LATVIJAS UNIVERSITĀTE

Promocijas darba kopsavilkums

Dzintra Šteinberga

GROBMANA-HARTMANA TEORĒMAS VISPĀRINĀJUMI NEAUTONOMĀM DINAMISKĀM SISTĒMĀM

Rīga 2023

LATVIJAS UNIVERSITĀTE

FIZIKAS, MATEMĀTIKAS UN OPTOMETRIJAS FAKULTĀTE
MATEMĀTIKAS NODAĻA

Dzintra Šteinberga

GROBMANA-HARTMANA TEORĒMAS VISPĀRINĀJUMI NEAUTONOMĀM DINAMISKĀM SISTĒMĀM

Promocijas darba kopsavilkums

Iesniegts matemātikas doktora grāda iegūšanai
Diferenciālvienādojumu apakšvirzienā

Zinātniskais vadītājs: Emeritētais profesors,
Dr.habil.math. Andrejs Reinfelds

RĪGA 2023

Promocijas darbs tika izstrādāts Latvijas Universitātes Fizikas, matemātikas un optometrijas fakultātes Matemātikas nodaļā no 2012. gada līdz 2022. gadam.

Darba forma: Promocijas darbs matemātikā, diferenciālvienādojumu apakšvirzienā.

Zinātniskais vadītājs: Dr.habil.math. Prof. Andrejs Reinfelds.

Promocijas darba recenzenti:

1. prof. Ewa Schmeidel (Belostokas Universitāte, Polija)
2. prof. Artūras Štikonas (Viļņas Universitāte, Lietuva)
3. prof. Felikss Sadirbajevs (Daugavpils Universitāte, Latvija)

Promocijas darbs tiks aizstāvēts 2023. gada 17. martā Latvijas Universitātē, Fizikas, matemātikas un optometrijas fakultātē.

ISBN 978-9934-18-952-4
ISBN 978-9934-18-953-1 (PDF)

Anotācija

Darbā ir iegūti oriģināli, agrāk nezināmi Grobmana-Hartmana teorēmas vispārinājumi, pat telpā R^n. Rezultāti ir iegūti samazinot prasības lineārai daļai un vienlaicīgi pastiprinot prasības nelineārai daļai. Lokālā kvalitatīvajā dinamisku sistēmu teorijā Grobmana-Hartmana teorēma ir nozīmīgs rezultāts. Teorēma ir par lokālu dinamisku sistēmu atrisinājuma uzvedību hiperboliska līdzsvara punkta apkārtnē. Teorēma tika pierādīta 1959. gadā un kopš tā laika ir veikti daudzi citi papildinoši pētījumi. Pētījumā izmantojam Grīna tipa attēlojumu un integrāl funkcionāl -vienādojuma tehniku, kas ļauj ne tikai ievērojami uzlabot pierādījumu, bet arī izveidot pilnīgi atšķirīgu dinamiskas ekvivalences pierādījuma metodi salīdzinot ar iepriekšējiem pētījumiem. Uzsverot iegūto vispārinājumu, mēs aplūkojam neautonomus diferenču un diferenciālvienādojumus patvaļīgā Banaha telpā. Integrāl- funkcionālvienādojumu tehnika noved ne tikai pie vienkāršāka pierādījuma, bet arī pie vispārīgāka pietiekamā nosacījuma ierobežota atrisinājuma, kā arī periodiska atrisinājuma, eksistencei laika skalā. Darbā ir iegūti arī jauni pietiekami nosacījumi lineāra dinamiska vienādojuma Haiera-Ulama stabilitātei pie nosacījuma, ka Grīna tipa attēlojuma integrālis ir vienmērīgi ierobežots. Lai uzsvērtu iegūto rezultātu uzlabojumus salīdzinot ar iepriekšējiem rezultātiem, promocijas darbs ir papildināts ar vairākiem piemēriem.

Atslēgas vārdi: Kvazilineārs diferenciālvienādojums, apgriežams diferenču vienādojums, Grobmana-Hartmana linearizācijas teorēma, kvazilineāri vienādojumi ar impulsiem, dinamiskā ekvivalence, dinamiski vienādojumi laika skalā, Grīna tipa attēlojums, ierobežots atrisinājums, periodisks atrisinājums, Haiera-Ulama stabilitāte.

Pateicības

Es vēlos izteikt pateicību savam vadītājam Dr.habil.math. Andrejam Reinfeldam par manu doktorantūras un saistīto pētījumu patstāvīgu atbalstu, norādījumu došanu, pacietību, motivāciju un milzīgajām zināšanām. Viņa vadība, laipnība un atbalsts visu šo gadu laikā man ir ļoti palīdzējis. Papildus es vēlos pateikties visai fakultātei par radīto atbalstošo darba vidi matemātikā.

Mīļu paldies vēlos teikt arī savai ģimenei, kura mani garīgi ir atbalstījusi dažādos manas dzīves posmos, lai es kļūtu par tādu personu, kāda esmu šodien. Esmu pateicīga par viņu nebeidzamo mīlestību un ieguldījumu, ko viņi ir veikuši manā labā. Īpašu pateicību vēlos veltīt savam vīram par pacietību, iedrošinājumu un atbalstu.

Saturs

Ievads

Diferenciālvienādojumu teorija aizsākās ar Ņūtona un Leibnica vispārīgās aritmētikas ieviešanu. Angļu matemātiķis Īzaks Ņūtons (1642-1727) strādāja pie dažāda tipa vienādojumiem un 1671. gadā darbā *Methodus of fluxionum et Serierum Infinitraum* [16] viņš klasificēja trīs pirmās kārtas diferenciālvienādojumus: $\frac{dy}{dx} = f(x)$, $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ un $x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy} = u$. 1695. gadā Jākobs Bernulli ieviesa citāda tipa diferenciālvienādojumu $y' + P(x)y = Q(x)y^n$, kas tika nosaukts viņa vārdā. Vēlāk, vienkāršojot Bernulli diferenciālvienādojumu, Leibnics ieguva tā atrisinājumu. Savukārt 1746. gadā Alemberts ieviesa viendimensionālu viļņa vienādojumu. Dažus gadu vēlāk Eilers atklāja trīsdimensionālu vienādojumu [28]. Vēlākos gados daudzi matemātiķi ir devuši ieguldījumu diferenciālvienādojumu attīstībā. Mūsdienās diferenciālvienādojumi ir ne tikai mācību priekšmets teorētiskā matemātikā, kur galvenais darbības virziens ir atrisinājuma eksistence un unitāte, bet arī pielietojumu matemātikā ar plašiem pielietojumiem fizikā, inženierzinātnēs, bioloģijā, ekonomikā un ķīmijā.

Neskatoties uz to, ka diferenču vienādojumi tika atklāti daudz agrāk nekā diferenciālvienādojumi, par tiem ir veikti ievērojami mazāk pētījumi. Tehnoloģiju attīstība, tai skaitā programmēšana un vizualizācija, ir būtiski attīstījusies pēdējās desmitgadēs un tas ir devis iespēju daudzas matemātikas problēmas atrisināt skaitliski, tai skaitā diferenču vienādojumus. Lai ar datora palīdzību atrisinātu diferenču vienādojumu, nepieciešams ne tikai formulēt aptuvenu diferenci, bet arī formulēt vispārēju diferenču vienādojumu teoriju. Tas ir iemesls kādēļ mūsdienās diferenču vienādojumu teorijai tiek pievērsta vairāk uzmanība.

Dinamiska sistēma sastāv no abstraktas fāžu telpas, kuras koordinātes raksturo stāvokli katrā momentā, un dinamiska noteikuma, kurš raksturo nākotni visiem stāvokļa mainīgajiem zinot patreizējos stāvokļa mainīgos, piemēram, svārsta stāvokli raksturo tā leņķi un leņķiskais ātrums, un attīstības noteikums tiek raksturots ar Ņūtona vienādojumu $F = ma$. Dinamisku sistēmu kvalitatīvā teorija radās Poinkarē darbā *Celestial mechanics* (Poinkarē 1899) un īpaši apbalvotais 270 lapu garais darbs. Darbā attīstītās metodes veidoja pamatu lokālai un globālai nelineāru diferenciālvienādojumu analīzei, tai skaitā, nekustīgā punkta teoriju, periodiskas orbītas, stabilas un nestabilas varietātes, un Poinkarē rekurences teorēmu.
Grobmana-Hartmana jeb linearizācijas teorēma ir centrāls rezultāts dinamisku sistēmu lokālajā kvalitatīvajā teorijā. Teorēma ir par lokālu dinamiskas sistēmas atrisinājuma uzvedību hiperboliska līdzsvara punkta apkārtnē. Grobmana-Hartmana teorēma 1959. gadā neatkarīgi pierādīja divi matemātiķi - amerikāņu matemātiķis Filips Hartmans [12] un krievu matemātiķis D.M. Grobmans [10]. Turpmākajos gados parasto diferenciālvienādojumu linearizācijas problēmu pētīja D.M. Grobmans [11], P. Hartmans [13], K.J. Palmers [17] un citi matemātiķi [20], [21].

Mērķis un uzdevumi

Promocijas darba galvenais mērķis ir iepazīties vispārīgākiem rezultātiem Grobmana-Hartmana teorēmai kvazilineāriem vienādojumiem, vienādojumiem ar impulsiem, vienādojumiem laika skalā, kā arī ierobežota un periodiska atrisinājuma eksistenci un Haiera-Ulama stabilitāti. Grobmana-Hartmana teorēmas vispārinājumus iegūst izmantojot pilnīgi citādu pierādījuma metodi. Lai uzsvērtu teorēmas vispārinājumu, darbs jāpapildina ar reprezentatīviem piemēriem. Darba uzdevumi ir cieši saistīti ar tā mērķi:

- Grobmana-Hartmana teorēmas vispārināšana izmantojot Grīna tipa attēlojumu un integrāl-funkcionālvienādojuma tehniku, kas noved pie vispārīgākiem kvazilineāru vienādojumu un vienādojumu ar impulsiem nosacījumiem.

- Izpētīt dinamiskas sistēmas laika skalā, lai vispārinātu Grobmana-Hartmana teorēmu laika skalā.
- Rezultātu vispārināšana, izpētot ierobežota un periodiska atrisinājuma eksistenci un Haiera-Ulama stabilitāti.
- Papildināt darbu ar piemēriem, kuri uzskatāmi parāda iepriekš zināmu rezultātu paplašinājumu.

Darba struktūra

Promocijas darba struktūra is šāda.
1. nodaļā sniegts vispārējs pārskats par nepieciešamajiem priekšdarbiem. Nodaļa ir sākta ar ievadu par diferenču un diferenciālvienādojumiem, un turpināta ar ievadu par laika skalas rēķinu teoriju, papildinot to ar dažiem atvasināšanu, integrēšanu, eksponenciālo funkciju un dažiem piemēriem. Nodaļā ir aprakstīti arī vispārzināmi rezultāti, kā piemēram, metriskas telpas, Banaha nekustīgā punkta teorēma, Grīna funkcija, kā arī mazāk zināmi rezultāti - Grīna tipa attēlojums.
2. nodaļā ir aprakstīta Grobmana-Hartmana teorēma un Palmera vispārinājums. Tālāk, samazinot prasības lineārai daļai un pastiprinot prasības nelineārai daļai, tiek iegūts kvazilineāra vienādojuma vispārinājums. Darbā ir ievērojami vienkāršots pierādījums, izmantojot Grīna tipa attēlojumu un integrāl-vienādojuma tehniku [21], [22], [23]. Turklāt, lai iegūtu vispārīgāku skatījumu, tiek aplūkoti neautonomai diferenču un neautonomi diferenciālvienādojumi patvaļīgā Banaha telpā. Nodaļā ir aplūkots piemērs, kur diferenciālvienādojuma lineārai daļai pat neizpildās eksponenciālā dihotomija, tādējādi tiek uzsvērta iegūto rezultātu novitāte.
3. nodaļa sniedz ievadu par vienādojumiem ar impulsu, kas papildināts ar piemēru. Ekvivalences problēmu vienādojumiem ar impulsiem pirmie pētīja A. Reinfelds un L. Sermone [25], [26], [27]. Citi linearizācijas problēmas vispārinājumi ir aprakstīti [24], [30], [31] un [32]. Nodaļas beigās ir aprakstīts mūsu vispārinājums teorēmai, tās pierādījums un piemērs.
4. nodaļā ir apskatīts Grobmana-Hartmana teorēmas vispārinājums laika

skalā, teorēma un tās pierādījums ir papildināts ar piemēru.
5. nodaļā ir noformulēts pietiekamais nosacījums lineāra dinamiska vienādojuma ierobežota vai periodiska atrisinājuma eksistencei, kur vienādojumam tiek prasīts vājāks nosacījums nelineārai daļa. Šajā nodaļā ir arī aplūkota Haiera-Ulama stabilitāte lineāram dinamiskam vienādojumam, tā jauns nepieciešamais nosacījums pie nosacījuma, ka Grīna tipa attēlojums ir vienmērīgi ierobežots. Šajā nodaļā ir iekļauti daži interesanti piemēri.

Aprobācija

Darba rakstīšanas procesā iegūtie rezultāti ir prezentēti piecās starptautiskās konferencēs (Mathematical Modelling and Analysis 2013, ICDEA 2015, ICDEA 2016, PODE 2016 and Conference on Differential and Difference Equations and Applications 2014) un piecās vietējas nozīmes konferencēs. Pilnu apmeklēto konferenču sarakstu skatīt 39. lapā.
Galvenie pētījuma rezultāti atspoguļoti trīs publikācijās starptautiskos indeksētos žurnālos (2 SCOPUS, 2 Web of Science), kā arī starptautisku un vietējas nozīmes konferenču tēzēs. Pilnu publikāciju sarakstu skatīt 41. lapā.

1. Pamatjēdzieni

1.1 Laika skala

Laika skalas rēķinu teoriju pirmo reizi 1988. gadā ieviesa Stefans Hilgers savā promocijas darbā [14] (zinātniskais vadītājs - Bernd Aulbach). Laika skala ir diferenču un diferenciālvienādojumu teorijas apvienošana. Tālāk minētās definīcijas un teorēmas, kā arī vispārīgu ievadu par laika skalu var aplūkot M. Bonera un A. Petersena grāmatā [4], kā arī citos literatūras avotos, piemēram [5], [8].

Definīcija 1. *Laika skala* $\mathbb{T}$ ir patvaļīga netukša telpas $\mathbb{R}$ slēgta apakškopa.

Uzskatāmi laika skalas piemēri ir reālie skaitļi, veselie skaitļi, naturālie skaitļi, bet racionāli skaitļi, iracionāli skaitļi, kompleksi skaitļi un vaļējs intervāls nav laika skala.
Delta atvasinājumu funkcijai f apzīmēsim ar f^{Δ}.

Definīcija 2. Katram $t \in \mathbb{T}$, pozitīvo nobīdes operatoru $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ definējam ar $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$.

Definīcija 3. Katram $t \in \mathbb{T}$, negatīvo nobīdes operatoru $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ definējam ar $\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}$.

Definīcija 4. Graudainības funkcija μ ir attālums no punkta līdz tuvākajam punktam, kas atrodas pa labi un ir definēts kā $\mu(t) = \sigma(t) - t$.

1.1.1 Atvasināšana

Mēs atsaucamies uz [4].

Definīcija 5. Pieņemam, ka $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ un $t \in \mathbb{T}^k$. Par Hilgera atvasinājumu $f^{\Delta}(t)$ (delta atvasinājumu) sauc tādu skaitli (ja tāds eksistē) ar īpašību, ka jebkuram $\epsilon > 0$ eksistē apkārtne U (t.i. $U = (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T}$ kādam $\delta > 0$), tāda ka

$$\mid [f(\sigma(t)) - f(s)] - f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s] \mid \leqslant \epsilon \mid \sigma(t) - s \mid . \quad (1.11)$$

f ir delta diferencējama kopā $\mathbb{T}^k$, ja visiem $t \in \mathbb{T}^k$ eksistē $f^{\Delta}(t)$.
Funkcija $f^{\Delta} : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$ tiek saukta par f delta atvasinājumu.

Lemma 1 ([38])**.** *Pieņemam, ka f, $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ir delta atvasināma punktā $t \in \mathbb{T}^k$, tad ir spēkā sekojošas delta atvasinājuma īpašības:*

$$(f+g)^\Delta(t) = f^\Delta(t) + g^\Delta(t);$$

$$(cf)^\Delta(t) = cf^\Delta(t), \quad c \in \mathbb{R};$$

$$(fg)^\Delta(t) = f^\Delta(t)g(t) + f^\sigma(t)g^\Delta(t) = f(t)g^\Delta(t) + f^\Delta(t)g^\sigma(t);$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)^\Delta(t) = \frac{f^\Delta(t)g(t) - f(t)g^\Delta(t)}{g(t)g^\sigma(t)}, \quad g(t)g^\sigma(t) \neq 0.$$

No lemmas mēs varam iegūt, ka

$$(f^2)^\Delta = (f * f)^\Delta = f^\Delta f + f^\sigma f^\Delta = (f + f^\sigma)f^\Delta.$$

1.1.2 Integrēšana

Šajā nodaļā aprakstītie integrēšanas jēdzieni laika skalā ir saskaņā ar Bonera un Petersona grāmatām [4], [5].

Definīcija 6. Funkcija $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ tiek saukta par rd-nepārtrauktu, ja tā ir nepārtraukta blīvi pa labi punktos $\mathbb{T}$ un tās kreisās puses robežas pastāv (ierobežotas) kreisajos blīvajos $\mathbb{T}$ punktos.
Rd-nepārtraukto funkciju kopu apzīmē ar $C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$.

Definīcija 7. Saka, ka $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ir $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ pirmfunkcija, ja

$$F^\Delta(t) = f(t)$$

visiem $t \in \mathbb{T}^k$.

Teorēma 2 (Pirmfunkcijas eksistence)**.** *Katrai rd-nepārtrauktai funkcijai ir pirmfunkcija. Ja $t_0 \in \mathbb{T}$, tad F, definēta ar $F(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)\Delta\tau$ visiem $t \in \mathbb{T}$, ir t pirmfunkcija.*

1.1.3 Eksponenciālā funkcija

Eksponenciālā funkcija ir ērti lietojama lai aprakstītu dažādas īpašības vai, lai to izmantotu pierādījumos. Mēs izmantojam cilindrisko transformāciju [4], lai definētu vispārinātu eksponenciālo funkciju patvaļīgā laika skalā $\mathbb{T}$.

Definīcija 8. Funkcija $p : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ir regresīva, ja $1 + \mu(t)p(t) \neq 0$ visiem $t \in \mathbb{T}^k$.

Visu regresīvo un rd-nepārtraukto funkciju kopu $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ apzīmējam ar $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbb{R}) = \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$.

Definīcija 9. Ja $p \in \mathcal{R}$, tad eksponenciālo funkciju definējam ar

$$e_p(t,s) = exp\left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right),$$

kur $s, t \in \mathbb{T}$ un cilindriskā transformācija ir

$$\xi_h(z) = \frac{1}{h} ln(1 + zh),$$

kur $h > 0$ un $h = 0$, $\xi_0(z) = z$, $z \in \mathbb{C}$. ln ir logaritma funkcijas galvenā daļa.

Lemma 3. *Ja $p \in \mathcal{R}$, tad visiem $r, s, t \in \mathbb{T}$ ir spēkā*

$$e_p(t,r)e_p(r,s) = e_p(t,s).$$

Definīcija 10. Ja $p \in \mathcal{R}$, tad pirmās kārtas lineāru dinamisku vienādojumu

$$y^{\Delta} = p(t)y \tag{1.12}$$

sauc par regresīvu.

Teorēma 4. *Ja vienādojums 1.12 ir regresīvs un $t_0 \in \mathbb{T}$, tad $e_p(\cdot, t_0)$ ir atrisinājums problēmai $y^{\Delta} = p(t)y$, $y(t_0) = 1$.*

Teorēma 5 (Konstantes variācijas metode). *Pieņemam, ka $p \in \mathcal{R}$, $f \in C_{rd}$, $t_0 \in \mathbb{T}$ un $y_0 \in \mathbb{R}$. Sākuma nosacījumu problēmas*

$$y^{\Delta} = p(t)y + f(t), \quad y(t_0) = y_0$$

unikālais atrisinājums ir

$$y(t) = e_p(t,t_0)y_0 + \int_{t_0}^t e_p(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau$$

1.2 Banaha nekustīgā punkta teorēma

Banaha nekustīgā punkta teorēma, saukta arī par saspiešanas teorēmu, ir par pilnas metriskas telpas saspiešanu sevī. Teorēma nosaka nekustīgā punkta eksistences un unitātes pietiekamo nosacījumu.

Definīcija 11. (X, d) ir metriska telpa. Attēlojumu $f : X \to X$ sauc par Lipšica nepārtrauktu, ja eksistē $\lambda \geq 0$ tāda, ka $\forall x_1, x_2 \in X$

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda d(x_1, x_2).$$

Vismazāko λ ar kuru izpildās dotā nevienādība sauc par funkcijas f Lipšica konstanti. Ja $\lambda < 1$, tad attēlojumu f sauc par saspiedējattēlojumu.

Definīcija 12 (Nekustīgais punkts)**.** Punktu $\overline{x} \in X$ sauc par attēlojuma f nekustīgo punktu, ja $f(\overline{x}) = \overline{x}$.

Teorēma 6 (Banaha nekustīgā punkta teorēma)**.** *Pieņemam, ka f ir saspiedējattēlojums pilnā metriskā telpā X, tad f eksistē viens vienīgs nekustīgai punkts $\overline{x} \in X$.*

1.3 Grīna tipa attēlojums

Definīcija 13. Nepārtrauktu attēlojumu $G : \mathbb{R}^2 \setminus \{D\} \to \mathfrak{L}(\mathbb{R})$, kur $D = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 \mid t = s\}$ sauc par Grīna tipa attēlojumu, ja

(i) $G(t, s)$ ir nepārtraukti diferencējama un tas ir $\dot{x} = Ax$ atrisinājums, izņemot $t = s$;

(ii) $G(s + 0, s) - G(s - 0, s) = I$, kur I ir identiskais attēlojums.

Punktos (i) un (ii) minētie nosacījumi ir līdzīgi Grīna funkcijas īpašībām, bet nosacījuma $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(t, s)|dt < +\infty$ pievienošana noved pie vienas vienīgas Grīna funkcijas.

2. Grobmana-Hartmana teorēma kvazilineāriem vienādojumiem

2.1 Grobmana-Hartmana teorēma

Grobmana-Hartmana jeb linearizācijas teorēma ir centrāls rezultāts dinamisku sistēmu lokālajā kvalitatīvajā teorijā. Teorēma ir par lokālu dinamiskas sistēmas atrisinājuma uzvedību hiperboliska līdzsvara punkta apkārtnē. Grobmana-Hartmana teorēmu 1959. gadā neatkarīgi pierādīja divi matemātiķi - amerikāņu matemātiķis Filips Hartmans [12] un krievu matemātiķis D.M. Grobmans [10].
Mēs atsaucamies uz [18].
Grobmana-Hartmana teorēma saka, ka hiperboliska līdzsvara punkta x_0 apkārtnē nelineārai sistēmai

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.11}$$

ir tāda pati kvalitatīvā struktūra kā lineārai sistēmai

$$\dot{x} = Ax \tag{2.12}$$

ar $A = Df(x_0)$, kur Df ir Jakobi matrica. Turpmāk pieņemam, ka līdzsvara punkts x_0 atrodas koordinātu sākumpunktā.

Teorēma 7 (Grobmana-Hartmana teorēma)**.** *Dots, ka R^n apakškopa E satur koordinātu sākumpunktu, $f \in C^1(E)$, un ϕ_t ir nelineārās sistēmas 2.11 plūsma. Pieņemam, ka $f(0) = 0$ un matricai $A = Df(0)$ īpašvērtību reālās daļas nav vienādas ar 0. Tādā gadījumā eksistē homeomorfisms H, kurš vaļēju koordinātu sākumpunktu saturoša kopu U attēlo vaļējā koordinātu sākumpunktu saturošā kopā V tā, ka katram $x_0 \in U$, eksistē vaļējs intervāls $I_0 \subset R$, kurš satur 0, tā, ka visiem $x_0 \in U$ un $t \in I_0$*

$$H \circ \phi_t(x_0) = e^{At} H(x_0),$$

t.i., H nelineārās sistēmas 2.11 trajektorijas koordinātu sākumpunkta apkārtnē attēlo par sistēmas 2.12 trajektorijām koordinātu sākumpunkta apkārtnē, saglabājot parametrizāciju pēc laika.

2.2 Palmera vispārinājums

1973. gadā Palmers vispārināja Grobmana-Hartmana teorēmu [17]. Vispārinājums tika veikts neautonomiem diferenciālvienādojumiem, kuriem lineārai daļai izpildās eksponenciālā dihotomija.

Definīcija 14 (Eksponenciālā dihotomija)**.** Matricu funkcija $A(t)$ ir definēta un nepārtraukta visiem $t \in \mathbb{R}$. Saka, ka lineāram diferenciālvienādojumam

$$\dot{x} = A(t)x$$

ir eksponenciālā dihotomija, ja

$$\begin{array}{l} \|X(t)PX^{-1}(s)\| \le Ke^{-\alpha(t-s)}, \quad s \le t, \\ \|X(t)(I-P)X^{-1}(s)\| \le Ke^{-\alpha(s-t)}, \, s \ge t, \end{array}$$

kur $X(t)$ ir fundamentālā atrisinājuma matrica, $\|\cdot\|$ ir operatora norma, P ir projektors ($P^2 = P$) un K, α ir pozitīva konstante.

2.3 Kvazilineāru diferenciālvienādojumu dinamiskā ekvivalence

Šajā nodaļā mēs vispārinām Grobmana-Hartmana-Palmera rezultātu (pat telpā R^n), samazinot prasības lineārai daļai A un vienlaicīgi pastiprinot prasības nelineārai daļai f. Mēs izmantojam Grīna tipa funkciju un integrāl-funkcionālvienādojuma tehniku [21], [22], [23], lai būtiski vienkāršotu pierādījumu. Lai iegūtu plašāku skata punktu, mēs aplūkojam neautonomus diferenciālvienādojumus un neautonomus diferenču vienādojumu patvaļīgā Banaha telpā. Mēs parādam piemēru, kur diferenciālvienādojuma lineārai daļai pat nav eksponenciālā dihotomija, tādējādi uzsverot iegūto rezultātu novitāti.

Šajā nodaļā mēs atsaucamies uz autora publikāciju Nr.1.

Dota Banaha telpa X un lineāru ierobežotu attēlojumu Banaha telpa $\mathfrak{L}(X)$. Aplūkojam kvazilineāru diferenciālvienādojumu

$$\dot{x} = A(t)x + f_1(t, x) \tag{2.31}$$

un

$$\dot{x} = A(t)x + f_2(t, x) \tag{2.32}$$

telpā X, kur $A : \mathbb{R} \to \mathfrak{L}(X)$ ir integrējams pēc Bohnera, pie tam, pieņemam, ka attēlojumi $f_i : \mathbb{R} \times X \to X$, $i = 1, 2$ ir lokāli integrējami pēc t pie fiksēta x un apmierina Lipšica nosacījumus

$$|f_i(t,x) - f_i(t,x')| \leq \varepsilon(t)|x - x'|, \quad i = 1, 2$$

un

$$\sup_x |f_1(t,x) - f_2(t,x)| \leq N(t) < +\infty,$$

kur $N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ un $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ ir skalāras integrējamas funkcijas. Ar $x_i(\cdot, s, x) : \mathbb{R} \to X$, $i = 1, 2$ apzīmējam vienādojuma 2.31 un 2.32 atrisinājumus, kur $x_i(s, s, x) = x$.

Definīcija 15. Diferenciālvienādojumus 2.31 un 2.32 sauc par globāli dinamiski ekvivalentiem, ja eksistē tāds nepārtraukts attēlojums $H : \mathbb{R} \times X \to X$ ka

(i) katram fiksētam $t \in \mathbb{R}$ attēlojums $H(t, \cdot)$ ir homeomorfisms;

(ii) $\sup_{t,x} |H(t,x) - x| \leq +\infty$;

(iii) visiem $t \in \mathbb{R}$

$$H(t, x_1(t, s, x)) = x_2(t, s, H(s, x)).$$

Dots

$$D = \{(t,s) \in R^2 | t = s\}.$$

Definīcija 16 (Grīna tipa attēlojums)**.** Nepārtraukts attēlojums $G : R^2 \setminus D \to \mathfrak{L}(X)$ ir Grīna tipa attēlojums, ja

(i) tas ir lineāra diferenciālvienādojuma

$$\dot{x} = A(t)x \tag{2.33}$$

atrisinājums, izņemot punktā $t = s$;

(ii)

$$G(t+0, t) - G(t-0, t) = I,$$

kur I ir identiskais attēlojums.

Ievērojam, ka diferenciālvienādojumam 2.33 ir bezgalīgi daudz Grīna tipa attēlojumi, bet, ja lineāram diferenciālvienādojumam 2.33 ir eksponenciālā dihotomija, tad eksistē viens vienīgs Grīna tipa attēlojums, kurš apmierina nevienādību

$$|G(t,s)| \leq Kexp(-\lambda|t-s|), \quad K \geq 1, \lambda > 0.$$

Grīna tipa attēlojumu varam attēlot formā

$$G(t,s) = \begin{cases} U(t,s)P(s), & \text{if } t > s \\ U(t,s)(P(s)-I), & \text{if } t < s \end{cases},$$

kur $U(t,s)$ ir vienādojuma 2.33 evolūcijas operators. Ievērojam, ka

$$U(t,\tau)U(\tau,s) = U(t,s)$$

un vienādojumu 2.31 un 2.32 atrisinājumu var pierakstīt formā

$$x_i(t,s,x) = U(t,s)x + \int_s^t U(t,\tau)f_i(\tau, x_i(\tau,s,x))d\tau, \quad i = 1,2.$$

Teorēma 8. *Pieņemam, ka lineārs diferenciālvienādojumam 2.33 ir tāds Grīna tipa attēlojums $G(s,\tau) \in \mathfrak{L}(X)$, ka*

$$\sup_s \int_{-\infty}^{+\infty} |G(s,\tau)|N(\tau)d\tau < +\infty,$$

$$\sup_s \int_{-\infty}^{+\infty} |G(s,\tau)|\epsilon(\tau)d\tau = 1 < q.$$

Tad diferenciālvienādojuma sistēmas 2.31 un 2.32 ir globāli dinamiski ekvivalentas.

Pierādījums. Apskatam nepārtrauktu, ierobežotu attēlojumu kopu

$$\mathfrak{M} = \left\{ h : \mathbb{R} \times X \to X \,\middle|\, \sup_{s,x} |h(s,x)| < +\infty \right\}.$$

$\mathfrak{M}$ ir Banaha telpa ar suprema normu

$$\|h\| = \sup_{s,x} |h(s,x)|.$$

Attēlojumu, kur uzdod 2.31 un 2.32 ekvivalenci, meklējam formā $H(s,x) = x + h(s,x)$. Mēs pētām sekojošu integrāl-funkcionālvienādojumu

$$h(s,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(s,\tau)(f_2(\tau, x_1(\tau,s,x) + h(\tau, x_1(\tau,s,x))) \qquad (2.34)$$
$$-f_1(\tau, x_1(\tau,s,x)))d\tau.$$

Aplūkojam attēlojumu $h \mapsto \mathfrak{T}h$, $h \in \mathfrak{M}$, kurš definēts ar nevienādību

$$\mathfrak{T}h(s,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(s,\tau)(f_2(\tau, x_1(\tau,s,x) + h(\tau, x_1(\tau,s,x)))$$
$$-f_1(\tau, x_1(\tau,s,x)))d\tau.$$

Pateicoties ierobežotībai, Lipšica nosacījumam un 8. teorēmas nosacījumiem, arī $\mathfrak{T}h(s,x) \in \mathfrak{M}$.

(i) Tā kā $\sup_x |f_1(t,x) - f_2(t,x)| \le N(t) < +\infty$, tad arī

$$\sup_x |f_2(t, x_1(t,s,x) + h(t, x_1(t,s,x))) - f_1(t, x_1(t,s,x))| \le N(t) < +\infty.$$

(ii)

$$\sup_x |\mathfrak{T}h(s,x)| =$$
$$= \sup_x \Big| \int_{-\infty}^{+\infty} G(s,\tau)(f_2(\tau, x_1(\tau,s,x) + h(\tau, x_1(\tau,s,x)))$$
$$-f_1(\tau, x_1(\tau,s,x)))d\tau \Big|$$
$$\le \sup_x \left| \int_{-\infty}^{+\infty} G(s,\tau) N(\tau) d\tau \right|.$$

(iii) No 8. teorēmas nosacījuma

$$\sup_s \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(s,\tau)| N(\tau) d\tau < +\infty$$

$$\Rightarrow \sup_{s,x} |\mathfrak{T}h(s,x)| < +\infty \Rightarrow \mathfrak{T}h(s,x) \in \mathfrak{M}.$$

Tālāk iegūstam, ka

$$|\mathfrak{T}h(s,x) - \mathfrak{T}h'(s,x)| =$$

$$= \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(s,\tau)(f_2(\tau, x_1(\tau,s,x) + h(\tau, x_1(\tau,s,x))) - f_1(\tau, x_1(\tau,s,x)))d\tau - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(s,\tau)(f_2(\tau, x_1(\tau,s,x) + h'(\tau, x_1(\tau,s,x))) - f_1(\tau, x_1(\tau,s,x)))d\tau \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(s,\tau)(f_2(\tau, x_1(\tau,s,x) + h(\tau, x_1(\tau,s,x))) - \cancel{f_1(\tau, x_1(\tau,s,x))} - \right.$$

$$\left. - f_2(\tau, x_1(\tau,s,x) + h'(\tau, x_1(\tau,s,x))) + \cancel{f_1(\tau, x_1(\tau,s,x))})d\tau \right| =$$

$$| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(s,\tau)(f_2(\tau, x_1(\tau,s,x) + h(\tau, x_1(\tau,s,x)))$$

$$- f_2(\tau, x_1(\tau,s,x) + h'(\tau, x_1(\tau,s,x))))d\tau| \leq$$

$$\leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(s,\tau)| \, \epsilon(\tau) \, |h(\tau, x_1(\tau,s,x)) - h'(\tau, x_1(\tau,s,x))| \, d\tau \leq$$

$$\leq \sup_s \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(s,\tau)| \, \epsilon(\tau) \, |h(\tau, x_1(\tau,s,x)) - h'(\tau, x_1(\tau,s,x))| \, d\tau \leq$$

No suprema normas Banaha telpā iegūstam, ka

$$\leq \sup_s \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(s,\tau)| \, \epsilon(\tau) d\tau \, ||h - h'|| =$$

un no 8.teorēmas seko, ka

$$= q\,||h - h'||,$$

kur $q < 1$. No tā seko, ka attēlojums $\mathfrak{T}$ ir saspiedējattēlojums, tātad integrāl-funkcionālvienādojumam 2.34 eksistē viens vienīgs atrisinājums kopā $\mathfrak{M}$.

$$h(t, x_1(t, s, x)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t, \tau)(f_2(\tau, x_1(\tau, s, x) + h(\tau, x_1(\tau, s, x)))$$

$$-f_1(\tau, x_1(\tau, s, x)))d\tau =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{t} G(t, \tau)(f_2(\tau, x_1(\tau, s, x) + h(\tau, x_1(\tau, s, x))) - f_1(\tau, x_1(\tau, s, x)))d\tau +$$

$$+ \int\limits_{t}^{+\infty} G(t, \tau)(f_2(\tau, x_1(\tau, s, x) + h(\tau, x_1(\tau, s, x))) - f_1(\tau, x_1(\tau, s, x)))d\tau =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{s} U(t, s)G(s, \tau)(f_2(\tau, x_1(\tau, s, x) + h(\tau, x_1(\tau, s, x))) - f_1(\tau, x_1(\tau, s, x)))d\tau +$$

$$+ \int\limits_{s}^{t} U(t, \tau)P(\tau)(f_2(\tau, x_1(\tau, s, x) + h(\tau, x_1(\tau, s, x))) - f_1(\tau, x_1(\tau, s, x)))d\tau +$$

$$+ \int\limits_{s}^{+\infty} U(t, s)G(s, \tau)(f_2(\tau, x_1(\tau, s, x) + h(\tau, x_1(\tau, s, x))) - f_1(\tau, x_1(\tau, s, x)))d\tau +$$

$$+ \int\limits_{t}^{s} U(t, \tau)(P(\tau) - I)(f_2(\tau, x_1(\tau, s, x) + h(\tau, x_1(\tau, s, x)))$$

$$-f_1(\tau, x_1(\tau, s, x)))d\tau =$$

$$U(t, s) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(s, \tau)(f_2(\tau, x_1(\tau, s, x) + h(\tau, x_1(\tau, s, x))) - f_1(\tau, x_1(\tau, s, x)))d\tau +$$

$$\int_s^t U(t,\tau)(f_2(\tau, x_1(\tau,s,x)+h(\tau, x_1(\tau,s,x)))-f_1(\tau, x_1(\tau,s,x)))d\tau =$$

$$= U(t,s)h(s,x)+$$

$$\int_s^t U(t,\tau)(f_2(\tau, x_1(\tau,s,x)+h(\tau, x_1(\tau,s,x)))-f_1(\tau, x_1(\tau,s,x)))d\tau,$$

jo

$$\int_s^t U(t,\tau)P(\tau)(...)d\tau + \int_t^s U(t,\tau)(P(\tau)-I)(...)d\tau =$$

$$= \int_s^t U(t,\tau)P(\tau)(...)d\tau - \int_s^t U(t,\tau)(P(\tau)-I)(...)d\tau =$$

$$= \cancel{\int_s^t U(t,\tau)P(\tau)(...)d\tau} - \cancel{\int_s^t U(t,\tau)(P(\tau))(...)d\tau} + \int_s^t U(t,\tau)(I)(...)d\tau =$$

$$= \int_s^t U(t,\tau)(...)d\tau$$

Līdz ar to mums ir

$$h(t, x_1(t,s,x)) = \int_s^t U(t,\tau)(f_2(\tau, x_1(\tau,s,x) + h(\tau, x_1(\tau,s,x)))$$

$$-f_1(\tau, x_1(\tau,s,x)))d\tau.$$

Sadalot integrāli divās daļās, iegūstam, ka

$$h(t, x_1(t,s,x)) = \int_s^t U(t,\tau)(f_2(\tau, x_1(\tau,s,x) + h(\tau, x_1(\tau,s,x)))d\tau$$

$$-\int_s^t U(t,\tau)f_1(\tau, x_1(\tau,s,x)))d\tau.$$

Tālāk pārnesot vienu integrāli uz vienādības otru pusi un pievienojot $U(t,s)x$ vienādības abām pusēm, iegūstam

$$U(t,s)x + h(t, x_1(t,s,x)) + \int_s^t U(t,\tau)f_1(\tau, x_1(\tau,s,x)))d\tau =$$

$$= U(t,s)x + \int_s^t U(t,\tau)(f_2(\tau, x_1(\tau,s,x) + h(\tau, x_1(\tau,s,x)))d\tau.$$

Tātad

$$x_1(t,s,x) + h(t, x_1(t,s,x)) = x_2(t,s,x+h(s,x)).$$

Mainot vietām f_1 un f_2, tādā pašā veidā pierādām $h'(s,x)$ eksistenci, kurš apmierina vienādību

$$x_2(t,s,x) + h'(t, x_2(t,s,x)) = x_1(t,s,x+h'(s,x)).$$

Apzīmējot $H(s,x) = x + h(s,x)$, $H'(s,x) = x + h'(s,x)$, iegūstam

$$H'(t, H(t, x_1(t,s,x))) = x_1(t,s,H'(s,H(s,x))),$$

$$H(t, H'(t, x_2(t,s,x))) = x_2(t,s,H(s,H'(s,x))).$$

Ņemot vērā attēlojumu $H'(t,H(t,\cdot)) - I$ un $H(t,H'(t,\cdot)) - I$ unitāti kopā $\mathfrak{M}$, iegūstam, ka $H'(t,H(t,\cdot)) = I$ un $H(t,H'(t,\cdot)) = I$, tātad $H(t,\cdot)$ ir homeomorfisms, kurš veido 2.31 un 2.32 dinamisko ekvivalenci. □

8. teorēma nosaka arī to, ka diferenciālvienādojumi 2.31 un 2.33 ir globāli dinamiski ekvivalenti, ja $f_2(t,x) = 0$.

2.3.1 Piemērs

Aplūkojam kvazilineāru diferenciālvienādojumu telpā $\mathbb{R}^3$.

$$\dot{x} = A(t)x + f(t,x), \tag{2.35}$$

kur

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2t}{1+t^2} \end{pmatrix},$$

$$|f(t,x) - f(t,x')| \leq \epsilon(t)|x - x'|$$

un

$$\sup_x |f(t,x)| \leq N(t) < +\infty.$$

Lineārā diferenciālvienādojuma sistēmas

$$\dot{x} = A(t)x$$

fundamentālā matrica ir

$$U(t,s) = \begin{pmatrix} cos(t-s) & -sin(t-s) & 0 \\ sin(t-s) & cos(t-s) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1+s^2}{1+t^2} \end{pmatrix}.$$

Attiecīgais Grīna tipa attēlojums var tikt izvēlēts formā

$$G(t,s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1+s^2}{1+t^2} \end{pmatrix}, \quad if \quad t > s,$$

$$G(t,s) = \begin{pmatrix} cos(t-s) & -sin(t-s) & 0 \\ sin(t-s) & cos(t-s) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad if \quad t < s.$$

Ja

$$\sup_t \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t,s)|\varepsilon(s)ds \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (1+s^2)\varepsilon(s)ds < 1$$

un

$$\sup_t \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t,s)|N(s)ds \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (1+s^2)N(s)ds < +\infty$$

tad saskaņā ar 8. teorēmu, sistēma 2.35 ir globāli dinamiski ekvivalenta lineārai sistēmai

$$\dot{x} = A(t)x. \tag{2.36}$$

Ievērojam, ka sistēmai 2.36 pat nav parastā dihotomija. [6].

2.4 Apgriežamu diferenču vienādojumu dinamiskā ekvivalence

Šajā nodaļā mēs atsaucamies uz autora publikāciju Nr.1.

Mēs vispārinām šo rezultātu apgriežamiem semilineāriem diferenču vienādojumiem

$$x(t+1) = A(t)x(t) + f_1(t, x(t)) \tag{2.41}$$

un

$$x(t+1) = A(t)x(t) + f_2(t, x(t)) \tag{2.42}$$

telpā X, kur attēlojums $A(t) \in \mathfrak{L}(X)$ ir apgriežams, attēlojumi $f_i : \mathbb{Z} \times X \to X, i = 1, 2$ apmierina nevienādības

$$|f_1(t,x) - f_2(t,x)| \leq N(t) < +\infty$$

$$|f_i(t,x) - f_i(t,x')| \leq \epsilon(t)\,|x - x'| \quad i = 1, 2$$

un $\sup\limits_t(||A^{-1}(t)||\epsilon(t)) < 1$.

Definīcija 17. Diferenču vienādojumi 2.41 un 2.42 ir globāli dinamiski ekvivalenti, ja eksistē nepārtraukts attēlojums $H : \mathbb{Z} \times X \to X$ tāds, ka

(i) katram fiksētam $t \in \mathbb{Z}$ attēlojums $H(t, \cdot) : X \to X$ ir homeomorfisms;

(ii) $\sup\limits_{t,x} |H(t,x) - x| < +\infty$;

(iii) katram $t \in \mathbb{Z}$

$$H(t, x_1(t, s, x_s)) = x_2(t, s, H(s, x_s)).$$

Definīcija 18. Attēlojums $G : \mathbb{Z}^2 \to \mathfrak{L}(X)$ ir Grīna tipa attēlojums, ja

(i) $G(t+1, s) = A(t)G(t, s), \quad t \neq s - 1$;

(ii) $G(t, t) = A(t)G(t-1, t) + I$.

Teorēma 9. *Pieņemam, ka lineāram diferenču vienādojumam*

$$x(t+1) = A(t)x(t) \tag{2.43}$$

ir Grīna tipa attēlojums $G(t,s) \in \mathfrak{L}(X)$ *tāds, ka*

$$\sup_{t\in\mathbb{Z}} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} |G(t,s+1)|\, N(s) < +\infty;$$

$$\sup_{t\in\mathbb{Z}} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} |G(t,s+1)|\, \epsilon(s) = q < 1,$$

tad diferenču vienādojumi 2.41 un 2.42 ir globāli dinamiski ekvivalenti.
Lai pierādītu 9. teorēmu, mēs pierādam, ka funkcionālvienādojumam

$$h(s,x_s) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} G(s,i+1)(f_2(i,x_1(i,s,x_s)+h(i,x_1(i,s,x_s)))$$

$$-f_1(i,x_1(i,s,x_s)))$$

ir viens vienīgs nepārtraukts un ierobežots atrisinājums. Pierādījums ir analoģisks diferenciālvienādojumu pierādījumam.

3. Grobmana-Hartmana teorēma vienādojumiem ar impulsiem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x \\ \Delta x|_{t=\tau_i} &= C_i x(\tau_i - 0) \end{aligned} \tag{3.01}$$

3.1 Galvenais rezultāts un pierādījums

Mēs atsaucamies uz autora publikāciju Nr.2.

Aplūkojam Banaha telpu **X** un ierobežotus lineārus operatorus Banaha telpā $\mathfrak{L}(\mathbf{X})$. Apskatam sekojošu diferenciālvienādojumu ar impulsiem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + f_1(t,x), \quad t \neq \tau_i \\ \Delta x|_{t=\tau_i} &= x(\tau_i + 0) - x(\tau_i - 0) = C_i x(\tau_i - 0) + p_{1i}(x(\tau_i - 0)) \end{aligned} \tag{3.11}$$

un

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + f_2(t,x), \quad t \neq \tau_i \\ \Delta x|_{t=\tau_i} &= x(\tau_i + 0) - x(\tau_i - 0) = C_i x(\tau_i - 0) + p_{2i}(x(\tau_i - 0)) \end{aligned} \tag{3.12}$$

kur:

(i) attēlojums $A\colon \mathbb{R} \to \mathfrak{L}(\mathbf{X})$ ir lokāli integrējams pēc Bocnera;

(ii) attēlojumi $f_j\colon \mathbb{R} \times \mathbf{X} \to \mathbf{X}$, $j = 1, 2$ ir lokāli integrējami pēc t pie fiksēta x, pie tam tie apmierina Lipšica nosacījumus

$$|f_j(t,x) - f_j(t,x')| \leq \varepsilon(t)|x - x'|, \quad j = 1, 2,$$

un nevienādību

$$\sup_x |f_1(t,x) - f_2(t,x)| \leq N(t) < +\infty,$$

kur $N\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ un $\varepsilon\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ ir skalāras integrējamas funkcijas;

(iii) katram $i \in Z$, $C_i \in \mathfrak{L}(X)$, attēlojumi $p_{1i} \colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}$, $p_{2i} \colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ apmierina Lipšica nosacījumus un nevienādību

$$|p_{ji}(x) - p_{ji}(x')| \leq \varepsilon(\tau_i - 0)|x - x'|, \quad j = 1, 2,$$

$$|p_{1i}(x) - p_{2i}(x)| \leq N(\tau_i - 0) < +\infty;$$

(iv) attēlojumi $x \to x + C_i x$ ir homeomorfismi un $\sup_i |(I + C_i)^{-1} \varepsilon(\tau_i - 0)| < 1$, kur I ir identiskais attēlojums;

(v) impulsa momenti τ_i ir stingri augoša virkne

$$\ldots < \tau_{-2} < \tau_{-1} < \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots,$$

kurai robeža var būt tikai $\pm\infty$.

Vienādojumu (3.11) un (3.12) atrisinājumi katram $t \geq s$ ir doti formā

$$x_j(t, s, x) = U(t, s)x + \int_s^t U(t, \tau) f_j(\tau, x_j(\tau, s, x))\, d\tau,$$

$$+ \sum_{s < \tau_i \leq t} U(t, \tau_i) p_{ji}(x_j(\tau_i - 0, s, x)), \quad j = 1, 2.$$

Teorēma 10. *Pieņemam, ka lineāram diferenciālvienādojumam ar impulsiem* (3.01) *ir Grīna tipa attēlojums* $G(s, \tau) \in \mathfrak{L}(\mathbf{X})$ *tāds, ka*

$$\sup_s \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |G(s, \tau)| N(\tau)\, d\tau + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |G(s, \tau_i)| N(\tau_i - 0) \right) < +\infty,$$

$$\sup_s \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |G(s, \tau)| \varepsilon(\tau)\, d\tau + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |G(s, \tau_i)| \varepsilon(\tau_i - 0) \right) = q < 1.$$

Tad diferenciālvienādojumi ar impulsiem (3.11) *un* (3.12) *ir globāli dinamiski ekvivalenti.*

Pierādījums. Pierādījums ir pieejams pilnajā promocijas darbā. □

10. teorēma nosaka, ka diferenciālvienādojumi ar impulsiem (3.11) un (3.01) ir globāli dinamiski ekvivalenti, ja $f_2(t, x) = 0$.

3.2 Piemērs

Mēs atsaucamies uz autora publikāciju Nr.2.
Aplūkojam diferenciālvienādojumu ar impulsiem telpā $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + f(t,x), \quad t \neq \tau_i, \\ \Delta x|_{t=\tau_i} &= C_i x(\tau_i - 0) + p_i(x(\tau_i - 0)), \end{aligned} \tag{3.21}$$

kur

$$A(t) = \begin{pmatrix} \ln 2 & 0 \\ 0 & -\frac{2t}{1+t^2} \end{pmatrix},$$

$$C_i = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$|f(t,x) - f(t,x')| \leq \varepsilon(t)|x - x'|,$$

$$|p_i(x) - p_i(x')| \leq \varepsilon(\tau_i - 0)|x - x'|,$$

$$\sup_x |f(t,x)| \leq N(t) < +\infty,$$

$$|p_i(x)| \leq N(\tau_i - 0) < +\infty$$

un $\tau_i = i, i \in \mathbb{Z}$.
Ievērojam, ka diferenciālvienādojumam ar impulsiem (3.01) pat nav parastā dihotomija.

4. Grobmana-Hartmana teorēma kvazilineāriem vienādojumiem laika skalā

Grobmana-Hartmana teorēma laika skalā ir aplūkota vairākos avotos [15], [19], [33], [34], [35], [37]. Pētījumā mēs vispārinām šos rezultātus, arī telpā $\mathbb{R}^n$, samazinot prasības lineārai daļai A un pastiprinot prasības nelineārai daļai f. Mēs izmantojam Grīna tipa attēlojumu un integrālfunkcionālvienādojum tehniku [21], kas ļauj ievērojami vienkāršot pierādījumu. Darbā izmantotā pierādījuma metode ir pilnīgi atšķirīga no citos avotos izmantotās. Lai iegūtu vēl plašāku novērtējumu, mēs aplūkojam diferenciālvienādojumu patvaļīgā Banaha telpā.

4.1 Galvenais rezultāts un pierādījums

Mēs atsaucamies uz autora publikāciju Nr.3.
$\mathbb{T}$ ir no augšas un apakšas neierobežota laika skala. **X** ir Banaha telpa un $\mathfrak{L}(\mathbf{X})$ ir lineāri ierobežoti endomorfismi Banaha telpā. Aplūkojam sekojošu dinamisku vienādojumu

$$x^{\Delta} = A(t)x + f_1(t,x) \tag{4.11}$$

un

$$x^{\Delta} = A(t)x + f_2(t,x), \tag{4.12}$$

kur:

(i) attēlojums $A\colon \mathbb{T} \to \mathfrak{L}(\mathbf{X})$ ir rd-nepārtraukts un attēlojums $A(t)\colon \mathfrak{L}(\mathbf{X}) \to \mathfrak{L}(\mathbf{X})$ ir regresīvs;

(ii) attēlojumi $f_j\colon \mathbb{T} \times \mathbf{X} \to \mathbf{X}$, $j = 1,2$ ir rd-nepārtraukti pēc t pie fiksēta x, un tie apmierina Lipšica nosacījumus

$$|f_j(t,x) - f_j(t,x')| \le \varepsilon(t)|x - x'|, \quad j = 1,2,$$

un nevienādību

$$\sup_x |f_1(t,x) - f_2(t,x)| \le N(t) < +\infty,$$

kur $N\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}_+$ un $\varepsilon\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}_+$ ir integrējamas skalāras funkcijas;

(iii) attēlojumi $I + \mu(t)A(t) + \mu(t)f_j(t,\cdot)\colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}$, $j = 1, 2$ ir apgriežami, kur I identiskais attēlojums.

Ievērojam, ka nosacījums (iii) nosaka (4.11) un (4.12) atrisinājuma turpināmību negatīvā virzienā un, kopā ar Lipšica nosacījumu pēc labās puses x, nodrošina atrisinājuma unitāti sākuma nosacījuma problēmai laika skalā $\mathbb{T}$.

Ar $x_j(\cdot, s, x)\colon \mathbb{T} \to \mathbf{X}$, $j = 1, 2$ apzīmējam dinamisku vienādojumu (4.11), (4.12) attiecīgos atrisinājumu ar dotiem sākuma nosacījumiem $x_j(s) = x$.

Definīcija 19. Dinamiskus vienādojumus (4.11) un (4.12) sauc par globāli dinamiski ekvivalentiem, ja eksistē attēlojums $H\colon \mathbb{T} \times \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ tāds, ka

(i) katram fiksētam $t \in \mathbb{T}$ attēlojums $H(t,\cdot)\colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ ir homeomorfisms;

(ii) $\sup\limits_{t,x} |H(t,x) - x| < +\infty$;

(iii) katram $t \in \mathbb{T}$

$$H(t, x_1(t,s,x)) = x_2(t,s,H(s,x)).$$

Grīna tipa attēlojums var tikt uzdots formā

$$G(t,s) = \begin{cases} e_A(t,s)P(s), & \text{if } t > s \\ e_A(t,s)(P(s) - I), & \text{if } t < s \end{cases},$$

kur $e_A(t,s)$ ir lineāra dinamiska vienādojuma

$$x^{\Delta} = A(t)x \tag{4.13}$$

eksponenciālais attēlojums un $P(s) \in \mathfrak{L}(\mathbf{X})$ ir rd-nepārtraukta pēc $s \in \mathbb{T}$. Ievērojam, ka lineāram dinamiskam vienādojuma (4.13) ir bezgalīgi daudz Grīna tipa attēlojumi. Savukārt, ja $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ un lineāram dinamiskam vienādojumam (4.13) ir eksponenciālā dihotomija, tad eksistē viens vienīgs Grīna tipa attēlojums, kurš apmierina nevienādību

$$|G(t,s)| \leq K \exp(-\lambda|t-s|), \quad K \geq 1, \lambda > 0.$$

Ievērojam, ka

$$e_A(t,\tau)e_A(\tau,s) = e_A(t,s).$$

(4.11) un (4.12) atrisinājumi var tikt uzdoti formā

$$x_j(t,s,x) = e_A(t,s)x + \int_s^t e_A(t,\sigma(\tau)) f_j(\tau, x_j(\tau,s,x))\,\Delta\tau,\ j = 1,2.$$

Teorēma 11. *Pieņemam, ka lineāram dinamiskam vienādojumam* (4.13) *ir rd-nepārtraukts Grīna tipa attēlojums $G(s,\tau) \in \mathfrak{L}(\mathbf{X})$ tāds, ka*

$$\sup_s \int_{-\infty}^{+\infty} |G(s,\sigma(\tau))| N(\tau)\,\Delta\tau < +\infty,$$

$$\sup_s \int_{-\infty}^{+\infty} |G(s,\sigma(\tau))| \varepsilon(\tau)\,\Delta\tau = q < 1.$$

Tad dinamiskie vienādojumi (4.11) *un* (4.12) *ir globāli dinamiski ekvivalenti.*

Pierādījums. Teorēmas pierādījums ir pieejams pilnajā promocijas darba versijā. □

11. teorēma nosaka, ka dinamiskie vienādojumi (4.11) un (4.13) ir globāli dinamiski ekvivalenti, ja $f_2(t,x) = 0$.

5. Ierobežoti atrisinājumi un Haiera-Ulama stabilitāte kvazilineāriem vienādojumiem laika skalā

Mēs konstruējam iepriekš nezināmu lineāru skalāru diferenciālvienādojumu, kuram nav eksponenciāla dihotomija, bet atbilstošais Grīna tipa attēlojuma integrālis ir vienmērīgi ierobežots. Šāda piemēra eksistence ļauj gan iegūt jaunu pietiekamo nosacījumu ierobežota atrisinājumu eksistencei, gan pierādīt Haiera-Ulama stabilitāti daudz plašākai lineāru dinamisku vienādojumu klasei.
Turpmāk šajā nodaļā aplūkotie rezultāti ir publicēti autora publikācijā Nr.8 un 12.

5.1 Ierobežots atrisinājums

$\mathfrak{L}(\mathbf{X})$ ir lineāri ierobežoti endomorfismi Banaha telpā. Aplūkojam detalizētāk regresīvu kvazilineāru dinamisku vienādojumu

$$x^{\Delta} = A(t)x + f(t, x). \tag{5.11}$$

Atbilstošais lineārais dinamiskais vienādojums

$$x^{\Delta} = A(t)x \tag{5.12}$$

ir regresīvs.
Noformulēsim pietiekamo nosacījumu kvazilineāra dinamiska vienādojuma (5.11) ierobežota atrisinājuma eksistencei.

Teorēma 12. *Pieņemsim, ka lineāram dinamiskam vienādojumam* (5.12) *ir rd-nepārtraukts Grīna tipa attēlojums $G(s, \tau) \in \mathfrak{L}(\mathbf{X})$ tāds, ka*

$$\sup_{t\in\mathbb{T}} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t, \sigma(\tau))| N(\tau)\, \Delta\tau < +\infty, \tag{5.13}$$

$$\sup_{t\in\mathbb{T}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(t,\sigma(\tau))|\varepsilon(\tau)\,\Delta\tau = q < 1. \tag{5.14}$$

Tad kvazilineāram vienādojumam (5.11) *eksistē ierobežots atrisinājums.*

Pierādījums. Teorēmas pierādījums atrodams pilnā promocijas darba versijā. □

Piemērs 1. Mēs konstruējam lineāru skalāru diferenciālvienādojumu, kura atrisinājumam no vienas puses ir bezgalīga Ļapunova eksponente [9], [7], bet no otras puses atbilstošais Grīna tipa attēlojuma integrālis ir vienmērīgi ierobežots. Aplūkojam

$$\dot{x} = -\left(\frac{a'(t)}{a(t)} + a(t)\right)x,\ a(t) = \alpha + \kappa(t),\ \alpha > 0,\ \kappa(t) \geq 0, \tag{5.15}$$

kur funkcija $\kappa\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ir zāģzobu tipa gabaliem lineāra un apmierina novērtējumu

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \kappa(t)\,dt < +\infty, \quad \lim\sup_{t\to+\infty} \frac{\ln(\kappa(t))}{t} = +\infty.$$

Tad vienādojuma (5.15) Koši problēmai ar dotiem sākuma nosacījumiem $x(s) = 1$ atrisinājums ir

$$x(t,s) = \exp\left(-\int\limits_s^t a(\tau)\,d\tau\right)\frac{a(s)}{a(t)} > 0$$

ar īpašību

$$\lim\sup_{t\to+\infty} \frac{\ln(x(t,s))}{t} = -\alpha - \lim\sup_{t\to+\infty} \frac{\ln(a(t))}{t}$$
$$= -\alpha - \lim\sup_{t\to+\infty} \frac{\ln(\kappa(t))}{t} = -\infty.$$

Piemēram, funkcija $\kappa\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ var tikt izvēlēta sekojoši. κ ir gabaliem lineāra nepārtraukta skalāra funkcija, $\kappa(-t) = \kappa(t)$ un $n \in \mathbb{N}$

$$\kappa(t) = \begin{cases} 0, & \text{if } t \in [0, 1/2) \\ 0, & \text{if } t \in [n - 1/2, n - 2^{-1}e^{-n^2}n^{-2}] \\ \text{linear}, & \text{if } t \in (n - 2^{-1}e^{-n^2}n^{-2}, n) \\ e^{n^2}, & \text{if } t = n \\ \text{linear}, & \text{if } t \in (n, n + 2^{-1}e^{-n^2}n^{-2}) \\ 0, & \text{if } t \in [n + 2^{-1}e^{-n^2}n^{-2}, n + 1/2). \end{cases}$$

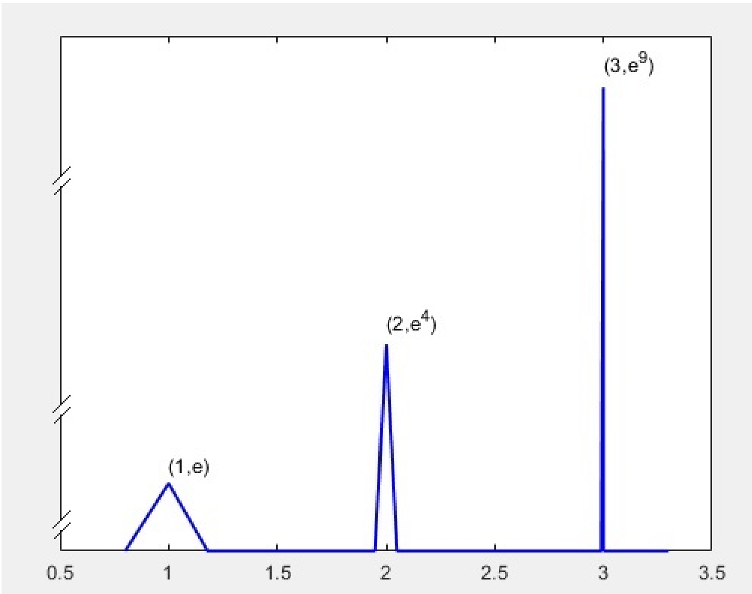
Tad

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \kappa(t)\,dt = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2} = \frac{\pi^2}{6} =< +\infty$$

un

$$\lim \sup_{t\to+\infty} \frac{\ln(\kappa(t))}{t} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(\kappa(n))}{n} = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty.$$

Funkcija $k(t)$ ir zāģzobu tipa funkcija, kurai katra nākamā virsotne ļoti strauji aug. Attēlā ir redzams funkcijas $k(t)$ uzmetums pie n=1,2,3.



Attēls 5.1: Sketch of function $k(t)$

Izvēlamies Grīna tipa attēlojumu

$$G(t,s) = \begin{cases} x(t,s), & \text{if } s \le t \\ 0, & \text{if } t < s. \end{cases}$$

Ievērojam, ka

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |G(t,s)|ds = \int_{-\infty}^{t} x(t,s)\,ds = \frac{1}{a(t)} \le \frac{1}{\alpha}.$$

Ja $\sup\limits_{t,x\in\mathbb{R}} |f(t,x)| < +\infty$ un $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \varepsilon(t) < \alpha$, tad atbilstošam kvazilineāram vienādojumam ir ierobežots atrisinājums, kaut arī atbilstošam lineāra vienādojuma atrisinājumam ir bezgalīga Ļapunova eksponente.

5.2 Periodisks atrisinājums

Pieņemam, ka laika skala ir periodiska, t.i., ja $t \in \mathbb{T}$, tad $t+\omega \in \mathbb{T}$, kur $\omega > 0$ ir periods laika skalā $\mathbb{T}$. Šādā gadījuma arī graudainības funkcija ir periodiska $\mu(t) = \mu(t+\omega)$.
Aplūkojam kvazilineāru dinamisku vienādojumu (5.11), kura labā puse ir periodiska ar periodu $\omega > 0$, attiecīgi, $A(t+\omega) = A(t)$ un $f(t+\omega, x) = f(t,x)$. Iegūstam, ka eksponenciālais attēlojums apmierina vienādību $e_A(t+\omega, s+\omega) = e_A(t,s)$. Ja $P(s+\omega) = P(s)$, tad seko, ka $G(t+\omega, s+w) = G(t,s)$.
Ievērojam, ka

$$\eta(t+\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t+\omega, \sigma(\tau)) f(\tau, \eta(\tau))\,\Delta\tau$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t+\omega, \sigma(r+\omega)) f(r+\omega, \eta(r+\omega))\,\Delta r$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t, \sigma(r)) f(r, \eta(r+\omega))\,\Delta r.$$

Tā kā integrāl-funkcionālvienādojumam eksistē viens vienīgs ierobežots atrisinājums, tad secinām, ka vienīgais ierobežotais atrisinājums ir periodisks

$$\eta(t+w) = \eta(t).$$

5.3 Haiera-Ulama stabilitāte

Definīcija 20. Dinamisku vienādojumu $x^\Delta = f(t,x)$ sauc par Haiera-Ulama stabilu, ja eksistē nenegatīva konstante $C > 0$ tāda, ka katram reālam skaitlim $\varepsilon > 0$ un katram atrisinājumam x nevienādībai

$$|x^\Delta - f(t,x)| \le \varepsilon$$

eksistē dinamiskas sistēmas $x^{\Delta} = f(t,x)$ atrisinājums x_0 ar īpašību

$$\sup_{t\in\mathbb{T}} |x(t) - x_0(t)| \leq C\varepsilon.$$

Svarīgi ir ievērot, ka Ļapunova stabilitātes jēdziens ir atšķirīgs no Haiera-Ulama stabilitātes jēdziena. Haiera-Ulama stabilitāte nozīmē, ka, diferenciālvienādojuma atrisinājumam, kurš iegūts ar aproksimāciju, pastāv tuvs precīzais atrisinājums, pie tam šo kļūdu ir iespējams novērtēt. Savukārt Ļapunova stabilitāte nozīmē, ka, atrisinājums, kurš sākas līdzsvara punkta apkārtnē, paliks vienmēr šī līdzsvara punkta apkārtnē.
Mēs izveidojam jaunu pietiekamo nosacījumu lineāru dinamisku sistēmu (5.12) Haiera-Ulama stabilitātei, pie nosacījuma, ka integrālis no Grīna tipa attēlojuma ir vienmērīgi ierobežots.

Teorēma 13. *Pieņemam, ka lineāram dinamiskam vienādojumam* (5.12) *ir rd-nepārtraukts Grīna tipa attēlojums $G(s,\tau) \in \mathfrak{L}(\mathbf{X})$ tāds, ka*

$$\sup_{t\in\mathbb{T}} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t,\sigma(\tau))|\, \Delta\tau < +\infty.$$

Tad lineārais dinamiskais vienādojums (5.12) *ir Haiera-Ulama stabils.*

Pierādījums. Teorēmas pierādījums ir pieejams pilnajā promocijas darba versijā. □

Secinājumi

Darbā ir iegūti Grobmana-Hartmana teorēmas vispārinājumi kvazilineāriem diferenciālvienādojumiem un diferenču vienādojumiem (pat telpā R^n), kvazilineāriem vienādojumiem laika skalā, vienādojumiem ar impulsiem, kā arī ierobežotu un periodisku atrisinājumu eksistences vispārīgāki nosacījumi, un Haiera-Ulam stabilitāte.
Darbā ir aplūkoti uzskatāmi piemēri, lai uzsvērtu iegūto novitāti vienādojumiem, kuriem var pielietot Grobmana-Hartmana teorēmu.
Lai sasniegtu darbā izvirzīto mērķi un uzdevumus, pētījumā ir apskatīta Grobmana-Hartmana teorēma, tās Palmera vispārinājums, laika skalas rēķinu teorija, Grīna tipa attēlojums, Banaha nekustīgā punkta teorēma, ierobežoti un periodiski atrisinājumi, kā arī Haiera-Ulama stabilitātes vispārinājums.
Publicētie raksti ir citēti dažādos citos rakstos. Scopus datu bāzē ir atrodamas 11 citēšanas, savukārt Web of Science datubāzē 9. Kā minēts Journal of Differential Equations (2021) rakstā [1], autora publikācija Nr. 1 iegūtais ir diezgan vispārīgs rezultāts gadījumam, kad lineārai daļai neizpildās eksponenciālā dihotomija. Viena no jaunākajām citēšanām ir notikusi 2022. gadā [2] un šis fakts nostiprina pārliecību, ka darbā aplūkotā problēma ir aktuāla un satur jaunas idejas.
Uzskatam, ka kopumā darba mērķis un uzdevumi ir sasniegti.

Konferenču saraksts

1. The international conference on difference equations and applications 2016 (ICDEA 2016), ”Bounded solution of dynamic system on time scale”, July 24-29, 2016, Osaka, Japan.

2. 10th International conference on Progress on Difference Equations, ”Bohl-Perron principle for dynamic systems on time scale”, May 17-20, 2016, Riga, Latvia.

3. 11th Latvian Conference on Mathematics, ”Dynamical system on time scales”, April 15-16, 2016 Daugavpils, Latvia.

4. 74th Conference of University of Latvia, ”Dinamiskās sistēmas laika skalā”, February 2016, Riga, Latvia.

5. The international conference on difference equations and applications 2015 (ICDEA 2015), ”Dynamical equivalence of quasiliner dynamic equations on time scale”, July 19-25, 2015, Bialystok, Poland.

6. 73th Conference of University of Latvia, ”Kvazilineāru vienādojumu ekvivalence laika skalā”, February 2015, Riga, Latvia.

7. Conference on Differential and Difference Equations and Applications, ”Conjugacy of dynamical systems on time scale”, June 23–27, 2014, Jasna, Slovak Republic.

8. 72th Conference of University of Latvia, ”Kvazilineāru vienādojumu ekvivalence”, February 2014, Riga, Latvia.

9. 10th Latvian Conference on Mathematics, ”Apgriežamu kvazilineāru diferenču vienādojumu ekvivalence”, April 11-12, 2014 Liepaja, Latvia.

10. 18th International Conference Mathematical Modelling and Analysis, ”Conjugancy of quasilinear equations”, May 27-30, 2013, Tartu, Estonia.

Autores publikācijas

1. A. Reinfelds and Dz. Steinberga. Dynamical equivalence of quasilinear equations *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 98(3), 355-364, 2015. Scopus.

2. A. Reinfelds and Dz. Steinberga. Dynamical equivalence of impulsive quasilinear equations *Tatra Mountains Mathematical Publications*, 63(1), 237-246, 2015. Scopus.

3. A. Reinfelds and Dz. Steinberga. Dynamical equivalence of quasilinear dynamic equations on time scales, *Journal of Mathematical Analysis*, 7 (2016), no. 1, 115 – 120. Web of Science.

4. A. Reinfelds and Dz. Steinberga. Dynamical equivalence of quasilinear dynamical equations on time scales, *Abstracts of the 21st International Conference on Difference Equations and Applications*, 19 – 25 July 2015, Bialystok, Poland.

5. Dz. Steinberga. Dynamic equation on time scale, *Abstracts of the 11th Latvian Mathematical Conference*, April 15-16, 2016, Daugavpils, Latvia.

6. A. Reinfelds and Dz. Steinberga. Dynamical equivalence of quasilinear dynamic equations on time scale *Journal of Mathematical Analysis. Special Issue associated with The Cape Verde International Days on Mathematics*, 2015.

7. A. Reinfelds and Dz. Steinberga. Bohl-Perron principle for dynamic systems on time scales *Abstracts of PODE 2016*, May 17–

20, 2016, Riga, Latvia.

8. A. Reinfelds and Dz. Steinberga. Bounded solution of dynamic system on time scale, *Abstracts of ICDEA 2016*, July 24-29, 2016, Osaka, Japan.

9. A. Reinfelds and Dz. Steinberga. Conjugacy of an invertible quaslinear difference equations, *Abstracts of the 10th Latvian Mathematical Conference*, April 11-12, 2014, Liepaja, Latvia.

10. A. Reinfelds and Dz. Steinberga. Conjugacy of quasiliner equations, *Abstracts of the 18th International Conference Mathematical Modelling and Analysis and 4th International Conference Approximation Methods and Orthogonal Expansions, MMA2013 and AMOE2013*, May 27 – 30, 2013, Tartu, Estonia.

11. A. Reinfelds and Dz. Steinberga. Conjugacy of dynamical systems on time scale, *Conference on Differential and Difference Equations and Applications*, June 23-27, 2014, Jasna, Slovak Republic.

12. A. Reinfelds and Dz. Steinberga. Bounded solutions and Hyers–Ulam stability of quasilinear dynamic equations on time scales, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*. Web of Science. Published Online, February 22 2023, pp. 1-15.

Bibliogrāfija

[1] L. Backes, D. Dragičevic, K.J. Palmer *Linearization and Hölder continuity for nonautonomous systems*, Journal of Differential Equations, 297, 536-574, (2021).

[2] L. Backes, D. Dragičevic, *A generalized Grobman–Hartman theorem for nonautonomous dynamics*, Collectanea Mathematica, Springer, (2022).

[3] J. Bernoulli, *Explicationes, Annotationes and Additiones ad ea, quae in Actis sup. de Curva Elastica, Isochrona Paracentrica, and Velaria, hinc inde memorata, and paratim controversa legundur; ubi de Linea mediarum directionum, alliisque novis*, Acta Eruditorum, (1965)

[4] M. Bohner and A. Peterson, *Dynamic Equations on Time Scales*. An Introduction with Applications, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2001.

[5] M. Bohner and A. Peterson, *Advances in Dynamic Equations on Time Scales*. Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2003.

[6] W.A. Coppel, *Dichotomies in Stability Theory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1978).

[7] W.A. Coppel *Dichotomies in Stability Theory. Lecture Notes in Mathematics*, vol. 629, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1978. DOI: 10.1007/BFb0067780

[8] J.J. DaCunha *Lyapunov Stability and Floquet Theory for Nonautonomous Linear Dynamic Systems on Tim e Scales* Dissertation, Baylor University, Texas 2004.

[9] Ju.L. Daleckii, M.G. Krein *Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1974).

[10] D. Grobman *Homeomorphisms of systems of differential equations*, Dokl Akad. Nauk SSSR, 128, 880-881, 1959.

[11] D.M. Grobman, *Topological classification of neighbourhoods of a singularity in n-space*,Mat. Sb., 56, No. 1 (1962), 77-94.

[12] P. Hartman *A lemma in the theory of structural stability of differential equations.*, Proc. A.M.S., 11, 610-620, 1960.

[13] P. Hartman, *On the local linearisation of differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc., 14, No. 4 (1963), 568-573.

[14] S. Hilger *A dimensional chain calculus with application to behavioral manifolds* Doctoral thesis, University Würzburg, (1988).

[15] S. Hilger *Generalized theorem of Hartman-Grobman on measure chains*, J. Aust. Math. Soc. Ser. A 60, No. 2 (1996), 157-191.

[16] I. Newton *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum (The Method of Fluxions and Infinite Series)*, published in 1736, Opuscula, 1744, Vol. I. p. 66, (c.1671)

[17] K.J. Palmer *A generalization of Hartman's linearisation theorem*, Math. Anal. Appl., 41, No. 3 (1973), 752-758.

[18] L. Perko *Differential Equations and Dynamical Systems* Third Edition, Springer-Verlang, New York, (2001)

[19] Ch. Pötzsche *Topological decoupling, linearisation and perturbation on homogeneous time scales*, J. Differential Equations 245, No. 5 (2008), 1210-1242.

[20] C.C. Pugh *On a theorem of P. Hartman*, Amer. J. Math., 91, No. 2 (1969), 363-367.

[21] A. Reinfelds, *On generalized Grobman-Hartman theorem*, Latv. Mat. Ezhegodnik, 29 (1985), 84-88 (in Russian).

[22] A. Reinfelds *Grobman's-Hartman's theorem for time dependent difference equations*, Latv. Univ. Zinātniskie Raksti, 605 (1997), 9-13.

[23] A. Reinfelds *Asymptotic equivalence of difference equations in Banach space*, Theory and Applications of Difference Equations and Discrete Dynamical Systems, Springer Proc. Math. Statist.,, 102 (2014), pp. 215-222, doi:10.1007/978-3-662-44140-4−12

[24] A. Reinfelds *A reduction theorem for systems of differential equations with impulse effect in a Banach space*, J. Math. Anal. Appl, 203, No. 1 (1996), 187-210.

[25] A. Reinfelds and L. Sermone *Equivalence of differential equations with impulse action*, Latv. Univ. Zināt. Raksti 553 (1990), 124-130 (in Russian).

[26] A. Reinfelds and L. Sermone, *Equivalence of nonlinear differential equations with impulse effect in Banach space*, Latv. Univ. Zināt. Raksti 577 (1992), 68-73.

[27] L. Sermone *Equivalence of linear differential equations with impulse effect*, Proc. Latv. Acad. Sci. Sect. B, No. 2(559), (1994), 78-80.

[28] D. Speiser *Discovering the Principles of Mechanics 1600-1800*,p.191 Birkhäuser, (2008)

[29] S. Sternberg *On local C^n contractions of the real line*, Duke Math. J.,24 (1957), 97-102.

[30] Y. Xia, X. Chen and V. Romanovski, *On the linearisation theorem of Fenner and Pinto*, J. Math. Anal. Appl., 400, No. 2 (2013), 439-451.

[31] Y. Xia, Y. Gao, X. Yuan and P.J.Y. Wong, *Linearization of impulsive differential equations with ordinary dichotomy*, Abstr. Appl. Anal., (2014), doi: 10.1155/2014/632109.

[32] Y. Xia, Y.G.X. Yuan and P.J.Y. Wong, *Linearization of nonautonomous impulsive systems with nonuniform exponential dichotomy*, Abstr. Appl. Anal., (2014), doi: 10.1155/2014/860378.

[33] Y. Xia, *Linearisation for systems with partially hyperbolic linear part*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2) 37, No. 4 (2014), 1195-1207.

[34] Y. Xia, J. Cao and M. Han *A new analytical method for the linearisation of dynamic equation on measure chains*, J. Differential Equations 235, No. 2 (2007) 527-543.

[35] Y. Xia, J. Li and P.J.Y. Wong *On the topological classification of dynamic equations on time scales*, Nonlinear Analysis: Real World Applications 14, No. 6 (2013) 2231-2248.

[36] Y.H. Xia , X. Yuan , K.I. Kou , P.J.Y.Wong *Existence and Uniqueness of Solution for Perturbed Nonautonomous Systems with Nonuniform Exponential Dichotomy. Abstract and Applied Analysis*, vol. (2014), Article ID 725098, 10 pages. DOI: 10.1155/2014/725098

[37] J. Zhang, M. Fan and X. Chang *Nonlinear perturbations of nonuniform exponential dichotomy on measure chains*, Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., 75, No. 2 (2012), 670-683.

[38] Y. Zhang and X. Tian *Time-scales Herglotz type Noether theorem for delta derivatives of Birkhoffian systems*, Royal Society open science 6, (2019), 191248.