 29                      | 0,683            | 1,699 | 2,045  | 2,756  | 3,659   |
| 30                      | 0,683            | 1,697 | 2,042  | 2,750  | 3,646   |
| 40                      | 0,681            | 1,684 | 2,021  | 2,704  | 3,551   |
| 60                      | 0,679            | 1,671 | 2,000  | 2,660  | 3,460   |
| 120                     | 0,677            | 1,658 | 1,980  | 2,617  | 3,373   |
| $\infty$                | 0,675            | 1,645 | 1,960  | 2,576  | 3,291   |
| $\gamma \backslash 1-P$ | Būtiskuma līmeņi |       |        |        |         |
|                         | 0,5              | 0,1   | 0,05   | 0,01   | 0,001   |

Robežvērtības korelācijas koeficienta būtiskuma novērtēšanai

| v  | Būtiskuma<br>līmeņi |       | v  | Būtiskuma<br>līmeņi |       | v    | Būtiskuma<br>līmeņi |       |
|----|---------------------|-------|----|---------------------|-------|------|---------------------|-------|
|    | 5%                  | 1%    |    | 5%                  | 1%    |      | 5%                  | 1%    |
| 1  | 0,997               | 1,000 | 16 | 0,468               | 0,590 | 35   | 0,325               | 0,418 |
| 2  | 0,950               | 0,990 | 17 | 0,456               | 0,575 | 40   | 0,304               | 0,393 |
| 3  | 0,878               | 0,959 | 18 | 0,444               | 0,561 | 45   | 0,288               | 0,372 |
| 4  | 0,811               | 0,917 | 19 | 0,433               | 0,549 | 50   | 0,273               | 0,354 |
| 5  | 0,754               | 0,874 | 20 | 0,423               | 0,537 | 60   | 0,250               | 0,325 |
| 6  | 0,707               | 0,834 | 21 | 0,413               | 0,526 | 70   | 0,232               | 0,302 |
| 7  | 0,666               | 0,798 | 22 | 0,404               | 0,515 | 80   | 0,217               | 0,283 |
| 8  | 0,632               | 0,765 | 23 | 0,396               | 0,505 | 90   | 0,205               | 0,267 |
| 9  | 0,602               | 0,735 | 24 | 0,388               | 0,496 | 100  | 0,195               | 0,254 |
| 10 | 0,576               | 0,708 | 25 | 0,381               | 0,487 | 125  | 0,174               | 0,228 |
| 11 | 0,553               | 0,684 | 26 | 0,374               | 0,478 | 150  | 0,159               | 0,208 |
| 12 | 0,532               | 0,661 | 27 | 0,367               | 0,470 | 200  | 0,138               | 0,181 |
| 13 | 0,514               | 0,641 | 28 | 0,361               | 0,463 | 300  | 0,113               | 0,148 |
| 14 | 0,497               | 0,623 | 29 | 0,355               | 0,456 | 400  | 0,098               | 0,128 |
| 15 | 0,482               | 0,606 | 30 | 0,349               | 0,449 | 500  | 0,088               | 0,115 |
|    |                     |       |    |                     |       | 1000 | 0,062               | 0,081 |

## ATBILDES

### 1. nodaļa

1.  $|AB| = \sqrt{13}$ ,  $|BC| = \sqrt{73}$ ,  $|CA| = 5\sqrt{2}$ . 2.  $\left(\frac{19}{6}; 0\right)$ . 3.  $\left(-\frac{6}{5}; \frac{13}{30}\right)$ . 4.  $\left(\frac{5}{4}; -\frac{5}{4}\right)$ ,  $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ ,  $\left(-\frac{9}{4}; \frac{1}{4}\right)$ . 5.  $(1; 3)$ . 6.  $\sqrt{13} \approx 3,6$ . 7. 56. 8. 27.

### 2. nodaļa

3.  $x - 2y = 0$ ,  $x + 2y = 0$ . 4.  $x + y - 8 = 0$ . 5.  $x^2 + y^2 - 4y = 0$ . 6. a) koordinātu asis; b) koordinātu sākuma punkts; c) divas koordinātu asīm paralēlas taisnes, kas krustojas punktā  $(1; -2)$ ; d) divas ordinātu asij paralēlas taisnes; e) reālu punktu, kuru koordinātes apmierinātu vienādojumu, nav, un tādēļ šis vienādojums nekādu līniju nedefinē; f) riņķa līnija ar centru koordinātu sākumā un rādiusu 2. 7.  $A, B, D$  atrodas,  $C$  un  $E$  neatrodas. 8.  $(4; 4)$ ,  $(-4; -4)$ .

### 3. nodaļa

1.  $y = \sqrt{3}x + 3$ . 2.  $3x - 2y - 8 = 0$ , punkti  $A, B, D$  atrodas uz taisnes, bet  $C$  un  $E$  nav uz taisnes. 3. 1)  $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ , 2)  $\frac{x}{-4} + \frac{y}{8} = 1$ , 3)  $\frac{x}{-\frac{10}{3}} + \frac{y}{-\frac{5}{2}} = 1$ , 4)  $\frac{x}{\frac{12}{5}} + \frac{y}{-\frac{4}{5}} = 1$ . 4. 1)  $y = -\frac{2}{3}x + 2$ , 2)  $y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$ , 3)  $y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{2}$ , 4)  $y = \frac{5}{3}x - 4$ . 6.  $\varphi = 8^\circ 09'$ . 7.  $3x - y + 15 = 0$ . 8.  $6x - 5y + 34 = 0$ . 9.  $k = \frac{5}{3}$ . 10.  $5x - 4y + 17 = 0$ . 11.  $4x - 22y + 41 = 0$ . 13.  $A(3; 4)$ ,  $B(1; 2)$ ,  $C(-3; 1)$ . 14.  $7x - 2y + 8 = 0$ . 15. 1) nav normālvienādojums, jo  $\frac{2}{3} > 0$ ,  $p = \frac{2}{3}$ ; 2) ir normālvienādojums, jo  $\left(\frac{7}{25}\right)^2 + \left(-\frac{24}{25}\right)^2 = 1$  un  $-\frac{13}{25} < 0$ ;  $p = \frac{13}{25}$ ; 3) nav



normālvienādojums, jo  $15^2 + 8^2 \neq 1$ ,  $\lambda = \frac{1}{17}$ ,  $p = \frac{8}{15}$ . 16. 1)  $\frac{2x+3y-6}{\sqrt{13}} = 0$ ;  
 2)  $\frac{2x-3y-8}{-\sqrt{13}} = 0$ ; 3)  $\frac{3x+4y+10}{-5} = 0$ ; 4)  $\frac{5x-3y-12}{\sqrt{34}} = 0$ . 17.  $d_1 = \frac{4}{13}$ ;  $d_2 = \frac{49}{13}$ .

#### 4. nodaļa

1.  $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 16$ . 2.  $x^2 + y^2 = 25$ . 3. 1)  $r=3$ ,  $C(3; 0)$ ; 2)  $r=5$ ,  
 $C(-3; 4)$ ; 3)  $r=15$ ,  $C(5; -12)$ ; 4)  $r = \frac{4}{3}$ ,  $C\left(-1; \frac{2}{3}\right)$ . 4. 1)  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ,  
 2)  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ , 3)  $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$ . 5. 1)  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , 2)  $\varepsilon = \sqrt{\frac{2}{17}}$ , 3)  $\varepsilon = \frac{4}{5}$ . 6. 5 un  
 2. 7.  $(3; -2)$  un  $\left(-\frac{117}{31}; \frac{22}{31}\right)$ . 8.  $M_1$  un  $M_2$  atrodas iekšpus elipses,  $M_3$  un  
 $M_4$  — ārpus tās,  $M_5$  atrodas uz elipses. 9. punkts  $M_3$ . 10. 1)  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$ ,  
 2)  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ , 3)  $\frac{x^2}{576} - \frac{y^2}{100} = 1$ , 4)  $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ . 11.  $F_1(-\sqrt{20}; 0)$ ,  $F_2(\sqrt{20}; 0)$ ,  
 $\varepsilon = \frac{\sqrt{20}}{4}$ ,  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{4}{3}$ . 12.  $\frac{x^2}{432} - \frac{y^2}{75} = 1$ . 13. 1)  $F(1; 0)$ ; 2)  $F(0; 1)$ ; 3)  $F(-2; 0)$ ;  
 4)  $F(0; -2)$ . 14.  $y^2 = 4x$ . 15. 1)  $y^2 = 9x$ ; 2)  $y = -x^2$ .

#### 5. nodaļa

1. a)  $O'(2; 1)$ ,  $x=2$ ,  $p = \frac{1}{4}$ ; b)  $O'(1; 1)$ ,  $y=1$ ,  $q = \frac{1}{4}$ . 2.  $F\left(2; \frac{5}{4}\right)$ . 3. 1) elipse  
 ar centru punktā  $O'(-2; 1)$ , pusasis  $\sqrt{6}$  un  $\sqrt{3}$ , lielā ass paralēla  $Ox$  asij,  
 mazā —  $Oy$  asij, 2) hiperbola ar centru punktā  $O'(1; -3)$ , reālā pusass 1,  
 imaginārā pusass  $\frac{1}{2}$ , reālā ass paralēla  $Oy$  asij, imaginārā —  $Ox$  asij, 3) pa-  
 rabola, kuras simetrijas ass paralēla  $Oy$  asij, virsotne punktā  $O'\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ ;  
 izliekta uz augšu, parametrs  $\frac{1}{4}$ .

#### 6. nodaļa

1.  $y|x=1 = \frac{1}{2}$ . 2.  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4a^2-1}$ ,  $\frac{1}{x^2+2x}$ ,  $\frac{1}{x^2-1}$ ,  $\frac{x^2}{1-x^2}$ ,  $x^2-1$ ,  $\frac{1}{x-1}$ . 3.  $x_1 =$   
 $= -1$ ,  $x_2 = 3$ . 4.  $|x| < 2$ ; 2)  $x > 0$ ; 3)  $x > -3$ ; 4)  $x \leq \frac{5}{2}$ ; 5) visu reālo  
 skaitļu ass, izņemot  $x = \pm 1$ ; 6)  $-\infty < x < +\infty$ ; 7) visa reālo skaitļu ass, iz-  
 ņemot  $x=0$ ,  $x=-1$ ,  $x=+1$ , t. i., četri intervāli  $-\infty < x < -1$ ,  $-1 < x < 0$ ,  
 $0 < x < 1$ ,  $1 < x < +\infty$ . 6. 1)  $y = \pm \sqrt{1-x^2}$ ; vienādojums segmentā  $[-1; 1]$   
 definē divas funkcijas  $y = \sqrt{1-x^2}$  un  $y = -\sqrt{1-x^2}$ ; 2)  $y = \frac{\log_2 5}{x}$ ; 3)  $y =$

$=\frac{1000}{x}-1$ . 7. 1)  $y=\frac{1-x}{3}$ ; 2) ja definīcijas apgabals ir visi  $x\geq 0$ , tad inversā funkcija  $y=\sqrt{x-1}$ ; 3)  $y=\lg x-1$ ; 4)  $y=2^{\frac{1}{x}}$ ; 5)  $y=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{3}$ . 8.  $y=(a^2+1)\sqrt{a^2+1}$ . 9. 1)  $y=\sqrt{z}$ ,  $z=x+1$ ; 2)  $y=u^3$ ,  $u=\cos z$ ,  $z=2x$ ; 3)  $y=\lg z$ ,  $z=\sin x$ ; 4)  $y=3^u$ ,  $u=z^2$ ,  $z=2x+1$ .

## 7. nodaļa

7.  $\frac{7}{4}$ . 8.  $\infty$ . 9. 0. 10. -4. 11. 1. 12.  $\frac{7}{8}$ . 13. 0. 14.  $\infty$ . 15.  $+\infty$ . 16.  $-\infty$ . 17.  $\frac{2}{3}$ . 18. 0. 19.  $\infty$ . 20. 8. 21. 1. 22. 0, kad  $x\rightarrow+\infty$ ; -2, kad  $x\rightarrow-\infty$ . 23.  $\frac{1}{4}$ . 24. -40. 25.  $\frac{2}{5}$ . 26.  $\frac{2}{3}$ . 27.  $\frac{1}{2}$ . 28.  $\frac{1}{2}$ . 29.  $e^3$ . 30.  $\sqrt[3]{e}$ . 31.  $\frac{1}{e}$ . 32.  $e^2$ . 33. 0, kad  $x\rightarrow+\infty$ ;  $-\infty$ , kad  $x\rightarrow-\infty$ .

## 8. nodaļa

1.  $6x$ ; 6. 2.  $3x^2+2$ ; 2. 3.  $-\frac{1}{2x^2}$ ;  $-\frac{1}{2}$ . 4.  $v=6$  cm/sek. 5.  $v=2$  m/sek. 8.  $6x-y-8=0$ ;  $x+6y+11=0$ . 9.  $x+2y+2=0$ ;  $4x-2y+3=0$ .

## 9. nodaļa

1.  $y'=4x^3-9x^2+17$ . 2.  $s'_t=1-3t+2t^2-5t^3$ . 3.  $x'_t=2a^2t$ . 4.  $y'=3x^2+2x+2$ . 5.  $y'=4x^3-9x^2+6x-2$ . 6.  $y'=8(6x-1)$ . 7.  $y'=-10x^4+24x^2+42$ . 8.  $y'=\frac{2}{(3x+2)^2}$ . 9.  $y'=\frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}$ . 10.  $y'=\frac{8x}{(1-x^2)^2}$ . 11.  $f'(-1)=\frac{13}{25}$ . 12.  $y'=x^2$ . 13.  $y'=\frac{6x^6}{a}$ . 14.  $f'(t)=-\frac{6t^2}{(t^3-1)^2}$ . 15.  $y'=6x^2-\frac{1}{2x^2}+\frac{6}{x^3}+\frac{6}{x^7}$ . 16.  $y'=-3x^{-\frac{3}{2}}-x^{-\frac{2}{3}}$ . 17.  $y'=\frac{5}{2}x\sqrt{x}-\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}+\frac{3}{4\sqrt{x}}$ . 18.  $y'=-\frac{2}{x\sqrt{x}}+8\sqrt[3]{x}-\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$ . 19. 24 sek. 20. Apm. 283 m. 21.  $x'_t=k(a-x)^2$ . 23.  $y'=2x\sin x+x^2\cos x$ . 24.  $y'=\cos 2x$ . 25.  $y'=-\frac{x\sin x+2\cos x}{x^3}$ . 27.  $y'=\ln x$ . 28.  $y'=x^2(\ln x+1)$ . 29.  $y'=\frac{x+1-x\ln x}{x(x+1)^2}$ . 30.  $y'=5(2x^3+1)^4(6x^2+1)$ . 31.  $y'=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-1}}$ . 32.  $f'(t)=\frac{5t^2+4t}{2\sqrt{t+1}}$ . 33.  $y'=\frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ . 34.  $s'_t=-\frac{1}{t\sqrt{t^2+2t}}$ . 35.  $y'=-\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$ . 36.  $x'_t=\frac{4t-3t^2}{2\sqrt{(1-t)^3}}$ . 37.  $y'=15(\cos 5x-\sin 3x)$ . 38.  $y'=2x(\sin 2x+x\cos 2x)$ . 39.  $y'=-\frac{2(x+1)\sin(2x-1)+\cos(2x-1)}{(x+1)^2}$ . 40.  $y'=4\sin 2x$ . 41.  $f'(\varphi)=\cos\varphi\times\cos 3\varphi-3\sin\varphi\cdot\sin 3\varphi=2\cos 4\varphi-\cos 2\varphi$ . 42.  $y'=\frac{2}{x^2-1}$ . 43.  $y'=\frac{2x-3}{x^2-3x+1}$ . 44.  $y'=\frac{2a}{a^2-x^2}$ . 45.  $y'=-\frac{2x}{1-x^4}$ . 46.  $y'=\frac{2}{x}(1+\ln x)$ . 47.  $y'=\frac{1}{x\ln x}$ . 48.  $y'=-$

$= \operatorname{ctg} x$ . 49.  $y' = 3 \lg(ex)$ . 50.  $y' = 0$ . Norādījums: izlietot sakarību starp dažādu bāzu logaritmiem. 51.  $y' = \frac{2x^3-1}{x(x^3+1)} \lg e$ . 52.  $y' = -\frac{3x^2}{1-2x^3} \lg e$ .  
 53.  $y' = -\operatorname{tg} x \cdot \lg e$ . 54.  $y' = \frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ . 55.  $y' = \frac{12}{\sin^2 6x}$ . 56.  $y' = 2 \sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x$ .  
 57.  $y' = \operatorname{tg}^2 x + \frac{2x \operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$ . 58.  $y' = \frac{x - \sin x}{x^2(1 + \cos x)}$ . 59.  $y' = \frac{1}{\sin x}$ . 60.  $y' = -\frac{2 \lg e}{\sin 2x}$ .  
 61.  $y' = x^2 e^x$ . 62.  $y' = e^x \left( \operatorname{ctg} x - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$ . 63.  $y' = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$ . 64.  $y' = x^2 10^x (3 + x \ln 10)$ .  
 65.  $y' = 5 \cdot 4^x \ln 4 - 4 \cdot 5^x \ln 5$ . 66.  $y' = e^{2x} + e^{-2x}$ . 67.  $y' = (2x^5 - 4x) e^{x^2}$ .  
 68.  $y' = e^{2x^2+5x-4} (4x+5)$ . 69.  $y' = 1$ . 70.  $y' = \frac{1}{1-e^x}$ . 71.  $s'_t = e^{-2t} [3 \cos(3t+1) - 2 \sin(3t+1)]$ .  
 72.  $y' = \frac{4 \ln 10}{(10^x - 10^{-x})^2}$ . 73.  $y' = (2^{-3x} - 2^{-x}) \ln 2$ . 74.  $y' = \frac{2^{3x}}{(x+1)^2} [3(x+1) \ln 2 - 1]$ .  
 75.  $T'_t = -kT$ . 76. 1)  $x'_t = k(a-x)$ ; 2)  $x'_t = k(a-x)(b-x)$ . 78. a)  $y' = -\frac{2x}{y}$ ; b)  $y = -1$ ,  $y' = 2$ ;  
 c)  $y = \pm \sqrt{3-2x^2}$ . 79. a)  $y' = \frac{3x^2-2y}{2y}$ ; b)  $y = +3$ ,  $y' = \frac{4}{3}$ ; c)  $y = \pm \sqrt{x^3-x^2+5}$ .  
 80. a)  $y' = \frac{2}{y}$ ; b)  $y = -2$ ;  $y' = -1$ ; c)  $y = \pm 2\sqrt{x}$ . 81.  $y' = -\frac{3(x+y)^2 - ay}{3(x+y)^2 - ax}$ .  
 82.  $y' = \frac{b^2 x}{a^2 y}$ . 83.  $v'_u = -\frac{v(3u^2 - 4uv + v^2)}{u(u^2 - 4uv + 3v^2)}$ . 84.  $4x - 3y + 1 = 0$ ;  $3x + 4y - 18 = 0$ .  
 85.  $y' = -x^{-x} (\ln x + 1)$ . 86.  $y' = 2(1+x)^{2x} \ln(1+x) + 2x(1+x)^{2x-1}$ . 87.  $y' = \frac{(x-2)^3 \sqrt{x+1}}{(x-5)^3} \left[ \frac{2}{x-2} + \frac{1}{3(x+1)} - \frac{3}{x-5} \right]$ .  
 88.  $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (\arccos x - \arcsin x)$ . 89.  $y' = +\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \frac{x}{1+x^2}$ .  
 90.  $y' = -\frac{x+2(1+x^2) \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x}{x^3(1+x^2)}$ . 91.  $y' = \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$ .  
 92.  $y' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ . 93.  $y' = 0$ . 94.  $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ . 95.  $y' = \frac{2}{4+x^2}$ . 96.  $y' = \frac{2x}{1+(1+x^2)^2}$ .  
 97.  $y' = \frac{2}{1+x^2}$ . 98.  $y'' = 80(1-2x)^3$ . 99.  $f''(t) = 2e^t (\cos t - \sin t)$ .  
 100.  $x''' = -\frac{2}{(1-t)^3}$ . 101. 2; 1; 0. 102.  $-9a$ ; 0;  $9a$  (cm/sek<sup>2</sup>). 103. 20,6 m/sek<sup>2</sup>,  $-9,8$  m/sek<sup>2</sup>.

## 10. nodaļa

1. a) neg. b) aug. 2. a) poz.; b) stacionāra. 3. a) poz.; b) dilst. 4. aug intervālā  $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ ; dilst intervālā  $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ . 5. aug intervālā  $(-\infty, -1)$  un  $(1, +\infty)$ ; dilst intervālā  $(-1, 1)$ . 6. aug intervālā  $(-\infty, +\infty)$ . 7. aug intervālā  $(-\infty, 0)$  un  $(0, +\infty)$ . 8.  $f(0) = 0$  maks.;  $f(1) = -1$  min.



9.  $f(-3) = -6$  maks.;  $f(3) = 6$  min. 10.  $f(0) = 0$  min. 11. izl. 12. iel. 13. iel.  
 14. infleks. punkts  $\left(\frac{5}{3}, \frac{20}{27}\right)$ ; izliek. interv.  $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$ ; ieliek. interv.  $\left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$ .  
 15. infleks. punktu nav, grafika ieliekta. 16.  $f(1) = \frac{1}{16}$  maks.;  $f(0) = 0$  min.  
 un  $f(2) = 0$  min. 17.  $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4}$  maks. 18.  $f(0) = 0$  min.;  $f(2) = \frac{4}{e^2}$  maks.  
 19. ekstrēmu nav. 20. punktā  $x=0$  ir min.;  $y|_{x=0} = -2$ . 21. 11 un 2. 22. 10  
 un 2. 23. 1 un -11. 24. 6; 3 un 4 cm. 25.  $\frac{20\sqrt{3}}{3}$  cm  $\approx 11,55$  cm. 26.  $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$   
 jeb  $293^\circ 56'$ . 31.  $x \approx 0,3$ . 32.  $x \approx 0,2$ . 33.  $x_1 \approx -3,1$ ;  $x_2 \approx 0,2$ ;  $x_3 \approx 2,9$ .

## 11. nodaļa

1.  $\Delta V = 4\pi \cdot 0,79$ ;  $4\pi \cdot 0,11$ ;  $4\pi \cdot 0,0101$ .  $dV = 4\pi \cdot 0,5$ ;  $4\pi \cdot 0,1$ ;  $4\pi \cdot 0,01$ . 2.  $\Delta V =$   
 $= 4\pi(0,5R^2 + 0,25R + 0,04)$ ;  $4\pi(0,1R^2 + 0,01R + 0,0003)$ ;  $4\pi(0,01R^2 + 0,0001R)$   $dV =$   
 $= 4\pi \cdot 0,5R^2$ ;  $4\pi \cdot 0,1R^2$ ;  $4\pi \cdot 0,01R^2$ . 3.  $dy = 2(x+1)dx$ . 4.  $dy = -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)dx$ .  
 5.  $du = 2 \cos 2x dx$ . 6.  $dx = -\frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}}$ . 7.  $dv = \frac{2(1-t^2)}{1+t^2} dt$ . 8.  $dy = \frac{dx}{1-x}$ . 9.  $dy =$   
 $= \lg e \cdot \operatorname{ctg} x dx$ . 10.  $dy = \frac{2 \lg e}{\sin 2x} dx$ . 11.  $78,5 \text{ cm}^2$ ,  $0,3 \text{ cm}^2$ ,  $0,004$  jeb  $0,4\%$ ;  
 $0,1 \text{ mm}$ ,  $0,002$  jeb  $0,2\%$ . 12.  $V = 524 \pm 3 \text{ cm}^3$ . 13.  $0,515$ . 14.  $\bar{1},712$ . 15.  $1-a$ .  
 16.  $1 + \frac{2}{3} a$ . 17.  $1 - \frac{1}{2} a$ . 18.  $a$ . 19.  $a$ .

## 12. nodaļa

1.  $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y - 4y^3$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 - 12xy^2$ . 2.  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2\sqrt{y} - \frac{y}{3x\sqrt{x}}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ . 3.  $\frac{\partial z}{\partial x} =$   
 $= \frac{x}{x^2+y^2}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2}$ . 4.  $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{v} + \frac{v}{u^2}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{u}{v^2} - \frac{1}{u}$ . 5.  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2y}{x^2 \sin \frac{y}{x}}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} =$   
 $= -\frac{2}{x \sin \frac{y}{x}}$ . 6.  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2}{y} e^{-\frac{x}{y}}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x}{y^2} e^{-\frac{x}{y}}$ . 7.  $\frac{\partial t}{\partial u} = -\frac{v}{u^2+v^2}$ ,  $\frac{\partial t}{\partial v} = \frac{u}{u^2+v^2}$ .  
 8.  $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 - 4yz$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z} = -2y^2 + 3z^2$ . 9.  $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x^3+xy^2+xz^2}(3x^2+y^2+z^2)$ ,  
 $\frac{\partial u}{\partial y} = e^{x^3+xy^2+xz^2}(2xy)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z} = e^{x^3+xy^2+xz^2}2xz$ . 10. 1)  $dz = (3x^2y - 4y^3)dx + (x^3 -$   
 $- 12xy^2)dy$  utt. 11.  $0,08$ . 12.  $-0,1$ . 13.  $524 \text{ cm}^3$ ;  $6,8 \text{ cm}^3$ ;  $0,013$  jeb  $1,3\%$ ;  
 $0,2 \text{ mm}$ ;  $0,004$  jeb  $0,4\%$ ;  $1 \text{ mm}$ ;  $0,005$  jeb  $0,5\%$ . 14.  $V = 3000 \pm 15 \text{ cm}^3$ .  
 15.  $\left(\frac{19}{32}; \frac{7}{32}\right)$ . 16.  $(0; 0)$ ,  $\left(0; -\frac{5}{3}\right)$ ,  $(2; 1)$ ,  $(-2; -1)$ . 17.  $(7; 2; 1)$ .  
 18.  $x^3(\ln x + 1)$ , salīdzināt ar 77. §. 2. piemēru.

1.  $\frac{1}{4}x^4 + C$ ,  $\ln x + C$ ,  $-\cos x + C$ ,  $\sin x + C$ . 2.  $\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C$  utt.
3.  $\frac{1}{4}x^4 - 5$ . 4.  $-3x + C$ ,  $\frac{1}{5}x^5 + C$ ,  $-\frac{1}{x} + C$ ,  $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$ ,  $3\sqrt[3]{x} + C$ ,  $-\frac{2}{\sqrt{x}} + C$ ,  $\frac{2x}{\ln 2} + C$ . 5.  $2x^5 - 3x\sqrt[3]{x} + 3x - 2\ln|x| - \frac{5}{x} + C$ . 6.  $\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2x^4} + C$ .
7.  $18\sqrt[3]{x} - \frac{3}{\sqrt{x}} + 9x + C$ . 8.  $\frac{1}{2}x^2 + 2x + C$ . 9.  $2e^x + \cos x + 6x + C$ . 10.  $4\sin x + \frac{3}{\ln 10}10^x + C$ . 11.  $2\operatorname{tg} x + \frac{1}{2}\operatorname{ctg} x + C$ . 12.  $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$ . Norādījums: skaiti-  
tājā 1' vietā likt  $\sin^2 x + \cos^2 x$ . 13.  $2\operatorname{tg} x - x + C$ . 14.  $\sin x + \cos x + C$ .
15.  $\frac{1}{3}\arctg x - \frac{1}{2}\arcsin x + C$ . 16.  $\frac{1}{5}(x-3)^5 + C$ . 17.  $\frac{2}{3}\sqrt{3x-5} + C$ .
18.  $\frac{1}{2}\ln|1+2x| + \ln|1-2x| + C$ . 19.  $\frac{2}{3}\sqrt{x^3-6} + C$ . 20.  $\ln|x^5+x^2+1| + C$ .
21.  $\frac{1}{8}\ln(4x^2-9) + C$ . 22.  $\frac{1}{12}\sqrt{(4x^2+1)^3} + C$ . 23.  $-\frac{10^{-3x}}{3\ln 10} + C$ . 24.  $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$ .
25.  $\ln(e^x+4) + C$ . 26.  $\frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{4}\cos 4x + C$ . 27.  $2\sqrt{x^2+\sin x} + C$ . 28.  $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + C$ .
29.  $\frac{1}{6}\arctg \frac{3x}{2} + C$ . 30.  $\frac{1}{3}\arctg \frac{e^x}{3} + C$ . 31.  $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+3}\right| + C$ .
32.  $\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right| + C$ . 33.  $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|x\sqrt{3}+\sqrt{3x^2-2}| + C$ . 34.  $\ln|x+\sqrt{x^2+4}| + C$ .
35.  $\frac{1}{2}\arcsin \frac{2}{\sqrt{3}}x + C$ . 36.  $\frac{1}{2}(\arcsin x)^2 + C$ . 37.  $\frac{1}{4}(\arctg 2x)^2 + C$ .
38.  $\frac{1}{4}x^2(2\ln x - 1) + C$ . 39.  $(x^2-2x+2)e^x + C$ . 40.  $x\sin x + \cos x + C$ .
41.  $-\frac{x^2}{5}\cos 5x + \frac{2x}{25}\sin 5x + \frac{2}{125}\cos 5x + C$ . 42.  $(x^2-4x+6)e^x + C$ .
43.  $\frac{1}{13}e^{-3x}(2\sin 2x - 3\cos 2x) + C$ . 44.  $x\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$ .
45.  $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$ . 46.  $\frac{1}{2}(1+x^2)\arctg x - \frac{1}{2}x + C$ . 47.  $\frac{1}{2}\ln|3x^2-4x+$   
 $+3| + C$ . 48.  $\frac{1}{2}\ln|x^2-2x-3| + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right| + C = \frac{3}{4}\ln|x-3| + \frac{1}{4}\ln|x+1| + C$ .
49.  $-2\ln(x+1) + C$ . 50.  $\arctg(x-3) + C$ . 51.  $\frac{1}{2}\ln(4x^2+4x+5) - \arctg \frac{2x+1}{2} +$   
 $+C$ . 52.  $\ln|x-1+\sqrt{x^2-2x-2}| + C$ . 53.  $\sqrt{x^2+2x+3} - \ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}| + C$ .
54.  $\ln|x-2+\sqrt{x^2-4x}| + C$ . 55.  $\arcsin \frac{2x+1}{5} + C$ . 56.  $\frac{1}{3}\arcsin \frac{3x-1}{\sqrt{5}} + C$ .
57.  $\frac{1}{8}\sqrt{2}\arcsin \frac{4x-3}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3x-2x^2} + C$ . 58.  $-\frac{1}{3}\cos^3 x + C$ . 59.  $-\frac{1}{\sin x} - \sin x + C$ .
60.  $-\frac{3}{2}\cos^{\frac{2}{3}} x + \frac{3}{8}\cos^{\frac{8}{3}} x + C$ . 61.  $-\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{\cos^5 x}{5} + C$ . 62.  $\frac{1}{2}x -$

$$-\frac{1}{12}\sin 6x+C. \quad 63. \frac{3}{8}x+\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{64}\sin 8x+C. \quad 64. \frac{1}{4}\operatorname{tg}^2 2x+\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|+ \\ +C. \quad 65. -\frac{1}{8}\operatorname{ctg}^2 4x-\frac{1}{4}\ln(\sin 4x)+C. \quad 66. \operatorname{tg} \frac{x}{2}+C. \quad 67. \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right|+C.$$

#### 14. nodaļa

1. 10. 2. 3. 3.  $\frac{1}{2}$ . 4.  $\frac{1}{2}$ . 5. 2. 6. 18. 7. 8. 8.  $\frac{8}{5}$ . 9.  $\ln 4+2\approx 3,386$ .  
 10. 2. 11. 16. 12. 9. 13.  $2\ln 2\approx 1,386$ . 14. 2. 15.  $4\ln 4-3\approx 2,545$ . 16. 6.  
 17. 127,5. 18. Apzīmējot integrāli ar  $I$ , iegūstam  $1<I<2$ ; salīdzināt ar 13. vingr.  
 19.  $0<I<1$ . 20.  $0<I<\ln 2\approx 0,693$ . Norādījums: skaitītāju noapaļot uz augšu  
 (leju), bet saucēju noapaļot uz leju (augšu). 21.  $\frac{1}{2}\ln 5\approx 0,805$ . 22.  $\frac{1}{2}$ .  
 23.  $\frac{\pi}{4}\approx 0,785$ . 24.  $\frac{1}{4}$ . 25. 1. 26.  $\frac{\pi}{2}\approx 1,571$ . 27.  $e-\sqrt{e}\approx 1,07$ . 28. 2. 29.  $\frac{1}{3}$ .  
 30.  $\approx -0,083$ . 31.  $1-\frac{2}{e}\approx 0,264$ . 32. 1. 33.  $2\ln 2-\frac{3}{4}\approx 0,636$ . 34.  $\frac{\pi}{2}-1\approx$   
 $\approx 0,571$ . 35.  $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\approx 1,035$ . 36.  $\approx 0,837$ , salīdzināt ar 19. vingr. Norādījums:  
 funkcijas vērtību aprēķināšanai lietot kubu un kvadrātsakņu tabulas. 37.  $\approx 0,272$ ,  
 salīdzināt ar 20. vingr. 38. 9,8. 39. 1. 41.  $\pi\approx 3,142$ .

#### 15. nodaļa

1. 144. 2.  $\frac{16}{3}$ . 3. 4,5. 4.  $\frac{16}{3}$ . 5.  $\frac{8}{3}$ . 6.  $\frac{32}{3}\sqrt{6}\approx 26,13$ . 7.  $\frac{4}{3}+2\pi\approx 7,617$ .  
 Norādījums: integrāli aprēķina kā 121. § 2. piemēru. 8.  $18\pi\approx 56,55$ .  
 9.  $12\pi\approx 37,7$ . 10.  $12\pi\approx 37,7$ . 11.  $\frac{512}{15}\pi\approx 107,3$ . 12. 1)  $\frac{4}{3}\pi ab^2$ ; 2)  $\frac{4}{3}\pi a^2b$ .  
 13. 0,06 džouli. 14.  $\approx 3,46\cdot 10^6$  džouli jeb  $\approx 0,35\cdot 10^6$  kGm. 15. 998 džouli  
 jeb  $\approx 102$  kGm. 16.  $1,41\cdot 10^6$  ņūtoni jeb 144 tonnas. 17.  $2,35\cdot 10^6$  ņūtoni jeb  
 240 tonnas.

#### 16. nodaļa

2. 1)  $y=3x^3$ ; 2)  $y=-\frac{3}{4}x^3$ . 3.  $y=Ce^{\frac{1}{x}}$ . 4.  $x^2+y^2=\ln Cx^2$ . 5.  $x+y=$   
 $=\ln C(x+1)(y+1)$ . 6.  $1+y^2=C(1-x^2)$ . 7.  $s^2=t-\frac{1}{t}+C$ . 8.  $xy=-8$ .  
 9.  $y=e^{\sqrt{x-2}}$ . 10. 40 min. Norādījums: atdzišanas diferenciālvienādojums šeit  
 ir  $\frac{dT}{dt}=-k(T-20)$ ; pēc vienādojuma integrēšanas pieprasām papildu nosaci-  
 jumus  $T_0=100^\circ\text{C}$  pie  $t=0$  un  $T_1=60^\circ\text{C}$  pie  $t=10$  min. 11.  $y=Cx^3-x^2$ .  
 12.  $y=e^{-x^2}\left(C+\frac{x^2}{2}\right)$ . 13.  $y=(x+C)(1+x^2)$ . 14.  $y=\frac{C-\cos 2x}{2\cos x}$ . 15.  $y=$   
 $=\frac{1}{x}(e^x+2-e)$ . 16.  $s=2t^2+\frac{1}{t}$ . 17.  $v=\frac{k}{\lambda}t-\frac{mk}{\lambda^2}\left(1-e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right)$ . 18.  $v=$



$$= \frac{f_0}{m^2 \omega^2 + \lambda^2} (m \omega e^{-\frac{\lambda}{m} t} + \lambda \sin \omega t - m \omega \cos \omega t). \quad 19. i = \frac{u_0}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L} t}). \quad 20. x^2 y^2 - x^4 - y^4 = C. \quad 21. y e^x - x^2 = C. \quad 22. y + \arctg \frac{x}{y} = C. \quad 23. \frac{x}{y} - y = C. \\ 24. (x^2 + y^2) e^x = C. \quad 25. y = \frac{x^3}{6} - \cos x + C_1 x + C_2. \quad 26. y = \frac{x^2}{2} \left( \ln x - \frac{3}{2} \right) + C_1 x + C_2. \\ 27. y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}. \quad 28. y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}. \quad 29. y = C_1 e^{-3x} + C_2. \quad 30. \dot{y} = C \sin(2x + \Theta). \quad 31. y = C e^{-3x} \sin(2x + \Theta). \quad 32. y = C e^x \sin \left( \frac{x}{2} + \Theta \right). \quad 33. y = 4e^x + 2e^{3x}. \quad 34. y = 3e^{-2x} \sin 5x.$$

### 17. nodaļa

1.  $\frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \dots$  2.  $\frac{4}{3!} + \frac{7}{4!} + \frac{10}{5!} + \dots$  3.  $\frac{\ln 2}{1^3} + \frac{\ln 3}{2^3} + \frac{\ln 4}{3^3} + \dots$  4.  $\frac{2}{\sqrt[3]{3}} - \frac{4}{\sqrt[3]{8}} + \frac{6}{\sqrt[3]{15}} - \dots$  5.  $a_n = \frac{n+6}{n^3}$ ;  $a_{n-1} = \frac{n+5}{(n-1)^3}$ ;  $a_{n+1} = \frac{n+7}{(n+1)^3}$  6.  $a_n = \frac{2n+1}{(n+1)!}$ ;  $a_{n-1} = \frac{2n-1}{n!}$ ;  $a_{n+1} = \frac{2n+3}{(n+2)!}$  7.  $a_n = \frac{1}{n(n+4)}$ ;  $a_{n-1} = \frac{1}{(n-1)(n+3)}$ ;  $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+5)}$  8.  $a_n = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2(n+1)}{2^{n+1} + 1}$ ;  $a_{n-1} = \frac{(-1)^n \cdot 2n}{2^n + 1}$ ;  $a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+2} \cdot 2(n+2)}{2^{n+2} + 1}$  9. Konverģē; salīdzināt ar rindu  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$
10. Diverģē, jo vispārīgais loceklis  $a_n = \frac{n+1}{2n} \rightarrow \frac{1}{2} \neq 0$ . 11. Diverģē; salīdzināt ar harmonisko rindu. 12. Konverģē; salīdzināt ar rindu  $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$
13. Diverģē, jo vispārīgais loceklis  $a_n = \frac{n}{100n-1} \rightarrow 0,01 \neq 0$ . 14. Diverģē; salīdzināt ar rindu  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$  15. Diverģē; sākot ar  $n=11$ ,  $\frac{1}{\sqrt[3]{10n}} > \frac{1}{n}$ , t. i., dotās rindas locekļi kļūst lielāki par attiecīgajiem harmoniskās rindas locekļiem. 16. Konverģē. 17. Konverģē. 18. Diverģē. 19. Konverģē. 20. Dalambēra kritērijs atbildi nedod; salīdzinot ar harmonisko rindu, konstatējama rindas diverģence. 24. Konverģē pēc Dalambēra pazīmes. 25. Diverģē; dotās rindas locekļus dabū, pareizinot diverģentas rindas  $1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \dots$  attiecīgos locekļus ar  $\frac{1}{3}$ .
26. Diverģē, jo nav izpildīts konverģences nepieciešamais noteikums;  $a_n = \frac{n}{5n-3} \rightarrow \frac{1}{5}$ . 27. Konverģē; rindas vispārīgais loceklis  $a_n = \frac{1}{n^3+1}$ , bet tas nepārsniedz konverģentas rindas  $1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} + \dots$  vispārīgo locekli. 28. Konverģē pēc Dalambēra pazīmes  $l=0 < 1$ . 29. Konverģē nosacīti;  $n=200$ . 30. Diverģē. 31. Konverģē absolūti;  $n=10$ . 32. Konverģē absolūti;  $n=5$ . 33. Konverģē nosacīti;  $n=500\,000$ .

## 18. nodaļa

1.  $|x| < 3$ . 2.  $|x| < 1$ . 3.  $|x| \leq 3$ . 4.  $-3 \leq x < 3$ . 5.  $-10 \leq x < 10$ .  
 6.  $|x| \leq 5$ . 7.  $\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^3} - \frac{x^4}{2^4} + \dots$ ; var izmantot arī gatavu izvirzījumu, ja ievēro, ka  $\frac{x}{x+2} = 1 - \frac{2}{x+2} = 1 - \frac{1}{1+\frac{x}{2}} = 1 - (1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{2^3} + \dots)$ . Rinda konverģē, ja  $|x| < 2$ . 8.  $\frac{1}{2^2} + \frac{2x}{2^3} + \frac{3x^2}{2^4} + \frac{4x^3}{2^5} + \dots$ ;  $|x| < 2$ . Var izmantot arī gatavu izvirzījumu, ja ievēro, ka  $\frac{1}{(2-x)^2} = \left(\frac{1}{2-x}\right)'$ . 9.  $1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^6 + \dots$ ;  $|x| \leq 1$ . Var izmantot arī binomiālo rindu. 10.  $x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots$ ;  $|x| \leq 1$ . Tā kā  $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ , tad to pašu izvirzījumu dabū, integrējot iepriekšējā piemērā dabūto rindu pa locekļiem. 11.  $x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \dots$ ; konverģē visiem  $x$ . Var izmantot arī funkcijas  $\sin x$  izvirzījumu, kurā liek  $x$  vietā  $x^2$ . 12. 6,055. 13. 0,1278. 14. 0,9511. 15. 2,0243 (trīs rindas locekļi). 16. 0,1823 (četri rindas locekļi). 17. 0,9512 (trīs rindas locekļi). 18. 0,5625. 19. 0,3897. 20. 0,2970. 21.  $x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{5x^4}{4!} - \dots$ . 22.  $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$ . 23.  $(x-1) + \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{11}{6}(x-1)^3 + \dots$ .

## 19. nodaļa

1. a)  $\vec{a}^0 = \left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{15}; -\frac{14}{15}\right)$ ; b)  $\vec{a}^0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$ . 2.  $\cos \alpha = \frac{33}{35}$ ;  $\cos \beta = -\frac{10}{35}$ ;  $\cos \gamma = \frac{6}{35}$ . 3.  $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 \approx 54^\circ 44'$  vai  $\alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 \approx 125^\circ 16'$ . 4.  $\varphi = 135^\circ$ . 5.  $\vec{b} = (-4; 2; -4)$ . 6. 1)  $(-58; -20; 12)$ ; 2)  $-104$ .

## 20. nodaļa

1. a)  $xOz$  plaknei paralēlu plakņu pāris, kas atšķēļ no  $Oy$  ass nogriežņus 1 un 3; b) caur  $Ox$  novilkta bisektrora plakne divplakņu kaktam, kuru veido  $xOy$  un  $xOz$  plaknes; c)  $Oy$  asij paralēla plakne, kuras pēda  $xOz$  plaknē ir taisne  $z - 2x + 3 = 0$ ; d)  $xOy$  un  $yOz$  plakņu pāris; e) caur  $Ox$  asi novilkta bisektrora plakņu pāris; f) sinusoidāls cilindrs ar  $Oz$  asij paralēlu veiduli, vadule  $xOy$  plaknē ir sinusoida  $y = \sin x$ ; g) hiperbolisks cilindrs ar  $Oz$  asij paralēlu veiduli, vadule  $xOy$  plaknē ir vienādsānu hiperbola; h) apaļš cilindrs ar  $Oz$  asij paralēlu veiduli, vadule  $xOy$  plaknē ir riņķa līnija ar centru koordinātu sākumu un rādiusu 1; i) sfēra ar centru koordinātu sākumā un rādiusu 1; j) koordinātu sākuma punkts. 2. a) riņķa līnija, kura atrodas  $xOz$  plaknē paralēla plaknē, tās centra koordinātes ir  $(1; -1; 0)$  un rādiuss  $r = 4$ ; b) hiper-

bola, kura atrodas  $yOz$  plaknei paralēlā plaknē, tās centra koordinātes ir  $(2; 0; 0)$ , reālā pusass 3 un imaginārā pusass 2. 3.  $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 81$ . 4.  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ .

## 21. nodaļa

2.  $(5; 0; 0)$ ,  $(0; -10; 0)$ ;  $(0; 0; 2)$ . 3.  $\frac{x}{5} + \frac{y}{-10} + \frac{z}{2} = 1$ ;  $\frac{1}{130} (2x - y + 5z - 10) = 0$ . 4.  $x - 4y + 5z + 15 = 0$ . 5.  $x + 2y - z = 0$ . 6.  $\frac{x-4}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{-1}$ . 7.  $\frac{x+1}{2} = y = z - 2$ . 8.  $x = \frac{y}{-2} = \frac{z+2}{0}$ . 9.  $3y + 7z - 5 \neq 0$ . 10. a)  $\varphi = \arccos 0,7$ ; b) plaknes ir savstarpēji perpendikulāras; c) plaknes ir paralēlas. 11.  $\varphi = \arccos \frac{72}{77}$ . 12.  $(0; 0; -2)$ . 13.  $\frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{-7} = \frac{z-2}{1}$ . 14.  $(1; 1; 3)$ . 15.  $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{4} = \frac{z}{8}$ . 16.  $\varphi \approx 50^\circ 30'$ .

## 22. nodaļa

1. a)  $k^2x^2 = y^2 + z^2$ , b)  $y^2 + z^2 = \sin^2 x$ , c)  $(\sqrt{x^2 + z^2} - a)^2 + y^2 = R^2$ . 2. a) elipsoīds ar pusasīm 1, 2, 3; b), c) viendabuma hiperboloīds; d) konuss; e) eliptiskais paraboloids; f) hiperboliskais paraboloids.

## 23. nodaļa

1. a)  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 7$ ,  $x_3 = 3$ ,  $x_4 = -2$ ; b)  $x_1 = 8 - 9x_2 - 4x_3$ ,  $x_4 = -10 + 11x_2 + 5x_3$ ; c) sistēma nav saderīga. 2. Ja  $k = 0$  vai  $k = -3$ , sistēma nav saderīga; ja  $k \neq 0$  un  $k \neq -3$ , tad sistēmai ir viens vienīgs atrisinājums  $x_1 = \frac{-k^2 + 2}{k(k+3)}$ ,  $x_2 = \frac{2k-1}{k(k+3)}$ ,  $x_3 = \frac{k^2 + 2k^2 - k - 1}{k(k+3)}$ . 3.  $x_1 = 13t$ ,  $x_2 = 2t$ ,  $x_3 = 7t$ .

## 24. nodaļa

1.  $\vec{x} = \{-2; 9,5; 13,5\}$ . 4.  $r = 3$ . 5. a)  $\vec{C} = \{13; 2; 7\}$ ,  $r = 2$ , b)  $\vec{C}_1 = \{4; 0; -3; 1\}$ ,  $\vec{C}_2 = \{0; 8; 3; 1\}$ ,  $r = 2$ .

## 25. nodaļa

1. a)  $\begin{pmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ -11 & 23 & 20 \end{pmatrix}$  b) un c)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  d)  $\begin{pmatrix} 15 & 19 & 3 \\ 6 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$   
e)  $\begin{pmatrix} -14 & 24 & -76 \\ 4 & 0 & 8 \\ 9 & 34 & -50 \end{pmatrix}$  2.  $r(A) = 3$ ;  $B^{-1} = \begin{pmatrix} -19 & -9 & -3 & 8 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ -56 & -27 & -9 & 23 \\ 12 & 6 & 2 & -5 \end{pmatrix}$



# 26. noda|a

1. a) -204; b) 141. 2. a)  $x=1, y=-1, z=2$ ; b)  $x=-1, y=2, z=1$ ;  
c)  $\vec{x}=\{2; 0; 1; -1\}$ .

# 28. noda|a

1. 102. 2. 0,5. 3. a)  $\frac{11}{20}$ ; b)  $\frac{3}{20}$ ; c)  $\frac{3}{20}$ ; d)  $\frac{17}{20}$ ; e)  $\frac{9}{20}$ . 4. 0,03. 5.  $\frac{1}{12}$ .  
6. a)  $\frac{1}{9}$ ; b)  $\frac{2}{27}$ ; c)  $\frac{4}{27}$ ; d)  $\frac{4}{81}$ . 7. a) 0,343; b) 0,027; c) 0,973. 8. a) 0,936;  
b) 0,648. 9.  $\frac{1}{12}; \frac{1}{12}; \frac{1}{6}; \frac{1}{36}$ .

10.

| 2              | 3              | 4              | 5              | 6              | 7              | 8              | 9              | 10             | 11             | 12             |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

- $m_0=7$ ;  $\mu=7$ ;  $\sigma=2,4$ . 11. a) 0,117; b) 0,114; c) 2,6%; d)  $m_0=5$ ; 0,246.  
12. 0,410. 13. 20. 14. 6. 15.  $\sigma^2(x_1+x_2)=9$ . 16. a) 20; b) 45. 17. a) 0,383;  
b) 0,991; c) 1,000. 18. 73,3%. 19. 17 g. 20. 4,4%. 21. 0,832. 22. 0,182.  
23. 1764.

## SATURS

Priekšvārds (3)  
Ievads (5)

## I DAĻA

### ANALITISKĀ ĢEOMETRIJA PLAKNĒ

#### 1. nodaļa. Koordinātu metode

1. §. Analītiskās ģeometrijas nozīme un iedalījums (10). 2. §. Reālie skaitļi un to absolūtā vērtība (10). 3. §. Ass un vektors (12). 4. §. Ass vektori un to algebriskais lielums (14). 5. §. Punktu koordinātes uz ass (15). 6. §. Leņķis starp diviem vektoriem (17). 7. §. Vektora projekcija uz ass (18). 8. §. Koordinātu sistēma plaknē (19). 9. §. Attālums starp diviem punktiem plaknē (20). 10. §. Taisnes nogriežņa dalīšana dotajā attiecībā (21). 11. §. Punktu rādiusvektori plaknē (22). 12. §. Trijstūra laukums plaknē (23). 13. §. Daudzstūra laukums (25). Vingrinājumi (26).

#### 2. nodaļa. Vienādojumu ģeometriskā nozīme

14. §. Kopas jēdziens (27). 15. §. Skaitļu intervāli (27). 16. §. Konstanti un mainīgi lielumi (27). 17. §. Punktu ģeometriskā vieta (28). 18. §. Līnijas vienādojums (28). 19. §. Divu līniju krustpunkti (30). 20. §. Līniju klasifikācija (30). Vingrinājumi (31).

#### 3. nodaļa. Taisne plaknē

21. §. Taisnes vienādojums ar virziena koeficientu (31). 22. §. Taisnes vispārīgais vienādojums (33). 23. §. Taisnes vienādojums ar asu nogriežņiem (34). 24. §. Leņķis starp divām taisnēm (35). 25. §. Divu taisņu paralelītātes un perpendikularitātes nosacījumi (36). 26. §. Caur doto punktu vilktas taisnes vienādojums (37). 27. §. Caur diviem dotajiem punktiem vilktas taisnes vienādojums (37). 28. §. Divu taisņu krustpunkts (38). 29. §.\* Taisnes normālvienādojums (39). 30. §.\* Attālums no punkta līdz taisnei (41). Vingrinājumi (42).

#### 4. nodaļa. Otrās kārtas līnijas

31. §. Otrās kārtas līnijas definīcija (43). 32. §. Riņķa līnija (43). 33. §. Elipse (45). 34. §. Elipses formas pētīšana pēc kanoniskā vienādojuma (46). 35. §. Elipses ekscentricitāte (48). 36. §. Hiperbola (49). 37. §. Hiperbolas formas pētīšana pēc tās kanoniskā vienādojuma. Asimptotas (50). 38. §. Hiperbolas ekscentricitāte (53). 39. §. Parabola (55). 40. §. Parabolas formas pētīšana pēc tās kanoniskā vienādojuma (56). 41. §. Konusa šķēlumi (58). Vingrinājumi (58).

#### 5. nodaļa.\* Taisnleņķa koordinātu transformācija plaknē

42. §. Koordinātu transformācijas uzdevums (59). 43. §. Koordinātu sistēmas translācija (60). 44. §. Koordinātu sistēmas rotācija (63). Vingrinājumi (66).

### II daļa

#### IEVADS MATEMATISKAJĀ ANALĪZĒ

#### 6. nodaļa. Funkcijas un to klasifikācija

45. §. Jēdziens par funkciju un tās vērtību (66). 46. §. Funkcijas definēšanas veidi (68). 47. §. Atklātas un apslēptas funkcijas (72). 48. §. Pāra un nepāra funkcijas (73). 49. §. Periodiskas funkcijas (74). 50. §. Inversās (apvērstās) funkcijas (74). 51. §. Saliktās funkcijas (78). 52. §. Algebriskās funkcijas (78). 53. §. Elementārās pamatfunkcijas (79). 54. §. Elementārās funkcijas (85). Vingrinājumi (85).

#### 7. nodaļa. Mainīga lieluma robeža

55. §. Mainīgu lielumu veidi: augošs, dilstošs, ierobežots mainīgs lielums (86). 56. §. Bezgalīgi mazi lielumi un to pamatīpašības (87). 57. §. Bezgalīgi lieli lielumi un to pamatīpašības (90). 58. §. Lielumi, kas tiecas uz robežu (92). 59. §. Kopsavilkums. Pamatteorēmas par robežām. Robežu eksistences teorēmas (96). 60. §. Jēdziens par funkcijas robežu (98). 61. §. Divas svarīgas robežas. Naturālie logaritmi (102). 62. §. Funkcijas pieaugums. Jēdziens par funkcijas nepārtrauktību (108). 63. §. Bezgalīgi mazu lielumu salīdzināšana. Ekvivalenti bezgalīgi mazi lielumi (112). Vingrinājumi (114).

### III daļa

#### DIFERENCIĀLREĶINI

#### 8. nodaļa. Funkcijas atvasinājums

64. §. Kustības ātrums (116). 65. §. Procesa ātrums (118). 66. §. Līnijas pieskare (119). 67. §. Funkcijas atvasinājums (120): 68. §. Funkcijas atvasinājuma mehāniskā un dabaszinātniskā nozīme (121). 69. §. Funkcijas atvasinājuma ģeometriskā nozīme, pieskares un normāles vienādojumi (123). 70. §. Funkcijas atvasinājuma eksistence (124). Vingrinājumi (126).

#### 9. nodaļa. Funkciju atvasināšana

71. §. Dažu elementāro pamatfunkciju atvasinājumu formulas (126). 72. §. Summas, reizinājuma un dalījuma atvasināšana (129). 73. §. Saliktas funkcijas atvasināšana (132). 74. §. Inversās funkcijas atvasināšana (135). 75. §. Funkciju  $y = \log_a x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $y = \operatorname{ctg} x$ ,  $y = a^x$  un  $y = e^x$  atvasinājumu formulas (135).



76 §.\* Apslēptas funkcijas atvasināšana (137). 77 §.\* Logaritmiskā atvasināšana, pakāpes funkcijas atvasinājums vispārīgā gadījumā (140). 78 §.\* Ciklo-metrisko funkciju atvasināšana (141). 79 §. Funkciju atvasināšanas pamat-formulas un kārtulas (142). 80 §. Augstāku kārtu atvasinājumi (142). 81 §. Funkcijas otrā atvasinājuma mehāniskā nozīme (143). Vingrinājumi (144).

#### 10. nodaļa. Funkcijas atvasinājuma lietošana funkciju pētīšanai

82 §. Funkcijas augšana un dilšana (147). 83 §. Funkcijas maksimums un minimums (149). 84 §. Līnijas ieliekums un izliekums (152). 85 §. Funkcijas maksimuma un minimuma otra pietiekamā pazīme (154). 86 §. Funkcijas vislielākā un vismazākā vērtība slēgtā intervālā (155). 87 §. Funkciju grafiku konstruēšana (156). 88 §.\* Grafiskā metode un izmēģinājumu metode vienā-dojumu aptuvenai atrisināšanai (157). 89 §. Galīgo pieaugumu formula (159). Vingrinājumi (161).

#### 11. nodaļa. Funkcijas diferenciālis

90 §. Diferenciāla jēdziens (163). 91 §. Funkcijas diferenciāla ģeometriskā nozīme (164). 92 §. Skaitlisks piemērs par funkcijas diferenciāli (164). 93 §. Funkciju diferenciāļu pielietojumi, absolūtās un relatīvās kļūdas, ap-tuvenu formulu iegūšana (165). 94 §. Diferenciāļu pamatformulu tabula (167). 95 §. Funkcijas atvasinājums kā diferenciāļu dalījums (168). 96 §. Diferen-ciāļu formas invariance (168). 97 §. Jēdziens par darbībām ar aptuveniem skaitļiem (169). Vingrinājumi (171).

#### 12.\* nodaļa. Vairāku argumentu funkcijas

98 §. Pamatjēdzieni (172). 99 §. Divu argumentu funkcijas ģeometriskā at-tēlošana (173). 100 §. Parciālie atvasinājumi (174). 101 §. Funkcijas pil-nais pieaugums un pilnais diferenciālis (177). 102 §. Funkcijas ekstrēms (179). 103 §. Saliktas funkcijas atvasināšana (181). 104 §. Apslēptas funkcijas atva-sināšana (182). Vingrinājumi (183).

### IV daļa

## INTEGRĀLRĒKINI

#### 13. nodaļa. Nenoteiktais integrālis

105 §. Primitīvā funkcija (185). 106 §. Nenoteiktais integrālis (186). 107 §. Primitīvās funkcijas mehāniskā nozīme (188). 108 §. Primitīvās fun-kcijas ģeometriskā nozīme (189). 109 §. Dažas integrēšanas pamatformulas (190). 110 §. Nenoteiktā integrāļa īpašības (192). 111 §. Substitūcijas (aiz-vietošanas) metode (193). 112 §.\* Funkciju  $y = \frac{1}{x^2 + a^2}$ ,  $y = \frac{1}{x^2 - a^2}$ ,  $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$

un  $y = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$  integrēšanas formulas (195).

113 §. Parciālā integrēšana (integrēšana pa daļām) (197). 114 §.\* Racionālu un iracionālu izteiksmju integrēšana ar papildināšanu līdz pilnam kvadrātam (200). 115 §.\* Trigonometrisku izteiksmju integrēšana (203). 116 §. Elemen-tāro funkciju integrēšanas iespējas (205). Vingrinājumi (206).

#### 14. nodaļa. Noteiktais integrālis

117. §. Problēmas, kas noved pie noteiktā integrāļa jēdziena (208). 118. §. Noteiktā integrāļa definīcija (210). 119. §. Noteiktā integrāļa pamatīpašības (213). 120. §. Noteiktā integrāļa aprēķināšana, Ņūtona—Leibnisa formula (216). 121. §.\* Substitūcija noteiktajā integrālī un noteiktā integrāļa parciāla integrēšana (218). 122. §.\* Noteiktā integrāļa aptuvena aprēķināšana (219). 123. §.\* Neistie integrāļi (222). Vingrinājumi (223).

#### 15. nodaļa. Noteiktā integrāļa pielietojumi

124. §. Plakanu figūru laukumu aprēķināšana (225). 125. §. Rotācijas ķermeņu tilpumu aprēķināšana (226). 126. §. Mehāniskais darbs (227). 127. §. Šķidruma spiediens uz vertikālu sienu (228). Vingrinājumi (229).

#### 16.\* nodaļa. Diferenciālvienādojumi

128. §. Pamatjēdzieni (230). 129. §. Diferenciālvienādojumu piemēri mehānikā, fizikā, ķīmijā un bioloģijā (233). 130. §. Diferenciālvienādojums ar atdalāmiem mainīgajiem (235). 131. §. Lineārs pirmās kārtas diferenciālvienādojums (237). 132. §. Totālais diferenciālvienādojums (239). 133. §. Otrās kārtas diferenciālvienādojums, ko var atrisināt ar tiešu integrēšanu (243). 134. §. Otrās kārtas lineārais homogēnais diferenciālvienādojums ar konstantiem koeficientiem (244). 135. §. Diferenciālvienādojumu atrisināšanas veidi (246). Vingrinājumi (247).

### V d a ļ a

#### BEZGALIGAS RINDAS

##### 17\*. nodaļa. Skaitļu rindas

136. §. Bezgalīga rinda kā maiņas process (248). 137. §. Pamatjēdzieni; konverģentas un diverģentas rindas (249). 138. §. Konverģentu rindu īpašības; rindu konverģences nepieciešamais noteikums (252). 139. §. Pozitīvu locekļu rindas; rindu salīdzināšana (255). 140. §. Dalāmbēra pietiekamā konverģences pazīme pozitīvu locekļu rindām (257). 141. §.\* Konverģences integrālā pazīme (259). 142. §. Alternējošas rindas; Leibnisa konverģences pazīme (262). 143. §. Patvaļīgu locekļu rindas; rindu absolūtā un nosacītā konverģence (265). Vingrinājumi (268).

##### 18.\* nodaļa. Pakāpju rindas

144. §. Jēdziens par funkciju rindu. Pakāpju rinda, tās konverģences intervāls (269). 145. §. Pakāpju rindu atvasināšana un integrēšana; dotās funkcijas izvērzišana pakāpju rindā (273). 146. §. Maklorēna rinda; tās pielietojums funkciju izvērzišanai pakāpju rindās (275). 147. §. Pakāpju rindu pielietojumi tuvinātos aprēķinos (280). 148. §.\* Teilora rinda (284). Vingrinājumi (288).

### VI \* d a ļ a

#### VEKTORU ALGEBRAS ELEMENTI UN ANALITISKĀ ĢEOMETRIJA TELPĀ

##### 19. nodaļa. Vektoru algebras elementi

149. §. Skalāri un vektoriāli lielumi (289). 150. §. Vektoru summa (289). 151. §. Vektora reizinājums ar skaitli (290). 152. §. Vektoru lineārā neatkarība (292). 153. §. Komplanāri vektori. Vektoru sadalīšana komponentēs (293).



154. §. Dekarta koordinātu sistēma telpā (297). 155. §. Vektoru skalārais reizinājums (299). 156. §. Vienkāršākie uzdevumi par taisnleņķa koordinātēm (302). 157. §. Vektoru vektoriālais reizinājums (306). Vinginājumi (310).

## 20. nodaļa. Vienādojumu ģeometriskā nozīme

158. §. Vienādojums ar vienu mainīgo lielumu (311). 159. §. Vienādojums ar diviem mainīgiem lielumiem (312). 160. §. Vienādojums ar trīs mainīgiem lielumiem (314). 161. §. Līnijas vienādojumi telpā (315). 162. §. Līnijas parametriskie vienādojumi (319). 163. §. Līnijas un virsmas krustpunkti (319). Vinginājumi (320).

## 21. nodaļa. Plakne un taisne telpā

164. §. Plaknes vispārīgais vienādojums (320). Plaknes vienādojums ar asu nogriežņiem (321). 166. §. Leņķis starp divām plaknēm (322). 167. §. Plaknes normālviensējums (322). 168. §. Attālums no punkta līdz plaknei (323). 169. §. Taisnes vispārīgie vienādojumi (324). 170. §. Taisnes kanoniskie vienādojumi (325). 171. §. Taisnes parametriskie vienādojumi (326). 172. §. Leņķis starp divām taisnēm (326). 173. §. Leņķis starp plakni un taisni (327). Vinginājumi (328).

## 22. nodaļa. Otrās kārtas virsmas

174. §. Rotācijas virsmas (329). 175. §. Elipsoīdi (331). 176. §. Hiperboloidi (332). 177. §. Paraboloidi (334). 178. §. Koniskas virsmas (335). 179. §. Otrās kārtas virsmas vispārīgais vienādojums (336). Vinginājumi (337).

# VII daļa

## LINEĀRĀS ALGEBRAS ELEMENTI

### 23. nodaļa. Lineāru algebrisku vienādojumu sistēmas

180. §. Lineārs algebrisks vienādojums un tā atrisinājumi (338). 181. §. Lineāru algebrisku vienādojumu sistēma (339). 182. §. Vienādojumu sistēmas atrisinājums (340). 183. §. Modificētā Zordāna izslēgšanas metode (343). 184. §. Vienādojumu sistēmas lineāra kombinācija (350). 185. §. Ekvivalentas vienādojumu sistēmas (351). 186. §.\* Parastā Zordāna izslēgšanas metode (351). 187. §. Saisinātā Zordāna izslēgšanas metode (353). 188. §. Gausa metode (355). 189. §. Lineāru homogēnu vienādojumu sistēma (358). 190. §. Lineāru vienādojumu sistēmas risināšanas gaitas kontrole (361). 191. §. Vienādojumu sistēmas matricas rangs un sistēmas saderība (363). Vinginājumi (367).

### 24. nodaļa. Lineārā $n$ dimensiju vektoru telpa

192. §.  $n$  dimensiju vektori (367). 193. §. Lineārās vektoru telpas definīcija (370). 194. §. Lineāru vienādojumu sistēmas vektoriālais rakstības veids (371). 195. §. Vektoru sistēmas lineārā neatkarība (371). 196. §. Vektoru sistēmas rangs un telpas dimensija (375). 197. §. Bāze un vektora koordinātes (376). 198. §. Vektoru skalārais reizinājums un ortogonalitāte (381). 199. §. Ortogonālās bāzes (382). 200. §.\* Lineārās  $n$  dimensiju vektoru telpas  $R_n$  apakštelpa (383). 201. §.\* Lineāru homogēnu vienādojumu sistēmas atrisinājumu telpa (384). 202. §.\* Lineāru nehomogēnu vienādojumu sistēmas vispārīgais



atrisinājums un tā eksistence (387). 203. §. Hiperplakne (389). 204. §. Jēdziens par nogriezni lineārā  $n$  dimensiju telpā (390). 205. §. Izliekta punktu kopa (391). 206. §. Pustelpas jēdziens (391). 207. §. Lineāra nevienādību sistēma (392). Vingrinājumi (394).

## 25. nodaļa. Matricas

208. §. Pamata jēdziens un simbolika (395). 209. §. Matricu summa un reizinājums ar skaitli (398). 210. §. Matricu reizināšana (399). 211. §. Matricas rangs (403). 212. §. Lineārie attēlojumi (406). 213. §. Bilineārās un kvadrātiskās formas (408). 214. §. Inversā matrica (409). 215. §. Matricu bloki (411). Vingrinājumi (413).

## 26. nodaļa. Determinanti

216. §. Otrās un trešās kārtas determinanti (414). 217. §.  $n$ -tās kārtas determinanti (415). 218. §. Determinantu pamata īpašības (417). 219. §. Matricas minoru un determinanta adjunkti (420). 220. §. Determinanta izvēršana pēc kādas rindas (kolonas) elementiem (420). 221. §. Inversās matricas eksistence (422). 222. §. Krāmiera kārtula (424). Vingrinājumi (425).

# VIII daļa

## VARBŪTĪBU TEORIJA UN MATEMĀTISKĀ STATISTIKA

### 27. nodaļa. Matemātiskā statistika I

223. §. Matemātiskās statistikas saturs (426). 224. §. Ģenerālā kopa un paraugs (426). 225. §. Vidējie lielumi (428). 226. §. Izkliesdes mēri (431). 227. §. Variāciju rinda un tās sastādīšana (434). 228. §. Variāciju rindas grafisks attēlojums un apstrāde (438). 229. §. Jēdziens par korelāciju (439). 230. §. Korelācijas koeficients un tā aprēķināšana (441). 231. §. Regresijas taisne (443). 232. §. Kopējās kvadrātu summas sadalīšana sastāvdaļās regresijas analizē (447). 233. §. Korelācijas tabula un korelācijas koeficienta aprēķināšana no korelācijas tabulas (450). 234. §. Korelācijas attiecība (452). 235. §. Daudzfaktoru regresija (456). 236. §. Liklinijas regresijas vienādojumi (460). Vingrinājumi (463).

### 28. nodaļa. Varbūtību teorija

237. §. Daži pamatjēdzieni (464). 238. §. Varbūtību teorijas saturs un sakars ar matemātisko statistiku (465). 239. §. Notikuma varbūtība (466). 240. §. Lielo skaitļu likums un praktiskās neiespējamības princips (469). 241. §. Varbūtību saskaitīšana (469). 242. §. Varbūtību reizināšana (471). 243. §. Bernulli formula (475). 244. §. Diskrēts gadījuma lielums, tā varbūtību sadalījums (477). 245. §. Varbūtību binomiālais sadalījums (480). 246. §. Binomiālā sadalījuma visvarbūtīgākā vērtība (481). 247. §. Binomiālā sadalījuma grafisks attēlojums (482). 248. §. Nepārtraukts gadījuma lielums, tā varbūtību sadalījums, vidējā vērtība un dispersija (484). 249. §. Teorēmas par vidējo vērtību un dispersiju (487). 250. §. Varbūtību normālais sadalījums (489). 251. §. Varbūtību binomiālā sadalījuma asimptotiskā formula. (Laplasa lokālā teorēma) (491). 252. §. Puasona sadalījums (493). 253. §. Varbūtību integrālis (495). 254. §. Varbūtības  $P\{m_1 \leq X \leq m_2\}$  atrašana ar varbūtību integrāļa palīdzību (Integrālā Laplasa teorēma) (499). Vingrinājumi (500).

255. §. Normālā sadalījuma līknes konstrukcija variāciju rindai (502).  
 256. §. Asimetrija un ekscess (504). 257. §. Vidējā aritmētiskā kļūda. Izmēģinājuma precizitātes rādītājs (508). 258. §. Stjudenta sadalījums (510).  
 259. §. Ģenerālā vidējā aritmētiskā novērtējums (511). 260. §. Nulles hipotēzes (512). 261. §. Divu vidējo aritmētisko salīdzināšana nesaistītiem novērojumiem (514). 262. §. Korelācijas koeficienta novērtējums (516). 263. §. Regresijas koeficienta novērtējums (517). 264. §. Rezultatīvās pazīmes prognozēto vērtību kļūdu intervāli (519). 265. §. Daudzfaktoru regresijas koeficientu novērtējums (521). Pielikums (524). Atbildes (528).

N. Brāzma, A. Brigmane u. c.  
AUGSTĀKĀ MATEMĀTIKA

Vāku zīm. G. Kļava.  
Redaktors E. Kronbergs.  
Māksl. redaktore A. Ozolina.  
Tehn. redaktore B. Briede.  
Korektore Z. Stikute.

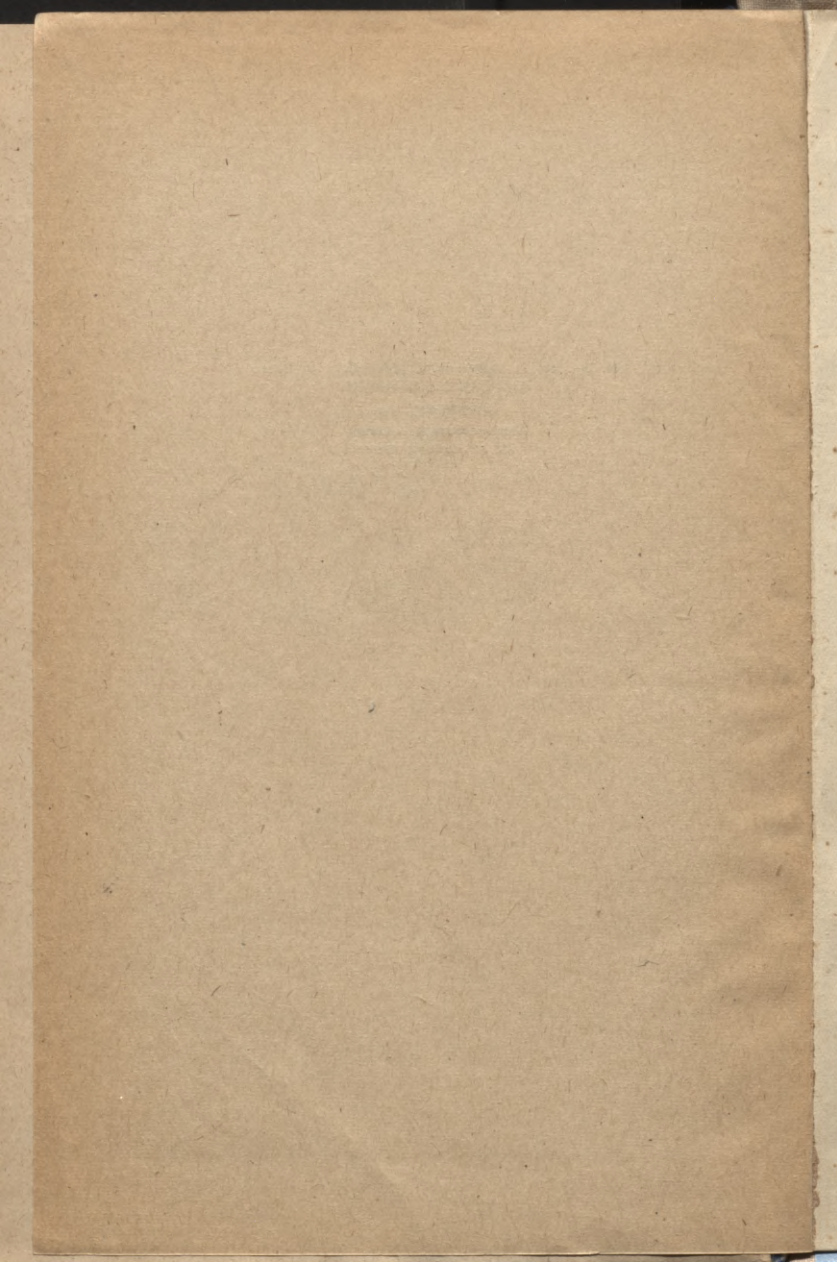
Nodota salikšanai 1970. g. 2. februārī. Parakstīta iespēšanai 1970. g. 11. septembrī. Tip. pap. Nr. 3. Papīra formāts 60×90/16. 34,25 fiz. iespiedl.; 34,25 uzsk. iespiedl.; 29,22 izdevn. l. Metiens 10000 eks. JT 04238. Maksā 97 kap. Izdevniecība «Zvaigzne» Rīgā, Gorkija ielā 105. Izdevn. Nr. 1343-A-458. Iespiesta Latvijas PSR Ministru Padomes Preses komitejas 3. tipogrāfijā Rīgā, Ļeņina ielā 137/139. Pasūt. Nr. 68.



Н. Бразма, А. Бригмане, А. Красгий, Ю. Раатс  
ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

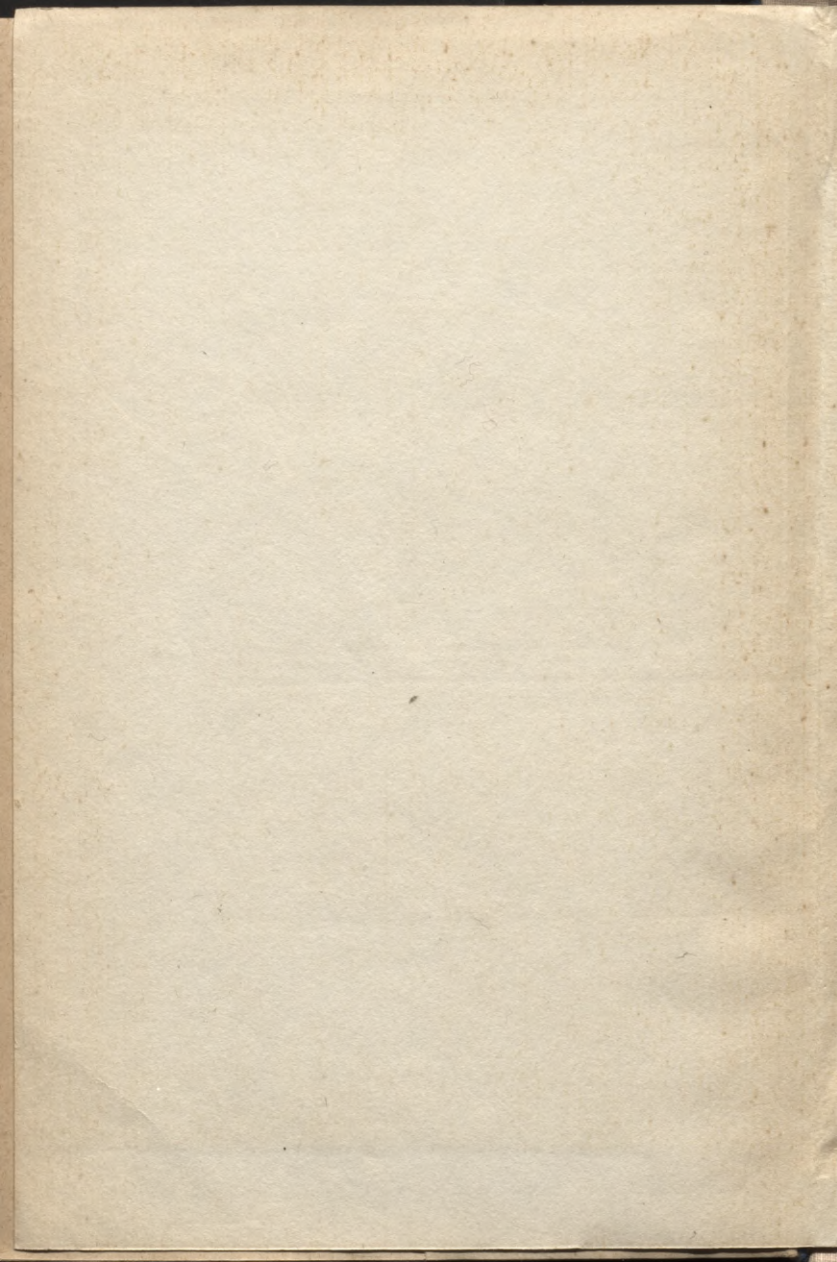
Второе издание

Издательство «Звайгзне»  
На латышском языке



5





LATVIJAS NACIONĀLĀ BIBLIOTĒKA



0308110887

97 kap.