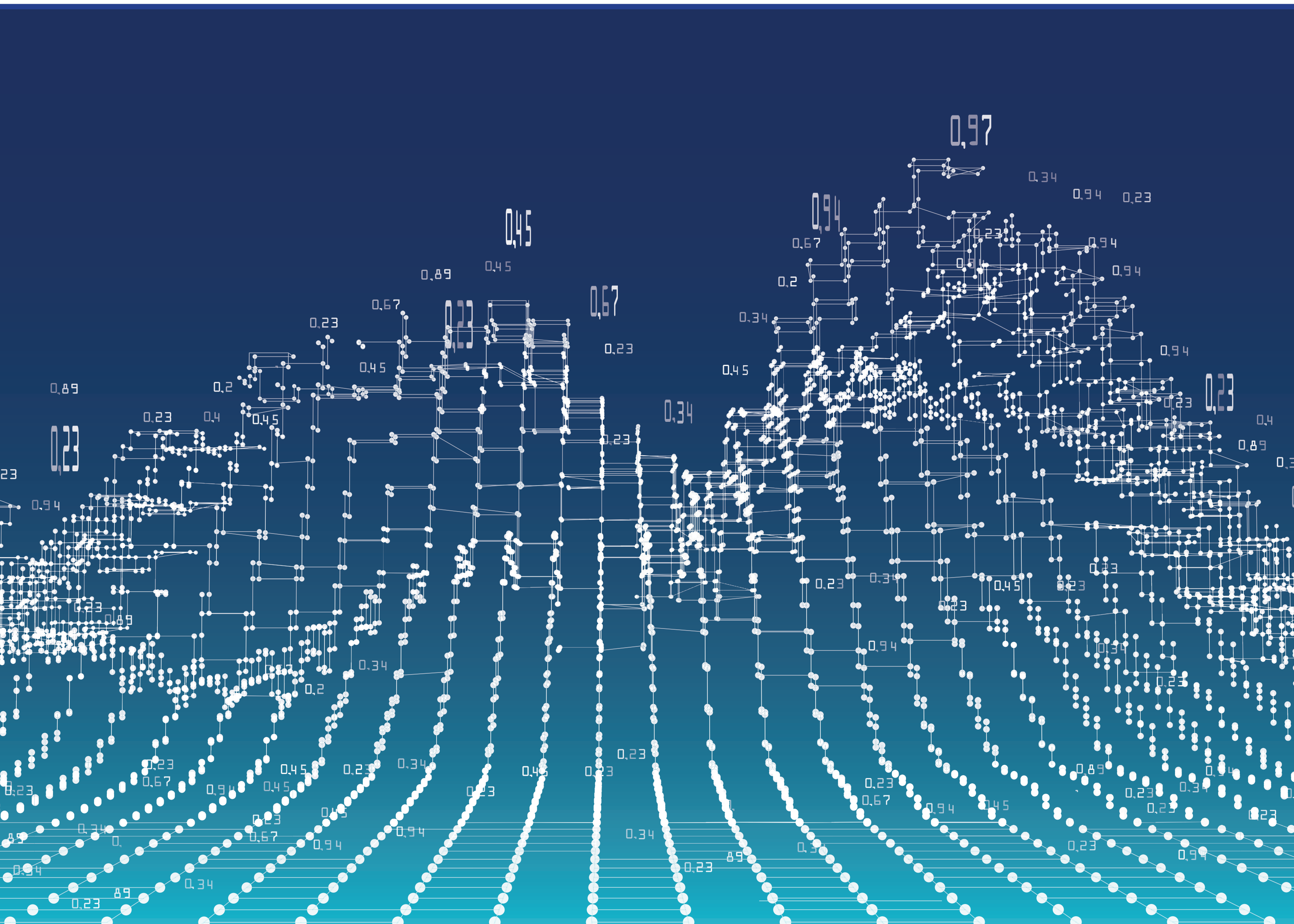
RĪGAS TEHNISKĀ UNIVERSITĀTE

Jegors Fjodorovs

RISKA PROGNOZĒŠANA NEPĀRTRAUKTO LAIKA MODEĻU IETVAROS TEHNOLOĢIJU UN TIRGUS NOVĒRTĒŠANAI

Promocijas darba kopsavilkums



RTU Izdevniecība
Rīga 2019

RĪGAS TEHNISKĀ UNIVERSITĀTE
Datorzinātnes un informācijas tehnoloģijas fakultāte
Datorvadības, automātikas un datortehnikas institūts

Jegors Fjodorovs
Doktora studiju programmas “Automātika un datortehnika” doktorants

RISKA PROGNOZĒŠANA NEPĀRTRAUKTO LAIKA MODEĻU IETVAROS TEHNOLOĢIJU UN TIRGUS NOVĒRTĒŠANAI

Promocijas darba kopsavilkums

Zinātniskais vadītājs
profesors *Dr. sc. ing.*
ANDREJS MATVEJEVS

RTU Izdevniecība
Rīga 2019

Fjodorovs, J. Riska prognozēšana nepārtraukto laika modeļu ietvaros tehnoloģiju un tirgus novērtēšanai. Promocijas darba kopsavilkums. Rīga: RTU Izdevniecība, 2019. 37 lpp.

Iespiests saskaņā ar promocijas padomes “RTU P-07” 2018. gada 19. jūnija lēmumu Nr. 18-8.

ISBN 978-9934-22-276-4 (print)
978-9934-22-277-1 (pdf)

PROMOCIJAS DARBS IZVIRZĪTS INŽENIERZINĀTŅU DOKTORA GRĀDA IEGŪŠANAI RĪGAS TEHNISKAJĀ UNIVERSITĀTĒ

Promocijas darbs inženierzinātņu doktora grāda iegūšanai tiek publiski aizstāvēts 2019. gada 3. jūnijā plkst. 10.00, Rīgas Tehniskās universitātes Datorzinātnes un informācijas tehnoloģijas fakultātē, Sētas ielā 1, 202. auditorijā.

OFICIĀLIE RECENZENTI

Profesors *Dr. sc. ing.* Jānis Grabis,
Rīgas Tehniskā universitāte

Profesore *Dr. sc. ing.* Irina Arhipova,
Latvijas Lauksaimniecības Universitāte, Latvija

Asoc. profesors *Ph. D. in Informatics Engineering Gintautas Tamulevičius*
Viļņas Universitāte, Lietuva

APSTIPRINĀJUMS

Apstiprinu, ka esmu izstrādājis šo promocijas darbu, kas iesniegts izskatīšanai Rīgas Tehniskajā universitātē inženierzinātņu doktora grāda iegūšanai. Promocijas darbs zinātniskā grāda iegūšanai nav iesniegts nevienā citā universitātē.

Jegors Fjodorovs ……………………………. (paraksts)
Datums: ………………………

Promocijas darbs ir uzrakstīts latviešu valodā, tajā ir ievads, četras nodaļas, rezultāti un secinājumi, pieci pielikumi un literatūras saraksts ar 94 nosaukumiem, tajā ietverti 40 attēli un septiņas tabulas, darba apjoms – 134 lappuses bez pielikumiem.

SATURS

PROMOCIJAS DARBA VISPĀRĒJS RAKSTUROJUMS

Tēmas aktualitāte

Informācijas teorija pēta informācijas pārraidi, apstrādi, ieguvi un izmantošanu. Abstraktā veidā informāciju var uzskatīt par nenoteiktības risinājumu [1]. Šobrīd dažādās pasaules valstīs publiskie un privātie uzņēmumi krāj dažāda veida informāciju un izmanto stohastisko modelēšanu šīs informācijas analīzei, lai noteiktu sagaidāmo procentu likmju termiņstruktūru, valūtu kursus, inflācijas līmeni, elektrības pieprasījumu dažādos laika posmos, atvasināto finanšu instrumentu cenas u. c. Tas nepieciešams, lai aprēķinātu optimālo valdības parāda līmeni, veiktu finanšu risku ierobežošanu, krājumu modelēšanu un dažādu finanšu aktīvu cenu noteikšanu. Iepriekšminētās informācijas apjoms [2] nepārtraukti palielinās, un mūsdienās prognožu izstrādātāji saskaras ar apjomīgu datu daudzumu. Šo datu apstrādes metodes var kavēt lēmumu pieņemšanu. Līdz ar to ir nepieciešami ātri informācijas apstrādes algoritmi, kas balstās uz neparametriskajiem modeļiem. Promocijas darbā ir izveidotas iteratīvas prognozēšanas procedūras, kas balstītas uz kopulveidīgajām [55] regresijām.

Mūsdienās ir svarīgi prognozēt finanšu aktīvu un makroekonomisko datu nākotnes vērtības. Viens no pazīstamākajiem prognozēšanas instrumentiem ir Boksa–Dženkinsa (*Box and Jenkins*, 1970 [93]) autoregresīvais integrētais slīdošā vidējā (*ARIMA*) modelis. Bet Boksa–Dženkinsa metodoloģijai ir arī trūkumi, piemēram, netiek ņemtas vērā aktīvu ienesīgumu sadalījuma “smagās astes” un “augstās virsotnes” (*leptokurtic*). Mūsdienās, veicot prognozēšanu finanšu jomā, nākas saskarties ar datiem, kas ir heteroskedastiski. Laikrindu svārstības nav stacionāras – pastāv straujas izmaiņas dažādos laika intervālos. Tādējādi atbildīgajam speciālistam būtu jālieto prognozēšanas metodes, kas ir spējīgas reaģēt uz datu svārstību izmaiņām un sērijveida korelācijām. Hestons [70] bija viens no pirmajiem, kurš nodarbojās ar stohastisko svārstību modeļiem un piedāvāja aprakstīt dispersijas procesu ar atsevišķu stohastisko vienādojumu, bet nav pievērsis uzmanību modeļa atbilstības pārbaudei reālajiem datiem. Promocijas darba aktualitāti nosaka fakts, ka pasaulē šobrīd ir izstrādātas un prognozēšanai tiek lietotas daudzas un dažādas programmpaketes, kas aprēķina arī prognozes kļūdu, parasti ar maksimālās ticamības metodi, bet pārbaude, vai šīs kļūdas sadalījumam ir izpildīti stabilitātes nosacījumi – momenti var mainīties laikā – pārsvarā netiek veikta [3]. Tādēļ pieprasījums pēc prognozēšanas metodēm, kā arī dažādu atvasinātu finanšu instrumentu cenu noteikšana, kas ir piemērota darbam ar sērijveida korelēto datu dinamiku, liecina par promocijas darba tēmas aktualitāti.

Promocijas darba mērķis un uzdevumi

Promocijas darba mērķis ir izstrādāt riska prognozēšanas modeļu izveides metodes un algoritmus, ņemot vērā novērojumu kļūdu atlikumu nelineāro sakarību. Darbs risina praktiskas problēmas, kas parādās finanšu analīzē: kā atrast patieso vērtību atvasinātajiem finanšu instrumentiem, ieskaitot iespēju līgumus (opcijas); kā uzbūvēt kopulas funkciju, ar kuru varētu aprakstīt dažādu finanšu risku ietekmi uz atvasinātā finanšu instrumenta cenu; kā noteikt aktīva vērtības svārstību amplitūdu, iestājoties lielai nenoteiktībai finanšu tirgū.

Mērķa sasniegšanai izvirzīti šādi uzdevumi:

- izstrādāt autoregresīvo modeļu uzbūves metodi, balstītu uz kopulas sakarībām;
- izstrādāt metodi atlikumu korelācijas iekļaušanai stohastiskā diferenču vienādojumā un pāreju uz nepārtraukto laiku, kā arī izpētīt šī vienādojuma stacionaritāti;
- izstrādāt Hestona modeļa diskretizācijas metodi;
- ieviest korelācijas korekciju nepārtraukta laika nosacītas dispersijas *D.* Nelsona riska vadības modelī;
- izpētīt novērojumu kļūdu korelācijas ietekmi uz Bleka–Šoulza modeļa parametriem un pārrēķināt riska ierobežošanas koeficientus.

Pētījuma objekts un priekšmets

Pētījuma objekts ir laikrindas. Galvenais pētījuma priekšmets ir novērojumu kļūdas nosacītā dispersija.

Pētījuma metodes

Darba pētījuma metodes izriet no formulētās problēmas, t. i., modeļiem, kas ļautu analizēt datus ar autokorelācijām atlikumos. Piedāvātās metodes, tādas kā lineāras regresijas atlikumu ar nestacionāro variāciju analīze, Nobela prēmijas laureāta R. Engles metode (*ARCH* modelis), nosacītās variācijas *GARCH* modeļu difūzijas aproksimācijas J. Carkova metode, uz kopulām bāzēta nelineārās regresijas konstruēšanas metode un Nobela prēmijas laureātu R. Mertonas un M. Šoulsas risku vadības un ierobežojuma metode ir tās, kas veido bāzi promocijas darba uzdevumu izpildei. Imitāciju aparāta izstrādei lietoti vispārpazīstamie stohastiskie modeļi, kuriem pievienotas aktīvu ienesīgumu autokorelācijas. Imitācijas aparāts ir darbības kopums, kas nepieciešams, lai veiktu piedāvāto modeļu statistisko aprobāciju, t. i., ar lielu skaitu atkārtojamo operāciju parādītu konverģenci uz teorētiskajām vērtībām. Formulēto problēmu risināšanai ir piedāvāts izmantot divu faktoru afīnu modeli, kuram pirmais faktors ir aktīva cena, otrais – aktīva cenas svārstīgums. Sekmīgai iegūto modeļu apstrādei un rezultātu reprezentācijai veikta izmantojamo imitācijas modeļu diskrētā reprezentācija un kopulas konstruēšana. Iegūtie modeļi lietoti finanšu tirgus datiem, izmantojot *Matlab* programmpaketi. Tātad – promocijas darbā lietotas varbūtību teorijas un matemātiskās statistikas metodes, optimizācijas teorijas un imitācijas modelēšanas metodes.

Darba zinātniskais jaunievedums

Promocijas darba rezultāts:

1) autoregresīva prognozēšanas modeļa uzbūve bez pieņēmumiem par racionālo cerību un prognozēšanas kļūdu atklāto formulas veidu;

2) atlikumu korelācijas iekļaušana diskrētā laika modeļos, pārejot uz nepārtraukto laiku, ļauj uzbūvēt precīzāku prognozēšanas un risku aprēķināšanas modeli.

Darba praktiskā nozīmība

Piedāvāto metodi un algoritmu autoregresīvo modeļu konstruēšanai diskrētajā laikā var izmantot risku analīzei un prognozēšanai pie pietiekami liela stacionāras izlases apjoma.

Promocijas darba rezultāti attiecībā uz korelācijas korekcijas ieviešanu ļauj precīzāk novērtēt stacionāra stāvokļa sasniegšanas laiku un sadalījumu izveidotajai riska komponentes dispersijai.

Promocijas darba praktiskie rezultāti:

- akciju *VIX* indeksam ir izveidota prognoze, balstoties uz Hestona modeļa diskrēto reprezentāciju;
- atrasta neparametriskā regresija *VIX* indeksam, kas ļauj izdarīt jaunas uzlabotās prognozes;
- izveidots enerģētisko iekārtu prognozēto darbības trūkumu modelēšanas algoritms, kas nodrošina iespēju paredzēt iekārtas drošību;
- ņemot vērā ienesīgumu autokorelāciju, izstrādāta *Tesla Motors Inc* akciju cenas noteikšanas metode.

Aizstāvēšanai izvirzītās tēzes

1. Radītais kopulveidīgo regresiju konstruēšanas algoritms ļauj izveidot autoregresīvu prognozēšanas modeli, kurā nav pieņēmumu par racionālu matemātisko cerību un prognozēšanas kļūdu sadalījuma veidu.
2. Diskrētā laika modeļos iekļauta atlikumu korelācija, tādējādi pārejot uz nepārtrauktu laiku, kas ļauj precīzāk konstruēt prognozēšanas modeli un aprēķināt risku.

Darba rezultātu aprobācija

Darba aprobācija veikta, prezentējot iegūtos rezultātus 14 starptautiskās zinātniskās konferencēs un semināros, publicējot 10 zinātniskos rakstus starptautiskos zinātniskos izdevumos. Izstrādātās metodes kopš 2008. gada lieto Latvijas Republikas Valsts kase un kopš 2012. gada – AS *Swedbank*.

Publikācijas

1. Fjodorovs J., Matvejevs A., Malyarenko A. "Algorithms of the Copula Fit to the Nonlinear Processes in the Utility Industry"// ICTE 2016, December 2016, Riga, Latvia. Iekļauta Scopus datubāzē.
2. Matvejevs A., Fjodorovs J. "Estimation of Semi Parametric Markov Models with Frank Copula"// Proceedings of Journal of Applied Mathematics, 2015 – 292.–299. lpp. Iekļauts Scopus datubāzē.

3. Fjodorovs J. “Simulation of Option Prices Using GARCH Processes for Autocorrelated Stock Returns”// Proceedings of Journal of Applied Mathematics, 2014 – 151.–158. lpp. Iekļauta Scopus datubāzē.
4. Fjodorovs J. “Copula Estimation for GARCH(1,1) Processes”// Proceedings of Journal of Applied Mathematics, 2013 – 111.–120. lpp. Iekļauts Scopus datubāzē.
5. Matvejevs A., Fjodorovs J. “Evaluation of Dynamics of the VIX Index Via Heston Model”// Proceeding of the International Conference on Business Intelligence and Financial Engineering ICBIFE’2011, Honkonga, Hong Kong, 12.–13. decembris, 2011. – 125.–131. lpp. Iekļauta VERSITA un EBSCO datubāzēs.
6. Egle A., Matvejevs A., Fjodorovs J. “The Evaluation of Financial Assets with Autocorrelations in Returns”// Scientific Journal of Riga Technical University, 2012. – 116.–119. lpp. Iekļauta VERSITA un EBSCO datubāzēs.
7. Fjodorovs J. “Copula Based Semiparametric Regressive Models”//Journal of Applied Mathematics, 2012, Volume V, pp. 241–248, ISIN: 1337-6365. Iekļauta VERSITA un EBSCO datubāzēs.
8. Matvejevs A., Fjodorovs J. “Modeling VIX Index Based on Semi Parametric Markov Models with Frank Copula”//Scientific Journal of Riga Technical University, 2014 – 106.–110. lpp. Iekļauta VERSITA un EBSCO datubāzēs.
9. Matvejevs A., Fjodorovs J. “Revaluation of Estimated Option Prices Using GARCH Processes with Most Preferable Properties”//Scientific Journal of Riga Technical University, 2013 – 100.–104. lpp. Iekļauts VERSITA un EBSCO datubāzēs.
10. Matvejevs A., Fjodorovs J., Pavlenko O. “Testing Heston Model Consistency and Evaluation of Parameters Thought Reprezentation in Discrete Time”// Journal of Applied Mathematics, 2011, Volume IV, pp. 265–272, ISIN: 1337-6365. Iekļauts VERSITA datubāzē.

Konferences

1. An. Matvejevs, J. Fjodorovs, O. Pavlenko “Testing Heston Model Consistency and Evaluation of Parameters Thought Reprezentation in Discrete Time” 10th International Conference on Applied Mathematics – APLIMAT 2011 in Bratislava, Slovakia, February 3–5, 2011.
2. An. Matvejevs, J. Fjodorovs “Copula Based Semiparametric Regression Models” 16th International Conference on Mathematical Modelling and Analysis, May 26–29, 2011, Sigulda, Latvia.
3. An. Matvejevs, J. Fjodorovs “The Impact of Serial Correlation on Financial Active Pricing and Risk Hedging” 17th International Conference on Mathematical Modelling and Analysis, June 6–9, 2012, Tallinn, Estonia.
4. An. Matvejevs, J. Fjodorovs “Copula Based Semiparametric Regressive Models” 11th International Conference on Applied Mathematics – APLIMAT 2012 in Bratislava, Slovakia, February 7–9, 2012.
5. J. Fjodorovs “Modeling Stohastic Proceses Using Copula Approach” RTU International Conference, October, Riga, Latvia, 2011.

6. J. Fjodorovs “Copula Based GARCH(1,1) Models” 18th International Conference on Mathematical Modelling and Analysis, May 27–31, 2013, Tartu, Estonia.
7. An. Matvejevs, J. Fjodorovs “Pricing of Financial Actives with Serial Correlation in Returns” RTU 53rd International Scientific Conference, October 11–12, Riga, Latvia, 2012.
8. An. Matvejevs, J. Fjodorovs “Copula Based Semiparametric Regressive Models” 12th International Conference on Applied Mathematics – APLIMAT 2013 in Bratislava, Slovakia, February 5–7, 2013.
9. An. Matvejevs, J. Fjodorovs “Revaluation of Estimated Option Prices Using GARCH Processes with Most Preferable Properties” RTU 54th International Scientific Conference, October 14–16, 2013, Riga, Latvia.
10. An. Matvejevs, J. Fjodorovs “Revaluation of Estimated Option Prices Using GARCH Processes with Most Preferable Properties” 7th International Conference on Computational and Financial Econometrics (CFE 2013), December, 15–19, 2014, London, Great Britain.
11. J. Fjodorovs “Simulation of Option Prices Using GARCH Processes for Autocorrelated Stock Returns” 13th International Conference on Applied Mathematics – APLIMAT 2014 in Bratislava, February 4–6, 2014.
12. J. Fjodorovs “Copulas and Markov chains” 10th Latvian International Mathematical conference, April 11–12, 2014, Liepāja, Latvia.
13. J. Fjodorovs “Copula Fit to the Nonlinear Processes in the Utility Industry” 11th Latvian International Mathematical conference, April 1–2, 2016, Daugavpils, Latvia.
14. An. Matvejevs, J. Fjodorovs Algorithm for Imitation of a Time Span for Reaching a Border of a Random Process” RTU 57th International Scientific Conference, October 14–18, 2016, Riga, Latvia.

Promocijas darba struktūra

Darbā ir ievads, četras nodaļas, rezultāti un secinājumi, literatūras saraksts un pieci pielikumi. Kopā – 134 lappuses. Darbā iekļauti 40 attēli, septiņas tabulas, literatūras sarakstā ir 94 avoti.

Ievadā ir pamatota veikto pētījumu aktualitāte, formulēts darba mērķis un uzdevumi, uzskaitītas promocijas darba izstrādē lietotās pētniecības metodes, aprakstīta pētījuma zinātniskā novitāte un iegūto rezultātu praktiskā nozīmība, kā arī izklāstīta darba rezultātu aprobācija.

Pirmajā nodaļā “Finanšu laikrindas un sērijveida korelācijas” izstrādāts Hestona modeļa diskretizācijas algoritms, kas varētu būt piemērots dažādu stohastisko modeļu pārveidošanai diskrētajā laikā. Tā rezultātā modeļu stacionaritāti un atbilstību izlases datiem ir iespējams izpētīt ar zināmām metodēm, ko izmanto *ARIMA* klases modeļu pētīšanai. Aprobējot piedāvāto metodi uz ASV akciju opciju svārstīguma indeksiem *VIX*, var pārliecināties par Hestona modeļa rezultātu atbilstību reālajiem datiem, pirms tiek pieņemts lēmums par noteiktas opcijas pirkšanas/pārdošanas darījumu. Papildus šajā nodaļā ir aprakstīti pētāmo objektu datu iegūšanas veidi, prognozēšanas būtība un *ARIMA* modeļu jēdziens, veidi un stacionaritātes nosacījumi.

Otrajā nodaļā "Neparametriskās regresijas un to uzdošanas veids ar kopulām" definēts neparametrisks Markova modelis un izstrādāts šī modeļa pārejas blīvumu atrašanas paņēmiens, izmantojot Arhimēda tipa kopulas. Ar šo paņēmienu ir iespējams pārveidot Markova modeli kopulas telpā (kur Markova ķēde ir kompakta), kas savukārt ļauj izmantot varbūtību teorijas robežteorēmas un veikt diferenču vienādojumu aproksimāciju ar difūzijas vienādojumiem. Rezultātā var pārskatīt vairāku atvasināto finanšu instrumentu cenas noteikšanas formulas un koriģēt tās, balstoties uz finanšu tirgus datiem. Šajā nodaļā kā piemērs ir izveidota Markova kopulveidīga neparametriskā regresija *VIX* indeksa datiem. Turklāt ir uzbūvēta kopula *GARCH*(1, 1) modeļa svārstīgumam, balstoties uz dažiem nosacījumiem par šī modeļa parametriem un marginālo sadalījumu.

Trešajā nodaļā "*GARCH*(p, q) modelis ar autokorelētajiem atlikumiem un opciju pārcenošanas vienādojums" ar Markova modeli, kurā ir izdalīts korelācijas koeficients, pārveidoti *GARCH*(1, 1) modeļa atlikumi. Izmantojot minēto modeli, tika pārveidots Bleka–Šoulza (*Black–Scholes*) opciju cenošanas modelis un ar to saistītie opciju jutīguma mēri (*Option Greeks*). Jaunā formula ļauj precīzāk novērtēt cenas, ņemot vērā "smagās astes" aktīvu ienesīgumu. Turklāt izmantotās metodes lietderības pārbaudei veikta *GARCH*(1, 1) konverģences uz stacionaritāti un gamma sadalījumu pārbaude, ņemot vērā korelācijas koeficientu. Iepriekš minēto problēmu risināšanai tika veikta imitācijas modelēšana *Matlab Simulink* vidē.

Ceturtajā nodaļā "Autokorelācijas izmantošana opciju cenas noteikšanai" ir izskatīta autokorelācijas iekļaušanas metode, balstoties uz *Tesla Motors Inc.* akciju opciju cenu noteikšanas tehniku un veicot Montekarlo imitācijas sagaidāmajam svārstīgumam un opciju pārcenošanu. Konstruētā sistēma palīdz veidot savu skatījumuu uz finanšu tirgus situāciju, opciju cenām un izdarīt pamatotu lēmumu attiecībā uz akciju vai opciju pirkšanu/pārdošanu.

Pēdējā nodaļa apkopo promocijas darba rezultātus un secinājumus.

1. TEORĒTISKĀ MODEĻA DEFINĪCIJA UN MODEĻU ATLIKUMU AUTOKORELĀCIJU APRAKSTS

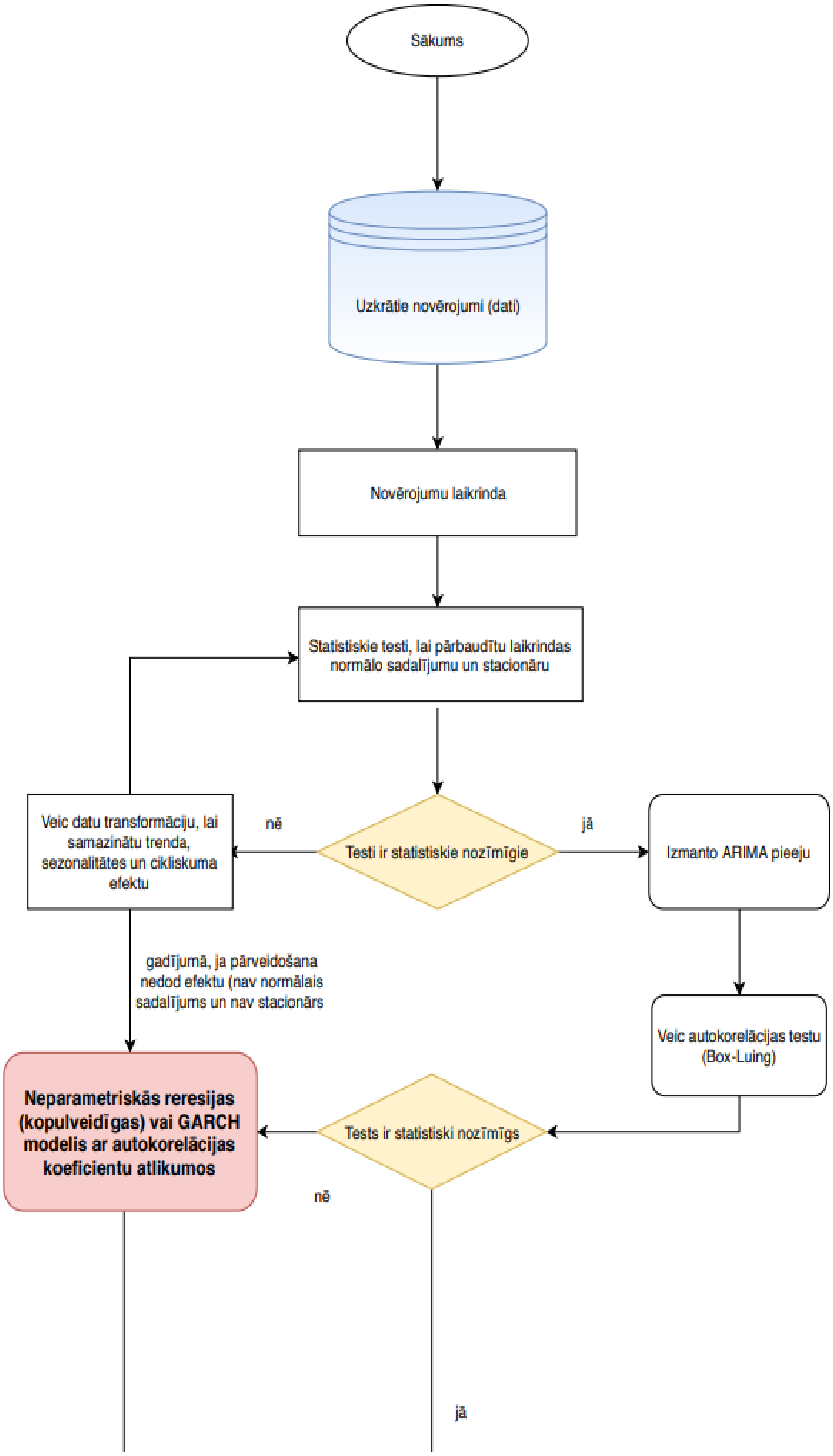
Viens no mūsdienīgas ekonometrijas pamatuzdevumiem ir laikrindu $\{X_t, t \in Z\}$ analīzes metožu attīstība ar autoregresīvo modeļu palīdzību, neveicot iepriekšējus pieņēmumus par fāzes koordinātes nosacītās matemātiskās cerības atkarības formu no laikrindas iepriekšējās vērtības.

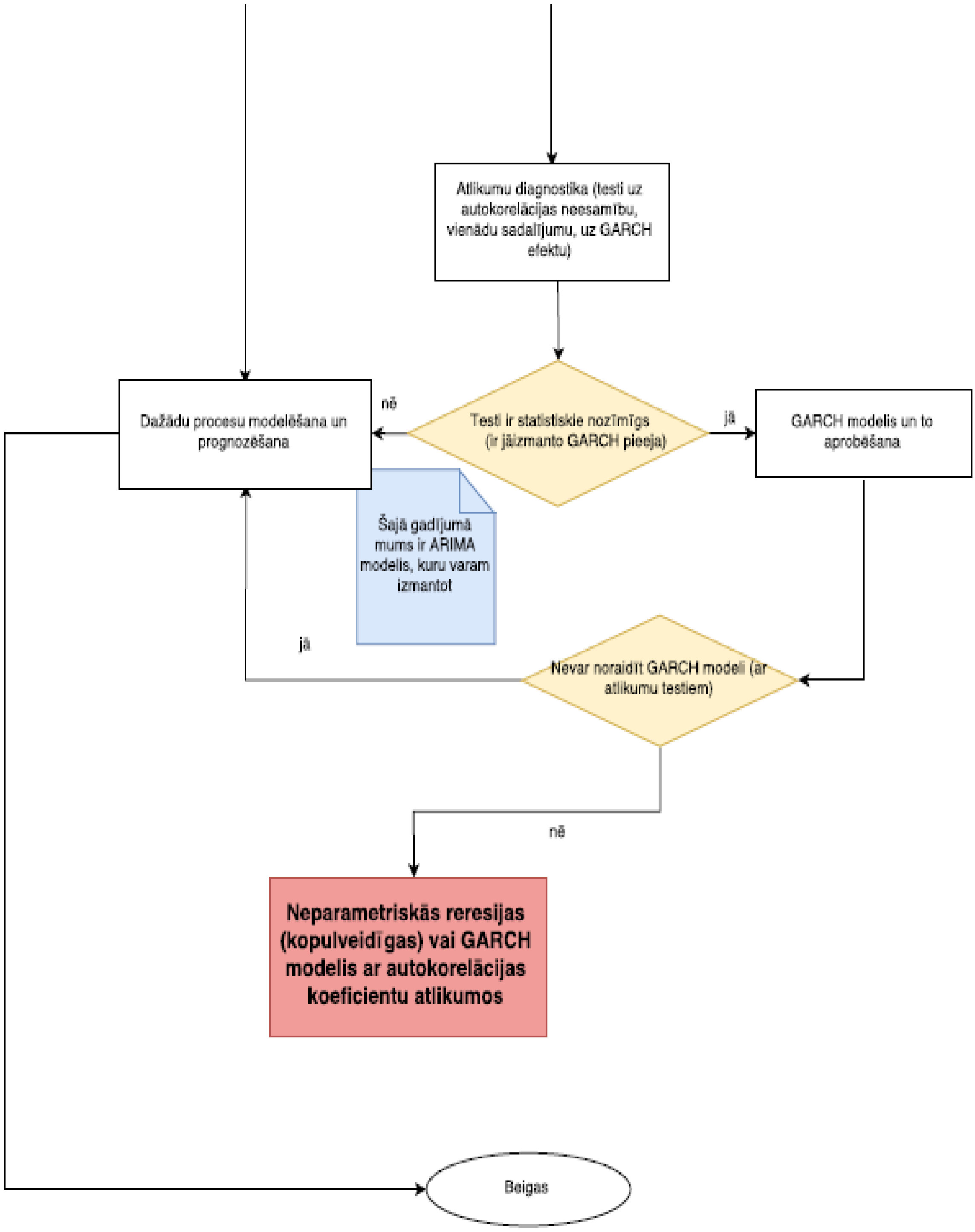
Galvenais iemesls tendencei atteikties no tradicionāliem lineāriem modeļiem ir tādas gadījuma lielumu vērtības, kurām nav Normālā sadalījuma rakstūra, bet tomēr tās apraksta reālo modeļu uzvedību.

Laikrindu analīzē galvenā uzmanība tiek pievērsta datu struktūras pētījumiem, aprakstam un/vai modelēšanai [3]. Šādu pētījumu mērķis parasti ir plašāks nekā vienkārši eksistējošu procesu analīze un modelēšana. Izveidotais modelis parasti tiek izmantots laikrindas ekstrapolācijai vai prognozēšanai, un šajā gadījumā prognozes kvalitāte var kalpot kā vērtīgs kritērijs alternatīvu modeļu izveidē. Laba modeļa izveide nepieciešama arī citiem lietojumiem, piemēram, sezonālo efektu korekcija un nogludināšana [4]. Visbeidzot, izveidotie modeļi var tikt izmantoti garu novērojumu rindu statistiskajai modelēšanai lielu sistēmu, kurām laikrinda ir ieejas informācija, pētījumos.

Ņemot vērā ekonomisko rādītāju mērījumu kļūdas un gadījuma fluktuāciju esamību, kas raksturīga novērojumu sistēmām, laikrindu pētījumos plaši tiek lietota varbūtību teorijas un matemātiskās statistikas pieeja. Šo zinātņu ietvaros novērojamā laikrinda tiek uztverta kā kāda gadījuma procesa realizācija. Tiek pieņemts, ka laikrindai ir noteikta struktūra, tādējādi tā atšķiras no neatkarīgu gadījuma lielumu virknes, jo novērojumi nav pilnīgi neatkarīgu skaitlisku vērtību kopa. (Dažus laikrindas struktūras elementus, piemēram, trendu un ciklus, dažreiz iespējams atklāt jau vizuāli grafikā.) Parasti tiek pieņemts, ka rindas struktūru var aprakstīt ar modeli, kam, salīdzinot ar novērojumu skaitu, ir neliels parametru skaits. Tas ir svarīgi praktiskos lietojumos, lai izveidoto modeli varētu izmantot prognozēšanai. Šādu modeļu piemēri ir autoregresijas modeli $AR(p)$, slīdošā vidējā modeli $MA(q)$, kā arī to kombinācijas – modeļi $ARMA(p, q)$ un $ARIMA(p, k, q)$ [3].

Daudzos zinātnieku darbos, analizējot un modelējot makroekonomiskos rādītājus, kas raksturo inflācijas, ārējās tirdzniecības, procentu likmju, valūtas kursu u. c. procesus, tika novērotas vispārīgas likumsakarības apskatāmo modeļu gadījuma atlikumu (prognozes kļūdu) uzvedībā: to lielās un mazās vērtības grupējas klasteros vai sērijās, t. i., mierīgo un nemierīgo stāvokļu periodi mijas [7]. Turklāt tas nerada to stacionaritātes un homoskedastitātes (t. i., kļūdu sadalījuma vienmērības) traucējumus salīdzinoši garos laika intervālos, t. i., hipotēze, ka dispersija ir konstanta, nebija pretrunā ar eksperimentālajiem datiem [8]. Ar *ARMA* modeļiem šo fenomenu neizdevās izskaidrot, tāpēc bija nepieciešama tajā laikā zināmo modeļu modifikācija.

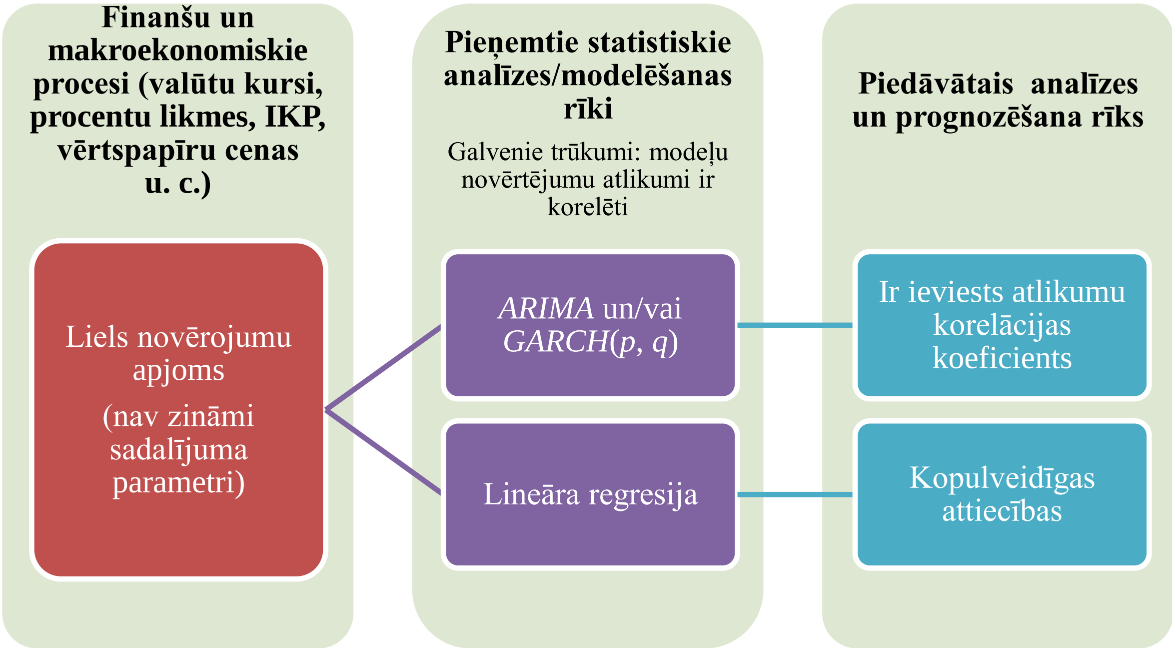

Sākums
Uzkrātie novērojumi (dati)
Novērojumu laikrinda
Statistiskie testi, lai pārbaudītu laikrindas normālo sadalījumu un stacionāru
Veic datu transformāciju, lai samazinātu trenda, sezonalitātes un cikliskuma efektu
nē
Testi ir statistiskie nozīmīgie
jā
Izmanto ARIMA pieeju
gadījumā, ja pārveidošana nedod efektu (nav normālais sadalījums un nav stacionārs
Veic autokorelācijas testu (Box-Luing)
Neparametriskās reresijas (kopulveidīgas) vai GARCH modelis ar autokorelācijas koeficientu atlikumos
Tests ir statistiski nozīmīgs
nē
jā



1.1. att. Statistisko modeļu konstruēšanas algoritms.

Šādu modifikāciju pirmo reizi piedāvāja R. Engle [6], kurš aplūkoja atlikumus kā nosacīti heteroskedastiskus, t. i., saistītus ar autoregresīvu atkarību. Viņš izstrādāja *ARCH*(q) modeli, kuram arī sastopamas daudzas modifikācijas, no tām pazīstamākā ir *GARCH*(p, q).

Līdz ar to informācijas nepietiekamība par sadalījuma likumu neļauj izskaitļot iepriekš minēto nosacīto matemātisko cerību analītiski kādas funkcijas veidā ar nezināmiem parametriem un reducēt problēmu līdz mazāko kvadrātu metodes novērtēšanai, kā tas ir pieņemts Gausa teorijā.



1.2. att. Datu apstrādes modeļu izklāsts.

1.2. attēlā ir izveidota blokshēma, kas apraksta esošo modeļu (pa vidu) spējas un promocijas darbā izstrādātos šo modeļu papildinājumus. Shēmai ir ilustratīvā nozīme. Mērķis ir paradīt izstrādāto modeļu/algoritmu vietu kopējā modelēšanas jomā. Lineāra regresija, *ARIMA* un *GARCH*(*p*, *q*) ir klasiskie piemēri no matemātiskās statistikas, kas ļauj veikt prognozēšanu, pamatojoties uz trendu. Savukārt promocijas darbā izveidotie modeļu papildinājumi palīdz uzlabot dažādu procesu imitācijas un prognozēšanas spējas, t. i., ļauj aprakstīt procesus ar sērijveidā korelētajiem atlikumiem (ieviešot atlikuma korelācijas koeficientu), kā arī veidot modeļus, balstoties uz dažāda tipa kopulām, kas apraksta ne tikai normāli sadalītus datus, bet arī datus ar "smagām astēm" un "augstām virsotnēm". Tāda pieeja imitāciju[1] modeļa ietvaros atļauj prognozēt gadījumus ar mazu iestāšanās varbūtību biežāk nekā normālais sadalījums (sk. augstākminēto diagrammu 1.1. attēlā "Statistisko modeļu konstruēšanas algoritms"). Līdz ar to uzlabojas (tiek precizēti) dažādi aprēķini finansēs, ekonomikā, enerģētikā u. c.

Hestona modelis un tā pārveidošana diskrētajā laikā

Šī darba nolūks ir sniegt priekšstatu par *ARIMA* modeļu lietojumiem, lai veiktu nepārtraukto Markova procesu reprezentāciju diskrētā laika gadījumā. Kā zināms, katru nepārtrauktu Markova procesu var uzskatīt par diskrēta Markova procesa robežgadījumu, un Kolmogorova difūzijas vienādojumu atrisinājumus var aproksimēt ar Kolmogorova

[1] Ar vārdu "imitācija" autors saprot Montekarlo modelēšanu, t. i., noteiktas formas modeļu izstrāde, kas varētu dot labākus rezultātus procesa aprakstīšanai un prognozēšanai.

diferenciālo vienādojumu atrisinājumiem [25]. Šis pieņēmums ļauj diskretizēt nepārtrauktos modeļus ar mērķi noteikt parametrus, pārbaudīt stacionaritāti utt.

Turpmāk tiks apskatīts Hestona svārstību modelis. Šī metode ir pielāgota, lai dotu intuitīvu izpratni par Hestona modeli ne tikai tehniski, bet arī tādā līmenī, lai nākamās sadaļas būtu vieglāk uztveramas. Nepieciešamībās gadījumā sīkākas tehniskās detaļas var atrast, izmantojot attiecīgās atsauces.

Hestons [71] piedāvāja šādu modeli:

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sqrt{V_t} S_t \mathrm{d}W_t^1, \tag{1.1.}$$

$$\mathrm{d}V_t = k(\theta - V_t)\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{V_t}\mathrm{d}W_t^2, \tag{1.2.}$$

$$\mathrm{d}W_t^1 \mathrm{d}W_t^2 = \rho \mathrm{d}t,$$

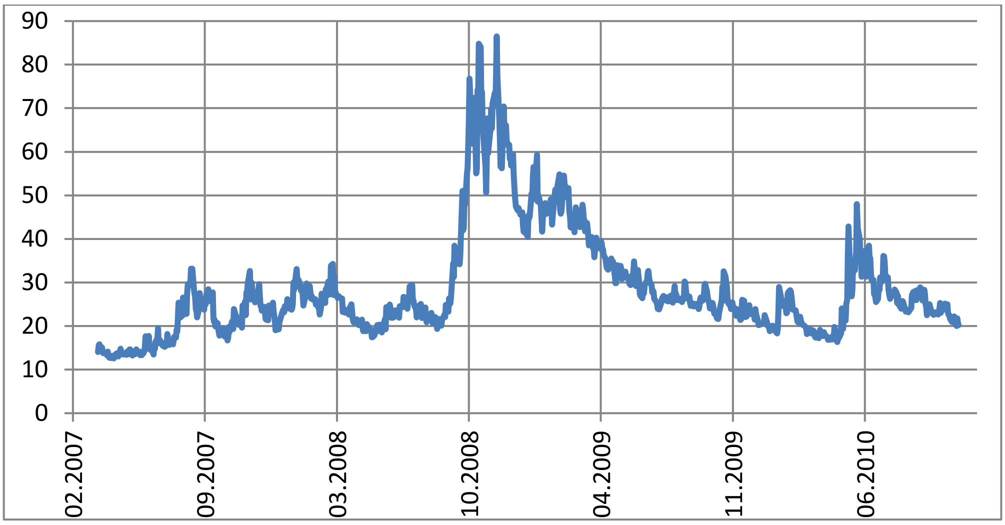
kur $\{S_t\}_{t\geq 0}$ un $\{V_t\}_{t\geq 0}$ ir attiecīgi cenas un svārstīguma procesi. $\{W_t^1\}_{t\geq 0}$, $\{W_t^2\}_{t\geq 0}$ ir korelēti Brauna kustības procesi (ar korelācijas parametru ρ), μ ir determinēta bezriska procentu likme. $\{V_t\}_{t\geq 0}$ ir atgriešanās procesa vidējās vērtības kvadrātsakne, kas pirmo reizi izmantota Koksa, Ingersola un Rosa darbā [27], ar ilgtermiņa vidējo vērtību θ, standartnovirzi σ un atgriešanos pie vidējā koeficientu k, ρ ir definēts kā difūzijas svārstības. Visi parametri k, μ, θ, σ ir laika un stāvokļu homogēni.

Tāpēc ir jāatrod diskrētā Hestona modeļa reprezentācija un jāpiemeklē iespējamais *ARIMA* klases modelis, lai, izmantojot laikrindu tehniku, pārbaudītu hipotēzi par heteroskedastiskā efekta eksistenci modeļa atlikumos. Pretējā gadījumā nav pamatojuma izmantot Hestona modeli izvēlētai finanšu instrumenta cenai. Promocijas darbā iepriekš minētie jautājumi ir apskatīti, balstoties uz reāliem datiem.

VIX indeksa modelēšana ar Hestona modeli

Aplūkosim piemēru, kurā ir apvienota Hestona modeļa diskrētā reprezentācija ar *ARIMA* modeļa pielāgošanas/testēšanas metodi. Analizēsim *VIX* – akciju tirgus svārstīguma indeksa – ikdienas datus no 2007. gada 27. marta līdz 2010. gada 21. oktobrim. *VIX* ir tirgus instruments, kas novērtē bāzes akciju tirgus indeksā *S&P 500* ietverto nenoteiktību 30 dienām uz priekšu. Spēja pilnvērtīgi interpretēt *VIX* kustības un tā vērtības reakciju uz notikumiem tirgū var sniegt investoriem neapšaubāmas priekšrocības tirdzniecības portfeļa riska/ienesīgumu pārvaldībai, kā arī palīdzēt izstrādāt portfeļa stratēģijas, izmantojot atvasinātos finanšu instrumentus, balstoties uz *VIX* pozīcijām. Rezultātā tas ļauj maksimizēt savu peļņu no *VIX* un *S&P 500* indeksa korelācijas, kas mainās laikā.

1.3. attēlā var redzēt, ka *VIX* laikrindai ir nestacionaritātes pazīmes, it īpaši īsos laika intervālos. Turklāt ir redzamas dažas tendenču izmaiņas 2008. gada oktobrī. Laikrindas autokorelācijas dažādiem laika intervāliem samazinās lineāri, kas ir tipiska nestacionāro rindu pazīme. Tādējādi, lai izlīdzinātu datus, ir nepieciešams izvēlēties pirmo diferenci. Šī jaunā sērija *DVIX* ir nosacīti heteroskedastiska. Jaunizveidotajai laikrindai pēc Dikija–Fullera testa rezultātiem nav vienības saknes, un, balstoties uz autokorelāciju rezultātiem, var izvēlēties atbilstošu modeli – *AR*(1) ar *ARCH*(2) atlikumiem. Savukārt laikrindas stabilitātes tests (Čou pārtrauktu punktu tests) uzrāda režīmu maiņu 2008. gada oktobrī. Tāpēc tika nolemts analizēt datus tikai pēc 2008. gada oktobra, izveidojot jauno laikrindu.



1.3. att. *VIX* akciju indeksa vēsturiskā dinamika.

Jaunajai rindai apskatāmajā periodā ir skaidri redzama tendence. Līdz ar to laika tendence (*trends*) tiek izslēgta, un tālāk analizēta jaunā laikrinda *vix*2 laika periodā no 2008. gada 10. oktobra līdz 2010. gada 21. oktobrim:

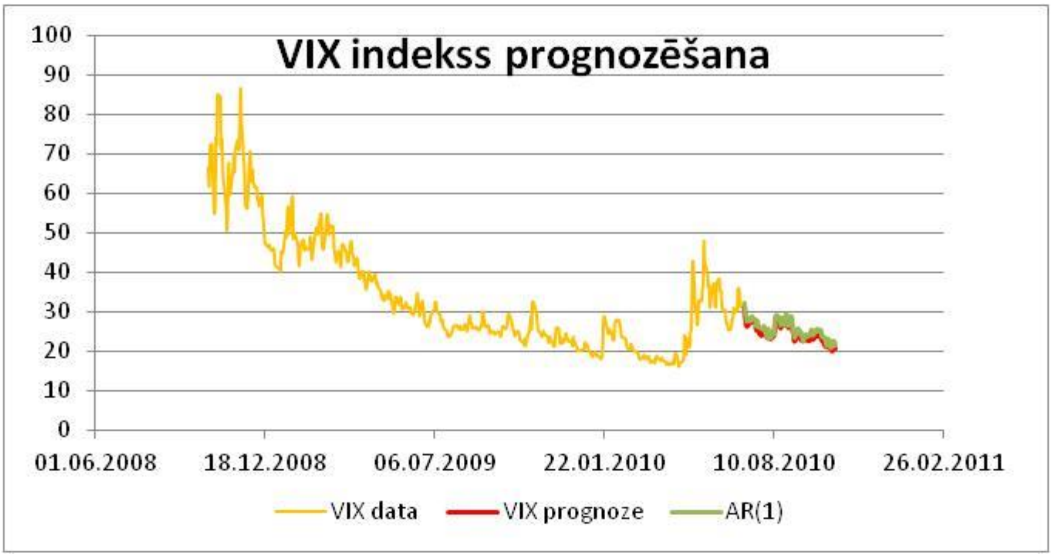
$$vix2_t = vix_t - vix_{t-1}. \tag{1.3.}$$

Darbā iegūtā sistēma no Hestona modeļa diskretizācijas ir aptuveni vienāda ar *AR*(1) modeli ar *GARCH-M*(1, 0) atlikumiem, kur kvadrātiskā dispersija ar fiksēto koeficientu 0,5 ir iekļauta *AR*(1) vienādojumā lielumam $vix2_t$.

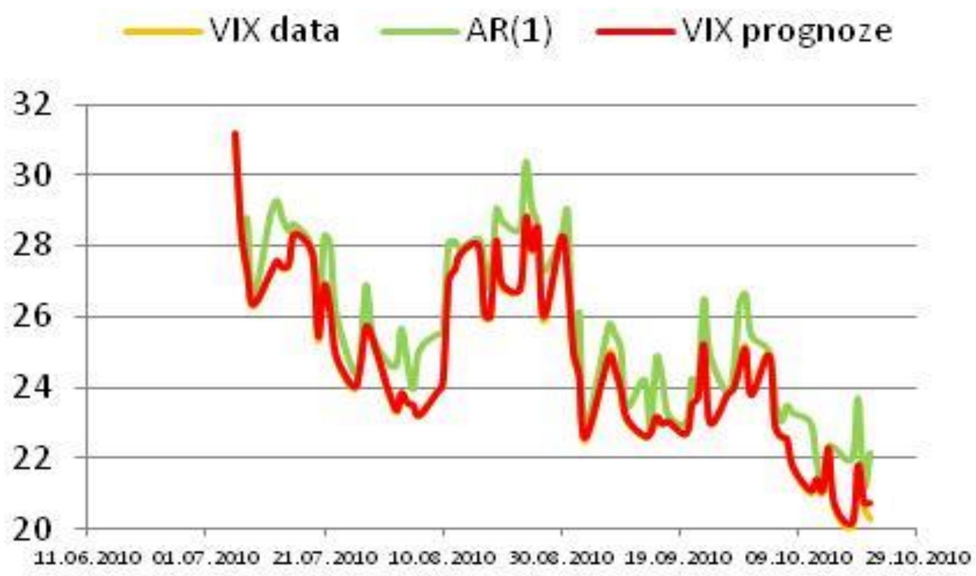
Izmantojot programmpaketi *WINRATS*, ir novērtēti parametri laikrindai $vix2_t$ šādā formā:

$$\begin{cases} vix2_t = -16{,}743 + 0{,}5\,V_t^2 + 0{,}954 \cdot vix2_{t-1} + \varepsilon_t; \\ \varepsilon_t = v_t \sqrt{V_t}; \\ V_t = 5{,}9934 + 0{,}04138979 V_{t-1}. \end{cases} \tag{1.4.}$$

Diskrētā Hestona modeļa reprezentācija ir piemērota, lai atrisinātu problēmu, saistītu ar stohastiskā modeļa atbilstību finanšu laikrindai. Turklāt *ARIMA* tehnikas izmantošana Hestona modeļu parametru novērtēšanā pamatīgi vienkāršo šo procesu, modeļa diskretizācija vienkāršo parametru novērtēšanas problēmu. Tomēr, ņemot vērā iepriekšminētos vienādojumu koeficientus, *VIX* datu modelēšana un attiecīgi indeksa nākotnes līmeņu prognozēšana, izmantojot Hestona modeli, ne vienmēr ir korekta. Tādējādi stohastiskā Hestona modeļa diskretizācijas pieeju var izmantot arī citu līdzīgu stohastisko diferenciālvienādojumu atbilstības pārbaudei reālajiem datiem (1.4. att. un 1.5. att.).



1.4. att. *VIX* indekss un modeļu prognozētas vērtības.



1.5. att. *VIX* indekss un modeļu salīdzinošās prognozes.

Līdz ar to var secināt, ka stohastisko modeļu pārveidošana diskrētajā laikā dot iespēju noteikt modeļa atbilstību novērojumu datiem, kas savukārt palielina prognozes precizitāti.

Pirmās nodaļas kopsavilkums

1. Autoregresijas modeļu klase (*ARIMA*) neapraksta pilnīgi visus procesus mehānikā un tautsaimniecībā. Līdz ar to ir jēga iekļaut korelācijas parametru atlikumus, lai efektīvi samazinātu prognozēšanas kļūdas.
2. Tika izveidots Hestona modeļa pārveidošanas algoritms, kas precizē prognozes heteroskedastiskajiem procesiem.

2. NEPARAMETRISKĀS REGRESIJAS UN TO UZDOŠANAS VEIDS AR KOPULĀM

Nelineārās laikrindas identificēšanas iespēja, izmantojot nosacītās vidējās vērtības un nosacītās dispersijas neparametriskus novērtējumus, ir minēta vairākos rakstos (skat., piemēram, [31]). Parasti analizē stacionāro laikrindu $\{\boldsymbol{x_t}, \boldsymbol{t} \in \boldsymbol{Z}\}$ regresīvo modeļu atkarības struktūru, kas ir noteikta ar invariantu marginālo sadalījumu un kopulas funkciju, kas ģenerē procesa laika atkarību. Kā norādīts [31], tas ļauj nodalīt laika atkarību (piemēram, "astes" atkarību) no laikrindu marginālā sadalījuma uzvedības (piemēram, "smagas astes"). Vēl viena šī veida regresīvas metodes priekšrocība ir iespēja piemērot varbūtību teorijas robežteorēmu pārejai no diferenču vienādojuma uz nepārtraukta laika stohastisko diferenciālvienādojumu [32], [33].

Šajā darbā kopulu klase tiek lietota, pamatojoties uz neparametrisko stacionāro Markova modeli skalāra diferenciālvienādojuma formā:

$$t \in Z : X_t = X_{t-1} + \varepsilon f(X_{t-1}, \varepsilon) + \varepsilon g(X_{t-1}, \varepsilon)\xi_t, \tag{2.1.}$$

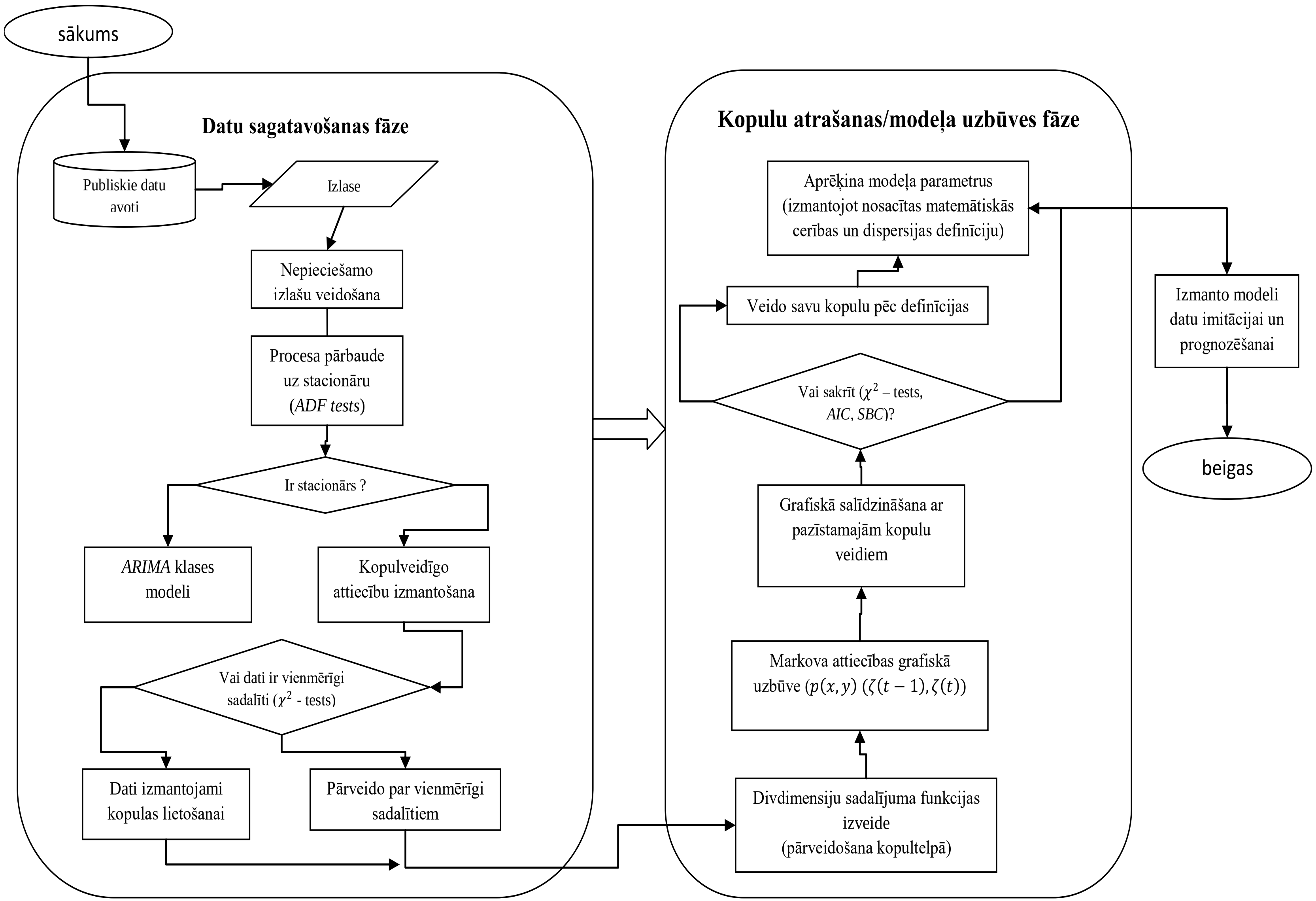
kur $\{\xi_t, t \in Z\}$ ir *i. i. d.* (identiski vienādi sadalīti) pēc $N(0, 1)$, un ε ir neliels pozitīvs parametrs, kas tiks izmantots regresijas (2.1. vienādojums) difūzijas aproksimācijai. Regresija (2.1. vienādojums) tiek bieži lietota imitāciju veikšanai un stohastiskā svārstību modeļa [32] parametru novērtēšanai. Bet diemžēl Markova ķēde, kas ir noteikta ar 2.1. vienādojumu, nav kompakta fāzes telpā, kas apgrūtina varbūtību teorijas robežteorēmu lietošanu. Kopulas metodes palīdz vienkāršot 2.1. vienādojuma asimptotisko analīzi.

Atgādināsim, ka, lai uzbūvētu kopulu $C(u, v)$ pārim $\{X_{t-1}, X_t\}$ no 2.1. vienādojuma, ir nepieciešams atrast X_t marginālo invariantu sadalījumu $F(x)$ un ievietot to jauktā sadalījuma funkcijā $H(x, y) = P(X_{t-1} \le x, X_t \le y)$, kur $C(u, v) = H(F^{-1}(u), F^{-1}(v))$ un $H(x, y) = C(F(x), F(y))$. Ņemot vērā mazā parametra ε esamību, pēc $U_t = F(X_t)$ aizvietošanas 2.1. vienādojumā par turpmāku difūzijas aproksimāciju var uzskatīt diferenču vienādojumu tādā pašā formā kā 2.1. vienādojumu:

$$t \in Z : U_t = U_{t-1} + \varepsilon f(U_{t-1}, \varepsilon) + \varepsilon g(U_{t-1}, \varepsilon)\xi_t. \tag{2.2.}$$

Tas ļauj vieglāk formulēt pārejas varbūtības uzbūvi un turpmāk iegūt funkciju $\boldsymbol{\hat{f}(u)}$ un $\boldsymbol{\hat{g}(u)}$ novērtējumus.

Pēc 2.2. vienādojuma difūzijas aproksimācijas ir iespējams veikt inverso aizvietošanu un iegūt stohastisko vienādojumu kā 2.2. vienādojuma difūzijas aproksimāciju.

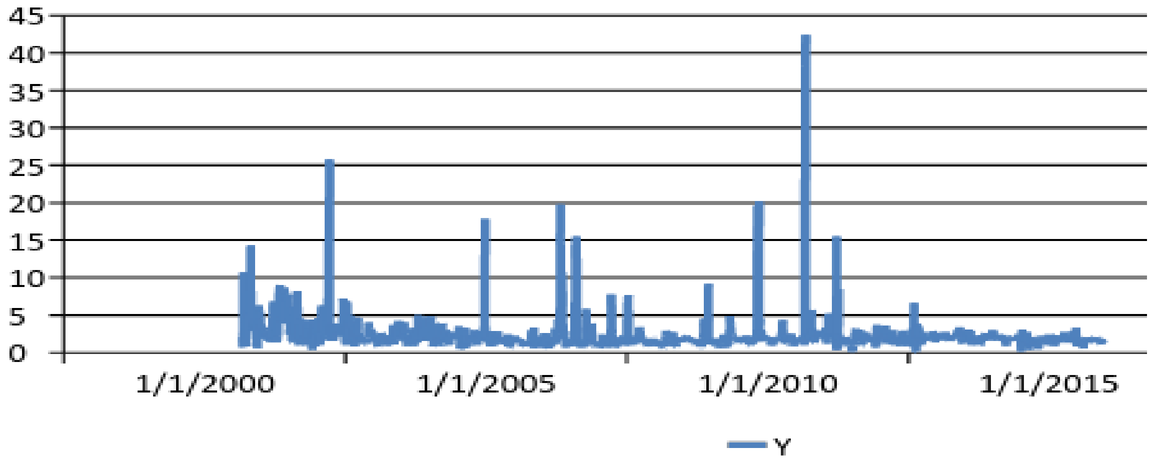


2.1. att. Kopulveidīgas regresijas konstruēšanas algoritms.

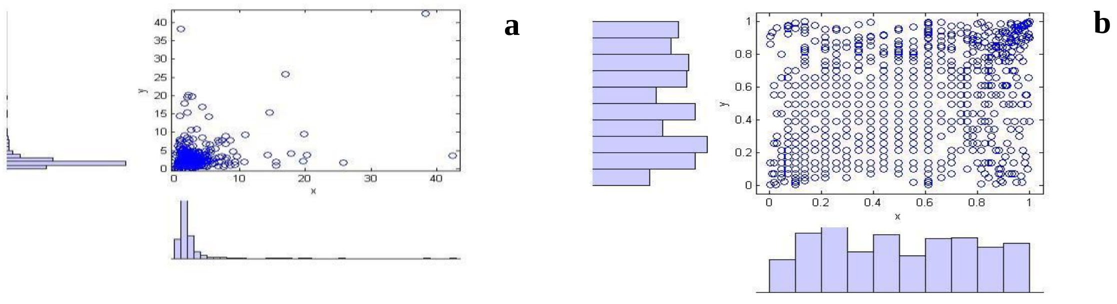
Kopulu meklēšana nelineāriem procesiem enerģētikā un gadījuma procesa noteiktās robežas sasniegšanas laika sadalījuma imitēšanas algoritms

Kopulu un kopulveidīgo regresijas uzbūves algoritmu (2.1. attēls) izmantošana paver iespējas atrast gadījuma rakstura procesus ne tikai finansēs, bet arī pārējā tautsaimniecībā, piemēram, promocijas darba gaitā tika uzbūvēts algoritms, kas palīdz izveidot imitācijas modeli enerģētikā. Tāds modelis ļauj veidot iekārtu maksimālās noslodzes algoritmus. Šajā gadījumā tiek modelēts procesa noteiktās robežas sasniegšanas laika sadalījuma imitēšanas algoritms.

Tādējādi darbā analizēti vēsturiskie iekārtu parametru darbības novērojumi (skat. *Y* līniju 2.2. attēlā). Lai iekārtas strādātu efektīvi un būtu agrīni signāli iespējamiem traucējumiem nākotnē, var noteikt līmeni, pēc kura ir jēga sākt primārās darbības. Kā rezultāts mūs interesē iekārtu stabila darbība. Šo stabilo darbību var raksturot maza svārstīguma procesi, bet reālajā dzīvē atkarībā no laika apstākļiem parametru vērtības var būtiski atšķirties. Tieši tāpēc radās ideja imitēt šo parametru iespējamās novirzes. Līdz ar to promocijas darba mērķis ir noteikt robežu atļautajām novirzēm un atrast algoritmu, kas imitēs šo definēto līmeni. Ir skaidrs, ka mums ir darīšana ar heteroskedastiskajiem procesiem. Šī iepriekšminētā procesa *Y* modelēšanā var lietot *ARIMA-GARCH* pieeju, bet kopulu izmantošana procesa modelēšanā akcentē īpatsvaru tieši uz kritiskajiem momentiem (retajiem notikumiem).



2.2. att. Novērojumu *Y* laikrinda.



2.3. att. (a) Divdimensiju blīvuma funkcijas zīmējums *Y* datiem (netransformētiem uz *R*[0, 1]); (b) divdimensiju blīvuma funkcijas zīmējums *Y*, transformētiem uz *R*[0, 1] datiem.

Līdz ar to tika veikta kopulveidīgas regresijas meklēšana Y laikrindai ar mērķi veidot imitāciju parametra noteiktas vērtības sasniegšanai vai noteiktas robežas sasniegšanai. Pētījuma nolūkam tika izmantoti ikdienas novērojumi no 31.12.2000. līdz 31.12.2015.

Savukārt kopulas meklēšana procesam Y tika veikta, balstoties uz 2. nodaļā aprakstīto algoritmu. Izmantojot *Matlab* programmu, tika uzbūvēti blīvuma funkcijas zīmējumi.

Kā redzams 2.3. attēlā (a), laikrindai Y ir "izlēcēji".

Tas padara marginālo sadalījumu meklēšanas uzdevumu ļoti sarežģītu. Balstoties uz Kolmogorova–Smirnova testu, tika veikta dažādu statistisko sadalījumu pārbaude. Rezultātā labākais no lietotajiem sadalījumiem tika izveidots kā jauktais sadalījums – viena datu daļa labi aprakstāma ar eksponenciālo sadalījumu, otra – ar vienmērīgo.

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, x < T, \\ H(x-T) + e^{-\lambda T}, T_1 < x < T, \end{cases} \tag{2.3.}$$

$$H = \frac{e^{-\lambda T_1}}{T - T_1}, \tag{2.4.}$$

kur T – laikrindas lielums, T_1 – laikrindas lielums bez "izlēcējiem".

Līdz ar to, ņemot vērā uzbūvēto marginālo sadalījumu, Y laikrindas dati tika transformēti vienmērīgā sadalījumā (R[0, 1]). Kā zināms, svarīgs posms šajā pētījumā ir izvēlēties datiem atbilstošu kopulu. Šajā pētījumā tika izskatītas standartizētas kopulas – Gumbeļa, Franka, Normālā un T. Dažādos rakstos ir minēti vairāki paņēmieni, kā pārbaudīt kopulas atbilstību datiem – *AIC* un *BIC* kritēriji, χ^2 kritērijs un Kolmogorova–Smirnova kritērijs. Primārā kopulas izvēle tika veikta, balstoties uz Kolmogorova–Smirnova testu (2.1. tabulu).

2.1. tabula

Kolmogorova–Smirnova tests (*KS* attālums)

Kopula	***KS* vērtība**
Franka kopula	0,67
Gumbeļa kopula	0,65
Normālā kopula	0,18
T kopula	0,70

$$D_{KS} = \max_{i,j} \left| C_n(U_{1,i}, U_{2,j}) - C_\theta(U_{1,i}, U_{2,j}) \right|, \tag{2.5.}$$

kur $C_n(U_{1,i}, U_{2,j})$ – izlases kopula un $C_\theta(U_{1,i}, U_{2,j})$ – teorētiskās kopulas.

Ņemot vērā *KS* testa rezultātus, varam secināt, ka vislabākā kopula Y laikrindai ir Normālā kopula. Bet Normālā kopula faktiski veido lineāru sakarību starp gadījuma lielumiem. Savukārt šajā pētījumā esam ieinteresēti imitēt retos Y laikrindas lēcienus, kas ir signāls iespējamajiem iekārtu traucējumiem. Lai īstenotu tieši šo prasību, ir jāņem kopula, kas apraksta asimetrisko atkarību – Gumbeļa kopula. Balstoties uz šo kopulu, atrodam neparametriskās regresijas koeficentus (funkcijas) f un g. Gumbeļa kopulai nevar izmantot inverso funkciju ar mērķi atgriezties pie pamatvienādojuma. Strādājot ar tāda veida kopulām, ir jāizmanto speciāli algoritmi, lai atgrieztos vajadzīgā vienādojuma formā.

Turpmāk, lai izmantotu iegūto modeli, ir nepieciešams pārbaudīt tā atbilstību datiem, salīdzināt arī ar pārējiem modeļiem. Bet, ņemot vērā nestacionāro datu raksturu (*Y* laikrinda), īpaši brīžos, kad ir novērojami lēcieni, klasiskā veidā *ARIMA* modeļi nav izmantojami, un atrasto neparametrisko modeli ar Gumbeļa kopulu var aprobēt ar imitācijas palīdzību.

2.2. tabulā ir attēlots algoritms neparametriskās kopulveidīgas regresijas uzbūvei, kas palīdz risināt gadījuma procesu imitācijas uzdevumus (ar heteroskedastisku dabu). Šis algoritms ļauj imitēt heteroskedastiskus gadījuma procesus un atrast laika intervāla sadalījumu šī procesa noteiktās robežas sasniegšanai. Tas ir ļoti svarīgi enerģētikā (noteiktas robežas sasniegšana), piemēram, iekārtu darbībā – var pasargāt no bojājumiem un ļaut laikus sagatavoties iespējamajiem traucējumiem.

2.2. tabula

Gadījuma procesa noteiktās robežas sasniegšanas imitācijas algoritms

1. Marginālo sadalījumu konstruēšana

$$\{X_n\} \to \{Y_n = F(X_n)\}, Y_n \in [0,1];$$

2. Kopulas un to parametru atrašana

$$C(y, z) = P(Y_n \le y, Y_{n-1} \le z);$$

3. Neparametrisko regresiju novērtēšana, izmantojot kopulu:

$$\sigma^2(z) = m_2(z) - m^2(z); \mathrm{d}z = m(z)\mathrm{d}t + \sigma(z)\mathrm{d}w(t)$$

$$m(z) = E(Y_n / Y_{n-1} = z) = \int_0^1 y p(y, z)\mathrm{d}y;$$

4. Iterācijas procedūras uzbūve t_n ar mazo parametru $h = 0.01$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h^2 m(y(t_n)) + \xi_n \sigma(y(t_n))h, \ \xi_n \sim N(0,1); \quad (*)$$

$$x \in (0, \Gamma), X_0 = x, \tau(x, \Gamma) = \inf\{n > 0, X_n \ge \Gamma\} \Leftrightarrow$$

$$y(0) = F(x), \tau(x, \Gamma) = \inf\{t_n > 0, y(t_n) \ge F(\Gamma)\}$$

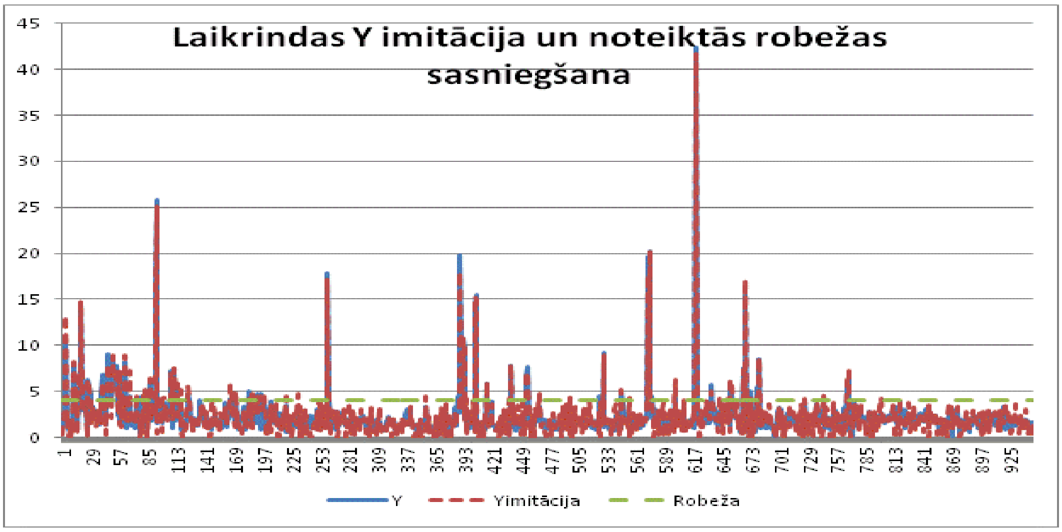
5. Sadalījuma atrašana laikam $\tau(x, \Gamma)$ sasniegt robežu $X_n = \Gamma$ ar Montekarlo imitācijām

$$C(y, z) = P(Y_n \le y, Y_{n-1} \le z);$$

5.1. Veic iterācijas (*) *N* reizes līdz $y(t_n) \ge F(\Gamma)$ un pēc katras iterācijas atceras $n^{(k)}$

5.2. Konstruē histogrammu $\{n^{(k)}, k = 1, ..., N\}$ un atrod sadalījumu

Līdz ar to, uzbūvējot algoritmu kopulveidīgajām regresijām un ņemot vērā noteiktās robežas sasniegšanas laika imitācijas procedūru, kas aprakstīta 2.2. tabulā (soļi 1–4), ir modelēts process Y ar Gumbeļa kopulu un neparametrisko regresiju. Kā redzams 3.4. attēlā, izveidotā modeļa imitācijas rezultāts ir tuvs laikrindas Y vērtībām. Būtībā imitācijas reaģē uz procesa svārstībām. Tas dod iespēju izmantot šo modeli laika sadalījuma novērtēšanai.



2.4. att. Vēsturiskās un modelētās (Y) vērtības energokompānijas iekārtu parametru darbībai.

Strādājot ar kopulām, nedrīkst ignorēt dažus faktus. Piemēram, nav viegli noteikt, kura parametru kopula vislabāk atbilst noteiktai datu kopai, jo dažas kopulas labāk atbilst netālu no centra un citas pie sadalījuma "astēm", un daudzām kopulām nav momentu, kas ir tieši saistīti ar Pīrsona korelāciju, tās ir grūti salīdzināmas ar finanšu modeļiem, balstītiem uz korelāciju.

Otrās nodaļas kopsavilkums

Izstrādātais algoritms nelineāro (neparametrisko) uz kopulām bāzēto Markova modeļu uzbūvei ļauj modelēt dažāda veida atkarības – uz sadalījuma centra vai "astēm". Pie tam šajā nodaļā ir aprakstīta kopulas $GARCH(1, 1)$ uzbūve un parametru noteikšana nelineārajiem modeļiem.

Nodaļā arī uzsvērts, ka kopulas izvēle var ietekmēt algoritma realizāciju. Dažām kopulām nav inversas transformācijas, kas samazina minētā algoritma realizācijas ātrumu.

3. *GARCH*(*p, q*) MODELIS AR AUTOKORELĒTIEM ATLIKUMIEM UN OPCIJU PĀRCENOŠANAS VIENĀDOJUMS

Mezins [60] atklāja sakarību starp finanšu aktīva cenas svārstīgumu, finanšu aktīva ienesīguma svārstīgumu un finanšu aktīva ienesīguma autokorelācijas koeficientu. Viņa iegūtais analītiskais atrisinājums reducējas uz labi zināmās Bleka–Šoulza opciju līguma cenas noteikšanas formulas speciālu gadījumu aurokorelētiem finanšu aktīvu ienesīgumiem. Mezina rakstā tika konstruēts ietvars logaritmiski normāli sadalītai finanšu aktīvu cenai S ar sērijveidā korelētiem ienesīgumiem un iegūts analītiskais opciju līguma cenas noteikšanas modelis, kas ļauj iegūt precīzu risinājumu šī finanšu aktīva atvasināto finanšu instrumentu līguma vērtības noteikšanai. Ietvars tika konstruēts normāli sadalītam gadījuma procesam x, kuram $\ln S = X$ un kura autokorelētie pieaugumi ξ ir ar svārstīgumu σ^2 un autokorelācijas koeficientu ρ. Abu parametru novērtējumus ir iespējams iegūt no vēsturiskiem datiem. Atsakoties no heiristiskas pieejas, ir iespējams izmantot robežteorēmas, ko piedāvāja Carkovs [50], un iegūt stohastiskā diferenciālvienādojuma aproksimāciju nepārtrauktam laikam, kas ir izteikta kā difūziju aproksimācija.

Turpmāk ir aprakstīts viens no paņēmieniem, kā asimptotiskās metodes izmantot reālajā dzīvē – pārcenot opcijas un ar to saistītos finanšu risku jutīguma parametrus (mērus).

Vienkāršākais matemātiskais modelis, kas apraksta akciju cenas S izmaiņas un iekļauj pieņēmumu par sērijveida autokorelācijām akcijas ienesīgumos, vienlaikus izpildoties parasti izmantojamam nosacījumam par riska neitrālo varbūtības mēru P, var tikt pierakstīts šādā formā:

$$S_{t+1} = S_t\left(1+\varepsilon^2\mu+\varepsilon\sigma y_{t+1}\right), \tag{3.1.}$$

kur y_t ir Gausa gadījuma virkne ar vidējo vērtību nulle un dispersiju viens.

Ja tiek pieņemts, ka gadījuma novērojumi ir neatkarīgi, tad var rakstīt, ka y_t ir $AR(1)$ process (Markova process):

$$y_{t+1} = \rho y_t + \sqrt{1-\rho^2}\,\xi_{t+1}, \tag{3.2.}$$

kur $\{\zeta\}_t$, $E\zeta_t$, $= 0$, $E\zeta_t^2 = 1$ ir neatkarīgas un vienādi sadalītas Gausa virknes.

Lai izmantotu Carkova [50] iegūtos rezultātus, apzīmēsim $x_t := S_t$ un pārrakstīsim 3.1. vienādojumu šādā formā:

$$x_{t+1} = x_t + \varepsilon\sigma y_{t+1}x_t + \varepsilon^2\mu x_t. \tag{3.3.}$$

No šī rezultāta izriet, ka maziem ε 3.3. vienādojumu var aproksimēt ar vektoru sadalījumu $\{X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)\}$, ko nosaka ar šāda Ito stohastiskā diferenciālvienādojuma atrisinājuma palīdzību:

$$\mathrm{d}X(s) = a\big(X(s)\big)\mathrm{d}s + \sigma\big(X(s)\big)\mathrm{d}\omega(s). \tag{3.4.}$$

Atrisinot 3.4. vienādojumu, iegūsim stohastiskā diferenču vienādojuma (3.3. vienādojums) nepārtrauktā laika aproksimāciju difūzijas procesa formā, kas apmierina Ito stohastisko diferenciālvienādojumu:

$$dS(t) = S(t)\left(\mu + \sigma^2 k\right)dt + S(t)\sqrt{1+2k}\,\sigma d\omega(t), \qquad (3.5.)$$

$$k := \sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{Corr}\{y_{t+m}, y_t\} = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Veicot ievietošanu, iegūstam gala vienādojumu:

$$dS(t) = S(t)\left(\mu + \sigma^2 \frac{\rho}{1-\rho}\right)dt + S(t)\sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}}\,\sigma d\omega(t). \qquad (3.6.)$$

Opciju pārcenošanas vienādojums

Eiropas tipa *call* (tiesības pirkt akcijas) opciju līguma cenas noteikšana akcijām ar autokorelētiem ienesīgumiem un tirgus riska jutīguma parametru modifikāciju var veikt, balstoties uz iepriekšminētajiem rezultātiem.

Tagad iegūsim formulu Eiropas tipa *call* opciju līguma cenas noteikšanai gadījumā, ja akcijas cenas process $S(t)$ apmierina stohastisko 4.6. diferenciālvienādojumu. Eiropas tipa *call* opciju līgumam robežnosacījumi ir $\boldsymbol{C(S(T),T) = \max(S(t) - K, 0)}$ un $\boldsymbol{C(0,t) = 0}$. Izmantojot standarta paņēmienus, iegūstam:

$$C(S(t),t) = S(t)N(d_1) - K\exp\left(-\left(\mu + \sigma^2 k\right)(T-t)\right)N(d_2), \qquad (3.7.)$$

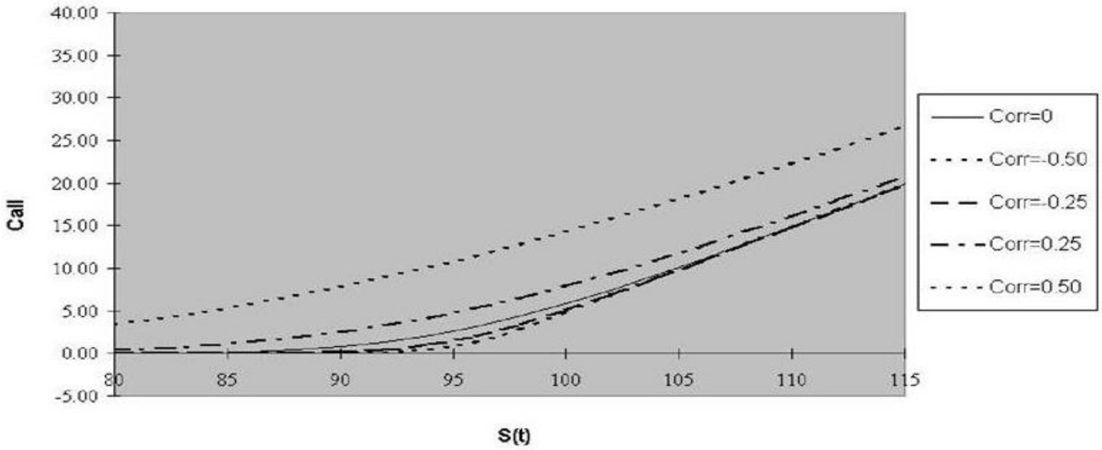
kur

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(\mu + \sigma^2 k + \frac{1}{2}\sigma^2(1+2k)\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(1+2k)(T-t)}},$$

un

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(1+2k)(T-t)},$$

kur $N(d_1)$ un $N(d_2)$ ir standartnormālā sadalījuma kumulatīvās funkcijas.



3.1. att. *Call* opciju līguma vērtība dažādiem korelācijas koeficientiem.

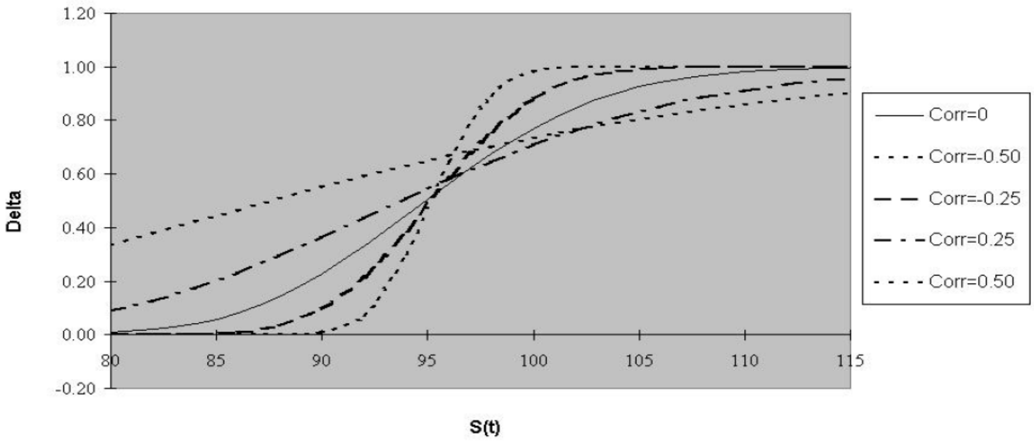
Opciju riska jutīguma mēru (*Option Greeks*) pārrēķins

Tagad ir iespējams iegūt formulas, lai aprēķinātu *call* opciju līguma cenas jutīgumu pret izmaiņām pamatparametros. Eksistē daudzi riska mēri, ko bieži apzīmē ar grieķu alfabēta burtiem, bet, lai ilustrētu autokorelācijas problēmu, apskatīsim visbiežāk izmantotos – delta, vega, ro un gamma.

Šie rādītāji ir ļoti svarīgi finanšu risku vadībā. Katrs rādītājs ir opciju portfeļa vērtības izmaiņu jutīguma mērs pret noteiktu finanšu tirgus faktoru. Tādējādi portfelis varētu tikt pārbalansēts attiecībā pret noteiktu riska komponenti (procentu likme, valūtu kurss, akciju cena u. c.), lai iegūtu noteiktu atklātu pozīciju pret definēto risku. Šos radītājus ir ļoti viegli izrēķināt, balstoties uz Bleka–Šoulza formulu, līdz ar to tie ir ļoti svarīgi atvasināto finanšu instrumentu tirgotājiem, īpaši tiem, kas vēlas ierobežot portfeļa cenu risku pret pēkšņām finanšu tirgus izmaiņām. Pārsvarā izmanto risku ierobežošanas rādītājus, kas mēra jutīgumu pret pamataktīva cenas izmaiņām, kā arī atvasināto finanšu instrumentu laiku līdz termiņa beigām un svārstīgumu. Riska rādītāji pret pašiem delta, vega un gamma nav īpaši izplatīti. Turklāt portfeļu menedžeri īpaši neņem vērā opcijas cenu jutīgumu pret bezriska procentu likmju izmaiņām, jo šis risks nav būtisks. Visi izmantojamie *Greeks* rādītāji ir pirmās kārtas (delta, vega un ro) un otrās kārtas atvasinājumi no opcijas cenas.

Delta, Δ, ir Eiropas tipa opciju līguma cenas *C* pirmās kārtas atvasinājums pēc pamata aktīva cenas *S* un opcijas cenas izmaiņu mērs pret pamataktīva izmaiņām:

$$\Delta(S(t),t) = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1)$$



3.2. att. *Call* opciju līguma delta parametra vērtība dažādiem korelācijas koeficientiem

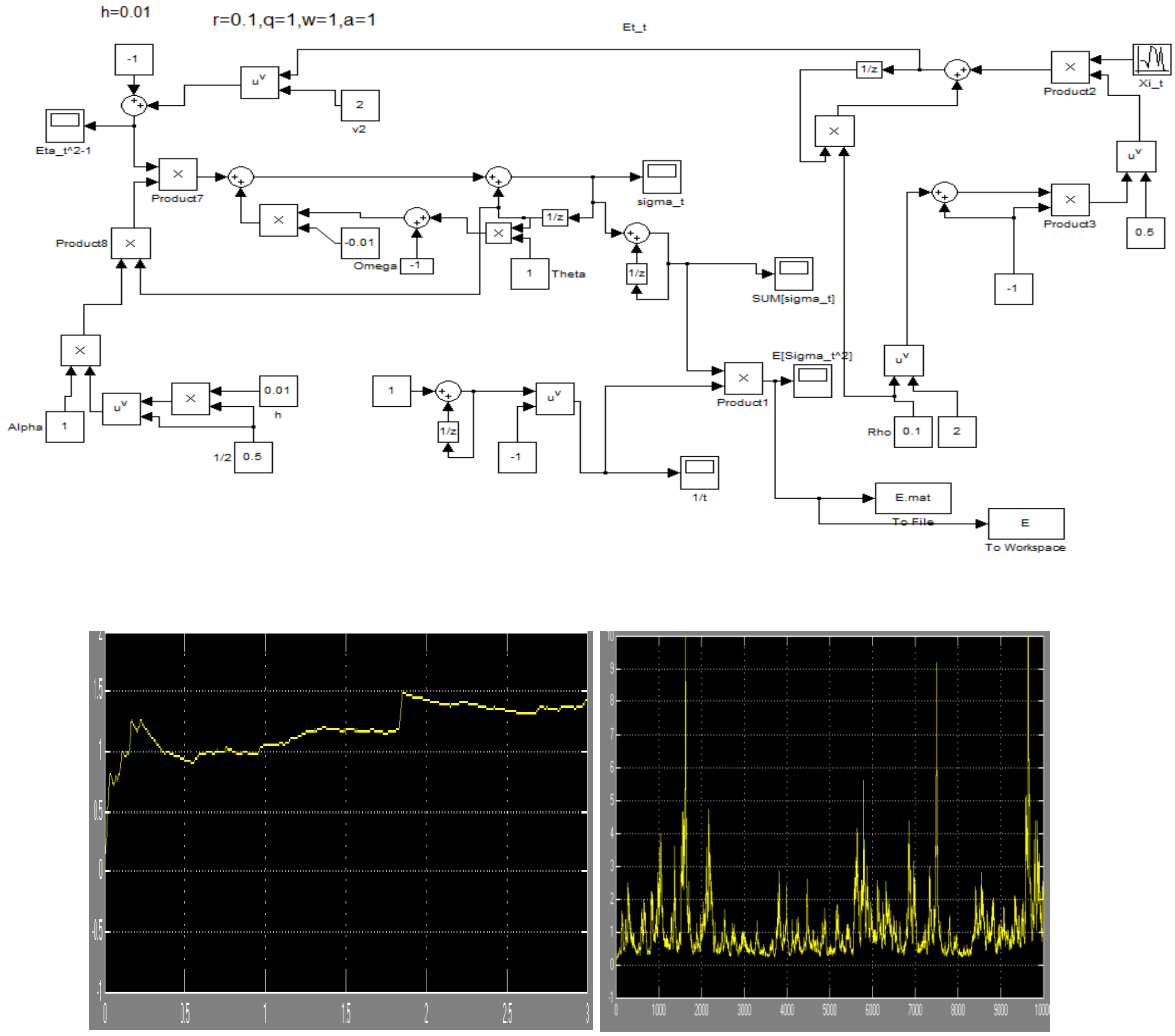
Kā redzams 3.1. un 3.2. attēlā, opciju līguma cenas jutīgumu būtiski ietekmē pamataktīva ienesīguma autokorelācija. Ja autokorelācija pastāv, tad atkarībā no tās zīmes opciju līguma pārdevējs var pārvērtēt vai nepietiekami novērtēt tirgus risku, kā rezultātā var veidoties neparedzami zaudējumi vai pat iestāties finanšu institūcijas maksātnespēja. Pārējie riska mēri ir aprakstīti promocijas darbā (liela loma šeit ir arī pamataktīva ienesīguma autokorelācijai).

Stacionāra atrisinājuma sadalījuma funkcijas pārbaude un konverģences sasniegšanas laika aprēķins fiksētām parametru vērtībām

Nākamais solis, kas ir jāiekļauj promocijas darbā, ir 3.4. vienādojuma atrisinājuma un attiecīgi iegūtā 3.5. vienādojuma stabilitātes pārbaude. Ja nav iespējams iegūt stacionāro 3.5. vienādojuma atrisinājumu un parādīt, ka tas ir neatkarīgs no korelācijas koeficienta vērtības, tad iegūtās formulas Eiropas tipa *call* opciju līguma cenas un riska mēru (*Greeks*) aprēķinam atrisinājums nav stabils, bet ir lokāls, un to nevar izmantot risku vadībā.

$$T_\varepsilon(\rho) = \frac{\ln(\delta\varepsilon) - \ln 4\left(\mathrm{E}\{|z(0)|^2\}\right)}{\lambda_2(\rho)}. \qquad (3.8.)$$

3.8. formula apraksta konverģences uz stacionāro atrisinājumu $\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})$ sasniegšanas laiku. Līdz ar to, izmantojot 3.8. formulu, kas ir atkarīga no ρ, ir iespējams atrast konverģences sasniegšanas laiku, kā arī to, ka, sākot ar konverģences brīdi, stacionārajam atrisinājumam ir jābūt sadalītam pēc gamma sadalījuma.



3.3. att. $E\sigma^2$ un σ^2 processa imitācija *Matlab Simulink* vidē.

Lai izveidotu stacionārā atrisinājuma stabilitātes pētīšanu atkarībā no korelācijas koeficienta vērtībām un to atbilstību pārbaudi gamma sadalījumam, tika veikta teorētiska 3.5. vienādojuma imitācija *Matlab Simulink* vidē (3.3. attēlā). Tika izveidotas 5000 novērojumu virknes, lai aprēķinātu un turpmāk salīdzinātu teorētiskus un empīriskus momentus, pārbaudītu Kolmogorova testu gamma sadalījumam, kā arī noteiktu 3.5. vienādojuma konverģences laiku.

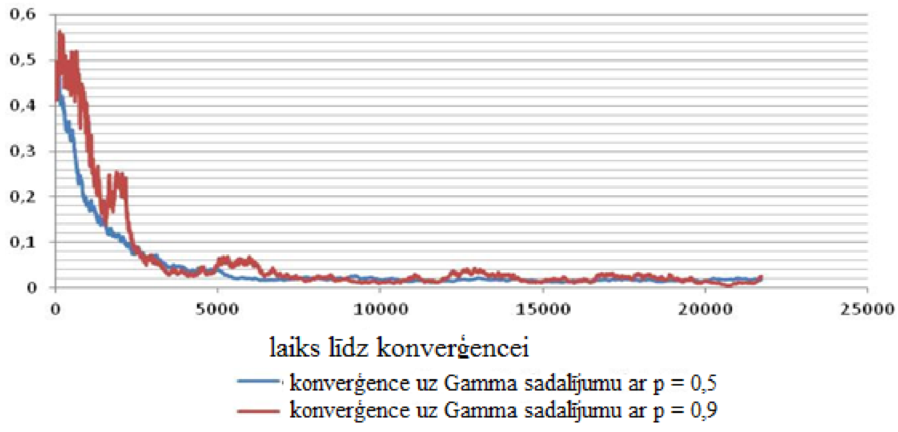
3.1. tabula

Empīrisko un teorētisko momentu salīdzināšana

Rādītāji	**Empīriskais σ^2**		**Teorētiskais σ^2**
	5000 imitācijas	**Pēdējās 100 imitācijas**	
Vidējais	1,00493	0,99748	1,00010
Dispersija	0,00570	0,00459	0,00513

Kā redzams 3.1. tabulā, dažādas kārtas momentiem nav būtisku atšķirību no gamma sadalījuma. Šajā gadījumā tika fiksēti 3.8. vienādojuma un gamma sadalījuma parametri. Tad tika veiktas imitācijas, mainot ρ vērtības no 0 līdz 1, kā rezultātā tika iegūti dažādi konverģences laiki.

Ņemot vērā Nelsona [34] rezultātus, ka stacionārajiem atrisinājumiem ir jābūt sadalītiem pēc inversā gamma sadalījuma, tika veikts Kolmogorova tests, lai pārbaudītu hipotēzi par gamma sadalījumu. Tādējādi šie testi (3.8. vienādojums) ir empīrisks pierādījums. Lielākajā daļā gadījumu hipotēze par gamma sadalījumu netika noraidīta.



3.4. att. Laiks līdz konverģencei uz gamma sadalījumu dažādiem korelācijas koeficientiem.

Kā redzams 3.4. attēlā, pie korelācijas koeficienta vērtībai $0{,}5|z(t)|^2$ konverģence uz stacionāro atrisinājumu ar iepriekšdefinētu precizitāti $\varepsilon < 0{,}1$ ir ātrāka nekā pie korelācijas koeficienta vērtības 0,9. Bet konverģence tika sasniegta visām ρ vērtībām. Tas nozīmē, ka 3.7. vienādojumu var izmantot, lai novērtētu cenu finanšu aktīvam ar autokorelētiem ienesīgumiem un noteiktu atbilstošo risku mēru vērtības.

Trešās nodaļas kopsavilkums

Darbā ir izstrādāts nepārtraukta laika difūzijas modelis akciju ienesīgumiem ar sērijveida korelāciju. Pēc tam tika iegūta formula Eiropas tipa *call* opciju līguma cenas noteikšanai gadījumam, ja opciju līgums ir izrakstīts akcijai ar autokorelētiem ienesīgumiem, un parādīts, ka pat nelielas sērijveida korelācijas rezultātā pastāvošā paredzamība var radīt būtiskas novirzes no Bleka–Šoulza formulas rezultātiem. Tālāk tika izvestas formulas Eiropas tipa *call* opcijas cenas jutīguma mēriem un parādīts, ka finanšu risku vadībā plaši izmantotie opciju līgumu hedžēšanas parametri ir atkarīgi no pieņēmumiem par pamatinstrumenta ienesīgumu korelāciju. Šo pieeju var izmantot arī diskrēta laika diferenču vienādojumu sistēmām gadījumos, kad svārstīgums ir stohastisks vai to modelē ar *GARCH* procesu.

4. Autokorelācijas izmantošana opciju cenas noteikšanai

Pagājušajā gadā notika diskusijas par opciju līgumu ar ļoti mazu izpildes iespēju (*deep out of the money*) raksturu [44]. Daži eksperti uzskata, ka dažādu aktīvu cenas apdrošināšanas pārdošana (opciju līgumu pārdošana) un loterijas biļešu pārdošana nodrošina pozitīvu ilgtermiņa atdevi dažādos investīciju sektoros. Finanšu tirgū ir pazīstamas daudzas dažādas stratēģijas, kas apraksta apdrošināšanu un loterijas. Galvenais jautājums ir, vai investori var uzlabot savus ilgtermiņa ieņēmumus, pērkot vai pārdodot apdrošināšanu un loteriju, respektīvi, veicot finanšu investīcijas, kurām ir apdrošināšanas vai loterijas raksturs. Atbilde ir atkarīga no tirgus cenu asimetrijas jeb no tā, kādā veidā investori novērtē cenu asimetriju attiecībā pret vidējo vērtību. Ja lielākā daļa investoru sagaida pozitīvu asimetrijas koeficientu, tad investīcijas ar pozitīvi asimetrisku peļņu tiecas uz augstāku cenu un nodrošina zemus ilgtermiņa ienākumus. Cenu svārstības gan kreisajā astē (apdrošināšana), gan labajā astē (loterijas biļetes) paaugstina ilgtermiņa ienākumus. Turpretim uz opciju līgumiem balstītās risku apdrošināšanas ar mazām varbūtībām pret finanšu katastrofām pirkšana un loterijas tipa investīciju ar augstu svārstīgumu uzturēšana rada zemus ilgtermiņa ienākumus.

Tālāk autors vēlas ieteikt veidu [46], [47], kā analizēt opciju līgumu peļņu un riskus, balstoties uz apgabalu nelinearitāti (*GARCH* modelis), izmantojot *Tesla Motors Inc.* akciju cenu dinamiku. Galvenā ideja ir izmantot autokorelācijas efektu stohastiskajā diferenču vienādojumā (kas izteikts caur difūzijas aproksimāciju ar stohastiskām svārstībām, kas ir aprakstītas *GARCH*(1, 1) formā) nepārtrauktā laika tuvinājumā.

4.1. tabula

Tesla Motors Inc. akciju opcijas pārcenojums

Opcijas cena	**Bleka–Šoulza formula**	**Piedāvātā pieeja**
Opcijas termiņš	1 gads	1 gads
Izpildes cena	380 USD	380 USD
Svārstīgums	57 %	35 %
Gada % likme	1 %	1 %
Cena	5,22 USD	1,36 USD; ja $\rho = 0{,}2$
		102,5 USD; ja $\rho = 0{,}9$

Rezultāti 4.1. tabulā var palīdzēt pieņemt lēmumu vērtspapīru portfeļa pārvaldniekam, riska analītiķim vai jebkurai citai personai, kas piedalās opciju līgumu pārdošanā. Kā redzams 4.1. tabulā, opciju līgumu cenas jaunais novērtējums ar zemu autokorelācijas koeficientu *Tesla Motors Inc.* akcijām ir zemāks nekā finanšu tirgū piedāvātais. Šis rezultāts nav spēkā, ja tiek izmantota liela autokorelācijas koeficienta vērtība. Maza autokorelācijas koeficienta gadījumā vienādojums (4.7) ar *GARCH*(1, 1) procesa svārstību novērtējumu iesaka pārdot *Tesla Motors Inc.* Eiropas tipa *call* līgumu, jo tā cena finanšu tirgū ir novērtēta pārāk augstu.

Ceturtās nodaļas kopsavilkums

Esam ieguvuši *Tesla Motors Inc.* Eiropas tipa *call* opciju līguma cenas novērtējumu, ņemot vērā peļņas un svārstīguma autokorelācijas koeficientu. Šie rezultāti liecina, ka pat ar sliktām prognozēšanas iespējām, izmantojot autokorelācijas koeficientu, iegūtie rezultāti ir būtiski atšķirīgi no Bleka–Šoulza formulas. Tātad Eiropas tipa *call* opciju līgumu pārdošana varētu būt ienesīga, pareizi novērtējot peļņas un svārstīguma autokorelācijas koeficientu, kā ir parādīts *Tesla Motors Inc.* gadījumā, un Ilmannena [44] hipotēzi noraidīt nevar. Tādējādi ir praktiski nodemonstrēts autokorelācijas iekļaušanas algoritms opciju cenas aprēķināšanā, kas labāk aprēķina opciju prēmijas un ļauj tās mainīt, ņemot vērā situāciju finanšu tirgū.

PROMOCIJAS DARBA REZULTĀTI UN SECINĀJUMI

Promocijas darba mērķis ir izstrādāt riska prognozēšanas modeļu uzbūvēšanas metodes un algoritmus, ņemot vērā novērojumu kļūdu atlikumu nelineāro sakarību. Metodes būtība ir modeļu konstruēšana, ņemot vērā atlikumu korelācijas, ievērojot "smagās astes" un "augstās virsotnes" izlases sadalījumos. Tādai neparametrisko modeļu uzbūves metodei, izmantojot kopulu blīvuma funkcijas nosacītos momentus, ir plašs lietojums finanšu, makroekonomisko un apdrošināšanas laikrindu prognozēšanā. Korelācijas izdalīšana modeļu atlikumos un tālāka modeļu novērtēšana ļauj precīzāk noteikt atvasināto finanšu instrumentu cenas.

Promocijas darba mērķis ir sasniegts, plānotie uzdevumi izpildīti. Iegūti šādi rezultāti:

1) definēts neparametrisks Markova modelis, izstrādāts šī modeļa blīvumu atrašanas paņēmiens, izmantojot Arhimēda tipa kopulas;
2) ar Markova modeli, kurā izdalīts korelācijas koeficients, ir pārveidoti *GARCH*(1, 1) modeļa atlikumi un ieviesta atlikumu korelācijas iekļaušanas metode;
3) izstrādāta Hestona modeļa diskretizācijas metode;
4) otrajā punktā izmantotās metodes lietderības pārbaudei veikta *GARCH*(1, 1) konverģences pārbaude uz stacionaritāti un gamma sadalījumu, ņemot vērā korelācijas koeficientu;
5) izmantojot modeli ar autokorelācijas korekciju (2. punkts), tika pārveidots Bleka–Šoulza opciju cenošanas modelis un ar to saistītie opciju jutīguma mēri (*Option Greeks*). Šī pieeja ļauj precīzāk izvērtēt cenas, ņemot vērā aktīvu ienesīguma "smagās astes". Veikts autokorelācijas ieviešanas metodes apkopojums, balstoties uz *Tesla Motors Inc.* akciju opciju noteikšanas tehniku un veicot Montekarlo imitācijas sagaidāmajam svārstīgumam, kā arī opciju pārcenošanu. Noteiktā sistēma palīdz pilnīgāk izzināt finanšu tirgus situāciju, opciju cenas un izdarīt pamatotus lēmumus attiecībā uz akciju vai opciju pirkšanu vai pārdošanu.

No rezultātiem izrietošie galvenie secinājumi:

1) stohastisko modeļu pārveidošana diskrētajā laikā dod iespēju noteikt modeļa atbilstību novērojumu datiem, kas savukārt palielina prognozes precizitāti;
2) nelineārie (neparametriskie) uz kopulām bāzētie Markova modeļi ļauj modelēt dažāda veida atkarības – uz sadalījuma centru vai "astēm";
3) *GARCH*(1, 1) modeļa ar autokorelētajiem atlikumiem konverģence uz stacionāro atrisinājumu ir atkarīga no korelācijas koeficienta vērtības – jo šī vērtība lielāka, jo vājāka ir konverģence;
4) modeļu atlikumu korelāciju novērtēšana palīdz noteikt atvasināto finanšu instrumentu cenas.

Promocijas darbā izvirzītās tēzes ir apstiprinātas.

Darba aprobācija veikta, prezentējot darba rezultātus 14 starptautiskās zinātniskās konferencēs un semināros, publicējot 10 zinātniskas publikācijas starptautiskos zinātniskos izdevumos, lietojot metodes Latvijas Republikas Valsts kasē kopš 2008. gada. Izstrādātās metodes dažādu finanšu risku pārcenošanai lieto AS *Swedbank* kopš 2012. gada.

LITERATŪRAS SARAKSTS

1. Shannon, C. E. (1948), A Mathematical Theory of Communication, Bell System Technical Journal, 27, pp. 379–423 & 623–656.
2. Manyika, James; Chui, Michael; Bughin, Jaques; Brown, Brad; Dobbs, Richard; Roxburgh, Charles; Byers, Angela Hung (May 2011) Big Data: The next frontier for innovation, competition, and productivity.
3. Fuller, W. A. (1976) Introduction to Statistical Time Series. Wiley, New York.
4. Pesaran, M. H. and Potter, S. M. (1997) A floor and ceiling model of US output. Journal of Economic Dynamics and Control 21, 661–695.
5. Robinson, P. M. (1991) Testing for strong serial correlation and dynamic conditional heteroskedasticity in multiple regression. Journal of Econometrics 47, 67–84.
6. Drost, F. C., Klaassen, C. A. J. and Werker, B. J. M. (1997) Adaptive estimation in time series models. Annals of Statistics 25, 786–817.
7. Seo, B. (1999) Distribution theory for unit root tests with conditional heteroskedasticity. Journal of Econometrics 91, 113–144.
8. Engle, R. F. (1982) Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of U. K. inflation. Econometrica 50, 987–1008.
9. Auestad, B. and Tjøstheim, D. (1990) Identification of nonlinear time series: First order characterization and order estimation, Biometrika 77: 669–687.
10. Bierens, H. J. (1987) Kernel estimators of regression functions, Advances in Econometrics, Cambridge University Press.
11. Granger, C. and Teroasvirta, T. (1992) Modeling Nonlinear Dynamic Relationships, Oxford University Press, Oxford.
12. Priestley, M. B. (1988) Nonlinear and Nonstationary Time Series Analysis, Academic Press, NY.
13. Tjøstheim, D. (1990) Nonlinear time series and markov chains, Advanced Applied Probability 22: 587–611.
14. Benedetti, J. K. (1977) On the nonparametric estimation of regression functions, Journal of the Royal Statistical Society, Series B 39: 248–253.
15. Bollerslev, T. (1986) Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity, Journal of Econometrics 31: 307–327.
16. Andreson, T., Goodman, L. (1967) Statistical Inference About Markov Chain. The Annals of Mathematical Statistics 38: 89–110.
17. Carkova, V., Swerdan, M. On mean square stability of linear stochastic difference equations.Theory of Stochastic Processes, 11 (27), 2005, 6–11.
18. Лумельский, Я. П., Чичагов В. В. (1986) Статистическое оценивание в схеме марковских случайных блужданий, Статистические методы, Перм. Ун-т. Пермь, 36–45.
19. Tsay, R. S. (1987) Conditional heteroscedastic time series models. Journal of the American Statistical Association 82, 590–604.
20. Karanasos, M. (1999) The second moment and the autocovariance function of the squared errors of the GARCH model. Journal of Econometrics 90, 63–76.
21. Lamoureux G. G., Lastrapes W. D. (1993) Forecasting Stock-Return Variance: Toward an Understanding of Stochastic Implied Volatilities, Review of Financial Studies, vol. 6, no 2.
22. Kreiss, J.-P. (1987) On adaptive estimation in stationary ARMA processes. *Annals of Statistics* 15, 112–133.
23. Ling, S. (1999) On the probabilistic properties of a double threshold ARMA conditional heteroskedasticity model. Journal of Applied Probability 36, 1–18.

24. Resnick, S. I. (1997) Heavy tail modeling and teletrafic data. Annals of Statistics 25, 1805–1869.
25. Hannan, E. J. (1980) The estimation of the order of an ARMA model, Annals of Statistics 8, 1071–1081
26. Fornari, F. and Mele, A. (1997) Sign-and volatility-switching ARCH models: Theory and applications to international stock markets. Journal of Applied Econometrics 12, 49–65.
27. Albert T. Bharucha-Reid. (1997) Elements of the Theory of Markov Processes and Their Applications, Courier Dover Publications.
28. John C. Cox; Johathan E. Ingersoll, Jr.; Stephen A.Ross (1987) A Theory of the Term Structure of Interest Rates, Econometrica, vol. 53, no 2.
29. Bolder, D. J. (2001) Affine Term-Structure Models: Theory and implementations, Bank of Canada Working Paper.
30. Feller, W. (1951) Two Singular Diffusion Problems, Annals of Mathematics, pp. 173–182.
31. Cont, R. (2001) Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues, Quantative Finance.
32. Bouye, E., Salmon, M. (2002) Dynamic Copula Quantile Regressions and Tail Area Dynamic Dependence in Forex Markets, London.
33. Chen, X., Fan, Y. (2006) Estimation of copula-based semiparametric time series models. Journal of Econometrics.
34. Nelson, D. B. (1990) ARCH models as difusion approximations. Journal of Econometrics, 441 1-2: 7–38.
35. Ait-Sahalia, Y., Kimmel, R. (2007) Maximum likelihood estimation of stochastic volatility models. Journal of Financial Economics.
36. Darsow, W., Nguyen, B., Olsen, E. (1992) Copulas and Markov processes. Illinois Journal of Mathematics 36, 600–642.
37. Joe, H., (1997) Multivariate Models and Dependence Concepts, Chapman & Hall/CRC.
38. Frees, E. W., Valdez, E. A. (1998) Understanding relationships using copulas. North American Actuarial Journal 2, 1–25.
39. Embrechts, P., McNeil, A., Straumann, D. (2002) Correlation and dependence properties in risk management: properties and pitfalls. In: Dempster, M. (Ed.), Risk Management: Value at Risk and Beyond. Cambridge University Press, Cambridge, pp. 176–223.
40. Sklar, A. (1959) Fonctions de r'epartition 'a n dimensionset leurs marges. Publ. Inst. Statis. Univ. Paris 8, 229–231.
41. Chen, X., Hansen, L. P., Carrasco, M. (1998) Nonlinearity and temporal dependence. Working Paper, University of Chicago.
42. Chen, X., Fan, Y. (2004) Pseudo-likelihood ratio tests for model selection in semiparametric multivariate copula models, Canadian Journal of Statistics.
43. Ajevskis V., Gūtmanis N. (2002) Modeling of the Latvian Term Structure of Interest Rate, 1st International Conference APLIMAT, 47–52.
44. Lee, S.-W. and Hansen, B. E. (1994) Asymptotic theory for the GARCH (1,1) quasi-maximum likelihood estimator. *Econometric Theory* 10, 29–52.
45. Chen, X., Fan, Y. (2006) Estimation of copula-based semiparametric time series models. Journal of Econometrics.
46. Ilmanen, Antti, (2012) Do Financial Markets Reward Buying or Selling Insurance and Lottery Tickets? Financial Analysts Journal, September/October, vol. 68, no. 5: 26–36.

47. Taleb, N. N. (2013) No, Small Probabilities Are Not “Attractive to Sell”: A Comment. Financial Analysts Journal, January/February, vol. 70.
48. Fjodorovs, J. (2014) Simulation of Option Prices Using GARCH Processes for Autocorrelated Stock Returns. Proceedings of Journal of Applied Mathematics, 151–158.
49. Egle, A., Matvejevs, An., Fjodorvs, J. (2012) Pricing of Financial Actives with Serial Correlation in Returns. Scientific Journal of Riga Technical University.
50. Matvejevs, An., Fjodorvs, J. (2013) Revaluation of Estimated Option Prices Using GARCH Processes with Most Preferable Properties. Scientific Journal of Riga Technical University.
51. Egle, A., Carkovs, J. (2009) On Continous Stochastic Modeling Of Heteroskedastic Conditional Variance, Proceedings of Aplimat.
52. Carkovs J. (2008) On Diffusion Approximation of Discrete Markov Dynamical Systems. In Computational Geometry, Proceedings of World Academy of Science, Engineering and Technology, vol. 30 pp. 1–6.
53. Frees, E. W., Valdez, E. A. (1998) Understanding relationships using copulas. North American Actuarial Journal 2, 1–25.
54. Chen, X., Hansen, L. P., Carrasco, M. (1998) Nonlinearity and temporal dependence. Working Paper, University of Chicago.
55. Fjodorovs, J. (2012) Copula Based Semiparametric Regressive Models. Journal of Applied Mathematics, Volume V, pp. 241–248, ISIN: 1337-6365.
56. Wong, E. (1964) The Construction of a Class of Stationary Markov Processes. Sixteenth Symposia in Applied Mathematics: Stochastic Processes in Mathematical Physics and Engineering, Providence, RI, 264–76.
57. Lo, A., MacKinley, A. C. (1990) An Econometric Analysis of Non-Synchronous Trading. Journal of Econometrics, no. 45, pp. 181–211.
58. Jokivuolle, E. (1995) Measuring True Stock Index Value in the Presence of Infrequent Trading. Journal of Financial and Quantitative Analysis.
59. Stoll, H. R., Whaley, R. E. (1990) The Dynamics of Stock Index and Stock Index Futures Returns.Journal of Financial and Quantitative Analysis, no. 25, pp. 441–468.
60. Mezin, V. Option Pricing Model for Autocorrelated Stock Returns. Working paper, Rutgers University.
61. Tsarkov, Ye. (J. Carkovs) (2002) Asymptotic methods for stability analysis of Markov impulse dynamical systems, Nonlinear dynamics and system theory, 1, no. 2.
62. Skorohod, A. V. (1965) Studies in the theory of random processes, USA: Addison-Wesley publishing.
63. Skorohod, A. V. (1994) Asymptotic Methods of Theory of Stochastic Differential Equations, 3rd ed. AMS, USA: Providance.
64. Dimentberg, M. (1988) Statistical Dynamics of Nonlinear and Time-Varying Systems. NY, USA: Willey.
65. Ball, C. A. and Roma, A. C. (1988) A jump diffusion model for the European Monetary System. In J. of International Money and Finance, pp. 475–492.
66. Ann, C. M. and Thompson, H. (1988) Jump-diffusion process and term structure of interest rates. In J. of Finance, 43, no. 3, pp. 155–174.
67. Arnold, Papanicolaou, L. G., and Wihstutz, V. (1986) Asymptotic analysis of the Lyapunov exponent and rotation number of the random oscillator and applications, In SIAM J. Appl. Math., 46, no. 3, pp. 427–450.
68. Fornari, F. and Mele, A. (1997) Sign- and volatility-switching ARCH models theory and applications to international stock markets. In J. of Applied Econometrics, 12, pp. 49–65.

69. Wong, E. (1964) The construction of a class of stationary Markov process In (R.Bellman ed.), Proceedings of the 16th Symposia in Applied Mathematics: Stochastic Processes in Mathematical Physics and Engineering, Providance, RI, pp. 264–276.
70. Heston, S. L. (1993) A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options: The Rview of Financial Studies, vol. 6, iss. 2, pp. 327–343.
71. Buss, G. (2013) Robust time series forecasting methods.Thesis. Riga Technical university.
72. Clive, W. J. Granger (2003) Time Series Concepts for Conditional Distributions. Oxford Bulleten of Economics and Statistics, vol. 65, iss. 1, pp. 689–701.
73. Ane, Th., Kharoubi C. (2003) Dependence Structure and Risk Measure, Journal of Business, vol. 76, no. 3, pp. 411–438.
74. Cech, C. (2006) Copula-Based Top-Down Approaches in Financial Risk Aggregation.
75. Junker, M., Szimayer A., Wagner N. (2003) Nonlinear Term Structure Dependence: Copula Functions, Empirics, and Risk Implications.
76. Savu C., Trede M. (2006) Hierarchical Archimedean Copulas. Munster.
77. Morone, M., Cornaglia A., Mignola G. (2007) Economic Capital Assessment via Copulas: Aggregation and Allocation of Different Risk Types.
78. Natale, F., P. (2006) Optimization With Tail-Dependence and Tail Risk: A Copula Based Approach For Strategic Asset Allocation.
79. Rosenberg, J., Schuermann, T. (2006) A General Approach to Integrated Risk Management with Skewed, Fat-Tailed Risks, Journal of Financial Economics. vol. 79, pp. 569–614.
80. Tang, A., Valdez, E. (2006) Economic Capital and the Aggregation of Risks using Copulas. Sydney.
81. Kole, E., Koedijk, K., Verbeek M. (2006) Selecting Copulas for Risk Management.
82. Patton, A. (2006) Modelling Asymmetric Exchange Rate Dependence // International Economic Review. vol. 47, no. 2, pp. 527–556.
83. Hsu, Ch.-Ch., Tseng Ch.-P., Wang Y.-H. (2007) Dynamic Hedging with Futures: A Copula-based GARCH Model.
84. Nelsen, R. (2006) An Introduction to Copulas. Second Edition. Springer. New York.
85. Фантаццини, Д. (2008) Эконометрический анализ финансовых данных в задачах управления риском, Прикладная эконометрика. № 2 (10), С. 91–13.
86. J.Mai, M. Scherer (2012) Financial Engineering with Copulas Explained. Palgrave Macmillan UK.
87. Пеникас, Г. И., Симакова, В. Б. (2009) Управление процентным риском на основе копулы-GARCH моделей, Прикладная эконометрика, № 1 (13), стр. 3–36.
88. Ханк, Д. Э., Уичери, Д. У., Райте, А. Дж. (2003) Бизнес-прогнозирование: пер. с англ. 7-е изд. М.: Вильямс, С. 506.
89. Makridakis, B., Andersen, A., Carbone, R., Fildes, R., Hibon, M., Lewandowski, R., Newton, J., Parzen, E., Winkler, R. (1982) The accuracy of extrapolation (time series) methods: Results of a forecasting competition, Journal of Forecasting, vol. 1, iss. 2, pp. 111–153.
90. Makridakis, S., Hibon, M. (1997) ARMA models and the Box-Jenkins Methodology // Journal of Forecasting, vol. 16, pp. 147–163.

91. Yule, C. Udny. (1927) On a Method of Investigating Periodicities in Disturbed Series, with Special Reference to Wolfer's Sunspot Numbers // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Ser. A. Vol. 226, pp. 267–298.
92. Тихонов, Э., И. (2006) Методы прогнозирования в условиях рынка. Учебное пособие, Невинномысск, 221 с.
93. Box, G. E. P. and Jenkins, G. M. (1970), Time Series Analysis: Forecasting and Control, San Francisco: Holden-Day.
94. Fisher, N. I. (1997). Copulas. In: Encyclopedia of Statistical Sciences, Update vol. 1, pp. 159–163. John Wiley Sons, New York.