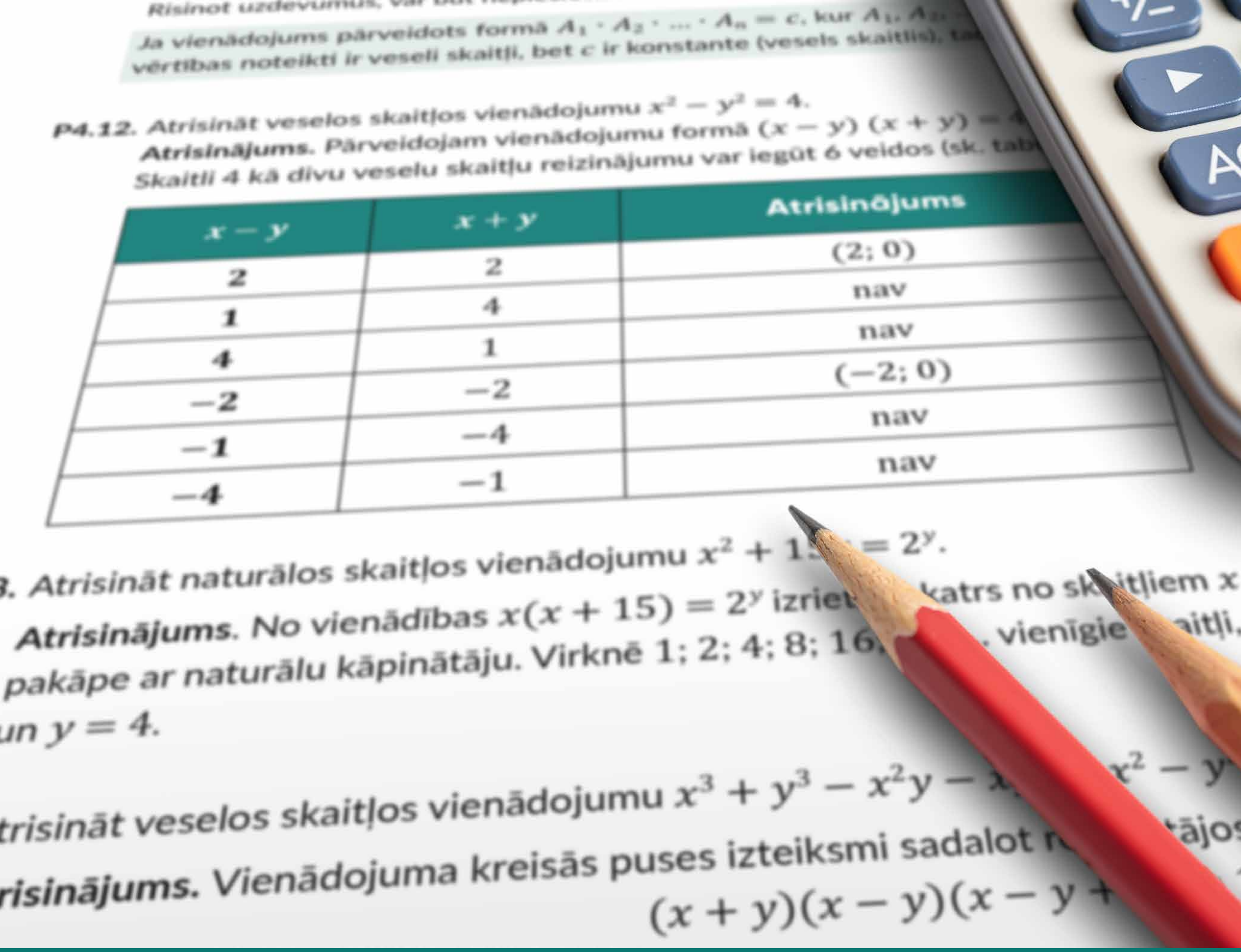


Skaitļu teorijas elementi

Specializētā kursa programmas paraugs vispārējai vidējai izglītībai

Valsts izglītības satura centrs | ESF projekts Nr. 8.3.1.1/16/I/002
Kompetenču pieeja mācību saturā

SKOLA 2030

Skaitļu teorijas elementi

Specializētā kursa programmas paraugs vispārējai vidējai izglītībai

Programmas paraugs ir izstrādāts Eiropas Sociālā fonda projektā “Kompetenču pieeja mācību saturā” (turpmāk – Projekts).

Mācību satura izstrādi pirmsskolas, pamatizglītības un vispārējās vidējās izglītības pakāpē Projektā vadīja **Dace Namsone** un **Zane Oliņa**.

Programmas parauga izstrādi un sagatavošanu publicēšanai Projektā vadīja **Jānis Vilciņš**.

Programmas paraugu izstrādāja **Maruta Avotiņa**.

Programmas paraugu izvērtēja ārējie eksperti: mācību satura recenzente **Baiba Āboltiņa** un zinātniskā recenzente **Dace Kūma**.

Projekts izsaka pateicību visām Latvijas izglītības iestādēm, kas piedalījās valsts pārbaudes darbu aprobācijā.

ISBN **978-9934-24-060-7**.

Saturs

Ievads

Specializētā kursa “**Skaitļu teorijas elementi”** programmas (turpmāk – programma) paraugs ir veidots, lai palīdzētu skolotājiem īstenot Ministru kabineta 2019. gada 3. septembra noteikumos Nr. 416 “Noteikumi par valsts vispārējās vidējās izglītības standartu un vispārējās vidējās izglītības programmu paraugiem” (turpmāk – standarts) noteiktos plānotos skolēnam sasniedzamos rezultātus matemātikas mācību jomā augstākajā mācību satura apguves līmenī.

Programmā iekļauti:

- kursa mērķis un uzdevumi;
- mācību saturs;
- mācību sasniegumu vērtēšanas formas un metodiskie paņēmieni;
- ieteikumi mācību darba organizācijai;
- mācību satura apguves norise.

Programma veidota, paredzot, ka kursa apguvei vidējās izglītības pakāpē tiks atvēlētas 35 mācību stundas.

Programmas paraugam ir ieteikuma raksturs. Skolotāji var izmantot šo programmu vai arī izstrādāt savu programmu.

Kursā aplūkotas skaitīšanas sistēmas un vienādojumi veselos skaitļos, kas ir neliela daļa no diskrētās matemātikas apakšnozares. Uzsvars likts uz spriešanu, kas attīsta skolēnu prasmi pierādīt matemātiska satura apgalvojumus.

Programmas paraugā doti gan uzdevumi, gan arī to atrisinājumi. Daudziem uzdevumiem doti vairāki atšķirīgi risinājumi, lai ilustrētu dažādas metodes, tās salīdzinot un novērtējot katras metodes priekšrocības un trūkumus. Teksts, kas rakstīts slīprakstā pelēkā krāsā, ir ieteikumi skolotājiem, kā virzīt skolēnu darbību un kādus jautājumus var uzdot skolēniem. Mācību satura apguvei izmantojamās literatūras un avotu uzskaitījums pievienots 6. pielikumā.

Mērķis un uzdevumi

Specializētā kursa apguves mērķis un uzdevumi skolēnam ir:

1) padziļināt izpratni par skaitīšanas sistēmu daudzveidību un lietojumu;
2) lietot atsevišķus diskrētai matemātikai raksturīgus matemātiskos modeļus un problēmrisināšanas paņēmienus.

Mācību saturs

Specializētā kursa mācību satura apguvē skolēns paplašinās un padziļinās Matemātika II padziļinātajā kursā apgūtās zināšanas atbilstoši šādiem standartā noteiktiem sasniedzamajiem rezultātiem.

M.A.3.1.4.	Skaidro, veido, lieto algoritmus pārejai no vienas skaitīšanas sistēmas uz citu naturāla skaitļa pierakstīšanai.
M.A.4.5.8.	Spriežot, veicot algebriskus pārveidojumus, pilno pārlasi vai interpretējot grafiski, atrisina vienādojumu ar diviem mainīgajiem kopā $\mathbb{N}$ un $\mathbb{Z}$, piemēram, $x^2 - y^2 = 4$.
M.A.4.5.9.	Lieto dalāmību (kongruences), nosakot izteiksmju īpašības, risinot vienādojumus ar diviem mainīgajiem kopā $\mathbb{N}$ un $\mathbb{Z}$.
M.A.4.5.10.	Pierāda dalāmību, spriežot un lietojot matemātiskās indukcijas principu.

Mācību sasniegumu vērtēšanas formas un metodiskie paņēmieni

Programmā paredzēti četru veidu plānotie skolēnam sasniedzamie rezultāti: zināšanas un izpratne, prasmes, vērtībās balstīti ieradumi un zināšanu, izpratnes, prasmju un ieradumu kombinācijas.

Zināšanu un izpratnes apguve attiecas uz standartā plānotajiem skolēnam sasniedzamajiem rezultātiem, kuri parasti sākas ar darbības vārdiem “skaidro”, “pamato” u. c. Plānoto skolēnam sasniedzamo rezultātu apguvi skolēns parāda, piemēram, skaidrojot jēdzienus, algoritmus, piedaloties sarunās un diskusijās.

Prasmju grupas atspoguļo būtiskas priekšmeta specifiskās prasmes, domāšanas prasmes. Prasmju apguvi skolēns demonstrē darbībā, piemēram, modelē, aprēķina, analītiski spriež, lieto priekšmeta specifisko valodu.

Ieradumus, kas balstīti vērtībās, skolēns demonstrē darbībā; tos vērtē, novērojot skolēna darbību ilgākā laikposmā, īpaši situācijās, kuras ietver izvēles iespējas.

Zināšanu, izpratnes, prasmju un ieradumu kombinācijas, kuras ir raksturīgas šī kursa mācību satura apguvē, skolēns demonstrē darbībā, risinot problēmas, izvērtējot to risinājumus, dažādus paņēmienus.

Skolotājs atbilstoši sasniedzamajam rezultātam izvēlas uzdevumu un vērtēšanas formu (mutiski, rakstiski, kombinēti). Būtiska uzdevumu daļa ir vērtēšanas kritēriji, saskaņā ar kuriem iespējams izvērtēt snieguma kvalitāti. Ja skolēns var demonstrēt sniegumu dažādās kvalitātes gradācijās, tad ir svarīgi veidot snieguma aprakstu attiecībā pret būtiskiem kritērijiem. Kritēriju izstrādē un vērtēšanā var iesaistīt skolēnus, lai pilnveidotu viņu pašvadītas mācīšanās prasmes.

Ieteikumi mācību darba organizācijai

Ieteicams plānot atsevišķu attālinātas mācīšanās formu izmantošanu ar uzdevumu, ka skolēni patstāvīgi plāno un īsteno jaunas informācijas, t. sk. teorētisku zināšanu, ieguvi, izvērtēšanu, apkopošanu un prezentēšanu, pilnveidojot savas pašvadītas mācīšanās prasmes.

Sākotnējo izpratni par jauniem, konceptuāli nozīmīgiem jēdzieniem, paņēmieniem, piemēram, skaitīšanas sistēmas, kongruence, skolēni gūst darbībā, saistot jauno ar jau zināmo, patstāvīgi veicot izpēti, formulējot idejas un pieņēmumus.

Programmas paraugā iekļauti vairāki piemēri mērķtiecīgam pāru darbam, akcentējot sadarbības prasmju izmantošanu kompleksu problēmu risināšanā.

Ievērojot sasniedzamos rezultātus, ieteicams šāds tēmu plānojums un stundu skaita sadalījums pa tēmām. Piedāvātajam sadalījumam ir ieteikuma raksturs, skolotājs plāno stundu skaitu tēmai, ievērojot savu pieredzi, skolēnu mācīšanās vajadzības.

Tēma	Stundu skaits	Stundu skaits kopā
Skaitīšanas sistēmas	2	4
Skaitļa pārvēršana no kādas skaitīšanas sistēmas decimālajā skaitīšanas sistēmā un otrādi	2	
Kongruences jēdziens	2	11
Kongruenču īpašības	3	
Skaitļu pakāpes pēc moduļa n	3	
Uzdevumi	3	
Dalāmības pazīmes	3	8
Matemātiskās indukcijas principa izmantošana dalāmības pierādīšanā	2	
Dalāmības pierādīšana (dažādi uzdevumi)	3	
Vienādojumu risināšana veselos un naturālos skaitļos, pirmās kārtas lineāri vienādojumi ar diviem mainīgajiem	2	11
Atrisinājuma neeksistences piemēri	3	
Grupu/pāru darba uzdevums (risina ar *MS Excel*)	1	
Gadījumu šķirošana un spriešana	5	
Pārbaudes darbs	1	1

Mācību satura apguves norise

Mācību satura apguves norise ietver visu iepriekšminēto tēmu izvērstu aprakstu, piedāvājot gan nelielu teorētisku pamatu – teorēmas un definīcijas –, gan piemērus ar vairākiem iespējamiem atrisinājumiem un vingrinājumus ar atbildēm, kas palīdzēs skolotājam plānot mācību procesu.

1. Skaitīšanas sistēmas

Skaitīšanas sistēma ir simbolisks skaitļu pieraksta veids, kurā skaitļu attēlošanai tiek izmantoti cipari vai citas rakstzīmes.

Izšķir pozicionālās un nepozicionālās skaitīšanas sistēmas.

Pozicionālajās skaitīšanas sistēmās cipara vērtība ir atkarīga no tā atrašanās vietas skaitlī. Pozicionālās ir decimālā, heksadecimālā, duodecimālā, oktālā, binārā un citas skaitīšanas sistēmas. Pozicionālās skaitīšanas sistēmas skaitļus pieraksta kā ciparu virknes.

Nepozicionālās sistēmās katra cipara vērtība nav atkarīga no šī cipara vietas skaitļa pierakstā. Šādas sistēmas piemērs ir romiešu skaitļu sistēma, kurā skaitļu pierakstam tiek izmantoti latīņu alfabēta burti (I, V, X, L, C, D, M). Piemēram, I ir vieninieks gan skaitļa sākumā, gan beigās.

Sadzīvē tiek lietota decimālā skaitīšanas sistēma.

Skaitīšanas sistēmā bāze ir kopējais dažādu simbolu skaits, kas pieļaujami šajā sistēmā. Lielākā simbola vērtība vienmēr ir par viens mazāka nekā bāze. Piemēram, decimālajā sistēmā ir desmit dažādi simboli: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, kur lielākais simbols 9 ir par viens mazāks nekā 10 (bāze).

Jāuzsver atšķirība starp ciparu un skaitli.

Decimālā skaitīšanas sistēma

Secīgas (pa vienam) decimālās skaitīšanas koncepcija.

Simtu pozīcija	Desmitu pozīcija	Vieninieku pozīcija	Piezīmes
		0	Mazākās vērtības simbols.
		1	Secīgs pieaugums pozīcijā.
		2	Secīgs pieaugums pozīcijā.
		3	Secīgs pieaugums pozīcijā.
		4	Secīgs pieaugums pozīcijā.
		5	Secīgs pieaugums pozīcijā.
		6	Secīgs pieaugums pozīcijā.
		7	Secīgs pieaugums pozīcijā.
		8	Secīgs pieaugums pozīcijā.
		9	Lielākās vērtības simbols.
	1	**0**	Nobīdes rādītājs.
	1	1	Secīgs pieaugums pozīcijā.
	1	2 [..]	Secīgs pieaugums pozīcijā.
	1	[..] 9	Secīgs pieaugums pozīcijā.
	2	**0**	Nobīdes rādītājs.
	2	1	Secīgs pieaugums pozīcijā.
	2	2	Secīgs pieaugums pozīcijā.
	...	...	Secīgs pieaugums pozīcijā.
	9	8	Secīgs pieaugums pozīcijā.
	9	9	Secīgs pieaugums pozīcijā.
1	**0**	**0**	Nobīdes rādītājs.
1	0	1	

Jāuzsver skaitļu, kas lielāki par sistēmas bāzi, veidošana. Simbols 0 seko pēc tam, kad kādā no skaitļa pozīcijām skaitīšanas secībā izmantoti visi sistēmā atļautie simboli, kas decimālajā sistēmā ir no 0 līdz 9. Pie simbola 0 parādīšanās uzkrājums no 1 līdz 9 "jānobīda" uz tieši blakus esošo pozīciju pa kreisi no 0 simbola, un secīgā skaitīšana jāatsāk iepriekšējā pozīcijā. Simbolu 0 dēvē par nobīdes rādītāju, un tas norāda, ka, secīgi skaitot, ir saskaitīti attiecīgās pozīcijas 10 vieninieki. Šādu darbību var aplūkot tabulā pie skaitļiem 10, 20 un 100. Katrai pozīcijai decimālajā skaitlī jeb katram vieniniekam šajā pozīcijā ir desmit reizes lielāka vērtība par labajā pusē tieši blakus esošās pozīcijas vērtību, tas ir, šajā pozīcijā esošā vieninieka vērtību. Katra pozicionālā vērtība ir skaitļa 10 daudzkārtnis, un tā var tikt izteikta kā skaitlis 10 kāpināts kādā pakāpē.

Vispārīgā veidā jebkuru decimālo skaitli var izteikt kā summu

$$N = \overline{A_n A_{n-1} \dots A_1 A_0} = A_n \cdot 10^n + A_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + A_1 \cdot 10^1 + A_0 \cdot 10^0 = \sum_{i=0}^{n} A_i \cdot 10^i,$$

kur $A_i \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

Piemēram, $\mathbf{4048} = \mathbf{4} \cdot 10^3 + \mathbf{0} \cdot 10^2 + \mathbf{4} \cdot 10^1 + \mathbf{8} \cdot 10^0$.

Citas skaitīšanas sistēmas

Ja skaitīšanas sistēmas bāze ir 2, tad šo sistēmu sauc par divnieku jeb bināro skaitīšanas sistēmu. Sistēmā izmanto tikai ciparus 0 un 1. Sistēmas bāze – skaitlis 2 – pierakstāms kā 10.

Binārajā sistēmā ir vienkārši izpildīt aritmētiskās darbības – saskaitīšanu un reizināšanu (sk. tabulā). Starpības atrašanai izmanto saskaitīšanas tabulu.

+	0	1
0	0	1
1	1	10

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Kur izmanto bināro skaitīšanas sistēmu?

Ja skaitīšanas sistēmas bāze ir 3, tad šo sistēmu sauc par trijnieku jeb ternāro skaitīšanas sistēmu.

Oktālā jeb astotnieku skaitīšanas sistēmā izmanto ciparus 0, 1, 2, ..., 7. Sistēmas bāze – skaitlis 8 – izsakāms kā 10.

Ja skaitli pieraksta decimālajā skaitīšanas sistēmā, tad pieņemts tās bāzi 10 īpaši neuzrādīt, savukārt, ja skaitlis ir pierakstīts citā skaitīšanas sistēmā, tad sistēmas bāzi norāda kā apakšējo indeksu skaitļa beigās. Piemēram, $1236_{(8)}$ – skaitlis oktālajā skaitīšanas sistēmā.

Vingrinājums

Aizpildīt saskaitīšanas tabulu oktālajā skaitīšanas sistēmā. Skaidrot darbību izpildi.

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0								
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								

Vingrinājuma atbilde

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

Daudzciparu skaitļu saskaitīšana

Daudzciparu skaitļu saskaitīšanu citās skaitīšanas sistēmās veic analogi tāpat kā decimālajā skaitīšanas sistēmā.

Var atgādināt, kā saskaita skaitļus decimālajā skaitīšanas sistēmā rakstos. Pēc tam kopīgi ar skolēniem var apspriest, kā veikt saskaitīšanu citās skaitīšanas sistēmās.

Piemērā apskatīts, kā saskaitīt divus skaitļus oktālajā skaitīšanas sistēmā.

Piemērs

Saskaitīt skaitļus $45342_{(8)}$ un $17231_{(8)}$.

1. Saskaitāmos pierakstām vienu zem otra tā, lai vienas šķiras vienības atrastos vienā kolonnā.

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 4\,5\,3\,4\,2_{(8)} \\ 1\,7\,2\,3\,1_{(8)} \end{array} \\ \hline \end{array}$$

2. Saskaitīšanu sāk ar zemāko šķiru. Vienas šķiras ciparu summu atrod saskaitīšanas tabulā (sk. vingrinājuma tabulu).
3. Ja dotās šķiras ciparu summa ir mazāka nekā skaitīšanas sistēmas bāze (tas ir, ja tā ir viencipara skaitlis; šajā piemērā mazāka nekā 8), tad to pieraksta attiecīgajā kolonnā zem svītras.

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 4\,5\,3\,4\,2_{(8)} \\ 1\,7\,2\,3\,1_{(8)} \end{array} \\ \hline .\;.\;5\,7\,3_{(8)} \end{array}$$

   Ja kādā šķirā ciparu summa ir divciparu skaitlis (šajā piemērā tāda ir ceturtās šķiras vienību summa), tad otrais (kreisais) cipars šādā summā vienmēr ir 1. To iegaumē un nākamajā solī pieskaita nākamās augstākās šķiras ciparu summai (piemērā to pieskaita piektās šķiras summai).

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 1\phantom{\,5\,3\,4\,2_{(8)}} \\ +\begin{array}{r} 4\,5\,3\,4\,2_{(8)} \\ 1\,7\,2\,3\,1_{(8)} \end{array} \\ \hline .\;4\,5\,7\,3_{(8)} \end{array} \qquad \begin{array}{r} +\begin{array}{r} 4\,5\,3\,4\,2_{(8)} \\ 1\,7\,2\,3\,1_{(8)} \end{array} \\ \hline 6\,4\,5\,7\,3_{(8)} \end{array}$$

Idejas mājasdarbam vai pāru darbam:

- *divu (vai vairāk) skaitļu saskaitīšana kādā skaitīšanas sistēmā, skaidrojot veiktās darbības;*
- *divu skaitļu atņemšana kādā skaitīšanas sistēmā, skaidrojot veiktās darbības;*
- *reizināšanas algoritma izveidošana, saskatot analoģijas ar skaitļu reizināšanu rakstos decimālajā skaitīšanas sistēmā.*

1.1. Skaitļa pārvēršana no kādas skaitīšanas sistēmas uz decimālo skaitīšanas sistēmu

Kā pārvērst skaitli decimālajā skaitīšanas sistēmā, ja tas dots kādā citā skaitīšanas sistēmā?

Lai pārvērstu skaitli decimālajā skaitīšanas sistēmā, to ir jāpieraksta kā ciparu virkni pēc dotās skaitīšanas sistēmas bāzes. Vispārīgā gadījumā, ja dots skaitlis $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}_{(g)}$ skaitīšanas sistēmā ar bāzi g, tad pārveidošanai uz decimālo skaitīšanas sistēmu pietiek aprēķināt summu:

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}_{(g)} = a_n \cdot g^n + a_{n-1} \cdot g^{n-1} + \cdots a_2 \cdot g^2 + a_1 \cdot g + a_0.$$

Piemēri

P1.1. Pārvērst skaitli $345_{(8)}$ no oktālās skaitīšanas sistēmas decimālajā.

Atrisinājums. Oktālās skaitīšanas sistēmas bāze ir skaitlis 8. Pierakstām skaitli $345_{(8)}$ kā ciparu virkni un aprēķinām iegūto summu:

$$345_{(8)} = 3 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 = 3 \cdot 64 + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 1 = 229.$$

Tātad $345_{(8)} = 229$.

P1.2. Pārvērst skaitli $11001100_{(2)}$ decimālajā skaitīšanas sistēmā.

Atrisinājums. Binārās skaitīšanas sistēmas bāze ir skaitlis 2. Pierakstām doto skaitli kā ciparu virkni un aprēķinām summu:

$$11001100_{(2)} = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 =$$
$$= 1 \cdot 128 + 1 \cdot 64 + 0 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 204_{(10)}.$$

Tātad $11001100_{(2)} = 204_{(10)}$.

P1.3. Pārvērst skaitli $1AB$ no heksadecimālās skaitīšanas sistēmas decimālajā.

Var uzdot skolēniem pašiem noskaidrot, kas ir heksadecimālā skaitīšanas sistēma.

Atrisinājums. Heksadecimālas skaitīšanas sistēmas bāze ir skaitlis 16. Lai pierakstītu doto skaitli kā ciparu virkni, burtus A un B ir jāaizvieto atbilstoši ar skaitļiem 10 un 11:

$$1AB_{(16)} = 1 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 11 \cdot 16^0 = 256 + 160 + 11 = 427.$$

Tātad $1AB_{(16)} = 427$.

1.2. Skaitļa pārvēršana no decimālās skaitīšanas sistēmas kādā citā skaitīšanas sistēmā

Piemērā apskatīts, kā decimālās skaitīšanas sistēmas skaitli 127 pārveidot binārajā pierakstā.
Mērķis ir skaitli 127 pierakstīt formā:

$$a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + a_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0,$$

kur $a_i \in \{0; 1\}$.

Tādā gadījumā skaitļa 127 binārais pieraksts būs $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0}$, kur $a_i \in \{0; 1\}$.
Dalot skaitli 127 ar 2, iegūstam dalījumu 63 un atlikumu 1:

$$127 = 63 \cdot 2 + 1.$$

Pēc tam, dalījumu 63 dalot ar 2, iegūstam dalījumu 31 un atlikumu 1:

$$63 = 31 \cdot 2 + 1.$$

Turpinām dalīt iegūtos dalījumus ar 2 tik ilgi, kamēr iegūstam dalījumu 0:

- $31 = 15 \cdot 2 + 1$;
- $15 = 7 \cdot 2 + 1$;
- $7 = 3 \cdot 2 + 1$;
- $3 = 1 \cdot 2 + 1$;
- $1 = 0 \cdot 2 + 1$.

Iegūtās vienādības izmantojam, lai pārveidotu skaitli 127 par tādu reizinājumu summu, kuros viens no reizinātājiem ir divnieka pakāpe un otrs reizinātājs ir 0 vai 1:

$$\begin{aligned}127 &= 63\cdot 2+1=(31\cdot 2+1)\cdot 2+1=31\cdot 2^2+1\cdot 2+1=(15\cdot 2+1)\cdot 2^2+1\cdot 2+1=\\ &=15\cdot 2^3+1\cdot 2^2+1\cdot 2+1=(7\cdot 2+1)\cdot 2^3+1\cdot 2^2+1\cdot 2+1=\\ &=7\cdot 2^4+1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+1\cdot 2+1=(3\cdot 2+1)\cdot 2^4+1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+1\cdot 2+1=\\ &=3\cdot 2^5+1\cdot 2^4+1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+1\cdot 2+1=(1\cdot 2+1)\cdot 2^5+1\cdot 2^4+1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+1\cdot 2+1=\\ &=1\cdot 2^6+1\cdot 2^5+1\cdot 2^4+1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+1\cdot 2+1.\end{aligned}$$

Līdz ar to esam ieguvuši, ka $127 = 1111111_{(2)}$.

Bieži skaitļu pārveidošanu veic īsāk, ievērojot, ka dotā skaitļa 127 pierakstā jaunajā skaitīšanas sistēmā cipari parāda atlikumus, ko iegūst, vispirms dalot doto skaitli un pēc tam dalot iegūtos dalījumus ar jaunās sistēmas bāzi:

- pirmajā vietā no labās puses ir atlikums, ko iegūst, dalot doto skaitli ar jaunās sistēmas bāzi;
- otrajā vietā ir atlikums, ko iegūst, dalot pirmo dalījumu ar jaunās sistēmas bāzi;
- trešajā vietā ir atlikums, ko iegūst, dalot otro dalījumu ar jaunās sistēmas bāzi;
- ...

Process beidzas, kad iegūtais dalījums ir 0; šīs dalīšanas atlikums ir cipars pēdējā vietā no labās puses (tas ir, pirmajā vietā no kreisās puses).

Skaitļu pārveidošanas procesu ērti attēlot tabulā; skaitli nolasa, sākot ar tabulas pēdējo rindu.

Darbība	Dalījums	Atlikums
127 : 2	63	1
63 : 2	31	1
31 : 2	15	1
15 : 2	7	1
7 : 2	3	1
3 : 2	1	1
1 : 2	0	1

Piemēri

P1.4. Pārveidot skaitli 57 no decimālās skaitīšanas sistēmas uz trijnieku skaitīšanas sistēmu.

Darbība	Dalījums	Atlikums
57 : 3	19	0
19 : 3	6	1
6 : 3	2	0
2 : 3	0	2

Tātad $57 = 2010_{(3)}$.

P1.5. Pārveidot skaitli 3010 no decimālās skaitīšanas sistēmas uz astotnieku skaitīšanas sistēmu.

Darbība	Dalījums	Atlikums
3010 : 8	376	2
376 : 8	47	0
47 : 8	5	7
5 : 8	0	5

Tātad $3010 = 5702_{(8)}$.

Pildot kā vingrinājumus, dažādus skaitļus var pārvērst no vienas skaitīšanas sistēmas uz kādu citu.
Rezultātu pārbaudei var izmantot interaktīvu rīku pārejai no vienas skaitīšanas sistēmas uz citu (piemēram, https://www.rapidtables.com/convert/number/base-converter.html).

2. Kongruences

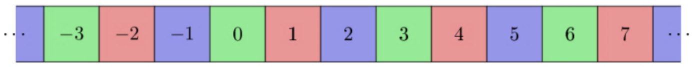
Viens no pazīstamākajiem veselo skaitļu iedalījumiem ir to dalījums pāra un nepāra skaitļos. Katrs vesels skaitlis ir vai nu pāra, vai nepāra, taču neviens nav vienlaikus gan pāra, gan nepāra skaitlis. Tādā veidā visi veselie skaitļi tiek sadalīti divās klasēs: skaitļi, kas dalās ar 2 (pāra skaitļi), un skaitļi, kas nedalās ar 2 (nepāra skaitļi).

Ja dalītāju 2 aizvieto ar 3, tad līdzīgi var runāt par skaitļiem, kas dalās vai nedalās ar 3. Tomēr izrādās, ka lietderīgāk ir veselos skaitļus dalīt klasēs atkarībā no tā, kādu atlikumu tie dod, dalot ar kādu skaitli. Arī pāra un nepāra skaitļus var uztvert kā skaitļus, kas, dalot ar 2, dod attiecīgi atlikumu 0 vai 1. Ja nomainām 2 ar 3, tad veselos skaitļus sadalām trīs klasēs – šķirojot gadījumus, vai skaitlis, dalot ar 3, dod atlikumu 0, 1 vai 2.

Teorēma par dalīšanu ar atlikumu. Ja a ir vesels skaitlis un b ir naturāls skaitlis, tad noteikti var atrast tādus veselus skaitļus q un r, ka $a = b \cdot q + r$, turklāt $0 \leq r < b$.

Iegaumē! Atlikums nekad nav mazāks kā 0 un vienmēr ir mazāks nekā dalītājs, tas ir, dalot ar b, atlikumam var būt vērtības $0, 1, 2, \ldots, b-1$.

Skaitļu sadalīšanu klasēs var salīdzināt ar "skaitļu krāsošanu". Pieņemsim, ka visi veselie skaitļi sarakstīti uz bezgalīgas rūtiņu lentes. Ja vēlamies veselos skaitļus sašķirot klasēs atkarībā no tā, piemēram, kādus atlikumus tie dod, dalot ar 3, tad grafiski var iztēloties, ka katram skaitlim atbilstošā rūtiņa tiek nokrāsota vienā no trim krāsām: tie skaitļi, kas dalās ar trīs, tiek krāsoti vienā krāsā, tie skaitļi, kas, dalot ar 3, dod atlikumu 1 – citā krāsā, un skaitļi, kas, dalot ar 3, dod atlikumu 2 – vēl citā krāsā. Tādējādi visi skaitļi tiek nokrāsoti kādā no trim krāsām, turklāt katrs skaitlis tiek nokrāsots tieši vienā krāsā (sk. 1. attēlu).



1. attēls

2.1. Kongruences jēdziens

Lai šos spriedumus vispārinātu un lietotu uzdevumu risināšanā, definē kongruences jēdzienu.

Definīcija. Doti veseli skaitļi a un b un naturāls skaitlis m. Skaitļi a un b ir kongruenti pēc moduļa m, ja a un b, dalot tos ar m, dod vienādu atlikumu.

To pieraksta $a \equiv b \pmod{m}$ vai $a \equiv_m b$. Latvijā biežāk tiek lietots pirmais pieraksta veids.

Piemēri

- $7 \equiv 3 \pmod{2}$, jo gan 7, gan 3, dalot ar 2, dod atlikumu 1.
- $17 \equiv 73 \pmod{14}$, jo gan 17, gan 73, dalot ar 14, dod atlikumu 3.
- $71 \equiv 8 \pmod{9}$, jo gan 71, gan 8, dalot ar 9, dod atlikumu 8.
- $-2 \equiv 4 \pmod{3}$, jo gan -2, gan 4, dalot ar 3, dod atlikumu 1.
- $-6 \equiv 85 \pmod{7}$, jo gan -6, gan 85, dalot ar 7, dod atlikumu 1.

Piezīme. Īpaši uzmanīgi jāaprēķina atlikums, ja negatīvu skaitli dala ar naturālu skaitli. Piemēram, skaitli -6, dalot ar 7, atlikums ir **1**, jo $-6 = 7 \cdot (-1) + \mathbf{1}$.

Bieži vien, lai pārbaudītu, vai skaitļi ir kongruenti pēc kāda moduļa, ir ērti lietot nākamo teorēmu.

Teorēma. $a \equiv b \pmod{m}$ tad un tikai tad, ja starpība $a - b$ dalās ar m.

Kāpēc starpība $a - b$ dalīsies ar m, ja $a \equiv b \ (mod\ m)$?

Tā kā $a \equiv b \ (mod\ m)$, tad $a = a_1 m + r$ un $b = b_1 m + r$, kur $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$ un $r \in \{0; 1; ...; m-1\}$.

Līdz ar to $a - b = (a_1 m + r) - (b_1 m + r) = a_1 m - b_1 m = (a_1 - b_1)m$, kas dalās ar m, jo satur reizinātāju m.

Kāpēc $a \equiv b \ (mod\ m)$, ja starpība $a - b$ dalās ar m?

Pieņemsim, ka $a = a_1 m + r_1$ un $b = b_1 m + r_2$, kur $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$ un $r_1, r_2 \in \{0; 1; ...; m - 1\}$. Līdz ar to $a - b = (a_1 m + r_1) - (b_1 m + r_2) = (a_1 - b_1)m + (r_1 - r_2)$. Tā kā $a - b$ un $(a_1 - b_1)m$ dalās ar m, tad arī $r_1 - r_2$ jādalās ar m, bet tas iespējams tikai tad, ja $r_1 - r_2 = 0$ jeb $r_1 = r_2$, jo $r_1, r_2 \in \{0; 1; ...; m - 1\}$. Tātad $a \equiv b \ (mod\ m)$.

Piemēri

- $7 \equiv 3 \pmod{2}$, jo starpība $7 - 3 = 4$ dalās ar 2.
- $17 \equiv 73 \pmod{14}$, jo starpība $17 - 73 = -56$ dalās ar 14.
- $71 \equiv 8 \pmod{9}$, jo starpība $71 - 8 = 63$ dalās ar 9.
- $-2 \equiv 4 \pmod{3}$, jo starpība $-2 - 4 = -6$ dalās ar 3.
- $-6 \equiv 85 \pmod{7}$, jo starpība $-6 - 85 = -91$ dalās ar 7.

Vingrinājumi

V2.1. Nosaukt vismaz piecus skaitļus, kas ir kongruenti skaitlim 7 pēc moduļa 4.
$7 \equiv ? \pmod{4}$

V2.2. Vai dotās kongruences ir patiesas?
a) $3 \equiv 7 \pmod{4}$
b) $3 \equiv 7 \pmod{3}$
c) $14 \equiv 73 \pmod{10}$
d) $78 \equiv 8 \pmod{5}$

V2.3. Pēc kāda moduļa var būt kongruenti skaitļi 12 un 19?
$12 \equiv 19 \ (\mathrm{mod}\ ?)$

V2.4. Pēc kāda moduļa var būt kongruenti skaitļi –3 un 7?
$-3 \equiv 7 \ (\mathrm{mod}\ ?)$

Vingrinājumu atbildes

V2.1. Skaitli 7 dalot ar 4, atlikumā iegūst 3. Tātad der skaitļi formā $4k + 3$, kur $k \in \mathbb{Z}$, tas ir, ...; -5; -1; 3; 7; 11; 15; ...

V2.2. a) Jā, jo gan 3, gan 7 dod atlikumu 3, dalot ar 4.
b) Nē, jo 3 dod atlikumu 0, dalot ar 3, bet 7 dod atlikumu 1, dalot ar 3.
c) Nē, jo 14 dod atlikumu 4, dalot ar 10, bet 73 dod atlikumu 3, dalot ar 10.
d) Jā, jo starpība $78 - 8 = 70$ dalās ar 5.

V2.3. Apskatām starpību $19 - 12 = 7$. Tā kā 7 dalās ar 1 un 7, tad dotie skaitļi var būt kongruenti pēc moduļa 1 vai 7:
$12 \equiv 19 \equiv 0 \pmod{1}$;
$12 \equiv 19 \equiv 5 \pmod{7}$.

V2.4. Apskatām starpību $7 - (-3) = 10$. Tā kā 10 dalās ar 1, 2, 5 un 10, tad dotie skaitļi var būt kongruenti pēc moduļa 1, 2, 5 vai 10:
$-3 \equiv 7 \equiv 0 \pmod{1}$;
$-3 \equiv 7 \equiv 1 \pmod{2}$;
$-3 \equiv 7 \equiv 2 \pmod{5}$;
$-3 \equiv 7 \equiv 7 \pmod{10}$.

Katrs skolēns var izdomāt līdzīgus piemērus (var uzdot arī kā mājasdarbu), pēc tam skolēnus sadala pāros, kur viņi apmainās ar piemēriem, risina otra izdomātos piemērus, salīdzina atbildes un apspriež risinājumus.

2.2. Kongruenču īpašības

Lai kongruences varētu lietot uzdevumu risināšanā, var izmantot kongruenču īpašības, kas ļauj daudzus aprēķinus veikt ievērojami vienkāršāk.

1. Ja a, dalot ar m, dod atlikumu r, tad $a \equiv r \pmod{m}$.
2. Ja $a \equiv b \pmod{m}$, tad $ka \equiv kb \pmod{m}$, kur k ir jebkurš vesels skaitlis.
3. Ja $a \equiv b \pmod{m}$, tad $a^n \equiv b^n \pmod{m}$, kur n ir jebkurš naturāls skaitlis.
4. Ja $a \equiv b \pmod{m}$ un $c \equiv d \pmod{m}$, tad
   - $a + c \equiv b + d \pmod{m}$,
   - $a - c \equiv b - d \pmod{m}$,
   - $ac \equiv bd \pmod{m}$.
5. Visiem veseliem a izpildās kongruence $a \equiv a \pmod{m}$ (refleksivitāte).
6. Ja $a \equiv b \pmod{m}$, tad $b \equiv a \pmod{m}$ (simetrija).
7. Ja $a \equiv b \pmod{m}$ un $b \equiv c \pmod{m}$, tad $a \equiv c \pmod{m}$ (transitivitāte).

Apskatām dažu īpašību lietojumu:
- $332 \equiv 330 + 2 \equiv 0 + 2 \equiv 2 \pmod{3}$ (*4. īpašība*);
- $50^{100} \equiv 1^{100} \equiv 1 \pmod{7}$, jo $50 \equiv 1 \pmod{7}$ (*3. īpašība*);
- $332 + 451 \equiv 2 + 1 \equiv 3 \equiv 0 \pmod{3}$, jo $332 \equiv 2 \pmod{3}$ un $451 \equiv 1 \pmod{3}$ (*4. īpašība*);
- $121 \cdot 26 \equiv 1 \cdot 2 \equiv 2 \pmod{4}$ (*4. īpašība*).

Tā kā kongruence pēc moduļa m sadala visus veselos skaitļus m klasēs, kur katrā klasē ietilpst skaitļi, kas dod vienādus atlikumus pēc moduļa m (sk., piemēram, 1. attēlu, kur $m = 3$ un vienā krāsā ir nokrāsoti skaitļi, kas ir vienā klasē), tad īpašību, kas jāpierāda visiem veseliem skaitļiem, pietiek pierādīt katras klases skaitļiem atsevišķi.

Vingrinājumi

V2.5. Uzrakstīt saskaitīšanas tabulu pēc moduļa 4.

$a \pmod{4}$ \ $b \pmod{4}$	**0**	**1**	**2**	**3**
0				
1				
2				
3				

V2.6. Uzrakstīt reizināšanas tabulu pēc moduļa 4.

$a \pmod{4}$ \ $b \pmod{4}$	**0**	**1**	**2**	**3**
0				
1				
2				
3				

Vingrinājumu atbildes

V2.5. Piemēram, $2 + 3 \equiv 5 \equiv 1 \pmod 4$.

$b \pmod 4$ / $a \pmod 4$	**0**	**1**	**2**	**3**
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

V2.6. Piemēram, $2 \cdot 3 \equiv 6 \equiv 2 \pmod 4$.

$b \pmod 4$ / $a \pmod 4$	**0**	**1**	**2**	**3**
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Piemēri

P2.1. Aprēķināt atlikumu, kāds rodas, skaitli A dalot ar n:
a) $A = 113^2 + 21^7 - 43 \cdot 15$ un $n = 11$;
b) $A = 13^3 - 49 \cdot 7 + 220^{220} \cdot 24$ un $n = 12$;
c) $A = 23^3 - 57 \cdot 12^2 - 81 \cdot 44$ un $n = 7$.

Atrisinājums

a) Risinājumā izmantoti šādi spriedumi:

$$113 \equiv 110 + 3 \equiv 11 \cdot 10 + 3 \equiv 0 + 3 \equiv 3 \pmod{11};$$
$$21 \equiv 22 - 1 \equiv 11 \cdot 2 - 1 \equiv 0 - 1 \equiv -1 \pmod{11};$$
$$43 \equiv 44 - 1 \equiv 0 - 1 \equiv -1 \pmod{11};$$
$$15 \equiv 11 + 4 \equiv 4 \pmod{11}.$$

$A \equiv 113^2 + 21^7 - 43 \cdot 15 \equiv 3^2 + (-1)^7 - (-1) \cdot 4 \equiv 9 - 1 + 4 \equiv 12 \equiv 1 \pmod{11}$. Skaitli A dalot ar 11, atlikums ir 1.

Šeit jāuzsver atšķirība starp atlikumu, kas vienmēr ir nenegatīvs, un darbībām ar kongruencēm, kur var izvēlēties ērtāko atbilstošās kongruenču klases pārstāvi. Piemēram, skaitli 21 ir ērtāk aizstāt ar tam kongruentu skaitli -1 pēc moduļa 11 (jo pēc tam tas jākāpina septītajā pakāpē), nevis ar skaitli 10.

b) Risinājumā izmantoti šādi spriedumi:

$$13 \equiv 12 + 1 \equiv 1 \pmod{12};$$
$$49 \equiv 48 + 1 \equiv 1 \pmod{12};$$
$$24 \equiv 12 \cdot 2 \equiv 0 \pmod{12}.$$

$A \equiv 13^3 - 49 \cdot 7 + 220^{220} \cdot 24 \equiv 1^2 - 1 \cdot 7 + 220^{220} \cdot 0 \equiv 1 - 7 + 0 \equiv -6 \equiv 6 \pmod{12}$. Skaitli A dalot ar 12, atlikums ir 6.

c) Risinājumā izmantoti šādi spriedumi:

$$23 \equiv 21 + 2 \equiv 2 \ (\text{mod } 7);$$
$$57 \equiv 56 + 1 \equiv 1 \ (\text{mod } 7);$$
$$23 \equiv 21 + 2 \equiv 2 \ (\text{mod } 7);$$
$$12 \equiv 7 + 5 \equiv 5 \ (\text{mod } 7);$$
$$81 \equiv 77 + 4 \equiv 4 \ (\text{mod } 7);$$
$$44 \equiv 42 + 2 \equiv 2 \ (\text{mod } 7).$$

$A \equiv 23^3 - 57 \cdot 12^2 - 81 \cdot 44 \equiv 2^3 - 1 \cdot 5^2 - 4 \cdot 2 \equiv -25 \equiv -28 + 3 \equiv 3 \ (\text{mod } 7)$. Skaitli A dalot ar 7, atlikums ir 3.

P2.2. Pierādīt, ka visiem naturāliem n skaitlis $2 \cdot 5^{2n} + 14^n - 3^{n+1}$ dalās ar 11.

Atrisinājums. Izmantojot kongruenču un pakāpju īpašības, iegūstam

$$2 \cdot 5^{2n} + 14^n - 3^{n+1} \equiv 2 \cdot 25^n + 14^n - 3 \cdot 3^n \equiv 2 \cdot 3^n + 3^n - 3 \cdot 3^n \equiv 0 \ (\text{mod } 11).$$

Tātad izteiksme $2 \cdot 5^{2n} + 14^n - 3^{n+1}$ dalās ar 11.

2.3. Skaitļu pakāpes pēc moduļa m

Dažreiz risinot uzdevumus, ir lietderīgi zināt, kādus atlikumus var iegūt, ja kāda skaitļa pakāpi (piemēram, kvadrātu, kubu) apskata pēc dotā moduļa.

Piemēri

P2.3. Kādu atlikumu var iegūt, vesela skaitļa kvadrātu dalot ar 3?

1. atrisinājums (*bez kongruenču izmantošanas*). Ievērojam, ka veselu skaitli n, dalot ar 3, var iegūt atlikumu 0, 1 vai 2. Tātad katru veselu skaitli var pierakstīt vienā no trim formām (k ir vesels skaitlis):

- $n = 3k$ (skaitļi, kas dalās ar 3, jeb visi skaitļi, kas, dalot ar 3, dod atlikumu 0), tad $n^2 = (3k)^2 = 9k^2$, kas dalās ar 3, jo satur reizinātāju 9;
- $n = 3k + 1$ (skaitļi, kas, dalot ar 3, dod atlikumu 1), tad $n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1$, kas, dalot ar 3, dod atlikumu 1, jo pirmie divi saskaitāmie dalās ar 3;
- $n = 3k + 2$ (skaitļi, kas, dalot ar 3, dod atlikumu 2), tad $n^2 = (3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4$, kas, dalot ar 3, dod atlikumu 1, jo pirmie divi saskaitāmie dalās ar 3, bet, 4 dalot ar 3, iegūst atlikumu 1.

Tātad vesela skaitļa kvadrātu, dalot ar 3, var iegūt atlikumu 0 vai 1.

2. atrisinājums (*ar kongruenču izmantošanu*). Ievērojam, ka veselu skaitli n, dalot ar 3, var iegūt atlikumu 0, 1 vai 2:

- ja $n \equiv 0 \ (\text{mod } 3)$, tad $n^2 \equiv 0^2 \equiv 0 \ (\text{mod } 3)$;
- ja $n \equiv 1 \ (\text{mod } 3)$, tad $n^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \ (\text{mod } 3)$;
- ja $n \equiv 2 \ (\text{mod } 3)$, tad $n^2 \equiv 2^2 \equiv 4 \ (\text{mod } 3)$.

Tātad vesela skaitļa kvadrātu, dalot ar 3, var iegūt atlikumu 0 vai 1.

Piezīme. Aplūkotajā 2. risinājumā pēdējos divus gadījumus var apvienot, ievērojot, ka $2 \equiv -1 \ (mod\ 3)$, tas ir, ja $n \equiv \pm 1 \ (mod\ 3)$, tad $n^2 \equiv (\pm 1)^2 \equiv 1 \ (mod\ 3)$.

Aprēķināt atlikumu var ar, piemēram, *MS Excel*. Piemēram, noskaidrojot, kādu atlikumu var iegūt, ja vesela skaitļa kvadrātu dala ar 8:

1) vienā kolonnā ieraksta iespējamos atlikumus (sk. 2. attēlu, kur atlikumi ierakstīti šūnās no A2 līdz A9), kādus var iegūt, ja skaitli dala ar 8 (atlikumi ir 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7);
2) otrā kolonnā raksta formulu, piemēram, šūnā B2 raksta **=mod(A2^2;8)**. Funkcijai MOD ir divi argumenti, kas atdalīti ar semikolu (sk. 3. attēlu).

	A	B
1	n	n^2 mod 8
2	0	0
3	1	1
4	2	4
5	3	1
6	4	0
7	5	1
8	6	4
9	7	1
10		

2. attēls

Apraksts

Atgriež atlikumu pēc skaitļa dalīšanas ar dalītāju. Rezultātam ir tāda pati zīme kā dalītājam.

Sintakse

MOD(skaitlis, dalītājs)

Funkcijas MOD sintaksei ir šādi argumenti.

- **Skaitlis** Obligāts arguments. Skaitlis, kura atlikums pēc dalīšanas ir jāuzzina.
- **Dalītājs** Obligāts arguments. Skaitlis, ar kuru jādala skaitlis.

Piezīmes

- Ja dalītājs ir 0, tad funkcija MOD atgriež #DIV/0! kļūdas vērtību #VALUE!.

3. attēls

P2.4. Kādu atlikumu dod skaitļa kvadrāts, dalot ar m, kur $m = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 13; 16$?

Uzdevumu var veikt "uz papīra" un pēc tam pārbaudīt ar MS Excel.
Uzdevumu var papildināt, skaitļa kvadrātu aizstājot ar kādu citu pakāpi, piemēram, kādu atlikumu dod skaitļa kubs, dalot ar m?

Atrisinājums

m	Atlikumi	m	Atlikumi
2	$0; 1$	**8**	$0; 1; 4$
3	$0; 1$	**9**	$0; 1; 4; 7$
4	$0; 1$	**10**	$0; 1; 4; 5; 6; 9$
5	$0; 1; 4$	**11**	$0; 1; 3; 4; 5; 9$
6	$0; 1; 3; 4$	**13**	$0; 1; 3; 4; 9; 10; 12$
7	$0; 1; 2; 4$	**16**	$0; 1; 4; 9$

P2.5. Pierādīt, ka nevienai naturālai n vērtībai izteiksmes $13^n + 7^n + 2019$ vērtība nav naturāla skaitļa kvadrāts.
Atrisinājums. Jau ieguvām (sk. P2.4. piemēru), ka naturāla skaitļa kvadrātu, dalot ar 3, var iegūt atlikumu 0 vai 1.
Apskatot doto izteiksmi pēc moduļa 3, iegūstam

$$13^n + 7^n + 2019 \equiv 1^n + 1^n + 0 = 1 + 1 = 2 \pmod 3.$$

Tātad dotā izteiksme, dalot ar 3, dod atlikumu 2, tāpēc tā nevar būt naturāla skaitļa kvadrāts.
Piezīme. Uzdevumu var atrisināt, arī aplūkojot izteiksmi pēc jebkura skaitļa 3 daudzkārtņa moduļa, tas ir, 6, 9, 12 utt.

Kāpēc neder, ja apskata pēc moduļa 2?

Apskatām izteiksmi pēc moduļa 2:

$$13^n + 7^n + 2019 \equiv 1^n + 1^n + 1 = 1 + 1 + 1 = 3 \equiv 1 \pmod 2.$$

Skaitļa kvadrāts var dot atlikumu 1, dalot to ar 2. Nerodas pretruna.

P2.6. Doti tādi naturāli skaitļi a un b, ka a^2+b^2 dalās ar 3. Pierādīt, ka a^2+b^2 dalās arī ar 9.

Atrisinājums. Jau ieguvām, ka naturāla skaitļa kvadrāts var būt kongruents ar 0 vai 1 pēc moduļa 3 (sk. P2.4. piemēru). Apskatām summu a^2+b^2 pēc moduļa 3.

$b^2 \pmod 3$ / $a^2 \pmod 3$	**0**	**1**
0	0	1
1	1	2

Ievērojam, ka $a^2+b^2 \equiv 0 \pmod 3$ jeb a^2+b^2 dalās ar 3 tikai tad, ja $a^2 \equiv 0 \pmod 3$ un $b^2 \equiv 0 \pmod 3$ jeb gan a^2, gan b^2 dalās ar 3.

Naturāla skaitļa kvadrāts dalās ar 3 tikai tad, ja pats skaitlis dalās ar 3 (sk. P2.1. piemēru). Tātad gan a, gan b dalās ar 3, bet tādā gadījumā gan a^2, gan b^2 dalās ar 9. Tā kā katrs saskaitāmais dalās ar 9, tad arī summa a^2+b^2 dalās ar 9.

Uzdevumos par veselu skaitļu pakāpēm ar mainīgu vai lielu kāpinātāju var noderēt nākamā teorēma.

Teorēma. Virkne $x_n = a^n$ pēc moduļa m ir periodiska.

Kāds ir lielākais iespējamais perioda garums?

Perioda garums nepārsniedz m.

Kā noskaidrot perioda garumu?

Perioda garumu un tajā ietilpstošos skaitļus var atrast, rakstot pēc kārtas skaitļus a^n pēc moduļa m.

Kāpēc virkne pēc moduļa m ir periodiska?

Tiklīdz virknē $a^n \pmod m$ parādās kāds jau bijis skaitlis, ir atrasts periods, jo katrs nākamais virknes loceklis ir atkarīgs tikai no iepriekšējā virknes locekļa ($x_{n+1} = x_n \cdot a = a^n \cdot a = a^{n+1}$).

Piemēri

P2.7. Kādu atlikumu iegūst, ja skaitli 3^{50}, dala ar 7?

1. atrisinājums. Virkne 3^n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, ir periodiska pēc moduļa 7, apskatīsim šīs virknes pirmos locekļus:

- ja $n=0$, tad $3^0 \equiv \mathbf{1} \pmod 7$;
- ja $n=1$, tad $3^1 \equiv 3 \pmod 7$;
- ja $n=2$, tad $3^2 \equiv 9 \equiv 2 \pmod 7$;
- ja $n=3$, tad $3^3 \equiv 3^2 \cdot 3 \equiv 2 \cdot 3 \equiv 6 \pmod 7$;
- ja $n=4$, tad $3^4 \equiv 3^3 \cdot 3 \equiv 6 \cdot 3 \equiv 18 \equiv 4 \pmod 7$;
- ja $n=5$, tad $3^5 \equiv 3^4 \cdot 3 \equiv 4 \cdot 3 \equiv 12 \equiv 5 \pmod 7$;
- ja $n=6$, tad $3^6 \equiv 3^5 \cdot 3 \equiv 5 \cdot 3 \equiv 15 \equiv \mathbf{1} \pmod 7$;
- ja $n=7$, tad $3^7 \equiv 3^6 \cdot 3 \equiv 1 \cdot 3 \equiv 3 \pmod 7$;
- ...

Šo informāciju ērti apkopot tabulā:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$3^n \pmod 7$	**1**	3	2	6	4	5	**1**	3	...

Virkne $3^n \pmod 7$ ir periodiska ar perioda garumu 6. Tā kā $3^6 \equiv 1 \pmod 7$, tad secinām, ka

$$3^{50} \equiv 3^{6\cdot 8+2} \equiv (3^6)^8 \cdot 3^2 \equiv 1 \cdot 3^2 \equiv 3^2 \equiv 2 \pmod 7.$$

Tātad skaitlis 3^{50} dod atlikumu 2, dalot ar 7.

2. atrisinājums. Izmantojam kongruenču un pakāpju īpašības:

$$3^{50} \equiv (3^2)^{25} \equiv 9^{25} \equiv 2^{25} \equiv (2^5)^5 \equiv 32^5 \equiv 4^5 \equiv 16 \cdot 16 \cdot 4 \equiv 2 \cdot 2 \cdot 4 \equiv 16 \equiv 2 \pmod 7.$$

Tātad skaitlis 3^{50} dod atlikumu 2, dalot ar 7.

P2.8. Vai var atrast tādus divus veselus skaitļus, kuru kubu summa, dalot ar 7, dod atlikumu 3?

Atrisinājums. Vispirms noskaidrojam, ar ko var būt kongruenti veselu skaitļu kubi pēc moduļa 7:

- ja $n \equiv 0 \pmod 7$, tad $n^3 \equiv 0^3 \equiv 0 \pmod 7$;
- ja $n \equiv 1 \pmod 7$, tad $n^3 \equiv 1^3 \equiv 1 \pmod 7$;
- ja $n \equiv 2 \pmod 7$, tad $n^3 \equiv 2^3 \equiv 8 \equiv 1 \pmod 7$;
- ja $n \equiv 3 \pmod 7$, tad $n^3 \equiv 3^3 \equiv 27 \equiv 6 \equiv -1 \pmod 7$;
- ja $n \equiv 4 \equiv -3 \pmod 7$, tad $n^3 \equiv (-3)^3 \equiv -3^3 \equiv -(-1) \equiv 1 \pmod 7$;
- ja $n \equiv 5 \equiv -2 \pmod 7$, tad $n^3 \equiv (-2)^3 \equiv -2^3 \equiv -1 \pmod 7$;
- ja $n \equiv 6 \equiv -1 \pmod 7$, tad $n^3 \equiv (-1)^3 \equiv -1 \pmod 7$.

Tātad veselu skaitļu kubi ir kongruenti ar 0 vai ±1 pēc moduļa 7. Aplūkojam, ar ko var būt kongruenta divu veselu skaitļu kubu summa pēc moduļa 7.

$a^3 \pmod 7$ / $b^3 \pmod 7$	**–1**	**0**	**1**
–1	–2	–1	0
0	–1	0	1
1	0	1	2

Esam ieguvuši, ka divu šādu skaitļu summa pēc moduļa 7 var pieņemt jebkuru no vērtībām -2, -1, 0, 1, 2, taču nekādas citas. Tā kā $3 \equiv -4 \pmod 7$ neparādās starp šīm vērtībām, tad divu veselu skaitļu kubu summa nevar dot atlikumu 3, dalot ar 7.

Piezīme. Tabulā -1 vietā varēja aplūkot tam pēc moduļa 7 kongruentu skaitli 6. Skaitļa 6 vietā izmantots skaitlis -1, jo ar to vieglāk veikt darbības. *Šeit jāuzsver atšķirība starp atlikumu, kas vienmēr ir nenegatīvs, un darbībām ar kongruencēm, kur var izvēlēties ērtāko atbilstošās kongruenču klases pārstāvi.*

P2.9. Pierādīt, ka $n^3 + 3$ nedalās ar 7 nekādiem veseliem skaitļiem.

Atrisinājums. Apskatām visus veselos skaitļus pēc moduļa 7:

- ja $n \equiv 0 \pmod 7$, tad $n^3 + 3 \equiv 0^3 + 3 \equiv 3 \pmod 7$;
- ja $n \equiv 1 \pmod 7$, tad $n^3 + 3 \equiv 1^3 + 3 \equiv 4 \pmod 7$;
- ja $n \equiv 2 \pmod 7$, tad $n^3 + 3 \equiv 2^3 + 3 \equiv 8 + 3 \equiv 4 \pmod 7$;
- ja $n \equiv 3 \pmod 7$, tad $n^3 + 3 \equiv 3^3 + 3 \equiv 27 + 3 \equiv 2 \pmod 7$;
- ja $n \equiv 4 \pmod 7$, tad $n^3 + 3 \equiv 4^3 + 1 \equiv 65 \equiv 2 \pmod 7$;
- ja $n \equiv 5 \pmod 7$, tad $n^3 + 3 \equiv 5^3 + 3 \equiv 25 \cdot 5 \equiv 20 + 3 \equiv 2 \pmod 7$;
- ja $n \equiv 6 \equiv -1 \pmod 7$, tad $n^3 + 3 \equiv (-1)^3 + 3 \equiv 2 \pmod 7$.

Nevienā gadījumā nav iegūts atlikums 0, tātad izteiksme $n^3 + 3$ nedalās ar 7 nekādiem veseliem skaitļiem.

P2.10. Trīs veselu skaitļu kvadrātu summa dalās ar 9. Pierādiet, ka var izvēlēties divus no šiem kvadrātiem tā, ka to starpība dalās ar 9.

Atrisinājums. Vispirms noskaidrojam, ar ko var būt kongruenti veselu skaitļu kvadrāti pēc moduļa 9 (*šo soli var izlaist, ja ir pildīts P2.4., vai arī veikt, lai trenētos darboties ar kongruencēm*):

- ja $n \equiv 0 \pmod 9$, tad $n^2 \equiv 0^2 \equiv 0 \pmod 9$;
- ja $n \equiv 1 \pmod 9$, tad $n^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod 9$;
- ja $n \equiv 2 \pmod 9$, tad $n^2 \equiv 2^2 \equiv 4 \pmod 9$;
- ja $n \equiv 3 \pmod 9$, tad $n^2 \equiv 3^2 \equiv 9 \equiv 0 \pmod 9$;
- ja $n \equiv 4 \pmod 9$, tad $n^2 \equiv 4^2 \equiv 16 \equiv 7 \pmod 9$;
- ja $n \equiv 5 \equiv -4 \pmod 9$, tad $n^2 \equiv (-4)^2 \equiv 4^2 \equiv 7 \pmod 9$;
- ja $n \equiv 6 \equiv -3 \pmod 9$, tad $n^2 \equiv (-3)^2 \equiv 3^2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 9)$;
- ja $n \equiv 7 \equiv -2 \pmod 9$, tad $n^2 \equiv (-2)^2 \equiv 2^2 \equiv 4 \pmod 9$;
- ja $n \equiv 8 \equiv -1 \pmod 9$, tad $n^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod 9$.

Tātad veselu skaitļu kvadrāti pēc moduļa 9 var būt kongruenti ar 0, 1, 4 vai 7. Pārbaudām, vai trīs dažādi atlikumi var dot summā skaitli, kas dalās ar 9:

- $0 + 1 + 4 \equiv 5 \not\equiv 0 \pmod 9$;
- $0 + 1 + 7 \equiv 8 \not\equiv 0 \pmod 9$;
- $0 + 4 + 7 \equiv 2 \not\equiv 0 \pmod 9$;
- $1 + 4 + 7 \equiv 3 \not\equiv 0 \pmod 9$.

Tātad vismaz divi no atlikumiem ir vienādi, bet tas nozīmē, ka šo kvadrātu starpība dalās ar 9.

2.4. Uzdevumi

U2.1. Pierādīt, ka no jebkuriem trim naturālu skaitļu kvadrātiem var izvēlēties divus tā, ka to summa vai starpība dalās ar 5.

U2.2. Pierādīt, ka starp jebkuriem pieciem naturālu skaitļu kvadrātiem var atrast divus tādus, ka to summa vai starpība dalās ar 13.

U2.3. Pierādīt, ka nevienai naturālai n vērtībai izteiksmes $13^n + 10^n + 7^n + 3^n$ vērtība nav naturāla skaitļa kvadrāts.

U2.4. Pierādīt: ja trīs veselu skaitļu kubu summa dalās ar 9, tad šo skaitļu reizinājums dalās ar 3.

U2.5. Vai var atrast tādus veselus skaitļus n, x un y, ka izpildās vienādība $x^3 + y^3 = 7n + 3$?

Ja kāds skolēns izpilda visus uzdevumus, tad 1. pielikumā ir doti trīs grūtāki uzdevumi un to atrisinājumi. Uzdevumus var dot gan patstāvīgai risināšanai, gan arī dotā atrisinājuma pētīšanai un skaidrošanai.

2.5. Idejas risinājumiem

U2.1. Kādus atlikumus var iegūt, ja naturāla skaitļa kvadrātu dala ar 5?
Kas notiek, ja divi no skaitļiem dod vienādus atlikumus, dalot ar 5?
Kas notiek, ja nav skaitļu, kas dod vienādus atlikumus, dalot ar 5?

Ievēro! Daži apskatīti piemēri nav pierādījums, ka prasītais vienmēr izpildīsies. Pierādījumam jāsatur spriedumi, kas attiecināmi uz jebkuriem trim izvēlētiem naturālo skaitļu kvadrātiem.

U2.2. Kādus atlikumus var iegūt, ja naturāla skaitļa kvadrātu dala ar 13?
Kas notiek, ja divi no skaitļiem dod vienādus atlikumus, dalot ar 13?
Kas notiek, ja nav skaitļu, kas dod vienādus atlikumus, dalot ar 13?

Ievēro! Daži apskatīti piemēri nav pierādījums, ka prasītais vienmēr izpildīsies. Pierādījumam jāsatur spriedumi, kas attiecināmi uz jebkuriem pieciem izvēlētiem naturālo skaitļu kvadrātiem.

U2.3. Kādu atlikumu var dot skaitļa kvadrāts, ja to dala ar kādu izvēlētu skaitli m? *(Var izmantot P2.4. piemēra tabulu).*
Kāda m vērtība jāizvēlas, lai rastos pretruna?
Vai iegūst pretrunu, ja izteiksmi apskata pēc moduļa 2?
Vai iegūst pretrunu, ja izteiksmi apskata pēc moduļa 3?
Vai iegūst pretrunu, ja izteiksmi apskata pēc moduļa 4?

Ievēro! Apskatot dažas n vērtības, nevar izdarīt secinājumu par vispārīgā apgalvojuma patiesumu. Arī pārbaudītas 100 dažādas n vērtības neļauj izdarīt secinājumu par visiem naturālajiem skaitļiem, kuru ir bezgalīgi daudz.

U2.4. Kādu atlikumu var iegūt, ja vesela skaitļa kubu dala ar 9?
Vai var gadīties, ka neviens no skaitļiem nedalās ar 3?

Ievēro! Daži apskatīti piemēri nav pierādījums, ka prasītais vienmēr izpildīsies.

U2.5. Ar ko kongruenta izteiksme $7n + 3$ pēc moduļa 7?
Ar ko kongruenta izteiksme $x^3 + y^3$ pēc moduļa 7?

Vai pamanīji, ka uzdevums ir ļoti līdzīgs P2.8. piemēram, tikai nedaudz citādāk formulēts?
Vai vari izskaidrot atšķirību atrisinājumā? Ar kurām vērtībām 0; −1; 1 (P2.8. piemērs) vai 0; 1; 6 (U2.5. uzdevums) tev bija vieglāk uztvert risinājumu? Kāpēc?
Ievēro! Ja, apskatot dažas konkrētas vērtības, neizdodas iegūt vienādību, tas vēl nenozīmē, ka to nevar iegūt. Iespējams, neesi atradis derīgos skaitļus. Pierādījumam, ka prasītos skaitļus nevar atrast, jābalstās uz vispārīgiem spriedumiem.

2.6. Uzdevumu atrisinājumi

U2.1. Pierādīt, ka no jebkuriem trim naturālu skaitļu kvadrātiem var izvēlēties divus tā, ka to summa vai starpība dalās ar 5.

Atrisinājums. Vispirms noskaidrojam, ar ko var būt kongruents naturāla skaitļa kvadrāts pēc moduļa 5.

$n \pmod 5$	0	1	2	3	4
$n^2 \pmod 5$	0	1	4	4	1

Tātad naturāla skaitļa kvadrāts pēc moduļa 5 var būt kongruents ar 0, 1 vai 4. Iespējami divi gadījumi.

- Ja divi kvadrāti dod vienādu atlikumu, dalot ar 5, tad to starpība dalās ar 5.
- Ja nekādi divi no šiem trim kvadrātiem nav kongruenti pēc moduļa 5, tad tie pēc moduļa 5 pieņem visas iespējamās vērtības 0, 1 un 4. Tā kā $1 + 4 = 5$, tad atbilstošo kvadrātu summa dalīsies ar 5.

U2.2. Pierādīt, ka starp jebkuriem pieciem naturālu skaitļu kvadrātiem var atrast divus tādus, ka to summa vai starpība dalās ar 13.

Atrisinājums. Vispirms noskaidrojam, ar ko var būt kongruents naturāla skaitļa kvadrāts pēc moduļa 13.

$n \pmod{13}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$n^2 \pmod{13}$	0	1	4	9	3	12	10	10	12	3	9	4	1

Tātad naturāla skaitļa kvadrāts pēc moduļa 13 var būt kongruents ar 0, 1, 3, 4, 9, 10 vai 12. Iespējami divi gadījumi.

- Ja divi kvadrāti dod vienādu atlikumu, dalot ar 13, tad to starpība dalās ar 13.
- Ja nekādi divi no šiem pieciem kvadrātiem nav kongruenti pēc moduļa 13, tad sadalām šo kvadrātu iespējamās vērtības pēc moduļa 13 četrās grupās: $\{0\}$, $\{1;\, 12\}$, $\{3;\, 10\}$, $\{4;\, 9\}$. Tā kā ir jāizvēlas pieci naturālu skaitļu kvadrāti, tad vismaz divi no tiem būs vienā grupā (Dirihlē princips). Šo divu skaitļu summa dalās ar 13.

U2.3. Pierādīt, ka nevienai naturālai n vērtībai izteiksmes $13^n + 10^n + 7^n + 3^n$ vērtība nav naturāla skaitļa kvadrāts.

Atrisinājums. Ievērojam, ka naturālu skaitli n, dalot ar 4, var iegūt atlikumu 0, 1, 2 vai 3, un atrodam, kādu atlikumu var iegūt, ja n^2 dala ar 4:

- ja $n \equiv 0 \pmod 4$, tad $n^2 \equiv 0^2 \equiv 0 \pmod 4$;
- ja $n \equiv 1 \pmod 4$, tad $n^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod 4$;
- ja $n \equiv 2 \pmod 4$, tad $n^2 \equiv 2^2 \equiv 4 \equiv 0 \pmod 4$;
- ja $n \equiv 3 \pmod 4$, tad $n^2 \equiv 3^2 \equiv 9 \equiv 1 \pmod 4$.

Tātad naturāla skaitļa kvadrātu, dalot ar 4, var iegūt atlikumu 0 vai 1.

Apskatot doto izteiksmi pēc moduļa 4, iegūstam

$$13^n + 10^n + 7^n + 3^n \equiv 1^n + 2^n + (-1)^n + (-1)^n \pmod 4.$$

Ja $n = 1$, tad $13 + 10 + 7 + 3 = 33$, kas nav naturāla skaitļa kvadrāts. Ja n ir lielāks nekā 1, tad $2^n \equiv 0 \pmod 4$, un šķirojam divus gadījumus:

- ja n ir pāra skaitlis, tad $1^n + 2^n + (-1)^n + (-1)^n \equiv 1 + 0 + 1 + 1 = 3 \pmod 4$;
- ja n ir nepāra skaitlis, tad $1^n + 2^n + (-1)^n + (-1)^n \equiv 1 + 0 - 1 - 1 = -1 \equiv 3 \pmod 4$.

Tātad dotā izteiksme, dalot ar 4, dod atlikumu 3, tāpēc tā nevar būt naturāla skaitļa kvadrāts.

Piezīme. Iegūt pretrunu var, arī apskatot doto izteiksmi pēc moduļa 9. Ja $n = 1$, tad atlikums, dalot ar 9, ir 6, ja n ir lielāks nekā 1, tad atlikums, dalot ar 9, ir 3, bet naturālu skaitļu kvadrātu vērtības pēc moduļa 9 var būt tikai 0, 1, 4 vai 7.

U2.4. Pierādīt: ja trīs veselu skaitļu kubu summa dalās ar 9, tad šo skaitļu reizinājums dalās ar 3.
Atrisinājums. Vispirms noskaidrojam, ar ko var būt kongruenti veselu skaitļu kubi pēc moduļa 9 (*var izmantot* MS Excel):

$n \pmod 9$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
$n^3 \pmod 9$	0	1	8	0	1	8	0	1	8

Ievērojam, ka $8 \equiv -1 \pmod 9$, un to izmantosim risinājumā, lai vieglāk izdarītu spriedumus.

Pieņemsim pretējo, ka doto trīs skaitļu reizinājums nedalās ar 3; tad arī neviens no šiem skaitļiem nedalās ar 3, līdz ar to katra skaitļa kubs ir kongruents ar 1 vai –1 pēc moduļa 9. Secinām, ka visu doto skaitļu kubu summa pēc moduļa 9 ir pierakstāma formā $\pm1 \pm1 \pm1$.

Ievērosim, ka tas ir nepāra skaitlis, kas pēc absolūtās vērtības nepārsniedz 3, tātad nevar būt kongruents ar 0 pēc moduļa 9. Taču tā ir pretruna ar to, ka doto skaitļu kubu summa dalās ar 9. Līdz ar to pieņēmums, ka neviens no reizinātājiem nedalās ar 3, bijis aplams. Tātad kāds no reizinātājiem dalās ar 3 un arī skaitļu reizinājums dalās ar 3.

Piezīme. Ja izmanto atlikumu 8, tad jāapskata, vai, kombinējot atlikumus 1 un 8, var iegūt skaitli, kas dalās ar 9, tas ir, jāapskata gadījumi $1 + 1 + 1$; $1 + 1 + 8$; $1 + 8 + 8$; $8 + 8 + 8$.

U2.5. Vai var atrast tādus veselus skaitļus n, x un y, ka izpildās vienādība $x^3 + y^3 = 7n + 3$?
Atrisinājums. Vesela skaitļa kubs, dalot ar 7, var dot atlikumu 0, 1 vai 6 (*sk. P2.8. piemēru*).
Sastādām tabulu, pa rindām un kolonnām apskatot atbilstoši iespējamās x^3 un y^3 vērtības pēc moduļa 7, bet tabulas šūnās rakstām $x^3 + y^3 \pmod 7$.

$x^3 \pmod 7$ / $y^3 \pmod 7$	**0**	**1**	**6**
0	0	1	6
1	1	2	0
6	6	0	5

Tātad izteiksme $x^3 + y^3$ pēc moduļa 7 var dot atlikumu 0, 1, 2, 5 vai 6, savukārt $7n + 3 \equiv 3 \pmod 7$.

Līdz ar to nav tādu veselu skaitļu n, x un y, ka izpildās vienādība $x^3 + y^3 = 7n + 3$.

3. Dalāmības pierādīšana

Ja a un b ir veseli skaitļi, tad ne vienmēr, dalot a ar b, dalījumā iegūst veselu skaitli. Ja dalījums ir vesels skaitlis, tad saka, ka a dalās ar b, pretējā gadījumā saka, ka a nedalās ar b.

Definīcija. Ja $b \neq 0$ un $a : b = k$, kur a, b, k – veseli skaitļi, tad saka, ka a dalās ar b. Pretējā gadījumā saka, ka a nedalās ar b.

Piemēram, 15 dalās ar 3, bet 15 nedalās ar 2.

Iegaumē! Ja tiek runāts par skaitļu dalāmību, tad runa ir tikai par veseliem skaitļiem.

Dalāmības īpašības (Visi īpašībās minētie skaitļi ir veseli.)

- Ja katrs no vairākiem saskaitāmajiem dalās ar n, tad to visu summa dalās ar n.
  Piemēram, $123456 + 7890 + 20152016$ dalās ar 2, jo katrs saskaitāmais dalās ar 2.
- Ja divi skaitļi dalās ar n, tad arī to starpība dalās ar n.
  Piemēram, tā kā 201420152016 un 2142020 dalās ar 4, tad ar 4 dalās arī starpība $201420152016 - 2142020$.
- Ja kaut viens no vairākiem naturāliem skaitļiem dalās ar n, tad to visu reizinājums dalās ar n.
  Piemēram, $2014 \cdot 2015 \cdot 2016$ dalās ar 5, jo 2015 dalās ar 5.
- Ja vairāku skaitļu summa un visi skaitļi, izņemot vienu, dalās ar n, tad arī šis pēdējais skaitlis dalās ar n.
  Piemēram, ja $x + 40 + 50 = 120$, tad, tā kā $40, 50$ un 120 dalās ar 10, arī x dalās ar 10.

3.1. Dalāmības pazīmes

Tēmu var sākt ar uzdevumu kā spēli, kurā jāatceras un jāizmanto dalāmības pazīmes.

Andris un Baiba raksta 12 ciparu skaitli, izmantojot tikai ciparus 1, 2, 3, 4 un 5. Pirmo ciparu raksta Andris, otro – Baiba, trešo – Andris, ceturto – Baiba utt. Baiba vēlas, lai beigās iegūtais 12 ciparu skaitlis dalītos ar 9, bet Andris cenšas to nepieļaut. Vai Baiba noteikti var sasniegt savu mērķi? Kā viņai jārīkojas?

Atrisinājums. Baiba vienmēr varēs panākt savu mērķi.

Katrā gājienā Baiba raksta tādu ciparu, kura summa ar Andra tikko uzrakstīto ciparu ir 6. Šādu ciparu Baiba var uzrakstīt vienmēr:

- ja Andris uzraksta 1, tad Baibai jāraksta 5;
- ja Andris uzraksta 2, tad Baibai jāraksta 4;
- ja Andris uzraksta 3, tad Baibai arī jāraksta 3;
- ja Andris uzraksta 4, tad Baibai jāraksta 2;
- ja Andris uzraksta 5, tad Baibai jāraksta 1.

Pavisam būs seši šādi Andra un Baibas gājienu pāri, tāpēc beigās visu 12 uzrakstīto ciparu summa būs $6 \cdot 6 = 36$.

Tā kā uzrakstītā skaitļa ciparu summa 36 dalās ar 9, tad arī iegūtais 12 ciparu skaitlis dalīsies ar 9.

Noskaidrot, vai viens vesels skaitlis dalās ar otru, tikai ar definīcijas palīdzību, tas ir, izdalot skaitļus, bieži vien ir neparocīgi un laikietilpīgi. Šo uzdevumu atvieglo skaitļu dalāmības pazīmes. Tabulā dotas biežāk lietotās dalāmības pazīmes.

Dalāmības pazīme	Piemēri
Skaitlis dalās ar 2, ja tā pēdējais cipars ir pāra, tas ir, tā pēdējais cipars ir 0, 2, 4, 6 vai 8.	2022 dalās ar 2, jo tā pēdējais cipars ir pāra.
Skaitlis dalās ar 3, ja tā ciparu summa dalās ar 3.	2022 dalās ar 3, jo 2 + 0 + 2 + 2 = 6 dalās ar 3.
Skaitlis dalās ar 4, ja tā pēdējo divu ciparu veidotais skaitlis dalās ar 4.	20**20** dalās ar 4, jo 20 dalās ar 4.
Skaitlis dalās ar 5, ja tā pēdējais cipars ir 0 vai 5.	201**5** dalās ar 5, jo tā pēdējais cipars ir 5.
Skaitlis dalās ar 6, ja tas dalās gan ar 2, gan ar 3.	2022 dalās ar 6, jo tas dalās ar 2 un 3.
Skaitlis dalās ar 8, ja tā pēdējo trīs ciparu veidotais skaitlis dalās ar 8.	12**800** dalās ar 8, jo 800 dalās ar 8. 2**016** dalās ar 8, jo pēdējo trīs ciparu veidotais skaitlis ir 16, kas dalās ar 8.
Skaitlis dalās ar 9, ja tā ciparu summa dalās ar 9.	2016 dalās ar 9, jo 2 + 0 + 1 + 6 = 9 dalās ar 9.
Skaitlis dalās ar 10, ja tā pēdējais cipars ir 0.	15**0** dalās ar 10, jo tā pēdējais cipars ir 0.
Skaitlis dalās ar 11, ja tā ciparu summas, kas atrodas nepāra pozīcijās, un ciparu summas, kas atrodas pāra pozīcijās, starpība dalās ar 11.	108647 dalās ar 11, jo (1 + 8 + 4) − (0 + 6 + 7) = 0, kas dalās ar 11 94831 dalās ar 11, jo (9 + 8 + 1) − (4 + 3) = 11, kas dalās ar 11.

Dalāmības pazīmju pierādījumi

Jau no pamatskolas zināmas dalāmības pazīmes, pierādīsim tās. *Dotos pierādījumus skolēni var izmantot patstāvīgai pētīšanai grupās un tad prezentēt citiem skolēniem.*

Dalāmības pazīme ar 2

Apskatām skaitli $N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$. To varam uzrakstīt formā:

$$N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Tā kā pirmie n saskaitāmie dalās ar 2 (jo satur reizinātāju 10), tad, lai skaitlis N dalītos ar 2, arī saskaitāmajam a_0 jādalās ar 2. Vienīgie viencipara skaitļi, kas dalās ar 2, ir 0; 2; 4; 6; 8.

Līdz ar to esam pierādījuši, ka skaitlis dalās ar 2, ja tā pēdējais cipars ir pāra skaitlis.

Piezīme. Lai iegūtu dalāmības pazīmi ar 2, var pārveidot skaitli N arī formā

$$N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1} \cdot \underbrace{10}_{\vdots 2} + a_0.$$

Īsākam pierakstam uzdevumos lietots apzīmējums $a \vdots b$, kas nozīmē, ka skaitlis a dalās ar skaitli b (bez atlikuma).

Līdzīgā veidā, pārveidojot skaitli par divu skaitļu summu var iegūt citu dalāmības pazīmju pierādījumus:

- dalāmības pazīme ar 5 un 10, pārveidojam $N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2} \cdot 10 + a_1$;
- dalāmības pazīme ar 4, pārveidojam $N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_3} \cdot \underbrace{100}_{\vdots 4} + \overline{a_2 a_1}$;
- dalāmības pazīme ar 8, pārveidojam $N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_4} \cdot \underbrace{1000}_{\vdots 8} + \overline{a_3 a_2 a_1}$;
- skaitlis dalās ar 10^n, ja tā pēdējo n ciparu veidotais skaitlis dalās ar 10^n;
- skaitlis dalās ar 2^n, ja tā pēdējo n ciparu veidotais skaitlis dalās ar 2^n;
- skaitlis dalās ar 5^n, ja tā pēdējo n ciparu veidotais skaitlis dalās ar 5^n.

Dalāmības pazīme ar 3 un ar 9

Dots skaitlis

$$N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Ievērojot, ka $10^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod 3$, iegūstam, ka

$$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv$$
$$\equiv a_n \cdot 1 + a_{n-1} \cdot 1 + \dots + a_2 \cdot 1 + a_1 \cdot 1 + a_0 \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0 \pmod 3.$$

Līdz ar to esam ieguvuši, ka N dalās ar 3 tad un tikai tad, ja $a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0$ dalās ar 3.

Piezīmes.

1. Varam secināt vēl vairāk, ka skaitlis N, dalot ar 3, dod tādu pašu atlikumu kā tā ciparu summa, dalot ar 3.
2. Dalāmību ar 3 var pierādīt arī bez kongruenču izmantošanas. Izmantojot faktu, ka $10^k - 1 = \underbrace{99 \dots 9}_{k \text{ reizes}} \vdots 3$, pārveidojam doto skaitli formā

$$N = a_n \cdot (10^n - 1 + 1) + a_{n-1} \cdot (10^{n-1} - 1 + 1) + \dots + a_1 \cdot (10 - 1 + 1) + a_0 =$$
$$= a_n \cdot \underbrace{(10^n - 1)}_{\vdots 3} + a_{n-1} \cdot \underbrace{(10^{n-1} - 1)}_{\vdots 3} + \dots + a_1 \cdot \underbrace{(10 - 1)}_{\vdots 3} + (a_0 + a_1 + \dots + a_n).$$

Dalāmības pazīmi ar 9 pierāda līdzīgi.

Dalāmības pazīme ar 11

Apskatām skaitli

$$N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Ievērojam, ka $10^{2k} \equiv (-1)^{2k} \equiv 1 \pmod{11}$ un $10^{2k-1} \equiv (-1)^{2k-1} \equiv -1 \pmod{11}$.
Šķirojam divus gadījumus atkarībā no skaitļa n paritātes.
Ja n ir pāra skaitlis, tad

$$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv$$
$$\equiv a_n \cdot 1 + a_{n-1} \cdot (-1) + a_{n-2} \cdot 1 + \dots + a_2 \cdot 1 + a_1 \cdot (-1) + a_0 \equiv$$
$$\equiv a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \dots + a_2 - a_1 + a_0 \equiv$$
$$\equiv (a_n + a_{n-2} + \dots + a_2 + a_0) - (a_{n-1} + a_{n-3} + \dots + a_3 + a_1) \pmod{11}.$$

Ja n ir nepāra skaitlis, tad

$$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv$$
$$\equiv a_n \cdot (-1) + a_{n-1} \cdot 1 + a_{n-2} \cdot (-1) + \dots + a_2 \cdot 1 + a_1 \cdot (-1) + a_0 \equiv$$
$$\equiv -a_n + a_{n-1} - a_{n-2} + \dots + a_2 - a_1 + a_0 \equiv$$
$$\equiv (a_{n-1} + a_{n-3} + \dots + a_2 + a_0) - (a_n + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_1) \pmod{11}.$$

Līdz ar to esam ieguvuši, ka skaitlis dalās ar 11, ja tā ciparu summas, kas atrodas nepāra pozīcijās, un ciparu summas, kas atrodas pāra pozīcijās, starpība dalās ar 11.

Citas dalāmības pazīmes

Kombinējot iepriekš dotās pazīmes, var iegūt arī pazīmes dalāmībai ar citiem skaitļiem. Piemēram, skaitlis dalās ar 12, ja tas dalās ar 3 un 4; skaitlis dalās ar 90, ja tas dalās ar 9 un 10 jeb skaitļa ciparu summa dalās ar 9 un tā pēdējais cipars ir nulle. Šādi pazīmes veido, doto dalītāju sadalot reizinātājos, kas ir savstarpēji pirmskaitļi (skaitļi, kam lielākais kopīgais dalītājs ir skaitlis 1), un pārbaudot dalāmību ar katru no tiem.

Kāpēc nosacījums par savstarpējiem pirmskaitļiem ir būtisks?

Nosacījums par savstarpējiem pirmskaitļiem ir būtisks, jo pretējā gadījumā apgalvojums var nebūt patiess. Ja skaitlis dalās ar 2 un 6, mēs nevaram apgalvot, ka tas dalās arī ar 2 · 6 = 12, piemēram, 18 dalās gan ar 2, gan ar 6, bet 18 nedalās ar 12.

Kā patstāvīgi pētāmu jautājumu var dot citu dalāmības pazīmju (piemēram, ar 7, 13 vai citiem skaitļiem) atrašanu un šo pazīmju pierādījumu pētīšanu vai prezentēšanu.

Piemēri

P3.1. Pierādīt, ka visām naturālām n vērtībām izteiksme $n^2 + n$ dalās ar 2.

Atrisinājums. Ievērojam, ka $n^2 + n = n(n + 1)$. Viens no diviem pēc kārtas esošiem naturāliem skaitļiem dalās ar 2, tāpēc $n(n + 1)$ dalās ar 2 visiem naturāliem skaitļiem n.

P3.2. Pierādīt, ka visām naturālām n vērtībām izteiksme $n^3 + 3n^2 + 2n$ dalās ar 6.

Atrisinājums. Pārveidojam izteiksmi:

$$n^3 + 3n^2 + 2n = n(n^2 + 3n + 2) = n(n + 1)(n + 2).$$

Viens no diviem pēc kārtas esošiem naturāliem skaitļiem dalās ar 2 un viens no trīs pēc kārtas esošiem naturāliem skaitļiem dalās ar 3, tāpēc $n(n + 1)(n + 2)$ dalās ar $2 \cdot 3 = 6$ visiem naturāliem skaitļiem n.

P3.3. Pierādīt, ka naturāla skaitļa kvadrāts nevar sastāvēt tikai no sešiniekiem un nullēm.

Atrisinājums. Tā kā skaitļa kvadrāts ir skaitļa reizinājums pašam ar sevi, tad visi dažādie pirmreizinātāji tam ir pāra skaitā. Ja skaitlis beidzas ar pāra skaita nullēm, tad šīs nulles varam atmest, jo šādā gadījumā mēs atmetam reizinātāju $10 = 2 \cdot 5$ pāra skaitā. Lai dotais skaitlis būtu kvadrāts, tad atlikušajam skaitlim (bez pāra skaita nullēm beigās) visi dažādie pirmreizinātāji jāsatur pāra skaitā. Apskatām divus iespējamos gadījumus atkarībā no atlikušā skaitļa pēdējiem diviem cipariem:

- 60, tad tas dalās ar 5, bet nedalās ar 25, tātad tam ir tieši viens pirmreizinātājs 5;
- 06 vai 66, tad šis skaitlis dalās ar 2, bet nedalās ar 4, tātad tam ir tieši viens pirmreizinātājs 2.

Tātad esam pierādījuši, ka dotais skaitlis nav naturālā skaitļa kvadrāts.

P3.4. Dots, ka x un y ir naturāli skaitļi. Kāds ir mazākais skaits dažādu pirmskaitļu, ar kuriem var dalīties izteiksme

$$3x(x + 2y + 1)(7y + 1)?$$

Atrisinājums. Dotā izteiksme dalās ar 3 neatkarīgi no x un y jo satur reizinātāju 3.

Parādīsim, ka tā nav trijnieka pakāpe. Ja ir trijnieka pakāpe, tad x ir nepāra skaitlis un $x + 2y + 1$ ir pāra skaitlis, kas dalās arī ar 2. Tātad dotā izteiksme satur vismaz divus pirmreizinātājus 2 un 3.

Vēl jāparāda piemērs, ka izteiksme var saturēt tieši divus dažādus pirmreizinātājus, kas ir pirmskaitļi. Izvēloties, piemēram, $x = 1$ un $y = 1$, iegūstam vajadzīgo

$$3x(x + 2y + 1)(7y + 1) = 3 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 8 = 2^5 \cdot 3^1.$$

Līdz ar to mazākais skaits dažādo pirmskaitļu, ar kuriem var dalīties dotā izteiksme, ir 2.

P3.5. Kādām naturālām n vērtībām izteiksmes $\frac{3n^2+11n-4}{n+2}$ vērtība ir vesels skaitlis?

Atrisinājums. Ekvivalenti pārveidojam doto izteiksmi, atdalot veselo:

$$\frac{3n^2 + 11n - 4}{n + 2} = \frac{3n(n + 2) + 5n - 4}{n + 2} = \frac{3n(n + 2)}{n + 2} + \frac{5(n + 2) - 14}{n + 2} = 3n + 5 - \frac{14}{n + 2}$$

Tā kā $3n + 5$ ir naturāls skaitlis, tad dotās izteiksmes vērtība būs vesels skaitlis tikai tad, ja $\frac{-14}{n+2}$ ir vesels skaitlis, bet tas iespējams, ja $(n + 2)$ ir skaitļa 14 dalītājs. Ievērojot, ka n ir naturāls, iegūstam, ka $n + 2 = 7$ vai $n + 2 = 14$, no kā iegūstam, ka $n = 5$ vai $n = 12$.

3.2. Matemātiskās indukcijas metodes izmantošana

Vidusskolas padziļinātajā kursā tiek apgūta matemātiskās indukcijas metode, kas ir viens no pierādījumu veidiem. Tas parasti tiek izmantots, lai pierādītu, ka kāds izteikums ir patiess visām naturālām n vērtībām.

Indukcija (no latīņu valodas *inductio* ('uzvedināšana, ierosināšana') – loģisks slēdziens, pārejot no atsevišķiem gadījumiem uz vispārīgu secinājumu, no atsevišķiem faktiem uz vispārinājumu.

Matemātiskās indukcijas metode ir viena no aritmētikas aksiomām, tāpēc tās patiesums nav jāpierāda. Pēc būtības indukcijas aksioma apgalvo, ka katru naturālo skaitli var iegūt, atkārtoti pieskaitot skaitlim 0 vieninieku.

Lietojot matemātiskās indukcijas metodi uzdevumu risināšanā, rīkojas pēc šāda plāna:
1) pārbauda, vai apskatāmā īpašība piemīt kopas pirmajam elementam (***indukcijas bāze***);
2) pieņem, ka šī īpašība ir spēkā pirmajiem k elementiem (***induktīvais pieņēmums***);
3) pierāda, ka tad tā ir patiesa arī $(k+1)$ elementam (***induktīvā pāreja***);
4) secina: tā kā no izteikuma patiesuma jebkuram elementam $n=k$ izriet, ka tas ir patiess elementam $n=k+1$, un tā kā izteikums ir patiess pirmajam elementam, tad izteikums ir patiess jebkuram naturālam elementam n.

Klasiskā veidā matemātiskās indukcijas metodi lieto:
- vienādību pierādīšanā;
- dalāmības pierādīšanā (tas ir, lai pamatotu dalīšanas atlikuma vai kāda cita invarianta saglabāšanos);
- rekurentas virknes vispārīgā locekļa formulas pierādīšanā;
- kombinatorikas uzdevumos u. c.

Šajā tēmā apskatīts, kā lietot matemātiskās indukcijas metodi dalāmības pierādīšanā. Dažiem piemēriem doti arī citi risinājumi, kas balstās uz dalāmības izmantošanu vai kongruencēm.

Piemēri

P3.6. Pierādīt, ka visām naturālām n vērtībām izteiksme n^3+5n dalās ar 6.

1. atrisinājums. Pierādīsim apgalvojumu ar matemātiskās indukcijas metodi.
Indukcijas bāze. Ja $n=1$, tad $1^3+5\cdot 1=6$, kas dalās ar 6.
Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka apgalvojums ir patiess, ja $n=k$, tas ir,

$$k^3+5k \,\vdots\, 6.$$

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka apgalvojums ir patiess arī tad, ja $n=k+1$, tas ir,

$$(k+1)^3+5(k+1) \,\vdots\, 6.$$

Pārveidosim izteiksmi:

$$(k+1)^3+5(k+1)=k^3+3k^2+3k+1+5k+5=k^3+5k+3k^2+3k+6=$$

$$=\underbrace{k^3+5k}_{\vdots 6\ p\bar{e}c\ ind.pie\c{n}.}+\underbrace{3}_{\vdots 3}\underbrace{k(k+1)}_{\vdots 2}+\underbrace{6}_{\vdots 6}.$$

Ja katras saskaitāmais dalās ar 6, tad visa summa dalās ar 6.
Secinājums. **Tā kā apgalvojums ir** patiess, ja $n=1$, un no tā, ka apgalvojums ir patiess, ja $n=k$, izriet, ka apgalvojums ir patiess arī $n=k+1$, secinām, ka apgalvojums ir patiess visām naturālām vērtībām.

2. atrisinājums. Pārveidojam doto izteiksmi:

$$n^3+5n=n^3-n+6n=n(n^2-1)+6n=n(n-1)(n+1)+6n.$$

Pirmais saskaitāmais $(n-1)n(n+1)$ ir trīs pēc kārtas esošu veselu skaitļu reizinājums, tāpēc tas dalās gan ar 2, gan ar 3, tātad dalās arī ar 6. Tā kā abi saskaitāmie dalās ar 6, tad arī to summa dalās ar 6.

3. atrisinājums. Apskatām visus naturālos skaitļus pēc moduļa 6:
- ja $n\equiv 0 \pmod 6$, tad $n^3+5n\equiv 0^3+0\equiv 0 \pmod 6$;
- ja $n\equiv 1 \pmod 6$, tad $n^3+5n\equiv 1^3+5\equiv 6\equiv 0 \pmod 6$;
- ja $n\equiv 2 \pmod 6$, tad $n^3+5n\equiv 2^3+10\equiv 18\equiv 0 \pmod 6$;
- ja $n\equiv 3 \pmod 6$, tad $n^3+5n\equiv 3^3+15\equiv 27+15\equiv 42\equiv 0 \pmod 6$;
- ja $n\equiv 4 \pmod 6$, tad $n^3+5n\equiv 4^3+20\equiv 64+20\equiv 84\equiv 0 \pmod 6$;
- ja $n\equiv 5 \pmod 6$, tad $n^3+5n\equiv 5^3+25\equiv 125+25\equiv 150\equiv 0 \pmod 6$.

Visos gadījumos iegūts atlikums 0, tātad izteiksme n^3+5n dalās ar 6 visiem naturāliem skaitļiem.

P3.7. Pierādīt, ka visām naturālām n vērtībām izteiksme $4^n - 1$ dalās ar 3.

1. atrisinājums. Pierādīsim apgalvojumu ar matemātiskās indukcijas metodi.
Indukcijas bāze. Ja $n = 1$, tad $4^1 - 1 = 3$, kas dalās ar 3.
Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka apgalvojums ir patiess, ja $n = k$, tas ir,

$$4^k - 1 \vdots 3.$$

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka apgalvojums ir patiess arī tad, ja $n = k + 1$, tas ir,

$$4^{k+1} - 1 \vdots 3.$$

Pārveidojam izteiksmi:

$$4^{k+1} - 1 = 4 \cdot 4^k - 1 = 4 \cdot \underbrace{(4^k - 1)}_{\vdots 3} + \underbrace{3}_{\vdots 3}.$$

Ja katras saskaitāmais dalās ar 3, tad visa summa dalās ar 3.
Secinājums. Tā kā apgalvojums ir patiess, ja $n = 1$, un no tā, ka apgalvojums ir patiess, ja $n = k$, izriet, ka apgalvojums ir patiess arī $n = k + 1$, secinām, ka apgalvojums ir patiess visām naturālām vērtībām.

2. atrisinājums. ***Pārveidojam doto izteiksmi:***

$$4^n - 1 = 2^{2n} - 1 = (2^n)^2 - 1 = (2^n - 1)(2^n + 1).$$

Ievērojam, ka $(2^n - 1) \cdot 2^n \cdot (2^n + 1)$ ir trīs pēc kārtas esošu skaitļu reizinājums, tātad tas dalās ar 3. Tā kā 2^n nedalās ar 3 (jo satur tikai reizinātājus 2), tad $(2^n - 1)(2^n + 1)$ jādalās ar 3. Esam pierādījuši prasīto.

3. atrisinājums. Apskatām doto izteiksmi pēc moduļa 3:

$$4^n - 1 \equiv 1^n - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod 3.$$

P3.8. Pierādīt, ka visām naturālām n vērtībām izteiksme $5^{2n} - 1$ dalās ar 24.

1. atrisinājums. Pierādīsim apgalvojumu ar matemātiskās indukcijas metodi.
Indukcijas bāze. Ja $n = 1$, tad $5^2 - 1 = 24$, kas dalās ar 24.
Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka apgalvojums ir patiess, ja $n = k$, tas ir,

$$5^{2k} - 1 \vdots 24.$$

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka apgalvojums ir patiess arī tad, ja $n = k + 1$, tas ir,

$$5^{2k+2} - 1 \vdots 24.$$

Pārveidojam izteiksmi:

$$5^{2k+2} - 1 = 25 \cdot 5^{2k} - 1 = 25 \cdot \underbrace{(5^{2k} - 1)}_{\vdots 24} + \underbrace{24}_{\vdots 24}.$$

Ja katras saskaitāmais dalās ar 24, tad visa summa dalās ar 24.
Secinājums. Tā kā apgalvojums ir patiess, ja $n = 1$, un no tā, ka apgalvojums ir patiess, ja $n = k$, izriet, ka apgalvojums ir patiess arī $n = k + 1$, secinām, ka apgalvojums ir patiess visām naturālām vērtībām.

2. atrisinājums. Pamatosim, ka dotā izteiksme dalās gan ar 3, gan ar 8.
Pārveidojam doto izteiksmi:

$$5^{2n} - 1 = (5^n)^2 - 1 = (5^n - 1)(5^n + 1).$$

Ievērojam, ka $(5^n - 1) \cdot 5^n \cdot (5^n + 1)$ ir trīs pēc kārtas esošu skaitļu reizinājums, tātad tas dalās ar 3. Tā kā 5^n nedalās ar 3 (jo satur tikai reizinātājus 5), tad $(5^n - 1)(5^n + 1)$ jādalās ar 3. Tā kā 5^n ir nepāra skaitlis, tad $5^n - 1$ un $5^n + 1$ ir divi viens otram sekojoši pāra skaitļi, tāpēc viens no tiem noteikti dalās ar 2 un otrs noteikti dalās ar 4. Tātad to reizinājums dalās ar 8.
Līdz ar to esam pierādījuši, ka dotā izteiksme dalās ar $24 = 3 \cdot 8$, jo skaitļi 3 un 8 ir savstarpēji pirmskaitļi.

3. atrisinājums. Apskatām doto izteiksmi pēc moduļa 24:

$$5^{2n} - 1 \equiv 25^n - 1 \equiv 1^n - 1 \equiv 0 \pmod{24}.$$

3.3. Uzdevumi

U3.1. Pierādīt, ka visām naturālām n vērtībām $7^n + 3^{n+1}$ dalās ar 4.

U3.2. Pierādīt, ka visām naturālām n vērtībām $6^{2n} + 19^n - 2^{n+1}$ dalās ar 17.

U3.3. Pierādīt, ka katram naturālam n izteiksme $3n^5 + 5n^4 - 8n$ dalās ar 10.

U3.4. Zināms, ka a un $\frac{a^2+a-1}{2a+1}$ ir veseli skaitļi. Atrast visas iespējamās a vērtības.

U3.5. Doti naturāli skaitļi a un b. Pierādīt

a) ja $20a + 18b$ dalās ar 7, tad $201a + 8b$ dalās ar 7;

b) ja $201a + 8b$ dalās ar 7, tad $20a + 18b$ dalās ar 7.

3.4. Idejas risinājumiem

U3.1.
1. Uzdevumu var risināt ar matemātiskās indukcijas metodi.
   Kā induktīvajā pārejā pārveidot izteiksmi, lai varētu secināt, ka tā dalās ar 4?
   Kā var palīdzēt induktīvā pieņēmuma izmantošana?
2. Uzdevumu var risināt arī ar kongruencēm.
   Apskati katru saskaitāmo pēc moduļa 4.
   Ar kādu skaitli var aizvietot 3?
3. Kā Ņūtona binoma formulu var izmantot uzdevuma risināšanā?
   Kā skaitli 7 var uzrakstīt citādi?
   Ievēro! Daži apskatīti piemēri nav pierādījums, ka prasītais vienmēr izpildīsies.

U3.2.
1. Uzdevumu var risināt ar matemātiskās indukcijas metodi.
   Kā induktīvajā pārejā pārveidot izteiksmi, lai varētu secināt, ka tā dalās ar 17?
   Kā var palīdzēt induktīvā pieņēmuma izmantošana?
2. Uzdevumu var risināt arī ar kongruencēm.
   Apskati izteiksmi pēc moduļa 17.
   Kā pārveidot saskaitāmo 6^{2n}, lai noskaidrotu, ar ko tas ir kongruents pēc moduļa 17?
   Ievēro! Daži apskatīti piemēri nav pierādījums, ka prasītais vienmēr izpildīsies.

U3.3.
1. Uzdevumu var risināt ar matemātiskās indukcijas metodi.
   Kā induktīvajā pārejā pārveidot izteiksmi, lai varētu secināt, ka tā dalās ar 10?
   Kā var palīdzēt induktīvā pieņēmuma izmantošana?
2. Uzdevumu var risināt arī ar kongruencēm.
   Risinot uzdevumu ar kongruencēm, var izmantot *MS Excel*, rezultātus var iegūt pakāpeniski (sk. 4. attēlu, kur šūnās B2, C2, D2 dotas formulas) vai arī uzreiz ievadot formulu (sk. 5. attēlu, kur šūnā B2 dota formula).

	A	B	C	D
1	n (mod 10)	n^5 (mod 10)	n^4 (mod 10)	3n^5+5n^4-8n (mod 10)
2		=mod(A2^5;10)	=mod(A2^4;10)	=mod(3*B2+5*C2-8*A2;10)
3	0	0	0	0
4	1	1	1	0
5	2	2	6	0
6	3	3	1	0
7	4	4	6	0
8	5	5	5	0
9	6	6	6	0
10	7	7	1	0
11	8	8	6	0
12	9	9	1	0

4. attēls

	A	B
1	n (mod 10)	3n^5+5n^4-8n (mod 10)
2		=mod(3*A2^5+5*A2^4-8*A2;10)
3	0	0
4	1	0
5	2	0
6	3	0
7	4	0
8	5	0
9	6	0
10	7	0
11	8	0
12	9	0

5. attēls

3. Vai izteiksmes $3n^5 + 5n^4 - 8n$ vērtība vienmēr dalās ar 2 (tas ir, vai tā vienmēr ir pāra skaitlis)?
   Veic ekvivalentus pārveidojumus, lai pamatotu, ka izteiksme vienmēr dalās arī ar 5. Izmanto, ka piecu pēc kārtas esošu naturālu skaitļu reizinājums dalās ar 5.
   Ievēro! Daži apskatīti piemēri nav pierādījums, ka prasītais vienmēr izpildīsies.

U3.4. Pārveido doto daļu par polinoma un tādas daļas, kurai skaitītājs ir skaitlis, summu.
Ko var secināt par šīs daļas saucēja iespējamajām vērtībām?

U3.5. **a)** Pamato, ka $6a + 4b$ dalās ar 7.
Doto izteiksmi pārveido par summu tā, lai katrs saskaitāmais dalītos ar 7.
b) Pamato, ka $5a + b$ dalās ar 7.
Doto izteiksmi pārveido par summu tā, lai katrs saskaitāmais dalītos ar 7.

3.5. Uzdevumu atrisinājumi

U3.1. Pierādīt, ka visām naturālām n vērtībām $7^n + 3^{n+1}$ dalās ar 4.

1. atrisinājums. Izmantosim matemātiskās indukcijas metodi.
Indukcijas bāze. Ja $n = 1$, tad $7^1 + 3^2 = 16$, kas dalās ar 4.
Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka apgalvojums ir patiess, ja $n = k$, tas ir, $7^k + 3^{k+1} \vdots 4$.
Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka apgalvojums ir patiess arī tad, ja $n = k + 1$, tas ir, $7^{k+1} + 3^{k+2} \vdots 4$.
Pārveidojam izteiksmi:

$$7^{k+1} + 3^{k+2} = 7 \cdot 7^k + 3 \cdot 3^{k+1} = 7 \cdot \underbrace{\left(7^k + 3^{k+1}\right)}_{\vdots 4} - \underbrace{4}_{\vdots 4} \cdot 3^{k+1}.$$

Tā kā katrs saskaitāmais dalās ar 4, tad arī summa dalās ar 4.
Secinājums. Tā kā apgalvojums ir patiess, ja $n = 1$, un no tā, ka apgalvojums ir patiess, ja $n = k$, izriet, ka apgalvojums ir patiess arī $n = k + 1$, secinām, ka apgalvojums ir patiess visām naturālām vērtībām.

2. atrisinājums. Apskatām doto izteiksmi pēc moduļa 4:

$$7^n + 3^{n+1} \equiv (-1)^n + (-1)^{n+1} \equiv 0 \pmod 4.$$

3. atrisinājums. Uzrakstām 7 kā $4 + 3$ un izmantojam Ņūtona binoma formulu:

$$7^n + 3^{n+1} = (4+3)^n + 3 \cdot 3^n =$$
$$= 4^n + C_n^1 \cdot 4^{n-1} \cdot 3 + C_n^2 \cdot 4^{n-2} \cdot 3^2 + \cdots + C_n^{n-1} \cdot 4 \cdot 3^{n-1} + 3^n + 3 \cdot 3^n =$$
$$= 4^n + C_n^1 \cdot 4^{n-1} \cdot 3 + C_n^2 \cdot 4^{n-2} \cdot 3^2 + \cdots + C_n^{n-1} \cdot 4 \cdot 3^{n-1} + 4 \cdot 3^n.$$

Tā kā katrs saskaitāmais dalās ar 4, tad arī visa summa dalās ar 4.

U3.2. Pierādīt, ka visām naturālām n vērtībām $6^{2n} + 19^n - 2^{n+1}$ dalās ar 17.

1. atrisinājums. Izmantosim matemātiskās indukcijas metodi.
Indukcijas bāze. Ja $n = 1$, tad $6^2 + 19^1 - 2^2 = 51$, kas dalās ar 17.
Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka apgalvojums ir patiess, ja $n = k$, tas ir, $6^{2k} + 19^k - 2^{k+1}$ dalās ar 17.
Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka apgalvojums ir patiess arī, ja $n = k + 1$, tas ir, $6^{2k+2} + 19^{k+1} - 2^{k+2}$ dalās ar 17.
Pārveidojam izteiksmi:

$$6^{2k+2} + 19^{k+1} - 2^{k+2} = 36 \cdot 6^{2k} + 19 \cdot 19^k - 2 \cdot 2^{k+1} =$$
$$= \underbrace{19 \cdot \left(6^{2k} + 19^k - 2^{k+1}\right)}_{\vdots 17} + \underbrace{17 \cdot 6^{2k}}_{\vdots 17} + \underbrace{17 \cdot 2^{k+1}}_{\vdots 17}.$$

Tā kā katrs saskaitāmais dalās ar 17, tad arī summa dalās ar 17.
Secinājums. Tā kā apgalvojums ir patiess, ja $n = 1$, un no tā, ka apgalvojums ir patiess, ja $n = k$, izriet, ka apgalvojums ir patiess arī $n = k + 1$, secinām, ka apgalvojums ir patiess visām naturālām vērtībām.

2. atrisinājums. Apskatām doto izteiksmi pēc moduļa 17:

$$6^{2n} + 19^n - 2^{n+1} \equiv 36^n + 19^n - 2 \cdot 2^n \equiv 2^n + 2^n - 2 \cdot 2^n \equiv 0 \pmod{17}.$$

U3.3. Pierādīt, ka katram naturālam n izteiksme $3n^5 + 5n^4 - 8n$ dalās ar 10.

1. atrisinājums. Izmantosim matemātiskās indukcijas metodi.
Indukcijas bāze. Ja $n = 1$, tad $3 + 5 - 8 = 0$, kas dalās ar 10.
Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ja $n = k$, tad $3k^5 + 5k^4 - 8k$ dalās ar 10.
Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ja $n = k + 1$, tad $3(k + 1)^5 + 5(k + 1)^4 - 8(k + 1)$ dalās ar 10.
Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$3(k + 1)^5 + 5(k + 1)^4 - 8(k + 1) =$$
$$= 3(k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1) + 5(k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) - 8(k + 1) =$$
$$= 3k^5 + 20k^4 + 50k^3 + 60k^2 + 27k = 3k^5 + 5k^4 - 8k + 15k^4 + 50k^3 + 60k^2 + 35k =$$
$$= (3k^5 + 5k^4 - 8k) + 5k \cdot (3k^3 + 10k^2 + 12k + 7).$$

Saskaitāmais $3k^5 + 5k^4 - 8k$ dalās ar 10 pēc induktīvā pieņēmuma.
Saskaitāmais $5k \cdot (3k^3 + 10k^2 + 12k + 7)$ dalās ar 5, jo satur reizinātāju 5, un dalās ar 2, jo:
- ja k ir pāra skaitlis, tad reizinātājs k dalās ar 2;
- ja k ir nepāra skaitlis, tad reizinātājs $3k^3 + 10k^2 + 12k + 7$ ir pāra skaitlis un tas dalās ar 2.

Tā kā katrs saskaitāmais dalās ar 10, tad arī summa dalās ar 10.
No matemātiskās indukcijas metodes izriet, ka katram naturālam n izteiksme $3n^5 + 5n^4 - 8n$ dalās ar 10, kas arī bija jāpierāda.

2. atrisinājums. Apskatām doto izteiksmi pēc moduļa 10. Tabulā redzams, ka visām n vērtībām dotā izteiksme dalās ar 10.

$n \pmod{10}$	$n^5 \pmod{10}$	$n \pmod{10}$	$3n^5 + 5n^4 - 8n \pmod{10}$
0	0	0	0
1	1	1	$3 + 5 - 8 \equiv 0$
2	2	6	$6 + 30 - 16 \equiv 0$
3	3	1	$9 + 5 - 24 \equiv 0$
4	4	6	$12 + 30 - 32 \equiv 0$
5	5	5	$15 + 25 - 40 \equiv 0$
6	6	6	$18 + 30 - 48 \equiv 0$
7	7	1	$21 + 5 - 56 \equiv 0$
8	8	6	$24 + 30 - 64 \equiv 0$
9	9	1	$27 + 5 - 72 \equiv 0$

3. atrisinājums. Pamatojam, ka izteiksmes vērtība vienmēr ir pāra skaitlis:
- ja n ir pāra skaitlis, tad visi saskaitāmie ir pāra skaitļi, tātad arī summa ir pāra skaitlis,
- ja n ir nepāra skaitlis, tad $3n^5 + 5n^4$ būs pāra skaitlis kā divu nepāra skaitļu summa un, no šīs summas atņemot pāra skaitli $8n$, rezultātā iegūsim pāra skaitli.

Līdz ar to esam pamatojuši, ka izteiksme $3n^5 + 5n^4 - 8n$ dalās ar 2.
Lai pamatotu, ka dotā izteiksme dalās arī ar 5, pārveidojam to formā:

$$3n^5 + 5n^4 - 8n = 5n^4 - 5n + 3n^5 - 3n = 5n^4 - 5n + 3n(n^4 - 1).$$

Pirmie divi saskaitāmie dalās ar 5, pamatosim, ka trešais saskaitāmais arī dalās ar 5.
Reizinātāju 3 neņemot vērā, jo tas neietekmē dalīšanos ar 5, pārveidojam izteiksmi:

$$n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)\,(n^2 + 1) = n(n - 1)\,(n + 1)\,((n + 2)\,(n + 3) - 5n - 5).$$

Ievērojam, ka $n - 1; n; n + 1; n + 2; n + 3$ ir pieci pēc kārtas esoši naturāli skaitļi, tāpēc iegūtais reizinājums noteikti dalās ar 5. Tātad esam pamatojuši, ka $n(n^4 - 1)$ dalās ar 5.
Tā kā 2 un 5 ir savstarpēji pirmskaitļi, tad izteiksme $3n^5 + 5n^4 - 8n$ dalās ar 10.

U3.4. Zināms, ka a un $\frac{a^2+a-1}{2a+1}$ ir veseli skaitļi. Atrast visas iespējamās a vērtības.

Atrisinājums. Ja $\frac{a^2+a-1}{2a+1}$ ir vesels skaitlis, tad arī $\frac{4(a^2+a-1)}{2a+1} = \frac{4a^2+4a-4}{2a+1}$ ir vesels skaitlis. Pārveidojam iegūto izteiksmi, atdalot veselo:

$$\frac{4a^2+4a-4}{2a+1} = \frac{(4a^2+4a+1)-5}{2a+1} = \frac{(2a+1)^2-5}{2a+1} = 2a+1-\frac{5}{2a+1}.$$

Lai šīs izteiksmes vērtība būtu vesels skaitlis, tad 5 jādalās ar $2a+1$, bet 5 dalās tikai ar ±1 un ±5.
Iespējamos gadījumus apkopojam tabulā.

$2a+1$	a	$\frac{a^2+a-1}{2a+1}$	
−1	−1	1	der
1	0	−1	der
−5	−3	−1	der
5	2	1	der

Tātad iespējamās a vērtības ir -3, -1, 0 un 2.

U3.5. Doti naturāli skaitļi a un b. Pierādīt:

a) ja $20a+18b$ dalās ar 7, tad $201a+8b$ dalās ar 7;

b) ja $201a+8b$ dalās ar 7, tad $20a+18b$ dalās ar 7.

Atrisinājums. a) Ja $20a+18b$ dalās ar 7, tad arī $6a+4b$ dalās ar 7, jo

$$20a+18b = 14a+14b+(6a+4b).$$

Tas nozīmē, ka arī $7 \cdot 27a + 2(6a+4b) = 201a+8b$ dalās ar 7.

b) Ja $201a+8b$ dalās ar 7, tad $201a+8b-7(28a+b) = 5a+b$ arī dalās ar 7. Tas nozīmē, ka arī $18(5a+b) - 7 \cdot 10a = 20a+18b$ dalās ar 7.

4. Vienādojumi naturālos un veselos skaitļos

Polinomiālu vienādojumu ar veseliem koeficientiem un vairākiem mainīgajiem, kuram jāmeklē veselās saknes, sauc par Diofanta vienādojumu (*Diophantine equation*).

Diofants no Aleksandrijas (*Diophantos of Alexandria*) bija sengrieķu matemātiķis, dzīvojis ap 3. gadsimtu. Viņš ir pazīstams ar savu darbību algebras nozarē, tiek saukts par "algebras tēvu". Diofanta galvenais darbs ir traktāts "Aritmētika", kas sastāv no 13 grāmatām, no kurām saglabājušas 6 grāmatas ar 189 vienādojumiem, sniegti arī risinājumi uzdevumiem, kas galvenokārt reducējās uz nenoteiktajiem vienādojumiem, kuri grāmatā tikuši saukti par Diofanta vienādojumiem. Diofants matemātiskos lielumus un darbības apzīmējis ar saīsinātiem vārdiem un nosacītiem algebriskiem apzīmējumiem, parādījās burtu simbolikas pazīmes. Diofants bijis pirmais grieķu matemātiķis, kas atzinis daļskaitļus par skaitļiem.

Liela daļa faktu par Diofanta dzīvi ir iegūta no 5. gadsimta grieķu antoloģijas par skaitļu spēlēm un mīklas, ko radījis Metrodorus. Viena no viņa mīklām (teksts uz Diofanta kapakmens):

> *Here lies Diophantus,' the wonder behold.*
> *Through art algebraic, the stone tells how old:*
> *'God gave him his boyhood one-sixth of his life,*
> *One twelfth more as youth while whiskers grew rife;*
> *And then yet one-seventh ere marriage begun;*
> *In five years there came a bouncing new son.*
> *Alas, the dear child of master and sage*
> *After attaining half the measure of his father's life chill fate took him. After consoling his fate by the science of numbers for four years, he ended his life.*

Var dot arī tekstu, kas ir 142. mīkla "*Professor Layton and Pandora's Box*" spēlē [3]:

> *Following the 1/6th of my life I spent as a child, I spent 1/12th of my life as a young man. Then, 1/7th of my life later, I got married. Five years after I wed, I was blessed with a child, but sadly, he only lived half the time I was alive before passing away. Today, four years after his death, I too will depart from this world.*

Cik gadu nodzīvojis Diofants?

Diofanta vecumu var noskaidrot, sastādot vienādojumu (x – Diofanta vecums):

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4,$$

kura atrisinājums ir $x = 84$.

Skolas kursā tiek risināti ļoti dažādi vienādojumi, piemēram, lineāri vienādojumi, kvadrātvienādojumi, trigonometriskie vienādojumi, eksponentvienādojumi. Šajā tēmā apskatīti vienādojumi, kuriem jānosaka tikai naturālās (veselās) saknes.

Atrisināt vienādojumu nozīmē:

1) atrast visas vienādojuma saknes;

2) pierādīt, ka citu sakņu bez atrastajām nav.

Ja vienādojums satur mainīgos $x_1, x_2, ..., x_n$, tad par tā atrisinājumu sauc skaitļu komplektu $(a_1, a_2, ..., a_n)$ ar šādu īpašību: ievietojot vienādojumā x_1 vietā a_1, x_2 vietā a_2, ..., x_n vietā a_n, iegūst patiesu skaitlisku vienādību.

Vispārīgas metodes, kā atrisināt vienādojumu, nav (ir zināmas metodes, kā risināt dažus specifiskus vienādojumus, piemēram, kvadrātvienādojumus), bieži vien jāizmanto dažādi spriedumi un metodes. Turpmāk apskatīti daži no tiem.

4.1. Pirmās kārtas lineāri vienādojumi ar diviem mainīgajiem[1]

Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu $2x = 3y$.

Vai vienādojumam ir atrisinājums?
Jā, jo der, piemēram, skaitļu pāris $x = 3$ un $y = 2$.

Vai vienādojumam ir viens vienīgs atrisinājums?
Nē, ir vairāk nekā viens atrisinājums.

Nosauciet dažus vienādojuma atrisinājumus!
Daži atrisinājumi $(3; 2)$, $(9; 6)$, $(-3; -2)$.

Kā vispārīgā veidā uzrakstīt vienādojuma atrisinājumus?
Vienādojuma kreisā puse dalās ar 2, tad arī labajai pusei jādalās ar 2, tātad $y = 2k$, kur $k \in \mathbb{Z}$. Līdz ar to $2x = 6k$ jeb $x = 3k$ un vienādojuma atrisinājums ir skaitļu pāris $(3k; 2k)$, kur $k \in \mathbb{Z}$.

Apskatām vispārīgo pirmās pakāpes vienādojumu ar diviem nezināmajiem $Ax + By = C$, kur A, B un C ir veseli skaitļi.
Ja $A = 0$ vai $B = 0$, tad iegūst lineāru vienādojumu ar vienu nezināmo (šādus vienādojumus risina jau 7. klasē).
Pieņemsim, ka $A \neq 0$ un $B \neq 0$.
Ja $LKD(A; B) = d \neq 1$, tad $A = a \cdot d$ un $B = b \cdot d$, kur $LKD(a; b) = 1$. Vienādojumu var uzrakstīt formā

$$adx + bdy = C.$$

Iespējami divi gadījumi:
- ja C nedalās ar d, tad vienādojumam nav atrisinājuma veselos skaitļos, jo vienādojuma kreisā puse dalās ar d, bet labā puse nedalās ar d;
- ja C dalās ar d, tad apzīmējam $C = c \cdot d$ un iegūstam vienādojumu formā $ax + by = c$, kur $LKD(a; b) = 1$.

Teorēma par lineārā vienādojuma atrisinājumu. Vienādojumam $ax + by = c$, kur $LKD(a; b) = 1$, eksistē bezgalīgi daudz atrisinājumu veselos skaitļos. Tos visus var iegūt ar formulām $x = x_0 - bk$ un $y = y_0 + ak$, kur k ir patvaļīgs vesels skaitlis un $(x_0; y_0)$ ir kaut kāds vienādojuma $ax + by = c$ atrisinājums.

Piezīme. Teorēmu pierāda, ievietojot atrisinājumus un pēc vienkāršošanas iegūstot vienādību $ax_0 + by_0 = c$.

Lai varētu lietot teorēmu, ir jāprot atrast vienu atrisinājumu $(x_0; y_0)$. Viens veids ir pārbaudīt visas vērtības $y = 0; 1; 2; 3; \ldots; a - 1$, bet tas var būt ilgi, ja a ir liels skaitlis. Otrs veids ir lietot secinājumu no Eiklīda algoritma: divu naturālu skaitļu lielāko kopīgo dalītāju var izteikt kā šo skaitļu lineāru kombināciju ar veseliem koeficientiem.

Veicot kā patstāvīgu darbu vai mājasdarbu, skolēni var atrast informāciju par Eiklīda algoritmu lielākā kopīgā dalāmā noteikšanai.

Piemēri

P4.1. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu $6x + 15y = 8$.
Atrisinājums. Vienādojuma kreisā puse dalās ar 3, bet labā – nedalās. Tātad vienādojumam nav atrisinājuma veselos skaitļos.

P4.2. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu $3x - 4y = 5$.
Atrisinājums. Tā kā $3x = 4y + 5$, tad $4y + 5$ jādalās ar 3.
Ievērojam, ka $4y + 5 = (3y + 3) + y + 2$, tātad $y + 2$ jādalās ar 3, tas ir, $y + 2 = 3k$, kur $k \in \mathbb{Z}$.
Līdz ar to $x = \frac{1}{3}(4(3k - 2) + 5) = 4k - 1$ un vienādojuma atrisinājums ir $(4k - 1; 3k - 2)$, kur $k \in \mathbb{Z}$.

P4.3. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu $2x - 7y = 11$.
Atrisinājums. Tā kā $LKD(2; 7) = 1$ un $x_0 = 2$, $y_0 = -1$ ir dotā vienādojuma viens konkrēts atrisinājums, tad tā atrisinājums ir $(2 + 7k; -1 + 2k)$, kur $k \in \mathbb{Z}$.

[1] Tēma sagatavota, izmantojot [1].

P4.4. Atrast vienu vienādojuma $17x - 13y = 5$ atrisinājumu veselos skaitļos.

Atrisinājums. Ievērojot, ka $34 - 39 = -5$, viegli iegūt vienu atrisinājumu $x_0 = -2$ un $y_0 = -3$. Tātad vienādojuma atrisinājums ir $(-2 + 13k; -3 + 17k)$, kur $k \in \mathbb{Z}$.

Piezīme. Apskatīsim, kā atrast vienu atrisinājumu, izmantojot Eiklīda algoritmu. Meklējam $LKD(17;\ 13)$ ar Eiklīda algoritmu:

$$17 = 13 \cdot 1 + 4;$$
$$13 = 4 \cdot 3 + 1;$$
$$4 = 1 \cdot 4 + 0.$$

Tātad $LKD(17;\ 13) = 1$, jo dalīšanās ar 1 ir bez atlikuma.

Pakāpeniski no “augšas uz leju” izsakām:

- no pirmās vienādības $4 = 17 - 13 \cdot 1$;
- no otrās vienādības $1 = 13 - 4 \cdot 3 = 13 - (17 - 13 \cdot 1) \cdot 3 = 4 \cdot 13 - 3 \cdot 17$;
- pārveidojam iegūto vienādību formā $17x - 13y = 5$:

$$4 \cdot 13 - 3 \cdot 17 = 1;$$
$$17 \cdot (-3) - 13 \cdot (-4) = 1;$$
$$17 \cdot (-15) - 13 \cdot (-20) = 5.$$

Esam ieguvuši atrisinājumu $x = -15$ un $y = -20$.

Šajā gadījumā vienādojuma vispārīgais atrisinājums ir formā $(-15 + 13k; -20 + 17k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Vai abos veidos iegūtie atrisinājumi sakrīt?

Jā, sakrīt. Pārveidojam iegūto atrisinājumu $(-15 + 13k; -20 + 17k) = (-2 - 13 + 13k; -3 - 17 + 17k) = (-2 + 13(k - 1); -3 + 17(k - 1))$, *kur* $k \in \mathbb{Z}$. *Apzīmējot* $m = k - 1$, *iegūstam* $(-2 + 13m; -3 + 17m)$, *kur* $m \in \mathbb{Z}$.

P4.5. Kādus naturālus skaitļus var ievietot x un y vietā, lai iegūtu patiesu vienādību $5x + 2y = 30$?

Atrisinājums. Doto vienādojumu pārveidojam par $2y = 30 - 5x$. Tā kā vienādojuma labā puse dalās ar 5, tad arī vienādojuma kreisajai pusei jādalās ar 5, tas ir, $2y$ jādalās ar 5. Skaitlis 2 ar 5 nedalās, tātad y jādalās ar 5.

Apskatām visus iespējamos gadījumus:

- ja $y = 5$, tad $25 = 30 - 5x$ jeb $x = 4$;
- ja $y = 10$, tad $2 \cdot 10 = 30 - 5x$ jeb $x = 2$;
- ja $y \geq 15$, tad $x \leq 0$ un tas vairs nav naturāls skaitlis.

Līdz ar to $x = 4$ un $y = 5$ vai $x = 2$ un $y = 10$.

Iegaumē!

Ja uzdevumā ir jautājums „Kāds var būt...? ”; „Cik...? ”, tad uzdevuma risinājumam jāsastāv no divām daļām:

1) jāaplūko visi iespējamie gadījumi un atbildē jāuzrāda visas atrastās dažādās vērtības, kam uzdevuma prasības izpildās;
2) jāpamato, ka citu vērtību nav.

4.2. Atrisinājuma neeksistences piemēri

Vai var atrast tādus naturālus skaitļus x un y, ka $6x + 16y = 2021$?

Atrisinājums. Tā kā vienādojuma kreisā puse dalās ar 2, bet labā nedalās ar 2, tad nevar atrast tādus naturālus skaitļus x un y, lai dotā vienādība būtu patiesa.

Līdzīgu pieeju var izmantot arī sarežģītāku vienādojumu risināšanā. Grūtākais ir atrast skaitli, ar kuru jādala vienādojuma abas puses, lai rastos pretruna.

Turpmāk apskatīti algebriski vienādojumi ar veseliem koeficientiem, kuriem atrisinājums jāmeklē veselo vai naturālo skaitļu kopā. Uzdevumos izmantota šāda ideja:

ja var pierādīt, ka vienādojuma abas puses, dalot ar kādu šim vienādojumam īpaši izvēlētu skaitli, noteikti dod dažādus atlikumus, tad vienādojumam nav atrisinājuma.

Ievēro! Ja vienādojuma abas puses dalās ar kādu skaitli, tad no tā nevar secināt, ka vienādojumam ir atrisinājums veselos skaitļos.

Daži *īpašā skaitļa* izvēles principi

- Izvēlamies tikai pirmskaitļus vai to pakāpes.
- Sākam ar maziem skaitļiem $2; 3; 4; 5; 7; 8; 9; 11; \ldots$.
- Izvēlamies skaitļus, kas ir vienādojuma koeficientu dalītāji.
- Vienādojumos, kuros parādās skaitļu k-tās pakāpes, izvēlamies skaitļus k^2 un visus pirmskaitļus, kas izsakāmi formā $mk + 1$. Piemēram, vienādojumos, kas saistīti ar skaitļu kubiem, sākotnējie *īpašie* skaitļi ir $9; 7; 13; 19; \ldots$.
- Vienādojumos, kuri satur veselu skaitļu kvadrātus, parasti izdevīgi aplūkot atlikumus, dalot ar 4, 8 vai 16, dažreiz ar 3.
- Jācenšas izvēlēties tādu skaitli, lai, dalot ar to, iespējami daudziem vienādojuma kreisās un labās puses saskaitāmajiem būtu pēc iespējas mazāk dažādu iespējamu vērtību.

Lietojot šo ideju, lietderīgi atcerēties par darbībām ar atlikumiem, kā arī to, kādus atlikumus var dot veselu skaitļu kvadrāti, kubi, ceturtās pakāpes utt.

Piezīme. Vienam vienādojumam var būt vairāki *īpašie* skaitļi un dotajos piemēros norādītie nav jāuzskata par vienīgajiem vai pašiem labākajiem.

Piemēri

P4.6. Pierādīt, ka vienādojumam $x^2 + y^2 = 2015$ nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

Atrisinājums. Naturāla skaitļa kvadrāts, dalot ar 4, var dot tikai atlikumu 0 vai 1 (sk. P2.4. piemēru). Tāpēc $x^2 + y^2$, dalot ar 4, var dot tikai atlikumu $0 + 0$, $0 + 1$, $1 + 0$ vai $1 + 1$, tas ir, atlikumu 0, 1 vai 2. Taču skaitlis 2015 dod atlikumu 3, dalot ar 4. Tāpēc dotajam vienādojumam nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

P4.7. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu $5x^2 - 2y^2 = 4$.

Atrisinājums. Pārrakstām vienādojumu formā $5x^2 = 2y^2 + 4$. Apskatām iegūtā vienādojuma labās puses izteiksmi pēc moduļa 5 (jo vienādojuma kreisās puses izteiksme dalās ar 5).

$y \pmod 5$	$2y^2 + 4 \pmod 5$
0	$2 \cdot 0^2 + 4 \equiv 4 \pmod 5$
1	$2 \cdot 1^2 + 4 \equiv 6 \equiv 1 \pmod 5$
2	$2 \cdot 2^2 + 4 \equiv 12 \equiv 2 \pmod 5$
3	$2 \cdot 3^2 + 4 \equiv 22 \equiv 2 \pmod 5$
4	$2 \cdot 4^2 + 4 \equiv 36 \equiv 1 \pmod 5$

Esam ieguvuši, ka $2y^2 + 4$ nedalās ar 5, bet $5x^2$ dalās ar 5. Tātad dotajam vienādojumam nav atrisinājuma veselos skaitļos.

P4.8. Pierādīt, ka vienādojumam $(x - y)^2 = 6xy + 7$ nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

1. atrisinājums. Pārveidojam doto vienādojumu formā $x^2 + y^2 = 8xy + 7$. Gan x^2, gan y^2 pēc moduļa 4 var pieņemt tikai vērtības 0 un 1, tāpēc vienādojuma kreisā puse pēc moduļa 4 var pieņemt tikai vērtības 0, 1 vai 2, bet $8xy + 7 \equiv 3 \pmod 4$. Līdz ar to dotajam vienādojumam nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

2. atrisinājums. Ekvivalenti pārveidojam doto vienādību:

$$x^2 - 2xy + y^2 = 6xy + 7;$$
$$x^2 + 2xy + y^2 = 10xy + 7;$$
$$(x + y)^2 = 10xy + 7.$$

Pēdējās vienādības kreisajā pusē ir skaitļa kvadrāts, kura pēdējais cipars var būt tikai $0; 1; 4; 5; 6; 9$, bet vienādības labajā pusē esošā skaitļa pēdējais cipars ir 7. Tātad abas vienādības puses nevar būt vienādas, līdz ar to dotajam vienādojumam nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

Piezīme. Principā 2. atrisinājumā izmantota kongruence pēc moduļa 10.

3. atrisinājums. Pārveidojam doto vienādību formā $(x+y)^2 = 10xy + 7$ un apskatām to pēc moduļa 5. Veselu skaitļu kvadrāti pēc moduļa 5 var dot atlikumus 0, 1 vai 4 (sk. P2.4. piemēru), taču labā puse ir kongruenta ar 2 pēc moduļa 5. Tātad abas vienādības puses nevar būt vienādas, līdz ar to dotajam vienādojumam nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

P4.9. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $7^x + 8^y = 13^z$.

Atrisinājums. Apskatīsim doto vienādojumu pēc moduļa 3. Tā kā $7 \equiv 1 \pmod 3$, $8 \equiv 2 \equiv -1 \pmod 3$ un $13 \equiv 1 \pmod 3$, tad iegūstam $1^x + (-1)^y \equiv 1^z \pmod 3$. Šī kongruence nav patiesa, jo kreisās puses izteiksmes vērtība ir 0 vai 2, bet labās puses izteiksmes vērtība ir 1. Tātad dotajam vienādojumam nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

Ideja par kongruenci pēc moduļa 3 var rasties, ja ievēro, ka $7 = 6 + 1$, $8 = 9 - 1$ un $13 = 12 + 1$.

P4.10. Pierādīt, ka neeksistē tādi naturāli skaitļi x, y un z, ka izpildās vienādība $6^x + 13^y = 29^z$.

Atrisinājums. Apskatīsim doto vienādojumu pēc moduļa 7. Tā kā $6 \equiv -1 \pmod 7$, $13 \equiv 6 \equiv -1 \pmod 7$ un $29 \equiv 1 \pmod 7$, tad iegūstam $(-1)^x + (-1)^y \equiv 1^z \pmod 7$. Šī kongruence nav patiesa, jo kreisās puses izteiksmes vērtība ir 0 vai ± 2, bet labās puses izteiksmes vērtība ir 1. Tātad dotajam vienādojumam nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

Ideja par kongruenci pēc moduļa 7 var rasties, ja ievēro, ka $6 = 7 - 1$, $13 = 14 - 1$ un $29 = 28 + 1$.

P4.11. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu $x^2 + 8z = 2y^2 + 3$.

Atrisinājums. Apskatām doto vienādojumu pēc moduļa 8. Viegli pārbaudīt, ka veselu skaitļu kvadrāti, dalot ar 8, var dot tikai atlikumus 0, 1 vai 4 (sk. tabulu).

$a \pmod 8$	0	1	2	3	4	5	6	7
$a^2 \pmod 8$	0	1	4	1	0	1	4	1

Tas nozīmē, ka dotā vienādojuma kreisā puse $x^2 + 8z$, dalot ar 8, var dot tikai atlikumus 0, 1 vai 4. Savukārt skaitlis $2y^2$, dalot ar 8, var dot tikai atlikumus 0 vai 2. Tātad vienādojuma labā puse $2y^2 + 3$, dalot ar 8, var dot tikai atlikumus 3 vai 5. Tātad nav tādu veselu x un y vērtību, pie kurām dotā vienādojuma abas puses dotu vienu un to pašu atlikumu, dalot ar 8. Līdz ar to dotajam vienādojumam nav atrisinājuma veselos skaitļos.

Papildu uzdevumi par pretrunas modeli doti 2. pielikumā, tos skolotājs var izmantot pēc saviem ieskatiem (ar tiem var aizstāt grupu/pāru darba uzdevumu).

Uzdevums grupu/pāru darbam (*ar MS Excel izmantošanu, risinājums dots 4. pielikumā*)

Atrisināt vienādojumu $2x^6 + y^7 = 11$ veselos skaitļos.

Vienādojumam nav atrisinājuma. Iespējami citi uzdevuma formulējumi.

- *Pierādīt, ka vienādojumam $2x^6 + y^7 = 11$ nav atrisinājuma veselos skaitļos.*
- *Vai vienādojumam $2x^6 + y^7 = 11$ ir atrisinājums veselos skaitļos?*
- *Vai var atrast tādus veselus skaitļus x un y, ka $2x^6 + y^7 = 11$?*

Pēc kāda moduļa jāapskata dotais vienādojums, lai iegūtu pretrunu?

Sāciet ar skaitļu pakāpēm un pirmskaitļiem! Ar ko var būt kongruenta skaitļa sestā vai septītā pakāpe pēc kāda moduļa?

Varbūt ērtāk izmantot vienādojumu formā $2x^6 = 11 - y^7$?

Ar ko var būt kongruents $2x^6$ un $11 - y^7$ pakāpe pēc kāda moduļa?

Apskatiet vienādojumu pēc moduļa 43.

Uzdevuma risinājuma uzrakstīšana trenē prasmi matemātiski korekti un citiem saprotami izteikties.

4.3. Dažādu spriedumu izmantošana vienādojumu risināšanā veselos skaitļos[2]

Tēmas apguvei apkopoti trīs biežāk lietotie spriedumi.

- Ja vienādojums pārveidots formā $A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n = c$, kur $A_1, A_2, ..., A_n$ ir izteiksmes, kas satur mainīgos un kuru vērtības noteikti ir veseli skaitļi, bet c ir konstante (vesels skaitlis), tad $A_1, A_2, ..., A_n$ noteikti jābūt c dalītājiem.
- Mazāks skaitlis nevar dalīties ar lielāku skaitli.
- Starp diviem pēc kārtas esošiem naturāliem skaitļiem n un $n+1$ nav neviena cita naturāla skaitļa.

Risinot uzdevumus, var būt nepieciešams veikt arī izteiksmju novērtēšanu.

Ja vienādojums pārveidots formā $A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n = c$, kur $A_1, A_2, ..., A_n$ ir izteiksmes, kas satur mainīgos un kuru vērtības noteikti ir veseli skaitļi, bet c ir konstante (vesels skaitlis), tad $A_1, A_2, ..., A_n$ noteikti jābūt c dalītājiem.

P4.12. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu $x^2 - y^2 = 4$.

Atrisinājums. Pārveidojam vienādojumu formā $(x-y)(x+y) = 4$.
Skaitli 4 kā divu veselu skaitļu reizinājumu var iegūt 6 veidos (sk. tabulu).

$x-y$	$x+y$	Atrisinājums
2	2	(2; 0)
1	4	nav
4	1	nav
−2	−2	(−2; 0)
−1	−4	nav
−4	−1	nav

P4.13. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $x^2 + 15x = 2^y$.

Atrisinājums. No vienādības $x(x+15) = 2^y$ izriet, ka katrs no skaitļiem x un $x+15$ ir vai nu vieninieks, vai divnieka pakāpe ar naturālu kāpinātāju. Virknē 1; 2; 4; 8; 16; 32; ... vienīgie skaitļi, kuru starpība ir 15, ir 1 un 16. Tāpēc $x = 1$ un $y = 4$.

P4.14. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu $x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 + x^2 - y^2 = 10$.

Atrisinājums. Vienādojuma kreisās puses izteiksmi sadalot reizinātājos, iegūstam

$$(x+y)(x-y)(x-y+1) = 10.$$

Tā kā x un y ir veseli skaitļi, tad katrs reizinātājs ir vesels skaitlis. Skaitli 10 kā trīs veselu skaitļu reizinājumu (līdz precizitātei ar reizinātāju secību) var izteikt septiņos veidos:

$$1 \cdot 2 \cdot 5 = -1 \cdot (-2) \cdot 5 = -1 \cdot 2 \cdot (-5) = 1 \cdot (-2) \cdot (-5) = 1 \cdot 1 \cdot 10 = \\ = -1 \cdot (-1) \cdot 10 = 1 \cdot (-1) \cdot (-10).$$

Ievērojam, ka $(x-y+1) - (x-y) = 1$, tātad der tikai tie sadalījumi, kuros ir divi reizinātāji, kas atšķiras tieši par 1, tādi ir tikai pirmie divi gadījumi. Apskatām katru no tiem.

1. Iegūstam vienādojumu sistēmu $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=5 \end{cases}$, kuras atrisinājums ir $x = 3$ un $y = 2$.
2. Iegūstam vienādojumu sistēmu $\begin{cases} x-y=-2 \\ x+y=5 \end{cases}$, kurai nav atrisinājuma veselos skaitļos, jo $x = 1{,}5$.

Līdz ar to esam ieguvuši, ka dotajam vienādojumam ir tikai viens atrisinājums veselos skaitļos x = 3 un y = 2.

[2] Tēma sagatavota, izmantojot [1].

P4.15. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu $x + y + xy = 2010$.

Atrisinājums. Pārveidojam vienādojumu par $(1 + x)(1 + y) = 2011$. Tā kā 2011 ir pirmskaitlis, tad $1 + x$ var būt tikai viens no skaitļiem $1; -1; 2011; -2011$. Ievietojot šīs vērtības, iegūstam atrisinājumus $(0; 2010)$, $(-2; -2012)$, $(2010; 0)$, $(-2012; -2)$.

P4.16. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $(2a + b)(2b + a) = 2^c$.

Atrisinājums. Izteiksim skaitļus a un b šādā formā: $a = 2^x \cdot n$ un $b = 2^y \cdot m$, kur n un m – nepāra skaitļi. Nezaudējot vispārīgumu (simetrijas dēļ), varam pieņemt, ka $x \geq y$. Tad

$$2a + b = 2 \cdot 2^x \cdot n + 2^y \cdot m = 2^y \cdot (2^{x+1-y} \cdot n + m).$$

Iekavās uzrakstīts nepāra skaitlis, kas ir lielāks nekā 1. Bet 2^c nevar dalīties ar nepāra skaitli lielāku par 1. Tātad dotajam vienādojumam nav atrisinājumu naturālos skaitļos.

Mazāks skaitlis nevar dalīties ar lielāku skaitli.

P4.17. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $x^2 + 3x = y^2 + 1$.

Atrisinājums. Pārveidojam vienādojumu formā

$$(x + 2 - y)(x + 2 + y) = x + 5.$$

Tā kā $x + 2 + y > x + 2 - y$ un $x + 5 \in N$, tad $x + 2 - y > 0$ un $x + 5 \geq x + y + 2$. Līdz ar to $y \leq 3$. Apskatot visas iespējamās y vērtības:

- ja $y = 1$, tad $x^2 + 3x - 2 = 0$, kura saknes ir $x_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$, kas nav naturāli skaitļi;
- ja $y = 2$, tad $x^2 + 3x - 5 = 0$, kura saknes ir $x_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{29}}{2}$, kas nav naturāli skaitļi;
- ja $y = 3$, tad $x^2 + 3x - 10 = 0$, kura saknes ir $x = -5$ (neder) un $x = 2$.

Līdz ar to dotajam vienādojumam naturālos skaitļos ir viens atrisinājums $(2; 3)$.

P4.18. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $(y^2 - 3)(x + 1) = x^2 + 1$.

Atrisinājums. Pārveidojam vienādojumu formā $y^2 - 3 = \frac{x^2+1}{x+1}$ un atdalām veselo:

$$y^2 - 3 = \frac{x^2 + 1}{x + 1} = \frac{x^2 - 1 + 2}{x + 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} + \frac{2}{x + 1} = x - 1 + \frac{2}{x + 1}.$$

Tā kā jāmeklē atrisinājums naturālos skaitļos, tad $x + 1$ ir jābūt 2 dalītājam. Vienīgā derīgā x vērtība ir 1, tad $y^2 - 3 = 1$, no kā iegūstam, ka $y = -2$ (neder) un $y = 2$.
Līdz ar to vienādojuma atrisinājums ir $x = 1$ un $y = 2$.

P4.19. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu $\frac{x^2}{2} + \frac{5}{y} = 7$.

Atrisinājums. Ja $(x; y)$ ir atrisinājums, tad arī $(-x; y)$ ir atrisinājums. Tāpēc sākumā apskatām tikai gadījumu, ja $x \geq 0$. Izsakot mainīgo y, iegūstam $y = \frac{10}{14-x^2}$.

Tā kā y jābūt veselam skaitlim un $y \neq 0$, tad $14 - x^2$ jābūt skaitļa 10 dalītājam, tātad $|14 - x^2| \leq 10$, no kurienes iegūstam $4 \leq x^2 \leq 24$. Tā kā apskatām $x \geq 0$, tad $2 \leq x \leq 4$. Pārbaudot visas iespējas, iegūstam atrisinājumus $(2; 1)$, $(3; 2)$, $(4; -5)$. Tātad dotā vienādojuma atrisinājumi ir arī $(-2; 1)$, $(-3; 2)$, $(-4; -5)$.

Piezīme. Uzdevumu var risināt, arī izsakot $x^2 = 14 - \frac{10}{y}$.

Nedrīkst izdarīt spriedumu, ka y ir jābūt skaitļa 5 dalītājam vai ka x ir jābūt pāra skaitlim, jo skaitli 7 var iegūt, arī saskaitot divus daļskaitļus.

P4.20. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $3abc + 3a + 3b = 7bc + 7$.

Atrisinājums. Izsakām mainīgo a:

$$a = \frac{7bc+7-3b}{3(bc+1)} = \frac{7(bc+1)-3b}{3(bc+1)} = \frac{7(bc+1)}{3(bc+1)} - \frac{3b}{3(bc+1)} = 2\frac{1}{3} - \frac{b}{bc+1}.$$

Lai a būtu naturāls skaitlis, tad $\frac{b}{bc+1} = \frac{1}{3}$ vai $\frac{b}{bc+1} = 1\frac{1}{3}$.

Apskatām abus gadījumus.

- Ja $\frac{b}{bc+1} = \frac{1}{3}$, tad $a = 2$ un $bc + 1 = 3b$ jeb $c = \frac{3b-1}{b} = 3 - \frac{1}{b}$. Skaitlis c ir naturāls tikai tad, ja $\frac{1}{b}$ ir naturāls. Vienīgā iespēja, ja $b = 1$. Līdz ar to esam ieguvuši, ka $a = 2$, $b = 1$ un $c = 2$ ir dotā vienādojuma atrisinājums.
- Ja b un c ir naturāli skaitļi, tad $b < bc + 1$ jeb $\frac{b}{bc+1} < 1$. Tātad $\frac{b}{bc+1} \neq 1\frac{1}{3}$ un šajā gadījumā dotajam vienādojumam nav atrisinājuma.

Līdz ar to esam pierādījuši, ka dotajam vienādojumam naturālos skaitļos ir viens vienīgs atrisinājums $a = 2$, $b = 1$ un $c = 2$.

Starp diviem pēc kārtas esošiem naturāliem skaitļiem n un $n + 1$ nav neviena cita naturāla skaitļa.

P4.21. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu $(x - y)(x + y) = x$.

Atrisinājums. Pārveidosim vienādojumu formā $x(x - 1) = y^2$.
Ja $x = 0$ vai $x = 1$, tad $y = 0$ un atrisinājums eksistē.
Pieņemsim, ka $x > 1$. Tad ir spēkā nevienādības:

$$(\boldsymbol{x} - \mathbf{1})^{\mathbf{2}} = x^2 - 2x + 1 < x^2 - x + \underbrace{1 - x}_{<0} < \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x} - \mathbf{1}) = x^2 - x < \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}.$$

Tā kā $x(x - 1)$ atrodas starp divu secīgu veselu skaitļu kvadrātiem, tad tas nevar būt vesela skaitļa kvadrāts.
Līdzīgi, ja $x < 0$, tad ir spēkā stingrās nevienādības $x^2 < x(x - 1) < (x - 1)^2$. Tātad arī šajā gadījumā $x(x - 1)$ nevar būt vesela skaitļa kvadrāts.
Līdz ar to atrisinājumi ir $(0; 0)$ un $(1; 0)$.

P4.22. Pierādīt, ka nav tādu naturālu skaitļu a, x, y un z, ka $7^a = 7^x + 7^y + 7^z$.

1. atrisinājums. Ja kāds no x, y vai z ir lielāks vai vienāds ar a, tad vienādojumam nav atrisinājuma.
Tātad jāizpildās nevienādībām $x < a$, $y < a$ un $z < a$. Tā kā x, y, z, a ir naturāli skaitļi, tad secinām, ka $x \leq a - 1$, $y \leq a - 1$ un $z \leq a - 1$. Tādā gadījumā

$$7^x + 7^y + 7^z \leq 7^{a-1} + 7^{a-1} + 7^{a-1} = 3 \cdot 7^{a-1} < 7 \cdot 7^{a-1} = 7^a,$$

no kā izriet, ka dotajam vienādojumam nav atrisinājuma.

2. atrisinājums. Apskatām doto vienādojumu pēc moduļa 3. Tad

$$7^a \equiv 1 \pmod 3 \quad \text{un} \quad 7^x + 7^y + 7^z \equiv 1 + 1 + 1 \equiv 3 \equiv 0 \pmod 3,$$

no kā izriet, ka nav tādu naturālu skaitļu a, x, y un z, ka $7^a = 7^x + 7^y + 7^z$.

P4.23. Pierādīt, ka vienādojumam $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a^2+b^2} = \frac{1}{2}$ nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

Atrisinājums. Pārveidojam doto vienādojumu:

$$\frac{a+b}{ab} + \frac{1}{a^2+b^2} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{a^2+b^2} = \frac{ab - 2(a+b)}{2ab},$$

$$(a^2 + b^2)\big(ab - 2(a + b)\big) = 2ab.$$

Lai vienādojumam būtu atrisinājums naturālos skaitļos, nepieciešams, lai $ab - 2(a + b) \geq 1$ (izteiksmes vērtība nevar būt negatīva vai 0, jo tad a vai b būtu jābūt negatīvam vai 0). Bet tādā gadījumā otram kreisās puses reizinātājam jābūt ne lielākam kā labās puses izteiksmei, tas ir, $a^2 + b^2 \leq 2ab$, ko pārveidojot iegūstam, ka $(a - b)^2 \leq 0$. Iegūtā nevienādība būs patiesa tikai tad, ja $a = b$. Tādā gadījumā $\frac{2}{a} + \frac{1}{2a^2} = \frac{1}{2}$, tāpēc $a \geq 5$ (ja a ir 4 vai mazāk, tad kreisās puses izteiksmes vērtība ir lielāka nekā $\frac{1}{2}$). Bet tādā gadījumā $\frac{2}{a} + \frac{1}{2a^2} \leq \frac{2}{5} + \frac{1}{50} = \frac{21}{50} < \frac{1}{2}$, tāpēc vienādojumam atrisinājuma naturālos skaitļos nav.

Papildu uzdevumi par vienādojumiem veselos skaitļos doti 3. pielikumā, tos skolotājs var izmantot pēc saviem ieskatiem (ar tiem var aizstāt grupu/pāru darba uzdevumu).

Uzdevums grupu/pāru darbam (*risinājums dots 5. pielikumā)*

Atrast visas iespējamās naturālās x, y, z un t vērtības tādas, ka $x \geq y \geq z$ un $x \geq y \geq z$ un $t! = x! + 2y! + 3z!$.

Vai vari atrast kādu derīgu skaitļu četrinieku?
Apskati gadījumu, ja $x = 1$.
Apskati gadījumu, ja $x = 2$.
Apskati gadījumu, ja $x = 3$.
Apskati gadījumu, ja $x = 4$.
Apskati gadījumu, ja $x = 5$.

Vai vari pamatot, ka neder tādas x *vērtības, kas lielākas nekā* 5*?*

- *Kāpēc* $t > x$*?*
- *Kāpēc ir patiesa nevienādība* $t! \leq 6x!$*?*
- *Kāpēc ir patiesa nevienādība* $t! \geq (x+1)!$ *?*

PIELIKUMI

1. pielikums. Kongruences (grūtāki uzdevumi)

1. Pierādīt apgalvojumu: ja $p > 3$ ir pirmskaitlis, tad skaitlis p^2, dalot 24, dod atlikumu 1.

Atrisinājums. Ievērosim, ka $24 = 8 \cdot 3$. Tā kā 8 un 3 ir savstarpēji pirmskaitļi, tad pietiek pierādīt, ka visiem pirmskaitļiem $p \geq 5$ izpildās kongruences

$$p^2 \equiv 1 \pmod 8 \text{ un } p^2 \equiv 1 \pmod 3,$$

jo tas nozīmēs, ka $p^2 - 1$ dalās gan ar 8, gan ar 3, tātad $p^2 - 1$ dalās ar $8 \cdot 3 = 24$.

1) Pamatosim, ka $p^2 \equiv 1 \pmod 8$. Tā kā visi pirmskaitļi $p \geq 5$ ir nepāra skaitļi, tad pēc moduļa 8 skaitlis p var pieņemt tikai vērtības 1, 3, 5 vai 7. Pārbaudām, ka visu šo vērtību kvadrāti ir kongruenti ar 1 pēc moduļa 8.

$p \pmod 8$	1	3	5	7
$p^2 \pmod 8$	1	$9 \equiv 1$	$25 \equiv 1$	$49 \equiv 1$

Redzam, ka šādiem pirmskaitļiem p izpildās $p^2 \equiv 1 \pmod 8$, tas ir, $p^2 - 1$ dalās ar 8.

2) Pamatosim, ka $p^2 \equiv 1 \pmod 3$. Neviens pirmskaitlis $p \geq 5$ nedalās ar 3. Tātad pēc moduļa 3 pirmskaitlis p var pieņemt tikai vērtības 1 vai 2. Pārbaudām, ka šo vērtību kvadrāti ir kongruenti ar 1 pēc moduļa 3.

$p \pmod 3$	1	2
$p^2 \pmod 3$	1	$4 \equiv 1$

Secinām, ka visiem pirmskaitļiem $p > 3$ skaitlis $p^2 - 1$ dalās gan ar 8, gan ar 3, tātad $p^2 - 1$ dalās 24, kas nozīmē, ka p^2, dalot ar 24, dod atlikumu 1.

Piezīmes.

1. Pēc moduļa 8 varēja aplūkot arī vērtības ±1 un ±3, bet pēc moduļa 3 jāaplūko vērtības ±1 un jāņem vērā, ka $(\pm a^2) \equiv a^2 \pmod n$.

2. Ievērojot, ka p ir nepāra skaitlis un $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ ir divu viens otram sekojošu pāra skaitļu reizinājums (no kuriem viens noteikti dalās ar 2, bet otrs – ar 4), var secināt, ka $p^2 - 1$ dalās ar 8.

2. Atrast visu skaitļu, kas pierakstāmi formā $a^4 - b^4$, kur $a > b > 5$ un a un b ir pirmskaitļi, lielāko kopīgo dalītāju!

Atrisinājums. Ievērojam, ka $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$.
Tā kā

$$11^4 - 7^4 = 4 \cdot 18 \cdot (121 + 49) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 17 = 240 \cdot 51$$

un

$$13^4 - 11^4 = 2 \cdot 24 \cdot (169 + 121) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29 = 240 \cdot 29,$$

tad meklētais lielākais kopīgais dalītājs d nevar būt lielāks kā 240. Pamatosim, ka visi dotie skaitļi dalās ar 240, līdz ar to būs pierādīts, ka $d = 240$. Ievērosim, ka $240 = 16 \cdot 3 \cdot 5$; tā kā visi reizinātāji ir savstarpēji pirmskaitļi, tad pietiekami parādīt, ka katrs no dotajiem skaitļiem dalās gan ar 16, gan ar 3, gan ar 5.

1) Tā kā jebkurš pirmskaitlis p, kas lielāks nekā 5, ir nepāra skaitlis, tad, to dalot ar pāra skaitli, nevar iegūt atlikumu, kas ir pāra skaitlis, līdz ar to var rasties tikai nepāra atlikums: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 vai 15. Tātad p var būt kongruents ar ar ± 1, ± 3, ± 5 vai ± 7 pēc moduļa 16. Noskaidrosim, ar ko var būt kongruenta pirmskaitļa ceturtā pakāpe pēc moduļa 16:
- $p^4 \equiv (\pm 1)^4 \equiv 1 \pmod{16}$;
- $p^4 \equiv (\pm 3)^4 \equiv 81 \equiv 1 \pmod{16}$;
- $p^4 \equiv (\pm 5)^4 \equiv 25 \cdot 25 \equiv 9 \cdot 9 \equiv 81 \equiv 1 \pmod{16}$;
- $p^4 \equiv (\pm 7)^4 \equiv 49 \cdot 49 \equiv 1 \cdot 1 \equiv 1 \pmod{16}$.

Tātad $p^4 \equiv 1 \pmod{16}$.

2) Pirmskaitli $p > 5$, dalot ar 3, var iegūt tikai atlikumu 1 vai 2, tāpēc pēc moduļa 3 šāds pirmskaitlis p var pieņemt tikai vērtības ± 1 un $p^4 \equiv 1 \pmod{3}$.

3) Pirmskaitli $p > 5$, dalot ar 5, var iegūt tikai atlikumu 1, 2, 3 vai 4, tāpēc pēc moduļa 5 šāds pirmskaitlis p var pieņemt tikai vērtības ± 1 un ± 2. Tad $p^4 \equiv (\pm 1)^4 \equiv 1 \pmod{5}$ vai $p^4 \equiv (\pm 2)^4 \equiv 16 \equiv 1 \pmod{5}$. Tātad $p^4 \equiv 1 \pmod{5}$.

Līdz ar to $p^4 \equiv 1 \pmod{240}$ un tāpēc $a^4 - b^4 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{240}$ jeb $a^4 - b^4$ dalās ar 240. Esam pierādījuši, ka visu skaitļu, kas pierakstāmi formā $a^4 - b^4$, kur $a > b > 5$ un a un b ir pirmskaitļi, lielākais kopīgais dalītājs ir 240.

Piezīme. Pamatot to, ka $a^4 - b^4$ dalās ar 16, var, ievērojot, ka jebkuriem nepāra skaitļiem a un b to kvadrātu summa dalās ar 2, bet kvadrātu starpība dalās ar 8.

3. Atrast skaitļu $3^3 - 3$, $5^5 - 5$, $7^7 - 7$, ..., $2015^{2015} - 2015$ lielāko kopīgo dalītāju.

Atrisinājums. Ievērosim, ka $3^3 - 3 = 24$, tātad meklētais lielākais kopīgais dalītājs d nevar būt lielāks kā 24. Pamatosim, ka visi dotie skaitļi dalās ar 24, līdz ar to būs pierādīts, ka $d = 24$. Ievērosim, ka $24 = 8 \cdot 3$. Tā kā 8 un 3 ir savstarpēji pirmskaitļi, tad pietiekami parādīt, ka katrs no dotajiem skaitļiem dalās gan ar 3, gan ar 8.

Ievērojam, ka dotie skaitļi ir formā $n^n - n = n\,(n^{n-1} - 1)$, kur n ir nepāra skaitlis, tas ir, $n = 2k + 1$.

1) Pamatosim, ka visi dotie skaitļi dalās ar 3.
- Ja n dalās ar 3, tad arī reizinājums $n\,(n^{n-1} - 1)$ dalās ar 3.
- Ja n nedalās ar 3, tad $n \equiv \pm 1 \pmod{3}$, līdz ar to $n^{n-1} - 1 \equiv (\pm 1)^{2k} - 1 \equiv 0 \pmod{3}$; taču tad reizinājums $n\,(n^{n-1} - 1)$ dalās ar 3.

2) Pamatosim, ka visi skaitļi dalās ar 8. Tā kā n ir nepāra skaitlis, tad n pēc moduļa 8 pieņem vērtības 1, 3, 5, 7. Ērti ir izmantot faktu $5 \equiv -3 \pmod{8}$ un $7 \equiv -1 \pmod{8}$, kas nozīmē, ka $n \equiv \pm 1 \pmod{8}$ vai arī $n \equiv \pm 3 \pmod{8}$.

Ievērosim, ka $(\pm 1)^2 \equiv 1 \pmod{8}$ un $(\pm 3)^2 \equiv 9 \equiv 1 \pmod{8}$.
Tātad $n^2 \equiv 1 \pmod{8}$ un $n^{n-1} - 1 \equiv (n^2)^k - 1 \equiv 1^k - 1 \equiv 0 \pmod{8}$.

Taču tas nozīmē, ka skaitlis $n^{n-1} - 1$ un arī reizinājums $n\,(n^{n-1} - 1)$ dalās ar 8.

Esam pierādījuši, ka nepāra skaitļiem n skaitlis $n^n - n = n\,(n^{n-1} - 1)$ dalās gan ar 3, gan ar 8, tātad doto skaitļu lielākais kopīgais dalītājs ir 24.

2. pielikums. Papildu uzdevumi par atrisinājuma neeksistenci

1. Vai var atrast tādus veselus skaitļus a un b, ka $ab(a+43b)$=434343?

   Atrisinājums. Ja a vai b ir pāra skaitlis, tad vienādojuma kreisās puses izteiksmes vērtība ir pāra skaitlis, kas nevar būs vienāda ar nepāra skaitli 434343. Ja a un b abi ir nepāra skaitļi, tad $a+43b$ ir pāra skaitlis (kā divu nepāra skaitļu summa) un vienādojuma kreisās puses izteiksmes vērtība ir pāra skaitlis, kas nevar būs vienāda ar nepāra skaitli 434343.
   Tātad nevar atrast tādus veselus skaitļus a un b, lai dotā vienādība būtu patiesa.

2. Vai var atrast tādus veselus skaitļus x, y un z, ka $x^3-2016xyz=10$?

   Atrisinājums. Apskatām dotā vienādojuma kreisās puses izteiksmi pēc moduļa 4.

$x \pmod 4$	$x^3-2016xyz \pmod 4$
0	$0^3-0\equiv 0 \pmod 4$
1	$1^3-0\equiv 1 \pmod 4$
2	$2^3-0\equiv 0 \pmod 4$
3	$3^3-0\equiv 3 \pmod 4$

   Esam ieguvuši, ka $x^3-2016xyz$ pēc moduļa 4 var pieņemt vērtības 0; 1 vai 3, bet $10\equiv 2 \pmod 4$. Tātad dotajam vienādojumam nav atrisinājuma veselos skaitļos.

3. Vai var atrast tādus veselus skaitļus x, y un z, ka $x^3-2016xyz=120$?

   1. atrisinājums. Gan 2016, gan 120 dalās ar 3, tātad arī x^3 jādalās ar 3. Tas nozīmē, ka arī x jādalās ar 3, bet tad x^3 noteikti dalās ar 9. Tas nozīmē, ka vienādojuma kreisā puse dalās ar 9, jo arī 2016 dalās ar 9, bet vienādojuma labā puse ar 9 nedalās. Tātad šādus skaitļus atrast nav iespējams.

   2. atrisinājums. Apskatām dotā vienādojuma kreisās puses izteiksmi pēc moduļa 9.

$x \pmod 9$	$x^3-2016xyz \pmod 9$
0	$0^3-0\equiv 0 \pmod 9$
$\pm\mathbf{1}$	$(\pm 1)^3-0\equiv \pm 1 \pmod 9$
$\pm\mathbf{2}$	$(\pm 2)^3-0\equiv \mp 1 \pmod 9$
$\pm\mathbf{3}$	$(\pm 3)^3-0\equiv 0 \pmod 9$
$\pm\mathbf{4}$	$(\pm 4)^3-0\equiv \pm 1 \pmod 9$

   Esam ieguvuši, ka $x^3-2016xyz$ pēc moduļa 9 var pieņemt vērtības 0; 1 vai -1, bet $120\equiv 3 \pmod 9$. Tātad dotajam vienādojumam nav atrisinājuma veselos skaitļos.

4. Vai var atrast tādus naturālus skaitļus x, y un z, ka $x^2 + y^2 + z^2 = \underbrace{1111 \ldots 1}_{2016}$?

Atrisinājums. Apskatām doto vienādojumu pēc moduļa 8. Veselu skaitļu kvadrāti, dalot ar 8, var dot tikai atlikumus 0, 1 vai 4.

$a \pmod 8$	0	1	2	3	4	5	6	7
$a^2 \pmod 8$	0	1	4	1	0	1	4	1

Tā kā vienādojuma labajā pusē ir nepāra skaitlis, tad vai nu vienam, vai trim no kreisās puses saskaitāmajiem jādod nepāra atlikums. Līdz ar to iespējami šādi gadījumi:

- $0 + 0 + 1 \equiv 1 \pmod 8$;
- $4 + 4 + 1 \equiv 1 \pmod 8$;
- $0 + 4 + 1 \equiv 5 \pmod 8$;
- $1 + 1 + 1 \equiv 3 \pmod 8$.

Tā kā $\underbrace{1111 \ldots 1}_{2016} \equiv \underbrace{1111 \ldots 1}_{2013}000 + 111 \equiv 0 + 7 \equiv 7 \pmod 8$, tad nevar atrast tādus naturālus skaitļus x, y un z, lai dotā vienādība būtu patiesa.

5. Pierādīt, ka vienādojumam $10^x + 12^y = 34^z$ nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

Atrisinājums. Apskatīsim doto vienādojumu pēc moduļa 11. Tā kā $10 \equiv -1 \pmod{11}$, $12 \equiv 1 \pmod{11}$ un $34 \equiv 1 \pmod{11}$, tad iegūstam $(-1)^x + 1^y \equiv 1^z \pmod{11}$. Šī kongruence nav patiesa, jo kreisās puses izteiksmes vērtība ir 0 vai 2, bet labās puses izteiksmes vērtība ir 1. Tātad dotajam vienādojumam nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

3. pielikums. Papildu uzdevumi par vienādojumiem veselos skaitļos

1. Atrast visus naturālu skaitļu pārus $(m; n)$, kuriem ir spēkā vienādība $m^5 + 5n^4 = 81m$.

Atrisinājums. Pārveidojam doto vienādību:

$$5n^4 = 81m - m^5;$$
$$5n^4 = m(9 + m^2)(3 + m)(3 - m).$$

Tā kā m un n ir naturāli skaitļi un iegūtās vienādības kreisās puses izteiksme ir pozitīva, tad $m = 1$ vai $m = 2$. Apskatām abus gadījumus:

- ja $m = 1$, tad $5n^4 = 1 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 2$ jeb $n^4 = 16$, no kā iegūstam, ka $n = 2$ (vērtība $n = -2$ neder, jo nav naturāls skaitlis);
- ja $m = 2$, tad $5n^4 = 2 \cdot 13 \cdot 5 \cdot 1$ jeb $n^4 = 26$, no kā iegūstam, ka naturālu atrisinājumu nav.

Līdz ar to esam ieguvuši, ka vienīgais derīgais skaitļu pāris ir (1; 2).

2. Atrast visus pirmskaitļu pārus $(m; n)$, kuriem $20m + 18n = 2018$.

Atrisinājums. Dalām abas dotā vienādojuma puses ar 2 un pārveidojam iegūto vienādojumu:

$$10m + 9n = 1009;$$
$$1000 - 10m = 9n - 9;$$
$$10(100 - m) = 9(n - 1).$$

Ievērojam, ka iegūtās vienādības labās puses izteiksme ir pozitīva, tātad arī $(100 - m)$ jābūt pozitīvam. Tā kā 10 un 9 ir savstarpēji pirmskaitļi, tad $(100 - m)$ ir jādalās ar 9. Iespējamās m vērtības varētu būt 1, 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82 un 91, no kurām derīgas ir tikai vērtības 19, 37 un 73, jo tie ir pirmskaitļi. Atrodam atbilstošās n vērtības:

- ja $m = 19$, tad $10 \cdot 81 = 9(n - 1)$ jeb $n = 91$ (neder, jo nav pirmskaitlis);
- ja $m = 37$, tad $10 \cdot 63 = 9(n - 1)$ jeb $n = 71$ (pirmskaitlis);
- ja $m = 73$, tad $10 \cdot 27 = 9(n - 1)$ jeb $n = 31$ (pirmskaitlis).

Tātad dotajam vienādojumam ir divi atrisinājumi: $m = 37, n = 71$ un $m = 73, n = 31$.

Piezīme. Uzdevumu var risināt ar pilno pārlasi, apskatot visus pirmskaitļus m, kuriem $20m < 2018$ (tas ir, visus pirmskaitļus, kas ir mazāki nekā 100).

4. pielikums. Pirmā grupu/pāru darba uzdevuma atrisinājums

Atrisināt vienādojumu $2x^6 + y^7 = 11$ veselos skaitļos.
(Starptautisko komandu sacensību matemātikā "Baltic Way 2012" uzdevums.)

Atrisinājums. Pierādīsim, ka dotajam vienādojumam nav atrisinājuma veselos skaitļos.

Sestās pakāpes skaitļi pēc moduļa 43 ir kongruenti tikai ar 0, 1, 4, 11, 16, 21, 35 vai 41, bet septītās pakāpes skaitļi – ar 0, 1, 6, 7, 36, 37 vai 42.

Apskatām, kādas vērtības var pieņemt vienādojuma $2x^6 = 11 - y^7$ katras puses izteiksme:

$$2x^6 \pmod{43} \in \{0; 2; 8; 22; 27; 32; 39; 42\},$$
$$11 - y^7 \pmod{43} \in \{4; 5; 10; 11; 12; 17; 18\}.$$

Tā kā šīm kopām nav kopīgu elementu, tad nevar pastāvēt vienādība $2x^6 + y^7 = 11$. Tātad dotajam vienādojumam nav atrisinājuma veselos skaitļos.

a	$a^6 \pmod{43}$	$2a^6 \pmod{43}$	$a^7 \pmod{43}$	$11 - a^7 \pmod{43}$
0	0	0	0	11
1	1	2	1	10
2	21	42	42	12
3	41	39	37	17
4	11	22	1	10
5	16	32	37	17
6	1	2	6	5
7	1	2	7	4
8	16	32	42	12
9	4	8	36	18
10	35	27	6	5
11	4	8	1	10
12	21	42	37	17
13	16	32	36	18
14	21	42	36	18
15	11	22	36	18
16	35	27	1	10
17	35	27	36	18
18	41	39	7	4
19	11	22	37	17
20	4	8	37	17
21	41	39	1	10
22	41	39	42	12
23	4	8	6	5
24	11	22	6	5
25	41	39	36	18

a	$a^6 \pmod{43}$	$2a^6 \pmod{43}$	$a^7 \pmod{43}$	$11 - a^7 \pmod{43}$
26	35	27	7	4
27	35	27	42	12
28	11	22	7	4
29	21	42	7	4
30	16	32	7	4
31	21	42	6	5
32	4	8	42	12
33	35	27	37	17
34	4	8	7	4
35	16	32	1	10
36	1	2	36	18
37	1	2	37	17
38	16	32	6	5
39	11	22	42	12
40	41	39	6	5
41	21	42	1	10
42	1	2	42	12
43	0	0	0	11

5. pielikums. Otrā grupu/pāru darba uzdevuma atrisinājums

Atrast visas iespējamās naturālās x, y, z un t un vērtības tādas, ka $x \geq y \geq z$ un $t! = x! + 2y! + 3z!$.

Atrisinājums. Tā kā $t! = x! + 2y! + 3z!$ un $x \geq y \geq z > 0$, tad $t > x$ un

$$(x+1)! \leq t! \leq x! + 2x! + 3x! = 6x! \text{ jeb } (x+1) \cdot x! \leq 6x!.$$

Tātad $x + 1 \leq 6$ un $x \leq 5$.

Apskatīsim visas iespējamās x vērtības.

- Ja $x = 1$, tad $x = y = z = 1$, $t! = 6$ un $t = 3$. Tātad $(1; 1; 1; 3)$ ir dotā vienādojuma atrisinājums.
- Ja $x = 2$, tad $3! \leq t! \leq 6 \cdot 2! = 2 \cdot 3 \cdot 2! = 2 \cdot 3! < 4!$. Tātad $t = 3$ un iegūstam vienādojumu $6 = 2 + 2y! + 3z!$. Tā kā $2 + 2y! + 3z! \geq 7$, tad šajā gadījumā vienādojumam nav atrisinājuma.
- Ja $x = 3$, tad $4! \leq t! \leq 6 \cdot 3! < 5!$. Tātad $t = 4$ un iegūstam vienādojumu $24 = 6 + 2y! + 3z!$. Tā kā vienādojuma kreisā puse ir pāra skaitlis, tad arī labajai pusei jābūt pāra skaitlim. Labās puses saskaitāmie 6 un $2y!$ ir pāra skaitļi, tāpēc arī $3z!$ ir jābūt pāra skaitlim. Tātad $2 \leq z \leq 3$.
  - Ja $z = 2$, tad $2y! = 24 - 6 - 3 \cdot 2! = 18 - 6 = 12$, $y! = 6$ un $y = 3$, tātad $(3; 3; 2; 4)$ ir dotā vienādojuma atrisinājums.
  - Ja $z = 3$, tad $2y! = 24 - 6 - 3 \cdot 3! = 18 - 18 = 0$, šajā gadījumā y nav naturāls skaitlis un dotajam vienādojumam nav atrisinājuma.
- Ja $x = 4$, tad $5! \leq t! \leq 6 \cdot 4! < 6!$. Tātad $t = 5$ un iegūstam vienādojumu $120 = 24 + 2y! + 3z!$ jeb $96 = 2y! + 3z!$.
  - Ja $z = 4$, tad $2y! = 96 - 3 \cdot 4! = 96 - 72 = 24$, $y! = 12$ un y nav naturāls skaitlis.
  - Ja $z < 4$, tad $2y! + 3z! \leq 2 \cdot 4! + 3 \cdot 3! = 48 + 18 < 96$. Tātad šajā gadījumā dotajam vienādojumam nav atrisinājuma.
- Ja $x = 5$, tad $6! \leq t! \leq 6 \cdot 5! = 6!$. Tātad $t = 6$.
  - Ja $x = y = z = 5$, tad $5! + 2 \cdot 5! + 3 \cdot 5! = 6 \cdot 5! = 6!$ un $(5; 5; 5; 6)$ ir dotā vienādojuma atrisinājums.
  - Ja $z < 5$, tad $2y! > 6! - 5! - 3 \cdot 5! = 6 \cdot 5! - 4 \cdot 5! = 2 \cdot 5!$, $y! > 5!$ jeb $y > 5$, kas ir pretrunā ar to, ka $x \geq y$. Tātad šajā gadījumā dotajam vienādojumam nav atrisinājuma.

Esam ieguvuši, ka dotā vienādojuma atrisinājumi ir $(1; 1; 1; 3)$, $(3; 3; 2; 4)$ un $(5; 5; 5; 6)$.

6. pielikums. Izmantotā literatūra un citi avoti

1. Andžāns, A. *Algebra 10.–12. klasei:* profilkursam, II daļa. Rīga: Zvaigzne ABC, 1998.
2. Avotiņa, M., Zīlīte, A. *Tematiskie uzdevumi matemātikas olimpiādēs*. Rīga: Latvijas Universitāte, 2019.
3. *Professor Layton and the Diabolical Box Walkthrough.* Pieejams: http://professorlayton2walkthrough.blogspot.com/2008/11/puzzle142.html

Noderīgi papildu materiāli skaitļu teorijas elementu plašākai apguvei

Andžāns, A., Kanders, U. *Matemātiskās indukcijas metode.* Rīga: Latvija Universitāte.
Pieejams: http://www.lanet.lv/info/matind/index.html#s

Andžāns, A., Zariņš, P. *Matemātiskās indukcijas metode un varbūtību teorijas elementi.* Rīga: Zvaigzne, 1983.

Balakrishnan, V. K. *Introductory Discrete Mathematics.* New York: Dover Publications, INC, 1996.

Bērziņa, A., Bērziņš, A. *Diferencēti uzdevumi skaitļu teorijā.* Rīga: Mācību apgāds, 1996.
Pieejams: https://www.nms.lu.lv/fileadmin/user_upload/lu_portal/projekti/nms.lu.lv/Gramatas/Tematiskie/DiferencetiUzdSkT_1996.pdf

Bērziņš, A. *Praktikums elementārajā skaitļu teorijā*. Rīga: Latvijas Universitāte, 1994.

Deksnis, G. *Diskrētā matemātika*. Rīga: Drukātava, 2009.

LeVeque, W. L. *Fundamentals of Number Theory*. New York: Dover Publications, INC, 1996.

Volodko, I. *Diskrētā matemātika uzdevumos un piemēros*. Rīga: RTU, 2004.

DOMAT.
DARĪT.
ZINĀT.

Valsts izglītības satura centra īstenotā projekta "Kompetenču pieeja mācību saturā" mērķis ir izstrādāt, aprobēt un pēctecīgi ieviest Latvijā tādu vispārējās izglītības saturu un pieeju mācīšanai, lai skolēni gūtu dzīvei 21. gadsimtā nepieciešamās zināšanas, prasmes un attieksmes.

Projekts Nr. 8.3.1.1/16/I/002 Kompetenču pieeja mācību saturā

Valsts izglītības satura centrs

NACIONĀLAIS ATTĪSTĪBAS PLĀNS 2020

EIROPAS SAVIENĪBA
Eiropas Sociālais fonds

IEGULDĪJUMS TAVĀ NĀKOTNĒ