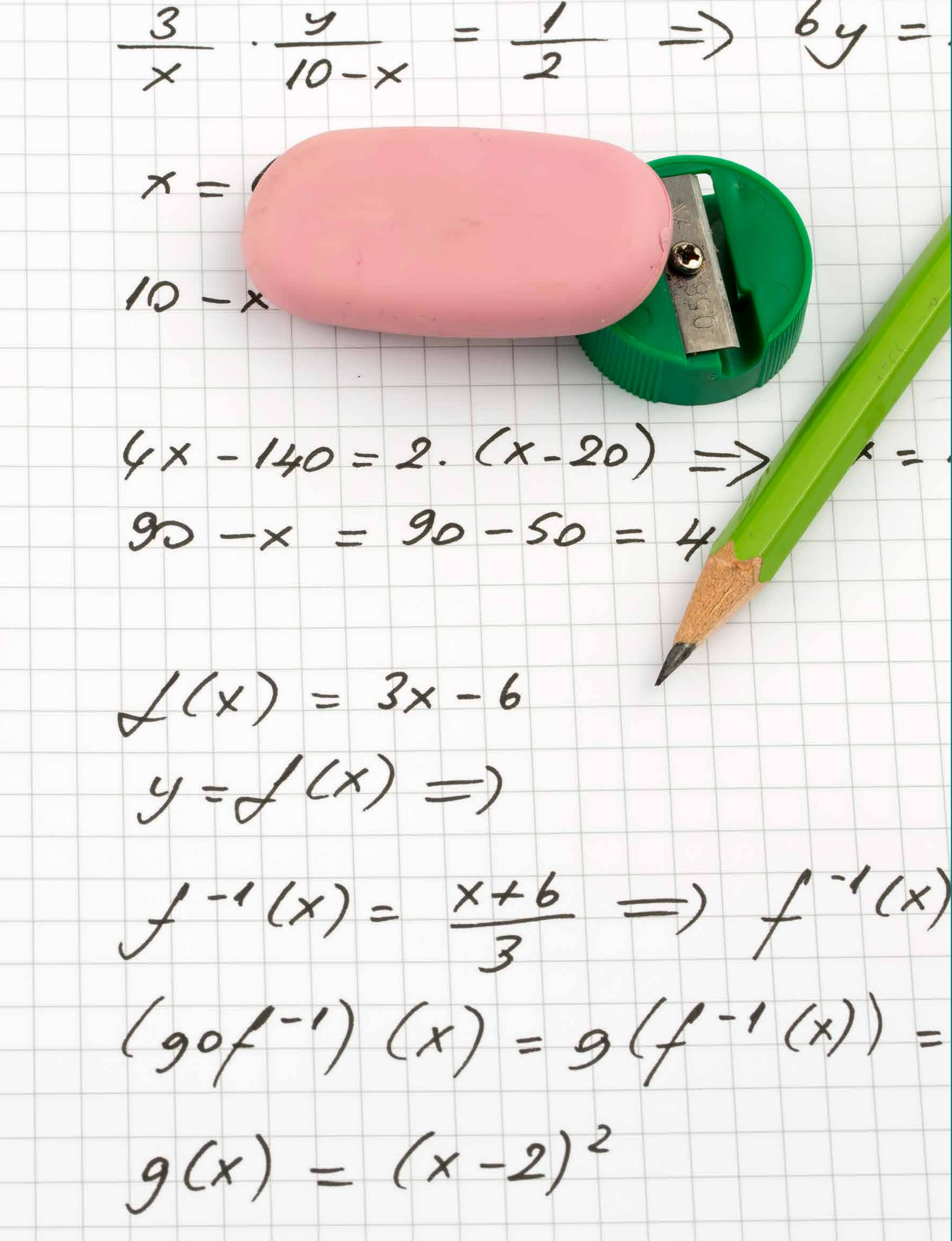


Matemātika vidusskolai

Integrētā kursa programmas paraugs vispārējai vidējai izglītībai Matemātikas optimālā un augstākā līmeņa satura integrēta apguve

Valsts izglītības satura centrs | ESF projekts Nr. 8.3.1.1/16/I/002
Kompetenču pieeja mācību saturā

Matemātika vidusskolai

Integrētā kursa programmas paraugs vispārējai vidējai izglītībai Matemātikas optimālā un augstākā līmeņa satura integrēta apguve

Programmas paraugs ir izstrādāts Eiropas Sociālā fonda projektā “Kompetenču pieeja mācību saturā” (turpmāk – Projekts).

Mācību satura izstrādi pirmsskolas, pamatizglītības un vispārējās vidējās izglītības pakāpē Projektā vadīja **Dace Namsone** un **Zane Oliņa**.

Programmas parauga izstrādi un sagatavošanu publicēšanai Projektā vadīja **Jānis Vilciņš**.

Programmas paraugu izstrādāja **Aivars Ančupāns**, **Maija Balode** un **Maruta Avotiņa**.

Programmas paraugu izvērtēja ārējie eksperti: mācību satura recenzente **Baiba Āboltiņa** un zinātniskā recenzente **Dace Kūma**.

ISBN **978-9934-24-100-0**

Saturs

Ievads

Kursa programmas struktūra

Matemātikas vidusskolas integrētā kursa programmas (turpmāk – programma) paraugs ir veidots, lai palīdzētu skolotājiem īstenot Ministru kabineta 2019. gada 3. septembra noteikumos Nr. 416 "Noteikumi par valsts vispārējās vidējās izglītības standartu un vispārējās vidējās izglītības programmu paraugiem" (turpmāk – standarts) noteiktos plānotos skolēnam sasniedzamos rezultātus matemātikas mācību jomā optimālajā un augstākajā mācību satura apguves līmenī.

Programmā iekļauti:

- kursa mērķis un uzdevumi;
- mācību saturs;
- mācību sasniegumu vērtēšanas formas un metodiskie paņēmieni;
- ieteikumi mācību darba organizācijai;
- mācību satura apguves norise.

Mācību satura apguves norisē parādīts, kā pakāpeniski tiek sasniegtas standarta prasības zināšanu apguvē, izpratnes veidošanā, kā arī prasmju un vērtībās balstītu ieradumu attīstīšanā. Ieteicamā mācību satura apguves norise veidota ar detalizētiem tematiem. Tematu secība plānota no skatpunkta, kā skolēnam pakāpeniski un pēctecīgi veidojas izpratne par būtiskākajiem jēdzieniem, darbībām, paņēmieniem u. tml. Iespēju robežās plānota konkrētā tematā apgūto zināšanu lietošana turpmākajos tematos. Katrā tematā ir norādīti plānotie skolēnam sasniedzamie rezultāti, to skaitā ziņas (apraksta nozīmīgākās temata apguves rezultātā iegūtās zināšanas un izpratni par mācību jomas lielajām idejām), prasmes, vērtībās balstīti ieradumi un kompleksi sasniedzamie rezultāti (raksturo skolēna spēju koordinēti lietot zināšanas, prasmes un ieradumus jaunās vai kompleksās situācijās). Tematu apguves norise satur būtiskas un nepieciešamas skolēna darbības, nozīmīgu skaitu uzdevumu, bet tā neapraksta visas iespējamās darbības un uzdevumus.

Programma veidota, paredzot, ka kursa apguvei vidējās izglītības pakāpē tiks atvēlētas 700 mācību stundas. Skolai ir iespējams mainīt (palielināt vai samazināt) mācību stundu skaitu kursā, taču to nesamazinot vairāk par 15 %.

Programmas paraugam ir ieteikuma raksturs. Skolotāji var izmantot šo programmu vai arī pēc šī parauga izstrādāt savu programmu.

Mācību satura un pieejas akcenti

Matemātikas mācību jomas apguvē svarīgi ņemt vērā noteiktus mācību satura un pieejas akcentus.

- Izpratne par matemātikas simboliem, jēdzieniem, darbībām un pārveidojumiem, tai raksturīgiem paņēmieniem un nozīmīgām idejām ir būtisks mācīšanās rezultāts. Skolēns demonstrē izpratni, ja spēj skaidrot veiktās darbības, algoritmus vai lieto zināšanas jaunā situācijā. Formālās definīcijas reproducēšana ne vienmēr liecina, ka ir izpratne; svarīgi, ka teorētisko skaidrojumu skolēns spēj ilustrēt ar konkrētiem piemēriem, raksturo konkrētā satura elementa saistību ar citiem satura jautājumiem, lietojumu, tā ierobežojumus u. tml.
- Raitums un elastība specifiski matemātisko prasmju un algoritmu izpildē, kas nozīmē arī to, ka skolēns matemātisko tehniku saista ar noteiktiem paņēmieniem/stratēģijām un konkrētā situācijā apzināti izvēlas piemērotāko no tiem.
- Spēja risināt kompleksus uzdevumus ir mācīšanās rezultāts. Kompleksums vairumā gadījumu nenozīmē arvien sarežģītāku matemātisko kontekstu, bet gan nepieciešamību tā atrisināšanai saistīt vairākas prasmes, pamatoti izvēlēties piemērotu paņēmienu, izmantot modelēšanu, lietot zināšanas jaunās situācijās, saistīt vismaz divu matemātikas apakšnozaru saturu.
- Digitālo rīku efektīva izmantošana. Ir vairāki matemātikas satura jautājumi, kuru efektīvākai vai dziļākai apguvei ir nozīmīga digitālo rīku izmantošana. Piemēram, trigonometrisko funkciju īpašību pētīšana un formulēšana, liela apjoma datu apstrāde un attēlošana, vidējo lielumu un izkliedes mēru aprēķināšana.

Mērķi un uzdevumi

Kursā skolēni apgūs matemātikas mācību jomas sasniedzamos rezultātus optimālajā un augstākajā apguves līmenī. Matemātikas mācību jomas apguves mērķis: skolēns izprot matemātiku kā zināšanu un prasmju sistēmisku kopumu, kas ļauj kvantitatīvi aprakstīt un izzināt apkārtējo pasauli, lieto apgūtos algoritmus, matemātisko modelēšanu un citus matemātikai raksturīgus paņēmienus dažādos kontekstos, spriež induktīvi un deduktīvi, izmanto tehnoloģiju priekšrocības, veidojot risinājumus un skaidrojot savu darbību un rezultātu, raksturo savai izaugsmei un turpmākajai darbībai nozīmīgo iegūtajā matemātiskās darbības pieredzē.

Matemātikas vidusskolas integrētā kursa mērķis un uzdevumi ir dot iespēju skolēnam:

- apgūt, definēt, skaidrot un raksturot algebras, matemātiskās analīzes, planimetrijas, analītiskās ģeometrijas, stereometrijas, trigonometrijas, varbūtību teorijas un statistikas matemātiskos modeļus un lietot tos dažādos kontekstos;
- iegūt daudzveidīgu deduktīvas un induktīvas spriešanas, pierādīšanas, matemātiskās modelēšanas un citu matemātikai raksturīgu paņēmienu pieredzi, konstruējot jaunas zināšanas un risinot kompleksas problēmas;
- pilnveidot un lietot matemātikas simbolisko valodu, lai korekti attēlotu risinājumu, raksturotu savu darbību, skaidrotu būtiskākos saturā iekļautos matemātikas jēdzienus un idejas u. tml.;
- lietot prasmes darbā ar informāciju, veidojot apgūto zināšanu pārnesumu praktiskos, citu jomu kontekstos.

Mācību saturs

Vidējās izglītības pakāpē mācību saturs ir izstrādāts, fokusējoties uz skolēnam būtiskāko, lai veidotos lietpratība (kompetence) kā komplekss skolēna mācīšanās rezultāts ilgākā periodā. Mācību saturs ir organizēts saskaņā ar mācību satura būtiskākajiem pamatjēdzieniem jeb lielajām idejām, kas skolēnam jāapgūst, lai veidotos vienota izpratne par apkārtējo pasauli un sevi tajā. Lielās idejas veido obligātā mācību satura strukturālo ietvaru. Tām atbilstoši aprakstītas prasības mācību satura apguvei jeb plānotie skolēnam sasniedzamie rezultāti, pabeidzot noteiktu izglītības pakāpi.

Matemātikas mācību jomā ir lielās idejas, par kurām skolēns veido izpratni arī vidusskolas integrētajā kursā.

- Matemātikas valodu izmanto saziņai un zinātniskai jēdzienu, ideju, problēmu risinājumu aprakstīšanai (M.Li.1).
- Risināt problēmu matemātikai raksturīgi nozīmē saskatīt struktūras, sistēmas, sakarības, veidot vispārinājumus un tos pierādīt (M.Li.2).
- Skaitļus izmanto konkrētu, arī praktisku uzdevumu atrisināšanai. Katrai darbībai ar skaitļiem ir noteikta jēga, un to izpildei ir noteikti likumi/algoritmi (M.Li.3).
- Sakarības starp lielumiem apraksta algebriskie modeļi un funkcijas. Izmantojot šos modeļus problēmu risināšanai, tos pārveido, nodrošinot ekvivalenci (M.Li.4).
- Datus par objektiem, situācijām, notikumiem, procesiem var matemātiski apstrādāt, analizēt, lai pieņemtu pamatotus lēmumus. (M.Li.5)
- Figūru īpašību, novietojuma, to raksturojošo lielumu izpēte ļauj risināt konkrētas, arī praktiskas, problēmas, formulēt vispārīgus secinājumus par objektiem, telpu, formu (M.Li.6).

Visu matemātikas mācību jomas lielo ideju formulējumos ir vienojošs aspekts – matemātikas lietojums, kas ietver arī problēmu risināšanu. Pirmās divas idejas raksturo matemātiku kā specifisku izziņas darbības veidu/pieredzi, bet pārējās četras idejas raksturo būtiskākos matemātiskos kontekstus – skaitļi un darbības ar tiem, funkcijas un algebriski modeļi, dati un varbūtība, figūras un telpa.

Pirmā lielā ideja (par valodu) apvieno plānotos skolēnam sasniedzamos rezultātus, kuru apguve skolēnam ļauj lasīt un veidot matemātisku tekstu, mērķtiecīgi pāriet no viena matemātikai raksturīga informācijas attēlošanas veida uz citu.

Otrā lielā ideja (par domāšanu) apvieno sasniedzamos rezultātus, kuri raksturo: 1) skolēna attieksmi pret matemātikai raksturīgu izziņas procesu (es varu izdomāt, spriest/risināt var dažādi, jaunās zināšanas ir saistītas ar jau zināmo, vispārīgi apgalvojumi ir jāpamato u. tml.); 2) daudzveidīgu spriedumu veidošanas, apgalvojumu patiesuma pierādīšanas un problēmrisināšanas pieredzi; 3) matemātisko modelēšanu un citu problēmrisināšanas stratēģiju apguvi apzinātā līmenī.

Pārējās četras lielās idejas (3.–6.) apvieno plānotos skolēnam sasniedzamos rezultātus, kas raksturo izpratni un prasmes darbā ar skaitļiem, funkcijām un algebriskiem modeļiem, datiem un figūrām. Izpratnes dimensiju plānoto skolēnam sasniedzamo rezultātu formulējumos raksturo darbības ar vārdiem "skaidro", "izvēloties sev piemērotāko paņēmienu" u. tml. Plānoto skolēnam sasniedzamo rezultātu formulējumi tipiski satur izteikumus "reālos (praktiskos), citu mācību jomu kontekstos" vai "pazīstamās un jaunās situācijās", kas raksturo spēju veidot pārnesumu – lietot iegūtās zināšanas autentiskos kontekstos.

Standartā plānotie skolēnam sasniedzamie rezultāti mācību jomā un no tiem atvasinātie sasniedzamie rezultāti programmā ir kompleksi – galarezultāts veidojas darbībā, kura ietver gan vienas vai vairāku mācību jomu zināšanas, izpratni un prasmes, gan caurviju prasmes, gan vērtībās balstītus ieradumus. Katra mācību priekšmeta skolotāja viens no uzdevumiem ir visu to attīstīt.

Kursā plānotie skolēnam sasniedzamie rezultāti optimālajā un augstākajā mācību satura apguves līmenī saskaņā ar vispārējās vidējās izglītības standartu (sk. Ministru kabineta 2019. gada 3. septembra noteikumu Nr. 416 9. pielikumu) iekļauti programmas 1. pielikumā.

Standartā plānotie skolēnam sasniedzamie rezultāti caurviju prasmēs vispārējās vidējās izglītības pakāpes noslēgumā iekļauti programmas 2. pielikumā.

Skolēnam attīstāmie ieradumi matemātikas mācību jomā ir 3. pielikumā. Katra temata ietvaru parāda temata ietvara struktūras paraugs. Programmā lietoto kodu skaidrojums pievienots 5. pielikumā.

Mācību sasniegumu vērtēšanas formas un metodiskie paņēmieni

Vērtēšanas pieeja un pamatprincipi

Viens no svarīgākajiem priekšnoteikumiem, īstenojot mūsdienīgu izglītību, kuras rezultāts ir patiesa izpratne, spēja izmantot skolā apgūto neierastās situācijās un lietpratība, ir esošās vērtēšanas prakses pārvērtēšana, atbilstoši saskaņojot vērtēšanas mērķi, formu un saturu.

Vērtēšanas uzsvars mainās no skolēna mācību sasniegumu novērtēšanas uz vērtēšanu, lai uzlabotu mācīšanos. Vērtēšana, lai uzlabotu mācīšanos, ir efektīvas atgriezeniskās saites sniegšana skolēnam, dodot viņam iespēju un laiku uzlabot savu sniegumu atbilstoši plānotajiem skolēnam sasniedzamajiem rezultātiem un vērtēšanas kritērijiem.

Vērtēšana primāri ir neatņemama mācīšanās sastāvdaļa, kas gan skolotājam, gan skolēnam ļauj plānot uzlabojumus mācību procesā. Vērtēšana nav tikai vērtējuma izlikšana, piemēram, atzīmes veidā.

Vērtēšanas uzsvaru maiņa ir svarīga arī skolas līmenī. Kļūst nozīmīgi veidot sistēmas, kuras ļauj sekot līdzi katra skolēna izaugsmei un sniegt atbalstu tieši tajā laikā un vietā, kad un kur tas ir nepieciešams.

Vērtēšanai standartā ir noteikti pamatprincipi.

1. Sistēmiskuma princips – mācību snieguma vērtēšanas pamatā ir sistēma, kuru raksturo regulāru un pamatotu, noteiktā secībā veidotu darbību kopums.
2. Atklātības un skaidrības princips – pirms mācību snieguma demonstrēšanas skolēnam ir zināmi un saprotami plānotie sasniedzamie rezultāti un viņa mācību snieguma vērtēšanas kritēriji.
3. Metodiskās daudzveidības princips – mācību snieguma vērtēšanai izmanto dažādus vērtēšanas metodiskos paņēmienus.
4. Iekļaujošais princips – mācību snieguma vērtēšana tiek pielāgota ikviena skolēna dažādajām mācīšanās vajadzībām, piemēram, laika dalījums un ilgums, vide, skolēna snieguma demonstrēšanas veids, piekļuve vērtēšanas darbam.
5. Izaugsmes princips – mācību snieguma vērtēšanā, īpaši mācīšanās posma noslēgumā, tiek ņemta vērā skolēna individuālā mācību snieguma attīstības dinamika.

Vērtēšanas norises laiku mācību procesā un biežumu, saturu, uzdevuma veidu, vērtēšanas formu un metodiskos paņēmienus, vērtēšanas kritērijus, vērtējuma izteikšanas veidu un dokumentēšanu izvēlas atbilstoši vienam no trim vērtēšanas mērķiem – diagnosticējošā, formatīvā vai summatīvā vērtēšana. Informācija par tiem ir apkopota tabulā.

Vērtēšanas veidi / Vērtē-šanas aspekti	Diagnosticējošā vērtēšana	Formatīvā vērtēšana	Summatīvā vērtēšana
Vērtēšanas mērķi	Noteikt skolēna apgūtās zināšanas, izpratni, prasmes, vērtībās balstītus ieradumus un kompleksus sasniedzamos rezultātus (turpmāk – plānotos skolēnam sasniedzamos rezultātus) mācību procesa plānošanai un pilnveidei, piemēram, turpmāko plānoto skolēnam sasniedzamo rezultātu precizēšanai, mācību uzdevumu izvēlei.	Noteikt skolēna apgūtos sasniedzamos rezultātus atgriezeniskās saites sniegšanai skolēnam un skolotājam, lai uzlabotu skolēna sniegumu un plānotu turpmāko mācību procesu. Veicināt skolēna mācību motivāciju attīstīt pašvadītas mācīšanās prasmes, iesaistot viņu vērtēšanas procesā.	Noteikt skolēna apgūtos sasniedzamos rezultātus mācību rezultāta novērtēšanai un dokumentēšanai. Summatīvās vērtēšanas rezultātus var izmantot arī, piemēram, lai uzlabotu skolēna sniegumu, izvērtētu mācību procesā izmantotās metodes, pieņemtu lēmumus par turpmāko darbu.
Norises laiks mācību procesā un biežums	Ieteicams veikt temata, mācību kursa vai mācību gada sākumā.	Veic mācību procesa laikā. Skolotājs to organizē pēc nepieciešamības.	Veic mācīšanās posma (piemēram, temata, vairāku tematu vai temata loģiskās daļas, mācību gada, izglītības posma vai pakāpes) noslēgumā.
Vērtēšanas saturs	Saturu veido iepriekšējā mācīšanās posmā plānotie skolēnam sasniedzamie rezultāti, kuri nepieciešami turpmākā mācību satura apguvē.	Saturu veido plānotie skolēnam sasniedzamie rezultāti mācīšanās posma laikā.	Saturu veido plānotie skolēnam sasniedzamie rezultāti mācīšanās posma noslēgumā.
Vērtēšanas uzdevumu veidi	Uzdevuma veidu skolotājs izvēlas atbilstoši plānotajam skolēnam sasniedzamajam rezultātam. Tas var būt, piemēram, atbilžu izvēles uzdevums, īso atbilžu uzdevums, strukturēts uzdevums, esejas tipa uzdevums, uzdevums, kurā skolēns var demonstrēt savu sniegumu darbībā vai izstrādājot produktu.		
Vērtēšanas formas un meto-diskie paņēmieni	Mutiski, rakstiski, praktiski vai kombinēti. Novērošana, saruna, aptauja, uzdevumu risināšana, darbs ar tekstu, projekts, diskusija u. tml.		
Vērtēšanas kritēriji, to izveide	Kritēriji nepieciešami vērtēšanas objektivitātes nodrošināšanai. Kritērijus izstrādā skolotājs atbilstoši plānotajam skolēnam sasniedzamajam rezultātam, vērtēšanas formai un metodiskajam paņēmienam. Kritēriju izstrādē un vērtēšanā var iesaistīt skolēnus, lai pilnveidotu skolēna pašvadītas mācīšanās prasmes.		
Vērtējuma izteikšanas veids un dokumentēšana	Vērtējumu izsaka, dokumentē un komunicē atbilstoši mērķauditorijai (piemēram, skolēns, kolēģis, atbalsta personāls, skolas vadība, vecāks), lai mērķtiecīgi atbalstītu skolēna mācīšanos un sekotu līdzi skolēna sniegumam ilgtermiņā. Vērtējumu var izteikt apguves līmeņos, procentos, punktos, ieskaitīts/neieskaitīts u. tml.		Vērtējumu vidējās izglītības pakāpē izsaka 10 ballu skalā katrā mācību priekšmeta kursā atbilstoši plānotajiem skolēnam sasniedzamajiem rezultātiem.

Vērtēšanas saturs, kritēriji, formas un metodiskie paņēmieni

Integrētā kursa tematu ietvaros paredzēti četru veidu plānotie skolēnam sasniedzamie rezultāti: ziņas, prasmes, vērtībās balstīti ieradumi, komplekss sasniedzamais rezultāts. Plānojot vērtēšanu, skolotājam svarīgi izvēlēties plānotajam skolēnam sasniedzamajam rezultātam atbilstošus kritērijus, metodiskos paņēmienus un uzdevumu vērtēšanas veidu.

Ziņu apguve parāda skolēna zināšanas un izpratni. Tā attiecas uz standartā plānotajiem skolēnam sasniedzamajiem rezultātiem, kuri parasti sākas ar darbības vārdiem "apraksta", "skaidro", "pamato" u. c. Plānoto sasniedzamo rezultātu apguvi skolēns parāda, veicot uzdevumus, piedaloties sarunās u. tml.

Prasmju apguvi skolēns demonstrē darbībā (piemēram, modelē, attēlo, aprēķina).

Ieradumus, kas balstīti vērtībās, skolēns demonstrē darbībā; tos vērtē, novērojot skolēna darbību ilgākā laika posmā, īpaši situācijās, kuras ietver izvēles iespējas.

Kompleksu sasniedzamo rezultātu apguvi skolēns demonstrē darbībā. Kompleksa sasniedzamā rezultāta vērtēšanai izmanto dažādas formas – rakstveida, mutvārdu vai kombinēts pārbaudes darbs, individuāls vai grupas projekts u. c.

Zināšanu, izpratnes, atsevišķu prasmju un kompleksa sasniedzamā rezultāta novērtēšanai var izmantot gan punktu vērtēšanas shēmas, gan snieguma līmeņa aprakstu.

Kursa apguves prasības

Programmā piedāvāts piemērs Matemātikas integrētā kursa beigšanas prasībām, kurā ir norādīti uzdevumi ar attiecīgo īpatsvaru kursa vērtējumā. Norādītais īpatsvars ir saistīts ar sasniedzamo rezultātu nozīmīgumu un mācību laiku, kas ir paredzēts to apguvei.

1. Skolēns sekmīgi veic visus plānotos summatīvās vērtēšanas pārbaudes darbus par katrā tematā apgūto, kuros skolēnam ir iespēja demonstrēt savas zināšanas, izpratni, prasmes un sniegumu to kompleksā lietojumā.
2. Skolēns sekmīgi veic patstāvīgo izpētes darbu "Matemātiskā modelēšana" (uzdevuma formulējumu skolēnam sk. 4. pielikumā).

Prasības skolēnam kursa apguvei	Īpatsvars kursa vērtējumā (%)
Summatīvie vērtēšanas darbi katrā tematā	90
Patstāvīgs izpētes darbs "Matemātiskā modelēšana"	10

Ieteikumi mācību darba organizācijai

Satura starpdisciplinaritāte

Ievērojot skolēnu izvēlētos padziļinātos kursus, ieteikums mācību satura plānošanai izmantot starpdisciplināras saites, konsultēties un plānot darbu kopā ar kolēģi, kas māca citas mācību jomas padziļināto kursu. Starpdisciplināra satura piemēri uzskaitīti tabulā.

Integrētā kursa temats	Satura jautājums	Saistība ar citām mācību jomām
2. Vektori	Vektoriāli lielumi.	Vektoriāli lielumi fizikā.
	Darbības ar vektoriem.	Darbību ar vektoriem lietojums fizikā.
3. Koordinātu metode	Taisnes vienādojums.	Pārvietojuma trajektorijas vienādojums fizikā.
6. Funkcijas īpašības	Funkcijas analītiskā izteiksme/formula.	Sakarības starp lielumiem citu jomu (fizika, ekonomika u. c.) kontekstos.
8. Daļveida funkcija, funkcijas robeža	Daļveida funkcija.	Sakarības starp lielumiem matemātiskais modelis.
9. Statistika	Dati.	Dažādu jomu autentiski dati.
10. Eksponentfunkcija, vienādojumi un nevienādības	Eksponentfunkcijas lietojums reālu procesu aprakstīšanai.	Reāli procesi, sakarības starp lielumiem situācijās ar fizikas, ekonomikas, bioloģijas vai sociālo zinātņu kontekstu.
11. Inversā funkcija un logaritmiskā funkcija	Logaritmu, darbību ar logaritmiem lietojums.	Lielumu definīcijas, pieraksts vai formulas lielumu noteikšanai fizikā, astronomijā, ķīmijā, ģeogrāfijā, mūzikā, psiholoģijā.
	Sakarības attēlošana koordinātu sistēmā ar asīm x, $\lg y$.	Sakarības starp lielumiem situācijās ar fizikas, bioloģijas vai citu mācību jomu kontekstu, kuru attēlošanai, raksturošanai praksē lieto logaritmiskās asis.
12. Funkcijas atvasinājums, tā lietojums	Atvasinājuma fizikālā nozīme un tās lietojums.	Taisnvirziena kustības momentānais ātrums un paātrinājums, atdzišanas ātrums, mikroorganismu daudzuma izmaiņas ātrums u. tml.
13. Trigonometrija	Sinusa funkcija.	Fizikāli lielumi, piemēram, mehāniskās svārstības, skaņa, maiņstrāva u. tml.
	Ciklisku/periodisku procesu matemātiskā modelēšana.	Reāli dati, kas raksturo cikliskus, periodiskus procesus situācijās ar ģeogrāfijas, astronomijas, bioloģijas vai citu mācību jomu kontekstiem.
17. Integrālis, tā lietojums	Nenoteiktā un noteiktā integrāļa lietojums.	Taisnvirziena kustības ceļš un ātrums, mehāniskais darbs (integrālis no funkcijas, kas apraksta spēku, kas pielikts, lai pārvietotu ķermeni).
20. Varbūtību sadalījumi	Diskrēta gadījuma lieluma varbūtības sadalījums.	Reālu datu (raksturo sociālās zinātnes, ekonomiku, bioloģiju) relatīvā biežuma (skaitlisko vērtību summa ir 1) sadalījumi.
	Diskrēta gadījuma lieluma sagaidāmā vērtība un standartnovirze.	Pamatota ienākumu un risku prognozēšana situācijās ar ekonomikas kontekstu.

Stundu sadalījums/grafiks

Mācību satura apguve plānota, ievērojot, ka mācību stundu skaits nedēļā pa trim gadiem ir attiecīgi 6, 7 un 7 mācību stundas. Iespējami arī citi varianti, piemēram, 6, 6 un 8 mācību stundas.

Ievērojot tematā sasniedzamos rezultātus un patstāvīgajam izpētes darbam atvēlēto laiku, ieteicams šāds stundu skaita sadalījums pa tematiem. Piedāvātajam sadalījumam ir ieteikuma raksturs, skolotājs plāno stundu skaitu tematam, ievērojot savu pieredzi, skolēnu mācīšanās vajadzības.

1. gads (10. klase)								
Temats	1. Leņķa paplašinājums un trijstūra elementu aprēķināšana	2. Vektori	3. Koordinātu metode	4. Planimetrija	5. Kopas, matemātiskā indukcija, kombinatorika	6. Funkcijas īpašības	7. Algebriskās daļas, daļveida vienādojumi un nevienādības	8. Daļveida funkcija, funkcijas robeža
Stundu skaits	24–28	24–28	22–26	22–26	30–34	20–24	30–34	14–18
2. gads (11. klase)								
Temats	9. Statistika	10. Eksponentfunkcija, vienādojumi un nevienādības	11. Inversā funkcija un logaritmiskā funkcija	12. Funkcijas atvasinājums, tā lietojums	13. Trigonometrija	14. Paralelitāte un perpendikularitāte telpā	Skolēnu individuāls darbs, t. sk. patstāvīgā darba “Matemātiskā modelēšana” veikšanai	
Stundu skaits	32–36	32–36	30–34	50–54	38–42	24–28	20	
3. gads (12. klase)								
Temats	15. Varbūtību teorijas elementi	16. Polinomi	17. Integrālis, tā lietojums	18. Prizma un piramīda	19. Rotācijas ķermeņi, ģeometrisko ķermeņu kombinācijas	20. Varbūtību sadalījumi	21. Vienādojumi un nevienādības, to sistēmas	Skolēnu individuāls darbs, t. sk. patstāvīgā darba “Matemātiskā modelēšana” veikšanai
Stundu skaits	30–34	20–24	32–36	26–30	34–38	24–28	36–40	20

Matemātikas vidusskolas integrētajam kursam paredzētais stundu skaits nedēļā (vismaz 6) nosaka blokstundu izmantošanu un tam atbilstošu mācīšanās plānošanu, piemēram, vienu no stundām atvēlot konkrētas kompleksas problēmas risināšanai, bet otru – dažādo risinājumu un iespējamo paņēmienu apspriešanai, vai arī pirmo stundu no “stundu pāra” plānot jaunu zināšanu konstruēšanai jeb patstāvīgai teorētiskā materiāla izpētei, bet otru stundu – iegūtās informācijas izvērtēšanai, daudzveidīgai prasmju vingrināšanai un lietošanai.

Mācību satura apguves norise

Mācību satura apguves norise ietver katrā mācību gadā apgūstamos tematus un tematu ietvarus.

Katra temata ietvarā iekļauti:

1) temata apguves mērķis un apguvei paredzētais laiks;
2) tematā plānotie skolēnam sasniedzamie rezultāti;
3) tematā apgūstamie jēdzieni, simboli un pieņemtie apzīmējumi;
4) nepieciešamās skolēna darbības sasniedzamo rezultātu apguvei.

1. gads

1. Leņķa paplašinājums un trijstūra elementu aprēķināšana	**2. Vektori**	**3. Koordinātu metode**	**4. Planimetrija**	**5. Kopas, matemātiskā indukcija, kombinatorika**	**6. Funkcijas īpašības**	**7. Algebriskās daļas, daļveida vienādojumi un nevienādības**	**8. Daļveida funkcija, funkcijas robeža**

1. Leņķa paplašinājums un trijstūra elementu aprēķināšana

Ieteicamais laiks temata apguvei: 24–28 mācību stundas.

Temata apguves mērķis: sistematizēt zināšanas par pamatskolā apgūtajiem ģeometriskajiem pārveidojumiem un padziļināt izpratni par pagriezienu kā ģeometrisko pārveidojumu, skaidrot pagrieziena leņķi, noteikt sinusa un kosinusa vērtības jebkuram leņķim grādos un lietot iegūtās zināšanas, lai aprēķinātu trijstūra elementus matemātiskos un citu jomu kontekstos.

Sasniedzamie rezultāti

Ziņas	Prasmes
• Divi sakrītoši stari veido leņķi, kura lielums ir skaitlis nulle. Ja viens stars paliek nekustīgs, bet otrs tiek pagriezts vienā (lielums pozitīvs) vai otrā (lielums negatīvs) virzienā, veidojas pagrieziena leņķis. Kustīgais stars pēc pilna apgrieziena var turpināt rotācijas kustību, tāpēc pagrieziena leņķa lielums var būt jebkurš reāls skaitlis. (M.Li.1.; M.Li.2.) • Plaknes figūru ģeometriskos pārveidojumus var skaidrot un definēt kā funkcijas, kuru definīcijas kopa ir kāda plaknes punktu kopa. (M.Li.2.; M.Li.6.) • Pagrieziens par leņķi α ap punktu O ir ģeometrisks pārveidojums, kurā katrs plaknes punkts A attēlojas par tādu punktu A_1, ka $OA = OA_1$ un $\sphericalangle AOA_1 = \alpha$. Figūra pagriezienā ap dotu punktu par noteiktu leņķi attēlojas par tai vienādu figūru. (M.Li.6.) • Pagrieziena leņķi raksturo kustīgā stara OP punkts $P(x; y)$ uz vienības riņķa. Pagrieziena leņķa α sinuss ir punkta P ordināta y, bet kosinuss ir punkta P abscisa x, ko pieraksta $P(\cos\alpha; \sin\alpha)$. (M.Li.2.; M.Li.3.) • Katram pagrieziena leņķim var noteikt sinusa un kosinusa vērtību. (M.Li.3.) • Vienības riņķi var izmantot, lai noteiktu, aptuveni novērtētu vai salīdzinātu sinusa/kosinusa vērtības vai tām atbilstošos pagrieziena leņķus. (M.Li.2.; M.Li.3.) • Dažādiem pagrieziena leņķiem var būt vienādas sinusa/kosinusa vērtības. (M.Li.2.; M.Li.3.) • Sinusu teorēma un kosinusu teorēma apraksta sakarības starp trijstūra malu garumiem un leņķu lielumiem; kosinusu teorēma ir Pitagora teorēmas vispārinājums. (M.Li.2.; M.Li.6.) • Sakarības starp lielumiem trijstūrī izmanto mērniecībā, ģeodēzijā, navigācijā un citās jomās, piemēram, atrašanās vietas, attāluma vai azimuta noteikšanai. (M.Li.2.; M.Li.6.)	• Konstruē figūras attēlu pagriezienā par noteiktu leņķi ap dotu pagrieziena centru, nosaka pagrieziena leņķi pēc figūras un tās attēla savstarpējā novietojuma. • Raksturo pagrieziena leņķa novietojumu vienības riņķī un attēlo pagrieziena leņķi vienības riņķī, ievērojot nosacījumus, t. sk. tā sinusa (kosinusa) skaitlisko vērtību. • Nosaka jebkura pagrieziena leņķa sinusa un kosinusa precīzu vai aptuvenu vērtību, izmantojot definīcijas, attēlojumu vienības riņķī vai digitālos rīkus. • Lasa un pieraksta pēc dzirdētā, salīdzina un sakārto augošā/dilstošā secībā skaitļus, kas pierakstīti kā pagrieziena leņķa sinuss vai kosinuss. • Lieto sakarību $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ nezināmās sinusa vai kosinusa vērtības noteikšanai. • Lieto sakarības $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ un $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ plata leņķa sinusa/kosinusa vērtības noteikšanai, spriedumu formulēšanai. • Lieto trijstūra laukuma aprēķināšanas formulu $S = \frac{1}{2}\, a \cdot b \cdot \sin\gamma$, kur γ ir leņķis starp malām a un b. • Lieto sinusu teorēmu vai kosinusu teorēmu trijstūra elementu aprēķināšanai. • Nosaka leņķa precīzo vai aptuveno vērtību, ja zināma tā sinusa vai kosinusa vērtība, izvēloties sev vai situācijai piemērotu veidu – lietojot vienības riņķi, digitālos rīkus vai vērtību tabulas.

Komplekss sasniedzamais rezultāts	Ieradumi
• Skaidro un definē figūras pagriezienu plaknē kā funkciju, kuras definīcijas kopu veido plaknes punkti. (M.A.1.2.4.; M.A.6.1.2.) • Pēta, formulē pagrieziena īpašības un tās lieto, lai noteiktu sinusa/kosinusa vērtības vai leņķu vērtības, ja zināma sinusa/kosinusa vērtība; raksturo saistību starp pagriezienu un centrālo simetriju. (M.A.2.1.2.; M.A.6.1.2.) • Pierāda sakarības $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ un $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, sinusu teorēmu, kosinusu teorēmu. (M.O.2.3.1.; M.A.2.3.1.; M.A.6.1.1.) • Lieto sakarības starp trijstūra malām un leņķiem, lai noteiktu nezināmos lielumus un raksturotu sakarības starp lielumiem dažādos kontekstos (piemēram, navigācija, mērniecība); izmanto uzziņu avotus, lai iegūtu, precizētu trūkstošo informāciju. (M.O.6.1.1.; M.A.1.1.1.; M.A.2.1.1.)	• Jēdzienus, pieņemtos apzīmējumus un simbolus lasa un pieraksta precīzi, apzinoties, ka neprecizitātes var būt pamats aplamiem secinājumiem. • Noskaidro jauno/vispārināto jēdzienu saistību ar jau pazīstamiem ģeometrijas jēdzieniem, attīstot ieradumu iegūto informāciju saistīt ar jau zināmo, lai konstruētu jaunas zināšanas. • Ievērojot situāciju un mērķi, meklēto lielumu aprēķināšanai izvēlas lietot digitālos rīkus vai trigonometrisko vienības riņķi, attīstot ieradumu plānot un vadīt savu domāšanas procesu, meklēt dažādus risinājumus.

Jēdzieni: ģeometriskie pārveidojumi, punkta/figūras attēls, pārvietojums, pagrieziens, pagrieziena centrs, pagrieziena leņķis, vienības riņķis, pagrieziena leņķa sinuss, pagrieziena leņķa kosinuss, vidējais proporcionālais/vidējais ģeometriskais, sinusu teorēma, kosinusu teorēma, arksinuss, arkkosinuss.

Simboli un pieņemtie apzīmējumi: $\sin(\alpha + \beta)$; $\arcsin\alpha$; $\mathrm{arc}\cos\alpha$.

Temata apguves norise

Pagrieziena leņķis	Nosauc piemērus no dažādām dzīves jomām, kuros izmanto leņķus, kas pārsniedz $360°$. Skaidro pagrieziena leņķi, izmantojot vizuālus vai praktiskus modeļus, jēdzienus "kustīgais stars" un "nekustīgais stars". Pēta un raksturo sakarības starp pagrieziena leņķu skaitliskajām vērtībām.
	Piemērs. Dots, ka α ir šaurs pagrieziena leņķis. Attēlo zīmējumā pagrieziena leņķus α, $180° - \alpha$, $180° + \alpha$, $360° - \alpha$ un $360° + \alpha$, ja to nekustīgais stars sakrīt. Raksturo pamanītās sakarības.
Ģeometriskie pārveidojumi	Izsaka idejas, kas kopīgs aksiālajai simetrijai, centrālajai simetrijai un plaknes figūras pagriezienam, izmantojot pamatskolā apgūtās zināšanas. Iegūst informāciju par jēdzienu "ģeometriskie pārveidojumi". Veido ģeometriska pārveidojuma definīciju, salīdzina ar citu veidotajām definīcijām un uzziņu literatūrā doto. Skaidro ģeometriskos pārveidojumus kā funkcijas.
	Piemēri. 1. Nosauc piemērus, kas veido priekšstatu par simetriju pret taisni (aksiālo simetriju), simetriju pret punktu (centrālo simetriju) un plaknes figūras pagriezienu. 2. Taisnstūri $ABCD$ attēlo aksiālajā simetrijā pret taisni AB, centrālajā simetrijā pret punktu A, pagriezienā ap virsotni A par $+ 90°$. Izsaki idejas, kā varētu aprakstīt veiktos pārveidojumus, izmantojot jēdzienu "funkcija". Salīdzini formulētās idejas ar definīciju uzziņu literatūrā. 3. Apraksti kā pārveidojumu $f(x; y)$ katram plaknes punktam $(x; y)$ a) aksiālo simetriju pret abscisu asi, b) centrālo simetriju pret koordinātu sākumpunktu.
	Lasa pārvietojuma definīciju un secina, ka aksiālā simetrija un plaknes figūras pagrieziens ir pārvietojuma piemēri. Uzziņu literatūrā iegūst un apkopo informāciju par plaknes figūru pārvietojumu veidiem, pastāsta to citiem, ilustrējot ar paša veidotiem vai atlasītiem attēliem.
	Piemēri. 1. Izmanto uzziņu literatūru un paskaidro, vai plaknes orientāciju maina dažādmalu trijstūra ABC attēlojums a) centrālajā simetrijā, b) aksiālajā simetrijā. 2. Uzziņu literatūrā noskaidro visus iespējamos plaknes figūru pārvietojumu veidus.
Pagrieziens	Veido pagrieziena definīciju, izvērtē citu veidotās definīcijas. Ar pretpiemēru pamato to nepilnību vai neatbilstību. Iesaka uzlabojumus. Salīdzina ar definīciju uzziņu avotos. Konkrētos piemēros formulē pagrieziena īpašības. Salīdzina ar citu iegūtajiem rezultātiem un informāciju uzziņu avotos. Vingrinās konstruēt plaknes figūras attēlu, izmantojot pagriezienu ap doto punktu par noteiktu leņķi. Vingrinās noteikt pagrieziena leņķi, ievērojot doto informāciju par figūru un tās attēlu pagriezienā. Nosaka punktu attēlu koordinātas, ko iegūst pagriezienā par $\pm 90°$; $\pm 180°$ ap koordinātu sākumpunktu; formulē vispārinājumus.
	Piemēri. 1. Formulē īpašību, kas piemīt pagriezienam par leņķi $360° \cdot n$, kur n ir vesels skaitlis. 2. Uzzīmē kvadrātu $ABCD$ un tā attēlu pagriezienā par $+ 90°$ ap malas AB viduspunktu. 3. Nosaki A_1 un A_2 koordinātas, ja A_1 un A_2 ir punkta $A(3; 1)$ attēli pagriezienā attiecīgi par $+ 90°$ un $- 90°$ ap koordinātu sākumpunktu.

Temata apguves norise (turpinājums)

Pagrieziena leņķa attēlojums vienības riņķī	Lasa vienības riņķa aprakstu un vingrinās to lietot – attēlo pagrieziena leņķi, nosaka pagrieziena leņķa kvadrantu, nosaka/uzraksta vairākus leņķus, ja dots atbilstošais kustīgais stars, nosaka dotam kustīgajam staram atbilstošu negatīvu pagrieziena leņķi, nosaka pagrieziena leņķi, ievērojot divus dotus nosacījumus par kvadrantu/skaitliskās vērtības intervālu un virzienu u. tml.
	Piemēri. 1. Nosaki divus pozitīvus un divus negatīvus pagrieziena leņķus, kuru kustīgais stars sakrīt ar pagrieziena leņķa $+\ 70°$ kustīgo staru. 2. Nosaki kvadrantu, kurā atrodas pagrieziena leņķa $+\ 1000°$ kustīgais stars. 3. Nosaki un pamato, vai eksistē pagrieziena leņķis α, kurš atrodas 4. kvadrantā un kuram ir spēkā $+\ 500° \leq \alpha \leq +\ 600°$.
Pagrieziena leņķa sinuss un kosinuss	Definē pagrieziena leņķa sinusu un kosinusu, izmantojot pamatskolas zināšanas un vienības riņķa rādiusa skaitlisko vērtību. Korekti lasa reālos skaitļus, kas pierakstīti kā pagrieziena leņķa sinuss, kosinuss; pieraksta tos pēc dzirdētā. Vingrinās noteikt sinusa un kosinusa precīzās vai aptuvenās skaitliskās vērtības patvaļīgam pagrieziena leņķim, kura lielums izteikts grādos, izmantojot definīciju un attēlojumu vienības riņķī, pašpārbaudei izmanto kalkulatoru.
	Piemēri. 1. Nosaki $\sin 445°$ un $\cos 445°$ aptuvenās vērtības, izmantojot attēlojumu vienības riņķī; pārbaudei izmanto kalkulatoru. 2. Uz vienības riņķa līnijas atliec punktu P, kura koordinātas ir: a) $P(\cos 45°;\ \sin 45°)$, b) $P(\cos 90°;\ \sin 90°)$. 3. Ko var secināt par pagrieziena leņķa α lielumu, ja tā sinuss ir pozitīvs, bet kosinuss ir negatīvs? Formulē vispārinājumu.
	Konkrētos piemēros secina, ka katram pagrieziena leņķim var noteikt sinusa un kosinusa vērtību, ka dažādiem pagrieziena leņķiem sinusu/kosinusu vērtības var būt vienādas, ka pagrieziena leņķa sinuss un kosinuss ir skaitlis no intervāla $[-1;\ 1]$. Iepazīst jēdzienus "arksinuss" un "arkkosinuss" un to simbolisko pierakstu, skaidro to nozīmi. Skaidro pagrieziena leņķu sinusu, kosinusu salīdzināšanu, vingrinās tos sakārtot augošā vai dilstošā secībā. Nosaka vienu vai vairākus pagrieziena leņķus atbilstoši dotajiem nosacījumiem. Attēlo vienības riņķī pagrieziena leņķus, ja zināma tā sinusa vai kosinusa vērtība; leņķu skaitlisko vērtību nosaka precīzi vai novērtē aptuveni. Izvērtē dotus vai citu veidotus risinājumus, formulē algoritmus visu tādu leņķu x atlikšanai/noteikšanai, kuriem $\sin x = a$ vai $\cos x = a$.
	Piemēri. 1. Salīdzini skaitļus: a) $\sin 130°$ un $\sin 140°$, b) $\cos 130°$ un $\cos 140°$, pamato savus spriedumus. 2. Salīdzini α un β, ja $\sin \alpha > \sin \beta$ un α un β ir 3. kvadranta leņķi. 3. Uzraksti trīs pagrieziena leņķus x, ja: a) $\sin x = 1$, b) $\sin x = 0$, c) $\cos x = -1$. Katrā no gadījumiem uzraksti formulu visu x pierakstīšanai. 4. Nosaki negatīvu intervāla $(-360°;\ -180°)$ pagrieziena leņķi x, kuram $\cos x = 0$. 5. a) Konstruē vienības riņķī visus tos pagrieziena leņķus α, kuriem $\sin \alpha = \frac{1}{3}$. b) Izmanto transportieri un nosaki aptuveno vērtību diviem 1. kvadranta leņķiem α un diviem 2. kvadranta leņķiem α. c) Uzraksti formulas visu α precīzo vērtību pierakstīšanai.
	Sprież, kā noteikt $\sin x$ precīzo vērtību, ja zināma $\cos x$ precīzā vērtība. Apspriež risinājumus, formulē un pierāda sakarību $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Vingrinās lietot iegūto sakarību, lai aprēķinātu nezināmo sinusa/kosinusa vērtību, t. sk., ievērojot dotos nosacījumus par leņķa lielumu vai novietojumu vienības riņķī. Pēta, formulē un pierāda formulas $\sin(180° - \alpha) = \sin \alpha$ un $\cos(180° - \alpha) = -\cos \alpha$, ja α ir šaurs leņķis un tās lieto plata leņķa sinusa/kosinusa vērtības noteikšanai, izsakot ar šaura leņķa sinusu/kosinusu.
	Piemēri. 1. Nosaki $\sin x$ precīzo vērtību, ja $\cos x = \frac{1}{3}$, izmantojot sakarības taisnleņķa trijstūrī. 2. Pierādi formulu $\sin(180° - \alpha) = \sin \alpha$, ja α ir šaurs leņķis.

Temata apguves norise (turpinājums)

Sakarības taisnleņķa trijstūrī	Nosauc jau zināmās sakarības starp malām un leņķiem taisnleņķa trijstūrī. Iepazīst jēdzienus “katetes projekcija uz hipotenūzas” un “vidējais proporcionālais/vidējais ģeometriskais”. Pierāda Eiklīda teorēmu, izmantojot trijstūru līdzību; formulē secinājumus no tās. Vingrinās lietot Eiklīda teorēmu. Uzzina, skaidro, kas ir divu nogriežņu vidējais aritmētiskais, vidējais proporcionālais jeb vidējais ģeometriskais (y ir vidējais proporcionālais, ja $\frac{x}{y}=\frac{y}{z}$). Pierāda, ka divu dažādu garumu nogriežņu vidējais aritmētiskais ir lielāks nekā šo nogriežņu vidējais ģeometriskais (vidējais proporcionālais).
	Piemēri. 1. Pierādi, ka taisnleņķa trijstūra katete ir vidējais proporcionālais starp hipotenūzu un šīs katetes projekciju uz hipotenūzas. 2. Aprēķini taisnleņķa trijstūra katetes, ja to projekcijas uz hipotenūzas ir $4{,}5$ cm un 8 cm. 3. Doti divi nogriežņi, kuru garumi ir a un b. Konstruē nogriezni, kura garums ir $h=\sqrt{a\cdot b}$. 4. Pierādi, ka divu dažādu garumu nogriežņu a un b vidējais aritmētiskais ir lielāks nekā šo nogriežņu vidējais ģeometriskais/vidējais proporcionālais.
Trijstūra laukuma aprēķināšana	Spriež, kā noteikt trijstūra laukumu jaunā situācijā – doti divu trijstūra malu garumi un lielums leņķim starp šīm malām, vispirms šaurs, tad plats. Salīdzina un apspriež risinājumus. Formulē un pierāda trijstūra laukuma formulu $S=\frac{1}{2}\,a\cdot b\cdot\sin\gamma$. Vingrinās lietot iegūto formulu, piemēram, nosaka lielumu leņķim starp divām trijstūra malām, ja zināms to garums un trijstūra laukums, secina par atrisinājumu skaitu. Aprēķina laukumu dažādiem četrstūriem, n-stūriem, t. sk., sadalot tos trijstūros.
	Piemēri. 1. Pierādi trijstūra laukuma formulu $S=\frac{1}{2}\,a\cdot b\cdot\sin\gamma$, kur γ ir leņķis starp malām a un b. 2. Vienādsānu trijstūra sānu malas garums ir 8 cm, bet laukums ir $16\ \text{cm}^2$. Aprēķini trijstūra virsotnes leņķi.
Sinusu teorēma	Risina uzdevumu, kura risinājums ietver spriedumus, kas ļauj pamatot sinusu teorēmu. Salīdzina un precizē risinājumus. Pierāda sinusu teorēmu, izvēloties piemērotāko paņēmienu – izmantojot sakarības taisnleņķa trijstūrī vai trijstūra laukuma formulu $S=\frac{1}{2}\,a\cdot b\cdot\sin\gamma$. Atpazīst un raksturo situācijas, kad sinusu teorēma ir lietojama; formulē un skaidro vispārinājumus. Vingrinās aprēķināt nezināmo trijstūra malu garumus un leņķu lielumus, izmantojot sinusu teorēmu, t. sk. izmanto digitālos rīkus, lai noteiktu leņķu aptuveno vērtību u. tml. Lieto sinusu teorēmu matemātiskos, praktiskos un citu jomu kontekstos, piemēram, lai noteiktu nezināmo attālumu dabā.
	Piemēri. 1. Trijstūrī ABC malas AB garums ir 6 cm, leņķis A ir $45°$ un leņķis C ir $30°$. Aprēķini malas BC garumu. 2. Pierādi, ka trijstūrī ABC ir spēkā vienādība $\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}$. 3. Trijstūra divas malas ir $AB=8$ cm un $BC=12$ cm. Vai iespējams, ka leņķa C sinuss ir a) $0{,}7$; b) $0{,}6$? Kādas ir leņķa C sinusa iespējamās vērtības?

Temata apguves norise (turpinājums)

Kosinusu teorēma	Risina uzdevumu, kura risinājums ietver spriedumus, kas ļauj pamatot kosinusu teorēmu. Salīdzina un precizē risinājumus. Pierāda kosinusu teorēmu, lietojot sakarības taisnleņķa trijstūrī. Atpazīst un raksturo gadījumus, kad lietojama kosinusu teorēma trijstūra malu un leņķu aprēķināšanai. Vingrinās aprēķināt nezināmās trijstūra malas garumu un leņķu lielumus, izmantojot kosinusu teorēmu. Spriež, formulē un pamato nosacījumus trijstūra veida noteikšanai (šaurleņķu, taisnleņķa, platleņķa), ja zināmi trijstūra malu garumi. Pierāda sakarību starp paralelograma malu un diagonāļu garumiem, izmantojot kosinusu teorēmu un sakarību $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, lieto iegūto formulu nezināmo lielumu aprēķināšanai.
	Piemēri. 1. Trijstūrī ABC malas AB garums ir 4 cm, malas BC garums ir 6 cm un leņķis B ir $120°$. Aprēķini malas AC garumu. 2. Pierādi kosinusu teorēmu. 3. Trijstūra malu garumi ir 7 cm, 8 cm un 13 cm. Aprēķini trijstūra lielākā leņķa lielumu.
	Risina uzdevumus ar praktisku saturu, ko var modelēt kā trijstūra elementu noteikšanu. Lieto sinusu teorēmu un kosinusu teorēmu, risinot ar mērniecību vai navigāciju saistītus uzdevumus, patstāvīgi meklē trūkstošo informāciju par jēdzienu, piemēram, “azimuts”, nozīmi.
	Piemērs. No laivu piestātnes laiva A ir $9{,}31$ km attālumā ar azimutu $64°$, bet laiva B ir $9{,}02$ km attālumā ar azimutu $119°$. Piestātnē saņēma zvanu ar lūgumu pēc palīdzības no laivas C, kas ir $11{,}13$ km attālumā no piestātnes ar azimutu $90°$. Kura no laivām – A vai B – ir tuvāk laivai C? Par kādu azimutu jādodas tuvākajai laivai, lai tā sniegtu palīdzību laivai C?

1. Leņķa paplašinājums un trijstūra elementu aprēķināšana	2. Vektori	3. Koordinātu metode	4. Planimetrija	5. Kopas, matemātiskā indukcija, kombinatorika	6. Funkcijas īpašības	7. Algebriskās daļas, daļveida vienādojumi un nevienādības	8. Daļveida funkcija, funkcijas robeža

2. Vektori

Ieteicamais laiks temata apguvei: 24–28 mācību stundas.

Temata apguves mērķis: veidot izpratni par atšķirību starp skalāriem un vektoriāliem lielumiem, lietot vektorus ģeometriskā un koordinātu formā, lai noteiktu un pamatotu figūru īpašības, matemātiski raksturotu fizikālus procesus.

Sasniedzamie rezultāti

Ziņas	Prasmes
• Vektors ir orientēts nogrieznis; to izmanto, lai matemātiski raksturotu lielumus, kuriem ir gan skaitliskā vērtība, gan virziens (piemēram, pārvietojums, momentānais ātrums, spēks). (M.Li.6.) • Divi vektori ir kolineāri, ja tie atrodas uz vienas taisnes vai uz paralēlām taisnēm; kolineāri vektori var būt vienādi vērsti vai pretēji vērsti. (M.Li.6.) • Trīs vektori ir komplanāri, ja tie atrodas vienā plaknē vai ir paralēli vienai un tai pašai plaknei. (M.Li.6.) • Vektoru summa, vektoru starpība un vektora reizinājums ar skaitli ir vektors. (M.Li.6.) • Paralēlo pārnesi var viennozīmīgi raksturot ar vektoru. (M.Li.1.; M.Li.6.) • Punkta stāvokli telpā var noteikt, izmantojot dažādas koordinātu sistēmas. Dekarta (taisnleņķa) koordinātu sistēmā katru telpas punktu viennozīmīgi raksturo 3 koordinātas – abscisa (x), ordināta (y) un aplikāta (z). (M.Li.1.; M.Li.6.) • Ja $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ir vienības vektori attiecīgi uz asīm x, y, z, tad jebkuru vektoru $\vec{a}$ plaknē var izteikt kā $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}$ un telpā kā $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$, kur a_x, a_y, a_z ir vektora $\vec{a}$ koordinātas jeb projekcijas uz asīm. (M.Li.6.) • Vektora koordinātas var iegūt, no vektora galapunkta koordinātām atņemot attiecīgās sākumpunkta koordinātas. (M.Li.6.) • Vektora pieraksts koordinātu formā ļauj ērti noteikt vektora garumu jeb moduli, veikt darbības ar vektoriem – saskaitīt un atņemt vektorus, vektoru reizināt ar skaitli. (M.Li.6.) • Vektorus gan ģeometriskā, gan koordinātu formā var izmantot figūru īpašību noteikšanā un pamatošanā. (M.Li.2.; M.Li.6.)	• Nosaka un skaidro kolineārus vektorus, vienādi vai pretēji vērstus vektorus, vienādus vektorus, pretējus vektorus, vienības vektorus un komplanārus vektorus, ja tie doti ģeometriskā formā. • Izpilda darbības ar vektoriem ģeometriskā formā – reizina ar skaitli, saskaita, atņem, aprēķina divu vektoru skalāro reizinājumu, izmantojot definīciju $\vec{a} \cdot \vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \cos\alpha$, ja α ir leņķis starp vektoriem. • Attēlo zīmējumā un nosaka punkta koordinātas Dekarta koordinātu sistēmā telpā, ievērojot dotos nosacījumus. • Nosaka vektora koordinātas (projekcijas uz asīm) plaknē un telpā, izvēloties piemērotāko paņēmienu. • Izpilda darbības ar vektoriem koordinātu formā – saskaita, atņem, reizina vektoru ar skaitli, aprēķina vektora garumu (moduli), vektoru skalāro reizinājumu. • Aprēķina leņķi starp diviem vektoriem, izmantojot vektoru skalāro reizinājumu.

Komplekss sasniedzamais rezultāts	Ieradumi
• Izsaka vektoru kā divu nekolineāru vektoru lineāru kombināciju plaknē un pierāda, ka to var izdarīt vienā vienīgā veidā, izsaka vektoru kā trīs nekomplanāru vektoru lineāru kombināciju telpā; skaidro vektora koordinātas, izmantojot vienības vektorus. (M.A.6.2.1.) • Lieto vektorus fizikas kontekstā (piemēram, aprēķinot rezultējošo spēku); izvēlas un argumentē piemērotāko vektoru uzdošanas veidu. (M.O.6.2.1.; M.A.1.2.1.) • Lieto vektorus, pamatojot plaknes figūru veidu un īpašības, nosakot plaknes figūru un telpisku ķermeņu lielumus; izvēlas un argumentē piemērotāko vektoru uzdošanas veidu. (M.A.1.2.1.; M.A.6.1.1.; M.A.6.2.2.; M.A.6.3.4.)	• Ilustrē ar piemēriem vai citādi raksturo skalārus un vektoriālus lielumus, attīstot ieradumu iegūtās zināšanas saistīt ar savu pieredzi.
Jēdzieni: skalārs lielums, vektoriāls lielums, vektors, vektora modulis, nulles vektors, vienības vektors, vienādi vērsti un pretēji vērsti vektori, vienādi un pretēji vektori, kolineāri vektori, komplanāri vektori, leņķis starp diviem vektoriem, vektora projekcijas uz koordinātu asīm, vektora koordinātas, vektoru lineāra kombinācija, vektoru skalārais reizinājums, paralēlās pārneses vektors.	
Simboli un pieņemtie apzīmējumi: $\vec{a}$; $\overrightarrow{AB}$; $\vec{0}$; $\vec{a} \parallel \vec{b}$; $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$; $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$; $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$; $\text{proj}_l\, \vec{a}$; $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$; $\vec{a} \cdot \vec{b}$.	

Temata apguves norise

Vektora jēdziens, kolineāri un vienādi vektori	Skaidro vektoriālus un skalārus lielumus, ilustrē ar piemēriem. Definē vektoru, vektora garumu jeb moduli, kolineārus vektorus, vienādi vērstus un pretēji vērstus vektorus, vienādus vektorus un pretējus vektorus. Raksturo dotas plaknes figūras, daudzskaldņus, izmantojot jēdzienus “vienādi vektori”, “pretēji vektori”, “vienādi vērsti un pretēji vērsti vektori”, “vektora modulis”, “kolineāri vektori”, lieto pieņemtos apzīmējumus. Pamato vektoru veidu, vektoru vienādību, izmantojot zināšanas par vektoriem un plaknes figūru īpašībām, formulētos apgalvojumus pieraksta, lietojot pieņemtos apzīmējumus. Veido zīmējumu atbilstoši dotajiem nosacījumiem par vektoriem un to veidu.
	Piemēri. 1. No dotajiem lielumiem vektoriāls lielums ir: **A** ceļš, **B** pārvietojums, **C** masa, **D** laiks. 2. Paralelograma $ABCD$ diagonāles krustojas punktā O. Nosauc divus vektorus, kas: a) ir kolineāri, bet nav vienāda garuma, b) ir pretēji vērsti un vienāda garuma. 3. Pierādi, ka no vektoru $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{CD}$ vienādības izriet vektoru $\overrightarrow{AC}$ un $\overrightarrow{BD}$ vienādība.
Vektoru summa un starpība	Izmanto izpratni par vektoriāliem lielumiem, piemēram, pārvietojumu, un spriež, kas ir summas vektors, ja vektori atrodas uz vienas taisnes, ja tie ir kolineāri, ja vektori brīvi novietoti plaknē; apspriež iegūtos rezultātus un definē vektoru summas vektoru. Formulē algoritmu vektoru saskaitīšanai ģeometriskā formā, salīdzina ar citu veidotajiem algoritmiem un uzziņu literatūrā doto. Vingrinās saskaitīt divus vektorus ģeometriskā formā, izvēloties paņēmienu (paralelograma vai trijstūra likums), t. sk., izmantojot digitālos rīkus; saskaita vairākus vektorus, izmantojot daudzstūra likumu. Pēta, formulē un pierāda vektoru saskaitīšanas īpašības (komutatīvā un asociatīvā), lieto tās vektoru saskaitīšanai. Lieto vektoru saskaitīšanu fizikas kontekstos, piemēram, rezultējošā spēka aprēķināšanai; raksturo nepieciešamās planimetrijas zināšanas (sakarības starp malām un leņķiem trijstūrī). Skaidro vektoru atņemšanu kā pretējā vektora pieskaitīšanu.

Temata apguves norise (turpinājums)

Vektoru summa un starpība	Piemēri. 1. Pierādi īpašību vektoru saskaitīšanai ģeometriskā formā $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$. 2. Dota trijstūra prizma $ABCA_1B_1C_1$. Nosaki vektoru, kas atbilst vektoru summai $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BC}$. 3. Dota trijstūra piramīda $ABCD$. Izsaki vektoru $\overrightarrow{AB}$ kā vektoru $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$ un $\overrightarrow{CB}$ summu vai starpību. 4. Aprēķini divu spēku $\overrightarrow{F_1}$ un $\overrightarrow{F_2}$ (pielikti vienā punktā) rezultējošā spēka F lielumu, ja F_1 = 5 N, $F_2 = 3$ N un leņķis starp šiem spēkiem ir 60°.
Vektora reizināšana ar skaitli	Formulē un lieto algoritmu vektora reizināšanai ar skaitli. Secina par kolineāru vektoru pazīmi. Pēta, formulē un pierāda vektoru reizināšanas ar skaitli īpašības. Lieto darbības ar vektoriem ģeometriskā formā nezināmo lielumu noteikšanai, figūru īpašību vai savstarpējā novietojuma pamatošanai.
	Piemēri. 1. Pierādi īpašības darbībām ar vektoriem ģeometriskā formā: a) $(k + m)\,\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$, b) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$. 2. Doti divi nekolineāri vektori $\vec{x}$ un $\vec{y}$. Konstruē vektoru $2\vec{x} - 0{,}5\vec{y}$. 3. Pierādi, ka $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$, kur $ABCD$ ir regulāras četrstūra piramīdas $SABCD$ pamats un O ir pamata diagonāļu krustpunkts.
Vektoru izteikšana ar dotiem vektoriem	Pierāda, ka jebkuru vektoru plaknē var izteikt vienā vienīgā veidā ar diviem dotiem nekolineāriem vektoriem. Vingrinās izteikt vektoru plaknē ar dotiem vektoriem. Lieto vektoru izteikšanu ar dotajiem vektoriem plaknes figūru īpašību pierādīšanai.
	Piemēri. 1. Dots regulārs sešstūris $ABCDEF$. Ar vektoriem $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$ un $\overrightarrow{AE} = \vec{s}$ izsaki vektorus: a) $\overrightarrow{BC}$, b) $\overrightarrow{DF}$. 2. Izmantojot vektorus, pierādi, ka trijstūra viduslīnijas garums ir puse no trijstūra malas garuma, kas tai paralēla. 3. Pierādi, ka trijstūra mediānas krustojoties dalās attiecībā $2:1$, skaitot no virsotnes. 4. Izpēti un formulē pieņēmumu par sakarību starp vektoriem $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{SO}$ regulārā trijstūra piramīdā $SABC$, kur O ir pamata mediānu krustpunkts. Pierādi formulētā pieņēmuma patiesumu. 5. Pierādi, ka trapeces pamatu viduspunkti un sānu malu pagarinājumu krustpunkts atrodas uz vienas taisnes.
	Definē komplanārus vektorus. Nosaka un pamato, vai dotie vektori ir komplanāri. Vingrinās nosaukt trīs komplanārus vektorus un trīs nekomplanārus vektorus dotā paralēlskaldnī. Nosaka trīs nekomplanāru vektoru summu, izmantojot paralēlskaldņa likumu. Skaidro vektora izteikšanu ar trim nekomplanāriem vektoriem. Lieto vektoru izteikšanu ar dotajiem vektoriem plaknē un telpā figūru īpašību pamatošanai. Nosaka un pamato, vai vektori atrodas vienā plaknē.
	Piemēri. 1. Punkts M ir kuba $ABCDA_1B_1C_1D_1$ šķautnes D_1C_1 viduspunkts. a) Izsaki vektoru $\overrightarrow{AM}$ ar vektoriem $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ un $\overrightarrow{AA_1}$. b) Aprēķini $\overrightarrow{AM}$ garumu, ja kuba šķautnes garums ir a. 2. Pierādi, ka paralēlskaldņa diagonāles krustojas vienā punktā un dalās tajā uz pusēm. 3. Pierādi, ka vektori $\vec{m}, \vec{n}$ un $\vec{p}$ atrodas vienā plaknē, ja $\vec{m} = \vec{a} + 2\vec{b} - 6\vec{c}$, $\vec{n} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{p} = 2\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c}$. 4. Pierādi, ka $2\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}$, kur nogrieznis EF savieno tetraedra (regulāra trijstūra piramīda, kuras visas šķautnes ir vienāda garuma) $ABCD$ šķautņu AC un BD viduspunktus.

Temata apguves norise (turpinājums)

Divu vektoru skalārais reizinājums	Definē leņķi starp vektoriem, nosaka leņķi starp vienādi vērstiem vektoriem un pretēji vērstiem vektoriem. Definē perpendikulārus vektorus. Uzziņu literatūrā iegūst divu vektoru skalārā reizinājuma definīciju $\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cdot\cos\alpha$; secina, ka divu vektoru skalārais reizinājums ir skaitlis. Pierāda, ka divu no nulles atšķirīgu vektoru skalārais reizinājums ir vienāds ar nulli tad un tikai tad, ja šie vektori ir perpendikulāri. Pierāda, ka skalārais kvadrāts ir vienāds ar vektora garuma kvadrātu. Pierāda dažas vektoru skalārā reizinājuma īpašības, piemēram, $\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}$. Vingrinās lietot skalārā reizinājuma definīciju un īpašības.
	Piemēri. 1. Aprēķini vektoru $\vec{a}$ un $\vec{b}$ skalāro reizinājumu, ja to garumi attiecīgi ir 6 un $8\sqrt{2}$ un leņķis starp tiem ir $135°$. 2. Vektora $\vec{a}$ garums ir 3, vektora $\vec{b}$ garums ir 4, leņķis starp tiem ir $120°$. Aprēķini: a) $(\vec{a}-\vec{b})^2$, b) $(\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}+3\vec{b})$. 3. Zināms, ka vektors $\vec{a}+\vec{b}$ ir perpendikulārs vektoram $\vec{a}-\vec{b}$. Ko var secināt par vektoriem $\vec{a}$ un $\vec{b}$? 4. Tetraedra $SABC$ šķautnes garums ir a. Punkti K, L ir attiecīgi šķautņu SB un CB viduspunkti. Aprēķini: a) $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CS}$; b) $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{SC}$; c) $\overrightarrow{KL}\cdot\overrightarrow{CS}$; d) $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{LK}$; e) $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{KL}$.
	Lieto vektoru skalārā reizinājuma definīciju un īpašības, lai noteiktu un pierādītu plaknes figūru un telpisku ķermeņu īpašības, nezināmos lielumus, raksturotu savstarpējo novietojumu.
	Piemēri. 1. Pierādi kosinusu teorēmu, lietojot vektoru skalāro reizinājumu. 2. Pierādi, ka romba diagonāles ir perpendikulāras, izmantojot vektorus. 3. Nosaki leņķus, ko veido kuba diagonāle un tā sānu skaldņu diagonāles. 4. Regulāras trijstūra prizmas $ABCA_1B_1C_1$ pamata šķautnes garums ir $2a$, bet sānu šķautnes garums ir a. Aprēķini leņķi starp taisnēm AB_1 un BC_1.
	Izmanto vektoru skalāro reizinājumu fizikas kontekstos, piemēram, aprēķinot mehānisko darbu.
	Piemērs. Aprēķini spēka $\vec{F}$ veikto darbu A, ja materiāls punkts pārvietojas pa taisni par vektoru $\vec{x}$. Zināms, ka $F=3$, $x=2$ un leņķis starp vektoriem $\vec{F}$ un $\vec{x}$ ir $45°$.
Dekarta koordinātu sistēma telpā	Iegūst informāciju par Dekarta koordinātu sistēmu telpā no uzziņu literatūras. Vingrinās attēlot punktus, ja dotas to koordinātas. Vingrinās noteikt punkta koordinātas telpā, piemēram, nosaka taisnstūra paralēlskaldņa virsotņu koordinātas, ievērojot dotos nosacījumus.
	Piemēri. 1. Attēlo Dekarta koordinātu sistēmā telpā punktu $A(1;2;2)$. Aprēķini punkta A attālumu līdz punktam $O(0;0;0)$. 2. Dots kubs $ABCDA_1\,B_1C_1D_1$, kur $B(0;0;0)$, $D(1;1;0)$ un $B_1(0;0;1)$. Nosaki pārējo kuba virsotņu koordinātas.
Vektora projekcijas uz asīm, vektora koordinātas	Definē un nosaka vektora projekcijas uz koordinātu asīm. Aprēķina vektora moduli, vektora projekcijas uz koordinātu asīm vai leņķi, ko vektors veido ar asi, izmantojot vektora projekcijas definīciju un sakarības taisnleņķa trijstūrī.
	Piemērs. Aprēķini vektora $\vec{a}$ projekcijas uz koordinātu asīm Ox un Oy, ja $\lvert\vec{a}\rvert=6$ un vektors $\vec{a}$ ar asi Ox veido $120°$.

Temata apguves norise (turpinājums)

Vektora projekcijas uz asīm, vektora koordinātas	Definē vienības vektorus plaknē un telpā. Pamato, ka jebkuru vektoru plaknē (telpā) var vienā vienīgā veidā izteikt ar vienības vektoriem; definē vektora koordinātas plaknē un telpā; secina, ka vektora koordinātas sakrīt ar vektora projekcijām uz asīm. Secina, ka vienādu vektoru koordinātas ir vienādas. Vingrinās noteikt vektora koordinātas, ja tā sākumpunkts sakrīt ar koordinātu sistēmas sākumpunktu plaknē un telpā. Vingrinās no koordinātu sākumpunkta vai kāda cita punkta atlikt vektoru, ja dotas tā koordinātas.
	Piemērs. Dots taisnstūra paralēlskaldnis $ABCDA_1B_1C_1D_1$, kur $B(0;\,0;\,0)$, taisnstūra paralēlskaldņa šķautnes ir paralēlas koordinātu asīm un tā dimensijas ir $BA = 4$, $BC = 5$ un $BB_1 = 3$. Nosaki koordinātas vektoriem $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{BD}$ un $\overrightarrow{BD_1}$.
	Pēta, formulē un pierāda sakarību starp vektora koordinātām un tā galapunktu koordinātām plaknē (telpā). Vingrinās lietot sakarību starp vektora, tā galapunkta un sākumpunkta koordinātām.
	Piemērs. Nosaki punkta B koordinātas, ja $A(-1;\,-2;\,3)$ un $\overrightarrow{AB} = (-1;\,0;\,5)$.
Darbības ar vektoriem koordinātu formā	Spriež, pēta, kā aprēķināt vektora garumu, ja dotas vektora koordinātas; skaidro Pitagora teorēmas izmantošanu. Pēta, formulē un pierāda teorēmas, kas apraksta darbības ar vektoriem (summa, starpība, reizinājums ar skaitli) koordinātu formā; vingrinās to lietojumā. Lieto vektorus koordinātu formā, lai pierādītu plaknes figūru vai telpisku ķermeņu īpašības, noteiktu to veidu vai nezināmos lielumus.
	Piemēri. 1. Nosaki un pamato, vai punkti $A(1;\,4;\,7)$, $B(-2;\,-1;\,-3)$, $C(2;\,5;\,9)$ atrodas uz vienas taisnes. 2. Nosaki un pamato četrstūra $ABCD$ veidu, ja $A(0;\,2;\,-1)$, $B(-2;\,-1;\,0)$, $C(0;\,-3;\,4)$, $D(1;\,1;\,1)$.
	Pierāda, ka divu vektoru skalārais reizinājums ir vienāds ar doto vektoru atbilstošo koordinātu reizinājumu summu $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x\,b_x + a_y\,b_y + a_z\,b_z$. Lieto iegūto sakarību, lai noteiktu un pierādītu plaknes figūru un telpisku ķermeņu īpašības, nezināmos lielumus, raksturotu savstarpējo novietojumu.
	Piemēri. 1. Aprēķini leņķi starp vektoriem $\vec{a} = (4;\,2;\,4)$ un $\vec{b} = (1;\,2;\,-2)$. 2. Nosaki k vērtību, lai vektori $\vec{a} = (k;\,2;\,-8)$ un $\vec{b} = (k;\,k;\,6)$ būtu perpendikulāri. 3. Pierādi, ka punkti $A(-1;\,0;\,2)$, $B(1;\,-3;\,8)$, $C(-2;\,3;\,6)$, $D(-4;\,6;\,0)$ atrodas vienā plaknē un taisnes AC un BD ir perpendikulāras.
Paralēlā pārnese	Aplūko piemērus un veido paralēlās pārneses definīciju. Definē un izpilda ģeometrisko figūru paralēlo pārnesi, izmantojot vektoru. Raksturo plaknes figūras, t. sk., ja tās novietotas koordinātu plaknē, izmantojot jēdzienus “figūras attēls”, “vektors”, “vektora koordinātas”, “paralēlā pārnese”, “vektora modulis” u. tml. Pierāda, ka paralēlā pārnese ir pārvietojums (ģeometrisks pārveidojums, kura rezultātā nemainās attālumi starp figūras punktiem); secina, ka paralēlajā pārnesē figūras attēls ir vienāds ar doto figūru. Formulē svarīgākās paralēlās pārneses īpašības (apgrieztais pārveidojums, kompozīcija). Izmanto vektorus, lai raksturotu vai veiktu paralēlo pārnesi.
	Piemēri. 1. Nosaki paralēlās pārneses vektoru un punkta $(3;\,0)$ attēlu, ja punkta $(-3;\,4)$ attēls paralēlajā pārnesē ir punkts $(2;\,1)$. 2. Uzzīmē funkcijas $y = x^2 - 4x$ grafika attēlu paralēlajā pārnesē par vektoru $\vec{a} = (-3;\,4)$.

1. Leņķa paplašinājums un trijstūra elementu aprēķināšana	2. Vektori	3. Koordinātu metode	4. Planimetrija	5. Kopas, matemātiskā indukcija, kombinatorika	6. Funkcijas īpašības	7. Algebriskās daļas, daļveida vienādojumi un nevienādības	8. Daļveida funkcija, funkcijas robeža

3. Koordinātu metode

Ieteicamais laiks temata apguvei: 22–26 mācību stundas.

Temata apguves mērķis: padziļināt izpratni par saistību starp algebriskiem un ģeometriskiem modeļiem, skaidrot un lietot koordinātu metodi nezināmo lielumu noteikšanai, figūru savstarpējā novietojuma un to īpašību pamatošanai matemātikas un fizikas kontekstā.

Sasniedzamie rezultāti

Ziņas	Prasmes
• Savstarpēji viennozīmīga atbilstība starp punktiem un to koordinātām, starp punktu ģeometriskām vietām (līnijām) un vienādojumiem problēmu risināšanā ļauj pāriet no algebriskas interpretācijas uz ģeometrisku, un otrādi; dažkārt to sauc par koordinātu metodi. (M.Li.1.; M.Li.2.; M.Li.6.) • Taisnes virziena koeficients k parāda funkcijas pieauguma un argumenta pieauguma attiecību, ko pieraksta $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. (M.Li.4.; M.Li.6.) • Katru taisni koordinātu plaknē apraksta vienādojums $Ax + By + C = 0$ (A un B vienlaikus nav 0), un otrādi. (M.Li.1.; M.Li.6.) • Taisnei $Ax + By + C = 0$ perpendikulāra vektora koordinātas ir $(A; B)$; šī sakarība ļauj uzdevumu risināšanā taisnes vienādojumu aizstāt ar tās normālvektoru. (M.Li.2.; M.Li.6.) • Funkciju var attēlot koordinātu plaknē, bet ne katra koordinātu plaknē attēlotā līnija ir funkcijas grafiks. (M.Li.4.) • Taisnes vienādojuma pierakstam ir vairāki veidi, un tā izvēli nosaka dotā informācija vai izmantošanas mērķis; pārejai no viena veida uz citu lieto ekvivalentus pārveidojumus. (M.Li.1.; M.Li.4.; M.Li.6.) • Katru riņķa līniju koordinātu plaknē apraksta vienādojums $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, kur riņķa līnijas centra koordinātas ir $(a; b)$ un rādiuss R, un otrādi – katram šāda veida vienādojumam atbilst riņķa līnija. (M.Li.1.; M.Li.6.) • Analītiskā ģeometrija ir matemātikas apakšnozare, kurā ar algebras palīdzību pēta ģeometrisku objektu formu un īpašības. (M.Li.2.; M.Li.6.)	• Lieto formulu attālumam starp diviem punktiem plaknē un telpā, sakarības starp nogriežņa galapunktu un viduspunkta koordinātām. • Nosaka no grafika un analītiski argumenta pieaugumu, funkcijas pieaugumu, taisnes virziena koeficientu, lieto pieņemtos apzīmējumus. • Attēlo koordinātu plaknē taisni, ja dots tās vienādojums (dažādi pieraksta veidi); pāriet no viena taisnes uzdošanas veida uz citu, skaidrojot un lietojot ekvivalentus pārveidojumus. • Uzraksta un lieto taisnes vienādojumu, ja dots: 1) viena taisnes punkta koordinātas un virziena koeficients; 2) divu taisnes punktu koordinātas; 3) taisnes novietojums koordinātu plaknē, t. sk., ja tā paralēla kādai no asīm. • Attēlo riņķa līniju koordinātu plaknē, ja dots tās vienādojums $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$; uzraksta riņķa līnijas vienādojumu, ievērojot dotos nosacījumus vai tās attēlojumu koordinātu plaknē.

Komplekss sasniedzamais rezultāts	Ieradumi
• Sprież induktīvi, deduktīvi un formulē saistību starp taisni un tai perpendikulāru vektoru, sakarības starp koeficientiem paralēlu vai perpendikulāru taišņu vienādojumos, pamato formulu attāluma no punkta līdz taisnei noteikšanai. (M.A.2.1.2.; M.A.6.2.3.; M.O.6.2.5.; M.O.6.2.6.) • Lieto koordinātu metodi fizikas kontekstā, piemēram, analītiski apraksta un raksturo taisnvirziena kustību; izvēlas piemērotāko taišņu uzdošanas veidu. (M.O.6.2.1.; M.A.1.2.1.) • Lieto koordinātu metodi, pamatojot plaknes figūru veidu un īpašības, nosakot plaknes figūru un telpisku ķermeņu lielumus; izvēlas un argumentē piemērotāko vektoru vai taišņu uzdošanas veidu. (M.A.1.2.1.; M.A.6.1.1.; M.A.6.2.2.; M.A.6.2.3.; M.A.6.3.4.) • Nosaka un raksturo analītiski uzdotas sakarības, piemēram, $x^2 - 4y^2 = 0$, $\lvert x\rvert - \lvert y\rvert = 2$, punktu ģeometrisko vietu, un otrādi – veido, pārbauda līniju vienādojumus pēc to attēlojumiem koordinātu plaknē; skaidro saistību ar vienādojumu, nevienādību un to sistēmu ar diviem nezināmajiem atrisināšanu. (M.A.1.2.3.; M.A.6.2.4.)	• Risinot ģeometrisku problēmu, paredz iespēju algebriskai interpretācijai, un otrādi.
• **Jēdzieni:** punktu ģeometriskā vieta, taisnes virziena koeficients, argumenta pieaugums, funkcijas pieaugums, līnijas vienādojums, taisnes vienādojums, riņķa līnijas vienādojums.	
• **Simboli un pieņemtie apzīmējumi:** $\Delta x,\ \Delta y,\ k = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.	

Temata apguves norise

Attālums starp punktiem. Nogriežņa viduspunkta koordinātas	Skaidro, kā noteikt attālumu starp diviem punktiem koordinātu plaknē vai telpā, izmantojot zināšanas par vektoriem. Lieto formulu attālumam starp diviem punktiem, lai noteiktu plaknes figūru un daudzskaldņu nezināmos lielumus un pamatotu to īpašības, piemēram, pamato, vai trīs telpas punkti atrodas uz vienas taisnes.
	Piemērs. 1. Nosaki un pamato, vai punkti A, B un C atrodas uz vienas taisnes, ja $A(-1; 0; 2)$, $B(1; 2; 0)$, $C(-4; -3; 5)$. 2. Nosaki koordinātas tādam Oz ass punktam K, kas atrodas vienādā attālumā no punktiem $A(2; 1; 1)$ un $B(-1; 2; 5)$. 3. Vienādmalu trijstūra ABC divas virsotnes ir $A(1; 0)$ un $B(2; \sqrt{3})$. Aprēķini virsotnes C koordinātas.
	Pēta, formulē, kā noteikt nogriežņa viduspunkta koordinātas plaknē; pieņēmumu pierāda, izmantojot vektorus vai trijstūru līdzību. Lieto formulu attālumam starp diviem punktiem un sakarības nogriežņa viduspunkta koordinātu noteikšanai viena uzdevuma ietvaros, piemēram, nosaka trijstūra mediānas garumu, ja dotas trijstūra virsotņu koordinātas. Sprież, nosaka koordinātas punktam, kas nogriezni sadala dotajā attiecībā, formulē vispārinājumu un lieto iegūto sakarību.
	Piemēri. 1. Aprēķini trijstūra ABC mediānas AM garumu, ja $A(2; 1; -1)$, $B(1; 0; 1)$, $C(5; -2; -7)$. 2. Nosaki trijstūra ABC mediānu krustpunkta koordinātas, ja $A(1; 0; 2)$, $B(0; 1; -1)$, $C(4; 3; 1)$.

Temata apguves norise (turpinājums)

Taisnes virziena koeficients	Skicē taisnes $y = kx + b$ dažādām k un b vērtībām, lai pētītu un raksturotu, kā ģeometriski interpretēt koeficientu k, kā to izmantot lineāras funkcijas grafika zīmēšanai. Vingrinās zīmēt lineāras funkcijas grafiku, izmantojot koeficientu k un b skaitliskās vērtības, pašpārbaudei izmanto digitālos rīkus. Iepazīst un lieto jēdzienus "taisnes virziena koeficients", "argumenta pieaugums" un "funkcijas pieaugums", formulē sakarību starp tiem. Raksturo lineāru funkciju un tās grafiku, izmantojot jaunos jēdzienus. Nosaka funkcijas pieaugumu no grafika un analītiski. Uzzīmē lineāras funkcijas grafiku un uzraksta funkcijas formulu, ievērojot dotos nosacījumus.
	Piemērs. Uzzīmē grafiku un uzraksti formulu lineārai funkcijai, ja: a) tās grafika virziena koeficients ir $k = 2$ un funkcijas nulle ir –4, b) tās grafika virziena koeficients ir $k = -0{,}5$ un krustpunkts ar ordinātu asi $(0; -2)$, c) tās grafika divi punkti ir $K(-2; -1)$ un $M(1; 1)$.
	Pēta, formulē secinājumus par taisnes/taišņu novietojumu koordinātu plaknē atkarībā no virziena koeficienta, tā izmaiņām, piemēram, 1) paralēlām taisnēm virziena koeficienti ir vienādi, un otrādi – ja virziena koeficienti ir vienādi, var secināt, ka taisnes ir paralēlas; 2) ja pozitīvs virziena koeficients palielinās, tad palielinās leņķis starp taisni un abscisu ass pozitīvo virzienu, 3) taisnei, kas perpendikulāra abscisu asij, virziena koeficientu nevar noteikt u. tml. Konkrētos piemēros un vispārīgi raksturo paralēlu taišņu savstarpējo novietojumu koordinātu plaknē, izmantojot jēdzienus "paralēlā pārnese", "vektors", "vektora modulis". Lieto nosacījumu taišņu paralelitātei, lai pierādītu koordinātu plaknē dota daudzstūra malu paralelitāti.
	Piemērs. Uzraksti formulu lineārai funkcijai, kuras grafiks iet caur punktu $K(-1; -1)$ un ir paralēls funkcijas $y = -0{,}5x + 2$ grafikam.
	Ar formulu uzdotu taisni attēlo pagriezienā par $90°$ ap dotu punktu un uzraksta iegūtās taisnes vienādojumu. Pēta, formulē un lieto sakarību starp perpendikulāru taišņu virziena koeficientiem.
	Piemērs. Uzraksti formulu lineārai funkcijai, kuras grafiks iet caur punktu $K(4; 6)$ un ir perpendikulārs funkcijas $y = 0{,}5x - 1$ grafikam.
Taisnes vienādojums	Izsaka domas, kā analītiski pierakstīt taisni, kas perpendikulāra abscisu asij. Secina, ka katru taisni koordinātu plaknē var pierakstīt analītiski, iepazīst jēdzienu "taisnes vienādojums" un tās vispārīgo veidu $Ax + By + C = 0$. Sprież konkrēti un vispārīgi, raksturo taisnes novietojumu koordinātu plaknē, ja $A = 0$, $B = 0$ vai $C = 0$. Skaidro saistību starp jēdzieniem "lineāras funkcijas formula" un "taisnes vienādojums", "funkcijas grafiks" un "līnija", izmantojot matemātikas valodu. Nosaka un pamato, vai koordinātu plaknē dotā līnija ir funkcijas grafiks. Vingrinās ar vispārīgo vienādojumu uzdotai taisnei $Ax + By + C = 0$ noteikt virziena koeficientu un krustpunktus ar asīm. Attēlo koordinātu plaknē taisni, kas uzdota formā $Ax + By + C = 0$, izvēloties un raksturojot savu paņēmienu, piemēram, pāreju uz taisnes pierakstu ar virziena koeficientu, nosaku divu taisnes punktu koordinātas, nosaku taisnes krustpunktus ar asīm.
	Piemēri. 1. Uzraksti vienādojumu taisnei, kas iet caur punktu $M(-3; 4)$ paralēli a) abscisu asij, b) ordinātu asij. 2. Nosaki taisnes $2x + 5y + 4 = 0$ virziena koeficientu. 3. Paskaidro vispārīgi vai ilustrē ar konkrētu piemēru sev piemērotu paņēmienu taisnes $Ax + By + C = 0$ uzzīmēšanai koordinātu plaknē.
	Pēta koordinātu plaknē dotas taisnes un tām perpendikulārus vektorus, lai saskatītu, formulētu un pamatotu sakarību starp taisnes koeficientiem, ja tā uzdota vispārīgā formā un tai perpendikulārā vektora koordinātām. Lieto iegūto sakarību, nosakot vai pamatojot plaknes figūras īpašības, nezināmos lielumus, piemēram, pamato daudzstūra malu paralelitāti vai perpendikularitāti.
	Piemēri. 1. Uzraksti vienādojumu taisnei, kuras katrs punkts atrodas vienādā attālumā no punktiem $C(4; 2)$ un $D(6; 7)$. 2. Dotas trijstūra ABC virsotņu koordinātas $A(-3;- 1)$, $B(2; 7)$, $C(5; 4)$. Nosaki vienādojumu taisnei, kas vilkta caur virsotni C perpendikulāri malai AB.

Temata apguves norise (turpinājums)

Taisnes vienādojums	Spriež, kā aprēķināt leņķi starp taisnēm, secina par vektoru izmantošanu. Vingrinās aprēķināt leņķi starp taisnēm plaknē.
	Piemērs. Aprēķini leņķi starp taisnēm $2x - y - 1 = 0$ un $0{,}5x - y - 1 = 0$.
	Iegūst, pamato un lieto formulu attāluma no punkta līdz taisnei noteikšanai ($d = \left\|\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right\|$, kur $Ax + By + C = 0$ ir taisnes vienādojums un $(x_0;\, y_0)$ ir dotais punkts).
	Piemēri. 1. Pierādi formulu attālumam no dotā punkta līdz taisnei plaknē. 2. Aprēķini attālumu no koordinātu sākumpunkta līdz taisnei $3x + 4y - 12 = 0$ divējādi: izmantojot tikai planimetrijas zināšanas vai izmantojot formulu punkta attālumam līdz taisnei. 3. Aprēķini attālumu starp taisnēm $3x - 4y + 20 = 0$ un $3x - 4y - 4 = 0$.
Taisnes uzdošanas veidi, to lietojums	Pēta, kā uzrakstīt taisnes vienādojumu, ja 1) dotas viena taisnes punkta koordinātas un taisnes virziena koeficients, 2) dotas taisnes divu punktu koordinātas, formulē sakarības $\frac{y-y_0}{x-x_0} = k$ un $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Vingrinās uzrakstīt taisnes vienādojumu, ja dotas viena taisnes punkta koordinātas un taisnes virziena koeficients, dotas divu taisnes punktu koordinātas. Lieto taisnes vienādojumu, lai noteiktu figūru veidu, to virsotņu koordinātas, pamatotu to īpašības, noteiktu nezināmos lielumus, izvēloties sev vai situācijai piemērotāko taisnes uzdošanas veidu, piemēram, pierāda, ka dotie četri punkti ir paralelograma virsotnes.
	Piemēri. 1. Uzraksti taisnes vienādojumu, kas iet caur punktiem: a) $A(3;\, 3)$ un $B(-3;\, 1)$, b) $A(x_1;\, y_1)$ un $B(x_2;\, y_2)$. 2. Koordinātu plaknē doti punkti $A(-3;\, -4)$, $B(2;\, -1)$, $C(5;\, 7)$. Nosaki koordinātas punktam D, ja $ABCD$ ir paralelograms.
	Lieto jau iepriekš apgūto un taisnes vienādojumu, risinot kompleksas problēmas fizikas kontekstā, piemēram, analītiski apraksta un raksturo divu objektu taisnvirziena kustības, nosaka, vai un kad ceļi krustosies, lai novērstu sadursmi [1].
Punktu ģeometriskā vieta, riņķa līnijas vienādojums	Pēta, formulē un pamato dažādu analītiski uzdotu sakarību punktu ģeometrisko vietu.
	Piemēri. 1. Pamato, ka sakarības $(y - 2x)(2y + x) = 0$ punktu ģeometrisko vietu veido divas perpendikulāras taisnes. 2. Attēlo koordinātu plaknē vienādojuma ar diviem mainīgajiem visu atrisinājumu kopu $(x - 3)(y + 2) = 0$. 3. Attēlo koordinātu plaknē visu to punktu ģeometrisko vietu, kuriem izpildās sakarība: a) $\|x - y\| = 4$, b) $\|x\| + \|y\| = 4$, c) $\|x\| - \|y\| = 4$.

Temata apguves norise (turpinājums)

Punktu ģeometriskā vieta, riņķa līnijas vienādojums	Sprież, nosaka un pamato to punktu ģeometrisko vietu, kurus analītiski apraksta vienādojums $x^2 + y^2 = 25$. Formulē vispārinājumu. Uzziņu avotos iegūst informāciju par to punktu ģeometrisko vietu, ko apraksta vienādojums $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. Vingrinās uzrakstīt riņķa līnijas vienādojumu formā $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, izmantojot koordinātu plaknē dotus riņķa līniju grafikus, un otrādi – uzskicēt riņķa līniju, ja dots tās vienādojums.
	Piemēri. 1. Uzraksti vienādojumu riņķa līnijai, kuras centrs atrodas punktā $(3; 5)$ un ordinātu asi tā krusto punktā $(0; 1)$. Nosaki koordinātas visiem iegūtās riņķa līnijas un koordinātu asu krustpunktiem. 2. Riņķa līnija novietota koordinātu plaknē tā, ka abas koordinātu asis tai pieskaras. Riņķa līnijas rādiuss ir 4, un tās centra koordinātas ir pretēji skaitļi. Nosaki visas iespējamās riņķa līnijas, ievērojot dotos nosacījumus, un uzraksti iegūto riņķa līniju vienādojumus.
	Sprież, skicē un nosaka atrisinājumu skaitu vienādojumu sistēmai, kas satur riņķa līnijas vienādojumu, nosaka un pārbauda atsevišķus atrisinājumus nevienādībām un to sistēmām ar diviem mainīgajiem, izsaka idejas, kā attēlot nevienādības vai nevienādību sistēmas visus atrisinājumus.
	Piemēri. 1. Nerisinot analītiski, nosaki atrisinājumu skaitu vienādojumu sistēmai $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y - x = 3 \end{cases}$. 2. Nosaki un attēlo koordinātu plaknē nevienādības $x^2 + y^2 < 9$ visu atrisinājumu kopu, izmantojot sakarības $x^2 + y^2 = 9$ grafisko attēlu. 3. Attēlo koordinātu plaknē sistēmas $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ y > x \end{cases}$ visu atrisinājumu kopu, paskaidro iespējas veikt pārbaudi.
	Uzziņu avotos iegūst informāciju par elipsi jeb to punktu ģeometrisko vietu, ko apraksta vienādojums $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

[1] Kompleksa uzdevuma piemērs. Tankkuģa "Aristides" ceļš

Šajā uzdevumā 1 vienība ir 1 km, vektors $(1; 0)$ norāda pārvietojumu uz austrumiem, bet vektors $(0; 1)$ norāda pārvietojumu uz ziemeļiem.
Zīmējumā parādīts naftas tankkuģa "Aristides" pārvietošanās trajektorija attiecībā pret Orto ostu, kas atrodas punktā $(0; 0)$.
Pārvietošanās laikā tankkuģa "Aristides" koordinātas nosaka sākuma stāvokļa koordinātas $(0; 28)$ un pārvietošanās par vektoru $\vec{a} = (6; -8)$ stundas laikā. Laiks ir stundu skaits pēc plkst. 12.00.

a) Nosaki "Aristides" atrašanās vietas koordinātas plkst. 13.00.

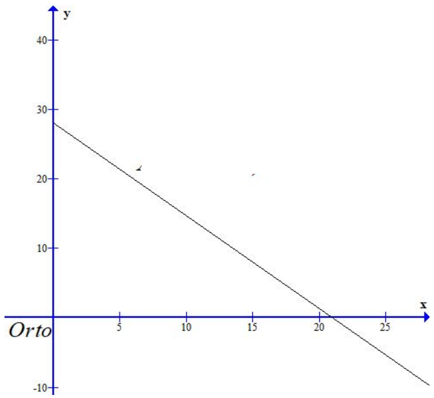
b) Uzraksti "Aristides" pārvietošanās trajektorijas vienādojumu formā $Ax + By = C$.

Zināms, ka kravas kuģis "Boadicea" ir nekustīgs punktā ar koordinātām $(18; 4)$.

Ar aprēķiniem parādi, ka abi kuģi sadursies, ja netiks mainīti nosacījumi, un nosaki sadursmes laiku.

Lai izvairītos no sadursmes, "Boadicea" plkst. 13.00 sāk pārvietoties par vektoru $\vec{a} = (15; 12)$ stundas laikā.

c) Nosaki attālumu starp abiem kuģiem plkst. 15.00.



4. Planimetrija

Ieteicamais laiks temata apguvei: 22–26 mācību stundas.

Temata apguves mērķis: padziļināt un sistematizēt pierādīšanas prasmes, lietojot dažādus paņēmienus un apgūtās zināšanas ģeometrisko figūru vai to elementu īpašību pierādīšanai, nezināmo lielumu noteikšanai un savstarpējā novietojuma raksturošanai.

Sasniedzamie rezultāti

Ziņas	Prasmes
• Pierādījums ir loģisku slēdzienu virkne. (M.Li.2.) • Riņķa līnijas loku raksturo garums (daļa no riņķa līnijas garuma) un leņķiskais lielums (daļa no pilna leņķa jeb 360°). (M.Li.1.; M.Li.6.) • Svarīgākie ar riņķa līniju saistītie leņķi ir centra leņķis un ievilkts leņķis. Sakarība starp tiem (ievilkta leņķa lielums ir puse no centra leņķa lieluma, ja tie balstās uz viena loka) ļauj noteikt un pamatot citu ar riņķa līniju saistītu leņķu lielumu. (M.Li.2.; M.Li.6.) • Centra leņķa lielums ir vienāds ar tam atbilstošā riņķa līnijas loka leņķisko lielumu. (M.Li.6.) • Sekante ir taisne, kas krusto riņķa līniju divos punktos. Sekantes nogriezni, kas atrodas starp šiem diviem punktiem, sauc par hordu. (M.Li.6.) • Lai pierādītu sakarības starp nogriežņiem, kas saistīti ar riņķa līniju, izmanto trijstūru līdzību un sakarības starp malām un leņķiem trijstūrī. (M.Li.2.; M.Li.6.) • Zinot riņķa sektora centra leņķi, var noteikt, kāda daļa no riņķa laukuma ir sektora laukums; riņķa segmenta laukuma aprēķināšanai izmanto laukuma īpašības. (M.Li.2.; M.Li.6.)	• Lieto sakarību starp centra leņķi un ievilktu leņķi. • Aprēķina riņķa sektora un riņķa segmenta laukumu. • Lieto riņķī ievilkta un ap to apvilkta četrstūra īpašības un pazīmes. • Lieto sakarības starp nogriežņiem riņķa līnijā. • Lieto sakarības starp nogriežņiem regulārā trijstūrī, kvadrātā, regulārā sešstūrī.
Komplekss sasniedzamais rezultāts	**Ieradumi**
• Pazīstamās un jaunās situācijās lieto pierādījumu no pretējā. (M.O.2.3.2.; M.A.2.3.2.) • Veido tiešo pierādījumu, izmantojot jau zināmo un lietojot apgūtos matemātikas instrumentus, piemēram, trijstūru līdzību, laukuma īpašības. (M.O.2.3.1.; M.A.6.1.1.) • Konkrētos piemēros skaidro jēdzienus “pietiekams nosacījums” un “nepieciešams nosacījums”, kā arī izteikuma formu “tad un tikai tad”. (M.A.2.3.3.)	• Plāno un pamato risinājuma soļus. • Izvēlas problēmas atrisināšanas piemērotāko un racionālāko paņēmienu.
• **Jēdzieni:** horda, sekante, segments, sektors, loka leņķiskais lielums, centra leņķis, ievilkts leņķis.	
• **Simboli un pieņemtie apzīmējumi:** $\overset{\frown}{AB}$, $\smile AB$.	

Temata apguves norise

Ar riņķa līniju saistīti leņķi un nogriežņi	Definē centra leņķi; skaidro jēdzienus “riņķa līnijas garums”, “pilns leņķis”, “riņķa līnijas loka garums”, “loka leņķiskais lielums”, “centra leņķis”, “centra leņķa lielums” un saistību starp tiem. Formulē secinājumus, t. sk. skaidro, ka riņķa līnijas loks ir ģeometriska figūra, kuru raksturo garums un leņķiskais lielums. Skaidro simbolu lietojumu.
	Piemērs. Riņķa līnijai, kuras rādiuss ir 8 cm, novilkti divi perpendikulāri diametri AB un CD. Nosaki loka AC leņķisko lielumu un loka AC garumu.
	Definē ievilktu leņķi. Pierāda sakarību starp centra leņķi un ievilktu leņķi, izmantojot jau zināmo par sakarībām starp malām un leņķiem trijstūrī. Saista iegūto sakarību ar jau zināmo, ka leņķis, kas balstās uz diametra, ir taisns. Secina, ka ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku, ir vienādi. Lieto sakarību starp centra leņķi un ievilktu leņķi.
	Piemēri. 1. Izmantojot vektoru skalāro reizinājumu, pierādi, ka ievilkts leņķis, kas balstās uz diametra, ir taisns. 2. Pierādi, ka ievilkta leņķa lielums ir vienāds ar pusi no tā loka leņķiskā lieluma, uz kuru tas balstās. Aplūko trīs gadījumus: 1) ievilktā leņķa malas iet caur riņķa līnijas centru, 2) riņķa centrs atrodas ievilktā leņķa iekšpusē, 3) riņķa centrs atrodas ievilktā leņķa ārpusē. 3. Ap vienādsānu trijstūri ABC $(AB = BC)$ apvilkta riņķa līnija ar centru punktā O. Aprēķini trijstūra ABC leņķus, ja $\sphericalangle AOC = 80°$.
	Atrod informāciju uzziņu literatūrā un definē sekanti un hordu, saista sekanti un riņķa līnijas pieskari, izmantojot paralēlo pārnesi. Izmantojot jau zināmo, aprēķina vai pierāda (kā teorēmas) leņķi starp hordām, leņķi starp sekantēm, leņķi starp pieskarēm. Lieto jaunā situācijā iegūtās zināšanas par leņķiem, kas saistīti ar riņķa līniju.
	Piemēri. 1. Horda savelk $120°$ lielu loku. Aprēķini: a) loka garumu, ja hordas garums ir $6\sqrt{3}$ cm; b) hordas garumu, ja loka garums ir $2\sqrt{3}\,\pi$ cm. 2. No punkta K vilktās sekantes krusto riņķa līniju attiecīgi punktos A, B un C, D. Zināms, ka loka AC leņķiskais lielums ir $40°$ un loka BD leņķiskais lielums ir $110°$. Aprēķini leņķi starp sekantēm KB un KD.
	Apdomā un plāno pierādījumu teorēmai par krustiskām hordām, izsakot idejas par paņēmieniem vai zināšanām, kas varētu būt noderīgas; secina par trijstūru līdzību. Pierāda teorēmu par krustiskām hordām un teorēmu par pieskari un sekanti; secina, ka visām sekantēm, kas novilktas caur vienu un to pašu punktu, sekantes nogriežņa un tās ārējās daļas nogriežņu garumu reizinājumi ir vienādi. Lieto jaunā vai kompleksā situācijā iegūtās zināšanas par nogriežņiem, kas saistīti ar riņķa līniju.
	Piemēri. 1. Izmantojot trijstūru līdzību, pierādi, ka krustiskām hordām AB un CD, kas krustojas punktā M, ir spēkā sakarība $AM \cdot MB = CM \cdot MD$. 2. Riņķa līnijas rādiuss ir 11 cm. Caur punktu, kas atrodas 7 cm attālumā no riņķa līnijas centra, novilkta 18 cm gara horda. Cik cm garos nogriežņos šis punkts sadala novilkto hordu? 3. Pierādi, ka riņķa līnijas diametrs, kas iet caur hordas viduspunktu, ir perpendikulārs hordai.

Temata apguves norise (turpinājums)

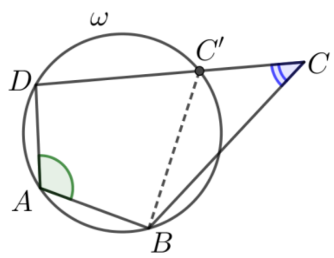
Riņķī ievilkts četrstūris, ap riņķi apvilkts četrstūris	Definē ievilktu četrstūri. Pierāda teorēmu par riņķa līnijā ievilkta četrstūra pretējo leņķu summu, izmantojot ievilktus leņķus. Pierāda apgriezto teorēmu (ievilkta četrstūra pazīmi), lietojot pierādījumu no pretējā. [1]. Formulē teorēmu, izmantojot izteikuma formu "tad un tikai tad". Definē apvilktu četrstūri. Pierāda teorēmu par pieskaru nogriežņu garumiem. Izmanto iegūto rezultātu un pierāda teorēmu par četrstūra, kas apvilkts ap riņķa līniju, pretējo malu garumu summu vienādību, izmantojot pieskares īpašību. Formulē un pierāda (izmantojot pierādījumu no pretējā) apgriezto teorēmu – riņķa līnijai apvilkta četrstūra pazīmi. Formulē teorēmu, izmantojot izteikuma formu "tad un tikai tad". Lieto pierādītās teorēmas.
	Piemēri. 1. Pierādi, ka ievilkta četrstūra pretējo leņķu summa ir $180°$. Formulē pierādītai teorēmai apgriezto teorēmu. 2. Aprēķini riņķa līnijā ievilkta četrstūra leņķus, ja trīs pēc kārtas ņemti leņķi attiecas kā $4:6:5$. 3. Pierādi, ka ap riņķa līniju apvilkta četrstūra pretējo malu garumu summas ir vienādas. 4. Apvilkta četrstūra triju pēc kārtas ņemtu malu garumu attiecība ir $1:4:6$. Aprēķini malu garumus, ja četrstūra perimetrs ir 42 cm. 5. Ap riņķi ar rādiusu r apvilkta vienādsānu trapece. Aprēķini trapeces perimetru un laukumu, ja trapeces šaurais leņķis ir α.
Riņķa daļas, to laukumi	Definē riņķa sektoru un riņķa segmentu. Pierāda riņķa sektora laukuma un riņķa segmenta laukuma aprēķināšanas formulas. Lieto iegūtās sakarības, risinot uzdevumus ar matemātisku un praktisku kontekstu. Lieto jaunā vai kompleksā situācijā iegūtās zināšanas, piemēram, aprēķina sektorā ievilkta riņķa laukumu, ja dots sektora rādiuss un sektora centra leņķis. Uzziņu literatūrā noskaidro trūkstošo informāciju, piemēram, kā definē sektorā ievilktu riņķa līniju.
	Piemēri. 1. Aprēķini sektora rādiusu, ja sektora centra leņķis ir $72°$ un sektora laukums ir $20\pi\ \mathrm{cm}^2$. 2. Aprēķini mazākā segmenta laukumu, ja hordas garums ir a un tā savelk $120°$ loku. 3. Riņķa sektorā, kura loks ir $60°$, ievilkts riņķis. Nosaki ievilktā riņķa un sektora laukumu attiecību.
Ievilkti un apvilkti regulāri daudzstūri	Pierāda un lieto sakarības starp: 1) regulāra trijstūra malu, augstumu, ievilktās riņķa līnijas un apvilktās riņķa līnijas rādiusu, 2) kvadrāta malu, diagonāli, ievilktās riņķa līnijas un apvilktās riņķa līnijas rādiusu, 3) sakarības starp nogriežņiem regulārā sešstūrī, regulārā n-stūrī.
	Piemēri. 1. Regulārā trijstūrī ievilktās riņķa līnijas rādiuss ir r. Aprēķini trijstūra laukumu. 2. Kvadrāta diagonāles garums ir d. Aprēķini kvadrāta laukumu. 3. Pierādi ap regulāru n-stūri apvilktās riņķa līnijas rādiusa aprēķināšanas formulu $R=\frac{a}{2\sin\frac{180°}{n}}$, kur a ir regulārā n-stūra malas garums. 4. Pierādi regulārā n-stūri ievilktās riņķa līnijas rādiusa aprēķināšanas formulu $r=\frac{a}{2\mathrm{tg}\frac{180°}{n}}$, kur a ir regulārā n-stūra malas garums.

Temata apguves norise (turpinājums)

Pierādīšanas paņēmieni	Lieto tiešo pierādījumu, izmantojot jau pierādīto.
	Piemēri. 1. Pierādi trijstūrim apvilktās riņķa līnijas rādiusa aprēķināšanas formulu $R = \frac{a}{2\,\sin A}$, izmantojot ievilktu leņķu īpašību un sakarību taisnleņķa trijstūrī (a ir leņķa A pretmala). 2. Pierādi sakarību starp paralelograma malām un diagonālēm, izmantojot kosinusu teorēmu. 3. Pierādi, ka trijstūra leņķa bisektrise sadala pretējo malu nogriežņos, kas proporcionāli to attiecīgajām piemalām, izmantojot sinusu teorēmu.
	Lieto tiešo pierādījumu, izmantojot trijstūru līdzību.
	Piemēri. 1. Izmantojot dotu pierādījuma plānu, pierādi bisektrises garuma aprēķināšanas formulu. 2. Caur trapeces diagonāļu krustpunktu novilkts nogrieznis, kas paralēls tā pamatiem. Pierādi, ka šī nogriežņa garums ir $\frac{2ab}{a+b}$, kur a un b ir trapeces pamati.
	Lieto tiešo pierādījumu, izmantojot trijstūra nevienādību vai lauztas līnijas īpašību.
	Piemēri. 1. Pierādi, ka trapeces sānu malu summa ir lielāka nekā pamatu starpība. 2. Pierādi, ka jebkura trijstūra mediānu garumu summa ir mazāka nekā trijstūra perimetrs, bet lielāka nekā trijstūra pusperimetrs.
	Lieto tiešo pierādījumu, izmantojot laukuma īpašības.
	Piemēri. 1. Trapeces $ABCD$ ($AD \parallel BC$) diagonāles krustojas punktā O. Pierādi, ka trijstūru ABO un COD laukumi ir vienādi. 2. No regulāra trijstūra patvaļīga iekšējā punkta ir novilkti perpendikuli pret malām. Pierādi, ka perpendikulu garumu summa nav atkarīga no iekšējā punkta izvēles (tas ir, ka garumu summa ir konstanta). 3. Pierādi trijstūra laukuma aprēķināšanas formulu $S = r \cdot p$, kur r – ievilktās riņķa līnijas rādiuss un p – trijstūra pusperimetrs. 4. Pierādi paralelograma laukuma aprēķināšanas formulu $S = \frac{1}{2} d_1\, d_2 \sin\alpha$, kur d_1, d_2 – paralelograma diagonāles, α – leņķis starp tām.

[1] Ievilkta četrstūra pazīmes pierādījums

Dots, ka $\sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD = 180°$ (sk. attēlu). Novelkam riņķa līniju ω, kas iet caur punktiem A, B, D. Pieņemsim, ka punkts C neatrodas uz ω, un CD krustpunktu ar ω apzīmēsim ar C'. Tā kā četrstūris $ABC'D$ ir ievilkts četrstūris, tad $\sphericalangle BAD + \sphericalangle BC'D = 180°$. Līdz ar to esam ieguvuši, ka $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BC'D$, tātad $BC' \parallel BC$, jo kāpšļu leņķi ir vienādi. Iegūta pretruna jo BC' un BC krustojas punktā B. Tātad pieņēmums ir aplams un punkts C atrodas uz ω jeb ap četrstūri $ABCD$ var apvilkt riņķa līniju.



1. Leņķa paplašinājums un trijstūra elementu aprēķināšana	2. Vektori	3. Koordinātu metode	4. Planimetrija	5. Kopas, matemātiskā indukcija, kombinatorika	6. Funkcijas īpašības	7. Algebriskās daļas, daļveida vienādojumi un nevienādības	8. Daļveida funkcija, funkcijas robeža

5. Kopas, matemātiskā indukcija, kombinatorika

Ieteicamais laiks temata apguvei: 30–34 mācību stundas.

Temata apguves mērķis: pilnveidot prasmi raksturot kopas, lietot darbības ar kopām, noteikt kopas elementu eksistenci, īpašības un skaitu. Padziļināt izpratni par vispārīgu apgalvojumu patiesuma pierādīšanu, apgūstot un lietojot matemātiskās indukcijas principu dažādos matemātikas kontekstos.

Sasniedzamie rezultāti

Ziņas	Prasmes
• Kopa ir matemātikas pamatjēdziens, ko nedefinē, bet tikai apraksta – kopa ir jebkuru objektu apkopojums pēc kādas raksturīgas īpašības. Kopas var uzdot: 1) uzskaitot visus kopas elementus, 2) uzrakstot formulu visu elementu noteikšanai, 3) uzrakstot īpašību, kas raksturo visus kopas elementus. (M.Li.5.) • Starp skaitļu kopām $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ir saistība, ko pieraksta $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Eksistē skaitļu kopas, kas ir plašākas nekā reālo skaitļu kopa $\mathbb{R}$, piemēram, komplekso skaitļu kopa $\mathbb{C}$. (M.Li.1.; M.Li.5.) • Kopu apvienojumu, šķēlumu, starpību izmanto, lai veidotu un pētītu kopas ar noteiktām īpašībām. Darbības ar kopām palīdz attēlot gan matemātiskas sakarības, gan modelēt reālas situācijas. (M.Li.5.) • Indukcija ir spriešanas veids, kurā no konkrētiem apgalvojumiem iegūst vispārīgu apgalvojumu. Dažu konkrētu apgalvojumu patiesums neļauj secināt par vispārīgā apgalvojuma patiesumu. (M.Li.2.) • Matemātiskās indukcijas princips ir pierādīšanas paņēmiens, ko parasti to lieto, lai pierādītu, ka kāds apgalvojums ir patiess visām naturālām vērtībām. (M.Li.2.) • Kombinatorikai raksturīgi jautājumi: vai eksistē elements ar noteiktām īpašībām, kā to iegūt, cik pavisam ir tādu elementu, kā iegūt tos visus. Risināšanai izmanto spriedumus, shēmas, grafus vai formulas. (M.Li.2.; M.Li.5.) • Skaitļa n faktoriāls (to pieraksta $n!$) ir visu naturālo skaitļu no 1 līdz n (ieskaitot) reizinājums jeb $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$. (M.Li.5.) • Izlase ir apakškopa ar noteiktām īpašībām. Nesakārtotām izlasēm (t. sk. kombinācijām) nav svarīga elementu secība, bet sakārtotām izlasēm (t. sk. variācijām, permutācijām) ir svarīga elementu secība. No katras nesakārtotas izlases elementiem var izveidot sakārotas izlases noteiktā skaitā. (M.Li.5.) • No konkrētā uzdevuma satura jāsecina, kādas izlases izmantot risinājumā – nesakārtotas vai sakārtotas. Izlašu skaitu var noteikt, spriežot vai lietojot atbilstošu formulu. (M.Li.2.; M.Li.5.)	• Raksturo īpašības, kas piemīt kopas visiem elementiem, uzdod kopu, izvēloties piemērotu veidu. • Nosaka, vai kopa galīga/bezgalīga; skaidro saistību starp skaitļu kopām $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, nosaka, vai objekts pieder kopai. • Nosaka galīgu vai bezgalīgu kopu apvienojumu, šķēlumu un starpību, darbības ar kopām attēlo ar Venna diagrammu. • Nosaka un pamato kopas elementa vai apakškopas ar noteiktu īpašību eksistenci. • Nosaka un pamato izlases veidu (sakārtota, nesakārtota) konkrētos piemēros, izmantojot izpratni par kontekstu. • Aprēķina skaitļa faktoriālu, izpilda darbības ar faktoriāliem, t. sk., ja tie doti vispārīgā veidā. • Nosaka objektu/elementu, apakškopu/izlašu skaitu, spriežot vai izmantojot formulas variāciju, permutāciju un kombināciju skaita aprēķināšanai. • Konkrētos piemēros skaidro matemātiskās indukcijas principa izmantošanu: nosaka bāzi, raksturo induktīvo soli, veido pierādījumu (induktīvo pāreju) vienkāršās situācijās. • Veido Ņūtona binoma $(a+b)^n$ izvirzījumu kāpinātāja n nelielām (nepārsniedz 6) vērtībām, nosaka noteiktus saskaitāmos, to koeficientus vai sakarības starp tiem, ievērojot dotos nosacījumus.

Komplekss sasniedzamais rezultāts	Ieradumi
• Pēta, formulē un pierāda galīgas kopas visu iespējamo apakškopu (ieskaitot tukšu kopu) skaitu, kombināciju skaita īpašības; izvēlas sev piemērotu pierādīšanas paņēmienu. (M.A.2.1.1.; M.A.2.3.1.; M.A.2.3.4.; M.A.5.1.1.) • Lieto matemātiskās indukcijas principu jaunās situācijās, piemēram, pierādot formulas permutāciju un variāciju skaita aprēķināšanai, izteiksmes dalāmību ar naturālu skaitli. (M.A.2.3.4.; M.A.5.1.1.) • Pēta, formulē un pierāda likumsakarības algebriskās izteiksmēs un to pierakstā, t. sk., lietojot Ņūtona binomu. (M.A.2.1.2.; M.A.5.1.2.) • Modelē situāciju ar vienādojumu, nevienādību, lietojot formulas variāciju vai kombināciju skaita noteikšanai, atrisina matemātisko modeli un izvērtē iegūtā atrisinājuma atbilstību kontekstam. (M.A.5.1.3.; M.O.2.2.1.)	• Veido dotās informācijas un risinājuma gaitas shematiskus attēlojumus, attīstot ieradumu plānot un vadīt savu domāšanas procesu, strukturēti un uzskatāmi attēlot informāciju. • Apzināti izvēlas izmantot spriešanu vai formulas izlašu skaita noteikšanai, attīstot ieradumu meklēt dažādus risinājumus, plānot un vadīt savu domāšanas procesu. • Apskata dažādus gadījumus/iespējas, lai formulētu pieņēmumu.
• **Jēdzieni:** kopa, kopas elements, tukša kopa, apakškopa, galīga kopa, bezgalīga kopa, kopu apvienojums/šķēlums/starpība/papildinājums, izlase, sakārtota izlase, nesakārtota izlase, permutācijas, skaitļa faktoriāls, variācijas, kombinācijas, matemātiskās indukcijas princips (MIP), Ņūtona binoms.	
• **Simboli un pieņemtie apzīmējumi:** $A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B,\ A \subset B,\ n!,\ P_n,\ A_n^k,\ C_n^k,\ (a+b)^n,\ \Sigma,\ \vdots$.	

Temata apguves norise

Kopas, to uzdošanas veidi	Ar piemēriem ilustrē, skaidro ar kopām saistītos jēdzienus: “kopa”, “kopas elements”, “apakškopa”, “galīga kopa”, “bezgalīga kopa”, “tukša kopa”. Nosaka, vai kopa galīga/bezgalīga; argumentē atbildi. Izmanto ar kopām saistītos jēdzienus, lai raksturotu ar matemātiku un citām mācību jomām saistītas klasifikācijas grupas, piemēram, četrstūru klasifikācija, dzīvnieku vai augu klasifikācija, ķīmisko vielu klasifikācija. Nosaka objektu piederību kopai (t. sk. skaitļu piederību kādai no kopām $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$). Lieto kopu simboliku, lai pierakstītu apgalvojumus par elementu, apakškopu piederību kopai, t. sk., nosakot saistību starp skaitļu kopām $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.
	Piemēri. 1. Starp kopām $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ nosaki kopu: a) kas ir pozitīvo skaitļu kopas apakškopa, b) kuras apakškopa ir pozitīvo skaitļu kopa. 2. Kopas P elementi ir visi paralelogrami, kopas T elementi ir visi taisnstūri, kopas R elementi ir visi rombi un kopas K elementi ir visi kvadrāti. Pieraksti sakarības starp šīm kopām, lietojot simbolu $\subset$.
	Veido dotu kopu apakškopas, t. sk. visas; formulē vispārinājumu.
	Piemēri. 1. Uzraksti kopas $\{a;\ b;\ c\}$ visas iespējamās apakškopas. 2. Veic izpēti un formulē pieņēmumu par galīgas kopas visu iespējamo apakškopas skaitu, ja kopas elementu skaits ir n.

Temata apguves norise (turpinājums)

Kopas, to uzdošanas veidi	Vingrinās uzdot kopu: 1) nosakot kopas visus elementus, 2) raksturojot īpašību, kas piemīt dotas kopas visiem elementiem un nepiemīt nevienam citam objektam, 3) ar formulas palīdzību, korekti lietojot simbolisko pierakstu. Pārrunā, secina, kādās situācijās ērtāk izmantot vienu vai otru veidu.
	Piemēri. 1. Lietojot pieņemtos apzīmējumus, ar formulu uzdod kopu, kuru veido visi skaitļa 3 dalāmie. 2. Lietojot pieņemtos apzīmējumus, ar formulu uzdod kopu, kuru veido visi naturālo skaitļu kvadrāti.
	Nosaka un pamato kopas elementa vai apakškopas ar noteiktu īpašību eksistenci.
	Piemēri. 1. Nosaki mazāko sešciparu skaitli, kura pierakstā ir tikai cipari $0, 1, 2, 3$ un tas dalās ar 9 (cipari var atkārtoties un visi cipari nav jāizmanto). 2. Nosaki (vai pamato, ka tāds neeksistē) mazāko: a) reālo skaitli, b) veselo skaitli, kas pieder nevienādības $x^2 - 16 < 0$ atrisinājumu kopai.
Darbības ar kopām	Pastāsta, ko jau zina par darbībām ar kopām – apvienojumu, šķēlumu, starpību, papildinājumu ($A \setminus B$ ir kopas B papildinājums līdz A, ja B ir A apakškopa). Sadarbojas mazā grupā, izvērtē savu līdzšinējo pieredzi un veido apkopojumu par darbību ar kopām un ar kopām saistītās terminoloģijas izmantošanu dažādos matemātiskos kontekstos; pastāsta citiem, uzklausa citu veidotos apkopojumus.
	Piemēri. 1. Kopas A elementi ir visi skaitļa 2 dalāmie, bet kopas B elementi ir visi skaitļa 3 dalāmie. Raksturo kopas $A \cap B$ elementus. 2. Dots kvadrātvienādojuma atrisinājums. Daudzpunktes vietā ievieto atbilstošu saikli un pamato izvēli, lietojot ar kopām saistīto terminoloģiju. $(x - 2) \cdot (x + 3) = 0$ $x - 2 = 0$ .... $x + 3 = 0$ $x_1 = 2$ $x_2 = -3$ 3. Paskaidro doto nevienādību sistēmu atrisināšanu, lietojot ar kopām saistīto terminoloģiju. a) $\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x + 3 < 0 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x - 2 < 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases}$
	Izpilda darbības ar galīgām un bezgalīgām kopām (gan ar sadzīvisku saturu, gan matemātisku), lieto atbilstošu pierakstu $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, A \subset B$.
	Piemēri. 1. Dotas kopas $A = \{1; 3; 5; 7; 9; 11\}$ un $B = \{1; 3; 5; 13; 17; 19\}$. Nosaki elementu skaitu kopā $A \cup B$. 2. Kurā no atbilžu variantiem pierakstīta kopa, ko veido visi pozitīvie skaitļi un visi negatīvie skaitļi? **A** $\mathbb{R} \cap \{0\}$ **B** $\mathbb{R} \cup \{0\}$ **C** $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ **D** $\mathbb{R}$ 3. Kopu A veido visi riņķa punkti, bet kopu B veido visi šī riņķa iekšējie punkti. Izmantojot darbības ar kopām A un B, nosaki kopu, kuras elementi ir visi šim riņķim atbilstošās riņķa līnijas punkti. 4. Nosaki kopas $\mathbb{R} \setminus D$ visus elementus, ja kopa D ir funkcijas $y = \frac{4}{x}$ definīcijas kopa.
	Modelē un risina situāciju uzdevumus ar loģikas elementiem, izmantojot darbības ar kopām, Venna diagrammas. Veido situāciju uzdevumus ar loģikas elementiem, risina citu izveidotos piemērus, salīdzina un apspriež risinājumus.
	Piemērs. Skolā centralizētos eksāmenus kārtoja 20 skolēni. No tiem bioloģijas eksāmenu kārtoja 10 skolēni, fizikas eksāmenu kārtoja 5 skolēni. Zināms, ka 3 skolēni kārtoja gan bioloģijas, gan fizikas eksāmenu. Cik skolēnu nekārtoja nevienu no šiem abiem eksāmeniem?

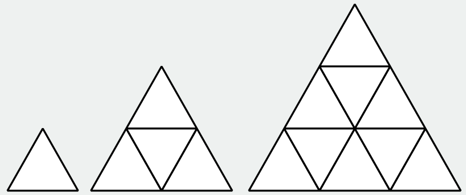
Temata apguves norise (turpinājums)

Matemātiskās indukcijas princips	Izsaka domas par to, kā pierādīt agrāk iegūto un formulēto pieņēmumu par visu iespējamo apakškopu (ieskaitot tukšu kopu) skaitu kopai, kas satur elementus. Risina uzdevumus ar vienkāršu matemātisku kontekstu, kas ļauj patstāvīgi nonākt pie idejas par MIP.
	Piemēri. 1. Pierādi, ka katru naudas daudzumu, kas lielāks nekā 8 centi, var samaksāt ar 2 un 5 centu monētām. 2. Pierādi, ka jebkuru kvadrātu var sagriezt n kvadrātos, ja $n \geq 6$.
	Iegūst informāciju par matemātiskās indukcijas principu – pierādīšanas paņēmienu –, ko galvenokārt lieto, lai pierādītu, ka kāds apgalvojums ir patiess visām naturālām vērtībām. Lasa pierādījumu, kurā izmantots MIP, komentē, jautā par neskaidro, saskata un raksturo galvenos soļus vai idejas.
	Piemērs. Lasi dotos pierādījumus, lietojot MIP. Īsi raksturo atšķirīgo no līdz šim lietotajiem pierādīšanas paņēmieniem, formulē jautājumus par neskaidro.
	Skaidro indukcijas bāzi, indukcijas soli (soļus), kā lietot simbolisko pierakstu. Izsaka idejas, atrod informāciju, kā vizuāli interpretēt pierādīšanas algoritmu ar MIP.
	Piemērs. Dota skaitļu virkne $1; 2; 4; 8; \ldots$, kuras katrs nākamais loceklis ir divas reizes lielāks nekā iepriekšējais. Pierādi, ka katru divu pēc kārtas ņemtu virknes locekļu summa dalās ar 3. Vispirms apraksti risinājumu vārdiski, tad pieraksti, lietojot simbolisko valodu.
	Lieto MIP, pierādot identitātes, nevienādības, dalāmību.
	Piemēri. 1. Pierādi, ka $(4^n - 1)$ dalās ar 3, ja n ir naturāls skaitlis. 2. Pierādi vienādību $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$, kur n ir naturāls skaitlis. 3. Pierādi aritmētiskās progresijas vispārīgā locekļa aprēķināšanas formulu un pirmo n locekļu summas aprēķināšanas formulu.
Nesakārtotas un sakārtotas izlases	Konkrētos piemēros nosaka elementu skaitu un secina, ka dažādā secībā novietoti vienas un tās pašas apakškopas elementi ir ar dažādu nozīmi. Secina, ka līdztekus jēdzieniem “kopa” un “apakškopa” nepieciešams jauns jēdziens – “izlase”.
	Piemērs. Četrzīmju koda veidošanai var izmantot ciparus $1; 2; 3; 4$ un 5, turklāt katru tieši vienu reizi. a) Uzraksti divus dažādus kodus, kurus veido vieni un tie paši cipari. b) Nosaki, cik dažādus kodus var izveidot.
	Lasa, skaidro izlases, nesakārtotas izlases, sakārtotas izlases definīcijas. Spriež par saistību starp jēdzieniem “kopa”, “apakškopa” un “nesakārtotas, sakārtotas izlases”. Vingrinās veidot kopu, piemēram, $\{a; b; c; d\}$, visas nesakārtotas un sakārtotas izlases, kurās ir viens, divi un trīs elementi, lietojot pilno pārlasi, skaidrojot savu paņēmienu informācijas strukturēšanai. Lasa dotus situāciju aprakstus un nosaka, vai situācijas matemātiskais modelis ir nesakārtota vai sakārtota izlase. Veido uzdevumus/situāciju aprakstus atbilstoši norādei par to matemātisko modeli – nesakārtota vai sakārtota izlase. Argumentē, pamato satura/konteksta atbilstību. Izvērtē citu veidotos uzdevumus/situāciju aprakstus. Nosaka nesakārtotu un sakārtotu izlašu skaitu spriežot.
	Piemēri. 1. Lasi dotās situācijas un nosaki iegūtās izlases veidu: a) no 12 firmas darbiniekiem tiek izraudzīti 4, kas dosies komandējumā; b) tiek izlozēta 6 konkursa dalībnieku uzstāšanās secība; c) no 4 sportistiem tiek izvēlēti 2, kas dosies uz Eiropas čempionātu; d) no 4 sportistiem tiek izvēlēti 2, no kuriem pirmais dosies uz Eiropas čempionātu, bet otrais – uz olimpiskajām spēlēm. 2. Izveido piemēru a) nesakārotai izlasei, b) sakārtotai izlasei; pamato izlases veidu.

Temata apguves norise (turpinājums)

Variāciju, permutāciju skaita aprēķināšanas formulas	Uzzina skaitļa faktoriāla jēdzienu. Vingrinās lietot skaitļa faktoriālu, pārveidojot skaitliskas izteiksmes, veicot algebriskus pārveidojumus ar izteiksmēm, kas satur skaitļa faktoriālu. Lasa, skaidro, kā saprot definīciju variācijām no n elementiem pa k elementiem $(k \leq n)$, to simbolisko pierakstu, lielumus variāciju skaita aprēķināšanas formulā. Secina par formulu permutāciju skaita noteikšanai. Pierāda formulu variāciju skaita noteikšanai divējādi – izmantojot reizināšanas likumu, lietojot matemātiskās indukcijas principu. Vingrinās lietot variāciju, permutāciju skaita aprēķināšanas formulas.
Kombināciju skaita aprēķināšanas formulas un īpašības	Lasa, skaidro, kā saprot definīciju kombinācijām no n elementiem pa k elementiem $(k \leq n)$ un to simbolisko pierakstu, lielumus kombināciju skaita aprēķināšanas formulās. Aplūko konkrētus piemērus un secina par saistību starp lielumiem A_n^k, P_k un C_n^k; formulē to vārdiski un ar formulu. Pierāda formulu kombināciju skaita noteikšanai divējādi – izmantojot reizināšanas likumu, lietojot matemātiskās indukcijas principu; lieto iegūto formulu. Konkrētos piemēros secina par saistību starp C_n^k un C_n^{n-k} un to pierāda ar matemātiskās indukcijas principu, algebriski vai lietojot interpretāciju metodi (ja no n elementiem izvēlos k elementus, tad neizvēlos $n - k$ elementus, kur $k \leq n$). Veido Paskāla trijstūri, izmantojot vērtības C_n^k. Saskata un formulē likumsakarības Paskāla trijstūrī vārdiski, pieraksta tās ar pieņemtajiem simboliem. Uzklausa citu formulētās likumsakarības, papildina savu iegūto rezultātu. Pierāda sakarību $C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$ ar matemātiskās indukcijas principu vai algebriski.
	Piemēri. 1. Par slīpni sauksim jebkuru skaitļu novietojumu Paskāla trijstūrī, kas paralēls vieninieku novietojumam. Izpēti un apraksti likumsakarību, kas ļauj noteikt "jebkuras slīpnes visu, sākot no 1, pēc kārtas galīgā skaitā ņemtu skaitļu summu". Formulē vispārinājumu un pierādi tā patiesumu. 2. Izpēti un apraksti likumsakarību, kas pastāv starp skaitļiem, ko iegūst, Paskāla trijstūra vienā rindā novietotos skaitļus pierakstot kā vienu skaitli, piemēram, trešās rindas skaitļi veido četrciparu skaitli 1331, bet piektās rindas skaitļi veido skaitli 15101051. Izvērtē iespējas pierādīt formulēto likumsakarību.
	Risina situāciju uzdevumus, veidojot vienādojumu, nevienādību, lietojot formulas variāciju vai kombināciju skaita noteikšanai, izvērtē iegūtā atrisinājuma atbilstību kontekstam.
	Piemēri. 1. Futbola turnīrā katra komanda sacentās ar katru vienu reizi. Kopā turnīrā tika aizvadītas 78 spēles. Cik komandu piedalījās turnīrā? 2. Plaknē novilka 6 paralēlas taisnes un pēc tam vēl novilka n savā starpā paralēlas taisnes, kuras krustoja sākumā novilktās, izveidojot 150 paralelogramus (katra paralelograma virsotnes ir kādi 4 no taišņu krustpunktiem). Nosaki n.
Ņūtona binoms	Pēta pakāpju $(a+b)^0$, $(a+b)^1$, $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$, ..., $(a+b)^n$, ... izvirzījumus (izteikšanu polinoma veidā), formulē saskatītās likumsakarības, kas raksturo izvirzījuma locekļu skaitu un skaitliskos koeficientus, t. sk. spriedumu pamatošanai izmanto kombinācijas un to skaita aprēķināšanas formulu. Formulē pieņēmumu par izvirzījuma koeficientu saistību ar Paskāla trijstūri; pierāda Ņūtona binoma formulu $(a+b)^n$, izmantojot matemātiskās indukcijas principu. Lieto Ņūtona binomu, nosakot noteiktus saskaitāmos, to koeficientus vai sakarības starp tiem, ievērojot dotos nosacījumus.
	Piemēri. 1. Uzraksti Ņūtona binoma izvirzījumu, ja $a = 1$ un pieraksti rezultātu, lietojot summas simbolu Σ. 2. Aprēķini binoma $(\sqrt{5} + \sqrt{3})^8$ izvirzījuma piekto saskaitāmo. 3. Nosaki iracionālo skaitļu skaitu binoma $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^{12}$ izvirzījumā. 4. Pierādi, ka $11^{10} - 1$ dalās ar 100.

Temata apguves norise (turpinājums)

Likumsakarību matemātiskos objektos pētīšana, formulēšana un pierādīšana	Pēta, formulē un pierāda likumsakarības vispārīgi uzdotās algebriskās izteiksmēs. Pēta, formulē, apraksta algebriski un pierāda likumsakarības "figūru virknēs", sakarības starp kārtas numuru un figūras lielumiem.
	Piemēri. 1. Dota izteiksme $(a+1)^n + (a-1)^n$, kur $n \in \mathbb{N}$. Izpēti, vai pastāv sakarība starp n un no nulles atšķirīgo locekļu skaitu, ja izteiksme ar atbilstošo n pārveidota par polinomu normālformā. Pamato savus spriedumus. 2. Figūras tiek veidotas no vienāda garuma nogriežņiem (sk. attēlu) pēc noteiktas likumsakarības. Ar $s(n)$ apzīmē vienādo nogriežņu skaitu, kas izmantoti n vērtībai atbilstošās figūras izveidei, piemēram, $s(1)=3$; $s(2)=9$. Izvēlies secību uzdevumu a) un b) risināšanai. a) Nosaki $s(10)$, parādi risinājumu. b) Uzraksti formulu $s(n)$ aprēķināšanai, paskaidro, kā to ieguvi. Pierādi, ka formula patiesa visiem naturāliem n.  $n=1$ $n=2$ $n=3$

1. Leņķa paplašinājums un trijstūra elementu aprēķināšana	2. Vektori	3. Koordinātu metode	4. Planimetrija	5. Kopas, matemātiskā indukcija, kombinatorika	6. Funkcijas īpašības	7. Algebriskās daļas, daļveida vienādojumi un nevienādības	8. Daļveida funkcija, funkcijas robeža

6. Funkcijas īpašības

Ieteicamais laiks temata apguvei: 20–24 mācību stundas.

Temata apguves mērķis: sistematizēt un padziļināt zināšanas par funkcijām un to īpašībām, t. sk. virkni kā naturāla argumenta funkciju.

Sasniedzamie rezultāti

Ziņas	Prasmes
• Sakarība starp kopām X un Y ir funkcija, ja katram $x \in X$ eksistē tieši viens $y \in Y$. (M.Li.4.) • Saliktas funkcijas arguments ir kāda cita funkcija. (M.Li.4.) • Galvenās funkciju īpašības ir: paritāte (pāra vai nepāra funkcija), periodiskums, monotonitāte (augoša vai dilstoša funkcija), funkcijas nulles un vienādu zīmju intervāli, funkcijas lielākā/mazākā vērtība. (M.Li.4.) • No funkcijas grafika var spriest par tās īpašībām, bet dažkārt grafiskais attēlojums par tām var maldināt; funkcijas īpašības pierāda analītiski. (M.Li.2.; M.Li.4.) • Augošas, dilstošas vai nemainīgas/konstantas funkcijas ir monotonu funkciju piemēri. Ir funkcijas, kas nav monotonas, piemēram, kvadrātfunkcija. (M.Li.4.) • Pāra funkcijas grafiks ir simetrisks attiecībā pret Oy asi. Nepāra funkcijas grafiks ir simetrisks attiecībā pret koordinātu sistēmas sākumpunktu. (M.Li.4.) • Funkcijas f vērtību argumentam a pieraksta ar simbolu $f(a)$. (M.Li.1.) • Funkcija ir periodiska, ja eksistē tāds skaitlis $T \neq 0$, ka katrai argumenta x vērtībai ir spēkā vienādība $f(x+T) = f(x)$. (M.Li.4.) • Funkcijas asimptotas ir taisnes, kam neierobežoti tuvojas funkcijas grafiks. (M.Li.2.; M.Li.4.) • Skaitļu virkne ir naturāla argumenta funkcija. Virknes vispārīgā locekļa formula ļauj noteikt katram naturālam skaitlim n atbilstošo virknes locekli. (M.Li.4.) • Skaitļu virkni var definēt arī rekurenti – norādot virknes pirmo locekli (dažus pirmos) un formulu, ar kuras palīdzību jebkuru virknes locekli var iegūt no iepriekšējā virknes locekļa (dažiem iepriekšējiem). (M.Li.1.; M.Li.4.) • Skaitļu virkne ir dilstoša, ja katrs nākamais tās loceklis ir mazāks nekā iepriekšējais; skaitļu virkne ir augoša, ja katrs nākamais tās loceklis ir lielāks nekā iepriekšējais. (M.Li.4.)	• Pamato, vai sakarība (uzdota dažādos veidos) ir funkcija. • Pēc grafika nosaka un raksturo funkcijas īpašības. • Nosaka funkcijas īpašības (vislielākā/vismazākā vērtība, augšanas/dilšanas intervāli, pāra/nepāra funkcija) analītiski. • Dotai saliktai funkcijai nosaka iekšējo funkciju un ārējo funkciju. • Skicē vai zīmē funkciju grafikus, izmantojot funkciju īpašības, grafika precizēšanai nosakot koordinātas atsevišķiem punktiem, lietojot elementāro pamatfunkciju grafiku transformācijas. • Nosaka skaitļu virkņu īpašības (augoša/dilstoša, lielākā/mazākā vērtība).

Komplekss sasniedzamais rezultāts	Ieradumi
• Pēta, formulē, pamato pakāpes funkcijas $f(x) = x^n$ īpašības, ja kāpinātājs n ir vesels skaitlis. (M.A.4.2.3.) • Zīmē intervālos dažādi uzdotas funkcijas grafiku, raksturo un pamato funkcijas īpašības. (M.A.4.2.1.) • Skaidro, kas ir salikta funkcija, lietojot jēdzienus “iekšējā funkcija” un “ārējā funkcija”; raksturo salikto funkciju īpašības, grafiku uzzīmēšanu ar zināšanām par attiecīgo elementāro funkciju. (M.O.4.2.3.) • Uzzīmē un raksturo funkciju $y = \|f(x)\|$, $y = f(\|x\|)$ īpašības un grafikus, izmantojot zināšanas par funkcijas $y = f(x)$ īpašībām un grafiku. (M.A.2.1.2.; M.A.4.2.5.) • Lieto matemātiskās indukcijas principu, pierādot ar formulu uzdotas skaitļu virknes pirmo n locekļu summu, rekurenti uzdotas virknes vispārīgā locekļa formulu, skaitļu virknes pirmo n locekļu summu. (M.A.2.3.4.; M.A.4.1.1.)	• Grafika skicēšanai un precizēšanai izvēlas papildu punktus un noskaidro funkcijas īpašības, apzinoties, ka nekritiska saistības veidošana var būt pamats aplamiem secinājumiem.
• **Jēdzieni:** definīcijas kopa, vērtību kopa, funkcijas nulles, pāra/nepāra funkcija, monotonitāte, monotona funkcija, augoša/dilstoša funkcija, salikta funkcija, ierobežota funkcija, funkcijas vislielākā/vismazākā vērtība, asimptota.	
• **Simboli un pieņemtie apzīmējumi:** $f(x)$, $f(g(x))$, $D(f)$, $E(f)$, x_n.	

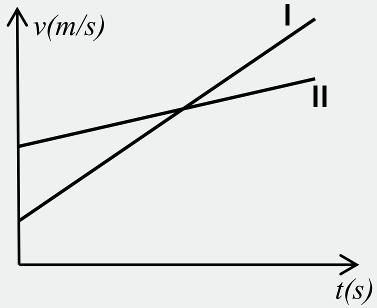
Temata apguves secība

Ar funkciju saistīti jēdzieni	Izmanto pamatskolā apgūto un skaidro, kas ir funkcija, tās uzdošanas veidus. Pamato, vai sakarība (uzdota dažādos veidos) ir funkcija. Skaidro pierakstu $f(a) = b$, ja dota funkcija $y = f(x)$, t. sk. intervālos dažādi uzdota.
	Piemērs. Funkcijai $f(x) = \begin{cases} -0{,}5x + 4, \text{ ja } x \in (-\infty; 2] \\ 2x - 4, \text{ ja } x \in (2; +\infty) \end{cases}$ aprēķini $f(-2)$, $f(2)$, $f(5)$.
	Vingrinās lietot simbolisko pierakstu, veicot aprēķinus, formulējot spriedumus.
	Piemēri. 1. Lietojot funkciju simbolisko pierakstu, uzraksti kuba pilnas virsmas laukumu kā funkciju, kuras arguments ir šķautnes garums. 2. Dota funkcija $f(x) = -0{,}5x + 2$. Uzraksti formulas funkcijām: $-f(x)$, $f(-x)$, $2f(x)$, $f(2x)$. 3. Dota funkcija $f(x) = x^2$. Aprēķini attiecību $f\ (2a) : f(a)$.
	No grafika nolasa informāciju par vispārīgā veidā uzdotu funkciju $y = f(x)$ un nosaka tās īpašības, piemēram, funkcijas definīcijas kopu, funkcijas vērtību kopu, argumenta un funkcijas pieaugumu dotajā intervālā, funkciju nulles, nemainīgu zīmju intervālus, augšanas un dilšanas intervālus, vislielāko un vismazāko vērtību visā definīcijas kopā vai dotajā intervālā; salīdzina divu dažādu funkciju vērtības; no grafiskā attēla iegūto informāciju izvērtē kritiski. Uzzīmē funkcijas grafiku, ievērojot dotos nosacījumus.
	Piemērs. Uzzīmē grafiku funkcijai f, ja tās definīcijas kopa ir $\mathbb{R}$, funkcija ir dilstoša un visiem x no definīcijas kopas $f(x) > 0$. Raksturo citas uzzīmētās funkcijas īpašības.

Temata apguves norise (turpinājums)

Salikta funkcija	Iegūst informāciju uzziņu avotos un skaidro jēdzienu “salikta funkcija”. Uzraksta saliktu funkciju $f(g(x))$, ja dotas funkcijas f un g. Nosaka dotas saliktas funkcijas iekšējo un ārējo funkciju.
	Piemēri. 1. Dotas funkcijas $f(x) = 2x^2$ un $g(x) = \frac{3}{x}$. Uzraksti salikto funkciju $f(g(x))$ un $g(f(x))$ izteiksmes. 2. Nosaki funkcijas $y = (2x - 1)^3$ iekšējo funkciju un ārējo funkciju.
	Spriež, prognozē, kāda veida līkne ir dažādu saliktu funkciju grafiks, kuru ārējā un iekšējā funkcija ir kāda no pamatskolā apgūtajām funkcijām.
	Piemērs. Izsaki pieņēmumu par dotās funkcijas grafiku – kāda veida līkne tas ir, paskaidro, kā domāji, un veic pašpārbaudi, izmantojot digitālos rīkus, raksturo kļūdaino vai neprecīzo pieņēmumu cēloni. a) $y = \frac{1}{2x+3}$, b) $y = \sqrt{0{,}5x - 1}$.
Lineāra funkcija	Skaidro un nosaka funkcijas $y = kx + b$ definīcijas kopu un vērtību kopu, vispārīgi (atkarībā no k vai b vērtībām) raksturo funkcijas augšanu un dilšanu, grafika krustpunktus ar asīm, grafika novietojumu, ja $b = 0$ vai $k = 0$ u. tml. Formulē, lieto sev piemērotu paņēmienu lineāras funkcijas formulas uzrakstīšanai, ja dotas koordinātas diviem funkcijas grafika punktiem.
	Piemēri. 1. Paskaidro lineāras funkcijas $f(x) = kx + 2$ grafika novietojumu koordinātu plaknē atkarībā no k vērtības, raksturo funkcijas $f(x) = kx + 2$ augšanu un dilšanu atkarībā no k vērtības. 2. Uzraksti formulu lineārai funkcijai, kuras grafiks koordinātu asis krusto punktos $(0; 3)$ un $(4; 0)$, paskaidro savu risinājumu.
	Skaidro, pamato un lieto sakarību $k = \operatorname{tg} \alpha$, kur α ir leņķis, ko taisne $y = kx + b$ veido ar x ass pozitīvo virzienu. Nosakot tangensu platam leņķim, spriedumus pamato ar plata leņķa sinusa/kosinusa vērtības noteikšanu un sakarību $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.
	Piemērs. Uzraksti formulu lineārai funkcijai, kuras grafiks ar Ox ass pozitīvo virzienu veido $135°$ un x asi krusto punktā $(-2; 0)$.
	Izmantojot jau zināmo, vispārīgi raksturo nosacījumus divu taišņu savstarpējam novietojumam (paralēlas, perpendikulāras). Uzraksta lineāras funkcijas formulu atbilstoši dotiem nosacījumiem. Zīmē intervālos dažādi definētas funkcijas (katrā no intervāliem funkcija ir lineāra); raksturo to īpašības.
	Piemērs. Uzraksti formulu lineārai funkcijai, kuras grafiks ir paralēls funkcijas $y = -0{,}4x - 1$ grafikam un iet caur punktu $(2; 4)$.
	Situācijās ar matemātisku, praktisku vai fizikas kontekstu (abonēšanas maksa, izmaksas, degvielas patēriņš, vienmērīgas taisnvirziena kustības ceļš u. tml.) atkarīgo mainīgo izsaka kā lineāru funkciju, lai noteiktu prasītos lielumus, formulētu un pamatotu spriedumus.

Temata apguves norise (turpinājums)

Lineāra funkcija	Piemērs. 1. a) Nosaki virziena koeficientu lineārai funkcijai, kas apraksta riņķa līnijas garumu atkarībā no riņķa līnijas rādiusa. b) Nosauc piemērus plaknes figūru lielumiem, sakarību, starp kuriem var aprakstīt ar lineāru funkciju. 2. Vienmērīgi paātrinātas kustības ātrumu v atkarībā no laika t apraksta formula $v(t) = v_0 + a \cdot t$, kur v_0 ir sākuma ātrums $(t = 0)$ un konstante a ir paātrinājums. Salīdzini koordinātu plaknē attēloto kustību paātrinājumus un sākuma ātrumus. 
Pakāpes funkcija (kāpinātājs vesels skaitlis)	Pēta, t. sk. ar digitāliem rīkiem, raksturo pakāpes funkcijas $y = x^n$ īpašības un tās grafiku atkarībā no n vērtības $(n \in Z)$, raksturo saistību ar jau zināmo par funkciju $y = \frac{k}{x}$ un kvadrāfunkciju. Apgūst un lieto jēdzienu “asimptota”, raksturojot funkciju grafiku. Lieto zināšanas par pakāpju funkcijas īpašībām matemātiskos kontekstos. Piemērs. Nosaki un pamato vienādojuma $x^{-2} = 4 - x^2$ sakņu skaitu. Lieto zināšanas par pakāpes funkcijas īpašībām, lai atrisinātu kompleksu matemātisku problēmu. Piemērs. Nosaki un pamato vienādojuma $x^n = nx$ sakņu skaitu atkarībā no parametra n vērtības, ja n ir vesels, no nulles atšķirīgs skaitlis.
Kvadrātfunkcija	Vispārīgi (atkarībā no a, b un c vērtībām) raksturo funkciju $y = ax^2$, $y = ax^2 + c$, $y = ax^2 + bx + c$ īpašības un grafiku, tā novietojumu koordinātu plaknē. Uzzīmē kvadrātfunkcijas grafiku un uzraksta funkcijas formulu, ievērojot dotos nosacījumus. Piemēri. 1. Pamato, ka funkcijai $y = ax^2 + c$ ir tieši divas nulles, ja $a < 0$ un $c > 0$. 2. Uzzīmē kvadrātfunkcijas grafiku un uzraksti funkcijas formulu, ievērojot, ka a) funkcijas nulles ir 2 un 4 un funkcijas lielākā vērtība ir 2, b) funkcija ir augoša intervālā $x \in (-\infty; 1)$ un dilstoša intervālā $x \in (1; +\infty)$ un tās vērtības ir tikai negatīvi skaitļi. Vingrinās kvadrātfunkciju izteikt un lietot formā $y = a(x - m)^2 + n$, atdalot pilno kvadrātu, un skaidro saistību ar parabolas virsotnes koordinātām un izmantošanu grafika zīmēšanai. Raksturo un pamato tās kvadrātfunkcijas īpašības, kuras var noteikt analītiski, ja tā uzdota formā $y = a(x - m)^2 + n$, piemēram, funkcijas lielākās/mazākās vērtības noteikšanu. Piemēri. 1. Nosaki funkcijas $y = (17x - 23)^2 + 2$ mazāko vērtību un paskaidro, kā ieguvi rezultātu. 2. Nosaki virsotnes koordinātas kvadrātfunkcijām $y = 2x^2$, $y = 2(x - 3)^2$ un $y = 2(x - 3)^2 + 1$.

Temata apguves norise (turpinājums)

Kvadrātfunkcija	Vingrinās kvadrātfunkciju izteikt un lietot formā $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, skaidro un pamato, kā tas palīdz uzskicēt funkcijas grafiku. Nosaka un pamato kvadrātfunkcijas īpašības analītiski, ja tā uzdota formā $y = a(x - x_1)(x - x_2)$. Piemērs. 1. Nosaki a, ja funkcijas $f(x) = (x - 2) \cdot (x + a)$ krustpunkts ar ordinātu asi ir $(0; -1)$. 2. Uzzīmē kvadrātfunkcijas $y = -2(x + 1) \cdot (x - 3)$ grafiku, precīzi nosakot un atliekot krustpunktus ar asīm. Situācijās ar fizikas kontekstu (vertikāli izsviesta ķermeņa augstums, vienmērīgi paātrinātas taisnvirziena kustības ceļš, slīpi pret horizontu izmesta ķermeņa kustības trajektorija u. tml.) atkarīgo mainīgo izsaka kā kvadrātfunkciju, lai noteiktu prasītos lielumus, formulētu un pamatotu spriedumus.
Funkciju īpašības	Skaidro definīcijas kopas saistību ar funkcijas uzdošanu. Iepazīst galvenās funkcijas vai tās grafika īpašības: simetriskums, pāra vai nepāra, periodiskums, monotonitāte (augoša vai dilstoša), funkcijas nulles un intervāli, kuros funkcijas vērtības ir ar vienādu zīmi, funkcijas lielākā/mazākā vērtība. Definē pāra un nepāra funkcijas. Nosaka un pamato, vai funkcija ir pāra, nepāra vai nav ne pāra, ne nepāra pēc grafika vai analītiski, izmantojot definīciju. Uzziņu avotos atrod informāciju par periodiskām funkcijām, t. sk. periodisku funkciju piemērus ($f(x) = \{x\}$ u. tml.) Definē periodisku funkciju. Vingrinās uzzīmēt periodiskas funkcijas grafiku, ievērojot dotos nosacījumus par periodu, funkcijas formulu noteiktā intervālā, paritāti u. tml.; raksturo iegūto grafiku, izmantojot ģeometriskos pārveidojumus. Definē augošu funkciju, dilstošu funkciju, monotonu funkciju, konstantu funkciju. Nosaka un pamato, vai funkcija ir augoša, dilstoša, monotona visā definīcijas kopā vai kādā noteiktā intervālā pēc grafika vai analītiski, izmantojot definīciju. Skaidro funkcijas lielākās/mazākās vērtības noteikšanu, ja tā definēta slēgtā intervālā. Izmanto jau zināmas funkcijas visā to definīcijas kopā un nosauc piemērus funkcijām, kurām nav lielākās vērtības un nav mazākās vērtības, kurām ir lielākā vērtība vai mazākā vērtība. Vingrinās noteikt pazīstamu funkciju lielāko vai mazāko vērtību noteiktā intervālā analītiski. Zīmē intervālos dažādi definētas funkcijas; raksturo un pamato to īpašības. Risina situāciju (ekstrēmu) uzdevumus ar matemātisku, praktisku vai fizikas kontekstu, izmantojot kvadrātfunkcijas un tās grafika īpašības.
Funkciju grafiku transformācijas	Izmanto jau zināmās funkcijas, piemēram, $y = x$, $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x}$, un vispārīgi, ņemot vērā a un b izmaiņas, raksturo funkciju grafiku transformācijas $y = f(x) + a$, $y = f(x + b)$, skicē transformācijas rezultātā iegūto funkciju grafikus, saista šīs transformācijas ar paralēlo pārnesi. Izvirzīto pieņēmumu par grafika novietojumu pārbauda, izmantojot digitālos rīkus. Spriež par transformācijas $y = f(x + b)$ izmantošanu saliktas funkcijas (ja iekšējā funkcija ir lineāra funkcija) grafika konstruēšanai vai skicēšanai. Vispārīgi raksturo funkcijas $y = f(x)$ transformācijas $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, skicē transformācijas rezultātā iegūto funkciju grafikus gan konkrēti, gan vispārīgi uzdotām funkcijām, saista šīs transformācijas ar aksiālo simetriju. Spriež, formulē, pārbauda, t. sk. ar digitāliem rīkiem, un pamato pieņēmumu par funkciju $y = \|f(x)\|$, $y = f(\|x\|)$ grafikiem, ja dots funkcijas $y = f(x)$ grafiks. Kā speciālgadījumu konstruē arī funkcijas $f(x) = \|x\|$ grafiku. Formulē un pamato spriedumus par dotas funkcijas un transformācijas rezultātā iegūtās funkcijas īpašībām un grafiku novietojumu koordinātu plaknē. Spriež un zīmē funkcijas grafiku, ievērojot doto informāciju, piemēram, definīcijas vai vērtību kopa, funkcijas īpašība, analītiskā izteiksme, transformācijas apraksts.

Temata apguves norise (turpinājums)

Skaitļu virkne kā naturāla argumenta funkcija	Skaidro skaitļu virkni kā naturāla argumenta funkciju, attēlo to grafiski. Raksturo kopīgo un atšķirīgo funkciju un virkņu simboliskajā pierakstā. Atšķir augošas, dilstošas, maiņzīmju, konstantas, galīgas, bezgalīgas skaitļu virknes. Nosaka dotu vai iegūtu virkņu īpašības – monotonitāti (augoša vai dilstoša), ierobežotību. Pierāda skaitļu virknes a_n monotonitāti, novērtējot starpību $a_{n+1} - a_n$ vai izdarot loģiskus secinājumus par vispārīgā locekļa formulu. Skaidro skaitļu virkņu uzdošanu ar vispārīgā locekļa formulu un rekurenti, izmantojot aritmētisko progresiju vai kādu citu konkrētu skaitļu virkni. Raksturo iespējas noteikt patvaļīgu virknes locekli, ja virkne uzdota rekurenti vai ar vispārīgā locekļa formulu, secina, ka dažkārt nepieciešams rekurenti uzdotai virknei noteikt un pierādīt vispārīgā locekļa formulu. Uzziņu literatūrā vai no skolotāja iegūst informāciju par to, ka pastāv tādas rekurentas virknes, kurām vēl nav atklāts, kā noteikt vispārīgā locekļa formulu. Saskata likumsakarības un formulē pieņēmumu par virknes nākamo locekli, par virknes uzdošanu rekurenti vai virknes vispārīgā locekļa formulu, par virknes locekļu summu. Salīdzina virkņu uzdošanas veidus, to izmantošanu, secina par nepieciešamību rekurenti uzdotai virknei noteikt un pierādīt vispārīgā locekļa formulu. Pierāda vispārīgā locekļa formulu rekurenti uzdotai virknei.
	Piemērs. Pierādi, ka virknes (a_n), kur $a_1 = 1$ un $a_{n+1} = a_n + 8_n$ vispārīgā locekļa formula ir $a_n = (2n - 1)^2$.
	Spriež induktīvi, īsteno noteiktas stratēģijas pieņēmuma formulēšanai, formulē un pierāda ar MIP pieņēmumu par rekurenti uzdotas virknes vispārīgā locekļa formulu.
	Piemēri. 1. Izveido un pierādi virknes (a_n) vispārīgā locekļa formulu, ja dots, ka $a_1 = 1$ un $a_{n+1} = 2a_n + 3$. 2. Raksturo savu pieeju/stratēģiju, lai formulētu pieņēmumu par rekurenti uzdotas virknes vispārīgā locekļa formulu.
	Uzraksta un aprēķina aritmētiskās progresijas $2; 3; 4; \ldots$ pirmo n locekļu summu. Pierāda dotas skaitļu virknes pirmo locekļu summu, lietojot MIP.
	Piemēri. Dota virkne, kuras vispārīgā locekļa formula ir $a_n = n(3n + 1)$, $n \in \mathbb{N}$. Pierādi, ka virknes pirmo n locekļu summa ir $n(n + 1)^2$.

7. Algebriskās daļas, daļveida vienādojumi un nevienādības

Ieteicamais laiks temata apguvei: 30–34 mācību stundas.

Temata apguves mērķis: formulēt un lietot algoritmus algebrisko daļu pārveidošanai, daļveida vienādojumu un nevienādību atrisināšanai; lietot iegūtās zināšanas, lai algebriski modelētu situācijas ar matemātisku un citu jomu kontekstu.

Sasniedzamie rezultāti

Ziņas	Prasmes
• Algebriska daļa ir daļa, kurai skaitītājs un saucējs ir polinomi (saka arī – daļveida racionāla algebriska izteiksme). Algebriskas daļas definīcijas kopa ir tās mainīgo vērtības, ar kurām saucējs nav vienāds ar nulli. (M.Li.4.) • Algoritmus algebrisko daļu saskaitīšanai un atņemšanai, reizināšanai un dalīšanai var formulēt, izmantojot analoģiju darbībām ar parastajām daļām. (M.Li.2.; M.Li.4.) • Daļveida vienādojumu risināšanā izmanto ekvivalentus pārveidojumus un spriedumu: ja $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, tad $f(x) = 0$ un $g(x) \neq 0$. (M.Li.2.; M.Li.4.) • Daļveida vienādojuma atrisināšanā dažkārt izmanto sakarības starp lielumiem divu daļu vienādībā (proporcijā), ievērojot definīcijas kopu. (M.Li.2.; M.Li.4.) • Daļveida vienādojumu atrisināšanā var izmantot vispārīgos vienādojumu atrisināšanas paņēmienus (sadalīšanu reizinātājos, substitūciju, grafisko paņēmienu). (M.Li.4.) • Risināt nevienādību $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ ar grafisko intervālu metodi nozīmē uzskicēt funkciju $f(x)$ un $g(x)$ grafikus, attēlojot funkciju nulles un nosakot funkciju vērtību zīmes iegūtajos intervālos; tas ļauj secināt par nevienādības $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ atrisinājumu; ir arī citi paņēmieni zīmju noteikšanai intervālos. (M.Li.2.; M.Li.4.) • Daļveida vienādojumu vai nevienādību izmanto, lai matemātiski aprakstītu/modelētu situācijas, kuras raksturo apgriezti proporcionāli lielumi. (M.Li.2.; M.Li.4.) • Vispārīgi uzdotu skaitlisko koeficientu vienādojuma (nevienādības) pierakstā sauc par parametru; atrisināt vienādojumu (nevienādību) ar parametru nozīmē noteikt atrisinājumu katrai parametra vērtībai. (M.Li.1.; M.Li.2.; M.Li.4.)	• Sadala izteiksmi reizinātājos, lietojot kubu starpības un kubu summas formulas. • Nosaka algebriskas daļas definīcijas kopu un to pieraksta, korekti lietojot pieņemtos apzīmējumus. • Saīsina vai paplašina algebrisku daļu, algebriskai daļai atdala veselo daļu. • Reizina un dala, saskaita un atņem algebriskas daļas. • Atrisina daļveida vienādojumu, izvēloties sev piemērotu paņēmienu. • Atrisina daļveida nevienādību, izvēloties sev piemērotu paņēmienu. • Risina situāciju uzdevumus ar dažādiem kontekstiem (kustība, plānotais un faktiski esošais, maisījumi u. tml.), lietojot daļveida vienādojumus vai nevienādības.

Komplekss sasniedzamais rezultāts	Ieradumi
• Spriež induktīvi, deduktīvi un formulē saīsināto reizināšanas formulu vispārinājumus, un lieto tos, sadalot izteiksmi reizinātājos. (M.A.2.1.2.; M.A.4.4.1.) • Izsaka algebrisku daļu kā divu daļu (saucēji ir lineāras izteiksmes) summu ar nenoteikto koeficientu metodi, piemēram, $\frac{4x-9}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$, skaidro savu darbību. (M.A.4.4.3.) • Veic un skaidro algebrisku daļu ekvivalentus pārveidojumus, ja to saucējā un skaitītājā ir izteiksmes ar vispārīgā veidā uzdotām pakāpēm (kāpinātājs ir vispārīgi uzdots skaitlis). (M.A.4.4.2.) • Skaidro, ko nozīmē risināt vienādojumu vai nevienādību ar parametru; risina daļveida vienādojumus vai nevienādības ar parametru. (M.A.2.1.3.; M.A.4.5.6.)	• Domā par pieļaujamām izteiksmes vērtībām, pārbauda vienādojuma sakni vai nevienādības atrisinājuma atbilstību dotajai situācijai, attīstot ieradumu plānot un vadīt savu domāšanas procesu, pamatot savus spriedumus. • Saskata iespējas izmantot jau apgūto par pozitīvu/negatīvu skaitļu dalījumu un par proporciju, attīstot ieradumu iegūto informāciju saistīt ar jau zināmo, meklēt risinājumu nepazīstamās situācijās.
• **Jēdzieni:** racionāla daļveida izteiksme, algebriska daļa, intervālu metode, grafiskā intervālu metode, daļveida vienādojums, daļveida nevienādība, vienādojums/nevienādība ar parametru, kubu starpības formula, kubu summas formula.	

Temata apguves norise

Algebriska daļa un tās definīcijas kopa	Uzziņu avotos atrod informāciju par jēdzieniem, kas saistīti ar matemātiskām izteiksmēm (skaitliska izteiksme, algebriska izteiksme, monomi, polinomi, racionāla algebriska izteiksme, vesela racionāla algebriska izteiksme, daļveida racionāla algebriska izteiksme, algebriska daļa u. tml.), un veido strukturētu informācijas apkopojumu, piemēram, domu karti. Definē algebrisku daļu, skaidro un nosaka algebriskas daļas definīcijas kopu, spriežot par nepieļaujamām vai pieļaujamām mainīgo vērtībām. Skaidro, kādas algebriskas daļas ir identiskas, ilustrē ar piemēriem. Raksturo jau pazīstamus algebrisku izteiksmju identiskos pārveidojumus. Pamato vienkāršas identitātes. Piemērs. Pamato identitātes $\frac{x-y}{y} = -\frac{y-x}{y} = \frac{y-x}{-y} = -\frac{x-y}{-y}$.
Izteiksmes sadalīšana reizinātājos	Sadala izteiksmes reizinātājos, lietojot jau iepriekš zināmās metodes – kopīgā reizinātāja iznešanu pirms iekavām, t. sk., izmantojot grupēšanas paņēmienu, kvadrāttrinoma sadalīšanu reizinātājos, saīsinātās reizināšanas formulas $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$, $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Spriež, formulē un pamato kubu summas un kubu starpības formulas. Vingrinās izteiksmi sadalīt reizinātājos, apsver un skaidro dažādu paņēmienu lietojumu, argumentē piemērotāko. Piemēri. 1. Sadali reizinātājos izteiksmi $a^4 + a^2 + 1$, izskatot iespēju kādu saskaitāmo aizstāt ar tam identisku izteiksmi. 2. Sadali reizinātājos izteiksmi: a) $6x^2 - xa - a^2$; b) $a^3 + 3a^2 - 4$; c) $x^{4n} - 1$; d) $a^{2n+1} - 2a^{n+1} + a$. Pēta, formulē un pamato saīsināto reizināšanas formulu vispārinājumus $a^n - b^n$, $a^{2n+1} + b^{2n+1}$. Piemērs. Izpēti, formulē un pierādi izteiksmju $a^2 - 1$; $a^3 - 1$; $a^4 - 1$; ...; $a^n - 1$ sadalīšanu reizinātājos, ja $n \geq 2$; $n \in \mathbb{N}$.

Temata apguves norise (turpinājums)

Algebrisku daļu saīsināšana	Formulē idejas par to, ko nozīmē saīsināt dotu algebrisku daļu, piemēram, $\frac{x^2+x}{x^2-x}$. Kritiski izvērtē piedāvātos risinājumus, t. sk. pamato, ka risinājums ir aplams, izmantojot pretpiemēru. Secina par nepieciešamību daļas skaitītāju un saucēju sadalīt reizinātājos. Vingrinās saīsināt algebriskas daļas. Formulē darbības paškontrolei, piemēram, reizinu skaitītāju un saucēju ar vienu un to pašu lielumu un pārliecinos, ka iegūta sākotnējā daļa. Saīsina algebriskas daļas, ja to skaitītājā un saucējā ir izteiksmes ar vispārīgā veidā uzdotām pakāpēm, skaidro risinājumu. Piemērs. Saīsini daļu $\frac{x^{2n}-y^{2n}}{x^n-y^n}$, paskaidro veiktās darbības.
Algebrisku daļu reizināšana un dalīšana	Formulē idejas par to, ko nozīmē reizināt divas algebriskas daļas, piemēram, $\frac{x-2}{x}\cdot\frac{x^2}{2x-4}$, izmantojot jau zināmo par parasto daļu reizināšanu. Kritiski izvērtē piedāvātos risinājumus un pamato, vai pārveidojumi veikti korekti. Formulē algoritmu algebrisko daļu reizināšanai. Formulē algoritmu algebrisko daļu dalīšanai, izmantojot jau apgūto un saistību starp reizināšanu un dalīšanu. Vingrinās algebrisko daļu reizināšanā un dalīšanā, skaidro veiktās darbības un veido domāšanas gaitai atbilstošu un korektu risinājuma pierakstu. Pārrunā un kritiski izvērtē dažādus risinājumus un to pierakstus, formulē secinājumus par tipiskām kļūdām. Plāno savu darbību, pirms risināšanas raksturo daļas, piemēram, skaitītāji, saucēji ir/nav sadalīti reizinātājos, un pastāsta, ko un kādā secībā darīs. Reizina, dala algebriskas daļas, ja to skaitītājā un saucējā ir izteiksmes ar vispārīgā veidā uzdotām pakāpēm, skaidro risinājumu. Piemērs. Dota izteiksme $\frac{x^n}{x^{2n}-y^{2n}}\cdot\frac{x^n+y^n}{x^{2n}}$. Izpildi darbības un paskaidro risinājumu.
Algebrisku daļu saskaitīšana un atņemšana	Formulē idejas par to, ko nozīmē saskaitīt un atņemt divas algebriskas daļas, piemēram, $\frac{4}{x}-\frac{1}{x^3}$; $\frac{x}{x-2}+\frac{1}{2x-4}$, izmantojot jau zināmo par parasto daļu saskaitīšanu un atņemšanu. Kritiski izvērtē piedāvātos risinājumus un pamato, vai pārveidojumi veikti korekti. Formulē algoritmu algebrisko daļu saskaitīšanai un atņemšanai. Vingrinās algebrisko daļu saskaitīšanā un atņemšanā pakāpeniski – vispirms daļu saucēji ir monomi, tad izteiksmes, kas nesatur vienādus reizinātājus, tad izteiksmes, kas satur vienādus reizinātājus. Plāno algebrisko daļu saskaitīšanu un atņemšanu, pirms risināšanas raksturo daļas, nosaka, vai saucēji ir sadalāmi reizinātājos un pastāsta, ko un kādā secībā darīs; veido pilnīgu un korektu pierakstu, skaidro veiktos pārveidojumus, lietojot matemātikas valodu. Saskaita, atņem algebriskas daļas, ja to skaitītājā un saucējā ir izteiksmes ar vispārīgā veidā uzdotām pakāpēm. Konkrētos piemēros pēta, spriež par iespējām veikt apgrieztu darbību algebrisku daļu saskaitīšanai – dotu algebrisku daļu uzrakstīt kā divu vai vairāku daļu summu. Piemērs. Izsaki daļu $\frac{10x}{x^2-x-6}$ kā divu daļu summu.

Temata apguves norise (turpinājums)

Algebrisku daļu saskaitīšana un atņemšana	Lasa dotus risinājumus un formulē algoritmu – nenoteikto koeficientu metodi algebriskas daļas pārveidošanai par daļu summu. Vingrinās algebrisku daļu izteikt kā daļu summu. Veic pašpārbaudi, saskaitot vai atņemot daļas. Lieto nenoteikto koeficientu metodi matemātiskos kontekstos. Piemērs. Nosaki visas tās x vērtības, kurām izteiksmes $\frac{6x-8}{x^2-3x+2}-\frac{4}{x-2}$ vērtība ir vesels skaitlis. Vingrinās veikt pārveidojumus ar racionālu daļveida izteiksmi, kas satur visas darbības (to skaits nepārsniedz 4); pirms risināšanas raksturo izteiksmi un tajā ietilpstošos lielumus; stāsta, ko un kādā secībā darīs, kādus paņēmienus, formulas lietos, ko ievēros, lai nekļūdītos; risinājuma laikā vai pēc tā skaidro veiktās darbības.
Veselās daļas atdalīšana	Spriež, kā dotu algebrisku daļu, piemēram, $\frac{2x+3}{x+1}$, pierakstīt citādi, izmantojot analoģiju ar parasto daļu, ko var pierakstīt kā jauktu skaitli vai kā neīstu daļu. Formulē idejas, veic pārbaudi. Algebriskai daļai atdala veselo daļu, izvēloties sev piemērotāko pieraksta veidu, piemēram, $\frac{2x-5}{x-3}=\frac{2(x-3)+1}{x-3}=2+\frac{1}{x-3}$ vai $\frac{2x-5}{x-3}=\frac{2x-6+1}{x-3}=2+\frac{1}{x-3}$, skaidro veiktos pārveidojumus. Lieto veselās daļas atdalīšanu, lai noteiktu visas mainīgā vērtības, ar kurām algebriskās daļas vērtība ir vesels skaitlis.
Daļveida vienādojumi	Nosaka un pamato vienkārša daļveida vienādojuma formā $\frac{f(x)}{g(x)}=0$ atrisināšanu, piemēram, $\frac{2x-8}{x-1}=0$, lietojot iepriekš apgūto – zināšanas par divu skaitļu dalījumu (t. sk. dalījuma vienādību ar 0) un tā pierakstu daļas veidā. Pārbauda, vai skaitlis ir vienādojuma sakne. Risina vienādojumu $\frac{2x^2-8}{x-2}=0$. Secina, ka, nosakot vienādojuma atrisinājumu, jāievēro definīcijas kopa. Formulē vienādojuma $\frac{f(x)}{g(x)}=0$ risināšanas algoritmu. Vingrinās atrisināt daļveida vienādojumus formā $\frac{f(x)}{g(x)}=0$. Skaidro, ko nozīmē risināt vienādojumu ar parametru. Spriež, risina daļveida vienādojumu ar parametru, piemēram, $\frac{x^2-16}{x-a}=0$, veido pilnīgu atrisinājuma pierakstu. Risina situāciju uzdevumu, kura konteksts ir pazīstams, piemēram, kustība, plānotais un esošais, iegūstot daļveida vienādojumu. Nosaka izteiksmju definīcijas kopu. Izsaka idejas, kā varētu risināt iegūto vienādojumu, piemēram, $\frac{60}{x}=\frac{40}{x-2}$. Saskata dažādas iespējas: izmantot zināšanas par sakarībām starp lielumiem proporcijā, lietot daļas pamatīpašību, lai vienādotu skaitītājus vai saucējus, kas ļauj secināt attiecīgi par saucēju vai skaitītāju vienādību, piemēram, $\frac{120}{2x}=\frac{120}{3(x-2)}$. Risina situāciju uzdevumu, kura matemātiskais modelis ir daļveida vienādojums, kas satur daļu summu vai starpību, piemēram, $\frac{21}{x+3}+\frac{6}{x-3}=9$. Spriež, veido risinājumu, izmanto pieredzi kvadrātvienādojumu risināšanā, ja tie nav pamatformā. Formulē algoritmu daļveida vienādojumu risināšanā. Vingrinās daļveida vienādojumu risināšanā. Lieto prasmi atrisināt daļveida vienādojumu, risinot situāciju uzdevumus. Aplūko, izvērtē dažādus paņēmienus situāciju uzdevuma atrisināšanai, piemēram, lineāru vienādojumu sistēmas izveide un atrisināšana.

Temata apguves norise (turpinājums)

Daļveida vienādojumi	Piemērs. Tūrists devās no kalnu ciemata A uz kalnu ciematu B un atgriezās atpakaļ ciematā A pa to pašu maršrutu. Maršruts sastāv no vairākiem ceļa posmiem, kas ved kalnup, un vairākiem posmiem, kas ved lejup (līdzenu ceļa posmu nav). Turpceļā tūrists pavadīja $4\ \mathrm{h}$, bet atpakaļceļā – $5\ \mathrm{h}$. Visus ceļa posmus, kas ved kalnup, tūrists veica ar nemainīgu ātrumu $3\ \mathrm{km/h}$. Visus ceļa posmus, kas ved lejup, tūrists veica ar nemainīgu ātrumu $6\ \mathrm{km/h}$. Aprēķini tūrista veikto ceļu.
Daļveida nevienādības	Skaidro, ko nozīmē atrisināt nevienādību, vispārīgi raksturo lineāru nevienādību un kvadrātnevienādību atrisināšanas algoritmus. Skaidro, kā dažādi var izlasīt un kā citādi vēl var pierakstīt dotas daļveida nevienādības, piemēram, $\frac{-4}{x-3} > 0$. Nosaka nevienādības visu atrisinājumu kopu spriežot. Vingrinās spriežot atrisināt nevienādības, kurām vai nu skaitītājs, vai saucējs ir pozitīvs/negatīvs visām nezināmā vērtībām, piemēram, $\frac{-2x^2-1}{x-3} < 0$. Spriež, formulē idejas daļveida nevienādības, piemēram, $\frac{x-4}{6-3x} > 0$, atrisināšanai un risinājuma pierakstīšanai, lietojot iepriekš apgūto par pozitīvu/negatīvu skaitļu dalīšanu, lineāru nevienādību sistēmām, to atrisinājumu. Formulē algoritmu nevienādības $\frac{f(x)}{g(x)} < 0\ (>, \geq, \leq)$ atrisināšanai, pārejot uz nevienādību sistēmām, skaidro iespējas nevienādību izlasīt dažādi, skaidro kopu šķēluma un apvienojuma lietojumu daļveida nevienādības atrisinājuma un tā pieraksta veidošanā. Vingrinās daļveida nevienādību $\frac{f(x)}{g(x)} < 0\ (>, \geq, \leq)$ risināšanā. Risina nevienādības, veicot nevienādību ekvivalentos pārveidojumus, līdz iegūst pamatformu $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$. Pēta, kā daļveida nevienādības, piemēram, $\frac{x-2}{2x-1} < 0$, atrisināšanai var izmantot zināšanas par funkcijām $y = x - 2$ un $y = 2x - 1$, to grafikiem; izmanto digitālos rīkus funkciju grafiku attēlošanai vai ideju pārbaudei. Formulē algoritmu daļveida nevienādības atrisināšanai ar grafisko intervālu metodi. Vingrinās lietot grafisko intervālu metodi. Risina situāciju uzdevumus, t. sk. ar citu mācību jomu kontekstu, sastādot un atrisinot daļveida nevienādības. Spriež, risina daļveida nevienādību ar parametru. Piemērs. Atrisini nevienādību $\frac{x-a}{x^2-9} \leq 0$ visām parametra a vērtībām.

1. Leņķa paplašinājums un trijstūra elementu aprēķināšana	2. Vektori	3. Koordinātu metode	4. Planimetrija	5. Kopas, matemātiskā indukcija, kombinatorika	6. Funkcijas īpašības	7. Algebriskās daļas, daļveida vienādojumi un nevienādības	8. Daļveida funkcija, funkcijas robeža

8. Daļveida funkcija, funkcijas robeža

Ieteicamais laiks temata apguvei: 14–18 mācību stundas.

Temata apguves mērķis: noteikt un pamatot daļveida funkcijas un tās grafika īpašības, veidot izpratni par funkcijas robežu.

Sasniedzamie rezultāti

Ziņas	Prasmes
• Virknes a_n robeža ir skaitlis A, uz kuru tiecas virknes locekļi, kārtas numuram n bezgalīgi pieaugot. Simbolisko pierakstu var veidot divējādi: 1) ja $n \to \infty$, tad $a_n \to A$, 2) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = A$. (M.Li.1.; M.Li.2.; M.Li.4.) • Funkcijas robeža A dod iespēju noskaidrot funkcijas $f(x)$ izturēšanos, kad $x \to a$, kur a var būt gan kāds reāls skaitlis, gan bezgalība. Simbolisko pierakstu var veidot divējādi: 1) ja $x \to a$, tad $f(x) \to A$, 2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. (M.Li.1.; M.Li.4.) • Funkcijas robežu, kad $x \to a$ un $x > a$, sauc par robežu no labās puses ($x \to a + 0$); funkcijas robežu, kad $x \to a$ un $x < a$, sauc par robežu no kreisās puses ($x \to a - 0$). (M.Li.4.) • Funkcijas grafika horizontālā asimptota ir Ox asij paralēla taisne, kuras vienādojums ir $y = b$, ja $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$. (M.Li.4.) • Funkcijas grafika vertikālā asimptota ir Oy asij paralēla taisne, kuras vienādojums ir $x = a$, ja $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$. (M.Li.4.) • Daļveida funkcijas $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ grafiks ir hiperbola. Lai iegūtu papildu informāciju par daļveida funkciju, dažkārt to pārveido formā $y = m + \frac{k}{cx+d}$; tad asimptotas ir $y = m$ un $x = -\frac{d}{c}$. (M.Li.4.)	• Analītiski vai pēc grafika nosaka un raksturo daļveida funkcijas īpašības (funkcijas nulles, vienādas zīmes intervāli, vērtību kopa, lielākā/mazākā vērtība), asimptotas un robežas, izmanto tās funkcijas grafika uzzīmēšanai (t. sk. ar digitāliem rīkiem), situāciju vai procesu, ko tās modelē, raksturošanai. • Uzzīmē/uzskicē daļveida funkcijas $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ grafiku, izmantojot ekvivalentos pārveidojumus, funkciju īpašības, analītiski nosakot asimptotas un grafika punktus tā precizēšanai.
Komplekss sasniedzamais rezultāts	**Ieradumi**
• Pēta un raksturo parametru ietekmi uz daļveida funkcijas grafiku, izmantojot algebriskos pārveidojumus, funkciju grafiku transformācijas, digitālos rīkus. (M.O.4.2.4.; M.A.2.1.2.) • Nosaka daļveida funkcijas robežu, spriežot, izmantojot funkcijas grafika īpašības. (M.A.4.3.1.) • Spriež, nosaka un pamato virknes monotonitāti un virknes robežu, kad arguments tiecas uz bezgalību. (M.A.4.1.2.) • Lieto zināšanas par daļveida vienādojumiem, nevienādībām un daļveida funkciju kompleksu problēmu risināšanā. (M.O.4.5.7.; M.A.2.1.1.)	• Ievērojot situāciju un mērķi, grafika konstruēšanai izvēlas lietot digitālos rīkus vai zīmēt grafiku uz papīra, attīstot ieradumu plānot un vadīt savu domāšanas procesu, pamatot spriedumus.
• **Jēdzieni:** virknes monotonitāte, virknes robeža, daļveida funkcija, vertikālā asimptota, horizontālā asimptota, funkcijas robeža, vienpusējās robežas.	
• **Simboli un pieņemtie apzīmējumi:** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$; $a_n \to A$; $\lim\limits_{x\to a} f(x)$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$; $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$.	

Temata apguves norise

Virknes monotonitāte un virknes robeža	Izmantojot skaitļu īpašības, nosaka un pamato robežu aprakstoši uzdotām skaitļu virknēm, piemēram, $0{,}3;\ 0{,}33;\ 0{,}333;\ 0{,}3333;\ \ldots$ Uzraksta līdzīgas skaitļu virknes, nosaka to robežu – skaitli, uz kuru tiecas virknes locekļi, kārtas numuram bezgalīgi pieaugot. Uzdod (ar formulu vai aprakstoši) skaitļu virkni, kurai neeksistē galīga robeža, piemēram, aritmētisko progresiju. Sprież, attēlo grafiski ar digitāliem rīkiem un formulē pieņēmumu par robežu monotonām virknēm, ja tās uzdotas ar vispārīgā locekļa formulu; izmanto veselās daļas atdalīšanu. Formulē vispārinājumus, piemēram, ja $0 < a < 1$ un $n \to +\infty$, tad $a^n \to 0$. Vingrinās pierakstīt virknes robežu, lietojot apzīmējumus $\lim$ vai $\to$, izvēlas sev piemērotāko paņēmienu.
	Piemērs. Izsaki pieņēmumu par virknes a_n robežu. a) $a_n = (0{,}1)^n$, b) $a_n = \frac{6}{n}$, c) $a_n = \frac{2n}{n+3}$, d) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$, kur $n \in \mathbb{N}$.
	Sprież, veido skaitļu virkni, ievērojot dotos nosacījumus par tās īpašībām un robežu.
	Piemēri. 1. Uzraksti skaitļu virkni, kura a) ir augoša un tās robeža ir 2, b) ir dilstoša un tās robeža ir 2. Uzraksti iegūto virkņu vispārīgā locekļa formulas. 2. Uzraksti formulu bezgalīgai virknei, kas ir augoša un katrs virknes loceklis ir mazāks nekā 3. 3. Nosaki un pierādi, vai virkne $a_n = \frac{2n}{n+3}$ ir augoša vai dilstoša.
Daļveida funkcijas robežas un asimptotas	Definē daļveida funkciju. Zīmē funkciju $f(x) = \frac{4}{x}$ un $g(x) = \frac{4}{x-2}$ grafikus, izmantojot pamatskolā apgūto un sprieżot, formulē secinājumus, raksturo grafiku transformāciju. Formulē pieņēmumu par funkcijas $h(x) = \frac{4}{x+3}$ grafiku un tā novietojumu koordinātu plaknē; pārbauda pieņēmumu, izmantojot digitālos rīkus. Nosaka visu trīs funkciju definīcijas kopu un vērtību kopu, lieto simbolisko pierakstu. Nosauc un analītiski pieraksta asimptotas, vingrinās vārdiski formulēt spriedumus par funkcijas robežām, t. sk. vienpusējām, un to pierakstīt, lietojot pieņemtos apzīmējumus.

Temata apguves norise (turpinājums)

Daļveida funkcijas īpašības un grafiks	Pēta funkciju $f(x)=\dfrac{k}{x}$, $f(x)=\dfrac{k}{x+b}$, $f(x)=\dfrac{k}{ax+b}$ grafiku novietojumu koordinātu plaknē, izmantojot digitālos rīkus; zīmē pēc kārtas vairāku funkciju grafikus, mainot k, a un b vērtības; formulē secinājumus. Lieto digitālos rīkus un uzzīmē grafikus dažām funkcijām formā $f(x)=m+\dfrac{k}{cx+d}$; formulē secinājumus par kopīgo un atšķirīgo ar jau aplūkoto daļveida funkciju grafikiem, un to novietojumu koordinātu plaknē; raksturo un analītiski pieraksta asimptotas, lieto jēdzienus "vertikālā asimptota" un "horizontālā asimptota". Sprież, izsaka idejas par funkcijas $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ grafika uzzīmēšanas algoritmu, izmantojot jau apgūto. Secina par veselās daļas atdalīšanu funkcijas formulas pierakstā. Vingrinās atdalīt veselo daļu. Uzskicē daļveida funkcijas $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ grafiku, pārveidojot funkciju formā $y=m+\dfrac{k}{cx+d}$ (t. i., atdalot veselo daļu) un spriežot par vertikālo un horizontālo asimptotu, kā arī par funkcijas robežu; raksturo daļveida funkcijas īpašības (augšanas/dilšanas intervāli, funkcijas nulles, vienādas zīmes intervāli, vērtību kopa, lielākā/mazākā vērtība). Nosaka daļveida funkcijas īpašības, raksturīgos lielumus analītiski un no grafika. Uzraksta funkcijas formulu, ievērojot doto informāciju par funkciju vai tās grafiku.
	Piemērs. Uzraksti formulu daļveida funkcijai, kuras grafiks Ox asi krusto punktā $(-1;0)$, Oy krusto punktā $(0;1)$ un grafika vertikālā asimptota ir $x=3$.
	Lieto zināšanas par daļveida funkciju un tās īpašībām matemātiskos kontekstos.
	Piemēri. 1. Nosaki funkcijas $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$ grafika asimptotas un funkcijas robežas, uzzīmē funkcijas grafiku. 2. Nosaki funkcijas $y=\left\|\dfrac{2x}{x-2}\right\|$ mazāko vērtību, augšanas un dilšanas intervālus. 3. Nosaki sakņu skaitu vienādojumam $x^2-4=\dfrac{4}{x-2}$.
Daļveida funkcijas lietojums	Sakarību starp lielumiem praktiskos, citu jomu vai matemātikas kontekstos apraksta kā daļveida funkciju, skicē tās grafiku, izmanto iegūto funkciju, lai noteiktu nezināmos lielumus, formulētu pamatotus spriedumus.
	Piemēri. 1. Lielā maisīšanas tvertnē sākotnēji ir 200 l ūdens, kurā samaisīti 40 kg cukura. Atverot pieplūdes krānu, vienas minūtes laikā tvertnē ieplūst 15 l ūdens, vienlaikus katras minūtes laikā maisījumam pievieno 2 kg cukura. a) Uzraksti formulu funkcijai $c(\mathrm{t})$, kur $c(\mathrm{kg/l})$ – cukura koncentrācija un t – laiks minūtēs; b) izmanto IT un uzzīmē funkcijas $c(\mathrm{t})$ grafiku, ja $t\in[0;10]$, vienības uz asīm izvēloties tā, lai iespējami uzskatāmi parādītu cukura koncentrācijas izmaiņu laikā. 2. Regulāras trijstūra prizmas sānu virsmas laukums ir S. Pamato, ka, prizmas pamata šķautnes garumu palielinot k reizes (S nemainās), prizmas augstuma garums samazinās k reizes.

2. gads

9. Statistika	10. Eksponentfunkcija, vienādojumi un nevienādības	11. Inversā funkcija un logaritmiskā funkcija	12. Funkcijas atvasinājums, tā lietojums	13. Trigonometrija	14. Paralelitāte un perpendikularitāte telpā

9. Statistika

Ieteicamais laiks temata apguvei: 32–36 mācību stundas.

Temata apguves mērķis: pilnveidot un padziļināt izpratni par pētījuma plānošanu, t. sk. pētījumam atbilstošu instrumentu pamatotu izvēli visos tā etapos, datu ieguvi un apstrādi, rezultātu statistisko analīzi un interpretēšanu.

Sasniedzamie rezultāti

Ziņas	Prasmes
• Populācija (ģenerālkopa) ir pētāmo elementu kopa, kuras analīze ļauj izdarīt labākus vispārinājumus nekā atsevišķu elementu analīze. (M.Li.5.) • Populācijas izlase ir reprezentatīva, ja tā atlasīta tādā veidā, lai tās pazīmes iespējami precīzi atspoguļotu populācijas pazīmes. (M.Li.5.) • Lai vispārinātu no izlases gūtos secinājumus uz populāciju (ģenerālkopu), izlasei jābūt reprezentatīvai. (M.Li.5.) • Dati ir pētījuma mainīgā lieluma (pazīmes) vērtības; izšķir kvantitatīvus un kategoriālus (kvalitatīvus) datus. (M.Li.5.) • Kategoriālus datus (piemēram, dzimums, ģimenes stāvoklis) apraksta un klasificē aprakstoši; kvantitatīvi dati izsakāmi ar skaitlisku vērtību, bet ne visi dati, kurus pieraksta ar cipariem, ir kvantitatīvi dati (piemēram, telefonu numuri ir kategoriāli dati). (M.Li.5.) • Kvantitatīvu un kategoriālu (kvalitatīvu) datu analīzei izmanto dažādas metodes. (M.Li.5.) • Dažādi datu attēlošanas veidi atklāj atšķirīgas datu kopai raksturīgās īpašības un paplašina datu analīzes iespējas. (M.Li.5.) • Datu kopas vidējie lielumi (aritmētiskais vidējais, moda, mediāna) raksturo centrālo tendenci/tipisko vērtību, bet neraksturo vērtību izkliedi. (M.Li.5.) • Izkliedes mēri (kvartiles, starpkvartiļu amplitūda, vidējā absolūtā novirze un standartnovirze) raksturo, cik ļoti datu kopas vērtības atšķiras viena no otras un no vidējās vērtības. (M.Li.5.) • Kvartiles ir pazīmes vērtības, kas augošā vai dilstošā secībā sakārtotas vērtības sadala 4 vienādās daļās. Vidējā no piecām kvartilēm sakrīt ar mediānu. (M.Li.5.)	• Raksturo kvantitatīvus un kategoriālus (kvalitatīvus) datus, attēlo tos biežuma tabulās vai grafiski vienam vai diviem mainīgiem lielumiem (pazīmēm), t. sk., izmantojot digitālos rīkus. • Atbilstoši datu veidam (diskrēti, nepārtraukti), izmantojot reālu datu piemērus un atbilstošus digitālos rīkus, nosaka datu kopas vidējos lielumus (aritmētiskais vidējais, mediāna, moda) un izkliedes mērus (amplitūda, kvartiles, starpkvartiļu amplitūda, vidējā absolūtā novirze, dispersija, standartnovirze). • Analizē un interpretē datus pēc to vidējiem lielumiem un izkliedes mēriem. • Veido, t. sk. ar digitāliem rīkiem, datu grafisko attēlojumu (stabiņu un kastu diagramma, izkliedes diagramma, histogramma), konkrētos piemēros izvērtē to lietojumu un formulē ar datiem pamatotus secinājumus. • Salīdzina divas vai vairākas izlases, izmantojot vidējos lielumus, izkliedes mērus, stabiņu un kastu diagrammas, izkliedes diagrammu. • Raksturo divu mainīgo lielumu (pazīmju) saistību, izmantojot biežuma tabulas, izkliedes diagrammas un Pīrsona korelācijas koeficientu (lineāra saistība) un atbilstošus digitālos rīkus.

Ziņas	Prasmes
• Kvartiles un kastu diagrammas bieži izmanto, lai salīdzinātu datu izkliedi vairākās izlasēs/kopās. (M.Li.5.) • Vidējā absolūtā novirze ir vidējais attālums, kādā datu kopas vērtības atrodas no šīs kopas datu vidējās aritmētiskās vērtības; to aprēķina pēc formulas $\frac{\sum_{i=1}^{n} \lvert x_i - \bar{x} \rvert}{n}$. Standartnovirzes aprēķināšanai tiek izmantots novirzes kvadrāts $(x_i - \bar{x})^2$, kas vairumā gadījumu precīzāk raksturo datu izkliedi; standartnovirzi praksē izmanto biežāk. (M.Li.5.) • Divu pazīmju saistības raksturošanai var izmantot biežuma tabulas, izkliedes diagrammas un Pīrsona korelācijas koeficientu (lineārai saistībai). (M.Li.5.) • Saistība starp mainīgajiem lielumiem (pazīmēm) ne vienmēr ļauj secināt par cēloņsakarību. (M.Li.5.) • Saistību starp diviem mainīgajiem x un y var modelēt, iespējami precīzi attēlotajiem datiem pielāgojot taisni (regresijas vienādojumu) $y = kx + b$, kas iet caur punktu $(\bar{x}; \bar{y})$, kur $\bar{x}$ un $\bar{y}$ ir mainīgo vidējās vērtības. (M.Li.5.)	• Salīdzina divu vai vairāku kopu datu sadalījumus, aprakstot un izmantojot kopas datu sadalījuma simetriskumu un formu, izmantojot vidējos lielumus un izkliedes mērus. • Izmanto lineāro regresiju, atbilstošus IT rīkus, lai analizētu divu mainīgo lielumu/pazīmju saistību.
Komplekss sasniedzamais rezultāts	**Ieradumi**
• Lieto atbilstošus digitālos rīkus, lai raksturotu un pamatotu izlašu un populācijas (ģenerālkopas) raksturlielumu atšķirību; salīdzina divas vai vairāk izlases, izmantojot vidējos lielumus, izkliedes mērus, stabiņu un kastu diagrammu, izkliedes diagrammu. (M.O.5.3.1.; M.O.5.3.5.) • Argumentēti raksturo pētījumu, tā mērķi, piemēram, vai dotais jautājums ir statistiski analizējams, izlases reprezentativitāti, mainīgā lieluma (pazīmes) atbilstību pētāmai problēmai, vidējo lielumu un izkliedes mēru lietojumu u. tml. (M.O.5.3.1.; M.O.5.3.3.; M.O.5.3.4.) • Skaidro atšķirību starp saistību un cēloņsakarību un nosaka, vai saistība starp atkarīgo un neatkarīgo mainīgo konkrētajā pētījumā ļauj secināt cēloņsakarību. (M.O.5.3.7.) • Patstāvīgi veic pētījumu – pēta divu lielumu saistību, t. sk. korelāciju, regresiju – izvēlas lielumus, plāno un veic datu ievākšanu, izmanto digitālos rīkus datu apstrādei un attēlošanai, analizē datus un interpretē rezultātus. (M.O.5.3.2.; M.O.5.3.3.; M.O.5.3.6.; M.O.5.3.7.; M.A.5.3.3.; M.A.5.3.4.)	• Rūpīgi plāno datu ievākšanas procesu un attēlošanu, apzinoties, ka neprecizitātes var būt pamats aplamiem secinājumiem. • Izvērtē dotos vai iegūtos datus, attīstot ieradumu iegūto informāciju saistīt ar jau zināmo, kritiski izvērtēt rezultātu ticamību un atbilstību konkrētajai situācijai.
• **Jēdzieni:** kvantitatīvi un kategoriāli (kvalitatīvi) dati, populācija, dispersija, standartnovirze, vidējā absolūtā novirze, kvartiles, starpkvartiļu amplitūda, korelācija, Pīrsona koeficients, regresijas vienādojums.	
• **Simboli un pieņemtie apzīmējumi:** $\bar{x}$; Me; Mo; Q_i; s^2; s.	

Temata apguves norise

Populācija, izlase un dati. Datu sakārtošana un grupēšana	Savieto dotās kopas ar to apakškopām (kopu elementi raksturo daudzveidīgus kontekstus). Skaidro, kas ir populācija citu mācību priekšmetu kontekstos. Izmantojot skolotāja dotus piemērus, min, kas varētu būt populācija un kas – izlase, pēc tam, strādājot individuāli vai pāros, veido savus piemērus. Strādājot grupā (3 līdz 4 skolēni), veido domu karti, lai attēlotu dažādus jautājumus, kurus var analizēt statistiski, ja ir dota noteikta populācija (piemēram, iedzīvotāju grupa, kādas valsts pilsoņi, parkā augošie koki). Stāsta klasesbiedriem par to, kas noteica pētāmā jautājuma izvēli, piemēram, vēlme izpētīt pētāmās kopas elementu noteiktas īpašības, pieejamie līdzekļi/instrumenti, personiskā pieredze, iegūtā informācija. Izmanto skolotāja piedāvātos pētāmo jautājumu piemērus, lai izvērtētu, kura izlase labāk raksturo doto populāciju (ģenerālkopu), strādājot pārī, pamato viedokli, salīdzinot izlasē iekļauto/neiekļauto elementu īpašības ar īpašībām, kas caurmērā piemīt populācijas (ģenerālkopas) elementiem (piemēram, pētījumā par smēķēšanas ieradumiem tiek apskatītas trīs izlases: kādas skolas skolēni, autoostas smēķētāju zonas apmeklētāji un 30 nejauši izvēlēti gājēji). Pilnveido prasmi formulēt pētāmo jautājumu: izveido divus pētāmos jautājumus tā, lai vienā gadījumā dotā kopa (piemēram, otrdien lidostas stāvlaukumā novietotās mašīnas) būtu populācija (ģenerālkopa), bet otrā – izlase. Izmantojot tīmekļa resursus, atrod vārdu "kvantitāte", "kvalitāte" un "kategorija" nozīmi (vēl nesaistītu ar statistiku). Strādājot ar skolotāja piedāvātiem piemēriem, izsaka pieņēmumu par to, kuri dati varētu būt kvantitatīvi, kvalitatīvi/kategoriāli. Konkrētos piemēros nosaka datu veidu – kategoriāli (kvalitatīvi), kvantitatīvi (diskrēti, nepārtraukti), minot pazīmes, kas ļauj atšķirt vienu datu veidu no otra. Vingrinās dažādos veidos iegūtos datus (tīmeklī, citos avotos pieejamus reālus datus vai patstāvīgi iegūtos) sakārtot augošā vai dilstošā secībā, izmantojot digitālos rīkus. Izmanto tīmeklī pieejamus diskrētus datus, tos sagrupē, t. sk. dažādos veidos, un sagrupētos datus sakārto relatīvā biežuma tabulā. Vingrinās grupēt diskrētus un nepārtrauktus datus relatīvā biežuma tabulās, izmantojot intervālus.
Statistiskie rādītāji, to noteikšana	Skolotāja dotos vai klasesbiedru veidotos piemēros pēc dotā apraksta atpazīst absolūto un relatīvo biežumu, aritmētisko vidējo, modu, mediānu, amplitūdu. Vispirms nosaka statistiskos rādītājus neliela apjoma datu kopai, savu darbību komentē, lieto matemātisko valodu, t. sk., izmantojot dotas simulācijas. Tad nosaka statistiskos rādītājus reālai liela apjoma datu kopai, izmantojot digitālos rīkus; raksturo datus, izmantojot statistiskos rādītājus. Aplūkojot vienu un to pašu datu dažādus attēlojumus (līniju, stabiņu, sektoru diagramma), spriež par to priekšrocībām un trūkumiem. Sadarbojas, lasa un analizē dotu reālu datu apkopojumu, kurā tiek salīdzināti dati (2 vai 3 datu kopas); mēģina salīdzināt datus, izmantojot jau zināmos statistiskos rādītājus, secina, ka tie ir nepietiekami. Tad, lasot tekstu, t. sk., izmantojot tīmeklī pieejamo informāciju, skolēni iepazīst jēdzienus "kvartiles" un "starpkvartiļu amplitūda". Nosaka kvartiles dotajām 2 vai 3 datu kopām, ar digitāliem rīkiem veido kastu diagrammas. Secina, komentē, pamato, kā kvartiles un datu attēlošana ar kastu diagrammu palīdz salīdzināt datus. Spriež, raksturo saistību starp lielumiem mediāna, amplitūda un kvartiles, starpkvartiļu amplitūda. Dotām reālu datu kopām vingrinās noteikt kvartiles, starpkvartiļu amplitūdu, veido kastu diagrammas ar digitāliem rīkiem; vārdiski raksturo datu izkliedi. Izmantojot dotu neliela apjoma datu kopu, spriež par iespējām novērtēt datu izkliedi: apskatot dažādus variantus (novirze no aritmētiskā vidējā, novirzes absolūtā vērtība, novirzes kvadrāts). Mācās lasīt un izmantot summas simbolu Σ, veido vidējās absolūtās novirzes, dispersijas un standartnovirzes aprēķināšanas izteiksmes (nelielam datu skaitam).

Temata apguves norise (turpinājums)

Statistiskie rādītāji, to noteikšana	Dotām (2 vai 3) liela apjoma reālām datu kopām nosaka standartnovirzi, izmantojot digitālos rīkus. Raksturo, salīdzina datu izkliedi dotajās kopās, izmantojot katras datu kopas vidējo un standartnovirzi. Lietojot digitālos rīkus un skolotāja piedāvātos datus par kādu populāciju (ģenerālkopu) ar vismaz 50 elementiem, nosaka gan populācijas, gan izvēlētās izlases absolūto un relatīvo biežumu, aritmētisko vidējo, modu, mediānu, amplitūdu, kvartiles, standartnovirzi, vidējo absolūto novirzi; pēta, kā mainās šie lielumi, ja izvēlas citu, pēc elementiem vai apjoma atšķirīgu, dotās populācijas izlasi. Izsaka priekšlikumus par to, kā vajadzētu rīkoties, veidojot izlasi, ja mērķis ir analizēt populāciju.
Datu analīze un interpretācija	Izvērtē, kādi dati būs nepieciešami, lai analizētu pētāmo jautājumu, un veido veicamajam uzdevumam un datu tipam atbilstošu biežuma tabulu: biežums nolasāms pa vienu vai divām dimensijām. Uzkrāj datus, izmantojot digitālos rīkus. Analizē skolotāja piedāvātos piemērus ar datu attēlojumiem, norāda uz paņēmieniem, kas izmantoti, lai radītu maldinošu iespaidu: nav norādīta nulltā iedaļa, dati apkopoti dažāda platuma intervālos, daži intervāli ir izlaisti u. tml. Strādājot pāros vai grupās, meklē kļūdaini attēlotu datu piemērus apkārtējā vidē. Izmantojot atbilstošo statistisko rādītāju vērtības, veido dotās/paša pētītās populācijas (ģenerālkopas) vai izlases aprakstu dažādiem adresātiem: piemēram, specializēta zinātniska žurnāla lasītājs, TV reportāžas skatītājs, kāda produkta/pakalpojuma potenciālais lietotājs. Veic laboratorijas darbā, piemēram, fizikā, bioloģijā, iegūto rezultātu analīzi, izmantojot zināšanas par statistiskajiem rādītājiem. Izmantojot skolotāja dotus, pašu atrastus vai veidotus piemērus, izvērtē, kuros gadījumos ievāktie dati nav ticami; pamato viedokli, atsaucoties uz konkrētām vērtībām vai novērotajām tendencēm (piemēram, tiek mērīts dažādu gliemežvāku garums, bet mērījumi lielākoties beidzas ar cipariem 0 un 5) datu kopā. Izmantojot reālus datus (piemēram, basketbola vai hokeja komandu rādītāji; klašu pārbaudes darbu rezultāti), salīdzina divas vai vairākas izlases, lietojot ar digitāliem rīkiem iegūtos vidējos lielumus, izkliedes mērus, stabiņu un kastu diagrammas.
Korelācija un cēloņsakarība, regresija	Veido teikumus formā "jo lielāks (mazāks)..., jo lielāks (mazāks)..." , papildina izkliedes diagrammas, kurās redzama pozitīva/negatīva korelācija (vēl nezinot jēdzienu) ar atbilstošiem lielumiem uz asīm, paskaidro savu izvēli. Izmantojot dotos datus (lineāra saistība), ar digitāliem rīkiem veido izkliedes diagrammas un nosaka Pīrsona koeficientu, lai spriestu par divu izvēlēto lielumu saistību. Iegūst un apkopo datus par diviem lielumiem, kas raksturo vienu objektu, piemēram, grāmatas cena un lappušu skaits, cilvēka auguma garums un svars. Attēlo datus grafiski, izmantojot IT, raksturo saistību starp lielumiem. Nosaka grafiskā attēlojuma punktu, kura koordinātas ir lielumu vidējās vērtības. Izsaka idejas un manuāli skicē taisni, kas iet caur šo punktu un visprecīzāk raksturo saistību starp lielumiem, uzraksta taisnes vienādojumu; pēc tam iegūst taisnes vienādojumu, izmantojot IT (izklājlapu sadaļā vai *GeoGebra*), iepazīst nosaukumus: regresijas taisne, regresijas līkne. Konkrētos piemēros lieto regresijas taisnes vienādojumu, lai formulētu secinājumus. Piemērs. Nosaki regresijas taisnes vienādojumu, izmantojot dotos datus par klases skolēnu auguma garumu un svaru. Izmantojot paša izvēlētus piemērus, izsaka savas domas, kas ir saistība/korelācija un cēloņsakarība un to, vai saistība starp diviem lielumiem vienmēr nozīmē arī cēloņsakarību. Sadarbojas, spriež vai atrod piemērus tīmeklī un ar konkrētiem piemēriem argumentē/pamato, ka saistība ne vienmēr ļauj secināt arī par cēloņsakarību. Izvērtē citu grupu veidotos piemērus, formulē jautājumus par neskaidro.

Temata apguves norise (turpinājums)

Korelācija un cēloņsakarība, regresija	Spriež par to, kā atšķirt situācijas, kurās starp lielumiem ir ne tikai saistība, bet arī cēloņsakarība. Izvērtē skolotāja vai klasesbiedru piedāvātos divu lielumu korelācijas piemērus pēc pazīmes cēloņsakarība, pamato savu atbildi. Izmanto skolotāja piedāvātas idejas un pēta divu lielumu saistību, t. sk. korelāciju, regresijas vienādojumu – izvēlas lielumus, plāno un veic datu ievākšanu, izmanto digitālos rīkus datu apstrādei un attēlošanai, analizē datus un interpretē rezultātus. Patstāvīgi vai sadarbībā ar kāda cita priekšmeta skolotāju izvēlas un formulē pētījuma mērķi, plāno un veic pētījumu (sk. nākamo sadaļu), izmanto statistiku, lai formulētu pamatotus secinājumus.
Statistisko lielumu pamatota izvēle	Uzziņu literatūrā iegūst informāciju par variācijas koeficientu un to izmanto, lai noteiktu, kā vidējais aritmētiskais raksturo pētāmo datu kopu. Raksturo, salīdzina, konkrētajā gadījumā pamato vidējās vērtības un standartnovirzes vai mediānas un starpkvartiļu amplitūdas izmantošanu datu aprakstīšanai. Piemērs. Apkopo datus par savas skolas pēdējo 4–5 gadu rezultātiem matemātikas eksāmenā. Apraksti datus, izmantojot gan vidējās vērtības un standartnovirzes, gan mediānu un starpkvartiļu amplitūdu. Kurš lielumu pāris ļauj precīzāk raksturot datus?
Datos balstīts pētījums	Plāno pētījumu, kura mērķis ir analizēt kādu parādību un noteikt faktorus, kuri veicina vai ierobežo to. Piemērs. Izvēlies mainīgus lielumus, par kuriem tev ir iespēja iegūt datus, lai izpētītu un raksturotu saistību starp tiem. Pēti jautājumu, kas tev interesants, personiski nozīmīgs. Secinājumu formulēšanai un pamatošanai izvēlies tos attēlošanas veidus, vidējos un izkliedes mērus, kas parāda datiem raksturīgo. Datu apstrādei, statistisko lielumu noteikšanai izmanto IT iespējas. Izskati iespēju izmantot lietojumprogrammu *Tracker* (pieejams tiešsaistē: https://physlets.org/tracker/), lai iegūtu datus par kāda filmēta objekta kustību. Apstrādā un analizē iegūtos datus, izmantojot izklājlapu lietotnes: 1) sagatavo iegūtos datus statistiskajai apstrādei, kodējot un ievadot datus; 2) aprēķina statistikas rādītājus, absolūto un relatīvo biežumu, vidējo vērtību, kvartiles, t. sk. mediānu, standartnovirzi; 3) nosaka saistību starp datiem, aprēķina Pīrsona korelācijas koeficientu; 4) izvēlas un veido atbilstošas diagrammas, lai attēlotu iegūtos rezultātus; 5) interpretē iegūtos rezultātus. Veido pētījuma pārskatu.

9. Statistika	10. Eksponentfunkcija, vienādojumi un nevienādības	11. Inversā funkcija un logaritmiskā funkcija	12. Funkcijas atvasinājums, tā lietojums	13. Trigonometrija	14. Paralelitāte un perpendikularitāte telpā

10. Eksponentfunkcija, vienādojumi un nevienādības

Ieteicamais laiks temata apguvei: 32–36 mācību stundas.

Temata apguves mērķis: raksturo un analizē lielumus, kas mainās eksponenciāli, lietojot eksponentfunkcijas un tās grafika īpašības, eksponentvienādojumus un eksponentnevienādības.

Sasniedzamie rezultāti

Ziņas	Prasmes
• Ģeometriskā progresija ir skaitļu virkne, kurā katrs nākamais loceklis tiek iegūts, iepriekšējo reizinot ar vienu un to pašu skaitli – kvocientu (q). (M.Li.4.) • Ģeometrisko progresiju var pierakstīt rekurenti vai ar vispārīgā locekļa formulu. (M.Li.1.; M.Li.4.) • Katrs ģeometriskās progresijas loceklis (sākot ar otro) ir blakus esošo locekļu vidējais ģeometriskais, ko pieraksta ${b_n}^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$. (M.Li.4.) • Ģeometriskā progresija ir bezgalīgi dilstoša, ja kvocients pēc moduļa mazāks nekā 1 $(\lvert q \rvert < 1)$. (M.Li.4.) • Ja $0 < a < 1$ un $n \to \infty$, tad $a^n \to 0$. To izmanto, lai pamatotu, ka bezgalīgi dilstošas ģeometriskās progresijas visu locekļu summa ir galīgs skaitlis. (M.Li.2.; M.Li.4.) • Par n-tās pakāpes sakni no reāla skaitļa a sauc tādu skaitli b, kurš kāpināts n-tajā pakāpē vienāds ar a, t. i., $\sqrt[n]{a} = b$, ja $b^n = a$. (M.Li.3.) • Ja bāze ir pozitīvs skaitlis, n-tās pakāpes sakni var aizstāt ar pakāpi, un otrādi; šo sakarību apraksta formula $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. (M.Li.1.; M.Li.3.) • Pakāpju īpašības: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $a^m : a^n = a^{m-n}$, $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ ir spēkā arī tad, ja kāpinātāji m un n ir racionāli skaitļi; tās izmanto izteiksmju pārveidošanai, vienādojumu (nevienādību) pārveidošanai formā $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ $(a^{f(x)} < a^{g(x)})$. (M.Li.3.; M.Li.4.) • Aizvietojot pozitīva skaitļa kāpinātāju ar mainīgu lielumu, iegūst eksponentfunkciju $y = a^x$, kur $a > 0$; $a \neq 1$; eksponentfunkcijas īpašības ir atkarīgas no bāzes a. (M.Li.4.) • Eksponentfunkcijas īpašības izmanto, lai novērtētu pakāpes aptuveno vērtību, salīdzinātu pakāpes, pamatotu vienādojumu $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ un nevienādību $(a^{f(x)} < a^{g(x)})$ atrisināšanu. (M.Li.4.)	• Ģeometrisko progresiju raksturo aprakstoši, ar vispārīgā locekļa formulu un rekurenti, attēlo grafiski. • Lieto ģeometriskās progresijas vispārīgā locekļa formulu un pirmo n locekļu summas formulu, bezgalīgi dilstošas ģeometriskās progresijas visu locekļu summas formulu nezināmo lielumu un sakarību starp virknes locekļiem noteikšanai. • Lasa, uzraksta pēc dzirdētā izteiksmes, kas satur n-tās pakāpes saknes, pakāpes ar racionālu kāpinātāju un logaritmus, skaidro pieņemto simbolu un apzīmējumu lietojumu. • Aprēķina precīzo vai aptuveno vērtību (t. sk. ar digitāliem rīkiem) skaitļiem, kas izteikti kā n-tās pakāpes saknes vai pakāpes ar racionālu kāpinātāju, tos salīdzina, sakārto augošā/dilstošā secībā un novērtē, starp kādiem veseliem skaitļiem tie atrodas. • Identiski pārveido izteiksmes, kas satur n-tās pakāpes saknes un pakāpes ar racionālu kāpinātāju, lietojot n-tās pakāpes saknes īpašības (saknes rādītāja paplašināšana/saīsināšana, sakne no reizinājuma, dalījuma, pakāpes un saknes) un pakāpju īpašības, pāreju no viena skaitļa pieraksta veida uz otru.

• Ģeometriskā progresija un eksponentfunkcija formā $y = c \cdot a^{kx+b}$ matemātiski apraksta/modelē noteiktus procesus dabā, tehnoloģijās un sabiedrībā, kuros kāds raksturīgais lielums "arvien straujāk" palielinās vai samazinās. (M.Li.4.) • Skaitlis e ir virknes $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ robeža, kad $n \to \infty$. (M.Li.2.; M.Li.3.; M.Li.4.) • Logaritms ir kāpinātājs; ar simbolu $\log_a b$ tiek apzīmēta precīzā vērtība kāpinātājam, kurā, kāpinot skaitli a, iegūst skaitli b. (M.Li.1.; M.Li.3.) • Kāpināšana, n-tās pakāpes saknes vilkšana un logaritmēšana (logaritma noteikšana) ir savstarpēji saistītas darbības. (M.Li.2.; M.Li.3.) • Matemātiskos un citu zinātņu kontekstos bieži izmanto logaritmus ar bāzi 10 jeb decimāllogaritmus un logaritmus ar bāzi e jeb naturāllogaritmus; pārejai uz citu bāzi lieto bāzes maiņas formulu. (M.Li.1.; M.Li.3.) • Eksponentvienādojumu risināšanā var izmantot vienādojumu risināšanas vispārīgos paņēmienus (sadalīšana reizinātājos, substitūcija, grafiskais paņēmiens). (M.Li.2.; M.Li.4.)	• Zīmē, t. sk., izmantojot digitālos rīkus, eksponentfunkcijas $f(x) = c \cdot a^{kx+b}$ grafiku, izmantojot funkcijas un grafika īpašības, nosakot atsevišķus grafika punktus un funkcijas robežu. • Atrisina eksponentvienādojumu un eksponentnevienādību (pārveidojami formā $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, $a^{f(x)} < a^{g(x)}$), lietojot pakāpju īpašību; skaidro un pamato veiktos pārveidojumus, lietojot eksponentfunkcijas īpašības. • Nosaka logaritma, t. sk. decimāllogaritma un naturāllogaritma, precīzo vai aptuveno skaitlisko vērtību, izmantojot logaritma definīciju, bāzes maiņas formulu, piemērotas eksponentfunkcijas grafiku vai digitālos rīkus; vienādību $a^x = b$ pieraksta, izmantojot logaritmu, un otrādi.
Komplekss sasniedzamais rezultāts	**Ieradumi**
• Pierāda ģeometriskās progresijas vispārīgā locekļa formulu, pirmo n locekļu summas formulu un ģeometriskās progresijas īpašības, lietojot matemātiskās indukcijas principu. (M.A.2.3.4.; M.A.4.1.1.) • Formulē un pierāda n-tās pakāpes sakņu, pakāpju ar racionālu kāpinātāju īpašības; skaidro un veic algebriskus pārveidojumus ar n-tās pakāpes saknēm un pakāpēm ar racionālu kāpinātāju, korekti veidojot vārdisko komunikāciju un simbolisko pierakstu. (M.O.1.1.2.; M.O.2.3.1.; M.A.3.2.1.; M.A.4.4.4.) • Analizē un lieto dotus vai izveidotus eksponenciālus modeļus (funkcijas, vienādojumus, nevienādības), t. sk. salikto procentu formulu situācijās ar citu mācību jomu kontekstu, piemēram, radioaktīvo izotopu pussabrukšanas periods, pasaules iedzīvotāju skaits, baktēriju populācijas vairošanās, banku rēķini, lai noteiktu nezināmo lielumu, formulētu secinājumus. (M.O.4.1.1.; M.O.4.1.2.; M.O.4.2.6.; M.O.4.5.7.; M.A.2.2.1.) • Veic aprēķinus, lietojot izklājlapas, un formulē pieņēmumu par skaitli e kā virknes $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ robežu, kad $n \to +\infty$. (M.A.3.1.1.; M.A.4.1.3.) • Atrisina vienkāršus ($a^x = b,\ a^x < b$) eksponentvienādojumus un nevienādības ar parametru, skaidro atrisinājumu. (M.A.2.1.3.; M.A.4.5.6.) • Argumentēti izvēlas vienādojumu risināšanas vispārīgo paņēmienu (sadalīšana reizinātājos, substitūcija, grafiskais paņēmiens) eksponentvienādojumu vai nevienādību risināšanai, veido un skaidro atrisinājumu. (M.O.4.5.5.)	• Matemātiski korekti lasa un pieraksta saknes, pakāpes un virknes formulas, attīstot ieradumu apgalvojumus formulēt precīzi, apzinoties, ka neprecizitātes var būt pamats aplamiem secinājumiem. • Veido apgūto zināšanu kopsavilkumus/pārskatus, attīstot ieradumu plānot un vadīt savu domāšanas procesu, ik pa laikam izvērtēt paveikto. • Strukturēti pieraksta un skaidro eksponentvienādojuma, nevienādības atrisinājumu, attīstot ieradumu vārdisko un rakstīto tekstu veidot saistītu un citiem saprotamu, pamatot savus spriedumus.
Jēdzieni: ģeometriskā progresija, kvocients, bezgalīgi dilstoša ģeometriskā progresija, robeža, skaitlis e, n-tās pakāpes sakne, eksponentfunkcija, eksponentvienādojums, eksponentnevienādība, logaritms, naturāllogaritms, decimāllogaritms.	
Simboli un pieņemtie apzīmējumi: $\sqrt[n]{a}$; $\log_a b$; $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$; $a^{\frac{k}{n}}$; e; $\log_e a = \ln a$; $\log_{10} a = \lg a$.	

Temata apguves norise

Ģeometriskā progresija	Lieto ģeometriskās progresijas definīciju, atšķirot tās no citām virknēm. Salīdzina aritmētisko progresiju ar ģeometrisko progresiju un atrod kopīgo un atšķirīgo. Modelē situācijas, kuras atbilst ģeometriskās progresijas likumiem, un aprēķina, novērtē atbilstošos lielumus (virknes locekli, kvocientu, virknes locekļa kārtas numuru, n-locekļu summu). Matemātiskos objektos saskata un pamato ģeometrisko progresiju, raksturo lielumus un sakarības starp tiem, piemēram, Koha sniegpārsliņa, Serpinska trijstūri.
Bezgalīgi dilstoša ģeometriskā progresija	Definē bezgalīgi dilstošu ģeometrisko progresiju. Izsaka pieņēmumu par virknes $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ visu locekļu summu ($n \in \mathbb{N}$), ar IT nosakot summas skaitlisko vērtību konkrētām n vērtībām. Uzziņu avotos atrod informāciju par virknes b_n visu locekļu summu. Skaidro formulas vizuālo interpretāciju/pierādījumu. Lieto bezgalīgi dilstošas ģeometriskās progresijas summas formulu nezināmā lieluma aprēķināšanai ģeometriskos kontekstos. Piemērs. Riņķī, kura rādiuss ir R, ievilkts kvadrāts; kvadrātā ievilkts riņķis, šai riņķī ievilkts kvadrāts utt. Nosaki visu riņķu laukumu summu un visu kvadrātu laukumu summu. Veido zināšanu pārnesumu, saskatot un lietojot aritmētisko progresiju vai ģeometrisko progresiju kā situāciju (praktisks, citu mācību jomu konteksts) matemātisko modeli.
Pakāpe ar racionālu kāpinātāju	Lasa, pieraksta, definē, salīdzina, sakārto augošā/dilstošā secībā, novērtē, starp kādiem veseliem skaitļiem atrodas skaitļi, kas izteikti kā n-tās pakāpes saknes, nosaka to precīzu vai aptuvenu vērtību, t. sk. ar digitāliem rīkiem. Lieto n-tās pakāpes sakni izteiksmes skaitliskās vērtības noteikšanai, novērtēšanai vai salīdzināšanai. Ar zināšanām par n-tās pakāpes sakni pamato īpašības pakāpēm ar racionālu kāpinātāju, ja bāze ir pozitīvs skaitlis. Lieto pakāpes ar racionālu kāpinātāju īpašības, vienkāršojot izteiksmes, aprēķinot un salīdzinot skaitlisko izteiksmju vērtības. n-tās pakāpes sakni izsaka kā pakāpi ar racionālu kāpinātāju, un otrādi. Lieto pierādītās sakarības un algebriskos pārveidojumus vispārīgi uzdotu izteiksmju pārveidošanai (situācijās, kas aktuālas turpmākajā kursā). Piemēri. 1. Izteiksmi $\sqrt{0{,}5^x} \cdot \sqrt[3]{4^x}$ izsaki kā divnieka pakāpi. 2. Izteiksmes $a - 2\sqrt{a}\,\sqrt{b} + b;\ a - x$ sadali reizinātājos; ja iespējams, tad ar dažādiem paņēmieniem. 3. Izteiksmi uzraksti kā pakāpi vai pakāpju summu: a) $\frac{\sqrt[3]{x}}{x}$; b) $\frac{x^2 - x}{x - \sqrt{x}}$.

Temata apguves norise (turpinājums)

Eksponentfunkcija	Saskata un izprot eksponenciālus modeļus (galīga/bezgalīga ģeometriska progresija – "papīra locīšana uz pusēm" – biezuma noteikšana vai "griežot papīru uz pusēm") un prot tos aprakstīt: ar vārdiem, ar formulu, tabulā vai grafiski, ja kāpinātājs ir vesels skaitlis. Vispārina eksponentfunkcijas un tās grafika īpašības (definīcijas kopa, vērtību kopa, krustpunkti ar asīm, augšana/dilšana, funkcijas vērtības, asimptotas), ņemot vērā eksponentfunkcijas bāzi, ja kāpinātājs ir reāls skaitlis. Atpazīst situācijas (piemēram, saliktie procenti), kurās ir eksponenciāla augšana/dilšana, veido matemātisko modeli un aprēķina/nosaka grafiski vai no tabulas atbilstošos elementus. Pētot, spriežot par salikto procentu formulu, kāpinātājam tiecoties uz bezgalību, nonāk līdz skaitlim e. Skaidro skaitļa e vērtību kā robežu izteiksmei $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, kad $n \to \infty$. Diskutē par eksponenciālā modeļa atbilstību reālajai situācijai (piemēram, "papīra locīšanai", Ebolas vīrusa izplatība). Pieraksta kāpinātāju kā logaritmu, nosaka un novērtē kāpinātāju no tabulas, grafiski vai ar kalkulatoru. Skaidro naturāllogaritma un decimāllogaritma simbolisko pierakstu. Lasa, pieraksta, definē naturāllogaritmu, nosaka tā precīzu vai aptuvenu vērtību, t. sk. ar digitāliem rīkiem. Situācijās ar praktisku, citu mācību jomu (piemēram, ekonomika, ģeogrāfija, bioloģija, fizika) kontekstu raksturo sakarību starp lielumiem, ja to matemātiski apraksta eksponentfunkcija; aprēķina vai nosaka no grafika nezināmos lielumus, izmanto zināšanas par vienādojumu atrisināšanu jaunā situācijā (nosaka eksponentvienādojuma atrisinājumu, t. sk. ar grafisko paņēmienu). Ievērojot doto informāciju un izmantojot dotos datus, nosaka un pamato eksponentfunkciju formā $y = c \cdot a^{kx+b}$ (t. sk. ar bāzi e) kā situācijas matemātisko modeli; izmanto iegūto formulu nezināmo lielumu noteikšanai, secinājumu formulēšanai. Izmantojot dotus datus un pieņēmumu, ka process ir eksponenciāls, nosaka formulu eksponentfunkcijai, kura visprecīzāk raksturo sakarību starp lielumiem. Iegūst informāciju par konkrētām eksponentfunkcijām kā reālu procesu matemātiskajiem modeļiem. Secina, ka, modelējot reālus procesus, eksponentfunkciju bieži pieraksta ar bāzi e. Meklē informāciju, lai iegūtu tam skaidrojumu. Pierāda, ka šādu bāzes pāreju var veikt vienmēr.
	Piemēri. 1. Iekārtas vērtību N (EUR) apraksta funkcija $N(t) = 500 \cdot 0{,}6^t$, kur t – iekārtas ekspluatācijas laiks (gados). Aprēķini jaunas iekārtas (nav bijusi ekspluatācijā) vērtību. 2. Sakarību starp aizvadīto laiku t (stundās), kopš pacients lietojis pirmo zāļu devu, un zāļu daudzumu (miligramos) $M(t)$ pacienta asinsritē modelē funkcija $M(t) = 20 \cdot e^{-0{,}8t}$. Pēc cik ilga laika zāļu daudzums pacienta asinsritē būs 1 mg? 3. Tvertnē ir $10\ 000$ litru šķidruma. Laika momentā $t = 0$ minūtes tiek atvērts krāns, un šķidrums tek ārā no tvertnes. Šķidruma tilpumu V litri, kas paliek tvertnē pēc t minūtēm, apraksta formula $V(t) = 10000 \cdot 0{,}933^t$. a) Nosaki V vērtību pēc 6 minūtēm. b) Nosaki ar precizitāti līdz pilnām sekundēm, pēc cik ilga laika tvertnē palikušais šķidrums būs vienāds ar pusi no sākotnējā tilpuma. c) Tiek uzskatīts, ka tvertne ir tukša, ja 98 % šķidruma ir iztecējis. Aprēķini, pēc cik ilga laika tvertne būs tukša. 4. Viedtālrunis, kurš jauns maksā 600 EUR, katru gadu zaudē 25 % no savas vērtības. Apraksti viedtālruņa vērtību kā funkciju $V(t)$, kur t gadu skaits kopš pirkuma.

Temata apguves norise (turpinājums)

<table>
<tr><td>Matemātiskā modelēšana</td><td>
Diskutē par jautājumu “Vai eksistē reāli eksponenciāli procesi, kuros kāds lielums pieaug/samazinās neierobežoti?”.

Izsaka idejas par reāliem procesiem, sakarībām starp lielumiem, kuru matemātiskais modelis varētu būt eksponentfunkcija. Iegūst, t. sk., izmantojot brīvi pieejamos interneta resursus, un apkopo datus (lielumu skaitliskās vērtības) par kādu skolotāja ieteiktu vai kopīgi izvēlētu reālu procesu. Attēlo iegūtos datus koordinātu plaknē un izmanto piemērotas lietotnes, lai noteiktu formulas funkcijām, kas tuvināti, bet iespējami precīzi aprakstītu sakarību starp lielumiem. Secina par iespējām izmantot izklājlapās iebūvētos rīkus, lai noteiktu funkciju, kura ir sakarības visprecīzākais matemātiskais modelis. Izvērtē iespējas izmantot iegūto funkciju, lai formulētu pamatotas prognozes, raksturo citu faktoru iespējamo ietekmi.

Piemērs. Tabulā doti dati par pārdoto viedtālruņu skaitu pasaulē no 2008. līdz 2012. gadam (avots: http://seekingalpha.com).

<table>
<tr><td>Gads</td><td>2008</td><td>2009</td><td>2010</td><td>2011</td><td>2012</td></tr>
<tr><td>Skaits (miljoni)</td><td>1,7</td><td>3,8</td><td>8,8</td><td>18,6</td><td>35,3</td></tr>
</table>
a) Atrodi datus par laiku no 2013. līdz 2021. gadam (norādi informācijas avotu).
b) Izmanto atbilstošus digitālos rīkus un attēlo datus grafiski, nosaki funkciju un tās formulu, kas iespējami precīzi apraksta pārdoto viedtālruņu skaita pieaugumu laikā no 2008. līdz 2021. gadam.
c) Formulē secinājumus, pamato ar datiem. Izvērtē iespējas pamatoti prognozēt.
</td></tr>
<tr><td>Eksponentvienādojumi un nevienādības</td><td>
Atrod informāciju un skaidro, kas ir eksponentvienādojums.

Spriež, izmanto eksponentfunkcijas īpašības vienādojumu atrisināšanai, piemēram, $2^x = -4$, $3^x = 6^x$.

Lieto grafisko paņēmienu tādu vienādojumu atrisināšanai, kas satur nezināmo ne tikai kāpinātājā, piemēram, $0{,}2^x = x + 6$.

Izsaka idejas, kā atrisināt vienādojumu $4 \cdot 2^x = 8^{x+1}$, kā pamatot, ka citu sakņu nav. Patstāvīgi formulē algoritmu. Raksturo tipiskus kļūdu cēloņus.

Izmantojot eksponentfunkcijas īpašības, pakāpju īpašības un vārdiski skaidrojot to lietojumu, pārveido vienādojumu formā $a^{f(x)} = b$ vai $a^{f(x)} = a^{g(x)}$. Vingrinās šādu vienādojumu atrisināšanā.

No dotas nevienādības, piemēram, $a^{-2} > a^{-3}$, secina par pozitīvas bāzes a vērtību kopu, pamato secinājumu.

Salīdzina kāpinātājus pakāpēm ar vienādām bāzēm, piemēram, $0{,}8^m > 0{,}8^n$; skaidro, kā secināja.

Izmantojot eksponentfunkcijas īpašības, pakāpju īpašības un vārdiski skaidrojot to lietojumu, pārveido nevienādību formā $a^{f(x)} > b$ vai $a^{f(x)} > a^{g(x)}$. Vingrinās šādu nevienādību atrisināšanā.

Risina vienkāršus eksponentvienādojumus un nevienādības ar parametru, piemēram, $4^x = a$.

Veido zināšanu pārnesumu un saskata substitūcijas vai sadalīšanas reizinātājos izmantošanu vienādojumu atrisināšanai jaunā situācijā, piemēram, $4^{x+1} + 2^{x+3} - 5 = 0$; $x \cdot 3^x - 9x = 0$. Formulē algoritmus, raksturo tipiskus kļūdu cēloņus, vingrinās lietot substitūciju, sadalīšanu reizinātājos eksponentvienādojumu atrisināšanai.

Formulē un skaidro algoritmu eksponentnevienādības atrisināšanai ar substitūciju, veido atrisinājumu, piemēram, $5^{2x+1} > 5^x + 4$; skaidro pieraksta veidošanu, lai tas būtu viennozīmīgi saprotams lasītājam.
</td></tr>
</table>

9. Statistika	10. Eksponentfunkcija, vienādojumi un nevienādības	11. Inversā funkcija un logaritmiskā funkcija	12. Funkcijas atvasinājums, tā lietojums	13. Trigonometrija	14. Paralelitāte un perpendikularitāte telpā

11. Inversā funkcija un logaritmiskā funkcija

Ieteicamais laiks temata apguvei: 30–34 mācību stundas.

Temata apguves mērķis: lieto inversās funkcijas definīciju un īpašības, nosaka inverso funkciju zināmajām funkcijām, t. sk. eksponentfunkcijai, lieto logaritmu īpašības izteiksmju vienkāršošanā un vienādojumu/nevienādību risināšanā.

Sasniedzamie rezultāti

Ziņas	Prasmes
• Atbilstība starp kopām X un Y ir viennozīmīga, ja katram $x_0 \in X$ atbilst tieši viens $y_0 \in Y$ un katram $y_0 \in Y$ atbilst tieši viens kopas X elements, kas ir x_0. Piemēram, funkcija $y = 2x$ ir viennozīmīga atbilstība, bet funkcija $y = x^2$ nav viennozīmīga atbilstība. (M.Li.4.) • Funkcijai, kas ir viennozīmīga atbilstība, var noteikt inverso funkciju. Ja funkcija $y = f(x)$ ir viennozīmīga atbilstība, tad tās inversā funkcija ir $x = \varphi(y)$. Parasti inversās funkcijas argumentu apzīmē ar x un funkcijas vērtību ar y un raksta $y = \varphi(x)$ vai $y = f^{-1}(x)$. (M.Li.1.; M.Li.4.) • Inversās funkcijas ļauj matemātiski raksturot reālus procesus, “mainot vietām” neatkarīgo un atkarīgo mainīgo. (M.Li.2.; M.Li.4.) • Divu savstarpēji inversu funkciju grafiki ir simetriski attiecībā pret taisni $y = x$. (M.Li.4.; M.Li.6.) • Izpildot ar dotu skaitli x divas savstarpēji inversas operācijas, iegūst doto skaitli x jeb $f(f^{-1}(x)) = x$, ja vien skaitlis x pieder funkciju f un f^{-1} definīcijas kopām; dažkārt šo īpašību izmanto logaritmisko vienādojumu un nevienādību risināšanā. (M.Li.2.; M.Li.4.) • Logaritmiskā funkcija $y = \log_a x$ $(a > 0;\ a \neq 1)$ ir eksponentfunkcijas $y = a^x$ inversā funkcija, kas ļauj spriest par tās īpašībām un grafiku, izmantojot jau zināmo par eksponentfunkciju. (M.Li.2.; M.Li.4.) • Logaritmu īpašības ($\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$, $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$, $\log_a b^c = c \log_a b$) var formulēt un pamatot, izmantojot jau zināmo par pakāpju īpašībām; tās izmanto izteiksmju pārveidošanai un vērtības aprēķināšanai, logaritmisko vienādojumu un nevienādību pārveidošanai formā $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ ($\log_a f(x) < \log_a g(x)$). (M.Li.1.; M.Li.2.; M.Li.4.) • Logaritmiskās funkcijas īpašības izmanto, lai novērtētu logaritma aptuveno vērtību, salīdzinātu logaritmus, pamatotu vienādojumu un nevienādību atrisināšanu. (M.Li.2.; M.Li.4.)	• Lieto inversās funkcijas definīciju, lai noteiktu dotai funkcijai inverso funkciju un tās īpašības; ja nepieciešams, sašaurina dotās funkcijas definīcijas kopu. • Uzzīmē, t. sk., lietojot digitālos rīkus, logaritmiskās funkcijas $f(x) = c \log_a (kx + b) + d$ grafiku, izmantojot funkcijas un grafika īpašības un nosakot atsevišķus grafika punktus. • Lasa, pieraksta, salīdzina, sakārto augošā/dilstošā secībā, novērtē, starp kādiem veseliem skaitļiem atrodas skaitļi, kas izteikti kā logaritmi, nosaka to precīzu vai aptuvenu vērtību, t. sk. ar digitāliem rīkiem. • Pārveido izteiksmes, aprēķina to skaitlisko vērtību, lietojot logaritma definīciju, logaritmisko pamatidentitāti, logaritmu īpašības, bāzes maiņas formulu.

• Logaritmisko vienādojumu vai nevienādību risināšanā var izmantot vienādojumu risināšanas vispārīgos paņēmienus (sadalīšana reizinātājos, substitūcija, grafiskais paņēmiens); risinot logaritmiskos vienādojumus, svarīgi pārliecināties par pārveidojumu ekvivalenci, ievērojot definīcijas kopu. (M.Li.2.; M.Li.4.) • Logaritmus lieto skaitļu pierakstīšanai dažādu jomu kontekstos (piemēram, psiholoģijas, ķīmijas, astronomijas, ģeogrāfijas, fizikas); dažkārt tos izmanto ļoti lielu vai ļoti mazu skaitļu pierakstīšanai. (M.Li.3.)	• Atrisina logaritmiskos vienādojumus un nevienādības (pārveidojami formā $\log_a x = b$, $\log_a x > b$, $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, $\log_a f(x) < \log_a g(x)$, lietojot logaritma definīciju un darbības ar logaritmiem; skaidro un pamato veiktos pārveidojumus un to ekvivalenci, lietojot logaritmiskās funkcijas īpašības.
Komplekss sasniedzamais rezultāts	**Ieradumi**
• Skaidro, kas ir viennozīmīga atbilstība, dotai funkcijai inversā funkcija, nosacījumus tās eksistencei un īpašības; raksturo savstarpēji inversu funkciju grafiku novietojumu koordinātu plaknē, definē logaritmisko funkciju kā eksponentfunkcijas inverso funkciju. (M.O.1.1.2.; M.A.2.1.1.; M.A.4.2.2.) • Pēta, raksturo un pamato funkcijas $f(x) = c\log_a(kx+b) + d$ īpašības (definīcijas kopa, vērtību kopa, funkcijas nulles, vienādas zīmes intervāli, lielākā/mazākā vērtība), asimptotas, funkcijas robežu un grafika novietojumu koordinātu plaknē, lietojot funkcijas grafika transformācijas. (M.A.4.2.4.) • Pēta, formulē un pierāda logaritmu īpašības, skaidro un veic algebriskus pārveidojumus ar logaritmiem, korekti veidojot vārdisko komunikāciju un simbolisko pierakstu, piemēram, izsaka $\log_2 20$, ja $\lg 2 = a$. (M.O.1.1.2.; M.A.2.1.2.; M.A.3.2.1.; M.A.4.4.4.) • Spriež, formulē logaritmisko vienādojumu un nevienādību atrisināšanas algoritmus (izmantojot definīciju, pārveidojot formā $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, $\log_a f(x) < \log_a g(x)$, logaritmējot abas vienādojuma puses), skaidro un lieto vienādojumu risināšanas vispārīgos paņēmienus (sadalīšana reizinātājos, substitūcija, grafiskais paņēmiens), pamato pārveidojumu ekvivalenci. (M.A.1.2.2.; M.A.2.1.1.; M.A.4.5.1.; M.A.4.5.3.) • Lieto logaritmus, darbības ar tiem un logaritmisko funkciju citu mācību jomu (piemēram, ķīmija – pH noteikšana, ģeogrāfija – Rihtera skala, fizika – akustika) kontekstos. (M.O.2.2.1.; M.O.3.3.1.; M.A.2.2.1.)	• Lieto ekvivalentus pārveidojumus izteiksmju vienkāršošanā, risinot vienādojumus un nevienādības. • Pārbauda iegūto rezultātu atbilstību sākotnējiem nosacījumiem. • Pareizi lasa matemātiskas izteiksmes, kas satur logaritmus.
Jēdzieni: viennozīmīga atbilstība, inversā funkcija, logaritmiskā funkcija, logaritma pamatidentitāte, bāzu pārejas formula, logaritmu īpašības.	
Simboli un pieņemtie apzīmējumi: $f^{-1}(x)$.	

Temata apguves norise

Inversā funkcija	Iegūst informāciju uzziņu avotos, skaidro jēdzienu “viennozīmīga atbilstība”, nosauc pazīstamas funkcijas, kas ir vai nav viennozīmīgas atbilstības. Definē inverso funkciju un nosaka lineāras funkcijas inverso funkciju, secina par funkcijas un tai inversās funkcijas novietojumu koordinātu plaknē, saprot un lieto atbilstošus simbolus, piemēram, $f^{-1}(x)$. Konstruējot dotās un inversās funkcijas grafikus vienā koordinātu sistēmā, nosaka šo funkciju īpašības (definīcijas kopa, vērtību kopa, simetrija pret taisni $y = x$). Konstruējot dotās funkcijas grafiku un tam simetrisko grafiku pret taisni $y = x$, secina par inversās funkcijas eksistenci. Skaidro un pamato inversās funkcijas eksistenci kvadrātfunkcijai, skaidro, kā sašaurināt dotās kvadrātfunkcijas definīcijas kopu, lai iegūtu viennozīmīgu atbilstību. Nosaka dotās funkcijas inverso funkciju vai pamato tās eksistenci noteiktā intervālā vai visā definīcijas kopā. Piemērs. Pierādi, ka funkcijai $y = x^2 - 2x$ intervālā $[0; 3]$ neeksistē inversā funkcija, bet intervālā $[-2; 0]$ eksistē inversā funkcija. Pamato inversās funkcijas īpašību $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$. Lieto zināšanas par inverso funkciju matemātiskos kontekstos. Piemērs. Ar kādām parametru a un b vērtībām funkcija $y = ax + b$ sakrīt ar savu inverso funkciju?
Pakāpes funkcija (kāpinātājs racionāls skaitlis)	Nosaka funkciju $y = x^3$, $y = x^4$ inversās funkcijas, izsaka tās kā pakāpes funkcijas ar racionālu kāpinātāju $y = x^{\frac{1}{3}}$, $y = x^{\frac{1}{4}}$. Raksturo un salīdzina funkciju $y = \sqrt[3]{x}$ un $y = x^{\frac{1}{3}}$ definīcijas kopas. Pēta un formulē īpašības, skaidro definīcijas kopu pakāpes funkcijai $y = x^n$, ja kāpinātājs ir racionāls skaitlis, pamato savus spriedumus. Izmanto IT, lai uzzīmētu grafiku funkcijai $y = x^n$ dažādām n $(n \in \mathbb{Q})$ vērtībām, salīdzina uzzīmēto funkciju īpašības. Lieto zināšanas par pakāpju funkcijas īpašībām matemātiskos kontekstos. Piemēri. 1. Salīdzini $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{2}{3}}$ nenegatīvām a vērtībām. 2. Atrisini vienādojumu $\sqrt[3]{x} = x$.

Logaritma īpašības

Apkopo un skaidro jau zināmo par logaritmiem.

Veicot aprēķinus, lietojot kalkulatoru, formulē pieņēmumu par logaritma īpašībām: summa, starpība, reizinājums ar skaitli.

Pierāda logaritmu īpašības, izmantojot pakāpes īpašības un logaritma definīciju.

Pamato bāzes pārejas formulu un lieto to logaritma vērtības noteikšanai ar kalkulatoru, t. sk., izmantojot naturāllogaritmu un decimāllogaritmu.

Lieto logaritmu īpašības matemātiskos un citu jomu kontekstos.

Piemēri. 1. Izsaki $\log_2 20$, ja $\lg 2 = a$. Pastāsti, kā nonāci pie atrisinājuma.

2. Skaņai, kuras intensitāte ir $I\left(\frac{W}{m^2}\right)$, skaļumu L (mēra decibelos) var aprakstīt kā funkciju $L(I) = 10 \lg \frac{I}{I_0}$, kur $I_0 = 10^{-12}\left(\frac{W}{m^2}\right)$ ir tikko dzirdamas skaņas intensitāte. Kā izmainījās skaņas skaļums, ja mūziķis ierakstu studijā skaņas intensitāti dubultoja?

Uzziņu avotos atrod informāciju par logaritmu lietojumu dažādās jomās. Diskutē par jautājumu, vai logaritmu lietojums dažādās jomās (akustika, astronomija, ģeogrāfija u. tml.) atvieglo vai sarežģī darbu ar skaitlisko informāciju.

Konkrētos piemēros pēta un raksturo logaritmiskās skalas izmantošanas iespējas un priekšrocības, ja grafiski attēlo sakarības, kas mainās ļoti strauji vai ļoti lēni.

Piemērs. Uzdevumu a) un b) izpildei izmanto izklājlapas.

a) Attēlo tabulā doto sakarību koordinātu plaknē ar asīm x, y.

b) Attēlo tabulā doto sakarību koordinātu plaknē ar asīm x, $\lg y$.

c) Salīdzini iespējas nolasīt informāciju no grafikiem, raksturot sakarību starp lielumiem.

x	1	2	3	4
y	10	100	1000	10000

Logaritmiskā funkcija

Definē logaritmisko funkciju $y = \log_a x$, t. sk. ar bāzi e, kā eksponentfunkcijas inverso funkciju, zīmē tās grafiku, t. sk., izmantojot digitālos rīkus, nosaka un pamato īpašības atkarībā no bāzes skaitliskās vērtības, asimptotu un funkcijas robežu.

Nosaka un salīdzina logaritmu vērtības, izmantojot logaritmiskās funkcijas grafikus.

Skaidro un pamato funkcijas $y = c \cdot \log_a (kx + b) + d$ īpašības, raksturīgos lielumus, tās grafika novietojumu koordinātu plaknē. Lieto funkciju grafiku transformācijas, piemēram, paralēlo pārnesi.

Piemērs. Nosaki funkcijas $y = \log_3 (x + 3) - 4$ krustpunktus ar asīm un uzskicē tās grafiku.

Lieto logaritmiskās funkcijas un tās grafika īpašības un formulē spriedumus matemātiskos kontekstos.

Piemēri. 1. Nosaki, starp kādiem diviem veseliem blakusesošiem skaitļiem atrodas skaitlis $\ln 10$.

2. Nosaki funkcijas $y = \log_{0,5} (2x - 5)$ lielāko un mazāko vērtību intervālā $[4; 5]$.

3. Nosaki vienādojuma $1 - x = |\log_3 x|$ sakņu skaitu.

4. Atrisini nevienādību $\log_2 (x + 4) < 0$.

Temata apguves norise (turpinājums)

Logaritmiskie vienādojumi un nevienādības	Raksturo savas zināšanas par vienādojumu atrisināšanu, par to atrisināšanas vispārīgajiem paņēmieniem. Risina vienādojumu jaunā situācijā.
	Piemēri. Atrisini vienādojumu: a) $\log_2(1-3x)=4$; b) $\log_{x-2}9=2$; c) $\log_2 \lg x=0$.
	Formulē un pamato algoritmus logaritmisku vienādojumu atrisināšanai, izmantojot logaritma definīciju, logaritmiskās funkcijas īpašības. Secina, kādās situācijās definīcijas kopas nosacījums izpildās vienmēr, kādās situācijās jāaplūko papildu nosacījumi jeb jāveido ar doto vienādojumu ekvivalenta sistēma. Vingrinās algoritmu lietojumā, izmantojot logaritma definīciju un īpašības, pārveidojot vienādojumus formā $\log_a f(x)=\log_a g(x)$.
	Piemēri. Atrisini vienādojumu: a) $\lg(x^2-x)=1+\lg 3$; b) $\log_4(x+3)-\log_4(x-1)=2-\log_4 8$.
	Konkrētos piemēros spriež un secina, ka logaritmu īpašību lietojums nenodrošina pārveidojumu ekvivalenci, dažkārt definīcijas kopa var sašaurināties vai paplašināties.
	Piemērs. Atrisini vienādojumu $2\log_2(x-3)^2=4$.
	Konkrētos piemēros spriež un secina par vispārīgo paņēmienu lietojumu, lai atrisinātu vienādojumus, kas satur logaritmus.
	Piemēri. Atrisini vienādojumu un raksturo lietotās zināšanas: a) $\log_3^2 x+2\log_3(9x)=3$; b) $\log_2 x=\frac{2}{x}$; c) $\log_3(3^x-6)=x-1$; d) $(x^2-4)\cdot\log_3(1-3x-x^2)=0$.
	Vingrinās lietot logaritmu īpašības un vienādojumu risināšanas vispārīgos paņēmienus logaritmisku vienādojumu atrisināšanai. Skaidro pārveidojumu ekvivalenci. Spriež induktīvi un deduktīvi, risina vienkāršu logaritmisku nevienādību, izvēloties sev piemērotu pieeju/paņēmienu; pamato spriedumus, izmantojot logaritmiskās funkcijas īpašības. Formulē algoritmus un vingrinās to lietojumā. Risina vienkāršas logaritmiskas nevienādības ar parametru.
	Piemēri. 1. Atrisini nevienādību: a) $\log_2 x<3$; b) $\log_{\frac{1}{3}} x>-1$. 2. Atrisini nevienādību visām pieļaujamajām parametra a vērtībām $\log_a(x-1)>1$.

9. Statistika	10. Eksponentfunkcija, vienādojumi un nevienādības	11. Inversā funkcija un logaritmiskā funkcija	12. Funkcijas atvasinājums, tā lietojums	13. Trigonometrija	14. Paralelitāte un perpendikularitāte telpā

12. Funkcijas atvasinājums, tā lietojums

Ieteicamais laiks temata apguvei: 50–54 mācību stundas.

Temata apguves mērķis: veidot izpratni par funkcijas atvasinājumu un tā lietojumu funkciju īpašību pētīšanai un pamatošanai, procesu aprakstīšanai fizikā, ekonomikā u. tml.

Sasniedzamie rezultāti

Ziņas	Prasmes
• Matemātiskā analīze ir matemātikas apakšnozare; tās svarīgākie jēdzieni ir “funkcija”, “funkcijas robeža”, “funkcijas nepārtrauktība”, “funkcijas atvasinājums”, “integrālis”. (M.Li.1.; M.Li.2.; M.Li.4.) • Divu bezgalīgi mazu lielumu dalījumam jeb “0/0” un divu bezgalīgi lielu lielumu dalījumam jeb “∞/∞” nav noteiktas skaitliskas vērtības – tās sauc par nenoteiktībām. (M.Li.3.; M.Li.4.) • Funkcijas nepārtrauktības pamatošanai izmanto definīciju; priekšstats par šo īpašību saistās ar funkcijas grafiku kā nepārtrauktu līniju, bet dažkārt tas var maldināt, piemēram, funkcija $y=\frac{4}{x}$ ir nepārtraukta tās definīcijas kopā. (M.Li.2.; M.Li.4.) • Funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta punktā x_0, ja bezgalīgi mazam argumenta pieaugumam Δx punktā x_0 atbilst bezgalīgi mazs funkcijas pieaugums $\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, t. i., $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=0$. Saka, ka funkcija ir nepārtraukta kādā intervālā, ja tā ir nepārtraukta visos intervāla punktos. (M.Li.1.; M.Li.4.) • Funkcijas izmaiņas ātrumu noteiktā intervālā $[x_0; x_0+\Delta x]$ raksturo funkcijas pieauguma un argumenta pieauguma attiecība $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$. Funkcijas izmaiņas ātrumu punktā x_0 raksturo attiecības $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ robeža, kad $\Delta x\to 0$; šo robežu sauc par funkcijas atvasinājumu punktā x_0 un raksta $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$. (M.Li.2.; M.Li.4.) • Ja funkcija, kuras arguments ir laiks, apraksta kādu procesu, tad funkcijas atvasinājums ir procesa norises ātrums (atvasinājuma fizikālā interpretācija). (M.Li.2.; M.Li.4.) • Funkcijas atvasinājums punktā x_0 ir vienāds ar virziena koeficientu pieskarei $y=kx+b$, kas novilkta funkcijas grafikam punktā $(x_0; f(x_0))$, t. i., $f'(x_0)=k=\operatorname{tg}\alpha$, kur α leņķis starp pieskari un Ox ass pozitīvo virzienu (atvasinājuma ģeometriskā interpretācija); dažkārt ģeometriskā interpretācija palīdz pamatot, ka atvasinājums noteiktā punktā neeksistē. (M.Li.2.; M.Li.4.) • Izmantojot atvasinājuma definīciju vai ģeometrisko interpretāciju, var iegūt vai pamatot vienkāršāko funkciju atvasinājumu; dažādas retāk lietotas atvasināšanas formulas nepieciešamības gadījumā var atrast uzziņu literatūrā. (M.Li.2.; M.Li.4.) • Saliktas funkcijas atvasinājums ir vienāds ar ārējās funkcijas atvasinājuma un iekšējās funkcijas atvasinājuma reizinājumu. (M.Li.2.; M.Li.4.) • Funkcijas otrās kārtas atvasinājums ir pirmās kārtas atvasinājuma atvasinājums. (M.Li.2.; M.Li.4.) • Punkts x_0 ir funkcijas f maksimuma punkts, ja šim punktam eksistē tāda apkārtne (intervāls), ka visiem šīs apkārtnes punktiem $x\neq x_0$ ir patiesa nevienādība $f(x)<f(x_0)$; līdzīgi definē minimuma punktu. Maksimuma un minimuma punktu kopīgais nosaukums ir ekstrēma punkti. (M.Li.4.)	• Lieto funkcijas atvasinājuma un ar to saistīto jēdzienu simbolisko pierakstu. • Nosaka atvasinājumu vai atvasinājuma punktā skaitlisko vērtību konstantai funkcijai, lineārai funkcijai, kvadrātfunkcijai, izmantojot atvasinājuma definīciju vai ģeometrisko interpretāciju. • Izmantojot formulas vai atvasināšanas likumus, atvasina pakāpes funkciju, funkcijas $y=e^x$ un $y=\ln x$ saliktu funkciju formā $f(ax+b)$, ja f ir kāda no nosauktajām funkcijām, funkciju summu, reizinājumu, dalījumu. • Uzraksta vienādojumu funkcijas grafika pieskarei dotā punktā, izmantojot funkcijas atvasinājumu. • Nosaka nezināmo lielumu (piemēram, ātrums, paātrinājums, laiks, kad tiks sasniegts dotais ātrums vai paātrinājums, ceļš noteiktā laikā) pēc dota taisnvirziena kustības vienādojuma.

Ziņas	Prasmes
• Kritiskie punkti ir tie punkti, kuros atvasinājums vienāds ar nulli vai neeksistē; tie ļauj spriest par funkcijas un grafika īpašībām. Katrs ekstrēma punkts ir kritiskais punkts, bet ne katrs kritiskais punkts ir ekstrēma punkts (jāizpildās minimuma/maksimuma punkta eksistences pietiekamajam nosacījumam). (M.Li.4.) • Augošas/dilstošas funkcijas grafiks kādā intervālā var būt izliekts (atrodas zem pieskares, kas novilkta kādā intervāla punktā), bet kādā – ieliekts (atrodas virs pieskares, kas novilkta kādā intervāla punktā); pārliekuma punkts atdala grafika izliekto un ieliekto daļu. (M.Li.4.) • Atvasinājums dod papildu iespējas noskaidrot vai pamatot funkcijas īpašības, piemēram, monotonitātes (augšanas un dilšanas) intervālus, kritiskos punktus un ekstrēma punktus, pārliekuma punktus, izliekuma un ieliekuma intervālus. (M.Li.2.; M.Li.4.)	• Analītiski nosaka a) intervālus, kuros funkcija ir augoša un kuros – dilstoša, b) kritiskos punktus, ekstrēma punktus un ekstrēmus, c) funkcijas pārliekuma punktus, funkcijas grafika ieliekuma un izliekuma intervālus un skicē funkcijas grafiku, izmantojot iegūto informāciju. • Aprēķina funkcijas lielāko un mazāko vērtību slēgtā intervālā.
Komplekss sasniedzamais rezultāts	**Ieradumi**
• Nosaka robežu, izmantojot funkcijas, tās grafika īpašības vai uzziņu literatūrā atrasto definīciju un teorēmas par robežām, t. sk., novēršot nenoteiktības ∞/∞ un $0/0$. (M.A.1.1.1.; M.A.4.3.1.) • Skaidro funkcijas nepārtrauktību, izmantojot definīciju; raksturo funkcijas nepārtrauktību un pārtraukuma punktus pēc dota vai uzzīmēta funkcijas grafika, konkrētos piemēros raksturo saistību starp atvasinājuma eksistenci un funkcijas nepārtrauktību. (M.A.4.3.1.) • Uzziņu literatūrā atrod informāciju, konkrētos piemēros skaidro, ko rāda funkcijas atvasinājums, ja funkcija, kuras arguments ir laiks, apraksta kādu procesu, piemēram, fizikā, ekonomikā. (M.A.1.1.1.; M.A.1.2.5.) • Skaidro funkcijas atvasinājuma punktā ģeometrisko interpretāciju, izmantojot dotus vai pašu veidotus vizuālos attēlojumus, animācijas; raksturo un lieto funkcijas atvasinājuma punktā saistību ar šajā punktā novilktās pieskares vienādojumu, lai noteiktu nezināmos lielumus, formulētu spriedumus. (M.A.1.2.5.; M.A.4.3.2.) • Pamato pakāpes funkcijas atvasināšanas formulu, izmantojot matemātiskās indukcijas principu. (M.A.4.3.2.; M.A.4.3.3.; M.A.1.2.4.; M.A.2.3.4.) • Lieto jēdzienus "nepieciešams nosacījums" un "pietiekams nosacījums", skaidrojot saistību starp ekstrēma punktiem un kritiskajiem punktiem, formulējot ekstrēma punktu atrašanas algoritmu u. tml. (M.A.2.3.3.; M.A.4.3.4.) • Pēta polinomiālas funkcijas un daļveida funkcijas īpašības un konstruē funkcijas grafiku, izmantojot atvasinājumu, zināšanas par funkciju un to grafiku īpašībām, funkcijas robežu, vertikālajām un horizontālajām asimptotām. (M.A.4.3.1.; M.A.4.3.3.; M.A.4.3.4.; M.A.4.3.5.) • Veido un uzraksta funkciju, kas matemātiski apraksta kādu lielumu ģeometrijas, fizikas vai citu jomu kontekstos, nosaka lieluma vislielāko/vismazāko vērtību dotajā intervālā, izmantojot funkcijas atvasinājumu. (M.A.2.2.1.; M.A.4.3.5.)	• Iegūto informāciju par funkcijas atvasinājumu saista ar jau zināmo par iespējām un paņēmieniem funkciju īpašību noteikšanai. • Iegūtās zināšanas saista ar savu pieredzi un zināšanām citās mācību jomās (piemēram, fizikā, ekonomikā), izvērtējot rezultātu ticamību un atbilstību konkrētai situācijai. • Pārliecinās, ka saprot ar matemātikas simboliem un pieņemtajiem apzīmējumiem veidotu tekstu. • Kritiski izvērtē doto vai iegūto informāciju par funkcijas īpašībām, apzinoties, ka neprecizitātes var būt pamats aplamiem secinājumiem.

Jēdzieni: nepārtraukta funkcija, nenoteiktības, pirmās kārtas atvasinājums, diferenciālis, otrās kārtas atvasinājums, kritiskie punkti, minimuma punkti, maksimuma punkti, ekstrēma punkti, ekstrēmi, grafika ieliekums/izliekums, monotonitāte, monotonas funkcijas, funkcijas grafika pieskare, punkta apkārtne.

Simboli un pieņemtie apzīmējumi: $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; Δx; Δy; $\Delta f(x_0)$; dx; dy; $f'(x_0)$; $f'(x)$; $f''(x)$; y'; y''.

Temata apguves norise

Funkcijas robeža	Apzina zināmo par funkcijām, sprież un nosauc piemērus funkcijām $f(x)$, ievērojot nosacījumu, ja $x \to a$, tad $f(x) \to +\infty$ vai $f(x) \to -\infty$. Secina, ka argumenta tiekšanās uz kādu skaitli var būt divējāda. Konkrētos piemēros aprakstoši skaidro vienpusējās robežas, to simbolisko apzīmējumu. Uzziņu literatūrā iegūst definīciju funkcijas robežai, ja tā ir bezgalība, un skaidro to, izmantojot konkrētu pazīstamu funkciju, tās īpašības un grafika novietojumu koordinātu plaknē. Pamato funkcijas robežu, izmantojot funkcijas īpašības un grafika novietojumu koordinātu plaknē; atsevišķos gadījumos pamato funkcijas robežu pēc definīcijas.
	Piemērs. Nosaki robežas funkcijai $y = 2 + \frac{4}{x-3}$ un pamato tās, izmantojot funkcijas īpašības un grafika novietojumu koordinātu plaknē; pieraksti rezultātu, izmantojot pieņemtos apzīmējumus.
	Zīmē funkcijas $y = \frac{x^2-1}{x-1}$ grafiku, pamatojot savus spriedumus. Spriežot vai veicot aprēķinus, raksturo funkcijas vērtību, argumenta vērtībai arvien tuvojoties skaitlim 1. Secina, ka $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$. Uzziņu literatūrā iegūst funkcijas robežas definīciju un izmanto to, lai pierādītu iegūto rezultātu. Skaidro saviem vārdiem funkcijas robežas definīciju. Zīmē intervālos dažādi definētas funkcijas grafiku, piemēram, $y = \begin{cases} 2^x, x \geq 1 \\ x,\ x < 1 \end{cases}$, un nosaka funkcijas vienpusējās robežas ($x \to 1+0$ un $x \to 1-0$). Nosaka funkcijas robežu, izmantojot definīciju, funkcijas un tās grafika īpašības.
	Piemēri. Pamato, ka a) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{x}{3}+1\right) = 2$; b) $\lim\limits_{x\to 1+0} \frac{-4}{x-1} = -\infty$; c) $\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{-4}{x-1} = +\infty$; d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2}{x^2} = +\infty$.
	Aprēķina robežas, izmantojot uzziņu literatūrā atrastās teorēmas par robežām un novēršot nenoteiktības ∞/∞ un $0/0$.
	Piemēri. Nosaki robežu, novēršot nenoteiktību: a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2-x}{x^2+x}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x+1}$; c) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{x^2-9}$.
	Secina par biežāk sastopamām situācijām, kad funkcijas izturēšanos raksturo robeža: a) arguments tiecas uz $+\infty$ vai $-\infty$, b) arguments tiecas uz punktu, kurā funkcija nav definēta. Veido funkcijas grafika skici, izmantojot robežas.
	Piemērs. Uzskicē funkcijas $y = 2^{\frac{1}{x-2}}$ grafiku, nosakot funkcijas robežas.
Funkcijas nepārtrauktība	Skaidro funkcijas nepārtrauktību, pamato, ka funkcija ir nepārtraukta punktā, izmantojot definīciju. Definē funkcijas nepārtrauktību intervālā. Skaidro, kas ir pārtraukta funkcija, pārtraukuma punkti. Uzziņu literatūrā iegūst informāciju par pārtraukuma punktu veidiem. Konkrētos piemēros pēta un nosaka funkciju pārtraukuma punktus.
	Piemērs. Uzskicē funkcijas grafiku un nosaki pārtraukuma punktus: a) $y = \frac{\lvert x \rvert}{x}$; b) $y = \begin{cases} x+3, x \geq 2 \\ 1-x,\ x < 2 \end{cases}$.
	Saista funkcijas nepārtrauktību ar intervālu metodes lietošanu nevienādību risināšanā; pieraksta, lietojot matemātisko simboliku, piemēram, ja $f(a) > 0$ un $f(b) < 0$, tad eksistē tāds $c \in [a; b]$, ka $f(c) = 0$.

Temata apguves norise (turpinājums)

Funkcijas atvasinājuma definīcija	Salīdzina funkcijas vērtības izmaiņas straujumu divām lineārām funkcijām, lineārai un kvadrātfunkcijai, formulē secinājumus. Izmantojot izklājlapu iespējas, pēta konkrētas vienkāršas funkcijas, piemēram, $y = 2x^2$ funkcijas izmaiņas ātrumu punktā x_0, nosaka attiecības $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ vērtības, ar noteiktu soli samazinot Δx skaitlisko vērtību, un formulē secinājumus. Definē atvasinājumu punktā kā funkcijas pieauguma un argumenta pieauguma attiecības robežu šajā punktā, kad argumenta pieaugums tiecas uz nulli. Vārdiski skaidro, ko raksturo funkcijas atvasinājums punktā (funkcijas izmaiņas ātrumu punktā). Nosaka vienkāršu funkciju atvasinājumu, izmantojot definīciju, formulē vispārīgus secinājumus.
	Piemēri. 1. Nosaki funkcijas $f(x) = x^2$ atvasinājumu, izmantojot definīciju. 2. Aprēķini $f'(2)$, ja $f(x) = x^3$.
	Definē otrās kārtas atvasinājumu kā pirmās kārtas atvasinājuma atvasinājumu (t. i., $f''(x) = (f'(x))'$).
Atvasinājuma fizikālā nozīme	Skaidro lielumus formulā $h = \frac{gt^2}{2}$. Nosaka krišanas momentāno ātrumu kādā laika momentā kā vidējā ātruma laika intervālā robežu, kad $\Delta t \to 0$. Iegūst krišanas momentānā ātruma formulu $v = gt$. Lasa informāciju par fizikāliem lielumiem (taisnvirziena kustības paātrinājums, strāvas stiprums), ko iegūst, atvasinot citu fizikālu lielumu, kas izteikts kā funkcija atkarībā no laika, un pastāsta citiem par iegūto informāciju. Formulē vispārinājumu par atvasinājuma fizikālo nozīmi – ja funkcija apraksta kādu procesu, tad funkcijas atvasinājums ir procesa norises ātrums.
Atvasinājuma ģeometriskā interpretācija	Izsaka un uzklausa idejas, kā definēt funkcijas grafika pieskari, salīdzina ar informāciju uzziņu literatūrā. Skaidro funkcijas atvasinājuma punktā x_0 ģeometrisko interpretāciju (punktā x_0 novilktās pieskares virziena koeficients). Uzraksta funkcijas grafika pieskares vienādojumu vispārīgā veidā $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Lieto atvasinājuma punktā ģeometrisko interpretāciju matemātiskos kontekstos.
	Piemēri. 1. Uzraksti vienādojumu pieskarei, kas novilkta funkcijas $y = x^2$ grafika punktā, kura abscisa ir 1; uzzīmē pieskari. 2. Nosaki funkcijas $y = x^2$ grafika punktu, kurā vilktā pieskare ar Ox ass pozitīvo virzienu veido $45°$ leņķi.
Atvasinājuma eksistence	Iegūst informāciju par atvasinājuma eksistences nepieciešamo nosacījumu (ja funkcijai punktā eksistē atvasinājums, tad funkcija šajā punktā ir nepārtraukta). Ar jau aplūkotajiem funkciju piemēriem ilustrē, ka funkcijas nepārtrauktība nav atvasinājuma eksistences pietiekamais nosacījums.
	Piemērs. Pierādi, ka funkcijām $y = \lvert x \rvert$, $y = \sqrt[3]{x}$ punktā $x_0 = 0$ atvasinājums neeksistē.
	Analizē dotu funkcijas grafiku, nosakot un pamatojot, kuros attēlotās funkcijas definīcijas kopas punktos atvasinājums neeksistē.

Temata apguves norise (turpinājums)

Atvasināšanas likumu un formulu lietojums	Uzziņu literatūrā noskaidro un lieto funkciju atvasināšanas likumus un formulas. Atsevišķus no tiem pierāda, izmantojot atvasinājuma definīciju.
	Piemēri. 1. Pierādi, ka konstantas funkcijas atvasinājums ir nulle. 2. Pierādi funkciju reizinājuma atvasinājuma formulu, izmantojot atvasinājuma definīciju. 3. Pierādi pakāpes funkcijas atvasināšanas formulu $(x^n)' = nx^{n-1}$, izmantojot MIP.
	Lieto atvasināšanas likumu un formulas matemātiskos un fizikas (dots kustības vienādojums) kontekstos.
	Piemēri. 1. Nosaki atvasinājumu funkcijai $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$ un aprēķini $f'(1)$. 2. Dots kustības vienādojums $s(t) = 3t^3 - 2t^2 + 5$. Nosaki ātrumu un paātrinājumu laika momentos $t = 1, t = 2$. 3. Nosaki leņķi, ko ar Ox ass pozitīvo virzienu veido pieskare, kas novilkta funkcijas $f(x) = e^x$ grafikam punktā, kuru abscisa ir a) 0; b) 1.
	Pēta funkciju, piemēram, $(ax+b)^2$, $(ax+b)^3$ un $(ax+b)^4$, atvasinājumus un izvirza pieņēmumu par saliktas funkcijas atvasināšanas likumu. Lasa un skaidro pierādījumu, izmantojot uzziņu literatūru. Vingrinās saliktu funkciju atvasināšanā.
	Piemērs. Atvasini funkciju $f(x) = (2x+1)^3$ divējādi – lietojot saliktas funkcijas atvasināšanas kārtulu un pārveidojot par pakāpju summu.
Atvasinājuma lietojums funkciju pētīšanā	Pēta konkrētas funkcijas augšanas un dilšanas intervālus un funkcijas atvasinājumu zīmi (0, pozitīvs, negatīvs) un izvirza pieņēmumu par funkcijas monotonitātes saistību ar tās atvasinājumu. Formulē, lieto algoritmu monotonitātes intervālu noteikšanai.
	Piemēri. Nosaki monotonitātes intervālus funkcijai: a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$; b) $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$.
	Definē maksimuma un minimuma punktus, kritiskos punktus. Skaidro un lieto ekstrēma eksistences nepieciešamo un pietiekamo nosacījumu. Formulē un lieto algoritmu funkcijas maksimuma un minimuma punktu noteikšanai.
	Piemēri. Nosaki un pamato ekstrēmus funkcijai: a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$; b) $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$.
	Skaidro nosacījumus funkcijas izliekumam un ieliekumam, pietiekamo nosacījumu pārliekuma punkta eksistencei, izmantojot atvasinājuma punktā ģeometrisko interpretāciju. Formulē un lieto algoritmus funkcijas grafika izliekuma un ieliekuma intervālu noteikšanai, pārliekuma punkta atrašanai.
	Piemērs. Nosaki un pamato ekstrēmus, funkcijas izliekuma un ieliekuma intervālus, grafika pārliekuma punktus: a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$; b) $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$.
	Pēta funkciju īpašības, izmantojot pirmo, otro atvasinājumu (otro atvasinājumu tikai polinomiem), skicē funkciju grafikus, papildus vēl izmantojot grafika horizontālās un vertikālās asimptotas, funkcijas robežas.
	Piemērs. Izpēti funkcijas īpašības un uzzīmē tās grafiku: a) $y = x^4 - x^2$; b) $y = \frac{x}{4-x^2}$.

Temata apguves norise (turpinājums)

Atvasinājuma lietojums matemātikas un citu jomu kontekstos	Formulē un lieto algoritmu funkcijas vislielākās/vismazākās vērtības noteikšanai slēgtā intervālā.
	Piemērs. Nosaki funkcijas $y = x^3 - 3x^2 + 9$ vislielāko un vismazāko vērtību intervālā $[1; 3]$.
	Lieto funkcijas atvasinājumu, risinot ekstrēmu uzdevumus.
	Piemēri. 1. No kvadrātveida kartona loksnes, kuras malas garums ir 60 cm, jāizgatavo kārba bez vāka. Kārbu veido, izgriežot loksnes stūros vienādus kvadrātus un uzliecot kartona malas uz augšu. Nosaki, kādam jābūt izgriezto kvadrātu malas garumam, lai iegūtu kārbu ar vislielāko tilpumu. 2. Regulāras trijstūra prizmas tilpums ir V. Kādam jābūt pamata malas garumam, lai prizmas pilnas virsmas laukums būtu vismazākais?
	Lieto funkcijas atvasinājumu, risinot uzdevumus par kustību.
	Piemērs. Vertikāli augšup sviests ķermenis pārvietojas pēc likuma $s(t) = 4 + 8t - 5t^2$ (m). Nosaki ķermeņa kustības ātrumu tajā momentā, kad tas saskaras ar zemi.
	Lieto funkcijas atvasinājumu situācijās, kuru aprakstā papildus dota nepieciešamā informācija par to, ko izsaka pētāmā funkcija vai tās atvasinājums dažādos kontekstos, saista zināšanas par funkcijas atvasinājumu ar doto informāciju.
	Piemērs. Medicīnā reakciju $R(x)$ uz zāļu devu x izsaka funkcija $R(x) = Ax^2(B - x)$, kur $A > 0$, $B > 0$ un to skaitliskā vērtība atkarīga no zālēm. Ķermeņa jutību $S(x)$ pret devu x definē kā $R'(x)$. Pieņemot, ka ar cilvēka dzīvību saistāma tikai pozitīva reakcija, nosaki: a) funkcijas $R(x)$ definīcijas kopu; b) kādām x vērtībām $R(x)$ ir lielākā vērtība un kāda tā ir; c) kādām x vērtībām ir maksimālā jutība.

13. Trigonometrija

Ieteicamais laiks temata apguvei: 38–42 mācību stundas.

Temata apguves mērķis: lietot trigonometrisko funkciju īpašības un sakarības starp trigonometriskajām funkcijām izteiksmju pārveidošanā un vienādojumu risināšanā matemātiskos un citu jomu kontekstos.

Sasniedzamie rezultāti

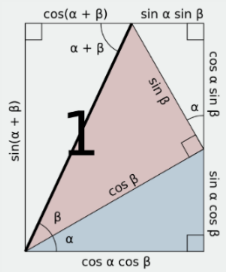
Ziņas	Prasmes
• Trigonometrija ir matemātikas apakšnozare, kas ietver algebras un ģeometrijas elementus; to plaši izmanto, piemēram, eksaktajās zinātnēs, medicīnā, navigācijā, radiotehnikā, optikā. (M.Li.1.; M.Li.4.; M.Li.6.) • Vienu radiānu liels leņķis ir centra leņķis, kam atbilstošā loka garums ir vienāds ar rādiusu. Pārejai no vienas leņķa mērvienības uz otru izmanto sakarību $180° = \pi$ (saka: “180 grādi ir vienādi ar π radiāniem”). (M.Li.1.; M.Li.4.) • Daži procesi, piemēram, dabā, tehnoloģijās, sabiedrībā, ir periodiski – to raksturīgo lielumu vērtības atkārtojas pēc noteiktas likumsakarības. Periodisku procesu matemātiskai raksturošanai var izmantot trigonometriskās funkcijas, piemēram, $y = \sin x$. (M.Li.4.) • Ja funkcija $f(x)$ ir periodiska, var noteikt tādu mazāko skaitli T (periodu), ka visiem x no definīcijas kopas izpildās vienādība $f(x + T) = f(x)$ jeb vārdiski – izmainot funkcijas argumentu par periodu, funkcijas vērtība nemainās. (M.Li.4.) • Attēlojums vienības riņķī palīdz skaidrot un pamatot trigonometrisko funkciju īpašības, noteikt to raksturīgos lielumus, atrisināt trigonometriskos vienādojumus u. tml. (M.Li.1.; M.Li.2.; M.Li.4.) • Koeficientu a, b, c un d vērtības katrā konkrētajā gadījumā nosaka funkciju ($y = a \cdot \sin(bx + c) + d$, $y = a \cdot \cos(bx + c) + d$, $y = a \cdot \text{tg}(bx + c)$, $y = a \cdot \text{ctg}(bx + c)$) īpašības un grafika novietojumu koordinātu plaknē; to izpētei efektīvi ir digitālie rīki. (M.Li.2.; M.Li.4.) • Pārveidojot trigonometrisku izteiksmi, tiek izmantotas gan trigonometriskās sakarības (argumenti var mainīties), gan algebriskie pārveidojumi (argumenti nemainās). (M.Li.2.; M.Li.4.) • Inversās trigonometriskās funkcijas (piemēram, $y = \arcsin x$) izmanto, lai noteiktu un pierakstītu jebkura pagrieziena leņķa precīzo vērtību. (M.Li.1.; MLi.3.; M.Li.4.) • Trigonometriskam vienādojumam var būt bezgalīgi daudz atrisinājumu; visu atrisinājumu kopu pieraksta ar formulu (formulām), kas apraksta katram k ($k \in \mathbb{Z}$) atbilstošo vienādojuma sakni. (M.Li.2.; M.Li.4.) • Trigonometrisko vienādojumu risināšanā lieto vispārīgos vienādojumu risināšanas paņēmienus: substitūcija, sadalīšana reizinātājos, grafiskais paņēmiens. (M.Li.2.; M.Li.4.)	• Pāriet no grādiem uz radiāniem, un otrādi. • Uzskicē funkciju $y = \sin x, y = \cos x, y = \text{tg}\ x, y = \text{ctg}\ x$ grafikus. • Nosaka pagrieziena leņķa tangensu un kotangensu vienības riņķī, no funkciju $y = \text{tg}\ x$ un $y = \text{ctg}\ x$ grafika, lietojot digitālos rīkus; aprēķina vērtību skaitliskai izteiksmei, kas satur pagrieziena leņķa tangensus, kotangensus. • Attēlo vienības riņķī pagrieziena leņķus, ja zināma to sinusa (kosinusa, tangensa, kotangensa) vērtība. • Atrisina trigonometriskos vienādojumus formā $\sin(ax + b) = c$, $\cos(ax + b) = c$, $\text{tg}(ax + b) = c$, $\text{ctg}(ax + b) = c$. • Veic algebriskus pārveidojumus ar trigonometriskām izteiksmēm. • Lieto sakarības starp viena un tā paša argumenta trigonometriskajām funkcijām, redukcijas formulas, divkārša argumenta formulas un argumentu saskaitīšanas formulas izteiksmju pārveidojumos, identitāšu pierādījumos, izteiksmju skaitlisko vērtību aprēķināšanā, pārveidojot trigonometriskos vienādojumus par pamatvienādojumiem. • Atvasina funkcijas $y = \sin x, y = \cos x$, saliktu funkciju formā $f(ax + b)$, ja f ir kāda no nosauktajām funkcijām.

Komplekss sasniedzamais rezultāts	Ieradumi
• Pierāda sakarību starp leņķa lielumu grādos un radiānos, redukcijas formulas un viena argumenta sakarības, formulu $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$, izmantojot vektoru skalāro reizinājumu vai sakarības taisnleņķa trijstūrī (interpretāciju metodi); to izmanto, lai pierādītu citas argumenta summas formulas un divkāršā argumenta formulas. (M.A.1.2.4.; M.A.2.3.1.; M.A.4.4.5.; M.A.4.4.6.; M.A.4.4.7.) • Skaidro nosacījumu par viennozīmīgu atbilstību un definē inversās trigonometriskās funkcijas, skicē to grafikus, iegūst informāciju par simbolisko apzīmējumu. (M.A.2.1.1.; M.A.4.2.2.) • Konkrētos piemēros spriež, skaidro un pamato trigonometrisko pamatvienādojumu atrisināšanu, skaidro atrisinājumu kopas simbolisko pierakstu un to salīdzina ar virkņu simbolisko pierakstu. (M.A.1.2.1.; M.A.1.2.4.; M.A.4.5.2.) • Argumentēti izvēlas, lieto un izvērtē dažādu, t. sk. vienādojumu atrisināšanas vispārīgo paņēmienu (sadalīšana reizinātājos, substitūcija, grafiskais paņēmiens) lietojumu trigonometrisku vienādojumu atrisināšanai. (M.A.4.5.2.; M.A.4.5.3.) • Pēta, pamato, t. sk., izmantojot atvasinājumu, uzzīmē, t. sk. ar digitāliem rīkiem, funkciju $y = a \cdot \sin(bx + c) + d$, $y = a \cdot \cos(bx + c) + d$, $y = a \cdot \operatorname{tg}(bx + c)$, $y = a \cdot \operatorname{ctg}(bx + c)$ grafikus, nosaka to definīcijas kopu, vērtību kopu, periodu, funkcijas nulles, vienādas zīmes intervālus, augšanas/dilšanas intervālus, lielāko/mazāko vērtību, asimptotas un paritāti, izmantojot grafiku un analītiski; vispārīgi raksturo trigonometrisko funkciju grafiku transformācijas, novietojumu koordinātu plaknē. (M.O.4.2.4.; M.O.4.2.5.; M.A.4.2.5.) • Izmantojot digitālu simulāciju vai situācijas aprakstu, pēta un matemātiski raksturo fizikālos lielumus un sakarības starp tiem, nosaka nezināmos lielumus dažādos fizikas kontekstos, piemēram, mehāniskās svārstības, skaņa, maiņstrāva. (M.O.3.3.2.; M.O.4.2.6.)	• Jēdzienus, pieņemtos apzīmējumus un simbolus cenšas izrunāt un rakstīt precīzi, apzinoties, ka neprecizitātes var būt pamats aplamiem secinājumiem. • Noskaidro jauno/vispārināto jēdzienu saistību ar jau pazīstamiem ģeometrijas jēdzieniem, attīstot ieradumu iegūto informāciju saistīt ar jau zināmo, lai konstruētu jaunas zināšanas. • Ievērojot situāciju un mērķi, grafika attēlošanai pamatoti izvēlas lietot digitālos rīkus vai skicēt/zīmēt ar roku, attīstot ieradumu plānot un vadīt savu domāšanas procesu, meklēt dažādus risinājumus.
Jēdzieni: radiāns, pagrieziena leņķa tangenss, pagrieziena leņķa kotangenss, periodiska funkcija, periods, paritāte, pāra funkcija, nepāra funkcija, sinusoīda, arksinuss, arkkosinuss, arktangenss, arkkotangenss, redukcijas formulas.	
Simboli un pieņemtie apzīmējumi: $\sin x$; $\cos x$; $\operatorname{tg} x$; $\operatorname{ctg} x$; $\arcsin x$; $\operatorname{arc}\cos x$; $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$; $\operatorname{arc}\operatorname{ctg} x$.	

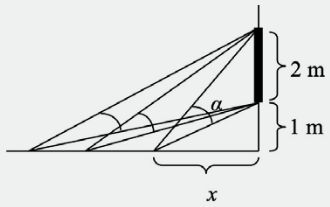
Temata apguves norise

Sakarība starp grādiem un radiāniem	Atrod informāciju, lasa matemātisku tekstu par dažādiem leņķa lieluma mēriem (grādi un radiāni); apspriež iegūto informāciju. Pierāda sakarību starp grādiem un radiāniem. Vingrinās lietot sakarību starp grādiem un radiāniem.
Sinusa un kosinusa funkcijas	Izmanto vienības riņķi, spriež un zīmē funkcijas $y = \sin x$ vai $y = \cos x$ grafiku vismaz divu periodu ietvaros, nosakot funkcijas vērtības atsevišķiem grafika punktiem, lai izveidotu iespējami precīzāku grafiku. Veic pašnovērtējumu, izmantojot digitālos rīkus. Izsaka idejas par to, kāpēc, definējot trigonometriskās funkcijas, arguments jāizsaka radiānos, kamēr, pierakstot un pārveidojot izteiksmes vai risinot vienādojumus, korekti ir izmantot arī grādus. Vingrinās nolasīt informāciju no funkciju $y = \sin x$ vai $y = \cos x$ grafikiem, t. sk. digitāli izveidotiem, izmantojot jau zināmo par funkciju īpašībām kopumā, piemēram, nosaka funkcijas vērtību dotajam argumentam, un otrādi – atrod dotajai funkcijas vērtībai atbilstošos argumentus noteiktā intervālā, definīcijas kopu un vērtību kopu, intervālus, kuros funkcija ir augoša/dilstoša, funkcijas nulles, intervālus, kuros funkcijas vērtība pozitīva/negatīva; veido pierakstu, korekti lietojot simbolus un pieņemtos apzīmējumus. Izsaka idejas, kā pierakstīt visas funkcijas nulles dotai trigonometriskai funkcijai, izmanto jau zināmo par virkni, tās formulas pierakstu. Vingrinās ar simboliem pierakstītas bezgalīgi daudz leņķu vērtības izlasīt, un otrādi – pierakstīt atbilstoši vārdiskam aprakstam vai attēlojumam grafikā, vienības riņķī. Pēta, t. sk., izmantojot digitālos rīkus, formulē un pamato funkciju $y = a \cdot \sin x,\ y = a \cdot \cos x,\ y = a \cdot \sin x + b,\ y = a \cdot \cos x + b$ īpašības, to grafiku īpašības un novietojumu koordinātu plaknē, saistot ar funkciju $y = \sin x$ vai $y = \cos x$ īpašībām un novietojumu. Lieto zināšanas par saliktu funkciju un raksturo iekšējo un ārējo funkciju sinusa un kosinusa funkciju piemēros. Veido saliktu funkciju formulu pierakstu, ievērojot dotos nosacījumus. Pēta, t. sk., izmantojot digitālos rīkus, formulē un pamato funkciju $y = \sin(x + a),\ y = \cos(x + a),\ y = \sin(kx),\ y = \cos(kx)$ īpašības, to grafiku īpašības un novietojumu koordinātu plaknē, saistot ar funkciju $y = \sin x$ vai $y = \cos x$ īpašībām un novietojumu. Veido apkopojumu par parametru ietekmi uz trigonometrisko funkciju $y = a \cdot \sin(bx + c) + d,\ y = a \cdot \cos(bx + c) + d$ grafikiem, izmantojot digitālos rīkus. Pēta fizikālos lielumus, piemēram, kas raksturo skaņu vai atsperē iekārta atsvara svārstības, izmantojot piemērotu digitālo rīku – formulē secinājumus par koeficientu nozīmi formulu pierakstā. Nosaka saliktas sinusa un kosinusa funkcijas definīcijas kopu, vērtību kopu un īpašības analītiski vai pēc grafika, piemēram, nosaka funkcijas $y = 3\sin 2x$ periodu analītiski.
Sinusa un kosinusa funkciju atvasinājums	Uzziņu literatūrā iegūst informāciju par sinusa un kosinusa funkciju atvasinājumu. Vingrinās atvasināt funkcijas formā $y = a \cdot \sin(bx + c),\ y = a \cdot \cos(bx + c)$. Piemērs. Nosaki atvasinājumu funkcijai $f(x) = 2 \sin 3x$ un aprēķini $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
Pagrieziena leņķa tangenss un kotangenss	Vienības riņķī definē pagrieziena leņķa tangensu un kotangensu. Raksturo dota pagrieziena leņķa tangensu vai kotangensu (zīme, novietojums kvadrantā, aptuvenā vērtība u. tml.). Nosaka nosacījumiem atbilstošu pagrieziena leņķi, aprēķina trigonometriskas izteiksmes skaitlisko vērtību, salīdzina trigonometriskas izteiksmes, formulē un pamato spriedumus matemātikas kontekstos. Piemēri. 1. Prognozē un salīdzini starpību tg $88°$ – tg $50°$; tg $89°$ – tg $88°$ vērtības. Pārbaudi savas prognozes atbilstību un formulē secinājumus. 2. Nosaki vienu 3. kvadranta leņķi α, par kuru zināms, ka $2 < \text{tg}\ \alpha < 3$. Pārbaudi iegūto rezultātu. 3. Salīdzini un sakārto augošā secībā izteiksmes $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, tg α, ctg α, ja $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right)$, pamato savus spriedumus. 4. Atrisini nevienādību tg $\alpha > 0$ intervālā $(-2\pi; 2\pi)$.

Temata apguves norise (turpinājums)

Tangensa un kotangensa funkcijas	Definē funkcijas $y = \text{tg } x$ un $y = \text{ctg } x$, nosaka un pamato to īpašības, raksturīgos lielumus, izmantojot vienības riņķi. Pēta un pierāda funkciju $y = \text{tg } x$ un $y = \text{ctg } x$ īpašības, izmantojot funkcijas atvasinājumu (izmanto funkciju dalījuma atvasināšanas formulu), zināšanas par funkcijas robežu un tās noteikšanu, izmanto iegūtos rezultātus, lai skicētu un raksturotu funkciju grafikus, nosaka asimptotas. Lieto funkcijas $y = \text{tg } x$ un $y = \text{ctg } x$ īpašības. Pēta trigonometrisko funkciju grafiku transformācijas.
	Piemēri. 1. Pierādi, ka funkcijas $y = \text{tg } x$ un $y = \text{ctg } x$ ir nepāra un periodiskas, izmantojot definīcijas, jau zināmo par sinusa un kosinusa funkcijām. Nosaki perioda skaitlisko vērtību. 2. Nosaki zīmi izteiksmei $\text{tg } \frac{20\pi}{3}$. 3. Pierādi identitāti $\text{tg } (3\pi + x) \cdot \cos (2\pi - x) = \sin x$. 4. Nosaki un pamato vienādojuma $\text{tg } x = \text{ctg } x$ sakņu skaitu intervālā $(-\pi; \pi)$, izmantojot grafisko paņēmienu, t. sk, izmantojot IT.
Trigonometriskās izteiksmes	Iegūst informāciju uzziņu literatūrā, skaidro jēdzienus trigonometriska izteiksme, trigonometriskas izteiksmes arguments. Izpilda algebriskus pārveidojumus ar trigonometriskām izteiksmēm, skaidro tipiskus kļūdu cēloņus saistībā ar trigonometrisko izteiksmju simbolisko pierakstu. Pamato jau zināmas sakarības starp viena argumenta trigonometriskām izteiksmēm, piemēram, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;\ \sin (180° - \alpha) = \sin \alpha;$ $\cos (180° - \alpha) = -\cos \alpha.$ Pamato dažas no redukcijas formulām un tās lieto matemātiskos kontekstos. Lieto sakarības starp viena argumenta trigonometriskajām izteiksmēm, lai aprēķinātu izteiksmes vērtību, identiski pārveidotu izteiksmes, pierādītu identitātes, izmantojot sev piemērotu paņēmienu.
	Piemēri. 1. Nosaki izteiksmes $\text{ctg } \alpha$ vērtību, ja: a) $\text{tg } \alpha = \frac{2}{3}$; b) $\text{tg } \alpha = a$. 2. Nosaki izteiksmes $\cos \alpha$ vērtību, ja $\text{tg } \alpha = 2$ un α ir 3. kvadranta leņķis. 3. Pierādi, ka $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \text{tg}^2\, x$, un nosaki x pieļaujamās vērtības. Izpēti, formulē un pierādi analogu sakarību starp sinusu un kotangensu. 4. Vienkāršo izteiksmi $(\text{tg}^2\, \alpha - \sin^2 \alpha) \cdot \text{ctg}^2\, \alpha$. 5. Pierādi identitāti $\frac{\text{tg}^2\, \alpha}{1 + \text{tg}^2\, \alpha} \cdot \frac{1 + \text{ctg}^2\, \alpha}{\text{ctg}^2\, \alpha} = \text{tg}^2\, \alpha$.
	Risina kompleksu problēmu, kuras atrisināšanai nepieciešams saistīt trigonometrijas un algebras zināšanas un prasmes.
	Piemērs. Aprēķini $\sin^4 x + \cos^4 x$, ja $\sin x + \cos x = c$.
	Veido argumentu summas formulas pierādījumu, izmantojot dažādus paņēmienus, piemēram, 1) vektoru skalāro reizinājumu, 2) interpretāciju metodi, izmantojot planimetrijas zināšanas un prasmes.
	Piemērs. Izpēti un paskaidro argumentu summas formulu pierādījumus ar interpretāciju metodi. 

Temata apguves norise (turpinājums)

Trigonometriskās izteiksmes	Izmanto iegūto rezultātu, lai pierādītu citas argumentu summas formulas, divkāršā argumenta formulas. Vingrinās izlasīt, uzrakstīt pēc dzirdētā, lietot divkāršā argumenta formulas abos virzienos dažādiem argumentiem, skaidrojot pārveidojumus ar tiem. Uzziņu literatūrā atrod un lieto situācijai atbilstošu trigonometrisko sakarību (formulu). Lieto argumentu summas formulas, lai pamatotu redukcijas formulas; salīdzina šo paņēmienu ar jau apgūtajiem, argumentē sev piemērotāko. Veido un formulē stratēģiju, kā droši un iespējami ātri iegūt kādu no redukcijas formulām, ja tas nepieciešams.
	Piemēri. 1. Nosaki izteiksmes $\cos 2\alpha$ vērtību, ja $\mathrm{tg}\ \alpha = -\frac{4}{3}$ un α ir 2. kvadranta leņķis. 2. Pierādi identitāti $\frac{1 + \sin 2x - \cos 2x}{1 + \sin 2x + \cos 2x} = \mathrm{tg}\ x$.
Inversās trigonometriskās funkcijas	Veido situācijas matemātisko modeli, kas ilustrē nepieciešamību definēt inverso trigonometrisko funkciju.
	Piemērs. Leņķis α mainās atkarībā no attāluma x līdz taisnei (sk. zīmējumu). Uzraksti funkcijas $\alpha(x)$ analītisko izteiksmi, lai noteiktu to attālumu x, kuram atbilst lielākā iespējamā α vērtība. 
	Nosaka funkcijas $y = \mathrm{tg}\ x$ inverso funkciju, skicē inversās funkcijas grafiku, izmantojot zināšanas par savstarpēji inversu funkciju novietojumu koordinātu plaknē, izmanto IT pašpārbaudei. Nosaka funkcijas $y = \mathrm{arctg}\ x$ definīcijas kopu, vērtību kopu, īpašības, asimptotas. Lieto iegūtās zināšanas un skaidro trigonometriska vienādojuma atrisināšanu vispārīgā veidā.
	Piemēri. 1. Nosaki un pamato funkcijas $y = \mathrm{arctg}\ x$ vērtību kopu. 2. Atrisini vienādojumu $\mathrm{tg}\ x = 2$, pieraksti vispārīgā veidā vienādojuma visas saknes.
	Definē sinusa, kosinusa un kotangensa funkciju inversās funkcijas, secina par to grafika novietojumu koordinātu plaknē, īpašībām, skaidro trigonometrisko vienādojumu ($\sin x = a$, $\cos x = a$, $\mathrm{ctg}\ x = a$) atrisināšanu vispārīgā veidā, formulē sev piemērotus un iespējami efektīvus algoritmus vienādojuma atrisināšanai un atbildes pierakstīšanai.
	Piemēri. 1. Uzzīmē funkciju $y = \mathrm{arc}\sin x$ un $y = \mathrm{arc}\cos x$ grafikus, izmantojot digitālos rīkus, secini par to vērtību kopu. 2. Formulē vienādojuma $\sin x = a$ atrisināšanas algoritmu vispārīgā veidā.
Trigonometriskie vienādojumi	Spriež par vienādojuma $\sin x = 0{,}5$ atrisināšanu, izmantojot jau esošās zināšanas. Atrisina trigonometriskos pamatvienādojumus: $\sin(kx + b) = a$, $\cos(kx + b) = a$, $\mathrm{tg}\ (kx + b) = a$, $\mathrm{ctg}\ (kx + b) = a$, izmantojot vienības riņķi vai trigonometrisko funkciju īpašības. Atrisina trigonometriskus vienādojumus, pārveidojot tos formā $\sin f(x) = \sin g(x)$; $\cos f(x) = \cos g(x)$; $\mathrm{tg}\ f(x) = \mathrm{tg}\ g(x)$; skaidro risinājumu, izmantojot vienības riņķi vai funkciju īpašības. Vingrinās trigonometrisko vienādojumu risināšanā, izvēloties piemērotu paņēmienu. Lieto vienādojumu vispārīgos risināšanas paņēmienus. Lieto trigonometriskos vienādojumus, vienkāršas trigonometriskās nevienādības matemātiskos kontekstos.
	Piemēri. 1. Atrisini vienādojumu $\sin(\pi - x) = \sin 2x$, raksturo savu izvēlēto paņēmienu un citus iespējamos paņēmienus. 2. Atrisini vienādojumu: a) $2\sin x - \cos x - \sin 2x + 1 = 0$; b) $\cos 4x = 5\sin 2x + 3$; c) $\frac{2\cos 2x - 1}{2\sin x - 1} = 0$. 3. Nosaki funkcijas $y = \mathrm{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ nulles, intervālus, kuros funkcijas vērtība ir pozitīva. 4. Nosaki un pamato tās argumenta vērtības, ar kurām funkcijai $y = \sin^2 x - 2\sin x + 5$ ir lielākā vērtība; risini divējādi – neizmantojot funkcijas atvasinājumu, izmantojot funkcijas atvasinājumu.

Temata apguves norise (turpinājums)

Trigonometriskie vienādojumi

Pārrunā un apkopo pieredzi ekvivalentu un neekvivalentu pārveidojumu lietošanā vienādojumu atrisināšanai; izvēlas paņēmienu trigonometriska vienādojuma atrisināšanai.

Piemēri. 1. Atrisini vienādojumu: a) $3\sin x - 2\cos x = 0$; b) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$. 2. Pierādi, ka vienādojumam $\sin^2 x \cdot \cos x = 1$ nav sakņu.

Atvasinājuma lietojums

Lieto atvasinājumu trigonometrisko funkciju īpašību noteikšanai un pamatošanai.

Piemēri. 1. Nosaki funkcijas $y = 2\sin 3x$ monotonitātes intervālus, izmantojot atvasinājumu.

2. Nosaki funkcijas $y = \operatorname{tg} 2x$ monotonitātes intervālus, kritiskos un ekstrēma punktus, grafika izliekumu, ieliekumu un pārliekuma punktus, izmantojot funkcijas atvasinājumu; uzskicē funkciju grafiku.

Matemātiskā modelēšana

Izsaka idejas par reāliem procesiem, sakarībām starp lielumiem, kuru matemātiskais modelis varētu būt kāda no trigonometriskajām funkcijām. Iegūst patstāvīgi, t. sk., izmantojot brīvi pieejamos interneta resursus, un apkopo datus (lielumu skaitliskās vērtības) par kādu reālu procesu. Attēlo iegūtos datus koordinātu plaknē un izmanto piemērotas lietotnes, lai noteiktu formulu funkcijai, kas tuvināti, bet iespējami precīzi aprakstītu sakarību starp lielumiem. Formulē secinājumus, raksturo iegūto rezultātu precizitāti, prognožu pamatotību.

Piemērs. Fandī (*Fundy*) līcī ir vislielākā vidējā ūdens līmeņa maiņa Jaunskotijā, Kanādā. Tabulā doti paredzamie dati 2019. gada 21. augustam atbilstoši Atlantijas standartlaikam (AST), augstumi (h) mērīti *Burntcoat Head* parkā.

Laiks	00.00	01.00	02.00	03.00	04.00	05.00	06.00	07.00	08.00	09.00	10.00	11.00
h (m)	2,6	4,8	7,6	10,1	12,1	13,1	12,5	10,5	7,9	5,5	3,4	2,2
Laiks	12.00	13.00	14.00	15.00	16.00	17.00	18.00	19.00	20.00	21.00	22.00	23.00
h (m)	2,3	4,0	6,7	9,3	11,5	12,9	12,9	11,2	8,7	6,2	4,0	2,5

a) Programmā *Graph* atliec dotos datus koordinātu sistēmā, kur uz abscisu ass ir diennakts laiks, bet uz ordinātu ass – ūdens līmeņa augstums (h). Uzraksti savus novērojumus par punktu novietojumu.

b) Izmantojot zināšanas par funkcijām un to grafikiem, izveido funkciju, kas apraksta funkcionālo sakarību starp attēlotajiem lielumiem. Paskaidro mainīgos (neatkarīgais, atkarīgais) un skaitliskos parametrus, kas ietekmēs funkcijas izteiksmi. Vai izvēlētai funkcijai ir kādi ierobežojumi? Paskaidro katra parametra iegūšanu.

c) Uzzīmē iegūtās funkcijas grafiku vienā koordinātu sistēmā ar atliktajiem punktiem. Vai funkcijas grafiks labi apraksta atliktos punktus?

d) Maini funkcijas izteiksmi, lai tā labāk aprakstītu dotos datus. Paskaidro, ko tu ņem vērā un ko dari.

e) Drošības nolūkos zvejnieki jūrā iet bēguma laikā. To ievērojot, izmanto iegūto matemātisko modeli un nosaki, kurā diennakts laikā zvejniekiem būtu jāiet jūrā 2019. gada 21. augustā.

f) Tabulā doti dati 2019. gada 22. augustam atbilstoši Atlantijas standartlaikam (AST). Vai iegūtā funkcija labi apraksta arī šos datus? Kāpēc? Ja nepieciešams, veic pārveidojumus funkcijas izteiksmē. Paskaidro, ko un kāpēc dari.

Laiks	00.00	01.00	02.00	03.00	04.00	05.00	06.00	07.00	08.00	09.00	10.00	11.00
h (m)	2,1	3,2	5,7	8,4	10,7	12,4	12,9	11,8	9,6	7,1	4,8	3,0
Laiks	12.00	13.00	14.00	15.00	16.00	17.00	18.00	19.00	20.00	21.00	22.00	23.00
H (m)	2,2	2,8	4,8	7,6	10,0	11,9	13,0	12,5	10,6	8,1	5,6	3,6

g) Kāpēc rodas atšķirības ūdens līmeņa augstumam? Veido skaidrojumu, iegūstot papildu informāciju. Norādi informācijas avotus.

14. Paralelitāte un perpendikularitāte telpā

Ieteicamais laiks temata apguvei: 24–28 mācību stundas.

Temata apguves mērķis: pilnveidot telpisko iztēli un izpratni par punktu, taišņu un plakņu savstarpējo novietojumu telpā un attēlošanu zīmējuma plaknē, pētot, formulējot un pierādot figūru īpašības, savstarpējo novietojumu.

Sasniedzamie rezultāti

Ziņas	Prasmes
• Stereometrijā pēta ģeometriskus (telpiskus) ķermeņus un citas figūras, kuru visi punkti neatrodas vienā plaknē. (M.Li.6.) • Planimetrijas pamatjēdzieni ir punkts un taisne. Stereometrijā aplūko vēl vienu pamatjēdzienu – plakne. Neapšaubāmi patiesas pamatjēdzienu īpašības izsaka aksiomas. (M.Li.2.; M.Li.6.) • Plakni viennozīmīgi nosaka: 1) jebkuri trīs punkti, kas neatrodas uz vienas taisnes, 2) taisne un punkts, kas tai nepieder; 3) divas krustiskas taisnes; 4) divas paralēlas taisnes. (M.Li.2.; M.Li.6.) • Pēc savstarpējā novietojuma telpā divas taisnes var būt krustiskas, paralēlas vai šķērsas. Divas taisnes ir šķērsas, ja tās neatrodas vienā plaknē. (M.Li.1.; M.Li.6.) • Divas plaknes telpā var būt novietotas tā, ka: 1) plaknes šķeļas (kopīga taisne), 2) plaknes ir paralēlas (nav kopīgu punktu). (M.Li.2.; M.Li.6.) • Attēlojot plaknē telpisku figūru (ķermeni), svarīgi veidot uzskatāmu priekšstatu par šo figūru (ķermeni). Veidojot telpisku figūru attēlus plaknē ar paralēlās projicēšanas metodi, saglabājas paralelitāte, taisnes nogriežņu attiecība un paralēlu taišņu nogriežņu attiecība. (M.Li.2.; M.Li.6.) • Leņķis starp divām šķērsām taisnēm a un b ir vienāds ar leņķi, ko veido krustiskas taisnes, kas attiecīgi paralēlas taisnēm a un b. Telpā perpendikulāras (leņķis starp tām $90°$) var būt gan divas krustiskas taisnes, gan divas šķērsas taisnes. (M.Li.6.) • Leņķis starp taisni un plakni ir leņķis starp taisni un tās projekciju šajā plaknē. (M.Li.6.) • Divplakņu kakts ir figūra, ko veido divas pusplaknes (neatrodas vienā plaknē) ar kopīgu šķautni. Divplakņu kakta leņķi iegūst, no brīvi izvēlēta kopīgās šķautnes punkta abās skaldnēs novelkot staru perpendikulāri šķautnei. (M.Li.2.; M.Li.6.) • Ja taisne, kas atrodas plaknē, ir perpendikulāra pret slīpnes projekciju šajā plaknē, tad tā ir perpendikulāra arī pret pašu slīpni, un otrādi. Šīs teorēmas lieto, lai noteiktu un pamatotu, vai leņķis ir taisns. (M.Li.2.; M.Li.6.) • Daudzskaldni šķeļot ar plakni, katrai daudzskaldņa skaldnei un plaknei vai nu ir kopīgs nogrieznis, vai ir viens kopīgs punkts, vai arī nav kopīgu punktu. Šķēlums ir daudzstūris, kura malas atrodas uz daudzskaldņa virsmas. Šķēlumā iegūtā daudzstūra malu skaits nevar pārsniegt daudzskaldņa skaldņu skaitu. (M.Li.2.; M.Li.6.)	• Raksturo un pamato divu taišņu, taisnes un plaknes, divu plakņu savstarpējo novietojumu. • Lieto atbilstošus simbolus, pieņemtos apzīmējumus un jēdzienus figūru savstarpējā novietojuma raksturošanai, spriedumu un uzdevumu atrisinājuma pierakstīšanai. • Veido telpisku figūru un daudzskaldņu attēlus plaknē. • Lieto taišņu, plakņu, taišņu un plakņu paralelitātes un perpendikularitātes nosacījumus, definīcijas leņķim starp taisnēm telpā, leņķim starp taisni un plakni, divplakņu kakta leņķim un attālumam līdz plaknei, sakarību starp slīpni, slīpnes projekciju un perpendikulu, sakarību starp slīpņu un to projekciju garumiem, triju perpendikulu teorēmu, lai formulētu un pamatotu apgalvojumus un aprēķinātu nezināmos lielumus. • Veido un raksturo daudzskaldņa šķēlumu ar plakni.

Komplekss sasniedzamais rezultāts	Ieradumi
• Skaidro stereometriju kā aksiomātisku sistēmu un veido pierādījumus, izmantojot piederības aksiomas, secinājumus no tām, lietojot tiešo pierādījumu un pierādījumu no pretējā. (M.A.2.3.2.; M.A.6.3.1.) • Skaidro un nosaka leņķi starp šķērsām taisnēm. (M.A.6.3.4.) • Pēta un formulē vispārīgus secinājumus par plaknes figūras un telpiska ķermeņa attēlošanu paralēlajā projicēšanā; izmanto uzziņu avotus, lai izvērtētu iegūto rezultātu. (M.A.1.1.1.; M.A.2.1.1.; M.A.6.3.2.) • Veido telpiska ķermeņa šķēlumu ar plakni, ja dotie šķēluma plaknes punkti nav tieši savienojami; skaidro un pamato konstrukcijas gaitu. (M.A.6.3.3.) • Pierāda taisnes un plaknes perpendikularitātes pazīmi, teorēmu par slīpņu un to projekciju garumu salīdzināšanu, triju perpendikulu teorēmu; formulē un pierāda apgrieztās teorēmas. (M.O.2.3.1.; M.A.2.1.2.)	• Iegūtās zināšanas saista ar savu pieredzi, skaidrojot telpiskās iztēles, projicēšanas plaknē un ģeometriskās modelēšanas prasmju nepieciešamību vai lietojumu dažādās dzīves jomās. • Neskaidrās situācijās veido skici, zīmējumu vai situācijas modelēšanai izmanto digitālos rīkus, attīstot ieradumu plānot un vadīt savu domāšanas procesu. • Sadala uzdevuma atrisinājumu soļos un plāno tā izkārtojumu lapā, attīstot ieradumu strukturēti un uzskatāmi attēlot informāciju, vārdisko un rakstīto tekstu veidot saistītu un citiem saprotamu.
Jēdzieni: aksioma, šķērsas taisnes, leņķis starp taisnēm telpā, perpendikuls pret plakni, slīpne, slīpnes projekcija, leņķis starp taisni un plakni, divplakņu kakts, divplakņu kakta leņķis, daudzskaldņa šķēlums ar plakni, paralēlā projicēšana.	
Simboli un pieņemtie apzīmējumi: $\cup$; $\cap$; $\in$; $\perp$; $\parallel$; $\nparallel$.	

Temata apguves norise

Stereometrijas pamatjēdzieni	Skaidro, ilustrē ar piemēriem jēdzienus “telpiska figūra”, “telpisks (ģeometrisks) ķermenis”, “daudzskaldnis”, “virsma”, “plakne”.
	Piemērs. Telpā pieci punkti izvietoti tā, ka veidojas daudzskaldnis. Izpēti, kādi daudzskaldņi var veidoties. Pamato skaldņu skaitu un to, kāda veida daudzstūri ir skaldnes katrā no gadījumiem.
	Apraksta telpiskas figūras, kas nav telpisks ķermenis. Definē vienādus telpiskus ķermeņus (telpiskas figūras), izmantojot analoģiju ar vienādu plaknes figūru definīciju. Izsaka idejas, kā definē tilpumu; raksturo tā īpašības, izmantojot analoģiju ar laukuma īpašībām. Spriež, iztēlojas, modelējot praktiski vai izmantojot digitālos rīkus, lai noteiktu un skaidrotu punktu, taišņu un plakņu savstarpējo stāvokli vienkāršās situācijās, piemēram: 1) ko var secināt par taisni AB, ja zināms, ka punkti A un B atrodas plaknē α, 2) ko var secināt par divām plaknēm, ja zināms, ka tām ir viens kopīgs punkts, 3) cik daļās telpu var sadalīt divas plaknes. Izsaka savas domas par to, vai secinājumu patiesums nerada šaubas.
Stereometrijas aksiomas un secinājumi no tām	Lasa aksiomas, kas raksturo punktu, taišņu un plakņu savstarpējo novietojumu telpā (piederības aksiomas), un skaidro tās, formulē secinājumus no tām. Pierāda, izmantojot piederības aksiomas un jau pierādītās teorēmas. Lieto pierādījumu no pretējā. Skaidro un lieto simbolisko pierakstu, lai aprakstītu punkta piederību taisnei vai plaknei, taisnes piederību plaknei. Skaidro, kas ir aksiomātiska sistēma un kā tā “strādā”. Argumentēti diskutē par “citām ģeometrijām”.
	Piemēri. 1. Pierādi teorēmu: caur divām krustiskām taisnēm var novilkt vienu vienīgu plakni. 2. Dots, ka taisne c krusto divas krustiskas taisnes a un b, bet neiet caur to krustpunktu. Pierādi, ka taisne c atrodas vienā plaknē ar taisnēm a un b. 3. Dots, ka taisnes AB un CD krustojas. Pierādi, ka taisnes AC un BD atrodas vienā plaknē. 4. Sameklē un apkopo informāciju par to, kādi elementi veido aksiomātisku sistēmu. 5. Sameklē, apkopo un prezentē informāciju par Eiklīda ģeometrijas aksiomām un 5. postulāta (aksiomas) problēmu. 6. Veido piemērus un pamatojumus diskusijas jautājumam, vai visas ģeometrijā apgūtās sakarības un teorēmas ir patiesas, ja figūras iztēlojas uz sfēras.
Taisnes telpā	Definē paralēlas taisnes telpā, kritiski izvērtē dotas paralēlu taišņu definīcijas, piemēram, taisnes ir paralēlas, ja tās nekrustojas. Raksturo, kādos gadījumos plakne ir uzdota viennozīmīgi (saka arī – plakni var novilkt). Vingrinās daudzskaldņa attēlā novilkt un pamatot plakni, ko nosaka doti elementi, piemēram, kuba $ABCDA_1\,B_1\,C_1\,D_1$ šķautne AA_1 un virsotne C. Izmanto kuba attēlu (virsotnes nosauktas) un klasificē/grupē taišņu (caur 2 virsotnēm) pārus pēc to savstarpējā novietojuma; secina, ka divas taisnes telpā var būt novietotas tā, ka tās nav ne paralēlas, ne krustiskas. Definē šķērsas taisnes. Vingrinās noteikt un pamatot divu taišņu savstarpējo novietojumu citu daudzskaldņu attēlos. Patstāvīgi lasa matemātisku tekstu, lai noskaidrotu paralēlu taišņu īpašības, veido skici, formulē jautājumus neskaidrību gadījumā; izmanto īpašības, lai pamatotu dota daudzskaldņa divu šķautņu savstarpējo novietojumu, ievērojot daudzskaldņa īpašības vai dotos nosacījumus. Izsaka idejas, kā zīmējumā iespējami uzskatāmi un vienkārši attēlot divas šķērsas taisnes. Uzziņu literatūrā atrod šķērsu taišņu pazīmi. Lieto teorēmas par plaknes novilkšanu, paralēlu un šķērsu taišņu definīcijas, paralēlu taišņu īpašības vai šķērsu taišņu pazīmi; zīmējumu veido ar roku vai izmantojot digitālos rīkus, skaidro risinājumu.

Temata apguves norise (turpinājums)

Taisnes telpā	Piemēri. 1. Taisne c krusto paralēlas taisnes a un b. Pierādi, ka taisnes a, b un c atrodas vienā plaknē. 2. Kuba $ABCDA_1\,B_1\,C_1\,D_1$ šķautņu $AB\ un\ BB_1$ viduspunkti ir attiecīgi M un N. Pierādi, ka taisnes MN un DC_1 ir paralēlas. 3. Taisnes a un b ir krustiskas. Uzzīmē taisni c tā, lai: a) c ir šķērsa gan ar a, gan ar b, b) c ir šķērsa ar a, bet nav šķērsa ar b, c) c nav šķērsa ne ar a, ne ar b.
Taišņu un plakņu paralelitāte	Nosaka, cik kopīgu punktu var būt taisnei un plaknei, ja tās novietotas telpā; lieto simbolus, lai pierakstītu punktu, taišņu un plakņu savstarpējo novietojumu. Definē, kad taisne ir paralēla plaknei. Raksturo un pierāda taišņu un plakņu savstarpējo novietojumu paralēlskaldnī, uzziņu literatūrā atrodot taisnes un plaknes paralelitātes pazīmi. Raksturo taišņu un plakņu savstarpējo novietojumu dažādos daudzskaldņos; atsevišķos gadījumos veido pierādījumu. Nosaka, cik kopīgu punktu var būt divām plaknēm telpā; izpētei izmanto digitālos rīkus. Formulē secinājumus, uzklausa un izvērtē citu iegūtos rezultātus. Definē paralēlas plaknes. Secina, ka divas plaknes var šķelties tikai pa taisni. Raksturo divu plakņu, taisnes un plaknes savstarpējo novietojumu daudzskaldņos; atsevišķos gadījumos veido pierādījumu, atrodot nepieciešamo teorētisko pamatojumu, piemēram, teorēmas par divu paralēlu plakņu šķelšanu ar trešo plakni, divu plakņu paralelitātes pazīmes.
	Piemēri. 1. Trijstūra divas malas ir paralēlas plaknei α. Pierādi, ka trijstūra trešā mala arī ir paralēla plaknei α. 2. Daudzstūra divas malas ir paralēlas plaknei. Vai var apgalvot, ka daudzstūra visas malas ir paralēlas plaknei, ja: a) dotās malas ir blakusmalas, b) dotās malas nav blakusmalas?
Leņķis starp šķērsām taisnēm	Definē leņķi starp krustiskām taisnēm, izmantojot jau zināmo. Izsaka idejas, kā mēra leņķi starp šķērsām taisnēm. Definē leņķi starp šķērsām taisnēm. Nosaka leņķi starp šķērsām taisnēm.
	Piemēri. 1. Dots kubs $ABCDA_1\,B_1\,C_1\,D_1$. Nosaki leņķi starp taisnēm $B_1\,D$ un AD_1. 2. Aprēķini leņķi starp kuba blakus skaldņu diagonālēm, kuras nekrustojas.
Figūras attēlošana ar paralēlās projicēšanas metodi	Raksturo savu pieredzi telpisku figūru un ķermeņu attēlošanai. Konstruē figūru attēlus ar paralēlās projicēšanas metodi, lietojot paralēlās projicēšanas īpašības, zināšanas par trijstūra un riņķa līnijas attēliem paralēlā projicēšanā. Izmanto informāciju mācību literatūrā.
	Piemērs. Konstruē ar paralēlās projicēšanas metodi: a) vienādsānu trijstūri, kurā novilkta mediāna pret pamata malu, ja doti vienas sānu malas un pret pamata malu vilktās mediānas attēli; b) ap riņķi apvilktu kvadrātu, ja dots riņķa un vienas malas attēls; c) riņķa līnijā ievilktu regulāru trijstūri, ja dots riņķa attēls.
Daudzskaldņu šķēlums ar plakni	Pēta, formulē un pamato, kādas plaknes figūras var veidoties, telpisku ķermeni šķeļot ar plakni.
	Piemērs. Zināms, ka a) tetraedru, b) regulāru trijstūra prizmu šķeļ ar plakni. Izpēti, kādas plaknes figūras var veidoties šķēlumā, un pamato, ka nav citu iespēju.
	Konkrētos piemēros, ja nepieciešams – skolotāja vadīti, veido prizmas vai piramīdas šķēlumu ar plakni. Patstāvīgi formulē algoritmu šķēluma veidošanai – pēdu metodi. Lieto pēdu metodi šķēlumu konstruēšanai.
	Piemērs. Dots kubs $ABCDA_1\,B_1\,C_1\,D_1$. Konstruēt kuba šķēlumu ar plakni KLM, ja punkti $K,\ L$ un M atrodas attiecīgi uz šķautnēm $AB,\ BB_1,\ A_1D_1$.

Taišņu un plakņu perpendikularitāte	Kubā nosauc divas perpendikulāras taisnes, kas ir krustiskas, un divas perpendikulāras taisnes, kas ir šķērsas. Izsaka idejas, kā definēt taisnes un plaknes perpendikularitāti; kritiski izvērtē piedāvātās definīcijas. Salīdzina izveidoto definīciju ar uzziņu literatūrā doto. Izvērtē patiesumu apgalvojumam: ja taisne a ir perpendikulāra kādai taisnei b plaknē γ, tad taisne a ir perpendikulāra plaknei γ. Pamato, ka apgalvojums ir aplams, modelējot praktiski un izveidojot pretpiemēru. Spriež, formulē taisnes un plaknes perpendikularitātes pazīmi un to lieto aprēķina un pierādījuma uzdevumos.
	Piemērs. Pierādi, ka kubā $ABCDA_1\,B_1\,C_1\,D_1$ pamata skaldnes diagonāle AC ir perpendikulāra plaknei $BB_1\,D_1$.
	Dažādu vienkāršu būvkonstrukciju, sadzīves priekšmetu attēlos saskata un raksturo visām situācijām kopīgo ģeometrisko modeli – pret plakni no punkta novilkts perpendikuls un 2–4 slīpnes. Mācību literatūrā atrod definīcijas jaunajiem jēdzieniem “perpendikuls, kas novilkts no punkta pret plakni”, “slīpne un tās projekcija plaknē” un tos izmanto, lai raksturotu nogriežņus un to savstarpējo novietojumu telpiskās figūrās, piramīdās un prizmās. Veido telpiskas figūras zīmējumu atbilstoši nosacījumiem, aprēķina nezināmos lielumus (perpendikula, slīpnes un slīpnes projekcijas garums), izmantojot sakarības taisnleņķa trijstūrī, vienādsānu trijstūra īpašības u. tml.
	Piemērs. Pret plakni no punkta A novilktas divas slīpnes AB un AC, turklāt to projekcijas BO un CO ir perpendikulāras savā starpā. Aprēķini perpendikula AO garumu, ja ABC ir vienādmalu trisjtūris, kura malas garums ir a.
	Izmanto zināšanas un definē attālumu starp divām paralēlām plaknēm, attālumu starp taisni un tai paralēlu plakni. Izsaka un skaidro idejas, kā noteikt leņķi starp taisni un plakni, ja tas nav taisns. Definē leņķi starp taisni un plakni. Pierāda teorēmas par slīpņu un to projekciju garumu salīdzināšanu. Pierāda triju perpendikulu teorēmu un tās apgriezto teorēmu. Lieto iegūtās sakarības, lai aprēķinātu nezināmos lielumus, pierādītu figūru īpašības vai figūru savstarpējo novietojumu.
	Piemēri. 1. Vienādsānu taisnleņķa trijstūra katete atrodas plaknē α, bet otra katete ar plakni α veido $45°$ leņķi. Aprēķini leņķi, ko trijstūra hipotenūza veido ar plakni α. 2. No romba $ABCD$ diagonāļu krustpunkta O pret tā plakni novilkts perpendikuls OK. Pierādi, ka $BD \perp KC$. 3. Kuba $ABCDA_1\,B_1\,C_1\,D_1$ šķautnes garums ir a. Aprēķini attālumu no virsotnes D līdz taisnei BC_1.
	Izsaka idejas, skaidro, kā noteikt leņķi starp divām plaknēm; uzklausa citu formulētās idejas. Salīdzina formulētās idejas ar mācību literatūrā atrodamo – lasa divplakņu kakta definīciju, divplakņu kakta leņķa lieluma definīciju. Ilustrē ar zīmējumu, skaidro plakņu perpendikularitātes pazīmi. Lieto iegūtās sakarības, lai aprēķinātu nezināmos lielumus, pierādītu figūru īpašības vai figūru savstarpējo novietojumu.
	Piemēri. 1. Uz taisna divplakņu kakta šķautnes atzīmēti punkti A un B, no kuriem dažādās kakta skaldnēs novilkti perpendikuli AC un BD. Aprēķini attālumu CD, ja $AB = 6$ cm, $AC = 3$ cm un $BD = 2$ cm. 2. Divplakņu kakta iekšpusē dots punkts, kurš atrodas 2 cm attālumā no abām skaldnēm. Aprēķini šī punkta attālumu no divplakņu kakta šķautnes, ja divplakņu kakta leņķis ir $60°$.

3. gads

15. Varbūtību teorijas elementi	16. Polinomi	17. Integrālis, tā lietojums	18. Prizma un piramīda	19. Rotācijas ķermeņi, ģeometrisko ķermeņu kombinācijas	20. Varbūtību sadalījumi	21. Vienādojumi un nevienādības, to sistēmas

15. Varbūtību teorijas elementi

Ieteicamais laiks temata apguvei: 30–34 mācību stundas.

Temata apguves mērķis: paplašināt un sistematizēt zināšanas par notikumu varbūtību, lietot iegūtās zināšanas, risinot kompleksas problēmas ar matemātisku un citu jomu kontekstu.

Sasniedzamie rezultāti

Ziņas	Prasmes
• Ja gadījuma mēģinājums tiek veikts n reižu un notikums A iestājas k reižu, tad skaitli $\frac{k}{n}$ sauc par notikuma A relatīvo biežumu jeb statistisko varbūtību. Palielinot mēģinājumu skaitu n, notikuma A relatīvais biežums/statistiskā varbūtība stabilizējas ap konstantu skaitli – notikuma A varbūtību. (M.Li.5.) • Varbūtību teorijas metodes izmanto, lai raksturotu riskus (piemēram, nosakot apdrošināšanas iemaksas), iespējas (piemēram, analizējot pētījumus medicīnā), nodrošinātu kvalitātes kontroli (piemēram, izvērtējot brāķēto detaļu īpatsvaru) u. tml. (M.Li.5.) • Ar vienu mēģinājumu saistīti notikumi A un B ir nesavienojami, ja to iznākumu kopām nav kopīgu elementu; tad $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. (M.Li.5.) • Formulu $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ ērti lietot tad, ja labvēlīgos notikumus vieglāk noteikt notikuma A pretējam notikumam $\bar{A}$. (M.Li.5.) • Ja A un B ir savienojami notikumi, tad $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. (M.Li.5.) • Notikuma A varbūtība, ja notikums B ir realizējies, ir notikuma A nosacītā varbūtība; to apzīmē $P(A \mid B)$. (M.Li.5.) • Divi notikumi A un B ir neatkarīgi, ja viena notikuma iestāšanās varbūtība neietekmē otra notikuma iestāšanos; notikumu A un B neatkarību var pamatot, izmantojot nosacīto varbūtību – izpildās sakarības $P(A \mid B) = P(A)$ vai $P(B \mid A) = P(B)$. (M.Li.5.) • Ja A un B $(P(B) \neq 0)$ ir jebkuri divi notikumi, tad notikuma $A \cap B$ varbūtību var aprēķināt ar formulu $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B)$; šo sakarību var izmantot nosacītās varbūtības $P(A \mid B)$ aprēķināšanai. (M.Li.5.) • Ja A un B ir neatkarīgi notikumi, tad $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, un otrādi, šo sakarību var izmantot, lai pamatotu divu notikumu A un B neatkarību. (M.Li.5.) • Sarežģītākas problēmas izpratnei un varbūtības noteikšanai ir lietderīgi veidot izvēļu koku/diagrammu. (M.Li.1.; M.Li.5.)	• Konkrētos piemēros nosaka mēģinājumu iznākumu kopu, tās noteiktas apakškopas atbilstoši nosacījumiem. • Nosaka, attēlo ar Venna diagrammu divu notikumu apvienojumu, šķēlumu, starpību; izmanto darbības ar notikumiem, lai skaidrotu un aprēķinātu varbūtību. • Aprēķina relatīvo biežumu/statistisko varbūtību. • Aprēķina divu notikumu apvienojuma varbūtību $P(A \cup B)$. • Aprēķina notikumam A pretējo notikumu $\bar{A}$, izmantojot spriešanu vai sakarību $P(A) = 1 - P(\bar{A})$. • Lieto varbūtību reizināšanas formulu. • Aprēķina nosacīto varbūtību, izmantojot formulu $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Komplekss sasniedzamais rezultāts	Ieradumi
• Iegūst datus (t. sk. digitāli) un skaidro, kas ir notikuma relatīvais biežums/statistiskā varbūtība, formulē ar datiem pamatotus secinājumus, izmantojot doto vai aprēķināto statistisko varbūtību, tās saistību ar varbūtību. (M.O.5.2.3.) • Konkrētos piemēros izmanto izvēļu koku un skaidro, kas ir nosacītā varbūtība, attēlo un raksturo saistību starp $P(B)$, $P(\bar{B})$, $P(A\mid B)$, $P(\bar{A}\mid B)$, $P(A\mid \bar{B})$, $P(\bar{A}\mid \bar{B})$ un to skaitliskajām vērtībām, formulē secinājumus. (M.O.5.2.5.) • Pamato, vai notikumi a) ir nesavienojami vai savienojami, b) ir vai nav neatkarīgi; skaidro formulas vai paņēmiena izvēli varbūtības aprēķināšanai. (M.O.5.2.6.; M.A.5.2.1.) • Lieto pilnās varbūtības formulu. (M.A.5.2.1.; M.A.5.2.2.)	• Veido dotās informācijas un risinājuma gaitas shematiskus attēlojumus, attīstot ieradumu plānot un vadīt savu domāšanas procesu, strukturēti un uzskatāmi attēlot informāciju. • Izvērtē iegūto varbūtības skaitlisko vērtību, attīstot ieradumu kritiski izvērtēt rezultātu ticamību un atbilstību konkrētajai situācijai.
Jēdzieni: gadījuma mēģinājums, notikums, pretējais notikums, iznākumu kopa, drošs notikums, neiespējams notikums, absolūtais biežums, relatīvais biežums, statistiskā varbūtība, nesavienojami notikumi, savienojami notikumi, nosacītā varbūtība, neatkarīgi notikumi, atkarīgi notikumi.	
Simboli un pieņemtie apzīmējumi: $P(A)$; $\bar{A}$; $P(A \cup B)$; $P(A \cap B)$; $P(A\|B)$.	

Temata apguves norise

Varbūtību teorijas elementi	Informācijas avotos meklē informāciju, kurās nozarēs un kā izmanto varbūtību teoriju, kāpēc tā ir nepieciešama. Lai pilnveidotu angļu valodas vai citas svešvalodas prasmes, ieteicams izmantot izvēlētos avotus ne tikai latviešu valodā. Lasa jaunu jēdzienu definīcijas un, izmantojot konkrētus piemērus, skaidro, kas ir eksperiments/mēģinājums, gadījuma mēģinājums, notikums, iznākumu kopa, drošs notikums, neiespējams notikums. Aplūko 3 vai 4 piemērus un veido gadījuma mēģinājuma iznākumu kopu, lieto kopu simboliku. Izmanto jau aplūkotos piemērus/gadījuma mēģinājumus un nosaka droša notikuma un neiespējama notikuma piemērus. Izmanto konkrētus gadījuma mēģinājumus (piemēram, monētas mešana, spēļu kauliņa mešana) un skaidro notikumam A pretējo notikumu $\bar{A}$. Vingrinās noteikt notikumu A un $\bar{A}$ iznākumu kopas un aprēķināt varbūtības; formulē vispārinājumu. Aplūko gadījuma mēģinājumu “Spēļu kauliņa mešana” un izmanto divu notikumu piemērus, lai skaidrotu divu notikumu apvienojumu (summu), šķēlumu (reizinājumu) un starpību. Nosaka notikumu apvienojuma, notikumu šķēluma vai notikumu starpības iznākumu kopu, izmanto Venna diagrammu notikumu $A, B, A \cup B, A \cap B$ un $A \setminus B$ attēlošanai un nozīmes skaidrošanai. Vingrinās formulēt notikumus $A \cup B, A \cap B$ un $A \setminus B$, ja doti notikumi A un B. Nosaka notikumu $A, B, A \cup B, A \cap B$ un $A \setminus B$ varbūtību, spriežot, nosakot notikumu iznākumu kopas, lietojot varbūtības definīciju. Izprot, ka informāciju var pierakstīt dažādi, piemēram, $A \cup B$, "A vai B", $A + B$, izvēlas sev pieņemamāko veidu. Vingrinās aprēķināt varbūtību, nosakot iznākumu kopu, t. sk., izmantojot kombinatoriskus spriedumus un formulas sakārtotu vai nesakārtotu izlašu skaita noteikšanai.
Statistiskā varbūtība	Izmanto interaktīvas simulācijas, lai salīdzinātu notikuma relatīvo biežumu jeb statistisko varbūtību un varbūtību, skaidrotu saistību starp tām, palielinot notikuma mēģinājumu skaitu. Lieto relatīvā biežuma aprēķināšanas formulu, lai noteiktu nezināmo lielumu, formulētu spriedumus. Vingrinās noteikt relatīvo biežumu gan situācijās ar dotiem un tabulā apkopotiem datiem, gan situācijās, kurās datus iegūst skolēni, t. sk., izmantojot interaktīvas simulācijas, formulē ar datiem pamatotus secinājumus.

Temata apguves norise (turpinājums)

Savienojami un nesavienojami notikumi	Pēta, analizē divus piemērus, izmantojot gadījuma mēģinājumu “Spēļu kauliņa mešana”. 1. piemērs: notikums A ir “uzmest 1 vai 2”, notikums B ir “uzmest 3 vai 4”. Noteikt $P(A \cup B)$. 2. piemērs: notikums C ir “uzmest 1, 2 vai 3”, notikums D ir “uzmest 3, 4 vai 5”. Noteikt $P(C \cup D)$. Raksturo saskatīto, formulē secinājumus, t. sk. pieņēmumu, ka $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Skaidro, kāpēc līdzīga sakarība nav spēkā 2. piemērā; raksturo/salīdzina abas situācijas, lietojot Venna diagrammu. Secina par formulu $P(A \cup B)$ aprēķināšanai, ja A un B ir savienojami notikumi, un to pamato, izmantojot Venna diagrammu, darbības ar kopām. Vingrinās noteikt un pamatot, vai divi notikumi ir savienojami vai nesavienojami, skaidro formulas izvēli un aprēķina notikumu apvienojuma varbūtību. Lieto Venna diagrammu un darbības ar kopām, lai aprēķinātu savienojamu notikumu apvienojuma varbūtību. Lasa un skaidro informāciju biežuma (krustenisko datu) tabulās, aprēķina varbūtību visiem iespējamiem notikumiem. Situāciju aprakstā doto informāciju par notikumu biežumu apkopo biežuma (krustenisko datu) tabulās, veido un aizpilda atbilstošu varbūtību tabulu, skaidro un pamato, kā veikt pašpārbaudi, saskaitot varbūtības “pa rindām un kolonnām”. Piemērs. 100 ģimenes jūlijā vai augustā rezervēja biļetes ceļojumu aģentūrās, lai brīvdienās dotos uz Lietuvu, Igauniju vai Somiju. Augustā ceļojums rezervēts 59 ģimenēm. 19 no 35 ģimenēm, kas dodas uz Lietuvu, biļetes rezervēja jūlijā. 30 ģimenes rezervēja biļetes ceļojumam uz Somiju. Augustā biļetes ceļojumam uz Igauniju rezervēja 20 ģimenes. a) Apkopo informāciju biežuma tabulā. b) Nosaki, cik ģimeņu ir rezervējušas biļetes, lai jūlijā dotos uz Somiju. c) Nosaki varbūtību, ka nejauši izvēlēta ģimene rezervējusi biļetes ceļojumam uz Igauniju jūlijā.
Nosacītā varbūtība. Neatkarīgi un atkarīgi notikumi	Aplūko piemēru: “Urnā ir 4 baltas un 2 melnas bumbiņas. Vispirms no urnas izņēma vienu bumbiņu un pēc tam (neatliekot pirmo bumbiņu atpakaļ) – izvilka otru bumbiņu. Noteikt varbūtību, ka otrā bumbiņa ir balta.” Spriež par notikuma A (otrā izņemtā bumbiņa ir balta) varbūtību, sprieduma attēlošanai un varbūtību noteikšanai izmanto grafu un secina, ka notikuma A varbūtība atkarīga no notikuma B (pirmā izņemtā bumbiņa ir balta) realizēšanās. Definē nosacīto varbūtību, skaidro tās simbolisko pierakstu. Vingrinās noteikt nosacīto varbūtību, izmantojot spriedumus par doto notikumu vai zīmējot grafu. Ievēro un skaidro atšķirību starp $P(A \mid B)$ un $P(B \mid A)$. Definē atkarīgus un neatkarīgus notikumus. Klasificē dotus notikumus, nosakot, vai tie ir atkarīgi vai neatkarīgi, izveido savus piemērus, izvērtē to atbilstību. Izmanto konkrētus piemērus, aprēķina notikumu varbūtību un secina, ka sakarības $P(A \mid B) = P(A)$ un $P(B \mid A) = P(B)$ ir patiesas, ja notikumi A un B ir neatkarīgi. Vingrinās pamatot divu notikumu neatkarību, salīdzinot $P(A \mid B)$ un $P(A)$ vērtības. Analizē konkrētus piemērus, lai noskaidrotu, kā aprēķināt notikumu A un B šķēluma (reizinājuma) varbūtību: 1) secina, ka atkarīgiem notikumiem A un B notikumu šķēluma/reizinājuma varbūtība nav vienāda ar varbūtību reizinājumu jeb $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$, 2) spriež un secina, ka $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B)$. Analizē konkrētus piemērus un secina, ka diviem neatkarīgiem notikumiem A un B ir patiesa sakarība $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Vingrinās aprēķināt varbūtību, lietojot sakarību $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, ja A un B ir neatkarīgi notikumi. Vispārina sakarību šķēluma varbūtības aprēķināšanai, ja neatkarīgo notikumu skaits ir lielāks nekā 2.
Pilnās varbūtības formula	Izmanto konkrētu piemēru, lai skaidrotu pilnās varbūtības formulu, ja pilnās nesavienojamo notikumu kopas elementu skaits ir 3, formulē vispārinājumu. Lieto pilnās varbūtības formulu. Pamato, vai notikumi veido pilnu nesavienojamu notikumu kopu, lieto varbūtību reizināšanas formulu neatkarīgiem notikumiem un atkarīgiem notikumiem. Aprēķina nosacīto varbūtību, izmantojot formulu $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Risinājuma veidošanai un skaidrošanai izmanto izvēļu koku/diagrammu. Piemēri. 1. Sēklu paciņā ir 40 % sarkano sēklu un 60 % dzelteno sēklu. Varbūtība, ka sarkanā sēkla uzdīgs, ir 0,9, bet dzeltenā – 0,8. Nejauši izvēlas sēklu no paciņas. a) Veido izvēļu koku/diagrammu. b) Aprēķini varbūtību, ka izvēlētā sēkla ir sarkana un tā uzdīgs. c) Aprēķini varbūtību, ka izvēlētā sēkla izdīgs. d) Zinot, ka sēkla ir uzdīgusi, aprēķini varbūtību, ka tā ir sarkana. 2. Viduslaiku loka šāvēju sacensībās piedalās 15 dalībnieki, no kuriem 10 ir profesionāļi, 3 – amatieri, bet pārējie – iesācēji. Varbūtība, ka šāvējs trāpīs mērķī, attiecīgi ir 90 %, 60 % un 10 %. a) Aprēķini varbūtību, ka nejauši izvēlēts dalībnieks trāpīs mērķī. b) Nosaki varbūtību, ka šāvējs ir iesācējs, ja bulta ir trāpījusi mērķī.

15. Varbūtību teorijas elementi	16. Polinomi	17. Integrālis, tā lietojums	18. Prizma un piramīda	19. Rotācijas ķermeņi, ģeometrisko ķermeņu kombinācijas	20. Varbūtību sadalījumi	21. Vienādojumi un nevienādības, to sistēmas

16. Polinomi

Ieteicamais laiks temata apguvei: 20–24 mācību stundas.

Temata apguves mērķis: padziļināt izpratni par n-tās pakāpes polinomu ar vienu mainīgo, apgūt prasmi dalīt polinomu ar binomu un to lietot izteiksmju pārveidošanai, augstāku kārtu vienādojumu atrisināšanai, sakarību starp vispārīgi uzdotu lielumu pētīšanai.

Sasniedzamie rezultāti

Ziņas	Prasmes
• n-tās pakāpes polinoms ar vienu mainīgo (polinoms) ir izteiksme $P_n\,(x) = a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \cdots + a_1\,x + a_0$, kur a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 ir polinoma koeficienti; ja $a_n = 1$, tad saka, ka polinoms ir reducēts. (M.Li1.; M.Li4.) • Polinoma $P_n\,(x)$ dalījums ar polinomu $Q_m\,(x)$ $(n \geq m)$ ir polinoms $S_{n-m}\,(x)$, ja $Q_m\,(x) \cdot S_{n-m}\,(x) = P_n\,(x)$; dalīšanas rezultātu var pārbaudīt ar apgriezto darbību – polinomu reizināšanu (M.Li.2.; M.Li.4.) • Polinoms $R_k\,(x)$ $(k < m)$ ir dalīšanas atlikums $P_n\,(x)$ dalījumam ar $Q_m\,(x)$, ja $P_n\,(x) = Q_m\,(x) \cdot S_{n-m}\,(x) + R_k\,(x)$. (M.Li.4.) • Reāls skaitlis x_0 ir polinoma $P_n\,(x)$ sakne, ja $P_n\,(x_0) = 0$; komplekso skaitļu kopā n-tās pakāpes polinomam ir tieši n saknes (reāli vai kompleksi skaitļi). (M.Li.4.) • Ja polinomu $P_n\,(x)$ dala ar binomu $x - x_0$, tad dalījuma atlikums būs $P_n\,(x_0)$. (M.Li.4.) • Polinoma sadalīšanai reizinātājos, algebrisku daļu saīsināšanai un augstāku kārtu vienādojumu risināšanai lieto teorēmu: skaitlis x_0 ir polinoma $P_n\,(x)$ sakne tad un tikai tad, ja $P_n\,(x)$ var izdalīt ar $x - x_0$ bez atlikuma. (M.Li.2.; M.Li.4.)	• Lieto polinoma simbolisko pierakstu, formulējot apgalvojumus, pierakstot matemātiskas izteiksmes un to pārveidojumus. • Nedalot nosaka atlikumu polinoma $P_n\,(x)$ dalījumam ar binomu $x - x_0$. • Dala polinomu $P_n\,(x)$ ar binomu $x - x_0$. • Sadala reizinātājos polinomu, izmantojot Bezū teorēmas secinājumu. • Nosaka polinoma $P_n\,(x)$ veselās saknes.
Komplekss sasniedzamais rezultāts	**Ieradumi**
• Atrisina augstāku kārtu vienādojumus, lietojot piemērotu vienādojumu risināšanas paņēmienu (sadalīšanu reizinātājos, substitūciju, grafisko paņēmienu); skaidro paņēmiena izvēli. (M.A.2.1.1.; M.A.4.5.4.) • Dala n-tās pakāpes polinomu ar m-tās pakāpes polinomu $(n \geq m)$, skaidro iespēju izmantot polinomu reizināšanu un saskaitīšanu, lai pārbaudītu dalīšanas rezultātu ar atlikumu vai bez tā. (M.A.1.2.1.) • Skaidro un lieto Bezū teorēmas secinājumu polinomu sadalīšanai reizinātājos, algebrisku daļu saīsināšanai, augstāku kārtu vienādojumu atrisināšanai. (M.A.4.4.1.). • Pēta, formulē un pamato sakarības starp reducēta trešās pakāpes vienādojuma saknēm un koeficientiem (vispārinātā Vjeta teorēma). (M.A.2.1.2.)	• Pamato savu rīcību polinomu dalīšanā, izvēli polinoma sakņu noteikšanā, veic pārbaudi. • Meklē risinājumu polinoma sakņu noteikšanai nepazīstamās situācijās arī tad, ja ar pirmo reizi tas neizdodas, uzdrīkstas piedāvāt savas idejas.
Jēdzieni: n-tās kārtas (pakāpes) polinoms ar vienu mainīgo, polinoms, polinoma koeficienti, reducēts polinoms, polinomu dalīšana, dalīšanas atlikums (polinoms), polinoma sakne, kompleksie skaitļi, Bezū teorēma.	
Simboli un pieņemtie apzīmējumi: $P_n\,(x)$; $P(x)$; C; $a + bi$.	

Temata apguves norise

Apkopojums par racionālu daļu algebriskajiem pārveidojumiem	Veido apkopojumu par algebriskajiem pārveidojumiem, raksturo savas algebrisko pārveidojumu prasmes, izmanto piedāvāto uzdevumu kopumu pašpārbaudei, secina par prasmēm, kuras jāpilnveido, piemēram, izteiksmju sadalīšana reizinātājos.
Polinoms ar vienu mainīgo	Lasa uzziņu literatūru, iegūst informāciju un definē n-tās pakāpes polinomu ar vienu mainīgo, raksturo ar to saistītos jēdzienus, polinoma simbolisko pierakstu. Vingrinās lietot polinoma simbolisko pierakstu dažādos matemātiskos kontekstos.
	Piemēri. 1. Dots polinoms $P(x) = x^4 - x^3 - x + 1$. Salīdzini $P(-1)$, $P(0)$, $P(1)$. 2. Dots polinoms $P(x) = x^3 + 5x^2 - 3x - 2$. Atrisini nevienādību $P(x) < P(-x)$.
	Izsaka idejas par to, ko nozīmē polinomu izdalīt ar polinomu ar atlikumu vai bez tā, izmantojot jau esošās zināšanas, skaidro par iespējām veikt pārbaudi. Saista ar pieredzi racionālu izteiksmju veselās daļas atdalīšanā.
	Piemērs. Nosaki dalījumus: a) $(x^2 - 1) : (x - 1)$, b) $(x^2 + 4x + 5) : (x + 2)$, c) $(6x - 3) : (x + 1)$, izmantojot jau esošās zināšanas. Raksturo iespējas veikt pārbaudi.
	Vingrinās dalīt n-tās pakāpes polinomu "stabiņā" ar m-tās pakāpes polinomu $(n \geq m)$. Definē polinoma sakni. Pierāda Bezū teorēmu (ja polinomu $P_n(x)$ dala ar binomu $x - x_0$, tad dalīšanas atlikums vienāds ar $P_n(x_0)$) un secinājumu no tās (skaitlis x_0 ir polinoma $P_n(x)$ sakne tad un tikai tad, ja šo poliomu var izdalīt ar binomu $x - x_0$ bez atlikuma). Lieto Bezū teorēmu, lai, nedalot noteiktu atlikumu polinoma dalījumam ar binomu, noteiktu un pārbaudītu polinoma sakni. Sadala polinomu reizinātājos, saīsina daļas, kuru skaitītājs un saucējs ir augstāku kārtu polinomi. Atrisina vienādojumus, lietojot dažādus paņēmienus, t. sk., pazeminot polinoma pakāpi. Nosaka augstāku kārtu vienādojumu saknes noteiktā kopā ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$).
	Piemēri. 1. Nedalot nosaki atlikumu dalījumam $(3x^5 + 6x^3 - 12x + 1) : (3x + 6)$. 2. Saīsini daļu $\frac{3x^4 - 4x^3 + 1}{x^3 - 3x - 2}$, ja tas iespējams. 3. Nosaki vienādojuma $x^3 - 7x - 6 = 0$ reālās saknes.
	Pēta, formulē un pamato sakarības starp lielumiem augstāku kārtu vienādojumos, algebriskās daļveida izteiksmēs un polinomos, formulē vispārīgus apgalvojumus un pierāda to patiesumu, t. sk., lietojot MIP.
	Piemērs. Veic izpēti un formulē pieņēmumu par sakarībām starp reducēta trešās pakāpes vienādojuma koeficientiem un saknēm.

Temata apguves norise (turpinājums)

Augstāku kārtu polinomu, polinomiālu funkciju lietojums	Atrod informāciju par objektiem, piemēram, modernās arhitektūras celtnēm, atrakciju “Amerikāņu kalniņi”, kuru kontūru/virsmu matemātiskais modelis noteiktās plaknēs ir polinomiāla funkcija; izmanto piemērotas aplikācijas, lai noteiktu funkciju formulas. Lieto zināšanas par augstāku kārtu vienādojumiem situācijās ar ekonomikas, fizikas vai citu jomu kontekstu; izvēlas situācijai piemērotu paņēmienu augstāku kārtu vienādojuma atrisināšanai, t. sk., izmantojot digitālos rīkus.
	Piemērs. Mērtrauks novietots zem klajas debess. Ūdens līmeni h (mm) mērtraukā atkarībā no dienu pilna skaita x modelē funkcija $h(x) = x^3 + 4x^2 - 2x + 7$. Nosaki, kad ūdens līmenis mērtraukā būs 10 milimetri.
	Risina kompleksu problēmu, kuras atrisināšanai prasmes darbā ar augstāku kārtu polinomiem vai algebriskām daļām jāsaista ar zināšanām matemātiskajā analīzē, stereometrijā.
	Piemērs. No taisnstūra veida kartona loksnes, kuras izmēri ir 9 dm un 12 dm, jāizveido kārba bez vāka. Kārbu veido, izgriežot loksnes stūros vienādus kvadrātus un uzliecot kartona malas uz augšu. Nosaki lielāko iespējamo kārbas tilpumu un kārbas augstumu, pie kura tās tilpums ir lielākais iespējamais.
Priekšstats par kompleksajiem skaitļiem	Nosauc darbību, kas nav definēta kopā $\mathbb{N}$, bet ir definēta kopā $\mathbb{Z}$; līdzīgi raksturo paplašinājuma nepieciešamību no kopas $\mathbb{Z}$ uz kopu $\mathbb{Q}$, no kopas $\mathbb{Q}$ uz kopu $\mathbb{R}$. Formulē pieņēmumu, ka arī kopai $\mathbb{R}$ eksistē paplašinājums, definējot darbību, kas tajā nav definēta. Uzziņu literatūrā iegūst un apkopo informāciju par kompleksajiem skaitļiem, to vēsturi, attēlojumu koordinātu plaknē un lietojumu zinātnē dažādās jomās. Diskutē, vai reālie skaitļi ir “reālāki” par kompleksajiem skaitļiem. Analizē konkrētus piemērus un formulē pieņēmumu, ka n-tās kārtas polinomam ir tieši n saknes (kompleksas vai reālas).

15. Varbūtību teorijas elementi	16. Polinomi	17. Integrālis, tā lietojums	18. Prizma un piramīda	19. Rotācijas ķermeņi, ģeometrisko ķermeņu kombinācijas	20. Varbūtību sadalījumi	21. Vienādojumi un nevienādības, to sistēmas

17. Integrālis, tā lietojums

Ieteicamais laiks temata apguvei: 32–36 stundas.

Temata apguves mērķis: apgūt prasmes un iemaņas funkcijas primitīvās funkcijas noteikšanā un noteiktā integrāļa lietojumos praktiska satura uzdevumu risināšanā.

Sasniedzamie rezultāti

Ziņas	Prasmes
• Apgrieztā darbība funkcijas $f(x)$ atvasināšanai ir tādas funkcijas $F(x)$ noteikšana, kuras atvasinājums ir dotā funkcija jeb $F'(x) = f(x)$; katru šādu funkciju $F(x)$ sauc par funkcijas $f(x)$ primitīvo funkciju. (M.Li.2.; M.Li.4.) • Funkcijas $f(x)$ visu primitīvo funkciju kopu sauc par funkcijas $f(x)$ nenoteikto integrāli, ko pieraksta $\int f(x)\,dx = F(x) + C$. (M.Li.1.; M.Li.2.; M.Li.4.) • Līklīnijas trapece ir figūra, ko ierobežo funkcijas $y = f(x)$ grafiks, Ox ass un taisnes $x = a$ un $x = b$; tās laukumu tuvināti var izteikt kā taisnstūru (malu garumi $f(x_i)$ un Δx) laukumu summu $S_{ab} \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$; jo mazāks Δx, jo precīzāka laukuma vērtība. (M.Li.2.; M.Li.4.) • Ja funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta intervālā $[a; b]$, tad summas $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ robežu, kad $\Delta x \to 0$, sauc par funkcijas noteikto integrāli šajā intervālā, ko apzīmē ar simbolu $\int_a^b f(x)dx$ un lasa "funkcijas $f(x)$ noteiktais integrālis no a līdz b" (M.Li.1.; M.Li.2.; M.Li.4.) • Intervālā $[a; b]$ nenegatīvai funkcijai $f(x)$ atbilstošās līklīnijas trapeces laukums ir vienāds ar šīs funkcijas noteikto integrāli intervālā $[a; b]$, t. i., $S_{ab} = \int_a^b f(x)dx$. (M.Li.4.) • Noteiktā integrāļa aprēķināšanai lieto Ņūtona–Leibnica formulu $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, kur $F(x)$ ir funkcijas $f(x)$ primitīvā funkcija intervālā $[a; b]$.	• Aprēķina nenoteikto integrāli, izmantojot nenoteiktā integrāļa īpašības, integrēšanas pamatformulas. • Aprēķina noteikto integrāli, izmantojot Ņūtona–Leibnica formulu. • Aprēķina plaknes figūras laukumu, izmantojot noteikto integrāli. • Aprēķina rotācijas ķermeņa tilpumu, izmantojot noteikto integrāli.

Komplekss sasniedzamais rezultāts	Ieradumi
• Skaidro, lieto nenoteikto integrāli, tā īpašības un integrēšanas formulas. (M.A.4.3.6.) • Risina kompleksu matemātisku problēmu, saistot algebras un matemātiskās analīzes zināšanas, piemēram, integrē, izmantojot polinoma dalīšanu ar polinomu, veselā izteikšanu no algebriskas daļas. (M.A.1.2.4.; M.A.4.3.7.) • Skaidro līklīnijas trapeces laukuma aprēķināšanu, lieto noteikto integrāli, lieto Ņūtona–Leibnica formulu plaknes figūras laukuma un rotācijas ķermeņa tilpuma aprēķināšanai. (M.A.1.2.5.; M.A.4.3.7.) • Skaidro, lieto noteikto integrāli taisnvirziena kustībā noietā ceļa, ātruma noteikšanai, kompleksas problēmas (konteksts – taisnvirziena kustība) atrisināšanai. (M.A.1.2.5.; M.A.4.3.7.)	• Pārliecinās par visas dotās informācijas izmantošanu, izvērtē tās nepieciešamību vai pietiekamību. • Spriedumos izmanto apgriezto matemātisko darbību.
Jēdzieni: primitīvā funkcija, nenoteiktais integrālis, noteiktais integrālis, Ņūtona–Leibnica formula, līklīnijas trapece.	
Simboli un pieņemtie apzīmējumi: $\int f(x)dx$; $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$; $\int_a^b f(x)dx$.	

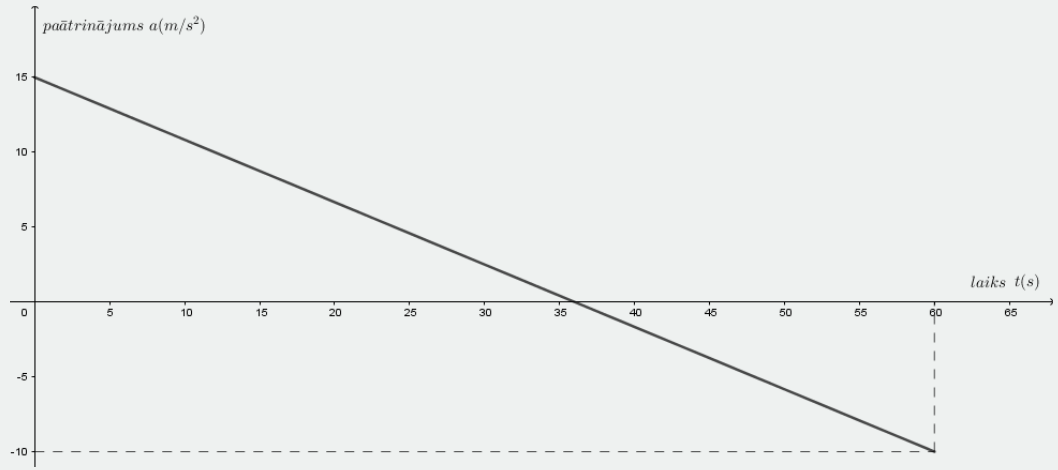
Temata apguves norise

Primitīvā funkcija	Konkrētos piemēros spriež par atvasināšanai apgriezto darbību – noteikt/uzrakstīt funkciju, kuras atvasinājums ir dotā funkcija, pārbauda iegūto rezultātu.
	Piemērs. Nosaki funkciju, kuras atvasinājums ir funkcija $y = 4x$, un pārbaudi pieņēmuma patiesumu.
	Definē dotās funkcijas primitīvo funkciju un vingrinās to noteikt un pamatot.
	Piemēri. Nosaki funkcijas primitīvo funkciju, ja: a) $f(x) = 3 + 2x$; b) $f(x) = x^3$; c) $f(x) = e^{2x}$.
	Secina, ka dotai funkcijai eksistē bezgalīgi daudz primitīvo funkciju, izsaka idejas, kā matemātiski aprakstīt dotas funkcijas visu primitīvo funkciju kopu.
Nenoteiktais integrālis	Definē nenoteikto integrāli kā visu primitīvo funkciju kopu, integrēšanu kā primitīvo funkciju kopas atrašanu. Mācās pierakstīt un lasīt nenoteiktā integrāļa simbolisko pierakstu, noskaidro katra simbola nozīmi.
	Piemēri. Integrē: a) $\int 3\,dx$; b) $\int 3\,x^2\,dx$; c) $\int x^2\,dx$; d) $\int 4x^2\,dx$.
	Iegūst informāciju mācību literatūrā, skaidro nenoteiktā integrāļa īpašības un dažas no tām pierāda (nenoteiktā integrāļa atvasinājums ir zemintegrāļa funkcija, konstantu reizinātāju var iznest pirms integrāļa zīmes, vairāku funkciju algebriskas summas nenoteiktais integrālis ir vienāds ar atsevišķo saskaitāmo funkciju integrāļu summu).
	Piemērs. Pierādi formulu $\int A \cdot f(x)\,dx = A \cdot \int f(x)\,dx$.
	Iegūst integrēšanas pamatformulas un dažas no tām pierāda, izmantojot atvasināšanu. Vingrinās integrēt funkcijas, kuru integrēšana reducējas uz pakāpes funkcijas integrēšanu un formulu $\int \frac{1}{x}dx = \ln\|x\| + C$.
	Piemēri. 1. Pierādi formulas: a) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, ja $n \neq -1$; b) $\int \frac{1}{x}dx = \ln\|x\| + C$. 2. Integrē $\int \frac{2+x+x^2}{x^3}\,dx$.

Temata apguves norise (turpinājums)

Izpratne par pāreju uz citas funkcijas diferenciāli	Skaidro, ar piemēriem ilustrē nenoteiktā integrāļa īpašību $\int dF(x) = F(x) + C$. Izpētes ceļā formulē pieņēmumus par sakarībām starp integrāļiem, ja funkciju diferenciāļi atšķiras par saskaitāmo c, kur c – reāls skaitlis, vai ar konstantu reizinātāju.
	Piemēri. 1. Integrē $\int dx$; $\int d(x+3)$; $\int d(x+6)$ un formulē secinājumu. 2. Integrē $\int dx$; $\int d(2x)$; $\int d(4x)$ un izsaki pieņēmumu par sakarību starp $\int dx$ un $\int d(cx)$.
	Izmantojot sakarību $dy = y'\,dx$, pierāda sakarības $dx = d(x+c)$, $dx = \frac{1}{k}d(kx)$) un formulē vispārinājumu $dx = \frac{1}{k}d(kx \pm c)$. Vingrinās vienkāršās situācijās izmantot šīs sakarības, skaidro veiktos pārveidojumus, izskata iespējas lietot dažādus paņēmienus.
	Piemēri. 1. Integrē $\int (x+4)^3\, d(x+4)$. 2. Integrē $\int \frac{dx}{x+4}$. 3. Integrē $\int (2x+1)^2\, dx$ divējādi – zemintegrāļa izteiksmi pārveidojot par polinomu un pārejot uz citas funkcijas diferenciāli.
Daļveida racionālu funkciju integrēšana	Spriež, saskata nenoteikto koeficientu metodes lietojumu un integrē funkciju, kas pierakstīta kā īsta racionāla daļa. Vingrinās šādu funkciju integrēšanā, skaidro savu darbību.
	Piemērs. Integrē $\int \frac{x+4}{x^2-x-2}\,dx$, izsakot zemintegrāļa izteiksmi saskaitāmajos ar nenoteikto koeficientu metodi.
	Lieto polinomu dalīšanu (veselā atdalīšanu no daļas) un integrē funkciju, kas pierakstīta kā neīsta racionāla daļa.
	Piemēri. Integrē: a) $\int \frac{x+1}{x+2}\,dx$; b) $\int \frac{x^3-3x+2}{x^2-x-2}\,dx$.
Līklīnijas trapeces laukums	Izsaka idejas, kā tuvināti varētu noskaidrot laukumu līklīnijas trapecei, ko ierobežo funkcijas $y = f(x)$ grafiks, Ox ass un taisnes $x = a$ un $x = b$; kā jārīkojas, lai iegūtu arvien precīzāku tuvinājumu. Secina par iespējām figūras laukumu tuvināti izteikt kā "daudzu" taisnstūru laukumu (ar malu garumiem Δx un $f(x_i)$) summu un par to, ka taisnstūru skaita palielināšana dod arvien precīzāku laukuma skaitlisko vērtību. Formulē sakarības $S_{ab} \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$, $S_{ab} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$. Salīdzina formulētās idejas ar informāciju uzziņu literatūrā.
Noteiktais integrālis	Definē noteikto integrāli, t. sk., izmantojot uzziņu literatūru, skaidro simbolisko pierakstu. Iegūst informāciju uzziņu literatūrā un skaidro noteiktā integrāļa īpašības, ģeometrisko interpretāciju, Ņūtona–Leibnica formulu. Vienkāršās situācijās vingrinās to lietot.
	Piemērs. Aprēķini, izmantojot Ņūtona–Leibnica formulu: a) $\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$; b) $\int_0^2 (x^2-2x+3)\,dx$.
Plaknes figūras laukuma aprēķināšana	Izmanto uzziņu literatūrā iegūto informāciju un skaidro plaknes figūras laukuma aprēķināšanu, lietojot noteikto integrāli, vispārīgi raksturo biežāk sastopamos gadījumus, vizuāli interpretē tos, izvērtē iespējas izmantot jau zināmo par plaknes figūras laukuma aprēķināšanu. Skaidro risinājumu dažādās situācijās: a) līklīnijas trapeci norobežo nenegatīva funkcija; b) līklīnijas trapeci norobežo nepozitīva funkcija; c) funkcija maina zīmi; d) figūru ierobežo divu funkciju grafiki.
	Piemēri. Aprēķini laukumu figūrai, ko ierobežo līnijas: a) $y = \frac{4}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e$; b) $y = 0, y = x^2 - 4$; c) $y = 0, y = \cos x, x = 0, x = \frac{3\pi}{2}$; d) $y = x^2, y = \sqrt{x}$.

Temata apguves norise (turpinājums)

Telpisku ķermeņu tilpuma aprēķināšana	Izmanto attēlu vai simulāciju, lai skaidrotu telpiska ķermeņa tilpuma tuvināto vērtību kā “daudzu” cilindru tilpumu summu jeb noteikto integrāli $V=\int_a^b S(x)\,dx$, kur $S(x)$ ir laukums šķēlumam, kas veidojas, telpisko ķermeni šķeļot ar Ox asij perpendikulāru plakni. Spriež induktīvi un deduktīvi, veido skici, plāno tilpuma aprēķināšanu ķermeņiem, kas rodas, līnijai/funkcijas $y=f(x)$ grafikam slēgtā intervālā rotējot ap Ox asi, skaidro formulas lietošanu.
	Piemēri. 1. Aprēķini tilpumu ķermenim, kas rodas, funkcijas grafikam rotējot ap Ox asi dotajā intervālā: a) $y=\sqrt{x}$, $[0;\,3]$; b) $y=x^2$, $[0;\,3]$; c) $y=\sin x$, $[0;\,1]$. 2. Pamato formulu $V=\pi\int_a^b y^2\,dx$, ja funkcija rotē ap Ox asi intervālā $[a;\,b]$.
	Patstāvīgi secina par rotācijas ķermeņa tilpuma izteikšanu kā citu ķermeņu tilpumu starpību.
	Piemērs. Aprēķini tilpumu rotācijas ķermenim, kas rodas, rotējot ap Ox asi figūrai, ko ierobežo līnijas $y=x^2$, $y=x$.
Nenoteiktā un noteiktā integrāļa lietojums matemātikas un fizikas kontekstos	Lieto nenoteikto un noteikto integrāli, lai izteiktu vai aprēķinātu lielumus, kas raksturo kustību.
	Piemēri. 1. Aprēķini taisnvirziena kustības ātrumu laika momentā $t=1$, ja paātrinājums mainās pēc likuma $a(t)=18t-4$. 2. Aprēķini ceļu, ko veic ķermenis no 2. līdz 8. sekundei, skaitot no kustības sākuma, ja taisnvirziena kustības ātrums mainās pēc likuma $v(t)=3t^2+2t$ (m/s).
	Risina kompleksu problēmu ar praktisku, fizikas vai kādas citas mācību jomas un matemātikas kontekstu, lietojot zināšanas par atvasinājumu vai integrāli, izvērtē, kādu papildu informāciju nepieciešams iegūt.
	Piemērs. Reaktīvā lidmašīna pārvietojas horizontāli pa taisnu ceļu vienu minūti, sākot ar laiku $t=0$ (mēra sekundēs). Paātrinājuma $a\left({}^{m}/{}_{s^2}\right)$ grafiks (sk. zīmējumu) ir taisne. a) Uzraksti izteiksmi, kas apraksta reaktīvās lidmašīnas paātrinājumu atkarībā no t šajā laikā. b) Nosaki lidmašīnas maksimālo ātrumu nākamās minūtes laikā, zinot, ka laika momentā $t=0$ tās ātrums ir 125 m/s. c) Zināms, ka reaktīvā lidmašīna pārvar skaņas barjeru, lidojot ar ātrumu 295 m/s. Nosaki, cik ilgi tā pārvietojas ar ātrumu, kas pārsniedz skaņas ātrumu. 

18. Prizma un piramīda

Ieteicamais laiks temata apguvei: 26–30 mācību stundas.

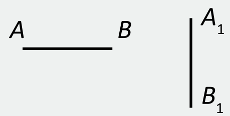
Temata apguves mērķis: sistematizēt un padziļināt zināšanas par ģeometriskajiem pārveidojumiem un daudzskaldņiem, pētot un pierādot to īpašības, nosakot nezināmos lielumus.

Sasniedzamie rezultāti

Ziņas	Prasmes
• Praksē bieži izmanto ģeometriskos pārveidojumus (paralēlā pārnese, pagrieziens, aksiālā simetrija), kuros figūra attēlojas par figūru, kas vienāda ar doto, un tādus pārveidojumus, kuros visi attālumi izmainās vienā un tajā pašā attiecībā. (M.Li.6.) • Homotētija ar centru O un koeficientu k ir tāds ģeometriskais pārveidojums, kurā katrs punkts A attēlojas par tādu punktu A_1, ka $\overrightarrow{OA_1} = k \cdot \overrightarrow{OA}$, kur $k \neq 0$. (M.Li.6.) • Homotētija pārveido figūru par tai līdzīgu figūru, bet ne visas līdzīgas figūras ir arī homotētiskas. (M.Li.2.; M.Li.6.) • Centrālā simetrija ir homotētija ar koeficientu $k = -1$. (M.Li.2.; M.Li.6.) • n-stūra prizma ir daudzskaldnis, kuru veido divi vienādi n-stūri (pamata skaldnes), kas atrodas paralēlās plaknēs un n paralelogrami (sānu skaldnes). (M.Li.6.) • Prizmas augstums ir attālums starp pamata skaldnēm. Ja prizmas augstuma garums ir vienāds ar sānu šķautnes garumu, tad tā ir taisna prizma; ja šie lielumi nav vienādi, tad – slīpa prizma. (M.Li.2.; M.Li.6.) • Prizmas normālšķēlums ir prizmas šķēlums ar plakni, kas perpendikulāra prizmas sānu šķautnēm. Prizmas normālšķēluma perimetru var izmantot prizmas sānu virsmas laukuma aprēķināšanai. (M.Li.2.; M.Li.6.) • Praktiski modelējot vai spriežot, var pamatot, ka slīpa prizma ir vienliela ar tādu taisnu prizmu (to tilpumi ir vienādi), kuras pamats ir slīpās prizmas normālšķēlums, bet augstums vienāds ar slīpās prizmas sānu šķautni. (M.Li.6.) • Piramīda ir daudzskaldnis, kuras viena skaldne (pamats) ir n-stūris, bet pārējās skaldnes (sānu skaldnes) ir trijstūri ar kopīgu virsotni. (M.Li.6.) • Nosakot raksturīgos leņķus piramīdā, svarīgi saprast, vai leņķis ir: 1) starp divām taisnēm, 2) starp taisni un plakni, 3) divplakņu kakta leņķis. (M.Li.2.; M.Li.6.) • Regulāras piramīdas pamats ir regulārs daudzstūris, piramīdas augstuma pamats sakrīt ar regulārā daudzstūra centru. Tetraedrs ir regulāra trijstūra piramīda, kuras visas šķautnes ir vienāda garuma. (M.Li.6.) • Neregulārās piramīdās būtiski noteikt un pamatot augstuma pamata ģeometrisko vietu pirms formulē un pamato piramīdas īpašības, nosaka nezināmos lielumus. (M.Li.2.; M.Li.6.) • Ja piramīdu šķeļ ar plakni vai plaknēm, kas paralēlas pamatam (perpendikulāras augstumam), tad nezināmo lielumu (t. sk. nošķeltas piramīdas) noteikšanai un sakarību pamatošanai var izmantot figūru līdzību un homotētiju. (M.Li.2.; M.Li.6.)	• Konstruē dotai figūrai homotētisku figūru ģeometriski un koordinātu formā. • Aprēķina nezināmos lielumus, t. sk. homotētijas koeficientu, izmantojot doto informāciju par homotētiskām figūrām. • Raksturo, pamato, attēlo raksturīgos elementus (piemēram, nogriežņus, leņķus, šķēlumus, šķautnes, skaldnes) prizmā, piramīdā, nošķeltā piramīdā. • Veido telpiska ķermeņa zīmējumu, ievērojot nosacījumus par to, kādi lielumi saglabājas, kādi – nesaglabājas. • Attēlo un iegūst nepieciešamo informāciju no telpiska ķermeņa attēlojuma dažādās plaknēs. • Aprēķina prizmas, piramīdas un nošķeltas piramīdas raksturīgo nogriežņu garumu un raksturīgo leņķu lielumu, izmantojot plaknes figūru īpašības, t. sk., ja lielumi uzdoti vispārīgi, pamato savus spriedumus. • Lieto prizmas, t. sk. slīpas, piramīdas un nošķeltas piramīdas virsmas laukuma un tilpuma aprēķināšanas formulas, t. sk., ja lielumi uzdoti vispārīgi, pamato savus spriedumus.

Komplekss sasniedzamais rezultāts	Ieradumi
• Pierāda, ka figūras ir homotētiskas. (M.O.6.1.2.; M.A.2.1.2.) • Kritiski izvērtē telpiska ķermeņa zīmējuma viennozīmīgu atbilstību objektam, iesaka precizējumus, kas jāveic zīmējumā un argumentē savus spriedumus. (M.A.1.1.1.; M.A.1.2.1.; M.A.6.3.2.) • Pamato slīpas prizmas virsmas laukuma un tilpuma aprēķināšanas formulas. (M.A.6.3.5.) • Pēta, formulē un pamato īpašības piramīdai ar vienādām sānu šķautnēm, piramīdai ar vienādiem divplakņu kakta leņķiem pie pamata. (M.A.2.1.2.) • Algebriski modelē un pamato sakarības starp lielumiem prizmās un piramīdās, pēta, nosaka un pamato lielumu iespējamās vērtības. (M.A.6.3.4.)	• Iegūtās zināšanas par ģeometriskajiem pārveidojumiem un daudzskaldņiem saista ar jau zināmo, saistību raksturo un ilustrē ar piemēriem. • Attīsta ieradumu vadīt savu domāšanas procesu, veidojot izvēlētajam paņēmienam piemērotu zīmējumu, kompleksa uzdevuma risinājumu sadalot daļās, skaidrojot vai pamatojot savus spriedumus, risinājuma soļus.
Jēdzieni: homotētija, taisna prizma, taisnstūra prizma, slīpa prizma, regulāra prizma, prizmas normālšķēlums, regulāra piramīda, tetraedrs, apotēma, nošķelta piramīda.	

Temata apguves norise

Apkopojums par ģeometriskajiem pārveidojumiem, homotētija	Aktualizē un sistematizē zināšanas par jau zināmajiem plaknes figūru ģeometriskajiem pārveidojumiem, tās lietojot vienkāršās situācijās. Secina par šiem pārveidojumiem kopīgu īpašību – figūra attēlojas par figūru, kas vienāda ar doto.
	Piemērs. Uzzīmē taisnstūri $ABCD$ un attēlo to: a) centrālajā simetrijā pret virsotni D, b) paralēlajā pārnesē par vektoru $\overrightarrow{OC}$, kur O – diagonāļu krustpunkts, c) aksiālajā simetrijā pret taisni BD, d) pagriezienā par $-90°$ ap pagrieziena centru A.
	Skaidro ģeometriskos pārveidojumus kā funkcijas, kuru definīcijas kopa ir plaknes punkti. Lieto ģeometriskos pārveidojumus, t. sk. plaknes figūru īpašību pierādīšanai, nezināmo lielumu noteikšanai dažādos matemātiskos kontekstos (funkciju grafiku transformācijas, taišņu vienādojumi, plaknes figūru lielumi un īpašības).
	Piemēri. 1. Raksturo funkciju $y = f(\|x\|)$ un $y = \|f(x)\|$ grafikus kā funkcijas $y = f(x)$ grafika ģeometriskos pārveidojumus. 2. Attēlo taisni $y = -2x + 3$ paralēlajā pārnesē un uzraksti iegūtās taisnes vienādojumu, ja paralēlās pārneses vektors ir $\vec{p} = (1; -2)$. 3. Koordinātu plaknē doti punkti $A(1; 2)$ un $B(4; 5)$. Konstruē punktu K tā, lai lauztās līnijas AKB garums būtu vismazākais, ja K atrodas: a) uz taisnes $x = 0$; b) uz taisnes $y = x$. 4. Vienādsānu taisnleņķa trijstūra katete ir 4 cm. Attēlo to pagriezienā par 45° ap taisnā leņķa virsotni un aprēķini abu trijstūru kopīgās daļas laukumu. 5. Kā ar ģeometriskajiem pārveidojumiem (varbūt vairākiem), nelietojot pagriezienu, nogriezni AB iespējams attēlot par nogriezni $A_1 B_1$ (sk. attēlu)? 

Temata apguves norise (turpinājums)

Apkopojums par ģeometriskajiem pārveidojumiem, homotētija	Izsaka idejas par figūru (reālu objektu) pārveidojumiem, kuru rezultātā visi attālumi starp figūras punktiem izmainās vienā un tajā pašā attiecībā, t. sk., izmantojot zināšanas par plaknes figūru līdzību. Uzziņu literatūrā lasa homotētijas definīciju, skaidro, kāpēc homotētiskas figūras ir arī līdzīgas figūras, bet ne visas līdzīgas figūras ir homotētiskas figūras. Skaidro homotētijas īpašības, izmantojot konkrētus piemērus. Secina un pamato, ka homotētija ar koeficientu $k = -1$ ir centrālā simetrija. Vingrinās konstruēt dotai figūrai homotētisku figūru. Nosaka homotētijas centru vai homotētijas koeficientu, ievērojot dotos nosacījumus. Piemēri. 1. Uzzīmē kvadrātu un konstruē tā attēlu homotētijā ar koeficientu $k = 2$ un centru kvadrāta vienas malas viduspunktā. 2. Taisnstūrī $ABCD$ ievilkts taisnstūris $EBFO$ tā, ka abiem taisnstūriem ir kopīgs leņķis B, bet virsotne O ir taisnstūra $ABCD$ diagonāļu krustpunkts. Pierādi, ka abi taisnstūri ir homotētiski, un nosaki homotētijas koeficientu. Atrod informāciju uzziņu literatūrā un skaidro homotētijas izmantošanu, veidojot figūru attēlus ar centrālo projicēšanu.
Prizma	Raksturo jau zināmo par prizmām. Pēta, algebriski modelē un pamato sakarības starp prizmas lielumiem, nosaka un pamato lielumu iespējamās vērtības. Piemērs. Regulāras četrstūra prizmas diagonāle veido leņķi α ar prizmas sānu skaldni. a) Nosaki un pamato, vai eksistē regulāra četrstūra prizma, kurai $\alpha = 60°$. b) Nosaki un pamato leņķa α iespējamās vērtības. Risina kompleksas problēmas, kuras atrisināšanai nepieciešams saistīt stereometrijas elementus un citas matemātikas apakšnozares elementus jaunā situācijā. Piemēri. 1. Nosaki un pamato taisnstūra paralēlskaldņa sānu virsmas laukuma mazāko iespējamo skaitlisko vērtību, ja zināms, ka taisnstūra paralēlskaldņa pamata perimetrs ir 20 dm un tilpums ir 80 dm^3. 2. Leņķi, kurus veido taisnstūra paralēlskaldņa diagonāle ar skaldnēm, kuras iziet no vienas virsotnes, ir α, β, γ. Pierādi, ka $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2$. Definē slīpu prizmu, skaidro un pamato prizmas eksistenci atbilstoši nosacījumiem. Skaidro virsmas laukuma aprēķināšanu. Lieto slīpas prizmas sānu virsmas aprēķināšanas formulu. Pierāda slīpas prizmas tilpuma formulu, izmantojot noteikto integrāli. Piemēri. 1. Vai eksistē slīpa trijstūra prizma, kuras: a) viena sānu skaldne ir taisnstūris, bet pārējās – paralelogrami; b) viena sānu skaldne ir perpendikulāra pamata plaknei, bet pārējās divas skaldnes nav perpendikulāras pamata plaknei? 2. Paralēlskaldņa pamats ir kvadrāts. Viena no augšējā pamata virsotnēm atrodas vienādā attālumā no visām četrām apakšējā pamata virsotnēm. Pamata malas garums ir a, bet sānu šķautnes agrums ir b. Aprēķini paralēlskaldņa pilnas virsmas laukumu. 3. Pierādi slīpas prizmas tilpuma formulu, izmantojot noteikto integrāli. Novieto Ox asi perpendikulāri prizmas pamatam. 4. Slīpas trijstūra prizmas sānu skaldnes ir perpendikulāras un to kopējās šķautnes garums ir a, bet šo skaldņu laukumi ir P un S. Aprēķini prizmas tilpumu.
Piramīda	Definē piramīdu; izvērtē citu veidotās definīcijas, skaidro savu definīciju, atbild uz jautājumiem, precizē definīciju. Skaidro, attēlo zīmējumā raksturīgos leņķus un nogriežņus piramīdā. Secina par skaldņu vai šķautņu skaitu, ievērojot dotos nosacījumus. Piemēri. 1. Piramīdas $SABCD$ pamatā ir taisnstūris $ABCD$, piramīdas augstums ir SB. Attēlo zīmējumā visus divplakņu kakta leņķus, nosaki un pamato tos, kuru lielums ir 90°. 2. Nosaki piramīdas šķautņu skaitu, ja piramīdai ir 12 skaldnes. Definē regulāru piramīdu. Vingrinās, aprēķinot nezināmo lielumu regulārā trijstūra un četrstūra piramīdā, pirms risinājuma stāsta ko un kādā secībā darīs, skaidro savu darbību risinājuma laikā.

Temata apguves norise (turpinājums)

Piramīda	Piemēri. 1. Regulāras trijstūra piramīdas augstuma garums vienāds ar pamata malas garumu. Aprēķini: a) leņķi starp sānu šķautni un pamata plakni, b) divplakņu kakta leņķi pie pamata. 2. Pierādi, ka regulārā piramīdā ir spēkā formula $S_{\text{sānu}} = \frac{S_{\text{pam.}}}{\cos\alpha}$, kur α – divplakņu leņķis pie pamata, $S_{\text{pam.}}$ – piramīdas pamata laukums.
	Pēta, algebriski modelē un pamato sakarības starp piramīdas lielumiem, nosaka un pamato lielumu iespējamās vērtības.
	Piemērs. Regulāras trijstūra piramīdas divplakņu kakta leņķis starp sānu skaldnēm ir α. Nosaki un pamato pieļaujamās α vērtības.
	Ilustrē ar piemēriem, uzzīmē, ievērojot dotos nosacījumus un raksturo neregulāras piramīdas, to lielumus, īpašības. Aprēķina neregulāras piramīdas nezināmos lielumus, pamato risinājuma soļus, piemēram, izmantojot triju perpendikulu teorēmu, taišņu un plakņu paralelitātes vai perpendikularitātes pazīmes.
	Piemērs. Piramīdas pamats ir kvadrāts. Divas sānu skaldnes ir perpendikulāras pamatam, bet pārējās divas ar pamata plakni veido divplakņu kakta leņķi β. Aprēķini piramīdas sānu virsmas laukumu, ja pamata malas garums ir a.
	Izvērtē patiesumu apgalvojumam: "ja piramīdas sānu šķautnes ir vienāda garuma, tad piramīda ir regulāra". Pēta īpašības trijstūra vai četrstūra piramīdai, ja tās sānu šķautnes ir vienāda garuma; formulē secinājumus. Pierāda teorēmas par piramīdas augstuma pamatu, ja sānu šķautnes ir vienāda garuma (sānu šķautnes ar pamata plakni veido vienādus leņķus). Lieto tās, lai aprēķinātu neregulāras piramīdas nezināmos lielumus, pierādītu īpašības.
	Piemērs. Piramīdas pamats ir taisnleņķa trijstūris ar 6 cm un 8 cm garām katetēm. Piramīdas augstums, kura garums 4 cm, veido ar sānu šķautnēm vienādus leņķus. Aprēķini piramīdas sānu virsmas laukumu.
	Pierāda teorēmu par piramīdas augstuma pamatu, ja sānu skaldnes ar pamata plakni veido vienādus divplakņu kakta leņķus. Lieto pierādīto teorēmu, lai pamatotu piramīdas īpašības, aprēķinātu nezināmos lielumus.
	Piemērs. Piramīdas pamats ir vienādsānu trapece, kuras sānu mala ir 6 cm, bet šaurais leņķis ir $30°$. Piramīdas visas sānu skaldnes ar pamata plakni veido $60°$ divplakņu kakta leņķi. Aprēķini piramīdas pilnas virsmas laukumu.
	Veido piramīdas šķēlumus ar plakni, kas paralēla pamatam (perpendikulāra augstumam), formulē sakarības starp dotās un atšķeltās piramīdas lielumiem, pamato tās, izmantojot līdzību (homotētiju). Lieto iegūtās sakarības.
	Piemēri. 1. Piramīdas tilpums ir V. Piramīda šķelta ar pamatam paralēlu plakni, kas augstumu sadala attiecībā $2 : 3$, skaitot no piramīdas virsotnes. Aprēķini atšķeltās piramīdas tilpumu. 2. Piramīdas augstums ir a. Kādā attālumā no piramīdas virsotnes jānovelk pamatam paralēla plakne, lai pamata laukums būtu trīs reizes lielāks nekā šķēluma laukums?
	Definē nošķeltu piramīdu, aprēķina tās elementus, virsmas laukumu un tilpumu; uzziņu literatūrā atrod nepieciešamās formulas.
	Piemēri. 1. Regulāras nošķeltas četrstūra piramīdas sānu skaldne ar pamata plakni veido $45°$ leņķi. Aprēķini nošķeltās piramīdas tilpumu, ja pamatu malas ir a un b $(a > b)$. 2. Pierādi, ka nošķeltas regulāras piramīdas sānu virsmas laukums ir vienāds ar abu pamatu pusperimetru summas un apotēmas reizinājumu.
	Pēta, formulē, lieto sakarības starp skaldņu, šķautņu un virsotņu skaitu prizmās un piramīdās.
	Piemēri. 1. Nosaki daudzskaldņa veidu (prizma vai piramīda), ja tam ir 16 skaldnes un 28 virsotnes. 2. Pēti un formulē pieņēmumu par sakarību starp daudzskaldņa virsotņu skaitu, skaldņu skaitu un šķautņu skaitu. Salīdzini iegūto rezultātu ar uzziņu literatūrā atrasto sakarību (formulu).

19. Rotācijas ķermeņi, ģeometrisko ķermeņu kombinācijas

Ieteicamais laiks temata apguvei: 34–38 mācību stundas.

Temata apguves mērķis: sistematizē un padziļina zināšanas par rotācijas ķermeņu un telpisku ķermeņu kombināciju īpašībām, attēlošanu plaknē un raksturīgo lielumu aprēķināšanu.

Sasniedzamie rezultāti

Ziņas	Prasmes
• Rotācijas ķermenis veidojas, plaknes figūrai rotējot ap kādu taisni (rotācijas asi), kas atrodas figūras plaknē. (M.Li.6.) • Aksiālšķēlumu iegūst, rotācijas ķermeni šķeļot ar plakni, kas iet caur rotācijas asi. (M.Li.6.) • Ja piramīdu vai konusu šķeļ ar pamatam paralēlu plakni, svarīgi apsvērt trijstūru līdzības lietošanu iegūto plaknes figūru īpašību noteikšanai, nezināmo lielumu aprēķināšanai. (M.Li.2.; M.Li.6.) • Telpisku ķermeņu virsmas laukumu var aprēķināt, izmantojot jau zināmo plaknes figūru laukumu aprēķināšanu, izņemot atsevišķus rotācijas ķermeņus. (M.Li.6.) • Konusa sānu virsmas izklājums plaknē ir riņķa sektors. Konusa sānu virsmas aprēķināšanas formulas iegūst, izmantojot sakarības starp lielumiem riņķa sektorā. (M.Li.6.) • Tilpuma aprēķināšanas formulas prizmai un cilindram $(V = S \cdot H)$, kā arī piramīdai un konusam $(V = \frac{1}{3} S \cdot H)$ satur divus mainīgos lielumus – pamata laukumu S un augstumu H. (M.Li.6.) • Lodes virsmas laukuma formula $S = 4\pi R^2$ un lodes tilpuma formula $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ satur vienu mainīgo lielumu – lodes rādiusu R. (M.Li.6.) • Ja telpisks ķermenis A ir ievilkts telpiskā ķermenī B, tad ķermeņa B katra virsma (skaldne) satur vismaz vienu ķermeņa A punktu. Katrā konkrētā gadījumā svarīgi noteikt un pamatot ķermeņu A un B kopīgos punktus, līnijas vai daļas. (M.Li.2.; M.Li.6.) • Rotācijas ķermenim, kas veidojas, līnijai ar doto vienādojumu $y = f(x)$ rotējot ap Ox vai Oy asi, tilpumu var aprēķināt kā integrāli $V = \pi \int_a^b y^2\, dx$ vai $V = \pi \int_c^d x^2\, dy$. (M.Li.4.; M.Li.6.)	• Uzzīmē un raksturo rotācijas ķermeni, kas veidojas, plaknes figūrai rotējot ap dotu taisni, spriežot vai izmantojot digitālos rīkus. • Uzzīmē un raksturo rotācijas ķermeņa aksiālšķēlumu, lodes šķēlumu ar plakni un šķēlumu raksturīgos lielumus. • Lieto plaknes figūru līdzību, lai aprēķinātu konusa un nošķelta konusa elementus, ja dotie lielumi ir konkrēti un vispārīgi uzdoti lielumi. • Lieto cilindra, konusa, lodes virsmas laukuma un tilpuma aprēķināšanas formulas, lai aprēķinātu nezināmo lielumu, formulētu un pamatotu apgalvojumus, ja dotie lielumi ir konkrēti un vispārīgi uzdoti lielumi. • Uzziņas literatūrā iegūst uzdevuma atrisināšanai nepieciešamo formulu jaunās vai neskaidrās situācijās un skaidro formulas pierakstā lietoto apzīmējumu nozīmi. • Veido telpisku ķermeņu (prizma un cilindrs, konuss un piramīda, cilindrs un konuss, lode un cilindrs, prizma un lode, konuss un lode) kombinācijas attēlus plaknē, t. sk. ar digitālo rīku palīdzību.

Komplekss sasniedzamais rezultāts	Ieradumi
• Pamato formulas konusa sānu virsmas laukuma aprēķināšanai, izmantojot sānu virsmas izklājumu, zināšanas par riņķa sektoru, tā raksturīgiem lielumiem. (M.O.2.1.1.; M.O.2.3.1.; M.O.6.3.5.) • Pamato telpisku ķermeņu kombinācijas (prizma un cilindrs, konuss un piramīda, cilindrs un konuss, lode un cilindrs, prizma un lode, konuss un lode) eksistenci (iespēju ievilkt, apvilkt), izvēlas situācijai piemērotāko attēlošanas veidu, t. sk., izmantojot digitālos rīkus. (M.A.2.1.2.; M.A.6.3.7.) • Pēta, formulē, pierāda un lieto telpisku ķermeņu un to kombināciju īpašības, pamato sakarības starp abu ķermeņu raksturīgajiem lielumiem, nosaka un pamato lielumu iespējamās vērtības. (M.A.6.3.4.; M.A.6.3.5.; M.A.6.3.6.; M.A.6.3.7.) • Risina kompleksu problēmu, saistot stereometrijas un citas matemātikas apakšnozares satura elementus jaunā situācijā, piemēram, veido algebrisko modeli, nosaka lielumu mazāko/lielāko iespējamo vērtību, izmantojot atvasinājumu, aprēķina rotācijas ķermeņa tilpumu, izmantojot noteikto integrāli. (M.A.1.2.4.; M.A.2.1.1.; M.A.2.3.1.; M.A.4.3.5.)	• Strukturēti un uzskatāmi attēlo informāciju zīmējumā, risinājumu skaidrojošo vārdisko un rakstīto tekstu veido saistītu un citiem saprotamu. • Veic telpisku ķermeņu un to kombināciju izpēti ar digitāliem rīkiem, attīstot ieradumu meklēt risinājumu nepazīstamās situācijās.
Jēdzieni: rotācijas virsma, rotācijas ass, veidule, rotācijas ķermenis, aksiālšķēlums, sfēriskā virsma, telpisku ķermeņu kombinācija, ievilkts telpisks ķermenis, apvilkts telpisks ķermenis.	

Temata apguves norise

Rotācijas ķermeņi	Izsaka idejas, kā tiek veidotas detaļas, kurām ir precīza lodes forma, vai kā tēlnieki panāk to, ka trauki ar liektām formām ir precīzi simetriski u. tml. Formulē idejas par to, kā visas šīs situācijas kopumā aprakstīt matemātiski. Definē rotācijas asi, veiduli, rotācijas virsmu, rotācijas ķermeni. Izmantojot zīmējumu vai digitālos rīkus, modelē dažādu plaknes figūru rotāciju ap taisni/rotācijas asi; skaidro, kāds rotācijas ķermenis veidosies, un otrādi – pēc rotācijas ķermeņa attēla nosaka un raksturo veiduli, rotācijas asi, rotācijas virsmu un rotācijas ķermeni. Piemērs. Uzzīmē rotācijas ķermeni, kas veidojas: a) taisnleņķa trijstūrim rotējot ap hipotenūzu, b) vienādsānu trapecei rotējot ap garāko pamatu, c) taisnstūrim rotējot ap taisni, kas paralēla tā malai; raksturo, no kādām virsmām sastāv iegūto rotācijas ķermeņu virsma.

Temata apguves norise (turpinājums)

Cilindrs	Definē cilindru kā rotācijas ķermeni. Zīmējumā attēlo tā raksturīgos lielumus. Sprież, raksturo sakarības starp lielumiem, ja cilindrs tiek šķelts ar plakni, kas iet caur rotācijas asi. Formulē un pamato apgalvojumus, kas raksturo cilindra aksiālšķēluma elementus, lielumus, to saistību, t. sk. ar cilindra elementiem, lielumiem, piemēram, ja cilindra pamata diametrs un augstums ir vienāda garuma, tad cilindra aksiālšķēlums ir kvadrāts. Vingrinās aprēķināt cilindra elementus ar vispārīgi uzdotiem lielumiem, piemēram, cilindra augstumu, ja zināms diagonālšķēluma diagonāles garums un lielums leņķim, ko tā veido ar pamata plakni. Pamato formulu cilindra sānu virsmas aprēķināšanai, skaidro pilnas virsmas laukuma aprēķināšanu. Skaidro cilindra tilpuma aprēķināšanas formulu, izmantojot noteikto integrāli. Aprēķina cilindra elementus (pamata rādiuss, augstums, veidule, aksiālšķēluma laukums, sānu virsmas un pilnas virsmas laukums, tilpums), pierāda un lieto sakarības starp tiem pazīstamās un jaunās situācijās, t. sk. ar vispārīgi uzdotiem lielumiem. Risina kompleksu problēmu, kuras atrisināšanai nepieciešams saistīt matemātiskās analīzes un stereometrijas elementus jaunā situācijā.
	Piemērs. Cilindra tilpums ir 64π cm^3. a) Izsaki cilindra pilnas virsmas laukumu kā funkciju $S(R)$, kur R – cilindra rādiuss. b) Nosaki un pamato cilindra pilnas virsmas laukuma mazāko vērtību.
Konuss un nošķelts konuss	Definē konusu un nošķeltu konusu kā rotācijas ķermeņus. Zīmējumā attēlo to raksturīgos lielumus. Sprież, raksturo sakarības starp lielumiem, ja konuss vai nošķelts konuss tiek šķelts ar plakni, kas iet caur rotācijas asi. Formulē un pamato apgalvojumus, kas raksturo konusa, nošķelta konusa aksiālšķēluma elementus, lielumus, to saistību, t. sk. ar konusa/nošķelta konusa elementiem, lielumiem, piemēram, ja konusa aksiālšķēlums ir taisnleņķa trijstūris, tad konusa augstums un tā pamata rādiuss ir vienāda garuma. Vingrinās aprēķināt konusa un nošķelta konusa nezināmos lielumus ar vispārīgi uzdotiem lielumiem, piemēram, aprēķina nošķelta konusa augstumu, ja doti abu pamatu garumi un leņķis, ko veidule veido ar pamata plakni. Lieto trijstūru līdzību, lai aprēķinātu konusa, nošķelta konusa nezināmos lielumus, pierādītu apgalvojumus par to elementiem, ja konuss, nošķelts konuss šķelti ar plakni, kas paralēls to pamatam. Pierāda formulas $S = \frac{\pi l^2 \alpha}{360°}$ un $S = \pi R l$ konusa sānu virsmas laukuma aprēķināšanai. Vingrinās lietot konusa sānu virsmas aprēķināšanas formulas, nosakot konusa nezināmo lielumu, ja dotie lielumi uzdoti konkrēti un vispārīgi. Veido un pamato vispārīgus spriedumus par konusa virsmas laukuma izmaiņām, ja tiek mainīts (palielinās/samazinās n reižu) kāds no lielumiem. Sprież, plāno nezināmo lielumu aprēķināšanu nošķeltam konusam, izmantojot zināšanas par konusu (piemēram, nošķelta konusa sānu virsma kā divu konusu sānu virsmu starpība) vai atrodot nepieciešamo informāciju uzziņu literatūrā. Pierāda konusa un nošķelta konusa tilpuma aprēķināšanas formulas, izmantojot noteikto integrāli. Aprēķina konusa un nošķelta konusa elementus (pamata rādiuss, augstums, veidule, aksiālšķēluma laukums, sānu virsmas un pilnas virsmas laukums, tilpums), pierāda un lieto sakarības starp tiem pazīstamās un jaunās situācijās, t. sk. ar vispārīgi uzdotiem lielumiem.

Temata apguves norise (turpinājums)

Lode, tās daļas	Definē lodi un sfēru kā rotācijas ķermeni un tā virsmu. Spriež, raksturo un pierāda sakarības starp lodes un šķēlumu elementiem un lielumiem, ja lodi šķeļ ar vienu vai divām paralēlām plaknēm. Vingrinās aprēķināt lodes nezināmo lielumu, ja tā šķelta ar vienu plakni vai divām paralēlām plaknēm, nosaka un pierāda patiesumu apgalvojumam par lodes īpašībām. Izmanto digitālos rīkus, lai pētītu, kādi telpiskie ķermeņi veidojas, ja lodi šķeļ ar vienu plakni vai divām paralēlām plaknēm; izmanto uzziņu literatūru, lai noskaidrotu lietotos terminus. Nosaka un raksturo lodes daļas (segments, josla/slānis, sektors) un to sfēriskās virsmas, to raksturīgos lielumus. Pierāda lodes tilpuma formulu, izmantojot noteikto integrāli (pusriņķis rotē ap Ox asi). Uzziņu literatūrā atrod formulas lodes daļu virsmas laukuma un tilpuma aprēķināšanai, skaidro lielumus formulās; vingrinās lietot iegūtās formulas uzdevumos ar praktisku un matemātisku kontekstu. Risina kompleksu problēmu, kuras atrisināšanai nepieciešams saistīt algebras un stereometrijas elementus.
	Piemērs. Nosaki, kā mainītos Zemeslodes virsmas (pieņemot, ka tā ir sfēra) laukums, ja tās rādiusu palielinātu par 1 metru.
Virsmas laukums un tilpums rotācijas ķermenim	Vizualizē un shematiski attēlo, t. sk. ar digitāliem rīkiem, rotācijas ķermeņus, kas rodas, kādai figūrai rotējot ap asi, plāno to virsmas laukuma un tilpuma aprēķināšanu, skaidro risinājuma soļus, raksturo nepieciešamo informāciju un izvēlas paņēmienu, t. sk. izskata noteiktā integrāļa izmantošanu tilpuma aprēķināšanai.
	Piemēri. 1. Raksturo, no kādām virsmām sastāv rotācijas ķermeņa virsma, ja tas rodas, rotējot: a) rombam ap diagonāli; b) dažādmalu taisnleņķa trijstūrim ap hipotenūzu; c) trapecei ap garāko pamatu; d) trapecei ap īsāko pamatu; d) riņķa sektoram ap vienu no rādiusiem; apraksti, kā aprēķināt iegūtā rotācijas ķermeņa tilpumu, izmantojot jau zināmo par tilpuma aprēķināšanu. 2. Taisnleņķa trijstūra hipotenūza ir c un viens no šaurajiem leņķiem β. Aprēķini tilpumu ķermenim, kas rodas, taisnleņķa trijstūrim rotējot ap tā hipotenūzu.
Telpisko ķermeņu kombinācijas	Pēta un pamato iespēju ievilkt vai apvilkt telpisko ķermeni, aplūko ķermeņu kombinācijas: cilindrs un prizma, konuss un piramīda, lode un prizma, cilindrs un konuss, lode un cilindrs, lode un konuss. Raksturo abu ķermeņu elementu savstarpējo novietojumu un īpašības, atsevišķas no tām pamato.
	Piemēri. 1. Formulē nosacījumus par taisnas prizmas īpašībām un lielumiem, lai to varētu ievilkt cilindrā. 2. Formulē nosacījumus par trijstūra piramīdas īpašībām un lielumiem, lai ap to varētu apvilkt konusu. 3. Formulē sakarības starp abu ķermeņu lielumiem, ja zināms, ka regulāra trijstūra prizma ievilkta lodē. 4. Formulē sakarības starp abu ķermeņu lielumiem, ja zināms, ka cilindrs ievilkts konusā tā, ka cilindra apakšējais pamats atrodas uz konusa pamata.
	Iegūst nepieciešamo informāciju par sakarībām starp telpisko ķermeņu kombinācijas lielumiem rasējuma trīs pamatskatos. Veido dažādus ģeometrisko ķermeņu kombināciju modeļus vai arī vizualizācijas ar datorprogrammu, piemēram, *GeoGebra*, palīdzību. Aprēķina nezināmos lielumus, pierāda īpašības, sakarības starp lielumiem telpisku ķermeņu kombinācijās. Risina kompleksu problēmu, kuras atrisināšanai nepieciešams saistīt stereometrijas un kādas citas matemātikas apakšnozares elementus jaunā situācijā.
	Piemērs. Lodē ar rādiusu R ievelc cilindru ar lielāko tilpumu.

20. Varbūtību sadalījumi

Ieteicamais laiks temata apguvei: 24–28 mācību stundas.

Temata apguves mērķis: veido izpratni par diskrēta gadījuma lieluma varbūtības sadalījumu un sagaidāmo vērtību; gūst pieredzi varbūtību teorijas un matemātiskās statistikas lietojumā dabas, tehnisko, sociālo un citu problēmu risināšanā.

Sasniedzamie rezultāti

Ziņas	Prasmes
• Gadījuma lielums (parasti apzīmē ar lielo burtu X) mēģinājuma rezultātā var pieņemt dažādas skaitliskas vērtības (x_i). (M.Li.1.; M.Li.5.) • Diskrētu gadījuma lielumu X (visu iespējamo vērtību x_1, x_2, x_3, ... skaits ir galīgs vai bezgalīgs, bet sanumurējams) uzdod, katrai vērtībai x_i norādot varbūtību p_i (to pieraksta $p_i = P(X = x_i)$). (M.Li.5.) • Diskrēta gadījuma lieluma uzdošanai var izmantot tabulu, grafisko attēlojumu vai formulu varbūtības aprēķināšanai. (M.Li.1.; M.Li.5.) • Vērtību x_1, x_2, x_3, ... realizēšanās ir notikumi, kas veido pilnu notikumu grupu un to varbūtību summa ir 1, ko var pierakstīt $\sum_i p_i = 1$. (M.Li.5.) • Gadījuma lieluma varbūtību sadalījumu sauc par gadījuma lieluma sadalījumu. (M.Li.5.) • Par diskrēta gadījuma lieluma X sagaidāmo vērtību vai vidējo vērtību sauc skaitli $\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i$. (M.Li.5.) • Vienmērīgs varbūtību sadalījums ir tad, ja diskrēta gadījuma lieluma X visu iespējamo vērtību x_i (to skaits ir galīgs) varbūtības p_i ir vienādas. Spēļu kauliņa punktu uzkrišanas varbūtību sadalījums ir vienmērīga varbūtību sadalījuma piemērs. (M.Li.5.) • Mēģinājumi ir neatkarīgi, ja notikuma A varbūtība katrā nākamajā mēģinājumā nav atkarīga no tā, kā beigušies iepriekšējie. (M.Li.5.) • Ja notikums A (varbūtība iestāties ir p, neiestāties $1 - p$) no izdarītajiem n mēģinājumiem realizējas m reižu (nerealizējas $n - m$ reižu), tad šādas neatkarīgu mēģinājumu virknes jeb sērijas varbūtība ir $p^m \cdot (1 - p)^{n-m}$. (M.Li.2.; M.Li.5.) • Ja diskrēts gadījuma lielums X ir notikuma A (varbūtība iestāties ir p) iestāšanās skaits n neatkarīgos mēģinājumos, tad saka, ka gadījuma lielums X ir sadalīts binomiāli ar parametriem n un p. (M.Li.5.)	• Nosaka gadījuma lieluma veidu (diskrēts, nepārtraukts). • Konkrētos piemēros raksturo varbūtību sadalījuma veidu (vienmērīgs, binomiāls). • Nosaka varbūtības diskrēta gadījuma lieluma vērtībām, ja dota tabula, grafiks vai formula. • Lieto diskrēta gadījuma lieluma sagaidāmās vērtības aprēķināšanas formulu ar nezināmo jebkurā pozīcijā. • Lieto Bernulli formulu varbūtību noteikšanai. • Ar piemērotiem digitāliem rīkiem zīmē normālsadalījumu, ja zināma vidējā vērtība un standartnovirze, un nolasa atbilstošās varbūtības.

• Varbūtību tam, ka sērijā no n neatkarīgiem mēģinājumiem notikums A realizējas m reižu, aprēķina ar formulu $P(X=m)=C_n^m \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m}$, jo no n mēģinājumiem m mēģinājumus var izvēlēties C_n^m veidos. (M.Li.2.; M.Li.5.) • Nepārtraukts gadījuma lielums X var pieņemt jebkuru vērtību no kāda reālo skaitļu kopas intervāla. (M.Li.5.) • Diskrēta gadījuma lieluma binomiālā sadalījuma grafiskais attēls arvien lielākām n (neatkarīgu mēģinājumu skaits) vērtībām rada priekšstatu par normālsadalījumu nepārtrauktiem gadījuma lielumiem. (M.Li.2.; M.Li.5.) • Normālsadalījuma līkni (zvana veida, simetrisku) sauc par Gausa līkni. Līknes virsotne atbilst gadījuma lieluma sagaidāmajai (vidējai) vērtībai. (M.Li.5.)	
Komplekss sasniedzamais rezultāts	**Ieradumi**
• Konkrētos piemēros skaidro un nosaka diskrēta gadījuma lieluma varbūtību sadalījumu, aprēķina nezināmos lielumus. (M.A.5.2.3.) • Saskata, raksturo binomiālo sadalījumu, lieto Bernulli formulu, binomiālā sadalījuma sagaidāmās vērtības aprēķināšanas formulu. (M.A.5.2.4.) • Saskata, raksturo normālsadalījumu, lieto vidējo vērtību, standartnovirzi un vienas, divu un trīs standartnoviržu likumu datu raksturošanai. (M.A.5.3.1.) • Formulē pētāmo sakarību, veic izpēti, pamatoti izvēlas statistiskas lielumus datu raksturošanai, formulē pamatotus secinājumus. (M.A.5.3.3.; M.A.5.3.4.)	• Iegūto informāciju par varbūtību noteikšanu un sadalījumiem saista ar jau zināmo statistikā, lai konstruētu jaunas zināšanas, apzinoties, ka nekritiska saistības veidošana var būt pamats aplamiem secinājumiem. • Zināšanas par gadījuma lielumu sadalījumiem saista ar savu pieredzi un lieto tās, lai sadzīves un citu jomu situācijas raksturotu matemātiski, izvērtējot rezultātu ticamību un atbilstību konkrētai situācijai.
Jēdzieni: diskrēts (nepārtraukts) gadījuma lielums, diskrēta gadījuma lieluma varbūtību sadalījums, diskrēta gadījuma lieluma sagaidāmā vērtība, vienmērīgs sadalījums, Bernulli sadalījums, binomiālais sadalījums, normālsadalījums, Bernulli formula, variācijas koeficients.	
Simboli un pieņemtie apzīmējumi: $P(X=x_i)$; $\mu = E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i$; $P(a<X<b)$; σ; s; $\bar{x}$.	

Temata apguves norise

Varbūtību sadalījums	Risina uzdevumu, kas ļauj nonākt pie idejas par varbūtību sadalījumu, izmantojot zināšanas par biežumu, relatīvo biežumu un tā skaitlisko vērtību summu (1), izpratni par pilnu nesavienojamu notikumu kopu un šo notikumu varbūtību summu (1). Secina par relatīvā biežuma summas ģeometrisko interpretāciju, ja histogrammas intervāla garums ir viena vienība. Konkrētos piemēros secina par saistību starp biežuma un relatīvā biežuma histogrammām. Piemērs. Apkopo datus par laiku, ko katrs tavas klases skolēns pavada no mājām līdz skolai, un attēlo tos biežuma histogrammā. Aprēķini un attēlo histogrammā lielumu relatīvo biežumu. Savieto biežuma un relatīvā biežuma histogrammas un formulē secinājumus.

Temata apguves norise (turpinājums)

<table>
<tr><td rowspan="5">Diskrēta gadījuma lieluma varbūtību sadalījums</td><td>Iegūst informāciju uzziņu literatūrā un skaidro jēdzienus “diskrēts gadījuma lielums”, “diskrēta gadījuma lieluma vērtības un iespējamo vērtību kopa”, “diskrēta gadījuma lieluma varbūtību sadalījums”. Raksturo varbūtību sadalījuma attēlošanu tabulā un lietoto simboliku.
Aprēķina notikumu iestāšanās varbūtības, ja varbūtību sadalījums ir vienmērīgi sadalīts. Formulē secinājumu par to grafisko attēlojumu.
Izsaka domas, vai ir saskatāma analoģija starp diskrēta gadījuma lieluma varbūtību sadalījumu un funkciju.
Nosaka nezināmo varbūtību $p_i = P(X = x_i)$, izmantojot sadalījuma pārējo varbūtību skaitliskās vērtības un to summu.</td></tr>
<tr><td>Piemērs. Kārlim basketbola treniņš ir divas dienas nedēļā. 90 % gadījumu viņš apmeklē abus treniņus, 8 % gadījumu – vienu treniņu, bet 2 % gadījumu viņš neapmeklē nevienu treniņu. Raksturo lielumus un pieraksti tos, lietojot pieņemtos apzīmējumus X, x_i, p_i.</td></tr>
<tr><td>Vingrinās noteikt diskrēta gadījuma lieluma varbūtību no sadalījuma tabulas, grafika vai pēc formulas.
Piemēros ar praktisku vai matemātisku kontekstu skaidro, nosaka diskrēta gadījuma lieluma (iespējamo vērtību skaits ir galīgs) varbūtību sadalījumu, korekti lieto pieņemtos apzīmējumus.</td></tr>
<tr><td>Piemēri. 1. Paskaidro teorētiski un ar piemēru ilustrē diskrēta gadījuma lieluma varbūtību sadalījumu.
2. Urnā ir 6 baltas un 3 melnas bumbiņas. Vienu bumbiņu izņem un nosaka tās krāsu, pēc tam bumbiņu ievieto atpakaļ urnā. To atkārto 3 reizes. Nosaki varbūtību sadalījumu gadījuma lielumam X, kur X – melno bumbiņu skaits. Varbūtību sadalījumu attēlo tabulā un grafiski.</td></tr>
<tr><td>Izsaka pieņēmumu par gadījuma lieluma varbūtību sadalījumu, piemēram, par īpašumā esošo transporta līdzekļu skaitu Latvijas iedzīvotājiem, iegūst datus un novērtē pieņēmuma atbilstību, izmantojot iegūtos datus.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Diskrēta gadījuma lieluma sagaidāmā vērtība</td><td>Aprēķina svērto aritmētisko vidējo.
Konkrētos piemēros (uzdevumā “par 6 baltām un 3 melnām bumbiņām” u. tml.) izsaka idejas par diskrēta gadījuma lieluma vidējo vērtību, izmantojot varbūtību sadalījumu.
Atrod informāciju un definē diskrēta gadījuma lieluma sagaidāmo vērtību. Saskata kopīgo diskrēta mainīga lieluma sagaidāmajai vērtībai ar svērto aritmētisko vidējo. Spriež induktīvi, veic ekvivalentus pārveidojumus, iegūst sagaidāmās vērtības aprēķināšanas formulu $E(x) = \sum x_i p_i$.
Lieto diskrēta gadījuma lieluma sagaidāmās vērtības aprēķināšanas formulu praktiskos kontekstos par kvalitātes kontroli u. tml.</td></tr>
<tr><td>Piemērs. Pārtikas preču veikals praksē ir noteicis, ka 95 % tomātu kastu nav bojātu tomātu, 2 % kastu ir 1 bojāts tomāts, 2 % kastu ir 2 bojāti tomāti un 1 % kastu ir 3 bojāti tomāti. Aprēķini sagaidāmo vērtību bojātu tomātu skaitam nejauši izvēlētā kastē.</td></tr>
<tr><td>Vingrinās lietot sagaidāmās vērtības aprēķināšanas formulu ar nezināmo jebkurā pozīcijā.</td></tr>
<tr><td>Piemēri. 1. Gaidstāves pasažieru* skaits, kas saņem vietu ikdienas reisā no Bostonas uz Ņujorku, ir gadījuma lielums, kura varbūtību sadalījums dots tabulā. Nosaki sagaidāmo vērtību. Raksturo, vai un kā iegūtos rezultātus var izmantot aviosabiedrība, lai pamatoti plānotu savu darbību.
* Pasažieri, kas iegādājušies biļetes, bet tiem jāgaida uz citu lidojumu, jo plānotajā lidojumā lidot gribētāju ir vairāk nekā vietu skaits lidmašīnā.
<table><tr><td>$X = x_i$</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>$P(X = x_i)$</td><td>0,30</td><td>0,25</td><td>0,20</td><td>0,15</td><td>0,05</td><td>0,05</td></tr></table></td></tr>
</table>

Temata apguves norise (turpinājums)

<table>
<tr><td rowspan="3">Diskrēta gadījuma lieluma sagaidāmā vērtība</td><td>2. Tabulā dota informācija par diskrēta gadījuma lieluma X vērtībām un to varbūtību. Nosaki: a) k vērtību; b) gadījuma lieluma X sagaidāmo vērtību.
<table><tr><td>$X = x_i$</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>$P(X = x_i)$</td><td>0,4</td><td>k</td><td>$3k$</td></tr></table>
3. Apdrošināšanas sabiedrība (AS) piedāvā iegādāties 20000 eiro vērta safīra gredzena apdrošināšanas polisi. Līgums paredz: 1) ja gredzens tiek nozagts, AS samaksā gredzena vērtību pilnībā; 2) ja tas tiek nozaudēts, AS īpašniekam maksās 8000 eiro. Iepriekšējā pieredze AS ļauj pieņemt, ka zādzības varbūtība ir 0,0025, bet nozaudēšanas varbūtība ir 0,03.
a) Nosaki varbūtību, ka AS polises pircējam neko nemaksā.
b) Aprēķini polises cenu, ja AS to noteikusi tādu, ka tās peļņas sagaidāmā vērtība ir 100 eiro par polisi.</td></tr>
<tr><td>Atrod diskrēta gadījuma lieluma varbūtību sadalījuma standartnovirzes aprēķināšanas formulu uzziņu avotos un lieto to uzdevumos ar reālu kontekstu. Skaidro iegūto rezultātu lietojumu praksē, lai plānotu, prognozētu saimniecisko darbību u. tml.</td></tr>
<tr><td>Piemērs. Laiks ar precizitāti līdz veselai minūtei (X), kas nepieciešams pilsētas autobusam visa maršruta veikšanai, ir parādīts varbūtību sadalījumā.
<table><tr><td>$X = x_i$</td><td>42</td><td>43</td><td>44</td><td>45</td><td>46</td><td>47</td></tr><tr><td>$P(X = x_i)$</td><td>0,10</td><td>0,20</td><td>0,30</td><td>0,25</td><td>0,09</td><td>0,06</td></tr></table>
a) Aprēķini X sagaidāmo vērtību $E(x)$ un standartnovirzi σ.
b) Nosaki laika intervālu, kādā autobuss parasti veic maršrutu $(E(x) \pm \sigma)$.</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Binomiālais sadalījums</td><td>Konkrētos piemēros skaidro, kas ir neatkarīgi mēģinājumi. Risina 1–2 uzdevumus, lai izvirzītu pieņēmumu par to, kā aprēķināt varbūtību tam, ka sērijā no n neatkarīgiem mēģinājumiem notikums A īstenojies m reižu ($n - m$ reižu nav īstenojies).
Aplūkotajos piemēros varbūtību sadalījumu attēlo grafiski (taisnstūru platums ir 1 vienība). Saskata un raksturo kopīgo un atšķirīgo grafiskajos attēlos. Iegūst informāciju par sadalījuma nosaukuma izcelsmi (saistība ar Ņūtona binomu).</td></tr>
<tr><td>Piemērs. Distancē biatlonistam jāveic 3 šāvieni. Zināms, ka biatlonists trāpa mērķī ar varbūtību p (varbūtība netrāpīt ir $q = 1 - p$). Kāda varbūtība, ka trāpīs x_i šāvienos (iespējamās x_i vērtības ir 0, 1, 2 un 3)?</td></tr>
<tr><td>Formulē vispārinājumu – Bernulli formulu $P(X = m) = C_n^m \cdot p^m \cdot (1 - p)^{n-m}$.
Lieto binomiālo sadalījumu un Bernulli formulu.</td></tr>
<tr><td>Piemēri. 1. Farmācijas firma ir atklājusi jaunu diagnostikas testu, kas 90 % gadījumu uzrāda pozitīvu rezultātu pacientam, kurš ir inficēts ar noteiktu slimību. Nosaki varbūtību, ka, diagnosticējot piecus inficētus pacientus, tiks atklāti četri.
2. Bioloģijas pārbaudes darbs sastāv no septiņiem jautājumiem ar pieciem atbilžu variantiem, no kuriem tikai viens ir pareizs. Lai pārbaudes darbs tiktu ieskaitīts, nepieciešamas vismaz četras pareizas atbildes. Anna nezina pareizo atbildi nevienam jautājumam, tāpēc atbildi katram jautājumam viņa izvēlas nejauši.
a) Nosaki varbūtību, ka Anna pareizi atbildēs uz četriem jautājumiem.
b) Nosaki varbūtību, ka Anna nokārtos bioloģijas pārbaudes darbu.</td></tr>
<tr><td>Nosauc diskrēta gadījuma lielumu piemērus, kuru varbūtību sadalījums atbilst binomiālajam sadalījumam, nepieciešamo informāciju atrod uzziņu avotos. Spriež induktīvi, konkrētam vērtību skaitam nosaka un pamato sagaidāmās vērtības aprēķināšanas formulu binomiālam varbūtību sadalījumam, ja vērtību skaits ir 3. Formulē vispārinājumu $E(x) = np$, salīdzina ar informāciju uzziņu avotos.</td></tr>
</table>

Temata apguves norise (turpinājums)

Binomiālais sadalījums	Piemērs. Pierādi – ja binomiālam varbūtību sadalījumam vērtību skaits ir 3, tad sagaidāmo vērtību aprēķina ar formulu $E(x) = 3p$, kur p – labvēlīga notikuma iestāšanās varbūtība.
	Lieto binomiālā sadalījuma sagaidāmās vērtības aprēķināšanas formulu.
	Piemēri. 1. Spēles apraksts: "Katrā gājienā monēta tiek mesta 10 reizes. Ja cipars uzkrīt 4 reizes vai mazāk, spēlētājs A iegūst 2 punktus. Ja cipars parādās vairāk nekā 4 reizes, spēlētājs B iegūst 1 punktu." Izmanto varbūtību sadalījumu, lai prognozētu uzvarētāju spēlē. 2. Zināms, ka 75 % no visiem pirkumiem noteiktā veikalā tiek veikti ar kredītkarti. Tiek apskatīti 10 nejauši izvēlēti pirkumi. Aprēķini: a) varbūtību, ka tieši septiņi pirkumi no izvēlētajiem 10 ir veikti ar kredītkarti; b) sagaidāmo vērtību pirkumu skaitam (no izvēlētajiem 10), kas veikti ar kredītkarti.
Citi varbūtību sadalījumi	Iegūst informāciju, veido priekšstatu par citiem diskrētiem varbūtību sadalījumiem – vienmērīgais, Bernulli, Puasona, hiperģeometriskais. Iegūst informāciju par Puasona un hiperģeometriskā sadalījuma lietojumu dažādās jomās.
Normālsadalījums	Ar piemēriem ilustrē, atšķir un salīdzina nepārtrauktus gadījuma lielumus (tipiski raksturo dabas parādības, radības un procesus) no diskrētiem gadījuma lielumiem, raksturo atšķirības to grafiskajā attēlojumā (histogramma un līkne). Skaidro saistību starp binomiālo sadalījumu diskrētiem gadījuma lielumiem un normālo sadalījumu nepārtrauktiem gadījuma lielumiem. Dotai histogrammai piemeklē normālo sadalījumu (Gausa līkni), kas tai atbilst vislabāk, izmantojot IT rīkus (piemēram, aplikācija *GeoGebra*). Atpazīst normālsadalījuma līkni (zvana veida, simetriska pret virsotni) un skicē Gausa līkni, zinot vidējo vērtību un standartnovirzi. Raksturo dotus vai grafiski attēlotus normālsadalījuma datus, izmantojot vidējo vērtību, standartnovirzi un vienas, divu un trīs standartnoviržu likumu. Izmanto IT, piemēram, programmu *GeoGebra*, lai noteiktu normāli sadalīta nepārtraukta gadījuma lieluma varbūtību pie dotajām vidējām un standartnovirzes vērtībām.
	Piemēri. 1. Automātiskais kafijas automāts ir iestatīts kafijas izsniegšanai krūzēs. Var uzskatīt, ka kafijas daudzums, ko mašīna izmanto kafijas pagatavošanai katrā krūzē, atbilst normālsadalījumam ar vidējo vērtību 330 ml un standartnovirzi 6 ml. Izmanto programmu *GeoGebra* un nosaki varbūtību, ka vienas kafijas krūzes pagatavošanai izlietotais kafijas daudzums pārsniedz 327 ml. 2. Noteiktas putnu sugas svars (masa) atbilst normālsadalījuma ar vidējo vērtību 0,8 kg un standartnovirzi 0,12 kg. Izmanto programmu *GeoGebra* un nosaki varbūtību, ka nejauši izvēlēta sugas putna svars (masa) ir no 0,74 kg līdz 0,95 kg.
Statistisko lielumu pamatota izvēle	Uzziņu literatūrā iegūst informāciju par variācijas koeficientu un to izmanto, lai noteiktu, kā vidējais aritmētiskais raksturo pētāmo datu kopu. Raksturo, salīdzina, konkrētajā gadījumā pamato vidējās vērtības un standartnovirzes vai mediānas un starpkvartiļu amplitūdas izmantošanu datu aprakstīšanai.
	Piemērs. Apkopo datus par savas skolas pēdējo 4–5 gadu rezultātiem matemātikas eksāmenā. Apraksti datus, izmantojot gan vidējās vērtības un standartnovirzes, gan mediānu un starpkvartiļu amplitūdu. Kurš lielumu pāris ļauj precīzāk raksturot datus?
	Iegūst un apkopo datus par diviem lielumiem, kas raksturo vienu objektu, piemēram, grāmatas cena un lappušu skaits, cilvēka auguma garums un svars. Attēlo datus grafiski, izmantojot IT, raksturo saistību starp lielumiem. Nosaka grafiskā attēlojuma punktu, kura koordinātas ir lielumu vidējās vērtības. Izsaka idejas un manuāli skicē taisni, kas iet caur šo punktu un visprecīzāk raksturo saistību starp lielumiem, uzraksta taisnes vienādojumu; pēc tam iegūst taisnes vienādojumu, izmantojot IT (izklājlapu sadaļā vai *GeoGebra*), iepazīst nosaukumus: regresijas taisne, regresijas līkne. Konkrētos piemēros lieto regresijas taisnes vienādojumu, lai pamatoti prognozētu lielumus.
	Piemērs. Nosaki regresijas taisnes vienādojumu, izmantojot dotos datus par klases skolēnu auguma garumu un svaru.
Datos balstīts pētījums	Piemērs. Izvēlies mainīgus lielumus, par kuriem tev ir iespēja iegūt datus, lai izpētītu un raksturotu saistību starp tiem. Pēti jautājumu, kas tev interesants, personiski nozīmīgs. Secinājumu formulēšanai un pamatošanai izvēlies tos attēlošanas veidus, vidējos un izkliedes mērus, kas parāda datiem raksturīgo. Datu apstrādei, statistisko lielumu noteikšanai izmanto IT iespējas. Izskati iespēju izmantot lietojumprogrammu *Tracker* (https://physlets.org/tracker/), lai iegūtu datus par kāda filmēta objekta kustību.

21. Vienādojumi un nevienādības, to sistēmas

Ieteicamais laiks temata apguvei: 36–40 mācību stundas.

Temata apguves mērķis: sistematizē un padziļina zināšanas un prasmes vienādojumu, nevienādību un to sistēmu risināšanā un lietojumā matemātikas un citu jomu kontekstos.

Sasniedzamie rezultāti

Ziņas	Prasmes
• Vienādojumu ar vienu mainīgo atrisināšanai lieto gan ekvivalentus pārveidojumus, gan neekvivalentus pārveidojumus; neekvivalentu pārveidojumu gadījumā jāveic papildu spriedumi, lai nodrošinātu ekvivalenci. (M.Li.2.; M.Li.4.) • Nevienādības ar vienu mainīgo atrisinājums var būt reālo skaitļu intervāls (piemēram, $x^2 < 4$), tukša kopa (piemēram, $x^2 < -4$) un atsevišķas skaitliskās vērtības (piemēram, $x^2 \leq 0$). (M.Li.2.; M.Li.4.) • Intervālu metodes nevienādību atrisināšanai būtiskas idejas: 1) zinot katra reizinātāja zīmi, var noteikt reizinājuma zīmi; 2) katru mainīgā izteiksmi var interpretēt kā funkciju un attēlot koordinātu plaknē. (M.Li.2.; M.Li.4.) • Vienādojumu vai nevienādību ar moduli var risināt analītiski (izmanto moduļa definīciju) vai grafiski. (M.Li.2.; M.Li.4.) • Atrisināt vienādojumu (nevienādību) ar parametru nozīmē noteikt un pierakstīt atrisinājumu katrai parametra vērtībai. (M.Li.1.; M.Li.2.; M.Li.4.) • Parasti vienādojumam ar diviem mainīgajiem ir bezgalīgi daudz atrisinājumu (skaitļu pāru); dažkārt atrisinājumu skaits ir galīgs, piemēram, $x^2 + y^2 = 0$. (M.Li.2.; M.Li.4.) • Nevienādības ar diviem mainīgajiem vai to sistēmas atrisinājums ir koordinātu plaknes daļa (atsevišķi punkti, līnija vai apgabals). (M.Li.2.; M.Li.4.) • Vienādojumiem, nevienādībām un vienādojumu sistēmām kā reālu procesu modeļiem, atrisinājumu nosaka, ņemot vērā problēmas kontekstu. • Risinot nevienādību sistēmu ar vienu mainīgo, vispirms atrisina katru nevienādību atsevišķi, tad nosaka visu nevienādību atrisinājumu kopu šķēlumu (kopīgo daļu).	• Atrisina augstāku kārtu nevienādības ar intervālu metodi. • Atrisina vienādojumus un nevienādības, izvēloties piemērotāko no vispārīgajām risināšanas metodēm (piemēram, sadalīšana reizinātājos, substitūcijas metode, grafiskā metode). • Atrisina vienādojumu un nevienādību sistēmas, izvēloties piemērotāko risināšanas metodi. • Atrisina situāciju uzdevumus, sastādot vienādojumu vai vienādojumu sistēmu. • Atrisina nevienādības un nevienādību sistēmas ar diviem mainīgajiem, attēlojot koordinātu plaknē to atrisinājumu kopu.

Komplekss sasniedzamais rezultāts	Ieradumi
• Konkrētos piemēros skaidro, ko nozīmē risināt vienādojumu un nevienādību ar parametru; atrisina dažādu veidu vienkāršus vienādojumus, to sistēmas un nevienādības ar parametru. (M.A.2.1.3.) • Atrisina vienādojumus, t. sk., augstāku kārtu lietojot piemērotu risināšanas paņēmienu (sadalot reizinātājos, substitūciju, grafisko paņēmienu), un skaidro paņēmiena izvēli. (M.A.2.1.1.; M.A.4.5.4.) • Atrisina jauktas vienādojumu sistēmas, kas var saturēt pirmās, otrās pakāpes vienādojumus, daļveida vienādojumus, eksponentvienādojumus vai logaritmiskus vienādojumus. (M.A.4.5.5.) • Sastāda matemātisko modeli (vienādojumu, nevienādību, vienādojumu sistēmu, nevienādību sistēmu) atbilstoši problēmas nosacījumiem, atrisina to un izvērtē matemātiskā atrisinājuma atbilstību situācijai. (M.O.4.5.7.; M.A.2.1.1.; M.A.2.2.2.)	• Pamato savu rīcību polinomu dalīšanā, izvēli polinoma sakņu noteikšanā, veic pārbaudi. • Meklē risinājumu polinoma sakņu noteikšanai nepazīstamās situācijās arī tad, ja ar pirmo reizi tas neizdodas, uzdrīkstas piedāvāt savas idejas.
Jēdzieni: iracionāls vienādojums, ekvivalenti un neekvivalenti pārveidojumi.	

Temata apguves norise

Zināšanu un prasmju apkopojums	Veic pašpārbaudi, izvērtējot savas zināšanas un izpratni par to, kā risināmi dotie vienādojumi ar vienu mainīgo, primāri risina tikai tos vienādojumus, kas rada jautājumus, kuru risinājums nav pilnīgi pārskatāms jau plānošanas posmā. Plāno dažādu vienādojumu ar vienu mainīgo risināšanu, argumentējot paņēmiena (ekvivalentu pārveidojumu lietošana, sadalīšana reizinātājos, substitūcijas metode, grafiskais paņēmiens u. c.) izvēli, nerisinot/pirms risinājuma skaidrojot svarīgākos paņēmiena vai algoritma soļus. Veido vienādojumu ar vienu mainīgo piemērus, ievērojot jau doto informāciju, nosacījumus par satura kontekstu, atrisinājumu skaitu vai eksistenci u. tml. Piemēri. 1. Uzraksti vienādojumu, kuram nav sakņu, ievērojot, ka vienādojums ir: a) daļveida vienādojums formā $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, b) eksponentvienādojums, c) trigonometrisks vienādojums. 2. Dota vienādība $x^3 = \cdots$, ieraksti daudzpunktes vietā izteiksmi, lai iegūtajam vienādojumam būtu tieši a) viena sakne, b) divas dažādas saknes, c) trīs saknes. Veido situācijas matemātisko modeli, sastādot vienādojumu vai nevienādību situācijās ar praktisku vai citu jomu (fizikas, ekonomikas u. tml.) kontekstu.
Iracionāli vienādojumi	Atrisina vienādojumus $\sqrt{x} = 2 - x$ un $\sqrt{x} = x - 2$, izmantojot jau esošās zināšanas, piemēram, ar grafisko paņēmienu, t. sk., izmantojot digitālos rīkus. Izsaka idejas par šo vienādojumu atrisināšanu analītiski. Definē iracionālu vienādojumu. Veido un uzraksta iracionālu vienādojumu, kura atrisinājumu kopa ir tukša, kuram ir tieši viena sakne vai tieši divas saknes; pamato savus spriedumus, piemēram, izmantojot grafisko attēlu. Pierāda, ka dotajam iracionālajam vienādojumam nav sakņu. Piemērs. Pierādi, ka vienādojumam $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = 0$ nav sakņu.

Temata apguves norise (turpinājums)

Vienādojumu ekvivalenti un neekvivalenti pārveidojumi	Skaidro, kas ir vienādojumu ekvivalenti pārveidojumi, ekvivalenti vienādojumi, ilustrē ar piemēriem. Izsaka idejas, ilustrē ar piemēriem savu pieredzi neekvivalentu pārveidojumu lietošanā vienādojumu atrisināšanai. Skaidro vispārīgi vai ilustrē ar piemēru, kāpēc vienādojuma $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)}{h(x)}$ aizstāšana ar vienādojumu $f(x) = g(x)$ ir neekvivalents pārveidojums, izmantojot jau zināmo par dalīšanu ar skaitli 0 un daļveida vienādojumiem. Spriež, salīdzina homogēnu (terminu vēl nezina) trigonometrisku un homogēnu eksponentvienādojumu, raksturo kopīgo un atšķirīgo tajos, piemēram, $\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$ un $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$. Mācību literatūrā iegūst informāciju par homogēniem vienādojumiem. Izsaka idejas par to atrisināšanu, formulē algoritmu, vingrinās atrisināt šādus vienādojumus. Skaidro vispārīgi vai ilustrē ar piemēru, kāpēc vienādojuma $\log_a f(x) + \log_a g(x) = b$ aizstāšana ar vienādojumu $\log_a (f(x) \cdot g(x)) = b$ var būt neekvivalents pārveidojums, izmantojot jau zināmo par logaritmu un logaritmiskiem vienādojumiem. Skaidro vispārīgi vai ilustrē ar piemēru, kāpēc vienādojuma $\sin f(x) = \sin g(x)$ aizstāšana ar vienādojumu $f(x) = g(x)$ ir neekvivalents pārveidojums, izmantojot jau zināmo par pagrieziena leņķa sinusu un trigonometriskajiem vienādojumiem. Vingrinās noteikt, vai dotie vienādojumi ir ekvivalenti, piemēram, $(x-4)^2 = 9$ un $x - 4 = 3$. Spriež, vai vienādojuma abu pušu kāpināšana kvadrātā ir ekvivalents pārveidojums. Skaidro vispārīgi vai ilustrē ar konkrētu piemēru, izmantojot jau zināmo par lineāru vienādojumu un kvadrātvienādojumu atrisināšanu. Atrisina iracionālu vienādojumu, abas puses kāpinot kvadrātā, izvēlas veidu, kā izvairīties no lieku sakņu iegūšanas – veicot pārbaudi vai uzrakstot vienādojumam ekvivalentu sistēmu, ievērojot definīcijas kopu. Piemērs. Atrisini vienādojumu: a) $\sqrt{3-x} = x + 3$, b) $\sqrt{3-x} = x + 2$. Lasa un analizē dotus vienādojumu (iracionāls un logaritmisks) atrisinājumus, izvērtē pārveidojumu ekvivalenci, raksturo kopīgo un atšķirīgo tajos. Lieto neekvivalentus pārveidojumus iracionālu un logaritmisku vienādojumu atrisināšanai. Piemēri. 1. Izskati dotos vienādojumu $\sqrt{3-x} = x - 5$ un $x\lg x = 100x$ atrisinājumus un raksturo kopīgo un atšķirīgo lietotajos paņēmienos. 2. Atrisini vienādojumu: a) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x} = x$; b) $x^{2+\log_2 x} = 8$.
Vienādojumu risināšana, izmantojot substitūciju	Skaidro algoritmu vienādojumu atrisināšanai, izmantojot substitūciju, raksturo un ar piemēriem ilustrē tipiskas kļūdas paņēmiena izmantošanā. Lieto substitūciju pazīstamās situācijās (algebrisks vienādojums, eksponentvienādojums, logaritmisks vienādojums, trigonometrisks vienādojums) un jaunā situācijā (iracionāls vienādojums). Piemērs. Atrisini vienādojumu $\sqrt{x+2} + 3\sqrt[4]{x+2} = 10$.
Grafiskais paņēmiens vienādojumu un nevienādību atrisināšanai	Skaidro algoritmu vienādojuma $f(x) = g(x)$ sakņu skaita noteikšanai un atrisināšanai ar grafisko paņēmienu, nevienādības $f(x) < g(x)$ atrisināšanai ar grafisko paņēmienu; izvērtē dotus vienādojumu vai nevienādību atrisinājumus un raksturo pieļautās kļūdas paņēmiena izmantošanā, nepilnības risinājuma pieraksta veidošanā. Lieto grafisko paņēmienu, lai noteiktu vienādojuma sakņu skaitu, atrisinātu vienādojumus vai nevienādības jaunā situācijā. Piemēri. 1. Nosaki sakņu skaitu vienādojumam $x^4 = x + 2$. 2. Atrisini vienādojumu $\sqrt{x+2} = \lvert x \rvert$.

Temata apguves norise (turpinājums)

Vienādojumu un nevienādību atrisināšana, izmantojot sadalīšanu reizinātājos	Skaidro algoritmu vienādojumu atrisināšanai, izmantojot izteiksmes sadalīšanu reizinātājos, raksturo un ar piemēriem ilustrē tipiskas kļūdas paņēmiena izmantošanā, piemēram, izvērtējot dotus vienādojumu atrisinājumus. Atrisina augstāku kārtu vienādojumu, izmantojot sadalīšanu reizinātājos, piemēram, $x^5 + x^3 - x^2 - 1 = 0$. Atrisina trigonometrisku vienādojumu, izmantojot sadalīšanu reizinātājos, piemēram, $\cos^2 x - 2\cos x = 4\sin x - \sin 2x$. Lieto paņēmienu (sadalīšana reizinātājos) jaunā situācijā. Piemērs. Atrisini vienādojumu $\sqrt{x^2 - 25} \cdot (\log_2(3 - x)) = 0$.
Apkopojums par nevienādībām ar vienu mainīgo	Izvēlas paņēmienu – grafiski vai analītiski (izmantojot moduļa definīciju), atrisina nevienādības formā $\lvert f(x)\rvert > a$; $\lvert f(x)\rvert < a$, formulē un pamato algoritmus, vingrinās to lietojumā. Spriež, nosaka nevienādības atrisinājumu jaunās situācijās, izmantojot spriešanu, t. sk. sadalīšanu reizinātājos. Piemēri. 1. Atrisini nevienādību $x^3 + x > 0$. 2. Atrisini nevienādību $\sqrt{x} \cdot (x - 2) \leq 0$. 3. Atrisini nevienādību $\lvert 3 - x\rvert > 0$. Skaidro intervālu metodi (algoritmu) nevienādību ar vienu mainīgo atrisināšanai, pilnīga un pamatota risinājuma pieraksta veidošanu, raksturo un ar piemēriem ilustrē tipiskas kļūdas paņēmiena izmantošanā. Lieto intervālu metodi nevienādību ar vienu mainīgo atrisināšanai. Piemērs. Atrisini nevienādību $\frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{1 - x} \geq 0$. Pierāda nevienādības, izvēloties piemērotu paņēmienu, t. sk. matemātiskās indukcijas principu. Piemēri. 1. Pierādi nevienādību $x^2 - x + 3 > 0$. 2. Pierādi nevienādību $x^4 + x^2 - 6x + 9 > 0$. 3. Pierādi nevienādību $2^n < n!$, ja $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$.
Vienādojumi un nevienādības ar parametru	Skaidro, ko nozīmē atrisināt vienādojumu ar parametru, kā korekti un pilnīgi pierakstīt atbildi. Sadarbojas un izveido pārskatu par to, kā risināt noteikta veida vienādojumu ar parametru (piemēram, lineārs vienādojums, eksponentvienādojums); uzklausa citu veidotos pārskatus par cita veida vienādojumiem, izvērtē un papildina tos, formulē jautājumus par neskaidro u. tml. Vingrinās atrisināt vienādojumus un nevienādības ar parametru, pirms risinājuma vārdiski raksturo nosacījumus par parametru, kas jāņem vērā, lai aprakstītu visas dažādās iespējas. Piemēri. 1. Atrisini vienādojumu $\frac{x^2 - a^2}{x - a} = 0$ visām parametra a vērtībām. 2. Atrisini vienādojumu $\sqrt{x - 3} = a$ visām parametra a vērtībām.

Temata apguves norise (turpinājums)

Vienādojumi, nevienādības un nevienādību sistēmas ar diviem mainīgajiem	Izvēlas veidu (ar piemēriem, teorētiski) un skaidro, ko nozīmē atrisināt vienādojumu un nevienādību ar diviem mainīgajiem, raksturo vienādojuma vispārīgā atrisinājuma pierakstīšanu analītiski, vienādojuma un nevienādības atrisinājumu kopas attēlošanu grafiski. Nosaka vienādojuma ar diviem mainīgajiem atrisinājumu, izmantojot spriešanu.
	Piemēri. 1. Atrisini vienādojumu $x^2 + (y - 3)^2 = 0$. 2. Atrisini vienādojumu $(x - 2) \cdot (y + 2) = 0$, attēlo visu atrisinājumu kopu koordinātu plaknē un pieraksti visu atrisinājumu kopu analītiski; paskaidro simbolu lietojumu.
	Pazīstamās un jaunās situācijās atrisina vienādojumus ar diviem mainīgajiem, izvēloties piemērotu paņēmienu (sadalīšana reizinātājos, substitūcija, grafiskais paņēmiens utt.); izmanto pilno pārlasi, lai noteiktu atrisinājumus kopās $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$.
	Piemērs. Atrisini vienādojumu $(x - y)^3 = (x - y)^2$, visu atrisinājumu kopu pieraksti analītiski, korekti lietojot matemātiskos simbolus.
	Atrisina nevienādības un to sistēmas ar diviem mainīgajiem, attēlojot koordinātu plaknē to atrisinājumu kopu.
	Piemērs. Koordinātu plaknē attēlo dotās nevienādību sistēmas visu atrisinājumu kopu $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 9 \\ \|x - y\| > 2 \end{cases}$.

Temata apguves norise (turpinājums)

Vienādojumu sistēmas ar diviem mainīgajiem	Izmanto zināšanas, pēta, formulē un pamato sistēmas $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ atrisinājuma eksistenci un to skaitu atkarībā no koeficientiem un sakarībām starp tiem. Salīdzina iegūtos rezultātus ar informāciju mācību literatūrā. Lieto iegūtos rezultātus, formulējot spriedumus par divu lineāru vienādojumu sistēmu ar parametru.
	Piemērs. Nosaki, ar kādu parametra a vērtību sistēmai $\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - 3y = a \end{cases}$ nav atrisinājuma.
	Izvēlas vai veido piemērus un skaidro jau apgūtos algoritmus/paņēmienus vienādojumu sistēmu ar diviem mainīgajiem atrisināšanai (ievietošanas paņēmiens, saskaitīšanas paņēmiens, grafiskais paņēmiens). Lieto jau apgūtos paņēmienus jaunās situācijās, t. sk. jauktu vienādojumu sistēmu atrisināšanai.
	Piemēri. Atrisini vienādojumu sistēmu: a) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 19 \\ x^2y + xy^2 = -6 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ \lvert x - 2y \rvert = 2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x - y = 4 \\ \lg(2y - x) = 0 \end{cases}$.
	Spriež, saskata un skaidro substitūcijas izmantošanu jaunā situācijā (sistēmu atrisināšanai).
	Piemērs. Atrisini vienādojumu sistēmu $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2 \\ x - y = 16 \end{cases}$, izmantojot substitūciju (definējot jaunu vai jaunus mainīgos).
	Vingrinās lietot substitūciju vienādojumu sistēmas atrisināšanai. Spriež, saista ar jau iegūto pieredzi homogēnu vienādojumu risināšanā un atrisina vienādojumu sistēmu, kuru kreisās puses ir homogēnas attiecībā pret x un y.
	Piemērs. Atrisini vienādojumu sistēmu $\begin{cases} x^2 - 5y^2 = -1 \\ 3xy + 7y^2 = 1 \end{cases}$.
	Spriež, meklē risinājumu jaunā situācijā.
	Piemērs. Atrisini vienādojumu sistēmu $\begin{cases} x + y + xy = 5 \\ x^2 + y^2 + xy = 7 \end{cases}$.
	Atrisina situāciju (teksta) uzdevumus, sastādot vienādojumu sistēmu pazīstamās un jaunās situācijās (piemēram, par kustību, par kopīgo darbu, par plānoto un faktiski esošo, par skaitļiem, par procentiem).

PIELIKUMI

1. pielikums. Skolēnam sasniedzamie rezultāti optimālajā un augstākajā mācību satura apguves līmenī

6. pielikums
Ministru kabineta
2019. gada 3. septembra
noteikumiem Nr. 416

Plānotie skolēnam sasniedzamie rezultāti matemātikas mācību jomā

Optimālais apguves līmenis	Augstākais apguves līmenis
1. Matemātikas valodu izmanto saziņai un zinātniskai jēdzienu, ideju, problēmu risinājumu aprakstīšanai	
1.1. Matemātisks teksts, pieņemtie simboli un apzīmējumi	
1.1.1. Lasa izvērstu matemātisku tekstu ar aktuālu matemātisku kontekstu un raksturo tā saturu, demonstrējot izpratni par tajā iekļautajiem jēdzieniem, pieņemto simbolu, apzīmējumu un matemātikai raksturīgo izteikumu formu lietojumu.	1.1.1. Lasa daļēji pazīstama satura izvērstu matemātisku tekstu, nepazīstamu jēdzienu, simbolu vai apzīmējumu nozīmi noskaidro papildu avotos vai izmanto izpratni par teksta saturu kopumā, raksturo teksta mērķi un kritiski izvērtē satura atbilstību tam.
1.1.2. Vārdiski un rakstiski veido izvērstu matemātisku tekstu konkrētai auditorijai, korekti lieto izmantotos jēdzienus, pieņemtos simbolus un apzīmējumus, lai pamatotu matemātisko objektu īpašības, formulētu idejas un raksturotu saistību starp tām, aprakstītu risinājumus un lietotos paņēmienus.	1.1.2. Veido izvērstu matemātisku tekstu zinātniskajā valodā, ņemot vērā auditorijas sastāvu, lai raksturotu, skaidrotu un argumentētu idejas, aprakstītu pētāmo problēmu, pētījuma mērķi un gaitu, pamatotu iegūtos rezultātus un secinājumus.
1.2. Dažādi attēlošanas veidi (reprezentācijas)	
1.2.1. Skaidro, salīdzina dažādus situācijai noderīgus matemātisko objektu attēlošanas veidus, izvēlas piemērotāko un argumentē to.	1.2.1. Vispārīgi raksturo matemātisko objektu dažādu attēlošanas veidu lietojuma priekšrocības un ierobežojumus matemātisku problēmu risināšanā.
1.2.2. Skaidro matemātisku izteiksmju identiskos pārveidojumus un vienādojumu, nevienādību un to sistēmu ekvivalentos pārveidojumus; konkrētos piemēros skaidro neekvivalentus pārveidojumus.	1.2.2. Raksturo un pamato ekvivalentu un neekvivalentu pārveidojumu lietojumu vienādojumu, nevienādību un to sistēmu atrisināšanai.
1.2.3. Skaidro taisnes, riņķa līnijas un vektora attēlošanu koordinātu plaknē un analītisko pierakstu; pāriet no viena attēlošanas veida uz otru, ievērojot situācijas kontekstu.	1.2.3. Raksturo iespējas koordinātu plaknē attēlotu līniju/plaknes figūru aprakstīt analītiski un otrādi – vienādojumu ar diviem mainīgajiem attēlot koordinātu plaknē. Veido spriedumus, vienu un to pašu matemātisko modeli attēlojot koordinātu plaknē un pierakstot analītiski.
1.2.4. Lieto saistību starp dažādu matemātikas apakšnozaru apgūtajiem elementiem, lai tos skaidrotu, attēlotu, noteiktu nezināmos lielumus un īpašības.	1.2.4. Formulē un pamato apgalvojumus, izmantojot saistību starp dažādu matemātikas apakšnozaru apgūtajiem elementiem.
	1.2.5. Skaidro atvasinājumu un integrāli, izmantojot gan to fizikālo, gan ģeometrisko nozīmi.
2. Risināt problēmu matemātikai raksturīgi nozīmē saskatīt struktūras, sistēmas, sakarības, veidot vispārinājumus un tos pierādīt	
2.1. Spriešana (pēc analoģijas, induktīva un deduktīva, lietojot matemātiskās loģikas elementus)	
2.1.1. Ievērojot jaunās situācijas kontekstu, raksturo kopīgo un atšķirīgo ar līdzīgām, agrāk aplūkotām situācijām un secina par zināšanām, prasmēm un paņēmieniem, kas noderīgi problēmas atrisināšanai.	2.1.1. Jaunā, kompleksā situācijā spriež, formulē uz situācijas analīzi vērstus jautājumus, secina gan par iepriekšējo zināšanu, prasmju un paņēmienu lietošanas iespējām, gan to nepieciešamību un formulē, kāda informācija vai kādas jaunas zināšanas nepieciešamas.

Optimālais apguves līmenis	Augstākais apguves līmenis
2.1.2. Jaunā situācijā izmanto induktīvu un deduktīvu spriešanu, apzinoties, ka vispārīgu apgalvojumu patiesums jāpierāda.	2.1.2. Jaunā situācijā izmanto induktīvu un deduktīvu spriešanu, pierāda formulēto vispārīgo apgalvojumu patiesumu.
	2.1.3. Skaidro, ko nozīmē risināt vienādojumu un nevienādību ar parametru.
2.2. Matemātiskā modelēšana un citi problēmrisināšanas paņēmieni	
2.2.1. Veic visus matemātiskās modelēšanas soļus, lai atrisinātu problēmu ar citu mācību jomu vai matemātisku kontekstu. Izvērtē dažādu matemātisko modeļu lietojumu, ievērojot situācijas kontekstu.	2.2.1. Formulē pētāmo jautājumu sev nozīmīgā kontekstā un veic visus matemātiskās modelēšanas soļus, lai atrisinātu autentisku problēmu. Izvērtē iegūtos rezultātus un, ja nepieciešams, uzlabo matemātisko modeli.
2.2.2. Argumentē problēmrisināšanas paņēmiena (spriežu no beigām, sadalu problēmu daļās, pāreju uz līdzīgu, vienkāršāku problēmu u. tml.) izvēli, lai atrisinātu problēmu ar pazīstamu matemātisko kontekstu.	2.2.2. Apzina, izvērtē matemātikai raksturīgo problēmrisināšanas paņēmienu (spriežu no beigām, sadalu problēmu daļās, pāreju uz līdzīgu, vienkāršāku problēmu u. tml.) lietojumu, izstrādājot kompleksas problēmas risinājuma plānu.
2.3. Apgalvojumi un to patiesuma pierādīšana	
2.3.1. Lieto tiešo pierādījumu, pierādot vispārīgus apgalvojumus gan ar ģeometrijas, gan ar algebras saturu, loģiski saistot trīs un vairāk spriedumus, izmantojot zināmus vai iepriekš pierādītus apgalvojumus.	2.3.1. Lieto tiešo pierādījumu, vienā pierādījumā saistot dažādu matemātikas apakšnozaru elementus.
2.3.2. Veido un izvērtē pretpiemērus apgalvojuma patiesuma pierādīšanai.	2.3.2. Jaunās situācijās lieto pierādījumu no pretējā.
2.3.3. Skaidro jēdzienus *tiešā teorēma*, *apgrieztā teorēma*, formulē teorēmai apgriezto teorēmu un izvērtē tās patiesumu.	2.3.3. Skaidro jēdzienus *pietiekams nosacījums*, *nepieciešams nosacījums*, lieto izteikuma formu ".. tad un tikai tad ..", formulējot apgalvojumus, pierādot to patiesumu.
	2.3.4. Lieto matemātiskās indukcijas principu, lai pierādītu vispārīgu apgalvojumu patiesumu.
3. Skaitļus izmanto konkrētu, arī praktisku uzdevumu atrisināšanai. Katrai darbībai ar skaitļiem ir noteikta jēga, un to izpildei ir noteikti likumi/algoritmi	
3.1. Skaitļa pieraksts un skaitļu salīdzināšana	
3.1.1. Skaidro, kas ir n-tās pakāpes saknes, pakāpes ar racionālu kāpinātāju, logaritma, pagrieziena leņķa sinusa un kosinusa skaitliskā vērtība. 3.1.2. Skaidro reālu skaitļu (n-tās pakāpes saknes, pakāpes ar racionālu kāpinātāju, pagrieziena leņķa sinusi, kosinusi) salīdzināšanu, izmantojot attiecīgo funkciju īpašības vai grafisko attēlojumu, vienības riņķi.	3.1.1. Skaidro skaitli e, izmantojot virknes robežu; definē un lieto naturāllogaritmu. 3.1.2. Skaidro kompleksa skaitļa pierakstu algebriskā formā, eksponenciālā formā, trigonometriskā formā un pāriet no vienas formas uz citu. 3.1.3. Attēlo skaitli komplekso skaitļu plaknē, aprēķina kompleksa skaitļa moduli. 3.1.4. Skaidro, veido, lieto algoritmus pārejai no vienas skaitīšanas sistēmas uz citu naturāla skaitļa pierakstīšanai.
3.2. Darbības ar skaitļiem, to īpašības, algoritmi	
3.2.1. Skaidro saistību starp n-tās pakāpes saknes aprēķināšanu, kāpināšanu un logaritmēšanu; formulē un lieto algoritmus darbību izpildei ar n-tās pakāpes saknēm (paplašināšana/saīsināšana, sakne no reizinājuma, dalījuma, pakāpes, saknes) un logaritmiem (reizinājums, dalījums, pakāpe, bāzes maiņa) skaitlisku izteiksmju vērtības aprēķināšanai.	3.2.1. Pierāda un lieto n-tās pakāpes sakņu, pakāpju ar racionālu kāpinātāju, logaritmu īpašības, sakarības starp pagrieziena leņķa sinusu, kosinusu, tangensu un kotangensu. 3.2.2. Izpilda darbības (saskaita, atņem, reizina, dala, aprēķina kvadrātsaknes vērtību) ar kompleksiem skaitļiem, izvēloties piemērotāko pieraksta formu.

Optimālais apguves līmenis	Augstākais apguves līmenis
3.2.2. Skaidro, formulē, lieto sakarības starp pagrieziena leņķa sinusu un kosinusu; aprēķina skaitlisko vērtību izteiksmei, kas satur sinusus, kosinusus, izmantojot sakarības starp tiem, vienības riņķi, sinusa un kosinusa funkciju īpašības, informāciju uzziņu avotos un digitālos rīkus. 3.2.3. Veido spriedumus matemātiskos un citu mācību jomu kontekstos, izmantojot dažādas reālu skaitļu pieraksta formas.	
3.3. Darbības ar skaitļiem kā reālu situāciju modeļi	
3.3.1. Lieto logaritmus citu mācību jomu (piemēram, bioloģijas, psiholoģijas, astronomijas, ķīmijas, ģeogrāfijas, fizikas) kontekstā. 3.3.2. Lieto pagrieziena leņķa sinusu, kosinusu citu mācību jomu (piemēram, fizikā svārstību aprakstīšanai) kontekstā.	
4. Sakarības starp lielumiem apraksta algebriskie modeļi un funkcijas; izmantojot šos modeļus problēmu risināšanai, tos pārveido, nodrošinot ekvivalenci	
4.1. Virknes	
4.1.1. Saskata likumsakarību ģeometriskajā progresijā un pieraksta to ar vispārīgā locekļa formulu, lieto ģeometriskās progresijas pirmo n locekļu summas formulu. 4.1.2. Nosaka virknes nezināmos locekļus, sakarības starp virknes locekļiem, ja tā uzdota vispārīgi vai rekurenti, vienkāršākos gadījumos pāriet no viena virknes uzdošanas veida uz citu.	4.1.1. Lieto matemātiskās indukcijas principu, pierādot aritmētiskās, ģeometriskās progresijas formulas, rekurenti uzdotas virknes vispārīgā locekļa formulu, galīgas vai bezgalīgas skaitļu virknes visu locekļu summu. 4.1.2. Nosaka virknes robežu, spriežot, modelējot uz skaitļu ass, izmantojot grafisko attēlu un kritiski izvērtējot tā lietojumu konkrētajā situācijā. 4.1.3. Veic aprēķinus, lietojot izklājlapas, un formulē pieņēmumu par skaitli e kā virknes $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ robežu, ja $n \to +\infty$.
4.2. Reāla argumenta funkcijas	
4.2.1. Nosaka, vai dažādos veidos uzdota sakarība ir funkcija. 4.2.2. Skaidro, kas ir argumenta pieaugums un funkcijas pieaugums, nosaka funkcijas pieaugumu no grafika un analītiski. 4.2.3. Skaidro, kas ir salikta funkcija, lietojot jēdzienus *iekšējā funkcija*, *ārējā funkcija*. Saista salikto funkciju īpašības un grafiku zīmēšanu ar zināšanām par attiecīgo elementāro funkciju. 4.2.4. Uzzīmē funkciju $y = f(x+a)$, $y = f(x) + a$, $y = k \cdot f(x)$, $y = f(kx)$ grafikus un raksturo to īpašības, izmantojot zināšanas par funkcijas $y = f(x)$ īpašībām un grafiku. 4.2.5. Nosaka funkciju $f(x) = \frac{ax+\mathrm{b}}{cx+d}$, $f(x) = \mathrm{c} \cdot \mathrm{a}^{kx+b}$, $f(x) = a \cdot \sin(bx+\mathrm{c})$, $f(x) = a \cdot \cos(bx+\mathrm{c})$ īpašības (definīcijas kopa, vērtību kopa, funkcijas nulles, vienādas zīmes intervāli, lielākā/mazākā vērtība, pāra/nepāra funkcija, periodiskas funkcijas periods) analītiski vai grafiski, lietojot dažādus funkcijas pieraksta veidus, funkcijas grafika pārbīdes un citas transformācijas.	4.2.1. Pierāda jaunu, nezināmu, t. sk. intervālos, dažādi uzdotu funkciju īpašības. 4.2.2. Skaidro, kas ir dotai funkcijai inversā funkcija, un nosacījumus tās eksistencei; raksturo savstarpēji inversu funkciju grafiku novietojumu koordinātu plaknē; definē logaritmisko funkciju, inversās trigonometriskās funkcijas. 4.2.3. Raksturo, pamato pakāpes funkcijas $f(x) = x^n$ īpašības, ja kāpinātājs ir racionāls skaitlis. 4.2.4. Raksturo un pamato funkciju $f(x) = \mathrm{c} \cdot \log_a(kx+b)$, $f(x) = a \cdot \mathrm{tg}\,(kx+b)$, $f(x) = a \cdot \mathrm{ctg}\,(kx+b)$ īpašības (definīcijas kopa, vērtību kopa, funkcijas nulles, vienādas zīmes intervāli, lielākā/mazākā vērtība, pāra/nepāra funkcija, periodiskas funkcijas periods), asimptotas un funkcijas robežu. 4.2.5. Uzzīmē un raksturo funkciju $y = \|f(x)\|$, $y = f(\|x\|)$ īpašības un grafikus, izmantojot zināšanas par funkcijas $y = f(x)$ īpašībām un grafiku.

Optimālais apguves līmenis	Augstākais apguves līmenis
4.2.6. Raksturo, analizē situāciju, ja sakarību starp lielumiem raksturo funkcijas $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $f(x) = c \cdot a^{kx+b}$, $f(x) = a \cdot \sin(bx+c)$ un $f(x) = a \cdot \cos(bx+c)$, izmantojot gan funkcijas formulu, gan grafiku. 4.2.7. Zīmē jaunas, nezināmas funkcijas, piemēram, $f(x) = \mathrm{tg}\, x$, $f(x) = \dfrac{2}{x^2-1}$ grafiku, izmantojot digitālos rīkus, un spriež par funkcijas īpašībām, izvērtē riskus maldīgu priekšstatu veidošanai.	
4.3. Funkcijas atvasinājums, integrālis	
	4.3.1. Nosaka funkcijas robežu, spriežot, izmantojot funkcijas grafika īpašības; skaidro un vizuāli interpretē funkcijas nepārtrauktību. 4.3.2. Interpretē atvasinājumu kā veiktā ceļa izmaiņas ātrumu; skaidro funkcijas atvasinājuma punktā ģeometrisko interpretāciju; nosaka vienkāršu funkciju, piemēram, $y = 4$, $y = 6x$, $y = 3x^2$ atvasinājumu, izmantojot definīciju, un formulē vispārīgus secinājumus. 4.3.3. Atvasina pakāpes funkciju, funkcijas $f(x) = \sin x$, $y = \cos x$, $f(x) = e^x$ un $f(x) = \ln x$, lieto likumus funkciju summas, reizinājuma un dalījuma atvasināšanai, atvasina saliktu funkciju formā $f(ax+b)$, ja f ir kāda no nosauktajām funkcijām. 4.3.4. Skaidro nosacījumus atvasinājuma eksistencei punktā, atšķir kritiskos punktus un ekstrēma punktus; skaidro ekstrēmu, funkcijas monotonitāti, pārliekuma punktu, grafika izliekumu un ieliekumu, izmantojot atvasinājuma punktā ģeometrisko interpretāciju. 4.3.5. Lieto funkcijas atvasinājumu, pētot polinomiālu funkciju un daļveida funkciju īpašības, zīmējot to grafikus, nosakot funkcijas vislielāko/vismazāko vērtību matemātiskos un citu mācību jomu kontekstos. 4.3.6. Skaidro primitīvās funkcijas atrašanu/integrēšanu kā atvasināšanai pretējo darbību un nosaka nenoteikto integrāli, izmantojot tā īpašības un integrēšanas pamatformulas (atbilstoši iepriekš lietotajām atvasināšanas formulām). 4.3.7. Aprēķina noteikto integrāli, izmantojot Ņūtona–Leibnica formulu, un to lieto plaknes figūras laukuma un rotācijas ķermeņa tilpuma aprēķināšanai, taisnvirziena kustībā noietā ceļa aprēķināšanai, darba aprēķināšanai u. tml.

Optimālais apguves līmenis	Augstākais apguves līmenis
4.4. Algebriskas izteiksmes	
4.4.1. Skaidro un nosaka racionālas daļveida izteiksmes/ algebriskas daļas definīcijas kopu. Aprēķina racionālas daļveida izteiksmes skaitlisko vērtību noteiktai mainīgā skaitliskajai vērtībai. 4.4.2. Sadala izteiksmi reizinātājos, vairākkārt iznesot pirms iekavām kopīgo reizinātāju, lietojot kubu summas/starpības formulas, lai pamatotu identitātes, risinātu vienādojumus. 4.4.3. Algebrisku daļu lasa, uzraksta pēc vārdiskā apraksta, raksturo iespējas to pierakstīt dažādos veidos, skaidro saīsināšanu, paplašināšanu. 4.4.4. Reizina un dala algebriskas daļas, kuru skaitītājā un saucējā ir monomi vai pirmās un otrās pakāpes polinomi; saskaita un atņem algebriskas daļas, ja saucēji ir pirmās vai otrās pakāpes polinomi un kopsaucēja pakāpe nepārsniedz trešo. 4.4.5. Veic algebriskus pārveidojumus ar pakāpēm, trigonometriskām izteiksmēm, lai pamatotu identitātes, pētītu funkciju īpašības un risinātu vienādojumus. 4.4.6. Skaidro, kas ir radiāns. Lieto sakarību starp grādiem un radiāniem, pārejot no vienas leņķa mērvienības uz otru. 4.4.7. Secina par sakarībām starp vienādu un dažādu argumentu sinusiem un kosinusiem, lietojot vienības riņķi. 4.4.8. Lieto sakarību $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, argumenta summas formulas un divkāršā argumenta formulas trigonometrisku izteiksmju skaitliskās vērtības aprēķināšanai, identiskai pārveidošanai un vienādojumu risināšanai.	4.4.1. Sadala izteiksmi reizinātājos, lietojot saīsināto reizināšanas formulu vispārinājumus, polinoma dalīšanu ar binomu (Bezū teorēmu), lai pamatotu identitātes, risinātu vienādojumus un nevienādības. 4.4.2. Reizina, dala, saskaita un atņem algebriskas daļas, kuru saucējā un skaitītājā ir polinomi vai izteiksmes ar vispārīgā veidā uzdotām pakāpēm. 4.4.3. Izsaka algebrisku daļu kā divu daļu (saucēji ir lineāras izteiksmes) summu ar nenoteikto koeficientu metodi, piemēram, $\frac{(4x-9)}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$. 4.4.4. Veic algebriskus pārveidojumus ar saknēm un logaritmiem, lai pamatotu identitātes, pētītu funkciju īpašības un risinātu vienādojumus. 4.4.5. Pierāda sakarību starp leņķa lielumu grādos un radiānos. 4.4.6. Pierāda redukcijas formulas un viena argumenta sakarības $\text{tg}\, x \cdot \text{ctg}\, x = 1$, $1 + \text{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$, $1 + \text{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$, lieto tās trigonometrisku izteiksmju vērtības aprēķināšanai, izteiksmju identiskai pārveidošanai, vienādojumu un nevienādību atrisināšanai. 4.4.7. Pierāda argumenta summas formulas, divkārša argumenta formulas un lieto tās izteiksmju vērtības aprēķināšanai, izteiksmju identiskai pārveidošanai un vienādojumu atrisināšanai.
4.5. Vienādojumi, nevienādības, to sistēmas	
4.5.1. Atrisina pamatskolā apgūtos vienādojumus, spriežot, lietojot attiecīgo funkciju īpašības un vienādojumu atrisināšanas metodes (sadalot reizinātājos, substitūciju, grafisko paņēmienu). Atrisina nevienādību sistēmu (satur lineāras nevienādības, kvadrātnevienādības). 4.5.2. Atrisina daļveida vienādojumu, nevienādību (saucēji ir pirmās vai otrās pakāpes polinomi un kopsaucēja pakāpe nepārsniedz trešo); izvēlas paņēmienu nevienādības atrisināšanai (pārejot uz nevienādību sistēmām, ar intervālu metodi). 4.5.3. Atrisina eksponentvienādojumu, kas pārveidojams formā $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, un eksponentnevienādību, kas pārveidojama formā $a^{f(x)} < a^{g(x)}$, lietojot eksponentfunkcijas īpašības. 4.5.4. Atrisina noteiktā intervālā trigonometriskos vienādojumus, kas pārveidojami formā $\sin(ax + b) = c$ un $\cos(ax + b) = c$, lietojot vienības riņķi, sinusa un kosinusa funkciju īpašības.	4.5.1. Atrisina logaritmisku vienādojumu, kas pārveidojams formā $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, un logaritmisku nevienādību, kas pārveidojama formā $\log_a f(x) < \log_a g(x)$, lietojot logaritmiskās funkcijas īpašības. 4.5.2. Skaidro inverso trigonometrisko funkciju lietojumu vienādojumu risināšanā. Atrisina trigonometriskos vienādojumus vispārīgā veidā, lietojot vienības riņķi un sinusa, kosinusa, tangensa un kotangensa funkciju īpašības. 4.5.3. Lieto neekvivalentus pārveidojumus dažādu vienādojumu risināšanā, piemēram, vienādojuma abas puses kāpina kvadrātā, abas puses izdala ar vienu un to pašu izteiksmi, abas puses logaritmē un raksturo papildu veicamos spriedumus. 4.5.4. Atrisina augstāko kārtu vienādojumus, lietojot vienādojumu risināšanas metodes (sadalot reizinātājos, substitūciju, grafisko paņēmienu). 4.5.5. Atrisina jauktas vienādojumu sistēmas, kas var saturēt pirmās, otrās pakāpes vienādojumus, daļveida vienādojumus, eksponentvienādojumus vai logaritmiskus vienādojumus.

Optimālais apguves līmenis	Augstākais apguves līmenis
4.5.5. Plāno vienādojumu atrisināšanas metožu (sadalot reizinātājos, substitūcija, grafiskais paņēmiens) lietojumu, lai atrisinātu daļveida vienādojumu, eksponentvienādojumu, trigonometrisko vienādojumu. 4.5.6. Atrisina vienādojumus, nevienādības (pakāpe nepārsniedz otro) un to sistēmas ar diviem mainīgajiem reālo skaitļu kopā, attēlojot atrisinājumu koordinātu plaknē. 4.5.7. Lieto vienādojumu $Ax + By = C$ kopā $\mathbb{N}$, daļveida vienādojumu, eksponentvienādojumu, daļveida nevienādību, divu mainīgo vienādojumu sistēmu (daļveida vienādojums un lineārs vienādojums, eksponentvienādojums un lineārs vienādojums), lai modelētu situāciju ar matemātisku un citu mācību jomu kontekstu.	4.5.6. Atrisina dažāda veida vienādojumus, to sistēmas un nevienādības ar parametru. 4.5.7. Analītiski vai grafiski atrisina vienādojumus un nevienādības, kas satur moduli $\lvert f(x)\rvert = g(x)$, $\lvert f(x)\rvert = \lvert g(x)\rvert$, $(<, >, \leq, \geq)$. 4.5.8. Spriežot, veicot algebriskus pārveidojumus, pilno pārlasi vai interpretējot grafiski, atrisina vienādojumu ar diviem mainīgajiem kopās $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, piemēram, $x^2 - y^2 = 4$. 4.5.9. Lieto dalāmību (kongruences), nosakot izteiksmju īpašības, risinot vienādojumus ar diviem mainīgajiem kopās $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$. 4.5.10. Pierāda nevienādības spriežot. Pierāda dalāmību, spriežot un lietojot matemātiskās indukcijas principu. 4.5.11. Atrisina vienādojumu komplekso skaitļu kopā, lietojot dažādas vienādojumu risināšanas metodes.
5. Datus par objektiem, situācijām, notikumiem, procesiem var matemātiski apstrādāt, analizēt, lai pieņemtu pamatotus lēmumus	
5.1. Kopas, darbības ar kopām un kombinatorikas elementi	
5.1.1. Nosaka un pamato, vai kopa ir galīga/bezgalīga, ar piemēriem ilustrē galīgu un bezgalīgu kopu. Formulē un pamato apgalvojumus, izmantojot jēdzienus *kopas elements*, *apakškopa*, *tukša kopa*; nosaka saistību starp skaitļu kopām $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$. 5.1.2. Raksturo un pamato īpašības, kas piemīt kopas visiem elementiem. Nosaka un pamato kopas elementa un apakškopas ar noteiktu īpašību eksistenci; definē/uzdod kopu ar visu elementu sarakstu un ar formulu, piemēram, $\{a = 3n \mid n \in \mathbb{N}\}$. 5.1.3. Nosaka galīgu un bezgalīgu kopu apvienojumu, šķēlumu un starpību pazīstamās un jaunās situācijās. 5.1.4. Elementu/objektu skaitu nosaka, spriežot un veicot pilno pārlasi, pamatojot savus spriedumus. 5.1.5. Skaidro jēdzienus *izlase*, *kombinācijas*, *variācijas* un *permutācijas*, to savstarpējo saistību un saistību ar jēdzieniem *kopa* un *apakškopa*. 5.1.6. Lieto formulas permutāciju, variāciju un kombināciju skaita aprēķināšanai un sakarību $C_n^k = C_n^{n-k}$; izvērtē iespējas noteikt objektu skaitu, spriežot un veicot pilno pārlasi vai lietojot kombinatorikas formulas.	5.1.1. Pierāda formulas permutāciju, variāciju skaita aprēķināšanai, galīgas kopas (satur n elementus) visu iespējamo apakškopu (ieskaitot tukšu kopu) skaitu, kombināciju skaita īpašības. 5.1.2. Formulē un pamato sakarības Paskāla trijstūrī; lieto Ņūtona binomu, veidojot konkrētus izvirzījumus, lai formulētu spriedumus matemātiskos kontekstos. 5.1.3. Identiski pārveido izteiksmes, kas satur faktoriālu. Modelē situāciju ar vienādojumu, nevienādību, lietojot formulas variāciju vai kombināciju skaita noteikšanai.
5.2. Varbūtību teorijas elementi	
5.2.1. Skaidro, kas ir eksperiments/mēģinājums, definē *notikumu*, *iznākumu kopu*, *pretējo notikumu*, *drošu notikumu*, *neiespējamu notikumu*; konkrētos piemēros nosaka iznākumu kopu, nosauc droša, neiespējama un pretēja notikuma piemērus. 5.2.2. Spriež, lieto formulas permutāciju, variāciju un kombināciju skaita aprēķināšanai, nosaka notikumam labvēlīgo iznākumu skaitu, visu iznākumu skaitu un aprēķina notikuma varbūtību.	5.2.1. Aprēķina savienojamu notikumu apvienojuma varbūtību, izmantojot darbības ar kopām un to vizuālo attēlojumu. 5.2.2. Lieto pilnās varbūtības formulu varbūtības aprēķināšanai. 5.2.3. Praktiska konteksta piemēros skaidro, nosaka, analizē mainīga lieluma (iespējamo vērtību skaits galīgs) varbūtības sadalījumu, aprēķina mainīgā lieluma sagaidāmo vērtību.

Optimālais apguves līmenis	Augstākais apguves līmenis
5.2.3. Skaidro, kas ir notikuma absolūtais biežums, definē notikuma relatīvo biežumu/statistisko varbūtību; aprēķina statistisko varbūtību, formulē datos balstītus secinājumus. 5.2.4. Nosaka, attēlo ar Eilera-Venna diagrammu divu notikumu apvienojumu, šķēlumu, starpību. Izmanto darbības ar notikumiem, lai skaidrotu un aprēķinātu varbūtību, t. sk. nesavienojamu notikumu apvienojuma varbūtību. 5.2.5. Skaidro, kas ir nosacītā varbūtība, un atšķirību starp $P(A \mid B)$ un $P(B \mid A)$; aprēķina nosacīto varbūtību, izmantojot notikumu biežumu. 5.2.6. Pamato, kāpēc dotie notikumi ir vai nav neatkarīgi, izmantojot nosacīto varbūtību. Aprēķina varbūtību, lietojot varbūtību reizināšanas teorēmu.	5.2.4. Praktiska konteksta piemēros skaidro vienmērīgo, Bernulli un binomiālo sadalījumu diskrētiem mainīgiem lielumiem, lieto Bernulli formulu varbūtības aprēķināšanai. Skaidro saistību starp binomiālo sadalījumu diskrētiem mainīgiem lielumiem un normālo sadalījumu nepārtrauktiem mainīgiem lielumiem.
5.3. Statistikas elementi	
5.3.1. Skaidro, kas ir populācija (ģenerālkopa), izlase, nosacījumus reprezentatīvas izlases veidošanai; izmanto IT rīkus, lai raksturotu un pamatotu izlašu un populācijas (ģenerālkopas) raksturlielumu atšķirību, secina par izlašu raksturlielumu izmaiņām, palielinot izlašu apjomu. 5.3.2. Raksturo kvantitatīvus un kategoriālus (kvalitatīvus) datus. Attēlo tos biežuma tabulās vai grafiski vienam vai diviem mainīgiem lielumiem (pazīmēm), izmantojot IT rīkus. 5.3.3. Atbilstoši datu veidam (diskrēti, nepārtraukti), izmantojot reālu datu piemērus un IT rīkus, nosaka datu kopas vidējos lielumus (aritmētiskais vidējais, mediāna, moda), izkliedes mērus (amplitūda, standartnovirze, vidējā absolūtā novirze, kvartiles, starpkvartiļu amplitūda), veido grafiskos attēlojumus (stabiņu un kastu diagramma, izkliedes diagramma, histogramma) un formulē ar datiem pamatotus secinājumus. 5.3.4. Argumentēti raksturo pētījumu/eksperimentu, tā mērķi, piemēram, izlases reprezentativitāti, izvēlētā mainīgā lieluma (pazīmes) atbilstību pētāmai problēmai, vidējo lielumu un izkliedes mēru lietojumu u. tml. 5.3.5. Salīdzina divas vai vairākas izlases, izmantojot vidējos lielumus, izkliedes mērus, stabiņu un kastu diagrammu, izkliedes diagrammu. 5.3.6. Raksturo divu mainīgo lielumu (pazīmju) saistību, izmantojot biežuma tabulu, izkliedes diagrammu, Pīrsona korelācijas koeficientu (lineāra saistība) un atbilstošus IT rīkus. 5.3.7. Konkrētos piemēros nosaka un argumentē, vai saistība starp atkarīgo un neatkarīgo mainīgo ļauj secināt arī par cēloņsakarību. 5.3.8. Patstāvīgi pēta divu lielumu saistību, t. sk. korelāciju, – izvēlas lielumus, plāno pētījumu un ievāc datus, izmanto IT rīkus datu apstrādei un attēlošanai, analizē datus un formulē datos balstītus secinājumus.	5.3.1. Dotai histogrammai piemeklē normālo sadalījumu (Gausa līkni), kas tai atbilst vislabāk, izmantojot IT rīkus. Raksturo attēlotos datus, izmantojot vidējo vērtību, standartnovirzi un vienas, divu un trīs standartnoviržu likumu. 5.3.2. Lai aprakstītu datus, pamatoti izvēlas (pamato ar datu simetriskumu un normālo sadalījumu) un aprēķina būtiskākos lielumu pārus: vidējo vērtību un standartnovirzi vai mediānu un starpkvartiļu amplitūdu. 5.3.3. Izmanto lineāro regresiju, atbilstošus IT rīkus, lai analizētu divu mainīgo lielumu (pazīmju) saistību. 5.3.4. Izvēlas sev nozīmīgu kontekstu, formulē pētāmo jautājumu, plāno un veic pētījumu/eksperimentu, iegūst datus, izmanto IT rīkus datu apstrādei, analizē datus, formulē datos balstītus secinājumus un pamato savas darbības katrā no soļiem.

Optimālais apguves līmenis	Augstākais apguves līmenis
6. Figūru īpašību, novietojuma, to raksturojošo lielumu izpēte ļauj risināt konkrētas, arī praktiskas, problēmas, formulēt vispārīgus secinājumus par objektiem, telpu, formu	
6.1. Plaknes figūras	
6.1.1. Pierāda sinusu teorēmu, kosinusu teorēmu un tās lieto situācijās ar matemātisku vai citu mācību jomu kontekstu. 6.1.2. Lieto paralēlo pārnesi, aksiālo simetriju, pagriezienu un homotētiju pazīstamos matemātiskos kontekstos, piemēram, lai noteiktu plaknes figūras novietojumu koordinātu plaknē, raksturotu funkcijas grafika pārbīdi, noteiktu dotai taisnei perpendikulāras taisnes virziena koeficientu.	6.1.1. Veido pierādījumu, lietojot apgūtos matemātikas instrumentus – trijstūru līdzību, ģeometriskos pārveidojumus, vektorus, koordinātu metodi –, lai pierādītu pazīstamu plaknes figūru īpašības jaunās situācijās, piemēram, trijstūra mediānu īpašību, trijstūra bisektrises īpašību, krustisku hordu īpašību. 6.1.2. Skaidro ģeometriskos pārveidojumus kā funkcijas, kuru definīcijas kopa ir plaknes punkti. Lieto ģeometriskos pārveidojumus un to īpašības, lai jaunās situācijās noteiktu plaknes figūru lielumus, pamatotu to īpašības.
6.2. Analītiskā ģeometrija	
6.2.1. Ģeometriskā formā nosaka vienādi vai pretēji vērstus vektorus, vienādus vektorus, pretējus vektorus, saskaita un atņem vektorus un reizina vektoru ar skaitli. Veido spriedumus, lietojot darbību ar vektoriem īpašības, divu vektoru kolinearitātes nosacījumu. Lieto vektorus ģeometriskā formā citu mācību jomu vai matemātiskā kontekstā. 6.2.2. Plaknē un telpā nosaka vektora koordinātas, aprēķina vektora garumu, izpilda darbības ar vektoriem koordinātu formā, lieto vektorus koordinātu formā, lai noteiktu figūru veidu, pamatotu to īpašības. 6.2.3. Nosaka punkta koordinātas Dekarta taisnleņķa koordinātu sistēmā telpā, ievērojot dotos nosacījumus, attēlo zīmējumā; aprēķina attālumu starp diviem punktiem koordinātu plaknē un telpā. 6.2.4. Attēlo koordinātu plaknē taisni, ja tā uzdota analītiski, un uzraksta taisnes vienādojumu pēc tās attēla koordinātu plaknē, t. sk. ja tā paralēla ordinātu asij, lieto taisnes atklāto vienādojumu, vienādojumu ar virziena koeficientu, vienādojumu caur diviem punktiem, vispārīgo vienādojumu, pāriet no viena veida uz citu; izvēlas taisnes uzdošanas veidu un to lieto, lai noteiktu figūru veidu, pamatotu to īpašības. 6.2.5. Formulē un lieto sakarības starp koeficientiem paralēlu un perpendikulāru taišņu vienādojumos. 6.2.6. Formulē saistību starp taisni, kas uzdota ar vispārīgo vienādojumu $Ax + By + C = 0$, un vektoru, kura koordinātas ir $(A; B)$, lieto to figūru īpašību noteikšanai. 6.2.7. Nosaka sakarības $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ punktu ģeometrisko vietu un otrādi – veido riņķa līnijas vienādojumu pēc tās attēlojuma koordinātu plaknē, zinot riņķa līnijas centra koordinātas un rādiusu.	6.2.1. Nosaka vektora projekciju uz patvaļīgas ass, izsaka vektoru plaknē kā divu vektoru (nav kolineāri) lineāru kombināciju plaknē, kā trīs vektoru (nav komplanāri) lineāru kombināciju telpā. To izmanto, lai skaidrotu, ka vektora koordinātas viennozīmīgi raksturo vektoru. 6.2.2. Lieto vektoru skalāro reizinājumu un īpašības, lai noteiktu un pierādītu figūru īpašības. Aprēķina vektoru skalāro reizinājumu koordinātu formā, lai noteiktu leņķi starp vektoriem. 6.2.3. Pamato un lieto formulu attāluma no punkta līdz taisnei noteikšanai. Aprēķina leņķi starp divām taisnēm, izmantojot zināšanas par leņķi starp vektoriem. 6.2.4. Nosaka analītiski uzdotas sakarības, piemēram, $x^2 - y^2 = 1$, punktu ģeometrisko vietu un otrādi – veido, pārbauda līniju vienādojumus pēc to attēlojumiem koordinātu plaknē.

Optimālais apguves līmenis	Augstākais apguves līmenis
6.3. Telpiski ķermeņi	
6.3.1. Sprież, formulē nosacījumus plaknes novilkšanai, īpašības un pazīmes, kas raksturo taisnes un plaknes, divu plakņu paralelitāti un perpendikularitāti, lai raksturotu, pamatotu telpisku ķermeņu īpašības. 6.3.2. Definē perpendikulu, slīpni, slīpnes projekciju, leņķi starp taisni un plakni, divplakņu kakta leņķi, formulē un pamato sakarības starp slīpņu un to projekciju garumiem, triju perpendikulu teorēmu, lai raksturotu, pamatotu telpisku ķermeņu īpašības, aprēķinātu to lielumus. 6.3.3. Veido zīmējumu, ievērojot nosacījumus par to, kādi telpiska ķermeņa lielumi saglabājas, kādi – nesaglabājas. 6.3.4. Formulē spriedumus par daudzskaldņa šķēlumu ar plakni, veido daudzskaldņa šķēlumu ar plakni, ja dotie plaknes punkti ir tieši savienojami, attēlo un matemātiski apraksta daudzskaldņu un rotācijas ķermeņu raksturīgos šķēlumus un to lielumus. 6.3.5. Aprēķina telpisku ķermeņu (taisna prizma, piramīda, cilindrs, konuss, lode), to daļu un vienkāršāko kombināciju (prizma un cilindrs, prizma un lode) elementu raksturīgos lielumus, virsmas laukumu, tilpumu, ja dotie lielumi ir konkrēti un vispārīgi uzdoti lielumi, t. sk. lietojot plaknes figūru līdzību, sakarības starp lielumiem modelējot algebriski.	6.3.1. Skaidro stereometriju kā vienu no aksiomātiskām sistēmām un veido pierādījumus, izmantojot piederības aksiomas, secinājumus no tām, lietojot tiešo pierādījumu un pierādījumu no pretējā. 6.3.2. Plaknes figūras attēlo zīmējuma plaknē, lietojot paralēlo projicēšanu, pamatojot konstrukcijas gaitu. 6.3.3. Veido daudzskaldņu (prizmu, piramīdu) šķēlumu ar plakni, izmantojot paralēlo un centrālo projicēšanu, pamatojot konstrukcijas gaitu. 6.3.4. Formulē un pamato plaknes figūru savstarpējo novietojumu telpiskos ķermeņos, t. sk. skaidro, nosaka leņķi starp šķērsām taisnēm; algebriski modelē un pamato sakarības starp lielumiem, nosaka un pamato lielumu iespējamās vērtības. 6.3.5. Pamato un lieto slīpas prizmas virsmas laukuma un tilpuma aprēķināšanas formulas. 6.3.6. Veido rotācijas ķermeņa zīmējumu, ja zināma rotācijas ass un plaknes figūra, kas rotē ap to; plāno, pamato un aprēķina rotācijas ķermeņa virsmas laukumu un tilpumu. 6.3.7. Pamato telpisku ķermeņu kombinācijas eksistenci (iespēju ievilkt, apvilkt), veido, pamato tās attēlojumu, lietojot paralēlo vai centrālo projicēšanu, veido, pamato sakarības starp abu ķermeņu raksturīgajiem lielumiem.

Izglītības un zinātnes ministre *I. Šuplinska*

2. pielikums. Skolēnam sasniedzamie rezultāti caurviju prasmēs vispārējās vidējās izglītības pakāpes noslēgumā

1. Kritiskā domāšana un problēmrisināšana:

1.1. mērķtiecīgi formulē precīzus jautājumus, lai kritiski analizētu kompleksas situācijas un abstraktas idejas. Izzina kontekstu, to analizē, kritiski izvērtē, kā arī sintezē un interpretē informāciju, lai sasniegtu konkrētu mērķi. Gūst vispusīgu, precīzu informāciju par kompleksiem jautājumiem, izvērtē tās ticamību un analizē, kādēļ atsevišķās situācijās iegūt ticamu informāciju ir grūti;
1.2. kompleksās situācijās spriež no konkrētā uz vispārīgo un no vispārīgā uz konkrēto. Pamana loģiskās argumentācijas kļūdas savos un citu izteikumos, novērš tās. Argumentē, pierādot izteiktā apgalvojuma ticamību un veidojot pamatotus secinājumus;
1.3. nosaka aktuālas vajadzības, precīzi formulē kompleksu problēmu un pamato nepieciešamību to risināt, izvirza mērķi, piedāvā vairākus risinājumus, izvērtē tos attiecībā pret mērķi, izvēlas īstenot labāko;
1.4. kompleksās, neskaidrās situācijās patstāvīgi izstrādā problēmas risinājuma plānu un īsteno to, izvēloties, lietojot un pielāgojot piemērotas problēmrisināšanas stratēģijas, elastīgi reaģē uz neparedzētām pārmaiņām, izvērtē paveikto un gūtos secinājumus izmanto arī citā kontekstā.

2. Jaunrade un uzņēmējspēja:

2.1. interesējas par atklājumiem un inovācijām, proaktīvi meklē jaunas iespējas, kā efektīvi uzlabot savu un citu dzīves kvalitāti, rosina uzlabot esošo situāciju, pieņem nepieredzētus, kompleksus izaicinājumus, saglabā emocionālu līdzsvaru un atvērtību nenoteiktības apstākļos;
2.2. raugoties uz situāciju no dažādiem skatpunktiem, pamana jaunas iespējas, mērķtiecīgi un elastīgi izmanto vai attīsta pats savas ideju radīšanas stratēģijas, lai nonāktu pie jauniem un noderīgiem risinājumiem, efektīvi organizē resursus (cilvēku, zināšanu, kapitāla, infrastruktūras), lai īstenotu savu ieceri, patstāvīgi meklē, izvērtē un atbildīgi izmanto citu idejas, kā arī piedāvā savas, lai iedvesmotu citus;
2.3. gan patstāvīgi, gan grupā attīsta ideju ilgtspējīgā piedāvājumā, kļūdas un grūtības izmanto kā iespēju izaugsmei.

3. Pašvadīta mācīšanās:

3.1. regulāri un atbilstoši savām vajadzībām izvirza īstermiņa un ilgtermiņa mērķus, formulē kritērijus, pēc kuriem izvērtēt, vai mērķis ir sasniegts, plāno mērķa īstenošanas soļus, uzņemas atbildību par savu lomu soļu īstenošanā un mērķu sasniegšanā;
3.2. patstāvīgi un regulāri analizē un reflektē par savas darbības saistību ar emocijām, personiskajām īpašībām un uzvedību, rod veidus, kā attīstīt spējas pārvaldīt savu domāšanu, emocijas un uzvedību;
3.3. patstāvīgi izvēlas, pielāgo un rada savas domāšanas stratēģijas kompleksās situācijās;
3.4. pieņemot atbildīgus lēmumus, vada emocijas sociāli pieņemamā veidā un orientējas uz iespējām, ieguvumiem un pozitīviem risinājumiem;
3.5. patstāvīgi izmanto kritērijus, kas palīdz īstenot darba uzraudzīšanu un pilnveidošanu, izvērtē, apkopo un turpmākā darba procesā mērķtiecīgi izmanto gūto pieredzi.

4. Sadarbība:

4.1. plāno un īsteno personisko un grupas mērķu sasniegšanai nozīmīgu, cieņpilnu verbālu, neverbālu un digitālu komunikāciju;
4.2. piedalās gan viendabīgas, gan neviendabīgas grupas darba procesā, pieņem viedokļu atšķirības, dalībnieku dažādo pieredzi un spējas, prognozē, novērš un risina domstarpības un konfliktus, tostarp digitālā vidē;
4.3. mācību procesā un sabiedriskajā dzīvē apzināti orientējas uz kopīgo labumu un grupai nozīmīgu mērķu sasniegšanu, spēj pārstāvēt savas un respektēt citu intereses, ja grupas un paša vajadzības atšķiras.

5. Pilsoniskā līdzdalība:

5.1. skaidro un pamato savu skatījumu par kopsakarībām gan vietējā, gan globālā mērogā, izvērtē indivīdu, sabiedrības un vides mijiedarbību;
5.2. balstoties savās vērtībās un cienot citu vērtības, izsvērti izvēlas pasākumus un ikdienas situācijas, kurās iesaistīties un iesaistīt citus, cieņpilni pamatojot savu nostāju, prot atteikties, ja pasākums neatbilst vērtībām, un spēj nepakļauties grupas spiedienam, paliekot saistīts ar tiem, kuriem nepiekrīt;

5.3. skaidro savas rīcības sekas un uzņemas par tām atbildību ikdienas situācijās, lokālos un globālos procesos;
5.4. patstāvīgi un kopā ar citiem gūst pieredzi, iesaistoties risinājumu meklēšanā un īstenošanā, kas palīdz uzlabot dzīves kvalitāti.

6. Digitālā pratība:

6.1. lai īstenotu daudzveidīgas ieceres, mērķtiecīgi izvēlas vai pielāgo un efektīvi izmanto atbilstošas digitālās tehnoloģijas;
6.2. analizē digitālās komunikācijas ieguvumus un riskus, atbildīgi uzvedas un komunicē digitālajā vidē atbilstoši savām un citu interesēm;
6.3. kritiski analizē mediju radīto realitāti un informācijas ticamību, uzņemas atbildību rīkoties, lai novērstu nekvalitatīva mediju satura radīto ietekmi, un, radot savu mediju saturu, ievēro privātuma, ētiskos un tiesiskos nosacījumus;
6.4. analizē un novērtē tehnoloģiju lomu dažādos kontekstos, izvērtē veselīgus un drošus tehnoloģiju lietošanas paradumus, ievēro un pielāgo tos savām vajadzībām, reflektē par savu digitālo identitāti un tās atbilstību savām un sabiedrības interesēm.

3. pielikums. Skolēnam attīstāmie ieradumi matemātikas mācību jomā

1. Pārliecinās, ka sapratis jautājumu, situāciju kopumā vai veicamo darbību nozīmi, un tikai tad sāk veidot risinājumu.
2. Plāno un vada savu domāšanas procesu, ik pa laikam izvērtē paveikto, noskaidro kļūdas iemeslu un uztver kļūdu kā iespēju izaugsmei.
3. Darbu veic rūpīgi, apgalvojumus formulē precīzi, apzinoties, ka neprecizitātes var būt pamats aplamiem secinājumiem.
4. Strukturēti un uzskatāmi attēlo informāciju, vārdisko un rakstīto tekstu veido saistītu un citiem saprotamu.
5. Paskaidro un/vai pamato savus spriedumus, veiktās darbības vai uzdevuma risinājumu.
6. Meklē risinājumu nepazīstamās situācijās arī tad, ja ar pirmo reizi tas neizdodas, uzdrīkstas piedāvāt savas idejas.
7. Iegūto informāciju saista ar jau zināmo, lai konstruētu jaunas zināšanas, apzinoties, ka nekritiska saistības veidošana var būt pamats aplamiem secinājumiem.
8. Zināšanas saista ar savu pieredzi un lieto tās, lai sadzīves un citu jomu situācijas raksturotu matemātiski, izvērtējot rezultātu ticamību un atbilstību konkrētai situācijai.
9. Meklē dažādus risinājumus, formulē dažādus secinājumus un jautājumus no turpmākās izpētes perspektīvas, attīstot radošumu.

4. pielikums. Patstāvīgs izpētes darbs "Matemātiskā modelēšana"

Sasniedzamais rezultāts

Formulē pētāmo jautājumu sev nozīmīgā kontekstā un veic matemātiskās modelēšanas visus soļus, lai atrisinātu autentisku problēmu; izvērtē iegūtos rezultātus un, ja nepieciešams, uzlabo matemātisko modeli. (M.A.2.2.1.)

Uzdevums

Patstāvīgs izpētes darbs "Matemātiskā modelēšana".

1. Iepazīsties ar darba izpildes nosacījumiem, sagaidāmo apjomu un vērtēšanas kritērijiem.
2. Saskati un formulē sev interesējošu pētāmo problēmu un raksturo lielumus, saistību, starp kuriem modelēsi matemātiski, izmantojot piemērotu funkciju.
3. Iegūsti un apkopo datus, cita veida informāciju, kas nepieciešama matemātiskā modeļa veidošanai, pētāmās problēmas atrisināšanai.
4. Plāno, veido, pārbaudi un, ja nepieciešams, uzlabo situācijas matemātisko modeli.
5. Apraksti savu darbību visos posmos un iegūtos rezultātus, formulē un pamato secinājumus, raksturo un argumentē izvēles un pieņemtos lēmumus.
6. Veidojot darba aprakstu, korekti lieto matemātikas valodu, tekstu veido strukturētu, saistītu un citiem saprotamu.

Vērtēšanas kritēriji[1]

Punkti / Kritēriji	1	2	3	4	5	6
Veido pētījuma aprakstu	Apraksts ir saistīts.	Apraksts ir saistīts, tajā ir saskatāma struktūra.	Apraksts ir saistīts, labi strukturēts.	Apraksts ir saistīts, labi strukturēts, lakonisks, pabeigts.		
Lieto matemātikas valodu	Daļēji atbilstoši.	Lielākoties atbilstoši.	Atbilstoši visā darbā.			
Iesaistās personiski	Ierobežoti, virspusēji.	Daļēji.	Nozīmīgi.	Izcili.		
Pārdomā, izvērtē	Ierobežoti, virspusēji.	Jēgpilni, pēc būtības.	Kritiski.			
Lieto matemātiku	Fragmentāri pareizi, demonstrē ierobežotu izpratni.	Daļēji pareizi, demonstrē daļēju izpratne.	Kopumā pareizi, demonstrē labu izpratni.	Pareizi, atbilst sagaidāmajam, demonstrē labu izpratni.	Pareizi un precīzi, atbilst sagaidāmajam, demonstrē pilnīgu izpratni.	Pareizi, precīzi un akurāti visā darbā, atbilst sagaidāmajam, demonstrē pilnīgu izpratni.

[1] Vērtēšanas kritēriju izstrādē par pamatu izmantota informācija no *Harcet, J., Heinrichs, L., Seiler, P. M., Skoumal, M. T. (2012). IB Mathematics Higher Level Course Book: Oxford IB Diploma Program Illustrated Edition. Oxford University Press.*

5. pielikums. Programmu paraugos lietotie kodi

Atsaucei uz standartu* mācību priekšmetu kursu programmu paraugos izmantoti šādi plānoto skolēnam sasniedzamo rezultātu (SR) un lielo ideju (Li) kodi. (Standarta pielikumi, kuros lietoti šie kodi, atrodami Skola2030 tīmekļa vietnē.)

SR kodi

Piemērs:

VL.O.2.1.

VL.	O.	2.1.
Mācību joma (visu mācību jomu apzīmējumus sk. tabulā)	Kursa apguves līmenis (visu kursu apguves līmeņu apzīmējumus sk. tabulā)	Mācību jomas SR kārtas numurs standartā

2.1. Izvēlas, atlasa un izmanto informāciju no dažādiem avotiem sava teksta izveidei saskaņā ar konkrētajām vajadzībām un mācību mērķiem.	2.1. Lai daudzpusīgi izzinātu noteiktu problēmu, jautājumu vai tematu un veidotu savu tekstu, mērķtiecīgi izvēlas, kārto, analizē un vērtē informāciju, salīdzinot dažādos avotos publicēto tekstu saturu un tajos izmantotos valodas līdzekļus.	2.1. Pēta valodas un literatūras jautājumu atspoguļojumu plašsaziņas līdzekļos, lai pēc noteiktiem kritērijiem izvērtētu informāciju un veidotu spriedumus par šo ziņu kvalitāti, aktualitāti un izmantojamību savu tekstu izveidei.

Li kodi

Piemērs:

VSK.S. Li.6.

VSK.	S.	Li.6.
Vispārējās vidējās izglītības pakāpe	Mācību joma	Mācību jomas SR kārtas numurs standartā

6. Jebkurš informācijas avots, kas ataino norises sabiedrībā pagātnē un mūsdienās, ir vērtējams kritiski.

Kursu apguves līmeņu apzīmējumi

V	Vispārīgais līmenis
O	Optimālais līmenis
A	Augstākais līmenis

Mācību jomu apzīmējumi

V	Valodu mācību joma	
	VL	Latviešu valoda
	VS	Svešvaloda
K	Kultūras izpratnes un pašizpausmes mākslā mācību joma	
S	Sociālā un pilsoniskā mācību joma	
D	Dabaszinātņu mācību joma	
M	Matemātikas mācību joma	
T	Tehnoloģiju mācību joma	
F	Veselības, drošības un fiziskās aktivitātes mācību joma	

* Ministru kabineta 2019. gada 3. septembra noteikumi Nr. 416 “Noteikumi par valsts vispārējās vidējās izglītības standartu un vispārējās vidējās izglītības programmu paraugiem”.

DOMAT.
DARĪT.
ZINĀT.

Valsts izglītības satura centra īstenotā projekta "Kompetenču pieeja mācību saturā" mērķis ir izstrādāt, aprobēt un pēctecīgi ieviest Latvijā tādu vispārējās izglītības saturu un pieeju mācīšanai, lai skolēni gūtu dzīvei 21. gadsimtā nepieciešamās zināšanas, prasmes un attieksmes.

Projekts Nr. 8.3.1.1/16/I/002 Kompetenču pieeja mācību saturā

Valsts izglītības satura centrs

NACIONĀLAIS ATTĪSTĪBAS PLĀNS 2020

EIROPAS SAVIENĪBA
Eiropas Sociālais fonds

IEGULDĪJUMS TAVĀ NĀKOTNĒ