D. TAIMIŅA

Matemātikas vēsture

D. TAIMIŅA

Matemātikas vēsture

Latvijas Republikas Tautas izglītības ministrija atļāvusi lietot par mācību līdzekli Latvijas augstskolu matemātikas specialitāšu studentiem

Rīga «Zvaigzne» 1990

Учебное издание

Тайминя Дайна Яновна
ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ

Допущено Министерством народного образования Латвийской Республики в качестве учебного пособия для студентов математических специальностей вузов Латвии

Рига, издательство «Звайгзне»
На латышском языке

Mācību izdevums
Taimiņa Daina Jāņa m.
MATEMĀTIKAS VĒSTURE

Redaktors U. Grinfelds. Māksl. redaktors U. Gulbis.
Tehn. redaktore S. Zeltiņa. Korektore I. Liberte.
Vāku zīm. O. Bērziņš.

ИБ № 3779

Nodota salikšanai 04.12.90. Parakstīta iespiešanai 15.10.90. Formāts 60×90/16. Tipogr. papīrs Nr. 1. Literatūras garnitūra. Augstspiedums. 12,5 uzsk. iespiedl., 12,50 uzsk. krāsu novilk., 15,12 izdevn. l. Metiens 3500 eks. Pasūt. Nr. 1203. Cena 80 kap. Izdevniecība «Zvaigzne», 226013, Rīgā, K. Valdemāra ielā 105. Licence Nr. 000065. Izdevn. Nr. 7923/FMĶ-458. Iespiesta tipogrāfijā «Rota», 226011, Rīgā, Blaumaņa ielā 38/40.

Recenzenti: *G. Eņģelis un E. Ģingulis*
Redaktors: *U. Grinfelds*

Taimiņa D.
Ta 170 Matemātikas vēsture: Mācību līdzeklis augstskolām. — R.: Zvaigzne, 1990. — 200 lpp.: il.
ISBN 5—405—00108—2

Grāmatā aplūkota matemātisko jēdzienu un metožu rašanās, matemātikas zinātnes izveidošanās, elementārās matemātikas attīstība, mainīgo lielumu matemātikas rašanās un mūsdienu matemātikas pamatu izveidošanās. Atsevišķās nodaļās īsi aplūkota matemātikas attīstība Padomju Savienībā un Latvijā.

Mācību līdzeklis paredzēts Latvijas augstskolu matemātikas specialitāšu studentiem.

$\text{T}\,\frac{1602010000}{\text{M802(11)—90}}$ 50—89

22.1dz7

I. Matemātikas vēstures priekšmets. Matemātikas attīstības galvenie posmi

Tāpat kā katra zinātne, matemātika sastāv no

a) *faktiem*, kas uzkrāti matemātikas attīstības gaitā (teorēmām un citiem apgalvojumiem, kuru patiesums konstatējams loģisku spriedumu rezultātā),

b) faktu *vispārinājumiem* (matemātikas likumiem un teorijām),

c) *metodoloģijas* (spriedumos un aprēķinos lietojamo matemātisko metožu kopuma).

Visi šie elementi ir savstarpēji saistīti un mainās līdz ar matemātikas attīstību. Matemātikas vēstures uzdevums ir izpētīt šo izmaiņu raksturu un tendences katrā konkrētā vēsturiskā periodā, analizēt matemātisko metožu, jēdzienu, ideju un teoriju rašanos un attīstību, noskaidrot matemātikas attīstības īpatnības atsevišķām tautām noteiktos vēsturiskos periodos, atklāt matemātikas daudzveidīgās saites ar citām zinātnēm un praksi, kā arī noskaidrot ievērojamāko matemātiķu ieguldījumu matemātikas attīstībā, analizējot viņu svarīgākos darbus.

Visām matemātikas nozarēm, lai cik dažādas tās arī būtu, ir kopīgs pētījumu objekts — *reālās pasaules kvantitatīvās attiecības un telpiskās formas*. Matemātikas vēsture analizē arī matemātikas loģiskās struktūras īpatnības atsevišķos laika posmos, matemātikas attīstības dialektiku, dažādu matemātikas nozaru mijiedarbības procesu, palīdz prognozēt matemātikas attīstības perspektīvas.

Akadēmiķis A. Kolmogorovs visu matemātikas vēsturi iedalīja četros posmos:

1) matemātikas jēdzienu rašanās,
2) elementārā matemātika,
3) mainīgo lielumu matemātika,
4) mūsdienu matemātika.

Pirmajā posmā sākotnējie priekšstati par skaitļiem un figūrām pakāpeniski pārveidojās par abstraktiem jēdzieniem. Šie priekšstati radās ilgā vēsturiskā laika posmā, apkopojot ar priekšmetu skaitīšanu un dažādas formas objektu salīdzināšanu iegūto praktiskās darbības pieredzi. Protams, šodien mēs varam vienīgi minēt un izteikt dažādas hipotēzes par to, kā tieši notika šī salīdzināšana un cilvēku apziņā veidojās tādi abstrakti jēdzieni kā «skaitlis» un «figūra», kas paši par sevi dabā neeksistē. Precīzu ziņu par minētajiem procesiem mums nav. Pakāpeniski uzkrājoties zināšanām par skaitļiem un figūrām, veidojoties šiem jēdzieniem to abstraktākajā formā, aizvien biežāk tika izmantoti vienkāršoti shematiski attēli un simboli. Attīstījās rakstība un līdz ar to arī skaitīšanas sistēmas. Pēc tam cilvēki pamazām iemācījās risināt vispārīgākus uzdevumus, nerisināja vairs katru konkrētu viena un tā paša tipa uzdevumu atsevišķi, bet tā vietā meklēja metodi, kā risināt šāda tipa uzdevumus vispārīgajā veidā. Matemātika kā zinātne sāka veidoties tikai tad, kad cilvēki iemācījās lietot simbolus, operēt ar tiem un izmantot tos konkrētu uzdevumu atrisināšanā, kā arī līdzīga tipa uzdevumus apvienot grupās un meklēt vispārīgas metodes to atrisināšanai.

Elementārās matemātikas posms (no VI—V gs. pirms m. ē. līdz XVI gs. ieskaitot) sākās ar uzkrāto zināšanu sistematizēšanu. Šajā posmā veidojās teorētiskā matemātika, tika izstrādātas dažādas pierādījumu matemātiskās metodes, t. i., matemātika kļuva par patstāvīgu zinātni ar savu priekšmetu un metodiku. Šim posmam raksturīgi galvenokārt panākumi konstantu lielumu izpētē, un tas beidzās, kad par matemātikas galveno objektu kļuva kustības procesa izpēte.

Mainīgo lielumu matemātika (no XVII gs. līdz XIX gs. vidum) sākās ar mainīgo lielumu pētīšanu (R. Dekarta analītiskajā ģeometrijā) un diferenciālrēķinu un integrālrēķinu radīšanu (I. Ņūtona un G. V. Leibnica darbos). Šajā posmā veidojās mūsdienu matemātikas klasiskais pamats. Matemātikā nostiprinājās nepārtrauktības ideja, kuru izteica jau senie grieķi, tika precīzi formulēts funkcionālās atkarības jēdziens, attīstījās kustības analīzes matemātiskās metodes.

Mūsdienu matemātikas aizsākumi datējami ar XIX gs. vidu. Šim posmam raksturīga matemātikas satura bagātināšanās, kuras rezultātā matemātika kā zinātne plaši sazarojās. Ļoti strauji paplašinājās matemātikas lietojumi. Svarīgu lomu guva matemātikas pamatojumu problēmas (nepretrunība, pamatpieņēmumu pilnība). XX gs. divdesmitajos gados matemātiskās loģikas ietvaros izveidojās algoritmu teorija, kura kļuva par pamatu matemātikas virzieniem, ko tagad mēdz saukt par teorētisko programmēšanu, informātiku jeb kompjūteru zinātni (angliski «computer science»). Būtībā visa matemātika ir saistīta ar dažādiem algoritmiem. Taču tikai pēc algoritma jēdziena formalizēšanas kļuva iespējams atklāt algoritmiski neatrisināmu problēmu eksistenci algebrā, skaitļu teorijā, topoloģijā, varbūtību teorijā un citās matemātikas nozarēs.

2. Pirmo matemātisko jēdzienu un metožu rašanās

Lai skaitītu, jābūt ne tikai priekšmetiem, ko skaitīt, bet arī spējai abstrahēties no šo priekšmetu konkrētajām īpašībām. Taču šāda spēja uzreiz nerodas.

Pirmatnējo cilvēku domāšana bija ļoti konkrēta, tā ietvēra tikai tos priekšmetus un notikumus, kuri tieši skāra un ietekmēja viņu dzīves norisi. Pat tad, kad pirmatnējais cilvēks jau bija uzkrājis zināšanas, kas radās, vērojot apkārtējos priekšmetus un likumsakarības dabā notiekošajos procesos, viņa matemātiskās zināšanas tomēr bija ļoti niecīgas. Sākotnēji šīs zināšanas aprobežojās ar prasmi novērtēt priekšmetu skaitu — viens priekšmets, divi priekšmeti, trīs priekšmeti, daudz priekšmetu. Skaitlim 2 ir arī kvalitatīva izcelsme, jo tas vienlaikus apzīmēja priekšmetu pāri — divas rokas, divas kājas (acis, ausis), divi spārni utt. Par to liecina arī daudzās valodās saglabājies divējādais skaitļa 2 izteikšanas veids — divi un pāris.

Kamēr cilvēku kopienu dzīve bija primitīva un to darbība aprobežojās tikai ar pārtikas iegūšanu, medniecību un zvejniecību, skaitlisko lielumu un telpisko formu izpratne attīstījās lēni. Stāvoklis mainījās, kad cilvēku pasīvo attieksmi pret dabu nomainīja aktīva attieksme, ar kuru sākās jauns akmens laikmeta periods — neolīts. Attīstoties zemkopībai, cilvēki arvien ilgāk mēdza apmesties vienā vietā un sāka būvēt mitekļus, lai aizsargātos no plēsīgiem zvēriem un nelabvēlīgiem laika apstākļiem. Sāka veidoties kolektīvas apmetnes, iesākās arī darba dalīšana. Šajā laikā attīstījās maiņas tirdzniecība — vispirms starp atsevišķiem ciemiem, vēlāk arī starp novadiem, kurus šķīra simtiem kilometru liels attālums. Šādi kontakti starp dažādām kopienām un ciltīm paātrināja valodas attīstību. Sākotnēji valodā bija vārdi tikai konkrētu lietu un parādību apzīmēšanai, taču vēlāk jau sāka uzkrāties vārdi abstraktu jēdzienu apzīmēšanai.

Arodu un tirdzniecības attīstība sekmēja arī skaitļa jēdziena attīstību. Cilvēki iemācījās skaitļus grupēt un apvienot lielākās vienībās — pa pieci (tik, cik rokai ir pirkstu), pa desmit (tik, cik pirkstu ir divām rokām). Šādas skaitīšanas vienības bija sevišķi izplatītas maiņas tirdzniecībā. Sāka attīstīties arī skaitļu simboliskie «pieraksti», jo radās nepieciešamība skaitļus «atcerēties», «fiksēt» (cik priekšmetu iemainīts, cik priekšmetu pircējs palicis parādā u. tml.). Skaitļu pierakstam sākumā izmantoja vienāda lieluma nūjiņas, kuras saseja kūlīšos. Faktiski tas bija piekārtojums — katram priekšmetam tika piekārtota viena nūjiņa. Nākamais solis piekārtojuma vienkāršošanā bija jau tuvāks skaitļu simboliskajam pierakstam — nūjā iegriezti robi, plāksnītē ievilktas svītras, virvē iesieti mezgli, vienādas formas akmentiņu vai gliemežvāku kaudzītes utt. Pamazām materiālais skaitļu attēlošanas veids pārveidojās par simbolisko pierakstu.

Līdz ar maiņas tirdzniecības attīstību radās arī nepieciešamība salīdzināt priekšmetu garumus, tilpumus. Pirmās mērvienības nebija pilnīgi precīzi un viennozīmīgi noteiktas — garuma vienības bija saistītas ar pašu cilvēku (attālumu mērīja soļos, lielākus attālumus mērīja dienās — cik dienās cilvēks šo ceļu var veikt, priekšmetu garumu izteica sprīžos, olektīs utt.).

Neolīta cilvēkam bija laba ģeometriskās formas izjūta. Māla trauku apdedzināšana un izkrāsošana, grozu un audumu izgatavošana, vēlāk metāla apstrāde izveidoja priekšstatu par plakanu un telpisku priekšmetu attiecībām. Neolītiskajos ornamentos atspoguļota figūru vienādība, simetrija un līdzība.

Akmens laikmeta reliģijā atrodami pirmie mēģinājumi stāties pretī dabas spēkiem. Reliģiskās paražas bija saistītas ar maģiju, maģiskais elements ietilpa arī tā laika ģeometriskajos priekšstatos un izpaudās skulptūrā un zīmējumos. Dažiem skaitļiem tika piedēvētas mistiskas īpašības, tādi bija t. s. maģiskie skaitļi 3, 4, 7. Līdz ar reliģijas rašanos radās arī jauni abstrakti jēdzieni (piemēram, dievība, augstākās varas sods, pirmās morāles kategorijas — labs, ļauns). Jāatzīst, ka tas sekmēja domāšanas attīstību.

Pat pašās atpalikušākajās ciltīs atrodam kaut kādu laika atskaiti un dažas ziņas par Saules, Mēness un zvaigžņu kustību. Astronomiskie novērojumi deva atsevišķas ziņas par leņķiem, radās nepieciešamība izpētīt sfēras un riņķa īpašības.

3. Matemātika Senajos Austrumos

Uz jaunā akmens laikmeta kopienu pamata, sākot ar 6. gadu tūkstoti pirms mūsu ēras, lielo Āfrikas un Āzijas upju — Nīlas, Tigras, Eifratas, Indas, vēlāk — Gangas, Huanhe, vēl vēlāk — Jandzi tuvumā veidojās jaunas, pilnīgākas sabiedrības formas. Radās privātīpašums uz ražošanas līdzekļiem, sabiedrība sadalījās šķirās. Ar 4. gadu tūkstoti pirms mūsu ēras Ēģiptē un Mezopotāmijā, Ķīnā un Indijā, bet vēlāk Aizkaukāzā un Vidusāzijā radās un attīstījās despotiskās vergturu valstis. Līdzīgs process, kaut arī ievērojami vēlāk, norisa rietumu puslodē maiju, inku un acteku ciltīs.

Piekrastes zemēs lielo upju rajonos varēja iegūt bagātīgas ražas, ja vien pareizi organizēja apūdeņošanu un nosusināja purvus. Gadsimtu gaitā tika uzcelti vaļņi un dambji, radot kanālu un ūdenskrātuvju tīklu. Ūdens apgādes regulēšana prasīja iedzīvotāju kopīgus pūliņus plašos rajonos. Radās centralizēta vadība. Paaugstinājās iedzīvotāju dzīves līmenis, izveidojās arī pilsētu aristokrātija. Radās jaunas profesijas — amatnieki, karavīri, rakstveži, priesteri. Ēģiptē apūdeņošanas un lauksaimniecības darbu valstiskā organizācija, nodokļu savākšana un uzskaite noritēja plānveidīgi un to vadīja speciāli apmācīti cilvēki. Viņu darbs būtu pilnīgi neiedomājams bez aritmētisko un ģeometrisko pamatfaktu sistematizācijas, bez to teorētiskas vispārināšanas. Kur tad vēl varenie arhitektoniskie veidojumi! Heopsa piramīda tika uzcelta apmēram 3,5 tūkstošus gadu pirms mūsu ēras, tādējādi jau tajā laikā ēģiptiešu matemātikai vajadzēja būt ievērojami augstā līmenī. Diemžēl par šo laiku ir gaužām maz ziņu.

Senajos Austrumos grūti datēt atklājumus. Sabiedriskās iekārtas statiskā rakstura dēļ zinātnes atziņas saglabājās bez pārmaiņām gadsimtiem un pat gadu tūkstošiem ilgi. Atklājumus, kurus izdarīja vienā pilsētā, varēja nezināt citās vietās. Zinātniskās un tehniskās informācijas glabātuves bieži tika iznīcinātas karos un plūdos, mainoties valdnieku dinastijām.

Citas grūtības austrumu zinātnes atklājumu datēšanā saistītas ar materiālu, kuru izmantoja pierakstiem. Divupes tautas rakstīja uz māla plāksnītēm, kuras pēc tam apdedzināja, tādējādi padarot tās praktiski nesagraujamas. Diemžēl daļa šo plāksnīšu pēc to atrašanas netika rūpīgi uzglabātas un tāpēc gāja bojā. Ēģiptieši lietoja papirusu, un tāpēc liela daļa ēģiptiešu rakstu pieminekļu ir saglabājusies sausā klimata apstākļos. Ķīnieši un indieši lietoja daudz neizturīgāku materiālu — koka mizu vai bambuku.

Par vēlāko laiku vēstī Rainda un Maskavas papirusi. (Rainda papiruss ir 5,5 m garš un 0,32 m plats, satur 84 uzdevumus; Maskavas papiruss ir 5,5 m garš un 8 cm plats, tajā ir 25 uzdevumi.)

Tie, protams, nav nekādi zinātniskie traktāti, bet gan praktiskas «rokasgrāmatas». Mums tie ir ēģiptiešu matemātikas paraugi.

Seno ēģiptiešu numerācijas sistēma palika nemainīga trīs tūkstošus gadu, mainījās tikai skaitļu apzīmējumu forma. Tāpat kā daudzās citās numerācijās, arī ēģiptieši vieninieku apzīmēja ar vertikālu svītriņu. Šāds apzīmējums droši vien radies tāpēc, ka sākotnēji priekšmetu skaitu atzīmēja ar iegriezumiem vai svītriņām. Hieroglifiskajai desmitnieka zīmei ∩ varbūt bija arī kāda īpaša nozīme, taču tas nav zināms. Simta apzīmējums nozīmēja «mērāmā virve», tūkstoša apzīmējums — «lotosa zieds», desmittūkstoša — «uz augšu pacelts pirksts». Veselo skaitļu rakstībā stingri tika ievērots pozicionālais princips.

Visas aritmētiskās darbības ēģiptieši centās reducēt uz saskaitīšanu. Piemēram, reizināšanā tika izmantots viena reizinātāja dubultošanas princips un pēc tam piemērotu starprezultātu saskaitīšana:

(12·12)	1	12	(17·19)	*1	19
	2	24		2	38
	*4	48		4	76
	*8	96		8	152
		144		*16	304
					323

Pirmajā solī tiek uzrakstīts reizinātājs (otrajā stabiņā), pirmajā stabiņā atzīmējot, ka šis reizinātājs ņemts vienu reizi. Otrajā solī notiek dubultošana (t. i., gan pirmajā, gan otrajā stabiņā pierakstītie skaitļi tiek saskaitīti paši ar sevi). Tāda dubultošana tiek izdarīta tik ilgi, kamēr pirmajā stabiņā ir iegūti skaitļi, kurus summējot dabū reizināmo. Minētie skaitļi ir atzīmēti ar zvaigznītēm. Reizinājumu ieguva, saskaitot šiem skaitļiem atbilstošos skaitļus otrajā stabiņā.

Liekas, ka dalīšana ēģiptiešiem bijusi pati grūtākā darbība. Tās izpildīšanai tika lietoti visdažādākie paņēmieni, līdzīgi kā reizināšanā rakstot skaitļus divos stabiņos. Otrajā stabiņā rakstīja dalītāju, kuru pēc vajadzības gan dubultoja, gan meklēja tā pusi, ceturtdaļu utt., atzīmējot pirmajā stabiņā attiecīgi 2, $^1/_2$, $^1/_4$ utt. Tā turpināja tik ilgi, kamēr otrajā stabiņā ieguva skaitļus, kurus saskaitot dabū dalāmo (piemēros šie skaitļi atzīmēti ar zvaigznīti). Dalījumu ieguva, saskaitot šiem skaitļiem atbilstošos skaitļus pirmajā stabiņā. Dažreiz kā starprezultāts tika meklētas skaitļa divas trešdaļas vai viena desmitdaļa. Rezultāti atstāti ēģiptiešu pierakstam atbilstošā formā:

(19:8)	1	8	(16:3)	1	3*	(4:15)	1	15
	2	16*		2	6		$^1/_{10}$	$1^1/_2$
	$^1/_2$	4		4	12*		$^1/_5$	3*
	$^1/_4$	2*		$^2/_3$	2		$^1/_{15}$	1*
	$^1/_8$	1*		$^1/_3$	1*			

$19:8=2+{}^1/_4+{}^1/_8$ $\quad 16:3=5+{}^1/_3$ $\quad 4:15={}^1/_{15}+{}^1/_5$

Lai izpildītu darbības ar daļām, ēģiptieši visas daļas reducēja uz t. s. pamatdaļu summu, t. i., uz tādu daļu summu, kuru skaitītājs ir 1. Vienīgais izņēmums bija daļa $^2/_3 = 1 - ^1/_3$, kuru apzīmēja ar īpašu simbolu. Rainda papirusā ir tabula, kurā doti visu nepāra skaitļu no 5 līdz 331 izvirzījumi pamatdaļās.

Daudzi ēģiptiešu risinātie uzdevumi bija ļoti vienkārši un reducējās uz lineāru vienādojumu ar vienu nezināmo. Nezināmo apzīmēja ar hieroglifu «kaudze» (lasīja «hau» vai «aha»). Tāpēc ēģiptiešu algebru dažreiz sauc par «hau-rēķiniem». Uzdevumos runa ir par maizes daudzumu un dažādām alus šķirnēm, par dzīvnieku barošanu un graudu glabāšanu. Atsevišķos uzdevumos vajadzēja izmantot aritmētisko vai ģeometrisko progresiju. Tāds, piemēram, ir uzdevums «sadalīt simts klaipus pieciem cilvēkiem tā, lai skaitļa 100 daļas veidotu aritmētisku progresiju un lai viena septītdaļa no trīs lielāko daļu summas būtu vienāda ar divu mazāko daļu summu». Dažiem uzdevumiem bija ģeometrisks saturs, un tie attiecās galvenokārt uz mērījumiem. Trijstūra laukums tika atrasts kā pamata un augstuma reizinājuma puse; riņķa laukumu, ja šī riņķa diametrs ir d, aprēķināja kā izteiksmes $(d+7d/9)^2$ vērtību, tādējādi iegūstot π vērtību $256/81=3{,}1605$. Tika lietotas arī atsevišķas formulas kuba, paralēlskaldņa un riņķa cilindra tilpuma aprēķināšanai, visus šos ķermeņus uzskatot par traukiem. Ievērojamākais rezultāts ēģiptiešu mērījumos bija nošķeltas piramīdas tilpuma aprēķināšanas formula

$$V=h/3\,(a^2+ab+b^2),$$

ja piramīdas augstums ir h, bet tās pamati ir kvadrāti, kuru malu garumi ir a un b. Ēģiptieši ir zinājuši arī formulas

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2.$$

Būtu nepareizi uzskatīt, ka ēģiptiešu zināšanas aprobežojās vienīgi ar to, kas ir lasāms atrastajos papirusos. Šie papirusi noderēja arī kā elementārs skolas mācību līdzeklis. Bet, tā kā apmācība reducējās uz iemācīšanos no galvas, tad ir dabiski, ka šajos papirusos izklāstītas gatavas receptes, bet ne veids, kā šīs receptes iegūtas. Protams, daudzus likumus ēģiptieši ieguva empīriskā ceļā, bet viņu matemātikā parādās jau arī teorētiski spriedumi. Piemēram, lai iegūtu nošķeltas piramīdas tilpuma formulu, nepietika vairs tikai ar mērījumiem, bija vajadzīgi arī teorētiski spriedumi. Kaut gan senajiem ēģiptiešiem nebija algebrisku formulu, tomēr viņi izmantoja dažus vispārīgus paņēmienus, lai risinātu viena un tā paša tipa uzdevumus. Šos paņēmienus droši var saukt par algebriskās metodes sākumu. Ēģiptiešu astronomiskajos mērījumos varam atrast aizsākumu arī trigonometriskajām tabulām.

Ēģiptiešu matemātika visā savā daudzus tūkstošus gadu ilgajā attīstības laikā, tāpat kā visa ēģiptiešu kultūra, atstāja lielu ietekmi uz to valstu zinātnes attīstību, ar kurām senajai Ēģiptei bija sakari, īpaši uz grieķu matemātiku.

4. Senās Babilonijas matemātika

Ar terminu «babiloniešu matemātika» apzīmē matemātisko kultūru, ko radījušas Mezopotāmijas (Divupes) tautas, kuras ietilpa Babilonijas valsts sastāvā. Par to, kā attīstījās šī kultūra, mēs zinām ļoti maz, bet, neapšaubāmi, tā sasniedza augstu līmeni jau pirms Divupes tautu apvienošanās. Babiloniešu matemātiku, tāpat kā visu babiloniešu kultūru, pārņēma Babilonijas valsts iekarotāji, un tā turpināja attīstīties līdz pat hellēnisma laikmetam. Ar asīriešu un persiešu starpniecību tālāk izplatījusies pasaulē, babiloniešu kultūra visur atstāja jūtamu ietekmi. Tā, piemēram, ķīļraksts izplatījās līdz Vidusāzijai, sasniedzot Indijas robežas. Acīmredzot arī matemātiskajai kultūrai bija tikpat liela izplatība. Katrā ziņā tās ietekme nonāca līdz Armēnijai.

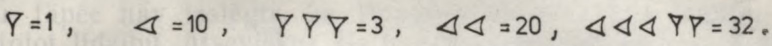
Līdz mūsu laikiem saglabājušies simtiem tūkstoši babiloniešu ķīļrakstu tekstu; visagrākie attiecas uz apmēram XXXV gs. pirms m. ē., vēlākie — uz mūsu ēras I gs. Ķīļrakstu tekstu atšifrēšana sākās pagājušā gadsimta piecdesmitajos gados, kad angļu zinātnieks Hinks atšifrēja vienu plāksnīti, kas atradās Britu muzejā. Šajā tekstā bija dota tabula, kā katru dienu pieaug mēness redzamā daļa no jauna mēness līdz pilnam mēnesim. Hinks norādīja, ka tabulu pareizi saprast var tikai tad, ja skaitļus, kas tajā ierakstīti, lasa sešdesmitnieku sistēmā. Tā pirmo reizi tika atklāta šī ievērojamā numerācijas sistēma, par kuru dīvainā kārtā nav saglabājušies nekādi norādījumi mums pieejamos grieķu un romiešu pirmavotos.

1884. un 1895. g. franču ekspedīcijas atklāja milzīgu senās šumeru pilsētas Lahašas saimniecības dokumentu arhīvu. Starp šiem dokumentiem bija daudz dažādu rēķinu, zemes gabalu plānu ar dotiem izmēriem un laukumu aprēķiniem.

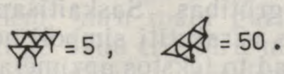
Vēl lielāka nozīme matemātikas vēsturē bija izrakumiem, ko izdarīja Pensilvānijas (ASV) universitātes ekspedīcija 1898.—1900. g. Nipurā. Enlila templī tika atrasta milzīga bibliotēka, kas aizņēma vairāk nekā 80 istabas. Tika atrastas arī skolas telpas, kurās saglabājušies mācību līdzekļi un skolnieku vingrinājumi rakstos, gramatikā, matemātikā un astronomijā. Vēlāk tika atrastas vairāk nekā 150 matemātiskas tabulas. Kaut cik precīzi datēt šīs tabulas nav iespējams. Katrā ziņā senākās tabulas attiecas uz apmēram XX gs., bet vēlākās — uz II gs. pirms m. ē. No šīm matemātiskajām tabulām varēja izdarīt dažus slēdzienus par babiloniešu aprēķinu tehniku. Pētnieku interesi saistīja jautājums par sešdesmitnieku sistēmas rašanos. Dabiski, ka tikai pēc tabulām vien nevarēja gūt pilnīgu priekšstatu par babiloniešu matemātisko kultūru. Vācu zinātniekam O. Noigebaueram, kurš savus darbus par Babilonijas matemātikas vēsturi sāka publicēt 1927. g., izdevās pilnīgi pārtulkot agrāk publicētos tekstus. Izrādījās, ka senās babiloniešu skolas skolnieki jau vismaz 1000 gadu pirms Pitagora prata risināt pilnus kvadrātvienādojumus un uzdevumus, kuros bija jālieto Pitagora teorēma. Pēc tam kad matemātisko tekstu terminoloģija bija atšifrēta, tālākā tekstu lasīšana veicās jau daudz ātrāk.

1935. g. ir publicēts Noigebauera fundamentāls pētījums, kurā analizēti 250 dokumenti, no kuriem apmēram 200 bija matemātiskas tabulas, bet pārējie 50 — uzdevumu un piemēru teksti, dažkārt ar atrisinājumiem, bet dažkārt arī bez tiem. Kopējais atrisināto uzdevumu skaits šajās plāksnītēs ir apmēram 500. Tik daudz teksta mazajās plāksnītēs varēja ierakstīt, tikai pateicoties rakstītāja ļoti ekonomiskajai rīcībai. Par to liecina šāds piemērs: lai vienu no tekstiem, kurš ir uzrakstīts uz 5×5 cm lielas plāksnītes, uzrakstītu transkripcijā ar latīņu burtiem, vajadzētu vismaz 70 rindas; šī paša teksta tulkojums aizņemtu 2,5 lappuses! Jāpiebilst gan, ka 5×5 cm izmēri ir tikai pašām mazākajām plāksnītēm, lielāko formāts ir 20×20 cm.

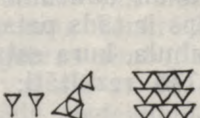
Babiloniešu matemātiskajos tekstos skaitļi no 1 līdz 59 pierakstīti decimālajā sistēmā — tieši tāpat, kā to darīja ēģiptieši. Tikai zīmju forma ir savādāka, proti,



Ja desmitu vai vienu skaits skaitlī pārsniedza trīs, babilonieši lietoja saīsinātu pierakstu, zīmes apvienojot grupās (kaut arī pamatzīmes joprojām ir viegli atšķiramas), piemēram,



Sākot ar 60, skaitļa pieraksts mainās. Skaitlis 60 tiek attēlots ar to pašu vertikālo ķīli kā vieninieks. Piemēram, skaitļa $169=2\cdot60+49$ pieraksts ir šāds:



Tādējādi babilonieši lietojuši jaukto numerāciju — tajā apvienotas decimālā un sešdesmitnieku sistēmas. Šajā sistēmā desmitniekam ir īpašs apzīmējums, turpretī sešdesmitnieku sistēmā tiek ievērots vienīgi pozicionālais princips. Tomēr jāatzīmē, ka jebkura skaitļa K pieraksts tikpat labi izlasāms kā $K\cdot60$, $K\cdot60^2$, $K\cdot60^3$ utt., jo nav noteikta K pozīcija. Konkrētā gadījumā pareizu skaitļa izlasīšanu noteica uzdevuma teksts.

Runājot par daļām babiloniešu pierakstā, jāatzīmē, ka babilonieši nepazina nekādas citas daļas kā tikai daļas ar saucēju 60^k.

Izņēmums ir divas trešdaļas un viena puse, kurām bija speciāli apzīmējumi.

Sešdesmitnieku daļu sistēma bija ne tikai babiloniešu kultūras nacionāls sasniegums, to aizguva arī grieķu astronomi, lai mērītu leņķus un laiku. No šīs sistēmas mēs neatsakāmies arī vēl šodien, domājams, ka arī nākotnē stundu dalīsim 60 minūtēs.

Svarīgs solis pozicionālās numerācijas attīstībā bija nulles izgudrošana. Jau no bērnības pieraduši lietot nulli kā ciparu, kas līdzvērtīgs pārējiem deviņiem cipariem, mēs parasti nenovērtējam šo izcilo cilvēces kultūras sasniegumu. Šodien lietojamās numerācijas sistēmās (decimālajā, binārajā u. c.) kādas šķiras vienības iztrūkumu skaitļu pierakstā parādām ar ciparu «nulle» šajā šķirā. Senatnē ar cipariem (zīmēm) sākotnēji apzīmēja noteiktu skaitu priekšmetu, cilvēku, naudas u. tml., tātad to, «kas ir». Iespējams, ka bija zināma psiholoģiska barjera, lai radītu zīmi, kas apzīmētu to, «kā nav». Nulles lietošana pirmoreiz atrasta indiešu avotos, tajos nulli apzīmēja līdzīgi kā tagad — ar aplīti. Vēl agrāk aplīti lietoja grieķu astronomi, lai apzīmētu «izlaidumu» sešdesmitnieku daļā, kaut arī īpašas nepieciešamības pēc tāda apzīmējuma nebija, jo katrai šķirai pierakstīja tās nosaukumu (minūtes, sekundes utt.) ar attiecīgu skaitu svītriņām (prim). Nulles vietā babiloniešu tekstos tika lietota zīme $\substack{\triangleleft \\ \triangleleft}$.

Diezgan ilgu laiku Divupes tautu matemātiskajos tekstos bija nenoteiktība cipara (zīmes) vērtības noteikšanā. Vēlāk nulles apzīmējums nostabilizējās, un tā lietošana nodrošināja tabulu lasīšanas viennozīmīgumu.

Jebkuru skaitļu saskaitīšana un atņemšana babiloniešiem nevarēja radīt nekādas grūtības. Saskaitīšanas darbībai speciālas zīmes nebija, divi blakus uzrakstīti simboli nozīmēja to summu. Kas attiecas uz atņemšanu, tad to tekstos apzīmēja ar vārdiem.

Pavisam citādi ir ar reizināšanu un dalīšanu. Ja ēģiptieši šīs darbības reducēja uz pakāpenisku dubultošanu (vai puses atrašanu), tad babilonieši reizināšanu un dalīšanu izpildīja pa šķirām. Babiloniešu reizināšanas princips ir tāds pats kā mūsējais. Bet, ja mums ir jāatceras reizināšanas tabula, kura satur 45 rezultātus, tad babiloniešiem būtu jāatceras 1770 rezultāti. Dabiski, viņiem vajadzēja lietot reizināšanas tabulas.

Cik varam spriest pēc materiāliem, kas saglabājušies līdz mūsu dienām, bija divu dažādu veidu tabulas: 1) uz vienas liela izmēra māla plāksnes abām pusēm kompakti sakārtotas daudzas reizināšanas tabulas, no kurām katra deva kāda skaitļa reizinājumu ar vairākiem reizinātājiem, turpat bija dotas arī apgriezto lielumu tabulas, kvadrātu tabulas utt., 2) katra atsevišķa plāksnīte saturēja tikai vienu galveno skaitli un tā dažādos reizinājumus. Nekādas principiālas atšķirības starp šīm tabulām nebija.

Dalīšana tika reducēta uz reizināšanu ar apgriezto skaitli. Ja apgriezto skaitli nevarēja iegūt precīzi, tad to noapaļoja.

Dažās plāksnītēs ir formulēti uzdevumi un doti to pilnīgi atrisinājumi, citās uzdevumu atrisinājumi nav doti. Skaitļi uzdevumos izraudzīti tā, lai atvieglotu risināšanu ar tabulu palīdzību. Viena un tā paša veida uzdevumi grupēti pēc grūtības pakāpes, sākot ar vieglākajiem un pakāpeniski pārejot uz grūtākiem uzdevumiem.

Starp aritmētiskajiem uzdevumiem ir daudz uzdevumu par procentu rēķiniem. Šajos uzdevumos pēc dotā naudas daudzuma, kas jāmaksā procentos, vajadzēja noteikt sākotnējā kapitāla lielumu, atrast, pēc cik gadiem kapitāls palielināsies līdz dotajai summai, u. tml. Šādus uzdevumus risināja aritmētiski, soli pa solim aprēķinot attiecīgo aritmētisko vai ģeometrisko progresiju locekļus.

Daudzus vienkāršākos ģeometrijas uzdevumus (zemes gabalu dalīšanai nepieciešamo garumu un laukumu noteikšanu vai dažādu tilpumu aprēķināšanu) babilonieši risināja ar aritmētiskiem paņēmieniem. Tie bija tādi ģeometrijas uzdevumi, kurus šodien risinām, izmantojot lineārus vienādojumus ar vienu nezināmo vai lineāru vienādojumu sistēmas ar vairākiem nezināmajiem. Bet babilonieši pat tad, kad nezināmo skaits bija pieci, rīkojās vienīgi ar dotajiem zināmajiem lielumiem, bet ne ar nezināmajiem, kā tas pieņemts algebrā.

Jau vairāk nekā 1000 gadu pirms Pitagora babiloniešiem bija pazīstama teorēma par taisnleņķa trijstūra katetēm un hipotenūzu (Pitagora teorēma). Babilonieši plaši lietoja ģeometrisko figūru līdzību, tāpēc nav izslēgts, ka Pitagora teorēma bija iegūta, tieši izmantojot līdzību. Atsevišķus šīs teorēmas gadījumus varēja atrast vai nu aritmētiski, aplūkojot kvadrātu tabulas, vai arī uzskatāmi ģeometriski. Piemēram, grīdu klājumos babilonieši izmantoja ornamentus, kurus ieguva, kvadrātu ar tā diagonālēm sadalot taisnleņķa trijstūros.

Liela interese babiloniešiem bija par t. s. Pitagora trijstūriem, t. i., taisnleņķa trijstūriem, kuru malu garumi ir veseli skaitļi. Ir atrasta tabula, kurā doti 15 šādu trijstūru malu garumi. Acīmredzot šos trijstūrus izmantoja praktiskiem mērķiem. Šādas tabulas liecina arī par to, ka babiloniešiem bija samērā dziļa izpratne dažos skaitļu teorijas jautājumos.

Risinot «kvadrātvienādojumus» (kā mēs tos tagad saucam), babilonieši abstrahējās no uzdevuma konkrētā, praktiskā satura. Kaut gan babilonieši nelietoja algebras simboliku, tomēr uzdevumus viņi risināja vai nu algebriski, vai arī ar dažādiem paņēmieniem reducējot doto uzdevumu uz tādu uzdevumu, kura atrisināšanai bija zināmi vispārīgi paņēmieni, kurus tagad mēs sauktu par formulām.

Nevienā no līdz šim atklātajiem babiloniešu matemātiskajiem tekstiem nav atrasts skaitļa kvadrātsaknes aprēķināšanas metodes apraksts un pamatojums, ir tikai norādījumi («receptes») «dari tā un tā». Spriežot pēc šiem norādījumiem, var izdarīt pieņēmumu, ka babilonieši skaitļa kvadrātsakni rēķināja aptuveni pēc algoritma $\sqrt{c}=\sqrt{a^2+b}\approx a+b/2a$, kur a^2 ir vislielākais pilnais kvadrāts (naturāla skaitļa kvadrāts), kuru satur skaitlis c. Babiloniešu aprakstīto kvadrātsaknes aprēķināšanas paņēmienu pēc 2000 gadiem lietoja Ptolemajs, sastādot tabulas.

Apmēram pirms 4000 gadiem babilonieši zināja jau daudzas aprēķinu metodes un viņiem bija arī samērā liels ģeometrisko zināšanu krājums. Babilonieši radīja pozicionālo numerācijas sistēmu, prata atrisināt otrās pakāpes vienādojumus un vienādojumu sistēmas, bija izstrādājuši diezgan vispārīgas zināmu un nezināmu lielumu identisko pārveidojumu metodes. Plaši lietojot palīgmainīgo metodi, babilonieši risināja arī trešās pakāpes vienādojumus. Visi aprēķini tika reducēti uz tabulu lietošanu, tādējādi atvieglojot aprēķinātāja darbu.

Kā redzējām, aprēķinus divās lielajās senatnes valstīs veica pavisam atšķirīgi. Tas ir pilnīgi saprotami, jo babiloniešu rēķināšanas tehnika radās specifiskos vēsturiskos apstākļos, kādu nebija Ēģiptē, bet tās praktiskās vajadzības, kuras risināja ar matemātikas palīdzību, bija vairāk vai mazāk līdzīgas abās zemēs. Kā Ēģiptē, tā arī Babilonijā bija vajadzīga prasme aprēķināt figūru laukumus, noteikt ķermeņu tilpumus. Ēģiptieši šajā jomā sasniedza tādus pašus, ja ne augstākus rezultātus kā babilonieši: riņķa laukums ēģiptiešu tekstos tika aprēķināts daudz precīzāk, nošķeltas piramīdas tilpuma aprēķināšanai ēģiptieši lietoja precīzu formulu. Vai šāda formula bija zināma arī babiloniešu matemātikā, nav zināms.

Saimnieciskās un juridiskās attiecības starp cilvēkiem kā Ēģiptē, tā Babilonijā radīja vairākus tipiskus aritmētiskus uzdevumus. Tādi, piemēram, ir uzdevumi par aritmētisko un ģeometrisko progresiju. Arī pēc izklāsta formas babiloniešu un ēģiptiešu matemātiskie teksti ir pārsteidzoši līdzīgi viens otram: kā vienos, tā otros risinājums izklāstīts dogmatiskā formā; nav ne pierādījuma par atrisinājuma pareizību, ne atsevišķu soļu jēgas skaidrojuma, ne nosacījumu analīzes.

Šī izklāsta dogmatiskā forma nebūt nenozīmē, ka netika veikti teorētiski pētījumi, un tāpēc tā nevar būt par argumentu, lai secinātu, ka seno ēģiptiešu matemātika bija primitīva. Šo formu noteica apmācības metodes un viss sabiedriskās dzīves veids Senajos Austrumos. Tur, kur visi amati tika mantoti, eksistēja ne tikai caru dinastijas, bet arī priesteru un ierēdņu dinastijas, tāpēc apmācībai bija jābūt ar autoritāru raksturu.

Vairāk nekā pusotra gadu tūkstoša laikā izklāsta forma babiloniešu matemātiskajos tekstos maz mainījās.

Pierādījumam īpaša vērība tika veltīta tikai seno grieķu matemātikā. Grieķu valsts dzīvē ilgāku laiku bija raksturīga sabiedrisko formu laušana. Vētrainās sadursmēs starp šķiru un partiju grupām īpaša nozīme bija pārliecībai un tās pierādījumam. Tas izpaudās ne tikai politisko oratoru runās, bet arī tiesu procesos un filozofiskajos strīdos, kā arī zinātniskajos darbos. Raksturīgi, ka hellēnisma laikmeta ievērojama daļa grieķu matemātisko sacerējumu, kas uzrakstīti Ēģiptes teritorijā, pēc izklāsta formas gandrīz neatšķiras no seno ēģiptiešu tekstiem. Tas attiecas gandrīz uz visiem sacerējumiem, kas veltīti matemātikas praktiskajiem lietojumiem. Tātad dogmatiskā izklāsta forma nebūt nenozīmē, ka tajā laikā neeksistēja teorētiskā zinātne.

5. Matemātika Senajā Grieķijā

Senajā Grieķijā radās zinātne, kuras pamatā bija stingri pierādījumi. Šis svarīgais pagrieziens zinātnes vēsturē notika VI—V gs. pirms m. ē., tajā pašā laikā, kad radās demokrātiskā valsts iekārta un tika sarakstītas pirmās traģēdijas un komēdijas.

Sengrieķu vergturu valstis, kuras izveidojās VIII—VI gs. pirms m. ē., bija t. s. polises — patstāvīgas pilsētas. Galvenās no tām bija Mazāzijas rietumu piekrastes vidusdaļas Jonijas tirdzniecības centri, kuri atradās uz ceļiem starp Ēģipti, Mezopotāmiju un Skitiju. Pašas Grieķijas piekrastē vadošā loma bija Korintai, vēlāk Atēnām; Itālijā — Krotonai un Tarentai, Sicīlijā — Sirakūzām.

VI gs. pirms m. ē. grieķu valstīs notika vairākas sacelšanās. To rezultātā valdošo vergturu aristokrātiju nomainīja tautas valdība — demokrātija. Protams, šī demokrātija nebūt nebija pilnīga, tā tāpat saglabāja pastāvošās verdzības iekārtas raksturu.

V gs. pirms m. ē. sākumā Grieķijai uzbruka persieši. Viņu pirmais iekarojums bija Jonijas piekraste. Pēc Jonijas zaudējuma pirmajā vietā izvirzījās Atika, kas atradās Grieķijas kontinentālajā daļā, un tās galvaspilsēta Atēnas. Atika saliedēja ap sevi grieķu valstis un kļuva par galveno pretspēku persiešiem. Pēc apvienošanās grieķi uzsāka cīņu pret persiešiem un divreiz guva uzvaru — 490. g. pirms m. ē. pie Maratonas un pēc desmit gadiem pie Salamīnas. Šī pēdējā kauja tad arī noteica kara iznākumu.

Pēc uzvaras pār persiešiem Atēnas kļuva par Grieķijas politisko un kultūras centru. Tā kā kara laikā pilsēta bija gandrīz pilnīgi nodedzināta, sākās intensīva tās rekonstrukcija. Tika celti daudzi tempļi, no jauna uzcēla Pireju — kara un tirdzniecības ostu.

V gs. beigas un IV gs. sākums pirms m. ē. bija Atēnu uzplaukuma laiks. Atēnās ieradās ievērojami ļaudis no visām antīkās pasaules malām: Anaksagors no Klazomenas, Dēmokrits no Abderas, Hipijs no Elīdas, Teodors no Kirēnes, ārsts Hipokrats no Kosas, Aristotelis no Stagīras. Viņus Atēnās saistīja intelektuālā dzīve. Šeit darbojās Sokrats, kurš prata rosināt savu klausītāju domas, tika radīta slavenā Platona Akadēmija un ne mazāk slavenais Aristoteļa Likejs (Licejs) — vēlāko universitāšu priekštecis.

Tomēr jau V gs. beigās aizsākās ilgais Peleponēsas karš, kas sagrāva Atēnu varenību. IV gs. pēdējā trešdaļā antīkās pasaules politiskajā arēnā parādījās Maķedonija. 337. g. pirms m. ē. Filips sagrāva grieķu pilsētu apvienotos spēkus, bet viņa dēls Aleksandrs, nostiprinājis Maķedonijas kundzību Grieķijā, sāka Austrumu iekarojumus.

Senās Grieķijas pilsētās attīstījās celtniecība un amatniecība, progresēja lauksaimniecība un kuģniecība. Tas viss radīja priekšnosacījumus arī zinātnes progresam. Lai radītu mašīnas kara vajadzībām, būvētu tirdzniecības kuģus un karakuģus, īstenotu grieķu arhitektu monumentālās ieceres, vairs nevarēja iztikt bez tehniskiem izgudrojumiem. Sākot ar VII gs. pirms m. ē., Jonijā — ēģiptiešu un babiloniešu kultūras saskarsmes vietā — radās zinātne, kurā astronomija, meteoroloģija, matemātika, mehānika un medicīna attīstījās vienkopus ar priekšstatiem par filozofiju, politiku, ekonomiku un ģeogrāfiju.

Sākotnēji sengrieķu matemātika principiāli neatšķīrās no ēģiptiešu un babiloniešu matemātikas, kuru grieķi pazina vēl pirms V gs. pirms m. ē., bet, jau sākot ar VI gs. pirms m. ē., grieķu matemātiskā domāšana kļuva aizvien teorētiskāka. «Melno» garīgo darbu — grāmatu pārrakstīšanu, aprēķinu veikšanu — sāka uzdot vergiem, ar laiku teorētiskā matemātika atdalījās no praktiskās matemātikas. No praktiskās aritmētikas, ko sauca par «loģistiku», un praktiskās ģeometrijas, kuru Arhimēds nosauca par «ģeodēziju», atdalījās teorētiskā aritmētika un teorētiskā ģeometrija, kaut arī tās, līdzīgi citām zinātnēm, tajā laikā vēl nebija patstāvīgas nozares, bet filozofijas sastāvdaļas. Atšķirībā no praktiskajām zinātnēm teorētiskā aritmētika un ģeometrija deva ne tikai priekšrakstu, kā risināt uzdevumus, bet arī pamatojumu, kāpēc atrisinājums ir pareizs. Matemātikā, tāpat kā politiskos un juridiskos strīdos, kļuva nepieciešams precīzi definēt jēdzienus, attīstīt stingrus pierādījumus.

Galīgā matemātikas kā patstāvīgas teorētiskas zinātnes atdalīšanās notika Grieķijā V gs. pirms m. ē., savu nobeigumu rodot jau hellēnisma laikmetā Eiklīda «Elementos» apmēram 300 gadus pirms m. ē.

Kā visai grieķu klasiskajai literatūrai, tā arī matemātiskajai literatūrai ir grūti atrast oriģinālus pirmavotus. No VI gs. pirms m. ē. ir saglabājušās tikai pāris seno autoru idejas, kuras kopā ar dažādām leģendām ir atrastas vēlākos sacerējumos. No V gs. pirms m. ē. palikuši tikai daži fragmenti, un tikai ar IV gs. pirms m. ē. ir atrodami sākumā nepilnīgi, bet pēc tam arvien pilnīgāki teksti. Tie ir daudzu autoru pārstāstīti, tāpēc ir grūti rekonstruēt pilnīgi patiesu vēsturisko ainu.

Iepazīšanos ar ēģiptiešu un babiloniešu aritmētiku iesākām ar rakstisko numerāciju. To varējām darīt tāpēc, ka numerācijas sistēma Ēģiptē un Babilonijā bija tikpat neatkarīga no mutiskās skaitīšanas kā mūsu numerācija. Grieķu aritmētikā bija citādi. Viņu rakstiskā skaitīšana bija atkarīga no valodas.

Sengrieķu valodā skaitļiem no 1 līdz 10 bija īpaši nosaukumi. Lielākajā daļā Eiropas tautu, indusu un persiešu valodā skaitļu nosaukumu saknes ir līdzīgas. Skaitļus no 11 līdz 19 veidoja pēc aditīvā principa tāpat, kā to darām tagad. Veselo desmitu nosaukumi bija atvasināti, izņemot 20. Tas, ka skaitlim 20 ir īpašs nosaukums, norāda, ka senatnē decimālā sistēma kombinējās ar divdesmitnieku sistēmu.

Ir zināms interesants dokuments, kas vēsta par skaitīšanu uz pirkstiem. Tā ir Smirnas mūka Rabdas vēstule, ko pagājušā gadsimta 80. gados atrada zinātnes vēsturnieks P. Tanerī. Rabda ir aprakstījis dažādus grieķu paņēmienus skaitīšanai uz pirkstiem. Izrādās, ka uz pirkstiem (ņemot talkā arī dažādus plaukstu un roku stāvokļus) ir iespējams skaitīt līdz miljonam.

Tā kā auga tirdzniecisko operāciju skaits, tad ar rēķināšanu uz pirkstiem, protams, nevarēja ilgi iztikt. Tika izveidota pirmā skaitļojamā ierīce — *abaks.* Abaks ir ierīce, kas atgādina mūsu skaitāmos kauliņus. Jādomā, ka abaku Grieķijā ieveda feniķieši. Vai feniķieši paši bija abaka izgudrotāji vai arī viņi vienkārši nodeva grieķiem citas tautas, piemēram, ēģiptiešu, izgudrojumu, — diezin vai tas tagad ir noskaidrojams.

Vienkāršākais abaka veids bija ar smiltīm nokaisīts dēlis, kurā ievilka svītras, kas dēli sadalīja kolonnās. Dažādās kolonnās novietotajiem akmentiņiem pierakstīja vērtības, kas bija saskaņotas ar naudas vienībām. Tas liecina, ka abaks bija grieķu tirgotāju instruments.

Līdz ar šādiem rēķiniem attīstījās arī skaitļu pieraksti. Dabiski, ka sākotnēji skaitļus apzīmēja vienīgi ar svītriņām. Šādu pierakstu redzējām ēģiptiešu un babiloniešu numerācijas sistēmās. IV gs. pirms m. ē. sākumā tāds pieraksts vēl bija arī grieķiem. Taču tas nevarēja apmierināt pat pašas pieticīgākās praktiskās vajadzības. Tāpēc grieķi sāka lietot pilnīgāku numerāciju.

Kādu laiku grieķiem vienlaikus pastāvēja divas numerācijas sistēmas. Pirmo no šīm sistēmām bieži sauc par *Herodiāna sistēmu* vai arī par *atisko numerācijas sistēmu.* Tā atgādina mums pazīstamo romiešu sistēmu.

Interesanti atzīmēt, ka sengrieķu uzrakstos daudzu mērvienību nosaukumus apzīmēja ar šī nosaukuma pirmo burtu, turklāt pierakstos varēja kombinēt skaitļu un mērvienību apzīmējumus. Tāds pieraksta veids rāda, ka atiešu skaitliskie apzīmējumi sākotnēji bija domāti nevis abstraktu skaitļu pierakstam, bet gan konkrētu lielumu apzīmēšanai.

Atisko numerācijas sistēmu Atēnās lietoja līdz m. ē. I gs. sākumam. Citās grieķu zemēs to bija aizstājusi alfabētiskā numerācijas sistēma jeb *joniskā numerācija.* Tajā skaitļu apzīmēšanai izmantoti burti tādā secībā, kādā tie sakārtoti alfabētā.

Grieķu matemātikas rašanās saistīta ar Talesa vārdu, kuru uzskata par visagrākās stihiskā materiālisma filozofiskās skolas dibinātāju. Dažkārt šī skola tiek saukta arī par *joniešu skolu.*

T a l e s s (ap 624.—547. g. pirms m. ē.) dzimis Milētā. Jaunībā, veicot tirdznieciskus darījumus, viņš nokļuva Ēģiptē, kur iepazinās ar ēģiptiešu zinātni. Atgriezies dzimtenē, Taless Milētā organizēja savu skolu. Pēc sengrieķu zinātnieka Prokla domām, Taless ir šādu teorēmu pierādījumu autors.

1. Divu taišņu krustleņķi ir vienādi.
2. Vienādsānu trijstūra leņķi pie pamata ir vienādi.

3. Trijstūri pilnīgi nosaka mala un tās divi pieleņķi. Izmantojot šo teorēmu, Taless noteica attālumu no krasta līdz kuģim jūrā.
4. Diametrs dala riņķi uz pusēm.
5. Ievilkts leņķis, kas balstās uz diametru, ir taisns.

Taless atklāja paņēmienus, kā noteikt piramīdu un vispār dažādu priekšmetu augstumu pēc to ēnas.

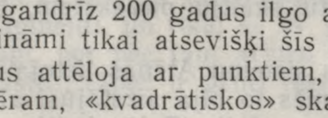
Milētas skolā bija vesela virkne filozofu — matemātiķu, tomēr par viņu zinātnisko darbību saglabājies gaužām maz ziņu. Ievērojams Talesa ideju turpinātājs bija viņa radinieks un skolnieks Anaksimandrs (ap 610.—543. g. pirms m. ē.) — sacerējuma «Par dabu» autors. Uzskata, ka Anaksimandrs ir izteicis ideju par Zemi kā riņķa cilindru, kura diametrs attiecas pret augstumu kā 3:1; izgatavojis pirmo Grieķijas un zemes ģeogrāfisko karšu zīmējumus, turklāt šajos zīmējumos pirmoreiz izmantota ortogonālā projekcija; izgatavojis saules pulksteni un citas astronomiskas ierīces. Uzskata arī, ka Anaksimandrs bija autors sacerējumam elementārajā ģeometrijā.

VI gs. pirms m. ē. beigās grieķu un persiešu karu rezultātā Grieķijas kultūras centri pārvietojās no austrumiem uz rietumiem, uz tās Dienviditālijas kolonijām. Šajā zemkopības valstī, kas salīdzinājumā ar Joniju bija stipri atpalikusi, radās ideālistiskās pitagoriešu un eleātu skolas.

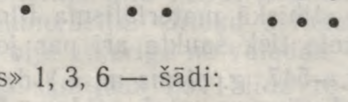
Leģendārais Pitagors (ap 570.—500. g. pirms m. ē.) piedzima bagātajā Samosas salā. Apmēram ap 530. g. pirms m. ē. viņš pārcēlās uz Krotonu (Dienviditālija), kur nodibināja slaveno pitagoriešu savienību.

Pitagoriešu mācībā bija nesaraujami saistīti trīs jēdzieni — mūzika, harmonija un skaitļi. Visa esošā izskaidrošana tikai ar veselo skaitļu likumu palīdzību atrodas loģiskā pretrunā ar pašu pitagoriešu atklāto nesamērojamo nogriežņu eksistenci. Iespējams, ka sākumā pitagorieši paši pat nepamanīja, ka šis atklājums ir pretrunā viņu natūrfilozofijai. Vēlāk pitagorieši šo atklājumu rūpīgi slēpa. Tā kā nav saglabājušies nekādi dokumentāli materiāli, tad pitagoriešu matemātikas gandrīz 200 gadus ilgo attīstības gaitu restaurēt nav iespējams. Zināmi tikai atsevišķi šīs matemātikas elementi.

Pitagorieši skaitļus attēloja ar punktiem, grupējot tos ģeometriskās figūrās. Piemēram, «kvadrātiskos» skaitļus 1, 4, 9 attēloja šādi:



bet «trijstūra skaitļus» 1, 3, 6 — šādi:



Pitagoriešiem punkts, kas attēloja vieninieku, bija tālāk nedalāms — tas bija «matemātisks» atoms; pašu punktu definēja kā vienību ar noteiktu stāvokli. Lai vienības — punktus — varētu atšķirt citu no cita, tos vajadzēja atdalīt ar telpu, katram punktam bija vajadzīgs tukšs laukums ap to. Tāpēc katru skaitli varēja attēlot ne tikai kā punktu, bet arī kā kvadrātisku laukumu. Figūru skaitļi attēloja veidu, kādā tie aritmētiski iegūti, t. i., vai tie iegūti ar saskaitīšanu vai reizināšanu. Pitagorieši un viņu tradīciju turpinātāji aplūkoja galvenokārt skaitļus — summas, bet Eiklīds un viņa skola pieļāva ģeometrisku attēlojumu vienīgi skaitļiem — reizinājumiem. Turpmākajā matemātikas attīstības gaitā figūru skaitļi zaudēja savu nozīmi, izņemot «kvadrātiskos» un «kubiskos» skaitļus, ar kuriem varēja aprēķināt laukumu un tilpumu, tātad risināt ģeometriskus uzdevumus.

Līdz ar kvadrātiskajiem skaitļiem pitagoriešiem nozīmīgi bija arī «turpinātie» skaitļi $n(n+1)$. Skaidrs, ka skaitļi, kas piederēja vienai kategorijai, vienlaikus varēja piederēt arī citai. Pitagorieši pazina arī «līdzīgos» skaitļus, piemēram, $6=2\times3$, $24=4\times6$, $54=6\times9$, ... (vispārīgā veidā mēs rakstītu $2n\times3n$), kurus attēloja kā taisnstūrus ar proporcionālām malām. Šiem skaitļiem piemīt interesanta īpašība: divu «līdzīgo» skaitļu reizinājums ir «kvadrātiskais» skaitlis.

Pitagorieši pētīja arī jautājumu par skaitļa un tā dalītāju summas attiecību. Ar skaitļa dalītājiem saprata visus tā dalītājus, gan pirmskaitļus, gan saliktus skaitļus, ieskaitot 1, bet izslēdzot pašu skaitli. Ja dalītāju summa izrādījās lielāka par pašu doto skaitli, tad skaitli nosauca par «virspilnīgu» (piemēram, 12), ja vienāda, — par «pilnīgu» (piemēram, 6), ja mazāka, — par «nepilnīgu» (piemēram, 15).

Pitagorieši aplūkoja arī t. s. «draudzīgos» skaitļus, t. i., tādus divus skaitļus, no kuriem katrs ir vienāds ar otra skaitļa dalītāju summu. Pitagoram piedēvē «draudzīgo» skaitļu 220 un 284 atklāšanu:

$$220=1+2+4+71+142,$$

$$284=1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110.$$

Līdz ar iracionālu lielumu atklāšanu pitagoriešu mācībai, ka veselie skaitļi ir visu lietu mērs, vajadzēja pārvarēt pretrunu. Bet tieši iracionalitātes atklājums ir vislielākais pitagoriešu ieguldījums matemātikā. Pitagorieši iracionālus lielumus saprata kā nogriežņus, kuriem nav kopēja mēra, un tāpēc tos nevar izteikt ar veselu skaitļu attiecību. Tāpēc runāt par kāda lieluma iracionalitāti, neattiecinot to pret kādu citu, tajā laikā nebija jēgas.

Iespējams, ka iracionalitātes atklāšana bija saistīta ar t. s. Pitagora teorēmu. Iespējams, ka Pitagors vai viņa skolnieki, zinot atsevišķus ēģiptiešu vai babiloniešu «svētos trijstūrus» (t. i., taisnleņķa trijstūrus, kuru malas izsakāmas ar veseliem skaitļiem), vispārināja šo teorēmu visiem taisnleņķa trijstūriem. Veselos skaitļus x, y, z, kuri izsaka taisnleņķa trijstūru malas, sauc par *Pitagora skaitļiem.* Pitagoriešiem bija zināms likums, kā noteikt Pitagora skaitļus, ja tie ir savstarpēji pirmskaitļi:

$$x=2p+1,\ y=2p^2+2p,\ z=2p^2+2p+1.$$

Par to, kā sākotnēji tika pierādīta Pitagora teorēma, var izteikt vienīgi hipotēzes. Iespējams, ka vispirms tā tika pierādīta vienādsānu taisnleņķa trijstūrim, kurš jau no seniem laikiem bija sastopams ornamentos.

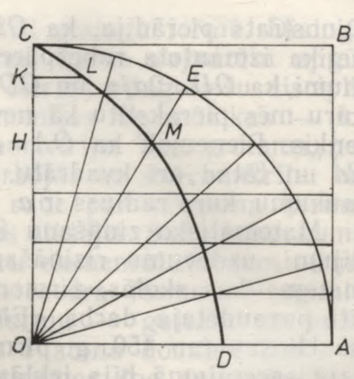
Pēc Pitagora teorēmas varēja aprēķināt hipotenūzu, ja zināmas abas trijstūra katetes. Bet šis uzdevums jau pašā vienkāršākajā gadījumā $a=b=1$ nebija atrisināms, proti, nevarēja atrast divus tādus veselus skaitļus, lai to attiecība $m:n$ būtu vienāda ar $\sqrt{1^2+1^2}=$ $=\sqrt{2}$. Citiem vārdiem, neizdevās atrast kopēju mēru kvadrāta malai un diagonālei. Nesamērojamus lielumus uzskatīja par «prātam neaptveramiem». Nav izslēgts, ka iracionalitāti $\sqrt{2}$ ieguva mūzikas teorijā, meklējot pusoktāvu. Šāds uzdevums ir ekvivalents ar uzdevumu — noteikt skaitļu 1 un 2 ģeometrisko vidējo.

Neiespējamība izteikt $\sqrt{2}$ kā divu veselu skaitļu attiecību veicināja tuvinātu aprēķinu attīstību. Eiklīda «Elementos» dotais $\sqrt{2}$ iracionalitātes pierādījums ir veikts, pieņemot pretējo, un tas reducējas uz šādu spriedumu. Pieņemsim, ka kvadrāta malas garums ir a, bet tā diagonāles garums ir b, turklāt skaitļiem a un b nav kopīgu dalītāju (izņemot 1). Tad pēc Pitagora teorēmas $b^2=2a^2$. Tā kā vienādības labā puse dalās ar 2, tad arī kreisajai pusei jādalās ar 2, tātad skaitlim b jābūt pāra skaitlim, bet, tā kā a un b nav kopīgu dalītāju, tad a jābūt nepāra skaitlim. Bet, ja b ir pāra skaitlis, tad tā kvadrāts dalās ar 4, tātad arī vienādības labajai pusei jādalās ar 4, kas iespējams tikai tad, ja a ir pāra skaitlis. Ir iegūta pretruna, ka a vienlaikus jābūt gan pāra, gan nepāra skaitlim. No šīs pretrunas izriet, ka nav tādu skaitļu a un b, kas apmierinātu sākotnējo vienādību $b^2=2a^2$.

Nesamērojamības atklāšana radīja grieķu matemātikā dziļu krīzi. Pitagoriešu mācību par veseliem skaitļiem kā visa esošā (tai skaitā arī ģeometrisko lielumu) pamatu vairs nevarēja uzskatīt par patiesu, sākās jauni meklējumi.

Grieķu materiālistu — atomistu skolu vadīja D ē m o k r i t s (ap 460.—370. g. pirms m. ē.). Dēmokrits tiek raksturots kā pirmais enciklopēdiskais domātājs starp grieķiem. Diogens Lāertietis (m. ē. III gs.) ir uzskaitījis 70 Dēmokrita sacerējumus par dažādiem dabaszinātņu, matemātikas un filozofijas jautājumiem, no kuriem saglabājušies gan tikai fragmenti.

Diogens Lāertietis nosauca sešus Dēmokrita matemātiskos sacerējumus. Kā liecina Aristotelis, Arhimēds un citi senatnes zinātnieki, savos ģeometriskajos sacerējumos Dēmokrits uzskatīja, ka punkti ir telpas atomi ar galīgu tilpumu un ka katrā nogrieznī ir galīgs, kaut arī ļoti liels punktu skaits. Šis priekšstats bija cieši saistīts ar pitagoriešu un Zēnona uzskatiem. Dēmokrits atrada daudzu figūru laukumus un ķermeņu tilpumus, starp citu, arī piramīdas tilpumu. Dēmokrits uzskatīja, ka ģeometriskie ķermeņi sastāv no paralēlām plāksnītēm, kuru biezums ir viens atoms. Dēmokrits zināja, ka trijstūra prizmu var sadalīt trīs piramīdās, kurām ir vienādi pamati un augstumi; no tā viņš secināja, ka piramīdas tilpums ir viena trešdaļa no tādas prizmas tilpuma, kurai ar piramīdu ir vienāds pamats un augstums. Stingri šo faktu pēc pusgadsimta pierādīja Eudokss. Tā kā riņķi Dēmokrits aplūkoja kā daudzstūri, kura katra mala sastāv no diviem atomiem, tad riņķa cilindrus un konusus viņš uzskatīja par prizmām un piramīdām ar ļoti lielu pamata malu skaitu, un tāpēc teorēmu par tilpumiem varēja vispārināt arī konusiem un cilindriem.



1. zīm.

H i p i j a m no Elīdas (ap 460. g. pirms m. ē.) piedēvē kvadratrises atklāšanu. Paps kvadratrises konstrukciju aprakstīja šādi: «Kvadrātā $OABC$ ievelk riņķa līnijas loku AEC ar centru O. Taisne OC vienmērīgi griežas ap O tā, ka punkts C apraksta loku CEA. Taisne CB pārvietojas paralēli pati sev, līdz sakrīt ar taisni OA. Kustība notiek tā, ka taisnes OC un CB sakrīt ar taisni OA vienlaicīgi. Taisnes OC un CB pārvietojoties krustojas kādā punktā M, kurš apraksta trajektoriju CMD, kas ir kvadratrise.» (1. zīm.)

Kvadratrises punktiem ir spēkā sakarība

$$\frac{CO}{MG}=\frac{\smile CA}{\smile EA}.$$

Izmantojot kvadratrisi, leņķi var sadalīt jebkura skaita vienādās daļās. Piemēram, lai sadalītu leņķi MOC trīs vienādās daļās, novelk taisni $MH \perp OC$, pēc tam konstruē $CK=\frac{1}{3}CH$. Tad velk taisni $KL \parallel MH$ līdz krustpunktam L ar kvadratrisi: $\sphericalangle KOL=$ $=\frac{1}{3}\sphericalangle COM$.

Līdz ar «riņķa kvadratūras» un «kuba dubultošanas» uzdevumiem leņķa trisekcijas uzdevums bija viena no trim slavenajām ģeometrijas problēmām. Šos uzdevumus atrisināt bija atļauts vienīgi ar t. s. «dievišķajiem instrumentiem» — cirkuli un lineālu. Uzdevumu atrisinājumu meklēšana ilga divus gadu tūkstošus.

To, ka nav iespējams sadalīt leņķi trijās vienādās daļās, izmantojot tikai cirkuli un lineālu, vispārīgā veidā varēja pierādīt pēc tam, kad Leonardo no Pizas (Fibonači, ap 1170.—1230. g.) parādīja, ka vispārīgajam kubiskajam vienādojumam ar veseliem koeficientiem atrisinājumus nevar izteikt ar racionāliem skaitļiem vai kvadrātiskām iracionalitātēm.

Leņķa trisekcijas uzdevums reducējas uz vienādojuma $\cos\varphi=$ $=4\cos^3\varphi/3-3\cos\varphi/3$ jeb $a=4x^3-3x$ atrisināšanu.

Hipija kvadratrisi, ar kuras palīdzību leņķi varēja sadalīt jebkura skaita vienādās daļās, izmantoja D i n o s t r a t s (ap 350. g. pirms m. ē.), lai atrisinātu uzdevumu par «riņķa kvadratūru».

Dinostrats pierādīja, ka $OD=2a/\pi$ (sk. 1. zīm.). Šajā pierādījumā netika izmantota robežpāreja, bet gan reducēti uz aplamību pieņēmumi, ka $OD<2a/\pi$ un $OD>2a/\pi$. Pierādījumā izmantota sakarība, kuru mēs pierakstītu kā nevienādību $\sin\alpha<\alpha<\operatorname{tg}\alpha$, kur α — šaurs leņķis. Pieņemot, ka $OA=a$ un $OD=2a/\pi$, viegli varēja konstruēt πa un tātad arī kvadrātu, kura laukums ir vienāds ar tāda riņķa laukumu, kura rādiuss ir a.

Matemātisko zināšanu fragmenti, atsevišķas teorēmas, to pierādījumi, uzdevumu risināšanas paņēmieni, kas bija iegūti dažādās matemātikas skolās, pirmoreiz tika apkopoti un sistemātiski izklāstīti pazaudētajā darbā «Elementi», kura autors bija Hipokrats no Hiosas (ap 450. g. pirms m. ē.). Pēc seno vēsturnieku liecībām šajā sacerējumā bija izklāstīta viela, ko Eiklīds vēlāk iekļāva savu «Elementu» pirmajās četrās grāmatās. Pašam Hipokratam pieder trīs atklājumi.

Pirmkārt, viņš pierādīja, ka riņķa laukumi ir proporcionāli uz riņķa diametriem konstruēto kvadrātu laukumiem.

Otrkārt, nodarbojoties ar «riņķa kvadratūras» uzdevumu, Hipokrats konstruēja līklīniju figūras — «mēnestiņus», kuriem ar cirkuli un lineālu varēja viegli konstruēt vienlielas taisnlīniju figūras. Tas nostiprināja cerību, tiesa gan — nepamatotu, ka izdosies atrisināt «riņķa kvadratūras» uzdevumu.

Trešais Hipokrata atklājums bija t. s. «Delosas problēmas», t. i., kuba dubultošanas uzdevuma reducēšana uz divkāršu ģeometrisko proporciju. Leģenda saista šo problēmu ar dievu prasību dubultot kubisko altāri Delfos. Hipokrats atrada, ka, pastāvot sakarībai $a:x=x:y=y:2a$, ir spēkā vienādība $a^3:x^3=a:2a$. Iespējams, ka šāda doma Hipokratam rodas pēc analoģijas ar kvadrāta dubultošanas uzdevumu, kurā ir spēkā vienkārša ģeometriska proporcija $a:x=x:2a$. Taču iespējams arī, ka viņam bija zināms šāds fakts: starp diviem kvadrātiskiem skaitļiem atrodas viens vidējais proporcionālais, bet starp diviem kubiskiem — divi vidējie proporcionālie. Pēc tam kad kuba dubultošanas problēma tika reducēta uz divu vidējo proporcionālo atrašanu, pie tās ķērās daudzi antīkie matemātiķi.

Filozofiskās skolas — Atēnu akadēmijas vadītājam Platonam (427.—347. g. pirms m. ē.) bija īpaša interese par matemātiku. Kaut arī Platons nebija matemātiķis, viņš un viņa skola uzskatīja matemātiku par ļoti nozīmīgu ne jau tās praktisko lietojumu dēļ, kas tika uzskatīti par «zemāku» nodarbošanos, bet tādēļ, ka matemātika norāda ceļu uz «tīro ideju» pasauli, uz filozofijas gala mērķa — Dieva idejas izziņu. Par to liecina uzraksts virs Atēnu akadēmijas ieejas «Lai neienāk tas, kas nezina ģeometriju».

Platona un dabaszinātņu skolas cīņas rezultātā zinātnieki vairāk sāka domāt par matemātisko objektu definīcijām. Pāra, nepāra u. tml. skaitļu definīcijas Platona sekotāji gandrīz bez izmaiņām pārņēma no pitagoriešiem. Savādāk bija ar ģeometrisko objektu definīcijām. Šīs definīcijas radās dabaszinātņu skolā.

Kaut arī pats Platons neveica nekādus matemātiskus atklājumus, viņa filozofiskajos un politiskajos darbos ir minēti daudzi matemātiski jautājumi. Platona darbi bija rakstīti dialogu formā. Dialogā «Republika» Platons uzskaita priekšmetus, kurus vajadzētu apgūt topošajiem valstsvīriem. Pirmo reizi bez četrām pitagoriešu disciplīnām — aritmētikas, ģeometrijas, astronomijas un mūzikas — kā atsevišķu disciplīnu Platons nosauc stereometriju. Tas, protams, nenozīmē, ka līdz Platonam grieķi nenodarbojās ar stereometriju. No tā, ka piecus regulārus daudzskaldņus sauc par «Platona ķermeņiem», neizriet, ka viņš šos daudzskaldņus atklājis. Šādu nosaukumu tie ieguva tāpēc, ka Platons piedēvē četru elementu atomiem pirmo četru regulāro daudzskaldņu formas: tetraedra formu — ugunij, ikosaedra formu — ūdenim, oktaedra formu — gaisam un kuba formu — zemei. Dodekaedra formu, pēc Platona domām, Dievs ir devis Visumam kopumā. Viduslaiku austrumos šos daudzskaldņus tā arī sauca — uguns ķermenis, zemes ķermenis utt.

Platonam piedēvē arī likumu, kā iegūt Pitagora skaitļus, kas būtu savstarpēji pirmskaitļi:

$$x=4p^2-1,\ y=4p,\ z=4p^2+1.$$

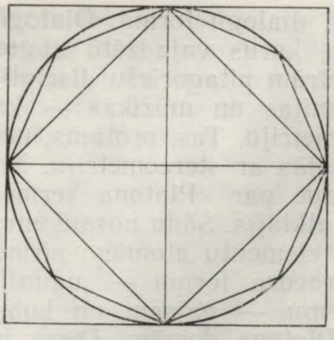
E u d o k s a (ap 408.—355. g. pirms m. ē.) svarīgākais ieguldījums matemātikā ir viņa attiecību teorija. Pēc nesamērojamības atklāšanas ģeometri centās izvairīties no attiecībām. Arī Eiklīda «Elementu» pirmajās četrās grāmatās neatrodam attiecības, to vietā ir lietoti bieži vien diezgan asprātīgi paņēmieni. Tā kā «Elementu» V grāmatā ir izklāstīta Eudoksa attiecību teorija, tad VI grāmatā tie paši uzdevumi (jau daudz vispārīgākā veidā) ir atrisināti ar attiecību palīdzību.

Grieķi uzskatīja, ka nesamērojamus nogriežņus nevar salīdzināt citu ar citu skaitliski (jo nebija iracionāla skaitļa jēdziena), tāpēc vajadzēja radīt jaunu, no skaitļa atšķirīgu jēdzienu. Par tādu kļuva «attiecība». Bez tās vispārīgā gadījumā nevarēja aplūkot nogriežņu proporcionalitāti, tātad arī trijstūru līdzību utt.

Jēdziens «attiecība» tiek paskaidrots ar trim nosacījumiem. Pirmkārt, nepieciešams nosacījums, lai divi lielumi atrastos attiecībā, ir to viendabība, bet attiecības pamats ir daudzums. Otrkārt, lai varētu runāt par divu lielumu attiecību, ja $A>B$, nepieciešams, lai eksistētu tāds skaitlis n, ka $A<nB$. Beidzot, treškārt, dota attiecību vienādības definīcija, kas ir vissvarīgākā, jo, tikai pateicoties tai, attiecības var izmantot matemātikā. Lielumu A un B attiecība ir vienāda ar lielumu C un D attiecību, ja jebkuriem diviem veseliem skaitļiem m un n, no nevienādības $mA\geqslant nB$ izriet, ka $mC\geqslant nD$, un no nevienādības $mA\leqslant nB$ izriet, ka $mC\leqslant nD$.

Saskaņā ar Eudoksa attiecību teoriju varēja uzskatīt, ka divu nogriežņu attiecība eksistē arī tad, ja tie ir nesamērojami. Šī teorija zināmā mērā aizstāja reālo skaitļu teoriju un deva iespēju radīt līdzīgu ģeometrisko figūru teoriju.

Eudoksa attiecību teorija ir cieši saistīta ar vēl vienu Eudoksa ieguldījumu matemātikā, proti, ar metodi, kas XVIII gs. ieguva nosaukumu «izsmelšanas metode». Arhimēds sacerējuma «Par lodi un cilindru» pirmās grāmatas priekšvārdā atzīmēja, ka Eudokss



2. zīm.

pierādījis Dēmokrita atklāto, bet nepierādīto teorēmu par piramīdas, konusa un cilindra tilpumiem.

Izsmelšanas metode, kuru Eiklīds izmanto «Elementu» XII grāmatā, ir šāda.

Lai pierādītu, ka divu riņķu laukumi attiecas viens pret otru kā uz šo riņķu diametriem konstruētu kvadrātu laukumi, ievelk riņķos ar diametriem d un D kvadrātus, kuru laukumi ir a un A. Tad $a/A=d/D$. Pēc tam katrā riņķī ievelk astoņstūri, 16-stūri, 32-stūri utt. Atbilstošo daudzstūru laukumu attiecība paliek nemainīga. Ap riņķi apvilktā kvadrāta laukums ir lielāks nekā riņķa laukums, bet riņķī ievilktā kvadrāta laukums ir puse no apvilktā kvadrāta laukuma (2. zīm.), tāpēc ievilktā kvadrāta laukums ir lielāks nekā puse no riņķa laukuma. Ievilktā astoņstūra laukums ir lielāks nekā trīs ceturtdaļas riņķa laukuma. Pēc Eudoksa lemmas — ja no kāda lieluma M vispirms atņem lielumu, kas lielāks par pusi no M, pēc tam no atlikuma — lielumu, kas lielāks par šī atlikuma pusi utt., tad pēc pietiekami liela soļu skaita atlikumā vienmēr var iegūt lielumu, kas mazāks par jebkuru iepriekš uzdotu lielumu m. Atlikušās riņķa daļas var padarīt pēc patikas mazas. Tātad ievilktie daudzstūri «izsmeļ» riņķus.

Nesamērojamu nogriežņu eksistence bija iemesls, kāpēc grieķu matemātiķi sāka meklēt sakarības starp aritmētiku un ģeometriju. Aritmētikas pamatā bija veselais skaitlis, racionālos skaitļus uzskatīja par veselo skaitļu pāri. Pēc tam kad izrādījās, ka ne katru divu nogriežņu attiecību var izteikt ar veselu skaitļu attiecību, iepriekšējā matemātiskā sistēma tika izjaukta. Sākās meklējumi, kā izkļūt no šīs krīzes. Mēs varētu teikt, ka pastāvēja vairākas iespējas:

1) varēja paplašināt skaitļa jēdzienu tā, lai ar jaunajiem skaitļiem varētu izteikt jebkuru divu nogriežņu attiecību;

2) definēt algebriskās operācijas tikai ģeometriskiem lielumiem, pamatojot tās ar attiecību teoriju, kas balstās uz veselo (vai racionālo) skaitļu aritmētiku;

3) atteikties no mēģinājumiem izveidot stingri loģisku mācību par nesamērojamību un pāriet uz brīvu operēšanu ar iracionalitātēm (tā vēlāk tika darīts Indijā un viduslaiku Eiropā).

Trešā iespēja grieķiem nebija pieņemama, jo tas nozīmēja atkāpšanos no matemātikas deduktīvās uzbūves pamatidejas. Pirmā iespēja tik agrīnā matemātikas stadijā, kādā bija pitagoriešu matemātika, bija pārāk grūta. Bija daži mēģinājumi paplašināt skaitļa jēdzienu, bet tie izrādījās nesekmīgi. Tādēļ grieķu matemātika izvēlējās otro iespēju. Kaut arī stratēģiski tā izrādījās kļūda, tomēr sākotnēji antīkā matemātika ieguva taktiskas priekšrocības. Tā radās ģeometriskā algebra.

6. Matemātika hellēņu zemēs

IV gs. pirms m. ē. beigās pēc Maķedonijas Aleksandra karagājieniem tika radīta milzīga, bet neilgi pastāvoša impērija, kas apvienoja Grieķiju, Ēģipti, Mezopotāmiju, Persiju, Priekšāziju, Vidusjūras piekrasti un vairākas citas Vidusjūras un Tuvo un Vidējo Austrumu zemes. Pēc Aleksandra nāves viņa impērija sadalījās, veidojot Ptolemaju valsti Āfrikā, Selevkīdu valsti Āzijā un vairākas citas sīkākas valstiņas. Dažādo Aleksandra impērijas tautu saskarsme un savstarpējie kontakti veicināja kultūras un zinātnes attīstību šajās valstīs. Šīs valstis sauc par hellēņu valstīm, jo tajās attīstījās un nostiprinājās seno grieķu kultūra un tradīcijas, par valsts valodu kļuva grieķu valoda. Hellēņu valstīs lielākie kultūras centri bija Aleksandrija, Antiohija, Pergama un Rodosas sala. Hellēņu valstu pastāvēšanas vēsturisko periodu sauc par hellēnismu, un tas ilga līdz mūsu ēras I gs., kad šīs valstis iekaroja Romas impērija.

Hellēnisma perioda ievērojamākais kultūras centrs bija Aleksandrija, kuru 332.—331. g. pirms m. ē. Ēģiptē nodibināja Aleksandrs un kura vēlāk kļuva par Ptolemaju valsts galvaspilsētu. Šeit tika uzkrātas karagājienos salaupītās bagātības. Šeit — Austrumu un Rietumu tirdzniecisko ceļu krustpunktā — attīstījās jūras tirdzniecība. Nežēlīgi ekspluatējot vergu darbu, attīstījās amatniecība. Atšķirībā no klasiskās grieķu kultūras Aleksandrijas kultūrai raksturīga lielāka specializācija. Zinātnes centrs bija Muzejs, kurā glabājās vairāki simti tūkstošu rakstu ruļļu. Aleksandrijā sāka veidoties atsevišķas patstāvīgas zinātnes. Tās bija astronomija, matemātika un mehānika kā precīzu un sistemātisku dabaszinātņu aizsākums.

Matemātikas tāpat kā dabaszinātņu un tehnisko zinātņu uzplaukumu tieši vai netieši veicināja Aleksandrijas perioda sabiedrības praktiskās vajadzības. Ptolemaji, cenzdamies līdzināties seno grieķu un ēģiptiešu kultūrai, cēla pilis, hidrotehniskas ierīces. Bez tam pastāvēja profesionāla armija, kurai arī bija savas vajadzības pēc tehnikas un līdz ar to arī matemātikas attīstības.

Antīkās pasaules matemātika Aleksandrijā sasniedza savu visaugstāko attīstības pakāpi, īpaši trešajā gadsimtā pirms m. ē., kad uz Aleksandriju tika uzaicināti daudzi izcili zinātnieki, no kuriem paši slavenākie bija Eiklīds, Eratostens un Perges Apollonijs. Šī perioda izcilāko zinātnieku pulkā ir arī Arhimēds, viņš gan nekad nepameta savas dzimtās Sirakūzas. Ar savu zinātnisko līmeni, priekšmeta vispārīgo apskatu un tā traktējuma pamatojumu šī perioda matemātika tālu aiz sevis atstāja pat pašus augstākos babiloniešu, ēģiptiešu un grieķu sasniegumus.

Kaut arī jau agrāk bija mēģinājumi izklāstīt svarīgākās matemātiskās zināšanas kā vienotu teoriju noteiktā secībā, tomēr E i k l ī d s

(IV–III gs. pirms m. ē.) bija pirmais, kurš vispilnīgāk šo darbu veica. Eiklīds ir sarakstījis vairākus sacerējumus, tomēr matemātikas vēsturē viņš ir pazīstams kā «Elementu» autors.

«Elementi» sastāv no 13 grāmatām. Tajās pētītas plaknes ģeometriskās figūras un aplūkota mācība par veseliem (pozitīviem) skaitļiem un to daļām. Tā kā telpisku figūru attiecības ne vienmēr var izteikt ar racionāliem skaitļiem, tad tika aplūkoti arī nesamērojami ģeometriski lielumi. Eiklīds aplūkoja virsmu savstarpējo novietojumu un ķermeņu tilpumu aprēķināšanu. Tādējādi «Elementos» tika izklāstīti planimetrijas, stereometrijas un aritmētikas pamati.

«Elementu» galvenā zinātniskā vērtība ir tā, ka tie veidoti pēc vienotas loģiskas shēmas; visas tajos ietvertās teorijas ir stingri loģiski pamatotas. Eiklīda darbā ģeometrijas teorēmas ir formulētas un pierādītas pēc šādas shēmas:

1) vispārīgais formulējums;

2) dotie lielumi, kas vienmēr attēloti zīmējumā;

3) definīcija vai norādījums, kurā ar atsauci uz konkrētiem dotajiem lielumiem norādīts, kas jādara vai jāpierāda;

4) konstrukcija, kurā ietilpst arī papildinājumi, kādi jāizdara, lai varētu veikt pierādījumu;

5) pierādījums;

6) vispārīgā veidā dots secinājums.

Gandrīz katrā «Elementu» grāmatā ir dotas definīcijas. Eiklīda definīcijas galvenokārt ir aprakstošas, piemēram:

«Punkts ir tas, kam nav daļu»,

«Līnija ir tas, kam ir garums, bet nav platuma».

Līdz ar aprakstošām definīcijām ir arī tādas, kurās norādīts, kā ķermenis vai figūra iegūti, piemēram:

«Taisnas figūras ir tās, kuras atrodas starp taisnēm»,

«Ja ap nekustīgu pusriņķa diametru rotējošs pusriņķis atkal nonāk tai pašā stāvoklī, no kura viņš sāka kustēties, tad ietvertais ķermenis ir sfēra».

Ir arī aksiomātiskas definīcijas:

«Vienādi riņķi ir tie, kuriem diametri ir vienādi».

Eiklīda «Elementu» pirmajā grāmatā ir formulēti 5 postulāti[1]:

1. No jebkura punkta līdz jebkuram punktam var novilkt taisni.
2. Ierobežotu taisni var nepārtraukti turpināt pa taisni.
3. No jebkura centra ar jebkuru atvērumu var novilkt riņķi.
4. Visi taisnie leņķi ir vienādi.
5. Ja taisne, krustojoties ar divām taisnēm, veido iekšējus vienpusleņķus, kuru summa mazāka par diviem taisniem leņķiem, tad, neierobežoti turpinātas, minētās divas taisnes krustojas tajā pusē, kurā šī leņķu summa ir mazāka par diviem taisniem leņķiem.

---

[1] Latīņu vārds «postulatum» nozīmē «pieprasījums» — kādas teorijas princips vai atzinums, kas tajā tiek pieņemts par pareizu un nav pierādāms šīs teorijas ietvaros. Mūsdienu zinātnes metodoloģijā jēdzienus «postulāts» un «aksioma» lieto kā līdzvērtīgus.

Pirmajos trīs postulātos pieņemts, ka lineāls un cirkulis ir ideāli — ar jebkuru garumu un jebkuru atvērumu; tādējādi ir iespējams konstruēt ideālas taisnes un ideālas riņķa līnijas.

Piekto postulātu sauc par *paralelitātes postulātu* un mūsdienu ģeometrijā to parasti aizstāj ar ekvivalentu apgalvojumu — paralēlo taišņu aksiomu: «Caur punktu ārpus dotās taisnes var novilkt tikai vienu taisni, kura nekrusto doto taisni.»

Eiklīda postulātiem bija liela nozīme ģeometrijas attīstībā. Kā zināms, katras aksiomātiskās teorijas pamatā ir aksiomu sistēma, kurai jābūt **pilnai, nepretrunīgai** un **neatkarīgai**. Aksiomu sistēmas pilnīgums nozīmē, ka no aksiomām loģisku spriedumu ceļā var pierādīt **visus** apgalvojumus, kas attiecīgajā teorijā ir patiesi. Aksiomu nepretrunīgums nozīmē, ka dotās teorijas ietvaros nevar pierādīt kādu apgalvojumu un šī apgalvojuma noliegumu. Aksiomu sistēmas neatkarība nozīmē, ka nevienu no šīs sistēmas aksiomām nevar pierādīt, izmantojot pārējās aksiomas. Šiem noteikumiem atbilstoša aksiomu sistēma ir Eiklīda pieci postulāti. Tādējādi «Elementos» iztirzātā Eiklīda ģeometrija ir pirmā aksiomātiskā teorija, kas savu nozīmi nav zaudējusi vēl mūsdienās un ir vērtējama kā viens no visizcilākajiem antīkās zinātnes sasniegumiem.

Vairāk nekā divi tūkstoši gadu ilgajā ģeometrijas attīstības vēsturē īpaša loma bija Eiklīda 5. postulātam — paralēlo taišņu aksiomai. Jau Eiklīda laikabiedru uzmanību saistīja apstāklis, ka 5. postulātu nav iespējams tieši pārbaudīt praksē; tātad prakse neapstiprina, bet arī nenoliedz šī apgalvojuma patiesumu. Līdz ar to 5. postulātu uzskatīja par teorēmu, ko nesekmīgi centās pierādīt ar pārējo postulātu palīdzību. Taču katru reizi spriedumos bija loģiska kļūda, jo tika izmantoti apgalvojumi, kas ekvivalenti pierādāmajam. Tādējādi līdz pat XIX gs. sākumam Eiklīda 5. postulātu uzskatīja par nepierādītu ģeometrijas teorēmu. Tikai 1826. gadā N. Lobačevskis parādīja, ka paralelitātes aksiomu nav iespējams loģiski iegūt no citām Eiklīda aksiomām (Eiklīda aksiomu sistēma ir neatkarīga). Pievienojot pirmajiem četriem Eiklīda postulātiem piektā postulāta pretējo apgalvojumu («caur punktu ārpus dotās taisnes plaknē var novilkt vismaz divas taisnes, kas nekrusto doto taisni»), Lobačevskis ieguva aksiomu sistēmu, no kuras izveidoja jaunu aksiomātisku teoriju — neeiklīda ģeometriju.

Par aksiomām Eiklīda «Elementos» ir nosaukti deviņi apgalvojumi, no kuriem pirmos sešus, izmantojot algebrisko pierakstu, var izteikt šādi.

1. Ja $A=C$ un $B=C$, tad $A=B$.

2. Ja $A=B$, tad $A+C=B+C$.

3. Ja $A=B$, tad $A-C=B-C$.

4. Ja $A\neq B$, tad $A+C\neq B+C$.

5. Ja $A=B$, tad $2A=2B$.

6. Ja $A=B$, tad $\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}B$.

Protams, Eiklīds šīs aksiomas izteica ar vārdiem, turklāt tās aplūkoja kā sakarības starp ģeometriskiem lielumiem — līnijām, virsmām, ķermeņiem, bet ne skaitļiem.

7. Viens ar otru savietotie ir savā starpā vienādi.

Eiklīds to saprata šādi: ja figūras, vienu uz otru «uzliekot», sakrīt, tad tās ir vienlielas, t. i., tām ir vienādi laukumi. Pieņemot šo aksiomu, Eiklīds, kā redzams, sekoja tradīcijai, jo «uzlikšanu» lietoja jau Taless. Bet Platons un Aristotelis uzskatīja, ka «matemātiskajām zinātnēm kustība ir sveša». Kaut arī Eiklīds pats izmantoja kustību (piemēram, lodes definīcijā), viņš tomēr centās no šī jēdziena izmantošanas izvairīties.

8. Veselais ir lielāks nekā daļa.

9. Divas taisnes nesatur telpu.

Uzskata, ka šīs pēdējās divas aksiomas ir vēlākas izcelsmes nekā iepriekšējās.

Pirmajās četrās Eiklīda grāmatās ir izklāstīta mācība par plaknes figūru vienādību.

I grāmata sākas ar 23 definīcijām, pēc tam aplūkotas 48 elementārās ģeometrijas teorēmas, kuras var sadalīt trīs grupās. No 1. līdz 26. teorēmai galvenokārt runa ir par trijstūriem un perpendikuliem. Otrajā grupā (27.—32. teorēma) dota paralēlo taišņu teorija, kura tiek izmantota pēdējā šīs grupas teorēmā, lai pierādītu, ka trijstūra iekšējo leņķu summa ir vienāda ar diviem taisniem leņķiem. Trešajā grupā (33.—48. teorēma) aplūkoti paralelogrami, kvadrāti un trijstūri, kā arī salīdzinātas figūras, kurām ir vienādi laukumi. I grāmatas pēdējās divas teorēmas ir Pitagora teorēma un tai apgrieztā teorēma.

II grāmatā (tā ir visīsākā) ir 14 teorēmas un 2 definīcijas. Šajā grāmatā izklāstīta grieķu ģeometriskā algebra.

III grāmatā ir 37 teorēmas par riņķi un riņķa līniju. Grāmatas sākumā dotas 11 definīcijas, ar kurām tiek definēts pieskares jēdziens (kā taisne, kas «tiekas ar riņķa līniju, bet nekrusto to»), divu riņķa līniju pieskaršanās u. c. No III grāmatas teorēmām interesantākā ir 16. teorēma, kurā runa ir par leņķi starp pieskari un riņķa līniju, t. i., «ragveida leņķi», un tiek pierādīts, ka šis leņķis ir mazāks par jebkuru šauro leņķi.

IV grāmata sastāv no 16 teorēmām. Tajā Eiklīds aplūko riņķī ievilktas un ap riņķi apvilktas figūras, vispirms definējot šos jēdzienus.

Ja pirmajās četrās grāmatās tiek aplūkota nogriežņu un laukumu vienādība, tad V un VI grāmatā tiek pētīta to nevienādība. Šo nevienādību pamatā ir attiecību teorija, ko sīki izstrādāja Eudokss, bet sistemātiski izklāstīja Eiklīds V grāmatas 25 teorēmās. Pirms tam dotas 18 definīcijas, kas lielākoties attiecas uz dažāda veida attiecībām.

Eiklīds lielumus attēloja ar nogriežņiem, kuru attiecības vispārīgā gadījumā nevarēja izteikt ar skaitļiem, jo neeksistēja iracionāla skaitļa jēdziens.

VI grāmatā proporciju mācība izmantota planimetrijā. Nākošajās «Elementu» grāmatās — VII, VIII un IX grāmatā — izstrādāta teorētiskā aritmētika, apkopotas tās zināšanas par veseliem skaitļiem, kas bija uzkrātas līdz Eiklīda laikam. VII grāmatā ir dots t. s. *Eiklīda algoritms*, kuru izmantojam vēl tagad, lai atrastu divu skaitļu lielāko kopīgo dalītāju.

VIII grāmatā aplūkota ģeometriskā progresija, bet IX grāmatā — pirmskaitļu teorija.

Trešā daļa no visa Eiklīda darba ietverta vislielākajā pēc apjoma un diezgan sarežģītajā X grāmatā. Šajā grāmatā, kurā ir 115 teorēmas, dota tādu iracionalitāšu klasifikācija, kuras iegūst, risinot kvadrātvienādojumus un uz tiem reducējamos bikvadrātvienādojumus ar veseliem koeficientiem. Sākumā dotas samērojamu un nesamērojamu lielumu definīcijas. Pēc tam tiek iegūti 13 iracionalitāšu veidi.

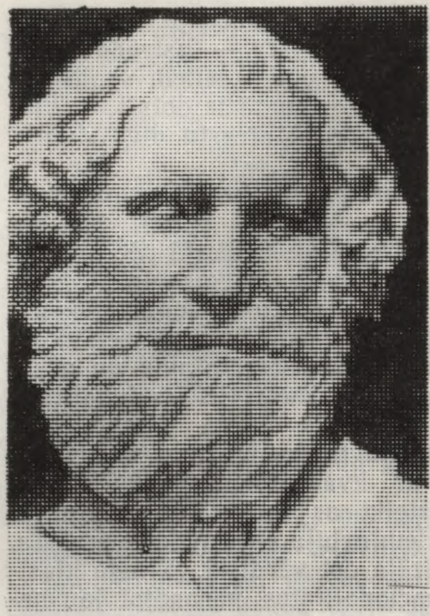
Iracionalitāšu klasifikācija tika veikta tāpēc, ka tādu uzdevumu atrisinājumus, kurus var reducēt uz kvadrātvienādojumiem vai bikvadrātvienādojumiem, nevarēja izteikt ar racionālu skaitļu un doto nogriežņu palīdzību. Tā kā grieķiem nebija algebriska pieraksta, tad vienādojumu atrisinājumus vajadzēja dot vārdiski. Eiklīda klasifikācija neaptver visas iespējamās iracionalitātes, nerunājot jau nemaz par augstāku pakāpju iracionalitātēm.

«Elementu» XI, XII un XIII grāmata ir veltīta stereometrijai. Sākumā dotas 28 definīcijas. Pirmā ir ķermeņa definīcija: «Ķermenis ir tas, kam ir garums, platums un dziļums». Pēc tam dotas plaknei perpendikulāras taisnes un divu perpendikulāru plakņu definīcijas. Eiklīds gan nepierāda, ka šādi perpendikuli vispār eksistē. Pēc tam tiek definētas slīpnes, paralēlas plaknes, telpisku ķermeņu līdzība un vienādība. Tālāk šajā grāmatā tiek definēta piramīda, prizma, sfēra, konuss, cilindrs, kubs, oktaedrs, ikosaedrs un dodekaedrs. Sfēru, konusu un cilindru definē kā rotācijas ķermeņus.

XI grāmata, kurā ir 39 teorēmas, veidota līdzīgi kā I grāmata. XII grāmatā dotas 18 teorēmas, kurās izmantota izsmelšanas metode, lai pierādītu piramīdas, konusa, cilindra un sfēras tilpumu aprēķināšanas formulas. Jāatzīmē, ka Eiklīds nekur neveic riņķa laukuma vai lodes tilpuma aprēķinus. Ne jau tāpēc, ka nebūtu zināmi tuvinātie aprēķini, bet gan tāpēc, ka šie aprēķini attiecas uz praktisko ģeometriju, nevis uz teorētisko ģeometriju. XIII grāmatā aplūkoti sfērā ievilkti regulāri daudzskaldņi. Grāmata noslēdzas ar piebildi, ka bez šiem pieciem regulārajiem daudzskaldņiem — tetraedra, kuba, oktaedra, ikosaedra un dodekaedra — citus regulārus daudzskaldņus konstruēt nav iespējams.

Kaut arī nav tiešu norādījumu, kuras teorēmas ir Eiklīda paša dotas un kuras ir aizgūtas no citiem autoriem, tomēr skaidrs, ka tik grandiozu sistematizācijas darbu varēja veikt vienīgi izcils ģeometrs.

No A r i s t a r h a (ap 310.—230. g. pirms m. ē.) darbiem ir saglabājies sacerējums «Par Saules un Mēness izmēriem un attālumiem». Šajā darbā aplūkoti arī jautājumi, kas attiecas uz



Arhimēds

trigonometriskām funkcijām. Aristarhs šīs funkcijas neizskaitļo, bet vienīgi norāda, kādās robežās atrodas to vērtības. Viņš izmanto divus pieņēmumus.

1. Ja α ir leņķis, ko mēra radiānos, turklāt $\alpha<\pi/2$, tad attiecība $\sin\alpha/\alpha$ samazinās, bet attiecība $\mathrm{tg}\,\alpha/\alpha$ palielinās, kad α pieaug no 0 līdz $\pi/2$.

2. Ja β ir cits leņķis, ko mēra radiānos, turklāt $\beta<\pi/2$, tad $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}<\frac{\alpha}{\beta}<\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\beta}$.

Protams, Aristarhs neizmanto šos apzīmējumus, bet gan pieņēmumus formulē vārdos, izmantojot taisna leņķa daļas riņķa lokus, to hordas un pieskares.

Hellēnisma laikmetā dzīvoja arī izcilais matemātiķis un mehāniķis A r h i m ē d s (ap 287.—212. g. pirms m. ē.). Atšķirībā no lielā sistematizētāja Eiklīda Arhimēds matemātikā ieviesa savus paša atklājumus, galvenokārt aprēķinādams plaknes līklīniju figūru laukumus un liektu virsmu ierobežotu ķermeņu virsmu laukumus un tilpumus. Šie aprēķini bija integrālrēķinu pirmsākumi.

Tāpat kā gandrīz visos seno autoru darbos, arī Arhimēda sacerējumos netiek atklātas analītiskās metodes, ar kurām rezultāti iegūti.

Darbā «Par plakņu līdzsvaru» stingri ģeometriski tiek izklāstīti teorētiskās mehānikas principi. Šeit galvenais uzdevums ir paralelograma, trijstūra un trapeces smaguma centra noteikšana.

Darba «Parabolas kvadratūra» nosaukums ir radies vēlāk, jo Arhimēds nelietoja Apollonija terminu «parabola», bet gan «taisna konusa šķēlums». Grāmatas priekšvārdā Arhimēds uzsver savu prioritāti jautājumā par laukuma aprēķināšanu parabolas segmentam, ko atšķeļ brīvi izraudzīta horda. Sākotnēji viņš šo laukumu atradis ar mehānikas palīdzību, bet pēc tam pierādījis ar ģeometrijas metodēm (ar izsmelšanas metodi).

Arhimēds pilnveidoja Eudoksa metodi. Uzdevumu atrisināšanai viņš faktiski lietoja augšējo un apakšējo integrālo summu un izdarīja robežpāreju.

Darbā «Par metodi» ir 16 teorēmas. Arhimēds pierāda, ka tilpums ap lodi apvilktam taisnam riņķa cilindram, kura augstums ir vienāds ar lodes diametru (vai elipsoīda rotācijas asi), ir $^3/_2$ no lodes (vai elipsoīda) tilpuma. Pēc tam tiek atrasti tilpumi segmentiem, ko no rotācijas ķermeņiem (paraboloīda, lodes, elipsoīda un divdobumu hiperboloīda) atšķeļ plakne, kas perpendikulāra rotācijas asij. Beigās Arhimēds aprēķina tilpumus diviem ķermeņiem, no kuriem viens ir iegūts, cilindru šķeļot ar plakni, bet otrs rodas, šķeļot divus vienāda diametra taisnus riņķa cilindrus, kuru rotācijas asis ir savstarpēji perpendikulāras.

Sacerējuma «Par lodi un cilindru» I grāmata sākas ar vēstuli Dosifejam, kurā Arhimēds norāda, ka šeit pirmoreiz tiek publicēti viņa iegūtie oriģinālie rezultāti, lai matemātiķiem būtu iespēja iepazīties ar pierādījumiem un spriest par to vērtību. Šie I grāmatas jaunie rezultāti ir šādi:

1) sfēras virsmas laukums ir četras reizes lielāks nekā tās lielā riņķa laukums;

2) lodes virsmas segmenta laukums ir vienāds ar tāda riņķa laukumu, kura rādiuss ir vienāds ar attālumu no segmenta virsotnes līdz segmenta riņķa perifērijai;

3) tilpums ap lodi apvilktam cilindram, kura augstums ir vienāds ar lodes diametru, ir trīs puses no lodes tilpuma;

4) šī cilindra pilnas virsmas laukums ir trīs puses no sfēras virsmas laukuma. (Pēdējie divi atklājumi tika iemūžināti Arhimēda kapakmenī.)

Darba II grāmatā aplūkoti seši uzdevumi un trīs teorēmas.

Darbā «Par spirālēm» Arhimēds izstrādāja pieskares noteikšanas metodes. Šīs metodes gan tika lietotas tikai spirālei, taču to vispārīgums ļauj tās izmantot, lai atrastu pieskari jebkurai gludai, nepārtrauktai līknei.

Spirāli $\rho = a\varphi$ (mūsu apzīmējumos) Arhimēds apraksta kinemātiski: taisne OA vienmērīgi rotē ap punktu O (noteiktības labad pieņemsim, ka pretēji pulksteņa rādītāju kustības virzienam) un vienlaikus pa šo taisni no O uz A kustas punkts M. Šī punkta M aprakstītā trajektorija ir spirāle.

Traktāta «Riņķa mērīšana» fragmentā, kurš ir saglabājies, tiek pierādītas šādas trīs teorēmas:

1) riņķa laukums ir vienāds ar tāda taisnleņķa trijstūra laukumu, kura augstums ir riņķa rādiuss, bet pamats vienāds ar riņķa līnijas garumu,

2) uz riņķa diametra konstruētā kvadrāta laukums attiecas pret riņķa laukumu kā 14:11,

3) jebkuras riņķa līnijas garuma attiecība pret tās diametru ir mazāka kā 22/7, bet lielāka nekā 223/71.

Pirmo teorēmu Arhimēds pierāda ar izsmelšanas metodi, ievelkot un apvelkot ap riņķi regulārus daudzstūrus, sākot ar regulāru sešstūri, un katru reizi dubultojot malu skaitu.

Trešajā teorēmā aptuveni noteikts skaitļa π lielums. Aprēķins balstās uz Arhimēda nevienādību

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}.$$

Darbs «Smilšu graudiņu aprēķini» ir aritmētisks traktāts. Tajā izklāstīts veids, kā izteikt brīvi izraudzītu lielu skaitli. Arhimēda sistēmas pamatā ir oktāde, kas vienāda ar miriādes miriādi, t. i., 10^8. Skaitļus līdz 10^8 sauca par «pirmajiem skaitļiem». Skaitlis 10^8 tiek uzskatīts par vienību «otrajiem skaitļiem», skaitlis $10^{8\cdot 2}$ ir vienība «trešajiem skaitļiem» un tā līdz $10^{8\cdot 10^8}$. Visi šie skaitļi ir pirmais periods, pēc kura seko turpmākie periodi līdz periodam 10^8. Vislielākais skaitlis, ko varēja izteikt ar šādām oktādēm, ir $10^{8\cdot 10^{8\cdot 10^8}}$. Šo skaitli varētu pierakstīt kā 1 ar 80 miljoniem miljonu nuļļu. Lai to uzrakstītu, pieņemot, ka katra nulle aizņem vienu milimetru, vajadzētu papīra lapu, kuras garums 500 reižu pārsniedz attālumu no Zemes līdz Saulei.

Arhimēds parāda, ka viņa sistēma ir vairāk nekā pietiekama, lai izteiktu smilšu graudiņu skaitu, kuri aizpildītu Visumu. Pēc Arhimēda domām, Visums ir lode, kuru ietver nekustīgu zvaigžņu sfēra. Arhimēds noteica, ka šīs sfēras rādiuss ir 10^{12} reizes lielāks nekā rādiuss sfērai, kuras lielais riņķis ir Zemes orbīta. Pieņemot, ka viens smilšu graudiņš ir 10^{-14} daļa no magones sēkliņas, kuras diametrs ir $^1/_{40}$ pirksta platuma, Arhimēds atrada, ka smilšu graudiņu skaits Visumā ir mazāks nekā skaitlis 10^{63}.

Šis aprēķins nebija vajadzīgs praksei. Drīzāk tas radās teorētiskas intereses dēļ kā noliegums pieņēmumam, ka pastāv «pēdējais skaitlis», ka nav iespējams saskaitīt jūras smiltis. Tas pārliecinoši parādīja cilvēka prāta abstrakcijas spēju.

Ir saglabājušās ziņas par Arhimēda atklātajiem pusregulārajiem daudzskaldņiem, t. i., tādiem izliektiem daudzskaldņiem, kuru skaldnes ir dažādu veidu regulāri daudzstūri, bet visi daudzplakņu kaktu leņķi kongruenti cits citam vai ir simetriski. Arhimēds atrada 13 tādus pilnīgi noteiktus ķermeņus, kuriem ir 8, 14, 26, 32, 38, 62 vai 92 skaldnes ar trijstūra, kvadrāta, piecstūra, sešstūra, astoņstūra, desmitstūra vai divpadsmitstūra formu. Desmit no šiem ķermeņiem ierobežo divu, pārējos trīs — trīs veidu daudzskaldņi. Arhimēds pusregulāros daudzskaldņus ieguva no pieciem regulārajiem daudzskaldņiem.

Novērtējot Arhimēda ieguldījumu matemātikā, vispirms jāatzīmē, ka Arhimēda matemātika ievērojami vairāk operē ar mainīgajiem lielumiem un nepārtrauktības jēdzienu nekā Eiklīda matemātika, bez tam ģeometrijā tiek izmantots kustības jēdziens. Arhimēds savos darbos ievērojami attīstīja gan laukumu un tilpumu noteikšanas metodi, gan līkņu pieskares konstruēšanas paņēmienu un algoritmu ekstrēmu noteikšanai. Arhimēds bija viens no pirmajiem matemātiķiem, kas, nosakot kādu lielumu (laukumu vai tilpumu), izteica to kā šī lieluma daļiņu summu. Novērtējot šīs daļiņas, Arhimēds ieguva t. s. augšējo un apakšējo summu, starpību starp kurām varēja padarīt pēc patikas mazu. Taisnei, riņķa līnijai, koniskajiem šķēlumiem un spirālei viņš pierādīja svarīgāko nepārtraukto lielumu īpašību: nepārtraukts lielums kļūst vienāds ar visām starpvērtībām, kas atrodas starp divām tā vērtībām. Viņš atrada arī metodi, kā reducēt plašu uzdevumu klasi uz uzdevumiem par pieskares konstruēšanu. Tādējādi Arhimēds sistemātiski izstrādāja jēdzienus, kuri pēc diviem tūkstošiem gadu bija pamatā integrālrēķiniem un diferenciālrēķiniem.

Otra raksturīga Arhimēda matemātikas iezīme bija sakarības izprašana starp atsevišķiem uzdevumiem. Tā, piemēram, viņš konstatēja, ka paraboloīda segmenta tilpumu var aprēķināt ar to pašu paņēmienu kā trijstūra laukumu, konusa tilpumu — kā spirāles sektora laukumu. Arhimēds izprata iekšējo funkcionālo saiti starp lielumiem, jo galveno uzmanību pievērsa nevis pašiem lielumiem, bet gan to izmaiņām.

Trešā, visraksturīgākā Arhimēda matemātiskās jaunrades iezīme ir tās saite ar mehāniku, hidrostatiku un astronomiju, teorijas un prakses tuvināšana, skaitļošanas matemātikas paņēmienu attīstīšana. Arhimēda, tāpat kā viņa izcilā priekšteča Perges Apollonija darbi atstāja milzīgu ietekmi uz visu tālāko matemātikas attīstību.

Neskatoties uz to, ka ēģiptiešu vergturu valsts, kuru pārvaldīja Ptolemajs, sākot ar III gs. pirms m. ē., nepārtraukto karu un sacelšanās dēļ aizvien vairāk zaudēja savu vadošo stāvokli starp hellēņu valstīm ekonomikā un kultūrā, Aleksandrijas matemātika turpināja attīstīties un deva izcilus rezultātus laikā, kad filozofija, poēzija un māksla pārdzīvoja dziļa pagrimuma periodu. Pēc Arhimēda četrus gadsimtus nebija neviena, kas varētu viņam līdzināties.

Ir saglabājušās ziņas vēl par dažiem matemātiķiem, kuri senatnē devuši ievērojamu ieguldījumu matemātikas attīstībā. Tie bija Eratostens, Nīkomēds, Diokls, Zēnodors un Hipsikls — Eiklīda «Elementu» XIV grāmatas autors.

Līdz mums nonākuši tikai divi Eratostena (275.? g. pirms m. ē. — 194. g. pirms m. ē.) matemātiskie atklājumi: tas ir viņa slavenais siets («koskinoks») un viņa Delosas problēmas risinājums. Eratostena siets ir pazīstamais paņēmiens, kā atrast visus pirmskaitļus (izņemot 2), kas mazāki par doto naturālo skaitli *n*. Starp citu, daži grieķi skaitli 2 neuzskatīja par pirmskaitli.

Nīkomēds (II gs. pirms m. ē.) leņķa trisekcijas un kuba dubultošanas uzdevumu atrisināšanai izmantoja t. s. *taisnes konhoīdu* («gliemežnīcai līdzīgo»). Nīkomēds konstruēja šo līkni ar paša izgudrotas ierīces palīdzību.

Ap 200. g. pirms m. ē. (iespējams, ka arī vēlāk) dzīvoja Diokls, kurš, tāpat kā Nīkomēds, nodarbojās ar dubulto vidējo proporcionālo un atklāja līniju, kuru sauc par *cisoīdu.*

Ir saglabājušies fragmenti no Zēnodora (ap 200. g. pirms m. ē.) darba «Par izoperimetriskām figūrām». Grieķu matemātiķiem interese par ģeometriskām figūrām ar vienādiem perimetriem, iespējams, radās tāpēc, ka senatnē matemātiķiem likās paradoksāli, ka, piemēram, diviem paralelogramiem ar vienādu perimetru var būt dažādi laukumi. Zēnodors pierādīja, ka no visiem regulāriem daudzstūriem ar vienādu perimetru vislielākais laukums ir tam, kuram ir visvairāk virsotņu; ka riņķa laukums ir lielāks par jebkura regulāra daudzstūra laukumu, kura perimetrs ir vienāds ar riņķa līnijas garumu; ka no visiem daudzstūriem, kuriem vienāds malu skaits un vienādi perimetri, vislielākais laukums ir regulāram daudzstūrim. Zēnodors risināja arī stereometrijas uzdevumus.

Pēdējais hellēnisma perioda izcilais matemātiķis bija Perges **Apollonijs** (apm. 262.—200. g. pirms m. ē.). Viņš ir pazīstams kā darba «Koniskie šķēlumi» autors.

Pirmās četras «Konisko šķēlumu» grāmatas ir saglabājušās grieķu valodā, nākamās trīs — arābu tulkojumā, bet pēdējā ir pazudusi. Apollonija pieeja koniskajiem šķēlumiem atšķiras no visu viņa priekšteču (tajā skaitā arī Arhimēda) metodēm ar savu lielo vispārīgumu. Pirms Apollonija katru no trim konusa šķēlumu veidiem ieguva, šķeļot taisnus riņķa konusus. Apollonijs visus trīs šķēlumu veidus ieguva no jebkura riņķa konusa, taisna vai slīpa. Apollonijs deva šiem šķēlumiem nosaukumus *elipse*, *hiperbola*, *parabola*. Pirmā «Konisko šķēlumu» grāmata sākas ar riņķa konusa definīciju (vispārīgajā gadījumā — arī slīpa konusa), turklāt tiek domāts, ka konuss ir turpināts uz abām pusēm no virsotnes. Turpat tiek doti konisko šķēlumu teorijas pamatjēdzieni — koniskā šķēluma virsotne, šķēluma diametri, saistītie diametri un asis.

Apollonijs ieguva elipsi, parabolu un hiperbolu atkarībā no tā, vai plakne šķeļ tikai vienas konusa daļas visas veidotājas, vai tā ir paralēla vienai veidotājai vai šķeļ abas konusa daļas. Katrai no šīm līknēm Apollonijs noteica tās pamatīpašību, izmantojot slīpleņķa koordinātas. Lietojot mūsdienu algebrisko pierakstu, šīs īpašības var izteikt ar vienādojumu $y^2=2px\pm\frac{p}{a}x^2$, kur mīnusa zīme atbilst elipsei, plusa zīme — hiperbolai, bet parabolai koeficients pie x^2 ir vienāds ar nulli. Protams, Apollonijs šīs īpašības izteica ar ģeometriskās algebras palīdzību.

Ievērojama pirmās grāmatas daļa veltīta pierādījumam, ka konisko šķēlumu pamatīpašība nav atkarīga no diametra izvēles, vai, mūsdienu valodā runājot, tika pierādīta šīs īpašības invariance, pārejot no vienas koordinātu sistēmas uz citu.

II grāmata sākas ar nodaļu par hiperbolas asimptotām. Pēc tam Apollonijs aplūko saistītās hiperbolas, kā arī konisko šķēlumu pieskaru īpašības un uzdevumus par pieskares konstruēšanu.

III grāmatas pirmajā daļā ir teorēmas par laukumu vienādību taisnlīniju figūrām, kuras veido konisko šķēlumu pieskares un sekantes. No citām teorēmām īpaši jāatzīmē teorēmas par elipses un hiperbolas fokusu īpašībām.

IV grāmatas saturā interesantākais ir pētījums par riņķa līnijas un konisko šķēlumu kopējo punktu skaitu, kā arī par divu konisko šķēlumu pieskaršanos. Šis jautājums grieķiem bija svarīgs, jo koniskajos šķēlumos iegūtās līknes izmantoja, risinot uzdevumu par kuba dubultošanu.

Ar IV grāmatu it kā noslēdzas mācības par koniskajiem šķēlumiem elementārākā daļa. V grāmata atšķiras no pārējā teksta: gan pēc satura, gan pēc izklāsta veida tā ievērojami apsteidza savu laiku. V grāmatā Apollonijs aplūkoja no dažādiem punktiem pret koniskiem šķēlumiem vilktās normāles kā taišņu nogriežņus ar maksimālu vai minimālu garumu. Apollonijs norāda, ka šādas taisnes ir pētītas arī pirms viņa, bet ļoti nepilnīgi, turklāt viņš atzīmē, ka šis jautājums «pieder pie lietām, kuras ir cienīgas, lai ar tām nodarbotos viņu pašu dēļ».

VI grāmatā aplūkoti divu taisnu līdzīgu konusu kongruentie un līdzīgie šķēlumi.

VII grāmata, kā norādīja Apollonijs, ir ievads VIII grāmatai, kura tagad pazudusi. Tajā aplūkotas hordas, kas paralēlas saistītajiem diametriem, un pierādītas pazīstamās «Apollonija teorēmas». Vienā no šīm teorēmām runa ir par saistīto diametru garumu kvadrātu summu, bet otrā izteikts apgalvojums, ka uz saistītiem diametriem konstruēto paralelogramu laukums ir konstants.

Apollonija metode bija analītiskās ģeometrijas pirmsākums. Apollonijs nelietoja koordinātas, bet viņam bija koordinātu līnijas un koordinātu leņķis; viņa koordinātu līnijas bija vērstas pa diviem saistītiem konisko šķēlumu virzieniem.

Hellēņu valstīs teorētiskajai matemātikai bija maz lietojumu praksē. To var izskaidrot tā, ka dabaszinātnes bija maz attīstītas un tāpēc nebija vajadzības un arī iespēju matemātikas plašai lietošanai. Dabaszinātnes sastāvēja tikai no astronomijas un mehānikas pašiem pamatiem. Fizika — zinātne, kas vēlāk kļuva par galveno matemātikas lietotāju un līdz ar to deva svarīgus tās attīstības stimulus, — tad vēl būtībā nebija radusies. Konisko šķēlumu teorija tika lietota galvenokārt matemātikā, bet ārpus tās — tikai hidrostatikā (Arhimēda peldošie ķermeņi). Tikai pēc J. Keplera atklājumiem astronomijā XVII gs. koniskos šķēlumus sāka plaši lietot dabaszinātnēs.

Otrs iemesls, kāpēc matemātiku maz lietoja praksē, bija tas, ka ģeometriskā algebra aplūkoja tikai nogriežņu reizinājumu veidotos laukumus un tilpumus un tās rezultātus nevarēja vispārināt brīvi izraudzītiem lielumiem.

7. Matemātika Romas impērijas valstīs

Matemātiskās zināšanas Senajā Romā radās un attīstījās gan uz pašu romiešu, gan citu Apenīnu pussalu apdzīvojošo tautu, galvenokārt etrusku, tehnikas un dabaszinātņu attīstības bāzes. Protams, bija jūtama arī grieķu matemātikas ietekme. Tā, piemēram, līdzīgi ir etrusku un seno romiešu skaitļu pieraksti un salikto skaitļu veidošanas princips. Romieši lietoja šādus ciparus: I (1), V (5), X (10), L (50), C (100), D (500), M (1000), no kuriem veidoja saliktus skaitļus. Kaut arī romiešu salikto skaitļu pieraksti nav veidoti, izmantojot noteiktas bāzes dažādas pakāpes, t. i., pēc pozicionālā principa, tomēr arī šeit var saskatīt dažas pozicionālā principa pazīmes, jo cipara vērtība ir atkarīga no tā atrašanās vietas. Vispārīgi runājot, romiešu skaitļu pieraksts ir jāuztver kā summa, taču, ja mazāks cipars atrodas pa kreisi no lielāka cipara, tad mazākais cipars jāuztver nevis kā saskaitāmais, bet kā mazinātājs. Daži skaitļu pierakstu piemēri, kas uztverami kā ciparu summa:

$$\mathrm{III}=\mathrm{I}+\mathrm{I}+\mathrm{I},\ \mathrm{VII}=\mathrm{V}+\mathrm{I}+\mathrm{I},\ \mathrm{XXV}=\mathrm{X}+\mathrm{X}+\mathrm{V}.$$

Kā starpība jāuztver šādi pieraksti:

$$\mathrm{IV}=\mathrm{V}-\mathrm{I},\ \mathrm{IX}=\mathrm{X}-\mathrm{I},\ \mathrm{XC}=\mathrm{C}-\mathrm{X},\ \mathrm{CD}=\mathrm{D}-\mathrm{C}.$$

Daļas romieši pierakstīja divpadsmitnieku sistēmā, katrai daļai no $\frac{1}{12}$ līdz $\frac{11}{12}$ bija savs apzīmējums un savs nosaukums. Tādējādi romieši rakstīja un lasīja, piemēram, nevis «viena astotdaļa», bet «pusotras divpadsmitdaļas». Šīs sistēmas izcelsme nav zināma.

Skaitīšanu romieši veica trīs dažādos veidos. Vissenākā bija skaitīšana uz pirkstiem, sākot no kreisās rokas un pārejot uz labo, turklāt katrs pirksts nozīmēja citu skaitli.

Otrs skaitīšanas veids, kuru lietoja romieši, bija skaitīšana uz abaka. Par abaku izmantoja ar smiltīm noklātu dēli. Smiltīs ievilka svītras, kas sadalīja dēli stabiņos. Tajos lika akmentiņus «kalkulus», no šī vārda arī cēlies nosaukums «kalkulācija». Bija arī citi, daudz pilnīgāki abaka veidi. Trešais skaitīšanas veids bija mutiskā skaitīšana.

Sākot ar V gs. pirms m. ē., Romas impērija ilgstošos karos paplašināja savu teritoriju. III gs. pirms m. ē. tā asiņainās un neatlaidīgās cīņās bija jau pakļāvusi visas Apenīnu pussalas tautas (arī grieķu kolonijas Dienviditālijā), turklāt vēl Sicīliju, Sardīniju, Korsiku un daļu Spānijas. Romiešu ietekmes sfērā nonāca Grieķija un

Mazāzija. 30. gadā pirms m. ē. romieši beidza Ēģiptes iekarošanu. Tādējādi mūsu ēras I gs. Roma bija varena impērija, kurai piederēja zemes arī Britānijas dienvidos.

Neapšaubāmi, romiešu kara tehnikai, hidrotehnikai, celtniecībai un zemes mērīšanai, kā arī ģeogrāfijai bija vajadzīgas matemātiskās zināšanas. Taču līdz mums nav saglabājušies materiāli, pēc kuriem varētu izsekot romiešu matemātikas attīstībai. Literatūrā nav atzīmēts neviens izcils romiešu matemātisks atklājums vai matemātiķis. Roma nekļuva par sava laika zinātnes galvaspilsētu tāpēc, ka tāda zinātnes galvaspilsēta Romas impērijā bija no hellēnisma perioda mantotā Aleksandrija. Līdz ar to romiešu laikmetā grieķu valoda saglabājās kā starptautiska zinātnes valoda (latīņu valoda par starptautisku zinātnes valodu nostiprinājās ievērojami vēlāk — pēc tam, kad tā kļuva par katoļu reliģijas valodu).

Romas impērijas laikā matemātika Aleksandrijā krasi atšķīrās no hellēnisma perioda matemātikas. Šo atšķirību galvenais iemesls bija Babilonijas astronomu un matemātiķu tradīciju plaša apgūšana Aleksandrijā, kas bija sākusies jau pirms romiešu iekarojumiem. To paātrināja sakaru nostiprināšanās starp Ēģipti un Mezopotāmiju. Aleksandrijā vislielākā interese radās par trigonometriju.

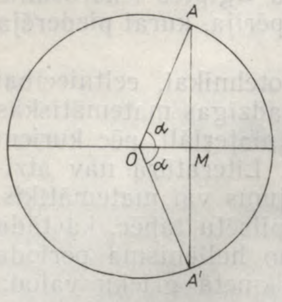
Mūsu ēras I gs. beigās dzīvoja M e n e l ā j s no Aleksandrijas. Menelāja ievērojamākais sacerējums ir trīs sējumu darbs «Sfērika», kurā vēsturiski pirmoreiz tika aplūkots sfēriskais trijstūris un sfēriskās trigonometrijas pamati.

«Sfērikas» I grāmatā aplūkotas pamatteorēmas par sfēriskiem trijstūriem, kas analogas Eiklīda «Elementu» teorēmām par plaknes trijstūriem. Ja Eiklīdam ir kāda teorēma, kurai nav pilnīga analoga sfēriskajā ģeometrijā, Menelājs to nomaina ar citu atbilstoša satura teorēmu. Tā, piemēram, viņš pierāda, ka sfēriska trijstūra iekšējo leņķu summa ir lielāka par diviem taisniem leņķiem.

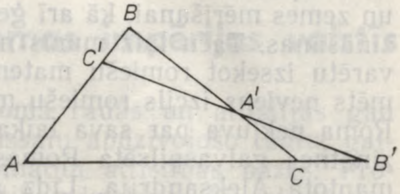
III grāmatā aplūkota trigonometrija. Protams, tajā netiek lietoti sinusa un citu trigonometrisko funkciju jēdzieni. To vietā aplūkotas hordas. Tā, piemēram, leņķa α sinusa līnija ir puse no hordas, kas savelk leņķi 2α (3. zīm.), t. i., $\sin\alpha = \frac{AM}{AO} = \frac{AA'}{2AO}$.

III grāmatā ir pierādīta slavenā Menelāja teorēma, kas vēlāk ieguva nosaukumu «teorēma par sekantēm» vai «sešu lielumu likums». Šajā teorēmā aplūko figūru, ko plaknē veido četri taisnes nogriežņi, bet uz sfēras — attiecīgi lielo riņķu loki, no kuriem katrs krusto pārējos trīs. Šo figūru, kuru viduslaikos sauca par «sekanšu figūru», tagad sauc par pilnu četrstūri (sk. 4. zīm.). Menelājs pierādīja, ka $\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = -1$.

Ievērojamais grieķu astronoms, ģeogrāfs un optiķis Klaudijs P t o l e m a j s, kas no 127. līdz 151. gadam veica savus novērojumus Aleksandrijā, uzrakstīja «Matemātiskos sacerējumus XIII grāmatās». Šis darbs, kas vēlāk ieguva arābu nosaukumu «Almagests»,



3. zīm.



4. zīm

ir tā laika astronomijas izcilākais sasniegums. Tajā izklāstīta Ptolemaja ģeocentriskā sistēma, kā arī sistemātiski aplūkota hordu trigonometrija.

Ptolemaja pasaules sistēma bija vispilnīgāk izstrādātā ģeocentriskā pasaules sistēma, kas debesu ķermeņu (Mēness, Saules, planētu, zvaigžņu) redzamo kustību izskaidroja ar visai sarežģītas epiciklu (riņķi, pa kuriem pārvietojas debess ķermeņi) un deferentu (riņķi, pa kuriem pārvietojas epiciklu centri) sistēmas palīdzību. Ptolemaja pasaules sistēma bija kļūdaina, tomēr savā laikā tai bija liela praktiska nozīme — tā deva iespēju noteikt debess spīdekļu stāvokļus un aprēķināt to kustību. Šo pasaules sistēmu izstrādāja Ptolemajs ap mūsu ēras 140. g., un to izmantoja līdz XVI gs., kad to nomainīja heliocentriskā pasaules sistēma.

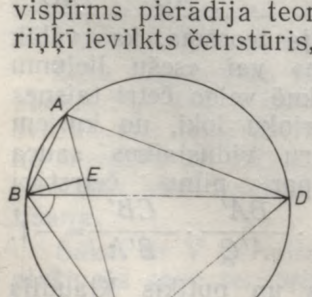
«Almagesta» I grāmata sākas ar īsu plaknes un sfēriskās trigonometrijas apskatu, kas nepieciešams, lai sastādītu un lietotu hordu (sinusu) tabulu. Ptolemajs dalīja riņķa līniju 360 vienādās daļās, bet tās diametru — 120 vienādās daļās un izteica šīs daļas sešdesmitnieku sistēmā. Ptolemajs ieguva sakarību:

$$(\text{horda } \alpha)^2 + (\text{horda } (180^\circ - \alpha))^2 = (\text{diametrs})^2,$$

kas analoga identitātei $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Lai iegūtu hordu $\alpha - \beta$, ja zināmas hordas α un β, Ptolemajs vispirms pierādīja teorēmu, kas nosaukta viņa vārdā: ja $ABCD$ — riņķī ievilkts četrstūris, tad

$$AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC \quad (5.\ \text{zīm.}).$$



5. zīm.

Ptolemaja teorēmu pierāda, novelkot taisni BE līdz krustpunktam ar AC tā, lai leņķi ABE un DBC būtu vienādi. No trijstūru ABE un DEC, kā arī ABD un BCE līdzības izriet pierādāmā vienādība. Speciālā gadījumā, ja AD ir riņķa diametrs, iegūst sakarību, kas ekvivalenta trigonometrijas formulai

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta \cdot \cos\alpha.$$

Lai aprēķinātu nelielu loku hordas, Ptolemajs pierādīja teorēmu, kas ekvivalenta formulai

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}.$$

Viņš pierādīja arī teorēmu, kuru izsaka formula

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta,$$

bet interpolācijai pierādīja teorēmu, kas ekvivalenta nevienādībai

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}<\frac{\alpha}{\beta}\left(\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}\right).$$

Visas šīs teorēmas tika izmantotas tabulu sastādīšanai. Ptolemaja tabulās skaitļi ir precīzi līdz piektajai decimālzīmei ieskaitot. I gs. pirms m. ē. Romas matemātika, arhitektūra, hidrotehnika, ģeogrāfija un kara tehnika piedzīvoja uzplaukuma periodu. Aleksandrijas zinātnieku atziņas Romā kļuva pazīstamas galvenokārt imperatora Jūlija Cēzara laikā. Pats Jūlijs Cēzars bija sacerējuma «Par zvaigznēm» autors. Šī darba mērķis bija kalendāra reforma. 450. gadā pirms m. ē. iepriekšējais gada garums (355 dienas) tika labots tādējādi, ka pēc katriem diviem gadiem «iestarpināja» lieku mēnesi, kurā dienu skaits pēc kārtas bija 22 vai 23 dienas. Bet tā gads kļuva pārāk garš, tāpēc sāka vienu no šiem «iestarpinātajiem» mēnešiem izlaist, sākumā to darot patvaļīgi, vēlāk pēc katriem 24 gadiem. Tā rezultātā hronoloģija bija tiktāl sajaukta, ka radās 85 dienu starpība starp faktisko un nominālo gadalaiku maiņu. Pēc Ēģiptes apciemojuma 48.—47. gadā Cēzars nolēma pārņemt aleksandriešu kalendāru, kurā bija 365 dienas gadā un katrā ceturtajā gadā lieka diena starp 23. un 24. februāri. Jauno kalendāru ieviesa 45. gadā pirms m. ē.

I gs. pirms m. ē. otrajā pusē dzīvoja Vitrūvijs. Viņš bija kara inženieris, ievērojams celtnieks un arhitekts — autors «Desmit grāmatām par arhitektūru». Šajā arhitektūras enciklopēdijā ir vairākas vietas, kas attiecas uz matemātiku. Vitrūvijs sprieda par cilvēka ķermeņa proporcijām, aplūkoja mācību par harmoniskām attiecībām, bez tam viņš rakstīja par trim, pēc viņa domām, vissvarīgākajiem matemātiskajiem atklājumiem: kvadrāta malas un diagonāles nesamērojamību, pitagoriešu trijstūri ar malu garumiem 3, 4 un 5 vienības un kroņa svara noteikšanu pēc kroņa izspiestā ūdens tilpuma. Tika doti arī zemes mērīšanas instrumentu apraksti un norādījumi, kā ar šiem instrumentiem rīkoties. Vitrūvijs lietoja plānu un ēku fasāžu rasējumus, tādējādi kļūdams par vienu no tēlotājas ģeometrijas pirmsācējiem. Izdarot aprēķinus, viņš pieņēma, ka $\pi=3$.

Ģeometrijas elementus var atrast vairāku romiešu zinātnieku darbos par citām nozarēm. Interese par ģeometriju bija saistīta ar nepieciešamību veikt zemes mērīšanu un būvēt ceļus.

Pusotra gadsimta laikā — no Cēzara līdz Trajānam — romieši apguva Aleksandrijas matemātiku tiktāl, ka viņiem nebija sveši arī teorētiskās aritmētikas pētījumi. Par romiešu praktiskajām zināšanām matemātikā var spriest arī pēc viņu juridiskajiem un ekonomiskajiem sacerējumiem, kuros lietoja procentu rēķinus (pret procentu iekasēšanu jau 342. gadā pirms m. ē. tika izdots likums, kas tomēr netika ievērots).

Diezgan sarežģīti aprēķini bija saistīti ar mantojuma tiesībām. Lielu popularitāti guva gadījums, kas iekļauts daudzās tieslietu un matemātikas mācību grāmatās: kāds romietis mirdams atstāja šādu novēlējumu — ja viņa sievai piedzims dēls, tas mantos divas trešdaļas, bet sieva vienu trešdaļu īpašuma; ja piedzims meita, viņa mantos vienu trešdaļu, bet sieva divas trešdaļas. Piedzima dvīnīši — zēns un meitene. Kā sadalīt īpašumu? Mūsu ēras II gs. dzīvojušais Salviāns Jūliāns piedāvāja šādu risinājumu: viss mantojums jāsadala septiņās vienādās daļās; dēlam jāsaņem četras, mātei — divas un meitai — viena daļa. Tādējādi dēls saskaņā ar novēlējumu saņems divreiz vairāk nekā māte, bet māte — divreiz vairāk nekā meita.

Viens no ievērojamākajiem senatnes matemātiķiem — enciklopēdistiem, kurš rakstīja gandrīz par visiem matemātikas, mehānikas, astronomijas un fizikas jautājumiem, bija H ē r o n s. Viņa sacerējumi ir domāti lielākoties kā mācību grāmatas. Hērons attīstīja skaitļošanas matemātiku, ar ģeometriskās algebras palīdzību reducējot uzdevumu risinājumus līdz konkrētiem, praksē izmantojamiem rezultātiem.

Teorētiska nozīme ir Hērona Eiklīda «Elementu» komentāriem. Pamatojoties uz Eiklīda mācību, Hērons aplūko dažādas atsevišķu ģeometrisko jēdzienu definīcijas to vēsturiskajā attīstībā.

Hērona vissvarīgākais ģeometriskais sacerējums ir «Metrika» (mācība par mērījumiem) trijās grāmatās.

Pirmajā grāmatā aplūkoti laukumu un virsmu mērīšanas likumi. Te dota nevienādu malu trijstūru laukumu aprēķināšanas formula, t. s. «Hērona formula», kura bija zināma jau Arhimēdam un kuru Hērons pierāda ar ievilkta riņķa palīdzību.

Hērons aplūkoja skaitliskus piemērus, kuros jāaprēķina arī kvadrātsaknes un tiek iegūts iracionāls rezultāts. Hērons lietoja babiloniešu tuvināto kvadrātsaknes aprēķināšanas metodi, ēģiptiešu daļu pierakstu un likumu izklāsta veidu. Par π vērtību viņš pieņēma skaitli 22/7. Hērona pirmā grāmata beidzas ar norādījumiem, kā noteikt neregulāru plaknes figūru un neregulāru virsmu laukumus.

Otrajā grāmatā aplūkota tilpumu mērīšana. Tā beidzas ar norādījumu, ka Arhimēds neregulāru ķermeņu tilpumus noteica, iegremdējot tos ūdenī un pēc tam izmērot izspiestā ūdens tilpumu.

Trešajā grāmatā tiek aplūkots jautājums, kā sadalīt dažādas figūras un ķermeņus dotajā attiecībā. Hērons izmantoja Eiklīda darbu «Par (figūru) dalīšanu», Apollonija traktātu «Par laukumu atšķelšanu» un Arhimēda traktātu «Par lodi un cilindru». Viņš atrisināja arī vairākus oriģinālus uzdevumus. Tā kā, tilpumu dalot, jāaprēķina kubsakne, tad Hērons izklāstīja arī kubsaknes tuvinātas aprēķināšanas paņēmienu.

P a p s no Aleksandrijas dzīvoja mūsu ēras III gs. beigās. Viņš nodarbojās ar aizmirstu klasisko matemātisko zināšanu atjaunošanu. Viņa galvenais darbs ir «Krājums» astoņās grāmatās. Šis darbs ir mācību grāmata ģeometrijā, kas uzrakstīta īsi un skaidri, labi pārzinot priekšmetu. Tajā daudz vēsturisku ziņu, norādīti 30 dažādi autori, tāpēc šis darbs ir svarīgs izziņas avots antīkās matemātikas vēsturē.

Jāatzīmē viena Papa darbu īpatnība. Nezināmos skaitļus viņš apzīmēja ar lielajiem burtiem, bet zināmos — ar mazajiem burtiem. Lielumus ar burtiem sāka apzīmēt Aristotelis, vēlāk to darīja arī Eiklīds un citi matemātiķi, kas ar burtiem apzīmēja skaitļus — nogriežņus. Paps no šī uzskatāmā attēlojuma atteicās. Tas bija svarīgs solis, kas sagatavoja «ceļu» algebrai. Tomēr pirmais antīkajā matemātikā sistemātiski algebriskos apzīmējumus vienādojumu risināšanā lietoja Diofants.

D i o f a n t s no Aleksandrijas dzīvoja ap mūsu ēras 250. gadu. VI gs. Metrodora izdotajā «Grieķu antoloģijā» ir uzdevums, kas attiecas uz Diofanta dzīvi: «Šeit apglabāts ir Diofants; un kapakmens, ja skaitīt proti, pastāstīt var mums, cik garš ir bijis viņa mūžs. Sesto daļu dzīves viņš bija zēns, bārda viņam sāka augt pēc vienas divpadsmitās daļas, pēc vienas septītās daļas mūža viņš apprecējās, pagāja pieci gadi, un piedzima dēls, kurš nodzīvoja tikai pusi no tā, ko tēvs; četrus gadus Diofants sēroja par smago zaudējumu, līdz nomira, mūžu atdevis zinātnei.» No šejienes, ja vien šie dati nav izdomāti, Diofanta vecuma noteikšanai iegūstam vienādojumu

$$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4=x,$$

kura atrisinājums ir $x=84$.

Diofanta galvenais darbs ir «Aritmētika», kas sastāv no vairākām grāmatām, no kurām ir saglabājušās tikai sešas. Šajā darbā Diofants ieviesa algebriskos apzīmējumus. Nezināmo lielumu Diofants definēja kā lielumu, kas «satur nenoteiktu skaitu vienību», un nosauca par «aritmos», t. i., «skaitli». Skaitliskos koeficientus Diofants rakstīja tūlīt pēc nezināmā. Nezināmā pakāpes viņš apzīmēja ar attiecīgo grieķu nosaukumu sākuma burtiem, apzīmējumi bija arī apgrieztajiem lielumiem un to pakāpēm. Augstākas pakāpes par sesto Diofants neaplūkoja. Saskaitīšanu apzīmēja tā, ka visus saskaitāmos vienkārši rakstīja blakus; atņemšanai Diofants lietoja zīmi

Ψ .

Tā kā Diofantam bija tikai viena zīme, kā apzīmēt nezināmo, tad visus uzdevumus vajadzēja formulēt tā, lai tajos būtu tikai viens nezināmais. Nenoteikto vienādojumu gadījumā dažu nezināmo vietā Diofants ņēma brīvi izraudzītus skaitļus, norādot, ka to vietā var izvēlēties arī jebkuru citu skaitli. Līdz ar to Diofanta risinājumi nezaudēja savu vispārīgumu.

Diofanta nozīmīgākais ieguldījums matemātikā ir viņa nenoteikto vienādojumu risināšanas metodes. Ar lineāriem nenoteiktiem vienādojumiem Diofants nenodarbojās, bet apskatīja kvadrātvienādojumus, kubiskos un bikvadrātvienādojumus. Šo vienādojumu saknes viņš meklēja tā, kā to dara tagad, kad risina tā sauktos Diofanta vienādojumus.

Darbā «Aritmētika» Diofants aplūkoja nenoteiktos kvadrātvienādojumus $Ax^2+Bx+C=y^2$. Atkarībā no koeficientiem A, B, C izšķirami vairāki gadījumi. Interesants ir gadījums $B=0$. Diofants parādīja metodi, kā vienādojumam $Ax^2+C=y^2$ atrast citas saknes, ja zināma viena no tām. Diofants pierādīja, ka vienādojumu Ax^2+ $+C=y^2$ var atrisināt racionālos skaitļos tikai tad, ja $A+C$ ir pilns kvadrāts. Risinot pilnu kvadrātvienādojumu $Ax^2+Bx+C=y^2$, Diofants aplūkoja vienīgi gadījumu, kad A vai C ir pilni kvadrāti vai arī pilns kvadrāts ir izteiksme $\frac{1}{4}B^2-AC$.

Bez šiem vienādojumiem Diofants risināja arī «dubultos» vienādojumus, t. i., sistēmas

$$\begin{cases} a_1x^2+b_1x+c_1=y^2 \\ a_2x^2+b_2x+c_2=z^2. \end{cases}$$

No augstākas pakāpes nenoteiktiem vienādojumiem Diofants aplūkoja šādus vienādojumus:

$$Ax^n+Bx^{n-1}+\ldots+Kx-M=y^2, \text{ ja } n\leqslant 6, \text{ un}$$
$$Ax^n+Bx^{n-1}+\ldots+Kx-M=y^3, \text{ ja } n\leqslant 3.$$

«Aritmētikā» bez uzdevumiem ir arī vispārīgas teorēmas skaitļu teorijā. Piemēram,

1) ja a ir dotais skaitlis, bet x un y — tādi skaitļi, ka izteiksmes $x+a$, $y+a$ un $xy+a$ ir kvadrāti, tad kvadrātu $x+a$ un $y+a$ malas atšķiras par 1;

2) trīs skaitļiem n^2, $(n+1)^2$ un $4(n^2+n+1)$ piemīt īpašība, ka jebkuru divu skaitļu reizinājums, palielināts vai nu par šo pašu skaitļu summu, vai arī par trešo skaitli, ir kvadrāts;

3) jebkura skaitļa kvadrātu var izteikt bezgalīgi daudz veidos kā divu skaitļu kvadrātu summu.

Patiešām, $a^2=x^2+y^2$, kur $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}a$ un $y=\frac{2t}{1+t^2}a$, bet t — jebkurš pozitīvs īsts daļskaitlis.

«Aritmētikā» ir arī vairāki uzdevumi par tāda taisnleņķa trijstūra konstruēšanu, kura malas ir izsakāmas ar racionāliem skaitļiem un apmierina doto nosacījumu.

«Aritmētika» bija ierosme jauno laiku matemātiķiem veikt pētījumus skaitļu teorijā.

IV gs. beigās dzīvoja matemātiķis T e o n s no Aleksandrijas. Viņš bija Ptolemaja «Almagesta» komentāru autors. Kaut arī šis darbs neraksturo Teonu kā izcilu matemātiķi, tomēr tajā ir daudz svarīgu vēsturisku ziņu un tas dod ieskatu, kā tā laika Aleksandrijas matemātiķi lietoja sešdesmitnieku daļas, kā reizināja, dalīja, aprēķināja kvadrātsakni.

Teons izdeva arī Eiklīda «Elementu» tekstu, izdarot tajā savus labojumus un papildinājumus. Šis teksts bija ļoti izplatīts viduslaikos.

Teona meita Hipatija (370.—415. g.) bija filozofe, matemātiķe, astronome un ārste, neoplatonisma piekritēja. Kā norāda pats Teons, Hipatija piedalījās «Almagesta» komentāru sastādīšanā. Hipatija ir uzrakstījusi komentārus arī Diofanta «Aritmētikai» un Apollonija «Koniskajiem šķēlumiem». Hipatiju nogalināja Aleksandrijas bīskapa Kirila mudināts kristiešu fanātiķu pūlis. Tāds pats fanātiķu pūlis iznīcināja arī slaveno Aleksandrijas bibliotēku. Tā tika sagrauts Romas impērijas galvenais zinātnes centrs.

Līdz ar vispārīgu verdzības iekārtas pagrimumu Romas impērijas zemēs sākās arī matemātikas pagrimums. Zinātne kļuva bezspēcīga pret barbaru un reliģiozo fanātiķu triecieniem, kuri izplatīja galēji reakcionāras, mistiskas filozofiskās mācības un reliģiskos kultus.

Pēc Aleksandrijas zinātniskās skolas bojāejas kādu laiku šī kultūra un valoda vēl saglabājās Atēnās. Turp no Aleksandrijas pārcēlās Prokls (410.—485. g.), kurš vadīja filozofisko skolu. Viņš ir uzrakstījis daudzus filozofiskus darbus, arī Platona dialogu komentārus. Matemātiķiem visvērtīgākie ir viņa Eiklīda «Elementu» I grāmatas komentāri, kas ir viens no svarīgākajiem ģeometrijas vēstures avotiem.

«Komentāri» sākas ar diviem ievadiem. Pirmajā Prokls raksta par matemātikas un filozofijas attiecībām, otrajā — par ģeometriju un tās priekšmetu. Pēc tam seko matemātikas vēstures izklāsts līdz Eiklīdam un visas «Elementu» I grāmatas satura apskats.

«Komentāros» Prokls pēc kārtas vēsturiski un kritiski izskata katru definīciju, postulātu un aksiomu, pēc tam pāriet pie teorēmām. Vispirms viņš izskaidro Eiklīda dotos pierādījumus, pēc tam norāda dažus konkrētus piemērus vingrinājumiem un beigās atspēko iebildumus, kādi varētu rasties pret pierādījumiem.

Pēc Romas krišanas un ostgotu karalistes izveidošanās parādījās vēl daži matemātiska satura darbi, taču tiem nebija paliekošas nozīmes.

No šī laika perioda minēsim vienīgi valstsvīra un filozofa Boēcija (dzimis ap 486. g., sodīts ar nāvi 524. g.) vārdu. Boēcijs pazīstams kā Aristoteļa un Porfirija loģikas sacerējumu komentāru, traktāta «Par mūziku» un teoloģiski ētiskā darba «Par filozofijas mierinājumu» autors. Viņš rakstīja arī matemātiskus darbus. Nebūdams apdāvināts matemātiķis, Boēcijs matemātikas vēsturē ir pazīstams kā tulkotājs. Viņš tulkoja Nikomaha «Aritmētiku», kā arī Eiklīda «Elementu» pirmās trīs grāmatas. Tie nebija burtiski tulkojumi — Nikomaha grāmata bija papildināta ar skaitliskiem piemēriem, bet Eiklīda grāmatās tika izlaisti pierādījumi. Boēcijam piedēvē arī «Ievadu aritmētikā» un «Ievadu ģeometrijā», kā arī darbus astronomijā.

Boēcijs kļuva par upuri politiskajā cīņā starp romiešu aristokrātiju un ostgotu valdību, taču katoļu baznīca izsludināja viņu par svēto it kā viņa izciesto mocību dēļ. Tādēļ arī viduslaikos pret Boēcija vārdu izturējās ar lielu cieņu.

Pateicoties Boēcija tulkojumiem, Eiropas tautas viduslaikos ieguva pirmās ziņas par grieķu matemātisko mantojumu, kuras līdz ar milzīgo darbu, ko veica Austrumu tautas, sagatavoja ceļu Renesanses laikmeta matemātikai.

8. Ķīnas matemātika

Pirmie līdz mūsdienām saglabājušies senie ķīniešu teksti attiecas uz I tūkstošgadi pirms m. ē. 213. g. pirms m. ē. imperators Ši Haun-di pavēlēja sadedzināt visas grāmatas — acīmredzot, lai likvidētu iepriekšējās tradīcijas. Tomēr drīz vien pēc Haņu pirmās dinastijas nodibināšanās senās grāmatas sāka atjaunot. Uz II gs. pirms m. ē. attiecas papīra izgudrošana, kā arī senākie līdz mums nonākušie sacerējumi matemātikā un astronomijā «Traktāts par mērāmo kārti» un «Matemātika deviņās grāmatās».

Otrās Haņu dinastijas valdīšanas laikā (II gs.) Ķīnai nodibinājās tirdznieciskie sakari ar Romu un Indiju. Sui dinastijas laikā (VI—VII gs.) sākās Lielā kanāla būve, kas savienoja Dienvidķīnu ar Ziemeļķīnu. Tan dinastijas laikā (VII—X gs.) tika iekarotas vairākas kaimiņu valstis. Šo iekarojumu rezultātā Ķīna kļuva par milzīgu valsti no Klusā okeāna līdz Tibetai un no Lielās sienas līdz Vjetnamai. Šai laikā ķīniešu hieroglifiskā rakstība izplatījās starp daudzām tautām. Tomēr dažādas tautas vienus un tos pašus hieroglifus izrunāja dažādi.

Tan laikmetā paplašinājās Ķīnas sakari ar Indiju, Indonēziju, Irānu, Vidusāziju. Tieši šajā laikā (VIII gs.) Ķīnā plaši izplatījās budisms un līdz ar to indiešu zinātne. Tika izgudrota grāmatu iespiešana no iegravētām plāksnēm, kuras pēc diviem gadsimtiem aizstāja ar nomaināmu šriftu. X—XIII gs. Sunu dinastijas laikā īpaši augstu attīstības līmeni sasniedza ķīniešu amatniecība un māksla. Uz šo laiku attiecas tādi svarīgi izgudrojumi kā kompass un pulveris. XIII gs. Ķīnu iekaroja mongoļi, kuri nodibināja jaunu, Juaņu dinastiju. Par galvaspilsētu kļuva Hanbalika (Pekina). Pēc mongoļu iekarojumiem Ķīnā turpmākajos mongoļu pārgājienos piedalījās arī ķīniešu pulvera meistari, sienu sagraušanas speciālisti un ieroču gatavotāji. Drīz pēc tam Vidusāzijā un Irānā parādījās arī ķīniešu zinātnieki. Savukārt Ķīnā ieradās islama valstu zinātnieki un tirgoņi, bet vēlāk arī eiropieši (XIII gs. bija slavenā Marko Polo Ķīnas ceļojuma laiks).

Senajā Ķīnā liela vērība tika pievērsta matemātikas mācīšanai. Matemātiskās apmācības sistēma tika izveidota jau Čžou laikā. Tanu valdīšanas laikā Imperatora akadēmijā matemātiku mācījās septiņus gadus. Lai ieņemtu valsts ierēdņa amatu, vajadzēja nokārtot vairākus eksāmenus, to skaitā arī matemātikā.

Svarīga īpatnība ķīniešu zinātnē ir tās dogmatisms. Gadsimtu gaitā ķīniešu zinātni attīstīja ierēdņi, kas to, tāpat kā daudzas valsts lietas, vērta birokrātisku. Ja grieķu matemātikas pamatdarbs — Eiklīda «Elementi» — ir vienots darbs, kurā apkopoti un rediģēti daudzu matemātiķu sacerējumi, tad ķīniešu klasiskie traktāti, arī «Matemātika deviņās grāmatās», tika izdoti bez izmaiņām.

Ķīniešu numerācija balstījās uz multiplikatīvo principu. Ķīniešu hieroglifisko ciparu forma radās II gadu tūkstotī pirms m. ē. un nostabilizējās III gs. pirms m. ē. Šos hieroglifus lieto arī tagad. Rakstot skaitļus, kas sastāvēja no tūkstošiem, simtiem, desmitiem un vieniem, augšā vai pa kreisi tika rakstīts tūkstošu skaits, tad tūkstoša zīme, simtu skaits, simtu zīme, desmitu skaits, desmitu zīme, vienu skaits. Ja kāda no šķirām trūka, to izlaida.

Tā kā aritmētiskās darbības ķīnieši veica uz skaitāmā dēļa, tad multiplikatīvais pieraksts izrādījās nepiemērots, un tādēļ skaitļu pieraksts kļuva pozicionāls.

Saskaitīšana un atņemšana uz skaitāmā dēļa tika izdarīta ar nūjiņu pielikšanu vai atņemšanu atbilstošajās šķirās. Tādējādi nebija nepieciešama saskaitīšanas tabula. Tāpēc arī tekstos fiksēti tikai reizināšanas un dalīšanas likumi. Taču pēc tiem var spriest arī par pirmajām divām darbībām, kuras no mūsdienās lietotajām darbībām atšķiras tikai ar dažām tehniskām detaļām, ko nosacīja skaitīšana uz dēļa. Darbības tika veiktas, sākot ar vecākajām šķirām, nevis jaunākajām. Doto skaitļu un atbildes izvietojums bija citāds nekā uz papīra. Starprezultāti pazuda aprēķinu gaitā, tāpēc tieša pārbaude bija neiespējama.

Ķīnā bija kompakta reizināšanas tabula no $9 \cdot 9 = 81$ līdz $1 \cdot 1 = 1$ (bez atkārtojumiem), kuru skolniekiem lika nodziedāt. Ķīniešu matemātiskajā literatūrā ir arī citas skaitļu tabulas, piemēram, m^2n^2 tabula, kur $m = 9, 8, 7, \ldots, 1$; $n = m, \ldots, 1$, ieskaitot skaitļu kvadrātus, kubus un ceturtās pakāpes. Kā redzam, senās Ķīnas matemātiķi nevairījās no lielām skaitļu tabulām un sarežģītiem aprēķiniem.

Senie matemātiskie traktāti līdz mums nonākuši II gs. pirms m. ē. redakcijā, bet tie ir daudz senāku sacerējumu pārstāstījums. «Matemātiku deviņās grāmatās» galīgā veidā rediģēja finansu ierēdnis Č z a n s C a n s (miris 150. g. pirms m. ē.). Šī grāmata domāta mērniekiem, inženieriem, ierēdņiem un tirgoņiem. Tajā savākti 246 uzdevumi, kas izklāstīti dogmatiski: vispirms formulēts uzdevums, pēc tam atbilde un ļoti īsi norādīts risināšanas veids. Grāmatām, kuras iekļautas šajā sacerējumā, ir dažāds matemātiskais līmenis, jo tās ir rakstītas dažādos laikos. I grāmatā «Lauku mērīšana» aplūkota daļu aritmētika un dažādu plaknes figūru laukumu aprēķināšana. II grāmatā «Sakarības starp dažādām graudaugu kultūrām» tiek risināti proporciju uzdevumi. III grāmatā «Dalīšana pa pakāpēm» apkopoti uzdevumi par dalīšanu proporcionāli dotajiem skaitļiem. IV grāmatā «Šao-guan» (grūti tulkojams termins) aplūkoti uzdevumi, kā atrast taisnstūra malu, ja dots tā laukums un otra mala; kvadrāta malu, ja dots tā laukums; kuba šķautni pēc kuba tilpuma, kā arī, kā aprēķināt riņķu un sfēru diametrus. V grāmatā «Darbu novērtēšana» parādīts, kā aprēķināt dažādu formu sienu, kanālu, dambju tilpumu un kā aprēķināt celtniecības darbiem vajadzīgo strādnieku skaitu. VI grāmatā «Proporcionālā sadalīšana» tiek risināts uzdevums par «taisnīgu» nodokļu noteikšanu atkarībā no dažādiem apstākļiem, kā arī aplūkoti sarežģītāki aritmētiskie uzdevumi. VII grāmatā «Iztrūkums un pārpalikums» tiek risināta divu lineāru vienādojumu sistēma ar diviem nezināmiem, izmantojot divu aplamo pieņēmumu likumu, ko mēs pazīstam kā hordu metodi. VIII grāmatā «Fan-čen» aplūkota n lineāru vienādojumu sistēma ar n nezināmiem, kuru risina ar īpašu metodi «fan-čen». IX grāmatā «Gou-gu» risināti uzdevumi, kuros izmantota Pitagora teorēma.

Daļskaitļus ķīnieši sāka lietot gandrīz vienlaikus ar veselajiem skaitļiem ilgi pirms negatīvajiem skaitļiem. Pirmie daļskaitļi bija $^1/_2$ («puse»), $^1/_3$ («mazā puse»), $^2/_3$ («lielā puse»). Šādus nosaukumus lietoja gan ikdienā, gan matemātiskos tekstos.

Ķīniešu darbībās ar daļskaitļiem lasītājs neatradīs neko neparastu, bet tieši tas ir pārsteidzoši, jo aritmētikas vēsturē daļskaitļu teorija daudzām tautām tika uzskatīta par vienu no vissarežģītākajām matemātikas nodaļām. Kā redzams no «Matemātikas deviņās grāmatās», II gs. pirms m. ē. ķīniešiem bija izdevies jau diezgan pilnīgi izstrādāt visas darbības ar daļskaitļiem. Ar Eiklīda algoritmu (atšķirībā no «Elementiem» tīri aritmētiskā formā) tika atrasts skaitītāja un saucēja lielākais kopīgais dalītājs, lai saīsinātu daļu. Daļskaitļu saskaitīšanu un atņemšanu veica tāpat kā tagad, tikai par kopsaucēju ņēma daļu saucēju reizinājumu.

V gs. ķīniešu matemātiķi, dalot daļskaitļus, dalāmo reizināja ar apgriezto daļu.

Mūsu ēras III gs. ķīnieši sāka lietot decimāldaļskaitļus, ar kuriem tika izteiktas tuvinātas iracionalitāšu vērtības, bet pēc tam arī skaitlis π.

VIII grāmatā izklāstītā «fan-čen» metode ir ķīniešu matemātikas augstākais sasniegums lineāru uzdevumu risināšanā. Šī metode ir n vienādojumu sistēmas ar n nezināmiem atrisināšanas algoritms. Šis algoritms būtībā ir analogs Gausa metodei, no kuras tas atšķiras vienīgi ar to, ka visas operācijas tiek izpildītas uz skaitāmā dēļa. Izmantojot mūsdienu terminoloģiju, var teikt, ka ķīniešu matemātiķi lietoja matricu, kuras kolonnas veido vienādojumi, bet rindas — koeficienti pie nezināmiem lielumiem un brīvie locekļi. «Fan-čen» burtiski nozīmē skaitļu izvietošanu pa rūtiņām. Pareizs skaitļu izvietojums uz skaitāmā dēļa ķīniešu matemātiķiem aizvietoja mūsdienu simbolikas burtus un indeksus.

«Fan-čen» metode ir tuva determinantu metodei, kuras ideju Eiropā pirmais izteica Leibnics, bet sīkāk attīstīja Krāmers (1750). Tomēr «fan-čen» metode principiāli atšķiras no determinantu metodes. Kaut arī ķīniešu matemātiķis darbojās it kā ar matricām, tomēr šo matricu elementu saistība ar vienādojumiem bija ļoti cieša. Lai radītu determinantus, vajadzēja no šīm tabulām izslēgt brīvos locekļus, rindas un kolonnas uzskatīt par līdzvērtīgām utt. To veica jauno laiku matemātiķi Eiropā.

Te vēl jāpiebilst, ka ievērojamajam japāņu matemātiķim Seni Kovam «fan-čen» metodi izdevās pilnveidot līdz determinantu metodei jau 1683. g., taču viņa darbs un pati «fan-čen» metode Eiropai līdz XIX gs. palika nezināma.

Nepieciešams nosacījums, lai varētu lietot «fan-čen» metodi, bija negatīvo skaitļu ieviešana. Negatīvos skaitļus uz skaitāmā dēļa attēloja ar citas krāsas vai formas nūjiņām, bet rakstīja ar citas krāsas tinti vai atzīmēja ar slīpu svītru. Negatīvajiem skaitļiem bija īpašs nosaukums «fu», bet pozitīvos skaitļus sauca «čžen».

Negatīvo skaitļu ieviešana ļāva vēl vairāk paplašināt to uzdevumu klasi, kuri ir risināmi, izmantojot tabulu metodi.

Pakāpeniski ķīniešu zinātnieki skaitli «fu» sāka interpretēt kā parādu, iztrūkumu u. tml. Tāda interpretācija deva iespēju skaitli «fu» izmantot, jau vienādojumu uzdodot.

Tāpat kā babiloniešu un grieķu matemātiķi, arī ķīniešu matemātiķi risināja teorētiskus uzdevumus par nenoteiktā vienādojuma $x^2+y^2=z^2$ atrisinājumu eksistenci veselos skaitļos.

Ķīniešu matemātiķi «Pitagora skaitļu» trijniekus sastādīja, izmantojot formulas

$$a=\frac{p^2-q^2}{2},\ b=pq,\ c=\frac{p^2+q^2}{2}.$$

«Matemātikas deviņās grāmatās» IX grāmatā ir vairāki uzdevumi, kuru risinājums reducējas uz vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} x^2 \pm y^2 = a \\ y \mp x = b \end{cases}$$

atrisināšanu. Lielākoties ķīnieši šo sistēmu reducēja uz lineāru vienādojumu vai uz nepilno kvadrātvienādojumu $Ax^2=B$. Piemēram, sistēmu

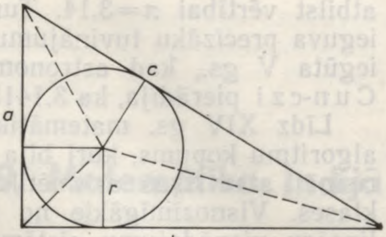
$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ y-x=b \end{cases}$$

aizvietoja ar tai ekvivalentu vienādojumu $2x^2+2bx+b^2=a^2$.

«Matemātikā deviņās grāmatās» ir aprakstītas kvadrātsaknes un kubsaknes vilkšanas metodes, kuras tika izstrādātas mūsu ēras sākumā. Tās tika pamatotas ar divu skaitļu summas kvadrāta un kuba formulu. Taču skaitāmā dēļa lietošanas dēļ metodēm bija dažas specifiskas īpatnības. Vēlāk šīs metodes tika vispārinātas jebkuras pakāpes saknes gadījumam. Tika radīta vispārīga n-tās pakāpes vienādojuma risināšanas metode, kura XIX gs. Eiropā kļuva pazīstama kā Hornera—Rufīnī metode. Ķīnā šo metodi sauca par «tjaņjuaņ» (burtiski — «debesu elements»; tā ķīnieši apzīmēja nezināmo).

«Matemātikā deviņās grāmatās» izklāstītā saknes vilkšanas procedūra sastāv no kārtējā cipara meklēšanas un uz skaitāmā dēļa atliktā skaitļa pārveidošanas nākamā cipara meklēšanai ērtākā veidā. Vispirms tiek noteikts saknes veselās daļas ciparu skaits. Kārtējo saknes zīmi atrod tāpat, kā izpildot dalīšanu. Vispār jāatzīmē, ka visi saknes vilkšanas paņēmieni ķīniešiem bija cieši saistīti ar dalīšanu.

Līdz ar kalendāru un astronomiskajiem aprēķiniem Ķīnā tika izstrādāti interpolēšanas paņēmieni, ar kuriem varēja noteikt funkcijas



6. zīm.

tuvinātas vērtības pēc neliela skaita empīriski atrastām vērtībām. Aptuveni ap 600. g. astronoms un matemātiķis Ļu Čžo izmantoja kvadrāttrinomu $y=ax^2+bx+c$, kura koeficientus var izteikt ar starpību starp tādiem skaitļiem, kas vienādi attālināti no argumenta pirmās un otrās pakāpes vērtībām. Ļu Čžo likumu izmantoja kalendāra aprēķinos VIII un IX gs. Astronoms I Siņs šo likumu vispārināja uz nevienādi attālinātu argumentu vērtību gadījumu. Ja funkcijai $f(x)$ punktos x_0, x_1, x_2 ir dotas vērtības, tad šo funkciju pēc Ļu Čžo un I Siņa likuma var aizvietot ar trinomu

$$y=f(x_0)+(x-x_0)\cdot\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}+$$

$$+(x-x_0)(x-x_1)\cdot\frac{\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}-\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_1}.$$

«Matemātikas deviņās grāmatās» IX grāmatā apkopoti ģeometrijas uzdevumi, kuru risināšanā tiek izmantota Pitagora teorēma. Pitagora teorēma taisnleņķa trijstūrim, kura malu garums ir 3, 4 un 5, bija zināma Šanam Gao 1100 gadus pirms m. ē., bet vispārīgajā gadījumā to zināja Čeņs Czi, kas dzīvoja VI gs. pirms m. ē.

Ķīnieši prata izteikt taisnleņķa trijstūrī ievilkta riņķa rādiusu ar katetēm a un b (6. zīm.):

$$2r=\frac{2ab}{a+b+c}, \text{ kur } c=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Tas nozīmē, ka ķīniešu matemātiķiem bija zināmi tādi ģeometriskie fakti kā pieskares perpendikularitāte pret rādiusu, kas vilkts no pieskaršanās punkta, kā arī no viena punkta vilktu pieskaru nogriežņu vienādība. Risinot uzdevumus, tika izmantota arī līdzīgu figūru malu proporcionalitāte un teorēma par ievilktu leņķi, kurš balstās uz diametru.

I—III gs. ķīniešu astronomi un matemātiķi nodarbojās ar skaitļa π precizēšanu. Astronoms un filozofs Čžans Hens noteica, ka riņķa līnijas garuma kvadrāta attiecība pret riņķa līnijai apvilktā kvadrāta perimetra kvadrātu ir 5:8, kas atbilst vērtībai $\pi=\sqrt{10}=$ $=3,162\ldots$ Zinātnieks un karavadonis Vans Fans ieguva labāku tuvinājumu $\pi=142:45=3,155\ldots$ Šo aprēķinu metodes nav zināmas, vienīgi «Matemātikas deviņās grāmatās» komentāros norādīts, ka izmantoti riņķī ievilkti regulāri daudzstūri. Lu Hue ieguva novērtējumu riņķa laukumam, ja riņķa rādiuss ir 10 un riņķī ievilkts 96-stūris. Par laukuma tuvināto vērtību viņš pieņēma 314, kas atbilst vērtībai $\pi=3{,}14$. Turpinot aprēķinus līdz $n=3072$, Lu Hue ieguva precīzāku tuvinājumu $\pi=3{,}14159$. Vēl lielāka precizitāte tika iegūta V gs., kad astronoms, matemātiķis un inženieris Czuns Čun-czi pierādīja, ka $3{,}1415926<\pi<3{,}1415927$.

Līdz XIV gs. matemātika Ķīnā galvenokārt attīstījās kā tādu algoritmu kopums, kuri bija domāti, lai uz skaitāmā dēļa varētu atrisināt atsevišķas aritmētikas, algebras un ģeometrijas uzdevumu klases. Visnozīmīgākie no šiem algoritmiem ir «fan-čen» metode lineāru vienādojumu sistēmu atrisināšanai un «tjaņ-juaņ» metode augstākas pakāpes algebrisku vienādojumu atrisināšanai. Kaut arī ķīniešu zinātnei bija maz kopīga ar grieķu tipa deduktīvo zinātni, tomēr arī ķīniešu matemātiķiem pieder identitāšu un ģeometrijas teorēmu pierādījumi. Svarīgākais ķīniešu matemātiķu sasniegums bija negatīvo skaitļu ieviešana.

Ķīniešu matemātika nebija izolēta no matemātikas attīstības citās valstīs. Kaut arī Ķīnas un citu valstu zinātniskie sakari vēl nav pietiekami izpētīti, tomēr var norādīt dažus faktus par Ķīnas, Indijas un islama valstu matemātikas savstarpējo ietekmi.

Par kultūras apmaiņu starp Indiju un Ķīnu mūsu ēras pirmajos gadsimtos liecina dažādu līdzīgu uzdevumu parādīšanās Indijā pāris gadsimtus pēc tam, kad tie bija radušies Ķīnā; arī numerācijas sistēmas Ķīnā un Indijā bija līdzīgas. Par kultūras apmaiņu starp Ķīnu un Vidusāziju liecina «divu aplamo pieņēmumu likuma» un Hornera shēmas parādīšanās Vidusāzijā pēc to atklāšanas Ķīnā. Caur Indiju un islama valstīm Ķīnas matemātika ietekmēja arī matemātikas attīstību Eiropā, kaut arī daudzi svarīgi ķīniešu matemātikas atklājumi Eiropā kļuva pazīstami tikai pēc tam, kad eiropieši šos faktus bija atklājuši patstāvīgi.

9. Matemātika Indijā

Ziņas par senās Indijas un viduslaiku Indijas matemātiku ir visai nepilnīgas. Atsevišķas ziņas par senās Indijas matemātiku ir smeltas no «Vēdu» komentāriem. Vienā no tādām grāmatām «Šulva sutra» («Virves likumi»), kas attiecas uz VII—V gs. pirms m. ē., tiek izklāstīti altāru celšanas veidi un ar tiem saistītie aprēķini.

Pirmajiem darbiem matemātikā — «Sidhanti» m. ē. V gs. — bija skaidri izteikta hellēnistiska izcelsme. Uzskata, ka viens no šī darba autoriem bija kāds aleksandriešu astronoms Pauls, kurš pēc Aleksandrijas zinātnes centra sagrāves bēga uz Indiju. «Sidhantos» tiek lietoti atsevišķi grieķu jēdzieni. Ievērojamāko «Sidhantu» daļu uzrakstīja B r ā m a g u p t a ap 628. g. Pavisam šī daļa sastāvēja no 20 grāmatām. Lielākā daļa no tām bija veltīta astronomijai, XII grāmata bija speciāli paredzēta aritmētikai un ģeometrijai, bet XVIII grāmata — algebrai.

Daudzi likumi bija uzrakstīti dzejas formā, lai tos varētu labāk atcerēties. Ievērojamākajam XIII gs. indiešu matemātiķim B ā s k a r a m pieder traktāts «Sidhanta-Širomani» («Zinību vainagi»), kuru XIII gs. pārrakstīja uz palmu lapām. Šis traktāts sastāv no četrām daļām, no kurām «Lilavati» («Skaistā») veltīts aritmētikai, bet «Bidžahanita» — algebrai, pārējās divas daļas ir par astronomiju.

Matemātiķis M a h a v ī r a IX gs. rakstīja: «Aprēķini ir noderīgi visos darbos, kas saistās ar pasaulīgām, zinātniskām vai reliģiskām lietām. Aprēķinu māksla tiek augstu vērtēta zinātnē par mīlu, zinātnē par bagātību, mūzikā un drāmā, loģikā un gramatikā, un citās vietās . . . Tā tiek izmantota Saules un citu spīdekļu kustības, aptumsumu un planētu novietojuma aprēķināšanai. Daudzumu, salu, kalnu un okeānu diametru un perimetru, telpu starp pasaulēm, Visumu, dievu pasaules un elles iemītnieku daudzumu mērījumus — to visu veic ar matemātikas palīdzību.»

Jau no seniem laikiem indieši lietoja decimālo skaitīšanas sistēmu. Skaitļu nosaukumos tika lietots gan aditīvais, gan substraktīvais princips: piemēram, 19 varēja nosaukt gan «navadaša» (deviņi plus desmit), gan «ekauna-vimsati» (bez viena divdesmit). Atšķirībā no citām indoeiropiešu valodām sanskritā eksistēja nosaukumi skaitļiem 10^n, ja $n<50$. Viena no pirmajām numerācijām, kuras lietoja Indijā, bija «karošti». Šī numerācija bija līdzīga feniķiešu numerācijai. Sākot ar VI gs. pirms m. ē., Indijā lietoja «brāmi» ciparus. Atšķirībā no «karošti» cipariem «brāmi» ciparus pierakstīja no kreisās puses uz labo. Abās numerācijās līdz simtam lietoja aditīvo pieraksta principu, bet, sākot ar simtu, šim principam tika pievienots arī multiplikatīvais pieraksta princips. Atšķirībā no «karošti» numerācijas «brāmi» numerācijā bija īpašas zīmes skaitļiem no 1 līdz 9. Šī «brāmi» ciparu īpatnība bija pamatā tam, ka Indijā izveidojās pozicionālā decimālā numerācija. Pirmais zināmais pieraksts ar «brāmi» cipariem, kurā tika izmantoti tikai pirmie deviņi cipari, bet desmitus un simtus apzīmēja ar tiem pašiem cipariem, attiecas uz mūsu ēras VI gs. Nulles nebija, tās vietā uz skaitāmā dēļa atstāja tukšu vietu. Rakstītie cipari Indijā ilgu laiku tika lietoti nevis aprēķinos, bet gan — lai tekstā pierakstītu skaitļus, hronoloģiskus datus u. c. Rēķinātājam somā bija pāris simti garenu gliemežvāku, lai abaka kolonnās izliktu skaitļus no 1 līdz 9, un apmēram ducis apaļu gliemežvāku — nulles ekvivalentu.

Līdz ar ciparu pierakstu Indijā plaši tika izmantota arī vārdiskā skaitļu apzīmēšanas sistēma. To veicināja bagātā sanskrita valoda, kurā bija daudz sinonīmu. Piemēram, nulli apzīmēja ar vārdiem «tukšums», «debesis», «caurums» (15 sinonīmi); vieninieku — ar lietām, kas ir tikai vienā eksemplārā: Mēness, Zeme, sākums, ķermenis (39 sinonīmi), līdzīgi divnieku — ar vārdiem «dvīņi», «acis», «lūpas» (30 sinonīmi) u. tml. Viens no nulles nosaukumiem «šunja» (tukšums) kļuva par vispārpieņemto. Kad VIII gs. indiešu «Sidhantus» pārtulkoja arābu valodā, «šunja» arābu valodā tulkoja kā «sifr», savukārt no arābu valodas tulkojot uz latīņu, to atstāja netulkotu kā «ciffra»; no šī vārda radušies franču un angļu «zero» (nulle), vācu «Ziffer» un krievu «цифра», kas arī sākotnēji nozīmēja «nulle».

Šai pašā laikā numerācijas turpmāko veidu ietekmēja matemātiķi. Aprēķinos bija vajadzīgas ērtākas skaitīšanas sistēmas, un Āriabhata ierosināja pierakstīt ciparus ar sanskrita burtiem. Dažādiem matemātikas vēsturniekiem ir dažādi uzskati par to, kā Indijā radās nulles apzīmējums. Vieni uzskata, ka indieši to aizguva no grieķiem, citi savukārt — ka indieši nulles apzīmējumu pārņēma no ķīniešiem.

Pirmās ziņas par indiešu pozicionālo decimālo sistēmu attiecas uz 662. gadu. Mēs saucam indiešu izgudrotos ciparus 1, 2, . . ., 9 un nulli par *arābu cipariem*, jo pārņēmām tos no arābiem, bet arābi paši šos ciparus sauca par indiešu cipariem. Aritmētiku, kas balstījās uz decimālo sistēmu, sauca par «indiešu skaitīšanu».

Indieši pirmie izstrādāja aritmētisko darbību likumus, kuri pamatojās uz viņu numerāciju. Par pamatdarbībām aritmētikā indieši uzskatīja saskaitīšanu, atņemšanu, reizināšanu, dalīšanu, kāpināšanu kvadrātā un kubā, kvadrātsaknes un kubsaknes vilkšanu. Saskaitīšanu un atņemšanu izpildīja kā no labās puses uz kreiso, t. i., sākot ar zemāko šķiru, tā arī no kreisās uz labo, t. i., sākot ar augstāko šķiru.

Reizināšanai bija apmēram desmit paņēmienu. Piemēram, sadalīja skaitāmo dēli taisnstūros, katru no tiem savukārt pārdalīja ar diagonāli. Gar tīkla malām rakstīja papildreizinātājus, bet starprezultātus rakstīja trijstūros un saskaitīja pa diagonāli.

Ķādu citu reizināšanas paņēmienu ilustrē šāds piemērs:

$$\begin{array}{r} 9576 \\ \times\ 4213 \\ \hline 40343688 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3\cdot6=1\underline{8} \\ 1+7\cdot3+6\cdot1=2\underline{8} \\ 2+5\cdot3+7\cdot1+6\cdot2=3\underline{6} \\ 3+9\cdot3+5\cdot1+7\cdot2+6\cdot4=7\underline{3} \\ 7+9\cdot1+5\cdot2+7\cdot4=5\underline{4} \\ 5+9\cdot2+5\cdot4=4\underline{3} \\ 4+9\cdot4=\underline{40} \end{array}$$

Pasvītrotie cipari veido reizinājumu.

Eksistēja vairāki paņēmieni, kā kāpināt kvadrātā un kubā. Šridhara savā «Patiganita» («Māksla rēķināt uz dēļa») aprakstīja metodes, kuras mūsu apzīmējumos var izteikt ar šādām formulām:

$$\begin{aligned} &n^2=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2; \\ &n^2=(a+b)^2=(a-b)^2+4ab; \\ &n^2=1+3+5+\ldots+(2a-1); \\ &n^2=(n-a)(n+a)+a^2; \\ &n^3=(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3; \\ &n^3=(n-1)^3+3n(n-1)+1; \\ &n^3=n(n+a)(n-a)+a^2(n-a)+a^3; \\ &n^3=n+3n+5n+\ldots+(2n-1)n. \end{aligned}$$

Indijā pirmais kvadrātsaknes un kubsaknes vilkšanu aprakstīja Ariabhata. Kvadrātsaknes vilkšana Indijā, tāpat kā Ķīnā, pamatojās uz summas kvadrāta formulu, taču Indijā nelietoja Hornera shēmu.

Tā kā, izpildot aritmētiskās darbības, starprezultātus nodzēsa, tad tieši pārbaudīt iegūto rezultātu nebija iespējams. Lai pārbaudītu reizināšanu, dalīšanu, kāpināšanu un saknes vilkšanu, indieši ieteica nevis apgrieztās darbības, bet gan t. s. pārbaudi ar devītnieku. Šīs metodes pamatā ir šāda īpašība: dalot veselu skaitli ar 9, atlikums ir vienāds ar to atlikumu, ko iegūst, dalot ar 9 šī skaitļa ciparu summu. Šo atlikumu vienādība ir tikai nepieciešamais, bet ne pietiekamais nosacījums rezultāta pareizībai, taču to indieši nepiemin. Pārbaudi ar 9 lietoja islama valstu matemātiķi, kas ar to iepazinās pēc indiešu rokrakstiem, bet no arābiem šis paņēmiens nokļuva arī pie eiropiešiem. Šīs pārbaudes nepilnību atzīmēja N. Šukē un L. Pačoli tikai XV gs. beigās.

Indijā daļskaitļi bija pazīstami sen. Jau II gadu tūkstotī pirms m. ē. lietoja tādus daļskaitļus kā *ardha* ($^1/_2$), *pada* ($^1/_4$), *tri-pada* ($^3/_4$) un *kala* ($^1/_{16}$). Indieši daļskaitļus pierakstīja tāpat, kā to darām mēs: skaitītāju rakstīja virs saucēja, tikai bez daļsvītras. Daļas vienu no otras atdalīja ar vertikālām un horizontālām svītrām.

Tāpat kā Babilonijā un Ķīnā, arī Indijā bija labi attīstītas algebriskās aprēķinu metodes. Izcils indiešu matemātiķu sasniegums bija algebras simbolikas izveidošana. Šī simbolika bija pat bagātāka nekā Diofantam. Pirmo reizi tika ieviestas īpašas zīmes vairāku nezināmo, pakāpju, vienādojuma brīvā locekļa apzīmēšanai. Lielākoties šie simboli bija atbilstošo sanskrita vārdu pirmās zilbes.

Sākot ar Brāmaguptu (VII gs.), indiešu matemātiķi sistemātiski lietoja negatīvos skaitļus un traktēja pozitīvos skaitļus kā īpašumu, bet negatīvos — kā parādu. Brāmagupta formulēja visus aritmētisko darbību likumus ar negatīviem skaitļiem. Nav izslēgts, ka par negatīviem skaitļiem indieši uzzināja no ķīniešu matemātiķiem.

Ariabhata aplūkoja uzdevumus, kuri reducējās uz lineāru vienādojumu ar vienu nezināmo. Mahavīram, Bāskaram un citiem autoriem bija uzdevumi, kuri reducējās uz lineāru vienādojumu sistēmu ar vairākiem nezināmiem. Vispārīgas metodes tādu uzdevumu risināšanā indiešiem nebija. Uzdevumi, kuros jārisina kvadrātvienādojumi, bija gan «Vēdās», gan «Šulva-sutrā», taču kvadrātvienādojumu atrisinājumi pirmo reizi doti Ariabhatas darbos. Brāmagupta formulēja vispārīgu likumu kanoniskā formā reducētu kvadrātvienādojumu

$$ax^2+bx=c, \quad a>0,$$

atrisināšanai (koeficientu b un c vērtības var būt arī negatīvas). Brāmagupta vēl neminēja, ka kvadrātvienādojumam var būt divi atrisinājumi. Mahavīram tas jau bija zināms.

Indieši risināja arī vienādojumu sistēmas. Piemēram, Bāskara risināja uzdevumu par taisnleņķa trijstūra katešu x, y un hipotenūzas z noteikšanu, ja dots trijstūra laukums un perimetrs. Šis uzdevums reducējas uz vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} xy=p, \\ x+y+z=q, \\ x^2+y^2=z^2. \end{cases}$$

Bāskara risināja arī trešās un ceturtās pakāpes vienādojumus ar dažām īpaši izraudzītām koeficientu vērtībām.

Lielus panākumus indiešu matemātiķi sasniedza nenoteikto vienādojumu risināšanā. Atšķirībā no Diofanta, kurš meklēja racionālus atrisinājumus, indieši izstrādāja metodi, kā atrisināt nenoteiktos vienādojumus veselos pozitīvos skaitļos.

Indiešu matemātiķu lielākais sasniegums skaitļu teorijā bija vispārīgā otrās pakāpes nenoteiktā vienādojuma ar diviem nezināmiem $ax^2+b=y^2$ atrisināšana veselos pozitīvos skaitļos.

Liela teorētiska un praktiska interese indiešiem bija par kombinatoriku. Viens no iemesliem, kāpēc sāka izstrādāt šo matemātisko teoriju, bija «Vēdu» dzejas rindas, kurās bija dažāds zilbju skaits: 6, 8, 9, 11, 12. Pie tam dažāda garuma dzejas rindās bija jāievēro ne tikai zilbju skaits, bet arī patskaņu garums katrā zilbju grupā. Indieši zināja paņēmienu, kā konstruēt binomiālo koeficientu trijstūri, kuru izmantoja kombinatorikas uzdevumos. Bez tam indiešu matemātiķi ne tikai prata aprēķināt C_n^m, bet arī zināja sakarību

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots C_n^n = 2^n.$$

Mahavīra vārdiski formulēja kombināciju skaita aprēķināšanas formulu

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(m-1))}{1\cdot 2\cdot 3\dots m}.$$

Indiešu matemātiķu zināšanas un atklājumi ģeometrijā nebija tik ievērojami kā aritmētikā, algebrā un skaitļu teorijā. Īpašu sacerējumu ģeometrijā nebija. Ģeometriskie fakti bija atrodami aritmētiskos traktātos vai astronomijas darbu aritmētiskajās nodaļās. Ģeometrijas teorēmas aplūkoja bez pierādījumiem. To vietā tika dots zīmējums ar norādi «skaties!», tikai reizēm bija arī īsi norādījumi. Acīmredzot pierādījumus skolniekiem izklāstīja mutiski. Ģeometrijas uzdevumi bija tikai aprēķinu uzdevumi, konstrukcijas uzdevumus neaplūkoja, kaut arī indieši zināja daudzus ģeometrisko konstrukciju veidus un izmantoja tos celtniecībā. Visagrākās ziņas par indiešu zināšanām ģeometrijā ir atrodamas «Šulvasutrā» (VII—V gs. pirms m. ē.) — rokasgrāmatā altāru un tempļu celtniecībā.

Jau «Sidhantos» var atrast riņķa līnijas garuma un diametra attiecības tuvinātus aprēķinus. V gs. tika uzskatīts, ka riņķa līnijas garums attiecas pret diametru kā 3927 pret 1250, kas atbilst vērtībai $\pi = 3{,}1416$. Ariabhata šo pašu π vērtību uzdod kā daļu $\frac{62832}{20000}$. Brāmagupta lietoja tuvinājumu $\pi \approx \sqrt{10}$.

Šridhara devis prizmas tilpuma formulu $V = SH$, riņķa konusa tilpuma formulu $V = \frac{1}{3}SH$ un nošķelta riņķa konusa tilpuma formulu $V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + rR + r^2)$, kur $\pi = \sqrt{10}$.

Bāskara lodes tilpumu aprēķināja pēc formulas $V = {}^4/_3\pi R^3$, kur $\pi = 3{,}1416$.

Jau senākajā no «Sidhantām» bija aplūkota Aleksandrijas astronomu hordu trigonometrija. Aprēķinos hordu nomaiņa ar sinusiem ir viegli izdarāma, jo loka α horda ir vienāda ar dubultotu loka 2α sinusu. Indieši aplūkoja tikai pirmā kvadranta loku trigonometriskās funkcijas. Viņi lietoja arī sakarības

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$

$$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha);$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta.$$

«Surja-sidhantā» un Ariabhatas darbā ir dotas sinusu tabulas ar soli 3°45′, Bāskaras «Zināšanu vainagā» sinusu tabulas dotas ar soli 1°.

Skaitļu rindu summēšana interesēja daudzus indiešu matemātiķus. Jau «Vēdās» atrodami atsevišķi aritmētiskās un ģeometriskās progresijas piemēri. Ariabhata atrada formulas, kā summēt trijstūra skaitļus, naturālu skaitļu kvadrātus un kubus, bet Mahavīra — ģeometriskās progresijas summas formulu un formulu tādas rindas summai, kuras locekļi ir aritmētiskās progresijas locekļu kvadrāti vai kubi. XVI gs. Narajana veica vēl vispārīgāku summēšanu: ja apzīmējam

$$1+2+3+\ldots+n=S_n^{(1)},$$

$$S_1^{(1)}+S_2^{(1)}+\ldots+S_n^{(1)}=S_n^{(2)},$$

$$S_1^{(2)}+S_2^{(2)}+\ldots+S_n^{(2)}=S_n^{(3)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

tad Narajana atrastā formula ir

$$S_n^{(m)}=\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}{1\cdot2\cdot3\ldots(m+1)}.$$

Ievērojamākie panākumi bezgalīgo rindu summēšanas jomā bija Dienvidu Indijas matemātiķiem XVI gs. Šādu pētījumu iemesls bija centieni precīzāk noteikt skaitli π. Nilakanta bez pierādījuma vārdiski aprakstīja riņķa ceturtdaļai atbilstošā loka izvirzījumu bezgalīgā rindā:

$$r\varphi=\frac{r\sin\varphi}{\cos\varphi}-\frac{r\sin^3\varphi}{3\cos^3\varphi}+\frac{r\sin^5\varphi}{5\cos^5\varphi}-\ldots$$

Ja $r=1$ un $\varphi=45°$, iegūst rindu π aprēķināšanai, turklāt $\pi/4$ var izteikt ar parciālsummu S_n un kļūdu k_n:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}+k_n.$$

Nilakantas dotā π vērtība ir pareiza līdz desmitajai zīmei.

Ķādā anonīmā traktātā, kas arī sarakstīts Dienvidu Indijā XV—XVI gs., doti sinusa un kosinusa izvirzījumi pakāpju rindā, kā arī tuvinātas sinusa un arksinusa formulas. Indieši zināja arī arktangensa izvirzījumu rindā.

Indiešu zinātnieki pārspēja vairākus rezultātus, kurus Eiropā no jauna ieguva tikai XVII—XVIII gs. Arktangensa rindu atklāja Dž. Gregori 1671. g. un G. V. Leibnics 1673. g. Sinusa, kosinusa un arksinusa rindas I. Ņūtons atklāja aptuveni 1666. gadā.

Indiešu matemātika stipri ietekmēja matemātikas attīstību gan Austrumos, gan Eiropā. Tieši Indijā radās mūsdienu aritmētika, kas pamatojas uz decimālo pozicionālo numerāciju, kā arī tādi aritmētikas likumi kā trijskaitļu likums un tā vispārinājums. Indiešu matemātiķiem jāpateicas arī par algebras un trigonometrijas izstrādāšanu, kā arī par negatīvo un iracionālo skaitļu ieviešanu. Diemžēl XV—XVII gs. sarakstītie indiešu matemātiķu darbi savā laikā palika nezināmi aiz Indijas robežām, un šos rezultātus eiropieši ieguva no jauna.

10. Matemātika islama valstīs

Pēc Muhameda nāves (632. g.) un Aleksandrijas krišanas (640. g.) arābu klejotāju ciltis iekaroja plašas teritorijas no Indijas līdz Spānijai, arī Ziemeļāfriku un Dienviditāliju. Izveidojās milzīga musulmaņu impērija, kuras galvaspilsēta bija Damaska. VIII gs. šī impērija sadalījās divās neatkarīgās daļās: Austrumu impērijā un Rietumu impērijā.

Iekarotajās zemēs arābu klejotāji atklāja civilizāciju, kas bija daudzkārt augstākā kultūras līmenī nekā viņu pašu. Arābi ātri apguva šo zemju iedzīvotāju paražas, domāšanas veidu un iepriekšējo gadsimtu gaitā izveidojušos kultūru. Asimilējušies vietējo iedzīvotāju vidū, arābi sāka veidot savu civilizāciju un kultūru. Tādējādi plašā ģeogrāfiskā apgabalā no VII līdz XIII gs. attīstījās arābu civilizācija.

Musulmaņu pilsētās sāka attīstīties zinātne. Kalifi dibināja akadēmijas, būvēja observatorijas, sūtīja emisārus manuskriptu meklējumos, vāca bibliotēkas.

Runājot par arābu zinātni, parasti domājam zinātnes attīstību visās islama valstīs. Apzīmējums «arābu zinātne» ir ieviesies tāpēc, ka šajā periodā arābu valoda bija kļuvusi par starptautisku valodu islama zemēs un jebkuram nozīmīgam zinātniskajam darbam vajadzēja būt uzrakstītam arābu valodā.

Sešu — astoņu gadsimtu laikā arābi kļuva par hellēnisma laikmeta, daļēji arī Indijas zināšanu krājējiem. Arābu zinātniekiem bija raksturīgs plašs interešu loks. Bieži vien viņi vienlaikus bija arī filozofi, matemātiķi, astronomi, ārsti, fiziķi, vēsturnieki, ģeogrāfi un dzejnieki.

Islama valstīs pastāvēja divi skaitļu tipi — burtu numerācija un decimālā pozicionālā sistēma.

Burtu numerāciju arābi pārņēma no senajiem semītiem, to alfabētam ar 22 burtiem pievienojot vēl klāt 6 burtus un arī šiem burtiem atbilstošos skaitļus. Arābu un arī semītu burtu numerācija atšķīrās no grieķu burtu numerācijām. Šī sistēma bija cieši saistīta ar vārdu skaitlisko vērtību atrašanu seno priesteru vajadzībām.

Decimālā pozicionālā sistēma islama kalifātā pirmo reizi parādījās ap 773. gadu, kad al Fazari pārtulkoja indiešu «Sidhantas». Tomēr vispārēju izplatību tā ieguva tikai ar Muhammeda al Horezmi (787. g. — ap 850. g.) darbu «Par indiešu skaitīšanu». Šajā traktātā al Horezmi novērtēja indiešu ciparu priekšrocības un bez deviņiem cipariem minēja arī mazu aplīti, «kas līdzīgs burtam o», lai pēc tā zinātu, ka šķira ... ir tukša». Šo nullīti arābi nosauca par «sifr», kas nozīmē «tukšs».

Viens no pirmajiem islama valstu zinātniekiem, slavenais matemātiķis, astronoms un ģeogrāfs al Horezmi IX gs. sākumā uzrakstīja traktātu aritmētikā, lietojot pozicionālo principu. Šis darbs saglabājies tikai nepilnā latīņu tulkojumā. Al Horezmi aprakstīja saskaitīšanu, atņemšanu, reizināšanu, dalīšanu un kvadrātsaknes vilkšanu, lietojot «indiešu skaitļus».

Astronomijā arābu matemātiķi, tāpat kā babilonieši, lietoja sešdesmitnieku sistēmu un arī nulli. Aritmētiskās darbības tika izpildītas tāpat kā mūsdienu decimālajā sistēmā. Praksē bieži tika izmantotas reizināšanas tabulas (59×59). Negatīvos skaitļus islama valstīs nelietoja.

Ar skaitīšanas metožu pilnveidošanu nodarbojās tādi izcili viduslaiku austrumu matemātiķi kā Abu l Vafa, āl Birunī, al Karadži, Omārs Haijams, at Tusi, āl Kašī un daudzi citi.

Daļas arābi pierakstīja tāpat kā indieši — skaitītāju augšā un saucēju zem tā. Veselo daļu rakstīja virs skaitītāja. Atdalošo līniju sāka lietot tikai XIII gs. sākumā.

Maragīras skolas vadītājs at Tusī (1201—1274) 1265. gadā aprakstīja jebkuras pakāpes saknes vilkšanu no vesela skaitļa. Metode pamatojās uz to, ka skaitlis tiek izteikts veidā a^n+r, kur a, n, r ir veseli skaitļi, un tiek meklēta saknes $\sqrt[n]{a^n+r}$ aptuvenā vērtība. Saknes veselā vērtība tiek meklēta pēc metodes, kas jau iepriekš bija zināma ķīniešu matemātiķiem un tagad pazīstama kā Rufīnī-Hornera shēma. Daļveida daļas aptuveno vērtību meklēja formā

$$\frac{r}{(a+1)^n-a^n}.$$

At Tusī zināja Ņūtona binoma formulas pierādījumu vispārīgajam gadījumam, kā arī binomiālo koeficientu tabulu līdz $n=12$.

Islama valstu matemātiķi kritizēja Eiklīda proporciju jēdzienu un attiecināja skaitļu jēdzienu gan uz nepārtrauktu lielumu, gan uz racionālu lielumu, gan iracionālu, gan arī uz proporcijām. Bez proporciju teorijas iracionāla skaitļa jēdziena veidošanā nozīmīgas bija darbības ar skaitliskajām iracionalitātēm. Iracionalitātes izpētē liela loma bija Eiklīda «Elementu» X grāmatai. Šajā grāmatā dota kvadrātisko un bikvadrātisko iracionalitāšu klasifikācija. Laikposmā no VIII līdz XV gs. šo grāmatu tulkoja, pārstrādāja un komentēja 50 islama valstu matemātiķi. Islama valstu matemātikā izzuda atšķirība starp ģeometriski nesamērojamiem lielumiem un skaitliskām iracionalitātēm.

Vārds «algebra» Eiropas zinātnē ienācis līdz ar Muhammeda ibn Musa āl Horezmi āl Madžusi vārdu. Āl Horezmi dzimis 787. gadā. Ir saglabājušies pieci āl Horezmi darbi: darbi aritmētikā, algebrā, astronomijā, ģeogrāfijā un darbs par kalendāru. Viņa darbu algebrā sauca «Kitab āl Džebr val Mukabala», kas tulkojumā nozīmē «Grāmata par alDžebr un Mukabala skaitļojumiem». Pirmā operācija, kas kļuvusi par visas algebras apzīmējumu, ir vienādojuma locekļu pārnešana no vienas puses uz otru pusi. Otra operācija ir līdzīgo locekļu savilkšana.

Šajā grāmatā āl Horezmi apskata pirmās un otrās pakāpes vienādojumu sešus tipus, kas mūsdienu pierakstā ir šādi: $ax^2=bx$, $ax^2=c$, $bx=c$, $ax^2+bx=c$, $ax^2+c=bx$, $bx+c=ax^2$, kur a, b, $c>0$. Katrs dotais vienādojums ar abu operāciju «alDžebr» un «Mukabala» palīdzību tika reducēts uz kādu no sešiem kanoniskajiem vienādojumiem. Bez tam kvadrātiskā vienādojuma koeficients a pie augstākās pakāpes bija jāpārvērš par vieninieku, jo atrisinājumu likumi bija sastādīti tieši tādam vienādojuma veidam. Āl Horezmi apskatīja tikai vienādojumu pozitīvās saknes.

Lielu ievērību pelna Omāra Haijama (1048—1123) «Traktāts par algebras uzdevumu pierādījumiem» (1074). Ar šo darbu būtībā algebra veidojās kā atsevišķa matemātikas nozare. Viņš stingri atdalīja aritmētiku no algebras un savā darbā apskatīja tikai algebrisku vienādojumu atrisinājumus. O. Haijāms definēja algebru kā «zinātni par vienādojumu atrisināšanu». Bez kvadrātvienādojumiem Haijāms apskatīja arī kubiskos vienādojumus.

Islama valstīs plaši izplatīta bija no hellēnisma laikmeta mantotā vienādojumu ģeometriskā teorija, t. i., vienādojumu sakņu atrašana, izmantojot ģeometrisku zīmējumu. Āl Kašī to izmantoja pat 4. pakāpes vienādojumu atrisināšanai. Praktiskām vajadzībām tika izstrādātas arī dažādas skaitliskās aprēķināšanas metodes.

Speciālā algebras simbolika sāka veidoties vēlākā laika posmā — ap XIII—XV gs.

Sākot ar IX gs., islama valstu matemātiķi apskatīja maģiskos kvadrātus: skaitļu summa katrā rindā, kolonnā un diagonālē ir viena un tā pati. Piemēram, deviņu skaitļu kvadrāts, kas bija pazīstams jau senajiem ķīniešiem, ir šāds:

8	3	4
1	5	9
6	7	2

Arābi sastādīja maģiskos kvadrātus ar 16, 25, 36 skaitļiem un meklēja maģiskos kvadrātus ar 49, 64 un 81 skaitli.

Interesants ir fakts, ka al Hodžandi (miris ap 1000. g.) devis pierādījumu Fermā teorēmas speciālam gadījumam: vienādojumam $x^3+y^3=z^3$ nav atrisinājumu racionālos skaitļos. Diemžēl šis pierādījums līdz mūsdienām nav saglabājies. Zināmu pitagoriešu «draudzīgo skaitļu» atrašanas vispārinājumu deva Sabits ibn Korra. Viņš pierādīja šādu apgalvojumu: ja $p=3\cdot 2^n-1$, $q=3\cdot 2^{n-1}-1$ ir pirmskaitļi, tad $M=2^n\cdot p:q$ un $N=2^n\cdot(p+q+pq)$ ir draudzīgie skaitļi. Piemēram, ja $n=2$, draudzīgie skaitļi ir 220 un 284.

Islama valstu ģeometrijas pamatā galvenokārt bija grieķu ģeometrijas sasniegumi, tomēr jāatzīmē arī arābu ieguldījums. Īpaši nozīmīgi ir pētījumi, kas saistīti ar Eiklīda 5. postulātu. Tā, piemēram, ibn al Haisams izteica sakaru starp paralelitātes postulātu un četrstūra leņķu summu. Kādā citā darbā viņš izmantoja 5. postulātam ekvivalentu pieņēmumu, ka divas taisnes, kas krustojas, nevar būt paralēlas vienai un tai pašai taisnei, t. i., no viena punkta nevar novilkt divas taisnes, kas būtu paralēlas dotajai taisnei. Vēlāk Haijāms kritizēja al Haisamu par to, ka tas ģeometriskajos pierādījumos lietojis kustību. Pats Haijāms pierādījumam izmantoja šādus divus apgalvojumus: katrs no tiem ir ekvivalents 5. postulātam:

1) divas taisnes, kas tuvojas viena otrai, krustojas,
2) neiespējami, ka divas taisnes, kas tuvojas viena otrai, tomēr attālinātos tuvošanās virzienā.

Praktiskajā ģeometrijā plašu popularitāti viduslaikos ieguva Abu l Vafas (940—998) «Grāmata par to, kas nepieciešams amatniekam ģeometriskajās konstrukcijās».

Lielu meistarību islama valstu matemātiķi sasniedza ģeometriskajos aprēķinos. Piemēram, «Traktātā par riņķi» al Kašī, pieņemot ievilkta $3\cdot 2^{28}$-stūra perimetra un apvilkta $3\cdot 2^{28}$-stūra perimetra vidējo aritmētisko par riņķa līnijas garumu, ieguva skaitļa π aptuveno vērtību $\pi=3{,}14159265358979325$ (nepareizs ir tikai pēdējais cipars).

Ļoti svarīga nozīme islama valstu matemātikā bija trigonometrijai. Tā tika lietota galvenokārt astronomiskajos aprēķinos un tabulās. Trigonometrijas attīstība arābu valstīs sākās ar indiešu traktāta «Sidhantas», Menelāja darba «Sfērikas» un Ptolemaja darba «Almagesta» tulkojumiem.

Sinusa un kosinusa līnijas islama valstu matemātiķi, tāpat kā Aleksandrijas un Indijas matemātiķi, mērīja rādiusa sešdesmitdaļās, bet tangensa un kotangensa līnijas — gnomona (saules pulksteņa) septītdaļās un divdesmitdaļās. Tika sastādītas plašas tabulas aprēķinu atvieglošanai.

Iespējams, ka pirmās sinusa tabulas islama valstīs sastādīja āl Horezmi; viņa laikabiedrs āl Nasibs sastādīja tabulas, kurās bija tangensa, kotangensa, sekansa un kosekansa vērtības.

Lielu meistarību islama valstu matemātiķi sasniedza praktiskajos skaitļojumos — gan trigonometrisku uzdevumu risināšanā, gan trigonometrisku tabulu veidošanā. Interesanta ir Abu l Vafas lineārās interpolācijas metode sinusa tabulas sastādīšanai. Viņa atrastā sinusa vērtībai pareizas ir 12 zīmes aiz komata. Komentēdams Ptolemaja «Almagestu», Abu l Vafa deva sistemātisku trigonometrijas izklāstu. Viņš vārdos aprakstīja formulas

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha \text{ un } \sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$

(otrā formula ir minēta pirmo reizi matemātikas vēsturē).

Sfēriskā trigonometrija jau no seniem laikiem interesēja astronomus. Sfērisko kosinusu teorēmu varam atrast ibn Korras «Grāmatā par instrumentu, ko sauc par saules pulksteni». Vēlāk šo likumu savā «Mas'uda Kanonā» apraksta āl Biruni. Izmantojot šo teorēmu, var atrast attālumu starp pilsētām, ja ir zināmas to ģeogrāfiskās koordinātas. To izmantoja arī virziena noteikšanai uz musulmaņu svēto pilsētu Meku. Sfēriskajai trigonometrijai veltīts arī anonīms XI gs. darbs «Astronomijas zinātnes likumu krājums», kas noderēja par paraugu vēlāko laiku darbiem.

Ap IX gs. arābu matemātiķi iepazinās ar antīkās matemātikas sasniegumiem par izsmelšanas metodēm (galvenokārt no Arhimēda darbiem).

Ibn Ķorra darbā «Grāmata par konisko šķēlumu, sauktu par parabolu, mērīšanu» izmantoja savu metodi parabolas segmenta kvadratūrai. Arhimēds bija pierādījis, ka šī segmenta laukums ir $^2/_3$ no tāda paralelograma laukuma, kas apvilkts ap šo segmentu. Ibn Ķorra dalīja parabolas diametru nevienādās daļās, kas attiecas cita pret citu kā nepāra skaitļi, — 1:3:5:7:. . . . Mūsdienu pierakstā šī ibn Ķorras metode līdzvērtīga integrāļa $\int_0^a \sqrt{x}\,dx$ aprēķināšanai. Sevišķi nozīmīgs ir fakts, ka ibn Ķorra integrēšanas segmentu dala nevienādās daļās. Al Haisams «Parabolisko ķermeņu mērīšanas grāmatā» apskata tāda ķermeņa tilpumu, kas rodas, parabolas segmentam rotējot ap patvaļīgu tā hordu.

Jo dziļāk mēs pētām islama valstu kultūru, jo vairāk atklājas, kādu milzīgu ieguldījumu tā devusi, radoši pārstrādājot antīko un austrumu kultūru, sistematizējot to un papildinot ar savu ieguldījumu, nododot šo kultūru tālāk Eiropas tautām.

VIII gs. arābi iekaroja Spāniju. Ap X gs. tādas pilsētas kā Kordova, Toledo, Sevilja, Granāda kļuva par lieliem kultūras centriem. Kordova šajā laikā bija pat viens no lielākajiem rūpniecības, tirdzniecības un kultūras centriem Eiropā. Tur atradās viena no plašākajām bibliotēkām un augstākā mācību iestāde. Zīmīgi, ka augstākās mācību iestādes Eiropā radās tieši arābu Spānijā, kurp daudzi eiropieši devās iegūt izglītību. No Spānijas Eiropa iepazinās ar svarīgākajiem tā laika sasniegumiem matemātikā, astronomijā, fizikā, alķīmijā, dabaszinātnēs, filozofijā, medicīnā, ģeogrāfijā.

Līdz pat Renesanses laikam Rietumeiropā sengrieķu filozofu un zinātnieku (Aristoteļa, Eiklīda, Ptolemaja, Hipokrata u. c.) darbus pazina galvenokārt latīņu tulkojumā no arābu valodas. Sākot ar XIV gs., islama valstu zinātnes sasniegumi Eiropā nonāca caur Bizantiju. Tāpat zinātniskos traktātus no arābu valodas vispirms tulkoja grieķu valodā un pēc tam latīņu valodā. Stiprā āl Horezmi ietekmē attīstījās ne tikai islama valstu, bet arī Eiropas aritmētika līdz pat XVI gs. Savā aritmētiskajā traktātā viņš dod pirmo izklāstu arābu valodā indiešu pozicionālajai decimālajai sistēmai. Latīņu tulkojumā šī grāmata sākas ar vārdiem *Dixit Algoritmi*, t. i., «Algoritmi teica . . .». No šiem vārdiem radies mums pazīstamais vārds «algoritms». Stiprā islama matemātiķu ietekmē uzrakstīta Fibonači «Abaka grāmata» — pirmais sistemātiskais aritmētikas un algebras izklāsts Eiropā.

Viens no pirmajiem darbiem trigonometrijā, kas tika pārtulkots latīņu valodā, bija āl Horezmi tabulas. Tās pārtulkoja 1126. gadā Adelards no Ratas. Šis darbs kļuva par pamatu viduslaiku Eiropas astronomiskajiem aprēķiniem. Vēlāk tika tulkoti arī citi «zidži» jeb tabulas. IX un X gadsimtā no arābu valodas tika pārtulkoti tādi izcili darbi kā Ptolemaja «Almagests», āl Fergani «Astronomijas elementi», daudzi Sabita ibn Korras darbi u. c.

Ar bizantiešu starpniecību Eiropas matemātiķi iepazinās ar jebkuras naturālas pakāpes «Ņūtona binomu», kas tika atklāts tieši islama valstīs, tāpat daudzi astronomijas un trigonometrijas atklājumi bagātināja Eiropas zinātni. Daudzu tā laika eiropiešu matemātiskajos darbos jūtams stiprs islama valstu iespaids.

XV un XVI gs. Eiropā nokļuva Ulugbeka observatorijas darbi, pirmām kārtām viņa ievērojamās «Ulugbeka tabulas».

II. Matemātika viduslaiku Eiropā

Mūsu ēras pirmajos gadsimtos Bizantijā turpināja pastāvēt hellēnisma zinātniskās un filozofiskās skolas. Pēc Aleksandrijas skolas sagrāves V gs. daudzi zinātnieki no Bizantijas emigrēja uz Irānu un Sīriju.

Agrīnā feodālisma laikmetā, kad garīgo dzīvi pilnīgi pārvaldīja reliģija, Rietumeiropā nebija nekādu stimulu zinātniskajai interesei par dabaszinātnēm un matemātiku. Saimniecībā un sadzīvē nepieciešamās matemātiskās zināšanas aprobežojās ar darbībām ar veseliem skaitļiem un daļām un vienkāršāko figūru mērīšanas likumiem. Nedaudz lielākas prasības pēc matemātikas bija klosteros, kuri bija ne tikai reliģiskas, bet arī lielas saimnieciskas organizācijas. Taču arī tur par matemātiku interesējās no praktiskā viedokļa un to izmantoja galvenokārt kalendāru un baznīcas svētku aprēķiniem.

Izglītotu cilvēku audzināšanai tika uzrakstītas dažas grāmatas, kurās bija sākotnējās ziņas par «septiņām brīvajām mākslām», kuras iedalīja triviumā un kvadriviumā. Triviumā ietilpa matemātika, retorika (runas māksla) un dialektika (mācība par to, kā vadīt diskusiju). Kvadriviums sastāvēja no aritmētikas (vienkāršāko skaitļu īpašību izklāsts bez pierādījumiem kopā ar skaitļu mistiku), ģeometrijas (īsas ziņas par ģeometrijas pamatobjektiem un mēriem), ģeogrāfijas un astronomijas (kalendāri) un mūzikas kā mācības par harmoniskiem intervāliem.

Viens no pirmajiem matemātiķiem Rietumeiropā bija īru mūks B ē d a (ap 673—735). Bēda bija vispusīgs zinātnieks. Viņam ir lieli nopelni kā vēsturniekam. Bēda bija īpaša hronoloģiska traktāta autors, kurā tika aprēķinātas Lieldienas, ar kurām cieši saistīti daudzi citi svarīgi kristiešu svētki. Lieldienu pirmo dienu atrod pēc likuma, kurš nosaka nenoteikta lineāra vienādojuma atrisinājumu veselos skaitļos. Galvenā ir prasība, lai Lieldienas sāktos pirmajā svētdienā pēc pilnmēness, kurš ir pavasara saulgriežos vai tuvākajā dienā pēc tam. Noteikta nedēļas diena dažādos gados ir dažādos datumos un atkārtojas ar 28 gadu ciklu, savukārt Mēness fāzes atkārtojas ar 19 gadu ciklu. Tāpēc Lieldienas kalendārā atkārtojas ar 532 gadu periodu (lielais riņķis).

VIII gs. franku karaļa Kārļa Lielā galmā strādāja bīskaps A l k u i n s (735—804). Alkuins bija skolu organizators un vairāku mācības grāmatu autors. No tām visinteresantākā ir «Uzdevumi jauniešu prātu asināšanai», kurā bija vairāki indiešu uzdevumi.

Līdz ar tirdzniecības attīstību sāka veidoties arī Eiropas zinātniskas saites ar arābu kultūru caur Spāniju un Sicīliju, kuras tai laikā pārvaldīja arābi. Viens no pirmajiem Spānijas provincē Katalonijā ieradās franču mūks Žerbērs (apm. 940—1003), kurš no 999. līdz 1003. gadam bija Romas pāvests Silvestrs II. No 972. līdz 982. gadam Žerbērs dzīvoja Reimsā, kur pasniedza kvadriviuma priekšmetus. Žerbērs nodarbojās ne tikai ar matemātiku, loģiku un filozofiju, bet arī ar astronomiju. Žerbēram pieraksta vairākus matemātiskus darbus, taču nav precīzi zināms, vai viņš ir šo darbu autors. Popularizējot Boēcija sacerējumus, Eiklīda «Elementu» fragmentus un praktisko ģeometriju, Žerbērs kritiski sprieda par ģeometrijas pamatjēdzieniem. Viņš norādīja, ka īstenībā neviens punkts, neviena līnija un virsma neeksistē citādi kā vien saistībā ar kādu ķermeni. Mēs vienīgi domās punktus, līnijas un virsmas atdalām no ķermeņiem. Tā laika matemātiskās kultūras zemo līmeni raksturo fakts, ka starp apvainojumiem, kurus izvirzīja pret Žerbēru, bija — viņa prasme dalīt jebkurus lielus skaitļus. Pēc baznīcas domām, tas bija neapšaubāms pierādījums sakariem ar velnu.

Mūsdienu eiropiešu ciparu priekšteči bija t. s. apeksi — žetoni ar skaitļu attēliem, kurus izmantoja rēķināšanai uz abaka. Pamazām ciparus sāka izmantot arī rakstos. Izšķirošā loma jauno ciparu un pozicionālās decimālās sistēmas ieviešanai Eiropā bija iepazīšanās ar arābu aritmētikas grāmatu latīņu tulkojumiem, it īpaši ar al Horezmi aritmētiku.

Jaunās aritmētikas ieviešanu veicināja arī tas, ka tika dibinātas laicīgās skolas, kurās mācījās jaunieši, lai pēc tam nodarbotos ar tirdzniecību vai finansu operācijām. Pirmās tāda veida skolas nodibinājās Itālijā. 1338. gadā Florencē bija sešas abaka skolas (ar vārdu *abaks* apzīmēja aritmētiku), katrā ap 1200 skolēnu. Pirmās monētas ar jaunajiem cipariem izkala 1424. g. Šveicē, 1458. g. Vācijā, 1478. g. Zviedrijā, 1485. g. Francijā, 1539. g. Skotijā, 1551. g. Anglijā.

Liela nozīme matemātisko zināšanu progresā bija arābu un grieķu darbu tulkojumiem no arābu valodas. Sevišķi intensīvi no arābu valodas tulkoja XII un XIII gadsimtā, bet arābu rokrakstu studēšana papildināja eiropiešu zināšanas matemātikā arī XV—XVII gs. Zināšanu popularizēšanu veicināja arābu un eiropiešu ārsti un astrologi, kuri bija dažos eiropiešu galmos. Taču tulkošana galvenokārt tika veikta Pireneju pussalā, ko spānieši pakāpeniski atkaroja arābiem. Kad 1085. g. tika ieņemta Toledo, turp devās daudzi pēc zināšanām alkstošie, un pēc neilga laika tika atvērta skola, kurā darbojās tulki un kompilatori. Rezultātā tika radīta plaša zinātniskā un filozofiskā literatūra latīņu valodā.

Svarīga loma matemātikas attīstībā bija universitātēm. Senākā Eiropas medicīnas universitāte tika dibināta Salerno ne vēlāk kā XI gs. pirmajā pusē. Ap 1100. gadu tika atvērta universitāte Boloņā. Sākotnēji tā bija skola, kurā uz romiešu likumu pamata tika izstrādātas juridiskās normas. Attīstoties pilsētām, pieauga interese par juridiskajām normām. Uz vairāku klosteru bāzes XII gs. beigās tika nodibināta Parīzes universitāte, kurā mācījās aptuveni 1000 studentu no visām Eiropas malām. Apmēram tai pašā laikā nodibināja Oksfordas un 1209. gadā Kembridžas universitāti. XIV gs. tiek nodibinātas universitātes Prāgā (1348), Krakovā (1364), Vīnē (1365), Heidelbergā (1385), Leipcigā (1409), Bāzelē (1459). Šīs universitātes atšķirībā no pirmajām divām universitātēm nebija šauri profesionālas skolas. Universitātē bija četras fakultātes — mākslas, teoloģijas, tiesību un medicīnas. Students, dažkārt vēl pusaudzis, vispirms iestājās mākslas fakultātē un mācījās apmēram sešus gadus. Pēc tam, izturot pārbaudījumus, varēja pāriet uz kādu citu fakultāti. Vispopulārākā un ietekmīgākā bija teoloģijas fakultāte, kurā mācības ilga astoņus gadus un noslēdzās ar pārbaudījumu un disputu.

Matemātiku mācīja kā kvadriviuma sastāvdaļu mākslas fakultātē, bet atsevišķus jautājumus izklāstīja arī filozofijas kursā. Vēlāk matemātiskās izglītības kursā iekļāva pirmo divu Eiklīda «Elementu» grāmatu izklāstu, ievadu sfēriskajā astronomijā, optikas elementus, planētu kustības teoriju, proporciju teoriju, mācību par laukumiem. Taču vairākus gadsimtus matemātika bija tikai palīgpriekšmets. Pirmais matemātisko disciplīnu pasniegšanā specializējās Vīnes universitātes maģistrs Johans no Grundenas (ap 1380—1442). No 1412. gada viņš Vīnē lasīja lekcijas par veselā un daļu algoritmiem, t. i., aritmētikā, sfērikā, optikā, baznīcas kalendāru aprēķinos, un vēlāk arī astrolabija lietošanas kursu.

Attieksme pret matemātiku kā palīgzinātni, protams, negatīvi ietekmēja studentu zināšanas, kuri, piemēram, ģeometrijā, tālāk par pirmajām Eiklīda «Elementu» teorēmām netika. Vēl XVI gs. sākumā Parīzes universitātē mākslas maģistra grāda kandidāti ģeometrijas eksāmena vietā nodeva zvērestu, ka noklausījušies lekcijas par «Elementu» pirmajām sešām grāmatām.

Kaut arī matemātiķu sagatavošana nebija universitāšu mērķis, tomēr no universitātēm nāca tādi izcili matemātiķi kā Tomass Bradvardīns Anglijā, Nikolā Orezms Francijā, Johans Millers Regiomontanus Vācijā un Nikolajs Koperniks Polijā.

Pirmais Rietumeiropas patstāvīgais matemātiķis, kurš pilnībā apguva islama valstu matemātiķu sasniegumus un attīstīja tos tālāk, bija L e o n a r d o n o P i z a s (1180—1240), ko pazīstam arī kā F i b o n a č i. Leonardo galvenais darbs — «Abaka grāmata» — tika uzrakstīts 1202. gadā un pārstrādāts 1228. gadā. Ar vārdu «abaks» Leonardo saprata nevis skaitāmo dēli, bet aritmētiku vispār. Šajā grāmatā Leonardo sistematizēja ziņas no arābu darbiem, papildināja tās ar ziņām no antīkā mantojuma, kā arī ievietoja savus uzdevumus un metodes. Aritmētiku, kā arī lineāro un kvadrātvienādojumu algebru Leonardo izklāstīja ļoti pilnīgi un izsmeļoši.

«Abaka grāmatā» pavisam bija 15 nodaļas. Pirmās piecas no tām veltītas veselu skaitļu aritmētikai uz jaunās numerācijas bāzes. Lai parādītu lasītājam jaunās sistēmas priekšrocības, Leonardo lietoja tabulu, kurā skaitļi pierakstīti gan ar romiešu, gan indiešu cipariem. Nodaļā par reizināšanu tika aprakstīta pārbaude ar devītnieku, turklāt atlikums pēc dalīšanas ar 9 varēja būt arī nulle. Tātad nulle jau tika uzskatīta par īstu skaitli. Nodaļā par dalīšanu aplūkota skaitļu sadalīšana pirmreizinātājos, aplūkotas dalāmības pazīmes ar

2, 3, 5, 9 un parādīta pārbaude ar septiņi un vienpadsmit. VI un VII nodaļā Leonardo mācīja, kā izpildīt darbības ar jauktiem skaitļiem un daļām; daļskaitļiem kopsaucēju atrada ar racionālāku paņēmienu nekā arābi — meklējot mazāko kopīgo dalāmo. VIII—X nodaļā tika izklāstīti paņēmieni, kā risināt komerciālās aritmētikas uzdevumus, izmantojot proporcijas. Starp šiem uzdevumiem bija uzdevumi, kuros izmantoja «brālības likumu», t. i., noteiktas summas sadalīšanu proporcionāli katra dalībnieka ieguldījumam. XI nodaļā aplūkoti uzdevumi par dažādiem sakausējumiem, bet XII nodaļā apkopoti uzdevumi, kuros jāsummē rindas — aritmētiskā un ģeometriskā progresija, kvadrātu rinda un rekurentā jeb atgriezeniskā rinda. (Atgriezenisko rindu locekļus var izteikt kā dažu iepriekšējo rindu locekļu lineāras kombinācijas.) Šajā nodaļā bija arī uzdevums, kurš vēlāk kļuva populārs daudzās zemēs un kura analogs bija jau Senajā Ēģiptē: «7 vecenes iet uz Romu, katrai 7 mūļi, uz katra mūļa 7 naži, kuri katrs ir 7 makstīs. Cik pavisam priekšmetu?» (137 256). Ar atgriezenisko rindu saistīts uzdevums par trušiem: «Cik trušu pāru piedzima gada laikā no viena trušu pāra, ja no katra pāra katru mēnesi rodas pa pārim un neviens pāris neaiziet bojā?» Tagad šo rindu sauc par Fibonači rindu, un tā ir atgriezenisko rindu speciāls gadījums.

«Abaka grāmatā» pirmo reizi minēts populārais uzdevums par vismazāko atsvaru skaitu, ar kuru palīdzību var nosvērt visus priekšmetus, kuru masa ir vesels skaitlis, kas mazāks par kādu doto skaitli. Leonardo atbilde — 1, 3, 9, 27, ... — pamatota ar to, ka jebkuru veselu skaitli var izteikt kā skaitļa 3 dažādu pakāpju un skaitļa 1 summu vai starpību.

Leonardo aplūkoja arī daudzus uzdevumus, kuri reducējami uz lineāru vienādojumu atrisināšanu. Vienādojumu risināšanai viņš izmantoja dažādas metodes: viena aplamā pieņēmuma metodi, vārdiski algebrisko risinājumu, divu aplamo pieņēmumu metodi. Daudzi no šiem uzdevumiem tika aizgūti no austrumu un sengrieķu rokrakstiem, taču Leonardo pilnveidoja to risināšanas metodes. Viņš izklāstīja arī citu lineāro vienādojumu risināšanas paņēmienu, kuru nosauca par *tiešo likumu* (regula recta) un par kuru atzīmēja, ka to lietojuši arābi un ar to ir atrisināmi daudzi uzdevumi. Tiešais likums ir algebrisks risināšanas paņēmiens, kuru Leonardo apraksta, neizmantojot simboliku.

Leonardo algebriski risināja vēl vienu viduslaikos populāru uzdevumu grupu. Šajos uzdevumos bija jānosaka vairāku cilvēku īpašums, ja katrs no viņiem var nopirkt kādu priekšmetu, tikai pievienojot savai kapitāla daļai vēl kāda cita kapitāla daļu. Priekšmeta cena nebija dota, tāpēc vispār šādi uzdevumi bija nenoteikti. Taču šo nenoteiktību varēja novērst, jo tika prasīts mazākais veselais atrisinājums.

Pētot lineārus vienādojumus, Leonardo pirmais Eiropā izteica domu par nepieciešamību ieviest negatīvus skaitļus un tos interpretēt kā parādu.

XIV nodaļā Leonardo ar skaitliskiem piemēriem izskaidro kvadrātsaknes un kubsaknes tuvinātas aprēķināšanas metodes. Kubsaknes vilkšanai Leonardo izmantoja tuvinājumu

$$\sqrt[3]{a^3+r} \approx a+\frac{r}{3a(a+1)+1},$$

ko uzskatīja par savu izgudrojumu. Šis tuvinājums dod diezgan labu precizitāti.

Leonardo labi pārzināja Eiklīda «Elementu» X grāmatu. Par to liecina «Abaka grāmatā» ievietotie uzdevumi par kvadrātiskajām iracionalitātēm.

XV nodaļā bija apkopoti ģeometrijas uzdevumi, kuros izmantojama Pitagora teorēma, un kvadrātvienādojumi, kas risināmi ar «algebru un almukabalu». Šajā nodaļā izmantota arābu literatūra, aplūkotas tās pašas sešas vienādojumu kanoniskās formas, kas bija al Horezmi darbā. Taču bija arī jauna veida vienādojumi, piemēram, $6x \cdot 5x + 10x = 20$.

«Abaka grāmatas» uzdevumus izmantoja daudzi vēlākā laika matemātiķi. XV un XVI gs. šos uzdevumus varēja atrast daudzos itāļu, vācu, franču, angļu un krievu rokrakstos un grāmatās, arī slavenajā L. Eilera «Algebrā» (1768).

Liela nozīme matemātikas attīstībā bija arī citiem Leonardo darbiem. 1220. gadā viņš uzrakstīja «Ģeometrijas praktiku» — grāmatu, kura pretēji nosaukumam bija nevis mācību līdzeklis zemes mērīšanā, bet gan apkopoja dažādas teorēmas (ar pierādījumiem).

Ap 1225. gadu Leonardo uzrakstīja «Kvadrātu grāmatu», kurā aplūkoja nenoteiktos kvadrātvienādojumus. Šis darbs bija vienīgais vērtīgais pētījums skaitļu teorijā viduslaiku Eiropā.

Vērtīgus rezultātus (it īpaši kontinuuma teorijā) ieguva angļu filozofs, maģistrs Tomass Bredvardīns (ap 1290—1349), kurš mācījās un pasniedza Oksfordas universitātē, bet dzīves nogalē kļuva par Kenterberijas arhibīskapu. Bredvardīns sarakstīja trīs darbus matemātikā un vienu mehānikā. «Teorētiskā aritmētika» bija Boēcija aritmētikas īss pārstāstījums. Oriģinālāka bija «Teorētiskā ģeometrija». To augstu vērtēja XIV un XV gs. matemātiķi. «Traktātā par attiecībām jeb par ātrumu attiecībām kustībā» (1328) visinteresantākais ir Bredvardīna mēģinājums matemātiski izteikt sakarību starp ātrumu v, spēku F un pretestību R. Angļu zinātnieks asprātīgi kritizēja pieņēmumu, ka ātrums ir proporcionāls spēka un pretestības attiecībai. Saistībā ar mehānikas jautājumiem Bredvardīns aplūkoja daļveida kāpinātājus. Laika posmā no 1328. g. līdz 1335. g. Bredvardīns uzrakstīja «Traktātu par kontinuumu», kurā aplūkoja mācību par nepārtraukto un diskrēto. Šī mācība atradās uz fizikas, matemātikas un filozofijas robežas. Eiropiešu zinātniekiem no Aristoteļa un arābu filozofu darbiem bija zināmi dažādi uzskati par kontinuuma uzbūvi. Bredvardīns uzskaitīja piecas koncepcijas par šo jautājumu. Pats viņš bija Aristoteļa koncepcijas piekritējs. Grāmatā vispirms bija dotas definīcijas, kurām sekoja pieņēmumi un slēdzieni, kurus pierādīja kā teorēmas. Kontinuumu definēja kā daudzumu, kura daļas ir savstarpēji saistītas. Atsevišķi tika definēts pastāvošais kontinuums un tā veidi — ķermenis kā kontinuums, kuram piemīt garums, platums, dziļums; kā arī virsma, līnija. Laiks tika definēts kā kontinuums, kas nosaka (mēra) secību. Tika definēti arī punkts kā nedalāmais, kuram ir noteikts stāvoklis, un mirklis. Kustība tika definēta kā telpas kontinuuma pārvietošanās laika kontinuumā. Bredvardīns šķiroja aktuālo un potenciālo bezgalību un noliedza atomistisko koncepciju.

Bredvardīna spriedumi par nepārtrauktību un bezgalību nebija domāti, lai radītu algoritmus kaut kādu noteiktu ģeometrijas vai fizikas uzdevumu risināšanai, tiem drīzāk bija filozofisks raksturs. Kaut arī netika iegūti konkrēti matemātiskie rezultāti, tomēr diskusija par kontinuumu noderēja XVII gs. matemātiķiem, izstrādājot bezgalīgi mazo lielumu analīzi.

XIV gs. ievērojamākais matemātiķis Francijā bija N i k o l ā O r e z m s (ap 1323—1382). Orezms bija viens no zinātniskās literatūras aizsācējiem franču valodā. Viņš pārtulkoja vairākus Aristoteļa darbus, franciski uzrakstīja «Traktātu par sfēru», kurā bagātināja franču terminoloģiju. Orezmam bija darbi arī astronomijā un mehānikā.

Divos darbos Orezms rakstīja par proporciju teoriju. Orezms lietoja daļveida proporcijas, kuras atbilstu mūsu daļveida kāpinātājiem.

Orezms būtiski attīstīja angļu matemātiķa Svainsheda mācību par formu intensitāti[1]. Šo mācību var uzskatīt par funkciju teorijas pirmsākumu, jo tajā formas intensitāte tika aplūkota kā kvalitātes intensitātes mainīgais (piemēram, siltuma vai aukstuma pakāpe, mehāniskās kustības ātrums). Pirmo reizi tika aplūkots momentānā ātruma jēdziens. Orezms šo mācību vienkāršoja un padarīja uzskatāmāku, sistemātiski lietojot ģeometriskās interpretācijas. Orezms nelietoja funkcijas jēdzienu (tā vienkārši vēl nebija), bet teica «attiecība». Šīs attiecības tika uzdotas gan vārdiski, gan ar zīmējumiem. Orezms īpaši aplūkoja kustības jeb plūsmas iespējamos gadījumus, ieviesa jēdzienu par paātrinājumu kā kustības intensitāti.

Citā Orezma sacerējumā — «Eiklīda ģeometrijas jautājumi» — pierādīts, ka paātrinātā kustībā, kuras sākuma ātrums ir nulle, noietais ceļš aug proporcionāli laika kvadrātam un vienādos laika momentos noietie attālumi aug proporcionāli nepāra skaitļu virknei, sākot ar skaitli 1. Parasti šos likumus saista ar Galileja vārdu, jo viņš tos lietoja mehānikā. Šajā pašā darbā Orezms pierādīja harmoniskās rindas diverģenci (protams, nelietojot rindas jēdzienu).

Pēc Orezma mācība par formu intensitāti ar jaunām idejām nepapildinājās, jo matemātiskais aparāts vēl nebija pietiekami pilnīgs, lai varētu risināt konkrētas problēmas. Kaut arī XVII gs. matemātiķi neatsaucās uz Orezmu, tomēr viņa darbi uzskatāmi par turpmāko atklājumu sagatavošanas posmu.

---

[1] Vienu lielumu (mainīgo) sauca par *kvalitāti*, tā vērtību — par *kvalitātes intensitāti*. Otru lielumu sauca par *formu*, tā vērtību — par *formas intensitāti*. Orezms aplūkoja vienkāršākās sakarības, kuras mūsdienu simbolikā var rakstīrot ar vienādību $y=x^a$.

12. Renesanses laikmeta matemātika

XV gs. un XVI gs. Eiropas vēsturē pazīstami kā Renesanses gadsimti, ar to saprotot tā augstā kultūras līmeņa atdzimšanu, kāds bija antīkajā pasaulē. Būtībā sabiedrības dzīvē notika daudz dziļākas pārmaiņas — feodālās iekārtas dzīlēs jau veidojās buržuāziskā sabiedrība kā jauna sabiedriskā formācija.

Rūpniecībā izveidojās manufaktūras, kurām bija nepieciešami tehniski izgudrojumi un uzlabojumi. Šajā laikā Eiropā kļūst pazīstami kompass, pulkstenis un šaujampulveris, papīrs un grāmatu iespiešana. Ļoti strauji attīstījās tirdzniecība, tas sekmēja jūras braucienus un jaunus ģeogrāfiskus atklājumus. Papīrs un grāmatu iespiešana padarīja zinātni par sabiedriskās dzīves nepieciešamu elementu. Notika īsta kultūras revolūcija. Daudzi ievērojami cilvēki veica tālus ceļojumus, pārvaldīja četras, piecas valodas, izmēģināja spēkus vairākās nozarēs. Tādi bija Leonardo da Vinči, Albrehts Dīrers, Mārtiņš Luters, Makiavelli, Kardano. Tika izveidota Kopernika mācība, ar kuru sākās dabaszinātņu atbrīvošanās no teoloģijas.

Vēsturiski izveidojās tāda situācija, ka tieši matemātikā sāka meklēt noteicošos patiesības kritērijus. No vienas puses, bija praktisks labums, ja tirgotājs, pateicoties labākiem navigācijas aprēķiniem jūrā, varēja nokļūt galā ātrāk nekā konkurenti. No otras puses, matemātiku uzmanības centrā izvirzīja reliģiskās tradīcijas, saskaņā ar kurām Dievs Visumu radījis pēc matemātiska plāna.

XV—XVI gs. matemātika galvenokārt attīstījās Itālijā, Francijā un Vācijā, kā arī XVI gs. beigās Holandē, kura tajā laikā pārdzīvoja pirmo buržuāzisko revolūciju Eiropā.

Krievijā matemātika sāka attīstīties tikai XVI gs., kad pēc Krievijas atbrīvošanās no tatāru jūga nodibinājās jauni kontakti ar Rietumeiropu.

Vislielākie panākumi XV un XVI gs. Eiropas matemātiķiem bija algebrā. Ievērojamākais eiropiešu algebrists XV gs. bija itālis Luka Pačoli (1445—1514). Pačoli ievērojamākais darbs bija «Aritmētikas, ģeometrijas, proporciju un proporcionalitātes virsotne» (1487), kuru Venēcijā izdeva 1494. gadā. Šajā darbā tika izklāstīti dažādi aritmētisko darbību izpildīšanas paņēmieni. Dažām skaitļu īpašībām Pačoli deva mistisku izskaidrojumu, tika citēta arī Bībele.

Algebru Pačoli sauca par «regula della cosa» — «lietas likums» un «arte maggiore» — «lielā māksla». Viņš izmantoja algebriskus simbolus, kvadrātsakni apzīmēja ar ℞ (*radice* — sakne) vai ℞2 kubsakni — ar ℞3 vai ℞ *cuba*, ceturtās pakāpes sakni — ar ℞4 vai ℞℞. Vienādojuma brīvo locekli Pačoli apzīmēja ar $n°$ (*nu-*

mero — skaitlis), x vietā lietoja simbolu *co* (*cosa* — lieta), x^2 vietā — *ce* (*censo* — kvadrāts). Pakāpju nosaukumu sistēma bija multiplikatīva. Pakāpju rādītājus, kurus nevarēja izteikt kā 2 un 3 reizinājumu, apzīmēja ar pirmskaitļa kārtas numuru un vārdu *relato*. Otru nezināmo (y) Pačoli apzīmēja ar vārdu *quantita* (daudzums). Saskaitīšanu apzīmēja ar $\tilde{p}$ (*plus* vai *pice* — vairāk), atņemšanu — ar $\tilde{m}$ (*minus* vai *meno* — mazāk). Pačoli formulēja likumus tādu skaitļu reizināšanai, pirms kuriem stāv $\tilde{p}$ un $\tilde{m}$ zīmes.

Šajā darbā Pačoli izklāstīja arī grāmatvedības teoriju, kurā visus skaitļus naudas operācijās pierakstīja divos stabiņos «kredīts» (ienākums) un «debets» (parāds). Uzdevumi bija apmēram tādi paši kā Leonardo «Abaka grāmatā».

Grāmatā «Par dievišķo proporciju» (tā sauca «zelta šķēlumu») tika aplūkoti arhitektūras jautājumi (izmantojot romiešu Vitruvija darbu). Šeit tika pētīti arī pieci regulārie daudzskaldņi un no tiem iegūtie pusregulārie daudzskaldņi, kā arī cilvēka ķermeņa proporcijas, kuras izteica ar veseliem skaitļiem. Ilustrācijas sava drauga grāmatai uzzīmēja Leonardo da Vinči, kuram Pačoli savukārt aprēķināja, cik daudz metāla nepieciešams jātnieka statujai.

Francijā ar algebru nodarbojās medicīnas bakalaurs Nikolā Šukē (miris ap 1500. g.). 1484. gadā Šukē pabeidza darbu «Zinātne par skaitļiem trīs daļās», kurā aplūkoja darbības ar racionāliem skaitļiem un iracionalitātēm un mācību par vienādojumiem. Pēc analoģijas ar itāļu terminu *millione* (burtiski «lielais tūkstotis») Šukē ieviesa skaitļu nosaukumus *biljons*, *triljons* utt. līdz *noniljonam*. Šukē pētīja arī aritmētiskās un ģeometriskās progresijas locekļu īpašības. Uzrakstījis vienu virkni zem otras —

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,$$
$$a,\ a^2,\ a^3,\ \ldots,\ a^n,$$

Šukē atzīmēja, ka divu apakšējās virknes locekļu reizinājuma kāpinātājs vienāds ar divu virs tiem stāvošo augšējās virknes locekļu summu. (Šo īpašību vēlāk izmantoja logaritmu aprēķinos.)

Kā savu oriģinālo atklājumu Šukē aprakstīja «vidējo skaitļu likumu». Apgalvojot (bez pierādījuma), ka $\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}$ atrodas starp $\frac{a_1}{b_1}$ un $\frac{a_2}{b_2}$, viņš šo «vidējo» lietoja uzdevumu risināšanā. Tomēr aprēķini ar šo metodi bija diezgan neparocīgi. Iekavu vietā Šukē lietoja pasvītrojumu, piemēram, izteiksmi $\sqrt{14+\sqrt{180}} = \sqrt{(14+\sqrt{180})}$ pierakstīja šādi: $\underline{R_x \cdot 14 p R_x 180}$.

Iepriekšējā nezināmā nosaukuma «lieta» vietā Šukē ieviesa terminu *premier*, t. i., «pirmais». Atbilstoši nezināmā pakāpēm tika lietoti arī «otrie», «trešie», «ceturtie» skaitļi. Lai apzīmētu nezināmā pakāpi, koeficientam augšā pa labi pierakstīja mazāku pakāpes rādītāju, piemēram, $12x$, $12x^2$, $12x^3$ Šukē rakstīja šādi: 12^1, 12^2, 12^3. Brīvo locekli, piemēram, 5, atbilstoši pierakstīja kā 5^0. Šukē lietoja arī negatīvus pakāpes rādītājus, piemēram, $7x^{-1}$ rakstīja kā $7^{1\cdot\tilde{m}}$.

«Algebrisko burtu» lietošana bija svarīgs solis uz priekšu algebras simbolikas radīšanā. 1489. gadā Leipcigā iznāca Johana Vidmaņa mācību grāmata «Ātri un skaisti rēķini visiem tirgoņiem». Šī grāmata ir ievērojama ar to, ka tajā pirmoreiz $\tilde{p}$ un $\tilde{m}$ vietā tika lietotas $+$ un $-$ zīmes. Iespējams, ka $+$ cēlies no zīmes &, ko vēl tagad lieto tirdzniecības kompāniju nosaukumos un kas savukārt nozīmēja latīņu saikli *et* (un).

XVI gs. sākumā Vācijā strādāja t. s. kosisti. Šādi viņus sauca tāpēc, ka nezināmā vietā viņi lietoja simbolu *coss* — no itāļu vārda *cosa* (lieta). Kosistu izstrādāto terminoloģiju plaši lietoja ne tikai Vācijā, bet arī citās Eiropas zemēs.

Luka Pačoli savā darbā nodaļu par algebriskiem vienādojumiem beidza ar norādījumu, ka kubisko vienādojumu $x^3+ax=b$ un $x^3+b=$ $=ax$ $(a, b>0)$ atrisināšanai «algebras māksla vēl nav atradusi paņēmienu, tāpat kā nav vēl atrisināts riņķa kvadratūras uzdevums». Šie Pačoli vārdi bija stimuls itāļu algebristiem.

Pirmais kubisko vienādojumu $x^3+ax=b$ $(a, b>0)$ radikāļos atrisināja Boloņas universitātes profesors Scipions del Ferro (1456—1526). Pēc tā laika tradīcijām Ferro savu rezultātu nepublicēja, bet paziņoja savam skolniekam Fiorem, kurš to lietoja matemātiskos turnīros.

Kādā no šādiem turnīriem Fiore tikās ar Nikolo Tartalju (1500—1557). Tartalja pirms turnīra, kurš notika 1535. gada 12. februārī, pats atrada del Ferro formulu un atrisināja visus Fiores uzdotos uzdevumus. Fiore bija par to tik satriekts, ka neatrisināja nevienu no Tartaljas uzdotajiem uzdevumiem. Nākamajā dienā pēc turnīra Tartalja atrada arī vienādojuma $x^3=ax+b$ atrisinājumu. Šie Tartaljas atklājumi tika publicēti Džirolamo Kardano (1501—1576) algebriskajā traktātā «Lielā māksla jeb par algebriskiem likumiem» (1545). 1539. gadā Kardano, uzzinājis par Tartaljas atklājumu, izlūdzās no viņa atrisinājuma formulējumu, zvērot, ka to nepublicēs. Tartalja savu risinājumu pateica kā dzejoli ar 25 rindām, kuru viņš pats bija sacerējis labākai iegaumēšanai. Kardano pēc nepilnīgajiem formulējumiem restaurēja atrisinājumu, pierādīja to un tāpēc uzskatīja, ka ar pilnām tiesībām var to publicēt savā grāmatā, pieminot, ka autors ir Tartalja. Tomēr šis likums kļuva pazīstams kā Kardano formula.

«Lielajā mākslā» Kardano izklāstīja arī sava skolnieka Luidži Ferari (1522—1565) atklāto ceturtās pakāpes vienādojuma risināšanas metodi.

Trešās un ceturtās pakāpes vienādojumu atrisināšanai radikāļos bija milzīga nozīme ne tikai algebras progresā, bet visas matemātikas attīstībā. No skaitļošanas viedokļa atrisinājums radikāļos nav ērtāks kā tuvinātie atrisināšanas paņēmieni. Taču te svarīgāki bija jauni, dziļi teorētiski jautājumi, galvenokārt, problēma par augstākas pakāpes vienādojumu atrisināšanu radikāļos. Pirmo reizi tika iets būtiski tālāk par sengrieķu matemātiķu sasniegumiem.

Tartaljas, Kardano un Ferari darbu turpinājums bija detalizētāka nereducējamā kubiskā vienādojuma izpēte gadījumam, kad zem abām kubsaknēm ir kvadrātsaknes no negatīviem skaitļiem, bet vienādojuma saknes tomēr ir reālas. Šo gadījumu ar imagināro skaitļu īpašību palīdzību izskaidroja R. Bombelli (ap 1526—1573). Viņš bija grāmatas «Algebra» autors, kuru sarakstīja 1560. gadā, bet tā iznāca 1572. gadā. Bombelli deva astoņus reālo un imagināro skaitļu reizināšanas likumus. Mūsu apzīmējumos tie ir šādi:

$$(\pm 1)i = \pm i \qquad (+i)(+i) = -1 \qquad (-i)(+i) = +1$$

$$(\pm 1)(-i) = \pm i \qquad (+i)(-i) = +1 \qquad (-i)(-i) = -1$$

Tāpat kā islama valstīs, arī viduslaiku Eiropā plaši lietoja sešdesmitnieku daļas. Piemēram, Fibonači kubisko vienādojumu atrisināja sešdesmitnieku daļās. Sevišķi daudz sešdesmitnieku daļas lietoja astronomijā. Bija mēģinājumi veikt aprēķinus sešdesmitnieku sistēmā, taču Eiropā šādi aprēķini popularitāti neguva.

Decimāldaļskaitļus Eiropā plaši sāka lietot pēc flāmu matemātiķa Simona Stevina (1548—1620) darba «Desmitais» iznākšanas. Stevins kvēli aģitēja par to ieviešanu un par pāreju uz decimālo mēru un monētu sistēmu. 1585. gadā iznāca arī Stevina «Aritmētika», kurā tika izklāstīta ne tikai aritmētika, bet arī algebra. Stevina simbolika vēl bija neracionāla, un tai nebija daudz piekritēju.

Pakāpju rādītājiem jaunus nosaukumus deva franču matemātiķis Pjērs Ramuss (1515—1572). Viņa darbā «Matemātikas kurss trīsdesmit vienā grāmatā» vienkāršākā un vieglākā valodā bija izklāstīti Eiklīda «Elementi». «Matemātikas kursā» Ramuss mēģināja pamatot matemātiku ar aritmētiku. Darbā «Divas grāmatas algebrā un tikpat aritmētikā», kurš iznāca 1586. gadā Frankfurtē, Ramuss ieviesa jaunus pakāpju apzīmējumus: x — *latus* (l), x^2 — *quadratus* (q), x^3 — *cubus* (c), x^4 — *biquadratus* (bq), x^5 — *solidus* (s), x^6 — *quadratocubus* (qc), x^7 — *bisolidus* (bs), x^8 — *triquadratus* (tq).

Būtiskus uzlabojumus algebras simbolikā veica Fransuā Vjeta (1540—1603). No daudzajiem Vjetas matemātiskajiem sacerējumiem tikai daļa iznāca viņa dzīves laikā, daudzus publicēja pēc viņa nāves, bet daži palika rokrakstā. Jaunās algebras vispārīgās idejas un pamatprincipus Vjeta izklāstīja grāmatā «Ievads analītiskajā mākslā» (1591), kura bija paredzēta kā liela, visaptveroša algebriska traktāta sākums. Vjetas mērķis bija pārveidot iepriekšējo algebru par spēcīgu matemātisku instrumentu. Vispārīgo algebru Vjeta nosauca par *logistica speciasa.* Tās priekšmets bija matemātisku objektu sistēma. Tā sastāvēja daļēji no ģeometriskiem, daļēji — no pseidoģeometriskiem objektiem, kurus savā starpā saistīja aritmētiskajām darbībām analogas sakarības. Šie objekti veidoja skalu, lielumu «kāpnes» — kvadrāta mala jeb sakne, kvadrāts, kubs, kvadrāta kvadrāts, kvadrāta kubs un vēl daudzi citi skalāri *(scalares)*, kuri piederēja pie dažādām reālām vai fiktīvām dimensijām —

garuma vai platuma, laukuma, tilpuma, laukuma laukumam utt. Saskaitīšana, atņemšana un salīdzināšana, tāpat kā antīkajā matemātikā, tika pakļautas «homogenitātes likumam». Tieši šajā daļā Vjeta sāka apzīmēt zināmos lielumus ar līdzskaņiem, bet nezināmos — ar patskaņiem. Burtu koeficientu ieviešana bija būtisks pagrieziens algebras attīstībā. Ar to kļuva iespējami algebriskie aprēķini kā formulu sistēma, kā operatīvs algoritms.

Vjeta savu simboliku izmantoja regulāri. Līdz XVII gs. vidum ieskaitot, to lietoja arī citi matemātiķi, arī slavenais P. Fermā. Mums, protams, acīmredzami ir Vjetas apzīmējumu trūkumi — tajos vēl bija pārāk daudz vārdu. Piemēram, vienādojums $x^3+3b^2x=2z^3$ tika pierakstīts šādi:

A cubus + B plano 3 *in A aequari Z solido* 2.

Drīz pēc vispārīgā algebrisko pārveidojumu aparāta izveidošanas Vjeta izstrādāja diezgan pilnīgu pirmo četru pakāpju vienādojumu teorijas analītisku izklāstu. Šeit minēsim divus svarīgākos rezultātus. Pirmkārt, Vjeta eleganti un vienkārši ar substitūciju $y^2+xy=a$ reducēja kubisko vienādojumu $x^3+3ax=2b$ uz vienādojumu $y^6+2by^3=a^3$, kurš ir kvadrātvienādojums attiecībā pret y^3. Otrkārt, viņš parādīja, ka jebkurš kubiskā vienādojuma atrisinājums reducējas vai nu uz divu vidējo proporcionālo ievietošanu, vai uz leņķa trisekciju, un ar trigonometrijas palīdzību atrada nereducējamā gadījuma atrisinājumu. Ja vienādojumu $x^3-px=q$ pārraksta formā $x^3-3r^2x=ar^2$ ($p=3r^2$ un $q=ar^2$), tad $r>a/2$ ir nereducējamais gadījums. Tā kā $\cos 3u=4\cos^3 u-3\cos u$, tad, ievietojot iegūstam, ka $a=2r\cos u$. Kā piemēru Vjeta atrisināja vienādojumu $x^3-3x=1$, kur $x=2\cos 20°$, $\cos 20°=0{,}93969262$.

Vjeta risināja arī tādus algebriskus vienādojumus, kuri atbilda leņķa dalīšanai piecās vai septiņās daļās. Viņš zināja arī $\cos mx$ un $\sin mx$ izvirzījumu pēc $\cos x$ un $\sin x$ pakāpēm. Tas deva iespēju Vjetam 1594. gadā uzreiz atrisināt 45. pakāpes vienādojumu ar skaitliskiem koeficientiem. Šo uzdevumu kā izaicinājumu visai zinātnes pasaulei uzdeva holandietis Adrians van Roumens (1561—1615):

$$45x-3795x^3+95634x^5-\ldots+12300x^{39}+945x^{41}-45x^{43}+x^{45}=a,$$

$$\text{kur } a=\sqrt{1\frac{3}{4}-\sqrt{\frac{5}{6}-\sqrt{1\frac{7}{8}-\sqrt{\frac{45}{64}}}}}.$$

Vjeta uzreiz saskatīja, ka a ir mala regulāram 15-stūrim, kurš ievilkts riņķī ar rādiusu 1, vai arī a ir 24° liela loka horda. Pēc pirmā un pēdējā locekļa koeficientiem Vjeta secināja, ka x ir šī loka 1/45 daļas horda. Nākamajā dienā Vjeta atrada vēl 22 vienādojuma saknes, kuras vispārīgajā veidā var uzrakstīt kā

$$2\sin\frac{n\cdot 360°+12°}{45}, \text{ kur } n=1, 2, \ldots, 22.$$

Ar to Vjeta aprobežojās, jo pārējās 22 vienādojuma saknes bija negatīvas, bet Vjeta neatzina ne negatīvas, ne imagināras saknes. Transcendentu funkciju izmantošanas ideju algebrisku vienādojumu risināšanā no jauna izmantoja XIX gs. otrajā pusē Š. Ermits un L. Kronekers (piektās pakāpes vienādojuma atrisināšana ar eliptiskām funkcijām).

Vjetam pieder arī pirmie ievērojamie panākumi algebrisko vienādojumu vispārīgajā teorijā. Darbā «Par vienādojumu analīzi un pilnveidošanu» viņš izmantoja savu simboliku vienādojumu sakņu pārveidojumiem. Šajā darbā īpaši interesanti ir pētījumi par vienādojuma sastādīšanu pēc dotajām saknēm un ar to saistītais jautājums par sakarībām starp vienādojuma saknēm un koeficientiem. Aplūkojot otrās, trešās, ceturtās un piektās pakāpes vienādojumu piemērus, kuros saknes ir pozitīvas un augstākās pakāpes locekļa koeficients ir 1 vai -1 (brīvais loceklis ir vienādojuma labajā pusē ar plusa zīmi), Vjeta parādīja, ka koeficienti pie x^{n-1}, x^{n-2}, x^{n-3} utt. būtībā ir ar mainīgām zīmēm ņemta sakņu summa, sakņu pāru reizinājumu summa, sakņu trijnieku reizinājumu summa utt. Vjeta izstrādāja arī tuvinātas atrisināšanas metodi algebriskam vienādojumam ar skaitliskiem koeficientiem. Šī metode bija ļoti apjomīga, taču to lietoja līdz pat XVII gs. beigām, kad sāka lietot vienkāršāko un parocīgāko Ņūtona metodi.

Vjetas algebriskie darbi un atklājumi bija jauna virziena sākums algebrā, un šī algebra noderēja par bāzi, uz kuras vēlāk attīstījās analītiskā ģeometrija un bezgalīgi mazo lielumu rēķini.

Eiropas matemātiķi pakāpeniski sāka lietot negatīvos skaitļus. Pirmoreiz negatīvie skaitļi Eiropā parādījās Leonardo no Pizas «Abaka grāmatā», kur tika aplūkoti septiņi nenoteiktie vienādojumi ar astoņiem nezināmajiem:

$$x+y+z+{}^1/_2(t+u+v+w)=s,$$

$$y+z+t+{}^1/_3(u+v+w+x)=s,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$w+x+y+{}^1/_8(z+t+u+v)=s.$$

Leonardo rakstīja, ka šis uzdevums ir neatrisināms, taču kļūst atrisināms, ja pieņem, ka trešais nezināmais atbilst parādam. Tādā gadījumā $x=507$, $y=171$, $z=$parāds (skaitlis, kas rodas, no 4029 atņemot 4038), $t=1347$, $u=451$, $v=131$, $w=1431$, $s=2349$. Analoģiski piemēri, kuros negatīvie skaitļi tiek iztulkoti kā parāds, ir vēl citos «Abaka grāmatas» uzdevumos. Jēdzienu «parāds» Leonardo, iespējams, ar arābu starpniecību aizguva no indiešiem.

Negatīvie skaitļi sastopami arī Pačoli un Šukē aritmētikās. Šukē negatīvos skaitļus apzīmēja ar $0\tilde{m}$ (piemēram, -11 rakstīja $0\tilde{m}11$), sauca par skaitļiem, kas «mazāki par neko», un interpretēja kā parādu.

Kardano algebrisko vienādojumu negatīvās saknes sauca par «fiktīvām».

Ja izmanto negatīvos skaitļus, tad trīs kvadrātvienādojuma veidu vietā var aplūkot vienu veidu. Eiropā pirmais šādu apvienojumu izdarīja Mihaēls Štīfels (1486—1567). Darbā «Pilnā aritmētika» viņš aplūkoja kvadrātvienādojumus, kas mūsu pierakstā atbilst vienādojumam $x^2=ax+b$, un aprakstīja vienādojuma risinājumu visos trīs gadījumos ($a>0$, $b>0$; $a>0$, $b<0$; $a<0$, $b>0$).

Negatīvo skaitļu ģeometriskā interpretācija guva plašu izplatību pēc analītiskās ģeometrijas rašanās, kad pozitīvos un negatīvos skaitļus sāka aplūkot kā punktu koordinātas.

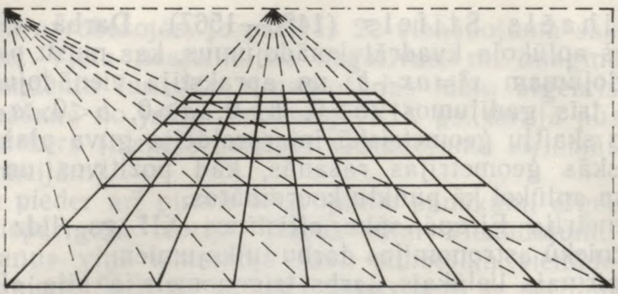
Trigonometrija Eiropā sāka attīstīties XII gs. līdz ar islama valstu zinātnieku astronomijas darbu tulkojumiem.

Eiropā pirmais lielākais darbs trigonometrijā bija «Piecas grāmatas par visu veidu trijstūriem». To sarakstīja vācu matemātiķis un astronoms Johans Millers (1436—1476) no Kēnigsbergas, kuru pēc latīniskā dzimšanas vietas nosaukuma dēvēja par Regiomontanu. Sacerējumu par trijstūriem Regiomontans sarakstīja Itālijā 1462.—1464. g. Tajā bija izklāstīti trijstūru konstrukcijas uzdevumi, turklāt daži no tiem bija atrisināti algebriski un nevis ar konstrukciju. Tālāk sekoja trigonometrija plaknē un uz sfēras. Eiropā tas bija pirmais darbs, kurā trigonometrija tika aplūkota kā patstāvīga matemātiska disciplīna. Trigonometrijas pamats bija ņemts no arābu literatūras, taču Regiomontanam ir nopelni šī materiāla sistematizācijā un lieliskā izklāstā. Bez tam viņš daudzas vietas papildināja ar saviem rezultātiem un oriģināliem pierādījumiem. Regiomontans sastādīja sinusu un tangensu tabulas, kurās riņķa rādiusa vērtība ir 10^7, kas ir ekvivalenta šo tabulu aprēķināšanai decimālda.skaitļos ar septiņām decimālzīmēm.

Trigonometrijas attīstību būtiski ietekmēja izcilais poļu astronoms Nikolajs Koperniks (1473—1543). Kopernika galvenais darbs «Par debesu sfēru rotāciju», kurā izklāstīta viņa heliocentriskā sistēma, tika publicēts Nirnbergā gandrīz vienlaikus ar autora nāvi. Astronomi sāka veikt arvien precīzākus novērojumus un rūpīgāk tos matemātiski apstrādāt. Tādēļ bija nepieciešams sastādīt precīzākas trigonometriskās tabulas un pilnveidot trigonometrisko aprēķinu tehniku. Kopernika darba otrās grāmatas XII nodaļā īsumā izklāstīta plaknes trigonometrija, bet tās pašas grāmatas XIV nodaļā — sfēriskā trigonometrija. Koperniks sastādīja arī precīzākas sinusa tabulas.

Grāmatā «Par debesu sfēru rotāciju» Koperniks oriģināli pierādīja sfēriskās trigonometrijas teorēmu, pamatojot to ar tāda trijplakņu kakta īpašībām, kurš projicē sfērisko trijstūri no sfēras centra. Kopernika terminoloģija ir līdzīga nevis Regiomontana vai islama valstu matemātiķu terminoloģijai, bet gan Ptolemaja lietotajai terminoloģijai.

Telpas figūru perspektīvo attēlojumu, t. i., šo figūru centrālo projicēšanu uz plakni, senie grieķi izmantoja «scenogrāfijā» — prasmē zīmēt dekorācijas teātra izrādēm. Dažādi centrālās projekcijas veidi aplūkoti Eiklīda «Optikā» un Ptolemaja «Planisfērijā». Perspektīvas teorijai bija veltīta liela daļa no XIII gs. poļu zinātnieka Vitelo (ap 1225—1280) darba «Optika», kurā autors izklāstīja perspektīvas teorijas pamatus no Eiklīda «Optikas», Ptolemaja «Op-



7. zīm.

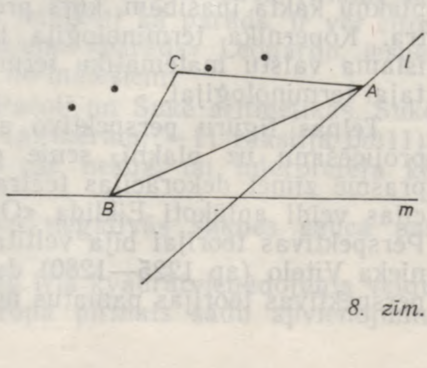
tikas» un ibn āl Haisama «Optikas grāmatas». Vitelo «Optikai» bija svarīga nozīme zinātnes attīstībā, starp citu, arī ģeometrijas attīstībā. Keplera darba «Astronomijas optiskā daļa» apakšvirsraksts ir «Vitelo papildinājums».

Uz XV gs. attiecas Florences arhitekta Leona Batistas Alberti (1404—1472) un mākslinieka Pjero dela Frančeskas (1416—1492) darbība. Alberti savā traktātā «Par glezniecību» (1435) izstrādāja metodi, kā attēlot vienādus paralēlus citu aiz cita novietotus nogriežņus, kuri atrodas starp divām taisnēm, ja šo taišņu krustpunkts ir uz horizonta līnijas. Alberti metode redzama 7. zīmējumā.

Dela Frančeska traktātā «Par perspektīvu glezniecībā» (ap 1480) aprakstīja priekšmetu perspektīvu attēlojumu pēc tā horizontālās un vertikālās projekcijas.

Perspektīvas teorijas jautājumi tika aplūkoti arī izcilā itāļu mākslinieka L e o n a r d o d a V i n č i (1452—1519) darbos, kurš perspektīvu izmantoja savās gleznās.

Leonardo da Vinči personība ir viena no vēstures mīklām. Laikabiedri viņu atzina par ģeniālu mākslinieku, bet Leonardo nodarbojās ne tikai ar glezniecību. Viņu interesēja eksperimentālās zinātnes, mehānika, optika, astronomija. Par matemātiku da Vinči teica: «Vislielāko prieku ķermenim sniedz saules gaisma, vislielāko prieku garam — matemātiskās patiesības skaidrība» un vēl: «Nevienu cilvēka pētījumu nevar saukt par patiesām zināšanām, ja tas nav pārbaudīts ar matemātisku pierādījumu.» Plaši pazīstams ir Leonardo da Vinči izteiciens: «Lai neviens, kas nav matemātiķis, neiedrošinās lasīt manus darbus.» Viņa matemātiskajās piezīmēs var atrast gan vingrinājumus un uzdevumus, kuriem bija lietišķs raksturs, gan arī ar matemātiskiem jēdzieniem saistītas filozofiskās problēmas. Daudz uzmanības tika veltīts vienlielu laukumu un tilpumu atrašanai, zvaigžņveida daudzskaldņiem, regulāru daudzstūru konstruēšanai. Dažas konstrukcijas bija tuvinātas.



8. zīm.

Leonardo da Vinči piezīmju grāmatiņās var atrast Hipokrata mēnestiņu pētījumus (da Vinči mēģināja vispārināt Hipokrata rezultātus), piezīmes par atšķirību starp līknēm ar vienkāršu un divkāršu liekumu, par + un – zīmju ieviešanu, par riņķa kvadratūras neiespējamību. Riņķa kvadratūras uzdevumu Leonardo da Vinči ieteica tuvināti atrisināt, izmantojot riteni, kura platums ir vienāds ar rādiusa pusi. Ja šo riteni ripina pa plakni, tad vienā pilnā apgriezienā tā taisnstūra sliedes laukums ir vienāds ar riteņa riņķa laukumu $\left(\pi r^2 = 2\pi r \cdot \frac{r}{2}\right)$. Pētot ķermeņu un figūru smagumu centrus un aprēķinot elipses laukumu, da Vinči izmantoja Arhimēda metodi, tādējādi apsteidzot XVII gs. zinātniekus. Viņš konstruēja arī matemātiskus instrumentus — proporcionālās dalīšanas cirkuli, ierīci parabolas konstruēšanai u. c. Leonardo da Vinči aprakstīja arī interesantu elipses konstrukcijas paņēmienu. Ja brīvi izraugāmies trijstūri ABC (8. zīm.), tad, pārvietojot trijstūri tā, ka visu laiku $B \in m$ un $A \in l$ (l un m ir divas patvaļīgas krustiskas taisnes), punkta C aprakstītā trajektorija ir elipse.

Daudz uzmanības perspektīvas teorijai veltīja cits tā laika izcils mākslinieks — Albrehts Dīrers (1471—1528). Par Dīreru bieži runā kā par cilvēku, kurš Renesanses idejas pauda Vācijā. Dīrers bija ne tikai izcils ģeometrs, bet arī domātājs ar neparasti plašu redzesloku. Dīrers uzrakstīja divus traktātus — «Par mērīšanu ar cirkuli un lineālu» (1525) un «Par cilvēku proporcijām» (1528). Otrajā darbā Dīrers aplūkoja dažādu cilvēka ķermeņa daļu proporcijas trīs savstarpēji perpendikulārās plaknēs. Cilvēku figūru konstruēšanai Dīrers ieteica ievērot, ka «galva ir $^1/_8$ no ķermeņa garuma, sejas izmēri (piere, deguns, lūpas, zods) ir $^1/_{10}$, bet krūšu platums no viena pleca līdz otram ir $^1/_4$». Vēlāk Dīrers bija spiests atzīt, ka cilvēka figūru nevar uzzīmēt ar cirkuli un lineālu.

Renesanses laikā Eiropas matemātika pirmo reizi pārsniedza no senajiem grieķiem un Austrumu tautām mantoto zināšanu robežas. Tieši šajā laikā beidzās daudzus gadsimtus ilgā cīņa par decimālās pozicionālās numerācijas ieviešanu. Tika radīta aritmētikas un algebras simbolika. Tika ieviesti daļveida un negatīvie pakāpju rādītāji, sekmīgi atrisināta problēma par trešās un ceturtās pakāpes vienādojumu atrisināšanu radikāļos — problēma, kura nebija pa spēkam islama valstu matemātiķiem. Ar šo problēmu saistīta arī formāla imagināru skaitļu ieviešana. Vjeta izveidoja algebru kā simboliskus aprēķinus, izmantojot īpašus burtu apzīmējumus nezināmajiem un polinomu koeficientiem, kā arī paplašināja algebrisko operāciju simboliku. Aritmētikā tika ieviestas decimāldaļas. Bija ievērojami panākumi plaknes un sfēriskajā trigonometrijā, tika pilnveidoti tabulu aprēķināšanas paņēmieni. Matemātika aizvien vairāk palīdzēja ātri atrisināt ne tikai tirdzniecības un zemes mērīšanas, bet arī jaunās tehnikas un jauno dabaszinātņu izvirzītos uzdevumus. Ilgais konstanto lielumu pētīšanas periods tuvojās noslēgumam. Bija izveidoti priekšnoteikumi, lai rastos mainīgo lielumu teorija, simboliskā algebra, analītiskā ģeometrija, diferenciālrēķini un integrālrēķini.

13. Mainīgo lielumu matemātika

Zinātnes vēsturē XVII gs. matemātikai ir īpaša loma. XVII gs. sākās jauns posms matemātikas attīstībā — mainīgo lielumu matemātika.

Vairums zinātnieku XVII un XVIII gs. strādāja daudzās zinātnes jomās. Viņi pētīja dabu, centās atklāt tās likumus un īpaši nerūpējās par zinātņu sadalīšanu. Šajā laikposmā veiktie pētījumi sekmēja matemātisko dabaszinātņu rašanos. Doma par matemātisko metožu universālumu nodarbināja daudzu izcilo XVII gs. zinātnieku un filozofu prātus (R. Dekarts, B. Spinoza, G. V. Leibnics, I. Ņūtons).

XVII gs. matemātiskās jaunrades raksturu noteica pieaugošās praktiskās vajadzības. Piemēram, strauji attīstījās mašīnbūve, tāpēc pieauga interese par teorētisko mehāniku. Tika tulkoti un no jauna izdoti Hērona un Arhimēda darbi, kā arī veikti pilnīgi jauni atklājumi mehānikā.

XVII gs. tika dibinātas pirmās zinātniskās organizācijas. 1662. gadā darbu sāka Londonas Karaliskā biedrība, bet 1666. gadā tika organizēta Parīzes Zinātņu akadēmija. Sāka iznākt pirmie zinātniskie žurnāli — 1665. gadā Londonā un Parīzē, 1682. gadā Leipcigā.

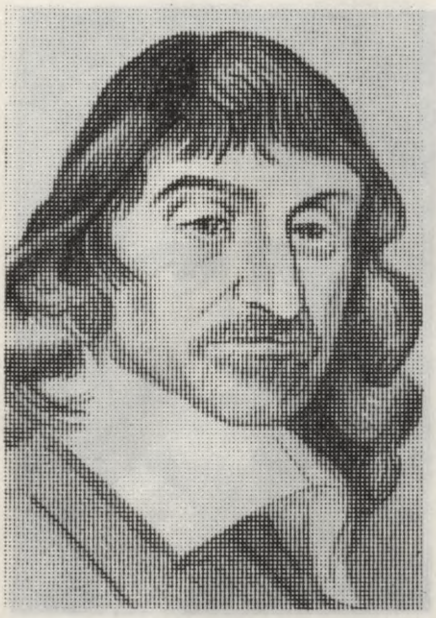
Matemātikas praktiskās nozīmes, idejisko pamatu, struktūras un lomas izmaiņa notika vienlaikus ar dziļām kvalitatīvām maiņām matemātikas saturā. Skaitļu, konstantu lielumu un figūru pētījumus papildināja kustības un transformācijas, funkcionālo atkarību pētījumi. Par šiem notikumiem matemātikā F. Engelss rakstīja[1]: «Pagrieziena punkts matemātikā bija Dekarta mainīgais lielums. Pateicoties tam, matemātikā ienāca kustība un līdz ar to dialektika un tūlīt kļuva nepieciešami diferenciālrēķini un integrālrēķini, kuri uzreiz arī radās un kurus apkopoja un pabeidza, nevis izgudroja Ņūtons un Leibnics.»

XVII gs. tika likti pamati gandrīz visām matemātikas disciplīnām, kuras tagad ietilpst mūsdienu augstākās matemātiskās izglītības klasiskajā fondā.

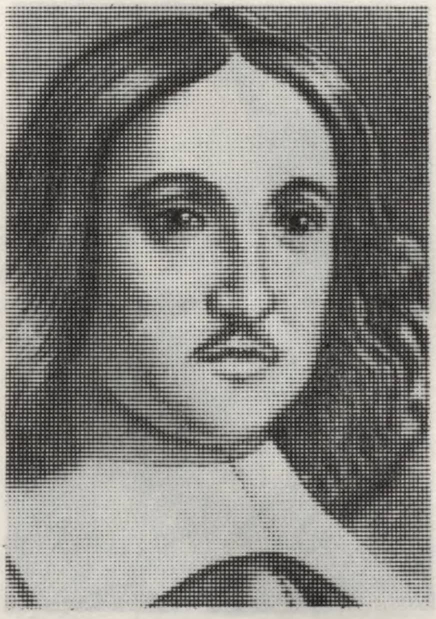
Revolūcija astronomijā, kas saistīta ar N. Kopernika, T. Brahes un J. Keplera vārdiem, lika pilnīgi no jauna novērtēt cilvēka vietu Visumā un iespējas izskaidrot astronomiskās parādības. J. Keplera darbos labi redzama jaunās astronomijas stimulējošā ietekme gan apjomīgu aprēķinu veikšanā, gan arī bezgalīgi mazo lielumu ieviešanā.

G. Galilejs radīja jaunu brīvi krītošu ķermeņu mehāniku, bija elastības teorijas pamatlicējs un Kopernika sistēmas aizstāvis. To-

[1] Engelss F. Dabas dialektika. — R.: LVI, 1949. — 218. lpp.



R. Dekarts



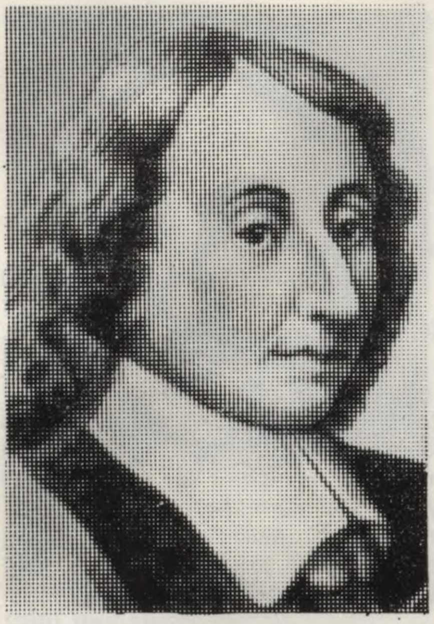
P. Fermā

mēr visvairāk Galilejam jāpateicas par to, ka viņš pamatoja eksperimentu ar teoriju. Pirms viņa līdzīgas domas bija izteikuši Arhimēds un L. da Vinči.

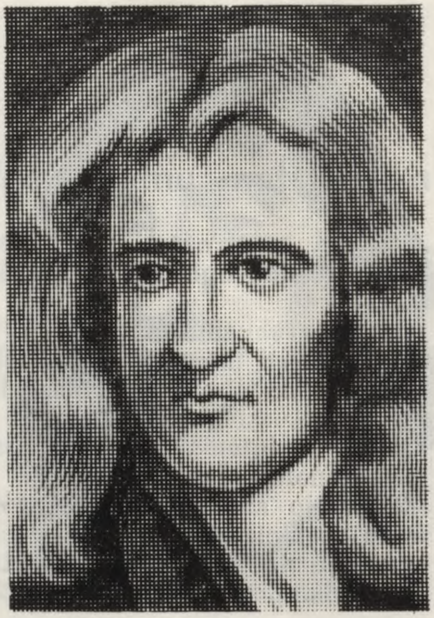
XVII gs. tika uzrakstīti vairāki matemātiskās analīzes sistemātiski izklāsti. Viens no pirmajiem bija Boloņas universitātes profesora B. Kavaljēri darbs «Ģeometrija» (1635). Aprēķini šajā darbā tika veikti ar metodi, ko tagad sauc par *Kavaljēri principu.*

Spēcīgu impulsu matemātikas attīstība guva pēc R. Dekarta (1596—1650) «Ģeometrijas» (1637) publicēšanas. Šis darbs bija ne tikai analītiskās ģeometrijas aizsākums, bet tas bija ievērojams arī ar to, ka tajā aplūkota arī algebrisko vienādojumu teorija. Analītiskā ģeometrija interesēja vēl citu izcilu franču matemātiķi — P. Fermā (1601—1655), taču viņa «Ģeometrija» iznāca tikai 1679. gadā, kaut gan matemātikas vēsturnieki uzskata, ka šis darbs uzrakstīts pirms Dekarta «Ģeometrijas». Taču vislielāko ieguldījumu Fermā deva skaitļu teorijā.

Strauji attīstoties kuģu būvniecībai, cilvēki aizvien vairāk devās jūras braucienos, palielinājās kravas pārvadājumu apjoms. Radās pirmās apdrošināšanas sabiedrības. Pieauga interese par jautājumiem, kas saistīti ar varbūtību teoriju. Par varbūtību teorijas pamatlicējiem kļuva P. Fermā un B. Paskāls (1623—1662). Paskāla sākotnējās zinātniskās intereses bija saistītas ar ģeometriju. Projektīvajā ģeometrijā tagad kā viena no pirmajām tiek minēta Paskāla teorēma. Paskāls bija arī ievērojams fiziķis. Vēl var atzīmēt, ka



B. Paskāls



I. Ņūtons

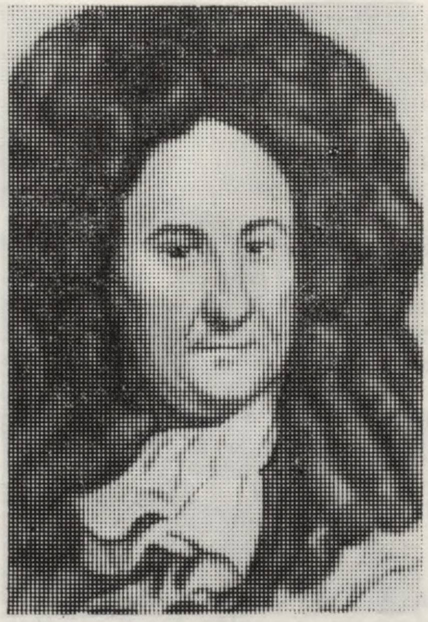
Paskāls pirmais konstruēja skaitļojamo mašīnu.

B. Kavaljēri darbus matemātiskajā analīzē turpināja Oksfordas universitātes ģeometrijas profesors Dž. Vallis s (1616—1703). Viņš ieviesa bezgalīgas rindas un bezgalīga reizinājuma (produkta) jēdzienus un, izmantojot šos jēdzienus, ieguva dažādu iracionālu skaitļu izteiksmes, piemēram,

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdot\ldots}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdot\ldots}.$$

Strādājot pie jauniem izgudrojumiem, zinātnieki dažkārt netieši ieguva matemātiskus rezultātus. Raksturīgs piemērs ir holandiešu zinātnieka K. Heigensa (1629—1695) darbs «Svārsta pulkstenis» (1673). Tajā, meklējot labāku laika mērīšanas veidu, aplūkoti ne tikai svārstu pulksteņi, bet pētītas arī plaknes līkņu evolūtas un evolentas. Heigenss bija izcils fiziķis un astronoms, taču ar pilnām tiesībām viņu var uzskatīt arī par vienu no matemātiskās analīzes priekštečiem.

Līdz XVII gs. vidum bija uzkrāts pietiekami daudz zināšanu, lai varētu radīt matemātiskās analīzes pamatu — diferenciālrēķinus un integrālrēķinus. Lai to veiktu, bija labi jāpārzina gan seno grieķu un Kavaljēri ģeometriskās metodes, gan Dekarta un Vallisa algebriskā metode. Diferenciālrēķinus un integrālrēķinus neatkarīgi viens no otra atklāja I. Ņūtons (1643—1727) un G. V. Leibnics (1646—1716). Ņūtona autoritāte pirmām kārtām balstījās uz viņa «Natūrfilozofijas matemātiskajiem principiem» (1687) — mehānikas

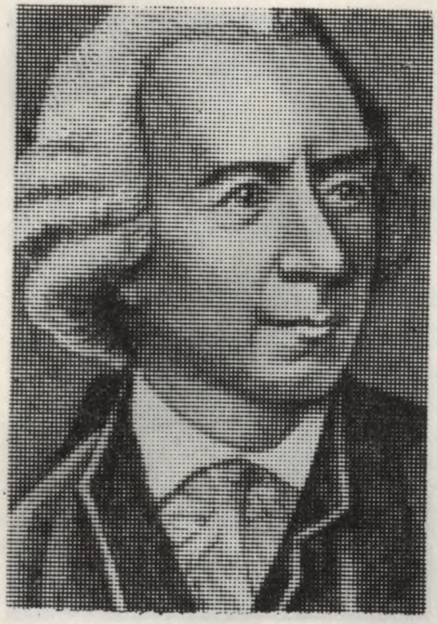
Z. Dalambērs G. Leibnics

aksiomātiskas uzbūves izklāstu un Saules sistēmas ķermeņu kustības izskaidrojumu ar gravitācijas likumu. Tā kā I. Ņūtons nelabprāt publicēja savus darbus, tad viņa atklātā «fluksiju teorija», kā viņš sauca analīzi, pilnībā atklātībā parādījās tikai pēc viņa nāves 1736. gadā. G. V. Leibnics savu analīzi pirmoreiz publicēja 1684. gadā rakstā «Jauna metode priekš maksimumiem un minimumiem un arī pieskarēm, kurai nav par šķērsli daļveida un iracionāli lielumi, un īpašs aprēķinu veids priekš tiem». Šajā rakstā tika izmantoti tādi apzīmējumi kā dx, dy, diferencēšanas likumi. 1686. gadā tika publicēts cits raksts ar integrālrēķinu izklāstu.

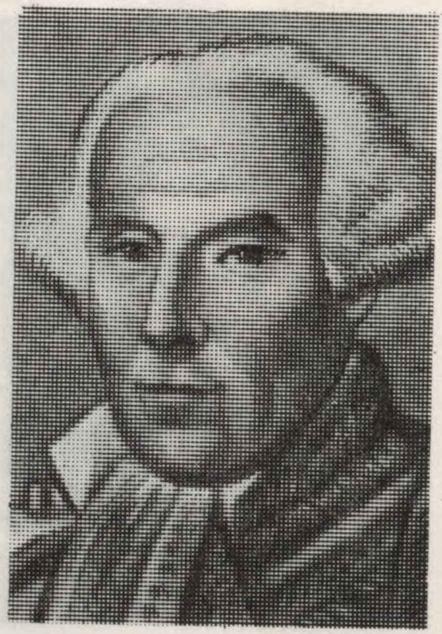
Pēc šo rakstu iznākšanas sākās ļoti auglīgs periods matemātikas attīstībā. Pirmie G. V. Leibnica skolnieki bija brāļi Bernulli — Jākobs (1654—1705) un Johans (1667—1748). 1696. gadā tika izdota pirmā matemātiskās analīzes mācību grāmata, kuru sarakstīja Johana Bernulli skolnieks G. Lopitāls (1661—1704).

XVII gs. matemātiku dažkārt rezumē ar vienu frāzi — XVII gs. matemātiķi un fiziķi uzbūvēja pasaules mehānistisko ainu. Matemātika vairs nebija tikai fizikas palīglīdzeklis — ērta, kompakta, skaidra un vispārīga valoda. Matemātika pati kļuva par fundamentālu zināšanu avotu.

XVIII gs. matemātiķu darbība visintensīvāk bija saistīta ar analīzi un tās lietojumiem mehānikā. Izcilākie šī gadsimta matemātiķi bija brāļi Bernulli: Jākobs (1654—1705) un Johans (1667—1748), L. Eilers (1707—1783), Ž. Dalambērs (1717—1783),



L. Eilers



P. Laplass

Ž. Lagranžs (1736—1813), P. Laplass (1749—1827). Zinātniskā darbība galvenokārt bija koncentrēta akadēmijās, ievērojamākās bija Parīzes, Berlīnes un Pēterburgas zinātņu akadēmijas.

13.1. Algebra un skaitļu teorija

Pakāpeniski vienkāršojot Vjetas smagnējo pierakstu un apzīmējumu sistēmu, viņa sekotāji vispirms pacentās izstrādāt likumus ar burtiem apzīmētu lielumu aprēķiniem. Viens no pirmajiem, kas sasaistīja elementāro aritmētiku ar pilnveidotajiem Vjetas burtveida apzīmējumiem, bija angļu zinātnieks V. Outreds (1574—1660). Darbā «Matemātikas atslēga» (1631) viņš aplūkoja darbību izpildi ar burtveida lielumiem. Outreds ieviesa reizināšanas zīmi $\times$, kaut arī pats $A\times B$ vietā bieži vien rakstīja vienkārši AB. Tai pašā laikā citi matemātiķi lielumu apzīmēšanai lielo burtu vietā sāka lietot mazos burtus. Visai drīz burtu lietošanu papildināja arī ar indeksiem.

F. Vjeta un viņa sekotāji algebriskos aprēķinus veidoja uz ģeometrijas bāzes. Lietas būtība mainījās pēc R. Dekarta «Ģeometrijas» iznākšanas. Dekarts skaidri parādīja, ka aprēķiniem ar burtveida lielumiem jābūt veidotiem uz aritmētikas bāzes. Viņš katram nogrieznim piekārtoja skaitli (arī otrādi), līdz ar to viņa rīcībā bija tas, ko tagad sauc par reālajiem skaitļiem. Iegūtās darbību definīcijas bija spēkā arī iracionālajiem skaitļiem.

Tika pilnveidota arī F. Vjetas aizsāktā vienādojumu teorija. Franču matemātiķis A. Žirārs (1595—1633), pētot algebrisko vienādojumu atrisinājumus, ieviesa ne tikai negatīvās saknes, kuras Vjeta neatzina, bet pat imaginārās saknes.

R. Dekarts gribēja izvirzīt algebru pirmajā vietā un padarīt to derīgu jebkura jautājuma formulēšanai un pētīšanai. Šī plāna realizēšanai bija nepieciešams tālāk izstrādāt tradicionālās vienādojumu formas. Dekarts sāka apzīmēt nezināmos vispirms ar z, tad ar y un x. Kā vienādības zīmi viņš lietoja simbolu $\propto$. Viens no svarīgākajiem Dekarta atklājumiem ir viņa vārdā nosauktais zīmju likums, kas apgalvo, ka pilnam algebriskam vienādojumam var būt tik pozitīvu sakņu, cik reizes mainās tā locekļu koeficientu zīmes, un tik negatīvu sakņu, cik reizes viena aiz otras seko divas plusa zīmes vai divas mīnusa zīmes. Šī likuma pamatojumu Dekarts nedeva, un tikai XVIII gs. matemātiķi atrada vairākus tā pierādījumus.

Izcilais R. Dekarta sāncensis P. Fermā arī nodarbojās ar svarīgiem algebriskiem pētījumiem. Viņš izstrādāja ļoti vienkāršu un elegantu paņēmienu viena nezināmā izslēgšanai no diviem vienādas pakāpes vienādojumiem.

Vairākas svarīgas algebras teorēmas minētas ievērojamā angļu zinātnieka I. Ņūtona «Universālajā aritmētikā» (1707). Ņūtons formulēja (tiesa, diezgan piesardzīgā formā) algebras pamatteorēmu par vienādojuma reālo sakņu skaitu. Ņūtons pētīja arī Dekarta zīmju likumu. Viņš ne tikai precīzi to formulēja vienādojumiem, kuriem visas saknes ir reālas, bet pirmais formulēja arī likumu imagināro sakņu skaita noteikšanai. Bez tam Ņūtons pētīja jautājumu par vienādojumu reducēšanas problēmu.

Jāmin arī angļu matemātiķa, Oksfordas universitātes profesora Dž. Vallisa (1616—1703) «Traktāts par algebru» (1685). Šis darbs apkopoja visas līdz tam laikam zināmās algebras metodes un rezultātus, kā arī iepazīstināja lasītājus ar dažām interesantām autora idejām (piemēram, pozitīvos un negatīvos skaitļus Valliss traktēja kā peļņu un parādu, aplūkoja pakāpes ar negatīviem kāpinātājiem).

Trigonometriskās funkcijas algebrā pirmoreiz ieviesa F. Vjeta. A. Muavrs (1667—1754) izmantoja trigonometriskās funkcijas dažu augstāku pakāpju vienādojumu risināšanā. Vispopulārākais Muavra rezultāts, protams, ir viņa teorēma (1722)

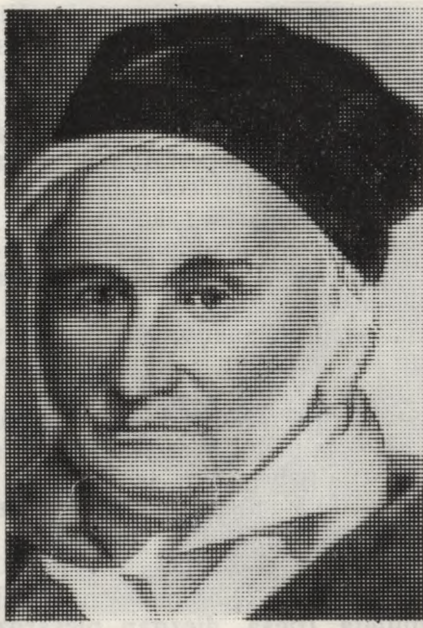
$$\sqrt[n]{\cos n\varphi \pm i \sin n\varphi} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi.$$

XVIII gs. matemātiķi centās atrast n-tās pakāpes algebriska vienādojuma vispārīgo atrisinājumu radikāļos. L. Eilers vairākkārt atgriezās pie šī jautājuma. Mēģinot pazemināt vienādojuma kārtu, Eilers izmantoja substitūciju

$$x = v + A\sqrt[n]{v} + B\sqrt[n]{v^2} + C\sqrt[n]{v^3} + \ldots + Q\sqrt[n]{v^{n-1}}$$

un uzskatīja, ka ieguvis pareizo formu vispārīgā atrisinājuma iegūšanai. Gandrīz gadsimtu vēlāk N. Ābels (1802—1829) tieši šo

N. Ābels



K. Gauss

formu izmantoja, lai pierādītu, ka 5. pakāpes vienādojumu nav iespējams atrisināt radikāļos.

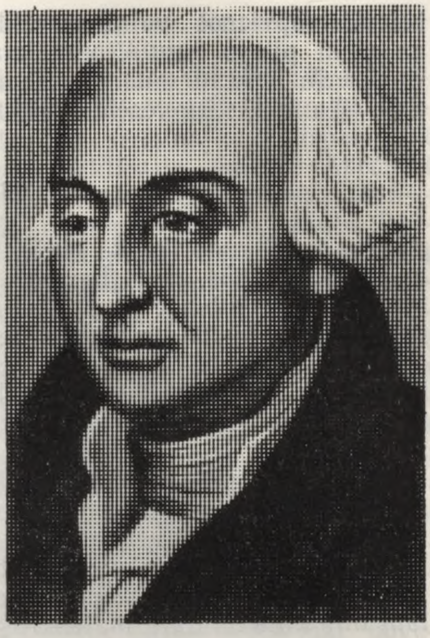
Vienādojumu sistēmu atrisināšanā tagad plaši lieto determinantus. Par determinantu izgudrotāju parasti uzskata G. Krāmeru (1704—1752). Viņš formulēja likumu par jebkura skaita lineāru vienādojumu sistēmu atrisinājumu iegūšanu, kā arī zīmju noteikšanas likumu. Vārdu «determinants» pirmoreiz lietoja K. Gauss (1777—1855), taču ar šo vārdu viņš apzīmēja kvadrātiskās formas diskriminantu. Mūsdienās lietotajā nozīmē šo terminu 1815. gadā ieviesa O. Košī (1789—1857).

XVII gs. matemātiķu interese par skaitļu teoriju bija saistīta galvenokārt ar Diofanta darbu izdevumu latīņu valodā 1621. gadā. Studējot šo izdevumu, P. Fermā uz tā malām pierakstīja savas slavenās skaitļu teorijas teorēmas. Tās tika publicētas tikai pēc Fermā nāves 1679. gadā. Diemžēl Fermā atstāja vienīgi teorēmu formulējumus bez pierādījumiem. Vispirms P. Fermā nodarbojās ar skaitļu dalāmības jautājumiem un ieguva paņēmienu, kā atrast jebkura skaitļa visus dalītājus. Šo pētījumu rezultātā viņš atklāja svarīgu teorēmu, kas tagad tiek saukta par Fermā teorēmu: katram a eksistē tāds m, ka

$$a^m = 1 \pmod p,$$

kur p — pirmskaitlis, kas nav a dalītājs, un $p=1 \pmod m$. Cenšoties vispārināt seno matemātiķu teorēmas par taisnleņķa trijstūriem, kuru

O. Koši



Z. Lagranžs

malas izsakāmas ar racionāliem skaitļiem, Fermā ieguva vairākas teorēmas par dažu vienādību neiespējamību. Minēsim svarīgāko no tām: vienādojumam $x^n+y^n=z^n$ $(n>2)$ neeksistē atrisinājums veselos skaitļos. Arī šī teorēma tika atrasta kā piezīme uz Diofanta darba izdevuma malas. Līdzās tai bija šādi vārdi: «Man ir tiešām brīnišķīgs pierādījums, taču malas ir pārāk šauras, lai to te varētu novietot.» Jau trīs gadsimtus matemātiķi nesekmīgi meklē šo pierādījumu.

Ar atsevišķiem skaitļu teorijas jautājumiem nodarbojās arī B. Paskāls, G. V. Leibnics, M. Rolls u. c. Taču viņiem neizdevās gūt tik labus rezultātus kā P. Fermā.

No XVII gs. beigām līdz XVIII gs. trīsdesmitajiem gadiem matemātiķi bija pārāk aizrāvušies ar analītisko ģeometriju un bezgalīgi mazo lielumu rēķiniem, lai nodarbotos ar skaitļu teoriju. Tāpēc šai laika posmā nevar minēt nevienu ievērojamu rezultātu skaitļu teorijā. Vienīgi L. Eilers, kura radošā aktivitāte aptvēra praktiski visas tā laika matemātikas nozares, veica pētījumus arī skaitļu teorijā. Vairāki Eilera raksti ir veltīti nenoteikto vienādojumu atrisināšanai veselos skaitļos. Bez tam viņš aplūkoja jautājumu par augstāku pakāpju Diofanta vienādojumu sistēmu atrisināmību veselos skaitļos. Eileru interesēja arī bez pierādījuma atstātās Fermā teorēmas, no kurām viņš vairākas pierādīja.

XVIII gs. nozīmīgi atklājumi skaitļu teorijā pieder Ž. L a g r a n ž a m (1736—1813) un A. L e ž a n d r a m (1752—1833). Lagranžam izdevās apvienot vairākas Eilera un Fermā atklātās teorēmas un veikt pirmo ieguldījumu kvadrātisko formu teorijā. 1797. gadā iznāca A. Ležandra darbs «Skaitļu teorija», kurā pirmoreiz sistemātiski tika izklāstīta veselo skaitļu teorija.

13.2. Kombinatorika un varbūtību teorija

Par kombinatoriku kā zinātnisku disciplīnu var runāt, tikai sākot ar XVII gs. 1634. gadā Erigons un Tartalja neatkarīgi viens no otra aprēķināja kombināciju skaitu no n elementiem pa m elementiem. 1654. gadā Paskāls nosūtīja Fermā «Traktātu par aritmētisko trijstūri». Šajā darbā tika aplūkotas sakarības starp binomiālajiem koeficientiem. Te jāpiebilst, ka Paskāla trijstūris un tā veidošanas aditīvais likums Indijā bija zināms jau apmēram divus gadsimtus pirms mūsu ēras.

Zinātnisks pamatojums kombināciju un permutāciju teorijai atrodams Leibnica sacerējumā «Spriedumi par kombinatorikas mākslu» (1666). No šī darba arī radās nosaukums «kombinatorika».

Lai pierādītu teorēmas par binomiālajiem koeficientiem, Paskāls izmantoja pilnās indukcijas metodi. Nav gan noskaidrots, vai Paskālam bija zināms itāļu matemātiķa Mauroliko darbs «Divas grāmatas par aritmētiku» (1575), kurā šī metode jau tika lietota. Šo matemātikā tik svarīgo metodi neatkarīgi atklāja arī Jākobs Bernulli (1686).

Tādi jaunievestie jēdzieni kā kombināciju skaits, faktoriāls u. c. pirmoreiz tika izmantoti teorēmā par polinoma kāpināšanu. Pirmais šo teorēmu publicēja Muavrs (1697). Spriežot pēc piezīmēm, Leibnics šo teorēmu ir zinājis jau 1678. gadā.

Turpmākie pētījumi kombinatorikā attiecas uz XVIII gs. otro pusi, kad spēcīga kombinatorās analīzes skola izveidojās Vācijā. Arī Eilers vairākkārt nodarbojās ar kombinatorikas uzdevumiem, piemēram, risinot uzdevumu par to, cik dažādos veidos ar diagonālēm iespējams sadalīt n-stūri trijstūros, kā arī uzdevumā par šaha zirdziņa gājieniem. Pēdējais uzdevums kļuva populārs pēc Ž. Ozanama (1640—1717) četru sējumu darba «Matemātiska un fizikāla izklaidēšanās» (1696) izdošanas. Risinot šo uzdevumu, Š. Vandermonds (1735—1796) apzīmēja šaha galdiņa laucinus ar dubultindeksiem. Tā tagad pieņemts apzīmēt determinanta elementus. Vairāki matemātiķi (Fermā, Ozanams u. c.) nodarbojās ar maģisko kvadrātu sastādīšanu.

Varbūtību teorijas un kombinatorikas pamatojumi radās vienlaikus Paskāla un Fermā sarakstē 1654. gadā. Viens no pirmajiem bija uzdevums, kas rodas kauliņu spēlē: kā taisnīgi sadalīt starp spēlētājiem laimestu, kurš būtu jāsaņem vienam no viņiem, iegūstot noteiktu punktu skaitu, ja spēle beidzas, pirms kāds no spēlētājiem šo punktu skaitu ir ieguvis. Jau XV gs. šādu uzdevumu centās atrisināt Pačoli, XVI gs. — Kardāno un Tartalja. Taču pirmais šo uzdevumu atrisināja Paskāls. Atrisinājuma pareizību apstiprināja

Fermā, kurš savukārt piedāvāja daudz īsāku un elegantāku atrisinājumu.

1656. gadā ar franču zinātnieku rezultātiem un metodēm iepazinās K. Heigenss. Viņam tas savukārt nebija nekas jauns, jo Heigenss patstāvīgi bija ieguvis šī uzdevuma atrisinājumu vispārīgajā gadījumā. Savus pētījumus Heigenss izklāstīja darbā «Aprēķini azarta spēlē», kurš iznāca kā pielikums F. van Shoutena (1615—1660) «Matemātiskajām etīdēm» (1657) un pēc tam kā Jākoba Bernulli darba «Pieņēmumu mākslas» (1713) pirmā daļa. Otrajā daļā viņš izstrādāja varbūtību teorijas vajadzībām nepieciešamo kombinatoro analīzi. Trešajā daļā viņš izmantoja šo analīzi atsevišķu uzdevumu risinājumos. Ceturtajā daļā Bernulli bija paredzējis aplūkot varbūtību teorijas lietojumus cilvēka dzīves ilguma aprēķinos, taču šo daļu viņš nepaguva uzrakstīt. Bernulli definēja divu veidu varbūtības — *a priori* un *a posteriori*, kā arī pierādīja lielo skaitļu likumu. Līdz ar to varbūtību teorija ieguva svarīgus praktiskus lietojumus. Par varbūtību teoriju īpaši interesējās dažādas apdrošināšanas sabiedrības. Matemātiķu sastādītās mūža ilguma tabulas izmantoja rentes noteikšanai atraitnēm un bāreņiem. Lietojot varbūtību teoriju, mēģināja atrisināt arī dažādus teoloģiskus un juridiskus strīdus.

Cita varbūtību teorijas lietošanas joma bija mācība par novērojumu rezultātu izlīdzināšanu. Te kā pirmais jāmin R. Kotesa raksts «Kļūdu novērtējums» (1722). Viņš ieteica dot dažādiem novērojumiem svaru. Ja, piemēram, novērojot kāda priekšmeta atrašanās vietu, iegūstam četrus punktus, tad pēc Kotesa likuma katram novērojumam jāpiešķir svars, kas ir apgriezti proporcionāls novērojumu kļūdām, bet par priekšmeta atrašanās vietu jāņem šo četru punktu masas centrs. Doma par to, ka labāk izlīdzināt vairāku novērojumu rezultātus nekā apmierināties tikai ar vienu novērojumu, tai laikā vēl diemžēl nenostiprinājās. 1770. gadā Lagranžs aplūkoja jēdzienu «kļūdas varbūtība», ko definēja kā atbilstošās kļūdas biežuma skaita dalījumu ar visu novērojumu skaitu. Tai pašā laikā D. Bernulli un P. Laplass meklēja kļūdu varbūtību sadalījuma likumu. Tikai K. Gausam izdevās (1809) izrisināt kļūdu sadalījuma likumu $y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$, kur h — konstante, kas atkarīga no novērojumu precizitātes.

Varbūtību teorija ievērojami tika attīstīta D. Bernulli (1700—1782) darbos. Viņš pirmais varbūtību teorijā izmantoja matemātisko analīzi. Līdz ar to daudzi uzdevumi tika vienkāršoti. Savu metodi D. Bernulli izklāstīja 1766.—1769. g. publicētajos rakstos.

Angļu matemātiķis T. Baiess (1702—1761) formulēja šādu varbūtību teorijas uzdevumu: «Pieņemsim, ka, atkārtojot kādu mēģinājumu noteiktu skaitu reizes, ir zināms, cik reizes realizējas kāds notikums. Jāatrod varbūtība tam, ka notikuma iestāšanās varbūtība vienā mēģinājumā atrodas starp divām dotām robežvērtībām.» Baiesa darbs tika publicēts tikai pēc viņa nāves — 1763. gadā.

Baiesa formula bija pareiza, taču daudz skaidrāk šo jautājumu 1774. g. izklāstīja Laplass. Vispārīgākā veidā šo uzdevumu atrisināja M. Kondorsē (1743—1794).

13.3. Diferenciālrēķinu un integrālrēķinu attīstība

Ar virsmu laukumu un ķermeņu tilpumu aprēķiniem nodarbojās jau senie grieķi. Ilgu laiku matemātiķi apmierinājās ar šīm metodēm, neko jaunu tām klāt nepievienojot.

XVII gs. laukumu un tilpumu aprēķini gluži jaunā traktējumā tika doti J. Keplera darbos. Vispirms darbā «Jaunā astronomija» (1609) Keplers apgalvoja, ka planētas orbītas lokam atbilstošo rādiusvektoru summa attiecas pret visas elipses rādiusvektoru summu tāpat, kā laiks, kas nepieciešams šī loka veikšanai, attiecas pret visu pilnā apgrieziena laiku. Ar rādiusvektoru summu jāsaprot integrālis. Šo likumu Keplers ieguva empīriski. Tajā pašā darbā viņš izrisināja arī sakarību, ko mēs pierakstām šādi:

$$\int_0^{\varphi} \sin\varphi \, d\varphi = 1 - \cos\varphi.$$

1615. gadā iznāca Keplera darbs «Jaunā vīna mucu stereometrija», kurā tika aplūkoti dažādu rotācijas ķermeņu tilpumu aprēķini. Šie aprēķini tika veikti, sadalot ķermeņus t. s. elementārajās daļās un pēc tam šīs daļas summējot. Kaut arī vārdā netika saukti, taču te jau tika izmantoti bezgalīgi mazie lielumi.

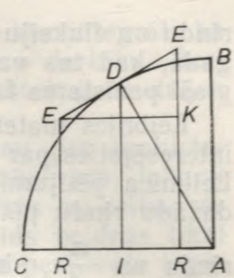
Keplera idejas tālāk tika attīstītas itāļu matemātiķa B. Kavaljēri (1598—1647) darbos. Kavaljēri izklāstīja Keplera lietoto metodi daudz sistemātiskākā veidā. Starp Kavaljēri paša iegūtajiem «summēšanas» rezultātiem var minēt, piemēram, sakarības (mūsdienu apzīmējumos)

$$\int_0^a x^2\,dx = \frac{a^3}{3}\,; \quad \int_0^a \frac{x^n}{a^n}\,dx = \frac{a}{n+1}.$$

Par bezgalīgi mazo lielumu rēķiniem interesējās daudzi matemātiķi, arī Fermā, Paskāls u. c. Paskāls faktiski jau izmantoja noteiktā integrāļa jēdzienu, kaut arī nelietoja nekādu simboliku un savus rezultātus izklāstīja vārdos. 1659. gadā iznāca vairāki Paskāla raksti, kuros bija izklāstīti daudzu trigonometrisko funkciju integrāļu aprēķini, teorēmas par parciālo integrēšanu un mainīgo substitūciju.

1656. gadā iznāca Dž. Vallisa «Bezgalīgo aritmētika», kurā tika aplūkota robežpāreja aritmētiskā veidā. Bezgalības apzīmēšanai Valliss pirmais sāka lietot simbolu ∞. Minētajā Vallisa darbā atrodamas arī «vienādības» $\frac{1}{0} = \infty$ un $\frac{1}{\infty} = 0$.

Ar diferencēšanu saistītajos uzdevumos senie matemātiķi bija veikuši mazāk pētījumu nekā integrēšanā. Svarīgākais darbs šajā jomā bija Apollonija «Koniskie šķēlumi», kura piektajā grāmatā tika aplūkoti daži uzdevumi par maksimumiem un minimumiem. XVII gs. sākumā populārākā ekstremālās vērtības atrašanas metode bija Fermā metode (1629). Metodes būtība bija šāda: izteiksmē, kurai jāatrod ekstremālā vērtība, nezināmā lieluma A vietā ievieto $A+E$ un abas izteiksmes savieno ar vienādības zīmi. Pēc tam abās pusēs tiek nosvītroti vienādie locekļi, izdalīts ar reizinātāju E, un visbeidzot E tiek aizstāts ar nulli. No atlikušā vienādojuma iegūst A vērtību, kas atbilst ekstrēmam.



9. zīm.

Jau Vallisa «Bezgalīgo aritmētikā» tiek lietota izteiksme, kas ekvivalenta mūsdienās lietotajai izteiksmei $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$ vai Leibnica terminoloģijā — «harakteristiskajam trijstūrim». Vairākkārt harakteristisko trijstūri izmantoja Paskāls. Viņš pierādīja, ka $DI \cdot EE = RR \cdot AB$ (9. zīm.). No šīs vienādības divu bezgalīgi mazu lielumu attiecību $\frac{RR}{EE}$ var izteikt ar galīgu lielumu attiecību $\frac{DI}{AB}$. Tieši no šī Paskāla zīmējuma Leibnicam radās ideja diferenciālrēķinu atklāšanai. Leibnics esot teicis, ka tur viņš ieraudzījis gaismu, ko neredzējis autors.

Integrēšanas un diferencēšanas metožu savstarpējā saistība būtībā bija zināma jau agrāk, taču atklātā veidā to izklāstīja Ņūtona skolotājs I. Barrou (1630—1677). Savos pētījumos Barrou par pamatu ņēma kustību un vienā gadījumā aprēķināja punkta noieto ceļu, ja zināms kustības laiks un punkta kustības ātrums, bet otrā gadījumā izteica kustības ātrumu, ja zināms kustības laiks un noietais ceļš. Pamatojoties uz gūtajiem rezultātiem, Ņūtons izveidoja fluksiju teoriju.

Ar funkciju izvirzīšanu bezgalīgās rindās nodarbojās vairāki matemātiķi, taču Ņūtons tik veiksmīgi šo metodi lietoja ģeometrisku jautājumu risināšanā, ka ar viņa vārdu jāsaista bezgalīgu rindu principiāla ieviešana matemātikā. Lai iegūtu rindas, Ņūtons izmantoja dažādas metodes: dalīšanu, saknes vilkšanu, teorēmu par binoma kāpināšanu u. c. Vienādojumu risināšanā izmantoto nenoteikto koeficientu metodi Ņūtons lietoja rindu apvēršanai un tādā veidā ieguva vairākas bezgalīgās rindas vienkāršām transcendentām funkcijām. Tā, piemēram, apvēršot logaritmisko rindu, viņš ieguva e^x izvirzījumu; apvēršot arcsin x izvirzījumu, dabūja sin x izvirzījumu, no kura savukārt ieguva cos x rindu, utt.

Matemātikas vēsturnieku izdarītā Ņūtona darbu analīze rāda, ka jau savas zinātniskās darbības sākumā Ņūtons ir skaidri sapratis sakarību starp «fluksiju» (atvasinājumu) un «fluenti» (integrāli), kaut arī šie jēdzieni tika definēti vēlāk — 1665. vai 1666. gadā. 1671. gadā Ņūtons savus rezultātus izklāstīja plašā darbā «Bezgalīgo rindu un fluksiju metode». Diemžēl šis darbs nāca klajā tikai 1736. gadā, kad tas vairs neizraisīja lielu interesi, jo tai laikā jau bija plaši pazīstama Leibnica metode.

Leibnics matemātiku bija apguvis galvenokārt pašmācības ceļā, interesējoties par tā laika ievērojamāko matemātiķu darbiem. Pirmie Leibnica pētījumi bija kombinatorikā. Pēc tam viņš nodarbojās ar dažādu rindu pētījumiem, no kurām pazīstamākās bija harmoniskā rinda un $\frac{\pi}{4}$, $\sin x$, $\cos x$, e^{-x} un e^{x} izvirzījumi. Studējot Paskāla darbus, Leibnicam radās doma par «harakteristisko trijstūri», kura «katetes» ir līknes divu blakus punktu ordinātu starpība un abscisu starpība, bet «hipotenūza» — bezgalīgi mazs pieskares vai līknes loka nogrieznis. Pieskares konstruēšana reducējās uz ordinātu noteikšanu pēc zināmajām starpībām. Bezgalīgi mazo lielumu summēšanu Leibnics sāka apzīmēt ar simbolu $\int l$, bet pretējo darbību — ar dx. Leibnics interesējās par Ņūtona atklājumiem šajā virzienā, taču Ņūtons savu metodi nedarīja zināmu plašākam lokam. 1684. gadā Leibnics žurnālā «Acta Eruditorum» publicēja rakstu «Jauna maksimumu, minimumu un pieskaru metode, kurai par šķērsli nav ne daļveida, ne iracionāli lielumi, un īpašs aprēķinu veids šai metodei». Šajā darbā tika publicēti vienkāršākie diferencēšanas likumi, un Leibnics savu algoritmu nosauca par *diferenciālrēķiniem*. Pēc šī darba tika izdoti vairāki citi raksti, kuros Leibnics aplūkoja līknes liekumu un harakteristisko trijstūri, ieviesa integrāļa zīmi, formulēja atšķirību starp algebriskām un transcendentām līknēm utt. Leibnics definēja arī pakāpes funkcijas diferenciāļa jēdzienu. Lietojot šo jēdzienu, viņš atrisināja vairākus aktuālus matemātikas un mehānikas uzdevumus. 1695. gadā Leibnics nodarbojās ar augstāku kārtu diferenciālrēķiniem.

1684. gadā publicētais Leibnica raksts par diferenciālrēķiniem bija tik konspektīvs un neskaidrs, turklāt vēl ar daudzām iespiedkļūdām, ka tas nebūt neizraisīja tūlītēju citu matemātiķu interesi par jauno metodi. Pagāja seši gadi, kamēr šo metodi sāka lietot citi matemātiķi. Tā, piemēram, Jākobs Bernulli diferenciālrēķinus apguva patstāvīgi apmēram divu trīs gadu laikā. 1690. gada maijā viņš «Acta Eruditorum» publicēja rakstu par izohronu, kurā izmantoja Leibnica diferenciālrēķinus. Jākobs Bernulli pētīja logaritmiskās spirāles īpašības, atklāja lemniskātu, ar jaunās metodes palīdzību aprēķināja sfēriskā trijstūra laukumu, kā arī veica daudzus citus svarīgus aprēķinus. Viņam ir arī lieli nopelni bezgalīgo rindu teorijas attīstībā. No 1689. līdz 1704. gadam Bāzelē iznāca pieci lieli darbi ar kopēju nosaukumu «Aritmētiskas teorēmas par bezgalīgām rindām un to galīgām summām». To var uzskatīt par pirmo rokasgrāmatu šajā jautājumā. Tā kā rindu konverģencei vēl nebija stingru kritēriju, tad minētajā darbā atrodamas atsevišķas kļūdas.

Johans Bernulli vairāk nodarbojās ar Leibnica integrālrēķiniem. 1691. gadā viņš sastādīja «Matemātiskas lekcijas par integrāļu metodi un citām lietām», taču tās tika publicētas tikai viņa «Sacerējumos» 1742. gadā. Johans Bernulli aplūkoja nenoteikto integrāli kā funkciju, ko iegūst, izpildot diferencēšanai apgriezto darbību. Bernulli lekcijas parādīja, kā jauno metodi var izmantot ģeometrijas un mehānikas uzdevumos.

1696. gadā Johans Bernulli formulēja uzdevumu par brahistohronu, kas vēlāk kļuva par variāciju rēķinu pirmsākumiem. Johana Bernulli dotā atrisinājuma dēļ viņa jau tā saspīlētās attiecības ar brāli Jākobu pārauga atklātā konfliktā. Brāļu strīds beidzās tikai 1705. gadā, kad Jākobs nomira. Vienīgais šo strīdu pozitīvais ieguvums zinātnei ir vairāki uzdevumi, kas būtiski veicināja zinātnes progresu.

Vēl starp Leibnica ideju popularizētājiem jāmin marķīzs de Lopitāls, kurš jauno metodi apguva daļēji patstāvīgi, daļēji ar Johana Bernulli palīdzību. Lopitāls uzrakstīja pirmo un ilgu laiku arī vienīgo diferenciālrēķinu mācību grāmatu «Bezgalīgi mazo lielumu analīze līkņu pētīšanai» (1696). Šī darba popularitāte izskaidrojama ar to, ka tas bija viegli lasāms un tajā pašā laikā šajā darbā tika aplūkoti visi svarīgākie matemātiskās analīzes jēdzieni, kas līdz grāmatas iznākšanai bija atklāti. Jauns materiāls minētajā darbā bija nenoteiktību $\frac{0}{0}$ un $\frac{\infty}{\infty}$ atklāšanai lietojamais «Lopitāla likums», kuru Lopitālam paziņoja Johans Bernulli.

Runājot par Ņūtona un Leibnica sekotājiem, nevar neminēt ilgstošus strīdus zinātnes vēsturē par diferenciālrēķinu un integrālrēķinu atklāšanas prioritāti. Šveiciešu matemātiķis Fatio de Djuiljī, dzīvodams Londonā, uzskatīja sevi par angli. Viņš izjuta naidu pret Leibnica skolu, jo 1697. gadā Leibnics nebija minējis Djuiljī vārdu starp matemātiķiem, kuri būtu spējīgi atrisināt uzdevumu par brahistohronu. Atriebības nolūkā 1699. gadā Djuiljī publicēja darbu, kurā izklāstīja divus brahistohronas uzdevuma atrisinājumus, kā arī, asi uzbrūkot Leibnicam, nosauca sevi par diferenciālrēķinu patstāvīgu izgudrotāju. Atklājēja godu viņš atstāja Ņūtonam, atzīmējot, ka Leibnics savas zināšanas ir aizguvis no Ņūtona. Pēc tam 1700. gadā «Acta Eruditorum» sekoja Leibnica spoži uzrakstītais aizstāvēšanās raksts, kurā, lai apstiprinātu savu prioritāti, Leibnics atsaucās uz pašu Ņūtonu, kas atzina Leibnica atklājumu savu «Elementu» (1687) otrās grāmatas otrajā nodaļā. Tā kā Ņūtons nekādi nereaģēja ne uz šo rakstu, ne arī kur citur izteicās Leibnica labā, tad Leibnics acīmredzot secināja, ka viņam adresētie uzbrukumi ir ar Ņūtona ziņu. Tādēļ Leibnics sāka mazināt Ņūtona nopelnus, nelaižot garām nevienu iespēju, lai pasvītrotu savas tiesības uz «bezgalīgi mazo lielumu analīzes» atklāšanu. Tad skots Dž. Keils, kas, tāpat kā Djuiljī, bija Karaliskās biedrības loceklis, 1710. gadā žurnālā «Philosophical Transactions» tieši apvainoja Leibnicu plaģiātā. Leibnics, kas arī bija tās pašas zinātniskās biedrības loceklis, iesniedza sūdzību. Lai izskatītu šo jautājumu, 1712. gada janvārī Karaliskā biedrība nozīmēja komisiju, kuras uzdevums bija publicēt atbilstošos dokumentus. 1713. gadā iznāca grāmatiņa «Sarakste», kurā tika pausts Ņūtonam labvēlīgs viedoklis (Ņūtons kopš 1703. gada bija Karaliskās biedrības prezidents). Ņūtons strīda laikā nevis atklāti uzstājās pret Leibnicu, bet gan piekrita komisijas locekļu viedoklim. Tāpēc nevar nosodīt Leibnicu, kurš pēc tam diezgan asā formā uzstājās pret «Saraksti» divos anonīmos rakstos. Sekoja vēl asāki apvainojumi no Keila un Ņūtona puses. 1714. gadā Leibnics uzrakstīja darbu «Diferenciālrēķinu vēsture un rašanās», taču to vairs publicēt nepaguva. (Leibnics nomira 1716. gada 14. novembrī.) Šis darbs tika publicēts tikai 1846. gadā. Ar Leibnica nāvi strīds nebūt nebeidzās. Leibnica draugiem un ienaidniekiem tas pārauga jau nacionālā strīdā starp angļiem un vāciešiem. Tikai XIX gs. strīds tika izbeigts, noskaidrojot, ka Ņūtons fluksiju metodi atklāja agrāk nekā Leibnics diferenciālrēķinus, taču Leibnics pirmais publicēja svarīgākos rezultātus un izstrādāja izdevīgus apzīmējumus.

Bezgalīgi mazo lielumu analīze XVIII gs. visplašāk tika izmantota rindu teorijā. Interesi par bezgalīgām rindām izraisīja nepieciešamība atrast racionālas izteiksmes atsevišķām funkcijām, lai tās varētu integrēt. Dabiski būtu bijis pētīt arī šo rindu konverģenci, taču šādi pētījumi netika veikti, un paradoksi, kas radās, lietojot rindas visām argumenta vērtībām, tika izskaidroti ar metafiziskiem apsvērumiem.

Svarīgāko metodi funkciju izvirzīšanai rindās izgudroja B. Teilors (1685—1731). 1712. gadā viņš to paziņoja kādā vēstulē, bet 1715. gadā publicēja grāmatu «Tiešā un apgrieztā pieauguma metode». 1742. gadā K. Maklorens (1698—1746) no jauna ieguva gan Teilora, gan Bernulli rindu, tādējādi apvienodams abas metodes. Maklorens arī formulēja teorēmu par to, ka katru funkciju var izvirzīt pakāpju rindā. Arī L. Eilers apgalvoja to pašu, taču abos gadījumos tas bija tikai induktīvs secinājums.

Pirmoreiz Teilora rindas atlikuma locekļa definīcija parādījās Lagranža «Analītisko funkciju teorijā». Lagranžs atzīmēja, ka, lai funkcijas izvirzījuma vērtība atbilstu funkcijas vērtībai, ir precīzi jāzina, ka rindas atlikuma loceklis tiecas uz nulli. Pilnīgāk šo jautājumu pētīja O. Koši XIX gs.

L. Eilers ieteica bezgalīgo rindu vispārīgos locekļus izteikt ar noteiktajiem integrāļiem. Tādējādi Eilers aizsāka noteikto integrāļu teoriju un atklāja vēlāk viņa vārdā nosauktos integrāļus — beta funkciju

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx = \frac{n!}{(m+1)(m+2)\dots(m+n-1)}$$

un gamma funkciju

$$\int_0^1 (-\ln x)^n \, dx = \int_0^\infty e^{-x} x^n \, dx.$$

Viens no pirmajiem Eilera rezultātiem bija pazīstamā formula

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$. Pēc tam tika iegūti vēl daudzi rezultāti gan rindu teorijā, gan citās matemātikas nozarēs.

Lai radītu analīzi mūsdienās lietotajā nozīmē, pirmām kārtām bija nepieciešama funkcijas jēdziena definīcija. Jēdziens par divu mainīgo lielumu atkarību matemātikā ieviesās pakāpeniski, pateicoties analītiskās ģeometrijas attīstībai. Šaurā nozīmē vārdu «funkcija» sāka lietot 1692. gadā Leibnics un 1694. gadā Jākobs Bernulli. Johans Bernulli funkciju definēja kā izteiksmi, kura kaut kādā veidā ir sastādīta no mainīga lieluma un konstantiem lielumiem. Arī Eilers definēja funkciju kā analītisku izteiksmi, kas sastāv no mainīgiem un konstantiem lielumiem. Atkarībā no analītiskās izteiksmes veida Eilers izšķīra algebriskas un transcendentas funkcijas. Viņš iedalīja funkcijas vienvērtīgās un daudzvērtīgās, pāra un nepāra, atklātās un apslēptās, bet algebriskās funkcijas — arī racionālās un iracionālās. Simbolu $f(x)$ pirmoreiz lietoja Eilers 1734. gadā.

Eilera ieviestā simbolika pirmoreiz sekmīgi tika izmantota Lagranža «Analītisko funkciju teorijā» (1797), kurā bija aplūkotas analītisko funkciju vispārīgās īpašības un likti pamati funkciju teorijai. Eilers un Lagranžs bez viena argumenta funkcijām definēja arī divu un vairāku argumentu funkcijas. Eilers saprata, ka funkcijas izvirzījums rindā dod skaidru priekšstatu par funkcijas īpašībām. Tāpēc viņš izvirzīja mērķi iegūt visu līdz tam laikam zināmo funkciju izvirzījumus rindās. 1736. gadā Eilers pirmoreiz lietoja simbolu e, 1743. gadā viņš norādīja, ka

$$e^z=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n.$$

Eilers noskaidroja sakarību starp trigonometriskajām un pakāpes funkcijām. Tai pašā 1743. gada rakstā pirmoreiz tika publicētas formulas

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\quad \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

Eilers pirmais apzīmēja $\sqrt{-1}$ ar i. Eilers pētīja arī skaitli π. Pirmoreiz burtu π riņķa līnijas garuma un diametra attiecības apzīmēšanai lietoja Džonss 1706. gadā, bet matemātikā šis apzīmējums ieviesās, pateicoties Eileram.

XVIII gs. bezgalīgo rindu teorija strauji attīstījās, pateicoties Eilera darbiem. Taču, lai cik arī auglīga būtu Eilera darbība, nevar neatzīmēt to, ka tā bija vērsta tikai formālā virzienā. Pēc Eilera domām, kaut kādā veidā atrasts funkcijas izvirzījums rindā *a priori* bija pareizs visām mainīgā vērtībām, pat ja tika iegūta diverģenta rinda. Tāpēc Eilers ar diverģentām rindām rīkojās tāpat kā ar konverģentām rindām. Pēc tam kad XVIII gs. zinātnieki pārliecinājās, ka ar jaunajām (no pierādījuma viedokļa apšaubāmām) metodēm varēja gūt lieliskus panākumus, pret analīzi vairs netika izvirzītas tik stingras prasības kā pret ģeometriju. Taču tas nenozīmē, ka Eilers pavisam būtu atteicies no rindu konverģences pētīšanas. Citādi viņš nebūtu izteicis apgalvojumu, ka rinda diverģē, ja $\lim\limits_{n\to\infty} |S_{kn}-S_n|>0$, kur S_n ir pirmo n locekļu summa.

Eilera laikabiedriem par rindu konverģenci bija tādi paši uzskati kā viņam. Par konverģenci nopietnāk interesējās Maklorens, Variņjons, Dalambērs.

13.4. Diferenciālvienādojumi

Problēmas, kas nodarbināja matemātiķus XVII gs. beigās un XVIII gs. sākumā, bija saistītas ar dažādu pirmās kārtas diferenciālvienādojumu risināšanu. Vispirms to integrēšanu mēģināja veikt ar lineārām funkcijām. Tieši tā Ņūtons 1687. gadā bija atrisinājis lineāru pirmās kārtas diferenciālvienādojumu. Taču drīz vien matemātiķi secināja, ka ar šādu paņēmienu diferenciālvienādojumu integrēšanas problēma vispārīgā veidā nav atrisināma. Sāka lietot nenoteiktos integrāļus, t. i., meklēt diferenciālvienādojumu atrisinājumus kvadratūrās. Pirmais diferenciālvienādojumu integerēšanas paņēmiens bija mainīgo atdalīšana. Lietojot substitūciju $y=xt$, Johans Bernulli atrisināja pirmās kārtas homogēno vienādojumu. Šo substitūciju zināja arī Leibnics, taču viņus abus apsteidza itāļu matemātiķis Manfredi, kurš pirmais publicēja šo paņēmienu (1714). Johans Bernulli atrisināja arī vienādojumu

$$a\,dy=yp\,dx+by^n q\,dx,$$

ko tagad sauc viņa vārdā (a un b ir konstantes, bet p un q — argumenta x funkcijas). Bernulli izteica y kā divu jaunu mainīgo reizinājumu un parādīja, ka pēc substitūcijas $y^{1-n}=v$ šis vienādojums pārvēršas par pirmās kārtas lineāru diferenciālvienādojumu. 1700. gadā Bernulli atrisināja arī vienu n-tās kārtas lineāru diferenciālvienādojumu. Vairākas jaunas diferenciālvienādojumu atrisināšanas metodes izstrādāja itālis grāfs Dž. Rikati (1676—1754). 1724. gadā viņš pirmo reizi metodiski izpētīja svarīgu vienādojumu

$$x^n\frac{du}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{u^2}{q},$$

ko tagad sauc par *Rikati vienādojumu.* Ar Rikati vienādojumu nodarbojās arī brāļi Bernulli. Rikati vienādojuma vispārinājumu aplūkoja L. Eilers (1738).

Ar Rikati vienādojumu sākās diferenciālvienādojumu teorijas metodiskā izstrāde. 1732. gadā iznāca Eilera raksts par trim jaunām otrās kārtas diferenciālvienādojumu klasēm. Tajā Eilers izklāstīja jaunu metodi, kā pazemināt dažu homogēnu vienādojumu kārtu. Vēlāk ar šo paņēmienu Eilers ieguva vispārīga lineāra n-tās kārtas diferenciālvienādojuma atrisināšanas algoritmu, ja vienādojuma koeficienti ir konstanti (1743).

Lineāra diferenciālvienādojuma izpēte turpinājās Dalambēra (1766), Lagranža (1777) un Laplasa (1769) darbos. 1775. gadā

Lagranžs izstrādāja konstanšu variācijas metodi un izmantoja to nehomogēna lineāra diferenciālvienādojuma atrisināšanai. Spriežot pēc Eilera vēstules, viņam šis paņēmiens bija zināms jau 1739. gadā.

Diferenciālvienādojuma singulārā atrisinājuma jēdziens pirmoreiz minēts Teilora darbā «Pieaugumu metode» (1715). Šo terminu viņš lietoja tāpēc, ka iegūtais atrisinājums viņam likās neparasts, taču tā īsto nozīmi Teilors neizprata.

Otrajā «Mehānikas» sējumā (1736) Eilers aplūkoja arī vairākus diferenciālvienādojumus ar singulārajiem atrisinājumiem. 1756. gadā Eilers speciāli nodarbojās ar šādu atrisinājumu pētīšanu. Kaut arī Eilers ieguva ģeometrisko interpretāciju vairākiem diferenciālvienādojumiem ar singulāriem atrisinājumiem, viņš tomēr neievēroja, ka singulārie atrisinājumi ir vispārīgā atrisinājuma līkņu saimes apliecējas, bet vienkārši uzskatīja, ka vispārīgais atrisinājums ir atrasts nepilnīgi. Eilera darbi modināja vispārēju interesi par šo jautājumu. Laplass atrada vēl divus kritērijus, kā noteikt dota diferenciālvienādojuma atrisinājuma raksturu, un ieteica īpašintegrāļu atrašanas metodes.

1776. gadā Lagranžs publicēja plašu rakstu, kurā pirmo reizi atbilstoši tā laika zināšanu līmenim izsmeļoši aplūkoja jautājumu par diferenciālvienādojuma singulārajiem atrisinājumiem. Viņš saistīja diferenciālvienādojumu teoriju ar jau zināmo un sīki izstrādāto apliecēju teoriju. Sistemātiski un no vienota viedokļa jautājumu par diferenciālvienādojumu singulārajiem atrisinājumiem Lagranžs izklāstīja «Lekcijās par funkciju aprēķināšanu» (1801).

Eilers, Dalambērs, Kondorsē u. c., tuvināti risinot diferenciālvienādojumus, izmantoja gan pakāpju rindas, gan rindas ar nenoteiktiem koeficientiem. Eilers izvirzīja rindās arī cilindriskās funkcijas, kuras vēlāk kļuva pazīstamas kā Beseļa funkcijas. (Tās ar panākumiem izmantoja astronoms F. Besselis (1784—1846).) Lai tuvināti atrastu parastā diferenciālvienādojuma integrāli, Lagranžs izgudroja vēl citu bezgalīgu procesu — izvirzīšanu ķēžu daļā. Pēc Lagranža domām, šīs metodes priekšrocība bija tāda, ka uzreiz varēja noskaidrot, vai atrisinājums ir racionāla vai iracionāla funkcija. Pirmajā gadījumā izvirzījums ir galīgs, bet otrajā — bezgalīgs.

XVIII gs. matemātiķu uzmanību saistīja arī parciālie diferenciālvienādojumi. Risinot ģeometrisku uzdevumu par līknēm ar mainīgu parametru, 1734. g. Eilers ieguva vienādojumus

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f(x,y);\quad \frac{\partial z}{\partial x}=f(x,y,z).$$

Taču galvenais parciālo diferenciālvienādojumu rašanās iemesls bija daudzie praktiskie fizikālie jautājumi, kuri nodarbināja visu izcilo matemātiķu prātus XVIII gs. vidū. Tā, piemēram, Dalambērs stīgas svārstības uzdevumu reducēja uz diferenciālvienādojumu

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Par šā vienādojuma atrisinājumu izraisījās strīds starp Dalambēru un Eileru. Dalambērs uzskatīja, ka par diferenciālvienādojuma atrisinājumu der vienīgi tās funkcijas, kuras ir izvirzāmas Teilora rindā. Eilers pastāvēja uz to, ka diferenciālrēķinus un integrālrēķinus var lietot pilnīgi patvaļīgām funkcijām.

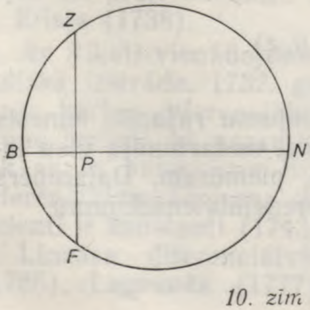
Parciālos diferenciālvienādojumus pētīja Dalambērs, Eilers, Dāniels Bernulli, Lagranžs, Monžs u. c. Strādājot pie šī jautājuma, matemātiķi pirmoreiz noskaidroja, cik daudz patvaļīgu funkciju satur parciālā diferenciālvienādojuma atrisinājums. No strīda par šo patvaļīgo funkciju dabu galu galā izveidojās mācība par patvaļīgas funkcijas izvirzīšanu trigonometriskā rindā, kuru vēlāk nosauca par Furjē rindu.

XVIII gs. matemātiķi aplūkoja arī augstāku kārtu parciālos diferenciālvienādojumus, kuri bija saistīti ar dinamikas uzdevumiem. Jāatzīmē, ka galvenokārt tika risināti un pētīti tie vienādojumi, kuros bez laika ietilpa tikai viena telpiskā koordināta. Jaunu metodi otrās kārtas parciālo diferenciālvienādojumu atrisināšanai izstrādāja Laplass (1777). Viņš arī sāka diferenciālvienādojuma atrisinājumu izteikt ar noteikto integrāli. Taču joprojām diferenciālvienādojumu atrisinājumus izteica arī ar bezgalīgām rindām. Tai laikā bija visai raksturīgi, ka par šo rindu konverģenci vai diverģenci interesējās tikai tad, ja vajadzēja iegūt derīgus skaitliskus rezultātus.

13.5. Variāciju rēķini

Jau drīz pēc diferenciālrēķinu izgudrošanas tos sāka izmantot, lai atrastu funkciju ekstremālās vērtības. Taču matemātiķi risināja arī daudz grūtāku uzdevumu — atrast tādas funkcijas vai atbilstoši līknes un virsmas, kurām salīdzinājumā ar citām līknēm vai virsmām piemīt kādas maksimālas vai minimālas īpašības. Ņūtons 1687. gadā formulēja un atrisināja uzdevumu par līkni, kura iet caur diviem dotiem punktiem un no kuras iegūtajam rotācijas ķermenim, kustoties šķidrumā savas ass virzienā, ir vismazākā pretestība.

Šādu problēmu pētīšanai ievirzi deva brahistohronas problēma, kuru izvirzīja Johans Bernulli 1696. gadā. Uzdevums tika formulēts šādi: «Starp visām līknēm, kuras iet caur diviem dotiem punktiem, atrast to līkni, pa kuru krītot materiāls punkts visātrāk noiet loku starp abiem dotajiem punktiem.» Šī uzdevuma atrisinājumu atrada vairāki matemātiķi. Jākobs Bernulli formulēja izoperimetrisko problēmu: «Starp visām vienāda garuma līknēm *BFN* (10. zīm.) atrast to, kuras ordinātas *PF* vai loku *BF* patvaļīgas pakāpes vai saknes veidotu jaunu līkni *BZN* tā, lai ietvertais laukums *BPNZB* būtu vislielākais vai vismazākais.» Izoperimetrisko problēmu izdevās atrisināt tikai pašam Jākobam Bernulli (1700).



10. zīm.

Viņš pirmais ievēroja, ka šāda tipa uzdevumos jāaplūko trīs cits citam sekojoši līknes elementi un jāvariē divas sekojošas ordinātas. Vēlāk šo uzdevumu pētīja Johans Bernulli, B. Teilors, L. Eilers.

XVII gs. beigās radās vēl viena ievērojama variāciju rēķinu problēma. To 1697. gadā formulēja Johans Bernulli: uz izliektas virsmas atrast visīsāko līniju starp diviem dotiem punktiem. Kaut arī viņš pats apgalvoja, ka zina šī uzdevuma vispārīgo atrisinājumu, tomēr ģeodēzisko līniju harakteristisko diferenciālvienādojumu Johans Bernulli publicēja tikai 1742. g. Pirmais šo diferenciālvienādojumu publicēja Eilers (1732).

XVIII gs. trīsdesmitajos gados, nepārtraukti nodarbojoties ar līdzīgiem uzdevumiem, Eilers radīja un pamatoja variāciju rēķinus. Sistemātisku savu rezultātu izklāstu Eilers deva apjomīgajā (322 lpp.) grāmatā «Metode, kā atrast līknes, kurām piemīt maksimuma vai minimuma īpašības, jeb izoperimetriskās problēmas atrisinājums visplašākajā nozīmē» (1744).

Tālāku attīstību variāciju rēķini guva Lagranža darbos. Lielākais Lagranža nopelns bija vienota variāciju rēķinu algoritma izstrāde. Lai atšķirtu variēšanu no diferencēšanas, Lagranžs ieviesa jaunu simbolu — δ, ar kuru veica aprēķinus tāpat kā ar diferenciāļa zīmi *d*. Lagranžs aplūkoja integrāļus ar mainīgām integrēšanas robežām un vispārināja savus rezultātus divkāršajiem integrāļiem. Pie jautājuma, kā atšķirt maksimumu no minimuma ar otrās variācijas palīdzību, strādāja Laplass un Ležandrs, taču šo jautājumu tikai XIX gs. izskaidroja K. Veierštrāss. XVIII gs. beigās bija pabeigta tikai pirmās variācijas formālā izpēte.

13.6. Analītiskā ģeometrija

Analītiskās ģeometrijas pamatlicēji ir franču matemātiķi P. Fermā un R. Dekarts. Fermā sacerējums Parīzes matemātiķiem bija zināms jau pirms 1637. gada, kad iznāca Dekarta «Ģeometrija», taču publicēts tas tika tikai pēc autora nāves 1679. g.

Fermā rakstīja: ja vienādojumā ir divi nezināmi lielumi (ar lielumu Fermā domāja taisnes nogriezni), tad šis vienādojums izsaka to punktu ģeometrisko vietu, ko apraksta viena lieluma galapunkts. Fermā pierādīja, ka katrs lineārs vienādojums ar 2 nezināmiem izsaka taisni. Tālāk Fermā algebriski apraksta Apollonija traktātā «Koniskie šķēlumi» aplūkoto līkņu īpašības.

Nav zināms, vai Dekarts ar Fermā darbu bija iepazinies pirms savas «Ģeometrijas» publicēšanas. Taču Dekarta darbs ir uzrakstīts tik atšķirīgi, ka nevar būt runa par Fermā ideju un metožu izmantošanu. Dekarta darbā gan nebija tāda vienādojumu un to ģeometrisko interpretāciju sistematizējuma kā Fermā darbā, toties Dekarta darbs ir ievērojams ar to, ka tajā gan pēc formas, gan pēc būtības tika pilnveidota algebra, parādīta algebras saistība ar ģeometriju, algebrai ierādot pirmo vietu. Iespējams, ka vienādojumu sistemātisku izklāstu Dekarts neaplūkoja, gribēdams aprakstīt vienīgi savas jaunās metodes vispārīgās kontūras.

Dekarts «Ģeometriju» sāka ar apgalvojumu, ka jebkurš ģeometrijas uzdevums galu galā ir reducējams vai nu uz garuma noteikšanu, vai uz atbilstošu nogriežņu konstruēšanu. Tas nav nekas cits kā nezināmo nogriežņu (z, y, x) algebriska aprēķināšana pēc dotiem nogriežņiem (a, b, c, ...) un nogriežņa z konstruēšana pēc vienādojuma ar vienu mainīgo z, kas iegūts, izslēdzot pārējos nezināmos. Dekarta uzmanību saistīja uzdevumi, kuros vienādojumu bija mazāk nekā nezināmo.

Tālāk Dekarts aplūkoja dažādu līkņu tipus un klasifikāciju. Viņš rakstīja, ka katras līknes visi punkti atrodas kaut kādā attiecībā pret kādas taisnes visiem punktiem un šo attiecību var izteikt ar vienādojumu, kas ir viens un tas pats visiem līknes punktiem. Kā piemēru viņš aplūkoja hiperbolas vienādojumu. Bez tam Dekarts aplūkoja arī vairākas augstākas kārtas līknes, kā, piemēram, Nikomēda konhoīdu un ovālus, ko tagad sauc par Dekarta ovāliem.

Gan Fermā, gan Dekarts, neraugoties uz atšķirībām viņu koncepcijās, lietoja abscisu asi ar sākumpunktu un paralēlas, vispārīgajā gadījumā slīpi pret abscisu asi novietotas ordinātas. Tas, ka vēl netika lietota arī otra koordinātu ass, ilgu laiku apgrūtināja analītiskās ģeometrijas attīstību. Interesanti, ka abi matemātiķi uzskatīja, ka šajā nozarē viņiem jau visu ir izdevies izdarīt.

Dekarta laikabiedriem «Ģeometrija» bija diezgan grūti saprotama, tāpēc jau nākamajā gadā pēc tās iznākšanas pats autors parūpējās par komentāriem šai grāmatai, kurus viņš izplatīja rokraksta veidā. Speciāli komentārus Dekarta grāmatai uzrakstīja Debons.

Vislielākie nopelni Dekarta analītiskās metodes popularizēšanā bija F. Shoutenam. Viņš izdeva «Ģeometrijas» latīņu tulkojumu, kurš XVII gs. iznāca četras reizes, kā arī gan mutiski, gan rakstiski propagandēja Dekarta metodi. Shoutens uzrakstīja «Komentārus», kas bija daudz plašāki nekā Debona «Piezīmes». Shoutens aplūkoja algebriski vairākus ģeometriskus uzdevumus, pierādīja Dekarta konhoīdas normāles konstrukciju, aprēķināja un konstruēja konhoīdas pārliekuma punktus. 1659. g. izdevumā jau parādījās taisnes vienādojums $y=a-x$. Shoutens parādīja, kā atrast konusu, uz kura atrodas dotā parabola, elipse vai hiperbola. Dekarts tikai pieminēja koordinātu transformāciju, Shoutens jau deva formulas koordinātu ass pagriešanai un nobīdei no sākumpunkta.

Analītiskās ģeometrijas idejas un metodes tika lietotas daudzu XVII gs. beigu matemātiķu darbos. Taču būtībā tie bija tikai Dekarta un Fermā ideju papildinājumi, precizējumi, izvērsumi. Vēl aizvien aplūkoja tikai vienu koordinātu asi, kaut gan Lopitāla darbos dažreiz parādījās arī otra ass.

Sava ietekme uz analītiskās ģeometrijas attīstību bija nelielam Ņūtona darbam «Trešās kārtas līkņu uzskaitījums», kurš iznāca 1704. g. kā pielikums «Optikai». Kaut arī tekstā joprojām tika runāts par «abscisu sākumpunktu» un tikai dažviet tika pieminēta «pirmā» vai «galvenā» ordināta, tomēr Ņūtona zīmējumos tika parādītas abas koordinātu asis, visi kvadranti bija līdzvērtīgi un jautājumi par koordinātu zīmēm tika izpētīti līdz galam. Katra līkne bija uzzīmēta tāpat, kā to zīmē arī mūsdienās. Laikabiedriem Ņūtona darbs atklāja negaidīti daudz jaunu līkņu formu, kuru vienādojumi tika doti tekstā.

1750. g. iznāca G. Krāmera «Ievads algebrisko līkņu analīzē», kurā tika ieviestas divas līdztiesīgas koordinātas un līdz ar to arī ordinātu ass. Analītisko ģeometriju būtiski papildināja L. Eilers. Darba «Ievads analīzē» otrajā sējumā (1748) Eilers definēja koordinātu sistēmas transformācijas formulas. Šajā darbā Eilers aplūkoja taisnes vispārīgo vienādojumu $\alpha x+\beta y+a=0$. Tālāk Eilers aplūkoja visiem koniskiem šķēlumiem kopējās īpašības, t. i., tās īpašības, kuras var secināt no vispārīgā otrās kārtas vienādojuma. Eilers pilnīgi izpētīja jautājumu par līknes saistītiem diametriem un galvenajām asīm, kā arī atrada reālos fokusus. Pēc tam tika dota otrās kārtas līkņu klasifikācija atkarībā no koeficienta γ vērtības vienādojumā $yy=\alpha+\beta x+\gamma xx$, kā arī pētītas šo līkņu asimptotas.

Analītiskās ģeometrijas popularizācija un algebras reforma sākotnēji tika veikta enciklopēdiskos kursos, kuros aplūkoja visas matemātikas nozares. Tikai XVIII gs. analītiskās ģeometrijas jēdzieni iekļuva mācību grāmatās. Veiksmīgākā mācību grāmata bija S. Lakruā «Taisnleņķa un sfēriskās trigonometrijas elementārs kurss un algebras pielietojumi ģeometrijā» (1798). Šis izklāsts bija tik mūsdienīgs un labs, ka jau pirmais izdevums varētu noderēt arī tagad par pamatu analītiskās ģeometrijas mācīšanā. Grāmatas 25. izdevums iznāca 1897. g.

Pirmais punktu novietojumu telpā ar trim perpendikulārām koordinātu asīm raksturoja Dezargs (1636), taču tas netika darīts, lai analītiski aprakstītu šo novietojumu. Dekarta koordinātas telpā pirmoreiz lietoja Lagīrs (1679), apzīmējot tās ar burtiem x, y, v. Telpiskās koordinātas lietoja arī Johans Bernulli (1715). 1731. g. Parīzē iznāca Klero darbs «Pētījumi par līknēm ar divkāršu liekumu». Klero uzskatīja, ka telpiska līkne tiek uzdota kā divu cilindrisku šķēlumu līnija. Viņam bija pilnīgi skaidrs, ka vienādojums, kas satur mainīgos x, y, z, izsaka virsmu. Kā piemērus viņš aplūkoja vienādojumus

$$aa=xx+yy+zz, \quad \frac{n}{m}x=yy+zz, \quad yy+zz=ax.$$

Klero aplūkoja arī tādas rotācijas virsmas kā paraboloīdu, elipsoīdu, viendobuma hiperboloīdu. Tālāk tika risināti uzdevumi par telpiskām līknēm, to atrašanos uz dotās virsmas, virsmu pētīšanu ar šķēlumu palīdzību.

Telpiskās analītiskās ģeometrijas pamatuzdevumi pirmoreiz tika atrisināti G. Monža darbā, kas iznāca 1785. g. (iesniegts izdošanai gan tas bija jau 1771). Lagranžs pirmoreiz analītiskās ģeometrijas metodes lietoja uzdevumiem, kurus agrāk attiecināja uz elementāro ģeometriju. Tie bija dažādi uzdevumi par trijstūra piramīdām. Telpisko koordinātu transformācijas formulas pirmais lietoja Menjē darbā par virsmu liekumu (1785). Runājot par virsmu pētījumiem, atkal jāmin Eilera vārds. Savam darbam «Ievads analīzē» viņš pievienoja plašu «Pielikumu par virsmām». Vispirms viņš paziņoja, ka par virsmu var spriest pēc tās punktu attāluma līdz patvaļīgi izraudzītai plaknei. Viņš izvēlējās trīs perpendikulāras plaknes un definēja taisnleņķa koordinātu sistēmu. Pēc tam sīki tika iztirzāts jautājums par koordinātu simetriju visos astoņos oktantos. Zīmējumos gan vienmēr tika attēlots tikai pirmais oktants. Pēc tam Eilers aplūkoja dažādas virsmu klases. Īpašā nodaļā tika aplūkoti vienādojumi, ar kuriem no vienas koordinātu sistēmas var pāriet uz citu. Tā kā Eilers lietoja sešus transformāciju noteicošus elementus, tad viņa formulas izrādījās nesimetriskas.

XVIII gs. matemātiķi pārāk neaizrāvās ar virsmu pētījumiem. Galvenais matemātiķu intereses objekts bija integrēšanas problēmas, un tāpēc par virsmām interesējās tikai tik daudz, cik tas bija nepieciešami integrēšanai.

13.7. Diferenciālģeometrija

Plaknes līkņu diferenciālģeometrijas rašanās bija tik cieši saistīta ar bezgalīgi mazo lielumu rēķinu attīstību, ka praktiski nav iespējams šos divus procesus atdalīt. Vēlāk diferenciālģeometriju sāka izmantot speciālu, it sevišķi transcendentu līkņu pētīšanā. Diferencēšanas operāciju izmantošana telpisku figūru pētīšanā nevarēja sākties, pirms nebija ieviestas telpiskās koordinātas. Pirmie pētījumi bija par īsāko līniju atrašanu uz virsmām. Šī problēma pirmoreiz formulēta Johana Bernulli darbā par ģeodēziskajām līnijām (1697). Savu metodi viņš izklāstīja gan tikai 1728. g., bet publicēja 1742. g.

Eilers «Mehānikas» (1736) otrajā sējumā pierādīja, ka punkts, kas pārvietojas pa virsmu bez paātrinājuma, vienmēr apraksta ģeodēzisko līniju. Eilera dotais pierādījums bija mehānisks, analītiski šo teorēmu pierādīja Lagranžs (1806). Jautājumus par ģeodēziskajām līnijām risināja arī Jākobs Bernulli un Klero.

Turpmākā diferenciālģeometrijas attīstība ir saistīta ar diviem Eilera rakstiem, kuri iznāca 1786. g. Eilers par neatkarīgo mainīgo izvēlējās loka garumu s un izteica

$$dx = p\,ds, \quad dy = q\,ds, \quad dz = r\,ds.$$

Viens no diferenciālģeometrijas rašanās praktiskajiem motīviem bija matemātiskās kartogrāfijas vajadzības. Tāpēc arī matemātiķu uzmanību saistīja jautājumi par dažādu virsmu izklājumiem. Eilers izvēlējās plaknē bezgalīgi mazu taisnleņķa trijstūri ar taisnā leņķa virsotni punktā (t, u) un definēja uz virsmas tādu trijstūri ar taisnā leņķa virsotni punktā (x, y, z), kas būtu kongruents ar pirmo trijstūri. Apzīmējot $\frac{\partial x}{\partial t} = l$, $\frac{\partial x}{\partial u} = \lambda$ utt., viņš ieguva virsmas izklājuma nosacījumus formā

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1, \quad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1, \quad l\lambda + m\mu + n\nu = 0.$$

Pēc tam Eilers analītiski un ģeometriski parādīja, ka jebkuras telpiskas līknes pieskares veido izklājumu virsmu un ka tas pats attiecas arī uz virsmām, kuras veido divu «ķermeņu» kopīgas pieskares.

Ievērojamu ieguldījumu diferenciālģeometrijas attīstībā deva G. M o n ž s. Neatkarīgi no Eilera arī Monžs (1771) definēja izklājamas virsmas jēdzienu. Monžs izrisināja virsmas vienādojumu polārās koordinātās, līknes jebkuras evolūtas vienādojumu, atrada liekuma rādiusa izteiksmi un analītiskos nosacījumus, kā noteikt telpisko līkņu abu veidu pārliekuma punktus.

XVIII gs. otrajā pusē stingru pamatu ieguva arī vispārīgā virsmu diferenciālģeometrija. Virsmas pieskarplaknes vienādojumu izrisināja Tenso un Monžs. Monža vienādojumam bija pavisam mūsdienīga forma:

$$z=p(x-x')+q(y-y')+k.$$

XVIII gs. beigās iznāca galvenais un rezumējošais Monža sacerējums «Ģeometrijā lietotās analīzes lapas» (1794/95), kurš ietekmēja matemātiķus līdz pat XIX gs. otrajai pusei. Sākotnēji šis darbs bija iecerēts kā mācību līdzeklis Politehniskās skolas audzēkņiem. Vēlāk atsevišķās lapas tika apvienotas grāmatā «Analīzes lietojumi ģeometrijā» (1807).

Vispirms Monžs definēja virsmas saimes jēdzienu, ko noteica parciālie diferenciālvienādojumi. Viņš aplūkoja virsmas, kuras nosacīja pirmās kārtas vienādojumi. Pirmo reizi ģeometriskā formā tika izteikts raksturlīknes jēdziens. No diferenciālvienādojuma $F(x, y, z, p, q)=0$ Monžs izrisināja raksturlīkņu diferenciālvienādojumu

$$P\,dy-Q\,dx=0,$$

kur $P=\frac{\partial F}{\partial p}$, $Q=\frac{\partial F}{\partial q}$.

Starp otrās kārtas diferenciālvienādojumu noteiktajām virsmām kā pirmās tika minētas lineārās virsmas, kuras aprakstīja taisne, pārvietojoties paralēli fiksētai plaknei un slīdot pa divām telpiskām līknēm. Monžs vispārīgā veidā izrisināja diferenciālvienādojuma $\Phi(x, y, z, p, q, r, s, t)=0$ raksturlīkņu diferenciālvienādojumu $R\,dx^2-S\,dx\,dy+T\,dy^2=0$, kur $\frac{\partial\Phi}{\partial r}=R$, $\frac{\partial\Phi}{\partial s}=S$ un $\frac{\partial\Phi}{\partial t}=T$. Monžs aplūkoja izklājamas virsmas, kā arī virsmas, kuras rodas, dotajai virsmai (vai telpiskai līknei) pārvietojoties pa patvaļīgu telpisku līkni. Monžs atklāja divu virsmas normāļu šķelšanās nosacījumu un katram virsmas punktam atrada divus savstarpēji perpendikulārus virzienus, kuru punktiem šis nosacījums ir spēkā. Pētot šos virzienus, viņš ieguva divas ortogonālas liekuma līniju saimes un izrisināja to diferenciālvienādojumus. Monžs pētīja arī virsmas, kuras nosaka trešās kārtas diferenciālvienādojumi. Darba nobeigumā tika aplūkota Monža atklātā telpisko līkņu teorija.

Jau seno grieķu filozofi, galvenokārt Aristotelis, mēģināja ar fizikāliem jēdzieniem izskaidrot dažādas dabas parādības. Antīkajā laikmetā valdošā teorija apgalvoja, ka visa matērija sastāv no četriem elementiem (zemes, gaisa, ūdens un uguns), kuriem piemīt viena vai vairākas īpašības (smagums, vieglums, sausums, slapjums). Visas dabā notiekošās parādības izskaidroja ar šo īpašību dažādām kombinācijām. Skaidroja, piemēram, ka uguns tiecas uz augšu, jo tai piemīt īpašība «vieglums», bet zemes pika krīt uz leju, jo tai piemīt īpašība «smagums». Viduslaiku zinātnieki seno grieķu aplūkotajām «īpašībām» pievienoja vairākas jaunas «īpašības», piemēram, «simpātiju» (ķermeņu savstarpējā pievilkšanās) un «antipātiju» (ķermeņu savstarpējā atgrūšanās).

Dekarts noliedza visas šīs īpašības un apgalvoja, ka visas fizikālās parādības var izskaidrot ar matēriju un kustību. Par būtisku matērijas pazīmi Dekarts uzskatīja izplatību, t. i., iespēju izmērīt garumu, platumu un augstumu. Bet to, ko var izmērīt, var arī matemātiski aprakstīt.

Dekarts kļuva par mehānistiskās teorijas pamatlicēju. Viņa sekotāji bija franču filozofs un garīdznieks P. Gasendī (1592—1655), angļu filozofs T. Hobss (1588—1679) un holandiešu matemātiķis un fiziķis K. Heigenss (1629—1695). Dekarts un viņa sekotāji visas fizikālās parādības centās izskaidrot ar sīku daļiņu izturēšanos. Šāda pieeja deva iespēju izskaidrot parādības, bet ar to nevarēja paredzēt: novērojumu vai eksperimentu rezultāti vienmēr izrādījās negaidīti.

Citas zinātnes filozofijas aizsācējs bija G. Galilejs, kurš uzskatīja, ka zinātnei kādu parādību jācenšas aprakstīt, bet ne tikai fizikāli izskaidrot. Tieši no šādas filozofijas vadījās Ņūtons, izmainīdams visu zinātnes attīstības gaitu. Fizikālu hipotēžu vietā Ņūtons aplūkoja matemātiskas sakarības, kuras savukārt izsecināja no novērojumiem un eksperimentiem. Ņūtona priekštecis Galilejs pētīja ķermeņu brīvo krišanu. Ņūtons aplūkoja daudz plašāku problēmu, kas nodarbināja daudzu XVII gs. vidus zinātnieku prātus: vai var atrast sakarību starp Galileja atklātajiem zemes ķermeņu kustības likumiem un Keplera atklāto planētu kustības likumiem? Šī ideja par to, ka jebkuras kustības likumiem jāizriet no neliela skaita universāliem likumiem, var likties grandioza un neparasta. Taču XVII gs. reliģiozajiem matemātiķiem tā šķita dabiska. Viņi taču uzskatīja, ka Dievs ir radījis Visumu un visas dabas parādības notiek pēc radītāja vienota plāna.

Realizējot savu universālo likumu meklēšanas programmu, Ņūtons ieguva daudzus svarīgus rezultātus algebrā un ģeometrijā. Īpaši liels bija viņa ieguldījums diferenciālrēķinu un integrālrēķinu radīšanā.

Dažkārt XVII gs. dabaszinātņu attīstību rezumē ar vienu frāzi, ka ar kopīgām XVII gs. fiziķu un matemātiķu pūlēm tika radīta pasaules mehāniskā aina. Ņūtona mehānikā matemātika kļuva par fundamentālu jēdzienu avotu.

Slavenā XVIII gs. zinātnieku plejāde — Leibnics, brāļi Bernulli, Eilers, Dalambērs, Lagranžs, Laplass un daudzi citi turpināja dabas matemātisko izpēti. Viņi attīstīja matemātiskās analīzes metodes, aizsāka diferenciālvienādojumu teoriju, diferenciālģeometriju, variāciju rēķinus, bezgalīgo rindu teoriju un kompleksā mainīgā funkciju teoriju.

Visvairāk matematizāciju ietekmēja astronomija. Matemātiskie aprēķini ļāva paredzēt Haleja komētas parādīšanos 1759. gadā. Lagranžs un Laplass pētīja planētu kustību. XVIII gs. zinātnes sasniegumi tika atspoguļoti Laplasa piecu sējumu «Debesu mehānikā», kuru izdeva no 1799. līdz 1825. gadam.

Cits matemātikas lietošanas virziens bija optika. Nozīmīgs darbs šajā jomā bija Eilera trīs sējumu «Optika». Eilers bija vienīgais no XVIII gs. zinātniekiem, kurš iedrošinājās uzstāties pret Ņūtona korpuskulāro gaismas teoriju.

Par jaunu fizikas nozari kļuva akustika — muzikālo skaņu matemātisks apraksts un analīze. XVIII gs. sāka attīstīties vēl viena matemātiskās fizikas nozare — hidrodinamika.

Jau XVIII gs. sākumā matemātiķi zināja atsevišķus piemērus par to, kā daba cenšas «maksimizēt» vai «minimizēt» dažādu fizikālu procesu raksturlielumus. XVIII gs. zinātnieki bija pārliecināti, ka Visums «necieš» liekus tēriņus un tāpēc katrai dabas darbībai galīgā rezultāta sasniegšanā jābūt vismazākajai no iespējām. Tika meklēts vispārīgs princips, kas izteiktu šo likumību. Pirmo šāda principa formulējumu izteica Mopertjuī. Precīzākā un vispārīgākā formā mazākās pretdarbības principu formulēja Lagranžs. Šis princips kļuva par galveno principu variāciju rēķinos. Tālāk šo principu vispārināja V. Hamiltons.

14. XIX gs. matemātika

XIX gs. un it īpaši XX gs. matemātikā iegūto faktu ir daudz vairāk nekā iepriekš apskatītajā laikā, tos grūti sakārtot vēsturiskā sistēmā. Pēdējo 150—185 gadu laikā matemātika ir ļoti diferencējusies un daudzas tās nozares ir kļuvušas šauri speciālas. Tāpēc nav iespējams īsā apskatā aptvert visu matemātikas nozaru attīstību.

Sākot ar XIX gs. otro ceturksni, matemātikā notika jauna revolūcija, kuru var salīdzināt ar to pagriezienu matemātikas attīstībā, kas notika XVII gs., parādoties bezgalīgi mazo lielumu rēķiniem. XIX gs. matemātikā jauna bija matemātisko objektu eksistences problēmas nostādne, īpaši bezgalīgi mazo lielumu analīzē. Radās arī ģeometrijas, aritmētikas un algebras nestandarta struktūras. Šo procesu aizsāka zinātnieki, kuri paši mācījās XIX gs. pirmajā ceturksnī, bet kuru jaunrade norisa otrajā un trešajā ceturksnī: Bolcano un Košī (matemātiskajā analīzē), Lobačevskis un Bojaji (ģeometrijā), Galuā, Hamiltons, Grasmanis (algebrā). Viņu priekštecis daudzējādā ziņā bija Gauss.

XIX gs. sākums bija spožs matemātiskās analīzes un tās fizikālo lietojumu uzplaukuma laiks. Matemātikas loma dabaszinātnēs, tehnikā un pat sabiedriskajās zinātnēs attīstīta kapitālisma apstākļos strauji pieauga. Tādēļ vajadzēja radikāli izmainīt vidējās un augstākās izglītības sistēmu.

Matemātika galvenokārt attīstījās Eiropas valstīs. Ārpus Eiropas XIX gs. beigās spēcīga matemātiķu grupa darbojās ASV. Eiropā matemātiskie centri nebija sadalīti vienmērīgi. Pirmajā vietā aktīvi strādājošo zinātnieku un publikāciju skaita ziņā bija Francija un Vācija. Pēc valsts apvienošanas strauji attīstījās matemātika Itālijā. Krievijā aktīvi darbojās Čebišova skolas matemātiķi. Anglijā pēc Ķēlī un Silvestra nāves «Tīrajā matemātikā» vairs nebija tik talantīgu matemātiķu. Diezgan ievērojamu ieguldījumu matemātikā deva tehniski un ekonomiski attīstīto Holandes, Beļģijas un Skandināvijas valstu matemātiķi.

Matemātiķiem nācās domāt par to, kā labāk organizēt savu darbu. 1871. g. Berlīnē iznāca pirmais referatīvais žurnāls matemātikā. 1897. g. Cīrihē notika pirmais starptautiskais matemātiķu kongress. Par matemātisko publikāciju skaita pieaugumu liecina šajā kongresā minētie dati. Pēc bibliogrāfu novērtējuma (no grāmatspiešanas parādīšanās Eiropā līdz XIX gs. beigām) visā zinātniskajā matemātiskajā literatūrā bija apmēram 125 tūkstoši darbu, no kuriem gandrīz puse bija izdota XIX gs. otrajā pusē. XIX gs. vidū sāka veidoties matemātikas biedrības. Sākotnēji gan tās bija saistītas ar konkrētu pilsētu. Tā, piemēram, gandrīz vienlaikus tika no-dibinātas Maskavas (1864) un Londonas (1865) matemātikas biedrības. Taču drīz vien, pateicoties šo biedrību izdotajiem žurnāliem, to loma ievērojami pieauga. 1872. g. tika nodibināta Francijas matemātikas biedrība, bet 1891. g. — Vācijas matemātikas biedrība. Pirmais starptautiskas organizācijas izveidošanas mēģinājums notika 1893. g. Čikāgā, kad tur strādāja starptautiska izstāde, kuras programmā bija ietverti zinātniski kongresi un konferences. Matemātiķu kongresā piedalījās 40 amerikāņu zinātnieki un tikai nedaudzi eiropieši.

Kā jau minējām, pirmais starptautiskais matemātiķu kongress notika 1897. g. Cīrihē. Tas ilga trīs dienas, un tā darbā piedalījās ap 200 dalībnieku. Tajā tika aplūkots jautājums par starptautisku komisiju nodibināšanu, kuru pārziņā būtu bibliogrāfijas un terminoloģijas jautājumi, pārskatu sastādīšana par dažādu matemātikas nozaru sasniegumiem, matemātikas zinātņu klasifikācijas izstrāde. Pēc kongresa plenārsēdēs nolasītajiem referātiem var izdarīt dažus secinājumus par XIX gs. beigu matemātiku. Gandrīz vienbalsīgu atzinību bija guvusi kopu teorija. Vienu no pirmajām vietām ieņēma analītisko funkciju teorija. Matemātisko disciplīnu sarakstā stabili nostiprinājās matemātiskā loģika. A. Puankarē, kurš tolaik bija vadošais matemātiķis, bija atsūtījis referātu par matemātikas un fizikas savstarpējām attiecībām. F. Kleins atzīmēja, ka sākotnēji viņš par «vadošajām» matemātikā uzskatījis jauno ģeometriju, kompleksā mainīgā funkciju teoriju un grupu teoriju. Tām vēl jāpievienojot matemātikas pamati un skaitļu teorija. Kongresā tika runāts arī par augstākās matemātiskās izglītības reformu.

Vēl viens XIX gs. beigu nozīmīgs notikums bija aizsāktā «Matemātisko zinātņu enciklopēdija» F. Kleina redakcijā. Enciklopēdijas uzdevums bija īsā, taču iespējami pilnīgā veidā atspoguļot matemātikas nozaru toreizējo stāvokli, parādīt matemātisko metožu evolūciju kopš XIX gs. sākuma. Enciklopēdija aptvēra arī matemātikas lietojumus mehānikā un fizikā, astronomijā un ģeodēzijā, dažādās tehnikas nozarēs.

Starptautisku kongresu organizēšana, enciklopēdijas un referatīvo žurnālu izdošana bija ar vienu kopīgu mērķi: saglabāt aizvien vairāk sazarotās matemātikas vienotību. Taču tās filozofiskās un metodoloģiskās problēmas, kas radās matemātikas attīstības gaitā, kā arī dažādās pieejās šo problēmu risināšanā parādīja, ka tuvojas matemātikas pamatu krīze.

To, ka pesimisms par matemātikas tālāko attīstību nebija pamatots, pierādīja 1900. g. Parīzē II Starptautiskajā matemātiķu kongresā Getingenes universitātes profesora D. Hilberta izvirzītās 23 problēmas.

Vispirms Hilberts ierosināja aritmētiski formulēt kontinuuma jēdzienu. Vai eksistē kardinālskaitlis starp skaitli, kas atbilst sanumurējamai kopai, un skaitli, kas atbilst kontinuumam? Vai var kontinuumu aplūkot kā pilnīgi sakārtotu koku? Ko var teikt par aritmētikas aksiomu nepretrunīgumu?

Nākošās problēmas bija par ģeometrijas pamatiem, nepārtrauktajām Lī transformāciju grupām un fizikas aksiomu matemātisko formulējumu. Pēc tam sekoja dažas problēmas, kas attiecas uz algebru un aritmētiku. Par dažiem skaitļiem vēl nebija zināms, vai tie ir iracionāli vai transcendenti (piemēram, a^{β}, ja a ir algebrisks, bet β — iracionāls skaitlis). Nebija zināms Rīmaņa hipotēzes pierādījums par dzeta funkcijas nullēm. Cita problēma šai jomā bija dažu ar invariantu teoriju saistītu pilnu funkciju sistēmu galīguma pierādījums. Piecpadsmitajā problēmā tika prasīts stingri formulēt Šūberta skaitliskās ģeometrijas, sešpadsmitajā — izpētīt algebrisko līkņu un virsmu topoloģiju. Vēl viena problēma attiecās uz telpas aizpildīšanu ar kongruentiem daudzskaldņiem. Pārējās problēmas bija par diferenciālvienādojumiem un variāciju rēķiniem. (Sīkāk par Hilberta problēmām skat. [23].)

14.1. Matemātiskā loģika

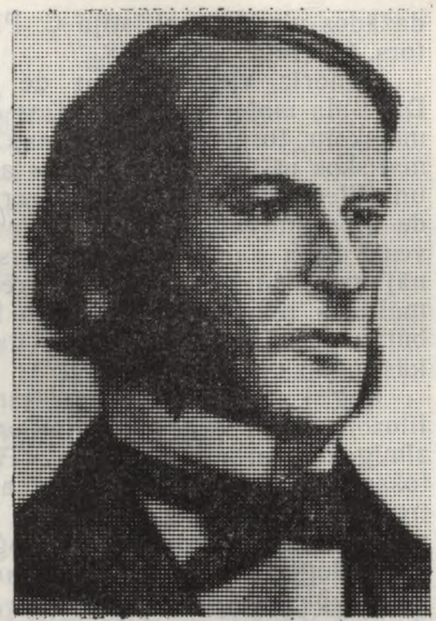
Pirmais sistemātiskais loģikas izklāsts, kas saglabājies līdz mūsdienām, ir Aristoteļa traktāti, kurus viņa komentētāji apvienoja ar nosaukumu «Organons». Uzsvērdams Aristoteļa izklāsta stingrību, Leibnics rakstīja: «Aristotelis bija pirmais, kurš nematemātisku tekstu rakstīja matemātiski.»

Cita stila loģika bija Eiklīda, Filona, Zēnona darbos. Šīs skolas darbos bija izklāstīta izteikumu loģika.

Vēlīnais grieķu un romiešu antīkais periods loģikas vēstures ziņā ir maz izpētīts. Parasti uzskata, ka šajā laikā loģika maz pavirzījās uz priekšu.

Agrīnajā viduslaiku periodā loģika kā patstāvīga zinātne ir minēta vienīgi arābu rokrakstos. Eiropā XII—XIV gs. bija sastopama tikai sholastiskā loģika, kas Aristoteļa loģiku pielāgoja baznīcas vajadzībām. Ap šo laiku sāka veidoties arī t. s. jaunā loģika, kura satur vairākus izteikumu loģikas elementus. Turpmākā loģikas attīstība jau attiecas uz XVII gs., kad vairāki zinātnieki sāka nodarboties ar loģikas pārkārtošanu uz algebriskiem pamatiem. Ievērojamākais no šiem zinātniekiem bija Leibnics.

Leibnica loģikas uzbūves pilnveidošanas plāns bija šāds. Vispirms jāizanalizē visi jēdzieni, reducējot tos uz vienkāršāko jēdzienu kombināciju. Šie vienkāršākie nedefinējamie jēdzieni sastādītu «cilvēka domu alfabētu». Jēdzienu analīze palīdzētu pierādīt visas zināmās patiesības. Šis pierādījumu kopums veidotu «pierādījumu enciklopēdiju». Leibnics uzskatīja, ka vispārīgai simbolikai jākļūst par starptautisku palīgvalodu, kurā varētu izteikt visas eksistējošās vai arī turpmāk iespējamās zināšanas. Leibnics uzskatīja, ka jaunā loģika palīdzētu viegli atrisināt visus strīdus: ja kādā jautājumā būs dažādi viedokļi, pretinieki varēs vienkārši teikt: «Izrēķināsim!» Leibnics rakstīja, ka uzdevums būs atrisināts, «... ja izdosies atrast nelielu skaitu domu, no kurām pēc kārtas rodas bezgalīgi daudz citu domu. Tā no nedaudziem skaitļiem no 1 līdz 10 pēc kārtas rodas visi pārējie skaitļi.» Pamatjēdzienus Leibnics nosauca par pirmās kārtas terminiem un apvienoja tos pirmajā klasē. Otro klasi veidoja otrās kārtas termini, t. i., pirmās kārtas terminu pāri. Trešajā klasē ietilpa trešās kārtas termini, kurus veidoja vai nu trīs pirmās kārtas termini, vai arī pirmās kārtas termina kombinācija ar otrās kārtas terminu utt. Jēdziena analīze nozīmēja tā sadalīšanu elementos, t. i., pirmās kārtas terminos. Pamatojoties uz analoģiju starp jēdzienu sadalīšanu pirmās kārtas terminos un skaitļu sadalīšanu pirmreizinātājos, Leibnics izveidoja loģikas aritmētisko interpretāciju. Lai izteiktu jēdzienu loģiskās saites, Leibnics izmantoja ģeometriskas shēmas. Loģikas pilnveidošanu Leibnics gribēja pabeigt ar aprēķinu metožu izstrādāšanu, taču šo darbu viņš līdz galam nepaveica.



Dž. Būls

Dažādu apstākļu dēļ lielākā daļa Leibnica darbu loģikā nāca klajā tikai mūsu gadsimta sākumā.

Matemātiskā loģika radās, izmantojot matemātikas, it īpaši algebras metodes loģikas uzdevumu risināšanā. Par patstāvīgu zinātnes nozari matemātiskā loģika kļuva XIX gs. Izmantojot algebras aparātu loģikas vajadzībām, radās algebriska struktūra, kura vēlāk tika nosaukta par Būla algebru. Pirmie šādu struktūru aprakstīja Dž. Būls un A. de Morgāns.

Londonas universitātes koledžas matemātikas profesors A. de Morgāns ieguva vairākus rezultātus algebrā un matemātiskajā analīzē. Kādā 1838. g. publicētā rakstā viņš definēja jēdzienu «matemātiskā indukcija». Matemātikā un tās pasniegšanā de Morgānu visvairāk interesēja pamatprincipi un to stingri loģiska attīstība. Matemātiku un loģiku viņš nosauca par «precīzu zināšanu acīm» un izteica nožēlu, ka matemātiķi par loģiku nerūpējas vairāk kā loģiķi par matemātiku. Pats viņš centās satuvināt abas šīs zinātnes, un viņa galvenais nopelns ir loģikas izveide pēc matemātikas parauga. De Morgāns grāmatā «Formālā loģika jeb nepieciešamo un varbūtējo slēdzienu rēķini» (1847) rakstīja, ka loģikai jākalpo precīzai domu izteikšanai un jānovērš neskaidrības un divdomības, kas raksturīgas parastajai valodai. Šajā darbā de Morgāns izmantoja sistēmu, kura tika nosaukta par Būla algebru. Vēlāk de Morgāns definēja vispārīgas attieksmes jēdzienu un operācijas ar attieksmēm. Faktiski viņš lika pamatu mūsdienīgajai attieksmju teorijai, kuru dažādos virzienos attīstīja Č. Pīrss, E. Šrēders, Dž. Peāno, G. Kantors, G. Fregē, B. Rasels.

Gandrīz vienlaikus ar de Morgāna rakstiem nāca klajā arī Dž. Būla matemātiskās loģikas darbi. Dž. Būls bija beidzis tikai pamatskolu, turpmākās zināšanas viņš ieguva pašmācības ceļā. Matemātiskos pētījumus Būls sāka ar analīzes operatoru metožu izstrādi un diferenciālvienādojumu teoriju, pēc tam viņš sadraudzējās ar de Morgānu un arī sāka nodarboties ar matemātisko loģiku. Galvenie Būla darbi bija «Loģikas matemātiskā analīze, kas ir mēģinājums deduktīvo spriedumu rēķinos» (1847) un «Pētījumi par domāšanas likumiem, uz kuriem balstās matemātiskā loģika un varbūtību teorija» (1854). Šajos darbos tika likti mūsdienu matemātiskās loģikas pamati.

Loģisko darbību mehanizēšanas ideju izteica Mančestras loģikas, filozofijas un politekonomijas profesors V. S. Dževonss. Viņa nozīmīgākie darbi loģikā bija «Tīrā loģika» (1863), «Līdzīgo aizvietošana» (1869), «Zinātnes pamati» (1874). Vispirms Dževonss konstruēja t. s. loģiskos skaitīkļus. Apmēram pēc desmit gadus ilgiem pūliņiem viņam izdevās radīt loģisko mašīnu, kuru nosauca par Dževonsa loģisko mašīnu. 1870. gadā tā tika izstādīta Londonas Karaliskajā biedrībā, un tās darbība aprakstīta rakstā «Par loģiskā izveduma mehānisko izpildi».

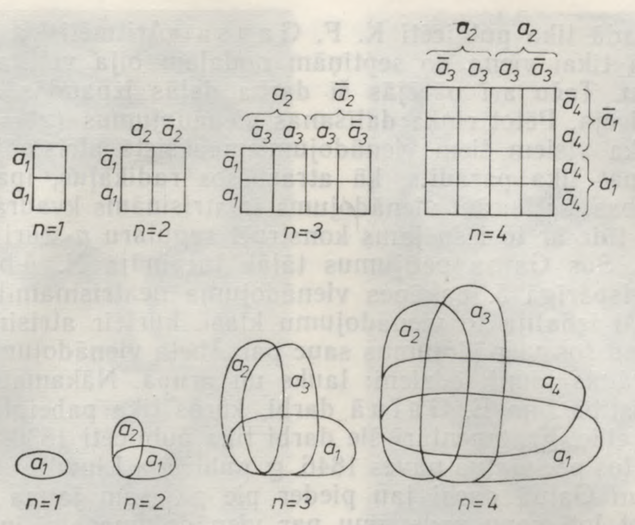
Visiem, kuri mūsdienās interesējas par matemātisko loģiku, ir pazīstamas Venna diagrammas. Dž. Venns 1858. g. pabeidza vienu no Kembridžas universitātes koledžām un, sekodams ģimenes tradīcijām, kļuva par garīdznieku. Taču, gribēdams nodarboties ar zinātni, viņš atgriezās Kembridžā, kur pasniedza loģiku un morāli. Ievērojamākais Venna darbs par jaunu loģikas metožu izveidi un to pamatojumu bija «Simboliskā loģika» (1881).

Loģikas uzdevumu risinājumos Venns izmantoja ne tikai algebriskās metodes, bet arī diagrammas. Tagad šīs diagrammas sauc par Venna diagrammām.

Veidojot diagrammas, plakne ar n slēgtiem kontūriem tiek sadalīta 2^n apgabalos (n — uzdevuma nosacījumos dotais klašu skaits). Venna risinātajos uzdevumos $n \leqslant 5$. Mainīgo skaitam palielinoties, zīmējumu uzskatāmība krasi samazinās. Tādēļ lielāka mainīgo skaita gadījumā Venns izmantoja 2^n rūtiņu tabulas — Venna tabulas. Starp tabulām un diagrammām pastāv savstarpēji viennozīmīga atbilstība. 11. zīmējumā parādītas tabulas un diagrammas, ja $n=1, 2, 3, 4$.

Vienlaikus ar Venna darbiem tika publicēti arī vācu matemātiķa E. Šrēdera un krievu matemātiķa P. Porecka darbi. 1905. g. Parīzē iznāca franču matemātiķa L. Kutjurā darbs «Loģikas algebra», kurā dots XIX gs. loģikas algebrā iegūto rezultātu kopsavilkums.

Matemātiskā loģika XIX gs. attīstījās galvenokārt kā loģikas algebra. Loģikas algebras izveide pamatojās uz analoģiju, ka jebkura uzdevuma risinājums ar vienādojuma sastādīšanu un atrisināšanu ir slēdziena izvedums no uzdevuma nosacījumiem. Būls cen-



11. zīm.

tās piemērot algebras idejas ne tikai kvantitatīva rakstura, bet arī jebkura veida uzdevumiem. Tāpēc vajadzēja atrast veidu, kā izteikt jebkuru informāciju ar vienādībām vai nevienādībām un formulēt šīs informācijas pārveidošanas likumus. Šādu likumu meklējumu rezultātā tika radīta algebriska sistēma, ko tagad sauc par *Būla algebru.* Pirmoreiz tā tika lietota Dževonsa darbos, pēc tam to pilnveidoja Venns, Šrēders, Poreckis. Vienlaikus tika precizētas arī sakarības starp teikumiem, tā rezultātā radās t. s. *izteikumu rēķini*. Ar šiem rēķiniem XIX gs. beigās nodarbojās G. Fregē. XIX gs. beigās loģikā tika ieviesti kvantori.

14.2. Algebra

Salīdzinot algebru XIX gs. sākumā un beigās, bet it īpaši algebru XIX gs. ar algebru XX gs. divdesmitajos gados, redzams, ka tās pamatjēdzieni un metodes, arī algebras nozīme matemātikā ir ļoti izmainījusies.

XVIII gs. beigās algebra jau bija kaut kas vairāk nekā prasme veikt aprēķinus ar skaitļiem, burtiem, izmantot noteiktus likumus un formulas un pareizi tos interpretēt. Gandrīz visi matemātiķi atzina kompleksos skaitļus, eksistēja lineāro vienādojumu teorija, bija aizsākta viena nezināmā jebkuras pakāpes vienādojumu teorija. Taču salīdzinājumā ar sasniegumiem matemātiskajā analīzē tas vēl bija gaužām maz. Algebra bija kaut kur matemātikas nomalē. Savukārt XX gs. sākumā algebras saturs bija ne tikai būtiski papildinājies ar jauniem jēdzieniem un teorijām, bet algebraizācija bija skārusi jau gandrīz visu matemātiku. Radās jaunas matemātikas nozares, kas intensīvi attīstījās, piemēram, algebriskā skaitļu teorija, algebriskā ģeometrija, Lī grupu teorija.

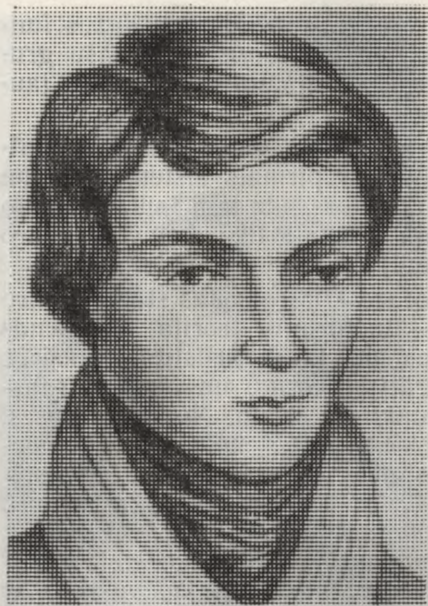
1801. gadā tika publicēti K. F. G a u s a «Aritmētiskie pētījumi». Šajā darbā tikai viena no septiņām nodaļām bija veltīta algebras jautājumam. Taču arī pārējās šī darba daļās izpaudās autora algebriskā pieeja. Pētot riņķa dalīšanas vienādojumus ($x^n=1$), Gauss pierādīja, ka visiem šiem vienādojumiem eksistē atrisinājumi radikāļos. Turpat tika parādīts, kā atrast šos radikāļus, īpaši izdalot tās n vērtības, ar kurām vienādojums ir atrisināms kvadrātiskos radikāļos un līdz ar to iespējams konstruēt regulāru n-stūri ar cirkuli un lineālu. Šos Gausa pētījumus tālāk turpināja N. Ā b e l s, kurš pierādīja vispārīgā 5. pakāpes vienādojuma neatrisināmību radikāļos un īpaši izdalīja to vienādojumu klasi, kuri ir atrisināmi radikāļos. Tagad šos vienādojumus sauc par Ābela vienādojumiem. Viņa darbos parādās jauni jēdzieni: lauks un grupa. Nākamais solis algebras attīstībā bija E. G a l u ā darbi, kuros tika pabeigta vienotas teorijas izveide. Fragmentāri šie darbi tika publicēti 1830.—1832. g., bet pilnīgi tos pēc Galuā nāves 1846. g. publicēja Liuvils.

Ābela un Galuā darbi jau pieder pie pavisam jauna ideju virziena. Pētot ļoti senu uzdevumu par vienādojuma atrisināmību radikāļos, Galuā vairāk interesējās nevis par uzdevuma nostādni, bet par risināšanas metodēm. Viņš precīzi definēja tādus jēdzienus kā lauks, vienādojumu grupa, noskaidroja atbilstību starp šīs grupas apakšgrupām un polinoma izvirzījumu apakšlaukiem, izdalīja grupas normāldalītājus. Tās bija gluži jaunas pētījumu metodes, kuras matemātiķi atzina tikai XIX gs. septiņdesmitajos gados. Pie grupu teorijas strādāja arī Gauss.

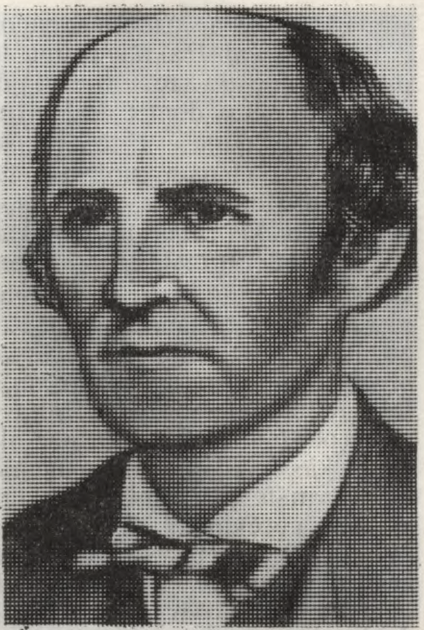
1828. un 1832. g. iznāca divas daļas jaunam Gausa darbam «Bikvadrātisko atlikumu teorija». Šajā darbā tika dota ne vien kompleksо skaitļu ģeometriskā interpretācija (tas bija darīts jau pirms Gausa), bet arī tika vispārināts veselā skaitļa jēdziens. Gauss izveidoja veselu kompleksu skaitļu aritmētiku, kas bija analoga parastajai aritmētikai. Drīz pēc tam Eizenšteins un Jakobi aplūkoja skaitļus $k+m\rho$, kur $\rho^3=1$, $\rho\neq1$, bet 1846. g. P. Ležēns-Dirihlē aplūkoja visus vienības elementus lauka $\boldsymbol{Q}(\Theta)$ veselo skaitļu gredzenā, kur Θ ir vienādojuma $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$, $a_i\in\boldsymbol{Z}$, sakne ($\boldsymbol{Q}$ — racionālo skaitļu lauks, $\boldsymbol{Z}$ — veselo skaitļu gredzens).

Turpmākie pētījumi algebrisko skaitļu teorijā sekmēja komutatīvās algebras izveidi.

XIX gs. pirmajā pusē turpinājās arī lineārās algebras attīstība. Kaut arī Gausa «Aritmētiskajos pētījumos» nebija nodaļas, kas būtu veltīta lineārajai algebrai, tomēr šajā darbā veiktie divargumentu kvadrātisko formu pētījumi ietekmēja lineārās algebras attīstību. Netieši par patvaļīgas kārtas matricu īpašvērtībām tika runāts O. Koši darbā «Par vienādojumiem, ar kuru palīdzību nosaka planētu kustību gadsimta nevienādības» (1826). Nedaudz vēlāk — 1834. g. — nāca klajā Jakobi darbs, kurā jau atklātā veidā tika pētītas kvadrātiskās formas un to reducēšana uz kanonisko veidu. 1841. g. Jakobi bija izveidojis gandrīz pabeigtu determinantu teoriju. Taču šai teorijai vēl aizvien trūka ģeometriskās interpretācijas un tik svarīgā un fundamentālā lineārās telpas jēdziena. Pirmo, ne sevišķi precīzu



E. Galuā



A. Ķēlī

lineāras telpas definīciju aplūkoja Grasmanis grāmatā «Mācība par lineāro turpinājumu» (1844). Šajā darbā bija bagātīgs jaunu ideju klāsts, taču tas bija neveiksmīgi uzrakstīts. Tāpēc uzmanību minētajam darbam pievērsa tikai pēc autora ievērojami pārstrādātā un uzlabotā 2. izdevuma iznākšanas (1862). Tajā tika aprakstīta tagad pazīstamā Grasmaņa algebra. 1843. g. iznāca A. Ķēlī «n-dimensiju analītiskās ģeometrijas nodaļas», kurās ideju bija mazāk, taču tās bija vairāk pazīstamas toreizējā matemātikas pasaulē. Lineārās algebras attīstība bija cieši saistīta ar hiperkomplekso skaitļu teoriju. Ilgu laiku matemātiķi neveiksmīgi pūlējās vispārināt kompleksо skaitļu jēdzienu, līdz 1843. g. Hamiltons atklāja kvaternionus. Ar kvaternioniem Hamiltons nodarbojās vairāk nekā 20 gadus. Viņa pētījumi tika apkopoti divos darbos — «Lekcijas par kvaternioniem» (1853) un «Kvaternionu teorijas elementi» (1866). Šie darbi vēlāk izrādījās vēl nozīmīgāki, jo, pētot kvaternionus, tika atklāti vektoru rēķini.

Atgriežoties pie grupu teorijas attīstības vēstures, jāpiemin O. Košī 1844.—1846. g. publicētie darbi, kuros viņš pierādīja vairākas teorēmas par simetriskās grupas apakšgrupām, arī pazīstamo Košī teorēmu: ja grupas kārtas skaitlis dalās ar pirmskaitli p, tad grupā eksistē elements, kura kārta ir p. Ievērojams notikums grupu teorijas vēsturē bija Ķēlī darbs «Par grupām, kas atkarīgas no simboliskā vienādojuma $\Theta^n=1$» (trīs daļas; 1854, 1854, 1859). Šajā darbā Ķēlī angļu matemātikas skolas garā aplūkoja grupu kā abstraktu simbolu kopu ar uzdotu kompozīcijas likumu un definēja dažus fundamentālus abstraktās grupu teorijas jēdzienus, vispirms pašu grupas jēdzienu un izomorfisma jēdzienu. Tas bija solis uz priekšu jaunas, abstraktas domāšanas attīstībā.

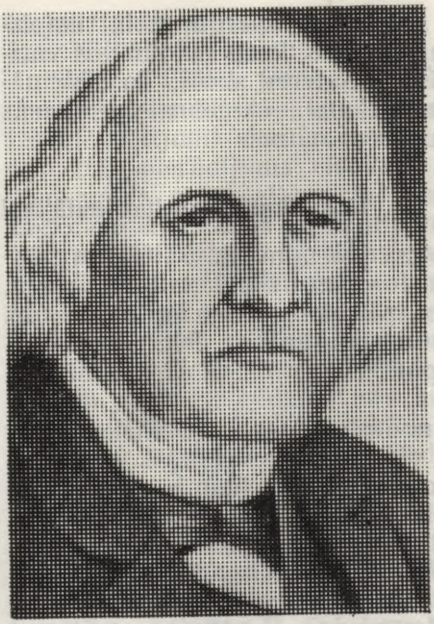
1870. g. iznāca Ķ. Žordāna «Traktāts par substitūcijām un algebriskiem vienādojumiem». Tas bija gan pirmais sistemātisks un pilnīgs Galuā teorijas izklāsts, gan izsmeļošs līdz tam laikam iegūto grupu teorijas rezultātu apraksts. Šajā grāmatā tika definēta lineāro transformāciju matricu Žordāna normālforma.

XIX gs. vidū attīstījās algebras nozare, kura atrodas starp lineāro algebru un algebrisko ģeometriju, — invariantu teorija. No vienas puses, šajā teorijā tiek vispārinātas un tālāk attīstītas lineārās algebras tēmas, kā, piemēram, kvadrātisko formu un lineāro transformāciju matricu reducēšana uz kanonisko veidu. No otras puses, tie ir pētījumi par to, kā pēc algebriskiem nosacījumiem noteikt ģeometriskās īpašības, kas ir nemainīgas attiecībā pret koordinātu sistēmas transformācijām. Laikā no 1840. g. līdz 1870. g. invariantu sistēmu aprēķiniem dažādos konkrētos gadījumos bija veltīti daudzu matemātiķu darbi. No tiem vispazīstamākie ir Ķēlī, Eizenšteina, Silvestra, Salmona, Klebša darbi. Ķēlī darbā «Sestais memuārs par formām» (1859) bija parādīts, kā no vienota invariantu teorijas viedokļa var aplūkot ģeometrisko figūru metriskās īpašības. Šis pētījums bija viens no F. Kleina «Erlangenes programmas» avotiem.

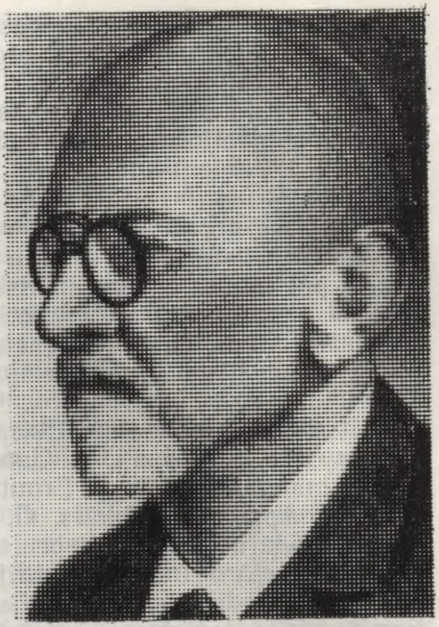
Nozīmīgs sasniegums lineārās algebras jomā bija Silvestra pierādītais kvadrātisko formu inerces likums (1852). 1858. g. iznāca Ķēlī «Memuārs par matricu teoriju», kurā tika definēta kvadrātisko matricu algebra un noskaidrots izomorfisms starp kvaternionu algebru un vienu no otrās kārtas matricu algebrām. Līdz ar to tika noskaidrotas sakarības starp hiperkomplekso skaitļu teoriju (algebru teoriju) un lineāro algebru.

XIX gs. sešdesmitajos gados liela ietekme uz matemātikas attīstību bija K. Veierštrāsa darbībai. Veierštrāss gandrīz neko nepublicēja. Savu pētījumu rezultātus viņš izklāstīja lekcijās Berlīnes universitātē. 1861. gada lekcijās Veierštrāss definēja vairāku algebru tiešās summas jēdzienu un pierādīja teorēmu par to, ka komutatīva algebra (virs reālo skaitļu lauka) ir tieša reālo un komplekso skaitļu summa. Tas bija viens no pirmajiem klasifikācijas tipa rezultātiem algebrā.

Algebriskajā skaitļu teorijā viens no galvenajiem uzdevumiem XIX gs. sešdesmitajos un septiņdesmitajos gados bija dalāmības teorijas izveidošana vispārīgos algebrisko skaitļu laukos. Pēc ilgiem pūliņiem tika izveidotas trīs konstrukcijas, kuru autori bija J. Zolotarjovs, R. Dedekinds un L. Kronekers. Par uzdevuma atrisinājumu matemātiķi pieņēma Dedekinda darbu. Skaidrais algebriskais Dedekinda izklāsts uz daudziem gadu desmitiem kļuva par matemātiskā stila paraugu. Ar šo un citiem saviem darbiem, kuros tika definēti gredzena, moduļa un ideāla jēdzieni, Dedekinds lika pamatus mūsdienu aksiomātiskajam matemātikas teoriju izklāstam.



Ķ. Veierštrāss



D. Hilberts

XIX gs. septiņdesmitie gadi bija it kā robeža algebras un algebriskās skaitļu teorijas attīstībā. Tieši šajā laikā matemātika sāka lietot tās idejas un metodes, kuras tika atklātas gadsimta pirmajā trešdaļā, piemēram, grupas un tās invariantu ideju, lauka, gredzena, moduļa un ideāla jēdzienus, kā arī visu lineārās algebras aparātu. Tai pašā laikā aritmētika tika pārnesta uz algebrisko skaitļu teoriju.

Turpmākajos piecdesmit gados visi iepriekš minētie jēdzieni ieguva aizvien abstraktāku traktējumu un vienlaikus sākās mūsdienu algebras ideju un metožu izmantošana dažādās matemātikas jomās. Grupu teorijā līdz ar galīgajām grupām sākās bezgalīgo grupu un topoloģisko (nepārtraukto) grupu pētījumi. Grupu teoriju sāka lietot ģeometrijā (Kleina «Erlangenes programma»), kompleksā mainīgā funkciju teorijā (īpaši A. Puankarē darbos) un diferenciālvienādojumu teorijā. Nepārtraukto grupu teorijas izveide (īpaši S. Lī, V. Ķillinga un E. Kartāna pētījumi) būtiski ietekmēja turpmāko algebras un topoloģijas attīstību.

Gadsimta beigās (1896) D. H i l b e r t s pirmoreiz sistemātiski izklāstīja algebrisko skaitļu teoriju. Viņa slavenais darbs *«Zahlbericht»* kļuva par pamatu tālākai teorijas attīstībai. Šajā grāmatā Hilberts padziļināja analoģiju starp algebrisko skaitļu un algebrisko funkciju laukiem.

XIX gs. beigās un XX gs. sākumā tika attīstīta aksiomātiskā metode algebrā, kas pamatojās uz kopu teorijas koncepcijām. Tādējādi tika izveidotas abstrakto grupu, lauku, gredzenu, ideālu, lokālo un puslokālo gredzenu teorijas, kā arī shēmu teorija, t. i., tika izveidots mūsdienu abstraktās algebras aparāts, kura sākotnējais variants (vēl bez shēmu teorijas) radās E. Nēteres skolā. To sistemātiski izklāstīja B. L. Van der Vardens grāmatā «Algebra», pēc kuras algebru ir mācījušās vairākas zinātnieku paaudzes.

14.3. Skaitļu teorijas jautājumi

Aplūkojot algebras attīstību XIX gs., jau minējām K. Gausa pētījumus par binārajām kvadrātiskajām formām $ax^2+2bxv+cv^2$, kur a, b, c — veseli skaitļi. «Aritmētiskajos pētījumos» bija aplūkotas arī ternārās formas, kas atkarīgas no trim mainīgajiem. Pēc Gausa vispārīgo kvadrātisko formu teoriju turpināja izstrādāt P. G. Ležēns-Dirihlē.

Cits ievērojams matemātiķis, kas nodarbojās ar kvadrātisko formu teoriju, bija Š. Ermits. Gandrīz visi XIX gs. pēdējās trešdaļas franču matemātiķi bija Š. Ermita skolnieki. Starp tiem bija A. Puankarē, P. Appels, E. Pikārs, G. Darbū, P. Penlēve, P. Tanerī u. c. Ermits nodarbojās ar algebru, skaitļu teoriju, eliptisko funkciju un Ābela modulāro funkciju teoriju. Vispazīstamākais Ermita sasniegums ir pierādījums, ka skaitlis e ir transcendents. Tomēr visvairāk Ermits pētīja dažādus ar kvadrātiskām formām saistītus jautājumus. Ar kvadrātisko formu teoriju nodarbojās arī daudzi matemātiķi Krievijā: V. Buņakovskis, P. Čebišovs, J. Zolotarjovs, A. Korkins, A. Markovs. A. Markova darbi skaitļu teorijā galvenokārt attiecās uz nenoteikto triju un četru argumentu kvadrātisko formu teoriju. XX gs. sākumā Markovs nodarbojās ar ekstremālo formu meklēšanu četru mainīgo gadījumā.

Skaitļu teorijā kā atsevišķs virziens izdalījās skaitļu ģeometrija. Par šī virziena aizsācēju uzskata Ž. Lagranžu, kurš rakstā «Analītiskais risinājums dažiem uzdevumiem par trijstūru piramīdām» (1773) aplūkoja dažādas tādu tetraedru īpašības, kuri uzdoti ar triju virsotņu koordinātām, ja ceturtā virsotne atrodas koordinātu sākumpunktā. Nākošais darbs bija vācu fizikas profesora L. Zēbera raksts «Mēģinājums izskaidrot cieta ķermeņa iekšējo uzbūvi» (1824). Šajā darbā Zēbers pētīja telpas sadalījumu vienādos paralēlskaldņos. Aplūkodams attālumu kvadrātus starp tādu paralēlskaldņu virsotnēm, Zēbers atklāja pozitīvo trīskāršo kvadrātisko formu ģeometrisko interpretāciju. Autors atzīmēja, ka pozitīvo trīskāršo kvadrātisko formu teorija izrādījās ļoti noderīga kristalogrāfijā.

Ar skaitļu ģeometriju nodarbojās arī K. Gauss. Gausa pētījumus tālāk turpināja Ležēns-Dirihlē. Gausa—Dirihlē ģeometrisko režģu metodi vēlāk izmantoja F. Kleins. Šo metodi patvaļīgam mainīgo skaitam vispārināja H. Minkovskis. 1896. g. Minkovskis publicēja darbu «Skaitļu ģeometrija», kurā sistematizēja iegūtos rezultātus. No skaitļu ģeometrijas Minkovskis pārgāja uz izliektu ķermeņu ģeometriju, viņš interesējās arī par mehānikas un fizikas jautājumiem.

Analītiskās skaitļu teorijas aizsākums bija L. Eilera darbi. Eilera idejas tālāk attīstīja Ležandrs, Dirihlē, Jakobi, Čebišovs, Rīmanis u. c. XIX un XX gs. matemātiķi.

Sekojot Eilera tradīcijām, Dirihlē sekmīgi izmantoja skaitļu teorijā matemātiskās analīzes metodes un rezultātus. Nozīmīgākie Dirihlē pētījumi skaitļu teorijā ir teorēma par aritmētisko progresiju (tās pierādījums vispirms tika atrasts analītiski, bet pēc tam vispārināts progresijām un kvadrātiskām formām ar nenoteiktiem koeficientiem); dotā determinanta bināro kvadrātisko formu klašu skaita noteikšana; augstākas pakāpes veselu algebrisku skaitļu teorijas izstrāde. Dirihlē skaitļu teorijā ieviesa jaunus jēdzienus, pirmoreiz vispārīgā veidā formulēja asimptotiskā likuma jēdzienu un izrisināja vairākas asimptotiskas formulas.

Liela ietekme uz skaitļu teorijas attīstību un uz vairāku matemātiķu paaudžu audzināšanu bija Dirihlē darbam «Lekcijas skaitļu teorijā» (1863). Dirihlē izstrādātās analītiskās un algebriskās metodes tālāk tika attīstītas R. Dedekinda, E. Kummera, L. Kronekera, B. Rīmaņa, P. Čebišova darbos.

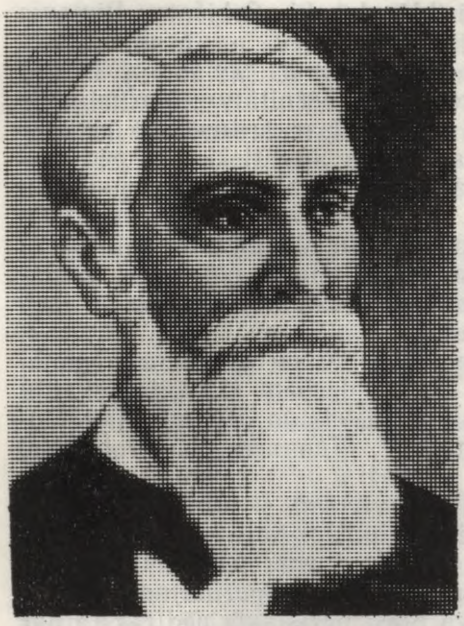
Galvenie P. Čebišova pētījumu virzieni skaitļu teorijā bija veltīti pirmskaitļu sadalījuma teorijai, rindām, kuru vispārīgais loceklis ir pirmskaitļu funkcija, kvadrātisko formu teorijai, Diofanta tuvinājumiem un nepārtraukto daļu algoritma vispārinājumam. Matemātiķu aprindās P. Čebišovs kļuva plaši pazīstams pēc raksta par to pirmskaitļu skaita noteikšanu, kuri nepārsniedz doto lielumu (1851), bet viņa popularitāte vēl vairāk pieauga pēc memuāra «Par pirmskaitļiem» (1852) publicēšanas franču valodā Liuvila izdotajā žurnālā.

Čebišova raksti rosināja daudzus matemātiķus. Viņi vispārināja teorēmas, uzlaboja Čebišova dotos funkciju novērtējumus, atrada jaunus pierādījumus. A. Puankarē Čebišova teorēmas vispārināja kompleksiem pirmskaitļiem.

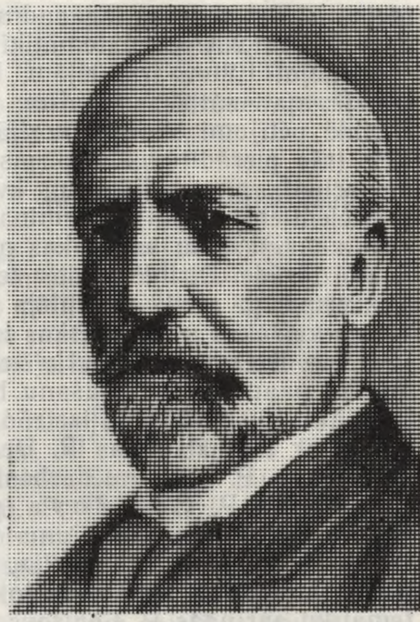
Ilgu laiku pēc Čebišova publicētajiem rakstiem pirmskaitļu sadalījuma teorijā nebija vērojama nekāda tālākvirzība. Sāka likties, ka turpināt pētījumus šajā virzienā ir neperspektīvi. Šo uzskatu tikai 1949. g. atspēkoja A. Selbergs un P. Erdešs ar jauniem rezultātiem. P. Erdešs un A. Selbergs pierādīja asimptotisko pirmskaitļu sadalījuma likumu, neizmantojot kompleksā mainīgā teorijas metodes. Pirms tam dažādos veidos ar šī likuma pierādījumu bija nodarbojušies B. Rīmanis, Ž. Adamārs, Š. Valle de Pusēns, I. Vinogradovs, N. Vīners.

Runājot par analītisko skaitļu teoriju, nevar nenminēt vēl vienu tās nozari — transcendento skaitļu teoriju.

Par to, ka daži matemātikā lietotie lielumi var būt transcendenti, izteicās Dž. Valliss 1656. g., atzīdams, ka skaitļa π īpašības atšķiras no parasto iracionalitāšu īpašībām. 1758. g. Eilers rakstīja, ka vēl nav pierādīta neiespējamība π izteikt ar «radikāliem lielumiem». 1766. g. Lamberts pierādīja skaitļu e un π iracionalitāti, tiesa, ne sevišķi stingri. 1800. g. Ležandrs pilnveidoja Lamberta pierādījumu. Pirmo transcendento skaitļu eksistences pierādījumu atrada Ž. Liuvils (1844, 1851). Nākamais ievērojamais rezultāts bija Ermita pierādījums, ka skaitlis e ir transcendents (1873). Šajā pierādījumā



P. Čebišovs



G. Kantors

tika izmantotas klasiskās matemātiskās analīzes metodes. Ermits uzskatīja, ka nebūs viegli līdzīgā veidā pierādīt, ka skaitlis π ir transcendents. Taču 1882. g. to pierādīja F. Lindemanis, izmantodams Š. Ermita idejas. Šis pierādījums beidzot noskaidroja riņķa kvadratūras neiespējamību.

G. Kantors transcendento skaitļu eksistenci noskaidroja ar kopu teorijas līdzekļiem (1873). Kantors pierādīja, ka visu skaitļu kopa nogrieznī [0, 1] ir nesanumurējama, bet visu algebrisko skaitļu kopa šajā nogrieznī ir sanumurējama. No šīs teorēmas izriet, ka eksistē transcendento skaitļu kopa un tā ir nesanumurējama.

Principiāli jaunas idejas transcendento skaitļu teorijā tika izteiktas XX gs. trīsdesmitajos gados (A. Gelfonds, K. Zīgels u. c.).

Rezumējot skaitļu teorijas attīstību XIX gs., var teikt, ka pirmoreiz tā ieņēma līdztiesīgu vietu starp citām matemātikas disciplīnām. Ja iepriekšējos gadsimtos daudzi matemātiķi nodarbošanos ar skaitļu teoriju uzskatīja tikai par laika kavēkli, tad XIX gs. izrādījās, ka harmoniska matemātikas attīstība nav iespējama bez aktīvas skaitļu teorijas izstrādes. XIX gs. tika atrisināti daudzi sen formulēti aritmētiski uzdevumi un formulētas jaunas grūtas problēmas. Tomēr vēl nepietika līdzekļu, lai atrisinātu vairākus klasiskos uzdevumus. Tā, piemēram, nevarēja atrisināt Goldbaha hipotēzi par to, ka katru naturālu skaitli var izteikt ar ne vairāk kā trīs pirmskaitļu summu. Šo uzdevumu risināšanai bija jārada citas metodes, kuru izveidei pievērsās XX gs. matemātiķi.

Varbūtību teorija veidojās XVII gs. otrajā pusē. XIX gs. radās jaunas vajadzības pēc varbūtību teorijas metodēm. Tā, piemēram, astronomijai un fizikai bija nepieciešama vienota kļūdu teorija. Šāda teorija bija nepieciešama arī kartogrāfijai, Zemes izmēru un formas precizēšanai pēc astronomiskiem, ģeodēziskiem un svārstu kustības novērojumiem. Tika ieviesta metriskā mēru sistēma. Šī sistēma pamatojās uz Parīzes meridiāna ceturtdaļas izmērīšanas programmu. Artilērijas progresa rezultātā tika formulēti daudzi šaušanas teorijas jautājumi. I. Kanta un P. Laplasa izvirzītās hipotēzes par Saules sistēmas izcelšanos rosināja interesi par vispārīgiem kosmoloģijas jautājumiem, arī par apkārtējās pasaules ģeometrijas izpēti. Pirmo mēģinājumu pārbaudīt Eiklīda ģeometriju reālā telpā 1842. g. veica N. Lobačevskis, un šajā sakarībā viņam nācās aplūkot varbūtību teorijas uzdevumu, kas bija saistīts ar neatkarīgi sadalītu gadījuma lielumu summēšanu. Sabiedrībā pieauga demogrāfijas loma, līdz ar to tika izstrādātas matemātiskās statistikas metodes. Matemātiskā statistika bija vajadzīga arī jaunajai zinātnes nozarei — biometrijai, kura nodarbojās ar bioloģisko novērojumu matemātisko apstrādi un pētīja dažādas statistiskās likumsakarības bioloģijā.

XIX gs. sākumā, turpinādams savu priekšteču aizsāktos pētījumus, P. L a p l a s s mēģināja apkopot varbūtību teorijā iegūtos rezultātus vienā darbā. 1812. g. Parīzē iznāca P. Laplasa «Analītiskā varbūtību teorija». Kaut arī materiāla izklāsts šajā darbā bija diezgan neveikls un dažu pamatjēdzienu traktējums neskaidrs, tomēr šis darbs kļuva par pamatdarbu varbūtību teorijā līdz P. Čebišova darbu iznākšanai.

«Analītiskā varbūtību teorija» sastāvēja no divām grāmatām. Pirmajā grāmatā bija aplūkoti tie matemātiskās analīzes jautājumi, kurus vēlāk izmantoja varbūtību teorijā. Otrajā grāmatā vispirms bija dota klasiskā varbūtības definīcija, neatkarīgu notikumu varbūtību summēšanas un reizināšanas teorēmas. Pēc tam tika aplūkoti vairāki elementārās varbūtību teorijas uzdevumi. Visbeidzot tika pierādītas Muavra—Laplasa robežteorēmas par binomiālā sadalījuma konverģenci uz normālsadalījumu. Laplasu interesēja pētījumi par galīgām notikumu summām, kuras viņš aplūkoja galvenokārt saistībā ar astronomiju. Diezgan daudz Laplasa darbā bija aplūkoti matemātiskās statistikas jautājumi. Laplass interesējās arī par liecinieku liecību un tiesu spriedumu varbūtībām. Šajos pētījumos Laplass balstījās uz pieņēmumu par dažādu tiesnešu spriedumu neatkarību. A. Puankarē atzīmēja, ka patiesībā šis nosacījums nav spēkā.

Vairāki Laplasa darbi bija veltīti kļūdu teorijai. Laplass izteica domu, ka novērojumu kļūda veidojas liela skaita neatkarīgu elementāru kļūdu summēšanas rezultātā. Ja šīs kļūdas ir mazas, tad novērojuma kļūdas sadalījums ir tuvs normālsadalījumam. Laplass ieteica lietot precizitātes mēra novērtējumu (dispersiju).

Kļūdu teoriju izveidoja K. G a u s s. Vispārēju atzinību guva mazāko kvadrātu metode. Šīs metodes atklāšanas un ieviešanas nopelni gan piederēja vēl diviem Gausa laikabiedriem — franču matemātiķim Ležandram un amerikāņu matemātiķim Edreinam.

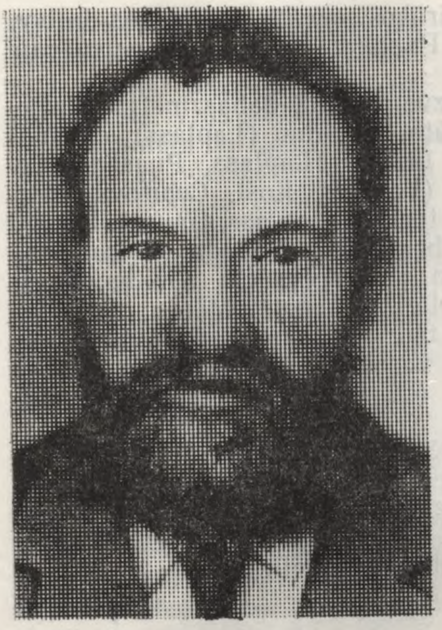
Varbūtību teorijā plaši pazīstams franču matemātiķa S. Puasona vārds. Viņa vārdā nosaukts sadalījuma likums un lielo skaitļu likums Puasona formā. S. Puasons sarakstīja vairāk nekā 300 zinātnisku darbu dažādās nozarēs. Puasona ieguldījums varbūtību teorijā pirmām kārtām saistīts ar viņa grāmatu «Pētījumi par krimināllietu un civillietu spriedumu varbūtību» (1837), kurā viņš turpināja Laplasa aizsākto uzdevumu pētīšanu. Puasons pirmais sāka aplūkot gadījuma lielumu kā vispārīgu jēdzienu. Jēdziens «gadījuma lielums» ilgu laiku nebija definēts, un to uzskatīja kā pašu par sevi saprotamu. Tikai XX gs. šo jēdzienu formalizēja A. Ļapunovs, P. Levi un A. Kolmogorovs. Puasona memuārs «Par novērojumu vidējo rezultātu varbūtību» bija pētījums kļūdu teorijā. Puasons interesējās par varbūtību teorijas metožu lietošanas paplašināšanu. Pats viņš nodarbojās ar šo metožu lietojumiem medicīnā un demogrāfijā.

O. Koši publicēja apmēram 10 darbus, kas attiecās uz novērojumu matemātisko apstrādi un daļēji arī uz varbūtību teoriju. Koši pētīja novērojumu apstrādi ar vidējo aritmētisko metodi un minmaksa metodi, kā arī pierādīja centrālo robežteorēmu.

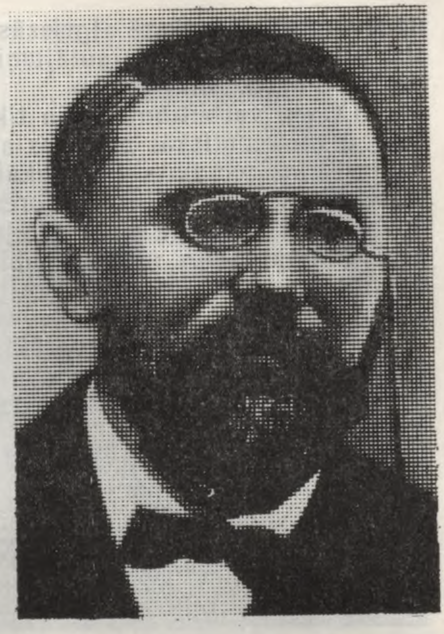
Parīzes matemātiķu skolas pētījumi varbūtību teorijā ātri kļuva pazīstami Krievijā. Apdrošināšanas biedrību attīstība, demogrāfiskie pētījumi, dažādu novērojumu matemātiskā apstrāde veicināja pirmo darbu izdošanu varbūtību teorijā Krievijā XIX gs. pirmajā pusē. Par varbūtību teorijas nozīmi un tās pasniegšanas nepieciešamību 1841. g. uzstājās Maskavas universitātes profesors N. Brašmanis. Viens no pirmajiem profesoriem, kas Krievijas augstskolās sāka lasīt varbūtību teorijas kursu, bija V. Buņakovskis, ievērojams zinātnisko pētījumu organizētājs un Pēterburgas Zinātņu akadēmijas viceprezidents. Viņš izdeva darbu «Matemātiskās varbūtību teorijas pamati» (1846). Buņakovskis daudz darīja, veidojot terminoloģiju krievu valodā. Atsevišķus rakstus varbūtību teorijā publicēja M. Ostrogradskis, kura zinātniskā darbība galvenokārt bija saistīta ar matemātisko analīzi, matemātisko fiziku un mehāniku.

Jauns pavērsiens varbūtību teorijas attīstībā bija saistīts ar P. Čebišova darbiem. 1846. g. Čebišovs aizstāvēja maģistra disertāciju «Varbūtību teorijas elementārā analīze». Līdzās radošajai darbībai Čebišovs nodarbojās arī ar lielas matemātiskās skolas izveidi: Pēterburgas matemātikas skolai bija nozīmīga loma matemātikas attīstībā. Pirmie P. Čebišova skolnieki bija A. Korkins, J. Zolotarjovs, A. Markovs, A. Ļapunovs, D. Grāve, V. Steklovs, A. Krilovs u. c.

Savā maģistra disertācijā Čebišovs izvirzīja mērķi izklāstīt varbūtību teoriju, minimāli izmantojot matemātiskās analīzes aparātu. Citā darbā — «Viena vispārīga varbūtību teorijas apgalvojuma elementārs pierādījums» (1846) — Čebišovs ar asprātīgu algebrisku metodi stingri pierādīja robežteorēmu, kura bija zināma Puasonam, taču Puasona pierādījums bija nestingrs. Nākamajā darbā — «Par



A. Ļapunovs



A. Puankarē

vidējiem lielumiem» (1867) — tika publicēts Čebišova lielo skaitļu likums, no kura Puasona un Bernulli lielo skaitļu likumi izriet kā speciāli gadījumi. Sacerējums «Par divām teorēmām attiecībā uz varbūtībām» (1887) bija viens no ievērojamākajiem Čebišova sasniegumiem. Šajā darbā izklāstīto programmu izpildīja A. Markovs un A. Ļapunovs.

XIX gs. otrajā pusē paplašinājās varbūtību teorijas lietojumi. 1871. g. L. Bolcmanis sāka publicēt rakstus par varbūtību teorijas izmantošanu gāzu kinētiskajā teorijā. Taču Bolcmaņa darbus atzina vienīgi kvantu mehānikas pamatlicējs M. Planks. Tikai XX gs. sākumā Bolcmaņa skolniekam P. Ērenfestam un viņa sievai T. Afanasjevai-Ērenfestai izdevās ar atbilstoša modeļa palīdzību pierādīt Bolcmaņa teorēmu pareizību (1907). Faktiski Maksvela un Bolcmaņa darbi lika pamatus klasiskajai statistiskajai fizikai.

XIX gs. beigās Anglijā Galtons, Bīrsons un Veldons radīja biometrisko skolu, kurā tika pētītas statistiskās likumsakarības bioloģijā. Pīrsons daudz strādāja korelāciju teorijā un izdeva vairākas svarīgas statistiskās tabulas.

XIX gs. beigās varbūtību teorijā tika publicēti Ž. Bertrāna un A. Puankarē raksti. Sevišķi interesants bija Bertrāna darbs «Varbūtības rēķini», kurā bija ietverti daudzi uzdevumi.

Arī Puankarē vairākkārt izdeva «Varbūtību rēķinus». Pirmajā izdevumā tika aplūkoti uzdevumi par varbūtībām ruletes spēlē un mazo planētu orbītu vienmērīgu sadalījumu. Pie līdzīga rakstura uzdevumiem Puankarē atgriezās vairākos populārzinātniskos darbos Par varbūtību teorijas jautājumiem Puankarē rakstīja arī populārajā darbā «Zinātne un metode».

XIX gs. varbūtību teorija tika izveidota kā dabaszinātņu disciplīna ar matemātiskās analīzes aparāta lietojumu (Laplass), dažādos veidos tika pierādīts lielo skaitļu likums (Laplass, Puasons, Čebišovs) un centrālā robežteorēma (Laplass, Koši, Čebišovs, Markovs). Bija izveidota klasiskā kļūdu teorija (Laplass, Gauss). Strauji pieauga statistikas nozīme sabiedrības dzīvē, pieauga arī sabiedrības interese par varbūtību teoriju un tās lietojumiem. XIX gs. otrajā pusē varbūtību teorija sāka veidoties kā matemātikas disciplīna (Čebišovs). Palielinājās varbūtību teorijas loma fizikā (Maksvels, Bolcmanis). Parādījās darbi, kuros varbūtību teorija tika pamatota no matemātiskās loģikas viedokļa (de Morgāns, Būls, Dževonss, Venns).

XIX gs. varbūtību teoriju vēl varēja pieskaitīt lietišķajai matemātikai. Tādēļ nav brīnums, ka D. Hilberts savā slavenajā runā Starptautiskajā matemātiķu kongresā Parīzē 1900. g. varbūtību teoriju pieskaitīja pie fizikas. Tikai XX gs. trīsdesmitajos gados varbūtību teoriju sāka uzskatīt par īsti matemātisku disciplīnu.

14.5. Ģeometrija

XIX gs. sākumā tika izdotas vairākas analītiskās ģeometrijas mācību grāmatas. Te minami franču matemātiķu S. Lakruā, Ž. Bio un Ž. Garnjē darbi. Daudzi analītiskās ģeometrijas uzdevumi, kas tagad atrodami katrā mācību grāmatā, pirmoreiz tika atrisināti G. Lamē darbā «Dažādu ģeometrisko uzdevumu atrisināšanas metodes» (1818). Pēc franču mācību grāmatām parādījās grāmatas arī vācu, angļu un krievu valodā.

Atšķirībā no XVIII gs. analītiskās ģeometrijas mācība par augstākas kārtas algebriskām līknēm un virsmām vairs netika aplūkota analītiskās ģeometrijas ietvaros, bet tā tika iekļauta algebriskajā ģeometrijā. Analītiskās metodes sāka izmantot projektīvās plaknes pētīšanā, kā arī neeiklīda telpu un daudzdimensiju telpu pētīšanā. XIX gs. sākumā intensīvi attīstījās diferenciālģeometrija.

Pēc Klero un Eilera XVIII gs. beigās vadošo vietu diferenciālģeometrijā ieņēma G. Monžs. Viņa darbi un it īpaši viņa pasniedzēja darbība Mezjēras Kara akadēmijā un Politehniskajā skolā piesaistīja daudzus skolniekus un sekotājus.

Nozīmīgs darbs diferenciālģeometrijā bija Gausa «Vispārīgie pētījumi par liektām virsmām» (1828). XIX gs. divdesmitajos gados Gauss izstrādāja augstākās ģeodēzijas principus. Aizsākums šim darbam bija valsts uzdevums — veikt precīzu meridiāna loka Getingene—Altona izmērīšanu. Vairāk nekā 15 gadus Gauss organizēja ģeodēziskos mērījumus. Pats viņš veica milzum daudz skaitlisko aprēķinu. Šo darbu laikā viņš vairāk pievērsās virsmu teorijai un aizsāka jaunu pētījumu virzienu — virsmas iekšējo ģeometriju.

Darbā «Vispārīgie pētījumi par liektām virsmām» Gauss izmantoja virsmas parametriskos vienādojumus. Viņš pirmoreiz precīzi formulēja virsmas iekšējās ģeometrijas jēdzienu un pierādīja, ka liekuma mērs (Gausa liekums) ir lielums, kas saistīts ar iekšējo ģeometriju. Turpat bija izklāstīta arī ģeodēzisko līniju teorija, kura arī ir virsmu iekšējās ģeometrijas sastāvdaļa. Gausa atklātā teorēma par ģeodēziskā trijstūra leņķu summu (šāda trijstūra leņķu summa ir lielāka nekā 180°, ja virsmai ir pozitīvs liekums, un mazāka kā 180°, ja virsmas liekums ir negatīvs) bija tieši saistīta ar Gausa dzīves laikā nepublicētajiem prātojumiem un aprēķiniem par neeiklīda ģeometriju. Gausa pētījumus virsmu iekšējā ģeometrijā turpināja vācu matemātiķi F. G. Mindings un K. Jakobi.


K. Pētersons

Matemātiskās fizikas, elastības teorijas un teorētiskās mehānikas pētījumiem bija nepieciešamas daudzas matemātikas nozares, arī ģeometrija. Tipiski šāda teorētiski lietišķā virziena pārstāvji diferenciālģeometrijā bija franču zinātnieki G. Lamē un A. Senvenāns.

XIX gs. četrdesmitajos gados Francijā ar diferenciālģeometriju nodarbojās Liuvila skola. Liuvils ne tikai attīstīja Monža virzienu, bet papildināja to ar Gausa idejām. Šīs skolas zinātnieki pētīja virsmas iekšējo ģeometriju un virsmu uzklāšanas jautājumus.

Ap XIX gs. vidu ar diferenciālģeometriju sāka nodarboties arī citās Eiropas valstīs: Anglijā — V. Hamiltons un Dž. Salmons, Vācijā — E. Kummers.

1867. g. O. Bonē «Memuārā par virsmām, kas uzklājamas uz dotās virsmas» pirmoreiz tika publicēta teorēma par virsmas definēšanu ar divām kvadrātiskām formām ar precizitāti līdz pārvietojumam. Taču vēl agrāk šo teorēmu bija pierādījis K. Pētersons, latviešu zemnieka dēls, kurš Tērbatas universitātē bija mācījies pie Mindinga. Šo teorēmu Pētersons bija pierādījis savā disertācijā «Par virsmas liekumu», kura tika uzrakstīta 1853. g., taču krievu tulkojumā iznāca tikai 1952. g. Svarīgākais Pētersona darbs bija «Par liektu virsmu attiecībām un līdzībām» (1866), kurš aizsāka lielu darbu ciklu par virsmu liekumiem. Diferenciālģeometrijā nozīmīgi bija vēl divi Pētersona darbi: raksts «Par līknēm un virsmām» (1867) un grāmata «Par līknēm un virsmām» (1868).

Neatkarīgi no Pētersona atsevišķus šajos darbos publicētos rezultātus ieguva G. Darbū un citi aizrobežu ģeometri, taču pēc 1905. g. Tulūzā publicētajiem E. Kosera Pētersona rakstu tulkojumiem Pētersona darbi ieguva vispārēju atzinību.

Pētersona darbi aizsāka Maskavas ģeometrijas skolu. Pirmie Pētersona sekotāji bija B. Mlodzejevskis, V. Cingers un D. Jegorovs. XX gs. divdesmito gadu sākumā D. Jegorovs kopā ar savu skolnieku N. Luzinu dibināja slaveno Maskavas funkciju teorijas skolu. Pēterburgā akadēmiķis O. Somovs attīstīja vektoru analīzes lietojumus ģeometrijā un mehānikā. Somovs izveidoja vektorfunkcijas diferencēšanas aparātu un izmantoja to telpisko līkņu pētīšanā.

Zviedrijā ar diferenciālģeometriju nodarbojās E. Bjerlings. Itālijā panākumus diferenciālģeometrijā guva A. Bordoni, D. Kodaci, F. Brioski, L. Kremons, E. Beltrami.

Projektīvā ģeometrija kā patstāvīga disciplīna izveidojās XIX gs. pirmajā pusē, kaut arī tās pirmsākumi meklējami jau antīkajā pasaulē. Interese par projektīvo ģeometriju XIX gs. aizsākās ar G. Monža darbiem tēlotājā ģeometrijā. Monža lekcijas bija klausījušies gan L. Karno, gan arī Š. Brianšons, V. Ponselē, Ž. Žergons un M. Šāls.

L. Karno publicēja trīs darbus ģeometrijā, kuros viņš definēja atsevišķus projektīvās ģeometrijas jēdzienus. Viņš pirmais definēja četru punktu anharmonisko attiecību, kā arī noskaidroja pilna četrstūra harmoniskās īpašības.

1815. g., atgriezies no Saratovas pēc gūstā pavadītā laika, Napoleona armijas kara inženieris V. Ponselē apkopoja uzrakstītās piezīmes «Traktātā par figūru projektīvām īpašībām», kurš Parīzē iznāca 1822. g. No šī traktāta nosaukuma radās termins «Projektīvā ģeometrija». Ponselē definēja plaknes figūru projektīvās īpašības kā īpašības, kuras saglabājas projekcijās un šķēlumos. Divas figūras Ponselē sauca par projektīvām, ja tās varēja iegūt vienu no otras ar vairākām projicēšanām. Ponselē pierādīja, ka koniskie šķēlumi ir projektīvas figūras. Līdz ar to tika pierādīts, ka konisko šķēlumu vispirms var projicēt par riņķa līniju, atrisināt uzdevumu riņķa līnijai un pēc tam veikt apgriezto projicēšanu. Ponselē grāmatā tika aplūkotas arī telpisku figūru projektīvās īpašības. Ponselē papildināja plakni ar bezgalīgi tālo punktu un definēja imagināro punktu un ciklisko punktu jēdzienus. Ponselē traktāts pabeidza projektīvās ģeometrijas pamatu izveidi. Tajā tika formulēts šīs zinātnes priekšmets, pamatjēdzieni, likumi un svarīgākās teorēmas, kas tika iegūtas ar sintētisko metodi.

XIX gs. divdesmito gadu beigās projektīvās ģeometrijas problēmas kļuva par centrālajām vairāku vācu matemātiķu darbos. Tie bija A. Mēbiuss, J. Šteiners, J. Plikers, O. Hese, H. Štauts u. c., kurus apvienoja līdzdalība «Krella žurnālā» (Journal für die reine und angewandte Mathematik).

Ponselē, Šteinera un Šāla darbos sintētiskā metode bija tik cieši saistīta ar projektīvās ģeometrijas priekšmetu, ka dažkārt šo ģeometriju sauca par sintētisko ģeometriju. Taču drīz vien ar Mēbiusa un Plikera darbiem projektīvajā ģeometrijā sāka lietot arī analītiskās metodes. Homogēnās koordinātas, kuras deva iespēju raksturot plaknes bezgalīgi tālos punktus, 1827. g. definēja Mēbiuss. Tai pašā gadā Mēbiuss definēja arī baricentriskās koordinātas. Izmantojot šīs koordinātas, varēja formulēt vairākas plaknes un telpas figūru afīnās un projektīvās īpašības. Mēbiuss pirmais izstrādāja pilnu četru taisnes punktu dubultattiecības teoriju un pierādīja tās invarianci projektīvās transformācijās.

Pēc Ponselē sintētisko metodi projektīvajā ģeometrijā visvairāk izmantoja J. Š t e i n e r s un M. Š ā l s. Pēc Šteinera projektīvās ģeometrijas sistēma bija jāattīsta, pakāpeniski pārejot no vienkāršām lineārām ģeometriskām formām uz sarežģītākām, bet pēc tam, izmantojot projektīvo atkarību, — uz augstāku kārtu objektiem. Šīs idejas Šteiners izklāstīja darbā «Ģeometrisko objektu savstarpējās atkarības sistemātisks izklāsts» (1832). Pirmās pakāpes objekti bija taisnes punktu virkne, taišņu šķipsna, plakņu šķipsna, otrās pakāpes objekti — vienas plaknes punkti un taisnes, taišņu un plakņu šķipsna, trešās pakāpes objekti — telpas punkti un plaknes. Darbā plaši tika izmantots dualitātes princips. Šteinera projektīvajā ģeometrijā bija daudz dažādu konstrukcijas uzdevumu.

M. Šāls sekoja franču ģeometru tradīcijām un savos pētījumos izmantoja sintētiskās metodes. Iespējams, ka Šāls pie savas projektīvās ģeometrijas sistēmas nonāca neatkarīgi no Šteinera, taču abu autoru darbos ir daudz kopīgu ideju. M. Šāls projektīvajā ģeometrijā definēja vispārīgu korelācijas jēdzienu. Svarīga loma intereses izraisīšanai par projektīvo ģeometriju bija M. Šāla augstākās ģeometrijas mācību grāmatai, kā arī viņa darbam «Vēsturisks apskats par ģeometrisko metožu rašanos un attīstību» (1837). Grāmatu ātri pārtulkoja daudzās Eiropas valstu valodās. M. Šāls, analizēdams Eiklīda, Papa, Dezarga u. c. darbus, pirmoreiz parādīja vairāku senāko laiku matemātiķu lomu projektīvās ģeometrijas izveidē.

XIX gs. vidū norisa karsti strīdi starp sintētiskās un analītiskās metodes piekritējiem projektīvajā ģeometrijā. Strīdnieki apvainoja cits citu projektīvo un metrisko jēdzienu jaukšanā. Sintētiskajā projektīvās ģeometrijas izklāstā pamatjēdziens bija četru taisnes punktu dubultattiecība. To definēja, izmantojot nogriežņu garumu. Taču arī projektīvo koordinātu definēšana, kas bija analītiskās metodes pamatā, balstījās uz attālumiem līdz trijstūra malām vai arī tika izmantotas formulas, kurās tāpat bija metriski jēdzieni. Tā radās problēma, kā atbrīvot projektīvo ģeometriju no metriskiem jēdzieniem.

Šī problēma saistīja vācu matemātiķa, K. Gausa skolnieka H. Š t a u t a uzmanību. H. Štautam izdevās atbrīvot projektīvo ģeometriju no elementārās ģeometrijas jēdzieniem. Savā darbā «Novietojuma ģeometrija» (1847) Štauts definēja harmonisko elementu četrinieku no dubultattiecības jēdziena ar t. s. pilno četrstūri.

Nozīmīgi bija A. K ē l ī rezultāti projektīvajā ģeometrijā. A. Kēlī bija analītiskās metodes piekritējs. Savus rezultātus viņš ieguva, lietojot algebrisko formu teoriju projektīvajā ģeometrijā. Darbā «Sestais memuārs par formām» (1859) A. Kēlī definēja projektīvo metriku. No šī darba rezultātiem izrietēja, ka ne tikai Eiklīda ģeometrija, bet arī citas metriskās ģeoemetrijas, kuras sauc par neeiklīda ģeometrijām, var aplūkot kā vispārīgās projektīvās ģeometrijas speciālu veidu, kad telpa ir papildināta ar kādu fiksētu otrās kārtas objektu.

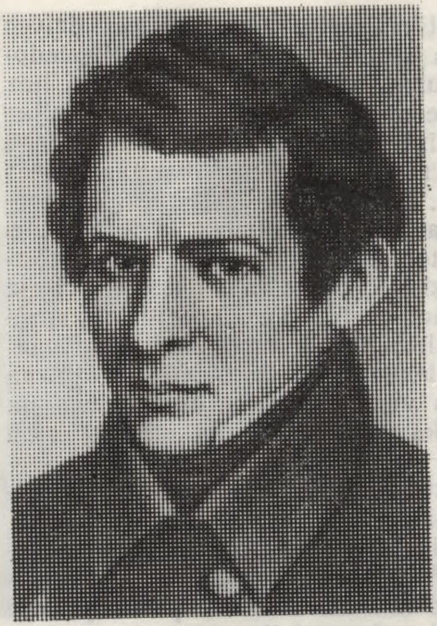
XIX gs. pie projektīvās ģeometrijas pieskaitīja arī algebrisko līkņu teoriju, kura vispirms tika aplūkota analītiskajā ģeometrijā. Algebriskās līknes sāka pētīt projektīvajā plaknē. Aprēķinu ērtības labad šo plakni uzskatīja par kompleksu. Nozīmīgs pētījumu virziens bija algebrisko virsmu teorija. 1849. g. A. Kēlī noskaidroja, ka uz gludas kubiskas virsmas var novietot vairākas taisnes. Dž. Salmons tai pašā gadā pierādīja, ka šo taišņu skaits ir 27. 1869. g. Karlsrūes politehnikuma tēlotājas ģeometrijas profesoram K. Vīneram izdevās izgatavot šīs virsmas modeli ar visām 27 taisnēm.

Svarīga loma afīnās ģeometrijas kā atsevišķas ģeometrijas nozares radīšanā bija H. Grasmaņa «Mācībai par lineāro izplatību» (1844). H. Grasmaņa definētie pamatjēdzieni bija «izplatības attēls», «izplatības lielumi» un dažādu pakāpju «sistēmas». Mūsdienu matemātikas valodā tiek lietoti jēdzieni «varietāte» un dažādu dimensiju lineārās telpas. Tātad H. Grasmaņa darbā tika aplūkota daudzdimensiju ģeometrija. 1862. gadā H. Grasmanis publicēja vēl vienu grāmatu — «Mācība par izplatību», kurā definēja «ekstensīvo lielumu» lineārās atkarības jēdzienu. Mūsdienu izpratnē tie ir abstraktas lineāras telpas vektori.

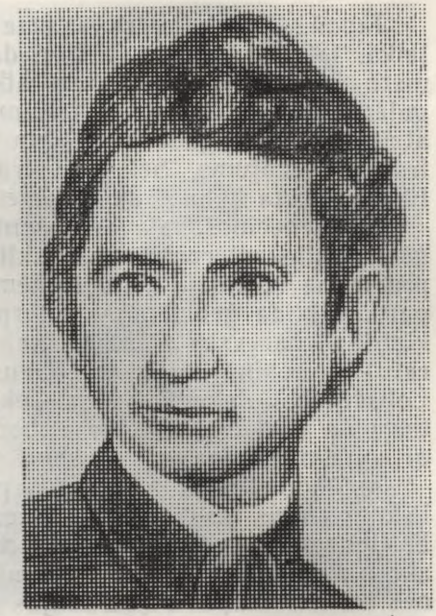
Neatkarīgi no H. Grasmaņa vektora jēdzienu definēja V. Hamiltons. Viņam vektora jēdziens bija cieši saistīts ar kvaternioniem. Vektoru rēķinus V. Hamiltons sistemātiski izklāstīja «Lekcijās par kvaternioniem» (1853). Līdz ar vektoru algebru V. Hamiltons aizsāka vektoru analīzi. Angļu fiziķis Dž. Maksvels vektoru analīzi lietoja elektromagnētiskā lauka teorijā. Dž. Maksvela «Traktāts par elektrību un magnētismu» (1873) piesaistīja vektoru analīzei fiziķu uzmanību. Angļu fiziķi Dž. Gibss un O. Hevisaids apvienoja H. Grasmaņa un V. Hamiltona vektoru rēķinus un izveidoja mūsdienu vektoru algebru.

Daudzus gadsimtus ilgie mēģinājumi pierādīt Eiklīda V postulātu XIX gs. noslēdzās ar jaunas ģeometrijas izveidi, kurā V postulāts nav spēkā.

N. Lobačevskis pirmo darbu ģeometrijā uzrakstīja 1823. g., taču tas tika publicēts pēc viņa nāves. 1826. g. N. Lobačevskis atklāja, ka V postulāts nav atkarīgs no pārējām Eiklīda ģeometrijas aksiomām. 1826. gada 11.(23.) februārī Kazaņas universitātes fizikas un matemātikas fakultātes sēdē viņš uzstājās ar referātu «Īss ģeometrijas pamatu izklāsts ar stingru teorēmas par paralēlām taisnēm pierādījumu». Šis referāts tika iekļauts N. Lobačevska pirmajā publikācijā par neeiklīda ģeometriju — rakstā «Par ģeometrijas pamatiem» (publicēts Kazaņas universitātes žurnālā 1829.—1830. g.). Pēc tam par jauno ģeometriju Lobačevskis publicēja vēl trīs darbus «Kazaņas universitātes zinātniskajās piezīmēs» (1835—1838). 1840. g. N. Lobačevska «Iedomātās ģeometrijas» pārstrādāts teksts franču valodā iznāca Berlīnē matemātikas žurnālā, bet vācu valodā



N. Lobačevskis



J. Bojaji

tai pašā gadā šis darbs iznāca atsevišķā grāmatā — «Ģeometriski pētījumi paralēlo līniju teorijā». 1855. un 1856. g. Kazaņā N. Lobačevskis krievu un franču valodā publicēja «Panģeometriju» («Vispārīgo ģeometriju»).

K. Gauss augstu novērtēja N. Lobačevska darbu «Ģeometriskie pētījumi» un sekmēja N. Lobačevska ievēlēšanu par Getingenes zinātniskās biedrības korespondētājlocekli. Taču presē ar jaunās ģeometrijas novērtējumu K. Gauss neuzstājās. Jau XVIII gs. deviņdesmitajos gados K. Gauss pats sāka nodarboties ar paralēlo līniju teoriju un nonāca pie tādiem pašiem secinājumiem kā N. Lobačevskis. K. Gausa rezultāti publicēti netika. Tie ir saglabājušies atsevišķos melnrakstos un vēstulēs draugiem.

Neatkarīgi no N. Lobačevska un K. Gausa neeiklīda ģeometriju atklāja ungāru matemātiķis J. Bojaji. Kad J. Bojaji ieguva tādus pašus rezultātus kā K. Gauss un N. Lobačevskis, viņa tēvs F. Bojaji, kaut arī nesaprata dēla darbu, tomēr publicēja to kā pielikumu savai mācību grāmatai matemātikā 1832. g. Šo darbu F. Bojaji nosūtīja arī K. Gausam, savam studiju biedram, taču viņš neko neatbildēja. 1837. g. J. Bojaji piedalījās konkursā par Leipcigas zinātniskās biedrības prēmiju ar darbu «Imagināro skaitļu ģeometriskās teorijas pilnveidošana». Taču izrādījās, ka J. Bojaji bija atklājis jau agrāk publicētos V. Hamiltona rezultātus. Tāpēc arī šis darbs netika pienācīgi novērtēts. J. Bojaji pārdzīvoja smagu depresiju, no kuras lāgā neattapās līdz pat mūža beigām.

Jaunās ģeometrijas sistēma netika atzīta tās radītāju dzīves laikā. 1865. g. iznāca A. Ķēlī darbs «Piezīme par Lobačevska iedomāto ģeometriju». Kaut arī atklājuma būtību A. Ķēlī nebija līdz galam izpratis, tomēr šī piezīme veicināja Lobačevska ģeometrijas atzīšanu. 1866. gadā Bordo un Parīzē iznāca N. Lobačevska darba franču tulkojums. Sekoja vairāku matemātiķu publikācijas, kurās tika aplūkota Lobačevska ģeometrija.

Vispārliecinošākais arguments jaunās ģeometrijas labā bija šīs ģeometrijas interpretācijas Eiklīda telpā. Pirmās divas šādas interpretācijas izveidoja itāļu matemātiķis E. Beltrami darbā «Eseja par neeiklīda ģeometrijas interpretāciju» (1868). E. Beltrami aprēķināja Lobačevska plaknes lineāro elementu (loka diferenciāļa kvadrātu). Aprēķinājis virsmas Gausa liekumu, E. Beltrami atklāja, ka Lobačevska plaknes Gausa liekums visos tās punktos ir viens un tas pats $(-1/r^2)$, t. i., ka Lobačevska plakni var aplūkot kā virsmu ar konstantu negatīvu liekumu.

Aplūkojot Eiklīda plaknes punktus ar koordinātām, kas skaitliski vienāds ar Beltrami koordinātām u, v Lobačevska plaknē, E. Beltrami ieguva otru interpretāciju. Šajā interpretācijā Lobačevska plakne attēlojās par riņķa $u^2+v^2=a^2$ iekšpusi, bet visas šīs plaknes taisnes — par riņķa līnijas hordām. Beltrami interpretācija bija pirmais, tiesa, nepilnīgs, Lobačevska ģeometrijas nepretrunīguma pierādījums.

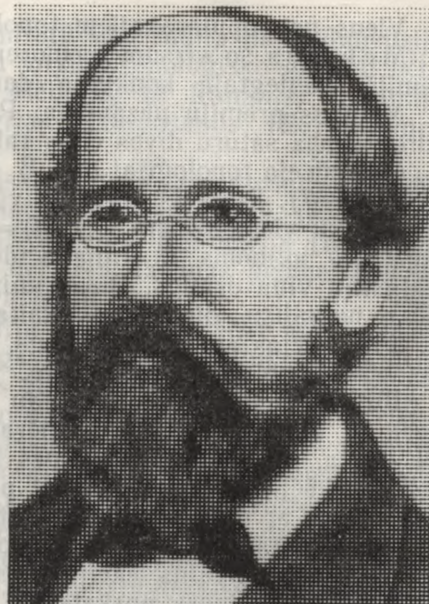
Par vienu no Lobačevska ģeometrijas interpretācijām var uzskatīt arī A. Ķēlī aplūkoto projektīvo plakni ar tajā definēto metriku. Tagad šādu plakni sauc par eliptisko plakni vai Rīmaņa plakni.

Sakaru starp Ķēlī projektīvajām metrikām un Lobačevska ģeometriju atrada vācu ģeometrs F. Kleins 1871. g. Noskaidrojis, ka Lobačevska telpas pārvietojumu grupa, kā arī Eiklīda telpas un citu projektīvo metriku transformāciju grupa ir telpas projektīvo transformāciju grupas apakšgrupas, F. Kleins nonāca pie vispārīgas idejas par transformāciju grupu nozīmi ģeometrijā. Šīs idejas F. Kleins izklāstīja lekcijā, ko viņš nolasīja, stājoties Erlangenes universitātes profesora amatā. Tagad šī lekcija ir pazīstama kā «Erlangenes programma» (1872). To sīkāk aplūkosim nedaudz vēlāk.

Rakstā «Par tā saucamo neeiklīda ģeometriju» (1871) F. Kleins definēja trīsdimensiju eliptisko ģeometriju. Viņš ierosināja šo ģeometriju nosaukt par eliptisko ģeometriju analogi dažkārt Lobačevska ģeometrijā lietotajam terminam «hiperboliskā ģeometrija». Svarīgāko eliptiskās telpas ģeometrijas faktu atklājējs bija angļu matemātiķis V. Klifords.

Attīstoties n-mainīgo algebrisko formu un vairākkārtīgo integrāļu teorijai, radās nepieciešamība pēc vairākargumentu funkciju ģeometriskās interpretācijas. Tā pakāpeniski izveidojās daudzdimensiju telpu ģeometrija. Tās pamatlicēji bija H. Grasmanis, L. Šlefli un B. Rīmanis. XIX gs. septiņdesmitajos gados vairākus darbus daudzdimensiju ģeometrijā publicēja F. Kleins. 1875. g. K. Žordāns publicēja «Eseju par n-dimensiju ģeometriju», kurā lietoja mūsdienīgu simboliku. Jaunu virzienu daudzdimensiju ģeometrijā izveidoja

F. Kleins



B. Rīmanis

B. Rīmanis pazīstamajā runā «Par hipotēzēm, kas ir ģeometrijas pamatā». Tā tika nolasīta 1854. g. 10. jūnijā kā mēģinājuma lekcija Getingenes universitātē. Rīmaņa aplūkotās daudzdimensiju telpas tagad sauc par Rīmaņa telpām, bet šo telpu ģeometriju — par Rīmaņa ģeometriju. Piemērs n-dimensiju Rīmaņa telpai ar konstantu pozitīvu liekumu ir sfēra $(n+1)$-dimensiju Eiklīda telpā. Savukārt piemērs n-dimensiju Rīmaņa telpai ar konstantu negatīvu liekumu ir n-dimensiju Lobačevska telpa.

XIX gs. otrajā pusē līdz ar daudzdimensiju Eiklīda un neeiklīda ģeometrijām sāka izstrādāt arī daudzdimensiju projektīvo ģeometriju. Matemātiķi lielākoties pētīja daudzdimensiju komplekso projektīvo telpu un algebriskās līnijas un virsmas tajā. Šie darbi bija vairāk algebriski nekā ģeometriski.

Jau XIX gs. sākumā vairāki matemātiķi mēģināja vispārināt Eilera teorēmu par izliektiem daudzskaldņiem: izliekta daudzskaldņa virsotņu skaitu N_0, šķautņu skaitu N_1 un skaldņu skaitu N_2 saista sakarība $N_0-N_1+N_2=2$. Šai teorēmai bija būtiska loma topoloģijas izveidē. Pirmais Eilera teorēmu vispārināja Politehniskās skolas profesors L. Puanso darbā «Par daudzstūriem un daudzskaldņiem» (1810). Pēc tam sekoja O. Košī darbs «Pētījumi par daudzskaldņiem» (1813). Termins «topoloģija» pirmoreiz tika lietots Getingenes matemātiķa un fiziķa J. Listinga darbā «Pirmie pētījumi topoloģijā» (1847). J. Listings aplūkoja dažādus pinuma, mezglu un citus lineāro kompleksu savstarpējā novietojuma veidus. J. Listinga izklāstā bija daudz piemēru no bioloģijas un tehnikas.

Viens no populārākajiem topoloģijas objektiem ir Mēbiusa lapa. A. Mēbiuss šo virsmu pirmoreiz aprakstīja 1861. g. Parīzes akadēmijā iesniegtajā konkursa darbā. Žūrija darbu nesaprata, un A. Mēbiuss prēmiju nesaņēma. Pēc tam A. Mēbiuss publicēja konkursa darba saturu divos citos rakstos, kuri iznāca 1863. un 1865. g.

Cita pieeja topoloģijai bija B. Rīmaņa darbā «Ābela funkciju teorija» (1857). Rīmanis aplūkoja virsmas, ko apslēptā veidā uzdod ar algebrisku vienādojumu $F(x, y)=0$, kur $F(x, y)$ — komplekso mainīgo x, y polinoms. B. Rīmaņa idejas par daudzdimensiju topoloģiju izklāstīja viņa draugs, Pizas universitātes profesors E. Betti darbā «Par patvaļīga dimensiju skaita telpām» (1871). B. Rīmaņa un E. Betti idejas savukārt XIX gs. beigās izmantoja A. Puankarē, izveidojot kombinatoro topoloģiju.

Būtisku ieguldījumu dažādu topoloģijas uzdevumu risināšanā deva K. Žordāns. Tā, piemēram, viņš pierādīja teorēmu par to, ka slēgta, nepārtraukta plaknes līnija sadala plakni divos apgabalos — iekšējā un ārējā, turklāt pie iekšējā apgabala vienmēr pieder kāds riņķis ar galīgu rādiusu (1887).

Jau minējām «Erlangenes programmu», t. i., F. Kleina 1872. g. nolasīto lekciju. Pilns lekcijas nosaukums bija «Jaunāko ģeometrisko pētījumu salīdzinošs apskats». F. Kleins secināja, ka jebkura ģeometrija būtībā ir mācība par vienas vai otras transformāciju grupas invariantiem. F. Kleins «Erlangenes programmu» sāka ar transformāciju grupas definīciju. No trīsdimensiju Eiklīda telpas viņš pārgāja uz patvaļīgu varietāti. Kā ģeometrijas vispārinājumu F. Kleins formulēja šādu uzdevumu: dota varietāte un transformāciju grupa tajā, jāattīsta šīs grupas invariantu teorija. «Erlangenes programmā» tika aplūkoti arī transformāciju grupu izomorfisma gadījumi, kuri dod iespēju vienu ģeometriju interpretēt citā ģeometrijā.

XIX gs. ģeometrijas attīstībā var izsekot šādām trim galvenajām līnijām.

1. Tika padziļinātas ģeometriskās metodes un rezultāti, kas attiecās uz Eiklīda telpu, īpaši diferenciālģeometrijā. Tika radīta invariantu un formu teorija, kas ar precizitāti līdz pārvietojumam nosaka telpisku līkni (Ž. Sere, F. Frenē), virsmu (K. Gauss, K. Pētersons, P. Bonē) un taisnlīniju kongruenci (E. Kummers). Tika izpētītas daudzas speciālu veidu līknes, virsmas, kongruences, ievērojami attīstīta virsmu liekumu teorija.

2. Tika paplašināti priekšstati par telpu. Te galvenais bija neeiklīda ģeometrijas atklāšana (N. Lobačevskis, J. Bojaji, K. Gauss, A. Ķēlī, F. Kleins). Projektīvā ģeometrija, kas sākotnēji bija Eiklīda plaknes figūru projektīvo īpašību teorija (V. Ponselē, A. Mēbiuss, J. Plikers, J. Šteiners, M. Šāls), tika pārveidota par projektīvās telpas ģeometriju (H. Štauts, A. Ķēlī). XIX gs. tika radīta afīnā un konformā ģeometrija (A. Mēbiuss, Ž. Liuvils) un likti pamati simpleksu ģeometrijas izveidei (A. Mēbiuss). Radās arī daudzdimensiju Eiklīda un afīnā ģeometrija (A. Ķēlī, H. Grasmanis), pēc tam — daudzdimensiju projektīvā un neeiklīda ģeometrija (B. Rīmanis, E. Beltrami). Virsmu iekšējās ģeometrijas (K. Gauss, F. Mindings,

Ž. Liuvils, P. Bonē) attīstības rezultātā tika radīta daudzdimensiju Rīmaņa telpu ģeometrija. Līkņu un virsmu topoloģisko īpašību pētīšana (K. Gauss, J. Listings, A. Mēbiuss, B. Rīmanis) veicināja daudzdimensiju varietāšu topoloģijas izveidošanos (B. Rīmanis, E. Betti).

3. Sākās arvien plašāka algebrisko metožu izmantošana ģeometrijā. Attīstījās līkņu un virsmu algebriskā ģeometrija (J. Plikers, B. Rīmanis, R. Klebšs), transformāciju grupu ģeometrija (H. Helmholcs, F. Kleins, S. Lī). F. Kleins definēja dažādas ģeometrijas kā noteiktas transformāciju grupas invariantu teoriju.

Pirmo ģeometrijas attīstības līniju XIX gs. zināmā mērā varēja uzskatīt par izsmeltu, kaut arī XX gs. turpinājās pētījumi trīsdimensiju telpas Eiklīda ģeometrijā un šīs ģeometrijas aksiomātikā. XX gs. par ģeometrijas galveno saturu kļuva otrās un trešās līnijas tālāka attīstība. XX gs. telpas jēdziena tālāka vispārināšana notika vairākos virzienos. XX gs. sākumā tika formulēts vispārīgais topoloģiskās telpas jēdziens (F. Hausdorfs u. c.), pēc tam tika precizēts topoloģiskas varietātes jēdziens (R. Brauers), uz vispārīgām topoloģiskām telpām tika attiecināti Puankarē kombinatorās topoloģijas jēdzieni (P. Aleksandrovs, A. Kolmogorovs, L. Pontrjagins, Dž. Aleksanders, H. Hopfs u. c.). A. Einšteina atklātā speciālā relativitātes teorija (1905) izraisīja jaunu interesi par neeiklīda ģeometrijām. XX gs. sākumā sāka izstrādāt pseidoeiklīda telpas ģeometriju, kas aprakstīja speciālās relativitātes teorijas telpas-laika kontinuumu (A. Puankarē, H. Minkovskis, F. Kleins, A. Zommerfelds), bet pēc tam — Galileja telpas ģeometrija, kura aprakstīja klasiskās Galileja—Ņūtona mehānikas telpas-laika kontinuumu (A. Koteļņikovs). Tā rezultātā radās jaunas projektīvo metriku klases (V. Blaške, D. Sommervils). Vēl lielāka nozīme bija A. Einšteina vispārīgās relativitātes teorijas atklāšanai (1916). Pieauga interese par Rīmaņa ģeometriju, kurā Levi-Čivita atklāja paralēlo pārnesi (1917). Radās pseidorīmaņa telpas ģeometrija, kura aprakstīja vispārīgās relativitātes teorijas telpas-laika kontinuumu. Tika pilnveidota G. Ričči XIX gs. beigās izgudrotā tenzoru analīze. Vispārīgas lauka teorijas radīšanas mēģinājumu rezultātā tika atklātas telpas ar afīnu sakarīgumu (H. Veils, J. Shoutens, E. Kartāns), pēc tam — telpas ar projektīvu un konformu sakarīgumu (E. Kartāns). Šīs telpas attiecas pret afīno projektīvo telpu un konformu telpu kā Rīmaņa telpa pret Eiklīda telpu. Savukārt šo teoriju rezultātā tika radīts vispārīgs homogēnas sakarīgas telpas jēdziens. Radās diferencējamu varietāšu teorija (O. Veblēns, Dž. Vaitheds), uz kuras bāzes tika precizēta sakarīgu telpu teorija un slāņveida telpu teorija. Izveidojās diferenciālā topoloģija. Uz topoloģijas metožu bāzes izveidojās vispārīgā diferenciālģeometrija gan trīsdimensiju Eiklīda telpā, gan daudzdimensiju un neeiklīda telpās (A. Aleksandrovs). Attīstījās projektīvā diferenciālģeometrija (G. Fubini, E. Čehs, S. Fiņikovs), afīnā diferenciālģeometrija (V. Blaške, P. Širokovs), konformā diferenciālģeometrija. Algebriskās metodes, kuras ģeometrijā sāka izmantot XIX gs., XX gs. kļuva par pamatmetodēm. Turpinājās algebriskās ģeometrijas tālāka

H. Veils

S. Banahs

attīstība, no kuras, apvienojoties ar topoloģiju, radās algebriskā topoloģija. Ģeometrijā plaši tika izmantotas Lī grupas. Šajā virzienā radās simetrisko telpu teorija (P. Širokovs, E. Kartāns) un reduktīvo telpu teorija (K. Nomidzu, P. Raševskis). Klasiskās projektīvās ģeometrijas, kā arī neeiklīda un konformā ģeometrija bija parasto Lī grupu ģeometrijas. XX gs. tika izveidotas arī pārējo Lī grupu ģeometrijas (E. Študi, G. Fubini, Dž. Kūlidžs, E. Kartāns, K. Ševalē), pēc tam radās kvazivienkāršo Lī grupu ģeometrija un sarežģītāku grupu ģeometrijas. Daudzas no vienkāršo, kvazivienkāršo u. c. Lī grupu ģeometrijām ir ģeometrijas pār algebrām. Tādēļ bija nepieciešams radīt vispārīgu teoriju telpām pār algebrām un vispārīgākiem gredzeniem. Vēl viens stimuls šādas teorijas radīšanai bija D. Hilberta darbs par ģeometrijas pamatiem. Tādējādi XIX gs. beigās un XX gs. sākumā radās ģeometrijas pār galīgiem laukiem (Dž. Fano, O. Veblēns), kuras guva negaidītus lietojumus kombinatorajā analīzē un matemātiskajā statistikā.

No XIX gs. beigās veiktajiem funkciju teorijas pētījumiem (S. Pinkerlē) un XX gs. sākumā radītās integrālvienādojumu teorijas (D. Hilberts) radās bezgalīgo dimensiju telpu teorija (D. Hilberts, S. Banahs). Tā kļuva par topoloģijas un funkcionālanalīzes pētījumu objektu XX gs.

XVIII gs. bija uzkrāts plašs faktu materiāls analītisko funkciju teorijā. Šī laika matemātiķi atzina, ka analītiskās funkcijas ir lietderīgi pētīt kā kompleksā mainīgā funkcijas.

Svarīga nozīme analītisko funkciju teorijas turpmākajā attīstībā bija komplekso skaitļu ģeometriskajai interpretācijai ar vektoriem vai plaknes punktiem. Pirmoreiz kompleksos skaitļus kā orientētus nogriežņus aplūkoja dāņu ģeodēzists K. Vesels darbā «Par virzienu analītisku izteikšanu» (1799), taču šo darbu matemātiķi pienācīgi novērtēja tikai pēc 100 gadiem. Neatkarīgi no K. Vesela komplekso skaitļu ģeometrisko interpretāciju 1806. g. aplūkoja francūzis A. Buē un šveicietis Ž. Argans. Sistemātiska komplekso skaitļu interpretācija ar plaknes punktiem sākās pēc K. Gausa darba «Bikvadrātisko atlikumu teorija» (1831) publicēšanas. K. Gauss pirmais lietoja terminu «kompleksais skaitlis». Vairākkārt pie kompleksā skaitļa jēdziena atgriezās franču matemātiķis O. Košī. Gandrīz trīsdesmit gadus O. Košī nodarbojās ar funkciju teorijas problēmām. Viņa darbi veido šīs teorijas pamatu. Pirmais nozīmīgākais O. Košī pētījums bija «Memuārs par noteikto integrāļu teoriju» (Parīzes Akadēmijā iesniegts 1814. g., bet publicēts 1825. g.); pavisam biogrāfi ir saskaitījuši 789 publicētus O. Košī zinātniskus darbus gandrīz visās matemātikas nozarēs.

O. Košī lasīja lekcijas matemātiskajā analīzē Politehniskajā skolā. Lekciju kurss tika publicēts trīs grāmatās: «Algebriskā analīze» (1821), «Lekciju par bezgalīgi mazo lielumu rēķiniem rezumējums» (1823), «Lekcijas par analīzes lietojumu ģeometrijā» (2 sēj.; 1826, 1828). Šajās grāmatās pirmoreiz matemātiskā analīze tika izklāstīta, pamatojoties uz robežu teoriju. O. Košī lekcijās aplūkoja vairākus rindu konverģences pietiekamos nosacījumus. Pilnu nosacījumu izpēti rindu konverģencei kompleksajā plaknē veica N. Ābels 1826. g. Jaunas pietiekamās konverģences pazīmes, kas vēlāk tika iekļautas mācību kursos, atrada J. Rābe (1832), N. Lobačevskis (1834), E. Kummers (1835), Ž. Bertrāns (1842), V. Jermakovs (1870) u. c.

O. Košī lekciju kursā aplūkotie integrālrēķini būtiski atšķirās no L. Eilera un citu agrāko matemātiķu darbos aplūkotajiem integrālrēķiniem. O. Košī par pamatjēdzienu izvēlējās noteikto integrāli un analītiski pierādīja nepārtrauktas funkcijas noteiktā integrāļa eksistenci. O. Košī lekcijās tika aplūkota arī funkciju izvirzīšana Teilora un Maklorēna rindās.

Matemātiskās analīzes pamatu tālākiem pētījumiem bija nepieciešams izmantot kopu teorijas un reālā mainīgā funkciju teorijas faktus un metodes. Šādi pētījumi tika aizsākti XIX gs. pirmajā pusē. Lielākie nopelni šai jomā bija čehu zinātniekam B. Bolcano. Viņa galvenie rezultāti gan kļuva zināmi tikai XIX gs. septiņdesmitajos gados. B. Bolcano nozīmīgākā sacerējuma «Mācība par funkcijām» rokrakstu atrada tikai 1920. g., bet publicēja 1930. g., tas ir, tieši simts gadus pēc tā uzrakstīšanas. B. Bolcano matemātiskās analīzes pamatojumā bija izdarījis daudz ko pirms O. Košī un K. Veierštrāsa. Tā, piemēram, 1817. g. B. Bolcano pierādīja šādu teorēmu: ja reālo skaitļu kopa ir ierobežota no augšas (attiecīgi no apakšas), tad tai eksistē suprēms (infīms). K. Veierštrāss šo teorēmu formulēja pēc 1860. g. Dažus gadus pirms O. Košī B. Bolcano formulēja virkņu konverģences kritēriju un stingru funkcijas nepārtrauktības definīciju, kā arī definēja vienpusējās nepārtrauktības jēdzienu. B. Bolcano pētīja arī nepārtrauktas funkcijas.

Ap XIX gs. vidu bija izstrādāta robežu teorija, mūsdienu funkciju teorijas un kopu teorijas elementi. Taču ievērojamākie Eiropas matemātiķi nesteidzās izmantot šo metodi savos darbos, bet deva priekšroku G. V. Leibnica bezgalīgi mazo lielumu rēķiniem. Daudzus jēdzienus nepieņēma tāpēc, ka tie bija aprakstoši, bez kvantitatīva novērtējuma, piemēram, «neierobežoti tuvojas», «cik patīk mazs». Bez tam robežu teorijā tika atrasti loģiski trūkumi, no kuriem teorijas piekritējiem neizdevās izvairīties. Te kā piemēru var minēt reālā skaitļa definīciju. Reālo skaitli definēja kā racionālu skaitļu virknes robežu. Piemēram, $\sqrt{2}$ aplūkoja kā robežu virknei 1; 1,4; 1,41; 1,414 .... Taču, lai šādi definētu skaitli, iepriekš jāpieņem tā eksistence. Tādējādi rodas loģisks riņķis.

Lai izstrādātu analīzes pamatojumu, vajadzēja a) izveidot stingru reālā skaitļa teoriju, b) iekļaut matemātikā bezgalīgas kopas jēdzienu, c) izdalīt pilnā apjomā nepārtraukto funkciju klasi un vispārīgajā klasifikācijā iekļaut iespējami plašāku pārtraukto funkciju klasi.

1872. g. iznāca vairāki nozīmīgi darbi: pirmais G. Kantora darbs par aritmētikas pamatiem, R. Dedekinda «Nepārtrauktība un iracionālie skaitļi», kā arī E. Heines un Š. Merē raksti par reālā skaitļa teoriju. Par šiem jautājumiem bija runa arī K. Veierštrāsa lekcijās analītisko funkciju teorijā, kuras viņš lasīja Berlīnes universitātē. R. Dedekinds definēja reālos skaitļus kā šķēlumus racionālo skaitļu kopā. G. Kantors reālo skaitli definēja kā konverģentu racionālo skaitļu virkni. K. Veierštrāsam reālā skaitļa definēšana bija tikai viena daļa no vispārīgā plāna par matemātiskās analīzes izveidošanu uz stingriem pamatiem. K. Veierštrāss ieviesa matemātiskajā analīzē daudzus svarīgus rezultātus: sistemātiski izmantoja skaitļu kopas suprēma un infīma jēdzienus, lietoja robežu teoriju, pierādīja teorēmu par to, ka slēgtā intervālā nepārtraukta funkcija sasniedz savu lielāko un mazāko vērtību, konstruēja nepārtrauktu funkciju, kurai nevienā punktā neeksistē atvasinājums, u. c. Apmēram ap 1880. g. matemātiskā analīze bija ieguvusi mūsdienīgo veidu.

Bezgalīgo kopu teoriju un transfinīto skaitļu teoriju izstrādāja Halles universitātes profesors G. Kantors. Viņš pierādīja (1874), ka racionālo un reālo skaitļu kopas nav ekvivalentas. 1878. g. G. Kantors definēja vispārīgo kopas apjoma jēdzienu. Sistemātisku kopu teorijas izstrādi G. Kantors pabeidza 1879.—1884. g.

Veierštrāsa funkciju teorijas un Kantora kopu teorijas attīstība XIX gs. beigās notika asas kritikas un cīņas apstākļos. Īpaši noraidoši pret šīm teorijām uzstājās Berlīnes universitātes profesors

L. Kronekers, kurš bija matemātikas aritmizācijas piekritējs. Tas nozīmēja cenšanos jebkuras matemātikas nozares pamatojuma problēmas reducēt uz naturālo skaitļu virknēm. L. Kronekera pozīciju spilgti raksturoja viņa apgalvojums, ka «veselos skaitļus radījis Dievs, bet viss pārējais ir cilvēka roku darbs». Šādi uzskati būtiski kaitēja paša L. Kronekera zinātniskajai darbībai. A. Puankarē jokojot izteicās, ka «L. Kronekers sasniedza izcilus rezultātus matemātikā tikai tāpēc, ka reizēm aizmirsa savu filozofisko pārliecību».

A. Lebegs

G. Kantora izveidotā kopu teorija vēlāk kļuva par abstraktās kopu teorijas pamatu. Robežpunkta jēdziens un ar to saistītais kopas slēgtības jēdziens pēc A. Lebega definētā kopas mēra jēdziena un E. Borela pētījumiem noveda pie metriskās kopu teorijas izveide pamatu vispārīgajai trigonometrisko rindu un integrēšanas teorijai. Vēlāk A. Lebega, K. Karateodori, F. Hausdorfa u. c. darbos tika izveidota vispārīgā mēra teorija. Šī teorija savukārt noderēja par

Kopu teorija būtiski ietekmēja matemātikas attīstību. Tā kļuva par pamatu mūsdienu reālā mainīgā funkciju teorijai, topoloģijai, algebrai un grupu teorijai, funkcionālanalīzei. Tas tomēr nenozīmē, ka visa matemātika būtu reducējama uz kopu teoriju. Jau G. Kantora dzīves laikā pašā kopu teorijā tika atklāti paradoksi, piemēram, paradokss par visu kopu kopas eksistenci, u. c. Kopu teorijas pamatojuma un tās pielietojamības robežu jautājumi XX gs. tika iekļauti matemātiskajā loģikā.

O. Košī matemātiskās analīzes kursā centās izveidot vienotu un stingru bezgalīgi mazo lielumu analīzi. Tajā tika sistematizēti arī fakti par komplekso mainīgo izmantošanu analīzē. Sākotnēji O. Košī lekcijās nebija nekā principiāli jauna salīdzinājumā ar viņa priekštečiem K. Gausu, P. Laplasu, S. Puasonu. Pirmos būtiskos rezultātus par to, kāda jēga ir operācijām ar imagināriem lielumiem, O. Košī publicēja 1825. g. «Memuārā par noteikto integrāļu teoriju» un «Memuārā par noteiktiem integrāļiem ar imaginārām robežām».

O. Košī darbos pirmoreiz atrodama integrālā formula

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c}\frac{f(\bar{x})}{\bar{x}-x}\,d\bar{x},$$

kurai bija svarīga nozīme turpmākajā kompleksā mainīgā funkciju teorijas attīstībā.

Citos darbos O. Košī aplūkoja šīs teorēmas lietojumus rindu konverģences teorijā, Teilora rindas atlikuma locekļa noteikšanā un operācijās ar rindām. Pēc O. Košī daudzi XIX un XX gs. matemātiķi savos darbos aplūkoja viņa integrālo teorēmu.

Vienlaikus ar O. Košī darbiem un vēlāk iznāca daudz darbu kompleksā mainīgā funkciju teorijā. 1827. g. tika izdots N. Ābela darbs «Pētījumi par rindu $1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots$, kur m un x ir jebkuri kompleksi skaitļi», kurā pierādītas divas svarīgas teorēmas. Šajā darbā N. Ābels norādīja arī uz O. Košī kļūdu, ka konverģentas nepārtrauktu funkciju rindas summa arī ir nepārtraukta. N. Ābels aizsāka algebrisko funkciju teoriju un (vienlaikus ar K. Jakobi) eliptisko funkciju teoriju.

XIX gs. četrdesmitajos gados kompleksā mainīgā funkciju teorijā tika izdarīti visi lielākie atklājumi, būtībā nobeidzot šīs teorijas veidošanās periodu. 1843. g. P. Lorāns atklāja rindu $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, kuru tagad sauc par Lorāna rindu. Ž. Liuvils lietoja Košī teoriju eliptisko funkciju teorijā. V. Pjuize izstrādāja algebrisko funkciju teoriju un realizēja daudzvērtīgu algebrisku funkciju izvirzījumu pēc daļveida pakāpēm. 1850. g. Pēterburgas profesors I. Somovs publicēja «Eliptisko funkciju teorijas pamatus». 1856. g. iznāca Š. Brio un Ž. Bukē pirmais mācību līdzeklis «Imaginārā mainīgā funkciju pētījumi».

XIX gs. četrdesmitajos gados vienlaikus ar analītiskās funkciju teorijas pamatu izveidošanu šajā teorijā tika ieviestas vairākas jaunas idejas. Visvairāk to bija B. Rīmaņa darbos.

B. Rīmaņa pētījumi kompleksā mainīgā funkciju teorijā bija raksturīgi ar daudzām analoģijām, kuras saistīja šo teoriju ar daudzām citām matemātikas nozarēm. B. Rīmaņa pamatrezultāti bija ietverti viņa disertācijā «Vispārīgās kompleksā mainīgā funkciju teorijas pamati» (1851) un darbā «Ābela funkciju teorija» (1857). Kompleksā mainīgā funkciju teoriju sāka izmantot dažādās fizikas nozarēs. Savukārt B. Rīmanis mēģināja ieviest matemātiskās fizikas idejas funkciju teorijā. Rīmaņa eksistences teorēmas, kuras bija radušās uz fizikālu analoģiju pamata, kļuva par strīdu objektu. Šīs teorēmas ar citām metodēm pierādīja L. Švarcs (1870) un K. Neimanis (1884). B. Rīmaņa spriedumu pamatojumu izdevās pierādīt tikai 1901.—1909. g. D. Hilbertam, kurš izmantoja variāciju rēķinu metodes. Vispārīgākā formā šos jautājumus pētīja R. Kurants un H. Veils.

Citas B. Rīmaņa definēto analoģiju grupas galvenais elements bija komplekso skaitļu un kompleksā mainīgā funkciju ģeometriskā interpretācija. Tajā laikā jau bija zināms, ka analītiskas kompleksā mainīgā funkcijas realizē konformu vienas plaknes attēlojumu uz otru, pie tam ne obligāti viennozīmīgu. Mēģinot pārvarēt šo attēlojuma neviennozīmību, B. Rīmanis nonāca pie idejas par speciālām virsmām, kuras tagad sauc par Rīmaņa virsmām.

Kompleksā mainīgā funkciju teorijas fakti, ja tos aplūkoja uz Rīmaņa virsmām, ieguva plašu vispārinājumu. B. Rīmanis noskaidroja sakaru starp abiem analoģiju tipiem, izmantojot fizikālu interpretāciju, lai iegūtu eksistences teorēmu funkcijām uz slēgtām daudzlapainām Rīmaņa virsmām. B. Rīmaņa darbu cikls aizsāka svarīgu mūsdienu funkciju teorijas nozari — ģeometrisko funkciju teoriju. XIX un XX gs. mijā B. Rīmaņa izteiktās topoloģiskās idejas iekļāvās jaunajā matemātikas nozarē — topoloģijā.

B. Rīmanis izteica vēl vienu ideju: izmantot kompleksā mainīgā funkciju $\xi(s) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ (tagad plaši pazīstamu kā *Rīmaņa dzeta-funkciju*) pirmskaitļu skaita noteikšanā dotajā naturālo skaitļu virknes intervālā. Līdz ar P. Čebišova rezultātiem B. Rīmaņa rezultāti lika pamatus analītiskajai skaitļu teorijai.

Kompleksā mainīgā funkciju teorijas analītiskais virziens tika attīstīts K. Veierštrāsa darbos. K. Veierštrāss galvenokārt interesējās par matemātiskās analīzes problēmām un tās klasiskajiem pamatiem, par kompleksā mainīgā funkciju teoriju, variāciju rēķiniem, diferenciālģeometriju. Visas savas darbības laikā K. Veierštrāss minētajam plašajam problēmu lokam izstrādāja loģisku pamatojumu sistēmu, kas balstījās uz reālo skaitļu teoriju. Kaut arī K. Veierštrāss savus rezultātus lekcijās izklāstīja kopš 1856. gada, taču publicēti tie tikai 1876. un 1880. g. darbos «Par vienvērtīgu analītisko funkciju teoriju» un «Par funkciju mācību». K. Veierštrāsa teorijas pamatā bija pakāpju rindas jēdziens.

XIX gs. pēdējā ceturksnī parādījās daudz darbu analītiskajā kompleksā mainīgā funkciju teorijā, kurus sarakstīja K. Veierštrāsa skolnieki — S. Kovaļevska un M. Mitāgs-Leflers, kā arī Š. Ermits, E. Pikārs, E. Lagers, A. Puankarē u. c.

XIX gs. beigās kompleksā mainīgā funkciju teorija bija ļoti sazarojusies. Tā aptvēra ģeometrisko funkciju teoriju, kas balstījās uz konformo attēlojumu un Rīmaņa virsmu teoriju. Tika izveidotas atsevišķu funkciju veidu teorijas: veselo, eliptisko un modulāro, automorfo, harmonisko, algebrisko funkciju teorija. Tika attīstīta Ābela integrāļu teorija. Tuva šiem virzieniem bija analītiskā diferenciālvienādojumu teorija un analītiskā skaitļu teorija. XX gs. sākumā strauji pieauga to darbu skaits, kuros realizēta dažādu ideju un metožu sintēze. Tika radīta vienota vispārīga kompleksā mainīgā funkciju teorijas koncepcija. Viens no pamatjēdzieniem, ko izmantoja šajos darbos, bija analītiskā turpinājuma jēdziens. Visizteiktāk tas redzams Ž. Adamāra darbā «Teilora rinda un tās analītiskais turpinājums» (1901). Vairākos A. Puankarē, F. Kleina un P. Kēbes darbos tika parādīts Lobačevska ģeometrijas sakars ar Rīmaņa virsmām un neeiklīda ģeometrijas nozīme šo virsmu pētīšanā.

F. Kleins attīstīja kompleksā mainīgā funkciju fizikālo interpretāciju darbā «Par Rīmaņa algebrisko funkciju un to integrāļu teoriju» (1881). Ievērojama loma analītisko funkciju teorijā bija N. Žukovska un S. Čapligina darbiem, kuri parādīja šīs teorijas lietojumus aeromehānikā un hidromehānikā. No analītiskās diferenciālvienādojumu teorijas tika iegūtas dažādas speciālās funkcijas: modulārās Ermita funkcijas, automorfās Kleina un Puankarē funkcijas, Švarca funkcijas u. c. Analītiskajā funkciju teorijā tika ieviesti daudzi Kantora kopu teorijas, reālā mainīgā funkciju teorijas jēdzieni (K. Žordāns, E. Borels, A. Lebegs, T. Stīltjess, R. Bērs), grupu teorijas un topoloģijas jēdzieni. Vispārīgā kompleksā mainīgā funkciju teorija tika aplūkota divu veidu mācību grāmatās: speciāli šim jautājumam veltītās grāmatās un vispārīgos matemātiskās analīzes kursos, kur šī teorija bija ietverta kā sastāvdaļa.

14.7. Diferenciālvienādojumi

XIX gs. diferenciālvienādojumi bija nozīmīgākais matemātiskās analīzes lietojumu virziens. Diferenciālvienādojumu teorijas attīstību sekmēja matemātiskie dabaszinātņu uzdevumi, it īpaši mehānikas un matemātiskās fizikas uzdevumi. Ievērojamākais matemātiskās fizikas centrs izveidojās Parīzes Politehniskajā skolā (S. Puasons, Ž. Furjē, O. Koši u. c.). Parīzē zinātnisko izglītību ieguva krievu matemātiķi V. Buņakovskis un M. Ostrogradskis. Atgriezušies Krievijā, viņi nodibināja Pēterburgas matemātisko skolu, kurā viens no galvenajiem pētījumu virzieniem bija matemātiskās fizikas uzdevumu atrisināšanas metožu izstrāde. Berlīnes Politehniskajā skolā ar matemātisko fiziku nodarbojās L. Dirihlē. Pateicoties F. Neimaņa un viņa skolnieku darbiem, kopš XIX gs. divdesmitajiem gadiem ievērojama loma matemātiskajā fizikā bija Kēnigsbergas universitātei. Getingenē pie elektromagnētisku parādību apraksta matemātiskā aparāta izveides daudz strādāja K. Gauss un H. Vēbers. Liela fizikas un mehānikas matemātisko metožu pētnieku grupa strādāja Anglijā (Dž. Grīns, Dž. Stokss, V. Tomsons, V. Hamiltons, Dž. Maksvels u. c.). Viens no pirmajiem veiksmīgi atrisinātajiem uzdevumiem bija elektromagnētisko parādību matemātiskās teorijas izveide. XIX gs. mācība par elektrību un magnētismu atdalījās no fizikas kā patstāvīga nozare.

Jau 1787. g. P. Laplass, risinot debesu mehānikas uzdevumus, parādīja, ka telpā ārpus ķermeņa potenciāla funkcija apmierina vienādojumu $\Delta V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$. Tas bija viens no pirmajiem diferenciālvienādojumiem matemātikā. Šādu vienādojumu aplūkoja arī L. Eilers.

Elektriskā potenciāla matemātiskā teorija izveidojās samērā ātri. Vairākus uzdevumus par elektrības lādiņa sadalījumu uz vadītāja virsmas atrisināja S. Puasons. Viņš izstrādāja daudzas matemātiskās fizikas nozares. Ap 1813. g. S. Puasons vispārināja

Laplasa vienādojumu telpai, kas atrodas ķermeņa iekšpusē, kā arī atrisināja daudzus magnetostatikas uzdevumus. Aprēķinos S. Puasons izmantoja potenciāla jēdzienu. Potenciāla teorijas vispārīgā nostādne tika attīstīta Dž. G r ī n a un K. G a u s a darbos. Dž. Grīns savu teoriju izklāstīja darbā «Pētījumi elektrības un magnētisma matemātiskajā teorijā» (1828). Neatkarīgi no Dž. Grīna vispārīgo potenciāla teoriju K. Gauss izklāstīja darbā «Vispārīgas teorēmas par pievilkšanās spēkiem, kas darbojas apgriezti proporcionāli attāluma kvadrātam» (1840). Šajā darbā, starp citu, bija teorēma

$$\iiint_V \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dx\,dy\,dz = \iint_S (X\,dy\,dz + Y\,dz\,dx + Z\,dx\,dy),$$

kuru M. Ostrogradskis bija pierādījis jau 1828. g.

Potenciāla jēdzienu fiziķi ilgu laiku aplūkoja vienīgi kā ērtu matemātisku jēdzienu. Potenciāla fizikālo jēgu noskaidroja vēlāk, kad tika definēti darba un enerģijas jēdzieni un atklāts enerģijas nezūdamības likums. Matemātikā potenciāla jēdziena definēšana paplašināja matemātiskās analīzes lietojumu iespējas. Līdz ar optiku un svārstību teoriju radās elektromagnētisma matemātiskā teorija. Risinot uzdevumus par potenciālu, tika vispārināts integrāļa jēdziens. Matemātiskajā analīzē aizsākās harmonisko funkciju izpēte. Šīs funkcijas definēja kā Laplasa diferenciālvienādojuma $\Delta v = 0$ atrisinājumus. Liela nozīme potenciāla teorijas izstrādē bija akadēmiķa A. Ļapunova pētījumiem XIX gs. beigās un XX gs. sākumā.

Līdz ar matemātiskās analīzes lietojumiem elektromagnētismā attīstījās arī matemātiskā siltuma vadāmības teorija, no kuras vēlāk izveidojās termodinamika. Viens no pirmajiem šīs zinātnes nozares uzdevumiem bija teorētiski izpētīt tvaika mašīnu darbību un atrast šo mašīnu lietderības koeficienta paaugstināšanas veidus. Matemātiskā formā šis uzdevums tika formulēts 1811. g. Parīzes Zinātņu akadēmijas izsludinātajā konkursā. Par konkursa uzvarētāju kļuva vēlākais Parīzes ZA akadēmiķis Ž. Furjē.

Ž. F u r j ē zinātniskās intereses galvenokārt bija saistītas ar siltumvadīšanas uzdevuma risināšanu. Jau 1807. g. viņš Parīzes ZA iesniedza memuāru par siltumizplatīšanās teoriju cietā ķermenī. 1822. g. Ž. Furjē publicēja «Analītisko siltuma teoriju», kurai bija nozīme arī matemātikas attīstībā. Siltuma izplatīšanos Ž. Furjē izskaidroja kā elementārdaļiņu plūsmu, kas brīvi pārvietojas vidē: elementārais siltuma daudzums dQ, izplūstot caur plāksnīti $S\,dx$ laikā dt ar temperatūras izmaiņu dv, apmierina empīriski atrastu sakarību

$$dQ = -kS \frac{dv}{dx} dt,$$

kur k ir siltumvadīšanas koeficients, kas atkarīgs no plāksnītes materiāla. Siltuma plūsmas blīvumu Ž. Furjē aprēķināja no vienādojuma

$$\frac{\partial v}{\partial t} = c^2 \Delta v,$$

Ž. Furjē M. Ostrogradskis

kur Δ — Laplasa operators. Šo vienādojumu Ž. Furjē integrēja dažādu robežnosacījumu gadījumā. Viņš izstrādāja mainīgo atdalīšanas metodi, kas tagad pazīstama kā Furjē metode. Furjē izmantoja funkcijas izvirzījumu trigonometriskā rindā

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Kaut arī šādi funkciju izvirzījumi bija pazīstami jau agrāk, tomēr pēc «Analītiskās siltuma teorijas» iznākšanas tie ieguva Furjē rindu nosaukumu. Furjē metodi tālāk pilnveidoja S. Puasons, L. Dirihlē un M. Ostrogradskis. Problēmu par jebkuras funkcijas izvirzāmību trigonometriskā rindā pētīja arī N. Lobačevskis, B. Rīmanis u. c. XIX gs. matemātiķi.

Diferenciālvienādojumu teorijā tika risinātas aizvien vispārīgākas problēmas. Nozīmīgi bija pētījumi par integrējamības nosacījumiem un kvadratūrās integrējamām vienādojumu klasēm. Tā, piemēram, Ž. Liuvils ieguva Rikati vienādojuma integrējamības nosacījumus, P. Čebišovs izrisināja binomiālā diferenciāļa integrējamības nosacījumus. No dažādiem lineāro diferenciālvienādojumu teorijā aplūkotajiem vienādojumu veidiem izveidojās citas teorijas. Piemēram, no Beseļa vienādojumu, Ležandra vienādojumu, Lamē vienādojumu pētījumiem radās speciālo funkciju teorija.

Parciālie diferenciālvienādojumi vienmēr bija cieši saistīti ar fizikas un tehnikas uzdevumiem. Lielākā praktiskā nozīme bija otrās kārtas vienādojumiem. Tāpēc arī matemātiķi teorētiskos pētījumos tiem pievērsās biežāk. Vispirms tika izdalīti šo vienādojumu pamatveidi — hiperboliskie, paraboliskie un eliptiskie vienādojumi. Pēc tam tika sistematizētas un vispārinātas katra atsevišķā vienādojumu veida atrisināšanas metodes. Diferenciālvienādojumu teorijā aizvien vairāk sāka lietot funkcionālās analīzes metodes.

Jau XIX gs. sākumā O. Koši pierādīja pirmās teorēmas par diferenciālvienādojuma atrisinājuma eksistenci (publicētas 1821. g.). Tagad lietotais Lipšica nosacījums tika formulēts 1876. g. Ap 1842. g. O. Koši pierādīja atrisinājuma eksistences teorēmu lineāru parciālo diferenciālvienādojumu sistēmai. Pēc A. Puankarē vārdiem, nobeigtu formu teorēmām par diferenciālvienādojumu atrisinājuma eksistenci ieguva S. Kovaļevska, pierādot atrisinājumu eksistences un unitātes teorēmu diferenciālvienādojumu sistēmai holomorfu funkciju gadījumā. E. Pikārs 1890. g. atrada citu eksistences un unitātes teorēmas pierādījumu, kas pamatojās uz pakāpenisko tuvinājumu konverģenci.

Eksistences teorēmām diferenciālvienādojumu teorijā bija principiāla nozīme. Tās pamatoja šīs teorijas stingrību un lietošanas iespējas.

Sākot ar XIX gs. septiņdesmitajiem gadiem, diferenciālvienādojumu teorija papildinājās ar vēl diviem virzieniem, kuri nav zaudējuši savu aktualitāti. Tie bija saistīti ar grupu teoriju un kvalitatīvajām metodēm. Matemātikā par kvalitatīvām metodēm sauc tādas metodes, ar kurām var noteikt uzdevuma atrisinājuma eksistenci, īpašības un atrisinājumu skaitu, neveicot uzdevuma analītisku vai skaitlisku risināšanu. S. Lī (1873) katram diferenciālvienādojumam piekārtoja nepārtrauktu transformāciju grupu, attiecībā pret kuru vienādojums ir invariants. Tādējādi S. Lī izveidoja diferenciālvienādojumu klasifikāciju. Šī koncepcija savu praktisko izpausmi atrada matemātiskajā fizikā.

Diferenciālvienādojumu kvalitatīvā teorija attīstījās debess mehānikas uzdevumu ietekmē. Lieli nopelni te bija A. Puankarē. Sākot ar 1878. g., iznāca vairāki A. Puankarē memuāri ar kopīgu nosaukumu «Par līknēm, kuras nosaka diferenciālvienādojumu». A. Puankarē pētīja diferenciālvienādojumu atrisinājumu izvirzījumu pēc maza parametra, pierādīja dažu parciālo diferenciālvienādojumu rindu asimptotiskumu, pētīja integrāllīkņu singulāros punktus. Puankarē izstrādātās metodes saistīja diferenciālvienādojumu teoriju ar topoloģiju.

Gandrīz vienlaikus ar A. Puankarē kvalitatīvās metodes aplūkoja arī A. Ļapunovs. Savā doktora disertācijā (1892) «Vispārīgs uzdevums par kustības stabilitāti» Ļapunovs definēja stabilitātes teorijas pamatjēdzienus, atsevišķi aplūkoja gadījumus, kad linearizācija ļauj noskaidrot stabilitāti, pētīja tos gadījumus, kad linearizācija ir nepietiekama.

15. XX gadsimta matemātika

XX gs. sākumā sāka strauji attīstīties matemātiskie pētījumi reālā mainīgā funkciju teorijā, kas par patstāvīgu matemātikas disciplīnu izveidojās XIX gs. otrajā pusē. Lielu ieguldījumu šīs teorijas attīstībā deva ievērojamā itāļu matemātiķa Dž. Peāno darbi. Dž. Peāno interesējās arī par matemātisko loģiku un matemātikas pamatiem.

XIX gs. beigās reālā mainīgā funkciju teorijā sāka izmantot kopu teorijas jēdzienus un metodes. Tādējādi radās punktu kopu mēra teorija, būtiski tika vispārināts integrāļa jēdziens, definēts mērojamas funkcijas jēdziens, klasificētas reālā mainīgā funkcijas. Tagad universitātes matemātikas lekcijās aplūkotie jēdzieni — Lebega kopas mērs, Borela mērojamas kopas, Bēra funkciju klases, Lebega integrālis — zinātnē parādījās XX gs. pirmajos gados.

Reālā mainīgā funkciju teorijā XX gs. sākumā vadošie bija franču matemātiķi E. Borels, R. Bērs, A. Lebegs. Jaunās funkciju teorijas problēmas sāka pētīt arī N. Luzins (Krievija), V. Serpinskis (Polija), V. H. Jungs (Anglija) un vairāki vācu un itāļu matemātiķi.

Turpināja attīstīties arī vadošā XIX gs. matemātikas nozare — analītisko funkciju teorija. Pēc A. Puankarē un E. Pikāra darbiem svarīgus rezultātus ieguva Ž. Adamārs, Dž. Valē-Pusēns, E. Borels.

Jauna matemātikas nozare bija topoloģija. Kombinatorā topoloģija par patstāvīgu pētījumu virzienu kļuva pēc A. Puankarē darbiem *«Analysis situs»* («Novietojuma analīze») un «Papildinājumi» (1895—1904). Tai laikā kombinatorajā topoloģijā daudz izmantoja algebriskas metodes.

Algebra XX gs. sākumā no «zinātnes par algebrisku vienādojumu risināšanu» kļuva par mūsdienu algebru. Atrisināmības problēma algebriskiem vienādojumiem ar reāliem vai kompleksiem koeficientiem tika aplūkota kompleksā mainīgā funkciju teorijā. Par algebras pētījumu objektu kļuva algebriskas struktūras. Pirmoreiz jaunā algebrisko problēmu nostādne atrodama vācu matemātiķa E. Šteinica darbā «Algebriskā lauku teorija» (1910).

XX gs. sākumā asākos matemātiskos strīdus izraisīja E. Cermelo teorēma (1904), ka jebkuru kopu var sakārtot, balstoties uz izvēles aksiomu. Šī aksioma apgalvo, ka jebkurā dotās kopas apakškopā var fiksēt kādu tās elementu («iezīmēto elementu»). Daudzi matemātiķi, piemēram, A. Puankarē, noraidīja Cermelo aksiomu un no tās iegūtos secinājumus. Savukārt citi (piemēram, D. Hilberts) šos rezultātus pieņēma. Diskusiju rezultātā radās vairākas pieejas matemātikas pamatu problēmām, pieauga interese par kopu teorijas aksiomātiku. E. Borels uzskatīja, ka matemātikā jāizmanto tikai «konstruktīvas definīcijas», t. i., definīcijas, kuras izmanto tikai galīgu vai sanumurējamu operāciju kopu. D. Hilberts izveidoja matemātikas pamatojuma programmu. Šis virziens tika nosaukts par formālismu. Kopu teorijas aksiomātiku trīs sējumos *«Principia Mathematica»* (1910—1913) publicēja B. Rasels un A. Vaitheds. 1913. g. iznāca F. Hausdorfa monogrāfija «Kopu teorija». Šajā darbā F. Hausdorfs aplūkoja 4 aksiomas. Trīs aksiomas raksturo vispārīgās topoloģiskās telpas, bet ceturtā ir t. s. atdalāmības aksioma. Hausdorfa telpām jāapmierina visas četras aksiomas.

Klasiskajā matemātiskajā analīzē gadsimtu mijā galveno vietu ieņēma matemātiskās fizikas robežuzdevumu atrisināšanas problēmas. XIX gs. deviņdesmitajos gados A. Puankarē vispārināja savu priekšteču metodes un rezultātus, tomēr visi rezultāti vēl nebija pietiekami stingri pamatoti. Šis virziens tika turpināts krievu matemātiķu A. Ļapunova un V. Steklova, kā arī poļu matemātiķa S. Zarembas darbos.

Vienotu matemātiskās fizikas robežuzdevumu teoriju palīdzēja izveidot integrālvienādojumu metode. Šī metode kļuva plaši pazīstama pēc 1903. g. iznākušā norvēģu matemātiķa E. Fredholma darba. Citā virzienā pētījumi integrālvienādojumos tika veikti D. Hilberta un viņa skolnieku darbos.

Ar D. Hilberta vārdu saistīti arī nozīmīgi darbi ģeometrijā un skaitļu teorijā. 1899. g. iznāca D. Hilberta darbs «Ģeometrijas pamati», kurā tika aplūkota precizēta Eiklīda ģeometrijas aksiomu sistēma un aizsākti pētījumi par šo aksiomu savstarpējo sakarību, par atsevišķu aksiomu grupu nozīmīgumu dažādu jautājumu risināšanā.

Analītiskajā skaitļu teorijā izcilus rezultātus ieguva H. Veils, E. Landau, Dž. Hardi un Dž. Litlvuds.

Varbūtību teorijā teorētiskās domas centrs joprojām bija Krievijā (A. Ļapunovs, A. Markovs). Franču skolu pārstāvēja E. Borels, P. Levi, M. Frešē u. c. Spēcīga matemātiskās statistikas skola veidojās Anglijā (K. Pīrsons, R. Fišers u. c.), Skandināvijas valstīs un ASV.

1914. gadā sākās imperiālistiskais karš, kurš uzkurināja nacionālistisku noskaņojumu zinātnieku aprindās (īpaši Vācijā) un kura dēļ tika pārtraukti daudzi starptautiskie zinātniskie sakari. Nebija pasargāta arī visabstraktākā zinātne — matemātika. Daudzus starptautiskus pasākumus neizdevās atjaunot arī pēc kara: palika nepabeigts franču «Matemātikas enciklopēdijas» izdevums, tika pārtraukta matemātikas pasniegšanas problēmu komisijas darbība, neizdevās realizēt paredzētos bibliogrāfiskos darbus, nenotika 1916. gadā paredzētais starptautiskais matemātiķu kongress. 1919. g. Briselē tika nodibināta Starptautiskā matemātiskā savienība, kurai drīzāk bija šķeltniecisks, nevis apvienojošs raksturs, jo tajā darbojās tikai vienas valstu grupas pārstāvji. 1932. g. Cīrihē notikušajā matemātiķu kongresā tika nolemts šo savienību likvidēt. Tika izveidota komisija, kurai uzdeva izskatīt jautājumu par jaunas starptautiskas matemātiķu organizācijas dibināšanu. Taču Hitlera nākšana pie varas Vācijā un kara tuvošanās šo darbu izjauca. 1936. g. Starptautiskajā matemātiķu kongresā komisija ziņoja, ka nav izdevies izstrādāt visiem pieņemamus priekšlikumus. Nākamais matemātiķu kongress varēja notikt tikai 1950. g.

Trīsdesmitajos gados Maskava kļuva par vienu no lielākajiem matemātikas centriem pasaulē. Divdesmitajos un trīsdesmitajos gados strauji attīstījās matemātika vairākās valstīs, kuras ieguva patstāvību pēc pirmā pasaules kara, piemēram, Polijā un Ungārijā. Musolīni režīma laikā mazinājās matemātiskā aktivitāte Itālijā. Fašisms ietekmēja Vācijas zinātni. Emigranti no Vācijas, vēlāk arī no Austrijas, Ungārijas un citām Centrālās Eiropas valstīm izbrauca galvenokārt uz ASV, kur ievērojami pieauga zinātnes potenciāls. Tādējādi trīsdesmito gadu beigās galvenie matemātiskie centri bija PSRS un ASV. Pieauga matemātisko pētījumu skaits Japānā, Indijā, Kanādā, dažās Dienvidamerikas valstīs.

Divdesmitajos un trīsdesmitajos gados joprojām viena no populārākajām matemātikas nozarēm bija kopu teorija un funkciju teorija (it īpaši reālā mainīgā funkciju teorija). Šajā virzienā pētījumus veica jau pirms revolūcijas izveidotā Maskavas matemātiķu skola N. Luzina vadībā. Pētījumus kopu teorijā, funkciju teorijā un topoloģijā veica poļu matemātiķi, kurus vadīja N. Luzina skolnieks V. Serpinskis. Veselo funkciju teorijā nozīmīgus rezultātus ieguva somu matemātiķi R. Nevanlinna un L. Alforss. Vācu matemātiķi pētīja vienlapainās funkcijas. Daudzlapainās funkcijas un ar tām saistītās Rīmaņa virsmas pētīja padomju un somu matemātiķi. Kaut arī funkciju teorijā trīsdesmito gadu beigās tika iegūti daudzi rezultāti, tomēr lielāku nozīmību guva citas matemātikas nozares. Viena no tām bija algebra.

E. Šteinica aizsākto darbu lauka teorijā Getingenē turpināja E. Nētere un viņas skolnieki, veidojot vispārīgo komutatīvo gredzenu teoriju, ideālu un moduļu teoriju, sistemātiski pētot nekomutatīvās algebras pamatproblēmas. Visas algebras struktūras tika pētītas, vadoties no struktūras aksiomām, neatkarīgi no struktūras elementiem. Padomju algebristus vadīja O. Šmits. Algebras virzienā intensīvi strādāja jaunie holandiešu, amerikāņu un franču matemātiķi. Jauno algebru atbalstīja B. Van der Vardens, D. Hilberts, H. Veils un citi matemātiķi, taču atzīta algebristu autoritāte līdz mūža beigām 1935. g. bija E. Nētere.

Jaunā algebra sekmēja topoloģijas attīstību: daudzas svarīgas sakarības, kas sākotnēji bija zināmas ģeometriskā formā, tika formulētas algebriski. Algebriskās problēmas radās arī daudzās citās matemātikas nozarēs, piemēram, pat tādā klasiskā matemātiskās analīzes nodaļā kā Furjē rindas un integrāļi.

Ģeometrija jau XIX gs. bija sazarojusies. Katrs no šiem zariem XX gs. papildinājās ar daudziem rezultātiem, taču šeit sīkāk tos neaplūkosim. Galvenais akcents ģeometriskajos pētījumos tika likts uz vispārinājumiem. Piemēram, formulās, kuras noteica transformāciju grupu (katras ģeometrijas pamatu F. Kleina klasifikācijā), sāka izmantot koeficientus no jebkura lauka. XIX un XX gs.

sākumā tika izmantots reālo skaitļu lauks, vēlāk — komplekso skaitļu lauks. Šāda vispārinājuma rezultātā radās kvaternionu projektīvā ģeometrija. Cits ģeometrisko pētījumu attīstības virziens saistīts ar projektīvās diferenciālģeometrijas izveidi. Tika atrisināti arī daudzi svarīgi konkrēti uzdevumi, piemēram, viens no klasiskajiem diferenciālģeometrijas uzdevumiem, kas pazīstams kā Plato problēma: noteikt minimālo virsmu, kas iet caur doto kontūru. Taču nozīmīgākie bija ar relativitātes teoriju saistītie ģeometriskie pētījumi.

E. Nētere

1915. un 1916. g. A. Einšteins, strādājot pie vispārīgās relativitātes teorijas, lietoja Rīmaņa diferenciālģeometriju un tenzoru rēķinus. Tenzoru rēķini vai, kā tos sauca agrāk, absolūtie Ričči-Kurbastro un Levi-Čivitas diferenciālrēķini matemātiķiem bija pazīstami jau XIX gs. Taču tie kļuva populāri, tikai pateicoties Einšteina relativitātes teorijai. Ievērojami palielinājās interese par Rīmaņa ģeometriju. T. Levi-Čivita Rīmaņa ģeometrijā definēja paralēlās pārneses jēdzienu. H. Veils izstrādāja afīno Rīmaņa ģeometriju. Ar tenzoru rēķinu lietojumiem nodarbojās holandiešu, padomju un amerikāņu ģeometri. E. Kartāns definēja t. s. holonomijas grupas un uz to pamata izveidoja tādu ģeometriju klasifikāciju, kurā Kleina un Rīmaņa ģeometrijas ietilpa kā speciāli gadījumi.

Algebras, ģeometrijas, topoloģijas un matemātiskās analīzes idejām savijoties, radās jauna matemātikas nozare — funkcionālanalīze. Funkcionālanalīzē iekļāvās daudzi XIX gs. beigu un XX gs. sākuma darbos iegūtie rezultāti par konkrētiem funkcionāļiem un operācijām, kas vispārināja klasiskās matemātiskās analīzes operācijas. XX gs. pirmajā desmitgadē mērķis konstruēt «vispārīgo analīzi» metriskās telpās tika izvirzīts M. Frešē darbos. Vienu no funkcionālanalīzes nodaļām veidoja integrālvienādojumu teorija. 1918. g. ungāru matemātiķis F. Rīss pierādīja, ka visi Fredholma pamatrezultāti par integrālvienādojumiem ir spēkā arī plašākai lineāru operatoru vienādojumu klasei. F. Rīsa darbā atrodams to topoloģisko, algebrisko un analītisko ideju kopums, kuru vēlāk izmantoja pilno normēto telpu teorijā. Tagad šo teoriju pazīstam kā Banaha telpu teoriju (divdesmitajos gados pie šīs teorijas aktīvi strādāja poļu matemātiķi S. Banaha vadībā).

Funkcionālanalīzē iekļāvās arī Padomju Savienībā sāktie pētījumi reālā mainīgā funkciju teorijā un topoloģijā, matricu teorijā, integrālvienādojumos, kvalitatīvajā diferenciālvienādojumu teorijā, variāciju rēķinos.

Dažādos virzienos attīstījās skaitļu teorija. Analītiskajā skaitļu teorijā galvenie sasniegumi saistīti ar I. Vinogradova darbiem. Ar savas metodes palīdzību viņš daļēji pierādīja Goldbaha teorēmu par trim pirmskaitļiem. A. Hinčins ieguva svarīgus rezultātus metriskajā skaitļu teorijā. Turpinājās ģeometriskās skaitļu teorijas attīstība (B. Delonē u. c.). Algebrisko līkņu aritmētika, kas bija saistīta ar Diofanta vienādojumiem, ievērojami pavirzījās uz priekšu franču matemātiķa A. Veila un K. Zīgela (Vācija, pēc tam ASV) darbos. Jaunu transcendentu skaitļu konstrukcijas metodi atklāja A. Gelfonds, kurš atrisināja ar septīto Hilberta problēmu saistītu jautājumu.

Parasto diferenciālvienādojumu jomā XX gs. pirmajās trīs desmitgadēs turpinājās analītiskās teorijas attīstība. Trīsdesmitajos gados galvenokārt tika risinātas kvalitatīvās teorijas problēmas. Šīs teorijas attīstību ietekmēja fizikas vajadzības. Fiziķiem (A. Andronovs, L. Mandelštams) pieder arī daži svarīgi matemātiski rezultāti.

Parciālo diferenciālvienādojumu teorijā pakāpeniski mainījās uzdevumu nostādne. Jaunās funkciju teorijas un topoloģijas metodes ļāva daudzos gadījumos iegūt eksistences, unitātes un nepārtrauktības teorēmas, nepieprasot pārāk stingru nosacījumu izpildi. Sākās potenciāla teorijas izveide uz jaunas, daudz vispārīgākas bāzes (N. Vīners u. c.).

Laikā starp abiem pasaules kariem varbūtību teorijā un matemātiskajā statistikā paplašinājās gan problēmu, gan lietojumu loks. PSRS pēc S. Bernšteina darbiem, kuros tika vispārinātas klasiskās robežteorēmas un aplūkoti varbūtību teorijas pamati, A. Kolmogorovs un A. Hinčins varbūtību teorijā sāka lietot reālā mainīgā funkciju teorijas metodes. Viņi radīja gadījuma procesu teoriju. A. Kolmogorovs izveidoja varbūtību teorijas aksiomātiku. Spēcīga varbūtību teorijas skola radās Francijā (E. Borels, M. Frešē, P. Levi). Anglijā un ASV tradicionāli vairāk uzmanības tika veltīts matemātiskajai statistikai.

Nebija zudusi arī interese par matemātikas pamatiem. Matemātiķu aprindās notika dzīvas diskusijas, kas veicināja strauju matemātiskās loģikas attīstību. Intuicionisma virzienu pārstāvēja L. Brauers un H. Veils. Viņi uzskatīja, ka matemātika nav atkarīga no ārpasaules, tā tiek veidota uz uzskatāmu priekšstatu bāzes. Intuicionisti noliedza trešā izslēgtā principu spriedumos par bezgalīgām kopām. A. Kolmogorovs izveidoja loģikas aksiomu sistēmu, kurā trešā izslēgtā princips nav spēkā. Šī loģika tika nosaukta par konstruktīvo loģiku. D. Hilberts un viņa sekotāji centās atrisināt problēmas, kas bija saistītas ar kopu teorijas paradoksiem un nekonstruktīviem pierādījumiem. D. Hilberts izvirzīja lozungu: «Neviens nevar mūs izdzīt no paradīzes, kuru radījis G. Kantors.» Lai šo klasiskās matemātikas «paradīzi» saglabātu, vajadzēja noskaidrot arit-

N. Vīners K. Gēdels

mētikas aksiomu nepretrunību. Savukārt, lai stingri varētu pierādīt kādas teorijas nepretrunību, šī teorija jāformalizē. Tas nozīmē, ka minētās teorijas apgalvojumi jāaplūko kā kaut kādi simboli bez konkrētas nozīmes, jānorāda likumi, kā šos simbolus kombinēt, un jāpierāda, ka, izmantojot šos likumus, nevar iegūt tādu simbolu kombināciju («formulu»), kura būtu pareiza dotajā teorijā līdz ar tās noliegumu. Šis D. Hilberta vadītais virziens tika nosaukts par formālismu. Formālismam bija vajadzīga arī metamatemātika — zinātniska disciplīna par pierādījuma teoriju. Formālisma virziena pārstāvji uzskatīja, ka visus apgalvojumus (arī tos, kas attiecas uz bezgalību) var formulēt ar galīgām aksiomām, galīgiem izveduma likumiem un teorēmām ar galīgiem pierādījumiem. Tādēļ D. Hilberts uzskatīja, ka, aprobežojoties spriedumos ar galīgiem procesiem, būs iespējams pierādīt aritmētikas — klasiskās matemātiskās analīzes bāzes — nepretrunību, kā arī pilnīgi izpētīt atrisināmības problēmu un pilnuma problēmu atbilstoši formalizētai teorijai. Šīs cerības un arī visu virzienu sagrāva divi K. Gēdeļa (Austrija, pēc tam ASV) rezultāti. 1931. g. K. Gēdels pierādīja šādu apgalvojumu: ja teorija ir nepretrunīga un formalizētās aritmētikas aksiomas ir šīs teorijas teorēmas, tad teorija nav pilna. Izmantojot aritmētikas nepilnīgumu, 1933. g. K. Gēdels pierādīja arī, ka ar Hilberta galīgiem procesiem nevar pierādīt nepretrunību nevienai teorijai, kura satur formalizētu aritmētiku. Tas nozīmēja, ka šai gadījumā atrisināmības problēma ir neatrisināma.

Ar matemātikas pamatu problēmām nodarbojās arī vairāki padomju matemātiķi: A. Kolmogorovs, A. Markovs, P. Novikovs, S. Janovska u. c.

Otrā pasaules kara gados matemātiķu zinātniskā darbība netika pilnīgi pārtraukta, taču bija lieli zaudējumi. Hitleriešu okupētajās valstīs zinātniskā dzīve tikpat kā apstājās, bet Polijā, Čehoslovakijā, Dienvidslāvijā zinātniekiem draudēja fiziska iznīcība. Daudzi matemātiķi aizgāja bojā. Matemātiķu starptautiskie sakari pat starp neitrālām valstīm bija pārtraukti.

Pēc 1945. g. starptautiskie matemātiskie sakari ātri atjaunojās. 1950. g. Harvardā (ASV) notika pirmais pēckara Starptautiskais matemātiķu kongress. Matemātisko publikāciju skaits pasaulē pēc 1946. g. turpināja augt pēc eksponenciāla likuma. Turpinājās arī matemātikas sazarošanās, palielinājās specializēto matemātikas žurnālu skaits. Ne mazāk nozīmīgi kā matemātiķu kongresi kļuva simpoziji un konferences atsevišķās matemātikas nozarēs.

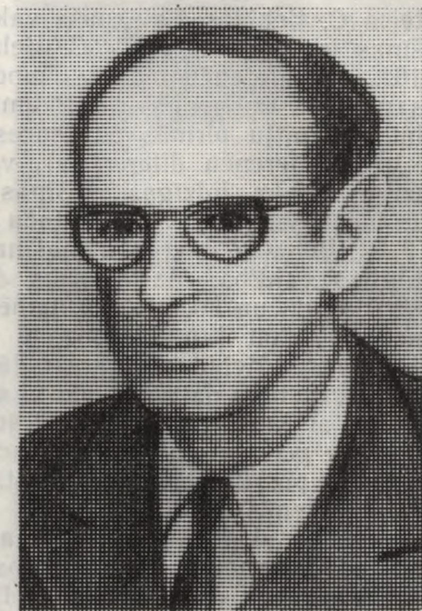
Bez tradicionālajām nozarēm, kurās plaši lietoja matemātiku (fizika, mehānika, astronomija, ballistika), «matematizācijas» process skāra arī tādas zinātnes kā ķīmija, bioloģija, lingvistika, psiholoģija, ekonomika u. c.

Aizvien pieaugošās matemātikas specializācijas dēļ vairs nebija iespējams vienam pat ar izcilām spējām apveltītam matemātiķim aptvert visu matemātiku. Tomēr matemātiķi centās atrast dažādu teoriju kopīgos pamatus. Šādā virzienā strādāja franču matemātiķu grupa ar kolektīvu pseidonīmu Nikolā Burbakī. Šo grupu 1937. gadā izveidoja bijušie Augstākās normālskolas studenti A. Kartāns, Ž. Djedonē, A. Veils, K. Ševalē, Ž. Delsartrs. Grupa palaikam papildinājās ar jauniem matemātiķiem, jo obligāta bija prasība, ka matemātiķi, kas sasnieguši 50 gadu vecumu, no grupas izstājas. N. Burbakī paredzēja uzrakstīt traktātu, kas aptvertu visu mūsdienu matemātiku un konsekventi pamatotos uz D. Hilberta aksiomātisko metodi. Traktāta «Matemātikas elementi» 1. sējums iznāca 1939. g., 33. sējums — 1967. g., bet darbs vēl nav pabeigts. Burbakī izklāstā matemātika sākas ar kopu teoriju, kurai seko abstraktā algebra, vispārīgā topoloģija, reālā mainīgā funkciju teorija, topoloģiskās vektoru telpas, vispārīgā integrēšanas teorija. Burbakī aksiomātikas pamatjēdzieni ir algebriska struktūra, sakārtota kopa un topoloģiska telpa.

Pēc otrā pasaules kara PSRS un ASV joprojām bija tās valstis, kurās noritēja pētījumi visos matemātikas pamatvirzienos. Savu kādreizējo slavu atguva franču matemātika, pamazām atjaunojās matemātiskie pētījumi Itālijā. Radās jauni matemātikas centri Japānā, Indijā, Kanādā, Dienvidamerikā, Ķīnā, arī Austrālijas un Āfrikas universitātēs.

Aplūkojot XX gs. matemātiku, nevar neminēt **elektronisko skaitļotāju attīstības vēsturi.** Tā kā iepriekš šī tēma netika aplūkota, tad tagad nedaudz atskatīsimies pagātnē.

1614. gadā Dž. Nepers no Skotijas publicēja rakstu, kurā pirmo reizi bija lietoti logaritmi. Kaut arī logaritmi bija Dž. Nepera galvenais atklājums, kas iemūžināja viņa vārdu, tomēr visā Eiropā plaši izplatījās daudz tehniskāks viņa izgudrojums — skaitāmās nūjiņas. Tās bija reizrēķina mehānisks variants. Pasaulē pirmo mehānisko saskaitīšanas mašīnu konstruēja vācu izgudrotājs, Tībingenes universitātes profesors V. Šikards 1623. gadā. Šajā mašīnā kā būtiska sastāvdaļa tika izmantots Dž. Nepera skaitāmo nūjiņu komplekts. Plašai publikai V. Šikarda mašīna dažādu iemeslu dēļ palika nezināma. 1642. gadā cita veida saskaitīšanas mašīnu izgudroja franču matemātiķis B. Paskāls.


A. Veils

Pirmo reizināšanas mašīnu izgudroja G. V. Leibnics. 1671. un 1677. g. janvārī viņš demonstrēja šīs mašīnas koka modeli (kas gan labi nestrādāja) Londonā, Karaliskajā biedrībā. Reizināšana mašīnām vēlāk bija daudz tehnisku uzlabojumu. Francijā ap 1820. g. šīs mašīnas rūpnieciski sāka ražot Š. Tomass. Viņa izstrādājums kļuva pazīstams ar nosaukumu «aritmometrs».

Aritmometrus lietoja dažāda veida inženiertehniskos, astronomiskos un statistiskos aprēķinos. Jau XVIII gs. beigās, lai atvieglotu aprēķinus, bija sastādītas visdažādākās matemātiskās tabulas. Eksistēja gan vienkāršas saskaitīšanas un reizināšanas tabulas, gan 20 zīmju logaritmu tabulas. Tabulas tika lietotas dabaszinātnēs, finansu aprēķinos, navigācijā. Nebija nekas neparasts, ja zinātnieka personiskajā bibliotēkā bija vairāk nekā 100 dažādu grāmatu, kas sastāvēja vienīgi no tabulām. Angļu izgudrotājam un matemātiķim Č. Bebidžam vien piederēja vairāk nekā 300 šādu sējumu. Daudzajām tabulām bija kāda kopīga īpašība — tajās visās bija ļoti daudz kļūdu. Piemēram, Francijā 1784. g. valdība uzdeva 6 izciliem matemātiķiem izveidot jaunas logaritmu un trigonometrisko funkciju tabulas, taču pēc 2 gadu darba jaunizstrādātie 17 sējumi netika publicēti, bet, baidoties no tipogrāfijas kļūdām, uzglabāti Parīzes publiskajā bibliotēkā. Pat Britānijas Jūras Almanahs — navigatoru bībele — saturēja daudzas kļūdas, kuras bija cēlonis lielai katastrofai jūrā.

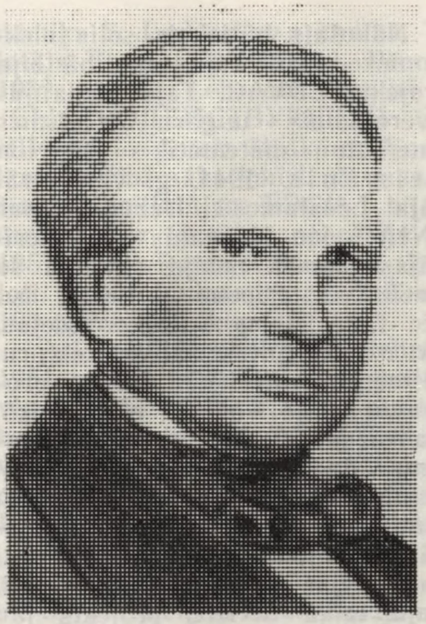
Č. Bebidžs 1820.—1821. g. bija Kembridžas universitātes students un kopā ar savu draugu Dž. Heršelu (slavenā astronoma V. Heršela dēlu, kas pats vēlāk kļuva par ievērojamu astronomu) strādāja pie astronomijas tabulu pārrēķināšanas. «Kaut būtu kāds izgudrojis tvaika mašīnu šādiem aprēķiniem,» reiz spēku izsīkuma brīdī teica Č. Bebidžs. Tajā pašā vakarā abi draugi apsprieda tādas mašīnas iespēju, un vēlāk Č. Bebidžs šādu mašīnu tiešām uzbūvēja. 1822. g. diferenču mašīnas modelis jau strādāja. Šī mašīna varēja sagatavot tipogrāfisku salikumu tabulām, kurās ir konstantas tabulas skaitļu pirmās diferences vai otrās diferences (t. i., pirmās kārtas diferenču diferences), vai trešās diferences utt. Vēlāk gan izrādījās, ka līdzīgas mašīnas pirms viņa ir izgudrojuši vācieši E. Klipšteins un J. Millers, taču nav tās uzbūvējuši.

Č. Bebidža diferenču mašīnas būvēšanu daļēji finansēja Lielbritānijas valdība. Mašīna tika daudz lietota navigācijas tabulu izstrādāšanā un koriģēšanā, tomēr ne valdība, ne flote šo mašīnu nenovērtēja, un jau 1842. g. tā nonāca Londonas Zinātņu muzejā. 1834. g. Č. Bebidžs sāka strādāt pie liela projekta, kam viņš veltīja visu turpmāko dzīvi, — pie analītiskās mašīnas. Tā bija iecerēta kā ierīce, ar kuru varētu risināt jebkuru uzdevumu, ne tikai konstruēt tabulas pēc galīgajām diferencēm. Mūsdienās tādu mašīnu varētu nosaukt par universālu skaitļotāju. Mašīnas principiālajā shēmā visas galvenās detaļas Bebidžs bija paredzējis tādas, kādas tās ir mūsdienu skaitļotājos: atmiņas ierīce («noliktava»), aritmētiska ierīce («dzirnavas») un vadības ierīce («kantoris»). Pašam Bebidžam izdevās uzbūvēt tikai nelielu daļu no šīs mašīnas. Diezin vai tik komplicētu ierīci arī vispār būtu izdevies uzbūvēt kā tīri mehānisku mašīnu. Darbi apsīka, jo Bebidžs nomira.

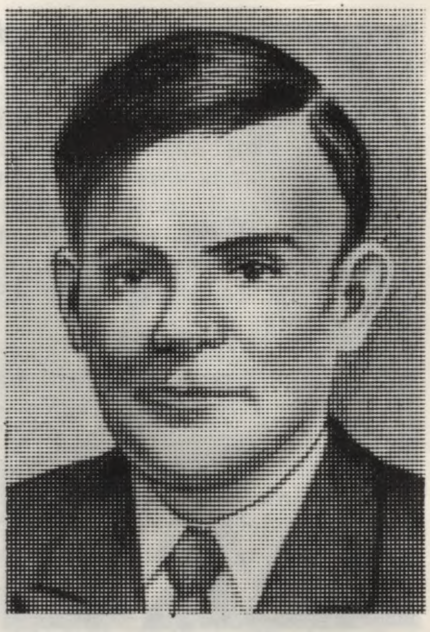
1884. g. vācu izcelsmes amerikāņu inženieris H. Holerits pieteica pirmo no saviem patentiem elektromehāniskai sistēmai perfokaršu šķirošanai un perfokartēs glabāto datu apstrādei. H. Holerits strādāja dienestā, kas regulāri organizēja ASV tautas skaitīšanu. Pieaugot valsts iedzīvotāju skaitam, datu apstrāde kļuva arvien sarežģītāka. Jau 1880. g. skaitīšanas datu apstrādāšana ilga deviņus gadus. Šķita, ka 1890. g. datu apstrādāšanai vairs nepietiks laika līdz 1900. g. tautas skaitīšanai. Tomēr ar H. Holerita tabulatoru palīdzību rezultātus izdevās iegūt vienā gadā. Holerita sistēmu pārņēma visa pasaule.

XX gs. trīsdesmitajos gados jau bija zināmi daudzi grūti risināmi uzdevumi. Bija radusies vajadzība pēc automātiskiem skaitļotājiem. Tādēļ dažās valstīs neatkarīgi cits no cita sāka strādāt jauni izgudrotāji. Bulgāru izcelsmes amerikānis Dž. V. Atanasovs kopā ar savu kolēģi K. Beriju 1942. g. pavasarī uzbūvēja mašīnu, kas prata izpildīt visas aritmētiskās darbības. Tā gan nebija programmējamā mašīna. Operatoram katru reizi vajadzēja norādīt nākošo izpildāmo darbību. Tomēr tā bija pirmā elektroniskā skaitļojamā mašīna.

Anglijā strādāja matemātiķis A. Tjūrings. Jau 1936. g. viņš bija ieviesis matemātiskajā loģikā matemātiskas mašīnas jēdzienu. Kara laikā A. Tjūrings piedalījās specializēta skaitļotāja COLOSSUS būvē. Ar šo skaitītāju tika atšifrēti hitleriskās Vācijas visslepenākie šifri. Diemžēl šī skaitļotāja uzbūve joprojām ir slepena (jo to lietoja arī pēc kara) un pat par tā lomu skaitļotāju vēsturē zināms ļoti maz.



C. Bebidžs



A. Tjūrings

Pirmo programmējamo skaitļotāju uzbūvēja vācietis K. Cūze 1941. g. decembrī. Cūze apzinājās, ka vajadzētu izmantot elektroniku, taču kara apstākļos viņam nācās aprobežoties ar elektromagnētiskiem relejiem. Mazās atmiņas dēļ šo skaitļotāju uzskatīja tikai par prototipu «īstajam» un nozīmīgus uzdevumus ar to nerisināja. «Īstais» skaitļotājs tā arī netika uzbūvēts.

ASV Bella telefona laboratorijās Dž. Štibics un Hārvardas universitātē H. Eikens arī sāka būvēt skaitļotājus, kas izmantoja elektromagnētiskos relejus. Kara laikā Dž. Štibics ar līdzstrādniekiem uzbūvēja piecas mašīnas, bet H. Eikens — divas. Tās visas tika nodotas ASV flotes rīcībā. Cik zināms, galvenais šo mašīnu uzdevums bija dot ātras rekomendācijas uguns korekcijai pretgaisa aizsardzībā.

1943. g. 9. aprīlī notika Pensilvānijas universitātes Mūra skolas pārstāvju un ASV armijas Ballistikas pētījumu laboratorijas administrācijas vēsturiskā tikšanās. Šīs tikšanās laikā Mūra skolas pārstāvji P. Ekerts un Dž. V. Mouklijs ierosināja ballistikas tabulu izstrādāšanai būvēt īpašu mašīnu. Rezultātā radās pasaulē pirmais elektroniskais skaitļotājs ar programmēto vadību. To sauca ENIAC. Mašīnā bija 18 tūkst. elektronu lampu, 1500 releju, 70 tūkst. pretestību, 10 tūkst. kondensatoru. Kustīgas mehāniskas daļas bija vienīgi ievadierīcē un izvadierīcē. Tādēļ ENIAC darbības ātrums bija liels — 5 tūkst. saskaitīšanas vai 360 reizināšanas vai 170 dalīšanas darbību sekundē. Šīs darbības tika veiktas ar skaitļiem, kas saturēja 10 decimālciparus.

Dž. fon Neimanis

Nākošais būtiskais solis elektronisko skaitļotāju attīstībā bija projekts EDVAC. Tajā piedalījās ievērojamais ungāru izcelsmes amerikāņu matemātiķis Dž. fon Neimanis. 1944. g. viņš strādāja Losalamosā. Uzzinājis par ENIAC, fon Neimanis neapmierinājās, kamēr nebija redzējis šo toreiz vēl slepeno projektu, bet pēc tam izteica vairākas idejas, kā uzlabot mašīnas arhitektūru. Piemēram, ENIAC darba programma bija iebūvēta elektronikā. Kad uzdevums bija atrisināts, mašīnu vajadzēja pārbūvēt. Fon Neimanis ierosināja paredzēt kopīgu atmiņu programmas un datu glabāšanai, jo programma ir tādi paši ieejas dati kā jebkuri citi. Tajā laikā ENIAC projekts jau bija attīstījies pārāk tālu, lai tajā varētu realizēt fon Neimaņa idejas. Tās tika realizētas nākamajos projektos EDVAC un IAS.

EDVAC tika nodota ASV armijas Ballistikas pētījumu laboratorijai. IAS skaitļotāji (kaut arī pēc mazliet atšķirīgiem projektiem) tika uzbūvēti Prinstonas Perspektīvo pētījumu institūtā, lai uzstādītu Losalamosas, Oukridžas un Argonas nacionālajās laboratorijās, Ilinoisas universitātē un Randa korporācijā. Tātad pārsvarā minētos skaitļotājus lietoja militāriem un inženiertehniskiem aprēķiniem, kā arī dažādiem eksperimentiem.

Nav pietiekami daudz informācijas, lai izsekotu, kādi uzdevumi toreiz tika risināti ar ārzemju skaitļotājiem. Daļēju informāciju sniedz ziņas par organizācijām, kuras finansēja skaitļotāju būvi.

Par elektroniskajiem skaitļotājiem lielu interesi izrādīja ASV Tautas skaitīšanas birojs, kas daļēji finansēja P. Ekerta un Dž. Mouklija grupu. Birojā skaitļotāju UNIVAC-1 uzstādīja 1951. g. 14. jūnijā, un ASV 1950. g. tautas skaitīšanas datu apstrāde bija pasaulē pirmais elektronisko skaitļotāju lietojums ekonomiskas un statistiskas informācijas apstrādāšanā. Jau 1947. g. oktobrī skaitļotāju pasūtīja arī aviācijas rūpniecības firma *Northrop Aircraft Company*. Skaitļotājs, kuru pabeidza būvēt 1949. g. augustā, tika lietots inženiertehniskiem aprēķiniem. Citi pasūtījumi skaitļotāju uzstādīšanai nāca no ASV Nacionālā standartu biroja un firmām *American Totalisator Company, Burroughs, Hughes Aircraft* u. c.

Padomju Savienībā pirmo elektronisko skaitļotāju МЭСМ (МАЛАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ СЧЕТНАЯ МАШИНА) uzbūvēja 1950. g. Kijevā. Ukrainas Zinātņu akadēmijas Elektrotehnikas institūtā akadēmiķa S. Ļebedeva vadībā. Tas bija pirmais elektroniskais skaitļotājs Eiropas kontinentā. Pēc tam autoru kolektīvs sadalījās, un 1952. g. S. Ļebedeva vadībā Maskavā tika uzbūvēts БЭСМ-1 (БЫСТРОДЕЙСТВУЮЩАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ СЧЕТНАЯ МАШИНА) — toreiz ātrākā mašīna Eiropā. Kijevā akadēmiķa V. Gluškova vadībā sāka konstruēt mazas un specializētas skaitļošanas mašīnas. Skaitļotājam БЭСМ-1 bija 5 tūkst. elektronu lampu, darbības ātrums līdz 10 tūkst. operāciju sekundē. Tā bija trīsadresu mašīna. 1957. g. B. Ramejeva vadībā tika uzbūvēta mazāka, lētāka un tādēļ ļoti izplatīta vienadreses mašīna УРАЛ. Tās darbības ātrums bija 100 operāciju sekundē.

Arī Latvijā skaitļošanas tehnikai jau ir dziļas saknes. J. Daube 1951. g. bija nodarbojies ar analogajām skaitļošanas ierīcēm. 1960. g. viņa vadībā LPSR Zinātņu akadēmijā konstruēja Latvijā pirmo elektronisko skaitļotāju LM-3. Bet jau 1959. g. profesora E. Āriņa vadībā tika nodibināts Latvijas Valsts universitātes Skaitļošanas centrs, pirmais šāda veida centrs Baltijas republikās un ceturtais Padomju Savienībā. Pirmais skaitļotājs šajā centrā bija БЭСМ-2. Arī Padomju Savienībā skaitļotāju lietojumi sākās ar inženiertehniskiem aprēķiniem.

Bella telefona laboratorijās 1947. gadā tika izgudrota jauna ierīce — tranzistors. Izgudrojums ir reģistrēts 1947. g. 23. decembrī. Izgudrotāji bija Džons Bardīns, Volters Breteins un Viljams Šoklijs. Jau drīz parādījās pirmie skaitļotāji, kuros elektronu lampu vietā izmantoti tranzistori. Ar tiem sākās skaitļotāju otrā paaudze. Pirmais otrās paaudzes skaitļotājs tika izgatavots Anglijā Mančestras universitātē 1953. g. novembrī. Pirmā amerikāņu otrās paaudzes mašīna TRADIC sāka darboties 1954. g. tajās pašās Bella laboratorijās, kurās pirms 7 gadiem tika izgudrots tranzistors. Otrās paaudzes skaitļotāji bija daudz lētāki nekā pirmās paaudzes līdzīgu iespēju mašīnas. Tieši ar otro paaudzi sākās skaitļotāju strauja izplatība pasaulē. Piemēram, ja 1955. g. ASV bija 244 skaitļotāji, tad 1958. g. — jau 2550 un 1964. g. — 18 200.

Padomju Savienībā pirmais otrās paaudzes skaitļotājs РАЗДАН-2 konstruēts Armēnijā 1959. g. S. Mergeljana vadībā. Pati populārākā (kaut arī ne pati izplatītākā) padomju otrās paaudzes mašīna bija БЭСМ-6, kuru radīja 1967. g. S. Ļebedeva vadībā. Tai tiešām bija izcilas īpašības. Piemēram, darbības ātrums — vairāk nekā miljons operāciju sekundē. Tādēļ nav brīnums, ka vēl pēc divdesmit gadiem gan PSRS, gan citās sociālisma valstīs БЭСМ-6 var atrast strādājam blakus ceturtās paaudzes skaitļotājiem.

Līdz ar mašīnām attīstījās arī programmēšana. Sākumā vajadzēja programmēt t. s. mašīnkodos. Katrai darbībai tika norādīts tās kodēts apzīmējums un trīs adreses: pirmās divas adreses norādīja, kur atrodas darbības komponentes (saskaitāmie, reizināmie utt.), bet trešā adrese —, kur novietot rezultātu. Pirmais solis uz programmēšanas automatizāciju bija pāreja uz programmēšanas asemblera valodu. Jau ap 1950. g. programmētāji bija pamanījuši, ka ir izdevīgi nerakstīt programmu īstajās adresēs, kamēr programma nav rūpīgi pārbaudīta. Citādi, ja jāievieto jauna operācija, uzreiz mainās daudzas adreses. Labāk lietot t. s. simboliskās adreses: tad labojumus izdarīt daudz vieglāk. Var sagatavot programmas atsevišķas daļas simboliskajās adresēs, pēc tam atliek tikai mehānisks darbs — visas šīs daļas salikt kopā un pārrakstīt īstajās adresēs. Šo mehānisko darbu var izdarīt speciāla programma «Asemblers».

Pirmo reizi šāda programmēšanas daļēja automatizācija tika izdarīta 1951. g. angļu pirmās paaudzes skaitļotājam EDSAC Kembridžas universitātē Morisa Vilksa vadībā.

Padomju Savienībā darbi programmēšanas automatizācijā iesākās piecdesmitajos gados PSRS ZA korespondētājlocekļa Alekseja Ļapunova vadībā. A. Ļapunovs ne tikai aizsāka programmēšanas teorijas attīstību PSRS, bet arī kopā ar saviem skolniekiem vadīja praktiskas izstrādnes, un, galvenais, viņš bija cilvēks, kurš panāca kibernētikas reabilitāciju Padomju Savienībā.

Formāli jāsaka, ka asemblera valodu sāka izmantot pirmās paaudzes skaitļotājiem, taču tās īstā nozīme atklājās, kad sāka izmantot otrās paaudzes skaitļotājus. Līdzīgi bija vēlāk ar programmēšanas valodām. Programma, kas rakstīta šajā valodā, ir daudz tuvāka tekstam, ko parasti raksta matemātiķi, bet stipri atšķirīga no programmas mašīnkodos. Vajadzēja izveidot speciālas pārkodēšanas programmas — translatorus. Terminu «programmēšanas valoda», kā arī pirmās tādas valodas un translatorus no tām izveidoja Greisa Hopere. Viņa iestājās ASV Jūras kara flotē otrā pasaules kara laikā un dienēja tur līdz astoņdesmito gadu otrajai pusei, sasniedzot (par nopelniem programmēšanas attīstībā) komodora dienesta pakāpi. (Šī dienesta pakāpe atbilst kaut kam vidējam starp pirmā ranga kapteini un kontradmirāli.)

1953. g. firmas IBM *(International Business Machines)* speciālistu grupa Džona Bekusa vadībā sāka izstrādāt programmēšanas valodu inženiertehniskajiem aprēķiniem. 1957. g. aprīlī pēc četru cilvēku trīsarpus gadu darba valoda un translators skaitļotājam IBM-704 bija gatavs. Turpmāk firma IBM šīs mašīnas pārdeva vienīgi kopā ar FORTRAN translatoru.

Valoda FORTRAN nebija piemērota ekonomiska rakstura uzdevumu programmēšanai. Tādēļ G. Hoperes iniciatīvas rezultātā tika veidota specializēta valoda COBOL. Tehnisko uzdevumu šai valodai apstiprināja ASV Aizsardzības ministrijas komisija 1959. g. maija sēdē. Plašām aprindām valoda bija pieejama kopš 1960. g. COBOL ir ērta tādu algoritmu programmēšanai, kuros netiek lietots sarežģīts matemātiskais aparāts, bet pietiek ar vienkāršu saskaitīšanu un atņemšanu. Toties pieļaujami ļoti sarežģīti loģiski nosacījumi, bet apstrādājamie dati var būt sarežģītas uzbūves tabulas.

Otrās paaudzes skaitļotājos vēl tika lietota valoda ALGOL-60 un citas programmēšanas valodas, taču salīdzinājumā ar mūsdienu programmēšanas valodām to izteiksmes līdzekļi vēl bija ierobežoti.

Otrās paaudzes skaitļotājiem jau bija attīstītas ārējās atmiņas ierīces un dažāda tipa ievada un izvada ierīces. Izmantojot šīs ierīces, varēja ievadīt un, galvenais, izvadīt datus lietotājam ērtā veidā.

Grafiskais displejs pirmo reizi bija izveidots skaitļotājam WHIRLWIND, kas bija konstruēts ASV Gaisa kara spēku vajadzībām 1950. g., lai realizētu sistēmu gaisa satiksmes kontrolei reālā laikā.

Cits skaitļotāju lietojuma veids, kas kļuva populārs, sākot ar otro paaudzi, ir sistēmas, ar kurām var sekot sarežģītu darbu izpildei. Pirmās tāda veida sistēmas sastādīja plānu-grafiku, ņemot vērā, cik laika vajadzīgs katras atsevišķas darba sastāvdaļas izpildei un kādā kārtībā tās izpildāmas.

1952. g. maijā kādā konferencē Vašingtonā uzstājās angļu inženieris G. Dammers un demonstrēja, ka principā iespējams vienā kristālā iebūvēt ne tikai vienu tranzistoru, bet vairākus elementus. Pirmo integrālshēmu uzbūvēja Džeikobs Kilbī firmā *Texas Instruments* (ASV), un šī shēma tika sekmīgi izmēģināta 1958. g. 12. septembrī. Pasaulē pirmo skaitļotāju, kas saturēja integrālshēmas, šī firma uzbūvēja 1961. g. ASV Gaisa kara spēku vajadzībām.

Trešās paaudzes skaitļotāju darbam būtiski nepieciešama operacionālā sistēma, t. i., programmu komplekss, kas vada mašīnas darbu un atsevišķo uzdevumu izpildi. Operacionālās sistēmas tika izveidotas jau otrās paaudzes skaitļotājiem, lai gan ne visiem. 1961. g. tika izgatavots pirmais mašīnas ATLAS eksemplārs Mančestras universitātē Anglijā, projekta vadītājs — Tomass Kilburns. Šajā mašīnā bija ne tikai pirmā attīstītā operacionālā sistēma, bet arī pirmo reizi realizēta virtuālas atmiņas ideja.

Padomju Savienībā pirmais trešās paaudzes skaitļotājs bija НАИРИ-3. Tas konstruēts 1970. g. Armēnijā G. Ovsepjana vadībā.

Lai koordinētu spēkus skaitļošanas tehnikas jomā, 1969. g. decembrī Bulgārijas, Čehoslovakijas, Padomju Savienības, Polijas, Ungārijas un VDR valdības noslēdza vienošanos, kuras rezultātā tika radīta trešās paaudzes skaitļotāju sērija EC. 1973. g. notika izstāde, kurā demonstrēja pirmos 6 šīs sērijas modeļus.

Patlaban rit darbs pie piektās paaudzes skaitļotāju radīšanas. Piektās paaudzes skaitļotāju elementu bāze būs sevišķi lielas integrālshēmas. Šīs integrālshēmas saturēs ap 10 milj. elementu vienā kristālā un spēs izdarīt ap 10^2—10^3 milj. loģisku spriedumu sekundē (vienam loģiskam spriedumam vajadzīgs 100—1000 operāciju).

16. Matemātika Padomju Savienībā

Pirms revolūcijas Krievijā matemātiķi darbojās atsevišķos zinātnes centros, no kuriem ievērojamākie bija Pēterburgā, Kazaņā un Maskavā.

Pēterburgas matemātiskās skolas pamatlicējs ir ievērojamais matemātiķis L. Eilers. XIX gs. slavu šai skolai atnesa P. Čebišova un viņa skolnieku A. Ļapunova, A. Markova, J. Zolotarjova, G. Voronoja darbi. Kazaņas matemātiskā skola aizsākās ar N. Lobačevska darbiem. Maskavas matemātikas biedrība tika izveidota no Maskavas universitātes un citu mācību iestāžu profesoru un pasniedzēju pulciņa. Šajā pulciņā darbojās daži vidējo mācību iestāžu pasniedzēji, starp tiem arī tāds izcils ģeometrs kā K. Pētersons. Viņš līdz ar N. Brašmani un A. Davidovu bija viens no pulciņa iniciatoriem un Maskavas matemātikas biedrības dibinātājiem (1864). K. Pētersons bija viens no ievērojamākajiem sava laika ģeometriem, taču viņa darbus, kas tika publicēti krievu valodā, pienācīgi novērtēja tikai ievērojami vēlāk. K. Pētersona darbi bija pamatā vēlākajai Maskavas diferenciālģeometrijas skolai (B. Mlodzejevskis, D. Jegorovs, S. Fiņikovs).

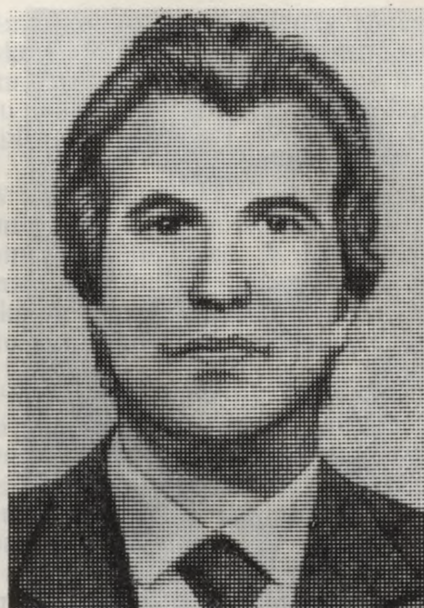
A. Davidovs galvenokārt nodarbojās ar mehāniku. Vairākām krievu inteliģences paaudzēm A. Davidovs ir zināms kā sava laika labāko elementārās matemātikas mācību grāmatu autors.

Pēc Lielās Oktobra sociālistiskās revolūcijas jaunas matemātiskās skolas izveidojās arī citās pilsētās. Ievērojama ir Tbilisi matemātiskā skola, kuru nodibināja N. Musheļišvili. Galvenais pētījumu virziens šai skolā ir diferenciālvienādojumu teorija. Funkciju teorijā aktīvi darbojas A. Šaginjana dibinātā matemātiskā skola Armēnijā. Ievērojamie Maskavas matemātiķi A. Kolomogorovs, J. Prohorovs, B. Gņedenko palīdzēja izveidot varbūtību teorijas skolas Taškentā (S. Siraždinovs), Viļņā (J. Kubiļus), Kijevā, Novosibirskā. Novosibirska tagad ir kļuvusi par tikpat nozīmīgu matemātisku centru kā Maskava un Ļeņingrada.

Skaitļu teorijā pētījumus aizsāka P. Čebišovs, A. Markovs, J. Zolotarjovs. Pēc viņiem ievērojamākos rezultātus ieguva I. Vinogradovs. 1934. g. ar trigonometrisko summu metodi viņš atrisināja 1770. g. formulēto Varinga problēmu. 1937. g. I. Vinogradovs atrisināja slaveno Goldbaha problēmu (formulēta 1742. g.) nepāra skaitļiem. Tika pierādīts, ka jebkuru pietiekami lielu nepāra skaitli var izteikt ar ne vairāk kā triju pirmskaitļu summu.

I. Vinogradova metodi apvienojot ar varbūtību teoriju, J. Ļiņņiks izstrādāja dispersiju metodi un pierādīja, ka visus pietiekami lielus veselos skaitļus var izteikt kā pirmskaitļa un divu veselu skaitļu

A. Kolmogorovs



J. Matijasēvičs

kvadrātu summu. J. Ļiņņikam ir arī svarīgi rezultāti par veselo skaitļu sadalījumu uz lodes un hiperboloīda.

Padomju matemātiķi ir ieguvuši svarīgus rezultātus Diofanta tuvinājumu jomā — nevienādību atrisināšanā veselos skaitļos. A. Hinčina pētījumiem šai jomā bija liela nozīme varbūtību teorijas un dinamisko sistēmu lietojumos.

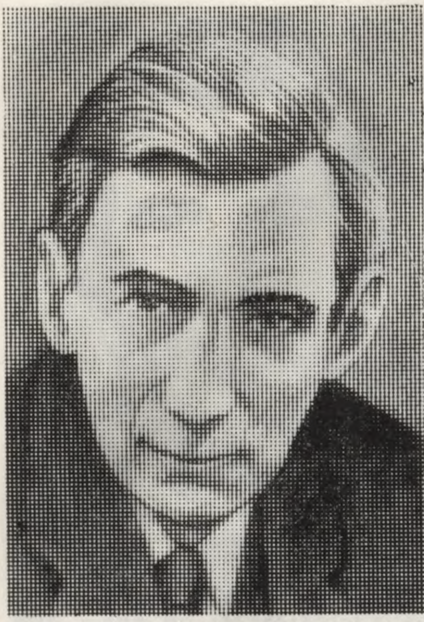
Fundamentālus rezultātus ieguva J. Kubiļus par aritmētisko funkciju vērtību sadalījumu.

Analītiskajā skaitļu teorijā pētījumus par dažādu funkciju sadalījumiem veica A. Postņikovs un viņa skolnieki. Viņiem izdevās atrast interesantas analoģijas ar diferenciālo operatoru spektrālo teoriju un varbūtību teoriju.

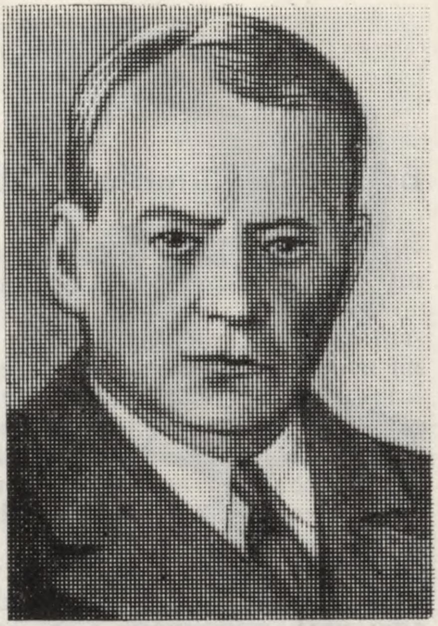
Transcendento skaitļu teorijā svarīgus rezultātus ieguva A. Gelfonds. Ar viņa metodes palīdzību izdevās atrisināt vairākus uzdevumus, tai skaitā arī Hilberta 7. problēmu. Tika pierādīts, ka, kāpinot iracionālā pakāpē jebkuru no 0 un 1 atšķirīgu algebrisku skaitli, iegūst transcendentu skaitli.

Skaitļu ģeometrijas virzienā strādāja B. Venkovs, D. Delone. Algebriskajā skaitļu teorijā piecdesmitajos gados tika publicēti J. Šafareviča darbi. Tālāk šīs idejas attīstīja viņa skolnieks J. Maņins.

Interese par matemātisko loģiku radās jau XIX gs., taču vēl vairāk par to sāka interesēties XX gs. divdesmitajos un trīsdesmitajos gados, kad aktuāls kļuva jautājums par atsevišķu uzdevumu atrisinājuma algoritma eksistenci. Agrāk matemātiķi nodarbojās tikai ar



K. Šenons



N. Luzins

šo algoritmu meklēšanu, taču tagad jau bija iespējams pierādīt atsevišķu algoritmisko problēmu neatrisināmību. Radās nepieciešamība izstrādāt precīzu algoritma definīciju. Līdz ar amerikāņu matemātiķiem lielu ieguldījumu algoritma jēdziena precizēšanā deva A. Kolmogorovs un A. Markovs. Atsevišķu algoritmisku problēmu neatrisināmību pierādīja P. Novikovs, S. Adjans, J. Matijasevičs.

Algoritmu teorijai ir liela nozīme programmēšanas teorijā un praksē. Matemātiķi aktīvi strādā pie dažādu algoritmu efektivitātes novērtējumiem.

Vadības sistēmu sintēzes teorija sākās ar K. Šenona (ASV) darbiem. Padomju Savienībā šajā virzienā nozīmīgi rezultāti ir O. Lupanovam, J. Žuravļovam un S. Jablonskim.

Nozīmīgus rezultātus matemātiskās loģikas un algebras saskarē ieguva A. Maļcevs.

A. Maļcevs un viņa skolnieki ir ieguvuši arī fundamentālus rezultātus algebrā. A. Maļcevs atrada nepieciešamos un pietiekamos nosacījumus abstraktu grupu sakārtošanai, pierādīja klasisko teorēmu par patvaļīgas Lī grupas izteikšanu ar tās maksimālās kompaktās apakšgrupas un Eiklīda telpas reizinājumu.

Ar ievērojamā padomju zinātnieka O. Šmita darbiem sākās pētījumi abstrakto grupu teorijā. Vēlāk izveidojās algebristu skola, ko vadīja A. Kurošs.

Topoloģiskās algebras attīstībā svarīga loma bija L. Pontrjagina darbiem.

Pētījumi vairākos padomju matemātikai jaunos virzienos sākās N. Luzina Maskavas matemātikas skolā. Šai skolā bija apvienojušies vairāki spilgti un daudzpusīgi matemātiķi. P. Aleksandrovs un P. Urisons bija topoloģijas pētījumu aizsācēji Padomju Savienībā. Topoloģiju tālāk attīstīja P. Aleksandrova skolnieki L. Pontrjagins, A. Tihonovs un J. Smirnovs.

N. Luzins strādāja reālā mainīgā funkciju teorijā. Viņš noskaidroja sakarību starp nepārtrauktām un mērojamām funkcijām, kā arī atrisināja Dirihlē uzdevumu mērojamu funkciju klasē. A. Kolmogorovs pierādīja fundamentālu teorēmu par funkciju superpozīciju. S. Soboļevs, S. Nikoļskis un viņa skolnieki pētīja vairākargumentu diferencējamu funkciju īpašības un to lietojumus diferenciālvienādojumu robežuzdevumos.

Viens no galvenajiem virzieniem metriskajā funkciju teorijā bija trigonometrisko un ortogonālo rindu pētīšana. Šī virziena attīstībā noteicošā loma bija N. Luzina slavenajai monogrāfijai «Integrālis un trigonometriskā rinda». Pirmais A. Kolmogorova zinātniskais rezultāts bija klasiskais visur diverģējošas Furjē rindas piemērs. Pie trigonometrisko rindu unitātes problēmām strādāja D. Meņšovs, N. Bari u. c.

Svarīgus kompleksā mainīgā funkciju teorijas pielietojumus atrada M. Keldišs un M. Lavrentjevs.

Parasto diferenciālvienādojumu teorijā padomju matemātiķi sekoja S. Kovaļevskas un A. Ļapunova tradīcijām. Stabilitātes teorijā ievērojamākie darbi ir N. Krasovskim, M. Kreinam. Cits svarīgs pētījumu virziens padomju matemātiķu darbos ir parasto diferenciālvienādojumu kvalitatīvā teorija. XX gs. divdesmitajos gados Maskavā tika noorganizēts V. Stepanova seminārs. Vairāki šī semināra dalībnieki bija N. Luzina skolnieki. Spēcīgs stimuls tēmas tālākajai izstrādei bija A. Andronova un L. Pontrjagina darbi. Uz diferenciālvienādojumu kvalitatīvo teoriju attiecas arī A. Kolmogorova un V. Arnolda darbi par tādu Hamiltona sistēmu stabilitāti, kuras tuvas integrējamām. Plašus lietojumus zinātnē un tehnikā ir guvušas N. Bogoļubova un N. Krilova asimptotiskās metodes maza parametra diferenciālvienādojumu teorijā.

Pirms revolūcijas parciālo diferenciālvienādojumu teorijā Krievijā pētījumus veica S. Kovaļevska, A. Ļapunovs, V. Steklovs, N. Ginters, S. Bernšteins, V. Smirnovs u. c. S. Bernšteins pierādīja, ka otrās kārtas eliptiska tipa divu neatkarīgu mainīgo kvazilineāram vienādojumam eksistē analītisks atrisinājums, un tādējādi atrisināja Hilberta 19. problēmu.

XX gs. trīsdesmito gadu beigās tika publicēti vairāki fundamentāli I. Petrovska darbi, kuros pētītas eliptisko, hiperbolisko un parabolisko sistēmu klases. S. Soboļevs diferenciālvienādojumu teorijā sāka izmantot funkcionālanalīzes metodes. L. Ļusterņika darbos pirmoreiz tika izmantota galīgo diferenču metode, lai pierādītu Dirihlē uzdevuma atrisinājuma eksistenci Laplasa vienādojumam.

Parciālo diferenciālvienādojumu teorijā lielu ieguldījumu devuši A. Tihonovs, N. Mushelišvili, I. Vekua, I. Gelfands, G. Šilovs u. c.

Funkcionālanalīzē darbojas liela zinātniska skola, kuru nodibināja I. Gelfands trīsdesmito gadu beigās. Interesantus rezultātus šai nozarē ir guvuši G. Šilovs, D. Raikovs, S. Mergeljans, S. Soboļevs, S. Nikoļskis, L. Kantorovičs u. c.

Varbūtību teorijā un matemātiskajā statistikā XIX gs. beigās un XX gs. sākumā vadošā bija krievu matemātiķu skola. Ievērojamo matemātiķu P. Čebišova, A. Markova, A. Ļapunova darbi bija pamats, uz kura pēc revolūcijas strauji attīstījās varbūtību teorija. Divdesmitajos gados tika veikti klasiskie S. Bernšteina un A. Hinčina pētījumi. S. Bernšteins pabeidza Laplasa un Ļapunova tipa robežteorēmu pētījumus, kā arī izstrādāja pirmo varbūtību teorijas aksiomātiku. Trīsdesmitajos gados tika publicēta A. Kolmogorova monogrāfija «Varbūtību teorijas pamatjēdzieni», kurā formulēta tagad lietotā varbūtību teorijas aksiomātika. A. Kolmogorovs, A. Hinčins u. c. daudz strādāja pie varbūtību teorijas lietojumiem bioloģijā, fizikā, tehnikā, statistikā. A. Kolmogorovs parādīja, kā varbūtību teorija iekļaujas mēra teorijā.

Padomju matemātiķu darbos intensīvi tiek pētīti arī Markova procesi (A. Skorohods, J. Dinkins).

Klasisks pētījumu virziens varbūtību teorijā ir dažādas robežteorēmas. Lielu noviržu gadījumus aplūkoja J. Ļiņņiks. Aditīvās skaitļu teorijas sakaru ar varbūtību teorijas robežteorēmām pētīja J. Kubiļus un viņa skolnieki. Gadījumu procesu robežteorēmas pētīja J. Prohorovs, A. Skorohods, A. Borovkovs un V. Koroļuks.

Līdz ar elektronisko skaitļotāju radīšanu plaši izvērtās pētījumi dažādos lietišķās matemātikas virzienos.

17. Matemātika Latvijā

Pirmās rakstiskās ziņas par Latvijas vēsturi varam atrast Indriķa Latvieša (Henricus Lettus) Livonijas hronikā. No šīs hronikas gan neko nevaram spriest par senlatviešu matemātiskajām zināšanām. Hronikā aptverts laiks no 1186. g. līdz 1227. g., taču tajā nav pieminēta Rīgas pirmās skolas — Domskolas izveide.

Par Domskolas dibināšanas gadu tiek uzskatīts 1211. g. (tiek minēts arī vēlāks laiks, taču zināms, ka 1225. g. Domskola darbojās). Par to, kas tika mācīts Domskolā, ziņu nav. Pirmais publicētais stundu saraksts attiecas uz 1597. g., kad skolā bija jau piecas klases (līdz 1594. g. bija trīs klases). No šī stundu saraksta redzams, ka tikai augstākajā klasē — prīma — bija divas stundas mācību priekšmetā «aritmētika ar sfēriku». XVI gs. Rīgā un citās Latvijas pilsētās darbojās jau vairākas skolas.

XVI gs. pēdējos gados Rīgā atvēra rēķinu skolu birģeriem. Šīs skolas uzdevums bija sagatavot beidzējus komerciālai darbībai. Pirmā rēķinu skola darbojās līdz 1619. g., kad nomira tās organizētājs, bet divas citas rēķinu skolas darbojās visu XVII gs. 1661. g. tām pievienojās arī bāriņu skola, un XVII gs. beigās Rīgā jau bija trīs skolas, kurās matemātika bija viens no pamatpriekšmetiem.

Otrās rēķinu skolas dibinātājs M. Lange 1650. g. izdeva mācību grāmatu, kurā bija aritmētika un praktisks ievads tirdznieciskos aprēķinos. F. Vedemeijera 1627. g. izdotajā mācību grāmatā jau bija algebras uzdevumi. Šī grāmata bija senākā līdz mūslaikam saglabājusies «Rīgas rēķināšanas grāmata». Tā glabājās Ļeņingradā PSRS ZA bibliotēkas fondā «Rossica», kurš gāja bojā 1987. g. ugunsgrēkā. Ir saglabājušies šīs grāmatas dažādu autoru pārstrādāti izdevumi (1677., 1688., 1737., 1769. g.; līdz 1819. g. pavisam 12 izdevumi). 1769. g. I. Flors izdeva jaunu «rēķinu grāmatu». Šajā grāmatā aritmētika definēta kā zinātne, kurā viss jāpierāda un kura «kalpo prāta attīstībai». Latviešu valodā pirmo aritmētikas mācību grāmatu — «Rēķināšanas grāmatiņa, ko priekš visiem tumšiem ļaudīm, bet tiem vien par labu sarakstīta, kas gudrību un gaišu prātu cienī» sarakstīja Rubenes mācītājs Kristofs Harders (Rīga, 1806). Tās ievadā teikts: «Šī grāmatiņa tāpēc ir uztaisīta, lai arī caur to dažkārt pie latviešiem laime un labums, un arī gudrība un saprašana vairotos.» Cēsu apriņķa skolu inspektori šo grāmatu izdeva, domādami par apriņķa jaundibinātās draudzes skolas vajadzībām. Taču autors to bija domājis pašmācībai. Tekstā ietverti daudzi padomi, kā saprātīgi saimniekot. Turpmākajos 15 gados netika laista klajā neviena cita matemātikas grāmata.

No 1817. līdz 1819. g. tika atcelta dzimtbūšana un «atbrīvoto» zemnieku izglītības lietas nodeva muižnieku un mācītāju ziņā. Tika iekārtotas četru mēnešu skolas (no 10. novembra līdz 10. martam) pa 8 stundām dienā. Varēja mācīties arī mājās, bet reizi mēnesī vajadzēja iet uz skolu pārbaudīt zināšanas. Izmaiņas matemātikas mācību grāmatu vēsturē iezīmēja šai laikā izdotie Kurzemes un Vidzemes zemnieku likumi, kuros ietilpa skolu uzturēšanas, pārvaldīšanas un apmeklēšanas noteikumi. Likumi noteica, ka latviešu draudzes skolās jāmāca arī rēķināt. Pārmaiņas tautas izglītībā notika ļoti lēni. Trūka līdzekļu skolu tīkla izveidei, nebija iestāžu skolotāju apmācībai. Pedagoģisko domu veidoja galvenokārt vācu mācītāji. Viņu idejas bieži īstenoja neizglītoti skolotāji, gadījuma cilvēki. Tomēr šajā laikā vērojama skolas literatūras bagātināšanās. 1821. g. iznāca Neretas mācītāja F. V. Vāgnera «Rēķināšanas pamācīšana, cik zemnieku ļaudīm vajag» (Jelgava, 1821). Pirmo matemātikas metodikas grāmatu latviešu valodā uzrakstīja Kārlis Eduards Napjerskis «Īsa pamācīšana priekš skolmeisteriem» (Jelgava, 1822). Autors cerēja, ka aktivizēsies skolu darbība Vidzemē, un apjauta nepieciešamību pirmām kārtām izglītot skolotājus. Pavisam XIX gs. pirmajā pusē iznāca pieci matemātikas grāmatu pirmizdevumi.

XIX gs. četrdesmitie un piecdesmitie gadi bija raksturīgi ar zemnieku nemieriem, izceļošanu uz citām guberņām, pāriešanu pareizticībā kā protestu pret vācu mācītāju varu. Valdība uzcēla 16 skolas. mācību grāmatu rakstīšana pārgāja skolotāju ziņā. Šajā laikā darbību uzsāka J. Cimzes un Irlavas skolotāju semināru pirmo izlaidumu absolventi. Latviešu matemātikas grāmatu vēsture nav domājama bez kādreizējo Cimzes semināristu Ā. Tērauda un J. Bankina veikuma. Abiem autoriem bija kopīgi izglītības avoti — gadu gaitā izkoptie vācu pedagogu E. Henšela un A. Dīstervēga matemātikas mācīšanas metodikas sasniegumi. 1857. g. tika izdota Ā. Tērauda «Rēķinu uzdošana, uz tāfeles rēķināmas» un J. Bankina «Uzdošanas, uz tāfeles rēķināmas».

Pirmā ģeometrijas mācību grāmata latviešu valodā iznāca tikai 1862. gadā Jelgavā. Tas bija vācu mācītāja G. Brāšes mēģinājums latviski izklāstīt «Mērīšanas mācību».

XIX gs. sešdesmitajos gados notika izglītības reforma: tika atcelts skolas kārtu raksturs, dresūra, iekalšanas metode, miesas sodi, tika atvērtas elementārskolas un par skolotājiem atļāva strādāt arī sievietēm. Statūti noteica divu veidu vidusskolas: klasisko un reālo ģimnāziju ar 7 gadu mācību laiku. Rīgā laikā no 1865. līdz 1868. gadam atklāja divas elementārskolas — Aleksandra vīriešu ģimnāziju (mācības vācu valodā) un Lomonosova sieviešu ģimnāziju (mācības krievu valodā).

XIX gs. septiņdesmitajos gados tika veikti reakcionāri pasākumi tautas izglītībā. Reālģimnāzijas pārveidoja par reālskolām ar profesionālu novirzienu, bet apriņķa skolas — par augstākā tipa elementārskolām sīktirgotāju, amatnieku un kalpotāju bērniem. Dažos pagastos zemnieki, cerēdami atbrīvoties no vācu kundzības, sūtīja lūgumus atvērt krievu skolas. Vācu muižnieki centās izvērst ģermanizāciju. Šai laikā aktīvi sāka darboties jaunlatviešu kustība. Jaunlatvieši lielu nozīmi piešķīra tautas izglītībai. Šīs rūpes jūtamas arī par matemātikas mācību grāmatām. 1874. g. Rīgā iznāca skolotāja, sabiedriska darbinieka un filozofa Kaspara Biezbārža (1806—1886) grāmata «Ģeometrija jeb āruma zinātnība». Interesanti, ka jau agrāk ģeometrijas grāmatas pirmo daļu bija uzrakstījis Auseklis, taču tā netika publicēta. Domājams, ka K. Biezbārdis ir izmantojis šo manuskriptu savas grāmatas rakstīšanā. K. Biezbārža grāmatai raksturīga cenšanās latviskot ģeometrijas terminus. Ievadā Biezbārdis raksta: «Matemātiku saucam mēruma zinātnību. Viņa pieņem par liecību tikai prātību, neliek acīm spriest par šo un to, bet prātam vien caur prātošanu.» Kā filozofs autors centās izskaidrot arī pamatjēdzienus. Piemēram, punkts tika definēts šādi: «Vietas ir bez nekāda mēruma, viņas ir iekš āruma (telpas), bet nav ārumainas, jo citādi jau pašas būtu ārumi, kam daudz vietas iekšā.» Pēc šīs ģeometrijas grāmatas vēl iznāca J. Bankina «Īsa ģeometrija jeb rūmes mācība» (Jelgava, 1880) un J. Kalniņa «Ģeometrija, 1. kurss» (Rīga, 1890). Nākošā ģeometrijas mācību grāmata iznāca tikai 1920. gadā.

1884. g. Rīgā bija 28 elementārskolas ar 2000 skolēniem, no kuriem 766 bija latvieši. Bez tam Rīgā bija 3 gada, 9 ziemas, 2 fabrikas skolas un 1 privātskola. Skolas bija apgādātas slikti. Pilsētās bija sliktāks skolu stāvoklis nekā laukos. Pēc lauku skolu normām (uz 1000 iedzīvotājiem viena skola) Rīgā vajadzēja būt 300, bet bija 86 skolas. Laukos tautskolas bija bezmaksas, bet Rīgā — maksas. Tomēr XIX gs. beigās lasītpratēju vecumā no 10 līdz 19 gadiem bija 95% vīriešu un 94% sieviešu.

1775. g. Kurzemes hercogs Pēteris Mītavā (Jelgavā) organizēja pirmo zinātnisko iestādi Latvijā — Pētera akadēmiju (Academia Petrina). Sākotnēji hercogam bija doma nodibināt universitāti, taču pret šo nodomu protestēja Polijas katoliskās aprindas, kuras negribēja pieļaut augstākās mācību iestādes eksistenci ar luterāņu ticības katedru. (Līdz 1795. g. Kurzeme bija autonoma Polijas karaļa hercogiste.) Tādējādi tika nolemts Mītavā izveidot akadēmisku ģimnāziju. Pētera akadēmijas statūtu projektu un mācību programmas 1773. g. izstrādāja Berlīnes Zinātņu akadēmijas loceklis J. Zulcers. Matemātikas profesoru pienākumos ietilpa arī mehānikas un optikas likumu, mašīnu uzbūves, hidrostatikas un hidraulikas izskaidrošana. Īpaša uzmanība bija jāpievērš zināšanu praktiskajam lietojumam ekonomikā un celtniecībā. Teorēmas bija jāmāca bez pierādījumiem. Matemātikas profesora vietai Zulcers rekomendēja Vilhelmu Beitleru (1745—1811) no Švābijas, kurš Tībingenē bija beidzis juridisko fakultāti un izrādīja interesi par matemātiku un astronomiju. V. Beitlers akadēmijā strādāja 36 gadus — no 1775. g. līdz mūža beigām. 1778. g. viņš publicēja darbu «Jauna kubisko vienādojumu analīze», kuru var uzskatīt par Latvijā pirmo zinātnisko darbu matemātikā. V. Beitlers sastādīja kalendārus no 1775. g. līdz 1814. g., kā arī nodibināja pirmo astronomisko observatoriju Latvijā.

Starp pirmajiem Pētera akadēmijas audzēkņiem bija Ernests B ī n e m a n i s (1753—1806), kurš izcēlās ar matemātiskām spējām un prasmi izgatavot mācību līdzekļus. Viņš palīdzēja V. Beitleram uzstādīt Anglijā nopirktos astronomiskos instrumentus. Vairākus instrumentus Bīnemanis izgatavoja pats. Pēc ģimnāzijas beigšanas Bīnemanis palika turpat strādāt par mehāniķi. V. Beitlers un E. Bīnemanis sekoja zinātnes un tehnikas jaunumiem. Tā, piemēram, 1784. g. sākumā, pusgadu pēc Francijā pirmajiem palaistajiem gaisa baloniem, Beitlers «Mītavas mēnešrakstā» publicēja optimālo aerostata izmēru aprēķinu, ja aerostats ir cilindrs ar koniskas virsmas «cepuri», bet Bīnemanis izgatavoja ar ūdeņradi pildītu aerostatu un publiski demonstrēja tā lidojumu. 1788. g. starp hercogu un Bīnemani radies konflikts, kura iemesls nav zināms. E. Bīnemani atlaida no darba Pētera akadēmijā. Viņš iekārtojās darbā par mehāniķi Petrozavodskā, vēlāk strādāja par skolotāju Gatčinā, kur arī miris.

Pēc Kurzemes iekļaušanas Krievijas impērijas sastāvā (1796) V. Beitleram piedāvāja doties uz Pēterburgu un ieņemt akadēmiķa vietu, taču viņš palika Jelgavā un turpināja strādāt ģimnāzijā, kuru tagad sauca *Gymnasium illustre.* 1795. g. V. Beitleru ievēlēja par Pēterburgas Zinātņu akadēmijas ārzemju locekli.

Divus gadus pēc Beitlera nāves matemātiku pasniedza vēstures profesors, bet 1813. g. par matemātikas profesoru kļuva Magnuss Georgs P a u k e r s (1787—1855). Pēc Tērbatas universitātes beigšanas 1808. gadā M. G. Paukers strādāja par inženieri un nodarbojās ar Krievijā pirmās optiskā telegrāfa līnijas Pēterburga—Carskoje Selo celtniecību. 1811. g. viņš atgriezās Tērbatā un kļuva par matemātikas pasniedzēju un astronomiskās observatorijas novērotāju. 1813. g. M. G. Paukers sekmīgi aizstāvēja disertāciju par cietu ķermeņu elastības problēmu un ieguva brīvo mākslu maģistra un filozofijas doktora grādu.

Jelgavā M. G. Paukers ierosināja dibināt zinātnisko biedrību. 1815. g. viņš sapulcēja organizatorisko kodolu, bet pēc diviem gadiem oficiāli tika nodibināta Kurzemes literatūras un mākslas biedrība. Mākslas jēdzienu biedrības locekļi traktēja ļoti plaši. Paukera pārziņā atradās matemātika, astronomija un ģeodēzija.

1819.—1822. g. Paukers divos sējumos izdeva Kurzemes literatūras un mākslas biedrības biedru zinātniskos ziņojumus. Tajos bija arī Paukera publikācija par regulāra 257-stūra konstrukciju. Šādas konstrukcijas eksistenci bija pierādījis K. F. Gauss. Paukera rakstā pēc viņa paša konstrukcijas izklāsta bija minēts citāts no Paukeram adresētas Gausa vēstules (1820. g. 2. janvārī), kurā Gauss bija atsūtījis izrakstu no viņa 1796. g. veiktā aprēķina. Gauss bija Kurzemes literatūras un mākslas biedrības goda loceklis, un tieši šo titulu viņš bija atzīmējis pirms paraksta Paukeram adresētajā vēstulē. Gausa autoritāte nepaglāba Paukeru no citu biedrības biedru uzbrukumiem. Viņi pārmeta Paukeram biedrības līdzekļu izšķiešanu, drukājot, pēc viņu domām, nevienam nevajadzīgus aprēķinus. Apvainotais Paukers atteicās no biedrības sekretāra pienākumiem. Pēc

25 gadiem, aizgājis pensijā, viņš gan ļāvās pierunāties un atkal ieņēma šo amatu.

Pārtraukums administratīvajā darbā labvēlīgi ietekmēja M. G. Paukera zinātnisko darbību. Drīz viņš kļuva par ievērojamu autoritāti novērojumu datu apstrādes teorijā un matemātiskajā statistikā. Viņš bija viens no pirmajiem, kurš novērtēja mazāko kvadrātu metodes nozīmi eksperimentālo datu apstrādē.

Par ieguldījumu metroloģijā Paukeram tika piešķirta Demidova prēmija, kas tolaik bija viens no augstākajiem zinātniskajiem apbalvojumiem Krievijā. 1822. g. M. G. Paukeru ievēlēja par Pēterburgas Zinātņu akadēmijas korespondētājlocekli. M. G. Paukers nodarbojās arī ar zinātnes popularizāciju. V. Beitlera un M. G. Paukera iedibinātās astronomijas un matemātikas tradīcijas labvēlīgi ietekmēja Latvijas zinātnes dzīvi līdz pat pirmajam pasaules karam, kad 1919. g. baltgvardi iznīcināja Jelgavas ģimnāzijas observatoriju.

Nozīmīga loma Latvijas zinātnes attīstībā bija Tērbatas (Tartu) universitātei. Tur izglītību ieguva daudzi Latvijas mācību iestāžu matemātikas pasniedzēji: M. G. Paukers, H. Veidemans, G. Kizerickis, G. Bingners, P. Bols, A. Meders, P. Kadiķis.

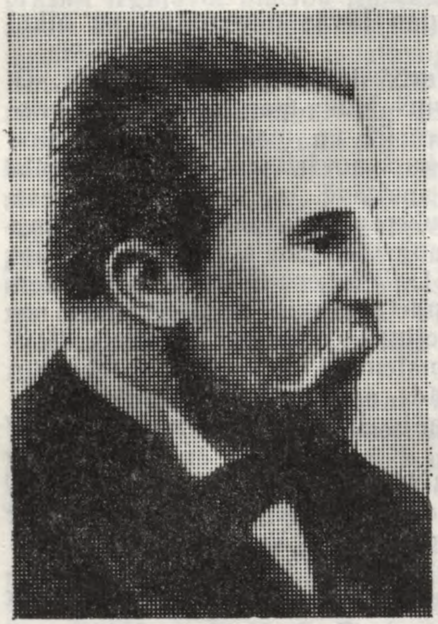
Pirmais latvietis, kas Tērbatas universitātē studēja matemātiku, bija Kārlis Viljams (1777—1847).

1808. gadā Tērbatas universitātes vadība griezās pie cara Aleksandra I ar lūgumu piešķirt K. Viljamam naudas pabalstu, jo «viņa uzcītība mācībās un panākumi studijās liek cerēt, ka viņš gūs lielas sekmes zinātnē tēvijas labā». Aleksandrs I pavēlēja maksāt Viljamam 300 rubļus gadā «no sava kabineta līdz studiju beigām un iestāšanās kādā dienestā». Dokumenta saturs nepārprotami liecina, ka K. Viljams, bijušais latviešu dzimtcilvēks, tiešām bija neparasti apdāvināts, jo nevar iedomāties kādus citus motīvus, kuru dēļ Tērbatas universitātes vadība viņu iedrošinātos tik noteikti protežēt.

Kārlis Viljams dzimis 1777. g. Cēsu apriņķī Lugažu pils pagasta Pilēniešu mājās. Viņa tēvs bija atslēdznieks, barona Vrangela dzimtcilvēks. Vāciski lasīt K. Viljams esot iemācījies, salīdzinot latviešu un vācu Bībeles tekstus. Tad no kāda mūrnieka dabūjis dzirdēt, ka eksistē latviešu-vācu vārdnīca. To viņš iegādājies un neatlaidīgi izkopis savas vācu valodas zināšanas. Tad ķēries pie matemātikas mācību grāmatām. Būdams apdāvināts atslēdznieks, viņš vaļas brīžos mēdzis darināt «matemātiskus rīkus» (domājams, ka kādas leņķa mērīšanas ierīces).

Pārsteigts par sava dzimtcilvēka neparasto apdāvinātību, barons Vrangels nolēma dāvāt Kārlim Viljamam brīvību, palīdzēt viņam tikt pie tālākas izglītības. Viljama brīvlaišanas grāmata tika reģistrēta Valkas notāra H. Glāzera kantorī 1803. g. 16. jūlijā. Tieši šis pats gads atzīmēts Tērbatas universitātes studējošo sarakstā («Album academicum») kā Viljama studiju sākums.

Tālākās ziņas par K. Viljama likteni ir visai nepilnīgas. Viņa vārdu sastopam pirmā Tērbatas universitātes matemātikas un astronomijas profesora S. Pfafa rakstos. S. Pfafs norāda, ka K. Viljams



P. Bols

palīdzējis viņam pie astronomiskās iekārtas izveidošanas un pats darinājis nelielu pasāžinstrumentu. Tērbatas universitāti K. Viljams beidza 1809. g., pēc tam strādāja par tehniķi un muižas pārvaldnieku Mazkrievijā, vēlāk par spoguļu fabrikas direktoru Rokkolā pie Viborgas.

Otrais latvietis, kas studēja matemātiku Tērbatas universitātē no 1842. līdz 1847. g., bija Jānis Āronietis (1824—1905). Pēc universitātes beigšanas viņš strādāja Pēterburgā Aņenska skolā par skolotāju un inspektoru. Trešais latvietis Tērbatas matemātikas students bija Kārlis Pētersons (1828—1881), kurš Tērbatā mācījās no 1847. līdz 1852. g. No 1865. g. viņš pasniedza matemātiku Petropavlovskas skolā Maskavā. Vēlāk viņš bija viens no septiņiem Maskavas matemātikas biedrības dibinātājiem. K. Pētersons ir vairāku nozīmīgu darbu autors diferenciālģeometrijā. Darbā «Par virsmu izklāšanu» (1853) K. Pētersons ieguva virsmas pamatvienādojumus (Pētersona—Kodaci vienādojumi). Viņš definēja arī t. s. Pētersona virsmas — virsmas, kuras var izklāt uz galvenās bāzes, — kā arī noskaidroja atbilstību starp divām virsmām, ja pieskarplaknes attiecīgajos punktos ir paralēlas (Pētersona atbilstība, 1866). K. Pētersonam ir darbi arī parciālo diferenciālvienādojumu teorijā. K. Pētersons tiek atzīts kā Maskavas ģeometriskās skolas dibinātājs.

Starp Maskavas matemātikas biedrības dibinātājiem minams arī Augusts Davidovs (1823—1885), kurš dzimis Lībavā (Liepājā), bet vidējo izglītību ieguvis Goldingenā (Kuldīgā).

Tērbatas universitātē studējušajiem latviešiem nebija iespēju strādāt dzimtenē, jo tam pretojās vācu muižniecība. Līdz 1890. g. no 22 latviešiem, kuri Tērbatā studēja matemātiku, universitāti beidza 8, no tiem tikai divi pēc tam strādāja Latvijā un arī ne savā specialitātē. Sākot ar 1890. g., situācija mainījās. Cariskās rusifikācijas politikas ietvaros latvieši pēc Tērbatas universitātes beigšanas varēja atgriezties Latvijā un strādāt mācību iestādēs.

1862. g. Rīgā tika nodibināts Politehnikums, kurā par matemātikas pasniedzējiem strādāja H. Veidemanis, G. Kizerickis, G. Bingners, bet no 1895. g. — arī Pīrss Bols (1865—1921), izcilākais Latvijā strādājušais matemātiķis.

Pīrss Bols piedzima 1865. g. 23. oktobrī (pēc jaunā stila) Valkā vācu tirgotāju ģimenē. Par viņa bērnību zināms tikai tas, ka pamatizglītību viņš ieguvis privātstundās un pilsētas skolā. 1878. g. P. Bols iestājās Vīlandes vācu klasiskajā ģimnāzijā. Par mācībām un uzturēšanos ģimnāzijas pansionātā bija jāmaksā 400 rbļ. gadā. Trūcīgākiem skolniekiem, ja viņiem bija labas sekmes, tika piešķirtas nelielas stipendijas. Stipendiātu sarakstā bija arī P. Bols. Atkarībā no klases matemātikai bija paredzētas 4—5 stundas nedēļā. Fiziku mācīja divās vecākajās klasēs 2 st. nedēļā. Šos priekšmetus mācīja Hugo Veidemanis (1854—1887), kurš augstāko izglītību bija ieguvis Tērbatas universitātē. Tai laikā pasniedzējs diezgan plašās robežās varēja pats noteikt, ko mācīt savā priekšmetā. H. Veidemanis izmantoja šīs savas tiesības, lai iepazīstinātu audzēkņus ar lielumu funkcionālās atkarības jēdzienu.

Pēc ģimnāzijas beigšanas 1884. g. rudenī P. Bols iestājās Tērbatas universitātes fizikas un matemātikas fakultātē. Tai laikā studentu apmācība notika nevis pa kursiem, bet pa priekšmetiem. Students pats varēja izvēlēties, kā viņš apgūs priekšmetu, lekciju apmeklēšana nebija obligāta, atrašanās laiks universitātē netika ierobežots. Nodarbības regulēja vispārīga prasība trijos paņēmienos nokārtot graduēšanas eksāmenus. Kad students uzskatīja, ka ir pienācīgi sagatavojies kārtējai trešdaļai, viņš par to rakstiski ziņoja dekānam un saņēma norīkojumu eksaminētājiem. Programmas priekšmetu nobeigums bija diplomdarbs. Ja diplomdarbs tika novērtēts pozitīvi, tā autors kļuva par attiecīgās specialitātes kandidātu — «matemātikas kandidātu», «astronomijas kandidātu» u. tml. Ja diplomdarbs nebija pa spēkam, tad tika piešķirts nosaukums «īstenais students».

Pirmo graduēšanas eksāmenu trešdaļu P. Bols nokārtoja 1885. g. decembrī. Nākošo trešdaļu viņš nokārtoja 1886. g. sākumā. Tai pašā gadā P. Bols iesniedza ikgadējam studentu darbu konkursam savu pirmo patstāvīgo pētījumu «Lineāro diferenciālvienādojumu invarianti un to pielietojums». 1886. g. 12. decembrī šim darbam tika piešķirta zelta medaļa.

Pēdējo graduēšanas eksāmenu trešdaļu P. Bols nokārtoja 1887. g. augustā. Visi eksāmeni tika nokārtoti ar atzīmi «ļoti labi». P. Bols ieguva matemātikas kandidāta diplomu. Vēl pēc divām nedēļām, nokārtojis eksāmenu elementārās matemātikas metodikā un uzrakstījis sacerējumu «Par ģimnāzijas izglītības nozīmi», P. Bols ieguva vecākā skolotāja nosaukumu.

Pēc universitātes beigšanas P. Bols sākumā bija privātskolotājs Lēvi muižā (Igaunijā), pēc tam neilgi pasniedza Irlavas skolotāju seminārā. Tai laikā tika izdotas viņa pirmās publikācijas: 1889. g. — raksts «Molekulārās pievilkšanās likums», 1890. g. — «Par vienu Keplera trešā likuma vispārinājumu». 1889. g. P. Bola vārds vēlreiz parādījās Tērbatas universitātes sarakstos. Viņš gatavojās maģistra disertācijas aizstāvēšanai. Maģistra disertācija «Par vienargumenta funkciju izvirzīšanu trigonometriskā rindā ar vairākiem argumentiem, kuri proporcionāli funkcijas argumentam» tika izstrādāta divos gados. Aizstāvēšana notika 1893. g. janvārī. P. Bola idejas citu zinātnieku uzmanību piesaistīja tikai pēc desmit gadiem, kad franču astronoms E. Esklangons neatkarīgi no P. Bola atklāja tos pašus jēdzienus un ieteica ērtu terminu — «kvaziperiodiskas funkcijas».

1900. g. novembrī P. Bolam tika piešķirts lietišķās matemātikas doktora grāds.

1895. g. P. Bolu uzaicināja vadīt Rīgas Politehnikuma matemātikas katedru. 1896. g. Politehnikums tika pārveidots par Politehnisko institūtu. 1896. g. maijā tika apstiprināts jauns nolikums, kurā bija teikts, ka pasniegšana turpmāk notiks tikai krievu valodā.

P. Bols aizrāvās ar šahu. Viņa spēle ieinteresēja arī tādu izcilu šahistu kā E. Laskers. Viena no P. Bola atrastajām atklātnēm šaha literatūrā pazīstama kā «spāniešu partijas Rīgas variants».

Interese par šahu netraucēja P. Bolu tiešajā darbā. Pagājušā gadsimta deviņdesmito gadu beigās viņš sarakstīja lekciju kursu augstākajā matemātikā. Rīgas Politehniskajā institūtā šis kurss, kurā bija ietverta analītiskā ģeometrija, diferenciālrēķini un integrālrēķini, vairākkārt tika izdots, un to 20 gadus lietoja kā mācību grāmatu augstākajā matemātikā. Šo kursu izmantoja arī matemātiķi Latvijas Universitātes pirmajos pastāvēšanas gados. Rīgā P. Bols uzrakstīja izcilus darbus funkciju teorijā un parasto diferenciālvienādojumu teorijā. Viņš pierādīja dažādu varietāšu un to gluduma eksistenci, nepieciešamos un pietiekamos stabilitātes nosacījumus pastāvīgi darbojošos perturbāciju gadījumā, ieguva daudzus citus rezultātus. Pierādījumos P. Bols izmantoja topoloģiskas metodes un kā palīgteorēmu pierādīja nekustīgā punkta eksistenci lodes nepārtrauktā transformācijā par lodi.

Studentiem P. Bols bija profesors ar dīvainībām. Viņa lekcijās bieži tika lietoti izteicieni, kas smīdināja studentus, piemēram: «Pieņemsim, ka tas tā nav, un tūlīt pierādīsim, ka tas tomēr tā ir.» Stāstīja, ka katru reizi, atgriezies mājās, viņš jautājis ekonomei: «Sakiet, lūdzu, vai šeit dzīvo P. Bols?», lai pārbaudītu, vai nav kļūdījies piezvanot. P. Bols nebija precējies, un viņam nebija tuvu draugu. Kolēģi uzskatīja, ka viņš dzīvojis tikai zinātnei. P. Bols bija vienaldzīgs pret slavu. Bieži vien, ieguvis jaunu rezultātu, viņš šaubījās, vai tiešām viņš to izdarījis pirmais.

Sākoties pirmajam pasaules karam, RPI tika evakuēts uz Maskavu, pēc tam uz Ivanovu. Uz Maskavu aizbrauca arī P. Bols. Viņš bieži esot pastaigājies gar Kremļa sienu ar neiztrūkstošo lietussargu rokās pat 30 grādu salā.

1919. g. P. Bols atgriezās Rīgā, un viņu ievēlēja par profesoru Latvijas Universitātes Inženieru fakultātē, bet tur viņš strādāja neilgi, jo 1921. g. 25. decembrī nomira.

P. Bola darbus izdeva Rīgā 1974. g. Te lieli nopelni I. Rabinovičam, kurš sarakstījis vairākus darbus Latvijas matemātikas vēsturē.

No 1897. g. Rīgas Politehniskajā institūtā strādāja Alfrēds Meders (1873—1944). A. Meders pabeidza Tērbatas universitātes fizikas un matemātikas fakultāti ar matemātikas kandidāta grādu 1895. g. 1906. g. Pēterburgas universitātē viņš ieguva maģistra grādu. Līdz 1899. g. A. Meders bija asistents, pēc tam — docents, no 1914. g. — profesors-adjunkts, bet no 1918. g. — RPI augstākās matemātikas ekstraordinārais profesors. No 1919. g. līdz 1939. g. A. Meders pasniedza Latvijas universitātē.

A. Meders nodarbojās ar līkņu īpašpunktu pētīšanu trīsdimensiju telpā, pētīja funkcijas izturēšanos un definīcijas apgabala robežas. Divus darbus A. Meders uzrakstīja varbūtību teorijā. A. Meders bija pirmais, kas Latvijā uzrakstīja darbu matemātikas vēsturē — «Gausa un Tērbatas universitātes tiešie un netiešie sakari». Svarīgākie darbi A. Mederam ir matemātiskajā analīzē.

Laiku pa laikam Latvijā ir parādījušies matemātiski darbi, kuru autori paši nav matemātiķi-profesionāļi. Piemēram, 1796. g. Liepājā iznāca anonīma grāmata par paralēlo taišņu teoriju. Iespējams, ka šīs grāmatas autors bija jurists Anderss. XIX gs. beigās Liepājā strādāja inženieris-dzelzceļnieks G. Semikoļenovs, kurš uzrakstīja darbu par Lobačevska ģeometriju.

1919. g. februāra sākumā, kad ar Latvijas Padomju valdības dekrētu tika nodibināta Latvijas augstskola, Latvijas Padomju valdības priekšsēdētājs P. Stučka un tautas izglītības komisārs J. Bērziņš aicināja no Maskavas uz Rīgu pārcelties profesoru E. Lejnieku. E. Lejnieks bija pirmais Matemātikas un dabaszinātņu fakultātes dekāns.

Edgars Lejnieks dzimis 1889. g. 19. maijā Rīgā privātfirmas ekspeditora ģimenē. Skolas gaitas viņš iesācis Pārdaugavas pamatskolā, vēlāk turpinājis mācīties Rīgas Pētera reālskolā. Jau skolas gados E. Lejnieks sacerēja savu pirmo zinātnisko darbu — «Par harmonisko rindu», ko 1907. g. publicēja Odesā izdotajā žurnālā «Eksperimentālās Fizikas un Elementārās Matemātikas Ziņotājs». Tāpēc nav nejaušība, ka pēc skolas beigšanas Lejnieks 1907. gadā dodas uz Maskavu, lai Maskavas universitātē studētu matemātiku. E. Lejnieks mācījās ļoti sekmīgi, turklāt gan studiju laikā, gan arī pēc tam vairākos žurnālos piedalījās kā uzdevumu sastādītājs un risinātājs. Sakarā ar darbību žurnālu redakcijās parādījās Lejnieka darbi elementārajā ģeometrijā, it īpaši trijstūra ģeometrijā. Studiju laikā E. Lejnieks intensīvi nodarbojās arī ar pētījumiem skaitļu teorijā un algebrā. Pēc universitātes beigšanas Lejnieks uzsāka pedagoģisko darbu matemātikā dažādos institūtos: Maskavas Sieviešu institūtā un Maskavas Glezniecības, tēlniecības un celtniecības augstskolā. 1914. gadā pēc maģistra eksāmena nolikšanas E. Lejnieks tiek komandēts uz Getingenes universitāti zinātniskās kvalifikācijas celšanai. Karam sākoties, E. Lejnieks atgriežas Maskavā un līdz 1919. gadam turpina pedagoģisko darbību Ceļu inženieru institūtā un Maskavas Augstākajā tehniskajā skolā.

Latvijas universitātē profesors E. Lejnieks strādāja līdz 1934. gadam. E. Lejnieks sastādīja mācību plānu, kā arī matemātikas nodaļas programmu. Vienlaikus E. Lejnieks uzņēmās ļoti lielu pedagoģisko slodzi, lasīdams daudzus mācību priekšmetus. Svarīgs E. Lejnieka nopelns bija Fizikas un matemātikas fakultātes bibliotēkas organizēšana.

E. Lejnieks aizvien uzmanīgi sekoja svarīgākajiem notikumiem matemātiskajā dzīvē, uzturēja sakarus ar padomju un aizrobežu matemātiķiem, piedalījās starptautiskajos matemātiķu kongresos (1928. g. Boloņā, 1931. g. Cīrihē), kā arī I Vissavienības matemātiķu kongresā 1930. g. Harkovā.

Būdams ļoti aizņemts, profesors Lejnieks savas lekcijas nav pierakstījis, kaut gan tāds nodoms viņam bijis. Skaitļu teorijā (pamatkursā, kā arī algebriskajā skaitļu teorijā) un augstākajā algebrā E. Lejnieka talantīgais skolnieks Ernests Fogels (1910—1985) izdeva viņa lekcijas profesora Arvīda Lūša (1900—1969) redakcijā. E. Lejnieks ir lasījis lekcijas matemātikas skolotāju sagatavošanas kursos, organizējis 1923. g. Pirmo Latvijas matemātikas zinātņu darbinieku kongresu Rīgā, bet 1922. gadā dibinājis Matemātikas zinātņu biedrību studentiem, kurā pats vairākkārt uzstājies ar ziņojumiem.

1934. gadā E. Lejnieks sakarā ar acu slimību bija spiests atteikties no pedagoģiskās un pēc tam arī no zinātniskās darbības. Vēl nesasniedzis 50. dzīves gadu, viņš 1937. gada 11. februārī nomira.

1919. gada septembrī universitātē iestājās Arvīds Lūsis. Kā privātdocents, docents, profesors A. Lūsis universitātē strādāja līdz mūža beigām.

Arvīds Lūsis dzimis 1900. gada 24. novembrī Valmieras apriņķa Koņu pagasta Kalniņos zemnieku ģimenē. Pēc pamatskolas beigšanas no 1914. līdz 1918. g. viņš mācījās Valkas reālskolā, bet 1919. g. iestājās Valkas ģimnāzijā, kuru pabeidza 1919. g. vasarā. Tā paša gada rudenī A. Lūsis uzsāka mācības Latvijas universitātes Matemātikas un dabaszinātņu fakultātē. Vienlaikus ar mācībām universitātē viņš apmeklēja vidusskolas skolotāju sagatavošanas kursus. No 1923. g. A. Lūsis sāka pasniegt matemātiku, fiziku un kosmogrāfiju Jelgavas skolotāju institūtā, kur strādāja līdz 1934. g. Pēc sekmīgas universitātes beigšanas 1924. g. A. Lūsis tika atstāts universitātē, lai sagatavotos universitātes pasniedzēja darbam. 1926. un 1927. g. vasaras semestros viņš stažējās Leipcigas universitātes Matemātikas institūtā. 1928. g. viņš uzrakstīja darbu «Permutablās funkcijas un Volterras integrālvienādojumi» un tika ievēlēts par Latvijas universitātes Matemātikas institūta privātdocentu. No 1928. līdz 1935. g. A. Lūsis lasīja dažādus kursus teorētiskajā mehānikā un lietišķajā matemātikā. 1935. g. A. Lūsi ievēlēja par docentu, un viņš sāka lasīt tīrās matemātikas kursus. 1938. g. viņš aizstāvēja doktora disertāciju «Permutablo funkciju teorijas pamatproblēma» un kļuva Matemātikas semināra vadītājs. (Tagad tas atbilstu katedras vadītāja amatam.) Tā paša gada rudenī A. Lūsim piešķīra vecākā docenta nosaukumu. No 1940. g. A. Lūsis bija profesors, matemātikas un mehānikas katedras vadītājs, bet no 1945. g. — matemātiskās analīzes katedras vadītājs. Kad 1946. g. tika noorganizēta LPSR Zinātņu akadēmija, A. Lūsis kļuva par pirmo Fizikas un matemātikas institūta Matemātikas nodaļas vadītāju. Šajā darbā viņš bija līdz 1949. g.

A. Lūsim ir lieli nopelni Latvijas matemātiķu audzināšanā. Daudzi Latvijas matemātiķi studiju gados ir klausījušies viņa rūpīgi sagatavotās lekcijas. Profesora A. Lūša vadībā ir izstrādātas 4 zinātņu kandidāta disertācijas un daudzi diplomdarbi.

A. Lūsis bija LPSR ZA prezidija Matemātikas zinātniskās padomes priekšsēdētājs, bija universitātes un fizikas un matemātikas fakultātes padomju loceklis, kā arī veica citu organizatorisko darbu.

Zinātniskajā darbā profesors A. Lūsis visu dzīvi nodarbojās ar integrālvienādojumu teoriju. A. Lūsis piedalījās starptautiskajos matemātiķu kongresos 1936. g. Oslo un 1966. g. Maskavā, kā arī III un IV PSRS matemātiķu kongresā 1956. g. Maskavā un 1961. g. Ļeņingradā, daudzās konferencēs, bija Francijas matemātikas biedrības biedrs, piecdesmitajos gados rakstīja referatīvajam žurnālam «Matemātika». A. Lūsis miris 1969. g. 12. februārī.

1922. gadā par privātdocentu Latvijas universitātē uzaicināja strādāt P. Kadiķi. Pēteris Kadiķis dzimis 1857. g. 6. aprīlī Kuldīgas apriņķa Snēpeles pagastā. 1878. g. pabeidza Kuldīgas ģimnāziju un iestājās Tērbatas universitātē, kur viņa vadītājs bija pazīstamais matemātiķis F. G. Mindings. Apveltīts ar neparastām spējām, Kadiķis četros gados pabeidza fizikas un matemātikas fakultātes kursu un pēc kandidāta grāda piešķiršanas tika nosūtīts uz Pēterburgas universitāti, lai sagatavotos profesora darbībai. 1885. g. Tērbatā viņš aizstāvēja maģistra disertāciju «Sešzīmju raksturistiku teorija», kurā oriģinālā veidā tika aplūkota Rīmaņa teta funkciju teorija no skaitļu teorijas viedokļa. P. Kadiķim tika apsolīta profesora vieta Tomskas universitātē, taču fizikas un matemātikas fakultātes atvēršana šai universitātē aizkavējās uz daudziem gadiem. Tāpēc pagājušā gadsimta deviņdesmito gadu sākumā Kadiķis ar nelabvēlīgos dzīves apstākļos sabeigtu veselību atgriezās no Sibīrijas uz Pēterburgu, kur sāka strādāt par pasniedzēju ģimnāzijā. Viņa cenšanās iegūt darbu augstākajās mācību iestādēs nevainagojās ar panākumiem. 1918.—1919. g. P. Kadiķis strādāja par inspektoru Petrogradas Galvenajā mēru un svaru palātā. 1919. g. viņš atgriezās Rīgā un vadīja Latvijas svaru un mēru pārvaldi. 1922. g. Kadiķi uzaicināja strādāt par privātdocentu Latvijas universitātē, taču ilgi tur strādāt viņam nebija lemts. A. Kadiķis bija pirmais, kurš universitātē lasīja kursu «Mašīnu matemātika». 1923. gada 28. aprīlī P. Kadiķis nomira.

Tikai trīsdesmito gadu otrajā pusē parādījās jauna latviešu matemātiķu paaudze: K. Zalts strādāja nomogrāfijā, A. Putnis — parciālo diferenciālvienādojumu teorijā, E. Fogels — skaitļu teorijā, E. Grinbergs — ģeometrijā, N. Brauers (Brāzma) — funkciju teorijā. Raksturīgi, ka tajā laikā, cik bija matemātiķu, tik bija arī dažādu matemātikas pētījumu virzienu. Pavisam laikā no 1919. līdz 1939. gadam 12 matemātiķi publicēja 54 darbus, iznāca 4 mācību grāmatas studentiem.

Pēc Lielā Tēvijas kara Latvijā strauji paplašinājās to iestāžu skaits, kurās tika veikts zinātniskais darbs matemātikā. Vispirms tās bija augstskolas, kurās bija matemātikas katedras. 1944. gadā divās fizikas un matemātikas fakultātes katedrās (Matemātiskās analīzes un Vispārīgās matemātikas) strādāja tikai 8 matemātiķi: N. Brāzma (fakultātes dekāns), E. Āriņš, A. Ērglis, E. Fogels, A. Grava, Z. Plūme, J. Rāts, J. Tomsons. 1965. g. tika izveidota algebras un ģeometrijas katedra, ko 1972. gadā pārveidoja par lietišķās matemātikas katedru, bet 1976. g. sadalīja divās daļās: diferenciālvienādojumu un tuvināto metožu katedrā un diskrētās matemātikas un programmēšanas katedrā. Atsevišķa matemātikas katedra tika organizēta Ekonomikas fakultātē. Rīgas Politehniskajā institūtā Augstākās matemātikas katedra ir kopš institūta atjaunošanas 1958. gadā. 1965. g. RPI tika izveidota augstākās matemātikas speckursu katedra un 1969. g. — Ekonomiski matemātisko metožu katedra. Matemātikas katedras ir arī citās republikas augstskolās: Rīgas Civilās aviācijas inženieru institūtā, Latvijas Lauksaimniecības akadēmijā, Liepājas un Daugavpils pedagoģiskajos institūtos. 1959. g. Latvijas Valsts universitātē tika organizēts Latvijā pirmais Skaitļošanas centrs, kurš tagad ir kļuvis par lielāko zinātnisko iestādi — Matemātikas un informātikas institūtu, kas apvieno Latvijas matemātiķus. Skaitļošanas centra organizētājs un pirmais direktors bija E. Āriņš. Latvijas PSR Zinātņu akadēmijas ietvaros 1946. gadā tika izveidots Fizikas un matemātikas institūts, kuru 1950. gadā reorganizēja par Fizikas institūtu. Šī institūta pirmais direktors bija matemātiķis N. Brāzma.

Nikolajs Brāzma (Brauers) ir dzimis 1913. g. 28. maijā Rēzeknē kalpotāju ģimenē. 1931. g. pēc vidusskolas beigšanas viņš iestājās Latvijas universitātes Matemātikas un dabaszinātņu fakultātes matemātikas nodaļā, kuru ar izcilību pabeidza 1936. g. Paralēli studijām universitātē viņš mācījās arī konservatorijas klavieru klasē. No 1936. g. N. Brāzma gatavojās zinātniskajam darbam. 1939. g. viņš bija Dānijā, kur profesora M. Bora vadībā specializējās gandrīz periodisku funkciju teorijā. Par darbiem šai nozarē N. Brāzma ieguva privātdocenta nosaukumu. Viņa turpmākie darbi galvenokārt attiecās uz matemātisko fiziku ar pielietojumiem elektrotehnikā.

No 1938. g. N. Brāzma bija Latvijas universitātes Matemātikas semināra asistents, no 1940. g. līdz 1957. g. — privātdocents, pēc tam vecākais pasniedzējs un docents P. Stučkas LVU Fizikas un matemātikas fakultātē. No 1944. g. līdz 1950. g. N. Brāzma vadīja Vispārīgās matemātikas katedru. 1946. g. N. Brāzmam tika piešķirts fizikas un matemātikas zinātņu kandidāta grāds, bet 1956. g. — docenta nosaukums. No 1957. g. viņš neilgi strādāja LLA Augstākās matemātikas katedrā, bet 1958. g. N. Brāzma pārgāja strādāt uz Rīgas Politehnisko institūtu, kur vispirms vadīja Augstākās matemātikas katedru, bet pēc tam Augstākās matemātikas speckursu katedru. Pēdējos dzīves gados N. Brāzma nodarbojās ar metodisko darbu, daudz pūļu veltot augstākās matemātikas speckursu organizēšanā RPI Elektroenerģētikas un Automātikas un skaitļošanas tehnikas fakultātēs. N. Brāzma miris 1966. g. 28. decembrī.

1962. gadā Fizikas institūtā L. Reiziņa vadībā no jauna tika izveidots matemātiskās fizikas sektors, kuru vēlāk pārveidoja par matemātikas laboratoriju. Fizikas institūtā J. Daubes vadībā tika konstruēts un uzbūvēts Latvijā pirmais elektronu skaitļotājs. 1961. g. Zinātņu akadēmija organizēja Elektronikas un skaitļošanas tehnikas institūtu, kurā strādā daudzi matemātiķi, taču atsevišķas matemātikas nodaļas nav. Vairāki matemātiķi strādā arī citos Zinātņu akadēmijas institūtos.

Pēc Lielā Tēvijas kara Latvijā sāka veidoties zinātnieku kolektīvi, kas strādāja dažādos matemātikas virzienos. Šie kolektīvi organizēja savus zinātniskos seminārus, kuros referēja par iegūtajiem rezultātiem. Četrdesmito gadu beigās A. Lūša vadībā darbojās diferenciālvienādojumu un integrālvienādojumu aspirantu seminārs. No 1950. līdz 1953. gadam aktīvi darbojās A. Miška seminārs diferenciālvienādojumos. No 1960. g. darbojās algebras seminārs B. Plotkina vadībā, no 1962. g. — parasto diferenciālvienādojumu seminārs L. Reiziņa vadībā, no 1964. līdz 1970. g. darbojās asimptotisko izvirzījumu seminārs E. Riekstiņa un T. Cīruļa vadībā, no 1972. g. darbojas seminārs funkcionālanalīzē M. Goldmaņa, J. Engelsona un I. Kārkliņa vadībā. Katru gadu dažādus seminārus organizē LVU Skaitļošanas centrs. No 1961. līdz 1967. gadam darbojās Rīgas pilsētas matemātiķu seminārs.

Līdz ar darbiem tradicionālajos Latvijas matemātiķu pētījumu virzienos (funkciju teorija, matemātiskā analīze, diferenciālvienādojumi un integrālvienādojumi, skaitļu teorija) tika publicēti darbi arī parciālo diferenciālvienādojumu teorijā, matemātiskajā fizikā, funkcionālanalīzē, matemātiskajā loģikā, algebrā, ģeometrijā, automātu teorijā, lietišķajā matemātikā. Tika veikti pētījumi matemātikas vēsturē, elementārajā matemātikā un matemātikas metodikā.

Skaitļu teorijā E. Fogels ieguva pirmskaitļu skaita novērtējumus īsās aritmētiskās progresijās, pētīja Dirihlē un Henkes L-funkciju nuļļu sadalījumu, ieguva novērtējumu to intervālu garumam, kuros atrodas vismaz viens pirmskaitlis, kā arī pirmskaitlis, kuru var izteikt ar bināro kvadrātisko formu kādā plaknes sektorā. E. Fogels daudz strādāja ar dzeta-funkciju.

Funkciju teorijā E. Riekstiņš un viņa skolnieki precizēja dažādas asimptotisko izvirzījumu definīcijas, vispārināja esošās un izstrādāja dažas jaunas metodes funkciju asimptotiskajai izvirzīšanai. T. Cīruļa vadībā tika veikti pētījumi tuvinātā Laplasa transformācijas apgriešanā. Klasisko ortogonālo polinomu vispārinājumu divargumentu polinomu gadījumā pētīja G. Eņģelis.

Rīgā pirmais ar funkcionālanalīzi sāka nodarboties S. Kračkovskis. Viņš pētīja Fredholma tipa lineāros funkcionālvienādojumus, pēc tam kopā ar M. Goldmani konstatēja nulles elementu īpašības un pilnīgi nepārtraukta operatora galvenās daļas struktūru, veica pētījumus lineāri ierobežotu operatoru spektrālajā teorijā. M. Goldmanis veica darbu ciklu par operatoru vienādojumu normālo atrisinājumu. Vēl funkcionālanalīzē pētījumus ir veikuši J. Engelsons, I. Kārkliņš, U. Raitums, G. Laptevs, V. Labejevs u. c.

Pētījumus matemātiskajā fizikā un parciāldiferenciālvienādojumos aizsāka N. Brāzmas darbi, kuros viņš pētīja matricu veida telegrāfa vienādojumus. Vēlāk šī tematika ieinteresēja arī citus matemātiķus. A. Miškis pētīja Koši nosacījuma unitāti hiperboliskajiem vienādojumiem un Dirihlē uzdevumu potenciālu teorijā. Četrdesmito gadu beigās un piecdesmito gadu sākumā A. Miškis izstrādāja vispārīgo teoriju diferenciālvienādojumiem ar aizkavētu argumentu. Par šo tēmu 1951. gadā viņš aizstāvēja doktora disertāciju.

No sešdesmito gadu sākuma pētījumus parasto diferenciālvienādojumu jomā aktīvi veic L. Reiziņš un viņa skolnieki. Ir atrasti vienādojumu lokālās topoloģiskās ekvivalences nosacījumi salikto miera punktu apkārtnē, slēgtās trajektorijās un invariantos toros, definēti un izpētīti jauni dinamisko sistēmu ekvivalences veidi, pētītas enerģētisko funkciju īpašības atkarībā no vienādojumu īpašībām. Liels darbu cikls veikts, pētot Pfaffa vienādojumus. Par parasto diferenciālvienādojumu ekvivalenci L. Reiziņš 1971. gadā aizstāvēja doktora disertāciju. Grupa LVU Skaitļošanas centra darbinieku J. Klokova un A. Lepina vadībā ieguva nepieciešamos un pietiekamos nosacījumus dažāda tipa parasto diferenciālvienādojumu robežuzdevumu atrisinājumu eksistencei, kā arī dažus rezultātus par atrisinājumu unitāti un nepārtraukto atkarību no uzdevumu nosacījumiem. Par šo tematiku J. Klokovs 1971. gadā aizstāvēja doktora disertāciju. Par optimālas regulēšanas jautājumiem rakstīja A. Liepa, ar stohastiskiem diferenciālvienādojumiem nodarbojās J. Carkovs.

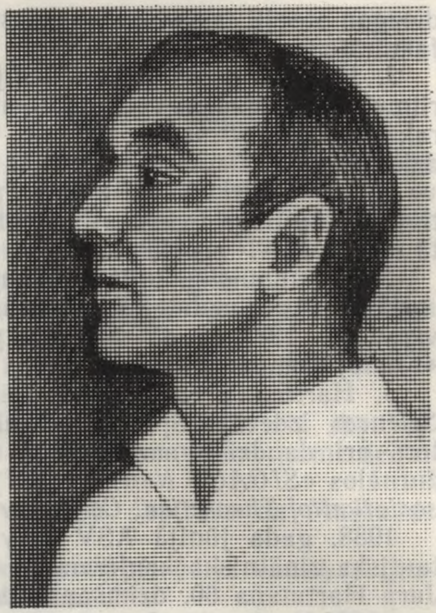
Matemātiskajā loģikā piecdesmito gadu sākumā V. Detlovs pierādīja algoritmisku un daļēji rekursīvu, kā arī pilnīgi algoritmisku un vispārrekursīvu funkciju ekvivalenci. Sešdesmitajos gados J. Bārzdiņš pierādīja tādu universālu elementu eksistenci, no kuriem var konstruēt jebkuru augošu automātu, ieguva nozīmīgus rezultātus par algoritmu sarežģītības novērtējumu, pētīja automāta izturēšanās atkarību no tā topoloģijas. Par šiem jautājumiem viņš kopā ar B. Trahtenbrotu sarakstīja monogrāfiju «Galīgie automāti». 1972. g. J. Bārzdiņš aizstāvēja doktora disertāciju. Konstruktīvajā matemātikā un varbūtisko automātu teorijā strādā A. Lorencs. Doktora disertāciju viņš aizstāvēja 1979. gadā. 1985. gadā varbūtisko automātu teorijā doktora disertāciju aizstāvēja R. Freivalds.

Līdz ar profesora B. Plotkina atbraukšanu uz Latviju 1960. g. sākās pētījumi algebrā. B. Plotkins pētīja algebrisko sistēmu automorfismu grupas, izveidoja struktūru teoriju. A. Pekelis pētīja grupu struktūru izomorfismus. Par šo tēmu viņš aizstāvēja doktora disertāciju. B. Plotkina daudzie skolnieki ir pētījuši lineārās grupas, galīgu dimensiju matricu pār komutatīviem gredzeniem, grupas, moduļus, vispārinājumus uz bezgalīgu dimensiju algebrām. I. Strazdiņš ir veicis pētījumus Būla funkciju un daudznozīmju loģikas funkciju invariantu teorijā.

Latvijas matemātiķi ģeometrijā nav tik daudz strādājuši kā iepriekšminētajos virzienos, taču atsevišķi pētījumi ir veikti. Ir pētītas kongruences konstanta liekuma telpās un m-dimensiju virsmas n-dimensiju Eiklīda afīnajās un projektīvajās telpās. Trīsdesmitajos gados ar ģeometriju nodarbojās E. Grinbergs, bet vēlāk viņš bija pirmais, kas Latvijā sāka pētīju mus grafu teorijā.

No 1960. gada strauji sāka attīstīties lietišķā matemātika. Lielāko ieguldījumu šai virzienā ir devis LVU Skaitļošanas centrs, kur vairākām mašīnām tika izveidoti translatori no valodas ALGOL uz valodu FORTRAN, ieviesta operāciju sistēma. Šajā virzienā pētījumi tiek veikti arī LPSR ZA Elektronikas un skaitļošanas tehnikas institūtā un RPI, kā arī citur.

Matemātikas vēsturē par P. Bola zinātnisko mantojumu un citiem jautājumiem rakstīja I. Rabinovičs. Pārskatus par matemātikas attīstību Latvijā XX gs. rakstīja A. Lūsis, L. Reiziņš un citi. diferenciālvienādojumu vēstures L. Reiziņš ir pētījis arī atsevišķus jautājumus.



J. Hartmanis

Daudz pūļu Latvijas matemātiķi ir veltījuši elementārās matemātikas pasniegšanas līmeņa paaugstināšanā republikas skolās. Ir izdotas vairākas oriģinālas mācību grāmatas un metodiskie palīglīdzekļi. Vislielākie nopelni te pieder Liepājas Pedagoģiskā institūta profesoram J. Mencim. No 1950. gada regulāri notiek matemātikas olimpiādes. Šo olimpiāžu organizēšanā daudz darba ieguldījuši E. Riekstiņš, T. Ziļicka, A. Andžāns. No 1969. gada LVU darbojas Neklātienes matemātikas skola (NMS) vidusskolēniem. NMS organizators un vadītājs ir A. Andžāns. Viņš sarakstījis arī vairākas grāmatas par paaugstinātas grūtības pakāpes uzdevumu risināšanu.

Izcilākais ārzemēs dzīvojošais latviešu izcelsmes matemātiķis ir Juris Hartmanis. Viens no ievērojamākajiem pasaules zinātniekiem teorētiskajā informātikā J. Hartmanis dzimis 1928. gada 5. jūlijā Rīgā. Kopā ar vecākiem emigrējis uz VFR, kur studēja no 1947. līdz 1949. gadam Mārburgas universitātē, doktora grādu elektriskajā inženierzinātnē ieguvis Kalifornijas Tehnoloģiskajā institūtā (1955). Strādājot no 1955. g. līdz 1957. g. Kornela universitātē un no 1957. g. līdz 1965. g. firmas *General Electric* zinātnisko pētījumu centrā, J. Hartmanis izveidojās par pasaulē pazīstamāko zinātnieku kompjūteru programmēšanas un teorētiskās informātikas jomā. 1965. gadā J. Hartmanis nodibināja vienu no pirmajām informātikas fakultātēm (Department of Computer Science) ASV un vadīja to no 1965. g. līdz 1971. g. un no 1977. g. līdz 1981. gadam. Tagad šī fakultāte pēc ASV universitāšu asociācijas oficiālā vērtējuma diezgan stabili ir piektā labākā starp ASV universitāšu informātikas fakultātēm.

J. Hartmaņa zinātniskie pētījumi galvenokārt attiecas uz algoritmu un rēķināšanas sarežģītības teoriju. 1965. gadā viņš publicēja rakstu, kurā pirmoreiz definēti visi sarežģītības teorijas pamatjēdzieni un ar kuru faktiski sākās šīs teorijas attīstība. J. Hartmanis un viņa skolnieki veido pašreiz pasaulē spēcīgāko zinātnisko kolektīvu sarežģītības teorijā. Viņi pēta šīs teorijas centrālo problēmu — tā saukto P-NP problēmu.

J. Hartmanis ir bijis Padomju Savienībā. 1979. gadā viņš apmeklēja Rīgu un latviešu valodā lasīja lekcijas Latvijas Valsts universitātē, 1987. gadā Kazaņā piedalījās starptautiskā konferencē «Kompjūteru teorijas pamati».

J. Hartmanis ir grāmatu sērijas «*Lecture Notes in Computer Science*» izdevējs Špringera zinātniskajā izdevniecībā. Viņš ir autors arī daudzām sarežģītības teorijas pārskata rakstu kolonnām žurnālos «*SIGACT News*» (ASV) un «*Bulletin of the European Association of Theoretical Computer Science*».

1988. gada jūnijā ASV galvaspilsētā Vašingtonā notika starptautiska zinātniska konference sarežģītības teorijā, veltīta profesora Jura Hartmaņa 60. dzimšanas dienai. 1989. gadā viņš tika ievēlēts par ASV Nacionālās Inženierakadēmijas īsteno locekli.

50 000 gadi p. m. ē.	Skaitļa jēdziena rašanās.
25 000 gadi p. m. ē.	Ģeometriskie ornamenti.
XXXVI—XXVII gs. p. m. ē.	Ēģiptes piramīdu celtniecība. Tika apgūta sviras, ķīļa un slīpās plaknes izmantošana.
XXX—XXV gs. p. m. ē.	Ēģiptiešu hieroglifiskā numerācija. Skaitīšana līdz 100 000.
XXIV gs. p. m. ē.	Babilonijā izgudrota pozicionālā skaitīšanas sistēma un sešdesmitnieku numerācijas sistēma.
1890.—1800. g. p. m. ē.	Uzrakstīti Rainda papiruss un Maskavas papiruss.
VII gs. beigas—VI gs. sākums p. m. ē.	Taless no Milētas pierādīja vairākas ģeometrijas teorēmas.
Apm. 585.—400. g. p. m. ē.	Pitagora skola.
V gs. p. m. ē. otrā puse	Hipokrats no Hiosas noteica dažu līklīniju figūru laukumus.
	Radās joniešu alfabētiskā skaitīšanas sistēma. Trīs klasisko grieķu uzdevumu — riņķa kvadratūras, leņķa trisekcijas un kuba dubultošanas — formulējums un pirmie risinājumi.
420.—350. g. p. m. ē.	Zēnons no Egejas formulēja kustības paradoksus.
V gs. p. m. ē. beigas	Dēmokrits no Abderas izstrādāja mācību par kustību, aplūkoja bezgalības problēmu.
IV gs. p. m. ē. pirmā puse	Arhits no Tarentas attīstīja proporciju teoriju.
	Eudokss no Knīdijas ieteica izsmelšanas metodi un vispārīgo proporciju teoriju.
	Platons ieviesa matemātiku Akadēmijā pasniedzamo priekšmetu skaitā.
IV gs. p. m. ē. vidus	Teetets no Atēnām pētīja iracionalitātes problēmu, attīstīja mācību par nesamērojamiem nogriežņiem.
IV gs. p. m. ē.	Menehmas un Dinostrata darbos tika izveidota konisko šķēlumu teorija. Dinostrats atklāja kvadratrisi — pirmo transcendento līkni.
IV gs. p. m. ē. otrā puse	Aristotelis izstrādāja loģikas sistēmu, pētīja matemātikas pamatu jautājumus.

Ap 335. g. p. m. ē.	Eudems uzrakstīja pirmo darbu par matemātikas vēsturi.
Ap 300. g. p. m. ē.	Eiklīda «Elementi».
Ap 280. g. p. m. ē.	Aristarhs no Samosas izstrādāja pirmo heliocentrisko sistēmu, izmantoja trigonometriskus aprēķinus, lai noteiktu attālumu no Zemes līdz Saulei un Mēnesim.
250. g. p. m. ē.	Valdnieks Ašoka (Indija) lika uzcelt akmens kolonnu, uz kuras saglabājušies senākie indiešu decimālās sistēmas skaitļi.
III gs. p. m. ē. vidus	Arhimēda darbi dažādās matemātikas, mehānikas un fizikas nozarēs.
III gs. p. m. ē. otrā puse	Eratostens no Ķirēnes ieteica paņēmienu pirmskaitļu noteikšanai («Eratostena siets»).
II gs. p. m. ē. pirmā puse	Perges Apollonijs uzrakstīja darbu «Koniskie šķēlumi», pētīja elipsi, hiperbolu, parabolu.
II gs. p. m. ē.	Zēnodors pētīja izoperimetrisko uzdevumu.
	Nikomeds atklāja konhoīdu — līkni, ar kuru varēja atrisināt kuba dubultošanas un leņķa trisekcijas uzdevumus.
II gs. p. m. ē. otrā puse	Diokls atklāja cisoīdu — trešās kārtas algebrisku līkni.
	Ķīnā parādījās «Matemātika deviņās grāmatās».
25. g. p. m. ē.	Vitrūvijs uzrakstīja traktātu «Desmit grāmatas par arhitektūru».
I gs.	Hērons no Aleksandrijas sarakstīja darbus matemātikā, mehānikā.
	Menelājs no Aleksandrijas aizsāka sfērisko trigonometriju.
Ap 100. g.	Nīkomahs uzrakstīja darbu «Ievads aritmētikā», kurā izklāstīja skaitļu teorijas pamatus.
Ap 150. g.	Ptolemajs sarakstīja «Almagestu», kurā izklāstīja ziņas par plaknes un sfērisko trigonometriju, izmantoja stereogrāfisko projekciju.
Ap 250. g.	Diofants sarakstīja «Aritmētiku», risināja nenoteiktos vienādojumus, pētīja skaitļu teorijas jautājumus.
Ap 300. g.	Papps no Aleksandrijas apkopoja sava laika matemātiskās zināšanas.
Ap 320. g.	Jamblihs uzrakstīja apcerējumu par matemātikas vēsturi.
Ap 390. g.	Teons uzrakstīja komentārus antīko ģeometru darbiem.

Ap 460. g.	Prokls sarakstīja komentārus Eiklīda «Elementu» pirmajai grāmatai, formulēja Eiklīda piekto postulātu.
480. g.	Czu Čunčži aprēķināja π ar precizitāti līdz septītajai zīmei aiz komata (355/113). Ariabhata aprēķināja π vērtību 3,1416.
V—XII gs.	Indiešu matemātikas uzplaukums.
Ap 628. g.	Brāmagupta lietoja algebrā negatīvus skaitļus.
Ap 820. g.	Al Horezmi grāmatā «Par indiešu skaitīšanu» ieviesa decimālo pozicionālo numerāciju un indiešu ciparus.
Ap 930. g.	Al Farabi sarakstīja komentārus Eiklīda «Elementiem» un Ptolemaja «Almagestam».
Ap 980. g.	Abu-l-Vafa risināja ģeometrisku konstrukciju uzdevumus, elementārus sfēriskās ģeometrijas uzdevumus, sastādot trigonometrisko funkciju tabulas, izmantoja lineāro interpolāciju, pierādīja sinusa teorēmu sfēriskam trijstūrim.
X gs. beigas—XI gs. sākums	Al Birunī tālāk attīstīja trigonometriju, izstrādāja lineārās un kvadrātiskās interpolācijas likumus.
	Ibn Sina (Avicenna) mēģināja pierādīt Eiklīda piekto postulātu.
Apm. 1100. g.	O. Haijāms ieteica kubiskā vienādojuma ģeometrisku atrisināšanas metodi.
1120.—1150. g.	Eiropā tika tulkoti arābu matemātiskie teksti latīņu valodā.
1202. g.	Leonardo no Pizas (Fibonači) uzrakstīja «Abaka grāmatu», kura Eiropā kļuva par pamatmācību grāmatu aritmētikā un algebrā.
Ap 1260. g.	At Tusī izdalīja trigonometriju no astronomijas kā patstāvīgu zinātni, izstrādāja savu reālā (pozitīvā) skaitļa koncepciju.
1267. g.	R. Bēkons sacerējumā «Lielais darbs» centās pierādīt, ka visas zinātnes balstās uz matemātiku.
Ap 1325. g.	T. Bredvardīns uzrakstīja «Teorētisko ģeometriju» un «Traktātu par kontinuumu», definēja iracionalitātes jēdzienu.
Ap 1360. g.	N. Orems ieteica matemātikā lietot koordinātu metodi, lietoja daļveida un iracionālas pakāpes.
Ap 1425. g.	Al Kašī atrada likumu jebkuras pakāpes saknes vilkšanai no veseliem skaitļiem, sastādīja binomiālo koeficientu tabulu, lietoja decimāldaļas, aprēķināja π vērtību ar 16 ticamām zīmēm.

Ap 1450. g.	Nikolajs no Kuzas definēja bezgalīgi lielo un bezgalīgi mazo skaitļu jēdzienu, piedalījās kalendāra reformā.
1457. g.	J. Gūtenbergs izgudroja grāmatu iespiešanu. L. Alberti izgudroja ierīci perspektīvas konstruēšanai.
1482. g.	Venēcijā pirmoreiz tika iespiesti Eiklīda «Elementi».
1489. g.	J. Vidmanis sāka lietot + un − zīmes.
1494. g.	L. Pačoli publicēja traktātu «Aritmētikas, ģeometrijas, proporciju un proporcionalitāšu summa».
Ap 1506. g.	S. del Ferro atrisināja vienu kubiskā vienādojuma veidu.
Ap 1510. g.	A. Dīrers lika pamatus ortogonālajai projekcijai, sāka izveidot mācību par cilvēka proporcijām, izstrādāja ornamenta teoriju, perspektīvas teoriju.
Ap 1530. g.	N. Koperniks sastādīja pirmo sekansu tabulu.
1533. g.	Regiomontāns sarakstīja pirmo trigonometrijas mācību grāmatu Eiropā «Piecas grāmatas par dažādu veidu trijstūriem».
1535. g.	N. Tartalja atrada kubiskā vienādojuma atrisinājuma formulu.
1542. g.	Tika publicēta N. Kopernika trigonometrijas mācību grāmata.
1543. g.	Iznāca N. Kopernika darbs «Par debesu sfēru kustību», kurā tika izklāstīta heliocentriskā sistēma.
1544. g.	M. Štifels atrada binomiālo koeficientu veidošanās likumu.
1545. g.	Dž. Kardāno publicēja darbu «Ars magna» («Lielā māksla»).
1572. g.	R. Bombelli definēja vienkāršākās darbības ar imagināriem skaitļiem, izvirzīja skaitļu kvadrātsaknes nepārtrauktu daļu veidā, izstrādāja pilnu kubisko vienādojumu teoriju.
1583. g.	T. Finke ieviesa terminu «tangenss».
1586. g.	Publicēts P. Ramusa sacerējums «Divas grāmatas par aritmētiku un tikpat par algebru».
Ap 1590. g.	F. Vjeta ieviesa algebras simboliku, pētīja otrās, trešās un ceturtās pakāpes vienādojumus, atklāja sakarību starp vienādojuma koeficientiem un saknēm (Vjeta formulas), pirmoreiz izteica skaitli π kā bezgalīgu reizinājumu.

XVI gs. beigas	S. Stevins ieviesa decimāldaļas.
XVI gs. beigas—XVII gs.	Krievijā parādījās rokraksti par aritmētiku un ģeometriju ar dažādiem praktiskiem piemēriem.
1614. g.	Dž. Nepers publicēja logaritmu tabulas, aprakstīja logaritmu īpašības un darbības ar tiem.
1615. g.	J. Keplers traktātā «Jaunā vīna mucu stereometrija» izklāstīja idejas, kas vēlāk tika liktas integrālrēķinu pamatā.
1617. g.	H. Brigss sastādīja un izdeva decimāllogaritmu tabulas pirmajam tūkstotim.
1620. g.	J. Birgi sastādīja skaitļu tabulas aprēķinu vienkāršošanai.
	E. Ginters izgudroja logaritmisko skalu un konstruēja apaļu logaritmisko lineālu, ieviesa terminus «kosinuss» un «kotangenss».
1622. g.	P. Guldins aizsāka kombinatoriku.
1623. g.	V. Šikards izgudroja un uzbūvēja pirmo skaitāmās mašīnas modeli saskaitīšanas un atņemšanas operāciju mehanizēšanai.
1625. g.	A. Žirārs aprēķināja sfērisko trijstūru laukumus.
1629. g.	A. Žirārs formulēja algebras pamatteorēmu, ģeometriski interpretēja vienādojuma negatīvās saknes.
Ap 1630. g.	V. Outreds izgudroja taisno logaritmisko lineālu.
1632. g.	Tika publicēta G. Galileja grāmata «Dialogs par divām galvenajām pasaules sistēmām».
Ap 1635. g.	P. Fermā lika pamatus skaitļu teorijai, izstrādāja koordinātu metodi ģeometrijā, izrisināja parciālās integrēšanas formulas.
1635.—1647. g.	B. Kavaljēri publicēja nedalāmo metodi, kas vēlāk bija bezgalīgi mazo analīzes pamats.
1636. g.	G. Galilejs pamatoja kustības relativitātes principu.
1637. g.	Iznāca R. Dekarta darbs «Ģeometrija», kuru uzskata par analītiskās ģeometrijas aizsākumu.
1638. g.	P. Fermā atklāja maksimuma un minimuma atrašanas metodi.
1639. g.	Ž. Dezargs definēja dažus projektīvās ģeometrijas jēdzienus.
1640. g.	P. Guldins pētīja virsmas un dažādu rotācijas ķermeņu tilpumus.

1641.—1644. g.	B. Paskāls izgudroja mašīnu saskaitīšanas un atņemšanas operāciju mehanizēšanai.
Ap 1645. g.	B. Paskāls pētīja varbūtību teorijas jautājumus, izstrādāja bezgalīgi mazo analīzes idejas un projektīvās ģeometrijas idejas.
1655. g.	Dž. Valliss publicēja «Bezgalīgo aritmētiku».
1662. g.	Nodibināta Londonas Karaliskā biedrība.
1665.—1666. g.	I. Ņūtons atklāja fluksiju metodi.
1666. g.	Parīzē tika nodibināta Francijas Zinātņu akadēmija.
1667. g.	G. V. Leibnics izgudroja skaitļojamo mašīnu.
1673.—1686. g.	G. V. Leibnics izstrādāja diferenciālrēķinu un integrālrēķinu idejas, ieviesa terminus «funkcija», «diferenciālis», «diferenciālvienādojumi», «algoritms», «abscisa», «ordināta» u. c., izstrādāja bezgalīgi mazo lielumu analīzes simboliku.
1684. g.	G. V. Leibnics publicēja memuāru «Jauna maksimumu un minimumu metode».
1687. g.	Iznāca I. Ņūtona darbs «Natūrfilozofijas matemātiskie principi», kurā tika formulēts vispasaules gravitācijas likums.
1696. g.	G. F. A. Lopitāls publicēja pirmo mācību grāmatu bezgalīgi mazo lielumu analīzē.
Ap 1700. g.	Joh. Bernulli atklāja vienkāršāko lielo skaitļu likuma veidu, izveda formulu funkcijas izvirzīšanai pakāpju rindā, strādāja pie diferenciālvienādojumu teorijas.
	I. Ņūtons, Jēk. un Joh. Bernulli, G. Lopitāls un G. V. Leibnics atrisināja uzdevumu par brahistohronu, kuru 1696. g. bija formulējis Joh. Bernulli. Tādējādi tika likti variāciju rēķinu pamati.
1700. g.	A. Parans pirmoreiz aplūkoja analītisko ģeometriju trīsdimensiju telpā.
1704. g.	I. Ņūtons aizsāka algebrisko ģeometriju.
1707. g.	A. Muavrs ieguva trigonometrisko formulu, kas tagad pazīstama kā Muavra formula.
1714. g.	P. Kotess atrada sakarību starp pakāpju un trigonometriskajām funkcijām.
1715. g.	B. Teilors atklāja vispārīgo teorēmu par funkcijas izvirzīšanu pakāpju rindā (Teilora rindā).
Ap 1720. g.	A. Muavrs izveidoja rekurento rindu teoriju.

1722. g.	H. Ķ. Takebe aprēķināja π vērtību ar precizitāti līdz četrdesmit pirmajai decimālzīmei.
1725. g.	Nodibināta Pēterburgas Zinātņu akadēmija.
1726.—1729. g.	A. K. Klero pētīja līknes ar dubultu liekumu, aizsāka diferenciālģeometriju telpā.
1733. g.	A. K. Klero definēja afīnās transformācijas jēdzienu.
1737.—1749. g.	L. Eilers pētīja pirmskaitļus ar ζ-funkcijas palīdzību, aizsākdams analītisko skaitļu teoriju.
1739. g.	L. Eilers izmantoja patvaļīgu konstantu variācijas metodi nehomogēna lineāra diferenciālvienādojuma ar konstantiem koeficientiem risināšanai.
Ap 1740. g.	D. Bernulli aizsāka parciālo diferenciālvienādojumu teoriju.
	G. Ķrāmers lika pamatus determinantu teorijai. K. Maklorēns atrada funkciju izvirzījumu pakāpju rindā, pierādīja skaitļu rindu konverģences integrālo pazīmi.
1742. g.	H. Goldbahs formulēja skaitļu teorijas problēmu, kas nosaukta viņa vārdā.
1743. g.	A. K. Klero definēja līklīniju integrāļa jēdzienu.
	T. Simpsons atrada tuvinātās integrēšanas formulu.
1744. g.	L. Eilers publicēja traktātu par variāciju rēķiniem.
1748. g.	L. Eilers publicēja monogrāfiju «Ievads bezgalīgi mazo lielumu rēķinos».
	Ž. L. Dalambērs aplūkoja kompleksā mainīgā funkciju integrāļus.
XVIII gs. vidus	L. Eilers pētīja eliptiskos integrāļus, definēja logaritmisko funkciju kompleksā apgabalā. T. Simpsons pētīja diskrētu trijstūra varbūtību sadalījumu, aizsāka kļūdu teoriju. Dž. Rikati risināja vienādojumu, kas nosaukts viņa vārdā.
1746.—1779. g.	Ž. L. Dalambērs (1746), L. Eilers (1755), Ž. L. Lagranžs (1779) lietoja kompleksa mainīgā funkcijas hidrodinamikas uzdevumu risināšanai.
1760. g.	Ž. L. Lagranžs izstrādāja analītisko metodi variāciju uzdevumu risināšanai.
1761. g.	Ž. L. Dalambērs noskaidroja sakarību starp analītiskām un harmoniskām funkcijām.

1762. g.	E. Varings pierādīja pamatteorēmu par simetriskiem polinomiem.
1766. g.	J. Lamberts pierādīja, ka skaitlis π ir iracionāls.
1768.—1770. g.	Iznāca L. Eilera darbs «Integrālrēķini», kurā tika definēti arī divkāršie integrāļi.
1770. g.	E. Varings formulēja skaitļu teorijas problēmu, kas nosaukta viņa vārdā.
1771.—1772. g.	Š. Vandermonds loģiski izklāstīja determinantu teoriju, ieteica determinanta izvirzīšanas metodi ar otrās kārtas determinanta un papildminora palīdzību.
1773. g.	Ž. L. Lagranžs definēja trīskāršo integrāli.
1774.—1779. g.	Ž. L. Lagranžs izstrādāja vispārīgo pirmās kārtas parciālo diferenciālvienādojumu atrisināšanas metodi.
1782.—1785. g.	A. M. Ležandrs ieviesa viņa vārdā nosauktos polinomus — vienkāršākās sfēriskās funkcijas.
Ap 1790. g.	M. Kondorsē un P. S. Laplass publicēja pētījumu rezultātus varbūtību teorijā.
	G. Monžs ģeometriski interpretēja parciālos diferenciālvienādojumus, publicēja pirmos darbus virsmu teorijā.
1794. g.	Parīzē tika nodibināta Politehniskā skola — pirmā jauna tipa tehniska mācību iestāde, kurā padziļināti tika mācīta matemātika, mehānika, fizika, ķīmija.
1795. g.	G. Monžs publicēja tēlotājas ģeometrijas kursu un grāmatu «Analīzes pielietojumi ģeometrijā», kurā izklāstīja pētījumus diferenciālģeometrijā un virsmu teorijā.
1796. g.	K. F. Gauss pierādīja, ka ar cirkuli un lineālu var konstruēt regulārus 17-stūrus un 257-stūrus.
1797. g.	L. Karno publicēja darbu «Pārdomas par bezgalīgi mazo rēķinu metafiziku».
1797.—1801. g.	Ž. L. Lagranžs darbos «Analītisko funkciju teorija» (1797) un «Lekcijas funkciju rēķinos» (1801) mēģināja pamatot matemātisko analīzi, reducējot to uz algebru.
1798. g.	P. Rufīni pierādīja, ka vienādojumus, kuru pakāpe ir augstāka par ceturto, nevar atrisināt algebriski. Viņš izstrādāja metodi jebkuras pakāpes algebriska vienādojuma reālo sakņu tuvinātai aprēķināšanai.
1799. g.	K. F. Gauss pierādīja algebras pamatteorēmu.

1799.—1806. g.	Ķ. Vesels (1799) un Ž. Argāns (1806) ģeometriski interpretēja kompleksos skaitļus.
1801. g.	K. F. Gauss publicēja «Aritmētiskos pētījumus».
1803. g.	L. Karno publicēja darbu «Novietojuma ģeometrija», kurā tika izklāstītas dažas topoloģijas idejas.
1805. g.	Franču matemātiķis Ž. Žakārs izveidoja automātisku aušanas stelļu vadību, izmantojot perfokartes.
1810. g.	P. S. Laplass pierādīja varbūtību sadalījuma binomiālo likumu.
1811. g.	Ž. Furjē izstrādāja metodi funkciju izvirzīšanai trigonometriskās rindās (Furjē rindās).
1812.—1821. g.	K. F. Gauss (1812), B. Bolcano (1817) un O. Koši (1821) lika pamatus rindu konverģences teorijai.
1812.—1827. g.	P. S. Laplass (1812) un S. Puasons (1827) pierādīja pirmās varbūtību teorijas robežteorēmas.
1814. g.	Ž. V. Ponselē pētīja figūru projektīvās īpašības.
1815. g.	O. Koši definēja galīgas grupas jēdzienu.
1820.—1834. g.	Č. Bebidžs strādāja pie skaitļojamās mašīnas projekta.
1821.—1823. g.	O. Koši izdeva Politehniskā skolā lasītās lekcijas matemātiskajā analīzē.
1826. g.	N. Lobačevskis pirmoreiz uzstājās ar ziņojumu par neeiklīda ģeometriju.
1826.—1829. g.	N. Ābels (1826—1829) un K. Jakobi (1829) izveidoja eliptisko funkciju teoriju.
1829. g.	Pirmā N. Lobačevska neeiklīda ģeometrijas ideju publikācija — memuārs «Par ģeometrijas pamatiem».
1831. g.	K. F. Gauss izklāstīja komplekso skaitļu teoriju.
	O. Koši pierādīja teorēmu par analītisku funkciju izvirzīšanu pakāpju rindā.
1832. g.	J. Bojaji publicēja savas neeiklīda ģeometrijas idejas.
1833.—1834. g.	V. Hamiltons strādāja pie variāciju rēķiniem.
1839. g.	J. Plikers attīstīja algebrisko līkņu teoriju.
Ap 1842. g.	E. Kummers izveidoja algebrisko skaitļu teoriju.
1843.—1865. g.	V. Hamiltons definēja kvaternionus un izstrādāja kvarternionu teoriju.

1844. g. G. Grasmanis publicēja «Mācību par dimensionāliem lielumiem» — vienu no pirmajiem darbiem vektoru teorijā.

1846.—1848. g. A. Ķēlī izveidoja algebrisko invariantu teoriju.

1847. g. V. Hamiltons definēja vektoru.

K. Štauts publicēja darbu «Novietojuma ģeometrija», kurā pamatoja projektīvo ģeometriju.

1847.—1854. g. Dž. Būls izveidoja matemātiskās un simboliskās loģikas pamatus.

Dž. Stokss definēja virknes un rindas vienmērīgās konverģences jēdzienus.

1851. g. B. Rīmanis izveidoja ģeometrisko virzienu analītisko funkciju teorijā, izstrādāja konformo attēlojumu teoriju.

Ž. Liuvils pierādīja transcendento skaitļu eksistenci.

1852. g. P. Čebišovs pierādīja lielo skaitļu likumu.

1854. g. B. Rīmanis definēja integrāli, ko tagad sauc par Rīmaņa integrāli, definēja vispārinātās (Rīmaņa) telpas jēdzienu. Izveidoja Rīmaņa ģeometriju.

1858. g. A. Ķēlī aizsāka matricu teoriju.

1865. g. Nodibināta Maskavas matemātikas biedrība.

1868. g. E. Beltrami publicēja memuāru, kurā pierādīja, ka virsmām ar konstantu negatīvu lielumu iekšējā ģeometrija sakrīt ar Lobačevska ģeometriju.

1869. g. K. Veierštrāss pamatoja kompleksā mainīgā funkciju teoriju, balstoties uz funkciju izvirzījumu pakāpju rindā.

Ap 1870. g. R. Dedekinds izvirzīja vispārīgu mūsdienu algebras koncepciju.

K. Žordāns izstrādāja galīgo grupu teoriju.

1872. g. Nodibināta Francijas matemātikas biedrība.

F. Kleins publicēja «Erlangenes programmu».

1873. g. Š. Ermits pierādīja, ka skaitlis *e* ir transcendents.

1874. g. G. Kantors pierādīja, ka visu reālo skaitļu kopa ir nesanumurējama.

1878. g. G. Kantors definēja vispārīgu kopas apjoma jēdzienu.

1879.—1884. g. G. Kantors strādāja pie bezgalības problēmas.

1881.—1883. g. F. Kleins un A. Puankarē izveidoja vispārīgo automorfo funkciju teoriju.

1882. g.	K. Lindemanis pierādīja, ka skaitlis π ir transcendents.
1883.—1887. g.	G. Kantors izveidoja transfinīto kardinālskaitļu teoriju, attīstīja iracionālo skaitļu teoriju, radīja kopu teoriju.
1887. g.	P. Čebišovs pierādīja varbūtību teorijas centrālo robežteorēmu.
1887. g.	Nodibināta Amerikas matemātikas biedrība.
1890. g.	Dž. Peāno formulēja naturālo skaitļu aksiomu, precizēja veselā skaitļa jēdzienu, deva piemēru nepārtrauktai līknei, kas iet caur visiem kvadrāta punktiem.
1890.—1893. g.	Izmantojot abstraktas metodes, D. Hilberts atrisināja algebrisko invariantu teorijas pamatproblēmas.
1892. g.	T. Stīltjess vispārināja integrāļa jēdzienu.
1893. g.	P. Bols izstrādāja kvaziperiodisko funkciju teorijas pamatus.
1895. g.	A. Puankarē publicēja savus pētījumus topoloģijā.
1896. g.	H. Minkovskis izstrādāja skaitļu ģeometriju. Inženieri Felts un Tarrans (ASV) konstruēja taustiņu skaitļojamo mašīnu četrām aritmētiskām darbībām.
1897. g.	I Starptautiskais matemātiķu kongress (Cīrihē).
1899. g.	D. Hilberts publicēja «Ģeometrijas pamatus».
1899.—1900. g.	E. Kartāns strādāja pie iekšējo formu teorijas un tās lietojumiem diferenciālģeometrijā.
XIX gs. beigas—XX gs. sākums	S. Pinkerlē (1885), V. Volterra (1887), D. Hilberts (1904—1910), F. Rīss (1912) pētīja funkcionālās telpas.
1900. g.	II Starptautiskais matemātiķu kongress (Parīzē). D. Hilberts šajā kongresā formulēja 23 problēmas.
1900.—1903. g.	E. Fredholms izveidoja vispārīgo integrālvienādojumu teoriju.
1901. g.	T. Levi-Čivita un G. Riččī-Kurbastro pabeidza tenzoru rēķinu izstrādi.
1903. g.	B. Rasels formulēja paradoksu, kas nosaukts viņa vārdā.
1904. g.	III Starptautiskais matemātiķu kongress (Heidelberga).
	A. Lebegs definēja jaunus kopas mēra un mērojamas funkcijas jēdzienus, tika definēts Lebega integrālis.

1904.—1908. g.	E. Cermelo izstrādāja vispārīgo kopu teorijas aksiomātiku.
1905. g.	E. Borels definēja kopas mēra jēdzienu varbūtību teorijā.
1908. g.	IV Starptautiskais matemātiķu kongress (Roma).
1910. g.	A. Lebegs izstrādāja kopu funkciju teoriju. A. Markovs izveidoja salikto un nehomogēno ķēžu teoriju.
1912. g.	V Starptautiskais matemātiķu kongress (Kembridža, Anglija).
1913. g.	J. Radons ieteica jaunu integrāļa definīciju, kura ietvēra Lebega integrāli un Stīltjesa integrāli.
1914. g.	F. Hausdorfs publicēja darbu «Kopu teorijas pamati». Šajā darbā formulētas četras aksiomas, no kurām trīs raksturo vispārīgās topoloģiskās telpas, bet ceturtā ir atdalāmības aksioma. Hausdorfa telpai jāapmierina visas četras aksiomas. M. Frešē definēja funkcionāļa nepārtrauktību, tā diferencējamību un funkcionāļa diferenciāli. Iznāca pēdējais «Matemātisko zinātņu enciklopēdijas» sējums (enciklopēdija sākta F. Kleina redakcijā 1901. g.).
1915. g.	N. Luzins publicēja disertāciju «Integrālis un trigonometriskā rinda».
1916. g.	S. Bernšteins publicēja pirmo varbūtību teorijas aksiomu sistēmu.
1918. g.	J. Shoutens un H. Veils neatkarīgi viens no otra vispārināja Rīmana telpas jēdzienu.
1919. g.	E. Nētere sāka pētījumus abstraktajā algebrā kā patstāvīgā algebras nozarē.
1921. g.	V. Steklova vadībā tika noorganizēts Krievijas Zinātņu akadēmijas Fizikas un matemātikas institūts, uz kura bāzes 1934. g. izveidojās PSRS ZA Matemātikas institūts.
1922. g.	S. Banahs definēja pilnu normētu vektoru telpu (Banaha telpu). T. Skolems formalizēja klasisko kopu teorijas aksiomu sistēmu (Cermelo sistēmu).
1923.—1924. g.	E. Kartāns izveidoja telpas ģeometriju, apvienojot virsmu ģeometriju un grupu teoriju.
1924. g.	VI Starptautiskais matemātiķu kongress (Toronto).
1925. g.	Dž. fon Neimanis formulēja aksiomātisko kopu teoriju.

1926. g.	A. Ķolmogorovs formulēja lielo skaitļu likuma pielietojamības nepieciešamos un pietiekamos nosacījumus.
1928. g.	VII Starptautiskais matemātiķu kongress (Boloņa).
1931. g.	B. Van der Vardens publicēja monogrāfiju «Modernā algebra» — pirmo sistemātisko mūsdienu algebras izklāstu.
	Ķ. Gēdels pierādīja teorēmu, ka katrā nepretrunīgā formālā sistēmā ir formāli neizšķirami izteikumi.
1932. g.	VIII Starptautiskais matemātiķu kongress (Cīrihe).
1933. g.	A. Tarskis izvirzīja formalizētu valodu koncepciju.
	A. Ķolmogorovs izveidoja varbūtību teorijas aksiomātiku, pamatojoties uz kopu teoriju.
1934. g.	A. Gelfonds un T. Šneiders neatkarīgi viens no otra atrisināja septīto Hilberta problēmu.
1935. g.	A. Ķolmogorovs formulēja topoloģiskas vektoru telpas ideju.
1936. g.	Dots pirmais algoritmiski neatrisināmas masu problēmas piemērs (A. Čērčs).
	A. Tjūrings formulēja abstraktas skaitļošanas mašīnas koncepciju (Tjūringa mašīna).
1937. g.	I. Vinogradovs pierādīja teorēmu par to, ka jebkuru pietiekami lielu nepāra skaitli var izteikt kā ne vairāk kā trīs pirmskaitļu summu (daļēji atrisināta Goldbaha problēma).
	Tika izveidota franču matemātiķu grupa ar kolektīvu pseidonīmu Nikolā Burbakī.
1939. g.	Sākta mūsdienu matemātikas monogrāfiju sērijas «Matemātikas elementi» publicēšana (N. Burbakī).
1944. g.	H. Eikens konstruēja pirmo automātisko skaitļošanas mašīnu (MARK-1).
1944. g.	Dž. Maočlijs un Dž. Ekerts konstruēja pirmo elektronisko skaitļotāju ENIAC.
1945.—1946. g.	Dž. fon Neimanis formulēja elektroniskā skaitļotāja ar uzglabājamu programmu koncepciju.
1947. g.	Publicēta N. Vīnera monogrāfija «Kibernētika».
	Ķ. Šenons izstrādāja informācijas izteikšanas kvantitatīvo metodi.

1948.—1951. g.	S. Ļebedeva vadībā izstrādāts pirmais elektronu skaitļotājs Padomju Savienībā (MЭCM).
1949. g.	K. Šenons definēja entropiju informācijas teorijā.
1950. g.	IX Starptautiskais matemātiķu kongress (Kembridža, ASV). Šajā kongresā pirmoreiz tika pasniegta Dž. Fīldsa prēmija.
1953. g.	X Starptautiskais matemātiķu kongress (Amsterdama).
1955. g.	ASV tika konstruēts pirmais pusvadītāju elektroniskais skaitļotājs.
1957. g.	Izgatavota pirmā pusvadītāju integrālshēma elektroniskajiem skaitļotājiem, izstrādāts pirmais algoritmiskās valodas ALGOL variants. Pirmoreiz tika izmantoti magnētiskie diski kā atmiņas iekārta (IBM-305, ASV).
1958. g.	XI Starptautiskais matemātiķu kongress (Edinburga).
1961. g.	P. Barto izveidoja algoritmisko mūzikas teoriju.
	L. Kantorovičs formulēja matemātiskās ekonomikas problēmu.
	Ieviestas t. s. Morsa-Smeila dinamiskās sistēmas (S. Smeils, ASV).
1962. g.	XII Starptautiskais matemātiķu kongress (Stokholma).
	Uz skaitļotāja IBM-7090 pirmoreiz tika sastādīts skaņdarbs desmit instrumentiem.
1963. g.	A. Tihonovs atrada pieeju nekorekto problēmu risināšanai.
	P. Koens pierādīja, ka kontinuuma hipotēzi nevar izrisināt no Cermelo-Frenkela aksiomu sistēmas.
1964. g.	Sākās trešās paaudzes elektronisko skaitļotāju izveide uz mikromoduļiem.
1965. g.	S. Soboļevs izveidoja vispārīgu skaitlisko algoritmu optimizācijas teoriju.
1966. g.	XIII Starptautiskais matemātiķu kongress (Maskava).
	Pierādīts, ka periodiskai funkcijai ar integrējamu kvadrātu Furjē rinda konverģē gandrīz visur (L. Karlesons, Zviedrija).
1970. g.	XIV Starptautiskais matemātiķu kongress (Nica).
1974. g.	XV Starptautiskais matemātiķu kongress (Vankūvera).

1978. g. XVI Starptautiskais matemātiķu kongress (Helsinki).

1983. g. XVII Starptautiskais matemātiķu kongress (Varšava).
Pierādīta Mordela hipotēze par to, ka algebriskam vienādojumam ar diviem nezināmajiem racionālo atrisinājumu skaits ir galīgs (G. Faltings, VFR).

1986. g. XVIII Starptautiskais matemātiķu kongress (Bērklija).

Personu rādītājs

Bolcano (Bernhard Bolzano, 1781—1848)
Bolcmanis (Ludwig Boltzmann, 1844—1906)
Bols Pīrss (1865—1921)
Bombelli (Raffael Bombelli, ap 1526—1573)
Bonē (Pierre Ossian Bonnet, 1819—1892)
Bordoni (Antonio Maria Bordoni, 1789—1860)
Borels (Emile Borel, 1871—1956)
Bredvardīns (Thomas Bradwardine, ap 1290—1349)
Brāmagupta (598—?)
Brauers (Luitzen Egbert Jan Brouwer, 1881—1966)
Brāzma Nikolajs (1913—1966)
Briansons (Charles Julien Brianchon, 1785—1864)
Brio (Charles Auguste Albert Briot, 1817—1882)
Brioski (Francesco Brioschi, 1824—1897)
Buē (Adrien Quentin Buee, 1748—1826)
Bukē (Jean Claude Bouquet, 1819—1885)
Būls (George Boole, 1815—1864)
Buņakovskis (Буняковский Виктор Яковлевич, 1804—1880)

Cermelo (Ernest Zermelo, 1871—1953)
Cingers (Цингер Василий Яковлевич, 1863—1907)
Cīrulis Teodors (dz. 1934)
Čapligins (Чаплыгин Сергей Алексеевич, 1869—1942)
Čebišovs (Чебышев Пафнутий Львович, 1821—1894)
Čehs (Eduard Čech, 1893—1960)
Čērčs (Alonzo Church, dz. 1903)
Dalambērs (Jean le Rond d'Alembert, 1717—1783)
Darbū (Gaston Darboux, 1842—1917)
Davidovs (Давидов Август Юльевич, 1823—1885)
Dedekinds (Julius Wilhelm Richard Dedekind, 1831—1916)
Dekarts (Rene Descartes, 1596—1650)
Delsartrs (Jean Delsarte, 1903—1968)
Dēmokrits (Δημὸκρὶτοζ, ap 460—ap 380 p. m. ē.)
Detlovs Vilnis (dz. 1923)
Dezargs (Girard Desargues, 1591—1661)
Dīnostrats (Δινοστρὰτοζ, IV gs. p. m. ē.)
Diofants (Διοφαντοζ, III gs.)
Diokls (Διοκλὴζ, II gs. p. m. ē.)
Dīrers (Albrecht Dürer, 1471—1528)
Djedonē (Jean Alexandre Dieudonne, dz. 1906)
Dževonss (William Stanley Jevons, 1835—1882)

Edreins (Robert Adrain, 1775—1843)

Eiklīds (Εὐκλειδηζ, 365—ap 300 p. m. ē.)
Eilers (Leonhard Euler, 1707—1783)
Einšteins (Albert Einstein, 1879—1955)
Eizenšteins (Ferdinand Gotthold Max Eisenstein, 1823—1852)
Engelsons Jēkabs (dz. 1925)

Horners (William George Horner, 1708—1837)
Ibn al Haisams (965—1039)
Ibn Korra (1173—1248)
Ikaunieks Ēvalds (dz. 1937)
Jablonskis (Яблонский Сергей Всеволодович, 1924)
Jakobi (Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804—1851)
Janovska (Яновская Софья Александровна, 1896—1966)
Jegorovs (Егоров Дмитрий Федорович, 1869—1931)
Jermakovs (Ермаков Василий Петрович, 1845—1922)
Jungs (William Henry Young, 1863—1942)
Kantors (Georg Cantor, 1845—1918)
āl Karadži (X—XI gs.)
Karateodori (Constantin Caratheodory, 1873—1950)
Kardāno (Girolamo Cardano, 1501—1576)
Kārkliņš Imants (dz. 1930)
Karno (Lasare Nicolas Marguerite Carnot, 1753—1823)
Kartāns (Elie Cartan, 1869—1951)
Kašī (?—ap 1530)
Kavaljēri (Bonaventura Cavalieri, 1598?—1647)
Kēbe (Paul Koebe, 1882—1945)
Keldišs (Келдыш Мстислав Всеволодович, 1911—1978)
Kēlī (Arthur Cayley, 1821—1895)
Keplers (Johannes Kepler, 1571—1630)
Killings (Wilhelm Karl Joseph Killing, 1847—1923)
Klebšs (Rudolf Friedrich Alfred Clebsch, 1833—1872)
Kleins (Felix Klein, 1849—1925)
Klero (Alexis Claude Cleuraut, 1713—1765)
Klokovs Jurijs (dz. 1929)
Kodaci (Delfino Codazzi, 1824—1873)
Koens (Paul Joseph Cohen, 1934)
Kolmogorovs (Колмогоров Андрей Николаевич, 1903—1987) 1903—1987)
Kondorsē (Marie Jean Antoine Nicolas Caritat de Condorcet, 1743—1794)
Koperniks (Nicolaus Coppernicus, 1473—1543)
Korkins (Коркин Александр Николаевич, 1837—1908)
Košī (Augustin Cauchy, 1789—1857)
Koteļņikovs (Котельников Александр Петрович, 1865—1944)
Kotess (Roger Cotes, 1682—1716)
Kovaļevska (Ковалевская Софья Васильевна, 1850—1891)
Krāmers (Gabriel Cramer, 1704—1752)
Kremona (Luigi Cremona, 1830—1903)
Krilovs (Крылов Алексей Николаевич, 1863—1945)
Kronekers (Leopold Kronecker, 1823—1891)
Kubiļus (Jonas Kubilius, dz. 1921)
Kūlidžs (Julian Lowell Coolidge, 1873—1958)
Kummers (Ernst Eduard Kummer, 1810—1893)

Ķurošs (Курош Александр Геннадиевич, 1908—1971)
Kutjurā (Louis Couturat, 1868—1914)
Lagers (Edmond Nicolas Laguerre, 1834—1886)
Lagirs (Philippe de La Hire, 1640—1718)
Lagranžs (Joseph Louis Lagrange, 1736—1813)
Lakruā (Sylvestre Francois Lacroix, 1765—1843)
Lamē (Gabriel Lame, 1795—1870)
Landau (Edmund Landau, 1877—1938)
Laplass (Pierre Simon Laplace, 1749—1827)
Lavrentjevs (Лаврентьев Михаил Алексеевич, 1900—1980)
Lebegs (Henri Lebesgue, 1874—1941)
Leibnics (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646—1716)
Lejnieks Edgars (1889—1937)
Leonardo da Vinči (Leonardo da Vinci, 1452—1519)
Lepins Arnolds (dz. 1930)
Leonardo no Pizas (Leonardo Pizano, Fibonači, 1180—1240)
Levi (Paul Levi, 1886—1971)
Levi-Čivita (Tullio Levi-Civita, 1873—1941)
Ležandrs (Adrien Marie Legendre, 1752—1833)
Ležēns-Dirihlē (Peter Gustav Lejeune-Dirichlet, 1805—1859)
Lī (Sophus Lie, 1842—1899)
Liepa Aivars (1936—1979)
Lindemanis (Ferdinand Lindemann, 1852—1939)
Liņņiks (Линник Юрий Владимирович, 1915—1972)
Listings (Johann Benedict Listing, 1808—1882)
Litlvuds (John Edensor Littlewood, 1885—1957)
Liuvils (Joseph Lioville, 1809—1882)
Lobačevskis (Лобачевский Николай Иванович, 1792—1856)
Lorāns (Pierre Alphonse Laurent, 1813—1854)
Lorencs Aivars (dz. 1933)
Lupanovs (Лупанов Олег Борисович, 1932)
Lūsis Arvīds (1900—1969)
Luzins (Лузин Николай Николаевич, 1883—1950)
Ļapunovs (Ляпунов Александр Михайлович, 1857—1918)

Mahavīra (IX gs.)
Maklorēns (Colin Maclaurin, 1698—1746)
Markovs (Марков Андрей Андреевич, 1856—1922)
Matijasevičs (Матиясевич Юрий Владимирович, 1947)
Mēbiuss (August Ferdinand Möbius, 1790—1868)
Mencis Jānis (dz. 1914)
Menelājs (Μενελαοζ, I—II gs.)
Menjē (Jean Baptiste Marie Charles Meusnier de la Place, 1754—1793)
Meņšovs (Меньшов Дмитрий Евгеньевич, 1892)
Merē (Mere Antoine Gombault, Chevalier de, ap 1610—1684)

Mindings (Ernst Ferdinand Adolf Gottlieb Minding, 1806—1885)
Minkovskis (Hermann Minkowski, 1864—1909)
Miškis Anatolijs (dz. 1920)
Mitāgs-Leflers (Magnus Gösta Mittag-Leffler, 1846—1927)
Mlodzejevskis (Млодзеевский Болеслав Корнелиевич, 1858—1923)
Monžs (Gaspard Monge, 1746—1816)
Moperuī (Pierre Louis Moreau Maupertuis, 1698—1759)
Morgans (Augustus D. de Morgan, 1806—1871)
Muavrs (Abraham de Moivre, 1667—1754)
Mushelišvili (Мусхелишвили Николай Иванович, 1891—1976)
Neimanis (Carl Gottfried Neumann, 1832—1925)
fon Neimanis (John (Janos) von Neumann, 1903—1957)
Nētere (Emmy Noether, 1882—1935)
Nevanlinna (Rolf Herman Nevanlinna, 1895—1980)
Nikoļskis (Никольский Сергей Михайлович, 1905)
Nīkomēds (Νικομὴδηζ, I—II gs.)
Nilakanta (XV—XVI gs.)
Novikovs (Новиков Петр Сергеевич, 1901—1975)
Ņūtons (Isaac Newton, 1643—1727)
Oresms Nikolajs (Nicole Oresme, ap 1323—1382)
Ostrogradskis (Остроградский Михаил Васильевич, 1801—1862)
Outreds (William Oughtred, 1575—1660)
Ozanams (Jacques Ozanam, 1640—1717)
Pačoli (Luca Pacioli, ap 1445—ap 1514
Papps (Πὰπποζ, III gs.)
Paskāls (Blaise Pascal, 1623—1662)
Peāno (Giuseppe Peano, 1858—1932)
Penlēve (Paul Painleve, 1863—1933)
Pētersons Kārlis (1828—1881)
Pikārs (Charles Emile Picard, 1856—1941)
Pinkerlē (Salvatori Pincherle, 1853—1936)
Pīrsons (Karl Pearson, 1857—1936)
Pīrss (Benjamin O. Peirce, 1809—1880)
Pitagors (Πιθὰγοραζ, VI gs. p. m. ē.)
Pjuizē (Victor Alexandr Puiseux, 1820—1883)
Planks (Max Planck, 1858—1947)
Platons (Πλατων, 429—348 p. m. ē.)
Plikers (Julius Plücker, 1801—1868)
Plotkins Boriss (dz. 1925)
Ponselē (Jean Victor Poncelet, 1788—1867)
Pontrjagins (Понтрягин Лев Семенович, 1908—1988)
Posts (Emil Leon Post, 1897—1954)
Poreckis (Порецкий Платон Сергеевич, 1846—1907)
Prohorovs (Прохоров Юрий Васильевич, 1929)

Prokls (Προκλοζ, 410—485)

Ptolemajs Klaudijs (Κλαυδιοζ Πτολεματοζ, ?—ap 170. g. p. m. ē.)
Puankarē (Henri Poincare, 1854—1912)
Puanso (Louis Poinset, 1777—1859)
Puasons (Simenon Denis Poisson, 1781—1840)
Rābe (Joseph Ludwig Raabe, 1801—1859)
Ramuss (Piere de la Ramees Petrus Ramus, 1515—1572)
Rasels (Bertrand Russell, 1872—1970)
Raševskis (Рашевский Петр Константинович, 1907)
Regiomontāns (Regiomontanus, Johannes Müller, 1436—1476)
Reiziņš Linards (dz. 1924)
Riekstiņš Eduards (dz. 1919)
Rikati (Jacopo Francesco Riccati, 1676—1754)
Rīmanis (Bernhard Riemann, 1826—1866)
Riss (Frigues Riesz, 1880—1956)
Rolls (Michel Rolle, 1652—1719)
Rufīni (Paolo Ruffini, 1765—1822)
Salmons (George Salmon, 1819—1904)
Selbergs (Atle Selberg, dz. 1917)
Senvenāns (Adhemard Jean Claude Barre de Sant Venant, 1797—1886)
Serpinskis (Waclaw Serpinski, 1882—1969)
Serē (Joseph Alfred Serret, 1819—1885)
Shoutens (Franz van Schooten, 1615—1660)
Silvestrs (James Joseph Silvester, 1814—1897)
Smeils (Stephen Smale, dz. 1930)
Soboļevs (Соболев Сергей Львович, 1908)
Somovs (Сомов Иосиф Иванович, 1815—1876)
Steklovs (Стеклов Владимир Андреевич, 1864—1926)
Stevins (Simon Stevin, 1548—1620)
Stīltjess (Thomas Johannes Stieltjes, 1856—1894)
Stokss (George Gabriel Stokes, 1819—1903)
Svainsheds (Richard Swineshead, ap 1350—?)
Šāls (Michel Chasles, 1793—1880)
Šenons (Claude Elwood Shannon, dz. 1916)
Ševalē (Claude Chevalley, 1798—1885)
Šilovs (Шилов Георгий, 1917—1975)
Širokovs (Широков Петр Алексеевич, 1895—1944)
Šmits (Шмидт Отто Юльевич, 1891—1956)
Šrēders (Ernst Schröder, 1841—1902)
Šridhara (IX—X gs.)
Štauts (Karl Georg Christian von Staudt, 1798—1867)
Šteiners (Jacob Steiner, 1796—1863)
Šteinics (Ernst Steinitz, 1871—1928)
Štīfels (Michael Stifel, 1496—1567)
Štūdi (Eduard Study, 1862—1922)
Šukē (Nicolas Chuquet, ?—ap 1500)

Švarcs (Carl Hermann Amandus Schwarz, 1843—1921)
Taless (θαλῆζ, ap 624—548 p. m. ē.)
Tartalja (Niccolo Tartaglia, 1500—1557)
Teons (θέων, II gs.)
Teilors (Brook Taylor, 1685—1731)
Tanerī (Jules Tannery, 1848—1910)
Tjūrings (Alan Mathison Turing, 1912—1954)
Tomsons (William Thomson, 1824—1907)
at Tusī (1201—1274)
Ulugbeks (1411—1449)
Vaitheds (Alfred Nors Whitehead, 1861—1947)
Valē-Pusēns (Charle Jean de la Vallee-Poussin, 1866—1962)
Valliss (John Wallis, 1616—1703)
Vandermonds (Alexandre Theophile Vandermonde, 1735—1796)
Van der Vārdens (Bartel Leendert van der Waerden, dz. 1903)
Varings (Edward Waring, 1734—1798)
Variņons (Pierre Varignon, 1654—1722)
Veierštrāss (Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, 1815—1897)
Veils Anrī (Andree Weil, dz. 1906)
Veils Hermanis (Hermann Weyl, 1885—1955)
Veldons (Walter Frank Raphael Weldon, 1860—1906)
Venns (John Venn, 1834—1923)
Vesels (Caspar Wessel, 1745—1818)
Vīners (Norbert Wiener, 1894—1964)
Vinogradovs (Виноградов Иван Матвеевич, 1891—1983)
Vitelo (Witelo, ap 1225—ap 2180)
Vitrūvijs (Marcus Vitruvius Pollio, I gs. p. m. ē.)
Vjeta (François Viete, Vieta, 1540—1603)
Voronojs (Вороной Георгий Федосеевич, 1868—1908)
Zaremba (Stanislaw Zaremba, 1863—1942)
Zēbers (Ludwig August Seeber, 1793—1855)
Zēnodors (Ζενοδὼραζ, III—II gs. p. m. ē.)
Zēnons Elejietis (Ζηνων, 490?—430? p. m. ē.)
Zīgers (Carl Ludwig Siegel, 1896)
Zolotarjovs (Золотарев Егор Иванович, (1847—1878)
Zommerfelds (Arnold Sommerfeld, 1868—1951)
Žerbērs (Gerbert, Silvestrus II, ap 940—1003)
Žergons (Joseph Diez Gergonne, 1771—1859)
Žirārs (Albert Girard, 1595—1632)
Žordāns (Camille Jordan, 1838—1922)
Žukovskis (Жуковский Николай Егорович, 1847—1921)
Žuravļovs (Журавлев Юрий Иванович, 1935)

Literatūra

1. Александров П. С. Советская математическая школа // Вопросы истории отечественной науки. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1949. — С. 63—85.
2. Башмакова И. Г., Юшкевич А. П. Происхождение систем счисления // Энциклопедия элементарной математики. — М.; Л., 1951. — Т. I.
3. Березкина Э. И. Математика древнего Китая. — М., 1980.
4. Боголюбов А. Н. Математики. Механики: Биографический справочник. — Киев: Наук. думка, 1983.
5. Бэлл Э. Т. Творцы математики. — М., 1979.
6. Ван дер Варден Б. Л. Пробуждающаяся наука. — М., 1959.
7. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия. — М.: Физматгиз, 1960.
8. Выгодский М. Я. Арифметика и алгебра в древнем мире. — М., 1967.
9. Даан-Дальмедико А., Пейфер Ж. Пути и лабиринты. Очерки по истории математики. — М.: Мир, 1986.
10. Депман И. Я. История арифметики. — М., 1965.
11. Детловс В. К., Лусис А. Я., Рейзинь Л. Э., Риекстиньш Э. Я. Работы математиков Советской Латвии за 50 лет // Латвийский математический ежегодник. — 1968. — 3. — С. 7—28.
12. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. — М.: Наука, 1970—1972. — Т. 1—3.
13. История отечественной математики. — Киев: Наук. думка, 1968—1970. — Т. 1—4.
14. Каневский А. Я., Рейзинь Л. Э., Риекстиньш Э. Я. Работы математиков Советской Латвии за 1967—1975 годы // Латвийский математический ежегодник, 1978. — 22.
15. Клайн М. Математика. Утрата определенности. — М.: Мир, 1984.
16. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. — М.: ОНТИ, 1937. — Ч. I.
17. Колман Э. История математики в древности. — М., 1961.
18. Колмогоров А. Н. Математика. — БСЭ, 1954. — Т. 26.
19. Лусис А. Я., Рейзинь Л. Э., Риекстиньш Э. Я. Математика в Советской Латвии // Успехи математических наук, 1966. — 21, 2(18). — С. 248—254.
20. Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятности. — М.: Наука, 1978.
21. Математика XIX века. Геометрия. Теория аналитических функций. — М.: Наука, 1981.
22. Нейгебауэр О. Точные науки в древности. — М., 1968.

23. Проблемы Гильберта / Под ред. П. С. Александрова. — М., 1969.
24. Рейзинь Л. Э., Риекстиньш Э. Я. Математика в Латвийском государственном университете в 1919—1969 гг. // Латвийский математический ежегодник. — 1975. — 16. — С. 14—22.
25. Рыбников К. А. История математики. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1974.
26. Стройк Д. Я. Краткий очерк по истории математики. — М., 1969.
27. Фолта Я., Новы Л. История естествознания в датах. Хронологический обзор. — М.: Прогресс, 1987.
28. Юшкевич А. П., Розенфельд Б. А. Математика в странах Востока в средине века. — М., 1960. — Вып. I.
29. Юшкевич А. П. История математики в средние века. — М., 1961.
30. Хрестоматия по истории математики. — М., 1975—1976. — Т. 1—2.

Briedis Z. Izcilie matemātiķi. — R., 1979.
Infelds L. Dievu mīlulis. — R., 1969.
Ļivanovs A. Trīs likteņi. — R., 1988.
Rabinovičs I. u. c. Edgars Lejnieks / Zvaigžņotā debess, 1962. g. ziema. — 42.—45. lpp.
Rabinovičs I. Izcilais Rīgas zinātnieks Pīrss Bols (1865—1921)/ Astronomiskais kalendārs 1957. g. — R., 1956. — 95.—105. lpp.
Rabinovičs I. Ķārlis Pētersons / Zvaigžņotā debess, 1966. g. rudens. — 22.—29. lpp.
Rabinovičs I. Ķārlis Viljams / Zvaigžņotā debess, 1961. g. rudens. — 40.—41. lpp.
Rabinovičs I. No laika rēķinu vēstures. — R., 1967.
Stradiņš J. Etīdes par Latvijas zinātņu pagātnē. — R., 1982.

Saturs