



**LATVIJAS
UNIVERSITĀTE**

**Promocijas darba
kopsavilkums**

Aigars Langins

**MAGNĒTISKO ŠĶIDRUMU
BRĪVO VIRSMU
DINAMIKAS SIMULĀCIJAS
TRIJĀS DIMENSIJĀS AR
ROBEŽINTEGRĀLVIENĀDOJUMIEM**

Rīga 2022



LATVIJAS UNIVERSITĀTE

FIZIKAS, MATEMĀTIKAS UN OPTOMETRIJAS FAKULTĀTE

Aigars Langins

MAGNĒTISKO ŠĶIDRUMU BRĪVO VIRSMU DINAMIKAS SIMULĀCIJAS TRIJĀS DIMENSIJĀS AR ROBEŽINTEGRĀLVIENĀDOJUMIEM

PROMOCIJAS DARBA KOPSAVILKUMS

Doktora grāda iegūšanai fizikā
Apakšnozarē: šķidrumu un gāzu mehānika

Zinātniskais vadītājs:
Dr. habil. phys. Andrejs Cēbers

Rīga, 2022

Promocijas darbs izstrādāts:

Latvijas Universitātes

Fizikas, matemātikas un optometrijas fakultātes

Teorētiskās fizikas katedrā

laika posmā no 2018. gada līdz 2022. gadam.

Darbs sastāv no ievada, 6 nodaļām, literatūras saraksta, 3 pielikumiem.

Darba forma: Disertācija fizikas nozarē, šķidrumu un gāzu mehānikas apakšnozarē

Zinātniskais vadītājs: prof. *Dr. habil. phys.* Andrejs Cēbers

Darba recenzenti:

1. *Dr. phys.* Jānis Priede, Coventry University (Lielbritānija),
2. *Dr.* Jānis Bajārs, Latvijas Universitāte,
3. *Dr.* Jaakko Timonen, Aalto University (Somija).

Darba aizstāvēšana notiks: Latvijas Universitātes Fizikas zinātnes nozares promocijas padomes atklātā sēdē 2022.gada 16. decembrī, pulksten 13:30, Rīgā, Jelgavas ielā 3, Latvijas Universitātes Fizikas, matemātikas un optometrijas fakultātē.

Ar darbu un tā kopsavilkumu var iepazīties Latvijas Universitātes Bibliotēkā, Rīgā, Raiņa bulvārī 19.

LU Fizikas zinātnes nozares promocijas padomes

priekšsēdētājs: *Dr. phys.* Andris Jakovičs

sekretāre: Sintija Siliņa

© Latvijas Universitāte, 2022

© Aigars Langins, 2022

ISBN 978-9934-18-896-1

ISBN 978-9934-18-897-8 (PDF)

Anotācija

Šī disertācija aplūko problēmu par magnētiska šķidruma piliena sarežģīto uzvedību ārēju magnētisko lauku ietekmē, kas līdz šim ir bijusi kvantitatīvi risināma tikai vienkāršākajos gadījumos. Problēmas risināšanai ir nepieciešams matemātisks modelis, kas apraksta pilnu magnētiska šķidruma piliena brīvās virsmas dinamiku ārējos magnētiskos laukos trijās dimensijās. Disertācijā prezentēts konkrēts modelis, kas balstās uz robežintegrālvienādojumu risināšanu, kā arī tā algoritmiskā implementācija. Algoritms var veikt aprēķinus ar patvaļīgām piliena un apkārtesošā šķidruma viskozitātēm, kā arī modelēt dažādas piliena virsmas nestabilitātes, kuras var izpausties īpašos magnētiskā lauka apstākļos, piemēram, konisku asumu rašanos vai transformēšanos jūraszvaigznei līdzīgā formā. Tas ļauj testēt dažādu pilienu aprakstā izmantotu aproksimāciju pielietojamības robežas, salīdzinot to paredzētos rezultātus ar skaitliskajiem rezultātiem, kas iegūti no pirmajiem principiem. Skaitlisko rīku var izmantot, lai pētītu magnētisku pilienu konfigurācijas patvaļīgos magnētiskos laukos, netieši noteiktu to fizikālos parametrus un īpašības un atrastu kritiskos magnētiskos laukus, kādi ir nepieciešami dažādo virsmas nestabilitāšu novērošanai.

Atslēgvārdi: Stoksa plūsma, Robežintegrāļi, Magnētiski šķidrumi, Nestabilitātes, Līdzsvara figūras.

Saturs

1	Ievads	5
1.1	Pētījuma aktualitāte	5
1.2	Skaitlisko simulāciju metodes šķidrums pilieniem	7
1.3	Darba mērķis un uzdevumi	7
1.4	Rezultātu aprobācija	8
2	Matemātiskais modelis	9
2.1	Bezdimensionāli kustības vienādojumi integrālā formā	10
3	Skaitliskais algoritms	11
3.1	Režģa uzturēšana	11
3.2	Kopsavilkums	13
4	Algoritma validācija	15
4.1	Relaksācija par sfēru	15
4.2	Līdzsvara izstiepums konstantā laukā	16
4.3	Kvazi-stabilu pilienu izstiepšanās	17
5	Simulācijas	19
5.1	Konstants lauks	20
5.2	Rotējošs lauks	22
6	Nobeigums	26
6.1	Diskusija	26
6.2	Galvenie secinājumi	27
6.3	Tēzes	28
7	Literatūras saraksts	29

1 Ievads

1.1 Pētījuma aktualitāte

Matemātiskā fizika jau sen pēta ar līdzsvara figūras, ko dažādi objekti var ieņemt dažādos ārējos fizikālos apstākļos. Piemēram, klasiskā pašgravitējošo masu problēma [1] ļāva izpētīt daudzas virsmas formu bifurkācijas. G.I.Taylor [2] seminālais raksts izraisīja plašus pētījumus par līdzsvara formām, kādas varētu būt elektriski vai magnētiski apveltītam šķidrumam, kā arī to dinamiku ārējo elektromagnētisko lauku ietekmē. Jo īpaši nozīmīgs sasniegums pilienu izpētē elektromagnētiskā lauka iedarbībā radās ar magnētisko šķidrumu sintēzi [3], kas ļāva novērot un aprakstīt daudzus interesantus efektus, piemēram, pilienu deformācijas un to dinamiku statiskos magnētiskos laukos [4, 5], rotējošos laukos [6, 7] un labirinta rakstu veidošanas Hele-Šou šūnās [8, 9] vai sistēmās ar ļoti maziem virsmas spraigumiem [10]. Šo efektu aprakstam tika izveidotas dažādas aproksimāciju metodes [11, 12, 13] (elipsoidālās formas pieņēmums, robežnosacījumu apmierināšana vidēji un citas), kuras ir jāpārbauda. Teorētiski vai skaitliski pietiekami šobrīd nav aprakstītas vēl dažādas novērotās parādības, piemēram, pilienu deformācijas histerēzes dinamika [14], magnētisko pilienu līdzsvara figūru atgriešanās pāreja augstfrekvences rotējošā laukā [6], smailes veidošanās uz pilienu galiem [15] un citi. Jāatzīmē, ka elektromagnētiskā lauka iedarbībā esošiem pilieniem ir daudz pielietojumu, piemēram, ausu mehānisko īpašību izpēte [16], dinamiska pašsavienošana [15], magnētiskā hipertermija vēža terapijai [17], mikrorobotika kravu pārvadājumiem [18, 19], programmējami pilieni plūsmas kontrolei [20] un daudzi citi.

Paralēli magnētisko pilienu eksperimentālajai izpētei ir pieliktas ievērojamas pūles to simulācijas skaitlisko metožu izstrādē. Balstoties uz robežintegrālvienādojumiem [21, 22], var izstrādāt efektīvus rīkus brīvo robežu parādību simulācijai; tās nesen tika izmantotas, lai novērotu dažādas "zvaigznes", piemēram, pilienu formas nestabilitātes divdimensiju Hele-Šou šūnas modelī [23]. Asimetriskā gadījumā šīs

metodes tika izstrādātas [24, 25]. Starp prognozētajām parādībām ir, piemēram, spicumu veidošanās uz pilienu poliem, ja magnētiskā caurlaidība ir pietiekami augsta [25, 26, 27]. Var atzīmēt, ka, izmantojot robežintegrālvienādojumu metodi, ir veikta tādas sarežģītas brīvo robežu problēmas kā labirinta rakstu veidošanās Hele-Šou šūnās simulācija [28]. Robežvienādojuma algoritma pielietošana reālajam trīsdimensiju gadījumam ir īsts izaicinājums, jo īpaša uzmanība jāpievērš, lai saglabātu režģa kvalitāti uz pilienu virsmas [29, 30, 31]. Šādas dinamikas modeļēšanai var izmantot arī līmeņvirsmu noteikšanas metodi [32], iegremdētās robežas metodi [33], kas ir jutīga pret precīzu robežu aprakstu [34] vai *Lattice-Boltzmann* metodēm, kas spēj apstrādāt sarežģītas šķidrums konfigurācijas un vairāku šķidrums fāžu līdzāspastāvēšanu [35]. Ir pieejams arī papildu pārskats par magnētisko šķidrums modeļēšanu un simulācijām [36]. Paralēli magnētisko pilienu simulācijas skaitlisko rīku izstrādei notiek atbilstoši pētījumi pilienu modeļēšanai noplūdes dielektriķos, kur bez parastajiem efektiem jāņem vērā arī konvektīvā virsmas lādiņa pārnese ar šķidrums kustību [37].

Viens no pirmajiem pasākumiem magnētisko pilienu modeļēšanai trīsdimensiju gadījumā tika veikts [38] ar nosacījumu, ka pilienam un apkārtējam šķidrums ir vienāda viskozitāte. Tā kā spēcīgi magnētisko pilienu koncentrētās fāzes viskozitātes, kas iegūtas, atjaucot magnētiskos koloīdus, ir ievērojami lielākas nekā nesejšķidrums (parasti ūdens) viskozitāte [39], to dinamiskas simulācijā ir ļoti svarīgi to ņemt vērā skaitliskajos modeļos.

Pašlaik nepastāv precīzi risinājumi magnētisko pilienu uzvedības modeļēšanai vienlaicīgas viskozu, magnētisku un kapilāru spēku iedarbībā, ko varētu izmantot kā etalonus skaitlisko modeļu apstiprināšanai. Šajā situācijā skaitlisko modeļu validācijas tiek veiktas, salīdzinot skaitliskos rezultātus ar dažādiem aptuveniem risinājumiem. Mūsu mērķis ir veikt šos salīdzinājumus, izmantojot vienkāršu magnētiskā šķidrums piliena [3] modeli, izmantojot [38] skaitliskā algoritma vispārinājumu.

1.2 Skaitlisko simulāciju metodes šķidrums pilieniem

Magnētiskā šķidrums pilienus var pētīt ar optiskām metodēm to pietiekami lielo izmēru dēļ, taču šādas pieejas nav tik izmantojamas, lai izmērītu, piemēram, spiediena vai sprieguma laukus piliena iekšpusē vai ap to. Šādos gadījumos skaitliskās metodes var lieliski palīdzēt, risinot pamatā esošo fizisko parādību matemātiskos modeļus un salīdzinot to rezultātus ar eksperimentāliem novērojumiem.

Integrālvienādojumi ļauj ņemt vērā dažādus robežnosacījumus šķidrums robežvirsmās un nodrošina rīku, lai saistītu fiziskos parametrus, piemēram, spiedienu, ātrumu un spriegumus noteiktā punktā uz robežas, ar parametriem visos citos punktos uz visām robežām. Šajā darbā mēs pētām robeželementu metodi (BEM), jo mūs īpaši interesē pilienu robežvirsmu dinamika un nestabilitātes.

1.3 Darba mērķis un uzdevumi

Tā kā magnētiskā šķidrums pilienu modeļošana trīs dimensijās joprojām ir ļoti jauna nozare, īpaši patvaļīgu pilienu un nesēja šķidrums viskozitātes attiecību gadījumā, šī darba mērķis ir izstrādāt skaitliskas simulācijas rīku un līdz ar to izpratni par to uzvedību dažādos magnētiskajos laukos.

Lai sasniegtu šo mērķi, tiek risinātas šādas problēmas:

- Izstrādāt trīsdimensiju skaitlisku algoritmu šķidrums magnētiskā lauka un ātrums lauka aprēķināšanai, pamatojoties uz robeželementu metodi, balstoties uz robežintegrālvienādojumiem.
- Izmantojot algoritmu, pārbaudīt dažādu tuvinājumu robežas, ko bieži izmanto šajā iestatījumā, piemēram, pieņēmums par pilienu elipsoīdālo formu.
- Skaitliski analizēt pilienu formas nestabilitātes sākšanos un attīstību, piemēram, "zvaigznes" nestabilitāti.
- Pielietot algoritmu, lai netieši iegūtu pilienu fizikālās īpašības

(virsmas spraigumu, magnētiskā caurlaidību un viskozitāti), simulācijas rezultātus pielāgojot eksperimentālajiem datiem.

- Skaitliski novērot iepriekš neredzētus efektus, piemēram, magnētiskā šķidrumsa pilienu kustība uz priekšu un atpakaļ rotējošā laukā.

1.4 Rezultātu aprobācija

1.4.1 Publikācijas

A. Langins, A. P. Stikuts, A. Cēbers, “*A three-dimensional boundary element method algorithm for simulations of magnetic fluid droplet dynamics*”, **Physics of Fluids** 34, 062105 (2022).

1.4.2 Konferences

A. Langins, A. P. Stikuts, A. Cēbers, “*A 3D BEM algorithm for simulations of magnetic fluid droplet dynamics*”, **International Conference on Magnetic Fluids**, Parīze, Francija, 2019.

A. Langins, A. P. Stikuts, A. Cēbers, “*Starfish instability evolution of magnetic fluid droplets in rotating magnetic field*”, **11th LIQUID MATTER CONFERENCE**, attālināti Prāgā, Čehijā, 2020/2021.

1.4.3 Zinātniskie projekti

Eiropas Savienības “Horizon 2020 Research and innovation program” ar grantu numuru 766007, “Magnetism and Microhydrodynamics”.

2 Matemātiskais modelis

Mēs aplūkojam magnētiskā šķidrums pilienu ar magnētisko caurlaidību μ , kas ir suspendēts bezgalīgā nemagnētiskā nesējšķidrumā un pakļauts ārējam magnētiskajam laukam. Tiek pieņemts, ka šķidrums inerce ir nenozīmīga. Šajā gadījumā pilienu kustību apraksta Stoksa vienādojumi magnētiskajam šķidrums [3, 40].

$$-\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}_M = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

kur p ir spiediens, η ir dinamiskā viskozitāte, $f_{M_i} = \partial_k T_{ik}$ ir tilpuma spēks, ko rada magnētiskais lauks, un $T_{ik} = -\frac{1}{2}\mu_0 H^2 \delta_{ik} + H_i B_k$ ir Maksvela sprieguma tenzors, \mathbf{H} ir magnētiskā lauka intensitāte, $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ ir magnētiskā lauka indukcija un \mathbf{M} ir magnetizācija. Robežnosacījumi spēkiem uz pilienu virsmas ir

$$(\sigma_{ik}^{(e)} - \sigma_{ik}^{(i)})n_k + (T_{ik}^{(e)} - T_{ik}^{(i)})n_k - \gamma(k_1 + k_2)n_i = 0, \quad (2)$$

kur $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \eta(\partial_i v_k + \partial_k v_i)$ ir šķidrums spriegums tensors, $\gamma(k_1 + k_2)$ ir kapilārais spēks, ko rada virsmas spraigums, kur γ ir virsmas spraigums un k_1, k_2 ir galvenie virsmas liekumi un \mathbf{n} ir vienības normāles vektors, kas norāda uz pilienu. Indeksi (e) un (i) apzīmē parametrus attiecīgi ārpus pilienu un pilienu iekšpusē.

Lai noteiktu magnētiskā šķidrums pilienu uzvedību, ir jāzina magnētiskie lauki uz tā virsmas. Tā kā iesaistītais magnētiskais lauks momentāni reaģē uz pilienu formas izmaiņām, var pieņemt, ka problēmu nosaka magnetostatika.

Lai modelis būtu risināma, ir jāizdara vairāki pieņēmumi. Tiek pieņemts, ka piliens ir lineāri magnetizējams $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$ kur \mathbf{M} ir tā magnetizācija, χ ir magnētiskā uzņēmība. Mēs arī pieņemam, ka iesaistītie šķidrums ir nevadoši, un tāpēc to brīvais strāvas blīvums \mathbf{J} ir nulle — attiecīgais Maksvela vienādojums ir šāds: $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} = 0$.

Šajā gadījumā magnētisko lauku var izteikt kā magnētiskā skalārā potenciāla gradientu $\mathbf{H} = \nabla \psi$. Šie pieņēmumi ļauj secināt, ka magnētiskajam potenciālam ir jāapmierina Laplasa vienādojums $\Delta \psi = 0$.

2.1 Bezdimensionāli kustības vienādojumi integrālā formā

Lai vienkāršotu problēmu, mēs ieviešam garuma skalu kā sfēriskā piliena R_0 rādiusu, laika skalu, ko nosaka $t_0 = R_0\eta^{(e)}/\gamma$, magnētiskā lauka skalu, ko nosaka ārējais lauks H_0 , magnētiskās caurlaidības skala, ko nosaka vakuuma konstante μ_0 , viskozitātes parametrs $\lambda = \eta^{(i)}/\eta^{(e)}$ un Bonda magnētiskais skaitlis $Bm = 4\pi\mu_0R_0H_0^2/\gamma$.

Izmantojot šīs skalas, ir iespējams uzrakstīt integrālvienādojumu punktu ātrumam uz piliena virsmas, kas automātiski apmierina robežnosacījumus [22]:

$$\begin{aligned}
 v_k(\mathbf{y}) = & -\frac{1}{1+\lambda}\frac{1}{4\pi}\int_S(k_1(\mathbf{x})+k_2(\mathbf{x}))n_i(\mathbf{x})G_{ik}(\mathbf{x},\mathbf{y})dS_x \\
 & +\frac{1}{1+\lambda}\frac{1}{4\pi}\int_S f_M(\mathbf{x})n_i(\mathbf{x})G_{ik}(\mathbf{x},\mathbf{y})dS_x \\
 & +\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\frac{1}{4\pi}\int_S v_i(\mathbf{x})T_{ijk}(\mathbf{x},\mathbf{y})n_j(\mathbf{x})dS_x \\
 & +\frac{2}{1+\lambda}v_{0k}(\mathbf{y}),
 \end{aligned} \tag{3}$$

kur integrāļi tiek rēķināti pa piliena virsmu un satur tā saukto *stokeslet*, kas apraksta lineāro sakarību starp punkta spēku \mathbf{g} un ātrumu \mathbf{v} , ko nosaka $G_{ik}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} + \frac{(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3}$ un tā sauktais *stresslet*, kas saista punkta spēku un sprieguma tensoru, kas uzdots ar $T_{ijk}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -6\frac{(x_i-y_i)(x_j-y_j)(x_k-y_k)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^5}$, un f_M ir magnētiskais normālspēks $f_M = \frac{Bm}{8\pi}(\mu-1)\left(\mu H_n^{(i)2} + H_t^{(i)2}\right)$.

3 Skaitliskais algoritms

Magnētiskā šķidrums pilienu virsmu veido trīsstūrveida robeželementu režģi ar kolokācijas punktiem (virsotnēm) (attēls 1). Integrāļi tiek aprēķināti, izmantojot trapeceveida integrācijas metodi, izmantojot tikai integrējamās funkcijas vērtības virsotnēs. Šī pieeja ļauj mums ērti pārveidot plakano trīsstūru summēšanu par summēšanu pa virsotnēm [29]

$$\int_S f(\mathbf{x})dS \approx \sum_i f(\mathbf{x}_i)\Delta S_i, \quad (4)$$

kur summēšana tiek veikta katrā režģa punktā i , un $\Delta S_i = 1/3 \sum \Delta S$ ir i -tajam punktam blakus esošo trijstūru vidējais laukums.

Izmantojot šo pārformulāciju, integrālie vienādojumi kļūst par vienkārši lineārām vienādojumu sistēmām, kuras var atrisināt ar parastajām skaitļošanas bibliotēkām.

Sākotnējo sfērisko režģi iegūst, iteratīvi "sagriežot" ikosaedru, pievienojot vairāk punktu tā virsmām un projicējot tikko pievienotos punktus uz sfēras, kā ierosina arī [41]. Simulācijās parasti tika izmantotas divas vai trīs sagriešanas iterācijas, palielinot punktu skaitu attiecīgi līdz 162 vai 642. Normāles un virsmas liekumus katrā virsotnē nosaka, izvietojot paraboloīdu uz attiecīgās virsotnes un tās tuvākajām virsotnēm [29].

3.1 Režģa uzturēšana

Kopumā pilienu virsmai ir nevienmērīgs ātruma sadalījums, tāpēc sākotnēji vienmērīgi sadalīto virsotnu pārvietošana diezgan ātri pasliktinātu režģa kvalitāti, jo daži trīsstūri kļūtu vairāk deformēti nekā citi.

Lai mazinātu šo nevēlamo efektu, simulāciju laikā tiek izmantotas daudzas režģa uzturēšanas metodes, kas ir izskaidrotas šajā sadaļā.

3.1.1 *Pasīvā stabilizācija*

Ņemot vērā, ka pilienu virsmas dinamiku nosaka tikai normālā ātruma komponente, režģa degradāciju var palēnināt, pareizi pielāgojot tangenciālā ātruma komponentes. Tā sauktajā *pasīvajā* stabilizācijā [30] tangenciālās sastāvdaļas var pielāgot, lai samazinātu noteiktu "kinētiskās enerģijas" funkciju.

$$F = \sum_{\mathbf{x}_{ij}} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{|\mathbf{x}_{ij}|^2}{h_{ij}^2} + \frac{h_{ij}^2}{|\mathbf{x}_{ij}|^2} \right) \right]^2 + 0.4 \sum_{\Delta} \frac{1}{C_{\Delta}^2} \left(\frac{dC_{\Delta}}{dt} \right)^2, \quad (5)$$

kur pirmā summa attiecas uz malām starp virsotnēm i un j un mēģina saglabāt malas \mathbf{x}_{ij} noteiktā optimālā garumā h_{ij} , ko nosaka katra mezgla lokālie izliekumi [30]

$$C_{\Delta} = \frac{S_{\Delta}}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad (6)$$

kur a, b, c apzīmē trīsstūra malu garumus, kā ceļvedi [30].

3.1.2 *Aktīvā stabilizācija*

Iepriekš apraktītais algoritms palēnina režģa degradāciju, bet neaptur to pilnībā. Tāpēc ir nepieciešama tā sauktā *aktīvā* stabilizācija [30] starp iterāciju soļiem. *Aktīvajā* stabilizēšanā virsotnes tiek slidinātas gar pilienu virsmu, lai mēģinātu samazināt "potenciālās enerģijas" funkciju

$$E = \sum_{\mathbf{x}_{ij}} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{|\mathbf{x}_{ij}|^2}{h_{ij}^2} + \frac{h_{ij}^2}{|\mathbf{x}_{ij}|^2} \right) \right]^{50} + \sum_{\Delta} \left(\frac{C_{\Delta}^{reg}}{C_{\Delta}} \right)^{100} \quad (7)$$

kur $C_{\Delta}^{reg} = \sqrt{3}/12$ ir regulāra trīsstūra kompaktuma vērtība. Šī "potenciālās enerģijas" funkcija E iegūst lielas vērtības, ja mala \mathbf{x}_{ij} ļoti atšķiras no tās optimālā garuma h_{ij} , un tādējādi tā novērš gan nepiemērotu drūzmēšanos, gan virsotņu izkļiedi, kā arī neļaujot trijstūriem daudz atšķirties no regulāra trijstūra optimālās kompaktuma vērtības.

Iepriekšminētajām enerģijas funkcijām E un F ir gradienti, kuras var izteikt skaidrā analītiskā formā, ļaujot veikt efektīvus aprēķinus.

3.1.3 Malu “apmešana”

Malas starp virsotnēm var savienot citādāk, tās “apmetot”. Šīs malu apmešana ļauj veidot arvien regulārākus trīsstūrus, un tā tiek pārbaudīta secīgi visām malām, līdz vairs nevienu nav atļauts “apmest”. Ir papildu noteikumi, piemēram — mala netiks apgriezta, ja rezultātā tiks izveidots virsotne ar mazāk nekā pieciem savienotiem blakus virsotnēm. Tas tiek īstenots, lai nodrošinātu, ka katrai virsotnei un tās kaimiņiem var piedzīt vispārēju paraboloīdu, kam nepieciešami pieci parametri, kas raksturo tā formu. Malu apmešanas algoritms tiek izmantots katrā simulācijas solī. Ja kāda mala ir apmesta, *aktīvā* stabilizācija tiks piemērota vēlreiz, lai nodrošinātu režģa regularitāti.

3.1.4 Virsotņu pievienošana

Tika konstatēts, ka, lai nodrošinātu precīzus rezultātus, reģionos ar augstu virsmas liekumu ir nepieciešams vairāk virsotņu, tāpēc tiek ieviesta arī virsotņu pievienošanas rutīna. Tomēr tas ievērojami palielina aprēķina laiku, kas mērogojas aptuveni kā $O(N^2)$, kur N ir virsotņu skaits.

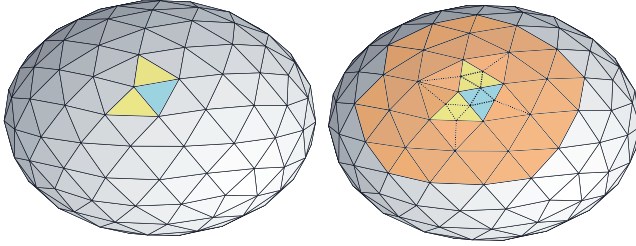
Ja tiek noteikts, ka virsmas izliekums ir pietiekami liels attiecībā pret kādu robežkritēriju ε , jaunās virsotnes tiks ieviestas katras atzīmēto trīsstūru malas vidū [31]. Šīs jaunās virsotnes pēc tam tiek savstarpēji savienotas, lai katrai no tiem būtu vismaz pieci kaimiņi.

Visbeidzot, trijstūri, kurus ietekmē šis jaunais virsotņu papildinājums, arī ir *aktīvi* stabilizēti, līdzīgi kā [31]. Virsotņu pievienošanas rutīna ir parādīta attēlā 1.

3.2 Kopsavilkums

Skaitlisko algoritmu var īsi apkopot šādi:

- Konkrētam ārējam magnētiskajam laukam atrisina robežintegrālvienādojumu magnētiskajam potenciālam ψ uz piliena virsmas.



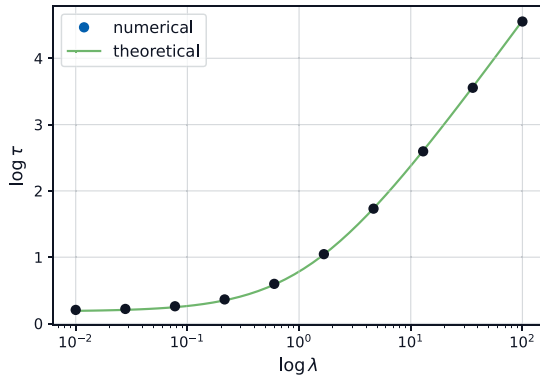
Att. 1: Ilustratīvs mezgla pievienošanas rutīnas piemērs. Pirmkārt, tiek atrasti trijstūri, kas atzīmēti mezgla pievienošanai, kā parādīts dzeltenā. Tā kā tirkīza trijstūrim ir vismaz divi blakus esošie trijstūri, kas ir atzīmēti sadalīšanai, arī tas pats ir atzīmēts. Jaunās virsotnes tiek pievienotas katras atzīmēto trīsstūru malas vidū, neizmirstot ieviest papildu malas, lai pārliecinātos, ka katrai virsotnei ir vismaz pieci kaimiņi. Jaunās malas ir norādītas ar pārtrauktām līnijām. Visbeidzot, skartie trīsstūri, kā arī to apkārtni, kas atzīmēta oranžā krāsā, ir *aktīvi* stabilizēta, lai uzlabotu režģa kvalitāti.

- Atrod tangenciālo H_t un parasto H_n magnētiskā lauka komponenti.
- Aprēķina normālos magnētiskos virsmas spēkus f_M .
- Iegūst katras virsotnes ātrumus no integrālvienādojuma (3) un attiecīgi pārvieto tos ar pirmās kārtas Eilera metodi.
- Izmanto režģa uzturēšanas metodes katrā simulācijas solī.

4 Algoritma validācija

Esot iepazinušies ar pašu algoritmu un tā režģa stabilizācijas metodēm, mēs tagad pievēršamies tā rezultātu validēšanai ar vairākām zināmām teorētiskām formulām magnētiskā šķidrums pilienu līdzsvara konfigurācijām un dinamikai. Neatbilstības starp šīm teorētiskajām sakarībām un mūsu skaitliskās simulācijas rezultātiem var liecināt par pašu sakarību pielietojamības robežām vai to izvedumu pamatā esošo pieņēmumu ierobežojumiem.

4.1 Relaksācija par sfēru

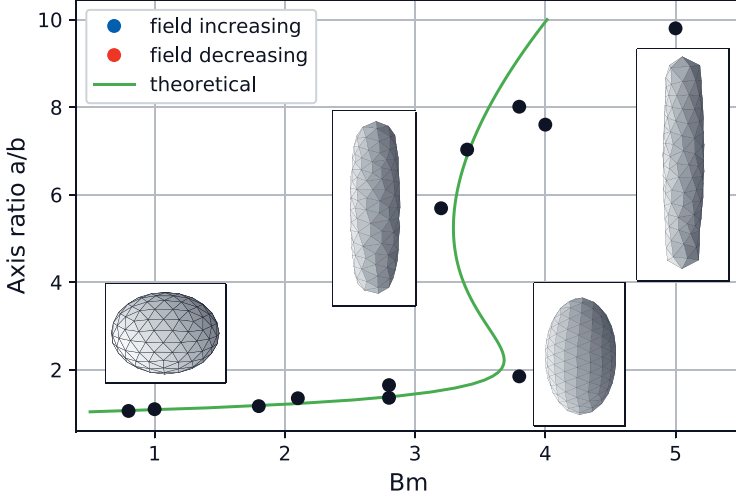


Att. 2: Raksturīgais bezdimensionālais relaksācijas laiks τ izstieptam pilienam, kā piliena un šķidrums viskozitātes attiecības λ funkcija.

Ja nav ārēja magnētiskā lauka, izstiepta piliens deformācijai, kas aprakstīta ar rotācijas elipsoīdu, vajadzētu eksponenciāli samazināties kapilāro spēku iedarbībā $e^{-t/\tau}$, kur τ ir raksturīgais relaksācijas laiks.

Salīdzinājums ar skaitliski noteiktajiem relaksācijas laikiem ir parādīts attēlā 2.

4.2 Līdzsvara izstiepums konstantā laukā



Att. 3: Pilienu evolūcija caur histerēzes apgabalu. Zilie (sarkanie) punkti norāda aprēķināto trajektoriju ar pieaugošu (dilstošu) magnētisko lauku, kad piliens ir līdzsvarā. Simulācijā tika izmantoti $\mu = 30$ un $\lambda = 7.6$.

Mēs varam arī salīdzināt pilienu līdzsvara konfigurācijas magnētiskajā laukā, ko nosaka algoritms, ar tālāk norādītajām teorētiskajām sakarībām. Attēlā 3 ir parādīts skaitliski iegūto pilienu līdzsvara formu salīdzinājums dotajā magnētiskajā laukā Bm ar teorētisko sakarību no [5, 12]

$$Bm = \left[\frac{4\pi}{\mu - 1} + N \right]^2 \frac{1}{2\pi} \frac{\left(\frac{3-2e^2}{e^2} - \frac{(3-4e^2) \arcsin e}{e^3(1-e^2)^{1/2}} \right)}{(1-e^2)^{2/3} \left(\frac{(3-e^2)}{e^5} \log \left(\frac{1+e}{1-e} \right) - \frac{6}{e^4} \right)}, \quad (8)$$

kur e simbolizē piedzītā elipsoīda $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ ekscentriskumu, kur a , b ir attiecīgi tā garā un īsā pusass, un N ir demagnetizējošais faktors.

Līdzsvara formulas (8) izvedums balstās uz pieņēmumu par asimetrisku elipsoidālu pilienu, kas darbojas labi līdz aksiālajai attiecībai aptuveni 7 [42]. Šo robežu var novērot arī 3 attēlā, kur simulētais rezultāts atšķiras ļoti iegareniem pilieniem, kas izskaidrojams ar to, ka pilienam veidojas koniskāki galiņi, nekā pie atbilstošā pagarinājuma būtu piedzītajam elipsoidam, un tādējādi tas vairāk nepakļaujas elipsoidālajai aproksimācijai.

Attēlā 3 ir parādīts arī piliens, kura stiepšanās laikā notiek histerēze, kā rezultātā tas var pēkšņi izstiepties, kad lauks tiek palielināts virs kritiskās vērtības aptuveni $Bm_c \approx 3.68$, bet tā pagarinājums seko citai trajektorijai, kad lauks tiek samazināts.

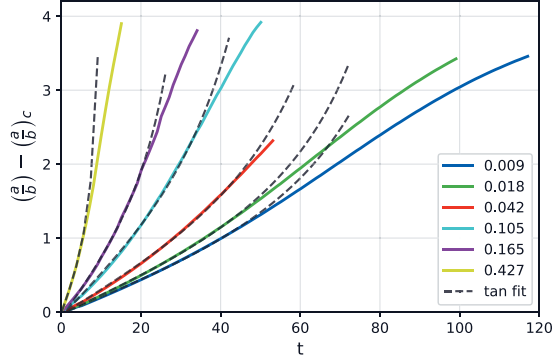
4.3 Kvazi-stabilu pilienu izstiepšanās

Jo mazāk magnētiskā lauka stiprums pārsniedz kritisko vērtību Bm_c , jo ilgāk piliens paliks šajā gandrīz stabilā stāvoklī, pirms tas “pārlec” uz patiesi stabilu konfigurāciju, norādot uz laika sastrēgumu jeb “pudeles kakla” reģionu.

Šīs nestabilitātes “lēcienu” dinamiku apraksta hiperbolisks diferenciālvienādojums, kas maziem t [14] ir

$$\frac{a}{b} - \left(\frac{a}{b}\right)_c = S \tau \tan \frac{t}{\tau}, \quad (9)$$

kur a/b ir pusaksiālā garuma attiecība, šeit τ ir raksturīgais laiks, kas pavadīts sašaurinājuma apgabalā pirms “lēcienu”, t apzīmē laiku, S ir skaitliska konstante, un indekss c norāda kritisko vērtību, t.i., to, kas atrodas līdzsvara līknes (8) galējā punktā.



Att. 4: Piliena izstiepšanās, “lecot pāri” histerēzes apgabalam pie dažādām ārējā magnētiskā lauka h vērtībām, ar raustītu līniju attēlojot tangenciālo sakarību (9). Sākotnēji paātrinātā dinamika piesātinās, kad piliens sasniedz savu jauno līdzsvara pagarinājumu. Simulācijās izmantotās pilienu parametru vērtības šeit bija $\mu = 30$, $\lambda = 7.6$.

Vairāku pilienu stiepšanās trajektoriju piemērs pie dažādiem magnētiskajiem laukiem $h = H/H_c - 1$ ir parādīts attēlā 4 ar atbilstošām vienādojuma (9) piedzītajām τ un S vērtību atbilstošajām līknēm.

Turpmākā analīzē tiek pētīta skaitliski iegūtā pilienu sašaurinājuma uzvedība tuvu kritiskajam lauka parametram Bm_c , pirms tas “pārlec” pāri nestabilajam apgabalam uz stabilu konfigurāciju. Parēdzams, ka šajā “pudeles kakla” ilgajā vietā pavadītais laiks sekos $\tau \sim \frac{1}{\sqrt{h}}$ [14] vai $\log \tau \sim -0.5 \log h$ logaritmiskā formā, kas lieliski saskan ar vērtību $k = -0.534$, kas noteikta no skaitliskajām simulācijām.

5 Simulācijas

Šajā sadaļā ir apskatītas dažādas simulācijas, ko veic jaunizveidotais algoritms, kas, cik mums zināms, iepriekš nav veiktas.

Piliena simulācijas nemainīgā laukā dod divus svarīgus rezultātus. Pirmkārt, algoritms spēj simulēt stipri magnētisku pilienu konisko galu attīstību.

Un, otrkārt, simulētās pilienu formas, palielinot magnētiskā lauka stiprumu, kad pilieni ir līdzsvaroti, ir salīdzināmas ar to eksperimentāli novēroto formas attīstību. Šī salīdzināmība ar eksperimentālajiem rezultātiem ļauj netieši secināt par pilienu parametriem, piemēram, viskozitāti, magnētisko caurlaidību un virsmas spraigumu, kas iepriekš bija diezgan grūti nosakāmas mikroskopiskiem magnētiskā šķidruma pilieniem.

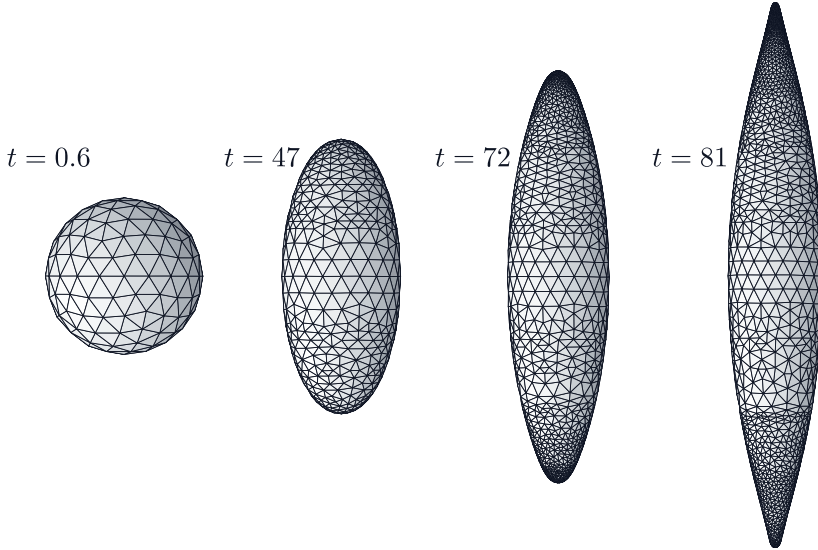
Rotējoša lauka gadījumā ir sasniegti trīs ievērojami rezultāti. Pirmkārt, šķidrā objekta - magnētiskā šķidruma piliena - kustība uz priekšu un atpakaļ ir simulēta trīs dimensijās. Šis efekts iepriekš ir novērots cietos magnētiskajos stieņos un elastīgajos magnētiskajos pavedienos.

Otrkārt, “zvaigznes” nestabilitātes attīstība ir skaitliski simulēta, un kritiskais lauks, kurā šī nestabilitāte rodas, ir noteikts no pilienu formas evolūcijas analīzes.

Visbeidzot, simulācijas kvalitatīvi norāda uz “atgriešanās” pāreju, kurā pilienam, kas ir piedzīvojis oblāts-prolāts pāreju, palielinot magnētiskā lauka stiprumu, atgriezīsies oblātā formā vēl augstākos laukos.

5.1 Konstants lauks

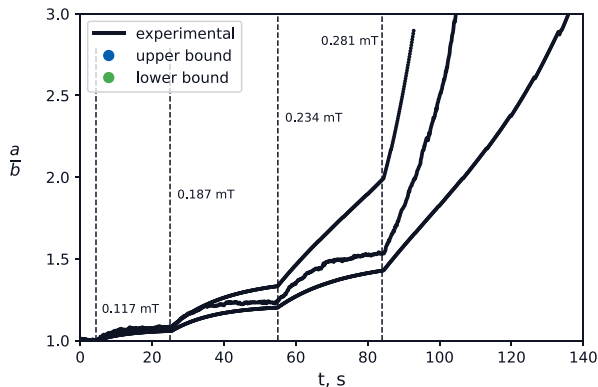
5.1.1 Konisko galu attīstība



Att. 5: Piliena stiepšanās konstantā magnētiskajā laukā ar $Bm = 5$, $\mu = 30$, $\lambda = 10$. Redzama asu galu attīstība, kā arī virsotņu pievienošanās augsta virsmas izliekuma reģionos. Šis attēls iegūts sadarbībā ar A. P. Stikutu.

Sākotnēji sfēriska magnētiskā šķidrums piliens tiek pakļauts pastāvīgam, homogēnam magnētiskajam laukam un ar zināmu ātrumu stiepjas, līdz sasniedz līdzsvara pagarinājumu, kur magnētiskie spēki līdzsvaro virsmas spraiguma spēku. Pilieniem ar augstu magnētisko caurlaidību μ pie pietiekami augstiem magnētiskajiem laukiem ir iespējams izaudzēt pat asus, koniskus galus. Līdzīgs efekts tika prognozēts [25] un novērots [5] iepriekš. Šeit mēs varam novērot šo parādību skaitliski, kā parādīts simulācijas rezultātos attēlā 5.

5.1.2 Salīdzinājums ar pilienu stiepšanos eksperimentāli



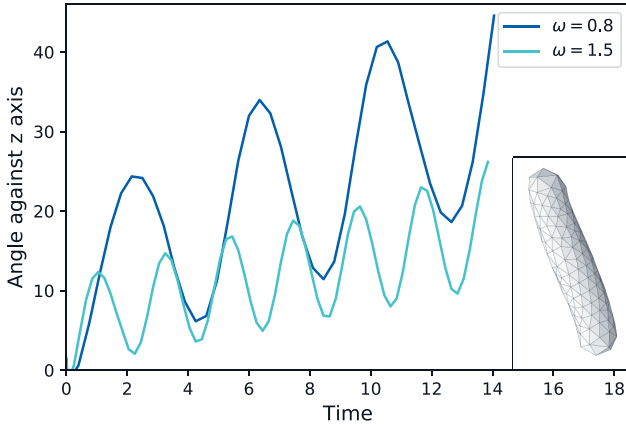
Att. 6: Magnētiskā šķidrums pilienu stiepšanās magnētiskajā laukā, laukam pakāpeniski palielinoties no nulles, ko norāda ar punktētām līnijām. Melnā krāsā— eksperimentālie rezultāti ar $\mu = 34 \pm 1.5$, $\gamma = (8.2 \pm 0.4) \cdot 10^{-7} J/m^2$, $\lambda = 10.1 \pm 2.5$ ārējā magnētiskajā laukā. Zilās un zaļās līknes iegūst skaitliski ar $(\mu = 34, \gamma = 7.7 \cdot 10^{-7} J/m^2, \lambda = 7.6)$ un $(\mu = 34, \gamma = 8.2 \cdot 10^{-7} J/m^2, \lambda = 7.6)$, attiecīgi. Skaitliski aprēķinātās līknes ļauj netieši atrast pilienu parametru vērtību robežas. Eksperimentālos datus sniedza A.P. Stikuts.

Eksperimentāli izmērītā magnētiskā šķidrums pilienu stiepšanās piemērs ir parādīts attēlā 6, kur sākotnēji sfēriska piliens pakāpeniski tiek pakļauts homogēniem magnētiskiem laukiem, kuru lielums palielinās. Simulācijas rezultāti ietver eksperimentālo pagarinājuma likni no apakšas un no augšas - tas netieši norādītu uz pilienu parametru robežām, piemēram, to virsmas spraigumu γ , magnētisko caurlaidību μ un viskozitātes attiecību λ .

Tomēr jāpiemin, ka šiem aprēķiniem ir nepieciešami lieli skaitļošanas resursi un, tā kā ir jānovērtē trīs parametri, šāda pilienu parametru novērtēšanas pieeja šobrīd nešķiet praktiska.

5.2 Rotējošs lauks

5.2.1 Kustība uz priekšu un atpakaļ

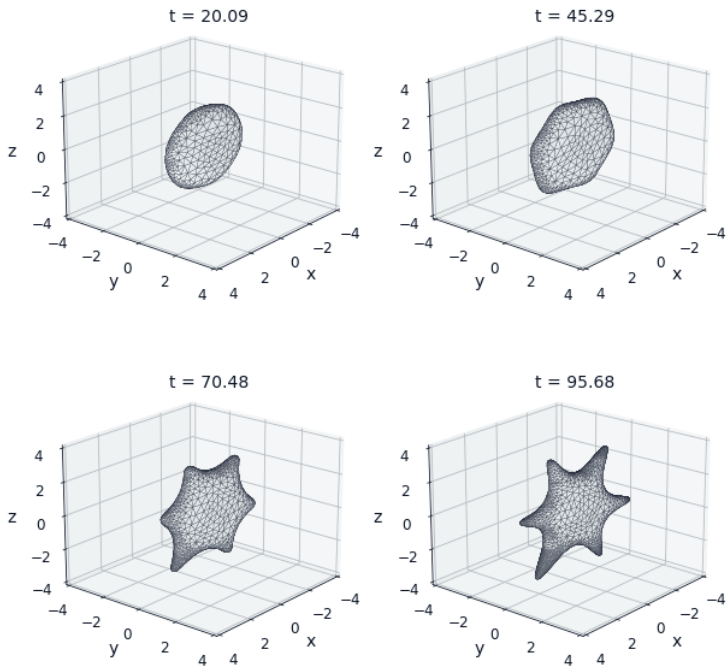


Att. 7: Piliena kustība, kas vispirms tika pagarināts nemainīgā magnētiskajā laukā, un vēlāk ievietots vidēji ātri rotējošajos laukos ar dažādām bezdimensionālām frekvencēm ω . Līknes attēlo leņķi starp garāko piliena asi un stacionāro z asi. Simulācijās izmantotie parametri: $\mu = 30$, $Bm = 10$, $\lambda = 1$. Šeit virsotņu pievienošana tika atspējota, lai paātrinātu simulācijas.

Pilieni, kas sākotnēji bija izstiepti nemainīgā laukā, pēc tam tika pakļauti dažādu bezdimensionālo frekvenču rotējošam magnētiskajam laukam ω .

Pie mazām rotācijas frekvencēm piliens seko ārējam magnētiskajam laukam, kā sagaidāms. Tomēr lielākās frekvencēs tika novērota šķidrums pilienu kustība uz priekšu un atpakaļ, kā redzams attēlā 7, kur ir parādīts, ka garākās piliena ass leņķis svārstās ap vidēji vienmērīgu rotāciju attiecībā pret z asi.

5.2.2 “Zvaigznes” nestabilitāte



Att. 8: Piemērs “zvaigznes” nestabilitātei, kas attīstās rotējošā magnētiskajā laukā, izmantojot $Bm = 35$, $\mu = 10$, $\omega = 10$, $\lambda = 7.6$ un virsotņu pievienošanas kritēriju $\varepsilon = 0,4$.

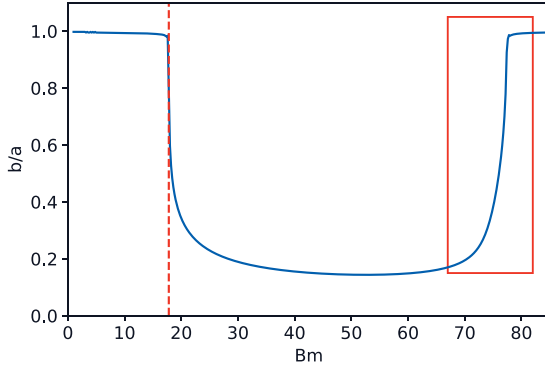
Algoritms sniedz mums iespēju izpētīt “zvaigznes” nestabilitātes sākumu, kas parādīts attēlā 8. Ir zināms, ka tas notiek pietiekami ātri un pietiekami spēcīgi rotējošiem magnētiskajiem laukiem, kad magnētiskā šķidrums pilienam ap savu perimetru “izaug” pirkstiem līdzīgas struktūras [6].

Ir iespējams analizēt šo “zvaigznes” nestabilitātes režīmu rašanos un attīstību, izpētot, kā to Furjē amplitūdas $A_n \propto e^{\beta_n t}$ un logaritmiskie inkrementi β_n mainās laika gaitā dažādos magnētiskajos laukos.

Lai noteiktu kritisko lauku Bm_c , virs kura var izpausties nestā-

bilitātes moda, jāatrod magnētiskā lauka vērtība, pie kuras logaritmētās amplitūdas evolūcijas slīpums (logaritmiskais inkrements) β maina zīmi.

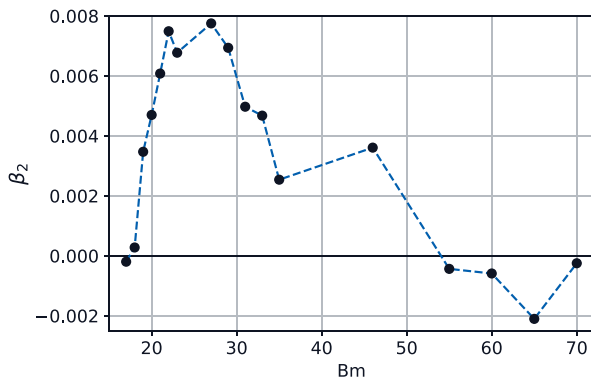
Īpaši interesanta ir $n = 2$ nestabilitātes moda, kuras pieaugums liecinātu par oblāts-prolāts formas pāreju vai, iespējams, ikdienišķākā izteiksmē, pankūkas formas pāreju uz regbija bumbai līdzīgu formu.



Att. 9: Vertikālā sarkanā līnija attēla kreisajā pusē parāda kritisko lauku, kas noteikts, izmantojot logaritmisko pieauguma β_2 zīmes maiņu. Tas lieliski saskan ar teorētisko vērtību. Kvadrātveida laukums attēla labajā pusē parāda, ka piliens atkal kļūst oblāts (līdzīgs pankūkai) pie lielākiem magnētiskajiem laukiem. Simulēts, izmantojot $\mu = 10$.

Šo pāreju norāda zilās līknes straujš kritums attēlā 9. Zilā līkne tika aprēķināta skaitliski, samazinot enerģiju pilienam, kas tiek uzskatīts par elipsoidālu [7, 38]. Pārejas kritiskais lauks, kas atrasts, analizējot β_2 uzvedību ar pieaugošiem magnētiskajiem laukiem (attēlā 9 parādīts ar sarkanu svītru), ļoti precīzi atbilst enerģijas samazināšanas prognozei.

5.2.3 “Atgriešanās” pāreja



Att. 10: Logaritmiskais inkrements zvaigznes režīma $n = 2$ pilienam ar $\mu = 10$ kļūst pozitīvs pie $Bm \approx 18$, norādot pāreju uz prolātu formu, kas tiek atgriezta lielos laukos, kad piliens atkal kļūst oblāts — šī “atgriešanās” pāreja tika prognozēta un novērota [6].

Pilienu enerģijas samazināšanas pieeja [7, 38], kas parādīta zilā krāsā 9 attēlā, kā arī eksperimentālie novērojumi [6] pie pietiekami lieliem magnētiskajiem laukiem ($Bm \gtrsim 70$) paredz, ka piliens, kas iziet “atgriešanās” pāreju — atgriežas pankūkai līdzīgā formā.

Kvalitatīvi līdzīgu rezultātu novērojam nedaudz perturbētu elipsoidālu pilienu Furjē modu A_2 analīzē, kur spēcīgākos magnētiskajos laukos $Bm \gtrsim 50$ pieauguma logaritmiskais inkrements β_2 atkal kļūst negatīvs, norādot uz $n = 2$ modas dilšanu un tādējādi ļaujot pilienam atkal ieiet savā “pankūkas” formā.

“Atgriešanās”pārejas lauka vērtību atšķirība varētu liecināt par elipsoidālās aproksimācijas robežām, kas izmantota kritisko lauku iegūšanā enerģijas samazināšanas pieejā.

6 Nobeigums

6.1 Diskusija

Robeželementu metodes algoritma izstrāde trīsdimensiju magnētiskā šķidrums brīvo virsmu dinamikai ļauj validēt dažādas to uzvedību raksturojošas sakarības un ir salīdzināmas ar eksperimentāliem datiem, tādējādi sniedzot ieskatu magnētisko koloīdu koncentrētās fāzes fizikālajās īpašībās. Šiem koloīdiem var būt daudz interesantu īpašību to stipri magnētiskā rakstura dēļ, piemēram, reoloģisko īpašību vai virsmas spraiguma atkarība no magnētiskā lauka.

Jaunizveidotais skaitliskais rīks, ir pārbaudīts pret vairākām teorētiskām sakarībām, kur tās bija pieejamas, - pilienu pagarinājuma līdzsvara liknes pastāvīgos magnētiskos laukos ar dažādām relatīvās magnētiskās caurlaidības μ vērtībām, nelielu pagarinājumu eksponenciālo samazināšanos virsmas spraigumā bez ārējiem magnētiskajiem laukiem, dinamiskā uzvedība ap histerēzes sašaurinājuma nestabilitātes reģioniem, kā arī pilienu dinamika dažādās rotējošā lauka konfigurācijās un kritiskie lauki oblāts-prolāts pārejas noteikšanā. Šie testi ļauj pārbaudīt dažādu teorētisko tuvinājumu un pieņēmumu robežas, ko bieži izmanto magnētiskā šķidrums pilienu aprakstā, piemēram, elipsoidālās formas pieņēmumu.

Teorētisko prognožu atbilstība skaitliskiem rezultātiem arī paplašina šo pilienu vienkāršā magnētiskā šķidrums modeļa apraksta pielietojuma robežas, kas, šķiet, ir diezgan jauna veida mīksta magnētiska viela ar *a priori* netriviālām fizikālām īpašībām.

Ir arī pierādīts, ka algoritms ir piemērots pilnas trīsdimensiju pilienu dinamikas prognozēšanai ar patvaļīgām pilienu un šķidrums viskozitātes attiecībām vienmērīgos laukos, gan statiskos, gan rotējošos līdz vidēji lielām pilienu deformācijām. Tas ir svarīgi, jo eksperimentāli magnētiskie šķidrums pilieni parasti nav asimetriski, tāpēc tie ir rūpīgi jāapraksta trijās dimensijās, un tie var sasniegt viskozitātes attiecību $\lambda \approx 100$. Algoritms ļauj arī izpētīt pilienu dinamiku mērenu frekvenču rotējošos magnētiskos laukos, kur nav spēkā ātri rotējoša lauka vidējo-

šana, kas iepriekš nebija iespējams.

Turklāt algoritms var simulēt paredzamo magnētiskā šķidruma pilienu raksturīgo uzvedību rotējošajos magnētiskajos laukos, jo īpaši sekojot ārējam laukam zemās rotācijas frekvencēs un demonstrējot kustību uz priekšu un atpakaļ vidēji ātros laukos, līdzīgi kā cietos magnētiskos stienišos vai daļiņās, kā arī pilienu, kam notiek oblāts-prolāts-oblāts pāreja strauji rotējošos laukos ar pieaugošu stiprumu.

Tomēr pašlaik algoritma spēja simulēt lielas pilienu deformācijas ir ierobežota. Tas arī nespēj simulēt “zvaigznes” nestabilitātes režīma simetrisku izskatu bez mākslīgas pilienu formas perturbācijas. Neperurbētajiem “zvaigznes” nestabilitātes režīmiem bija zināma asimetrija gan to leņķiskajā stāvoklī, gan garumā. Lai paātrinātu simulācijas laiku, maza virsmas izliekuma reģionos ir jāievieš virsotņu noņemšanas rutīna, kā tas ir darīts iepriekš [31]. Turklāt esošā algoritma versija balstās uz pieņēmumiem par vienmērīgu virsmas spraigumu un lineāru pilienu magnetizējamību. Visbeidzot, pašreizējais algoritms nevar iekļaut pilienu topoloģiskās izmaiņas, piemēram, saplūšanu vai sadalīšanos, kā arī vairāku pilienu mijiedarbību. Tomēr ir iespējams BEM algoritmu attiecināt arī uz šiem gadījumiem[30].

Ievērojams šī darba ieguldījums ir magnētiskā šķidruma pilienu uzvedības galveno principu skaitliskais apstiprinājums statiskos un rotējošos magnētiskos laukos. Tas ļauj pētīt pilienu dinamiku arī ārpus līdzsvara esošās situācijās, kuras pašlaik nav iespējams aprakstīt ar nevienu teorētisku pieeju, kā arī izpētīt dažādas parādības, kas var būt jutīgas pret vairākām pilienu vai to apkārtnes fizisko parametru precīzām vērtībām.

6.2 Galvenie secinājumi

- Kad rotējošā laukā sacenšas pilienu “zvaigznes” nestabilitātes modas, moda, kas parādās pirmā, var nebūt dominējošā.
- Pilienu virsmas perturbācijas evolūcijas analīze ļauj precīzi noteikt magnētiskā lauka sliekšņus, virs kuriem iespējama konkrētu

“zvaigznes” nestabilitātes modu izpausme.

- Lielākām “zvaigznes” nestabilitātes modām ir nepieciešami spēcīgāki magnētiskie lauki.
- Šķidri, magnētiski objekti var demonstrēt kustību uz priekšu un atpakaļ rotējošos magnētiskajos laukos, līdzīgi kā to cietie analogi.
- Bezgalīgi gara cilindriskā magnētiskā šķidrums piliens modelis [43] pārvērtē kritisko lauku, kurā rodas “zvaigznes” nestabilitāte, iespējams, nepietiekami novērtētu kapilāro spēku dēļ.
- Vienkāršs magnētiskā šķidrums piliens modelis ir pietiekams, lai modelētu dažādas sarežģītās pilienu virsmas dinamikas ārējos laukos, neskatoties uz papildu pieņēmumiem par lineāru piliens magnetizējamību un vienmērīgu virsmas spraigumu.

6.3 Tēzes

Robežintegrālvienādojumos balstītas simulācijas ļauj pilnībā aprakstīt magnētiskā šķidrums piliens brīvo virsmu dinamiku trijās dimensijās.

7 Literatūras saraksts

- [1] S. Chandrasekhar, *Ellipsoidal Figures of Equilibrium*. Yale University Press, Dover, 1969.
- [2] G. Taylor, “Disintegration of water drops in an electric field,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 280, pp. 383–397, July 1964.
- [3] R. Rosensweig, *Ferrohydrodynamics*. Dover Books on Physics, Dover Publications, 1985.
- [4] V. Drozdova, T. Skrobotova, and V. Chekanov, “Experimental study of the hydrostatics characterizing the interphase boundary in a ferrofluid,” *Magnetohydrodynamics*, vol. 15, pp. 12–14, 3 1979.
- [5] J. Bacri and D. Salin, “Instability of ferrofluid magnetic drops under magnetic field,” *Journal de Physique Lettres*, vol. 43, no. 17, pp. 649–654, 1982.
- [6] J.-C. Bacri, A. O. Cebers, and R. Perzynski, “Behavior of a magnetic fluid microdrop in a rotating magnetic field,” *Physical Review Letters*, vol. 72, pp. 2705–2708, Apr. 1994.
- [7] K. I. Morozov and A. V. Lebedev, “Bifurcations of the shape of a magnetic fluid droplet in a rotating magnetic field,” *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, vol. 91, pp. 1029–1032, Nov. 2000.
- [8] A. Cebers and M. Mayorov, “Structures of interface a bubble and magnetic fluid in a field,” *Magnetohydrodynamics*, vol. 16, pp. 231–235, 1980.
- [9] A. O. Tsebers and M. M. Maiorov, “Magnetostatic instabilities in plane layers of magnetizable liquids,” *Magnetohydrodynamics*, vol. 16, no. 1, pp. 21–28, 1980.

- [10] C. Rigoni, G. Beaune, B. Harnist, F. Sohrabi, and J. V. I. Timonen, “Ferrofluidic aqueous two-phase system with ultralow interfacial tension and micro-pattern formation,” *Communications Materials*, vol. 3, p. 26, Dec. 2022.
- [11] J.-C. Bacri and D. Salin, “Bistability of ferrofluid magnetic drops under magnetic field,,” vol. 39, no. 1, pp. 48–50.
- [12] A. Cebers, “Virial method of investigation of statics and dynamics of drops of magnetizable liquids,” *Magnetohydrodynamics (Engl. Transl.); (United States)*, vol. 21, 7 1985.
- [13] S. Afkhami, A. J. Tyler, Y. Renardy, M. Renardy, T. G. St. Pierre, R. C. Woodward, and J. S. Riffle, “Deformation of a hydrophobic ferrofluid droplet suspended in a viscous medium under uniform magnetic fields,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 663, pp. 358–384, Nov. 2010.
- [14] J.-C. Bacri and D. Salin, “Dynamics of the shape transition of a magnetic ferrofluid drop,” *Journal de Physique Lettres*, vol. 44, no. 11, pp. 415–420, 1983.
- [15] J. V. I. Timonen, M. Latikka, L. Leibler, R. H. A. Ras, and O. Ikkala, “Switchable Static and Dynamic Self-Assembly of Magnetic Droplets on Superhydrophobic Surfaces,” *Science*, vol. 341, pp. 253–257, July 2013.
- [16] F. Serwane, A. Mongera, P. Rowghanian, D. A. Kealhofer, A. A. Lucio, Z. M. Hockenbery, and O. Campàs, “In vivo quantification of spatially varying mechanical properties in developing tissues,” *Nature Methods*, vol. 14, pp. 181–186, Feb. 2017.
- [17] P. Das, M. Colombo, and D. Prospero, “Recent advances in magnetic fluid hyperthermia for cancer therapy,” *Colloids and Surfaces B: Biointerfaces*, vol. 174, pp. 42–55, 2019.

- [18] X. Fan, M. Sun, L. Sun, and H. Xie, “Ferrofluid Droplets as Liquid Microrobots with Multiple Deformabilities,” *Advanced Functional Materials*, vol. 30, p. 2000138, June 2020.
- [19] X. Fan, X. Dong, A. C. Karacakol, H. Xie, and M. Sitti, “Reconfigurable multifunctional ferrofluid droplet robots,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 117, pp. 27916–27926, Nov. 2020.
- [20] R. Kay, C. Katrycz, E. J. Heimlich, and B. D. Hatton, “Programmable droplets: Leveraging digitally-responsive flow fields to actively tune liquid morphologies,” *PLoS ONE*, vol. 17, 2022.
- [21] C. Pozrikidis, *A practical guide to boundary element methods with the software library BEMLIB*. Chapman & Hall/CRC, 2002.
- [22] C. Pozrikidis, *Boundary Integral and Singularity Methods for Linearized Viscous Flow*. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
- [23] R. M. Oliveira and J. A. Miranda, “Fully nonlinear simulations of ferrofluid patterns in a radial magnetic field,” *Phys. Rev. Fluids*, vol. 5, p. 124003, Dec 2020.
- [24] J. D. Sherwood, “Breakup of fluid droplets in electric and magnetic fields,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 188, pp. 133–146, Mar. 1988.
- [25] H. A. Stone, J. R. Lister, and M. P. Brenner, “Drops with conical ends in electric and magnetic fields,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 455, pp. 329–347, Jan. 1999.
- [26] O. Lavrova, G. Matthies, T. Mitkova, V. Polevikov, and L. Tobiska, “Numerical treatment of free surface problems in ferrohydrodynamics,” *Journal of Physics: Condensed Matter*, vol. 18, pp. S2657–S2669, Sept. 2006.

- [27] Í. M. Coutinho and J. A. Miranda, “Peak instability in an elastic interface ferrofluid,” *Physics of Fluids*, vol. 32, p. 052104, May 2020.
- [28] I. Drikis, J.-C. Bacri, and A. Cebers, “Labyrinthine pattern formation in disordered system of the magnetic fluid drops: Numerical simulation,” *Magnetohydrodynamics*, vol. 35, pp. 157–169, 01 1999.
- [29] A. Z. Zinchenko, M. A. Rother, and R. H. Davis, “A novel boundary-integral algorithm for viscous interaction of deformable drops,” *Physics of Fluids*, vol. 9, pp. 1493–1511, June 1997.
- [30] A. Z. Zinchenko and R. H. Davis, “Emulsion flow through a packed bed with multiple drop breakup,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 725, pp. 611–663, June 2013.
- [31] V. Cristini, J. Bławdziewicz, and M. Loewenberg, “An Adaptive Mesh Algorithm for Evolving Surfaces: Simulations of Drop Breakup and Coalescence,” *Journal of Computational Physics*, vol. 168, pp. 445–463, Apr. 2001.
- [32] X. Ni, B. Zhu, B. Wang, and B. Chen, “A level-set method for magnetic substance simulation,” *ACM Transactions on Graphics*, vol. 39, Aug. 2020.
- [33] W. C. Jesus, A. M. Roma, and H. D. Ceniceros, “Deformation of a sheared magnetic droplet in a viscous fluid,” *Commun. Comput. Phys*, vol. 24, pp. 332–355, 2018.
- [34] C. S. Peskin, “Flow patterns around heart valves: A numerical method,” *Journal of Computational Physics*, vol. 10, no. 2, pp. 252–271, 1972.
- [35] X. Li, Z.-Q. Dong, P. Yu, X.-D. Niu, L.-P. Wang, D.-C. Li, and H. Yamaguchi, “Numerical investigation of magnetic multiphase flows by the fractional-step-based multiphase lattice Boltzmann method,” *Physics of Fluids*, vol. 32, p. 083309, Aug. 2020.

- [36] S. Afkhami and Y. Renardy, “Ferrofluids and magnetically guided superparamagnetic particles in flows: a review of simulations and modeling,” *Journal of Engineering Mathematics*, vol. 107, pp. 231–251, Dec. 2017.
- [37] D. Das and D. Saintillan, “Electrohydrodynamics of viscous drops in strong electric fields: Numerical simulations,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 829, pp. 127–152, Oct. 2017. arXiv: 1612.02070.
- [38] J. Erdmanis, G. Kitenbergs, R. Perzynski, and A. Cēbers, “Magnetic micro-droplet in rotating field: numerical simulation and comparison with experiment,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 821, pp. 266–295, June 2017.
- [39] A. Stikuts, R. Perzynski, and A. Cēbers, “Spontaneous order in ensembles of rotating magnetic droplets,” *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 500, p. 166304, Apr. 2020.
- [40] E. Blūms, A. O. Cebers, and M. M. Maġorov, *Magnetic fluids*. Berlin ; New York: Walter de Gruyter, 1997.
- [41] I. R. Siqueira, R. B. Rebouças, T. F. Oliveira, and F. R. Cunha, “A new mesh relaxation approach and automatic time-step control method for boundary integral simulations of a viscous drop,” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 84, pp. 221–238, June 2017.
- [42] V. G. Bashtovoi, S. G. Pogirnitskaya, and A. G. Reks, “Determination of the shape of a free drop of magnetic fluid in a uniform magnetic field,” *Magnetohydrodynamics (Engl. Transl.); (United States)*, vol. 23:3, 1 1988.
- [43] S. Lācis and A. Cēbers, “Magnetic fluid free surface instabilities in high frequency rotating magnetic fields,” *Brazilian Journal of Physics*, vol. 25, pp. 101–111, 1995.

