

Kārlis ŠTEINERS, Biruta SILIŅA

AUGSTĀKĀ MATEMĀTIKA

3. Analītiskā
ģeometrija

4. Lineārās telpas

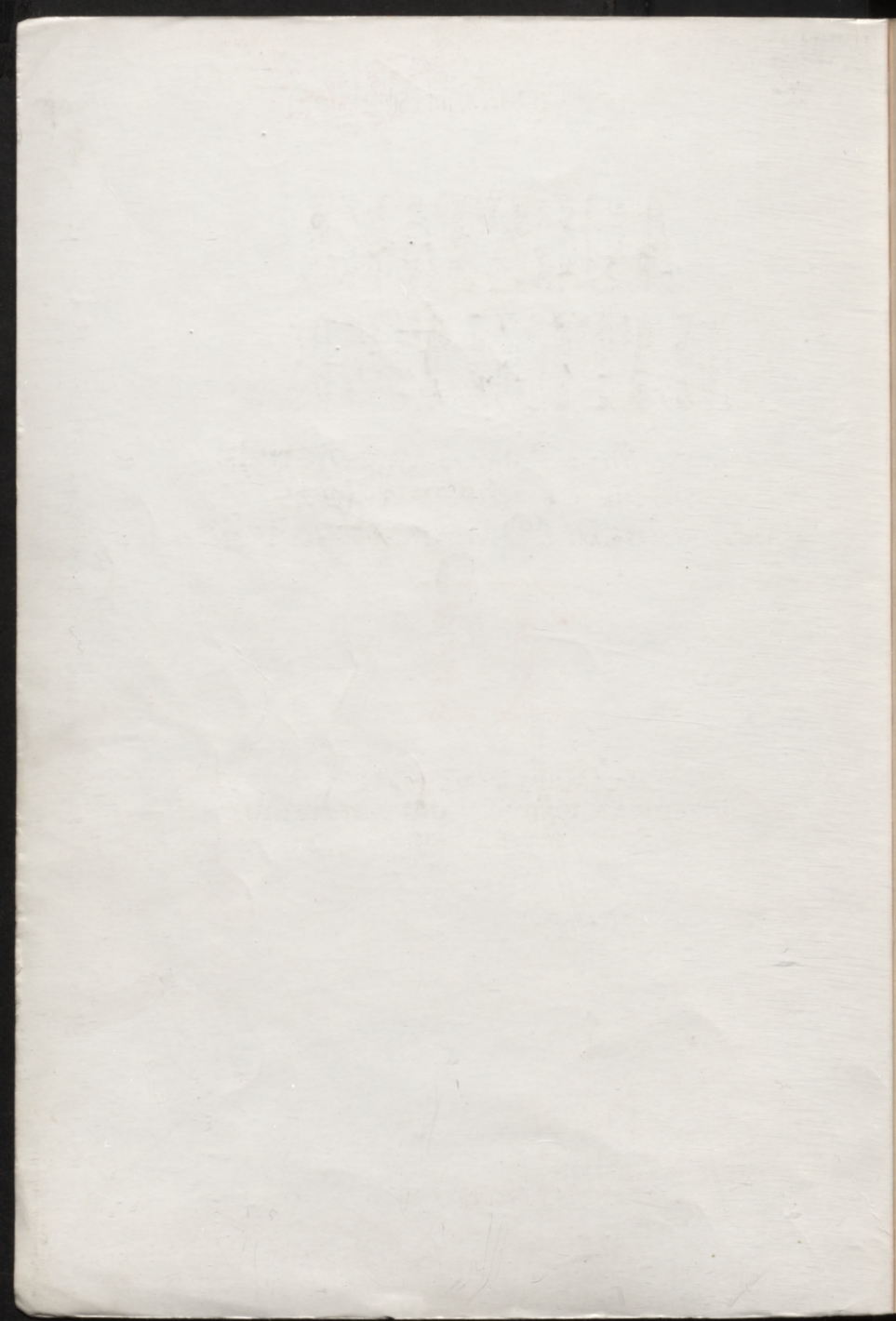
5. Lineārās
transformācijas

II

Lekciju konspekts
inženierzinātņu un
dabaszinātņu
studentiem



ZVAIGZNE ABC



L 98-5
30

Kārlis ŠTEINERS, Biruta SILIŅA

L
5B

AUGSTĀKĀ MATEMĀTIKA

3.nodaļa. Analītiskā ģeometrija

4.nodaļa. Lineārās telpas

5.nodaļa. Lineārās transformācijas

II

Lekciju konspekts
inženierzinātņu un dabaszinātņu
studentiem



ZVAIGZNE ABC

98-12.015
0301011614

Lekciju konspekts augstākajā matemātikā tiek izdots vairākās grāmatās, tāpēc katras grāmatas titulā un uz vāka norādītas tajā iekļautās nodaļas.

Šajā (otrajā) grāmatā ir trīs nodaļas: **analītiskā geometrija, lineārās telpas un lineārās transformācijas.**

Grāmatu kā mācību līdzekli var lietot arī koledžu studenti un vidusskolēni, kas apgūst matemātikas profilkursu.

Grāmatā **uz krāsu fona** ir izvietots atdalītais materiāls (definīcijas, formulas, kopsavilkumi, vēsturiskas ziņas un piemēri). Šīs piezīmes domātas, lai lasītājs varētu iegūt pārskatu par katrā tēmā svarīgākajiem jautājumiem, neie dziļinoties to sīkākā izklāstā.

Nākamajās grāmatās tiks aplūkoti matemātiskās analīzes elementi. Tā, piemēram, III grāmatā ir šādas nodaļas: funkcijas jēdziens, robežu teorijas pamati, funkcijas atvasinājums, atvasinājuma lietojumi un vairākargumentu funkcijas.

Lekciju konspekts tiek veidots pēc vieniem un tiem pašiem principiem – gan iekārtojuma ziņā, gan satura ziņā. Visas tēmas tiek aplūkotas tādā apjomā, kas atbilst inženierzinātņu un dabaszinātņu studiju programmām.

Grāmatas pamatā ir lekcijas augstākajā matemātikā, ko autori daudzus gadus ir lasījuši Latvijas Universitātē un Rīgas Tehniskajā universitātē.

ANALĪTISKĀ ĢEOMETRIJA

3.1. §. JĒDZIENS PAR LĪNIJU KOORDINĀTU PLAKNĒ UN LĪNIJAS VIENĀDOJUMU

1. ANALĪTISKĀS ĢEOMETRIJAS PRIEKŠMETS

Analītiskā ģeometrija ir matemātikas nozare, kas ģeometrijas objektus (līnijas, virsmas, ķermeņus) pēta ar algebras metodēm, izmantojot galvenokārt vienādojumus un vienādojumu sistēmas. **Analītiskās ģeometrijas pamatā ir koordinātu metode**, ko izstrādāja 17. gs. franču matemātiķis Renē Dekarts. Saskaņā ar šo metodi ģeometrijas pamatelementu – **punktu plaknē nosaka sakārtotu reālu skaitļu pāris** (punkta abscisa un ordināta), **bet telpā – sakārtotu reālu skaitļu trijnieks** (punkta abscisa, ordināta un aplikāta).

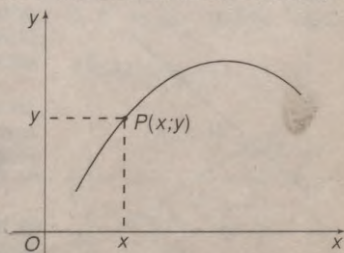
Līnijas un virsmas kā punktu kopas nosaka ar vienādojumiem, kurus apmierina visu to un tikai to punktu koordinātas, kuri pieder pie attiecīgās līnijas vai virsmas.

Atbilstoši elementārās ģeometrijas iedalījumam planimētrijā un stereomētrijā arī analītisko ģeometriju iedala divās daļās – analītiskā ģeometrija plaknē un analītiskā ģeometrija telpā.

2. LĪNIJAS VIENĀDOJUMA SASTĀDĪŠANAS VISPĀRĪGĀ SHĒMA

Aplūkosim koordinātu plaknē līniju, kas attēlota 47. zīmējumā. Lai labāk izprastu analītiskās ģeometrijas spriedumus, uzskatīsim, ka šo līniju veido kustīgs punkts $P(x; y)$, kas pārvietojas plaknē, t. i., līnija ir šī punkta kustības trajektorija.

Šāda kustīga punkta koordinātas $(x; y)$ ir mainīgi lielumi. Analītiskajā ģeometrijā aplūko tādas līnijas, kuru visiem punktiem piemīt kāda noteikta īpašība. Šo īpašību parasti formulē līnijas definīcijā, piemēram, par riņķa līniju sauc visu to plaknes punktu kopu, kuri atrodas vienādā attālumā no dota punkta – riņķa līnijas centra. Līnijas jebkura punkta īpašību parasti var uzrakstīt ģeometriskas vienādības veidā, kuru pārveido, izmantojot šī punkta koordinātas $(x; y)$ un uzdevumā dotos lielumus. Rezultātā iegūst vienādojumu,



47. zīm.

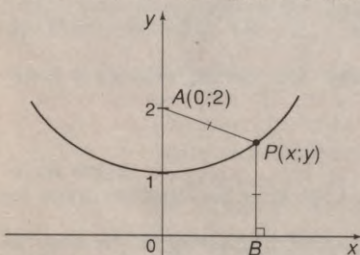
kura nezināmie lielumi ir līnijas mainīgā punkta koordinātas. Vispārīgā veidā iegūto vienādojumu pieraksta šādi: $F(x; y)=0$. Tātad **par kādas līnijas vienādojumu sauc vienādojumu $F(x; y)=0$, kuru apmierina visu to un tikai to punktu koordinātas, kas pieder pie šīs līnijas.**

Tādējādi, sastādot līnijas vienādojumu, kuras visiem punktiem ir norādīta kopīga īpašība, rīkojas pēc šādas shēmas:

- 1) brīvi izraugās kādu līnijas punktu $P(x; y)$;
- 2) vienādības veidā uzraksta šī punkta vispārīgo īpašību, kas dota līnijas definīcijā vai uzdevuma nosacījumos;
- 3) iegūtajā vienādībā geometriskos lielumus (parasti nogriežņu garumus) izsaka ar punkta $P(x; y)$ koordinātām un uzdevumā dotajiem lielumiem;
- 4) vienkāršo iegūto vienādojumu, izpēta un uzzīmē vienādojumam atbilstošo līniju.

Piemērs. Sastādīt vienādojumu līnijai, kuras brīvi izraudzīta punkta attālums līdz abscisu asij ir vienāds ar šī punkta attālumu līdz punktam $A(0; 2)$.

Apzīmēsim līnijas punktu ar $P(x; y)$, bet šī punkta projekciju uz abscisu ass – ar B . Tad saskaņā ar uzdevuma nosacījumu $AP=PB$ (48. zīm.). Tā kā



48. zīm.

$AP = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2}$ un punkta P attālums līdz abscisu asij ir vienāds ar šī punkta ordinātas moduli, t. i., $PB = |y|$, tad

$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = |y|.$$

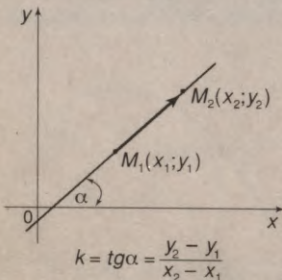
Kāpinot šīs vienādības abas puses kvadrātā un vienkāršojot, iegūstam līnijas vienādojumu

$$x^2 - 4y + 4 = 0 \quad \text{jeb} \quad y = \frac{1}{4}x^2 + 1.$$

Kā redzams no vienādojuma, šī līnija ir parabola (48. zīm.).

3.2. §. TAISNE PLAKNĒ

1. TAISNES VIRZIENA LEŅĶIS UN VIRZIENA KOEFICIENTS



49. zīm.

Viens no ģeometrijas pamatelementiem ir taisne. Taisnes virziena noteikšanai koordinātu plaknē lieto jēdzienus «taisnes virziena leņķis» un «taisnes virziena koeficients». **Taisnes virziena leņķis** ir mazākais leņķis α , par kuru ir jāpagriež Ox ass pretēji pulksteņa rādītāju kustības virzienam, lai šī ass sakristu ar taisni. Taisnes virziena leņķa tangensu sauc par **taisnes virziena koeficientu**; to parasti apzīmē ar burtu k . Tātad $k = \operatorname{tg} \alpha$.

Taisnes virziena koeficientu viegli aprēķināt, ja ir dotas šīs taisnes divu punktu koordinātas. Patiešām, pieņemsim, ka $M_1(x_1; y_1)$ un $M_2(x_2; y_2)$ ir divi taisnes punkti (49. zīm.). Šie punkti nosaka

vektoru $\vec{M_1M_2}$, ko saucsim par **taisnes virziena vektoru**. Vektora $\vec{M_1M_2}$ koordinātas var aprēķināt pēc doto punktu koordinātām: $\vec{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$. Saskaņā ar vektora koordinātu definīciju un vektora projekcijas aprēķināšanas formulu iegūstam šādas vienādības:

$$x_2 - x_1 = \text{proj}_{Ox} \vec{M_1M_2} = |\vec{M_1M_2}| \cos \alpha, \quad (1)$$

$$y_2 - y_1 = \text{proj}_{Oy} \vec{M_1M_2} = |\vec{M_1M_2}| \cos(90^\circ - \alpha) = |\vec{M_1M_2}| \sin \alpha. \quad (2)$$

No vienādībām (1) un (2) atrodam, ka

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{|\vec{M_1M_2}| \sin \alpha}{|\vec{M_1M_2}| \cos \alpha} = \text{tg} \alpha = k.$$

Tātad

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (3)$$

Piezīme. Ja taisne ir paralēla Ox asij, tad tās virziena leņķis un virziena koeficients ir vienāds ar nulli. Ja taisne ir paralēla Oy asij, tad tās virziena leņķis ir vienāds ar 90° un virziena koeficients neeksistē, jo nav definēta vērtība $\text{tg} 90^\circ$.

Piemērs. Aprēķināt virziena koeficientu taisnei, kas iet caur punktiem $A(-4; 6)$ un $B(2; 3)$.

Saskaņā ar formulu (3) $k = \frac{3-6}{2-(-4)} = -\frac{1}{2}$.

2. TAISNES VIENĀDOJUMA VEIDI PLAKNĒ

Taisnes stāvokli koordinātu plaknē var noteikt dažādi. Tāpēc ir iespējami arī dažādi taisnes vienādojumu veidi.

Taisnes vienādojums, ja ir dots taisnes punkts un virziena koeficients.

Pienemsim, ka $M_0(x_0; y_0)$ ir kāds taisnes punkts un k — šīs taisnes virziena koeficients. Apzīmēsim taisnes mainīgo punktu ar $P(x; y)$. Tad $\vec{M_0P} = (x - x_0; y - y_0)$ ir taisnes virziena vektors un saskaņā ar formulu (3) ir spēkā vienādība

$$k = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

no kuras iegūstam vienādojumu

$$y - y_0 = k(x - x_0). \quad (4)$$

Šo vienādojumu sauc par vienādojumu taisnei, kas iet caur doto punktu un ir ar doto virziena koeficientu (50. zīm.).

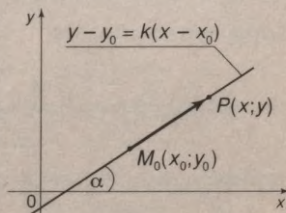
Tā, piemēram, ja taisne iet caur punktu $M_0(-5; 4)$ un tās virziena leņķis $\alpha = 135^\circ$, tad virziena koeficients $k = \text{tg} 135^\circ = -1$ un saskaņā ar formulu (4) iegūstam taisnes vienādojumu

$$y - 4 = -1 \cdot (x - (-5)) \text{ jeb } x + y + 1 = 0.$$

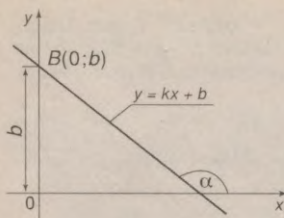
Ja taisne iet caur koordinātu sākumpunktu $O(0; 0)$, tad $x_0 = 0$ un $y_0 = 0$ un no vienādojuma (4) iegūstam, ka

$$y = kx \quad (5)$$

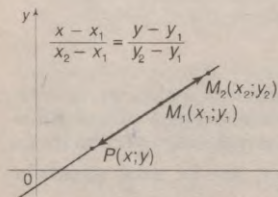
(šo vienādojumu sauc arī par **tiešās proporcionālītātes sakarību**).



50. zīm.



51. zīm.



52. zīm.

Īpaši aplūko gadījumu, kad dotais taisnes punkts atrodas uz Oy ass. Apzīmēsim šo punktu ar $B(0; b)$. Ievietojot punkta koordinātas vienādojumā (4), iegūstam

$$y - b = k(x - 0) \quad \text{jeb} \quad y = kx + b. \quad (6)$$

Tā kā b ir taisnes un Oy ass krustpunkta ordināta jeb koordinātu sākumpunktam atbilstošā taisnes punkta ordināta (51. zīm.), tad vienādojumu (6) sauc par *taisnes vienādojumu ar dotu virziena koeficientu un dotu sākumpunkta ordinātu* jeb par *taisnes atklāto vienādojumu*.

Taisnes vienādojums, ja ir doti divi taisnes punkti. Taisnes stāvokli visbiežāk nosaka ar diviem šīs taisnes punktiem.

Pieņemsim, ka $M_1(x_1; y_1)$ un $M_2(x_2; y_2)$ ir dotie taisnes punkti. Apzīmēsim ar $P(x; y)$ taisnes maiņīgo punktu (52. zīm.). Aplūkotie punkti nosaka vektorus $\vec{M_1P}$ un $\vec{M_1M_2}$, kuri ir kolineāri, jo atro-

Taisnes virziena koeficients

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (49. \text{ zīm.})$$

Taisnes vienādojuma veidi plaknē:

$$y - y_0 = k(x - x_0), \quad (50. \text{ zīm.})$$

$$y = kx,$$

$$y = kx + b, \quad (51. \text{ zīm.})$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \quad (52. \text{ zīm.})$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad (53. \text{ zīm.})$$

$$x = a; \quad y = b, \quad (55., 56. \text{ zīm.})$$

$$Ax + By + C = 0. \quad (57. \text{ zīm.})$$

Attālums no punkta līdz taisnei:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Leņķis starp divām taisnēm

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \quad (58. \text{ zīm.})$$

Divu taisņu paralelītātes nosacījums:

$$k_1 = k_2 \quad \text{vai} \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

Divu taisņu perpendikularitātes nosacījums:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

das uz vienas taisnes. Tātad šo vektoru koordinātas ir proporcionālas. Tā kā $\vec{M_1P} = (x-x_1; y-y_1)$ un $\vec{M_1M_2} = (x_2-x_1; y_2-y_1)$, tad

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \quad (7)$$

Taisnes vienādojums ir vektoru kolinearitātes nosacījums (7).

Piemērs. Sastādīt taisnes vienādojumu, ja ir doti šīs taisnes divi punkti $A(2; 4)$ un $B(-6; -2)$, un atrast tās virziena koeficientu.

Ievietojot doto punktu koordinātas vienādojumā (7), iegūstam

$$\frac{x-2}{-6-2} = \frac{y-4}{-2-4} \quad \text{jeb} \quad \frac{x-2}{-8} = \frac{y-4}{-6}, \quad \text{jeb} \quad 3x-4y+10=0.$$

Taisnes virziena koeficientu k var aprēķināt pēc punktu A un B koordinātām, lietojot formulu (3). Taču ļoti **bieži virziena koeficients ir jānosaka no taisnes vienādojuma**. Tad vienādojums ir jāpārveido tā, lai tam būtu forma $y=kx+b$, t. i., no vienādojuma ir jāizsaka punkta ordināta y . Tad koeficients pie x ir taisnes virziena koeficients.

Pārveidojot vienādojumu $3x-4y+10=0$, iegūstam, ka

$$4y=3x+10 \quad \text{jeb} \quad y=\frac{3}{4}x+\frac{10}{4}.$$

Tātad taisnes virziena koeficients $k=\frac{3}{4}$.

Atzīmēsim, ka, sastādot taisnes vienādojumu pēc divu punktu koordinātām, iegūtais vienādojums nav atkarīgs no tā, kuru no punktiem uzskata par pirmo punktu (formulā (7) apzīmēts ar indeksu 1) un kuru par otro punktu (apzīmēts ar indeksu 2).

Jāievēro, ka formulu (7) nevar lietot, ja $x_1=x_2$ vai $y_1=y_2$. Acīmredzami šādā gadījumā taisne ir paralēla vai nu Oy asi, vai Ox asi.

Taisnes vienādojums koordinātu asu nogriežņos. Pieņemsim, ka ir doti taisnes krustpunkti ar koordinātu asīm $A(a; 0)$, un $B(0; b)$. Šādā gadījumā taisnes vienādojumu ērti sastādīt, lietojot formulu (7). Ievietojot šajā formulā punktu A un B koordinātas, atrodam, ka

$$\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0} \quad \text{jeb} \quad bx-ab=-ay, \quad \text{jeb} \quad bx+ay=ab.$$

Tā kā $a \neq 0$ un arī $b \neq 0$, tad, dalot pēdējā vienādībā labo un kreiso pusi ar ab , iegūstam vienādojumu

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad (8)$$

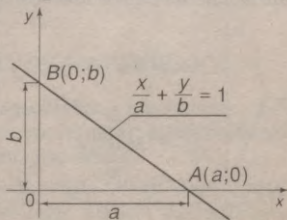
kuru sauc par **taisnes vienādojumu koordinātu asu nogriežņos**, jo a ir taisnes un Ox ass krustpunkta abscisa, bet b - taisnes un Oy ass krustpunkta ordināta (53. zīm.).

Pēc vienādojuma koordinātu asu nogriežņos viegli konstruēt taisni. Piemēram, pārveidosim vienādojumu $2x+3y-12=0$ par vienādojumu koordinātu asu nogriežņos. Pārnesot brīvo locekli -12 vienādojuma labajā pusē un dalot vienādojuma

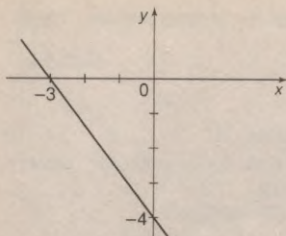
abas puses ar 12, iegūstam $\frac{2x}{12} + \frac{3y}{12} = 1$ jeb

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1.$$

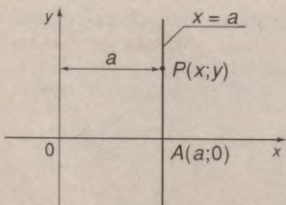
Tātad $a=6$ un $b=4$.



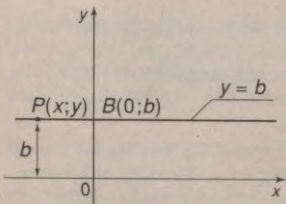
53. zīm.



54. zīm.



55. zīm.

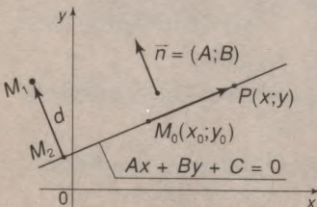


56. zīm.

Lineāra vienādojuma ar diviem mainīgajiem vispārīgais veids ir

$$Ax + By + C = 0. \quad (9)$$

Šādā veidā izteicām arī visos iepriekš aplūkotajos piemēros iegūtos vienādojumus. Viegli pārliecināties, ka jebkurš lineārs vienādojums (9) izsaka kādu taisni koordinātu plaknē (šī vienādojuma brīvais loceklis C un viens no koeficientiem A vai B var būt vienāds ar nulli). Tādējādi starp visu lineāro vienādojumu (9) kopu un visu koordinātu plaknes taisņu kopu pastāv abpusēji viennozīmīga atbilstība: *katrai taisnei atbilst noteikts lineārs vienādojums un katram lineāram vienādojumam atbilst noteikta taisne.*



57. zīm.

Savukārt pēc koordinātu plaknē attēlotās taisnes var atrast tās vienādojumu, nosakot krustpunktu koordinātas ar asīm, t. i., nosakot parametrus a un b . Tā, piemēram, 54. zīmējumā attēlotajai taisnei $a = -3$ un $b = -4$; saskaņā ar formulu (8) šīs taisnes vienādojums ir

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{-4} = 1 \text{ jeb } 4x + 3y + 12 = 0.$$

Koordinātu asīm paralēlu taisņu vienādojumi. Ja taisne ir paralēla Oy asi un tās krustpunkts ar Ox asi ir $A(a; 0)$, tad taisnes brīvi izraudzīta punkta $P(x; y)$ abscisa ir vienāda ar skaitli a , bet ordināta var būt jebkurš reāls skaitlis. Līdz ar to šādas taisnes vienādojums ir $x = a$ (55. zīm.). Ja $a = 0$, tad taisne sakrīt ar Oy asi. Tāpēc $x = 0$ ir Oy ass vienādojums.

Analogi, ja taisne ir paralēla Ox asi un tās krustpunkts ar Oy asi ir $B(0; b)$, tad taisnes brīvi izraudzīta punkta $P(x; y)$ abscisa var būt jebkurš reāls skaitlis, bet ordināta ir vienāda ar skaitli b . Tātad šādas taisnes vienādojums ir $y = b$ (56. zīm.). Ja $b = 0$, tad taisne sakrīt ar Ox asi. Līdz ar to Ox ass vienādojums ir $y = 0$.

Taisnes vispārīgais vienādojums. Attālums no punkta līdz taisnei. Aplūkojot iegūtos taisnes vienādojuma veidus (4)–(8), redzams, ka visos gadījumos **taisnes vienādojums ir 1. pakāpes vienādojums** ar diviem mainīgajiem lielumiem x un y (ja taisne ir paralēla kādai no koordinātu asīm, tad tās vienādojums ir nepilns lineārs vienādojums, kas nesatur kādu no lielumiem x vai y).

Koeficientiem A un B taisnes vispārīgajā vienādojumā (9) ir noteikta ģeometriskā nozīme: šie skaitļi **ir taisnei perpendikulāra** (saka arī – normāla) **vektora koordinātas**.

Patiesām, pieņemsim, ka taisne iet caur punktu $M_0(x_0; y_0)$ perpendikulāri vektoram $\vec{n} = (A; B)$ (57. zīm.). Ja $P(x; y)$ ir brīvi izraudzīts šīs taisnes punkts, tad vektors $\vec{M_0P} = (x - x_0; y - y_0)$ ir perpendikulārs vektoram

$\vec{n} = (A; B)$ un to skalārais reizinājums ir vienāds ar nulli. Izmantojot skalārā reizinājuma izteiksmi koordinātu formā, iegūstam vienādību

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0,$$

no kuras atrodam, ka $Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0$. Apzīmējot ar C izteiksmi $-Ax_0 - By_0$, iegūstam vienādojumu

$$Ax + By + C = 0.$$

Taisnes vispārīgo vienādojumu (9) lieto, lai aprēķinātu attālumu no punkta līdz taisnei. Pieņemsim, ka jāatrod **attālums d no punkta $M_1(x_1; y_1)$ līdz taisnei ar vienādojumu (9)**. Šajā nolūkā konstruējam perpendikulu M_1M_2 no punkta M_1 līdz taisnei; pieņemsim, ka punkta M_2 koordinātas ir $(x_2; y_2)$. Aplūkosim vektoru $\vec{M_2M_1} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$, kas ir perpendikulārs pret taisni un tāpēc ir kolineārs ar taisnes normālo vektoru $\vec{n} = (A; B)$ (57. zīm.). Atkarībā no tā, vai šie vektori ir vienādi vērsti vai pretēji vērsti, to veidotaais leņķis ir vai nu 0° , vai 180° ; tāpēc $\cos \angle(\vec{n}; \vec{M_2M_1}) = \pm 1$. To ievērojot, atrodam skalāro reizinājumu

$$\vec{n} \cdot \vec{M_2M_1} = |\vec{n}| \cdot |\vec{M_2M_1}| \cdot \cos \angle(\vec{n}, \vec{M_2M_1}) = |\vec{n}| \cdot |\vec{M_2M_1}| \cdot (\pm 1) = \pm |\vec{n}| \cdot |\vec{M_2M_1}|$$

jeb koordinātu formā

$$A(x_1 - x_2) + B(y_1 - y_2) = \pm |\vec{n}| \cdot |\vec{M_2M_1}|.$$

Pieskaitot un atņemot vienādības kreisajā pusē C un izpildot pārveidojumus, iegūstam vienādību

$$Ax_1 + By_1 + C - (Ax_2 + By_2 + C) = \pm |\vec{n}| \cdot |\vec{M_2M_1}|.$$

Tā kā punkts $M_2(x_2; y_2)$ pieder pie taisnes, tad šī punkta koordinātas apmierina taisnes vienādojumu, t. i., $Ax_2 + By_2 + C = 0$. Līdz ar to $Ax_1 + By_1 + C = \pm |\vec{n}| \cdot |\vec{M_2M_1}|$. Ievērojot, ka $|\vec{M_2M_1}| = d$ un $|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2}$, iegūstam sakarību

$$d = \pm \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Izteiksme $Ax_1 + By_1 + C$ var būt pozitīva vai negatīva atkarībā no punkta M_1 koordinātām un vienādojuma koeficientiem. Tā kā $d > 0$, tad iegūstam šādu formulu attāluma d aprēķināšanai no punkta $M_1(x_1; y_1)$ līdz taisnei $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (10)$$

Piemērs. Aprēķināt trijstūra KLM augstumu KN , ja $K(-2; 5)$ un malas LM vienādojums ir $3x - 4y + 11 = 0$.

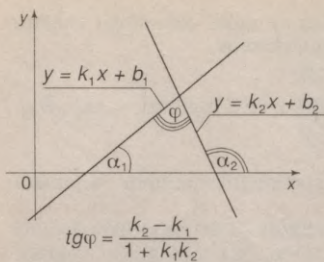
Izmantojot formulu (10), atrodam, ka

$$KN = d = \frac{|3 \cdot (-2) + (-4) \cdot 5 + 11|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-15|}{5} = 3.$$

3. DIVU TAIŠŅU SAVSTARPĒJĀ STĀVOKĻA PĒTĪŠANA

Izmantojot taišņu vienādojumus, risina dažādus ģeometrijas uzdevumus – nosaka, vai taisnes krustojas, un aprēķina krustpunkta koordinātas, aprēķina leņķi starp taisnēm u. c. Aplūkosim dažus pamatzdevumus par taisni.

Leņķis starp divām taisnēm. Pieņemsim, ka ir doti divu taišņu vienādojumi $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ un $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, kurus pārveidojam atklātu vienādojumu veidā: $y = k_1x + b_1$ un $y = k_2x + b_2$. Līdz ar to esam noteikuši arī šo taišņu virziena



58. zīm.

leņķus α_1 un α_2 , jo $k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$ un $k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$ (58. zīm.). Apzīmēsim ar φ leņķi starp šīm taisnēm. Tā kā trijstūra ārējais leņķis ir vienāds ar to iekšējo leņķu summu, kuri nav ārējā leņķa blakusleņķi, tad $\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi$ jeb $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ un $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1)$. Pārveidojam šo vienādību, lietojot divu leņķu starpības tangensa formulu:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Esam ieguvuši formulu divu taisņu veidotā leņķa tangensa aprēķināšanai:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \quad (11)$$

Acīmredzami ar formulu (11) aprēķinātā $\operatorname{tg} \varphi$ vērtība ir atkarīga no tā, kuras taisnes virziena koeficientu apzīmē ar k_1 un kuras – ar k_2 . Mainot doto taisņu numerāciju, mainās izteiksmes (11) zīme, jo jāmaina vietām virziena koeficienti skaitītāja izteiksmē. Tātad tiek aprēķināta sākumā aplūkotā leņķa φ blakusleņķis. Ievērosim, ka formulu (11) nevar lietot, ja kāda no dotajām taisnēm ir paralēla ar O y asi, jo tad tās virziena leņķis ir 90° un virziena koeficients neeksistē.

Piemērs. Aprēķināt leņķi starp taisnēm $2x + 3y - 6 = 0$ un $x - 2y + 5 = 0$.

Pārveidojam dotos vienādojumus atklātu vienādojumu veidā:

$$2x + 3y - 6 = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + 2; \quad x - 2y + 5 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

Apzīmējam $k_1 = -\frac{2}{3}$ un $k_2 = \frac{1}{2}$ un lietojam formulu (11):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{1}{2} - \left(-\frac{2}{3}\right)}{1 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{7}{4}.$$

$$\text{Tātad } \varphi = \arctg \frac{7}{4}.$$

Divu taisņu paralelītātes nosacījums. Ja divas taisnes ir paralēlas, tad to virziena leņķi ir vienādi, proti, $\alpha_1 = \alpha_2$ un tātad arī $\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2$ jeb $k_1 = k_2$. Tādējādi taisņu paralelītātes nosacījums ir šo taisņu virziena koeficientu vienādība

$$k_1 = k_2 \quad (12)$$

Ja taisnes dotas ar vispārīgiem vienādojumiem $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ un $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, tad, pārveidojot tos atklātu vienādojumu veidā, iegūst $y = -\frac{A_1}{B_1}x - \frac{C_1}{B_1}$ un $y = -\frac{A_2}{B_2}x - \frac{C_2}{B_2}$. Tātad $k_1 = -\frac{A_1}{B_1}$, $k_2 = -\frac{A_2}{B_2}$ un no paralelītātes

nosacījuma $k_1 = k_2$ izriet, ka $-\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2}$ jeb

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Tātad paralēlu taisņu vispārīgajos vienādojumos mainīgo lielumu koeficienti ir proporcionāli, piemēram, ar vienādojumiem $2x + 5y - 4 = 0$ un $6x + 15y + 7 = 0$ dotās taisnes ir paralēlas, jo $\frac{2}{6} = \frac{5}{15}$.

Divu taisņu perpendikularitātes nosacījums. Ja divas taisnes ir perpendikulāras, tad to veidotais leņķis ir $\varphi=90^\circ$ un $\alpha_2=90^\circ+\alpha_1$. Lietojot redukcijas formulu un sakarību starp kotangensa un tangensa funkciju, atrodam, ka

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} (90^\circ + \alpha_1) = -\operatorname{ctg} \alpha_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1}.$$

Tādējādi iegūstam divu taisņu perpendikularitātes nosacījumu

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}. \quad (13)$$

Piemērs. Uzrakstīt vienādojumu taisnei, kas iet caur punktu $M_0(3; 4)$ perpendikulāri taisnei $2x+3y-5=0$.

Pārveidojot doto taisnes vienādojumu atklātā veidā, atrodam tās virziena koeficientu:

$$2x+3y-5=0 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}.$$

Tātad virziena koeficients $k_1 = -\frac{2}{3}$. Izmantojot perpendikularitātes nosacījumu (13), atrodam perpendikulārās taisnes virziena koeficientu $k_2 = \frac{3}{2}$. Meklējamais taisnes vienādojums ir

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

kur $(x_0; y_0)$ ir dotā punkta M_0 koordinātas, bet $k = \frac{3}{2}$.
Tātad

$$y - 4 = \frac{3}{2}(x - 3).$$

Pārveidojot šo vienādojumu, iegūstam vienādojumu

$$2y - 8 = 3x - 9 \quad \text{jeb} \quad 3x - 2y - 1 = 0.$$

Divu taisņu krustpunkta koordinātas. Divu taisņu $A_1x+B_1y+C_1=0$ un $A_2x+B_2y+C_2=0$ krustpunkta koordinātas apmierina abus dotos vienādojumus. Tāpēc, lai aprēķinātu šīs koordinātas, ir jāatrisina vienādojumu sistēma

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases} \quad \text{jeb} \quad \begin{cases} A_1x+B_1y=-C_1 \\ A_2x+B_2y=-C_2. \end{cases}$$

Šo vienādojumu sistēmu var atrisināt pēc Krāmiera formulām

$$x = \frac{D_1}{D}, \quad y = \frac{D_2}{D},$$

$$\text{kur } D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}.$$

Izpētot šos determinantus, var noskaidrot *taisņu savstarpējo stāvokli*.

1. Ja sistēmas determinants $D \neq 0$, tad *taisnes krustojas*, jo sistēmai ir viens vienīgs atrisinājums – krustpunkta koordinātas.

2. Ja determinants $D=0$, bet determinanti $D_1 \neq 0$, $D_2 \neq 0$, tad sistēmai nav atrisinājuma. Tātad taisnēm nav kopīgu punktu un tās ir *paralēlas*. Patiešām, no vienādības $D=A_1B_2-A_2B_1=0$ jeb $A_1B_2=A_2B_1$ izriet divu taisņu

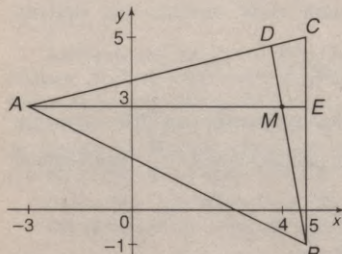
paralelītātes nosacījums $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.

3. Ja $D=0$, $D_1=0$ un $D_2=0$, tad, izvirzot šos determinantus, iegūstam vienādības

$$A_1 B_2 = A_2 B_1, C_1 B_2 = C_2 B_1, A_1 C_2 = A_2 C_1 \text{ jeb } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}, \frac{C_1}{C_2} = \frac{B_1}{B_2}, \frac{A_1}{A_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

no kurām izriet proporcija $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$. Tā kā abos vienādojumos koeficienti un brīvie locekļi ir proporcionāli, tad vienu no šiem vienādojumiem var iegūt, reizinot otru vienādojumu ar kādu skaitli. Tātad sistēmā neatkarīgs ir tikai viens vienādojums, kuram ir bezgalīgi daudz atrisinājumu. Tas nozīmē, ka taisnēm ir bezgalīgi daudz kopīgu punktu un šīs *taisnes sakrīt*.

1. piemērs. Dots trijstūra ABC virsotnes $A(-3; 3)$, $B(5; -1)$ un augstumu krustpunkts $M(4; 3)$. Sastādīt trijstūra malu vienādojumus un aprēķināt virsotnes C koordinātas (59. zīm.).



59. zīm.

Malas AB vienādojumu sastādām, izmantojot formulu (7), kuras pierakstā lietošim virsotņu apzīmējumus:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}.$$

Ievietojot šajā vienādojumā virsotņu A un B koordinātu vērtības, iegūstam vienādojumu

$$\frac{x+3}{5+3} = \frac{y-3}{-1-3} \text{ jeb } \frac{x+3}{8} = \frac{y-3}{-4},$$

$$\text{jeb } x+2y-3=0.$$

Malas AC ir perpendikulāra augstumam BD . Tātad saskaņā ar divu taisņu perpendikularitātes nosacījumu (13)

$$k_{AC} = -\frac{1}{k_{BD}}.$$

Augstuma BD virziena koeficientu aprēķinām, izmantojot punktu B un M koordinātas pēc formulas (3):

$$k_{BD} = \frac{y_B - y_M}{x_B - x_M} = \frac{-1-3}{5-4} = -4.$$

Tātad $k_{AC} = \frac{1}{4}$.

Lai iegūtu malas AC vienādojumu, lietojam formulu (4)

$$y - y_A = k_{AC}(x - x_A).$$

Tātad

$$y-3 = \frac{1}{4}(x+3) \text{ jeb } x-4y+15=0.$$

Tā kā punktu A un M ordinātas ir vienādas, tad augstums AE ir paralēls abscisu asij. Tāpēc mala BC ir paralēla Oy asij un tās vienādojums ir $x=5$.

Virsotnes C koordinātas iegūst, atrisinot vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x-4y+15=0 \\ x=5. \end{cases}$$

Sistēmas atrisinājums ir $x=5$ un $y=5$. Tātad $C(5; 5)$.

Atbilde: malas AB vienādojums ir $x+2y-3=0$, malas AC vienādojums ir $x-4y+15=0$, malas BC vienādojums ir $x=5$, virsotne ir punktā $C(5; 5)$.

2. piemērs. Doti paralelograma divu malu vienādojumi $3x - 7y + 19 = 0$, $x + 3y + 1 = 0$ un diagonālu krustpunkts $M(1; 2)$. Uzrakstīt pārējo malu vienādojumus un aprēķināt to garumu.

Tā kā dotajos vienādojumos x un y koeficienti nav proporcionāli ($\frac{3}{1} \neq \frac{-7}{3}$), tad šie vienādojumi ir paralelograma neparalēlo malu vienādojumi.

Apzīmēsim paralelograma virsotnes ar burtiem un pieņemsim, ka $3x - 7y + 19 = 0$ ir malas AB vienādojums, bet $x + 3y + 1 = 0$ – malas AD vienādojums (60. zīm.).

Aprēķinām virsotnes A koordinātas, atrisinot vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 3x - 7y + 19 = 0 \\ x + 3y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -4, y = 1.$$

Tātad $A(-4; 1)$.

Tā kā diagonālu krustpunkts M ir diagonālu viduspunkts, tad

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} \quad \text{un} \quad y_M = \frac{y_A + y_C}{2}.$$

No šīm vienādībām atrodam virsotnes C koordinātas:

$$x_C = 2x_M - x_A = 2 \cdot 1 - (-4) = 6 \quad \text{un} \quad y_C = 2y_M - y_A = 2 \cdot 2 - 1 = 3.$$

Tātad $C(6; 3)$.

Tā kā $DC \parallel AB$, tad $k_{DC} = k_{AB}$. Taisnes AB virziena koeficientu nosakām, pārveidojot atklātā veidā šīs taisnes vienādojumu:

$$3x - 7y + 19 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{7}x + \frac{19}{7}; \quad k_{DC} = k_{AB} = \frac{3}{7}.$$

Šo vērtību izmantojam, sastādot malas DC vienādojumu pēc formulas (4):

$$y - y_C = k_{DC}(x - x_C).$$

Iegūstam vienādojumu

$$y - 3 = \frac{3}{7}(x - 6) \quad \text{jeb} \quad 3x - 7y + 3 = 0.$$

Analogi atrodam malas CB vienādojumu:

$$CB \parallel AD \Rightarrow k_{CB} = k_{AD}.$$

No AD vienādojuma $x + 3y + 1 = 0$ jeb $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$ izriet, ka $k_{AD} = -\frac{1}{3}$ un arī $k_{CB} = -\frac{1}{3}$.

Malas CB vienādojumu sastādām pēc formulas

$$y - y_C = k_{CB}(x - x_C).$$

Šis vienādojums ir

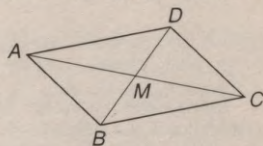
$$y - 3 = -\frac{1}{3}(x - 6) \Rightarrow x + 3y - 15 = 0.$$

Lai aprēķinātu paralelograma malu garumus, vispirms jāatrod virsotnes D koordinātas, atrisinot sistēmu, kas satur malu AD un DC vienādojumus:

$$\begin{cases} x + 3y + 1 = 0 \\ 3x - 7y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -1, y = 0; \quad D(-1; 0).$$

Aprēķinām malas AD garumu pēc formulas $AD = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2}$:

$$AD = \sqrt{(-1 - (-4))^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{10}.$$



60. zīm.

Analogi

$$DC = \sqrt{(x_c - x_D)^2 + (y_c - y_D)^2} = \sqrt{(6 - (-1))^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{58}.$$

Atbilde: paralelograma pārējo malu vienādojumi ir $3x - 7y + 3 = 0$ un $x + 3y - 15 = 0$, malu garumi ir $\sqrt{10}$ un $\sqrt{58}$.

3.3. §. OTRĀS KĀRTAS LĪNIJAS

Iepriekšējā paragrāfā noskaidrojām, ka taisni plaknē nosaka pirmās pakāpes vienādojums $Ax + By + C = 0$. Tāpēc saka, ka *taisne ir pirmās kārtas līnija*. Tagad apskatīsim līnijas, kuras nosaka otrās pakāpes vienādojums ar diviem mainīgajiem. Šādas līnijas ir *riņķa līnija, parabola, elipse un hiperbola*, kuras sauc arī par *otrās kārtas līnijām*. Vispārīgā veidā otrās pakāpes vienādojumu ar diviem mainīgajiem lielumiem raksta šādi:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (1)$$

Šajā vienādojumā viens vai vairāki koeficienti var būt vienādi ar nulli, taču vismaz viens no koeficientiem A, B, C nav vienāds ar nulli, jo pretējā gadījumā vienādojums nesatur otrās pakāpes locekļus un lineārais vienādojums $Dx + Ey + F = 0$ ir taisnes vienādojums.

1. RIŅĶA LĪNIJA

Definīcija. Par *riņķa līniju* sauc tādu plaknes punktu kopu, kuri atrodas vienādā attālumā no dota šīs plaknes punkta, ko sauc par centru. Attālumu no brīvi izraudzīta riņķa līnijas punkta līdz centram sauc par rādiusu un apzīmē ar burtu R . Pieņemsim, ka centra C koordinātas ir a un b (61. zīm.).

Ja $P(x; y)$ ir brīvi izraudzīts riņķa līnijas punkts, tad šī punkta īpašību var uzrakstīt ar vienādību $PC = R$. Tā kā $PC = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, tad iegūstam riņķa līnijas vienādojumu $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$ jeb

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \quad (2)$$

Ja centrs atrodas koordinātu sākumpunktā $O(0; 0)$, tad $a = 0, b = 0$ un iegūstam vienādojumu

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad (3)$$

ko sauc par *riņķa līnijas kanonisko¹ vienādojumu*. Kanoniskais vienādojums ir vienkāršākais riņķa līnijas vienādojums, jo koordinātu asis ir izraudzītas tā, lai koordinātu sākumpunkts sakristu ar riņķa līnijas centru.

Atverot iekavas riņķa līnijas vienādojumā (2) un pārgrupējot locekļus, iegūstam vienādojumu

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0. \quad (4)$$

Salīdzinot šo vienādojumu ar vispārīgo otrās pakāpes vienādojumu (1), redzams, ka riņķa līnijas vienādojumā (4) nav locekļa, kas satur reizinājumu xy , tātad $B = 0$, un koeficienti pie x^2 un y^2 ir vienādi, t. i., $A = C$.

¹ Grieķu izcelsmes vārds *kanonisks* nozīmē *vispārpieņemts, stingri reglamentēts*.

Ja otrās pakāpes vienādojumā $A=C$ un $B=0$, tad šāds vienādojums ir riņķa līnijas vienādojums, ja vien to var pārveidot formā (2), t. i., pārveidot tā, lai vienādojuma kreisajā pusē būtu binomu kvadrātu summa $(x-a)^2 + (y-b)^2$, bet labajā pusē – pozitīvs skaitlis R^2 . Paskaidrosim teikto ar piemēru.

Piemērs. Pārliecināties, ka vienādojums $2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y + 5 = 0$ nosaka riņķa līniju, atrast tās rādiusu un centra koordinātas.

Kā redzams, šajā vienādojumā $B=0$ un $A=C=2$.

Lai pārveidotu doto vienādojumu formā (2), vispirms vienādojuma kreiso un labo pusi dala ar kvadrātlocekļu koeficientu 2, pārnes labajā pusē brīvo locekli, sagrupē vienā izteiksmē locekļus, kas satur x , un citā izteiksmē locekļus, kas satur y :

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + \frac{5}{2} = 0; \quad (x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) = -\frac{5}{2}. \quad (5)$$

Salīdzinot iegūto vienādojumu (5) ar vienādojumu (4), redzams, ka šajā gadījumā $2ax = 2x = 2 \cdot 1 \cdot x$ un $2by = -4y = -2 \cdot 2 \cdot y$.

Tātad $a=1$, $b=-2$.

Pieskaitot vienādojuma (5) abām pusēm skaitļus $a^2=1$ un $b^2=4$, iegūstam vienādojumu

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 1 + 4 - \frac{5}{2},$$

kuru var pārrakstīt šādi:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = \frac{5}{2}.$$

Tātad $R^2 = \frac{5}{2}$, $a=1$, $b=-2$; riņķa līnijas rādiuss $R = \sqrt{\frac{5}{2}}$ un centrs ir punktā $C(1; -2)$.

Šos vienādojuma pārveidojumus sauc par *pilno kvadrātu atdalīšanu*.

Ja pēc pilno kvadrātu atdalīšanas iegūst vienādojumu, kura labajā pusē ir nulle, t. i.,

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = 0,$$

tad šādu vienādojumu apmierina tikai punkta $C(a; b)$ koordinātas un saka, ka *riņķa līnija ir degenerējusies par punktu*.

Ja pēc pilno kvadrātu atdalīšanas vienādojuma labajā pusē ir negatīvs skaitlis, tātad iegūts vienādojums

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = -R^2,$$

tad acīmredzami nav tādu punktu, kuru koordinātas apmierina šo vienādojumu (nenegatīvu skaitļu summa nevar būt vienāda ar negatīvu skaitli $-R^2$). Tātad šādam vienādojumam neatbilst nekāda līnija. Dažkārt saka, ka šis vienādojums ir *imaginārs* (tātad nereāls) *riņķa līnijas vienādojums*.

Risinot uzdevumus, bieži vien nav nepieciešams atrast riņķa līnijas rādiusu, bet ir jānosaka tikai centra koordinātas. No iepriekš aplūkotā piemēra redzams, ka centra koordinātas ir vienādas ar pusi no vienādojuma lineāro locekļu koeficientu

=====

Riņķa līnijas vienādojums:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2;$$

R – rādiuss, $C(a; b)$ – centrs;

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

$O(0; 0)$ – centrs.

vērtībām, kas ņemtas ar pretēju zīmi, t. i., ja $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ ir riņķa līnijas vienādojums, tad centra abscisa ir $a = -\frac{D}{2}$, bet ordināta ir $b = -\frac{E}{2}$.

Piemērs. Uzrakstīt vienādojumu pieskarei, kas novilkta riņķa līnijai $x^2 + y^2 - 12x + 2y + 12 = 0$ punktā $M(9; 3)$.

Pēc dotā vienādojuma lineāro locekļu koeficientiem $D = -12$ un $E = 2$ nosakām centra koordinātas $C(6; -1)$.

Tā kā riņķa līnijas pieskare iet caur punktu $M(9; 3)$, tad tās vienādojumu sastādām, izmantojot taisnes vienādojumu

$$y - y_M = k_p(x - x_M),$$

kur k_p ir pieskares virziena koeficients.

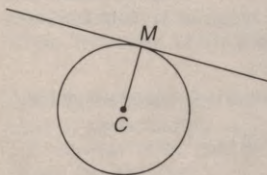
Pieskare ir perpendikulāra rādiusam CM (62. zīm.), tāpēc $k_p = -\frac{1}{k_{CM}}$.

Rādiusa CM virziena koeficientu atrodam pēc formulas

$$k_{CM} = \frac{y_M - y_C}{x_M - x_C} = \frac{3 - (-1)}{9 - 6} = \frac{4}{3}.$$

Tātad $k_p = -\frac{3}{4}$ un pieskares vienādojums ir

$$y - 3 = -\frac{3}{4}(x - 9) \text{ jeb } 3x + 4y - 39 = 0.$$



62. zīm.

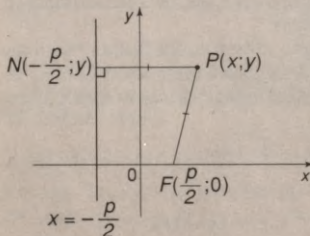
2. PARABOLA

Definīcija. Par **parabolu** sauc tādu plaknes punktu kopu, kuras jebkurš punkts atrodas vienādā attālumā no dotā šīs plaknes punkta, ko sauc par fokusu, un dotas taisnes, ko sauc par direktrisi.

Attālumu no fokusa līdz direktrisei sauc par **parabolas parametru**; to apzīmē ar burtu p .

Lai iegūtu parabolas kanonisko vienādojumu, koordinātu asis izraugās tā, lai abscisu ass iet caur fokusu perpendikulāri direktrisei, bet ordinātu ass būtu vienādā attālumā no fokusa un direktrises (63. zīm.). Šādi izraudzītā koordinātu sistēmā **direktrises vienādojums ir $x = -\frac{p}{2}$** , bet **fokusa F koordinātas ir $(\frac{p}{2}; 0)$** .

Apzīmējam ar $P(x; y)$ brīvi izraudzītu parabolas punktu un novelkam no šī punkta perpendikulu PN pret direktrisi. Tad punkta N koordinātas ir $(-\frac{p}{2}; y)$.



63. zīm.

Saskaņā ar parabolas definīciju ir spēkā vienādība $FP = PN$, kuru pārveidojam, izsakot šo nogriežņu garumu ar punktu koordinātām.

Tā kā $F(\frac{p}{2}; 0)$, $P(x; y)$, $N(-\frac{p}{2}; y)$, tad iegūstam vienādojumu

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2}.$$

Vienkāršojam šo vienādojumu, kāpinot tā labo un kreiso pusi kvadrātā un kāpinot kvadrātā binomus:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}.$$

Savelkot līdzīgos locekļus, iegūstam šādu parabolas **kanonisko** vienādojumu:

$$y^2 = 2px. \quad (6)$$

Salīdzinot vienādojumu (6) ar vispārīgo otrās pakāpes vienādojumu (1), redzams, ka parabolas kanoniskajā vienādojumā ir šādas koeficientu vērtības: $A=B=E=F=0$, $C=1$, $D=-2p$.

Parabolas formas izpēte pēc kanoniskā vienādojuma

Definīcijas apgabals. No vienādojuma (6) var izteikt y : $y = \pm \sqrt{px}$. Tātad ir jābūt spēkā nevienādībai $2px \geq 0$, bet, tā kā $p > 0$ (p ir attālums no fokusa līdz direktrisei), tad $x \geq 0$ jeb $x \in [0; +\infty)$. Ja parabolas punkta abscisu neierobežoti palielina, t. i., ja $x \rightarrow +\infty$, tad ordinātas modulis arī neierobežoti palielinās, t. i., $y \rightarrow \pm \infty$. Ja $x=0$, tad arī $y=0$. Tātad parabola iet caur koordinātu sākumpunktu $O(0; 0)$ – šo punktu sauc par **parabolas virsotni**. Tātad parabola ir nenoslēgta līnija, kas iet caur koordinātu sākumpunktu un atrodas koordinātu plaknes 1. un 4. kvadrantā.

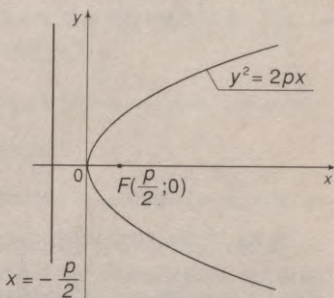
Parabolas simetrija un izliekums. Pieņemsim, ka uz parabolas atrodas punkts M_1 , kura abscisa ir skaitlis $x_1 > 0$. Tad šī punkta ordināta ir vai nu skaitlis $y_1 = +\sqrt{2px_1}$, vai skaitlis $y_2 = -\sqrt{2px_1} = -y_1$. Tā kā punkti $M_1(x_1; y_1)$ un $M_2(x_1; -y_1)$ ir simetriski attiecībā pret Ox asi, tad secinām, ka **parabola ir simetriska attiecībā pret abscisu asi**.

Atbilstoši veiktajam formas pētījumam parabola attēlota 64. zīmējumā.

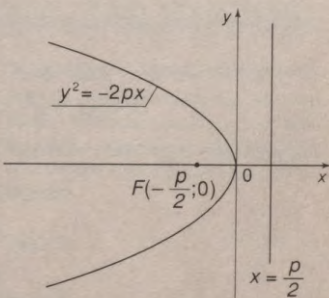
Parabolas kanoniskā vienādojuma pārējie veidi. Ja parabolas direktrise atrodas koordinātu plaknes 1. un 4. kvadrantā, bet fokuss – abscisu ass negatīvo vērtību daļā, tad $F(-\frac{p}{2}; 0)$ un direktrises vienādojums ir $x = -\frac{p}{2}$. Rīkojoties analogi kā iepriekš, iegūstam

parabolas kanonisko vienādojumu $y^2 = -2px$. No tā izriet, ka parabola iet caur koordinātu sākumpunktu un atrodas 2. un 3. kvadrantā (65. zīm.).

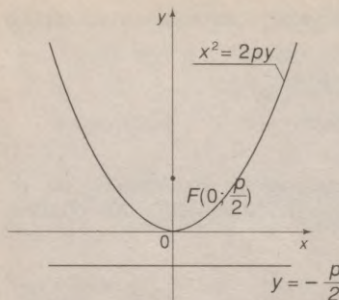
Ja parabolas fokuss atrodas uz ordinātu ass tās pozitīvo vērtību daļā, bet direktrise – 3. un 4. kvadrantā, t. i., tās vienādojums ir $y = -\frac{p}{2}$, bet fokuss ir punkts $F(0; \frac{p}{2})$, tad



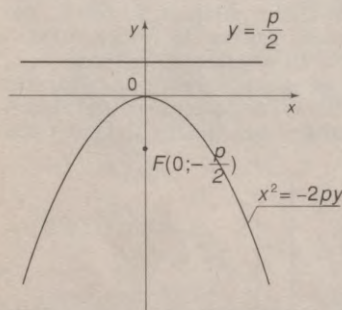
64. zīm.



65. zīm.



66. zīm.



67. zīm.

parabolas kanoniskais vienādojums ir $x^2 = 2py$. Šajā gadījumā parabolas simetrijas ass ir Oy ass, parabola atrodas 1. un 2. kvadrantā un iet caur koordinātu sākumpunktu (66. zīm.). Ievērosim, ka no šī parabolas vienādojuma izriet kvadrātfunkcijas izteiksme

$y = \frac{1}{2p}x^2$, kuras grafiku arī sauc par *parabol*.

Ja parabolas fokuss atrodas ordinātu ass negatīvo vērtību daļā un direktrise ir 1. un 2. kvadrantā, tad direktrises vienādojums ir $y = \frac{p}{2}$, bet fokuss ir punkts $F(0; -\frac{p}{2})$. Parabolas kanoniskais vienādojums ir $x^2 = -2py$ (67. zīm.).

Tātad ir iespējami četri parabolas kanoniskā vienādojuma veidi:

$$y^2 = 2px, y^2 = -2px, x^2 = 2py \text{ un } x^2 = -2py.$$

Uzdevumi par parabol. Lai uzrakstītu parabolas vienādojumu, ir jāzina, kurš no minētajiem četriem kanoniskā vienādojuma veidiem jāizraugās, un jāatrod parametra p vērtība. Šo uzdevumu var veikt, ja ir zināmas vai nu fokusa koordinātas, vai direktrises vienādojums, vai arī parabolas viena punkta koordinātas un simetrijas ass.

1. piemērs. Uzrakstīt parabolas vienādojumu, ja tās fokuss ir punkts $F(-3; 0)$.

Tā kā fokuss atrodas abscisu ass negatīvo vērtību daļā, tad šajā gadījumā parabolas vienādojums ir $y^2 = -2px$ un fokusa koordinātas ir $(-\frac{p}{2}; 0)$. Tātad $\frac{p}{2} = 3$, $p = 6$ un meklētais parabolas vienādojums ir $y^2 = -12x$.

Parabolas kanoniskais vienādojums:

$$y^2 = 2px, F\left(\frac{p}{2}; 0\right) - \text{fokuss}, x = -\frac{p}{2} - \text{direktrise.} \quad (64. \text{ zīm.})$$

Citi parabolas kanoniskā vienādojuma veidi:

$$y^2 = -2px, F\left(-\frac{p}{2}; 0\right), x = \frac{p}{2}. \quad (65. \text{ zīm.})$$

$$x^2 = 2py, F\left(0; \frac{p}{2}\right), y = -\frac{p}{2}. \quad (66. \text{ zīm.})$$

$$x^2 = -2py, F\left(0; -\frac{p}{2}\right), y = \frac{p}{2}. \quad (67. \text{ zīm.})$$

2. piemērs. Uzrakstīt parabolas vienādojumu, ja tās direktrises vienādojums ir $y = -2$.

Aplūkotajā gadījumā parabolas vienādojums ir $x^2 = 2py$, bet direktrises vienādojums ir $y = -\frac{p}{2}$. Tātad $\frac{p}{2} = 2$, $p = 4$. Ievietojot šo parametra vērtību parabolas vienādojumā, iegūstam $x^2 = 8y$.

3. piemērs. Uzrakstīt parabolas vienādojumu, ja tā ir simetriska Ox asij un uz parabolas atrodas punkts $M(8; -2)$.

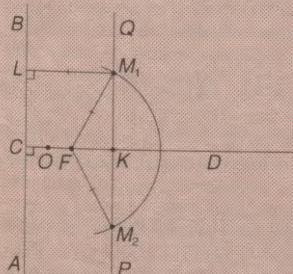
No uzdevuma nosacījumiem secinām, ka parabola atrodas 1. un 4. kvadrantā, tātad tās kanoniskais vienādojums ir $y^2 = 2px$. Tā kā punkts M atrodas uz šīs parabolas, tad tā koordinātas apmierina kanonisko vienādojumu, t. i., ir spēkā vienādība $(-2)^2 = 2p \cdot 8$, no kurienes atrodam, ka $16p = 4$ un $p = \frac{1}{4}$. Ievietojot šo p vērtību vienādojumā $y^2 = 2px$, iegūstam $y^2 = \frac{1}{2}x$.

4. piemērs. Dots parabolas vienādojums $x^2 = -12y$. Atrast šīs parabolas fokusa koordinātas un uzrakstīt direktrises vienādojumu.

Aplūkotajā gadījumā parabolas kanoniskais vienādojums ir $x^2 = -2py$, fokusa koordinātas ir $(0; -\frac{p}{2})$ un direktrises vienādojums ir $y = \frac{p}{2}$. No dotā vienādojuma izriet, ka $2p = 12$, tātad $p = 6$ un $\frac{p}{2} = 3$. Parabolas fokuss ir punkts $F(0; -3)$, bet direktrises vienādojums ir $y = 3$.

Kā konstruē parabolu

Parabolas definīciju izmanto, konstruējot parabolu pa punktiem, ja ir dots tās parametrs p . Konstruāciju veic pēc šāda plāna:



A-14. zīm.

1) novelk taisni AB (parabolas direktrisi) un konstruē perpendikulu CD (A-14. zīm.);

2) atliek nogriezni $CF = p$ un atrod nogriežņa CF viduspunktu O (punkts F ir parabolas fokuss, bet punkts O – parabolas virsotne);

3) uz taisnes stara OD brīvi izraugās kādu punktu K un caur šo punktu velk direktrisei AB paralēlu taisni PQ ;

4) konstruē riņķa līniju ar centru fokusā F un rādiusu $R = CK$; šī riņķa līnija krusto taisni PQ punktos M_1 un M_2 , kuri ir parabolas punkti, jo pēc konstrukcijas $R = FM_1 = FM_2 = CK = M_1L$. Atkārtojot šo konstrukciju ar citu taisnes stara OD punktu, iegūst citus parabolas punktus.

Parabolas optiskā īpašība. Parabolū iegūst, šķēļot parabolisku spoguļi ar plakni, kas iet caur spoguļa simetrijas asi. Izmantojot gaismas atstarošanas likumu, var pierādīt, ka visi parabolas simetrijas asij paralēlie gaismas stari pēc atstarošanās no spoguļa krusto simetrijas asi fokusā. Analogi, ja spoguļa fokusā ir novietots punktveida gaismas avots, tad no spoguļa atstarotie gaismas stari ir paralēli simetrijas asij. Šo īpašību izmanto tehnikā, konstruējot prožektorus, paraboliskas antenas u. tml.

Piemērs. Uz parabolisku spoguļi punktā $A(4,5; 6)$ krīt Ox asij paralēls gaismas stars. Uzrakstīt atstarotā gaismas stara vienādojumu.

Tā kā parabolas punkts A atrodas 1. kvadrantā un abscisu ass ir parabolas simetrijas ass, tad parabolas vienādojums ir $y^2 = 2px$, bet fokuss ir punkts $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$. Punkta A koordinātas apmierina parabolas vienādojumu; tāpēc

$$6^2 = 2p \cdot 4,5, \quad 9p = 36 \text{ un } p = 4.$$

Tātad ir jāsastāda vienādojums taisnei AF , kas iet caur punktiem $F(2; 0)$ un $A(4,5; 6)$. Ievietojot vienādojumā

$$\frac{x - x_F}{x_A - x_F} = \frac{y - y_F}{y_A - y_F}$$

punktu F un A koordinātu vērtības, iegūstam vienādojumu

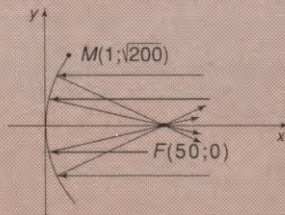
$$\frac{x - 2}{4,5 - 2} = \frac{y - 0}{6 - 0},$$

no kura atrodam, ka $\frac{x - 2}{2,5} = \frac{y}{6}$ jeb $12x - 5y - 24 = 0$.

Vai Arhimēds varēja ar paraboliska spoguļa palīdzību sadedzināt romiešu kuģus?

Parabolas optiskās īpašības pētīja Arhimēds jau 3. gadsimtā pirms mūsu ēras. Viņš nodarbojās ne tikai ar matemātikas teorētiskiem jautājumiem, bet arī ar tās praktiskiem lietojumiem, konstruējot dažādus mehānismus un ierīces. Legenda vēsta, ka Sirakūzu pilsētas aizstāvēšanas laikā pret romiešu karaspēku Arhimēds aizdedzinājis romiešu kuģus, fokusējot saules starus ar paraboliska spoguļa palīdzību. Kaut arī atstarotie saules stari spoguļa fokusā rada ļoti augstu temperatūru (var pat izkausēt svinu, vārīt ūdeni), tomēr zinātnieki ilgi apšaubīja iespēju, ka Arhimēds aizdedzinājis kuģi, jo viņa rīcībā nevarēja būt tik liels spoguļis. Patiešām, Arhimēdam bija jāatrodas pietiekami drošā attālumā no romiešu kuģa. Pieņemsim, ka šis attālums ir 50 metri. Tā kā kuģis atradās spoguļa fokusā, tad parabolas $y^2 = 2px$ fokusa koordinātas ir $(50; 0)$; tātad $\frac{p}{2} = 50, p = 100$ un parabolas vienādojums ir $y^2 = 200x$. Šādas parabolas liekums ir mazs. Tāpēc, lai 50 m attālumā no spoguļa virsotnes iegūtu pietiekami augstu temperatūru, spoguļa dziļumam jābūt pietiekami lielam, piemēram, – 1 m. Ja uz parabolas $y^2 = 200x$ atrodas punkts, kura abscisa ir 1, tad šī

punkta ordināta $y = \pm \sqrt{200 \cdot 1} \approx \pm 14$ (A-15. zīm.). Līdz ar to secinām, ka spoguļa diametrs ir apmēram 28 metri. Tik lielu parabolisku spoguļi Arhimēds varēja pagatavot no mazām plāksnītēm, piemēram, no Sirakūzu kareivju metāla vairogiem. Eksperimentāli pārbaudīts, ka šāda iespēja ir reāla. Novietojot nospodrinātus metāla vairogius uz parabolas loka, kuras fokusā atradies no darvotiem dēļiem izgatavots romiešu kuģa makets, atstarotajos saules staros kuģis sadedzis.



A-15. zīm.

3. ELIPSE

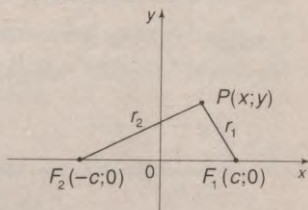
Definīcija. Par **elipsi** sauc tādu plaknes punktu kopu, kuras jebkura punkta attālumu summa līdz diviem dotiem šīs plaknes punktiem, ko sauc par fokusiem, ir konstanta.

Fokusus apzīmē ar burtiem F_1 un F_2 , attālumu starp fokusiem apzīmē ar $2c$ un attālumu summu no elipses punkta līdz fokusiem apzīmē ar $2a$.

Lai iegūtu elipses kanonisko vienādojumu, abscisu asi novelk caur fokusiem, bet ordinātu asi – caur nogriežņa F_1F_2 viduspunktu. Tad fokusu koordinātas ir $F_1(c; 0)$ un $F_2(-c; 0)$ (68. zīm.).

Ja $P(x; y)$ ir brīvi izraudzīts elipses punkts, tad saskaņā ar definīciju ir spēkā vienādība

$$PF_1 + PF_2 = 2a. \quad (7)$$



68. zīm.

Nogriežņus PF_1 un PF_2 sauc par **elipses fokālā-rādijiem** un lieto arī šādus apzīmējumus:

$PF_1 = r_1$, $PF_2 = r_2$. Izsakot fokālās rādijusus ar punktu P , F_1 , F_2 koordinātām, no vienādības (7) iegūstam vienādojumu

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} &= 2a \quad \text{jeb} \\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Lai vienkāršotu iegūto vienādojumu, tā abas puses kāpina kvadrātā:

$$\begin{aligned} (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2, \\ x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2. \end{aligned}$$

Savelkot līdzīgos locekļus un saīsinot, iegūstam vienādojumu

$$cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

kuru vienkāršojam, atkal kāpinot kvadrātā labās un kreisās puses izteiksmes:

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2).$$

Izpildot algebriskus pārveidojumus, no šī vienādojuma iegūstam, ka

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \quad (8)$$

No elipses definīcijas izriet, ka $a > c$. Patiesām, ir spēkā nevienādība $PF_1 + PF_2 > F_1F_2$, jo trijstūra divu malu summa ir lielāka nekā trešā mala (68. zīm.).

Tātad $2a > 2c$ un $a > c$. Līdz ar to $a^2 - c^2$ ir pozitīvs skaitlis un to var izteikt kā cita skaitļa b kvadrātu. Apzīmēsim $a^2 - c^2 = b^2$ un pārrakstīsim vienādojumu (8) šādi:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Izdalot šī vienādojuma labās puses un kreisās puses izteiksmes ar a^2b^2 , iegūstam elipses **kanonisko** vienādojumu

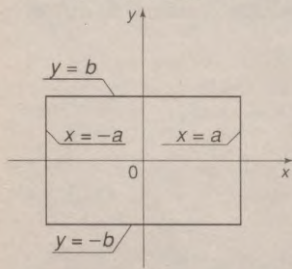
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (9)$$

Elipses kanoniskais vienādojums un tās parametri

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad F_1(c; 0), \quad F_2(-c; 0), \quad c^2 = a^2 - b^2, \quad e = \frac{c}{a}. \quad (68., 69., 70. \text{ zīm.})$$

Elipses formas izpēte pēc kanoniskā vienādojuma

Definīcijas apgabals. No elipses kanoniskā vienādojuma iegūstam vienādības



69. zīm.

$$y = \pm \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \quad (10)$$

$$x = \pm \frac{a}{b} \cdot \sqrt{b^2 - y^2}, \quad (11)$$

no kurām secinām, ka elipses punktu koordinātām ir spēkā nevienādības $a^2 - x^2 \geq 0$ un $b^2 - y^2 \geq 0$ jeb $x^2 \leq a^2$ un $y^2 \leq b^2$. Tātad

$$-a \leq x \leq a \text{ un } -b \leq y \leq b.$$

Tas nozīmē, ka elipse atrodas tāda taisnstūra iekšpusē, kura malas nosaka vienādojumi $x = -a$, $x = a$, $y = -b$, $y = b$ (69. zīm.).

Krustpunkti ar koordinātu asīm. Lai noteiktu elipses krustpunktus ar Ox asi, ir jāatrisina vienādojumu sistēma, kurā ir elipses vienādojums un Ox ass vienādojums $y = 0$.

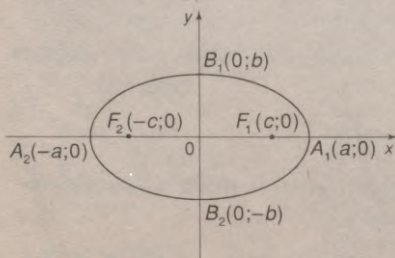
Ievietojot vienādojumā (11) $y = 0$, iegūstam, ka $x = \pm a$. Tātad elipse krusto Ox asi punktus $A_1(a; 0)$, un $A_2(-a; 0)$.

Analogi atrod krustpunktus ar Oy asi: ievietojot vienādojumā (10) $x = 0$, iegūstam, ka $y = \pm b$. Tātad elipse krusto Oy asi punktus $B_1(0; b)$ un $B_2(0; -b)$.

Punktus A_1, A_2, B_1, B_2 sauc par **elipses virsotnēm**. Nogriežņa A_1A_2 garumu **2a** sauc par **elipses lielo asi**, nogriežņa B_1B_2 garumu **2b** – par **elipses mazo asi**. Lielumus **a** un **b** sauc attiecīgi par elipses **lielo pusasi un mazo pusasi**.

Elipses simetrija. Pieņemsim, ka uz elipses atrodas punkts $P_1(x_1; y_1)$. Tad šī punkta koordinātas apmierina elipses vienādojumu. Tā kā elipses vienādojumā ir tikai mainīgo lielumu x un y pāra pakāpes, tad šo vienādojumu apmierina arī punktu $P_2(-x_1; y_1)$, $P_3(x_1; -y_1)$ un $P_4(-x_1; -y_1)$ koordinātas. Punkti P_1 un P_2 ir savstarpēji simetriski attiecībā pret Oy asi, punkti P_1 un P_3 ir simetriski attiecībā pret Ox asi, bet punkti P_1 un P_4 ir simetriski attiecībā pret koordinātu sākumpunktu. Tātad elipse ir simetriska attiecībā pret koordinātu asīm un attiecībā pret koordinātu sākumpunktu. Koordinātu sākumpunktu sauc par **elipses centru**, bet simetrijas asis – par **elipses asīm**.

Ievērojot elipses simetriju, var pētīt elipses formu tikai 1. kvadrantā, izmantojot vienādojumu



70. zīm.

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

ko iegūst no vienādojuma (10). Acīmredzami, ja x vērtības palielinās no 0 līdz a , tad y vērtības samazinās no b līdz 0. Var pierādīt, ka pirmajā un otrajā kvadrantā elipse ir izliekta līnija. Ievērojot šī pētījuma rezultātus, konstruē elipsi (70. zīm.).

Elipses ekscentricitāte. Elipses formas raksturošanai lieto parametru, ko sauc par ekscentricitāti.

Par elipses *ekscentricitāti* sauc skaitli $\varepsilon = \frac{c}{a}$ – fokusa attāluma līdz centram un lielās pusass attiecību.

Tā kā elipsei $0 < c < a$, tad $0 < \varepsilon < 1$. Lai noskaidrotu ekscentricitātes geometrisko nozīmi, ievērosim, ka elipsei ir spēkā sakarība $a^2 - c^2 = b^2$, no kuras atrodam, ka

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$; tātad $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$. Analizējot šo ekscentricitātes izteiksmi, pieņemsim, ka lielās pusass vērtība a ir nemainīga, bet mainās mazā pusass b .

Ja $b = a$, tad $c = 0$ un arī $\varepsilon = 0$, elipses vienādojums šajā gadījumā ir $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ jeb $x^2 + y^2 = a^2$, tātad ir iegūts riņķa līnijas vienādojums. Tādējādi var uzskatīt, ka *riņķa līnija ir īpašs elipses gadījums, proti, gadījums, kad elipses ekscentricitāte ir vienāda ar nulli un fokusi sakrīt ar centru.*

KĀ KONSTRUĒ ELIPSI

Ir vairāki paņēmieni, kā ar cirkļa un lineāla palīdzību var atrast elipses punktus. Aplūkosim vienu no šiem paņēmieniem. Pieņemsim, ka ir dota elipses lielā ass $2a$ un mazā ass $2b$. Konstruāciju veic pēc šāda plāna:

1) novelk divas savstarpēji perpendikulāras taisnes; to krustpunktu apzīmē ar burtu O ;

2) atliek elipses virsotnes A_1, A_2, B_1, B_2 tā, lai $OA_1 = OA_2 = a$ un $OB_1 = OB_2 = b$;

3) konstruē riņķa līnijas loku ar centru punktā B_1 un rādiusu a ; šis riņķa līnijas loks krusto taisnes nogriezni A_1A_2 punktos F_1 un F_2 , kas ir elipses fokusi. $OF_1 = c = \sqrt{a^2 - b^2}$ un saskaņā ar Pitagora teorēmu nogrieznis OF_1 ir tāda taisnleņķa trijstūra katete, kura hipotenūza ir a , bet otra katete ir nogrieznis b ;

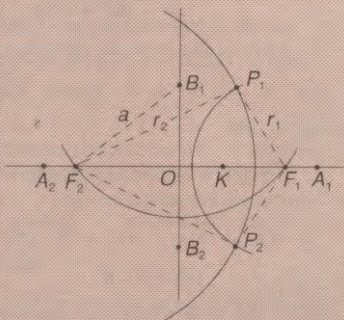
4) uz nogriežņa A_1A_2 brīvi izraugās punktu K un konstruē riņķa līniju ar centru punktā F_1 un rādiusu $r_1 = KA_1$;

5) konstruē riņķa līniju ar centru punktā F_2 un rādiusu $r_2 = KA_2 = 2a - r_1$.

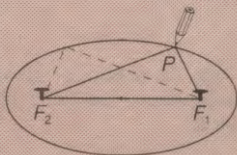
Šo riņķa līniju krustpunkti P_1 un P_2 ir elipses punkti, jo pēc konstrukcijas fokālo rādiusu summa $F_1P_1 + F_2P_1 = F_1P_2 + F_2P_2 = r_1 + 2a - r_1 = 2a$ (A-16. zīm.). Izraugoties citu nogriežņa A_1A_2 punktu un atkārtot šo konstrukciju, iegūst citus elipses punktus.

Ar aplūkoto paņēmieni var atrast kaut arī pēc patikas daudz, taču tikai atsevišķus izolētus elipses punktus.

Ļoti vienkāršs ir paņēmieni, pēc kura iegūst elipses kā nepārtrauktas līnijas zīmējumu. Šo paņēmieni var ērti lietot tad, ja jāzīmē lielāku izmēru elipse. Pēc dotajām elipses pusasīm a un b atrod c un zīmējuma plaknē atzīmē fokusus F_1 un F_2 , attālums starp kuriem ir vienāds ar $2c$. Fokusos ar saspraucamo adatu vai naglīnu palīdzību piestiprina $2a$ vienību gara diega galus. Ar zīmūļa smaili nostiepj diegu tā, lai zīmējuma plaknē tas sakristu ar trijstūra F_1PF_2 sānu malām (A-17. zīm.). Pārvietojot zīmūļa smaili gar šādi nostieptu diegu, tiek zīmēta līnija, kuras fokālo rādiusu summa (trijstūra F_1PF_2 sānu malu garumu summa) ir konstanta un vienāda ar $2a$. Tātad šī līnija ir elipse.



A-16. zīm.



A-17. zīm.

Ja mazā pusass neierobežoti samazinās, t. i., ja $b \rightarrow 0$, tad ekscentricitāte palielinās un tiecas uz skaitli 1, t. i., $\varepsilon \rightarrow 1$, bet $c \rightarrow a$. Elipse šajā gadījumā ir vairāk izstiepta, tās fokusi ir vairāk attālināti no centra.

Tādējādi ekscentricitāte ir parametrs, kas raksturo elipses formu: jo lielāka ir ekscentricitāte (t. i., jo mazāk tā atšķiras no skaitļa 1), jo vairāk izstiepta ir elipse; jo mazāka ir ekscentricitāte (t. i., jo mazāk tā atšķiras no skaitļa 0), jo mazāk elipse atšķiras no riņķa līnijas. Šī parametra ģeometriskā nozīmi atspoguļo tā nosaukums: latīņu izcelsmes vārds «ekscentricitāte» nozīmē «ārā no centra», šajā gadījumā – elipses fokusu novirzi no centra.

Uzdevumi par elipsi. Risinot uzdevumus par elipsi, ir jāizmanto tās kanoniskais vienādojums $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, sakarība starp parametriem $a^2 - c^2 = b^2$ un to ģeometriskā nozīme, kā arī ekscentricitātes formula $\varepsilon = \frac{c}{a}$.

1. piemērs. Parādīt, ka $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$ ir elipses vienādojums. Noteikt elipses pusasis, fokusu koordinātas un ekscentricitāti.

Pārveidojam vienādojumu kanoniskā veidā (9):

$$9x^2 + 25y^2 = 225 \Rightarrow \frac{9x^2}{225} + \frac{25y^2}{225} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Tātad $a^2 = 25$, $b^2 = 9$ un $a = 5$, $b = 3$. Izmantojot sakarību $a^2 - c^2 = b^2$, atrodam, ka $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$. Elipses fokusi ir punkti $F_1(4; 0)$ un $F_2(-4; 0)$, bet ekscentricitāte $\varepsilon = \frac{4}{5}$.

2. piemērs. Uzrakstīt elipses vienādojumu, ja tās ekscentricitāte $\varepsilon = \frac{3}{5}$ un attālums starp fokusiem $2c = 12$.

Tā kā $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$ un $c = 6$, tad $\frac{6}{a} = \frac{3}{5}$ jeb $a = 10$. Elipses mazā pusass $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$.

Ievietojot atrastās a un b vērtības elipses vienādojumā, iegūstam

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1.$$

3. piemērs. Uzrakstīt elipses vienādojumu, ja tās ekscentricitāte $\varepsilon = \frac{2}{3}$ un punkts $P\left(2; -\frac{5}{3}\right)$ atrodas uz elipses.

Vispirms atrodam elipses pusasis a un b . Izmantojot sakarību $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, iegūstam vienādiību

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{2}{3}.$$

Tā kā punkts P atrodas uz elipses, tad tā koordinātas apmierina elipses vienādojumu. Tādējādi atrodam otru sakarību starp meklējamiem lielumiem a un b :

$$\frac{2^2}{a^2} + \frac{\left(-\frac{5}{3}\right)^2}{b^2} = 1 \quad \text{jeb} \quad \frac{4}{a^2} + \frac{25}{9b^2} = 1.$$

Esam ieguvuši vienādojumu sistēmu attiecībā pret a un b :

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{2}{3} \\ \frac{4}{a^2} + \frac{25}{9b^2} = 1. \end{cases}$$

Kāpinot pirmā vienādojuma kreisās puses un labās puses izteiksmi kvadrātā, atrodam, ka $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{4}{9}$ jeb $9b^2 = 5a^2$. Ievietojot otrajā vienādojumā $9b^2$ vietā $5a^2$, iegūstam, ka

$$\frac{4}{a^2} + \frac{25}{5a^2} = 1, \quad \frac{4}{a^2} + \frac{5}{a^2} = 1, \quad \frac{9}{a^2} = 1, \quad a^2 = 9.$$

Tā kā $9b^2 = 5a^2$, tad $b^2 = 5$. Tādējādi meklētais elipses vienādojums ir

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

4. HIPERBOLA

Definīcija. Par **hiperbolu** sauc tādu plaknes punktu kopu, kuras brīvi izraudzīta punkta attālumu starpība līdz diviem dotiem šīs plaknes punktiem, ko sauc par fokusiem, ir konstanta.

Fokusus apzīmē ar burtiem F_1 un F_2 , attālumu starp fokusiem apzīmē ar $2c$ un attālumu starpību no hiperbolas punkta līdz fokusiem apzīmē ar $2a$.

Lai iegūtu kanonisku hiperbolas vienādojumu, abscisu asi novelk caur fokusiem, bet ordinātu asi – caur nogriežņa F_1F_2 viduspunktu. Tad fokusiem ir šādas koordinātas: $F_1(c; 0)$ un $F_2(-c; 0)$ (71. zīm.).

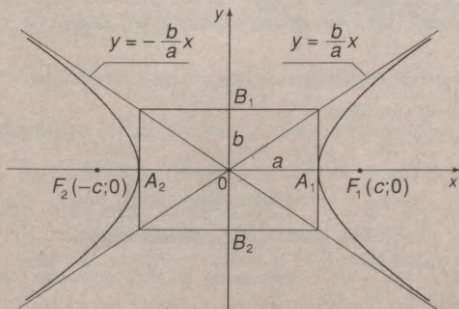
Ja $P(x; y)$ ir brīvi izraudzīts hiperbolas punkts, tad saskaņā ar definīciju ir spēkā vienādība

$$PF_1 - PF_2 = \pm 2a. \quad (12)$$

Nogriežņus PF_1 un PF_2 sauc par hiperbolas **fokālajiem rādiusiem** un tos apzīmē arī šādi: $PF_1 = r_1$, $PF_2 = r_2$. Izsakot fokālos rādiusus ar punktu P , F_1 un F_2 koordinātām, no vienādības (12) iegūstam vienādojumu

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \pm 2a \text{ jeb}$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \pm 2a.$$



71. zīm.

Šī vienādojuma labās puses un kreisās puses izteiksmi kāpinām kvadrātā un pārveidojam:

$$\begin{aligned}(x-c)^2 + y^2 &= (x+c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2 + 4a^2}, \\ x^2 - 2cx + c^2 + y^2 &= x^2 + 2cx + c^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2 + 4a^2}, \\ -cx - a^2 &= \pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}.\end{aligned}$$

Pēdējās vienādības labās puses un kreisās puses izteiksmes atkal kāpinām kvadrātā:

$$c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2).$$

Izpildot algebriskus pārveidojumus, iegūstam vienādojumu

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2). \quad (13)$$

No trijstūra F_1PF_2 (68. zīm.) izriet, ka $PF_1 - PF_2 < F_1F_2$, $2a < 2c$ un $a < c$. Tātad $c^2 - a^2$ ir pozitīvs skaitlis un to var izteikt kā cita skaitļa b kvadrātu: $c^2 - a^2 = b^2$. Izmantojot šo apzīmējumu, vienādojumu (13) var pārrakstīt šādi:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Izdalot vienādojuma labās puses un kreisās puses izteiksmi ar a^2b^2 , iegūstam hiperbolas **kanonisko** vienādojumu

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (14)$$

Hiperbolas formas izpēte pēc kanoniskā vienādojuma

Definīcijas apgabals. No hiperbolas kanoniskā vienādojuma (14) iegūstam vienādības

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \quad (15)$$

un

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + y^2}, \quad (16)$$

no kurām var secināt, ka hiperbolas brīvi izraudzīta punkta abscisai ir spēkā nevienādība $x^2 - a^2 \geq 0$ jeb $x^2 \geq a^2$. Tātad $x \geq a$ vai $x \leq -a$. Savukārt hiperbolas punktu ordinātas var būt jebkurš reāls skaitlis, jo ar visiem reāliem skaitļiem ir spēkā nevienādība $b^2 + y^2 \geq 0$.

Krustpunkti ar koordinātu asīm. Ievietojot vienādojumā (16) $y = 0$, iegūstam, ka $x = \pm a$. Tātad hiperbola krusto Ox asi punktos $A_1(a; 0)$ un $A_2(-a; 0)$. Ievietojot vienādojumā (15) $x = 0$, iegūstam imagināru skaitli $y = \pm bi$. Tātad hiper-

Hiperbolas kanoniskais vienādojums

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad F_1(c; 0), \quad F_2(-c; 0), \quad c^2 = a^2 + b^2, \quad e = \frac{c}{a},$$

$$y = \pm \frac{b}{a} x - \text{hiperbolas asimptotas (71. zīm.);}$$

$$x^2 - y^2 = a^2 - \text{vienādsānu hiperbola.}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 - \text{savstarpēji saistītas hiperbolas (72. zīm.).}$$

bola nekrusto Oy asi. Tomēr, konstruējot hiperbolu, izmanto Oy ass punktus $B_1(0; b)$ un $B_2(0; -b)$.

Punktus A_1 un A_2 sauc par **hiperbolas reālajām virsotnēm**, bet B_1 un B_2 – par **imaginārajām** (šķietamajām, neeksistējošām) virsotnēm. Nogriežņa A_1A_2 garumu $2a$ sauc par **hiperbolas reālo asi**, nogriežņa B_1B_2 garumu $2b$ – par **hiperbolas imagināro asi**. Lielumus a un b sauc attiecīgi par hiperbolas **reālo pusasi un imagināro pusasi**.

Hiperbolas simetrija. Analogi kā elipsei, viegli konstatēt, ka hiperbola ir simetriska attiecībā pret koordinātu asīm un attiecībā pret koordinātu sākumpunktu, jo hiperbolas vienādojumā ir tikai mainīgo lielumu x un y pāra pakāpes. Koordinātu sākumpunktu sauc par **hiperbolas centru**, Ox asi – par **hiperbolas fokālo asi**, jo uz šīs ass atrodas hiperbolas fokusi. Ievērojot hiperbolas simetriju, var pētīt tās formu tikai 1. kvadrantā, izmantojot vienādojumu

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \quad \text{jeb} \quad y = \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}, \quad (17)$$

ko iegūst no vienādojuma (15).

Hiperbolas asimptotas. No vienādojuma (17) secinām, ka, neierobežoti palielinot x vērtības, arī y vērtības neierobežoti palielinās, t. i., $y \rightarrow +\infty$, ja $x \rightarrow +\infty$.

Ordinātas izteiksme ir sadalīta divos reizinātajos $\frac{b}{a}x$ un $\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$.

Ja x vērtības neierobežoti palielina, tad $\frac{a^2}{x^2}$ vērtības neierobežoti samazinās, t. i., tiecas uz nulli, zemsaknes izteiksme un arī kvadrātsaknes vērtība tiecas uz skaitli 1, bet hiperbolas punkta ordinātas y vērtība tiecas uz $\frac{b}{a}x$.

Tā kā $y = \frac{b}{a}x$ ir taisnes vienādojums, tad secinām, ka, neierobežoti palielinot abscisas x vērtības, hiperbolas zars 1. kvadrantā tiecas uz taisni $y = \frac{b}{a}x$. Var arī matemātiski stingri pierādīt, ka attālums no hiperbolas punkta līdz šai taisnei tiecas uz nulli, ja $x \rightarrow +\infty$. Taisni, kurai piemīt šāda īpašība, sauc par **hiperbolas asimptotu**. Ievērojot hiperbolas simetriju, var apgalvot, ka asimptota ir arī taisne

$$y = -\frac{b}{a}x.$$

Tātad **hiperbolai ir divas asimptotas**, kas ir savstarpēji simetriskas attiecībā pret koordinātu asīm; tās ir taisnes

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{un} \quad y = -\frac{b}{a}x, \quad (18)$$

kas krustojas koordinātu sākumpunktā. Šo taisņu virziena koeficienti ir $k_1 = \frac{b}{a}$ un $k_2 = -\frac{b}{a}$. Tāpēc, lai konstruētu asimptotas, parasti vispirms koordinātu plaknē konstruē taisnstūri, kura malu vienādojumi ir $x = a$, $x = -a$, $y = b$ un $y = -b$. Pēc tam novelk šī taisnstūra diagonāles un turpina tās ārpus taisnstūra. Iegūtās taisnes ir hiperbolas asimptotas, jo saskaņā ar konstrukciju to vienādojumi ir vienādojumi (18).

Ievērojot šī pētījuma rezultātus, konstruē hiperbolu (71. zīm.).

Hiperbolas ekscentricitāte. Analogi kā elipsei, arī hiperbolas formas raksturošanai lieto parametru, ko sauc par ekscentricitāti.

Par *hiperbolas ekscentricitāti* sauc skaitli $\varepsilon = \frac{c}{a}$.

Tā kā hiperbolai $c > a$, tad $\varepsilon > 1$. Ievērosim, ka hiperbolai $c^2 - a^2 = b^2$ jeb $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ un tātad $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$. Ja reālās pusass a vērtība ir nemainīga, bet palielinās imaginārā pusass b , tad ε vērtība palielinās. Savukārt, samazinot b vērtību, samazinās arī ε vērtība. Tātad, jo mazāk ekscentricitāte atšķiras no skaitļa 1, jo šaurāki ir hiperbolas zari.

Vienādsānu hiperbola. Ja hiperbolas reālā pusass ir vienāda ar imagināro pusasi, t. i., ja $a = b$, tad hiperbolu sauc par *vienādsānu hiperbolu*. Šādas hiperbolas vienādojums ir

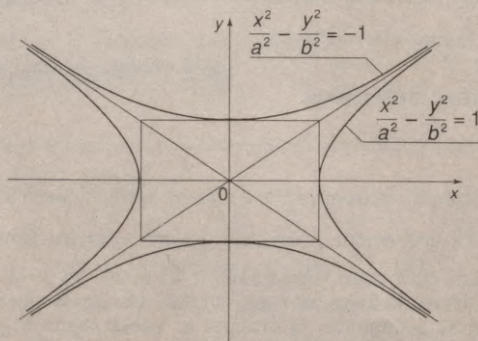
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{jeb} \quad x^2 - y^2 = a^2.$$

No vienādojumiem (18) izriet, ka vienādsānu hiperbolas asimptotas ir taisnes $y = x$ un $y = -x$. Tātad asimptotas ir savstarpēji perpendikulāras un ar koordinātu asīm veido 45° leņķi. Vienādsānu hiperbolai parametrs $c = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$, bet ekscentricitāte $\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$.

Saistītā hiperbola. Ja hiperbolas fokusus izraugās uz Oy ass, fokālo rādiusu starpību apzīmē ar $2b$, attālumu starp fokusi apzīmē ar $2c$ un starpību $c^2 - b^2 = a^2$, tad iegūst šādu hiperbolas vienādojumu:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad \text{jeb} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1. \quad (19)$$

Hiperbolas $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ un $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ sauc par *savstarpēji saistītām hiperbolām*; šīm hiperbolām ir vienas un tās pašas simetrijas asis un arī asimptotas sakrīt. Abas hiperbolas attēlotas 72. zīmējumā.



72. zīm.

Uzdevumi par hiperbolu. Risinot uzdevumus par hiperbolu, parasti ir jāizmanto tās kanoniskais vienādojums $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, sakarība starp parametriem $c^2 - a^2 = b^2$, to ģeometriskā nozīme, ekscentricitātes formula $\varepsilon = \frac{c}{a}$ un asimptotu vienādojumi $y = \pm \frac{b}{a}x$.

1. piemērs. Parādīt, ka $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$ ir hiperbolas vienādojums. Noteikt hiperbolas reālo un imagināro pusasi, fokusu koordinātas, ekscentricitāti, uzrakstīt asimptotu vienādojumus.

Pārveidojam doto vienādojumu kanoniskā veidā:

$$9x^2 - 16y^2 - 144 = 0 \Rightarrow 9x^2 - 16y^2 = 144 \Rightarrow \frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Tātad $a^2 = 16$, $b^2 = 9$, $a = 4$, $b = 3$.

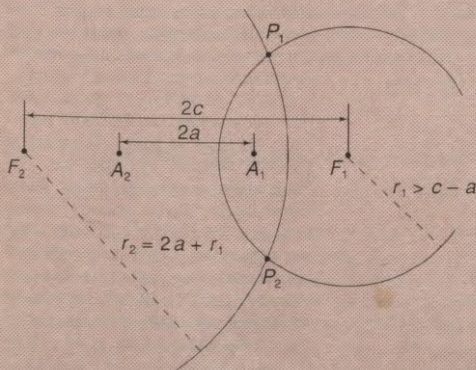
No vienādības $c^2 - a^2 = b^2$ atrodam, ka $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$. Tātad hiperbolas fokusi ir punkti $F_1(5; 0)$, $F_2(-5; 0)$, ekscentricitāte $\varepsilon = \frac{5}{4}$, asimptotu vienādojumi ir $y = \frac{3}{4}x$ un $y = -\frac{3}{4}x$.

2. piemērs. Uzrakstīt hiperbolas vienādojumu, ja attālums starp fokusi $2c = 20$ un asimptotu vienādojumi ir $y = \pm \frac{4}{3}x$.

No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka $c = 10$ un $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$ jeb $b = \frac{4}{3}a$. Ievietojot šos lielumus sakarībā $c^2 - a^2 = b^2$, iegūstam vienādību $100 - a^2 = \frac{16}{9}a^2$, no kuras izriet, ka $\frac{25}{9}a^2 = 100$, $a^2 = 36$ un $a = 6$.

No vienādības $b = \frac{4}{3}a$ atrodam, ka $b = 8$. Ievietojot atrastās a un b vērtības hiperbolas kanoniskajā vienādojumā, iegūstam $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$.

KĀ KONSTRUE HIPERBOLU



A-18. zīm.

Analogi kā elipses punktus, arī hiperbolas punktus var konstruēt ar cirkuļa un lineāla palīdzību, ja ir dots attālums $A_1A_2 = 2a$ starp hiperbolas virsotnēm un attālums starp fokusi $F_1F_2 = 2c$ ($c > a$). Novelk riņķa līniju ar centru punktā F_1 un brīvi izraudzītu rādiusu $r_1 > c - a$. Pēc tam konstruē riņķa līniju, kuras centrs ir fokuss F_2 , bet rādiuss ir $r_2 = 2a + r_1$. Šo riņķa līniju krustpunkti P_1 un P_2 ir hiperbolas punkti, jo $r_2 - r_1 = 2a + r_1 - r_1 = 2a$. Atkārtot šo konstrukciju ar citu rādiusu r_1 , iegūst citus hiperbolas punktus (A-18. zīm.).

3. piemērs. Uzrakstīt hiperbolas vienādojumu, ja uz tās atrodas punkti $P_1(6; -1)$ un $P_2(-8; 2\sqrt{2})$.

Tā kā dotie punkti atrodas uz hiperbolas, tad to koordinātas apmierina hiperbolas vienādojumu:

$$\frac{6^2}{a^2} - \frac{(-1)^2}{b^2} = 1 \quad \text{un} \quad \frac{(-8)^2}{a^2} - \frac{(2\sqrt{2})^2}{b^2} = 1.$$

Atrisinām vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} \frac{36}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \\ \frac{64}{a^2} - \frac{8}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{36}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \\ \frac{8}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{1}{8} \end{cases}.$$

Atnemot no pirmā vienādojuma otro vienādojumu, iegūstam vienādojumu

$$\frac{36}{a^2} - \frac{8}{a^2} = 1 - \frac{1}{8} \quad \text{jeb} \quad \frac{28}{a^2} = \frac{7}{8},$$

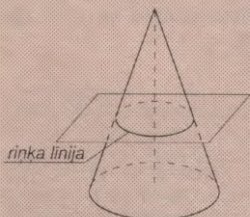
no kura izriet, ka $a^2 = 32$. Ievietojot šo a^2 vērtību sistēmas pirmajā vienādojumā, atrodam b^2 :

$$\frac{36}{32} - \frac{1}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{b^2} = \frac{1}{8} \Rightarrow b^2 = 8.$$

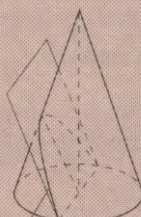
Meklētais hiperbolas vienādojums ir

$$\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{8} = 1.$$

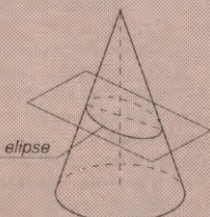
KONIKU JĒDZIENS



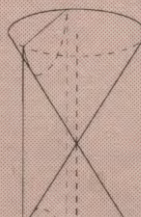
A-19. zīm.



A-20. zīm.



A-21. zīm.



A-22. zīm.

Otrās kārtas līnijas (riņķa līniju, parabolu, elipsi un hiperbolu) pētīja jau Senās Grieķijas zinātnieki vairākus gadsimtus pirms mūsu ēras. Sen grieķu matemātiķi nepazīna analītiskās pētīšanas metodes, kuru pamatā ir vienādojumu izpēte. Toties bija ļābi attīstīti dažādu geometrijas konstrukcijas uzdevumu risināšanas paņēmieni. Otrās kārtas līnijas ieguva, šķēļot taisna riņķa konusa virsmu ar plaknēm. Ja plakne ir perpendikulāra konusa asij, tad šķēlumā iegūst riņķa līniju (A-19. zīm.). Ja plakne ir paralēla konusa veidulei, tad šķēluma līnija ir parabola (A-20. zīm.). Elipsi iegūst, šķēļot konusa virsmu ar plakni, kas nav paralēla veidulei un nav ne paralēla, ne arī perpendikulāra konusa simetrijas asij (A-21. zīm.). Ja plakne ir paralēla divdobumu konusa simetrijas asij, tad šķēlumā iegūst hiperbolas zarus (A-22. zīm.). Tāpēc šīs līnijas sauc arī par konusa šķēlumiem jeb par *konikām*.

KUBA DUBULTOŠANAS UZDEVUMS UN TĀ SAISTĪBA AR KONIKĀM

Antīkajā matemātikā radās trīs interesanti konstrukcijas uzdevumi, ar kuru risināšanu cilvēki nesekmīgi nodarbojās daudzus gadsimtus. Šie uzdevumi ir

- 1) *riņķa kvadrātūra* (konstruēt kvadrātu, kura laukums ir vienāds ar dotā riņķa laukumu);
- 2) *leņķa trisekcija* (lietojot tikai cirkuli un lineālu, sadalīt leņķi trīs vienādās daļās);
- 3) *kuba dubultošana* (konstruēt kubu, kura tilpums ir divas reizes lielāks nekā dotā kuba tilpums).

Aplūkosim kuba dubultošanas uzdevumu. Kā vēsta leģenda, Grieķijā, Dēlas salā izcēlusies mēra epidēmija. Salas iedzīvotāji griezušies pie Delfu orākula ar lūgumu palīdzēt. Orākuls atbildējis, ka Atēnās Apollona templī atrodas kuba formas zelta ziedojumu trauks, kurā cilvēki liekot ziedojumus. Šis trauks esot par mazu, tāpēc dievi sadusmojušies un uzsūtījuši slimību. Nepieciešams novietot divas reizes lielāku trauku. Dēlas salas iedzīvotāji izgatavojuši kuba formas zelta trauku, kura šķautne bijusi divas reizes garāka nekā iepriekšējam traukam, un novietojusi templī, taču epidēmija nav izbeigusies. Kad viņi atkārtoti griezušies pie orākula, tas padomājis un atbildējis: «Jūsu trauks ir par lielu, tā tilpums nav divas reizes, bet gan astoņas reizes lielāks. Nepieciešams tieši divas reizes lielāks ziedojumu trauks.» Dēlas iedzīvotāji nav varējuši atrast šāda kuba šķautnes garumu. Tā esot radies kuba dubultošanas jeb Dēlas uzdevums. Acīmredzami, ja dotā kuba šķautne ir a un tilpums a^3 , bet meklējamā kuba šķautne ir x un tilpums x^3 , tad no vienādojuma $x^3 = 2a^3$ iegūstam, ka $x = a\sqrt[3]{2}$. Tātad kuba dubultošanas uzdevums reducējas uz uzdevumu ar cirkuli un lineālu konstruēt nogriezni, kura garums ir $\sqrt[3]{2}$, ja par garuma mērvienību izraugās nogriezni a . (Atzīmēsim, ka analogi no kvadrāta dubultošanas uzdevuma rodas vienādojums $x^2 = 2a^2$, kura atrisinājums ir $x = a\sqrt{2}$, un nogriezni $a\sqrt{2}$ var viegli konstruēt, izmantojot Pitagora teorēmu.) Ar kuba dubultošanas uzdevuma risināšanu sākuši nopietni nodarboties sengrieķu matemātiķi. Viens no viņiem – Menehms 4. gadsimtā pirms mūsu ēras atradis, ka meklējamā kuba šķautnes garumu x un dotā kuba šķautnes garumu a saista proporcija

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a},$$

kur y ir konstrukcijā izmantojamā palīgnogriežņa garums. Konstruējot nogriezni x pēc šādas proporcijas, Menehms izmantojis konusa virsmas šķēlumus ar plaknēm – konikas. Šāda uzdevuma risinājums, izmantojot analītiskās ģeometrijas metodes, ir ļoti vienkāršs. Patiešām, no Menehma proporcijas izriet vienādojumu sistēma

$$\begin{cases} x^2 = ay \\ y^2 = 2ax, \end{cases}$$

kurā ir divu parabolu vienādojumi. Izsakot no pirmā vienādojuma $y = \frac{x^2}{a}$ un ievietojot otrajā vienādojumā, iegūstam, ka $\frac{x^4}{a^2} = 2ax$, no kurienes $x^4 - 2a^3x = 0$ jeb $x(x^3 - 2a^3) = 0$.

Tātad $x_1 = 0$, $x_2 = a\sqrt[3]{2}$, bet $y_1 = 0$ un $y_2 = a\sqrt[3]{4}$. Kā redzams, šo parabolu krustpunkta $P(a\sqrt[3]{2}; a\sqrt[3]{4})$ abscisa ir meklējamā kuba šķautnes garums. Līdz ar to Dēlas uzdevuma risinājums ir šāds: jākonstruē parabolas $x^2 = ay$ un $y^2 = 2ax$ un jānosaka šo parabolu krustpunkta abscisa. Kaut arī, zinot parabolas parametru, ar cirkuli un lineālu var konstruēt pēc patikas daudz parabolas punktu, tomēr nav zināms, kā jākonstruē divu parabolu kopīgais punkts. Ir pierādīts, ka skaitli $\sqrt[3]{2}$ nav iespējams konstruēt un tātad arī kuba dubultošanas uzdevumu nevar atrisināt, lietojot tikai cirkuli un lineālu.

KONIKAS UN DEBESS ĶERMEŅU KUSTĪBA

Zinātnieku interese par 2. kārtas līnijām īpaši pastiprinājās 16., 17. gadsimtā sakarā ar debess ķermeņu kustības izpēti. 1609. gadā vācu astronoms un matemātiķis Johans Keplers, izmantojot Marsa novērojumus, secināja, ka katra planēta riņķo ap Sauli pa elipsi, kuras vienā fokusā atrodas Saule. Piemēram, Zemes trajektorija ir elipse, kuras lielā ass $2a = 298 \cdot 10^6$ km un Saules attālums līdz elipses centram (fokusa attālums) $c = 2,496 \cdot 10^6$ km. Ar planētu kustības likumu matemātisko izpēti daudz nodarbojās Izaks Ņūtons. Izmantojot gravitācijas likumu, viņš pierādīja, ka, pastāvot zināmiem nosacījumiem, debess ķermeni var pārvietoties ne tikai pa elipsēm, bet arī pa parabolām un hiperbolām. Vēlāk izrādījās, ka pa šādām trajektorijām pārvietojas dažas komētas. Ņūtons paredzēja arī mākslīgo Zemes pavadoņu radišanas iespēju, izsviežot ķermeni ar dažādiem sākuma ātrumiem no Zemes. Ja ķermeni ievada orbitā ap Zemi ar ātrumu 7,9 km/s (1. kosmiskais ātrums), tad tā trajektorija ir riņķa līnija, kuras centrā ir Zeme. Ja sākuma ātrums ir lielāks nekā 7,9 km/s, tad trajektorija ir elipse, kuras fokusā atrodas Zeme. Ja ķermeņa sākuma ātrums ir 11,2 km/s (2. kosmiskais ātrums), tad tas, pārvietojoties pa parabolu, atstāj Zemes gravitācijas iedarbības lauku. Ja ķermeni ar ātrumu 16,5 km/s (3. kosmiskais ātrums) izšauj no Zemes tās kustības virzienā ap Sauli, tad kustības trajektorija ir hiperbola un ķermenis atstāj Saules sistēmu.

3.4. §. JĒDZIENS PAR OTRĀS PAKĀPES VIENĀDOJUMA REDUCĒŠANU KANONISKĀ VEIDĀ

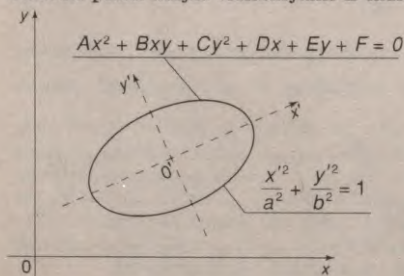
1. PROBLĒMAS NOSTĀDNE

Izrisinot otrās kārtas līniju – riņķa līnijas, parabolas, elipses un hiperbolas kanoniskos vienādojumus, koordinātu asis izraudzījāmies tā, lai iegūtie vienādojumi būtu pēc iespējas vienkārši un pēc tiem varētu viegli izpētīt līnijas īpašības un iegūt zīmējumu.

Kanonisku līnijas vienādojumu iegūst tad, ja koordinātu asis sakrīt ar līnijas simetrijas asīm. Ja, piemēram, koordinātu asis nesakrīt ar elipses simetrijas asīm un nav arī tām paralēlas (73. zīm.), tad iegūst vispārīgu 2. pakāpes vienādojumu

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (1)$$

Taču šis pašas līnijas vienādojums ir kanoniskais vienādojums



73. zīm.

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

citā koordinātu sistēmā $x'O'y'$, kuras asis sakrīt ar elipses simetrijas asīm. Tādējādi rodas šāds pamatzdevums: noskaidrot, kāda 2. kārtas līnija ir noteikta ar vispārīgo 2. pakāpes vienādojumu (1), un pārveidot šo vienādojumu kanoniskā formā. Šī uzdevuma risināšanas ideja izriet no 73. zīmējuma. Acīmredzami, lai koordinātu asis sakristu ar elipses simetrijas asīm, koor-

dinātu sistēmas xOy asis vispirms ir jāpārbīda paralēli sev tā, lai koordinātu sākumpunkts būtu punkts O' . Pēc tam koordinātu asis ir jāpagriež par noteiktu leņķi tā, lai tās sakristu ar sistēmas $x'O'y'$ asīm. Citiem vārdiem, ir jānoskaidro divi jautājumi: 1) kā mainās līnijas punkta koordinātas, ja koordinātu asis pārbīda paralēli sev; 2) kā mainās līnijas punkta koordinātas, ja koordinātu asis pagriež par noteiktu leņķi.

2. KOORDINĀTU ASU PARALĒLĀ PĀRNESE

Pieņemsim, ka kādā koordinātu sistēmā xOy punkta P koordinātas ir $(x; y)$. Aplūkosim šajā koordinātu sistēmā citu punktu O' , kura koordinātas ir $(x_0; y_0)$, un pārbīdīsim koordinātu asis paralēli sev tā, lai koordinātu sākumpunkts būtu punkts O' . Iegūtajā jaunajā koordinātu sistēmā punkta P koordinātas ir skaitļi $(x'; y')$.

Lai atrastu sakarības starp punkta P koordinātām vecajā un jaunajā koordinātu sistēmā, aplūkosim vektorus $\vec{OP}$, $\vec{OO'}$ un $\vec{O'P}$. Tā kā šie vektori ir rādusvektori, tad to koordinātas ir vienādas ar galapunktu koordinātām, proti, $\vec{OP} = (x; y)$, $\vec{OO'} = (x_0; y_0)$ un $\vec{O'P} = (x'; y')$ (74. zīm.). Kā redzams no 74. zīmējuma,

$$\vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{O'P} \text{ jeb } x = x' + x_0 \text{ un } y = y' + y_0.$$

No šīm vienādībām atrodam, ka $x' = x - x_0$ un $y' = y - y_0$.

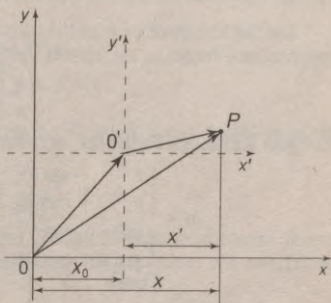
Tātad punkta P koordinātas **vecajā sistēmā** ir atrodamas pēc šī punkta koordinātām jaunajā sistēmā, lietojot formulas

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0, \end{cases} \quad (3)$$

kur $x_0; y_0$ ir jaunās koordinātu sistēmas sākumpunkta koordinātas.

Punkta P **jaunās koordinātas** atkarībā no vecajām koordinātām atrod pēc formulām

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0. \end{cases} \quad (4)$$



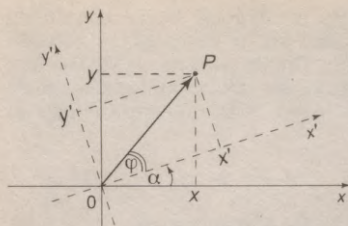
74. zīm.

Piemērs. Koordinātu sistēmā xOy dots punkts $M(-5; 3)$. Atrast šī punkta koordinātas sistēmā $x'O'y'$, kas iegūta ar paralēlo pārnēsī, pārvietojot sistēmas xOy sākumpunktu O uz punktu $O'(-1; -4)$.

Šajā gadījumā $x = -5$, $y = 3$, $x_0 = -1$, $y_0 = -4$. Lietojot formulas (4), atrodam, ka $x' = -5 - (-1) = -4$ un $y' = 3 - (-4) = 7$. Tātad sistēmā $x'O'y'$ dotā punkta koordinātas ir šādas: $M(-4; 7)$.

3. KOORDINĀTU ASU PAGRIEŠANA

Pieņemsim, ka koordinātu sistēmā xOy punkta P koordinātas ir $(x; y)$. **Pagriežot koordinātu asis par leņķi α** , iegūstam jaunu koordinātu sistēmu $x'O'y'$. Punkta P koordinātas jaunajā koordinātu sistēmā apzīmēsim ar $(x'; y')$. Atradīsim sakarības starp punkta vecajām un jaunajām koordinātām un pagrieziena leņķi α .



75. zīm.

Aplūkosim vektoru $\vec{OP}$, kura koordinātas vecajā sistēmā ir $(x; y)$, bet jaunajā sistēmā $-(x'; y')$ (75. zīm.). Šī vektora un Ox' ass veidoto leņķi apzīmēsim ar φ . Izmantojot vektora koordinātu definīciju un formulu, pēc kuras aprēķina vektora projekciju uz ass, iegūstam:

$$\begin{aligned} x &= \text{proj}_{Ox} \vec{OP} = |\vec{OP}| \cos(\alpha + \varphi) = \\ &= |\vec{OP}| (\cos \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \sin \varphi) = \\ &= |\vec{OP}| \cos \varphi \cos \alpha - |\vec{OP}| \sin \varphi \sin \alpha = \\ &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha. \end{aligned}$$

Analogi:

$$\begin{aligned} y &= \text{proj}_{Oy} \vec{OP} = |\vec{OP}| \cos(90^\circ - (\alpha + \varphi)) = |\vec{OP}| \sin(\alpha + \varphi) = \\ &= |\vec{OP}| (\sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi) = |\vec{OP}| \cos \varphi \sin \alpha + |\vec{OP}| \sin \varphi \cos \alpha = \\ &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{aligned}$$

Tādējādi **punkta P koordinātas vecajā sistēmā** atrod pēc šī punkta koordinātām jaunajā sistēmā, lietojot formulas

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{cases} \quad (5)$$

Lai iegūtu punkta P jaunās koordinātas atkarībā no vecajām koordinātām un pagriezienu leņķa α , atrisinām vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x' \cos \alpha - y' \sin \alpha = x \\ x' \sin \alpha + y' \cos \alpha = y. \end{cases}$$

Lietojuot Krāmpera formulas, atrodam, ka

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\begin{vmatrix} x & -\sin \alpha \\ y & \cos \alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}} = \frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ y' &= \frac{\begin{vmatrix} \cos \alpha & x \\ \sin \alpha & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}} = \frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = -x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{aligned}$$

Tātad **punkta P jaunās koordinātas** aprēķina pēc formulām

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{cases} \quad (6)$$

Ievērosim, ka formulas (5) un (6) var pierakstīt matricu reizinājuma formā:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{un} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Abas formulas var nolasīt, lietojot šādu tabulu:

	x	y
x'	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
y'	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$

Piemērs. Koordinātu sistēmā xOy dots punkts $A(1; \sqrt{3})$. Atrast šī punkta koordinātas sistēmā $x'Oy'$, kas iegūta, pagriežot sistēmas xOy asis pretēji pulksteņa rādītāju kustības virzienam par 60° leņķi.

Šajā gadījumā $x=1$, $y=\sqrt{3}$, $\cos\alpha=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$, $\sin\alpha=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Lietojot formulas (6), iegūstam $x'=1\cdot\frac{1}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2$, $y'=-1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}=0$. Tātad sistēmā $x'Oy'$ punkta A koordinātas ir $(2; 0)$.

4. VIENĀDOJUMU PĀRVEIDOŠANA, ATDALOT PILNOS KVADRĀTUS

Aplūkosim otrās pakāpes vienādojumu

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (7)$$

kas nesatur locekli Bxy . Šādu vienādojumu var reducēt kanoniskā formā, izpildot tikai koordinātu asu paralēlo pārnēsī. Lai atrastu jaunās koordinātu sistēmas sākumpunkta koordinātas, vienādojuma (7) kreisās puses izteiksmē ir jāatdala pilnie kvadrāti. Pārveidojumus veic pēc šāda algoritma:

- 1) sagrupē vienā izteiksmē tos locekļus, kas satur x , un citā izteiksmē – tos locekļus, kas satur y , katrā no iegūtajām izteiksmēm pirms iekavām iznesot kvadrātlocekļa koeficientu:

$$(Ax^2 + Dx) + (Cy^2 + Ey) + F = 0,$$

$$A\left(x^2 + \frac{D}{A}x\right) + C\left(y^2 + \frac{E}{C}y\right) + F = 0;$$

- 2) katra lineārā locekļa koeficientu uzraksta kā šī koeficienta puses reizinājumu ar skaitli 2:

$$A\left(x^2 + 2\cdot\frac{D}{2A}x\right) + C\left(y^2 + 2\cdot\frac{E}{2C}y\right) + F = 0;$$

- 3) katrā iekavu izteiksmē pieskaita un atņem lineārā locekļa koeficienta puses kvadrātu un iegūto kvadrāttrinomu uzraksta kā summas vai starpības kvadrātu:

$$A\left(x^2 + 2\cdot\frac{D}{2A}x + \left(\frac{D}{2A}\right)^2 - \left(\frac{D}{2A}\right)^2\right) + C\left(y^2 + 2\cdot\frac{E}{2C}y + \left(\frac{E}{2C}\right)^2 - \left(\frac{E}{2C}\right)^2\right) + F = 0,$$

$$A\left(\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 - \frac{D^2}{4A^2}\right) + C\left(\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 - \frac{E^2}{4C^2}\right) + F = 0,$$

$$A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F;$$

- 4) pārraksta iegūto vienādojumu, izmantojot apzīmējumus

$$x + \frac{D}{2A} = x' \text{ un } y + \frac{E}{2C} = y':$$

$$Ax'^2 + Cy'^2 = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F. \quad (8)$$

Analizējot iegūto vienādojumu (8) atkarībā no tā koeficientiem, ir iespējami šādi gadījumi:

- 1) vienādojums nosaka kādu no konikām (riņķa līniju, elipsi, hiperbolu, parabolu);

- 2) vienādojums nosaka divas krustiskas taisnes;
- 3) vienādojums nosaka divas paralēlas taisnes;
- 4) vienādojumam nav reālas ģeometriskas ilustrācijas.

Paskaidrosim šos spriedumus ar piemēriem.

1. piemērs. Reducēt kanoniskā veidā vienādojumu

$$9x^2 + 25y^2 - 36x + 150y + 36 = 0$$

un uzzīmēt līniju, ko nosaka šis vienādojums.

Pārveidosim vienādojumu pēc iepriekš aplūkotā algoritma:

$$9x^2 - 36x + 25y^2 + 150y + 36 = 0;$$

$$9(x^2 - 4x) + 25(y^2 + 6y) + 36 = 0;$$

$$9(x^2 - 2 \cdot 2x) + 25(y^2 + 2 \cdot 3y) + 36 = 0;$$

$$9(x^2 - 2 \cdot 2x + 4 - 4) + 25(y^2 + 2 \cdot 3y + 9 - 9) + 36 = 0;$$

$$9((x-2)^2 - 4) + 25((y+3)^2 - 9) + 36 = 0;$$

$$9(x-2)^2 - 36 + 25(y+3)^2 - 225 + 36 = 0;$$

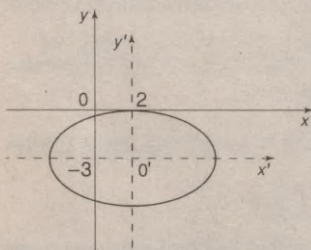
$$9(x-2)^2 + 25(y+3)^2 = 225.$$

Lietojot apzīmējumus

$$x - 2 = x', \quad y + 3 = y' \quad (9)$$

un dalot vienādojuma labās un kreisās puses izteiksmes ar 225, iegūstam vienādojumu

$$\frac{x'^2}{25} + \frac{y'^2}{9} = 1.$$



76. zīm.

Esam ieguvuši elipses kanonisko vienādojumu koordinātu sistēmā $x'O'y'$. Koordinātu sākumpunkta O' koordinātas nosaka, salīdzinot vienādojuma (9) ar paralēlas pārnesei formulām (4): $x - x_0 = x'$, $y - y_0 = y'$. Šajā gadījumā $x_0 = 2$ un $y_0 = -3$. Tātad jaunās koordinātu sistēmas sākumpunkts ir punkts $O'(2; -3)$. Lai konstruētu dotajam vienādojumam atbilstošo elipsi, caur punktu $O'(2; -3)$ novelk jaunās koordinātu asis Ox' un Oy' paralēli vecās sistēmas asīm Ox , Oy un jaunajā koordinātu sistēmā konstruē elipsi ar pusasīm 5 un 3 (76. zīm.).

2. piemērs. Reducēt kanoniskā veidā vienādojumu $0,5x^2 - 6x - 4y + 2 = 0$ un uzzīmēt šim vienādojumam atbilstošo līniju.

Pārveidojam šo vienādojumu analogi kā iepriekšējā uzdevuma risinājumā:

$$0,5(x^2 - 12x) - 4y + 2 = 0;$$

$$0,5(x^2 - 2 \cdot 6x) - 4y + 2 = 0;$$

$$0,5(x^2 - 2 \cdot 6x + 36 - 36) - 4y + 2 = 0;$$

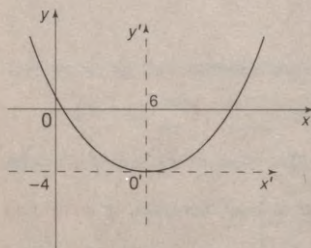
$$0,5((x-6)^2 - 36) - 4y + 2 = 0;$$

$$0,5(x-6)^2 - 18 - 4y + 2 = 0;$$

$$0,5(x-6)^2 = 4y + 16;$$

$$0,5(x-6)^2 = 4(y+4);$$

$$(x-6)^2 = 8(y+4).$$



77. zīm.

Apzīmējot $x - 6 = x'$ un $y + 4 = y'$, iegūstam parabolas kanonisko vienādojumu

$$x'^2 = 8y'$$

koordinātu sistēmā $x'O'y'$, kuras sākumpunkts ir $O'(6; -4)$ (77. zīm.).

Ne vienmēr ar doto vienādojumu ir izteikta visa otrās kārtas līnija. Parasti šāds vienādojums satur kvadrātsakni un ir atrisināts attiecībā pret x vai y .

Piemēram, noteiksim, kādas līnijas ir dotas ar vienādojumiem

$$1) y = \frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}; \quad 2) x = -2 - \sqrt{16-y^2}; \quad 3) y = -1 - \frac{2}{3}\sqrt{x^2-4x-5},$$

un uzzīmēsim šīs līnijas.

Reducējot šos vienādojumus kanoniskā veidā, vispirms lietojam iracionālu vienādojumu atrisināšanas paņēmieni.

$$1) y = \frac{3}{2}\sqrt{4-x^2} \Rightarrow y^2 = \frac{9}{4}(4-x^2) \Rightarrow y^2 = 9 - \frac{9x^2}{4} \Rightarrow y^2 + \frac{9x^2}{4} = 9 \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Esam ieguvuši elipses kanonisko vienādojumu, kurā $a^2=4$ un $b^2=9$. Tātad pusasis ir $a=2$, $b=3$.

Ar sākotnējo vienādojumu dota elipses augšējā puse, jo $y \geq 0$.

$$2) x = -2 - \sqrt{16-y^2} \Rightarrow x+2 = -\sqrt{16-y^2} \Rightarrow (x+2)^2 = 16-y^2 \Rightarrow (x+2)^2 + y^2 = 16.$$

Lietojot apzīmējumus $x+2=x'$, $y=y'$, iegūstam riņķa līnijas kanonisko vienādojumu

$$x'^2 + y'^2 = 16$$

koordinātu sistēmā $x'O'y'$. Koordinātu sākumpunkts ir $O'(-2; 0)$, riņķa līnijas rādiuss $R=4$.

Ar doto vienādojumu ir izteikta riņķa līnijas kreisā puse, jo $x+2 \leq 0$.

$$3) y = -1 - \frac{2}{3}\sqrt{x^2-4x-5} \Rightarrow y+1 = -\frac{2}{3}\sqrt{x^2-4x-5} \Rightarrow (y+1)^2 = \frac{4}{9}(x^2-4x-5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y+1)^2 = \frac{4}{9}(x^2-4x+4-4-5) \Rightarrow (y+1)^2 = \frac{4}{9}((x-2)^2-9) \Rightarrow (y+1)^2 = \frac{4}{9}(x-2)^2-4 \Rightarrow$$

$$\frac{4}{9}(x-2)^2 - (y+1)^2 = 4 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1.$$

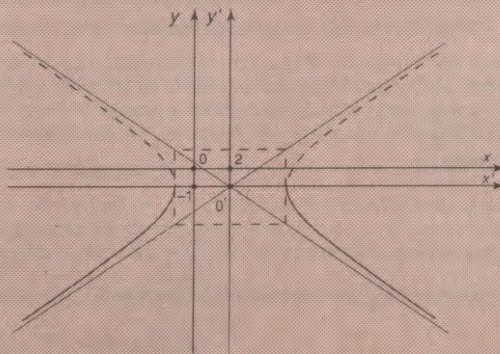
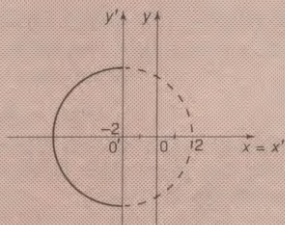
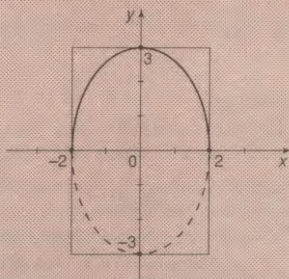
Apzīmējot $x-2=x'$, $y+1=y'$, iegūstam hiperbolas kanonisko vienādojumu

$$\frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{4} = 1$$

koordinātu sistēmā $x'O'y'$, kur $O'(2; -1)$, $a=3$, $b=2$, bet

asimptotas ir $y' = \pm \frac{2}{3}x'$.

Tā kā $y+1 \leq 0$, tad ar doto vienādojumu ir izteikta hiperbolas apakšējā daļa.



5. VIENĀDOJUMA PĀRVEIDOŠANA, LIETOJOT KOORDINĀTU ASU PAGRIEŠANU

Pārliccināsimies, ka vispārīgo 2. pakāpes vienādojumu (1) var pārveidot par vienādojumu, kas nesatur mainīgo lielumu reizinājumu, ja **koordinātu asis pagriež par piemēroti izraudzītu leņķi α** . Patiešām, ievietojot vienādojumā $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ punkta $P(x; y)$ koordinātu izteiksmes (5)

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha, \end{cases}$$

iegūstam:

$$A(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)^2 + B(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + C(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha)^2 + D(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha) + E(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + F = 0.$$

Izdarām algebriskus pārveidojumus un, savēlot līdzīgos locekļus, izveidojam koeficientu izteiksmes pie x'^2 , $x'y'$, y'^2 , x' un y' :

$$\begin{aligned} &(A \cos^2 \alpha + B \sin \alpha \cos \alpha + C \sin^2 \alpha)x'^2 + (-2A \sin \alpha \cos \alpha + B \cos^2 \alpha - B \sin^2 \alpha + \\ &+ 2C \sin \alpha \cos \alpha)x'y' + (A \sin^2 \alpha - B \sin \alpha \cos \alpha + C \cos^2 \alpha)y'^2 + \\ &+ (D \cos \alpha + E \sin \alpha)x' + (-D \sin \alpha + E \cos \alpha)y' + F = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Vienādojums (10) nesatur reizinājumu $x'y'$, ja šī locekļa koeficients ir vienāds ar nulli, t. i., ja ir spēkā vienādība

$$-2A \sin \alpha \cos \alpha + B \cos^2 \alpha - B \sin^2 \alpha + 2C \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

jeb

$$B \sin^2 \alpha + 2(A - C) \sin \alpha \cos \alpha - B \cos^2 \alpha = 0.$$

Esam ieguvuši homogēnu trigonometrisku vienādojumu, no kura var atrast koordinātu asu pagriezienu leņķi α . Dalot vienādojuma abas puses ar $\cos^2 \alpha$, iegūst kvadrātvienādojumu

$$B \tan^2 \alpha + 2(A - C) \tan \alpha - B = 0 \quad (11)$$

attiecībā pret $\tan \alpha$. Vienādojumu atrisinot, pēc atrastām $\tan \alpha$ vērtībām nosaka mazāko leņķi α , par kādu ir jāpagriež koordinātu asis, vai arī aprēķina šī leņķa sinusa un kosinusa vērtības pēc formulām

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \quad \text{un} \quad \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha. \quad (12)$$

Šīs sinusa un kosinusa vērtības izmanto kā koeficientus formulās (5). Paskaidrosim sīkāk šo vienādojuma pārveidošanas procedūru ar piemēriem.

1. piemērs. Kā zināms, apgrieztās proporcionalitātes sakarības $y = \frac{k}{x}$ grafiku sauc par hiperbolu. Taču šis vienādojums nav hiperbolas kanoniskais vienādojums. Pārliccināsimies, ka, pagriežot koordinātu asis, iegūst koordinātu sistēmu, kurā apgrieztās proporcionalitātes sakarība pārveidojas par vienādsānu hiperbolas kanonisko vienādojumu. Patiešām, no dotās sakarības iegūst 2. pakāpes vienādojumu

$$xy - k = 0, \quad (13)$$

kurā $A = C = D = E = 0$ un $B = 1$. To ievērojot, no vienādojuma (11) izriet, ka $\tan^2 \alpha - 1 = 0$, $\tan^2 \alpha = 1$ un $\tan \alpha = \pm 1$. Līdz ar to secinām, ka koordinātu asu pagriezienu leņķis α var būt vai nu 45° , vai 135° . Izraugāsimies vērtību $\alpha = 45^\circ$. Tad

$\sin \alpha = \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ un saskaņā ar formulām (5)

$$x = x' \frac{\sqrt{2}}{2} - y' \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y = x' \frac{\sqrt{2}}{2} + y' \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

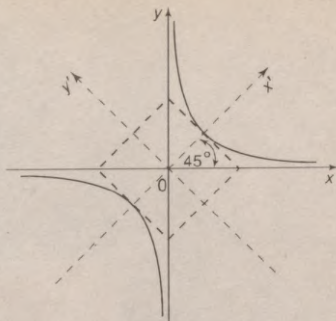
Ievietojot šīs izteiksmes vienādojumā (13), iegūstam vienādojumu

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y') - \frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y') - k = 0,$$

no kura izriet, ka

$$\frac{1}{2}(x'^2 - y'^2) = k \text{ jeb } \frac{x'^2}{2k} - \frac{y'^2}{2k} = 1.$$

Tātad koordinātu sistēmā $x'Oy'$ ir iegūts vienādsānu hiperbolas kanoniskais vienādojums, kurā $a = b = \sqrt{2k}$. Šīs hiperbolas asimptotas ir sistēmas xOy koordinātu asis (78. zīm.).



78. zīm.

2. piemērs. Reducēt kanoniskā veidā vienādojumu $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 32 = 0$ un uzzīmēt līniju, ko nosaka šis vienādojums.

Šajā vienādojumā $A = C = 5$ un $B = -6$. No vienādojuma (11) atrodam, ka $-6 \operatorname{tg}^2 \alpha + 6 = 0$ jeb $\operatorname{tg}^2 \alpha = 1$, $\operatorname{tg} \alpha = \pm 1$. Par koordinātu asu pagriezienu leņķi izraugā-

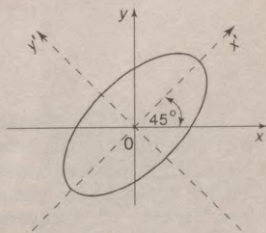
mies $\alpha = 45^\circ$; tad analogi kā iepriekšējā uzdevumā $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$ un $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$. Ievietojam šīs izteiksmes dotajā vienādojumā:

$$5 \cdot \frac{1}{2}(x' - y')^2 - 6 \cdot \frac{1}{2}(x' - y')(x' + y') + 5 \cdot \frac{1}{2}(x' + y')^2 - 32 = 0.$$

Izpildot algebriskus pārveidojumus un savēlot līdzīgos locekļus, iegūstam elipses kanonisko vienādojumu $4x'^2 + 16y'^2 = 64$ jeb

$$\frac{x'^2}{16} + \frac{y'^2}{4} = 1.$$

Novelkam koordinātu asis Ox' un Oy' , kas ar asīm Ox un Oy veido 45° leņķi, un koordinātu sistēmā $x'Oy'$ konstruējam elipsi ar pusasīm $a = 4$ un $b = 2$ (79. zīm.).



79. zīm.

3. piemērs. Reducēt kanoniskā veidā vienādojumu $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 25x - 50y + 50 = 0$ un uzzīmēt līniju, ko nosaka šis vienādojums.

Šajā gadījumā $A = 16$, $B = -24$, $C = 9$ un koordinātu asu pagriezienu leņķis ir atrodams no vienādojuma

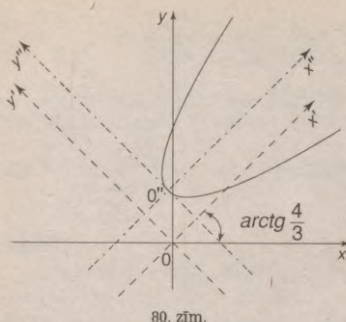
$$-24 \operatorname{tg}^2 \alpha + 14 \operatorname{tg} \alpha + 24 = 0 \text{ jeb } 12 \operatorname{tg}^2 \alpha - 7 \operatorname{tg} \alpha - 12 = 0.$$

Kvadrātvienādojuma atrisinājums ir $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{4}{3}$ un $\operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{3}{4}$. Izraugāties vērtību $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$ un pēc formulām (12) aprēķinām, ka $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ un $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. Saskaņā ar formulām (5) atrodam, ka

$$x = \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y' = \frac{1}{5}(3x' - 4y') \text{ un } y = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' = \frac{1}{5}(4x' + 3y').$$

Ievietojot šīs izteiksmes dotajā vienādojumā un izpildot pārveidojumus, iegūstam vienādojumu

$$y'^2 - x' - 2y' + 2 = 0.$$



Atdalām pilno kvadrātu:

$$y'^2 - 2 \cdot 1 \cdot y' + 1 - 1 - x' + 2 = 0, \quad (y' - 1)^2 = x' - 1.$$

Apzīmējot $y' - 1 = y''$ un $x' - 1 = x''$, iegūstam koordinātu sistēmā $x''O''y''$ parabolas kanonisko vienādojumu

$$y''^2 = x''.$$

Lai konstruētu šo parabolu, vispirms novelk koordinātu asis Ox' un Oy' , pagriežot asis Ox un Oy pretēji pulksteņa rādītāju kustības virzienam par leņķi, kura tangensa funkcija ir $\frac{4}{3}$. Šajā koordinātu sistēmā atliek

punktu $O''(1; 1)$ un pārbīda Ox' un Oy' asis paralēli sev tā, lai jaunais koordinātu sākumpunkts būtu punkts O'' . Iegūtajā koordinātu sistēmā $x''O''y''$ konstruē parabolu $y''^2 = x''$ (80. zīm.).

3.5. §. JĒDZIENS PAR LĪNIJAS PARAMETRISKIEM VIENĀDOJUMIEM

1. PAMATJAUTĀJUMI

3.1. paragrāfā aplūkojām līnijas vienādojuma sastādīšanas vispārīgo shēmu, saskaņā ar kuru līnijas brīvi izraudzīta punkta (tekošā punkta) $P(x; y)$ pamatpārišību izsaka vienādības formā un pārveido, izmantojot šī punkta koordinātas $(x; y)$. Tādējādi iegūst līnijas vienādojumu $F(x; y) = 0$. Dažkārt, sastādot līnijas vienādojumu, izmanto arī citu pieeju, proti, nosaka, pēc kāda likuma mainās tekošā punkta abscisa x un pēc kāda likuma mainās tā ordināta y . Nosakot šīs sakarības, izmanto trešo mainīgo lielumu, ko parasti apzīmē ar burtu t un sauc par **parametru**. Parametram t bieži ir noteikta fizikāla vai ģeometriskā nozīme, piemēram, parametrs var būt laiks, leņķis u. tml. Rezultātā iegūst vienādojumus

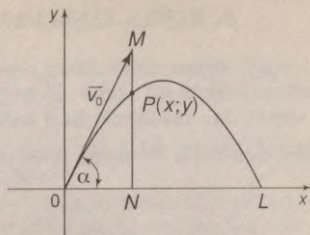
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases} \quad (1)$$

kurus sauc par **līnijas parametriskiem vienādojumiem**. Bieži parametriskā veidā dotas līnijas vienādojumus, izslēdzot parametru, var pārveidot par vienādojumu $F(x; y) = 0$. Paskaidrosim šos jautājumus ar piemēriem.

2. SLĪPI PRET HORIZONTU SVIESTA ĶERMEŅA TRAJEKTORIJA

Pieņemsim, ka kādu ķermeni, piemēram, basketbola bumbu, izsviež ar sākuma ātrumu v_0 , kura vektors ar horizontu veido leņķi α . Noteiksim kustības trajektoriju, ja neievēro gaisa pretestību. Izraudzīsimies koordinātu asis tā, lai koordinātu sākumpunkts atrastos ķermeņa izsviešanas punktā (81. zīm.). Ķermeņa

kustība ir salikta: tā sastāv no vienmērīgas taisnvirziena kustības ar ātrumu v_0 virzienā, kas ar Ox asi veido leņķi α , un no brīvās krišanas smaguma spēka iedarbībā perpendikulāri Ox asij. Pieņemsim, ka pēc laika t no kustības sākuma ķermenis atrodas trajektorijas punktā $P(x; y)$. Lai iegūtu trajektorijas parametriskos vienādojumus, noteiksim koordinātas x un y atkarībā no kustības laika t . Ja neievēro kustību smaguma spēka iedarbībā, tad pēc laika t ķermenis atrastos punktā M un tā pārvietojums būtu $OM = v_0 t$. Ja aplūko ķermeņa kustību tikai smaguma spēka iedarbībā, tad tā pārvietojums būtu $\frac{gt^2}{2}$. Tā kā abas šīs kus-



81. zīm.

tības notiek vienlaikus, tad punkta $P(x; y)$ koordinātas atrodam, izmantojot trijstūri ONM :

$$x = ON = OM \cos \alpha = v_0 t \cos \alpha,$$

$$y = NP = NM - MP = OM \sin \alpha - MP = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Esam ieguvuši šādus **trajektorijas parametriskos vienādojumus**:

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \alpha \cdot t \\ y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} \end{cases} \quad (2)$$

kur parametrs t ir laiks. Izslēgsim no šiem vienādojumiem parametru. No pirmā vienādojuma atrodam, ka $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$. Ievietojot šo izteiksmi otrajā vienādojumā, iegūstam vienādojumu

$$y = v_0 \sin \alpha \frac{x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \quad \text{jeb} \quad y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \operatorname{tg} \alpha \cdot x. \quad (3)$$

Kā redzams, ir iegūts **parabolas** vienādojums, kuru var izmantot kustības pētīšanai. Piemēram, var noteikt trajektorijas augstumu, lidojuma tālumu, leņķi α , lai lidojuma tālums būtu vislielākais, u. tml. Lai noteiktu lidojuma tālumu, ir jāatrod parabolas un Ox ass krustpunkta L abscisa. Tā kā šī punkta ordināta ir 0, tad iegūstam vienādojumu

$$-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + \operatorname{tg} \alpha \cdot x = 0 \quad \text{jeb} \quad x \left(-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x + \operatorname{tg} \alpha \right) = 0,$$

kura saknes ir $x_1 = 0$ (trajektorijas sākumpunkta abscisa) un

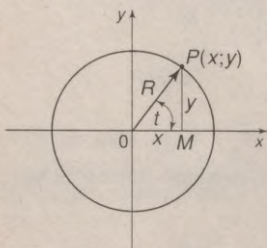
$$x_2 = \frac{2v_0^2 \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \alpha}{g} = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

Šai izteiksmei ir vislielākā vērtība, ja $\sin 2\alpha = 1$, t. i., ja $2\alpha = 90^\circ$ un $\alpha = 45^\circ$. Tātad **slīpi pret horizontu sviesta ķermeņa lidojuma tālums ir vislielākais, ja ķermeņa sākuma ātruma vektors ar horizontu veido 45° leņķi.**

3. RIŅĶA LĪNIJAS PARAMETRISKIE VIENĀDOJUMI

Aplūkosim riņķa līniju, kuras rādiuss ir R un centrs atrodas koordinātu sākumpunktā (82. zīm.). Pieņemsim, ka $P(x; y)$ ir brīvi izraudzīts šīs līnijas punkts, un apzīmēsīm ar t leņķi, ko rādiusvektors $\vec{OP}$ veido ar Ox asi. Tad pēc sinusa un kosinusa funkciju definīcijām $\sin t = \frac{PM}{OP}$ un $\cos t = \frac{OM}{OP}$. No šīm vienādībām izriet, ka

$$\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t. \end{cases} \quad (4)$$



82. zīm.

Šie vienādojumi ir *riņķa līnijas parametriskie vienādojumi*. Ja $0 \leq t < 2\pi$, tad punkta $P(x; y)$ trajektorija ir visa riņķa līnija.

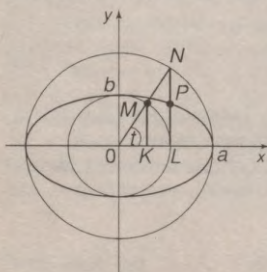
Izslēdzot no vienādojumiem (4) parametru t , iegūst riņķa līnijas kanonisko vienādojumu. Patiešām, kāpinot vienādojumu abas puses kvadrātā un saskaitot, atrodam, ka $x^2 + y^2 = R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t$, t. i.,

$$x^2 + y^2 = R^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) \text{ jeb } x^2 + y^2 = R^2.$$

4. ELIPSES PARAMETRISKIE VIENĀDOJUMI

Pieņemsim, ka $P(x; y)$ ir brīvi izraudzīts elipses punkts (83. zīm.). Izpildīsim šādas palīgkonstrukcijas.

1. Konstruējam koncentriskas riņķa līnijas ar rādiusiem a un b un centru koordinātu sākumpunktā ($a > b$).



83. zīm.

2. Caur elipses punktu P novelkam Ox asij perpendikulāru nogriezni NL .
3. Novelkam rādiusu $ON = a$, kas ar Ox asi veido leņķi t un mazāko riņķa līniju krusto punktā M .
4. No punkta M novelkam Ox asij perpendikulāru nogriezni MK .

No trijstūra OLN atrodam, ka $OL = a \cos t$, no trijstūra OMK , – ka $MK = b \sin t$. Pārliecināsimies, ka šādi iegūtās izteiksmes ir elipses punkta $P(x; y)$ koordinātas, t. i.,

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t. \end{cases} \quad (5)$$

Patiešām, no vienādībām (5) izriet, ka $\frac{x}{a} = \cos t$, $\frac{y}{b} = \sin t$. Tātad

$$\frac{x^2}{a^2} = \cos^2 t, \quad \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 t \quad \text{un} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t \quad \text{jeb}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Tādējādi, izslēdzot parametru t , ir iegūts elipses kanoniskais vienādojums. Tātad vienādojumi (5) ir elipses parametriskie vienādojumi, $0 \leq t < 2\pi$.

5. CIKLOĪDA

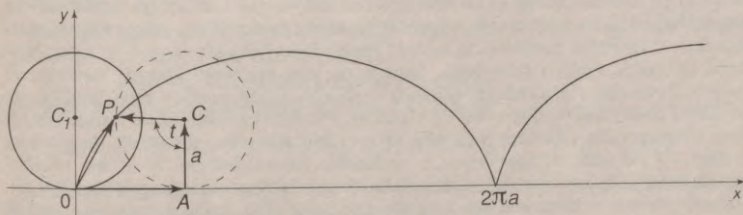
Analītiskajā geometrijā un tās lietojumos aplūko arī tādas līnijas, kuras nosaka tikai ar parametriskiem vienādojumiem, jo šo līniju $F(x; y)=0$ veida vienādojumi ir ļoti sarežģīti. Viena no šādām līnijām ir cikloīda.

Definīcija. *Par cikloīdu sauc līniju, ko apraksta kāds fiksēts riņķa līnijas punkts, ja riņķa līnija bez slīdes rit pa taisni.*

Pēc šīs definīcijas var viegli noteikt aptuvenu cikloīdas formu. Kā viens no pirmajiem ideju par cikloīdu esot izteicis 15. gadsimtā franču filozofs Šarls Bovēls, vērodams, kā pa ceļu ripo karieses riteņi.

Lai iegūtu cikloīdas parametriskos vienādojumus, pieņemsim, ka riņķa līnija rit pa Ox asi un kustības sākumā fiksētais riņķa līnijas punkts P sakrīt ar koordinātu sākumpunktu; riņķa līnijas rādiusu apzīmēsim ar a .

Pieņemsim, ka, riņķa līnijai ritot pa Ox asi, rādiuss C_1O ir pagriezies par leņķi t (84. zīm.).



84. zīm.

Aplūkosim 84. zīmējumā vektorus $\vec{OP}$, $\vec{AC}$, $\vec{CP}$ un $\vec{OA}$. Acīmredzami saskaņā ar vektoru saskaitīšanas likumu

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AC} + \vec{CP}.$$

Tā kā $\vec{OP}$ ir rādiusvektors, tad tā koordinātas ir vienādas ar galapunkta $P(x, y)$ koordinātām. Saskaņā ar vektora koordinātu definīciju un teorēmām par vektoru projekciju uz ass iegūstam, ka

$$\begin{aligned} x &= \text{proj}_{Ox} \vec{OP} = \text{proj}_{Ox} (\vec{OA} + \vec{AC} + \vec{CP}) = \text{proj}_{Ox} \vec{OA} + \text{proj}_{Ox} \vec{AC} + \text{proj}_{Ox} \vec{CP} = \\ &= |\vec{OA}| \cos \angle(\vec{OA}, Ox) + |\vec{AC}| \cos \angle(\vec{AC}, Ox) + |\vec{CP}| \cos \angle(\vec{CP}, Ox). \end{aligned} \quad (6)$$

Analogi

$$\begin{aligned} y &= \text{proj}_{Oy} \vec{OP} = \text{proj}_{Oy} \vec{OA} + \text{proj}_{Oy} \vec{AC} + \text{proj}_{Oy} \vec{CP} = \\ &= |\vec{OA}| \cos \angle(\vec{OA}, Oy) + |\vec{AC}| \cos \angle(\vec{AC}, Oy) + |\vec{CP}| \cos \angle(\vec{CP}, Oy). \end{aligned} \quad (7)$$

Viegli konstatēt, ka $\angle(\vec{CP}, Ox) = \frac{3\pi}{2} - t$ un $\cos \angle(\vec{CP}, Ox) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\sin t$.

Savukārt $\angle(\vec{CP}, Oy) = \frac{\pi}{2} - \angle(\vec{CP}, Ox)$. Tāpēc $\cos \angle(\vec{CP}, Oy) = \sin \angle(\vec{CP}, Ox) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\cos t$. Tā kā riņķa līnija bez slīdes rit pa Ox asi, tad $|\vec{OA}| = \vec{AP} = at$.

Ievērojot šīs sakarības, kā arī vektoru $\vec{OA}$ un $\vec{AC}$ novietojumu attiecībā pret koordinātu asīm, no vienādības (6) iegūstam, ka $x = at - a \sin t = a(t - \sin t)$, bet no

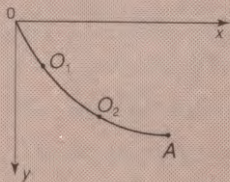
vienādības (7) – ka $y = a - a \cos t = a(1 - \cos t)$. Esam ieguvuši šādus cikloīdas parametriskos vienādojumus:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (8)$$

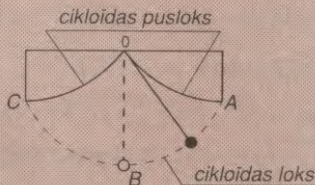
No vienādojumiem (8) var viegli noteikt galvenos cikloīdas punktus. Piemēram, ja rādiusa pagrieziens leņķis $t = 2\pi$, tad $x = 2\pi a$ un $y = 0$, t. i., cikloīdas viena loka pamatnes garums ir vienāds ar riņķa līnijas garumu. Analogi, ja $t = \pi$, tad $x = \pi a$ un $y = 2a$, t. i., iegūstam cikloīdas loka virsotnes koordinātas.

CIKLOĪDAS ĪPAŠĪBU IZMANTOŠANAS PIEMĒRI

Matemātikas teoriju pamatā ļoti bieži ir dažādas praktiskas problēmas. Sevišķi spilgti par to liecina renesanses laika matemātikas vēsture, kad zinātnieki intensīvi risināja ar astronomiju, dabaszinātnēm un tehniku saistītus uzdevumus. Dažkārt pat kāda atsevišķa matemātikas objekta pētījumi bija saistīti ar praktisku izmantošanu. Interesants piemērs šajā ziņā ir cikloīdas izmantošana praksē. Nosaukuma «cikloīda» autors ir itāļu astronoms un fizikis *Galilejs* (1564–1642). *Galilejs* un viņa skolnieki *Viviani*, *Toričelli*, arī *Dekarts*, *Robervals* u. c. atrisināja vairākus ar cikloīdu saistītus uzdevumus. Izrādījās, ka šai līnijai piemīt īpašības, kas noteica cikloīdas praktiskās izmantošanas iespējas mehānikā. Viena no šīm īpašībām ir saistīta ar t. s. *brahistohronas problēmu*. 18. gadsimtā *L. Eilers*, *J. Bernulli*, *Ž. Lagranžs* u. c. zinātnieki, risinot dažādus ar praksi saistītus optimizācijas uzdevumus, radīja pamatus jaunai matemātikas nozarei *variāciju rēķiniem*. Viens no šādiem uzdevumiem bija noskaidrot, kādai ir jābūt kalna formai, lai materiāls punkts pa kalnu noslidētu vismazākā laikā (berzi neievērojot). Formulējot šo uzdevumu matemātiski, ir jānosaka A-23. zīmējumā attēlotās līnijas OA vienādojums, ja materiāls punkts smaguma spēka iedarbībā ceļu no koordinātu sākumpunkta O līdz dotam punktam A veic vismazākā laikā. Līniju ar šādu īpašību sauc par *brahistohronu*. Šo uzdevumu atrisināja Jākobs Bernulli. Viņš pierādīja, ka līnija OA ir cikloīdas pusloks. Tātad, ja bobsleja trasei kādā posmā ir cikloīdas pusloka forma, tad kamanas šo posmu veic vismazākā laikā. Izrādījās, ka laiks, kādā punkts, pārvietojoties pa cikloīdas pusloku, sasniedz punktu A, nav atkarīgs no kustīgā punkta sākuma stāvokļa. Tātad, ja no brīvi izraudzītiem cikloīdas punktiem O_1 un O_2 vienlaikus sāk slidēt divi punkti, tad punktu A tie sasniedz reizē. Šo īpašību sauc par cikloīdas *tautohrono* jeb *izohrono īpašību*. Cikloīdas tautohrono īpašību izmantoja holandiešu zinātnieks *Kristiāns Heigenss* (1629–1695), konstruējot svārsta pulksteni. Svārsta pulksteņa gaitu regulē, mainot svārsta garumu. Lai iedarbinātu uzvilkto pulksteni, svārsts ir jānovirza no līdzsvara stāvokļa. Taču, ja svārsta galapunkta kustība notiek pa riņķa līnijas loku, tad svārstību periods un tātad arī pulksteņa gaita ir atkarīga no leņķa, par kādu novirza svārstu no līdzsvara stāvokļa, t. i.,



A-23. zīm.



A-24. zīm.

3.6. §. POLĀRO KOORDINĀTU SISTĒMA

1. PUNKTA POLĀRĀS KOORDINĀTAS

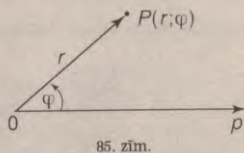
Iepriekšējā vielas izklāstā, sastādot dažādu līniju vienādojumus un risinot citus uzdevumus, izmantojām punkta Dekarta koordinātas. Bez Dekarta taisnleņķa koordinātu sistēmas punkta stāvokļa noteikšanai lieto arī citas koordinātu sistēmas. Viena no tām ir polārā koordinātu sistēma.

Polāro koordinātu sistēmu veido taisnes stars Op , ko sauc par *polāro asi*, un šī stara sākumpunkts O , ko sauc par *polu*.

Lai noteiktu punkta P stāvokli, novelk vektoru $\vec{OP}$; tā moduli apzīmē ar r un sauc par punkta P *polāro rādiusu*. Nosaka radiānos leņķi starp polāro asi un vektoru $\vec{OP}$; šo leņķi, kuru analogi kā trigonometrijā mēra no polārās ass pretēji pulksteņa rādītāju kustības virzienam, apzīmē ar φ un sauc par punkta P *polāro leņķi* (85. zīm.).

Tādējādi punktu P nosaka divi reāli sakārtoti skaitļi r un φ , kurus sauc par šī punkta *polārajām koordinātām* un līdzīgi kā Dekarta koordinātas raksta iekavās aiz burtā, ar kuru apzīmē punktu, t. i., raksta

$P(r; \varphi)$, piemēram, $A\left(3; \frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(2; \frac{\pi}{2}\right)$, $C(1; 0)$ u. tml.



Lai jebkuru plaknes punktu varētu viennozīmīgi noteikt ar polārām koordinātām, pieņem, ka $0 \leq r < +\infty$ un $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Taču, sastādot līniju vienādojumus polārā koordinātu sistēmā, dažkārt uzskata, ka polārais leņķis, līdzīgi kā trigonometriskais leņķis, var būt lielāks nekā 2π un, mērot pulksteņa rādītāju kustības virzienā, tā vērtības var būt arī negatīvas, t. i., $\varphi \in (-\infty; +\infty)$. Uzskata, ka arī polārā rādiusa vērtības ir negatīvas, ja attālumam no pola mēra virzienā, kas ir pretējs polārā rādiusvektora vērsumam (vispārinātās polārās koordinātas).

=====

no svārstību sākuma amplitūdas. Ja svārstu galapunkts pārvietojas pa cikloīdas loku, tad saskaņā ar tautohrono īpašību svārstību periods nav atkarīgs no šī punkta sākuma stāvokļa uz cikloīdas. Konstruējot šādu svārstu, Heigenss nonāca pie jēdziena par evolūtu un evolventi. Heigenss izgatavoja detaļu, kurai bija divu cikloīdas pusloku forma. Šo pusloku kopīgajā punktā O piestiprināja lokanā saitē iekārtu lodīti (A-24. zīm.). Saites garums bija vienāds ar cikloīdas pusloka garumu. Novirzot šādu svārstu no līdzsvara stāvokļa, saite apliecās ap cikloīdas pusloku un lodīte krita pārvietojās pa līniju, ko sauc par tās līknes *evolventi*, ap kuru ir apliekusies saite. Heigenss pierādīja, ka šādā konstrukcijā svārstu lodīte pārvietojas pa citas cikloīdas loku ABC . Tātad cikloīdas evolvente arī ir cikloīda un pēc tautohronās īpašības laiks, kādā lodīte veic pilnu svārstību, nav atkarīgs no tās sākuma stāvokļa. Tādējādi ar šādu konstrukciju Heigenss panāca, ka pulksteņa gaita nav atkarīga no svārstu svārstību amplitūdas un, iedarbinot pulksteni, nebija nepieciešams svārstu novirzīt no līdzsvara stāvokļa par kādu noteiktu leņķi.

2. SAKARĪBAS STARP PUNKTA DEKARTA KOORDINĀTĀM UN POLĀRAJĀM KOORDINĀTĀM

Vienu un to pašu punktu plaknē var noteikt ar dažādām koordinātām atkarībā no tā, kā izraugās koordinātu sistēmu. Ja polu izraugās Dekarta koordinātu sistēmas sākumpunktā un polārā ass sakrīt ar Ox asi, tad punkta P Dekarta koordinātas $(x; y)$ un šī paša punkta polārās koordinātas $(r; \varphi)$ saista sakarības

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi. \end{cases} \quad (1)$$

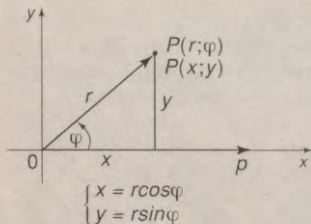
Patiešām, tā kā $(x; y)$ ir arī rādiusvektora $\overrightarrow{OP}$ koordinātas, tad

$$x = \text{proj}_{Ox} \overrightarrow{OP} = r \cos \varphi \quad \text{un}$$

$$y = \text{proj}_{Oy} \overrightarrow{OP} = r \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = r \sin \varphi \quad (86. \text{ zīm.}).$$

No formulām (1) izriet vienādības

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{un} \quad \text{tg} \varphi = \frac{y}{x} \quad (\text{ja } x \neq 0), \quad (2)$$



86. zīm.

kuras var lietot, pārejot no Dekarta koordinātām uz polārajām koordinātām.

Ja $x=0$, tad punkts atrodas uz Oy ass un

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{vai arī} \quad \varphi = \frac{3\pi}{2}.$$

3. LĪNIJU POLĀRIE VIENĀDOJUMI

Sastādot kādas līnijas vienādojumu, var izmantot arī šīs līnijas punkta P polārās koordinātas $(r; \varphi)$. Tad iegūst līnijas polāro vienādojumu, kura vispārīgais veids ir $F(r; \varphi) = 0$. Šādu vienādojumu iegūst arī tad, ja līnijas Dekarta koordinātu sistēmas vienādojumā $F(x; y) = 0$ mainīgo x un y vietā ievieto izteiksmes (1). Bieži līnijas vienādojums Dekarta koordinātās ir ļoti sarežģīts, bet to var vienkāršot, pārejot uz polārām koordinātām ar formulām (1). Parasti šādām līnijām aplūko tikai polāros vienādojumus, kurus izmanto vērtību tabulas sastādīšanai, lai līniju konstruētu pa punktiem. Aplūkosim dažus piemērus.

Riņķa līnijas polārais vienādojums. Praksē ļoti bieži izmanto riņķa līnijas vienādojumu polārā koordinātu sistēmā. Ja riņķa līnijas centrs atrodas koordinātu sākumpunktā un tās rādiuss ir R , tad jebkura šīs līnijas punkta polārais rādiuss r ir vienāds ar riņķa līnijas rādiusu R , t. i., ir spēkā vienādība

$$r = R, \quad (3)$$

kas ir riņķa līnijas vienādojums polārā koordinātu sistēmā. Šo vienādojumu iegūst arī, ja kanoniskajā vienādojumā $x^2 + y^2 = R^2$ pāriet uz polārām koordinātām ar formulu $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ palīdzību. Patiešām, ievietojot šīs izteiksmes kanoniskajā vienādojumā, iegūstam vienādību $r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = R^2$, no kuras seko, ka

$$r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = R^2, \quad r^2 = R^2 \quad \text{jeb} \quad r = R.$$

Arhimēda spirāle. Arhimēda spirāle ir tāda punkta trajektorija, kas vienmērīgi pārvietojas pa taisnes staru, kurš vienmērīgi griežas ap savu sākumpunktu.

Kāpinām šī vienādojuma abas puses kvadrātā, sareizinām iekavu izteiksmes un savēlcam līdzīgos locekļus:

$$\begin{aligned}(x^2 - 2ax + a^2 + y^2)(x^2 + 2ax + a^2 + y^2) &= a^4, \\ x^4 + 2x^2y^2 + y^4 &= 2a^2x^2 - 2a^2y^2, \\ (x^2 + y^2)^2 &= 2a^2(x^2 - y^2).\end{aligned}\quad (5)$$

Tā kā šis vienādojums satur tikai mainīgo lielumu x un y pāra pakāpes, tad acīmredzami līnija ir simetriska attiecībā pret koordinātu asi un arī attiecībā pret koordinātu sākumpunktu. Tāpēc var izpētīt un uzzīmēt šo līniju 1. kvadrantā un iegūto līkni simetriski attēlot pret koordinātu asi un koordinātu sākumpunktu.

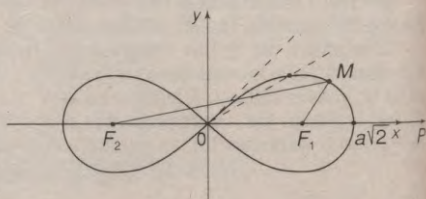
Pārveidosim vienādojumu (5) polārā koordinātu sistēmā, izmantojot formulas $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$:

$$\begin{aligned}(r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi)^2 &= 2a^2(r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi), \\ (r^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi))^2 &= 2a^2r^2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi), \\ r^4 &= 2a^2r^2 \cos 2\varphi, \quad r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi, \\ r &= \pm a \sqrt{2 \cos 2\varphi}.\end{aligned}\quad (6)$$

No iegūtā līnijas polārā vienādojuma atrodam, ka dažiem līnijas punktiem 1. kvadrantā ir šādas polārās koordinātas:

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
r	$a\sqrt{2}$	a	0

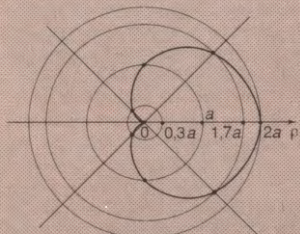
Pēc vērtību tabulas konstruējam līkni 1. kvadrantā un pēc tam to attēlojam simetriski pret koordinātu asi un koordinātu sākumpunktu (88. zīm.); iegūto līniju sauc par *Bernulli lemniskatu*.



88. zīm.

DAŽU LĪNIJU POLĀRIE VIENĀDOJUMI

Kardioīda* $r = a(1 + \cos \varphi)$; ($a > 0$)

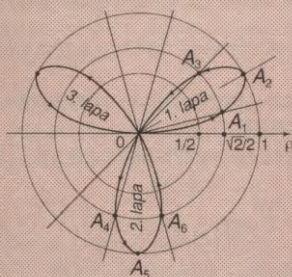


Trīslapu roze $r = a \sin 3\varphi$; ($a > 0$)

φ	r
0	$2a$
$\pm \frac{\pi}{4}$	$\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)a \approx 1,7a$
$\pm \frac{\pi}{2}$	a
$\pm \frac{3\pi}{4}$	$\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)a \approx 0,3a$
$\pm \pi$	0

* Nosaukums «kardioīda» radies no grieķu vārda «cardia» - *sirds*.

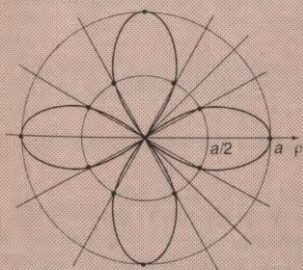
Ja $a=1$:



3. lapai: $\varphi \in \left[\frac{2\pi}{3}; \pi \right]$

φ	r	linijas punkts
0	0	O
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	A_1
$\frac{\pi}{16}$	1	A_2
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	A_3
$\frac{\pi}{3}$	0	O
$\frac{5\pi}{12}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	A_4
$\frac{\pi}{2}$	-1	A_5
$\frac{7\pi}{12}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	A_6
$\frac{2\pi}{3}$	0	O

Četrlapu roze $r = a \cos 2\varphi$



1. lapai $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$

3.7. §. JĒDZIENS PAR VIRSMU TELPĀ UN VIRSMAS VIENĀDOJUMU

1. VIRSMAS VIENĀDOJUMS. SFĒRA

Aplūkojot ģeometriskus objektus (punktus, līnijas, virsmas) telpā, lietojam Dekarta koordinātu sistēmu, nosakot punktu ar reālu sakārtotu skaitļu trijnieku $(x; y; z)$ – šī punkta koordinātām. Pieņemsim, ka kādas punktu kopas visiem punktiem piemīt noteikta īpašība un, izmantojot brīvi izraudzīta kopas punkta $M(x; y; z)$ koordinātas, šī īpašība ir izteikta ar vienādojumu

$$F(x; y; z) = 0. \quad (1)$$

Visu to telpas punktu kopu, kuru koordinātas apmierina vienādojumu (1), sauc par **virsmu**. Virsmas apzīmēsim ar burtiem S, Q , lietojam arī

apzīmējumus (S) , (Q) . Virsmas brīvi izraudzītu punktu apzīmēsim ar $M(x; y; z)$. Pētot virsmas, analītiskajā ģeometrijā aplūko šādus pamatzdevumus:

- 1) sastādīt virsmas vienādojumu pēc virsmas definīcijā dotas tekošā punkta vispārīgās īpašības;
- 2) pēc dota virsmas vienādojuma (1) noskaidrot virsmas īpašības un uzzīmēt virsmu.

Definīcija. Par **sfēru** sauc visu to punktu kopu telpā, kuri atrodas vienādā attālumā no dotā punkta C – sfēras centra.

1. piemērs. Sastādīt sfēras vienādojumu, ja tās centrs ir punkts $C(x_0; y_0; z_0)$, bet rādiuss ir R (89. zīm.).

Ja $M(x; y; z)$ ir brīvi izraudzīts sfēras punkts, tad

$$|\overrightarrow{CM}| = R. \quad (2)$$

Tā kā $\overrightarrow{CM} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$, tad no vienādības (2) izriet, ka

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = R$$

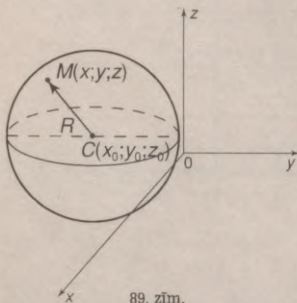
jeb

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2. \quad (3)$$

Vienādojumu (3) sauc par **sfēras kanonisko vienādojumu**.

Ja sfēras centrs atrodas koordinātu sistēmas sākumpunktā O , tad $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ un sfēras vienādojums ir šāds:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad (4)$$



89. zīm.

2. piemērs. Noskaidrosim, kādu virsmu nosaka vienādojums

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 8y - 6z + 1 = 0.$$

Lai vienādojumā atdalītu pilnos kvadrātus, sagrupēsim vienkopus saskaitāmos ar vienāda nosaukuma nezināmajiem:

$$x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 - 8y + 16 - 16 + z^2 - 6z + 9 - 9 + 1 = 0 \quad \text{jeb}$$

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 8y + 16) + (z^2 - 6z + 9) - 1 - 16 - 9 + 1 = 0,$$

$$(x - 1)^2 + (y - 4)^2 + (z - 3)^2 = 25.$$

Tātad dotais vienādojums nosaka sfēru, kuras rādiuss $R = 5$, bet centrs ir punktā $C(1; 4; 3)$.

Klasificējot vienādojumus, lieto šādus jēdzienus: *algebriskas virsmas*, *transcendentas virsmas*; *imagināras virsmas* un *dēģenerētas virsmas*.

Piemēri.

$$x^2 + y^2 + z^2 = -1 - \text{imagināra virsma};$$

$x^2 + y^2 + z^2 = 0$ – koordinātu sākumpunkts (sfēra ar rādiusu $R = 0$, tātad – dēģenerēta virsma);

$x^2 + y^2 = 0 - Oz$ ass (bezgalīgs riņķa cilindrs ar rādiusu $R = 0$, tātad – dēģenerēta virsma).

Sfēras vienādojums

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2,$$

$O(x_0; y_0; z_0)$ – centrs;

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

$O(0; 0; 0)$ – centrs.

2. PLAKNES VISPĀRĪGAIS VIENĀDOJUMS

Plakne ir visvienkāršākā virsma. Plaknes stāvokli telpā attiecībā pret izraudzīto koordinātu sistēmu viennozīmīgi nosaka

1) vektors $\vec{n} = (A; B; C)$, kas perpendikulārs plaknei; šo vektoru sauc par **normālvektoru**;

2) kāds šajā plaknē dots **punkts** $M_0(x_0; y_0; z_0)$ (90. zīm.).

Ja brīvi izraudzītu punktu plaknē apzīmējam ar $M(x; y; z)$, tad vektoru $\overrightarrow{M_0M}$ un $\vec{n}$ ir perpendikulāri un to skalārais reizinājums ir vienāds ar nulli, t. i.,

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0. \quad (5)$$

Tā kā $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$, tad no (5) iegūstam plaknes vienādojumu

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (6)$$

Šo vienādojumu apmierina jebkura plaknes punkta M koordinātas.

Pārveidosim vienādojumu (6) šādi:

$$Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0.$$

Apzīmējot izteiksmi iekavās ar D , iegūstam plaknes vispārīgo vienādojumu

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (7)$$

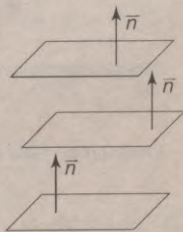
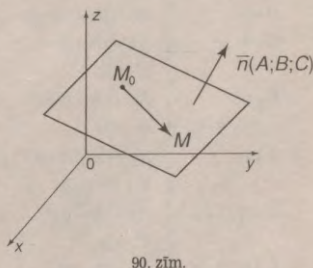
kur $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, bet koeficienti A, B, C ir plaknes normālvektora koordinātas.

Var pierādīt, ka vienādojuma (7) brīvā locekļa D moduļa dalījums ar normālvektora $\vec{n}$ moduli ir vienāds ar plaknes **attālumu d no koordinātu sākumpunkta**, proti,

$$d = \frac{|D|}{|\vec{n}|} = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (8)$$

Ja vienādojumā (7) maina brīvo locekli D , bet nemaina koeficientus A, B, C , tad šādi vienādojumi nosaka savstarpēji paralēlas plaknes, jo visām šīm plaknēm ir viens un tas pats normālvektors $\vec{n} = (A; B; C)$ (91. zīm.).

Vienādojumā (7) viens vai vairāki koeficienti var būt vienādi ar nulli. Tad iegūstam t. s. **plaknes nepilnos vienādojumus**. Šādi vienādojumi nosaka plaknes, kurām ir kāds īpašs novietojums koordinātu telpā: plakne ir paralēla kādai no koordinātu asīm vai koordinātu plaknēm, iet caur koordinātu sākumpunktu vai sakrīt ar kādu no koordinātu plaknēm. Piemēram, ja $D = 0$, tad vienādojums $Ax + By + Cz = 0$ nosaka plakni, kas iet caur koordinātu sākumpunktu, jo šo vienādojumu apmierina koordinātas $(0; 0; 0)$. Ja $A = 0$, tad vienādojums $By + Cz + D = 0$ nosaka Ox asij paralēlu plakni, jo šīs plaknes normālais vektors $\vec{n} = (0; B; C)$ ir perpendikulārs pret Ox asi. Ja $A = B = D = 0$, tad iegūst vienādojumu $Cz = 0$ jeb $z = 0$, kas nosaka koordinātu plakni xOy , jo normālvektors $\vec{n} = (0; 0; C)$ ir perpendikulārs xOy plaknei un šajā plaknē atrodas koordinātu sākumpunkts. Pavisam ir iespējami 13 plaknes nepilno vienādojumu veidi; tie aplūkoti tabulā (nav jēgas gadījumam, kad $A = B = C = 0$).



Plaknes vispārīgais vienādojums

$$Ax + By + Cz + D = 0;$$

$$\text{normālvektors } \vec{n} = (A; B; C).$$

Plaknes nepilnie vienādojumi

	Vienādojums	$\vec{n}$	Plakne
$D=0$	$Ax + By + Cz = 0$	$\vec{n} = (A; B; C)$	caur punktu $O(0; 0; 0)$
$C=0$	$Ax + By + D = 0$ $\vec{n} \perp Oz$	$\vec{n} = (A; B; 0)$	$\parallel Oz$ asij
$B=0$	$Ax + Cz + D = 0$ $\vec{n} \perp Oy$	$\vec{n} = (A; 0; C)$	$\parallel Oy$ asij
$A=0$	$By + Cz + D = 0$ $\vec{n} \perp Ox$ asij	$\vec{n} = (0; B; C)$	$\parallel Ox$ asij
$C=0; D=0$	$Ax + By = 0$ $\vec{n} \perp Oz$	$\vec{n} = (A; B; 0)$	caur Oz asi
$B=0; D=0$	$Ax + Cz = 0$ $\vec{n} \perp Oy$	$\vec{n} = (A; 0; C)$	caur Oy asi
$A=0; D=0$	$By + Cz = 0$ $\vec{n} \perp Ox$	$\vec{n} = (0; B; C)$	caur Ox asi
$B=0; C=0$	$Ax + D = 0$ $\vec{n} \perp yOz$	$\vec{n} = (A; 0; 0)$	$\parallel yOz$ plaknei
$A=0; C=0$	$By + D = 0$ $\vec{n} \perp xOz$	$\vec{n} = (0; B; 0)$	$\parallel xOz$ plaknei
$A=0; B=0$	$Cz + D = 0$ $\vec{n} \perp xOy$	$\vec{n} = (0; 0; C)$	$\parallel xOy$ plaknei
$B=C=D=0$	$Ax=0 \Rightarrow x=0$ $\vec{n} \perp yOz$	$\vec{n} = (A; 0; 0)$	yOz plakne
$A=C=D=0$	$By=0 \Rightarrow y=0$ $\vec{n} \perp xOz$	$\vec{n} = (0; B; 0)$	xOz plakne
$A=B=D=0$	$Cz=0 \Rightarrow z=0$ $\vec{n} \perp xOy$	$\vec{n} = (0; 0; C)$	xOy plakne

Plaknes vienādojums koordinātu asu nogriežņos

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Vienādojums plaknei caur trim punktiem M_1, M_2, M_3 :

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

3. PLAKNES VIENĀDOJUMS KOORDINĀTU ASU NOGRIEŽŅOS

Pieņemsim, ka plakne Q nav paralēla nevienai koordinātu asij un iet caur koordinātu sākumpunktu. Tad $D \neq 0$ un šī plakne no koordinātu asīm atšķel nogriežņus a , b un c (92. zīm.). Tā kā plakne Q iet caur punktiem $M_1(a; 0; 0)$, $M_2(0; b; 0)$ un $M_3(0; 0; c)$, tad to koordinātas apmierina vienādojumu (7). Iegūstam trīs vienādības

$$Aa + D = 0; Bb + D = 0; Cc + D = 0.$$

No tām izsakām koeficientus A , B un C ;

$$A = -\frac{D}{a}; \quad B = -\frac{D}{b}; \quad C = -\frac{D}{c}.$$

Tādējādi vienādojums (7) ir uzrakstāms šādi:

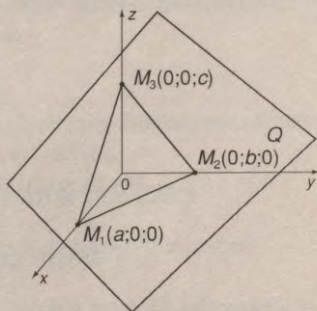
$$-\frac{D}{a}x - \frac{D}{b}y - \frac{D}{c}z + D = 0.$$

Izdalot abas puses ar D , iegūstam plaknes vienādojumu asu nogriežņos:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

(9)

Koeficienti a , b , c var būt kā pozitīvi, tā arī negatīvi skaitļi.



92. zīm.

4. VIENĀDOJUMS PLAKNEI, KAS IET CAUR TRIM DOTIEM PUNKTIEM

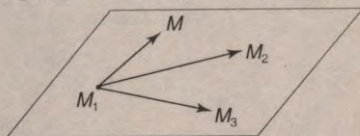
Pieņemsim, ka plaknē doti trīs punkti $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, kas neatrodas uz vienas taisnes. Tad plakne ir viennozīmīgi noteikta un, izmantojot šo punktu koordinātas, var sastādīt tās vienādojumu.

Ja brīvi izraudzītu plaknes punktu apzīmējam ar $M(x; y; z)$, tad šajā plaknē varam izveidot trīs vektorus, piemēram, $\vec{M_1M}$, $\vec{M_1M_2}$ un $\vec{M_1M_3}$ (93. zīm.). Acīmredzami šie vektori ir komplanāri, tāpēc to jauktais reizinājums ir vienāds ar 0:

$$\vec{M_1M} \cdot \vec{M_1M_2} \cdot \vec{M_1M_3} = 0. \quad (10)$$

Tā kā $\vec{M_1M} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1)$, $\vec{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, $\vec{M_1M_3} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1)$, tad, uzrakstot jauktā reizinājuma (10) izteiksmi koordinātās, iegūstam plaknes vienādojumu

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (11)$$



93. zīm.

Protams, trīs komplanāros vektorus var izvēlēties dažādi, bet vienkāršības dēļ brīvi izraudzīto punktu M vēlamus savienot tikai ar vienu no dotajiem punktiem. Savukārt determinantu (11) aprēķina, izvirzot to pēc pirmās rindas.

Piemērs. Sastādīt vienādojumu plaknei, kas iet caur punktiem $M_1(-1; 1; 0)$, $M_2(0; 0; 3)$, $M_3(-4; -1; 0)$.

Brīvi izvēlamies plaknes punktu $M(x; y; z)$ un sastādām trīs vektorus tāpat kā 93. zīmējumā:

$$\overrightarrow{M_1M} = (x+1; y-1; z-0) = (x+1; y-1; z),$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (0+1; 0-1; 3-0) = (1; -1; 3),$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = (-4+1; -1-1; 0-0) = (-3; -2; 0).$$

Tā kā $\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0$, tad

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z \\ 1 & -1 & 3 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Izvirzot determinantu pēc pirmās rindas, iegūstam plaknes vienādojumu:

$$(x+1) \cdot (6) - (y-1) \cdot 9 + z \cdot (-2-3) = 0,$$

$$6x + 6 - 9y + 9 - 5z = 0 \quad \text{jeb} \quad 6x - 9y - 5z + 15 = 0.$$

5. LEŅĶIS STARP DIVĀM PLAKNĒM

Pieņemsim, ka dotas plaknes

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{un} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Leņķi φ starp šīm plaknēm noteiksim kā leņķi starp šo plakņu normālvektoriem: $\varphi = \angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$. Tā kā

$$\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1), \quad \vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2) \quad \text{un} \quad \cos \angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|},$$

tad leņķi φ starp plaknēm nosaka pēc formulas

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (12)$$

~~~~~

Ja dotas divas plaknes

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad (\text{plakne } Q_1),$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad (\text{plakne } Q_2)$$

un  $\varphi$  ir leņķis starp tām, tad

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

$$Q_1 \parallel Q_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

$$Q_1 \perp Q_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Punkta  $M_1(x_1; y_1; z_1)$  attālums līdz plaknei  $Ax + By + Cz + D = 0$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$



Ja plaknes ir paralēlas, tad to normālvektori ir kolineāri un to koordinātas ir proporcionālas:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (13)$$

Proporcija (13) ir divu plakņu *paralelitātes nosacījums*.

Ja turklāt  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ , tad plaknes sakrīt.

Ja plaknes ir perpendikulāras, tad arī to normālvektori ir perpendikulāri un to skalārais reizinājums ir vienāds ar 0:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0. \quad (14)$$

Tātad vienādība (14) ir divu plakņu *perpendikularitātes nosacījums*.

## 6. ATTĀLUMS NO PUNKTA LĪDZ PLAKNEI

Pieņemsim, ka jānosaka punkta  $M_1(x_1; y_1; z_1)$  attālums  $d$  līdz plaknei

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Ja punkta  $M_1$  projekciju plaknē apzīmējam ar  $M_0$ , tad acīmredzot  $\vec{n} \parallel \overrightarrow{M_0 M_1}$ . Tātad leņķis starp šiem vektoriem ir vai nu  $0^\circ$ , vai  $180^\circ$  un šī leņķa kosinusa vērtība ir 1 vai  $-1$ . Tāpēc šo vektoru skalārais reizinājums

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0 M_1} = \pm |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{M_0 M_1}|. \quad (15)$$

kur  $\vec{n} = (A; B; C)$ , bet  $|\overrightarrow{M_0 M_1}| = d$  (94. zīm.).

Tā kā  $\overrightarrow{M_0 M_1} = (x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0)$ , tad no vienādības (15) izriet, ka

$$A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0) = \pm |\vec{n}| \cdot d.$$

Šajā vienādībā atverot iekavas un kreisajā pusē pieskaitot un atņemot  $D$ , iegūstam

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D - (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = \pm |\vec{n}| \cdot d.$$

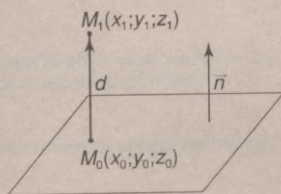
Tā kā punkts  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  atrodas plaknē, tad šī punkta koordinātas apmierina plaknes vienādojums, t. i.,  $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ . Līdz ar to **punkta  $M_1$  attālums līdz plaknei  $Ax + By + Cz + D = 0$  ir aprēķināms pēc formulas**

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (16)$$

Piemērs. Aprēķināt punkta  $M_1(5; 1; -1)$  attālumu līdz plaknei  $x - 2y - 2z + 4 = 0$ .

Saskaņā ar formulu (16)

$$d = \frac{|1 \cdot 5 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) + 4|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{9}{3} = 3.$$



94. zīm.

### 3.8. §. LĪNIJA TELPĀ. TAISNES VIENĀDOJUMA VEIDI TELPĀ

#### 1. LĪNIJA TELPĀ

Līniju telpā iegūst, divām virsmām šķeloties. Tātad līnija ir visu to punktu kopa, kuri atrodas kā uz vienas, tā arī uz otras virsmas. Šādu punktu koordinātas apmierina abu virsmu vienādojumus. Tāpēc līniju var noteikt ar vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} F_1(x; y; z) = 0 \\ F_2(x; y; z) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

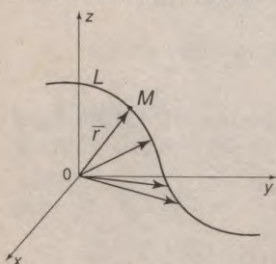
Tācu daudzus uzdevumos, kas saistīti ar kustību, līniju definē kā kustīga punkta trajektoriju. To iegūst, fiksējot kustīgā punkta  $M$  stāvokli katrā laika momentā  $t$ . Tātad katrai  $t$  vērtībai atbilst noteikts rādiusvektors

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (95. \text{ zīm.}). \quad (2)$$

Vienādojumu (2) sauc par *trajektorijas vektoriālo vienādojumu*.

Pieņemsim, ka  $\vec{r}(t) = (\varphi_1(t); \varphi_2(t); \varphi_3(t))$ . Tā kā  $\vec{r} = (x; y; z)$ , tad no (2) izriet kustīgā punkta  $M(x; y; z)$  koordinātu parametriskie vienādojumi

$$\begin{cases} x = \varphi_1(t) \\ y = \varphi_2(t) \\ z = \varphi_3(t). \end{cases}$$



95. zīm.

Izslēdzot parametru  $t$  no diviem pirmajiem un no diviem pēdējiem vienādojumiem, iegūst divu virsmu vienādojumus, kas saista trajektorijas punktu koordinātas  $x$ ,  $y$  un  $z$ . Tātad trajektorija ir šo virsmu šķēluma līnija.

Protams, parametrs  $t$  var būt ne tikai laiks. Par parametru var izvēlēties, piemēram, punkta noietā ceļa garumu, pagriezienu leņķi u. tml. – jebkādu lielumu, kurš viennozīmīgi nosaka tekošā punkta koordinātas.

Līnija telpā – divu virsmu šķēlums:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Taisnes vispārīgais vienādojums:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Taisnes kanoniskie vienādojumi:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

$M_0(x_0; y_0; z_0)$  – punkts uz taisnes;

$\vec{v} = (m; n; p)$  – taisnes virziena vektors;

$M(x; y; z)$  – taisnes punkts.



## 2. TAISNES VISPĀRĪGAIS VIENĀDOJUMS TELPĀ

Taisni telpā iegūsim kā divu plakņu  $Q_1$  un  $Q_2$  šķēlumu līniju:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Šo vienādojumu sistēmu (3) sauc par *taisnes vispārīgo vienādojumu*.

Protams, plaknes  $Q_1$  un  $Q_2$  šķēļas (un tāpat definē taisni) tikai tad, ja to normālvektori  $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$  un  $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$  nav kolineāri (t. i., koeficienti  $A_1; B_1; C_1$  un  $A_2; B_2; C_2$  nav proporcionāli).

## 3. TAISNES PARAMETRISKIE UN KANONISKIE VIENĀDOJUMI

Taisnes stāvokli telpā viennozīmīgi nosaka šādi lielumi:

- 1) *taisnes virziena vektors*  $\vec{v} (m; n; p) \neq \vec{0}$ ,
- 2) kāds dots taisnes *punkts*  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  (96. zīm.).

Lai iegūtu taisnes vienādojumu vektoriālā veidā, aplūkosim  $\triangle OM_0M$ . Acīmredzot

$$\vec{OM} = \vec{OM}_0 + \vec{M_0M}. \quad (4)$$

Tā kā  $\vec{M_0M} \parallel \vec{v}$ , tad eksistē tāds skaitlis  $t$  (parametrs), ka

$$\vec{M_0M} = t\vec{v} \quad (-\infty < t < \infty).$$

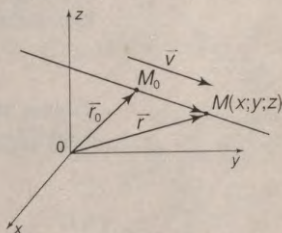
Tātad no (4) iegūstam taisnes vienādojumu vektoriālā formā

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}. \quad (5)$$

Ja parametrs  $t$  – laiks,  $\vec{v}$  – ātruma vektors, bet  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  – kustības sākumpunkts, tad vienādojums (5) izsaka vienmērīgā taisnvirziena kustībā esoša materiāla punkta pārvietojumu pēc  $t$  sekundēm. Tātad taisne ir šīs kustības trajektorija.

Tā kā  $\vec{r} = (x; y; z)$ ,  $\vec{r}_0 = (x_0; y_0; z_0)$  un  $\vec{v} = (m; n; p)$ , tad, pārejot vienādojumā (5) uz koordinātām, iegūstam *taisnes parametriskos vienādojumus*

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \quad (6)$$



96. zīm.

Taisnes parametriskie vienādojumi:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

Taisne caur diviem punktiem  $M_1(x_1; y_1; z_1)$  un  $M_2(x_2; y_2; z_2)$ :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Izsakot no tiem parametru  $t$ , varam rakstīt, ka

$$t = \frac{x-x_0}{m}; \quad t = \frac{y-y_0}{n}; \quad t = \frac{z-z_0}{p} \quad \text{un}$$

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} \quad (7)$$

Vienādojumus (7) sauc par **taisnes kanoniskajiem vienādojumiem**.

Piezīme. Ja taisne atrodas  $xOy$  plaknē, t. i.,  $z=0$ ,  $z_0=0$  un  $\vec{v}=(m; n; 0)$ , tad taisnes parametriskie vienādojumi ir

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt, \end{cases}$$

bet kanoniskais vienādojums ir

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n}.$$

Piemērs. Taisne iet caur punktu  $M(2; -1; 3)$  paralēli  $Ox$  asij. Sastādīt šīs taisnes kanoniskos un parametriskos vienādojumus. Novilkt šo taisni.

Tā kā taisne ir paralēla  $Ox$  asij, tad par taisnes virziena vektoru var izvēlēties  $Ox$  ass ortu:  $\vec{v} = \vec{i} = (1; 0; 0)$  (97. zīm.). Taisne iet caur punktu  $M(2; -1; 3)$ , tātad  $x_0=2$ ,  $y_0=-1$ ,  $z_0=3$  un no vienādojuma (7) iegūstam taisnes kanoniskos vienādojumus

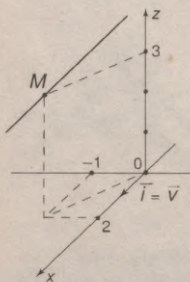
$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-3}{0}.$$

Taisnes parametriskos vienādojumus iegūst, pielīdzinot šīs attiecības brīvi izraudzītām parametram  $t$ :

$$\frac{x-2}{1} = t; \quad \frac{y+1}{0} = t; \quad \frac{z-3}{0} = t,$$

t. i.,

$$\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -1 \\ z = 3, \end{cases}$$



97. zīm.

kur  $t \in (-\infty, \infty)$ . Acīmredzot, ja  $t=0$ , tad no sistēmas atrodam doto punktu  $M(2; -1; 3)$ .

#### 4. PAMATUZDEVUMI PAR TAISNI UN PLAKNI

**Taisne caur diviem dotiem punktiem.** Pieņemsim, ka doti divi taisnes punkti  $M_1(x_1; y_1; z_1)$  un  $M_2(x_2; y_2; z_2)$ . Lai sastādītu taisnes kanoniskos vienādojumus (7), nepieciešams tās virziena vektors  $\vec{v}=(m; n; p)$ . Bet vektors  $\vec{M_1M_2}=(x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1)$  atrodas uz taisnes, tātad varam pieņemt, ka  $\vec{v}=\vec{M_1M_2}$ , un uzrakstīt taisnes kanoniskos vienādojumus šādi:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \quad (8)$$

Protams, sastādot šīs taisnes vienādojumu, nav nozīmes tam, kuru punktu  $M_1$  vai  $M_2$  - izvēlamies par «punktu  $M_0$  uz taisnes». Arī virziena vektors  $\vec{v}$  var būt  $\vec{M_2M_1}$ .



**Leņķis starp divām taisnēm.** Pieņemsim, ka doti divu taisņu kanoniskie vienādojumi

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1},$$

$$\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

Tātad šo taisņu virziena vektori ir  $\vec{v}_1 = (m_1; n_1; p_1)$  un  $\vec{v}_2 = (m_2; n_2; p_2)$ , un tie veido tādu pašu leņķi  $\varphi$  kā šīs taisnes:

$$\varphi = \angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2).$$

Leņķa  $\varphi$  kosinusu aprēķinām, izmantojot skalāro reizinājumu:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \quad (9)$$

Ja  $\cos \varphi > 0$ , tad  $\varphi$  ir leņķis starp taisnēm. Bet, ja  $\cos \varphi < 0$ , tad ir iegūts taisņu veidotā leņķa blakusleņķis un leņķis starp taisnēm ir  $\pi - \varphi$ .

Īpaši gadījumi ir divu taisņu paralelītāte un perpendikularitāte. Ja taisnes ir **paralēlas**, tad to virziena vektori ir kolineāri, proti,  $\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$ , un to koordinātas ir proporcionālas:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}. \quad (10)$$

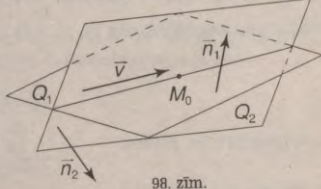
Ja taisnes ir **perpendikulāras**, tad arī  $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$ , t. i.,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos \varphi = 0$  un no (9) iegūstam, ka

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0. \quad (11)$$

**Vispārīgā taisnes vienādojuma redukcija kanoniskā veidā.** Lai no taisnes vispārīgā vienādojuma (3) iegūtu tās kanoniskos vienādojumus (7), rīkojas šādi:

1) atrod kādu punktu  $M_0$  uz taisnes, tā vienu koordinātu izvēloties patvaļīgi, bet pārējās divas aprēķinot no sistēmas (3);

2) tā kā taisne ir perpendikulāra abu plakņu  $Q_1$  un  $Q_2$  normālvektoriem  $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$  un  $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ , tad par taisnes virziena vektoru  $\vec{v}$  var pieņemt šo vektoru vektoriālo reizinājumu  $\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$  (98. zīm.).



98. zīm.

Ja dotas divas taisnes

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad (\text{taisne } L_1),$$

$$\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2} \quad (\text{taisne } L_2)$$

un  $\varphi$  ir leņķis starp tām, tad

$$\cos \varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

Piemērs. Sastādīt taisnes

$$\begin{cases} x+2y+3z-13=0 \\ 3x+y+4z-14=0 \end{cases}$$

kanoniskos vienādojumus.

1) Pieņemot, ka  $x=1$ , aprēķināsim  $y$  un  $z$  no sistēmas

$$\begin{cases} 2y+3z-12=0 \\ y+4z-11=0 \end{cases} \text{ jeb } \begin{cases} 2y+3z=12 \\ y+4z=11. \end{cases}$$

Lietojot Krāmra formulas, atrodam, ka

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 11 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{48-33}{8-3} = \frac{15}{5} = 3 \quad \text{un} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 1 & 11 \end{vmatrix}}{5} = \frac{22-12}{5} = \frac{10}{5} = 2.$$

Esam ieguvuši punktu  $M_0(1; 3; 2)$ , kas atrodas uz taisnes.

2) Tā kā  $\vec{n}_1 = (1; 2; 3)$ ,  $\vec{n}_2 = (3; 1; 4)$ , tad

$$\begin{aligned} \vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 5\vec{i} + 5\vec{j} - 5\vec{k} = (5; 5; -5), \text{ t. i., } m=5; n=5; p=-5. \end{aligned}$$

Ievietojot visus iegūtos lielumus vienādojumos (7), atrodam šīs taisnes kanoniskos vienādojumus

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-2}{-5}.$$

Protams, arī vienādojumi  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{-1}$  nosaka to pašu taisni, jo virziena vektori ar koordinātām  $(5; 5; -5)$  un  $(1; 1; -1)$  ir kolineāri.

**Taisnes un plaknes krustpunkts.** Lai noteiktu taisnes

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$$

krustpunktu ar plakni

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

jāatrisina šo vienādojumu sistēma. Turklāt taisnes vienādojumi jāizsaka parametriskajā formā. Tad pēc  $x, y$  un  $z$  ievietošanas plaknes vienādojumā iegūst to parametru  $t$  vērtību, kurai atbilstošās  $x, y$  un  $z$  vērtības ir meklētā krustpunkta koordinātas.

Piemērs. Noteikt taisnes

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z+2}{-2}$$

krustpunktu ar plakni

$$3x-7y-2z+7=0.$$

Vispirms iegūstam taisnes parametriskos vienādojumus, taisnes kanoniskos vienādojumus pielīdzinot parametram  $t$ :

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z+2}{-2} = t, \\ \begin{cases} x-1=t \\ y-3=0 \\ z+2=-2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t+1 \\ y=3 \\ z=-2t-2. \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$



Ievietojam šīs vērtības plaknes vienādojumā un aprēķinām  $t$ :

$$3(t+1) - 7 \cdot 3 - 2(-2t-2) + 7 = 0;$$

$$3t + 3 - 21 + 4t + 4 + 7 = 0;$$

$$7t - 7 = 0 \Rightarrow t = 1.$$

Taisnes un plaknes krustpunkta koordinātas atrodam no vienādībām (12):

$$x=2; \quad y=3; \quad z=-4.$$

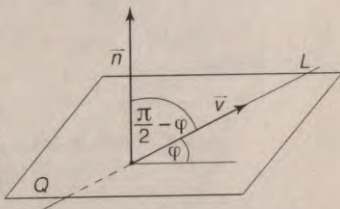
**Leņķis starp taisni un plakni.** Pieņemsim, ka dota taisne  $L$

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$$

un plakne  $Q$

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Par leņķi starp taisni un plakni sauc leņķi, ko veido taisne ar tās projekciju dotajā plaknē (99. zīm.). Tādējādi šis leņķis  $\varphi$  nav lielāks par  $\frac{\pi}{2}$ .



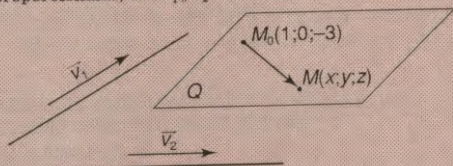
99. zīm.

Piezīme. Risinot uzdevumus par plakni un taisni, galvenokārt jāievēro plaknes normālvektora  $\vec{n} = (A; B; C)$  un taisnes virziena vektora  $\vec{v} = (m; n; p)$  savstarpējais novietojums, izmantojot atbilstoši skalāro, vektoriālo vai jaukto reizinājumu.

Piemērs. Sastādīt vienādojumu plaknei, kas iet caur punktu  $M_0(1; 0; -3)$  un ir paralēla taisnēm

$$\frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{1} \quad \text{un} \quad \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}.$$

Doto taisņu virziena vektori ir  $\vec{v}_1 = (2; 3; 1)$  un  $\vec{v}_2 = (-1; 2; 1)$ . Tā kā atbilstošās projekcijas nav proporcionālas, tad  $\vec{v}_1 \nparallel \vec{v}_2$ . Uzskatāmības dēļ uzskicēsim zīmējumu:



Plaknē (kuras vienādojums jā sastāda) brīvi izvēlamies punktu  $M = (x; y; z)$  un nosakām vektora  $\vec{M_0M}$  koordinātas:  $\vec{M_0M} = (x-1; y; z+3)$ .

Acīmredzot atbilstoši uzdevuma nosacījumiem vektoriem  $\vec{M_0M}$ ,  $\vec{v}_1$  un  $\vec{v}_2$  jābūt komplanāriem, t. i., to jauktajam reizinājumam jābūt vienādam ar 0:

$$\vec{M_0M} \cdot \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0.$$

Šis reizinājums ir plaknes  $Q$  vienādojums vektoriālā formā. Plaknes vienādojums koordinātās ir

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+3 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Determinantu aprēķinām, izvirzot pēc pirmās rindas:

$$(x-1)(3-2) - y(2+1) + (z+3)(4+3) = 0 \Rightarrow x-3y+7z+20=0.$$

Izmantojot skalāro reizinājumu, aprēķināsim kosinusu no leņķa, kuru veido plaknes  $Q$  normālvektors  $\vec{n} = (A; B; C)$  un taisnes  $L$  virziena vektors  $\vec{v} = (m; n; p)$ :

$$|\cos \angle(\vec{n}, \vec{v})| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}|}{|\vec{n}| |\vec{v}|}. \quad (13)$$

Tā kā  $\angle(\vec{n}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} - \varphi$  un  $\left| \cos \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) \right| = \sin \varphi$ , tad saskaņā ar vienādību (13)

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}|}{|\vec{n}| |\vec{v}|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \quad (14)$$

Ja **taisne un plakne ir perpendikulāras**, tad  $\vec{v} \parallel \vec{n}$ , t. i., šo vektoru koordinātas ir proporcionālas:

$$\frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C}. \quad (15)$$

Ja **taisne ir paralēla plaknei**, tad  $\vec{v} \perp \vec{n}$ , t. i.,  $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$  un

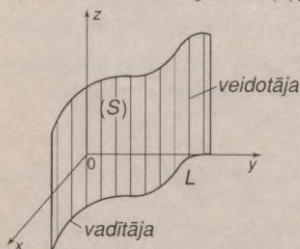
$$Am + Bn + Cp = 0. \quad (16)$$

### 3.9. §. CILINDRISKAS VIRSMAS

Pieņemsim, ka  $xOy$  plaknē dota kāda līnija  $L$  (100. zīm.)

$$\begin{cases} F(x; y) = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Acīmredzot vienādojumu  $F(x; y) = 0$  apmierina arī visi tie punkti, kuru projekcijas atrodas uz šīs līnijas.



100. zīm.

Šāda punktu kopa ir **cilindriska virsma**, kuru izveido  $Oz$  asiļ paralēla taisne – **veidotāja**, pārvietojoties pa līniju  $L$ , kuru sauc par **vadītāju**.

Piemēram, ja vadītāja ir riņķa līnija

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = 0, \end{cases}$$

kas atrodas  $xOy$  plaknē, bet veidotāja ir taisne, kas paralēla  $Oz$  asiļ, tad iegūst cilindrisku virsmu – t. s. **taisno riņķa cilindru** (101. zīm.). Tās vienādojums ir

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Savukārt, ja vadītāja ir riņķa līnija

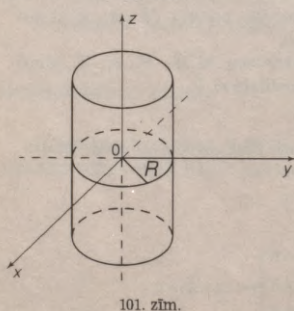
$$L: \begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

ar centru punktā  $C(x_0; y_0)$ , tad atbilstošā cilindriskā virsma ir taisns riņķa cilindrs ar šādu vienādojumu:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Analogi, ja cilindriskas virsmas veidotājas ir paralēlas  $Oy$  asiļ, bet vadītājas vienādojums ir

$$\begin{cases} y = 0 \\ F(x; z) = 0, \end{cases}$$



101. zīm.



tad cilindriskās virsmas vienādojums ir

$$F(x; z) = 0.$$

Piemēram, ja vadītāja ir elipse

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + \frac{z^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

$xOz$  plaknē un veidotāja paralēla  $Oy$  asij, tad iegūstam **eliptisku cilindru** (102. zīm.)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Savukārt vienādojums

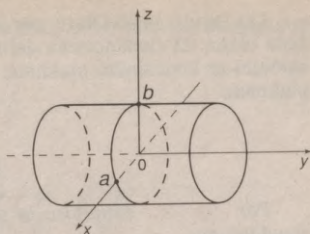
$$F(y; z) = 0$$

attēlo cilindrisku virsmu, kuras veidotāja ir paralēla  $Ox$  asij. Piemēram, ja vadītāja ir parabola

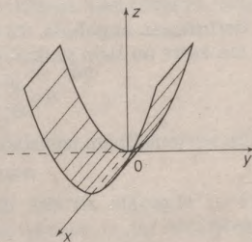
$$\begin{cases} y^2 = 2pz \\ x = 0, \end{cases}$$

bet veidotāja ir taisne, kas paralēla  $Ox$  asij, tad rodas cilindriskā virsma – **parabolisks cilindrs** (103. zīm.), kura vienādojums ir

$$y^2 = 2pz.$$



102. zīm.



103. zīm.

### 3.10. §. OTRĀS KĀRTAS VIRSMAS

Aplūkosim virsmas, kuras nosaka ar 2. pakāpes vienādojumiem; šādas virsmas sauc par **2. kārtas virsmām**. Šo virsmu nosaukumi un vienādojumi doti tabulā.

| N. p. k. | Virsmas nosaukums          | Kanoniskais vienādojums                                    |
|----------|----------------------------|------------------------------------------------------------|
| 1.       | Elipsoīds                  | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  |
| 2.       | Viendobuma hiperboloīds    | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  |
| 3.       | Divdobumu hiperboloīds     | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ |
| 4.       | Eliptiskais paraboloids    | $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$                       |
| 5.       | Hiperboliskais paraboloids | $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$                       |
| 6.       | Divdobumu konuss           | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$  |

Lai iegūtu priekšstatu par šo virsmu formu, izpētīsim to vienādojumus pēc šāda plāna: 1) vienādojuma definīcijas apgabals; 2) virsmas simetrija; 3) virsmas šķēlumi ar koordinātu plaknēm; 4) šķēlumi ar plaknēm, kas paralēlas koordinātu plaknēm.

## 1. ELIPSOĪDS

Par **elipsoīdu** sauc visu to telpas punktu kopu, kuru koordinātas apmierina vienādojumu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (1)$$

**Definīcijas apgabals.** Tā kā vienādojumā (1) trīs nenegatīvu skaitļu summa ir 1, tad katrs no šiem saskaitāmajiem ir mazāks (vai vienāds) nekā 1. Tāpēc

$$0 \leq \frac{x^2}{a^2} \leq 1, \quad 0 \leq \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \quad 0 \leq \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

No šīm nevienādībām iegūstam, ka  $x^2 \leq a^2$ ,  $y^2 \leq b^2$ ,  $z^2 \leq c^2$  jeb

$$-a \leq x \leq a, \quad -b \leq y \leq b, \quad -c \leq z \leq c.$$

Tātad uz elipsoīda atrodas tikai tādi punkti, kuru koordinātas apmierina šīs nevienādības, t. i., **elipsoīds ir ierobežota virsma.**

**Simetrija.** Tā kā elipsoīda vienādojumā ir tikai mainīgo lielumu  $x$ ,  $y$ ,  $z$  pāra pakāpes, tad var secināt, ka **elipsoīds ir simetriska virsma attiecībā pret visām koordinātu plaknēm, visām koordinātu asīm un attiecībā pret koordinātu sākpunktu** (spriedumi ir analogi kā pētot elipses simetriju 3.3. § 3. p.).

**Šķēlumi ar koordinātu plaknēm.** Lai iegūtu vienādojumu elipsoīda šķēluma līnijai ar  $xOy$  plakni, aplūkojam vienādojumu sistēmu, kurā ir elipsoīda vienādojums un  $xOy$  plaknes vienādojums  $z=0$ :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0. \end{cases}$$

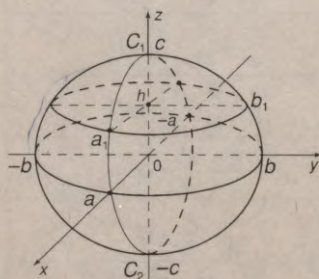
Tātad elipsoīda **šķēlums ar  $xOy$  plakni ir elipse**, kuras pusasis ir  $a$  un  $b$ . Analogi atrod šķēlumus ar  $yOz$  un  $zOx$  plakni, kuru vienādojumi ir  $x=0$  un  $y=0$ :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0. \end{cases}$$

Tādējādi **šķēlums ar  $yOz$  plakni ir elipse**, kuras pusasis ir  $b$  un  $c$ , bet **šķēlums ar  $zOx$  plakni – elipse**, kuras pusasis ir  $a$  un  $c$  (104. zīm.).

**Šķēlumi ar plaknēm, kas ir paralēlas koordinātu plaknēm.** Var pierādīt, ka elipsoīda šķēlums ar plakni, kas ir paralēla kādai no koordinātu plaknēm, ir elipse. Sīkāk aplūkosim



104. zīm.



gadījumā, kad šķēlēja plakne ir paralēla  $xOy$  plaknei; šādas plaknes vienādojums ir  $z=h$ . No vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = h \end{cases}$$

iegūstam

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2} \\ z = h \end{cases} \quad \text{jeb} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{c^2 - h^2}{c^2} \\ z = h. \end{cases}$$

Ja  $h < c$ , tad  $c^2 - h^2 > 0$  un iegūtais vienādojums ir elipses vienādojums, kuru var pārveidot šādā kanoniskā veidā:

$$\frac{x^2}{\left(a \sqrt{\frac{c^2 - h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b \sqrt{\frac{c^2 - h^2}{c^2}}\right)^2} = 1 \quad \text{jeb}$$

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1,$$

kur  $a_1 = a \sqrt{\frac{c^2 - h^2}{c^2}}$  un  $b_1 = b \sqrt{\frac{c^2 - h^2}{c^2}}$ . Kā redzams, pusasis  $a_1$  un  $b_1$  ir proporcionālas pusasīm  $a$  un  $b$ .

**Elipses, kuru pusasis ir proporcionālas, sauc par līdzīgām.** Palielinot  $h$  vērtību, pusasis  $a_1$  un  $b_1$  samazinās. Tas nozīmē, ka, jo lielāks ir šķēluma plaknes attālums no  $xOy$  plaknes, jo mazāka elipse tiek iegūta šķēlumā. Ja  $|h| = c$ , tad no aplūkotas vienādojumu sistēmas iegūstam, ka

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \\ z = h. \end{cases}$$

Šīs vienādojumu sistēmas atrisinājums ir  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z=\pm c$ . Tātad elipsoīdam ar plakni  $z=c$  ir tikai viens kopīgs punkts  $C_1(0, 0, c)$ , bet ar plakni  $z=-c$  — kopīgs punkts  $C_2(0, 0, -c)$ .

Ja  $|h| > c$ , tad plaknei ar elipsoīdu kopīgu punktu nav, jo  $c^2 - h^2 < 0$ . Patiešām nav tādu punktu, kuru koordinātas apmierina vienādojumu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{c^2 - h^2}{c^2},$$

ja  $\frac{c^2 - h^2}{c^2} < 0$ .

Analogi izpēta šķēļumus, ja šķēlēja plakne ir paralēla  $yOz$  plaknei vai  $zOx$  plaknei.

Ja elipsoīda vienādojumā (1) divas pusasis ir vienādas, tad virsmu sauc par **rotācijas elipsoīdu**, jo šāda virsma rodas, elipsei rotējot ap koordinātu asi. Piemēram, ja  $a=c$ , tad elipsoīds ir rotācijas virsma, kas rodas,  $xOy$  plaknes elipsei rotējot ap  $Oy$  asi.

Ja visas pusasis ir vienādas, t. i.,  **$a=b=c$** , tad no vienādojuma (1) iegūst **sfēras vienādojumu**

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

## 2. VIENDOBUMA HIPERBOLOĪDS

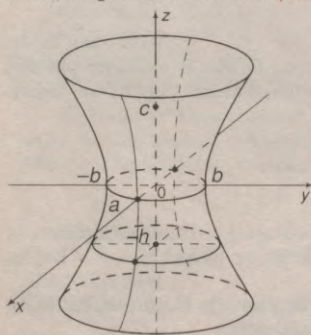
Par *viendobuma hiperboloīdu* sauc visu to telpas punktu kopu, kuru koordinātas apmierina vienādojumu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (2)$$

**Definīcijas apgabals.** No vienādojuma (2) iegūstam, ka  $z = \pm c \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1}$ . No šīs vienādības izriet, ka uz pētāmās virsmas atrodas tikai tādi punkti, kuru koordinātas apmierina nevienādību  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq 1$ . Ja neierobežoti palielina  $x$  un  $y$  absolūtās vērtības, tad arī  $z$  absolūtā vērtība palielinās neierobežoti, t. i.,  $z \rightarrow \pm \infty$ , ja  $x \rightarrow \pm \infty$  un (vai)  $y \rightarrow \pm \infty$ . Tādējādi var secināt, ka *viendobuma hiperboloīds ir neierobežota virsma*.

**Simetrija.** Analogi kā elipsoīds, arī *viendobuma hiperboloīds ir simetriska virsma attiecībā pret visām koordinātu plaknēm, visām koordinātu asiņ un koordinātu sākumpunktu*, jo vienādojumā (2) ir tikai mainīgo lielumu  $x$ ,  $y$ ,  $z$  pāra pakāpes.

**Šķēlumi ar koordinātu plaknēm.** Viendobuma hiperboloīda šķēlums ar  $xOy$  plakni ir elipse (pierādījums ir analogs kā elipsoīda gadījumā). No vienādojuma (2) izriet, ka pētāmās virsmas **šķēlums ar  $yOz$  plakni ( $x=0$ ) ir hiperbola**



105. zīm.

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

un **šķēlums ar  $zOx$  plakni ( $y=0$ ) arī ir hiperbola**

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0. \end{cases}$$

Šo šķēlumu līnijas parādītas 105. zīmējumā.

**Šķēlumi ar plaknēm, kas ir paralēlas koordinātu plaknēm.** Spriežot līdzīgi kā elipsoīda gadījumā, var pierādīt, ka viendobuma hiperboloīda šķēlums ar  $xOy$  plaknei paralēlu plakni  $z=h$  ir elipse, turklāt  $h$  vērtība var būt jebkurš skaitlis. Palielinot  $h$  vērtību, šķēlumā iegūtas elipses pusasis palielinās. Tātad, jo lielāks ir šķēluma plaknes attālums no  $xOy$  plaknes, jo lielāka elipse tiek iegūta šķēlumā. Var pierādīt, ka, šķēlot viendobuma hiperboloīdu ar plaknēm, kas ir paralēlas  $yOz$  plaknei vai  $zOx$  plaknei, šķēlumu līnijas ir hiperbolas. Ja  $a=b$ , tad virsmu sauc par *rotācijas viendobuma hiperboloīdu*, jo šādu virsmu veido  $yOz$  plaknē esošā hiperbola, rotējot ap  $Oz$  asi.

## 3. DIVDOBUMU HIPERBOLOĪDS

Par *divdobumu hiperboloīdu* sauc visu to punktu kopu, kuru koordinātas apmierina vienādojumu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \quad (3)$$



**Definīcijas apgabals.** No vienādojuma (3) iegūstam, ka  $z = \pm c \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1}$ .

Acīmredzami zemsaknes izteiksmes vērtība ir pozitīva ar jebkurām  $x$  un  $y$  vērtībām. Ja neierobežoti palielina  $x$  un  $y$  absolūtās vērtības, tad arī  $z$  absolūtā vērtība palielinās neierobežoti, t. i.,  $z \rightarrow \pm \infty$ , ja  $x \rightarrow \pm \infty$  un (vai)  $y \rightarrow \pm \infty$ . Tātad **divdobumu hiperboloīds ir neierobežota virsma**.

**Simetrija.** Divdobumu hiperboloīds ir simetriska virsma attiecībā pret visām koordinātu plaknēm, visām koordinātu asīm un attiecībā pret koordinātu sākumpunktu (spriedumi analogi kā elipsoīda gadījumā).

**Šķēlumi ar koordinātu plaknēm.** Ievietojot  $z=0$  vienādojumā (3), iegūstam vienādiību

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Tā kā nenegatīvu skaitļu summa nevar būt vienāda ar  $-1$ , tad nav tādu punktu, kuru koordinātas apmierina šo vienādojumu. Tātad  **$xOy$  plakne divdobumu hiperboloīdu nešķel**. Ievietojot  $x=0$  vienādojumā (3), iegūstam hiperbolas vienādojumu, kuras fokusi atrodas uz  $Oz$  ass:

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \\ x = 0. \end{cases}$$

Analogi, ja  $y=0$ , arī iegūstam hiperbolas vienādojumu:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \\ y = 0. \end{cases}$$

Tātad **divdobumu hiperboloīda šķēlumi ar  $yOz$  plakni un  $zOx$  plakni ir hiperbolas**, kuru fokusi atrodas uz  $Oz$  ass.

**Šķēlumi ar plaknēm, kas ir paralēlas koordinātu plaknēm.** Ievietojot  $z=h$  vienādojumā (3), iegūstam sistēmu

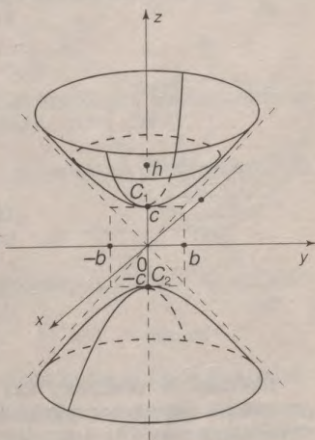
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1 \\ z = h. \end{cases}$$

Analizējot iegūto sistēmu, jāaplūko trīs gadījumi.

Ja  $|h| = c$ , tad vienādiības labā puse ir vienāda ar nulli un šo vienādojumu apmierina punktu  $C_1(0; 0; c)$  un  $C_2(0; 0; -c)$  koordinātas. Ja  $|h| < c$ , tad vienādojuma labajā pusē ir negatīvs skaitlis, ar kuru nevar būt vienāda divu nenegatīvu skaitļu summa. Tātad nav tādu punktu, kuru koordinātas apmierina šādu vienādojumu. Tas nozīmē, ka plakne  $z=h$ , ja  $|h| < c$ , pētāmo virsmu nešķel.

Ja  $|h| > c$ , tad divdobumu hiperboloīda šķēlums ar plakni  $z=h$  ir elipse. Šīs elipses pusasis palielinās, ja palielina  $h$  absolūto vērtību. Tātad, jo lielāks ir šķēluma plaknes attālums no  $xOy$  plaknes, jo lielāka ir šķēlumā iegūtā elipse (106. zīm.).

Var pierādīt, ka divdobumu hiperboloīda šķēlumi ar plaknēm, kas paralēlas  $yOz$  plaknei un  $zOx$  plaknei, ir hiperbolas.



106. zīm.

#### 4. ELIPTISKAIS PARABOLOĪDS

Par *eliptisko paraboloidu* sauc visu to telpas punktu kopu, kuru koordinātas apmierina vienādojumu

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p > 0, q > 0. \quad (4)$$

**Definīcijas apgabals.** No vienādojuma (4) izriet, ka  $z \geq 0$ , turklāt  $z \rightarrow +\infty$ , ja  $x \rightarrow \pm\infty$  un (vai)  $y \rightarrow \pm\infty$ . Tātad pētāmā virsma atrodas virs  $xOy$  plaknes un ir *neierobežota*.

**Simetrija.** Vienādojumā (4) ir mainīgo lielumu  $x$  un  $y$  pāra pakāpes un mainīgā lieluma  $z$  nepāra pakāpe. Varam secināt, ka šī virsma ir simetriska attiecībā pret  $yOz$  plakni (tās vienādojums ir  $x=0$ ) un  $zOx$  plakni ( $y=0$ ), kā arī ir simetriska attiecībā pret  $Oz$  asi.

**Šķēlumi ar koordinātu plaknēm.** Ja  $z=0$ , tad no vienādojuma (4) iegūstam, ka  $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 0$ . Šo vienādojumu apmierina tikai koordinātu sākumpunkta  $O(0; 0; 0)$  koordinātas. Tātad eliptiskajam paraboloidam ar  $xOy$  plakni ir tikai viens kopīgs punkts – koordinātu sākumpunkts.

Ja  $x=0$ , tad no vienādojuma (4) iegūstam

$$\begin{cases} \frac{y^2}{q} = 2z \\ x=0 \end{cases} \quad \text{jeb} \quad \begin{cases} y^2 = 2qz \\ x=0. \end{cases}$$

Tātad virsmas šķēlums ar  $yOz$  plakni ir parabola, kuras fokuss atrodas uz  $Oz$  ass. Arī šķēlums ar  $zOx$  plakni ir parabola, jo, ievietojot  $y=0$  vienādojumā (4), iegūstam parabolas vienādojumu

$$\begin{cases} x^2 = 2pz \\ y=0. \end{cases}$$

**Šķēlumi ar plaknēm, kas ir paralēlas koordinātu plaknēm.** Eliptiskā paraboloida šķēlums ar  $xOy$  plaknei paralēlu plakni  $z=h$  ir elipse, jo, ievietojot vienādojumā (4)  $z=h > 0$ , atrodam, ka

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2h \\ z=h \end{cases} \quad \text{jeb} \quad \frac{x^2}{(\sqrt{2hp})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2hq})^2} = 1.$$

Acīmredzami, jo lielāka ir  $h$  vērtība, jo lielākas ir elipses pusasis.

Var pierādīt, ka šīs virsmas šķēlumi ar  $yOz$  plaknei paralēlu plakni un  $zOx$  plaknei paralēlu plakni ir parabolas (107. zīm.).

Ja  $p=q$ , tad šo virsmu sauc par *rotācijas paraboloidu*, jo tā rodas, parabolai  $y^2=qz$  rotējot ap  $Oz$  asi. Rotācijas paraboloida šķēlums ar  $xOy$  plaknei paralēlu plakni ir riņķa līnija.



## 5. HIPERBOLISKAIS PARABOLOĪDS

Par *hiperbolisko paraboloīdu* sauc visu to telpas punktu kopu, kuru koordinātas apmierina vienādojumu

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p > 0, q > 0. \quad (5)$$

**Definīcijas apgabals.** Acīmredzami  $x$  un  $y$  vērtības var būt jebkuri reāli skaitļi; var pierādīt, ka *hiperboliskais paraboloīds ir neierobežota virsma*.

**Simetrija.** Tāpat kā eliptiskais paraboloīds, arī *hiperboliskais paraboloīds ir simetriska virsma attiecībā pret  $yOz$  plakni,  $zOx$  plakni un  $Oz$  asi.*

**Šķēlumi ar koordinātu plaknēm.** Ja  $z=0$ , tad no vienādojuma (5), iegūstam, ka  $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0$ . Lai noskaidrotu, kādu punktu kopu  $xOy$  plaknē nosaka šis vienādojums, sadalām tā kreisās puses izteiksmi reizinātājos kā kvadrātu starpību:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = 0.$$

Kā redzams,

$$\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0 \quad \text{vai} \quad \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0.$$

Šie vienādojumi nosaka divas taisnes, kas krustojas koordinātu sākumpunktā un ir savstarpēji simetriskas attiecībā pret koordinātu asīm. Tātad *hiperboliskā paraboloīda šķēlums ar  $xOy$  plakni ir divas krustiskas taisnes*.

**Virsma šķēlums ar  $yOz$  plakni ir parabola**, jo, ievietojot vienādojumā  $x=0$ , iegūstam parabolas kanonisko vienādojumu

$$\begin{cases} y^2 = -2qz \\ x = 0. \end{cases}$$

**Šķēlums ar  $zOx$  plakni arī ir parabola**: ievietojot vienādojumā (5)  $y=0$ , iegūstam parabolas vienādojumu

$$\begin{cases} x^2 = 2pz \\ y = 0. \end{cases}$$

Ievērosim, ka  $zOx$  plaknē parabolas zari ir vērsti uz augšu, bet  $yOz$  plaknē – uz leju.

**Šķēlumi ar plaknēm, kas ir paralēlas koordinātu plaknēm.** Aplūkosim šķēlumu ar  $xOy$  plaknei paralēlu plakni  $z=h$ . Ievietojot  $z=h$  vienādojumā (5), iegūstam hiperbolas vienādojumu

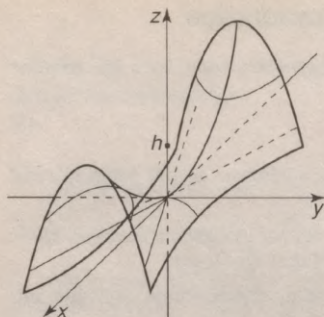
$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2h \\ z = h \end{cases} \quad \text{jeb} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{2hp} - \frac{y^2}{2hq} = 1 \\ z = h. \end{cases}$$

Izpētot sīkāk iegūto hiperbolas vienādojumu, ir jāapskata divi gadījumi:

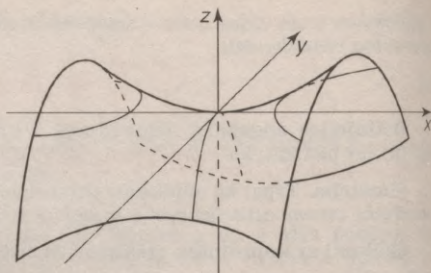
ja  $h > 0$ , tad hiperbolas reālā pusass ir  $\sqrt{2hp}$  un fokusi atrodas uz  $Ox$  asij paralēlas taisnes  $xOz$  plaknē;

ja  $h < 0$ , tad reālā pusass ir  $\sqrt{2|h|q}$  un fokusi atrodas uz  $Oy$  asij paralēlas taisnes  $yOz$  plaknē.

Ja šķēluma plaknes ir paralēlas  $yOz$  plaknei vai  $zOx$  plaknei, tad šķēlumos iegūst parabolas, pie tam plaknē  $y=m$  parabolas zari ir vērsti uz augšu, bet plaknē  $x=m$  – uz leju.



108. zīm.



109. zīm.

Hiperboliskā paraboloida šķēlumi ar plaknēm attēloti 108. zīmējumā (šīs virsmas forma atgādina seglus); labākas uzskatāmības dēļ dažkārt šo virsmu attēlo tā, kā parādīts 109. zīmējumā.

## 6. DIVDOBUMU KONUSS

Par *divdobumu konusu* sauc tādu punktu kopu telpā, kuru koordinātas apmierina vienādojumu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \quad (6)$$

**Definīcijas apgabals.** No vienādojuma (6) iegūstam vienādību  $z = \pm c \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$ .

Acīmredzami zemsaknes izteiksme ir nenegatīva ar jebkurām reālām  $x$  un  $y$  vērtībām, turklāt  $z \rightarrow \pm \infty$ , ja  $x \rightarrow \pm \infty$  un (vai)  $y \rightarrow \pm \infty$ . Tātad *otrās kārtas konuss ir neierobežota virsma*.

**Simetrija.** Tā kā vienādojumā (6) ir tikai mainīgo lielumu  $x$ ,  $y$ ,  $z$  pāra pakāpes, tad *konuss ir simetriska virsma attiecībā pret visām koordinātu plaknēm, visām koordinātu asīm un attiecībā pret koordinātu sākumpunktu*.

**Šķēlumi ar koordinātu plaknēm.** Ja  $z=0$ , tad no (6) iegūto vienādojumu

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

apmierina tikai koordinātu sākumpunkta koordinātas  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z=0$ . Tātad pētāmajai virsmai *ar  $xOy$  plakni ir tikai viens kopīgs punkts – koordinātu sākumpunkts*.

Viegli pārliecināties, ka *šķēlums ar  $yOz$  plakni vai  $zOx$  plakni ir divas taisnes*, kas krustojas koordinātu sākumpunktā un ir savstarpēji simetriskas attiecībā pret koordinātu asīm. Patiesām, ja  $x=0$ , tad no vienādojuma (6) izriet, ka

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{jeb} \quad \left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) \left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) = 0.$$



Iegūstam taisņu vienādojumus

$$\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0 \quad \text{un} \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0 \quad \text{jeb} \quad z = \frac{c}{b}y \quad \text{un} \quad z = -\frac{c}{b}y.$$

Analogi atrod šķēlumus ar  $zOx$  plakni  $y=0$ ; šo taisņu vienādojumi ir  $z = \frac{c}{a}x$  un  $z = -\frac{c}{a}x$ .

**Šķēlumi ar plaknēm, kas ir paralēlas koordinātu plaknēm.** Konusa šķēlums ar  $xOy$  plaknei paralēlu plakni  $z=h$  ir elipse; tās vienādojumu atrodam, ievietojot vienādojumā (6)  $z=h$ :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} \\ z = h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{\left(\frac{ah}{c}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{bh}{c}\right)^2} = 1 \\ z = h. \end{cases}$$

Palielinot  $h$  vērtības, palielinās elipses pusas  $\frac{ah}{c}$  un  $\frac{bh}{c}$ . Šķēlums ar  $yOz$  plaknei (vai arī  $zOx$  plaknei) para-

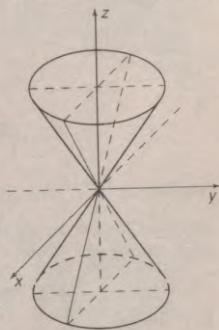
lēlu plakni  $x=m$  (vai  $y=m$ ) ir hiperbola, kuras fokusi atrodas uz  $Oz$  asij paralēlas taisnes. Otrās kārtas konuss attēlots 110. zīmējumā. Ja  $a=b$ , tad konusa šķēlums ar  $xOy$  plaknei paralēlu plakni ir riņķa līnija un virsma ir

**rotācijas konuss**, ko veido  $yOz$  plaknes taisne  $z = \frac{c}{b}y$ , rotējot ap  $Oz$  asi.

Piezīme. Aplūkotās virsmas (arī sfēru) nosaka otrās pakāpes vienādojumi ar 3 mainīgajiem lielumiem. Vispārīgā veidā 2. pakāpes vienādojumu ar 3 mainīgajiem pieraksta šādi:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

Var pierādīt, ka atkarībā no koeficientiem vispārīgais 2. pakāpes vienādojums nosaka vai nu kādu no aplūkotajām otrās kārtas virsmām (ar kopīgu terminu tās sauc par **kvadrikām**), vai arī kādu degenerētu virsmu, piemēram, paralēlu plakņu pāri, vienu plakni, vienu taisni, vienu punktu u. tml. Ir iespējams arī, ka šim vienādojumam nav nekādas reālas ģeometriskas ilustrācijas.



110. zīm.

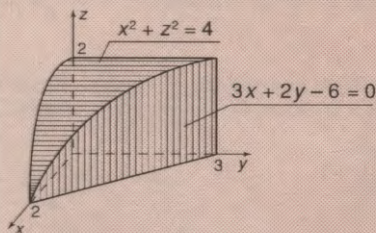
### Uzzīmēt ķermeni, ko ierobežo dotās virsmas

#### 1. piemērs

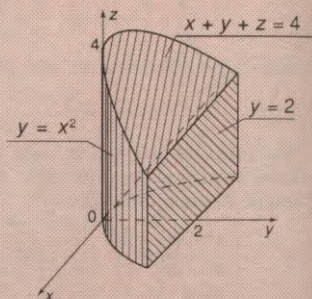
$$x^2 + z^2 = 4, \quad 3x + 2y - 6 = 0, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0.$$

Veidojot zīmējumu, vispirms jānoskaidro, kādas virsmas ir dotas ar šiem vienādojumiem. Vienādojumi  $x=0$ ,  $y=0$  un  $z=0$  ir koordinātu plakņu vienādojumi, bet ar nevienādībām  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  un  $z \geq 0$  tiek noteikts, ka aplūkojamais ķermenis atrodas 1. oktantā. Vienādojums  $x^2 + z^2 = 4$  ir riņķa līnijas vienādojums  $zx$  plaknē; riņķa līnijas rādiuss ir  $R=2$  un centrs atrodas koordinātu sākumpunktā. Telpā šis vienādojums izsaka riņķa cilindra virsmu, kuras veidules ir paralēlas  $Oy$  asij.

Vienādojums  $3x + 2y - 6 = 0$   $xOy$  plaknē izsaka taisni, bet telpā –  $Oz$  asij paralēlu plakni. Ērtākai plaknes uzzīmēšanai šo vienādojumu ieteicams pārveidot koordinātu asu



A-25. zīm.



A-26. zīm.

nogriežņos:  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ . Šīs plaknes un cilindra virsmas šķēluma līnija ir līkne, kuru aptuveni nosaka zīmējumā iegūtie šo virsmu divi kopīgie punkti  $M(2; 0; 0)$  un  $N(0; 3; 2)$  (A-25. zīm.).

## 2. piemērs

$$y = x^2, \quad y = 2, \quad x + y + z = 4, \quad z = 0.$$

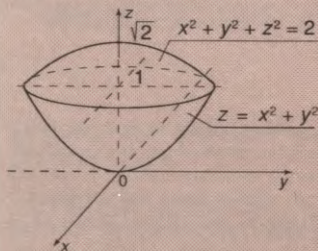
Vienādojuma  $y = x^2$  grafiks  $xOy$  plaknē ir parabola, bet telpā – paraboliska cilindra virsma, kuras veidules paralēlas  $Oz$  asij. Analogi  $xOy$  plaknē vienādojums  $y = 2$  nosaka  $Ox$  asij paralēlu taisni, bet telpā –  $zOx$  plaknei paralēlu plakni, kas iet caur šo taisni.

Vienādojums  $x + y + z = 4$  nosaka plakni; veidojot zīmējumu, šo vienādojumu ieteicams pārveidot koordinātu asu nogriežņos:  $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1$  (A-26. zīm.).

## 3. piemērs

$$z = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2.$$

No vienādojumiem redzams, ka ķermeni ierobežo rotācijas paraboloids un sfēra, kuras rādiusi ir  $\sqrt{2}$  un centrs atrodas koordinātu sākumpunktā. Paraboloida un sfēras šķēluma līnijas vienādojumu atrodam, atrisinot vienādojumu sistēmu



A-27. zīm.

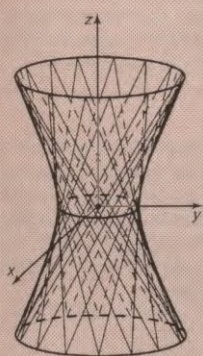
$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow z^2 + z = 2, \quad z^2 + z - 2 = 0.$$

Iegūtā kvadrātvienādojuma saknes ir  $z_1 = 1$  un  $z_2 = -2$  (neatbilst nosacījumam  $z = x^2 + y^2$ ). Ievietojot sistēmas vienādojumos  $z = 1$ , iegūstam riņķa līnijas vienādojumu  $x^2 + y^2 = 1$ . Tātad doto virsmu šķēlums ir riņķa līnija; tās rādiuss  $R = 1$ , un šī līnija atrodas  $xOy$  plaknei paralēlā plaknē  $z = 1$  (A-27. zīm.).

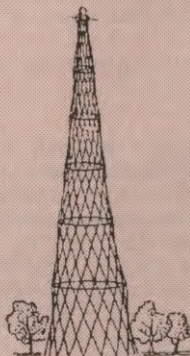


## OTRĀS KĀRTAS VIRSMAS DABĀ UN TEHNIKĀ

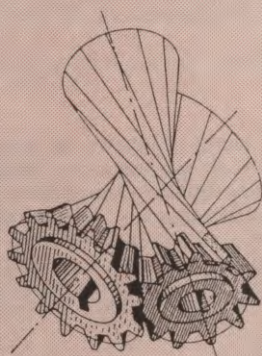
Otrās kārtas virsmu īpašības izmanto tehnikā, celtniecībā, arhitektūrā; šo virsmu formas dažkārt ir vērojamas arī dabā. Piemēram, vispazīnāmā ir dažādu lodes formas priekšmetu izmantošana (lodiņu gultņi, volejbola, basketbola bumbas u. tml.). Rotācijas elipsoīda forma (šādas virsmas rodas, elipsei rotējot ap savu lielo asi) ir melnei, regbija bumbai. Savukārt rotācijas centrālās spēka iedarbībā Zemes, Saules u. c. debess ķermeņu virsmai ir tāda rotācijas elipsoīda forma, kas rodas, elipsei rotējot ap savu mazo asi.



A-28. zīm.



A-29. zīm.



Ja cilindrisks trauks ar šķidrumu rotē ap cilindra vertikālo asi, tad rotācijas centrālās spēka un smaguma spēka iedarbībā šķidruma virsma ieliecas un tai ir rotācijas paraboloida forma. Šo īpašību izmantoja amerikāņu fizikis Roberts Vuds, lai rotējošā cilindriskā traukā ar dzīvsudrabu izveidotu lielu parabolisku spoguļi, kuru viņš gribēja izmantot astronomiskos novērojumos. 3.3. paragrāfā aplūkojām parabolas optiskās īpašības, kuras izmanto, konstruējot paraboliskus spoguļus, radiolokācijas antenas, lāzeru iekārtas. Šīm konstrukcijām ir rotācijas paraboloida forma.

Hiperboliskā paraboloida formu izmanto, veidojot zirga seglus.

Vairākām mašīnu detaļām ir rotācijas konusa forma.

Interesanta ir viendabuma hiperboloīda īpašību izmantošana celtniecībā. Var pierādīt, ka caur katru viendabuma hiperboloīda (un arī hiperboliskā paraboloida) punktu iet divas taisnes, kas pieder pie šīs virsmas (A-28. zīm.). Šīs taisnes sauc par *virsmas veidotājām*. Tātad viendabuma hiperboloīdu un hiperbolisko paraboloidu var izveidot no taisnēm, kuru stāvoklis telpā ir noteikts ar virsmu vienādojumiem. Šo īpašību izmanto, veidojot dažādas būvkonstrukcijas. Pirmais tādas konstrukcijas projektēja krievu inženieris un zinātnieks *Vladimirs Šuhovs* (1853–1939). Šuhova konstrukcijās tērauda sijas tika novietotas pa viendabuma rotācijas hiperboloīda veidotājām. Savienojot citu virs citas vairāku šādu virsmu joslas, tika būvēti augsti radiotorni, masti, balsti u. tml. Šādas konstrukcijas bija ļoti izturīgas un deva lielu materiālu ekonomiju. Pēc Šuhova projektiem uzbūvēti apmēram 200 torni, 500 tilti, elevatori, domnas u. c. būves. Šis celtniecības princips izmantots arī Parīzes Eifela torņa būvē.

Cits viendabuma hiperboloīda īpašību izmantošanas piemērs ir zobratu pārvada konstrukcija, ja zobratu simetrijas ass nav paralēla. A-29. zīmējumā attēlotajā detaļā zobratu izcilņi ir vērsti pa divu viendabuma hiperboloīdu veidotājām.

## LINEĀRĀS TELPAS

4.1. §. LINEĀRĀS TELPAS DEFINĪCIJA,  
ĪPAŠĪBAS UN PIEMĒRI

Vairākus vektoru un matricu algebras jēdzienus var vispārināti aplūkot ar cita veida matemātiskiem objektiem. Paplašinot kādas teorijas lietojumu apjomu, parasti vairums pamatjēdzienu tikai nosacīti jeb simboliski saglabā savus iepriekšējos nosaukumus. Tas attiecas arī uz tādiem jēdzieniem kā vektors, koordinātas, telpa u. c. To pašu var teikt par lineārām darbībām – elementu saskaitīšanu, elementa reizināšanu ar skaitli un to īpašībām. Tādējādi iegūst vienotu dažādu elementu kopai raksturīgu matemātisko modeli – lineāro telpu.

## 1. DEFINĪCIJA

Pieņemsim, ka dota elementu  $x, y, z, \dots$  kopa  $L$ , t. i.,

$$L = (x, y, z, \dots).$$

Definīcija. Kopu  $L$  sauc par **lineāru telpu**, ja

1) dots likums, pēc kura jebkuram elementu pārim  $x \in L, y \in L$  viennozīmīgi tiek piekārtots trešais elements  $z \in L$ , kuru sauc par šo **elementu summu** («nosacīto summu») un raksta

$$x + y = z \quad \text{vai} \quad z = x + y;$$

2) dots likums, pēc kura katram elementam  $x \in L$  un brīvi izraudzītam skaitlim  $\lambda \in R$  viennozīmīgi tiek piekārtots elements  $z \in L$ , kuru sauc par **elementa  $x$  reizinājumu ar skaitli  $\lambda$**  («nosacīto reizinājumu») un raksta

$$\lambda x = z \quad \text{vai} \quad x \lambda = z;$$

3) lineārām darbībām – elementu saskaitīšanai un elementa reizināšanai ar skaitli ir spēkā šādas **aksiomas**.

1.  $x + y = y + x$  (jebkuriem  $x, y \in L$ ).

2.  $(x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z$  (jebkuriem  $x, y, z \in L$ ).

3. Kopā  $L$  eksistē nulles elements, t. i., tāds elements  $0$ , ka jebkuram  $x \in L$

$$x + 0 = x \quad (0 \in L).$$

4. Katram  $x \in L$  eksistē tā pretējais elements, t. i., tāds elements  $-x$ , ka

$$x + (-x) = 0 \quad (-x \in L).$$

5. Jebkuram  $x \in L$

$$1 \cdot x = x.$$



6. Jebkuram  $x \in L$  un jebkuriem  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$

$$\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x.$$

7. Jebkuriem  $x, y \in L$  un jebkuram  $\lambda \in \mathbf{R}$

$$\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y.$$

8. Jebkuram  $x \in L$  un jebkuriem  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$

$$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x.$$

Tā kā šajā definīcijā  $\lambda$  un  $\mu$  ir reāli skaitļi, tad šādu telpu sauc par *reālu lineāru telpu*. Ja reālo skaitļu kopas  $\mathbf{R}$  vietā šajā definīcijā ir komplekso skaitļu kopa, tad iegūst *kompleksās lineārās (jeb vektoru) telpas definīciju*. Turpmāk aplūkosim tikai reālas lineāras telpas.

Ja aplūkojamā kopa veido lineāru telpu, tad tās elementus  $x, y, z, \dots$  sauksim par *telpas elementiem jeb vektoriem* un apzīmēsim ar  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \dots$ .

## 2. PAMATĪPAŠĪBAS

No lineārās telpas definīcijas izriet šādi apgalvojumi.

1. teorēma

*Lineārā telpā eksistē viens vienīgs nulles elements (jeb vektors)  $\vec{0}$ .*

Pierādījums. Pieņemsim pretējo, t. i., ka eksistē divi nulles elementi

$$\vec{0}_1 \in L \quad \text{un} \quad \vec{0}_2 \in L.$$

Tādā gadījumā no 3. aksiomas secinām, ka  $\vec{0}_2 + \vec{0}_1 = \vec{0}_2$  (jo  $\vec{0}_1$  ir nulles elements) un arī  $\vec{0}_1 + \vec{0}_2 = \vec{0}_1$  (jo  $\vec{0}_2$  ir nulles elements). Salīdzinot šīs vienādības un ievērojot 1. aksiomu ( $\vec{0}_2 + \vec{0}_1 = \vec{0}_1 + \vec{0}_2$ ), secinām, ka  $\vec{0}_1 = \vec{0}_2$ .

2. teorēma

*Skaitļa 0 reizinājums ar jebkuru elementu  $\vec{x} \in L$  ir nulles elements  $\vec{0}$  ( $\vec{0} \in L$ ).*

Pierādījums. Lai pierādītu, ka  $0\vec{x} = \vec{0}$ , pieņemsim, ka  $0\vec{x} = \vec{y}$  ( $\vec{y} \neq \vec{0}$ ), un aplūkosim summu  $\vec{x} + \vec{y}$ . Saskaņā ar 5. aksiomu  $\vec{x} + \vec{y} = 1\vec{x} + 0\vec{x}$ ; savukārt no 8. aksiomas izriet, ka  $\vec{x} + 0\vec{x} = (1+0)\vec{x} = 1\vec{x} = \vec{x}$ . Tātad  $\vec{x} + \vec{y} = \vec{x}$  un no 3. aksiomas secinām, ka  $\vec{y} = \vec{0}$ .

3. teorēma

*Lineārā telpā katram elementam  $\vec{x}$  eksistē viens vienīgs pretējais elements  $-\vec{x}$ .*

Pierādījums. Pieņemsim, ka elementam  $\vec{x} \in L$  eksistē divi pretējie elementi  $-\vec{x}_1 \in L$  un  $-\vec{x}_2 \in L$ .

Aprēķināsim divos veidos summu  $\vec{x} + (-\vec{x}_1) + (-\vec{x}_2)$ :

$$\begin{aligned} 1. \text{ veids. } \vec{x} + (-\vec{x}_1) + (-\vec{x}_2) &= [2. \text{ aksioma}] = (\vec{x} + (-\vec{x}_1)) + (-\vec{x}_2) = \\ &= [4. \text{ aksioma}] = \vec{0} + (-\vec{x}_2) = [1. \text{ aksioma}] = (-\vec{x}_2) + \vec{0} = \\ &= [3. \text{ aksioma}] = -\vec{x}_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ veids. } \vec{x} + (-\vec{x}_1) + (-\vec{x}_2) &= [1. \text{ aksioma}] = \vec{x} + (-\vec{x}_2) + (-\vec{x}_1) = \\ &= [2. \text{ aksioma}] = (\vec{x} + (-\vec{x}_2)) + (-\vec{x}_1) = \vec{0} + (-\vec{x}_1) = -\vec{x}_1 + \vec{0} = -\vec{x}_1. \end{aligned}$$

Salīdzinot abas izteiksmes, secinām, ka  $-\vec{x}_1 = -\vec{x}_2$ .

Secinājums. Elementa  $-\vec{x} \in L$  pretējais elements ir  $\vec{x} \in L$ .

#### 4. teorēma

*Ja  $\vec{x} \in L$ , tad reizinājums  $-1\vec{x}$  ir pretējais elements šajā lineārajā telpā, t. i.,  $-1\vec{x} = -\vec{x}$  ( $-\vec{x} \in L$ ).*

#### Pierādījums

$$-1\vec{x} + \vec{x} = [8. \text{ aksioma}] = (-1+1)\vec{x} = 0\vec{x} = [2. \text{ teorēma}] = \vec{0}.$$

Tātad  $-1\vec{x} + \vec{x} = \vec{0}$ , t. i.,  $-1\vec{x} = -\vec{x}$  (skat. 4. aksiomu).

Piezīme. Elementu summu  $\vec{x} + (-\vec{y})$  var apzīmēt ar  $\vec{x} - \vec{y}$  un nosaukt par  $\vec{x}$  un  $\vec{y}$  starpību («nosacīto starpību»).

#### 5. teorēma

*Lineārā telpā elementa  $\vec{x}$  reizinājums ar skaitli  $\lambda$  ir vienāds ar nulles elementu tad un tikai tad, ja  $\lambda=0$  vai arī  $\vec{x} = \vec{0}$ , t. i.,*

$$\lambda\vec{x} = 0 \Leftrightarrow 0\vec{x} = \vec{0} \quad \text{vai} \quad \lambda\vec{0} = \vec{0}.$$

Pierādīsim, piemēram, apgalvojumu  $\lambda\vec{0} = \vec{0}$ .

Patiešām,

$$\begin{aligned} \lambda\vec{0} &= \lambda(\vec{x} + (-\vec{x})) = [4. \text{ teorēma}] = \lambda(\vec{x} + (-1)\vec{x}) = [7. \text{ aksioma}] = \\ &= \lambda\vec{x} + \lambda(-1)\vec{x} = [6. \text{ aksioma}] = \lambda\vec{x} + (-\lambda\vec{x}) = [4. \text{ aksioma}] = \vec{0}. \end{aligned}$$

### 3. PIEMĒRI

1. piemērs. Aplūkosim reālo skaitļu kopu  $R$ , kurā «nosacītā saskaitīšana» ir reālo skaitļu saskaitīšana, bet «nosacītā reizināšana ar skaitli» ir divu reālu skaitļu reizinājums.

Lai noskaidrotu, vai  $R$  ir lineāra telpa (definīcijas nozīmē), jāpārlicinās par to, ka visas aksiomas ir spēkā. Pārbaudīsim to.

1. aksioma kopā  $R$  ir pareiza kā reālu skaitļu saskaitīšanas komutatīvā īpašība;
2. aksioma – izriet no saskaitīšanas asociatīvās īpašības;
3. aksioma – eksistē skaitlis  $0 \in R$ ;
4. aksioma – katram  $x \in R$  eksistē  $-x \in R$ ;
5. aksioma – jebkuru reālu skaitli reizinot ar skaitli 1, šis skaitlis nemainās;
6. aksioma – izriet no reālu skaitļu reizināšanas asociatīvās īpašības;
7. un 8. aksioma – izriet no reālu skaitļu īpašībām.

Tātad varam secināt, ka **reālo skaitļu kopa  $R$  ir lineāra telpa.**

2. piemērs. Apzīmēsim ar  $V$  visu analītiskajā ģeometrijā aplūkoto **telpas vektoru (t. s. ģeometriskos vektoru) kopu**, kurā definēta vektoru saskaitīšana un vektora reizināšana ar skaitli  $\lambda \in R$ . Šo darbību rezultātā iegūst vektoru, kurš arī pieder pie kopas  $V$ . Savukārt jebkura no aksiomām vektoru kopā  $V$  arī ir spēkā. Tātad kopa  **$V$  ir lineāra telpa.**

3. piemērs. No 2. piemērā aplūkotās vektoru kopas  $V$  izvēlēsimies tikai to vektoru kopu, kas atrodas vienā plaknē, un apzīmēsim to ar  $V_1$ . Definējot saskaitīšanu un reizināšanu ar skaitli tā, kā to aplūko plaknes vektoriem, var pārlicināties, ka kopā  $V_1$  visas aksiomas ir spēkā un tātad arī  $V_1$  ir lineāra telpa.

4. piemērs. Aplūkosim kopu  $G$ , kuras elementi ir visi polinomi (ar reāliem koeficientiem), kuru pakāpe nepārsniedz 3. Tātad kopas  $G$  elementi ir, piemēram, polinomi

$$P_3(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3, \quad P_2(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2,$$

$$P_1(x) = a_0x + a_1, \quad P_0(x) = a_0.$$



Ja šajā kopā «nosacīto saskaitīšanu» un «nosacīto elementa reizinājumu» ar skaitli  $\lambda \in \mathbf{R}$  definējam tāpat kā polinomu algebrā, tad visas astoņas aksiomas ir spēkā, piemēram, 3. aksioma – kopā  $G$  eksistē nulles elements, jo  $P_0(x) = a_0$ , kur  $a_0 = 0$ , ir nulltās pakāpes polinoms, kurš arī pieder pie kopas  $G$ ; 4. aksioma – katram polinomam  $P_0(x)$ ,  $P_1(x)$ ,  $P_2(x)$ ,  $P_3(x)$  eksistē pretējais elements  $-P_0(x) = -a_0$ ,  $-P_1(x) = -a_0x - a_1$ , utt., kuru saskaitot ar doto polinomu iegūst nulli.

Tātad kopa  $G$  ir lineāra telpa.

5. piemērs. Aplūkosim kopu  $C(a, b)$ , kurā apvienotas visas reāla argumenta  $t$  funkcijas, kas definētas un nepārtrauktas intervālā  $a \leq t \leq b$ , un abas darbības šajā kopā (elementu saskaitīšana un elementa reizināšana ar skaitli) ir jau zināmā funkciju saskaitīšana un funkcijas reizināšana ar skaitli. Var pārliect, ka visas aksiomas ir spēkā un tātad kopa  $C(a, b)$  ir lineāra telpa, kur

$$\vec{x} = f(t), \quad \vec{y} = g(t),$$

$$\vec{x} + \vec{y} = f(t) + g(t),$$

$$\lambda \vec{x} = \lambda f(t).$$

6. piemērs. Ar  $M$  apzīmēsim visu to reālo matricu kopu, kuru izmēri ir  $m \times n$  ( $m$  rindas un  $n$  kolonnas). Ja kopas  $M$  elementu (matricu) saskaitīšanu un elementa (matricas) reizināšanu ar skaitli  $\lambda \in \mathbf{R}$  definējam tāpat kā matricu algebrā (par nulles elementu pieņemot nulles matricu), tad visas aksiomas ir spēkā un tātad kopa  $M$  ir lineāra telpa.

7. piemērs. (Aritmētiskā telpa) Pieņemsim, ka kopas  $S$  elementi ir visas iespējamās  $n$  reālu skaitļu sakārtotas virknes ( $n$  reāli skaitļi noteiktā secībā).

Citiem vārdiem,  $\vec{x}$  ir kopas  $S$  elements, ja  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Skaitļus  $x_i \in \mathbf{R}$  saucim par elementa (vektora)  $\vec{x}$  koordinātām ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Par nullvektoru  $\vec{x} = \vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$  šajā kopā sauc vektoru, kura visas koordinātas ir vienādas ar nulli.

Savukārt divus vektorus  $\vec{x}, \vec{y} \in S$ ,  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  un  $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  sauc par vienādiem tad un tikai tad, ja to atbilstošās koordinātas ir vienādas:

$$\vec{x} = \vec{y} \Leftrightarrow x_i = y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Abas darbības kopā  $S$  definēsim šādi: vektoru  $\vec{x}$  un  $\vec{y}$  summa ir elements

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

kas arī pieder pie kopas  $S$ ;

reizinājums ar skaitli  $\lambda \in \mathbf{R}$  ir elements

$$\lambda \vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n), \quad \lambda \vec{x} \in S.$$

Var pārliect, ka kopai  $S$  visas aksiomas ir spēkā un tātad  $S$  ir lineāra telpa.

Šo lineāro telpu sauc arī par aritmētisko telpu.

Piezīme. Kā aritmētiskās telpas speciālgadījumus aplūko rindas matricu un kolonnas matricu

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n); \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

veidotās telpas.

8. piemērs. Pieņemsim, ka kopu  $D$  veido visas intervālā  $[-1; +1]$  definētās nepāra funkcijas  $a=f(t)$  un  $b=g(t)$ , kurām elementu summu un reizinājumu ar skaitli  $\lambda \in \mathbf{R}$  definē šādi:

$$\begin{aligned} a+b &= f(t)+g(t), \\ \lambda a &= \lambda f(t). \end{aligned}$$

Nepāra funkciju summa arī ir nepāra funkcija, jo

$$f(-t)+g(-t)=-f(t)-g(t)=-(f(t)+g(t)).$$

Arī nepāra funkcijas reizinājums ar  $\lambda \in \mathbf{R}$  ir nepāra funkcija. Tātad abu darbību rezultāts arī pieder pie kopas  $D$ . Var pārliecināties, ka šajā kopā (ar šādi definētām darbībām) visas astoņas aksiomas ir izpildītas. Tātad kopa  $D$  ir lineāra telpa.

Piezīme. Ne vienmēr  $[-1; 1]$  definēta nepāra funkciju kopa veido lineāru telpu. Tā, piemēram, ja summu definējam ar vienādību

$$a+b=f(t) \cdot g(t),$$

bet reizinājumu – ar skaitli tāpat kā iepriekš, tad kopa  $D$  vairs nav lineāra telpa, jo

$$f(-t) \cdot g(-t)=(-f(t)) \cdot (-g(t))=f(t) \cdot g(t),$$

t. i., «summa» ir pāra funkcija un tātad nepieder pie kopas  $D$ .

## 4.2. §. VEKTORU LINEĀRĀ ATKARĪBA UN NEATKARĪBA

Pieņemsim, ka dota lineāra telpa  $L$ , kuras elementi (vektori) ir  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$ . Saskaņā ar lineārās telpas definīciju arī vektors

$$\vec{y} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_k \vec{x}_k. \quad (1)$$

( $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbf{R}$ ) pieder pie telpas  $L$ . Šādu vektoru  $\vec{y}$ , kas izteikts ar vektoriem  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$ , sauc par vektoru  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$  lineāru kombināciju, bet skaitļus  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  – par šīs kombinācijas koeficientiem.

Definīcija. **Vektoru sistēmu (vektorus)  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$  sauc par lineāri neatkarīgu, ja  $\vec{y} = \vec{0}$ , tad un tikai tad, kad**

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0.$$

Ja savukārt  $\vec{y} = \vec{0}$ , bet starp skaitļiem  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  vismaz viens skaitlis nav vienāds ar nulli, tad vektoru sistēmu  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$  sauc par **lineāri atkarīgu**.

Tātad pārliecināties par vektoru sistēmas  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$  lineāro atkarību vai neatkarību var, pielīdzinot nullvektoram lineāro kombināciju (1)

$$\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_k \vec{x}_k = \vec{0} \quad (2)$$

un noskaidrojot, kādiem  $\lambda_i$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ) šī vienādība ir spēkā.

Tā, piemēram, ja sistēmā ir tikai viens vienīgs vektors  $\vec{x} \neq \vec{0}$ , tad tā ir lineāri neatkarīga, jo vienādība (2)

$$\lambda \vec{x} = \vec{0}$$

ir iespējama tikai tad, ja  $\lambda = 0$ . Savukārt, ja sistēmā ir viens vienīgs nullvektors  $\vec{0}$ , tad tā ir lineāri atkarīga, jo vienādība (2)

$$\lambda \vec{0} = \vec{0}$$

ir spēkā arī tad, ja  $\lambda \neq 0$ .



1. piemērs. Dekarta koordinātu sistēmas orti

$$\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0), \vec{k} = (0, 0, 1)$$

veido lineāri neatkarīgu sistēmu, jo vienādība

$$\lambda_1 \vec{i} + \lambda_2 \vec{j} + \lambda_3 \vec{k} = \vec{0}$$

iespējama tikai tadā gadījumā, kad  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ .

2. piemērs. Funkcijas  $f_1(t) = 1$ ;  $f_2(t) = \sin^2 t$ ;  $f_3(t) = \cos^2 t$  jebkurā galīgā intervālā ir lineāri atkarīgas, jo to lineārā kombinācija

$$\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) + \lambda_3 f_3(t)$$

ir vienāda ar nulli, ja  $\lambda_1 = -1$ ;  $\lambda_2 = 1$ ;  $\lambda_3 = 1$ :

$$-1 \cdot 1 + 1 \cdot \sin^2 t + 1 \cdot \cos^2 t = 0.$$

3. piemērs. Pieņemsim, ka  $V$  ir ģeometrisko vektoru telpa (skat. 1. § 3. punkta 2. piemēru) un  $\vec{x}_1, \vec{x}_2$  jebkuri divi kolineāri nenulles vektori tajā.

Ja  $\vec{x}_1 \parallel \vec{x}_2$ , tad no analītiskās ģeometrijas zināms, ka eksistē tāds skaitlis  $\lambda \neq 0$ , ka  $\vec{x}_1 = \lambda \vec{x}_2$  jeb  $\vec{x}_1 - \lambda \vec{x}_2 = \vec{0}$ . Tātad vienādība (2) ir pareiza, ja  $\lambda_1 = 1$ ;  $\lambda_2 = -\lambda$ , un varam secināt, ka kolineāri vektori  $\vec{x}_1$  un  $\vec{x}_2$  ir lineāri atkarīgi.

Var pierādīt, ka **lineāras telpas vektoriem ir spēkā šādas īpašības.**

1. Ja no  $k$  lineāri neatkarīgu vektoru sistēmas atmet jebkurus  $m$  vektorus ( $m < k$ ), tad atlikušie  $k - m$  vektori arī veido lineāri neatkarīgu sistēmu.

2. Ja  $k$  lineāri atkarīgu vektoru sistēmai pievieno jebkurus  $m$  vektorus, tad iegūst  $k + m$  lineāri atkarīgu vektoru sistēmu.

3. Ja starp vektoru sistēmas  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$  vektoriem ir viens nullvektors, tad šie vektori ir lineāri atkarīgi.

**Teorēma.**

**Lai vektori  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$  ( $k > 1$ ) būtu lineāri atkarīgi, ir nepieciešami un pietiekami, ka vismaz viens no šiem vektoriem ir vienāds ar pārējo vektoru lineāru kombināciju.**

**Pierādījums.** Nepieciešamība. Pieņemsim, ka vektori  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$  ir lineāri atkarīgi. Tātad eksistē tādi skaitļi  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , no kuriem vismaz viens nav vienāds ar nulli, ka

$$\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_k \vec{x}_k = \vec{0}.$$

Pieņemot, ka  $\lambda_1 \neq 0$ , vektoru  $\vec{x}_1$  var izteikt ar pārējiem:

$$\vec{x}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{x}_2 - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_1} \vec{x}_k,$$

t. i., vektors  $\vec{x}_1$  ir vienāds ar pārējo vektoru lineāru kombināciju.

**Pietiekamība.** Pieņemsim, ka viens vektors dotajā vektoru sistēmā  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$  ir izteikts ar pārējiem (ir pārējo vektoru lineāra kombinācija), piemēram,

$$\vec{x}_k = \mu_1 \vec{x}_1 + \mu_2 \vec{x}_2 + \dots + \mu_{k-1} \vec{x}_{k-1}.$$

Bet tad

$$\mu_1 \vec{x}_1 + \mu_2 \vec{x}_2 + \dots + \mu_{k-1} \vec{x}_{k-1} - \vec{x}_k = \vec{0}$$

un, salīdzinot ar (2), redzams, ka

$$\lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \dots, \lambda_{k-1} = \mu_{k-1}, \lambda_k = -1.$$

Tā kā vismaz viens skaitlis nav vienāds ar nulli (proti,  $\lambda_k = -1$ ), tad tas nozīmē, ka dotā vektoru sistēma ir lineāri atkarīga.

Piezīme. Jebkurā lineārā telpā var definēt arī kolinearitātes un komplanaritātes jēdzienus: divus vektorus sauc par kolineāriem, ja tie ir lineāri atkarīgi, un par nekolineāriem, ja tie ir lineāri neatkarīgi; trīs vektorus sauc par komplanāriem, ja tie ir lineāri atkarīgi, un par nekomplanāriem, ja tie ir lineāri neatkarīgi.

### 4.3. §. LINEĀRĀS TELPAS BĀZE UN DIMENSIJA. VEKTORA KOORDINĀTAS

#### 1. BĀZE UN DIMENSIJA

1. definīcija. *Par bāzi lineārā telpā  $L$  sauc tās vektoru sistēmu (kopu)  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ , ja*

1) *vektori  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  ir lineāri neatkarīgi;*

2) *jebkuru vektoru  $\vec{x} \in L$  var lineāri izteikt ar  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ , t. i.,*

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n, \text{ kur } \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

2. definīcija. *Telpas  $L$  bāzes vektoru skaitu sauc par tās dimensiju<sup>1</sup> un apzīmē ar  $\dim L$ .*

Ja telpa sastāv tikai no nulles elementa, tad uzskatīsim, ka tās dimensija ir vienāda ar 0.

Ja telpas bāzi veido  $n$  lineāri neatkarīgi vektori, tad šo telpu saucim par  *$n$ -dimensionālu telpu*.

Telpu  $L$  sauc par *galīgu telpu*, ja  $\dim L = n$  ir galīgs skaitlis, un par *bezgalīgu*, ja  $\dim L = \infty$ , t. i., ja bāzi veido bezgalīgi daudz lineāri neatkarīgu vektoru. Šeit galvenokārt aplūkosim galīgas telpas.

Piemērs. Pieņemsim, ka dota ģeometriskos vektoru telpa  $V$ . Kā zināms, tad jebkuri trīs nekomplanāri vektori  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  ir lineāri neatkarīgi, bet četri vektori  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$  vienmēr ir lineāri atkarīgi; turklāt eksistē tādi reāli skaitļi  $\lambda, \mu, \nu$ , ka

$$\vec{d} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c}.$$

Atbilstoši definīcijām secinām, ka

1) telpas  $V$  bāze ir jebkuri trīs nekomplanāri vektori;

2)  $\dim V = 3$ .

Analogi – telpā  $V_1$ , kuras elementi ir ģeometriskie vektori kādā plaknē, bāzi veido jebkuri divi nekolineāri vektori, t. i.,  $\dim V_1 = 2$ .

No šiem piemēriem varam secināt, ka kādā lineārā telpā  $L$  var būt vairākas bāzes, bet katras bāzes elementu skaits ir viens un tas pats, t. i.,  $\dim L$  nemainās. Izrādās, ka tā nav nejaušība un var pierādīt šādus apgalvojumus.

1. teorēma

*Ja  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  ir lineāri neatkarīga vektoru sistēma telpā  $L$  un jebkuru vektoru  $\vec{x} \in L$  var lineāri izteikt ar  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ , tad telpa  $L$  ir  $n$ -dimensionāla, t. i.,  $\dim L = n$ .*

2. teorēma

*Ja  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  ir lineārās telpas  $L$  bāze, tad jebkuru  $\vec{x} \in L$  tikai vienā vienīgā veidā var izteikt ar šiem bāzes vektoriem:*

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n. \quad (1)$$

<sup>1</sup> No franču valodas: *dimension* – izmērs.



Pierādījums. Pieņemsim, ka  $\vec{x} \in L$  iespējams izteikt arī citādi, t. i., eksistē tādi skaitļi  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ , ka

$$\vec{x} = \mu_1 \vec{e}_1 + \mu_2 \vec{e}_2 + \dots + \mu_n \vec{e}_n. \quad (2)$$

Bet tad no (1) un (2) secinām, ka

$$\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n = \mu_1 \vec{e}_1 + \mu_2 \vec{e}_2 + \dots + \mu_n \vec{e}_n$$

jeb

$$(\lambda_1 - \mu_1) \vec{e}_1 + (\lambda_2 - \mu_2) \vec{e}_2 + \dots + (\lambda_n - \mu_n) \vec{e}_n = 0. \quad (3)$$

Tā kā vektori  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  ir lineāri neatkarīgi, tad vienādība (3) ir spēkā tikai tad, ja

$$\lambda_1 - \mu_1 = 0, \lambda_2 - \mu_2 = 0, \dots, \lambda_n - \mu_n = 0, \text{ t. i.,}$$

$$\lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \dots, \lambda_n = \mu_n.$$

## 2. VEKTORA KOORDINĀTAS

Definīcija. Ja vektors  $\vec{x}$  ir izteikts ar bāzes vektoriem  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ :

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n, \quad (1)$$

tad skaitļus  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  sauc par vektora  $\vec{x}$  **koordinātām** šajā bāzē.

Pēc analogijas ar vektoru algebru vektoru  $\vec{x}$  raksta šādi:

$$\vec{x} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Piemērs. Pieņemsim, ka dota piecdimensionāla telpa  $L$  un tās bāze ir vektori  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5$ . Noteikt vektora  $\vec{x} = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_4$  koordinātas.

Atrisinājums. Uzrakstīsim vektoram  $\vec{x}$  atbilstošo vienādību (1):

$$\vec{x} = 3\vec{e}_1 + (-1)\vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 + 2\vec{e}_4 + 0 \cdot \vec{e}_5.$$

Tātad vektora  $\vec{x}$  koordinātas šajā bāzē ir  $\vec{x} = (3; -1; 0; 2, 0)$ .

**Darbības ar vektoriem vienā un tajā pašā bāzē var reducēt uz atbilstošajām darbībām ar vektoru koordinātām, pamatojoties uz šādām īpašībām.**

1.  $\vec{x} = \vec{0} \in L$  tad un tikai tad, ja visas tā koordinātas jebkurā bāzē ir vienādas ar nulli:

$$\vec{x} = (0, 0, \dots, 0).$$

2.  $\vec{x} = \vec{y}$  ( $\vec{x} \in L, \vec{y} \in L$ ) tad un tikai tad, ja šo vektoru atbilstošās koordinātas arī ir vienādas (vienā un tajā pašā bāzē).

Tātad, ja  $\vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n, \vec{y} = \mu_1 \vec{e}_1 + \mu_2 \vec{e}_2 + \dots + \mu_n \vec{e}_n$ , tad

$$\vec{x} = \vec{y} \Leftrightarrow \lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \dots, \lambda_n = \mu_n.$$

3. Divu vektoru summas koordinātas ir vienādas ar šo vektoru atbilstošo koordinātu summu (vienā un tajā pašā bāzē).

Pamatojoties uz 1., 2. un 8. aksiomu, varam aprēķināt  $\vec{x}$  un  $\vec{y}$  summu:

$$\begin{aligned} \vec{x} + \vec{y} &= (\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n) + (\mu_1 \vec{e}_1 + \mu_2 \vec{e}_2 + \dots + \mu_n \vec{e}_n) = \\ &= (\lambda_1 + \mu_1) \vec{e}_1 + (\lambda_2 + \mu_2) \vec{e}_2 + \dots + (\lambda_n + \mu_n) \vec{e}_n. \end{aligned}$$

Tā kā jebkuru vektoru (tātad arī  $\vec{x} + \vec{y}$ ) var attēlot vienā vienīgā veidā, tad vektoru summas koordinātas ir šādas:

$$\vec{x} + \vec{y} = (\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2, \dots, \lambda_n + \mu_n).$$

Analogi pierāda šādu īpašību.





**Pierādījums. Nepieciešamība.** Pieņemsim, ka vektoru sistēma (1) ir lineāri neatkarīga. Tātad nevienš no vektoriem  $\vec{x}_i \neq \vec{0}$ , t. i.,  $\text{rang } A = r > 0$ . Pieņemsim, ka  $r < m$ . Tātad matricas  $A$  bāzes minora  $M$  kārtā ir  $r$  (matricā  $A$  ir  $r$  lineāri neatkarīgas kolonnas) un kāda kolonna ir vienāda ar pārējo kolonnu lineāru kombināciju. Tātad šai kolonnai atbilstošais vektors ir pārējo vektoru lineāra kombinācija. Bet tas ir pretrunā ar to, ka vektoru sistēma (1) ir lineāri neatkarīga. Atliek secināt, ka  $r = m$ .

Pietiekamība. Pieņemsim, ka  $\text{rang} A = r = m$ . Tātad matricas  $A$  bāzes minora kārta ir  $m$ , t. i., sakrīt ar kolonnu skaitu. Ja vektori  $\vec{x}_i$  būtu lineāri atkarīgi, tad kāda matricas kolonna ir vienāda ar pārējo kolonnu lineāru kombināciju, t. i., bāzes minors  $M = 0$ . Bet tas ir pretrunā ar bāzes minora definīciju. Tātad vektoru sistēma (1) ir lineāri neatkarīga.

No teorēmas izriet šādi secinājumi.

1.  $n$  vektoru sistēma telpā  $L$  ir lineāri neatkarīga tad un tikai tad, ja šīs sistēmas koordinātu matrica ir nesingulāra, t. i.,  $\det A_n \neq 0$ .

2. Ja dota sistēma (1) un  $\text{rang} A = r$ , tad maksimālais lineāri neatkarīgo vektoru skaits šajā sistēmā ir  $r$ .

## 2. PĀREJAS MATRICA NO VIENAS BĀZES UZ CITU

Pienemsim, ka lineārā telpā  $L$  ir dotas divas bāzes

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \quad (3)$$

un

$$\vec{e}_1', \vec{e}_2', \dots, \vec{e}_n'. \quad (4)$$

Par *pārejas matricu* no bāzes (3) uz bāzi (4) sauc vektoru sistēmas (4) koordinātu matricu bāzē (3).

Tādējādi, ja «jauno» bāzi (4) ar «vecu» bāzi (3) saista vienādojumu sistēma

$$\begin{cases} \vec{\epsilon}'_1 = t_{11}\vec{\epsilon}_1 + t_{21}\vec{\epsilon}_2 + \dots + t_{n1}\vec{\epsilon}_n \\ \vec{\epsilon}'_2 = t_{12}\vec{\epsilon}_1 + t_{22}\vec{\epsilon}_2 + \dots + t_{n2}\vec{\epsilon}_n \\ \vdots \\ \vec{\epsilon}'_n = t_{1n}\vec{\epsilon}_1 + t_{2n}\vec{\epsilon}_2 + \dots + t_{nn}\vec{\epsilon}_n \end{cases} \quad (5)$$

tad pārejas matrica  $T$  ir

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Tā kā vektoru sistēmas (3) un (4) ir lineāri neatkarīgas (kā bāzes vektori), tad no 1. punktā aplūkotās teorēmas varam secināt, ka

1) pārējās matrica  $T$  ir nesingulāra ( $\det T \neq 0$ ), jo  $\text{rang } T = n$ ;

2) jebkuru nesingulāru matricu var uzskatīt par pārejas matricu no vienas bāzes uz otru.

Piezīme. Uzrakstīsim matricas  $T$  transponēto matricu

$$T^T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & \dots & t_{n1} \\ t_{12} & t_{22} & \dots & t_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{1n} & t_{2n} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix},$$

kā arī «veco» un «jauno» bāzi attēlosim ar kolonnas matricām  $B$  un  $B'$ :

$$B = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \\ \vdots \\ \vec{e}'_n \end{pmatrix}.$$

Tad sistēmu (5) var pierakstīt matricu formā:

$$B' = T^T \cdot B. \quad (7)$$

Savukārt formulas pārejai no «jaunās» bāzes uz «veco» bāzi iegūst, izmantojot inverso matricu  $(T^T)^{-1}$ . Ar šo matricu reizināsim abas puses vienādībā (7):

$$(T^T)^{-1} \cdot B' = (T^T)^{-1} \cdot T^T \cdot B.$$

Izteiksmi vienādības labajā pusē pārveido, ņemot vērā, ka  $(T^T)^{-1} \cdot T^T = E$ ,  $E \cdot B = B$ , kur  $E$  – vienības matrica. Tātad

$$(T^T)^{-1} \cdot B' = B.$$

Tā kā  $(T^T)^{-1} = (T^{-1})^T$  (transponētās matricas īpašība), tad

$$B = (T^{-1})^T \cdot B'. \quad (8)$$

### 3. VEKTORA KOORDINĀTU TRANSFORMĀCIJA

Viena un tā paša vektora  $\vec{x} \in L$  koordinātas dažādās bāzēs arī ir dažādas.

Noskaidrosim, kā mainās (transformējas) vektora  $\vec{x}$  koordinātas, pārejot no vienas bāzes uz otru, ja sakarība starp abām bāzēm – «veco» un «jauno» – ir noteikta (t. i., – dota sistēma (5) vai (7)).

**Teorēma**

*Ja  $n$ -dimensionālā lineārā telpā  $L$  bāzē  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  dots vektors  $\vec{x}$  ar koordinātām  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , t. i.,  $\vec{x} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , bet  $\vec{x}$  koordinātas bāzē  $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n$  ir  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ , t. i.,  $\vec{x} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ , tad koordinātu transformāciju realizē formula*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \quad (9)$$

jeb matricu formā

$$X = T \cdot X', \quad (10)$$

kur

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix},$$

bet  $T$  – matrica (6) pārejai no vienas bāzes uz otru.

Pierādījums. Vektors  $\vec{x} \in L$  ir izteikts divējādi, proti,

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n \quad (11)$$

un

$$\vec{x} = \mu_1 \vec{e}'_1 + \mu_2 \vec{e}'_2 + \dots + \mu_n \vec{e}'_n. \quad (12)$$





$$P = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 15 & 3 & -8 \\ 25 & 9 & -14 \end{pmatrix} \left[ \text{piemēram, } T_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -(21-30)=9 \right],$$

tad

$$T^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 15 & 3 & -8 \\ 25 & 9 & -14 \end{pmatrix}.$$

$X' = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix}$  aprēķinām pēc formulas (14):

$$X' = T^{-1} \cdot X = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 15 & 3 & -8 \\ 25 & 9 & -14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,6 \\ 1,2 \\ 1,6 \end{pmatrix}.$$

Tātad  $\mu_1 = -0,6$ ,  $\mu_2 = 1,2$ ,  $\mu_3 = 1,6$  un  $\vec{x} = (-0,6; 1,2; 1,6)$ .

## 4.5. §. EIKLĪDA TELPA

### 1. DEFINĪCIJA

Pieņemsim, ka dota lineāra telpa  $L$  un papildus jau iepriekš definētajām darbībām (saskaitīšanai un reizināšanai ar skaitli) jebkuram vektoru pārim  $\vec{x}, \vec{y} \in L$  tiek piekārtots reāls skaitlis, kuru apzīmē ar  $(\vec{x}, \vec{y})$ .

Šo skaitli  $(\vec{x}, \vec{y})$  sauc par *vektoru  $\vec{x}$  un  $\vec{y}$  skalāro reizinājumu*, ja jebkuriem  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in L$  un jebkuram  $\lambda \in \mathbf{R}$  ir spēkā šādas aksiomas:

1.  $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$ ;
2.  $(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z})$ ;
3.  $(\lambda \vec{x}, \vec{y}) = \lambda (\vec{x}, \vec{y})$ ;
4.  $(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$  (turklāt vienādība ir spēkā tikai tad, ja  $\vec{x} = \vec{0}$ ).

Skalāro reizinājumu  $(\vec{x}, \vec{x})$  sauc par *vektora  $\vec{x}$  skalāro kvadrātu* un apzīmē šādi:

$$(\vec{x}, \vec{x}) = \vec{x}^2.$$

Ja reizinājumā  $(\vec{x}, \vec{y})$  vismaz viens no vektoriem ir nullvektors, tad skalārais reizinājums ir vienāds ar 0. Tiešām,

$$(\vec{0}, \vec{y}) = (0\vec{x}, \vec{y}) = 0(\vec{x}, \vec{y}) = 0.$$

Lineāru telpu, kurā definēts skalārais reizinājums, sauc par *Eiklīda telpu*.

1. piemērs. Pieņemsim, ka lineārā telpa ir ģeometrisko vektoru telpa  $V$ . Tā kā šajā telpā jebkuriem diviem vektoriem ir definēts skalārais reizinājums un tam ir spēkā visas četras aksiomas, tad lineārā telpa  $V$  ir Eiklīda telpa.

2. piemērs. 4.1. § 7. piemērā aplūkotojām aritmētisku  $n$  dimensiju telpu  $S$ , kuras elementi ir visas sakārtotu  $n$  reālu skaitļu virknes. Ja  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S$  un  $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in S$ , tad skalāro reizinājumu var definēt šādi:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

Acīmredzot visas aksiomas ir spēkā, un tātad aritmētiskā telpa arī ir Eiklīda telpa.



3. piemērs. Pieņemsim, ka dota kopa  $M$ , kuras elementi ir matricas ar kārtu  $n \times 1$ , un matricu elementi ir reāli skaitļi, t. i.,  $\vec{x} \in M$  un  $\vec{y} \in M$ , ja

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Definējot elementu summu  $\vec{x} + \vec{y}$  un reizinājumu ar skaitli tāpat kā matricu algebra, secinām, ka matricu kopa  $M$  ir lineāra telpa.

Šajā telpā  $M$  katram matricu pārim  $\vec{x}, \vec{y}$  piekārtosim skaitli

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n. \quad (1)$$

Izteiksme (1) ir skalārais reizinājums, jo visas četras aksiomas ir spēkā. Tātad telpa  $M$  ir Eiklīda telpa.

Analogi var pārliecināties, ka arī visas reālo skaitļu vienas rindas matricas (ar kārtu  $1 \times n$ ) veido Eiklīda telpu, ja elementu  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , skalāro reizinājumu definē tāpat kā kolonnas matricām – ar formulu (1).

## 2. VEKTORA NORMA JEB MODULIS

Par Eiklīda telpas vektora  $\vec{x}$  *normu jeb moduli (garumu)* sauc skaitli

$$|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}.$$

Tā, piemēram, geometriskos vektoru telpā  $V$  vektora norma ir tā garums; arimētiskā lineārā telpā  $S$  vektora norma ir  $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ .

Vektoru, kura garums ir 1, sauc par *normētu vektoru*. Jebkuru vektoru  $\vec{x} \neq \vec{0}$  var *normēt*, pareizinot to ar skaitli  $\lambda = \frac{1}{|\vec{x}|}$ , jo

$$|\vec{x}| \cdot \lambda = |\vec{x}| \cdot \frac{1}{|\vec{x}|} = 1.$$

Vektora modulim ir spēkā šādas īpašības:

1.  $|\vec{x}| = 0$  tad un tikai tad, ja  $\vec{x} = \vec{0}$ ;
2.  $|\lambda \vec{x}| = |\lambda| |\vec{x}|$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}$ ;
3.  $|(\vec{x}, \vec{y})| \leq |\vec{x}| |\vec{y}|$  (*Košī-Buņakovska nevienādība*);
4.  $|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$  (*trijstūra nevienādība*).

(2)

(3)

Pierādīsim Košī-Buņakovska nevienādību (2).

Ja  $\vec{x}$  vai  $\vec{y}$  ir  $\vec{0}$ , tad (2) pareizība ir acīmredzama.

Pieņemsim, ka  $\vec{x} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{y} \neq \vec{0}$ , un aplūkosim vektora  $\vec{x} - t\vec{y}$  skalāro kvadrātu ( $t \in \mathbf{R}$ ).

Saskaņā ar skalārā reizinājuma 4. aksiomu

$$(\vec{x} - t\vec{y}, \vec{x} - t\vec{y}) \geq 0.$$

Pārveidosim nevienādības kreiso pusi, lietojot 1., 2. un 3. aksiomu:

$$(\vec{x}, \vec{x} - t\vec{y}) + (-t\vec{y}, \vec{x} - t\vec{y}) \geq 0;$$

$$(\vec{x}, \vec{x}) - t(\vec{x}, \vec{y}) - t(\vec{y}, \vec{x}) + (-t)^2 (\vec{y}, \vec{y}) \geq 0;$$

$$(\vec{x}, \vec{x}) - 2t(\vec{x}, \vec{y}) + t^2 (\vec{y}, \vec{y}) \geq 0;$$

$$t^2 |\vec{y}|^2 - 2t(\vec{x}, \vec{y}) + |\vec{x}|^2 \geq 0.$$

Tātad nevienādības kreisā puse ir kvadrāttrinoms attiecībā pret  $t$ , un tas ir nenegatīvs, ja diskriminants  $D \leq 0$  ( $at^2 + bt + c \geq 0$ , ja  $D = b^2 - 4ac \leq 0$ ). Iegūstam nevienādību

$$4(\vec{x}, \vec{y})^2 - 4|\vec{x}|^2|\vec{y}|^2 \leq 0$$

jeb

$$(\vec{x}, \vec{y})^2 \leq |\vec{x}|^2|\vec{y}|^2.$$

Tā kā abas nevienādības puses ir nenegatīvas, tad

$$\sqrt{(\vec{x}, \vec{y})^2} \leq \sqrt{|\vec{x}|^2|\vec{y}|^2} \quad \text{jeb} \quad |(\vec{x}, \vec{y})| \leq |\vec{x}| \cdot |\vec{y}|. \quad (2)$$

Piezīme. Formulā (2) vienādība ir spēkā tikai tad, ja vektori  $\vec{x}$  un  $\vec{y}$  ir kolineāri, t. i.,  $\vec{y} = \lambda \vec{x}$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ).

Pierādīsim trijstūra nevienādību (3), aprēķinot vektoru summas moduļa kvadrātu  $|\vec{x} + \vec{y}|^2$ :

$$|\vec{x} + \vec{y}|^2 = (\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{x}) + 2(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{y}) = |\vec{x}|^2 + 2(\vec{x}, \vec{y}) + |\vec{y}|^2. \quad (4)$$

No nevienādības (2) secinām, ka

$$(\vec{x}, \vec{y}) \leq |\vec{x}| \cdot |\vec{y}|.$$

Tātad no vienādības (4) iegūstam, ka

$$|\vec{x} + \vec{y}|^2 \leq |\vec{x}|^2 + 2|\vec{x}| \cdot |\vec{y}| + |\vec{y}|^2 = (|\vec{x}| + |\vec{y}|)^2, \quad \text{t. i.,} \\ |\vec{x} + \vec{y}|^2 \leq (|\vec{x}| + |\vec{y}|)^2$$

jeb

$$|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|. \quad (3)$$

### 3. LENĶIS STARP VEKTORIEM. VEKTORU ORTOGONALITĀTE

1. definīcija. *Par lenķi starp vektoriem  $\vec{x}$  un  $\vec{y}$  Eiklīda telpā sauc skaitli*

$$\varphi = \arccos \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}, \quad (5)$$

*t. i., tādu lenķi  $\varphi$ , kuram*

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}, \quad (6)$$

kur  $0 \leq \varphi \leq \pi$ .

No Koši-Buņakovska nevienādības (2) secinām, ka

$$\frac{|(\vec{x}, \vec{y})|}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} \leq 1 \quad \text{jeb} \quad -1 \leq \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} \leq 1.$$

Tātad apzīmējums (6) ir pamatots. Tā, piemēram, ja vektori  $\vec{x} \neq \vec{0}$  un  $\vec{y} \neq \vec{0}$  ir kolineāri, t. i.,  $\vec{y} = \lambda \vec{x}$ , tad  $\cos \varphi = \pm 1$  un  $\varphi = 0$  vai  $\varphi = \pi$  (atkarībā no  $\lambda$  zīmes).

2. definīcija. *Divus vektorus  $\vec{x}$  un  $\vec{y}$  sauc par ortogonāliem, ja to skalārais reizinājums ir vienāds ar nulli:*

$$(\vec{x}, \vec{y}) = 0.$$

Tādējādi vektori  $\vec{x} \neq \vec{0}$  un  $\vec{y} \neq \vec{0}$  ir ortogonāli, ja lenķis starp tiem  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Nullvektors  $\vec{0}$  ir ortogonāls ar jebkuru vektoru.

Piemērs. Geometrisko vektoru telpā  $V$  lenķi starp vektoriem definē tieši tāpat – ar formulām (5), (6).



#### 4. ORTOGONĀLA UN ORTONORMĒTA BĀZE

Vektoru sistēmu  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$  ( $n \geq 2$ ) sauc par *ortogonālu*, ja jebkuri divi vektori ir ortogonāli, t. i.,

$$(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = 0, \text{ ja } i \neq j. \quad (7)$$

Ja turklāt  $(\vec{x}_i, \vec{x}_i) = |\vec{x}_i|^2 = 1$ , tad šo sistēmu sauc par *ortonormētu*.

Tātad vektoru sistēma ir ortonormēta, ja

$$(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j, \end{cases}$$

kur  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

No katras ortogonālas sistēmas var iegūt ortonormētu sistēmu, ja katru vektoru normē, t. i., reizina ar normējošo reizinātāju  $\mu = \pm \frac{1}{|\vec{x}|}$ .

**Teorēma**

**Ortogonālu (nenulles) vektoru sistēma ir lineāri neatkarīga.**

**Pierādījums.** Pieņemsim pretējo, t. i., ka ortogonālu vektoru sistēma (visi  $\vec{x}_i \neq \vec{0}$ ) ir lineāri atkarīga un tātad

$$\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n = \vec{0}, \quad (8)$$

kur vismaz viens no  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) nav vienāds ar 0.

Pieņemsim, ka  $\lambda_1 \neq 0$ , un (8) abas puses skalāri pareizināsim ar  $\vec{x}_1$ :

$$\lambda_1 (\vec{x}_1, \vec{x}_1) + \lambda_2 (\vec{x}_2, \vec{x}_1) + \dots + \lambda_n (\vec{x}_n, \vec{x}_1) = (\vec{0}, \vec{x}_1).$$

No (7) secinām, ka šajā izteiksmē visi saskaitāmie, izņemot pirmo, ir vienādi ar nulli. Tātad arī

$$\lambda_1 (\vec{x}_1, \vec{x}_1) = 0 \text{ jeb } \lambda_1 |\vec{x}_1|^2 = 0.$$

Tā kā  $\lambda_1 \neq 0$ , atliek secināt, ka  $\vec{x}_1 = \vec{0}$ , bet tas ir pretrunā ar doto. Tātad teorēma ir pierādīta.

Pieņemsim, ka  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  ir ortogonāla bāze  $n$ -dimensionālā Eiklīda telpā, bet  $\vec{x}$  – patvaļīgs vektors tajā. Tad  $\vec{x}$  var izteikt ar bāzes vektoriem:

$$\vec{x} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \dots + a_n \vec{e}_n, \quad (9)$$

kur  $a_i \in \mathbb{R}$ . Reizinot izteiksmes abas puses skalāri ar  $\vec{e}_1$ , pēc tam – ar  $\vec{e}_2, \dots, -$  ar  $\vec{e}_n$ , iegūstam, ka

$$\begin{aligned} (\vec{x}, \vec{e}_1) &= a_1 |\vec{e}_1|^2, \\ (\vec{x}, \vec{e}_2) &= a_2 |\vec{e}_2|^2, \\ &\vdots \\ (\vec{x}, \vec{e}_n) &= a_n |\vec{e}_n|^2. \end{aligned}$$

Tātad visi izteiksmes (9) koeficienti ir zināmi un (9) var pārrakstīt šādi:

$$\vec{x} = \frac{(\vec{x}, \vec{e}_1)}{|\vec{e}_1|^2} \vec{e}_1 + \frac{(\vec{x}, \vec{e}_2)}{|\vec{e}_2|^2} \vec{e}_2 + \dots + \frac{(\vec{x}, \vec{e}_n)}{|\vec{e}_n|^2} \vec{e}_n.$$

Atgādinām, ka bāzi sauc par *ortonormētu*, ja katra bāzes vektora  $\vec{e}_i$  modulis  $|\vec{e}_i| = 1$ . Tā, piemēram, aritmētiskā telpā  $S$  par ortonormēto bāzi var izvēlēties vektoru sistēmu

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0), \\ \vec{e}_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0), \\ &\vdots \\ \vec{e}_n &= (0, 0, 0, \dots, 1). \end{aligned}$$

Bez pierādījuma atzīmēsim šādu teorēmu.

**Teorēma**

**Katrā  $n$ -dimensionālā ( $n \geq 2$ ) Eiklīda telpā eksistē ortonormēta bāze.**

# **ORTONORMĒTAS BĀZES KONSTRUKCIJA** ***n*-DIMENSIONĀLĀ EIKLĪDA TĒLPĀ**

Pieņemsim, ka *n*-dimensionālā Eiklīda telpā  $L_n$  dota bāze  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ .

Ortogonalu bāzi  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$  konstruē šādi. Vispirms izveidosim divus vektorus

$$\vec{b}_1 = \vec{x}_1, \quad \vec{b}_2 = \vec{x}_2 + \alpha \vec{x}_1 \quad (\alpha \in \mathbb{R}), \quad (1)$$

kur  $\vec{b}_2 \neq \vec{0}$ , jo  $\vec{x}_1, \vec{x}_2$  – lineāri neatkarīgi (kā bāzes vektori). Reizinātāju  $\alpha$  noteiksim tā, lai  $\vec{b}_1$  un  $\vec{b}_2$  būtu ortogonāli, t. i., to skalārais reizinājums  $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$  būtu vienāds ar nulli:

$$(\vec{x}_1, \vec{x}_2 + \alpha \vec{x}_1) = 0 \Rightarrow (\vec{x}_1, \vec{x}_2) + \alpha (\vec{x}_1, \vec{x}_1) = 0 \Rightarrow (\vec{x}_1, \vec{x}_2) + \alpha |\vec{x}_1|^2 = 0.$$

Tātad

$$\alpha = - \frac{(\vec{x}_1, \vec{x}_2)}{|\vec{x}_1|^2} \quad (|\vec{x}_1| \neq 0, \text{ jo } \vec{x}_1 \neq \vec{0}),$$

un no (1) atrodam  $\vec{b}_2$ :

$$\vec{b}_2 = \vec{x}_2 - \frac{(\vec{x}_1, \vec{x}_2)}{|\vec{x}_1|^2} \vec{x}_1$$

jeb

$$\vec{b}_2 = \vec{x}_2 - \frac{(\vec{b}_1, \vec{x}_2)}{|\vec{b}_1|^2} \vec{b}_1 \quad (\vec{x}_1 = \vec{b}_1). \quad (2)$$

Nākamo vektoru  $\vec{b}_3$  konstruē analogi:

$$\vec{b}_3 = \vec{x}_3 + \beta_1 \vec{b}_1 + \beta_2 \vec{b}_2. \quad (3)$$

Reizinātājus  $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$  noteiksim tā, lai  $\vec{b}_3$  būtu ortogonāls gan ar  $\vec{b}_1$ , gan ar  $\vec{b}_2$ , t. i., lai būtu spēkā vienādības

$$\begin{cases} (\vec{b}_1, \vec{b}_3) = 0 \\ (\vec{b}_2, \vec{b}_3) = 0. \end{cases}$$

Ievietojot vektoru (3), iegūstam šādus skalāros reizinājumus:

$$\begin{cases} (\vec{b}_1, \vec{x}_3 + \beta_1 \vec{b}_1 + \beta_2 \vec{b}_2) = 0 \\ (\vec{b}_2, \vec{x}_3 + \beta_1 \vec{b}_1 + \beta_2 \vec{b}_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\vec{b}_1, \vec{x}_3) + \beta_1 (\vec{b}_1, \vec{b}_1) + \beta_2 (\vec{b}_1, \vec{b}_2) = 0 \\ (\vec{b}_2, \vec{x}_3) + \beta_1 (\vec{b}_2, \vec{b}_1) + \beta_2 (\vec{b}_2, \vec{b}_2) = 0. \end{cases}$$

Tā kā  $(\vec{b}_1, \vec{b}_2) = (\vec{b}_2, \vec{b}_1) = 0$ ,  $(\vec{b}_1, \vec{b}_1) = |\vec{b}_1|^2 \neq 0$ ,  $(\vec{b}_2, \vec{b}_2) = |\vec{b}_2|^2 \neq 0$ , tad varam izteikt

$$\beta_1 = - \frac{(\vec{b}_1, \vec{x}_3)}{|\vec{b}_1|^2}, \quad \beta_2 = - \frac{(\vec{b}_2, \vec{x}_3)}{|\vec{b}_2|^2}$$

un ievietot formulā (3):

$$\vec{b}_3 = \vec{x}_3 - \frac{(\vec{b}_1, \vec{x}_3)}{|\vec{b}_1|^2} \vec{b}_1 - \frac{(\vec{b}_2, \vec{x}_3)}{|\vec{b}_2|^2} \vec{b}_2. \quad (4)$$

Analogi var konstruēt jebkuru ortogonālās bāzes vektoru  $\vec{b}_i$ :

$$\vec{b}_i = \vec{x}_i - \frac{(\vec{b}_1, \vec{x}_i)}{|\vec{b}_1|^2} \vec{b}_1 - \frac{(\vec{b}_2, \vec{x}_i)}{|\vec{b}_2|^2} \vec{b}_2 - \dots - \frac{(\vec{b}_{i-1}, \vec{x}_i)}{|\vec{b}_{i-1}|^2} \vec{b}_{i-1} \quad (5)$$

$$(\vec{b}_i = \vec{x}_i; i = 2, 3, \dots, n).$$

Tādējādi iegūtā bāze  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$  ir ortogonāla, bet, normējot katru vektoru  $\vec{b}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), iegūst ortonormētu bāzi  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ , kur

$$\vec{e}_i = \frac{\vec{b}_i}{|\vec{b}_i|}.$$

Piezīme. Konstruējot šo bāzi, vienlaikus esam pierādījuši arī 4. punktā formulēto teorēmu.



## 5. SKALĀRAIS REIZINĀJUMS KOORDINĀTU FORMĀ ORTONORMĒTĀ BĀZĒ

Pieņemsim, ka  $n$ -dimensionālā Eiklīda telpā  $L$  dota **ortonormēta bāze**

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$$

un vektori  $\vec{x} \in L, \vec{y} \in L$  izteikti ar to koordinātām:

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n,$$

$$\vec{y} = \mu_1 \vec{e}_1 + \mu_2 \vec{e}_2 + \dots + \mu_n \vec{e}_n.$$

Aprēķināsim skalāro reizinājumu:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n)(\mu_1 \vec{e}_1 + \mu_2 \vec{e}_2 + \dots + \mu_n \vec{e}_n).$$

Ievērojot aksiomas un to, ka

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \begin{cases} 0, & \text{ja } i \neq j, \\ 1, & \text{ja } i = j, \end{cases}$$

iegūstam šādu skalārā reizinājuma izteiksmi:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \dots + \lambda_n \mu_n.$$

Tātad **skalārais reizinājums ortonormētā bāzē ir vienāds ar atbilstošo koordinātu reizinājumu summu.**

Savukārt, lietojot šo formulu, var noteikt vektora  $\vec{x}$  garumu (moduli):

$$|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2}.$$

Piemēram, ģeometriskos vektoru telpā  $V$  (trīsdimensiju Eiklīda telpā) ortonormētu bāzi veido vektoru sistēma  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  un jebkurus vektorus  $\vec{a}, \vec{b} \in V$  var izteikt ar tiem:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \\ \vec{b} &= b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}. \end{aligned}$$

Atbilstoši skalārā reizinājuma un moduļa aprēķināšanas formulas ir tādas pašas kā vektoru algebrā.

## 4.6. §. LINEĀRĀS TELPAS APAKŠTELPAS. IZOMORFAS TELPAS

### 1. APAKŠTELPAS DEFINĪCIJA

**Lineāras  $n$ -dimensionālas telpas  $L$  elementu kopu  $L_1$  sauc par telpas  $L$  apakštelpu ( $L_1 \subset L$ ), ja ir spēkā šādi nosacījumi:**

1) **kopā  $L_1$  abas darbības – saskaitīšana un reizināšana ar skaitli – definētas tāpat kā kopā  $L$ ;**

2) **ja  $\vec{x}, \vec{y} \in L_1$ , tad arī  $\vec{x} + \vec{y} \in L_1$ ;**

3) **ja  $\vec{x} \in L_1$ , tad arī  $\lambda \vec{x} \in L_1$ .**

Tādējādi var secināt, ka kopa  $L_1$  arī ir lineāra telpa. Vienkāršākie apakštelpas piemēri.

1. Kopa ar vienu vienīgo elementu – nullvektoru  $\vec{0}$ .
2. Lielākā iespējamā  $L$  apakštelpa ir pati telpa  $L$ .





Analogi nosaka  $\dim L_2 = \text{rang } A_2$ :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{«}R_2 - R_1\text{»}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{«}K_4 - K_2\text{»}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\text{«}K_4 - 2K_2\text{»}$

Tātad  $\text{rang } A_2 = 2$  un arī  $\dim L_2 = 2$ .

Tagad atradīsim apakštelpas  $L_1 + L_2$  dimensiju un kādu no tās bāzēm.

Tā kā  $L_1 + L_2 = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{y}_1, \vec{y}_2)$ , tad tās bāzi veido jebkura lineāri neatkarīga šo vektoru apakšsistēma. Tas nozīmē to, ka jāatrod vektoru  $L_1 + L_2$  koordinātu matricā  $B$  kāda lineāri neatkarīga rindu sistēma. Noteiksim to.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \text{«}R_3 - R_2 - \frac{1}{2}R_1\text{»} \\ \text{«}R_5 - R_2 - R_4\text{»} \end{matrix}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Citu rindu lineāru kombināciju nav, un tātad atlikušās trīs nenulles rindas ir lineāri neatkarīgas. Par to var pārliecināties, aprēķinot, piemēram, šādu minoru:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Tādējādi varam secināt, ka

- 1) telpas  $L_1 + L_2$  bāzi veido vektori  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y}_1$ ;
- 2)  $\dim(L_1 + L_2) = 3$ .

No vienādības (1) izteiksim reizinājuma  $(L_1, L_2)$  dimensiju:

$$\dim(L_1, L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 + L_2) = 2 + 2 - 3 = 1.$$

### 3. IZOMORFAS TELPAS

Jau iepriekš pārliecinājāmies par to, ka lineāras telpas ir dažādu elementu (vektoru) kopas, kurās definētās darbības – elementu saskaitīšana un reizināšana ar skaitli – pakļaujas noteiktiem likumiem – aksiomām. Savukārt pašiem lineārās telpas elementiem īpaša ierobežojuma nav un tie pēti tie netiek.

Lineāro telpu teorija būtībā nozīmē telpu pētīšanu atkarībā no tajās definētajām lineārajām darbībām. Tādējādi nozīmīgas ir telpas ar vienādu lineāro darbību struktūru jeb izomorfās telpas.

**Definīcija.** Divas lineāras telpas  $L_1$  un  $L_2$  sauc par **izomorfām**, ja starp to vektoriem pastāv tāda savstarpēji viennozīmīga atbilstība  $\Leftrightarrow$ , ka ir spēkā šādi nosacījumi:

- 1) ja  $\vec{x}_1 \in L_1$  atbilst  $\vec{x}_2 \in L_2$ , t. i.,  $\vec{x}_1 \Leftrightarrow \vec{x}_2$ , un  $\vec{y}_1 \in L_1$  atbilst  $\vec{y}_2 \in L_2$ , t. i.,  $\vec{y}_1 \Leftrightarrow \vec{y}_2$ , tad arī  $\vec{x}_1 + \vec{y}_1 \Leftrightarrow \vec{x}_2 + \vec{y}_2$ , kur  $\vec{x}_1 + \vec{y}_1 \in L_1$  un  $\vec{x}_2 + \vec{y}_2 \in L_2$ ;
- 2) ja  $\vec{x}_1 \Leftrightarrow \vec{x}_2$ , tad  $\lambda \vec{x}_1 \Leftrightarrow \lambda \vec{x}_2$ , kur  $\lambda \vec{x}_1 \in L_1$  un  $\lambda \vec{x}_2 \in L_2$  ( $\lambda$  – reāls vai komplekss skaitlis);
- 3) ja  $\vec{x}_1 \Leftrightarrow \vec{x}_2, \vec{y}_1 \Leftrightarrow \vec{y}_2$ , tad šo vektoru pāru skalārie reizinājumi ir vienādi:  
 $(\vec{x}_1, \vec{y}_1) = (\vec{x}_2, \vec{y}_2).$

Izomorfām telpām var pierādīt šādas teorēmas.

1. Ja  $L_1$  un  $L_2$  ir izomorfas telpas, tad lineāri neatkarīgiem vektoriem telpā  $L_1$  atbilst lineāri neatkarīgi vektori telpā  $L_2$ .
2. Divas lineāras telpas (reālas vai kompleksas) ir izomorfas tad un tikai tad, ja to dimensijas ir vienādas:

$$\dim L_1 = \dim L_2.$$

Secinājums. Jebkura  $n$ -dimensionāla telpa ir izomorfa ar  $n$ -dimensionālu aritmētisko telpu.

3. Visas vienas un tās pašas dimensijas Eiklīda telpas ir izomorfas telpas.



## LINEĀRĀS TRANSFORMĀCIJAS

## 5.1. §. LINEĀRS OPERATORS UN TĀ MATRICA

## 1. DEFINĪCIJA

Pieņemsim, ka dotas divas (galīgas) lineāras telpas  $L$  un  $L_1$ . Ja ir dots likums, ar kuru tiek norādīts, kā jebkuram vektoram  $\vec{x} \in L$  piekārto vienu un tikai vienu vektoru  $\vec{y} \in L_1$ , tad šo likumu sauc par **operatoru jeb transformāciju**. Parasti operatoru apzīmē ar burtu  $\mathcal{A}$  un raksta

$$\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x}) \quad \text{vai} \quad \mathcal{A}: L \rightarrow L_1.$$

Protams, operatoru jeb transformāciju var apzīmēt arī ar citu burtu, piemēram,  $\mathcal{T}$ ,  $f$ ,  $F$  u. c.

Ja ir dots kāds operators  $\mathcal{A}$ , tad saskaņā ar tā definīciju katrs telpas  $L$  vektors  $\vec{x}$  transformējas par telpas  $L_1$  vektoru  $\vec{y}$ , bet telpa  $L$  transformējas (attēlojas) par telpu  $L_1$  vai tās daļu. Vektoru  $\vec{y}$  sauc par **vektora  $\vec{x}$  attēlu**, bet vektoru  $\vec{x}$  – par **vektora  $\vec{y}$  oriģinālu**.

No operatora definīcijas var secināt, ka tas ir funkcijas jēdziena vispārinājums; telpa  $L$  ir šīs funkcijas definīcijas apgabals, bet telpa  $L_1$  – vērtību apgabals.

Operatoru  $\mathcal{A}$  sauc par **lineāru operatoru**, ja ir spēkā šādi linearitātes nosacījumi:

1) jebkuriem  $\vec{x}_1$  un  $\vec{x}_2$  no telpas  $L$  ir spēkā vienādība

$$\mathcal{A}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \mathcal{A}(\vec{x}_1) + \mathcal{A}(\vec{x}_2); \quad (1)$$

2) jebkuram  $\vec{x} \in L$  un jebkuram  $\lambda \in \mathbf{R}$  vai  $\lambda \in \mathbf{C}$

$$\mathcal{A}(\lambda \vec{x}) = \lambda \mathcal{A}(\vec{x}). \quad (2)$$

Tā kā šeit aplūkosim tikai lineārus operatorus un lineāras transformācijas, tad vārdu «lineārs» bieži izlaidīsim.

Turpmāk aplūkosim vienkāršāko transformācijas gadījumu, kad  $L = L_1$ . Citiem vārdiem, aplūkosim lineārās telpas attēlojumu  $\mathcal{A}: L \rightarrow L$ , kurš telpu  $L$  attēlo par šo pašu telpu  $L$ .

No definīcijas izriet, ka lineārā transformācijā  $\mathcal{A}: L \rightarrow L$  katram vektoram  $\vec{x}$  eksistē viens vienīgs attēls  $\vec{y}$ , bet nebūt ne katram vektoram  $\vec{y}$  eksistē un turklāt tikai viens vienīgs oriģināls  $\vec{x}$ .

Ja katram  $\vec{y}$  eksistē viens vienīgs oriģināls, tad šādu transformāciju sauc par **savstarpēji viennozīmīgu**.

No lineārās transformācijas definīcijas izriet, ka operators  $\mathcal{A}$  nullvektoru transformē par nullvektoru, jo

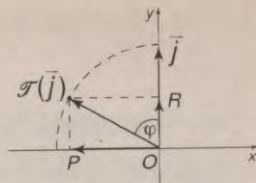
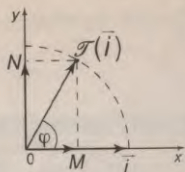
$$\mathcal{A}(\vec{0}) = \mathcal{A}(\vec{x} - \vec{x}) = \mathcal{A}(\vec{x}) - \mathcal{A}(\vec{x}) = \vec{0}$$

(t. s. **triviālā transformācija**).





Noteiksim 1. punkta piemērā aplūkotajā telpā  $V_1$  transformācijas  $\mathcal{T}$  (rotācijas) matricu bāzē  $\vec{i}, \vec{j}$ . Dotie un transformētie vektori parādīti 111. zīmējumā. No zīmējuma redzams, ka



111. zīm.

$$\begin{cases} \mathcal{T}(\vec{i}) = \vec{OM} + \vec{ON} = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j} \\ \mathcal{T}(\vec{j}) = \vec{OP} + \vec{OR} = \sin \varphi (-\vec{i}) + \cos \varphi \vec{j}, \end{cases}$$

un, salīdzinot ar (4) un (5), varam uzrakstīt transformācijas  $\mathcal{T}$  matricu

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

=====

**Uzdevums.** Trīsdimensionālā telpā  $L_3$  dots vektors  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ . Noskaidrot, vai operators (transformācija)

$$\mathcal{A}(\vec{x}) = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$$

ir lineārs (lineāra). Lineārai transformācijai uzrakstīt tās matricu.

**Atrisinājums.** Lai pārbaudītu, vai dotais operators  $\mathcal{A}$  ir lineārs, jāpārlicinās, ka

$$1) \mathcal{A}(\vec{x} + \vec{y}) = \mathcal{A}(\vec{x}) + \mathcal{A}(\vec{y}) \quad \text{un} \quad 2) \mathcal{A}(\lambda \vec{x}) = \lambda \mathcal{A}(\vec{x}),$$

kur  $y = (y_1, y_2, y_3) \in L_3$ .

Uzrakstīsim  $\vec{x} + \vec{y}$  un  $\lambda \vec{x}$  koordinātas:

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3), \quad \lambda \vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3).$$

Pārbaudīsim pirmo nosacījumu

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\vec{x} + \vec{y}) &= ((x_2 + y_2) + (x_3 + y_3), 2(x_1 + y_1) + (x_3 + y_3), 3(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3)) = \\ &= ((x_2 + x_3) + (y_2 + y_3), (2x_1 + x_3) + (2y_1 + y_3), (3x_1 - x_2 + x_3) + (3y_1 - y_2 + y_3)) = \mathcal{A}(\vec{x}) + \mathcal{A}(\vec{y}). \end{aligned}$$

Pārbaudīsim otro nosacījumu:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\lambda \vec{x}) &= (\lambda x_2 + \lambda x_3, 2\lambda x_1 + \lambda x_3, 3\lambda x_1 - \lambda x_2 + \lambda x_3) = \\ &= \lambda(x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3) = \lambda \mathcal{A}(\vec{x}). \end{aligned}$$

Tātad operators  $\mathcal{A}$  ir lineārs.

Lai uzrakstītu transformācijas matricu, attēlu  $\mathcal{A}(\vec{e}_i)$  uzrakstīsim atbilstoši izteiksmei (3), pieņemot, ka  $L_3$  bāzes vektori ir  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ :

$$\begin{aligned} \vec{y} = \mathcal{A}(\vec{e}_1) &= (x_2 + x_3)\vec{e}_1 + (2x_1 + x_3)\vec{e}_2 + (3x_1 - x_2 + x_3)\vec{e}_3 = \\ &= x_1(2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3) + x_2(\vec{e}_1 - \vec{e}_3) + x_3(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3). \end{aligned}$$

Tātad bāzes vektoru attēli (jeb sistēma (4)) ir šādi:

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\vec{e}_1) = 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 \\ \mathcal{A}(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 - \vec{e}_3 \\ \mathcal{A}(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \end{cases}$$

to koordinātas veido transformācijas matricu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$





kas acīmredzot ir ekvivalenta ar atbilstošo matricu vienādojumu  $Y=AX$ , t. i., vienādojumu (1).

Piezīmes. 1. Jāievēro, ka **katrai no izteiksmēm**  $\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x})$  un  $Y=AX$  ir sava atšķirīga nozīme:

ar pirmo vienādību ir simboliski pierakstīts mainīgā  $\vec{x}$  transformācijas likums par mainīgo  $\vec{y}$  (neatkarīgi no telpas bāzes),

otrā vienādība nosaka sakarības starp vektoru  $\vec{x}$  un  $\vec{y}$  koordinātām (vienā un tajā pašā bāzē).

2. Ja dota lineāra transformācija  $\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x})$  un transformācijas matrica  $A$ , tad šo transformāciju (t. i., (3)) mēdz pierakstīt arī šādi:

$$\vec{y} = A\vec{x}.$$

Piemērs. Dota trīsdimensionālas telpas bāze  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ , vektors  $\vec{x} = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - \vec{e}_3$  un lineārās transformācijas matrica

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Noteikt šajā bāzē vektora  $\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x})$  koordinātas.

Atrisinājums. Atbilstoši dotajam vienādojumā  $Y=AX$  matricas  $X$  un  $Y$  ir šādas:

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Tātad

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+0-2 \\ 4+4-1 \\ 6+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

un  $y_1 = -4$ ;  $y_2 = 7$ ;  $y_3 = 7$  jeb  $\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x}) = -4\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3 = (-4, 7, 7)$ .

## 2. LINEĀRĀS TRANSFORMĀCIJAS VEKTORS DAŽĀDĀS BĀZĒS

Teorēma

**Ja lineārā telpā  $L$  dotas divas bāzes**

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \quad (4)$$

un

$$\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n \quad (5)$$

**bet lineārās transformācijas  $\mathcal{A}$  matrica bāzē (4) ir  $A$ , tad šīs transformācijas matrica bāzē (5) ir**

$$B = T^{-1} \cdot A \cdot T, \quad (6)$$

**kur  $T$  ir pārejas matrica no bāzes (4) uz bāzi (5).**

Pierādījums. Izteiksim doto vektoru  $\vec{x}$  un transformēto vektoru  $\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x})$  gan ar bāzes (4), gan ar bāzes (5) vektoriem:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n,$$

$$\vec{x} = x'_1\vec{e}'_1 + x'_2\vec{e}'_2 + \dots + x'_n\vec{e}'_n,$$

$$\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \dots + y_n\vec{e}_n,$$

$$\vec{y} = y'_1\vec{e}'_1 + y'_2\vec{e}'_2 + \dots + y'_n\vec{e}'_n.$$

Šo vektoru koordinātas pierakstīsim matricās:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}.$$

Ja  $T$  ir pārejas matrica no bāzes (4) uz bāzi (5) (4.4. § (6)), tad atbilstoši 4.4. § formulai (10) ir spēkā matricu vienādojumi

$$X = TX', \quad (7)$$

$$Y = TY', \quad (8)$$

bet doto transformāciju katrā bāzē realizē vienādojumi

$$Y = AX \quad (1)$$

$$\text{un } Y' = BX'. \quad (9)$$

Tātad ar  $B$  apzīmēta transformācijas matrica bāzē (5).

Lai iegūtu matricu  $B$ , vienādojuma (7) abas puses reizināsim ar matricu  $A$  no kreisās puses:

$$AX = ATX'.$$

Saskaņā ar (1) šīs vienādības kreisā puse ir vienāda ar  $Y$ , tātad  $Y = A \cdot T \cdot X'$ , un, salīdzinot ar (8), iegūstam, ka

$$TY' = A \cdot T \cdot X'.$$

Savukārt, šajā vienādībā reizinot abas puses ar  $T^{-1}$  (no kreisās puses), iegūstam vienādību

$$T^{-1} \cdot T \cdot Y' = T^{-1} A \cdot T \cdot X' \quad \text{jeb} \\ Y' = T^{-1} \cdot A \cdot T \cdot X' \quad (T^{-1} \cdot T = E).$$

Salīdzinot pēdējo vienādību ar vienādību (9), secinām, ka  $B = T^{-1} \cdot A \cdot T$ . Vienādība (6) ir pierādīta.

Piemērs. Atrast lineārā operatora matricu bāzē  $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ , ja bāzē  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  tā ir

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

turklāt

$$\begin{cases} \vec{e}'_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{e}'_2 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 \\ \vec{e}'_3 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3. \end{cases}$$

Atrisinājums. No sakarībām, kurās «jaunā» bāze izteikta ar «vecu» bāzi, secinām, ka pārejas matrica  $T$  ir

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lai iegūtu lineārā operatora matricu bāzē  $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$  (jaunajā bāzē), lietošim formulu (6):

$$B = T^{-1} \cdot A \cdot T.$$

Šajā vienādībā inversā matrica  $T^{-1} = \frac{1}{\det T} \cdot P$ , kur  $P$  ir piesaistītā matrica jeb matricas  $T$  adjunktu matrica:

$$P = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{pmatrix}.$$



Tā kā  $\det T=1$ , tad  $T^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Tātad matrica  $B$  ir iegūstama, sareizinot trīs matricas:

$$B = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 23 \\ -3 & -1 & 15 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

### 3. LĪDZĪGAS MATRICAS

Iepriekš aplūkotās matricas  $A$  un  $B = T^{-1} \cdot A \cdot T$  raksturo vienu un to pašu lineāro transformāciju  $\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x})$  dažādās bāzēs. Šādai sakarībai ir īpašs nosaukums – līdzīgas matricas.

1. definīcija. *Divas kvadrātiskas matricas  $A$  un  $B$  sauc par līdzīgām, ja  $B = T^{-1} \cdot A \cdot T$ , kur  $T$  – nesingulāra matrica.*

1. teorēma

*Līdzīgu matricu determinanti ir vienādi.*

Pierādījums. Izmantojot determinantu īpašības, noteiksim matricas  $B$  determinantu:

$$\det B = \det(T^{-1} \cdot A \cdot T) = \det T^{-1} \cdot \det A \cdot \det T = \frac{1}{\det T} \det A \cdot \det T = \det A.$$

No šīs teorēmas varam izdarīt šādu secinājumu: tā kā vienai un tai pašai lineārai transformācijai dažādās bāzēs transformācijas matricas ir līdzīgas, tad transformācijas matricas determinanta vērtība nav atkarīga no izraudzītās bāzes.

2. definīcija. *Ja  $A$  ir lineāras transformācijas  $\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x})$  matrica bāzē  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ , tad  $n$ -tās pakāpes vienādojumu*

$$\det(A - \lambda E) = 0 \quad (10)$$

*sauc par lineārās transformācijas  $\mathcal{A}$  (jeb matricas  $A$ ) raksturīgo vienādojumu, bet vienādojuma saknes – par transformācijas  $\mathcal{A}$  (jeb matricas  $A$ ) raksturīgajiem skaitļiem. Savukārt polinomu  $\det(A - \lambda E)$  sauc par raksturīgo polinomu.*

Tā kā lineārās transformācijas  $\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x})$  matrica (t. i., bāzes vektoru  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  attēlu  $\mathcal{A}(\vec{e}_i)$  koordinātu matrica) ir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

tad raksturīgo vienādojumu (10) izvērsta veidā var pierakstīt šādi:

$$\det \left( \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

jeb

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (11)$$

## 2. teorēma

**Līdzīgu matricu  $A$  un  $B$  raksturīgie polinomi (un tātad arī raksturīgie vienādojumi) ir vienādi:**

$$\det(A - \lambda E) = \det(B - \lambda E).$$

Pierādījums. Tā kā  $B = T^{-1} \cdot A \cdot T$  un arī  $E = T^{-1} \cdot E \cdot T$ , tad

$$B - \lambda E = T^{-1} \cdot A \cdot T - \lambda T^{-1} \cdot E \cdot T = T^{-1} \cdot (A - \lambda E) \cdot T.$$

Tātad  $B - \lambda E$  un  $A - \lambda E$  ir līdzīgas matricas (1. definīcija) un to determinanti ir vienādi (1. teorēma).

**Secinājums.** Gan lineāras transformācijas matricas determinants, gan raksturīgais polinoms ir invariants (nemainīgs) lielums. Tas nozīmē to, ka šie lielumi nav atkarīgi no izvēlētas bāzes. Protams, pašas transformācijas matricas dažādās bāzēs ir dažādas.

## 5.3. §. DARBĪBAS AR LINEĀRIEM OPERATORIEM. INVERSIE OPERATORI

Lineāros operatorus var saskaitīt, reizināt vienu ar otru un reizināt ar skaitli.

**Operatora reizinājums ar skaitli.** Par lineāra operatora  $\mathcal{A}$  reizinājumu ar skaitli  $\lambda \in \mathbf{R}$  sauc tādu operatoru  $\lambda \mathcal{A}$ , kas jebkuru vektoru  $\vec{x} \in L$  transformē šādi:

$$(\lambda \mathcal{A})(\vec{x}) = \lambda(\mathcal{A}(\vec{x})).$$

Var pārliecināties, ka arī operators  $\lambda \mathcal{A}$  ir lineārs operators.

Savukārt, ja transformācijas  $\mathcal{A}$  matrica ir  $A$ , tad transformācijas  $\lambda \mathcal{A}$  matrica ir  $\lambda A$ .

**Operatoru summa.** Par divu lineāru operatoru  $\mathcal{A}$  un  $\mathcal{B}$  summu sauc tādu transformāciju  $\mathcal{G}$ , kurā jebkurai vektoram  $\vec{x} \in L$  ir spēkā šāda vienādība:

$$\mathcal{G}(\vec{x}) = \mathcal{A}(\vec{x}) + \mathcal{B}(\vec{x}).$$

Transformāciju summu saīsināti pierakstīsim šādi:

$$\mathcal{G} = \mathcal{A} + \mathcal{B}.$$

No definīcijas izriet, ka  $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{B} + \mathcal{A}$ .

Var pierādīt, ka summa  $\mathcal{A} + \mathcal{B}$  arī ir lineāra transformācija, bet tās matrica ir vienāda ar atbilstošo matricu  $A$  un  $B$  summu (vienā un tajā pašā bāzē).

Pierādīsim šo otro apgalvojumu.

Pieņemsim, ka

$$\mathcal{A}(\vec{x}) = \vec{y} \quad \text{un} \quad \mathcal{B}(\vec{x}) = \vec{z}. \quad (1)$$

Tātad

$$\mathcal{G}(\vec{x}) = (\mathcal{A} + \mathcal{B})(\vec{x}) = \mathcal{A}(\vec{x}) + \mathcal{B}(\vec{x}) = \vec{y} + \vec{z}. \quad (2)$$

Ja  $A$ ,  $B$  un  $C$  ir atbilstošo transformāciju  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  un  $\mathcal{G}$  matricas, bet  $X$ ,  $Y$  un  $Z$  - vektoru  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  un  $\vec{z}$  koordinātu matricas (vienā un tajā pašā bāzē), tad transformācijas (1) un (2) var pierakstīt matricu formā:

$$A \cdot X = Y, \quad B \cdot X = Z, \quad (3)$$

$$CX = Y + Z. \quad (4)$$



Saskaitot vienādojumus (3), iegūstam, ka

$$AX + BX = Y + Z \text{ jeb } (A + B)X = Y + Z.$$

Salīdzinot pēdējo vienādību ar (4), redzams, ka

$$A + B = C.$$

**Operatoru reizinājums un kāpināšana.** Ja lineāras transformācijas  $\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x})$  attēls  $\vec{y}$  savukārt ir transformācijas  $\mathcal{B}$  oriģināls, t. i.,

$$\mathcal{B}(\vec{y}) = \vec{z},$$

tad vektors  $\vec{z}$  ir iegūts no vektora  $\vec{x}$  ar divkārtu transformāciju.

**Definīcija. Par lineāru operatoru  $\mathcal{A}$  un  $\mathcal{B}$  reizinājumu jeb superpozīciju sauc transformāciju  $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$  matricas  $\mathcal{B}$  no transformācijas  $\mathcal{A}$ .** Lineāru operatoru reizinājumu pieraksta šādi:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}\mathcal{A}(\vec{x}) &= \mathcal{B}(\mathcal{A}(\vec{x})) \text{ jeb} \\ \mathcal{B} \circ \mathcal{A}(\vec{x}) &= \mathcal{B}(\mathcal{A}(\vec{x})). \end{aligned} \quad (5)$$

Operatoru reizinājumam ir spēkā šādas īpašības:

1. Lineāru operatoru reizinājums arī ir lineārs operators.
2. Ja lineāru transformāciju  $\mathcal{A}$  un  $\mathcal{B}$  matricas kādā bāzē ir atbilstoši  $A$  un  $B$ , tad operatoru reizinājuma  $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$  matrica tajā pašā bāzē ir  $B \cdot A$ .

**Secinājums.** Visām aplūkotajām darbībām ar operatoriem piemīt analogas īpašības kā darbībām ar matricām (vienības matricai atbilst identiskais operators ( $\mathcal{E}(\vec{x}) = \vec{x}$ ), bet nulles matricai – nulles operators).

Lineāro operatoru reizinājums ne vienmēr ir komutatīvs ( $\mathcal{B} \circ \mathcal{A} \neq \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ ).

**Piemērs.** Ja  $\mathcal{A}$  nozīmē vektoru pagriezienu par leņķi  $\varphi$  telpā  $V_1$ ,  $\mathcal{B}$  – pagriezienu par leņķi  $\psi$  tajā pašā virzienā, tad operatoru reizinājums  $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$  nozīmē vektoru pagriešanu par leņķi  $\varphi + \psi$ . Šajā piemērā  $\mathcal{B} \circ \mathcal{A} = \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ .

**Definīcija. Par lineāra operatora  $\mathcal{A}$  kvadrātu sauc operatoru  $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A} \circ \mathcal{A}$ .** Analogi

$$\mathcal{A}^3 = \mathcal{A}^2 \circ \mathcal{A}, \dots, \mathcal{A}^n = \mathcal{A}^{n-1} \circ \mathcal{A}.$$

Tā, piemēram,  $\mathcal{A}^3(\vec{x})$  nozīmē to, ka transformācija  $\mathcal{A}$  tiek lietota trīs reizes pēc kārtas:

$$\mathcal{A}^3(\vec{x}) = \mathcal{A}^2(\mathcal{A}(\vec{x})) = \mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathcal{A}(\vec{x}))).$$

**Piemērs.** Doti vektori  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\mathcal{A}(\vec{x}) = (x_2 - x_3, x_1, x_1 + x_3)$  un  $\mathcal{B}(\vec{x}) = (x_2, 2x_3, x_1)$ . Atrast operatoru  $\mathcal{B}(2\mathcal{A} + \mathcal{B})$ .

**Atrisinājums.** Atrast operatoru  $\mathcal{B}(2\mathcal{A} + \mathcal{B})$  nozīmē atrast  $\mathcal{B}(2\mathcal{A} + \mathcal{B})(\vec{x})$ . Lietosim definīcijas (2) un (5), saskaņā ar kurām

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})(\vec{x}) = \mathcal{A}(\vec{x}) + \mathcal{B}(\vec{x}), \quad (\mathcal{B}\mathcal{A})(\vec{x}) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\vec{x})).$$

Tātad

$$\mathcal{B}(2\mathcal{A} + \mathcal{B})(\vec{x}) = \mathcal{B}(2\mathcal{A}(\vec{x})) + \mathcal{B}^2(\vec{x}). \quad (6)$$

Aprēķināsim katru saskaitāmo atsevišķi:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(2\mathcal{A}(\vec{x})) &= 2\mathcal{B}(\mathcal{A}(\vec{x})) = 2\mathcal{B}(x_2 - x_3, x_1, x_1 + x_3) = \\ &= 2(x_1, 2(x_1 + x_3), x_2 - x_3) = (2x_1, 4(x_1 + x_3), 2(x_2 - x_3)); \\ \mathcal{B}^2(\vec{x}) &= \mathcal{B}(\mathcal{B}(\vec{x})) = \mathcal{B}(x_2, 2x_3, x_1) = (2x_3, 2x_1, x_2). \end{aligned}$$

Atbilstoši formulai (6) aprēķinām summu:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(2\mathcal{A} + \mathcal{B})(\vec{x}) &= (2x_1, 4(x_1 + x_3), 2(x_2 - x_3)) + (2x_3, 2x_1, x_2) = \\ &= (2(x_1 + x_3), 6x_1 + 4x_3, 3x_2 - 2x_3). \end{aligned}$$

### Inversā transformācija.

1. definīcija. *Lineāru operatoru  $\mathcal{A}$  sauc par nesingulāru operatoru, ja tā transformācijas matrica  $A$  ir nesingulāra matrica.*

Jebkura nesingulāra transformācija ir savstarpēji viennozīmīga un jebkuru vektoru  $\vec{x} \neq \vec{0}$  transformē par vektoru  $\vec{y} \neq \vec{0}$  (un otrādi).

2. definīcija. *Par operatoru  $\mathcal{A}$ :  $L \rightarrow L$  inverso operatoru sauc tādu operatoru  $\mathcal{B}$ :  $L \rightarrow L$ , kuram spēkā vienādība*

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \mathcal{B} \cdot \mathcal{A} = \mathcal{E}, \quad (7)$$

kur  $\mathcal{E}$  – identiskais operators.

Inverso operatoru apzīmē ar  $\mathcal{A}^{-1}$ , t. i.,  $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$ , tātad vienādības (7) var pārrakstīt šādi:

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1} \cdot \mathcal{A} = \mathcal{E}.$$

Tādējādi, ja dota transformācija

$$\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x}), \quad (8)$$

tad tās inversā transformācija ir

$$\vec{x} = \mathcal{A}^{-1}(\vec{y}). \quad (9)$$

Pamatojoties uz definīcijām un darbībām ar operatoriem (un to matricām), var pierādīt šādus apgalvojumus.

1. Ja  $\mathcal{A}$  ir lineārs operators, tad arī  $\mathcal{A}^{-1}$  ir lineārs operators.

2. Operatoram  $\mathcal{A}$  eksistē inversais operators  $\mathcal{A}^{-1}$  tad un tikai tad, ja  $\mathcal{A}$  ir nesingulārs operators.

3. Ja  $\mathcal{A}$  ir nesingulārs operators un tā transformācijas matrica kādā bāzē ir  $A$ , tad eksistē viens vienīgs inversais operators  $\mathcal{A}^{-1}$  ar transformācijas matricu  $A^{-1}$  (tajā pašā bāzē).

Tātad atbilstošās transformācijas (8) un (9) matricu veidā ir šādas:

$$Y = A \cdot X, \quad X = A^{-1} \cdot Y.$$

## 5.4. §. LINEĀRĀ OPERATORA ĪPAŠVĒRTĪBAS UN ĪPAŠVEKTORI

Pieņemsim, ka  $n$ -dimensionālā lineārā telpā  $L$  ir dota lineāra transformācija

$$\mathcal{A}(\vec{x}) = \vec{y}, \quad (1)$$

kurās matrica ir  $A$ .

Ja telpā  $L$  izvēlēta bāze  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  un vektora  $\vec{x}$  koordinātas šajā bāzē ir  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , attēla  $\vec{y}$  koordinātas ir  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , bet transformācijas matrica ir  $A$ , tad vienādība (1) matricu formā ir

$$AX = Y, \quad (2)$$

kur

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(matricas  $A$   $i$ -tajā kolonnā ir vektora  $\mathcal{A}(\vec{e}_i)$  koordinātas bāzē  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ ).



### Īpašvektori un īpašvērtības.

Definīcija. Vektoru  $\vec{x}$  sauc par lineārās transformācijas  $\mathcal{A}$  īpašvektoru, ja  $\vec{x} \neq \vec{0}$  un eksistē tāds skaitlis  $\lambda$ , ka

$$\mathcal{A}(\vec{x}) = \lambda \vec{x}. \quad (3)$$

( $\lambda \in \mathbb{R}$ , ja lineārā telpa  $L$  ir reāla, bet  $\lambda \in \mathbb{C}$ , ja  $L$  ir kompleksa).

Skaitli  $\lambda$  sauc par lineārā operatora jeb lineārās transformācijas  $\mathcal{A}$  īpašvērtību.

Saskaņā ar definīciju (3) īpašvektora  $\vec{x}$  attēls ir tam kolineārs vektors  $\lambda \vec{x}$ .

Transformāciju (3) var uzrakstīt arī kā matricu vienādojumu

$$AX = \lambda X. \quad (4)$$

Atzīmēsim īpašvektora nozīmīgākās īpašības.

1. Katram īpašvektoram atbilst viena un tikai viena īpašvērtība.

Tiešām, pieņemsim pretējo, ka operatora  $\mathcal{A}$  īpašvektoram  $\vec{x}$  atbilst divas īpašvērtības  $\lambda_1$  un  $\lambda_2$ , t. i.,

$$\mathcal{A}(\vec{x}) = \lambda_1 \vec{x} \quad \text{un} \quad \mathcal{A}(\vec{x}) = \lambda_2 \vec{x}.$$

Tad  $\lambda_1 \vec{x} = \lambda_2 \vec{x}$  jeb  $(\lambda_1 - \lambda_2) \vec{x} = \vec{0}$ . Tā kā  $\vec{x} \neq \vec{0}$ , tad pēdējā vienādība iespējama tikai tādā gadījumā, ja  $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ , t. i.,  $\lambda_1 = \lambda_2$ .

2. Ja  $\vec{x}$  ir lineārās transformācijas  $\mathcal{A}$  īpašvektors un tā īpašvērtība ir  $\lambda$ , tad jebkurš vektors  $a\vec{x}$  ( $a \neq 0$ ), kas kolineārs ar vektoru  $\vec{x}$ , arī ir operatora  $\mathcal{A}$  īpašvektors ar to pašu īpašvērtību  $\lambda$ .

Patiešām, ja  $\mathcal{A}(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$ , tad

$$\mathcal{A}(a\vec{x}) = a \mathcal{A}(\vec{x}) = a(\lambda \vec{x}) = \lambda(a\vec{x}).$$

Tādējādi katrai īpašvērtībai  $\lambda$  atbilst bezgalīgi daudz kolineāru īpašvektoru.

3. Ja  $\vec{x}_1$  un  $\vec{x}_2$  ir lineāri neatkarīgi operatora  $\mathcal{A}$  īpašvektori ar vienu un to pašu īpašvērtību  $\lambda$ , tad to summa  $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$  arī ir operatora  $\mathcal{A}$  īpašvektors ar īpašvērtību  $\lambda$ .

Patiešām, ja  $\mathcal{A}(\vec{x}_1) = \lambda \vec{x}_1$  un  $\mathcal{A}(\vec{x}_2) = \lambda \vec{x}_2$ , tad

$$\mathcal{A}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \mathcal{A}(\vec{x}_1) + \mathcal{A}(\vec{x}_2) = \lambda \vec{x}_1 + \lambda \vec{x}_2 = \lambda(\vec{x}_1 + \vec{x}_2).$$

Secinājums. Ja lineārā transformācijā  $\mathcal{A}$  vienai un tai pašai īpašvērtībai  $\lambda$  atbilst  $r$  lineāri neatkarīgi īpašvektori  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_r$ , tad jebkura šo vektoru lineāra kombinācija arī ir transformācijas  $\mathcal{A}$  īpašvektors, kas atbilst īpašvērtībai  $\lambda$ .

4. Ja lineārā transformācijā  $\mathcal{A}$  īpašvērtībām  $\lambda_1$  un  $\lambda_2$  ( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ) atbilst īpašvektori  $\vec{x}_1$  un  $\vec{x}_2$ , tad vektori  $\vec{x}_1$  un  $\vec{x}_2$  ir lineāri neatkarīgi.

Analogi 3. īpašībai arī šī īpašība ir spēkā jebkuram galīgam vektoru skaitam un pa pāriem dažādu īpašvērtību skaitam.

### Lineārās transformācijas īpašvektora eksistence

Teorēma

Kompleksā lineārā telpā  $L$  katram lineāram operatoram  $\mathcal{A}$  eksistē vismaz viens īpašvektors.

Pierādījums. Lai noteiktu lineārās transformācijas  $\mathcal{A}$  īpašvērtību  $\lambda$  un tai atbilstošo īpašvektoru  $\vec{x} \neq \vec{0}$ , jāatrisina matricu vienādojums (4):

$$AX = \lambda X = \lambda EX \quad \text{jeb} \quad (A - \lambda E)X = 0, \quad (5)$$

kur  $E$  – vienības matrica.

Ar matricu vienādojumu (5) ir dota homogēna lineāru vienādojumu sistēma, kurā nezināmo un vienādojumu skaits ir vienāds ar  $n$ . Šādai sistēmai eksistē netriviāls atrisinājums tad un tikai tad, ja tās determinants ir vienāds ar 0, t. i.,

$$\det(A - \lambda E) = 0. \quad (6)$$

Šis vienādojums ir **lineārās transformācijas  $\mathcal{A}$  raksturīgais vienādojums** (skat. 5.2. §. (10)), kuram atrisinājums eksistē vienmēr.

Tātad lineārā operatora  $\mathcal{A}$  īpašvērtība ir tā raksturīgā vienādojuma (6) sakne.

Ja, atrisinot (6), ir noteikts  $\lambda$ , tad atbilstošā īpašvektora  $\vec{x}$  koordinātas nosaka, ievietojot šo  $\lambda$  sistēmā (5) un atrisinot to.

Piezīmes. 1. Ja  $L$  ir reāla telpa, tad arī lineārās transformācijas  $\mathcal{A}$  īpašvērtības ir reālas; šīs īpašvērtības ir raksturīgā vienādojuma (6) reālās saknes. Tātad, ja vienādojumam (6) reālu sakņu nav, tad transformācijai  $\mathcal{A}$  nav ne īpašvērtību, ne īpašvektoru.

2. Lineārās transformācijas  $\mathcal{A}$  īpašvērtības (raksturīgos skaitļus) un īpašvektorus sauc arī par **matricas  $A$  īpašvērtībām** (raksturīgiem skaitļiem) un **īpašvektoriem**.

**Īpašvektora noteikšana.** Uzrakstīsim vienādojumu (5) koordinātu formā:

$$\left( \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0.$$

t.i.,

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

jeb

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Tātad atbilstošais raksturīgais vienādojums (6) ir šāds:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

Dotās lineārās transformācijas  $\mathcal{A}$  (jeb matricas  $A$ ) īpašvektoru nosaka pēc šāda **algoritma**.

1. Uzraksta raksturīgo vienādojumu (8) un atrod tā saknes  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , t. i., raksturīgos skaitļus.

2. Ja telpa  $L$  ir reāla (matrica  $A$  – reāla), tad izvēlas tikai reālās  $\lambda_i$  vērtības, kas arī ir transformācijas  $\mathcal{A}$  (jeb matricas  $A$ ) īpašvērtības.

Kompleksas telpas gadījumā visi raksturīgie skaitļi ir īpašvērtības.

3. Katru īpašvērtību  $\lambda_i$  ievieto  $\lambda$  vietā sistēmā (7) un atrod atbilstošo netriviālo sistēmas atrisinājumu  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

4. Uzraksta īpašvektoru  $\vec{x}$  koordinātu formā:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$



Piezīme. Var pierādīt, ka katrai īpašvērtībai  $\lambda_i$  atbilst  $n-r_i$  lineāri neatkarīgi īpašvektori, kur  $r_i = \text{rang}(A - \lambda_i E)$ . Tā kā vienai un tai pašai īpašvērtībai atbilstošo īpašvektoru kopa arī ir lineāra telpa, tad mēdz teikt, ka dotās lineārās transformācijas īpašvektoru telpas dimensija ir  $n-r_i$ .

Piemērs. Atrast matricas  $A$  īpašvērtības un īpašvektorus, ja

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Atrisinājums. Lai noteiktu īpašvērtības  $\lambda$  un īpašvektorus  $\vec{x} \neq \vec{0}$ , rīkosiemies saskaņā ar algoritmu.

1. Atbilstoši (8) uzrakstām dotās matricas  $A$  raksturīgo vienādojumu. Tas ir šāds:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Uzrakstām arī vienādojumu sistēmu vektora  $\vec{x}$  koordinātu noteikšanai (sk. (7)):

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (2-\lambda)x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + (2-\lambda)x_3 = 0. \end{cases}$$

Aprēķinot determinantu, iegūstam raksturīgo polinomu, pielīdzinot to nullei – raksturīgo vienādojumu:

$$\begin{aligned} (2-\lambda)^3 - (2-\lambda) &= 0, \\ (2-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Šī vienādojuma saknes ir raksturīgie skaitļi

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3.$$

2. Tā kā visi raksturīgie skaitļi ir reāli, tad tie visi ir matricas īpašvērtības.

3. un 4. Noteiksim īpašvērtībai  $\lambda_1 = 1$  atbilstošo īpašvektoru  $\vec{x}^{(1)} = (x_1, x_2, x_3)$  no vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} (2-1)x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (2-1)x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + (2-1)x_3 = 0 \end{cases}$$

jeb

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Šīs sistēmas vispārīgais atrisinājums ir  $x_1 = 0, x_2 = x_3 = c$ , kur  $c$  – patvaļīga konstante. Pieņemot, ka  $c = 1$ , iegūstam īpašvērtībai  $\lambda = 1$  atbilstošo īpašvektoru  $\vec{x}^{(1)} = (0, 1, 1)$ .

Līdzīgi nosaka īpašvērtībai  $\lambda_2 = 2$  atbilstošo īpašvektoru. Tātad jāatrisina šāda vienādojumu sistēma

$$\begin{cases} 0x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 0x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{jeb} \quad \begin{cases} -x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Sistēmas vispārīgais atrisinājums ir  $x_1 = x_2 = x_3 = c$ , un, pieņemot, ka  $c = 1$ , ir iegūts īpašvērtībai  $\lambda_2 = 2$  atbilstošais īpašvektors  $\vec{x}^{(2)} = (1, 1, 1)$ .

Analogi atrod īpašvērtībai  $\lambda_3 = 3$  atbilstošo īpašvektoru  $\vec{x}^{(3)} = (1, 0, 1)$ .

## 5.5. §. ORTOGONĀLAS MATRICAS UN TRANSFORMĀCIJAS

## Ortogonalas matricas

**Definīcija.** *Reālu skaitļu kvadrātisku matricu*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

sauc par **ortogonālu matricu**, ja tai atbilstošo vektoru sistēma

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 &= (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}), \\ \vec{x}_2 &= (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2}), \\ &\vdots \\ \vec{x}_n &= (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{nn})\end{aligned}$$

ir ortonormēta, t. i.,

$$a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \dots + a_{ni}a_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{ja } i=j \\ 0, & \text{ja } i \neq j \end{cases}$$

jebkuriem  $i$  un  $j$  ( $i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, n$ ).

Savukārt vektori  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$  veido Eiklīda telpu ar skalāro reizinājumu

$$(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj}.$$

Bez pierādījuma atzīmēsim šādu teorēmu.

### Teorēma

Matrica  $A$  ir ortogonāla tad un tikai tad, ja tās reizinājums ar transponēto matricu  $A^T$  ir vienības matrica:

$$A^T A = E \quad (1)$$

ieb  $A A^T = E.$  (2)

**Secinājumi.** 1. Ja matrica  $A$  ir ortogonāla, tad  $A^T = A^{-1}$ . Tas izriet no vienādībām (1), (2) un inversās matricas  $A^{-1}$  definīcijas.

2. Ortogonālas matricas transponētā matrica  $A^T$  arī ir ortogonāla matrica.

3. Ortogonālas matricas inversā matrica  $A^{-1}$  arī ir ortogonāla matrica.

4. Ortogonālas matricas determinanta absolūtā vērtība ir vienāda ar 1.

Pierādīsim to. No vienādības (1), izmantojot determinantu īpašības, iegūstam šādu rezultātu:

$$\det(A^T A) = \det E,$$

$$\det A^T \cdot \det A = 1.$$

Tā kā  $\det A^T = \det A$ , tad

$$(\det A)^2 = 1 \quad \text{jeb} \quad \det A = +1.$$

**Ortogonalās transformācijas.** Lineāru transformāciju  $\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x})$  jeb  $Y = AX$  Eiklīda telpā sauc par *ortogonālu*, ja ortonormētā bāzē  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  transformācijas matrica  $A$  ir ortogonāla.

Tā kā  $\det A = \pm 1$ , tad ortogonālā transformācija ir nesingulāra un tātad jebkurai ortogonālai transformācijai eksistē ortogonāla inversā transformācija (ar transformācijas matricu  $A^T$ ).



## Teorēma

### Ortogonalā transformācijā vektoru skalārais reizinājums nemainās.

Pierādījums. Pieņemsim, ka Eiklīda telpā dots lineārs operators  $\mathcal{A}$  ar ortogonalu transformācijas matricu  $A$ .

Ja  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  un  $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  ir brīvi izraudzīti telpas vektori un to koordinātu matricas ir atbilstoši

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ jeb } X^T = (x_1, x_2, \dots, x_n), Y^T = (y_1, y_2, \dots, y_n), \text{ tad ortogo-}$$

nālās transformācijas  $\mathcal{A}(\vec{x}) = \vec{x}_1$  un  $\mathcal{A}(\vec{y}) = \vec{y}_1$  var pierakstīt ar matricām, proti,

$$\mathcal{A}(\vec{x}) = AX \text{ un } \mathcal{A}(\vec{y}) = AY. \quad (3)$$

Tādējādi skalārais reizinājums ir

$$(\vec{x}, \vec{y}) = X^T Y. \quad (4)$$

Analogi attēlu skalārais reizinājums ir

$$(\vec{x}_1, \vec{y}_1) = (\mathcal{A}(\vec{x}), \mathcal{A}(\vec{y})) = (AX)^T AY = X^T A^T AY = X^T EY = X^T Y$$

un acīmredzot sakrīt ar (4).

Secinājumi. 1. Ortogonalns operators transformē kādu ortonormētu bāzi  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  par ortonormētu bāzi  $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n$ , turklāt pārejas matrica  $T$  ir ortogonāla matrica.

2. Ortogonalā transformācijā vektora garums un leņķis starp vektoriem nemainās.

3. Ortogonalu transformāciju reizinājums arī ir ortogonāla transformācija.

**Ortogonalas transformācijas konstrukcija.** Jebkuru ortogonalu transformāciju  $n$ -dimensionālā Eiklīda telpā viennozīmīgi nosaka  $n$ -tās kārtas ortogonāla transformācijas matrica.

Lai iegūtu šādu matricu, t. i., matricu, kuras kolonnās izvietotas ortonormētu bāzes vektoru attēlu koordinātas, vispirms konstruēsim  $n$  pa pāriem ortogonālus  $n$ -dimensionālus vektorus.

Pieņemsim, ka pirmā vektora  $\vec{x}_1$  koordinātas ir jebkuri reāli skaitļi  $\vec{x}_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1})$  (vismaz viens no  $a_{i1} \neq 0$ ) un vektora  $\vec{x}_2$  koordinātas  $t_1, t_2, \dots, t_n$  noteiksim tā, lai  $\vec{x}_2$  un  $\vec{x}_1$  būtu ortogonāli, t. i.,

$$(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = 0 \text{ jeb } a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \dots + a_{n1}t_n = 0.$$

Šim vienādojumam ir bezgalīgi daudz atrisinājumu. Izvēlēsimies vienu no tiem un apzīmēsim šādi:

$$t_1 = a_{12}, t_2 = a_{22}, \dots, t_n = a_{n2}.$$

Tātad  $\vec{x}_2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2})$ .

Analogi atrod vektoru  $\vec{x}_3 = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ , izmantojot vektoru  $\vec{x}_3$  un  $\vec{x}_1$ , kā arī  $\vec{x}_3$  un  $\vec{x}_2$  ortogonalitāti, t. i., skalāros reizinājumus

$$(\vec{x}_3, \vec{x}_1) = 0 \text{ un } (\vec{x}_3, \vec{x}_2) = 0.$$

Tādējādi rodas divu vienādojumu sistēma ar  $n$  nezināmiem:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{n1}p_n = 0 \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \dots + a_{n2}p_n = 0. \end{cases}$$

Sistēmai eksistē bezgalīgi daudz atrisinājumu. Izvēloties vienu no tiem (netriviālu atrisinājumu) un apzīmējot to ar

$$p_1 = a_{13}, p_2 = a_{23}, \dots, p_n = a_{n3},$$

ir iegūts vektors  $\vec{x}_3 = (a_{13}, a_{23}, \dots, a_{n3})$ .

Šo procesu turpinot, iegūst  $n$  ortogonālus vektorus

$$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n,$$

bet, katru vektoru normējot, – atbilstošo ortonormēto vektoru sistēmu

$$\vec{x}_1' = \frac{\vec{x}_1}{|\vec{x}_1|}, \vec{x}_2' = \frac{\vec{x}_2}{|\vec{x}_2|}, \dots, \vec{x}_n' = \frac{\vec{x}_n}{|\vec{x}_n|}.$$

Ierakstot vektoru  $\vec{x}_i'$  koordinātas atbilstošajās kolonnās  $i=1, 2, \dots, n$ , ir iegūta ortogonāla transformācijas matrica.

Piezīme. No ortogonālās matricas konstrukcijas gaitas var secināt, ka šādu ortogonālu matricu ir bezgalīgi daudz.

### LINEĀRA OPERATORA UN AR TO SAISTĪTO JĒDZIENU GEOMETRISKĀS INTERPRETĀCIJAS

Ja katram kādas kopas  $U$  elementam atbilst viens noteikts kopas  $V$  elements, tad šādu atbilstību sauc par *kopas  $U$  attēlojumu kopā  $V$* . Atkarībā no tā, kādi objekti ir šo kopu elementi dažādās matemātikas nozarēs, kopas attēlojumu kopā sauc par *funkciju, operatoru, transformāciju, funkcionāli*.

Pienemsim, ka kopā  $U$  ir kāds apgabals Dekarta koordinātu plaknē  $xy$ , bet kopā  $V$  – apgabals koordinātu plaknē  $x'y'$ . Tad kopas  $U$  elementi ir sakārtoti reālu skaitļu pāri  $(x; y)$  un kopas  $V$  elementi arī ir sakārtoti reālu skaitļu pāri  $(x'; y')$  – plaknes punktu koordinātas. Šajā gadījumā kopas  $U$  attēlojumu kopā  $V$  saucim par *operatoru*. Šo attēlojumu var realizēt, ja ir dots likums, kā noteikt kopas  $V$  punktu koordinātas pēc kopas  $U$  punktu koordinātām. Pieņemsim, ka kopas  $V$  punkta  $N(x'; y')$  abscisu  $x'$  atrod pēc formulas  $x' = g(x; y)$ , bet ordinātu  $y'$  – pēc formulas  $y' = h(x; y)$ , kur  $(x; y)$  ir kāda kopas  $U$  punkta  $M$  koordinātas. Formulas

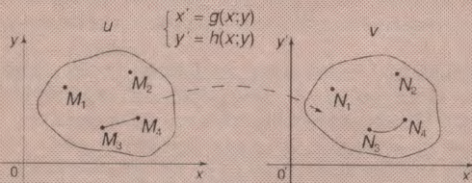
$$\begin{cases} x' = g(x; y) \\ y' = h(x; y) \end{cases} \quad (1)$$

sauc par *attēlojuma funkcijām*.

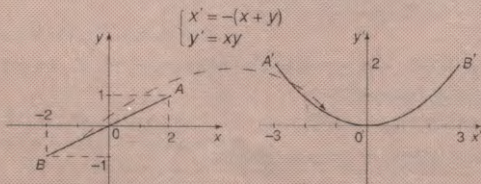
Ar to palīdzību katram kopas  $U$  punktam  $M$  piekārt kopā  $V$  punktu  $N$ , ko sauc par punkta  $M$  *attēlu*, un raksta:  $M \mapsto N$ . Atkarībā no attēlojuma funkcijām (1) kāda  $xy$  plaknes nogriežņa  $M_3M_4$  attēls plaknē  $x'y'$  var būt liekta līnijas loks  $N_3N_4$  (A-30. zīm.). Vispārīgi  $xy$  plaknes figūra transformējas par citādas konfigurācijas figūru plaknē  $x'y'$ .

Piemēram, ja attēlojuma funkcijas ir

$$\begin{cases} x' = -(x+y) \\ y' = xy, \end{cases} \quad (2)$$



A-30. zīm.



A-31. zīm.



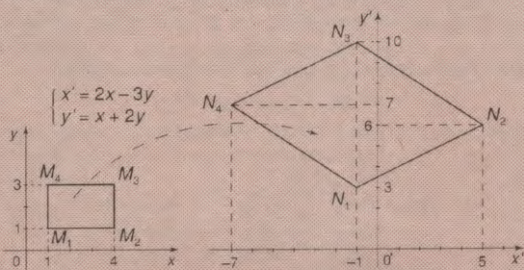
taid punktu  $O(0; 0)$ ,  $A(2; 1)$  un  $B(-2; -1)$  attēli ir šādi punkti:  $O(0; 0) \mapsto O'(0; 0)$ ,  $A(2; 1) \mapsto A'(-3; 2)$ ,  $B(-2; -1) \mapsto B'(3; 2)$ , un var pierādīt, ka  $xy$  plaknes taisnes nogriežņa  $AB$  attēls  $x'y'$  plaknē ir parabolas loks  $A'O'B'$  (A-31. zīm.).

Aplūkosim gadījumu, kad attēlojuma funkcijas (1) ir lineāras funkcijas, piemēram,

$$\begin{cases} x' = 2x - 3y \\ y' = x + 2y \end{cases} \quad (3)$$

Šādu attēlojumu sauc par *lineāru operatoru*. Viegli pārliecināties, ka, realizējot attēlojumu ar formulu (3) palīdzību, iepriekšējā piemērā aplūkoto punktu attēli ir šādi punkti:  $O(0; 0) \mapsto O'(0; 0)$ ,  $A(2; 1) \mapsto A'(1; 4)$ ,  $B(-2; -1) \mapsto B'(-1; -4)$ . Var pierādīt, ka taisnes nogriežņa  $AB$  attēls ir taisnes nogrieznis  $A'B'$  (A-32. zīm.).

Aprēķināsim taisnstūra  $M_1M_2M_3M_4$  virsotņu  $M_1(1; 1)$ ,  $M_2(4; 1)$ ,  $M_3(4; 3)$ ,  $M_4(1; 3)$  attēlu koordinātas, ja attēlojumu realizē ar formulām (3). Iegūstam, ka  $M_1(1; 1) \mapsto N_1(-1; 3)$ ,  $M_2(4; 1) \mapsto N_2(5; 6)$ ,  $M_3(4; 3) \mapsto N_3(-1; 10)$ ,  $M_4(1; 3) \mapsto N_4(-7; 7)$ . Atliekot šos punktus  $x'y'$  koordinātu plaknē, secinām, ka taisnstūra  $M_1M_2M_3M_4$  attēls ir četrstūris  $N_1N_2N_3N_4$ . Var pierādīt, ka šis četrstūris ir paralelograms (A-33. zīm.).



A-33. zīm.

Vispārīgā gadījumā lineāru operatoru koordinātu plaknē uzdod ar sistēmu

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = x' \\ a_{21}x + a_{22}y = y' \end{cases} \quad (4)$$

vai arī ar šīs sistēmas matricu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Matricu  $A$  sauc par *lineārā operatora matricu*.

Var pierādīt, ka ar lineāru operatoru taisne tiek attēlota par taisni, paralēlas taisnes – par paralēlām taisnēm, vienādi taisnes nogriežņi – par vienādiem nogriežņiem. Taču mainās nogriežņa garums, leņķis starp taisnēm un figūras laukums. Šīs īpašības ilustrē aplūkotais piemērs.

No teiktā izriet, ka orientēts nogrieznis jeb vektors ar lineāru operatoru tiek attēlots par vektoru. Turklāt var pierādīt, ka attēlojumā iegūtā vektora koordinātas aprēķina pēc dotā



vektora koordinātām, izmantojot tās pašas formulas, ar kurām aprēķina vektora galapunktu koordinātas. Tādējādi, ja ir dots vektors  $\vec{x} = (x_1; x_2)$  un lineāra operatora  $\mathcal{A}$  matrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

tad šī vektora attēla  $\vec{y} = (y_1; y_2)$  koordinātas atrod šādi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = y_2. \end{cases}$$

Raksta  $\vec{x} = (x_1; x_2) \xrightarrow{\mathcal{A}} \vec{y} = (y_1; y_2)$  jeb  $\vec{y} = A\vec{x}$ .

Analogi aplūko lineāra operatora jēdzienu 3 dimensiju vektoru telpā. Šajā gadījumā operatoru uzdod ar 3. kārtas matricu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

un vektora  $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3)$  attēla  $\vec{y} = (y_1; y_2; y_3)$  koordinātas atrod šādi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = y_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = y_3. \end{cases} \quad (7)$$

Lineāru operatoru teorijā īpaši aplūko gadījumu, kad ar lineāru operatoru  $\mathcal{A}$  kāds vektors  $\vec{x}$  (kas nav nullvektors) attēlojas par šim vektoram kolineāru vektoru  $\vec{y} = \lambda \vec{x}$ . Šādā gadījumā vektoru  $\vec{x}$  sauc par operatora  $\mathcal{A}$  *īpašvektoru*, bet koeficientu  $\lambda$  – par *īpašvērtību*.

Lai atrastu lineāra operatora  $\mathcal{A}$  īpašvektorus (ja tādi eksistē) un īpašvērtības, izmanto vektoru kolinearitātes nosacījumu. Tā kā  $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3)$  un  $\vec{y} = (y_1; y_2; y_3)$  ir kolineāri vektori, t. i.  $\vec{y} = \lambda \vec{x}$ , tad iegūstam, ka  $y_1 = \lambda x_1$ ,  $y_2 = \lambda x_2$ ,  $y_3 = \lambda x_3$ . Ievietojot šīs izteiksmes attēlojuma formulās (7), iegūstam vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = \lambda x_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \lambda x_3 \end{cases}$$

jeb

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \lambda)x_3 = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Sistēma (8) ir homogēnu lineāru vienādojumu sistēma, kuras nezināmie lielumi ir īpašvektoru koordinātas. Homogēnai lineāru vienādojumu sistēmai eksistē netriviāls atrisinājums, ja šīs sistēmas determinants ir vienāds ar nulli. Tāpēc vispirms aplūko vienādību

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (9)$$

kuru sauc par lineārā operatora *raksturīgo vienādojumu*. Īpašvērtības atrod, atrisinot vienādojumu (9) attiecībā pret nezināmo lielumu  $\lambda$ . Iegūtās īpašvērtības ievietojot  $\lambda$  vietā vienādojumu sistēmā (8), atrod īpašvektoru koordinātas.

Piemērs

Atrast īpašvērtības un īpašvektorus lineāram operatoram  $\mathcal{A}$ , kura matrica ir

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$



1. Vispirms sastāda un atrisina dotajam lineārajam operatoram atbilstošo raksturīgo vienādojumu.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Izvirzot determinantu, iegūstam vienādojumu  $(2-\lambda)((1-\lambda)^2-9)=0$  jeb  $(2-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-8)=0$ .

Šī vienādojuma saknes ir  $\lambda_1=2$ ,  $\lambda_2=4$ ,  $\lambda_3=-2$ .

Tātad dotajam lineārajam operatoram ir 3 īpašvērtības.

2. Lai atrastu iegūtajām īpašvērtībām atbilstošos īpašvektorus, uzraksta vienādojumu sistēmu (8), kuras nezināmie lielumi ir īpašvektoru koordinātas:

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ (1-\lambda)x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0. \end{cases}$$

3. Šajā vienādojumu sistēmā  $\lambda$  vietā ievieto atrastās īpašvērtības un atrisina sistēmu, lietojot Gausa metodi:

a) ja  $\lambda_1=2$ , tad

$$\begin{cases} 0x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_3 = 0 \\ -4x_3 = 0. \end{cases}$$

Tādējādi atrodam, ka  $x_3=0$ ,  $x_2=0$ , bet  $x_1$  var būt jebkurš reāls skaitlis  $C$ . Izraugoties vērtību  $C=1$ , iegūstam, ka īpašvērtībai  $\lambda_1=2$  atbilst īpašvektors  $\vec{x}^{(1)}=(1; 0; 0)$ ;

b) ja  $\lambda_2=4$ , tad

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Šīs vienādojumu sistēmas atrisinājums ir  $x_1=2$ ,  $x_2=1$ ,  $x_3=1$ , t. i., īpašvērtībai  $\lambda_2=4$  atbilst īpašvektors  $\vec{x}^{(2)}=(2; 1; 1)$ ;

c) ja  $\lambda_3=-2$ , tad

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Sistēmas atrisinājums ir  $x_1=0$ ,  $x_2=-1$ ,  $x_3=1$ . Tātad īpašvērtībai  $\lambda_3=-2$  atbilst īpašvektors  $\vec{x}^{(3)}=(0; -1; 1)$ .

Atbilde: dotajam lineārajam operatoram  $\mathcal{A}$  ir 3 īpašvērtības  $\lambda_1=2$ ,  $\lambda_2=4$ ,  $\lambda_3=-2$ , kurām atbilstošie īpašvektori ir  $\vec{x}^{(1)}=(1; 0; 0)$ ,  $\vec{x}^{(2)}=(2; 1; 1)$ ,  $\vec{x}^{(3)}=(0; -1; 1)$ .

~~~~~

SATURS

III nodaļa. Analītiskā ģeometrija	3
3.1. § Jēdziens par līniju koordinātu plaknē un līnijas vienādojumu	3
1. Analītiskās ģeometrijas priekšmets	3
2. Līnijas vienādojuma sastādīšanas vispārīgā shēma	3
3.2. § Taisne plaknē	4
1. Taisnes virziena lēņķis un virziena koeficients	4
2. Taisnes vienādojuma veidi plaknē	5
3. Divu taisņu savstarpējā stāvokļa pētīšana	9
3.3. § Otrās kārtas līnijas	14
1. Riņķa līnija	14
2. Parabola	16
3. Elipse	21
4. Hiperbola	25
3.4. § Jēdziens par otrās pakāpes vienādojuma reducēšanu kanoniskā veidā	32
1. Problēmas nostādne	32
2. Koordinātu asu paralēlā pārnese	33
3. Koordinātu asu pagriešana	33
4. Vienādojuma pārveidošana, atdalot pilnos kvadrātus	35
5. Vienādojuma pārveidošana, lietojot koordinātu asu pagriešanu	38
3.5. § Jēdziens par līnijas parametriskiem vienādojumiem	40
1. Pamatjautājumi	40
2. Slīpi pret horizontu sviesta ķermeņa trajektorija	40
3. Riņķa līnijas parametriskie vienādojumi	42
4. Elipses parametriskie vienādojumi	42
5. Cikloīda	43
3.6. § Polāro koordinātu sistēma	45
1. Punkta polārās koordinātas	45
2. Sakarības starp punkta Dekarta un polārajām koordinātām	46
3. Līniju polārie vienādojumi	46
3.7. § Jēdziens par virsmu telpā un virsmas vienādojumu	49
1. Virsmas vienādojums. Sfēra	49
2. Plaknes vispārīgais vienādojums	51
3. Plaknes vienādojums koordinātu asu nogriežņos	53
4. Vienādojums plaknei, kas iet caur trim dotiem punktiem	53
5. Lēņķis starp divām plaknēm	54
6. Attālums no punkta līdz plaknei	55
3.8. § Līnija telpā. Taisnes vienādojuma veidi telpā	56
1. Līnija telpā	56
2. Taisnes vispārīgais vienādojums telpā	57
3. Taisnes parametriskie un kanoniskie vienādojums	57
4. Pamatuzdevumi par taisni un plakni	58
3.9. § Cilindriskas virsmas	62

3.10. § Otrās kārtas virsmas	63
1. Elipsoīds	64
2. Viendobuma hiperboloīds	66
3. Divdobumu hiperboloīds	66
4. Eliptiskais paraboloīds	68
5. Hiperboliskais paraboloīds	69
6. Divdobumu konuss	70
IV nodaļa. Lineārās telpas	74
4.1. § Lineāras telpas definīcija, īpašības un piemēri	74
1. Definīcija	74
2. Pamatīpašības	75
3. Piemēri	76
4.2. § Vektoru lineārā atkarība un neatkarība	78
4.3. § Lineārās telpas bāze un dimensija. Vektora koordinātas	80
1. Bāze un dimensija	80
2. Vektora koordinātas	81
4.4. § Bāzes maiņa lineārā telpā. Vektoru koordinātu transformācija	82
1. Vektoru sistēmas matrica	82
2. Pārejas matrica no vienas bāzes uz citu	83
3. Vektora koordinātu transformācija	84
4.5. § Eiklīda telpa	86
1. Definīcija	86
2. Vektora norma jeb modulis	87
3. Leņķis starp vektoriem. Vektoru ortogonalitāte	88
4. Ortogonāla un ortonormēta bāze	89
5. Skalārais reizinājums koordinātu formā ortonormētā bāzē	91
4.6. § Lineārās telpas apakštelpas. Izomorfās telpas	91
1. Apakštelpas definīcija	91
2. Apakštelpas īpašības un darbības ar apakštelpām	92
3. Izomorfās telpas	93
V nodaļa. Lineārās transformācijas	95
5.1. § Lineārs operators un tā matrica	95
1. Definīcija	95
2. Lineāras transformācijas matrica	96
5.2. § Lineārās transformācijas oriģināla un attēla koordinātu sakarības	98
1. Lineārā transformācija vienā bāzē	98
2. Lineārās transformācijas vektors dažādās bāzēs	99
3. Līdzīgas matricas	101
5.3. § Darbības ar lineāriem operatoriem. Inversie operatori	102
5.4. § Lineārā operatora īpašvērtības un īpašvektori	104
5.5. § Ortogonālas matricas un transformācijas	108

SW11.01100
0011111111

Kārlis Šteiners, Biruta Silīna

AUGSTĀKĀ MATEMĀTIKA

Lekciju konspekts

inženierzinātņu un dabaszinātņu studentiem

3. ANALĪTISKĀ ĢEOMETRIJA. 4. LINEĀRĀS TELPAS

5. LINEĀRĀS TRANSFORMĀCIJAS

Redaktori U. Grinfelds, B. Silīna

Māksl. redaktors R. Štrauhs

Tehn. redaktore A. Svilpe

Maketētājs R. Lejasmeiers

Korektore Z. Stikute

Vāku zīm. S. Belsone

Apgāds «Zvaigzne ABC», SIA, K. Valdemāra ielā 105, Rīgā, LV-1013.

Registr. nr. 2-1060. Red. nr. E-528.

A/s «Poligrāfists», K. Valdemāra ielā 6,
Rīgā, LV-1010.

120

OBL
EKSI

LATVIJAS NACIONĀLA BIBLIOTĒKA



0301011614

Kārlis ŠTEINERS, Biruta SILIŅA

L 98-5
30II

AUGSTĀKĀ MATEMĀTIKA

3. Analītiskā ģeometrija

4. Lineārās telpas

5. Lineārās transformācijas

Lekciju konspekts
inženierzinātņu un
dabaszinātņu
studentiem



ZVAIGZNE ABC

ISBN 9984-04-884-5