LATVIJAS UNIVERSITĀTE

Promocijas darba kopsavilkums

Māra Delesa-Vēliņa

EMPĪRISKĀS TICAMĪBAS METODE LOKĀCIJAS PARAMETRAM, BALSTOTIES UZ DAŽIEM ROBUSTIEM NOVĒRTĒTĀJIEM

Rīga 2022

LATVIJAS UNIVERSITĀTE
FIZIKAS, MATEMĀTIKAS UN OPTOMETRIJAS FAKULTĀTE

Māra Delesa-Vēliņa

EMPĪRISKĀS TICAMĪBAS METODE LOKĀCIJAS PARAMETRAM, BALSTOTIES UZ DAŽIEM ROBUSTIEM NOVĒRTĒTĀJIEM

PROMOCIJAS DARBA KOPSAVILKUMS

Doktora grāda iegūšanai matemātikas nozarē
Apakšnozare: varbūtību teorija un statistika

Rīga 2022

Promocijas darbs izstrādāts Matemātiskās analīzes katedrā, Matemātikas nodaļā, Fizikas, matemātikas un optometrijas fakultātē, Latvijas Universitātē laika posmā no 2012. gada līdz 2021. gadam.

Darbs sastāv no ievada, sešām nodaļām, secinājumiem, aizstāvamajām tēzēm un literatūras saraksta.

Darba forma: disertācija matemātikas nozarē, varbūtību teorijas un matemātiskās statistikas apakšnozarē.

Darba zinātniskais vadītājs: *Dr. math.* Jānis Valeinis, profesors, Latvijas Universitāte.

Darba recenzenti.

1. *Ph. D.* Mihai Giurcanu, asociētais profesors, Čikāgas Universitāte, ASV.
2. *Ph. D.* Tõnu Kollo, emeritētais profesors, Tartu Universitāte, Igaunija.
3. *Dr. habil. math.* Aleksandrs Šostaks, vadošais pētnieks, Latvijas Universitāte.

Promocijas darba aizstāvēšana notiks 2022. gada 18. martā Latvijas Universitātes Matemātikas zinātņu nozares promocijas padomes atklātā sēdē.

Ar promocijas darbu un tā kopsavilkumu var iepazīties Latvijas Universitātes Bibliotēkā Rīgā, Kalpaka bulvārī 4.

Promocijas padomes priekšsēdētājs *Dr. math.*, prof. Andrejs Cibulis
Promocijas padomes sekretārs *Dr. math.*, doc. Sergejs Smirnovs

ISBN 978-9934-18-779-7
ISBN 978-9934-18-780-3 (PDF)

Anotācija

Pētījumā attīstītas empīriskās ticamības metodes divu un vairāku neatkarīgu populāciju salīdzināšanai, balstoties uz robustiem lokācijas parametra novērtētājiem. Empīriskās ticamības metode (EL) ir neparametriskās statistikas metode, kuras pieņēmumi nepieprasa datu normālo sadalījumu. Iegūti jauni asimptotiskie rezultāti par empīriskās ticamības metodēm: 1) divu M-novērtētāju (tajā skaitā divu gludināto Hūbera novērtētāju) starpībai; 2) divu nošķeltu vidējo vērtību starpībai; 3) uz empīrisko ticamību balstītai ANOVA metodei vairāk kā divu nošķeltu vidējo vērtību salīdzināšanai. Tika izstrādāts simulāciju eksperiments un analizēti datu piemēri, kas parādīja, ka jauniegūtās metodes ir līdzvērtīga alternatīva klasiskās statistikas metodēm gadījumos, kad dati ir normāli sadalīti – tām ir līdzīga jauda un spēja kontrolēt empīrisko pirmā veida kļūdu. Turklāt metodēm ir labas robustuma īpašības, pārspējot klasiskās metodes gadījumos, kad normalitātes pieņēmums neizpildās.

Atslēgas vārdi: empīriskā ticamība; gludinātie M-novērtētāji; robustā statistika; hipotēžu testi; divu izlašu problēma; ANOVA

Satura rādītājs

Ievads

Pētījuma motivācija

Statistiskajā analīzē bieži sastopama problēma, kad jāsalīdzina divas populācijas F_1 un F_2, balstoties uz divu izlašu novērojumiem $X_1, \ldots, X_{n_1}$ un $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$. Piemēram, vēlamies noskaidrot, vai jauna medikamenta efekts testa grupā ir lielāks nekā placebo efekts kontroles grupā. Visplašāk lietotais tests šādā situācijā ir Stjūdenta t-tests [29]. Ja novērojumi $X_1, \ldots, X_{n_1}$ un $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ ir neatkarīgi un vienādi sadalīti (i.i.d.) attiecīgi no sadalījumiem $N(\mu_1; \sigma^2)$ un $N(\mu_2; \sigma^2)$, tad Stjūdenta t-tests ir optimāls tādā nozīmē, ka hipotēžu testam $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ pret $H_1 : \mu_1 > \mu_2$ tas ir maksimālās ticamības attiecības tests ar izmēru α [3, 9. nodaļa].

Tomēr nosacījums, ka novērotie dati ir precīzi normāli sadalīti, praktiskā situācijā ir reti sasniedzams. Dati var būt iegūti no asimetriska sadalījuma, smago astu sadalījuma vai tie var saturēt vienu vai vairākus *izlēcējus* (netipiskus novērojumus, kas izteikti atšķiras no datu vairuma). Izlēcēju vai smago astu klātbūtne palielina vidējās vērtības standartkļūdu, līdz ar to samazinot Stjūdenta testa jaudu. Ja sadalījumu asimetrijas pakāpes atšķiras, Stjūdenta testa rezultāti nav pareizi pat asimptotiski [7]. Bernards L. Velčs (*Bernard L. Welch*) [35] izstrādāja Stjūdenta testa modifikāciju, balstītu uz aptuvenajām brīvības pakāpēm, kas paredzēta normāli sadalītiem datiem ar dažādām dispersijām. Ja normalitāte nav spēkā, problēmas saglabājas arī tā sauktajam Velča testam.

Pieņemsim, ka $Y_i = (Y_{i1}, Y_{i2}, \ldots, Y_{in_i})$, $i = 1, \ldots, k$ ir izlases no neatkarīgām populācijām $F_1, \ldots, F_k$. Vidējo vērtību salīdzināšanai k izlašu gadījumā klasiski izmanto dispersiju analīzes (ANOVA) F-testu, kas balstīts uz pieņēmumu, ka F_i ir normālie sadalījumi ar vienādām dispersijām. Vispārzināms, ka ANOVA tests nespēj veikt savu uzdevumu, ja normalitātes pieņēmums neizpildās. B. L. Velčs [36] piedāvāja ANOVA F-testa versiju atšķirīgu dispersiju gadījumam, tomēr tas nav noturīgs pret novirzēm no normalitātes un izlēcējiem, īpaši, ja izlases ņemtas no sadalījumiem ar atšķirīgu asimetriju.

Empīriskās ticamības metodi (EL) ieviesa Ārts B. Ovens (*Art B. Owen*) 1988. gadā [20]. EL ir neparametriska statistikas metode, kas neprasa uzstādīt pieņēmumus par datu sadalījuma veidu. A. B. Ovens [20] parādīja, ka novērtētāja $\theta(F)$, kas izteikts kā funkcija no nezināma sadalījuma F, empīriskās ticamības attiecības statistikai asimptotiski ir spēkā hī kvadrātā sadalījums. Analoģiski parametriskajai maksimālās ticamības metodei, EL metode ļauj novērtēt parametrus, konstruēt hipotēžu testus un ticamības intervālus. Vienas izlases gadījumā vispārīgu EL metodi, kas balstīta uz gludiem novērtējošiem vienādojumiem, izstrādāja Dziņs Cjiņs un Džerijs Loless (*Jin Qin and Jerry Lawless*) [25] 1994. gadā. Junsuns Cjiņs un Linčens Džao (*Yongsong Qin and Lincheng Zhao*) [26] paplašināja EL metodi divu izlašu gadījumam viendimensionālu parametru starpībai. Jānis Valeinis u.c. [31] analizēja EL īpašības dažām divu izlašu problēmām un izstrādāja programmas *R* [27] bibliotēku *EL* [6]. A. B. Ovens izstrādāja EL ANOVA metodi k izlašu vidējo salīdzināšanai 1991. gadā [22]. Plašu pārskatu par EL metodēm var skatīt [23].

EL tiek definēta, konstruējot multinomiālu sadalījumu uz izlases novērojumu punktiem. Izlēcēju klātbūtne datos var izteikti pagarināt vidējās vērtības EL ticamības intervālus izlēcēju virzienā un attiecīgās intervālu novērtējumu pārklājuma varbūtības var izrādīties nepareizas [10]. A. B. Ovens [23] tika minējis divas pieejas, kā būtu iespējams izveidot robustu empīriskās ticamības metodi: pirmkārt, izmantojot novērtētājus $\theta(F)$, kas ir *robustāki nekā vidējā vērtība*, un otrkārt, aplūkojot *robustu ticamības funkciju*.

Šī pētījuma interešu centrā ir pirmā pieeja, t.i., aplūkot empīriskās ticamības metodi *robustiem novērtētājiem* un it īpaši *robustiem lokācijas parametra novērtētājiem*, kas raksturo datu centrālo punktu. Vārds „robusts” lietots nozīmē „nejutīgs pret nelielām novirzēm no pieņēmumiem” [15, p. 2]. Robustās statistikas galvenā problemātika ir sadalījuma robustums, t.i., statistisko metožu uzvedība, kad datu sadalījums nelielā mērā atšķirīgs no pieņemtā (parasti normālā) sadalījuma.

Robustās statistikas disciplīna attīstījās 20. gadsimta sešdesmitajos gados ar Džona V. Tūkija (*John W. Tukey*) un Pītera J. Hūbera (*Peter J. Huber*) darbiem. 1964. gadā P. J. Hūbers publicēja ietekmīgu rakstu „Robust Estimation of a Location Parameter” [14], kurā definēja *M-novērtētāju* klasi, kas zināmā mērā ir maksimālās ticamības novērtētāju (MLE) vispārinājums. Aplūko parametra θ novērtētāju $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$. P. J. Hūbers piedāvāja definēt $\hat{\theta}$, izmantojot vispārīgu ρ- vai ψ-funkciju

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta} \sum_{i=1}^{n} \rho(X_i, \theta) \text{ vai } \sum_{i=1}^{n} \psi(X_i, \theta) = 0,$$

kur otrais formulējums var tikt izmantots, ja ρ ir atvasināma pēc θ un $\psi = (\partial/\partial\theta)\rho(x, \theta)$.

P. J. Hūbers arī ieguva nosacījumus M-novērtētāju konsistencei un asimptotiskajai normalitātei un parādīja, ka normālā sadalījuma apkārtnē eksistē noteikts „optimālais” M-novērtētājs. Viņš aplūkoja piesārņoto sadalījumu klasi $P_\epsilon = (1 - \epsilon)\Phi + \epsilon H$, kur Φ ir normālā kumulatīvā sadalījuma funkcija, un H ir jebkura simetriska sadalījuma funkcija. Tad *Hūbera novērtētājs*, ko pie izvēlētas konstantes $c > 0$ definē ar funkciju

$$\psi(x) = \max(-c, \min(c, x)),$$

asimptotiski minimizē vislielāko dispersiju starp visiem translācijas ekvivariantiem lokācijas novērtētājiem. Frenks Hampels (*Frank Hampel*) u. c. [12] definēja gludināšanas principu vispārīga M-novērtētāja ψ-funkcijai, un parādīja, ka gludinātajiem novērtētājiem ir mazāka vidējā kvadrātiskā kļūda, nekā attiecīgajiem negludajiem novērtētājiem maza un vidēja apjoma izlasēs.

Nošķeltā vidējā vērtība ir vēl viens plaši zināms robusts lokācijas novērtētājs, kuru iegūst, aprēķinot izlases vidējo vērtību pēc tam, kad izslēgta fiksēta proporcija izlases ekstrēmo novērojumu. Kārena K. Jūena (*Karen K. Yuen*) [39] izstrādāja robustu testu divu populācijas nošķelto vidējo salīdzināšanai, balstoties uz t tipa statistiku.

Minētajiem robustajiem novērtētājiem ir izstrādātas empīriskās ticamības metodes vienas izlases gadījumam. A. B. Ovens parādīja, ka EL metodi var pielietot noteiktiem M-novērtētājiem, tajā skaitā Hūbera novērtētājam [20]. Attiecībā uz nošķelto vidējo vērtību, EL metodes pamatnosacījums ir novērojumu neatkarība, savukārt nošķeltā izlase veido atkarīgus novērojumus. Kā risinājumu Genšens Cjiņs un Miņs Zao (*Gengsheng Qin and Min Tsao)* [24] piedāvāja definēt EL attiecību tieši nošķeltajai izlasei un pierādīja, ka robežsadalījums šādā gadījumā ir mērogots hī kvadrātā sadalījums. Ar simulāciju eksperimenta palīdzību autori parādīja, ka asimetriskiem sadalījumiem nošķeltās vidējās vērtības EL ticamības intervāls ir precīzāks, nekā ticamības intervāls, kas balstīts uz normālo aproksimāciju.

Pētījuma mērķi

Promocijas darba mērķis ir attīstīt jaunas uz empīriskās ticamības funkciju balstītas metodes divu un vairāku populāciju salīdzināšanai, izmantojot robustus lokācijas parametra novērtētājus. Ņemot vērā, ka nošķeltajai vidējai vērtībai un Hūbera novērtētājam ir noderīgas robustas īpašības vienas izlases gadījumā, šie novērtētāji ir labi kandidāti jaunu robustu divu izlašu un ANOVA EL metožu izstrādei. Pētījuma uzdevumi ir šādi.

1. Izstrādāt empīriskās ticamības metodi divu gludinātu lokācijas parametra M-novērtētāju starpībai, izmantojot J. Cjiņa un L. Džao [26] pieeju. Kā speciālu gadījumu aplūkot gludināto Hūbera novērtētāju [12].

2. Izstrādāt empīriskās ticamības metodi divu populācijas nošķelto vidējo starpībai, vispārinot G. Cjiņa un M. Zao [24] rezultātus divu izlašu gadījumam, izmantojot [26] pieeju.

3. Izstrādāt uz EL balstītu ANOVA metodi vairāk kā divu populāciju nošķeltu vidējo salīdzināšanai, vispārinot G. Cjiņa un M. Zao [24], un A. B. Ovena [22] rezultātus.

4. Izstrādāt simulāciju eksperimentu, salīdzinot jaunizveidotās EL metodes robustu lokācijas parametru novērtētājiem ar plaši lietotām klasiskām un robustām metodēm.

5. Pētīt jaunizveidoto metožu pielietojumu datu piemēriem no reālām situācijām, salīdzinot ar plaši lietotām klasiskām un robustām metodēm.

Promocijas darba struktūra ir šāda. Pārskats par nepieciešamajiem priekšdarbiem dots darba pirmajās divās nodaļās. 1. nodaļā sniegta teorija par empīriskās ticamības metodi. Tiek īsi izklāstīta maksimālās ticamības metode, ieviesta empīriskās ticamības funkcija un izskaidrota EL novērtēšana, balstoties uz gludiem nenovirzītiem novērtējošiem vienādojumiem vienas un divu izlašu gadījumā. 2. nodaļā sniegta teorija par lokācijas parametra novērtēšanu robustā veidā. Tiek definēti M-novērtētāji, gludinātie M-novērtētāji un nošķeltā vidējā vērtība, kā arī sniegtas to īpašības.

Promocijas darba oriģinālie teorētiskie rezultāti sniegti 3. - 5. nodaļā. 3. nodaļā tiek aprakstīta EL metode divu M-novērtētāju starpībai. Tiek iegūti nosacījumi, kas atļauj konstruēt EL ticamības attiecību diviem vispārīgiem M-novērtētājiem, un parādīts, ka nosacījumi izpildās gludinātiem Hūbera novērtētājiem. 4. nodaļā tiek iegūta EL metode divu nošķeltu vidējo vērtību starpībai. 5. nodaļā tiek iegūts EL ANOVA tipa tests vairāk kā divu populāciju nošķelto vidējo vērtību salīdzināšanai.

6. nodaļā aprakstīti simulāciju un datu analīzes rezultāti. Tiek pētīts testu empīriskais līmenis un jauda, izlases ņemot no dažādiem teorētiskajiem sadalījumiem. Jaunieviestās EL metodes tiek salīdzinātas ar labi zināmām klasiskām un robustām metodēm. Noslēgumā sniegti promocijas darba secinājumi un tēzes.

Rezultātu aprobācija un autora ieguldījums

Promocijas darba pētījuma rezultāti ir prezentēti divpadsmit zinātniskajās konferencēs (skatīt pielikumu *Dalība konferencēs*) – vienpadsmit starptautiskās konferencēs **C1-C10, C12** un vienā nacionālā konferencē **C11**. Darba oriģinālie rezultāti ir tikuši publicēti trīs recenzētos *Scopus/SCIE* datu bāzēs indeksētos žurnālos (skatīt pielikumu *Autores publikācijas*). Māra Delesa-Vēliņa bija publikāciju galvenā autore, pierādīja asimptotiskos rezultātus, izstrādāja simulāciju pētījumu un veica datu analīzi, kā arī piedalījās publikāciju rakstīšanā un koriģēšanā.

1. nodaļa. Empīriskās ticamības metode

1.1 Maksimālās ticamības metode

1.1.1. Definīcija. [5, 315. lpp.] Pieņemsim, ka $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ ir neatkarīgu un vienādi sadalītu (i.i.d.) gadījuma lielumu izlase no populācijas ar varbūtību blīvuma funkciju (pdf) vai varbūtību masas funkciju (pmf) $f(x|\theta_1, \ldots, \theta_k)$, kur $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$, un $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ir novērotās izlases vērtības. Par *ticamības funkciju* sauc funkciju

$$L(\theta|\mathbf{x}) = L(\theta_1, \ldots, \theta_k|x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta_1, \ldots, \theta_k). \tag{1.1}$$

1.1.2. Definīcija. [5, 316. lpp.] Pieņemsim, ka katrai novērotai izlasei $\mathbf{x}$, $\hat{\theta}(\mathbf{x})$ ir parametra vērtība, pie kuras $L(\theta|\mathbf{x})$ sasniedz savu maksimumu kā funkcija no θ pie $\mathbf{x}$ fiksēta. *MLE novērtētājs parametram θ*, balstoties uz izlasi $\mathbf{X}$, ir $\hat{\theta}(\mathbf{X})$.

Pie noteiktiem funkcijas $f(x|\theta)$ regularitātes nosacījumiem [5, 516. lpp.], MLE ir funkcionāli invariants, konsistents, asimptotiski normāls un efektīvs novērtētājs.

1.1.3. Definīcija. [5, 375. lpp.] Ticamības attiecības testa statistika hipotēžu pārbaudei $H_0 : \theta \in \Theta_0$ pret $H_1 : \theta \in \Theta_0^c$ ir formā

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{\sup_{\Theta_0} L(\theta|\mathbf{x})}{\sup_{\Theta} L(\theta|\mathbf{x})}. \tag{1.2}$$

Par *ticamības attiecības testu* sauc jebkuru testu ar noraidīšanas apgabalu R formā $R = \{\mathbf{x} : \lambda(\mathbf{x}) \leq c\}$, kur $0 \leq c \leq 1$.

1.1.1. Teorēma. *[5, 10.3.3. teorēma] (Vilksa teorēma) Pieņemsim, ka $X_1, \ldots, X_n$ ir gadījuma izlase no populācijas ar pdf vai pmf $f(x|\theta)$. Pie noteiktiem regularitātes nosacījumiem funkcijai $f(x|\theta)$ [5, 375. lpp.], ja $\theta \in \Theta_0$ un $n \to \infty$,*

$$-2 \log \lambda(\mathbf{X}) \xrightarrow{d} \chi^2_{q-p},$$

kur hī kvadrātā sadalījuma brīvības pakāpju skaitu uzdod $\theta \in \Theta$ brīvo parametru skaits q un $\theta \in \Theta_0$ brīvo parametru skaits p, kur $p < q$.

Pastāv vispārēja ekvivalence starp hipotēžu testu un intervālu novērtēšanu, kas ļauj konstruēt intervālu novērtētāju ar *testa inversijas* palīdzību.

1.1.2. Teorēma. *[5, 9.2.2. teorēma] Pieņemsim, ka katram $\theta_0 \in \Theta$, $A(\theta_0)$ ir α līmeņa testa $H_0 : \theta = \theta_0$ pieņemšanas reģions. Tad katram $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ aplūko kopu $C(\mathbf{x})$ no parametru telpas, kur*

$$C(\mathbf{x}) = \{\theta_0 | \mathbf{x} \in A(\theta_0)\}.$$

Tad gadījuma kopa $C(\mathbf{X})$ ir $1-\alpha$ līmeņa ticamības reģions. Un otrādi, pieņemsim, ka $C(\mathbf{X})$ ir $1-\alpha$ līmeņa ticamības reģions. Tad jebkuram $\theta_0 \in \Theta$ aplūko

$$A(\theta_0) = \{\mathbf{x} | \theta_0 \in C(\mathbf{x})\}.$$

Tad $A(\theta_0)$ ir pieņemšanas reģions α līmeņa testam hipotēžu pārbaudei $H_0 : \theta = \theta_0$.

1.2 Empīriskās ticamības metode

Detalizēts izklāsts par empīriskās ticamības metodi atrodams [20]. Varbūtību sadalījuma funkcijai F apzīmēsim $F(x-) = P(X < x)$, līdz ar to, $P(X = x) = F(x) - F(x-)$.

1.2.1. Definīcija. [23, 6. lpp.] Pieņemsim, ka $X_1, \ldots, X_n$ ir i.i.d. gadījuma lielumi ar nezināmu sadalījumu F. Par F *empīrisko ticamības funkciju* sauc

$$L(F) = \prod_{i=1}^{n} (F(X_i) - F(X_i-)) = \prod_{i=1}^{n} p_i, \tag{1.3}$$

kur $p_i = P(X = X_i)$ un $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

1.2.1. Teorēma. *[23, 2.1. teorēma] Pieņemsim, ka $X_1, \ldots, X_n \in \mathbb{R}$ ir i.i.d. gadījuma lielumi ar nezināmu sadalījumu F_0 un ka $F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I_{X_i \leq x}$, $-\infty < x < \infty$, ir šo gadījuma lielumu empīriskais kumulatīvais sadalījums, un F ir jebkurš sadalījums. Ja $F \neq F_n$, tad $L(F) < L(F_n)$.*

1.2.2. Definīcija. [23, 10. lpp.] Par *sadalījuma F empīrisko (neparametrisko) ticamības attiecību* sauc

$$R(F) = \frac{L(F)}{L(F_n)} = \prod_{i=1}^{n} np_i.$$

Pieņemsim, ka mūs interesē parametrs θ, uzdots ar reālvērtīgu funkcionāli T, kas definēts varbūtību sadalījumiem: $\theta = T(F)$, $F \in \mathcal{F}$, kur $\mathcal{F}$ sadalījumu kopa.

1.2.3. Definīcija. [23, 11. lpp.] *Profila empīriskās ticamības attiecību* uzdod izteiksme

$$\mathcal{R}(\theta) = \sup\{R(F) | T(F) = \theta, F \in \mathcal{F}\}. \tag{1.4}$$

Empīriskās ticamības tests noraida hipotēzi $H_0 : T(F_0) = \theta_0$, ja $\mathcal{R}(\theta_0) < r_0$ kādai sliekšņa vērtībai r_0. Parametra $\theta_0 = T(F_0)$ empīriskās ticamības intervāls ir formā $\{\theta | \mathcal{R}(\theta) \geq r_0\}$.

1.2.1. Piemērs. Aplūko hipotēžu testu par populācijas vidējo vērtību $\mu^* = E_F X_i$:

$$H_0 : \mu = \mu^*, \; H_1 : \mu \neq \mu^*.$$

Izsakot funkcionālā formā, $\mu^* = \int x dF(x)$, kur $F \in \mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ klase satur multinomiālus sadalījumus, kas piešķir nenegatīvus svarus izlases vērtībām. Fiksētam μ^* nepieciešams optimizēt $F = (p_1, \ldots, p_n)$, kur $p_i \geq 0$ un $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. No funkcionālās formas pie F seko $\sum_{i=1}^{n} p_i X_i = \mu^*$, un EL profila ticamības attiecība vidējai vērtībai ir formā

$$\mathcal{R}(\mu) = \sup_p \left\{ \prod_{i=1}^{n} np_i \,|\, \sum_{i=1}^{n} p_i X_i = \mu^*, p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \right\}. \tag{1.5}$$

1.2.2. Teorēma. *[23, 2.2. teorēma] Pieņemsim, ka $X_1, \ldots, X_n$ ir i.i.d. gadījuma lielumi ar sadalījuma funkciju F_0, $\mu_0 = E_{F_0} X_i$ un $0 < DX_i < \infty$. Tad*

$$-2 \log \mathcal{R}(\mu_0) \xrightarrow{d} \chi_1^2, \quad \textit{kad } n \to \infty.$$

$1-\alpha$ empīriskās ticamības intervālu uzdod kopa

$$C_\alpha = \{\mu \in \mathbb{R} | -2\log \mathcal{R}(\mu) \le \chi^2_{1,1-\alpha}\},$$

kur $\chi^2_{1,1-\alpha}$ apzīmē χ^2_1 sadalījuma $1-\alpha$ kvantili. C_α sasniedz nominālo pārklājumu asimptotiski, t.i.,

$$P(\mu_0 \in C_\alpha) \to (1-\alpha), \quad \text{kad } n \to \infty.$$

1.3 Empīriskās ticamības metode divu izlašu gadījumā

Empīriskās ticamības metodi divu viendimensionālu parametru starpībai izstrādāja J. Cjiņs un L. Džao [26]. Aplūko divu izlašu problēmu, kur $X_1, \ldots, X_{n_1}$ ir i.i.d. gadījuma lielumi ar nezināmu sadalījuma funkciju F_1, un $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ ir i.i.d. gadījuma lielumi ar nezināmu sadalījuma funkciju F_2. Pieņemsim, ka θ_0 un θ_1 ir viendimensionāli parametri, kas saistīti attiecīgi ar sadalījuma funkcijām F_1 un F_2. Interesējošais parametrs ir starpība $\Delta_0 = \theta_1 - \theta_0$. Pieņemsim, ka informācija par F_1, F_2, θ_0 un θ_1 ir uzdota ar divām novērtējošām funkcijām $w_1(X, \theta_0, \Delta_0)$ un $w_2(Y, \theta_0, \Delta_0)$, kam izpildās nosacījumi

$$E_{F_1} w_1(X, \theta_0, \Delta_0) = 0, \; E_{F_2} w_2(Y, \theta_0, \Delta_0) = 0, \tag{1.6}$$

kur Δ_0 ir interesējošā parametra patiesā vērtība, bet θ_0 ir traucējošais parametrs.

1.3.1. Piemērs. Vidējo vērtību starpība. Apzīmē $\theta_0 = \int x dF_1(x)$, $\theta_1 = \int y dF_2(y)$ un $\Delta_0 = \int y dF_2(y) - \int x dF_1(x)$. Novērtējošās funkcijas uzdod

$$w_1(X, \theta_0, \Delta_0) = X - \theta_0, \quad w_2(Y, \theta_0, \Delta_0) = Y - \theta_0 - \Delta_0.$$

1.3.2. Piemērs. Sadalījuma funkciju starpība. Fiksētam t_0, kur $0 < t_0 < 1$, aplūko $\theta_0 = F_1(t_0)$, $\theta_1 = F_2(t_0)$, un $\Delta_0 = F_2(t_0) - F_1(t_0)$. Tad

$$w_1(X, \theta_0, \Delta_0) = I_{X \le t_0} - \theta_0, \quad w_2(Y, \theta_0, \Delta_0) = I_{Y \le t_0} - \theta_0 - \Delta_0.$$

Divu izlašu gadījumā empīriskās ticamības funkcija tiek definēta formā

$$L(F_1, F_2) = \prod_{i=1}^{n_1} (F_1(X_i) - F_1(X_i-)) \prod_{j=1}^{n_2} (F_2(Y_j) - F_2(Y_j-)) = \prod_{i=1}^{n_1} p_i \prod_{j=1}^{n_2} q_j, \tag{1.7}$$

kur $p_i = P(X = X_i)$ un $q_j = P(Y = Y_i)$. $L(F_1, F_2)$ maksimālā vērtība ir $n_1^{-n_1} n_2^{-n_2}$, t.i., (1.7) sasniedz maksimumu, kad F_1 un F_2 ir attiecīgās empīriskās kumulatīvā sadalījuma funkcijas F_{n_1} un F_{n_2}. Līdz ar to EL profila ticamības attiecības funkcija ir formā

$$\mathcal{R}(\Delta, \theta) = \sup_{p,q} \left\{ \prod_{i=1}^{n_1} n_1 p_i \prod_{j=1}^{n_2} n_2 q_j \,|\, \sum_{i=1}^{n_1} p_i w_i(X_i, \theta, \Delta) = 0, \sum_{j=1}^{n_2} q_j w_2(Y_j, \theta, \Delta) = 0 \right\}, \tag{1.8}$$

kur $p_i \ge 0$, $\sum_{i=1}^{n_1} p_i = 1$, $q_j \ge 0$ un $\sum_{i=1}^{n_2} q_j = 1$. Izteiksmes (1.8) atrisinājumus p_i, q_j fiksētām Δ un θ vērtībām var iegūt, izmantojot Lagranža reizinātāju metodi (sīkāk skatīt [26]), un atrisinājumi ir

$$p_i = \frac{1}{n_1(1+\lambda_1(\Delta,\theta)w_1(X_i,\theta,\Delta))},\ i=1,\dots,n_1, \tag{1.9}$$

$$q_j = \frac{1}{n_2(1+\lambda_2(\Delta,\theta)w_2(Y_j,\theta,\Delta))},\ j=1,\dots,n_2. \tag{1.10}$$

Lagranža rezinātājus $\lambda_1 = \lambda_1(\Delta,\theta)$ un $\lambda_2 = \lambda_2(\Delta,\theta)$ var noteikt, atrisinot vienādojumus

$$\sum_{i=1}^{n_1} \frac{w_1(X_i,\theta,\Delta)}{1+\lambda_1(\Delta,\theta)w_1(X_i,\theta,\Delta)} = 0,\ \sum_{j=1}^{n_2} \frac{w_2(Y_j,\theta,\Delta)}{1+\lambda_2(\Delta,\theta)w_2(Y_j,\theta,\Delta)} = 0. \tag{1.11}$$

Ievietojot p_i un q_j no (1.9) - (1.10) izteiksmē (1.8) un logaritmējot, iegūst EL profila logaritmisko ticamības funkciju

$$\log\mathcal{R}(\Delta,\theta) = -\sum_{i=1}^{n_1}\log(1+\lambda_1(\Delta,\theta)w_1(X_i,\theta,\Delta)) \\ -\sum_{j=1}^{n_2}\log(1+\lambda_2(\Delta,\theta)w_2(Y_j,\theta,\Delta)). \tag{1.12}$$

Lai iegūtu atrisinājumu $\hat{\theta}(\Delta)$, pie kura izteiksme $\mathcal{R}(\Delta,\theta)$ sasniedz maksimumu, aplūko vienādojumu $(\partial/\partial\theta)\{\log\mathcal{R}(\Delta,\theta)\} = 0$, un iegūst

$$\sum_{i=1}^{n_1} \frac{\lambda_1(\Delta,\theta)\alpha_1(X_i,\theta,\Delta)}{1+\lambda_1(\Delta,\theta)w_1(X_i,\theta,\Delta)} + \sum_{j=1}^{n_2} \frac{\lambda_2(\Delta,\theta)\alpha_2(Y_j,\theta,\Delta)}{1+\lambda_2(\Delta,\theta)w_2(Y_j,\theta,\Delta)} = 0, \tag{1.13}$$

kur $\alpha_1 = \partial w_1/\partial\theta$ un $\alpha_2 = \partial w_2/\partial\theta$.

1.3.1. Pieņēmums. [26, p. 26]

(C1) $\theta_0 \in \Omega$, kur Ω ir vaļējs intervāls.

(C2) $E_{F_1}w_1^2(X,\theta,\Delta) > 0$ un $E_{F_2}w_2^2(Y,\theta,\Delta) > 0$, $\alpha_1(X,\theta,\Delta)$ un $\alpha_2(Y,\theta,\Delta)$ ir nepārtrauktas θ_0 apkārtnē; $\alpha_1(X,\theta,\Delta)$ un $w_1^3(X,\theta,\Delta)$ ir ierobežotas θ_0 apkārtnē ar integrējamu funkciju $G_1(X)$; $\alpha_2(Y,\theta,\Delta)$ un $w_2^3(Y,\theta,\Delta)$ ir ierobežotas θ_0 apkārtnē ar integrējamu funkciju $G_2(Y)$; un $E_{F_1}\alpha_1(X,\theta,\Delta)$ un $E_{F_2}\alpha_2(Y,\theta,\Delta)$ nav nulle.

(C3) $n_2/n_1 \to k$ (kad $n_1, n_2 \to \infty$) un $0 < k < \infty$.

1.3.1. Teorēma. *[26, 1. Teorēma] Pie 1.3.1. pieņēmuma izteiksmei* (1.13) *eksistē atrisinājums $\hat{\theta}(\Delta)$, kas ir konsistents θ_0 novērtētājs, $\mathcal{R}(\Delta,\theta)$ sasniedz maksimālo vērtību pie $\hat{\theta}(\Delta)$, un*

$$-2\log\mathcal{R}(\Delta_0,\hat{\theta}(\Delta_0)) \xrightarrow{d} \chi_1^2, \quad kad\ n_1, n_2 \to \infty.$$

Teorēmas pierādījums atrodams [26]. Parametra Δ_0 ticamības intervālus var iegūt, apvēršot hipotēžu pārbaudes rezultātu, un tie ir formā $\{\Delta \,|\, \mathcal{R}(\Delta,\hat{\theta}(\Delta)) > c\}$, kur konstanti c iegūst, izmantojot 1.3.1. teorēmas rezultātu.

2. nodaļa. Robusta lokācijas parametra novērtēšana

Šajā nodaļā tiks aplūkots *lokācijas modelis* un ar to saistītie *lokācijas parametra novērtētāji.* Tiks definēti lokācijas M-novērtētāji (piemēram, Hūbera novērtētājs) un nošķeltā vidējā vērtība, kā arī sniegtas dažas šo novērtētāju īpašības. Detalizēts izklāsts par robustiem lokācijas novērtētājiem atrodams [18].

2.1 Lokācijas M-novērtētāji

2.1.1. Definīcija. [18, 17. lpp.] Pieņemsim, ka $X_1, \dots X_n$ ir i.i.d gadījuma lielumi ar sadalījuma funkciju F, kas atkarīgi no nezināmā parametra θ, un saistība starp X_i un θ uzdota ar modeli

$$X_i = \theta + u_i,\ i = 1, \dots, n, \tag{2.1}$$

kur kļūdas u_i ir i.i.d gadījuma lielumi ar sadalījuma funkciju F_0, un $F_0(u) = 1 - F_0(-u)$. Modeli (2.1) sauc par *lokācijas modeli*, un θ sauc par *lokācijas parametru.*

2.1.2. Definīcija. [18, 25. lpp] Aplūko lokācijas modeli (2.1). Izvēlētai funkcijai ρ *lokācijas parametra θ M-novērtētāju* definē ar sakarību

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta} \sum_{i=1}^{n} \rho(X_i - \theta). \tag{2.2}$$

Ja ρ eksistē atvasinājums attiecībā pret θ, kur $\psi(x, \theta) = (\partial/\partial\theta)\rho(x, \theta)$, tad $\hat{\theta}$ ir atrisinājums vienādojumam

$$\sum_{i=1}^{n} \psi(X_i - \theta) = 0. \tag{2.3}$$

2.1.1. Piemērs. *Lokācijas parametra maksimālās ticamības novērtētājs.* Ievēro, ka izvēloties $\rho(x, \theta) = -\log f_\theta(x - \theta)$ un $\psi(x, \theta) = -(\partial/\partial\theta) \log f_\theta(x - \theta)$ izteiksmēs (2.2) un (2.3), iegūst blīvuma funkcijas f_θ lokācijas parametra θ maksimālās ticamības novērtētāju. Ja F_θ sadalījums ir $N(0; 1)$, neņemot vērā konstanti, $\rho(x, \theta) = (x - \theta)^2/2$ un $\psi(x, \theta) = x - \theta$, un iegūst, ka θ ir vidējā vērtība. Ja F_θ ir eksponenciālais sadalījums ar blīvuma funkciju $f_\theta(x) = 1/2 \exp(-|x|)$, tad $\rho(x, \theta) = |x - \theta|$, un iegūst, ka θ ir mediāna.

2.1.2. Piemērs. *Hūbera novērtētājs.* Izvēlētai pozitīvai konstantei k, Hūbera novērtētāju definē ar izteiksmi (2.2) vai (2.3), kur

$$\rho = \rho_k(x) = \begin{cases} 2kx - k^2, & x > k \\ x^2, & -k \le x \le k \\ -2kx - k^2, & x < -k \end{cases} \tag{2.4}$$

un $\partial\rho/\partial\theta = 2\psi_k(x)$, kur

$$\psi = \psi_k(x) = \begin{cases} k, & x > k \\ x, & -k \le x \le k \\ -k, & x < -k. \end{cases} \tag{2.5}$$

Hūbera novērtētājs ir maksimālās ticamības novērtētājs tā sauktajam *Hūbera visnelabvēlīgākajam sadalījumam*, kuru uzdod blīvuma funkcija

$$f_k(x) = \begin{cases} (1-\epsilon)\phi(k)\exp(-k(x-k)), & x > k \\ (1-\epsilon)\phi(x), & -k \le x \le k \\ (1-\epsilon)\phi(k)\exp(k(x+k)), & x < -k, \end{cases} \tag{2.6}$$

kur k un ϵ ir saistīti ar sakarību

$$2\phi(k)/k - 2\Phi(-k) = \epsilon/(1-\epsilon), \tag{2.7}$$

kur ϕ un Φ apzīmē attiecīgi standartnormālā gadījuma lieluma blīvuma un sadalījuma funkcijas.

Robežgadījumā, kad $k \to 0$, iegūst mediānu, bet robežgadījumā, kad $k \to \infty$, iegūst vidējo vērtību. P. J. Hūbers [14] pierādīja, ka šis novērtētājs asimptotiski minimizē vislielāko dispersiju piesārņotu sadalījumu klasē $P_\epsilon = (1-\epsilon)\Phi + \epsilon H$, kur H ir kāda simetriska sadalījuma funkcija. Publikācijā [14] tika apgalvots, ka Hūbera novērtējumu būtiski neietekmē k konstantes izvēle; jebkura k vērtība starp 1 un 2 sniedz apmierinošus rezultātus, ja piesārņojuma līmenis $\epsilon < 0,2$. Bieži tiek piedāvāts lietot vērtību $k = 1,35$, ar kuru pie normālā sadalījuma Hūbera novērtētāja efektivitāte ir 95 % attiecībā pret izlases vidējo vērtību [18, 23].

Jebkurš lokācijas M-novērtētājs $\hat{\theta}$ formā (2.2) vai (2.3) ir ekvivariants pret translāciju [18], tomēr tas var nebūt ekvivariants pret mērogošanu. Mēroga ekvivariances neesamība var izraisīt problēmu, ka novērtējums kļūst lielā mērā atkarīgs no izvēlētās mērījumu vienības.

2.1.3. Definīcija. *Mēroga ekvivariants lokācijas parametra θ M-novērtētājs ar iepriekš novērtētu dispersiju* tiek definēts kā atrisinājums vienādojumam

$$\sum_{i=1}^{n} \psi\left(\frac{X_i - \theta}{\hat{\sigma}}\right) = 0, \tag{2.8}$$

kur $\hat{\sigma}$ ir iepriekš izskaitļots dispersijas novērtējums.

Intuitīvi var spriest, ka novērtētājam $\hat{\sigma}$ izteiksmē (2.8) arī jābūt robustam. Par robustu novērtētāju $\hat{\sigma}$ bieži izvēlas tā saukto *normalizēto mediāno absolūto novirzi no mediānas.*

2.1.4. Definīcija. [18, 36. lpp.] *Mediānā absolūtā novirze no mediānas (MAD)* tiek definēta kā

$$\mathrm{MAD}(X) = \mathrm{MAD}(X_1, \ldots, X_n) = \mathrm{Med}\{|X - \mathrm{Med}(X)|\}, \tag{2.9}$$

kur Med apzīmē izlases mediānu. *Normalizētā MAD (MADN)* tiek definēta kā

$$\mathrm{MADN}(X) = \mathrm{MAD}(X)/0,6745,$$

kur konstante $0,6745$ izvēlēta, pamatojoties uz faktu, ka standartnormālā sadalījuma gadījumā $\mathrm{MAD} = 0,6745$, līdz ar to $\mathrm{MADN} = 1$ un MADN sakrīt ar izlases standartnovirzi.

Pieņemsim, ka $\hat{\sigma}_n$ ir dispersijas novērtētājs jebkuram n un ka vienādojumam

$$\sum_{i=1}^{n} \psi\left(\frac{X_i - \theta}{\hat{\sigma}_n}\right) = 0$$

eksistē viens vienīgs atrisinājums $\theta = \hat{\theta}_n$.

2.1.1. Pieņēmums. (M-novērtētāja ar iepriekš novērtētu dispersiju konsistence) [18, 385. lpp.]

(A1) ψ ir monotona un ierobežota funkcija, kurai eksistē ierobežots atvasinājums.

(A2) Eksistē σ, kam spēkā $\hat{\sigma}_n \xrightarrow{p} \sigma$.

(A3) Vienādojumam $\mathrm{E}(\psi(X_i - \theta)/\sigma) = 0$ ir viens vienīgs atrisinājums θ_0.

2.1.1. Teorēma. *[18, 10.12. Teorēma] Pie refass:Mest.sc.consist. pieņēmuma*

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta_0.$$

Apzīmēsim $u_i = X_i - \theta_0$ un

$$a = \mathrm{E}\psi^2\left(\frac{u_i}{\sigma}\right),\ b = \mathrm{E}\psi'\left(\frac{u_i}{\sigma}\right),\ c = \mathrm{E}\psi\left(\frac{u_i}{\sigma}\right)\psi'\left(\frac{u_i}{\sigma}\right). \tag{2.10}$$

2.1.2. Pieņēmums. (M-novērtētāja ar iepriekš novērtētu dispersiju asimptotiskā normalitāte) [18, 385. lpp.]

(A1) Izteiksmē (2.10) definētie lielumi eksistē un $b \neq 0$.

(A2) $\sqrt{n}(\hat{\sigma}_n - \sigma)$ konverģē uz kādu sadalījumu.

(A3) $c = 0$.

2.1.2. Teorēma. *[18, 10.13. Teorēma] Pie 2.1.2. pieņēmuma*

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} N(0; \nu),\ kur\ \nu = \sigma^2 \frac{a}{b^2}.$$

2.1.5. Definīcija. [12, 325. lpp.] Aplūko i.i.d. gadījuma lielumus $X_1, \ldots, X_n$ ar sadalījumu $F_{\theta,\sigma}$ un unimodālu varbūtību blīvuma funkciju

$$f_{\theta,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x - \theta}{\sigma}\right),$$

un aplūko no vispārīga M-novērtētāja ψ-funkcijas konstruētu funkciju

$$\tilde{\psi}(x) = \int \psi(x+u)dQ_n(u), \tag{2.11}$$

kur Q_n ir sākotnējā negludinātā M-novērtētāja sadalījums pie n i.i.d novērojumiem no izvēlētā sadalījuma $F_{\theta,\sigma}$. Par lokācijas parametra θ *gludināto M-novērtētāju* sauc atrisinājumu t vienādojumam

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{\psi}\left(\frac{X_i - t}{\sigma}\right) = 0. \tag{2.12}$$

2.1.1. Piezīme. *Izmantojot 2.1.2. teorēmas rezultātu par M-novērtētāja asimptotisko normalitāti, sadalījumu Q_n var aproksimēt ar $N(0; V/n)$, kur V ir sākotnējā negludā M-novērtētāja asimptotiskā dispersija. Maksimālās ticamības novērtētāja gadījumā par Q_n var izvēlēties sadalījumu, pie kura šis novērtētājs ir iegūts. Hūbera novērtētājam šis sadalījums ir Hūbera visnelabvēlīgākais sadalījums ar blīvuma funkciju f_k (2.6).*

2.1.1. Apgalvojums. *[12, 326. lpp.] Izvēloties izteiksmē* (2.11) *par Q_n blīvuma funkciju f_k no izteiksmes* (2.6)*, $\tilde{\psi}$-funkciju, kas definē gludināto Hūbera novērtētāju, var izteikt atklātā formā*

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_k(x) = {} & k\Phi\left(\frac{x-k}{\sigma_n}\right) - k\left(1 - \Phi\left(\frac{x+k}{\sigma_n}\right)\right) \\ & + x\left(\Phi\left(\frac{x+k}{\sigma_n}\right) - \Phi\left(\frac{x-k}{\sigma_n}\right)\right) + \sigma_n\left(\phi\left(\frac{x+k}{\sigma_n}\right) - \phi\left(\frac{x-k}{\sigma_n}\right)\right),\end{aligned} \tag{2.13}$$

kur $\sigma_n = \sqrt{V/n}$ un k ir pielāgošanas konstante Hūbera novērtētājam (2.5).

2.2 Nošķeltā vidējā vērtība

2.2.1. Definīcija. [24, 2199. lpp.] Pieņemsim, ka $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ir i.i.d. gadījuma izlase no populācijas ar sadalījumu F_0 un ka $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ ir šīs izlases sakārtota statistika. Par *nošķelto izlases vidējo vērtību* sauc

$$\bar{X}_{\alpha\beta} = \frac{1}{m}\sum_{i=r}^{s} X_{(i)}, \tag{2.14}$$

kur $0 \le \alpha < 1/2$, $0 \le \beta < 1/2$ ir šķelšanas proporcijas attiecīgi no kreisās un no labās puses, $r = \lfloor n\alpha \rfloor + 1$, $s = n - \lfloor n\beta \rfloor$, un $m = n - \lfloor n\alpha \rfloor - \lfloor n\beta \rfloor$.

Nošķeltās vidējās vērtības asimptotisko sadalījumu ieguva S. Stiglers [28]. Apzīmēsim

$$A = F_0^{-1}(\alpha) - F_0^{-1}(\alpha-) \text{ un } B = F_0^{-1}(1-\beta) - F_0^{-1}((1-\beta)-). \tag{2.15}$$

Lielumi A un B raksturo F_0^{-1} lēcienus šķelšanas punktos. Apzīmē $\xi_p := F_0^{-1}(p)$, kur $0 < p < 1$, un definē sadalījuma funkciju $H(x)$, kas raksturo nošķeltu F_0 sadalījumu:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < \xi_\alpha \\ \frac{F_0(x)-\alpha}{1-\alpha-\beta}, & \xi_\alpha \le x \le \xi_{1-\beta} \\ 1, & x > \xi_{1-\beta}. \end{cases} \tag{2.16}$$

Ar $\mu_{\alpha\beta}$ un $\sigma^2_{\alpha\beta}$ apzīmēsim attiecīgi sadalījuma H matemātisko cerību un dispersiju.

2.2.1. Teorēma. *[28, 473. lpp.] Pieņemsim, ka* $0 < \alpha < 1 - \beta < 1$ *un* $n \to \infty$. *Tad*

$$\sqrt{n}(\bar{X}_{\alpha\beta} - \mu_{\alpha\beta}) \xrightarrow{d} W, \text{ kur}$$

$$W = \frac{1}{1-\alpha-\beta}\left[Z + (\xi_\alpha - \mu_{\alpha\beta})Z_1 + (\xi_{1-\beta} - \mu_{\alpha\beta})Z_2 - A\max(0, Z_1) + B\max(0, Z_2)\right],$$

A un B ir lielumi, kas definēti izteiksmē (2.15), gadījuma lielumam Z ir sadalījums $N(0;(1-\alpha-\beta)\sigma^2_{\alpha\beta})$, Z ir neatkarīgs no gadījuma vektora (Z_1, Z_2), un (Z_1, Z_2) ir daudzdimensiju normālais sadalījums $N(0; C)$, kur

$$C = \begin{pmatrix} \alpha(1-\alpha) & -\alpha\beta \\ -\alpha\beta & \beta(1-\beta) \end{pmatrix}.$$

2.2.1. teorēmas pierādījums atrodams [28] vai [1].

2.2.1. Piezīme. *Ja 2.2.1. teorēmā $A = 0$ un $B = 0$ (t.i., F_0 kvantiles, kas atbilst šķelšanas proporcijām, ir nosakāmas viennozīmīgi), tad W asimptotiskais sadalījums vienkāršojas. Tādā gadījumā $EW = 0$ un*

$$DW = \frac{1}{(1-\alpha-\beta)^2}\Big(\sigma^2_{\alpha\beta} + \alpha(1-\alpha)(\xi_\alpha - \mu_{\alpha\beta})^2 - 2\alpha\beta(\xi_\alpha - \mu_{\alpha\beta})(\xi_{1-\beta} - \mu_{\alpha\beta}) + \beta(1-\beta)(\xi_{1-\beta} - \mu_{\alpha\beta})^2\Big) =: \tau^2_{\alpha\beta},$$

tātad $\sqrt{n}(\bar{X}_{\alpha\beta} - \mu_{\alpha\beta}) \xrightarrow{d} N(0; \tau^2_{\alpha\beta})$.

3. nodaļa. Empīriskās ticamības metode divu lokācijas M-novērtētāju starpībai

Šajā nodaļā aprakstīti rezultāti divu izlašu problēmai par divu M-novērtētāju starpību. Šajā nodaļā sniegtie oriģinālie rezultāti ir publicēti M. Delesas-Vēliņas u. c. rakstā [33]. A. B. Ovens [20] ieguva nosacījumus, pie kuriem iespējams konstruēt empīriskos ticamības intervālus M-novērtētājiem, un parādīja, ka šie nosacījumi izpildās Hūbera novērtētājam. Tomēr 1.3. nodaļā aprakstītā divu izlašu EL metode nav tieši pielietojama Hūbera novērtētājam, jo tam nav spēkā 1.3.1. pieņēmuma nosacījums (C1), kas pieprasa, lai novērtējošajai funkcijai eksistētu nepārtraukts atvasinājums. Tāpēc tiks izmantots 2. nodaļā aprakstītais M-novērtētāja ψ-funkcijas gludināšanas princips.

2. nodaļā tika minēts, ka M-novērtētājs, kas definēts ar sakarību (2.2) vai (2.3), nav mēroga ekvivariants, līdz ar to novērtējums ir lielā mērā atkarīgs no izvēlētajām mērījumu vienībām. Tāpēc vēlams izmantot mēroga ekvivariantus M-novērtētājus, kas uzdoti ar izteiksmi (2.8). Tomēr jāņem vērā, ka praktiskās situācijās mēroga parametra patiesā vērtība σ izteiksmē (2.8) nav zināma. EL maksimizācijas problēmā nezināmais mēroga parametrs tiek interpretēts kā papildu traucējošais parametrs. Darbā tiks izmantota *plug-in* empīriskā ticamība, kas ļauj novērtējošajos vienādojumos iekļaut potenciāli bezgalīgas dimensijas traucējošos parametrus. *Plug-in* empīrisko ticamību vienas izlases gadījumam apraksīja Nīlss L. Jorts (*Nils L. Hjort*) u. c. [13]. J. Valeinis [30] vispārināja *plug-in* EL metodes nosacījumus divu izlašu gadījumam.

3.1 Galvenie rezultāti

Aplūko 1.3. nodaļā aprakstīto divu izlašu problēmu: $X_1, \dots, X_{n_1}$ ir i.i.d. gadījuma lielumi ar nezināmu sadalījumu F_1 un $Y_1, \dots, Y_{n_2}$ ir i.i.d. gadījuma lielumi ar nezināmu sadalījumu F_2, un mēs interesējamies par divu izlašu X un Y M-novērtējumu θ_0 un θ_1 starpību. Tad novērtējošās funkcijas (1.6) - (1.6) ir formā

$$\begin{aligned} w_1(X, \Delta_0, \theta_0, \sigma_1^0, \sigma_2^0) &= \psi\left(\frac{X-\theta_0}{\sigma_1^0}\right), \qquad (3.1)\\ w_2(Y, \Delta_0, \theta_0, \sigma_1^0, \sigma_2^0) &= \psi\left(\frac{Y-\Delta_0-\theta_0}{\sigma_2^0}\right), \end{aligned}$$

kur ψ ir vispārīga M-novērtētāja (2.8) ψ-funkcija, σ_1 un σ_2 ir attiecīgi izlašu X un Y mēroga novērtējumi ar patiesajām vērtībām σ_1^0 un σ_2^0 un θ apzīmē izlases X lokācijas novērtējumu, kura patiesā vērtība ir θ_0.

1.3. nodaļā aprakstītā divu izlašu problēma paredz fiksētas novērtējošās funkcijas w_1 un w_2, bet (3.1) satur traucējošos parametrus θ, σ_1, σ_2 un netieši V_1 un

V_2. Definē profila empīriskās ticamības funkciju

$$\mathcal{R}(\Delta,\theta,\sigma_1,\sigma_2) = n_1^{n_1} n_2^{n_2} \sup_{p,q} \Bigg\{ \prod_{i=1}^{n_1} p_i \prod_{j=1}^{n_2} q_j \,|\, p_i \geq 0, q_j \geq 0, \sum_{i=1}^{n_1} p_i = 1,$$
$$\sum_{j=1}^{n_2} q_j = 1, \sum_{i=1}^{n_1} p_i \psi\left(\frac{X_i-\theta}{\sigma_1}\right) = 0, \sum_{j=1}^{n_2} q_j \psi\left(\frac{Y_j-\Delta-\theta}{\sigma_2}\right) = 0 \Bigg\}. \quad (3.2)$$

(3.2) eksistē viens vienīgs atrisinājums pie nosacījuma, ka 0 pieder vienlaikus punktu $w_1(X_i,\Delta,\theta,\sigma_1,\sigma_2)$ un $w_2(Y_j,\Delta,\theta,\sigma_1,\sigma_2)$ izliektajai čaulai. Izteiksmes (3.2) maksimumu var atrast, izmantojot Lagranža reizinātāju metodi, un reizinātāji ir atkarīgi ne tikai no parametra Δ un θ, bet arī no traucējošiem parametriem σ_1 un σ_2, t.i., $\lambda_1 = \lambda_1(\Delta,\theta,\sigma_1,\sigma_2)$ un $\lambda_2 = \lambda_2(\Delta,\theta,\sigma_1,\sigma_2)$. Lagranža reizinātājus var noteikt no vienādojumiem (1.11)-(1.11), izmantojot novērtējošās funkcijas, kas definētas (3.1), t.i.,

$$\sum_{i=1}^{n_1} \frac{\psi\left(\frac{X_i-\theta}{\sigma_1}\right)}{1+\lambda_1\psi\left(\frac{X_i-\theta}{\sigma_1}\right)} = 0, \quad \sum_{j=1}^{n_2} \frac{\psi\left(\frac{Y_j-\Delta-\theta}{\sigma_2}\right)}{1+\lambda_2\psi\left(\frac{Y_j-\Delta-\theta}{\sigma_2}\right)} = 0. \quad (3.3)$$

Definē empīriskās ticamības logaritmisko attiecību (reizinātu ar mīnus divi) kā

$$\mathcal{W}(\Delta,\theta,\sigma_1,\sigma_2) = -2\log\mathcal{R}(\Delta,\theta,\sigma_1,\sigma_2) =$$
$$= 2\sum_{i=1}^{n_1} \log\left(1+\lambda_1\psi\left(\frac{X_i-\theta}{\sigma_1}\right)\right) + 2\sum_{j=1}^{n_2} \log\left(1+\lambda_2\psi\left(\frac{Y_j-\Delta-\theta}{\sigma_2}\right)\right).$$

Lai noteiktu novērtētāju $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\Delta,\sigma_1,\sigma_2)$, kas maksimizē $\mathcal{R}(\Delta,\theta,\sigma_1,\sigma_2)$, aplūko vienādojumu

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\mathcal{W}(\Delta,\theta,\sigma_1,\sigma_2) = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{\lambda_1\psi'\left(\frac{X_i-\theta}{\sigma_1}\right)}{1+\lambda_1\psi\left(\frac{X_i-\theta}{\sigma_1}\right)} + \sum_{j=1}^{n_2} \frac{\lambda_2\psi'\left(\frac{Y_j-\Delta-\theta}{\sigma_2}\right)}{1+\lambda_2\psi\left(\frac{Y_j-\Delta-\theta}{\sigma_2}\right)} = 0, \quad (3.4)$$

kur $\psi' = (\partial/\partial\theta)\psi$.

Pieņemsim, ka $\hat{\sigma}_1$ un $\hat{\sigma}_2$ ir mēroga parametru σ_1 un σ_2 novērtētāji. Tālāk sniegti pieņēmumi vispārīgai M-novērtētāja (2.8) ψ-funkcijai.

3.1.1. Pieņēmums.

(A1) $\theta_0 \in \Omega$ un Ω ir vaļējs intervāls.

(A2) $\mathrm{E}\psi^2\left((X_i-\theta)/\hat{\sigma}_1\right) > 0$, $\mathrm{E}\psi^2\left((Y_j-\theta-\Delta)/\hat{\sigma}_2\right) > 0$, funkcijas $\psi'\left((X_i-\theta)/\hat{\sigma}_1\right)$, $\psi'\left((Y_j-\theta-\Delta)/\hat{\sigma}_2\right)$ ir nepārtrauktas θ_0 apkārtnē, $\psi'\left((X_i-\theta)/\hat{\sigma}_1\right)$ un $\psi^3\left((X_i-\theta)/\hat{\sigma}_1\right)$ ir ierobežotas ar integrējamu funkciju $G_1(X)$ šajā apkārtnē, $\psi'\left((Y_j-\theta-\Delta)/\hat{\sigma}_2\right)$ un $\psi^3\left((Y_j-\theta-\Delta)/\hat{\sigma}_2\right)$ ir ierobežotas ar integrējamu funkciju $G_2(Y)$ šajā apkārtnē, un $\mathrm{E}\psi'\left((X_i-\theta)/\hat{\sigma}_1\right)$, $\mathrm{E}\psi'\left((Y_j-\theta-\Delta)/\hat{\sigma}_2\right)$ nav nulle.

(A3) $n_2/n_1 \to k$, kad $n_1, n_2 \to \infty$, un $0 < k < \infty$.

3.1.2. Pieņēmums.

(B1) $\hat\sigma_1 \xrightarrow{p} \sigma_1^0,\ \hat\sigma_2 \xrightarrow{p} \sigma_2^0$.

(B2) $\mathrm{E}\psi^2\left(\frac{X_i-\theta_0}{\sigma_1^0}\right) = V_1 < \infty,\ \mathrm{E}\psi^2\left(\frac{Y_j-\theta_0-\Delta_0}{\sigma_2^0}\right) = V_2 < \infty.$

(B3) $\mathrm{E}\left(\left(\frac{X_i-\theta_0}{\sigma_1^0}\right)\psi'\left(\frac{X_i-\theta_0}{\sigma_1^0}\right)\right) = 0, \quad \mathrm{E}\left(\left(\frac{Y_j-\theta_0-\Delta_0}{\sigma_2^0}\right)\psi'\left(\frac{Y_j-\theta_0-\Delta_0}{\sigma_2^0}\right)\right) = 0.$

(B4) $\mathrm{E}\left(\left(\frac{X_i-\theta_0}{\sigma_1^0}\right)\psi\left(\frac{X_i-\theta_0}{\sigma_1^0}\right)\psi'\left(\frac{X_i-\theta_0}{\sigma_1^0}\right)\right) < \infty,$
$\mathrm{E}\left(\left(\frac{Y_j-\theta_0-\Delta_0}{\sigma_2^0}\right)\psi\left(\frac{Y_j-\theta_0-\Delta_0}{\sigma_2^0}\right)\psi'\left(\frac{Y_j-\theta_0-\Delta_0}{\sigma_2^0}\right)\right) < \infty.$

3.1.3. Pieņēmums.

(C1) ${n_1}^{-1}\sum_{i=1}^{n_1}\psi'\left(\frac{X_i-\theta_0}{\hat\sigma_1}\right) \xrightarrow{p} M_1,$
${n_2}^{-1}\sum_{j=1}^{n_2}\psi'\left(\frac{Y_j-\Delta_0-\theta_0}{\hat\sigma_2}\right) \xrightarrow{p} M_2.$

(C2) $\frac{1}{\sqrt{n_1}}\sum_{i=1}^{n_1}\psi\left(\frac{X_i-\theta_0}{\hat\sigma_1}\right) \xrightarrow{d} U_1$, kur $U_1 \sim N(0; V_1)$,
$\frac{1}{\sqrt{n_2}}\sum_{j=1}^{n_2}\psi\left(\frac{Y_j-\theta_0-\Delta_0}{\hat\sigma_2}\right) \xrightarrow{d} U_2$, kur $U_2 \sim N(0; V_2)$.

(C3) $n_1^{-1}\sum_{i=1}^{n_1}\psi^2\left(\frac{X_i-\theta_0}{\hat\sigma_1}\right) \xrightarrow{p} V_1,$
${n_2}^{-1}\sum_{j=1}^{n_2}\psi^2\left(\frac{Y_j-\theta_0-\Delta_0}{\hat\sigma_2}\right) \xrightarrow{p} V_2.$

3.1.1. Piezīme. *3.1.1. pieņēmums ir līdzīgs 1.3.1. pieņēmumam ar tādu atšķirību, ka šajā nodaļā nosacījumiem jāizpildās novērtējošām funkcijām, kuras iekļauj traucējošos parametrus $\hat\sigma_1$ un $\hat\sigma_2$. Nosacījums (A1) pieprasa, lai patiesā parametra vērtība θ_0 atrastos vaļējā intervālā. Nosacījums (A2) tika izmantots arī publikācijā [25], un apraksta novērtējošo funkciju gluduma nosacījumus. Nosacījums (A3) pieprasa, lai izlašu apjomi asimptotiski būtu salīdzināma lieluma.*

3.1.2. pieņēmums ir nepieciešams, lai M-novērtētājam ar iepriekš novērtētu dispersiju būtu spēkā asimptotiskā normalitāte, skatīt arī 2.1.1. un 2.1.2. pieņēmumu. Nosacījums (B1) ir spēkā mēroga novērtētājam, ja attiecīgā sadalījuma funkcija ir pietiekami gluda. (B2) ir spēkā jebkurai ierobežotai ψ-funkcijai. (B3) ir spēkā nepāra funkcijai ψ, ja sadalījumi F_1 un F_2 ir simetriski.

3.1.3. pieņēmums apkopo tehniskus nosacījumus, kas nepieciešami, lai varētu pielietot plug-in *empīrisko ticamību; tie ir līdzīgi nosacījumiem, kas aprakstīti [13] un [30]. Šie nosacījumi ļauj pierādīt* plug-in *empīriskās ticamības attiecības logaritma robežsadalījumu, ja tiek pieņemts, ka EL maksimizācijas problēmai eksistē atrisinājums. Lai pierādītu atrisinājuma eksistenci, būtu nepieciešami stingrāki nosacījumi, piemēram, nosacījumā (B1) būtu jābūt spēkā gandrīz drošai konverģencei, nevis konverģencei pēc varbūtības (sīkāku skaidrojumu un nosacījumus var skatīt J. Valeinis [30]).*

Tālāk sniegta lemma, kas parāda sakarību starp 3.1.1. - 3.1.3. pieņēmumiem, kā arī nodaļas galvenais rezultāts – 3.1.1. teorēma, kas apraksta empīriskās ticamības metodi divu M-novērtētāju starpībai. Visbeidzot sniegta 3.1.2. lemma, kas precizē nosacījumus, pie kuriem empīriskās ticamības metodi var pielietot divu gludinātu Hūbera novērtētāju starpībai.

3.1.1. Lemma. *(M. Delesa-Vēliņa u. c. [33]) Vispārīgai M-novērtētāja ψ-funkcijai, kam izpildās 3.1.1. un 3.1.2. nosacījums, izpildās arī 3.1.3. nosacījums.*

3.1.1. Teorēma. *(M. Delesa-Vēliņa u. c. [33]) Pieņemsim, ka empīriskās ticamības maksimizācijas problēmai eksistē atrisinājums $\hat{\theta}(\Delta, \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2)$, ko uzdod sakarība* (3.4)*. Tad vispārīgai M-novērtētāja ψ-funkcijai, kas apmierina 3.1.1. un 3.1.3. nosacījumu,*

$$-2 \log \mathcal{R}(\Delta_0, \hat{\theta}(\Delta_0, \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2), \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2) \xrightarrow{d} \chi_1^2,$$

kad $n_1, n_2 \to \infty$.

3.1.2. Lemma. *(M. Delesa-Vēliņa u. c. [33]) Pieņemsim, ka $\tilde{\psi}_k$ ir funkcija* (2.13)*, ar kuru definē gludināto Hūbera novērtētāju, un pieņemsim, ka $\hat{\sigma}_1$ un $\hat{\sigma}_2$ ir attiecīgi izlašu X un Y dispersijas novērtējumi, iegūti ar MAD novērtētāju* (2.9)*. Pieņemsim, ka sadalījumi F_1 un F_2, no kuriem ņemtas izlases X un Y, ir simetriski. Tad 3.1.1. un 3.1.2. pieņēmums izpildās funkcijai $\psi = \tilde{\psi}_k$.*

3.1.2. Piezīme. *Pierādījumus skatīt M. Delesas-Vēliņas u. c. publikācijā [33].*

4. nodaļa. Empīriskās ticamības metode divu nošķeltu vidējo vērtību starpībai

Šajā nodaļā aprakstīti divu izlašu problēmas rezultāti par divu nošķeltu vidējo vērtību starpību. Šajā nodaļā sniegtie oriģinālie rezultāti ir publicēti M. Delesas-Vēliņas u. c. rakstā [8].

4.1 apakšnodaļā aprakstīti rezultāti par empīriskās ticamības metodi nošķeltām vidējam vērtībām vienas izlases gadījumā. A. B. Ovens [21] izstrādāja EL metodi neatkarīgiem novērojumiem, savukārt nošķeltas izlases novērojumi ir atkarīgi. Kā risinājumu G. Cjiņs un M. Zao [24] piedāvāja novērtēt empīriskās ticamības attiecību nošķeltai izlasei un parādīja šķelšanas ietekmi uz empīriskās ticamības attiecības robežsadalījumu, iegūstot mērogotu hī kvadrātā sadalījumu.

Apakšnodaļā 4.2 iegūts galvenais rezultāts par empīriskās ticamības metodi divu nošķeltu vidējo vērtību starpībai, vispārinot G. Cjiņa un M. Zao [24] rezultātu divu izlašu gadījumam, izmantojot līdzīgu pieeju kā 1. nodaļā aprakstītajai J. Cjiņa un L. Džao [26] divu izlašu problēmai.

4.1 Empīriskās ticamības metode nošķeltajai vidējai vērtībai vienas izlases gadījumā

Pieņemsim, ka $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ir i.i.d. gadījuma lielumi ar sadalījuma funkciju F_0, ka $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ ir sakārtota statistika un ka $\bar{X}_{\alpha\beta}$ ir izlases nošķeltā vidējā vērtība (2.14), t.i,

$$\bar{X}_{\alpha\beta} = \frac{1}{m} \sum_{i=r}^{s} X_{(i)},$$

kur $0 < \alpha < 1/2$, $0 < \beta < 1/2$ ir šķelšanas proporcijas attiecīgi no kreisās un no labās puses, $r = \lfloor n\alpha \rfloor + 1$, $s = n - \lfloor n\beta \rfloor$ un m ir nošķeltās izlases apjoms $m = n - \lfloor n\alpha \rfloor - \lfloor n\beta \rfloor$.

Saskaņā ar 2.2.1. teorēmu, nošķeltās vidējās vērtības $\bar{X}_{\alpha\beta}$ asimptotiskā vērtība ir

$$\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{1-\alpha-\beta} \int_{\xi_\alpha}^{\xi_{1-\beta}} x dF_0.$$

Pieņemsim, ka svari $p_i = 0$, ja $i < r$ un $i > s$, $p_i \geq 0$, ja $r \leq i \leq s$ un $\sum_{i=r}^{s} p_i = 1$. Definē profila empīriskās ticamības attiecību nošķeltai vidējai vērtībai kā

$$\mathcal{R}(\mu_{\alpha\beta}) = \sup \left\{ \prod_{i=r}^{s} m p_i : p_i \geq 0, \sum_{i=r}^{s} p_i = 1, \sum_{i=r}^{s} p_i X_{(i)} = \mu_{\alpha\beta} \right\}.$$

4.1.1. Teorēma. *[24, 2.1. Teorēma]*

Pieņemsim, ka F_0 ir nepārtraukta, $F_0'(\xi_\alpha) > 0$ un $F_0'(\xi_{1-\beta}) > 0$, un pieņemsim, ka $\mu_{\alpha\beta}^0$ ir nošķeltās vidējās vērtības $\mu_{\alpha\beta}$ patiesā vērtība. Tad

$$-2a \log \mathcal{R}(\mu_{\alpha\beta}^0) \xrightarrow{d} \chi_1^2,$$

kur

$$a = \sigma^2_{\alpha\beta}/((1-\alpha-\beta)\tau^2_{\alpha\beta}),$$

$$\sigma^2_{\alpha\beta} = \frac{1}{(1-\alpha-\beta)} \int_{\xi_\alpha}^{\xi_{1-\beta}} x^2 dF_0(x) - \mu^2_{\alpha\beta} \tag{4.1}$$

un

$$\tau^2_{\alpha\beta} = \frac{1}{(1-\alpha-\beta)^2}((1-\alpha-\beta)\sigma^2_{\alpha\beta} + \beta(1-\beta)(\xi_{1-\beta} - \mu_{\alpha\beta})^2 \\ - 2\alpha\beta(\xi_\alpha - \mu_{\alpha\beta})(\xi_{1-\beta} - \mu_{\alpha\beta}) + \alpha(1-\alpha)(\xi_\alpha - \mu_{\alpha\beta})^2). \tag{4.2}$$

[24] tika piedāvāts novērtēt konstanti a, izmantojot konsistentu novērtētāju

$$\hat{a} = \hat{\sigma}^2_{\alpha\beta}/((1-\alpha-\beta)\hat{\tau}^2_{\alpha\beta}),$$

kur

$$\hat{\sigma}^2_{\alpha\beta} = \frac{1}{(1-\alpha-\beta)} \int_{\hat{\xi}_\alpha}^{\hat{\xi}_{1-\beta}} x^2 dF_n(x) - \bar{X}^2_{\alpha\beta}, \tag{4.3}$$

$$\hat{\tau}^2_{\alpha\beta} = \frac{1}{(1-\alpha-\beta)^2}((1-\alpha-\beta)\hat{\sigma}^2_{\alpha\beta} + \beta(1-\beta)(\hat{\xi}_{1-\beta} - \bar{X}_{\alpha\beta})^2 \\ - 2\alpha\beta(\hat{\xi}_\alpha - \bar{X}_{\alpha\beta})(\hat{\xi}_{1-\beta} - \bar{X}_{\alpha\beta}) + \alpha(1-\alpha)(\hat{\xi}_\alpha - \bar{X}_{\alpha\beta})^2), \tag{4.4}$$

$\hat{\xi}_p = \inf\{x : F_n(x) \geq p\}$ jebkuram $0 < p < 1$ un $F_n(x)$ ir izlases empīriskā sadalījuma funkcija.

4.2 Galvenie rezultāti

Aplūko EL divu izlašu problēmu, kas aprakstīta 1.3. nodaļā, kur $X_1, \ldots, X_{n_1}$ un $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ ir i.i.d. gadījuma lielumi ar nezināmām sadalījuma funkcijām F_1 un F_2.

Mūs interesē divu nošķeltu vidējo vērtību ar šķelšanas proporcijām $0 < \alpha < 1/2$, $0 < \beta < 1/2$ starpība. Tātad izteiksmēs (1.6) - (1.6) nepieciešams aplūkot parametrus

$$\theta_0 = \frac{1}{1-\alpha-\beta} \int_{\xi_\alpha}^{\xi_{1-\beta}} x dF_1 =: \mu_{\alpha\beta 1}, \quad \theta_1 = \frac{1}{1-\alpha-\beta} \int_{\xi_\alpha}^{\xi_{1-\beta}} y dF_2 =: \mu_{\alpha\beta 2}$$

un

$$\Delta_0 = \mu_{\alpha\beta 2} - \mu_{\alpha\beta 1}.$$

Aplūko atbilstošās nošķeltās izlases vidējās vērtības

$$\bar{X}_{\alpha\beta} = \frac{1}{m_1} \sum_{i=r_1}^{s_1} X_{(i)}, \quad \bar{Y}_{\alpha\beta} = \frac{1}{m_2} \sum_{j=r_2}^{s_2} Y_{(j)},$$

kur $r_1 = \lfloor n_1\alpha \rfloor + 1$, $s_1 = n_1 - \lfloor n_1\beta \rfloor$, $r_2 = \lfloor n_2\alpha \rfloor + 1$, $s_2 = n_2 - \lfloor n_2\beta \rfloor$ un m_1, m_2 – nošķelto izlašu apjoms, t.i., $m_1 = n_1 - \rfloor n_1\alpha \rfloor - \lfloor n_1\beta \rfloor$, $m_2 = n_2 - \lfloor n_2\alpha \rfloor - \lfloor n_2\beta \rfloor$.

Līdzīgi kā 4.1.1. teorēmā, pieņemsim, ka svari $p_i = 0$, ja $i < r_1$, $i > s_1$, un $q_j = 0$, ja $j < r_2$ un $j > s_2$. Definēsim novērtējošās funkcijas

$$w_1(X, \mu_{\alpha\beta 1}, \Delta_0) = X - \mu_{\alpha\beta 1}, \quad w_2(Y, \mu_{\alpha\beta 1}, \Delta_0) = Y - \Delta_0 - \mu_{\alpha\beta 1}.$$

Visbeidzot, definēsim profila empīriskās ticamības attiecības funkciju divu nošķeltu vidējo vērtību starpībai Δ kā

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\Delta, \mu_t) = \sup_{p_i, q_j} \Bigg\{ \prod_{i=1}^{m_1} m_1 p_i \prod_{j=1}^{m_2} m_2 q_j | p_i \geq 0, q_j \geq 0, \sum_{i=r_1}^{s_1} p_i = 1, \sum_{j=r_2}^{s_2} q_j = 1, \\ \sum_{i=r_1}^{s_1} p_i w_1(X_{(i)}, \mu_t, \Delta) = 0, \sum_{j=r_2}^{s_2} q_j w_2(Y_{(j)}, \mu_t, \Delta) = 0 \Bigg\}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

kur μ_t tiek uzskatīts par traucējošo parametru ar patieso vērtību $\mu_{\alpha\beta 1}$. Šis uzstādījums līdzinās 1.3 nodaļā aprakstītajam, ar atšķirību, ka šajā gadījumā tiek pievienoti papildus ierobežojumi $p_i = 0$, ja $i < r_1$, $i > s_1$, un $q_j = 0$, ja $j < r_2$, $j > s_2$. (4.5) eksistē viens vienīgs atrisinājums, ja 0 pieder punktu $w_1(X_{(i)}, \mu_t, \Delta)$ un $w_2(Y_{(j)}, \mu_t, \Delta)$, kur $r_1 \leq i \leq s_1$, $r_2 \leq j \leq s_2$, izliektajai čaulai, un to var atrast, izmantojot Lagranža reizinātāju metodi. Līdzīgi kā (1.9) - (1.10), iegūst

$$p_i = \frac{1}{m_1(1 + \lambda_1 w_1(X_{(i)}, \mu_t, \Delta))}, \quad i = r_1, \ldots, s_1,$$

$$q_j = \frac{1}{m_2(1 + \lambda_2 w_2(Y_{(j)}, \mu_t, \Delta))}, \quad j = r_2, \ldots, s_2,$$

kur Lagranža reizinātāji $\lambda_1 = \lambda_1(\mu_t, \Delta)$ un $\lambda_2 = \lambda_2(\mu_t, \Delta)$ var tikt izteikti ar μ_t, izmantojot sakarības

$$\sum_{i=r_1}^{s_1} \frac{w_1(X_{(i)}, \mu_t, \Delta)}{1 + \lambda_1 w_1(X_{(i)}, \mu_t, \Delta)} = 0, \quad \sum_{j=r_2}^{s_2} \frac{w_2(Y_{(j)}, \mu_t, \Delta)}{1 + \lambda_2 w_2(Y_{(j)}, \mu_t, \Delta)} = 0.$$

Profila empīriskās ticamības attiecības logaritms tiek definēts kā

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(\Delta, \mu_t) &= -2 \log \mathcal{R}(\Delta, \mu_t) \qquad (4.6)\\ &= 2 \sum_{i=r_1}^{s_1} \log(1 + \lambda_1 w_1(X_{(i)}, \mu_t, \Delta)) + 2 \sum_{j=r_2}^{s_2} \log(1 + \lambda_2 w_2(Y_{(j)}, \mu_t, \Delta)).\end{aligned}$$

Lai atrastu traucējošā parametra μ_t novērtējumu $\hat{\mu}_t = \hat{\mu}_t(\Delta)$, kas maksimizē $\mathcal{R}(\Delta, \mu_t)$ pie fiksēta parametra Δ, aplūko vienādojumu $(\partial/\partial\mu_t)\mathcal{W}(\Delta, \mu_t) = 0$. Ievērojot, ka funkciju w_1 un w_2 atvasinājumi attiecībā pret μ_t ir vienādi ar -1, iegūst sakarību

$$\frac{\partial}{\partial \mu_t} \mathcal{W}(\Delta, \mu_t) = \sum_{i=r_1}^{s_1} \frac{-\lambda_1}{1 + \lambda_1 w_1(X_{(i)}, \mu_t, \Delta)} + \sum_{j=r_2}^{s_2} \frac{-\lambda_2}{1 + \lambda_2 w_2(Y_{(j)}, \mu_t, \Delta)} = 0. \tag{4.7}$$

4.2.1. Pieņēmums.

(A1) F_1, F_2 ir nepārtrauktas sadalījuma funkcijas, un $F_1'(\xi_\alpha) > 0$, $F_1'(\xi_{1-\beta}) > 0$, $F_2'(\xi_\alpha) > 0$, $F_2'(\xi_{1-\beta}) > 0$.

(A2) $\mu_{\alpha\beta 1} \in \Omega$, un Ω ir vaļējs intervāls.

(A3) $n_2/n_1 \to k$, kad $n_1, n_2 \to \infty$, un $0 < k < \infty$.

4.2.1. Piezīme. *4.2.1. pieņēmuma nosacījums (A1) saistīts ar 4.1.1. teorēmu un nodrošina, ka izlases ir nošķeltas punktos, kur atbilstošās sadalījuma procentīles ir nosakāmas viennozīmīgi. Ievēro, ka tiek pieņemts, ka šķelšanas proporcijas α un β ir pozitīvi skaitļi. Lai α vai β atļautu pieņemt nulles vērtības, būtu nepieciešams pievienot papildus nosacījumus, ka $E(X^2) < \infty$ un $E(Y^2) < \infty$, kā arī veikt nelielu izmaiņu sekojošās 4.2.1. teorēmas pierādījumā. (A2) un (A3) nosacījumi ir saistīti ar EL metodi vispārīgā divu izlašu gadījumā, skatīt 1.3.1. pieņēmumu.*

4.2.1. Teorēma. *(M. Delesa-Vēliņa u. c. [33]) Pie 4.2.1. pieņēmuma vienādojumam* (4.7) *eksistē atrisinājums $\hat{\mu}_t(\Delta_0)$, kas ir parametra $\mu_{\alpha\beta 1}$ konsistents novērtētājs, $\mathcal{R}(\Delta_0, \mu_t)$ sasniedz lokālo maksimumu punktā $\hat{\mu}_t(\Delta_0)$ un*

$$-2a_2 \log \mathcal{R}(\Delta_0, \hat{\mu}_t(\Delta_0)) \xrightarrow{d} \chi_1^2,$$

kad $n_1, n_2 \to \infty$, kur mēroga konstante a_2 definēta kā

$$a_2 = \frac{n_1 n_2 (m_2 \sigma_1^2 + m_1 \sigma_2^2)}{m_1 m_2 (n_2 \tau_1^2 + n_1 \tau_2^2)},$$

kur ($\sigma_1^2 = \sigma_{\alpha\beta 1}^2$, $\tau_1^2 = \tau_{\alpha\beta 1}^2$) un ($\sigma_2^2 = \sigma_{\alpha\beta 2}^2$, $\tau_2^2 = \tau_{\alpha\beta 2}^2$) ir definēti izteiksmēs (4.1) *un* (4.2) *attiecīgi sadalījuma funkcijām F_1 un F_2.*

4.2.2. Piezīme. *4.2.1. teorēmā izmantotās mēroga konstantes a_2 konsistents novērtētājs iegūstams ar*

$$\hat{a}_2 = \frac{n_1 n_2 (m_2 \hat{\sigma}_1^2 + m_1 \hat{\sigma}_2^2)}{m_1 m_2 (n_2 \hat{\tau}_1^2 + n_1 \hat{\tau}_2^2)},$$

kur parametri $\hat{\sigma}_1^2$, $\hat{\tau}_1^2$ un $\hat{\sigma}_2^2$, $\hat{\tau}_2^2$ ir definēti kā vienas izlases gadījumā izteiksmēs (4.3) *un* (4.4) *ar empīriskajām sadalījuma funkcijām $F_{n_1}(x)$, $F_{n_2}(y)$ un nošķeltajiem izlases vidējiem $\bar{X}_{\alpha\beta}$ un $\bar{Y}_{\alpha\beta}$.*

4.2.3. Piezīme. *Nošķelto vidējo vērtību starpības Δ_0 asimptotisko $1-p$ līmeņa ticamības intervālu iegūst izmantojot hipotēžu testu, un tas ir formā*

$$\{\Delta \,|\, -2\hat{a}_2 \log \mathcal{R}(\Delta, \hat{\mu}_t(\Delta)) \leq \chi_{1,1-p}^2\},$$

kur $\chi_{1,1-p}^2$ apzīmē χ_1^2 sadalījuma $1-p$ kvantili.

Pierādījums. Pierādījumu skatīt M. Delesas-Vēliņas u. c. publikācijā [8].

5. nodaļa. Uz empīrisko ticamību balstīta ANOVA metode nošķeltiem vidējiem

Šajā nodaļā aprakstīta uz empīrisko ticamību balstīta ANOVA metode vairāk nekā divu populācijas nošķelto vidējo vērtību salīdzināšanai. Nodaļā sniegtie oriģinālie rezultāti ir publicēti Delesas-Vēliņas u. c. rakstā [32].

Aplūko problēmu, kur jāsalīdzina vairāk nekā divas izlases. Pieņemsim, ka $Y_i = (Y_{i1}, Y_{i2}, \ldots, Y_{in_i})$, $i = 1, 2, \ldots, k$ ir k neatkarīgas gadījuma izlases no dažādām populācijām ar vidējo vērtību μ_i. Klasiskajā statistikā tiek pārbaudīta nulles hipotēze par populācijas vidējo vērtību vienādību

$$H_0 : \mu_1 = \ldots = \mu_k =: \mu. \tag{5.1}$$

Pie pieņēmuma, ka populāciju dispersijas ir vienādas (homoskedasticitāte) un dati katrā grupā sadalīti normāli, t.i., $Y_{ij} \sim N(\mu_i; \sigma)$, var izmantot klasisko ANOVA F-testu.

Labi zināms, ka ANOVA F-tests nav piemērots dispersiju heteroskedasticitātes gadījumā, jo tam rodas problēmas kontrolēt pirmā veida kļūdu. B. L. Velčs [36] piedāvāja aptuveno brīvības pakāpju (ADF) procedūru, kas ir piemērota dispersiju heteroskedasticitātes gadījumā, ja dati it normāli sadalīti. Tomēr problēmas saglabājas situācijās, kur hetoroskedasticitāte pastāv vienlaikus ar novirzēm no normalitātes un dažādiem izlašu apjomiem [37]. Jūena [39] piedāvāja robustu modifikāciju Velča ANOVA testam, izmantojot nošķeltas vidējās vērtības un Vinzorētas dispersijas kopā ar ADF statistiku. Publikācijā [16] tika parādīts, ka šāda pieeja nodrošina labāku I veida kļūdas kontroli vienfaktora ANOVA dizainiem, kad izlases tiek ņemtas no sadalījumiem ar dažādu asimetrijas pakāpi un ar dažādiem izlases apjomiem. A. B. Ovens [22] izstrādāja uz empīrisko ticamību balstītu ANOVA metodi neatkarīgām grupām, kas pārbauda hipotēzi par vidējo vērtību vienādību. Izmantojot nošķelto vidējo vērtību noderīgās robustuma īpašības vienas izlases gadījumā, mēs piedāvājam izstrādāt uz EL balstītu ANOVA metodi, kas pārbaudītu nulles hipotēzi par vairāk nekā divu nošķelto vidējo vērtību vienādību.

Vispirms 5.1. apakšnodaļā tiks aprakstīta A. B. Ovena EL ANOVA metode [22]. Galvenais rezultāts par vairāku nošķeltu vidējo vērtību salīdzināšanu, balstoties uz empīriskās ticamības pieeju, sniegts 5.2. apakšnodaļā.

5.1 Uz empīrisko ticamību balstīta ANOVA metode

EL ANOVA metode tiks aprakstīta, balstoties uz [22]. Apzīmēsim novērojumus ar $Y_{ij} \in \mathbb{R}$, kur $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, n_i$ un $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$ apzīmē kopējo novērojumu skaitu.

Aplūko N gadījuma pārus (I, Y), kur $I \in \{1, \ldots, k\}$ un $Y \in \mathbb{R}^d$. Novērojumu Y_{ij} raksturo pāris $I = i$ un $Y = Y_{ij}$. Pieņemsim, ka F ir pāru (I, Y) sadalījuma funkcija. Šie dati nav i.i.d no sadalījuma F, jo I jebkurā pārī ir fiksēts kategoriāls prediktors. Definē ticamības funkciju

$$L(F) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n_i} v_{ij},$$

kur $v_{ij} = F\{(i, Y_{ij})\}$. Svarus v_{ij} iespējams faktorizēt kā $v_{ij} = v_{j|i} v_{i\cdot}$, kur $v_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{n_i} v_{ij}$, un $v_{j|i} = v_{ij}/v_{i\cdot}$. Tad EL attiecības funkciju var izteikt formā

$$\begin{aligned} R(F) &= \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{n_i} N v_{i\cdot} v_{j|i} \\ &= \left(\prod_{i=1}^{k} \left(\frac{N v_{i\cdot}}{n_i} \right)^{n_i} \right) \left(\prod_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{n_i} n_i v_{j|i} \right). \end{aligned} \tag{5.2}$$

ANOVA analīzes ietvaros visbiežāk interesējas par sadalījumu F tikai aplūkojot svarus $v_{j|i}$, tātad iespējams fiksēt svarus $v_{i\cdot} = n_i/N$. Pirmais reizinājums izteiksmē (5.2) tādējādi kļūst vienāds ar viens un $R(F)$ maksimizācijas problēma ir atkarīga tikai no ierobežojumiem uz $v_{j|i}$. Šādas pieejas rezultātā iegūst ticamības attiecības funkciju

$$R(F) = R_k(F_1, \ldots F_k).$$

Lai iegūtu EL ANOVA hipotēžu testu, iespējams izmantot trīsstūrveida masīva EL teorēmu [23, 4.1. Teorēma].

5.1.1. Apgalvojums. *(EL ANOVA tests par vidējo vērtību vienādību) [22, 173. lpp.] Pieņemsim, ka $E(Y_{ij}) = \mu_0$. Aplūko*

$$\mathcal{R}(\mu) = \max_{v_{j|i}} \left\{ \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{n_k} n_i v_{j|i} \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n_1} v_{j|1} Y_{1j} = \ldots = \sum_{j=1}^{n_k} v_{j|k} Y_{kj} = \mu, \right.$$
$$\left. \sum_{j=1}^{n_k} v_{j|i} = 1, v_{j|i} \geq 0, i = 1, \ldots, k \right\} \tag{5.3}$$

un definē $n_0 = \min_{1 \leq i \leq k} n_i$. Ja $\mu = \mu_0 + O(n_0^{-1/2})$ un katram $i = 1, \ldots k$ DY_{i1} ir galīga un nav nulle, tad

$$-2 \log \max_{\mu} \mathcal{R}(\mu) = \sum_{i=1}^{k} n_i (\bar{Y}_{i\cdot} - \hat{\mu})^2 / s_i^2 + O_p(n_0^{-1/2}) \xrightarrow{d} \chi_k^2,$$

kad $n_0 \to \infty$, kur $\bar{Y}_{i\cdot} = n_i^{-1} \sum_j Y_{ij}$, $s_i^2 = n_i^{-1} \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{i\cdot})^2$ un $\hat{\mu}$ ir kopējās vidējās vērtības μ_0 EL novērtētājs, ko definē

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \bar{Y}_{i\cdot} / s_i^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i / s_i^2}.$$

Jāievēro, EL novērtētājs $\hat{\mu}$ nav visu novērojumu Y_{ij} vidējais, kā tas ir klasiskās ANOVA analīzes gadījumā. Tā vietā $\hat{\mu}$ ir grupu vidējo vērtību svērtais vidējais, kur svari ir apgriezti proporcionāli grupu dispersijām. Izliektās čaulas nosacījums ANOVA gadījumā ir formā

$$\min_j Y_{ij} \leq \mu_i \leq \max_j Y_{ij}, \ i = 1, \ldots, k.$$

5.2 Galvenie rezultāti

Mēs interesējamies par nulles hipotēzi

$$H_0^T : \mu_{\alpha\beta 1} = \mu_{\alpha\beta 2} = \ldots = \mu_{\alpha\beta k} =: \mu_{\alpha\beta}, \tag{5.4}$$

kur

$$\mu_{\alpha\beta i} = \frac{1}{1-\alpha-\beta} \int_{\xi_\alpha}^{\xi_{1-\beta}} x dF_{i0}$$

un $\mu_{\alpha\beta}$ ir kopējais nošķeltais populācijas vidējais.

Pieņemsim, ka $Y_{i(1)}, Y_{i(2)}, \ldots, Y_{i(n_i)}$ apzīmē i-tās izlases sakārtotu statistiku, $i = 1, \ldots, k$. Apzīmē $r_i = \lfloor n_i \alpha \rfloor + 1$ un $s_i = n_i - \lfloor n_i \beta \rfloor$, kur $0 < \alpha < 1/2$ un $0 < \beta < 1/2$ ir šķelšanas proporcijas attiecīgi no kreisās un no labās puses. Tad $m_i = n_i - \lfloor n_i \alpha \rfloor - \lfloor n_i \beta \rfloor$ ir i-tās nošķeltās izlases apjoms. i-tās izlases nošķeltā vidējā vērtība un nošķeltā dispersija ir uzdotas ar

$$\bar{Y}_{\alpha\beta i} = \frac{1}{m_i} \sum_{j=r_i}^{s_i} Y_{i(j)}, \quad S_{\alpha\beta i}^2 = \tfrac{1}{m_i} \textstyle\sum_{j=r_i}^{s_i} (Y_{i(j)} - \bar{Y}_{\alpha\beta i})^2.$$

Līdzīgi kā EL ANOVA problēmā (5.3), mūs interesē tikai uz i-to izlasi nosacītie svari $v_{j|i}$. Vienkāršības labad turpmāk $v_{j|i}$ vietā tiks rakstīts v_{ij}. Tālāk izmantosim principu, kas aprakstīts 4. nodaļā un definēsim empīriskās ticamības attiecības funkciju nošķeltajām izlasēm, pieprasot, lai svari $v_{ij} = 0$ visiem $i = 1, \ldots, k$ un $j < r_i$, $j > s_i$. Empīriskās ticamības profila attiecība tiek definēta kā

$$\mathcal{R}(\mu_{\alpha\beta}) = \sup_{v_{ij}} \left\{ \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=r_i}^{s_i} m_i v_{ij}, \sum_{j=r_i}^{s_i} v_{ij} = 1, \sum_{j=r_i}^{s_i} v_{ij}(Y_{i(j)} - \mu_{\alpha\beta}) = 0, i = 1, \ldots, k \right\}.$$

5.2.1. Teorēma. *(M. Delesa-Vēliņa u. c. [32]) Pieņemsim, ka $\mu_{\alpha\beta 0}$ ir kopējais populācijas nošķeltais vidējais. Pieņemsim, ka sadalījuma funkcija F_{i0} ir nepārtraukta, $F_{i0}'(\xi_\alpha) > 0$ un $F_{i0}'(\xi_{1-\beta}) > 0$ katram $i = 1, \ldots, k$. Ja $\mu_{\alpha\beta i} = \mu_{\alpha\beta 0} + O(n_0^{-1/2})$, $i = 1, \ldots, k$, kur $n_0 = \min_{1 \le i \le k} n_i$, tad pie H_0^T (5.4) spēkā*

$$\sum_{i=1}^{k} a_i l_i := \sum_{i=1}^{k} a_i m_i (\bar{Y}_{\alpha\beta i} - \bar{Y}_{\alpha\beta})^2 / S_{\alpha\beta i}^2 + O_p(n_0^{-1/2}) \xrightarrow{d} \chi^2_{(k-1)},$$

kad $n_0 \to \infty$, kur $\bar{Y}_{\alpha\beta}$ ir uz empīrisko ticamību balstīts kopējās nošķeltās vidējās vērtības novērtētājs,

$$\bar{Y}_{\alpha\beta} \quad = \quad \frac{\sum_{i=1}^{k} \bar{Y}_{\alpha\beta i} m_i / S_{\alpha\beta i}^2}{\sum_{i=1}^{k} m_i / S_{\alpha\beta i}^2} + o_p(n_0^{-1/2})$$

un mērogošanas konstantes ir uzdotas ar

$$a_i = \sigma_{\alpha\beta i}^2 / ((1-\alpha-\beta)\tau_{\alpha\beta i}^2). \tag{5.5}$$

Lielumi $\sigma_{\alpha\beta i}^2$ un $\tau_{\alpha\beta i}^2$ i-tajai izlasei tiek aprēķināti pēc izteiksmēm (4.1) *un* (4.2).

Pierādījums. Ar pierādījumu var iepazīties [32].

6. nodaļa. Simulāciju un datu analīzes rezultāti

Šajā nodaļā jaunieviesto empīriskās ticamības metožu sniegums robustiem lokācijas parametra novērtētājiem tiks analizēts situācijās, kad neizpildās klasiskie pieņēmumi par normalitāti un dispersiju homogenitāti. Ar simulāciju eksperimenta palīdzību tiks pētīta sadalījuma formas (asimetrija, smagās astes un izlēcēji, vienādas vai dažādas dispersijas) ietekme uz metožu pirmā veida kļūdu daudzumu, ticamības intervālu empīrisko pārklājumu precizitāti un testu jaudu. Jaunās metodes tiks pielietotas arī datu piemēriem un salīdzinātas ar labi zināmām klasiskās un robustās statistikas metodēm.

Jaunieviesto EL metožu sniegums iepriekš tika analizēts M. Delesas-Vēliņas u. c. publikācijās [32], [33] un [8]. Šajā nodaļā tiks apkopoti iepriekšējie secinājumi un veikts metožu salīdzinājums. EL metožu skaitliskie aprēķini veikti, izmantojot programmas *R* bibliotēku *EL* [6], kā arī autores speciāli izveidotas *R* funkcijas.

6.1 EL metode divu gludu Hūbera novērtētāju starpībai

Divu gludu Hūbera novērtētāju starpība tika aplūkota M. Delesas-Vēliņas u. c. publikācijā [33]. Jāatzīmē, ka 3.1.2. lemma nosaka, ka 3.1.1. teorēmas asimptotiskie rezultāti ir spēkā gludinātajam Hūbera novērtētājam, ja aplūkotie sadalījumi F_1 un F_2 ir simetriski. Tā kā praktiskos piemēros bieži sastopami asimetriski sadalījumi, mūs interesēja empīriski novērtēt ietekmi, kas rodas atkāpjoties no simetrijas pieņēmuma. Tāpēc simulāciju eksperimentā tika aplūkoti ne tikai dati, kas iegūti no simetriskiem sadalījumiem – dubulteksponenciālā un Hūbera visnelabvēlīgākā sadalījuma – bet arī dati, kas iegūti no asimetriskiem sadalījumiem – gamma sadalījuma un gamma sadalījuma ar vienmērīgi sadalītu piesārņojumu. Tika aplūkotas vienāda apjoma (50 un 100) izlases gan ar vienādām, gan atšķirīgām dispersijām. Simulācijas pētījumā galvenā uzmanība tika pievērsta 95 % ticamības intervālu empīriskajam pārklājumam un testu jaudai.

Gludinātā M-novērtējuma (2.11) aprēķināšanai nepieciešama sākotnējā negludinātā M-novērtējuma asimptotiskā dispersija V. Gludinātu Hūbera novērtētāju starpībai tika aplūkoti divi V novērtēšanas varianti: pirmkārt, vērtība tika fiksēta $V = 2,046$, kā ieteikts [12], un otrkārt, V tika izskaitļota konkrētajam sadalījumam, izmantojot Montekarlo simulācijas. Kā sadalījuma mēroga parametra σ iepriekšējais novērtētājs tika izmantots MAD, kā to pieprasa 3.1.2. lemma. Salīdzinājumam tika iekļauti hipotēžu testi divu vidējo vērtību starpībai, proti, Stjūdenta t-tests un EL tests vidējo vērtību starpībai (1.3.1 piemērs).

Rezultātus iespējams skatīt publikācijā [33]. Ticamības intervālu empīriskā pārklājuma aspektā galvenie secinājumi bija šādi. 1. Simetriskiem sadalījumiem (dubulteksponenciālajam un Hūbera visnelabvēlīgākajam sadalījumam) visas metodes deva līdzīgus rezultātus un empīriskais pārklājums bija tuvu nominālajam, t.i., tuvu 95 %, neatkarīgi no dispersijas heterogenitātes pakāpes. 2. Gamma sadalījumam empīriskais pārklājums bija tuvu nominālajiem 95 % metodēm, kas balstītas uz vidējām vērtībām un gludināto Hūbera novērtētāju ar izskaitļoto V. Tomēr metodei, kas balstīta uz gludināto Hūbera novērtētāju ar $V = 2,046$, empīriskais pārklājums bija zemāks, proti, robežās no $0,832$ līdz $0,879$, kad izlases apjoms $n = 100$. 3. Gamma sadalījuma ar 6 % vai 20 % piesārņojumu gadījumā EL metodei ar izskaitļoto V kopumā bija labāks empīriskais pārklājums nekā Stjūdenta t-testam un EL testam vidējo vērtību starpībai. 4. EL metode Hūbera novērtētāju starpībai ar fiksētu asimptotisko dispersiju $V = 2,046$ deva pretrunīgus rezultātus.

Empīriskā jauda tika analizēta, ņemot izlases no diviem gamma sadalījumiem ar dažādām formām un vidējām vērtībām. Gadījumā bez piesārņojuma EL metodei vidējo vērtību starpībai un EL metodei gludinātu Hūbera novērtētāju starpībai ar V izskaitļošanu jaudas bija līdzīgas un tās pārspēja t-testu. EL metodei gludinātu Hūbera novērtētāju starpībai ar fiksētu $V = 2,046$ jauda bija ievērojami zemāka. Vienmērīga piesārņojuma gadījumā EL metode divu vidējo vērtību starpībai neizrādījās robusta, un tās jauda bija līdzīga t-testam. Vislielāko jaudu sasniedza EL metode divu gludu Hūbera novērtētāju starpībai ar izskaitļotu V.

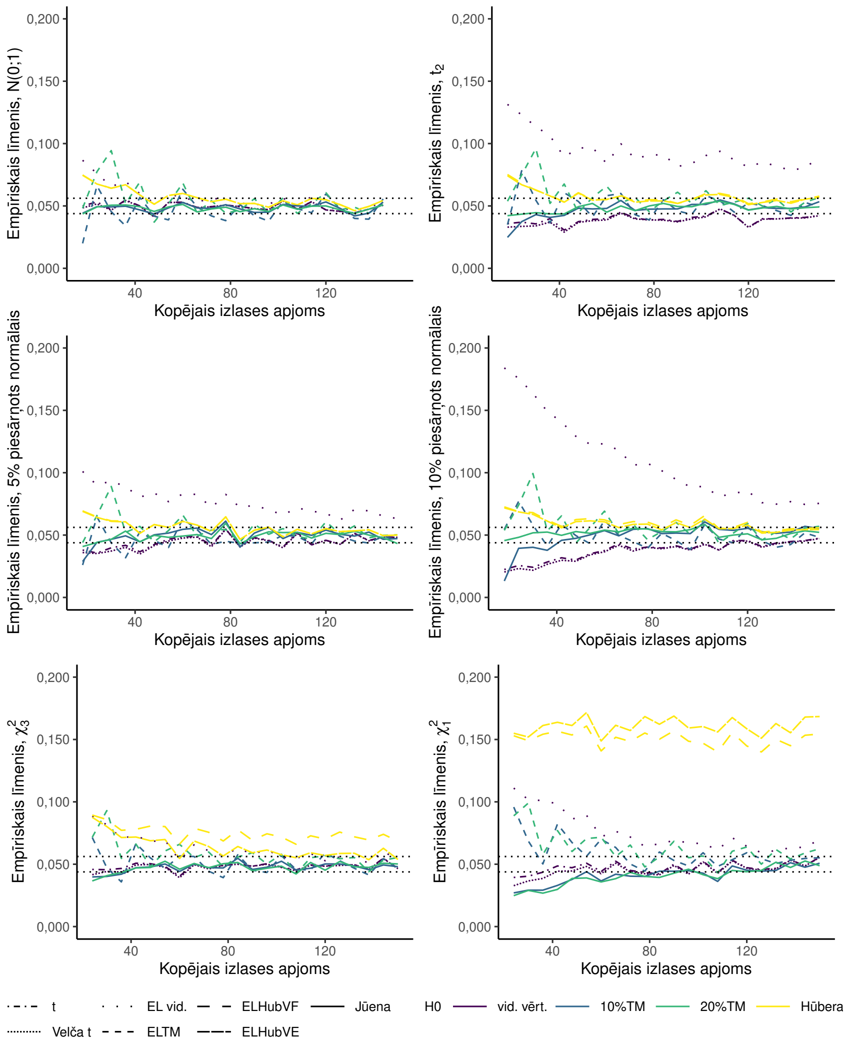
Pamatojoties uz šiem novērojumiem, tika secināts, ka simetriskiem sadalījumiem sākotnējā negludinātā Hūbera novērtētāja asimptotisko dispersiju V patiešām var uzskatīt par pielāgošanas parametru un to var fiksēt, kā ieteikts [12]. Tomēr asimetriskiem sadalījumiem tas tā nav un vēlams dot priekšroku V izskaitļošanai. Praktiskās situācijās V var novērtēt no datu izlases, izmantojot neparametrisko butstrepa (*bootstrap*) metodi [34].

6.2 EL metode divu nošķeltu vidējo vērtību starpībai

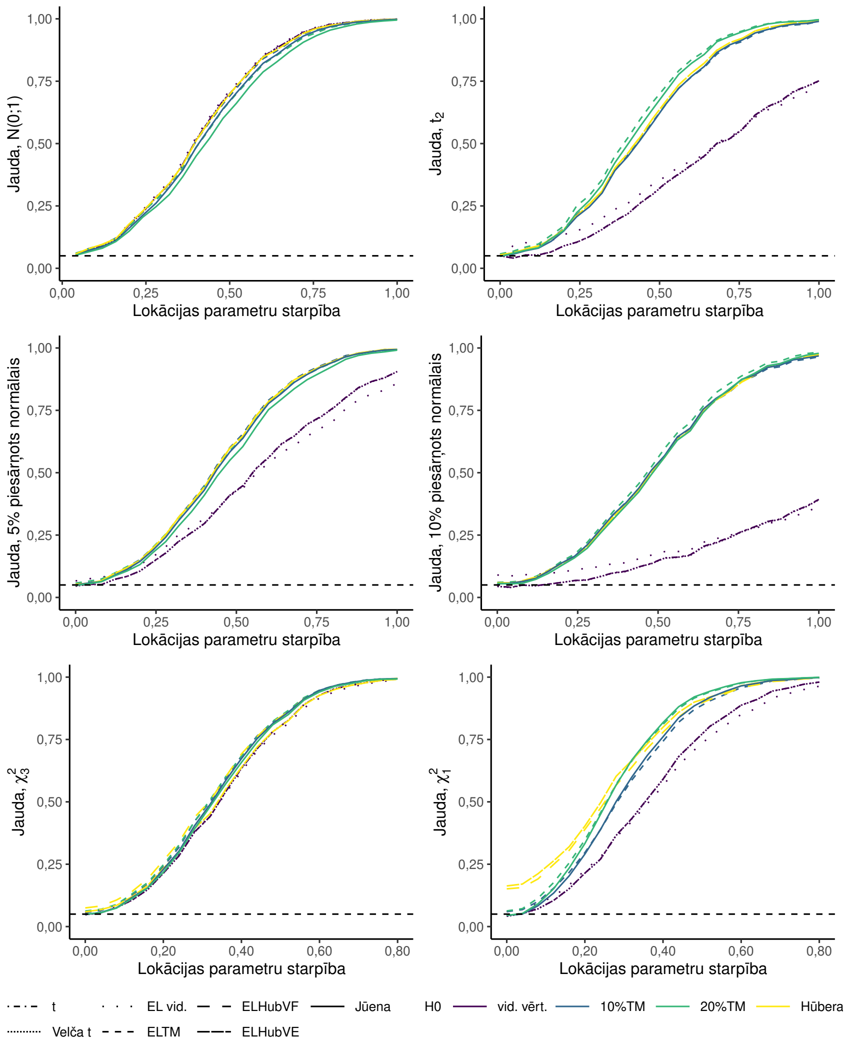
Empīriskās ticamības metode divu nošķeltu vidējo vērtību starpībai tika aplūkota M. Delesas-Vēliņas u. c. rakstā [8]. Simulāciju eksperiments ietvēra dažādus klasisko pieņēmumu pārkāpumu aspektus: dažādus sadalījumu veidus un dispersiju heterogenitāti apvienotu ar nesabalansētu izlašu apjomu. Tika analizēts testu empīriskais līmenis (t.i., simulētā pirmā veida kļūdu proporcija) un jauda. Tika aplūkots standartnormālais sadalījums, t_2 sadalījums, asimetriski sadalījumi χ^2_3 un χ^2_1, kā arī divi piesārņoti normālie sadalījumi gan ar vienādu ($n_1 = n_2$), gan ar nesabalansētu izlašu apjomu ($n_2 = 2n_1$).

Salīdzinājumam tika izmantotas šādas metodes: Stjūdenta t-tests, Velča tests [35] un EL tests (skat. 1.3.1 piemēru) – vidējo vērtību salīdzināšanai; Jūenas tests [39] ar butstrepa t-aproksimāciju (skat. [38, 5.6. tabula]) – nošķelto vidējo vērtību salīdzināšanai, kā arī 5. nodaļā aprakstītā EL ANOVA metode nošķelto vidējo vērtību salīdzināšanai. Attiecībā uz nošķeltajām vidējām vērtībām, tika aplūkotas divas šķelšanas proporcijas: 10 % un 20 %. Jūenas testa aprēķināšanai tika izmantota *R* bibliotēkas *WRS2* [17] funkcija *yuenbt*. Salīdzinājums ar EL testu divu gludinātu Hūbera novērtētāju starpībai nebija iekļauts [8], bet tika iekļauts promocijas darba pētījumā un ir aprakstīts šajā nodaļā. Attiecībā uz gludinātajiem Hūbera novērtētājiem tika aplūkotas divas testa versijas – ar fiksētu asimptotisko dispersiju $V = 2,046$ (panelis *ELHubVF*), un V izskaitļotu, izmantojot 10 000 Montekarlo simulācijas (panelis *ELHubVE*). No tālākajiem rezultātiem ir izslēgts salīdzinājums ar EL ANOVA metodi nošķeltām vidējām vērtībām, šie rezultāti tiks komentēti 6.3. nodaļā. Promocijas darba kopsavilkumā iekļauti tikai rezultāti pie vienādiem izlašu apjomiem.

Kā pirmais aspekts tika pētīts testu empīriskais līmenis kā funkcija no izlases apjoma diviem vienādiem sadalījumiem, skatīt 6.1. attēlu. Horizontālās punktētās līnijas apzīmē simulācijas kļūdu kā divas standartnovirzes ap nominālo



6.1. att. Testu empīriskais līmenis kā funkcija no kopējā izlases apjoma $n_1 + n_2$, izlašu apjomi vienādi. Augšā: $N(0;1)$ sadalījums (pa kreisi), t_2 sadalījums (pa labi). Vidū: 5 % piesārņots normālais sadalījums $0,95N(0;1) + 0,05N(0;25)$ (pa kreisi), 10 % piesārņots normālais sadalījums $0,9N(0;1) + 0,1N(0;100)$ (pa labi). Apakšā: χ^2_3 sadalījums (pa kreisi), χ^2_1 sadalījums (pa labi). Aplūkotie testi: Stjūdenta t-tests (t), Velča tests (Velča t), Jūenas tests nošķeltām vidējām vērtībām ar butstrepa t-aproksimāciju (Jūena), EL tests vidējām vērtībām (EL vid.), EL tests nošķeltām vidējām vērtībām (ELTM), EL tests gludināto Hūbera novērtētāju starpībai ar fiksētu $V = 2,046$ (ELHubVF) un izskaitļotu V (ELHubVE). Krāsa norāda attiecīgo pārbaudāmo hipotēzi: violeta – par vidējo vērtību vienādību, zila un zaļa – attiecīgi par 10 % un 20 % nošķelto vidējo vērtību vienādību, dzeltena – par gludināto Hūbera novērtētāju vienādību.



6.2. att. Testa jauda kā funkcija no lokācijas parametru starpības Δ_0 pie vienādiem izlases apjomiem $n_1 = n_2 = 50$. Augšā: $N(0;1)$ sadalījums (pa kreisi), t_2 sadalījums (pa labi). Vidū: 5 % piesārņots normālais sadalījums $0,95N(0;1)+0,05N(0;25)$ (pa kreisi), 10 % piesārņots normālais sadalījums $0,9N(0;1)+0,1N(0;100)$ (pa labi). Apakšā: χ^2_3 sadalījums (pa kreisi), χ^2_1 sadalījums (pa labi). Aplūkotie testi: Stjūdenta t-tests (t), Velča tests (Velča t), Jūenas tests nošķeltām vidējām vērtībām ar butstrepa t-aproksimāciju (Jūena), EL tests vidējām vērtībām (EL vid.), EL tests nošķeltām vidējām vērtībām (ELTM), EL tests gludināto Hūbera novērtētāju starpībai ar fiksētu $V = 2,046$ (ELHubVF) un izskaitļotu V (ELHubVE). Krāsa norāda attiecīgo pārbaudāmo hipotēzi: violeta – par vidējo vērtību vienādību, zila un zaļa – attiecīgi par 10 % un 20 % nošķelto vidējo vērtību vienādību, dzeltena – par gludināto Hūbera novērtētāju vienādību.

līmeni $0,05$, kur standartnovirze aprēķināta kā $\sqrt{\alpha(1-\alpha)/5000}$, iegūstot intervālu $(0,047;0,053)$. Abām jaunieviestajām EL divu izlašu metodēm simulāciju rezultāti apstiprina empīriskā līmeņa konverģenci uz nominālo līmeni $N(0,1)$ un t_2 sadalījumiem, kā arī piesārņotiem normāliem sadalījumiem, kad nulles hipotēze ir spēkā. Attiecībā uz tādiem smago astu sadalījumiem kā piesārņots normālais un t_2 sadalījums, EL testu konverģence nošķeltajiem vidējiem un gludinātajiem Hūbera novērtētājiem ir ievērojami ātrāka nekā uz vidējām vērtībām balstīto testu konverģence. Dažās situācijās EL tests 10 % nošķelto vidējo vērtību starpībai konverģē uz nominālo līmeni ātrāk nekā tests 20 % nošķelto vidējo vērtību starpībai, tāpēc mazās izlasēs (līdz 30) būtu vēlams izmantot 10 % šķelšanu. Uz EL balstītās metodes nošķeltu vidējo vērtību salīdzināšanai konverģē uz nominālo līmeni lēnāk nekā Jūenas tests ar butstrepa t-aproksimāciju.

Asimetrisku sadalījumu gadījumā rezultāti ir atkarīgi no izmantotā testa. EL metode nošķeltajām vidējām vērtībām konverģē uz nominālo līmeni, lai gan lēnāk nekā Jūenas tests. Viegli asimetriskajam χ^2_3 sadalījumam EL tests Hūbera novērtētāju starpībai ar izskaitļotu V konverģē uz nominālo līmenim lēnāk nekā testi, kuri balstīti uz nošķelto vidējo vērtību, bet versija ar fiksēto V nekonverģē uz nominālo līmeni. Šis rezultāts saskan ar [33] novēroto, kur tika secināts, ka $V = 2,046$ fiksēšana dod ticamības intervālu empīrisko pārklājumu, kas ir zemāks par nominālo, ja aplūkotie sadalījumi ir asimetriski un ar atšķirīgu formu. Izteikti asimetriskā χ^2_1 sadalījuma gadījumā uz Hūbera novērtētājiem balstīto testu empīriskais līmenis vispār nekonverģē uz nominālo. Tas varētu šķist pretēji [33] rezultātiem, tomēr šī rezultāta interpretācija, iespējams, ir saistīta ar sadalījumu asimetrijas pakāpi – neviens no [33] aplūkotajiem sadalījumiem nebija ar tik augstu asimetrijas pakāpi kā χ^2_1.

Kā otrais aspekts tika pētīta testu jauda pie lokācijas parametru starpības Δ_0, kur $\Delta_0 = j\cdot 0,04\cdot\delta$, $j = 1,\ldots,25$. Vērtība $\delta = F^{-1}(0,841) - F^{-1}(0,5)$ tika izvēlēta kā starpība starp 84, 13. un 50. procentīli no aplūkojamā sadalījuma F, tādējādi ļaujot salīdzināt jaudas simulāciju rezultātus dažādiem sadalījumu veidiem. Šāda pieeja iepriekš izmantota [9]. Tiek izmantoti tādi paši sadalījumi, kā analizējot testu empīrisko līmeni. Izvēlēts tāds izlases apjoms ($n_1 = 50$), kas lielākajai daļai testu bija pietiekams, lai izvēlētajiem sadalījumiem kontrolētu empīrisko pirmā veida kļūdu.

Jaudas simulācijas rezultāti redzami 6.2. attēlā. EL testam nošķeltu vidējo vērtību starpībai pie standartnormālā sadalījuma jauda ir tuva Stjūdenta t-testa jaudai, bet ievērojami to pārsniedz lielākajā daļā situāciju, kur sadalījums nav normālais, izņemot viegli asimetrisko χ^2_3 sadalījumu. Turklāt jaunā testa jauda ir līdzīga Jūenas testa jaudai dažos gadījumos pat pārsniedzot to. EL testa jauda divu gludinātu Hūbera novērtētāju starpībai līdzinās EL testa jaudai nošķelto vidējo vērtību starpībai, un $N(0;1)$ un 5 % piesārņota normālā sadalījuma gadījumā tā jauda ir augstāka kā lielākajai daļai uz nošķeltām vidējām vērtībām balstīto testu. Testa jauda pie izteikti asimetriskā χ^2_1 sadalījuma ir augstāka nekā visiem pārējiem testiem, tomēr tās ir sekas nepareizam testa līmenim pie nulles hipotēzes.

Kā trešais aspekts tika analizēts testu robustums dažādām dispersiju heterogenitātes pakāpēm apvienojumā ar nesabalansētu izlases apjomu normālā un χ^2_3 sadalījuma gadījumā. Tika aplūkoti šādi izlašu apjomi: divi mazu izlašu sce-

6.1. tabula. Testu empīriskais līmenis un robustums pēc Bredlija [4] kritērija nesabalansētu izlašu apjomu un heterogēnu dispersiju gadījumā standartnormālajam un χ^2_3 sadalījumam. Rezultāti parādīti atsevišķi maza apjoma (panelis *mazs*) un liela apjoma (panelis *liels*) izlasēm. Panelis *poz.* apzīmē scenārijus, kur pastāv pozitīva sakarība starp dispersijas lielumu un izlases apjomu, *neg.* – negatīva sakarība, savukārt *vien.* – vienādas dispersijas. Aplūkotie testi: Stjūdenta t tests (t), Velča tests (Velča t), Jūenas tests nošķeltām vidējām vērtībām ar butstrepa t-aproksimāciju (Jūena), EL tests vidējo vērtību starpībai (EL vid.), EL tests nošķeltu vidējo vērtību starpībai (ELTM), EL tests gludināto Hūbera novērtētāju starpībai ar fiksētu $V = 2,046$ (ELHubVF) un izskaitļotu V (ELHubVE).

Standartnormālais sadalījums

	Testa empīriskais līmenis						# robusti	
izlases apjoms		*mazs*			*liels*		*mazs*	*liels*
dispersiju sakarība	*vien.*	*poz.*	*neg.*	*vien.*	*poz.*	*neg.*		
t	0,049	0,020	0,113	0,049	0,019	0,107	4	2
Velča t	0,050	0,050	0,049	0,049	0,050	0,051	10	10
EL vid.	0,060	0,061	0,068	0,050	0,051	0,054	9	10
ELTM 10 %	0,047	0,050	0,054	0,052	0,052	0,055	10	10
ELTM 20 %	0,077	0,077	0,102	0,053	0,054	0,057	2	10
Jūena 10 %	0,050	0,051	0,047	0,049	0,050	0,051	10	10
Jūena 20 %	0,050	0,050	0,049	0,049	0,050	0,051	10	10
ELHubVF	0,061	0,060	0,063	0,052	0,051	0,053	10	10
ELHubVE	0,060	0,058	0,062	0,051	0,051	0,053	10	10

χ^2_3 sadalījums

	Testa empīriskais līmenis						# robusti	
izlases apjoms		*mazs*			*liels*		*mazs*	*liels*
dispersiju sakarība	*vien.*	*poz.*	*neg.*	*vien.*	*poz.*	*neg.*		
t	0,048	0,035	0,129	0,052	0,022	0,110	6	2
Velča t	0,049	0,064	0,069	0,052	0,051	0,055	9	10
EL vid,	0,070	0,071	0,082	0,054	0,051	0,054	6	10
ELTM 10%	0,051	0,054	0,058	0,053	0,052	0,053	10	10
ELTM 20%	0,078	0,078	0,105	0,055	0,052	0,056	3	10
Jūena 10%	0,047	0,052	0,048	0,050	0,049	0,050	10	10
Jūena 20%	0,048	0,051	0,052	0,051	0,048	0,050	10	10
ELHubVF	0,084	0,080	0,079	0,070	0,071	0,071	1	9
ELHubVE	0,075	0,071	0,070	0,057	0,057	0,057	6	10

nāriji – $(n_1, n_2) = (15, 25)$ un $(n_1, n_2) = (25, 35)$ – un divi lielu izlašu scenāriji – $(n_1, n_2) = (80, 120)$ un $(n_1, n_2) = (160, 240)$. Tika aplūkoti divi populāciju dispersiju attiecības scenāriji: 1:16 un 1:36, kā arī homogēnu dispersiju scenārijs 1:1.

Tika aplūkotas trīs iespējamās sakarības starp izlases apjomu un dispersijas lielumu: pozitīva, kad lielākā dispersija ir saistīta ar lielāko izlases apjomu, negatīva, kad lielākā dispersija ir saistīta ar mazāko izlases apjomu, un vienādas dispersijas salīdzinājumam. Lai nulles hipotēze būtu patiesa pie visiem scenārijiem, χ^2_3 sadalījuma izlases pirms mērogošanas uz izvēlēto dispersiju attiecību tika standartizētas tā, lai teorētiskā lokācijas parametra vērtība būtu vienāda ar 0 un standartnovirzes vērtība ar 1.

Tā vietā, lai attēlotu katra atsevišķa simulāciju eksperimenta rezultātu, tie tika sagrupēti pēc: 1) mazu un lielu izlašu scenārijiem; 2) pēc sakarības starp dispersiju un izlases apjomu (pozitīva, negatīva un vienāda). Testa sniegums tika novērtēts pēc J. V. Bredlija liberālā robustuma kritērija [4]. Proti, testu uzskata par robustu, ja tā empīriskā pirmā veida kļūda $\hat{\alpha}$ ietilpst intervālā $0,5\alpha \leq \hat{\alpha} \leq 1,5\alpha$. Katram testam tika uzskaitīts, cik scenārijos tests atbilst robustuma nosacījumam, t. i., dod pirmā veida empīrisko kļūdu intervālā $[0,025; 0,075]$.

Rezultāti redzami 6.1. tabulā. Jaunā EL metode 10 % nošķelto vidējo vērtību starpībai bija robusta pēc Bredlija kritērija visām izlases apjoma un dispersiju heterogenitātes kombinācijām gan normālā, gan χ^2_3 sadalījuma gadījumā. EL tests 20 % nošķelto vidējo vērtību starpībai nebija robusts lielākajā daļā mazo izlašu scenāriju, lai gan uzrādīja labus rezultātus lielu izlašu scenārijiem. Tests divu gludināto Hūbera novērtējumu starpībai izrādījās robusts pret dispersiju heterogenitāti un nesabalansētu izlases apjomu normālā sadalījuma gadījumā, bet χ^2_3 sadalījuma gadījumā testu var uzskatīt par robustu tikai lieliem izlases apjomiem, versijai ar V izskaitļotu dodot mazliet mazāku empīrisko kļūdu biežumu nekā versijai ar fiksētu V.

6.3 Uz EL balstīta ANOVA metode nošķeltām vidējām vērtībām

EL ANOVA metodes sniegums nošķeltām vidējām vērtībām tika detalizēti analizēts M. Delesas-Vēliņas u. c. publikācijās [32, 33]. [32] tika pētīta EL ANOVA metode 5 %, 10 % un 20 % simetriski nošķeltām vidējām vērtībām. Tika aplūkota metodes empīriskā pirmā veida kļūda pie dažādiem asimetriskiem sadalījumiem. Jaunā metode tika salīdzināta ar klasisko ANOVA F-testu, Velča ANOVA F-testu [36], EL ANOVA testu vidējām vērtībām [22], kā arī Jūenas-Velča ANOVA testu nošķeltām vidējām vērtībām [38, 7.1. tabula].

Pētījumā tika salīdzinātas trīs grupas ar vienādiem izlašu apjomiem no $n = 20$ līdz $n = 500$. Tika simulēts pirmā veida empīrisko kļūdu biežums pie H_0 par nošķeltu vidējo vērtību vienādību, ņemot izlases no χ^2_3 sadalījuma, lognormālā sadalījuma, gamma sadalījuma, kā arī asimetriskā normālā sadalījuma [2]. Heterogēnu dispersiju scenārijos simulētie dati tika mērogoti tā, lai dispersiju attiecība būtu 1:4:9 vai 1:1:36.

Pētījuma rezultātus iespējams skatīt [32]. Attiecībā uz jaunizveidoto EL ANOVA testu nošķeltajām vidējām vērtībām, simulācijas trim izlasēm no asimetriskiem sadalījumiem liecina, ka testa empīriskais līmenis konverģē uz nominālo visiem apskatītajiem sadalījumiem. Scenārijs ar heterogēnām dispersijām rāda, ka tests pārsniedz nominālo līmeni, kad izlases apjoms ir mazs (zem 100). Lieliem izlases apjomiem tests konverģē uz nominālo līmeni. Visiem heterogēnu dispersiju scenārijiem EL ANOVA metode nošķeltiem vidējiem ir robustāka nekā klasiskais F-tests – tās empīriskā pirmā veida kļūda ir tuvāk nominālajam līmenim.

[8] analizēja EL ANOVA metodes sniegumu nošķeltām vidējām vērtībām divu grupu salīdzināšanas gadījumā. Simulācijas ar divām grupām liecina, ka EL ANOVA tests nošķeltajiem vidējiem konverģē pie empīriskā līmeņa arī tad, ja dati ir ņemti no sadalījumiem ar smagu astes daļu vai sadalījumiem, kas satur izlēcējus. Turklāt metodei ir labas jaudas īpašības, pārsniedzot uz vidējām vērtībām balstītu metožu jaudu, ja dati nav normāli sadalīti. Līdzīgi kā trīs grupu gadījumā, var novērot, ka EL ANOVA tests nošķeltām vidējām vērtībām nav robusts pret dispersijas heterogenitātes un asimetrijas kombināciju, ja izlase ir maza. Jāatzīmē,

ka simulāciju rezultāti ar divām grupām sniedz tikai ierobežotu priekšstatu par ANOVA tipa metožu uzvedību.

6.4 Datu piemēru analīze

Datu analīzes pētījumā tika veikti hipotēžu testi par divu vai vairāku populāciju lokācijas parametru vienādību datu kopām ar novirzēm no normalitātes, izmantojot jaunieviestās empīriskās ticamības metodes, kā arī dažas plašāk lietotas klasiskās un robustās statistikas metodes. Pilnus datu analīzes rezultātus var skatīt promocijas darba 6.3. nodaļā, kā arī M. Delesas-Vēliņas publikācijās [32, 33, 8].

Divu izlašu metožu gadījumā tika novērots, ka testi, kas balstīti uz nošķeltām vidējām vērtībām, var novest pie pretējiem secinājumiem par H_0 nekā testi, kas balstīti uz vidējām vērtībām. Abi testi nošķeltu vidējo vērtību starpībai – EL tests un par robustu uzskatītais Jūenas tests – dod samērā tuvas p-vērtības, turklāt šis novērojums ir spēkā arī mazu izlašu gadījumā. Uz EL balstītā testa ticamības intervāli bija nedaudz īsāki. Attiecībā uz testu divu gludinātu Hūbera novērtētāju starpībai tika novērots, ka p-vērtības var izrādīties visnotaļ atšķirīgas atkarībā no izmantotās asimptotiskās dispersijas V vērtības, īpaši, ja aplūkotais sadalījums ir ievērojami asimetrisks. Tas saskan ar simulāciju rezultātiem un vedina domāt, ka ievērojami asimetrisku datu gadījumā jāizvairās lietot EL testu divu gludinātu Hūbera novērtētāju starpībai. Mērenas asimetrijas gadījumā Hūbera testa versija ar izskaitļotu V dod p-vērtības tuvas tām, ko iegūst ar testu vidējo vērtību starpībai.

ANOVA tipa metožu gadījumā tika novērots, ka pie vienādām šķelšanas proporcijām abi testi, kas salīdzina nošķeltās vidējās vērtības – uz EL balstītais tests un Jūenas-Velča tests – dod samērā tuvas p-vērtības. Interesanti, ka savstarpēji līdzīgas bija arī p-vērtības, kas iegūtas no EL ANOVA testa vidējo vērtību starpībai un Velča ANOVA testa. Dažās situācijās secinājumi, kas izrietēja no uz vidējām vērtībām balstītajiem testiem, bija atšķirīgi no tiem, kurus sniedza uz nošķeltām vidējām vērtībām balstītie testi.

Secinājumi

Galvenie pētījuma mērķi tika sasniegti. Izstrādātas jaunas EL metodes divu un vairāku populāciju salīdzināšanai, izmantojot robustus lokācijas parametra novērtētājus:

1. Empīriskās ticamības metode divu M-novērtētāju salīdzināšanai;
2. Empīriskās ticamības metode divu populācijas nošķelto vidējo salīdzināšanai;
3. Uz empīrisko ticamību balstīta ANOVA metode vairāk nekā divu populācijas nošķelto vidējo salīdzināšanai.

Tika iegūti metožu pielietošanas nosacījumi un pierādīti asimptotiskie rezultāti. Izmantojot J. Cjiņa un L. Džao pieeju [26], tika parādīts, ka pie noteiktiem nosacījumiem divu M-novērtētāju EL ticamības attiecības logaritma robežsadalījums ir χ^2_1, līdzīgi kā divu vidējo vērtību gadījumā. Tika parādīts, ka gludinātam Hūbera novērtētājam izpildās minētie nosacījumi. Lai nosacījumi izpildītos, svarīgs ir F. Hampela u. c. [11] piedāvātais gludināšanas princips, jo ļauj konstruēt nepieciešamās gludās EL novērtējošās funkcijas.

G. Cjiņa un M. Zao [24] vienas izlases rezultāti par EL metodi nošķeltai vidējai vērtībai tika vispārināti divu izlašu un ANOVA gadījumam. Divu nošķeltu vidējo vērtību starpības empīriskās ticamības attiecības logaritma robežsadalījums ir mērogots χ^2_1, un šis rezultāts ir saistīts ar S. Stiglera [28] iegūto nošķeltās vidējās vērtības asimptotisko sadalījumu. EL ANOVA metodes nošķeltām vidējām vērtībām gadījumā mērogošanas konstantes ietekmē katru no k populācijām, turklāt rezultējošais EL attiecības logaritma robežsadalījums ir χ^2_{k-1}. Šis rezultāts ir saistīs ar A. B. Ovena ieviesto EL ANOVA metodi vidējo vērtību vienādībai [22].

Tika īstenots simulāciju eksperiments, pētot jauno metožu uzvedību situācijās, kad izlases tiek ņemtas no dažāda veida sadalījumiem, it īpaši, kad klasiskie pieņēmumi par normalitāti un dispersiju vienādību neizpildās. EL metodes, kas balstītas uz nošķeltām vidējām vērtībām, izrādījās robustas pret sadalījumu asimetriju, smago astu un izlēcēju klātbūtni, kā arī pret atšķirīgām dispersijām kombinācijā ar atšķirīgiem izlašu apjomiem tādā ziņā, ka testa empīriskais pirmā veida kļūdu līmenis konverģē uz nominālo. Attiecībā uz EL metodi divu gludinātu Hūbera novērtētāju starpībai, tās robustums netika apstiprināts ievērojamas asimetrijas gadījumā, tomēr apstiprinājās viegli asimetriskiem sadalījumiem, sadalījumiem ar izlēcējiem un smagajām astēm. Uz EL balstītajām metodēm ir lielāka jauda, nekā metodēm, kas balstītas uz vidējām vērtībām.

Pētījuma turpinājumā, pirmkārt, ir iespēja papildus Hūbera novērtētāja sniegumam pētīt arī citu M-novērtētāju sniegumu. Otrkārt, iespējams aplūkot EL metodi, kas balstīta uz negludu kritēriju novērtējošām funkcijām, ko piedāvāja [19]. Šādai pieejai ir potenciāli plašāks pielietojums, bet lēnāks teorētiskais konverģences ātrums. Būtu noderīgi veikt salīdzinājumu starp gludo un negludo novērtējošo funkciju pieeju – cik autorei zināms, divu izlašu un ANOVA problēmām tāds līdz šim nav veikts.

Tēzes

1. **Iegūta empīriskās ticamības metode divu M-novērtētāju salīdzināšanai, tās pielietošanas nosacījumi un asimptotiskie rezultāti. Parādīts, ka nosacījumi izpildās divu gludinātu Hūbera novērtētāju starpībai. Simulāciju eksperiments rāda, ka metodei ir labas robustuma īpašības, kad izlases ņemtas no smago astu sadalījumiem vai sadalījumiem, kas satur izlēcējus.**

   Simulāciju eksperimenta rezultāti rāda, ka gadījumos, kad izlases iegūtas no dažāda tipa sadalījumiem, jaunajai metodei ar novērtētu asimptotisko dispersiju V testa līmenis ir robusts (t.i., testa empīriskais līmenis ir tuvs nominālajam, kad nulles hipotēze ir patiesa) un tai ir augstāka jauda nekā metodēm, kas balstītas uz vidējām vērtībām. Situācijās, kad vienlaicīgi pastāv dispersiju heterogenitāte un izlašu apjomi ir atšķirīgi, testa līmenis ir robusts normāli sadalītiem datiem, bet ja izlases apjoms ir liels, tas ir robusts arī datiem ar χ^2_3 sadalījumu. [33]

2. **Iegūta empīriskās ticamības metode divu vidējo vērtību salīdzināšanai un tās asimptotiskie rezultāti. Simulāciju eksperiments izlasēm, kas ņemtas no simetriskiem sadalījumiem, smago astu sadalījumiem vai sadalījumiem ar izlēcējiem, apstiprina metodes robustuma īpašības.**

   Jauniegūtā testa līmenis ir robusts, turklāt tam ir augstāka jauda nekā klasiskajām metodēm, kad izlases iegūtas no asimetriskiem sadalījumiem un smago astu sadalījumiem. Empīriskās ticamības testa līmenis divu 10 % nošķeltu vidējo vērtību starpībai ir robusts arī tad, ja vienlaicīgi pastāv dispersiju heterogenitāte un izlašu apjomi ir atšķirīgi – gan normāliem, gan hī kvadrātā sadalījumiem. [8]

3. **Iegūta uz empīrisko ticamību balstīta ANOVA metode vairāk kā divu populāciju nošķelto vidējo vērtību salīdzināšanai un tās asimptotiskie rezultāti. Simulāciju eksperiments izlasēm, kas ņemtas no asimetriskiem sadalījumiem, rāda, ka metodei ir labākas robustuma īpašības nekā klasiskajam F-testam.**

   Simulācijas ar trim izlasēm, kas ņemtas no asimetriskiem sadalījumiem, apstiprina, ka testa līmenis ir robusts. Jaunā testa empīriskais līmenis ir tuvāks nominālajam nekā klasiskā F-testa līmenis, kad dispersijas nav vienādas.

   Simulācijas ar divām izlasēm rāda, ka jaunajai metodei ir lielāka jauda nekā ANOVA metodēm, kas balstītas uz vidējām vērtībām, kad izlases ņemtas no asimetriskiem sadalījumiem, smago astu sadalījumiem vai sadalījumiem ar izlēcējiem. Lielām izlasēm EL ANOVA metode 10 % nošķeltajām vidējām vērtībām gan normālā gan hī kvadrātā sadalījuma gadījumā ir robusta, pat ja vienlaicīgi pastāv dispersiju heterogenitāte un izlašu apjomu atšķirības. [32], [8]

Autores publikācijas

P1 M. Velina, J. Valeinis, L. Greco, G. Luta. Empirical Likelihood-Based ANOVA for Trimmed Means. *International Journal of Environmental Research and Public Health.* 13(10):953, 2016. `https://doi.org/10.3390/ijerph13100953`

P2 M. Velina, J. Valeinis, G. Luta. Empirical Likelihood-Based Inference for the Difference of Two Location Parameters Using Smoothed M-Estimators. *Journal of Statistical Theory and Practice* 13(34), 2019. `https://doi.org/10.1007/s42519-019-0037-8`

P3 M. Delesa-Vēliņa, J. Valeinis, G. Luta. Comparing Two Independent Populations Using a Test Based on Empirical Likelihood and Trimmed Means. *Lithuanian Mathematical Journal* 61: 199-–216, 2021. `https://doi.org/10.1007/s10986-021-09516-x`

Dalība konferencēs

- **C1** J. Valeinis, M. Vēliņa, G. Luta. Empirical likelihood-based inference for the difference of smoothed Huber estimators. 11th International Conference on Robust Statistics, Valladolid, Spain, 2011.
- **C2** M. Vēliņa, J. Valeinis, G. Luta. Empirical likelihood-based methods for the difference of two trimmed means. 12th International Conference on Robust Statistics, Burlington, Vermont, USA, 2012.
- **C3** M. Vēliņa, J. Valeinis. Empirical likelihood based robust inference for trimmed mean. 18th International Conference on Mathematical Modeling and Analysis, Tartu, Estonia, 2013.
- **C4** M. Vēliņa, J. Valeinis, G. Luta. Robust inference using empirical likelihood based ANOVA methods. 13th International Conference on Robust Statistics, St. Petersburg, Russia, 2013.
- **C5** M. Vēliņa. Methods of robust statistics, using empirical likelihood method. 72nd Scientific Conference of University of Latvia, Riga, Latvia, 2014.
- **C6** M. Vēliņa, J. Valeinis. Empirical likelihood based robust ANOVA inference. 11th International Vilnius Conference on Probability & Mathematical Statistics, Vilnius, Lithuania, 2014.
- **C7** M. Vēliņa, J. Valeinis, R. Nedovis, G. Luta. A comparison of robust empirical likelihood-based ANOVA methods. 14th International Conference on Robust Statistics, Halle, Germany, 2014.
- **C8** M. Vēliņa. Robust empirical likelihood function for two and more samples. 73rd Scientific Conference of University of Latvia, Riga, Latvia, 2015.
- **C9** M. Vēliņa, J. Valeinis. Applications of robust ANOVA methods. 20th International Conference on Mathematical Modeling & Analysis, Sigulda, Latvia, 2015.
- **C10** M. Vēliņa, J. Valeinis. Two-sample empirical likelihood in the presence of nuisance parameters. European Meeting of Statisticians, Amsterdam, Netherlands, 2015.
- **C11** M. Vēliņa. Robust empirical likelihood inference for two sample location problem. 12th conference of Latvian Mathematics Society, Ventspils, Latvia, 2018.
- **C12** M. Delesa-Vēliņa. Empirical likelihood inference for trimmed means. 78th Scientific Conference of University of Latvia, Riga, Latvia, 2020.

Literatūra

[1] B. C. Arnold, N. Balakrishnan, and H. N. Nagaraja. *A First Course in Order Statistics.* Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2008.

[2] A. Azzalini. A class of distributions which includes the normal ones. *Scandinavian Journal of Statistics*, (12):171–178, 1985.

[3] P. J. Bickel and K. A. Doksum. *Mathematical Statistics: Basic Ideas and Selected Topics, Volumes I-II Package.* Texts in Statistical Science. Chapman and Hall/CRC, New York, 1st edition, 2015.

[4] J. V. Bradley. Robustness? *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 31:144–152, 1978.

[5] G. Casella and L. R. Berger. *Statistical Inference.* Brooks/Cole, Australia, 2nd edition, 2002.

[6] E. Cers and J. Valeinis. *EL: Two-sample Empirical Likelihood*, 2011. R package version 1.0.

[7] N. A. Cressie and H. J. Whitford. How to use the two sample t-Test. *Biometrical Journal*, 28(2):131–148, 1986.

[8] M. Delesa-Vēliņa, J. Valeinis, and G. Luta. Comparing two independent populations using a test based on empirical likelihood and trimmed means. *Lithuanian Mathematical Journal*, 61, 2021.

[9] R. Fried and H. Dehling. Robust nonparametric tests for the two-sample location problem. *Statistical Methods & Applications*, 20(2):409–422, 2011.

[10] N. L. Glenn and Y. Zhao. Weighted empirical likelihood estimates and their robustness properties. *Computational Statistics & Data Analysis*, 51:5130–5141, 6 2007.

[11] F. R. Hampel. On the philosophical foundations of statistics: Bridges to Huber's work, and recent results. In H. Rieder, editor, *Robust statistics, data analysis, and computer intensive methods. In honor of Peter Huber's 60th birthday*, pages 185–196. Springer, New York, 1996.

[12] F. R. Hampel, C. Hennig, and E. A. Ronchetti. A smoothing principle for the Huber and other location M-estimators. *Computational Statistics & Data Analysis*, 55:324–337, 2011.

[13] N. L. Hjort, I. W. McKeague, and I. Van Keilegom. Extending the scope of empirical likelihood. *The Annals of Statistics*, 37(3):1079–1111, 2009.

[14] P. J. Huber. Robust estimation of a location parameter. *The Annals of Mathematical Statistics*, 35(1):73 – 101, 1964.

[15] P. J. Huber and E. Ronchetti. *Robust Statistics.* Wiley, New York, 2nd edition, 2009.

[16] L. M. Lix and H. J. Keselman. To trim or not to trim: Tests of location equality under heteroscedasticity and nonnormality. *Educational and Psychological Measurement*, 58(3):409–429, 1998.

[17] P. Mair and R. Wilcox. Robust Statistical Methods in R Using the WRS2 Package. *Behavior Research Methods*, 52:464–488, 2020.

[18] R. A. Maronna, R. D. Martin, and V. J. Yohai. *Robust Statistics. Theory and Methods (with R).* Wiley, New York, 2nd edition, 2018.

[19] E. M. Molanes Lopez, I. Van Keilegom, and N. Veraverbeke. Empirical likelihood for non-smooth criterion functions. *Scandinavian Journal of Statistics*, 36(3):413–432, 2009.

[20] A. B. Owen. Empirical likelihood ratio confidence intervals for a single functional. *Biometrika*, 75(2):237–249, 1988.

[21] A. B. Owen. Empirical likelihood confidence regions. *The Annals of Statistics*, 18:90–120, 1990.

[22] A. B. Owen. Empirical likelihood for linear models. *The Annals of Statistics*, 19(4):1725 – 1747, 1991.

[23] A. B. Owen. *Empirical Likelihood.* Chapman & Hall/CRC, New York, 2001.

[24] G. Qin and M. Tsao. Empirical likelihood ratio confidence interval for the trimmed mean. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 31(12):2197–2208, 2002.

[25] J. Qin and J. F. Lawless. Empirical likelihood and general estimating equations. *The Annals of Statistics*, 22(1):300 – 325, 1994.

[26] Y. Qin and L. Zhao. Empirical likelihood ratio confidence intervals for various differences of two populations. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, pages 23–30, 2000.

[27] R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing.* R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2020.

[28] S. M. Stigler. The asymptotic distribution of the trimmed mean. *The Annals of Statistics*, 1(3):472–477, 1973.

[29] Student. The probable error of a mean. *Biometrika*, 6(1):1–25, 1908.

[30] J. Valeinis. *Confidence bands for structural relationship models.* PhD thesis, University of Goettingen, Goettingen, 2007.

[31] J. Valeinis, E. Cers, and J. Cielens. Two-sample problems in statistical data modelling. *Mathematical Modelling and Analysis*, 15(1):137–151, 2010.

[32] M. Vēliņa, J. Valeinis, L. Greco, and G. Luta. Empirical likelihood-based ANOVA for trimmed means. *International Journal of Environmental Research and Public Health*, 13(10):1–13, 2016.

[33] M. Vēliņa, J. Valeinis, and G. Luta. Likelihood-based inference for the difference of two location parameters using smoothed M-estimators. *Journal of Statistical Theory and Practice*, 13, 2019.

[34] L. Wasserman. *All of Nonparametric Statistics*. Springer, New York, 2006.

[35] B. L. Welch. The generalization of "Student's" problem when several different population variances are involved. *Biometrika*, 34(1):28–35, 1947.

[36] B. L. Welch. On the comparison of several mean values: An alternative approach. *Biometrika*, 38:330–336, 1951.

[37] R. R. Wilcox. Comparing the means of two independent groups. *Biometrical Journal*, 32(7):771–780, 1990.

[38] R. R. Wilcox. *Introduction to Robust Estimation and Hypothesis Testing*. Elsevier Academic Press, London, 4th edition, 2017.

[39] K. K. Yuen. The two-sample trimmed t for unequal population variances. *Biometrika*, 61:165–170, 1974.

Pateicības

Es vēlos pateikties zinātniskajam vadītājam Dr. math., prof. Jānim Valeinim par ievadīšanu zinātniskajā un pedagoģiskajā darbā – viņa optimisms un aizrautība mani motivēja uzsākt pētniecības ceļu. Pateicība Dr. biostat., prof. Džordžam Lutam par lielisko ideju iepazīt robustās statistikas jomu. Paldies Dr. math., prof. Inesei Bulai un Dr. phys., prof. Guntai Krūmiņai par uzticību un doto iespēju attīstīties pasniedzēja lomā.

Sirsnīgs paldies LU doktorantūras studiju kolēģēm Leonorai Pahirko un Tatjanai Pladerei par uzmundrinājumu un emocionālo atbalstu. Paldies klases biedrenei Agnesei Melbārdei, kura pārliecināja, ka visplašākās iespējas mums sniegs tieši statistikas studijas. Pateicība manai plašajai ģimenei un īpaši manam mīļajam vīram Žilam Delesam-Vēliņam – par pacietību, iedrošinājumu, skatu perspektīvā un to, ka ticēja manam doktora darbam vairāk nekā es pati.

Un visam cauri pateicos par balsu, stīgu, vēju, taustiņu un citu mūziku, kas kopā ar statistiku veido manas dzīves īsto harmoniju.